

Elektron relativistiiku elektrodünaamika vaatenurgast

Näide arvuti kasutamisest teoreetilises füüsikas

Ülo Uder

V osa

Sissejuhatus

Võrreldes IV osas esitatuga, asendatakse siin reaksarendustes enda poolt väljamõeldud r_1 -suunalised l -ga astendatavad tegurid Besseli funktsioonidega J_0 ja J_1 . Kasutame nende 0-kohtade tabeleid samal viisil, nagu tegime seda II ja III osas, silindrilises käsitluses. Sellisel juhul asenduvad r_1 -suunalised ühemärgilised funktsioonid siinuste-koosiinustega sarnaselt võnkuvate funktsioonidega, mis omavad 0 väärtuse $r_1 = r_1m$ juures ehk laengukera piiril. Osutub, et kogu iteratsiooniprotsess muutub märksa stabiilsemaks ja võimaldab kasutada märksa pikemaid reaksarendusi, mistõttu vähenevad ka dif-võrrandite poolte kokkulangevusi iseloomustavad ruutkeskmised hälbed. Tõsi, selleks vajalike iteratsioonide arv ka kasvas. Arvatavasti saab vajalike iteratsioonide arvu vähendada, kui asendada iteratsioonide lõpus protsessi stabiilsuse saavutamiseks ette võetud uute väärtuste keskmistamine sisendväärtustega võrdses kaalus mõne teise kaaluga – vähendades sisendi kaalu. Autor seda ei katsetanud.

Selles osas kaotame ka IV tehtud vea, mis tekkis filtri $O_{i,k}$ kasutamisega. Algososas, kus on tegu Cartesiuse koordinaatides esitatud joonistega on O kasutamine mõnigate arvutustulemuste nullistamiseks, mis ei tohks omada väljaspool sfäärilist laengusüsteemi nullist erinevaid väärtusi, õige. Kuid hiljem, kui praktilised arvutused tehakse sfäärilistes koordinaatides ei olnud O kasutamine õige. Seda selgitame allpool täpsemalt.

1. Algmudeli valimine

Valitavaid funktsioone (arvumassiivide kujul) on 4 – kolm kiiruse komponenti ja üks laengu jaotusfunktsioon. Nende abil esitame algmudeli, mille oleme nimetanud solenoidaalseks.

Alustame programmi algusosaga, mis määrab sfäärilises vaateväljas kasutatavad koordinaadid ja nende väärtuste piirid. Sfääriline vaateväli on raadiusega $\rho_1 m$, mille võtame nüüd lähemana nn elektroni klassikalisele raadiusele, sest varemates arvutustes kasutasime umbes 11 korda suuremat. Seekordne on umbes 2 korda suurem ja pole ka esitatud mõtetult suure hulga kümnekohtade arvuga. Sfääriline ruum jagatakse kaheks punktidesüsteemiks nimedega **integreerimispunktid** ja **vaatluspunktid**. Kõik punktid asuvad sfäärilistel pindadel. Integreerimispunktidesse on jagatud kogu süsteemi laeng. Vaatluspunktid, milledes arvutatakse väljatugevused, asuvad eelmiste sfääriliste vahel, et vältida singulaarsuste tekkimist jagamisel punktidevahelise kaugusega integraalsummades, mis arvutavad väljatugevusi. Saadakse integraalide nn peaväärtused funktsioonide integreerimisel, mis sisaldab singulaarset punkti. Viga ei ole nii suur, et oluliselt suurendaks järgnevate ligikaudsete numbriliste arvutuste paratamatult tekkivaid vigu.

Integreerimispunktid toimuvad edaspidi kõik edasised arvutused ja sellel juhul muutuvad need **vaatluspunktideks**.

Mõõtmel on võetud angströmid ja arvutused tehakse Gaussi süsteemis. kr on sellest tulenev konstant integraalavaldistes. Algmudeli arvutustes kasutatakse 10^5 korda suuremat koordinaati r1, mis tähistab integreerimispunktide sfäärilise raadiusi. Formaalsete kordajatega säätakse suhteliste kiiruste – mõõdetud valguse kiirustes – suurused väiksemaks ühest ja ääritingimusi andvad tegurid vahemikku -1...+1. Täpne suuruste arvestamine algab väljatugevuste arvutamise ja võrrandite lahendamise juures.

Alljärgnev mudeli valimine toetub kogemustele, mis on saadud trükise I...IV osades tehtud arvutustulemuste analüüsi tulemusena. Alustame koordinaatsüsteemi andmete valikuga.

Integreerimispunktide arv ja koordinaadid on:

$$\rho1m := 5.6 \times 10^{-5} \quad r1m := 5.6 \quad im := 35 \quad i := 0..im \quad \Delta r1 := \frac{r1m}{im} \quad r1_i := \Delta r1 \cdot i$$

$$km := 35 \quad k := 0..km \quad \Delta\theta1 := \frac{\pi}{km} \quad \theta1_k := \Delta\theta1 \cdot k \quad jm := 35 \quad j := 0..jm \quad \phi1_j := \frac{2 \cdot \pi}{jm} \cdot j$$

Vaatuspunktide koordinaadid väljatugevuste arvutamisel on (indeksid kreeka tähed ι, κ, λ):

$$\iota := 0..im \quad r0 := \frac{r1m}{2 \cdot im} \quad r_\iota := r0 + \Delta r1 \cdot \iota \quad \kappa := 0..km \quad \theta_\kappa := \Delta\theta1 \cdot \kappa \quad \lambda := 0..jm$$

$\phi_\lambda := \frac{2 \cdot \pi}{jm} \cdot \lambda$ Nihke r0 tõttu asub vaatuspunktide süsteemi suurim sfäär juba laengusüsteemist väljas, poole sammu r0 kaugusel välispinnast.

Laengupunkti ja vaatuspunkti, kus arvutatakse väljatugevus, kaugus arvutub valemiga:

$$R(r, \theta, \varphi, r1, \theta1, \varphi1) := \sqrt{r1^2 - 2 \cdot r1 \cdot r \cdot (\sin(\theta1) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi1 - \varphi) + \cos(\theta1) \cdot \cos(\theta)) + r^2}$$

Algmudeli kiiruskomponente vr ja vθ sfäärilises taustsüsteemis määrame $\varphi1 = \varphi = 0$ tasandil. Parema ruumilise ettekujutise saavutamise eesmärgil määrame algväärtused Cartesiuse koordinaadistikus ja teisendame nad siis sfäärilisse. Ristkoordinaadistiku z1 telg on laengusüsteemi pöörlemistelg, mille suhtes on ta telgsümmeetriline ja siin määratud komponendid, kaasaarvatud ka kolmas komponent vφ ei olene nurgast φ1. Samal tasandil asub ka x1-telg. Väljapunktide ristkoordinaadid valitud tasandil määrame nii:

$$u := 0..35 \quad x1_u := \frac{r1m}{35} \cdot u \quad t := 0..35 \quad z1_t := -r1m + \frac{2 \cdot r1m}{35} \cdot t \quad \text{Kõigepealt loome teguri,}$$

millega funktsioone korrutades nullistab tegur need väljaspool sfäärilist laengusüsteemi, kui nad seal põhimõtteliselt ei tohiks nullist erinevaid väärtusi omada. Kõigepealt võtame kasutusele nurga β1, mille moodustab z1 = 0 punktist väljapunktini x1,z1 joonistatud raadius ρ1 tellega z1. Siis:

$$\rho1 = \sqrt{x1^2 + z1^2} \quad x1 = \rho1 \cdot \sin(\beta1) \quad z1 = \rho1 \cdot \cos(\beta1) \quad O_{u,t} := \text{if} \left[\sqrt{(x1_u)^2 + (z1_t)^2} > r1m, 0, 1 \right]$$

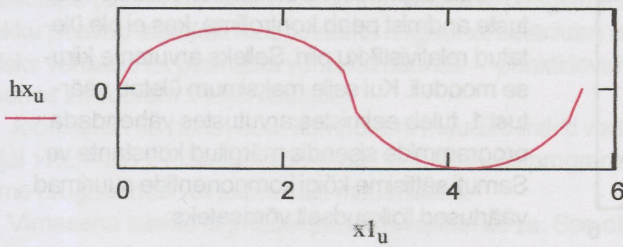
Alustame algmudeli loomist kiiruskomponentidele vz. Trükitöö I.. M osas tehtud arvutustega saadud kogemuste põhjal alustan järgmisest muutusest mööda x1 telge, mille algus on asetatud punkti z1=0.

$$a := -0.010329690671204 \quad b := 0.14461566939702 \quad c := -0.587139617751874$$

$$d := 0.396825396825362 \quad f := 0.952380952380967 \quad \beta1 := \theta1$$

$$h0_u := a \cdot (x1_u)^5 + b \cdot (x1_u)^4 + c \cdot (x1_u)^3 + d \cdot (x1_u)^2 + f \cdot x1_u \quad hx_u := \text{if} \left(x1_u < \frac{r1m}{2}, \frac{3}{4} \cdot \sqrt{h0_u}, -\sqrt{-h0_u} \right)$$

$hx_{35} := 0$ Selle ja kõigi allpooltoodud valemite tuletuskäiku ei ole siin näidatud, sest need täidaks liialt palju kirjaruumi.

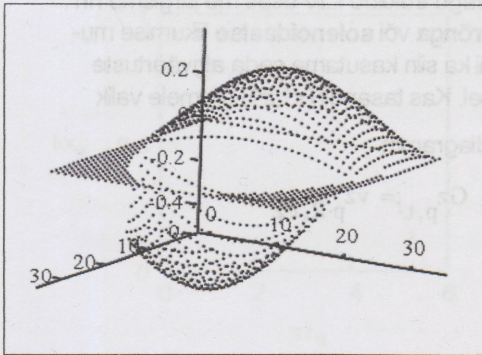


Joonega tekitame pinna kogu x_1, z_1 tasandi kohal nurga β_1 muutmisega. Näidatud joon asub x_1 telje kohal, kui $\beta_1 = \pi/2$. Pöörame joont asenditesse kogu β_1 väärtuste $0.. \pi$ ulatuses. Seejuures kahnegu kogu joone kõrgus 0-ni jõudmisel z_1 teljele ($\beta_1 = 0$ ja π juures). Viimast tagab $\sin(\beta_1)$ kõrvalolevas programmis.

```
V(h, ve) :=
  for t ∈ 0..35
    v_t ← ve · sin(β1_t)
  for u ∈ 0..35
    H_u,t ← h_u · v_t
  H
```

$$vz := V(hx, 0.5) \quad vz_{u,t} := vz_{u,t} \cdot O_{u,t}$$

Järgnevalt asume teise kiiruskomponendi vx arvumassiivi leidma. See on suurim kohas, kus vz vahetab märki laengusüsteemi sees ja kahaneb samuti kaugenemisel sellest, saavutades 0 väärtuse laengukera välispiiril. Antud juhul on $vz = 0$ sirgel $x_1 = x_{17}$.



Alustame jällegi joonest x_1 teljel:

$$a := \frac{16}{r1m^4} \quad b := \frac{-32}{r1m^3} \quad c := \frac{16}{r1m^2}$$

$$hx_u := a \cdot (x1_u)^4 + b \cdot (x1_u)^3 + c \cdot (x1_u)^2$$

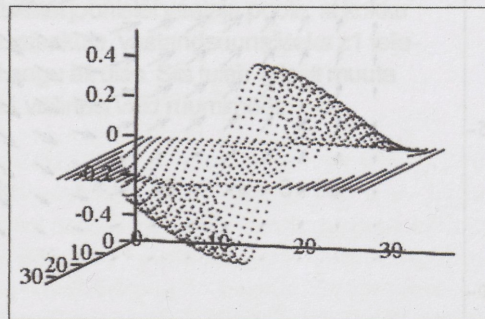
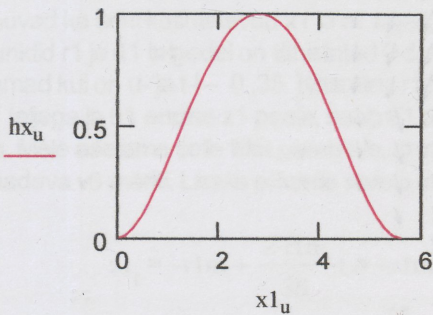
Sama programmiga $V(h, ve)$ tekitame 3-mõõtmelise kujundi.

$$vx := V(hx, 0.5) \quad vx_{u,t} := vx_{u,t} \cdot O_{u,t}$$

vz

Kuid vx peab olema assümmeetriline nn ekvatoriaalse tasandi suhtes ($z_1 = 0$):

$$ta := 0..17 \quad vx_{u,ta} := -vx_{u,ta}$$



Kolmas kiirusvektori komponent on vy . Alustame siingi joonest x_1 teljel:

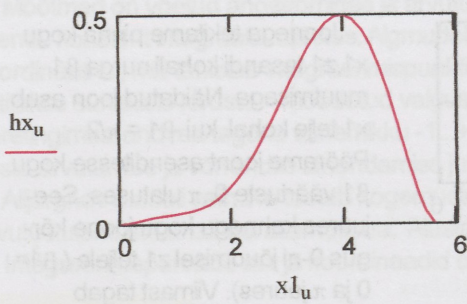
vx

$$a := 1.43547803204561 \times 10^{-3}$$

$$b := -0.019917740582699 \quad c := 0.090999528241492 \quad d := -0.156281963467194$$

$$f := 0.107587423510484 \quad hx_u := a \cdot (x1_u)^6 + b \cdot (x1_u)^5 + c \cdot (x1_u)^4 + d \cdot (x1_u)^3 + f \cdot (x1_u)^2$$

$$vy := V(hx, 1) \quad vy_{u,t} := vy_{u,t} \cdot O_{u,t}$$



Peale algmudeli kiiruskomponentidele väärtuste andmist peab kontrollima, kas ei ole ületatud relativistlikku piiri. Selleks arvutame kiiruse mooduli. Kui selle maksimum ületab väärtust 1, tuleb eelmistes arvutustes vähendada programmide sisendis märgitud konstante v_e . Samuti sättisime kõigi komponentide suurimad väärtused ligikaudselt võrdseteks:

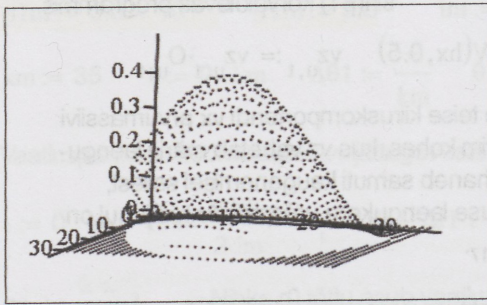
$$vm_{u,t} := \sqrt{(vx_{u,t})^2 + (vy_{u,t})^2 + (vz_{u,t})^2}$$

$$\max(vm) = 0.782323423226303$$

$$\max(vx) = 0.49868136158554$$

$$\max(vy) = 0.498681361585973$$

$$\min(vz) = -0.499236326674251$$

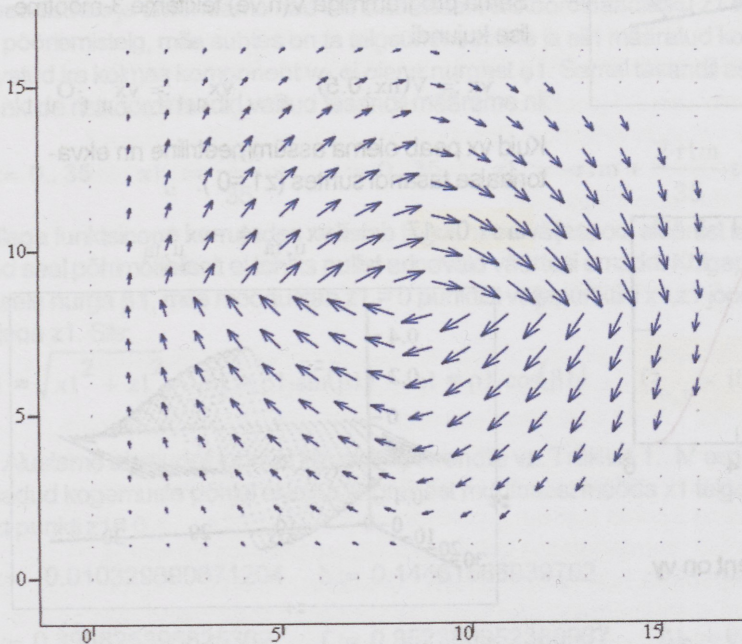


Nii nagu trükitöö I.IV osas me järgisime nn **suitsurõnga** või **solenoidaalse liikumise** mudelit, nii ka siin kasutame seda algväärtuste valimisel. Kas tasandil $(x1,z1)$ on meie valik

vy

tekitanud pöörleva liikumise, seda näitab järgmine vektordiagramm.

$$p := 1..16 \quad t := 1..16 \quad Gx_{p,t} := vx_{p,2,t-2} \quad Gz_{p,t} := vz_{p,2,t-2}$$



(Gx, Gz)

Joonistatud vektordiagrammil on vx telg horisontaalne ja vz oma vertikaalne. See joonis hõlmab laengukera meridiaantaseandi ühte poolt. Teise poole saame, kui peegeldame olemasolevat vertikaalse telje suhtes vasakule. Lisaks näidatud liikumistele toimub tekkinud rõngaste sees laengu liikumine kiirusega vy ümber vertikaalse telje, omades suurimat väärtust nähtavate rõngaste tsentri kohal. Joonise esitamisel ei ole jälgitud õigeid vertikaalseid ja horisontaalseid

mastaape (see ei ole siinkohal oluline). Vasakule peegeldatud ja nähtavate rõngaste välispiirid kokku peavad tegeelikult moodustama ringjoone, sfäärilise laengusteemi välispiiri. Joonist tuleks venitada 2x pikemaks vertikaali suunas – punktidevaheline samm on tegeelikult vertikaali suunas 2x suurem x-teljel võetust.

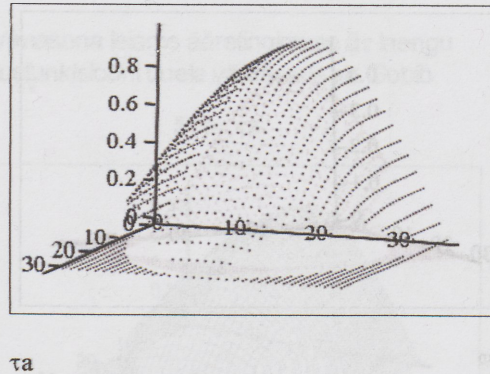
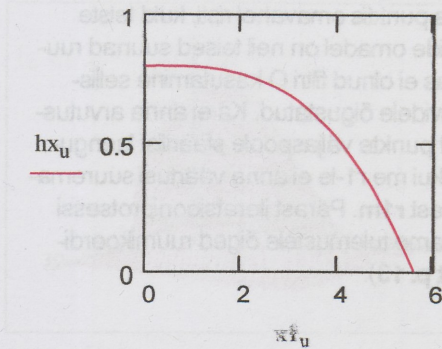
Joonisel on ka näha, et vz komponent muudab märki vertikaalsel sirgel (i = 17, number Gx teljel 17/2 = 8.5). Edasises võrrandite lahendamise programmis, uute kiiruste määramisel, jätkame programmile voli joone kuju muutmiseks.

Viimasena leiame algmudeli jaotusfunktsioonile τ_a . See olgu z1-teljel suurima väärtusega ja kahanegu x1 kasvades, saavutades väärtuse 0 laengusteemi piiril ja selle taga. Alustame jällegi joonest x1 teljel, mille algus asub z1 = 0 kohal ja telg x1 on risti z1 teljega, asudes laetud kera nn ekvatoriaaltasandil.

$$a := -5.06076152720018 \times 10^{-3} \quad b := 2.83402645523209 \times 10^{-3} \quad c := 0.799875626724708$$

$$hx_u := a \cdot (x1_u)^3 + b \cdot (x1_u)^2 + c \quad \tau_a := V(hx, 1.25) \quad t := 0..35 \quad \tau_{a,u,t} := \tau_{a,u,t} \cdot O_{u,t}$$

τ_a normeeritakse iteratsioonitsükli alguses p 4.



Kuna edasine töö hakkab käima sfäärilises koordinaatsüsteemis, teisendame saadud funktsioonid sellesse süsteemi. Seal käib kogu töö meridiaantasandis $\varphi_1 = 0$. Selles tasandis asuvad ka seni kasutatavad x1 ja z1 teljed. Ka r1 ja sellega ristuv θ_1 telg jääb sinna. Kuigi punktid r1 ja θ_1 telgedel on tähistatud indeksitega i ja k, väärtusvahemikud on neil indeksitel samad kui on u- ja t- 0..35. Keerates r1 telje ka sfäärilistel joonistel vaataja poole, st kokku x1 teljega ja θ_1 endise z1 peale, saab θ_1 ainult suuna vasakule, vastandsuunaliseks z1 teljega. Meie asetame selle ikka paremale, st vaatame pilti nagu alt üles. Siis tuleb lihtsalt muuta saadava $v\theta$ märki. Lisaks ei kanta sellele teljele mitte θ_1 väärtusi vaid ruumimõõtmeid:

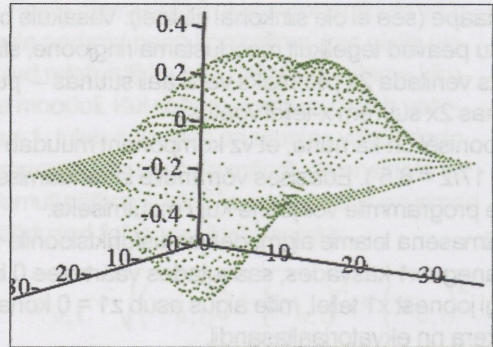
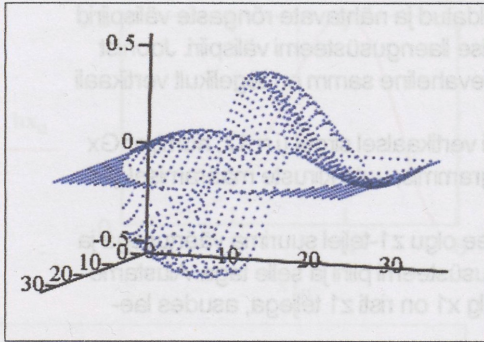
$$z1_t = -r1m + \frac{2 \cdot r1m}{35} \cdot t = -r1m + \frac{2 \cdot r1m}{35} \cdot k \quad t = 0..35 \quad k = 0..35$$

Järelikult:

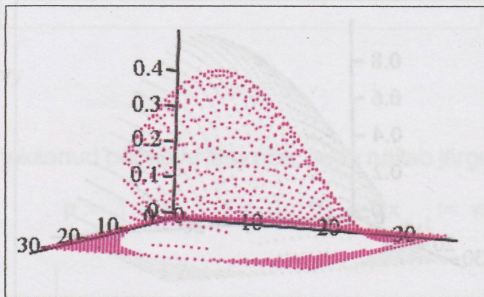
$$vr_{i,k} := vx_{i,k} \cdot \sin(\theta_{1k}) + vz_{i,k} \cdot \cos(\theta_{1k}) \quad v\theta_{i,k} := vx_{i,k} \cdot \cos(\theta_{1k}) - vz_{i,k} \cdot \sin(\theta_{1k})$$

Need on vektori teisendusvalemid ristkoordinaadistikust sfäärilisse, kui $v\varphi_1 = 0$.

$$v\theta := -v\theta \quad v\varphi := v\varphi \quad \tau_a := \tau_a \quad v\theta \text{ ei pea olema } i = 0 \text{ teljel } 0: \quad v\theta_{0,k} := 0.5 \cdot v\theta_{1,k}$$



Edaspidise töös, arvustes sfääriliste koordinaatidega r_1, θ_1 sfääri tasandil $\varphi_1 = 0$, kasutame täpselt samu koordinaadistikke aga "z1" teljele kanname nurgaväärtused θ_1 . St kõiki kaheindeksilisi massiive kujutame analoogsetes ristkoordinaatides, mis ei kujuta reaalselt ruumi. Paremale suunatud teljele kantakse nurgaväärtused radiaanides ja vaataja poole suunatule



väljapunkti kaugus sfääri tsentrilt. r_1 ja θ_1 teljed on küll igas punktis omavahel risti, kuid teiste väljapunktide omadel on neil teised suunad ruumis. IV osas ei olnud filtri O kasutamine sellistele massiividele õigustatud. Ka ei anna arvutus tulemused punkte väljaspoole sfäärilist laengusüsteemi, kui me r_1 -le ei anna väärtusi suuremana mõõtmest $r_1 m$. Pärast iteratsiooniprotsessi lõppu anname tulemustele õiged ruumikoordinaadid (vt p. 13).

Algväärtusi kasutatakse ainult ühel korral. Järgnevad iteratsioonid asuvad neid muutma. Nagunii ei ole ette teada, millised need peaks olema, st ei pea eriti hoolt kandma nende tööle vastavuse pärast. Valikust oleneb ainult iteratsiooniprotsessi koondumise kiirus. Lõpptulemus sõltub ka ääretingimuste valikust.

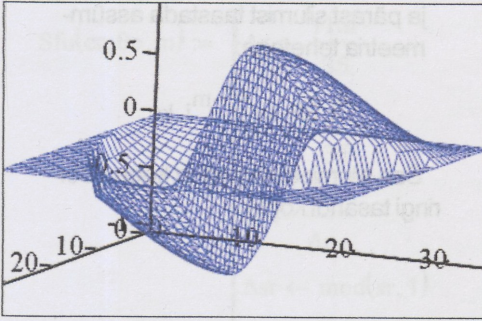
2. Ääretingimuste valimine

Ääretingimusi me rakendasime osaliselt juba algväärtuste määramisel. Need peavad määrama v_r, v_θ, v_φ ja τ_a väärtused laengusüsteemi välispiiridel. Sealt alates, kaugemal, kus laengud puuduvad, peavad olema kõik nullid. Kuidas toimub muutus sisenemisel laetud kerasse ei saa me midagi ette anda märgi mõttes. τ_a peab küll olema seal positiivne aga kiirused võivad olla nii positiivsed kui negatiivsed – laengusüsteemi pöörlemissuunad võivad iga telje suhtes olla nii positiivsed kui negatiivsed. Ka on järgnev võrrandite lahendamise programm vaba omavalikuga märkide suhtes. Hälvete miinimumi määramise programm võib anda juhuslikult muutuvad märgid. Kui programm ei anna just meie poolt valitud märke, siis parandame neid oma soovide järgi **paranduste** osas. See parandamine kuulub ka ääretingimuste esitamise valda. Ääretingimusi joonistame valitud algväärtuste jooniste järgi.

Esmalt määrame ääretingimuse \bar{a}_r kiirusele v_r . Võrreldes v_r ja v_x jooniseid näib, et v_x joonis sobibki hästi ääretingimuseks v_r -le. Ainult v_x väärtuste amplituudid suurendane 1-ni:

$$\bar{a}_{r,i,k} := \frac{v_{x,i,k}}{\max(v_x)}$$

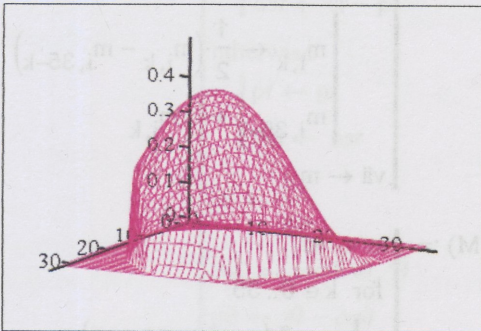
Uue v_{ru} määramise programmil on vaba voli tegutseda nende "katuste" ümbruses aga välispiiril same kindlalt 0-sed väärtused.



är

Äretingimuse v_φ jaoks $\ddot{a}\varphi$ kasutame algmudeli väärtust v_φ .

$$\ddot{a}\varphi := v_\varphi$$



äφ

Järgmisena esitame vajaminevaid silumisprogramme, mis arvutustes saadud arvumassiive siluda võimaldavad. Pikkades arvutustes tekkivate aritmeetiliste vigade tõttu muutuvad nende pildid üsna "karvasteks".

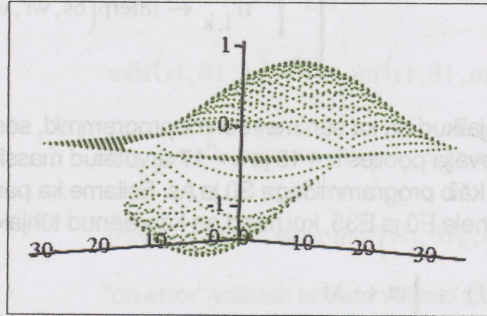
Smrv() programm on 36 x 36 arvumassiivi silumiseks koordinaatide r_1, θ_1 süsteemis. μ_i ja μ_k on 0.25.. ..1, 2, 3, ...

```

Smrv(m, μi, μk) :=
  for i ∈ 0..35
  | for k ∈ 0..35
  | | vθk ← θ1k
  | | vf_k ← m_{i,k}
  | as ← loess(vθ, vf, μk)
  | for k ∈ 0..35
  | | sθ_{i,k} ← interp(as, vθ, vf, vθk)
  for k ∈ 0..35
  | for i ∈ 0..35
  | | m_{i,35-k} = m_{i,ka}
  
```

Analoogiliselt tegutseme v_θ ääretingimuste $\ddot{a}\theta$ määramisel, võrreldes v_θ ja v_z :

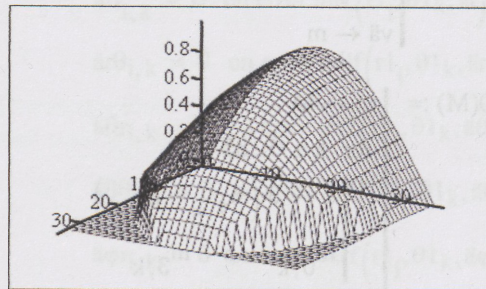
$$\ddot{a}\theta_{i,k} := \frac{v_{z,i,k}}{\max(v_z)} \quad \ddot{a}\theta_{0,k} := \frac{1}{2} \cdot \ddot{a}\theta_{1,k}$$



äθ

Viimasena leiame ääretingimuse $\ddot{a}\tau$ laengu jaotusfunktsiooni uuele väärtusele τu . Sobib

$$\ddot{a}\tau := \tau a$$



äτ

Kasutusjuhend on:

$$m = \text{Smrv}(m, 0.5, 0.5)$$

Programm rikub ära järsu ülemineku θ_1 telje suunas kohal $k = 17$, kui massiiv on selle suhtes asümmeetriline. Sellisel juhul annab parema tulemuse kui teha alguses massiiv sümmeetriliseks teheteiga (muidugi omistamismärgiga :=)

$$m_{i,35-ka} = m_{i,ka}$$

```

| wri ← r1i
| wfi ← sθi,k
| bs ← loess(wr, wf, μi)
| for i ∈ 0..35
|   tfi,k ← interp(bs, wr, wf, wri)
| tf

```

ja pärast silumist taastada assümmeeria tehetege:

$$m_{i,35-k} = -m_{i,k}$$

See silumine rakendub kogu poolringi tasandi kohta.

Vajalikud on ka sümmeetreerimisprogrammid, sest ka seda rikuvad lihtsad arvutustehted. Vaatevälja pooltes $k < 18$ ja $k > 17$ arvutatud massiivide sümmeetreerimine ja assümmeetreerimine käib programmidega Sü ja As. Esitame ka paraboolse ekstrapoolimise $i = 0$ ja $i = 35$ äärejoonele E0 ja E35, kui need on kas jäänud tühjaks või on suurte vigadega leitud.

```

Sü(M) := | m ← M
| for i ∈ 0..35
|   for k ∈ 0..17
|     | mi,k ← 1/2 · (mi,k + mi,35-k)
|     | mi,35-k ← mi,k
|   vä ← m

```

```

As(M) := | m ← M
| for i ∈ 0..35
|   for k ∈ 0..17
|     | mi,k ← 1/2 · (mi,k - mi,35-k)
|     | mi,35-k ← -mi,k
|   vä ← m

```

```

E0(M) := | m ← M
| for k ∈ 0..35
|   | a ← 3 · (m1,k - m2,k)
|   | m0,k ← a + m3,k
| vä ← m

```

```

E35(M) := | m ← M
| for k ∈ 0..35
|   | a ← 3 · (m34,k - m33,k)
|   | m35,k ← a + m32,k
| vä ← m

```

Veel tarvitame ühel real või veerul silumise programmi, kus μ omab samu väärtusi, mis ülalnäidatud μ_i ja μ_k . nm on rea või veeru x punktide koguarv.

Kõigi arvutatud väärtuste massiivid näitavad neid tasandis $\varphi = 0$. Telgsümmeetrilisel juhul peab see olma sama kõigis tasandites $\varphi = 0..2\pi$. Telg, mille ümber tuleb kujutisi pöörata, on paremale pööratud θ_1 -telg. Vaataja poole on suunatud r_1 -telg.

```

Sm(f, x, μ, nm) := | for n ∈ 0..nm
|   | wxn ← xn
|   | wyn ← fn
|   bs ← loess(wx, wy, μ)
|   for n ∈ 0..nm
|     sfn ← interp(bs, wx, wy, xn)
| sf

```

Peale ääreväärtuste leidmist tuleb nendest leida ka osatuletied r_1 ja θ_1 järgi. Uued väärtused vru , $v\theta_u$, $v\varphi_u$ ja τ_u avaldatakse ääritingimuste ja neid lähendava rittaarenduse korrutisena ja asetatakse dif-võrranditesse. Seal leitakse ka mainitud osatuletised. Osatuletised φ_1 järgi on 0-id meie eelduse järgi, et laengusüsteem ja laengute liikumine on telgsümmeetriline. Osatuletisi tähistame, nagu ikka, 3. tähega r või θ tuletist võetava suuruse tähistusele lisades. Kuna on tegu arvumassiividega, siis on kasulikum kõigi jaoks kirjutada ühine programm. Programm **Sfu()** töötab 36×36 mõõtmeliste massiividega (koordinaatides r_1, θ_1), muutes need pidevateks funktsioonideks. See võimaldab neist osatuletisi leida. Programmi sisendis kasutame koordinaate r_1 ja θ_1 tähistustega er, θ_e . m tähistab arvumassiivi.

```

Sfu(er, θe, m) := Δr ←  $\frac{r1m}{35}$ 
                  Δθ ←  $\frac{\pi}{35}$ 
                  sr ←  $\frac{er}{\Delta r}$ 
                  Δsr ← mod(sr, 1)
                  pr ← sr - Δsr
                  if pr < 0
                      | pr ← 0
                      | Δsr ← sr
                  if pr > 34
                      | pr ← 34
                      | Δsr ← sr - pr
                  otherwise
                      | pr ← pr
                      | Δsr ← Δsr
                  sθ ←  $\frac{\theta e}{\Delta \theta}$ 
                  Δsθ ← mod(sθ, 1)
                  pθ ← sθ - Δsθ
                  if pθ < 0
                      | pθ ← 0
                      | Δsθ ← sθ
                  if pθ > 34
                      | pθ ← 34
                      | Δsθ ← sθ - pθ
                  otherwise
                      | pθ ← pθ
                      | Δsθ ← Δsθ
                  f0 ← mpr, pθ
                  f1 ← mpr+1, pθ
                  f2 ← mpr+1, pθ+1
                  f3 ← mpr, pθ+1
                  fr1 ← f0 + (f1 - f0) · Δsr
                  fr2 ← f3 + (f2 - f3) · Δsr
                  fr ← fr1 · (1 - Δsθ)
                  fr ← fr + fr2 · Δsθ

```

Osatuletiste leidmine:

$$mf(r1, \theta1, m) := Sfu(r1, \theta1, m)$$

$$mrf(r1, \theta1, m) := \frac{d}{dr1} mf(r1, \theta1, m)$$

$$m\theta f(r1, \theta1, m) := \frac{d}{d\theta1} mf(r1, \theta1, m)$$

$$mr_{i,k} := 0 \text{ on error } mrf(r1_i, \theta1_k, m)$$

$$m\theta_{i,k} := 0 \text{ on error } m\theta f(r1_i, \theta1_k, m)$$

"on error" välistab tekkida võivaid tõrkeid. Nendesse kohtadesse kirjutatakse 0. Nulli võib vajadusel asendada ka mõne muu arvuga.

Leiame kõigi ääritingimuste osatuletised:

$$\ddot{a}r_{i,k} := 0 \text{ on error } mrf(r1_i, \theta1_k, \ddot{a}r)$$

$$\ddot{a}\theta_{i,k} := 0 \text{ on error } m\theta f(r1_i, \theta1_k, \ddot{a}\theta)$$

$$\ddot{a}\theta r_{i,k} := 0 \text{ on error } mrf(r1_i, \theta1_k, \ddot{a}\theta)$$

$$\ddot{a}\theta\theta_{i,k} := 0 \text{ on error } m\theta f(r1_i, \theta1_k, \ddot{a}\theta)$$

$$\ddot{a}\phi r_{i,k} := 0 \text{ on error } mrf(r1_i, \theta1_k, \ddot{a}\phi)$$

$$\ddot{a}\phi\theta_{i,k} := 0 \text{ on error } m\theta f(r1_i, \theta1_k, \ddot{a}\phi)$$

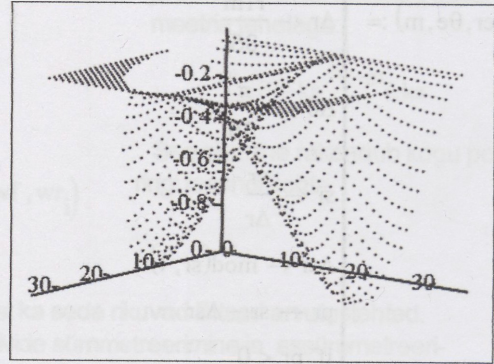
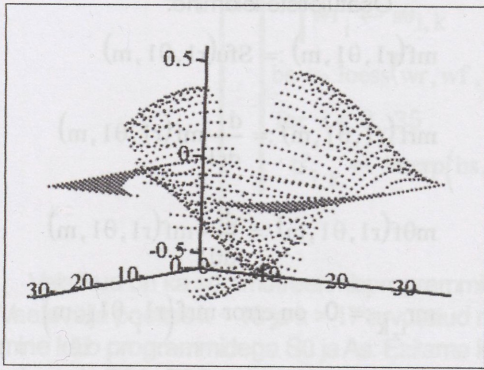
$$\ddot{a}\tau_{i,k} := 0 \text{ on error } mrf(r1_i, \theta1_k, \ddot{a}\tau)$$

$$\ddot{a}\tau\theta_{i,k} := 0 \text{ on error } m\theta f(r1_i, \theta1_k, \ddot{a}\tau)$$

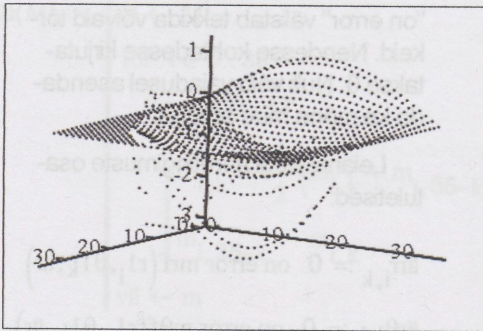
Programm tekitab vigu kohtades, kus toimuvad järsud hüpped m massiivi väärtustes. Neid tuleb siluda. Ka lihtsalt käsitsi parandada. Parandused tegime kõrvallehekülgedel, mida siin ei ole näidatud ruumi kokkuhoiu mõttes. Ka ei peaks need lugejat huvitama.

ka := 0..17

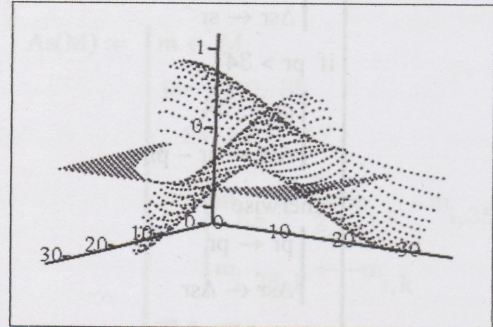
fr



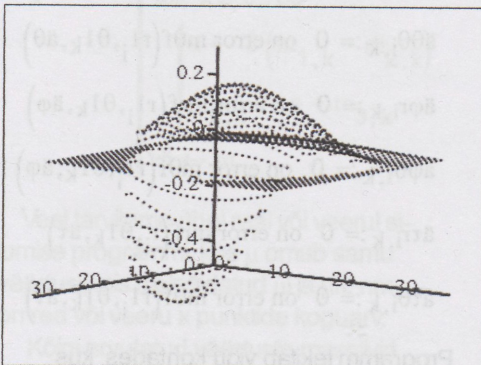
ärr



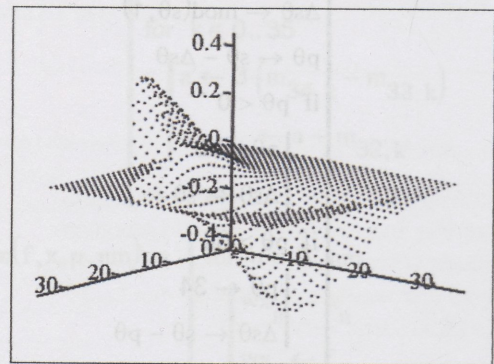
ärθ



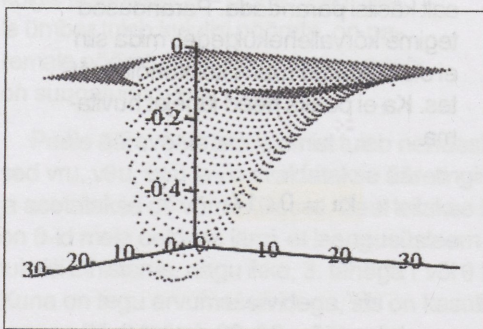
ääθr



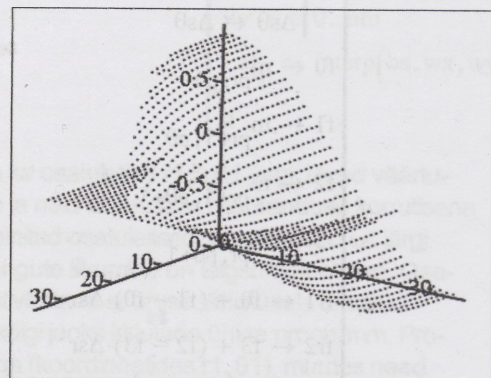
ääθθ



ääφr



ääφθ



ääτr

ääτθ

Kõik senised arvutused on tehtud koordinaatides, mis on tegelikest laengussüsteemi mõõtetest 10^5 korda suuremad. Vajalikud tasearvestused tehakse võrrandite lahendamise juures.

3. Kirjeldame põhilist väljatugevuste arvutamise protsessi

Kui programm on leidnud võrrandite lahendamisega uued kiiruskomponendid v_r , v_θ , v_φ ja jaotusfunktsiooni τu , need salvestatakse failidesse ja betakse siin üleval (kus toimub uute väärtuste sisestamine, p 4) endiste asemele. Algab järgmine "iteratsioon". Seda korratakse nii kaua, kui saadud tulemused jäävad praktiliselt muutumatuks.

Integraalid on järgmist tüüpi. Laeng on jagunenud vaatevälja punktidesse $r_{1_i}, \theta_{1_k}, \varphi_{1_j}$. Väljatugevused arvutatakse punktides nende vahel (indeksid on kreeka tähed) $r, \theta, \varphi, \lambda$.

$$v\ddot{a}(r, \theta, \varphi) = \int \int \int \tau a(r_{1_i}, \theta_{1_k}) \cdot av(r, \theta, \varphi, r_{1_i}, \theta_{1_k}, \varphi_{1_j}) \cdot r_{1_i}^2 \cdot \sin(\theta_{1_k}) dr_{1_i} d\theta_{1_k} d\varphi_{1_j}$$

Seejuures arvestasime olukorraga, kus τa ega kiirusvektorite komponendid ei olene nurgakoordinaatidest φ ja φ_{1_j} . St avaldises on tegureid, mis ei olene neist. Kirjutame need φ_{1_j} integraali märgi alt välja:

$$v\ddot{a}(r, \theta, \varphi) = \int \int \tau a(\rho_{1_i}, \zeta_{1_k}) \cdot \left(\int av(r, \theta, \varphi, r_{1_i}, \theta_{1_k}, \varphi_{1_j}) d\varphi_{1_j} \right) \cdot r_{1_i}^2 \cdot \sin(\theta_{1_k}) dr_{1_i} d\theta_{1_k}$$

Integraalid arvutame summadena, kasutades trapetsi meetodit (lühema kirjutusviisi saamiseks kirjutame siin risküliku meetodi järgi, programmis tehakse seda trapetsi meetodil):

$$j_m := 35 \quad j := 0..j_m \quad \varphi_{1_j} := \frac{2 \cdot \pi}{j_m} \cdot j \quad \Delta\varphi_{1_j} := \frac{2 \cdot \pi}{j_m} \quad \Delta S := \frac{\Delta r_{1_i}}{2} \cdot \frac{\Delta\theta_{1_k}}{2}$$

$$(v\ddot{a}_{r, \kappa})_\lambda = \sum_{i=0}^{j_m} \sum_{k=0}^{j_m} \tau a_{i, k} \cdot \left(\sum_{j=0}^{j_m-1} av(r_{1_i}, \theta_{1_k}, \varphi_{1_j}, r_{1_i}, \theta_{1_k}, \varphi_{1_j}) \cdot \frac{\Delta\varphi_{1_j}}{2} \right) \cdot (r_{1_i})^2 \cdot \sin(\theta_{1_k}) \cdot \Delta S$$

NB! Ringintegraali puhul on summa ülaraada im kurjast, sest see kattub 0 väärtusega:

$$\sum_{j=0}^{j_m-1} \Delta\varphi_{1_j} = 6.28318530717959 \quad \text{on } 2\pi \text{ aga} \quad \sum_{j=0}^{j_m} \Delta\varphi_{1_j} = 6.46270488738472 \quad \text{mitte!}$$

Kõigi 5 väljatugevustekomponendi valemite ülevaatamisel saime 5 erinevat avaldist av :

$$a_0 = \frac{r}{R(r, \theta, \varphi, r_{1_i}, \theta_{1_k}, \varphi_{1_j})^3} \quad a_1 = \frac{r_{1_i} \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\theta_{1_k})}{R(r, \theta, \varphi, r_{1_i}, \theta_{1_k}, \varphi_{1_j})^3} \quad a_2 = \frac{r_{1_i} \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta_{1_k})}{R(r, \theta, \varphi, r_{1_i}, \theta_{1_k}, \varphi_{1_j})^3}$$

$$a_3 = \frac{r_{1_i} \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\theta_{1_k}) \cdot \cos(\varphi - \varphi_{1_j})}{R(r, \theta, \varphi, r_{1_i}, \theta_{1_k}, \varphi_{1_j})^3} \quad a_4 = \frac{r_{1_i} \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta_{1_k}) \cdot \cos(\varphi - \varphi_{1_j})}{R(r, \theta, \varphi, r_{1_i}, \theta_{1_k}, \varphi_{1_j})^3}$$

Neis on veel tegureid, mis saab võtta j-summa märgi ette. Järele jääb ainult 2 tüüpi:

$$A(r, \theta, \varphi, r_{1_i}, \theta_{1_k}) = \sum_{j=0}^{j_m-1} \frac{\cos(\varphi - \varphi_{1_j})}{R(r, \theta, \varphi, r_{1_i}, \theta_{1_k}, \varphi_{1_j})^3} \quad B(r, \theta, \varphi, r_{1_i}, \theta_{1_k}) = \sum_{j=0}^{j_m-1} \frac{1}{R(r, \theta, \varphi, r_{1_i}, \theta_{1_k}, \varphi_{1_j})^3}$$

On veel neid avaldisi, milliste lugejasse jääb tegur $\sin(\varphi - \varphi_1)$, kuid need koos jagajaga nullistuvad integreerimisel ja ka summeerimisel üle 2π suuruse nurga.

Kuidas \sin -d olenevad φ -st? Kui kõik kasutatavad füüsikalised suurused ei olene nurgakoordinaatidest, ei peaks ka lõpptulemus – integraalide väärtused sellest olenema. Ligikaudsel arvutusel nad muudugi olenevad. St tuleks veel keskmistada üle kõikvõimalike φ väärtuste. Nii saame:

$$A(r, \theta, r_1, \theta_1) = \frac{1}{j_m} \sum_{\lambda=0}^{j_m-1} \sum_{j=0}^{j_m-1} \frac{1}{R(r, \theta, \varphi, r_1, \theta_1, \varphi_1)^3}$$

$$B(r, \theta, r_1, \theta_1) = \frac{1}{j_m} \sum_{\lambda=0}^{j_m-1} \sum_{j=0}^{j_m-1} \frac{\cos(\varphi_\lambda - \varphi_1 j)}{R(r, \theta, \varphi, r_1, \theta_1, \varphi_1)^3}$$

Need summad saab eraldi ära arvutada. Siin ei ole andmeid, mis muutuksid järgnevas järkjärgulise lähendamise protsessis ja annab suure kokkuhoiu arvutusajaks integraalsummade leidmisel igas iteratsioonis korduvalt. Siiski kulus

autori kasutuses oleval ORDI lauaarvutil selleks 36 minutit programmi S0 järgi. Kõik järgnevad arvutused kõigi järgnevate programmidega tehti enamikus "ühe silmapilgutuse" jooksul.

Järgneb programm 4-indeksiliste arvumassiivide A ja B arvutamiseks. Mathcad 2001, mida autor kasutas selles töös, ei luba töölehel 4-indeksilisi kasutada, küll aga koostatavates programmides kujul:

$$\left(A_{i,k} \right)_{i,k} \quad \text{Anname esialgu punktidevahelise kaugusele } R() \text{ teistsuguse kuju. Kui}$$

$$\rho_1 = r_1^2 + r^2 \quad \rho_2 = 2 \cdot r_1 \cdot r \quad \text{co} = \cos(\varphi - \varphi_1) \quad \text{si} = \sin(\theta_1) \cdot \sin(\theta) \quad \text{cs} = \cos(\theta_1) \cdot \cos(\theta)$$

on programmis arvutatavad kaheindeksilised suurused, siis:

$$Rp(\rho_1, \rho_2, \text{si}, \text{co}, \text{cs}) := \sqrt{\rho_1 - \rho_2 \cdot (\text{si} \cdot \text{co} + \text{cs})}$$

```
S0 :=
  for j ∈ 0..jm
    for λ ∈ 0..jm
      coj,λ ← cos(φλ - φ1j)
    for k ∈ 0..km
      for κ ∈ 0..km
        sik,κ ← sin(θκ) · sin(θ1κ)
        csk,κ ← cos(θκ) · cos(θ1κ)
      for i ∈ 0..im
        for ι ∈ 0..im
          ρ1i,ι ← (r1i)2 + (rι)2
          ρ2i,ι ← 2 · r1i · rι
        for i ∈ 0..im
          for k ∈ 0..km
            for ι ∈ 0..im
              for κ ∈ 0..km
                for λ ∈ 0..jm - 1
```

$$A := S0_0 \quad B := S0_1$$

Väljatugevusi arvutava programmi järgnevad osad asuvad iteratsioonitsükli sees ja hakavad kasutama neid arvumassiive. Seega hoiab niisugune viis igalt iteratsioonilt kokku 36 minutit.

```

for j ∈ 0..jm - 1
  scj ← sik,κ · coj,λ + csk,κ
  aj ← (√(ρ1i,l - ρ2i,l · scj))3
  aaj ← 1 / aj
  baj ← coj,λ / aj

AAλ ← (Δφ1 / 2) · ∑j=0jm-2 (aaj + aaj+1)
BBλ ← (Δφ1 / 2) · ∑j=0jm-2 (baj + baj+1)

Aai,κ ← (1 / jm) · ∑λ=0jm-1 AAλ
Bai,κ ← (1 / jm) · ∑λ=0jm-1 BBλ

Ai,k ← Aa
Bi,k ← Ba

vä0 ← A
vä1 ← B
vä

```

4. Iteratsiooniprotsess algab siit

Esimesel tsükliil, nummerdame selle 700-ga, sisestatakse algmudeli andmed:

vra := vr vθa := vθ vφa := vφ taa := ta

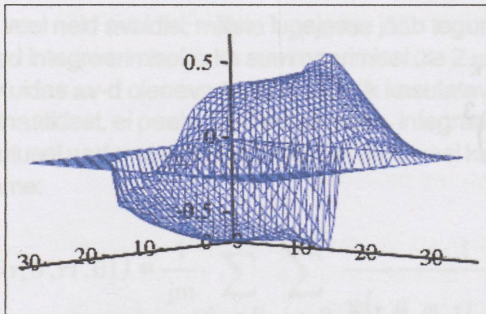
Järgmistel tsükliitel loetakse need failidest, kuhu uued salvestati eelmise tsükli lõpus. Nende tsükliitega oleme teinud arvutusi kuni 745-ni. Edaspidi toimub kõigis hälvetes ainult aritmeetilistest vigadest põhjustatud juhuslikud võnkumised. Edasist triivi väiksema hälvetesumma poole ei toimu.

vr :=

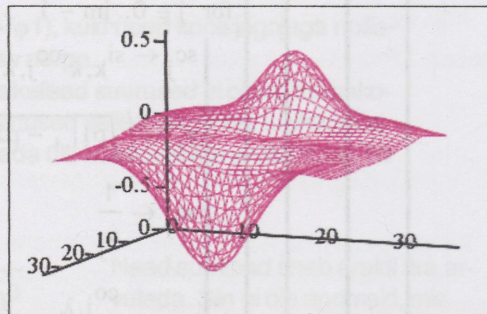
 C:\..\vru745

vθ :=

 C:\..\vdu745



vr



vθ

vφ :=

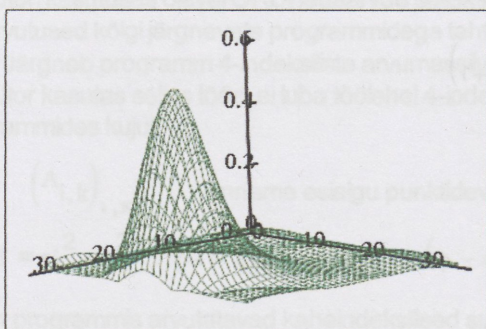


C:\..lvju745

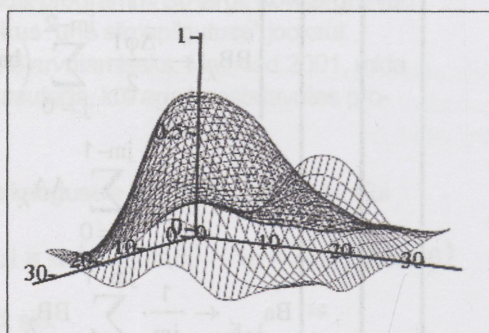
τα :=



C:\..tu745



vφ



τα

$$\Delta r_1 := \frac{r_{1m}}{im} \quad \Delta \theta_1 := \frac{\pi}{km}$$

```

Nor(τu) :=
  for i ∈ 0..im
    for k ∈ 0..km
      fi,k ← τui,k · sin(θ1k) · (r1i)2
    for i ∈ 0..im
      gi ← 1/2 · ∑k=0km-1 (fi,k + fi,k+1)
    s ← 1/2 · ∑i=0im-1 (gi + gi+1)
  s ← s · 2 · π · Δr1 · Δθ1
  
```

Jaotusfunktsioon tuleb normeerida 1-le. Kõrvalolev programm teeb seda. Integreerimine asendub summeerimisega trapetsi meetodil ja arvestada tuleb ka süsteemi reaalseid mõõtmeid angströmites. Siin kasutatud ruumimõõde on 10⁵ korda suuremates ühikutes.

Seega 1/cm³-tes mõõdetuna on suurem

$$(10^{13})^3 \text{ korda: } \tau_a := \text{Nor}(\tau_a) \quad \tau_a \cdot A_\tau = 1$$

$$A_\tau := \frac{1}{\tau_a} \cdot 10^{39} \quad A_\tau = 2.6003921845 \times 10^{36}$$

All on kirjas normeerimiskonstandi A_τ muutumine tsükli 700..745 jooksul. Nendele vastavaid vr, vθ, vφ ja τα viimaste keskmisi väärtusi vaata punktist 13. Kõiki seekord ei ole mõtet esitada. Muutused on aeglased, tänu sel-

lele, et I...IV osade kuhjunud kogemus on võimaldanud algjäähendid valida üsna sarnased lõppväärtustele. Kirjutame välja ainult muutusi näitavate suuruste arväärtuste tabelid.

Kontrolliks arvutame sisendkiiruse mooduli maksimaalväärtuse, mis võis ekslikult olla eelmise iteratsiooni lõpus saanud väärtuse > 1. Siis muutuksid paljud tulemused kompleksarvudeks ja pole mõtet järgnevaid arvutusi alustada. Sellise võimalusega allpool ei arvestata. Sellel juhul tuleb eelmist tsüklit parandada.

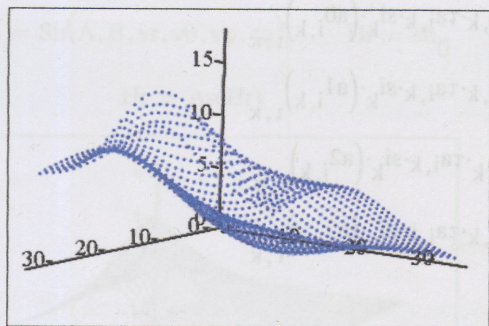
$va_{i,k} := \sqrt{(vr_{i,k})^2 + (v\theta_{i,k})^2 + (v\varphi_{i,k})^2}$			$vm := \max(va)$	$vm = 0.999999989072465$	
700.	$3.6461799397 \times 10^{36}$	701.	$5.273127631 \times 10^{36}$	702.	$7.9600311247 \times 10^{36}$
703.	$1.2050695466 \times 10^{37}$	704.	$7.5081424348 \times 10^{36}$	705.	$5.3373372621 \times 10^{36}$
706.	$4.1863466302 \times 10^{36}$	707.	$3.8538009962 \times 10^{36}$	708.	$3.9438235476 \times 10^{36}$
709.	$4.0818436049 \times 10^{36}$	710.	$4.2332071445 \times 10^{36}$	711.	$3.7238589979 \times 10^{36}$
712.	$3.0633484279 \times 10^{36}$	713.	$2.6392748329 \times 10^{36}$	714.	$2.5806646633 \times 10^{36}$
715.	$2.599620985 \times 10^{36}$	716.	$2.6240181056 \times 10^{36}$	717.	$2.620118177 \times 10^{36}$
718.	$2.6206939899 \times 10^{36}$	719.	$2.6219661056 \times 10^{36}$	720.	$2.6208169309 \times 10^{36}$
721.	$2.6178411349 \times 10^{36}$	722.	$2.6144570002 \times 10^{36}$	723.	$2.6128125717 \times 10^{36}$
724.	$2.611539071 \times 10^{36}$	725.	$2.6076702765 \times 10^{36}$	726.	$2.6057401745 \times 10^{36}$
727.	$2.6047761945 \times 10^{36}$	728.	$2.6008845197 \times 10^{36}$	729.	$2.600103759 \times 10^{36}$
730.	$2.5997063656 \times 10^{36}$	731.	$2.5998257777 \times 10^{36}$	732.	$2.6039656272 \times 10^{36}$
733.	$2.6102729598 \times 10^{36}$	734.	$2.615370806 \times 10^{36}$	735.	$2.6176082184 \times 10^{36}$
736.	$2.6173838505 \times 10^{36}$	737.	$2.6151031792 \times 10^{36}$	738.	$2.6118866459 \times 10^{36}$
739.	$2.6102813447 \times 10^{36}$	740.	$2.6094794338 \times 10^{36}$	741.	$2.605600904 \times 10^{36}$
742.	$2.602913664 \times 10^{36}$	743.	$2.6015433532 \times 10^{36}$	744.	$2.6013182292 \times 10^{36}$
745.	$2.6003921845 \times 10^{36}$				

Elektriväljatugevuse komponentide E_r ja E_θ arvutusprogramm on ($E_\varphi = 0$ valitud sümmeetrilise tõttu):

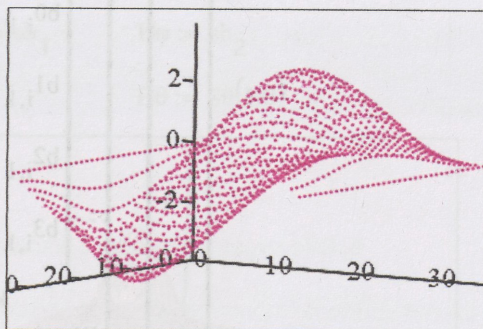
```

Se(A,B,τa) :=
  for k ∈ 0..km
    | si_k ← sin(θ1_k)
    | co_k ← cos(θ1_k)
  for i ∈ 0..im
    for k ∈ 0..km
      for l ∈ 0..im
        for κ ∈ 0..km
          | α0l ← (r_l - r_l · co_κ · co_k) · (A_l,k)_l,κ
          | er_l,κ ← α0l - r_l · si_κ · si_k · (B_l,k)_l,κ
          | α1l ← si_κ · co_k · (A_l,k)_l,κ

```

Er



Eθ

Järgnevalt arvutame magnetväljatugevuste komponendid H_r , H_θ ja H_ϕ .

```

Sh(A, B, vr, vθ, vφ, τa) :=
  for k ∈ 0..km
    | si_k ← sin(θ1_k)
    | co_k ← cos(θ1_k)
    for i ∈ 0..im
      for k ∈ 0..km
        for ι ∈ 0..im
          for κ ∈ 0..km
            α01 ← si_κ · co_k · (A_{i,k})_{ι,κ}
            α0 ← α01 - co_κ · si_k · (B_{i,k})_{ι,κ}
            α11 ← (r_ι - r1_ι · co_κ · co_k) · (A_{i,k})_{ι,κ}
            α1 ← α11 - r1_ι · si_κ · si_k · (B_{i,k})_{ι,κ}
            hr_{ι,κ} ← r1_ι · α0
            hθ_{ι,κ} ← α1
            hφ1_{ι,κ} ← r1_ι · α0
            hφ2_{ι,κ} ← α1
            a0_{i,k} ← hr
            a1_{i,k} ← hθ
            a2_{i,k} ← hφ1
            a3_{i,k} ← hφ2
          for ι ∈ 0..im
            for κ ∈ 0..km
              for i ∈ 0..im
                for k ∈ 0..km

```

$$b_{0,i,k} \leftarrow v\varphi_{i,k} \cdot \tau a_{i,k} \cdot s_{i,k} \cdot (a_{0,i,k})_{i,\kappa}$$

$$b_{1,i,k} \leftarrow v\varphi_{i,k} \cdot \tau a_{i,k} \cdot s_{i,k} \cdot (a_{1,i,k})_{i,\kappa}$$

$$b_{2,i,k} \leftarrow v r_{i,k} \cdot \tau a_{i,k} \cdot s_{i,k} \cdot (a_{2,i,k})_{i,\kappa}$$

$$b_{3,i,k} \leftarrow v\theta_{i,k} \cdot \tau a_{i,k} \cdot s_{i,k} \cdot (a_{3,i,k})_{i,\kappa}$$

$$B_{0,i} \leftarrow - \sum_{k=0}^{km-1} (b_{0,i,k} + b_{0,i,k+1})$$

$$B_{1,i} \leftarrow \sum_{k=0}^{km-1} (b_{1,i,k} + b_{1,i,k+1})$$

$$B_{2,i} \leftarrow \sum_{k=0}^{km-1} (b_{2,i,k} + b_{2,i,k+1})$$

$$B_{3,i} \leftarrow \sum_{k=0}^{km-1} (b_{3,i,k} + b_{3,i,k+1})$$

$$a_4 \leftarrow \sum_{i=0}^{im-1} [(r_{1,i})^2 \cdot B_{0,i} + (r_{1,i+1})^2 \cdot B_{0,i+1}]$$

$$a_5 \leftarrow \sum_{i=0}^{im-1} [(r_{1,i})^2 \cdot B_{1,i} + (r_{1,i+1})^2 \cdot B_{1,i+1}]$$

$$a_6 \leftarrow \sum_{i=0}^{im-1} [(r_{1,i})^2 \cdot B_{2,i} + (r_{1,i+1})^2 \cdot B_{2,i+1}]$$

$$a_7 \leftarrow \sum_{i=0}^{im-1} [(r_{1,i})^2 \cdot B_{3,i} + (r_{1,i+1})^2 \cdot B_{3,i+1}]$$

$$Hr_{i,\kappa} \leftarrow a_4$$

$$H\theta_{i,\kappa} \leftarrow a_5$$

$$H\varphi_{i,\kappa} \leftarrow a_6 - a_7$$

$$\Delta V \leftarrow \frac{1}{4} \cdot \Delta r_1 \cdot \Delta \theta_1$$

$$v\ddot{a}_0 \leftarrow Hr \cdot \Delta V$$

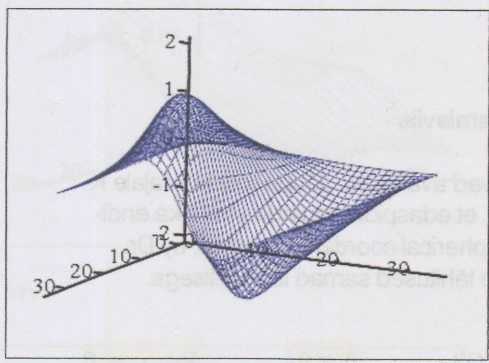
$$v\ddot{a}_1 \leftarrow H\theta \cdot \Delta V$$

$$v\ddot{a}_2 \leftarrow H\varphi \cdot \Delta V$$

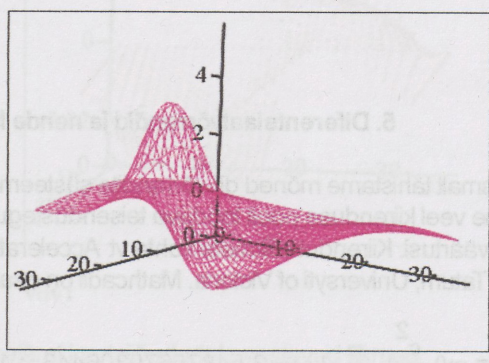
$$v\ddot{a}$$

$$sh := Sh(A, B, vr, v\theta, v\phi, \tau a) \quad Hr := sh_0 \quad H\theta := sh_1 \quad H\phi := sh_2$$

$$Hr := As(Hr) \quad H\theta := S\ddot{u}(H\theta)$$

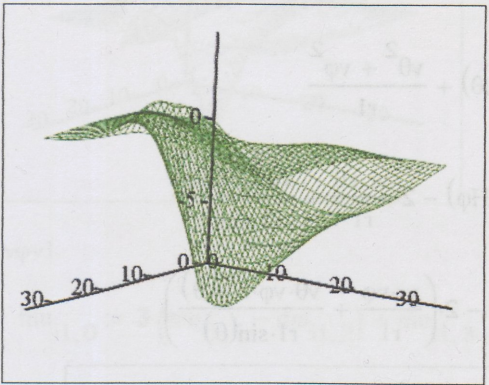


Hr



Hθ

$$H\phi := S\ddot{u}(H\phi) \quad A_j := A\tau \cdot 10^{-13} \quad A_j = 2.60039218447582 \times 10^{23}$$



Hφ

Näidatud kordaja A_j tuleb integreeritud väärtustele juurde kirjutada, et saada $E_r, E_\theta, H_r, H_\theta$ ja H_ϕ väärtusi CGS süsteemis. $A\tau$ on jaotuse τa normeerimistegur ja 10^{-13} teisendab angströmites arvutatud integraali aluse avaldise cm-tekks (arvestades ka, et angströmites esitatud ruumimõõtmeid on 10^5 korda suurendatud). A_j on viidud allpool üldkordajasse K .

Kiiruste ja jaotusfunktsiooni arvumassiivide indeksid on:

i ja k, arvutatud väljatugevuste indeksid aga

i ja κ Väärtusvahemikud 0..35 on samad,

ainus erinevus on koordinaatide r_1 ja r_1 väärtustes

tes poole sammu suuruses nihkes: $\frac{\Delta r_1}{2} = 0.08 \quad r_1 = r_{1_1} + r_0 \quad r_0 = 0.08$

Teise indeksite paari asemel võib ka kautada esimesi aga tähise r asemel r_1 mitte.

Tuleb arvestada, et väljatugevused arvutati r punktides. Kogu järgnev arvutus toimub aga punktides r_1 . Seetõttu on tarvis teha väljatugevustes ümberarvutus reaalsele vaatevälja koordinaatidele r_1 . Näiteks r_0 ja r_1 väärtuste keskmine tuleb kanda r_{1_1} kohale jne. Selle tulemuse na jääb r_0 tühjaks, mille täidame saadud r_{1_1}, r_{1_2} ja r_{1_3} väärtuste abil parabolse ekstrapoolimisega. Seda teeb järgmine programm (V_a on arvutatud väljatugevus, V - paikanihutatu). Programmi tööle lisanduvad mõningad parandused parabolse ekstrapoolimise tööle.

```
Ni(Va) :=
  for k ∈ 0.. 35
  for i ∈ 0.. 34
    V_{i+1,k} ← 1/2 · (V_{a,i,k} + V_{a,i+1,k})
    V_{0,k} ← 3 · (V_{1,k} - V_{2,k}) + V_{3,k}
  V

  Er := Ni(Er)   Eθ := Ni(Eθ)
  Hr := Ni(Hr)   Hr_{0,k} := 1/2 · Hr_{1,k}
  Hθ := Ni(Hθ)   Hθ_{0,k} := 1/2 · Hθ_{1,k}
  Hφ := Ni(Hφ)
```

Edasise arvutuse mugavuse mõttes säilitame seal needsamad reaalsedest 10^5 korda suuremaid ruumimõõtmel ja teeme "tagasiarvutuse" 10^{13} alles dif-võrrandsüsteemi ja suuruste arvutusprogrammi sees.

5. Diferentsiaalvõrrandid ja nende lahendamisviis

Esmalt tähistame mõned dif-võrrandite süsteemi kuuluvad avaldised. Jõupoole kordajale K lisame veel kiirenduse poolt toodava teisendusteguri 10^{13} , et edaspidi kasutada seal ikka endisi $r1$ väärtusi. Kiirenduselikkmete kohta vt Acceleration in spherical coordinate system, by Dr. J. B. Tatum, University of Victoria. Mathcadil on osatuletiste tähtsused samad täistuletisega.

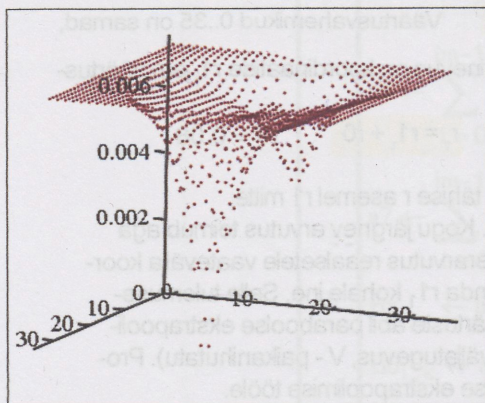
$$kr = m0 \cdot \frac{c^2}{e} \quad kr := 3.54875670306443 \times 10^{12} \text{ CGS} \quad \theta = \theta 1 \quad E\varphi_{i,k} := 0$$

$$K_{i,k} := \frac{Aj \cdot 10^{-13}}{kr} \cdot \sqrt{1 - (vr_{i,k})^2 - (v\theta_{i,k})^2 - (v\varphi_{i,k})^2} \quad vE_{i,k} := vr_{i,k} \cdot Er_{i,k} + v\theta_{i,k} \cdot E\theta_{i,k}$$

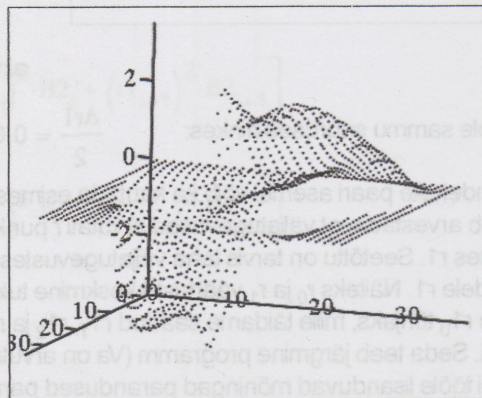
$$vr \cdot \frac{d}{dr1} vr_u + \frac{v\theta}{r1} \cdot \frac{d}{d\theta} vr_u = K \cdot (Er - vr \cdot vE + v\theta \cdot H\varphi - v\varphi \cdot H\theta) + \frac{v\theta^2 + v\varphi^2}{r1}$$

$$vr \cdot \frac{d}{dr1} v\theta_u + \frac{v\theta}{r1} \cdot \frac{d}{d\theta} v\theta_u = K \cdot (E\theta - v\theta \cdot vE + v\varphi \cdot Hr - vr \cdot H\varphi) - 2 \cdot \frac{vr \cdot v\theta}{r1} + \frac{v\varphi^2 \cdot \cos(\theta)}{r1 \cdot \sin(\theta)}$$

$$vr \cdot \frac{d}{dr1} v\varphi_u + \frac{v\theta}{r1} \cdot \frac{d}{d\theta} v\varphi_u = K \cdot (-v\varphi \cdot vE + vr \cdot H\theta - v\theta \cdot Hr) - 2 \cdot \left(\frac{vr \cdot v\varphi}{r1} + \frac{v\theta \cdot v\varphi \cdot \cos(\theta)}{r1 \cdot \sin(\theta)} \right)$$



K



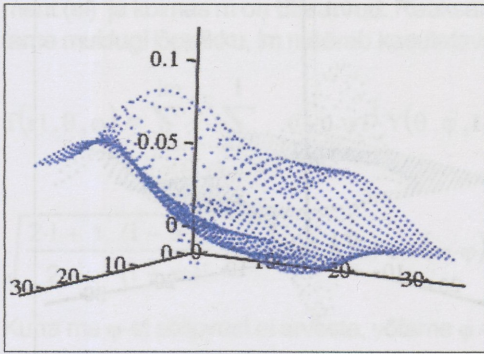
vE

Arvutame vabad liikmed sisendkiiruste väärtusi kasutades. Esmalt väljatugevuste osad:

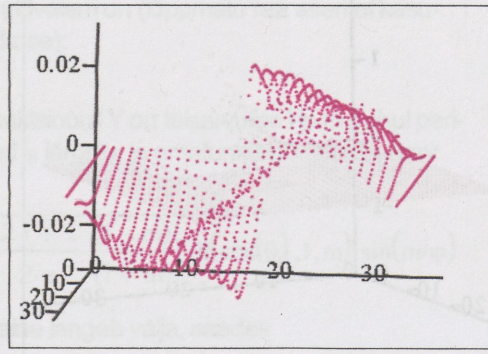
$$vr v1_{i,k} := K_{i,k} \cdot (Er_{i,k} - vr_{i,k} \cdot vE_{i,k} + v\theta_{i,k} \cdot H\varphi_{i,k} - v\varphi_{i,k} \cdot H\theta_{i,k})$$

$$v\theta v1_{i,k} := K_{i,k} \cdot (E\theta_{i,k} - v\theta_{i,k} \cdot vE_{i,k} + v\varphi_{i,k} \cdot Hr_{i,k} - vr_{i,k} \cdot H\varphi_{i,k})$$

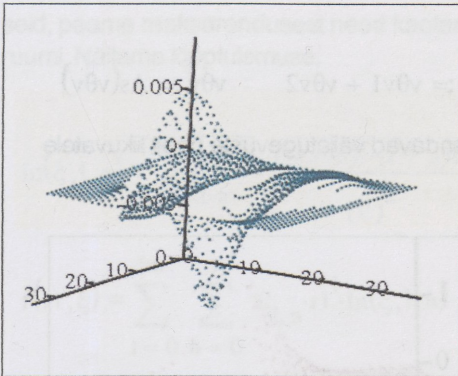
$$v\varphi v1_{i,k} := K_{i,k} \cdot (-v\varphi_{i,k} \cdot vE_{i,k} + vr_{i,k} \cdot H\theta_{i,k} - v\theta_{i,k} \cdot Hr_{i,k})$$



vrv1



vθv1



vφv1

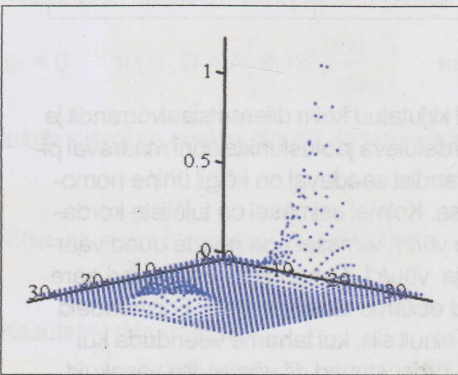
Seejärel inertsijõududele vastavad liikmed.
Inertsijõudude avaldistes tuleb singulaarsus
vältida ja tulemusi sümmetreerida.

$$i1 := 1..35 \quad vrv2_{i1,k} := \frac{(v\theta_{i1,k})^2 + (v\varphi_{i1,k})^2}{r1_{i1}}$$

$$vrv2_{0,k} := 3 \cdot (vrv2_{1,k} - vrv2_{2,k}) + vrv2_{3,k}$$

$$k1 := 1..34 \quad mu_{i1,k1} := \frac{(v\varphi_{i1,k1})^2 \cdot \cos(\theta_{k1})}{r1_{i1} \cdot \sin(\theta_{k1})}$$

$$mu_{i1,0} := 3 \cdot (mu_{i1,1} - mu_{i1,2}) + mu_{i1,3} \quad mu_{i1,35} := 3 \cdot (mu_{i1,34} - mu_{i1,33}) + mu_{i1,32}$$



vrv2

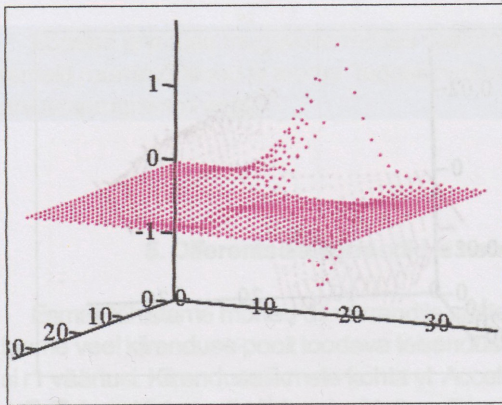
$$v\theta v2_{i1,k} := -2 \cdot \frac{vr_{i1,k} \cdot v\theta_{i1,k}}{r1_{i1}} + mu_{i1,k}$$

$$v\theta v2_{0,k} := 3 \cdot (v\theta v2_{1,k} - v\theta v2_{2,k}) + v\theta v2_{0,k}$$

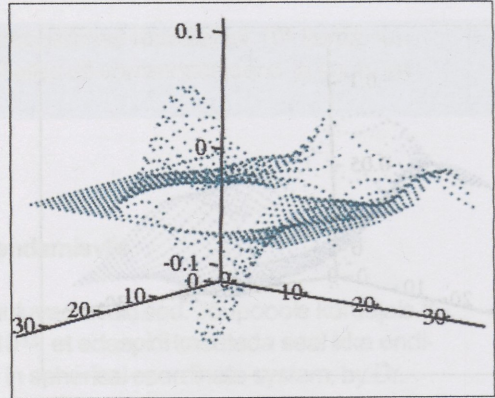
$$v\varphi v2_{i1,k1} := -2 \cdot \left(\frac{vr_{i1,k1} \cdot v\varphi_{i1,k1}}{r1_{i1}} + \frac{v\theta_{i1,k1} \cdot v\varphi_{i1,k1} \cdot \cos(\theta_{k1})}{r1_{i1} \cdot \sin(\theta_{k1})} \right)$$

$$v\varphi v2_{0,k1} := 3 \cdot (v\varphi v2_{1,k1} - v\varphi v2_{2,k1}) + v\varphi v2_{3,k1}$$

$$v\varphi v2_{i,35} := 3 \cdot (v\varphi v2_{i,34} - v\varphi v2_{i,33}) + v\varphi v2_{i,32}$$



vθv2



vφv2

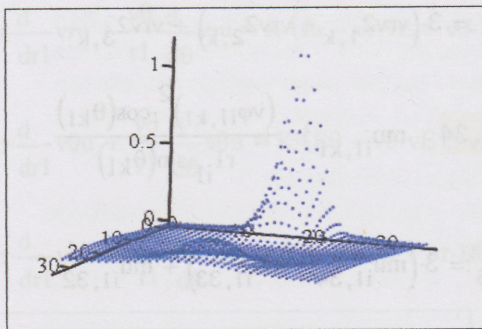
Summa annab vabade liikmete arvumassiivid:

$$vrv := vrv1 + vrv2 \quad vrv := S\ddot{u}(vrv) \quad v\theta v := v\theta v1 + v\theta v2 \quad v\theta v := As(v\theta v)$$

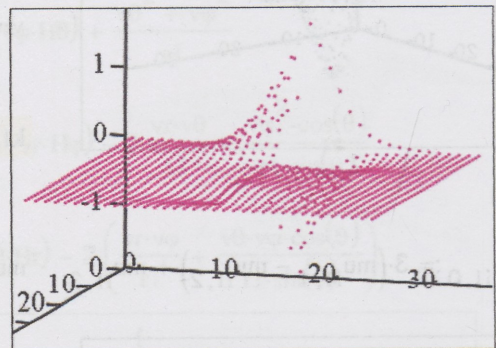
$$v\phi v := v\phi v1 + v\phi v2 \quad v\phi v := As(v\phi v)$$

Need tähendavad väljatugevuste poolt liikuvatele

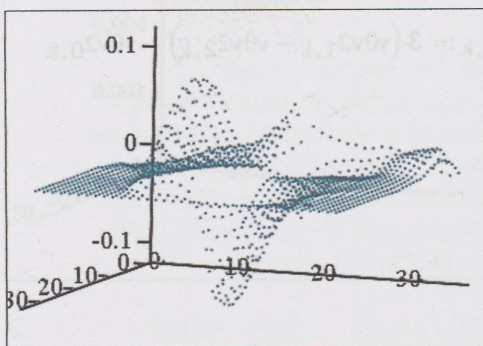
laengutele mõjuvate väljajõudude ja inertsjõude summasid.



vrv



vθv



vφv

Ülalpool kirjutatud kolm diferentsiaalvõrrandit ja allpool juurdetuleva jaotusfunktsiooni määraval pidevusvõrrandist saadaval on kõigil ühine homogeenne osa. Kolmel esimesel on tuletiste kordajateks vr ja $v\theta/r1$, viimasel aga nende uued väärtused vru ja $v\theta u/r1$. Lahenditele esitatavad ääretingimused esitame üldlahenditele. Eri lahendeid määrame ainult siis, kui tahame veenduda kui hästi nad võrdsustavad dif-võrrandite vasakuid pooli vabade liikmetega. Seda tegime eelmistes trükistes.

Otsitavad kiirused ja jaotusfunktsiooni arendame kahemõõtmelisse ritta. Selles V osas koosnevad need sfäärilistest harmoonilistest funktsioonidest (vt G.A.Korn, T.M. Korn lk 324).

$$\xi = \cos(\theta) \quad P(\xi, 1, m) = (-1)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{(1+m)!}{l! \cdot \pi} \cdot \int_0^\pi \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \cdot \cos(t) \right)^l \cdot \cos(m \cdot t) \, dt \quad \text{Teine argu-}$$

ment (el) ja kolmas m on täisarvud. Reaksarenduse üldvalem on (lõppmatu rea asemel kasutame muidugi lõplikku, lm määrab kasutatava rea pikkuse):

$$f(r1, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{lm} \sum_{m=-l}^l C_{l,m} \cdot r1^l \cdot Y(\theta, \varphi, l, m)$$

Funktsioonil Y on täisarvulise l ja m puhul periood φ järgi 2π ja omafunktsioonidel 2 vormi:

$$\sqrt{\frac{2 \cdot l + 1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{(l - m)!}{(l + m)!}} \cdot P(\cos(\theta), l, m) \cdot \cos(m \cdot \varphi) \quad \sqrt{\frac{2 \cdot l + 1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{(l - m)!}{(l + m)!}} \cdot P(\cos(\theta), l, m) \cdot \sin(m \cdot \varphi)$$

Kuna me φ -st sõltuvust ei arvesta, võtame $\varphi = 0$, siis teine langeb välja, saades

$$Y(\theta, 0, l, m) = \sqrt{\frac{2 \cdot l + 1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{(l - m)!}{(l + m)!}} \cdot P(\cos(\theta), l, m)$$

Kuna Mathcad ei "talud" negatiivseid indekseid, peame reaksarendusest need kaotama. Kogu teisenduse esitamine siin võtaks palju ruumi. Näitame lõpptulemuse.

$$In(\xi, l, n) = \sqrt{\frac{2 \cdot l + 1}{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{(l - n)! \cdot (l + n)!}{(l!)^2} \cdot (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \cdot \cos(t))^l \cdot \cos(n \cdot t) dt$$

$$f(r1, \xi) = \sum_{l=0}^{lm} \sum_{n=0}^l C_{l,n} \cdot r1^l \cdot In(\xi, l, n)$$

$C_{l,n}$ siin ei ole sama tähendusega kui algavaldises kirjutatu. Selle väärtusi hakkame nagunii määrama.

Leidsime, et selline rida ei sobi meie funktsioonide lähendamiseks teguri $r1^l$ tõttu - $r1$ kasvades rea see tegur kasvab piiramatult aga lähendatavad funktsioonid peavad lähenema 0-le jõudmisel laengusüsteemi piirle. Seetõttu modifitseerime rea seda tegurit. V osas asendame IV osas "iseenese tarkusest" moodustatud funktsioonid $t(r1, l)$ Besseli funktsiooniga J_0 või J_1 nii, nagu seda tegime II...III osas silindriliste koordinaatiga taustsüsteemi puhul - kasutame J_0 nullkohtade tabelit $O0$ või J_1 oma $O1$. Neid valib tunnus $tu = 0$ või 1 :

$$tu = 0 \quad t0(r1, l) = J_i\left(0, O0_l \cdot \frac{r1}{r1m}\right) \quad tu = 1 \quad t1(r1, l) = J_i\left(1, O1_l \cdot \frac{r1}{r1m}\right)$$

, kus $J_i(m, x)$ ja selle

tuletis x järgi on avaldatatavad järgmiste integraalidega:

$$Ji(m, x) := \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \cos(m \cdot t - x \cdot \sin(t)) dt$$

$$Jix(m, x) := \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \sin(m \cdot t - x \cdot \sin(t)) \cdot \sin(t) dt$$

Kasutatav rida on siis:

$$f(r1, \xi, tu) = \sum_{l=0}^{lm} \sum_{n=0}^l C_{l,n} \cdot t(r1, l, tu) \cdot Re(In(\xi, l, n))$$

$t(r1, l, tu) = if(tu = 0, t0(r1, l), t1(r1, l))$
Kordajate C määramise programmis on

tarvis teada ka funktsioonide osatuletisi $r1$ ja θ järgi (teine täht tähises r või θ näitab kumma järgi on tuletis võetud), $In(\xi, l, n)$ ei olene $r1$ -ist. $\xi = \cos(\theta)$ järgi võetud tuletise jaoks saime IV osas:

$$T(l, n) = \frac{-1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot l + 1}{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{(l - n)! \cdot (l + n)!}{(l!)^2} \cdot (-1)^{\frac{n}{2}}$$

Tähistus, mis võimaldab valemi kirjutada ühele lehekülje reale:

$$\ln\theta(\xi, l, n) = T(l, n) \cdot \int_0^\pi \sqrt{1 - \xi^2} \cdot (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \cdot \cos(t))^{l-1} \cdot \left(1 + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot \cos(t)\right) \cdot \cos(n \cdot t) dt$$

$$f\theta(r_1, \xi, t_u) = \sum_{l=0}^{lm} \sum_{n=0}^l C_{l,n} \cdot t(r_1, l, t_u) \cdot \operatorname{Re}(\ln\theta(\xi, l, n))$$

Osatuletisele r_1 järgi saame juhul $t_u = 0$ ja $t_u = 1$ vastavalt:

$$t0r(r_1, l) := \frac{O0_l}{r_{1m}} \cdot \operatorname{Jix}\left(0, O0_l \cdot \frac{r_1}{r_{1m}}\right)$$

$$t1r(r_1, l) := \frac{O1_l}{r_{1m}} \cdot \operatorname{Jix}\left(1, O1_l \cdot \frac{r_1}{r_{1m}}\right)$$

$$tr(r_1, l, t_u) = \text{if}(t_u = 0, t0r(r_1, l), t1r(r_1, l))$$

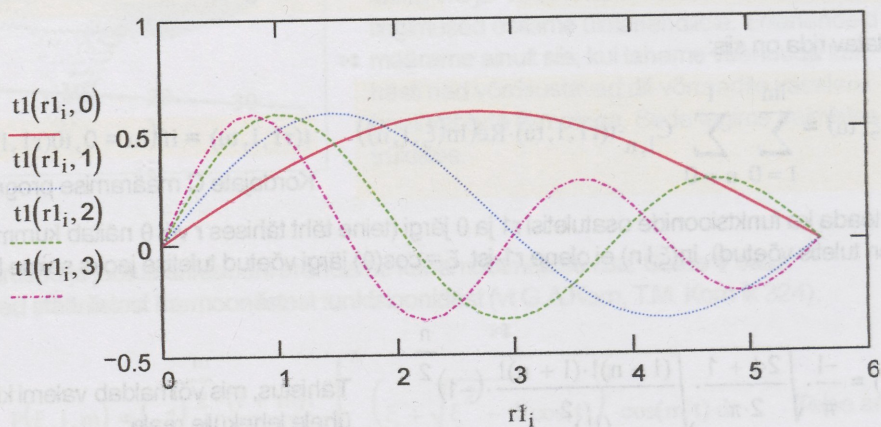
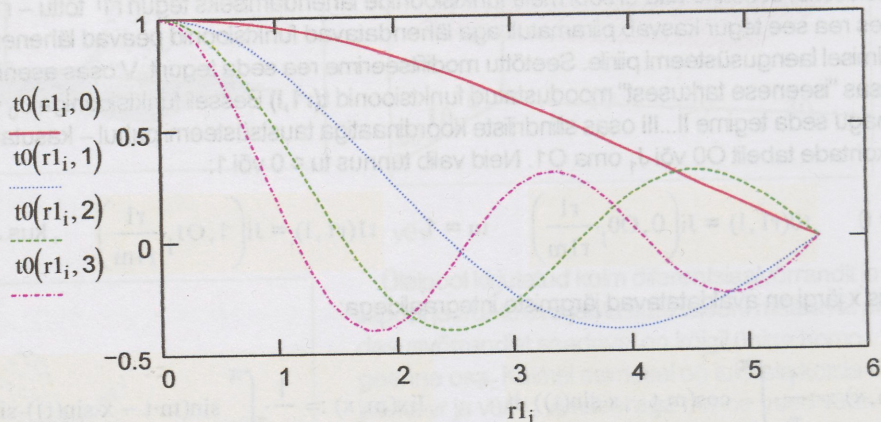
$$fr(r_1, \xi, t_u) = \sum_{l=0}^{lm} \sum_{n=0}^l C_{l,n} \cdot tr(r_1, l, t_u) \cdot \operatorname{Re}(\ln(\xi, l, n))$$

Järgmistel joonisel näitame esimeste l väärtustele vastavaid koordinaadist r_1 sõltuvaid reaksarenduse r_1 -st sõltuvaid kordajaid.

$$t0(r_1, l) := \operatorname{Ji}\left(0, O0_l \cdot \frac{r_1}{r_{1m}}\right)$$

$$t1(r_1, l) := \operatorname{Ji}\left(1, O1_l \cdot \frac{r_1}{r_{1m}}\right)$$

$r_{1m} = 5.6$



6. Kõigepealt lahendame vru võrrandi

Võrrand on:
$$v_r \cdot \frac{d}{dr} v_{ru} + \frac{v_\theta}{r} \cdot \frac{d}{d\theta} v_{ru} = v_{rv} \quad (1)$$

Tuletised on osatuletised. vru määramiseks asendame selle reaksarendusega:

$$v_{ru} = \ddot{a}r \cdot f(r_1, \cos(\theta), tu) \quad (2)$$

(2) asetamisel võrrandisse (1) saame:

$$v_r \cdot \ddot{a}r \cdot f_r + \frac{v_\theta}{r} \cdot \ddot{a}r \cdot f_\theta + \left(v_r \cdot \ddot{a}r + \frac{v_\theta}{r} \cdot \ddot{a}r \theta \right) \cdot f = v_{rv}$$

Tähistame kordajad, millised võib arvumas- siividena kohealt ära arvutada ja siluda:

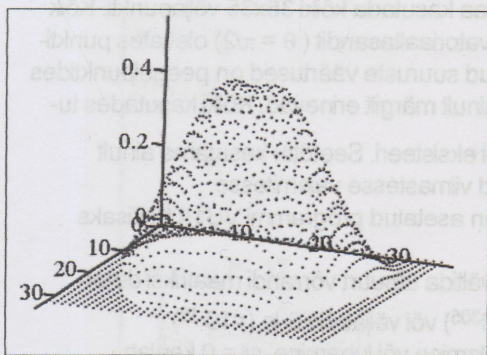
$$v_{r\ddot{u}} := v_{r,i,k} \cdot \ddot{a}r_{i,k}$$

$$v_{\theta\ddot{u}} := v_{\theta,i,k} \cdot \frac{\ddot{a}r_{i,k}}{r_{1,i}}$$

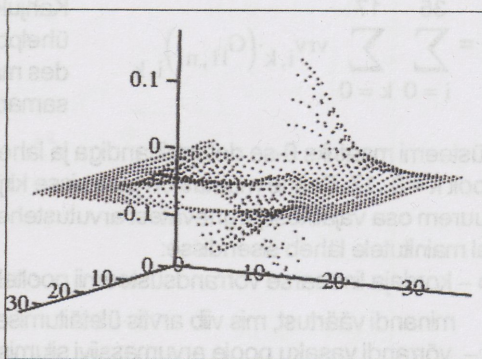
$$v_{0\ddot{u}} := v_{r,i,k} \cdot \ddot{a}r_{i,k} + v_{\theta,i,k} \cdot \frac{\ddot{a}r_{i,k}}{r_{1,i}}$$

$$v_{r\ddot{u}} := S\ddot{u}(v_{r\ddot{u}})$$

$$v_{\theta\ddot{u}} := A_s(v_{\theta\ddot{u}})$$



$v_{r\ddot{u}}$

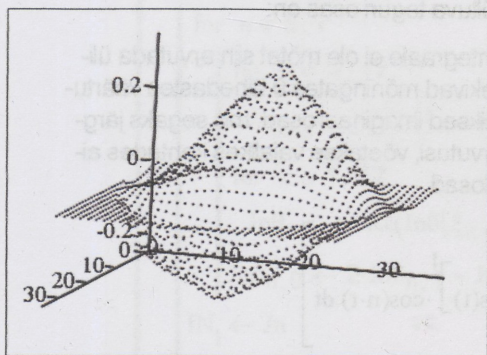


$v_{\theta\ddot{u}}$

$$v_{0\ddot{u}} := S\ddot{u}(v_{0\ddot{u}})$$

Nii saame võrrandile kuju:

$$v_{r\ddot{u}} \cdot f_r + v_{\theta\ddot{u}} \cdot f_\theta + v_{0\ddot{u}} \cdot f = v_{rv}$$



$v_{0\ddot{u}}$

Asetame reaksarendused võrrandisse ilma summa märkide- ja C-ta ning tähistame siis vasaku poole nii:

$(G_{l,n})_{i,k}$ Saame võrrandi, mida rakendame kõigi vaatluspunktidele $(r_{1,i}, \theta_k)$:

$$\sum_{l=0}^{lm} \sum_{n=0}^1 C_{l,n} \cdot (G_{l,n})_{i,k} = v_{rv,i,k}$$

$$(G_{l,n})_{i,k} = v_{r\ddot{u},i,k} \cdot \text{tr}(r_{1,i}, l, tu) \cdot \text{Re}(\text{In}(\xi_k, l, n)) +$$

$$+ v_{\theta\ddot{u},i,k} \cdot \text{tr}(r_{1,i}, l, tu) \cdot \text{Re}(\text{In}(\xi_k, l, n)) + v_{0\ddot{u},i,k} \cdot \text{tr}(r_{1,i}, l, tu) \cdot \text{Re}(\text{In}(\xi_k, l, n))$$

Leiame võrrandi vasaku ja parema poole vahe ruudu summa üle poole vaatevälja punktide:

$$SU(C) = \sum_{i=0}^{35} \sum_{k=0}^{17} \left[\sum_{l=0}^{lm} \sum_{n=0}^1 C_{l,n} \cdot (G_{l,n})_{i,k} - v_{rv,i,k} \right]^2$$

C määrame tingimusest, et see oleks minimaalne.

Leitakse osatuletised $\frac{d}{dC} SU(C)$ iga komponendi $C_{l,n}$ järgi ja võrrotatakse need 0-ga.

$$2 \cdot \sum_{i=0}^{35} \sum_{\kappa=0}^{17} \left[\sum_{l=0}^{lm} \sum_{n=0}^1 C_{l,n} \cdot (G_{l,n})_{i,\kappa} - \text{var}_{i,\kappa} \right] \cdot (G_{ll,nl})_{i,\kappa} = 0$$

Tuletised leiti $C_{l1,n1}$ järgi, kus l1 ja n1 omavad samu

väärtusi, mis l ja n. Võrrandite arv võrdub tundmatute arvuga inm. Näiteks juhul $lm := 9$

$$\text{inm} := \sum_{l=0}^{lm} \sum_{n=0}^1 1 \quad \text{inm} = 55 \quad \text{in} = 0.. \text{inm} - 1 \quad \text{inl} := 0.. \text{inm} - 1$$

Süsteemi maatriks on: $M_{in,inl} = \sum_{i=0}^{35} \sum_{k=0}^{17} (G_{l,n})_{i,k} \cdot (G_{ll,nl})_{i,k}$ ja vabad liikmed

$$V_{inl} = \sum_{i=0}^{35} \sum_{k=0}^{17} \text{vrv}_{i,k} \cdot (G_{ll,nl})_{i,k}$$

Kahjuks ei saa kasutada kõiki 35x35 võljapunkti. Kõik ühelt pool ekvatoriaaltasandit ($\theta = \pi/2$) olevates punktides määratud suuruste väärtused on peegelpunktides samad või ainult märgilt erinevad. Kõiki kasutades tu-

leb süsteemi maatriks 0-se determinandiga ja lahendit ei eksisteeri. Seetõttu kasutame ainult väljpoolt $k = 0..17$. Selline muutus on juba sisse kirjutatud viimastesse valemitesse.

Suurem osa vajalikest järgnevatest arvutustehetest on asetatud programmi VU1(U). Lisaks üleval mainitutele läheb sisendisse:

ko – kordaja lineaarse võrrandsüsteemii pooltele, et vältida ülisuurt võrrandi maatriksi determinandi väärtust, mis viib arvutis ületätumisele (10^{305}) või väljatrüki 0-le ($<10^{-16}$).

sil – võrrandi vasaku poole arvumassiivi silumise keelamine või lubamine, sil = 0 keelab ja sil = 1 lubab.

μ – silumise järk 0.25,...,1, 2, 3 ...

tu – tunnus = 0 kui kasutame J_0 nullkohti ja 1 kui J_1 omi. Valiku määrab väiksem hälvetesumma lähendatava ja lähenduse massiivide elementide ruutkeskmises erinevuses.

Programmis kasutatavad funktsioonid ridade teise, ξ -st sõltuva teguri osas on:

$$\text{kor}(l,n) := \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot l + 1}{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{\sqrt{(l-n)! \cdot (l+n)!}}{(l!)^2}$$

Kuna integraale ei ole mõtet siin arvutada üliläpselt, tekivad mõningates 0 lähedastes väärtustes üliväikesed imaginaarosad, mis segaks järgnevaid arvutusi, võetakse vajalikes kohtades ainult reaalosad.

$$\text{In}(\xi, l, n) := \text{kor}(l, n) \cdot \text{Re} \left[(-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \int_0^{\pi} \left[\xi + \sqrt{(\xi)^2 - 1} \cdot \cos(t) \right]^l \cdot \cos(n \cdot t) dt \right]$$

$$T(l, n) := \frac{-1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot l + 1}{2 \cdot \pi}} \cdot \frac{\sqrt{(l-n)! \cdot (l+n)!}}{(l!)^2} \cdot (-1)^{\frac{n}{2}}$$

Tähistus, et järgmine avaldis mahuks sellele leheküljele.

$$\text{In}\theta(\xi, l, n) := T(l, n) \cdot \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \xi^2} \cdot \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \cdot \cos(t) \right)^{l-1} \cdot \left(1 + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot \cos(t) \right) \cdot \cos(n \cdot t) dt$$

$\text{In}\theta(\xi, l, n) := \text{Re}(\text{In}\theta(\xi, l, n))$ Kõik arvutused võrrandite lahendamiseks kasutades ite-
ratsiooni teeb programm VU1(U). Vektorisse U pakitakse kõik selleks vajalikud sisendandmed.
Nende kõigi üksikult sisendiargumentide kohale asetamisel muudaks programm horisontaal-
suunas nii laiaks, et see ei mahuks trükileheküljele. Kõik eeltoodud arvutused vähendavad võr-
randsüsteemi lahendamise programmi VU1(U) ühekorse tööaja suurusjärguni 1 sek, muidugi
lauarvutil, mis on autori käsutuses.

```

VU1(U) := | lm ← U0
           | r1m ← U1
           | vrü ← U2
           | vθü ← U3
           | v0ü ← U4
           | va ← U5
           | ko ← U6
           | sil ← U7
           | μ ← U8
           | tu ← U9
           | for κ ∈ 0..17
           |   | ξκ ← cos(π·κ/35)
           |   | siκ ← sin(π·κ/35)
           |   | for l ∈ 0..lm
           |   |   | for n ∈ 0..l
           |   |   |   | for κ ∈ 0..17
           |   |   |   |   | Jn,κ ← Re(In(ξκ, l, n))
           |   |   |   |   | for κ ∈ 1..17
           |   |   |   |   |   | Jnθ,κ ← Re(Inθ(ξκ, l, n))
           |   |   |   |   |   | Jnθ,0 ← 2·Jnθ,1 - Jnθ,n,1
           |   |   |   | INl ← Jn
           |   |   |   | INθl ← Jnθ
           |   |   | for l ∈ 0..lm
           |   |   |   | for i ∈ 0..35
           |   |   |   |   | r1i ← r1m·i/35
           |   |   |   |   | Tl,i ← | t0(r1i, l) if tu = 0
           |   |   |   |   | | t1(r1i, l) otherwise

```

```

Trl,i ←  $\begin{cases} t0r(r1_i, l) & \text{if } tu = 0 \\ t1r(r1_i, l) & \text{otherwise} \end{cases}$ 
for n ∈ 0..1
  for i ∈ 0..35
    for κ ∈ 0..17
      a0i,κ ← v0üi,κ · (INl)n,κ + vθüi,κ · (INθl)n,κ
      a1i,κ ← vrüi,κ · Trl,i · (INl)n,κ + a0i,κ · Tl,i
      Gl,n ← a1
inl ← 0
for ll ∈ 0..lm
  for n1 ∈ 0..11
    v ← ko ·  $\sum_{i=0}^{35} \sum_{\kappa=0}^{17} va_{l,\kappa} \cdot (G_{ll,n1})_{i,\kappa}$ 
    Vinl ← v
    inl ← inl + 1
in ← 0
for l ∈ 0..lm
  for n ∈ 0..1
    inl ← 0
    for ll ∈ 0..lm
      for n1 ∈ 0..11
        a ← ko ·  $\sum_{i=0}^{35} \sum_{\kappa=0}^{17} (G_{l,n})_{i,\kappa} \cdot (G_{ll,n1})_{i,\kappa}$ 
        Min,inl ← a
        inl ← inl + 1
      in ← in + 1
    pm ← in - 1
    if V0 = 0
      for p3 ∈ 0..pm - 1
        V1p3 ← Vp3+1
        for p4 ∈ 0..pm - 1
          M1p3,p4 ← Mp3+1,p4+1
        pml ← pm - 1
      otherwise

```

```

M1 ← M
V1 ← V
pm1 ← pm
D ← |M1|
for p2 ∈ 0..pm1
  for p1 ∈ 0..pm1
    for p3 ∈ 0..pm1
      bp1,p3 ← M1p1,p3
    for p1 ∈ 0..pm1
      bp1,p2 ← V1p1
    C1p2 ←  $\frac{|b|}{D}$ 
  for p2 ∈ 0..pm1          if V0 = 0
    Chp2 ← if(p2 = 0, 0, C1p2-1)
  Ch ← C1 otherwise
id ← 0
for l ∈ 0..lm
  for n ∈ 0..l
    Cvl,n ←  $\begin{cases} 0 & \text{if } l = lm \wedge V_0 = 0 \\ Ch_{id} & \text{otherwise} \end{cases}$ 
    id ← id + 1
  for l ∈ 0..lm
    for n ∈ 0..l
      for i ∈ 0..35
        for k ∈ 0..17
          vfi,k ← Cvl,n · (Gl,n)i,k
        Vfl,n ← vf
    for i ∈ 0..35
      for k ∈ 0..17
        vs0,i,k ←  $\sum_{l=0}^{lm} \sum_{n=0}^l (V_{f_{l,n}})_{i,k}$ 
    for i ∈ 0..35
      if sil = 1
        for k ∈ 0..17
          fk ← vs0,i,k
          ψk ← sik · r1m

```

```

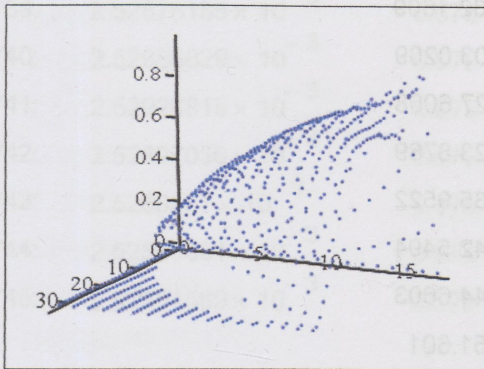
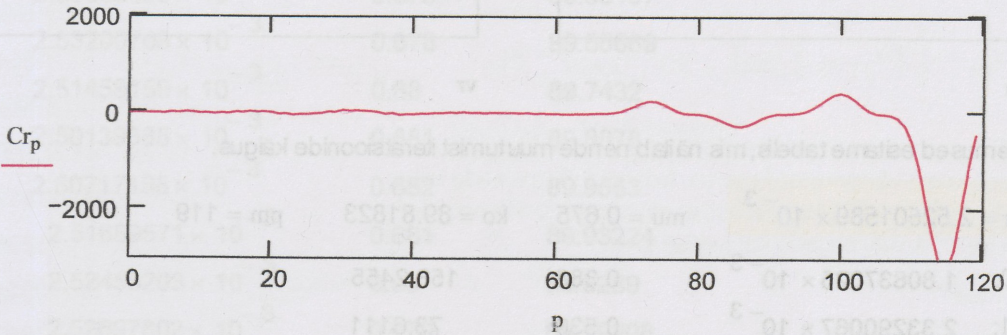
vs ← Sm(f, ψ, μ, 17)
for k ∈ 0..17
  vs1i,k ← vsk
vs1 ← vs0 otherwise
for k ∈ 0..17
  if sil = 1
    for i ∈ 0..35
      fi ← vs1i,k
      ξi ← r1i
      vs ← Sm(f, ξ, μ, 35)
      for i ∈ 0..35
        vs2i,k ← vsi
      vs2 ← vs1 otherwise
ja ← 36·18
Su ←  $\sqrt{\frac{1}{ja \cdot (ja - 1)} \sum_{i=0}^{35} \sum_{k=0}^{17} (vs2_{i,k} - va_{i,k})^2}$ 
for i ∈ 0..35
  for κ ∈ 0..17
    rfi,κ ←  $\sum_{l=0}^{lm} \sum_{n=0}^1 C_{v,l,n} \cdot T_{l,i} \cdot (IN_1)_{n,\kappa}$ 
vä0 ← Ch
vä1 ← vs2
vä2 ← Su
vä3 ← D
vä4 ← M1
vä5 ← rf
vä6 ← pm1
vä

```

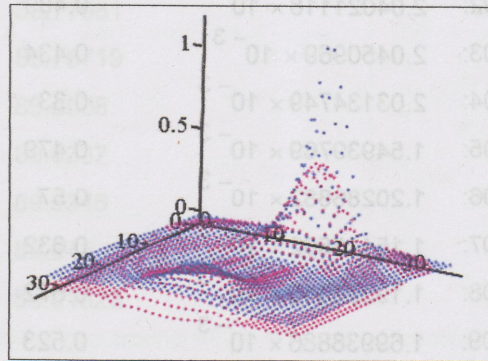
7. Niisiis vru võrrandi üldlahendi leidmine

ko valimisega saavutame võrrandsüsteemi determinandile Dr 1.415 lähedase väärtuse. Se-da teeme mõne lm väärtuse puhul, jäädes selle juurde, mis annab väikseima ruutkeskmise hälbe Sur võrrandi poolte vahel, arvatatuna poole vaatevälja (36 x 18) punktides. Värvidega märke-gistatud suurusi muudetakse katsetamiste korras. Parima tulemuse andis alati $tu=0$ ehk J_0 .

$lm := 14$ $ko := 89.81823$ $sil := 1$ $\mu := 0.4$ $tu := 0$ $U_0 := lm$
 $U_1 := r1m$ $U_2 := vrü$ $U_3 := v\thetaü$ $U_4 := v0ü$ $U_5 := vrv$ $U_6 := ko$
 $U_7 := sil$ $U_8 := \mu$ $U_9 := tu$ $vu := VU1(U)$ $Cr := vu_0$ $vas := vu_1$
 $Sur := vu_2$ $Dr := vu_3$ $pm := vu_6$ $Dr = 1.4151557767908$ $rf := vu_5$
 $vrü_{i,ka} := \text{är}_{i,ka} \cdot rf_{i,ka}$ $vas_{i,35-ka} := vas_{i,ka}$ $pm = 119$ $p := 0..pm$



vru



vrv, vas

Teine, kaheväriline joonis, näitab kuivõrd häst programm võrdsustas vru dif-võrrandi pooli. Sinisega on vaba liige, punasega vasak pool.

Parandused ja silumine: vru eeldasime võtta $ka = 0 \dots 17$ osas negatiivsena. Teine,

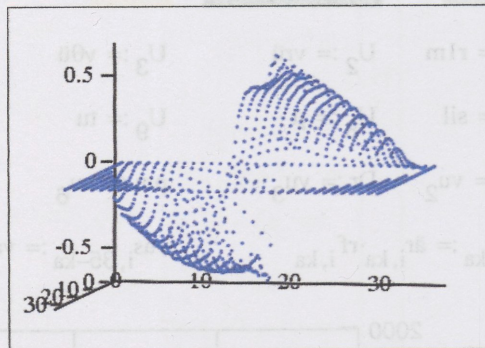
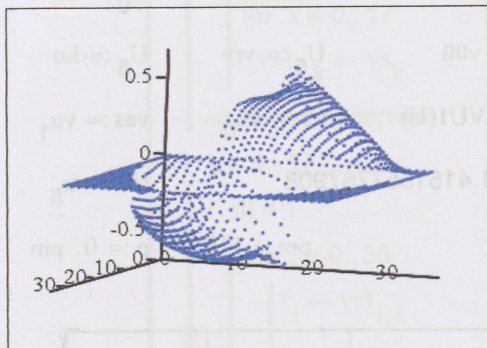
$k = 18 \dots 35$ osa, on siis > 0 . Täidame ka selle poole, määrame amplituudi muutuse, võrreldes seda sisendi omaga (μ) ja taastame sisendi amplituudi:

$$vru := -vru \quad vrü_{i,35-ka} := -vrü_{i,ka} \quad \mu := \frac{\max(vr)}{\max(vru)} \quad vru := vru \cdot \mu \quad \text{Keskmistame}$$

sisendiga: $vru := 0.5 \cdot (vr + vru)$ See väldib liialt suurt muutumist, mis võib viia iteratsiooniprotsessi "hajumisele". Tõsi, see muudab ka koondumise aeglasemaks. Kui keskmistati, siis amplituud muutus ja taastamist korratakse.

$$vru := vru \cdot \frac{\max(vr)}{\max(vru)} \quad vru := As(vru)$$

Sisendväärtused olid:



vru

vr

Tulemused esitame tabelis, mis näitab nende muutumist iteratsioonide käigus.

	$Sur = 2.52501589 \times 10^{-3}$	$\mu = 0.675$	$ko = 89.81823$	$pm = 119$
700:	$1.80837025 \times 10^{-3}$	0.388	153.2455	
701:	$2.33290067 \times 10^{-3}$	0.536	73.6111	
702:	$2.04021118 \times 10^{-3}$	0.489	82.1609	
703:	2.0450969×10^{-3}	0.434	103.0209	
704:	$2.03134749 \times 10^{-3}$	0.33	127.6008	
705:	$1.54939769 \times 10^{-3}$	0.479	123.8769	
706:	$1.20286882 \times 10^{-3}$	0.57	135.9522	
707:	$1.15415502 \times 10^{-3}$	0.632	142.5494	
708:	$1.19359343 \times 10^{-3}$	0.672	144.6603	
709:	$1.69938886 \times 10^{-3}$	0.523	151.601	
710:	$1.76175546 \times 10^{-3}$	0.577	122.8607	
711:	1.8414018×10^{-3}	0.61	110.5576	
712:	$1.91558031 \times 10^{-3}$	0.607	105.59662	
713:	$1.99481756 \times 10^{-3}$	0.606	104.6773	
714:	$2.07604691 \times 10^{-3}$	0.605	103.98873	
715:	$2.14765223 \times 10^{-3}$	0.604	103.32334	
716:	$2.18737435 \times 10^{-3}$	0.697	102.82792	
717:	$2.21990122 \times 10^{-3}$	0.714	101.23995	
718:	$2.30557777 \times 10^{-3}$	0.701	101.34956	
719:	$2.37879757 \times 10^{-3}$	0.701	100.76583	
720:	$2.41411117 \times 10^{-3}$	0.701	100.18865	
721:	$2.43097796 \times 10^{-3}$	0.685	99.7656	
722:	$2.42536263 \times 10^{-3}$	0.693	94.13689	
723:	$2.45724551 \times 10^{-3}$	0.69	92.05713	

724:	2.499604×10^{-3}	0.686	91.2222
725:	$2.54374536 \times 10^{-3}$	0.682	90.53051
726:	$2.57543489 \times 10^{-3}$	0.681	89.8502
727:	$2.57321469 \times 10^{-3}$	0.681	89.338
728:	$2.55848397 \times 10^{-3}$	0.679	89.25063
729:	$2.55821557 \times 10^{-3}$	0.676	89.52254
730:	$2.55920186 \times 10^{-3}$	0.675	89.56855
731:	$2.55896983 \times 10^{-3}$	0.675	89.65197
732:	$2.53200708 \times 10^{-3}$	0.678	89.55669
733:	$2.51459159 \times 10^{-3}$	0.68	89.7432
734:	$2.50139385 \times 10^{-3}$	0.681	89.8878
735:	$2.50717185 \times 10^{-3}$	0.682	89.9553
736:	$2.51659571 \times 10^{-3}$	0.681	89.93224
737:	$2.52453203 \times 10^{-3}$	0.68	89.8289
738:	$2.52697802 \times 10^{-3}$	0.679	89.79908
739:	$2.52878185 \times 10^{-3}$	0.678	89.77051
740:	$2.52986829 \times 10^{-3}$	0.676	89.78719
741:	$2.52926815 \times 10^{-3}$	0.675	89.8508
742:	$2.52827036 \times 10^{-3}$	0.675	89.8387
743:	2.5263557×10^{-3}	0.675	89.8346
744:	$2.52553681 \times 10^{-3}$	0.674	89.842
745:	$2.52501589 \times 10^{-3}$	0.675	89.81823

8. Teisena lahendame $v\theta$ u võrrandi

Määrame sisendi $v\theta$ nulljoone punktide indeksid i_0 , silume seda punktirida (saame mitte-täisarvuliste rea is) ja parandame selle järgi allpool saadavat $v\theta$ u – arvutatud väärtused peavad olema ühelpool 0-joont positiivsed ja teisel negatiivsed.

$v\theta_0(\mu) :=$	for $k \in 0..35$	
	for $i \in 0..35$	
	$v0_{i,k} \leftarrow \text{if}(v\theta_{i,k} > 0, 1, 0)$	17.3181975174239
	$v0_{i,k} \leftarrow \text{if}(i = 0, 1, v0_{i,k})$	22.0885523533363
	for $k \in 0..35$	25.0633535484405
	for $i \in 0..34$	26.262325339369
	$i_0 \leftarrow \begin{cases} i & \text{if } v0_{i,k} = 1 \wedge v0_{i+1,k} = 0 \\ \text{continue} & \text{otherwise} \end{cases}$	25.3809046911941
	$i_0 \leftarrow i_0$	24.9103966558667
		24.0601113794607
		23.0884758940178

$$\begin{cases} Is \leftarrow Sm(I0, z1, \mu, 35) \\ vä_0 \leftarrow I0 \\ vä_1 \leftarrow Is \\ vä \end{cases}$$

$$V0 := V\theta(0.25) \quad i0 := V0_0 \quad is := V0_1 \quad is_k := \text{if}(is_k < 0, 0, is_k)$$

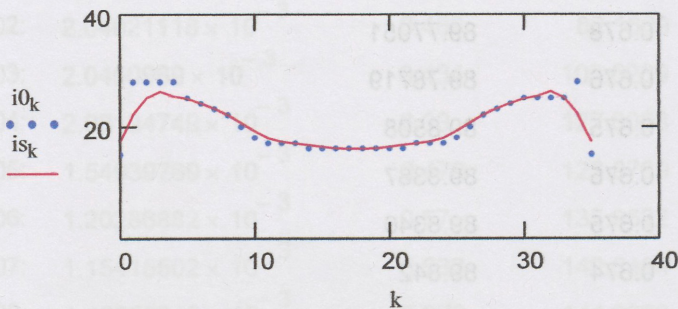
Juhuks, kui rikuti sümmeetriat

$$is_{ka} := \frac{1}{2} \cdot (is_{35-ka} + is_{ka}) \quad is_{35-ka} := is_{ka}$$

isu :=

Säilitame joone andmed kõrvallabelis muutumatuna hetkest kui see enamvähem stabiliseerus. Edaspidi jääme seda kasutama, vältides sellega võimalust, et programm joone edaspidi "ära rikub" arvutusvigade kuhjumise tõttu.

is := isu



Diferentsiaalvõrrand ja vθu lähendusvalem on:

$$vr \cdot \frac{d}{dr1} v\theta u + \frac{v\theta}{r1} \cdot \frac{d}{d\theta} v\theta u = v\theta v \quad v\theta u = \ddot{a}\theta \cdot f(r1, \cos(\theta), O1)$$

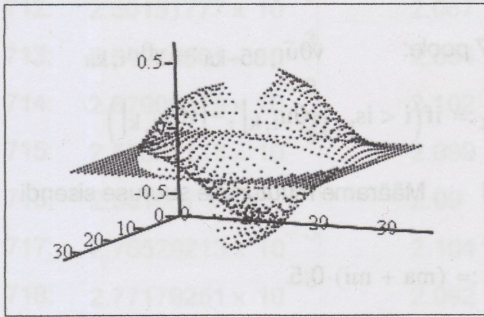
Ettevalmistavad arvutusvalemid ja suurused on täpselt samad kui vru võrrandi puhul, ainult ääritingimus ja selle tuletised on teised. Teine on ka vaba liige.

$vr_{i,k} := vr_{i,k} \cdot \ddot{a}\theta_{i,k}$ $v\theta\ddot{u}$ ja $v0\ddot{u}$ valemis tuleb vältida $i = 0$ ja 35 puhul tekkivat jagamist 0-ga.

$$i1 := 1..35 \quad v\theta\ddot{u}_{i1,k} := v\theta_{i1,k} \cdot \frac{\ddot{a}\theta_{i1,k}}{r1_{i1}} \quad v\theta\ddot{u}_{0,k} := 3 \cdot (v\theta\ddot{u}_{1,k} - v\theta\ddot{u}_{2,k}) + v\theta\ddot{u}_{3,k}$$

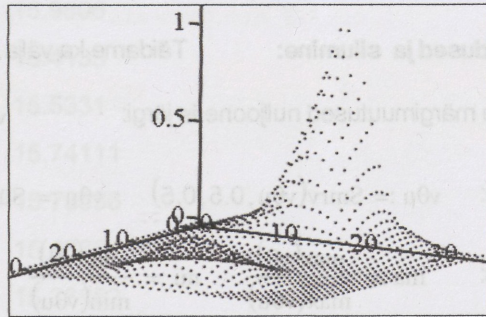
$$vr\ddot{u} := As(vr\ddot{u}) \quad v\theta\ddot{u} := S\ddot{u}(v\theta\ddot{u}) \quad \mu_{i1,k} := \frac{\ddot{a}\theta_{i1,k}}{r1_{i1}} \quad i = 0 \text{ koha täidame allpool.}$$

22.002254900231
20.6983156525808
19.242700418074
17.9365062701927
17.2404455178429
16.9410160706548
16.6393317232356
16.3016843474192
15.997745099769
15.9410160706548
15.9410160706548
15.997745099769
16.3016843474192
16.6393317232356
16.9410160706548
17.2404455178429
17.9365062701927
19.242700418074
20.6983156525808
22.002254900231
23.0884758940178
24.0601113794607
24.9103966558667
25.3809046911941
26.262325339369
25.0633535484405
22.0885523533363
(17.3181975174239)



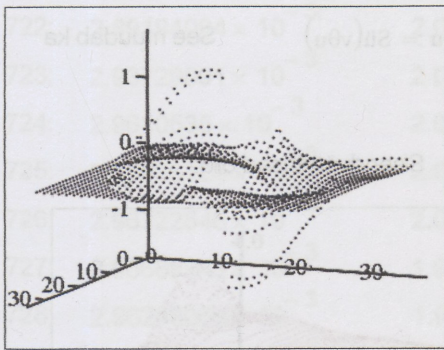
vrü

$$\mu_{0,k} := 3 \cdot (\mu_{1,k} - \mu_{2,k}) + \mu_{3,k}$$



v0ü

$$v0\ddot{u}_{i,k} := v_{r,i,k} \cdot \ddot{\alpha}\theta_{r,i,k} + v\theta_{i,k} \cdot \mu_{i,k}$$



lm := 13

ko := 13.0587

sil := 1

$\mu := 0.3$

tu := 0

$U_0 := lm$

$U_1 := rlm$

$U_2 := vrü$

$U_3 := v\theta\ddot{u}$

$U_4 := v0\ddot{u}$

$U_5 := v\theta v$

$U_6 := ko$

$U_7 := sil$

$U_8 := \mu$

$U_9 := tu$

$vu := VUI(U)$

$C\theta := vu_0$

$vas := vu_1$

$Su\theta := vu_2$

$D\theta := vu_3$

$rf := vu_5$

$pm := vu_6$

$D\theta = 1.41531800710978$

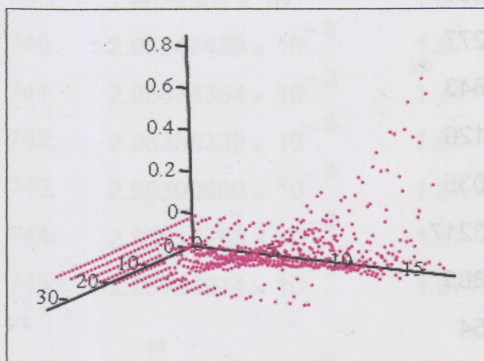
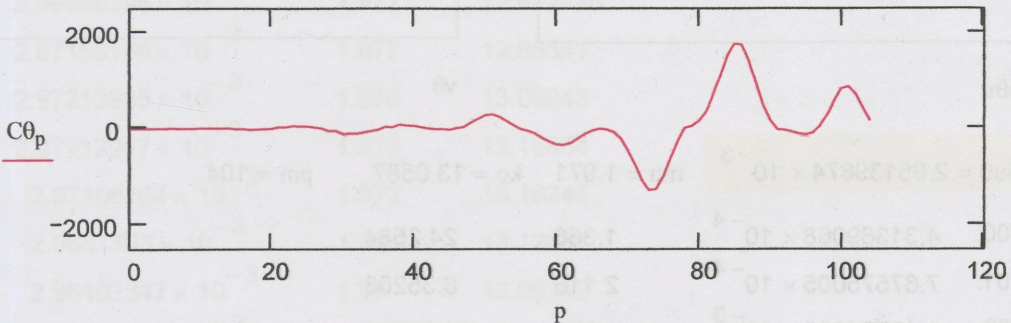
v0ü

pm = 104

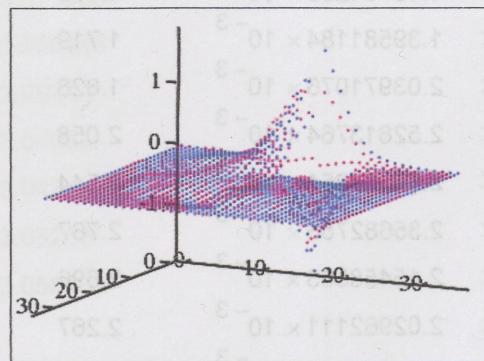
p := 0..pm

$$v\theta u_{i,ka} := \ddot{\alpha}\theta_{i,ka} \cdot rf_{i,ka}$$

$$vas_{i,35-ka} := -vas_{i,ka}$$



v0u



v0v, vas

Parandused ja silumine:

Täidame ka välja $k > 17$ poole:

$$v\theta_{i, 35-k} := v\theta_{i, k}$$

Teeme märgimuutused nulljoone is järgi:

$$v\theta_{i, k} := \text{if}(i < is_k, |v\theta_{i, k}|, -|v\theta_{i, k}|)$$

Silume: $v\theta_u := \text{Smrv}(v\theta_u, 0.5, 0.5)$ $v\theta_u := \text{Sü}(v\theta_u)$ Määrame muutumise suuruse sisendi

$$\text{suhtes: } ma := \frac{\max(v\theta)}{\max(v\theta_u)} \quad mi := \frac{\min(v\theta)}{\min(v\theta_u)} \quad mu := (ma + mi) \cdot 0.5$$

Säilitame ka positiivse ja negatiivse osa amplituudide omavahelise suhte ning sisendi suuruse.

$$ma := \frac{\max(v\theta)}{\max(v\theta_u)} \quad mi := \frac{\min(v\theta)}{\min(v\theta_u)} \quad v\theta_{i, k} := \text{if}(v\theta_{i, k} > 0, ma \cdot v\theta_{i, k}, mi \cdot v\theta_{i, k})$$

Keskmistame sisendiga.

$$v\theta_u := 0.5 \cdot (v\theta + v\theta_u)$$

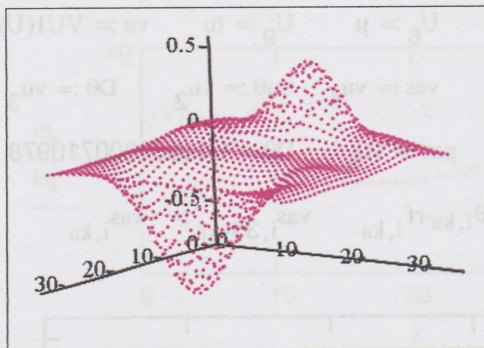
$$v\theta_u := \text{Sü}(v\theta_u)$$

See muudab ka

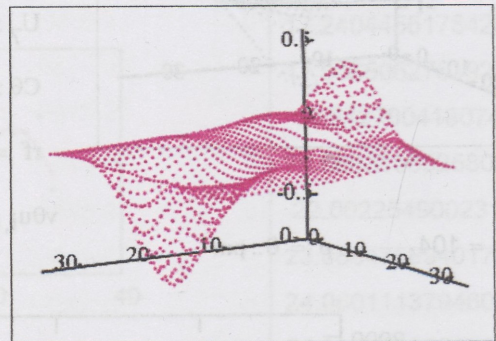
amplituude, taastame:

$$v\theta_u := v\theta_u \cdot \frac{\max(v\theta)}{\max(v\theta_u)}$$

Sisendväärtused olid:



$v\theta_u$



$v\theta$

$Su\theta = 2.95139874 \times 10^{-3}$	$mu = 1.971$	$ko = 13.0587$	$pm = 104$
700: $4.31369068 \times 10^{-4}$	1.366	24.2584	
701: $7.67575005 \times 10^{-4}$	2.116	8.35208	
702: $1.19754295 \times 10^{-3}$	1.776	10.09853	
703: $1.39581184 \times 10^{-3}$	1.719	14.39277	
704: $2.03971076 \times 10^{-3}$	1.626	15.29843	
705: $2.52813764 \times 10^{-3}$	2.058	15.89126	
706: $2.59337251 \times 10^{-3}$	2.544	18.20035	
707: $2.35682786 \times 10^{-3}$	2.767	20.193217	
708: $2.15458583 \times 10^{-3}$	2.696	21.05885	
709: $2.02962111 \times 10^{-3}$	2.267	21.9754	
710: $2.05487303 \times 10^{-3}$	2.105	19.30511	
711: $2.28581301 \times 10^{-3}$	2.057	16.36098	

712:	$2.50151777 \times 10^{-3}$	2.067	15.9806
713:	$2.54904801 \times 10^{-3}$	2.094	15.4135
714:	$2.57996379 \times 10^{-3}$	2.102	15.5331
715:	$2.57651118 \times 10^{-3}$	2.099	15.74111
716:	2.581967×10^{-3}	2.09	15.73536
717:	$2.76529213 \times 10^{-3}$	2.104	15.46304
718:	$2.77179251 \times 10^{-3}$	2.092	15.36952
719:	$2.78848259 \times 10^{-3}$	2.08	15.15347
720:	$2.79325937 \times 10^{-3}$	2.071	14.94974
721:	$2.80251373 \times 10^{-3}$	2.045	14.77436
722:	$2.89194094 \times 10^{-3}$	2.032	14.0231
723:	$2.93729091 \times 10^{-3}$	2.026	13.78004
724:	2.9610535×10^{-3}	2.022	13.65711
725:	$2.96829124 \times 10^{-3}$	2.014	13.40642
726:	$2.96722546 \times 10^{-3}$	2.006	13.079669
727:	$2.96688943 \times 10^{-3}$	1.999	12.8294
728:	$2.96298069 \times 10^{-3}$	1.992	12.73031
729:	$2.96187898 \times 10^{-3}$	1.988	12.7643
730:	$2.96461028 \times 10^{-3}$	1.983	12.77052
731:	$2.96847207 \times 10^{-3}$	1.979	12.781666
732:	$2.96960398 \times 10^{-3}$	1.977	12.842448
733:	$2.97156134 \times 10^{-3}$	1.977	12.98541
734:	$2.97213935 \times 10^{-3}$	1.976	13.09948
735:	$2.97212217 \times 10^{-3}$	1.973	13.15864
736:	$2.97106164 \times 10^{-3}$	1.972	13.16245
737:	2.9681363×10^{-3}	1.971	13.1269
738:	$2.96402347 \times 10^{-3}$	1.97	13.09172
739:	2.9629501×10^{-3}	1.97	13.072789
740:	$2.95947436 \times 10^{-3}$	1.97	13.068146
741:	$2.95476354 \times 10^{-3}$	1.97	13.05443
742:	$2.95358332 \times 10^{-3}$	1.97	13.04095
743:	$2.95300006 \times 10^{-3}$	1.97	13.04247
744:	$2.95214783 \times 10^{-3}$	1.97	13.05255
745:	$2.95139874 \times 10^{-3}$	1.971	13.0587

9. Kolmanda ehk v φ u võrrandi lahenduskäik

$$v_r \frac{d}{dr} v_{\varphi u} + \frac{v_{\theta}}{r} \frac{d}{d\theta} v_{\varphi u} = v_{\varphi v}$$

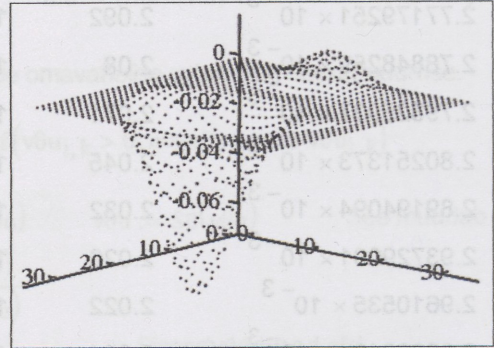
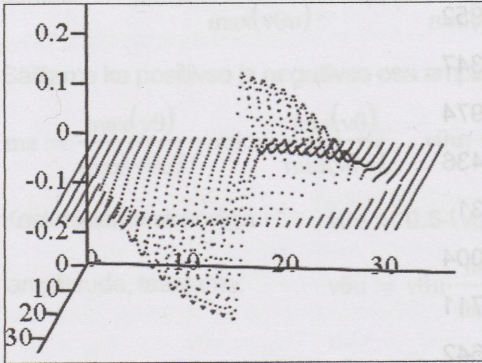
$$v_{\varphi u} = \ddot{\alpha} \varphi \cdot f(r, l, \cos(\theta), O_1)$$

$$v_{r, i, k} := v_{r, i, k} \cdot \ddot{\alpha} \varphi_{i, k} \quad v_{\theta \ddot{u}}_{i, k} := v_{\theta i, k} \cdot \frac{\ddot{\alpha} \varphi_{i, k}}{r_{i, k}}$$

$$v_{\theta \ddot{u}}_{0, k} := 3 \cdot (v_{\theta \ddot{u}}_{1, k} - v_{\theta \ddot{u}}_{2, k}) + v_{\theta \ddot{u}}_{3, k}$$

$$v_{r \ddot{u}} := A s(v_{r \ddot{u}})$$

$$v_{\theta \ddot{u}} := S \ddot{u}(v_{\theta \ddot{u}})$$

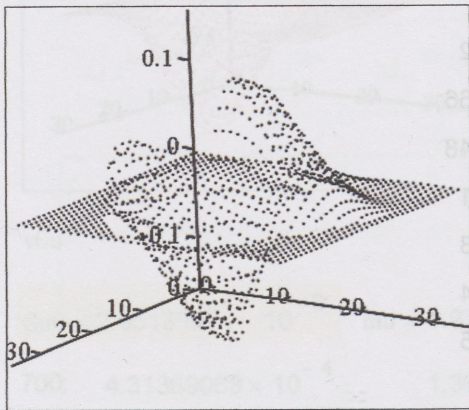


$v_{r \ddot{u}}$

$v_{\theta \ddot{u}}$

$$v_{\theta \ddot{u}}_{i, k} := \left(v_{r i, k} \cdot \ddot{\alpha} \varphi_{r i, k} + v_{\theta i, k} \cdot \frac{\ddot{\alpha} \varphi_{\theta i, k}}{r_{i, k}} \right)$$

$$v_{\theta \ddot{u}}_{0, k} := 3 \cdot (v_{\theta \ddot{u}}_{1, k} - v_{\theta \ddot{u}}_{2, k}) + v_{\theta \ddot{u}}_{3, k}$$



$v_{\theta \ddot{u}}$

$$l_m := 14 \quad k_o := 1.504382 \cdot 10^3 \quad sil := 1 \quad \mu := 0.4$$

$$tu := 0$$

$$U_0 := l_m \quad U_1 := r l_m \quad U_2 := v_{r \ddot{u}}$$

$$U_3 := v_{\theta \ddot{u}} \quad U_4 := v_{\theta \ddot{u}} \quad U_5 := v_{\varphi v} \quad U_6 := k_o$$

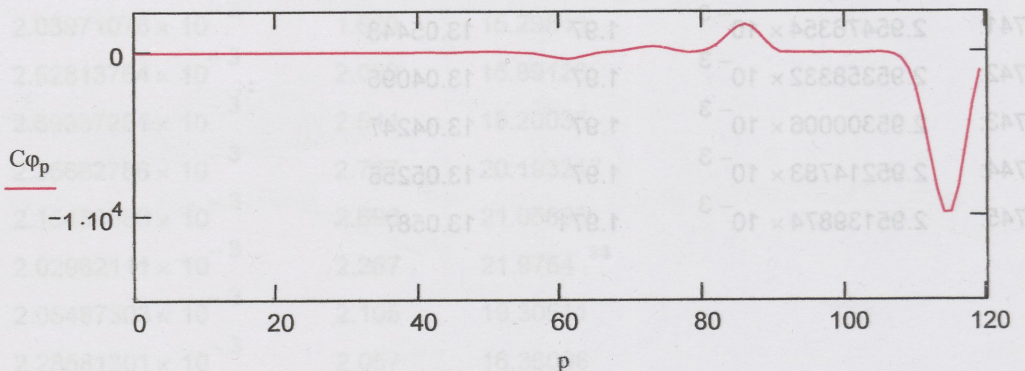
$$U_7 := sil \quad U_8 := \mu \quad U_9 := tu \quad v_u := VU1(U)$$

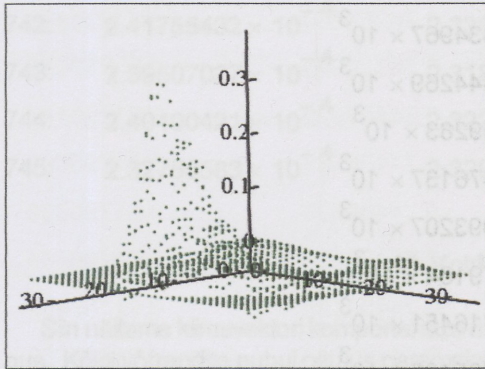
$$C_{\varphi} := v_{u_0} \quad v_{as} := v_{u_1} \quad S_{u\varphi} := v_{u_2} \quad D_{\varphi} := v_{u_3}$$

$$r_f := v_{u_5} \quad p_m := v_{u_6} \quad D_{\varphi} = 1.4150195281197$$

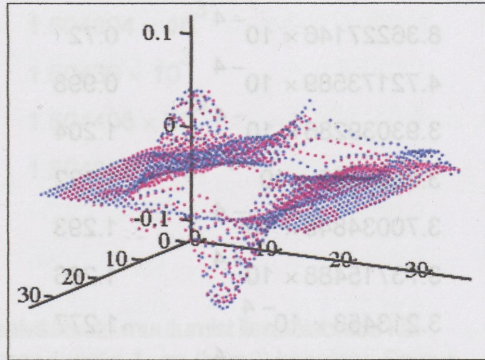
$$v_{\varphi u_{i, ka}} := -\ddot{\alpha} \varphi_{i, ka} \cdot r_{f, i, ka} \quad v_{\varphi u_{i, 35-ka}} := v_{\varphi u_{i, ka}}$$

$$v_{as_{i, 35-ka}} := -v_{as_{i, ka}} \quad p_m = 119 \quad p := 0..p_m$$





vφu



vφv, vas

Parandused ja silumine: Me valisime positiivse vφ, pöörlemist teises suunas ei eeldata.

$$v\phi u_{i,k} := \text{if}(v\phi u_{i,k} < 0, -v\phi u_{i,k}, v\phi u_{i,k}) \quad \text{Silumine:} \quad v\phi u := \text{Smrv}(v\phi u, 0.5, 0.5)$$

$$v\phi u := \text{Sü}(v\phi u) \quad v\phi u_{0,k} := 0$$

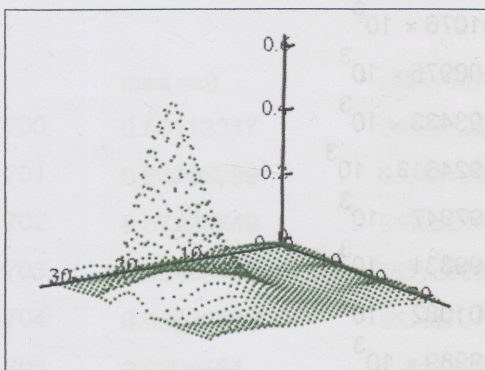
Taastame sisendväärtuse amplituudi ja keskmistame sisendväärtusega:

$$\mu := \frac{\max(v\phi)}{\max(v\phi u)} \quad v\phi u := v\phi u \cdot \mu \quad v\phi u := 0.5 \cdot (v\phi + v\phi u) \quad \text{Kuna amplituud võis muutuda,}$$

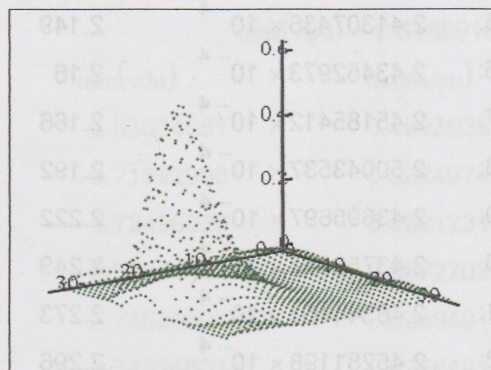
$$\text{siis taastame selle:} \quad v\phi u := v\phi u \cdot \frac{\max(v\phi)}{\max(v\phi u)} \quad \text{Silumine võis tekitada ka negatiivseid väärtusi:}$$

$$v\phi u_{i,k} := \text{if}(v\phi u_{i,k} < 0, -v\phi u_{i,k}, v\phi u_{i,k})$$

Sisendväärtus oli:



vφu



vφ

$$\text{Su}\phi = 2.32750583 \times 10^{-4}$$

$$\mu = 2.329$$

$$k\phi = 1.504382 \times 10^3$$

$$p\mu = 119$$

$$700: \quad 5.37805752 \times 10^{-4} \quad 1.568$$

$$2.51928 \times 10^3$$

$$701: \quad 9.74835833 \times 10^{-4} \quad 1.365$$

$$1.231044 \times 10^3$$

$$702: \quad 1.17893817 \times 10^{-3} \quad 1.577$$

$$1.365838 \times 10^3$$

$$703: \quad 1.47173058 \times 10^{-3} \quad 0.962$$

$$1.70004 \times 10^3$$

$$704: \quad 1.94168525 \times 10^{-3} \quad 0.652$$

$$2.12956 \times 10^3$$

$$705: \quad 1.54915974 \times 10^{-3} \quad 0.571$$

$$2.10063 \times 10^3$$

706:	$8.36227146 \times 10^{-4}$	0.72	2.334967×10^3
707:	$4.72173589 \times 10^{-4}$	0.998	2.444269×10^3
708:	$3.93039286 \times 10^{-4}$	1.204	2.49283×10^3
709:	3.6698365×10^{-4}	1.322	2.476137×10^3
710:	$3.70034845 \times 10^{-4}$	1.293	1.993207×10^3
711:	$3.73715488 \times 10^{-4}$	1.266	1.79164×10^3
712:	3.213453×10^{-4}	1.277	1.716451×10^3
713:	$3.27723062 \times 10^{-4}$	1.346	1.705406×10^3
714:	$3.02980246 \times 10^{-4}$	1.458	1.699323×10^3
715:	$2.53266082 \times 10^{-4}$	1.586	1.69329×10^3
716:	$2.44569949 \times 10^{-4}$	1.689	1.68886×10^3
717:	$2.31860017 \times 10^{-4}$	1.777	1.660557×10^3
718:	$2.37283751 \times 10^{-4}$	1.854	1.6626×10^3
719:	$2.31544534 \times 10^{-4}$	1.941	1.654336×10^3
720:	$2.26938612 \times 10^{-4}$	2.008	1.6461445×10^3
721:	$2.28467649 \times 10^{-4}$	2.046	1.640118×10^3
722:	$2.41597878 \times 10^{-4}$	2.086	1.559473×10^3
723:	$2.37677538 \times 10^{-4}$	2.106	1.530581×10^3
724:	$2.46777952 \times 10^{-4}$	2.126	1.52022×10^3
725:	$2.41307436 \times 10^{-4}$	2.149	1.51076×10^3
726:	$2.43452973 \times 10^{-4}$	2.16	1.500975×10^3
727:	$2.45185412 \times 10^{-4}$	2.166	1.493433×10^3
728:	$2.50043537 \times 10^{-4}$	2.192	1.4924613×10^3
729:	$2.43695697 \times 10^{-4}$	2.222	1.497947×10^3
730:	$2.43759517 \times 10^{-4}$	2.249	1.499331×10^3
731:	$2.46344461 \times 10^{-4}$	2.273	1.501082×10^3
732:	$2.45281198 \times 10^{-4}$	2.296	1.49989×10^3
733:	$2.41133545 \times 10^{-4}$	2.345	1.5029839×10^3
734:	$2.35478634 \times 10^{-4}$	2.373	1.505269×10^3
735:	$2.36418813 \times 10^{-4}$	2.396	1.50612×10^3
736:	$2.42397082 \times 10^{-4}$	2.385	1.505424×10^3
737:	$2.40149333 \times 10^{-4}$	2.388	1.5035039×10^3
738:	$2.39550037 \times 10^{-4}$	2.388	1.50302×10^3
739:	$2.41417367 \times 10^{-4}$	2.389	1.50266×10^3
740:	$2.41345401 \times 10^{-4}$	2.381	1.503117×10^3
741:	$2.41549477 \times 10^{-4}$	2.357	1.5042671×10^3

742:	$2.41755432 \times 10^{-4}$	2.335	1.504304×10^3
743:	$2.39507027 \times 10^{-4}$	2.318	1.50436×10^3
744:	$2.40400421 \times 10^{-4}$	2.322	1.504406×10^3
745:	$2.32750583 \times 10^{-4}$	2.329	1.504382×10^3

10. Kokkuvõte

Siin näitame kiirusvektori komponentide maksimaalväärtuste muutumist iteratsioonide käigus. Kõigi võrrandite puhul osutus paremaks reaksarenduseks J_0 -ga ($tu = 0$) koostatu. Samuti parandasid tulemusi silumised ($sil = 1$) – väiksema hälbeaga Su . Ka kontrollime, kas seoses amplituudide säilitamisega sisendi omade tasemel ei ületatud relativistlikku piiri? Kui see on juhtunud, siis vähendame kiiruse mooduli maksimumi sisendi omani vm .

$$va_{i,k} := \sqrt{(vru_{i,k})^2 + (v\theta u_{i,k})^2 + (v\phi u_{i,k})^2} \quad \max(va) = 0.999885473368277 \quad su := \frac{vm}{\max(va)}$$

$$vru_{i,k} := su \cdot vru_{i,k} \quad v\theta u_{i,k} := su \cdot v\theta u_{i,k} \quad v\phi u_{i,k} := su \cdot v\phi u_{i,k} \quad vru_{0,k} := 0$$

$$va_{i,k} := \sqrt{(vru_{i,k})^2 + (v\theta u_{i,k})^2 + (v\phi u_{i,k})^2} \quad vmu := \max(va) \quad \mathbf{vmu = 0.999999989072465}$$

vru väärtus pöörlemisteljel peab olema 0. Miinimum on alati suuruselt võrdne maximumiga, kuid negatiivne. Seetõttu pole mõtet seda tabelisse kirjutada.

$$mi := \min(v\phi u) \quad mi = 0$$

$$\max(vru) = 0.65462154 \quad \max(v\theta u) = 0.54166338 \quad \min(v\theta u) = -0.74262276$$

$$\max(v\phi u) = 0.61669107$$

	$\max(vru)$	$\max(v\theta u)$	$\min(v\theta u)$	$\max(v\phi u)$
700:	0.53113317	0.43863653	-0.53534081	0.49939361
701:	0.66206099	0.54676332	-0.71392098	0.62249742
702:	0.67229849	0.55521796	-0.72496039	0.63212314
703:	0.62468498	0.51589632	-0.69574443	0.58727022
704:	0.66562569	0.54970723	-0.74624601	0.6258491
705:	0.6704664	0.54970723	-0.74624601	0.6258491
706:	0.67333641	0.55607512	-0.76005822	0.63309904
707:	0.67309844	0.5558786	-0.75978961	0.6328753
708:	0.67253297	0.55541161	-0.75915131	0.63234361
709:	0.66584781	0.54989066	-0.75171593	0.62605794
710:	0.66310768	0.54762773	-0.749553	0.62348156
711:	0.65984394	0.54493236	-0.74710455	0.62041286
712:	0.65828207	0.5436425	-0.74533614	0.61894432
713:	0.65697323	0.54256159	-0.74385421	0.61771369
714:	0.65602522	0.54177868	-0.74278084	0.61682234

715:	0.65591161	0.54168484	-0.74265219	0.61671551
716:	0.65709624	0.54266318	-0.74399349	0.61782936
717:	0.65598813	0.54272649	-0.74408029	0.61790144
718:	0.65591654	0.54273057	-0.74408589	0.61790609
719:	0.65591192	0.54273084	-0.74408625	0.61790639
720:	0.65591163	0.54273086	-0.74408628	0.61790641
721:	0.65587778	0.54270285	-0.74404788	0.61787452
722:	0.65607221	0.54286373	-0.74426845	0.61805769
723:	0.65623494	0.54299838	-0.74445305	0.61821098
724:	0.6562153	0.54298213	-0.74443077	0.61819248
725:	0.65608793	0.54287674	-0.74428628	0.6180725
726:	0.65585052	0.54268029	-0.74401696	0.61784884
727:	0.65574104	0.5425897	-0.74389276	0.61774571
728:	0.65560079	0.54247366	-0.74373366	0.61761359
729:	0.65549287	0.54238436	-0.74361123	0.61751192
730:	0.65535367	0.54226918	-0.74345332	0.61738078
731:	0.65526956	0.54219958	-0.7433579	0.61730154
732:	0.65527682	0.54220559	-0.74336613	0.61730838
733:	0.65521488	0.54215433	-0.74329586	0.61725003
734:	0.65516729	0.54211496	-0.74324188	0.6172052
735:	0.655031	0.54200218	-0.74308727	0.61707681
736:	0.65494553	0.54193147	-0.74299031	0.61699629
737:	0.65486832	0.54186757	-0.74290272	0.61692355
738:	0.65473491	0.54175719	-0.74275137	0.61679787
739:	0.65460925	0.54165321	-0.74260883	0.6166795
740:	0.65452029	0.5415796	-0.7425079	0.61659569
741:	0.65452004	0.54157939	-0.74250762	0.61659545
742:	0.65451991	0.54157929	-0.74250747	0.61659533
743:	0.65447872	0.54154521	-0.74246075	0.61655653
744:	0.65454657	0.54160135	-0.74253772	0.61662045
745:	0.65462154	0.54166338	-0.74262276	0.61669107

11. Järgmisena τ võrrandi lahendamise

Pidevusvõrrandist tuletatud võrrand sfäärilistes koordinaatides on:

$$vr_u \frac{d}{dr_l} \tau_u + \frac{v\theta_u}{r_l} \frac{d}{d\theta} \tau_u = v_a \cdot \tau_u \quad \text{va} = -vr_{ur} - \frac{1}{r_l} \cdot \left(2 \cdot vr_u + v\theta_u \theta + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \cdot v\theta_u \right) \quad \text{Lahendus-}$$

meetodi kasutamisel võtame võrduse paremal poolel oleva τu ka etteantuks ehk võrdseks si-
sendis esitatud väärtusega τa . Nii saame vabale liikmele avaldise:

$\text{var} = \text{va} - \tau a$ Otsitava arendame ritta: $\tau u = \text{är} f(r1, \cos(\theta), 01)$ Arvutame vaba liikme ositi:

$v\theta u_{i,k} := 0$ on error $m\theta f(r1_i, \theta_k, v\theta u)$ (vt selgitusi programmi $mrf()$ ja $m\theta f()$ kohta punktist 2):

$$k2 := 1..34 \quad su_{i,k2} := 2 \cdot vru_{i,k2} + v\theta u_{i,k2} + \frac{\cos(\theta_{k2})}{\sin(\theta_{k2})} \cdot v\theta u_{i,k2}$$

$$su_{i,0} := 3 \cdot (su_{i,1} - su_{i,2}) + su_{i,3} \quad su_{i,35} := 3 \cdot (su_{i,34} - su_{i,33}) + su_{i,32} \quad sul_{i1,k} := \frac{su_{i1,k}}{r1_{i1}}$$

$sul_{0,k} := 3 \cdot (sul_{1,k} - sul_{2,k}) + sul_{3,k}$ $vrur_{i,k} := 0$ on error $mrf(r1_i, \theta_k, vru)$ Kõik üksiku-

tes tehetes tekkinud vigu (eriti tuletiste leidmisel) parandame koos vaba liikme silumisega.

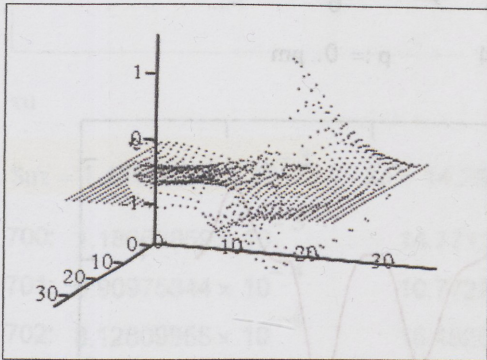
$$va_{i,k} := -vrur_{i,k} - sul_{i,k}$$

$$\text{var}_{i,k} := va_{i,k} - \tau a_{i,k}$$

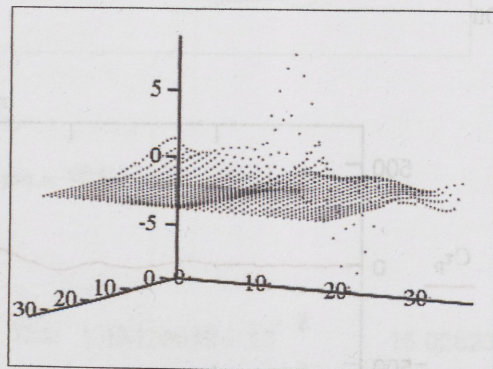
$$\text{var}_{i,35-ka} := \text{var}_{i,ka}$$

$$\text{var} := \text{Smrv}(\text{var}, 0.5, 0.5)$$

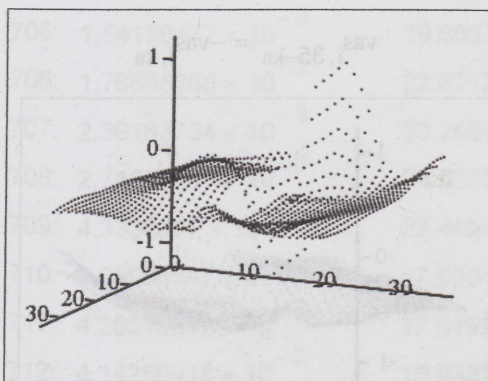
$$\text{var}_{i,35-ka} := -\text{var}_{i,ka}$$



vrur



sul



var

$$v\theta\ddot{u} := \text{Sü}(v\theta\ddot{u})$$

Vajalikud suurused üldlahendi leidmispro-
grammile on:

$$vr\ddot{u}_{i,k} := \text{är}_{i,k} \cdot vru_{i,k} \quad vr\ddot{u} := \text{As}(vr\ddot{u})$$

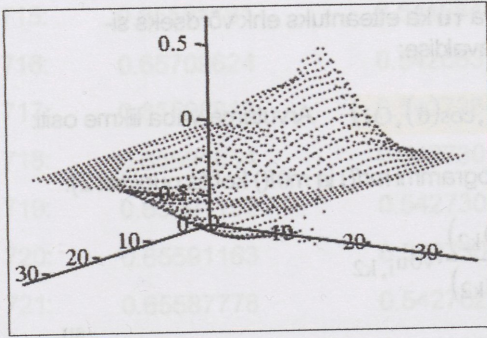
$$v\theta\ddot{u}_{i1,k} := \text{är}_{i1,k} \cdot \frac{v\theta u_{i1,k}}{r1_{i1}}$$

$$v\theta\ddot{u}_{0,k} := 3 \cdot (v\theta\ddot{u}_{1,k} - v\theta\ddot{u}_{2,k}) + v\theta\ddot{u}_{3,k}$$

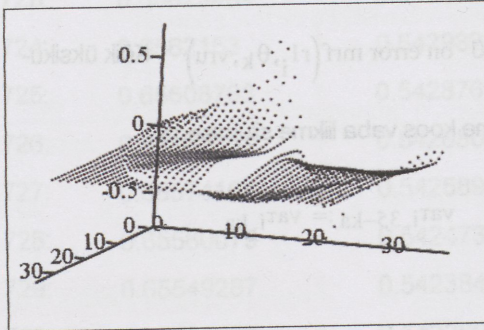
$$v\theta\ddot{u}_{i1,k} := \text{är}_{i1,k} \cdot vru_{i1,k} + \text{är}_{\theta i1,k} \cdot \frac{v\theta u_{i1,k}}{r1_{i1}}$$

$$v\theta\ddot{u}_{0,k} := 3 \cdot (v\theta\ddot{u}_{1,k} - v\theta\ddot{u}_{2,k}) + v\theta\ddot{u}_{3,k}$$

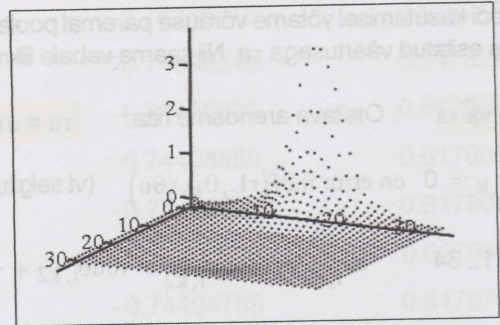
$$v\theta\ddot{u} := \text{As}(v\theta\ddot{u})$$



vrü



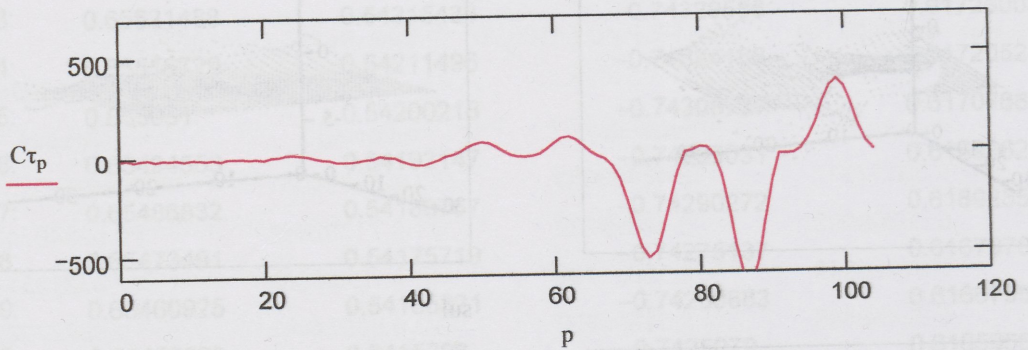
v0ü



vθü

$lm := 13$ $ko := 14.29775$ $sil := 1$ $\mu := 0.4$
 $tu := 0$ $U_0 := lm$ $U_1 := rlm$ $U_2 := vrü$
 $U_3 := v\theta\ddot{u}$ $U_4 := v0\ddot{u}$ $U_5 := var$ $U_6 := ko$
 $U_7 := sil$ $U_8 := \mu$ $U_9 := tu$ $vu := VU1(U)$
 $C\tau := vu_0$ $vas := vu_1$ $Sut := vu_2$ $Dr := vu_3$
 $rf := vu_5$ $pm := vu_6$ $Dr = 1.41515136016903$

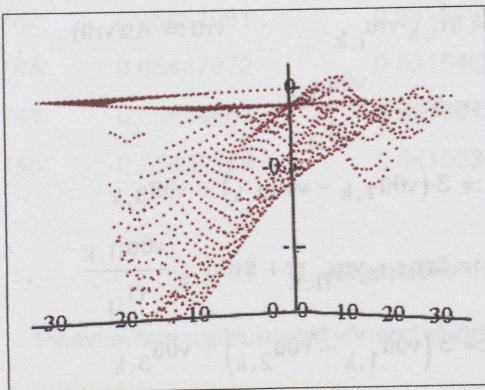
$pm = 104$ $p := 0..pm$



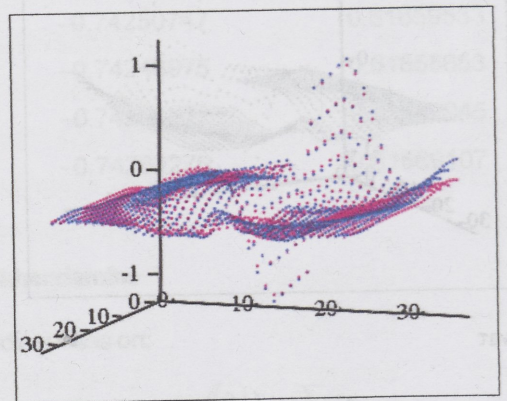
$\tau_{i,ka} := \ddot{a}\tau_{i,ka} \cdot rf_{i,ka}$

$\tau_{i,35-ka} := \tau_{i,ka}$

$vas_{i,35-ka} := -vas_{i,ka}$



τu



var, vas

Parandused ja silumised: τ_u peab olema kõikjal positiivne:

$\tau_{u,i,k} := \text{if}(\tau_{u,i,k} < 0, -\tau_{u,i,k}, \tau_{u,i,k})$ Silume: $\tau_u := \text{Smrv}(\tau_u, 0.5, 0.5)$ $\tau_u := \text{Sü}(\tau_u)$

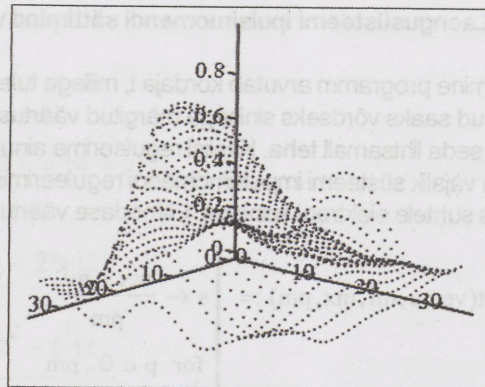
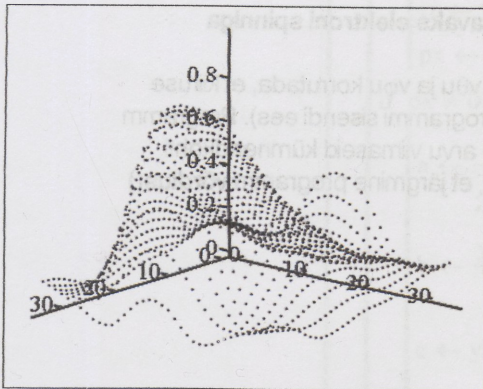
See tekitab ka negatiivse osa, kergitame kujutist $m_i := \min(\tau_u)$ $\tau_{u,i,k} := \tau_{u,i,k} - m_i$

Võrdsustame maksimumi sisendi omaga: $\tau_u := \tau_u \cdot \frac{\max(\tau_a)}{\max(\tau_u)}$ Keskmistame sisendiga:

$\tau_u := 0.5 \cdot (\tau_u + \tau_a)$ **$\min(\tau_u) = 0$** Muudame maksimumi 1-ks. $\tau_u := \frac{\tau_u}{\max(\tau_u)}$

$\max(\tau_u) = 1$ Normeerimine toimub p 2.

Sisendväärtus oli:



τ_u

τ_a

$\text{Sur} = 1.48819627 \times 10^{-3}$

$\text{ko} = 14.29775$

$\text{pm} = 104$

700:	$1.18662859 \times 10^{-3}$	14.77123		
701:	$6.90975844 \times 10^{-4}$	10.77285		
702:	$8.12809955 \times 10^{-4}$	15.45285	724:	$1.38328979 \times 10^{-3}$ 15.02823
703:	$1.52879465 \times 10^{-3}$	16.22732	725:	$1.45100122 \times 10^{-3}$ 14.49645
704:	$1.32119839 \times 10^{-3}$	16.7935	726:	$1.51569829 \times 10^{-3}$ 14.058699
705:	$1.54138477 \times 10^{-3}$	19.6567	727:	1.5470138×10^{-3} 13.85169
706:	$1.76695265 \times 10^{-3}$	22.62123	728:	$1.54653468 \times 10^{-3}$ 13.88822
707:	$2.36163734 \times 10^{-3}$	23.259144	729:	$1.54608448 \times 10^{-3}$ 13.89447
708:	$2.71875643 \times 10^{-3}$	24.8357	730:	$1.54808041 \times 10^{-3}$ 13.90591
709:	4.3336897×10^{-3}	22.44583	731:	$1.60085646 \times 10^{-3}$ 13.97894
710:	$4.88096147 \times 10^{-3}$	17.92045	732:	1.5380646×10^{-3} 14.18655
711:	$4.20313512 \times 10^{-3}$	17.5199	733:	1.4963689×10^{-3} 14.37286
712:	$4.14250418 \times 10^{-3}$	16.93875	734:	1.4668437×10^{-3} 14.46884
713:	$3.59517057 \times 10^{-3}$	17.5279	735:	$1.49291478 \times 10^{-3}$ 14.46823
714:	$2.95882076 \times 10^{-3}$	18.37276	736:	$1.46738119 \times 10^{-3}$ 14.4088
715:	$2.61213151 \times 10^{-3}$	19.03718	737:	$1.47792937 \times 10^{-3}$ 14.345

716: $2.55462286 \times 10^{-3}$	19.181951	738: $1.48774229 \times 10^{-3}$	14.312319
717: 2.1914145×10^{-3}	18.64644	739: $1.49175794 \times 10^{-3}$	14.30089
718: 1.8143542×10^{-3}	18.22002	740: $1.50254472 \times 10^{-3}$	14.27923
719: 1.7529067×10^{-3}	17.86323	741: $1.51702186 \times 10^{-3}$	14.25631
720: $1.79501427 \times 10^{-3}$	17.61143	742: $1.51131117 \times 10^{-3}$	14.26135
721: $1.58708495 \times 10^{-3}$	16.40122	743: $1.50558453 \times 10^{-3}$	14.28213
722: $1.45610746 \times 10^{-3}$	15.83896	744: $1.49804791 \times 10^{-3}$	14.29899
723: $1.39768195 \times 10^{-3}$	15.49523	745: $1.48819627 \times 10^{-3}$	14.29775

12. Laengusüsteemi impulsimomendi sättimine võrreldavaks elektroni spinniga

Järgmine programm arvutab kordaja t , millega tuleks v_{ru} , $v_{\theta u}$ ja $v_{\varphi u}$ korrutada, et kiiruse amplituud saaks võrdseks sinisega märgitud väärtusega (programmi sisendi ees). Programm aitab seda lihtsamalt teha. Käsitsi reguleerime ainult sinise arvu viimaseid kümnendkohti. See on vajalik süsteemi impulsimomendi reguleerimiseks nii, et järgmine programm **võrdlus**() annaks suhtele elektroni spinniga 1 lähedase väärtuse.

```

vamuut(vemu, mi, mx, pm) :=
  s ← (mx - mi) / pm
  for p ∈ 0..pm
    tp ← mi + s·p
    for i ∈ 0..35
      for k ∈ 0..35
        veli,k ← (tp·vrui,k)2 + (tp·vθui,k)2 + (tp·vφui,k)2
      yp ← max(vel) - vemu2
    tx ← 1
    px ← 0
    for p ∈ 1..pm - 1
      if yp·yp+1 < 0 ∨ yp = 0
        y1 ← yp-1
        t1 ← tp-1
        y2 ← yp
        t2 ← tp
        y3 ← yp+1
        t3 ← tp+1
        px ← p
      if yp+1 = 0

```

```

y1 ← yp
t1 ← tp
y2 ← yp+1
t2 ← tp+1
y3 ← yp+2
t3 ← tp+2
px ← p + 1
otherwise
  tx ← tx
  px ← px
if px ≠ 0
  a ←  $\frac{1}{2 \cdot s^2} \cdot (y_3 - 2 \cdot y_2 + y_1)$ 
  b ←  $\frac{y_3 - y_1}{2 \cdot s} - 2 \cdot a \cdot t_2$ 
  c ← y2 - a · t22 - b · t2
  tx ←  $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$ 
continue otherwise
for i ∈ 0..35
  for k ∈ 0..35
    vei,k ←  $\sqrt{(tx \cdot vru_{i,k})^2 + (tx \cdot v\theta u_{i,k})^2 + (tx \cdot v\phi u_{i,k})^2}$ 
vä0 ← y
vä1 ← t
vä2 ← tx
vä3 ← px
vä4 ← ve
vä5 ← max(ve)
vä

```

vmu := 0.99999998907830883

mi := 0.9

mx := 1.1

pm := 100

yp := vamuut(vmu, mi, mx, pm)

tx := yp₂

tx = 1.000000000000584

vem := yp₅

vru := tx · vru

vθu := tx · vθu

vφu := tx · vφu

vem = 0.999999989078309

Kas ei tekkinud imaginaarsust?

$$ve_{i,k} := (vru_{i,k})^2 + (v\theta u_{i,k})^2 + (v\varphi u_{i,k})^2$$

$$ju_{i,k} := \text{Im}\left(\sqrt{1 - ve_{i,k}}\right)$$

$$\max(ju) = 0$$

Vajalikud arvutused, mis on seotud süsteemi impulsimomendi ja elektroni spinni suhte määramisega, kaasa haaratud ka "τu" normeerimine, on vormistatud programmina "võrdlus".

Konstant kor avaldises muutub, kui välja mõõtmeid muudetakse!

$$\begin{aligned} \text{võrdlus}(\tau u, v\varphi, v\theta, v\varphi) := & \left. \begin{aligned} ko &\leftarrow \frac{2.730969971695}{\sum_{i=0}^{35} \sum_{k=0}^{35} \tau u_{i,k} (r1_i)^2 \cdot \sin(\theta_k)} \\ kor &\leftarrow ko \cdot 10^{-30} \\ su &\leftarrow \sum_{i=0}^{35} \sum_{k=0}^{35} \frac{\tau u_{i,k} \cdot v\varphi u_{i,k} (r1_i)^3 \cdot \sin(\theta_k)}{\sqrt{1 - (vru_{i,k})^2 - (v\theta u_{i,k})^2 - (v\varphi u_{i,k})^2}} \\ \text{Imz} &\leftarrow kor \cdot su \\ h &\leftarrow 6.626176 \cdot 10^{-27} \\ \text{spip} &\leftarrow \frac{4 \cdot \pi}{h} \\ \text{suhspi} &\leftarrow \text{spip} \cdot \text{Imz} \\ \text{vä}_0 &\leftarrow ko \\ \text{vä}_1 &\leftarrow \text{spip} \\ \text{vä}_2 &\leftarrow su \\ \text{vä}_3 &\leftarrow \text{suhspi} \\ \text{vä} & \end{aligned} \right| \end{aligned}$$

$$\text{vä} := \text{võrdlus}(\tau u, vru, v\theta u, v\varphi u)$$

$$\text{vä} = \begin{pmatrix} 6.37041442483956 \times 10^{-4} \\ 1.89647401674196 \times 10^{27} \\ 8.27723747331663 \times 10^5 \\ 0.999999995979373 \end{pmatrix}$$

kor ilma astmeta 10^{-30} .

spip, spinni pöördväärtus

su, kahekordne summa

suhspi juhul, kui tegu on käesoleva läbijooksu kiiruste ja jaotusega, tabelisse ümardatult.

$$\text{vä}_3 = 0.99999999598$$

$$\text{vem} = 0.999999989078309$$

shsp

vem

700:	0.99985172629	0.99999999396
701:	0.99995226843	0.999999992637
702:	0.99998812023	0.999999991373
703:	0.99999130635	0.99999999998802

vem reguleeritud kiiruse mooduli **vmu** muutmisega selliseks, et shsp tuleks 1 lähedale. Ei ole mingit mõtet reguleerida suhspi täpselt 1-ks. Sellele ei oleks siin mingit mõistlikku põhjendust.

704:	0.99999638785	0.99999989593	705:	0.99999733848	0.999999888854
706:	0.99999761854	0.999999902761	707:	0.99999823478	0.999999904672
708:	0.99999950059	0.9999999052475	709:	0.9999998369	0.9999999032154
710:	0.9999980195	0.99999990529696	711:	0.9999979981	0.9999998908061
712:	0.9999985285	0.99999989314323	713:	0.999999952	0.99999989222872
714:	0.9999999606	0.99999988999308	715:	0.999999928	0.99999988754323
716:	0.9999999985	0.99999988749178	717:	0.9999999021	0.99999988751422
718:	0.9999999477	0.99999988743648	719:	0.9999999915	0.99999988755025
720:	0.9999999321	0.99999988781645	721:	0.9999998742	0.99999988818058
722:	0.9999999982	0.99999988841526	723:	0.9999999488	0.99999988863514
724:	0.9999999158	0.99999988904505	725:	0.9999999146	0.99999988919771
726:	0.9999999787	0.99999988923764	727:	0.9999999287	0.99999988955026
728:	0.9999999155	0.99999988981144	729:	0.9999998762	0.99999988996437
730:	0.9999999024	0.99999989003634	731:	0.9999999921	0.99999988971179
732:	0.9999999797	0.99999988915593	733:	0.9999999883	0.99999988871478
734:	0.9999999811	0.99999988856149	735:	0.9999999611	0.99999988868347
736:	0.9999999941	0.9999998889813	737:	0.9999999733	0.99999988936998
738:	0.9999999952	0.99999988959455	739:	0.9999999295	0.99999988972345
740:	0.999999972	0.99999989016908	741:	0.9999999045	0.99999989045954
742:	0.9999999588	0.99999989060403	743:	0.9999999431	0.99999989063909
744:	0.9999999933	0.99999989072465	745:	0.9999999598	0.99999989078309

Kaks viimast programmi ei võimalda lähendada suhet spinniga rohkem lähemale 1-le kui arv 7-9 üheksaga (0.9999999-0.999999999) ühelt poolt või sama arvu nullidega teiselt poolt 1.00000001- 1.0000000001. Põhjus on Matcadis, mis ei luba programmi viia enama kümnendkohtade arvuga arve kui 15. Võib küll kirjutada töölehele (18 kümnendkohta)

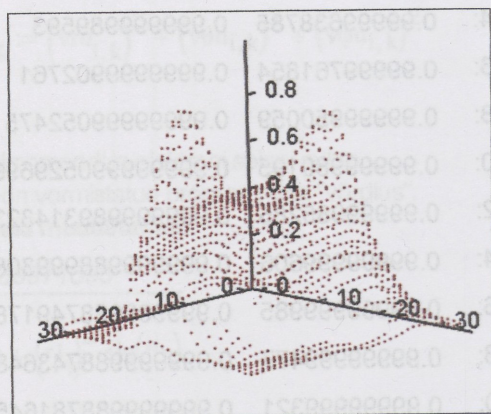
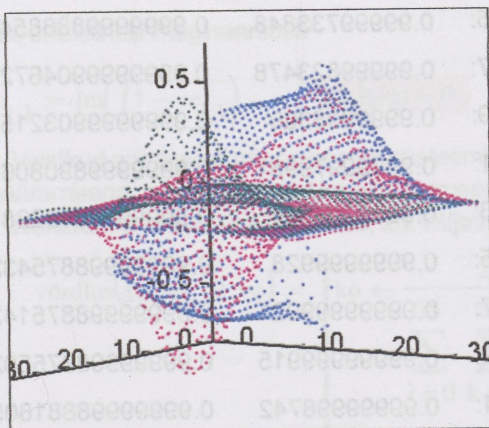
$$s := 0.123456789987654321$$

kuid ta edastab seda väärtusega: $s = 0.123456789987654$ ehk ümardab 15 kümnendkohale.

Nagu juba kirjutatud – reguleerimisel täpselt 1-ks ei ole siin mingit tähtsust või vajadust. **shsp** muutumine oleneb ka sellest, kuidas muutus kiiruse amplituud viimases tsüklis. Valisime alati suhtele 1 väiksema variandi. Kontrollime veel kord, kas $vm < 1$?

$$vm_{i,k} := \sqrt{(vru_{i,k})^2 + (v\theta u_{i,k})^2 + (v\varphi u_{i,k})^2} \quad \max(vm) = 0.99999989078309$$

Järgmistel joonistel näitame 3 kiiruskomponenti ühel joonisel erinevate värvidega ja teisel kiiruse mooduli jaotust.



vru, vθu, vφu

vm

sinine, punane, roheline

Väljastame tulemused (vru, vθu, vφu, τu) failidesse **vru701, vdu701, vju701, tu701** alates. Seejärel pöördume tsükli algusesse, punkti 4, väljastame need ja uus tsükkel algab. Edaspidi suurendatakse siin näidatud failinumbreid ja nii oleme selles töös jõudnud 745-ni. Suurustes ja kujutistes ei toimunud viimastes tsüklites enam olulisi muutusi. Nagu juba sissejuhatuses sai mainitud, vajalike tsüklite arvu selleks, et kõik näitajad enamvähem stabiliseeruksid, oleks ilmselt saanud vähendada – iteratsioonitsükli stabiliseerimise eesmärgil ette võetud tulemuste keskmistamisel sisendväärtustega oleks pidanud viimaste kaalu vähendada. Selliseid proovi-misi ei pidanud autor vajalikuks.

13. Iteratsiooniprotsessi tulemustele õigete ruumikoordinaatide andmine.

Saime kolmele kiiruskomponendile vru, vθu ja vφu ning jaotusfunktsioonile τu kaheindeksilised arvumassiivid $m_{i,k}$, mis vastavad sfäärilistele koordinaatidele r_{1i} ja θ_{1k} . Esimesel on ruumimõõde kuid teine on antud radiaanides. Seega need "koordinaadid" ei ole tegelikke ruumipunkte iseloomustavad. Kujutasime tulemusi küll ristkoordinaatides aga telgedel näidati ainult indekseid, mis ei kuulu tegelikele ruumipunktile x_{1u} ja z_{1t} (vt punkt 1). Need tulevad määrata. Lihtsalt saab määrata igale (i,k) punktile vastavad koordinaadid Z ja X:

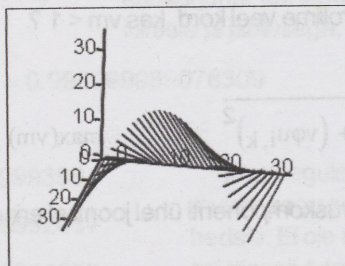
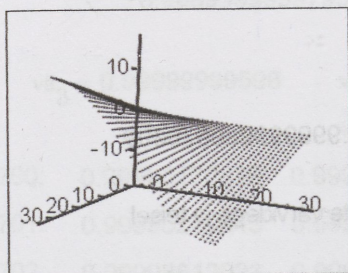
$$Z_{i,k} := r_{1i} \cdot \cos(\theta_{1k}) \quad X_{i,k} := r_{1i} \cdot \sin(\theta_{1k}) \quad \text{Kuid need ei vasta koordinaatidele } x_{1i} \text{ ja } z_{1k},$$

$$\text{sest jagades vastavalt } z_1 \text{ ja } x_1 \text{ sammudega} \quad \Delta z_1 := \frac{2 \cdot r_{1m}}{35} \quad \Delta x_1 := \frac{r_{1m}}{35} \quad \text{ei saa me täis-}$$

arvulisi indekseid u ja t (u = 0..35, t = 0..35), Üldjuhul on neil murdarvulised väärtused:

$$K_{i,k} := \frac{Z_{i,k}}{\Delta z_1} \quad I_{i,k} := \frac{X_{i,k}}{\Delta x_1} \quad \max(I) = 34.9647573 \quad \min(I) = 0 \quad \max(K) = 17.5$$

$$\min(K) = -17.5$$



K

I

Saame isegi negatiivseid väärtusi. θ_{1k} järgi asub punkt sfääri ülemisel poolkeral, kui $k = 0 \dots 17$ ja alumisel $18 \dots 35$ puhul, seejuures Z absoluutväärtus kahaneb, kui $0 < k < 18$ ja kasvab $k > 17$ alas. z_{1t} aga on kuigi teel positiivne.

Järgmine samm tuleneb teadmisest, et meil on teada mainitud massiivide m väärtused murdarvuliste indeksite I, K kohal aga tarvis on neid täisarvuliste u,t juures. Seda saab teha järgmise programmiga, mis kujutab endast lineaarseid interpoolimisi mööda k-veerge sfääri põhjapoolkeral. Alumise poolkera tulemused kirjutame sümmeetria järgi.

Seda tööd ei tee me mitte iteratsiooniprotsessi viimase tsükli tulemuse järgi vaid näiteks 6 viimase keskmisega, et vähendada veelgi järelejäänute väikseid muutusi. Seega arvutame vru, vθu, vφu, τu keskmise.

$$\begin{array}{l} \text{vru1} := \\ \text{vru2} := \\ \text{vru3} := \end{array} \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \text{vru744} \\ \text{vru743} \\ \text{vru742} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{vru4} := \\ \text{vru5} := \end{array} \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \text{vru741} \\ \text{vru740} \end{array} \end{array} \quad \text{Kuues on ülevalpool saadud 745.}$$

$$\text{vrk} := \frac{1}{6} \cdot (\text{vru} + \text{vru1} + \text{vru2} + \text{vru3} + \text{vru4} + \text{vru5})$$

$$\begin{array}{l} \text{v}\theta\text{u1} := \\ \text{v}\theta\text{u2} := \\ \text{v}\theta\text{u3} := \end{array} \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \text{vdu744} \\ \text{vdu743} \\ \text{vdu742} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{v}\theta\text{u4} := \\ \text{v}\theta\text{u5} := \end{array} \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \text{vdu741} \\ \text{vdu740} \end{array} \end{array}$$

$$\text{v}\theta\text{k} := \frac{1}{6} \cdot (\text{v}\theta\text{u} + \text{v}\theta\text{u1} + \text{v}\theta\text{u2} + \text{v}\theta\text{u3} + \text{v}\theta\text{u4} + \text{v}\theta\text{u5})$$

$$\begin{array}{l} \text{v}\varphi\text{u1} := \\ \text{v}\varphi\text{u2} := \\ \text{v}\varphi\text{u3} := \end{array} \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \text{vju744} \\ \text{vju743} \\ \text{vju742} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{v}\varphi\text{u4} := \\ \text{v}\varphi\text{u5} := \end{array} \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \text{vju741} \\ \text{vju740} \end{array} \end{array}$$

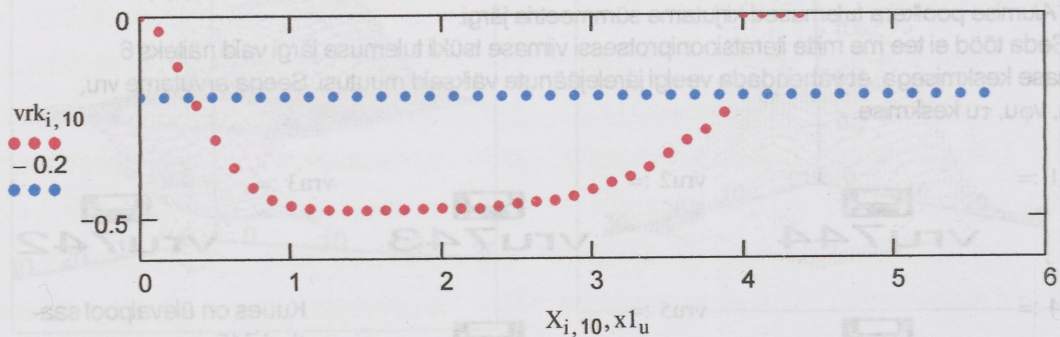
$$\text{v}\varphi\text{k} := \frac{1}{6} \cdot (\text{v}\varphi\text{u} + \text{v}\varphi\text{u1} + \text{v}\varphi\text{u2} + \text{v}\varphi\text{u3} + \text{v}\varphi\text{u4} + \text{v}\varphi\text{u5})$$

$$\begin{array}{l} \text{\tau}u1 := \\ \text{\tau}u2 := \\ \text{\tau}u3 := \end{array} \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \text{tu744} \\ \text{tu743} \\ \text{tu742} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{\tau}u4 := \\ \text{\tau}u5 := \end{array} \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \text{tu741} \\ \text{tu740} \end{array} \end{array}$$

$$\text{\tau}uk := \frac{1}{6} \cdot (\text{\tau}u + \text{\tau}u1 + \text{\tau}u2 + \text{\tau}u3 + \text{\tau}u4 + \text{\tau}u5)$$

Programmi töö selgituseks teeme joonise näiteks veeru $k = 10$ jaoks kiiruskomponendi vrk puhul:



Punased punktid näitavad vrk väärtusi valitud veeru punktides ja sinised reaalse ruumi koordinaate selles veerus. Programm määrab vrk väärtused siniste punktide kohal. Kuna kasutame lihtsat lineaarset interpoleerimist, peab tulemusi mingil määral ka siluma. Kasutame 2. punktis näidatud silumisprogrammi $Smrv()$ modifikatsiooni, mis kehtiks reaalses ruumis.

```

INv(m) :=
  for ka ∈ 0..17
  |
  |   for i ∈ 0..35
  |   |   x2_i ← X_{i,ka}
  |   |   u ← 0
  |   |   for i ∈ 0..34
  |   |   |   if (x2_i ≤ x1_u < x2_{i+1}) ∧ x1_u ≤ x2_{35}
  |   |   |   |   mv_{u,ka} ← (m_{i,ka} · (x2_{i+1} - x1_u) + m_{i+1,ka} · (x1_u - x2_i)) / (x2_{i+1} - x2_i)
  |   |   |   |   u ← u + 1
  |   |   |   |   continue otherwise
  |   |   |   vä ← mv
  
```

```

Smrv2(m, μi, μk) :=
  for i ∈ 0..35
  |
  |   for k ∈ 0..35
  |   |   vθ_k ← z1_k
  |   |   vf_k ← m_{i,k}
  |   |   as ← loess(vθ, vf, μk)
  |   |   for k ∈ 0..35
  |   |   |   sθ_{i,k} ← interp(as, vθ, vf, vθ_k)
  |   |   for k ∈ 0..35
  |   |   |   for i ∈ 0..35
  |   |   |   |   wr_i ← x1_i
  |   |   |   |   wf_i ← sθ_{i,k}
  
```

$Vru := INv(vrk) \quad V\theta_u := INv(v\theta_k)$
 $V\phi_u := INv(v\phi_k) \quad Tu := INv(\tau uk)$

Need on väärtused põhjapoolkera ühel poolel. Lõunapoolkera sama poole omad kirjutame vastavalt suurustele omistatavale sümmeeriale ekvatoriaaltasandi suhtes. Esialgu jätamme vru sümmeetriliseks, et silumine oleks edukam.

$Vru_{u,35-ka} := Vru_{u,ka}$
 $V\theta_{u,35-ka} := V\theta_{u,ka}$
 $V\phi_{u,35-ka} := V\phi_{u,ka}$

```

tf | bs ← loess(wr, wf, μi)
    | for i ∈ 0..35
    |   tfi,k ← interp(bs, wr, wf, wri)
    |   μi := 0.25   μk := 0.25

```

$$Tu_{u,35-ka} := Tu_{u,ka}$$

Järgnevad silumised.

$$Vru := Smrv2(Vru, \mu_i, \mu_k) \quad V\theta_u := Smrv2(V\theta_u, \mu_i, \mu_k) \quad V\varphi_u := Smrv2(V\varphi_u, \mu_i, \mu_k)$$

$Tu := Smrv2(Tu, \mu_i, \mu_k)$ Silumisprogramm muudab ka paljusid 0-väärtusi langukera välistes punktides. Need taastame 1. punktis toodud filtriga O.

$$Vru_{i,k} := Vru_{i,k} \cdot O_{i,k} \quad V\theta_{i,k} := V\theta_{i,k} \cdot O_{i,k} \quad V\varphi_{i,k} := V\varphi_{i,k} \cdot O_{i,k} \quad Tu_{i,k} := Tu_{i,k} \cdot O_{i,k}$$

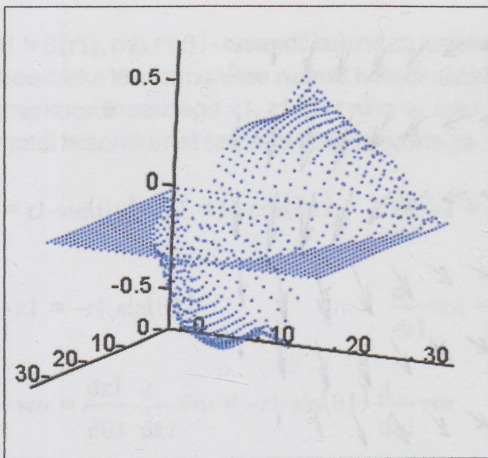
$V\theta_{u,0} := 0$ $V\theta_{u,35} := 0$ Vru ei või omada ühel poolkeral ja $V\varphi_u$ mõlemal erimärgilisi väärtusi ning süsteemi pöörlemisel nullist erinevaid väärtusi. Tu peab kõigis punktides olema positiivne:

$$Vru_{i,k} := \text{if}(Vru_{i,k} > 0, 0, Vru_{i,k}) \quad Vru_{0,k} := 0 \quad V\varphi_{i,k} := \text{if}(V\varphi_{i,k} < 0, -V\varphi_{i,k}, V\varphi_{i,k})$$

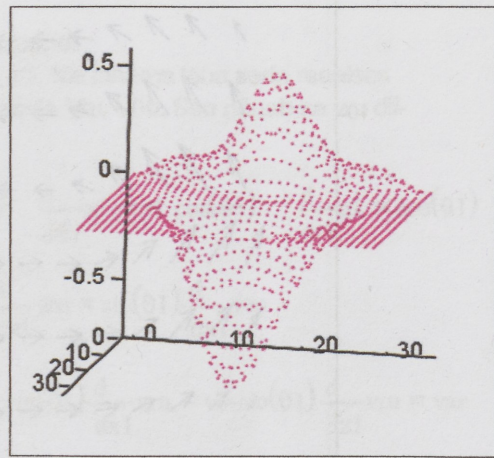
$$V\varphi_{0,k} := 0 \quad V\varphi_{1,k} := 0.5 \cdot V\varphi_{1,k} \quad Tu_{i,k} := \text{if}(Tu_{i,k} < 0, -Tu_{i,k}, Tu_{i,k})$$

Lõpuks anname Vru -le vajaliku assümmeetria:

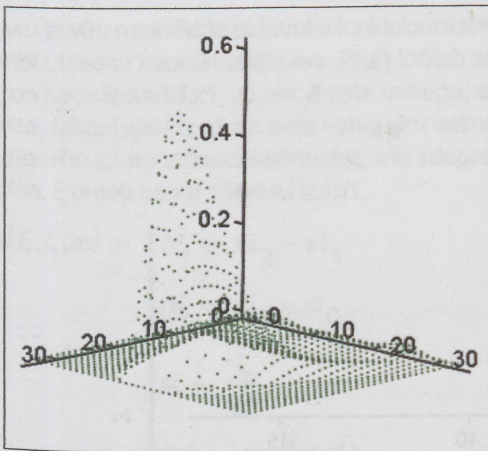
$$Vru_{u,35-ka} := -Vru_{u,ka}$$



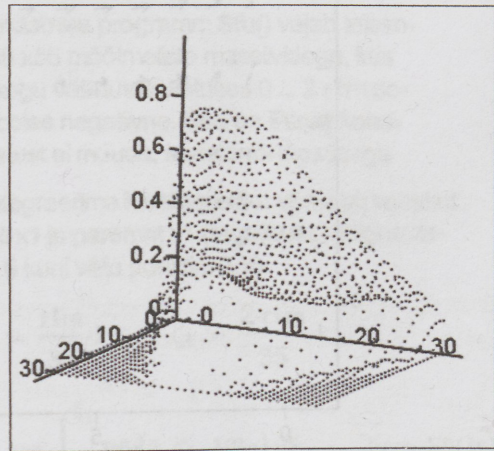
Vru



$V\theta_u$



$V\varphi_u$

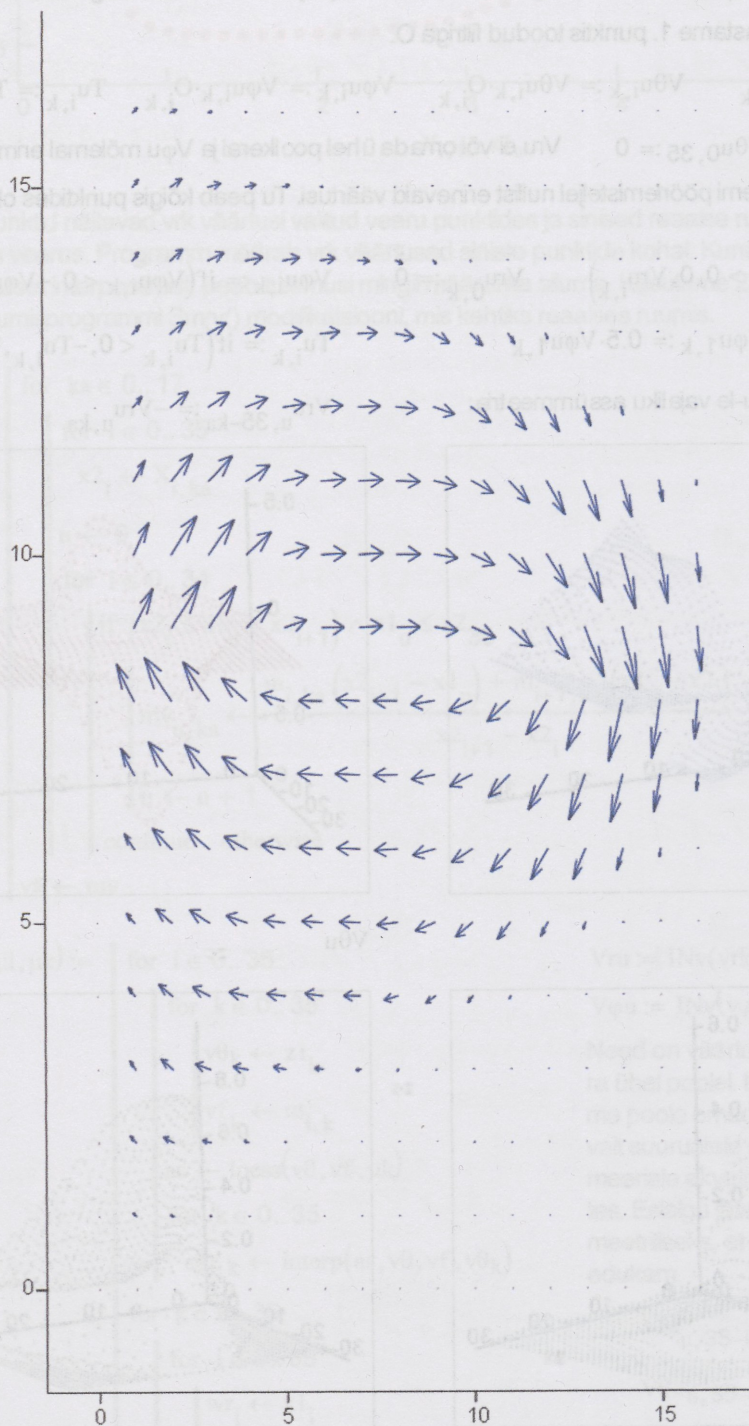


Tu

Ligikaudsel vaatusel ei märkaks olulist erinevust v_{rk} , $v_{\theta k}$, $v_{\phi k}$ ja τ_{uk} -ga. Erinevused on siiski päris suured – piisab, kui leida vastavate massiivide numbrilised vahed.

Joonistame V_{ru} ja v_{θ} poolt antava vektordiagrammi, mis näitab laengute liikumist laengusfääri meridionaalse tasandi $\phi = 0$ ühes pooles. Erinevalt algmudeli loomise juures (p.1) tehtud diagrammist, teeme selle enamvõhem õigete mastaapidega mõlemal teljel. Joonisel on ka näha, et vertikaalne joon, millel v_{θ} muutab märki, ei ole enam sirge (vektor on seal horisontaalne).

$$p := 1..16 \quad t := 1..16 \quad Gr_{p,t} := V_{ru}_{p-2,t-2} \quad Gz_{p,t} := V_{\theta}_{p-2,t-2}$$



(Gr, Gz)

Joonistatud vektordiagrammil on V_{ru} telg horisontaalne ja $V_{\theta u}$ vertikaalne. Kuna joonis näitab pilti sfääri ühel pooltasandil, peab kõrgus olema 2x suurem laisusest, sest punktidevaheline samm on vetrikaalses suunas 2x suurem horisontaalsete omast. Nagu algväärtuste juures sai mainitud, pildi kogu meridaantasandis saame peegeldusega vasakule poole veertikaaltelge.

14. Ettevalmistused võrrandite karakteristiklike joonte määramisele

Konkreetsuse mõttes võtame ette v_r võrrandi (karakteristikud on kõigil samad):

$$v_r \cdot \frac{d}{dr_1} v_{ru} + \frac{v_{\theta}}{r_1} \cdot \frac{d}{d\theta_1} v_{ru} = \text{var}$$

Lineaarse osatuletistega dif-võrrandi karakteristikud võrrandid kirjutatakse järgmiselt:

$$\frac{dr_1}{v_r} = \frac{r_1 \cdot d\theta_1}{v_{\theta}} = \frac{dv_{ru}}{\text{var}} = ds$$

Need on täisdiferentsiaalsed võrrandid, milledest esimese võrduse

lahendamiseks leitakse karakteristikud jooned ja viimases võrduses on ds nende joonte pikku-diferentsiaal ning see võrdus võimaldab v_{ru} määrata joonintegraaliga mööda karakteristiklike jooni. Tulemus annab v_{ru} väärtuse selle väljapunkti, nn karakteristikliku punkti jaoks, mis asub joonel (muidugi konstandi täpsusega):

$$v_{\theta} \cdot dr_1 = r_1 \cdot v_r \cdot d\theta_1 \quad v_p(r_1, \theta_1) = \int \text{var}(r_1, \theta_1) ds \quad \text{Esimese lahendamine annab funktsiooni}$$

ni $\theta_1 = \theta(\mathbf{r}_1)$, mis r_1, θ_1 -tasandil kujundab karakteristikliku joone.

See oleks töö formaalses ruumis koordinaatidega r_1, θ_1 . Me tahame teha seda reaalses ruumis koordinaatidega x_1, z_1 ja v_r ning v_{θ} asemel kasutada $V_{ru}, V_{\theta u}$. See nõuab ka v_{ru} dif-võrrandi teisendamist samade koordinaatidega ruumi:

$$x_1 = r_1 \cdot \sin(\theta_1) \quad z_1 = r_1 \cdot \cos(\theta_1) \quad \frac{d}{dr_1} x_1 = \sin(\theta_1) \quad \frac{d}{d\theta_1} x_1 = r_1 \cdot \cos(\theta_1) \quad \frac{d}{dr_1} z_1 = \cos(\theta_1)$$

$$\frac{d}{d\theta_1} z_1 = -r_1 \cdot \sin(\theta_1) \quad \frac{d}{dr_1} v_{ru} = \frac{dx_1}{dr_1} \cdot \frac{d}{dx_1} v_{ru} = \sin(\theta_1) \cdot \frac{d}{dx_1} v_{ru}$$

$$\frac{d}{d\theta_1} v_{ru} = \frac{dz_1}{d\theta_1} \cdot \frac{d}{dz_1} v_{ru} = -r_1 \cdot \sin(\theta_1) \cdot \frac{d}{dz_1} v_{ru} \quad v_r \cdot \sin(\theta_1) \cdot \frac{d}{dx_1} v_{ru} - v_{\theta} \cdot \sin(\theta_1) \cdot \frac{d}{dz_1} v_{ru} = \text{var}$$

Siit tuleb karakteristikliku võrrand:
$$\frac{dx_1}{v_r \cdot \sin(\theta_1)} = \frac{dz_1}{-v_{\theta} \cdot \sin(\theta_1)} \quad V_{\theta u} \cdot dx_1 = -V_{ru} \cdot dz_1$$

Ka v_{ru} ja $v_{\theta u}$ massiivide pidevaks funktsioonideks teisendamise programm **Sfu()** vajab teisendamist uutesse koordinaatidesse. **Pfu()** töötab samuti 36 x 36 mõõtmeliste massiividega, kus ξ, ζ on koordinaadid x_1, z_1 ainult selle vahega, et ζ on kogu väärtuste ulatuses 0 ... 2 r1m positiivne, samal ajal kui z_1 on selle vahemiku esimeses pooles negatiivne. See on lihtsalt konstantne nihe z_1 -koordinaadi väärtustes, mis integraali väärtust ei muuda, konstandi täpsusega õeldes. ξ omab samu väärtusi kui x_1 .

$$\text{Pfu}(\xi, \zeta, m) := \begin{cases} \Delta \xi \leftarrow x_{12} - x_{11} \\ \Delta \zeta \leftarrow z_{11} - z_{10} \\ s\xi \leftarrow \frac{\xi}{\Delta \xi} \\ \Delta s\xi \leftarrow \text{mod}(s\xi, 1) \\ p\xi \leftarrow s\xi - \Delta s\xi \end{cases}$$

Integreerime karakteristikliku võrrandi vasakut poolt x_1 ja paremat z_1 (tegelikult ζ) järgi radades 0 kuni välja punktini (i, k).

$$\xi_i := \frac{r1m}{35} \cdot i \quad \zeta_k := \frac{2 \cdot r1m}{35} \cdot k$$

$$Iv_{i,k} := \int_0^{\xi_i} \text{Pfu}(\xi, \zeta_k, V_{\theta u}) d\xi \quad Iv := \text{Sü}(Iv)$$

```

if pξ < 0
  | pξ ← 0
  | Δsξ ← sξ
if pξ > 34
  | pξ ← 34
  | Δsξ ← sξ - pξ
otherwise
  | pξ ← pξ
  | Δsξ ← Δsξ

```

$$s\zeta \leftarrow \frac{\zeta}{\Delta\zeta}$$

$$\Delta s\zeta \leftarrow \text{mod}(s\zeta, 1)$$

$$p\zeta \leftarrow s\zeta - \Delta s\zeta$$

```

if pζ < 0
  | pζ ← 0
  | Δsζ ← sζ

```

```

if pζ > 34
  | pζ ← 34
  | Δsζ ← sζ - pζ

```

```

otherwise
  | pζ ← pζ
  | Δsζ ← Δsζ

```

$$f0 \leftarrow m_{p\xi, p\zeta}$$

$$f1 \leftarrow m_{p\xi+1, p\zeta}$$

$$f2 \leftarrow m_{p\xi+1, p\zeta+1}$$

$$f3 \leftarrow m_{p\xi, p\zeta+1}$$

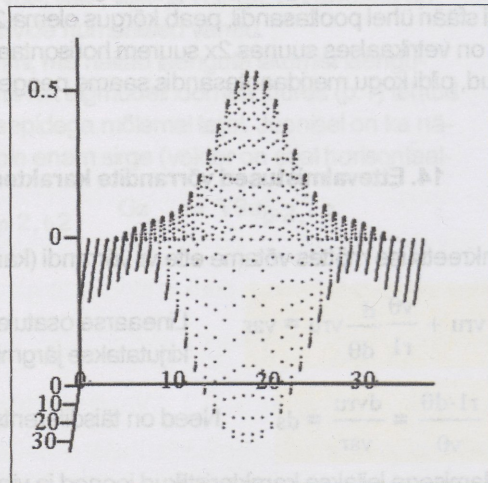
$$fr1 \leftarrow f0 + (f1 - f0) \cdot \Delta s\xi$$

$$fr2 \leftarrow f3 + (f2 - f3) \cdot \Delta s\xi$$

$$fr \leftarrow fr1 \cdot (1 - \Delta s\zeta)$$

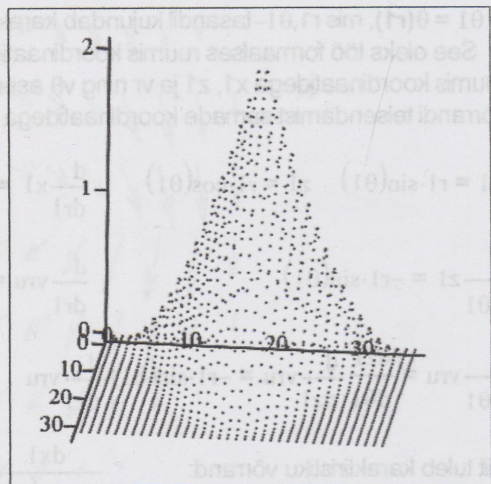
$$fr \leftarrow fr + fr2 \cdot \Delta s\zeta$$

```
fr
```



Iv

$$I_{p, k} := - \int_0^{\zeta_k} \text{Pfu}(\xi_i, \zeta, V_{ru}) d\zeta \quad I_p := \text{Sü}(I_p)$$



Ip

Lisades integraalidele ka meelevaldsed integreerimiskonstandid, mis ilmselt olenevad väljapunktidest, milleni integreeriti, saame võrduse:

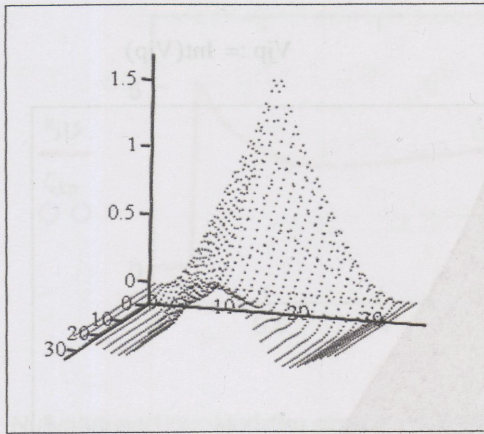
$$I_{i, k} + C1_{i, k} - I_{i, k} - C2_{i, k} = 0 \quad \text{ehk}$$

$$C_{i, k} = C1_{i, k} - C2_{i, k} = I_{i, k} - I_{i, k}$$

Teiste sõnadega, me saame tundmatute konstantide osa ära arvutada. Nende väärtuste tõttu saab karakteristik võrdus rahuldatud.

$$C_{i, k} := I_{i, k} - I_{i, k} \quad (1) \quad \text{Leiame selle konstandi konkreetse väljapunkti (ip, kp) jaoks:}$$

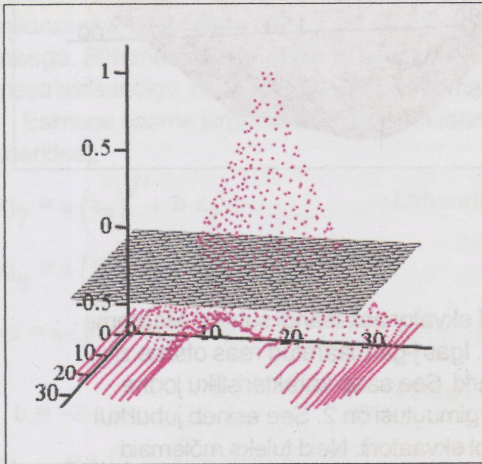
$$ip := 19 \quad kp := 15 \quad C_{ip, kp} := I_{ip, kp} - I_{ip, kp} \quad C_{ip, kp} = 0.515666839215154$$



Cx

$$Tv_{i,k} := 0$$

Joon, mida mööda tasand kujundit lõikab, ongi karakteristik joon.



Vv, Tv

Asetades selle võrdusesse (1), saame

$$C_{ip, kp} = Ip_{i,k} - Iv_{i,k} \quad (2) \quad \text{See ongi karakteristliku joone võrrand, mis määrab } z1 \text{ ja } x1 \text{ vahelise seose } z1 = f(x1). \text{ See joonistab karakteristikliku joone } (z1, x1)\text{-tasandile. Joon peab läbima karakteristikliku punkti } (z1_{kp}, x1_{ip}). \text{ Muutes koordinaati } x1 = 0 \text{ kuni jõudmisel välispiirini, tuleb määrata } z1 \text{ väärtused iga } x1 \text{ väärtuse kohal, mis asetatuna võrdusesse (2), rahuldavad seda.}$$

Tähistame: $Vv_{i,k} := Ip_{i,k} - Iv_{i,k} - C_{ip, kp}$

Võrduse (2) kehtimise punktides on $Vv = 0$. Lõikame Vv kujundit tasandiga Tv , mis asub kõrgusel 0.

Et saada paremat kujundit, tuleb $x1$ muuta väiksema sammuga kui on antud senised $x1$ väärtused. Tähistame uue muutuja xj , mis muutub 0 ... $r1m$ sammuga $r1m/jm$. Olgu $jm = 200$.

$$jm := 200 \quad j := 0..jm \quad xj := \frac{r1m}{jm} \cdot j$$

Sama tihendamine toimugu ka $z1$ telje suunas, ainult samm tuleb 2 korda suurem, sest $z1$ muutuste ala on 2 korda pikem aga punktide arvu jätsime samaks, et neid saaks asetada ühise indeksi alla.

$$pm := 200 \quad p := 0..pm \quad zj_p := \frac{2 \cdot r1m}{pm} \cdot p$$

$$Vj_{j,p} := Pfu(xj_j, zj_p, Vv) \quad Tj_{j,p} := 0$$

Parandame vea, mis tekkis Vru järsu hüppe kohal ülrimineku lekvaaoriga, kus suur negatiivne väärtus muutub järsult samasuureks positiivseks väärtuseks. Sellest tekib Vj_p keskel zj_{97} ja zj_{103} vahel zj suunas konstantne platoo. Parandame järgmise programmiga mööda ridu paraboliselt interpoloides.

$$\zeta_e := zj_{100}$$

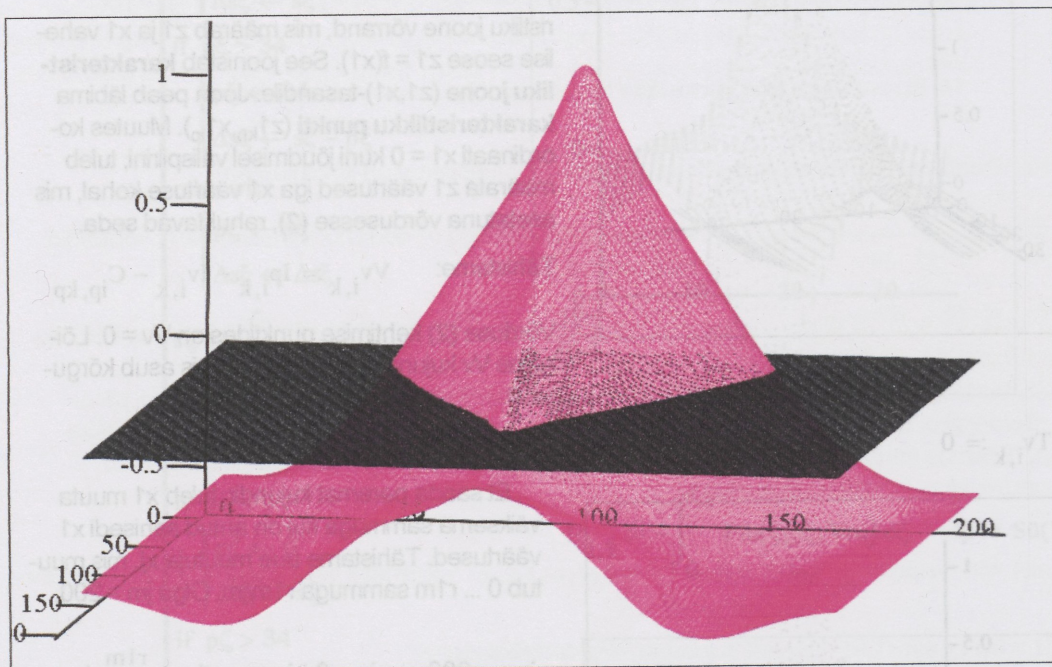
$$\zeta_e = 5.6$$

See on zj väärtus ekvaatoril.

```
Int(m) :=
  mv ← m
  for j ∈ 0..jm
    a ←  $\frac{m_{j,97} - m_{j,96}}{(zj_{97} - zj_{96}) \cdot (zj_{97} + zj_{96} - 2 \cdot \zeta_e)}$ 
    b ←  $-2 \cdot a \cdot \zeta_e$ 
    c ←  $m_{j,96} - a \cdot (zj_{96})^2 - b \cdot zj_{96}$ 
    for pl ∈ 98..102
```

$$mv_j, p1 \leftarrow a \cdot (zj_{p1})^2 + b \cdot zj_{p1} + c$$

$$Vjp := \text{Int}(Vjp)$$



Vjp, Tj

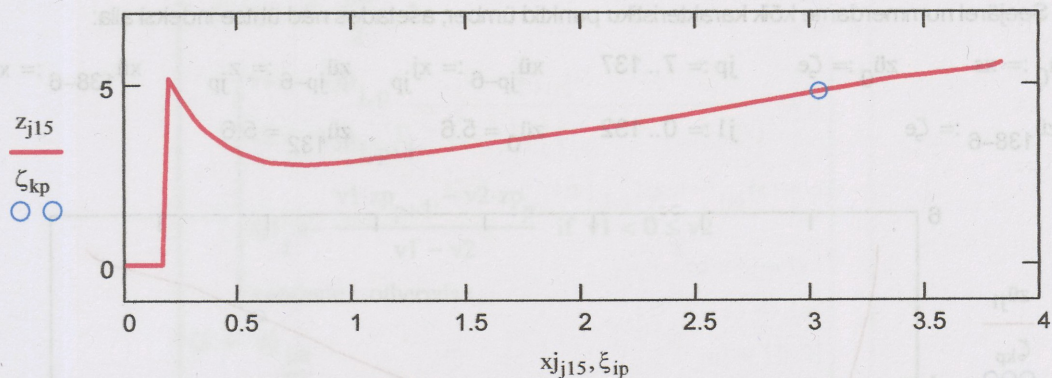
On näha, et karakteristikud jooned on sümmeetrilised ekvatoriaaltasandi suhtes. Määrame selle osa, mis asub "alpool ekvaatorit" ($kp < 18, p < 101$). Igas j -ga määratud reas otsime z_j kasvamisel ($p = 0 \dots 100$) üles koha, kus Vjp muudab märki. See saab karakteristikku joone punkti ordinaadiks abstsissi x_j kohal. Võib juhtuda, et märgimuutusi on 2. See esineb juhul kui joon osutub kinniseks või osaliselt kinniseks juba ühel pool ekvaatorit. Neid tuleks mõlemaid eraldi määrata. Nii abstsissile kui ordinaadile anname ühise indeksi j . Alumise ja ülemise märgimuutuse omad tähisrame lisaindeksiga 1 ja 2. Näite puhul teist ei ole. Vastav programmi lõik on:

```

Kj(ip, kp, m) :=
  for j ∈ 0..jm
    for p ∈ 0..(pm/2) - 1
      v1 ← mj,p
      v2 ← mj,p+1
      zj ← (v1·zjp+1 - v2·zjp) / (v1 - v2) if v1 < 0 ≤ v2 ∨ v1 > 0 ≥ v2
      continue otherwise
  zj
  
```

ip = 19 kp = 15 z := Kj(ip, kp, Vjp) rows(z) = 138 j15 := 0..137

Kanname joonisele ka karakteristikku punkti.



Nullväärtused karakteristiku alguses on lihtsalt ordinaadi väärtusi mittedaanud punktid ja karakteristiku hulka ei kuulu. Karakteristik algab 7. punktist ja lõpeb viimase 137 punktiga:

$$z_7 = 5.16862711407838 \quad z_{137} = 5.58559066089816 \quad \text{Ekvaator asub } z \text{ väärtuse juures } \zeta_e$$

$\zeta_e = 5.6$ Kuna esimesed on sellest väiksemad, tähendab et sisenemis- ja väljumispunkt on määramata. Need asuvad ekvaatori tasandil ja tulevad eraldi määrata paraboolse ekstrapoliimisega. Sümmetria tõttu peab karakteristik olema sisenemis- ja väljumispunktis risti sümmetriasandiga. Nende abstsisse tähistame x_s ja x_v .

Esimese saame järgmisest võrrandsüsteemist (neljas saadakse parabooliavaldist diferentseerides):

$$x_{j7} = a \cdot (z_7)^2 + b \cdot z_7 + c \quad \text{Lahendamisel saame} \quad a := 0.078140013780821$$

$$x_{j8} = a \cdot (z_8)^2 + b \cdot z_8 + c \quad c := 2.63193033783958$$

$$x_s = a \cdot \zeta_e^2 + b \cdot \zeta_e + c \quad x_s := -a \cdot \zeta_e^2 + c \quad x_s = 0.181459505673034$$

$$b = -2 \cdot a \cdot \zeta_e$$

x_v saame analoogiliselt, süsteem on:

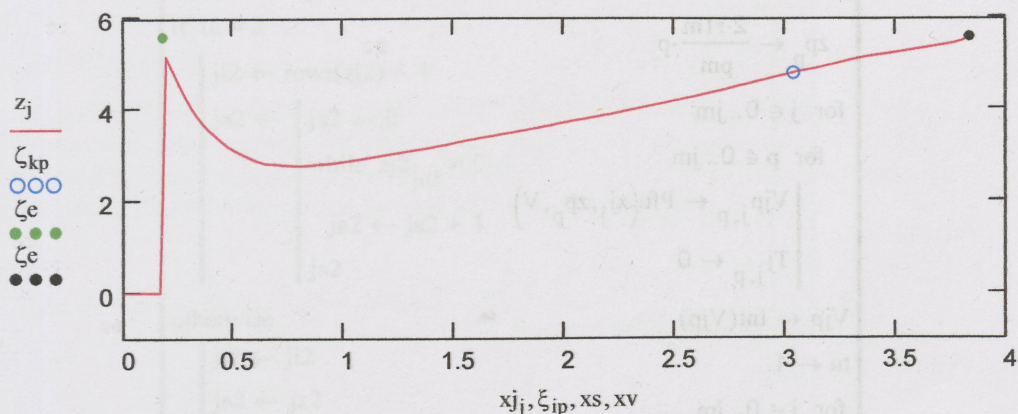
$$x_{j137} = a \cdot (z_{137})^2 + b \cdot z_{137} + c \quad a := -3.21419478830356$$

$$x_{j136} = a \cdot (z_{136})^2 + b \cdot z_{136} + c \quad c := -96.9604812009785$$

$$x_v = a \cdot \zeta_e^2 + b \cdot \zeta_e + c \quad x_v := -a \cdot \zeta_e^2 + c \quad x_v = 3.83666736022113$$

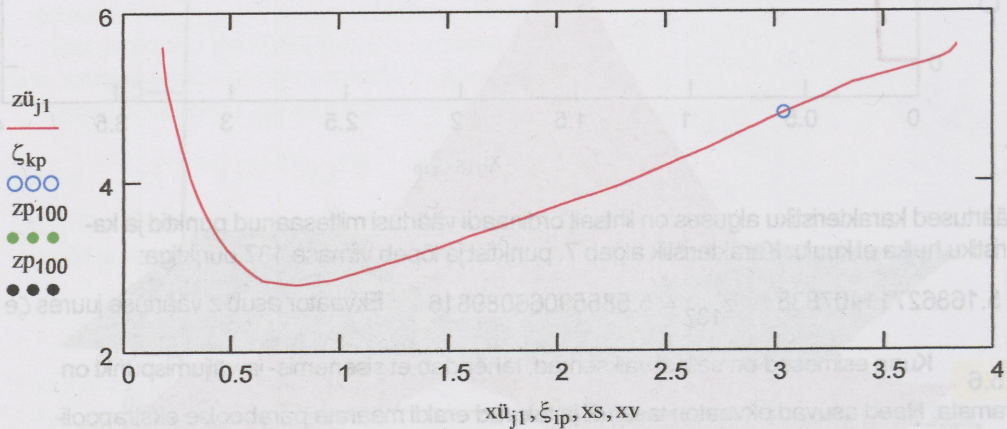
$$b = -2 \cdot a \cdot \zeta_e$$

Kanname sisenemis- ja väljumispunkti ka joonisele:



Seejärel nummerdame kõik karakteristiku punktid ümber, asetades nad ühtse indeksi alla:

$$\begin{aligned} x_{ü_0} &:= x_s & z_{ü_0} &:= \zeta_e & j_p &:= 7..137 & x_{ü_{jp-6}} &:= x_{j_{jp}} & z_{ü_{jp-6}} &:= z_{j_{jp}} & x_{ü_{138-6}} &:= x_v \\ z_{ü_{138-6}} &:= \zeta_e & j_1 &:= 0..132 & z_{ü_0} &= 5.6 & z_{ü_{132}} &= 5.6 \end{aligned}$$



Keerulisemaks osutub olukord siis, kui lõikav tasand T_j langeb niipalju alla, et hakkab V_{jp} kujundit lõikama ka teises kohas (vt V_{jp} ja T_j joonist). Kui seejuures ei teki lõikejoone katkemist (vahele ei teki 0-ste väärtustega ordinaate), on olukord endine. Katkemise korral tuleb ekstrapoolida uue osa sisenemispunkt üle ekvaatori, kui on näha, et sisenemine toimus sealt. Kui väljumine toimub paremale, on see programmis juba tehtud, selle ekstrapoolimist ei vajata. Kui esineb mitteväljumist vaateväljast, teeme parandusi käsitsi.

Et saaks mugavamalt jälgida erinevate joonte teket, tuleb kogu näiteks toodud töö asetada ühte terviklikku programmi. See on:

```

KJ(ip, kp, jm) :=
  C ← Ipip, kp - Ivip, kp
  for i ∈ 0..35
    for k ∈ 0..35
      Vi, k ← Ipi, k - Ivi, k - C
  for j ∈ 0..jm
    xj ←  $\frac{r1m}{jm} \cdot j$ 
  for p ∈ 0..jm
    zp ←  $\frac{2 \cdot r1m}{pm} \cdot p$ 
  for j ∈ 0..jm
    for p ∈ 0..jm
      Vjp, j, p ← Pfu(xj, j, zp, p, V)
      Tj, j, p ← 0
  Vjp ← Int(Vjp)
  tu ← 1
  for j ∈ 0..jm

```

```

for p ∈ 0..  $\frac{j_m}{2} - 1$ 
    v1 ← Vjpj,p
    v2 ← Vjpj,p+1
    zj1j ←  $\frac{v1 \cdot zp_{p+1} - v2 \cdot zp_p}{v1 - v2}$  if v1 < 0 ≤ v2
    continue otherwise
ζe ←  $\frac{zp_{j_m}}{2}$ 
jl1 ← rows(zj1) - 1
jal ← | jal ← 0
      | while zj1jal = 0
      |   jal ← jal + 1
      | jal
ja2 ← 0
jl2 ← 0
zj2 ← 0
j12m ← 0
for j ∈ 0.. j_m
    for p ∈ 0..  $\frac{j_m}{2} - 1$ 
        v1 ← Vjpj,p
        v2 ← Vjpj,p+1
        if v1 > 0 ≥ v2
            zj2j ←  $\frac{v1 \cdot zp_{p+1} - v2 \cdot zp_p}{v1 - v2}$ 
            tu ← 2
            continue otherwise
    if tu = 2
        jl2 ← rows(zj2) - 1
        ja2 ← | ja2 ← 0
              | while zj2ja2 = 0
              |   ja2 ← ja2 + 1
              | ja2
    otherwise
        jl2 ← jl2
        ja2 ← ja2

```

```

av ← 1
if tu = 1
  a ←  $\frac{x_{j_{ja1+1}} - x_{j_{ja1}}}{(z_{j_{ja1+1}} - z_{j_{ja1}}) \cdot (z_{j_{ja1+1}} + z_{j_{ja1}} - 2 \cdot \zeta e)}$ 
  c ←  $x_{j_{ja1}} - a \cdot z_{j_{ja1}} \cdot (z_{j_{ja1}} - 2 \cdot \zeta e)$ 
  xs1 ←  $-a \cdot \zeta e^2 + c$ 
  zs1 ←  $\zeta e$ 
  if j11 ≠ jm
    a ←  $\frac{x_{j_{j11-1}} - x_{j_{j11}}}{(z_{j_{j11-1}} - z_{j_{j11}}) \cdot (z_{j_{j11-1}} + z_{j_{j11}} - 2 \cdot \zeta e)}$ 
    c ←  $x_{j_{j11}} - a \cdot z_{j_{j11}} \cdot (z_{j_{j11}} - 2 \cdot \zeta e)$ 
    xv1 ←  $-a \cdot \zeta e^2 + c$ 
    zv1 ←  $\zeta e$ 
  otherwise
    xv1 ←  $x_{j_{jm}}$ 
    zv1 ←  $z_{j_{jm}}$ 
  xü10 ← xs1
  zü10 ← zs1
  if j11 = jm
    for jp ∈ ja1..j11
      xü1jp-ja1+1 ←  $x_{j_{jp}}$ 
      zü1jp-ja1+1 ←  $z_{j_{jp}}$ 
    xü1j11-ja1+1 ← xv1
    zü1j11-ja1+1 ← zv1
    jü1m ← rows(xü1) - 1
  otherwise
    for jp ∈ ja1..j11
      xü1jp-ja1+1 ←  $x_{j_{jp}}$ 
      zü1jp-ja1+1 ←  $z_{j_{jp}}$ 
    xü1j11-ja1+2 ← xv1
    zü1j11-ja1+2 ←  $\zeta e$ 
    jü1m ← rows(xü1) - 1
  otherwise
    j12 ← rows(zj2) - 1

```

```

xü0 ← xjjl2
zü0 ← zj22jl2
for p ∈ 0..jl2 - ja2 - 1
  xüp+1 ← xjjl2-1-p
  züp+1 ← zj22jl2-1-p
xüjl2-ja2+1 ← xjja2
züjl2-ja2+1 ← zj1ja1
for p ∈ 1..jl1 - ja1
  xüjl2-ja2+1+p ← xjja1+p
  züjl2-ja2+1+p ← zj1ja1+p
jüm ← rows(xü) - 1
xü1 ← 0
zü1 ← 0
jü1m ← 0
vä0 ← xü1
vä1 ← zü1
vä2 ← jü1m
vä3 ← xü
vä4 ← zü
vä5 ← jüm
vä

```

15. Karakteristlike joonte määramine

ip := 17 Valik näitab, et esimene sari on selline, kus karakteristlik punkt asub x1-tele keskel.

kp := 17 K_j := KJ(ip, kp, jm) x17 := K_{j0} z17 := K_{j1} jü1m := K_{j2} jü1m = 90 jl := 0..jü1m

kp := 15 K_j := KJ(ip, kp, jm) x15 := K_{j0} z15 := K_{j1} jü1m := K_{j2} jü1m = 118 jl := 0..jü1m

kp := 13 K_j := KJ(ip, kp, jm) x13 := K_{j0} z13 := K_{j1} jü1m := K_{j2} jü1m = 195 jl := 0..jü1m

kp = 13 graafikut tuleks parandada käsitsi, et mitte teha programmi K_j() keerulisemaks. Parem on teha väike lisaprogramm väljumispunkti ekstrapoolimise kohta ekvaatorile, võttes selleks andmeid K_j väljundist ja jälgides joonist. Joon peaks peale 141. punkti väljuma üle ekvaatori. See katkeb (0 -sed väärtused) ja siseneb hiljem üle ekvaator vaatevälja tagasi.

$$\text{EL}(x_j, z_j, j_l) := \begin{cases} a \leftarrow \frac{x_{j_{l-1}} - x_{j_l}}{(z_{j_{l-1}} - z_{j_l})(z_{j_{l-1}} + z_{j_l} - 2 \cdot 5.6)} & j_l := 141 \\ c \leftarrow x_{j_l} - a \cdot z_{j_l} \cdot (z_{j_l} - 2 \cdot 5.6) & x_{13, j_{l+1}} := \text{EL}(x_{13}, z_{13}, j_l) \end{cases}$$

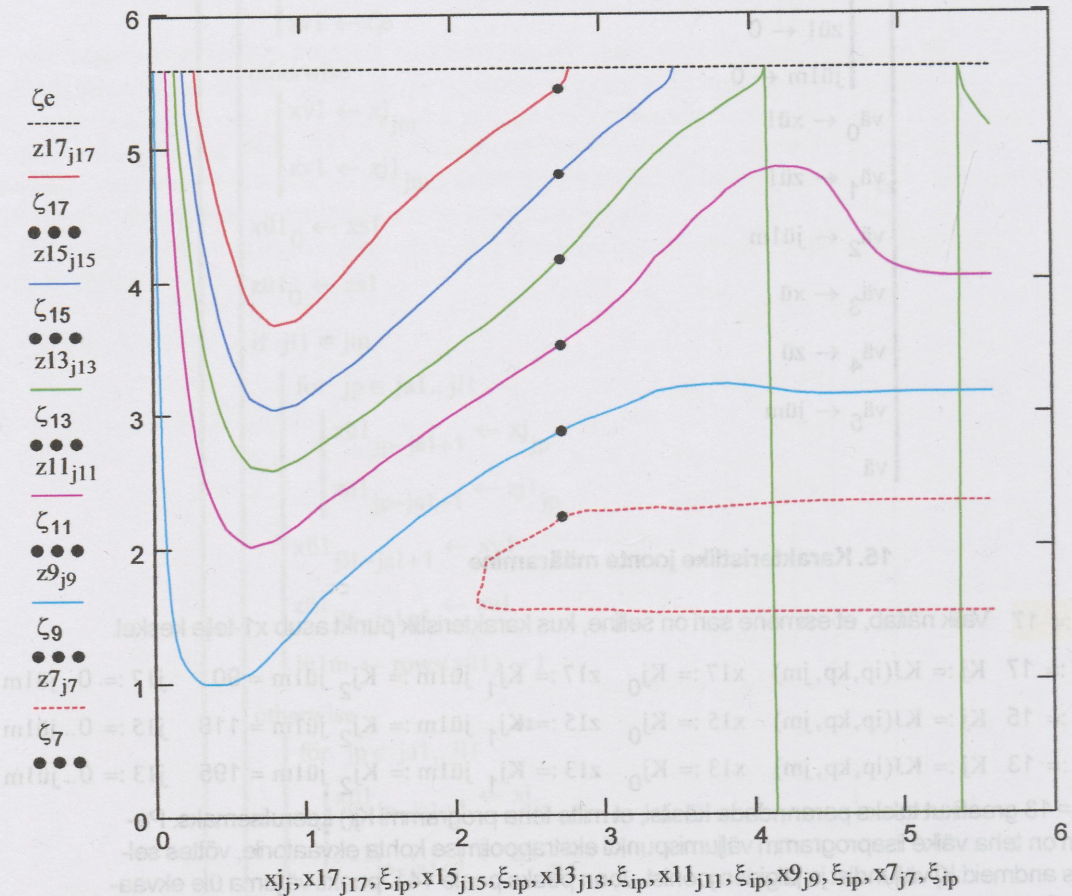
$$xv \leftarrow -a \cdot 5.6^2 + c$$

$$z13_{j1+1} := \zeta_e$$

Teise sisenemise juures jätab programm ekvaatori punkti määramata. Soovime ka seda teha käsitsi. Esimene määratud punkt pärast sisenemist on 189. punkt Saab näha massiivi z13 väljatrukist. Sealt on tarvis ekstrapoolida 1 võrra väiksema indeksi kohale.

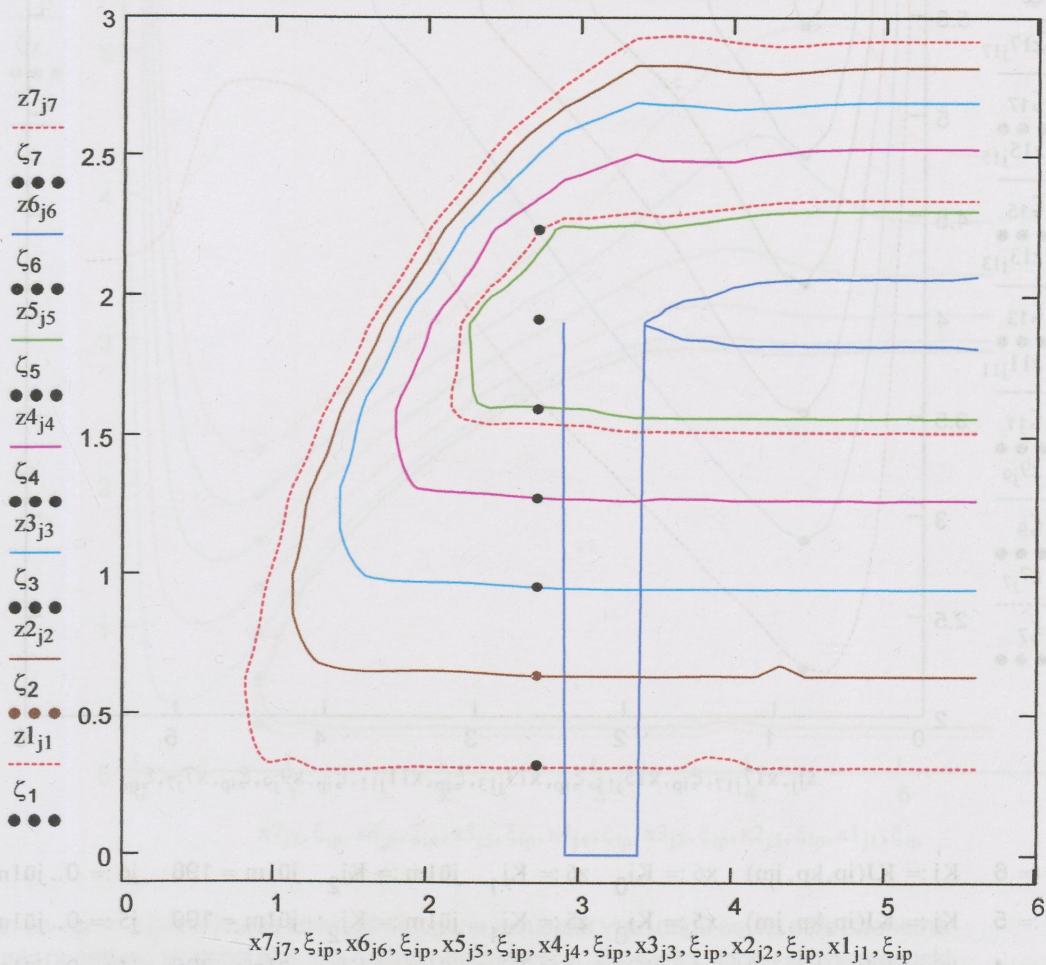
$$ES(xj, zj, ja) := \begin{cases} a \leftarrow \frac{xj_{ja+1} - xj_{ja}}{(zj_{ja+1} - zj_{ja}) \cdot (zj_{ja+1} + zj_{ja} - 2 \cdot 5.6)} & ja := 189 \\ c \leftarrow xj_{ja} - a \cdot zj_{ja} \cdot (zj_{ja} - 2 \cdot 5.6) & x13_{ja-1} := ES(x13, z13, ja) \\ xs \leftarrow -a \cdot (5.6)^2 + c & z13_{ja-1} := \zeta_e \end{cases}$$

kp := 11 K_j := KJ(ip, kp, jm) x11 := K_{j0} z11 := K_{j1} jü1m := K_{j2} jü1m = 197 j11 := 0..jü1m
 kp := 9 K_j := KJ(ip, kp, jm) x9 := K_{j0} z9 := K_{j1} jü1m := K_{j2} jü1m = 200 j9 := 0..jü1m
 kp := 7 K_j := KJ(ip, kp, jm) x7 := K_{j3} z7 := K_{j4} jüm := K_{j5} jüm = 247 j7 := 0..jüm



kp := 6 K_j := KJ(ip, kp, jm) x6 := K_{j3} z6 := K_{j4} jüm := K_{j5} jüm = 195 j6 := 0..jüm
 kp := 5 K_j := KJ(ip, kp, jm) x5 := K_{j3} z5 := K_{j4} jüm := K_{j5} jüm = 239 j5 := 0..jüm
 kp := 4 K_j := KJ(ip, kp, jm) x4 := K_{j3} z4 := K_{j4} jüm := K_{j5} jüm = 273 j4 := 0..jüm
 kp := 3 K_j := KJ(ip, kp, jm) x3 := K_{j3} z3 := K_{j4} jüm := K_{j5} jüm = 299 j3 := 0..jüm

$kp := 2$ $Kj := KJ(ip, kp, jm)$ $x2 := Kj_3$ $z2 := Kj_4$ $jüm := Kj_5$ $jüm = 321$ $j2 := 0..jüm$
 $kp := 1$ $Kj := KJ(ip, kp, jm)$ $x1 := Kj_3$ $z1 := Kj_4$ $jüm := Kj_5$ $jüm = 343$ $j1 := 0..jüm$



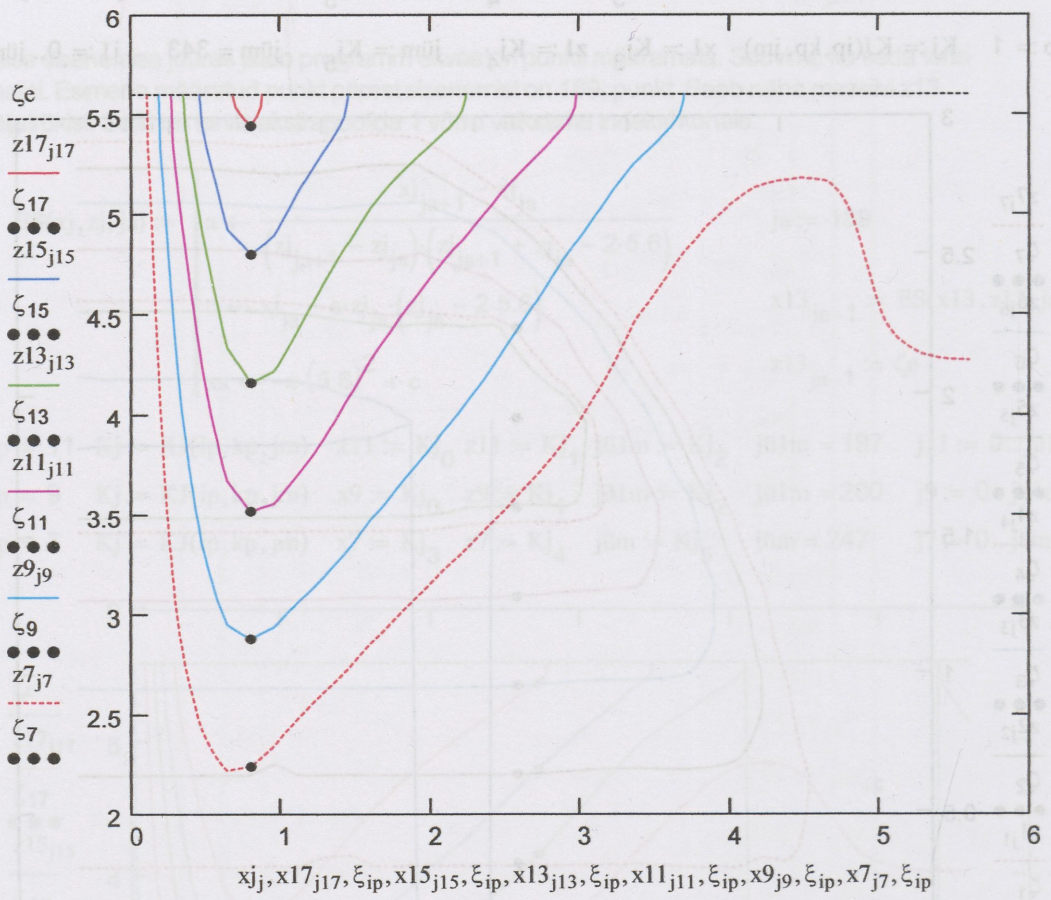
$kp = 6$ joon, sinine, tähendab tegejikut, et joon siseneb paremalt, alumine osa, ja suundub karakteristlikku punktini ning pöördu tagasu ja ühineb sinise joone ülemise osaga. Siis väljub ülemist teed mööda paremale. Need detailid joonistuks välja siis, kui suurendaksime arvutuslike punktide tihedust ehk võtaks $jm = 200$ asemel näiteks 300.

Need on karakteristlikud jooned nn "lõunapoolkera" poolel meridaantasandil $\varphi = 0$. "Põhja-poolkera" osa saame, kui peegeldame saadud graafikuid "ekvatoriaaltasandi" suhtes üles. Tasandit kujutab eelmisel joonisel kujutatud horisontaalne must punktiirjoon.

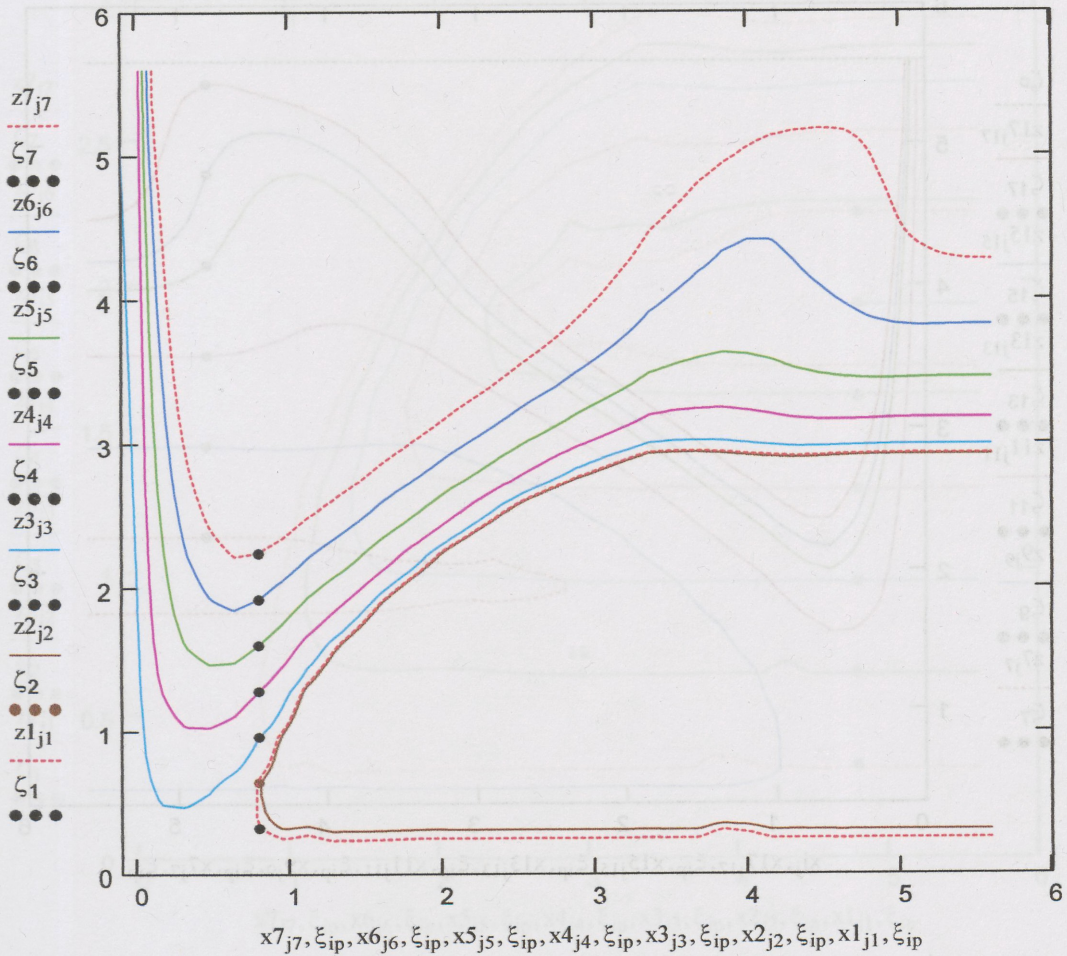
Teeme sama sarja, kuid $ip = 5$ annab karakteristliku punkti joonise vasakusse ossa.

ip := 5

$kp := 17$ $Kj := KJ(ip, kp, jm)$ $x17 := Kj_0$ $z17 := Kj_1$ $jü1m := Kj_2$ $jü1m = 8$ $j17 := 0..jü1m$
 $kp := 15$ $Kj := KJ(ip, kp, jm)$ $x15 := Kj_0$ $z15 := Kj_1$ $jü1m := Kj_2$ $jü1m = 37$ $j15 := 0..jü1m$
 $kp := 13$ $Kj := KJ(ip, kp, jm)$ $x13 := Kj_0$ $z13 := Kj_1$ $jü1m := Kj_2$ $jü1m = 69$ $j13 := 0..jü1m$
 $kp := 11$ $Kj := KJ(ip, kp, jm)$ $x11 := Kj_0$ $z11 := Kj_1$ $jü1m := Kj_2$ $jü1m = 98$ $j11 := 0..jü1m$
 $kp := 9$ $Kj := KJ(ip, kp, jm)$ $x9 := Kj_0$ $z9 := Kj_1$ $jü1m := Kj_2$ $jü1m = 127$ $j9 := 0..jü1m$
 $kp := 7$ $Kj := KJ(ip, kp, jm)$ $x7 := Kj_0$ $z7 := Kj_1$ $jü1m := Kj_2$ $jü1m = 197$ $j7 := 0..jü1m$



$kp := 6 \quad K_j := KJ(ip, kp, jm) \quad x_6 := Kj_0 \quad z_6 := Kj_1 \quad j\ddot{u}lm := Kj_2 \quad j\ddot{u}lm = 198 \quad j_6 := 0..j\ddot{u}lm$
 $kp := 5 \quad K_j := KJ(ip, kp, jm) \quad x_5 := Kj_0 \quad z_5 := Kj_1 \quad j\ddot{u}lm := Kj_2 \quad j\ddot{u}lm = 199 \quad j_5 := 0..j\ddot{u}lm$
 $kp := 4 \quad K_j := KJ(ip, kp, jm) \quad x_4 := Kj_0 \quad z_4 := Kj_1 \quad j\ddot{u}lm := Kj_2 \quad j\ddot{u}lm = 200 \quad j_4 := 0..j\ddot{u}lm$
 $kp := 3 \quad K_j := KJ(ip, kp, jm) \quad x_3 := Kj_0 \quad z_3 := Kj_1 \quad j\ddot{u}lm := Kj_2 \quad j\ddot{u}lm = 200 \quad j_3 := 0..j\ddot{u}lm$
 $kp := 2 \quad K_j := KJ(ip, kp, jm) \quad x_2 := Kj_3 \quad z_2 := Kj_4 \quad j\ddot{u}m := Kj_5 \quad j\ddot{u}m = 343 \quad j_2 := 0..j\ddot{u}m$
 $kp := 1 \quad K_j := KJ(ip, kp, jm) \quad x_1 := Kj_3 \quad z_1 := Kj_4 \quad j\ddot{u}m := Kj_5 \quad j\ddot{u}m = 345 \quad j_1 := 0..j\ddot{u}m$

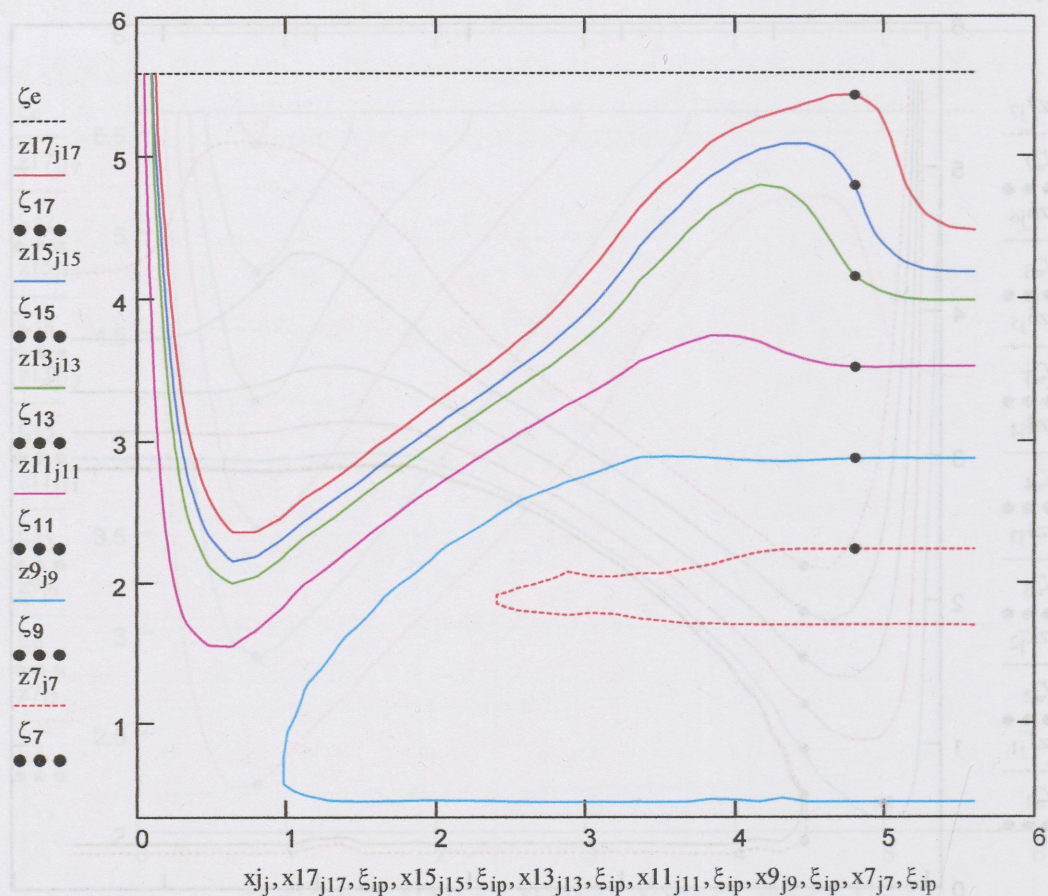


Siin on $kp = 3$ joone juures tekkinud niisugune arvutuslik viga, nagu asuks selle sisenemispunkt negatiivse abstsissi alas ehk sisenemispunkt oleks sfääri teljel. Joone sisenemispunkt peab asuma ekvaatoril nagu mitmel järgnevalgi joonel. See kaob samuti, kui suurendame jm .

Järgmisena veel seeria karakteristlike punktidega parempoolses joonise osas.

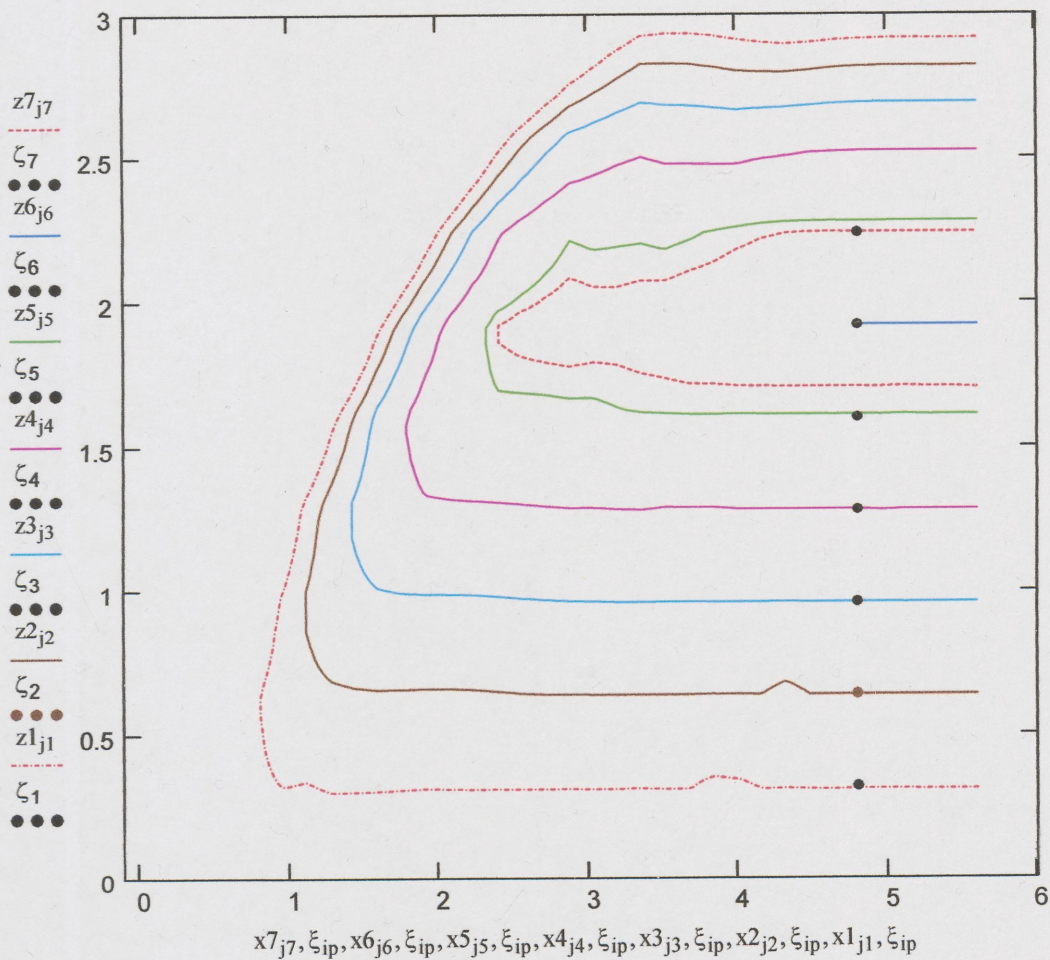
ip := 30

$kp := 17$	$Kj := KJ(ip, kp, jm)$	$x_{17} := Kj_0$	$z_{17} := Kj_1$	$j_{ü1m} := Kj_2$	$j_{ü1m} = 196$	$j_{17} := 0..j_{ü1m}$
$kp := 15$	$Kj := KJ(ip, kp, jm)$	$x_{15} := Kj_0$	$z_{15} := Kj_1$	$j_{ü1m} := Kj_2$	$j_{ü1m} = 197$	$j_{15} := 0..j_{ü1m}$
$kp := 13$	$Kj := KJ(ip, kp, jm)$	$x_{13} := Kj_0$	$z_{13} := Kj_1$	$j_{ü1m} := Kj_2$	$j_{ü1m} = 197$	$j_{13} := 0..j_{ü1m}$
$kp := 11$	$Kj := KJ(ip, kp, jm)$	$x_{11} := Kj_0$	$z_{11} := Kj_1$	$j_{ü1m} := Kj_2$	$j_{ü1m} = 199$	$j_{11} := 0..j_{ü1m}$
$kp := 9$	$Kj := KJ(ip, kp, jm)$	$x_9 := Kj_3$	$z_9 := Kj_4$	$j_{ü1m} := Kj_5$	$j_{üm} = 345$	$j_9 := 0..j_{üm}$
$kp := 7$	$Kj := KJ(ip, kp, jm)$	$x_7 := Kj_3$	$z_7 := Kj_4$	$j_{üm} := Kj_5$	$j_{üm} = 229$	$j_7 := 0..j_{üm}$



$kp := 6$ $j6 := 30..35$ $x6_{j6} := \xi_{j6}$ $z6_{j6} := \zeta_6$ Selle kp puhul on sama olukord kui
 $ip = 17$ puhul, et sisenev joon langeb antud arvutustäpsuse korral kokku väljuva joonega, ainult
 nüüd langevad nad kokku kogu ulatuses. Sisenev ja väljuv eralduvad arvutuspunktide tihenda-
 misel ehk j m suurendamisel.

$kp := 5$	$Kj := KJ(ip, kp, jm)$	$x5 := Kj_3$	$z5 := Kj_4$	$jüm := Kj_5$	$jüm = 235$	$j5 := 0..jüm$
$kp := 4$	$Kj := KJ(ip, kp, jm)$	$x4 := Kj_3$	$z4 := Kj_4$	$jüm := Kj_5$	$jüm = 273$	$j4 := 0..jüm$
$kp := 3$	$Kj := KJ(ip, kp, jm)$	$x3 := Kj_3$	$z3 := Kj_4$	$jüm := Kj_5$	$jüm = 299$	$j3 := 0..jüm$
$kp := 2$	$Kj := KJ(ip, kp, jm)$	$x2 := Kj_3$	$z2 := Kj_4$	$jüm := Kj_5$	$jüm = 321$	$j2 := 0..jüm$
$kp := 1$	$Kj := KJ(ip, kp, jm)$	$x1 := Kj_3$	$z1 := Kj_4$	$jüm := Kj_5$	$jüm = 343$	$j1 := 0..jüm$



16. Kokkuvõtteks

Võrreldes saadud karakteristlikke jooni IV osas saadutega, võib tekkida küsimus kas seal-
sed on ikka õiged? Käib ju sealne arvutus samuti sfäärilistes koordinaatides sama laengusfää-
ri kohta. Vastuolu ei ole. Sealne karakteristikute arvutusruum ei ole reaalne ruum. θ_1 koordi-
naadil ei ole reaalse ruumi mõõdet. Töö käib formaalses ruumis, kahemõõtmeliste massiivi-
dega, mida kujutatakse samuti kahemõõtmelises matemaatilises ruumis.

Kui soovitakse leida kiiruskomponentidele väärtusi kõigis 36×18 väljapunktis, peab määra-
ma kõiki neid punkte läbivad karakteristlikud jooned, so 648 erinevat joont. Joonte kohta peab
täpselt teada saama nende sisenemispunktid vaatevälja ja väljumispunktid sealt, kui joon ei
osutu kinniseks ühes väljapooles. Kinnine joon asub täies ulatuses vaateväljas. Kõike teades
saab arvutada vajalikud joonintegraalid võrrandite vabadest liikmetest. Pärast selle töö tege-
mist silindrilises koordinaatide süsteemis (trükise III osa) lootis autor, et ehk annab sfääriline
korrapärasemaid ja täpsemini määratavaid karakteristlikke jooni. IV osas ja eriti käesolevas
osas saime iteratsioonimeetodil küll märksa paremaid lahendid kiiruskomponentidele ja jao-
tusfunktsioonile, kuid joonte määramise täpsus jäi ikka endiseks. Toodud graafikud näitavad, et
siin on tekkinud küll joonte oluline korrapärasustumine aga neid mööda integreerimine on ikkagi
liiga komplitseeritud integreerimise alguse ja lõpu otsimise osas. Niisiis jääme sama järeldu-
se juurde, mille tegime juba III osas – karakteristlike joonte abil saame paremad tulemused
ehk siis, kui on võimalik karakteristliku võrrandi lahendid saada täpsete valemite kujul.

Head kasutamist! Ülb Uder, august 2025.