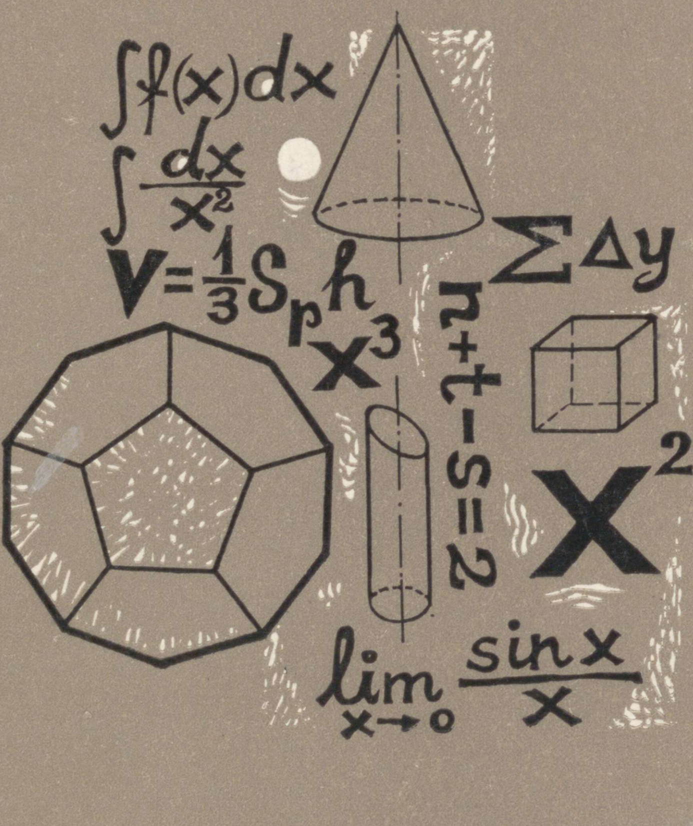
E. ETVERK

O. PRINITS

MATEMAATIKA

XI KLASSILE



E. ETVERK, O. PRINITS

MATEMAATIKA

XI KLASSILE

3. TRÜKK

KIRJASTUS «VALGUS» TALLINN 1968

51
E 95

Kunstiliselt kujundanud *J. Arrak*

Kinnitatud Eesti NSV Haridusministeeriumi poolt.

6—6

I. SIRGED JA TASAPINNAD.

1.1. TASAPIND JA SELLE KUJUTAMINE.

Geomeetria esimeses osas — **planimeetrias** ehk tasapinnageomeetrias õpitakse tundma t a s a p i n n a l i s t e kujundite omadusi. Geomeetria teise osa — **stereomeetria** ehk ruumigeomeetria ülesandeks on uurida r u u m i l i s i kujundeid, s. o. kujundeid, mis ei asetse kõigi oma punktidega ühel ja samal tasapinnal. Iga kujundi uurimisel on eeskätt vaja saada kujundist õige k u j u t l u s ning osata teda k u j u t a d a joonise abil.

Kõige lihtsamad kujundid on **punkt, sirgjoon** ja **tasapind;** neid nimetatakse **põhikujunditeks.** Põhikujundeid me ei defineeri. Nende abil uurime kõiki teisi kujundeid.

Punkte tähistatakse suurte ladina tähtedega, näiteks A, B, C jm., sirgeid väikeste ladina tähtedega, näiteks s, t, u jm., ja tasapindu väikeste kreeka tähtedega, näiteks α, β, ε jm.

Punkti ja sirge omadused on tuttavad planimeetria kursusest. Tasapinda iseloomustab tema järgmine omadus, nn. t a s a p i n n a p õ h i o m a d u s:

kui tasapinnal ja sirgjoonel on kaks ühist punkti, siis sirgjoone kõik punktid asetsevad sellel tasapinnal.

Sel juhul öeldakse, et sirge a s e t s e b tasapinnal ehk tasapind l ä b i b sirget.

Lauseid «sirge s asetseb tasapinnal α» ja «tasapind α läbib sirget s» kirjutame sümbolite abil lühidalt järgmiselt:

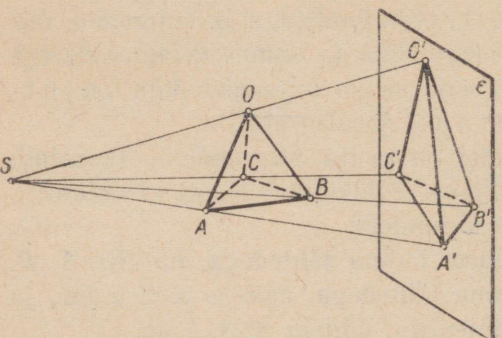
$s \subset \alpha$ ja $\alpha \supset s$.

Mingist ruumiobjektist tasapinnalise k u j u t i s e saamiseks toimime järgmiselt. Valgustame objekti ühest punktist väljuvate või paralleelsete valguskiirtega ja joonestame tekkiva varju piirjoone mingil tasapinnal. Niisugust varjujoonist nimetatakse objekti **projektsiooniks** ehk **kujutiseks** tasapinnal ning tasapinda, millel saadakse see joonis, **projektsioonipinnaks** ehk **ekraaniks.** Kiired, mis tekitavad kujutise, on **kujutamiskiired** ehk **projekteerivad kiired.**

Ruumiobjektiks tema tasapinnalise kujutise tuletamine on teatud liiki geomeetriline teisendus. Neid teisendusi käsitlev geomeetria osa on **kujutav geomeetria.**

Sõltuvalt kujutamiskiirte vastastikusest asendist eristatakse kahesuguseid projektsioone, nimelt t s e n t r a a l p r o j e k t s i o o n e ja p a r a l l e e l p r o j e k t s i o o n e.

Tsentraalprojektsiooniks nimetatakse kujundi projektsiooni juhul, kui kujutamiskiired lähtuvad ühest punktist.



JOON. 1.

Joonis 1 kujutab kolmnurkse püramiidi $OABC$ tsentraalprojektsiooni $O'A'B'C'$ tekkimist ekraanil ε. Püramiidi tippe ja servi projekteerivad kiired SA, SB jne. väljuvad siin ühest ja samast punktist S, mida nimetatakse **silmapunktiks.** Nende kiirte ja projektsioonipinna lõikepunktide hulk ongi kujundi projektsioon. Näiteks püramiidi tipu O projektsioon ekraanil ε on punkt O', kui punkt O' on sirge SO ja tasapinna ε lõikepunkt. Viimast asjaolu märgime sümbolites järgmiselt:

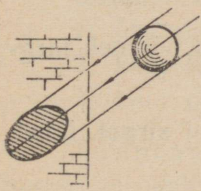
$$O' \equiv SO \times \varepsilon.$$

Kui silmapunkt S on lõpmata kaugel esemest ja ekraanist, siis kujutamiskiired on omavahel paralleelsed.

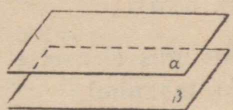
Projektsiooni, mis saadakse paralleelsete kujutamiskiirtega, nimetatakse paralleelprojektsiooniks.

Et päikesekiired on Päikese väga suure kauguse tõttu praktiliselt paralleelsed, siis võib nende poolt mingil tasapinnal tekitatud varjusid lugeda paralleelprojektsioonideks (joon. 2). Seevastu on fotograafilised ülesvõtted tsentraalprojektsioonid. Tsentraalprojektsioonis tehtud kujutist nimetatakse sagedasti ka perspektiiviks[1]. See kujutamisviis leiab rakendamist peamiselt maalikunstis ja arhitektuuris, sest ta võimaldab kujutada esemeid nii, nagu neid näeb meie silm. Kehade kujutamine paralleelprojektsioonis aga leiab rakendamist tehnikas ja teaduses, sest ta võimaldab kergesti keha mõõtmete kindlakstegemist.

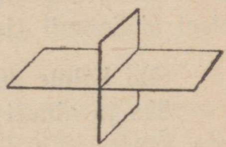
Ruumis oleva tasapinna kujutamiseks eraldame temast mõttes tüki, harilikult ristkülikukujulise, ning joonestame selle tüki paralleelprojektsiooni. Selleks on üldiselt rööpkülik; seepärast



JOON. 2.



JOON. 3.



JOON. 4.

kujutataksegi tasapindu harilikult rööpkülikutena. Nii kujutab joonis 3 kahte rõhttasapinda ja joonis 4 üht rõht- ja üht püsttasapinda. Tasapinna asendi selgitamiseks antakse mõnikord rööpküliku need küljed tugevamalt, mis on vaatlejale lähemal; samal põhjusel esitatakse lõigud, mis jäävad teise tasapinna varju, kas kriipsjoonega (nagu tasapinna β puhul joonisel 3) või jäetakse need lõigud üldse joonestamata (nagu joonisel 4). Viimasel juhtumil tekitab joonis kujutluse tasapindadest, mis on läbipaistmatud.

Õige kujutluse saamiseks ruumilistest kujunditest nende jooniste järgi peame oskama näha jooniseid n. ö. «ruumilistena». Selle kergendamiseks on kasulik kõrvuti joonistega vaadelda ka vastavaid mudeleid. Mudelite ehitamisel kasutame tasaseid vineeri- või papitükke (ka joonestuskolmnurki) tasapindadena ning mitmesuguseid vardaid (ka pliiatseid) sirgetena.

---

[1] *perspicere* (lad.) — läbi vaatama.

Ülesandeid.

1. Kuidas saab joonlauaga kontrollida, kas laua pind on tasane?
2. Esita joonisel tasapind ühes sellele kuuluva kahe lõikuva sirgega.
3. Kujuta joonisel kaks lõikuvat püsttasapinda.
4. Mitu tasapinda läheb läbi ühe punkti, läbi ühe sirge?
5. Esita joonisel kolm tasapinda läbi ühe sirge.

1.2. TASAPINNA MÄÄRAMINE PUNKTIDE JA SIRGETE ABIL.

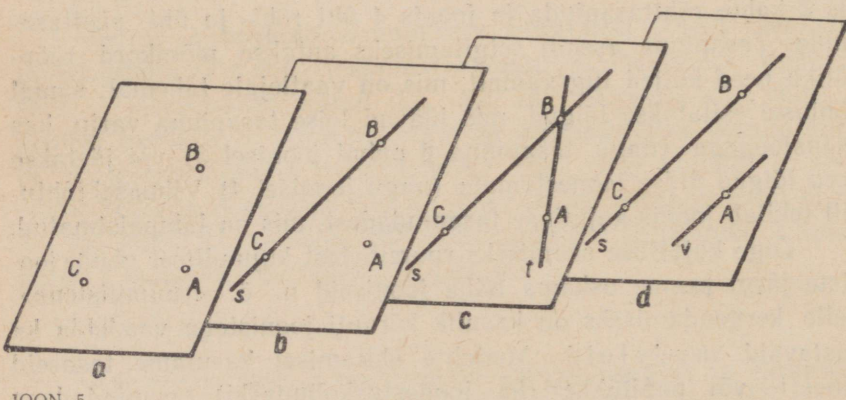
1.2.1. TASAPINNA MÄÄRAMINE KOLME PUNKTI ABIL.

Tasapinna määramine punktide ja sirgete abil põhineb järgmisel aksioomil (joon. 5, *a*):

läbi kolme punkti, mis ei asetse ühel ja samal sirgel, läheb üks ja ainult üks tasapind.

Sama tõsiasja väljendatakse veel kujul:

tasapind on määratud oma kolme punktiga, mis ei asetse ühel ja samal sirgel.



JOON. 5.

Sellest aksioomist järeldub nn. t a s a p i n d a d e ü h t i v u s e t e o r e e m:

kui kahel tasapinnal on kolm ühist punkti, mis ei asetse ühel ja samal sirgel, siis need tasapinnad ühtivad,

sest nende kolme punktiga on määratud ainult üks tasapind.

Tasapinda, mis on määratud punktidega A, B ja C, nimetame tasapinnaks ABC. Lause «Tasapind α on määratud punktidega A, B ja C» kirjutame lühidalt kujul

$$\alpha \equiv ABC.$$

1.2.2. TASAPINNA MUUD MÄÄRAMISE VIISID.

Kolme punktiga määramise viisi kõrval leidub veel kolm tasapinna määramise viisi. Esitame need kõik korraga järgmise teoreemi näol:

tasapind on määratud:
1) **ühe sirge ja väljaspool sirget asetseva punktiga;**
2) **kahe lõikuva sirgega;**
3) **kahe paralleelse sirgega.**

T õ e s t u s. Kui on antud kas sirge ja väljaspool seda asetsev punkt või kaks lõikuvat sirget või kaks paralleelset sirget, siis saab neil kujunditel ikka valida kolm punkti A, B ja C, mis ei asetse ühel sirgel (joon. 5, *b, c, d*). Need kolm punkti määravad ühe tasapinna, millel asetsevad antud sirgete ülejäänud punktid. Kui viimaste hulgast valiksime mingi muu mitte ühel sirgel asetseva punktide kolmiku A_1, B_1, C_1, siis nendega määratud tasapind ühtiks tasapinnaga ABC, sest neil tasapindadel oleks kolm ühist punkti, mis ei asetse ühel sirgel. Seega on nende andmetega määratud ikka ainult üks tasapind. Seda aga oligi vaja tõestada.

Jooniselt 5 selgub ühtlasi, kuidas kolmest punktist kui tasapinna määramisandmete baasist saab üle minna muudele määramisandmetele.

Sõltuvalt tasapinna määramise viisist saab tasapinda peale ühe kreeka tähe tähistada ja nimetada ka kas kolme punkti, kahe sirge või punkti ja sirge tähiste abil. Nii näiteks tasapind st on määratud sirgetega s ja t, tasapind Ms on määratud punktiga M ja sirgega s jne. Kui tasapind α on määratud näiteks sirgetega s ja t, siis märgime seda lühidalt nii:

$$\alpha \equiv st.$$

Ülesandeid.

6. Sirged a ja b lõikuvad punktis C, sirged a ja c punktis B ning sirged b ja c punktis A, kusjuures A, B ja C on erinevad punktid. Näita, et need kolm sirget asetsevad ühel ja samal tasapinnal, ja anna tasapinna kõik määramisviisid nimetatud kolme punkti ja kolme sirge abil.
7. On antud mittetasane nelinurk $ABCD$, s. o. nelinurk, mille kõik tipud ei asetse ühel ja samal tasapinnal. Mitu tasapinda ja millised nimelt on määratud selle nelinurga tippudega? Mitmel ja missugustel tasapindadel nimelt asetseb selle nelinurga kumbki diagonaal?
8. On antud neli punkti, mis ei ole ühel ja samal tasapinnal. Kas võib leiduda nende hulgas kolm punkti, mis asetsevad ühel ja samal sirgel? Mitu sirget ja mitu tasapinda on määratud nende nelja punktiga?
9. Mitu sirget on määratud n punktiga ($n>2$), kui ükski punktide kolmik pole ühel ja samal sirgel?
10. Mitu tasapinda on määratud n punktiga ($n>3$), kui ükski punktide nelik pole ühel ja samal tasapinnal?
11. Paljude aparaatide toeks, nagu fotoaparaat, pikksilm, teodoliit jm., tarvitatakse k o l m e jalaga statiivi. Selgita, miks.

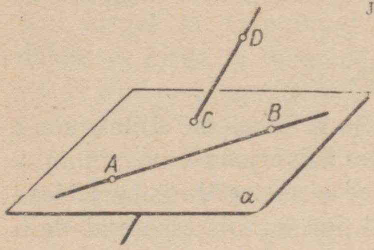
1.3. KAHE SIRGJOONE VASTASTIKUSED ASENDID. KIIVSIRGED.

Ühe ja sama tasapinna kaks sirget teatavasti kas lõikuvad või on paralleelsed. Ümberpöördult, kui mistahes kaks sirget lõikuvad või on paralleelsed, siis saab neist ikka läbi panna tasapinna.

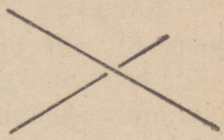
Näitame nüüd, et kahel sirgel r u u m i s on veel kolmas vastastikuse asendi võimalus. Selleks võtame tasapinnal α sirge AB ja väljaspool sirget punkti C (joon. 6). Kui nüüd väljaspool tasapinda α asetsevast punktist D tõmbame sirge CD, siis viimane pole sirgega AB ühel ja samal tasapinnal. Tõepoolest, kui leiduks tasapind β, mis läbiks sirgeid AB ja CD, siis punkte A, B ja C peaks läbima kaks mitteühtivat tasapinda, nimelt tasapind α, mis ei sisalda sirget CD, ja tasapind β, mis sisaldab sirge CD. Et punkte

A, B ja C läbib ainult üks tasapind, milleks on α, siis tasapinda β pole olemas.

Kahte sirget, mida ei saa läbida üks ja sama tasapind, nimetatakse **kiivsirgeteks.**



JOON. 6.



JOON. 7.

Seega on ruumis kaks mitteühtivat sirget kas lõikuvad, paralleelsed või kiivsed.

Kahe kiivsirge kujutamisel joonestatakse see sirge katkestatult, mis jääb teise alla või taha (joon. 7). Paralleelseid sirgeid, mis pole joonisepinnal (ekraanil), kujutame jooniselgi paralleelsetena. See on õigustatud eeldusel, et kujutamine toimub paralleelsete kiirte abil.

Ülesandeid.

12. Mitu kuubi serva lõikuvad ühe servaga, on paralleelsed ühe servaga, on kiivsed ühe servaga?

13. Mitu risttahuka serva lõikuvad, mitu on paralleelsed ja mitu on kiivsed risttahuka ühe diagonaaliga?

14. Kui palju on horisontaalseid ja kui palju vertikaalseid sirgeid, mis läbivad antud punkti?

15. Mitu horisontaalset sirget saab joonestada antud vertikaalsel tasapinnal läbi antud punkti?

16. Kuidas asetsevad teineteise suhtes mittetasase nelinurga diagonaalid?

1.4. KAHE TASAPINNA LÕIKEJOON.

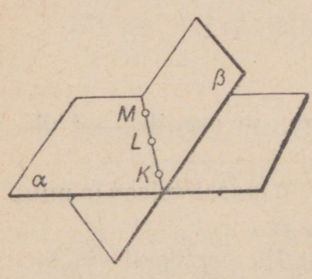
Kui kahel tasapinnal on ühiseid punkte, aga tasapinnad ei ühti, siis öeldakse, et nad l õ i k u v a d. Meie kujutluse järgi kahel lõikuval tasapinnal ei saa olla ainult üksikuid ühiseid punkte, vaid neil peab olema ü h i n e j o o n. Viimast nimetatakse tasapindade **lõikejooneks.** Tõestame, et

kahe tasapinna lõikejoon on sirge.

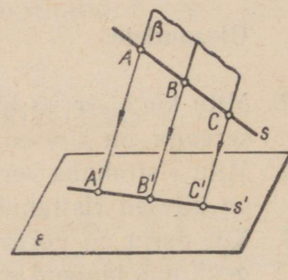
T õ e s t u s. Kui kahe tasapinna α ja β lõikejoon ei oleks sirge (joon. 8), siis peaks ta olema kõver. Kõverjoonel on võimalik valida kolm punkti K, L ja M nii, et nad ei asetse ühel sirgel. Need kolm mitte ühel sirgel asetsevat punkti oleksid siis tasapindade α ja β ühised punktid ning järelikult peaksid need tasapinnad ühtima. Et antud tasapinnad eelduse järgi ei ühti, siis ei saa nende lõikejoonel olla kolme punkti, mis ei asetse ühel sirgel; järelikult peab lõikejoon olema sirge. Sellega on teoreem tõestatud.

Toetudes ülalantud teoreemile saab näidata, et nii tsentraal- kui ka paralleelprojektsioonis

sirgjoone kujutis on üldiselt sirge, erijuhul aga punkt.



JOON. 8.



JOON. 9.

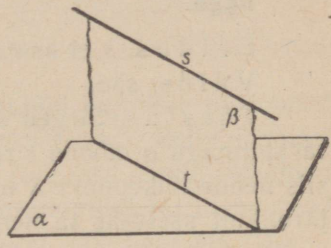
Sirgjoone s punktide A, B ja C kujutamiskiired AA', BB' ja CC' kas väljuvad kõik ühest punktist või on paralleelsed (joon. 9). Nii ühel kui teisel juhul asetsevad nad kõik ühel ja samal tasapinnal β, s. t. sirge s kujutamiskiirte tasapinnal, mis on määratud sirgega s ja ühe kiirega, näiteks kiirega AA'. Sirge s kujutiseks ekraanil ε on tasapindade β ja ε lõikejoon s', mis teatavasti on sirge.

Kui sirge s ühtib ühe kujutamiskiirega, siis selle kiire ja ekraani lõikepunkt on sirge kõigi punktide kujutiseks.

1.5. SIRGE JA TASAPIND.

1.5.1. SIRGE JA TASAPINNA VASTASTIKUSED ASENDID.

Tasapinna põhiomadusest selgus, et kui sirgel on tasapinnaga kaks ühist punkti, siis sirge kõik punktid on tasapinnal. Kui sirgel ja tasapinnal on üksainus ühine punkt, siis öeldakse, et sirge ja tasapind lõikuvad. Kui neil aga pole ühtki ühist punkti, siis öeldakse, et sirge ja tasapind on paralleelsed. Muid võimalusi ilmselt olla ei saa. Niisiis on ruumis igal sirgel iga tasapinna suhtes üks järgmisest kolmest asendist: sirge kas asetseb (ehk on) tasapinnal, lõikab tasapinda või on tasapinnaga paralleelne.



JOON. 10.

Nende tõsiasjade märkimiseks kasutame sümboleid $\subset$ (asetseb), $\supset$ (läbib), $\times$ (lõikab) ja $\parallel$ (on paralleelne). Nii kirjutame allantud lauseid lühidalt järgmiselt:

sirge s asetseb tasapinnal α	$s \subset \alpha$;
sirge t läbib punkti M	$t \supset M$
sirge u lõikab tasapinda β	$u \times \beta$;
sirge v on paralleelne tasapinnaga γ	$v \parallel \gamma$.

Kahe kujundi, näiteks sirge u ja tasapinna β lõikumise üleskirjutust $u \times \beta$ kasutame ühtlasi ka nende lõikekujundi märkimiseks. Nii kirjutame lause «Sirge u ja tasapinna β lõikepunkt on A» kujul

$$u \times \beta \equiv A$$

ja lause «Tasapinnad α ja β lõikuvad mööda sirget s» kujul

$$\alpha \times \beta \equiv s.$$

Eelneva põhjal kirjutus

$$(\alpha \times \beta) \supset M$$

tähendab, et tasapindade α ja β lõikesirge läbib punkti M.

Kahe kujundi mingi vastastikuse asendi eitamist märgitakse vastava märgi läbitõmbamisega.

1.5.2. SIRGE JA TASAPINNA PARALLEELSUSE TUNNUS.

Sirge ja tasapinna vastastikuse asendi uurimisel on otstarbekohane kasutada järgmist teoreemi, mida nimetatakse ka sirge ja tasapinna paralleelsuse tunnuseks:

kui sirge, mis pole tasapinnal, on paralleelne tasapinnal asetseva sirgega, siis ta on paralleelne ka selle tasapinnaga.

Eeldus. s ei asetse tasapinnal α; $t \subset \alpha$; $s \| t$ (joon. 10).

Väide. $s \| \alpha$.

Tõestus. Sirged s ja t määravad tasapinna β, mis lõikub tasapinnaga α mööda sirget t. Kui sirge s lõikuks tasapinnaga α, siis nende lõikepunkt X oleks nii tasapinnal β kui ka tasapinnal α, järelikult asetseks ta nende tasapindade lõikesirgel t. Seega oleks punkt X sirgete s ja t ühine punkt. Kuid eelduse järgi neil sirgeil ühist punkti pole ning seepärast ei saa sirge s lõikuda tasapinnaga α, vaid on temaga paralleelne.

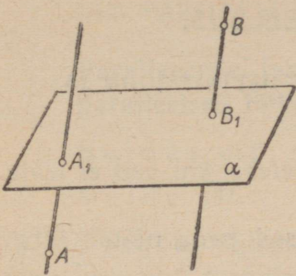
Sellest teoreemist järeldame, et

sirge, mis on paralleelne kahe tasapinna lõikejoonega ega asetse kummalgi tasapinnal, on mõlema tasapinnaga paralleelne,

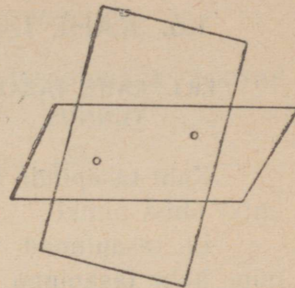
sest ta on paralleelne sirgega, mis asetseb nii ühel kui ka teisel tasapinnal.

Ülesandeid.

17. Kuidas võib asetseda tasapinnaga paralleelne sirge sellel tasapinnal antud sirge suhtes?
18. Mitu sirget saab panna läbi väljaspool tasapinda antud punkti paralleelselt antud tasapinnaga?
19. Näita, et risttahuka iga serv on paralleelne kahe tahuga.
20. Antud on tasapind ja sellega paralleelne sirge. Tõesta, et seda sirget läbiva tasapinna ja antud tasapinna lõikejoon on paralleelne antud sirgega.
21. Tasapinnast α ühel pool on antud punkt A ja teisel pool punkt B. Läbi nende punktide on pandud kaks paralleelset sirget, mis lõikavad tasapinda α vastavalt punktides A_1 ja B_1 (joon. 11). Leia punkt, kus sirge AB lõikab tasapinda α.



JOON. 11.



JOON. 12.

22. Joonisel 12 on antud kahe tasapinnatüki kujutiste piirjooned ja nende tasapindade lõikejoone kaks punkti. Esita joonisel nende tasapindade lõikumine, s. t. joonesta nende lõikejoon ja tõmba tugevamalt kummagi tasapinnatüki piirjoone need osad, mis on nähtavad. (Ülesandel on kaks lahendust.)

23. Püramiidi *SABC* tahul *SAB* on antud punkt *M* ja tahul *SBC* punkt *N* (joon. 13). Tee joonis ja esita sellel:

1) tasapindade *SMN* ja *SAB* lõikejoon;
2) tasapindade *SMN* ja *SBC* lõikejoon;
3) tasapindade *SMN* ja *ABC* lõikejoon;
4) sirge *MN* ja tasapinna *ABC* lõikepunkt;
5) tasapindade *SMN* ja *SAC* lõikejoon;
6) sirge *MN* ja tasapinna *SAC* lõikepunkt.

Tähista saadud lõikekujundid ja avalda nad andmete kaudu.

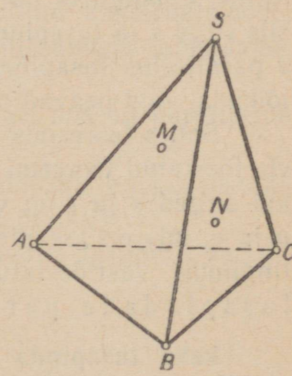
Näiteks, kui sirge *MN* ja tasapinna *SAC* lõikepunkt on *P*, siis

$$P \equiv MN \times SAC.$$

24. Püramiidi *SABC* serval *SA* on antud punkt *M*, serval *SB* punkt *N* ja serval *SC* punkt *P*. Tee joonis ja leia sellel:

1) punktid, kus sirged *MN*, *NP* ja *PM* lõikavad tasapinda *ABC*;

2) tasapindade *ABC* ja *MNP* lõikejoon.



JOON. 13.

1.6. KAHE TASAPINNA PARALLEELSUS.

1.6.1. KAHE TASAPINNA PARALLEELSUSE DEFINITSIOON JA TUNNUS.

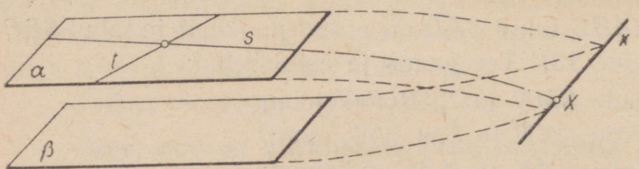
Kaht tasapinda nimetatakse paralleelseteks, kui neil ei leidu ühtki ühist punkti.

Et tasapinnad võivad olla paralleelsed, seda näitab järgmine kahe tasapinna paralleelsuse tunnus:

kaks tasapinda on paralleelsed, kui ühe tasapinna kahest lõikuvast sirgest kumbki on paralleelne teise tasapinnaga.

Eeldus. $s \times t$; $\alpha \equiv st$; $s \parallel \beta$; $t \parallel \beta$ (joon. 14).

Väide. $\alpha \parallel \beta$.



JOON. 14.

Tõestus. Tasapinnad α ja β ei ühti, sest sirged s ja t on tasapinnal α, kuid mitte tasapinnal β. Kui tasapinnad α ja β lõikuksid, siis nende lõikesirge x, olles tasapinnal α, lõikuks vähemalt ühega sirgetest s ja t, kuna teisega neist ta võib olla paralleelne. Lõikugu ta näiteks sirgega s punktis X. See punkt X oleks siis sirge s ja tasapinna β lõikepunkt. Kuid eelduse järgi on sirge s paralleelne tasapinnaga β. Järelikult ei saa tasapinnad α ja β lõikuda, vaid peavad olema paralleelsed. Seda oligi vaja tõestada.

Selles teoreemis eeldasime, et $s \parallel \beta$ ja $t \parallel \beta$. Eelmises paragrahvis tõestatud teoreemi järgi on aga niisugused eeldused täidetud, kui sirged s ja t on vastavalt paralleelsed kahe lõikuva sirgega u ja v, mis on tasapinnal β, s. t. kui $s \parallel u$ ja $t \parallel v$. Kasutades neid tingimusi vasttõestatud teoreemi eelduses, võime sõnastada nn. tasapindade paralleelsuse tunnuse järgmiselt:

kaks tasapinda on paralleelsed, kui ühe tasapinna kaks lõikuvat sirget on vastavalt paralleelsed teise tasapinna kahe sirgega.

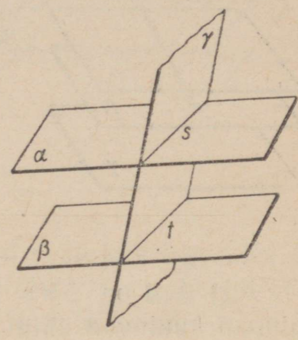
1.6.2. PARALLEELSETE TASAPINDADE PÕHIOMADUS.

Paralleelsete tasapindade lõikamisel tasapinnaga tekivad paralleelsed lõikesirged.

Eeldus. $\alpha \| \beta$; $\alpha \times \gamma = s$; $\beta \times \gamma = t$ (joon. 15).

Väide. $s \| t$.

Tõestus. Sirged s ja t, olles ühel ja samal tasapinnal γ, kas lõikuvad või on paralleelsed. Kui sirged s ja t lõikuksid, siis nende lõikepunkt X asetseks tasapinnal α, sest sirge s kõik punktid asetsevad tasapinnal α; samuti asetseks punkt X tasapinnal β, sest sirge t kõik punktid asetsevad tasapinnal β. Seega oleks X tasapindade α ja β ühine punkt. Kuid ühist punkti neil tasapindadel olla ei saa, sest $\alpha \| \beta$. Järelikult s ja t ei lõiku, vaid on paralleelsed.



JOON. 15.

Ülesandeid.

25. Tõesta, et risttahuka vastastahkude tasapinnad on paralleelsed.

26. Eeldades, et ruumis saame igal antud või vabalt võetud tasapinnal teostada planimeetriast tuntud konstruktsioone, koosta kava järgmiste konstruktsioonülesannete lahendamiseks ruumis:

1) läbi antud punkti panna mingi sirge, mis on paralleelne antud tasapinnaga;

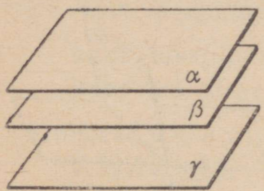
2) läbi antud punkti asetada tasapind, mis on paralleelne antud tasapinnaga (mis ei läbi antud punkti);

3) läbi ühe kahest antud kiivsirgest panna tasapind, mis on paralleelne teise antud sirgega.

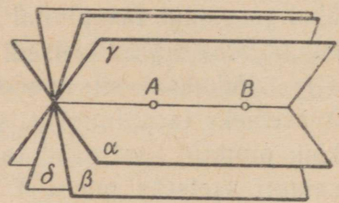
1.7. KOLME TASAPINNA VASTASTIKUSED ASENDID.

Kolm tasapinda võivad asetseda nii, et

1) neil p o l e ü h t k i lõikesirget (joon. 16); sel juhul tasapinnad on paralleelsed;



JOON. 16.



JOON. 17.

2) neil on ü k s lõikesirge (joon. 17); sel juhul need tasapinnad kuuluvad ühte t a s a p i n d a d e k i m p u;

3) neil on k a k s lõikesirget (joon. 15); sel juhul kaks tasapinda nende hulgast on paralleelsed;

4) neil on k o l m lõikesirget (joonised 18 ja 19).

Viimasel juhul on kolme tasapinna lõikesirgetel kaks vastastikuse asendi võimalust, nagu selgub järgmisest teoreemist.

Kolme tasapinna lõikesirged on kas paralleelsed või lõikuvad ühes ja samas punktis.

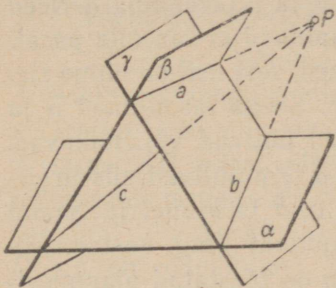
E e l d u s. $\alpha \times \beta \equiv c$; $\beta \times \gamma \equiv a$; $\alpha \times \gamma \equiv b$ (joonised 18 ja 19).

V ä i d e. 1) Kui $a \times b \equiv P$, siis $c \supset P$ (joon. 18).

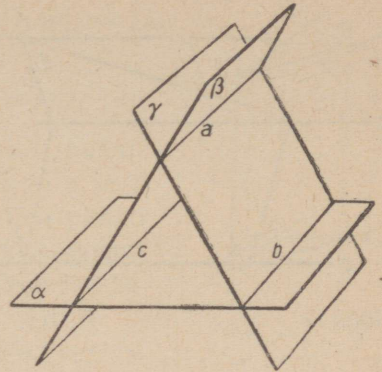
2) Kui a ja b ei lõiku, siis $a \| b$, $a \| c$ ja $b \| c$ (joon. 19).

T õ e s t u s. Sirgetest a, b ja c saab koostada kolm sirgete paari, nimelt paari a ja b, paari a ja c, paari b ja c. Neist esimene paar on tasapinnal γ, teine tasapinnal β ja kolmas tasapinnal α. Järelikult pole nende sirgete hulgas kiivsirgeid.

Kui üks paar sirgeid, näiteks a ja b, lõikuvad (joon. 18), siis nende lõikepunkt P on nii tasapinnal α, kus asetseb sirge b, kui ka tasapinnal β, kus asetseb sirge a. Niisiis on punkt P tasapindade α ja β ühine punkt ja järelikult asetseb nende tasapindade lõikesirgel c. Sel juhul sirged a, b ja c lõikuvad ühes ja samas punktis P.



JOON. 18.



JOON. 19.

Kui a ja b ei lõiku, siis $a \| b$, sest nad ei ole kiivsirged. Kuid siis ka $a \| c$ ja $b \| c$, sest a ja c või b ja c lõikumise puhul järelduks tõestuse eelmise osa põhjal, et ka a ja b lõikuvad.

Ülesandeid.

27. Paiguta kolm papitükki kui tasapinna mudelid üksteise suhtes niisugusesse asendisse, et nende lõikesirgete hulgas on üks paar, kaks paari, kolm paari ristuvaid sirgeid.
28. On antud kiivsirged x ja y ning esimesel neist punktid A ja B, teisel C. Missugused tasapinnad on määratud nende punktide ja sirgetega? Kuidas asetsevad nende tasapindade lõikesirged üksteise suhtes?

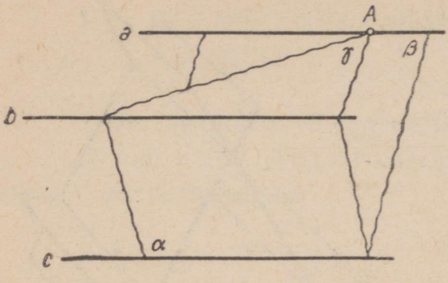
1.8. KOLM PARALLEELSET SIRGET.

Toetudes eelmisele teoreemile saab näidata, et ruumigeomeetrias jääb õigeks järgmine tasapinnageomeetriast tuntud teoreem:

kui kumbki kahest sirgest on paralleelne mingi kolmanda sirgega, siis nad on ka teineteisega paralleelsed.

E e l d u s. $a \| c$; $b \| c$ (joon. 20).

V ä i d e. $a \| b$.



JOON. 20.

Tõestus. Sirged a ja c määravad tasapinna β, sirged b ja c tasapinna α. Need tasapinnad ei saa olla paralleelsed, sest neil on ühine sirge c. Seega tasapinnad α ja β kas ühtivad või lõikuvad. Kui α ja β ühtivad, siis on sirged a, b ja c ühel ja samal tasapinnal ning vastav teoreem on tõestatud planimeetria kursuses. Kui aga tasapinnad α ja β lõikuvad (joon. 20), siis võtame sirgel a mingi punkti A; koos sirgega b määrab see tasapinna $\gamma \equiv Ab$. Tasapindade α, β ja γ lõikesirgetest üks paar sirgeid on paralleelsed, nimelt $b \| c$. Kuid siis on eelmise teoreemi põhjal ka tasapindade γ ja β lõikesirge paralleelne sirgega c, järelikult ühtiv sirgega a, sest läbi punkti A läheb tasapinnal β ainult üks sirge paralleelselt sirgega c. Sama teoreemi põhjal on tasapindade β ja γ lõikesirge a ühtlasi paralleelne sirgega b, järelikult $a \| b$.

Ülesandeid.

29. Tõesta, et risttahuka iga serv on paralleelne kolme servaga.

30. Tõesta, et risttahuka iga diagonaalipaar asub ühel tasapinnal, nn. diagonaaltasapinnal; järelda, et risttahuka diagonaalid lõikuvad kõik ühes ja samas punktis, mis poolitab diagonaale.

31. Joonesta risttahuka lõige tasapinnaga, mis on määratud diagonaalipaariga.

1.9. VASTAVALT PARALLEELSETE HAARADEGA NURGAD.

1.9.1. VASTAVALT PARALLEELSETE HAARADEGA NURKADE OMADUS.

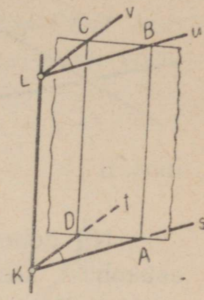
1. Tõestame, et ka ruumis

vastavalt paralleelsete ja samasuunaliste haaradega nurgad on võrdsed.

E e l d u s. $s \| u$; $t \| v$; $s \times t \equiv K$; $u \times v \equiv L$ (joon. 21).

V ä i d e. $\angle st = \angle uv$.

T õ e s t u s. Võtame kiirel s vabalt punkti A ja kiirel t vabalt punkti D. Sirgetega s ja u määratud tasapinnal su joonestame läbi punkti A sirge AB paralleelselt sirgega KL; samuti joonestame sirgega KL paralleelse sirge DC tasapinnal tv. Tekkinud nelinurgad $ABLK$ ja $DCLK$ on rööpkülikud. Et rööpküliku vastasküljed on võrdsed, siis



JOON. 21.

$$AB = KL = DC.$$

Sirged AB ja DC, mis on paralleelsed sirgega KL, on eelmise teoreemi järgi ka teineteisega paralleelsed. Seega nelinurk $ABCD$ on rööpkülik, sest tal on üks paar paralleelseid ja võrdseid vastaskülgi. Rööpküliku vastaskülgede võrdsuse tõttu

$$AK = BL, \; KD = LC \text{ ja } AD = BC.$$

Kolmnurkade võrdsuse tunnuse kkk järgi seega

$$\triangle AKD = \triangle BLC,$$

millest järeldub, et

$$\angle K = \angle L,$$

mida oligi tarvis tõestada.

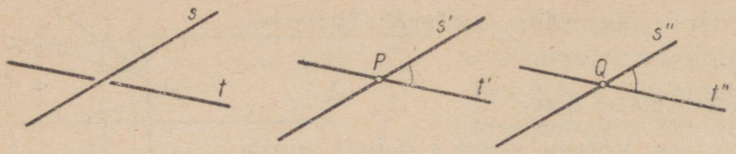
1.9.2. KAHE KIIVSIRGE VAHELINE NURK.

Eelmine teoreem võimaldab defineerida nurka kahe kiivsirge vahel: kahe kiivsirge s ja t vaheliseks nurgaks nimetatakse nurka kahe lõikuva sirge s' ja t' vahel, kui need sirged on vastavalt paralleelsed antud kiivsirgetega s ja t (või üks neist ühtib ühega sirgetest s ja t). Niisiis (joon. 22), kui

$$s' \| s, \; t' \| t \text{ ja } s' \times t' = P,$$

siis

$$\angle s't' = \angle st.$$



JOON. 22.

Nii defineeritud nurga $\angle s't'$ suurus ei sõltu nurga tipu P asukohast, sest võttes nurga tipuks mingi teise punkti Q ja joonestades läbi Q kaks sirget s'' ja t'' nii, et

$$s'' \parallel s \text{ ja } t'' \parallel t,$$

saame eelnenud teoreemi põhjal tõestada, et

$$\angle s''t'' = s't'.$$

Kui kahe kiivsirge vaheline nurk osutub täisnurgaks, siis öeldakse, et k i i v s i r g e d r i s t u v a d. Nende sirgete puhul jääb kehtima planimeetriast tuntud teoreem:

kui sirge on risti ühega kahest paralleelsest sirgest, siis ta on risti ka teisega.

1.9.3. PARALLEELPROJEKTSIOONI OMADUSI.

Näitame, et ruumikujundite paralleelprojektsioonidel on järgmised omadused.

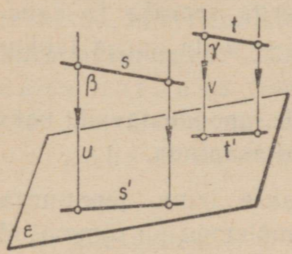
1) **Sirged, mis on paralleelide projektsioonideks, on paralleelsed.**

Paralleelsete sirgete s ja t kujutamiskiirte tasapinnad β ja γ on paralleelsed, sest sirge s ja teda lõikav mingi kujutamiskiir u tasapinnal β on vastavalt paralleelsed sirgega t ja teda lõikava mingi kujutamiskiirega v tasapinnal γ (joon. 23). Paralleelsete tasapindade β ja γ lõikamisel tasapinnaga ε tekivad paralleelsed lõikesirged s' ja t', mis ongi sirgete s ja t kujutisteks.

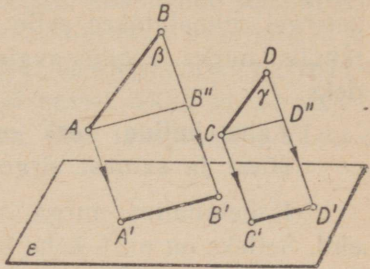
2) **Paralleelsed sirglõigud on võrdelised oma paralleelprojektsioonidega.**

Olgu $A'B'$ ja $C'D'$ paralleelsete lõikude AB ja CD kujutised tasapinnal ε (joon. 24). Võtame kiirel BB' punkti B'' nii, et $AB'' \parallel A'B'$, ja kiirel DD' punkti D'' nii, et $CD'' \parallel C'D'$. Et eelmise teoreemi järgi $A'B' \parallel C'D'$, siis ka $AB'' \parallel CD''$; seega kolmnurga

ABB″ kõik küljed on vastavalt paralleelsed kolmnurga *CDD″* küljedega. Kuid siis nende kolmnurkade nurgad on vastavalt võrdsed ning kolmnurgad ise sarnased; seetõttu



JOON. 23.



JOON. 24.

$$AB : AB'' = CD : CD''.$$

Et nelinurgad $AB''B'A'$ ja $CD''D'C'$ on rööpkülikud, siis

$$AB'' = A'B' \text{ ja } CD'' = C'D'.$$

Neid võrdusi eespool leitud võrdes arvestades saamegi, et

$$AB : A'B' = CD : C'D'.$$

Erijuhtumil, kui $AB \parallel \varepsilon$, nelinurk $ABB'A'$ osutub rööpkülikuks ning siis $A'B' = AB$ ja $A'B' \parallel AB$. Sellega oleme tõestanud, et

3) **ekraaniga paralleelne lõik on võrdne ja paralleelne oma paralleelprojektsiooniga.**

Ülesandeid.

32. Too risttahuka servade juurest näiteid lõikuvatest ristsirgetest ja kiivsetest ristsirgetest.

33. Põhjenda väidet, et ristküliku paralleelprojektsioon on üldiselt rööpkülik.

34. Põhjenda väidet, et korrapärase kuusnurga paralleelprojektsioonil on vastasküljed võrdsed ja paralleelsed ning vastastippe ühendavad diagonaalid poolituvad nende lõikepunktis.

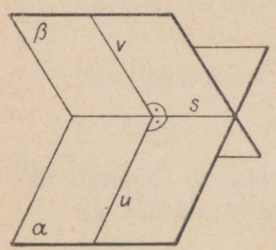
35. Nimeta mõni korrapärase kuusnurga omadus, mis jääb paralleelprojektsioonis püsima, ja mõni omadus, mis ei jää püsima.

1.10. KAHETAHULINE NURK.

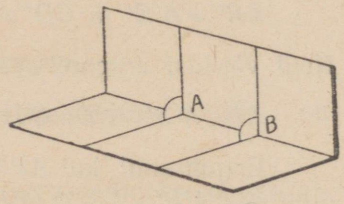
Kahe tasapinna lõikumisel tekib neli kahetahulist nurka. Kui kõrvaldada teisele poole tasapindade lõikesirget jäävad pooltasapinnad, siis saame ühe kahetahulise nurga. Tasapindade lõikesirget nimetatakse selle kahetahulise nurga **servaks** ja kahetahulist nurka moodustavaid pooltasapindu — selle nurga **tahkudeks.**

Kahetahuline nurk on kujund, mille moodustavad kaks ühest ja samast sirgest väljuvat pooltasapinda.

Kahetahulise nurga suurust mõõdetakse tema **joonnurga** abil. Selleks on nurk kahe kiire vahel, mis mõlemad on tõmmatud kahetahulise nurga serva ühest ja samast punktist risti kahetahulise nurga servaga ning millest üks on ühel tahul, teine teisel tahul. Niisiis, joonestades kahetahulise nurga serva s mingist punktist tahul α kiire u nii, et $u \perp s$, ja tahul β kiire v nii, et $v \perp s$, saamegi kahetahulise nurga joonnurga uv (joon. 25).



JOON. 25.



JOON. 26.

Kahetahulise nurga joonnurga suurus ei sõltu nurga tipu asukohast kahetahulise nurga serval.

Selle tõestamiseks võrdleme kahetahulise nurga joonnurki, mille tippudeks on mingid kaks punkti A ja B (joon. 26). Et joonnurkade haarad on risti kahetahulise nurga servaga, siis nurgad A ja B on vastavalt paralleelsete ja samasuunaliste haaradega nurgad. Seega $\angle A = \angle B$.

Nii on siis ükskõik, missuguse punkti kahetahulise nurga serval võtame joonnurga tipuks.

Vastavalt oma joonnurga suurusele on kahetahuline nurk kas täis-, terav- või nürinurk. Kahetahulised nurgad on võrdsed, kui nende joonnurgad on võrdsed.

Kui kahetahulise nurga joonnurk on täisnurk, siis öeldakse, et tasapinnad ristuvad; lühidalt (joon. 25):

kui $\angle uv = 90°$, siis $\alpha \perp \beta$.

Kui kaks lõikuvat tasapinda ei ristu, siis nende lõikumisel tekkinud kahetahulistest nurkadest kaks nurka on teravnurgad ja kaks nürinurgad. Siis loetakse kahe tasapinna vaheliseks nurgaks harilikult nende lõikumisel tekkinud teravnurka. Sama nurka nimetatakse ka ühe tasapinna kaldenurgaks teise tasapinna suhtes.

Ülesandeid.

36. Tõesta, et tasapind, mis on risti ühega kahest paralleelsest tasapinnast, on risti ka teisega.

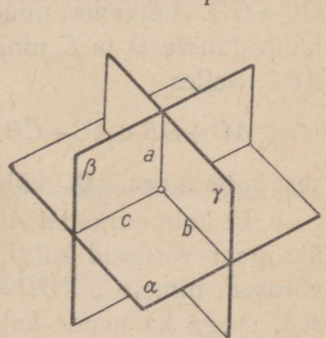
37. Selgita, missuguseid nurki võiks nimetada kahetahulisteks kõrvalnurkadeks, missuguseid kahetahulisteks tippnurkadeks.

1.11. RUUMINURK.

1.11.1. RUUMINURGA MÕISTE.

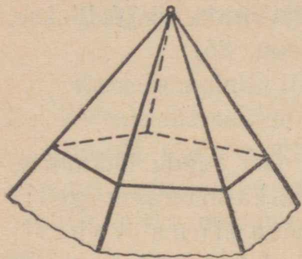
Kui kolme tasapinna lõikesirged läbivad ühist punkti, siis tekib selle punkti juures kaheksa kolmetahulist nurka (joon. 27).

Ühes punktis võib lõikuda ka enam kui kolm tasapinda — üldiselt n tasapinda. Kujundeid, mis tekivad tasapindade lõikumisel ühes punktis, nimetatakse **ruuminurkadeks.** On lõikuvaid tasapindu näiteks viis, siis tekib viietahuline nurk (joon. 28). Ruuminurga igal tahul asub kaks nurga serva, mille vahel on ruuminurga üks tasanurk. On selge, et n-tahulisel nurgal on n serva ja n tasanurka.

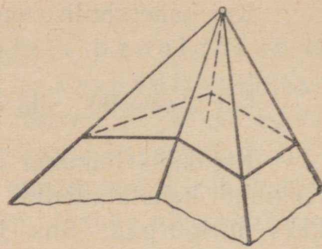


JOON. 27.

Kui ruuminurga lõikumisel tasapinnaga, mis lõikab kõiki servi, saa-



JOON. 28.



JOON. 29.

dakse kumer hulknurk, nagu joonisel 28, siis nimetatakse ruuminurka k u m e r a k s. Kumera ruuminurga ühegi tahu tasapind ei lõika seda nurka; mittekumera ruuminurga mõne tahu tasapind aga lõikab seda nurka (joon. 29).

1.11.2. TEOREEM KOLMETAHULISE NURGA TASANURKADEST.

Kolmetahulise nurga iga tasanurk on väiksem kui ülejäänud tasanurkade summa.

Olgu kolmetahulise nurga *Oabc* tasanurkadest nurk *ab* kõige suurem (joon. 30). Tõestame, et

$$\angle ab < \angle ac + \angle cb.$$

Kui see väide on õige kõige suurema tasanurga kohta, siis on ta kindlasti õige ka teiste tasanurkade kohta.

Tõestuseks joonestame tipust O tahul ab kiire d nii, et $\angle ad = \angle ac$, ja võtame kiirtel c ja d vastavalt punktid C ja D nii, et $OC = OD$. Lõikame nüüd kolmetahulist nurka tasapinnaga, mis läbib punkte D ja C ning lõikab servi a ja b. Lõige on kolmnurk ABC. Selles

$$AD + DB < AC + CB,$$

sest kolmnurga ABC külg AB on väiksem teiste külgede summast.

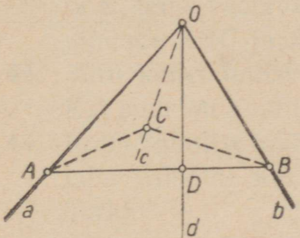
Et kolmnurkadel AOD ja AOC peale ühise külje AO on veel üks paar võrdseid külgi, nimelt $OD = OC$, ning ühed nurgad on võrdsed, nimelt $\angle AOD = \angle AOC$, siis on need kolmnurgad võrdsed; seega ka nende kolmandad küljed on võrdsed:

$$AD = AC.$$

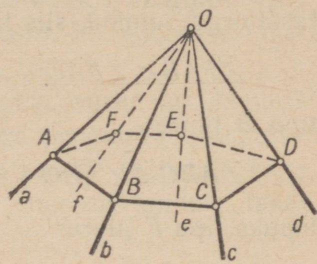
Lahutades ülalsaadud võrratuse pooltest võrdsed liikmed AD ja AC, leiame, et

$$DB < CB.$$

Edasi vaatleme kolmnurki BOD ja BOC. Neil on peale ühise külje BO veel üks paar võrdseid külgi, nimelt $OD = OC$, aga kolmandad küljed DB ja CB ei ole võrdsed: $DB < CB$. Kui kolmnurka BOC pöörata ümber külje BO kolmnurga BOD peale, siis punktid D ja C satuvad ühele ja samale ringjoonele, mille keskpunktiks on O, ja võrratuse $DB < CB$ tõttu kiir OD jääb nurga BOC sisse.



JOON. 30.



JOON. 31.

Seega

$$\angle BOD < \angle BOC$$

ehk

$$\angle db < \angle cb.$$

Liites selle võrratuse vasaku poolega nurga ad ja parema poolega niisama suure nurga ac, saame

$$\angle ad + \angle db < \angle ac + \angle cb$$

ehk

$$\angle ab < \angle ac + \angle cb,$$

mida oligi tarvis tõestada.

J ä r e l d u s. **Kolmetahulise nurga iga tasanurk on suurem kui kahe ülejäänud tasanurga vahe,**

sest kui $\angle ab < \angle ac + \angle cb$, siis $\angle ab - \angle ac < \angle cb$.

1.11.3. TEOREEM RUUMINURGA TASANURKADE SUMMAST.

Kumera ruuminurga tasanurkade summa on väiksem kui täispööre.

Olgu *Oabcdef* mingi kumer ruuminurk. Tõestame, et

$$\angle ab + \angle bc + \angle cd + \ldots + \angle fa < 360°.$$

Tõestuseks lõikame ruuminurka mingi tasapinnaga. Lõige on kumer hulknurk *ABCDEF* (joon. 31). Selle iga tipu juures leidub kolmetahuline nurk, mis asub püramiidi *OABCDEF* sees. Et kolmetahulise nurga iga tasanurk on väiksem kui kahe ülejäänud tasanurga summa, siis tipu *A* juures

$$\angle FAB < \angle FAO + \angle OAB,$$

tipu *B* juures

$$\angle ABC < \angle ABO + \angle OBC \text{ jne.,}$$

lõpuks tipu *F* juures

$$\angle EFA < \angle EFO + \angle OFA.$$

Nende võrratuste vasakute poolte summa on hulknurga *ABCDEF* sisenurkade summa, seega $(n-2)\cdot 180°$, kus n on hulknurga tippude arv. Võrratuste paremate poolte summa on kolmnurkade *OAB, OBC, . . . , OFA* sisenurkade summa ilma tipu *O* juures olevate nurkade summata. Tähistame viimase summa tähega x; siis võrratuste poolte liitmisel saame, et

$$(n-2)\cdot 180° < n \cdot 180° - x$$

ehk

$$x + n \cdot 180° - 360° < n \cdot 180°$$

ehk

$$x < 360°.$$

Et x on antud kolmnurga tasanurkade summa, siis on teoreem tõestatud.

Kaks ruuminurka on võrdsed, kui neid saab teineteise sisse mahutada nii, et kõik ühe ruuminurga servad ühtivad teise vastavate servadega. Võrdsete ruuminurkade kõik tasanurgad ja kõik kahetahulised nurgad on vastavalt võrdsed ja ühteviisi asetatud.

Ülesandeid.

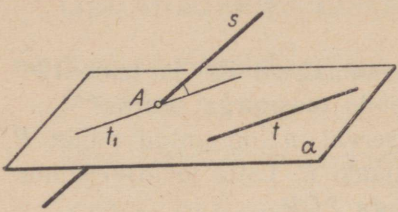
38. Kolmetahulise nurga üks tasanurk on 75° ja teine 126°. Missugustes piirides on kolmanda tasanurga suurus?
39. Kolmetahulise nurga *Oabc* serval *a* on antud punkt *P*, serval *b* punkt *Q* ja tahul *ac* punkt *R*. Esita joonisel kolmetahulise nurga lõige tasapinnaga *PQR*.
40. Kolmetahulise nurga *Oabc* serval *a* on antud punkt *P*, tahul *ab* punkt *Q* ja tahul *ac* punkt *R*. Esita joonisel kolmetahulise nurga lõige tasapinnaga *PQR*.
41. Kolmetahuline nurk *Oabc* on lõigatud kahe tasapinnaga, millest üks lõikab servi *a*, *b* ja *c* vastavalt punktides *A*, *B* ja *C*, teine vastavalt punktides *K*, *L* ja *M*. Esita joonisel tasapindade *ABC* ja *KLM* lõikejoon.
42. Mitu kahetahulist ja mitu kolmetahulist nurka on kuubil? Kui suur on kuubi kolmetahulise nurga tasanurkade summa?
43. Kolmetahulise nurga kaks tasanurka on 45° ja nende kahe tahu vaheline nurk on täisnurk. Kui suur on kolmas tasanurk?

    N ä p u n ä i d e. Joonesta antud kahetahulise nurga joonnurk ja uuri tekkinud kolmnurki.
44. Kolmetahulise nurga kaks tasanurka on mõlemad 30° ja nende kahe tahu vaheline nurk on täisnurk. Kui suur on kolmas tasanurk?
45. Kolmetahulise nurga kõik tasanurgad on 60°. Arvuta kahetahuliste nurkade suurused.

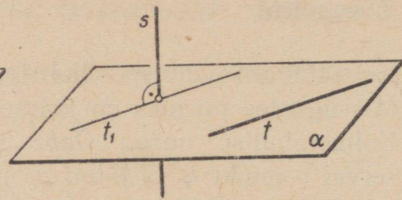
1.12. TASAPINNA NORMAAL.

Lõigaku sirge *s* tasapinda α punktis *A* (joon. 32). Võtame tasapinnal α mingi sirge *t* ja leiame sirgete *s* ja *t* vahelise nurga $\angle st$. Kui sirge *t* ei läbi punkti *A*, siis sirged *s* ja *t* on kiivsirged ja nendevahelise nurga leidmiseks võtame läbi punkti *A* sirge $t_1 \| t$ (1.9.2.).

Kui $\angle st$ on täisnurk ja jääb täisnurgaks ka sirge *t* mistahes asendi puhul tasapinnal α, siis ütleme, et tasapind α ja sirge *s* on teineteisega r i s t i (joon. 33). Tasapinnaga ristuvat sirget nimetatakse ka tasapinna **normaaliks.** Niisiis,



JOON. 32.



JOON. 33.

sirget nimetatakse tasapinna normaaliks, kui ta on risti kõigi selle tasapinna sirgetega.

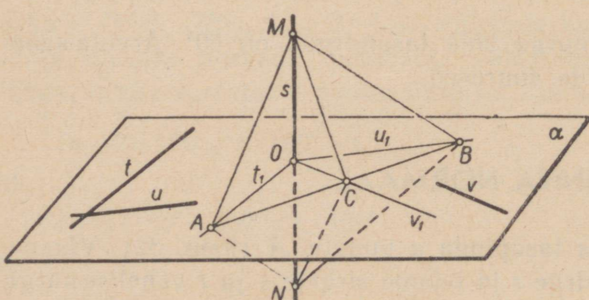
Sirget, mis tasapinda lõikab, kuid ei ole sellega risti, nimetatakse selle tasapinna suhtes **kaldsirgeks.**

Tasapinna normaali olemasolu selgub järgmisest teoreemist, mida nimetatakse ka *sirge ja tasapinna ristseisu tunnuseks.*

Kui tasapinda lõikav sirge on risti selle tasapinna kahe lõikuva sirgega, siis see sirge on tasapinna normaal.

Eeldus. $s \perp t$; $s \perp u$; $t \times u$; $tu \equiv \alpha$ (joon. 34).

Väide. $s \perp \alpha$.



JOON. 34.

Tõestus. Sirge s ristumiseks tasapinnaga α on antud definitsiooni järgi tarvis, et sirge s ristuks *iga* sirgega, mis asetseb tasapinnal α. Ilmselt sirge s ristub iga sirgega, mis on paralleelne sirgega t või u. Tõestamiseks võtame seepärast tasapinnal α mistahes kolmanda sirge v, mis lõikab sirgeid t ja u, ja näitame, et

$s \perp v$. Kui sirge v ei läbi punkti $O \equiv s \times \alpha$, siis võtame läbi punkti O sirge $v_1 \| v$ ja näitame, et $s \perp v_1$. Sellest järeldub siis, et $s \perp v$. Kui sirged t ja u ei läbi punkti O, siis võtame läbi punkti O sirged t_1 ja u_1 nii, et $t_1 \| t$ ja $u_1 \| u$. Eeldusest järeldub, et siis $s \perp t_1$ ja $s \perp u_1$. Edasi täiendame joonist veel järgmiselt:

1) märgime sirgel s punktid M ja N nii, et $OM = ON$;

2) võtame sirgetel t_1 ja u_1 punktid A ja B nii, et sirge AB lõikab sirget v_1; tähistame lõikepunkti tähega C;

3) ühendame punktid A, B ja C punktidega M ja N.

Nii saadud kolmnurkadest on (tunnuse knk põhjal)

$$\triangle OAM = \triangle OAN \text{ ja } \triangle OBM = \triangle OBN,$$

millest järeldub, et

$$AM = AN \text{ ja } BM = BN.$$

Kuid siis

$$\triangle ABM = \triangle ABN,$$

sest ühe kolmnurga küljed on vastavalt võrdsed teise kolmnurga külgedega. Sellest näeme, et $\angle CBM = \angle CBN$. Võrreldes nüüd kolmnurki CBM ja CBN, selgub, et ka need on võrdsed, millest omakorda järeldub, et $CM = CN$. Kuid siis kolmnurk MNC on võrdhaarne ja tema aluse MN mediaan CO on risti alusega; niisiis, $s \perp v_1$ ja seega $s \perp v$.

Et sirge s on eelduse järgi risti tasapinna α kahe lõikuva sirgega t ja u ning tõestuse järgi risti ka mistahes kolmanda sirgega v, mis asetseb tasapinnal α, siis on ta risti selle tasapinna iga sirgega; järelikult s on tasapinna α normaal.

Ülesandeid.

46. Põhjenda väidet, et kahetahulise nurga serv on risti tema joonnurga tasapinnaga.

47. Teades, et risttahuka iga tahk on ristkülik, põhjenda väidet, et risttahuka iga serv on risti kahe tahuga.

48. Põhjenda väidet, et risttahuka lõige tasapinnaga, mis läbib tema kaht diagonaali, on ristkülik.

49. Risttahuka servade pikkused on 10 cm, 12 cm ja 16 cm. Arvuta risttahuka diagonaali pikkus.

50. Kuubi serva pikkus on a cm. Kui pikk on kuubi diagonaal?

51. Sirge s on paralleelne tasapinnaga α. Kas leidub tasapinnal α sirgeid, mis on risti sirgega s? Kuidas need sirged asetsevad üksteise suhtes?

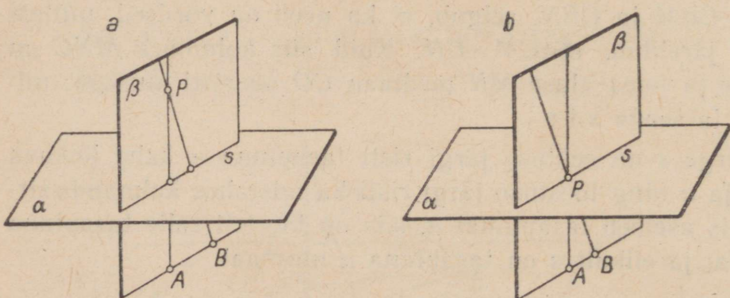
52. Sirge s on tasapinna α suhtes kaldu. Kui palju on tasapinnal α sirgeid, mis on risti sirgega s? Mitu neist lõikuvad sirgega s?

1.13. TASAPINNA NORMAALI OMADUSI.

Tasapinna normaalil on rida omadusi, millest tähtsamaid väljendavad järgmised teoreemid.

1. **Iga punkti läbib ainult üks sirge, mis on risti antud tasapinnaga.**

Tõepoolest, kui punkti P läbiks mitu sirget, mis on risti tasapinnaga α, näiteks sirged PA ja PB (joon. 35), siis nende kahe



JOON. 35.

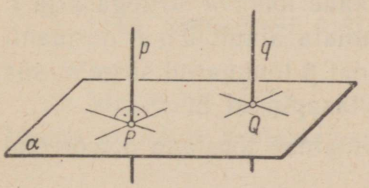
sirgega määratud tasapinnal β läheks läbi punkti P kaks sirget (PA ja PB), mis on mõlemad risti sirgega $s \equiv \alpha \times \beta$. Et see pole aga võimalik (nagu teame planimeetria kursusest), siis järelikult läbib punkti P ainult ü k s sirge, mis on risti tasapinnaga α.

Et tõestamisel polnud oluline, kas punkt P on tasapinnal α või väljaspool seda (joon. 35, a ja b), siis on väide õige i g a punkti kohta.

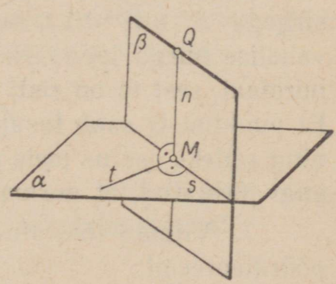
2. **Kui kahest paralleelist üks on risti mingi tasapinnaga, siis ka teine on risti selle tasapinnaga.**

Tõestuseks vaatleme tasapinna α mistahes normaali p ja selle paralleeli q. Lõigaku need tasapinda α vastavalt punktides P ja Q (joon. 36). Joonestame tasapinnal α kaks sirget läbi punkti P ning kaks nendega vastavalt paralleelset sirget läbi punkti Q. Siis sirge p on risti läbi punkti P joonestatud sirgetega, sest p on tasapinna α normaal. Et vastavalt paralleelsete haaradega nurgad on võrdsed, siis sirge q on risti läbi punkti Q joonestatud kahe sirgega tasapinnal α, järelikult $q \perp \alpha$.

3. **Kõik tasapinna normaalid on üksteisega paralleelsed,** sest kui p ja q on tasapinna α kaks normaali ning Q on teise normaali üks punkt, siis esimese teoreemi järgi saab läbi punkti Q minna ainult üks sirge, mis on risti tasapinnaga α, teise teoreemi järgi aga on selleks sirge p paralleel läbi punkti Q, seega $p \| q$ (joon. 36).



JOON. 36.



JOON. 37.

4. **Tasapinna normaali läbiv tasapind on risti esimese tasapinnaga.**

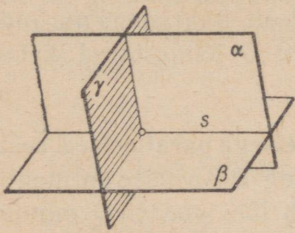
Tõestuseks vaatleme tasapinna α normaali n läbiva tasapinna β ja tasapinna α vahelise nurga joonnurka (joon. 37), mille tipuks on punkt $M \equiv n \times \alpha$ lõikesirgel $s \equiv \alpha \times \beta$. Selle joonnurga üheks haaraks on normaal n, sest normaali definitsiooni järgi on $n \perp s$. Kuid samal põhjusel on n risti ka joonnurga teise haaraga t; seega

$$\angle nt = 90°, \text{ s. t. } \beta \perp \alpha.$$

5. Viimasest teoreemist järeldub, et

tasapind, mis on risti kahe tasapinna lõikesirgega, on risti ka nende tasapindadega.

Tõepoolest, kui tasapind γ on risti tasapindade α ja β lõikesirgega s (joon. 38), s. t. sirge s on tasapinna γ normaal, siis seda normaali läbivad tasapinnad α ja β on viimase teoreemi järgi risti tasapinnaga γ.



JOON. 38.

6. **Kui ühel kahest ristuvast tasapinnast on võetud punkt ja sellest on tõmmatud teise tasapinna normaal, siis see normaal asetseb esimesel tasapinnal.**

Tõestuseks eeldame, et tasapinnad α ja β ristuvad (joon. 37) ning ühel neist, näiteks tasapinnal β, on võetud punkt Q. Viimasest tõmbame tasapinnal β sirge n risti tasapindade α ja β lõikesirgega s. Punktist $M \equiv n \times s$ tõmbame tasapinnal α sirge t risti sirgega s. Siis $n \perp t$, sest $\angle nt$ on ristuvate tasapindade α ja β vahelise nurga joonnurk. Et ühtlasi $n \perp s$, siis n on tasapinna α normaal, sest ta on risti tasapinna α kahe lõikuva sirgega s ja t. Et punktist Q saab tasapinnale α tõmmata ainult ühe normaali ning selleks osutus meie poolt tasapinnal β tõmmatud sirge n, siis ongi tõestatud, et normaal n asetseb tasapinnal β.

7. Viimati tõestatud teoreem võimaldab tõestada 5. teoreemi pöördteoreemi:

tasapind, mis on risti kahe lõikuva tasapinnaga, on risti ka nende tasapindade lõikesirgega.

Tõepoolest, kui $\gamma \perp \alpha$ ja $\gamma \perp \beta$ ning $\alpha \times \beta \equiv s$ (joon. 38), siis selle lõikesirge mingit punkti läbiv tasapinna γ normaal peab teoreemi 6 järgi asetsema nii tasapinnal α kui ka tasapinnal β, seega ühtima nende tasapindade lõikesirgega s.

Ülesandeid.

53. Kaks võrdset võrdkülgset kolmnurka küljepikkusega a asetsevad nii, et neil on üks külg ühine ning kolmnurkade tasapinnad ristuvad. Avalda mitteühiste tippude vaheline kaugus.

54. Põhjenda väidet, et kahetahulise nurga joonnurga tasapind on risti kahetahulise nurga tahkudega.

55. Tõesta, et antud punktist paralleelsetele tasapindadele tõmmatud normaalid ühtivad.

1.14. PUNKTI JA SIRGE RISTPROJEKTSIOON.

1.14.1. PUNKTI RISTPROJEKTSIOON.

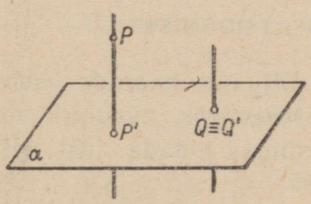
Punkti P ristprojektsiooniks tasapinnal α nimetatakse punktist P tasapinnale α tõmmatud normaali ja tasapinna α lõikepunkti (punkti P' joonisel 39).

Punkt, mis ise on tasapinnal (projektsioonipinnal), ühtib oma projektsiooniga sellel tasapinnal (punkt Q joonisel 39).

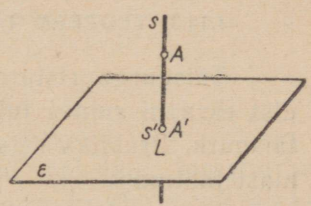
Punkti ja tema ristprojektsiooni vahelist kaugust nimetatakse punkti kauguseks tasapinnast. Niisiis, punkti kaugust tasapinnast tuleb mõõta mööda tasapinna normaali.

1.14.2. SIRGJOONE RISTPROJEKTSIOON.

Sirgjoone ristprojektsiooniks tasapinnal nimetatakse sirgjoone punktide projektsioonide kogumit sellel tasapinnal.



JOON. 39.

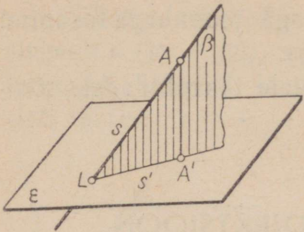


JOON. 40.

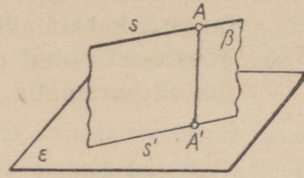
Kui sirge s on risti ekraaniga ε (joon. 40), siis selle sirge mistahes punkti A läbiv ekraani normaal ühtib sirgega s ning seetõttu sirge kõigi punktide ristprojektsioonid ühtivad sirge ja ekraani lõikepunktiga L; järelikult

ekraaniga ristuva sirge ristprojektsiooniks on punkt.

Kui sirge s pole risti ekraaniga ε (joon. 41 ja 42), siis tema punkte projekteerivad ekraani normaalid asetsevad ühel ja samal



JOON. 41.



JOON. 42.

tasapinnal β, mis on risti ekraaniga ε. See nn. projekteeriv tasapind β on määratud sirgega s ja tema mingit punkti projekteeriva normaaliga, näiteks normaaliga AA'. Sirge s kõigi punktide ristprojektsioonid ekraanil ε asetsevad tasapindade β ja ε lõikesirgel s'; järelikult

ekraaniga mitteristuva sirge ristprojektsioon on sirge.

Ekraaniga mitteristuv sirge s ja tema ristprojektsioon s' on ühel ja samal tasapinnal β ning järelikult nad kas lõikuvad või on paralleelsed. Esimesel juhul on sirge ekraani suhtes kaldu (joon. 41), teisel juhul paralleelne (joon. 42).

Ekraaniga paralleelne sirge on paralleelne oma ristprojektsiooniga,

sest nende lõikumise korral antud sirge lõikuks ekraaniga.

1.14.3. TEOREEM TÄISNURGA RISTPROJEKTSIOONIST.

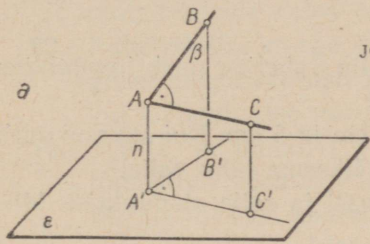
Täisnurga ristprojektsiooniks võib sõltuvalt haarade asendist ekraani suhtes tulla kas kiir, sirge, teravnurk, nürinurk või täisnurk. Praktika seisukohalt on tähtis silmas pidada just viimast juhtumit.

Tõestame järgmise teoreemi:

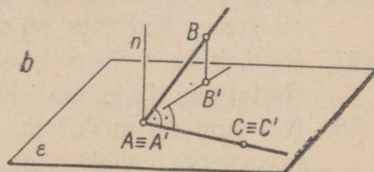
kui täisnurga üks haar asetseb ekraanil või on sellega paralleelne ja teine haar pole ekraaniga risti, siis täisnurga ristprojektsioon on täisnurk.

T õ e s t u s. Olgu $\angle BAC$ täisnurk, mille haar AC on paralleelne ekraaniga ε ja haar AB pole risti selle ekraaniga (joon. 43, *a*). Tähistame punktide A, B ja C ristprojektsioone tasapinnal ε vastavalt A', B' ja C'. Siis sirged AC ja $A'C'$ on paralleelsed kui ekraaniga paralleelne sirge ja tema ristprojektsioon. Sellest järeldub, et kiivsirged $A'C'$ ja AB on teineteisega risti, sest nendevaheline nurk võrdub täisnurgaga BAC (1. 9. 2). Ühtlasi sirge $A'C'$ on risti tasapinna ε normaaliga $n \equiv A'A$, mis lõikab sirget AB. Kuid siis on $A'C'$ risti tasapinnaga $\beta \equiv BAA'$ (1. 12), seega risti ka sirgega $A'B' \subset \beta$. Sellest nähtubki, et antud täisnurga ristprojektsioon $\angle B'A'C'$ on täisnurk.

Kui täisnurga BAC haar AC asetseb ekraanil ε (joon. 43, *b*), siis tõestus lihtsustub, sest nüüd $AC \equiv A'C'$ ja endiste kiivsirgete AB ja $A'C'$ vaheline nurk asendub antud nurgaga BAC.



JOON. 43.



Samal viisil saab tõestada, et

kui nurga ristprojektsioon on täisnurk ja tema üks haar asetseb ekraanil või on sellega paralleelne, siis see nurk on täisnurk.

1.14.4. LÕIGU RISTPROJEKTSIOON.

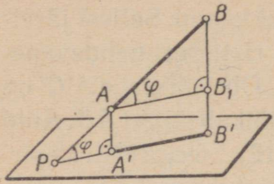
Kaldsirge ja tema ristprojektsiooni vahelist teravnurka nimetatakse sirge ja ekraani vaheliseks nurgaks ehk sirge k a l d e n u r g a k s (ekraani suhtes).

Tähistame sirge *s* kaldenurga, s. o. nurga APA' joonisel 44 tähega φ. Kolmnurgast APA' saame siis, et

$$A'P = AP \cdot \cos \varphi$$

ehk

lõigu ristprojektsiooni pikkus võrdub lõigu pikkuse ja tema kaldenurga koosinuse korrutisega.



JOON. 44.

See seos kehtib ka siis, kui lõigu mõlemad otspunktid on väljaspool projektsioonipinda, nagu lõigul AB joonisel 44. See selgub, kui läbi lõigu ühe otspunkti A tõmbame lõigu projektsioonile paralleeli AB_1. Seega üldiselt lõigu AB ristprojektsioon $A'B'=AB\cdot\cos\varphi$.

Kui $\varphi=0$, siis $A'B'=AB$, s. t. **ekraaniga paralleelne lõik on võrdne oma ristprojektsiooniga.**

Ülesandeid.

56. Joonesta kuubi diagonaali ja tahu vaheline nurk loomulikus suuruses. Kui suur on see nurk?

57. Risttahuka mõõtmed on 7 cm, 4 cm ja 5 cm. Kui suur on nurk risttahuka diagonaali ja kõige väiksema tahu vahel?

58. Kui suur on nurk kuubi diagonaali ja selle otspunktist lähtuva serva vahel?

59. Punktist väljaspool tasapinda on tasapinnani tõmmatud kaldlõik, mille pikkus on 35 cm; lõigu ristprojektsiooni pikkus on 12 cm. Kui suur on lõigu kaldenurk tasapinna suhtes?

60. Kaldlõigu pikkus on 13,4 m; lõigu kaldenurk tasapinna suhtes on 63°36′. Arvuta lõigu ristprojektsiooni pikkus.

61. Punktist, mille kaugus tasapinnast on 12 cm, on tõmmatud tasapinnani 20 cm pikkune kaldlõik. Leia kaldlõigu ristprojektsiooni pikkus ja kaldenurga suurus.

62. Lõigu otspunktid on tasapinnast 3 dm ja 6,3 dm kaugusel. Leia lõigu ristprojektsiooni pikkus, kui lõigu pikkus on 6,5 dm.

63. Lõiku pikkusega 20 cm lõikab tasapind nii, et lõigu otspunktid on tasapinnast 4 cm ja 6 cm kaugusel. Kui suur on lõigu ja tasapinna vaheline nurk?

64. Ruudu külje pikkus on 20 cm. Ruudu keskpunktist O on püstitatud 15 cm pikkune lõik OP risti ruudu tasapinnaga. Punkt P on ühendatud ruudu külje keskpunktiga C. Arvuta lõigu PC kaldenurk ruudu tasapinna suhtes.

65. Täisnurkses kolmnurgas kaateti a lähisnurk $\beta=36°48'$. Kaatet a on tasapinnal α ja kaatet b moodustab tasapinnaga α

nurga $\gamma=52°44'$. Arvuta hüpotenuusi kaldenurk tasapinna α suhtes (üldkujul ja antud andmete puhul).

66. Punktist A nähakse torni olevat põhja suunas; ta tipp paistab kõrgusnurgas $\alpha=17°$. Liikudes $d=70$ m võrra ida poole — punkti B, nähakse torni nihkununa $\beta=40°$ võrra põhjast lääne poole. Arvuta torni kõrgus (üldkujul ja antud andmete puhul).

67. Määra kahetahulise nurga suurus, kui punkt, mis asetseb ühel tahul, on nurga servast 2 korda kaugemal kui teisest tahust.

68. Kahetahulise nurga ühel tahul on võetud punkt, mis on a cm kaugusel teisest tahust. Leia selle punkti kaugus servast, kui nurk tahkude vahel on 45°.

69. Kahetahulise nurga ühel tahul on võetud punkt 25 cm kaugusel nurga servast. Kui kaugel on see punkt teisest tahust, kui kahetahulise nurga suurus on 50°?

70. Tõesta, et punktist väljaspool tasapinda selle tasapinnani tõmmatud võrdsetel kaldlõikudel on võrdsed ristprojektsioonid ja võrdsed kaldenurgad.

71. Kaks võrdset võrdhaarset kolmnurka, mille alus on a ja tipunurk on $\alpha=40°$, asetsevad nii, et nende alused ühtivad ja aluste vastastippude vaheline kaugus on samuti a. Kui suur on kolmnurkade tasapindade vaheline nurk?

72. Võrdkülgse kolmnurga üks külg asetseb tasapinnal ja teine moodustab tasapinnaga nurga $\frac{\pi}{4}$. Kui suure nurga moodustab kolmnurk selle tasapinnaga?

73. Paralleelprojektsioonis on antud risttahukas ja selle ühel külgtahul punkt A, teisel punkt B. Leia joonisel punktid, mis kujutavad sirge AB ja risttahuka põhjade tasapindade lõikepunkte.

Näpunäide. Kasuta sirge AB ristprojektsioone põhjade tasapindadel.

74. Paralleelprojektsioonis on antud risttahukas ja selle ühel tahul punkt A, teisel tahul punkt B ja nende tahkude ühisel serval punkt C. Esita joonisel risttahuka lõige tasapinnaga ABC. Kui tasapind ABC ei lõika risttahuka kõiki tahke, siis leia sirge, mida mööda ta lõikab selle tahu tasapindu.

75. Lahenda eelmine ülesanne eeldusel, et punktid A, B ja C on antud risttahuka kolmel paariti kiivsel serval.

Ülesandeid enesekontrolliks.

76. Võrdkülgse kolmnurga üks külg asetseb tasapinnal ja teine moodustab sellega nurga α. Tõesta, et $\alpha \leqslant \frac{\pi}{3}$.

77. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga hüpotenuus asetseb tasapinnal ja kaatetid moodustavad tasapinnaga nurga α. Tõesta, et $\alpha \leqslant \frac{\pi}{4}$.

78. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga üks kaatet on tasapinnal ja teine moodustab tasapinnaga nurga α. Näita, et hüpotenuus moodustab tasapinnaga nurga $\arcsin \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2}}$.. Leia see nurk, kui $\alpha = 45°$.

79. Võrdkülgse kolmnurga üks külg on tasapinnal ja teine moodustab tasapinnaga nurga α. Näita, et kolmnurga projektsiooni pindala on $\frac{a^2}{4}\sqrt{3-4\sin^2\alpha}$, kus a on antud kolmnurga külje pikkus.

80. Kolmnurk, mille üks külg asetseb projektsioonipinnal, moodustab selle pinnaga nurga α. Tõesta, et kolmnurga projektsiooni pindala võrdub kolmnurga pindala ja kolmnurga kaldenurga koosinuse korrutisega.

2. FUNKTSIOONI TULETISE RAKENDUSI.

2.1. KORDAMISEKS.

Funktsiooni $y=f(x)$ **tuletisfunktsiooniks** ehk **tuletiseks** nimetatakse funktsiooni $y'=f'(x)$, mis on defineeritud piirväärtuse kaudu järgmiselt:

$$y'=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Tuletise väärtus antud kohal $x=x_i$ näitab selle funktsiooni muutumise hetkelist kiirust sellel kohal, geomeetriliselt aga funktsiooni graafikule vastavas punktis $(x_i; y_i)$ tõmmatud puutuja tõusu.

Kui tahame leida mõne funktsiooni tuletist, siis peame läbima kolm järgmist sammu:

1°. Leiame $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$.

2°. Leiame $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

3°. Leiame $y'=\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

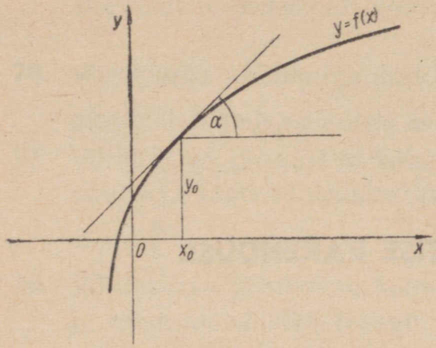
Et leida funktsiooni $s=u(t)$ muutumise hetkelist kiirust kohal $t=a$, leiame esmalt antud funktsiooni tuletise

$$s'=u'(t)$$

ning seejärel selle tuletise väärtuse kohal a:

$$s'\Big|_{t=a}=u'(a).$$

Funktsiooni $y=f(x)$ graafiku puutujale võrrandi leidmiseks



JOON. 45.

kohal $x=x_0$ (vt. joon. 45) leiame esmalt puutuja tõusu kohal $x=x_0$, s. o.

$$\tan\alpha=f'(x_0)$$

ja seejärel puutepunkti ordinaadi

$$y_0=f(x_0).$$

Puutuja võrrandi saame kujul

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=f'(x_0)$$

ehk

$$\boxed{y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)}$$

Funktsiooni uurimisel kasutame tuletist kasvamis- ja kahanemispiirkonna ning ekstreemumkohtade leidmiseks.

Funktsiooni $y=f(x)$ kasvamise tunnuseks on

$$f'(x)>0,$$

kahanemise tunnuseks

$$f'(x)<0,$$

ekstreemumkohti otsime aga võrrandi

$$f'(x)=0$$

lahendite hulgast.

Kordamisküsimusi ja ülesandeid.

81. Mis on funktsiooni tuletis?

82. Mis on funktsiooni tuletise
a) geomeetriliseks tõlgenduseks?
b) füüsikaliseks tõlgenduseks?

83. Kuidas avaldub
a) summa tuletis?
b) korrutise tuletis?
c) jagatise tuletis?

84. Millega võrduvad järgmiste funktsioonide tuletised?

a) $y=x^2$ e) $y=\sqrt{x}$

b) $y=\frac{1}{x}$ f) $y=100^{10}$

c) $y=x^5$ g) $y=x+x^2$

d) $y=x^{-2}$ h) $y=x\sqrt{x}$

85. Leia järgmiste funktsioonide muutumise hetkelised kiirused antud kohal:

a) x^2, kui $x=0$; e) $\frac{3}{x}$, kui $x=-2$;

b) $2x$, kui $x=-2$; f) $4x^{-2}$, kui $x=2$;

c) $4x^3$, kui $x=\frac{1}{2}$; g) $10x^{-5}$, kui $x=-\frac{1}{2}$;

d) $\sqrt{x}$, kui $x=4$; h) $-2\sqrt{x}$, kui $x=9$.

86. Mis on funktsiooni
a) kasvamise tunnuseks?
b) kahanemise tunnuseks?

87. Mis on funktsiooni
a) maksimumkohaks?
b) miinimumkohaks?
c) ekstreemumkohaks?

88. Kas funktsioon $y=\sqrt{x}$ on kasvav või kahanev kohal 1, 9, 625, 0?

89. Leia funktsiooni $\frac{1}{x}$ kasvamispiirkond ja kahanemispiirkond.

90. Leia järgmiste funktsioonide kasvamispiirkond, kahanemispiirkond ja ekstreemumkohad.

a) $y=x^2-3x+2$ c) $y=x^4+2x^2-3x$

b) $y=x^3+x^2-1$ d) $y=3x^4-4x^3$

91. Kuidas avaldub funktsiooni $y=f(x)$ graafikule punktis $(x_0; y_0)$ tõmmatud puutuja võrrand?

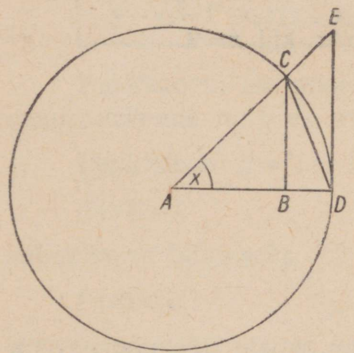
92. Leia võrrand kõvera $y=f(x)$ puutujale etteantud kohal:
a) $y=x^2$, kohal $x=1$;
b) $y=x^3$, kohal $x=-2$;
c) $y=x^3+x^2+x+1$, kohal $x=0$.

2.2. TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE TULETISED.

2.2.1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Trigonomeetriliste funktsioonide tuletiste leidmine eeldab piirväärtuse $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ teadmist. Tõestame, et

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$



JOON. 46.

Olgu antud ühikring ja selles kuitahes väike kesknurk x (joon. 46). Vaatleme kolmnurka ADC, sektorit ADC ja kolmnurka ADE. Tähistades nende kujundite pindalad vastavalt tähtedega S_1, S_2 ja S_3, võime kirjutada, et

$$S_1 < S_2 < S_3.$$

Avaldame need pindalad suuruse x kaudu:

$$S_1 = \frac{AD \cdot BC}{2} = \frac{1 \cdot \sin x}{2} = \frac{\sin x}{2},$$

$$S_2 = \frac{\pi r^2}{2\pi} \cdot x = \frac{1}{2} \cdot x = \frac{x}{2},$$

$$S_3 = \frac{AD \cdot DE}{2} = \frac{1 \cdot \tan x}{2} = \frac{\tan x}{2}.$$

Seega

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2}$$

ehk

$$\sin x < x < \tan x.$$

Jagame need võrratused läbi avaldisega $\sin x$. Et x on väike positiivne nurk, siis $\sin x > 0$ ja järelikult

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Kui nüüd $x \to 0$, siis $\cos x \to 1$ ja seega ka $\frac{1}{\cos x} \to 1$. Et $\frac{x}{\sin x}$ väärtused peavad seejuures jääma arvu 1 ja $\frac{1}{\cos x}$ väärtuste vahele, siis peab ka $\frac{x}{\sin x} \to 1$. Piirväärtuse sümbolit kasutades võime seega kirjutada, et

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

Kasutades võrdust

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{\frac{x}{\sin x}}$$

jõuamegi meid huvitava piirväärtuseni:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{x}{\sin x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Seega

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

2.2.2. FUNKTSIOONI sin x TULETIS.

On antud funktsioon $y = \sin x$.

1°. Siin

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

ja kasutades siinuste vahe korrutiseks teisendamise valemit:

$$\Delta y = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

2°. Moodustame jagatise:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

3°. Kui nüüd $\Delta x \to 0$, siis saamegi otsitava tuletise:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \right].$$

Kui $\Delta x \to 0$, siis ka $\frac{\Delta x}{2} \to 0$ ja $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$ ning

$$\lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x, \text{ s. t. et}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \cdot \cos x.$$

Niisiis,

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

2.2.3. FUNKTSIOONI cos x TULETIS.

On antud funktsioon $y = \cos x$.

1°. Siin

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x$$

ja kasutades koosinuste vahe korrutiseks teisendamise valemit, saame

$$\Delta y = -2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

2°. Moodustame jagatise

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x},$$

mille kirjutame kujul

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

3°. Kui nüüd $\Delta x \to 0$, siis saamegi otsitava tuletise:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = -\sin x,$$

s. t.

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

2.2.4. FUNKTSIOONI tan x TULETIS.

Olgu antud funktsioon $y = \tan x$. Et $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, siis kasutame otsitava tuletise leidmiseks jagatise tuletise leidmise eeskirja. Saame

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Seega

$$\boxed{(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

Ülesandeid.

93. Leia piirväärtused.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{3}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos 2x}{2x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x}$ d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$

94. Leia järgmiste funktsioonide tuletised:

a) $\sin x - \cos x$ d) $\sin^2 x$

b) $\cos x + \tan x$ e) $\cos^2 x$

c) $3 \sin x - 2 \tan x$ f) $\tan^2 x$

95. Teades, et

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} \text{ ja } \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x},$$

leia funktsioonide $\cot x$, $\sec x$ ja $\operatorname{cosec} x$ tuletised.

96. Leia järgmiste funktsioonide tuletised:

a) $\sqrt{x}\sin x$ d) $\sqrt{x}\cos x$

b) $\frac{\cos x}{x}$ e) $x^2 \sin x$

c) $\frac{x^2}{\tan x}$ f) $\frac{1}{x}\tan x$

97. Leia järgmiste funktsioonide tuletised:

a) $\sin x \cos x$ d) $\cos^2 x - \sin^2 x$

b) $\tan x \cot x$ e) $\sin^2 x + \cos^2 x$

c) $\sec x \operatorname{cosec} x$ f) $\cos 2x + \sin 2x$

98. Leia järgmiste funktsioonide muutumise hetkelised kiirused antud kohtades:

a) $\sin x$, kui $x=\frac{\pi}{3}$; c) $\sin 2x$, kui $x=\frac{\pi}{8}$;

b) $\cos x$, kui $x=-\frac{\pi}{6}$; d) $\frac{x^4}{4}+\cos 2x$, kui $x=\frac{\pi}{6}$.

99. Selgita, kas funktsioon

$y=\sin x+\cos x$

on kohtadel $x_1=0$, $x_2=-\frac{\pi}{3}$ ja $x_3=\frac{\pi}{3}$ kasvav või kahanev.

100. Selgita, kas funktsioon
$y=\sin 2x+\cos 2x$

on kohtadel $x_1=0$, $x_2=\frac{\pi}{12}$, $x_3=-\frac{\pi}{12}$, $x_4=-\frac{\pi}{4}$, $x_5=\frac{\pi}{4}$ kasvav või kahanev.

101. Leia kõvera $y=\sin x$ puutuja võrrand kohal $x=0, -\frac{\pi}{4}, \frac{9}{4}\pi$.

102. Leia kõvera $y=\cos 2x$ puutuja võrrand kohal $x=0, -\frac{\pi}{8}, \frac{7}{4}\pi$.

2.3. EKSTREEMUMÜLESANDED.

Teame, et funktsiooni $y=f(x)$ ekstreemumkohti otsime võrrandi

$$f'(x)=0$$

lahendite hulgast. Seda tõsiasja saab ära kasutada paljude praktilist laadi ülesannete lahendamiseks. Selgitame seda mõnede näidete abil.

N ä i d e 1. Jaotada arv 70 kaheks osaks nii, et nende korrutis oleks suurim.

Olgu üks arv x, siis teine on $70-x$. Funktsioon, mille maksimumkoht tuleb leida, on

$$y=x(70-x)$$

ehk

$$y=70x-x^2.$$

Leiame tuletise ja võrdsustame selle nulliga:

$$y'=70-2x; \qquad 70-2x=0,$$

millest

$$x=35.$$

Et antud funktsioon on ruutfunktsioon negatiivse ruutliikme kordajaga, siis haripunkti abstsiss on maksimumkohaks ja seega korrutis

$$35 \cdot 35=1225$$

on suurim.

N ä i d e 2. Missuguste mõõtmete korral on silindrikujulise konservitoosi valmistamiseks kulutatud vähim hulk plekki ja kui palju, kui konservitoosi ruumala on V (joon. 47).

JOON. 47.

Tähistame silindri põhja raadiuse tähega r, kõrguse tähega h ja täispindala tähega S. Siis

$$S=2\pi rh+2\pi r^2,$$

millele lisandub ülesande andmete kohaselt tingimus $\pi r^2 h=V$, mis võimaldab meil S avaldada kas r või h funktsioonina.

Avaldame võrdusest $V=\pi r^2 h$ näiteks h:

$$h=\frac{V}{\pi r^2}$$

ja asetame selle S avaldisse:

$$S=2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2}+2\pi r^2.$$

Pärast taandamist saame

$$S=\frac{2V}{r}+2\pi r^2.$$

Et leida, missuguse r väärtuse korral on S väärtus väikseim, selleks leiame tuletise r järgi ja võrdsustame selle 0-ga:

$$S'=-\frac{2V}{r^2}+4\pi r;$$

$$\frac{-2V}{r^2}+4\pi r=0.$$

Lahendame selle võrrandi:

$$-V+2\pi r^3=0;$$

$$r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Et $h=\frac{V}{\pi r^2}$, siis $h=\frac{V}{\pi\sqrt[3]{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{\pi}{4V}}}=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}.$

Parema ülevaate saamiseks konservitoosi kujust leiame suhte $\frac{r}{h}$:

$$\frac{r}{h}=\frac{\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}}{\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}}=\sqrt[3]{\frac{V\cdot\pi}{2\pi\cdot 4V}}=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2},$$

s. t. et konservitoosi kõrgus peab olema kaks korda suurem kui raadius ehk, teisiti, konservitoosi põhja läbimõõt ja kõrgus peavad olema võrdsed.

Tekib küsimus: kas leitud tulemuste korral kulub konservitoosi valmistamiseks vähim või suurim hulk plekki.

Olgu Δr kuitahes väike positiivne suurus ja r võrrandi

$$-\frac{2V}{r^2}+4\pi r=0$$

lahend. Pannes selle võrduse vasakusse poolde r asemele $r+\Delta r$, saame avaldise

$$-\frac{2V}{(r+\Delta r)^2}+4\pi(r+\Delta r).$$

Et

$$\frac{2V}{r^2} > \frac{2V}{(r+\Delta r)^2} \quad \text{ja} \quad \frac{-2V}{r^2} < \frac{-2V}{(r+\Delta r)^2}$$

ning

$$4\pi r < 4\pi(r+\Delta r),$$

siis

$$-\frac{2V}{r^2} + 4\pi r < -\frac{2V}{(r+\Delta r)^2} + 4\pi(r+\Delta r).$$

Samuti selgub, et

$$-\frac{2V}{r^2} + 4\pi r > -\frac{2V}{(r-\Delta r)^2} + 4\pi(r-\Delta r).$$

Teame, et

kui $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, siis $S' = 0$.

Nüüd veendusime, et

kui $r > \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, siis $S' > 0$, ja

kui $r < \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, siis $S' < 0$.

Seega toimub funktsioonil $S = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2$ kohal $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ üleminek kahanemiselt kasvamisele, s. t. et käesoleval juhul on ekstreemumkoht miinimumkohaks.

Leitud avaldised r ja h jaoks võimaldavad arvutada vähima plekihulga, mis on vajalik antud andmetele vastava konservitoosi valmistamiseks

$$S = 2\pi \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \cdot \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} + 2\pi \cdot \sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}} =$$

$$= 2\pi\left(\frac{\sqrt[3]{16\pi V^2}}{2\pi} + \frac{\sqrt[3]{2\pi V^2}}{2\pi}\right) = 2\sqrt[3]{2\pi V^2} + \sqrt[3]{2\pi V^2} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}.$$

Niisiis, antud ruumalaga V silindrikujulise konservitoosi valmistamiseks kulub vähim hulk plekki juhul, kui $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ ja $h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$. Vajatav plekihulk on $3\sqrt[3]{2\pi V^2}$ ruutühikut.

Ülesandeid.

103. 20 cm pikkune lõik on jaotatud kahte ossa. Üks osa võetakse ristküliku aluseks, teine kõrguseks. Missuguse aluse puhul on ristküliku pindala suurim?

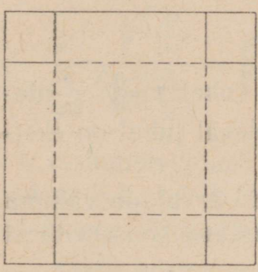
104. Ristküliku pindala on 100 cm^2. Missuguste mõõtmete korral on selle ristküliku ümbermõõt vähim?

105. Tõesta, et kahe positiivse arvu korrutis juhul, kui nende arvude summa on konstantne, on maksimaalne võrdsete tegurite korral.

106. Tõesta, et kahe positiivse arvu summa juhul, kui nende arvude korrutis on konstantne, on minimaalne võrdsete liidetavate korral.

107. Traadiga, mille pikkus on $2a$ meetrit, tuleb ümbritseda kolmest küljest ristkülikukujuline koppel. Leia selle maatüki mõõtmed nii, et traadiga piiratava ala pindala oleks suurim, kui traataed tuleb teha kahekordne.

108. Kolmnurga pindala on 18. Ehita see kolmnurk nii, et tema aluse ja kõrguse summa oleks väikseim. Mitu lahendit on sellel ülesandel?



JOON. 48.

109. Ruudukujulise plekitahvli külg on 60 cm. Plekitahvli nurkadest tuleb lõigata ära 4 ruutu nii, et järelejäänud osast saaks servi üles pöörates suurima ruumalaga karbi (joon. 48). Leia väljalõigatud ruutude külje pikkus.

110. Ristkülikukujulisest papitükist, mille mõõtmed on 3 dm ja 5 dm, tuleb valmistada kaaneta karp. Selleks lõigatakse papitüki nurkadest ära võrdsed ruudud ja murtakse servad üles. Kui suur peab olema väljalõigatavate ruutude külg, et karbi ruumala oleks suurim?

111. Mõõda mõne konservitoosi kõrgus ja põhja läbimõõt ning leia, kui palju oleks saanud plekki kokku hoida:
a) ühe samasuguse ruumalaga konservitoosi valmistamisel;
b) 100 000 sellise konservitoosi valmistamisel (vt. näide 2).

112. Mõõda tikutoosi mõõtmed. Kui suur on tema ruumala? Missugused peavad olema tikutoosi mõõtmed, et tema valmistamiseks kuluks vähim hulk materjali, eeldades, et toosi pikkus on tiku pikkusega määratud ja toosi pandavate tikkude arv jääb samaks? (Arvutuste hõlbustamiseks loeme toosi kesta ja sahtli ristlõike mõõtmed võrdseteks.)

113. Kuidas tuleb valida silindrikujulise (pealt lahtise) liitri mõõtmed, et tema valmistamiseks kuluks vähim hulk plekki?

114. Soovitakse valmistada 1000-liitrine silindrikujuline boiler. Külje materjali ruutdetsimeeter maksab 50 kop., otste materjali ruutdetsimeeter 1 rbl. Missuguste mõõtmete korral on boileri valmistamise kulud väikseimad?

115. Risttahukakujulise paagi põhjaks on ruut. Paagi pindala ilma kaaneta on 108 dm². Missugused peavad olema paagi mõõtmed, et paagi ruumala oleks suurim?

116. Tuleb valmistada pealt lahtine risttahukakujuline anum, mille põhjaks on ruut ja mille ruumala on 32 l. Millised peavad olema anuma mõõtmed, et selle valmistamiseks kuluks vähim hulk materjali?

117. Soovitakse valmistada 100-liitrine risttahukakujuline ruudukujulise põhjaga akvaarium. Kuidas tuleb valida akvaariumi mõõtmed, et

a) punasest vasest servad maksaksid võimalikult vähe?

b) põhi- ja külgpind tuleksid võimalikult odavad?

118. Aken koosneb ristkülikust ja sellele asetatud poolringist. Akna ümbermõõt on p. Kuidas tuleb valida akna laius ja kõrgus, et akent läbiv valgushulk oleks suurim?

119. Raamatu leheküljele soovitakse mahutada S cm² teksti ja jätta selle ümber l cm laiused ääred. Missugused mõõtmed peavad olema lehel, et raamatu valmistamiseks kuluks võimalikult vähe paberit?

120. Lahenda eelmine ülesanne juhul, kui $l = 1{,}5$ ja $S = 196$ cm². Kui palju on võimalik kokku hoida paberit, kui raamatu leheküljel on teksti $11 \times 17{,}8$ cm², raamatus on 400 lehekülge ja raamatu tiraaž on 30 000 eksemplari?

121. Veeanum koosneb lahtisest silindrist ja selle otsa kinnitatud poolkerast. Missugused peavad olema selle anuma mõõtmed, et tema valmistamiseks kuluks võimalikult vähe materjali, kui anuma ruumala on V m³?

122. Võrdhaarse kolmnurga aluse ja kõrguse summa on s. Kolmnurk pöörleb oma kõrguse ümber. Missugune seos peab olema aluse ja kõrguse vahel, et tekkinud pöördkeha ruumala oleks maksimaalne?

2.4. NEWTONI VÕTE.

2.4.1. VÕRRANDI LIGIKAUDNE LAHENDAMINE.

Lineaarsete ja ruutvõrrandite lahendamine toimub kindlate eeskirjade kohaselt ja tulemuseks saadakse alati täpne lahend.

N ä i t e i d.

1) $3x-1=7;$

$3x=8;$

$x=\frac{8}{3}.$

2) $2x^2-3x+1=0;$

$x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4};$

$x_1=\frac{4}{4}=1;$

$x_2=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$

Kui ruutvõrrandi lahendid on irratsionaalarvud, siis leides ruutjuure kas algoritmi abil teatud täpsusega või kasutades tabeleid, saame kümnendmurrud, mis on ruutvõrrandi *l i g i k a u d s e i k s l a h e n d e i k s*.

N ä i d e.

$2x^2+x-2=0;$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+16}}{4};$

$x\approx\frac{-1\pm4{,}123}{4};$

$x_1\approx\frac{3{,}123}{4}\approx0{,}78;$

$x_2\approx\frac{-5{,}123}{4}\approx-1{,}28.$

Siin on lahendid antud sajandiku täpsusega.

Kuupvõrrandi lahendamiseks võib kasutada ka vastavat lahendivalemit (nagu ruutvõrrandi puhulgi), kuid praktiliseks kasutamiseks on see liialt kohmakas. Enamikul juhtudel kasutatakse kuupvõrrandite (samuti teiste kõrgema astme võrrandite) lahendamiseks mõnd nn. ligikaudse lahendamise võtet. See on võte, mille abil osutub võimalikuks kas proovimise teel või graafikult leitud lahendi ligikaudset väärtust täpsustada.

Olgu näiteks antud võrrand

$$x^3-3x-5=0.$$

Tähistame võrrandi vasaku poole $f(x)$-iga, s. t.

$$f(x)=x^3-3x-5.$$

Kui $x=1$, siis $f(1)=-7$;
„ $x=2$, „ $f(2)=-3$;
„ $x=3$ „ $f(3)=13$.

Saadud tulemuste põhjal võime öelda, et funktsioonil x^3-3x-5 on vähemalt üks nullkoht arvude 2 ja 3 vahel, sest funktsioon x^3-3x-5 on pidev ja seega peab ta üleminekul negatiivsetelt väärtustelt positiivsetele läbima nullkoha.

Kui soovime antud võrrandi lahendit saada kümnendiku täpsusega, siis tuleb arvude

2,1; 2,2; 2,3; . . . ; 2,9

hulgast leida need, mille vahel asub funktsiooni x^3-3x-5 nullkoht. Proovimise teel saame kindlaks teha, et

$$f(2{,}2)\approx-1{,}0 \text{ ja } f(2{,}3)\approx 0{,}3.$$

Seega on võrrandi $x^3-3x-5=0$ ligikaudseteks lahenditeks 2,2 ja 2,3. Kumb neist on täpsem, see selgub, kui otsime funktsioonile x^3-3x-5 samal viisil nullkohta arvude

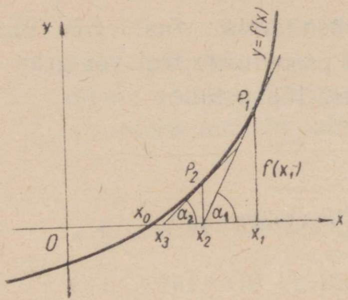
2,21; 2,22; 2,23; . . . ; 2,29

hulgast.

Arvutustehniliselt muutub proovimise meetod järjest keerukamaks. Matemaatikud on otsinud valemeid, mille abil saab võrrandi lahendeid kergemini täpsustada. Siinkohal tutvumegi neist ühega, mille võttis kasutusele tuntud inglise füüsik ja matemaatik *Isaac Newton.*

2.4.2. NEWTONI VÕTE VÕRRANDI LAHENDI TÄPSUSTAMISEKS.

Olgu antud lahendada võrrand $f(x)=0$, s. t. ülesandeks on määrata funktsiooni $y=f(x)$ nullkoht. Esitagu joonisel 49 kujutatud kõver funktsiooni $y=f(x)$ graafikut. Tähistame selle funkt-



JOON. 49.

siooni nullkoha tähega x_0, mis aga tähendab, et x_0 on antud võrrandi täpne lahend.

Oletame, et proovimise teel on leitud antud võrrandi lahendi esimeseks lähendiks x_1, s. t. $x_0 \approx x_1$ ehk

$$x_0 = x_1 + a,$$

kus a on nn. p a r a n d u s, s. o. täpse lahendi ja ligikaudse lahendi vahe.

Abstsissile x_1 vastab graafikul punkt P_1. Läbi selle punkti kõverale tõmmatud puutuja moodustab x-teljega nurga α_1. Selle puutuja tõus $k_1 = f'(x_1) = \tan \alpha_1$. Puutuja ja x-telje lõikepunkt määrab antud võrrandi lahendile märksa parema lähendi x_2, kui seda on x_1.

Kasutades joonisel esitatud kolmnurka, võime kirjutada

$$\frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} = \tan \alpha_1$$

ja siit

$$x_1 - x_2 = \frac{f(x_1)}{\tan \alpha_1}.$$

Et

$$\tan \alpha_1 = f'(x_1),$$

siis

$$\boxed{\mathbf{x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}}}$$

Kui tahame saada veel täpsemat lahendit, siis ehitame kõveral punkti $P_2(x_2; y_2)$ ja läbi selle punkti tõmbame puutuja, mis lõikumisel x-teljega määrabki antud võrrandi lahendile täpsema lähendi x_3. Et siin on probleem täpselt samasugune nagu x_2 määramisel, siis võime kohe kirjutada, et

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$

Kui ka sellest täpsusest ei piisa, siis tuleb analoogilise mõttekäigu abil leida järgmine lähend:

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \text{ jne.}$$

Kuidas avaldub x_5, x_n?

N ä i d e. Olgu tarvis leida võrrandi

$$x^3 - x - 5 = 0$$

lahendi õiged numbrid kuni tuhandikeni.

Antud ülesandes on $f(x) = x^3 - x - 5$. Proovimise teel leiame, et $f(1) = -5$ ja $f(2) = 1$. Seega on üks lahend 1 ja 2 vahel. Olgu $x_1 = 2$. Newtoni võtte rakendamiseks on vaja teada $f(x)$ tuletist:

$$f'(x) = 3x^2 - 1.$$

Nüüd võime avaldada x_2:

$$x_2 = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{1}{11} \approx 1{,}909.$$

Analoogiliselt leiame x_3 ja x_4:

$$x_3 = 1{,}909 - \frac{0{,}048}{9{,}935} \approx 1{,}909 - 0{,}005 = 1{,}904;$$

$$x_4 = 1{,}904 - \frac{0{,}002}{9{,}878} \approx 1{,}904 - 0{,}0002 \approx 1{,}904.$$

Et kõik kohad kuni tuhandikeni jäid püsima, siis võime öelda, et saadud lahend $x = 1{,}904$ esitab antud võrrandi lahendi õiged numbrid kuni tuhandikeni.

Ülesandeid.

123. Lahenda järgmised ruutvõrrandid, leides lahendid sajandiku täpsusega.

a) $x^2 = 30$ d) $x^2 - 3x - 3 = 0$
b) $3x^2 = 78$ e) $x^2 + x - 8 = 0$
c) $2{,}3x^2 - 46{,}1 = 0$ f) $2x^2 - 5x + 1 = 0$

124. Leia, missuguste täisarvude vahel on järgmistel võrranditel lahend.

a) $x^3 - 3x - 1 = 0$ d) $x^3 + x^2 - 1 = 0$
b) $x^3 - 5x - 10 = 0$ e) $x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$
c) $x^3 + 2{,}5x + 40 = 0$ f) $x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$

125. Leia järgmiste võrrandite lahenditele täisarvulised lähendid ja täpsusta neid Newtoni võttega.

a) $x^3-4x+7=0$ d) $x^3+6x^2+5=0$

b) $x^3-6x+3{,}5=0$ e) $x^3-2x+18=0$

c) $x^3-2x-5=0$ f) $x^4-x-4=0$

126. Võrrandi $x^3+px+q=0$ lahendid on samad, mis võrrandil $x^3=-px-q$. Seega on antud võrrandi lahenditeks funktsioonide

$y=x^3$ ja $y=-px-q$

graafikute lõikepunktide abstsissid. Kasutades seda tõsiasja, kontrolli ülesande 123 ja ülesande 124 kahe esimese võrrandi lahendeid graafiliselt.

127. Pane avaldises x^3+bx^2+cx+d tähe x asemele $(x+a)$. Missugune väärtus tuleb anda a-le, et pärast asendamist poleks avaldises enam x^2-ga liiget?

128. On antud võrrand $x^3+3x^2+2x-1=0$. Teisenda selle võrrandi vasak pool niisuguseks, et sealt puuduks x^2-ga liige (vt. eelmine ülesanne). Kas antud võrrandil ja saadud võrrandil on ühesugused lahendid? Mille võrra need lahendid erinevad?

129. Lahenda võrrandid järgmise skeemi kohaselt:

1) kasuta ruutliikmest vabastamise teisendust;

2) leia saadud võrrandile ligikaudsed lahendid, kasutades funktsiooni $y=x^3$ graafikut;

3) täpsusta saadud lahendeid Newtoni võttega sajandikeni.

a) $x^3+x^2-1=0$ d) $x^3+3x^2-x-3=0$

b) $x^3-6x^2-10=0$ e) $x^3-3{,}9x^2-3{,}9x+10{,}8=0$

c) $x^3+2x^2-3x+1=0$ f) $x^3-4{,}2x^2-12{,}6x+45{,}9=0$

2.5. NEWTONI BINOOMVALEM.

2.5.1. BINOOMI $x+1$ ASTMETE ARENDID.

Summa ruudu ja summa kuubi valemite järgi võime kirjutada:

$(x+1)^2=x^2+2x+1;$

$(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1.$

Kasutades neid valemeid võime jätkata $x+1$ astmete väljakirjutamist:

$$(x+1)^4=(x+1)^3(x+1)=x^4+4x^3+6x^2+4x+1;$$
$$(x+1)^5=(x+1)^4(x+1)=x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1$$

jne.

Nende võrduste paremaid pooli nimetatakse lühidalt **binoomi $x+1$ astmete arenditeks.**

Esitame binoomi $x+1$ astmete arendite kordajad tabelina:

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&&1&&&&& \\ &&&&1&&1&&&& \\ &&&1&&2&&1&&& \\ &&1&&3&&3&&1&& \\ &1&&4&&6&&4&&1& \\ 1&&5&&10&&10&&5&&1 \end{array}$$

Seda tabelit nimetatakse **Pascali kolmnurgaks.**

Pascali kolmnurgast näeme, et binoomkordajate kohta kehtivad järgmised seaduspärasused:

a) binoomkordajad asetsevad arendis sümmeetriliselt, s. t. arendi algusest ja lõpust võrdsetel kaugustel asetsevate liikmete kordajad on võrdsed;

b) esimese ja viimase liikme kordaja on 1;

c) teise ja eelviimase liikme kordaja on võrdne binoomi astendajaga.

Edaspidi näitame, et need omadused kehtivad iga naturaalarvulise astendajaga binoomi arendi kohta.

Ülesandeid.

130. Esita binoomide $(x+1)^6$, $(x+1)^7$, $(x+1)^8$ arendid ja täienda nende kordajatega Pascali kolmnurka.

131. Leia Pascali kolmnurga abil, kuidas saab teise astme binoomi arendi kordajate kaudu välja kirjutada kolmanda astme binoomi arendi kordajaid, kolmanda astme binoomi arendi kordajate kaudu neljanda astme binoomi arendi kordajaid jne.

132. Sõnasta Pascali kolmnurga jätkamise reegel ja täienda selle abil Pascali kolmnurka binoomide $(x+1)^9$ ja $(x+1)^{10}$ kordajatega.

2.5.2. FUNKTSIOONI $[f(x)]^n$ TULETIS.

a) $[f(x)]^2$ tuletis.

Et $[f(x)]^2 = f(x) \cdot f(x)$, siis kasutame siin korrutise tuletise leidmise eeskirja. Saame

$$\{[f(x)]^2\}' = [f(x)]' \cdot f(x) + f(x) \cdot [f(x)]' = 2f(x) \cdot [f(x)]'.$$

b) $[f(x)]^3$ tuletis.

Kasutades eelmist tulemust ja jällegi korrutise tuletise leidmise eeskirja, võime kirjutada:

$$\{[f(x)]^3\}' = \{[f(x)]^2 \cdot f(x)\}' = \{[f(x)]^2\}' \cdot f(x) + [f(x)]^2 \cdot [f(x)]' =$$
$$= 2f(x) \cdot [f(x)]' \cdot f(x) + [f(x)]^2 \cdot [f(x)]' = 3[f(x)]^2 \cdot [f(x)]'.$$

c) $[f(x)]^n$ tuletis.

Eeldame, et eelmiste näidete juures tähelepandud seaduspärasus kehtib mingi naturaalarvu k korral, s. t. et

$$\{[f(x)]^k\}' = k \cdot [f(x)]^{k-1} \cdot [f(x)]',$$

ja väidame, et siis kehtib ka valem

$$\{[f(x)]^{k+1}\}' = (k+1) \cdot [f(x)]^k \cdot [f(x)]'.$$

Et

$$[f(x)]^{k+1} = [f(x)]^k \cdot f(x),$$

siis

$$\{[f(x)]^{k+1}\}' = \{[f(x)]^k \cdot [f(x)]\}' =$$
$$= \{[f(x)]^k\}' \cdot f(x) + [f(x)]^k \cdot [f(x)]' =$$
$$= k[f(x)]^{k-1} \cdot [f(x)]' \cdot f(x) + [f(x)]^k \cdot [f(x)]' =$$
$$= (k+1)[f(x)]^k \cdot [f(x)]'.$$

Et $k=3$ puhul see valem kehtib (vt. punkt *b*), siis tõestatu põhjal kehtib ta ka $k=4$ puhul. Kui valem kehtib aga $k=4$ puhul, siis tõestatu põhjal kehtib ta ka $k=5$ puhul jne.

Seega olemegi tõestanud, et

$$\boxed{\{[f(x)]^n\}' = n[f(x)]^{n-1} \cdot [f(x)]'}$$

Ülesandeid.

133. Leia järgmiste funktsioonide tuletised:

a) $(x+1)^5$ f) $(3x^2+2x-1)^6$

b) $(2x-3)^7$ g) $(\sin x+\tan x)^{10}$

c) $\left(2-\frac{3}{2}x\right)^6$ h) $\left(x^2+\frac{1}{x}+x\right)^{12}$

d) $(-4+3{,}72x)^9$ i) $(3\cos x-2\sin x)^7$

e) $(x+1)^n$ j) $\left(3x+\frac{4}{x}\right)^n$

2.5.3. BINOOMI $(x+1)^n$ AREND.

a) Binoomkordajate määramine.

Binoomi $(x+1)$ astmete arendid on avaldatavad korrastatud hulkliikmetena x astmete suhtes. Seame nüüd eesmärgiks avaldada hulkliikme kordajad binoomi astendaja n kaudu. Selleks oletame, et

$$(x+1)^n=C_0x^n+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+$$
$$+\ldots+C_{n-2}x^2+C_{n-1}x+C_n,$$

kus nn. binoomkordajad C_0, C_1, $C_2, \ldots, C_{n-2}$, C_{n-1}, C_n tuleb määrata.

Binoomkordajate määramiseks kasutatava võttega tutvume juhul, kui $n=4$, s. t. seame ülesandeks määrata kordajad C_0, C_1, C_2, C_3 ja C_4 võrduses

$$(x+1)^4=C_0x^4+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4.$$

Kui $x=0$, siis

$$(0+1)^4=C_0\cdot 0^4+C_1\cdot 0^3+C_2\cdot 0^2+C_3\cdot 0+C_4$$

ja siit

$$1^4=C_4, \text{ s. t. et } \mathbf{C_4=1}.$$

Järgmised kordajad määrame tuletise kaasabil, lähtudes eeldusest, et kui funktsioonid on võrdsed, siis on võrdsed ka nende tuletisfunktsioonid. Seega, kui

$$(x+1)^4=C_0x^4+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4,$$

siis

$$4(x+1)^3\cdot 1=4C_0x^3+3C_1x^2+2C_2x+C_3.$$

Et ka see võrdus peab kehtima x iga väärtuse korral, siis võttes jällegi $x=0$, saame

$$4 \cdot 1^3 = C_3, \text{ s. t. et } \mathbf{C_3=4}.$$

Jätkates analoogiliselt, saame, et

$$3 \cdot 4(x+1)^2 \cdot 1 = 3 \cdot 4 \cdot C_0 x^2 + 2 \cdot 3 \cdot C_1 x + 2C_2,$$

ja siit, kui $x=0$, et $2C_2=12$ ja $\mathbf{C_2=6}$.

Edasi on

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (x+1) \cdot 1 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot C_0 \cdot x + 2 \cdot 3 \cdot C_1,$$

millest juhul, kui $x=0$, saame, et $6C_1=24$ ja $\mathbf{C_1=4}$, ning

$$2 \cdot 3 \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot C_0, \text{ millest } \mathbf{C_0=1}.$$

Nii jõuamegi tuntud tulemuseni

$$(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1.$$

Siin tutvustatud võtet kasutades saame leida järgmised avaldised binoomi $(x+1)^n$ arendi kordajate jaoks:

$$C_n = 1;$$

$$C_{n-1} = n;$$

$$C_{n-2} = \frac{n(n-1)}{2};$$

$$C_{n-3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3};$$

$$C_{n-4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4};$$

. . . .

$$C_{n-k} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-k+1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot k};$$

. . . .

$$C_{n-n} = C_0 = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n} = 1.$$

b) Faktoriaali mõiste.

Järjestikuste naturaalarvude korrutis, alates arvust 1, kirjutatakse üles eri sümboliga, nn. faktoriaali abil.

Nii tähistame

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n = n!,$$

kus sümbolit $n!$ loeme «n faktoriaal».

Näiteks

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5,$$
$$8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8.$$

Ka sümbolile 0! on antud arvu tähendus:

$$0! = 1.$$

c) Binoomkordajate üldavaldis.

Laiendades binoomkordaja C_{n-k} avaldises lugejat ja nimetajat korrutisega

$$(n-k)(n-k-1)(n-k-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = (n-k)!,$$

saame

$$C_{n-k} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)(n-k)(n-k-1)(n-k-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot k(n-k)(n-k-1)(n-k-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}.$$

Selle murru võime hoopis lühemalt üles kirjutada, kui kasutame faktoriaali sümbolit:

$$C_{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Seega oleme saanud binoomi $(x+1)^n$ arendi kordajate üldliikme, mis võimaldab leida kõiki binoomkordajaid, kui $k=0$, $1, 2, \ldots, n$.

d) Binoomkordajate omadused.

Kasutades binoomkordajate üldavaldist, leiame binoomkordajad $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_k$:

$$C_1 = C_{n-(n-1)} = \frac{n!}{(n-1)!(n-n+1)!} = \frac{n!}{(n-1)} = n;$$

$$C_2 = C_{n-(n-2)} = \frac{n!}{(n-2)!(n-n+2)!} = \frac{n!}{(n-2)!\,2!} = \frac{n(n-1)}{2!};$$

$$C_3 = C_{n-(n-3)} = \frac{n!}{(n-3)!(n-n+3)!} = \frac{n!}{(n-3)!\,3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!};$$

. . . .

$$C_k = C_{n-(n-k)} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k!)} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

Võrreldes kordajat C_k kordajaga C_{n-k}, näeme, et

$C_k = C_{n-k}$.

Seega,

1° *binoomi* $(x+1)^n$ *arendis on algusest ja lõpust võrdsetel kaugustel seisvate liikmete kordajad võrdsed.*

Siis on $C_0 = C_n$, $C_1 = C_{n-1}$, $C_2 = C_{n-2}$ jne.

Eespool veendusime, et $C_n = 1$. Nüüd teame, et $C_n = C_0$. Sellest järeldub, et

2° *binoomi* $(x+1)^n$ *arendis on esimese ja viimase liikme kordajad võrdsed ühega.*

Nägime ka, et $C_{n-1} = n$. Et aga $C_{n-1} = C_1$, siis

3° *binoomi* $(x+1)^n$ *arendis on teise ja eelviimase liikme kordajad võrdsed binoomi astendajaga.*

e) Binoomi $(x+1)^n$ arend.

Esitame nüüd binoomi $(x+1)^n$ arendi, asendades määramata kordajad määratud kordajatega:

$$(x+1)^n = x^n + nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3} +$$

$$+ \ldots + \frac{n!}{k!(n-k)!}x^{n-k} + \ldots + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + nx + 1.$$

Ülesandeid.

134. Määra binoomi arendi kordajad.

a) $(2x+5)^3 = C_0x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3$

b) $(4-3x)^4 = C_0x^4 + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$

c) $(1{,}2x-6)^5 = C_0x^5 + C_1x^4 + C_2x^3 + C_3x^2 + C_4x + C_5$

135. Leia

3!, 5!, 10!, 0!.

136. Kasutades binoomkordajate üldavaldist, leia järgmised binoomkordajad.

C_{3-2}, C_{4-1}, C_{5-3}, C_{6-2} C_{7-4}, C_{8-3}.

137. Binoomkordajaid C_{n-k} tähistatakse sageli kujul C_n^k. Leia C_3^1, C_5^2, C_7^3, C_8^6, C_{10}^5.

138. Esita binoomide $(x+1)^8$ ja $(x+1)^{15}$ arendid.

2.5.4. BINOOMI $(a+b)^n$ AREND.

Tuginedes $(x+1)^n$ arendile leiame nüüd $(a+b)^n$ arendi. Lähtume samasusest

$$(a+b)^n=\left[b\left(\frac{a}{b}+1\right)\right]^n=b^n\left(\frac{a}{b}+1\right)^n.$$

Edasi rakendame binoomi $(x+1)^n$ arendi valemit:

$$(a+b)^n=b^n\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n+n\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-2}+\right.$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-3}+\ldots+\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-k}+$$
$$\left.+\ldots+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{a}{b}\right)^2+n\frac{a}{b}+1\right].$$

Avades sulud ja taandades, saame

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)^n&=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\\&+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+\ldots+\frac{n!}{k!(n-k)!}a^{n-k}b^k+\\&+\ldots+\frac{n(n-1)}{2!}a^2b^{n-2}+nab^{n-1}+b^n.\end{aligned}}$$

Viimast valemit nimetatakse **Newtoni binoomvalemiks.**

2.5.5. NEWTONI BINOOMVALEMI KORDAJATE OMADUSI.

Et Newtoni binoomvalemi kohaselt on binoomi $(a+b)^n$ arendis kordajad samad mis binoomi $(x+1)^n$ arendis, siis kehtivad siin needsamad juba tähele pandud omadused kordajate kohta.

1° *Binoomkordajad on esitatavad Pascali kolmnurgana.*

2° Binoomi arendi algusest ja lõpust võrdsetel kaugustel asetsevad kordajad on võrdsed.

3° Binoomi arendi liikmete arv on binoomi astendajast ühe võrra suurem.

Võttes binoomvalemis $a=b=1$, saame, et

4° binoomkordajate summa on 2^n.

Kontrolli seda omadust!

Kasutades võrdust $(a-b)^n=[a+(-b)]^n$, saame binoomvalemi vahe jaoks. Tee seda!

Võttes nüüd $a=b=1$, jõuame omaduseni

5° paarituarvulistel kohtadel seisvate binoomkordajate summa võrdub paarisarvulistel kohtadel seisvate binoomkordajate summaga.

Kontrolli seda omadust!

Ülesandeid.

139. Esita järgmiste binoomide arendid.

a) $(1-s)^4$ d) $(2-a)^8$

b) $(p+q)^5$ e) $(3x+4y)^6$

c) $\left(u+\frac{1}{u}\right)^{10}$ f) $(x^2+2y^2)^4$

140. Leia järgmised astmed kuni neljanda kohani pärast koma, kasutades selleks binoomi arendist vajalikku arvu liikmeid.

a) $(1,1)^8$ d) $(0,95)^6$

b) $(1,05)^{12}$ e) $(0,99)^5$

c) $(1,002)^{10}$ f) $(0,998)^{20}$

141. Leia järgmised astmed, kasutades Newtoni binoomvalemit.

a) 29^5 c) $(4+3)^6$ e) $(a+b)^4$

b) 99^3 d) $(6-52)^5$ f) $(a-b)^4$

2.6. LIGIKAUDNE VALEM $(1+x)^n \approx 1+nx$.

Seame ülesandeks esitada funktsioon $(1+x)^n$ ligikaudu lineaarse funktsioonina, eeldades, et n on naturaalarv ja x on absoluutväärtuselt väike arv.

Kasutades Newtoni binoomvalemit võime kirjutada:

$$(1+x)^n=1+nx+\ldots+x^n.$$

Et x on absoluutväärtuselt väike arv ja seega tema astmed veelgi väiksemad, siis võime kirjutada:

$$(1+x)^n\approx 1+nx$$

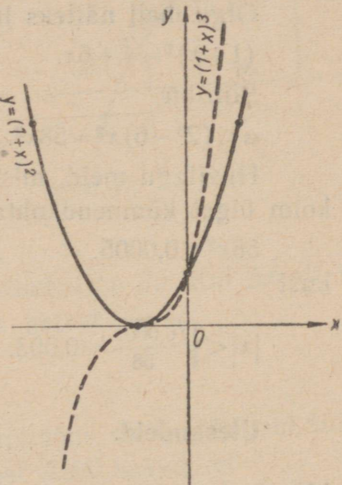
Funktsiooni $y=(1+x)^n$ graafikuks on nn. n-astme parabool, mis läbib iga n korral punkte $(-1; 0)$ ja $(0; 1)$ (joon. 50).

Leiame selle parabooli puutuja tõusu punktis $(0; 1)$. Selleks avaldame funktsiooni tuletise ja leiame selle väärtuse, kui $x=0$:

$$y'=n(x+1)^{n-1};$$

$$y'|_{x=0}=n.$$

Seega on parabooli $y=(1+x)^2$ puutuja tõus kohal 0 võrdne 2-ga, parabooli $y=(1+x)^3$ puutuja tõus kohal 0 võrdne 3-ga jne.



JOON. 50.

Sirge $y=1+nx$ tõus on samuti n ja ta läbib punkti $(0; 1)$. Seega on sirge $y=1+nx$ parabooli $y=(1+x)^n$ puutujaks kohal 0.

Kasutades valemit $(1+x)^n\approx\approx 1+nx$, asendame punkti $(0; 1)$ lähemas ümbruses parabooli kaare tema puutuja lõiguga.

Selgitame nüüd missuguste suuruse x väärtuste korral on see ligikaudne valem rakendatav, kui n on ette antud.

Newtoni binoomvalemi kohaselt

$$(1+x)^n=1+nx+\alpha,$$

kus

$$\alpha=C_2x^2+C_3x^3+\ldots+C_nx^n.$$

Asendame siin kõik x astmed x^2-ga ja et x on absoluutväärtuselt väike arv, siis

$$\alpha<(C_2+C_3+\ldots+C_n)x^2.$$

Et binoomkordajate summa on 2^n, s. t.

$$C_0+C_1+\ldots+C_n=2^n,$$

siis

$$\alpha<(2^n-n-1)x^2.$$

Suurendades x^2 kordajat 1 võrra, saame

$$\alpha<(2^n-n)x^2.$$

Seda võrratust kasutataksegi vea hindamiseks. Selle võrratuse abil määratakse, missuguste x väärtuste korral on ligikaudne valem kasutatav.

Olgu meil näiteks ligikaudne valem

$$(1+x)^6\approx 1+6x.$$

Siin on

$$\alpha<(2^6-6)x^2=58x^2.$$

Huvitagu meid, missuguste x väärtuste korral annab valem kolm õiget kümnendkohta. Selleks tuleb lahendada võrratus

$$58x^2<0{,}0005,$$

kust

$$|x|<\sqrt{\frac{0{,}0005}{58}}\approx 0{,}003.$$

Ülesandeid.

142. Leia, missuguste x väärtuste korral annab

a) ligikaudne valem $(1+x)^4\approx 1+4x$ kaks õiget kümnendkohta,

b) ligikaudne valem $(1+x)^8\approx 1+8x$ neli õiget kümnendkohta,

c) ligikaudne valem $(1+x)^5\approx 1+5x$ kolm õiget kümnendkohta.

143. Missuguseid tingimusi peavad rahuldama a ja b, et

1) $(a+b)^2>a^2+b^2$?

2) $(a+b)^2<a^2+b^2$?

3) $(a+b)^2=a^2+b^2$?

144. Missuguseid tingimusi peavad rahuldama a ja b, et

1) $(a-b)^2>a^2+b^2$?

2) $(a-b)^2<a^2+b^2$?

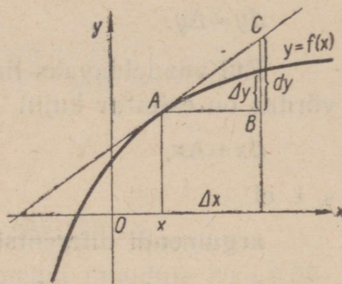
3) $(a-b)^2=a^2+b^2$?

2.7. FUNKTSIOONI DIFERENTSIAAL.

2.7.1. FUNKTSIOONI DIFERENTSIAALI MÕISTE.

Joonisel 51 on esitatud funktsiooni $y=f(x)$ graafik. Kohal x on sellele graafikule tõmmatud puutuja. Teame, et puutuja tõus on võrdne antud funktsiooni $f(x)$ tuletisega kohal x, s. o. $f'(x)$-ga.

Olgu x argumendi mingi etteantud väärtus. Kui nüüd argument muutub Δx võrra, siis funktsioon y muutub Δy võrra. Sageli osutub otstarbekohaseks vaadelda funktsiooni kohast x alates lineaarselt muutuvana. Joonisel tähendaks see antud funktsiooni graafikule kohal x puutuja joonestamist ja kohast x alates funktsiooni graafiku asendamist puutujaga. Sel juhul vastab joonisel 51 argumendi muudule Δx funktsiooni muut BC, mis on tähistatud sümboliga dy. Kui $\Delta x \to 0$, siis $dy \to \Delta y$. Seega on küllalt väikese Δx korral



JOON. 51.

$$dy \approx \Delta y.$$

Et punktis A tõmmatud puutuja tõus on funktsiooni tuletis kohal x, s. t. $f'(x)$, ning kolmnurgast ABC saame, et

$$\tan \angle BAC = \frac{dy}{\Delta x},$$

siis

$$\frac{dy}{\Delta x} = f'(x)$$

ehk

$$\boxed{dy = f'(x)\,\Delta x}$$

Suurust dy nimetatakse **funktsiooni diferentsiaaliks.**

On kerge veenduda, et

lineaarfunktsiooni $y=ax+b$ muut ja diferentsiaal on võrdsed.

Tõepoolest, et $y'=a$, siis

$$dy=a\cdot\Delta x.$$

Teame aga, et lineaarfunktsiooni korral

$$\Delta y=a\cdot\Delta x$$

ja seega

$$dy=\Delta y.$$

Kui vaadeldavaks lineaarfunktsiooniks on $y=x$, siis viimane võrdus on esitatav kujul

$$dx=\Delta x,$$

s. t. et

argumendi diferentsiaal on võrdne argumendi muuduga.

Seega võime diferentsiaali avaldises muudu Δx asendada diferentsiaaliga dx. Siis on

$$\boxed{dy=f'(x)dx}$$

Seega võib kokkuvõttes öelda, et

funktsiooni diferentsiaal ja funktsiooni muut on võrdsed, kui funktsioon muutub lineaarselt;
funktsiooni diferentsiaal avaldub funktsiooni tuletise ja argumendi diferentsiaali korrutisena.

2.7.2. FUNKTSIOONI DIFERENTSIAALI KASUTAMINE LIGIKAUDSEL ARVUTAMISEL.

Rakendame nüüd funktsiooni diferentsiaali funktsiooni muudu ligikaudseks arvutamiseks.

N ä i d e 1. Leia $\cos 60°2'$ ligikaudne väärtus.

Selle ülesande lahendamisel peame arvestama, et trigonomeetriliste funktsioonide, nagu $y=\sin x$, $y=\cos x$ jt. argumenti mõõdetakse radiaanmõõdus. Seega peame siin $60°2'$ esitama kõigepealt radiaanides. Teame, et

$$1°=\frac{\pi}{180} \text{ radiaani,}$$

$$60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ radiaani}$$

$$\text{ja } 2' = \left(\frac{1}{30}\right)^\circ = \frac{\pi}{5400} \text{ radiaani.}$$

Teame samuti, et $\cos x = 0{,}5$, kui $x = \frac{\pi}{3}$. Funktsiooni muudu arvutamiseks juhul, kui $\Delta x = \frac{\pi}{5400}$, kasutame diferentsiaali avaldist

$$dy = -\sin x \cdot \Delta x = -\sin\frac{\pi}{3} \cdot \frac{\pi}{5400} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{5400} \approx -0{,}0005.$$

Seega

$$\cos 60^\circ 2' \approx 0{,}4995.$$

Näide 2. Leia $\sqrt{16{,}08}$ ligikaudne väärtus.

Teame, et $\sqrt{x} = 4$, kui $x = 16$. Argumendi muudule $\Delta x = 0{,}08$ vastava funktsiooni muudu ligikaudse väärtuse leiame diferentsiaali avaldisest

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \Delta x = \frac{1}{2\sqrt{16}} \cdot 0{,}08 = 0{,}01.$$

Seega

$$\sqrt{16{,}08} \approx 4{,}01.$$

Ülesandeid.

145. Avalda järgmiste funktsioonide muut ja diferentsiaal.

a) x^2
b) $4x^2 - 3x + 2$
c) $\sin x$
d) $\frac{1}{\sqrt{x}}$
e) x^{-3}
f) $x^3 + x^{-2}$

146. $y = x^3 - x$. Leia Δy ja dy, kui $x = 2$ ja $\Delta x = 1$; $0{,}1$; $0{,}01$.

147. Leia funktsiooni $y = \sin x$ muudu ligikaudne väärtus, kui x muutub 30° kuni $30^\circ 1'$. Millega võrdub $\sin 30^\circ 1'$? Võrdle tulemust tabelist saadava tulemusega.

148. Leia funktsiooni $y = \tan x$ muudu ligikaudne väärtus, kui x muutub 45° kuni $45^\circ 10'$. Võrdle tulemust tabelist saadava väärtusega.

149. Leia ligikaudne väärtus: $\sin 60°3'$, $\sin 60°18'$, $\cos 45°2'$, $\cos 30°4'$. Võrdle tulemusi tabelist saadavate väärtustega.

150. Arvuta funktsiooni diferentsiaali abil:

$$\sqrt{4{,}03},\ \sqrt{25{,}1},\ \sqrt{48{,}97},\ \sqrt{0{,}98}.$$

151. Leia viga, mis tekib ringi pindala arvutamisel, kui raadius on 8 cm ja raadiuse mõõtmisel tehtud vea ülemmäär on 0,05 cm.

152. Leia võrdkülgse kolmnurga pindala arvutamisel saadava tulemuse viga, kui kolmnurga külg on $36(\pm 1)$ cm.

3. INTEGRAAL.

3.1. MÄÄRAMATA INTEGRAAL.

3.1.1. ALGFUNKTSIOON.

Antud funktsiooni f(x) algfunktsiooniks nimetatakse niisugust funktsiooni F(x), mille tuletis on võrdne f(x)-ga, s. t.

$F'(x) = f(x)$.

Olgu näiteks $f(x) = 3x^2$, siis $F(x) = x^3$, sest $(x^3)' = 3x^2$. Kui aga $f(x) = \cos x$, siis $F(x) = \sin x$, sest $(\sin x)' = \cos x$.

Funktsiooni x^3 nimetatakse funktsiooni $3x^2$ algfunktsiooniks ja funktsiooni $\sin x$ funktsiooni $\cos x$ algfunktsiooniks.

3.1.2. MÄÄRAMATA INTEGRAALI MÕISTE.

Funktsioonil $3x^2$ on veel teisi algfunktsioone peale x^3. Näiteks

$$(x^3 - 3)' = 3x^2;$$
$$(x^3 + 100)' = 3x^2.$$

Üldiselt

$$(x^3 + C)' = 3x^2,$$

kus C on mistahes reaalarv ning seepärast nimetataksegi konstanti C **määramata konstandiks.**

Kõigi niisuguste funktsioonide tuletised, mis on võrdsed $\cos x$-ga, avalduvad kujul $\sin x + C$, kus C on määramata konstant.

Avaldisi $x^3 + C$ ja $\sin x + C$ nimetatakse vastavalt funktsioonide $3x^2$ ja $\cos x$ **algfunktsioonide üldavaldiseks.**

Tähistame funktsiooni $f(x)$ algfunktsiooni $F(x)$-ga, siis on algfunktsioonideks ka funktsioonid $F(x)+C$, kus C on määramata konstant. Avaldist $F(x)+C$ nimetatakse funktsiooni $f(x)$ **algfunktsioonide üldavaldiseks** ehk **määramata integraaliks.** Sümbolites kirjutatakse see üles järgmiselt:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C,$$

mida loetakse «määramata integraal funktsioonist $f(x)$ on $F(x)+C$» või «määramata integraal diferentsiaalist $f(x)dx$ on $F(x)+C$».

Nii kirjutame

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C$$

ja

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C.$$

Analoogiliselt võime kirjutada, et

$$\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + C, \text{ sest } \left(\frac{x^6}{6}+C\right)' = \frac{1}{6}\cdot 6x^5 = x^5,$$

$$\int x^{10}\,dx = \frac{x^{11}}{11} + C, \text{ sest } \left(\frac{x^{11}}{11}+C\right)' = \frac{1}{11}\cdot 11x^{10} = x^{10},$$

$$\int x^{-4}\,dx = \frac{x^{-3}}{-3} + C, \text{ sest } \left(\frac{x^{-3}}{-3}+C\right)' = \frac{1}{-3}\cdot(-3)x^{-4} = x^{-4},$$

kuid

$$\int x^{-1}\,dx \neq \frac{x^0}{0}, \text{ sest nulliga jagamisel puudub mõte.}$$

Saab näidata, et valem $(x^n)' = nx^{n-1}$ kehtib ka murrulise n korral. Seega näiteks

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C,$$

sest

$$\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C\right)' = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}.$$

Üldiselt

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ kus } n \text{ on mistahes ratsionaalarv, välja}$$

arvatud -1.

3.1.3. MÄÄRAMATA INTEGRAALI OMADUSI.

1. Olgu $[F(x)]' = f(x)$ ja $[G(x)]' = g(x)$, siis

$$[F(x) + G(x)]' = [F(x)]' + [G(x)]' = f(x) + g(x).$$

Näitame nüüd, et

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

Tõepoolest,

$$\int [f(x) + g(x)]dx = F(x) + G(x) + C,$$

sest $[F(x) + G(x) + C]' = f(x) + g(x)$,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C_1, \text{ sest } [F(x) + C_1]' = f(x),$$

$$\int g(x)\,dx = G(x) + C_2, \text{ sest } [G(x) + C_2]' = g(x).$$

Et konstandid C, C_1 ja C_2 on määramata konstandid, siis võib neid suvaliselt valida ja seega on võrduse

$$F(x) + G(x) + C = F(x) + C_1 + G(x) + C_2 \; *$$

kehtivuseks vaid vajalik, et avaldiste mittekonstantsed liidetavad oleksid võrdsed. Et aga

$$F(x) + G(x) = F(x) + G(x),$$

siis võrdus * kehtib ja järelikult ka

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx,$$

s. t. et

summa integreerimiseks integreeritakse liidetavad ja tulemused liidetakse.

N ä i d e 1.

$$\int (x^3+x^5)\,dx=\int x^3dx+\int x^5dx=$$

$$=\frac{x^4}{4}+C_1+\frac{x^6}{6}+C_2=\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{6}+C.$$

N ä i d e 2.

$$\int \frac{x^2-2x-3}{x-3}\,dx=\int \frac{(x+1)(x-3)}{x-3}\,dx=\int (x+1)\,dx=$$

$$=\int x\,dx+\int 1\cdot dx=\frac{x^2}{2}+C_1+x+C_2=\frac{x^2}{2}+x+C.$$

2. Olgu $[F(x)]'=f(x)$, siis $[c\cdot F(x)]'=c\cdot f(x)$ ja $c\cdot[F(x)]'=c\cdot f(x)$.

Näitame nüüd, et

$$\int c\cdot f(x)\,dx=c\cdot\int f(x)\,dx.$$

Tõepoolest,

$$\int c\cdot f(x)\,dx=c\cdot F(x)+C, \text{ sest } [c\cdot F(x)+C]'=c\cdot f(x),$$

ja

$$c\cdot\int f(x)\,dx=c[F(x)+C_1], \text{ sest } [F(x)+C_1]'=f(x).$$

Et

$$c\cdot F(x)+C=c[F(x)+C_1], \text{ sest } c\cdot F(x)=c\cdot F(x),$$

siis

$$\int c\cdot f(x)\,dx=c\cdot\int f(x)\,dx,$$

s. t. et

konstantse teguri saab tuua integraali märgi ette.

N ä i d e 1.

$$\int 5\sin x\,dx=5\int \sin x\,dx=-5\cos x+C.$$

Näide 2.

$$\int \frac{2+3x^2\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{2}{\cos^2 x}\,dx + \int 3x^2\,dx =$$
$$= 2\int \frac{dx}{\cos^2 x} + 3\int x^2\,dx = 2\tan x + C_1 + 3\cdot\frac{x^3}{3} + C_2 =$$
$$= 2\tan x + x^3 + C.$$

Ülesandeid.

153. Leia järgmistele funktsioonidele kolm algfunktsiooni.

a) $\sin x$ c) x e) $\frac{1}{\sin^2 x}$

b) 3 d) $\frac{x^2}{2}$ f) $\frac{1}{\cos^2 x}$

154. a) $\int 3x^2 dx$ d) $\int \frac{dx}{x^2}$ g) $\int x^n dx$

b) $\int x^2 dx$ e) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ h) $\int \frac{dx}{x^3}$

c) $\int x^3 dx$ f) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$ i) $\int \sin x\,dx$

155. a) $\int 4x dx$ d) $\int (x+\sin x)\,dx$

b) $\int \frac{1}{2}x^2 dx$ e) $\int \left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx$

c) $\int \frac{3dx}{\cos^2 x}$ f) $\int (\sin x+\cos x)\,dx$

156. a) $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\,dx$ d) $\int \frac{\sqrt{u^3+1}}{\sqrt{u+1}}\,du$

b) $\int (1-z)^2 dz$ e) $\int \frac{x^2+7x+12}{x+4}\,dx$

c) $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}\,du$ f) $\int \frac{1+2x^2}{x^2}\,dx$

157. a) $\int (x+3)^4 dx$ b) $\int (z-2)^5 dz$

c) $\int (y+4)^7 dy$ e) $\int (x-a)^4 da$

d) $\int (x-a)^4 dx$ f) $\int (x^2+c)^6 dx$

158. a) $\int \frac{x^2-3x-10}{x^2-5x} dx$ c) $\int \frac{x^2-8x+15}{3x-x^2} dx$

b) $\int \frac{x^2+5x+6}{x^2+2x} dx$ d) $\int \frac{2x^2-5x-3}{2x+1} dx$

159. a) $\int \frac{2x^2-50}{x+5} dx$ c) $\int \frac{54+2x^3}{3+x} dx$

b) $\int \frac{3x^3-24}{x-2} dx$ d) $\int \frac{x^4-8x^2+16}{[(x-2)(x+2)]^2} dx$

160. a) $\int \frac{2+3u}{\sqrt{u}} du$ c) $\int \frac{(3\sqrt{v}-4v^2)^3}{v^2\sqrt{v}} dv$

b) $\int \frac{(4z-5)^4}{z^2} dz$ d) $\int \frac{(1-\sqrt{x})^5}{x\sqrt{x}} dx$

161. a) $\int \frac{3-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx$ c) $\int \frac{\cos x+\sin x}{\cos^2 x+\sin^2 x} dx$

b) $\int \frac{\sin^2 x-4}{\sin^2 x} dx$ d) $\int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x} dx$

3.1.4. MÄÄRAMATA INTEGRAALI INTERPRETATSIOONE.

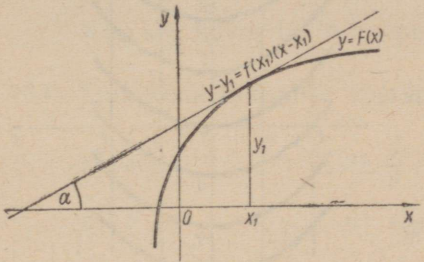
1. Olgu antud funktsioon $y=F(x)$, millele oskame leida tuletist $y'=[F(x)]'$. Tähistame $[F(x)]'=f(x)$. Olgu selle funktsiooni $y=F(x)$ graafik esitatud joonisel 52. Valime argumendi väärtuse x_1, siis $y_1=F(x_1)$. Teades funktsiooni tuletist kohal x_1, s. o. $f(x_1)$, saame leida puutuja tõusunurga α ja joonestada funktsiooni $y=F(x)$ graafikule punktis $(x_1; y_1)$ puutuja. Selle puutuja võrrand on

$$y-y_1=f(x_1)(x-x_1).$$

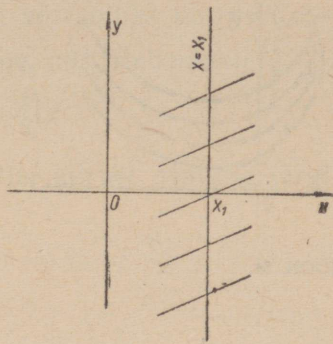
Seega, kui on antud funktsioon ja oskame leida tema tuletist, siis on funktsiooni graafiku puutuja etteantud kohal määratud.

Olgu nüüd funktsioon $y'=f(x)$. Siis, nagu teame, pole funktsioon y üheselt määratud, vaid

$$y=F(x)+C, \text{ kus } [F(x)]'=f(x).$$



JOON. 52.



JOON. 53.

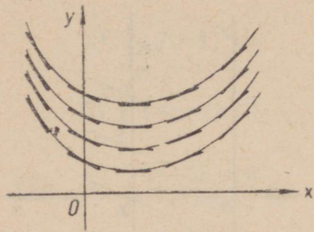
Vaatleme joonist 53. Teame, et funktsiooni $y'=f(x)$ väärtusega kohal x_1 on määratud kõigi algfunktsioonide $F(x)+C$ graafikute puutuja tõus kohal x_1. Sellele tõusule vastavalt võime läbi sirge $x=x_1$ mistahes punkti kujutada puutuja, sest antud tuletis ja argumendi väärtus ei määra puutepunkti ordinaati. Et samuti on võimalik leida puutuja tõusu kõigil teistel argumendi väärtustel, siis saame funktsioonile $y'=f(x)$ tuginedes joonestada algfunktsioonide $y=F(x)+C$ **puutujate välja** (joon. 54). Kasutades neid puutujaid, saame aga konstrueerida algfunktsioonide graafikuid.

Olgu näiteks antud funktsioon $y'=\frac{x}{2}$. Järgnevas tabelis on esitatud selle funktsiooni väärtused mõnede argumendi väärtuste korral.

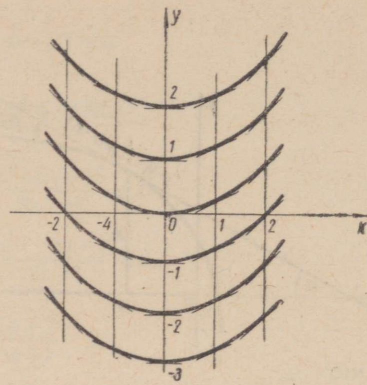
x	-2	-1	0	1	2
y'	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1

Joonisel 55 on selle tabeli põhjal kujutatud algfunktsioonide $y=\frac{x^2}{4}+C$ puutujate väli ning selles mõnede algfunktsioonide graafikud.

Kui tahame algfunktsioonide graafikute hulgast leida mingi kindla kõvera võrrandit, siis peab olema ette antud üks punkt, mida see kõver läbib. Näiteks kui tahame algfunktsioonide



JOON. 54.



JOON. 55.

$y = \frac{x^2}{4} + C$ graafikute hulgast leida punkti $(-1; 2)$ läbiva kõvera võrrandit, siis peavad antud punkti koordinaadid rahuldama kõvera võrrandit, s. t.

$$2 = \frac{(-1)^2}{4} + C,$$

millest

$$C = \frac{7}{4},$$

ning otsitud kõvera võrrandi saame kujul

$$y = \frac{x^2}{4} + \frac{7}{4}.$$

2. Tõlgendades antud funktsiooni $y = s'(t)$ hetkelise kiiruse avaldisena, saame integreerimise teel leida vastava liikumise võrrandi. Kui näiteks $v = t^2 + 1$, siis funktsioon $s(t) = \frac{t^3}{3} + t + C$ esitab keha liikumise võrrandit. See võrrand sisaldab aga määramata konstanti ja seetõttu ütleme, et hetkelise kiiruse avaldisega on liikumise võrrand määratav kuni konstandini.

Ülesandeid.

162. Algfunktsioonide graafikute parve võrrandiks on $y = \sin x + C$. Leia võrrand kõverale, mis läbib punkti $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$.

163. Algfunktsioonide graafikute parve võrrandiks on $y = Cx$. Leia võrrand kõverale, mis läbib punkti $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right)$. Leia veel kaks punkti, mida see kõver läbib.

164. Algfunktsioonide graafikute parve võrrandiks on $y=5x^3-3x^2+2x+C$. Leia võrrand kõverale, mis läbib punkti $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$. Kas see kõver läbib ka punkti $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$?

165. Leia keha liikumise võrrand hetkelise kiiruse avaldise järgi.

a) $\cos t$ c) $\frac{1}{t}$

b) t^3+t^2 d) t^4+t^5

166. Leia keha liikumise võrrand hetkelise kiiruse avaldise järgi, kui on teada keha poolt läbitud tee pikkus etteantud ajamomendil:

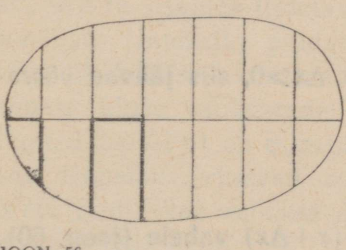
a) $(1+t)^2$, kui $s(1)=1$;

b) $\sin t+\cos t$, kui $s\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

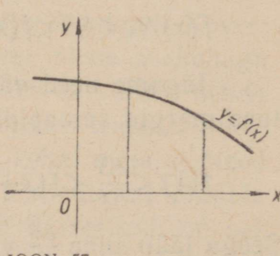
3.1.5. PINDALA TULETIS.

Iga kinnise kõveraga piiratud pinnatükki saab tükeldada osadeks, nii nagu on näidatud joonisel 56. Need on täisnurksed trapetsid, mille üks haar on kõverjoon, ja kolmnurgad, mille üks külg on kõverjoon. Et kolmnurka võib vaadelda trapetsi erijuhuna (üks alus on kõdunud nulliks), siis nimetataksegi neid kujundeid ühise nimetusega **kõverjoonelisteks trapetsiteks.**

Vaatleme nüüd kõverjoonelist trapetsit koordinaatteljestikus. Valime x-telje nii, et sellel asuks trapetsi alustega ristuv haar (joon. 57). See trapets on koordinaatteljestikus määratud, kui on teada funktsioon $y=f(x)$, mille graafiku üks osa on trapetsi kõver-



JOON. 56.



JOON. 57.

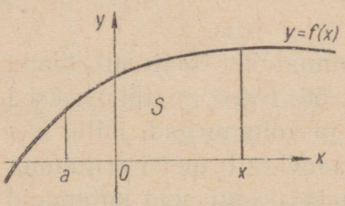
jooneliseks haaraks, ja kui on antud trapetsi aluste asukohti määravad abstsissi väärtused.

Joonisel 58 on koordinaatteljestikus esitatud funktsiooni $y=f(x)$ graafik ja sellel ordinaatlõik kohal a. Olgu see lõik kõverjoonelise trapetsi üheks aluseks, tema üheks nn. ä ä r o r d i n a a d i k s. Võttes nüüd x ükskõik millise väärtuse, mis kuulub antud funktsiooni $f(x)$ määramispiirkonda, ja kujutades sellel kohal ordinaatlõigu, esitab see kõverjoonelise trapetsi teist alust, tema teist äärordinaati. Igale x väärtusele vastab nüüd kindel kõverjoonelise trapetsi pindala (joon. 58). Seega võime öelda, et

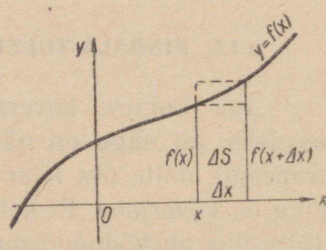
funktsiooni y=f(x) graafiku aluse kõverjoonelise trapetsi pindala on argumendi x funktsioon.

Tähistades kõverjoonelise trapetsi pindala tähega S, võime kirjutada, et $S=S(x)$.

Seame nüüd ülesandeks leida $S(x)$, kui $f(x)$ on antud.



JOON. 58.



JOON. 59.

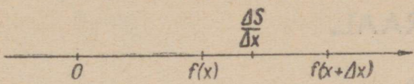
Muutugu argumendi väärtus x suuruse Δx võrra, selle tagajärjel muutub kõverjoonelise trapetsi pindala ΔS võrra. Jooniselt 59 näeme, et

$$f(x)\Delta x<\Delta S<f(x+\Delta x)\Delta x.$$

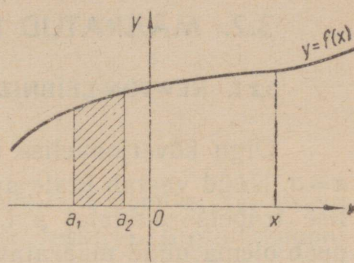
Jagame need väärtused Δx-ga. Et $\Delta x>0$, siis jäävad võrratuse märgid samapidisteks:

$$f(x)<\frac{\Delta S}{\Delta x}<f(x+\Delta x).$$

Seega jääb suhe $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ väärtuste $f(x)$ ja $f(x+\Delta x)$ vahele (joon. 60).



JOON. 60.



JOON. 61.

Kui $\Delta x \to 0$, siis $f(x+\Delta x) \to f(x)$. Et suhe $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ jääb $f(x)$ ja $f(x+\Delta x)$ vahele, siis ka $\frac{\Delta S}{\Delta x} \to f(x)$, s. t.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x).$$

Võrduse vasakul poolel on funktsiooni $S(x)$ tuletis. Seega,

$$S'(x) = f(x),$$

s. t. et kõverjoonelise trapetsi pindala $S(x)$ on antud funktsiooni $f(x)$ algfunktsioon. Et see algfunktsioon pole üheselt määratud, siis

$$S(x) = \int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Näiteks, kui $f(x) = 3x^2$, siis $F(x) = x^3$ ja

$$S(x) = \int 3x^2\,dx = x^3 + C.$$

Selgitame seda tulemust ka geomeetriliselt.

Võrduse $S'(x) = f(x)$ tuletamine ei ole seotud kõverjoonelise trapetsi esimese aluse asukohaga. Seetõttu ei määragi seos $S'(x) = f(x)$ kõverjoonelise trapetsi pindala funktsiooni $S(x)$ üheselt, sest ta sisaldab liidetavana ühe määramata konstandi. Kõverjooneliste trapetsite pindalad erineva esimese aluse asukohaga erinevad üksteisest konstantse pindala võrra, mis on võrdne nende esimese aluse asukohtade vahelise kõverjoonelise trapetsi pindalaga. Joonisel 61 on esimene alus fikseeritud kohal a_1 ja a_2. Need kaks trapetsit erinevad teineteisest joonisel viirutatud pindala võrra. Seni, kui esimese aluse asukoht pole fikseeritud, on see konstant määramata.

3.2. MÄÄRATUD INTEGRAAL.

3.2.1. NEWTON-LEIBNIZI VALEM.

Olgu kõverjoonelise trapetsi esimene alus fikseeritud kohal $x=a$. Nüüd vastab igale argumendi väärtusele kindel kõverjoonelise trapetsi pindala, s. t. et konstant, mis enne oli määramata, peab olema nüüd määratav. Leiame selle.

Konstandil on nüüd üks kindel väärtus sõltumata sellest, missugusel argumendi väärtusel on võetud teine alus. Valime kõigist võimalikest x väärtustest selle, millele vastavat pindala suurust me teame. See on kui teine alus ühtib esimesega, s. t. kui $x=a$. Siis on kõverjoonelise trapetsi pindala 0, s. t. et

$$F(a)+C=0$$

ja siit

$$C=-F(a).$$

Märgime integraali sümboli otste juurde need argumendi väärtused, millele vastavate ordinaatlõikude vahel asub vaadeldav kõverjooneline trapets. Neid väärtusi nimetatakse ka **integraali rajadeks.** Seega

$$\int_a^x f(x)\,dx=F(x)-F(a)$$

ehk

$$S(x)=F(x)-F(a).$$

Anname nüüd ka x-le kindla väärtuse. Siis peab vastava kõverjoonelise trapetsi pindala avalduma samuti kindla väärtusena. Tõepoolest, asendades viimastes võrdustes $x=b$, saame

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

ehk

$$S(b)=F(b)-F(a).$$

Integraale, millel on fikseeritud rajad, nimetatakse **määratud integraalideks.**

Seost

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

kus $F'(x) = f(x)$, nimetatakse **Newton-Leibnizi valemiks.** See valem annab määratud integraalide arvutamise eeskirja. Algfunktsiooni järel kasutatakse rajade märkimiseks püstkriipsu. Näiteks

$$\int_1^3 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 9 - \frac{1}{3} = 8\frac{2}{3},$$

mis tähendab, et parabooli $y = x^2$ alune pindala argumendi väärtustele 1 ja 3 vastavate ordinaatlõikude vahel on $8\frac{2}{3}$ ruutühikut.

Määratud integraalide puhul kehtivad samasugused omadused kui määramata integraalide puhul, s. t.,

1. $$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx;$$

2. $$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx.$$

Ülesandeid.

167. a) $\int_0^{10} x\,dx$ d) $\int_0^a (3x^2 - x + 1)\,dx$ g) $\int_1^4 \frac{dx}{x^2}$

b) $\int_{\frac{a}{2}}^a x^2 dx$ e) $\int_1^{2,5} (2x+1)^2 dx$ h) $\int_4^9 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})\,dx$

c) $\int_2^3 6x\,dx$ f) $\int_0^2 x^3 dx$ i) $\int_{0,8}^{1,2} \left(x^2 + 3x + \frac{1}{x^3}\right) dx$

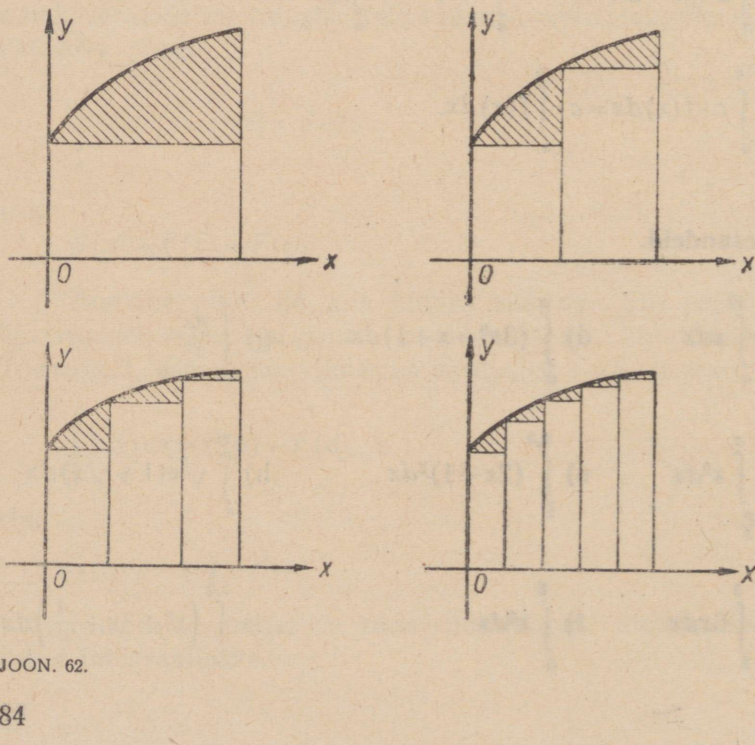
168. a) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx$; b) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$; c) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$;

d) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x+3\cos x)\,dx$; e) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right) dx$.

3.2.2. MÄÄRATUD INTEGRAAL PIIRVÄÄRTUSENA.

Integraali on võimalik defineerida ka summa piirväärtuse kaudu, mis võimaldab integraali rakendada väga paljude ülesannete lahendamisel. Võtame selle definitsiooni selgitamisel aluseks kinnise kõveraga piiratud tasapinnatüki pindala leidmise ülesande.

Olgu antud kõverjooneline trapets, mis on määratud funkt-



JOON. 62.

siooni $y=f(x)$ graafikuga ja abstsissi väärtustega a ja b. Teame, et selle trapetsi pindala S avaldub määratud integraalina

$$S=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ringi pindala defineerisime tema sisse joonestatud korrapäraste hulknurkade pindalade piirväärtusena, kui hulknurga tippude arv piiramatult kasvab. Et ka kõverjooneline trapets pole otseselt pindalaühikuga võrreldav, siis selgitame, kuidas siin jõuda pindala defineerimiseni piirväärtuse kaudu. Võrdleme kõverjoonelist trapetsit ristkülikutega, nii nagu näidatud joonisel 62. Näeme, et kui tükeldada antud trapetsit järjest kitsamaiks trapetseiks ja neid kitsamaid trapetseid võrrelda ristkülikutega, siis erinevus antud kõverjoonelise trapetsi pindala ja ristkülikute pindalade summa vahel järjest väheneb. Niisuguste ristkülikute pindalade summa piirväärtusena ongi antud kõverjoonelise trapetsi pindala defineeritav. Kui tähistame $a=x_1$ ja $b=x_n$ (joon. 63), siis

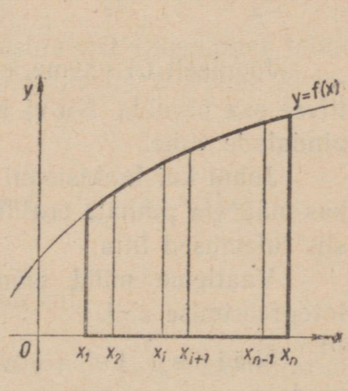
$$S=\lim_{n\to\infty}[f(x_1)(x_2-x_1)+f(x_2)(x_3-x_2)+\ldots+f(x_i)(x_{i+1}-x_i)+$$
$$+\ldots+f(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})],$$

kusjuures kõik vahed $(x_{i+1}-x_i)\to 0$.

Nurksulgudes on summa, mille liidetavad erinevad üksteisest ainult indeksite poolest. Sellist summat saab üles kirjutada lühemalt, kasutades selleks nn. s u m m a m ä r k i $\sum$:

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1}-x_i),$$

kusjuures $(x_{i+1}-x_i)\to 0$.



JOON. 63.

Loeme: kõverjoonelise trapetsi pindala on võrdne piirväärtusega summast, mille liidetavaiks on korrutised $f(x_i)(x_{i+1}-x_i)$, kus i omab järjest täisarvulisi väärtusi 1-st $(n-1)$-ni, kus n kasvab tõkestamatult ja kõik vahed $(x_{i+1}-x_i)$ lähenevad nullile. Tähistades vahesid $x_{i+1}-x_i=\Delta x_i$, saame kõverjoonelise trapetsi pindala piirväärtusena

$$S = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x_i.$$

Seega

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x_i.$$

Selle seose tundmine osutub edaspidi väga kasulikuks, sest mitmed küsimused, näiteks ruumala valemite tuletamisel, taanduvad niisugusele summa piirväärtusele. Teades, et see on võrdne määratud integraaliga, jõuamegi kiiresti vastuseni.

Viimasest võrdusest tuleneb ka üks omadus, mida määratud integraalide arvutamise juures tuleb arvestada siis, kui integreerimisrajade-vahelises piirkonnas funktsiooni graafik lõikab x-telge. Nimelt, kui funktsiooni graafik on allpool x-telge, siis on funktsiooni väärtused negatiivsed; kui funktsiooni graafik on ülalpool x-telge, siis on funktsiooni väärtused positiivsed. Vastavalt sellele tulevad negatiivsed või positiivsed ka korrutised $f(x_i)\Delta x_i$. Nende korrutiste summaks ja selle summa piirväärtuseks saame siis mitte selle kõvera ja x-teljega määratud pindalade summa, vaid vahe

$$\int_{-2}^{3} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{3} = \frac{9}{2} - \frac{4}{2} = 2\frac{1}{2}.$$

Jooniselt 64 näeme, et $\frac{9}{2}$ on positiivse osa pindala ja 2 negatiivse osa pindala. Nii et integreerimise tulemusena saame nende pindalade vahe.

Juhul kui funktsiooni graafik lõikab x-telge, siis on otstarbekas määrata pindala eraldi allpool x-telge ja ülalpool x-telge ning siis tulemused liita.

Vaatleme nüüd mõningaid näiteid pindala leidmise kohta integreerimise abil.

N ä i d e 1. Leida kõverătega $y = x^2$ ja $y = x$ piiratud kujundi pindala.

Leiame antud kõverate lõikepunktide abstsissid. Selleks lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=x, \end{cases}$$

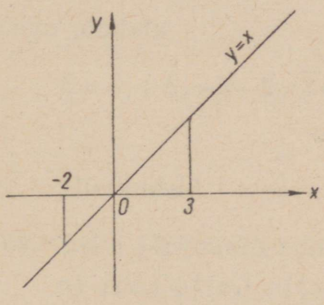
millest

$$x^2-x=0.$$

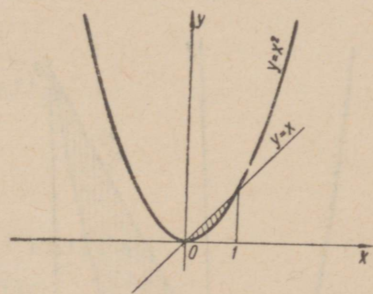
Selle võrrandi lahenditeks saame

$$x_1=0 \text{ ja } x_2=1.$$

Jooniselt 65 näeme, et otsitava pindala leidmiseks tuleb leida vahemikus [0,1] esmalt sirge $y=x$ alune pindala, seejärel



JOON. 64.



JOON. 65.

kõvera $y=x^2$ alune pindala ning siis esimesest tulemusest lahutada teine. Tähistades otsitava pindala tähega S võime kirjutada, et

$$S=\int_0^1 x\,dx-\int_0^1 x^2\,dx=\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1-\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1=\left(\frac{1}{2}-0\right)-\left(\frac{1}{3}-0\right)=\frac{1}{6}.$$

Seega on otsitav pindala $\frac{1}{6}$ ruutühikut.

N ä i d e 2. Leida kõverategaga $y=x^2-3$ ja $y=2x$ piiratud kujundi pindala.

Leiame antud kõverate lõikepunktid. Selleks lahendame need võrrandid süsteemina

$$\begin{cases} y=x^2-3 \\ y=2x, \end{cases}$$

millest

$$x^2-3=2x$$

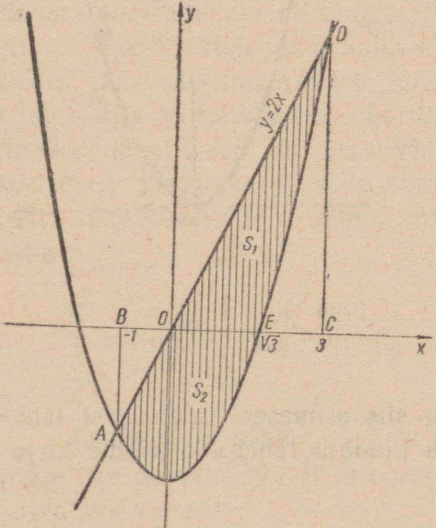
ja

$$x^2-2x-3=0.$$

Saadud ruutvõrrandi lahendid on

$$x_1=-1 \text{ ja } x_2=3.$$

Joonisel 66 on kujutatud otsitav pindala. Näeme, et osa otsitavast pindalast on ülalpool x-telge ja osa allpool x-telge. Seepärast



JOON. 66.

leiame need pindalad eraldi, tähistades nad vastavalt tähtedega S_1 ja S_2.

Ülalpool x-telge tuleb kolmnurga OCD pindalast lahutada kujundi ECD pindala. Punkti E abstsiss saadakse võrrandi

$$x^2-3=0$$

positiivse lahendina, seega $E(\sqrt{3}, 0)$ ja

$$S_1 = \int_0^3 2x\,dx - \int_{\sqrt{3}}^3 (x^2-3)\,dx = x^2\Big|_0^3 - \frac{x^3}{3}\Big|_{\sqrt{3}}^3 + 3x\Big|_{\sqrt{3}}^3 =$$

$$= (9-0) - \left(\frac{27}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{3}\right) + (9-3\sqrt{3}) = 9-2\sqrt{3}.$$

Allpool x-telge tuleb kujundi BAE pindalast lahutada kolmnurga BAO pindala, seega

$$S_2 = \left|\int_{-1}^{\sqrt{3}} (x^2-3)\,dx - \int_{-1}^{0} 2x\,dx\right| = \left|\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{\sqrt{3}} - 3x\Big|_{-1}^{\sqrt{3}} - x^2\Big|_{-1}^{0}\right| =$$

$$= \left|\left(\sqrt{3}+\frac{1}{3}\right) - (3\sqrt{3}+3) - (0-1)\right| = \left|-2\sqrt{3}-2\frac{1}{3}\right| = 2\sqrt{3}+2\frac{1}{3}.$$

Kogu pindala

$$S = S_1 + S_2 = 9-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}+2\frac{1}{3} = 11\frac{1}{3}.$$

Ülesandeid.

169. Esita järgmised summad summa märgi abil.

a) $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)+f(x_5)$

b) $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n$

c) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_s^2$

d) $(x_1+x_2)+(x_2+x_3)+(x_3+x_4)+\ldots+(x_k+x_{k+1})$

e) $\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}+\frac{a_5+a_6}{2}+\ldots+\frac{a_{n-1}+a_n}{2}$

170. Esita järgmised summad summa märgita.

a) $\sum_{i=1}^{4}(a_i+b_i)^i$

b) $\sum_{i=2}^{5}\frac{i+2}{i}$

c) $\sum_{i=3}^{8}\frac{3-i^2}{i-2}$

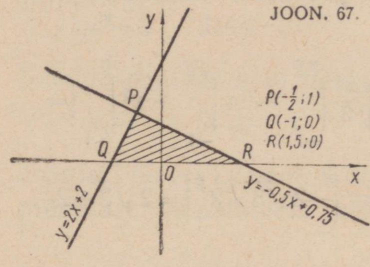
d) $\sum_{i=1}^{4}(i^2+2i+1)$

e) $\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)]^2(x_{i+1}-x_i)$

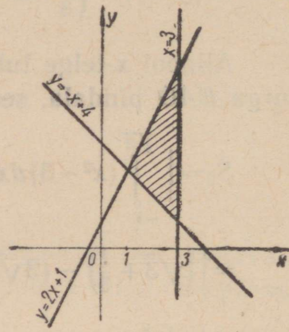
f) $\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}\right]^2$

171. a) Leia kujundi pindala, mida piiravad funktsiooni $y=x^2-4x+5$ graafik, x-telg ja sirged $x=3$ ja $x=5$.

b) Leia parabooliga $y=\frac{x^2}{2}$, sirgetega $x=3$ ja $x=6$ ning x-teljega piiratud kujundi pindala.



JOON. 67.



JOON. 68.

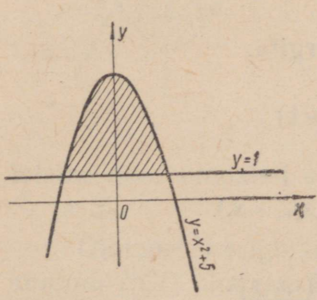
172. Leia joonistel 67 ja 68 kujutatud pindalad integreerimise teel.

173. Leia kujundi pindala, mille sirge $y=2x+3$ lõikab paraboolist $y=x^2$.

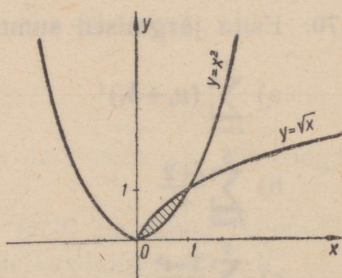
174. a) Leia parabooli $y=x^2$ ja sirge $y=8$ vahelise kujundi pindala.

b) Leia kõverategega $y=\frac{1}{4}x^2$ ja $y=3-\frac{x^2}{2}$ piiratud kujundi pindala.

175. Leia joonistel 69 ja 70 kujutatud pindalad.



JOON. 69.



JOON. 70.

176. Leia kõvera $y=\sin x$ ja x-telje vahelise kujundi pindala vahemikus $(0, \pi)$ ja vahemikus $(\pi, 2\pi)$. Võrdle tulemusi.

177. Leia kõvera $y=\cos x$ ja x-telje vahelise kujundi pindala vahemikus $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$ ja vahemikus $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Võrdle tulemusi omavahel ja eelmise ülesande tulemustega.

178. Leia kõverate $y=\sin x$ ja $y=\cos x$ vahelise kujundi pindala nende kõverate kahe järjestikuse lõikepunkti vahel.

179. Leia kõveratega $y=x^2$ ja $y=x^3$ piiratud kujundi pindala.

180. Leia kõveratega $y=x^2+4$ ja $y=-x^2$ piiratud kujundi pindala.

181. Leia kõveratega $y=\sin x$ ja $y=\tan x$ piiratud kujundi pindala.

182. Leia kõveratega $y=x^4$ ja $y=10x^2-9$ piiratud kujundi pindala.

183. Leia kõveratega $y=x^4$ ja $y=8x^2+9$ piiratud kujundi pindala.

184. Leia kõveraga $y=\sin x$ ja sirgega $y=0{,}5$ piiratud kujundite pindalade summa vahemikus -2π kuni 6π.

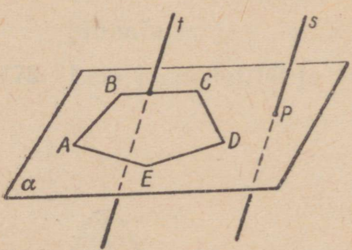
4. HULKTAHUKAD.

4.1. PRISMA.

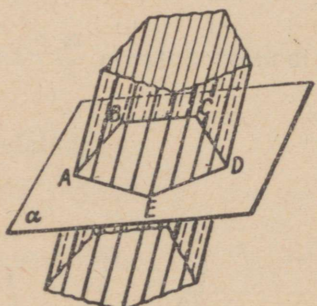
Käesoleva peatükiga alustame stereomeetriliste, s. o. ruumiliste kujundite ja nende omaduste käsitlemist. Tunneme küll juba prismat, püramiidi, silindrit, koonust ja kera, kuid nüüd seame eesmärgiks anda neile kehadele täpne definitsioon, tõestada nende kehade mitmesuguseid omadusi ja osalt juba tuttavate pindala ja ruumala valemite kehtivust.

4.1.1. PRISMALINE PIND.

Olgu antud tasapinnal α kinnine murdjoon $ABCDEA$ ja veel sirge s, mis lõikab seda tasapinda (joon. 71). Vaatleme nüüd teist sirget t, mis lõikab antud murdjoont $ABCDEA$ ja on paralleelne



JOON. 71.



JOON. 72.

sirgega s. Paneme sirge t liikuma nii, et kogu aeg lõikab antud murdjoont $ABCDEA$ ja on paralleelne sirgega s. Olles läbinud kõik murdjoone lõigud on sirge t kujundanud ühe pinna. Seda pinda nimetame **prismaliseks pinnaks** (joon. 72).

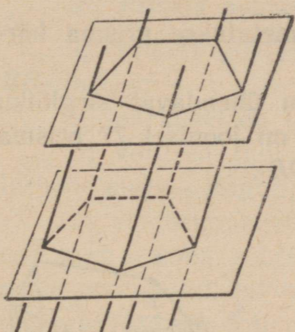
Murdjoont $ABCDEA$ nimetame prismalise pinna **juhtjooneks** ja sirget t — **moodustajaks.**

4.1.2. PRISMA.

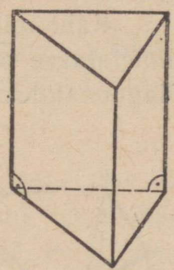
Lõikame prismalist pinda kahe paralleelse tasapinnaga, mis pole paralleelsed moodustajaga. Saame kinnise pinna, millega piiratud keha nimetatakse **prismaks** (joon. 73).

Seega,

prisma on keha, mis tekib prismalise pinna lõikamisel kahe paralleelse tasapinnaga, mis pole paralleelsed selle prismalise pinna moodustajaga.



JOON. 73.



JOON. 74.

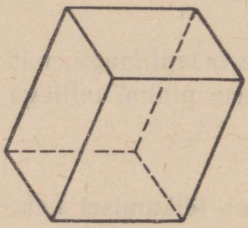
Prismat piiravat prismalise pinna osa nimetatakse prisma **külgpinnaks** ja paralleelsete tasapindade osi prisma **põhjadeks.**

Kui prismalist pinda lõikavad tasapinnad on risti prismalise pinna moodustajaga, siis tekkinud prismat nimetatakse **püstprismaks** (joon. 74), vastupidisel juhul aga **kaldprismaks** (joon. 75).

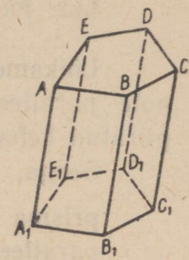
Prismat piirav kinnine pind koosneb hulknurkadest. Niisugust keha, mille pind koosneb hulknurkadest, nimetatakse **hulktahukaks;** teda piiravaid hulknurki nimetatakse **tahkudeks.** Prisma külgpind koosneb nelinurkadest. Neid nimetatakse **külgtahkudeks,** põhju nimetatakse aga **põhitahkudeks.**

Sirglõike, mida mööda lõikuvad prisma külgtahud, nimetatakse prisma **külgservadeks** ja sirglõike, mida mööda lõikuvad külgtahud põhitahkudega, **põhiservadeks.** Servade lõikepunkte nimetatakse prisma **tippudeks.**

Prisma tippe tähistatakse suurte tähtedega. Nii nagu hulknurki kirjutasime üles nende tippude järgi (nelinurk $ABCD$), nii kirjutame ka prismasid üles nende tippude järgi. Joonisel 76 on



JOON. 75.

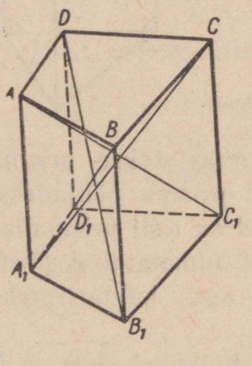


JOON. 76.

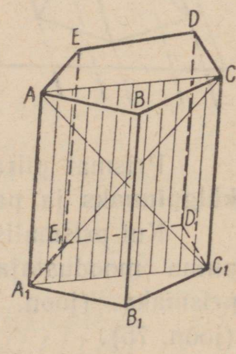
esitatud prisma $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$. Lühemalt kirjutatakse ka nii: prisma AE_1.

Prisma põhjade vahelist kaugust nimetatakse prisma **kõrguseks.**

Kaht mitte ühel tahul asetsevat tippu ühendavat sirglõiku nimetatakse prisma **diagonaaliks.** Näiteks on joonisel 77 prisma diagonaalideks lõigud AC_1, BD_1, CA_1 ja DB_1.



JOON. 77.



JOON. 78.

Prisma kaks mitte ühele tahule kuuluvat külgserva määravad prisma **diagonaallõike** (joon. 78).

Mitu diagonaallõiget saab kujutada joonistel 77 ja 78 esitatud prismadesse?

Mitu diagonaali saab kujutada joonisel 74 esitatud prismasse?

4.1.3. PRISMA OMADUSED.

1°. **Prisma külgtahud on rööpkülikud.**

Prisma külgtahkudeks on nelinurgad. Nendel nelinurkadel on vastasküljed paralleelsed: üks paar vastaskülgi (prisma külgservad) on paralleelsed prismalise pinna konstruktsiooni põhjal, teine paar vastaskülgi (prisma põhiservad) on aga paralleelsed seetõttu, et nad on kahe paralleelse tasapinna lõikamisel kolmandaga tekkinud lõikesirgete lõigud. Seega on prisma külgtahud rööpkülikud.

2°. **Prisma põhjad on võrdsed hulknurgad.**

Et prisma põhjade vastavaid tippe ühendavad lõigud AA_1, BB_1 jne. on:

a) paralleelsed (prismalise pinna konstruktsiooni põhjal),

b) võrdsed (kui paralleelsete tasapindade vahelised paralleelsete sirgete lõigud) ja

c) samasuunalised,

siis saab prisma põhjasid rööplükke abil ühtimisele viia, sest nii nagu tasapinnal, nii teisendub ka ruumis iga kujund rööplükkel temaga võrdseks kujundiks. Seega on prisma põhjad kongruentsed hulknurgad.

Püstprismat, mille põhjaks on korrapärane hulknurk, nimetatakse **korrapäraseks prismaks.**

Prismat nimetatakse kolmnurkseks, nelinurkseks, üldiselt n-nurkseks, kui tema põhitahud on vastavalt kolmnurgad, nelinurgad, n-nurgad.

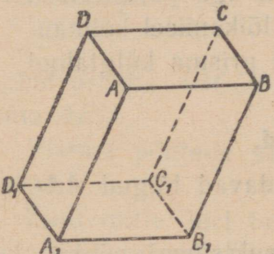
Küsimusi ja ülesandeid.

185. Missugust pinda nimetatakse prismaliseks?
186. Missugust keha nimetatakse prismaks?
187. Nimeta prisma omadusi.
188. Missugust prismat nimetatakse püstprismaks?
189. Mis on prisma diagonaal? diagonaallõige?
190. Missugust prismat nimetatakse korrapäraseks?
191. Missugust hulknurka nimetatakse korrapäraseks?
192. Näita, et püstprisma külgserv on võrdne tema kõrgusega.
193. Näita, et püstprisma külgtahud on ristkülikud.
194. Missuguse nurga moodustab püstprisma külgserv põhiservadega? Miks?

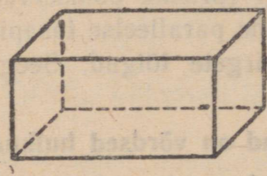
4.1.4. RÖÖPTAHUKAS.

Prismat, mille põhjaks on rööpkülik, nimetatakse **rööptahukaks** (joon. 79).

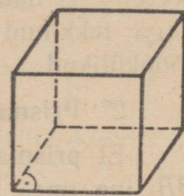
Püströöptahukat, mille põhjaks on ristkülik, nimetatakse **risttahukaks** (joon. 80).



JOON. 79.



JOON. 80.



JOON. 81.

Risttahukat, mille ühest tipust väljuvad servad on võrdsed, nimetatakse **kuubiks** (joon. 81).

Rööptahuka kõik tahud on rööpkülikud, risttahuka kõik tahud on ristkülikud ja kuubi kõik tahud on ruudud.

Rööptahuka neid külgtahke, millel pole ühiseid servi, nimetatakse **vastastahkudeks**. Nii on näiteks joonisel 79 tahud AA_1D_1D ja BB_1C_1C vastastahkudeks.

4.1.5. RÖÖPTAHUKA OMADUSED.

1°. Rööptahuka vastastahud on paralleelsed.

Selle omaduse põhjendamine tugineb kahe tasapinna paralleelsuse tunnusele: kaks tasapinda on paralleelsed, kui ühe tasapinna kaks lõikuvat sirget on paralleelsed teise tasapinna kahe lõikuva sirgega. Tõesta see rööptahuka vastastahkude omadus!

2°. Rööptahuka vastastahud on võrdsed.

Rööptahuka vastastahud on rööpkülikud. Rööpküliku diagonaal poolitab rööpküliku kaheks võrdseks kolmnurgaks. Seega, kui tahame tõestada kahe rööpküliku võrdsust, siis tükeldame kummagi rööpküliku diagonaaliga kaheks võrdseks kolmnurgaks ja tõestame vastavate kolmnurkade võrdsuse.

Tuginedes kolmnurkade võrdsuse lausetele võime sealt järeldada rööpkülikute võrdsuse tunnused. Näiteks: kaks rööpkülikut on võrdsed, kui ühe rööpküliku lähisküljed on võrdsed teise rööpküliku lähiskülgedega ja nurgad nende külgede vahel on võrdsed.

Sellele lausele tuginedes saabki tõestada rööptahuka vastastahkude võrdsuse. Tee seda!

3°. **Rööptahuka diagonaalid lõikuvad kõik ühes punktis, mis on ühtlasi nende poolituspunktiks.**

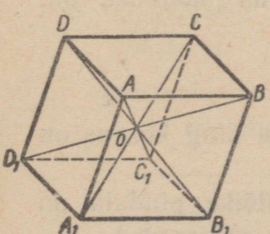
Tõestame selle omaduse, tuginedes joonisele 82.

Vaatleme diagonaali B_1D ja tähistame tema poolituspunkti tähega O. Näitame, et ka rööptahuka teised diagonaalid BD_1, A_1C ja AC_1 läbivad seda punkti O ja poolituvad selles punktis.

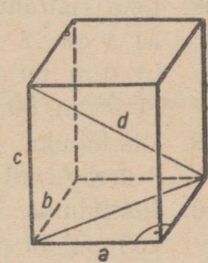
Rööptahuka servad BB_1 ja DD_1 on võrdsed (miks?) ja paralleelsed (miks?). Seega on nelinurk BDD_1B_1 rööpkülik. Selle rööpküliku diagonaalideks on rööptahuka diagonaalid BD_1 ja B_1D. Et rööpküliku diagonaalid lõikuvad ja lõikepunktis poolituvad, siis peavad diagonaalid BD_1 ja B_1D lõikuma punktis O, milles poolitub ka diagonaal BD_1.

Nelinurgad A_1B_1CD ja B_1C_1DA on samuti rööpkülikud (miks?). Neil mõlemal on üheks diagonaaliks B_1D, mis poolitub punktis O. Et rööpkülikute A_1B_1CD ja B_1C_1DA teisteks diagonaalideks on vastavalt AC ja AC_1, siis peavad ka nemad läbima punkti O ja seal poolituma (miks?).

4°. Nimetades risttahuka põhiservade ja külgservade pikkust



JOON. 82.



JOON. 83.

tema mõõtmeteks, saab Pütagorase teoreemile tuginedes näidata, et

risttahuka diagonaali ruut võrdub tema kolme mõõtme ruutude summaga

ehk, tuginedes joonisel 83 toodud tähistustele,

$$\boxed{d^2=a^2+b^2+c^2}$$

Et kuubi servad on kõik võrdsed, s. t. $a=b=c$, siis kuubi diagonaal

$$d=a\sqrt{3},$$

kus a on kuubi serva pikkus.

Küsimusi ja ülesandeid.

195. Missugust hulknurka nimetatakse rööpkülikuks?
196. Nimeta rööpküliku omadusi.
197. Missugust rööpkülikut nimetatakse ristkülikuks?
198. Nimeta ristküliku omadusi.
199. Mis on romb?
200. Nimeta rombi omadusi.
201. Mis on ruut?
202. Nimeta ruudu omadusi.
203. Tuginedes kolmnurkade võrdsuse lausetele, sõnasta rööpkülikute võrdsuse tunnused.
204. Mis on rööptahukas? risttahukas? kuup?
205. Nimeta rööptahuka omadusi.
206. Sõnasta risttahuka diagonaali omadus.
207. Sõnasta koosinusteoreem ja siinusteoreem.
208. Leia risttahuka diagonaali pikkus, kui tema mõõtmed on:
a) 1 cm, 2 cm ja 2 cm;
b) 6 m, 60 dm ja 700 cm;
c) 8 dm, 90 cm ja 1,2 m.
209. Risttahuka põhiservad on 7 dm ja 24 dm ning kõrgus on 8 dm. Arvuta diagonaallõike pindala.
210. Risttahuka külgserv on 5 cm, diagonaallõike pindala on 205 cm^2 ja põhja pindala on 360 cm^2. Leia põhiservad.
211. Korrapärase nelinurkse prisma põhja pindala on 144 cm^2 ja kõrgus on 14 cm. Arvuta prisma diagonaal.
212. Arvuta korrapärase nelinurkse prisma diagonaal, kui põhja diagonaal on 8 cm ja külgtahu diagonaal on 7 cm.
213. Prisma põhjaks on korrapärane kuusnurk küljega a. Prisma külgtahud on ruudud. Leia prisma diagonaalide pikkused ja diagonaallõigete pindalad.

214. Korrapärases kuusnurkses prismas, mille külgtahud on ruudud, pannakse tasapind läbi alumise põhja ühe serva ja tema vastas asetseva ülemise põhja serva. Põhiserv on a. Leia saadud lõike pindala.

215. Leia kuubi diagonaalide vaheline nurk.

216. Risttahuka mõõtmed on 3, 4 ja 5. Leia diagonaalidevaheline nurk.

217. Leia püströöptahuka diagonaallõike pindala, kui rööptahuka kõrgus on võrdne põhja lühema diagonaaliga ja põhiservad on 3,4 ja 5,7 ning nendevaheline nurk 62°10′.

218. Leia risttahuka diagonaallõike pindala, kui põhiservad on 18,2 cm ja 31,6 cm ning selle diagonaallõike diagonaalide vaheline nurk on 32,1°.

219. Risttahuka diagonaal moodustab risttahuka servadega nurgad α, β ja γ. Tõesta, et $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. Leia α, β ja γ, kui risttahuka mõõtmed on 8,5 cm, 7,2 cm ja 4,8 cm.

220. Risttahuka diagonaal moodustab ühe otspunkti juures tahkudega nurgad α, β ja γ. Tõesta, et $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$.

4.1.6. PRISMA KÜLG- JA TÄISPINDALA.

Prisma külgpindalaks nimetatakse tema külgtahkude pindalade summat.

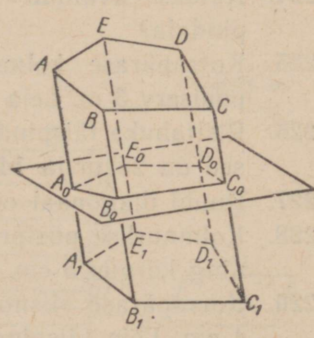
Püstprisma külgtahkudeks on ristkülikud, mille üheks küljeks on põhiserv ja teiseks prisma kõrgus.

Näita, et

püstprisma külgpindala S_k on võrdne põhja ümbermõõdu $ü_p$ ja kõrguse h korrutisega, s. t.

$$\boxed{S_k = ü_p \cdot h}$$

Kaldprisma külgpindala leidmiseks lõikame prismat tasapinnaga, mis on risti külgservadega (joon. 84). Prismalise pinna poolt sellest tasapinnast eraldatud hulknurka nimetatakse prisma **ristlõikeks.**



JOON. 84.

Kaldprisma külgtahud on rööpkülikud. Vaadeldes külgservi rööpküliku alusena ja ristlõike serva rööpküliku kõrgusena, saab näidata, et

kaldprisma külgpindala S_k on võrdne ristlõike ümbermõõdu $ü_r$ ja külgserva l korrutisega, s. t.

$$\boxed{S_k = ü_r \cdot l}$$

Tee seda!

Prisma täispindalaks nimetatakse tema külgpindala ja põhjade pindalade summat.

Tähistades täispindala sümboliga S_t ja põhja pindala sümboliga S_p, võime kirjutada

$$\boxed{S_t = S_k + 2S_p}$$

Küsimusi ja ülesandeid.

221. Kuidas avaldub korrapärase hulknurga pindala külgserva kaudu?

222. Kuidas avaldub kolmnurga pindala
a) kolme külje järgi?
b) kahe külje ja nendevahelise nurga järgi?
c) ühe külje ja selle lähisnurkade järgi?

223. Kuidas avaldub rombi pindala
a) külje ja sellele vastava kõrguse kaudu?
b) diagonaalide kaudu?

224. Kuidas avaldub korrapärase prisma külgpindala? täispindala?

225. Korrapärase kolmnurkse püstprisma kõrgus on 12 cm ja põhiserv 3 m. Leia prisma täispindala.

226. Risttahuka täispindala on 1714 m². Põhja lähisservade pikkused on 25 m ja 14 m. Arvuta külgpindala ja külgserv.

227. Kuubi diagonaal on 10 cm. Leia kuubi täispindala.

228. Kolmnurkse püstprisma põhiservad on 6 cm, 7 cm ja 8 cm ning kõrgus 5 cm. Leia täispindala.

229. Korrapärase viisnurkse prisma põhiserv on 3 cm ja kõrgus 4 cm. Leia täispindala.

230. Kolmnurkse kaldprisma kaks külgtahku on teineteisega risti; nende ühine serv on 24 cm ning asetseb teistest külgservadest 12 cm ja 35 cm kaugusel. Arvuta prisma külgpindala.

231. Risttahuka põhiservad on 36 cm ja 15 cm. Risttahuka diagonaal moodustab põhitahuga 38°-se nurga. Leia risttahuka külgpindala.

232. Püstprisma põhjaks on romb küljega 4 cm ja teravnurgaga 36°15′. Leia prisma täispindala, kui prisma kõrgus on võrdne rombi pikema diagonaaliga.

233. Püströöptahuka põhjaks on romb, mille külje pikkus on 58 cm ja teravnurk 63°. Rööptahuka pikem diagonaal moodustab põhitahuga 52°-se nurga. Leia täispindala.

4.1.7. RISTTAHUKA RUUMALA.

a) Olgu antud risttahukas R_1 mõõtmetega a, b ja c ning risttahukas R_2 mõõtmetega na, b, c, kus n on naturaalarv. Nagu joonisel 85 näeme, on risttahukas R_2 saadav n risttahukast R_1. Tähistades esimese risttahuka ruumala V_1 ja teise oma V_2, võime kirjutada

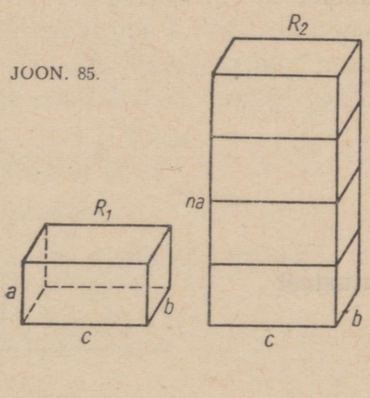
$$V_2 = n \cdot V_1.$$

Seega,

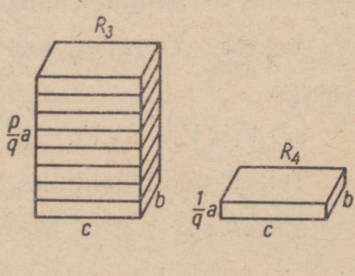
kui risttahuka mõõde suureneb naturaalarv n korda, siis suureneb ka tema ruumala n korda.

b) Vaatleme nüüd kõrvuti risttahukaga R_1 risttahukat R_3, mille mõõtmed on $\frac{p}{q} \cdot a$, b ja c, kus $\frac{p}{q}$ on positiivne murdarv (joon. 86). Jaotame risttahuka R_1 paralleelsete tasapindadega q

JOON. 85.



JOON. 86.



võrdseks risttahukaks R_4, mille mõõtmed on $\frac{1}{q} \cdot a$, b ja c. Risttahukaid R_4 mahub risttahukasse R_3 täpselt p tükki. Tähistades risttahuka R_3 ruumala sümboliga V_3 ja risttahuka R_4 ruumala sümboliga V_4, saame

$$V_3 = p \cdot V_4.$$

Et risttahukaid R_4 mahub risttahukasse R_1 parajasti q tükki, siis

$$V_1 = q \cdot V_4.$$

Avaldades sellest võrdusest V_4:

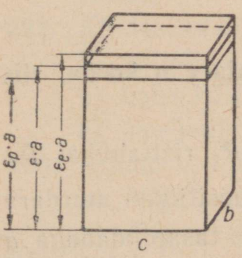
$$V_4 = \frac{1}{q} \cdot V_1$$

ja asendades eelmises võrduses V_4 saadud avaldisega, saame

$$V_3 = p \cdot \frac{1}{q} \cdot V_1 = \frac{p}{q} \cdot V_1.$$

Seega,

kui risttahuka mõõde muutub murdarv $\frac{p}{q}$ korda, siis muutub ka tema ruumala sama murdarv $\frac{p}{q}$ korda.



JOON. 87.

c) Vaatleme nüüd veel risttahukat R_5, mille mõõtmed on εa, b, c, kus ε on irratsionaalarv (joon. 87). Irratsionaalarvu saab lähendada kuitahes suure täpsusega ratsionaalarvu abil. Olgu ε mingiks lähisväärtuseks puuduga ε_p ja liiaga ε_l, s. t. $\varepsilon_p < \varepsilon < \varepsilon_l$. Seega sulgub risttahuka R_5 ruumala V_5 oma suuruselt risttahukate R_{5_p} ja R_{5_l} ruumalade R_{5_p} ja V_{5_l} vahele:

$$V_{5_p} < V_5 < V_{5_l}.$$

Juhu b) põhjal teame, et

$$V_{5_p} = \varepsilon_p \cdot V_1 \text{ ja } V_{5_l} = \varepsilon_l \cdot V_1,$$

ja seega

$$\varepsilon_p \cdot V_1 < V_5 < \varepsilon_l \cdot V_1.$$

Teiselt poolt, lähtudes võrratustest

$$\varepsilon_p < \varepsilon < \varepsilon_l,$$

saame

$$\varepsilon_p \cdot V_1 < \varepsilon \cdot V_1 < \varepsilon_l \cdot V_1.$$

Et mõlemad võrratuste read jäävad kehtima, kui ε_p ja ε_l esitada järjest suurema arvu kohtadega pärast koma, siis

$$V_5 = \varepsilon \cdot V_1.$$

Kui risttahuka mõõde muutub irratsionaalarvu ε kordseks, siis muutub ka risttahuka ruumala ε kordseks.

Vaadeldud kolm juhtu võib kokku võtta lausega:

kui risttahuka üks mõõde muutub mingi arv korda, siis muutub risttahuka ruumala sama arv korda,

s. t.

risttahuka ruumala on võrdeline ühe oma mõõtmega, kui teised mõõtmed ei muutu.

Olgu risttahuka mõõtmed a, b ja c, siis võime kirjutada, et

$$V = kabc.$$

Tõepoolest, kui b ja c ei muutu, siis

$$kbc = k_1 \text{ ja } V = k_1 a;$$

kui a ja c ei muutu, siis

$$kac = k_2 \text{ ja } V = k_2 b;$$

kui a ja b ei muutu, siis

$$kab = k_3 \text{ ja } V = k_3 c.$$

Seega tuleb risttahuka ruumala valemi saamiseks määrata võrduses $V = kabc$ võrdetegur k.

Et see konstant peab olema sama iga a, b ja c väärtuse korral, siis määrame k väärtuse niisuguse risttahuka abil, mille ruumala me teame. Ruumala mõõtmise ühikuks on ühikkuup, s. o. niisugune risttahukas, milles kõik mõõtmed on võrdsed ühikuga, seega

$$1 = k \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

ja siit $k = 1$.

Seega risttahuka ruumala

$$\boxed{\mathbf{V = abc}}$$

Risttahuka ruumala on võrdne tema kolme mõõtme korrutisega

ehk, vaadates näiteks tahku mõõtmetega a ja b põhjana,

risttahuka ruumala on võrdne põhja pindala ja kõrguse korrutisega.

Ülesandeid.

234. Leia risttahuka ruumala, kui tema mõõtmed on

a) 1,03 m, 2,45 m, 0,67 m;

b) $3\frac{3}{4}$ cm, $5\frac{1}{2}$ cm, $7\frac{1}{2}$ cm;

c) a, $2a$, $\frac{a}{2}$.

235. Risttahuka mõõtmed suhtuvad nagu 4 : 5 : 6. Risttahuka täispindala on 592 cm². Kui suured on risttahuka mõõtmed? Kui suur on risttahuka ruumala?

236. Kahe risttahuka vastavad mõõtmed suhtuvad nagu $m : n$. Kuidas suhtuvad nende risttahukate täispindalad? Kuidas suhtuvad nende risttahukate ruumalad?

237. Risttahuka mõõtmed suhtuvad nagu 1 : 2 : 3. Kui suured peavad olema need mõõtmed, kui risttahuka ruumala on 1 m³.

238. Risttahuka diagonaallõikeks on ruut pindalaga 100 m². Leia selle risttahuka täispindala ja ruumala, kui põhiservad suhtuvad nagu 3 : 4.

239. Risttahuka mõõtmed suhtuvad nagu 12 : 16 : 21. Risttahuka diagonaal on 87 cm. Kui suur on selle risttahuka ruumala?

240. 1,5 cm paksustest laudadest tehti kast, mille välimised mõõtmed on 1,6 m, 95 cm ja 50 cm. Kui palju kulus kasti valmistamiseks puitu ja kui suur on kasti sisemine ruumala?

241. Hõbepaber (stannioolpaber) pikkusega 24 cm ja laiusega 15 cm kaalub 6,561 grammi. Kui paks on see paber, kui stanniooli erikaal $e = 7{,}29$?

242. Risttahukakujulisest paagist pikkusega $4\frac{1}{2}$ m, laiusega 3,4 m ja kõrgusega $1\frac{1}{2}$ m, mis on täidetud veega, lastakse ära joosta 96 hl vett. Kui kõrgel on nüüd paagis veepind?

243. Väikese risttahukakujulise klaasvanni välised mõõtmed on: pikkus 8 cm, laius 5 cm ja kõrgus 4 cm. Klaasi paksus on

6 mm. Leia klaasvanni raskus ja sellesse vanni mahtuva elavhõbeda kaal, kui klaasi erikaal $e_1 = 2{,}4$ ja elavhõbeda erikaal $e_3 = 13{,}6$.

244. Risttahuka mõõtmed on 3 cm, 4 cm ja 5 cm. Kui iga tema serva suurendada x cm võrra, siis suureneb täispindala 54 cm² võrra. Mitu korda suureneb ruumala?

245. Risttahuka kolme tahu pindalad on 2 m², 3 m² ja 6 m². Leia ruumala.

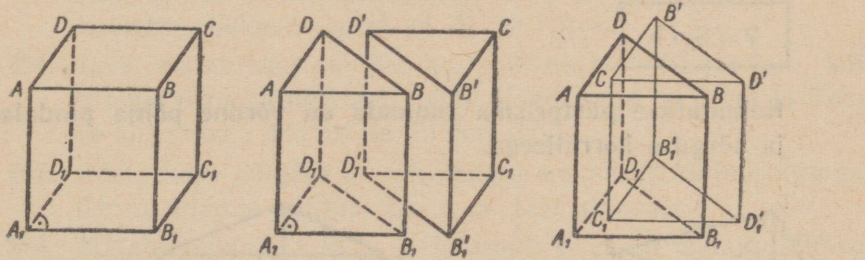
246. Leia risttahuka ruumala, kui tema diagonaal moodustab põhitahuga nurga α, suurema külgtahuga aga nurga β. Risttahuka diagonaali pikkus on d. Uuri saadud valemit.

247. Risttahuka põhja diagonaal on d, põhja diagonaalide vaheline nurk on α ning risttahuka suuremat põhiserva läbiva lõiketasapinna ja põhitahu vaheline nurk on β. Leia risttahuka ruumala. Arvuta ruumala, kui $d = 7{,}5$; $\alpha = 43°$ ja $\beta = 57°$.

4.1.8. PÜSTPRISMA RUUMALA.

a) KOLMNURKSE PÜSTPRISMA RUUMALA.

Joonisel 88 on risttahukas lõigatud mööda diagonaallõike tasapinda kaheks osaks. Saadud kolmnurksetel püstprismadel on põhjadeks võrdsed täisnurksed kolmnurgad ning samuti on neil



JOON. 88.

kolmnurksetel püstprismadel võrdsed kõrgused. Pöörates üht pooltest, näiteks prismat DC_1 ümber serva CC_1 180° võrra, on võimalik neid prismasid paralleellükke abil üksteise sisse asetades viia ühtimisele, s. t. need kolmnurksed püstprismad on ruumvõrdsed. Tähistame ühe kolmnurkse püstprisma ruumala V-ga, siis

$$2V = abc$$

ja

$$V = \frac{1}{2} abc.$$

Et $\frac{1}{2} ab$ on vaadeldava kolmnurkse püstprisma põhja pindala ja c kõrgus, siis tähistades põhja pindala S_p-ga ja kõrguse h-ga, saame

$$V = S_p \cdot h.$$

Olgu nüüd kolmnurkse püstprisma põhjaks mistahes kolmnurk (joon. 89). Lõikame seda prismat niisuguse põhjadega ristuva tasapinnaga, mis läbib üht külgserva ja on risti selle serva vastastahuga. Saame kaks kolmnurkset püstprismat, mille põhjadeks on täisnurksed kolmnurgad. Tähistame antud prisma põhja pindala S_p-ga ja ruumala V-ga. Lõikamise tulemusena saadud kolmnurksete prismade põhja pindalad tähistame S_1-ga ja S_2-ga ning ruumalad V_1-ga ja V_2-ga. Siis

$$S_p = S_1 + S_2 \text{ ja } V = V_1 + V_2.$$

Et

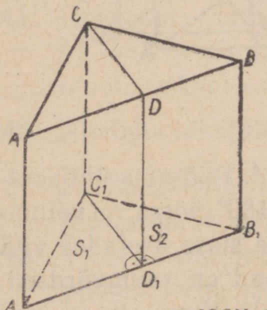
$$V_1 = S_1 \cdot h \text{ ja } V_2 = S_2 \cdot h,$$

siis

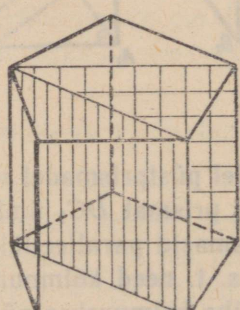
$$V = S_1 \cdot h + S_2 \cdot h = (S_1 + S_2) h = S_p \cdot h.$$

$$\boxed{\mathbf{V = S_p \cdot h}}$$

Kolmnurkse püstprisma ruumala on võrdne põhja pindala ja kõrguse korrutisega.



JOON. 89.


JOON. 90.

b) PÜSTPRISMA RUUMALA.

Olgu nüüd püstprisma põhjaks mingi hulknurk. Lõikame seda prismat niisuguste põhjadega ristuvate tasapindadega, mis on määratud kahe mitte ühel tahul asetseva külgservaga. Selle tagajärjel antud prisma tükeldub kolmnurkseteks prismadeks (joon. 90). Kolmnurkse prisma ruumala valemi tuletamisel kasutatud mõttekäiku järgides saab näidata, et

iga püstprisma ruumala on võrdne põhja pindala ja kõrguse korrutisega.

Näita seda!

Kaldprisma ruumala valemi tuletame hiljem, kasutades selleks püramiidi ruumala valemit.

Ülesandeid.

248. Arvuta korrapärase kuusnurkse prisma ruumala, kui prisma kõik servad on võrdsed a-ga.

249. Arvuta korrapärase kuusnurkse prisma ruumala, kui prisma kõrgus on 12 m ja põhiserv 35 cm.

250. Püstprisma kõrgus on 1,8 m ja ruumala 0,54 m^3. Leia prisma põhiservad, kui prisma põhjaks on täisnurkne kolmnurk, mille kaatetite pikkused erinevad 70 cm võrra.

251. Leia nelinurkse püstprisma ruumala ja täispindala, kui prisma põhjaks on romb, mille diagonaalid on 8 cm ja 6 cm ja kui prisma kõrgus on 10 cm.

252. Püstprisma põhjaks on võrdkülgne kolmnurk küljepikkusega 0,8 m. Prisma kõrgus on 1,5 m. Leia ruumala.

253. Majale pikkusega 18 m ja laiusega 12 m on ehitatud 60°-se nurga all katus. Kui suur on pööning?

254. Püstprisma põhjaks on kolmnurk külgedega 6,5 cm, 7,2 cm ja 4,8 cm. Leia prisma ruumala, kui kõrgus on 60 cm?

255. Maantee rajamiseks tuleb ehitada teetamm, mille ristlõikeks on võrdhaarne trapets ülemise alusega 8 m, haaradega 2,6 m ja kõrgusega 2,4 m. Mitu m^3 pinnast tuleb vedada kohale niisuguse teetammi iga 10 m pikkuse lõigu ehitamiseks?

256. Kanal on alt 20 m ja veepinnalt 25 m lai. Vee sügavus on 3,5 m. Mitu kuupmeetrit vett voolab 1 tunni jooksul läbi kanali, kui veevoolu kiirus on 40 cm sekundis?

257. Risttahuka diagonaal d moodustab põhjaga nurga α. Põhja diagonaali ja põhiserva vaheline nurk on β. Leia risttahuka külgpindala, täispindala ja ruumala, kui $\beta=21°30'$, $\alpha=54°20'$ ja $d=17{,}9$ m.

258. Püströöptahuka põhjaks on romb, mille väiksem diagonaal on d ja teravnurk on α. Rööptahuka kõrgus on $\frac{d}{2}$. Leia rööptahuka täispindala ja ruumala, kui $d=25{,}8$ ja $\alpha=75°20'$.

259. Püstprisma põhjaks on kolmnurk ABC, mille külg $AC=$ $=38{,}1$ dm, külg $BC=34{,}8$ dm ja nurk $ABC=58°20'$. Prisma külgserv võrdub kolmnurga ABC küljele AB tõmmatud kõrgusega. Arvutada prisma ruumala.

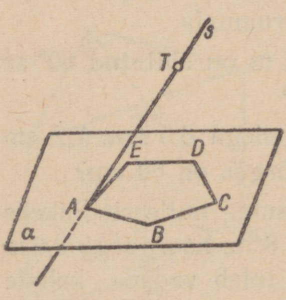
260. Püstprisma kõrgus $h=20$ dm. Prisma põhjaks on ringi ümber kujundatud täisnurkne trapets, mille teravnurk $\alpha=45°30'$; ringi raadius $r=6$ dm. Arvuta prisma ruumala.

261. Püstprisma põhjaks on võrdhaarne kolmnurk, mille haar on a ja tipunurk α. Ülemise põhja tipust on tõmmatud võrdsete külgtahkude diagonaalid, mille vaheline nurk on β. Leia prisma täispindala ja ruumala, kui $a=97{,}84$ cm; $\alpha=63°30'$ ja $\beta=39°40'$

4.2. PÜRAMIID JA TÜVIPÜRAMIID.

4.2.1. PÜRAMIIDILINE PIND.

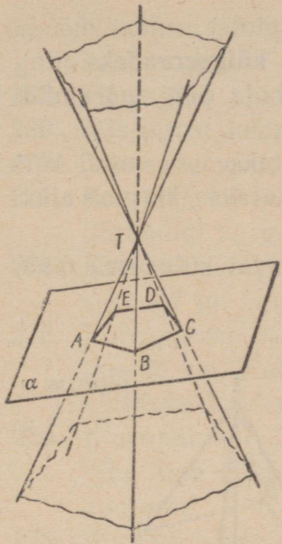
Olgu tasapinnal α antud kinnine murdjoon $ABCDEA$ (joon. 91) ja väljaspool seda punkt T.



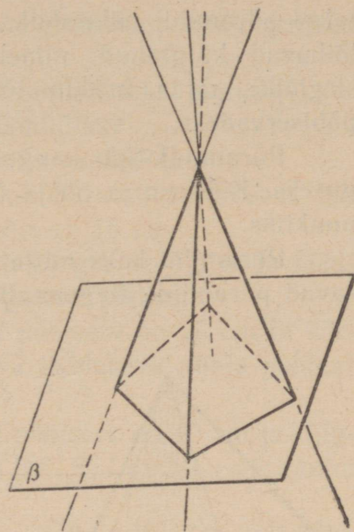
JOON. 91.

Vaatleme sirget s, mis läbib punkti T ja antud murdjoone üht punkti, näiteks punkti A. Paneme sirge s liikuma nii, et ta kogu aeg lõikaks murdjoont $ABCDEA$, kusjuures punkt T jääks paigale. Kui sirge s on läbinud kõik murdjoone lõigud, siis on ta kujundanud pinna, mida nimetatakse **püramiidiliseks pinnaks** (joon. 92).

Murdjoont $ABCDEA$ nimetatakse



JOON. 92.



JOON. 93.

vaadeldava püramiidilise pinna **juhtjooneks** ja sirget *s* **moodustajaks.**

Punkti *T* nimetatakse püramiidilise pinna **tipuks.** Tipp jaotab püramiidilise pinna kaheks ühesuguseks osaks.

4.2.2. PÜRAMIID.

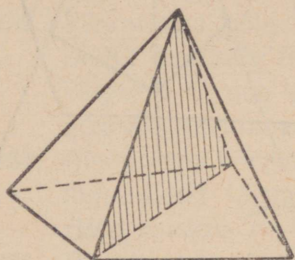
Lõikame püramiidilist pinda tasapinnaga β, mis ei läbi tippu ja mis pole paralleelne püramiidilise pinna moodustaja ühegi asendiga. Püramiidiline pind moodustab koos selle tasapinnaga β kinnise pinna. Saadud kinnise pinnaga piiratud keha nimetatakse **püramiidiks** (joon. 93). Seega,

püramiid on keha, mis tekib püramiidilise pinna lõikamisel niisuguse tasapinnaga, mis ei läbi tippu ja mis pole paralleelne püramiidilise pinna moodustaja ühegi asendiga.

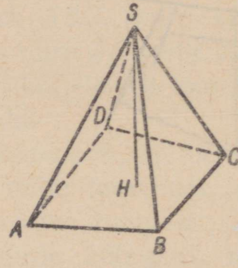
Püramiidi piiravat püramiidilise pinna osa nimetatakse püramiidi **külgpinnaks.** Külgpind koosneb ühise tipuga kolmnurkadest, milliseid nimetatakse püramiidi **külgtahkudeks.** Külgtahkude ühist tippu nimetatakse püramiidi **tipuks.** Peale kolmnurkade on püramiidi piiravas kinnises pinnas veel üks hulknurk, mida nimetatakse püramiidi **põhitahuks** ehk **põhjaks.** Sirglõike, mida mööda lõikuvad külgtahud, nimetatakse püramiidi **külgservadeks** ning sirglõike, mida mööda lõikuvad külgtahud ja põhi, püramiidi **põhiservadeks.**

Püramiidi tipu kaugust põhjast nimetatakse püramiidi **kõrguseks.** Kõrguse ja põhja ühist punkti nimetatakse **kõrguse aluspunktiks.**

Püramiidi kaks mitte ühele tahule kuuluvat külgserva määravad püramiidi **diagonaallõike** (joon. 94).



JOON. 94.



JOON. 95.

Püramiidi tähistatakse püramiidi tipu tähise ja põhjaks oleva hulknurga tippude tähiste abil. Joonisel 95 esitatud püramiidi tähistame $SABCD$, tema kõrguseks on SH.

Püramiidi, mille põhjaks on korrapärane hulknurk ja mille kõrguse aluspunktiks on põhja keskpunkt, nimetatakse **korrapäraseks püramiidiks.**

Korrapärase püramiidi külgtahu kõrgust nimetatakse püramiidi **apoteemiks.**

Püramiidi nimetatakse kolmnurkseks, nelinurkseks, üldiselt n-nurkseks, kui tema põhitahkudeks on vastavalt kolmnurgad, nelinurgad, n-nurgad.

Küsimusi ja ülesandeid.

262. Liigita kolmnurgad külgede (nurkade) järgi!

263. Missuguseid kolmnurki nimetatakse võrdseteks, missuguseid sarnasteks?

264. Millal kaks hulknurka on sarnased?

265. Missuguseid lõike nimetatakse võrdelisteks?

266. Nimeta kolmnurkade sarnasuse tunnused!

267. Näita, et korrapärase püramiidi külgtahud on kongruentsed kolmnurgad.

268. Missugust pinda nimetatakse püramiidiliseks pinnaks?

269. Missugust keha nimetatakse püramiidiks?

270. Missugust püramiidi nimetatakse korrapäraseks?

271. Kui pikk on korrapärase nelinurkse püramiidi apoteem, kui püramiidi kõrgus on 15 cm ja põhiserv 16 cm?

272. Korrapärase kuusnurkse püramiidi kõrgus on 1,5 m ja põhiserv 1,2 m. Leia apoteemi ja külgserva pikkus.

273. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on 25 cm ja kõrgus 20 cm. Kui suur on külgserva kaldenurk põhja suhtes? külgtahu kaldenurk põhja suhtes?

274. Korrapärase viisnurkse püramiidi põhiserv on 10 cm ja külgtahu ning põhja vaheline nurk on 50°. Kui pikk on püramiidi apoteem?

275. Püramiidi põhjaks on korrapärane kolmnurk. Üks külgtahk on risti põhitahuga, teised aga moodustavad põhitahuga kumbki nurga $\varphi = 30°$. Kui suured on nurgad külgservade ja põhitahu vahel?

276. Korrapärase nelinurkse püramiidi külgtahu tipunurk on $\alpha = 60°$. Leia püramiidi külgtahkude ja põhitahu vahelised nurgad.

4.2.3. PÜRAMIIDI PÕHJAGA PARALLEELNE LÕIGE.

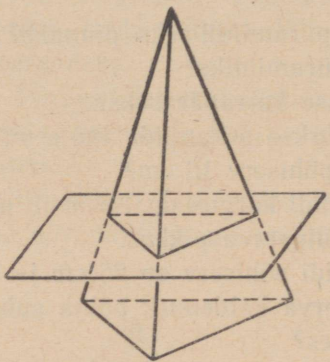
Lõikame püramiidi tema põhjaga paralleelse tasapinnaga. Püramiidi külgtahud eraldavad sellest tasapinnast hulknurga, mida nimetatakse **püramiidi põhjaga paralleelseks lõikeks** (joon. 96).

Tõestame teoreemi:

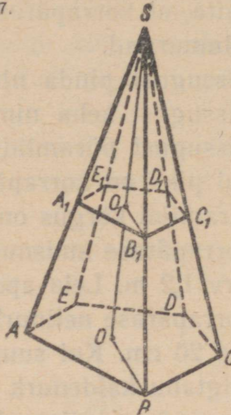
püramiidi põhjaga paralleelne lõige on põhjaga sarnane hulknurk.

Et püramiidi põhi ja temaga paralleelne lõige on samanimelised hulknurgad, siis tuleb tõestada, et nende hulknurkade vastavad nurgad on võrdsed ja nende võrdsete nurkade lähisküljed on võrdelised. Nurgad, mille tipud asetsevad ühel ja samal külgserval, on võrdsed kui vastavalt paralleelsete ja samasuunaliste haaradega nurgad. Võrdsete nurkade lähiskülgede võrdelisuse tõestamine tugineb kolmnurkade sarnasusele. Kasutades joonist 97,

JOON. 96.



JOON. 97.



tõestame näiteks võrdsete nurkade $\angle ABC$ ja $\angle A_1B_1C_1$ lähisküljgede võrdelisuse. Et

$$\triangle A_1SB_1 \sim \triangle ASB \text{ ja } \triangle B_1SC_1 \sim \triangle BSC \text{ (miks?)},$$

siis

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{SB_1}{SB} \text{ ja } \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{SB_1}{SB},$$

millest

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC}.$$

Nii saame tõestada kõigi võrdsete nurkade lähisküljgede võrdelisust, s. t. et

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{D_1E_1}{DE} = \frac{E_1A_1}{EA}.$$

Seega olemegi tõestanud, et püramiidi põhjaga paralleelne lõige on põhjaga sarnane hulknurk.

Tõestame ka veel teise omaduse:

püramiidi põhja pindala ja põhjaga paralleelse lõike pindala suhtuvad nii nagu neile vastavate püramiidide kõrguste ruudud.

Vaatleme joonist 97. Kolmnurgad SB_1O_1 ja SBO (kus O_1 ja O on vastavate püramiidide kõrguste aluspunktid) on sarnased. Miks? Sellest järeldub, et

$$\frac{SB_1}{SB} = \frac{SO_1}{SO}.$$

Et ka

$$\frac{SB_1}{SB} = \frac{A_1B_1}{AB}$$

(vt. eelmise teoreemi tõestust),
siis

$$\frac{SO_1}{SO} = \frac{A_1B_1}{BA}.$$

Teame, et sarnaste hulknurkade pindalad suhtuvad nii, nagu vastavate külgede ruudud. Tähistades põhja pindala sümboliga S_p ja lõike pindala sümboliga S_l, võime kirjutada

$$\frac{S_l}{S_p} = \frac{A_1B_1^2}{AB^2};$$

Siit saame eelmist võrdust kasutades, et

$$\frac{S_l}{S_p} = \frac{SO_1^2}{SO^2},$$

mida oligi tarvis tõestada.

Ülesandeid.

277. Püramiidi põhja pindala on 36 cm² ja kõrgus 8 cm. Leia püramiidi põhjaga paralleelse lõike pindala, kui lõige asub tipust 4 cm kaugusel.

278. Püramiidi põhja pindala on 30 cm² ja kõrgus 10 cm. Leia lõike kaugus põhjast, kui lõike pindala on $7\frac{1}{4}$ cm².

279. Püramiidi põhjaks on ruut küljega 6 cm. Kui pikk on põhjast 2 cm kõrgusel asuva paralleelse lõike külg, kui püramiidi kõrgus on 10 cm?

280. Püramiidi põhjaks on võrdkülgne kolmnurk, mille külg on 5 cm. Kui suur on põhjast 2 cm kaugusel asuva paralleelse lõike pindala, kui püramiidi kõrgus on 8 cm?

281. Püramiidi põhja pindala ja põhjaga paralleelse lõike pindala suhtuvad nagu 3 : 2. Leia püramiidi kõrgus, kui lõige asub tipust 7 ühiku kaugusel.

282. Püramiidi põhjaks on korrapärane kuusnurk küljega 3 cm. Põhjaga paralleelse lõike külg on 1 cm. Leia püramiidi põhja pindala ja põhjaga paralleelse lõike pindala, kui lõige asub tipust 5 cm kaugusel.

4.2.4. TÜVIPÜRAMIID.

Lõikame püramiidilist pinda ühel pool tippu kahe paralleelse tasapinnaga, mis pole paralleelsed selle püramiidilise pinna moodustaja ühegi asendiga (joon. 98). Need tasapinnad koos püramiidilise pinnaga moodustavad kinnise pinna. Selle pinnaga piiratud keha nimetatakse **tüvipüramiidiks.** Seega,

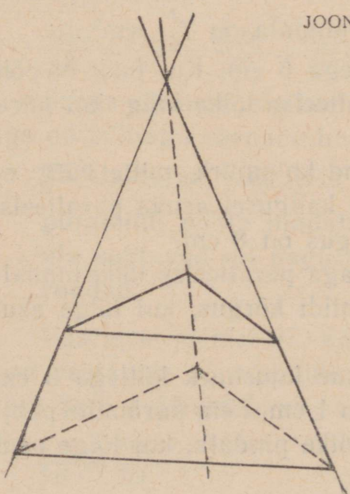
tüvipüramiid on keha, mis tekib püramiidilise pinna lõikamisel ühel pool tippu kahe niisuguse paralleelse tasapinnaga, mis pole paralleelsed püramiidilise pinna moodustaja ühegi asendiga.

Tüvipüramiidi määrav kinnine pind koosneb püramiidilise pinna osast, nn. **külgpinnast,** mis koosneb trapetsikujulistest tahkudest, ja paralleelsete tasapindade osadest — **põhjadest** ehk **põhitahkudest,** milleks on hulknurgad.

Külgservad, põhiservad, tipud, kõrguse, diagonaali ja diagonaallõike defineerime siin samuti nagu prisma juures. Tee seda!

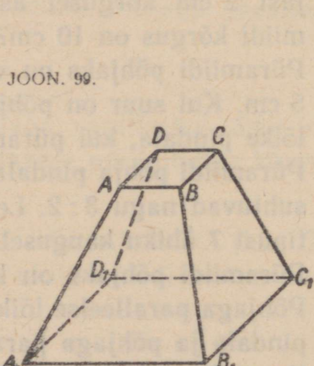
Tüvipüramiidi tähistatakse tema tippude tähiste abil. Nii on joonisel 99 esitatud tüvipüramiid $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ehk lühemalt tüvipüramiid AD_1.

Tüvipüramiidi nimetatakse **korrapäraseks**, kui tema põhjadeks on korrapärased hulknurgad ja ülemise põhja keskpunktist tõmmatud kõrgus langeb alumise põhja keskpunkti.

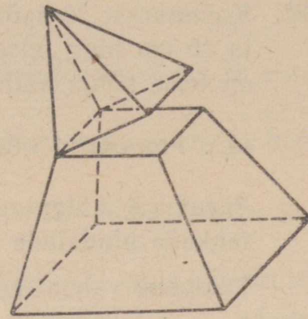


JOON. 98

JOON. 99.



Korrapärase tüvipüramiidi külgtahkudeks on võrdsed võrdhaarsed trapetsid. Tõesta see väide! Nende trapetsite kõrgust nimetatakse korrapärase tüvipüramiidi **apoteemiks.**



JOON. 100.

Et püramiidi saime püramiidilise pinna lõikamisel ühe tasapinnaga, tüvipüramiidi aga kahe paralleelse tasapinnaga, siis tüvipüramiidi võime saada, kui püramiidi lõikame põhjaga paralleelse tasapinnaga ja eraldame tipupoolse osa (joon. 100). Samuti on alati võimalik antud tüvipüramiidi täiendada püramiidiks. Püramiidi, millega täiendame antud tüvipüramiidi, nimetatakse **täienduspüramiidiks.**

Seega võib tüvipüramiidi ülemist põhja vaadelda kui üht püramiidi põhjaga paralleelset lõiget. Et aga püramiidi põhjaga paralleelne lõige on põhjaga sarnane hulknurk, siis

tüvipüramiidi põhjad on sarnased hulknurgad.

Küsimusi ja ülesandeid.

283. Missugust prismat, püramiidi, tüvipüramiidi nimetatakse korrapäraseks?

284. Missugused kujundid on prisma, püramiidi, tüvipüramiidi külgtahkudeks?

285. Defineeri prismat, püramiidi ja tüvipüramiidi kui hulktahukat!

286. Kuidas on võimalik püramiidist saada tüvipüramiidi?

287. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi kõrgus on 7 cm. Põhiservad on 10 cm ja 2 cm. Arvuta püramiidi külgserv.

288. Korrapärase kolmnurkse tüvipüramiidi põhiservad on 4 dm ja 1 dm. Külgserv on 2 dm. Leia kõrgus.

289. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi suurema põhja serv on a ja väiksema oma b. Külgserv moodustab põhjaga 45°-se nurga. Avalda tüvipüramiidi külgserv.

290. Korrapärase kolmnurkse tüvipüramiidi põhiservad on 2 cm ja 6 cm. Külgtahk moodustab suurema põhjaga 60°-se nurga. Leia tüvipüramiidi kõrgus.

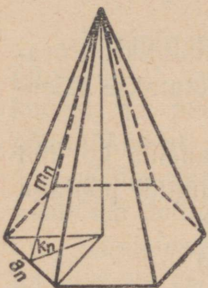
291. Kolmnurkse tüvipüramiidi ühe põhja küljed on 6 cm, 8 cm ja 10 cm ning teise põhja ümbermõõt on 72 cm. Kui pikad on teise põhja küljed?

4.2.5. PÜRAMIIDI KÜLG- JA TÄISPINDALA.

Püramiidi külgpindalaks nimetatakse tema üksikute külgtahkude pindalade summat.

Tuletame valemi korrapärase püramiidi külgpindala arvutamiseks.

Olgu n-nurkse korrapärase püramiidi põhiserv a_n ja apoteem m_n (joon. 101). Ühe külgtahu pindala on siis $\frac{1}{2}a_n \cdot m_n$ ja kogu külgpindala



JOON. 101.

$$\boxed{S_k = \frac{1}{2} n \cdot a_n \cdot m_n}$$

Et $n \cdot a_n$ on püramiidi põhja ümbermõõt, siis

korrapärase püramiidi külgpindala on võrdne põhja ümbermõõdu ja püramiidi apoteemi poole korrutisega.

Täispindala saamiseks tuleb külgpindalaga liita põhja pindala, s. t.

$S_t = S_k + S_p$.

Kui tähistada põhja apoteem k_n-ga, siis korrapärase püramiidi puhul

$$\boxed{S_t = \frac{1}{2} n \cdot a_n (m_n + k_n)}$$

Tõesta see!

Mittekorrapärase püramiidi külgpindala leidmiseks arvutatakse kõigi tema külgtahkude pindalad ja tulemused liidetakse. Juhul kui kõigi külgtahkude kõrgused on võrdsed, avaldub püramiidi külgpindala põhja ümbermõõdu ja külgtahu kõrguse poole korrutisena.

292. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on 2 cm ja apoteem 3 cm. Leia täispindala.

293. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on 6 cm ja kõrgus 4 cm. Leia täispindala.

294. Avalda korrapärase nelinurkse püramiidi külgpindala, kui tema kõik servad on a cm.

295. Leia kolmnurkse püramiidi täispindala, kui selle püramiidi iga serv on a cm.

296. Torni põhi on ruut küljega 5 m. Tuleb ehitada 8 m kõrgune püramiidikujuline katus. Leia sarikapalkide pikkus (püramiidi tipu ja põhja tipu vaheline kaugus). Kui palju plekki kulub torni katuse katmiseks, kui ühendustele kulub 5% katust katva pleki pindalast?

297. Torni katusel on korrapärase kuusnurkse püramiidi külgpinna kuju. Katuse põhja ümbermõõt on 10,2 m ja iga tema tahu kõrgus on 6 m. Leia katuse pindala. Kui palju vajatakse katuse katmiseks 4 m pikkusi ja 0,3 m laiusi laudu, kui katuse kujust tingituna arvestatakse laudade vajadus 15% suuremana katuse pindalast?

298. Paviljoni katus on kujult korrapärane kaheksanurkne püramiid põhiservaga 4,6 m ja külgservaga 7 m. Mitu tahvlit katuseplekki kulub selle katuse katmiseks, kui iga ruutmeetri kohta kulub 1,2 tahvlit plekki?

299. Korrapärase kuusnurkse püramiidi kõrgus on 12 cm ja põhiserv on 6 cm. Leia püramiidi täispindala.

300. Korrapärase kuusnurkse püramiidi külgserv on 10 cm ja apoteem 9 cm. Arvuta püramiidi täispindala.

301. Korrapärase kuusnurkse püramiidi põhiserv on 2,4 dm ja külgserv 7,6 dm. Arvuta püramiidi täispindala.

302. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on a ja külgtahu tipunurk α. Avalda püramiidi täispindala.

303. Korrapärase nelinurkse püramiidi kõrgus on h ja külgtahu tipunurk 2α. Leia püramiidi külgpindala.

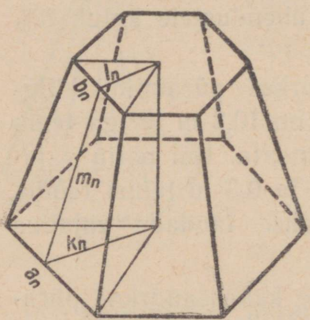
304. Püramiidi põhjaks on ruut, mille külg on a. Kaks külgtahku on risti põhitahuga, teised kaks moodustavad aga põhitahuga nurga φ. Avalda püramiidi külg- ja täispindala.

305. Püramiidi põhjaks on romb, mille külg on a ja teravnurk α. Kaks külgtahku, mille vahele jääb rombi teravnurk, on risti põhitahuga, ülejäänud kaks moodustavad aga põhitahuga nurga φ. Leia püramiidi külgpindala.

4.2.6. TÜVIPÜRAMIIDI KÜLG- JA TÄISPINDALA.

Tüvipüramiidi külgpindalaks nimetatakse tema üksikute külgtahkude pindalade summat.

Tuletame valemi korrapärase tüvipüramiidi külgpindala arvutamiseks.



JOON. 102.

Olgu korrapärase n-nurkse tüvipüramiidi ühe põhja serv a_n, teise põhja serv b_n ning apoteem m_n (joon. 102), siis ühe külgtahu pindala on $\frac{a_n+b_n}{2}\cdot m_n$. Tähistades külgpindala S_k-ga, saame

$$S_k=\frac{a_n+b_n}{2}\cdot m_n\cdot n$$

ehk

$$\boxed{S_k=\frac{n\cdot a_n+n\cdot b_n}{2}\cdot m_n.}$$

Seega,

korrapärase tüvipüramiidi külgpindala on võrdne põhjade ümbermõõtude poolsumma ja apoteemi korrutisega.

Täispindala saamiseks tuleb külgpindalaga S_k liita kahe põhja pindalad S_{p_1} ja S_p . Tähistades nagu varemgi täispindala S_t-ga, saab näidata, et korrapärase tüvipüramiidi puhul

$$\boxed{S_t=\frac{n}{2}[a_n(m_n+k_n)+b_n(m_n+l_n)]}$$

kus k_n on selle põhja apoteem, mille külg on a_n, ja l_n on selle põhja apoteem, mille külg on b_n.

Näita seda!

Küsimusi ja ülesandeid.

306. Kuidas avaldub trapetsi pindala?

307. Missugust trapetsit nimetatakse võrdhaarseks?

308. Missugust tüvipüramiidi nimetatakse korrapäraseks?

309. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi põhiservad on 12 cm ja 5 cm ning tüvipüramiidi kõrgus on 30 cm. Leia täispindala.

310. Korrapärase kolmnurkse tüvipüramiidi põhiservad on 8 cm ja 6 cm ning kõrgus on 14 cm. Leia külgserva pikkus ja täispindala.

311. Korrapärase tüvipüramiidi põhjadeks on korrapärased kuusnurgad küljepikkusega vastavalt 20 cm ja 9 cm. Külgserva pikkus on 61 cm. Leia tüvipüramiidi kõrgus ja täispindala.

312. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi põhiservad on 17,8 cm ja 1,8 cm ning külgserv on 12,8 cm. Leia täispindala.

313. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi kõrgus on h ning külgserv ja diagonaal moodustavad suurema põhitahuga vastavalt nurgad α ja β. Leia tüvipüramiidi külgpindala.

4.2.7. PÜRAMIIDI JA TÜVIPÜRAMIIDI RUUMALA.

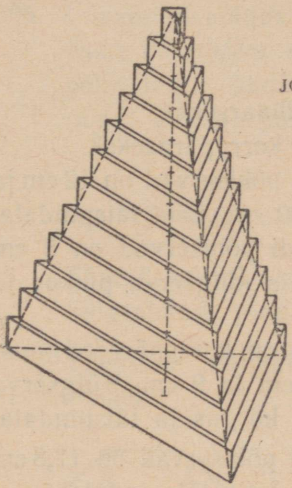
a) PÜRAMIIDI RUUMALA MÕISTE.

Ringjoone pikkuse ja ringi pindala defineerisime piirväärtuse abil. Miks?

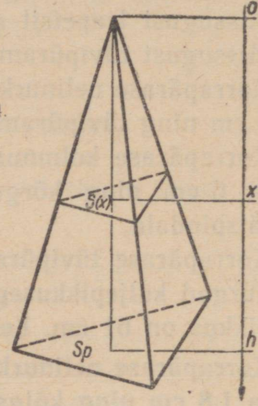
Ruumiühikuks on ühikkuup, millega ei saa mõõta püramiidi ruumala. Seetõttu kasutame siingi ruumala defineerimiseks piirväärtust.

Tükeldame püramiidi tema põhjaga paralleelsete tasapindadega võrdse kõrgusega tüvipüramiidideks. Olgu neid tüvipüramiide koos tipu juurde jäänud püramiidiga n. Täiendame nüüd joonist püstprismadega nii, nagu näidatud joonisel 103. See püstprismade poolt moodustatud keha läheneb oma kujult püramiidile seda enam, mida suurem on n. Seepärast defineerimegi püramiidi ruumala järgmiselt:

püramiidi ruumalaks nimetatakse tema põhjaga paralleelsete lõigete abil moodustatud prismade ruumalade summa piirväärtust, kui prismade arv tõkestamatult kasvab.



JOON. 103.



JOON. 104.

Tähistame prismade ruumalasid vastavalt V_1, $V_2, \ldots, V_n$ ja püramiidi ruumala tähega V, siis

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} V_i.$$

b) PÜRAMIIDI RUUMALA VALEMI TULETAMINE.

Olgu püramiidi kõrgus h ja põhja pindala S_p.

Paneme tähele (joon. 104), et püramiidi põhjaga paralleelse lõike pindala on tipu kauguse funktsioon. Olgu lõike kaugus tipust x, siis lõike pindala on x funktsioon, mida tähistame $S(x)$-ga.

Tuginedes püramiidi põhjaga paralleelsete lõigete omadusele, võime kirjutada, et

$$\frac{S(x)}{S_p} = \frac{x^2}{h^2},$$

kust

$$S(x) = \frac{S_p}{h^2} x^2.$$

Seega, püramiidi põhjaga paralleelse lõike pindala on tipu kauguse suhtes ruutfunktsioon.

Kui tähistada lõigetevahelisi kaugusi Δx-ga, siis tüvipüramiidi, mille alumiseks põhjaks on $S(x_i)$, lähendame prismaga V_i, mille ruumala on $S(x_i) \cdot \Delta x$. Et püramiidi ruumala defineerisime kõigi selliste prismade ruumalade summa piirväärtusena, kui lõigete arv tõkestamatult kasvab, siis

$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} S(x_i)\cdot\Delta x.$$

Selline summa piirväärtus on aga võrdne määratud integraaliga. Nii saame, et

$$V=\int_0^h S(x)\,dx.$$

Asendame nüüd $S(x)$ tema avaldisega ja arvutame määratud integraali:

$$V=\int_0^h \frac{S_p}{h^2}x^2dx=\frac{S_p}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^h=\frac{S_p}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}=\frac{1}{3}S_p\cdot h.$$

Saime tulemuseks, et

püramiidi ruumala on võrdne ühe kolmandikuga põhja pindala ja kõrguse korrutisest.

$$\boxed{V=\frac{1}{3}S_p\cdot h}$$

c) TÜVIPÜRAMIIDI RUUMALA VALEMI TULETAMINE.

Tüvipüramiidi ruumala valemi tuletamiseks summeerime prismade ruumalad vahemikus h_1-st h_2-ni (joon. 105) ja leiame selle summa piirväärtuse, s. t. et tüvipüramiidi ruumala avaldub järgmise integraalina:

$$V=\int_{h_1}^{h_2}\frac{S_{p_2}}{h_2^2}x^2dx=\frac{S_{p_2}}{h_2^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_{h_1}^{h_2}=\frac{S_{p_2}}{h_2^2}\cdot\frac{h_2^3-h_1^3}{3}=$$

$$=\frac{S_{p_2}}{h_2^2}\cdot\frac{(h_2-h_1)(h_2^2+h_1h_2+h_1^2)}{3}=$$

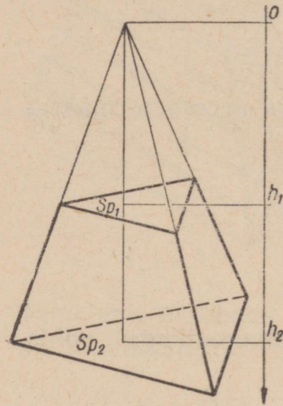
$$=\frac{S_{p_2}\cdot h}{3}\cdot\frac{h_2^2+h_1h_2+h_1^2}{h_2^2}=$$

$$=\frac{S_{p_2}\cdot h}{3}\cdot\left(1+\frac{h_1}{h_2}+\frac{h_1^2}{h_2^2}\right).$$

Teades, et $\frac{S_{p_1}}{S_{p_2}} = \frac{h_1^2}{h_2^2}$, võime kirjutada:

$$V = \frac{S_{p_2} \cdot h}{3} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{S_{p_1}}}{\sqrt{S_{p_2}}} + \frac{S_{p_1}}{S_{p_2}}\right) = \frac{S_{p_2} \cdot h}{3} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{S_{p_1} \cdot S_{p_2}}}{S_{p_2}} + \frac{S_{p_1}}{S_{p_2}}\right) =$$

$$= \frac{h}{3} \cdot (S_{p_1} + \sqrt{S_{p_1} \cdot S_{p_2}} + S_{p_2}).$$



JOON. 105.

Seega,

tüvipüramiidi ruumala on võrdne niisuguse püramiidi ruumalaga, mille kõrgus on võrdne tüvipüramiidi kõrgusega ja mille põhja pindala on võrdne tüvipüramiidi põhjade pindalade ja nende geomeetrilise keskmise summaga.

$$\boxed{V = \frac{h}{3}\,(S_{p_1} + \sqrt{S_{p_1} \cdot S_{p_2}} + S_{p_2})}$$

Küsimusi ja ülesandeid.

314. Millal on kaks muutuvat suurust funktsionaalses sõltuvuses?

315. Missuguse funktsioonina avaldub kuubi täispindala serva pikkuse suhtes?

316. Nimeta püramiidi põhjaga paralleelse lõike omadused.

317. Kuidas defineeritakse ringjoone pikkust? ringi pindala?

318. Kuidas avaldub püstprisma ruumala?

319. Korrapärase kolmnurkse püramiidi iga serv on 10 cm. Arvuta püramiidi ruumala.

320. Püramiidi põhjaks on romb, mille diagonaalid on 12 cm ja 15 cm. Arvuta püramiidi ruumala, kui püramiidi kõrgus on 21 cm.

321. Leia korrapärase kuusnurkse püramiidi ruumala, kui põhiserv on 2,1 m ja külgserv 2,9 m.

322. Korrapärase kolmnurkse püramiidi põhiserv on *a*. Külgserv moodustab põhitahuga 45°-se nurga. Avalda püramiidi ruumala.

323. Korrapärase kolmnurkse püramiidi kõrgus on h. Püramiidi külgtahk moodustab põhitahuga 60°-se nurga. Avalda püramiidi ruumala.

324. Püramiidi põhjaks on võrdhaarne kolmnurk, mille haarad on 6 cm ja alus on 8 cm. Püramiidi kõik külgservad on 9 cm. Arvuta püramiidi ruumala.

325. Püramiidi põhjaks on kolmnurk külgedega 39 cm, 17 cm ja 28 cm. Kõik külgservad on 22,9 cm. Arvuta püramiidi ruumala.

326. Püramiidi põhi on ristkülik, mille pindala on 1 m^2. Kaks külgtahku on risti põhitahuga ning teised kaks moodustavad temaga nurgad 30° ja 60°. Arvuta püramiidi ruumala.

327. Korrapärase nelinurkse püramiidi külgserv on b ja külgtahu tipunurk α. Avalda püramiidi ruumala.

328. Korrapärase kaheksanurkse püramiidi külgserv $b=3{,}5$ moodustab põhja tasapinnaga nurga $\alpha=78°40'$. Leia püramiidi ruumala.

329. Kuidas avaldub püstprisma ruumala?

330. Kuidas avaldub püramiidi ruumala? tüvipüramiidi ruumala?

331. Tüvipüramiidi põhjade pindalad on 50 cm^2 ja 32 cm^2 ning kõrgus on 30 cm. Leia tüvipüramiidi ruumala.

332. Tüvipüramiidi ruumala on 7,4 dm^3. Põhjade pindalad on 1000 cm^2 ja 10 cm^2. Leia tüvipüramiidi kõrgus.

333. Korrapärase kolmnurkse tüvipüramiidi põhiservad on alumisel põhjal 12,5 cm ja ülemisel põhjal 7,5 cm. Kõrgus on 10 cm. Arvuta ruumala.

334. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi kujuline anum, mille põhjaks on tüvipüramiidi väiksem põhi, on poole kõrguseni täidetud veega. Kui palju vett on anumas, kui anuma põhjade küljed on 20 cm ja 10 cm ning anuma kõrgus on 30 cm?

335. Kui suur on nelinurkse tüvipüramiidi kujulise keha erikaal, kui ta vette asetatult (väiksema põhjaga allapoole) vajub vette kuni poole kõrguseni? Põhjade küljed on 14 cm ja 8 cm ning kõrgus on 9 cm.

336. Kolmnurkse tüvipüramiidi kõrgus on 10 m. Püramiidi ühe põhja küljed on 27 m, 29 m ja 52 m ning teise põhja ümbermõõt on 72 m. Arvuta tüvipüramiidi ruumala.

337. Tüvipüramiidi ruumala on 1720 m^3, kõrgus on 20 m ja põhjade vastavate külgede suhe on 5 : 8. Arvuta põhjade pindalad.

338. Ruudukujulise tiigi külje pikkus on 80 m. Tiigi sügavus on 3 m ja kallaste kaldenurk on 60°. Mitu kuupmeetrit pinnast kaevati välja tiigi ehitamisel, kui väljakaevamisel suurenes pinnase maht 9%?

339. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi põhiservad on 10,5 ja 4,5 cm ning kõrgus on 4 cm. Leia
a) külgtahkude ja põhitahu vaheline nurk α;
b) külgservade ja põhitahu vaheline nurk β;
c) külgtahkudeks olevate trapetsite nurgad γ ja δ.

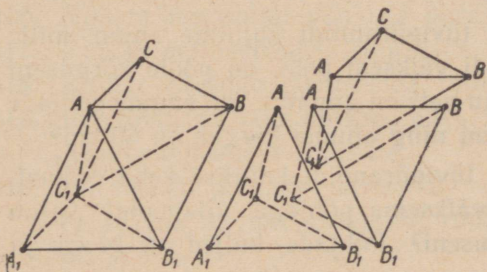
340. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi põhiservad on 25 m ja 15 m ning külgtahu teravnurk on 65°. Leia tüvipüramiidi ruumala.

4.2.8. KALDPRISMA RUUMALA.

Vaatleme kolmnurkset kaldprismat AC_1 (joon. 106). Tõestame teoreemi:

iga kolmnurkne prisma on tükeldatav kolmeks ruumvõrdseks püramiidiks.

Lõikame antud prismat kahe tasapinnaga. Üks neist läbib tippe A, B_1 ja C_1 ning teine A, B ja C_1. Selle tagajärjel tükeldub prisma kolmeks püramiidiks. Nimeta need!



JOON. 106.

Püramiidid $AA_1B_1C_1$ ja C_1ABC on ruumvõrdsed, sest neil mõlemal on põhjaks prisma põhi ning kõrguseks prisma kõrgus. Seega on nende püramiidide ruumalad võrdsed prisma põhja pindala ja kõrguse ühe kolmandiku korrutisega. Tähistades püramiidi $AA_1B_1C_1$ ruumala V_1-ga ja püramiidi C_1ABC ruumala V_2-ga, võime kirjutada

$$V_1 = V_2 = \frac{S_p \cdot h}{3}.$$

Vaatame nüüd püramiide ABB_1C_1 ja $ABCC_1$. Need on samuti ruumvõrdsed, sest nende põhjad BB_1C ja BC_1C on võrdsed (miks?) ja nende kõrgused on võrdsed (miks?). Tähistame ABB_1C_1 ruumala V_3-ga. Kuna $ABCC_1$ ruumala on tähistatud V_2-ga, siis

$$V_2 = V_3.$$

Enne leidsime, et $V_1 = V_2$. Seega $V_1 = V_2 = V_3$ ja teoreem on sellega tõestatud.

Et prisma ruumala $V = V_1 + V_2 + V_3$, siis arvestades eelmist tulemust, võime kirjutada:

$$V = 3V_1.$$

Kuna $V_1 = \frac{S_p \cdot h}{3}$, siis

$$V = 3 \cdot \frac{S_p \cdot h}{3} = S_p \cdot h,$$

s. t.

kolmnurkse kaldprisma ruumala on võrdne põhja pindala ja kõrguse korrutisega.

$$\boxed{\mathbf{V = S_p \cdot h}}$$

Et iga neli-, viis-, . . . , n-nurkset kaldprismat saab diagonaaltasapindade abil tükeldada kolmnurkseteks prismadeks, siis saame nii nagu püstprismade puhulgi näidata, et

iga kaldprisma ruumala on võrdne põhja pindala ja kõrguse korrutisega.

Tee seda!

Küsimusi ja ülesandeid.

341. Missugust keha nimetatakse prismaks?

342. Missugust prismat nimetatakse püstprismaks? kaldprismaks?

343. Prisma põhjaks on kolmnurk, mille üks külg on 2 cm ja teised küljed on 3 cm. Külgserv on 4 cm ja ta moodustab põhjaga 45°-se nurga. Arvuta prismaga ruumvõrdse kuubi serv.

344. Prisma põhjaks on kolmnurk külgedega 3 cm, 5 cm ja 7 cm. Külgserva pikkus on 8 cm ja ta moodustab põhjaga nurga 60°. Arvuta prisma ruumala.

345. Kolmnurkse kaldprisma põhiserv on 17,4 cm, külgserv on 64,5 cm ja külgserv moodustab põhjaga nurga 82°40′. Leia ruumala.

4.3. KORRAPÄRASED TAHKKEHAD.

4.3.1. KUUP EHK KORRAPÄRANE HEKSAEEDER.

Eespool tutvusime prismadega, sealhulgas ka kuubiga (joon. 107). Vaadeldes kuupi paneme tähele järgmist:

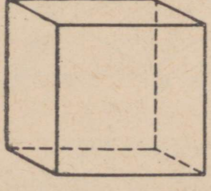
1) kuubi kõik 6 tahku on võrdsed ruudud ehk korrapärased nelinurgad;

2) kuubil on 8 tippu; s. t. et kuubis on 8 ruuminurka, mille kõik tasanurgad on võrdsed,

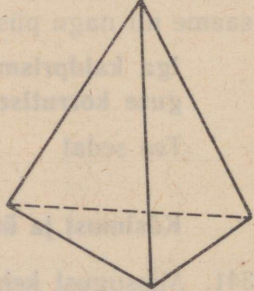
3) iga tipu juurde koondub 3 serva; kokku on servi 12, sest iga serv ühendab kaht tippu.

Kuup kuulub korrapäraste prismade hulka.

Kuupi nimetatakse ka **korrapäraseks heksaeedriks.** See nimetus pärineb kreekakeelsetest sõnadest *hex* — kuus ja *hedra* — pind.



JOON. 107.



JOON. 108.

4.3.2. KORRAPÄRANE TETRAEEDER.

Vaatleme korrapärast kolmnurkset püramiidi, mille külgtahud on korrapärased kolmnurgad (joon. 108). Need külgtahud on võrdsed põhitahuga. Miks? Sellel püramiidil on:

1) 4 tahku, mis on kõik võrdsed korrapärased kolmnurgad;

2) 4 tippu, s. t. vaadeldavas püramiidis on 4 ruuminurka, mille kõik tasanurgad on võrdsed;

3) 6 serva.

Et vaadeldaval püramiidil on 4 tahku ja kreeka keeles on neli *tettara*, siis kannab niisugune püramiid **korrapärase tetraeedri** nimetust.

4.3.3. KORRAPÄRASED TAHKKEHAD.

Vaadeldud heksaeedril ja tetraeedril on järgmised ühised omadused:

1) kõik tahud on võrdsed korrapärased samanimelised hulknurgad;

2) iga tipu juurde koondub võrdne arv servi.

Niisugust tahkkeha, mille kõik tahud on võrdsed korrapärased samanimelised hulknurgad ja mille iga tipu juurde koondub võrdne arv servi, nimetatakse korrapäraseks ehk regulaarseks tahkkehaks.

Tuleb meeles pidada, et korrapäraste tahkkehade hulka ei kuulu kõik korrapärased prismad, vaid ainult üks neist, nimelt kuup. Samuti ei kuulu korrapäraste tahkkehade hulka kõik korrapärased püramiidid ja korrapärased tüvipüramiidid, vaid jällegi ainult üks, nimelt korrapärane tetraeeder.

Tekib küsimus, kas korrapäraseid tahkkehi on ainult kaks või leidub veel teisigi, ja kui leidub, siis kas neid on lõpmata palju või lõplik arv.

Nii korrapärasel heksaeedril kui ka korrapärasel tetraeedril on iga tipu juures kolmetahuline ruuminurk. Et korrapärase nelinurga iga nurk on 90° ja korrapärase kolmnurga iga nurk on 60°, siis heksaeedri ruuminurga tasanurkade summa on 270° ja tetraeedril 180°.

Teame, et ruuminurga tasanurkade summa peab olema väiksem kui 360°. Seda arvestades võib oletada, et eksisteerivad veel niisugused korrapärased tahkkehad, mille iga tipu juures olevaks ruuminurgaks on:

1) kolmetahuline ruuminurk, kus tasanurkadeks on korrapärase viisnurga nurgad;

2) neljatahuline ruuminurk, kus tasanurkadeks on korrapärase kolmnurga nurgad;

3) viietahuline ruuminurk, kus tasanurkadeks on korrapärase kolmnurga nurgad.

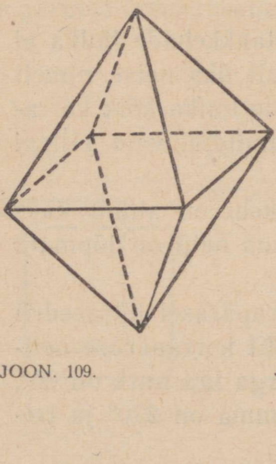
Põhjenda, et sellised ruuminurgad võivad eksisteerida ja et rohkem selliseid ruuminurki pole, mille tasanurkadeks on korrapäraste samanimeliste hulknurkade nurgad!

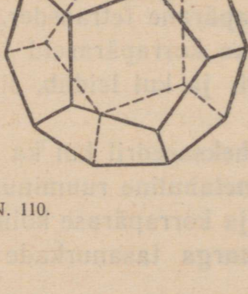
Seega võib peale meile juba tuntud kuubi ja tetraeedri olla veel kolm korrapärast tahkkeha.

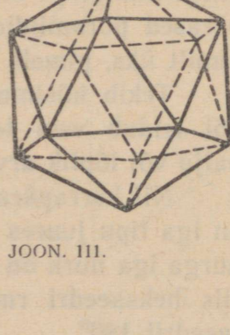
4.3.4. KORRAPÄRANE OKTAEEDER.

Joonisel 109 on esitatud tahkkeha, millel on 8 tahku, mis kõik on võrdsed korrapärased kolmnurgad, ja mille iga tipu juurde koondub neli serva. See on korrapärane tahkkeha, mida nimetatakse **korrapäraseks oktaeedriks** (kr. k. *okto* — kaheksa).

Mitu serva on korrapärasel oktaeedril? Kui suur on iga ruuminurga tasanurkade summa?


JOON. 109.


JOON. 110.


JOON. 111.

4.3.5. KORRAPÄRANE DODEKAEEDER.

Joonisel 110 on esitatud tahkkeha, millel on 12 tahku, mis kõik on võrdsed korrapärased viisnurgad, ja mille iga tipu juurde koondub kolm serva. See on korrapärane tahkkeha, mida nimetatakse **korrapäraseks dodekaeedriks** (kr. k. *dōdeka* — kaksteist).

Mitu serva on korrapärasel dodekaeedril? Kui suur on iga ruuminurga tasanurkade summa?

4.3.6. KORRAPÄRANE IKOSAEEDER.

Joonisel 111 on esitatud tahkkeha, millel on 20 tahku, mis kõik on võrdsed korrapärased kolmnurgad, ja mille iga tipu juurde koondub 5 serva. Seda korrapärast tahkkeha nimetatakse **korrapäraseks ikosaeedriks** (kr. k. *eikosi* — kakskümmend).

Mitu serva on korrapärasel ikosaeedril? Kui suur on iga ruuminurga tasanurkade summa.

4.3.7. EULERI VALEM.

Koostame järgmise tabeli.

Korrapärase hulktahuka nimetus	Tahkude arv (n)	Tippude arv (t)	Servade arv (s)
1. Tetraeeder	4	4	6
2. Heksaeeder	6	8	12
3. Oktaeeder	8	6	12
4. Dodekaeeder	12	20	30
5. Ikosaeeder	20	12	30

Kontrolli selle tabeli abil valemi

$$\boxed{n+t-s=2}$$

kehtivust.

Et selle valemini jõudis esimesena kuulus šveitsi päritoluga ja pikemat aega Peterburi Teaduste Akadeemias töötanud matemaatik *Leonhard Euler* (1707—1783), siis nimetatakse seda Euleri valemiks.

Küsimusi ja ülesandeid.

346. Missugust hulknurka, prismat, püramiidi nimetatakse korrapäraseks?

347. Missuguseid hulktahukaid nimetatakse korrapärasteks?

348. Sõnasta ruuminurga tasanurkade summa omadus.

349. Avalda korrapäraste tahkkehade pindalad külgserva a kaudu.

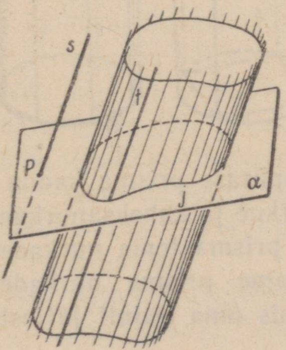
5. PÖÖRDKEHAD.

5.1. SILINDER.

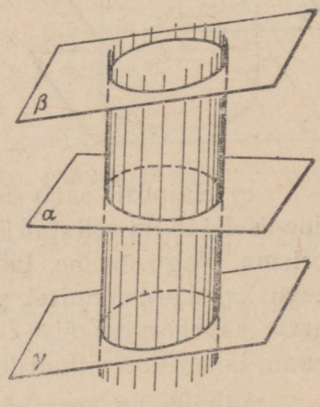
5.1.1. SILINDRILINE PIND.

Olgu tasapinnal α antud kinnine kõverjoon j (joon. 112). Samuti olgu antud tasapinda α mingis tema punktis, näiteks punktis P lõikav sirge s. Vaatleme veel teist sirget t, mis lõikab antud kinnist kõverjoont j ja on paralleelne sirgega s. Paneme sirge t liikuma nii, et ta lõikab kogu aeg kõverjoont j ja on paralleelne sirgega s. Olles läbinud kogu kinnise kõverjoone j, on sirge t kujundanud pinna, mida nimetame **silindriliseks pinnaks.**

Kinnist kõverjoont j nimetatakse silindrilise pinna **juhtjooneks** ja sirget t — silindrilise pinna **moodustajaks.**



JOON. 112.



JOON. 113.

5.1.2. SILINDER.

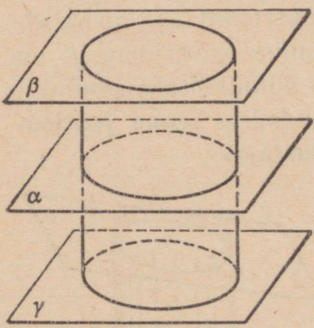
a) Lõikame silindrilist pinda kahe paralleelse tasapinnaga β ja γ, mis pole paralleelsed moodustajaga. Saame kinnise pinna, millega piiratud keha nimetatakse **silindriks** (joon. 113). Seega

silinder on keha, mis tekib silindrilise pinna lõikamisel kahe paralleelse, kuid sealjuures silindrilise pinna moodustajaga mitteparalleelse tasapinnaga.

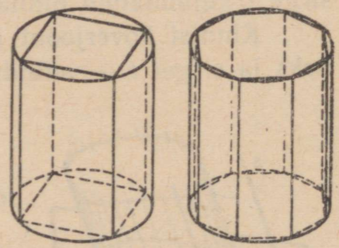
Olgu silindrilise pinna juhtjooneks ringjoon tasapinnal α ja olgu moodustaja t risti selle tasapinnaga. Lõikame seda silindrilist pinda tasapindadega β ja γ, mis on paralleelsed juhtjoone tasapinnaga α (joon. 114). Saadud silindrit nimetatakse **püstringsilindriks.** Et keskkooli matemaatika kursuses käsitletakse ainult püstringsilindreid, siis nimetame neid edaspidi lihtsalt **silindriteks.**

Silindri **külgpinnaks** on osa silindrilisest pinnast. Silindri **põhjadeks** on ringid. Põhjadevahelist kaugust nimetatakse, nii nagu prisma ja tüvipüramiidi juureski, **kõrguseks.**

Silindri põhjade vahele jäävat silindrilise pinna moodustaja lõiku nimetatakse silindri **moodustajaks.** Silindri moodustaja on võrdne silindri kõrgusega.



JOON. 114.


JOON. 115.

b) Silindrit saab defineerida ka korrapärase prisma kaudu. Joonisel 115 on esitatud korrapärane nelinurkne ja kaheksanurkne prisma. Nagu näeme, läheneb korrapärane prisma tema nurkade arvu kahekordistamisel silindrile. Kui jätkame prisma nurkade arvu kahekordistamist, saame prismad, mis oma kujult järjest enam lähenevad silindrile. Seega,

silinder on korrapärase prisma piirkujund, kui prisma nurkade arv tõkestamatult suureneb.

Et korrapärase prisma põhjadeks on võrdsed korrapärased hulknurgad ja et nad jäävad võrdseteks ka nurkade arvu kahekordistamisel, siis järeldub sellest definitsioonist, et

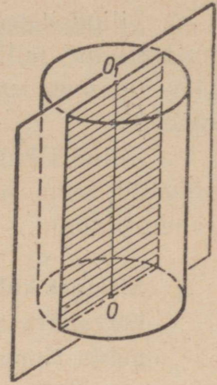
silindri põhjad on võrdsed ringid.

c) Silindrit tunneme juba kui pöördkeha. Missuguse kujundi pöörlemisel tekib silinder? Mis on pöörlemisteljeks?

Lõikame silindrit tasapinnaga, mis läbib tema põhjade keskpunkte. See tasapind läbib siis ka nende punktide ühenduslõigu, s. o. **silindri telje.** Silindri pind eraldab sellest lõiketasapinnast ühe osa, mida nimetatakse silindri **telglõikeks** (joon. 116).

Tõesta, et

silindri telglõige on ristkülik.



JOON. 116.

Küsimusi ja ülesandeid.

350. Mis on ringjoon?
351. Defineeri silindrit kui pöördkeha!
352. Missugust silindrit nimetatakse püstsilindriks?
353. Missugust nelinurka nimetatakse ristkülikuks?
354. Defineeri ringjoon korrapärase hulknurga piirkujundina!
355. Missuguse kujundi me saame, kui lõikame silindri külgpinna lahti mööda tema moodustajat ja laotame siis selle külgpinna tasapinnale? Kuidas avalduvad saadud kujundi mõõtmed silindri põhja raadiuse r ja kõrguse h kaudu?
356. Mis on prisma?
357. Missugust prismat nimetatakse korrapäraseks?
358. Silindri kõrgus on 16,8 cm ja põhja raadius on 8,4 cm. Kui suur on telglõike pindala?
359. Silindri telglõige on ruut küljega a. Leia silindri põhja pindala.
360. Silindri telglõige on ruut, mille diagonaal on a. Leia silindri moodustaja, telglõike pindala ja põhja pindala.

5.1.3. SILINDRI KÜLG- JA TÄISPINDALA.

Teame, et silindri külgpindala on võrdne põhja ümbermõõdu ja kõrguse korrutisega. Sellele tulemusele jõudsime VII klassis, kasutades silindri pinnalaotust.

Silindrilise pinna laotamine tasapinnale on aga seotud painutamisega, millega kaasnevad deformatsioonid, mistõttu teadaolev tulemus vajab kontrollimist. Kasutame selleks piirväärtuse mõistet.

Silindri külgpind ei ole tasapinnaline, mistõttu pole otseselt võimalik tema suurust võrrelda pindalaühikuga, milleks on ühikruudu pindala.

Silindri külgpindalaks nimetatakse silindri sisse kujundatud korrapärase prisma külgpindala piirväärtust, kui prisma põhja tippude arv tõkestamatult kasvab.

Kui tähistada n-nurkse korrapärase prisma külgpindala S_n-ga ja silindri külgpindala S_k-ga, siis

$$S_k = \lim_{n \to \infty} S_n.$$

Et $S_n = n \cdot a_n \cdot h$, kus n on korrapärase prisma põhja tippude arv, a_n — tema põhiserva pikkus ja h — nii prisma kui ka silindri kõrgus (joon. 117), siis

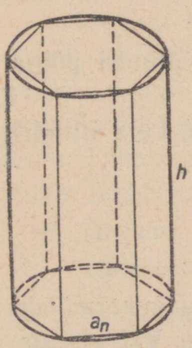
$$S_k = \lim_{n \to \infty} (n \cdot a_n \cdot h).$$

Et h ei sõltu n-st, siis

$$S_k = h \cdot \lim_{n \to \infty} (n \cdot a_n).$$

Nagu juba teame, on $\lim\limits_{n \to \infty} (n \cdot a_n)$, s. o. prisma põhjaks oleva korrapärase hulknurga ümbermõõdu piirväärtuseks põhja tippude arvu tõkestamatul kasvamisel selle hulknurga ümber joonestatud ringjoone pikkus. Seega, kui silindri põhjaks oleva ringi raadius on r, siis $\lim\limits_{n \to \infty} (n \cdot a_n) = 2\pi r$ ja

$$\boxed{S_k = 2\pi rh}$$



JOON. 117.

Et $2\pi r$ on silindri põhja ümbermõõt ja h on silindri kõrgus, siis

silindri külgpindala on võrdne põhja ümbermõõdu ja kõrguse korrutisega.

Silindri täispindala

$$\boxed{S_t = 2\pi r(r+h)}$$

Näita selle valemi kehtivust!
Seega ühtivad tulemused varem teadaolevatega.

Küsimusi ja ülesandeid.

361. Kuidas tuletati ringjoone pikkuse valem?

362. Defineeri silindri prisma kaudu!

363. Sõnasta silindri täispindala valem!

364. Arvuta silindri täispindala, kui

a) $r = 1{,}25$ m ja $h = 53$ cm,

b) $r = 2{,}5$ mm ja $h = 45{,}3$ cm.

365. Ristkülik, mõõtmetega m ja n cm, pöörleb kord lühema, kord pikema külje ümber. Kummal juhul on silindri täispindala suurem, kui $m > n$? Arvuta need täispindalad, kui $n = 15{,}3$ cm ja $m = 23{,}8$ cm.

366. Silindrikujulise aurukatla läbimõõt on 0,7 m ja pikkus 3,8 m. Kui suur on auru rõhumine kogu katla pinnale, kui auru rõhk ruutsentimeetrile on 10 kG?

367. Silindrikujulise korstna kõrgus on 18 m ja läbimõõt 65 cm. Mitu ruutmeetrit plekki kulub korstna valmistamiseks, kui neetekohtadele kulub 10% kogu vajatavast plekist?

368. Leia ruudukujulise telglõikega silindri täispindala, kui silindri külgpindala on 100 cm².

369. Avalda silindri täispindala põhja pindala S_p ja telglõike pindala Q kaudu. Arvuta täispindala, kui $S_p = 30$ cm² ja $Q = 42{,}4$ cm².

370. Korrapärase nelinurkse prisma ümber on kujundatud silinder. Leia silindri täispindala, kui prisma põhiserv on a ja kõrgus h. Arvuta täispindala, kui $a = 4{,}8$ dm ja $h = 1{,}3$ m.

VII klassis võtsime silindri ruumala valemi saamiseks silindri ja risttahuka, mille põhja pindalad ja kõrgused olid võrdsed. Liiva valamisega ühest nõust teise veendusime, et mõlemad kehad mahutasid ühepalju liiva.

Sellist proovimise võtet olime sunnitud kasutama seetõttu, et silindri ruumala võrdlemine ruumalaühikuga, milleks on ühikkuubi ruumala, pole võimalik. Niisugune proovimise võte, mis praktika seisukohalt küll rahuldab, ei veena meid aga valemi täielikus täpsuses.

Võtame siingi appi piirväärtuse mõiste.

Silindri ruumalaks nimetatakse silindri sisse kujundatud korrapärase prisma ruumala piirväärtust, kui prisma põhja nurkade arv tõkestamatult kasvab.

Tähistades silindri sisse kujundatud n-nurkse korrapärase prisma ruumala V_n-ga ja silindri ruumala V-ga, võime kirjutada

$$V = \lim_{n \to \infty} V_n.$$

Et $V_n = n \cdot a_n \cdot \frac{k_n}{2} \cdot h$, kus n on korrapärase prisma külgservade arv, a_n — põhiserva pikkus, k_n — põhja apoteem ja h — nii prisma kui ka silindri kõrgus, siis

$$V = \lim_{n \to \infty} \left(n \cdot a_n \cdot \frac{k_n}{2} \cdot h \right).$$

Et korrutise piirväärtus võrdub tegurite piirväärtuste korrutisega ja et $\lim\limits_{n \to \infty} (n \cdot a_n) = 2\pi r$ ning $\lim\limits_{n \to \infty} k_n = r$, siis

$$V = \lim_{n \to \infty} (n \cdot a_n) \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{k_n}{2} \cdot h = 2\pi r \cdot \frac{r}{2} \cdot h = \pi r^2 \cdot h.$$

$$\boxed{\mathbf{V = \pi r^2 h}}$$

Et πr^2 on silindri põhja pindala, siis

silindri ruumala on võrdne põhja pindala ja kõrguse korrutisega.

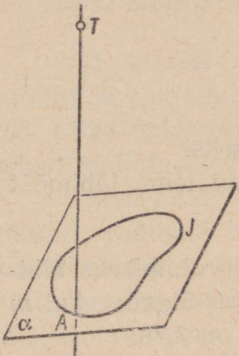
Tulemus kinnitab varem katseliselt leitud ruumala valemi õigsust.

371. Kuidas tuletati ringi pindala valem?
372. Mis on π?
373. Missugust prismat nimetatakse korrapäraseks?
374. Arvuta ümarterase jooksva meetri kaal, kui tema läbimõõt on 4,5 cm ja erikaal $7{,}8\frac{\text{G}}{\text{cm}^3}$.
375. Põhjenda praktikas ümarterase massi m arvutamiseks läbimõõdu d kaudu kasutatava valemi $m = 612\,d^2$ õigsust, kui m on grammides ja d sentimeetrites. Erikaal on 7,78.
376. Kui palju kaalub ülalt lahtine silindrikujuline anum, kui anuma sisemine kõrgus on 20 cm, sisemine läbimõõt 6 cm, seina paksus 2 mm ja anuma materjali erikaal 7,6?
377. Kui palju vett voolab 45 minuti jooksul läbi toru, mille sisemine läbimõõt on 6 cm? Voolu kiirus on $5\frac{\text{cm}}{\text{s}}$.
378. Mitu veinipudeli korki kaalub 1 kG, kui silindrikujulised korgid on 3,9 cm pikad, 2,3 cm paksud ja korgi erikaal on 0,24?
379. Ristkülik, mõõtmetega m cm ja n cm, pöörleb kord lühema, kord pikema külje ümber. Kummal juhul on silindri ruumala suurem, kui $m > n$? Arvuta ruumalad, kui $m = 13{,}2$ cm ja $n = 132$ mm.
380. Silindri külgpindala on S_k ja põhja ümbermõõt on c. Avalda silindri ruumala. Arvuta, kui $S_k = 396{,}4$ ja $c = 14{,}2$.
381. Ruudukujulise telglõikega silindri põhja sisse on kujundatud korrapärane n-nurk, mille külg on a_n. Avalda silindri ruumala. Arvuta, kui $a_5 = 8{,}3$.

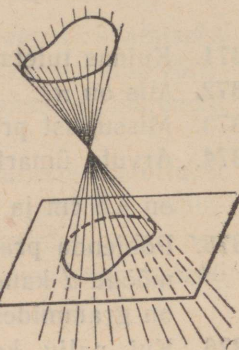
5.2. KOONUS JA TÜVIKOONUS.

5.2.1. KOONILINE PIND.

Olgu tasapinnal α antud kinnine kõverjoon j (joon. 118) ja väljaspool seda tasapinda liikumatu punkt T. Vaatleme sirget s, mis läbib punkti T ja kõverjoone j üht punkti, näiteks punkti A. Kujutleme nüüd sirget s liikuvana nii, et ta lõikaks kogu aeg joont j ja läbiks punkti T, kuni ta jõuab uuesti tagasi lähteasen-



JOON. 118.



JOON. 119.

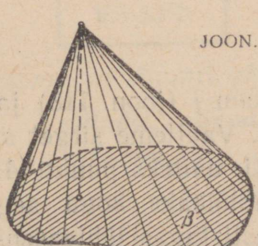
disse, s. t. kuni läbib jälle punkti A. Sellel liikumisel kujundab sirge s pinna, mida nimetatakse **kooniliseks pinnaks** (joon. 119).

Kinnist kõverjoont j nimetatakse koonilise pinna **juhtjooneks** ja sirget s — koonilise pinna **moodustajaks.** Punkti T nimetatakse koonilise pinna **tipuks.** Nagu näeme jooniselt, jaotab tipp koonilise pinna kaheks ühesuguseks osaks.

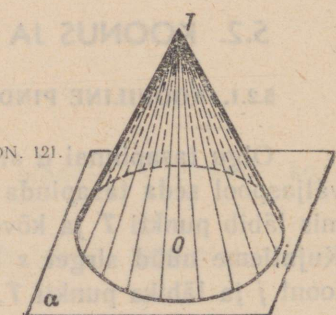
5.2.2. KOONUS.

a) Lõikame koonilist pinda tasapinnaga β, mis ei läbi tippu ega ole paralleelne koonilise pinna moodustaja ühegi asendiga. Kooniline pind koos tasapinnaga β moodustavad kinnise pinna. Selle kinnise pinnaga piiratud ruumi osa nimetatakse **koonuseks** (joon. 120). Seega,

> **koonus on keha, mis tekib koonilise pinna lõikamisel tasapinnaga, mis ei läbi koonilise pinna tippu ega ole paralleelne moodustaja ühegi asendiga.**



JOON. 120.



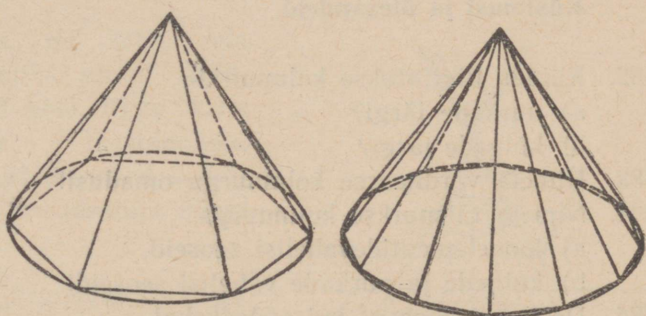
JOON. 121.

Olgu koonilise pinna juhtjooneks tasapinnal α asetsev ringjoon j. Koonilise pinna tipp asetsegu sirgel, mis on risti ringjoone tasapinnaga α ja mis läbib ringi keskpunkti O (joon. 121). Loomulikult ei saa tipp T asetseda punktis O. Miks? Lõigates seda koonilist pinda kas tasapinnaga α või mõne teise tasapinnaga, mis on α-ga paralleelne ja ei läbi tippu T, saame koonuse, mida nimetatakse **püstringkoonuseks.** Et keskkooli matemaatika kursuses käsitletakse ainult püstringkoonuseid, siis nimetame neid edaspidi lihtsalt **koonusteks.**

Koonuse **külgpinnaks** on osa koonilisest pinnast. Koonuse **põhjaks** on ring. Tipu kaugust põhjast nimetatakse, nii nagu püramiidi juureski, **kõrguseks.**

Koonuse tipu ja juhtjoone vahelist koonilise pinna moodustaja lõiku nimetatakse **moodustajaks.**

JOON. 122.



b) Koonust saab defineerida ka korrapärase püramiidi kaudu. Joonisel 122 on esitatud korrapärane kuusnurkne ja kaksteistnurkne püramiid. Nagu näeme, läheneb korrapärane püramiid tema põhja tippude arvu kahekordistamisel koonusele. Kui jätkame püramiidi põhja tippude arvu kahekordistamist, saame püramiidid, mis oma kujult järjest enam lähenevad koonusele. Seega,

koonus on korrapärase püramiidi piirkujund, kui püramiidi põhja tippude arv tõkestamatult suureneb.

Et korrapärase püramiidi põhjaks on korrapärane hulknurk ja viimase piirkujundiks nurkade arvu tõkestamatul suurenemisel on ringjoon, siis selgub siit, et

koonuse põhjaks on ring.

Et püramiidi põhjaga paralleelne lõige säilitab oma omadused, kui tema nurkade arvu kahekordistada, siis kehtivad ka koonuse juures püramiidi käsitlemisel tundmaõpitud põhjaga paralleelse lõike omadused. Sõnasta need! Mis järeldub siit ringide sarnasuse kohta?

c) Koonust tunneme juba kui pöördkeha. Missuguse kujundi pöörlemisel tekib koonus? Mis on pöörlemisteljeks?

Lõikame koonust tasapinnaga, mis läbib tema pöörlemistelge. Koonuse pind eraldab sellest tasapinnast ühe osa, mida nimetame koonuse **telglõikeks.**

Tõesta, et

koonuse telglõige on võrdhaarne kolmnurk.

Küsimusi ja ülesandeid.

382. Kuidas liigitatakse kolmnurki
a) nurkade järgi?
b) külgede järgi?

383. Nimeta võrdhaarse kolmnurga omadusi!

384. Nimeta täisnurkse kolmnurga
a) joonelementidevahelisi seoseid,
b) külgede ja nurkade vahelisi seoseid!

385. Defineeri koonust kui pöördkeha!

386. Missugust koonust nimetatakse püstringkoonuseks?

387. Mis on püramiid?

388. Missugust püramiidi nimetatakse korrapäraseks?

389. Missuguse kujundi me saame, kui lõikame koonuse külgpinna lahti mööda tema moodustajat ja laotame siis selle külgpinna tasapinnale?

390. Kuidas avaldub ringi sektori pindala raadiuse ja kesknurga kaudu?

391. Koonuse põhja pindala ja telglõike pindala suhe on π. Leia moodustaja kaldenurk põhja suhtes.

392. Koonuse kõrgus on h. Kui kaugel koonuse tipust peab lõikama koonust põhjaga paralleelse tasapinnaga, et lõike pindala oleks pool põhja pindalast?

393. Koonuse põhja raadius on r. Läbi kõrguse keskpunkti on võetud põhjaga paralleelne tasapind. Leia lõike pindala.

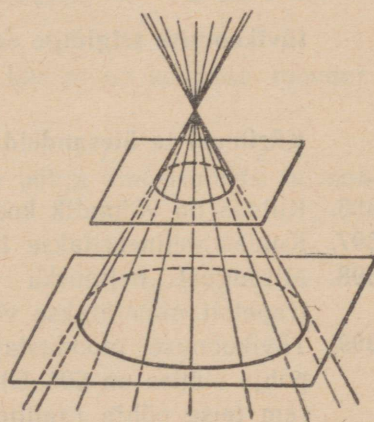
394. Avalda koonuse põhja pindala, kui moodustaja ja põhja vaheline nurk on α ning telglõike pindala on Q. Arvuta see pindala, kui $\alpha=34{,}2°$ ja $Q=18$ dm².

395. Koonuse moodustaja m ja põhja vaheline nurk on α. Avalda koonuse põhja pindala. Arvuta see, kui $m=0{,}32$ m ja $\alpha=63{,}8°$.

5.2.3. TÜVIKOONUS.

a) Lõikame koonilist pinda ühel pool tippu kahe paralleelse tasapinnaga, mis pole paralleelsed selle koonilise pinna moodustaja ühegi asendiga (joon. 123). Need tasapinnad koos koonilise pinnaga moodustavad kinnise pinna. Selle pinnaga piiratud keha nimetatakse **tüvikoonuseks.** Seega,

tüvikoonus on keha, mis tekib koonilise pinna lõikamisel ühel pool tippu kahe paralleelse tasapinnaga, mis pole paralleelsed koonilise pinna moodustaja ühegi asendiga.



JOON. 123.

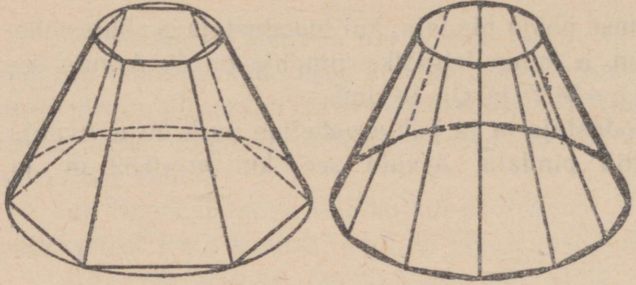
Vaatleme järgnevas kursuses ainult neid tüvikoonuseid, mis on saadud püstringkoonuse lõikamisel põhjaga paralleelse tasapinnaga.

Tüvikoonuse külgpinnaks on osa koonilisest pinnast. Tüvikoonuse **põhjadeks** on ringid. Põhjadevahelist ristlõiku nimetatakse **kõrguseks.** Koonilise pinna moodustaja lõiku tüvikoonuse külgpinnal nimetatakse tüvikoonuse **moodustajaks.**

b) Tüvikoonust saab defineerida ka tüvipüramiidi piirkujundina (joon. 124).

Tüvikoonus on korrapärase tüvipüramiidi piirkujund, kui tüvipüramiidi põhjade tippude arv tõkestamatult suureneb.

c) Nagu silindrit ja koonust, nii saab ka tüvikoonust defi-



JOON. 124.

neerida pöördkehana. Missuguse kujundi pöörlemisel tekib tüvikoonus? Mis on pöörlemisteljeks?

Lõikame tüvikoonust tasapinnaga, mis läbib tema telge. Tüvikoonust piirava pinnaga on eraldatud sellest tasapinnast osa, mida nimetatakse tüvikoonuse **telglõikeks.**

Tõesta, et

tüvikoonuse telglõige on võrdhaarne trapets.

Küsimusi ja ülesandeid.

396. Kuidas on võimalik koonusest saada tüvikoonust?

397. Kuidas defineeritakse tüvipüramiidi? koonust?

398. Missugust nelinurka nimetatakse trapetsiks? Missugust trapetsit nimetatakse võrdhaarseks?

399. Tüvikoonuse moodustaja on $2a$ ja moodustaja kaldenurk põhja suhtes on 60°. Ühe põhja raadius on kaks korda suurem teise põhja raadiusest. Avalda põhjade raadiused.

400. Tüvikoonuse moodustaja on 5 dm ning põhjade raadiused on 3 dm ja 7 dm. Arvuta telglõike pindala.

401. Tüvikoonuse põhjade pindalad on 4 m^2 ja 16 m^2. Tüvikoonus on lõigatud põhjadega paralleelse tasapinnaga, mis läbib kõrguse keskpunkti. Arvuta lõike pindala.

402. Tüvikoonuse põhjade pindalad on 1 m^2 ja 49 m^2. Põhjaga paralleelse lõike pindala võrdub nende poolsummaga. Missugusteks osadeks jaotab see lõige kõrguse?

403. Leia tüvikoonuse põhjade ümbermõõdud, kui nad suhtuvad nagu 2 : 3 ja väiksema põhja raadius on 4 cm.

5.2.4. KOONUSE KÜLG- JA TÄISPINDALA.

Koonuse külgpindalaks nimetatakse koonuse sisse kujundatud korrapärase püramiidi külgpindala piirväärtust, kui püramiidi põhja tippude arv tõkestamatult suureneb (joon. 122).

Tähistame korrapärase n-nurkse püramiidi külgpindala S_n-ga ja teda piirava koonuse külgpindala S_k-ga. Nüüd võime kirjutada, et

$$S_k = \lim_{n \to \infty} S_n.$$

Et $S_n = \frac{1}{2} n \cdot a_n \cdot m_n$, kus a_n on korrapärase n-nurkse püramiidi põhiserv ja m_n selle püramiidi apoteem, siis

$$S_k = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2} n \cdot a_n \cdot m_n \right) = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot m = \pi r m,$$

sest $\lim\limits_{n \to \infty} (n \cdot a_n) = 2\pi r$ ja $\lim\limits_{n \to \infty} m_n = m$, kus m on koonuse moodustaja. Seega,

koonuse külgpindala on võrdne põhja ümbermõõdu ja moodustaja poole korrutisega.

$$\boxed{S_k = \pi r m}$$

Koonuse täispindala

$$\boxed{S_t = \pi r (r + m)}$$

Näita selle valemi kehtivust!

Küsimusi ja ülesandeid.

404. Kuidas leiti koonuse külgpindala VII klassis?
405. Defineeri koonus püramiidi kaudu!
406. Sõnasta koonuse täispindala valem!
407. Kuidas avalduvad korrapärase püramiidi, korrapärase tüvipüramiidi ja silindri külgpindala ja täispindala?

408. Koonuse telglõige on võrdkülgne kolmnurk küljega 75 cm. Leia täispindala.

409. Koonuse telglõike üks haar on 20 cm ja telglõike tipunurk on 72°. Leia külgpindala ja täispindala.

410. Koonuse põhja pindala on 36π cm². Koonuse põhjast kahe ühiku kaugusel asuv põhjaga paralleelne lõige on 25π cm². Leia koonuse külgpindala.

411. Silotorni katus on koonusekujuline. Katuse kõrgus on 2 m ja torni läbimõõt on 6 m. Mitu tahvlit katuseplekki kulus katuse katmiseks, kui tahvli mõõtmed on 0,7 m$\times$1,4 m ja katuse kokkuvaltsimiseks kulus 12% kogu vajatavast plekist?

412. Ringi diameetri otspunktist tõmmatud kõõl pöörleb selle diameetri ümber. Arvuta pöörlemisel tekkiva pinna suurus, kui ringi diameeter on 25 cm ja kõõl 20 cm.

413. Kui suur on koonuse telglõike tipunurk juhul, kui koonus ja silinder on võrdsete kõrguste, võrdsete põhjapindalade ja võrdsete külgpindaladega.

414. Täisnurkne kolmnurk, mille kaatetid on 15 cm ja 20 cm, pöörleb kord ühe ja kord teise kaateti ümber. Leia nende koonuste külgpindalade suhe.

415. Kolmnurk külgedega $a=13$ cm, $b=14$ cm ja $c=15$ cm pöörleb kord külje a, siis külje b ja lõpuks külje c ümber. Missugusel juhul on tekkiva kaksikkoonuse pindala suurim?

416. Võrdhaarne trapets alustega 10 cm ja 4 cm ning kõrgusega 8 cm pöörleb pikema aluse ümber. Leia tekkiva pöördkeha pindala.

5.2.5. TÜVIKOONUSE KÜLG- JA TÄISPINDALA.

Tähistame tüvikoonuse sisse kujundatud korrapärase n-nurkse tüvipüramiid külgpindala S_n-ga ja tüvikoonuse külgpindala S_k-ga. Defineerides tüvikoonuse külgpindala tema sisse kujundatud korrapärase tüvipüramiidi külgpindala piirväärtusena (joon. 124), võime kirjutada

$$S_k = \lim_{n \to \infty} S_n.$$

Olgu korrapärase n-nurkse tüvipüramiidi alumise põhja külg

a_n ja apoteem k_n ning ülemise põhja külg b_n ja apoteem l_n. Tüvipüramiidi apoteem olgu m_n. Siis

$$S_n = \frac{n(a_n + b_n)}{2} \cdot m_n$$

ehk

$$S_n = \frac{n \cdot a_n + n \cdot b_n}{2} \cdot m_n.$$

Kui $n \to \infty$, siis $n \cdot a_n \to 2\pi r_1$, $n \cdot b_n \to 2\pi r_2$, kus r_1 on tüvikoonuse alumise põhja raadius ja r_2 tema ülemise põhja raadius. m_n läheneb tüvikoonuse moodustajale m. Seega

$$S_k = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n \cdot a_n + n \cdot b_n}{2} \cdot m_n \right) = \frac{2\pi r_1 + 2\pi r_2}{2} \cdot m.$$

$$\boxed{\mathbf{S_k = \pi m (r_1 + r_2)}}$$

Et

$$\pi m (r_1 + r_2) = 2\pi m \cdot \frac{r_1 + r_2}{2},$$

siis tulemust saab sõnastada järgmiselt:

tüvikoonuse külgpindala on võrdne niisuguse silindri külgpindalaga, mille moodustajaks on tüvikoonuse moodustaja ja mille põhja raadiuseks on tüvikoonuse põhjade raadiuste aritmeetiline keskmine.

Tüvikoonuse täispindala saamiseks tuleb külgpindalaga liita põhja pindalad πr_1^2 ja πr_2^2. Seega

$$\boxed{\mathbf{S_t = \pi[r_1^2 + r_2^2 + m(r_1 + r_2)]}}$$

Küsimusi ja ülesandeid.

417. Kuidas avaldub tüvipüramiidi külgpindala ja täispindala?

418. Tuleta tüvikoonuse täispindala valem, lähtudes tüvipüramiidi täispindala valemist!

419. Missugune kujund on koonuse telglõikeks? tüvikoonuse telglõikeks?

420. Missuguse kujundi me saame, kui lõikame tüvikoonuse külgpinna mööda tema moodustajat lahti ja laotame tasapinnale?

421. Tüvikoonuse põhjade raadiused on 3 m ja 1,5 m ning kõrgus 4 m. Arvuta täispindala.

422. Leia tüvikoonuse külgpindala, kui väiksema põhja läbimõõt $d=10{,}8$ dm, moodustaja $m=3{,}7$ dm ja kõrgus $h=1{,}2$ dm.

423. Tüvikoonuse kõrgus $h=63$ dm, moodustaja $m=65$ dm ja külgpindala $S=26\pi$ m². Arvuta põhjade raadiused.

424. Avalda tüvikoonuse külgpindala, kui tüvikoonuse moodustaja kaldenurk põhja suhtes on 30° ja telglõike pindala on Q.

425. Avalda tüvikoonuse külgpindala, kui tüvikoonuse moodustaja kaldenurk põhja suhtes on 45° ning põhjade raadiused on r_1 ja r_2.

426. Leia niisuguse silindri põhja raadius, mille külgpindala on võrdne antud tüvikoonuse külgpindalaga ja mille kõrgus on võrdne tüvikoonuse moodustajaga, kui tüvikoonuse põhjade pindalad on $2{,}56\pi$ m² ja $21{,}16\pi$ m².

5.2.6. KOONUSE RUUMALA.

Koonuse ruumalaks nimetatakse koonuse sisse kujundatud korrapärase püramiidi ruumala piirväärtust, kui püramiidi põhja tippude arv tõkestamatult kasvab.

Tähistades korrapärase n-nurkse püramiidi ruumala V_n-ga ja koonuse ruumala V-ga, võime kirjutada, et

$$V=\lim_{n\to\infty} V_n.$$

Et püramiidi ruumala on võrdne põhja pindala ja kõrguse korrutise kolmandikuga, siis korrapärase n-nurkse püramiidi ruumala

$$V_n=\frac{1}{3}\frac{n\cdot a_n\cdot k_n}{2}\cdot h,$$

kus a_n on põhiserv, k_n — põhja apoteem ja h — püramiidi kõrgus. Seega

$$V=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6}n\cdot a_n\cdot k_n\cdot h\right)=\frac{1}{6}\cdot 2\pi r\cdot r\cdot h=\frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Põhjenda seda võrduste rida!

Seega,

koonuse ruumala on võrdne ühe kolmandikuga põhja pindala ja kõrguse korrutisest.

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \pi r^2 h}$$

Küsimusi ja ülesandeid.

427. Kuidas avalduvad prisma, püramiidi, tüvipüramiidi ja silindri ruumalad?

428. Sõnasta püramiidi põhjaga paralleelsete lõigete omadused!

429. Sõnasta rööptahuka vastastahkude omadus ja diagonaalide omadus!

430. Kui palju kaalub koonusekujuline liivahunnik, mille kõrgus on 1,3 m ja põhja ümbermõõt on 15 m, kui 1 m^3 liiva kaalub 1,8 t?

431. Koonuse kõrgus on 8 cm, telje ja moodustaja vaheline nurk on 42°. Arvuta koonuse ruumala.

432. Koonuse põhja raadius on 20 cm, moodustaja ja põhja vaheline nurk on 65°. Leia ruumala.

433. Koonusekujuline telk ehitatakse niisugune, et sellesse mahuvad 4 meest arvestusega igale 3,5 m^2 pinda. Telgi kõrgus on 3,5 m. Kui palju kulub telgi valmistamiseks riiet ja kui palju tuleb telgis õhku ühe mehe kohta?

434. Kaevati välja vundamendisüvend mõõtmetega 14,50 m, 9,25 m ja 6,50 m. Väljakaevatud mullast kerkis koonusekujuline hunnik, mille moodustaja ja põhja vaheline nurk oli 45°. Arvestades, et igast 25 m^3 kinnisest pinnasest saab 40 m^3 lahtist pinnast, leia selle koonuse kõrgus.

435. Marmorkoonusest, mille kõrgus oli 21 cm ja põhja läbimõõt 40 cm, puuriti välja teine koonus, mille telg ühtis antud koonuse teljega ja mille moodustaja oli paralleelne antud koonuse moodustajaga. See tühimik valati seisu stabiilsuse saavutamiseks täis seatina. Leia nii saadud koonuse erikaal, kui väljapuuritud koonuse kõrgus oli 14 cm ning kui marmori erikaal on 2,84 $\frac{g}{cm^3}$ ja seatina erikaal 11,35 $\frac{g}{cm^3}$.

436. Ruut, mille diagonaal on d cm, pöörleb ümber diagonaali. Leia tekkinud pöördkeha pindala ja ruumala. Arvuta, kui $d=3,5$.

437. Leia ülesande 414 andmete järgi koonuste ruumalade suhe.

438. Leia ülesande 415 andmete järgi, missugusel juhul on tekkiva kaksik-koonuse ruumala suurim.

439. Koonuse kõrgus on h ning moodustaja ja põhja vaheline nurk on α. Avalda koonuse ruumala. Arvuta, kui $\alpha=25°$ ja $h=14,6$.

440. Koonuse põhja raadius on r ning moodustaja ja põhja vaheline nurk on α. Avalda koonuse külgpindala ja ruumala. Arvuta, kui $\alpha=48,4°$ ja $r=3,42$.

441. Kolmnurgas on antud külg a ja selle lähisnurgad β ja γ. Avalda selle kolmnurga pöörlemisel ümber antud külje tekkiva keha pindala ja ruumala. Arvuta, kui $a=14,6$, $\beta=78°$ ja $\gamma=56°$.

442. Võrdhaarne kolmnurk, mille pindala $Q=50$ dm² ja tipunurk $\beta=100°$, pöörleb ümber sirge, mis läbib kolmnurga aluse üht otspunkti ja on risti alusega. Avalda ja arvuta tekkiva pöördkeha pindala ja ruumala.

5.2.7. TÜVIKOONUSE RUUMALA.

Tüvikoonuse ruumala valemi tuletamiseks kasutame meile juba teada olevat korrapärase tüvipüramiidi ruumala valemit, defineerides tüvikoonuse ruumala tema sisse kujundatud korrapärase püramiidi ruumala piirväärtusena.

Olgu tüvikoonusesse kujundatud korrapärane n-nurkne tüvipüramiid (joon. 124). Tähistame selle tüvipüramiidi ruumala V_n-ga ja tüvikoonuse ruumala V-ga. Siis

$$V=\lim_{n\to\infty} V_n.$$

Et $V_n=\frac{h}{3}(S_{p_1}+\sqrt{S_{p_1}S_{p_2}}+S_{p_2})$, kus h on tüvipüramiidi kõrgus ja S_{p_1} ning S_{p_2} tüvipüramiidi põhjade pindalad.

Kui $n\to\infty$, siis tüvipüramiidi põhjad lähenevad tüvikoonuse põhjadele, s. t. et $\lim\limits_{n\to\infty} S_{p_1}=S_1$ ja $\lim\limits_{n\to\infty} S_{p_2}=S_2$.

Seega

$$V=\lim_{n\to\infty}\frac{h}{3}(S_{p_1}+\sqrt{S_{p_1}S_{p_2}}+S_{p_2})=\frac{h}{3}(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2).$$

Sõnasta see valem!

Olgu tüvikoonuse põhjade raadiused r_1 ja r_2, siis saame ruumala valemi esitada kujul

$$\boxed{V=\frac{\pi h}{3}(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)}$$

Küsimusi ja ülesandeid.

443. Missugust keha nimetatakse tüvipüramiidiks? tüvikoonuseks?

444. Kuidas avaldub tüvipüramiidi ruumala? koonuse ruumala?

445. Tüvikoonuse põhjade raadiused on 4 m ja 2,5 m; kõrgus on 3 m. Leia ruumala.

446. Tüvikoonusekujulise veeanuma ülemise põhja sisemine läbimõõt on 1,20 m ja alumise põhja sisemine läbimõõt 80 cm. Sisemine sügavus on 1,00 m. Mitu ämbrit vett mahub anumasse, kui ämbrisse mahub 11 l vett?

447. Tehase korsten on 140 m kõrge. Korstna sisemine läbimõõt alt on 5,25 m ja korstnamüüri paksus 1,50 m. Ülevalt on korstna sisemine läbimõõt 2,50 m ja korstnamüüri paksus 0,25 m. Arvuta:

a) korstnamüüri ruumala, kui müüri paksus väheneb ühtlaselt alt ülespoole,

b) korstna kogurõhk vundamendile, kui korstnamüüri erikaal on $1{,}75\,\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{m}^3}$.

448. Tüvikoonuse põhjade raadiused on $r_1=25$ cm ja $r_2=12$ cm. Moodustaja kaldenurk põhja suhtes on 75°. Leia selle tüvipüramiidi pindala ja ruumala.

449. Koonusest, mille põhja raadius on 11 cm ja mille moodustaja on 61 cm, lõigatakse tipust 20 cm kaugusel põhjaga paralleelse tasapinnaga ära tema koonuseline osa. Kui suur on järelejäänud tüvikoonuse ruumala?

450. Puust koonus, kõrgusega 45 cm, ujub vees nii, et tema tipp on veepinnast 27 cm kõrgemal. Leia koonuse erikaal.

451. Puust koonus, kõrgusega 24 cm, ujub vees tipuga allapoole. Leia:

a) kui sügavalt ujub koonus vees, kui puu erikaal on 0,48,

b) kui suur on veepinnale jääva koonuseosa ruumala ja pindala, kui koonuse põhja raadius on 7 cm.

452. Tehnikas kasutatakse tüvikoonuse ruumala arvutamiseks järgmist ligikaudset valemit:

$$V \approx G_m \cdot h, \text{ kus } G_m = \frac{\pi}{2}(r_1^2 + r_2^2).$$

Selgita selle valemi kasutamise õigsust. Kas valem annab täpsema tulemuse siis, kui tüvikoonus oma kujult läheneb silindrile, või siis, kui ta oma kujult läheneb koonusele?

453. Tehnikas kasutatakse tüvikoonuse ruumala arvutamiseks ka valemit

$$V \approx M \cdot h,$$

kus M on tüvikoonuse kesklõike pindala, s. o. selle põhjaga paralleelse lõike pindala, mille läbimõõt on $r_1 + r_2$.
Selgita esitatud valemi kasutamise õigsust. Kas valem annab täpsema tulemuse siis, kui tüvikoonus oma kujult läheneb silindrile, või siis, kui ta oma kujult läheneb koonusele?

454. Kasutades eelmises kahes ülesandes antud ligikaudseid valemeid, arvuta niisuguse tüvikoonuse ruumala, mille põhjade läbimõõdud on 18 cm ja 20 cm ning kõrgus on 6 cm. Kumb valem annab täpsema tulemuse?

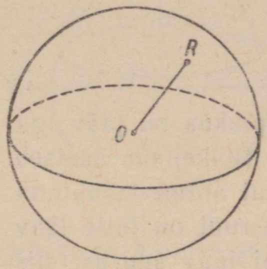
5.3. KERA.

5.3.1. SFÄÄR JA KERA.

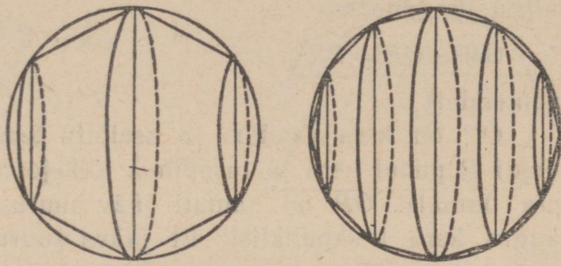
a) Ruumis antud punktist võrdsel kaugusel asuvate punktide hulk kujutab kinnist pinda, mida nimetatakse **sfääriks** ehk **kerapinnaks** (joon. 125).

Keraks nimetatakse sfääriga piiratud ruumi osa.

Punkti O nimetatakse kera keskpunktiks ja sirglõigu OR pikkust — kera **raadiuseks.**



JOON. 125.

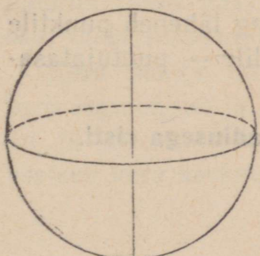


JOON. 126.

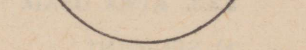
b) Joonisel 126 on esitatud pöördkeha, mis tekib korrapärase hulknurga pöörlemisel tema sümmeetriatelje ümber. On ilmne, et hulknurga nurkade arvu suurendades läheneb pöördkeha oma kujult kerale. Seega,

kera on korrapärase hulknurga pöörlemisel ümber tema sümmeetriatelje tekkiva pöördkeha piirkujund, kui hulknurga nurkade arv tõkestamatult suureneb.

c) Kera tekib ka ringi pöörlemisel ümber diameetri (joon. 127).



JOON. 127.



JOON. 128.

5.3.2. KERA LÕIGE TASAPINNAGA.

Lõikame kera tasapinnaga α (joon. 128). Tõestame, et

sfääri ja tasapinna lõikejooneks on ringjoon.

Tõmbame kera keskpunktist ristlõigu OP tasapinnale α, ühendame kera ja tasapinna lõikejoone mingi punkti R punktiga P. Nüüd on $OP \perp PR$ (miks?) ja seega kolmnurk OPR on täisnurkne.

Sellest järeldub, et

$$OR^2 - OP^2 = PR^2$$

(põhjenda!).

OR on kera raadius ja seetõttu tema pikkus on jääv iga punkti R puhul kera ja tasapinna lõikejoonel (lõikejoon asetseb kera pinnal). OP on samuti jääv suurus kui antud tasapinna kaugus kera keskpunktist. Et jääva suuruse ruut on jälle jääv suurus ja et jäävate suuruste vahe on samuti jääv suurus, siis peab PR^2 ja seega ka PR olema jääv suurus iga punkti R puhul kera ja tasapinna lõikejoonel. See tähendab aga, et kera ja tasapinna lõikejoone kõik punktid asetsevad punktist P võrdsetel kaugustel, s. t. nad asetsevad ringjoonel, mille keskpunkt on punktis P ja mille raadiuseks on PR.

Sellest teoreemist järeldub, et

kera lõige tasapinnaga on ring.

Kasutades seost $PR = \sqrt{OR^2 - OP^2}$, järeldame veel, et

1) mida ligemal kera keskpunktile asetseb lõikav tasapind, seda suurem on lõikering;

2) lõikering on suurim, kui lõikav tasapind läbib kera keskpunkti;

3) kui $OP \to r$, siis $PR \to 0$, s. t. et lõikering läheneb punktile ja seega lõiketasapind läheneb oma piirkujundile — puutujatasapinnale. Siit järeldub, et

kera puutujatasapind on puutepunktis raadiusega risti.

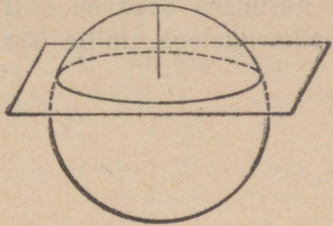
5.3.3. KERA OSAD.

a) SEGMENT.

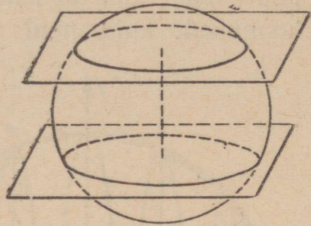
Lõigates kera tasapinnaga, jaotub kera kaheks osaks (joon. 129). Neid osi nimetatakse **kera segmentideks.** Kera segmenti piiravat kera pinna osa nimetatakse **sfääri segmendiks** ja ringi — **segmendi põhjaks.** Põhja keskpunktist kera pinnani tõmmatud ristlõiku nimetatakse **segmendi kõrguseks.**

b) KIHT JA VÖÖ.

Lõigates kera kahe paralleelse tasapinnaga (joon. 130), jao-



JOON. 129.



JOON. 130.

tub kera kaheks segmendiks ja paralleelsete tasapindade vaheliseks osaks, mida nimetatakse **kera kihiks.**

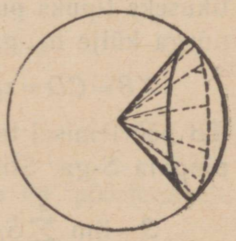
Kihi külgpinda, s. o. pinda, mis eraldub sfäärist tema lõikamisel kahe paralleelse tasapinnaga ja mis jääb nende vahele, nimetatakse **kera vööks.**

Kera kihti piiravad peale vöö veel paralleelsete tasapindade osad — ringid, mida nimetatakse **kihi põhjadeks.** Põhjadevahelist kaugust nimetatakse nii **kera kihi** kui ka **kera vöö kõrguseks.**

c) SEKTOR.

Lõikame kera niisuguse ühepoolse koonilise pinnaga, mille tipp asetseb kera keskpunktis (joon. 131). See pind eraldab kerast osa, mida nimetatakse **kera sektoriks.**

Kera sektor on liitkeha, mis koosneb kera segmendist ja koonusest. Sellel segmendil ja koonusel on ühine põhi. Koonuse tipp asetseb kera keskpunktis.



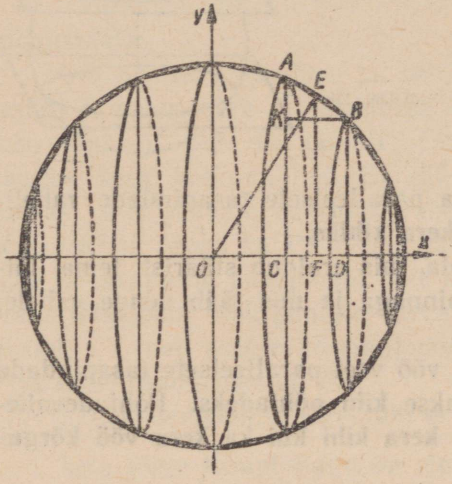
JOON. 131.

5.3.4. SFÄÄRI JA TEMA OSADE PINDALA.

a) SFÄÄRI PINDALA.

Sfääri pindalaks nimetatakse korrapärase hulknurga pöörlemisel tekkinud pöördkeha pindala piirväärtust, kui hulknurga tippude arv tõkestamatult kasvab.

Olgu antud korrapärane $2n$-nurk koos tema ümberringjoonega (joon. 132). Pöörelgu see hulknurk ümber x-telje, milleks on sirge, millel asub üks keskpunkti läbivaist diagonaalidest. Saame pöördkeha, mis koosneb tüvikoonustest. Äärmised osad on küll koonused, kuid neid võib vaadelda tüvikoonustena, mille ühe



JOON. 132.

põhja pindala on null. Sfääri pindalaks on nende tüvikoonuste külgpindalade summa piirväärtus. Olgu hulknurga kaheks järjestikuseks tipuks punktid $A(x_{i-1};\ y_{i-1})$ ja $B(x_i;\ y_i)$. Tähistame hulknurga külje a_{2n}-ga ja apoteemi k_{2n}-ga. Edasi tähistame

$$KB = CD = x_i - x_{i-1} = \Delta x_i,$$

AB pöörlemisel tekkiva tüvikoonuse külgpindala S_i-ga ning sfääri pindala S-ga. Siis

$$S = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} S_i.$$

Jooniselt näeme, et $S_i = \pi(AC + BD) \cdot AB$. Trapetsi kesklõigu omaduse põhjal $AC + BD = 2EF$ ja seega

$$S_i = 2\pi \cdot EF \cdot AB.$$

Vaatleme kolmnurki AKB ja OFE. Need on sarnased. Miks? Siit

$$\frac{AB}{OE} = \frac{KB}{EF},$$

millest

$$AB \cdot EF = OE \cdot KB = k_{2n} \cdot \Delta x_i.$$

Seega

$$S_i = 2\pi \cdot k_{2n} \cdot \Delta x_i$$

ja

$$S = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} S_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi \cdot k_{2n} \cdot \Delta x_i =$$

$$= \lim_{n \to \infty} (2\pi \cdot k_{2n} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i) = 2\pi \lim_{n \to \infty} (k_{2n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i) = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2,$$

sest $\lim\limits_{n \to \infty} k_{2n} = r$, s. t. et hulknurga apoteem n tõkestamatul kasvamisel läheneb hulknurga ümber joonestatud ringjoone raadiusele ja $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i = 2r$.

Saadud summa piirväärtust saab avaldada ka määratud integraali kaudu rajades $(-r)$-st r-ni, sest

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \int_{-r}^{r} dx.$$

Seega

$$S = 2\pi r \int_{-r}^{r} dx = 2\pi r x \Big|_{-r}^{r} = 4\pi r^2.$$

Et hulknurga ümberringjoone raadius r on ka pöörlemisel tekkinud kera raadiuseks, siis

sfääri pindala on võrdne neljakordse suurringi pindalaga.

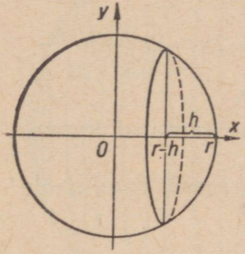
$$\boxed{S = 4\pi r^2}$$

b) SFÄÄRI SEGMENDI PINDALA.

$\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i$ avaldamine määratud integraalina võimaldab kergesti leida sfääri segmendi pindala. Selleks tuleb nüüd integreerida rajades $(r-h)$-st r-ni, kus h on segmendi kõrgus (joon. 133).

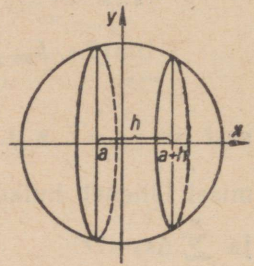
$$S_{seg}=2\pi r\int_{r-h}^{r}dx=2\pi rx\Big|_{r-h}^{r}=2\pi r^2-2\pi r(r-h)=2\pi rh.$$

$$\boxed{S_{seg}=2\pi rh}$$



JOON. 133.

JOON. 134.



c) KERA VÖÖ PINDALA.

Vöö pindala saamiseks tuleb integreerida rajades a-st $(a+$ $+h)$-ni, kus h on vöö kõrgus ja a on x-telje selle punkti abstsiss, mida läbib kera kihi üks põhi (joon. 134).

$$S_{vöö}=2\pi r\int_{a}^{a+h}dx=2\pi rx\Big|_{a}^{a+h}=2\pi r(a+h)-2\pi ra=2\pi rh.$$

$$\boxed{S_{vöö}=2\pi rh}$$

Näeme, et sfääri segmendi ja vöö pindala avalduvad ühesuguse valemiga, mida sõnastame järgmiselt:

sfääri segmendi (kera vöö) pindala on võrdne segmendi (vöö) kõrguse ja kera ümbermõõdu korrutisega.

Küsimusi ja ülesandeid.

455. Näita, et tüvikoonuse ruumala valemist tuleneb koonuse ruumala valem, kui ühe põhja raadius võtta võrdseks nulliga.

456. Missugust joont nimetatakse ringjooneks?

457. Kuidas nimetatakse ringi osi?

458. Kuidas leitakse ringi sektori pindala? ringi segmendi pindala?

459. Otsitava sfääri pindala on 3 korda suurem antud sfääri pindalast. Kui suur on otsitava kera raadius, kui antud kera raadius on 5 cm?

460. On antud kaks kera, mille raadiused on 8,8 cm ja 10,5 cm. Kui suur on selle kera raadius, mille pindala on võrdne antud kerade pindalade summaga?

461. Kera, mille raadius on 41 dm, on lõigatud tasapinnaga 9 dm kaugusel keskpunktist. Arvuta lõike pindala.

462. Kera raadius on 63 cm. Punkt asetseb kera puutujatasapinnal 16 cm kaugusel puutepunktist. Leia punkti lühim kaugus kera pinnast.

463. Kera raadius on r. Läbi raadiuse otspunkti on pandud tasapind, mille suhtes raadiuse kaldenurk on 60°. Avalda tekkinud lõike pindala.

464. Vöö põhjade raadiused on 16 cm ja 33 cm; kera raadius on 65 cm. Leia vöö kõrgus juhul, kui kera keskpunkt

a) on vöö põhjade vahel,

b) ei ole vöö põhjade vahel.

465. Arvuta sfääri segmendi pindala, kui kera raadius on 15 cm ja segmendi kõrgus on 4 cm.

466. Arvuta sfääri segmendi pindala, kui segmendi kõrgus on 16 cm ja põhja raadius on 30 cm.

467. Tõesta, et kera segmenti kujundatud koonuse külgpindala on selle segmendi põhja pindala ja sfääri segmendi pindala keskmine võrdeline.

468. Kera, mille raadius on 10 cm, on silindriliselt läbi puuritud mööda telge. Puuraugu läbimõõt on 12 cm. Arvuta keha täispindala.

469. Observatooriumi katus on kujult sfääri segment, mille kõrgus on 4,6 m. See segment on osa kerast, mille raadius on 9,2 m. Leia katuse pindala.

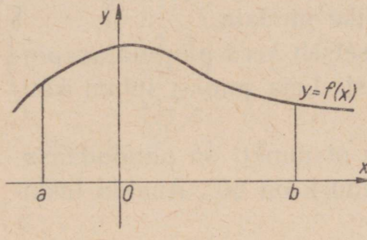
470. Kuubi ümber, mille raadius on a, on kujundatud kera. Üht kuubi tahkudest on laiendatud kuni lõikumiseni kera pinnaga. Leia tekkinud segmentide pindalad.

471. Kui suur osa maakera pinnast kuulub polaarvöötmesse, parasvöötmesse ja troopikavöötmesse ($r \approx 6000$ km)?

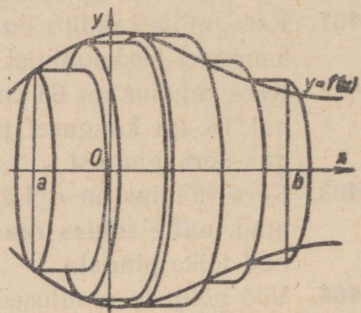
5.3.5. PÖÖRDKEHA RUUMALA.

Olgu koordinaatteljestikus antud funktsiooni $y=f(x)$ graafik ja olgu selle graafikuga määratud kõverjooneline trapets vahemikus a-st b-ni (joon. 135). Paneme selle trapetsi pöörlema ümber x-telje. Tekkinud pöördkeha ruumala valemi tuletamiseks jaotame trapetsi x-teljega ristuvate tasapindade abil n-osaks. Need osad

JOON. 135.



JOON. 136.



lähendame silindritega, nagu näidatud joonisel 136. Nende silindrite ruumalade summa

$$\sum_{i=1}^{n} \pi f^2(x_i)\,\Delta x_i$$

on pöördkeha ruumala ligikaudseks väärtuseks. Pöördkeha ruumala all mõistame nende silindrite ruumalade summa piirväärtust, kui silindrite arv tõkestamatult suureneb nii, et iga $\Delta x_i \to 0$ a-st b-ni.

Tähistades pöördkeha ruumala tähega V, võime kirjutada

$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(x_i)\,\Delta x_i.$$

Niisugune summa piirväärtus on aga võrdne määratud integraaliga.

Seega avaldub pöördkeha ruumala määratud integraalina

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx}$$

5.3.6. KERA JA TEMA OSADE RUUMALA.

a) KERA RUUMALA.

Kasutades leitud pöördkeha ruumala valemit, leiame kera ruumala valemi.

Kera tekib ringjoone pöörlemisel ümber diameetri.

Olgu ringjoone keskpunktiks koordinaatide alguspunkt. Nagu teame, on niisuguse ringjoone võrrand $x^2+y^2=r^2$. Avaldades siit y^2, saame avaidise, mida tuleb kera ruumala valemi saamiseks integreerida rajades $(-r)$-st r-ni:

$$V_{kera}=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\,dx=\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r}=\pi\left(r^3-\frac{r^3}{3}+r^3-\frac{r^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

$$\boxed{\mathbf{V_{kera}=\frac{4}{3}\pi r^3}}$$

Et $\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{1}{3}\cdot 4\pi r^2\cdot r$, siis võib tulemuse sõnastada järgmiselt:

kera ruumala on võrdne ühe kolmandikuga sfääri pindala ja raadiuse korrutisest.

b) KERA SEGMENDI RUUMALA.

Jooniselt 133 näeme, et kera segmendi ruumala valemi saame sama integraali kaudu, kui integreerime rajades $(r-h)$-st r-ni, kus h on segmendi kõrgus.

$$V_{seg}=\pi\int_{r-h}^{r}(r^2-x^2)\,dx=\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{r-h}^{r}=\pi\left(r^3-\frac{r^3}{3}-r^3+r^2h+\right.$$

$$\left.+\frac{r^3-3r^2h+3rh^2-h^3}{3}\right)=\pi\left(rh^2-\frac{h^3}{3}\right)=\pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right).$$

$$\boxed{\mathbf{V_{seg}=\pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right)}}$$

c) KERA SEKTORI RUUMALA.

Kera sektori ruumala avaldub koonuse ja kera segmendi ruumalade summana (joon. 131):

$$V_{sek}=\frac{1}{3}\pi r_1^2(r-h)+\pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right).$$

Et

$$r_1^2=r^2-(r-h)^2=2rh-h^2,$$

siis

$$V_{sek}=\frac{1}{3}\pi(2rh-h^2)(r-h)+\pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\pi h(2r^2-2rh-rh+h^2+3rh-h^2)=\frac{2}{3}\pi r^2 h.$$

$$\boxed{\mathbf{V_{sek}=\frac{2}{3}\pi r^2 h}}$$

d) KERA KIHI RUUMALA.

Kera kihi ruumala saame leida kahe segmendi ruumala vahena (joon. 134).

Kera kihi ruumala valemi saame ka integreerimise teel, kasutades kera ruumala valemi tuletamisel saadud integraali. Nüüd toimub aga integreerimine rajades a-st $(a+h)$-ni, kus a on kihi vasakpoolse põhja kaugus koordinaatide alguspunktist ja h on kihi kõrgus.

$$V_{kiht}=\pi\int_a^{a+h}(r^2-x^2)\,dx=\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_a^{a+h}=\pi\left[r^2(a+h)-\frac{(a+h)^3}{3}-\right.$$

$$\left.-r^2a+\frac{a^3}{3}\right]=\pi\left(r^2h-a^2h-ah^2-\frac{h^3}{3}\right)=\frac{\pi h}{2}\left(2r^2-2a^2-2ah-\right.$$

$$\left.-\frac{2h^2}{3}\right)=\frac{\pi h}{2}\left\{(r^2-a^2)+\left[r^2-(a^2+2ah+h^2)\right]+\frac{h^2}{3}\right\}=$$

$$=\frac{\pi h}{3}\left(r_1^2+r_2^2+\frac{h^2}{3}\right)=\frac{\pi h}{6}\left(3r_1^2+3r_2^2+h^2\right).$$

$$\boxed{\mathbf{V_{kiht}=\frac{\pi h}{6}(3r_1^2+3r_2^2+h^2)}}$$

Küsimusi ja ülesandeid.

472. Sõnasta kera segmendi ruumala valem.

473. Sõnasta kera sektori ruumala valem.

474. Missuguse kuju omandab kera segment, kui tema kõrgus saab võrdseks kera raadiusega? läbimõõduga? Kontrolli segmendi ruumala valemi kehtivust neil juhtudel!

475. Missuguse kuju omandab kera kiht, kui $h=r-a$. Kontrolli kera kihi ruumala valemi kehtivust sel juhul!

476. Leia sirge $y=2x$ pöörlemisel ümber x-telje tekkiva pöördkeha ruumala vahemikus 0-st 3-ni.

477. Tuleta koonuse ruumala valem, kasutades pöördkeha ruumala valemit!

478. Leia parabooli $y=x^2$ pöörlemisel ümber x-telje tekkiva pöördkeha ruumala vahemikus 0-st 2-ni.

479. Leia joone $y=\sqrt{x}$ pöörlemisel ümber x-telje tekkiva pöördkeha ruumala vahemikus 0-st 2-ni.

480. Leia kuupparabooli $y=x^3$ pöörlemisel ümber x-telje tekkiva keha ruumala vahemikus 0-st 2-ni.

481. Praktikas kasutatakse kera ruumala arvutamiseks valemit $V \approx \frac{1}{2} d^3$. Põhjenda selle valemi õigsust. Kui suur on viga, kui kasutada seda valemit niisuguse kera ruumala arvutamiseks, mille raadius on 1 m?

482. Kuubil ja keral on võrdne ruumala 1000 cm^3. Mitu protsenti on kera pindala väiksem kuubi pindalast?

483. Kuubil ja keral on võrdne pindala 600 cm^2. Mitu protsenti on kera ruumala suurem kuubi ruumalast?

484. Kerakujuline õõnes boi, välise läbimõõduga 1,4 m, peab vees vajuma poolest saadik vette. Kui paks peab sel juhul olema terasplekk, millest boi tuleb valmistada, kui vee erikaal on 1 ja teraspleki erikaal 7,8?

485. Puust kera, läbimõõduga 11,1 cm, vajub 6,9 cm sügavusele vette. Kui suur on märgamata pinna osa? Kui suur on kera erikaal?

486. Tinakuulist, mille raadius on 8,6 cm, valatakse seest tühi kuul välise läbimõõduga 23,5 cm. Kui paks on uue kuuli sein?

487. Kera raadius on r ja tema sektori telglõike nurk on 120°. Leia sektori ruumala.

488. Kaksikkumera läätse sfääriliste pindade raadiused on 10 cm ja 17 cm. Keskpunktidevaheline kaugus on 21 cm. Arvuta läätse ruumala.

489. Kera, mille raadius on 65 cm, on ühel ja samal pool keskpunkti lõigatud kahe paralleelse tasapinnaga, mille kaugused keskpunktist on 16 cm ja 25 cm. Leia nende vahel oleva kera kihi ruumala.

490. Ringi segment pöörleb segmendi aluseks oleva kõõluga paralleelse diameetri ümber. Tõesta, et seejuures tekkiv pöördkeha on ruumvõrdne keraga, mille läbimõõduks on segmendi kõõl.

6. ARVU MÕISTE ÜLDISTAMINE.

6.1. NATURAALARVUD.

6.1.1. TEHTED NATURAALARVUDE HULGAS.

Arvud 0, 1, 2, 3, 4, 5,... on naturaalarvud ja nad moodustavad naturaalarvude hulga. Tähistame selle arvuhulga sümboliga

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\},$$

lühidalt aga tähega N. Niisiis

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

Olgu arv a naturaalarv. Seda tõsiasja tähistame sümboliga

$$a \in N$$

ja loeme «arv a kuulub hulka N». Seega

$$1 \in N, \quad 2 \in N, \quad 3 \in N \text{ jne.}$$

Olgu arv b mittenaturaalarv. Seda tõsiasja tähistame sümboliga

$$b \overline{\in} N$$

ja loeme «arv b ei kuulu hulka N». Näiteks

$$\frac{1}{2} \overline{\in} N, \quad 2{,}37 \overline{\in} N, \quad -5 \overline{\in} N.$$

Arvuhulka nimetatakse kinniseks antud tehte suhtes, kui selle tehte teostamine mistahes kahe sellesse hulka kuuluva arvuga annab tulemuseks ühe ja ainult ühe sama hulga arvu.

Naturaalarvude hulk on kinnine liitmise ja korrutamise suhtes, sest kui $a \in N$ ja $b \in N$, siis ka $a+b \in N$ ja $ab \in N$. Too näiteid!

Naturaalarvude hulk pole aga kinnine lahutamise ja jagamise suhtes, sest näiteks $2 \in N$ ja $5 \in N$, kuid

$$2-5=-3 \notin N \text{ ja } 2:5=0{,}4 \notin N.$$

Tooge veel näiteid!

Naturaalarvude liitmine ja korrutamine on **kommutatiivne** ja assotsiatiivne, s. t. et kui $a \in N$, $b \in N$ ja $C \in N$, siis

$$a+b=b+a,$$
$$a+(b+c)=(a+b)+c,$$
$$ab=ba,$$
$$a(bc)=(ab)c.$$

Lisaks neile omadustele on naturaalarvude hulgas kehtiv ka **distributiivsuse** seadus:

$$a(b+c)=ab+ac.$$

Liitmise ja korrutamise assotsiatiivsust kasutatakse arvutamise lihtsustamiseks. Näiteks

$$13+46=13+(40+6)=(13+40)+6=53+6=59,$$
$$16 \cdot 20=16 \cdot (2 \cdot 10)=(16 \cdot 2) \cdot 10=32 \cdot 10=320.$$

Ka korrutamise distributiivsust kasutatakse arvutamise lihtsustamiseks. Sellele tugineb nimelt kirjalik korrutamise võte. Näiteks

$$16 \cdot 15=16 \cdot (10+5)=160+80=240$$

ja

$$\begin{array}{r} 26 \\ 34 \\ \hline 104 \\ 78 \\ \hline 884 \end{array} \qquad \begin{aligned} 26 \cdot 34 &= 26 \cdot (30+4) = \\ &= 26 \cdot 30 + 26 \cdot 4 = \\ &= 780+104=884. \end{aligned}$$

Naturaalarvude hulk sisaldab nn. **neutraalse arvu liitmise suhtes**, s. o. arvu 0, mille liitmine mistahes naturaalarvuga a ei muuda selle naturaalarvu väärtust:

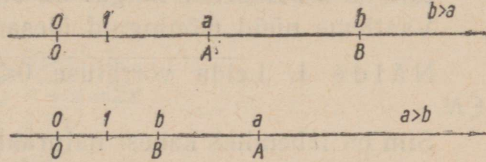
$$a+0=0+a=a.$$

Naturaalarvude hulk sisaldab **neutraalse arvu** ka **korrutamise suhtes**, s. o. arv 1, mille korrutamine mistahes naturaalarvuga ei muuda selle naturaalarvu väärtust:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

6.1.2. NATURAALARVUDE SUURUSJÄRJESTUS.

Naturaalarve kujutatakse arvteljel (joon. 137). Arvule 0 vastavat punkti nimetatakse **alguspunktiks**. Valime kaks erinevat naturaalarvu a ja b. Olgu arvteljel neile vastavateks punktideks A ja B. Siis kõik need naturaalarvud, millele vastavad punktid



JOON. 137.

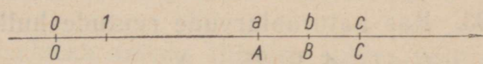
asetsevad arvteljel punktist A paremal, on naturaalarvust a suuremad, ja kõik need naturaalarvud, millele vastavad punktid asetsevad arvteljel punktist A vasakul, on antud naturaalarvust a väiksemad. See tähendab, et iga kahe erineva naturaalarvu a ja b korral saab öelda, kas «a on suurem kui b» või «a on väiksem kui b» ehk lühemalt:

kui $a \in N$ ja $b \in N$ ning $a \neq b$, siis kas $a > b$ või $a < b$.

See omadus on kokku võetav järgmisse väljendisse:

naturaalarvud on järjestatavad suuruse järgi.

Olgu a, b ja c kolm järjestikust naturaalarvu. Arvteljel paiknevad neile arvudele vastavad punktid A, B ja C üksteisest



JOON. 138.

isoleeritult, kusjuures iga kahe järjestikuse punkti vaheline kaugus on võrdne ühiku pikkuse lõiguga (joon. 138). Seepärast öeldaksegi, et

naturaalarvude hulk on diskreetne.

Et arv c on arvule b vahetult järgnev arv ja arv a on arvule b vahetult eelnev arv, siis nimetatakse arve a ja c arvu b **naaberarvudeks.** Ühiku kaudu on arvu a naaberarvud esitatavad kujul $a-1$ ja $a+1$. Näiteks on arvu 569 naaberarvudeks 568 ja 570. Tooge veel näiteid!

Arvul 0 on ainult üks naaberarv $0+1=1$, sest $0-1=-1\overline{\in}N$.

Anname ette kuitahes suure naturaalarvu, näit. 10^{10}. Ikka leidub naturaalarv, mis on sellest suurem, näiteks kasvõi tema naaberarv $10^{10}+1$. Seega naturaalarvude hulgas pole suurimat arvu ehk, teisiti öeldes,

naturaalarvude hulk on lõpmatu.

Kas naturaalarvude hulgas on olemas väikseim arv?

Vaatleme nüüd mõningaid ülesandeid hulgas N.

Näide 1. Leida võrratuse $0\leqslant x\leqslant 1$ lahendite hulk, kui $x\in N$.

Siin on lahendiks kahest naturaalarvust koosnev hulk $\{0, 1\}$.

Näide 2. Leida võrratuse $x+1\leqslant 5$ lahendite hulk, kui $x\in N$.

Siin on lahendiks arvuhulk

$\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Ülesandeid.

491. Kas paarisarvude hulk

$A=\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

on kinnine liitmise ja korrutamise suhtes?

492. Kas paaritute arvude hulk

$B=\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

on kinnine liitmise ja korrutamise suhtes?

493. Kas naturaalarvude ruutude hulk

$C=\{1, 4, 9, 25, \ldots\}$

on kinnine liitmise ja korrutamise suhtes?

494. Kas arvuhulk

$D=\{1, 2, 3\}$

on kinnine liitmise ja korrutamise suhtes?

495. Kas arvuhulk

$E=\{1\}$

on kinnine liitmise ja korrutamise suhtes?

496. Esita järgmised arvud õiges suurusjärjestuses:

a) $4 \cdot 10^6$; $15 \cdot 10^5$; $632 \cdot 10^4$; $1631 \cdot 10^3$; $29342 \cdot 10^2$;

b) $912 \cdot 10^{-4}$; $26 \cdot 10^{-3}$; $131 \cdot 10^{-2}$; $671 \cdot 10^{-1}$; 428;

c) $13 \cdot 2^6$; $32 \cdot 2^5$; $64 \cdot 2^4$; $213 \cdot 2^3$; $4444 \cdot 2^2$;

d) 4^5; 5^4; 3^6; 6^3; 2^7; 7^2.

497. Kirjuta järgmiste arvude naaberarvud:

999999; 10000000; 1.

498. Lahenda järgmised võrrandid ja võrratused, kui $x \in N$.

a) $x+1=1$	f) $6>x>5$
b) $x<4$	g) $x+x=2x$
c) $x\leqslant 4$	h) $x\geqslant 1$
d) $2x=0$	i) $x\neq 5$
e) $x+2<2$	j) $2x+1=3$

6.2. TÄISARVUD.

Naturaalarvude hulga laiendamine täisarvude hulgaks toimub eesmärgiga saada niisugune arvuhulk, mis on kinnine peale liitmis- ja korrutamistehte ka lahutamistehte suhtes, s. t. et täisarvude hulgas peab olema võrrand

$$a+x=b$$

alati lahenduv. Kui $a \in N$ ja $b \in N$, siis $x \in N$ ainult siis, kui $b \geqslant a$. Kui $a<b$, siis avalduvad selle võrrandi lahendid naturaalarvude **vastandarvudena.**

Et arv 0 jääb neutraalseks arvuks liitmise suhtes kõigis laiendatud arvuvaldades, defineerime vastandarvu liitmise suhtes kui arvu, mis liidetuna antud arvuga annab tulemuseks neutraalse arvu ehk

antud arvu a vastandarvuks liitmise suhtes nimetatakse arvu x, mis rahuldab võrrandit $a+x=0$.

Teame, et kui $a \in N$, siis $x \overline{\in} N$. Võrrandi $a+x=0$ lahendeid tähistatakse sümboliga «$-a$», s. t. et $x=-a$.

Seega on naturaalarvude vastandarvudeks

$-1, -2, -3, \ldots$

Tähistame naturaalarvude vastandarvude hulga tähega V, s. t.

$V=\{-1, -2, -3, -4, \ldots\}$.

Ühendades hulgad N ja V saamegi täisarvude hulga Z. Kui kahe hulga ühendamist tähistada sümboliga $\cup$, siis

$N \cup V=Z$.

Hulgas Z on võrrandil $a+x=0$ alati lahend olemas, s. t. et

igal täisarvul on olemas vastandarv.

Näiteks on arvu -4 vastandarvuks arv 4, sest võrrandi

$-4+x=0$

lahendiks on $x=4$.

Arvu 0 vastandarvuks on arv 0 ise, sest võrrandi

$0+x=0$

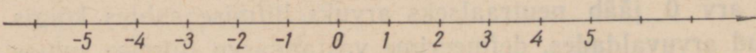
lahendiks on $x=0$.

Niisiis,

täisarvude hulk on kinnine liitmise, korrutamise ja lahutamise suhtes,

s. t. kui $a \in Z$, $b \in Z$ ja $x \in Z$, siis ka $a+b \in Z$, $ab \in Z$ ja võrrandil $a+x=b$ on täisarvude hulgas Z alati lahend olemas.

Täisarvude hulk ei ole aga kinnine jagamise suhtes, s. t. et võrrandil $ax=b$ ei pruugi hulgas Z olla lahendit. Näiteks, kui $a=2$ ja $b=-3$, siis võrrandi $2x=-3$ lahendiks on $x=-\frac{3}{2} \overline{\in} Z$.



JOON. 139.

Analoogiliselt naturaalarvude käsitlemisel esitatud mõttekäikudega selgita arvtelje abil (joon. 139), et

täisarvud on järjestatavad suuruse järgi

ja et

täisarvude hulk on diskreetne.

Et juba naturaalarvude hulk oli lõpmatu, siis muidugi ka

täisarvude hulk on lõpmatu.

Kas täisarvude hulgas on olemas väikseim arv?

Küsimusi ja ülesandeid.

499. a) Nimeta 10 naturaalarvu. Kirjuta need suuruse järgi.
b) Missugustele naturaalarvudele on arv n naaberarvuks?
c) Missugustele täisarvudele on arv 0 naaberarvuks?
d) Missugused on arvu $n+3$, $n-5$ naaberarvud?

500. Kirjuta üles naturaalarvude

10 400; 1 001 000; 3 040 500; 1 000 100

naaberarvud ja järjesta need suuruse järgi.

501. Leia ülesandes 500 antud arvude summa ja kirjuta üles selle naaberarvud.

502. Nimeta 10 täisarvu. Järjesta need suuruse järgi.

503. Kirjuta üles täisarvude

30 401; $-41\,000$; 1 800 100; $-190\,001$

naaberarvud ning järjesta antud ja üleskirjutatud arvud suuruse järgi.

504. Leia ülesandes 503 antud arvude summa ja kirjuta üles selle arvu naaberarvud.

505. Leia ülesandes 500 ja ülesandes 503 antud vastavate arvude vahed ning kirjuta üles nende arvude naaberarvud. Järjesta need arvud suuruse järgi.

506. Kas hulk V on kinnine
a) liitmise;
b) lahutamise;
c) korrutamise
suhtes?

507. Kas hulk $\{0, 1, -1\}$ on kinnine korrutamise suhtes?

508. Kas hulk $\{-2, 0, 2\}$ on kinnine liitmise suhtes?

509. Lahenda järgmised ülesanded:

a) $x^2-x-2=0$, kui $x \in N$;

b) $x^2-x-2=0$, kui $x \in Z$;

c) $x^2-x-6<0$, kui $x \in N$;

d) $x^2-x-6<0$, kui $x \in Z$;

e) $3x^2+5x-2=0$, kui $x \in Z$;

f) $-2x^2+6x \geqslant 0$, kui $x \in N$;

g) $-2x^2+6x \geqslant 0$, kui $x \in V$.

6.3. RATSIONAALARVUD.

Täisarvude hulga laiendamine ratsionaalarvude hulgaks toimub eesmärgiga saada niisugune arvuhulk, mis on kinnine peale liitmise, lahutamise ja korrutamise ka jagamise suhtes. Selleks täiendame täisarvude hulka Z niisuguste taandatud murdude $\frac{a}{b}$ hulgaga M, mis rahuldavad tingimusi

$$a \in Z,\ b \in Z,\ b \neq 0 \text{ ja } b \neq 1.$$

Hulka M kuuluvad seega need taandatud harilikud murrud, mis pole täisarvud, näiteks

$$\frac{2}{3} \in M;\ -\frac{5}{7} \in M;\ \frac{135}{11} \in M,$$

kuid näiteks

$$\frac{13}{1} \notin M.$$

Moodustame nüüd uue arvuhulga, kuhu kuuluvad kõik arvud hulgast Z ja kõik arvud hulgast M. Seda hulka nimetatakse **ratsionaalarvude hulgaks** ja tähistatakse tähega Q, s. t. et

$$Z \cup M = Q.$$

Et täisarve saab esitada murruna, mille lugejaks on seesama täisarv ja nimetajaks arv 1, siis on ratsionaalarvu üldkujuks

$$\frac{a}{b},\ \text{kus } a \in Z,\ b \in Z \text{ ja } b \neq 0.$$

Ratsionaalarvude hulgas on võrrand $bx=a$, kus $a \in Z$, $b \in Z$ ja $b \neq 0$, alati lahenduv.

Tõepoolest, avaldades antud võrrandist tundmatu, saame

$$x=\frac{a}{b} \in Q.$$

Seega,

ratsionaalarvude hulk on kinnine nii liitmise, lahutamise, korrutamise kui ka jagamise suhtes.

Ratsionaalarvude hulgas jäävad kehtima liitmise ja korrutamise kommutatiivsuse ja assotsiatiivsuse seadused ning samuti distributiivsuse seadus.

Vaatleme liitmise kommutatiivsuse ja distributiivsuse seaduste kehtivust. Olgu $\frac{a}{b} \in Q$, $\frac{c}{d} \in Q$ ja $\frac{e}{f} \in Q$. Näitame, et

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}.$$

Tõepoolest, et

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}$$

ja

$$\frac{c}{d}+\frac{a}{b}=\frac{cb+ad}{db}$$

ning et täisarvude hulgas kehtib nii liitmise kui ka korrutamise kommutatiivsuse seadus, siis

$$\frac{cb+ad}{db}=\frac{ad+cb}{bd}$$

ja seega

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}.$$

Veendume veel, et

$$\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}.$$

Teeme esmalt nõutud tehted tõestatava võrduse vasakul poolel:

$$\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{cf+ed}{df}=\frac{a(cf+ed)}{bdf}.$$

Et täisarvude hulgas distributiivsuse seadus kehtib, siis

$$\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{acf+aed}{bdf}.$$

Nüüd teeme tehted tõestatava võrduse paremal poolel:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}=\frac{ac}{bd}+\frac{ae}{bf}=\frac{acf+aed}{bdf}.$$

Et tulemused on võrdsed, siis

$$\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}.$$

Näita ka korrutamise kommutatiivsuse ja liitmise ning korrutamise assotsiatiivsuse seaduste kehtivust!

Ratsionaalarvude hulgas on igal arvul olemas vastandarv liitmise suhtes, s. t. et

võrrandil $a+x=0$ on ratsionaalarvude hulgas alati lahend olemas.

Et ratsionaalarvude hulgas osutub alati lahenduvaks võrrand $ax=b$, siis ka

võrrand $ax=1$, kus $a\neq 0$, on ratsionaalarvude hulgas alati lahenduv.

See lahend $\frac{1}{a}$ on ratsionaalarvude hulgas **vastandarvuks korrutamise suhtes** ehk nn. **pöördarvuks.**

Et arv 1, mida nimetasime naturaalarvude hulgas neutraalseks arvuks korrutamise suhtes, jääb selleks ka kõigis laiendatud arvuhulkades, siis on antud arvu pöördarv defineeritav kui arv, mida antud arvuga korrutades saame neutraalse arvu korrutamise suhtes.

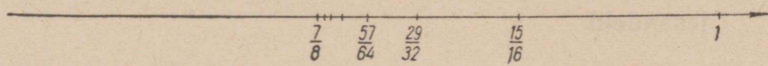
Et ratsionaalarvude hulk on saadud täisarvude hulgast, mis sisaldab lõpmata palju arve, ning seda on täiendatud veel uute arvudega, siis kindlasti ka

ratsionaalarvude hulk sisaldab lõpmata palju arve.

Nii nagu täisarvud, on ka ratsionaalarvud kujutatavad arvteljel. Sellega on aga nende arvude suurusjärjestus määratud. Seega,

ratsionaalarvud on järjestatavad suuruse järgi.

Seame nüüd ülesandeks leida antud ratsionaalarvu naaberarve, s. t. seame ülesandeks leida antud ratsionaalarvule vahetult eelneva ja vahetult järgneva ratsionaalarvu.



JOON. 140.

Olgu näiteks antud arv $\frac{7}{8}$, siis temale järgnevaks ratsionaalarvuks ei ole $\frac{8}{8}=1$, sest $\frac{7}{8}$ ja 1 vahel asetseb näiteks arv $\frac{15}{16}$ (joon. 140):

$$\frac{7}{8}<\frac{15}{16}<1.$$

Kuid ka $\frac{15}{16}$ ei ole $\frac{7}{8}$-le järgnev ratsionaalarv, sest nende vahel asetseb näiteks arv $\frac{29}{32}$:

$$\frac{7}{8}<\frac{29}{32}<\frac{15}{16}.$$

Samuti jätkates võime kirjutada:

$$\frac{7}{8}<\frac{57}{64}<\frac{29}{32},$$

$$\frac{7}{8}<\frac{113}{128}<\frac{57}{64} \text{ jne.}$$

Nii võime lõpmatult jätkata arvule $\frac{7}{8}$ järgneva ratsionaalarvu otsimist, kuid me ei leia seda, sest ikka võib üles kirjutada ratsionaalarvu, mis on küll suurem kui $\frac{7}{8}$, kuid samal ajal ka väiksem ükskõik kui vähe $\frac{7}{8}$-st erinevast suuremast arvust.

Täpselt samuti on tulemuseta antud ratsionaalarvule eelneva arvu otsimine.

Seega paisutas täisarvude hulgale murdarvude juurdelisamine arvuhulga nii suureks, et

ratsionaalarvude hulgas pole võimalik kindlaks määrata naaberarve.

Ülesandeid.

510. Leia järgmiste arvude vastandarvud:

$-15;\ 469;\ \frac{5}{7};\ 0{,}89;\ -\frac{16}{3}.$

511. Leia järgmiste arvude pöördarvud:

$8;\ -29;\ -\frac{2}{3};\ \frac{15}{7};\ 6\frac{3}{4};\ 5{,}6;\ -12{,}1.$

512. Näita, et paarisarvu ruut on paarisarv ja et paaritu arvu ruut on paaritu arv.

513. Teosta nõutud tehted.

a) $\dfrac{\left(49\frac{5}{24}-46\frac{7}{20}\right)\cdot 2\frac{1}{3}+0{,}6}{0{,}2}$

b) $\dfrac{\left(12\frac{1}{6}-6\frac{1}{27}-5\frac{1}{4}\right)\cdot 13{,}5+0{,}111}{0{,}02}$

c) $\dfrac{\left(68\frac{7}{30}-66\frac{5}{18}\right):6\frac{1}{9}+\left(\frac{7}{40}+\frac{3}{32}\right)\cdot 4{,}5}{0{,}04}$

d) $\dfrac{\left[\left(40\frac{7}{30}-38\frac{5}{12}\right):10{,}9+\left(\frac{7}{8}-\frac{7}{30}\right):1\frac{9}{11}\right]\cdot 4{,}2}{0{,}008}$

514. Leia järgmiste lõpmatute perioodiliste kümnendmurdudega ekvivalentsed ratsionaalarvud.

a) 0,(12) c) 12,(365)
b) 1,2(35) d) 0,3(276)

Märkus. Ülesande lahendamiseks võib kasutada ka järgmist võtet. Olgu

$x=0,(3)$, s. t. et $x=0,3333\ldots$,

siis $10x=3,3333\ldots$. Lahutades viimasest võrdusest eelneva, saame

$$\begin{array}{r} 10x=3,3333\ldots \\ x=0,3333\ldots \\ \hline 9x=3, \end{array}$$

millest

$$x=\frac{1}{3}.$$

515. Tõesta järgmiste võrduste kehtivus.

a) $0,5=0,4(9)$

b) $2,(56)=2,5(65)$

516. Esita ratsionaalarvuna järgmised korrutised.

a) $0,(3)\cdot 0,(123)$ c) $0,2(6)\cdot 0,0(5)$

b) $2,(13)\cdot 1,(31)$ d) $2,3(48)\cdot 0,4(172)$

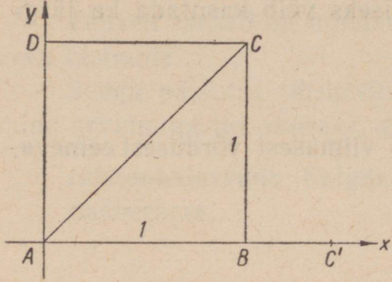
6.4. REAALARVUD.

6.4.1. RATSIONAALARVUDE HULGA LAIENDAMISE VAJADUS.

Naturaalarvude hulga laiendasime täisarvude hulgaks, kus peale liitmise ja korrutamise on alati ka liitmise pöördtehe — lahutamine teostatav. Täisarvude hulga laiendamise ratsionaalarvude hulgaks, kus lisaks nimetatud kolmele tehtele on alati teostatav ka korrutamise pöördtehe — jagamine (välja arvatud jagamine nulliga).

Praktilisteks arvutusteks saadakse andmed peamiselt mõõtmise teel. Mõõtmise tulemused, mis on küll ligikaudsed, avaldatakse alati ratsionaalarvudena. Seega on praktilisteks arvutusteks ratsionaalarvude hulk küllaldane. Sealjuures tuleb vaid arvestada mõningaid nn. ligikaudse arvutamise reegleid.

Osutub aga, et ratsionaalarvudest ei piisa iga lõigu täpse pikkuse avaldamiseks.



JOON. 141.

Olgu antud koordinaatteljestikus ruut, mille tipud asetsevad punktides $A(0;\ 0)$, $B(1;\ 0)$, $C(1;\ 1)$, $D(0;\ 1)$ (joon. 141). Asetame sirkli teraviku punkti A ja kanname kauguse AC x-teljele. Saame punkti C'. Väidame, et punktile C' ei vasta ühtki ratsionaalarvu.

Tõestame vastuväiteliselt.

Oletame, et leidub niisugune ratsionaalarv, s. o. taandatud murd $\frac{a}{b}$, kus $b \neq a$, mis väljendab ühikruudu diagonaali pikkust.

Pütagorase teoreemi kohaselt peab siis kehtima võrdus

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 1^2 + 1^2 \text{ ehk } \frac{a^2}{b^2} = 2 \text{ ja siit } a^2 = 2b^2.$$

Et ainult paarisarvu ruut on paarisarv, siis peab a olema paarisarv. Olgu $a = 2m$. Asendades saame

$$4m^2 = 2b^2$$

ja siit

$$2m^2 = b^2.$$

Sellest võrdusest järeldub omakorda, et b peab olema paarisarv. Olgu $b = 2n$. Siis on aga murd

$$\frac{a}{b} = \frac{2m}{2n}$$

taanduv, mis on vastuolus eeldusega. Niisiis, ei leidu ratsionaalarvu, mille ruut on 2.

Seega oletus, et leidub ratsionaalarve, millele vastab x-teljel punkt C', viib vastuolule, s. t. et ei leidu niisugust ratsionaalarvu, mille abil saaks avaldada ühikruudu diagonaali pikkust.

6.4.2. IRRATSIONAALARVUD.

Nagu juba nimetatud, saab ratsionaalarve esitada kujul $\frac{a}{b}$, kus a ja b on täisarvud ja $b \neq 0$. Iga harilikku murdu on aga võimalik esitada kümnendmurruna, kusjuures see kümnendmurd on kas lõplik või lõpmatu perioodiline. Näiteks väljenduvad murrud $\frac{1}{2}$ ja $\frac{14}{5}$ lõplike kümnendmurdudena.

$$\frac{1}{2}=0{,}5 \text{ ja } \frac{14}{5}=2{,}8,$$

murrud $\frac{4}{9}$ ja $\frac{16}{7}$ aga lõpmatute perioodiliste kümnendmurdudena

$$\frac{4}{9}=0{,}(4) \text{ ja } \frac{16}{7}=2{,}(285714).$$

Seega,

ratsionaalarvud väljenduvad kas täisarvudena, lõplike kümnendmurdudena või lõpmatute perioodiliste kümnendmurdudena.

Arvuvalla edasiseks laiendamiseks on niisiis reserv olemas — lõpmatud mitteperioodilised kümnendmurrud.

Ühikruudu diagonaali pikkuseks saame $\sqrt{2}$ (joon. 141). Kui hakkame seda ruutjuurt arvutama, saame

$$\sqrt{2}=1{,}414213562373\ldots$$

Seda juurimisprotsessi saab aga jätkata. Tekib küsimus, kas see juurimisprotsess võib lõppeda, s. t. kas $\sqrt{2}$ võib võrduda lõpliku kümnendmurruga või kas saabub koht, millest alates numbrid hakkavad korduma, s. t. kas $\sqrt{2}$ võib võrduda lõpmatu perioodilise kümnendmurruga.

Vastus on eitav. Kui $\sqrt{2}$ võrduks lõpliku kümnendmurruga või lõpmatu perioodilise kümnendmurruga, siis peaks ta olema ratsionaalarv. Eespool tõestasime aga, et ühikruudu diagonaali pikkus ei avaldu ratsionaalarvuna.

Et aga $\sqrt{2}$ avaldub koma abil kirjutatud arvuna, siis saab see olla ainult lõpmatu mitteperioodiline kümnendmurd.

Lõpmatute mitteperioodiliste kümnendmurdudena avalduvad näiteks $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{7}$; $\sin 16°$; $\tan 382°$; $\log 4{,}32$; π jne.

Kõiki neid arve, mis avalduvad lõpmatute mitteperioodiliste kümnendmurdudena, nimetatakse irratsionaalarvudeks.

Nägime, et irratsionaalarvule $\sqrt{2}$ vastas arvteljel kindel punkt. Saab näidata, et

igale irratsionaalarvule vastab arvteljel kindel punkt

ning et

arvtelje igale punktile vastab kas kindel ratsionaalarv või kindel irratsionaalarv.

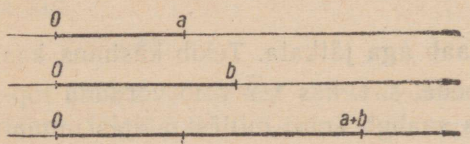
6.4.3. REAALARVUD. TEHTED REAALARVUDEGA.

Kui ratsionaalarvude hulgale lisame irratsionaalarvude hulga, saame reaalarvude hulga.

Tähistades irratsionaalarvude hulga tähega I ja reaalarvude hulga tähega R, võime kirjutada, et

$Q \cup I = R.$

a) Edasi vajab selgitamist aritmeetiliste tehete sooritamise võimalikkus reaalarvude hulgas, sest oskame neid sooritada vaid ratsionaalarvudega. Igale reaalarvule vastab arvteljel kindla



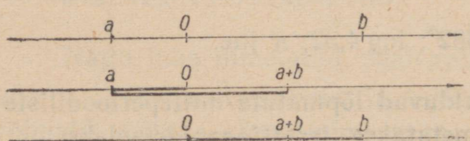
JOON. 142.

pikkusega ja kindla suunaga lõik. Seega on kahe reaalarvu liitmine tõlgendatav kahe ühel ja samal sirgel asetseva lõigu liitmisena (joon. 142). See operatsioon on alati teostatav ja seega

kui $a \in R$ ja $b \in R$, siis $a+b \in R$,

s. t.

reaalarvude hulk on kinnine liitmise suhtes.



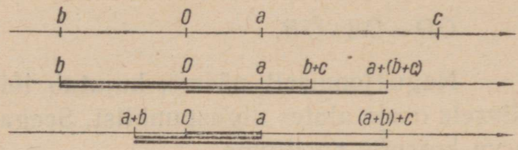
JOON. 143.

Jooniselt 143 on loetav, et

reaalarvude liitmine on kommutatiivne,

ja jooniselt 144, et

reaalarvude liitmine on assotsiatiivne.



JOON. 144.

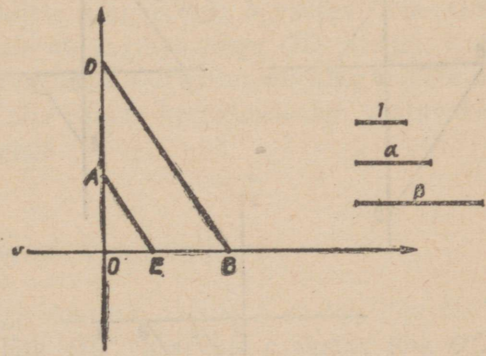
Neutraalseks arvuks liitmise suhtes jääb ka reaalarvude hulgas arv 0, sest

$$a+0=0+a=a,$$

ja kui arv $a \in R$, siis tema **vastandarvuks** liitmise suhtes on $-a \in R$, sest

$$a+(-a)=0.$$

b) Et selgitada reaalarvude hulga kinnisust korrutamise suhtes, tuleb näidata, et kui arvule $a \in R$ vastab lõik OA ja arvule $b \in R$ lõik OB, siis ka korrutisele ab vastab kindel lõik.



JOON. 145.

Näitame seda joonise 145 abil. Olgu $a>0$ ja $b>0$. Kanname lõigu OA alates alguspunktist ordinaatteljele, lõigu OB abstsissteljele ja ühiku pikkuse lõigu OE samuti abstsissteljele. Ühendame punktid A ja E ning tõmbame selle lõiguga paralleelse lõigu BD. Lõigu OD pikkus ongi võrdne lõikude OA ja DB pikkuste korrutisega.

Tõepoolest, kolmnurgad OEA ja OBD on sarnased ja seega

$$\frac{OB}{OE}=\frac{OD}{OA}.$$

Et $OE=1$, siis

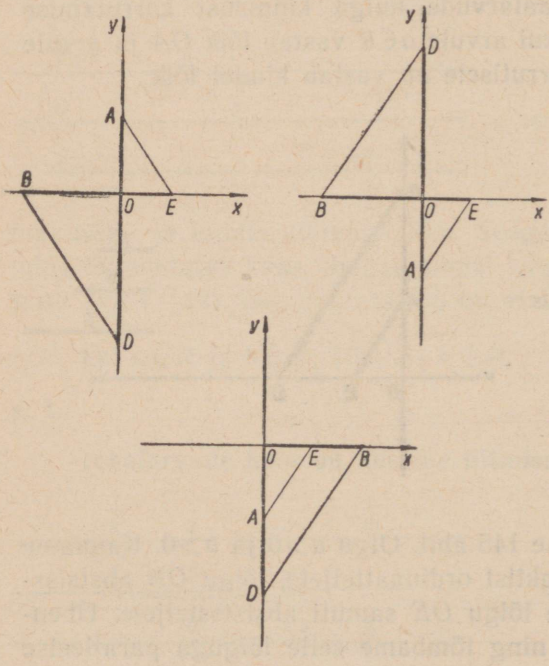
$$OD=OA\cdot OB.$$

Nagu joniselt näeme, kujutub lõik OD ordinaattelje positiivsele osale alates alguspunktist. Seega on kahe positiivse reaalarvu korrutis positiivne.

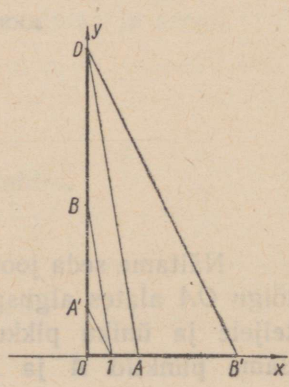
Kui tegurid pole mõlemad positiivsed, siis kujutame negatiivsetele arvudele vastavad lõigud vastava telje negatiivsele poolele ja samasuguse konstruktsiooni abil nagu ennegi (vt. joon. 146) selgitame nii korrutise olemasolu kui ka korrutise märgi. Seega,

reaalarvude hulk on kinnine korrutamise suhtes.

c) Joniselt 147 näeme, et kui ühikule vastav lõik ja arvule

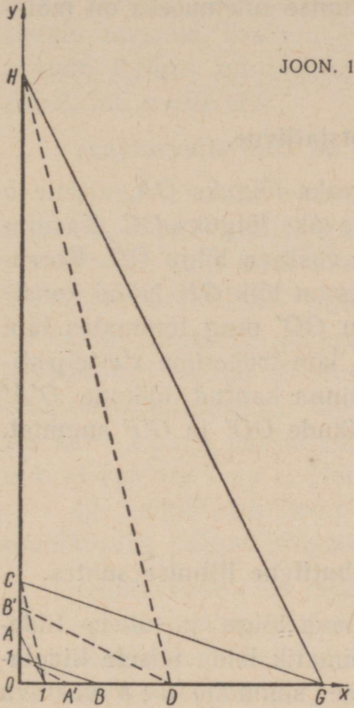


JOON. 146.

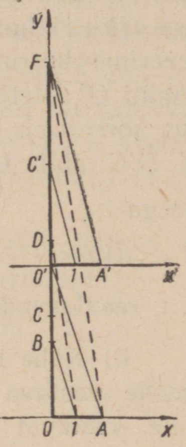


JOON. 147.

JOON. 148.



JOON. 149.



a vastav lõik OA kanda x-teljele ning arvule b vastav lõik OB y-teljele, siis saame korrutisele ab vastava lõigu OD y-teljel. Kui aga kanname arvule b vastava lõigu OB' x-teljele ning arvule a vastava lõigu OA' y-teljele, siis saame korrutisele ba vastavaks lõiguks lõigu OD y-teljel. Seega

$$ab = ba,$$

s. t. **reaalarvude korrutamine on kommutatiivne.**

Joonisel 148 on esialgu kantud arvule a vastav lõik OA' x-teljele, arvule b vastav lõik OB' ja arvule c vastav lõik OC y-teljele. Korrutisele ab vastav lõik OD on konstrueeritud x-teljele ja korrutisele $(ab)c$ vastav lõik OH y-teljele. Seejärel on arvule a vastav lõik OA ja arvule c vastav lõik OC paigutatud y-teljele ning arvule b vastav lõik OB x-teljele. Korrutisele bc vastav lõik OG on konstrueeritud x-teljele ja korrutisele $a(bc)$

vastav lõik OH y-teljele. Et konstrueerimise tulemuseks on mõlemal juhul seesama lõik, siis

$$(ab)c = a(bc),$$

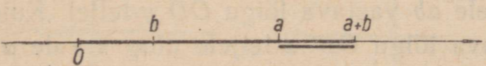
s. t. **reaalarvude korrutamine on assotsiatiivne.**

Joonisel 149 on arvule a vastavaks lõiguks OA, arvule b vastavaks lõiguks OB ja arvule c vastavaks lõiguks OC. Kasutades lõikude liitmist saame arvule $b+c$ vastava lõigu OD. Korrutise $a(b+c)$ konstrueerimise tulemuseks on lõik OF. Nüüd konstrueerime korrutisele ab vastava lõigu OO' ning tõmmates läbi punkti O' x-teljega paralleelse telje x', konstrueerime $x'y$-teljestikus korrutisele ac vastava lõigu $O'F$ sinna kantud lõikude $O'A'$ ja $O'C$ abil. Lõik OF esitab nüüd lõikude OO' ja $O'F$ summat. Seega

$$a(b+c) = ab + ac,$$

s. t. **reaalarvude korrutamine on distributiivne liitmise suhtes.**

d) Kahe reaalarvu summale vastava lõigu ja ühele liidetavale vastava lõigu abil on ikka võimalik leida teisele liidetavale vastavat lõiku. Selleks võetakse summale $a+b$ vastava lõigu alguspunktiks telje punkt O ja sama lõigu lõpp-punkt liidetavale b vastava lõigu alguspunktiks (vt. joon. 150). Tee sama



JOON. 150.

konstruktsioon läbi ka juhul, kui summa või antud liidetav on negatiivne!

Et summa ja ühe liidetava järgi on reaalarvude hulgas teine liidetav ikka leitav, siis võime öelda, et reaalarvude hulgas on võrrand $a+x=b$ alati lahenduv ehk

reaalarvude hulk on kinnine lahutamise suhtes.

e) Kahe reaalarvu korrutisele vastava lõigu ja ühele tegurile vastava lõigu abil saab ikka konstrueerida teisele tegurile vastavat lõiku. Selleks on joonisel 145 ordinaatteljele kantud mõlemad antud lõigud OD ja OA ning reaalteljele ühiklõik OE.

Meile juba tuttava konstruktsiooni abil saame abstsissteljel otsitavale tegurile vastava lõigu OB. Seega võime öelda, et reaalarvude hulgas on võrrand $ax=b$ alati lahenduv (välja arvatud juhul, kui $a=0$) ehk

reaalarvude hulk on kinnine jagamise suhtes.

f) Et lõpmatu mitteperioodilise kümnendmurru üleskirjutamine on võimatu, siis ei saa irratsionaalarvudega sooritada tehteid täpselt, vaid tuleb kasutada nende ligikaudseid väärtusi ulatuses, mis praktiliselt vajalikuks osutub. Näiteks, kui ülesandeks on leida ringjoone pikkus $2\pi r$ ja on teada, et $r=\sqrt{5}$ dm, siis arvutamisel võime piirduda väärtusega 2,24, mis on raadiuse pikkuseks millimeetri täpsusega, samuti piirdume siis π avaldises kahe kohaga pärast koma (3,14). Vastuseks saame 14,1 (dm), s. t. et vastuse viga ei ületa viit sajandikku.

g) Selgita, nii nagu seda tehti ratsionaalarvude hulgas, et reaalarvude hulgas jäävad kehtima järgmised omadused:

reaalarvude hulk sisaldab lõpmata palju arve;
reaalarvud on järjestatavad suuruse järgi;
reaalarvude hulgas pole võimalik kindlaks määrata ühegi arvu naaberarve.

Ratsionaalarvude hulka nimetasime tihedaks. Osutus aga, et arvtelje igale punktile ei leidu vastavat ratsionaalarvu. Neile punktidele vastasid irratsionaalarvud. Seetõttu ütlemegi, et reaalarvude hulk ei ole mitte ainult tihe, vaid

reaalarvude hulk on pidev.

Ülesandeid.

517. Leia graafiliselt reaalarvudele $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$ ja $\sqrt{13}$ vastavad lõigud.

518. Leia graafiliselt reaalarvude $\sqrt{5}$ ja $\sqrt{13}$ summa, vahe, korrutis ja jagatis.

519. Leia reaalarvude $\sqrt{5}$ ja 3,14 summa ja korrutis, võttes ka $\sqrt{5}$ ligikaudse väärtuse kahe kohaga pärast koma, juhul kui

a) 3,14 on täpne arv;

b) 3,14 on ligikaudne arv.

520. Teosta järgmised tehted, võttes tabelist irratsionaalarvud kolme kohaga pärast koma.

a) 4π d) $\sqrt{3}\cdot\tan 73°12'$

b) $3\sin 18°16'$ e) $\pi\cdot\log 0{,}346$

c) $\frac{1}{2}\log 36{,}25$ f) $\sqrt[3]{18}+\sqrt{5}\cdot\log\pi-\cos\frac{\pi}{4}$

521. Kui võimalik, siis leia tulemus täpselt, kui ei, siis sajandiku täpsusega.

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$ c) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{25}$ e) $\sqrt{6}\cdot\sqrt[3]{12}$

b) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{9}$ d) $\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{4}$ f) π^2

522. Kumb on suurem?

a) π või 3,14 e) $\sin 50°30'$ või 0,77

b) $\sqrt{2}$ või 1,42 f) π või $\sqrt{10}$

c) $\sqrt{3}$ või 1,8 g) 3,4842 või $6\sqrt{2}$

d) $\log 31$ või 1,5 h) $\sqrt{3}$ või $\frac{97}{56}$ või $\frac{71}{41}$

523. Leia järgmiste arvude vastandarv ja pöördarv.

a) $-\frac{2}{3}$ c) $1,(5)$

b) $\sqrt{5}+1$ d) $-1{,}252552555\ldots$

524. Näita, et reaalarvude hulgas kehtib seos:

a) $a(b+c+d)=ab+ac+ad$;

b) $a(b-c)=ab-ac$.

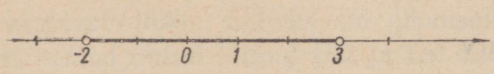
525. Kujuta arvteljel järgmised arvuhulgad:

a) $x>2$, kui $x\in R$; d) $-3\leqslant x\leqslant 2$, kui $x\in N$;

b) $x\leqslant -2$, kui $x\in R$; e) $x<1$ või $x>3$, kui $x\in R$;

c) $-1\leqslant x\leqslant 3$, kui $x\in R$; f) $1<x\leqslant 9$, kui $x\in N$.

Näide. $-2<x\leqslant 3$, kui $x\in R$. Selle ülesande lahendiks on poolkinnine vahemik arvteljel (vt. joon. 151).



JOON. 151.

526. Nimeta üks ratsionaal- ja üks irratsionaalarv antud arvupaaride vahel:

a) 2 ja 3; d) 0,(14) ja 0,143;

b) $-\frac{1}{4}$ ja $-\frac{3}{16}$; e) 2,452657 ... ja 2,452781 ... ;

c) 3,(5) ja 3,56; f) 0,2781453 ... ja 0,2781462 ...

527. Tõesta näidete varal, et irratsionaalarvude hulk ei ole kinnine korrutamise suhtes.

528. Lahenda järgmised võrrandid:

a) $\log_2(7x-9)+\log_2(3x-4)=2$, kui $x \in N$;

b) $\frac{\log(35-x^3)}{\log(5-x)}=3$, kui $x \in R$;

c) $4^{x+1}+\frac{64}{4^x}=257$, kui $x \in N$;

d) $3^{x+1}+\frac{18}{3^x}=29$, kui $x \in Q$.

6.5. KOMPLEKSARVUD.

6.5.1. RUUTVÕRRANDI LAHENDUVUS.

Reaalarvude hulga laiendamise ajendiks on jõuda niisugusesse arvuhulka, kus iga ruutvõrrand oleks lahenduv.

Teatavasti on ruutvõrrandi

$$ax^2+bx+c=0$$

lahendiks

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Reaalarvude hulgas on see ruutvõrrand lahenduv tingimusel, et

$$b^2-4ac\geqslant 0.$$

Seame nüüd eesmärgiks täiendada reaalarvude hulka niisuguste arvudega, mille kaudu avalduksid ruutvõrrandi lahendid juhul, kui

$$b^2-4ac<0.$$

6.5.2. ARV i.

Vaatleme paralleelselt kaht võrrandit

$$x^2-1=0 \text{ ja } x^2+1=0.$$

Need võrrandid on esitatavad kujul

$$x^2=1 \text{ ja } x^2=-1.$$

Esimese võrrandi lahendamiseks võetakse võrrandi mõlemast poolest ruutjuur ja saadakse

$$x=\pm\sqrt{1}$$

ehk

$$x=\pm 1.$$

Kasutades teise võrrandi lahendamiseks sama võtet, saame võrrandi lahendiks sümboli

$$x=\pm\sqrt{-1},$$

millel reaalarvude hulgas pole tähendust.

Laiendame reaalarvude hulka arvuga, mille ruut on -1. Tähistades selle arvu tähega i võime kirjutada, et

$$\boxed{i^2=-1.}$$

Sellise arvu olemasolu korral on võrrandil $x^2+1=0$ lahendid olemas:

$$x=\pm i$$

ehk

$$x_1=-i,\ x_2=i.$$

N ä i d e 1. Lahendada võrrand $x^2+16=0$.

$$x^2+16=0,$$

millest

$$x^2=-16$$

ja

$$x=\pm\sqrt{-16}.$$

Et

$$\sqrt{-16}=\sqrt{16\cdot(-1)}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{-1}=4i,$$

siis

$$x=\pm 4i,$$

s. t. et

$$x_1=-4i \text{ ja } x_2=4i.$$

N ä i d e 2. Lahendada võrrand

$$x^2+2x+10=0.$$

Kasutades taandatud ruutvõrrandi lahendivalemit, saame

$$x=-1\pm\sqrt{1-10}$$

ehk

$$x=-1\pm\sqrt{-9}.$$

Et

$$\sqrt{-9}=\sqrt{9\cdot(-1)}=3i,$$

siis

$$x=-1\pm 3i$$

ehk

$$x_1=-1+3i \text{ ja } x_2=-1-3i.$$

6.5.3. IMAGINAARARVUD.

Arvu i nimetatakse **imaginaarühikuks.** Eelnenud näidetes saime võrrandi lahendeiks arvud $\pm 4i$ ja $-1\pm 3i$.

Arve kujul a+bi, kus a∈R, b∈R ja b≠0 ning i on imaginaarühik, nimetatakse imaginaararvudeks.

Näiteks arvud

$$5+2i,\ -3+\frac{1}{2}i,\ \sqrt{2}i \text{ ja } 2,(35)i$$

on imaginaararvud.

Tähistame imaginaararvude hulga tähega J.

Kui imaginaararvus $a+bi$ on $a=0$, siis saame nn. **puhtimaginaararvu.**

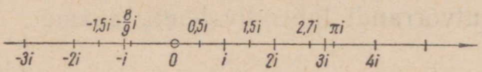
Näiteks on arvud

$$i,\ -3i,\ 2{,}7i,\ -\frac{8}{9}i \text{ ja } \pi i$$

puhtimaginaararvud.

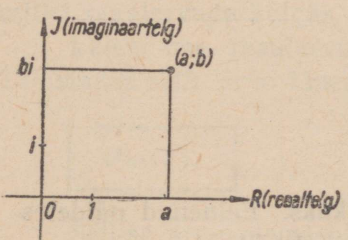
Võtame sirge (joon. 152) ja seame tema mingile punktile O vastavusse arvu 0. Punktist O paremale võtame teise punkti, millele seame vastavusse imaginaarühiku i. Sellel teljel saame nüüd kujutada näiteks arve $2i$, $-1{,}5i$ jne., s. t. et selle sirge igale punktile vastab üks puhtimaginaararv, välja arvatud punkt 0, ja samuti vastupidi, igale puhtimaginaararvule vastab selle sirge üks punkt.

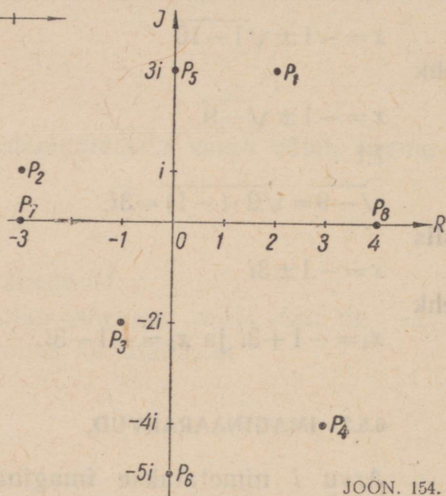
Arvtelge, mille igale punktile (välja arvatud alguspunkt) vastab üks puhtimaginaararv, nimetatakse **imaginaarteljeks.**



JOON. 152.

JOON. 153.





JOON. 154.

Imaginaararvude $a+bi$ geomeetriliseks kujutamiseks asetatakse reaaltelg, s. o. telg, mille igale punktile vastab reaalarv, ja imaginaartelg teineteisega risti nii, et nende alguspunktid ühtivad. Igale arvule $a+bi$ seatakse nüüd vastavusse nende arvtelgedega määratud tasapinna, nn. **komplekstasapinna,** punkt $(a;\ b)$ (joon. 153). Et $b \neq 0$, siis vastavad imaginaararvudele $a+bi$ selle tasapinna kõik punktid (välja arvatud reaaltelg) ja, vastupidi, igale reaalteljel mitteasuvale punktile vastab imaginaararv.

Joonisel 154 on kujutatud punktid P_1, P_2, P_3 ja P_4, mis vastavad imaginaararvudele $2+3i$, $-3+i$, $-1-2i$ ja $3-4i$. Punktidele P_5 ja P_6 vastavad puhtimaginaararvud $3i$ ja $-5i$ ning punktidele P_7 ja P_8 reaalarvud -3 ja 4.

6.5.4. KOMPLEKSARVUD.

Ruutvõrrand $ax^2+bx+c=0$ osutus lahenduvaks reaalarvude hulgas, kui $b^2-4ac \geqslant 0$, ja imaginaararvude hulgas, kui $b^2-4ac < 0$. Seega on ruutvõrrand alati lahenduv niisuguses arvuhulgas, mis sisaldab nii reaalarvud kui ka imaginaararvud. Moodustamegi uue arvuhulga, mis sisaldab kõik reaalarvud ja kõik imaginaararvud, ja nimetame seda arvuhulka **kompleksarvude hulgaks.** Tähistades kompleksarvude hulga tähega K, võime kirjutada, et

$$R \cup J = K.$$

Seega,

arve kujul a+bi, kus a ∈ R ja b ∈ R ning i on imaginaarühik, nimetatakse kompleksarvudeks.

Kompleksarvud on reaalarvud, kui $b=0$, ja imaginaararvud, kui $b \neq 0$.

Kompleksarvus $a+bi$ nimetatakse arvu a tema **reaalosaks,** arvu bi tema **imaginaarosaks** ja arvu b tema **imaginaarosa kordajaks.**

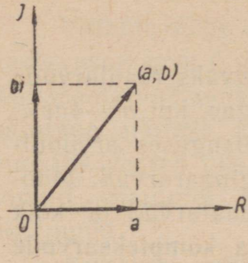
Igale kompleksarvule vastab komplekstasapinnal kindel punkt ja, vastupidi, igale punktile komplekstasapinnal vastab kindel kompleksarv. Sellest järeldub, et

kompleksarvude hulk sisaldab lõpmata palju arve.

ja et

kompleksarvude hulk on pidev.

Kompleksarvu võib tõlgendada komplekstasapinnal ka nn. **kohavektorina,** s. o. vektorina, mille alguspunkt on koordinaatide alguspunktis ja lõpp-punkt kompleksarvule vastavas punktis. Reaalarvud kujutuvad siis kohavektoreina reaalteljel ja puhtimaginaararvud kohavektoreina imaginaarteljel. Liites reaalarvule a ja puhtimaginaararvule bi vastavad vektorid, saame vektori, mille alguspunkt on koordinaatide alguspunktis ja lõpppunkt punktis $(a;\ b)$ (joon. 155), s. t. kohavektori, mis vastab kompleksarvule $a+bi$. Seega on kompleksarvus esineval märgil «+» ka vastavate vektorite juures liitmise tähenduse. Niisiis, igale kompleksarvule komplekstasapinnal vastab kindel kohavek-



JOON. 155.

tor (arvule 0 vastavat vektorit nimetatakse nullvektoriks) ja, vastupidi, igale kohavektorile komplekstasapinnal vastab kindel kompleksarv.

On loomulik lugeda võrdseteks need kompleksarvud, millele vastab komplekstasapinnal üks ja sama punkt või kohavektor ja, vastupidi, kui kaks kompleksarvu on võrdsed, siis vastab neile komplekstasapinnal üks ja sama punkt. Seega,

kui $a+bi \in K$ ja $c+di \in K$ ning $a=c$ ja $b=d$, siis $a+bi=$ $=c+di$,

ja, vastupidi,

kui $a+bi=c+di$, siis $a=c$ ja $b=d$.

Et arv 1 ja arv i pole omavahel suuruse poolest võrreldavad, siis ei saa suuruse poolest võrrelda ka imaginaararve, mis ei ole puhtimaginaararvud. Kahe puhtimaginaararvu jaoks võime kokku leppida suurusjärjestuses, lugedes suuremaks selle arvu, kumma reaalarvuline kordaja on suurem. Näiteks $2i > -3i$. Üldreeglina aga

kompleksarve ei saa järjestada suuruse järgi.

Sellest ja juba varem teada olevast tõsiasjast, et reaalarvudel pole naaberarve, järeldub, et

kompleksarvudel pole naaberarve.

Ülesandeid.

529. Esita tasapinnal punktid, mis vastavad kompleksarvudele: $2{,}5i$; $-\frac{4}{3}i$; 2; -5; $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$, $3-\frac{3}{4}i$; $-1{,}5-2{,}5i$; $-3{,}5+2{,}5i$.

530. Missugused kompleksarvud vastavad ruudu tippudele, kui ruudu diagonaalide lõikepunkt asetseb koordinaatide alguspunktis ja ruudu küljed pikkusega 2 on paralleelsed telgedega?

531. Leia korrapärase kuusnurga tippudele vastavad kompleksarvud, kui kuusnurga diagonaalid lõikuvad koordinaatide alguspunktis ja tema üheks tipuks on $A(3; 0)$.

6.5.5. KOMPLEKSARVUDE LIITMINE JA LAHUTAMINE.

Tehted kompleksarvude hulgas defineeritakse eeldusel, et ka kompleksarvude liitmisel ja korrutamisel jäävad kehtima kommutatiivsuse, assotsiatiivsuse ja distributiivsuse seadused.

a) KOMPLEKSARVUDE LIITMINE.

Olgu antud kompleksarvud $a+bi$ ja $c+di$. Rakendades nimetatud seadusi leiame nende arvude summa.

$$\begin{aligned}&(a+bi)+(c+di)=[(a+bi)+c]+di=\\&=[a+(bi+c)]+di=[a+(c+bi)]+di=\\&=[(a+c)+bi]+di=(a+c)+(bi+di)=\\&=(a+c)+(b+d)i.\end{aligned}$$

Selgita, missuguseid seadusi on kasutatud selles võrduste reas!

Niisiis,

$$\underline{(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.}$$

Kahe kompleksarvu summa on kompleksarv, mille reaalosa on võrdne liidetavate reaalosade summaga ja imaginaarosa kordaja on võrdne liidetavate imaginaarosade kordajate summaga.

Seega,

kompleksarvude hulk on kinnine liitmise suhtes.

b) KOMPLEKSARVUDE LAHUTAMINE.

Lahutamist mõistame ka kompleksarvude vallas liitmise pöördtehtena, s. t. kui $q \in K$ ja $p \in K$, siis vajab selgitamist, kas leidub niisugust kompleksarvu z, mis rahuldaks võrrandit $q+z=$ $=p$.

Olgu $p=a+bi$, $q=c+di$ ja ülesandeks on leida $z=x+yi$ nii, et oleks rahuldatud võrrand

$$(c+di)+(x+yi)=a+bi.$$

Liitmise eeskirja järgi

$$x+c=a \text{ ja } y+d=b$$

ning siit

$$x=a-c \text{ ja } y=b-d.$$

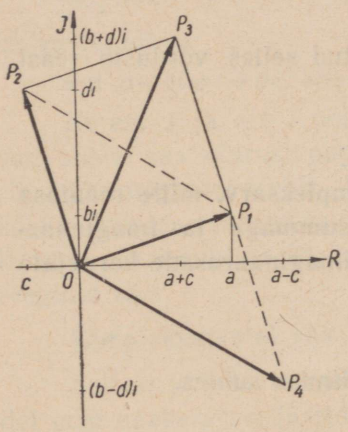
Seega,

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$$

Niisiis on võrrand $q+z=p$ kompleksarvude hulgas lahenduv ehk **kompleksarvude hulk on kinnine lahutamise suhtes.**

Saadud tulemuse sõnastame järgmiselt:

kahe kompleksarvu vahe on kompleksarv, mille reaalosa on võrdne antud kompleksarvude reaalosade vahega ja imaginaarosa kordaja on võrdne antud kompleksarvude imaginaarosade kordajate vahega.



JOON. 156.

Joonisel 156 on esitatud kompleksarvude $a+bi$ ja $c+di$ vastavad punktid P_1 ja P_2; samuti kompleksarvudele $(a+c)+(b+d)i$ ja $(a-c)+(b-d)i$ vastavad punktid P_3 ja P_4. Jooniselt näeme, et

$$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}=\overrightarrow{OP_3}$$

ja

$$\overrightarrow{OP_1}-\overrightarrow{OP_2}=\overrightarrow{OP_4},$$

s. t. $\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_4}=\overrightarrow{OP_1}$.

Seega,

iga kahe kompleksarvu liitmine on tõlgendatav vastavate kohavektorite liitmisena ja vahe — vastavate kohavektorite lahutamisena.

Ülesandeid.

532. Esita tasapinnal punktid, mis vastavad kompleksarvudele:

$2{,}5i$; $-\frac{4}{3}i$; 2; -5; $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$; $3-\frac{3}{4}i$; $-1{,}5-2{,}5i$; $-3{,}5+2{,}5i$.

533. Missugused kompleksarvud vastavad ruudu tippudele, kui ruudu diagonaalide lõikepunkt asetseb koordinaatide alguspunktis ja ruudu küljed pikkusega 2 on paralleelsed telgedega?

534. Leia korrapärase kuusnurga tippudele vastavad kompleksarvud, kui kuusnurga diagonaalid lõikuvad koordinaatide alguspunktis ja tema üheks tipuks on $A(3; 0)$.

535. Liida järgmised kompleksarvud.

a) $(2+3i)+4i$
b) $5i+2i$
c) $(5+4i)+(3-7i)$
d) $(2+5i)+(-2-2i)$
e) $(1+i)+(2+i)+(3+i)$
f) $(0{,}3-3{,}2i)+(1{,}5-0{,}8i)+(-4-i)$
g) $\left(1\frac{3}{4}+\frac{2}{3}i\right)+\left(1\frac{1}{2}-\frac{5}{6}i\right)+\left(-\frac{3}{4}-2i\right)$
h) $(0{,}8-0{,}2i)+(0{,}1-1{,}3i)+(1{,}5+0{,}7i)+(2{,}3-0{,}6i)$

536. Arvuta järgmised vahed.

a) $(5+3i)-(2+i)$
b) $(5+4i)-(2-3i)$
c) $(2-3i)-(2+3i)$
d) $(-2+4i)-(2+i)$

537. Leia graafiliselt järgmised summad.

a) $(4-i)+(3+2i)$
b) $(-2+3i)+(1+2i)$
c) $(-3-4i)+(-2-i)$
d) $(2+i)+(3+3i)$

538. Leia graafiliselt järgmised vahed.

a) $(3-2i)-(2+i)$
b) $(2+3i)-(4-2i)$
c) $(-3+2i)-(2-3i)$
d) $(-2-2i)-(2+2i)$

539. Liida ja lahuta.

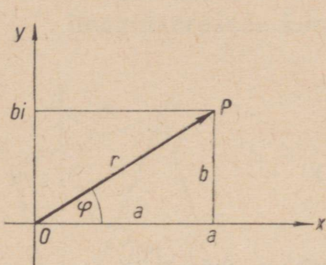
a) $(5x-3yi)+(-2+8yi)-(2x-yi)-(7x-2yi)$
b) $(2c-8di)-(5c-2di)+(c-di)-(-4c+3di)$

540. Leia x ja y väärtused nii, et kehtiks võrdus:

a) $2+5ix-3iy=14i+3x-5y$;
b) $\frac{8}{x}+iy-2=7i-\frac{10}{x}+y$.

Esitame tasapinnal asetsevad punktid uute koordinaatide kaudu. Nendeks koordinaatideks võtame punkti kohavektori pikkuse r ja nurga φ, mille see kohavektor moodustab x-teljega (joonis 157). Koordinaat r kui vektori pikkus on alati positiivne, φ on aga nurk 0-st kuni 2π-ni.

Jooniselt näeme, et täisnurksest kolmnurgast saame välja kirjutada seosed:



$$\boxed{\begin{aligned} a &= r\cos\varphi \\ b &= r\sin\varphi \end{aligned}}$$

JOON. 157.

Seega,

$$a+bi=r\cos\varphi+ir\sin\varphi.$$

Võttes r sulgude ette, saame

$$a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Avaldist $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ nimetatakse kompleksarvu trigonomeetriliseks kujuks.

Koordinaati r nimetatakse kompleksarvu **mooduliks** ja nurka φ kompleksarvu **argumendiks.**

Avaldist $a+bi$ nimetatakse kompleksarvu algebraliseks kujuks.

Olgu kompleksarv antud algebralisel kujul $a+bi$ ja ülesandeks on esitada see arv trigonomeetrilisel kujul. Et leida moodulit ja argumenti, selleks tuleb lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} a=r\cos\varphi \\ b=r\sin\varphi \end{cases}$$

Jagades teise võrrandi esimesega, saame

$$\frac{b}{a}=\frac{r \sin \varphi}{r \cos \varphi}$$

ja siit

$$\tan \varphi=\frac{b}{a}.$$

Tõstame nüüd süsteemi kuuluvate võrrandite mõlemad pooled ruutu, saame

$$a^2=r^2 \cos^2 \varphi$$
$$b^2=r^2 \sin^2 \varphi$$

ja liidame nende võrrandite vastavad pooled:

$$a^2+b^2=r^2(\cos^2 \varphi+\sin^2 \varphi).$$

Siit

$$a^2+b^2=r^2,$$

millest avaldame tundmatu r:

$$r=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Miks ei või kehtida võrdus $r=-\sqrt{a^2+b^2}$?

Seega, kui kompleksarv on antud algebralisel kujul $a+bi$, siis tema trigonomeetrilise kuju saamiseks leiame r ja φ seostest

$$\boxed{\boldsymbol{r}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2} \text{ ja } \tan \varphi=\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}}$$

Nurga φ määramise juures arvestame veel kas a või b märki. Miks?

N ä i d e 1. Olgu antud kompleksarv $2+5i$. Leida tema trigonomeetriline kuju.

Antud kompleksarvu trigonomeetrilise kuju saamiseks leiame r ja φ:

$$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29};$$

$$\tan \varphi=\frac{5}{2}=2{,}5, \quad \varphi=68°12' \text{ või } \varphi=248°12'.$$

Et φ omab väärtusi $0°$-st kuni $360°$-ni ja tangensi väärtused on positiivsed I ja III veerandi nurkade puhul, siis tuleb selgitada, mitmendas veerandis asub komplekstasandil vastav punkt. Et $a>0$, siis on punkt I veerandis ja seega $\varphi=68°12'$.

Niisiis,

$$2+5i=\sqrt{29}(\cos 68°12'+i \sin 68°12').$$

N ä i d e 2. Teisendada trigonomeetrilisele kujule arv $-4-2i$.

$$r=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2}=\sqrt{20}$$

$$\tan\varphi=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}.$$

Et $b<0$, siis asub punkt III veerandis ja

$$\varphi=180°+26°34'=206°34'.$$

Niisiis,

$$-4-2i=\sqrt{20}(\cos 206°34'+i \sin 206°34').$$

Ülesandeid.

541. Mitmendas veerandis asetsevad järgmistele kompleksarvudele vastavad punktid?

a) $4-3i$ c) $5+3i$ e) $-3+8i$
b) $-2+3i$ d) $-2-i$ f) $2-i$

542. Leia eelmises ülesandes antud kompleksarvude trigonomeetriline kuju.

543. Teisenda antud kompleksarvud trigonomeetrilisele kujule.

a) i c) 5 e) $3i$
b) $-4i$ d) -2 f) 1

544. Teisenda antud kompleksarvud algebralisele kujule.

a) $2(\cos 45°+i \sin 45°)$ e) $5(\cos 18°35'+i \sin 18°35')$
b) $3(\cos 120°+i \sin 120°)$ f) $2{,}6(\cos 104°20'+i \sin 104°20')$
c) $8(\cos 225°+i \sin 225°)$ g) $\frac{7}{12}(\cos 222°22'+i \sin 222°22')$
d) $12(\cos 300°+i \sin 300°)$ h) $\frac{13}{5}(\cos 314°48'+i \sin 314°48')$

545. Teisenda antud kompleksarvud algebralisele kujule.

a) $\cos 0° + i \sin 0°$

b) $\cos 90° + i \sin 90°$

c) $\cos 180° + i \sin 180°$

d) $\cos 270° + i \sin 270°$

e) $\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi$

f) $\pi(\cos \pi + i \sin \pi)$

g) $\frac{5}{6}\left(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi\right)$

h) $\frac{\pi}{2}\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$

6.5.7. KOMPLEKSARVUDE KORRUTAMINE.

1. Olgu antud kaks kompleksarvu $a+bi$ ja $c+di$. Leiame nende korrutise.

$$\begin{aligned}
&(a+bi)(c+di) = (a+bi)c + (a+bi)di = \\
&= (ac+bic) + (adi+bidi) = (ac+bci) + (adi+bdi^2) = \\
&= [(ac+bci) + adi] + bd(-1) = [ac + (bci+adi)] + (-bd) = \\
&= ac + [(bc+ad)i + (-bd)] = ac + [(-bd) + (ad+bc)i] = \\
&= (ac-bd) + (ad+bc)i.
\end{aligned}$$

Selgita, missuguseid seadusi on teisendamisel kasutatud!

Seega

$$\underline{(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i.}$$

N ä i d e. Olgu antud kompleksarvud

$4-3i$ ja $-2-5i$.

Leiame nende korrutise:

$(4-3i)\cdot(-2-5i) = (-8-15) + (-20+6)i = -23-14i.$

2. Leiame kompleksarvude korrutamise reegli ka juhul, kui tegurid on antud trigonomeetrilisel kujul.

Olgu antud kompleksarvud

$r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ ja $r_2(\cos \varphi + i \sin \varphi_2)$.

Nende korrutis on siis

$$\begin{aligned}
&[r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)] r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)] = \\
&= r_1 r_2(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\
&= r_1 r_2(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 +
\end{aligned}$$

$+i^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) = r_1 r_2[(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) +$
$+ i(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2)] = r_1 r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) +$
$+ i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$.

Seega,

kahe trigonomeetrilisel kujul antud kompleksarvu korrutis on kompleksarv, mille mooduliks on antud kompleksarvude moodulite korrutis ja argumendiks antud kompleksarvude argumentide summa.

Näide. Olgu antud kompleksarvud

$2(\cos 15° + i\sin 15°)$ ja $3(\cos 110° + i\sin 110°)$.

Nende korrutiseks on siis

$6(\cos 125° + i\sin 125°)$.

Et iga kahe kompleksarvu korrutis on jälle kompleksarv, siis

kompleksarvude hulk on kinnine korrutamise suhtes.

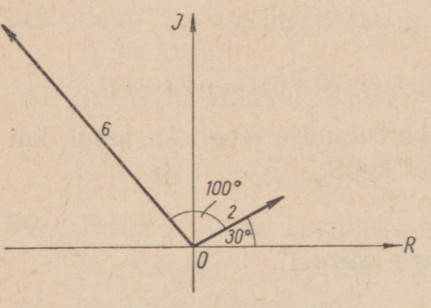
Trigonomeetrilisel kujul antud kompleksarvude korrutamise reegli võime saada ka nii, et algebralisel kujul leitud kompleksarvude korrutises teeme vastavad asendused:

$a = r_1\cos\varphi_1$, $b = r_1\sin\varphi_1$ ja $c = r_2\cos\varphi_2$, $d = r_2\sin\varphi_2$,

siis

$$(ac-bd) + (ad+bc)i = r_1 r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$

Kontrolli selle võrduse kehtivust!



JOON. 158.

Tuginedes trigonomeetrilisel kujul antud kompleksarvude korrutamise eeskirjale, saame kompleksarvude korrutamist tõlgendada geomeetriliselt järgmiselt.

Kujutame koordinaattelјestikus ühele tegurile vastava kohavektori. Korrutisele vastava kohavektori saamiseks tuleb antud vektorit pöörata teise teguri argumendi võrra ja muuta siis vektori pikkust teise teguri mooduli kordseks. Joonisel 158 on esitatud geomeetriliselt kompleksarvude

$$2(\cos 30° + i \sin 30°) \quad \text{ja} \quad 3(\cos 100° + i \sin 100°)$$

korrutamine.

Kompleksarve a+bi ja a−bi nimetatakse kaaskompleksarvudeks.

Nii on näiteks arvu $-3+2i$ kaaskompleksarvuks $-3-2i$. Korrutame kompleksarvu oma kaaskompleksarvuga:

$$(a+bi)(a-bi) = a^2+b^2.$$

Tulemuseks on reaalarv. (Näita seda ka geomeetriliselt!) Saadud võrdus näitab, et kompleksarvude vallas on võimalik ruutude summat lahutada tegureiks.

N ä i d e. $9+x^2 = (3+xi)(3-xi)$.

Ülesandeid.

546. Leia järgmiste kompleksarvude korrutised.

a) $3(\cos 72° + i \sin 72°) \cdot 5(\cos 68° + i \sin 68°)$

b) $4(\cos 113° + i \sin 113°) \cdot 2{,}3(\cos 118° + i \sin 118°)$

c) $2\left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi\right)$

d) $19(\cos 36° + i \sin 36°) \cdot 16\left(\cos \frac{6}{5}\pi + i \sin \frac{6}{5}\pi\right)$

547. Leia järgmiste kompleksarvude korrutised.

a) $2{,}5i \cdot 4i$

b) $(3+5i) \cdot 2$

c) $(-8-7i) \cdot (-3i)$

d) $(\sqrt{2}-i) \cdot (\sqrt{3}+i\sqrt{2})$

e) $(5+i\sqrt{3})(5-i\sqrt{3})$

f) $(\sqrt{k}+i\sqrt{n})(\sqrt{k}-i\sqrt{n})$

g) $(0{,}5+0{,}2i)(2+3i)$

h) $(1-2i)(5-i)$

548. Leia geomeetriliselt järgmiste kompleksarvude korrutis.

a) $2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) \cdot 3\left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi\right)$

b) $4(\cos 160° + i \sin 160°) \cdot \frac{1}{2}(\cos 80° + i \sin 80°)$

549. Lahuta tegureiks.

a) a^2+4

b) $1+c^2$

c) a^2+4b^2

d) $4m^2+9n^2$

e) $a+b$

f) $a+2$

1. Seame nüüd ülesandeks selgitada, kas võrrandil $qz=p$ on kompleksarvude hulgas lahend olemas. Olgu $p=a+bi$ ja $q=c+di$. Leida tuleb niisugune kompleksarv $z=x+yi$, mis rahuldaks võrrandit

$$(c+di)(x+yi)=a+bi.$$

Kompleksarvude korrutamise eeskirja kohaselt peavad kehtima võrdused:

$$\begin{cases} xc-yd=a; \\ xd+yc=b. \end{cases}$$

Lahendades selle võrrandisüsteemi, saame

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2} \text{ ja } y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

Seega

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

See tähendab, et võrrandil $qz=p$ on kompleksarvude hulgas alati lahend olemas, kui $q\neq 0$.

Seega,

kompleksarvude hulk on kinnine jagamise suhtes.

Saadud tulemuseni võib jõuda ka teisiti. Selleks laiendame murdu $\frac{a+bi}{c+di}$ nimetaja kaaskompleksarvuga:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}.$$

N ä i d e.

$$\frac{4-3i}{-2-i}=\frac{-8+3}{5}+\frac{6-(-4)}{5}i=-1+2i.$$

2. Leiame kompleksarvude jagamise eeskirja ka juhul, kui kompleksarvud on antud trigonomeetrilisel kujul.

Olgu ülesandeks teostada jagamine

$$\frac{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)},$$

s. t. tuleb leida niisugune kompleksarv $r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, mille korrutamisel nimetajaga saame lugeja, s. t. et

$$r_2 r_1 = r \text{ ja siit } r_2 = \frac{r}{r_1},$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi \text{ ja siit } \varphi_2 = \varphi - \varphi_1.$$

Niisiis,

$$\frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)} = \frac{r}{r_1}[\cos(\varphi - \varphi_1) + i\sin(\varphi - \varphi_1)].$$

Kui osutub, et $\varphi - \varphi_1 < 0$, siis tuleb see nurk asendada vastava positiivse nurgaga $360° + (\varphi - \varphi_1)$, mis kuulub argumendi võimalike väärtuste piirkonda.

On ju

$$\cos(\varphi - \varphi_1) = \cos[360° + (\varphi - \varphi_1)]$$

ja

$$\sin(\varphi - \varphi_1) = \sin[360° + (\varphi - \varphi_1)].$$

Näide.

$$\frac{2(\cos 20° + i\sin 20°)}{5(\cos 300° + i\sin 300°)} = 0{,}4(\cos 80° + i\sin 80°).$$

Et $20° - 300° = -280°$, siis tuleb argumendiks $360° - 280° = 80°$.

Trigonomeetrilisel kujul antud kompleksarvude jagamise reegli võime saada ka nii, et algebralisel kujul leitud kompleksarvude jagatises teeme vastavad asendused.

Kui $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$

ja $c = r_1\cos\varphi_1$, $d = r_1\sin\varphi_1$,

siis

$$\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i = \frac{r}{r_1}[\cos(\varphi - \varphi_1) + i\sin(\varphi - \varphi_1)].$$

Kontrolli selle võrduse kehtivust!

Ülesandeid.

550. Leia jagatis.

a) $\frac{3(\cos 80° + i\sin 80°)}{2(\cos 20° + i\sin 20°)}$

b) $\frac{10(\cos 292° + i\sin 292°)}{4(\cos 186° + i\sin 186°)}$

c) $\frac{\frac{5}{6}\left(\cos\frac{17}{36}\pi + i\sin\frac{17}{36}\pi\right)}{\frac{2}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$

d) $\frac{5{,}16(\cos 1{,}8\pi + i\sin 1{,}8\pi)}{1{,}11\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)}$

551. Leia jagatis.

a) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ d) $\frac{-2\sqrt{3}i+1}{1+2i\sqrt{3}}$ g) $\frac{a}{a+2i\sqrt{a}}$

b) $\frac{5+2i}{5-2i}$ e) $\frac{6-i}{6-2i}$ h) $\frac{a-bi}{b+ai}$

c) $\frac{3}{2+4i}$ f) $\frac{5-2i}{3i}$ i) $\frac{bi}{a+bi}$

552. Leia geomeetriliselt järgmiste kompleksarvude jagatis.

a) $4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right):2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

b) $0{,}5(\cos 320°+i\sin 320°):0{,}2(\cos 35°+i\sin 35°)$

6.6. KAKSLIIKMELISTE VÕRRANDITE LAHENDAMINE.

6.6.1. KAKSLIIKMELISE VÕRRANDI MÕISTE.

Võrrandit nimetatakse **kaksliikmeliseks,** kui temale saab anda kuju

$$x^n+m=0,$$

kus n on naturaalarv ja m — reaalarv.

Näiteks võrrandid

$$x+b=0,$$
$$x^2+d=0,$$
$$x^3+f=0,$$
$$x^4+k=0$$

on vastavalt esimese, teise, kolmanda ja neljanda astme kaksliikmelised võrrandid.

Võrrandi $x+b=0$ lahendiks on $x=-b$.

Võrrandi $x^2+d=0$ lahenditeks on $x_1=\sqrt{-d}$ ja $x_2=-\sqrt{-d}$.

Kui d on negatiivne, siis on juurealune avaldis positiivne ja me saame lahendeiks kaks märgilt erinevat reaalarvu.

Kui aga d on positiivne, siis saame lahendeiks imaginaararvud $i\sqrt{d}$ ja $-i\sqrt{d}$.

6.6.2. VÕRRANDI $x^3+a^3=0$ LAHENDAMINE.

Kolmanda astme kaksliikmelise võrrandi $x^3+f=0$ $(f>0)$ lahendite leidmiseks tähistame vabaliikme a^3-ga, kus $a>0$, s. t. $f=a^3$, ja vaatleme võrrandi

$$x^3+a^3=0$$

lahendamist.

Võrrandi vasaku poole kui kuupide summa saame lahutada tegureiks:

$$(x+a)(x^2-ax+a^2)=0.$$

Seega taandub antud võrrandi lahendamine kahe uue võrrandi lahendamisele:

$$x+a=0,$$

mille lahendiks on

$$x_1=-a,$$

ja

$$x^2-ax+a^2=0,$$

mille lahendeiks on

$$x_{2,3}=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-a^2}=\frac{a}{2}\pm\sqrt{-\frac{3}{4}a^2}=\frac{a}{2}\pm\frac{a}{2}\sqrt{-3}=\frac{a}{2}(1\pm i\sqrt{3}).$$

Seega on võrrandi $x^3+a^3=0$ lahendeiks (kui $a>0$):

$$x_1=-a;$$

$$x_2=\frac{a}{2}(1+i\sqrt{3});$$

$$x_3=\frac{a}{2}(1-i\sqrt{3}).$$

Näide. Lahendada võrrand $3x^3+4=0$.

Selle võrrandi teisendame kujule $x^3+\frac{4}{3}=0$.

Siin on $a^3=\frac{4}{3}$ ja seega $a=\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$.

Antud võrrandi lahendeiks on:

$$x_1=-\sqrt[3]{\frac{4}{3}};$$

$$x_2=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{4}{3}}(1+i\sqrt{3});$$

$$x_3=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{4}{3}}(1-i\sqrt{3}).$$

6.6.3. VÕRRANDI $x^3-a^3=0$ LAHENDAMINE.

Tähistame nüüd võrrandis $x^3+f=0$ vabaliikme $-a^3$-ga, kus $a>0$, s. t. $f=-a^3$.

Lahendada tuleb seega võrrand

$$x^3-a^3=0.$$

Selle võrrandi lahendame nii nagu eelmisegi võrrandi. Lahendeiks saame:

$$x_1=a;$$

$$x_2=\frac{a}{2}(-1+i\sqrt{3});$$

$$x_3=\frac{a}{2}(-1-i\sqrt{3}).$$

6.6.4. VÕRRANDI $x^4+a^4=0$ LAHENDAMINE.

Neljanda astme kaksliikmelised võrrandid on esitatavad kujul $x^4+a^4=0$ ja $x^4-a^4=0$.

Ka siin lahutame kõigepealt võrrandi vasaku poole tegureiks.

Selleks liidame kaksliikmele x^4+a^4 juurde ja seejärel ka lahutame avaldise $2a^2x^2$. Siis rakendame tegureiks lahutamisel ruutude vahe valemit:

$$x^4+a^4=x^4+a^4+2a^2x^2-2a^2x^2=(x^2+a^2)^2-\sqrt{2}ax)^2=$$
$$=(x^2+a^2-\sqrt{2}ax)(x^2+a^2+\sqrt{2}ax).$$

Seega taandub antud võrrandi lahendamine võrrandi

$$(x^2-\sqrt{2}ax+a^2)(x^2+\sqrt{2}ax+a^2)=0$$

lahendamisele.

Kui siin $x^2-\sqrt{2}ax+a^2=0$, siis saame lahendeiks

$$x_{1,2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{2}a^2-a^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a\pm\sqrt{-\frac{1}{2}a_2}=\frac{a}{\sqrt{2}}(1\pm i).$$

Kui aga $x^2+\sqrt{2}ax+a^2=0$, siis on lahendeiks

$$x_{3,4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{2}a^2-a^2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}a\pm\sqrt{-\frac{a^2}{2}}=-\frac{a}{\sqrt{2}}(1\pm i).$$

6.6.5. VÕRRANDI $x^4-a^4=0$ LAHENDAMINE.

Lahutades x^4-a^4 tegureiks, saame

$$x^4-a^4=(x^2-a^2)(x^2+a^2)=(x-a)(x+a)(x^2+a^2).$$

Võrrandi

$$(x-a)(x+a)(x^2+a^2)=0$$

lahendeiks on

$x_1=a;$
$x_2=-a;$
$x_3=ai;$
$x_4=-ai.$

Ülesandeid.

553. Lahenda võrrandid.

a) $x^3-27=0$
b) $x^3+729=0$
c) $x^4-625=0$
d) $x^4+256=0$
e) $4x^3+15=0$
f) $-2x^3+7=0$
g) $-\frac{3}{4}x^4+\frac{5}{8}=0$
h) $3{,}2x^4+10{,}1=0$

6.7. ALGEBRA PÕHILAUSE.

Lineaarvõrrandite lahendamisel saame alati ühe lahendi. Pärast arvuvalla laiendamist kompleksarvudega saame igale ruutvõrrandile kaks lahendit.

Eespool nägime, et igal vaadeldud kaksliikmelisel võrrandil on kompleksarvude vallas just niipalju lahendeid, kui suur on võrrandi aste.

See omadus on üldine, s. t. kehtib kolmanda, neljanda, viienda jne. astme võrrandite puhul ka siis, kui see võrrand sisaldab liikmeid, kus tundmatu esineb madalamas astmes, kui on võrrandi aste. See tõsiasi, mida me siinkohal ei tõesta, ongi tuntud a l g e b r a p õ h i l a u s e nime all.

Nii on näiteks võrrandil

$$x^3-2x^2+x-2=0$$

kolm lahendit, 2, i ja $-i$, ja võrrandil

$$x^5+3x^4-5x^3-15x^2+4x+12=0$$

viis lahendit: ± 1, ± 2 ja -3.

Kontrolli neid lahendeid!

6.8. ARVUVALLA LAIENDAMISEST.

Seni tundmaõpitud matemaatika kursuses on mitmel korral laiendatud arvuvalda. Algklassides arvutati ainult naturaalarvudega. Hiljem õpiti tundma positiivseid murdarve ja negatiivseid täis- ja murdarve.

Positiivsed ja negatiivsed täis- ning murdarvud moodustavad nn. ratsionaalarvude valla.

2, log 5, sin 10° jne. on arvud, mis ei kuulu ratsionaalarvude hulka. Seega õppides tundma juurimist, logaritmimist ja trigonomeetrilisi funktsioone, täienes arvuvald irratsionaalarvudega.

Irratsionaalarvud koos ratsionaalarvudega moodustavad reaalarvude valla.

Analoogiliselt on kulgenud arvuvalla laiendamine ka ajaloolisest seisukohast vaadatuna. Vana-Kreeka matemaatikud kasutasid naturaalarve ja positiivseid murdarve. Positiivse ja negatiivse arvu mõistet kasutasid esimestena hindud 6. ja 7. sajandil. Möödus aga veel palju sajandeid, enne kui need arvud leidsid täit tunnustust. Näiteks tuletati taandatud ruutvõrrandi $x^2+px+q=0$ kordajate ja tema lahendite x_1 ja x_2 vahelised seosed 16. sajandil prantsuse matemaatiku Francois Vieta poolt ainult positiivsete lahendite puhul. Alles 17. sajandil muutuvad negatiivsed arvud matemaatikas üldkasutatavaks.

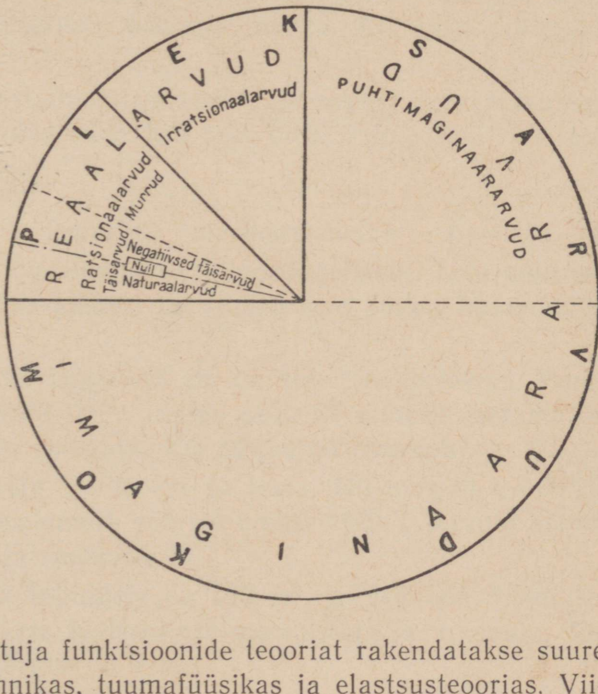
Mitteratsionaalarvu olemasolu oli selge juba Vana-Kreeka matemaatikuile ja Eukleides oma suure tähtsusega töös «Elemendid» püüdis anda nende arvude kohta teatud teooria, tuginedes geomeetrilisele kujutusele ühismõõdututest lõikudest. Uue matemaatikaharu — matemaatilise analüüsi — tekkimise ja arenemisega 17. ja 18. sajandil kerkis väga teravalt päevakorrale vajadus anda range reaalarvude teooria. Selle ülesande lahendasid 19. sajandil üksteisest sõltumatult saksa matemaatikud Richard Dedekind, Georg Cantor ja Karl Weierstrass.

Itaalia matemaatik Geronimo C a r d a n o avaldas 16. sajandil kuupvõrrandi $x^3+px+q=0$ lahendamiseks valemi

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

mille rakendamine juhul, kui kuupvõrrandi kõik kordajad on reaalarvud, nõuab kompleksarvude tundmist. Cardano nimetas neid arve «valedeks arvudeks». Üldise tunnustuse said kompleksarvud pärast saksa matemaatiku Carl Friedrich G a u s s i poolt antud kompleksarvude teooria põhjendust 1831. aastal. Kompleksarvude baasil, mis esialgu näisid olevat mingid «valed arvud», arenes hiljem välja kompleksmuutuja funktsioonide teooria, mille rakendused on eriti hinnatavad aerodünaamikas. Selles on suuri teeneid tuntud vene teadlasel Nikolai Ž u k o v s k i l.

JOON. 159.



Kompleksmuutuja funktsioonide teooriat rakendatakse suure eduga ka elektrotehnikas, tuumafüüsikas ja elastsusteoorias. Viimasel alal on silmapaistvaid tulemusi saavutanud ka endine Tartu Ülikooli rakendusmatemaatika professor Gurt K o l o s s o v (1867—1931).

Matemaatikas kui teaduses toimub loogilise arutluse lihtsustamise huvides arvuvalla laiendamine naturaalarvudelt ratsionaalarvudeni teisiti, kui siin kirjeldatud. See kulgeb nii, nagu seda on tehtud eespool, naturaalarvudelt esmalt täisarvudele ja siis sealt ratsionaalarvudele. Edasi laieneb arvuvald reaalarvudele, kompleksarvudele jne.

Joonis 159 iseloomustabki just seda fakti, et iga uus arvuvald hõlmab endas temale eelnenud arvuvalla.

Arvuvalla edasist laiendamist nii, et igale ruumipunktile vastaks kindel arv, põhjendas iiri matemaatik ja astronoom William Rowan Hamilton 1943. aastal. Uusi arve nimetatakse kvaternioonideks.

7. ÜLESANDEID KORDAMISEKS.

554. Poiss ehitas ruudukujulise põhjaga kinnist risttahukat. Ta vahetas kogemata ära põhiserva ja kõrguse mõõtmed, seetõttu kulus risttahuka ehitamiseks 9600 cm^2 materjali enam ja ruumala suurenes kahekordseks. Missugused pidid olema risttahuka mõõtmed?

555. Korrapärase nelinurkse püramiidi apoteem on 15 cm ja külgservad moodustavad põhjaga nurga 70°. Leia püramiidi ruumala.

556. 918,4 grammist tinast valatakse ühesuguse servapikkusega tetraeeder ja oktaeeder. Kui pikk on see serv, kui tina erikaal on $11{,}4 \frac{G}{cm^3}$?

557. Korrapärane kuusnurkne marmorsammas $\left(\varrho = 2{,}84 \frac{G}{cm^3}\right)$ pikkusega 1,85 m lihvitakse silindrikujuliseks. Leia marmorsamba põhiserva pikkus, kui samba kaal pärast lihvimist on 215 kG.

558. Puurauk läbimõõduga 16 cm on vett täis jooksnud. Pump võimsusega 4500 liitrit tunnis peab 20 minutit töötama, et seda vett välja pumbata. Kui sügav on puurauk?

559. Kolmnurga külg $c = 25$ cm ja tema lähisnurgad $\alpha = 60°20'$ ja $\beta = 42°10'$. Kolmnurk pöörleb ümber külje c. Arvuta pöördkeha pindala ja ruumala.

560. Tüvikoonuse külgpindala on 100 m^2 ja põhjade raadiuste summa 5 m. Leia tüvikoonuse moodustaja ja ruumala, kui tüvikoonuse kõrgus on 4 m.

561. Ringi sektor, mille raadius on r ja kesknurk 60°, pöörleb ümber sümmeetriatelje. Kui suur on pöördkeha ruumala? Leia pöördkeha ja kera, mille osaks on see pöördkeha, ruumalade suhe.

562. Võrdle järgmiste taevakehade pindala, ruumala ja massi, kui vaatleme neid taevakehasid keradena, mille raadiused ja tihedused on antud:

Maa: $r = 6370$ km, tihedus $5{,}6\,\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{cm}^3}$,

Kuu: $r = 1738$ km, tihedus $3{,}3\,\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{cm}^3}$,

Päike: $r = 695\,300$ km, tihedus $1{,}4\,\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{cm}^3}$.

563. Lahenda kolmnurk, kui on antud:

a) $a = 15$ cm $\quad h_a = 11$ cm $\quad$ ja $\alpha = 67°24'$,
b) $b = 38{,}5$ cm $\quad c = 33{,}7$ cm $\quad$ ja $h_c = 35{,}2$ cm,
c) $a = 25$ cm $\quad b = 17$ cm $\quad$ ja $\alpha = 118°43'$.

564. Tõesta samasused.

a) $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\tan\alpha - \tan\beta} = \cos\alpha \cdot \cos\beta$

b) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos^2\alpha + \cos^2(60°+\alpha) + \cos^2(60°-\alpha) = \frac{3}{2}$

d) $\tan\alpha \cdot \tan\beta + \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan(\alpha+\beta)} = 1$

565.* Määra tähtede väärtused, mille puhul on kehtivad järgmised võrratused ja võrdused:

a) $2^x > x^2$, b) $2^x < x^2$, c) $2^x = x^2$.

566. Koonda.

a) $\frac{1}{2}u^2 - \frac{2}{3}v^2 + \frac{5}{6}u^2 - \frac{2}{4}v^2$
b) $0{,}85a^{2n} - 1{,}73b^{2n} + 3{,}52c^{2n} + 7{,}88a^{2n} - b^{2n} + 0{,}12c^{2n}$
c) $5(a+b)^{m+n} - 6(a+b)^{m-n} - 3(a+b)^{m+n} + 7(a+b)^{m-n}$

567. Lihtsusta.

a) $\left(\frac{9x^2-6x+1}{4x^2+4x+1}\right)^{\frac{1}{2}}$ $\qquad$ b) $\frac{(x^4-y^4)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

---

* Kui selles ja järgnevates ülesannetes antud või otsitavate suuruste kohta ei ole eraldi märgitud arvuhulka, kuhu nad kuuluvad, siis on selleks arvuhulgaks reaalarvude hulk.

c) $\left(\frac{x^2y+x^3z}{24y^3}\right)^{\frac{1}{3}}$ e) $\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^{-\frac{1}{4}}$

d) $a^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[3]{a}:a^{\frac{3}{4}}$ f) $(-12)^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{144}$

568. Arvuta.

a) $\left(2{,}75+5\frac{2}{3}-1\frac{5}{6}\right):19{,}75+\left(4{,}5-2\frac{5}{6}+3{,}75\right):3{,}25$

b) $\left(1\frac{5}{12}+2{,}75-3\frac{5}{6}\right)\cdot 3{,}6-\left(8{,}4-7\frac{2}{15}+1\frac{2}{3}\right):14\frac{2}{3}$

c) $6\frac{3}{8}:\left(4\frac{1}{6}-2\frac{3}{4}\right)+\left(51\frac{1}{2}-5\frac{1}{8}\right):3\frac{1}{2}$

d) $8\frac{4}{5}:\left(7\frac{1}{4}-2\frac{5}{6}\right):6\frac{5}{8}+\left(4\frac{1}{6}-2\frac{3}{4}\right):5\frac{2}{3}$

569. Arvuta.

a) $\dfrac{\frac{1}{2}:\frac{1}{100}-24\frac{1}{4}}{1\frac{3}{5}\cdot 12\frac{7}{8}}-\dfrac{\frac{1}{100}\cdot 43\frac{3}{4}-\frac{1}{16}}{\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}}$

b) $\dfrac{4\frac{7}{8}\cdot 4\frac{4}{5}}{5\frac{1}{5}+6\frac{1}{2}}+\dfrac{5\frac{5}{8}:3\frac{3}{4}}{2\frac{1}{2}-1\frac{3}{10}}$

570. Leia arv, millest 40% võrdub avaldise $14{,}7-6{,}3:2\frac{1}{3}$ väärtusega.

571. Leia 60% avaldise $115{,}8+0{,}5\cdot 8{,}4$ väärtusest.

572. Kauba hinda tõsteti esialgu 10% võrra ja mõne aja möödudes vähendati 10% võrra. Mitu protsenti oli nüüd kauba hind suurenenud või vähenenud esialgse hinna suhtes?

573. Arvuta logaritmide tabelite abil ja kontrolli tulemust arvutuslükatil.

a) $\dfrac{3{,}87\cdot 554{,}2\cdot 0{,}8741}{0{,}07529\cdot 230000}$ d) $\sqrt[3]{58{,}06-\sqrt{0{,}009898}}$

b) $\dfrac{54{,}18^2\cdot 6{,}874\cdot 0{,}942^3}{31{,}09\cdot 3{,}876^3}$ e) $\left(\frac{2578}{568300}\right)^{-1{,}5}-\left(\frac{0{,}9487}{0{,}0095}\right)^{1{,}5}$

c) $\sqrt[4]{28{,}75\sqrt[3]{\frac{765{,}9}{8645}}}$ f) $\left(\frac{0.2389}{4{,}597}\right)^2+\sqrt{\left(\frac{0{,}0197}{0{,}385}\right)^{\frac{3}{2}}}$

574. Kolm arvu, mille summa on 39, moodustavad geomeetrilise progressiooni. Kui suurimat arvu vähendada 9 võrra, saame aritmeetilise progressiooni. Leia need kolm arvu.

575. Esita hariliku murruna.

a) 0,28157157... b) 0,8174242... c) 0,142857142857...

576. Aritmeetilise progressiooni 2, 14, 26 jne. iga kahe järjestikuse liikme vahele tuleb paigutada kaheksa arvu nii, et saaksime jälle aritmeetilise progressiooni. Esita selle progressiooni esimesed 10 liiget.

577. Mitu meetrit läbib vabalt langev keha õhutühjas ruumis 12 sekundiga? Mitme sekundiga langeb keha 490 m?

578. Lahenda võrratused.

a) $\frac{x-4}{x+3}>1$ c) $\frac{-x-2}{3-2x}+1<0$

b) $\frac{2x}{3-4x}<2$ d) $\frac{2+x}{x-1}+x>0$

579. Leia

a) $\sqrt[3]{-125}$ c) $\sqrt{-81}$ e) $\sqrt[5]{-32}$ g) $\sqrt[7]{-128}$

b) $\sqrt[4]{-625}$ d) $\sqrt{-\frac{3}{4}}$ f) $\sqrt{i^4}$ h) $\sqrt[3]{i^2}$

580. Leia järgmised piirväärtused.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+4x-3}{7x+2}$ d) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x^2-3x+2}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+7}{x+1}$ e) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{2x^2-x-15}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{2x^2+x-1}{4x^2-1}$

581. Leia järgmiste kõverate ekstreemumpunktid.

a) $y=2x^4+32x^2$ c) $y=x^4+2x^3-4x^2$

b) $y=\frac{x^2}{2}-10x^3$ d) $y=x^4+6\frac{2}{3}x^3-4x^2$

582. Leia järgmiste funktsioonide tuletised.

a) $y=(x^5+x^3+x)^2$ c) $y=(x^3-3x^2+2x)^3$
b) $y=(3-2x)^5$ d) $y=(2x^4+3x^3-2x^2+5x-6)^4$

583. Uuri funktsioone.

a) $y=4x-3$ c) $y=3x^2-2x-1$
b) $y=2-3x$ d) $y=3-2x-x^2$

584. Kasutades kuupparabooli $y=x^3$ graafikut, lahenda järgmised võrrandid graafiliselt.

a) $x^3=10-x$ d) $x^3-x-1=0$
b) $x^3+x=2$ e) $x^3-5x+3=0$
c) $x^3-2x=0$ f) $x^3-3x-2=0$

585. Parabool $y=0{,}4\ x^2$ pöörleb ümber x-telje. Leia pöördkeha ruumala, mille eraldab pöördparaboolist tasapind, mis on risti x-teljega ja lõikab teda kohal $x=3$.

586. Arvuta järgmised integraalid.

a) $\int\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)dx$ d) $\int(x-\sin x)\,dx$

b) $\int(x^n+x^{n-1}+\ldots+x^2+x+1)\,dx$ e) $\int\left(x-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$

c) $\int\frac{\sin x}{2}\,dx$ f) $\int\frac{\cos^2 x-1}{\cos^2 x}\,dx$

587. Avalda kuubi ruumala
a) kuubi serva funktsioonina,
b) kuubi täispindala funktsioonina.
Esita need funktsioonid graafiliselt.

588. Kuidas sõltub sirge $y=mx+1$ asend koordinaatteljestikus m väärtusest?
Joonesta need sirged, kui $m=-0{,}5$; 1; 0,5 ja 2.

589. Kuidas sõltub sirge $y=-2x+b$ asend koordinaatteljestikus b väärtusest?
Joonesta need sirged, kui $b=-3$; 0; 1,5; 5.

590. Leia võrrand sirgele, mis on paralleelne sirgega $y=4x-7$ ja läbib sirgete $2x+y=3$ ja $4x-7y=-3$ lõikepunkti.

591. Leia võrrand sirgele, mis läbib punkti $P(-1;\ 3)$ ning sirgete $y=4x+3$ ja $y=2x+9$ lõikepunkti.

592. On antud punktid $A(3;\ 2)$, $N(5;\ 6)$, $T(4;\ 5)$ ja $S(2;\ 1)$. Näita, et punktidega $ANTS$ määratud nelinurk on rööpkülik.

593. Lahenda järgmised võrrandid.

a) $abx^2-(a^2+b^2)x+ab=0$

b) $c^2x^2+(ac-bc)x-ab=0$

594. Missugustesse arvuhulkadesse kuuluvad järgmised arvud:

$$\sqrt{\frac{3}{4}};\ \sqrt{-4};\quad \sqrt{|-16|};\quad -\sqrt{16};\quad \sqrt{\frac{4}{-5}}.$$

595. Lahenda järgmised võrratused.

a) $|2x+1|<3,\ x\in R$ c) $|3x-1|>8,\ x\in R$

b) $|2-3y|<6,\ y\in Z$ d) $|\frac{1}{2}y+2|>3,\ y\in Z$

596. Leia järgmiste võrrandite lahendite hulk.

a) $|x+1|=5$ c) $|x+3|=11$ e) $|2x-3|=|x+6|$

b) $|x+2|=4$ d) $|2x-1|=13$ f) $|2x-3|=|x-3|$

597. Lahenda järgmised võrrandid.

a) $\frac{x}{ab}+\frac{x}{bc}+\frac{x}{ac}-1=abc-x(a+b+c)$

b) $\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}=\frac{a-b}{x^2-ab}$

598. Lahenda järgmised võrrandid.

a) $\sqrt{1+\sqrt{x^4-x^2}}=x-1$

b) $\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=13-x$

599. Trapetsikujulise ristlõikega kanali laius on ülalt 4,5 m, alt 1,5 m ja sügavus 1,5 m. Veetase kanalis on 1 m ja voolu kiirus 30 $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$. Arvuta vee mass, mis voolab läbi kanali ristlõike 1 tunni jooksul.

600. 9 cm pikkuse servaga kuupi lõigatakse iga tema tipu juurest tasapinnaga nii, et see lõikab külgservi 3 cm kaugusel tipust. Joonesta saadud keha ja arvuta tema ruumala. Missuguse keha me saame, kui tasapinnad lõikavad servi 4,5 cm kaugusel tipust? Kui suur on nüüd saadud keha ruumala?

601. Kuidas suhtub tetraeedri täispindala kuubi täispindalasse, kui nende külgservad on võrdsed?
Kuidas suhtub tetraeedri ruumala kuubi ruumalasse, kui nende külgservad on võrdsed?

602. Esita silindri kõrgus, külgpindala ja ruumala põhja läbimõõdu funktsioonina ja joonesta nende funktsioonide graafikud.

603. Kolmnurga küljed on: $a=48$ cm, $b=36$ cm ja $c=28$ cm. Kolmnurk pöörleb ümber külje a. Leia pöördkeha pindala ja ruumala.

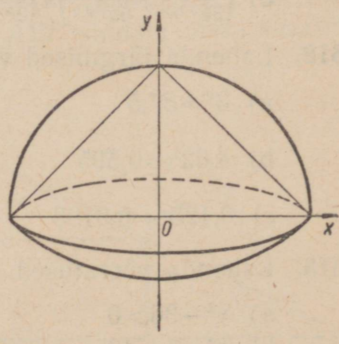
604. 20 cm pikkuse raadiusega ringist on välja lõigatud sektorid kesknurgaga
a) 45°; b) 60°; c) 120° ja d) 240°.
Need sektorid on koonuste külgpindadeks. Leia koonuste ruumala.

605. Koonuse telglõikeks on võrdkülgne kolmnurk.
Avalda moodustaja m ja kõrgus h põhja raadiuse r funktsioonina.
Avalda külgpindala S_k ja ruumala V põhja läbimõõdu d funktsioonina.
Joonesta vastavad graafikud.

606. Planetaarium koosneb silindrikujulisest ruumist ja selle peale ehitatud poolkerast, mille pinnale kujutatakse tähistaevas. Leia planetaariumi ruumala, kui silindrikujulise ruumi läbimõõt on 12 m ja kõrgus 5 m.

607. Leia
a) 1 m pikkuse raadiusega kera pindala ja ruumala,
b) 1 m² suuruse pindalaga kera raadius ja ruumala,
c) 1 m³ suuruse ruumalaga kera raadius ja pindala.

608. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 6 cm. Kolmnurga ümber on joonestatud poolringjoon, mis läbib kolmnurga kõiki tippe. Selle poolringjoone vastu on joonestatud kaar, mille keskpunkt asetseb täisnurga tipus ja mille



JOON. 160.

raadius on võrdne kaatetiga. Ringjoone kaarte poolt piiratud kujund pöörleb täisnurga tippu läbiva hüpotenuusi ristsirge ümber. Leia pöördkeha pindala ja ruumala (vt. joon. 160).

609. Kumb on suurem:

a) $\sqrt{4\cdot 9}$ või $\sqrt{4+9}$?

b) $\sqrt{a^2-b^2}$ või $\sqrt{(a-b)^2}$?

c) $\sqrt{a^3+b^3}$ või $\sqrt{(a+b)^3}$?

d) $\sqrt{4x^2-12xy+9y^2}$ või $\sqrt{4x^2-9y^2}$?

Põhjenda!

610. Lihtsusta.

a) $\sqrt{9x+9}-\sqrt{x+1}+\sqrt{25x+25}$

b) $(3\sqrt{2}+5\sqrt{8}+9\sqrt{50})\cdot\sqrt{2}$

c) $(\sqrt{3}+2\sqrt{5})(3\sqrt{2}-\sqrt{5})$

d) $(2+\sqrt{6})(2-\sqrt{6})$

e) $(\sqrt{6}+2\sqrt{2})^2$

611. Lihtsusta.

a) $\dfrac{m^{-\frac{3}{2}}n^4}{p^3q^{-2}}\cdot\dfrac{m^{-1}n^{-1,5}}{p^{-\frac{2}{3}}q^{-0,25}}$

b) $\left(\dfrac{3x^{-2}}{4y^{-3}}-\dfrac{4y^{-3}}{3x^{-2}}\right)^{-2}$

c) $\left(\dfrac{5a^{-0,5}}{3b^{-1,3}}+\dfrac{3b^{-1,3}}{5a^{-0,5}}\right)\cdot\left(\dfrac{5a^{-0,5}}{3b^{-1,3}}-\dfrac{3b^{-1,3}}{5a^{-0,5}}\right)$

612. Lahenda järgmised võrrandid arvutuslükati abil.

a) $3^x=87,5$

b) $4,62^x=0,595$

c) $0,125^x=0,0103$

d) $237^{x-1}=4,89$

e) $\sqrt[x]{578}=5,5$

f) $\sqrt[x-1]{67,5}=1,75$

613. Lahenda võrratused.

a) $x^3-36>0$

b) $x^2-5x<0$

c) $x^2+6x-7<0$

d) $-5x^2-18x-35>0$

614. Ringi, mille raadius on r, on joonestatud ruut, sellesse ruutu on joonestatud ring, millesse jälle ruut jne. Kui suur on kõikide ringide pindalade summa? Kui suur on kõikide ruutude pindalade summa?

615. Arvude 1 ja 7 vahele tuleb paigutada 6 arvu nii, et moodustuks kaheksaliikmeline geomeetriline progressioon. Leia need arvud. Leia sellele progressioonile vastav eksponentfunktsioon.

$1=1=1^2$
$1+3=4=2^2$
$1+3+5=9=3^2$ jne.

Näita, et toodud näidetest ilmnev seaduspärasus (sõnasta see!) on kehtiv iga naturaalarvu n puhul!

616. Lihtsusta.

a) $\tan\alpha+\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$

b) $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}+\tan\alpha\cdot\cot\alpha$

c) $\cos^4\beta+\sin^2\beta\cdot\cos^2\beta+\sin^2\beta$

d) $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

617. Leia järgmiste funktsioonide pöördfunktsioonid.

a) $y=\dfrac{3-4x}{2}$

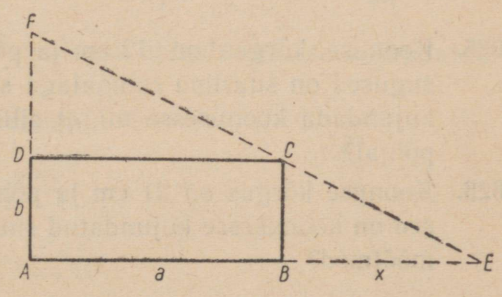
b) $y=\dfrac{4x^2-1}{2}$

c) $y=\log(x+1)$

d) $y=\log(x^2-3)$

618. Ristküliku $ABCD$ mõõtmed on a ja b (joon. 161). Kui pikk peab olema lõik x, et kolmnurga AEF pindala oleks suurim?

JOON. 161.



619. Lõik s tuleb jagada kaheks osaks nii, et silinder, mille raadiuseks ja kõrguseks need lõigud on, oleks suurima ruumalaga.

620. Lahenda järgmised võrrandid.

a) $x^2-(a+b)x+ab=0$
b) $x^2-2ax+a^2-b^2=0$

621. Lahenda järgmised võrrandid.

a) $\sqrt{x+6}+\sqrt{x+1}=\sqrt{7x+4}$
b) $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-5}=\sqrt{2x+18}$

622. Kumb on suurem 9^{99} või $(9^9)^9$?

623. Teravnurga ühel haaral on võetud punkt P, mille kaugus tipust on a. Punktist P on tõmmatud ristlõik teisele haarale. Saadud punktist Q, mis on tipust kaugusel b, on tõmmatud ristlõik esimesele haarale. Nii jätkates saame ühele haarale punktid P, P_1, P_2 jne. ja teisele haarale punktid Q, Q_1, Q_2 jne. Leia kõikide nende ristlõikude summa, s. t. $PQ+QP_1+$ $+P_1Q_1+\dots$

624. Arvuta järgmised integraalid.

a) $\int_0^{10} dx$ d) $\int_1^2 \left(\frac{x^2}{2}-1\right)dx$ g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$

b) $\int_2^4 5x^3dx$ e) $\int_0^{10} (x+1)(x-1)dx$ h) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

c) $\int_{100}^{101} 5x^2dx$ f) $\int_{-1}^{1} (3x^2+10)dx$ i) $\int_0^{2\pi} (\sin x+1)dx$

625. Koonuse kõrgus on 12 cm ja põhja raadius on 6 cm. Missugused on suurima ruumalaga silindri mõõtmed, mida saab kujundada koonusesse nii, et silindri põhi asetseks koonuse põhjal?

626. Koonuse kõrgus on 21 cm ja põhja raadius 7 cm. Missugused on koonusesse kujundatud suurima täispindalaga silindri mõõtmed?

627. Kolme 6 m pikkuse kepi abil ehitatakse korrapärase kolmnurkse püramiidi kujuline telk. Kui suur peab olema püramiidi kõrgus, et telgis oleks võimalikult palju õhku?

628. On antud kaks sama orientatsiooniga võrdset kolmnurka. Leia peegeldused, mille abil saab viia ühe kolmnurga teisega ühtivusse.

629. On antud kaks võrdset, kuid erinevate orientatsioonidega kolmnurka. Leia peegeldused, mille abil saab viia ühe kolmnurga teisega ühtivusse.

630. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga üks kaatet asetseb tasapinnal ja teine moodustab tasapinnaga nurga 45°. Kui suure nurga moodustab hüpotenuus selle tasapinnaga?

631. Võrdkülgse kolmnurga üks külg asetseb tasapinnal, mis moodustab kolmnurga tasapinnaga nurga 60°. Kui suure nurga moodustavad teised küljed selle tasapinnaga?

632. Kolmetahulise ruuminurga iga tasanurk on 60°. Kui suured on selle ruuminurga kahetahulised nurgad?

633. Püramiidi $SABC$ serval AB on antud punkt M, tahul SAB punkt N ja tahul SAC punkt P. Esita joonisel püramiidi lõige tasapinnaga MNP.

634. Kuubi serv on 10 cm. Kui kaugel asetseb kuubi mingi tipp selle vastastahu keskpunktist?

635. Võrdkülgse kolmnurga ristprojektsioon tasapinnal, mis läbib kolmnurga üht külge, on täisnurkne kolmnurk. Leia nurk võrdkülgse kolmnurga ja projektsioonipinna vahel.

636. Ruudu projektsioon tasapinnal, mis läbib ruudu üht tippu, on romb, mille üks nurk on 140°. Leia ruudu ja projektsioonipinna vaheline nurk.

637. Mitu protsenti kuubi ruumalast täidab kuubisse kujundatud kera?

638. Mitu protsenti kera ruumalast täidab kerasse kujundatud kuup?

639. Lahenda järgmised võrrandid.

a) $\frac{2+2x}{9x^2-4}-\frac{x-2}{9x^2+12x+4}=\frac{x+4}{9x^2-4}$

b) $\frac{3+2x}{1+2x}-\frac{5+2x}{7+2x}=1-\frac{4x^2-2}{7+16x+4x^2}$

640. Ehitati ristkülikukujuline tiik mõõtmetega 60 m$\times$80 m. Kalda kaldenurk on 45° ja tiigi sügavus 3 m. Leia tiigi ehitamisel väljakaevatud pinnase hulk, kui väljakaevamisel pinnase hulk suureneb 9% võrra.

641. Tüvipüramiidi ruumala on 74 cm³, kõrgus 6 cm ja ühe põhja pindala 16 cm². Leia teise põhja pindala.

642. Kas on võimalik saata 1000 pudelikorki läbimõõduga 2,2 cm ja pikkusega 3,4 cm pakina, mis kaalub vähem kui 5 kG, kui korgi erikaal on 0,25?

643. Liivakell koosneb kahest ühesugusest ühise tipuga koonusest. Tipus on ava, millest liiv läbi voolab. Koonuste põhjade raadiused on 3 cm.

a) Leia koonuste kõrgus, kui 1 minuti jooksul voolab ühest koonusest teise 7,5 cm³ liiva ja liivakell mõõdab 10-minutilist ajavahemikku.

b) Leia liiva seis viienda minuti kohal.

644. Tüvikoonusekujulise korstna kõrgus on 25 m. Korstna alumine sisemine läbimõõt on 1 m ja ümbermõõt 7,54 m, ülemine läbimõõt on 0,6 m, ümbermõõt 3,14 m. Leia korstna rõhumine alusmüürile, kui korstna erikaal on 2,2.

645. Nõguspeegel on segmendi pinnaks kerale raadiusega 10 cm. Segmendi kõrgus on 2 cm. Peegel kaetakse 0,1 mm paksuse hõbedakihiga. Leia hõbedakihi mass, kui hõbeda tihedus on $10{,}4\ \frac{\mathrm{G}}{\mathrm{cm}^3}$.

646. Leia kera ruumala, kui kera pindala on 1296 cm².

647. Leia kera pindala, kui kera ruumala on 4500 cm³.

648. Lihtsusta.

a) $(49x^2+84xy+36y^2)^n:(7x+6y)^n$

b) $\frac{u^{2+n}v^x}{10y^3}:\frac{u^n v^{2+x}}{5y}\cdot 2v^{2+2y}$

c) $\frac{95x^6y^7z}{38x^2yz}+(2x^2y^3)^2-\frac{2x^5x^8}{4z^2}:\frac{3xy^2}{4z^2}$

649. Võrdle avaldisi.

a) $(4a+2a)^{-3}$, $4a+2a^{-3}$ ja $4a+(2a)^{-3}$,

b) $(5x\cdot 2x)^{-2}$, $5x\cdot 2x^{-2}$ ja $5x\cdot(2x)^{-2}$,

c) $(25-16)^{\frac{1}{2}}$, $25^{\frac{1}{2}}-16^{\frac{1}{2}}$ ja $25-16^{\frac{1}{2}}$.

650. Võrdkülgse kolmnurga kõrgusele on ehitatud uus võrdkülgne kolmnurk, selle kõrgusele jällegi uus võrdkülgne kolmnurk jne. Leia kõikide nii konstrueeritud kolmnurkade pindalade summa, kui esimese kolmnurga külg on a.

651. Lahenda võrrandid.

a) $\sin 2x = \sin x$ c) $2 \sin x = \sin(45° - x)$

b) $\cos 2x = \cos x$ d) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

652. Leia järgmiste funktsioonide määramispiirkonnad.

a) $y = \sqrt{3x^2 - x + 1}$ c) $y = \frac{2-x}{5-4x-x^2}$

b) $y = \log(3-4x)$ d) $y = \frac{\log(3x-6)}{x-3}$

653. Leia järgmiste funktsioonide ekstreemumkohad.

a) $y = (x-1)(x-2)(x-3)$ d) $y = x^3 + 3x^2 + 3x - 7$

b) $y = x(x^2 + x + 1)$ e) $y = (x-a)^3 + (x-b)^3$

c) $y = (x-1)(x^2-1)$ f) $y = (x-a)(x-b)^2$

654. Leia järgmiste võrrandite lahendid, kasutades Newtoni võtet lahendite täpsustamiseks.

a) $x^3 - x = 33$ b) $x^3 - x^2 = 10$ c) $x^3 - x^2 + x = 44$

655. Nelinurkne korrapärane püramiid on lõigatud põhjaga paralleelse tasapinnaga nii, et eraldub püramiid, mille ruumala on pool esialgse püramiidi ruumalast. Kui kõrgel põhjast on tehtud lõige?

656. Koonuse külgpinna laotuseks on ringi sektor. Avalda selle sektori kesknurk koonuse põhja raadiuse r ja moodustaja s suhte funktsioonina. Mis tähendus on suhtel $\frac{r}{s}$ koonuse telglõike puhul?

657. Missuguse nurga moodustavad kõverate $y = \sin x$ ja $y = \cos x$ puutujad x-teljega kohtadel

a) $x = 0$, b) $x = \frac{\pi}{4}$, c) $x = \frac{\pi}{2}$, d) $x = \pi$?

658. Parabool $y = 0{,}4x^2$ pöörleb ümber y-telje. Leia pöördkeha ruumala, mille eraldab pöördparaboolist tasapind, mis on risti y-teljega ja lõikab teda kohal $y = 3$. Võrdle saadud tulemust ülesande 585 vastusega.

659. Leia $f(x)$, kui

a) $\int f(x)\,dx = x + c$, d) $\int f(x)\,dx = -\frac{1}{x} + c$,

b) $\int f(x)\,dx = 4x^3 + c$, e) $\int f(x)\,dx = x^2 + c$,

c) $\int f(x)\,dx = 9x^2 + c$, f) $\int f(x)\,dx = x^{-5} + c$.

660. Leia kuubi täispindala, ruumala, diagonaal ja diagonaallõike pindala, kui kuubi serv on

a) 12 cm, b) 1,5 m, c) 14 dm.

661. Korrapärase üheksanurkse püramiidi põhiserv on 2 cm. Külgtahud moodustavad põhitahuga 65° nurga. Arvuta
a) püramiidi kõrgus ja külgserva pikkus,
b) püramiidi täispindala ja ruumala,
c) külgservade ja põhja vaheline nurk.

662. Oktaeedri serv on 5,3 cm. Arvuta oktaeedri pindala ja ruumala. Missugune kuju on oktaeedri diagonaallõikel ja kui suur on selle pindala?

663. Lahenda võrrandid.

a) $2 \cdot 4^{2x} - 17 \cdot 4^x + 8 = 0$
b) $4^{x-2} - 17 \cdot 2^{x-4} + 1 = 0$

c) $3\sqrt[x]{81} - 10\sqrt[x]{9} + 3 = 0$

664. Leia x, kui

a) $x = 100^{\frac{1}{2}\log 9 - \log 2}$;

b) $x = 100^{\frac{1}{2} - \log \sqrt[4]{4}}$;

c) $x = 49^{1 - \log_7 2} + 5^{-\log_5 4}$.

665. Lahenda võrrandid.

a) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$

b) $0{,}5^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = 64^{-1}$

c) $\left(\frac{4}{9}\right)^x \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{\log 4}{\log 8}$

666. Eeldades, et kella osutid liiguvad konstantse kiirusega, leia, mitu minutit pärast kella nelja osutid kattuvad.

667. Kaks keha liiguvad ringjoont mööda, esimene neist läbib täispöörde 5 sekundit kiiremini kui teine. Kui nad liiguvad ühes suunas, siis nad kohtuvad iga 100 sekundi pärast. Kui suure osa täispöördest läbib kumbki keha ühes sekundis?

668. Lahenda järgmised võrrandisüsteemid.

a) $\begin{cases} x+y=20 \\ xy=64 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2+y^2=164 \\ x-y=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-y=9 \\ xy=90 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2+y^2=208 \\ xy=96 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2+y^2=625 \\ x+y=35 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^2-y^2=55 \\ xy=24 \end{cases}$

669. Lahenda järgmised võrrandid.

a) $4^{(3-x)(2-x)}=1$ d) $2^{x+3}+4^{x+1}=320$

b) $10^{(5-x)(6-x)}=100$ e) $3^{x+2}+9^{x+1}=810$

c) $2^{x+1}+4^x=80$

670. Missugustel $a\in Q$ väärtustel on võrrandil

$$\frac{a}{x}=\frac{x-1}{x-a}$$

reaalsed lahendid olemas?

671. Missugustel $a\in N$ väärtustel on võrrandil

$$x^2-2(a-5)x+a^2-1=0$$

reaalsed lahendid olemas?

672. Missugustel $a\in R$ väärtustel on võrrandi

$$ax^2-x+a=0$$

lahendid

a) reaalsed ja erinevad,
b) reaalsed ja võrdsed,
c) imaginaarsed?

673. Missugustel $m\in R$ väärtustel on võrrandi

$$(m-5)x^2-4mx+m-2=0$$

lahendid

a) reaalsed ja erinevad,
b) reaalsed ja võrdsed,
c) imaginaarsed?

674. Lahenda järgmised võrratused.

a) $\frac{7x-5}{8x+3} > 4$

b) $\frac{x^2+10x+16}{x-1} > 10$

c) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12} > 1$

675. Mitmes liige aritmeetilises progressioonis on 10, kui

$a_n = 2n^2 - 19n + 34$?

676. Mitmendad aritmeetilise progressiooni liikmed on võrdsed, kui nende progressioonide üldliikmed avalduvad vastavalt valemitena

$a_n = 5n^2 - 21n - 236$ ja $b_n = 2n^2 - 11n - 83$?

677. Igal inimesel on 2 vanemat, 4 vanavanemat, 8 vanavanavanemat jne. Kui palju eelkäijaid oli ühel inimesel 1000 aastat tagasi, kui ühe aastasaja jooksul kasvab üles 3 põlvkonda?

678. Lahenda järgmised võrrandid.

a) $3 \cos 2x = 7 \sin x$

b) $2 \sin^2 x + \cos^2 x = \frac{3}{2} \sin 2x$

c) $1 + \cos x + \sin x = 0$

d) $\cos 2x = \cos 6x$

e) $\sin^2 2x + \sin^2 x = 1$

679. Joonesta funktsiooni graafik.

a) $y = |x^2 - x - 6|$

b) $y = |-6x^2 + x + 1|$

c) $y = |\cos x|$

d) $y = |\sin x|$

680. Leia määramispiirkond.

a) $y = \frac{5}{6x^2 - x - 1}$

b) $y = \sqrt{1 - \cos x}$

c) $y = \sqrt{x^2 - 4x - 12}$

d) $y = \sqrt{x} + \sqrt{1 - x}$

681. Leia funktsiooni kasvamispiirkond ja kahanemispiirkond.

a) $y=x^2+3x-108$ c) $y=\frac{x^2-4}{x-2}$

b) $y=-x^3+3x+4$ d) $y=\sin 2x$

682. Leia piirväärtused.

a) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$

c) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x^2+5x-2}{5x^2+12x+4}$

683. Kasutades ligikaudset valemit avaldise $(1+x)^n$ väärtuse arvutamiseks, leia

a) $1{,}04^3$, b) $1{,}03^6$, c) $0{,}98^4$.

684. Näidata, et

a) $\frac{6-i}{3+4i}=\frac{13+41i}{-12+25i}$,

b) $\frac{2+i}{3-i}=\frac{13+4i}{17-9i}$.

685. Leia $x\in R$ ja $y\in R$, kui

a) $(x+y)+(x-y)i=2+4i$,
b) $(x+y)+(x-y)i=2$,
c) $(y+2x)+(2y+4x)i=0$.

686. Lahenda võrratused.

a) $|1+x|<2$
b) $|x+4|\leqslant 3$
c) $|-2x+1|>5$

687. Jalgrattur hilines väljumisega 30 km pikkusele distantsile 3 minutit. Ta sõitis aga kavandatud keskmisest kiirusest 1 kilomeetri võrra tunnis rohkem ja jõudis kohale täpselt ettenähtud ajal. Missuguse kiirusega oli jalgratturil sõit kavandatud?

688. Kohtade A ja B vaheline kaugus on 78 km. Kohast A väljub jalgrattur koha B suunas. 1 tund hiljem alustas teine jalgrattur sõitu kohast B koha A suunas kiirusega, mis oli esimese jalgratturi kiirusest 4 km võrra tunnis suurem. Jalgratturid kohtusid 36 km kaugusel kohast B. Mitu kilomeetrit läbis kumbki jalgrattur kuni kohtumiseni ja missuguse kiirusega?

689. Kaks jalakäijat väljusid samaaegselt kohtadest A ja B teineteisele vastu ja kohtusid 3 tunni 20 minuti pärast. Mitme tunniga läbib kumbki jalakäija A ja B vahelise maa, kui esimene neist jõudis kohta B 5 tundi hiljem kui teine kohta A?

690. Kaks töölist koos töötades lõpetavad töö 8 tunniga. Esimene neist üksi töötades suudaks selle töö lõpetada 12 tunni võrra kiiremini kui teine üksi töötades. Mitme tunniga suudaks selle töö lõpetada kumbki tööline üksi töötades?

691. Bassein täitub kahe toru kaudu 6 tunniga. Kui aga kasutada ainult esimest toru, siis täitub bassein 5 tunni võrra kiiremini kui ainult teise toru kaudu. Mitme tunniga täituks bassein ainult esimest toru kasutades või ainult teist toru kasutades?

692. Abituriendid vahetasid omavahel enne koolist lahkumist fotosid. Mitu õpilast oli abituuriumis, kui vahetati 870 fotot?

693. Kahe arvu geomeetriline keskmine on 12 võrra väiksem väiksemast arvust. Nende arvude aritmeetiline keskmine on aga 24 võrra väiksem suuremast arvust. Leida need arvud.

694. Ristkülikukujulisest papitükist valmistati lahtine karp nii, et nurkadest lõigati välja ruudud, külje pikkusega 4 cm, ja siis pöörati servad üles. Missugused olid papitüki mõõtmed, kui tema ümbermõõt oli 96 cm ja saadud karbi ruumala 768 cm^3?

695. Ristkülikukujulise spordiväljaku mõõtmed on a meetrit ja b meetrit. Väljak ümbritsetakse kõikjal ühelaiuse teega. Leia selle tee laius, kui tee kogupindala on võrdne spordiväljaku pindalaga.

696. Kaks keha, mille vahemaa on d meetrit, liiguvad teineteisele vastu ja kohtuvad a sekundi pärast. Kui nad liiguksid mõlemad samas suunas sama kiirusega, siis kohtuksid nad b sekundi pärast. Leia kummagi keha liikumise kiirus.

697. Vabrikus on 35% töölistest naised, ülejäänud 252 töölist on mehed. Kui palju on vabrikus töölisi?

698. Kaupa müüdi 138 rubla ja 60 kopika eest ning saadi sealjuures 10% kasu. Kui suur on kauba omahind?

699. Kauba hind oli 65 rubla. Pärast hinnaalandust maksis see kaup 62 rubla. Mitme protsendi võrra alandati kauba hinda?

700. Antikvariaat ostis kaks eset 225 rubla eest ja sai müües 40% kasumit. Kui palju maksis kauplus kummagi eseme eest, kui ühe eest saadi kasumit 25% ja teise eest 50%?

8. VALEMEID.

	Suurus, mõiste	Valem, avaldis
	1. Protsendid	
1.	1°. a ja b suhe protsentides	$\frac{a}{b}\cdot 100$
	2°. a muut Δa protsentides	$\frac{\Delta a}{a}\cdot 100$
2.	p % arvust a on m	$m=\frac{p}{100}\cdot a$
		$a=\frac{m}{p}\cdot 100$
	2. Keskmised	
3.	Arvude $a_1, a_2, \ldots, a_n$ aritmeetiline keskmine	$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$
4.	Arvude $a_1, a_2, \ldots, a_n$ geomeetriline keskmine	$\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}$
	3. Abivalemid	
5.	Kahe arvu summa ja vahe ruut	$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$
6.	Kahe arvu ruutude vahe	$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
7.	Kahe arvu summa ja vahe kuup	$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$
8.	Kahe arvu kuupide summa ja vahe	$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$
	4. Võrduse ja võrratuse omadused	
9.	Võrduse omadused	1°. Kui $a=b$, siis $b=a$. 2°. Kui $a=b$ ja $b=c$, siis $a=c$. 3°. Kui $a=b$, siis $a+c=b+c$. 4°. Kui $a=b$, siis $ac=bc$.
10.	Võrratuse omadused	1°. Kui $a>b$, siis $b<a$. 2°. Kui $a>b$ ja $b>c$, siis $a>c$. 3°. Kui $a>b$, siis $a+c>b+c$.

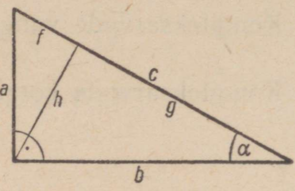
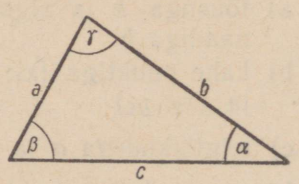
Suurus, mõiste	Valem, avaldis
	4°. Kui $a>b$ ja $c>d$, siis $a+c>b+d$. 5°. Kui $a>b$ ja $c<d$, siis $a-c>b-d$. 6°. Kui $a>b$ ja $m>0$, siis $ma>mb$. 7°. Kui $a>b$ ja $n<0$, siis $na<nb$.
5. Ruutvõrrand	
11. Ruutvõrrandi $x^2+px+q=0$ lahend	$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$
12. Ruutvõrrandi $ax^2+bx+c=0$ lahend	$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
13. Ruutvõrrandi $ax^2+2kx+c=0$ lahend	$x=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}$
14. Ruutvõrrandi $x^2+px+q=0$ lahendite summa ja korrutis	$x_1+x_2=-p$ $x_1x_2=q$
6. Progressioonid	
15. Aritmeetilise progressiooni üldliige (a_n — n-es liige, a_1 — esimene liige, d — vahe, n — liikmete arv)	$a_n=a_1+(n-1)d$
16. Aritmeetilise progressiooni summa (S_n — n esimese liikme summa)	1°. $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$ 2°. $S_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$
17. Geomeetrilise progressiooni üldliige (q — tegur)	$a_n=a_1q^{n-1}$
18. Geomeetrilise progressiooni summa	1°. $S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$ 2°. $S_n=a_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$
19. Tõkestamatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa	$S=\frac{a_1}{1-q}$

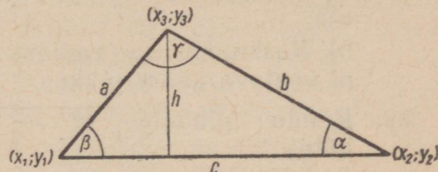
	Suurus, mõiste	Valem, avaldis
	7. Astmed ja juured	
20.	Korrutise aste	$(a_1a_2\ldots a_k)^n=a_1^n a_2^n\ldots a_k^n$
21.	Jagatise aste	$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$
22.	Võrdsete alustega astmete korrutis	$a^m a^n=a^{m+n}$
23.	Võrdsete alustega astmete jagatis	$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$
24.	Astme aste	$(a^m)^n=a^{mn}$
25.	Korrutise juur	$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_k}=$ $=\sqrt[n]{a_1}\cdot\sqrt[n]{a_2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{a_k}$
26.	Jagatise juur	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
27.	Juure aste	$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$
28.	Juure juur	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$
29.	Aste astendajaga null	$a^0=1$
30.	Negatiivse astendajaga aste	$a^{-m}=\frac{1}{a^m}$
31.	Murrulise astendajaga aste	$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$
	8. Logaritmid	
32.	Logaritm arvust N alusel a	$a^{\log_a N}=N$
33.	Korrutise logaritm	$\log(ab)=\log a+\log b$
34.	Jagatise logaritm	$\log\frac{a}{b}=\log a-\log b$
35.	Astme logaritm	$\log a^m=m\log a$
36.	Juure logaritm	$\log\sqrt[m]{a}=\frac{\log a}{m}$

Suurus, mõiste	Valem, avaldis
9. Kombinatoorika	
37. Permutatsioonid m elemendist	$P_m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m = m!$
38. Variatsioonid n elemendist m kaupa	$V_n^m = m(m-1)(m-2) \cdot \ldots \cdot [m-(n-1)]$
39. Kombinatsioonid n elemendist m kaupa	$C_n^m = \frac{V_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$
40. Newtoni binoom	$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$
10. Funktsioonid (x — argument, y — funktsioon, a, b, c — konstandid)	
41. Paarisfunktsioon	$f(-x) = f(x)$
42. Paaritu funktsioon	$f(-x) = -f(x)$
43. Lineaarfunktsioon	$y = ax + b \quad (a \neq 0)$
44. Võrdeline sõltuvus	$y = ax \quad (a \neq 0)$
45. Pöördvõrdeline sõltuvus	$y = \frac{a}{x} \quad (a \neq 0,\ x \neq 0)$
46. Ruutfunktsioon	$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$
47. Astmefunktsioon	$y = ax^n$
48. Eksponentfunktsioon	$y = a^x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$
49. Logaritmfunktsioon	$y = \log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$
11. Funktsiooni piirväärtus ja pidevus	
50. Funktsiooni piirväärtuse omadused	1°. $\lim[f(x_1) + g(x)] = \lim f(x) + \lim g(x)$ 2°. $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$ 3°. $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$, $(\lim g(x) \neq 0)$
51. Arv π	$\pi = \lim\limits_{n \to \infty} \left(n \cdot \sin \frac{180°}{n}\right)$

Suurus, mõiste	Valem, avaldis
52. Arv e	$e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
53. Funktsiooni $f(x)$ pidevus kohal a	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$
12. Funktsiooni tuletis	
54. Funktsiooni $f(x)$ tuletis (Δx — argumendi muut)	$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
55. Elementaarfunktsioonide tuletised	vt. tabel lk. 240
56. Funktsiooni $y=f(x)$ kasvamise tunnus	$f'(x)>0$
57. Funktsiooni $y=f(x)$ kahanemise tunnus	$f'(x)<0$
58. Funktsiooni $y=f(x)$ ekstreemumkoha tarvilik tingimus	$f'(x)=0$
59. Funktsiooni $y=f(x)$ puutuja võrrand punktis $(x_1;\ y_1)$	$y-y_1=f'(x_1)(x-x_1)$
60. Funktsiooni $y=f(x)$ graafiku kumeruse tunnus	$f''(x)<0$
61. Funktsiooni $y=f(x)$ graafiku nõgususe tunnus	$f''(x)>0$
62. Käänupunkti olemasolu tarvilik tingimus	$f''(x)=0$
13. Kompleksarvud	
63. Imaginaarühik	$i^2=-1$
64. Kompleksarvu algebraline kuju	$a+bi$
65. Kompleksarvu trigonomeetriline kuju	$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, kus $a=r\cos\varphi$ ja $b=r\sin\varphi$ ning $\tan\varphi=\frac{b}{a}$ ja $r=\sqrt{a^2+b^2}$
66. Kompleksarvude summa	$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+$ $+(b+d)i$

Suurus, mõiste	Valem, avaldis
67. Kompleksarvude vahe	$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+$ $+(b-d)i$
68. Kompleksarvude korrutis	$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+$ $+(ad+bc)i$
	$r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\times$ $\times r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$ $=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+$ $+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$
69. Kompleksarvude jagatis	$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$
	$\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+$ $+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$
70. Kompleksarvu aste	$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=$ $=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$
71. Kompleksarvu juur	$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=$ $=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$
14. Joone võrrand (x, y — joone mistahes punkti koordinaadid; a, b, k, r — konstandid)	
72. Võrrand sirgjoonele, mis on määratud	
a) tõusuga k ja algordinaadiga b	$y=kx+b$
b) kahe punktiga $(x_1;\ y_1)$ ja $(x_2;\ y_2)$	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$
c) telglõikudega a ja b	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$
73. Lineaarse interpolatsiooni valem	$\Delta y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\Delta x$
74. Parabooli võrrand	$y=ax^2+bx+c$
75. Hüperbooli võrrand	$y=\frac{a}{x}$
76. Ellipsi võrrand	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
77. Ringjoone võrrand	$x^2+y^2=r^2$

Suurus, mõiste	Valem, avaldis
15. Täisnurkne kolmnurk	
78. Meetrilised seosed	1°. $a^2+b^2=c^2$ 2°. $h^2=fg$ 3°. $a^2=fc$ 4°. $b^2=gc$
79. Külgede ja nurkade vahelised seosed	1°. $\frac{a}{c}=\sin\alpha$ 2°. $\frac{b}{c}=\cos\alpha$ 3°. $\frac{a}{b}=\tan\alpha$ 4°. $\frac{b}{a}=\cot\alpha$
80. Pindala	$S=\frac{1}{2}ch$ $S=\frac{1}{2}ab$
16. Kolmnurk	
81. Koosinuslause	$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$
82. Siinuslause (R — ümberringjoone raadius)	$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$
83. Teisi külgede ja nurkade vahelisi seoseid	1°. $\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}$

Suurus, mõiste	Valem, avaldis
	$2°.\ \frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$ $3°.\ \frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$
84. Kolmnurga pindala (r — siseringjoone raadius)	 $1°.\ S=\frac{1}{2}hc$ $2°.\ S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$ $3°.\ S=\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}$ $4°.\ S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, kus $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ $5°.\ S=pr$ $6°.\ S=\frac{abc}{4R}$ $7°.\ S=\frac{1}{2}\lvert(x_1-x_2)(y_1-y_3)-$ $-(x_1-x_3)(y_1-y_2)\rvert$
85. Võrdhaarne kolmnurk (a — alus, b — haar)	$S=\frac{a}{2}\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$
86. Võrdkülgne kolmnurk (a — külje pikkus, R — ümberjoonestatud ringjoone raadius)	$a=R\sqrt{3}$ $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ $S=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$

Suurus, mõiste	Valem, avaldis
17. Ringjoon. Nelinurk	
87. a) Ringjoone pikkus (r — raadius, d — diameeter)	$c=2\pi r$ $c=\pi d$
b) Ringi pindala	$S=\pi r^2$ $S=\frac{\pi d^2}{4}$
88. a) Kesknurgale x radiaani vastava sektori pindala	$S=\frac{r^2 x}{2}$
b) Kesknurgale x radiaani vastava kaare pikkus	$s=rx$
89. Ruudu pindala (a — külg)	$S=a^2$
90. Ristküliku pindala (a, b — lähisküljed)	$S=ab$
91. Rombi pindala (a — külg, α — üks rombi nurk; d_1, d_2 — diagonaalid)	1°. $S=a^2 \sin\alpha$ 2°. $S=\frac{1}{2} d_1 d_2$
92. Rööpküliku pindala (a, b — lähisküljed, α — nendevaheline nurk)	$S=ah=ab\sin\alpha$
93. Rööpküliku diagonaalide omadus (d_1, d_2 — diagonaalid; a, b — lähisküljed)	$d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2)$
94. Trapetsi pindala (a, b — alused, h — kõrgus)	$S=\frac{h}{2}(a+b)$
95. Nelinurga pindala (d_1, d_2 — diagonaalid, α — nurk nende vahel)	$S=\frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha$
18. Trigonomeetria valemid	
96. Seosed radiaanmõõdu ja kraadimõõdu vahel	$1 \text{ rad}=\frac{180}{\pi}=57°17'45''$ $1°=\frac{\pi}{180°} \text{ rad} \approx 0{,}017453 \text{ rad}$
97. Trigonomeetrilised põhiseosed	1°. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

Suurus, mõiste	Valem, avaldis
	2°. $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ 3°. $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ 4°. $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$
98. Negatiivse nurga trigonomeetrilised funktsioonid	1°. $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ 2°. $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ 3°. $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$
99. Taandamisvalemid	1°. $\sin(180°-\alpha) = \sin\alpha$ 2°. $\cos(180°-\alpha) = -\cos\alpha$ 3°. $\tan(180°-\alpha) = -\tan\alpha$ 4°. $\sin(180°+\alpha) = -\sin\alpha$ 5°. $\cos(180°+\alpha) = -\cos\alpha$ 6°. $\tan(180°+\alpha) = \tan\alpha$ 7°. $\sin(360°-\alpha) = -\sin\alpha$ 8°. $\cos(360°-\alpha) = \cos\alpha$ 9°. $\tan(360°-\alpha) = -\tan\alpha$
100. Trigonomeetriliste funktsioonide perioodilisus	1°. $\sin(\alpha + k\cdot 360°) = \sin\alpha$ 2°. $\cos(\alpha + k\cdot 360°) = \cos\alpha$ 3°. $\tan(\alpha + k\cdot 180°) = \tan\alpha$
101. Nurkade summa ja vahe valemid	1°. $\sin(\alpha\pm\beta) =$ $= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$ 2°. $\cos(\alpha\pm\beta) =$ $= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$ 3°. $\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$
102. Kahekordse nurga valemid	1°. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ 2°. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ 3°. $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$
103. Poolnurga valemid	1°. $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ 2°. $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ 3°. $\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ 4°. $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ 5°. $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Suurus, mõiste	Valem, avaldis
104. Trigonomeetriliste funktsioonide summa ja vahe valemid	1°. $\sin\alpha+\sin\beta=$ $=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ 2°. $\sin\alpha-\sin\beta=$ $=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ 3°. $\cos\alpha+\cos\beta=$ $=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ 4°. $\cos\alpha-\cos\beta=$ $=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
105. Trigonomeetrilised põhivõrrandid	
1°. Võrrandi $\sin x=m$ üldlahend	$x=k\pi+(-1)^k\arcsin m$
2°. Võrrandi $\cos x=m$ üldlahend	$x=2k\pi\pm\arccos m$
3°. Võrrandi $\tan x=m$ üldlahend	$x=k\pi+\arctan m$

Kehade pindala ja ruumala valemid.

(V — ruumala; S_k — külgpindala; S_p — põhja pindala; S_t — täispindala; h — kõrgus; n — põhja tippude arv; r — põhja raadius)

Keha	Pindala	Ruumala
Prisma $\ddot{u}_n$ — ristlõike ümbermõõt l — külgserv	$S_k=\ddot{u}_n\cdot l$ $S_t=S_k+2S_p$	$V=S_ph$
Korrapärane püramiid n — põhja tippude arv a_n — põhja serv m_n — apoteem k_n — põhja apoteem	$S_k=\frac{1}{2}na_nm_n$ $S_t=\frac{1}{2}na_n(m_n+k_n)$	$V=\frac{1}{3}S_ph$

Keha	Pindala	Ruumala
Püramiid		$V=\frac{1}{3}S_p h$
Korrapärane tüvipüramiid a_n, b_n — põhjade servad k_n, l_n — põhjade apoteemid	$S_k=\frac{na_n+nb_n}{2}\cdot m_n$ $S_t=\frac{n}{2}[a_n(m_n+k_n)+$ $+b_n(m_n+l_n)]$	$V=\frac{h}{3}(S_{p_1}+\sqrt{S_{p_1}S_{p_2}}+$ $+S_{p_2})$
Tüvipüramiid		$V=\frac{h}{3}(S_{p_1}+\sqrt{S_{p_1}S_{p_2}}+$ $+S_{p_2})$
Silinder	$S_k=2\pi rh$ $S_t=2\pi r(r+h)$	$V=\pi r^2 h$
Koonus (m — moodustaja)	$S_k=\pi rm$ $S_t=\pi r(r+m)$	$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$
Tüvikoonus	$S_k=\pi m(r_1+r_2)$ $S_t=\pi[r_1^2+r_2^2+$ $+m(r_1+r_2)]$	$V=\frac{\pi h}{3}(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)$
Kera (sfäär)	$S=4\pi r^2$	$V=\frac{4}{3}\pi r^3$
Kera (sfääri) segment	$S=2\pi rh$	$V=\pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right)$
Kera vöö (kiht)	$S=2\pi rh$	$V=\frac{\pi h}{6}(3r_1^2+3r_2^2+h^2)$
Kera sektor		$V=\frac{2}{3}\pi r^2 h$
Pöördkeha		$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$

TULETISTE TABEL.

Funktsioon	Tuletis
c	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x)+g(x)$	$f'(x)+g'(x)$
$f(x)\cdot g(x)$	$f'(x)\cdot g(x)+g'x)\cdot f(x)$
$c\cdot f(x)$	$c\cdot f'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$, kus $g(x)\neq 0$	$\frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{[g(x)]^2}$

SISUKORD

Эльмар Этверк, Олаф Принитс, МАТЕМАТИКА ДЛЯ XI КЛАССА. На эстонском языке. Издание 3-е. Художественное оформление Ю. Аррак. Издательство «Валгус». Таллин, Пярнуское шоссе, 10.

*

Toimetaja K. Kallaste. Kunstiline toimetaja H. Keigo. Tehniline toimetaja A. Muna. Korrektor E. Bitter. Laduda antud 2. IV 1968. Trükkida antud 12. V 1968. Paber 60×90/16. Trükipaber nr. 2 — Kohila Paberivabrik. Trükipoognaid 15,25. Arvestuspoognaid 11,55. Trükiarv 7000. Tellimise nr. 2268. Hans Heidemanni nim. trükikoda, Tartu, Ülikooli 17/19. I

Hind 23 kop.

23 kop.