Kompuuterfüüsika II

Heiki Kasemägi

Tehnoloogiainstituut
Tartu Ülikool

9. detsember 2009. a.

Eessõna

Käesolev loengukonspekt on abivahendiks Tartu Ülikooli Füüsika Instituudis loetavale ainekursusele ”Kompuuterfüüsika II”(ainekoodiga LOFY.03.019).

Ainekursus käsitleb lõplike elementide meetodi kasutamist füüsikaliste, keemiliste ja materjaliteaduse probleemide uurimisel. Lõplike elementide meetod on arvutil põhinev simulatsioonimeetod, mis saanud alguse lennukitööstuses ettetulnud probleemide lahendamisest, on leidnud oma tee pea kõigisse valdkondadesse, mis kasutavad simulatsiooni ühe uurimismeetodina.

Loengute jooksul antakse ülevaade lõplike elementide meetodi põhidetailidest ja ja tuuakse praktilised näited mõningatest reaalsetest probleemidest erinevatest valdkondadest nagu mehaanika, soojusülekanne, difusioon vooludünaamika, helivõnkumised. Antakse ülevaade saadaolevatest kommerts- ja vabavaralistest arvutiprogrammidest ning käsitletakse arvutisimulatsioonide praktilist teostamist. Seminarides ja praktikumides lahendatakse praktilisi ülesandeid arvutil ja teostatakse isesisev projekt.

Konspekti peatükid põhinevad peale otseselt tekstis esinevate viidete järgmistel allikatel:

1. peatükk:

N. S. Ottosen ja H. Petersson, “Introduction to the Finite Element Method” [1, ptk. 1]

R. D. Cook, D. S. Malkus, M. E. Plesha ja R. J. Witt, “Concepts and Applications of Finite Element Analysis” [2, ptk. 1]

2. peatükk:

N. S. Ottosen ja H. Petersson, “Introduction to the Finite Element Method” [1, ptk. 11]

C. A. Felippa, “Introduction to Finite Element Methods” [3, ptk. 6]

E. R. Champion noorem., “Finite Element Analysis in Manufacturing Engineering. A PC-Based Approach” [4, ptk. 3]

3. peatükk:

K. D. Mish, L. R. Herrmann ja LaDawn Haws, “Finite Element Procedures in Applied Mechanics” [5, ptk. 1]

4. peatükk:

R. D. Cook, D. S. Malkus, M. E. Plesha ja R. J. Witt, “Concepts and Applications of Finite Element Analysis” [2, ptk. 9]

5. peatükk:

W. B. Bickford, “A First Course on the Finite Element Method” [6, ptk. 2]

6. peatükk:

L. J. Segerlind, “Applied Finite Element Analysis” [7, ptk. 11]

N. S. Ottosen ja H. Petersson, “Introduction to the Finite Element Method” [1, ptk. 10]

7. peatükk:

T. J. Chung, “Finite Element Analysis in Fluid Dynamics” [8, ptk. 7]

8. peatükk:

T. J. Chung, “Finite Element Analysis in Fluid Dynamics” [8, ptk. 5]

9. peatükk:

L. J. Segerlind, “Applied Finite Element Analysis” [7, ptk. 12]

10. peatükk:

L. J. Segerlind, “Applied Finite Element Analysis” [7, ptk. 13]

11. peatükk:

K. D. Mish, L. R. Herrmann ja LaDawn Haws, “Finite Element Procedures in Applied Mechanics” [5, ptk. 8]

12. peatükk:

J. N. Reddy,“An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis”, [9, ptk. 1.5]

R. D. Cook, D. S. Malkus, M. E. Plesha ja R. J. Witt, “Concepts and Applications of Finite Element Analysis” [2, ptk. 10]

Ainekursus ”Kompuuterfüüsika II”ja selle materjalid on ette valmistatud Eesti Infotehnoloogia Sihtasutuse (http://www.eitsa.ee) toetusel.

Veebikursuse ”Kompuuterfüüsika II”(https://moodle.ut.ee/course/view.php?id=50) valmimist on toetanud Euroopa Sotsiaalfond.

Sisukord

1 Sissejuhatus **7**
- 1.1 Meetodi põhiidee . . . 7
- 1.2 Ajalugu ja areng . . . 7
- 1.3 Kasutamisvõimalused . . . 8
  - 1.3.1 Tahkise-, ehitus- ja struktuurimehaanika . . . 9
  - 1.3.2 Elektromagnetism ja elektrotehnika . . . 9
  - 1.3.3 Autotööstus . . . 9
  - 1.3.4 Soojusjuhtivus . . . 9
  - 1.3.5 Vedelike voolamine . . . 9
  - 1.3.6 Akustika . . . 10
- 1.4 Eelised . . . 10
- 1.5 Puudused . . . 10

2 Diskreetimine **12**
- 2.1 Võrk . . . 12
- 2.2 Elementide parameetrid . . . 12
- 2.3 Elementide liigitus . . . 13
- 2.4 1D elemendid . . . 14
  - 2.4.1 Piirkonna jagamine lineaarelementideks . . . 14
  - 2.4.2 Lineaarelement . . . 14
  - 2.4.3 Näide . . . 16
  - 2.4.4 Tükati sile pidev võrrand . . . 17
  - 2.4.5 Ruutelement . . . 18
  - 2.4.6 Kuup- ja neljandat järku elemendid - Lagrange'i interpolatsioon . . . 20
- 2.5 2D elemendid . . . 21
  - 2.5.1 2D võrk . . . 21
  - 2.5.2 Lineaarne kolmnurkelement . . . 24
  - 2.5.3 Näide . . . 26
  - 2.5.4 Näide . . . 27
  - 2.5.5 Bilineaarne ristkülikelement. Isoparameetriline element . . . 27
  - 2.5.6 Näide . . . 29
  - 2.5.7 Tükati sile pidev võrrand . . . 30
  - 2.5.8 Näiteid 2D elementidest . . . 31
- 2.6 3D elemendid . . . 33
  - 2.6.1 3D element . . . 33
  - 2.6.2 Näiteid 3D elementidest . . . 33
- 2.7 Koordinaadisüsteemid . . . 34
  - 2.7.1 Lokaalkoordinaatide süsteem . . . 34
  - 2.7.2 Loomulike koordinaatide süsteem . . . 36
  - 2.7.3 Ristkülikelement . . . 38
  - 2.7.4 Kolmnurkelement: pindalakoordinaadid . . . 38
  - 2.7.5 Näide . . . 41
  - 2.7.6 Pidevus . . . 42

3 Rajaülesanded **44**
3.1 Lihtsa rajaülesande *tugev* lahend . . . 44
3.2 Lihtsa rajaülesande *nõrgad* lahendid . . . 45
3.3 Diraci deltafunktsioon . . . 46
3.4 Lihtne rajaülesanne. Jätk . . . 47
3.5 *Tugeva* ja *nõrga* vormi ekvivalentsus . . . 48
3.6 Lisandusi lihtsa rajaülesande *nõrgale* vormile . . . 52
3.7 Ülevaade mõnedest kriteeriumidest lihtsa rajaülesande lahendamiseks . . . 53
3.8 Lihtsa rajaülesande ligikaudsed lahendid . . . 54
3.9 Lihtsa rajaprobleemi variatsiooniline formulatsioon . . . 57
3.10 Ligikaudsete lahendite moodustamise näide . . . 58
3.11 Lahend . . . 59

4 Vead **62**
4.1 Veaallikad . . . 62
4.2 *Pahaloomulisus* . . . 63
4.3 Seisundiarv . . . 65
4.4 Diagonaalne kõdumistest . . . 67
4.5 Jäägid . . . 69
4.6 Diskreetimisviga. Koonduvus. . . . 70
4.7 Mitmekordse võrgu ekstrapoleerimine . . . 74
4.8 Võrgu redigeerimise meetodid . . . 75
4.8.1 h-viimistlus . . . 76
4.8.2 p-viimistlus . . . 76
4.8.3 r-viimistlus . . . 76
4.8.4 Märkused . . . 77
4.8.5 Teised meetodid . . . 77

5 Mehaanika **79**
5.1 1D teljesuunaline deformatsioon . . . 79
5.1.1 Diskreetimine . . . 79
5.1.2 Interpoleerimine . . . 80
5.1.3 Elementide formuleerimine . . . 80
5.1.4 Võrrandisüsteemi koostamine . . . 80
5.1.5 Piirangud . . . 81
5.1.6 Lahend . . . 81
5.1.7 Tuletatud muutujate arvutamine . . . 81
5.1.8 4-sõlmeline mudel . . . 82
5.1.9 Tulemuste analüüs . . . 82

6 Soojuse ülekandmine **85**
6.1 1D radiaatoriribi . . . 85
6.2 1D radiaatori illustreeriv näide . . . 86
6.3 2D soojusvoog . . . 88
6.4 2D näide . . . 94
6.5 2D soojusvoog koos konvektsiooniga . . . 98
6.6 3D soojusvoog . . . 99

7 Difusioon **101**
7.1 Difusioonivõrrandid . . . 101
7.2 Lõplike elementide võrrandid . . . 102
7.3 Näidisprobleemid . . . 104
7.3.1 Difusioon ilma konvektsioonita . . . 104
7.3.2 Konvektiivne difusioon (Neumanni-Dirichlet' probleem) . . . 105
7.3.3 Konvektiivne difusioon (kahepunktiline rajaprobleem) . . . 108

8 Vooludünaamika. Kokkusurumata voolamine **109**
8.1 Liikumisvõrrandid ja ideaalse vedeliku pidevus . . . 109
8.2 2D mitteviskoosne vool . . . 110
8.2.1 Lõplike elementide formuleeringud . . . 110
8.2.2 Arvutused kolmnurkelementidega . . . 115
8.3 Laine liikumine madalas basseinis . . . 120
8.3.1 Põhivõrrandid . . . 120
8.3.2 Lõplike elementide formuleering . . . 121
8.3.3 Omaväärtuste lahendid . . . 123

9 Helivõnkumised **125**
9.1 1D võnkumised . . . 125
9.2 2D võnkumised . . . 129

10 Telgsümmeetria **131**
10.1 Diferentsiaalvõrrand . . . 131
10.2 Telgsümmeetrilised elemendid . . . 131
10.3 Galerkini meetod . . . 133
10.4 Elemendimaatriksid . . . 135
10.5 Illustreeriv näide . . . 136
10.6 Tuletatud rajatingimused . . . 137
10.7 Illustreeriv näide . . . 139

11 Mittelineaarsus **141**
11.1 Mittelineaarsed probleemid . . . 141
11.2 Newtoni meetod . . . 144
11.3 Iteratsiooniskeemid mittelineaarsete maatriksvõrrandisüsteemide jaoks . . . 147
11.4 Mittelineaarsete iteratsiooniskeemide koonduvustestid . . . 149

12 Praktiline modelleerimine **150**
12.1 Üldpilt . . . 150
12.2 Füüsikaline *vs.* elemendi käitumine . . . 151
12.3 Materjali omadused . . . 153
12.4 Ühendused struktuuris . . . 154
12.5 Lõplike elementide programmi ülesehitus . . . 154
12.6 Üldised vead . . . 155
12.7 Mudeli kontrollimine . . . 157
12.8 Arvutustulemuste arvustus . . . 158

Viited **161**

1 Sissejuhatus

1.1 Meetodi põhiidee

Lõplike elementide meetod (LEM) on numbriline meetod üldiste diferentsiaalvõrrandite lahendamiseks aproksimeerimisega.

Vaatluse all olevat füüsikalist probleemi käsitlev(ad) diferentsiaalvõrrand(id) kehtivad eelduse kohaselt terves kindlalt piiritletud 1- (1D), 2- (2D) või 3-mõõtmelises (3D) piirkonnas. LEM-i iseloomustavaks tunnuseks on see, et otsitakse lähendit mitte kogu piirkonda jaoks, vaid see piirkond jaotatakse väiksemateks ehk lõplikeks elementideks ja lahend aproksimeeritakse iga elemendi jaoks. Isegi kui muutujate väärtused võivad vaadeldavas lõplikus piirkonnas varieeruda mittelineaarselt, tehakse suhteliselt õigustatud eeldus, et iga elemendi piires muutuvad need väärtused lineaarselt. Sellist elementide kogumit nimetatakse lõplike elementide võrgustikuks (*mesh*). Igale elemendile valitud aproksimatsioonitüübile saadakse vastuseks selle elemendi käitumine. Igal elemendil teostatav aproksimatsioon on suhteliselt lihtne. Kui kõigi elementide reaktsioon on teada, pannakse need teatud reeglite järgi kokku, võimaldades nii arvutada keha kui terviku ligikaudse reaktsiooni.

Aproksimatsioon on tavaliselt polünomiaalne, olles tegelikult teatud sorti interpolatsioon üle elemendi, kusjuures eeldatakse, et muutuja väärtused on elemendi kindlates punktides teada. Neid punkte nimetatakse sõlmpunktideks ja tihti asuvad need iga elemendi piiril. Täpset viisi, kuidas muutuja muudab oma väärtust võrepunktist võrepunkti, väljendatakse spetsiifilise aproksimatsiooniga, mis võib olla lineaarne, ruutsõltuvus, kuupsõltuvus jne.

Muutuja ligikaudne väärtus on teada kogu elemendi piires, kui see on teada võresõlmedes, mis nüüd saavad probleemi tundmatuteks suurusteks. Aproksimatsioonimeetodil pole siinkohal mingit mõju. Sel viisil asendatakse originaalse probleemi esialgselt põhimõtteliselt lõpmatu hulk tundmatuid (pidev süsteem) ehk vabadusastmeid lõpliku arvu tundmatutega (diskreetne süsteem). Üldiselt kehtib reegel, et mida rohkem tundmatuid, seda täpsem on ligikaudne lahend. Muutuja väärtused võresõlmedes saadakse võrrandite süsteemi lahendeist. Kuna tavaliselt hõlmab selline süsteem sadu ja tuhandeid tundmatuid, siis sõltub LEM suuresti kasutada olevast arvutusvõimsusest.

LEM-i võib kohaldada suvalise diferentsiaalvõrrandi ligikaudse lahendi saamiseks. Kuna meetod on numbriline, siis võib seda rakendada väga erinevate füüsikalistele probleemidele. Nendeks võivad olla näiteks soojusjuhtivus, elastsete võllide vääne, diffusioon, põhjavee voolamine, 1D, 2D ja 3D kehade, kaasa arvatud tala ja plaadi elastse käitumise analüüs. Meetodit võib kohaldada ka suvalise kujuga ja suvalisest materjalist kehale.

1.2 Ajalugu ja areng

Nii vara nagu 1851 tehti esimene pinna jagamine kolmnurkadeks ja kirjutati lõplike vahede avaldis kogu diskreeditud piirkonna kohta. Seda tehti selleks, et tuletada ruumis kinnise kõveraga piiratud ala minimaalse pinna diferentsiaalvõrrandid [10]. 1906. aastast hakati märkama, et regulaarne kangide kogum käitub lähedaselt isotroopsele elastsele kehale. 1941 avaldati töö [11], milles rakendati hästituntud raamstruktuuride analüüsi meetodit tasandi elastsus- ja plaadijäikusprobleemidele. Kuigi seda meetodit ei saa rakendada suvalise kujuga kehadele, võib seda pidada lõplike elementide analüüsi (LEA) eelkäijaks.

LEM oma praegusel kujul pärineb Courant' 1943. aasta tööst, mis suuliselt kanti ette juba 1941 Ameerika Matemaatikaseltsis [12]. Courant jagas õõnsa võlli jäikuse määramiseks selle ristlõike kolmnurkadeks ja interpoleeris pingefunktsiooni ϕ lineaarselt kõigis kolmnurkades nende võrgusilmades olevate ϕ väärtuste järgi. Courant märkis, et meetod võimaldab laialdast üldistamist, millega kaasneb suur paindlikkus ja arvestatav praktiline väärtus. Siiski ei ilmunud praktilised rakendused enne, kui aeronautikainseneerid asusid meetodit arendama, tõenäoliselt Courant' tööst mitteteadlikud olles.

1950-tel tegi märkimisväärseid edusamme aeronautikatööstus. USA-s leiti, et tavalised analüüsimeetodid pole adekvaatsed väikese kõrguse ja laiuse suhtega tiibade arvutamiseks, sestap kavandas Turner kolmenodelise kolmnurkelemendi tiivapinna mudeleerimiseks [13]. Sama tegi Taig Inglismaal [14]. Saksamaal lisas Argyris LEA põhimõtted maartriksarvutusi käsitlevate artiklite kogumisse [15]. Detaile leiab veel viidetest [16–19].

"Lõpliku elemendi" mõiste lõi Clough 1960. Varsti pärast seda arendati suuresti tänu intuitsioonile füüsikalistele argumentidele tuginedes välja suur hulk uusi elemente pingeanalüüsi jaoks. 1963 sai LEA tunnustuse akadeemilises maailmas, kui selles tunti ära klassikalise Rayleigh-Ritzi aproksimatsioonitehnika üks vorme. Sellega omandas LEA tugeva matemaatilise baasi olemaks laialt kasutatav meetod, mitte enam eritrikk pingeanalüüsis. 1965 ilmusid artiklid, milles LEA-d kasutati soojusjuhtivuse ja immitseva vooluse uurimisel. Üldotstarbelised LEA arvutiporgrammid ilmusid 1960-te lõpus ja 1970-te alguses. Alates 1970-te lõpust, mil LEA tarkvara hakkas kasutama arvutigraafika suurenevat judlust, muutus LEA piisavalt ligitõmbavaks reaalsete probleemide lahendamiseks. Kuni selle ajani oli meetod nii üksluine, et seda rakendati vaid juba olemasolevate struktuuride kontrolliks või läbikukkunud struktuuride uurimiseks. Kuna praktiline LEA sõltub otseselt arvutusvõimsusest, siis pole juhus, et arvutustehnika ja programmeerimiskeelte areng kulges käsikäes varasema LEA arenguga. 1967 ilmus esimene LEA-d käsitlev raamat [20].

1.3 Kasutamisvõimalused

LEM-i kasutusvõimalused on kirjeldamatult mitmekesised. Oma algusaegadel aeronatikast ja kosmosetööstusest tiivad alla saanuna, adopteeriti meetod kiiresti ehistusmehaanika ja pideva keskkonna mehaanika poolt. Järgnesid rakendused Laplace'i ja Poissoni võrrandite lahendamiseks. Pärast seda, kui B. A. Szaba, G. C. Lee 1969 ja O. C. Zienkevicz 1971 näitasid ja tõestasid, et meetodist tekkivaid võrrandeid saab vaadelda Galerkini ja vähimruutude meetodi erijuhuna, siis kadusid igasugused takistused LEMi kasutamiseks suvaliste diferentsiaalvõrrandite lahendamiseks.

Olgu siin loetletud mõned valdkonnad neist paljudest, kus LEM-i kasutatakse:

- tahkise-, ehitus- ja struktuurimehhaanika;
- elektromagnetism ja elektrotehnika;
- soojusülekanne;
- akustika;
- difusioon;
- vedelike voolamine;

- geoloogia;
- keemilised reaktsioonid ja keemiatehnika;
- mikroelektromehaanilised süsteemid (MEMS);
- autotööstus;
- bio- ja meditsiinitehnika.

Tihtilugu on need valdkonnad üksteisega läbi põimunud, nii et üks valdkond võib olla mitme teise valdkonna alamosaks. Näiteks autotööstus ei saa läbi ei struktuurimehaanika ega soojusülekandeta.

1.3.1 Tahkise-, ehitus- ja struktuurimehaanika

LEM adopteeriti kahtlemata kõige kiiremini ja kõige valutumalt tahkise-, ehitus- ja struktuurimheaanikas. Ehitiste kontruktsioonid, talad, sillad, pilvelõhkujad – kõik need sisaldavad hulgaliselt probleeme, mida saab LEM-i abil laialdaselt lahendada. Probleemide loetelu hõlmab elastsust, plaatide ja kestade analüüsi, kontiinumi vibratsioone (omavõnkesagedused ja nende moodide kujud) [7], pingeid, rõhkusid ja surveid.

1.3.2 Elektromagnetism ja elektrotehnika

LEM-i saab edukalt kasutada suurte elektrivoolu genereerivate turbiinide ja voolu muundavate trafode simuleerimisel [21]. See on vajalik näiteks magnet- ja elektrivälja jaotuse uurimiseks, et trafo diain oleks võimalikult ökonoomne ja ohutu. Simulatsioonidega saab välja selgitada, kui suuri koormusi materjalid taluvad, et läbilööki ei toimuks, mis võiks viia suurte kahjustusteni.

1.3.3 Autotööstus

Autotööstus püüab saavutada üha paremaid tulemusi mitmes valdkonnas nagu massi minimeerimine, auto üldise toimimise parendamine ja tugevuse suurendamine, suurem ohutus, vastupidavus ja kestvus, ökonoomsus. Praktiliselt kõik autos olevad süsteemid saavad FEM-ist kasu lĭgata, alates mootorist ja ülekandest kuni rataste, kolbide jt. detailideni. Võimalik on simuleerida näiteks õhuvoolu mööda auto kere ehk siis auto aerodünaamikat [4].

1.3.4 Soojusjuhtivus

Üldise soojusjuhtivusprobleemi näiteks on gaasturbiinmootor, milles temperatuurit tõusevad väga kõrgele ja mõningaid sisedetaile tuleb jahutada eduka töö tagamiseks. Tavaliselt on pöörleva osa küljes olevatel labadel sooned, millesse juhitakse laba jahutamiseks jahedamat õhku. Lõplike elementide mudelit kasutatakse soonte arvu, suuruse ja asukoha määramiseks, et laba jahutamine oleks efektiivne.

1.3.5 Vedelike voolamine

Ideaalse vedeliku keerisevaba voolamist uuritakse suhteliselt laialdaselt, sest sellest analüüsist saadakse infot voolu kohta ümber nurkade, üle kalatõkete, läbi konstruktsioonide ja ümber tiibade. Ideaalne keerisevaba voolamine on lähendus, mis eeldab, et vedeliku ja pinna vahel pole hõõrdumist ja et liikumise ajal ei toimu vedelikuosakeste pöörlemist või moonutusi.

Vee voolamist maa sees võib samuti lähendada keerisevaba voolamisega. Põhjavee voolamise analüüs on oluline regionaalplaneerimisel, sest sellest sõltub asumite veevarustus. Samuti on sellel analüüsil oluline roll uurimaks vee voolamist läbi tammide ja nende alt ning valgumist kanalisatsiooni [7]. Voolamised, mida saab LEM abil simuleerida, võivad olla ka keeriselised, viskoossed ja kokkusurutud. Voolamis ja vedelikke iseloomustavad suurused võivad üksteist mõjutada, viies nii keeruliste mittelineeaarsete võrranditeni.

Omaette valdkonna moodustab magnetohüdrodünaamika, mis tegeleb magnetvälja olemasolul ülimalt juhtivate vedelike voolamistega. Selline liikumine genereerib elektrivoolu, mis muudab magnetvälja ja häiritud väli omakorda tekitab mehaanilise jõu, mis mõjutab vooluvälja [8].

1.3.6 Akustika

LEM-i abil saab lahendada selliseid probleeme nagu laine liikumine madalas vees ja akustilised vibratsioonid suletud ruumides [7].

1.4 Eelised

LEM-i kasutamine on tänapäeval väga laialdane ja oma osa on selles kindlasti meetodi eelistes teiste numbriliste meetodite ees [2]:

- meetodi iseloomustab mitmekülgsus ja paindlikkus probleemi defineerimisel;
- meetodi saab rakendada pea kõikidele väljaprobleemidele, hõlmates teiste seas soojusjuhtivust, rõhu- ja pingeanalüüsi, magenetvälja probleeme jne.
- puuduvad geomeetrilised piirangud, mis tähendab seda, et uuritav objekt võib olla suvalise kujuga;
- ääretingimused pole piiratud, need võivad olla katkevad ja mittestandardsed;
- ühe ja sama objekti piires võib olla piirkondi, millel on erinevad füüsikalised omadused ning käitumine ja matemaatiline kirjeldus. Nii saab simuleerida kehasid, mis koosnevad mitmest erinevast materjalist javõi detailist;
- lõplike elementide moodustatav võrgustik sarnaneb tegelikule kehale või piirkonnale;
- aproksimatsiooni saab kergesti parandada meshi muutmisega näiteks selliselt, et suurema gradiendiga piirkondadesse lisatakse rohkem elemente.

1.5 Puudused

Sarnaselt teiste arvutusmeetoditega, pole ka LEM vaba puudustest. Olgu siin mõningad neist nimetatud [22]:

- meetodi puudused on peamiselt seotud sellega, et arvutuste maht on suur ja arvutused on keerukad; peamised piirid seab kasutatav arvutusvõimsus ning arvutuste keerukus nõuab ka keerukate programmide koostamist;
- arvutused on mahukad nii vajatava protsessorijõudluse kui ka kasutatava mälu- ja salvestushulga poolest;

- meetod võib olla üpriski ebaefektiivne, kui tuleb diskreetida ülisuur ruumala võrreldes kogupindalaga;
- lahendi diferentseerimine, et saada välja, annab numbriliselt kehva tulemuse; nt. magnetvälja tiheduse $\mathbf{B}$ leidmiseks tuleb arvutada vektorpotentsiaali $\mathbf{A}$ rootor. Sel ajal, kui $\mathbf{A}$ graafikud on siledad, on $\mathbf{B}$ graafikutes diferentseerimise tõttu katkevused;

2 Diskreetimine

2.1 Võrk

LEM-i üks põhikontseptsioone on matemaatilise mudeli jagamine üksteisest eraldatud ja mittekattuvateks lihtsa geomeetriaga komponentideks, mida nimetatakse lõplikeks elementideks ehk elementideks.

Üks esimesi samme LEA-s on valida elementide tüüp ja sellele vastav võrk. Selleks pole olemas fikseeritud reegleid. On selge, et antud elemenditüübi korral kasvab täpsus elemendi suuruse vähenemisel. Üldiselt kasutatakse väikesi elemente piirkondades, kus tundmatu funktsioon, näiteks temperatuur muutub tormakalt. Kuid see pole ainus kaalutlus elemendi suuruse ja tüübi valimisel. Iga analüüs hõlmab teatud ressursside kasutamist, olgu selleks siis raha või tööjõud. Kuigi püüeldakse maksimaalselt täpse lahendi poole, ei pea see olema suurem vajalikust. Mõnede probleemide korral on vajalik detailne info isegi lokaalsetest piirkondadest, samas teiste probleemide korral võib piirduda ainult üsna üldiste ja esmaste trendidega terviku käitumisest. Enamgi veel, mõned probleemid sisaldavad lihtsustusi juba iseenda definitsioonis. Sestap tuleb valida tulemuste usaldusväärsuse ja kulukuse seisukohast optimaalne elementide tüüp ja võrk. Tihti alustatakse lihtsa lõplike elementide mudeliga, mis on aluseks hilisematele keerulisematele ja täpsematele mudelitele.

Kõik lõplikud elemendid põhinevad tundmatute fuktsioonide suhteliselt lihtsatel polünomiaalsetel interpolatsioonidel elemendi piires. Antud elemenditüübi jaoks tähendab see seda, et mida väiksem element, seda suurem täpsus. Kuid see eeldab ka seda, et elemendi iga dimensioon peab olema nii väike kui võimalik – mitte ainult suurus, vaid ka elemendi kuju on oluline.

Elemendi suurima ja väikseima mõõtme suhet nimetatakse kuvasuhteks (*aspect ratio*) ja heas lõplike elementide võrgus on see võimalikult lähedane 1-le.

Et saada efektiivne lahendusskeem, soovitakse kasutada vähem elemente piirkondades, kus tundmatu funktsioon muutub aeglaselt ja rohkem elemente seal, kus muutused on kiired.

Arvutusefektiivsuse tõstmiseks tuleks maksimaalselt ära kasutada sümmeetriaomadusi. Sümmeetria ei hõlma seejuures mitte ainult geomeetriat, vaid ka rakendatud koormusi ja materjali omadusi.

2.2 Elementide parameetrid

Elemenditüüpidele võib omistada lokaalseid omadusi üksteisest sõltumatult. See võimaldab modulaarsete elemendibaaside moodustamist. Individuaalsetel elementidel on järgmised parameetrid:

Iseloomulik dimensionaalsus. Elemendid võivad olla 1-, 2- või 3-mõõtmelised. Dünaamilises analüüsis on aeg lisamõõtmeks. Eksisteerivad ka spetsiaalsed elemendid, millel pole dimensiooni, näiteks kokkusurutud vedrud, punktmassid, punktsoojusallikad jne.

Sõlmpunktid. Igal elemendil on kogum iseloomulikke punkte, mida nimetatakse sõlmpunktideks ehk võresõlmedeks. Nendel on kaks otstarvet: defineerida elemendi geomeetria ja vabadusastmete arv. Tavaliselt asuvad nad elemendi nurkades või otstes. Niinimetatud ra-

fineeritud või kõrgemat järku elementide sõlmpunktid võivad asuda ka servadel, külgedel, tahkudel ja võimalik, et ka elemendi sees.

Geomeetria. Elemendi geomeetria defineerib sõlmpunktide asetus. Praktiliselt kasutatavate elementide geomeetria on suuremas osas suhteliselt lihtne. 1D elemendid on tavaliselt sirglõigud või nende kõverad segmendid. 2D elemendid on kolmnurkse või nelinurkse kujuga. 3D elementidest on tavalisimad tetraheeder, pentaheeder (kiilud ja prismad) ja heksaheedrid (kuboidid ehk "tellised").

Vabadusastmete arv. Vabadusastmete arv (VAA) määratleb elemendi oleku. Samuti on nende ülesandeks on olla ühenduslüliks külgnevate elementide vahel. VAA on defineeritud kui primaarvälja väärtused (ja võimaluse korral ka tuletised) sõlmpunktides. Põhikriteeriumiks VAA valikul on põhimuutuja olemus matemaatilises mudelis. Mehaanikaliste elementide jaoks on põhimuutujaks nihkeväli ja paljude, aga mitte kõigi elementide VAA on nihkekomponentide arv sõlmpunktides.

Võresõlmede jõud. Võresõlmedes on alati olemas jõud, mis vastavad üksüheselt vabadusastmete arvule. Mehaanilistes elementides on see vastavus seatud energia kaudu.

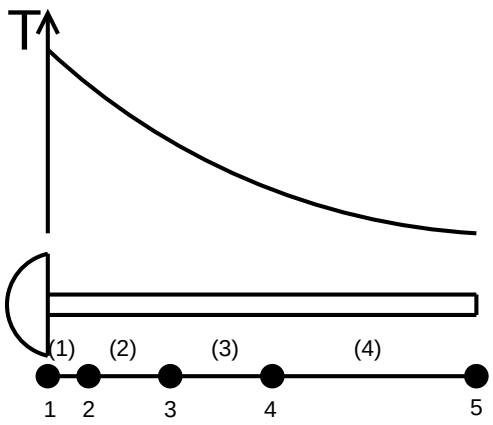
Olemuslikud parameetrid. Mehaanikaliste elementide korral on nendeks seosed, mis kirjeldavad materjali omadusi. Näiteks lineaarse elastse kangi korral on piisav, kui on antud elastsuskoefitsient E ja termiline paisumiskoefitsient α.

Koosteparameetrid. Mehaanikaliste elementide korral on nendeks parameetrid, mis tulenevad elemendi dimensionaalsusest. Näideteks on kangi, tala ja võlli ristlõike omadused, samuti plaadi või kesta paksus.

2.3 Elementide liigitus

Lõplikke elemente võib liigitada järgmiste tunnuste järgi:

1. geomeetria:
   - 1D;
   - 2D;
   - 3D;
2. interpolatsioonifunktsiooni tüüp:
   - polünoom;
   - Lagrange'i polünoom;
   - Hermite'i polünoomid;
3. elementide koordinaadid:
   - ristkoordinaadid;
   - lokaalkoordinaadid;
4. määratud muutujate valik sõlmedes:
   - Lagrange'i perekond;
   - Hermite'i perekond.



Joonis 2.1: 1D piirkonna jaotamine elementideks

2.4 1D elemendid

2.4.1 Piirkonna jagamine lineaarelementideks

Lineaarelementi kasutatakse näiteks võrrandi

$$D\frac{d^2\phi}{dx^2} + Q = 0 \tag{2.1}$$

ligikaudse lahendi saamiseks.

1D piirkond on joone segment ja selle jagamine alampiirkondadeks või elementideks on suhteliselt sirgjooneline. Joone segment jagatakse lühemateks lõikudeks sõlmede abil (joonisel 2.1). Sõlmed nummerdatakse tavaliselt paremalt vasemale nagu elmendidki, kusjuures viimaste numbrid kirjutatakse paremale arusaamise huvides sulgudes. Sõlmede paigutamiseks on mõningad reeglid:

1. sõlmed tuleks viia üksteisele lähemale piirkondades, kus tundmatu parameeter muutub kiiresti ja üksteisest lahku seal, kus tundmatu suurus on suhteliselt konstantne;
2. asetada sõlm sellesse kohta, kus koefitsient D javõi Q võrrandis (2.1) muutuvad astmeliselt;
3. asetada sõlm sellesse kohta, kus vajatakse muutuja ϕ väärtust võrrandis (2.1) .

Esimene reegel eeldab, et kasutaja teab ühte-teist sellest, kuidas tundmatu suurus võiks käituda. Teine reegel muudab parameetreid D ja Q sisaldavate integraalide arvutamise lihtsamaks.

2.4.2 Lineaarelement

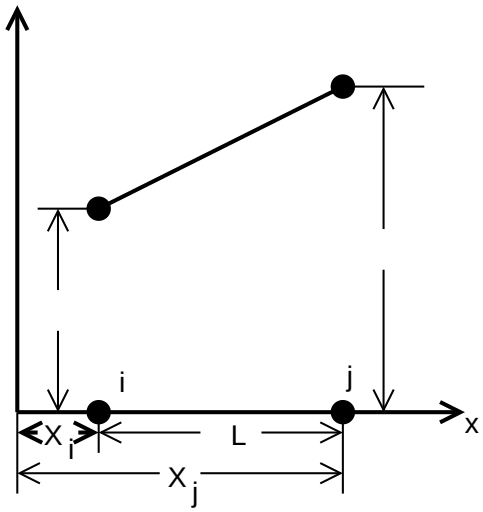
Muutujat ϕ 1D elemendil lähendav polünoom on kujul:

$$\phi = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + \cdots \tag{2.2}$$

või

$$\phi = a_1 + a_{i+1}a^i \tag{2.3}$$

kus $i = 1$ on lineaarvariatsioon, $i = 2$ ruutvariatsioon jne., a_1, a_2 jne. on konstandid.



Joonis 2.2: 1D lineaarelement

Lineaarelement on lõik pikkusega L ja kahe sõlmega, üks kummaskis otsas (joonis 2.2). Sõlmi tähistatakse i ja j-ga ning tundmatu suuruse väärtusi sõlmedes Φ_i ja Φ_j-ga. Koordinaadistiku nullpunkt on sõlmest i vasemal.

Parameeter ϕ^* muutub sõlmede vahel lineaarselt ja

$$\phi = a_1 + a_2 x \tag{2.4}$$

Koefitsiendid a_1 ja a_2 saab leida sõlmtingimustest

$$\begin{array}{lll} \phi = \Phi_i & \text{kohal} & x = X_i \\ \phi = \Phi_j & \text{kohal} & x = X_j \end{array} \tag{2.5}$$

et moodustada võrrandite paar:

$$\begin{array}{l} \Phi_i = a_1 + a_2 X_i \\ \Phi_j = a_1 + a_2 X_j \end{array} \tag{2.6}$$

millest saadakse

$$\begin{array}{l} a_1 = \frac{\Phi_i X_j - \Phi_j X_i}{X_j - X_i} \\ a_2 = \frac{\Phi_j - \Phi_i}{X_j - X_i} \end{array} \tag{2.7}$$

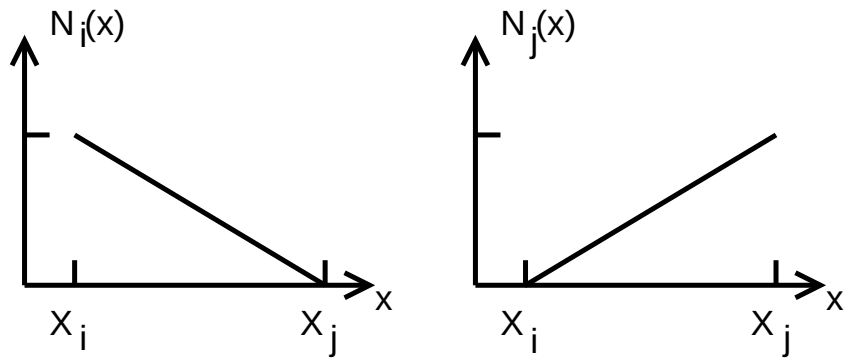
Asendades võrrandi (2.7) võrrandisse (2.4) , saadakse

$$\phi = \left(\frac{X_j - x}{L} \right) \Phi_i + \left(\frac{x - X_i}{L} \right) \Phi_j \tag{2.8}$$

milles $X_j - X_i$ on asendatud pikkusega L.

Võrrand (2.8) on standardne lõplike lementide kuju. Sõlmväärtused on korrutatud x-i lineaarfunktsioonidega, mida nimetatakse kuju- või interpolatsioonifunktsioonideks N (indeks näitab sõlme, millega konkreetne kujufunktsioon on seotud). Kui tähistada

$$N_i = \frac{X_j - x}{L} \qquad N_j = \frac{x - X_i}{L} \tag{2.9}$$



Joonis 2.3: Lineaarsed kujufunktsioonid N_i ja N_j

Võrrand (2.8) teisendub kujule

$$\phi = N_i\Phi_i + N_j\Phi_j \tag{2.10}$$

ja ka

$$\phi = [\mathbf{N}]\{\mathbf{\Phi}\} \tag{2.11}$$

kus $[\mathbf{N}] = [N_i \quad N_j]$ on kujufunktsioonide reavektor ja

$$\{\mathbf{\Phi}\} = \left\{ \begin{array}{c} \Phi_i \\ \Phi_j \end{array} \right\}$$

on veeruvektor, mis sisaldab elementide sõlmede väärtusi.

Mõningaid kujufunktsioonide omadusi:

1. Igal kujufunktsioonil on väärtus 1 enda sõlmes ja 0 teistes sõlmedes.
2. Kahe kujufunktsiooni summa on 1.
3. Kujufunktsioonid on alati sedasama tüüpi polünoomid, mis esialgne interpolatsioonivõrrandki.
4. Kujufunktsioonide tuletised x järgi annavad summaks 0.

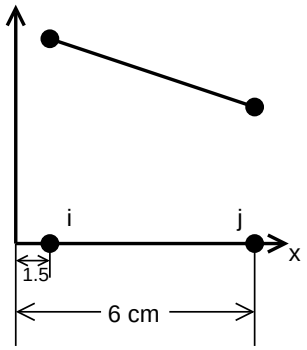
Lineaarsed kujufunktsioonid on joonisel 2.3 .

2.4.3 Näide

1D lineaarelementi kasutatakse temperatuurijaotuse lähendamiseks radiaatoris. Lahend näitab, et temperatuur sõlmedes i ja j on vastavalt 120°C ja 90°C. Määrata temperatuur 4 cm kaugusel nullpunktist ja temperatuurigradient elemendi sees. Sõlmed i ja j on 1.5 ja 6 cm kaugusel nullpunktist joonisel 2.4 .

Temperatuur elemendi sees on antud võrrandiga (2.8) . Elementide andmed on:

$$\begin{array}{cc} X_i = 1.5cm & X_j = 6.0cm \\ \Phi_i = 120°C & \Phi_j = 90°C \\ x = 4.0cm & L = 4.5cm \end{array}$$



Joonis 2.4: Näidisprobleemi sõlmväärtused

Asendamisel saadakse

$$\phi = \left(\tfrac{6-4}{4.5}\right) 120 + \left(\tfrac{4-1.5}{4.5}\right) 90$$
$$\phi = 103.3°C$$

Temperatuurigradient on võrrandi (2.8) tuletis:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\Phi_j - \Phi_i}{L} \tag{2.12}$$

Asendades sõlmväärtused, saadakse

$$\frac{d\phi}{dx} = \left(\frac{90 - 120}{4.5}\right) = -6.67°C/cm$$

2.4.4 Tükati sile pidev võrrand

1D piirkonna tükati sileda pideva võrrandi saab mitme lineaarvõrrandi ühendamisel. Iga neist võrrandeist võib anda kujul

$$\phi^{(e)} = N_i^{(e)}\Phi_i + N_j^{(e)}\Phi_j \tag{2.13}$$

kus

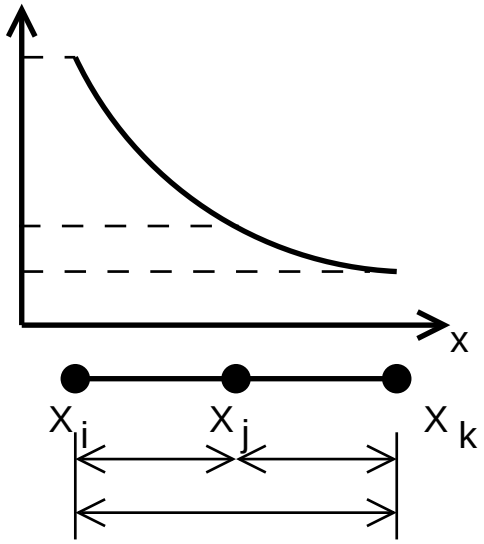
$$N_i^{(e)} = \frac{X_j - x}{X_j - X_i} \qquad N_j^{(e)} = \frac{x - X_i}{X_j - X_i} \tag{2.14}$$

Ülaindeks (e) elementide hulka. Protsessi lõpetamiseks tuleb anda iga elemdi jaoks õiged i, j ja e väärtused, mis saadakse võrgust. Sõlm i on elemendi vasakpoolsem sõlm. Elemendiinfo võrgu jaoks joonisel 2.1 on

e	i	j
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5

Võrrand iga elemendi jaoks joonisel 2.1 on

$$\begin{aligned}
\phi^{(1)} &= N_1^{(1)}\Phi_1 + N_2^{(1)}\Phi_2 \\
\phi^{(2)} &= N_2^{(2)}\Phi_2 + N_3^{(2)}\Phi_3 \\
\phi^{(3)} &= N_3^{(3)}\Phi_3 + N_4^{(3)}\Phi_4 \\
\phi^{(4)} &= N_4^{(4)}\Phi_4 + N_5^{(4)}\Phi_5
\end{aligned} \tag{2.15}$$



Joonis 2.5: 1D ruutelement

Siinkohal tuleb märkida, et $N_2^{(1)}$ ja $N_2^{(2)}$ on erinevad võrrandid, ehkki nad hõlmavad sõlme 2. Võrrandid nende kahe suuruse jaoks on

$$N_2^{(1)} = \frac{x - X_1}{X_2 - X_1} \qquad N_2^{(2)} = \frac{X_3 - x}{X_3 - X_2}$$

Võrrand (2.15) on mõeldud üksiku elemendi jaoks ega ole rakendatav väljaspool elementi. Esimene võrrand oleks korrektsel kujul

$$\phi^{(1)} = N_1^{(1)}\Phi_1 + N_2^{(1)}\Phi_2 \qquad X_1 \leq x \leq X_2$$

Vaiksel kokkuleppel jäetakse x-i piirkond ära.

Võrranditega (2.11) ja (2.13) on saadud formulatsioon, mis eraldab elemendi kujufunktsiooni kaudu toimiva geomeetria mõju füüsikalise suuruse sõlmväärtuste kaudu toimiva füüsika mõjust. Siit järgneb, et kohe, kui elemendi geomeetria on teada, saab koheselt avaldada elemendi kujufunktsioonid. See oluline omadus on ühine kõigile lõplike elementide tüüpidele ja see hõlbustab oluliselt meetodi kasutamist arvutil.

2.4.5 Ruutelement

Lihtsa lineaarse 1D elemendi asemele võib kergesti konstrueerida elemendi, kus lähendusfunktsioon sisaldab kõrgemat järku liikmeid. Ruutlähendus on kujul:

$$\phi = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 \tag{2.16}$$

Element sisaldab nüüd kolme sõlmpunkti (joonisel 2.5). Et tagada muutuja pidevus naaberelementidega, asuvad kaks sõlme elemendi mõlemas otsas ja kolmas asub suvaliselt nende vahel. Praktikas paigutatakse see tavaliselt elemendi keskele.

Olgu võrrand (2.16) kujul

$$\phi = [\bar{\mathbf{N}}]\{\mathbf{a}\} \tag{2.17}$$

kus

$$[\bar{\mathbf{N}}] = [1 \qquad x \qquad x^2]; \qquad \{\mathbf{a}\} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

Koefitsientide a_n $(n = 1, 2, 3)$ avaldamiseks tingimustest $\phi = \Phi_i$ kohal $x = X_i$ $(i = i, j, k)$ saadakse võrrandid:

$$\begin{aligned} \Phi_i &= a_1 + a_2 X_i + a_3 X_i^2 \\ \Phi_j &= a_1 + a_2 X_j + a_3 X_j^2 \\ \Phi_k &= a_1 + a_2 X_k + a_3 X_k^2 \end{aligned}$$

või

$$\begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_i & X_i^2 \\ 1 & X_j & X_j^2 \\ 1 & X_k & X_k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

ehk

$$\{\mathbf{\Phi}\} = \mathbf{C}\{\mathbf{a}\} \tag{2.19}$$

Siit järgneb, et

$$\{\mathbf{a}\} = \mathbf{C}^{-1}\{\mathbf{\Phi}\} \tag{2.20}$$

ja selle asendamisel võrrandisse (2.17)

$$\phi = [\bar{\mathbf{N}}]\mathbf{C}^{-1}\{\mathbf{\Phi}\} \tag{2.21}$$

ehk

$$\phi = [\mathbf{N}]\{\mathbf{\Phi}\} \tag{2.22}$$

Valides $j = 1$, saab arvutada

$$\begin{aligned} \det C &= 1(X_j X_k^2 - X_k X_j^2) - 1(X_i X_k^2 - X_k X_i^2) + 1(X_i X_j^2 - X_j X_i^2) \\ &= X_j X_k (X_k - X_j) - X_i X_k (X_k - X_i) + X_i X_j (X_j - X_i) \end{aligned}$$

Joonis 2.5 annab

$$\begin{aligned} \det C &= \tfrac{L}{2}(X_j X_k - 2X + iX + k + X_i X + j) = \tfrac{L}{2}[X_k(X_j - X_i) + X_i(X_j - X_k)] \\ &= \tfrac{L}{2}\left(X_k \tfrac{L}{2} - X_i \tfrac{L}{2}\right) = \tfrac{L^2}{4}(X_k - X_i) = \tfrac{L^3}{4} \end{aligned}$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{2}{L^2} \begin{bmatrix} X_j X_k & -2X_j X_k & X_i X_j \\ -(X_j + X_k) & 2(X_i + X_k) & -(X_i + X_j) \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

Asendades avaldised (2.18) ja (2.23) avaldisse (2.22)

$$[\mathbf{N}] = [N_i^{(e)} \qquad N_j^{(e)} \qquad N_k^{(e)}] \tag{2.24}$$

kus

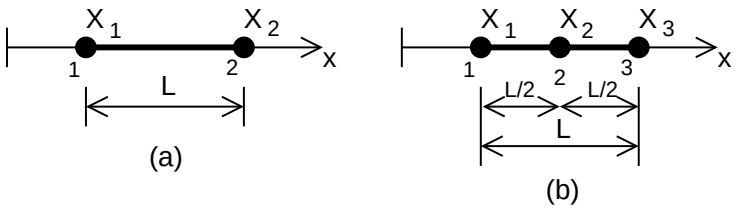
$$\begin{aligned} N_i^{(e)} &= \tfrac{2}{L^2}(x - X_j)(x - X_k) \\ N_j^{(e)} &= -\tfrac{4}{L^2}(x - X_i)(x - X_k) \\ N_k^{(e)} &= \tfrac{2}{L^2}(x - X_i)(x - X_j) \end{aligned} \tag{2.25}$$

Gradient

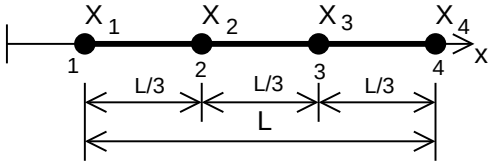
$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{d[\mathbf{N}]}{dx}\{\mathbf{\Phi}\} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{\Phi}\} \tag{2.26}$$

kus

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \dfrac{dN_i^{(e)}}{dx} & \dfrac{dN_j^{(e)}}{dx} & \dfrac{dN_k^{(e)}}{dx} \end{bmatrix} = \frac{2}{L^2}[2x - X_j - X_k \quad -2(2x - X_i - X_k \quad 2x - X_i = X_j] \tag{2.27}$$



Joonis 2.6: (a) Lineaarelement; (b) ruutelement



Joonis 2.7: Kuupelement

2.4.6 Kuup- ja neljandat järku elemendid - Lagrange'i interpolatsioon

Kuupelementi võib lähendada järgmiselt:

$$\phi = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \tag{2.28}$$

Kui lineaarelemendi jaoks on maatriksi $\mathbf{C}$ pöördmaatriksi leidmine suhteliselt lihtne, siis ruutelemendi korral on see juba kohmakas ja kuupelemendi korral veelgi keeulisem. Siiski on olemas üldine tehnika, tänu millele saab elemendi kujufunktsioonid otse kirja panna.

Esmalt seatakse sisse sõlmede lokaalne nummerdamine, mis pole miskitki moodi seotud nende globaalse nummerdamisega. Lineaarelemendi jaoks sõlmnumbritega joonisel 2.6 (a) on kujufunktsioonid

$$N_1^{(e)} = -\frac{1}{L}(x - X_2); \qquad N_2^{(e)} = \frac{1}{L}(x - X_1) \tag{2.29}$$

Analoogselt ruutelemendi jaoks sõlmnumbritega joonisel 2.6 (b)

$$\begin{gathered} N_1^{(e)} = \tfrac{2}{L^2}(x - X_2)(x - X_3); \qquad N_2^{(e)} = -\tfrac{4}{L^2}(x - X_1)(x - X_3); \\ N_3^{(e)} = \tfrac{2}{L^2}(x - X_1)(x - X_2) \end{gathered} \tag{2.30}$$

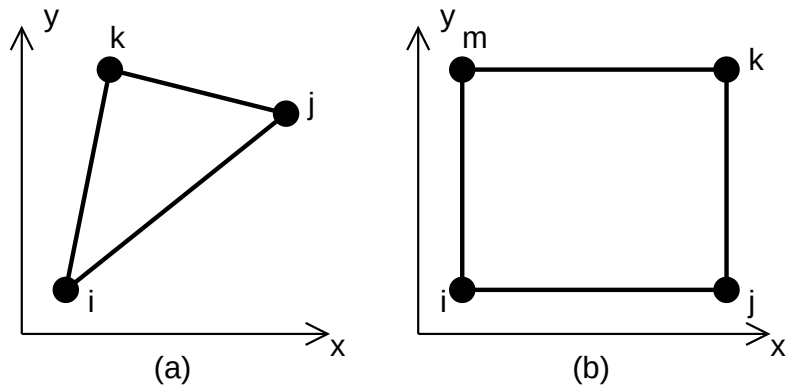
Olgu kuupelement joonisel 2.7 . Elemendi kujufunktsioon peab lubama kirjutada

$$\phi = N_1^{(e)}\Phi_1 + N_2^{(e)}\Phi_2 + N_3^{(e)}\Phi_3 + N_4^{(e)}\Phi_4 \tag{2.31}$$

Ka peavad elemendi kujufunktsioonid olema polünoomid ja selle tingimuse täitumise annab otseselt Lagrange'i interpolatsioonivalem. n antud punkti jaoks annab see valem $n-1$ järku võrrandi:

$$\begin{gathered} l_k^{n-1}(x) = \frac{(x-X_1)(x-X_2)\cdots(x-X_{k-1})(x-X_{k+1})\cdots(x-X_n)}{(X_k-X_1)(X_k-X_2)\cdots(X_k-X_{k-1})(X_k-X_{k+1}\cdots(X_k-X_n)} \\ k = 1, 2, 3, \ldots, n \end{gathered} \tag{2.32}$$

Tuleb märkida, et liige $(X_k - X_k)$ puudub nimetajas ja liige $(x - X_k)$ puudub nimetajas. Ilmneb, et $l_k^{n-1}(X_k) = 1$ ja $l_k^{n-1}(X_i) = 0$, kui $k \neq i$. Kuna need omadused on kooskõlas elemendi



Joonis 2.8: (a) Lineraarne kolmnurkelement; (b) bilineaarne ristkülikelement

kujufunktsionide fundamentaalomadustega, siis saab elemendi kujufunktsioonid konstrueerida otse, seades

$$N_k^{(e)} = l_k^{n-1} \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{2.33}$$

Lineaarelemendi korral joonisel 2.6 (a) $n = 2$ ja avaldisest (2.33) tuleneb, et

$$N_k^{(e)} = l_k^1; \qquad k = 1, 2$$

Avaldisest (2.32) :

$$l_1^1 = \frac{x - X_2}{X_1 - X_2}; \qquad l_2^1 = \frac{x - X_1}{X_2 - X_1}$$

ja kuna $L = X_2 - X_1$, on tulemuseks avaldis (2.29) . Avaldisest (2.33) saab kuupelemendi kujufunktsioonid, kui $n = 4$ ja 4. järku elemendi kujufunktsioonid, kui $n = 5$. Seda rida saab jätkata n suvalise väärtuseni. Kuna kõigi käsitletud 1D elementide kujufunktsioonid saab tuletada Lagrange'i interpolatsioonivalemist, siis nimetatakse neid elemente Lagrange'i elemntideks.

2.5 2D elemendid

2.5.1 2D võrk

Lineaarsel kolmnurkelemendil (joonisel 2.8 (a)) on sirged küljed ja sõlm igas tipus. Skalaarsuuruse interpolatsioonifunktsioon on

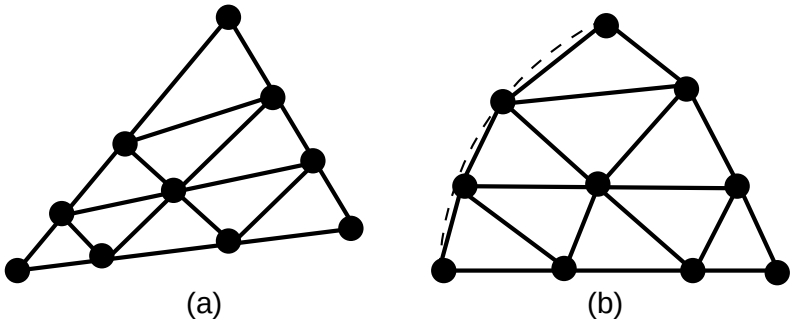
$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \tag{2.34}$$

mis on täielik lineaarne polünoom, sest sisaldab konstantset liiget ja kõikvõimalikke lineaarseid liikmeid (x ja y). Kolmnurkelement võib võtta suvalise orientatsiooni ja rahuldada kõrvalelemente sisaldavaid pidevuse nõudeid.

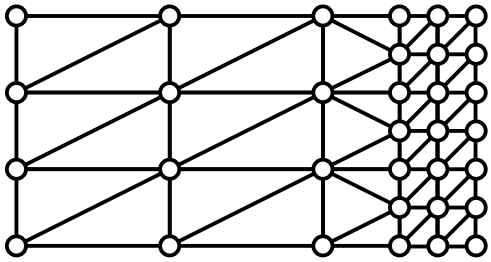
Bilineaarsel nelinurkelemendil (joonisel 2.8 (b)) on sirged küljed ja sõlm igas nurgas. Skalaarsuuruse interpolatsioonifunktsioon on

$$\phi = C_1 + C_2 x + C_3 y + C_4 xy \tag{2.35}$$

See võrrand sisaldab vaid ühte kolmest võimalikust 2. järku liikmest ja x^2- ning y^2-liikmete puudumise tõttu ei saa seda suvaliselt orienteerida. Nelinurga küljed peavad jääma paralleelseks xy-koordinaadistikuga.



Joonis 2.9: Piirkondade jagamine kolmnurkelementideks



Joonis 2.10: Nelinurkpiirkonna jagamine kolmnurkelementideks

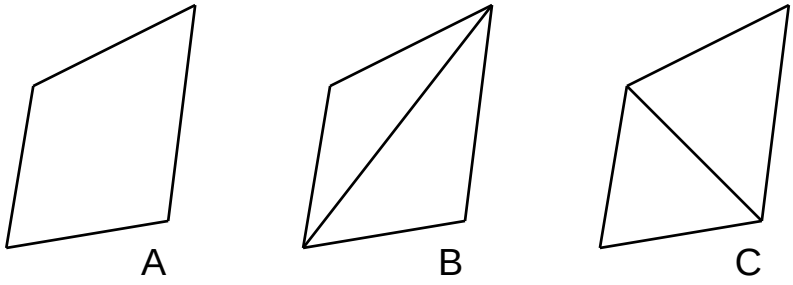
Nelinurkelementide võrku on lihtne konstrueerida. Kõigil elementidel, mis on ühes reas paralleelselt x-teljega, peab olema sama kõrgus. Kõigil elementidel, mis on veerus paralleelselt y-teljega, peab olema sama laius. Nelinurkelement sobib kõige paremini ruudu- või ristküliku kujulise piirkonna jaoks. Mitteregulaarsetes piirkondades tuleks kasutada nii neli- kui ka kolmnurkelemente. Mitteregulaarse ääre mudeleerimiseks kasutatakse kolmnurkelemente.

Piirkonna jagamisel kolmnurkelementideks on kõige lihtsam see ene jagada suurteks nelinurkseteks kolmnurkseteks alampiirkondadeks. Kolmnurkne alampiirkond jaotatakse elementideks sel viisil, et pikki igat külge määratakse ühesugune arv sõlmi ja siis ühendatakse sobivad sõlmed sirgjoontega ja asetatakse sõlmed nende joonte lõikumispunktidesse (joonis 2.9 (a)). Sõlmed ei pea paiknema pikki külge võrdsetel kaugustel, võimaldades nii elementide suurusel varieeruda. Kolmnurkses piirkonnas on $(n-1)^2$ kolmnurkelementi (n - sõlmede arv küljel).

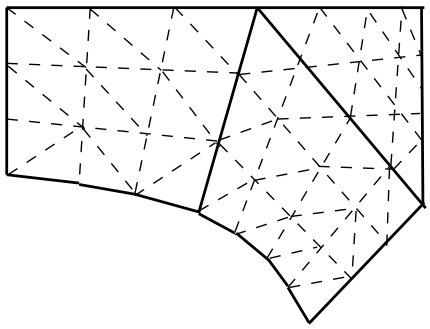
Kui kolmnurksel piirkonnal on kõverad küljed, siis on ääreelementidel sirged servad. Joonisel 2.9 (b) on punktiirjoon esialgne kuju ja pidevjoon märgib elemente.

Nelinurkse alampiirkonna jagamiseks kolmnurkelementideks ühendatakse diagonaalnurgad sirglõikudega (joonis 2.10). Sisemised sõlmed asetatakse lõikumispunktidesse. Sisemised nelinurgad ühendatakse lühimat diagonaali mööda (joonis 2.11). Viimane on eelistatud, sest võrdkülgsemad kujud annavad täpsemaid tulemusi kui pikad kitsad kolmnurgad.

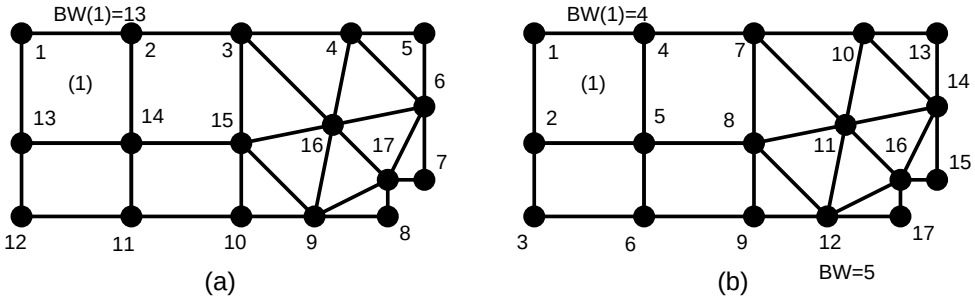
Sõlmede arv pikki nelinurkse alampiirkonna kõrvuti olevaid külgi ei pea olema sama, kuid elementide arv peab olema vastaskülgedel võrdne, v.a. siis, kui võrku on peenendatud (või suurendatud). Nelinurgas on $2(n-1)(m-1)$ kolmnurkelementi (m, n - sõlmede arv kõrvuti olevate külgede paaris).



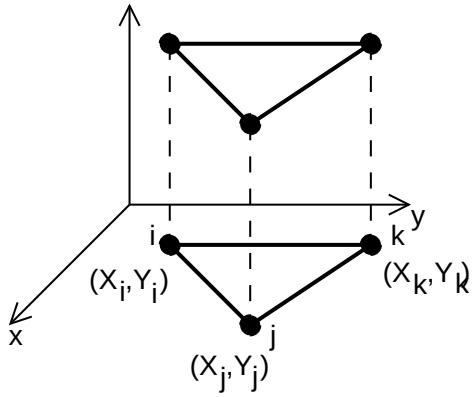
Joonis 2.11: Nelinurkelemendi (a) jagamine mittesoovitaval (b) ja soovitaval (c) viisil kolmnurkelemendiks



Joonis 2.12: Piirkonna jagamine alampiirkondadeks ja siis kolmnurkelementideks



Joonis 2.13: Kaks sõlmenumbrite järjekorda, mis annavad erineva ülekandekiiruse



Joonis 2.14: Lineaarse kolmnurkelemendi parameetrid

Alampiirkondade piiril olevate sõlmede arv ja suhteline asend peavad olema ühesugused, et kindlustada ϕ pidevus üle elemendi piiri. Joonisel 2.12 on kujutatud regiooni diskreetimise kontseptsioonid. Pikki nelinurga külgi muudetakse sõlmede vahekaugusi, et saada kõverduva ääre lähikonnas väikesmad elemendid.

Tihti leidub piirkondi, kus sõlmmuutuja on suhteliselt konstantse väärtusega ja saab kasutada suuremaid elemente. Seega pole tihit ka vajadust võrgu järele, mis on regulaarne ja ühesuuruste elementidega. Kolmnurkelemendi oluline eelis ongi võime muuta oma suurust. Lihtsaim viis elemendi suuruse muutmiseks on luua nelinurkne piirkond, mille vastaskülgedel on erinev arv sõlmi. Hea kombinatsioon on panna 2 sõlme ühel küljel iga 3 sõlme kohta vastasküljel (joonis 2.10).

Sõlmede nummerdamine võiks olla triviaalne operatsioon, kui see ei mõjutaks võrrandisüsteemi ülekandekiirust NBW:

$$NBW = \max_{e}[BW^{(e)}] + 1 \tag{2.36}$$

kus $BW^{(e)}$ on elemendi suurima ja väikseima sõlmenumbri vahe. Joonisel 2.13 (a) ja 2.13 (b) on $BW^{(1)}$ väärtused vastavalt 13 ja 4, suurimad $BW^{(e)}$ väärtused 13 ja 5 ning ülekandekiirused on 14 ja 6.

2.5.2 Lineaarne kolmnurkelement

Lineaarsel kolmnurkelemendil (joonisel 2.14) on sirged küljed ja 3 sõlme, üks igas tipus. Järjekindel sõlmede nummerdamine on hädavajalik ja seda tehakse vastupäeva alates suvaliselt asetatud sõlmest i. ϕ sõlmväärtused on Φ_i, Φ_j ja Φ_k. Sõlmede koordinaadid on (X_i, Y_i), (X_j, Y_j) ja (X_k, Y_K).

Interpolatsioonipolünoom on

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \tag{2.37}$$

koos sõlmtingimustega

$$\begin{array}{ll} \phi = \Phi_i & \text{kohal } x = X_i, y = Y_i \\ \phi = \Phi_j & \text{kohal } x = X_j, y = Y_j \\ \phi = \Phi_k & \text{kohal } x = X_k, y = Y_k \end{array}$$

Asendades need võrrandisse (2.37) , saadakse võrrandisüsteem

$$\begin{aligned}\Phi_i &= \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i \\ \Phi_j &= \alpha_1 + \alpha_2 X_j + \alpha_3 Y_j \\ \Phi_k &= \alpha_1 + \alpha_2 X_k + \alpha_3 Y_k\end{aligned} \tag{2.38}$$

millest saadakse

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \tfrac{1}{2A}[(X_j Y_k - X_k Y_j)\Phi_i + (X_k Y_i - X_i Y_k)\Phi_j + (X_i Y_j - X_j Y_i)\Phi_k] \\ \alpha_2 &= \tfrac{1}{2A}[(Y_j - Y_k)\Phi_i + (Y_k - Y_i)\Phi_j + (Y_i - Y_j)\Phi_k] \\ \alpha_3 &= \tfrac{1}{2A}[(X_k - X_j)\Phi_i + (X_i - X_k)\Phi_j + (X_j - X_i)\Phi_k]\end{aligned}$$

kus determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_J \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} = 2A \tag{2.39}$$

ja A on kolmnurga pindala.

Asendades α_1, α_2 ja α_3 võrrandisse (2.37) , saadakse võrrand ϕ jaoks kujufunktsioonide Φ_i, Φ_j ja Φ_k kaudu:

$$\phi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k \tag{2.40}$$

kus

$$N_i = \frac{1}{2A}[a_i + b_i x + c_i y] \tag{2.41}$$

$$N_j = \frac{1}{2A}[a_j + b_j x + c_j y] \tag{2.42}$$

$$N_k = \frac{1}{2A}[a_k + b_k x + c_k y] \tag{2.43}$$

ning

$$\begin{aligned} a_i &= X_j Y_k - X_k Y_j, \quad & b_i &= Y_j - Y_k, \quad & c_i &= X_k - X_j \\ a_j &= X_k Y_i - X_i Y_k, \quad & b_j &= Y_k - Y_i, \quad & c_j &= X_i - X_k \\ a_k &= X_i Y_j - X_j Y_i, \quad & b_k &= Y_i - Y_j, \quad & c_k &= X_j - X_i \end{aligned}$$

Skalaarsuurus ϕ on seotud sõlmväärtustega x ja y suhtes lineaarsete kujufunktsiooonidega. See tähendab, et gradiendid $\partial\phi/\partial x$ ja $\partial\phi/\partial y$ on elemendi piires konstantsed. Näiteks

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial x}\Phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial x}\Phi_j + \frac{\partial N_k}{\partial x}\Phi_k \tag{2.44}$$

kuid

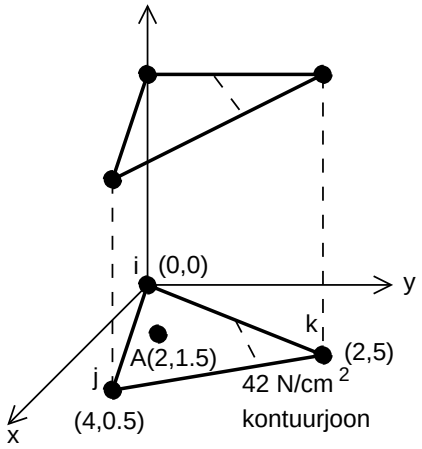
$$\frac{\partial N_\beta}{\partial x} = \frac{b_\beta}{2A} \qquad \beta = i, j, k$$

Sestap

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{2A}[b_i \Phi_i + b_j \Phi_j + b_k \Phi_k] \tag{2.45}$$

Kuna b_i, b_j ja b_k on konstantsed (need fikseeritakse siis, kui määratakse sõlmkoordinaadid) ja Φ_i, Φ_j ning Φ_k on ruumikoordinaatidest sõltumatud, siis on tuletis konstantne. Konstantne gradient elemendi sees tähendab, et tuleb kasutada palju väikesi elemente, et piisava täpsusega lähendada ϕ kiiret muutumist.

Lineaarne kolmnurkelement on väga lihtne element, mis pakuti välja Turneri poolt 1956 ja kuigi see paljuski märkis LEM-i algust, on see siiski laialt kasutatav. On hädavajalik, et elemnt võiks võtta suvalise kolmnurga kuju, mis viitab sellele, et suvalise mitteregulaarse 2D keha geomeetriat saab lähendada nii täpselt kui vaja. See võime mudeleerida suvalisi geomeetriaid on LEM-i üks phieeliseid.



Joonis 2.15: Näiteprobleemi parameetrid

2.5.3 Näide

Avaldada elemendi kujufunktsioon ja arvutada rõhk punktis A joonisel 2.15 , kui sõlmväärtused on $\Phi_i = 40N/cm^2$, $\Phi_j = 34N/cm^2$ ja $\Phi_k = 46N/cm^2$. Punkti A asukoht on $(2, 1.5)$.

Rõhk ϕ on antud võrrandiga (2.40) ja kujufunktsiooni defineerivad (2.41) . (2.42) ja (2.43) . Koefitsiendid kujufunktsioonide jaoks on

$$\begin{aligned}
a_i &= 4(5) - 2(0.5) = 19 \\
a_j &= 2(0) - 0(5) = 0 \\
a_k &= 0(0.5) - 4(0) = 0 \\
b_i &= 0.5 - 5 = -4.5 \\
b_j &= 5 - 0 = 5 \\
b_k &= 0 - 0.5 = -0.5 \\
c_i &= 2 - 4 = -2 \\
c_j &= 0 - 2 = -2 \\
c_k &= 4 - 0 = 4
\end{aligned}$$

samas, kui

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0.5 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Koefitsientide asendamine kujufunktsioonide avaldistesse annab:

$$\begin{aligned}
N_i &= \tfrac{19-4.5x-2y}{19} \\
N_j &= \tfrac{5x-2y}{19} \\
N_k &= \tfrac{-0.5x+4y}{19}
\end{aligned}$$

Märkus: $N_i + N_j + N_k = 1$. Rõhuavaldis on

$$\phi = \left(\frac{19 - 4.5x - 2y}{19}\right)\Phi_i + \left(\frac{5x - 2y}{19}\right)\Phi_j + \left(\frac{-0.5x + 4y}{19}\right)\Phi_k$$

ϕ väärtus punktis $A = (2, 1.5)$ on

$$\phi = \left(\frac{7}{19}\right)40 + \left(\frac{7}{19}\right)34 + \left(\frac{5}{19}\right)46 = 39.4N/cm^2$$

Kolmnurkelemendi jaoks defineeritud kujufunktsioonid rahuldavad samu nõudeid, mida kehtivad 1D kujufunktsioonide kohta:

1. igal kujufunktsioonil on väärtus 1 omas sõlmes ja 0 ülejäänud kahes;
2. kolm kujufunktsiooni annavad alati summaks 1;
3. kujufunktsioon muutub lineaarselt pikki külgi oma sõlme ja ülejäänud kahe sõlme vahel, s.t. N_i muutub lineaarselt pikki külgi ij ja ik;
4. kujufunktsioon on 0 pikki oma sõlme vastaskülge, s.t. N_i on 0 pikki külge jk.

Esimese omaduse järelduseks on see, et ϕ muutub lineaarselt pikki igat kolme külge. Teiseks, iga joon konstantse phi-ga on sirgjoon, mis lõikub elemendi kahe küljega (v.a. kui kõigil sõlmedel on sama väärtus). Need kaks omadust võimaldavad kergesti määrata kontuurjooni, nagu näidatakse järgnevas näites.

2.5.4 Näide

Määrata $42N/cm^2$ kontuurjoone asukoht eelmises näites kasutatud kolmnurkelemendi jaoks.

Rõhukontuur $42N/cm^2$ jaoks lõikab külgi ik ja jk. Koordinaatide väärtuste saamiseks kasutatakse lihtsaid suhteid, sest rõhk muutub lineaarselt pikki igat külge. Külje jk jaoks

$$\frac{46-42}{46-34} = \frac{2-x}{2-4} \Rightarrow \frac{4}{12} = \frac{2-x}{-2}$$

$$x = 2.67cm$$

ja

$$\frac{46-42}{46-34} = \frac{5-y}{5-0.5} \Rightarrow y = 3.5cm$$

Sarnastest suhetest külje ik jaoks:

$$x = \frac{2}{3}cm \qquad y = \frac{5}{3}cm$$

Kontuurjoon on joonisel 2.15 .

2.5.5 Bilineaarne ristkülikelement. Isoparameetriline element

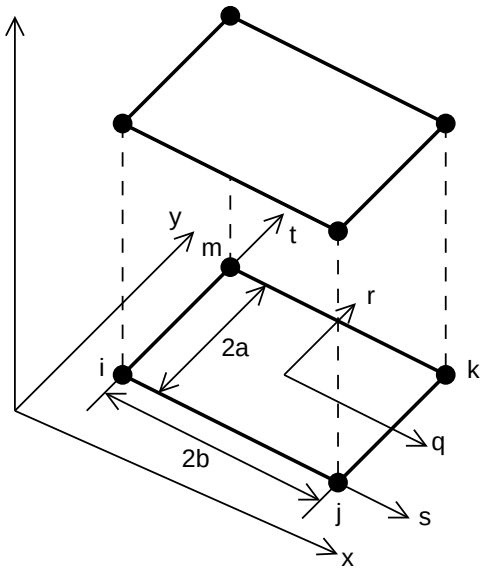
Bilineaarse ristkülikelemendi pikkus on $2b$ ja kõrgus $2a$. Sõlmed on i, j, k ja m ning sõlm i on alati alumises vasemas nurgas (joonis (2.43)).

Interpolatsioonivõrrand (2.35) esitatakse lokaalkoordinaatides s ja t. Leidub vähemasti kolm võimalust, et

$$\phi = C_1 + C_2 s + C_3 t + C_4 st \tag{2.46}$$

oleks kõige kasulikum. Teised variandid asendaks st-liikme s^2 või t^2-ga. Võrrandit (2.46) kasutatakse seepärast, et ϕ on lineaarne pikki s-i konstantse t korral ja lineaarne pikki t-d konstantse s korral. Nende omaduste tõttu nimetatakse elementi tihti bilineaarseks.

Lokaalkoordinaatide alguspunkt on sõlmes i, sest siis on kujufunktsioone lihtsam avaldada. Teine populaarne koordinaadistik on qr alguspunktiga elemendi keskel (joonisel 2.16).



Joonis 2.16: Bilineaarse ristkülikelemendi parameetrid

Koefitsiendid C_1, C_2, C_3 ja C_4 on saadud ϕ sõlmväärtuste ning sõlmkoordinaatide (st-koordinaadistikus) kaudu, et avaldada neli võrrandit:

$$\begin{aligned}
\Phi_i &= C_1 \\
\Phi_j &= C_1 + (2b)C_2 \\
\Phi_k &= C_1 + (2b)C_2 + 2(a)C_3 + (4ab)C_4 \\
\Phi_m &= C_1 + (2a)C_3
\end{aligned}$$

Lahendamisel saadakse:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \Phi_1 \\
C_2 &= \tfrac{1}{2b}(\Phi_j - \Phi_i) \\
C_3 &= \tfrac{1}{2a}(\Phi_m - \Phi_i) \\
C_4 &= \tfrac{1}{4ab}(\Phi_i - \Phi_j + \Phi_k - \Phi_m)
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Süsteemi (2.47) asendamine võrrandisse (2.46) annab:

$$\phi = N_i\Phi_i + N_j\Phi_j + N_k\Phi_k + N_m\Phi_m \tag{2.48}$$

kus

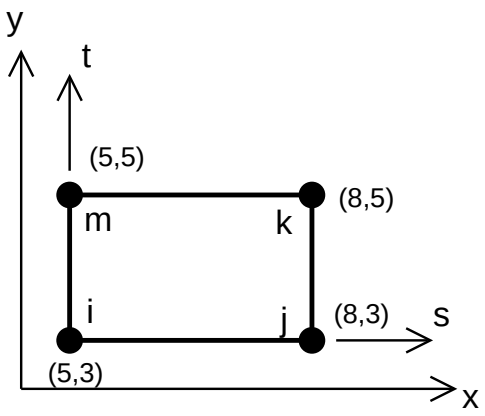
$$\begin{aligned}
N_i &= \left(1 - \tfrac{s}{2b}\right)\left(1 - \tfrac{t}{2a}\right) \\
N_j &= \tfrac{s}{2b}\left(1 - \tfrac{t}{2a}\right) \\
N_k &= \tfrac{st}{4ab} \\
N_m &= \tfrac{t}{2a}\left(1 - \tfrac{s}{2b}\right)
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Kujufunktsioonide omadused sarnanevad kolmnurkelemendi omadega:

1. iga kujufunktsioon muutub lineaarselt pikki külgi oma sõlme ja kahe naabersõlme vahel; näiteks, N_i muutub lineaarselt pikki külgi ij ja im;

2. iga kujufunktsioon on 0 pikki külge, mida tema sõlm ei puuduta, s.t. N_i on 0 pikki külgi jk ja km.

ϕ lineaarne muutumine pikki ristkülik- ja kolmnurkelemendi külgi tähendab seda, et need kaks elementi on omavahel kokkusobivad ja neid võib kõrvuti kasutada.



Joonis 2.17: Näiteprobleemi sõlmkoordinaadid

Teisendusvalemid qr- ja st-koordinaadisüsteemi vahel on

$$s = b + q \qquad t = a + r \tag{2.50}$$

Avaldiste (2.50) asendamine võrrandeisse (2.49) annab kujufunktsioonid q ja r kaudu:

$$\begin{array}{l} N_i = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{q}{b}\right)\left(1 - \frac{r}{a}\right) \\ N_j = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{q}{b}\right)\left(1 - \frac{r}{a}\right) \\ N_k = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{q}{b}\right)\left(1 + \frac{r}{a}\right) \\ N_m = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{q}{b}\right)\left(1 + \frac{r}{a}\right) \end{array} \tag{2.51}$$

Avaldistega (2.51) defineeritud kujufunktsioonid on selle poolest kasulikud, et need viivad loomuliku koordinaatsüsteemini, mis võimaldab ristkülikul deformeeruda üldiseks nelinurgaks. Sellist elementi nimetatakse isoparmeetriliseks elemendiks. Nimetus “isoparameetriline” tuleneb sellest, et “sama” parameetrilist funktsiooni, mis kirjeldab geomeetriat, saab kasutada muutuja osaliste variatsioonide interpoleerimiseks elemendi piires. Kuna isoparameetriline element kasutab mittedimensionalseid koordinaate, on see üks lokaalkoordinaatidega elemente.

Ristkülikelemendi kontuurjoon on tavaliselt kõver. Selle lõikekohad servadega saab lineaarse interpolatsiooniga. Lihtsaim viis saada kolmas punkt on seada s või t kujufunktsiooni avaldises nulliks ja lahendada võrrand (2.48) teise koordinaadi suhtes, nagu näidatakse järgnevas näites.

2.5.6 Näide

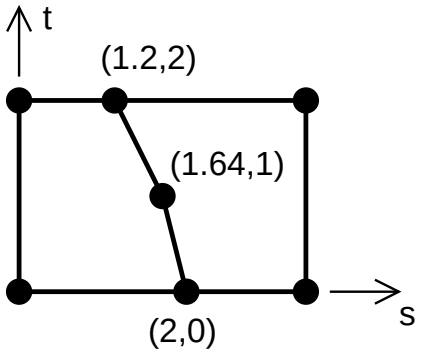
Määrata kolm punkti joonisel 2.17 näidatud $50°C$ kontuurjoonel. Sõlmväärtused on $\Phi_i = 42°C$, $\Phi_j = 54°C$, $\Phi_k = 56°C$ ja $\Phi_m = 46°C$

Külgede pikkused on

$$\begin{aligned} 2b &= X_j - X_i = 8 - 5 = 3 \\ 2a &= Y_m - Y_i = 5 - 3 = 2 \end{aligned}$$

Nende väärtuste asendamine avaldisse (2.49) annab kujufunktsioonid:

$$N_i = \left(1 - \frac{s}{3}\right), \qquad N_j = \frac{s}{3}\left(1 - \frac{t}{2}\right)$$



Joonis 2.18: $50°C$ kontuurjoon

$$N_k = \frac{st}{6}, \qquad N_m = \frac{t}{2}\left(1 - \frac{s}{3}\right)$$

Kuna $50°C$ kontuurjoon lõikab külgi ij ja km, siis tuleb fikseerida t väärtused ja arvutada s väärtused. Pikki külge ij $t = 0$ ja

$$\phi = \left(1 - \frac{s}{3}\right)\Phi_i + \frac{s}{3}\Phi_j = 50$$

Φ_i ja Φ_j asendamine annab lahenduseks $s = 2.0$. Pikki külge km $t = 2a = 2$ ja

$$\phi = \frac{s}{3}\Phi_k + \left(1 - \frac{s}{3}\right)\Phi_m = 50$$

Φ_k ja Φ_m asendamine annab lahenduseks $s = 1.2$.

Kolmanda punkti saamiseks eeldada, et $t = a = 1$, siis

$$\phi = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{s}{3}\right)\Phi_i + \frac{s}{6}\Phi_j + \frac{s}{6}\Phi_k + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{s}{3}\right)\Phi_m = 50$$

Sõlmväärtuste asendamine annab

$$\frac{s}{6}(-42 + 54 + 56 - 46) + \frac{1}{2}(42 + 46) = 50 \Rightarrow s = 1.64$$

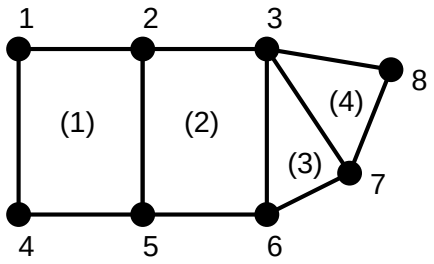
st-koordinaadistikus on kolm punkti (ülalt alla) $(1.2, 2)$, $(1.64, 1)$ ja $(2, 0)$. xy-koordinaadistikus on need punktid $(6.2, 5)$, $(6.64, 4)$ ja $(7, 3)$. Sirgjoon punktist $(6.2, 5)$ punkti $(7, 3)$ läbib punkti $(6.60, 4)$. Sestap pole kontuurjoon sirgjoon (joonis 2.18).

2.5.7 Tükati sile pidev võrrand

Võrranditega (2.40) või (2.48) defineeritud ϕ elementide võrrandeidsaab kasutada suvalise kolmnurk- või ristkülikelemendi jaoks, kui määrata i, j ja k või i, j, k ja m numbrilised väärtused. Iga kolmnurkelemendi sõlm võib olla sõlmeks i, tähistades seda teistest erldamiseks tärniga. Ristkülikelemendi sõlm i on alati st-koordinaatsüsteemi alguspunktis.

Neljaelemendilise võrgu elemendi sõlmeinfo (joonisel 2.19) on:

e	i	j	k	m
1	1	4	5	2
2	2	5	6	3
3	3	6	7	
4	8	3	7	



Joonis 2.19: Neljaelemendiline võrk koos sõlmenumbritega

Elemendi 1 interpolatsioonifunktsioon:

$$\phi^{(1)} = N_1^{(1)}\Phi_1 + N_4^{(1)}\Phi_4 + N_5^{(1)}\Phi_5 + N_2^{(1)}\Phi_2 \tag{2.52}$$

Elementide sõlmede numbrid pole enam järjestikku, mis on tavaline 2D elementide korral. Kujufunktsioonid võrrandeis (2.49) on globaalkoordinaatide funktsioonid ainult selles mõttes, et

$$2b = X_j - X_i = X_4 - X_1$$

ja

$$2a = Y_m - Y_i = Y_2 - Y_1$$

Interpolatsioonifunktsioon elemendi 4 jaoks on

$$\phi^{(4)} = N_8^{(4)}\Phi_8 + N_3^{(4)}\Phi_3 + N_7^{(4)}\Phi_7 \tag{2.53}$$

Kujufunktsioonid avaldises (2.53) on globaalkoordinaatide funktsioonid ja i, j ja k spetsifikatsioon näitab kohe, milliseid koordinaate kasutada. Olgu näiteks $N_8^{(4)}$. Avaldist (2.41) kasutades saadakse

$$N_8^{(4)} = \frac{1}{2A}(a_8^{(4)} + b_8^{(4)}x + c_8^{(4)}y)$$

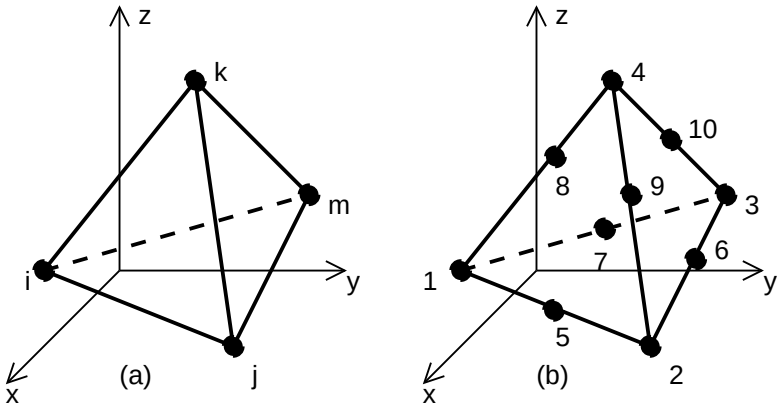
kus

$$\begin{aligned} a_8^{(4)} &= X_3Y_7 - X_7Y_3 \\ b_8^{(4)} &= Y_3 - Y_7 \\ c_8^{(4)} &= X_7 - X_3 \end{aligned}$$

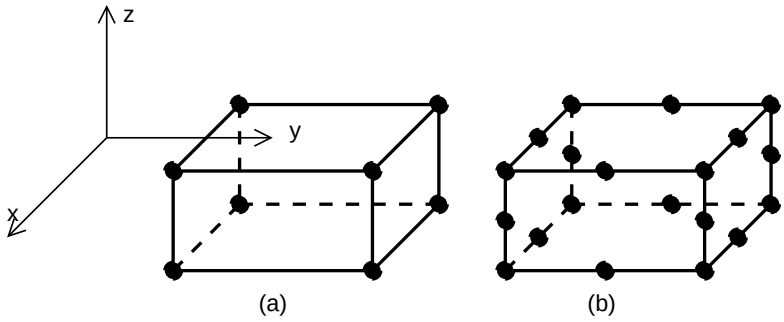
kuna $j = 3$ ja $k = 7$. Pindala A on neljanda elemendi pindala.

2.5.8 Näiteid 2D elementidest

Nelja- ja kolmesõlmeline monoliit. 2D 4-sõlmelist monoliiti on nimetatud ka isoparameetriliseks nelinurkelemendiks. See on üks kõige enimkasutatud elemente tahkete struktuuride kahemõõtmeliste pingeprobleemide ja omavõnkesageduste uurimisel. Element eeldatakse olevat õhuke sellise määrani, et pinge suurusjärk on konstantne üle elemendi paksuse. Lisaks sellele, et elementi kasutatakse kaheteljelise pingetasaelemendina, on tal ka rakendus tasapinnalise venituselemendina. Elemendil on kaks nihkevabadusastet ja puuduvad pöörlemisvabadusastmed. Võimalik on defineerida temperatuurist sõltuvaid otrotroopseid materjaliomadusi.



Joonis 2.20: (a) neljasõlmeline tetraheeder; (b) 10-sõlmeline tetraheeder



Joonis 2.21: (a) 8-sõlmeline prismaelement; (b) 20-sõlmeline prismaelement

Isoparameetriline termiline monoliit. 2D isoparameetrilist termilist monoliiti saab kasutada kaheteljelise tasaelemendi või telgsümmeetrilise ringelemendina, millel on 2D termiline juhtivus. Elemendil on 4 sõlme, millest igal on üks vabadusaste - temperatuur. Element on rakendatav 2D staatilises ja dünaamilises analüüsis.
Kui mudelit, mis sisaldab isoparameetrilist temperatuurielementi, tuleb analüüsida strukturaalselt, tuleb see element asendada ekvivalentse struktuurielemendiga.
Elemendil ei tohi olla puuduvat või negatiivset pindala. Nagu kõigil teistel nelinurksetel elementidel, tuleb ka sellel elemedil numerdada sõlmi vastupäeva lokaalkoordinaatide suhtes. Neid elemente saab kaasata rõhukambrite, trükiplaatide ja jahutusradiaatorite mudelitesse.

Vedelikelement. 2D vedelikelement on isoparameetrilise monoliitelemendi modifikatsioon.
See sobib hästi hüdrostaatliste rõhkude ja vedelike vastasmõhu mudeleerimiseks. Elemendil on 4 sõlme, millest igal on 2 vabadusastet lokaalses x- ja y-suunas. Elemedi pindala peab olema positiivne ja sõlmi tuleb numerdada koordinaadisüsteemis vastupäeva. Läbivoolava vedeliku kogus on piiratud hulgaga, mis ei põhjusta olulisi elemendi moonutusi. Staatilistes rakendustes peab vaba pinna algolek olema tasane.

2.6 3D elemendid

2.6.1 3D element

3D ehk tahkiselemendid saab tuletada 2D elementide laiendustena. Lihtsaim 3D element, tetraheeder joonisel 2.20 (a) on 4-sõlmeline, vastates lähendusele

$$\phi = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z \tag{2.54}$$

Kuuesõlmelise kolmnurga üldistusena saadakse 10-sõlmeline tetraheeder joonisel 2.20 (b). Lähendus selle jaoks on

$$\phi = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z + a_5 x^2 + a_6 y^2 + a_7 z^2 + a_8 xy + a_9 xz + a_{10} yz \tag{2.55}$$

mis on täielik polünoom.

Lihtne on tuletada prisma- või tellisekujulisi 3D elemente (joonisel 2.21), mille küljed on paralleelsed koordinaattelgedega, näiteks 4- ja 8-sõlmelistest elementidest, ja mille lähndus 8-sõlmelise prisma jaoks on

$$\phi = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z + a_5 xy + a_6 xz + a_7 yz + a_8 xyz \tag{2.56}$$

samas, kui aproksimatsioon 20-sõlmelise isoparameetrilise elemendi jaoks on

$$\begin{aligned}\phi = {} & a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z + a_5 x^2 + a_6 y^2 + a_7 z^2 + a_8 xy + a_9 xz + a_{10} yz + \\ & + a_{11} x^2 y + a_{12} xy^2 + a_{13} x^2 z + a_{14} xz^2 + a_{15} y^2 z + a_{16} yz^2 + \\ & + a_{17} xyz + a_{18} x^2 yz + a_{19} xy^2 z + a_{20} xyz^2\end{aligned} \tag{2.57}$$

Isoparameetrilise formulatsiooni korral võib neid elemente kasutada üksteisega sobituvalt ka siis, kui nende küljed pole koordinaattelgedega paralleelsed.

2.6.2 Näiteid 3D elementidest

Kahesõlmeline sõrestik. 3D kahesõlmeline sõrestikelement on võib-olla üks lihtsamaid elemente. Sellel on olemas ristlõikepindala, üks võresõlm igas otsas. Vabadusastmete arv on 3 ja see element pole võimeline paindeks. Selle elemendi omadused hõlmavad sõlmjõude, termilist ja ühtlast kiirendust suvalises suunas või kõgis suundades korraga. Pinge eeldatakse olevat konstantne üle kogu elemendi. Sellist tüüpi elemente kasutatakse olukordades, kus seotud kaks jõuliiget nagu tornide, sildade ja hoonete mudelites.

Kahesõlmeline tala. 3D kahesõlmeline tala lubab erinevalt sõrestikust painet. Elemendile saab rakendada momente ja jõudusid sõlmedes ning vahepealsetes punktides; termilist, pidevat ja vahepealse jaotusega koormust, fikseeritud lõpp-jõude ja kiirendamist suvalises suunas või kõigis suundades. Kasutaja peab määratlema nii inertsimomendi lokaalses x- ja y-suunas kui ka lõikealadel lokaalsuundades. Vabadusastmeteks on nihked lokaalsetes x-, y- ja z-suundades ning pöörded ümber lokaalsuundade. Tala ei tohi olla nullist pikkust või pindala. Samas võib inertsimoment olla 0. Talal võib olla suvaline ristlõikepindala, mille jaoks saab arvutada inertsimomendi. Seda elementi kasutatakse reaalprobleemide mudelites, kus tuleb simuleerida reaalset tala, näiteks kolmemõõtmeliste raamide nagu sildade ja korstnate mudelites.

Neljasõlmeline membraanplaat. 3D neljasõlemeline plaat ja selle variatsioonid on kasulikud mudelites, mille kujutatav struktuur vajab paindumist plaadi tasandist välja ja/või kus membraani (plaaditasandis) olevtes pingetel on oluline roll. Igal sõlmel on kuus vabadusastet: nihe iga lokaaltelje suunas ja pööre ümber iga lokaaltelje. Kasutja peab määratlema plaadi paksuse. Selliseid elemente kasutatakse detailidest koostatud struktuuride jaoks nagu telgid ja suurhoonete, näiteks staadiumide katused.

Kaheksasõlmeline tahke tellis. 3D 8-õlmelisel tahkel tellisel on kolm nihkevabadusastel sõlme kohta. Mitte ühtegi pöördvabadusastet pole lubatud. See on kasulik element poltide, seibide, tugevate metallraamide ja praktiliselt iga tahke struktuuri modelleerimisel. See on lineaarelement, kus gradiendid pole mitte konstantsed, vaid ühe koordinaadisuuna lineaarfunktsioon. Neist elementidest saab koostada ratste, turbiinilabade, äärikute jne. mudeleid, kui lisada isotrroopiliste materjalide omadused.

Plaat/kestelement. Need on 3- ja 4-sõlmelised elemendid 3D ruumis. Elementidel on iga sõlme kohta 5 vabadusastet: 3 nihet ja 2 pööret, mis võimaldavad paindumist plaadi tasandist välja. Selle elemendi jaoks ei defineerita pöörlemist plaadi tasandis. Iga elemendi sõlmedele saab automaatselt lisada plaadi tasandis pöörlemisjäikuse. Võimalik on defineerida veel ortotroopilise materjali omadused. Neid elemente kasutatakse röhukambrite, elektroonikavarjestite ja automootorite detailide mudeleerimiseks.

Ääreelement. 3D 2-sõlmeline ääreelement võib liikuda igas lokaalsuunas. Ainus vajalik parameeter on elemendi jäikus. See element on kasulik olukorras, kus konkreetsel sõlmel pole kindlat püsivust. Koostöös teiste elementidega lisavad äärelemendid mudelile jäikust või elastsust. Ükskǐk kummale sõlmele või mõlemale korraga saab rakendada pööret või nihet.

Termiline element. Nende 3D elementide materjalide omadused võivad olla ortotroopilised ja sõltuda temperatuurist. Elementi koormatakse sisemise soojuse genereerimise, pinnajuhtivuse, radiatsiooni ja püsiva sõlmetemperatuuriga.

Temperatuuri ääreelement. Need ühesõlmelised elemendid võimaldavad määratleda sõlme temperatuuri ääretingimused. Elementi kasutatakse koos 2D ja 3D termiliste elementidega.

2.7 Koordinaadisüsteemid

2.7.1 Lokaalkoordinaatide süsteem

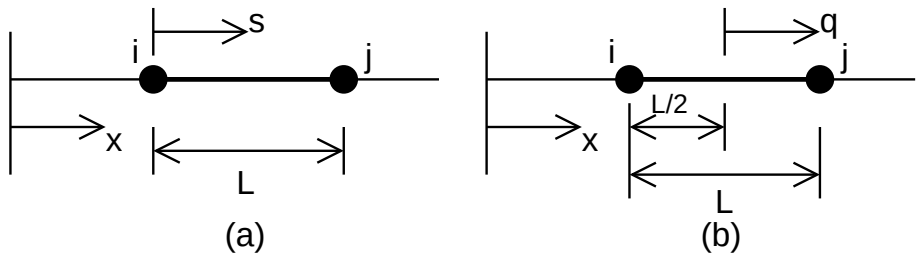
Lineaarne kujufunktsioon

$$N_i(x) = \frac{X_j - x}{L} \qquad N_j(x) = \frac{x - X_i}{L} \tag{2.58}$$

on mõeldud elemendi jaoks, mille koordinaatide nullpunkt asub sõlmest i vasemal. Need on üldised võrrandid, mis kehtivad kõigi lineaarelementide jaoks sõltumata nende asukohast. Nende kujufunktsioonide puudused ilmnevad kujufunktsioonide korrutisi sisaldavate integraalide nagu

$$\int_{X_i}^{X_j} N_i(x) N_j(x) dx \qquad \int_{X_i}^{X_j} N_i^2(x) dx \tag{2.59}$$

Sellist tüüpi integraalid esinevad nii välja- kui ka tahkisemehaanika probleemides. Integraale (2.59) lihtsustatakse uute kujufunktsioonide defineerimisega koordinaatsüsteemi suhtes, mille



Joonis 2.22: 1D elemendi lokaalkoordinaatide süsteemid

nullpunkt on elemendil. Sellist süsteemi nimetatakse lokaalkoordinaatide süsteemiks.

1D elemendi jaoks kaks kõige tavalisemat lokaalkoordinaatide süsteemi sellised, mille nulpunkt on kas sõlmes i või elemendi keskel (joonis 2.22).

Kujufunktsioonid koordinaadisüsteemi jaoks, mille nullpunkt on sõlmes i, saadakse avaldistest (2.58) asendades seal $x = X_i + s$, saades:

$$N_i(s) = \frac{X_j - x}{L} = \frac{X_j - (X_i + s)}{L} = 1 - \frac{s}{L} \tag{2.60}$$

ja

$$N_j(s) = \frac{x - X_i}{L} = \frac{X_i + s - X_i}{L} = \frac{s}{L} \tag{2.61}$$

See kujufunktsioon on 1 tema omas sõlmes ja 0 teises sõlmes. Mõlema summa annab tulemuseks 1.

Elemendi keskel oleva koordinaatsüsteemi kujufunktsoonid saadakse avaldisest (2.58) , kui seal asendada $x = X_i + (L/2) + q$. Siis kujufunktsioonid avalduvad kujul:

$$N_i(q) = \left(\frac{1}{2} - \frac{q}{L}\right) \qquad N_j(q) = \left(\frac{1}{2} + \frac{q}{L}\right) \tag{2.62}$$

kus koordinaatmuutuja q on piirides $-L/2$ kuni $L/2$.

Kujufunktsioonid (2.60) , (2.61) ja paar (2.62) on kasulikud vaid siis, kui muudetakse integreerimismuutujat. Selleks on valem

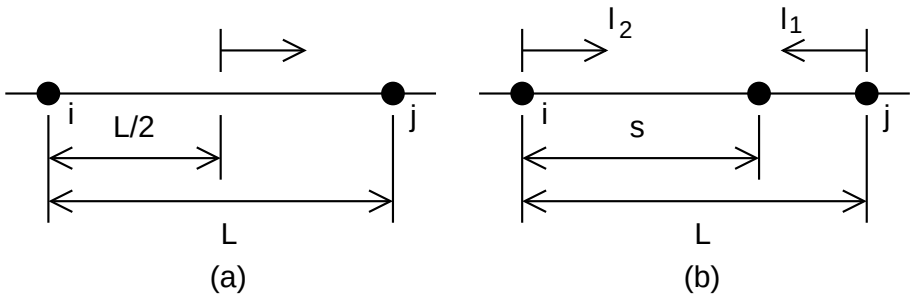
$$\int_a^b f(x)dx = \int_{p_1}^{p_2} f(g(p)) \left[\frac{d(g(p))}{dp}\right] dp \tag{2.63}$$

kus p on uus koordinaatmuutuja ja $g(p)$ on võrrand, mis seob x ja p, ehk siis $x = g(p)$.

Avaldise (2.63) interpretatsioon koordinaadisüsteemi suhtes joonisel 2.22 on alljärgnev. koordinaadi s jaoks, kus $x = X_i + s$,

$$\int_{X_i}^{X_j} f(x)dx = \int_{s_1}^{s_2} \frac{d(X_i + s)}{ds} ds = \int_0^L h(s)ds \tag{2.64}$$

kus $h(s)$ on s kaudu avaldatud $f(x)$. Intergeerimisrajad saadakse x-i asendamisel X_i ja X_j-ga kui $x = X_i + s$ ja lahendamisega s suhtes.



Joonis 2.23: 1D elemendi loomulike koordinaatide süsteemid

koordinaadi q jaoks, kus $x = X_i + L/2 + q$

$$\int_{X_i}^{X_j} f(x)dx = \int_{q_1}^{q_2} r(q)\frac{d(X_i + L/2 + q}{dq}dq = \int_{-L/2}^{L/2} r(q)dq \tag{2.65}$$

kus $r(q)$ on q kaudu avaldatud $f(x)$.

Avaldiste (2.64) ja (2.65) kasulikkus avaldub selliste integraalide nagu

$$\int_{X_i}^{X_j} N_i^2 dx$$

arvutamisel. Kasutades koordinaatmuutjat s:

$$\int_{X_i}^{X_j} N_i^2(x)dx = \int_{-L/2}^{L/2} N_i^2(q)dq = \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{q}{L}\right)^2 dq = \frac{L}{3}$$

2.7.2 Loomulike koordinaatide süsteem

Lokaalkoordinaatsüsteemid s ja q saab konverteerida loomulike koordinaatide süsteemdesse. Loomulike koordinaatide süsteem on lokaalne ssüteem, mis lubab määrata elemendi sees punkte dimensioonita arvudega, mille absoluutne suurusjärk ei ületa kunagi ühikulist.

Alustades q-koordinaadiga jooniselt 2.22 ja suhtega $q/(L/2) = 2q/L = \zeta$, siis ζ muutub -1 kuni +1 (joonis 2.23 (a)). Kujufunktsioonid (2.62) saab kirjutada ζ kaudu, kui teha asendus $q = \zeta L/2$:

$$N_i(\zeta) = \frac{1}{2}(1 - \zeta) \qquad N_j(\zeta) = \frac{1}{2}(1 + \zeta) \tag{2.66}$$

Integreerimismuutjate vahetusel:

$$\int_{-L/2}^{L/2} r(q)dq = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} g(\zeta)\frac{d(\zeta L/2)}{d\zeta}d\zeta = \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} g(\zeta)d\zeta \tag{2.67}$$

kus $g(\zeta)$ on ζ kaudu avaldatud $r(q)$.

Koordinaatmuutuja ζ eeliseks on integreerimisrajad -1 ja 1. Enamus arvutiprogramme kasutab elemendimaatriksite arvutamiseks numbrilist integreerimist. Lõplike elementide programmides on kasutusel Gaussi-Legendre'i numbrilise integreerimise skeem, millel on proovipunktid ja

kaalukoefitsiendid defineeritud intervallis [-1,1].

Teine huvitav loomulike koordinaatide süsteem sisaldab pikkussuhete paari (joonis 2.23 (b)). Kui s on kaugus sõlmest i, siis l_1 ja l_2 on defineeritud kui suhted

$$l_1 = \frac{L-s}{L} \qquad l_2 = \frac{s}{L} \tag{2.68}$$

See koordinaatide paar pole sõltumatu, sest

$$l_1 + l_2 = 1 \tag{2.69}$$

(2.68) ja (2.69) tähtsaim karkteristik on see, et l_1 ja l_2 on identsed kujufunktsioonidega (2.60) ja (2.61) . Nende koordinaatide kasulikkus ilmneb järgmist üüpi integraalide arvutamisel:

$$\int_0^L N_i^a(s) N_j^b(s) ds \tag{2.70}$$

mis sisaldavad kujufunktsioonide korrutisi.

Muutujavahetus ja suhted $N_i(s) = l_1$, $N_j(s) = l_2$, $s = Ll_2$ ja $ds/dl_2 = L$ annavad

$$\int_0^L N_i^a(s) N_j^b(s) ds = \int_0^1 l_1^a l_2^b L dl_2 \tag{2.71}$$

Paremal poolel olev integraali saab teisendada kujule

$$L \int_0^1 (1-l_2)^a l_2^b dl_2 \tag{2.72}$$

kasutades avaldist (2.69) . Integraal (2.72) on järgmist tüüpi:

$$\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \tag{2.73}$$

kus $\Gamma(n+1) = n!$. Seega

$$L \int_0^1 l_1^a l_2^b dl_2 = L \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1+1} = L \frac{a!b!}{(a+b+1)!} \tag{2.74}$$

Võrrand (2.74) on kasulik selle poolest, et see kinnitab, et üsna keerulisi integraale saab avaldada võrranditena, mis sisaldavad vaid elementide pikkusi ja korrutises olevaid astmeid.

Alustades võrrandist

$$\int_{X_i}^{X_j} N_i^2(x) dx = \int_0^L N_i^2(s) ds$$

annab (2.69)

$$\int_o^L N_i^2(s) ds = L \int_0^1 l_1^2 l_2^0 dl_2 = L \frac{2!0!}{(2+0+1)!} = \frac{L}{3}$$

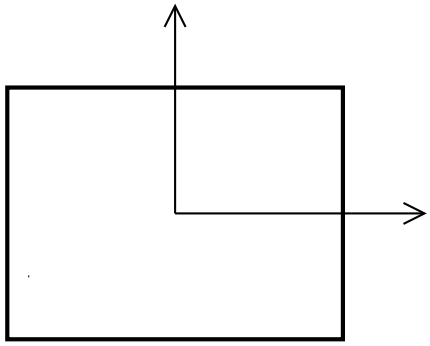
Teine näide on

$$\int_o^L N_i^3(s) N_j^2(s) ds = L \int_0^1 l_1^3 l_2^2 dl_2 = L \frac{3!2!}{(3+2+1)!} = \frac{L}{60}$$

1D lineaarelemendi koordinaadisüsteemid, kujufunktsioonid ja integreerimisrajad on summeritud tabelis 2.1.

Tüüp	Koordinaat	Kujufunktsioonid	Integreerimisrajad
globaalne	x	$N_i = \frac{X_j - x}{L}$, $N_j = \frac{x - X_i}{L}$	X_i, X_j
lokaalne	s	$N_i = 1 - \frac{s}{L}$, $N_j = \frac{s}{L}$	0, L
lokaalne	q	$N_i = \left(\frac{1}{2} - \frac{q}{L}\right)$, $N_j = \left(\frac{1}{2} + \frac{q}{L}\right)$	$-\frac{L}{2}$, $\frac{L}{2}$
looomulik	ζ	$N_i \frac{1}{2}(1-\zeta)$, $N_i \frac{1}{2}(1+\zeta)$	-1, 1
loomulik	l_2	$N_i = l_1$, $N_j = l_2$	0, 1

Tabel 2.1: 1D elemendi koordinaadisüsteemid ja integreerimisrajad



Joonis 2.24: Ristkülikelemendi loomulike koordinaatide süsteem

2.7.3 Ristkülikelement

Loomulike koordinaatide süsteeme saab defineerida ka 2D elementide jaoks, mispuhul on neil samad eelised, mis 1D elementide puhul. Nad on mugavamad nii analüütilisel kui ka numbrilisel integreerimisel.

Ristkülikelemendi loomulike koordinaatide süsteem on joonisel 2.24 . See asub elemendi tsentris ja koordinaadid on pikkuse suhted

$$\zeta = \frac{q}{b} \qquad \eta = \frac{r}{a} \tag{2.75}$$

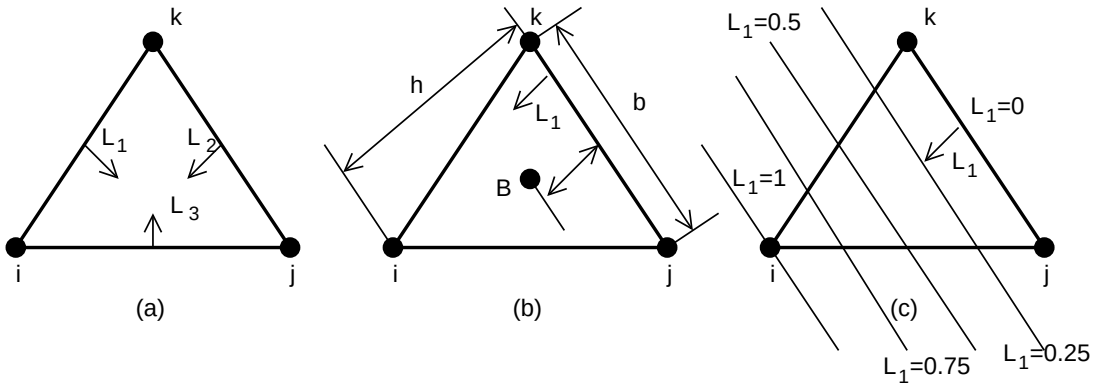
kus q ja r on lokaalkoordinaadid. Kujufunktsioonid (2.51) saab kergesti teisendada loomulike koordinaatide süsteemi:

$$\begin{array}{ll} N_i = \frac{1}{4}(1-\zeta)(1-\eta), & N_j = \frac{1}{4}(1+\zeta)(1-\eta) \\ N_k = \frac{1}{4}(1+\zeta)(1+\eta), & N_m = \frac{1}{4}(1-\zeta)(1+\eta) \end{array} \tag{2.76}$$

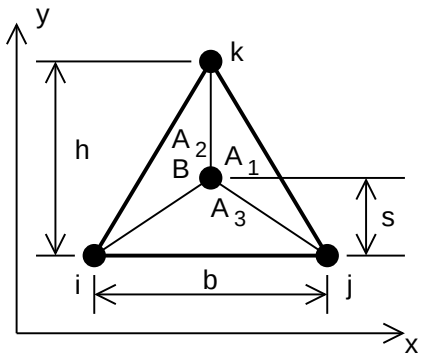
$$-1 \leq \zeta \leq 1 \qquad -1 \leq \eta \leq 1$$

2.7.4 Kolmnurkelement: pindalakoordinaadid

Kolmnurkelemendi loomilike koordinaatide süsteem saadakse kolme pikkussuhte L_1, L_2 ja L_3 defineerimisega (joonis 2.25 (a)). Iga koordinaat on ühe küljega risti oleva kauguse s suhe sama külje kõrgusega h (joonis 2.25 (b)). Iga koordinaat on pikkuse suhe, mis muutub 0 ja 1 vahel. Joonisel 2.25 (c) on jooned konstantse $L_!$-ga. Iga neist joontest on paralleelne küljega, millest L_1-e mõõdetakse.



Joonis 2.25: Kolmnurkelemendi 3 pindalakoordinaatide süsteemi



Joonis 2.26: Pindalakoordinaatidele vastavateks pindaladeks jagatud kolmnurk

Koordinaate L_1, L_2 ja L_3 nimetatakse pindalakoordinaatideks, sest nende väärtused annavad alamkolmnurga ja kolmnurga kogupindala suhte. Olgu punkt B joonisel 2.26 . Kolmnurga kogupindala A:

$$A = \frac{bh}{2}$$

samas, kui viirutatud kolmnurga (B, j, k) pindala on

$$A_1 = \frac{bs}{2} \tag{2.77}$$

Suhe

$$\frac{A_1}{A} = \frac{s}{h} = L_1 \tag{2.78}$$

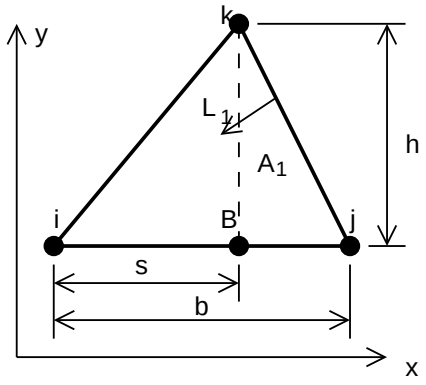
Pindalakoordinaat L_1 on viirutatud ala ja kogupindala suhe. Sarnaselt:

$$L_2 = \frac{A_2}{A} \qquad L_3 \frac{A_3}{A} \tag{2.79}$$

Kuna $A_1 + A_2 + A_3 = A$, siis

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \tag{2.80}$$

Kuna koordinaadid pole sõltumatud, siis piisab punkti määramiseks kahest koordinaadist.



Joonis 2.27: Pindalakoordinaatid punkti jaoks kolmnurga serval

Avaldise (2.78) saab viia teisele kujule, kui korrutada lugejat ja nimetajat kahega

$$L_1 = \frac{2A_1}{2A} \tag{2.81}$$

Kasutades $2A_1$ jaoks determinantlaiendust

$$2A_1 = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix}$$

või

$$2A_1 = (X_jY_k - X_kY_j) + (Y_j - Y_k)x + (X_k - X_j)y \tag{2.82}$$

kus x ja y on punkti B koordinaadid. (2.82) asendamine avaldisse (2.81) annab

$$L_1 = \frac{1}{2A}[(X_jY_k - X_kY_j) + (Y_j - Y_k)x + (X_k - X_j)y] \tag{2.83}$$

Avaldis (2.83) on identne avaldisega (2.41) , seega

$$L_1 = N_i \tag{2.84}$$

Analoogiliselt

$$L_2 = N_j \qquad L_3 = N_k \tag{2.85}$$

Seega on lineaarse kolmnurkelemendi pindalakoordinaadid identsed kujufunktsioonidega.

pindalakoordinaatide süsteemi kasutamise eeliseks on integreerimisvõrrandi olemasolu, mis lihtsustab pindalaintegraalide arvutamist. See integraalvõrrand on seotud avaldisega (2.74) , olles:

$$\int_A L_1^a L_2^b L_3^c dA = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!}2A \tag{2.86}$$

Avaldise (2.86) kasulikkust näitab kujufunktsioonide korrutise

$$\int_A N_i(x,y)N_j(x,y)da \tag{2.87}$$

arvutamine üle kolmnurga pindala. Pinnaintegraal on

$$\int_A N_i N_j dA = \int_A L_1^1 L_2^1 L_3^0 dA = \frac{1!1!0!}{(1+1+0+2)!} = 2A = \frac{2A}{4!} = \frac{A}{12}$$

Pindalakoordinaadid L_1 ja L_2 saab asendada vastavalt N_i-d ja N_j-i. kuna N_k pole korutises, siis on L_3 kaasatud nullise astmega. Nulli faktoriaal on 1.

Tuletatud ääretingimuste või pinnakoormuste kaasamine lõplike elementide analüüsi vajab integraalide arvutamist pikki elemendi piiri. Neid integraale on lihtne arvutada, kui on teada, kuidas pindalakoordinaadid käituvad serval. Olgu punkt B küljel ij joonisel 2.27 . Koordinaat $L_3 = 0$ ja L_1 on viirutatud ala ning kogupindala suhe. Defineeritakse koordinaat s, mis on paralleelne külhega ij ja mida mõõdetakse sõlmest i. Kui punkti B koordinaat on s ja külje pikkus b, siis

$$L_1 = \frac{2A_1}{2A} = \frac{\frac{2h(b-s)}{2}}{\frac{2bh}{2}} = \frac{b-s}{b} = 1 - \frac{s}{b} \tag{2.88}$$

Pindalakoordinaat

$$L_2 = \frac{s}{b} \tag{2.89}$$

Pindalakoordinaadid L_1 ja L_2 taanduvad 1D kujufunktsioonideks $N_i(s)$ ja $N_j(s)$, mis on defineeritud avaldistega (2.60) ning (2.61) . Kasutades 1D loomulikke koordinaate l_1 ja l_2, mis on defineeritud avaldisega (2.68) , saadakse

$$L_1 = l_1 \qquad L_2 = l_2 \qquad \text{küljel } i \to j \tag{2.90}$$

Seosed teiste külgede jaoks on:

$$L_2 = l_1 \qquad L_3 = l_2 \qquad \text{küljel } j \to k \tag{2.91}$$

$$L_3 = l_1 \qquad L_1 = l_2 \qquad \text{küljel } k \to i \tag{2.92}$$

Seoste (2.90) , (2.91) ja (2.92) tähtsus seisneb selles, et iga integraali üle kolmnurkelemendi serva võib asendada joonintegraaliga avaldatuna s ja l_2 kaudu:

$$\int_\Gamma f(L_1, L_2, L_3) d\Gamma = \int_0^L g(s) ds = \int_0^1 h(l_2) dl_2 \tag{2.93}$$

ja arvutada faktoriaalavaldist (2.74) kasutades. 2D elemendi piir on Γ.

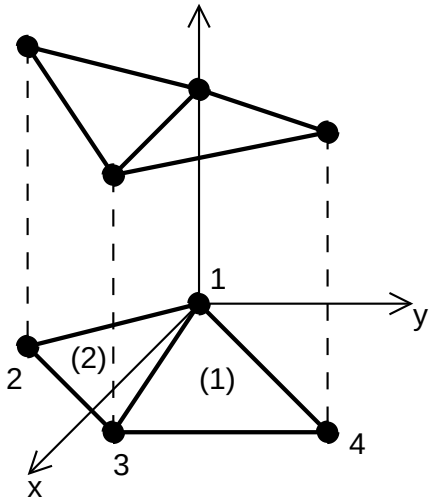
2.7.5 Näide

Arvutada $]int_\Gamma [N]^T d\Gamma$ üle lineaarse kolmnurkelemendi külje ik. Integraal on

$$\int_\Gamma [N]^T d\Gamma = L_{ik} \int_0^1 \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} dl_2 = L_{ik} \int_0^1 \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} dl_2$$

kuna lineaarse kolmnurga kujufunktsioonid ja pindalakoordinaadid on ekvivalentsed. Pikki külge ik $L_1 = l_1$, $L_2 = 0$ ja $L_3 = l_2$, seega

$$\int \Gamma [N]^T d\Gamma = L_{ik} \int_0^1 \begin{Bmatrix} l_1 \\ 0 \\ l_2 \end{Bmatrix} dl_2 = \frac{L_{ik}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$



Joonis 2.28: 2-elemendiline võrk

2.7.6 Pidevus

$\phi(x, y)$-i lähendusfunktsioonid sisaldavad tükati siledate pidevate funktsioonide kogumit, millest igaüks on defineeritud ühe elemendi jaoks. Vajadus neid funktsioone integreerida tekitab nõudeid elementidevahelise pidevuse järgule. Integraal

$$\int_0^H \frac{d^n\phi}{dx^n}dx$$

on defineeritud vaid siis, kui ϕ pidevuse järk on $(n-1)$. See kindlustab, et n-järku tuletises eksiteerivad vaid lõpliku hüppega katkevused. See nõue tähendab, et lähendusfunktsiooni esimest järku tuletis peab olema elementide vahel pidev, kui integraalis on 2. järku liikmed ($n = 2$). Enamus vaadeldavaist elementidest sisaldavad esimest järku tuletisi, sestap peab ϕ olema pidev elementide vahel, kuid tema tuletised ei pea olema pidevad. Tuletiste pidevus on vajalik talaelemendi jaoks.

ϕ pidevus on 1D elemendis kindlustatud, kuna kahel naaberelemendil on ühine sõlm. ϕ pidevust on pikki kahe ristkülikelemendi ühist piiri suhteliselt lihtne tĕstada. ϕ pidevus pikki kahe suvaliselt orienteeritud kolmnurkelemendi ühist piiri on on märksa keerulisem.

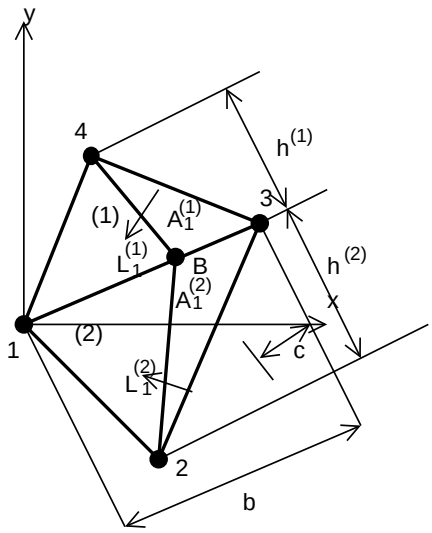
Olgu 2 kõrvutist elementi (joonis 2.28), mille koordinaatide alguspunkt on sõlmes 1. Sõlmväärtused on Φ_1, Φ_2, Φ_3 ja Φ_4.

$$\begin{aligned}\phi^{(1)} &= N_1^{(1)}\Phi_1 + N_3^{(1)}\Phi_3 + N_4^{(1)}\Phi_4 \\ \phi^{(2)} &= N_1^{(2)}\Phi_1 + N_2^{(2)}\Phi_2 + N_3^{(2)}\Phi_3\end{aligned} \tag{2.94}$$

Kujufunktsioonide omadused viitavad, et $N_2^{(2)} = N_4^{(1)} = 0$ pikki ühist piiri. Kasutades kujufunktsioonide ja pindalakoordinaatide vahelist võrdsust (2.84) , (2.85) , saadakse võrrandeist (2.94) :

$$\begin{aligned}\phi^{(1)} &= L_1^{(1)}\Phi_1 + L_2^{(1)}\Phi_3 \\ \phi^{(2)} &= L_1^{(2)}\Phi_1 + L_3^{(2)}\Phi_3\end{aligned} \tag{2.95}$$

Siinkohal tuleb märkida, et pindalakoordinaatide alaindeksid pole seotud sõlmede numbritega.



Joonis 2.29: Pindalakoordinaadid $L_1^{(1)}$ ja $L_1^{(2)}$ pikki ühist piiri

Kuna $L_3^{(1)} = L_2^{(2)} = 0$, siis kasutades avaldist (2.80) :

$$\begin{aligned} \phi^{(1)} &= L_1^{(1)}\Phi_1 + (1 - L_1^{(1)})\Phi_3 \\ \phi^{(2)} &= L_1^{(2)}\Phi_1 + (1 - L_1^{(2)})\Phi_3 \end{aligned} \tag{2.96}$$

Tõestus on tehtud, kui on näidatud, et $L_1^{(1)} = L_1^{(2)}$.

Joonisel 2.29 on ühisel piiril näidatud punkt koos viirutatud pindadega $L_1^{(1)}$ ja $L_1^{(2)}$. Defineerides kauguse punktist B nodesse 3 kui c ja külje 1-3 pikkuse kui b, siis

$$L_1^{(1)} = \frac{2A_1^{(1)}}{2A^{(1)}} = \frac{\frac{2ch^{(1)}}{2}}{\frac{2bh^{(1)}}{2}} = \frac{c}{b}$$

ja

$$L_1^{(2)} = \frac{2A_1^{(2)}}{2A^{(2)}} = \frac{\frac{2ch^{(2)}}{2}}{\frac{2bh^{(2)}}{2}} = \frac{c}{b} = L_1^{(1)}$$

m.o.t.t.

3 Rajaülesanded

Lõplike elementide aproksimatsioonid tulenevad konkreetsete diferentsiaalvõrrandite integraalformuleeringutest, pärides paljud oma kõige ihaldusväärsematest karakteristikutest integraalformuleeringute fundamentaalomadustest.

3.1 Lihtsa rajaülesande *tugev* lahend

Olgu lihtne probleem, mille diferentsiaalvõrrand avaldub kujul:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x) \qquad a < x < b \tag{3.1}$$

ääretingimusega:

$$u(a) = u(b) = 0 \tag{3.2}$$

kus $f(x)$ on pidev funktsioon.

"Ääreprobleem" koosneb diferentsiaalvõrrandist ja sobivast ääretingimuste komplektist. Antud lihtne ääreprobleem võib muu hulgas esindada

- elastse vedru staatilist ristnihet pikkusega $(b-a)$ koormuse $f(x)$ mõjul;
- jahutusradiaatori homogeense ribi staatilist temperatuurijaotust $f(x)$.

Selle ääreprobleemi lahend (tehniliselt *tugev* lahend) defineeritakse kui funktsioon $u(x)$, mis rahuldab järgmisi tingimusi:

$$u(x) \text{ -l on pidevad esimest ja teist järku tuletised piirkonnas } [a,b] \tag{3.3}$$

$$u(a) = u(b) = 0 \tag{3.4}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x) \qquad \forall x \in [a,b] \tag{3.5}$$

Kriteeriumid (3.3) ja (3.4) defineerivad funktsioonide klassi ($C_0^2[a,b]$), mille hulka lahendifunktsioon $u(x)$ kuulub, ehk siis:

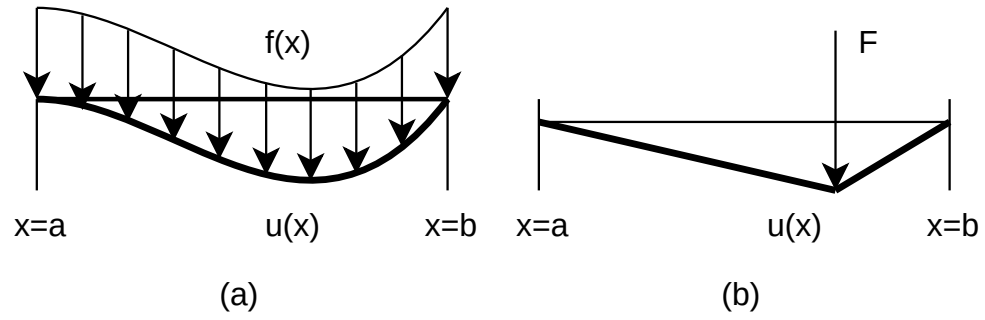
$$\mathbf{C_0^2[a,b]} = \{\mathbf{u(x)} : \textbf{u-l on 1. ja 2. järku pidevad tuletised piirkonnas } \mathbf{[a,b]} \textbf{ ja } \mathbf{u(a) = u(b) = 0}\}$$

Seda lahendite klassi kutsutakse antud probleemi lahendiruumiks.

Vaatleme kriteeriumi (3.5) :

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

- Kriteeriumi (3.5) on tunduvalt raskem rahuldada kui kriteeriumeid (3.3) või (3.4) , sest on palju raskem konstrueerida integraale (või leida diferentsiaalvõrrandi üldlahendit) kui teist järku pidevaid diferentseeritavaid funktsioone.
- Peamine raskus selle tingimuse rahuldamisel seisneb selles, et intervallis (a,b) on väga palju väärtusi x jaoks (tehniliselt lõpmatult palju). Seega on see tingimus väga *tugev* tingimus funktsiooni $u(x)$ jaoks.



Joonis 3.1: Vedru läbipaine: (a) pidev koormus; (b) punktkoormus.

- Leidub palju funktsioone, mis rahuldavad üheaegselt nii tingimust (3.3) kui ka (3.4) , kuid ainult üks funktsioon $u(x)$, mis rahuldab kõiki kolme tingimust, s.t. selle lihtsa ääreprobleemi jaoks unikaalne lahend.

Kõiki neid kolme tingimust rahuldavat funktsiooni nimetatakse selle rajaülesande *tugevaks lahendiks*. Kui on olemas *tugev* lahend, peab ilmselgelt olema olemas ka selle rajaülesande *nõrk* lahend. See saadakse tingimuse (3.5) leevendamise teel. Tegelikult ilmneb, et reaalsete ülesannete lahendamisel on *nõrk* lähenemisviis parem kui *tugev*. Lisaks neile kahele eksisteerib veel selle rajaülesande jaoks *variatsiooniline* lahend. Praktikas on igal lahenditüübil oma eelised. Igal rajaprobleemil, millel leidub klassikaline *tugev* lahend, on olemas ka *nõrk* lahend, mis on omavahel identsed. Kui on rahuldatud teatud antud probleemile aluseks olevad matemaatilised sümmeetriatingimused on rahuldatud, leidub probleemile ka *variatsiooniline* lahend, mis on sama kui *tugev* või *nõrk* lahend. Tänu võimalusele mitmekesiselt probleemi formuleerida, saab valida sellise matemaatilise raamistiku, mis kõige paindlikumalt karakteriseerib lahendit.

3.2 Lihtsa rajaülesande *nõrgad* lahendid

Kuna lihtne rajaülesanne võib kujutada näiteks vedru läbipainet (koos sobivalt normaliseeritud telgjäikusega) ristjõu $f(x)$ mõjul (joonisel 3.1), siis on loomulik arvestada juhtu, mil ristikoormus on rakendatud kontsentreeritud jõuna ühte punkti.

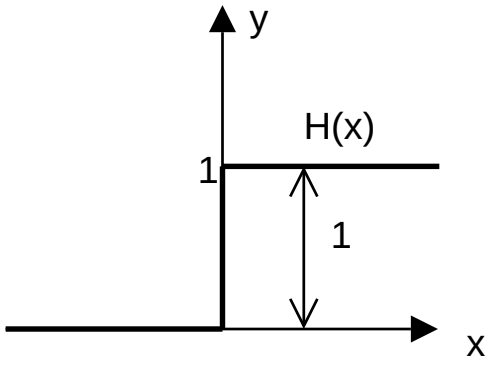
Vedru läbipaindel $u(x)$ pole kontsentreeritud koormuse korral *mitte ühtegi* pidevat tuletist ja seega pole sellel probleemile ka *tugevat* lahendit. See pisut häiriv, sest selliseid punktkoormusi ja sarnaseid singulaarsusi (või "diskreetsusi") esineb tehnikas massiliselt, näiteks põhjaveeallikad, punktjõud mehaanikas, kontsentreeritud allikas soojusjuhtivuses jne. Seega paistab, et lihtsa rajaüleande *tugeva* lahendi teooria deserteerub just siis, kui ilmnevad huvitavad reaalsed probleemid.

Ilmselgelt on vaja uut raamistikku diskreetseid andmeid sisaldavate probleemide lahendite jaoks. On kaks üksteisega seotud suunda, milles edasi minna:

1. defineerida tehtud arvutused ümber distributsiooniteooria terminitesse (üldistatud funktsioonid);
2. arendada välja "nõrgem" struktuur lahenditele (*nõrgad* lahendid).

Defineerime lihtsa rajaülesande *nõrga* lahendi, asendades tingimuse (3.5) alljärgnevaga:

$$\int_a^b \frac{d^2u}{dx^2} v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx \tag{3.6}$$



Joonis 3.2: Heaviside'i astmefunktsioon

iga pideva $v(x)$ korral nii, et

$$v(a) = v(b) = 0 \tag{3.7}$$

Mõlemad tingimused (3.5) ja (3.6) sisaldavad nn. "iga…korral" avaldust: *tugeva* lahendi korral "iga punkti x korral piirkonnas (a, b)" ja "iga pideva funktsiooni $v(x)$ korral, mis rahuldab tingimust $v(a) = v(b) = 0$" *nõrga* lahendi jaoks. Viimasel juhul nimetatakse funktsioone $v(x)$ testfunktsioonideks ja nad moodustavad testfunktsioonide ruumi, konkreetselt funktsioonide klassi kõigist pidevatest funktsioonidest, mille väärtus on 0 lõpp-punktides a ja b.

3.3 Diraci deltafunktsioon

Diraci deltafunktsioon $\delta(x)$ võimaldab käsitleda teatud liiki punktandmeid tuttavas *tugeva* lahendi raamistikus, samas minnes mööda suhteliselt keerulisest matemaatikast, lihtsustades nii käsitlust. Diraci funktsiooni defineerimisega saab selgemaks, miks viib *nõrk* formuleering suurema ja huvitavama lahendatavate probleemide klassini kui *tugev* formuleering.

Diraci deltafunktsioon defineeritakse kui Heaviside'i astmefunktsiooni (joonisel 3.2)

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \forall x < 0 \\ 1 & \forall x > 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

tuletis $H'(x)$. On selge, et see tuletis peab olema 0 kõikjal, välja arvatud nullpunktis, kus on ta sellisel viisil lõpmatu, et saab rakendada teoreemi:

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{x} H'(\xi)d\xi = H(x) = \begin{cases} 0 & \forall x < 0 \\ 1 & \forall x > 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

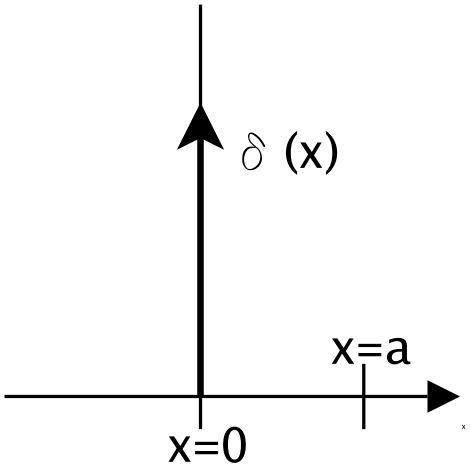
Teine lähenemisviis on defineerida deltafunktsioon tema omaduste kaudu (joonis 3.3):

$$\delta(x) = 0 \quad \forall x \neq 0 \tag{3.10}$$

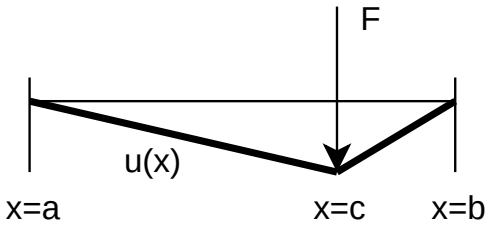
$$\int_{-\infty}^{\alpha} \delta(x)dx = \begin{cases} 0 & \forall \alpha < 0 \\ 1 & \forall \alpha > 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

$$\int_{-\infty}^{\alpha} \delta(x)v(x)dx = \begin{cases} 0 & \forall \alpha < 0 \\ v(0) & \forall \alpha > 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

Deltafunktsiooni mõju on võimalik nihutada pikki x-telge punkti $x = c$, saades tulemuseks



Joonis 3.3: Diraci deltafunktsioon



Joonis 3.4: Punktkoormus F punktis $x = c$

$\delta(x - c)$. See üldistatud funktsioon $\delta(x - c)$ esitab ühikimpulsi (või ühikkoormuse, ühikallika jne) rakendatuna punktis $x = c$. See annab sobiva sümbolismi esindamaks diskreetseid mõisteid probleemides, mis sisaldavad osaliselt pidevaid ja osaliselt diskreetseid andmeid nagu massijaotus, tõenäosusjaotus ja lihtsate rajaülesannete allikad. See on funktsioon, mille väärtus on null kõikjal, v.a. punktis $x = c$. Selles punktis on ta väärtus lõpmatu sellisel viisil, et tema integraal $-\infty$-st kuni suvalise c-st suurema arvuni on võrdne ühega.

Seni, kuni deltafunktsioon on integrandiks, saab kasutada omadusi (3.11) ja (3.12) , et seda sisaldavaid integraale arvutada.

3.4 Lihtne rajaülesanne. Jätk

Vaatleme "punktkoormuse" probleemi lahendifunktsiooni $u(x)$ käitumist eemal sellest punktist, millele koormus on rakendatud. Kui rakendada vedrule koormust suurusega F punktis $x = c$ ja $a < c < b$ (joonisel 3.4), siis ütleb füüsikaline intuitsioon, et $u(x)$ tuletised rahuldavad järgmist kaheosalist definitsiooni (c_1 ja c_2 on konstandid):

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0, \quad \frac{du}{dx} = c_1 = \frac{u(c)-u(a)}{c-a}$$
$$a < x < c \tag{3.13}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0, \quad \frac{du}{dx} = c_2 = \frac{u(b)-u(c)}{b-c}$$
$$c < x < b \tag{3.14}$$

Seega kaob $u(x)$ teist järku tuletis igal pool piirkonnas $[a, b]$, v.a. punktis c, kus rakendatakse ristijõudu.

Punktis $x = c$ on u esimest järku tuletise hüpe, mille suurusjärk on $(c_2 - c_1)$. Siit tuleneb oluline tähelepanek:

$\frac{\mathbf{d^2u}}{\mathbf{dx^2}}$ käitub nagu deltafunktsioon $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{c})$ või täpsemalt, nagu jaotus $(\mathbf{c_2} - \mathbf{c_1})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{c})$

Kuna $\delta(x-c)$ on vaid matemaatiline sümbolism punktis $x = c$ rakendatud ühikkoormusele, siis saab siit tuletada sümboolselt *tugeva* vormi vaadeldavale lihtsale rajaülesandele, mis sisaldab koormust suurusega F:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2u}{dx^2} = F\delta(x - c) \\ &u(a) = u(b) = 0 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Diraci funktsiooni korrutatakse F-ga, sest koormuse suurus on F. See lähenemine on üldiselt sarnane Greeni funktsioonide käsitlusega.

Kahjuks ei oma selline probleemi formuleerimine mõtet traditsioonilises mõttes, sest siin puudub pidev funktsioon $f(x)$, mida saaks lahendifunktsiooni $u(x)$ saamiseks kaks korda integreerida. See viib järelduseni, et selle probleemile pole tavalise algebra raames *tugevat* lahendit.

Lihtsa rajaülesande *nõrk* formuleering deltafunktsiooni kaudu:

$$\int_a^b \frac{d^2u}{dx^2} v(x)dx = \int_a^b bF\delta(x - c)v(x)dx = Fv(x) \qquad \forall v(x) \tag{3.16}$$

Kuna deltafunktsioon ilmub ainult integrandis, siis saab integraali kergelt arvutada deltafunktsiooni omaduse (3.12) abil. Diraci deltafunktsiooni võib vajadusel unustada ja asendada punktkoormused diskreetsete suurustega nagu $Fv(c)$. Kui $v(x)$ vaadeldakse nihkena analoogselt $u(x)$-ga, siis integraalil on töö dimensioon ja $Fv(c)$ on nn. virtuaalse nihke $v(x)$ põhjustanud jõu poolt tehtud töö. Seega on *nõrga* formulatsiooni näiteks elementaarmehaanikast tuntud virtuaaltöö mõiste.

3.5 *Tugeva* ja *nõrga* vormi ekvivalentsus

Nagu näidatud, tekivad mõningad probleemid seal, kus *tugevat* lahendit pole, aga siiski on *nõrk* lahend hästidefineeritud. Seega väärib *nõrk* lahend lähemat uurimist, kuid kohe kerkivad üles kaks ilmset küsimust:

- kas on probleeme, kui *tugev* lahend on olemas ja *nõrka* pole?
- kas on probleeme, kui mõlemad lahendid eksisteerivad, kuid on erinevad?

Vastus esimesele küsimusele on *ei*: mitte midagi ei lähe kaduma, kui kasutatakse *nõrka* lahendit.

Vastus teisele küsimusele on samuti *ei*, kuid selle tõestamine on pisut huvitavam. *Nõrga* ja *tugeva* lahendi samaväärsuse näitamine nõuab *jäägifunktsiooni* sissetoomist.

Lahendite ekvivalentsuse tõestamine on suhteliselt lihtne ja selle raskeim osa põhineb elementaaralgebras tihti kasutataval pidevuse argumendil. Strateegiliselt on lihtsam tõestada, et "iga *tugev* lahend on *nõrk* lahend" ja "iga *nõrk* lahend on *tugev* lahend" kui et "*tugev* ja *nõrk* on samad", mis on palju raskem, kuigi loogiliselt ekvivalentne.

Iga lihtsa rajaülesande *tugev* lahend on ka *nõrk* lahend (*tugev* $\Rightarrow$ *nõrk*)

Olgu $u(x)$ lihtsa rajaülesande *tugev* lahend. Siis on kriteerium (3.5) rahuldatud, nii et

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

Korrutades selle võrduse mõlemaid pooli suvalise funktsiooniga $v(x)$ (ja konkreetselt pideva funktsiooniga $v(x)$, kusjuures $v(a) = v(b) = 0$) ei muuda seda võrdsust ning samuti ei muuda seda nende mõlema võrdse poole integreerimine $x = a$-st kuni $x = b$-ni, saadakse:

$$\int_a^b \frac{d^2u}{dx^2} v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx \tag{3.17}$$

iga pideva funktsiooni $v(x)$ korral, mille jaoks kehtib

$$v(a) = v(b) = 0 \tag{3.18}$$

Kuna see on just kriteerium (3.6) (mis on tuntud ka kui *nõrga* lahendi definitsioon), siis on näidatud, et iga *tugev* lahend on ka *nõrk* lahend.

Iga lihtsa rajaülesande *nõrk* lahend on ka *tugev* lahend

Olgu $u(x)$ lihtsa rajaülesande *nõrk* lahend, nii et kriteerium (3.6) on rahuldatud. Saab tõestada, et see *nõrk* lahend on ka *tugev* lahend eeldades, et see *pole* ja siis näidates, et selline eeldus viib vastuoluni. Sellist tehnikat nimtatakse *tõestuseks vastuolu kaudu*.

Eeldame, et $u(x)$ *pole* selle rajaülesande *tugev* lahend, nii et leidub vähemasti üks punkt (x_0) piirkonnas (a,b), kus $u(x)$ teine tuletis *pole* võrdne f(x)-ga:

$$\frac{d^2u(x_0)}{dx^2} \neq f(x_0), \qquad x_0 \in (a,b) \tag{3.19}$$

Defineerime funktsiooni

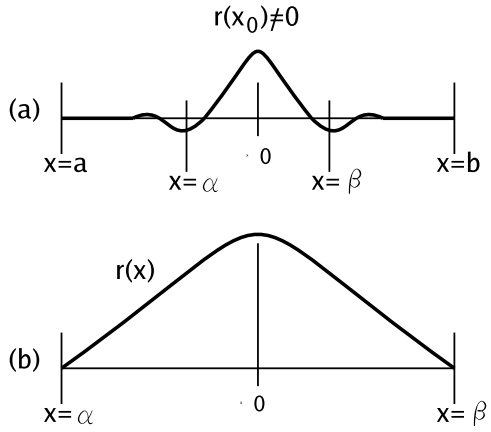
$$r(x) = \frac{d^2u}{dx^2} - f(x) \tag{3.20}$$

nii, et põhieelduseks oleks, et

$$r(x_0) \neq 0 \tag{3.21}$$

Siinkohal tasub tähele panna, et $r(x)$ sõltub $u(x)$-st ja mõnikord rõhutatakse seda sõltuvust noteeringuga $r(x,u)$. Funktsiooni $r(x)$ nimetatakse selle diferentsiaalvõrrandi *jäägifunktsiooniks* ja see on võti "Galerkini lähendusele". Need lähendused moodustavad põhiosa ühest kõige tavalisemast lõplike elementide mudelist. Tuleb märkida, et tingimus "$r(x) = 0$ kõigi x korral piirkonnas (a,b)" on ekvivalentne kriteeriumiga (3.5) ,nii et rajaülesande *tugeva* lahendi oleks võinud defineerida kui funktsiooni, mis ellimineerib jäägifunktsiooni $r(x)$ kogu piirkonnas.

Eeldus, et $u(x)$ ei ole *tugev* lahend, tähendab, et $r(x_0) \neq 0$ mõne punkti x_0 jaoks piirkonnas



Joonis 3.5: (a) Jäägifunktsioon r(x); (b) suurendatud vaade piirkonnas (α,β)

(a, b). See tingimus on joonisel 3.5 (a), kus $r(x_0)$ on kujutatud positiivsena (ilma üldistatust kaotamata). On teada, et $r(x)$ on pidev funktsioon, kuna see on kahe pideva funktsiooni vahe, nii et peab leiduma intervall (α, β), kus $\alpha < x < \beta$, üle mille $r(x) > 0$). See naabrus on suurendatult joonisel 3.5 (b).

Võti saavutamaks soovitud vastuolu on ära kasutada *nõrga* lahendi definitsiooni "iga testfunktsiooni korral" aspekti. Kui suudetaks leida testfunktsioon $v(x)$, et $r(x)$ ja $v(x)$ korrutise integraal pole 0, siis on näidatud, et

$$\int_a^b rvdx = \int_a^b [\frac{d^2u}{dx^2} - f]vdx \neq 0 \tag{3.22}$$

mis annab mõista, et

$$\int_a^b \frac{d^2u}{dx^2}v(x)dx \neq \int_a^b f(x)v(x)dx \tag{3.23}$$

See viimane mittevõrdsus peaks olema vastuolu hüpoteesiga, et $u(x)$ on *nõrk* lahend. Korrates vastuolu kaudu tõestamise mehaanikat, et kui selline vastuolu on saadud, saab tõestada, et "*nõrk* ja *mittetugev*" on väär, mis loogikareeglite järgi on sama kui et "*nõrk* on *tugev*" on tõene.

On lihtne konstrueerida funktsiooni $v(x)$ nii, et korrutis $r(x)v(x)$ on positiivne piirkonnas (α, β) ja null igal pool mujal. Joonisel 3.6 on selline testfunktsiooni, kus v muutub nullist kohal $x = \alpha$ kuni positiivse väärtuseni kohal $x = x_0$ ja naaseb tagasi nulli kohal $x = \beta$. Selle funktsiooni $v(x)$ efekt on "testida" nullist erinevaid jääke alamintervallis (α, β), mistõttu seda nimetatakse testfunktsiooniks. See konkreetne testfunktsioon annab siin otsitava vastuolu.

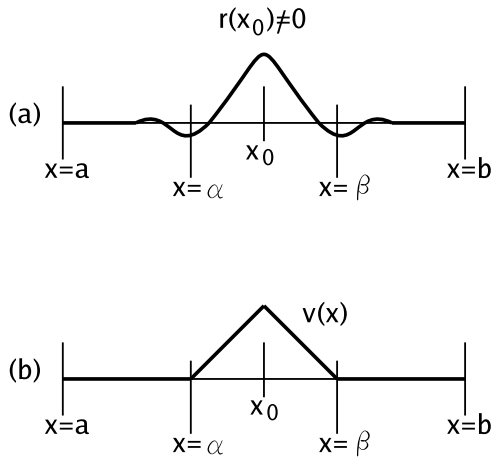
Kuna $r(x)v(x) > 0$ üle (α, β) ja $r(x)v(x) = 0$ muudel juhtudel, siis

$$\int_a^b rvdx = \int_a^b [\frac{d^2u}{dx^2} - f]vdx > 0 \tag{3.24}$$

nii, et

$$\int_a^b [\frac{d^2u}{dx^2}v(x)dx > \int_a^b f(x)v(x)dx \tag{3.25}$$

See mittevõrdsus on vastuolus faktiga, et $u(x)$ on rajaülesande *nõrk* lahend ja seega eeldus, et $u(x)$ *pole tugev* lahend, on vale. Siit tulenevalt $u(x)$ on *tugev* lahend ja on tõestatud, et iga *nõrk*



Joonis 3.6: (a) Jäägifunktsioon; (b) testfunktsioon.

lahend on ka *tugev* lahend. Kui panna "*tugev* toob kaasa *nõrga*" ja "*nõrk* toob kaasa *tugeva*" tulemused kokku, saadakse soovitud tulemus lihtsa rajaülesande jaoks:

Igal lihtsal rajaülesandel, millel on olemas tugev lahend, on olemas ka nõrk lahend ja need kaks lahendit on identsed

Sellesse olulisse tulemusse lisatud sõna "igal" võimaldab juhtumeid, kus pole *tugevat* lahendit elementaaralgebra raames, ent leidub **nõrk** lahend eespool konstrueeritud "kaheosalise" definitsiooni näol. Lõpuks selgub ka, et füüsikalise reaalsuse jaoks takistavad matemaatiliste mudelite arendamist tihti tavaliste *tugevate* lahendite kaalutlused, sestap sõltutakse siis *nõrkadest* (või variatsioonilistest) formuleeringutest ligilähedaste lahendite konstrueerimisel.

Sellest tõestusest koorus mitu olulist tulemust. Esiteks, näidati, et võimes lahendada diferentsiaalvõrrandeid ei kaotata mitte midagi, kui neid võrrandeid käsitletakse *nõrga* formulatsiooni raames selle asemel, et kasutada analoogset *tugevate* lahendite teooriat. Leidub huvitavaid probleeme (sisaldades mittepidevaid andmeid), mis ei võimalda *tugevaid* lahendeid, vähemasti mitte tavaliste tuletiste ja integraalide mõistes. Veel tähtsam on see, et *nõrgad* lahendid viivad loomulikul viisil ligilähedaste lahendustehnikateni, mida on kergem kasutada arvutuslikeks lähendamisteks kui neid, mis põhinevad *tugeval* lähenemisel.

Üldiselt kehtib, et mida keerukamaks muutub probleem, seda keerukamaks muutub ka jääkide kuju. Galerkini lõplike elementide aproksimatsiooni konstrueerimisel on ülioluline korrektse jäägifunktsiooni moodustamine. Üldiselt, kui probleemi jaoks on võimalik konstrueerida terviklik jäägifunktsioon, siis saab konstrueerida ka lõplike elementide mudeli.

Jäägifunktsiooni füüsikaliseks interpretatsiooniks on *diferentsiaalvõrrandi lahendamisel tekkiv viga*. Kui $u(x)$ on diferentsiaalvõrrandi täpne lahend, siis $r(x)$ on identselt null ja lahendil viga pole. Olgu $\hat{u}(x)$ lähend täpsele lahendile $u(x)$, siis jääk $r(x, \hat{u})$ pole identselt null, v.a. siis, kui $\hat{u} = u$, mis on õige ainult sellisel ebatõenäolisel juhul, mil lähendus on täpselt sama, mis lahendki. Kui lähend pole täpne, pole $r(x, \hat{u})$ identselt null ja diferentsiaalvõrrandi lahendamisel tekib viga. Tekkib veel viga $u - \hat{u}$, mis on tegelik lähendamisviga.

On oluline teha neil kahel veal vahet, sest üks neist, jääk, on miski, mida on võimalik määrata,

samas kui teine, lähendamisviga, on tähtis tehtud lähenduse täpsuse mõõduna ja seda ei saa üldiselt määtata. Kui võimetus määrata lähendamisviga pole selge, siis tasuks meenutada, et selle vea leidmine vajab täpse lahendi $u(x)$ teadmist ja siis ei olda üldiselt lähenduste leidmisest huvitatud. Enamus tavalisi lõplike elementide lähendusi, mida rakendatakse suurele hulgale rajaprobleemidele, lubavad minimiseerida kõige ligitõmbavama kujuga lähendusviga $u - \hat{u}$ jääke r töödeldes. See tulemus võib olla raskestimõistetav, ent on sellist sorti tähtis praktiline tulemus, tänu millele on lõplike elementide mudelid laialt kasutatavad. Analüütik saab kasutada arvutit, et töödelda kättesaadavat jäägifunktsiooni, et minimiseerida muidu ligipääsmatut viga lähendusprotsessis. Lähendusi, millel on antud minimaalne veamäär, nimetatakse vastava matemaatilise terminiga "parim" ja antud juhul on matemaatiline tähendus täpselt sama, mis idiomaatiline. Need *on* parimad.

Lõpetuseks on heaks harjutuseks tõestada, et *nõrga* lahendi alternatiivseks definitsiooniks on:

$$u(x) \text{ on } \textit{nõrk} \text{ lahend, kui}$$

$$\int_a^b r(x,u)v(x)dx = 0 \qquad \forall v(x) \tag{3.26}$$

3.6 Lisandusi lihtsa rajaülesande *nõrgale* vormile

Jäägifunktsiooni $r(x)$ definitsioon, mis sõltub lahendifunktsioonist $u(x)$, võimaldab taasavaldada kriteeriumid *tugevate* ja *nõrkade* lahendite defineerimiseks:

Tugev lahend

$$r(x,u) = \frac{d^2u}{dx^2} - f(x) = 0 \qquad \forall x \in (a,b) \tag{3.27}$$

Nõrk lahend

$$\int_a^b r(x,u)v(x)dx = 0 \qquad \forall v(x) \tag{3.28}$$

Kui iga võimaliku lahendi $u(x)$ korral $r(x)$ on identselt null, siis on $u(x)$ *tugev* lahend. *Nõrka* vormi väljendatakse integraali kujul (matemaatiliselt on see $r(x)$ ja $v(x)$ skalaarkorrutis). Kuna matemaatiliseks ortogonaalsuse tingimuseks on skalaarkorrutise võrdumine nulliga, s.t. et kaks vektorit $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on ortogonaalsed, kui nende skalaarkorrutis

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \tag{3.29}$$

siis tuleb märkida, et probleemi *nõrga* ülesseade võib anda ka järgmiselt:

"*nõrk* lahend $u(x)$ on lahend, mis annab jäägi $r(x,u)$, mis on ortogonaalne kõigi testfunktsioonidega $v(x)$".

Teine vaatenurk *nõrgale* probleemiseadele on käsitleda testfunktsioone $v(x)$ kui "kaale", mida saab kasutada jääkide "proovimiseks" intervalli erinevates osades. Selline interpretatsioon on sarnane varasema *nõrk = tugev* tõestusega. Praegusel juhul nimetatakse $r(x)$ ja $v(x)$ integraale *kaalutud jääkideks* ja selline terminoloogia on üldiselt kasutuses.

Nõrga probleemiasetuse üks muresid selle praegusel kujul on see, et see vajab integrandis $u(x)$ teist järku tuletist, kuid testfunktsioonidelt $v(x)$ ainult lihtsat pidevust. Sestap tuleb silma peal hoida kahel ruumil, millest ühes asuvad vastuvõetavad lahendid (funktsioonide $u(x)$ ruum) ja

teises testfunktsioonid (funktsioonide $v(x)$ ruum). Palju õiglasem *nõrga* deklaratsiooni versioon oleks vähendada $u(x)$-ga seotud tuletiste arvu ja tõsta seda $v(x)$ jaoks. Selle versiooni võib saada "osade järgi integreerimisest":

$$\begin{aligned} 0 = \int_a^b r(x)v(x)dx &= \int_a^b \frac{d^2u}{dx^2}v(x)dx - \int_a^b f(x)v(x)dx = \\ &= \frac{du}{dx}v\,\big]_a^b - \int_a^b \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx - \int_a^b f(x)v(x)dx \end{aligned} \tag{3.30}$$

Kuna $v(a) = v(b) = 0$ on varjatud testfunktsioonide ruumi definitsioonis (see on tegelikult põhjus, miks see testfunktsioonide tingimus on selle probleemi jaoks vajalik), kaob ääreliige osade kaupa integreerimisest ära, jättes järgi ekvivalentse, ent lihtsama *nõrga* deklaratsiooni kuju:

$$\int_a^b \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx + \int_a^b f(x)v(x)dx = \int_a^b [\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + fv]dx = 0 \tag{3.31}$$

kõigi testfunktsioonide $v(x)$ korral.

Et selle *nõrga* kuju deklaratsiooni kõigil integraalidel oleks mõtet, peavad nii $u(x)$-l kui ka $v(x)$-l leiduma esimesed tuletised. See tähendab, et lahendid ja testfunktsioonid saab valida samast funktsiooniruumist, nimelt nende seast, millel on sobivad esimese tuletise integreeruvustingimused.

Seega on lahendi $u(x)$ nõudeid lõdvendatud kahelt pidevalt tuletiselt (*tugeva* lahendi jaoks) esimeste tuletiste korrutiste integreeruvuseni (*nõrga* lahendi viimatine kuju). Vähendades nõudeid lahendile $u(x)$, vajatakse väiksema pidevusega lahendit ja seega suureneb lahendatavate probleemide spekter. Näiteks "punktkoormusega vedru" probleem ei võimalda *tugevat* lahendit, ent ilmselgel lahendil, mis konstrueeriti füüsikalist intuitsiooni kasutades, on kindlasti olemas esimest järku tuletis, mis on integreeritav (kuna see on punkthaaval konstantne). Seega pole sellisel kujul *nõrgal* lahendil mingeid probleeme kohaneda selle lihtsa probleemi punktkoormuse versiooniga.

3.7 Ülevaade mõnedest kriteeriumidest lihtsa rajaülesande lahendamiseks

1. *Tugev* lahend:

   - peab rahuldama võrrandit

   $$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x) \qquad \forall x \in (a,b) \tag{3.32}$$

   - nõuab, et $u(x)$-l peab olema vähemalt 2. järku pidevad tuletised ja et oleks rahuldatud tingimus:

   $$u(a) = u(b) = 0 \tag{3.33}$$

   - võimaldab viimast tingimust leevendada, täpsustades, et $u(x)$-l peab olema vaid üks pidev tuletis ilma tuletise mõiste ümberdefineerimiseta. See võimaldab käsitleda osaliselt pidevaid allikaliikmeid lihtsa rajaülesande mudelis, kuid ei luba punktallikate olemasolu.

2. *Nõrk* lahend (I):

- peab rahuldama võrrandit

$$\int_a^b \left[\frac{d^2u}{dx^2} - f\right] v dx = 0 \qquad \forall v(x) \tag{3.34}$$

- nõuab, et $u(x)$-l oleks integreeritav teist järku tuletis ja et oleks rahuldatud tingimus

$$u(a) = u(b) = 0 \tag{3.35}$$

- see tingimus laiendab lahendite klassi nende funktsioonidega, mille teine tuletis käitub sarnaselt Diraci deltafunktsiooniga. See võimaldab ositi integreerimise kaudu arvestada lihtsas rajaülesandes punktallikaid ilma integraalide ja tuletiste tavaliste definitsioonide hülgamiseta. Siinkohal tuleb märkida, et arvestatakse lahendi $u(x)$ teist järku tuletisi, kuid mitte ühtegi tuletist proovifunktsiooni $v(x)$ jaoks. Sestap pole veel selge, milline peaks olema testfunktsioonide $v(x)$ ruum.

3. *Nõrk* lahend (II):

   - peab rahuldama võrrandit

$$\int_a^b \left[\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + fv\right] dx = 0 \qquad \forall v(x) \tag{3.36}$$

   - nõuab, et nii $u(x)$-l kui ka $v(x)$-l oleksid "ruutintegreeritavad" teist järku tuletised ja et nad rahuldaksid tingimust

$$u(a) = v(a) = u(b) = v(b) = 0 \tag{3.37}$$

   - See tingimus võimaldab vaadelda $u(x)$-i ja $v(x)$-i kui sama "funktsiooniperekonna" liikmeid, millel on tähtsad tagajärjed peale ilmselge, et enam ei pea muretsema mingi uue testfunktsioonide ruumi pärast. See formuleering viib ka *nõrga* lahendi kriteeriumide lihtsa füüsikalise interpretatsioonini, mis hõlmab tööd ja energiat.

Järgnevalt koostatakse ligikaudne lahend lihtsale rajaülesandele. *Tugeva* lahendi tingimuste kasutamine ligikaudse lahendi leidmiseks viib lõplike vahede meetodini (*Finite Difference Method*, FDM). Analoogne lähenemisviis *nõrga* lahendi formuleeringut (I) kasutades annab tulemuseks kaalutud jääkide meetodi (*Method of Weighted Residuals*, MWR). Lõpuks juhib *nõrga* lahendi formuleering (II) üldise Galerkini lähenduse ja konkreetselt lõplike elementide meetodini (*Finite Element Method*, FEM). Kuna *nõrga* lahendiga probleemide hulk on suurem *tugeva* lahendiga probleemide hulgast, siis saab FEM-i ja MWR-i kasutades lahendada palju "huvitavamaid" probleeme kui FDM-ga. Alternatiivse *variatsioonilise* formuleeringu abil saab väiksema jõupingutusega sama lähenduse.

3.8 Lihtsa rajaülesande ligikaudsed lahendid

Nõrgad formuleeringud on *tugevatest* kasulikumad, sest võimaldavad lahendada laiemat probleemideklassi ja neil on külgetõmbavam füüsikaline interpretatsioon. Kuid tõenäolisemalt kõige olulisem eelis on puhtalt praktiline: need viivad lihtsamate ja paremini käituvate numbriliste lähenditeni. Kuna täpselt lahenduvate (*nõrgalt* või *tugevalt*) "reaalmaailmaprobleemide" arv on väga väike, siis tuleb lähendamist võtta kui kõige tavalisemat viisi leidmaks vastuseid analüüsitavatele probleemidele. Näiteks selgub, et ligikaudsete lahendite klass, mida tuntakse *Galerkini lähendustena*, sisaldab paljude tavaliste probleemide jaoks lahendite kõige efektiivsemaid

lähendusi.

Esmalt tuleb defineerida mõningad terminid, et eristada lähendusi täpsetest lahendeist:

- $u(x)$ on antud rajaülesande täpne lahend (*nõrk* või *tugev*)
- $\hat{u}(x)$ on antud rajaülesande ligikaudne lahend (*nõrk* või *tugev*)

Lähendust $\hat{u}(x)$ vaadeldakse lähendusfunktsioonide summana:

$$\hat{u}(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \phi_j(x) \tag{3.38}$$

Käesoleval juhul väljendatakse lahendit lähendusfunktsioonide $\phi_j(x)$ summana, mida kaalutakse sobiva koefitsientide komplektiga, mis on valitud selliselt, et nad maksimeeriksid tulemuseks saadava ligikaudse lahendi täpsuse. Täpsuse maksimeerimine peab toimuma ilma konkreetsete teadmisteta täpse lahendi kujust, mis muudab sobituskoefitsientide valimise huvitavaks ülesandeks. Lähendusfunktsioonid $\phi_j(x)$, mida nimetatakse ka baasifunktsioonideks, sest nad moodustavad lähenduse alamruumi baasi, peaksid kinni püüdma lahendi ruumilise muutlikkuse, kui sobituskoefitsiendid on valitud. Üldiselt on vajalik, et baasifunktsioonid rahuldaks igat nullist $u(x)$-i ääretingimust, nii et summa $\hat{u}(x)$ rahuldaks neid samu tingimusi.

Kuna

$$\frac{d\hat{u}}{dx} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \frac{d\phi_j}{dx} \tag{3.39}$$

siis sobituskoefitsiendid α_j pole x-i funktsioonid.

Ligikaudse lahendi esitamine baasifunktsioonide kaalutud summana on suhteliselt standardne tehnika matemaatika lähendusteoorias ja numbrilises analüüsis. Näitena olgu toodud matemaatilise füüsika teatud diferentsiaalvõrrandite lahend kärbitud Fourier' ridade kaudu.

Näidislähendus: kärbitud Fourier' siinusrida

$$\hat{u}(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j sin(\frac{j\pi x}{L}) \tag{3.40}$$

Siin on baasifunktsioonid $\phi_j(x)$ siinused ja koefitsiendid on näide Fourier' koefitsientidest. Nende koefitsientide määramiseks on olemas standardsed integraalvalemid ja sellist tüüpi lähendit kasutatakse tavaliselt teatud kindlate rajaülesannete lahendamiseks piirkonnas $[0, L]$.

Et luua *nõrkade* lähendite konstruktsioon, asendatakse ligikaudsete lahendite kuju rajaülesande *nõrka* formuleeringusse:

$$\int_a^b \left[\frac{d\hat{u}}{dx}\frac{dv}{dx} + fv\right] dx = \int_a^b \left\{\left[\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \frac{d\phi_j}{dx}\right] \frac{dv}{dx} + fv\right\} dx = 0 \tag{3.41}$$

Iga sõltumatu testfunktsiooni $v(x)$ valik annab integraalvõrrandi, mida saab kasutada, et aidata määrata tundmatut sobituskoefitsientide komplekti. Vaja on täpselt N sõltumatut testfunktsiooni $v(x)$, et genereerida võrrandisüsteem määramaks unikaalset sobituskoefitsientide komplekti.

Kui need tarvilikud N testfunktsiooni on käes, asendatakse need eelmisesse võrrandisse, et saada alljärgnev integraalvõrrandite süsteem:

$$\int_a^b \left\{ \left[\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \frac{d\phi_j}{dx} \right] \frac{dv}{dx} + f v_i \right\} dx = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, N \tag{3.42}$$

Lähemal vaatlusel osutub see võrrand NxN lineaarvõrrandisüsteemiks tundmatute sobituskoefitsientide α_j suhetes:

$$\sum_{j=1}^{N} B_{ij} \alpha_j = c_i \tag{3.43}$$

kus

$$B_{ij} = \int_a^b \left\{ \frac{d\phi_j}{dx} \frac{dv_i}{dx} \right\} dx \tag{3.44}$$

ja

$$c_i = -\int_a^b f v_i dx \tag{3.45}$$

Ilmselt sõltuvad sobituskoefitsiendid baasi- ja testfunktsioonide valikust. Lähendi kvaliteet (täpsus) kui testfunktsioonide funktsioon on ükskõige tähtsamaid probleeme *nõrkade* lähendite konstrueerimisel.

On olemas olulist kolm etappi antud probleemi ligikaudse lahendi konstrueerimisel, kusjuures need kehtivad peaaegu iga lähendusskeemi jaoks.

(1) Valida ligikaudsete lahendite pere. See etapp vastab baasifunktsioonide arvu ja tüübi valimisele. Ideaalselt peaks baasifunktsioonide arvu suurendamisel vastavalt lähenduse täpsus suurenema.

(2) Valida kriteerium ligikaudsete lahendite perest "parima" liikme selekteerimiseks. See etapp vastab sõltumatute testfunktsioonide valimisele, mille tavalisim näide on Galerkini meetod.

(3) Lahendada saadud võrrandid sobituskoefitsientide suhtes. Seda tehakse tavaliselt arvutiga, ent mõnel juhul, näiteks piiratud arvu baasifunktsioonide korral on võrrandisüsteem piisavalt väike käsitsilahendamiseks.

Kuna lahend on ligikaudne, pole nõutud, et jääk oleks null (mis annaks märku *tugevast* lahendist) või isegi, et see kaoks igalt poolt piirkonnas (a, b). Küll on nõutud, et jääk $r(x, \hat{u})$ oleks ortogonaalne kõigi N testfunktsiooni $v_i(x)$-ga. See tingimus on sobituskoefitsientide võrrandisüsteemi allikaks.

Testfunktsioonide $v_(x)$ loomulik valik oleks kasutada baasifunktsioone $\phi_j(x)$, kui mingil teisel põhjusel peale vaatluse ei selgu, et siis tuleks arvestada ühe võra väiksema funktsiooniruumide arvuga. Kui testfunktsioone kasutatakse ka baasifunktsioonidena, nimetatakse saadud lähendusskeemi *Galerkini meetodiks*. See on lõplike elementide meetodi üks olulisimaid koostisosi ja see omab teatud optimaalseid veaminimeerimisomadusi. Galerkini meetod annab sobituskoefitsientide võrrandisse sümmeetrilise maatriksi B.

3.9 Lihtsa rajaprobleemi variatsiooniline formulatsioon

Alternatiivse formulatsiooni lihtsale rajaülesandele saab, kui siia probleem variatsioonilisele kujule. Formuleering hõlmab probleemi täpse lahendi väljendamist füüsikaliselt energiana interpreteeritava skalaarsuuruse minimeerijana. Matemaatilist aparaati *tugeva*, *nõrga* ja *variatsiooniliste* vormide ekvivalentsuse taga nimetatakse variatsioonarvutuseks, mis moodustab ühe vanimatest ja mitmekülgsematest teemadest matemaatikas. Lühiduse huvides kontsentreerutakse alljärgnevas käsitluses demonstreerimisele, et probleemi *variatsioonilisest* püstitusest saadud lähendused on identsed nendega, mis on saadud *nõrgast* vormist.

Olgu defineeritud skalaarfunktsionaal

$$\Pi(u) = \frac{1}{2}\int_a^b \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx + \int_a^b fu dx \tag{3.46}$$

Funktsionaali saab defineerida kui funktsiooni, mille ulatus on reaalarvude kogum (skalaarid), kuid mille määramispiirkond on funktsioonide komplekt. Funktsionaal on seega funktsioon funktsioonidest. Küllap kõige tuttavam funktsionaal on kaugus kahe punkti vahel: see kaugus, skalaar, sõltub läbitud teest nende kahe punkti vahel, mida saab väljendada funktsiooniga. Aksioom "lühim tee kahe punkti vahel on sirglõik" ütleb, et sirglõik kahe punkti vahel on funktsioon, mis läbib kahte punkti, minimeerides teepikkuse.

Siinne funktsionaal on tegelikult kahe liikme, U ja V vahe. Kui füüsikaline interpretatsioon valida selline, et $u(x)$ on deformeeritud vedru põikinihe (sobivalt ühikuliseks normaliseeritud elastse takistusega), siis deformeeritud vedrusse salvestunud potentsiaalne energia on antud esimese skalaariga U:

$$U(u) = \frac{1}{2}\int_a^b \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx \tag{3.47}$$

Teine skalaar V väljendab rakendatud koormuse $f(x)$ potentsiaalse energia kadu, mis on kahekordne selle koormuse poolt tehtud töö vedru nihutamiseks:

$$V(u) = -\int_a^b f(x)u(x)dx \tag{3.48}$$

"–"-märk tuleneb faktist, et $u(x)$ on positiivne ülespoole, $f(x)$ aga positiivne allapoole. Selline tava muudab probleemi *tugeva* formuleeringu pisut lihtsamaks, aga lisab kerged komplikatsioonid *variatsioonilisse* versiooni. Töö on positiivne, kui jõud ja nihe on samasuunalised, sestap on siin vaja miinusmärki, kuna need suurused on positiivsed vastassuundades.

Lihtsa rajaülesande *variatsiooniline* lahend on defineeritud kui:

funktsioon $\mathbf{u(x)}$, mis *minimeerib* $\mathbf{\Pi(u)}$, alludes piirangule, et $\mathbf{u(a) = u(b) = 0}$.

Seega rahuldab *variatsiooniline* lahend *piiratud minimeerimise printsiipi*. Kui asendada lahendus $\hat{u}(x)$ probleemi *variatsioonilisse* formuleeringusse (3.46) ja otsida lähedast minimeerijat Π-le üle lähendusepere, siis on tulemuseks N muutuja α_i minimeerimisprobleem:

$$\begin{aligned}\Pi(\hat{u}) = \tfrac{1}{2}\int_a^b \left(\tfrac{d\hat{u}}{dx}\right)^2 dx \quad &+ \quad \int_a^b f\hat{u}dx = \tfrac{1}{2}\int_a^b \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j \tfrac{d\phi_j}{dx}\right)^2 dx + \\ &+ \quad \int_a^b f\left[\sum_{j=1}^N \alpha_j\phi_j(x)\right]dx\end{aligned} \tag{3.49}$$

Funktsionaal minimiseeritakse tema sobituskoefitsientide järgi võetud tuletiste võrdsustamisel nulliga:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_i} = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, N \tag{3.50}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{1}{2} \int_a^b \left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \frac{d\phi_j}{dx} \right)^2 dx + \int_a^b f \left[\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \phi_j(x) \right] dx \right) = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, N \tag{3.51}$$

Leibnitzi seadust kasutades saame tulemuseks: minimeerida $\Pi(\hat{u}) \quad \Rightarrow$

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \int_a^b \left(\frac{d\phi_i}{dx} \right) \left(\frac{d\phi_j}{dx} \right) dx + \int_a^b f \phi_i(x) dx = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N \tag{3.52}$$

Need võrrandid sobituskoefitsientide jaoks on täpselt samad, mis saadud Galerkini lähenduse jaoks *nõrga* probleemi juhul. Sel tähelepanekul on ülioluline praktiline tähtsus, sest tehnikas on laialdaselt teada paljude probleemide jaoks *variatsioonilised* formuleeringud. Need *variatsioonilised* formuleeringud annavad analüsaatorile eriti lihtsa viisi konstrueerida Galerkini lõplike elementide lähendid ja seega saada selle tähtsa ligikaudsete lahendite klassi jaoks optimaalsed veakarakteristikud.

3.10 Ligikaudsete lahendite moodustamise näide

Olgu järgmine lihtne rajaülesanne, kus piirkonnas $(0, 1)$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -x^2 \quad u(0) = 0 \quad u(1) = 0 \tag{3.53}$$

ja antud trigonomeetriline lähendustepere

$$\hat{u}(x) = \alpha_1 sin(\pi x) + \alpha_2 sin(2\pi x) \tag{3.54}$$

(1) Määrata selle rajaülesande täpne lahend

(2) Määrata selle probleemi jaoks Galerkini lähendus

(3) Määrata kaalutud jääkide lähendus, kasutades testfunktsioone

$$v_1(x) = x(1 - x) \tag{3.55}$$

$$v_2(x) = x(1 - x^2) \tag{3.56}$$

(4) Määrata koosesinemiselähendus, mis kaalutud jääkide lähenduse erijuht Dirac'i deltafunktsioonide kasutamisel kaalufunktsioonidena. Antud juhul kasutada kahte deltafunktsiooni

$$v_1(x) = \delta(x - \frac{1}{3}) \tag{3.57}$$

$$v_2(x) = \delta(x - \frac{2}{3}) \tag{3.58}$$

(5) Minimeerida sobiv funktsionaal Π, et saada *variatsiooniline* lähendus. Määrata, kas see lähendus on sama, mis saadi Galerkini meetodit kasutades.

(6) Kujutada nende erinevate skeemide vead $u(x) - \hat{u}(x)$ ja $u'(x) - \hat{u}'(x)$ eraldi graafikutel.

3.11 Lahend

(1) *Täpse* lahendi saab leida pärast kahekordset integreerimist ja selle tulemusel tekkivate integreerimiskonstantite leidmist kahest ääretingimusest. Üldlahend kahe integreerimiskonstandiga:

$$u(x) = -\frac{x^4}{12} + c_1 x + c_2 \tag{3.59}$$

$$u(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0 \tag{3.60}$$

$$u(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{1}{12} \tag{3.61}$$

Täpne lahend:

$$u(x) = \frac{1}{12}(x - x^4) = \frac{x}{12}(1 - x^3) \tag{3.62}$$

On olemas terve valik valemeid, et leida lahendeid osadele (2)-(6), kuid sellel lihtsal juhul jäädakse põhilise ortogonaalsuse tingimuse juurde, et jääk on risti mõlemaga kahest testfunktsioonist.

Tuleb märkida, et

$$r(x, \hat{u}) = \frac{d^2\hat{u}}{dx^2} - f(x) = \frac{d^2}{dx^2}[\alpha_1 sin(\pi x) + \alpha_2 sin(2\pi x)] - (-x^2) \tag{3.63}$$

$$r(x, \hat{u}) = -\alpha_1\pi^2 sin(\pi x) - 4\alpha_2\pi^2 sin(2\pi x) + x^2 \tag{3.64}$$

(2) Galekini meetodi jaoks võtta

$$v_i(x) = \phi_i(x) = sin(i\pi x), \quad i = 1, 2 \tag{3.65}$$

See viib kahe samaaegse võrrandini:

$$0 = -\int_0^1 \alpha_1\pi^2 sin^2(\pi x)dx - \int_0^1 4\alpha_2\pi^2 sin(2\pi x)sin(\pi x)dx + \int_0^1 x^2 sin(\pi x)dx \tag{3.66}$$

$$0 = -\int_0^1 \alpha_1\pi^2 sin(\pi x)sin(2\pi x)dx - \int_0^1 4\alpha_2\pi^2 sin^2(2\pi x)dx + \int_0^1 x^2 sin(2\pi x)dx \tag{3.67}$$

Pärast integreerimist saadakse 2x2 süsteem koefitsientide α_i jaoks(Galerkin):

$$\begin{bmatrix} \frac{\pi^2}{2} & 0 \\ 0 & 2\pi^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\pi^2-4}{\pi^3} \\ \frac{-1}{2\pi} \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \alpha_1 & = 0.03860960\ldots \\ \alpha_2 & = -0.008062884\ldots \end{matrix} \tag{3.68}$$

See võrrandisüsteem on diagonaalne, mis muudab koefitsientide leidmise lihtsaks ülesandeks. Nullid kõrvaldiagonaalidel tulenevad sellest, et kaks baasifunktsiooni on teineteisega ortogonaalsed. Ortogonaalsuse tingimus on peamine trigonomeetriliste lähendustest saadav kasu sellistes rakendustes nagu Fourier' read.

(3) Kaalutud jääkide skeemi jaoks tuleb testfunktsioon lisada vajalikku integraali nagu eelmises osas, integreerida ja lahendada saadud süsteem. Protsess on kokkuvõtlikult alljärgnev:

$$\begin{matrix} 0 = -\int_0^1 \alpha_1\pi^2 sin(\pi x)[x(1-x)]dx - \int_0^1 4\alpha_2\pi^2 sin(2\pi x)[x(1-x)]dx + \\ + \int_0^1 x^2[x(1-x)]dx \end{matrix} \tag{3.69}$$

$$0 = -\int_0^1 \alpha_1\pi^2 sin(\pi x)[x(1-x^2)]dx - \int_0^1 4\alpha_2\pi^2 sin(2\pi x)[x(1-x^2)]dx + \\ + \int_0^1 x^2[x(1-x^2)]dx \tag{3.70}$$

Integreerides ja lahendades saadakse, et

$$\alpha_1 = 0.039269908\ldots \qquad \alpha_2 = -0.008726646\ldots \tag{3.71}$$

(4) Koosesinemisskeemid on kaalutud jääkide lähendused, mis väldivad integraalide lahendamist Dirac'i deltafunktsioonide kasutamisega testfunktsioonide genereerimiseks. Deltafunktsiooni $\delta(x)$ "nihke"omaduse tõttu kollapseerub tulemuseks saadav integraal diskreetseks liikmeks, mis esindab jääkide valimit diskreetsel punktihulgal. Antud skeemi lihtsuse tõttu saab arvutusi isegi käsitsi teha. Kuna aga enamus lõplike elementide arvutusi tehakse arvutil, kasutades lihtsaid ja efektiivseid numbrilise integreerimise meetode *nõrgas* vormis varjatult sees olevate integraalide lahendamiseks, siis pole koosesinemisskeemi käsitsiarvutuse eelis kuigi kaalukas ja palju täpsem Galerkini lähenemine annab üldiselt parema arvutusliku lähenduse.

Igatahes, koosesinemisvõrrandid antakse kujul:

$$0 = -\int_0^1 \alpha_1\pi^2 sin(\pi x)\delta(x-\frac{1}{3})dx - \int_0^1 4\alpha_2\pi^2 sin(2\pi x)\delta(x-\frac{1}{3})dx + \int_0^1 x^2\delta(x-\frac{1}{3})dx \tag{3.72}$$

$$0 = -\int_0^1 \alpha_1\pi^2 sin(\pi x)\delta(x-\frac{2}{3})dx - \int_0^1 4\alpha_2\pi^2 sin(2\pi x)\delta(x-\frac{2}{3})dx + \int_0^1 x^2\delta(x-\frac{2}{3})dx \tag{3.73}$$

Kasutades deltafunktsiooni "nihke"omadust lahendada need võrrandid:

$$\begin{array}{l} 0 = -\alpha_1\pi^2 sin(\frac{\pi}{3}) - 4\alpha_2\pi^2 sin(\frac{2\pi}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ 0 = -\alpha_1\pi^2 sin(\frac{2\pi}{3}) - 4\alpha_2\pi^2 sin(\frac{4\pi}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 = 0.032498785\ldots \\ \alpha_2 = -0.004874818\ldots \end{array} \tag{3.74}$$

(5) Arvutada potentsiaalifunktsionaal Π kasutades eelnevalt antud definitsiooni:

$$\Pi(\hat{u}) = \frac{1}{2}\int_a^b \left(\frac{d\hat{u}}{dx}\right)^2 dx + \int_a^b -x^2\hat{u}dx = \frac{\pi^2}{4}\alpha_1^2 + \pi^2\alpha_2^2 - \frac{\pi^2-4}{\pi^3}\alpha_1 + \frac{1}{2\pi}\alpha_2 \tag{3.75}$$

Diferentseerida funktsionaali Π koefitsientide järgi, et leida lahend:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\alpha_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi^2}{2}\alpha_1 = \frac{\pi^2-4}{\pi^3} \tag{3.76}$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\alpha_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\pi^2\alpha_2 = -\frac{1}{2\pi} \tag{3.77}$$

Need on samad võrrandid, mis saadi Galerkini meetodiga, seega ***variatsiooniline* lähendus on sama, mis Galerkini lähendus.**

(6) Praktikas saab koosesinemisskeemid teha veelgi täpsemaks, kui määrata "optimaalsed" koosesinemispunktid, kuid üldiselt on Galerkini meetod "parim", mida võib leida suvalist kaalutud jäägiga skeemi kasutades (kaasa arvatud koosesinemine). MWR tulemused on peaaegu sama head kui Galerkini lähendus, kuid ilmselget kvaliteeti on raske garanteerida, kuna (käesoleval juhul) on kaks kaalufunktsiooni valitud nende sarnasuse tõttu

täpsele lahendile.

Kui kujutada erinevate lähenduste jäägifunktsioonid graafikul, siis iga neist kaob täpselt kaks korda, $x = 1/3$ ja $= 2/3$ kohal, kuna neid tingimusi kasutati koosesinemise lähenduse saamiseks. On oluline teha vahet jäägifunktsioonil $r(x)$ ja lahendi veal $e(x) = u(x) - \hat{u}(x)$ ning nende graafikuid tuleb lähemalt uurida, et erinevusest aru saada. Koosesinemisskeem annab tulemuseks jäägifunktsiooni, mis on sama väike kui Galerkini lähendusel, ent Galerkini skeemi viga on oluliselt väiksem kui koosesinemise tulemusel.

4 Vead

4.1 Veaallikad

Lõplike elementide analüüsil arvutatud tulemused sisaldavad vigu, välja arvatud juhtudel, mil matemaatiline mudel on niivõrd lihtne, et LEA on mittevajalik. “Vea” all mõistetakse erinevust LEA tulemuse ja matemaatilise mudeli täpse lahendi vahel. Järgnevas eeldatakse, et tarkvara sobib antud ülesande lahendamiseks ja on *bugi*vaba; lõplike elementide mudeli geomeetria, ääretingimused, koormused ja materjalide omadused sobivad probleemiga; kasutaja pole teinud näpuvigu sisendandmetes; elementide üldine tüüp on õigesti valitud.

Ülejäänud veaallikad on mõjutatud elemenditüüpide kitsamat määratlemist, elementide suurusest ja kujust, teatud ääretingimuste ja piirangute rakendamisest. Need valikud võivad lisaks oma mõjule diskreetimisveale suurendada või vähendada numbrilisi vigu, mis on seotud kümnendkohtade arvu piiramisega tulemuste salvestamisel.

Võimalikud veaallikad oleksid alljärgnevad:

Modelleerimisvead väljendavad erinevust füüsikalise süsteemi ja selle matemaatilise mudeli vahel. Analüüsitakse mitte tegelikku probleemi, vaid selle matemaatilist mudelit, mis on reaalprobleemi lihtsustus: vähemtähtsad detailid on jäetud arvestamata ja ülejäänud osa probleemist kirjeldatakse üldtunnustatud matemaatilise teooriaga, näiteks soojusjuhtivuse võrrandid või elastsusteooria jne. Suure tõenäosusega ignoreeritakse vähemasti esialgses analüüsis mitmesuguseid pisidetaile, väikseid auke, teisi geomeetrilisi korrapäratusi ja vähetähtsaid mitteühtsusi materjali omadustes. Koormusi lihtsustatakse, ääretingimused loetakse olevat ideaalsed, näiteks et toestused on jäigad. Probleem esitatakse tihti tasapinnalise, mitte kolmemõõtmelisena, lineaarsena mittelineaarse asemel või ajast sõltumatuna dünaamilise asemel. Kokku võtteks väljendavad modelleerimisvead teadlikult tehtud mõistlikke ja kaalutletud lähendusi.

Kasutajavead on tarkvara kasutaja poolt tehtud vead pärast füüsikalisest probleemist arusaamist analüüsiküsimuste püstitamisel ja sobiva matemaatilise mudeli loomisel. Siia hulka kuuluvad valestivalitud üldine elementide tüüp, näiteks plaatelemendi kasutamine seal, kus oleks vaja kestelementi, elementide jaoks vale suuruse ja kuju valimine, kõige lõpuks lihtsad näpuvead sisendandmete sisestamisel, mille tõttu sisestatud mudel pole see, mis kavandatud. Siia võiks arvata ka võimetuse interpreteerida arvutustulemusi, mistõttu varasemate vigade tagajärjed jäävad tähelepanuta.

***Bug*id** leiduvad tarkvaras. *Bug* võib peatada programmi töö näiteks eeltöötlusetapis. Ohtlikum on *bug*, mis võimaldab programmil tööd jätkata, kuid genereerib vea, mis on tõsine, kuid mitte nii suur, et kohe silma torgata.

Diskreetimisviga tuleneb matemaatilise mudeli teisendamisest lõplike elementide mudeliks. Matemaatilises mudelis on vabadusastmete arv lõpmatu, kuid lõplik lõplike elementide mudelis. LEA lahendit mõjutab kasutatu elementide arv, sõlmede arv elemendi kohta, elemendi kujufunktsiooni iseloom, isoparameetriliste elementidega kasutatud integreerimisreeglid ja muud elementide defineerimisel kasutatavad detailid.

Ümardamisvead väljendavad informatsioonikadu arvude salvestamiseks kasutatavate mälupesade lõpliku arvu tõttu toimuvast ümardamisest või kümnendkohtade kärpimisest. See viga on olemas juba enne lahendusalgoritmi rakendamist. Olgu näiteks $x = 1.23456$

ja $y = 1.23455$ 6 tüvekohaga väljendus arvudele, millel on tegelikult rohkem kui 6 tüvekohta. Tulemus $x-y = 1E-5$ on mitteusaldusväärne juba oma ühe tüvearvuga. Siin ilmneb probleem peale lahutamist, aga selle allikas on x ja y ümardamisviga hoolimata nende viiest usaldusväärsest tüvenumbrist.

Töötlusvead tekivad siis, kui võrrandid on töödeldud, näiteks tulemuste ümardamisel või kümnendkohtade ärajätmisel. Seda sorti vead võivad olla tühised, kui globaalseid võrrandeid $[\mathbf{K}]\{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{R}\}$ lahendatakse vaid ühe korra. Kuid mõne dünaamilise ja mittelineaarse probleemi korral vajab iga järgnev samm eelmise tulemusi ja nii võivad töötlusvead kuhjuda.

Numbrilised vead on ümardamis- ja töötlusvigade summa.

Kuigi lõplike elementide arvutustes on vead vältimatud, ei ole vabandust põhjuseta vigadele. Numbrilised konstandid nagu π jt. tuleb esitada sellise täpsusega nagu kasutatav arvutuskeskkond võimaldab. Tavaliselt vajab LEA 12…14 bitti arvu kohta. Sestap tuleb arve salvestada ja töödelda kahekordset täpsust võimaldavas keskkonnas.

Veatestid. Kui avastatakse oluline numbriline viga, siis tuleb lõplike elementide mudelit redigeerida ja analüüsi korrata. Olulisi diskreetimisvigu avastatakse tihti järeltöötluse käigus, mistõttu tuleb võrku redigeerida ja analüüsi korrata. Järeltöötluse, võrgu redigeerimise ja uue analüüsi tsükli võib teha automaatselt tarkvaraliselt, kuni jõutakse kasutaja poolt defineeritud veapiirini.

Numbriliste vigade korral kasutatakse tihti terminit *pahaloomuline*. Maatriksite korral tähendab see, et maatriksi koefitsientide väikesed muutused tekitavad suuri muutusi arvutustulemustes. Siiski ei saa maatriksit enne *pahaloomuliseks* pidada, kuni pole selge, mis on maatriksi ülesanne. Maatriks, mis on ülimalt sobiv võrrandite lahendamiseks, võib olla *pahaloomuline* omaväärtuste arvutamiseks ja vastupidi.

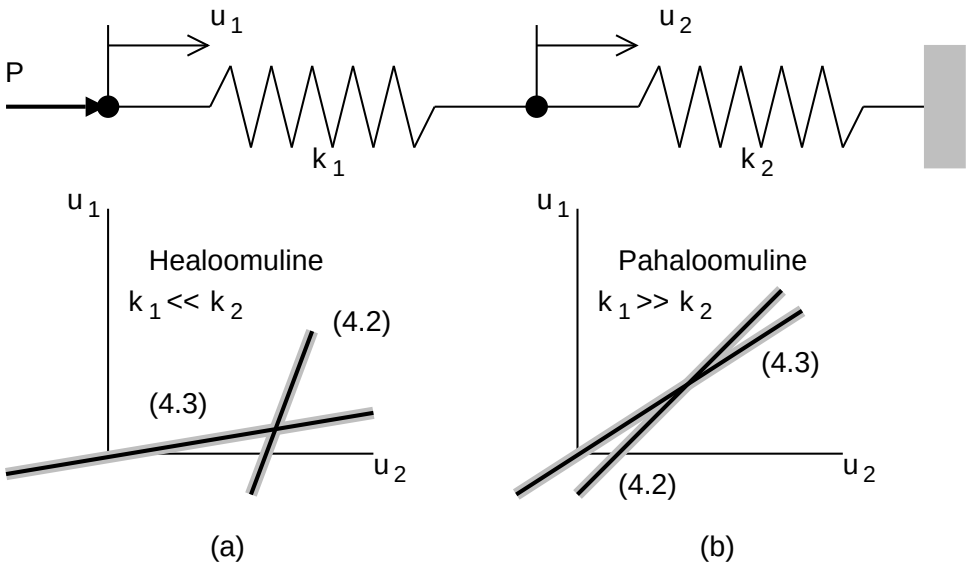
Pole olemas ühtegi lollikindlat lahendi täpsuse testi. Veatest, mis ühes situatsioonis testib vea ära, võib teises olukorras alt vedada või anda valehäiret. Näivalt usaldusväärne veatest võib olla kasutu. Olgu näiteks Hilberti maatriks $[\mathbf{H}]$, mille üldliige on $H_{ij} = 1/(i+j-1)$. $[\mathbf{H}]$ on kurikuulsalt *pahaloomuline* võrrandite lahendamiseks ja seepärast kasutatakse seda vahetevahel testimiseks. Ühes katses [23] esitati 10. järku Hilberti maatriks ühekordse täpsusega, arvutati selle pöördmaatriks $[\mathbf{H}]^{-1}$ ja lõpuks esialgne maatriks uuesti kui $([\mathbf{H}]^{-1})^{-1}$. Leiti, et $[\mathbf{H}] = ([\mathbf{H}]^{-1})^{-1}$ seitsme koha täpsusega, ometi $[\mathbf{H}]^{-1}$ koefitsientide viga oli seitse suurusjärku.

4.2 *Pahaloomulisus*

Võrrandisüsteem on *pahaloomuline*, kui lahendivektor on tundlik väikestele muutustele koefitsientide maatriksis või konstantide vektoris. LEA-s tekitab koefitsientide maatriks $[\mathbf{K}]$ suurema tõenäosusega muresid kui konstantide vektor $\mathbf{R}$. Võrrandisüsteemi lahendamise suhtes *pahaloomuline* koefitsientide maatriks on peaaegu singulaarne.

Olgu kahe vabadusastmega struktuur, mille globaalsed võrrandid $[\mathbf{K}]\{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{R}\}$ on

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1+k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.1}$$



Joonis 4.1: Kahe vabadusastmega süsteem lineaarvedrude näol: (a) jäiga piirkonna poolt toetatud painduv piirkond; (b) painduva piirkonna poolt toetatud jäik piirkond.

või

$$k_1 u_1 - k_1 u_2 = P \tag{4.2}$$

$$-k_1 u_1 + (k_1 + k_2) u_2 = 0 \tag{4.3}$$

Mõlemad võrrandid kujutavad sirgjoont $u_1 u_2$-koordinaadisüsteemis. Need on kujutatud joonisel 4.1 pidevjoonega. Varjutatud ribad nende ümber on ebatäpsus, mis tuleneb asjaolust, et arvutimälus esitatakse numbrilisi koefitsient lõpliku arvu bittidega. Täpne lahend on punkt, kus pidevjooned lõikuvad. Arvutatud lahend on punkt piirkonnas, kus varjutatud ribad kattuvad. See piirkond on väike, kui $k_1 << k_2$, kuid suur, kui $k_1 >> k_2$. Viimasel juhul on $[\mathbf{K}]$ read peaaegu lineaarselt sõltuvad ehk üks rida on peaaegu teise skalaarkordne. Sellisel juhul põhjustab väike k_2 või P muutus olulisi u_1 ja u_2 muutusi.

Võrrandite (4.2) ja (4.3) liitmisel saame võrrandist (4.3)

$$[(k_1 + k_2) - k_1]\, u_2 = P \tag{4.4}$$

mis oleks täpselt korrektne tulemus $k_2 u_2 = P$, kui k_1 ja k_2 oleksid esitatud lõpmatu täpsusega. Aga kui näiteks $k_1 = 1.000000$ ja $k_2 = 4.444444E - 6$ ning arvuti salvestab andmeid 7 koha täpsusega, siis valemist (4.4) tuleneb $1.000004 - 1.000000 = 4E - 6$ ehk ainult üks tähendusega koht säilib. Kui arvude salvestamiseks oleks vaid 6 tähendusega kohta, oleks tulemuseks $1.00000 - 1.00000 = 0$. Füüsikaliselt tähendaks see, et jäigal vedrul pole mingit tuge ja see oleks vaba liikuma jäiga kehana. Tarkvara peaks sellisele tulemusele reageerima hoiatusega, et koefitsientide maatriks on singulaarne. Tasub ka tähele panna, et juhtum $k_1 << k_2$ ei tekita sellist olukorda.

Ülalkirjeldatud vea allikaks on ebapiisav info esialgses jäikustegurites. Täpse lahendi jaoks vajaminev info võib sisalduda vaid arvutis salvestatud arvu mõnes viimases bitis. Järgnev töötlus, nii hoolikas ja laialdane kui see vaid olla saab, ei taasta puuduvate kümnendkohtade kantud infot.

Suurim *pahaloomulisuse* ohte ei seisne mitte sellest, et võrrandite lahendamine võib ebaõnnestuda, vaid et see võib olla edukas ilma igasuguste hoiatusteta tarkvara kasutajale ja anda tõsiste vigadega tulemusi, mis esmapilgul võivad jääda märkamatuks.

Pahaloomulisusele **altid olukorrad.** Struktuurmehaanikas on selliseks füüsikaliseks olukorraks, mis võib põhjustada probleeme, jäik piirkond, mida toetab palju painduvam piirkond (joonis 4.1 (b)). Siis on jäigemal piirkonnal jäiga keha deformatsioonikomponent nii suur, et see varjutab teised pinge täpseks arvutamiseks vajalikud deformatsioonikomponendid. Joonisel 4.1 (b) olevaga analoogne olukord näiteks soojusjuhtivuses on suure soojusjuhtivusega piirkonna ja madala soojusjuhtivusega piirkonna puutepunkt, kus temperatuur on ette määratud. Kui struktuurmehaanikas läheneb Poisson' suhe tasapinnalise pinge ja tahkiseprobleemide korral 0.5-le, siis muutuvad elemendid erakordselt jäigaks ruumala muutuste suhtes, kuid säilitavad võime deformeeruda muul viisil. Kõigi paindlike piirkondade toetatud jäikade piirkondade probleemide korral on esmajärguline info salvestatud arvu viimastesse bittidesse. Neid võib olla nii vähe, et vähemasti mõned tulemused on tõsiselt vigased.

Oodatud probleemid ei pruugi järgneda, kui koormused on isetasakaalustuvad. Näiteks, kui joonisel 4.1 (b) on vasakpoolne koormus P lisatud sõlmele 2, siis saab sõlmede 1 ja 2 suhtelist nihet arvutada täpselt isegi siis, kui jäiga keha nihkekomponendid u_1 ja u_2 sisaldavad olulist viga. Veel üldisemalt, isetasakaalustuvad koormused lubavad mõnikord gradientide (või pingete) täpset arvutamist.

"Suhtelised" ja "hierarhilised" vabadusastmed. Toome probleemi jaoks joonisel 4.1 sisse "suhtelise" vabadusastme $u_r = u_1 - u_2$ vabadusastme u_1 asemel. Seega asendub võrrand (4.1) alljärgnevaga:

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ P \end{Bmatrix} \tag{4.5}$$

Võrrandid (4.5) on *healoomulised* k_1 ja k_2 kõigi väärtuste suhtes. Need võrrandid saadakse u_r kui vabadusastme sissetoomisega elemendi kirjeldusse, võimalik, et teisenduste või standardsete elemendimaatriksite kaudu enne lahendatava võrrandisüsteemi koostamist. u_r-i sissetoomisest tuleb hoiduda lahendatava võrrandisüsteemi (4.2) , (4.3) teisendamise teel, sest koefitsient $k_1 + k_2$ sisaldab viga, mida soovitakse vältida.

p-viimistluse kontekstis on lisatud suhtelised vabadusastmed tuntud kui "hierarhilised" vabadusastmed. Hierarhilised vabadusastmed ei asenda juba olemasolevaid vabadusastmeid, vaid need lisatakse elemendile, et suurendada selle polünoomivälja järku (nagu avaldises (4.27)).

4.3 Seisundiarv

Maatriksi $[\mathbf{K}]$ seisundiarv $C(\mathbf{K})$ annab hinnangu täpsuskohtade arvule, mis võivad kaduma minna võrrandi $[\mathbf{K}]\{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{R}\}$ lahendamisel. Tegelik kaotus on hinnangust tavaliselt väiksem, sestap pole $C(\mathbf{K})$ täpne arvutamine vajalik.

Definitsioon ja arvutamine. Maatrikis $[\mathbf{K}]$ seisundiarv, mida vahel nimetatakse ka spektraalseisundiarvuks, defineeritakse kui

$$C(\mathbf{K}) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \tag{4.6}$$

kus λ_{max} ja λ_{min} on $[\mathbf{K}]$ suurim ja väikseim omaväärtus. Mõnel juhul võib $C(\mathbf{K})$ olla "kunstlikult" kõrge selles mõttes, et siis ennustab ta suuremat täpsuse kadu kui tegelikult esinev. Kui

näiteks joonisel 4.1 on $C(\mathbf{K})$ suur $k_1 << k_2$ korral ja siis $k_1 >> k_2$ korral, viib ainult juht $k_1 >> k_2$ numbrilise veani võrrandi lahendamisel. Saab nii korraldada, et seisundiarv on suur ainult siis, kui võrrandid on tõsiselt *pahaloomulised*. Selleks skaleeritakse $[\mathbf{K}]$ selliselt, et tema diagonaalelemendid on ühed. Siis arvutatakse λ_{max} ja λ_{min} skaleeritud maatriksist $[\mathbf{K_S}]$. Skaleerimismaatriks $[\mathbf{S}]$ on diagonaalne ja see konstrueeritakse $[\mathbf{K}]$ diagonaalelementidest. Seega omaväärtusprobleemiks saab

$$([\mathbf{K_S}] - \lambda[\mathbf{I}]) = \{\mathbf{0}\} \tag{4.7}$$

kus

$$[\mathbf{K_S}] = [\mathbf{S}][\mathbf{K}][\mathbf{S}]$$

ja

$$S_{ii} = \frac{1}{\sqrt[2]{K_{ii}}}$$

Siin $[\mathbf{I}]$ on ühikmaatriks. Valemi (4.7) kuju saab muuta ilma omaväärtusi muutmata, kui teha asendus $\{\mathbf{D}\} = [\mathbf{S}]^{-1}\{\mathbf{D_S}\}$ ja korrutada maatriksiga $[\mathbf{S}]^{-1}$. Seega

$$([\mathbf{K}] - \lambda[K_{11} \quad K_{22} \quad \cdots \quad K_{nn}])\{\mathbf{D_S}\} = \{\mathbf{0}\} \tag{4.8}$$

Võnkumiste mõistetes tähendab valem (4.8) , et skaleeritud maatriksi $[\mathbf{K_S}]$ omaväärtused $\lambda_i = \omega_i^2$ saab kätte esialgse jäikusmaatriksiga $[\mathbf{K}]$ ja diagonaalse "massimaatriksiga", mis on lihtsalt $[\mathbf{K}]$ diagonaal, struktuuri omavõnkesagedustest ω_i. See vaatenurk näitab, miks isoleeritud jäik piirkond suurendab seisundiarvu: isoleeritud suur "mass" K_{ii} vähendab madalaimat sagedust, kuid tal on väike mõju kõrgeimale.

Omaväärtusprobleemi lahendamise arvutuslik hind on suurem kui võrrandeil $[\mathbf{K}]\{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{R}\}$. Õnneks ei pea λ_{max} ja λ_{min} olema täpselt teada. Rahuldava *a priori* hinnangu λ_{max}-le võib saada Gerschgorini piirist [2, avaldis 11.12-17]. Siiski pole λ_{min} *a priori* hinnang ligilähedaseltki nii usaldusväärne. Skaleeritud maatriksi $[\mathbf{K_S}]$ seisundiarvu hinnang on $C(\mathbf{K_S}) = (r_i)_{max}$, kus r_i on diagonaalne kõdumissuhe (4.12) [24]. See hinnang on loomulikult *a posteriori* selle asemel, et olla *a priori*.

Interpretatsioon. Kuna koefitsiendimaatriksit $[\mathbf{K}]$ töödeldakse võrrandi $[\mathbf{K}]\{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{R}\}$ lahendamisel, siis viib esialgsete jäikustegurite äralõikeviga modifitseeritud tegurite täpsuse vähenemisele. Kui iga arvu jaoks kasutatakse d numbrikohta, siis modifitseeritud koefitsientide täpsus on d_{acc} numbrikohta, kusjuures

$$d_{acc} = d - d_{loss} \tag{4.9}$$

milles

$$d_{loss} \leq log_{10}C(\mathbf{K_S})$$

Seega, kui $d = 14$ ja $C(\mathbf{K}) = 1E8$, siis $d_{acc} \geq 6$. "$\leq$" sümbol valemis 4.9 näitab, et $log_{10}C(\mathbf{K_S})$ võib numbrikohtade kaotust üle hinnata. $C(\mathbf{K})$ suurujärk on tüüpiliselt miljon, kuid valemi (4.9) väidetud potentsiaalne täpsuse kadu ei pruugi aset leida. Üks põhjusi on see, et valem (4.9) ei arvesta koormusi $\{\mathbf{R}\}$. Täpsuse kadu on enam tõenäoline, kui $\{\mathbf{R}\}$ kuju sarnaneb ühega viimastest omavektoritest $\{\mathbf{V}\}_i$ valemis (4.10) või on ligilähedaselt nende lineaarkombinatsioon, kuid sisaldab vigu või väikesi koormusekomponente, et meenutab esimest omavektorit [25]. Praktikas sarnaneb $\{\mathbf{R}\}_i$ kuju tihti rohkem kõige madalamate omavektorite lineaarkombinatsiooniga.

Teooria valemi (4.9) taga summeerub alljärgnevalt [26]. Olgu $[\mathbf{K}]$ omaväärtused λ_i ja vastavad

omavektorid $\{\mathbf{V}\}_i$ normaliseeritud nii, et $\{\mathbf{V}\}_i^T\{\mathbf{V}\}_i = 1$. Siis $n \times n$ maatriksi $[\mathbf{K}]$ jaoks, mis on sümmeetriline ja positiivselt määratud

$$\begin{array}{l}[\mathbf{K}] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \{\mathbf{V}\}_i \{\mathbf{V}\}_i^T \\ [\mathbf{K}]^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \{\mathbf{V}\}_i^T \{\mathbf{V}\}_i\end{array} \tag{4.10}$$

$[\mathbf{K}]$-s domineerib λ_{max} ja $[\mathbf{K}]^{-1}$-s λ_{min}. λ_{min} arvutamiseks vajalik info sisaldub koefitsientide K_{ij} kõige parempoolsemates bittides. Suhte $\lambda_{max}/\lambda_{min}$ iga 10 astme jaoks on $[\mathbf{K}]^{-1}$ madalaim domineeriv mood esitatud umbes ühe võrra vähema kohtade arvuga, kuna info liigub üle kasutatavate bittide arvu välja.

Pahaloomulisuse tõsidus on seotud probleemi tüübiga ja lõplike elementide mudeli karakteristikutega [27]:

$$C(\mathbf{K}) = b \left(\frac{h_{max}}{h_{min}} \right)^{2m-1} N_{els}^{2m/n} \tag{4.11}$$

kus

b	=	positiivne arv
h_{max}, h_{min}	=	maksimaalne ja minimaalne sõlmede vahekaugus võrgus
N_{els}	=	elementide arv lõplike elementide mudelis
$2m$	=	diferentsiaalvõrrandi järk
n	=	lõplike elementide võrgu dimensionaalsus

Valem (4.11) võib olla kasulik ennustamaks lõplike elementide mudeli muutuste efekti $C(\mathbf{K})$-le. Kui näiteks tala korral elementide pikkuste suhe h_{max}/h_{min} muutub $1/1$-lt $10/1$-le, siis suureneb $C(\mathbf{K})$ 1000 korda. Kui elementide arv kahekordistub, suureneb $C(\mathbf{K})$ 16 korda. Mõlema muudatuse korral suureneb $C(\mathbf{K})$ 16000 korda.

Leidub ka avaldis $C(\mathbf{K})$ ülemise ja alumise piiri arvutamiseks [27], kuid see pole LEA tarkvara jaoks kuigi ligitõmbav, sest on arvutuslikult kulukas.

4.4 Diagonaalne kõdumistest

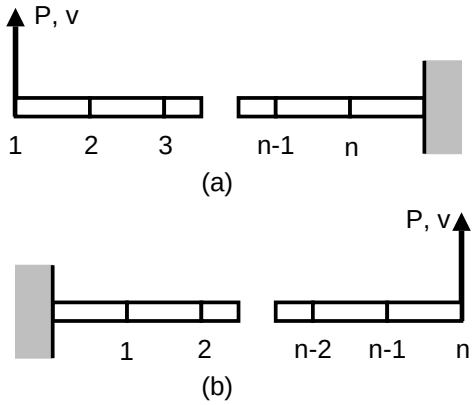
Alljärgnevalt kirjeldatakse diagonaalset kõdumistesti kui viisi leida numbrilisi vigu võrrandi $[\mathbf{K}]\{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{R}\}$ lahendamisel Gaussi välistamismeetodil. Sarnaselt teiste numbriliste vigade testidega, pole ka see eksimatu, kuid on lihtne ja arvutuslikult odav.

Olgu $[\mathbf{K}]$ sümmeetriline ja positiivselt määratud. Kui võrrandid on lahendatud, s.t. tundmatud kõrvaldatud, vähendatakse lahutamise teel diagonaalelementide K_{ii}, mis vastavad vabadusastmetele i, mis siiski tuleb kõrvaldada, väärtusi suurusjärgu võrra, ent need jäävad positiivseteks. Selline käitumine esineb näiteks [2, joonisel 2.8-3] ja avaldistes (4.1) ning (4.4) , kus u_1 kõrvaldamine teisendab teise diagonaalelemendi $k_1 + k_2$ kujule k_2.

Diagonaalset kõdumistesti rakendatakse igale diagonaalelemendile enne, kui neid kasutatakse teiste tundmatute ellimineerimiseks [28]. Olgu P_{ii} i-nda diagonaalelemendi väärtus sel hetkel. Koos selle elemendi originaalväärtusega K_{ii} on diagonaalne kõdumissuhe

$$r_i = \frac{K_{ii}}{P_{ii}} \tag{4.12}$$

Esialgsest diagonaalelemendist võib kaotsi minna r_i-i kümnendastmega võrdne arv täpseid tüvekohti. Kui $r_i = 1E8$, võib K_{ii} kaotada kuni 8 kohta oma täpsusest selle aja jooksul, mil



Joonis 4.2: Konsooltala elementide nummerdamine tabeli 4.1 juurde: (a) *tip-to-root*; (b) *root-to-tip*.

Tabel 4.1: Arvutatud külgtipu kõrvalekalded v ja diagonaalsed kõdumissuhted r_i viimases kolmes töödeldud võrrandis ($i = 2n - 2$, $i = 2n - 1$ ja $i = 2n$) N_{els} võrdse pikkusega elemendist koosneva konsooltala jaoks.

Kogupikkus = 1000 El = 8(10^6) $v_{exact} = 1.0000$								
	tip-to-root				*root-to-tip*			
	$2n$ mittenullist vabadusastet				$2n$ mittenullist vabadusastet			
Elementide arv	v	r_{2n-2}	r_{2n-1}	r_{2n}	v	r_{2n-2}	r_{2n-1}	r_{2n}
$N_{els} = n = 10$	1.0000	8.0	2.0	8.0	1.0000	5.3	1(10^3)	4(10^1)
$N_{els} = n = 100$	1.0000	8.0	2.0	8.0	0.9992	7.7	1(10^6)	4(10^2)
$N_{els} = n = 1000$	1.0000	8.0	2.0	8.0	0.1197	8.0	2(10^8)	2(10^3)

ta muutub P_{ii}-ks ja teda kasutatakse i-nda tundmatu kõrvaldamiseks. On võimalik saavutada $r_i = \infty$, mis näitab, et ääretingimused pole sobivad; struktuurmehaanika terminites on võimalik jäiga keha liikumine. Tulemus $r_i = \infty$ võib ilmuda mitte enne viimast ellimineerimissammu, sest viimase vabadusastme piirang rahuldab, et vältida mõnede probleemide korral singulaarsust. Mõnes programmis on olemas võimalus lisada ääretingimus, kus $r_i = \infty$ saabumist märgatakse, rakendades nii programmeerija oletust, et selline füüsikaline probleem oli tarkvara kasutaja teadlik valik.

Tabel 4.1 näitab diagonaalse kõdumistesti rakendamist. Antud näite talaelemendid ei luba põiki läbipainet. $\{\mathbf{D}\}$-s on sõlmede vabadustastmete v ja $\theta = dv/dx$ järjekord järgmine:

$$\{\mathbf{D}\} = [v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad \theta_{2n-2} \quad v_{2n} \quad \theta_{2n}]^T$$

Analüüs viidi läbi arvutil, mis eraldas arvu jaoks 11 kohta. Test on antud juhul edukas: r_i muutub suureks vaid otsas arvutatud läbipainde v olulise vea korral. $[\mathbf{K}]$ seisundiarv peale skaleerimist valemi (4.7) järgi on suurusjärgus 1E12 kui $N_{els} = 1000$, hoolimata sellest, kas sõlmede nummerdamisjärjekord on *tip-to-root* või *root-to-tip*. Siiski ei ilmne tõsist täpsuse kadu, mida ennustab selline suur seisundi arv, *tip-to-root* nummerdamise korral.

Näites tabelis 4.1 on elemendid võrdse pikkusega. Olgu nüüd $N_{els} = 1000$ korral elementide pikkused vahemikus $L = 0.99999$ kuni $L = 1.00001$. Siis annab *tip-to-root* nummerdamine otsa läbipaindeks $v = 1.027$, samas kui diagonaalsed kõdumissuhted ei muuda oma väärtusi 8.0 ja 2.0 tabelist 4.1. Seega võib järeldada, et diagonaalne kõdumistest ei pruugi märgata olulist täpsuse kadu.

Oluline on diagonaalkoefitsientide kõdumine, mitte nende väike väärtus. Väikesed diagonaalelemendid iseenesest ei tekita suuri vigu. Samalaadselt ei tee seda ka suure väärtusega diagonaalelemendid (nagu valemeis (4.1) ja (4.4) juhul $k_1 << k_2$ isegi siis, kui sõlmede nummerdamine vastupidiseks muuta). Kui aga suure diagonaalelemendi kõrval on suured mittediagonaalelemendid, siis toob nende ellimineerimine kaasa arvestatava diagonaalse kõdumise teistes võrrandites, mis samuti sisaldavad suuri mittediagonaalelemente (nagu valemeis (4.1) ja (4.4) juhul $k_1 >> k_2$).

4.5 Jäägid

Olgu võrrand $[\mathbf{K}]\{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{R}\}$ lahendatud $\{\mathbf{D}\}$ suhtes. Siis saab arvutada jäägivektori $\{\Delta\mathbf{R}\}$:

$$\{\Delta\mathbf{R}\} = \{\mathbf{R}\} - [\mathbf{K}]\{\mathbf{D}\} \tag{4.13}$$

Kui lahendivektoris $\{\mathbf{D}\}$ ei domineeri numbrilised vead, siis $\{\Delta\mathbf{R}\} = \{\mathbf{0}\}$. Tõenäolisemalt on aga vead olemas, mille korral on $\{\Delta\mathbf{R}\}$ veamõõduks. Selle skalaarkuju on

$$e = \frac{\{\mathbf{D}\}^T\{\Delta\mathbf{R}\}}{\{\mathbf{D}\}^T\{\mathbf{R}\}} \tag{4.14}$$

Füüsikaliselt on e jääkkoormuse ja tegeliku koormuse, millest mõlemad toimivad nihke $\{\mathbf{D}\}$ kaudu, tehtud tööde suhe.

Õnnetuseks kipuvad jäägid olema väikesed, kui *pahaloomulisi* võrrandeid lahendatakse Gaussi ellimineerimismeetodil, sõltumata sellest, kas lahendivektor $\{\mathbf{D}\}$ on täpne või mitte [29]. Kahest lahendivektorist vähemtäpsemal võivad olla väiksemad jäägid. Kuigi väike $\{\Delta\mathbf{R}\}$ ei garanteeri täpsust, on suur $\{\Delta\mathbf{R}\}$ usaldusväärne indikaator selle kohta, et miski on valesti.

Struktuurmehaanikas seisneb väikese $\{\Delta\mathbf{R}\}$ füüsikaline mõte selles, et rakendatud koormis $\{\mathbf{R}\}$ on peaaegu püsivas tasakaalus vastupidiselt mõjuvate jõududega $[\mathbf{K}]\{\mathbf{D}\}$. Tasakaalutingimus võib olla rahuldatud isegi siis, kui $\{\mathbf{D}\}$ on palju väiksem, kui see peaks olema füüsikalises probleemis, seda liigselt jäiga diskreetimise pärast (näiteks [2, joonis 8-3.4-2]).

Võrrandite $[\mathbf{K}]\{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{R}\}$ lahendi numbrilist viga saab vähendada järgmise iteratiivse skeemiga. Algse lahendi $\{\mathbf{D}\}_1$ järgi arvutatakse edukalt jäägivektor, juurdekasvud lahendivektoris ja seejärel värskendatakse lahendivektorit. Arvutusi korratakse kuni koondumiseni ($i = 1, 2, \ldots, n$).

$$\begin{aligned} \{\Delta\mathbf{R}\}_i &= \{\mathbf{R}\} - [\mathbf{K}]\{\mathbf{D}\}_i \\ [\mathbf{K}]\{\Delta\mathbf{D}\}_i &= \{\Delta\mathbf{R}\}_i \\ \{\mathbf{D}\}_{i+1} &= \{\mathbf{D}\}_i + \{\Delta\mathbf{D}\}_i \end{aligned} \tag{4.15}$$

Et see protsess suurendaks täpsust, peab $[\mathbf{K}]$ esitama esimeses võrrandis (4.15) suurema kümnendkohtade arvuga kui esialgne lahendivektor $\{\mathbf{D}\}_1$. Teises võrrandis (4.15) võib kasutada originaalset ehk vähemtäpset $[\mathbf{K}]$-d, mille tegurdatud kuju on juba olemas $\{\mathbf{D}\}_1$ lahendamisest. Koonduvus liigub võrrandite $[\mathbf{K}]\{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{R}\}$ lahendi poole seda enam, mida täpsemalt

on $[\mathbf{K}]$ esitatud.

Kui võrrandisüsteem on tõsiselt *pahaloomuline*, on etem mudel olukorra parandamiseks ümber ehitada, selle asemel, et teha kangelaslike jõupingutusi kehva lahendi parandamisel. “Kui asi pole tegemist väärt, pole see hästitegemist väärt” [29].

4.6 Diskreetimisviga. Koonduvus.

Diskreetimisviga väljendab erinevust matemaatilise mudeli ja selle diskreetse (lõplike elementide) mudeli vahel. Lõplike elementide tulemuste koondumine matemaatilise mudeli tulemuste suunas ei ütle iseenesest midagi selle kohta, kui hästi matemaatiline mudel väljendab tegelikkust.

Järgnevad argumendid on joonisega 4.9-2 [2] seotud argumentide viimistlus. Lõplike elementide veaanalüüsi alusväide on, et piisavalt peene võrgu korral saab lõplike elementide lahendi vea piiritleda veaga, mis tekib sõlmpunktides täpse kujufunktsiooni interpoleerimisel [30]. See väide ei vaja, et lõplike elementide lahend peab sõlmedes täpne olema; selline on olukord ainult erijuhtudel [31]. See vajab piisavalt peent võrku, mille puhul saavutatakse vajalik koonduvusmäär (vt. ka joonist 4.4 . Seega välistatakse lõplike elementide mudelid, millel on suur diskreetimisviga (nagu näiteks joonisel 3.4-1 [2]). Samuti on vajalik, et sõlmjõud oleksid rakendatud kooskõlaliselt, nagu on kirjeldatud [2, ptk. 3.11].

Veaanalüüs. Diskreetimisviga saab mõnikord määrata veaanalüüsi suurusjärgu kaudu. Olgu telgsuunaliselt koormatud ühtlane varras joonisel 4.3 (a). Telgtasakaaluvõrrand on $A\sigma_{x,x}+q=0$. Kui asendada rõhu-pinge suhe $\sigma_x = Eu_{,x}$, on tasakaaluvõrrand

$$u_{,xx} + \frac{1}{AE} = 0 \tag{4.16}$$

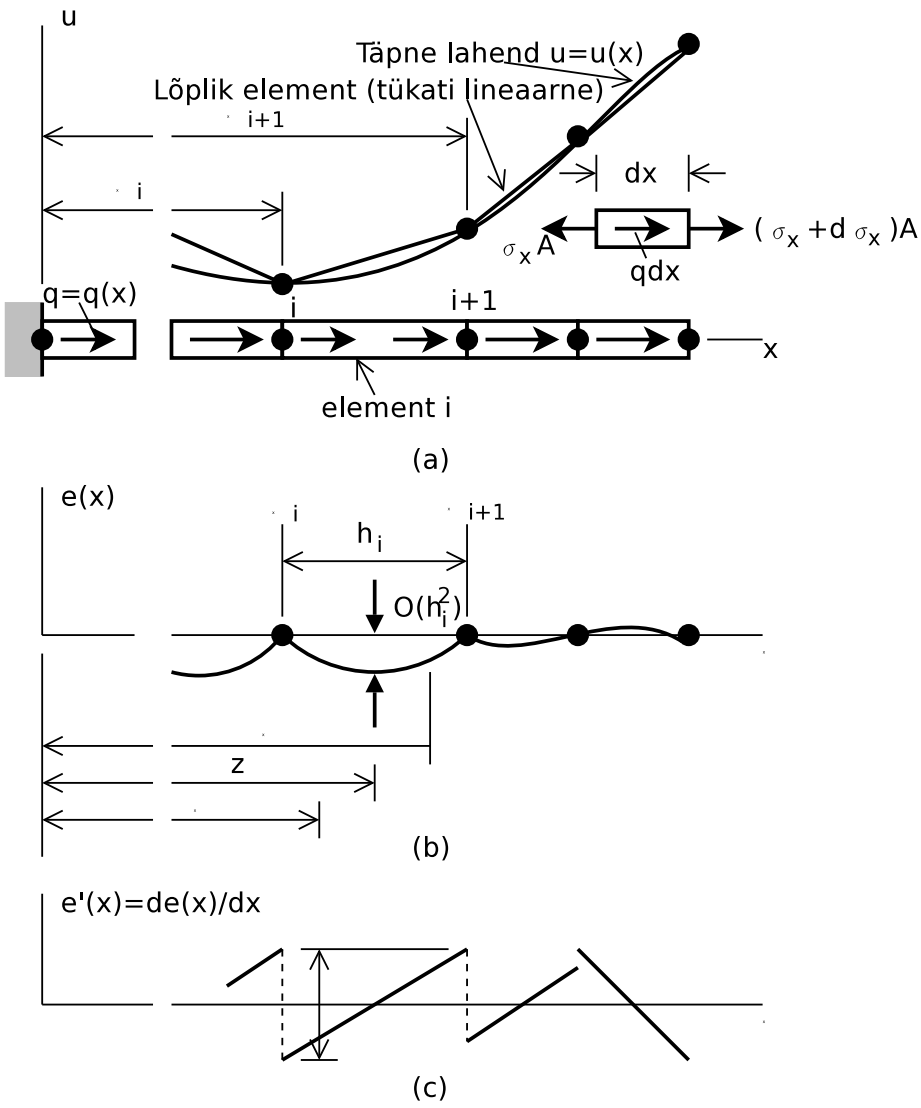
Koosnegu lõplike elementide mudel standardsetest kahesõlmelistest varraselementidest. Kui koormusintegraali arvutada kooskõlaliselt (avaldised (3.3-8) ja 4.8-15b [2] ja A ning E on konstandid, siis on lõplike elementide mudeli sõlmede nihe u_i täpne [31]. Kuna täpne lahend pole punkthaaval lineaarne, esinevad lahendis sõlmede vahel vead.Vardaprobleemi vigade olemus on omane ka palju keerulisematele ja realistlikumatele lõplike elementide probleemidele. Alljärgnev arutlus on otseselt rakendatav lineaarsele elastsusprobleemile, millel on sujuvad (aga võimalik, et muutuvad) elastsuskoefitsiendid koos pideva, mitte punktkoormusega ja mille kehades pole tugevaid singulaarsusi (praod puuduvad).

Vardaprobleemis analüüsitakse i-nda elemendi lineaarinterpolatsiooniviga sõlmede x_i ja x_{i+1} vahel. Nihkeviga $e = e(x)$:

$$e(x) = u(x) - \left[u_i\left(1 - \frac{x-x_i}{h_i}\right) + u_{i+1}\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)\right] \tag{4.17}$$

kus $u(x)$ on täpne lahend, $h_i = x_{i+1} - x_i$ on elemendi pikkus. Samuti $u_i = u(x_i)$ ja $u_{i+1} = u(x_{i+1})$. Sõlmedes $e(x) = 0$. Elementide pikkused ei pea olema ühesugused. Elementide sees on $e(x)$ pidev funktsioon. Sõlmedes on esimese tuletise $e'(x)$ katkemised (joonisel 4.3 (c). (Edaspidi $e_{,x} = e', e_{,xx} = e''$ jne.)

$e(x)$ ülemine piir põhineb alljärgnevale argumendile [30]. Olgu z telgkoordinaat vahemikus



Joonis 4.3: Vea käitumine telgjaotusega koormuse q all oleva ühtlase varda lõplike elementide mudelis. Täpne telgnihe on $u = u(x)$ ja selle viga on $e = e(x)$.

$x_i \leq z \leq x_{i+1}$ nii, et $e'(z) = 0$. Sellise punkti olemasolu on ilmne jooniselt 4.3 (b) ja see tuleneb elementaaralgebra Rolle'i teoreemist. Edasises kehtib eeldus, et $u''(x)$ on sõlmed vahel pidev. $e'(x)$ muutuse saab e'' integreerimisel. Seega valemist (4.17) :

$$e'(x) - e'(z) = e'(z) = \int_z^x e''(s)ds = \int_z^x u''(s)ds \tag{4.18}$$

seejuures s on integreerimismuutuja ja $e'(z) = 0$. Avaldise (4.17) lineaarliikmed ei mõjuta $e''(x)$-i. Samuti:

$$\left|\int_z^x u''(s)ds\right| \leq \int_z^x |u''(z)|\, ds \leq \int_z^{x+1} |u''(z)|\, ds \leq h_i \left(\max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} |u''(x)|\right) \tag{4.19}$$

Seetõttu on i-nda elemendi pingeviga $e'(x)$ piiratud järgmiselt:

$$|e'(x)| \leq h_i \left(\max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} |u''(x)|\right) \tag{4.20}$$

Saab ka määrata nihkevea $e(x)$ piiri, kui silmas pidada, et suurim nihe on kohal $x = z$, kus $e'(z) = 0$. Kui z pole elemendi keskpunkt, peab see olema lähemal ükskõik kas x_i-le või x_{i+1}-le. Olgu z lähemal x_i-le. $e(x)$ saab arvutada kolmeliikmelisest Taylori reast koos täpse jäägiga $x = z$ ümber.

$$e(x_i) = e(z) + (x_i - z)e'(z) + \frac{1}{2}(x_i - z)^2 e''(s) \tag{4.21}$$

s on jäägi arvutamise punkt elemendil i. Kuna $e(x_i) = 0$, $e'(z) = 0$ ja valemist (4.17) $e''(s) = u''(s)$, siis

$$e(z) = -\frac{1}{2}(x_i - z)^2 u''(s) \tag{4.22}$$

Vastavalt eeldusele, et z on lähemal x_i-le kui x_{i+1}le, tuleneb, et $|z - x_i| \leq h_i/2$. Seega on i-nda elemendi nihkeviga $e(x)$piiratud kui

$$e(x) \leq \frac{1}{8}h_i^2 \left(\max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} |u''(x)| \right) \tag{4.23}$$

Saab tõestada, et tulemus on sama ka siis, kui z oleks lähemal x_{i+1}-le.

Eelneva arutluse esilekerkivad punktid on:

1. lineaarelemendi pingeviga on võrdeline elemendi suurusega ja nihkeviga on võrdeline elemendi suuruse ruuduga;

2. veahinnang on võrdeline kujufunktsiooni järgust ühe võrra suurema järguga tuletistega (teist järku tuletised varda jaoks, mille kujufunktsioon on lineaarne);

3. nihked on kõige täpsemad sõlmedes või nende vahetus läheduses. Pinged on kõige täpsemad elemendi sees.

Kasutades sümbolit O järgu jaoks, saab öelda, et valem (4.20) kujutab pinge diskreetimisviga $O(h)$ ja (4.23) kujutab nihke diskreetimisviga $O(h^2)$. Seega, kui $h = max(h_i)$ poolitades teha ühest elemendist 2, siis pingeviga väheneb umbes 2 korda ja nihkeviga 4 korda.

Üldistused. Olgu defineeritud alljärgnevad sümbolid:

h = elemendi ligilähedane "karakteristlik pikkus"; lineaarelemendi pikkus; pikima joonsegmendi pikkus, mis mahub plaat- või monoliitelemendi sisse (võimalikud on erinevad definitsioonid);

p = elemendi füüsikalise suuruse täieliku polünoomi kõrgeim järk;

$2m$ = elemendi füüsikalise suuruse diferentsiaalvõrrandi kõrgeimat järku tuletise järk.

p definitsioonis on sõna "täielik" oluline. Näiteks $p = 1$ põhilise 4-sõlmelise tasaelemendi jaoks (joonis 3.6-1 ja avaldis 3.6-1 [2]). Selles elemendis on olemas kõik konstandid ja lineaarliikmed, kuid ainult xy kolme ruutelemendi x^2, y^2 ja xy seast.

Element, mille väljatugevus sisaldab täielikku p-järku polünoomi, eksib $p+1$ ja kõrgemat järku polünomiaalsete liikmete kujutamisel. Kui singulaarsusi ei esine, siis on mõistlik eeldada, et suurem osa vigu tuleneb madalaima järguga liikme ehk liikme järguga $p + 1$ ärajätmisest. Siit saab järeldada, et singulaarsuste puudumisel on diskreetimisvead (ja koondumismäärad) alljärgnevad:

- $O(h^{p+1})$ esitab füüsikalise suuruse viga;
- $O(h^{p+1-r})$ esitab füüsikalise suuruse r-nda tuletise viga;
- $O(h^{2(p+1-m)})$ esitab pingeenergia viga (struktuurimehaanikas)

Veajärgu valemites saab h asendada $N_{els}^{-1/n}$-ga, kus N_{els} ja n on vastavalt elementide arv lõplike elementide mudelis ja mudeli dimensionaalsus. Asendust õigustab see, et h on põõrdvõrdeliselt seotud külgelementide arvuga N_{es}, mis on ligikaudu $N_{els}^{1/n}$.

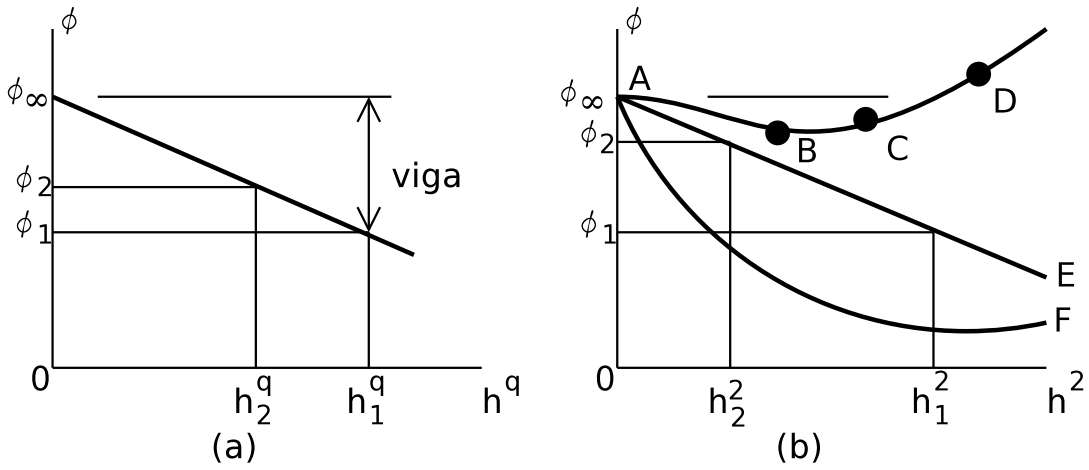
Ühemõõtmelises näites joonisel 4.3 $p = 1$, $r = 1$ pingearvutustes ja $2m = 2$. Tasakehadel, mida modelleeritakse kolmesõlmeliste kolmnurkadega ja monoliitkehadel, mida modelleeritakse 4-sõlmeliste tetraeedritega, on füüsikaline suurus täielik lineaarne polünoom, seega $p = 1$. Samuti $r = 1$ gradiendi (pinge või rõhk) arvutustes ja $2m = 2$ selliste probleemide jaoks nagu soojusjuhtivus ja rõhuanalüüs. Samad arvud kehtivad tavaliste 4-sõlmeliste nelinurkade ja 8-sõlmeliste telliste jaoks, millel pole sisemist "sõlmeta" vabadusastet. Nendel elementidel on rohkem polünoomliikmeid kui kolmnurgal ja tetraeedril, kuid mitte piisavalt, et moodustada täielikke ruutpolünoome (joonis 3.9-1 [2]). Diskreetimisviga on väiksem ja seega koonduvusaste suurem kõrgemat järku liikmete olemasolul. Kui tasandi probleemi korral vahetada 4-sõlmelised elemendid 8-sõlmeliste vastu, siis muutub füüsikalise suuruse vea järk $O(h^2)$-st $O(h^3)$-ks. Kui võrgusilma suurust h vähendada kaks korda, siis viga väheneb 4 korda 4-sõlmelise võrgu korral ja 8 korda 8-sõlmelise võrgu korral. Varda jaoks $p = 3$ standardse kahesõlmelise varraselemendi korral, $r = 2$ kumerusarvutustes ja $2m = 4$. Nihkeviga on $O(h^4)$ ja kumerusest arvutatud väändemomendi viga on $O(h^2)$. Tasub meenutada, et need hinnangud eeldavad sõlmkoormuste kooskõlalist arvutamist. Sestap ühtlaselt koormatud konsooltala korral kannab ühtlase elementide paigutusega lõplike elementide mudelis tipusõlm mõjuvat jõudu ja hetkekoormust.

Füüsikalise suuruse tuletiste veahinnangud võivad olla pessimistlikud. Näiteks varda korral joonisel 4.3 tuleb $u_{,x}$ veahinnangud arvutada sõlmedes, kus viga on suurim, mitte keskpunktides, kus viga on väiksem, olles $O(h^2)$ $O(h)$ asemel. Teiste sõnadega koondub gradient varraselemendi keskpunktis sama moodi nagu füüsikaline suurus. Kui lõplike elementide võrgus leidub punkte, milles pingete vigade suurusjärk on sama mis nihetel, siis öeldakse, et pinged on neis punktides "ülikoonduvad".

Lõpetuseks tuleks märkida, et mõned potentsiaalsed diskreetimisvead vähenevad, kui struktuuri ruumala korrektselt edasi antakse. Kui tasapinnalise keha piir on ringikujuline ja seda modelleeritakse sirgete külgedega elementidest koosneva võrguga, siis ei asu lõplike elementide mudeli polügonaalne välispiir täielikult ei ringi sees ega ka väljaspool seda.

Singulaarsused. Nagu nähtud, on veapiirid võrdelised füüsikalise suuruse täpse väärtuse $(p + 1)$-järku osatuletisega (näiteks avaldised (4.20) ja (4.23)). Kui lahendataval probleemil on selle tuletise väärtus lõpmatu, siis veapiirid rangelt ei kehti. Näiteks pragudega kehades on nihketuletis kuni teise järguni lõpmatu prao tipus. Sestap isegi lineaarelementide, millel $p = 1$, korral ei kehti antud hinnangud prao tipu läheduses. Kui madalaima singulaarse tuletise järk pole teada, et saa hinnata, mitu korda viga väheneb võrgusilmade suuruse vähendamisel.

Kuigi singulaarsused võivad aeglaselt koonduda, ei väldi teisest järgust kõrgemate tuletiste singulaarsused koonduvust. Täielik p-järku polünoom sisaldab kindlasti täielikku polünoomi järguga $p - \mu$, kusjuures $0 < \mu \leq p$. Kui täpse lahendi $(p + 1 - \mu)$-järku tuletis on kõrgeimat



Joonis 4.4: (a) ϕ viga on võrdeline h^q-ga. (b) Viga on mittemonotoonne kõveral ABCD ja võrdeline h^2-ga kõveral AE. Kõvera AF võiks kujutada sirgjoonena, kui abtsiss oleks h.

järku mittesingulaarne tuletis, siis eelnevas veahinnangus saab p asendada suurusega $p-\mu$, saades füüsikalise suuruse veahinnanguks $O(^{p+1-\mu})$, selle esimese tuletise veahinnanguks $O(h^{p-\mu})$ jne. Seega täpse lahendi iga singulaarse $p+1$- või väiksemat järku tuletise korral võib lõplike elementide lahend kaotada h-i astmes. Hinnang on tihti pessimistlik. Aga kui see kehtib, on elementidel järguga $p-\mu$ sama veajärk, mis elementidel järguga p, ent madalama järguga elemendid on arvutuslikult odavamad.

Olgu näiteks jälle telgsuunaliselt koormatud varras, kuid astmelise muutusega elemendi sees. Olgu elementide numbriga i ja i+1 jaoks $x_i < x_q < x_{i+1}$ ja telgkoormuse jaotus

$$q = 0, x \leq x_q \qquad q = 1, x > x_q \tag{4.24}$$

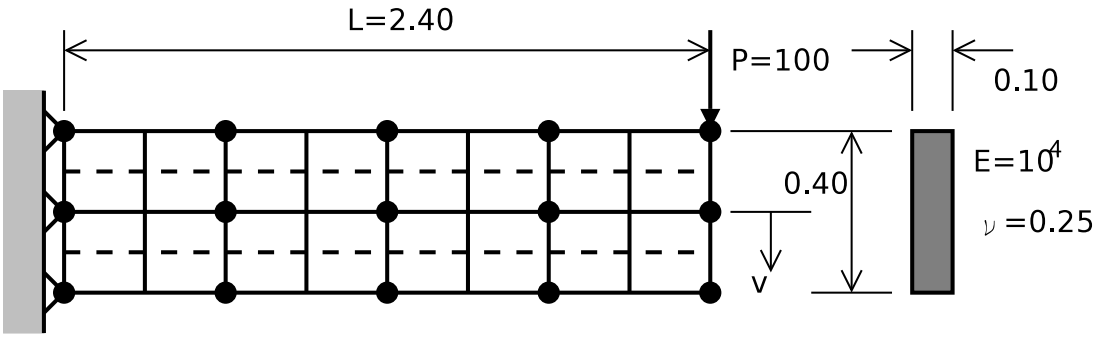
Valemist (4.16) saame, et $u_{,xx}$ on defineeritud kõigi x väärtuste korral, $max\,|u''(x)| = 1/AE$ ja avaldised (4.20) ning (4.23) on rakendatavad. Vastavalt jäävad veahinnangud sellisteks nagu avaldised (4.20) ja (4.23) ütlevad, olgu siis element lineaarne, ruut- või kõrgemat järku. $O(h^3)$ nihketäpsust, mida võiks normalselt oodata ruutelemendi jaoks, ei ole võimalik saavutada. Täistäpsus on taastatav, kui asetada elementidevaheline piir koormuse muutumise astmele. Üldistades võib oodata, et täpsuse olulist kahanemist võib oodata naabruses toimuvate äkiliste elemendisiseste koormuste, materjaliomaduste või paksuse muutumisel.

4.7 Mitmekordse võrgu ekstrapoleerimine

Olgu ϕ huvitav suurus, mida arvutatakse lõplike elementide võrgu mingis punktis. See suurus võib olla otsitav füüsikaline suurus ise, üks selle tuletistest või näiteks pinge, mis on võrdeline tuletiste kombinatsiooniga. Olgu $O(h^q)$ ϕ veahinnangu järk, kus h on elemendi suuruse mõõt. Olgu eelduseks, et koonduvus on monotoonne ja et q on teada. ϕ sõltuvuse graafik h^q-st on sirgjoon (joonis 4.4 (a)). Olgu ϕ_1 ja ϕ_2 väärtused, mis on arvutatud kahel võrgul, millel on vastavalt mõõdud h_1 ja h_2. Lineaarse ekstrapoleerimisega ϕ-teljele saadakse

$$\phi_\alpha = \frac{\phi_1 h_2^q - \phi_2 h_1^q}{h_2^q - h_1^q} = \frac{\phi_1 - \phi_2 (h_1/h_2)^q}{1 - (h_1/h_2)^q} \tag{4.25}$$

kus ϕ_∞ vastab elemendi suurusele $h = 0$ ehk lõpmatult peenele võrgule. Valem (4.25) on tuntud kui Richardsoni ekstrapoleerimisvalem [32]. Alljärgnevalt on mõningad piirangud:



Joonis 4.5: Tagaosas koormatud konsooltala regulaarvõrgu viimistlemine. Pidevjooned tähistavad $N_{els} = 8$ võrku. Pidev- ja kriipsjooned tähistavad $N_{els} = 32$ võrku. Mõlemal juhul kasutatakse 4-sõlmelist tasaelementi.

1. valem (4.25) sõltub täielikult võrgu regulaarsest viimistlusest;
2. igal viimistlusel säilitatakse jämedama võrgu sõlmed ja elementidevahelised piirid, sel ajal kui lisatakse uusi sõlmi, elemente ja sõlmedevahelisi piire;
3. elementide tüübid ei muutu;
4. nurgasõlmed jäävad nurgasõlmedeks ja küljesõlmed küljesõlmedeks (joonis 4.5);
5. iga viimistluse järel peab huvitav suurus ilmuma matemaatilises mudelis fikseeritud asukohas ja elemendi suhtes fikseeritud positsioonis (alati näiteks nurgasõlmes).

Ilma nende piiranguteta ei pruugi koonduvus olla monotoonne, misjuhul (4.25) ei kehti.

Mittemonotoonne koonduvus võib põhjustada mittesobivate elementidega võrku nagu näiteks nelinurksed QM6 elemendid [2, ptk. 6.6]. Viimased sisaldavad täielikku ruutnihke valemit ja käituvad nagu ruutelemendid. Kuid koos suureneva kujumoonutusega kipuvad nad kaotama oma ruutomadusi ja käituma rohkem nagu Q4 (lineaarsed) elemendid [2, ptk. 6.11]. Neil põhjustel on q-d suhteliselt raske ennustada.

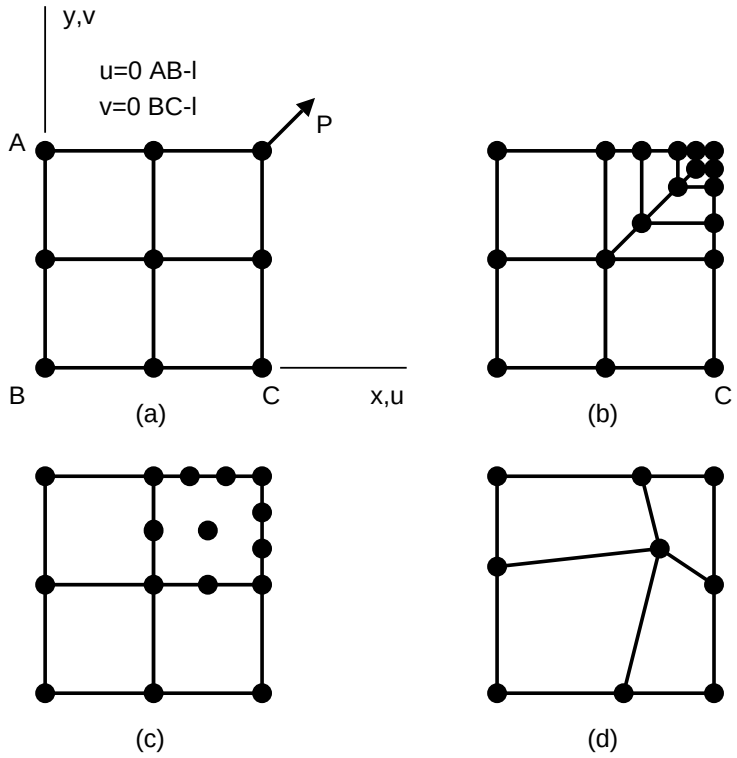
Kui q pole ette teada, saab seda määrata graafiliselt kui eksponenti, mille korral ϕ sõltuvus h^q-st on sirgjoon. Vajatakse vähemasti kolme erinevat võrku, et eristada kõverat sirgjoonest (nagu AF AE-vastu joonisel 4.4 (b)). Kui originaalvõrk on liiga jäme, ei pruugi selle võrgu ϕ olla ühegi q korral sirgjoonel. Kui arvutatakse liiga vähe andmepunkte või kasutatakse mittekorrektset q väärtust, võib ekstrapoleeritud tulemus olla vähemtäpsem kui lahend suvalises andmepunktis. Eelistavam on arvestada suurust

$$e = \frac{\phi_2 - \phi_\infty}{\phi_\infty} 100\% \tag{4.26}$$

kui ϕ_2 suhtelist viga.

4.8 Võrgu redigeerimise meetodid

Võrgu redigeerimisega püütakse parandada tulemusi analüüsi järgmises tsüklis. Eesmärk on saavutada vajalik täpsus nii väikese vajamineva vabadusastmete arvuga kui võimalik. Jooksva võrgu analüüsimine annab nii veahinnangu kui ka juhiseid võrgu revideerimiseks. Võrgu redigeerimine tähendab tavaliselt jämedama võrgu peenemaks viimistlemist, kuid on võimalik, et mõnes piirkonnas tuleb võrku ka jämedamaks teha.



Joonis 4.6: (a) Ruudukujulise plaadi esialgne võrk koos plaadisisese nurgakoormusega P. (b) Võimalik h-viimistlus. (c) Võimalik p-viimistlus. (d) Võimalik r-viimistlus.

4.8.1 h-viimistlus

h on siin elemendi suurust iseloomustav lineaardimensioon, näiteks elemendi suurim laius või näiteks tasaelemendi pindala ruutjuur või monoliitelemendi ruumala kuupjuur. h-viimistlus seisneb sama tüüpi elementide lisamises (joonis 4.6 (b)). Joonis 4.5 näitab ühtlast h-viimistlust, joonisel 4.6 (b) on aga mitteühtlane h-viimistlus. Kui olemasolevaid elemente jagatakse korduvalt alamosadeks, nimetatakse sellist viimistlust mõnikord “rikastamiseks” [2, joonis 6.13-1b].

4.8.2 p-viimistlus

p on siin elemendi väljatugevuse täieliku polünoomi kõrgeim järk. p-viimistluses suurendatakse p väärtust elemendi sees ilma elementide arvu muutmiseta. Sellega võib kaasneda olemasolevatele sõlmedele vabadusastmete lisamine, sõlmede lisamine olemasolevatele elementidevahelistele piiridele ja/või sisemiste vabadusastmete lisamine. p-viimistlus joonisel 4.6 (c) on mitteühtlane, sest elemendid pole ühte moodi viimistletud.

4.8.3 r-viimistlus

r tähendab “ümberkorraldamist” (ing. k. *rearrange*). Sestap sisaldab r-viimistlus sõlmede ümberpaigutamist ilma elementide arvu või nende füüsikalise suuruse polünomiaalse järgu muutmiseta (joonis 4.6 (d)).

4.8.4 Märkused

Käsitsi arvutamisel ei vaja h-viimistlus muudatusi olemasolevasse LEA tarkvarasse. Automaatsel arvutamisel vajab h-viimistlus, et olemasolev LEA tarkvara, mida kasutatakse pärast taasvõrgustamist, kohaneks võrguga. Taasvõrgustamisel ei tohiks hästikohanenud elemente asendada kahe või enama halvasti kohanenud elemendiga. Nutika programmeerimisega saab juhul, kui viimistlust tuleb teha väikeses lõplike elementide mudeli osas, mõningaid eelneva võrgu jaoks saadud analüüsitulemusi, nagu mõjutamata elementide jäikusmaatriksid, taaskasutada uuestiarvutamise asemel. h-viimistlust võib korrata lõpmatuseni. Piiravaks on ainult arvutusmaksumus, andmesalvestusruum ja edasine mõeldav täpsuse kadu numbriliste vigade tõttu.

p-viimistluse automatiseerimine nõuab tavatarkvaras olulisi muudatusi. Viimistlust saab jätkata, kasutades üksteise järgi üha kõrgema järguga elemendi kujufunktsioone, kuni on kasutusel kõrgeimad tarkvarasse programmeeritud järgud. Arvutusliku ökonoomsuse jaoks saab viimistletud võrk taaskasutada mõningaid eelmise võrgu jaoks tehtud arvutusi, kui lisatud kujufunktsioonid säilitava oma "hierarhilise" kuju, s.t. olemasolevad elemendi kujufunktsioonid säilitavad oma esialgse kuju [33]. Näiteks valemid [2, 6.1-3] ja [2, 6.1-4] saab asendada valemiga:

$$u = [\mathbf{N}]\{\mathbf{d}\} = \left\| \frac{1}{2}(1-\xi) \quad (1-\xi^2) \quad \frac{1}{2}(1+\xi) \right\| \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ a_2 \\ u_3 \end{array} \right\} \tag{4.27}$$

kus a_2 on hierarhiline vabadusaste, mille füüsikaliseks tähenduseks on suhteline nihe u_1 ja u_3 määratud lineaarse variatsiooni suhtes. Seega ei muutu 2-sõlmelise elemendi lineaarsed kujufunktsioonid hierarhilise kujufunktsiooni $1-\xi^2$ lisamisel. Kui $\{\mathbf{d}\}$ vabadusastmed on selliselt järjestatud, et iga lisatud hierarhilise vabadusastme saab paigutada nimekirja lõppu, siis iga hierarhilise vabadusastme lisamisega täieneb elementide jäikusmaatriks uute ridade ja veergudega ilma, et juba olemasolevad read ja veerud muutuksid.

Pärast vabadusastmete lisamist on p-viimistlusel kõrgem koonduvusaste kui h-viimistlusel, eriti kui esineb singulaarsusi [33]. Samuti toob p-viimistlus sama vabadusastmete arvu korral kaasa madalama $[\mathbf{K}]$ seisundiarvu kui h-viimistlus. Teisalt sobib h-viimistlus paremini paralleelarvutusteks, et üheaegselt genereerida tuhandeid sama tüüpi elemente [34]. p-meetod kipub selektiivselt lisatavate vabadusastmetega genereerima mitmetüübilisi elemente.

r-meetod võimaldab vaid piiratud arengut, sest vabadusastmete arv ei muutu. Samuti on see kallis ja harva tasuv, kuigi sõlme asendi optimeerimine on võimalik. Struktuurimehaanikas on r-optimeeritud võrgul selline huvitav omadus, et elementidevahelised piirid püüavad järgida peamist pingetrajektoori [34–36].

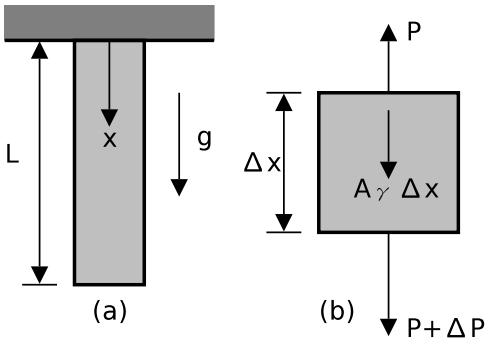
Loomulikult saab neid viimistlusmeetode kasutada ka üksteisega kombineeritult ja tavaliselt seda ka tehakse. h-viimistlust on tüüpiliselt täiendatud sõlmede ümberpaigutamisega, saades seega reaalselt hr-viimistluse [2, joonised 6.14-2, 6.14-3 ja 9.7-4]. Teine efektiivne kombinatsioon on hp-viimistlus, mille koonduvusmäär vabadusastmete lisamisel on suurem kui h-viimistlusel või p-viimistlusel eraldi.

4.8.5 Teised meetodid

Pärast esialgset analüüsi võib valida osa originaalsest lõplike elementide struktuurist ja viimistleda ainult seda osa. Isoleeritud osa piiril rakendatakse esialgsest analüüsist arvutatud nihkeid.

Seda nimetatakse osamodelleerimiseks [2, ptk. 10.10]. Kontseptuaalselt sarnane on meetod, mille korral lõplike elementide mudeli osa kaetakse täiendava võrguga, millel on parandatud omadused peendetailide lahendamiseks [37–39].

Mitmekordse võrgustiku meetodid on eelnevaga pealiskaudselt sarnased, kuid neid enam kaldutakse pidama iteratiivseteks võrrandilahendamistehnikateks kui võrgu viimistlustehnikateks [2, Lisa B.3].



Joonis 5.1: Rippuva varda probleem

5 Mehaanika

5.1 1D teljesuunaline deformatsioon

Olgu rippuv sirge ühtlane varras erikaaluga γ ja ristlõikepindalaga A (joonis 5.1 (a)). Vastavad diferentsiaalvõrrandid saab moodustada tüüpilise diferentsiaalelemendi vaba keha diagrammi järgi nõudes, et see oleks tasakaaluolekus. *Põhiline füüsikaline printsiip, mis kehtib sellises olukorras nihete ja jõudude jaoks, on inertsimomendi tasakaal.* Tasakaaluvõrrand saadakse avaldisest:

$$\sum F_x = -P + P + \Delta P + A\gamma\Delta x = 0$$

või

$$P' + A\gamma = 0 \tag{5.1}$$

Ülekantud jõud on

$$P(x) = A\sigma = AE\epsilon = AEu' \tag{5.2}$$

kus A on pindala, E - Youngi moodul, u - nihke teljesuunaline komponent ja u' on viimase tuletis x järgi. P ellimineerimine valemitest (5.1) ja (5.2) annab teed juhtivale tasakaaluvõrrandile nihete kaudu väljendatuna:

$$(AEu')' + a\gamma = 0 \tag{5.3}$$

Ääretingimused, üks kummagi otsa jaoks:

$$u(0) = 0$$

ja

$$P(L) = AEu'(L) = 0$$

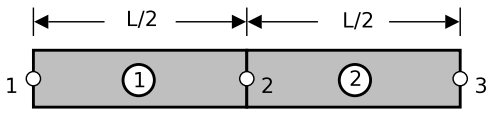
Märkusena, esimene ääretingimus on hädavajalik, teine aga on loomulik. Süsteemi potentsiaalset koguenergiat väljendav funktsionaal:

$$V(u) = \int_0^L \left(\frac{AEu'^2}{2} - A\gamma u \right) dx$$

Selle probleemi lõplike elementide mudel seatakse üles ja lahendatakse alljärgnevate sammudega.

5.1.1 Diskreetimine

Olgu 2-elemendiline mudel (joonis 5.2), mille elementidel on 3 sõlme ja elemendid ise võrdse pikkusega.



Joonis 5.2: Sõlmed ja elemendid – kahelemendiline mudel

5.1.2 Interpoleerimine

Selle mudeli korral saab kasutada lineaarset interpoleerimist. Interpolatsioonivektor lokaalkoordinaatides

$$N(\xi) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\xi}{l_e} \\ \frac{\xi}{l_e} \end{bmatrix}$$

koos

$$N'(\xi) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l_e} \\ \frac{1}{l_e} \end{bmatrix}$$

kus $l_e = L/2$.

5.1.3 Elementide formuleerimine

Elementide maatriksid on:

$$\mathbf{p_e} = \int_0^{l_e} \mathbf{N}' AE \mathbf{N}'^T d\xi = \int_0^{l_e} \begin{bmatrix} -\frac{1}{l_e} \\ \frac{1}{l_e} \end{bmatrix} AE \begin{bmatrix} \frac{-1}{l_e} & \frac{1}{l_e} \end{bmatrix} d\xi = \frac{AE}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q_e} = 0$$

ja

$$\mathbf{f_e} = \int_0^{l_e} l_e \begin{bmatrix} 1 - \frac{\xi}{l_e} \\ \frac{\xi}{l_e} \end{bmatrix} A\gamma d\xi = \frac{A\gamma l_e}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nii p_e kui ka f_e erivormid on selle otsene tagajärg, et lahendit interpoleeritakse lineaarselt.

5.1.4 Võrrandisüsteemi koostamine

Puhtas olekus p_e ja f_e maatriksite koostamisel saadakse:

$$\mathbf{P_G} = \sum_e \mathbf{p_G} = \frac{2AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ja

$$\mathbf{F_G} = \sum_e \mathbf{f_G} = \frac{2A\gamma L}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kogukaal $A\gamma L$, mis esialgses pidevas probleemis oli ühtlaselt jaotatud üle kogu pikkuse, on nüüd rakendatud diskreetsete või kontsentreeritud jõududena sõlmedes. Spetsiifiline sõlmjaotus, millele viitab $\mathbf{F_G}$, on lineaarse interpolatsiooni tulemus.

Piiranguteta globaalne võrrandisüsteem on:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & \phi \\ -1 & 2 & -1 & 2\phi \\ 0 & -1 & 1 & \phi \end{array}\right]$$

kus $\phi = \gamma L^2/8E$.

5.1.5 Piirangud

Tarvilikud ääretingimused kohal $x = 0$ transleeruvad lõplike elementide mudelisse kui $u_1 = 0$, mis siis asendatuna võrrandisüsteemi annavad:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 2\phi \\ 0 & -1 & 1 & \phi \end{array}\right]$$

Pärast elementaarseid reaoperatsioone, et taastada sümmeetria:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2\phi \\ 0 & -1 & 1 & \phi \end{array}\right]$$

5.1.6 Lahend

See süsteem on kergesti lahendatav, andes:

$$u_1 = 0$$
$$u_2 = 3\phi = \frac{3\gamma L^2}{8E}$$
$$u_3 = 4\phi = \frac{4\gamma L^2}{8E}$$

5.1.7 Tuletatud muutujate arvutamine

Antud probleemi jaoks on tuletatud muutjaks ülekantud sisemine jõud

$$P = pu'AEu'$$

ja selle saab arvutada iga elemendi jaoks.

Element 1. On kerge näha, et u_1' on

$$u' = \frac{u_2 - u_1}{l_e} = \frac{2(u_2 - u_1)}{L}$$

nii et

$$P_1 = AEu_1' = \left(\frac{2}{L}\right)\left(\frac{3A\gamma L^2}{8}\right) = \frac{3A\gamma L}{4}$$

Element 2. Jälle,

$$u' = \frac{u_3 - u_2}{l_e} = \frac{2(u_3 - u_2)}{L}$$

nii et

$$P_2 = AEu_2' = \left(\frac{2}{L}\right)\left(\frac{A\gamma L^2}{8}\right) = \frac{A\gamma L}{4}$$

5.1.8 4-sõlmeline mudel

Lineaarselt interpoleeritud 4-sõlmelisel mudelil on 5 vabadusastet. Iga elemendi pikkuseks l_e võetakse $L/4$. Koostatud piiranguteta globaalsed võrrandid on

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \phi \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 2\phi \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 2\phi \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 2\phi \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \phi \end{array}\right]$$

kus $\phi = \gamma L^2/32E$. Pannes peale piirangud ja lahendades siis võrrandid, saadakse

$$\mathbf{u_G}^T = [0 \quad 7 \quad 12 \quad 15 \quad 16]\frac{\gamma L^2}{32E}$$

Sisemised ülekantud jõud:

$$P_1 = \tfrac{7A\gamma L}{8E} \qquad P_2 = \tfrac{5A\gamma L}{8E}$$

$$P_3 = \tfrac{3A\gamma L}{8E} \qquad P_4 = \tfrac{A\gamma L}{8E}$$

8-elemendiline lineaarselt interpoleeritud mudel võrdsete pikkustega L/8 annab tulemuseks:

$$\mathbf{u_G}^T = [0 \quad 15 \quad 28 \quad 39 \quad 48 \quad 55 \quad 60 \quad 63 \quad 64]\frac{\gamma L^2}{128E}$$

ja

$$P_1 = \tfrac{15A\gamma L}{16} \qquad P_2 = \tfrac{13A\gamma L}{16} \qquad P_3 = \tfrac{11A\gamma L}{16} \qquad P_4 = \tfrac{9A\gamma L}{16}$$

$$P_5 = \tfrac{7A\gamma L}{16} \qquad P_6 = \tfrac{5A\gamma L}{16} \qquad P_7 = \tfrac{3A\gamma L}{16} \qquad P_8 = \tfrac{A\gamma L}{16}$$

Nende kolme edukalt poolitatud võrkudega mudeli võrdlemine näitab selget nihke- ja edasiantud jõudude mustrit. Selle mustri uurimisel peaks saama järeldada, mis toimub, kui edasiste edukate poolitamistega jõutakse piirini.

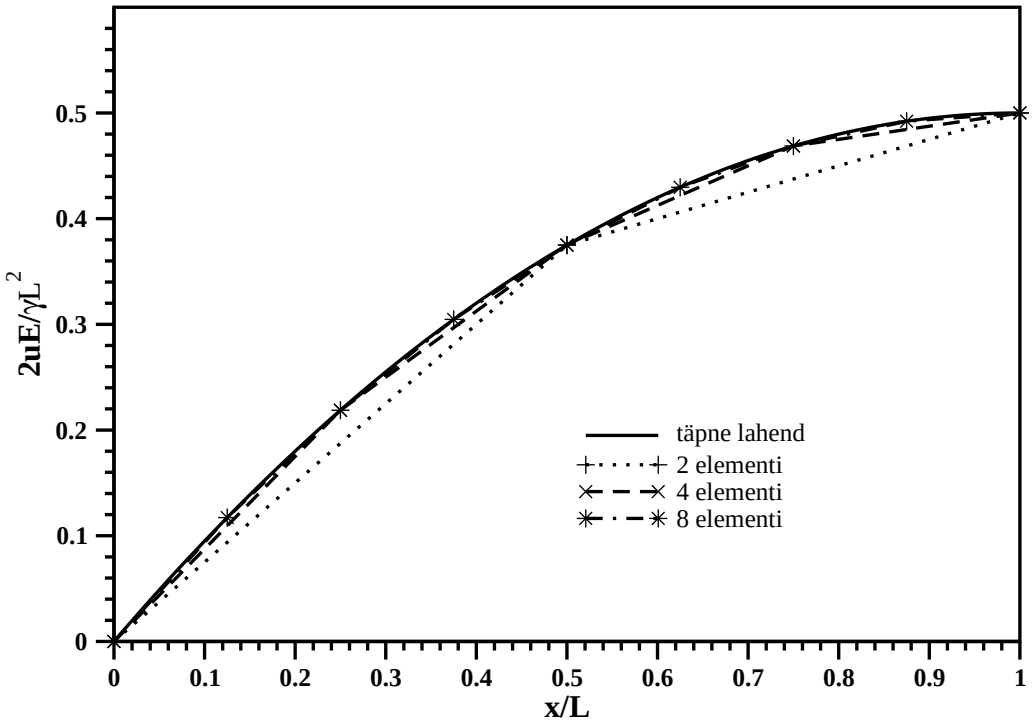
5.1.9 Tulemuste analüüs

Nihketulemused on joonisel 5.3 . Täpne lahend kujul $u(x) = \gamma(2Lx - x^2)$ on parabool, mis läbib kõiki sõlmi, nagu nägid ette kõik lõplike elementide mudelid. Tulemused sisemiste jõudude jaoks on joonisel 5.4 koos täpse tulemusega $P(x) = A\gamma(L - x)$.

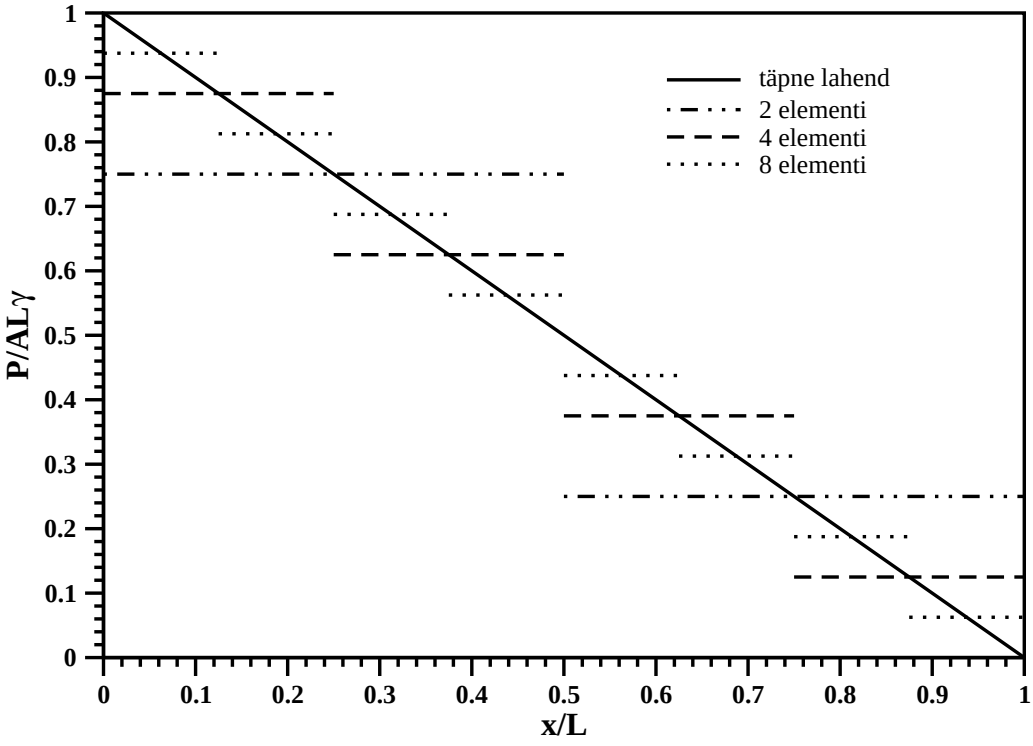
Lõplike elementide mudeli ennustatud sisemised jõud on elemendi piires konstantsed ja nende üleminekul ühest elemendist teise esinevad katkemised. See on vältimatu tagajärg sellele, et selle probleemi jaoks kasutati lineaarset interpolatsiooni. Jooniselt 5.4 on näha, et kasutades keskmistamist tuletatud muutuja $P = AEu'$ korral, saadakse täpne kõver piki varda pikkust ülekantud jõu jaoks.

Suhteliselt õpetlik on joonistada välja iga elemendi vaba keha diagrammid. Neljaelemendilise mudeli jaoks on vaba keha diagrammid joonisel 5.5 , kus $f = A\gamma L/8$. Joonis 5.6 kujutab olukorda, mil elemendid on rekombineeritud.

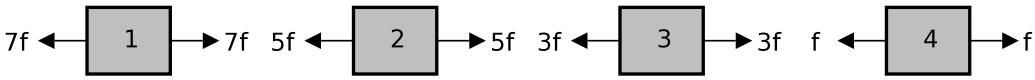
Diagrammidelt on näha, et jõu katkevus elementide sees on täpselt võrdne ja sellel kaugusel põhjustatud igale sõlmele rakendatud välisest jõust. Sõlme 3 vaba keha diagrammilt (joonis 5.7



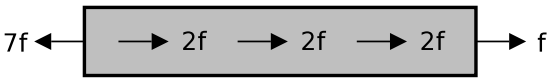
Joonis 5.3: Lõplike elementide nihked ja täpne nihe.



Joonis 5.4: Lõplike elementide jõud ja täpne jõud.

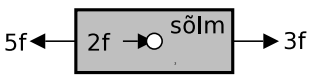


Joonis 5.5: Neljaelemendilise mudeli elementide vaba keha diagrammid.



Joonis 5.6: Ümberseatud varras.

), mis arvestab seda jõudu, on selge, et ülekantud jõu katkevus on tasakaalus välise jõuga sellel sõlmel. Lisaks on näha (joonis 5.6), et reaktsioon sõlmel 1 on võrdne väliskoormustega, mis on rakendatud sõlmedele toe all. Varda ülalotsas olevat $A\gamma L/8$ reaktsiooni võib vaadelda $(A\gamma L - A\gamma L/8)$ summadena, mis on tegelikud reaktsioonid, millest on lahutatud koormused, mis kaotatakse piirangute rakendamisel. Seega tasakaal, kui selle probleemiga seotud põhiprintsiip, on rahuldatud sisemiste jõudude ja väliskoormuste kaudu antud lõplike elementide mudelis. Esialgse pideva mudeli tasakaal ei ole saavutatud, mis on nähtav faktist, et antud elemendis on jõud konstantne pideva välise koormuse olemasolul.



Joonis 5.7: Sõlme 3 vaba keha diagramm.

6 Soojuse ülekandmine

Üks esimesi lõplike elementide meetodi rakendusi mittestruktuursetest probleemidest oli soojuse ülekanne soojusjuhtivuse ja konvektsiooni teel. Soojuse ülekandumise probleemide lahendused lõplike elementide meetodil on eriti populaarsed termilise pinge probleemide uurijate seas, sest soojuse ülekandumise probleemi lahend on pingeanalüüsi probleemi sisendiks ning mõlema probleemi lahendamiseks saab kasutada sama võrku.

6.1 1D radiaatoriribi

1D radiaatoriribi soojuse ülekannet kirjeldab järgmine diferentsiaalvõrrand:

$$kA\frac{d^2\phi}{dx^2} - hP\phi + hP\phi_f = 0 \tag{6.1}$$

kus k on soojusjuhtivus, h - konvektsioonitegur, A - ristlõikepindala, P - radiaatoriribi ümbermõõt ja ϕ - temperatuur. Temperatuuril on x-i konkreetse väärtuse jaoks ristlõike igas punktis üks kindel väärtus. Võrrandiga (6.1) seotud ääretingimused antakse tavaliselt temperatuurina kohal $x = 0$:

$$\phi(0) = \phi_0 \tag{6.2}$$

ja konvektsiooniline soojuskadu vabas otsas

$$-kA\frac{d\phi}{dx} = hA(\phi_b - \phi_f)|_{x=H} \tag{6.3}$$

kus ϕ_b on temperatuur radiaatori lõpus ja pole enne probleemi lahendamist teada. Konvektsioonitegur võrrandis (6.3) võib, aga ei pruugi olla sama, mis võrrandis (6.1) .

Diferentsiaalvõrrandi (6.1) üldine kuju:

$$D\frac{d^2\phi}{dx^2} - G\phi + Q = 0 \tag{6.4}$$

kus $D = kA$, $G = hP$ ja $Q = hP\phi_f$. Elemendi panus Galerkini jäägivõrrandisse $\{\mathbf{R}^{(e)}\}$ on:

$$\begin{array}{rcl} \{\mathbf{R}^{(e)}\} & = & -\int_{X_i}^{X_j}[\mathbf{N}]^T\left(D\frac{d^2\phi}{d^2x} - G\phi + Q\right)dx = \\ & = & -\int_{X_i}^{X_j}[\mathbf{N}]^T\left(D\frac{d^2\phi}{d^2x} + Q\right)dc + \int_{X_i}^{X_j}G[\mathbf{N}]^T\phi dx \end{array} \tag{6.5}$$

Esimene integraal valemis (6.5) on võrdne suurusega $\{\mathbf{I}^{(e)}\} + [\mathbf{k}^{(e)}]\{\mathbf{\Phi}\} - \{\mathbf{f}^{(e)}\}$. Asendades $\phi^{(e)} = [\mathbf{N}]\{\mathbf{\Phi}^{(e)}\}$ teise integraali, saadakse, et

$$\int_{X_i}^{X_j} G[\mathbf{N}]^T\phi dx = \left(\int_{X_i}^{X_j} G[\mathbf{N}]^T[\mathbf{N}]dx\right)\{\mathbf{\Phi}^{(e)}\} \tag{6.6}$$

Kuna integraal on korrutatud suurusega $\{\mathbf{\Phi}^{(e)}\}$, on see osa elemendi jäikusmaatriksist. Kui defineerida

$$[\mathbf{k}_G^{(e)}] = \int_{X_i}^{X_j} G[\mathbf{N}]^T[\mathbf{N}]dx \tag{6.7}$$

siis

$$\{\mathbf{R}^{(e)}\} = \{\mathbf{I}^{(e)}\} + \left([\mathbf{k}_D^{(e)}] + [\mathbf{k}_G^{(e)}]\right)\{\mathbf{\Phi}^{(e)}\} - \{\mathbf{f}_Q^{(e)}\} \tag{6.8}$$

kus $[\mathbf{k}_D^{(e)}]$ on antud avaldisega [7, 4.11] ja $\{\mathbf{f}_Q^{(e)}\}$ avaldisega [7, 4.12].

Integraali valemis (6.7) on lihtne arvutada nii s- kui ka l_1, l_2-koordinaatsüsteemides. Saab näidata, et

$$[\mathbf{k}_G^{(e)}] = \frac{GL}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

Tuletatud ääretingimus (6.3) lülitatakse formulatsiooni elementidevahelise vektoriga $\{\mathbf{I}^{(e)}\}$ [7, 4.10]:

$$\{\mathbf{I}^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} D\frac{d\phi}{dx}\mid_{x=X_i} \\ -D\frac{d\phi}{dx}\mid_{x=X_j} \end{Bmatrix} \tag{6.10}$$

ja selle saab lahutada osadeks:

$$\{\mathbf{I}^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} D\frac{d\phi}{dx}\mid_{x=X_i} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -D\frac{d\phi}{dx}\mid_{x=X_j} \end{Bmatrix} \tag{6.11}$$

mis on ekvivalentne valemiga

$$\{\mathbf{I}^{(e)}\} = \{\mathbf{I}_i^{(e)}\} + \{\mathbf{I}_b^{(e)}\}$$

kus $\{\mathbf{I}_i^{(e)}\}$ on elementidevaheline tingimus ja $\{\mathbf{I}_b^{(e)}\}$ on seotud ääretingimusega. Nullist erinev liige $\{\mathbf{I}_b^{(e)}\}$ on võrrandi (6.3) vasem pool. Seega

$$\{\mathbf{I}_b^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ hA(\phi_b - \phi_f) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ ha\phi_j \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ ha\phi_b \end{Bmatrix} \tag{6.12}$$

kuna ϕ_b on sama, mis Φ_j. Võrrand (6.12) on ekvivalentne võrrandiga

$$\{\mathbf{I}_b^{(e)}\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & hA \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ hA\Phi_f \end{Bmatrix} = [\mathbf{k}_M^{(e)}]\{\mathbf{\Phi}^{(e)}\} - \{\mathbf{f}_S^{(e)}\} \tag{6.13}$$

kus

$$[\mathbf{k}_M^{(e)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & hA \end{bmatrix}, \quad \{\mathbf{f}_S^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ hA\Phi_f \end{Bmatrix} \tag{6.14}$$

Täieliku jäägivõrrandi saab võrrandis (6.8) $\{\mathbf{I}^{(e)}\}$ asendamisel:

$$\{\mathbf{R}^{(e)}\} = \{\mathbf{I}_i^{(e)}\} + ([\mathbf{k}_D^{(e)}] + [\mathbf{k}_G^{(e)}] + [\mathbf{k}_M^{(e)}])\{\mathbf{\Phi}^{(e)}\} - \{\mathbf{f}_Q^{(e)}\} - \{\mathbf{f}_S^{(e)}\} \tag{6.15}$$

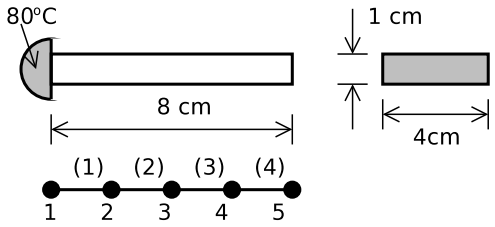
Elementidevahelise tingimuse $\{\mathbf{I}_i^{(e)}\}$ hülgamine annab

$$\{\mathbf{R}^{(e)}\} = [\mathbf{k}^{(e)}]\{\mathbf{\Phi}^{(e)}\} - \{\mathbf{f}^{(e)}\} \tag{6.16}$$

$[\mathbf{k}_M^{(e)}]$ panus $[\mathbf{k}^{(e)}]$-sse toimub ainult radiaatori viimase elemendi jaoks ja vaid siis, kui h on radiaatori lõpu jaoks nullist erinev. Näiteks on $[\mathbf{k}_M^{(e)}]$ null, kui radiaatori lõpp on isoleeritud.

6.2 1D radiaatori illustreeriv näide

Ülesandeks on arvutada temperatuurijaotus 1D radiaatoriribil joonisel 6.1 antud füüsikaliste omadustega. Ribi on kujult nelinurkne, 8 cm pikk, 4 cm lai ja 1 cm paks. Eelduse järgi toimub soojuskadu soojusjuhtivuse kaudu ribi lõpus.



Joonis 6.1: Nelinurkne ribi: $k = 3\frac{W}{cm°C}$, $h = 0.1\frac{W}{cm^2°C}$, $\phi_f = 20°C$

Ribi modelleeritakse 4 elemendiga, millest igaüks on 2 cm pikkune. Elementide maatriksid on

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = \frac{kA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{hPL}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & hA \end{bmatrix}$$

ja

$$\{\mathbf{f}^{(e)}\} = \frac{hPL\phi_f}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ hA\phi_f \end{Bmatrix}$$

kus kolmas maatriks $[\mathbf{k}^{(e)}]$-s ja teine vektor $\{\mathbf{f}^{(e)}\}$-s rakenduvad ainult neljandale elemendile. Erinevate parameetrite väärtused:

$$\frac{kA}{L} = \frac{3(4)}{2} = 6\frac{W}{^oC}$$

$$\frac{hPL}{6} = \frac{0.1(10)2}{6} = 0.333\frac{W}{^oC}$$

$$hA = 0.1(4) = 0.400\frac{W}{^oC}$$

$$\frac{hpL\phi_f}{2} = \frac{0.1(10)(20)(2)}{2} = 20W$$

$$hA\phi_f = 0.1(4)(20) = 8W$$

Elementide väärtused on

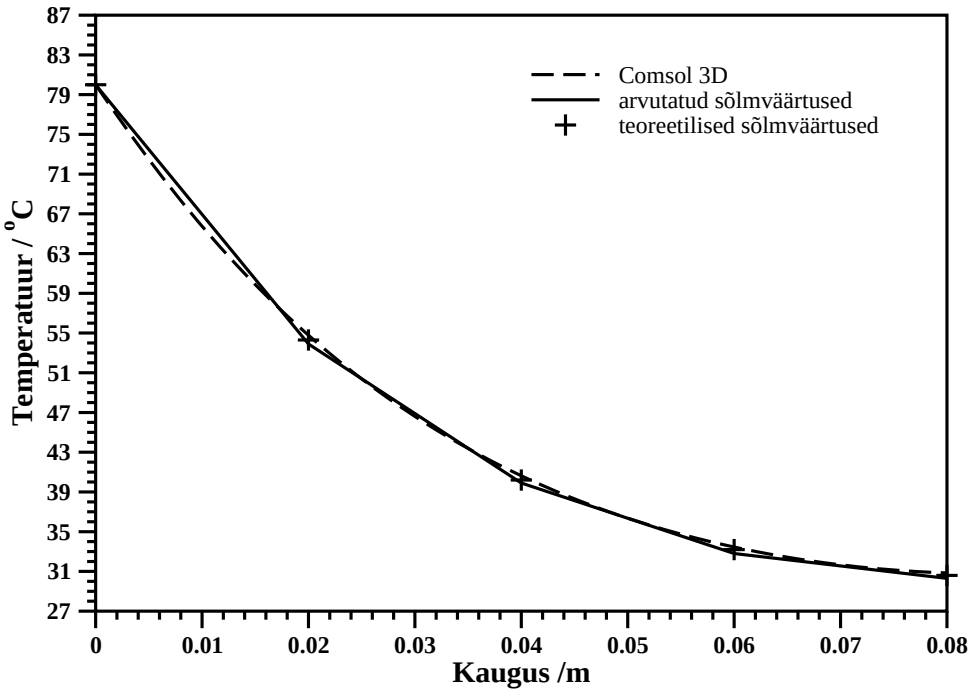
$$[\mathbf{k}^{(e)}] = \begin{bmatrix} 6.666 & -5.667 \\ -5.667 & 6.666 \end{bmatrix}, \quad \{\mathbf{f}^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} 20 \\ 20 \end{Bmatrix}$$

esimese, teise ja kolmanda elemendi jaoks ning

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = \begin{bmatrix} 6.666 & -5.667 \\ -5.667 & 7.066 \end{bmatrix}, \quad \{\mathbf{f}^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} 20 \\ 28 \end{Bmatrix}$$

neljanda elemendi jaoks. Elemendimaatriksite kokkupanek otsesel jäikusprotseduuril annab võrrandisüsteemi

$$\begin{bmatrix} 6.666 & -5.667 & 0 & 0 & 0 \\ -5.667 & 13.33 & -5.667 & 0 & 0 \\ 0 & -5.667 & 13.33 & -5.667 & 0 \\ 0 & 0 & -5.667 & 13.33 & -5.667 \\ 0 & 0 & 0 & -5.667 & 7.006 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20 \\ 40 \\ 40 \\ 40 \\ 28 \end{Bmatrix}$$



Joonis 6.2: Nelinurkse ribi temperatuurjaotus

Esimese sõlme temperatuur $\Phi_1 = 80^oC$ on teada, seega tuleb esimene võrrand kustutada ja teisi modifitseerida. Uueks võrrandisüsteemiks saab

$$\begin{bmatrix} 13.33 & -5.667 & 0 & 0 \\ -5.667 & 13.33 & -5.667 & 0 \\ 0 & -5.667 & 13.33 & -5.667 \\ 0 & 0 & -5.667 & 7.006 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 493 \\ 40 \\ 40 \\ 28 \end{Bmatrix}$$

Väärtused sõlmpunktides on

$$\{\mathbf{\Phi}\}^T = [80 \quad 53.9 \quad 39.9 \quad 32.8 \quad 30.3]$$

mis on igati võrreldavad teoreetiliste väärtustega (joonis 6.2)

$$\{\mathbf{\Phi}\}^T = [80 \quad 54.3 \quad 40.2 \quad 33.2 \quad 30.6]$$

6.3 2D soojusvoog

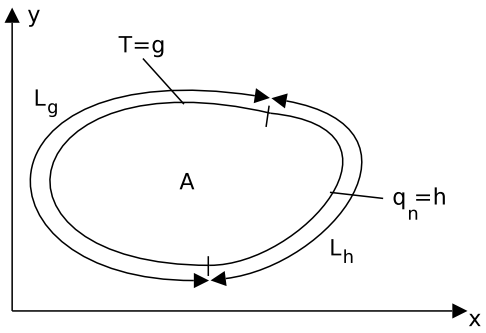
2D soojusvoo *tugev* vorm on antud kujul [1, 6.32...6.34]. Vastav nõrk vorm on ([1, 6.46...6.47]

$$\int_A (\nabla \mathbf{v})^T t \mathbf{D} \nabla T dA = -\int_{L_h} vhtdL - \int_{L_g} vq_n tdL + \int_A vQtdA \tag{6.17}$$

$$T = g \tag{6.18}$$

piirkonnas L_g. Siin v on suvaline kaalufunktsioon, $\mathbf{D}$ on soojusjuhtivuse maatriks, T - temperatuur, t - paksus, Q - soojusallikas ajaühiku ja keha ruumalaühiku kohta. Vooluvektor $\mathbf{q}$ on määratud Fourier' seadusega [1, 6.4]:

$$\mathbf{q} = -\mathbf{D}\nabla\mathbf{T} \tag{6.19}$$



Joonis 6.3: Kahemõõtmeline piirkond A koos rajaga $L = L_h + L_g$.

kus temperatuurigradient

$$\nabla \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{6.20}$$

Voog q_n piirkonna rajal on antud joonisega 6.3 ja valemiga [1, 6.3]:

$$q_n = \mathbf{q}^T \mathbf{n} \tag{6.21}$$

kus $\mathbf{n}$ on pinna normaalvektor ja q_n on positiivne, kui soojus lahkub kehast. Nagu joonisel 6.3 näidatud, koosneb piirkonna A piir L kahest osast: L_h ja L_g. Rajal L_h $q_n = h$, kus h on tuntud suurus ja L_G-l $T = g$, kus g on tuntud suurus.

Temperatuuri T lähendatakse [1, 7.137] mõttes, s.t.

$$T = \mathbf{N}\mathbf{a} \tag{6.22}$$

kus $\mathbf{N}$ on globaalne kujufunktsiooni maatriks ja $\mathbf{a}$ sisaldab temperatuure keha kõigis sõlmpunktides. See tähendab, et

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_n]; \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_N \end{bmatrix} \tag{6.23}$$

kus n on kodu keha sõlmede arv ja komponent N_i sõltub x-st ja y-st, s.t. $N_i = N_i(x, y)$. Võrrandist (6.22)

$$\nabla \mathbf{T} = \mathbf{B}\mathbf{a}, \qquad \mathbf{B} = \nabla \mathbf{N} \tag{6.24}$$

mis vihjab, et vastavalt avaldistele [1, 7.140 ja 7.142]

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{6.25}$$

Asendades võrrandi (6.24) võrrandisse (6.17)

$$\left(\int_A (\nabla \mathbf{v})^T \mathbf{D}\mathbf{B} t dA \right) \mathbf{a} = - \int_{L_h} vht dL - \int_{L_g} vq_n t dL + \int_A vQt dA \tag{6.26}$$

Viimane samm on valida suvaline kaalufunktsioon v. Vastavalt Galerkini meetodile seatakse:

$$v = \mathbf{N}\mathbf{c} \tag{6.27}$$

Kuna v on suvaline, on ka maatriks $\mathbf{c}$ suvaline. Võrrandist (6.27) saadakse:

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{B}\mathbf{c} \tag{6.28}$$

Kuna $v = v^T$, siis saab võrrandi (6.27) kirja panna ka kujul

$$v = \mathbf{c}^T\mathbf{N}^T \tag{6.29}$$

Asendades võrrandid (6.28) ja (6.29) võrrandisse (6.26) ja märkides, et $\mathbf{c}$ on positsioonist sõltumatu, saadakse:

$$\mathbf{c}^T\left[\left(\int_A \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}tdA\right)\mathbf{a} + \int_{L_h}\mathbf{N}^T htdL + \int_{L_g}\mathbf{N}^T q_n tdL - \int_A \mathbf{N}^T QtdA\right] = 0$$

Kuna see võrrand peab kehtima suvalise maatriksi $\mathbf{c}^T$ korral, siis:

$$\left(\int_A \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}tdA\right)\mathbf{a} = -\int_{L_h}\mathbf{N}^T htdL - \int_{L_g}\mathbf{N}^T q_n tdL + \int_A \mathbf{N}^T QtdA \tag{6.30}$$

mis on otsitud lõplike elementide formuleering.

Kirjutamaks võrrandit (6.30) veel kompaktsemal kujul, defineeritakse järgmised maatriksid:

$$\begin{array}{l}\mathbf{K} = \int_A \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}tdA \\ \mathbf{f_b} = -\int_{L_h}\mathbf{N}^T htdL - \int_{L_g}\mathbf{N}^T q_n tdL \\ \mathbf{f_l} = \int_A \mathbf{N}^T QtdA\end{array} \tag{6.31}$$

Kuna $\mathbf{D}$ dimensioon on 2×2 ja $\mathbf{B}$ dimensioon on $2 \times n$, siis on $\mathbf{K}$ ruutmaatriks dimensiooniga $n \times n$ ja seda nimetatakse jäikusmaatriksiks. Samuti on nii $\mathbf{f}_b$ kui ka $\mathbf{f}_l$ dimensioon $n \times 1$, kusjuures vektorid on ise vastavalt rajavektor ja koormusvektor. Koos võrrandiga (6.31) saab võrrandi (6.30) viia kujule:

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}_b + \mathbf{f}_l \tag{6.32}$$

Jõuvektor $\mathbf{f}$ defineeritakse kui

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_b + \mathbf{f}_l \tag{6.33}$$

ja võrrand (6.32) teisendub kujule

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f} \tag{6.34}$$

Jõuvektori $\mathbf{f}$ dimensioon on [J/s].

Tänu soojusjuhtivuse maatriksi $\mathbf{D}$ sümmeetriale [1, 6.10] tuleneb võrrandist (6.31) , et $\mathbf{K}$ on sümmeetriline:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^T \tag{6.35}$$

Sarnaselt [1, 9.38..9.40] järgneb sellele, et $\mathbf{K}$ on singulaarne:

$$det\mathbf{K} = 0 \tag{6.36}$$

Enamgi veel, kuna $\mathbf{D}$ on positiivselt määratud [1, 6.8], siis sarnaselt [1, 9.41..9.43] saadakse, et $\mathbf{K}$ on osaliselt positiivselt määratud:

$$\mathbf{a}^T\mathbf{K}\mathbf{a} \geq 0 \tag{6.37}$$

kõigi $\mathbf{a} \neq 0$ korral ja vaid siis, kui temperatuurigradient on 0, s.t. $\nabla\mathbf{T} = \mathbf{B}\mathbf{a} = \mathbf{0}$, on ülalpool olev ruutvorm null. Saab ka näidata, et iga osamaatriks $\tilde{\mathbf{K}}$, mis saadakse $\mathbf{K}$-st ühe või enama rea ja vastavate veergude kustutamisega, on sümmeetriline, mittesingulaarne ja positiivselt määratud. Vähemasti ühe sõlmpunkti temperatuuri peab ära kirjeldama, et saada lõplike elementide võrrandile unikaalset lahendit. Rajatingimuste süstemaatiline arvestamine on taas antud avaldistes [1, 9.57..9.59] rõhutatud viisil.

Järgneb tõestus, et jõuvektori komponendid täidavad jälle võrdust [1, 9.68]. Kui vaatluse all on piirkond A paksusega t, siis tasakaaluprintsiip [1, 6.19] ütleb, et

$$\int_A Qt dA = \oint_L q_n t dL \tag{6.38}$$

Olgu võrrand (6.33) kujul:

$$f_i = f_{bi} + f_{li}; \quad i = 1, \ldots, n$$

mis viib tulemuseni

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = \sum_{i=1}^{n} f_{bi} + \sum_{i=1}^{n} f_{li} \tag{6.39}$$

Vastavalt võrrandile (6.31)

$$f_{bi} = -\int_{L_h} N_i h t dL - \int_{L_g} N_i q_n t dL \tag{6.40}$$

Rajatingimused määravad voo $q_n = h$ piki piiri L_h, samas kui voog q_n piki L_g-d on eelnevalt määramata. Sestap saab võrrandi (6.40) kirjutada kujul:

$$f_{bi} = -\oint_L N_i q_n t dL \tag{6.41}$$

Koormusvektori komponent võrrandist (6.31) on

$$f_{li} = \int_A N_i Q t dA \tag{6.42}$$

Võrrandite (6.41) ja (6.42) kasutamine võrrandis (6.39) annab

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = -\oint_L \left(\sum_{i=1}^{n} N_i\right) q_n t dL + \int_A \left(\sum_{i=1}^{n} N_i\right) Q t dA$$

mis koos avaldisega [1, 7.139] annab

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = -\oint_L q_n r dL + \int_A Q t dA \tag{6.43}$$

Võrdlus võrrandiga (6.38) näitab. et

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = 0 \tag{6.44}$$

vastavalt [1, 9.68]. See tähendab, et keha tasakaaluprintsiipi väljendab fakt, et jõuvektori f komponentide summa on null. Tuleb rõhutada, et (6.44) kehtib *täpselt* sõltumata asjaolust, et lõplike elementide meetod on lähendusmeetod.

Koormusvektori komponendi on antud võrrandiga (6.42) . Olgu eeldus, et koormus Q on antud lineaarallikana, kus soojusvarustus on koondunud xy-tasandi punkti, milles on kirjeldatud soojusvarustus Q_s ajaühiku ja keha paksuse ühiku kohta. Q_s on lineaarallika tugevus dimensiooniga [J/(s m)]. Sellises olukorras võib Q-d väljendada Diraci deltafunktsiooniga ([1, 9.70...9.72])

$$Q = Q_s\delta(x-a)\delta(y-b) = \begin{cases} \infty & \text{kui } (x,y) = (a,b) \\ 0 & \text{muudel juhtudel} \end{cases} \tag{6.45}$$

kus (a, b) on joonallika positsioon. Definitsiooni järgi

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Q dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Q_s\delta(x-a)\delta(y-b)dxdy = Q_s \tag{6.46}$$

Võrrandite (6.45) ja (6.46) järgi:

$$\int_{b^-}^{b^+}\int_{a^-}^{a^+} Q_s\delta(x-a)\delta(y-b)dxdy = Q_s \tag{6.47}$$

Sellise joonallika jaoks teiseneb võrrandiga (6.42) antud koormusvektori komponent kujule

$$\begin{array}{rcl} f_{li} = \int_A N_i(x,y)Qt dA & = & \int_{b^-}^{b^+}\int_{a^-}^{a^+} N_i(x,y)Q_s\delta(x-a)\delta(y-b)tdxdy = \\ & = & N_i(a,b)t(a,b)Q_s \end{array} \tag{6.48}$$

Kui joonallika asukoht (a, b) kattub sõlmpunktiga i, siis $N_i(a, b) = N_i(x, y) = 1$ ehk saadakse

$$f_{li} = Q_s t(x_i, y_i) \tag{6.49}$$

Siit järgneb, et iga jaotatud koormuse Q võib asendada joonallikatega, mis asetsevad sõlmpunktides.

Globaalne jäikusmaatriks $\mathbf{K}$ ja globaalne koormusvektor $\mathbf{f_l}$, mis on antud võrrandiga (6.31) , on saadud integreerimisel üle kogu piirkonna A. Need integreerimised võib saada summana integreerimistest üle iga elemendi. Sel viisil jõutakse välja laiendatud elemendi jäikusmaatriksini $\mathbf{K}^{ee}$ elemendi α jaoks ja laiendatud elemendi koormusvektorini $\mathbf{f}_l^{ee}$ elemendi α jaoks:

$$\begin{array}{l} \mathbf{K}^{ee} = \int_{A_\alpha} \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}tdA \\ \mathbf{f}_l^{ee} = \int_{A_\alpha} \mathbf{N}^T Qt dA \end{array} \tag{6.50}$$

kus A_α on elemendi α piirkond. Siit järeldub otseselt, et

$$\begin{array}{l} \mathbf{K} = \sum_{\alpha=1}^{n_{el}} \mathbf{K}_\alpha^{ee} \\ \mathbf{f}_l^{ee} = \sum_{\alpha=1}^{n_{el}} \mathbf{f}_{l\alpha}^{ee} \end{array} \tag{6.51}$$

kus n_{el} on elementide koguarv, $\mathbf{K}_\alpha^{ee}$ ja $\mathbf{f}_{l\alpha}^{ee}$ aga märgivad elemendi α asjakohaseid suurusi. Kontseptuaalselt on võrrandid (6.50) ja (6.51) fundamentaalse tähtsusega, kuid viivad väga ebaefektiivse arvutiprogrammini. Et identifitseerida otseselt $\mathbf{K}^{ee}$ ja $\mathbf{f}_l^{ee}$ nullist erinevaid komponente, võetakse elemendi jaoks lõplike elementide formuleeringus arvesse vaid need vabadusastmed, mis kuuluvad vastava elemendi juurde.

Temperatuuri lähend üle iga elemendi on antud kui

$$T = \mathbf{N}^e \mathbf{a}^e \tag{6.52}$$

kus $\mathbf{N}^e$ on elemendi kujufunktsiooni maatriks ja $\mathbf{a}^e$ sisaldab temperatuuri elemendi sõlmpunktides, s.t.

$$\mathbf{N}^e = [N_1^e \quad N_2^e \quad \dots N_{n_e}^e \quad]; \qquad \mathbf{a}^e = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{n_e} \end{bmatrix} \tag{6.53}$$

kus n_e märgib elemendi sõlmpunktide arvu. Võrrandist (6.52) saadakse

$$\nabla \mathbf{T} = \mathbf{B}^e \mathbf{a}^e \qquad \mathbf{B}^e = \nabla \mathbf{N}^e \tag{6.54}$$

s.t.

$$\mathbf{B}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{n_e}^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_{n_e}^e}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{6.55}$$

Võrdlus võrranditega (6.30) . . . (6.34) näitab otse, et ühe elemendi lõplike elementide formuleering on antud kui

$$\mathbf{K}^e \mathbf{a}^e = \mathbf{f}^e \tag{6.56}$$

kus elemendi jõuvektor $\mathbf{f}^e$ on antud kui

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{f}_b^e + \mathbf{f}_l^e \tag{6.57}$$

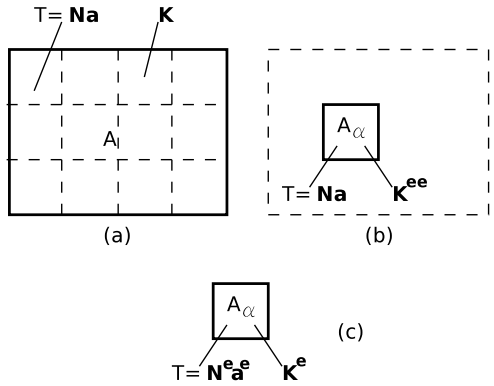
Enamgi veel, elemendi jäikusmaatriks $\mathbf{K}^e$, elemendi rajavektor $\mathbf{f}_b^e$ ja elemendi koormusvektor $\mathbf{f}_l^e$ elemendi α jaoks on:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^e &= \textstyle\int_{A_\alpha} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D} \mathbf{B}^e t dA \\ \mathbf{f}_b^e &= -\textstyle\int_{L_{h\alpha}} \mathbf{N}^{eT} h t dL - \int_{L_{g\alpha}} \mathbf{N}^{eT} q_n t dL \\ \mathbf{f}_l^e &= \textstyle\int_{A_\alpha} \mathbf{N}^{eT} Q t dA \end{aligned} \tag{6.58}$$

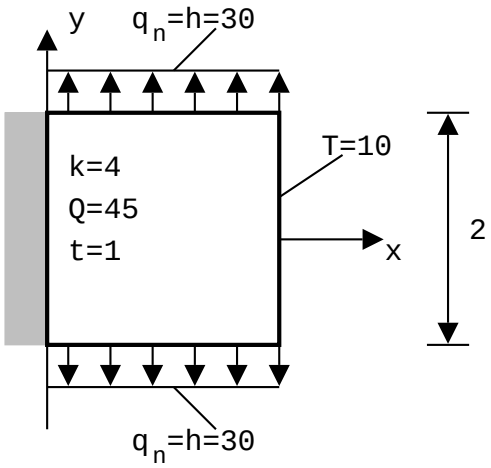
kus A_α on elemendi α piirkond, $L_{h\alpha}$ on osa elemendi rajast, millel voog $q_n = h$ on teda, samas kui $L_{g\alpha}$ on ülejäänud osa elemendi rajast. Rajatingimused piki elemendi piiri on tundmata, v.a. juhul, kui elemendi piir langeb kokku keha piiriga.

Kolm erinevat lõplike elementide formuleeringut – globaalne, laiendatud elemendi formuleering ja elemendi formuleering – on illustreeritud joonisel 6.4 . Globaalses formuleeringus arvestatakse tervet keha ja võetakse omaks kogu kehale kehtiv lähendus $T = \mathbf{Na}$. Laiendatud elemendi formuleeringus arvestatakse ühte elementi, kuid kasutatakse globaalset lähendust $T = \mathbf{Na}$. Lõpuks, elemendi formuleeringus, arvestatakse ühte elementi ja kasutatakse sellele konkreetsele elemendile kehtivat lähendust $T = \mathbf{N}^e \mathbf{a}^e$

Arvutiprogrammis määratakse elemendi jäikus $\mathbf{K}^e$ ja elemendi koormusvektor $\mathbf{f}_l^e$ võrrandiga (6.58) ja panus globaalsesse jäikusmaatriksisse $\mathbf{K}$ ja globaalsesse koormusvektorisse $\mathbf{f}_l$ saadakse geomeetrilisi andmeid kasutades. Rajavektor $\mathbf{f}_b$ tuletatakse alati võrrandit (6.31) kasutades. Kuna jäikusmaatriks $\mathbf{K}$, mis on antud võrrandiga (6.31) sisaldab globaalse kujuvektori esimest järku tuletisi, siis peavad need kujufunktsioonid täitma C^0-pidevuse nõuet [1, ptk. 9.7].



Joonis 6.4: Kolm erinevat lplike elementide formuleeringut: (a) globaalne; (b) laiendatud element; (c) element.



Joonis 6.5: Ruutpaneel soojusvooga.

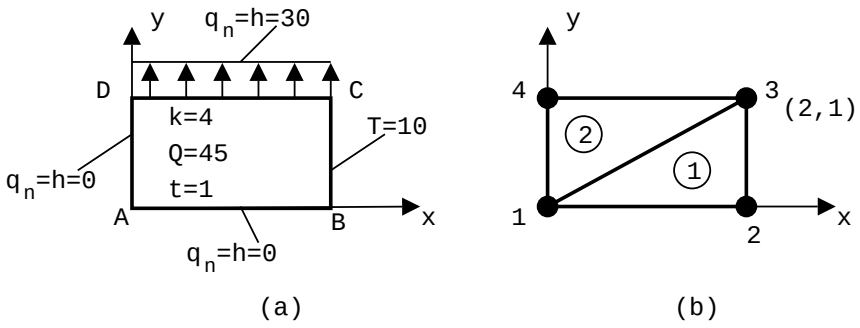
Kui sõlmpunkti temperatuur määratakse võrrandi (6.34) järgi, siis on temperatuur T antud elemendi suvalises punktis võrrandiga (6.52) ja temperatuurigradient $\nabla \mathbf{T}$ on antud võrrandiga (6.54) . Temperatuurigradiendist tuleneb, et voovektor $\mathbf{q}$ saadakse keha suvalises kohas Fourier' seadusest (6.19) . Sestap, kui $\mathbf{a}$ on võrrandist (6.34) määratud, saab kõiki huvitavaid suurusi tuletada.

6.4 2D näide

Olgu ruudukujuline pannel joonisel 6.5 , mille piir piki y-telge on isoleeritud (s.t. $q_n = h = 0$) ja konstantne voog $q_n = h = 30J/(m^2 s)$ on piki piiri kohal $y = 1m$ ja $y = -1m$. Konstantne temperatuur $T = 10°C$ on piki $x = 2m$ ja konstantne soojusallikas $Q = 45J/(m^2 s)$ on üle kogu paneeli. Plaadi paksus $t = 1m$ on konstantne. Materjal on eelduse järgi isotroopne ja homogeenne, s.t. vastavalt [1, 6.13...6.14] on soojusjuhtivuse maatriks $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{D} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} k\mathbf{I} \tag{6.59}$$

kus soojusjuhtivus $k = 4J/(°Cms)$.



Joonis 6.6: (a) Probleemi ümberformuleerimine; (b) lõplike elementide võrk.

On selge, et soojusvoog paneelis on sümmeetriline x-telje suhtes, s.t. voogu x-teljega risti pole. Siis võib probleemi ümber formuleerida, nagu kujutatud joonisel 6.6 (a).

Et lahendada seda probleemi käsitsi lõplike elementide meetodil, kasutatakse erakordselt lihtsat lõplike elementide mudelit, mis koosneb kahest kolmesõlmelisest kolmnurgast 6.6 (b). Elementide ja sõlmede globaalsed numbrid on samuti joonisel näidatud.

Elemendi jäikusmaatriks $\mathbf{K}^e$ ja elemendi koormusvektor $\mathbf{f}_l^e$ on antud võrrandiga (6.58) . Koos võrrandiga (6.59) ja arvestades, et $\mathbf{B}^e$ on konstantne maatriks kolmesõlmelise kolmnurga jaoks [1, 7.99], saadakse, et

$$\mathbf{K}^e = k\mathbf{B}^{eT}\mathbf{B}^e t A_\alpha \tag{6.60}$$

kus

$$\mathbf{B}^e = \frac{1}{2A_\alpha}\begin{bmatrix} y_j - y_k & y_k - y_i & y_i - y_j \\ x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i \end{bmatrix} \tag{6.61}$$

Kuna nii koormus Q kui ka paksus t on konstantsed, siis võrrandist (6.58) saadakse:

$$\mathbf{f}_l^e = Qt\int_{A_\alpha} \mathbf{N}^{eT} dA \tag{6.62}$$

Elemendi kujumaatriks on antud võrrandiga [1, 7.92] ja võrrandi (6.62) saab arvutada pindintegraali standardreeglite järgi. Antud juhul varieeruvad kujufunktsioonid lineaarselt, mis tähendab, et võrrandi (6.62) saab arvutada väga lihtsal viisil. Selleks vaadelda keha joonisel 6.7 , ruumala V on tuntud kui

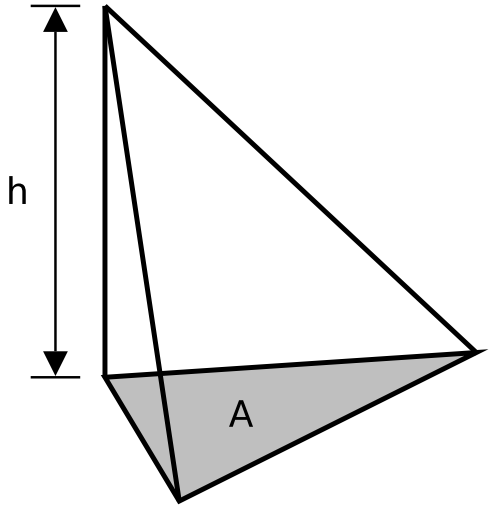
$$V = \frac{1}{3}hA \tag{6.63}$$

kus h on keha baasi moodustava kolmnurga hõrgus ja A selle pindala.

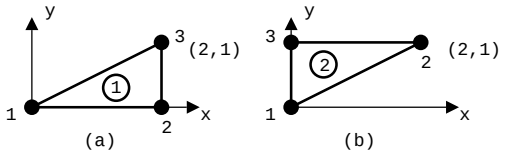
Pilk joonisele [1, 7.23] näitab, et elemendi kujufunktsioonid varieeruvad joonisel 6.7 kujutatud viisil, s.t. võrrandist (6.62) saadakse koos võrrandiga (6.63)

$$\mathbf{f}_l^e = \frac{Q}{3}tA_\alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6.64}$$

See tulemus pole kindlasti üllatav, sest see näitab, et konstantne koormus Q annab võrdse panuse igasse sõlmpunkti.



Joonis 6.7: Keha kolmnurkse alusega ja kõrgusega h.



Joonis 6.8: Elemendi 1 (a) ja 2 (b) lokaalsed sõlmpunktid.

Kahe elemendi lokaalsed sõlmpunktid on joonisel 6.8 ja need on järjestatud vastupäeva. Esmalt arvestatakse elementi 1, kus $i = 1$, $j = 2$ ja $k = 3$, s.t.

$$x_i = y_i = 0; \qquad x_j = 2, y_j = 0; \qquad x_k = 2, y_k = 1$$

Nende väärtustega ja pindala $A_1 = 1$ korral tuleneb võrrandist (6.61)

$$\mathbf{B}^e = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \tag{6.65}$$

Võrranditest (6.60) ja (6.64) ning paksusest $t = 1$ saadakse tulemus esimese elemendi jaoks:

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{f}_l^e = 15\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kui võrrelda jooniseid 6.6 (b) ja 6.8 (a), siis sõlmpunktid $1, 2, 3$ vastavad globaalsetele sõlmpunktidele $1, 2, 3$. Seega, peale esimese elemendi panust on globaalne jäikusmaatriks $\mathbf{K}$ ja globaalne koormusvektor $\mathbf{f}_l$:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1^{ee} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{f}_l = \mathbf{f}_{l1}^{ee} = 15\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.66}$$

Järgnevalt arvestada elementi 2 joonisel 6.8 (b), kus $i = 1$, $j = 2$ ja $k = 3$, s.t.

$$x_i = y_i = 0; \qquad x_j = 2, y_j = 1; \qquad x_k = 0, y_k = 1$$

Kui pindala $A_2 = 1$ ja $\mathbf{B}^e$ on antud võrrandiga (6.61) , siis

$$\mathbf{B}^e = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{6.67}$$

Võrrandeist (6.60) ja (6.64) järgnevad tulemused teise elemendi jaoks:

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 5 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{f}_l^e = 15\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jooniste 6.6 (b) ja 6.8 (b) võrdlemisel selgub, et antud elemendi topoloogia on selline, et lokaalsetele sõlmpunktidele $1, 2, 3$ vastavad globaalsed sõlmpunktid $1, 3, 4$. Selguse huvides on laiendatud elemendi jäikusmaatriks $\mathbf{K}^{ee}$ ja laiendatud elemendi koormusvektor $\mathbf{f}_l^{ee}$ seda topoloogiat kasutades:

$$\mathbf{K}_2^{ee} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{f}_l^e = 15\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lisades need tulemused võrrandile (6.66)

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & -4 \\ -1 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -1 \\ -4 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{f}_l = 15\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6.68}$$

Nüüd on aeg arvutada rajavektor $\mathbf{f}_b$, mis on antud võrrandiga (6.31) . Jooniselt 6.6 saab järeldada, et

$$\mathbf{f}_b = -\int_{L_{AB}} \mathbf{N}^T h t dL - \int_{L_{DC}} \mathbf{N}^T h t dL - \int_{L_{AD}} \mathbf{N}^T h t dL - \int_{L_{BC}} \mathbf{N}^T q_n t dL$$

s.t.

$$\mathbf{f}_b = -t\int_{L_{DC}} \mathbf{N}^T h dL - t\int_{L_{BC}} \mathbf{N}^T q_n dL \tag{6.69}$$

Ainsad kujufunktsioonid, mis pikki piiri DC erinevad nullist, on N_3 ja N_4. Enamgi veel, need varieeruvad lineaarselt ja kui $h = 30$ pikki DC-d, siis

$$\int_{L_{DC}} \mathbf{N}^T h dL = 30\int_{L_{DC}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} dL = 30\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6.70}$$

Samamoodi järgneb, et

$$\int_{L_{BC}} \mathbf{N}^T q_n dL = \begin{bmatrix} 0 \\ \int_{L_{BC}} N_2 q_n dL \\ \int_{L_{BC}} N_3 q_n dL \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.71}$$

Kasutades võrrandeid (6.69) – (6.71) ja paksust $t = 1$, siis piirivektor

$$\mathbf{f}_b = -\begin{bmatrix} 0 \\ \int_{L_{BC}} N_2 q_n dL \\ 30 + \int_{L_{BC}} N_3 q_n dL 30 \end{bmatrix} \tag{6.72}$$

Keha lõplike elementide võrrandid saadakse võrrandeist (6.68) ja (6.72) :

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & -4 \\ -1 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -1 \\ -4 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ 10 \\ 10 \\ T_4 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ \int_{L_{BC}} N_2 q_n dL \\ 30 + \int_{L_{BC}} N_3 q_n dL \\ 30 \end{bmatrix} + 15 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6.73}$$

kus $T_2 = T_3 = 10$. Esimesest ja neljandast reast saadakse

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 - 0 + 30 \\ 10 - 30 - 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ -5 \end{bmatrix}$$

koos lahendiga

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 15 \end{bmatrix}^o C \tag{6.74}$$

Kasutades seda lahendit (6.73) teise ja kolmanda rea jaoks, siis

$$\int_{L_{BC}} N_2 q_n dL = 25; \qquad \int_{L_{BC}} N_3 q_n dL = 5 \tag{6.75}$$

Kuna N_2 ja N_3 on positiivsed funktsioonid, vihjavad seosed (6.75) , et q_n on positiivne pikki piiri BC, s.t saab järeldada, et hoida temperatuuri väärtusel $T = 10$ pikki piiri BC, peaks soojus väljuma kehast pikki seda piiri. Koos tulemusega (6.75) tuleneb võrrandist (6.73) , et keha tasakaaluprintsiip on rahuldatud kooskõlas võrrandiga (6.44) . Viimaks määratakse voovektor q igas elemendis. Võrrandeist (6.19) ja (6.54) saadakse

$$\mathbf{q} = -\mathbf{D}\nabla\mathbf{T} = -k\nabla\mathbf{T} = -k\mathbf{B}^e\mathbf{a}^e$$

kus $k = 4$. Elemendi 1 jaoks saadakse koos võrrandiga (6.65) , et

$$\mathbf{q} = -4 \times \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix} J/(m^2 s)$$

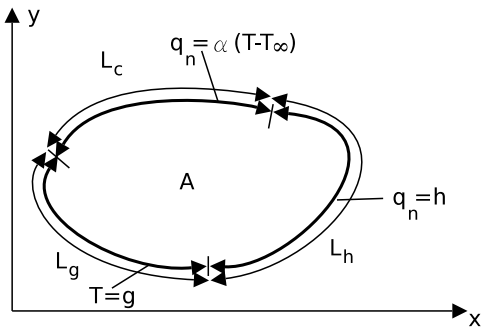
ja elemendi 2 jaoks, kuna kehtib (6.67) :

$$\mathbf{q} = -4 \times \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix} J/(m^2 s)$$

6.5 2D soojusvoog koos konvektsiooniga

Eelnevalt eeldati, et piir L koosneb kahest osast: L_h ja L_g, kus on vastavalt kirjeldatud voog q_n ja temperatuur T. Olgu nüüd samuti eeldus, et konvektsioon toimub piiri osal L_c. Vastavalt võrrandile (6.31) mõjutab see ainult rajavektorit $\mathbf{f}_b$, mille jaoks saadakse:

$$\mathbf{f}_b = -\int_{L_h} \mathbf{N}^T h t dL - \int_{L_g} \mathbf{N}^T q_n t dL - \int_{L_c} \mathbf{N}^T q_n t dL \tag{6.76}$$



Joonis 6.9: Kahemõõtmeline piirkond koos rajaga $L = L_h + L_g + L_c$.

kus L_h, L_g ja L_c sisaldavad nüüd kogu piiri, nagu näidatud joonisel 6.9 . Konvektsioon pikki L_c on antud Newtoni konvektsiooni rajatingimusega [1, 9.143]:

$$q_n = \alpha(T - T_\infty) \tag{6.77}$$

Et arvestada konvektsiooni mõju, asendatakse tundmatu temperatuur T valemis (6.77) suurusega $T = \mathbf{Na}$, saades

$$q_n = \alpha\mathbf{Na} - \alpha T_\infty$$

ning võrrand (6.76) saab kuju:

$$\mathbf{f}_b = -\int_{L_h} \mathbf{N}^T h t dL - \int_{L_g} \mathbf{N}^T q_n t dL - \left(\int_{L_c} \alpha \mathbf{N}^T \mathbf{N} t dL\right)\mathbf{a} + T_\infty \int_{L_c} \mathbf{N}^T \alpha t dL$$

Koos selle võrrandiga võtab lõplike elementide formuleering (6.32) kuju

$$\begin{gathered}(\mathbf{K} + \mathbf{K}_c)\mathbf{a} = -\int_{L_h} \mathbf{N}^T h t dL - \int_{L_g} \mathbf{N}^T q_n t dL + T_\infty \int_{L_c} \mathbf{N}^T \alpha t dL + \mathbf{f}_l \\ \mathbf{K}_c = \int_{L_c} \alpha \mathbf{N}^T \mathbf{N} t dL\end{gathered} \tag{6.78}$$

Ilmneb, et jäikusmaatriks modifitseerub. See uus jäikusmaatriks on sümmeetriline, nagu ka $\mathbf{K}$ ja mittesingulaarne:

$$det(\mathbf{K} + \mathbf{K}_c) \neq 0 \tag{6.79}$$

Lõpetuks tuleb märkida, et on võimalik arvestada konvektsiooni pikki piirkonna A külgpindasid, s.t. xy-tasandil. Seda olukorda saab käsitleda koormuse Q muutmisega, mis viib koormusvektori $\mathbf{f}_l$ modifitseerimiseni nagu seda tehti 1D soojusvoo korral võrrandeis [1, 9.152, 9.154 ja 9.155].

6.6 3D soojusvoog

3D soojusvoo nõrk vorm on antud võrranditega [1, 6.49 ja 6.50], s.t.

$$\begin{gathered}\int_v (\nabla v)^T \mathbf{D} \nabla T dV = -\int_{S_h} v h dS - \int_{s_g} v q_n dS + \int_V v Q dV \\ T = g\end{gathered} \tag{6.80}$$

pinnal S_g. Siin V on keha ruumala ja S on piirpind, mis koosneb S_h-st ja S_g-st, millel on vastavalt antud voog $q_n = h$ ja temperatuur $T = g$.

Temperatuuri lähendatakse jällegi järgmiselt:

$$T = \mathbf{Na} \tag{6.81}$$

kus

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_n]; \mathbf{a} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix} \tag{6.82}$$

n on kogu keha sõlmpunktide arv ja komponent N_i sõltub nüüd x-st, y-st ja z-st, s.t. $N_i = N_i(x, y, z)$. Võrrandist (6.81) saadakse

$$\nabla \mathbf{T} = \mathbf{Ba}; \qquad \mathbf{B} = \nabla \mathbf{N} \tag{6.83}$$

s.t.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{6.84}$$

Lõplike elementide formuleeringu tuletamine võrrandist (6.80) kasutades ülaltoodud lähendust kombineerituna Galerkini meetodiga järgib sama rada, mis sama tuletus 2D soojusvoo jaoks. Sestap võib tulemuse kohe väljendada kui

$$\mathbf{Ka} = \mathbf{f} \tag{6.85}$$

kus

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_b + \mathbf{f}_l \tag{6.86}$$

ja

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV$$

$$\mathbf{f}_b = -\int_{S_h} \mathbf{N}^T h dS - \int_{S_g} \mathbf{N}^T q_n dS \tag{6.87}$$

$$\mathbf{f}_l = \int_V \mathbf{N}^T Q dV$$

Ka siin on jõuvektori $\mathbf{f}$ dimensiooniks [J/s]. Enamgi veel, 2D soojusvoo tuletamise arutluskäigu saab otseselt 3D soojusvoole üle kanda. Märkuseks niipalju, et konvektsioon toimub vaid läbi piirpinna osa S_c. Vastav piirvektori $\mathbf{f}_b$ modifikatsioon on sarnane sellega, mis tehti 2D soojusvoo korral.

7 Difusioon

7.1 Difusioonivõrrandid

Difusiooniprotsess on kontsentratsiooni ühtlustamine ühe faasi piires. Mittepoorses keskkonnas on huvitavaks suuruseks difundeeruva materjali voolukiirus. Materjali voolu tekitab aga kontsentratsioonigradient. Üldjuhul osaleb protsessis kaks või enam ainet, mistõttu on ka rohkem kui üks difusioonivõrrand.

Olgu J aine hulk pindalaühiku ja ajaühiku kohta. Kui x on koordinaat, mis on valitud risti võrdluspinnaga ja c on difundeeruva aine kontsentratsioon, mis on antud ainehulgana kuupsentimeetris, siis Ficki esimene difusiooniseadus on kujul:

$$J = -D\frac{\partial c}{\partial x} \tag{7.1}$$

kus D on difusioonikonstant ühikutes ruutsentimeetrit sekundi kohta (cm^2/s). J-i võib vaadelda kui difusioonivoolu vektorina nii, et

$$\mathbf{J} = -D\nabla c \tag{7.2}$$

või

$$J_i = -Dc_{,i} \tag{7.3}$$

kusjuures $i = 1, 2, 3$ (vastavalt ühe-, kahe- ja kolmemõõtmeline ruum). Lühikese aja t korral saab kergesti näidata, et

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \tag{7.4}$$

Seda nimetatakse Ficki teiseks difusiooniseaduseks. D on siin konstant. Mitmemõõtmelise difusiooni korral omandab (7.4) kuju

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\nabla^2 c = Dc_{,ii} \tag{7.5}$$

Juhul, kui D pole konstantne, tuleneb võrrandist (7.5)

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (D\nabla c) = (Dc_{,i})_{,i} \tag{7.6}$$

Kui D pole otseselt positsioonist sõltuv, saadakse

$$\frac{\partial c}{\partial t} = Dc_{,ii} + \frac{\partial D}{\partial c}c_{,i}c_{,i} \tag{7.7}$$

Mitteisotroopse aine korral

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_{xx}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D_{yy}\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + D_{zz}\frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \tag{7.8}$$

kus D_{xx}, D_{yy} ja D_{zz} on vastavalt difusioonikonstandid x-, y- ja z-suunas.

Muutugu kontsentratsioon difusiooni mõjul ja ilma väliste jõudude vahelesegamiseta. Ühemõõtmelise probleemi korral

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v\frac{\partial c}{\partial x} \tag{7.9}$$

kus v on konvektsioonikiirus. Mitmemõõtmelise probleemi jaoks saadakse:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\nabla^2 c - \mathbf{v} \cdot \nabla c \tag{7.10}$$

või

$$\frac{\partial c}{\partial t} = Dc_{,ii} - v_i c), i \tag{7.11}$$

Kui lahustunud molekulidele või kolloidosakeste või teatud sorti gaasimolekulidele mõjub x-suunas väline jõud f ja vaatluse all olevate osakeste liikuvus on m, siis materjali koguvool on

$$cfm = cv$$

Seega selle voolu põhjustatud kontsentratsiooni muutumise kiirus

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}(cv) \tag{7.12}$$

Mitmemõõtmelisel juhul

$$\frac{\partial c}{\partial t} = Dc_{,ii} - (cv_i)_{,i} \tag{7.13}$$

Kui üksiku komponendi kontsentratsiooni muutumise kiirust mõjutab osaliselt difusioon ja osaliselt keemiline reaktsioon, siis vastav ühemõõtmeline võrrand omandab kuju

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + f(c) \tag{7.14}$$

kus $f(c)$ on reaktsioonikiiruse seadus ja võib sõltuda teiste komponentide kontsentratsioonidest ning välistest mõjudest nagu valgustatus.

7.2 Lõplike elementide võrrandid

Lõplike elementide võrrandite formulatsioon võib põhineda võrranditel (7.5) , (7.7) , (7.8) , (7.11) või (7.13) mitmemõõtmeliste probleemide korral. Olgu näitena aluseks võrrand (7.5)

$$\dot{c} - Dc_{,ii} = 0$$

koos kontsentratsiooniga c, mida on lähendatud järgmiselt:

$$c = \Phi_N c_N$$

Lokaalne lõplike elementide võrrand saadakse järgmine:

$$\int_\Omega (\dot{c} - Dc_{,ii})\Phi_N d\Omega = 0$$

või

$$A_{NM}\dot{c}_M + B_{NM}c_M = f_N \tag{7.15}$$

kus

$$A_{NM} = \int_\Omega \Phi_N \Phi_M d\Omega \tag{7.16}$$

$$B_{NM} = \int_\Omega D\Phi_{N,i}\Phi_{M,i} d\Omega \tag{7.17}$$

$$f_N = \int_\Gamma Dc_{,i} n_i \Phi_N d\Gamma = \int_\Gamma J_i n_i \Phi_i d\Gamma \tag{7.18}$$

Sisendvool äärtel on antud f_N-ga võrrandist (7.18) . Saab seada $J_i n_i = J_0$ nii, et

$$f_N = \int_\Omega J_0 \Phi_N d\Omega$$

Kui difusiooni kirjeldab võrrand (7.11) , siis saadakse

$$\int_\Omega (\dot{c} - dc_{,ii} + v_i c_{,i}) \Phi_N d\Omega = 0 \tag{7.19}$$

või

$$A_{NM}\dot{c}_M + B_{NM}c_M + E_{NM}c_M = f_N$$

kus

$$E_{NM} = \int_\Omega v_i \Phi_N \Phi_{M,i} d\Omega$$

kusjuures ülejäänud suurused on samad, mis varemalt. Püsiv kiirus v_i määratakse välisjõu f_i ja vaatluse all olevate osakeste liikuvuse korrutisena.

Võrrandis (7.19) olevad standardsed testfunktsioonid Φ_N on identsed kasutatud proovifunktsioonidega. Konvektsiooniliikme olemasolu annab oma panuse lahendi ebastabiilsusesse või ostsilleerumisse, kui võrgusilmi väiksemaks tehakse. Samas võivad vastuvoolulised lõplikud elemendid kompenseerida selle raskuse ja anda monotoonse konvergeeruvuse. Seda võib saavutada spetsiaalsete testfunktsioonidega, mille järk on kõrgem kui proovifunktsioonidel. Sellisel juhul:

$$\int_\Omega (\dot{c} - Dc_{,ii} + v_i c_{,i}) W_N d\Omega = 0 \tag{7.20}$$

koos $c = \Phi_N c_n$, kus Φ_N-i võib vaadelda standardse lineaarse interpolatsioonifunktsioonina. Siis testfunktsioon

$$W_N = \Phi_N + \Psi_N \tag{7.21}$$

kus Ψ_N ühedimensionaalse juhu jaoks on antud kui

$$\Psi_1 = \frac{3\alpha}{h^2} x(x-h) \qquad \Psi_1 = -\Psi_2$$

Kahedimensionaalsete isoparameetriliste elementide jaoks on soovitatud, et

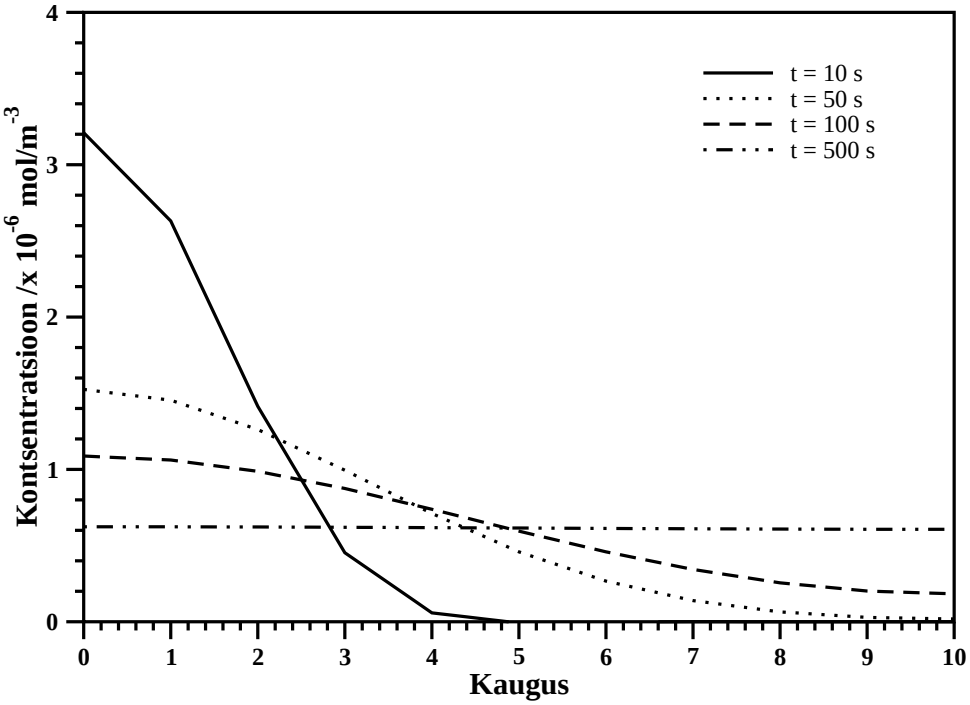
$$W_N = [\Phi_n(\xi) + \Psi_N(\xi)][\Phi_N(\eta) + \Psi_N(\eta)] \tag{7.22}$$

$$\Psi_1(\xi) = \frac{3\alpha}{4}(\xi^2 - 1) = \Psi_4(\xi) = -\Psi_2(\xi) = -\Psi_3(\xi)$$

$$\Psi_1(\eta) = \frac{3\beta}{4}(\eta^2 - 1) = \Psi_2(\eta) = -\Psi_3(\eta) = -\Psi_4(\eta)$$

kusjuures α ja β märgid kattuvad antud sõlme kiiruse märkidega. Erinevad võrrandi (7.20) maatriksid on nüüd antud kui:

$$A_{NM} = \int_\Omega W_N \Phi_M d\Omega \quad B_{NM} = \int_\Omega D W_{N,i} \Phi_{M,i} d\Omega \quad E_{NM} = \int_\Omega v + i W_N \Phi_{M,i} d\Omega$$



Joonis 7.1: 1D difusioon ilma konvektsioonita. Sisendkontsentratsioon $c_0 = 1E - 5$ eemaldatakse peale esimest ajasammu. $D = 0.1$. Lineaarne interpolatsioon.

7.3 Näidisprobleemid

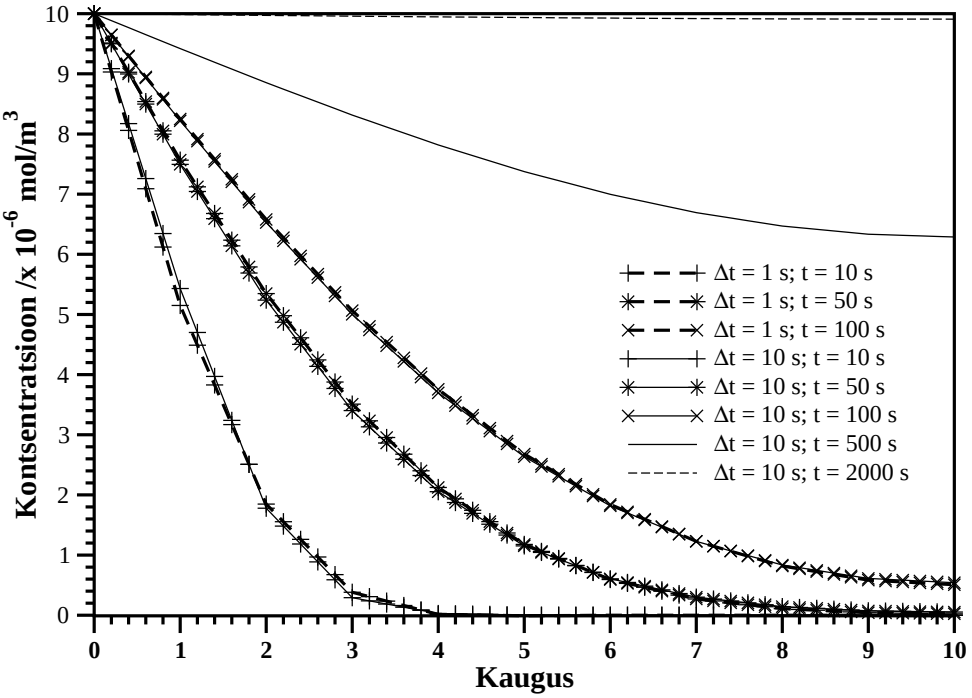
7.3.1 Difusioon ilma konvektsioonita

Olgu alul lihtsuse mõttes ühemõõtmeline difusioon koos konvektsiooniga. Poollõpmatu pikkuse ja ühikulise läbilõikega silindri analüütiline lahend on

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{4\pi Dt}} exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \tag{7.23}$$

kus c_0 on aine kogus kohal $x = 0$, mis allub difusioonile. Praktilistes rakendustes ollakse huvitatud lõplikest piirkondadest või c_0-i konstantsusest teatud aja vältel või aine eemaldamisest määratud ajaks. Need omadused võib lisada lõplike elementide lahendisse. Olgu illustreerimiseks ühemõõtmeline piirkond, mis koosneb 10 elemendist ja 11 sõlmest. Difusioonikoefitsient $D = 0.1$. Alg- ja ääretingimused on: $c_0 = 1E - 5$ kohal $x = 1$ ja $\partial c/\partial x = 0$ kohal $x = 10$. Mõlema otsaga külgnevad sõlmed on rohkem lähestikku viidud, et paremini jälgida väljundandmeid. Näites kasutatakse ajutist operaatorit [8, 3-54a] koos $\theta = 0$ (täielik skeem). Optimaalne Δt on vahemikus $1s \leq \Delta t \leq 10s$ koos ostsilleerumisega, kui $\Delta t \leq 1s$. Vahemike $\Delta t > 10s$ korral moonutatakse varasem kulg ära. Sisendkontsentratsioon eemaldatakse pärast esimest ajasammu. Tulemused joonisel 7.1 järgivad valemi (7.23) üldist trendi lõpmatu silindri jaoks, kuid sellest näitest on silmnähtav ka lõpliku mõõtme efekt. Tasakaalulisse olekusse jõutakse umbes $t = 500s$ juures. Seda on kontrollitud $\Delta t = 1, 10, 100s$ korral.

Joonis 7.2 annab tulemused juhu jaoks, mil sisendkontsentratsiooni ei eemaldata, vaid see jääb piiramatuks. Siis jõutakse tasakaalulisse olekusse 2000 s pärast. Lahend $\delta t = 10s$ jaoks jäävad kergelt maha tulemustest $\delta t = 1s$ omadest, võimalik, et varasemate sammude moonutatud käigu pärast, kuid aja kulgedes jõuavad neile järele.



Joonis 7.2: 1D difusioon ilma konvektsioonita. Sisendkontsentratsioon $c_0 = 1E-5$ eemaldatakse peale esimest ajasammu. $D = 0$. Lineaarne interpolatsioon.

Antud tüüpi ajutise operaatori korral võib δt valik olla üsna tundlik. δt piirväärtuste määramiseks tuleb järgida üldisi juhiseid sektsioonis [8, ptk. 3-3-3]. Tuleb märkida, et mõnel juhul täpsus suuremate $deltat$ väärtuste korral halveneb, samas kui vastupidine toimub ülejäänutel juhtudel. See on tingitud sellest, et δt piirväärtused nii, nagu need ilmuvad laiendusmaatriksisse, on mõjutatud lõplike elementide formulatsiooni füüsikalistest ja geomeetrilistest parameetritest.

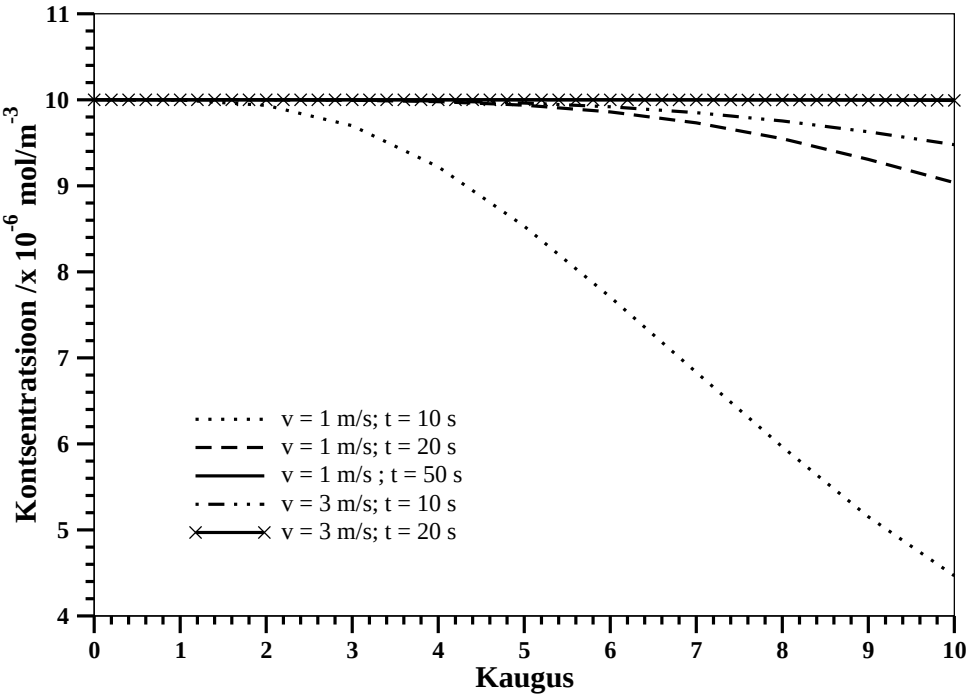
7.3.2 Konvektiivne difusioon (Neumanni-Dirichlet' probleem)

Käesoleva näite eesmärgiks on demonstreerida konvektiivse liikme ((7.19) ja (7.20)) efekti. Alg- ja ääretingimused on samad, mis eelmises näites. Koos lineaarsete proovifunktsioonidega Φ_N ja 2. järku testfunktsioonidega W_N omandavad mitmesugused maatriksid alljärgnevad kujud:

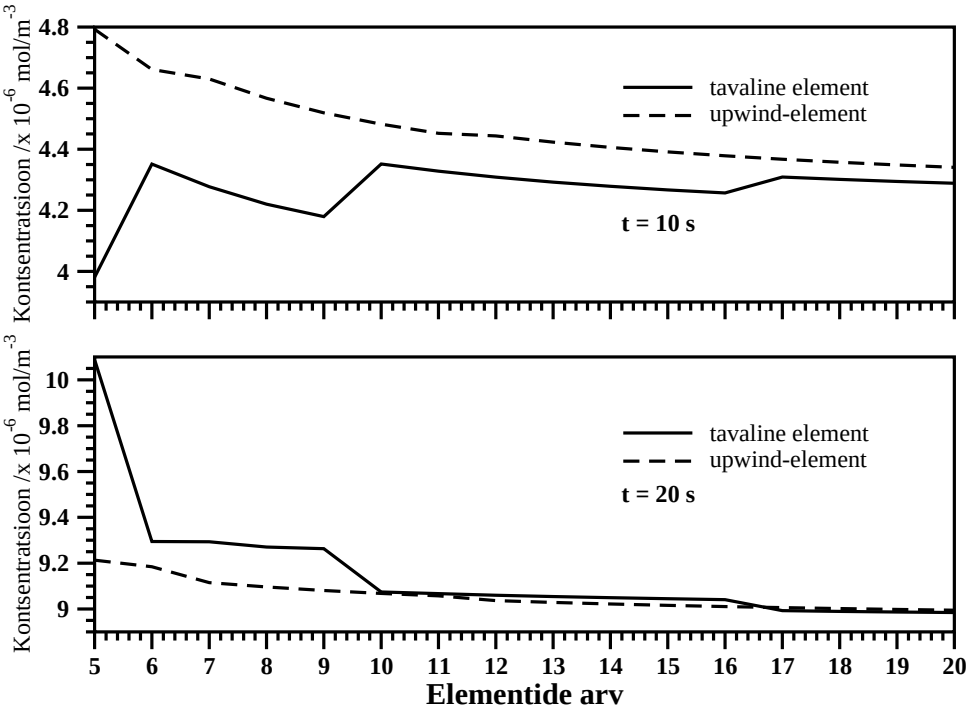
$$A_{NM} = \frac{h}{12}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \quad B_{NM} = \frac{D}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad C_{NM} = v\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Valemis (7.22) on $\alpha = 1$

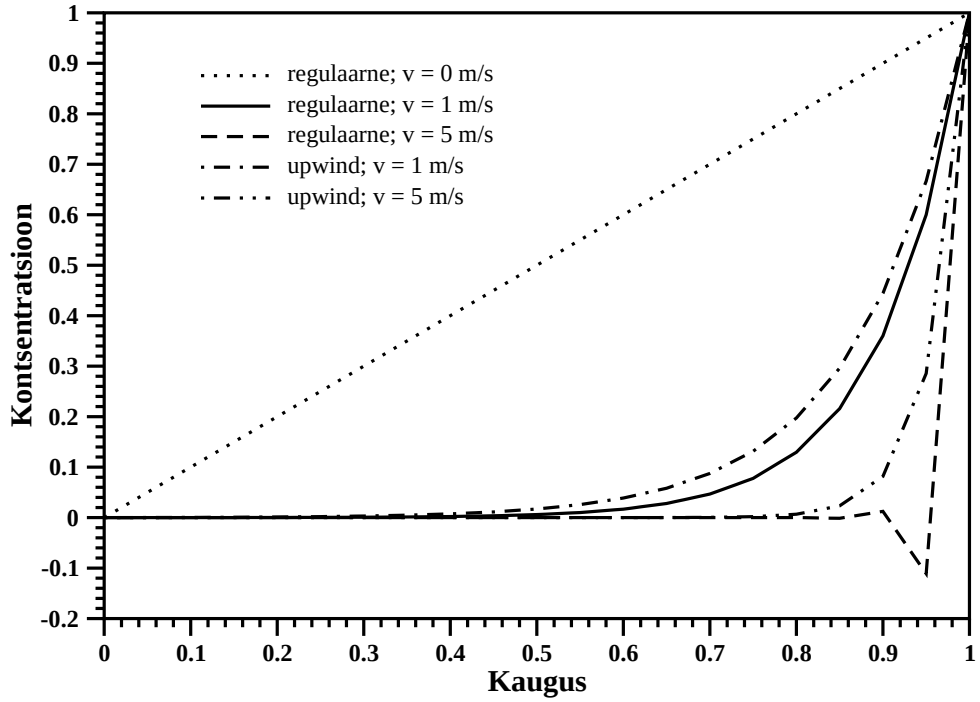
Lahend 10 võrdse elemendi, $c_0 = 1E-5$ kohal $x = 0$ ajavahemiku $0 \le t \le \infty$ ja $\partial c/\partial t = 0$ kohal $x = 10$ korral on joonisel 7.3 . Suurem konvektsioonikiirus lükkab vastuse kiiresti tasakaalulisse olekusse. Joonisel 7.4 on lahendi koondumiskarakteristikud võrgu viimistlusel testfunktsioonide Φ_N ja W_N korral. Vastusuunaliste lõplike elementide, mis kasutavad testfunktsioone W_N efektiivsus pole antud näites kasutatud ääretingimuste puhul nii ilmne. Vastusuunaliste elementide väärtus on aga seotud Dirichlet' probleemiga ning seda käsitletakse järgmises näites.



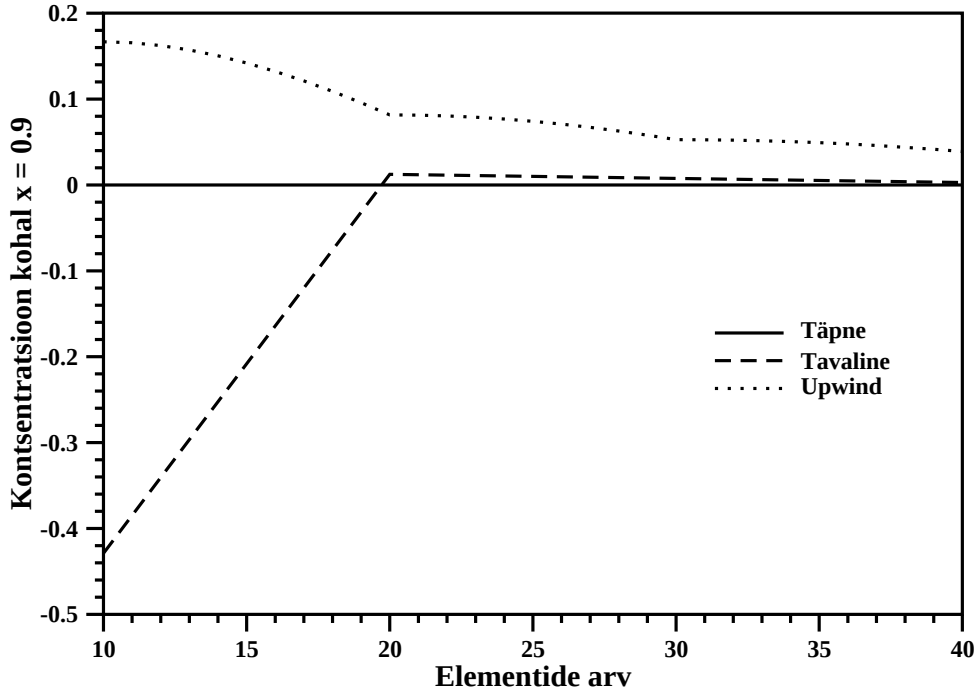
Joonis 7.3: Difusioon koos konvektsiooniga. 10 võrdse pikkusega lineaarelementi. $\Delta t = 10s$, $D = 0.1$. Petrov-Galerkini *upwind*-difusioon parameetriga 0.5.



Joonis 7.4: Difusioon koos konvektsiooniga. 10 võrdse pikkusega lineaarelementi. $\Delta t = 10s$, $D = 0.1$. Tavalised elemendid ja Petrov-Galerkini *upwind*-difusioon parameetriga 0.5. Muutuv elementide arv.



Joonis 7.5: Difusioon koos konvektsiooniga. $c(0) = 0$, $c(1) = 1$, $D = 0.1$, $\Delta t = 10s$. Kontsentratsioon ajahetkel $t = 2000s$.



Joonis 7.6: Difusioon koos konvektsiooniga. $c(0) = 0$, $c(1) = 1$, $D = 0.1$, $\Delta t = 10s$. Koondumine koos võrgu peenendamisega ajahetkel $t = 2000s$ ja $v = 5m/s$ korral.

7.3.3 Konvektiivne difusioon (kahepunktiline rajaprobleem)

Nii (7.19) kui ka (7.20) lahendis olid ääretingimusteks $c(0) = 0$ ja $c(1) = 1$. Kuigi tasakaaluolekusse jõutakse umbes $t = 50s$ kohal, integreeritakse üle aja kuni 2000 s jooksul (joonis 7.5 et veenduda, et tasakaal on lõplik. Tasakaaluoleku täpne lahend on

$$c = \frac{exp(Px) - 1}{exp(P) - 1}$$

kus $P = v/D$ on Peclet' arv. $v = 1(P = 10)$ jaoks on regulaarse lõpliku elemendi (Φ_n) lahend peaaegu identne täpse tasakaaluoleku lahendiga, kuid see ostsilleerib ägedalt, kui v on jõudnud väärtuseni $v = 5(P = 50)$. Pilk joonisele 7.6 paljastab, et vastusuunaline lõplik element (W_N) annab monotoonse koonduvuse täpseks lahendiks, samas kui tavaline lõplik element kukub armetult läbi.

8 Vooludünaamika. Kokkusurumata voolamine

8.1 Liikumisvõrrandid ja ideaalse vedeliku pidevus

Ideaalse vedeliku liikumist kirjeldab Euleri võrrand

$$\alpha_i = \frac{DV_i}{Dt} = \dot{V}_i + V_{i,j}V_j = \frac{1}{\rho}(G_i - P_{,i}) \tag{8.1}$$

kus gravitatsioonijõud on defineeritud kui

$$G_i = \rho F_i = -(\rho g H)_{,i} = -J_{,i} \tag{8.2}$$

Siin g on raskuskiirendus ja H on kõrgus maa suhtes üle teatud nullpunkti. Asendades valemi (8.2) võrrandisse (8.1)

$$\dot{V}_i + V_{i,j}V_j = -\frac{1}{\rho}(P + J)_{,i} \tag{8.3}$$

või

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = -\nabla\left(\frac{P}{\rho} + \frac{J}{\rho}\right) \tag{8.4}$$

Valemeist [8, 1-10b], (8.3) ja (8.4) tuleneb, et

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{V^2}{2}\right) - \nabla \times \omega = -\nabla\left(\frac{P}{\rho} + \frac{J}{\rho}\right)$$

Stabiilse liikumise korral

$$\nabla \times \omega = \nabla\left(\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gH\right)$$

Mittepöörleva liikumise $\omega = 0$ jaoks

$$\nabla\left(\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gH\right) = 0$$

Pärast integreerimist saadakse

$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gH = \Gamma \tag{8.5}$$

See on tuntud kui Bernoulli' võrrand. Suurus Γ on konstantne, kui $\omega = 0$ või $\mathbf{V} = 0$. Bernoulli' võrrandi võib üldistada, kaasates mittepüsiva liikumise:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gH\right) = 0$$

Kasutades võrdust $\mathbf{V} = \nabla\phi$:

$$\nabla\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gH\right) = 0 \tag{8.6}$$

või

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gH = \Gamma(t) \tag{8.7}$$

8.2 2D mitteviskoosne vool

8.2.1 Lõplike elementide formuleeringud

Vooluprobleemides arvutatakse kas voolufunktsioonid või kiiruse potentsiaalid. Kiiruse jaotust kirjeldab valem:

$$V_i = \epsilon_{ij}\psi_{,j}$$

või

$$V_i = \phi_{,j}$$

Üldiselt sõltub valik kiiruse potentsiaali ja voolufunktsiooni vahel lõplike elementide mudelis sellest, kumma ääretingimusi on lihtsam määratleda. Kummalgi pole teise eest eelist, kui geomeetria on lihtne.

Vaatleme Laplace'i võrrandit [8, 4-71], kus voolufunktsiooni ψ võib lähendada lõplikes elementides kujul

$$\psi = \Phi_N \psi_N$$

koos $N = 1, 2, \ldots, r$ (r on sõlmede koguarv elemendis), Φ_N on interpolatsioonifunktsioonid ja ψ_N on ψ väärtused sõlmedes. Olgu [8, 4-71] jääk võrdne jäägiga ϵ. Siis

$$\nabla^2 \psi = \epsilon \tag{8.8}$$

Nüüd võtta arvesse jäägiruumi (8.8) ortogonaalprojektsiooni alamruumi, mida on täiendatud interpolatsioonifunktsioonidega Φ_N, mis käituvad Galerkini mõttes kaalufunktsioonidena:

$$(\epsilon, \Phi_N) = \int_\Omega \psi_{,ii}\Phi_N d\Omega = 0 \tag{8.9}$$

Kasutades Greeni-Gaussi teoreemi, saadakse:

$$\int_\Gamma \psi_{,i} n_i \check{\Phi}_N d\Gamma - \int_\Omega \psi_{,i}\Phi_{N,i} d\Omega = 0$$

või

$$\left\{ \int_\Omega \Phi_{N,i}\Phi_{M,i} d\Omega \right\} \psi_M = \int_\Gamma \psi_{,i} n_i \check{\Phi}_N d\Gamma \tag{8.10}$$

Siin $\check{\Phi}_N$ on interpolatsioonifunktsioon, mis vastab äärevoolule või voolufunktsiooni normaalgradiendile.

Lihtsustades:

$$A_{NM}\psi_M = F_N \tag{8.11}$$

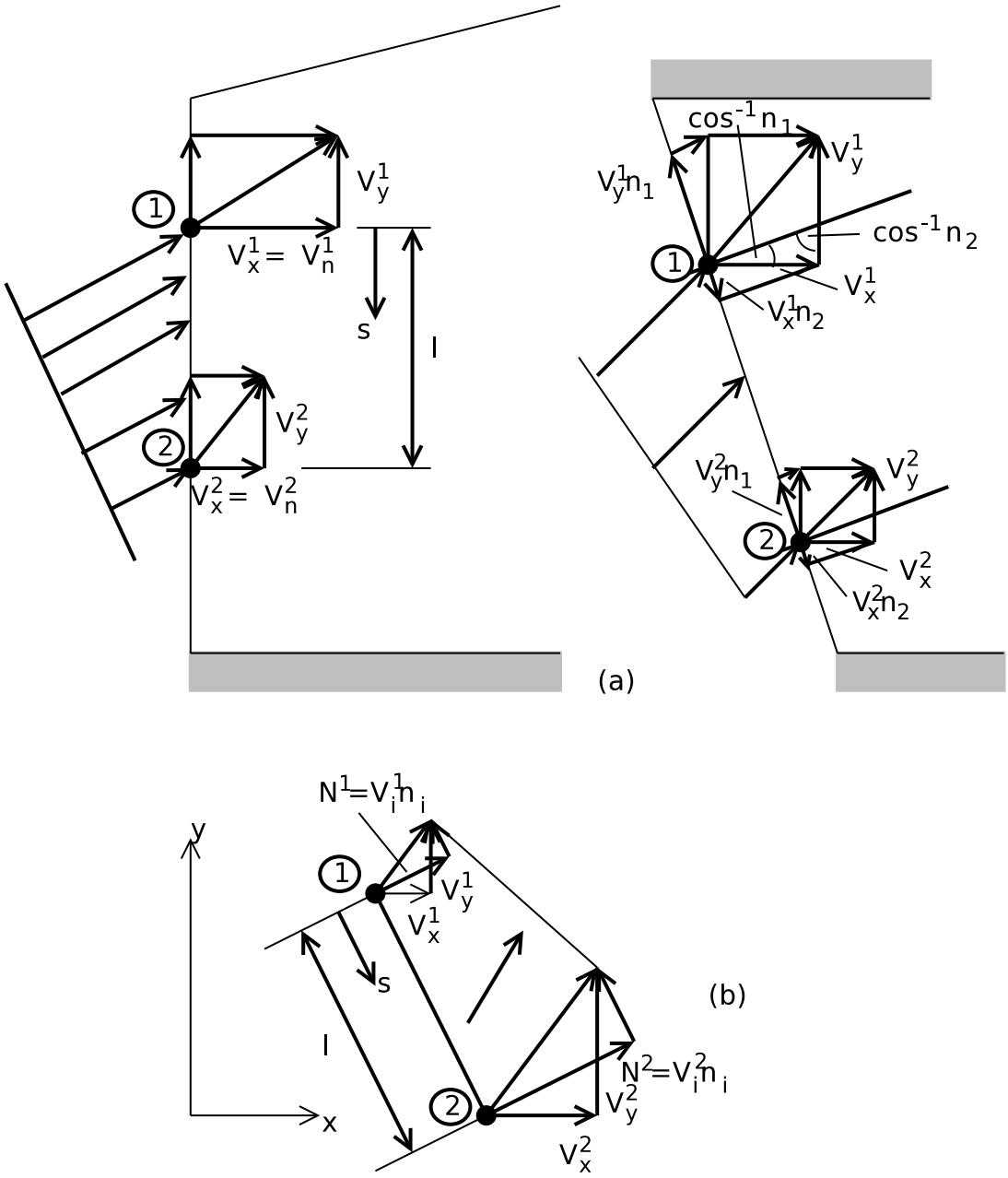
kus A_{NM} ja F_N on vastavalt koefitsientide maatriks ja vooluvektor:

$$A_{NM} = \int_\Omega \Phi_{N,i}\Phi_{M,i} d\Omega \tag{8.12}$$

$$\int_\Gamma \psi_{,i} n_i \check{\Phi}_N d\Gamma \tag{8.13}$$

Vooluvektorit võib väljendada alternatiivkujul:

$$F_N = \int_\Gamma \epsilon_{ji} V_j n_i \check{\Phi}_N d\Gamma \tag{8.14}$$



Joonis 8.1: Rajakiirused: (a) voolufunktsiooni ääretingimused; (b) potentsiaalifunktsiooni ääretingimused.

Olgu kiiruse jaotus kaldu olevate sõlmede 1 ja 2 vahel joonisel 8.1 lineaarne. Ühikulise paksuse jaoks

$$F_N = \int_0^l \psi_{,i} n_i \check{\Phi}_N ds = \int_0^l \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x} \check{\Phi}_N cos(n,x) + \frac{\partial \psi}{\partial y} \check{\Phi}_N cos(n,y) \right\} ds \tag{8.15}$$

või

$$F_N = \int_0^l \epsilon_{ji} V_j n_i \check{\Phi}_N ds = \int_0^l [V_x cos(n,y) - V_y cos(n,x)] \check{\Phi}_N ds \tag{8.16}$$

$\epsilon_{ji} V_j n_i$ esindab piirpinnaga joonisel 8.1 (a) paralleelse rajakiiruse komponente. Kui sissetulev kiirusevektor on risti piirpinnaga, siis on selline äär potentsiaalijooneks, millel peab asuma $\epsilon_{ji} V_j n_i$. Sellisel juhul kaob F_N hoolimata ääre sisendpinna orientatsioonist. Füüsikaliselt on F_N piirpinnaga paralleelse voolu suurus. Ilmselt sellist voolusuurust ei eksisteeri näiteks paralleelselt ääre sisendiga, kui sisenev vool on risti sisendiga. Sisendi suhtes muutuva suuruse suvaliste nurkade all olevate äärekiiruste jaoks võib teha lähenduse $\epsilon_{ji} V_j n_i = \epsilon_{ji} \check{\Phi}_M V_j^M n_i$, kus $\check{\Phi}_1 = 1 - s/l$ ja $\check{\Phi}_2 = s/l$. Siis

$$F_N = \int_0^1 \epsilon_{ji} V_j n_i \check{\Phi}_N ds = \int_0^1 \epsilon_{ji} \check{\Phi}_M V_j^M n_i \check{\Phi}_N ds$$

või

$$F_N = \int_0^l (\check{\Phi}_M V_x^M n_2 - \check{\Phi}_M V_y^M n_1) \check{\Phi}_N ds$$

Integreerimine annab

$$F_N = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} V_x^1 n_2 - V_y^1 n_1 + \frac{V_x^2 n_2}{2} - \frac{V_y^2 n_1}{2} \\ \frac{V_x^1 n_2}{2} - \frac{V_y^1 n_1}{2} + V_x^2 n_2 - V_y^2 n_1 \end{bmatrix} \tag{8.17}$$

Siin vastavad suunakoosinused n_1 ja n_2 sõlmkiirustele.

Kui voolufunktsiooni asemel kasutatakse kiiruse potentsiaali, siis $\phi = \Phi_N \phi_N$. Tehes läbi samasuguse arutluse nagu (8.8) … (8.11) , saadakse

$$A_{NM} \phi_M = F_N \tag{8.18}$$

kus A_{NM} on sama, mis (8.12) , kui F_N on kujul:

$$F_N = \int_\Gamma \phi_{,i} n_i \check{\Phi}_N d\Gamma = \int_\Gamma V_i n_i \check{\Phi}_N d\Gamma \tag{8.19}$$

$V_i n_i$ esindab pinna suhtes normaaläärekiirusi (joonis 8.1 (b)). Sestap $V_i n_i$ saab lähendada $\check{\Phi}_M V_i^N n_i$-ga, saades:

$$F_N = \int_0^l \check{\Phi}_M V_i^M n_i \check{\Phi}_N ds$$

või

$$F_N = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} V_x^1 n_1 + V_y^1 n_2 + \frac{V_x^2 n_1}{2} + \frac{V_y^2 n_2}{2} \\ \frac{V_x^1 n_1}{2} + \frac{V_y^1 n_2}{2} + V_x^2 n_1 + V_y^2 n_2 \end{bmatrix} \tag{8.20}$$

Galerkini meetodi asemel võib kasutada Rayleigh-Ritz'i meetodit, et saada lõplike elementide analoog Laplace'i võrrandile. Esmalt on vaja funktsionaali kujul:

$$I(\psi) = \int_{\Omega} (x_i, \psi, \psi_{,i}) d\Omega \tag{8.21}$$

milles võistlevad funktsioonid $\psi(x_i)$ eeldavad eelnevalt määratud pidevaid väärtusi $\psi = \psi(s)$ regiooni Ω rajal Γ. Variatsiooniline funktsionaal on kujul

$$f(x_i, \psi, \psi_{,i}) = \frac{1}{2} \psi_{,i} \psi_{,i} \tag{8.22}$$

kus

$$\psi = \Phi_N \psi_N$$

(8.21) ja (8.22) valguses saadakse

$$I = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \psi_{,i} \psi_{,i} d\Omega \tag{8.23}$$

Integraali varieerimine voolufunktsiooni sõlmväärtuste suhtes annab

$$\delta I = \frac{\partial I}{\partial \psi_N} \partial \psi_N = \left\{ \int_{\Omega} \psi_{,i} \frac{\partial \psi_{,i}}{\partial \psi_N} d\Omega \right\} \partial \psi_N$$

või

$$\delta I = \left\{ \int_{\Omega} \psi_{,i} \Phi_{N,i} d\Omega \right\} \partial \psi_N = 0 \tag{8.24}$$

Green-Gaussi teoreemist saadakse:

$$\delta I = \left(\int_{\Gamma} \psi_{,i} n_i \check{\Phi}_N d\Gamma - \int_{\Omega} \psi_{,ii} \Phi_N d\Omega \right) \partial \Psi_N = \left(\int \Gamma \psi_{,i} n_i \check{\Phi}_N d\Gamma \right) \partial \psi_N \tag{8.25}$$

Võrrandeist (8.24) ja (8.25) :

$$\left\{ \int_{\Omega} \Phi_{N,i} \Phi_{M,i} d\Omega \right\} \psi_M = \int_{\Gamma} \psi_{,i} n_i \check{\Phi}_N d\Gamma$$

või

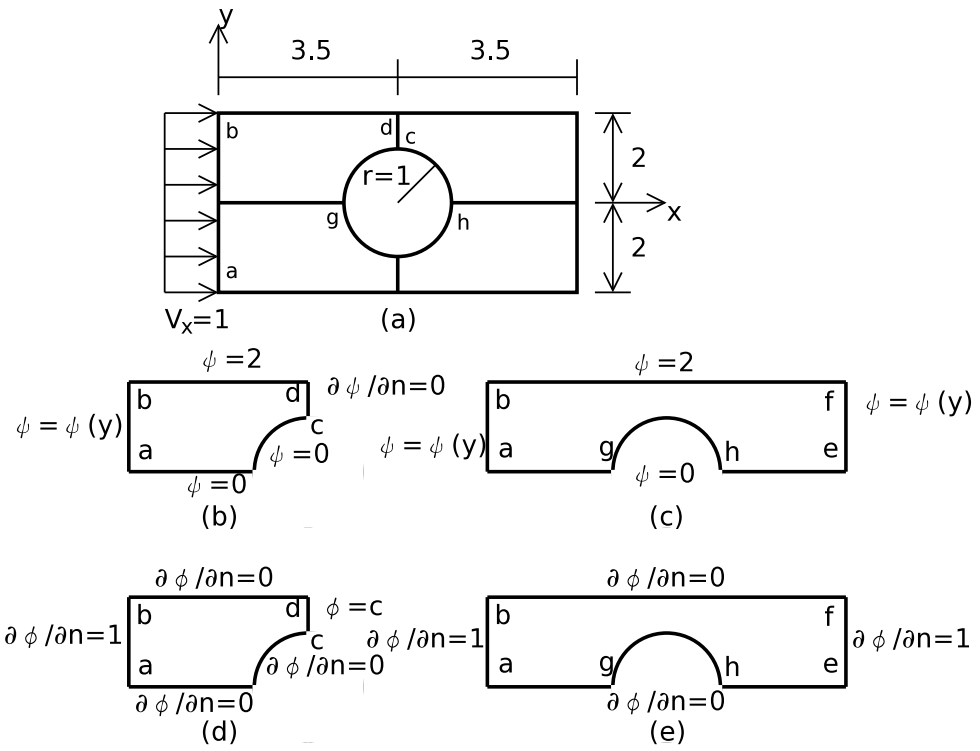
$$A_{NM} \psi_M = F_N \tag{8.26}$$

mis on identne valemiga (8.11) , mis saadi Galerkini meetodist. On selge, et variatsioonilise funktsionaali määramine selliselt nagu valemis (8.23) pole kõige kergem, kui vastavad diferentsiaalvõrrandid on enam komplitseeritud. Seepärast on Galerkini meetod palju mugavam, kuna ei vaja selliseid funktsionaale.

Järgmiseks uuritakse ääretingimuste kohtlemist 2D voolamisel ümber paralleelsete plaatide vahel oleva silindri, nagu näidatud joonisel 8.2 .

Voolufunktsiooni formuleerimine (joonised 8.2 (b,c)). Sümmeetria tõttu kasutatakse kvadranti *a-b-d-c-g*. Piirid *a-g-c* ja *b-d* on voolujooned ja konstantsed. Võrdluse eesmärkidel olgu $\psi = 0$ pikki *a-g-c*. Kuna sisendi vaba voolu kiirus on konstantne pikki *a-b*

$$\int_{\psi_a}^{\psi_b} d\psi = \int_{y_a}^{y_b} V_x dy \tag{8.27}$$



Joonis 8.2: Vool ümber silindri: (a) terve piirkond; (b) kvadrandi ψ ääretingimused; (c) ülemise poole ψ ääretingimused; (d) kvadrandi ϕ ääretingimused; (e) ülemise poole ϕ ääretingimused.

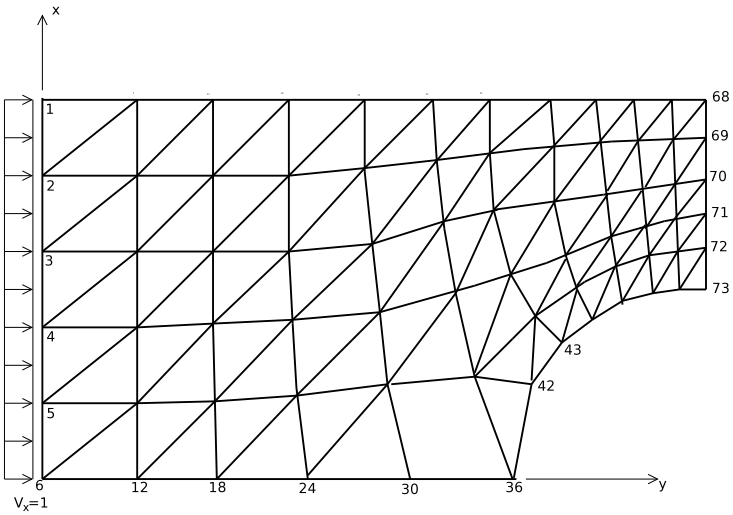
Integreerides saadakse:

$$V_x = \frac{\psi_b - \psi_a}{y_b - y_a} \tag{8.28}$$

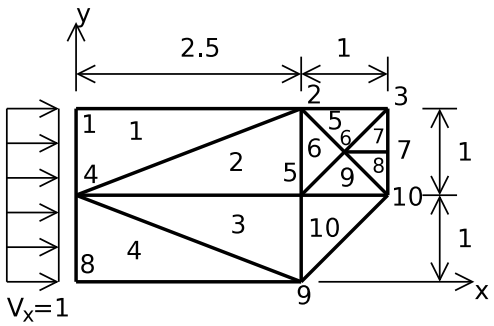
Kuna ψ_a oli null, siis $\psi_b = 2$ vaba voolu kiiruse $V_x = 1$ jaoks, koos ψ väärtuste lineaarse muutumisega 0-st 2-ni *a-b* vahel ja $\psi = 2$ *b-d* vahel. Seega saab ψ väärtusi pikki piire *g-a-b-d* kui Dirichlet' rajatingimusi. Kõik võrrandist (8.17) arvutatud Neumanni rajatingimused on nullid ($n_1 = 1, n_2 = 0$) pikki piire *a-b* ja *c-d*.

Kui vaba voolu kiirus pole konstantne, kuid siiski risti sissepääsuga, siis tuleb integraali (8.17) arvutamisel V_x-i käsitleda y funktsioonina. Kui vaba voolu kiirus pole risti sissepääsuga, siis Neumanni rajatingimusi esindav F_N pole null ja see tuleks arvutada võrrandist (8.17) Mõlemal juhul sümmeetria ei säili ja kogu piirkonda tuleb analüüsida. Seega saab Dirichlet' rajatingimusi nagu $\psi = 0$ määrata kas pikki ülemist või alumist plaati.

Kiiruspotentsiaali formuleerimine (joonised 8.2 (d,e). Kui lõplike elementide võrrandeis kasutatakse kiiruspotentsiaalifunktsiooni, siis on ilmseks rajatingimuseks, et ϕ on konstant pikki *a-b* ja *d-c* (kasutatakse vaid kvadranti). Võrdlusväärtused ϕ võib määrata kui Dirichlet' tingimused pikki *d-c*. Siiski kehtivad sissepääsu jaoks Neumanni tingimused (8.20) . Tingimust $\phi = const.$ ei pea pikki *a-b* rakendama, sest seal tuleb kasutada Neumanni tingimusi, et sisse viia sisendinfot. Pikki piire *b-d* ja *a-g-c* on Neumanni tingimus $\phi_{,i} n_i = V_i n_i = 0$ automaatselt rahuldatud, kui $F_N = 0$. Kui kasutatakse kogu ülemist poolpiirkonda, siis tuleb pikki *e-f* rakendada ka $\frac{\partial \phi}{\partial n} = v_x$



Joonis 8.3: Diskreetimine voolu jaoks ümber silindri (73 sõlme, 111 elementi).



Joonis 8.4: Jämedam võrk voolu jaoks ümber silindri.

8.2.2 Arvutused kolmnurkelementidega

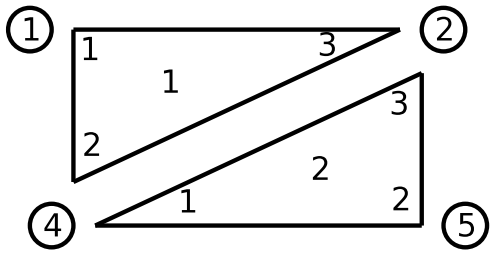
Olgu vaatluse all vool ümber lõpmatult pika silindri, mis asub sümmeetriliselt kahe lõpmatu ulatusega tasaplaadi vahel. Olgu valitud ekvivalentne lõplik piirkond, nagu näidatud joonisel 8.2 . Õige rajatingimuste valiku korral saab kasutada ainult veerandit kogu piirkonnast.

Voolufunktsiooni formuleerimine Dimensioonide valik voolu suunas on suvaline, kuid vaba voolu kiirust eeldatakse olevat valdav piisavalt suurtel kaugustel silindrist. Siinses näites kasutatakse kolmnurkelemente ja sõlmed on nummerdatud lühemas suunas, ei tee siksakke ja liigub samas suunas (joonis 8.3). Sellised skeemid vähendavad kõrvutiste sõlmede numbrite erinevused miinimumini ja annavad panuse kitsaribalisele maatriksile, et oleks võimalik saada stabiilsem ja täpsem lahend. Kuna realistlik diskreetimine, nagu joonisel 8.3 näidatud, viib suure arvu võrranditeni, tuleks numbrilise demonstratsiooni huvides vaatluse alla võtta toorem lähendus joonisel 8.4 . Voolufunktsioon eeldatakse olevat lineaarselt varieeruv elemendi piires:

$$\psi = \Phi_N \psi_N \qquad (N = 1, 2, 3) \tag{8.29}$$

Võrrandist [8, 2-17]

$$\Phi_N = a_N + b_N x + c_N x \tag{8.30}$$



Joonis 8.5: Elementide 1 ja 2 lokaalsed ning globaalsed sõlmed.

$$\begin{array}{lll} a_1 = (x_2y_3 - x_3y_2)/2A & a_2 = (x_3y_1 - x_1y_3)/2A & a_3 = (x_1y_2 - x_2y_1)/2A \\ b_1 = (y_2 - y_3)/2A & b_2 = (y_3 - y_1)/2A & b_3 = (y_1 - y_2)/2A \\ c_1 = (x_3 - x_2)/2A & c_2 = (x_1 - x_3)/2A & c_3 = (x_2 - x_1)/2A \end{array} \tag{8.31}$$

kus A on kolmnurkelemendi pindala. Lõplike elementide võrrand on kujul:

$$A_{NM}\psi_M = F_N \tag{8.32}$$

Laiendades:

$$\left[\begin{array}{ccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array}\right] \tag{8.33}$$

kus

$$A_{11} = \int_\Omega \Phi_{1,i}\Phi 1, id\Omega = \int_\Omega (\Phi_{1,1}\Phi_{1,1} + \Phi_{1,2}\Phi_{1,2})d\Omega = \int_\Omega (b_1^2 + c_1^2)d\Omega = \int_\Omega (b_1^2 + c_1^2)dxdydz$$

xy-tasandiga risti oleva ühikpaksuse jaoks:

$$A_{11} = A(b_1^2 + c_1^2) \tag{8.34}$$

Teised koefitsiendid määratakse analoogselt, saades:

$$A_{NM} = A \left[\begin{array}{ccc} b_1^2 + c_1^2 & b_2b_1 + c_2c_1 & b_3b_1 + c_3c_1 \\ b_2b_1 + c_2c_1 & b_2^2 + c_2^2 & b_3b_2 + c_3c_2 \\ b_3b_1 + c_3c_1 & b_3b_2 + c_3c_2 & b_3^2 + c_3^2 \end{array}\right] \tag{8.35}$$

Et arvutada A_{NM} kõigi elementide jaoks, on esmalt vaja nummerdada elemendi sõlmed suvaliselt, kuid vastupäeva. Vastupäeva nummerdamine on vajalik selleks, et vältida võrrandis (8.30) pindala A muutumist negatiivseks. Kuna elemendi 1 koordinaadid on (joonised 8.4 , 8.5)

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0 & y_1 = 2 \\ x_2 = 0 & y_2 = 1 \\ x_3 = 2.5 & y_3 = 2 \end{array}$$

siis arvutatakse b-d ja c-d nende koordinaatide jaoks ja saadakse elemendi 1 koefitsientide maatriks

$$(A_{NM})_1 = \left[\begin{array}{ccc} 1.45 & -1.25 & -0.2 \\ -1.25 & 1.25 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0.2 \end{array}\right]$$

Sarnaselt saadakse teiste elementide jaoks:

$$(A_{NM})_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.2 & 0 \\ -0.2 & 1.45 & -1.25 \\ 0 & -1.25 & 1.25 \end{bmatrix} \qquad (A_{NM})_3 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & -0.2 \\ 0 & 1.25 & -1.2 \\ -0.2 & -1.25 & 1.45 \end{bmatrix}$$

$$(A_{NM})_4 = \begin{bmatrix} 1.25 & -1.25 & 0 \\ -1.25 & 1.45 & -0.2 \\ 0 & -0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \qquad (A_{NM})_5 = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$(A_{NM})_6 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \qquad (A_{NM})_7 = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$(A_{NM})_8 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \qquad (A_{NM})_9 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A_{NM})_{10} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Elementide maatriksid tuleb nüüd üheks koondada:

$$A_{\alpha\beta}\psi_\beta = f_\alpha \tag{8.36}$$

$$A_{\alpha\beta} = \sum_{e=1}^{e=10} A_{NM}^{(e)} \Delta_{N\alpha}^{(e)} \Delta_{M\beta}^{(e)} \qquad F_\alpha = \sum_{\Gamma} F_N^{(e)} \Delta_{N\alpha}^{(e)}$$

$N, M = 1, 2, 3$ ja $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots 10$. Kuna joon 8-9-10 on konstantne voolujoon, võib pikki seda seada $\psi = 2$. Seega peab $\psi = 1$ sõlmes 4 ja $\psi = 2$ sõlmedes 1, 2 ja 3, nagu arvutatud võrrandist (8.28) . Need on Dirichlet' rajatingimused. Kõik Neumanni rajatingimused on rahuldatud, kui seada $\psi_{,i} n_i = 0$ või $F_N = 0$ kõigi vertikaalpiiri sõlmede jaoks.

Koostatud globaalseid lõplike elementide võrrandeid (8.36) tuleb modifitseerida vastavalt ääretingimustele, saades näiteks:

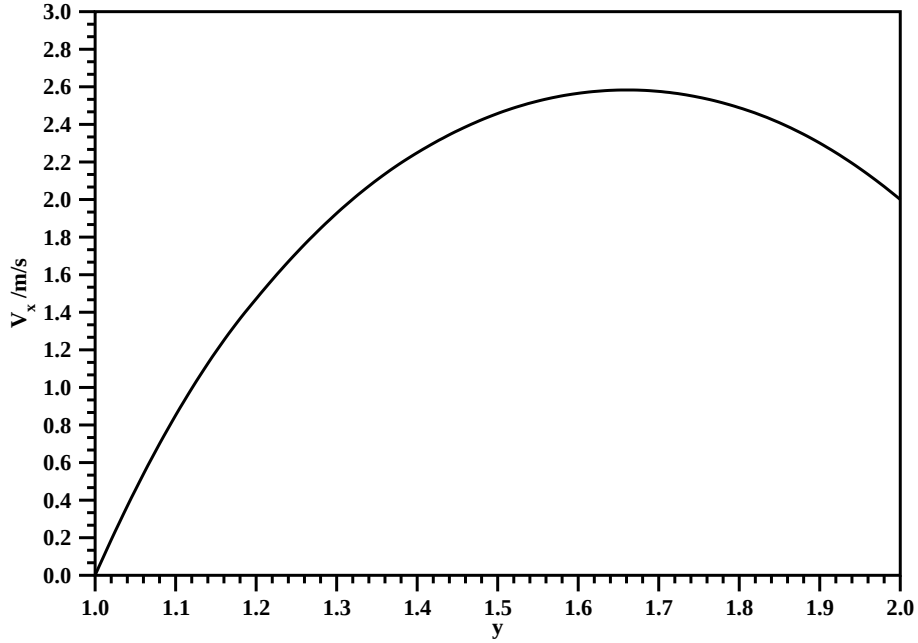
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.9 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \\ \psi_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2.5 + 0.4 \\ 2 + 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{8.37}$$

Jättes kõrvale 4 esimest võrrandit, on vaja lahendada vaid

$$\begin{bmatrix} 4.9 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_5 \\ \psi_6 \\ \psi_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.9 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{8.38}$$

millest saadakse

$$\psi_5 = 0.845$$
$$\psi_6 = 1.241$$
$$\psi_7 = 1.120$$



Joonis 8.6: Kiiruse jaotus silindri harjal pikki vertikaaljoont.

Kuna voolufunktsioon on eelduse kohaselt lineaarne sõlmede vahel, siis on kiirus konstantne ja sõlmedevaheline kiirus arvutatakse valemist (8.28) . Näiteks pikki vertikaaljoon 10-7-3 saadakse:

$$(V_x)_{7-10} = \frac{\psi_7 - \psi_{10}}{y_7 - y_{10}} = \frac{1.12 - 0}{1.5 - 1} = 2.24$$

$$(V_x)_{3-7} = \frac{\psi_3 - \psi_7}{y_3 - y_7} = \frac{2 - 1.12}{2 - 1.5} = 1.76$$

Neid tulemusi saab võrrelda lähendatud analüütilise lahendiga kujutiste meetodi abil. Arvestades, et joon 9-10 on ringikujuline segment, on voolufunktsioon ja horisontaalkiirus antud kui

$$\psi = U \left\{ y - \frac{\frac{H}{2\pi} sinh^2\left(\frac{\pi b}{H}\right) sin\left(\frac{2\pi y}{H}\right)}{\left[cosh^2\left(\frac{\pi x}{H}\right) - cos^2\left(\frac{\pi y}{H}\right)\right]} \right\} \tag{8.39}$$

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = U \left\{ 1 - \frac{sinh^2\left(\frac{\pi b}{H}\right) cos\left(\frac{2\pi y}{H}\right)}{cosh^2\left(\frac{\pi x}{H}\right) - cos^2\left(\frac{\pi y}{h}\right)} + \frac{\frac{1}{2} sinh^2\left(\frac{\pi b}{h}\right) sin^2\left(\frac{2\pi y}{H}\right)}{\left[cosh^2\left(\frac{\pi x}{H}\right) - cos^2\left(\frac{\pi y}{H}\right)\right]^2} \right\} \tag{8.40}$$

kus x, y on koordinaadid silindri keskpunktist, b on raadius ja H on kahe plaadi vaheline vertikaalkaugus. Joonisel 8.6 on antud simulatioonist saadud kiirused pikki vertikaaljoont ülalpool silindriharja.

Üldiselt loodetakse lõplike elementide lahendi täpsuse paranemist koos peenema võrgu ja kõrgemat järku interpolatsioonifunktsioonidega. Mitteregulaarne võrk koos nõelasarnaste elementidega vähendavad täpsust.

Kiiruspotentsiaali formuleerimine Arvutused kiiruspotentsiaali formuleeringu kaudu erinevad vaid õige pisut voolufunktsiooni formuleeringu kasutamisest. Globaalselt koostatud koefitsientide maatriksid on identsed. Erinevad ainult rajatingimused. Probleemi jaoks joonisel 8.4 võib

seada $\phi_3 = \phi_7 = \phi_1 0 = 0$ või suvalise sobiva väärtuse ϕ-le. Nüüd on olemas Neumanni ääretingimused $F_N \neq 0$:

$$F_N = \int_\Gamma \phi_{,i} n_i \check{\Phi}_N d\Gamma = \int_\Gamma v_i n_i \check{\Phi}_N d\Gamma$$

Võrrandist (8.20) saadakse koos $V_x = 1$, $V_y = 0$, $n_1 = 1$, $n_2 = 0$ ja $l = 1$ piiride 1-4 ja 4-8 jaoks:

$$F_N = \frac{lV_x}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kõigi teiste piiride jaoks $F_N = 0$ ja seega on koostatud väljundvektor

$$F_\alpha = \sum_{e=1}^{E} F_N^{(e)} \Delta_{N\alpha}^{(e)} \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, \ldots, 10 \\ E = 1, 2, \ldots, 10 \end{pmatrix}$$

või

$$F_\alpha = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Seega omandavad globaalsed võrrandid kuju:

$$\begin{bmatrix} 1.45 & -0.2 & 0 & -1.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 2.45 & 0 & 0 & -1.25 & -1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1.0 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2.9 & -0.4 & 0 & 0 & -1.25 & 0 & 0 \\ & & & & 4.9 & -1.0 & 0 & 0 & -1.75 & -0.5 \\ & & & & & 4.0 & -1.0 & 0 & 0 & -0.5 \\ & & & & & & 1.0 & 0 & 0 & -0.5 \\ & & & symm & & & & 1.45 & -0.2 & 0 \\ & & & & & & & & 1.95 & 0 \\ & & & & & & & & & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \\ \phi_8 \\ \phi_9 \\ \phi_1 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8.41}$$

Kuna $\phi_3 = \phi_7 = \phi_{10} = 0$, siis saab välja jätta 3., 7. ja 10. rea ning veerud ühtedega diagonaalidel ja lahendada järelejäänud 7×7 võrrandit. Seega saadakse:

$$\phi_1 = 3.787, \quad \phi_2 = 1.204, \quad \phi_3 = 0, \quad \phi_4 = 3.841, \quad \phi_5 = 1.261$$

$$\phi_6 = 6.161, \quad \phi_7 = 0, \quad \phi_8 = 3.827 \quad , \phi_9 = 1.491, \quad \phi_{10} = 0$$

Neist saab arvutada keskmise x-kiiruse sõlmede 6 ja 7 vahel:

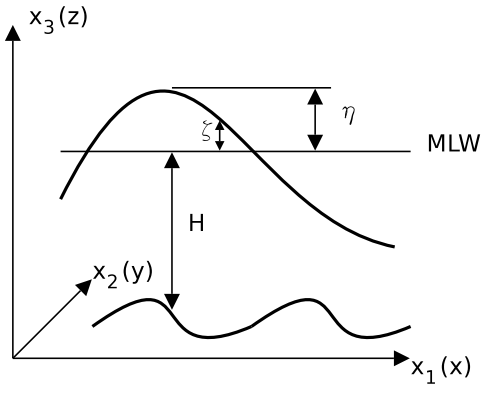
$$(V_x)_{6-7} = \frac{\phi_6 - \phi_7}{x_6 - x_7} = \frac{6.161 - 0}{0.5} = 1.2322$$

Kuna antud näites kasutati jämedat võrku, siis ei saa oodata mõistlikke tulemusi.

Kiirusi saab arvutada iga elemendi raskuskeskmes kui

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi_N}{\partial y} \psi_N \tag{8.42}$$

$$V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi_N}{\partial y} \psi_N \tag{8.43}$$



Joonis 8.7: Veelaine liikumine basseinis.

ψ formuleeringu jaoks ja

$$V_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_N}{\partial x}\phi_N \tag{8.44}$$

$$V_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi_N}{\partial y}\phi_N \tag{8.45}$$

ϕ formuleeringu jaoks. Kui kasutatakse 4-sõlmelisi isoparmeetrilisi elemente, siis on võimalik arvutada kiirusi sõlmedes pikki joont d-c, kui asendada sõlmedele vastavad isoparameetrilised koordinaadid $(1, -1)$.

8.3 Laine liikumine madalas basseinis

8.3.1 Põhivõrrandid

Laine liikumine madalas basseinis on paljude praktiliste tehniliste probleemide osa, näiteks lahe kujundamine. Lihtsuse mõttes eeldada ideaalset vedelikku, jättes kõrvale piirihõõrdumiste hajutavad efektid. Konvektsiooniliiget väljajättev liikumisvõrrand eeldatakse olevat kujul

$$\dot{V} - F_i + \frac{1}{\rho}P_{,i} - W_i = 0 \tag{8.46}$$

kus F_i on väike häiritusjõud, mis mõjub veele väikese sügavusega H kanalis olevale veele, nagu näidatud joonisel 8.7 . Vertikaaljõu $F_3 - F_z$ võib lugeda konstantseks, sest z muutub 0 kuni H-ni väikese gravitatsioonikiirenduse g väärtuse muutumisega. W_i on tuulest tingitud jõud pinnal

$$W_i = \frac{\tau_i}{H + \zeta} \tag{8.47}$$

kus τ_i on tuule kiiruse ruut (ft^2/s^2). Häirituse põhjustatud rõhk on

$$P = \rho g(H + \zeta) \tag{8.48}$$

kus ζ on muutuv laineamplituud üle keskmise veepinna (MWL - *mean water level*. Asendades võrrandi (8.48) võrrandisse (8.46) ja mitte arvestades F_i-d:

$$\dot{V}_i - W_i + g\zeta_{,i} = 0 \tag{8.49}$$

Olgu $\zeta(i = 1, 2)$ nihkekomponendid. Siis on kiirus:

$$V_i = \dot{\xi}_i \tag{8.50}$$

Kuna häiritud ja häirimata olekute massid peavad olema võrdsed, siis

$$\rho(H+\zeta)\left(dx_1+\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}\right)dx_1)\left(dx_2+\frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}dx_2\right)=\rho H dx_1 dx_2$$

Selle laiendamine ja teist järku liikmete hülgamine annab

$$\rho\zeta=-\rho H\xi_{i,i} \tag{8.51}$$

Võrrandi (8.51) diferentseerimine aja järgi annab koos võrrandiga [8, 10-5-103]

$$\dot{\zeta}+HV_{i,i}=0 \tag{8.52}$$

Kui kõrgus H on muutuv, siis omandab võrrand (8.52) kuju

$$\zeta+(HV_i)_{,i}=0 \tag{8.53}$$

Lõplike elementide analüüsis võib H võtta väikese elemendi piires võrrandis (8.52) konstantseks ja lubada varieeruda elemendist elementi, kui eksisteerivad muutuvad sügavused.

Lõpuks, diferentseerides võrrandit (8.52) aja järgi ja kasutades võrrandit (8.49) , saadakse

$$\ddot{\zeta}-c^2\zeta,ii=-HW_{i,i} \tag{8.54}$$

kus c on levi- või lainekiirus $c=\sqrt{gH}$. kui välised häiritusjõud W_i puuduvad, siis

$$\ddot{\zeta}-c^2\zeta,ii=0 \tag{8.55}$$

See on standardne lainevõrrand hüpeboolsel kujul. Kuna etteennustatud liikumine on harmooniline, tuuakse sisse võrdus

$$\zeta(x_i,t)=\eta(x_i)cos\omega t \tag{8.56}$$

kus $\eta(x_i)$ on $\zeta(x_i,t)$ maksimumamplituud ja ω on laine liikumis sagedus

$$\omega=\frac{2\pi}{T}$$

kus T on harmooniku periood. Asendades valemi (8.56) võrrandisse (8.55) , saadakse Helmholtzi võrrand kujul

$$c^2\eta_{,ii}+\omega^2\eta=0 \tag{8.57}$$

Lõplike elementide analüüsi võib teha koos sobivate ääretingimustega nii võrrandil (8.54) , (8.55) või (8.57) baseerudes.

8.3.2 Lõplike elementide formuleering

Tehnilistes rakendustes võib lahendada võrrandi (8.54) , et määrata laine amplituudid vastavalt eelkirjeldatud häiritusjõududele. Alternatiivselt saab võrrandite (8.55) ja (8.57) baasil formuleerida omaväärtusülesande, et arvutada sagedused ja laine liikumise moodide kujud omaväärtuste ja -vektorite lahendite kaudu.

Olgu esmalt vaatluse all liikumisvõrrand (8.54) . Selle võrrandi variatsioonilise põhimõtte saamiseks võib kasutada mugavat Galerkini kaalutud keskmiste meetodit. Esmalt lähendatakse laine amplituudi $\eta(x_i)$ nagu tavaliselt

$$\zeta(x_i)=\Phi_N(x_i)\zeta_N$$

ja konstrueeritakse Galerkini integraal

$$\int_\Omega (\ddot{\zeta} - c^2\zeta,ii + HW_{i,i})\Phi_N d\Omega = 0 \tag{8.58}$$

Integreerides osade kaupa või kasutades Green-Gaussi teoreemi:

$$\left[\int_\Omega \Phi_N\Phi_M d\Omega\right]\ddot{\zeta}_M - \int_\Gamma c^2\zeta_{,i}n_i\check{\Phi}_{N,i}d\Gamma + \left[\int_\Omega c^2\Phi_{N,i}\Phi_{M,i}d\Omega\right]\zeta_M + \\ + \int_\Gamma HW_i n_i\check{\Phi}_N d\Gamma - \int_\Omega HW_i n_i\Phi_{N,i}d\Omega = 0$$

Kompaktses vormis

$$A_{NM}\ddot{\zeta}_M + B_{NM}\zeta_M = F_N \tag{8.59}$$

kus A_{NM}, B_{NM} ja F_N on üldiselt tuntud vastavalt kui massimaatriks, jäikusmaatriks ja jõuvektor:

$$A_{NM} = \int_\Omega \Phi_N\Phi_M d\Omega$$

$$B_{NM} = \int_\Omega c^2\Phi_{N,i}\Phi_{M,i}d\Omega$$

$$F_N = F_N^{(1)} + F_N^{(2)} + F_N^{(3)}$$

koos

$$F_N^{(1)} = -\int_\Omega HW_i\Phi_{N,i}d\Omega \quad F_N^{(2)} = -\int_\Gamma HW_i n_i\check{\Phi}_N d\Gamma \quad F_N^{(3)} = -\int_\Gamma c^2\zeta_{,i}n_i\check{\Phi}_N d\Gamma$$

Kui häiritusjõud puuduvad piirkonnas, kuid on rakendatud vaid piiridele, soos $F_N^{(1)}$ on null. $\check{\Phi}_N$ on $W_i n_i$ ja $\zeta_{,i}n_i$ variatsioonide interpolatsioonifunktsioon pikki piire. $F_N^{(2)}$ käitub kui sundiv jõud, sams kui $F_N^{(3)}$ on Neumanni ääretingimus. Pikki piire tuleb tagada, et tingimus $\zeta_{,i}n_i = \partial\zeta/\partial n = 0$.

Võrrandi (8.59) lahendamiseks võib kasutada ajutist hüperboolset operaatorit, nagu kirjeldab [8, ptk. 3-3-3]. Protseduur on sama nagu demonstreerib [8, ptk. 5-6]. Tuleb märkida, et W_i on võrrandis (8.47) $(H+\zeta)^{-1}$ funktsioon, kuid seda saav hoida konstantsena iga ajasammu piires ja värskendada koos aja suurendamisega. Võrrandi (8.59) lahend annab vertikaalsõlmelise laineamplituudid ja sellest infost saab arvutada iga elemendi horisontaalnihked. Võrrandite (8.49) ja (8.50) seisukohast saab kiirenduskomponendid leida kui

$$\ddot{\xi}_r = W_r - g\zeta_{,r} \qquad (r = 1, 2) \tag{8.60}$$

Selle võrrandi saab jällegi arvutada sobivat ajutist operaatorit rakendades, et määrata horisontaalnihked ξ_r vertikaalnihete ζ_r kaudu, mis on määratud võrrandist (8.59)

Alternatiivne formuleering viib samaaegselt võrrandi (8.46) lahendini koos pidevuse võrrandiga. Üldise rakenduse jaoks (sügav bassein) on vajalik kaasata konvektsiooni horisontaalliige. Seega oleksid põhivõrrandid

$$\dot{V} + i + V_{i,j}V_j + g\zeta_{,i} - W_i = 0 \tag{8.61}$$

$$V_{i,i} = 0 \tag{8.62}$$

Nende võrrandite lõplike elementide lahendid on identsed võrrandi [8, 5-93] omadega.

8.3.3 Omaväärtuste lahendid

Praktilistes situatsioonides ei pruugi sisenevad häirivad jõud $F_N^{(1)}$ ja $F_N^{(2)}$ teada olla. Sestap on tihti kasulik omaväärtusprobleemi lahendamisel leida sagedused ja laineamplituudide suhtelised maksimumid. Selles suunas liikudes tehakse võrrandi (8.59) homogeenses osas võrrandi (8.56) tüüpi asendus:

$$(-\omega^2 A_{NM} + B_{NM})\eta_M cos\omega t = 0$$

või

$$(B_{NM} - \omega^2 A_{NM})\eta_M = 0 \tag{8.63}$$

Peale elemendimaatriksi koostamist saadakse globaalne vorm

$$(B_{ij} - \omega^2 A_{ij})\eta_j = 0 \tag{8.64}$$

Võrrand (8.63) on identne lõplike elementide võrrandiga, mida võib tuletada võrrandeist (8.55) või (8.57) , v.a. rajatingimuse $F_N^{(3)}$ jaoks, mis on võrrandite (8.55) või (8.57) osatuletistega liikmete osade kaupa integreerimisel saadav kokkulangevus. Illustrerimiseks olgu vorm (8.57)

$$\int_\Omega (c^2\eta_{,ii} + \omega^2\eta)\Phi_N d\Omega = 0 \tag{8.65}$$

koos $\eta(x_i) = \Phi_N(x_i)\eta_N$. Jätkates tavapärasel viisil saadakse:

$$(B_{NM} - \omega^2 A_{NM})\eta_M = F_N^{(3)}$$

Selle tulemuse võib saada ka võrrandist (8.59) koos $F_N^{(3)}$ säilitamisega. Võrrandi (8.65) globaalne vorm on

$$(B_{ij} - \omega^2 A_{ij})\eta_j = F_i^{(3)} \tag{8.66}$$

$\eta_{,i}\eta_i = 0$ pikki piire ja seega $F_i^{(3)} = 0$. See viib võrrandini (8.64) . n_j mittetriviaalse lahendi jaoks võrrandis (8.64) , peab sulgudes olevate liikmete determinant olema 0:

$$|B_{ij} - \omega^2 A_{ij}| = 0 \tag{8.67}$$

või maatrikskujul:

$$|\mathbf{B} - \omega^2 \mathbf{A}| = 0 \tag{8.68}$$

See on standardne omaväärtusprobleem. Maatriks A_{ij} on mittesingulaarne, samas kui maatriks B_{ij} on singulaarne. Sestap korrutatakse võrrandit (8.68) A_{ik}^{-1}-ga:

$$|A_{ik}^{-1}B_{kj} - \omega^2\delta_{ij}| = 0 \tag{8.69}$$

või

$$|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} - \omega^2\mathbf{I}| = 0 \tag{8.70}$$

kus $\mathbf{I}$ on ühikmaatriks. Tuleb märkida, et $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ on mittesümmeetriline, kuigi $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{A}$ on mõlemad sümmeetrilised. On eelistav muuta $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ sümmeetriliseks enne omaväärtuste lahendamist. Selleks olgu $\mathbf{A}$ kujul

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$$

kus $\mathbf{L}$ on madalam kolmnurkmaatriks, mille diagonaalist ülalpool on nullid ja T märgib transponeerimist. Siis

$$\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{L}^{-1} \tag{8.71}$$

Kirjutades võrrandi (8.64) maatrikskujul koos $\mathbf{A}^{-1}$ läbikorrutatuna:

$$(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} - \omega^2\mathbf{I})\eta = 0 \tag{8.72}$$

Asendades võrrandi (8.71) võrrandisse (8.72) ning korrutades $\mathbf{L}^T$-ga, siis

$$(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{B} - \omega^2\mathbf{L}^T)\eta = 0$$

Olgu

$$\mathbf{L}^T\eta = \mathbf{Y}$$
$$\eta = (\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{Y} \tag{8.73}$$

Tulemuseks on

$$(\mathbf{Z} - \omega^2\mathbf{I})\mathbf{Y} = 0$$

kus

$$\mathbf{Z} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{L}^{-1})^T$$

Seega võtab omaväärtusprobleem kuju

$$|\mathbf{Z} - \omega^2\mathbf{I}|\mathbf{Y} = 0 \tag{8.74}$$

Nüüd on näha, et maatriks $\mathbf{Z}$ on sümmeetriline. Omaväärtusülesande lahend koosneb omaväärtuste ω^2 ja omavektorite $\mathbf{Z}$ määramisest. Neist saadakse sagedused ω ja tegelikud omavektorid η võrrandist (8.73) . Tule märkida, et reaalselt huvitavad disaini eemärkidel vaid mõned madalama sagedusega moodid.

Olgu näiteks ruudukujuline pind nagu näidatud joonisel [8, 5-32]. Pind on jagatud 25 elemendiks 36 sõlmega. Lahendis kasutatakse isoparameetrilisi elemente. Eeldades, et keskmine veetase on konstantne ja $gH = 1000s^-2$, kus $g = 32.174ft/s^2$ ja $H = 31.08ft$, lahendatakse omaväärtusprobleem (8.67) , (8.68) Givens-Householderi meetodil.

Omaväärtuste ruutudest saadud sagedused hertsides on summeeritud tabelis (tab:10-5-4). Kuna geomeetriaks on ruut, siis on vaid 6-l moodi 36-st sõltumatud, iseloomulikud omaväärtused. Nendeks on moodid 1, 4, 9, 16, 33 ja 36. Teised moodid esinevad paaridena. Kui geomeetrial poleks sümmeetriliste telgede paari, siis peaks iga mood olema sõltumatult erinev ja identsete omaväärtustega paare ei tohiks esineda.

Moodikujud või omavektorid, mis vastavad mõnedele omavektoritest on joonisel [8, 5-33]. Esimene mood esindab jäiga keha liikumist koos kogu tasandi nihkumisega ühe ühiku võrra üles. Joonis [8, 5-33] näitab graafikuid kolmanda ja kümnenda moodi vahel. Nende moodide kujusid vaadeldakse x-teljest 220^o vastupäeva ja 20^o ülalpool tasandit. Omavektorid on ekstrapoleeritud 2. järku vähimruutude meetodiga, mille võeti 20 punkti pikki x- ja y-telge.

9 Helivõnkumised

Kui staatilise välja võrrandis

$$D_x\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+D_y\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}-G\phi+Q=0 \tag{9.1}$$

$Q=0$ ja $G<0$, siis saadakse Helmholtzi võrrand

$$D_x\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+D_y\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+G\phi=0 \tag{9.2}$$

Võrrandiga (9.2) kirjeldatavate füüsikaliste probleemide hulgas on lainetused madalas vees ja helivõnkumised suletud ruumides või sektsioonides.

Helmholtzi võrrandi lahend vajab omaväärtusülesande lahendamist, sest ääretingimused on sellised, et globaalne jõuvektor $\{\mathbf{F}\}$ on null. Globaalne võrrandisüsteem on kujul $[\mathbf{K}]\{\mathbf{\Phi}\}=\{\mathbf{0}\}$.

9.1 1D võnkumised

Jäikade piiridega 2D ruumis olevate helivõnkumistega seotud rõhuvälja kirjeldavad diferentsiaalvõrrandid on kujul

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\frac{w2}{c^2}\phi=0 \tag{9.3}$$

kus ϕ on rõhu muutus mingilt ümbritsevalt väärtuselt, w on laine sagedus ja c on laine liikumiskiirus aines. Ääretingimuseks on

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=0 \tag{9.4}$$

Ühemõõtmeline analoog võrrandile (9.3) on

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}+\frac{w^2}{c^2}\phi=0 \tag{9.5}$$

koos tingimusega $d\phi/dx=0$ igas otsas. Võrrandi (9.5) üldine kuju:

$$D\frac{d^2\phi}{dx^2}-G\phi=0 \tag{9.6}$$

kus $D=1$ ja $G=-w^2/c^2$. Esimese liikme $d^2\phi/dx^2$ jäikusmaatriks on

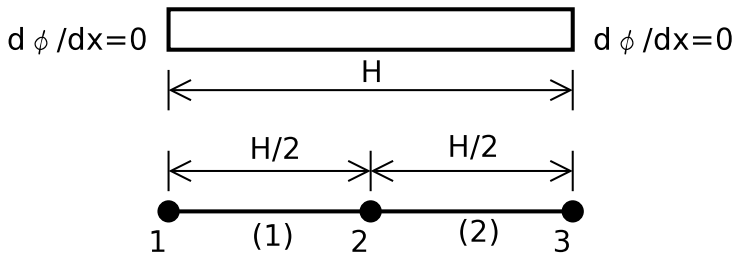
$$[\mathbf{k}^{(e)}]=\frac{1}{L}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix} \tag{9.7}$$

$-G\phi$-liikme panus elemendi jäikusmaatriksisse on

$$[\mathbf{k}_G^{(e)}]=-\frac{w^2L}{6c^2}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix} \tag{9.8}$$

Võrrandi (9.6) täielik jäikusmaatriks on

$$[\mathbf{k}^{(e)}]=\frac{1}{L}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}-\frac{w^2L}{6c^2}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix} \tag{9.9}$$



Joonis 9.1: Kaheelemendiline võrk 1D torule.

Elemendi jõuvektor $\{\mathbf{f}^{(e)}\}$ koosneb nullidest, sest võrrandis (9.6) pole ühtegi allikaliiget ja ääretingimus $d\phi/dx = 0$ mõlemas otsas ei genereeri ühtegi mittenullist liiget $\{\mathbf{f}^{(e)}\}$-s.

Olgu suletud toru joonisel 9.1 . Lõplike elementide mudel koosneb kahest elemendist. Asendades $H/2$ L-i võrrandis (9.9) ja korrutades seda võrrandit $H/2$-ga:

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - Z \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{9.10}$$

kus

$$Z = \frac{w^2 H^2}{24c^2} \tag{9.11}$$

Kahe elemendimaatriksi kombineerimine annab tulemuseks kolme võrrandiga süsteemi:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} - Z \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{9.12}$$

või

$$([\mathbf{K}_D] - Z[\mathbf{K}_G])\{\mathbf{\Phi}\} = \{\mathbf{0}\} \tag{9.13}$$

Mõlemad maatriksid $[\mathbf{K}_D]$ ja $[\mathbf{K}_G]$ on sümmeetrilised; $[\mathbf{K}_G]$ on positiivselt määratud, samas kui $[\mathbf{K}_D]$ on pooleldi positiivselt määratud, sest sel on nulline determinant. Omaväärtuste teooria ütleb, et kõik omaväärtused Z_i, mis rahuldavad võrrandeid (9.12) , on selged, reaalsed ja positiivsed arvud ning vastavad omavektorid $\{\mathbf{\Phi}\}_i$ on sõltumatud.

Omaväärtused Z_i on **Z** väärtused, mis teevad võrrandeis (9.12) determinandi nulliks. Kahe maatriksi kombineerimisel:

$$\begin{bmatrix} (1-2Z) & -(1+Z) & 0 \\ -(1+Z) & (2-4Z) & -(1+Z) \\ 0 & -(1+Z) & (1-2Z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{9.14}$$

Determinant on

$$2(102Z)[(1-2Z)^2 - (1+Z)^2] = 0 \tag{9.15}$$

millel on juurväärtused

$$Z_1 = 0 \qquad Z_2 = \frac{1}{2} \qquad Z_3 = 2 \tag{9.16}$$

Leidub iga (9.16) juurega seotud omavektor $\{\mathbf{\Phi}\}_i$, mille kolme komponenti on võimalik üheselt määrata, sest võrrandisüsteem on homogeenne. Tavaline protseduur on omistada ühele

komponendile suvaline väärtus ja lahendada ülejäänud komponendid selle omistatud väärtuse kaudu.

Omavektor $\{\mathbf{\Phi}\}_1$ määratakse $Z_1 = 0$ asendamisega võrrandeisse (9.14) :

$$\begin{array}{rrrl} \Phi_1 - & \Phi_2 & & = 0 \\ -\Phi_1 + & 2\Phi_2 & -\Phi_3 & = 0 \\ & -\Phi_2 & +\Phi_3 & = 0 \end{array} \tag{9.17}$$

Esimene võrrand ütleb, et $\Phi_1 = \Phi_2$, samas kui kolmandast tuleneb, et $\Phi_2 = \Phi_3$. Seega $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3$ ja omavektor on

$$\{\mathbf{\Phi}\}_1^T = [1 \quad 1 \quad 1] \tag{9.18}$$

kui $\Phi_1 = 1$ kasutatakse suvalise väärtusena.

Asendades $Z_2 = 1/2$ võrdusesse (9.14) :

$$\begin{array}{rrrl} & -\frac{3}{2}\Phi_2 & & = 0 \\ -\frac{3}{2}\Phi_1 & & -\frac{3}{2}\Phi_3 & = 0 \\ & -\frac{3}{2}\Phi_2 & & = 0 \end{array} \tag{9.19}$$

Esimene ja kolmas võrrand annavad teada, et $\Phi_2 = 0$ ja teisest tuleneb, et $\Phi_3 = -\Phi_1$. Kasutades Φ_1 kui suvalist väärtust, saadakse:

$$\{\mathbf{\Phi}\}_2^T =]1 \quad 0 \quad -1] \tag{9.20}$$

Jääb üle ainult näidata, et

$$\{\mathbf{\Phi}\}_3^T =]1 \quad -1 \quad 1] \tag{9.21}$$

Omavõnkesageduste w_n teoreetilised väärtused on

$$W_n = \frac{n\pi c}{H} \tag{9.22}$$

w_n arvutatud väärtused saab valemi (9.16) antud juurte Z_1, Z_2 ja Z_3 asendamisega võrrandisse (9.11) ja selle lahendamisega w_n suhtes. w arvutatud väärtused

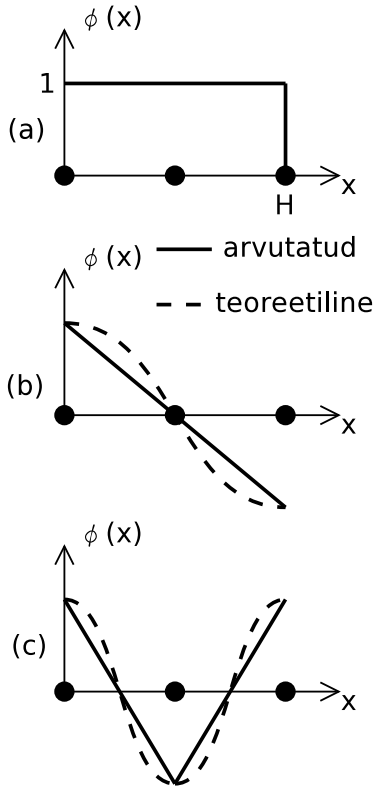
$$w_1 = 0, \qquad w_2 = \frac{3.464c}{H}, \qquad w_3 = \frac{6.928c}{H}$$

on suhteliselt hästi võrreldavad teoreetiliste väärtustega

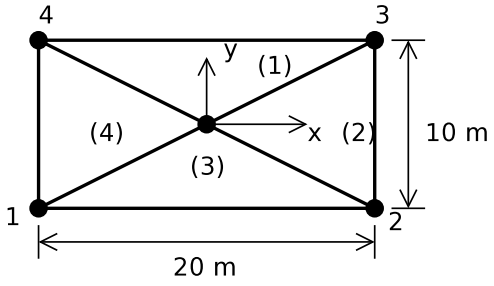
$$w_1 = 0, \qquad w_2 = \frac{3.142c}{H}, \qquad w_3 = \frac{6.283c}{H}$$

arvestades seda, et võrk koosneb vaid kahest elemendist.

Teoreetilistel moodikujudel on üldine vorm $P = cos(n\pi x/H)$. Teoreetilised moodikujud ja arvutatud omavektorid on joonisel 9.2 . Esimese moodi teoreetiline ja arvutatud kuju langevad kokku.



Joonis 9.2: 1D toru teoreetilised ja arvutatud moodid: (a) esimene mood, (b) teine mood, (c) kolmas mood.



Joonis 9.3: Neljaelemendiline võrk 2D ruumile.

9.2 2D võnkumised

2D helivõnkumiste võrrandid ja ääretingimused on antud valemitega (9.3) ja (9.4) . Elementide maatriksid on [7, 7.36] ja [7, 7.38] kolmnurkse elemendi jaoks ning [7, 7.49] ja [7, 7.55] nelinurkse elemendi jaoks.

Nelinurkne 20x10 m ruum on jagatud neljaks kolmnurkseks elemendiks joonisel 9.3 . Defineerides $Z = w^2/c^2$ selgub, et globaalne võrrandisüsteem on

$$([\mathbf{K}_D] - Z[\mathbf{K}_G])\{\mathbf{\Phi}\} = \{\mathbf{0}\} \tag{9.23}$$

kus

$$[\mathbf{K}_D] = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 10 & 3 & 0 & -3 & -10 \\ 3 & 10 & -3 & 0 & -10 \\ 0 & -3 & 10 & 3 & -10 \\ -3 & 0 & 3 & 10 & -10 \\ -10 & -10 & -10 & -10 & 40 \end{bmatrix} \tag{9.24}$$

$$[\mathbf{K}_G] = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 100 & 25 & 0 & 25 & 50 \\ 25 & 100 & 25 & 0 & 50 \\ 0 & 25 & 100 & 25 & 50 \\ 25 & 0 & 25 & 100 & 50 \\ 50 & 50 & 50 & 50 & 200 \end{bmatrix} \tag{9.25}$$

ja

$$\{\mathbf{\Phi}\}^T = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \Phi_3 \quad \Phi_4 \quad \Phi_5] \tag{9.26}$$

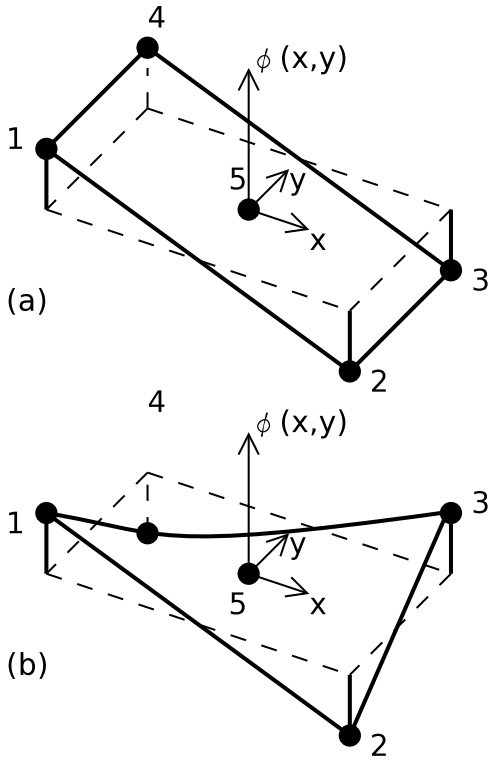
Z väärtuste , mis teeks determinandi $([\mathbf{K}_D] - Z[K_G])$ nulliks, käsitsiarvutamine ei ole mõtekas. Selle asemel tuleks kasutada arvutit. Süsteemi (9.23) 5 omaväärtust ja omavektorit on:

$$\begin{array}{lll} Z_1 = 0, & \{\mathbf{\Phi}\}_1^T = [1, & 1, \quad 1, \quad 1, \quad 1] \\ Z_2 = 0.030, & \{\mathbf{\Phi}\}_2^T = [1, & -1, \quad -1, \quad 1, \quad 0] \\ Z_3 = 0.120, & \{\mathbf{\Phi}\}_3^T = [1, & 1, \quad -1, \quad -1, \quad 0] \\ Z_4 = 0.150, & \{\mathbf{\Phi}\}_4^T = [1, & -1, \quad 1, \quad -1, \quad 0] \\ Z_5 = 0.450, & \{\mathbf{\Phi}\}_5^T = [-0.5, & -0.5, \quad -0.5, \quad -0.5, \quad 1] \end{array} \tag{9.27}$$

Need väärtused on suhteliselt hästi võrreldavad $Z = w^2/c^2$ teoreetiliste väärtustega

$$Z_1 = 0, \quad Z_2 = 0.0247, \quad Z_3 = 0.0987, \quad Z_4 = 0.123, \quad Z_5 = 0.395$$

Moodide kujud $\{\Phi\}_2$ ja $\{\Phi\}_4$ jaoks on graafiliselt kujutatud joonisel 9.4 .



Joonis 9.4: 2D ruumi (a) teise ja (b) neljanda moodi kuju. Punktiirjooned asuvad xy-tasandil.

10 Telgsümmeetria

Eksisteerib grupp 3D väljaprobleeme, mida saab lahendada kahemõõtmeliste elementide kasutamisega. Neil probleemidel on on sümmeetria pöörlemistelje suhtes, mistõttu neid nimetatakse telgsümmeetrilisteks või mõnikord radiaalsümmeetrilisteks probleemideks. Nii ääretingimused kui ka piirkonna geomeetria peavad olema sõltumatud asukohast ümber telje.

Galerkini formuleering ja elementide võrrandid on sarnased kahemõõtmelise probleemi omadele, kuid erinedes neist mõne olulise aspekti poolest.

10.1 Diferentsiaalvõrrand

Väljavõrrand silindrilistes koordinaatides (r, θ, z):

$$D_r \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{D_r}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{D_\theta}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + D_z \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + Q = 0 \tag{10.1}$$

Telgsümmeetriline probleem on θ-st sõltumatu, sestap saadakse võrrandist (10.1) :

$$D_r \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{D_r}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + D_z \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + Q = 0 \tag{10.2}$$

mida võib kirjutada ka kujul:

$$\frac{1}{r} \left[D_r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \right] + D_z \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + Q = 0 \tag{10.3}$$

eeldades, et D_r on konstant. Võrrandiga (10.3) seotud ääretingimused on

$$\phi(\Gamma) = \text{määratud väärtused} \tag{10.4}$$

piiri osal, mida võib tähistada kui Γ_1 ja

$$D_r \frac{\partial \phi}{\partial r} cos\theta + d_z \frac{\partial \phi}{\partial z} sin\theta = -M\theta_b + S \tag{10.5}$$

ülejäänud piiril Γ_2. Mõlemad rajatingimused peavad olema sõltumatud asukohast ümber telje.

10.2 Telgsümmeetrilised elemendid

Telgsümmeetriline element saadakse kahemõõtmelise elemendi pööramisel ümber z-telje, moodustades toroidi. See idee on kolmnurkelemendiga näidatud joonisel 10.1 .

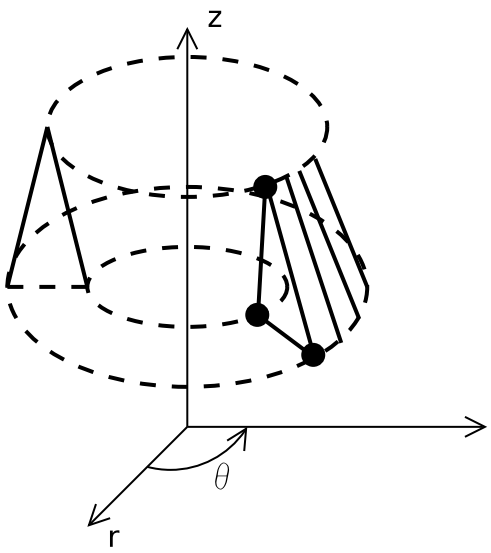
Joonisel 10.2 on üksik kolmnurkelement rz-tasandil, olles identne tavalise kolmnurkelemendiga. Erinevus on vaid selles, et koordinaatmuutjateks on x ja y asemel r ja z.

Uues koordinaatsüsteemis on muutuja ϕ ja kolmnurksed kujufunktsioonid kujul:

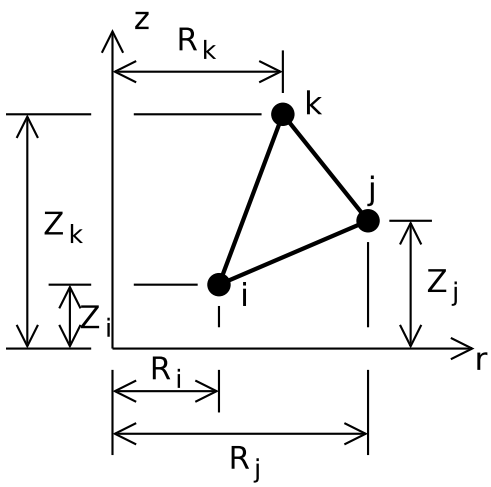
$$\phi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k \tag{10.6}$$

kus

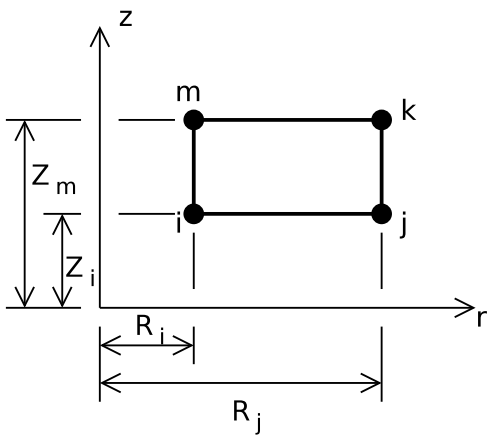
$$\begin{aligned} N_i &= \tfrac{1}{2A}(a_i + b_i r + c_i z) \\ N_j &= \tfrac{1}{2A}(a_j + b_j r + c_j z) \\ N_k &= \tfrac{1}{2A}(a_k + b_k r + c_k z) \end{aligned} \tag{10.7}$$



Joonis 10.1: Telgsümmeetriline kolmnurkelement.



Joonis 10.2: Telgsümmeetriline kolmnurkelement rz-tasandil.



Joonis 10.3: Telgsümmeetriline nelinurkelement rz-tasandil.

milles

$$\begin{array}{lll} a_i = R_j Z_k - R_k Z_j, & b_i = Z_j - Z_k, & c_i = R_k - R_j \\ a_j = R_k Z_i - R_i Z_k, & b_j = Z_k - Z_i, & c_j = R_i - R_k \\ a_k = R_i Z_j - R_j Z_i, & b_k = Z_i - Z_j, & c_k = R_j - R_i \end{array}$$

Üksik nelinurkelement rz-tasandil on joonisel 10.3 . Selle kujufunktsioonid peavad olema suhtelised rz-koordinaatüsteemi nullpunkti suhtes.

Märkides, et

$$r = R_i + s \qquad z = Z_i + t \tag{10.8}$$

korraldades ümber kujule

$$s = r - R_i \qquad t = z - Z_i \tag{10.9}$$

ja asendades s ja t võrrandisse (2.49) , saadakse nelinurksed kujufunktsioonid rz-koordinaatsüsteemis:

$$\begin{aligned} N_i &= \tfrac{1}{4ab}(R_j - r)(Z_m - z) \\ N_j &= \tfrac{1}{4ab}(r - R_i)(Z_m - z) \\ N_k &= \tfrac{1}{4ab}(r - R_i)(z - Z_i) \\ N_m &= \tfrac{1}{4ab}(R_j - r)(z - Z_i) \end{aligned} \tag{10.10}$$

10.3 Galerkini meetod

Telgsümmeetrilise väljaprobleemi kaalutud jäägi integraal on ruumiintegraal

$$\{\mathbf{R}^{(e)}\} = -\int_V [\mathbf{N}]^T \left(\frac{D_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + D_z \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + Q \right) dV \tag{10.11}$$

Tuletisliikmed tuleks muuta madalamat järku liikmeteks, kasutades diferentseerimise korrutamisreeglit ja Gaussi teoreemi.

Diferentseerimise korrutamisreegel annab:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left([\mathbf{N}]^T \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = [\mathbf{N}]^T \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial [\mathbf{N}]^T}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{10.12}$$

Ümber grupeerides:

$$[\mathbf{N}]^T \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left([\mathbf{N}]^T \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) - \frac{\partial [\mathbf{N}]^T}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{10.13}$$

Võrrandi (10.11) esimene liige asendatakse kohe, kui on määratud, et

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left([\mathbf{N}]^T r \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial [\mathbf{N}]^T}{\partial r} r \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}[\mathbf{N}]^T \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) \tag{10.14}$$

Ümbergrupeerimine annab:

$$[\mathbf{N}]^T \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \phi}{\partial r}\right)\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left([\mathbf{N}]^T r \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) - \frac{\partial [\mathbf{N}]^T}{\partial r}\frac{\partial \phi}{\partial r} \tag{10.15}$$

Võrrandite (10.13) ja (10.15) asendamine võrrandisse (10.11) annab:

$$\begin{aligned}\{\mathbf{R}^{(e)}\} = \int_V \left(D_r \frac{\partial [\mathbf{N}]^T}{\partial r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + D_z \frac{\partial [\mathbf{N}]^T}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial z} - [\mathbf{N}]^T Q\right) dV - \\ - \int_V \left(\frac{D_r}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left([\mathbf{N}]^T r \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + D_z \frac{\partial}{\partial z}\left([\mathbf{N}]^T \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)\right) dV\end{aligned} \tag{10.16}$$

Teise ruumintegraali saab teisendada Gaussi teoreemi abil pindintegraaliks:

$$\int_\Gamma \left(\frac{D_r}{r}\left([\mathbf{N}]^T r \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) cos\theta + D_z [\mathbf{N}]^T \frac{\partial \Phi}{\partial z} sin\theta\right) d\Gamma \tag{10.17}$$

mis lihtsustub kujule

$$\int_\Gamma [\mathbf{N}]^T \left(D_r \frac{\partial \phi}{\partial r} cos\theta + D_z \frac{\partial \phi}{\partial z} sin\theta\right) d\Gamma \tag{10.18}$$

Täielik jäägiintegraal on

$$\begin{aligned}\{\mathbf{R}^{(e)}\} = \int_V \left(D_r \frac{\partial [\mathbf{N}]^T}{\partial r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + D_z \frac{\partial [\mathbf{N}]^T}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial z} - [\mathbf{N}]^T Q\right) dV - \\ - \int_\Gamma [\mathbf{N}]^T \left(D_r \frac{\partial \phi}{\partial r} cos\theta + D_z \frac{\partial \phi}{\partial z} sin\theta\right) d\Gamma\end{aligned} \tag{10.19}$$

Kuna $\phi^{(e)} = [\mathbf{N}]\{\mathbf{\Phi}^{(e)}\}$, $\partial\phi/\partial r$ ja $\partial\phi/\partial z$ võrrandi (10.19) esimeses integraalis saab asendada suurustega

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial [\mathbf{N}]}{\partial r}\{\mathbf{\Phi}^{(e)}\} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial [\mathbf{N}]}{\partial z}\{\mathbf{\Phi}^{(e)}\} \tag{10.20}$$

siis

$$\begin{aligned}\{\mathbf{R}^{(e)}\} = \; & \left(\int_V \left(D_r \tfrac{\partial [N]^T}{\partial r}\tfrac{\partial [N]}{\partial r} + D_z \tfrac{\partial [N]^T}{\partial z}\tfrac{\partial [N]}{\partial z}\right) dV\right)\{\mathbf{\Phi}^{(e)}\} \\ & - \textstyle\int_V Q[\mathbf{N}]^T dV \\ & - \textstyle\int_\Gamma [\mathbf{N}]^T \left(D_r \tfrac{\partial \phi}{\partial r} cos\theta + D_z \tfrac{\partial \phi}{\partial z} sin\theta\right) d\Gamma\end{aligned} \tag{10.21}$$

Esimene integraal võrrandis (10.21) on korrutatud $\{\mathbf{\Phi}^{(e)}\}$-ga. Seega on see integraal elemendi jäikusmaatriks. Integraal, mis sisaldab Q-d, muutub $\{\mathbf{f}^{(e)}\}$-ks samas, kui pindintegraal on elementidevaheliseks tingimuseks elementide sisepiiridel ja tuletatud ääretingimusteks elementide piiridel piirkonnas Γ_2. $\{\mathbf{R}^{(e)}\}$ üldine kuju on

$$\{\mathbf{R}^{(e)}\} = \{\mathbf{I}^{(e)}\} + [\mathbf{k}^{(e)}]\{\mathbf{\Phi}^{(e)}\} - \{\mathbf{f}_Q^{(e)}\} \tag{10.22}$$

kus

$$\{\mathbf{I}^{(e)}\} = \int_{\Gamma} [\mathbf{N}]^T \left(D_r \frac{\partial \phi}{\partial r} cos\theta + D_z \frac{\partial \phi}{\partial z} sin\theta \right) d\Gamma \tag{10.23}$$

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = \int_{V} \left(D_r \frac{\partial [\mathbf{N}]^T}{\partial r} \frac{\partial [\mathbf{N}]}{\partial r} + D_z \frac{\partial [\mathbf{N}]^T}{\partial z} \frac{\partial [\mathbf{N}]}{\partial z} \right) dV \tag{10.24}$$

ja

$$\{\mathbf{f}_Q^{(e)}\} = \int_{V} Q [\mathbf{N}]^T dV \tag{10.25}$$

Võrrandi (10.24) saab viia kompaktsele kujule:

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = \int_{V} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}][\mathbf{B}] dV \tag{10.26}$$

kus

$$\{\mathbf{gv}\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{array} \right\} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{\Phi}^{(e)}\} \tag{10.27}$$

ja

$$[\mathbf{D}] = \left[\begin{array}{cc} D_r & 0 \\ 0 & D_z \end{array} \right] \tag{10.28}$$

10.4 Elemendimaatriksid

Vahetu siht on arvutada ruumintegraalid, mis annavad $[\mathbf{k}^{(e)}]$ ja $\{\mathbf{f}^{(e)}\}$. Tuletatud ääretingimuse panust nendesse integraalidesse arutatakse järgmises sektsioonis. Arutlus on piiratud kolmnurkelementiga, sest selle integraale on lihtne arvutada. Nelinurkelemendi integraale arvutatakse tavaliselt numbriliste tehnikate abil.

Koefitsiendid $[B]$ saadakse kujufunktsioonide diferentseerimisel r ja z järgi. See annab maatriksi

$$[\mathbf{B}] = \frac{1}{2A} \left[\begin{array}{ccc} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{array} \right] \tag{10.29}$$

Iga $[\mathbf{B}]$-s olev koefitsient on konstant. Kuna $[\mathbf{D}]$, nagu antud võrrandiga (10.28) , koosneb samuti konstantsetest koefitsientidest, siis

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = \int_{V} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}][\mathbf{B}] V = [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}][\mathbf{B}] \int_{V} dV = [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}][\mathbf{B}] V \tag{10.30}$$

Ümber z-telje pöörleva piirkonna ruumala on $V = 2\pi \bar{r} A$, kus $\bar{r}$ on piirkonna raskuskeskme radiaalkaugus. Elemendi jäikusmaatriks on

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = 2\pi \bar{r} A [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}][\mathbf{B}] \tag{10.31}$$

Maatrikskorrutist on lihtne arvutada, saades tulemuseks

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = \frac{2\pi \bar{r} D_r}{4A} \left[\begin{array}{ccc} b_i^2 & b_i b_j & b_i b_k \\ b_i b_j & b_j^2 & b_j b_k \\ b_i b_k & b_j b_k & b_k^2 \end{array} \right] + \frac{2\pi \bar{r} D_z}{4A} \left[\begin{array}{ccc} c_i^2 & c_i c_j & c_i c_k \\ c_i c_j & c_j^2 & c_j c_k \\ c_i c_k & c_j c_k & c_k^2 \end{array} \right] \tag{10.32}$$

Radiaalkaugus kolmnurkelemendi massikeskmesse on

$$\bar{r} = \frac{R_i + R_j + R_k}{3} \tag{10.33}$$

Elemendi jõuvektor

$$\{\mathbf{f}_Q^{(e)}\} = \int_V Q[\mathbf{N}]^T dV = 2\pi Q \int_A \left\{ \begin{array}{c} N_i r \\ N_j r \\ N_k r \end{array} \right\} dA \tag{10.34}$$

kuna $dV = 2\pi r dA$. Võrrandis (10.34) saab kujufunktsioonid asendada piirkonnakoordinaatidega ja radiaalkauguse r omandab kuju:

$$r = N_i R_i + N_j R_j + N_k R_k = L_1 R_i + L_2 R_j + L_3 R_k \tag{10.35}$$

ja $\{\mathbf{f}_Q^{(e)}\}$ integraaliks on

$$\{\mathbf{f}_Q^{(e)}\} 2\pi Q \int_A \left\{ \begin{array}{c} L_1(L_1 R_i + L_2 R_j + L_3 R_k) \\ L_2(L_1 R_i + L_2 R_j + L_3 R_k) \\ L_3(L_1 R_i + L_2 R_j + L_3 R_k) \end{array} \right\} dA$$

Piirkonnakoordinaatide korrutiste integraalide arvutamise valemi (2.86) abil saadakse:

$$\{\mathbf{f}_Q^{(e)}\} = \frac{2\pi Q A}{12} \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} R_i \\ R_j \\ R_k \end{array} \right\} \tag{10.36}$$

Elementide piires ühtlane Q ei ole sõlmede vahel ühtlaselt jaotunud nagu see juhtus kahemõõtmeliste elementide korral. Iga sõlm saab oma osa sõltuvalt tema radiaalkaugusest nullpunktist.

10.5 Illustreeriv näide

Telgsümmeetrilisel kolmnurkelemendil sõlmkoordinaatidega joonisel 10.4 on ühtlane soojuse eraldumine $Q = 3W/cm^3$. Arvutada $[\mathbf{k}^{(e)}]$ ja $\{\mathbf{f}_Q^{(e)}\}$, kui$D_r = D_z = 1.5W/(cm \quad {}^0C)$

Kasutades võrrandit (10.7) , determinandi võrrandit (2.39) ja (10.33) , saadakse

$$b_i = -4, \quad b_j = 5, \quad b_k = -1$$

$$c_i = -2, \quad c_j = -2, \quad c_k = 4$$

$$\bar{r} = \frac{22 + 26 + 24}{3} = 24cm$$

ja

$$2A = 18cm^2$$

Korrutaja koefitsiendid on

$$\frac{2\pi \bar{r} D_r}{4A} = \frac{2\pi \bar{r} D_z}{4A} = \frac{2\pi(24)(1.5)}{2(18)} = 2\pi$$

$$\frac{2\pi Q A}{12} = \frac{2\pi(3)(9)}{12} = 4.5\pi$$

Elemendi jäikusmaatriks on

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = 2\pi \left[\begin{array}{ccc} 16 & -20 & 4 \\ -20 & 25 & -5 \\ 4 & -5 & 1 \end{array} \right] + 2\pi \left[\begin{array}{ccc} 4 & 4 & -8 \\ 4 & 4 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{array} \right]$$

või

$$[\mathbf{k}^{(e)}] = \pi \begin{bmatrix} 40 & -32 & -8 \\ -32 & 58 & -26 \\ -8 & -26 & 34 \end{bmatrix}$$

Elemendi jõuvektor on

$$\{\mathbf{f}_Q^{(e)}\} = 4.5\pi \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_i \\ R_j \\ R_k \end{Bmatrix}$$

$$\{\mathbf{f}_Q^{(e)}\} = 4.5\pi \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 22 \\ 26 \\ 24 \end{Bmatrix}$$

$$\{\mathbf{f}_Q^{(e)}\} = \pi \begin{Bmatrix} 423 \\ 441 \\ 432 \end{Bmatrix}$$

Kuna Q on elemendi piires konstantne, on kogu eraldatud soojus

$$\int_V Q dV = Q \int_V dV = 2\pi \bar{r} A Q = 1296\pi W$$

$\{\mathbf{f}_Q^{(e)}\}$ komponendid summeeruvad selleks väärtuseks, aga see suurus pole võrdselt sõlmede vahel jaotunud.

10.6 Tuletatud rajatingimused

Elemendimaatriksid (10.32) ja (10.36) vastavalt $[\mathbf{k}^{(e)}]$ ja $\{\mathbf{f}_Q^{(e)}\}$ jaoks kehtivad sisemiste elementide jaoks ja rajaelementidele, kui $\phi(r, z)$ on rajal määratud. Kui on määratud tuletatud rajatingimused (10.5) , saavad $[\mathbf{k}^{(e)}]$ ja $\{\mathbf{f}_Q^{(e)}\}$ lisapanuse.

Tuletatud ääretingimustest tulenev panus elementidesse tuleneb elementidevahelisest vektorist (10.23) pärast selle suhte asendamist ääretingimusse (10.5) . Eeldada, et Γ_{bc} on pinnaelement rajatingimusega

$$\{\mathbf{I}_{bc}^{(e)}\} = -\int_{\Gamma_{bc}} [\mathbf{N}]^T (-M\phi_b + S) d\Gamma \tag{10.37}$$

või

$$\{\mathbf{I}_{bc}^{(e)}\} = \int_{\Gamma_{bc}} M[\mathbf{N}]^T \phi_b d\Gamma - \int_{\gamma_{bc}} S[\mathbf{N}]^T d\Gamma \tag{10.38}$$

ϕ väärtus rajal ϕ_b on antud kui $\phi^{(e)} = [\mathbf{N}]\{\mathbf{\Phi}^{(e)}\}$; sestap

$$\{\mathbf{I}_{bc}^{(e)}\} = \left(\int_{\Gamma_{bc}} M[\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] d\Gamma \right) \{\mathbf{\Phi}^{(e)}\} - \int_{\Gamma_{bc}} S[\mathbf{N}]^T d\Gamma \tag{10.39}$$

Esimene integraal annab panuse $[\mathbf{k}^{(e)}]$-sse, kuna seda korrutatakse $\{\mathbf{\Phi}^{(e)}\}$-ga; teine liige $\{\mathbf{f}^{(e)}\}$-sse. Mõlemad integraalid võrrandis (10.39) on pindintegraalid. Integraalid võrrandis (10.39) on

$$[\mathbf{k}_M^{(e)}] = \int_{\Gamma_{bc}} M[\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] d\Gamma \tag{10.40}$$

ja

$$\{\mathbf{f}_S^{(e)}\} = \int_{\Gamma_{bc}} S[\mathbf{N}]^T d\Gamma \tag{10.41}$$

Integraal (10.41) on kõige kergem arvutada, andes

$$\{\mathbf{f}_S^{(e)}\} = S \int_{\Gamma_{bc}} \left\{ \begin{array}{c} N_i \\ N_j \\ N_k \end{array} \right\} d\Gamma = L_j k \int_0^l S \left\{ \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \right\} 2\pi r dl_2 \tag{10.42}$$

eeldades, et integreeritakse piki külge jk. Piirkonnakoordinaadid muutuvad väärtusetks $L_1 = 0$, $L_2 = l_l$ ja $L_3 = l_2$ piki seda külge ja integraaliks saadakse

$$\{\mathbf{f}_S^{(e)}\} = 2\pi S L_{jk} \int_0^l \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ l_1 r \\ l_2 r \end{array} \right\} dl_2 \tag{10.43}$$

Rajal oleva punkti radiaalkaugus on

$$r = N_i R_i + N_j R_j + N_k R_k = l_1 R_j + l_2 R_k \tag{10.44}$$

kuna $N_i = 0$. r asendamine võrrandisse (10.43) annab

$$\{\mathbf{f}_S^{(e)}\} = 2\pi S L_{jk} \int_0^1 \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ l_1(l_1 R_j + l_2 R_k) \\ l_2(l_1 R_j + l_2 R_k) \end{array} \right\} dl_2 \tag{10.45}$$

l_1^2, $l_1 l_2$ ja l_2^2 integraalid arvutatakse (2.74) abil. Lõpptulemus on:

$$\{\mathbf{f}_S^{(e)}\} = \frac{2\pi S L_{jk}}{6} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 2R_j + R_k \\ R_j + 2R_k \end{array} \right\} \tag{10.46}$$

Külgede ij ja ik jaoks on $\{\mathbf{f}_S^{(e)}\}$ vastavalt

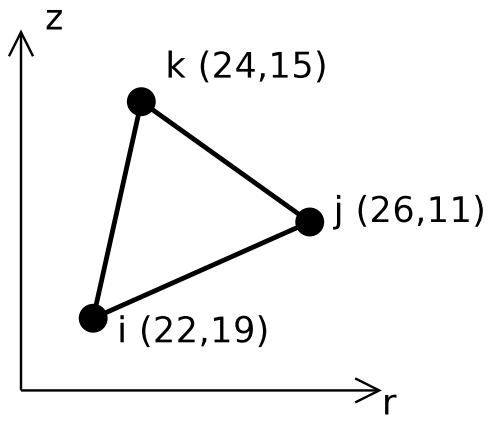
$$\{\mathbf{f}_S^{(e)}\} = \frac{2\pi S L_{ij}}{6} \left\{ \begin{array}{c} 2R_i + R_j \\ R_i + 2R_j \\ 0 \end{array} \right\}, \qquad \frac{2\pi S L_{ik}}{6} \left\{ \begin{array}{c} 2R_i + R_k \\ 0 \\ R_i + 2R_k \end{array} \right\} \tag{10.47}$$

Pindintegraal (10.40) arvutatakse analoogsel viisil. Külje jk korral saadakse

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{bc}} M[\mathbf{N}]^T[\mathbf{N}] d\Gamma &= 2\pi M L_{jk} \int_0^l \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ l_1 \\ l_2 \end{array} \right\} \begin{bmatrix} 0 & l_1 & l_2 \end{bmatrix} r dl_2 \\ &= 2\pi M L_{jk} \int_0^l \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & r l_1^2 & r l_1 l_2 \\ 0 & r l_1 l_2 & r l_2^2 \end{bmatrix} dl_2 \end{aligned} \tag{10.48}$$

Asendades võrrandist (10.44) r-i ja kasutades faktoriaalvalemit (2.74) , saadakse

$$[\mathbf{k}_M^{(e)}] = \frac{2\pi M L_{jk}}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (3R_j + R_k) & (R_j + R_k) \\ 0 & (R_j + R_k) & (R_j + 3R_k) \end{bmatrix} \tag{10.49}$$



Joonis 10.4: Näidisprobleemi kolmnurkelement.

Külgede ij ja ik korral on võrrandi (10.40) tulemuseks vastavalt

$$[\mathbf{k}_M^{(e)}] = \frac{2\pi M L_{ij}}{12} \begin{bmatrix} (3R_i + R_j) & (R_i + R_j) & 0 \\ (R_i + R_j) & (R_i + 3R_j) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{10.50}$$

$$[\mathbf{k}_M^{(e)}] = \frac{2\pi M L_{ik}}{12} \begin{bmatrix} (3R_i + R_k) & 0 & (R_i + R_k) \\ 0 & 0 & 0 \\ (R_i + R_k) & 0 & (R_i + 3R + k) \end{bmatrix} \tag{10.51}$$

10.7 Illustreeriv näide

Arvutada $[\mathbf{k}_M^{(e)}]$ ja $\{\mathbf{f}_S^{(e)}\}$ ij külje elemendi jaoks joonisel 10.4 , kui $M = 4$ ja $S = 3$.

Asjakohased suurused on

$$R_i = 22, \qquad R_j = 26$$

ja

$$L_{ij} = \sqrt{(26-22)^2 + (11-10)^2} = 4.12cm$$

korrutavad konstandid on

$$\frac{2\pi M L_{ij}}{12} = \frac{2(3.14)(4)(4.12)}{12} = 8.62$$

$$\frac{2\pi S L_{ij}}{6} = \frac{2(3.14)(3)(4.12)}{6} = 12.9$$

samas kui

$$3R_i + R_j = 3(22) + 26 = 92$$

$$R_i + R_j = 22 + 26 = 48$$

$$R_i + 3R_j = 22 + 3(26) = 100$$

$$2R_i + R_j = 2(22) + 26 = 70$$

$$R_i + 2R_j = 22 + 2(26) = 74$$

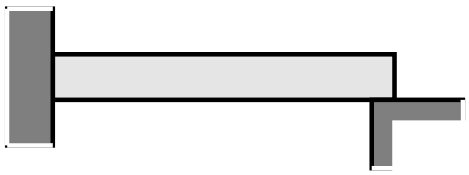
Elementide suurused on:

$$[\mathbf{k}_M^{(e)}] = 8.62 \begin{bmatrix} 92 & 48 & 0 \\ 48 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 793 & 414 & 0 \\ 414 & 862 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ja

$$\{\mathbf{f}_S^{(e)}\} = 12.9 \begin{Bmatrix} 70 \\ 74 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 903 \\ 955 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$[\mathbf{k}_M^{(e)}]$ diagonaalväärtused nagu ka $\{\mathbf{f}_S^{(e)}\}$ väärtused pole samad.



Joonis 11.1: Konsooltala, mille ääretingimused sõltuvad probleemi lahendusest.

11 Mittelineaarsus

11.1 Mittelineaarsed probleemid

Mittelineaarne käitumine aktsepteerib laia valikut ilminguid, mis võivad interakteeruda üksteisega ja igat neist võib olla raske formuleerida. Õnnelikul kombel annavad lineaarsed mudelid paljudele praktilist huvi pakkuvatele probleemidele rahuldava ähendi. Kuid olulised kõrvalekalded lineaarsusest on suhteliselt tavalised. Näiteks soojuse ülekandumise analüüsis on materjali omadused tihti temperatuurist sõltuvad; faasimuutus neelab või vabastab kuumust ja muudab materjali omadusi; kiirgus teeb analüüsi eriti mittelineaarseks, sest see sõltub absoluutse temperatuuri neljandast astmest. Struktuurimehaanikas või materjal painduda või voolata; tühimikud võivad avaneda või sulguda. Mittelineaarsed probleemid tõstavad raskuastet nähtuse kirjeldamisel realistlike matemaatiliste mudelitega ja selle tulemusel mittelineaarsete võrrandite lahendamisel. Samuti või suureneda arvutuskulukus, kuigi arvutusvõimsused pidevalt suurenevad. Siiski võetakse mittelineaarset analüüsi üha enam ette, sest vastav tarkvara on üha võimekam, arvutusmaksumus väheneb, struktuuridele esitatakse suuremaid nõudmisi ja vajatakse enam teadmisi töötlemisprotsessist.

Mittelineaarsuse tüübid hõlmavad järgmisi nähtusi:

- *materjali mittelineaarsus*, mille korral materjali omadused on pinge või rõhu funktsioonid. Siia alla kuuluvad näiteks mittelineaarne elastsus ja plastilisus.
- *kontakti mittelineaarsus*, mille korral võib kõrvutiolevate osade vahel olev lõhe sulguda või avaneda; kontaktpindala osade vahel muutub, kui kontaktjõud muutuvad või esineb libisev kontakt koos hõõrdejõududega.
- *geomeetriline mitelineaarsus*, mille korral on deformatsioon piisavalt suur, et tasakaaluvõrrandid peavad arvestama deformeeritud struktuuri geomeetriat. Samuti võivad koormused muuta suunda, kui nad kasvavad, nagu näiteks rõhk paisutab membraani.
- *rajatingimuste mittelineaarsus*, kus rajatingimuse väärtus või tüüp sõltub probleemi lahendusest.

Viimase tüübi kohta on näide joonisel 11.1 . Konsooltala võib käituda selliselt, nagu tema parem ostpunkt oleks vaba või nagu toestatud konsool, sõltuvalt otsa nihke märgist. Sellisel juhul muutub rajatingimuste fundamentaalne klassifikatsioon koos nihkega ja lahendusskeemi tuleb vastavalt muuta.

On võimalik selline probleem, kus materjali ja geomeetriline mittelineaarsus esinevad koos, näiteks kaasnevad mitteelastse materjali mittelineaarsustega tihti plastiline vool, mis võib viia suurte deformatsioonideni, mis teevad hädavajalikuks mittelineaarsete venitus-nihkevõrrandite

kasutamise.

Mittelineaarsete probleemide lahendamiseks on palju viise; tihti tundub neid olema isegi liiga palju, peegeldades olulist fakti, et mittelineaarsete probleemide lahendamise üldise teooria maht on suhteliselt väike. Mittelineaarseid probleeme lahendatakse tavaliselt iteratsiooniskeemidega. Olgu järgmine tähistus:

$u^{(i)}$ = i-nda iteratsioonisammu lahend u.

Järgnevalt vaadeldakse kahte üldist iteratsiooniskeemi mittelineaarsete probleemide lahendamiseks:

- *järgnevate asendamiste meetod*, mis hõlmab vastavate mittelineaarsete võrrandite transformeerimise iteratsioonide jaoks loomulikku vormi;
- *Newtoni meetod*, mis on järgnevate asendamiste erijuht, mis oma kasulikkuse pärast väärib eraldi käsitlemist.

Järgneva asendamise skeemid põhinevad aluseks oleva mittelineaarse operaatori poolitamisel kergesti töödeldavaks ja keerulisemaks komponendiks, kusjuures silmas peetakse Galerkini õplike elementide mudeli rakendamist. Teisel, Newtoni meetodil, on mõned soovimatud jooned, mis muudavad selle lihtsameelse kasutamise mõneti ohtlikuks protsessiks.

Ära tuleb tuua ka kerge hoiatus terminoloogia vallast. Mõned autorid nimetavad *Newtoni meetodiks* iteratsiooniskeemi, mis tuleneb mitteruutfunktsionaalide minimeerimisest, näiteks nende, mis katavad palju mittelineaarseid probleeme tahkisemehaanikas. Need autorid nimetavad analoogset mittelineaarse võrrandisüsteemi lahendamise tehnikat (mis võib, aga ei pea olema funktsionaali ekstreemumiprobleemi tulemuseks) *Newton-Raphsoni iteratsiooniks*. Siin nimetatakse lihtsuse mõttes mõlemat *Newtoni meetodiks* ning tuuakse esile sarnasused *variatsioonilise* ja *nõrga* formuleeringu vahel, samuti mõlemast meetodist tulenevad võrrandisüsteemid.

Olgu vaatluse all mittelineaarse skalaarse võrrandi $f(x) = 0$ lahend. Skalaarkoordinaati x, mis rahuldab võrrandit $f(x) = 0$, nimetatakse funktsiooni f juureks, mille silmnhtav geomeetriline interpretatsioon oleks punkt, milles funktsiooni f graafik kas lõikab või puutub x-telge. Tavaliseks viisiks on nimetada x-i nii sõltumatuks muutujaks kui ka juureks.

Põhiline idee püüde taga lahendada mittelineaarset võrrandit $f(x)$ on kujundada see võrrand kujule, mis hõlmab uut funktsiooni $g(x)$ nii, et suvaline mittelineaarse võrrandi $f(x) = 0$ juur lahendab ekvivalentse võrrandi $x = g(x)$. Tehniliselt saab võrrandi $x = g(x)$ lahendit nimetada funktsiooni $g(x)$ fikseeritud punktiks, sest see funktsioon asetab punkti x oma määramispiirkonda samal ajal, kui seesama skalaar on ka tema muutumispiirkonnas. Fakt, et juur x on g määramis- ja ka muutumispiirkonnas, võib põhjustada probleeme ettevaatamatule analüüsijale, kes püüab lahendada mittelineaarset võrrandit. Funktsioon g defineerib loomuliku iteratsiooniskeemi, nii et kogu tuletusprotsess on midagi alljärgnevat:

$$\textbf{lahendada } f(x) = 0 \Leftrightarrow \textbf{lahendada } x = g(x) \Rightarrow \textbf{defineerida iteratsiooniskeem}$$
$$x^{(i)} = g(x^{(i-1)})$$

Et saada lahend $f(x) = 0$-le, tuuakse sisse iteratsiooniskeem $x^{(i)} = g(x^{(i-1)})$, mis loodetavasti koondub soovitud lahendiks. Sõna "loodetavasti" on siinkohal sobiv, sest leidub palju asju, mis võivad valesti minna. Alustseks ehk asjaolu, et kõige fundamentaalsem erinevus hästipüstitatud

lineaarvõrrandite ja mittelineaarvõrrandite vahel on see, et viimastel on tihti mitu lahendit. Näiteks on mittelineaarvõrrandil $f(x) = sin(x)$ ilmselgelt palju juuri, nimelt $\pm n\pi$ suvalise n korral. Kui tuuakse sisse iteratsiooniskeem, tuleb veenduda, et kui juur on leitud, oleks sellel ka füüsikaline tähendus.

Teine mure on see, et funktsiooni g defineeritud iteratsioon kipub kalduma mingi piiri poole, mida võib interpreteerida kui funktsiooni f juurt. Kui $g(x) = x^2$, siis iga esialgne hinnang, mille suurujärk on suurem ühikulisest, lõpetab varem või hiljem lõpmatuses. Kuna leida on vaja funktsiooni g fikseeritud punkte, siis tuleb abi saamiseks pöörduda teoreemide poole, mis tegelevad $x = g(x)$ lahendi olemasolu ja unikaalsusega (Contraction Mapping Theorem). Kui $g(x)$-i muutumispiirkond sisaldub $g(x)$ määramispiirkonnas ja $g(x)$ "suurus" on piisavalt koonduv, nii et kui x ja y on suvalised punktid g määramispiirkonnas, siis $|g(x) - g(y)| \leq p\,|x - y|$ suvalise $p < 1$ korral, g-d nimetatakse kokkutõmbeks (ing. k. *contraction*) ning on võimalik tõestada g fikseeritud punktide olemasolu ja unikaalsus. Lihtsamalt, $g(x)$ toob punktid oma määramispiirkonnas üksteisele lähemale ja lõpuks punktide rida

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = \lim_{n\to\infty} g(x^{(n-1)}) = \lim_{n\to\infty} g^2(x^{(n-2)}) = \ldots = \lim_{n\to\infty} g^n(x^{(0)}) \tag{11.1}$$

kus $x^{(0)}$ on esialgne hinnang, jääb paigale piiravale väärtusele, mis on mittelineaarse funktsiooni $f(x) = 0$ soovitud lahend. g kokkutõmbuvuse piisavaks tingimuseks (peale ilmselge muutumis- ja määramispiirkonna) on, et $g'(x) \leq p < 1$ suvalise skalaari p korral. Näiteks $g(x) = x^2$ puhul $g'(x) = 2x$ ja kui esialgne hinnang valida piirkonda $-1/2 < x^{(0)} < 1/2$, siis saab garanteerida, et iteratsioon koondub fikseeritud punktiks $x = 0$. Ainet mõtisklusteks: kui esialgne hinnang on laiemas intervallis $(-1, 1)$, siis jõutakse samasse fikseeritud punkti.

Üks lähenemisviise iteratsioonifunktsiooni $g(x)$ konstrueerimiseks hõlmab funktsiooni $f(x)$ lahutamist "kergeks" ja "keeruliseks" osaks. "Kerge" osa saab defineerida kui sellisena, et seda on lihtne ümber pöörata ja "raske" osa on ülejäänu. Näiteks $f(x) = ax + b(x)$ korral, kus a on konstant ja $b(x)$ sisaldab mittelineaarsust, võib pöörata lineaarliikme, et saada vajalik kuju $g(x)$-le:

$$f(x) = ax + b(x) \Rightarrow ax = -b(x) \Rightarrow x = -\frac{b(x)}{a} = g(x) \tag{11.2}$$

Loodetavasti $x^{(i)} = g(x^{(i-1)})$ defineeritud iteratsioon koondub. On teada, et kui g muutumispiirkond sisaldub tema määramispiirkonnas ja kui $|b'(x)| \leq p\,|a|$ igal pool määramispiirkonnas suvalise $p < 1$ korral, siis järjestikkuste asendamistega saadud iteratsioon koondub unikaalsesse fikseeritud punkti.

Olgu näiteks juhtum

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \tag{11.3}$$

millel on juured

$$x = 1 \qquad x = 2 \tag{11.4}$$

Kui eelpool soovitatud lahutamine läbi viia, siis saadakse alljärgnevad tulemused:

$$x = g(x) = \frac{x^2 + 2}{3} \Rightarrow x^{(i)} = g(x^{(i-1)}) = \frac{\left[x^{(i-1)}\right]^2 + 2}{3}$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x^{(i)}$	0	0.667	0.815	0.888	0.929	0.955	0.970	0.981	0.987	0.992	0.994

Iteratsioon koondub juureks $x = 1$, kuid mitte väga kiiresti. Lisaks tuleb märkida, et $|g'(x)| < 1$ piirkonnas $(0, 1)$, sestap on alust oodata, et iteratsioon läheneb lõpuks ühele kahest juurest, aga see meetod pole nii kasulik, kui seda võik soovida.

11.2 Newtoni meetod

Newtoni meetod on tegelikult järjestikkuste asendamiste meetodi erijuht, aga see sisaldab väga nutikat iteratsioonifunktsiooni $g(x)$ valimist. Olgu juht, kus on vaja leida f-i juur ja olemas on hinnanguline x, mida soovitakse täpsustada. Üksikasjalisemalt eeldatakse, et $f(x) \neq 0$, kuid loodetakse leida "parandus" või "samm" h nii, et skalaar $x+h$ on f-i juur, milles $f(x+h) = 0$. f-i saab arendada Taylori reaks teada oleva väärtuse x ümber:

$$0 = f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \dots \tag{11.5}$$

Siin on h kõrgemat järku liikmed ära jäetud.

Seda *lineariseeritud Taylori rea arendust* saab lahendada parandi h jaoks, et saada iteratsiooniskeem:

$$h = -\frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow x^{(i)} = x^{(i-1)} + h = x^{(i-1)} - \frac{f(x^{(i-1)})}{f'(x^{(i-1)})} \tag{11.6}$$

nii, et

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{11.7}$$

$g(x)$-i konkreetne valik defineerib Newtoni meetodi. Eelnevalt näitena vaadeldud mittelineaarse probleemi korral

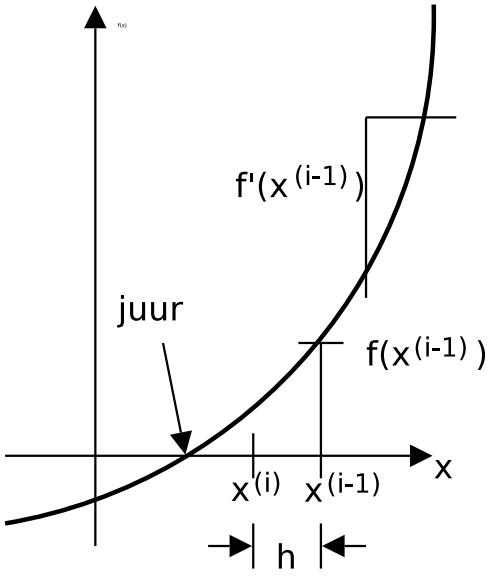
i	0	1	2	3	4
$x^{(i)}$	0	0.677	0.933	0.996	1.000

Käesoleval juhul on Newtoni meetodi koonduvus ruutkoonduvus, seega võib see toimuda väga kiiresti, kui iteratsioon on hakanud juure naabruses liikuma. Üks silmnähtav probleem Newtoni meetodi juures on see, et $f'(x)$-ga jagamine nõuab, et see tuletis ei kaoks soovitud juure lähikonnas. Kui $f(x)$ graafikul on lokaalne puutepunkt x-teljega soovitud juure kohal (s.t. f-il on seal mitu juurt), siis võib Newtoni meetodi optimaalne koonduvuskiirus kaduma minna. Kui $f'(x)$ on nullilähedane, siis võib parandussammu h suurus minna väga suureks ja järjestikkused iteratsioonid võivad olla laialt lahus.

See on Newtoni meetodi fundamentaalne probleem: kui tuletis f' muutub juure naabruses piisavalt väikeseks, siis võib Newtoni iteratsioon viia soovitud fikseeritud punktist väga kaugele. Suurem osa praktilisi mittelineaarseid skeeme põhineb tänapäeval Newtoni meetodil, sisaldades ühte või mitut parandid, et see tähtis skeem ei libiseks kaugele kohast, kus see peaks juurt otsima.

Joonisel 11.2 on Newtoni meetodi geomeetriline interpretatsioon. Tegelik funktsioon $f(x)$ on asendatud selle lokaalse lineariseeringuga, mis on saadud Taylori seeria lineaarsest liikmest. Selle $f(x)$-i lineariseeritud versiooni ja x-telje lõikekoht on valitud iteratsiooniskeemi järgmiseks sammuks. Antud näites on $f(x)$-il lihtne juur ja graafik lõikab telge ilma seda puutumata. $f'(x) \neq 0$ juure lähikonnas ja mittelineaarse lahendi skeem koondub ruutseaduse järgi.

Selle probleemi laiendus koos Newtoni meetodiga on andnud mõningaid huvitavaid tulemusi,



Joonis 11.2: Newtoni iteratsioonimeetodi geomeetriline interpretatsioon.

mida saab kasutada meetodi probleemide esitamiseks graafilisel viisil. Kui võtta arvesse kompleksarve, siis neid võib käsitleda kui järjestatud (x, y) paare, sarnanedes nii tasandil olevate vektoritega. Ometi on vektorite jaoks defineeritud algebralised omadused suhteliselt väheviljakad võrreldes nendega, mis on defineeritud skalaaride jaoks. Reaalarvud moodustavad algebralise välja, mis on nii rikas kui üks numbrisüsteem olla saab. Vektoralgebra on suhteliselt piiratud, sest seal pole defineeritud pöördtehet korrutamisele, seega ei saa isegi mõtteliselt jagamist teha. Kompleksarvude ilu seisneb selles, et need skalaarid defineerivad välja, säilitades seega praktiliselt kõik reaalarvude omadused (nagu jagamine) ja põhiliselt kõik tavalised algebrareeglid lähevad samuti üle sellesse olulisesse kahemõõtmelisse juhtu. Tegelikult on järjestamine ainus reaalarvude omadus, mis ei lähe kompleksruumi üle. Komplekset võrdsust saab kergesti defineerida (vastavalt kahe kompleksarvu reaal- ja imaginaarosa samaaegse võrdsuse kaudu), kuid kahe kompleksarvu mittevõrdsust ei saa määrata selliste mõistetaga nagu “suurem kui” või “väiksem kui”. Peal selle piirangu kehtib kõik reaalarvude kohta teadaolev ka kompleksarvude jaoks. Ainus erinevus on, et kompleksarv koosneb kahest skalaarist, reaal- ja imaginaarosast:

$$z = (x, y) = x + iy, \quad x = Real(z), y = Im(z), \quad i^2 = -1$$

Üks olulisi mittelineaarsete võrrandite allikaid on algebraliste polünoomide süsteem ehk funktsioonid kujul

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \quad \ldots \quad + a_n x^n \qquad (a_n \neq 0) \tag{11.8}$$

Algebra põhiteoreem ütleb, et igal n-järku polünoomil on täpselt n juurt (mis kõik ei pea kindlasti üksteisest eristatavad olema) komplekstasandil. Seega on lihtsal taandatud polünoomvõrrandil

$$z^n - 1 = 0 \qquad z = x + iy \tag{11.9}$$

kus x, y on reaalarvud, täpselt n juurt komplekstasandil. Viimasel juhul nimetatakse juuri n-järku ühikjuurteks. $n = 1$ korral on kompleksarv $z = 1 + 0y$ ehk paremini tuntud kui reaalarv 1, esimest järku ühikjuur. $n = 2$ puhul on kompleksarvud $z = 1 + 0y$ ja $z = -1 + 0y$ teist järku ühikjuured. Viimane tulemus kinnitab lihtsalt laialtlevinud teadmist, et arvul “1” on kaks ruutjuurt (s.t. $n = 2$): “1” ja “-1”.

Asi läheb tõeliselt huvitavaks, kui $n > 2$. Siis sisaldavad ühikjuured arve imaginaarsete komponentidega. On kerge leida n-järku ühikjuurt, sest need asuvad võrdsete vahedega ühikringis $|z| = 1$ komplekstasandil ja reaalarv "1" on alati komplekti kaasatud. Eksisteerib lihtne valem selle tähtsa mittelineaarse võrrandi lahendamiseks:

$$z^n - 1 = 0 \tag{11.10}$$

on n juurt

$$z_j = x_j + iy_j \tag{11.11}$$

kus

$$x_j = cos\frac{2j\pi}{n} \qquad y_j = sin\frac{2j\pi}{n} \tag{11.12}$$

$j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ Kui $j = 0$, saadakse alati reaalarv "1".

Kuna diferentseerimine ja jagamine kehtivad ka kompleksarvude suhtes, siis tullakse Newtoni meetodi kasutamisest puhta nahaga välja ühikjuurte leidmisega. Kui vaatluse all oleks arvu "1" kuupjuurte leidmine, siis tuleks arvesse võtta alljärgnevat iteratsiooni:

$$f(z) = z^3 - 1 = 0 \Rightarrow z^{(i)} = z^{(i-1)} = \frac{f(z^{(i-1)})}{f'(z^{(i-1)})} = z^{(i-1)} - \frac{\left(z^{(i-1)}\right)^3 - 1}{3\left(z^{(i-1)}\right)^2} \tag{11.13}$$

Kompleksne astendamine on lihtsalt korratud korrutamine (nagu reaalarvude puhul) ja komplekse jagamise kasu kaasneb koos Newtoni iteratsiooni jaoks defineeritud jagatisega. Leidub täpselt 3 juurt ja saab püstitada huvitava hüpoteesi:

> Iga punkti jaoks komplekstasandil koondub Newtoni skeem $z^3 - 1 = 0$ lahendamiseks kas üheks juureks või ei koondu üldse (näiteks numbriliste raskuste pärast). Kui võtta regioon komplekstasandil ja värvida selle iga punkt vastavalt sellele, milliseks juureks ta koondub, siis saadakse selle probleemi jaoks Newtoni meetodi koonduvuskarakteristiku 4-värviline kaart. Kolm värvi esitavad piirkondi, mis koonduvad üheks kolmest juurest ja neljas värvkujutab punkte, mis ei koondu (vähemasti mitte arvutil) ühekski juureks.

Kuni viimase ajani peeti Newtoni meetodi koonduvuskarakteristikuid suhteliselt lihtsateks, kuigi neid on üldjuhul väga raske karakteriseerida. Kui eelpool defineeritud kaart peaks olema lihtme, siis peaks selle kuupvõrrandi Newtoni meetodi käitumist olema lihtne mõista. Eksperimenteerimisel selgub, et leidub väga vähe punkte, mis ei koondu (ja mida võib välja arvata), kui tulemusena saadav kaart on oodatust palju keerulisem.

ühikkuupjuured asuvad hallis ringis ja kolm piirkonda on kujutatud järgmiselt:

valge: kõik punktid, mis koonduvad juureks

$$z = 1 \qquad (x = 1, y = 0)$$

hall: kõik punktid, mis koonduvad juureks

$$z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

must: kõik punktid, mis koonduvad juureks

$$z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(Väike osa punkte, mis ei koondu, näiteks piirkonnas ümber nullpunkti, on samuti musta tooni.)

Piirid nende kolme piirkonna vahel on ilmselgelt väga keerulise kujuga ja mõnede huvitavate omadustega. Esiteks kujutavad need fraktalit, sest nende käitumine pole loomu poolest mitte lihtsalt ühe- ega kahemõõtmeline. Kui suurendada fraktali suvalist piirkonda, siis saadud pilt näeb välja täpselt nagu suurendus, nii et see komplitseeritud struktuur ilmub skaala kogu ulatuses. Enamgi veel, piirkondade vahelisel piiril on teine veider omadus: iga naabrus (sõltumata sellest, kui väike see ka poleks), mis sisaldab punkte kahest naaberpiirkonnast, peab sisaldama punkte ka kolmandast. See oleks nagu juhtum, kus Eesti ja Läti vahelise piiri kaardil piir iga punkt sisaldaks ka tükikest Leedust. Lihtsa kuupvõrrandi Newtoni meetodi koonduvust iseloomustava kaardi patoloogiline käitumine viib olulise arusaamiseni: Newtoni meetod koondub kiiresti, kui esialgne hinnang on juure lähiümbruses, kui mõne teise algväärtuse puhul võib see skeem käituda *pahaloomulisena*. Viimane fakt tuleneb tähelepanekust, et esialgse hinnangu väike hälve võib viia leitud juurte suurte muutusteni.

Palju praktilisi Newtoni-sarnaseid skeeme on ajendatud püüdest kompenseerida seda puudujääki Newtoni meetodis. Mõned skeemid püüavad piirata piirkonda, kus Newtoni meetod võib juurt otsida, et püüda hoida Newtoni meetodi dikteerimast huvitavast piirkonnast lahtumist. Teised skeemid jälle püüavad Newtoni meetodit maha rahustada sammuulatuse parameetriga, mida saab kasutada, et garanteerida teadud progress juure avastamise suunas.

11.3 Iteratsiooniskeemid mittelineaarsete maatriksvõrrandisüsteemide jaoks

Skalaarsete mittelineaarsete võrrandite jaoks esitatud meetode on lihtne üldistada $N \times N$ mittelineaarsete võrrandite süsteemide jaoks. Üldjuht on tavaliselt defineeritud võrrandivektoriga

$$\bar{r}(\bar{u}) = \bar{0} \tag{11.14}$$

kus $\bar{r}$ ja $\bar{u}$ on N reaalse komponendiga vektorid. Antud juhul vaadeldakse vektorit $\bar{u}$ kui soovitud vektorlahendit ja vektori $\bar{r}$ komponendid on igaüks u komponentide mittelineaarsed funktsioonid. Lõplike elementide mudelite seadistustes on kõige tavalisem $\bar{r}(\bar{u})$ kuju antud kui

$$\bar{r}(\bar{u}) = K\bar{u} - \bar{f} = \bar{0} \tag{11.15}$$

kus eeldatakse, et jäikus K ja koormus f võivad sõltuda lahendivektorist $\bar{u}$.

Järjestikkuse asendamise skeemi võib saada katsega lõhkuda K konstantseks ja mittekonstantseks komponendiks nii, et

$$K(\bar{u}) = A + B(\bar{u}) \tag{11.16}$$

Kui lahendada K lineaarne osa, siis saadakse maatriksiteratsiooniskeem:

$$A\bar{u}^{(i)} = \bar{f}^{(i-1)} - B(\bar{u}^{(i-1)})\bar{u}^{(i-1)} \tag{11.17}$$

kus $B(\bar{u}^{(i-1)}) = B$ arvutatuna iteratsioonil $i-1$.

Selle skeemi eeliseks on see, maatriksi A faktoriseerimine tuleb teha vaid üks kord, seega on see iteratsiooniskeem juba ette suhteliselt odav. Selle arvutusliku lihtsuse kompromissiks on tihti aeglasem koonduvuskiirus ja üks tavalisi skeeme hõlmamaks palju "värskemat" iteratsiooniajalugu, on kasutada järgmist alternatiivset iteratsiooniskeemi:

$$\left[A + B(\bar{u}^{(i-1)})\right] \bar{u}^{(i)} = \bar{f}^{(i-1)} \tag{11.18}$$

kus $B(\bar{u}^{(i-1)}) = B$ arvutatuna iteratsioonil $i-1$.

See skeem vajab igal iteratsioonisammul koefitsientide maatriksi uut faktoriseerimist, kui tihti kompenseerib selle ekstra kulutuse palju kiirem koondumiskiirus. Kumbki neist skeemidest pole kasulik, kui mittelineaarsused on tugevad. Viimasel juhul on paremaks valikuks Newtoni meetodi variant võrrandite süsteemide jaoks. Newtoni skeemis soovitakse saada parandusvektorit h , nii et iteratsiooniskeem defineeritakse kui:

$$\bar{u}^{(i)} = \bar{u}^{(i-1)} + \bar{h} \tag{11.19}$$

kus $\bar{h}$ lahendab süsteemi:

$$\bar{r}'(\bar{u}^{(i-1)})\bar{h} = \left[\frac{\partial \bar{r}'(\bar{u}^{(i-1)})}{\partial \bar{u}}\right] \bar{h} = -\bar{r}(\bar{u}^{(i-1)}) \tag{11.20}$$

Käesoleva juhu jaoks on Newtoni meetodi tuletamine peaaegu samasugune kui skalaarjuhu jaoks. Ainus oluline erinevus on see, et ei saa jagada osatuletiste maatriksiga, mis on defineeritud kui:

$$\left[\frac{\partial \bar{r}'(\bar{u}^{(i-1)})}{\partial \bar{u}}\right] = \left[\frac{\partial r_i}{\partial u_j}\right] \qquad i,j = 1,2,\ldots,N \tag{11.21}$$

Kuna maatriksiga jagamine pole defineeritud, siis selle asemel lahendatakse võrrandite süsteem, annab kokku maatrikskorrutise inverteerimise (mis veel oleks jagamine kui mitte korrutise inverteerimine?). Kõige tavalise (staatilise) $\bar{r}$-i kuju jaoks saab selle koefitsientide maatriksi arvutada kui

$$\frac{\partial r_i}{\partial u_j} = \frac{\partial}{\partial u_j}\left[\sum_{n=1}^{N} K_{in}u_n - f_i\right] = K_{ij} + \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial K_{ij}}{\partial u_j}u_n - \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \tag{11.22}$$

Viimase võrduse paremal poolel olevast kolmest liikmest esimene on lihtsalt jäikusmaatriksi (i,j)-element. Viimane liige neist kolmest mõõdab, kuidas muutub koormusvektor koos lahendiga ja on tavaliselt null, v.a. siis, kui esinevad mingit sorti mittelineaarsed rajatingimused. Keskmine liige sisaldab kolme alaindeksiga massiivi korrutist lahendivektoriga ja see oluline liige näitab, kuidas jäikusmaatriks sõltub lahendivektorist. Seda liiget on suhteliselt kerge arvutada elemendi tasemel, eeldades, et on võimalik arvutada mittelineaarsuse tuletisi. Paljudel juhtudel (mitteelastsuse mudelid näiteks) on nende tuletiste arvutamine raskendatud vastavalt tuleb modifitseerida mittelineaarse iteratsiooni skeemi. Paremal oleval kahe esimese liikme summal on kaks vaba indeksit (i, j) ja seda nimetatakse mõnikord puutejäikuseks.

Nii lahutamise kui ka Newtoni skeemi korral on oluliseks kontseptsiooniks, millest tuleks aru saada see, et igal iteratsioonil tuleb lahendada võrrandite süsteem ja et sellel süsteemil on sarnased karakteristikud (nagu näiteks kokkupanek elementide panustest) lõplike elementide võrrandite lineaarse süsteemiga. Programmi arhitektiuuri seisukohast saadakse mittelineaarne lõplike elementide programm, kui lineaarne lõplike elementide programm lisatakse iteratsioonitsüklisse.

11.4 Mittelineaarsete iteratsiooniskeemide koonduvustestid

Järelejäänud probleem mittelineaarse iteratsiooni rakendamisel on määramine, millal iteratsiooniprotsess peatada. Mittelineaarse iteratsiooniskeemi koonduvuse testimiseks on kaks ilmset testi: kui järjestikkused iteratsioonid erinevad vaid kergelt üksteisest või kui jäägivektori $\bar{r} = K\bar{u} - \bar{f}$ muutub väikeseks. Mõlemal neist testidest on omad eelised ja puudused. Kui võrrelda lahendivektori muutusi järjestikkustel sammudel, siis on koonduvustestiks:

$$\frac{\left|\left|\bar{u}^{(i)} - \bar{u}^{(i-1)}\right|\right|}{||\bar{u}^{(i)}||} < \epsilon \tag{11.23}$$

kus ϵ on koonduvussallivus.

Üldiselt tuleks kasutada suhtelist veasallivust, sest N-mõõtmelises ruumis kasvab vektori norm N kasvades suureks. Lahendivektori pikkusega jagamine kõrvaldab selle mittesoovitud sõltuvuse võrrandisüsteemi suurusest. Sellist sorti koonduvustesti on lihtne ellu viia ja see vajab ainult minimaalset arvutusjõudlust, kuid võib tuua kaasa "vale" positiivse otsuse, sest kui iteratsiooniskeem koondub (või hajub) väga aeglaselt, võib antud test läbi minna isegi siis, kui iteratsioon pole koondunud.

Külgetõmbavaks alternatiiviks sellele "lahendi muutuse" testile on kontrollida erinevusi $K\bar{u} = \bar{f}$ lahendamisel palju otsesemal viisil. Sellisel juhul moodustatakse jäägivektor $\bar{r} = K\bar{u} - \bar{f}$ ja testitakse selle normi, et määrata, kui lähedal on olemasolev iteratsioonitulem, et rahuldada valitsevat mittelineaarsete võrrandite komplekti. See test on lihtne (sest jäägivektor tuleb iteratsiooni käigus niikuinii arvutada) ja üldiselt on see rohkem usaldatavam kui esimene skeem, ent pole selge, kuidas *normaliseerida* jäägivektorit, et saada suhteline (s.t. dimensioonitu) veasallivus. Paljude struktuuriprobleemide korral töötab hästi jäägivektori võrdlemine esialgse jõuvektori mõne osaga ja seda lähenemist annab laiendada laiaks valikuks praktilistest koonduvustestidest.

12 Praktiline modelleerimine

12.1 Üldpilt

Tehniline disainimine on protsess, mille käigus muudetakse süsteemi mõõtmeid, kuju, materjali jne., et leida parim (optimaalseim) konfiguratsioon sšuteemi funktsionaalsuse realiseerimiseks. Analüüs on disaini abivahend, hõlmates

1. matemaatilise mudeli loomist;
2. andmete kogumist mõõtmistest;
3. numbrilist simuleerimist;
4. tulemuste hindamist teadaoleva info ja matemaatilisse mudelisse tehtud paranduste valguses.

Matemaatiline mudel luuakse füüsikaseaduste ja protsessi käitumise kohta tehtavate eelduste põhjal. Andmed sisaldavad süsteemi reaalseid parameetrid nagu geomeetria, koormused ja ääretingimused ja tuletatud omadusi. Viimased hõlmavad näitena mitmesuguseid konstante, juhtivusi jne., mida määratakse katseliselt. Üldjuhul ei võimalda matemaatiline mudel analüütilist või täpset lahendit geomeetrilise keerukuse ja/või mittelineaarsuste tõttu. Matemaatilises mudelis tekivad mittelineaarsused geomeetria või materjalide omaduste muutumiste tõttu. See osutub vajalikuks rakendada numbrilisi meetode, et arvutada matemaatilise mudeli ligikaudne lahend. Üheks selliseks, ja seejuures väga võimsaks numbriliseks meetodiks on lõplike elementide meetod.

Tüüpiline lõplike elementide analüüs algab analüüsieesmärkide seadmisega. Nendest sõltub analüüsi raskusaste ja idealisatsioon:

- 2- või 3-mõõtmeline probleem;
- lineaarne või mittelineaarne;
- kui mittelineaarne, siis millist tüüpi mittelineaarsusi arvestada;
- tuletatud mudeli tüüp;
- reaalse süsteemi koormuste ja ääretingimuste idealiseerimine;
- kaasnevate efektide arvestamine, kui neid esineb jne.

Kui süsteemi idealiseerimine on lõpetatud ehk matemaatiline mudel paigas, tuleb valida numbrilise lähendamise tüüp ja vastav tarkvara. See hõlmab:

1. tundmatute suuruste valimist, mis omakorda määravad lõplike elementide mudeli tüübi;
2. elementide tüübi valimist;
3. võrgu tüübi valimist;
4. mittelineaarse analüüsi korral koormuse suurenemise suurusjärgu valimist;
5. iteratsioonimeetodi valimist lahendamiseks;

6. veakriteeriumide määramist;

7. veataluvuspiiride kehtestamist;

8. maksimaalse iteratsioonide arvu määmist, milleni jõudes programm oma töö katkestab.

Viimasteks sammudeks arvutusmudeli loomisel on koodi kontrollimine ja matemaatilise mudeli valideerimine. Arvutusmudeli kontrollimisel veendutakse, et arvutusmudel oleks matemaatilise mudeli täpne diskreetne analoog. Seega, kui arvuti lõplikust aritmeetikast tingitud vead on ebaolulised, peaks arvutusmudel andma matemaalilise mudeli täpse lahendi. Valideerimine sisaldabki numbriliste lahendite võrdlemist teadaolevate täpsete ja/või katsetulemustega. Teisalt määrab valideerimine, millisel määral kajastab matemaatiline mudel süsteemi füüsikalist reaalsust mudeli kavatsetava rakenduse seisukohast. Valideerimimisprotsess peab seega olema kooskõlas mudeli kasutuseesmärgiga. Näiteks pole lineaarse elastsuse jaoks loodud mudel kasutatav mittelineaarse koste jaoks. Valideerimine võimaldab lisada matemaatilisse mudelisse puuduvaid elemente, mis muudavad arvutustulemused kooskõlalisemaks füüsikalise kostega. Tegelikult ei saa matemaatilist mudelit kunagi kinnitada; seda saab vaid ümber lükata. Uute ja multifüüsikaliste probleemide puhul tuleks alati teha valideerimine.

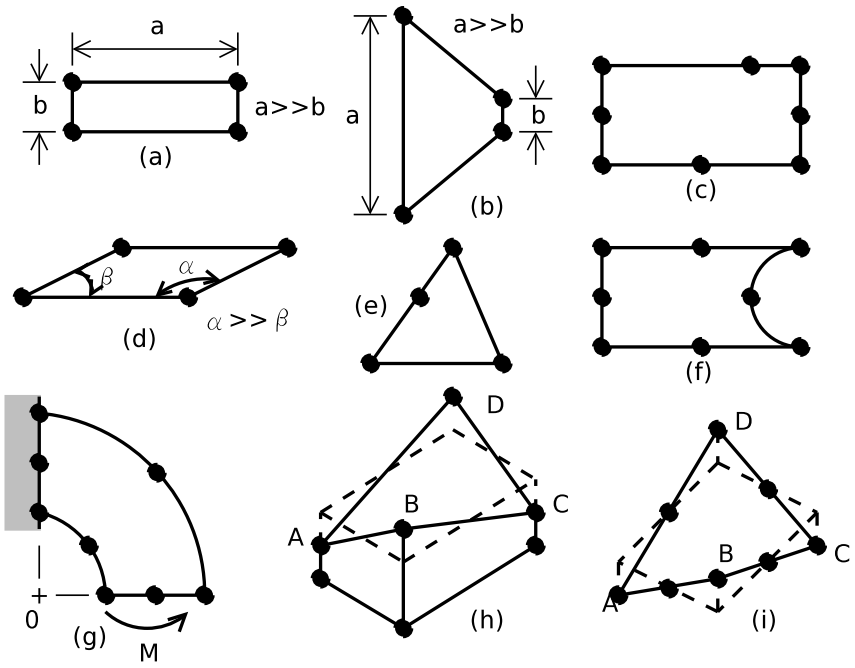
12.2 Füüsikaline *vs.* elemendi käitumine

Millist üldist elementitüüpi kasutada – tala, plaati, kesta või tahkist? Kui plaati, siis kas kolmnurkset või nelinurkset? Kas küljesõlmedega või ilma? Kui palju elemente ja kui keerukas peaks olema võrk? Sellised küsimused tekivad kohe matemaatilise mudeli diskreetimisel. Vastused neile küsimustele nõuavad arusaamist sellest, kuidas struktuur (või selle matemaatiline mude) *tõenäoliselt* võiks käituda. Kuna lõplike elementide meetod on oma olemuselt tükkhaaval polünomiaalne interpoleerimine, siis ei saa element kanda keerukamaid füüsikaliste suuruste variatsioone kui neid sisaldub elemendi formulatsioonis.

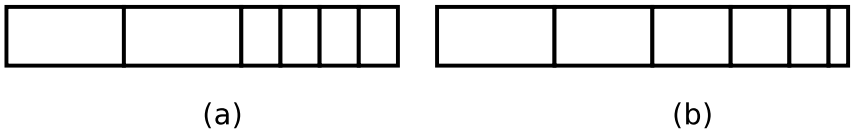
Elemendid, mis annavad edukalt edasi geomeetriat, ei pruugi olla sobivad analüütilisteks eesmärkideks. Arvutatud lõplike elementide tulemused kipuvad olema kõige täpsemad siis, kui elemendid on kompaktsed, mitte laialivalguvad, viltused, moonutatud või kiivas. Sellised moonutused (joonis 12.1) vähendavad tavaliselt täpsust. Antud moonutuse põhjustatud täpsuse kao suurus sõltub elemendi tüübist, võrgu ülesehitusest ja füüsikalisest probleemist. Moonutuste kombinatsioonid võiva olla eriti kahjulikud. Moonutused kahjustavad tavaliselt gradiente rohkem kui nihkeid, omavõnkesagedusi, moodikujusid või temperatuure. Moonutatud elemendid võivad mõnikord anda edasi lineaarvariatsioone, kui satuvad hätta keerukamate variatsioonide korral. Elemendid on kujumoonutuste suhtes vähemtundlikumad, kui neil on lisaks nurgasõlmedele ka külje- (või serva-) sõlmed. Samuti on vähemtundlikumad ühe või mitme sisemise vabadusastmega elemendid.

Ettekavatsetud moonutused võivad õigel käsitlemisel kasulikud olla. Elemendid, millel on küljesõlmed, sobivad paremini kõverate äärtega, võrreldes elementidega, millel on vaid nurgasõlmed. Joonisel 12.1 (g) kasutatakse nelinurkelementi veerandringikujulise kõvera tala modelleerimiseks, millele on rakendatud koormus M. Tavaliselt pole arukas kasutada kõveraid külgi, mis moodustavad täisnurga, kuid selle probleemi korral on arvutustulemustel üllatav täpsus [40]. Põhjus on selles, et isoparameetriline transformatsioon annab kõverustsentris Q singulaarsuse, mis on täpselt selleks kohaks, kus pingeanalüüsiteooria ennustab lõpmatut pinget.

3D juhul ei suurenda kiivas pinnad täpsust. Kiivas pind võib olla kesta geomeetria jaoks oluline,



Joonis 12.1: Elementide kujudeformatsioonid, mis tavaliselt vähendavad täpsust: (a) suur kuvasuhe; (b) peaaegu kolmnurk; (c) väljaspool tsentrit olev sõlm; (d) ülimalt viltune; (e) kolmnurkne nelinurk; (f) tugevalt kõverdunud serv; (g) suured kõverusraadiused; (h) ABCD-tahk on suuresti kiivas; (i) kestelement ABCD on suuresti kiivas.



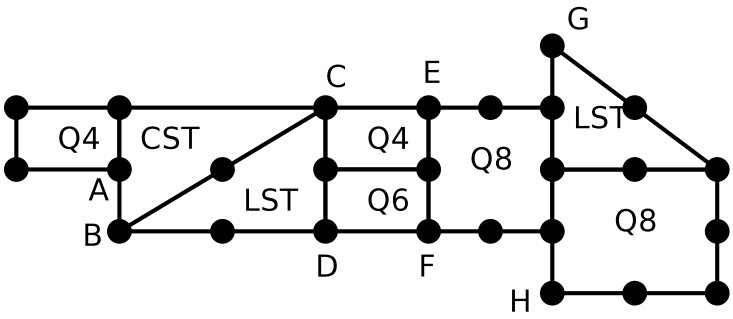
Joonis 12.2: Muutused elemendi suuruses on (a) liiga järsud; (b) palju sujuvamad.

kuid mõjub halvasti tulemustele õhukese kesta korral.

Järskudest elemendi suuruse muutustest tuleks hoiduda (joonis 12.2). Isegi kui “halvas” asetuses on rahuldav kuvasuhe, ilmuvad sellise elemendisuuruse muutuse naabruses gradiendiväljas häiritused. Muutused elemenditüübis (näiteks kolmnurgast nelinurgaks), järsud suurus muutused, halva kujuga elemendid ja kohatud elementide ühendused (joonis 12.3) võivad kõik tekitada kunstlikke gradiendivälja häiritusi, mida võidakse ekslikult pidada füüsikalises mõttes realistlikuks. Eriti hoolikas tuleb selliste defektide suhtes olla piirkondades, kus gradiendid on suured ja täpsus oluline.

Kõik paikapidavad elemendid läbivad paigatesti [2, ptk. 6.13]. Elemente, mis käituvad hästi, nimetatakse robustseteks. Selle all mõeldakse seda, et need pole vabad mitte ainult fataalsetest defektidest, vaid et need on ka suhteliselt vähetundlikud väikestele muutustele, mis pole seotud füüsikalise probleemiga, näiteks muutused elemendi geomeetrias ja koormuste jaotuses.

Eelanalüüs on keerulise probleemi lihtsustatud analüüs lihtsama mudeli ja väiksemate eesmärkidega. Sellega saab testida tarkvara võimeid täismahuliseks analüüsiks, võib lisada isegi tead-



Joonis 12.3: Näide sellest, kuidas elemente mitte ühendada.

likke vigu, et testida tarkvara veaavastamisvõimeid. Eelanalüüsi eeliseks väiksem sisendandmete maht, andes samas tulemuseks eelpildi struktuuri käitumisest, testmudeli idealisatsioonist nagu ühendused ja ääretingimused, näitab ära näpuvead sisendandmetes ja annab vihjeid sobivate simulatsiooniparameetrite kohta. Samuti on väljundi maht väiksem, mis võimaldab täismahulise analüüsi jaoks planeerida väljundandmete mahtu ja struktuuri. Eelanalüüs on iseäranis kasulik dünaamiliste ja mittelineaarsete probleemide korral, kus tulemust võib olla raske ette näha ja on palju simulatsiooniparameetreid seada.

12.3 Materjali omadused

Isotroopsete materjalide andmeid on suhteliselt lihtne hankida ja programmile edastada. Probleemid mõlemas osas tekivad mitteisotroopsete materjalide korral. Olgu näiteks pinge-rõhu-temperatuuri suhted ortotroopse materjali jaoks peamiste telgedega x, y ja z.

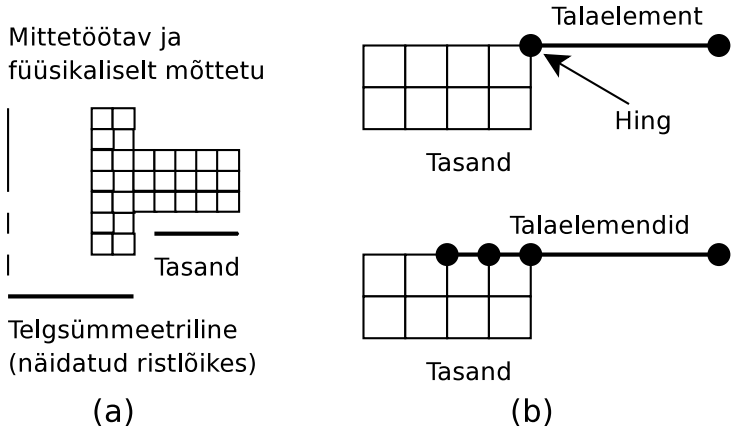
$$\begin{aligned}
\epsilon_x &= +\tfrac{1}{E_x}\sigma_x - \tfrac{\nu_{yx}}{E_y}\sigma_y - \tfrac{\nu_{zx}}{E_z}\sigma_z + \alpha_x T \qquad \gamma_{xy} = \tfrac{\tau_{xy}}{G_{xy}} \\
\epsilon_y &= -\tfrac{\nu_{xy}}{E_x}\sigma_x + \tfrac{1}{E_y}\sigma_y - \tfrac{\nu_{zy}}{E_z}\sigma_z + \alpha_y T \qquad \gamma_{yz} = \tfrac{\tau_{yz}}{G_{yz}} \\
\epsilon_z &= -\tfrac{\nu_{xz}}{E_x}\sigma_x + \tfrac{\nu_{yz}}{E_y}\sigma_y - \tfrac{1}{E_z}\sigma_z + \alpha_z T \qquad \gamma_{zx} = \tfrac{\tau_{zx}}{G_{zx}}
\end{aligned} \tag{12.1}$$

Mitte kõik materjalikonstandid pole avaldistes (12.1) sõltumatud. Maxwelli pöördteoreemi järgi peab konstantide maatriks olema sümmeetriline. Sestap

$$E_x\nu_{yx} = E_y\nu_{xy} \quad E_y\nu_{zy} = E_z\nu_{yz} \quad E_z\nu_{xz} = E_z\nu_{zx} \tag{12.2}$$

Avaldised (12.1) sisaldavad üheksat sõltumatut elastsustegurit ja 3 sõltumatut termilist tegurit (neis avaldistes eeldatakse temperatuurist sõltumatust). Üldiselt on mitteisotroopsel materjalil 21 sõltumatut elastsustegurit. Ei pruugi lihtne olla nende kõigi numbriliste väärtuste hankimine, samuti sisendandmetes korralik kirjeldamine ja nende üksteisest eristamine. Lisaks tuleks tähele panna, põhitelgede orientatsiooni struktuuri erinevates osades. Isotroopsed materjalid võivad olla kergelt mittelineaarsed ja tabelites toodud väärtused on tüüpiliselt keskmised. Omaduste erinevust põhjustavad muutused koostises, tootmismeetodis ja temperatuuriline käsitlemine.

Mõnikord on analüüsis vaja teatud elemente teatud tingimuste täitumisel struktuurist eemaldada, näiteks osa struktuuri sulamisel. Tegelik eemaldamine oleks imelik, kuid elemente saab efektiivselt deaktiveerida, kui nende mooduli korrutamisel mingisuguse teguriga suurusjärgust



Joonis 12.4: (a) Tasapinnalist ja telgsümmeetrilist lõplike elementide mudelit ei saa ühendada. (b) Hinge tekkimist (ülemine joonis) saab vältida tala pikendamisega tasandivõrgule.

näiteks 1E-6. Eelnevalt deaktiveeritud elemente saab siis reaktiveerida nende mooduli korrutamisega teguriga suurusjärgus 1E6, et näiteks modelleerida tahkestumist või materjalile uue kihi lisamist.

12.4 Ühendused struktuuris

Ühendused on sageli kõige nõrgemateks lülideks struktuuris ja nende elastne või mitteelastne käitumine võib oluliselt teiste struktuuriosade käitumist mõjutada. Ühendus võib hõlmata keerulist geomeetriat, möödajoondusi, erinevaid materjale, eelpingeid, kontaktide moodustamist või lõhkumist, hõõrdumist ja libisemist, plastilist muutust ja materjali kahjustumist väände, keevituse või akude tõttu. Neid keerukusi tavaliselt ignoreeritakse või lihtsustatakse tublisti, kui antud ühendus pole ise uurimisobjektiks. Lihtsustuse eesmärgiks on tavaliselt lähendada ühenduse efekti ülejäänud struktuurile ja võib ilmuda vähendatud elastsusteguriga standardelemendi näol.

Mõningad vähesed erandid välja arvatud, on ühendus tasapinnalise lõplike elementide mudeli ja telgsümmeetrilise lõplike elementide mudeli vahel füüsikaliselt mõttetu, isegi kui tarkvara aktsepteerib seda ilma kaebusteta. Sellise ühenduse näide on joonisel 12.4 (a), kus tasavõrk esindab torul olevat jahutuslaba. Ristlõikel on telgsümmeetriline võrk kahemõõtmeline, kuid selle elemendid on ringid ja need, mis peaks olema sõlmpunktid, on tegelikult sõlmringid. Kui sisendandmed vajavad telgsümmeetrilist analüüsi, koheldakse ka tasasena kavandatud võrku tarkvara poolt telgsümmeetrilisena.

Kui pöördvabadusastmetega elemente kombineeritakse elementidega, millel pöördvabadusastmed puuduvad, käitub ühendav sõlm hingena, mis ei pruugi olla esialgne kavatsus (joonis 12.4 (b)). Hingühendust saab vältida tala pikendamisega tasavõrgule. Selliste ühenduste naabruses pole pinged realistlikud.

12.5 Lõplike elementide programmi ülesehitus

Tüüpiline lõplike elementide programm koosneb kolmest osast:

1. eelprotsessor;

2. protsessor;

3. järelprotsessor.

Eelprotsessor loeb ja/või genereerib probleemi sisendandmed:

- vaadeldava piirkonna geomeetria;
- analüüsitingimused: staatiline, omaväärtusülesanne või dünaamiline;
- analüüsitava probleemi andmed, näiteks diferentsiaalvõrrandite koefitsientide defineerimine;
- ääretingimused;
- lõplike elementide info: elemendi tüüp, elementide arv, geomeetriline info võrgu genereerimiseks ja elementide ühendamiseks;
- järeltöötluse instruktsioonid: printimine või mitteprintimine, arvutatavate suuruste tüübid jne.

Järeltöötlusel interpoleeritakse lahend sõlmedevahelistesse punktidesse, arvutatakse tuletatud suurused ja teisendatakse tulemused visualiseerimiseks sobivasse formaati.

Protsessori põhimoodulid on alljärgnevad:

1. elemendimaatriksite genereerimine numbrilise integreerimisega;
2. elemendivõrrandite koostamine;
3. ääretingimuste arvestamine;
4. põhimuutujate algebraliste võrrandite lahendamine sõlmede suhtes.

12.6 Üldised vead

Tavaliselt on eksimused mudeli koostamisel seotud ebapiisavatest teadmistest:

- füüsikalisest probleemist;
- elemendi käitumisest;
- analüüsi piiridest;
- tarkvara kohta.

Vigade parandamise luhtumine tuleneb samadest põhjustest, mistõttu eiratakse tarkvara hoiatusi ja samuti ebapiisavast järjekindlusest arvutustulemuste kontrollimisel.

Elemendimaatriks $[\mathbf{k}]$ on null, kui ühine korrutaja, näiteks elemendi paksus on null. Kui elemendi paksus on määramata, võib see saada ühikulise väärtuse, ent see sõltub tarkvarast. Kui genereeritakse elementide jäikusmaatrikseid, võib nulliga jagamine leida aset näiteks siis, kui Poisson'i suhe on 0.5 tasandi pinge, telgsümmeetrilise või 3D tahkiseprobleemi korral. Singulaarse või peaaegu singulaarse globaalse maatriksi $[\mathbf{K}]$ võivad põhjustada alljärgnevad asjaolud, millest õige mitmed on seotud eksimustega andmete sisestamisel:

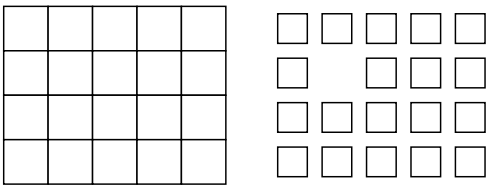
- materjalide omadused, näiteks elastsustegurid, on nullid kõigil elementidel, millel on ühine sõlm;
- üks või mitu struktuurisõlme pole seotud ühegi elemendiga;
- üks või mitu struktuuriosa pole seotud ülejäänutega;
- ääretingimusi pole määratud või on need ebapiisavad;
- võltsmood (–mehhanism) saab võimalikuks tänu ebaadekvaatsetele ühendustele (näiteks ŝarniirühendus joonisel 12.4 (b));
- esinevad suured erinevused jäikustes;
- osa struktuurist on paindunud;
- mittelineaarses analüüsis on tugede või ühenduste jäikus on muutunud nulliks, mistõttu kas kogu struktuur või osa sellest ebaadekvaatselt toestatud.

Struktuuri sõltumatult võrgustatud osadel võivad olla kokkulangevad sõlmed, kuid tarkvarale pole öeldud, et neid kokkulangevaid sõlmi tuleks pidada identseteks. Selle asemel jäetakse need sõlmed ühendamata. 3D mudelite korral on lihtne unustada, et jäigal kehal on 6 võimalust liikumiseks, mistõttu ununevad lisamata vajalikud toetingimused.

Kui tarkvara teatel on $[\mathbf{K}]$ singulaarne, kuid põhjus pole silmnähtav, siis võib abi olla, kui analüüsida mudelit selle madalaimate võnkemoodide jaoks (kuni 6 moodi 3D probleemi korral). Võnkeanalüüsi korral ei pea $[\mathbf{K}]$ olema mittesingulaarne. Iga nullise sagedusega mood on võimalik piirangute tõttu, mis pole adekvaatsed staatilise analüüsi jaoks. Sellise moodi animeeritud graafik võib kiiresti osutada, milliseid lisapiiranguid vajatakse.

Singulaarne $[\mathbf{K}]$ väljastab tavaliselt veateate ja peatab programmi täitmise. Kui programmi täitmine peatub või jätkub, ent annab imelikke tulemusi, siis on selge, et midagi on valesti ja osutub vajalikuks selle põhjuse otsimine. Olukord on enam ohtlik siis, kui olemasolevad vead annavad esmapilgul mõistliku tulemuse, mis on tegelikult sügavalt vigane. Siia kuuluvad alljärgnevad vead:

- elemendid on valet tüüpi; näiteks kasutatakse kestelementi seal, kus on vaja 3D tahkiselementi;
- võrk on liiga jäme või on elemendi võimalused piiratud;
- ääretingimused on vales kohas, valet tüüpi või vales suunas; tugesid võib olla liiga vähe, põhjustades hingeefekti, aga ka liiga palju, muutes piirkonna liiga jäigaks;
- koormused on vales kohas, valet tüüpi, vales suunas või vale suurusjärguga;
- kümnendarvude komad võivad olla valel positsioonil või aetakse segamini ühikuid; kerge on sisestada vale kümnendastmega andmeid; tuletatud ühikud pole konverteeritud põhiühikuteks või kasutatakse süsteemiväliseid ühikuid;
- element võib olla topeltdefineeritud; see ei pruugi võrgukuvalt silma torgata, ent tegelikult on mudelis siis üks “jäigem” koht;
- telgsümmeetrilise analüüsi jaoks mõeldud andmed kasutavad sümmeetriateljena z-telge, tarkvara aga y-telge.



Joonis 12.5: Tegeliku võrgu (a) kokkutõmmatud kuva (b) näitab, et üks element pole defineeritud.

12.7 Mudeli kontrollimine

Mudelit tuleks kindlasti kontrollida enne arvutmist, et saavutada suurema tõenäosusega edu ja vältida kontrolli edasilükkamisega selle keerulisemaks muutumist. Juba mudeli ettevalmistamise ajal saab preprotsessori graafiliste vahenditega mudelit kontrollida. On lihtsam vead kohe nende tekkimisel parandada, kusjuures need võivad esineda kõikjal, isegi kõige lihtsamates andmetes.

Võrk genereeritakse tavaliselt automaatselt sisendandmete järgi, millega määratletakse kasutatava elemendi tüüp, võrgustatav piirkond ja võrgu tihedus piirkonna valitud osades. Võrk tuleks seejärel kuvada ja vaadata, kas see näeb välja “õige”: korrektne üldgeomeetria, parajad võrgutihedused, suurte moonutusteta elementide kujud. Üleni moonutatud elementides annab tõenäoliselt teada juba tarkvara, kuid viimane uurib üksikosi, analüüsija aga näeb ka tervikut. Vajadusel saab piirkonda uuesti võrgustada või selle mitterahuldavaid detaile korrigeerida. Kui peendetailid, nagu kindla sõlme asukoht, on olulised, tuleb lisaks graafilisele pildile uurida ka numbrilist andmelistingut.

Graafiline pilt võimaldab laialivenitatud või kokkusurutud moodis, kus individuaalsete elementide suurust on vähendatud umbes 20 % (joonis 12.5 (b)) kohe näha puuduvaid elemente. 3D mudelite puhul on võrgu kontrollimine raskem, ent saab rakendada lisavõtteid nagu ristlõiked mudelist, vaated erinevatest suundadest, perspektiiv ja valitud osa suurendamine. Toetingimusi ja koormusi saab kuvada erisümbolitega, mis näitavad suunda ja tüüpi. Tasapinnalise mudeli äärte kuvamisel on näha, kas esineb pragusid, mille korral on kõrvutiasetsevad või kattuvad sõlmed kas tahtlikult või tahtmata ühendamata.

Kommertstarkvara teeb teatud kontrollimisi automaatselt. Näiteks võrreldakse elemendi geomeetriat seesmiselt talletatud numbrilise piiranguga, mis defineerib kõlblikkuse määra. Kõik, mis seda määra ületab, põhjustab veateate. See piir on teatud mõttes suhteline. See, mis on aktsepteeritav ühes olukorras, pole seda teises. Tarkvara või kontrollida järgmisi tingimusi:

- sõlm pole ühendatud ühegi elemendiga;
- sõlmed on lähestikku või isegi kokkulangevad, ent pole ühendatud; see ei pruugi alati viga olla; selline kontroll on eriti kasulik suurte 3D mudelite korral; mõni preprotsessor ühendab automaatselt sõlmed, mis ta leiab teiseteise läheduses olevat;
- elemendid jagavad sõlme, kuid ei kasuta sama vabadusastmete komplekti, mis sõlm;
- nurga- ja küljesõlmed on ühendatud ehk esineb “halb” ühendus, nagu näidatud joonisel 12.3 ;

- elementide kujud erinevad tugevasti ideaalsest (joonis 12.1);
- mudelis ei esine koormusi, ääretingimusi või materjali omadusi;
- enne programmi täitmist peaks tarkvara oskama hinnata täitmiseks kuluvat aega ja vajaminevat mäluhulka.

Automaatkontroll ei pruugi siiski järeldada, kas tegelik probleem on defineeritud, materjali omadused korrektsed ja ühikud kooskõlalised, koormused ning toed õigetes paikades jne. Analüüsija peab olema valvas.

12.8 Arvutustulemuste arvustus

Mõningates valdkondades võivad disainivead olla kallid või isegi katastroofiliste tagajärgedega, sestap tuleks lahendit kontrollida nii erinevatel viisidel kui võimalik. Üksikut lahendit ei tohiks usaldada. Esimene samm LEA tulemuste kontrollimisel tuleks vaadata, kas need ei tundu “imelikud”. Näiteks, kas nihked pole ootamatutes kohtades, ootamatutes suundades, hämmastavalt suured või väikesed, toereaktsioonid ootamatus suunas, soojusvoog pole külmalt soojale jne. Eelanalüüs peaks andma vähemasti kvalitatiivsed eeldused sellise kontrolli läbiviimiseks. Kui midagi pole silmnähtavalt valesti, saab jätkata juba detailsema ja kvantitatiivsema kontrolliga. Kui kahtlustatakse probleemi, tuleks selle allikas üles leida, kas siis lõplike elementide lahendist, aga ka eelnevast analüüsist või probleemi füüsikalisest mõistmisest. Igal juhul tuleb probleem kindlaks teha ja kõrvaldada ning simulatsiooni korrata. Kui jooksev analüüs annab rahuldavaid tulemusi, tuleks otsustada, kas edasine analüüs on vajalik ja kui on, siis kuidas jooksev analüüs peaks seda mõjutama.

Kui lõplike elementide tulemusi kõrvutatakse muudest allikatest – lähendid, käsiraamatute valemid, teine tarkvara, sarnased eksisteerivad struktuurid või katse – hangitutega, siis tuleks veenduda, et alternatiivsetes allikates esitatud tulemuste saamisel oli füüsikaline olukord sisuliselt sama.

Viited

[1] N. S. Ottosen and H. Petersson, *Introduction to the Finite Element Method*, Prentice Hall International (UK) Ltd., Hertfordshire, 1992.

[2] R. D. Cook, D. S. Malkus, M. E. Plesha and R. J. Witt, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., 2002.

[3] C. A. Felippa, *Introduction to Finite Element Methods*, University of Colorado, Boulder, *http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/IFEM.d/*, 2004.

[4] E. R. Champion, *Finite Element Analysis in Manufacturing Engineering. A PC-Based Approach*, McGraw-Hill, Inc., 1992.

[5] K. D. Mish, L. R. Herrmann and LaDawn Haws, *Finite Element Procedures in Applied Mechanics*, University of California, Davis, *http://cee.engr.ucdavis.edu/Faculty/mish/212A/*, 2000.

[6] W. B. Bickford, *A First Course on the Finite Element Method*, Richard D. Irwin, Inc., Homewood, Illinois, 1990.

[7] L. J. Segerlind, *Applied Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., 2 ed., 1984.

[8] T. J. Chung, *Finite Element Analysis in Fluid Dynamics*, McGraw-Hill, Inc., 1978.

[9] J. N. Reddy, *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, Oxford University Press, 2004.

[10] F. Williamson, Jr., "A historical note on the finite element method," *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, **15**, 1980, 930–934.

[11] A. Hrennikoff, "Solution of problems in elasticity by the framework method," *ASME Journal of Applied Mechanics*, **8**, 1941, A169–A175.

[12] C. A. Felippa, "50 year classic reprint: An appreciation of R. Courant's 'Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations', 1943," *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, **37**, 1994, 2159–2187, [includes Courant's paper].

[13] M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, and L. J. Topp, "Stiffness and deflection analysis of complex structures," *Journal of the Aeronautical Sciences*, **23**, 1956, 805–823.

[14] J. Robinson, *Early FEM Pioneers*, Robinson and Associates, Dorset, UK, 1985.

[15] J. H. Argyris and S. Kelsey, "Energy theorems an structural analysis," London, 1960, [collection of papers published in *Aircraft Engineering* in 1954 and 1955].

[16] R. W. Clough, "The Finite Element Method after twenty-five years: A personal view," *Computers And Structures*, **12**, 1980, 361–370.

[17] R. W. Clough, "Original formulation of the Finite Element Method," *Finite Elements in Analysis and Design*, **7**, 1990, 89–101.

[18] E. L. Wilson, "Automation of the Finite Element Method – a personal historical view," *Finite Elements in Analysis and Design*, **13**, 1993, 91–104.

[19] K. K. Gupta and J. L. Meek, "A brief history of the Finite Element Method," *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, **39**, 1996, 3761–3774.

[20] O. C. Zienkiewicz and Y. K. Cheung, *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, McCraw-Hill Publishing Co. Ltd., London, 1967.

[21] A. B. J. Reece and T. W. Preston, *Finite Element Methods in Electrical Power Engineering*, Oxford University Press, Oxford, 2000.

[22] Bruce Klimpke, "A hybrid magnetic field solver: Using a combined finite elementboundary element field approach," *Sensors Magazine Online*, **21**, May 2005.

[23] R. A. Rosanoff, J. F. Gloudemann, and S. Levy, "Numerical conditioning of stiffness matrix formulations for frame structures," *Proceedings of the Second Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics* , 1029–1060, Wright-Patterson AFB, (Ohio), 1968.

[24] S. Utku and R. J. Melosh, "Estimating the manipulation errors in finite element analysis. part i," *Finite Elements in Analysis and Design*, **3**(4), 1987, 285–295.

[25] R. T. Haftka, "Stiffness-matrix condition number and shape sensitivity errors," *AIAA Journal*, **28**(7), 1990, 1322–1324.

[26] R. A. Rosanoff and T. A. Ginsburg, "Matrix error analysis for engineers," *Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics* , 887–910, Wright-Patterson AFB, (Ohio), 1965.

[27] I. Fried, "Condition of finite element matrices generated from nonuniform meshes," *AIAA Journal*, **10**(2), 1972, 219–221.

[28] B. M. Irons, "Roundoff criteria in direct stiffness solutions," *AIAA Journal*, **6**(7), 1968, 1308–1312.

[29] B. Noble, *Applied Linear Algebra*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1969.

[30] G. Strang and G. J. Fix, *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.

[31] W. L. Cleghorn, B. Tabarrok, Y. Xiong, and T. W. Lee, "A note on some exact elements," *International Journal of Mechanical Engineering Education*, **19**(2), 1991, 143–154.

[32] S. H. Crandall, *Engineering Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1956.

[33] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, *The Finite Element Method*, 4 ed.

[34] C. Militello and C. A. Felippa, "r-adaptive methods based in element-level error indicators for parallel analysis of plates and shells," *The 33rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference* , 292–301a, AIAA, (Washington, DC), 1992.

[35] R. J. Melosh, and P. V. Marcal, "Energy basis for mesh refinement of structural continua," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **11**(7), 1977, 1083–1091.

[36] D. J. Turke, "Characteristics of piecewise approximation in numerical analysis," in *Finite Element Grid Optimization*, M.Š. Shephard and R. H. Gallagher, eds., 15–26, ASME, New York, 1979.

[37] J. Fish, “The s-version of the finite element method,” *Computers & Structures*, **43**(3), 1992, 539–547.

[38] T. Belytschko, J. Fish, and A. Bayliss, “Spectral overlay on finite elements for problems with high gradients,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **81**(1), 1990, 71–89.

[39] E. Rank and R. Krause, “A multiscale finite-element method,” *Computers & Structures*, **64**(1-4), 1997, 139–144.

[40] R. D. Henshell, D. Walters, and G. B. Warburton, “A new family of curvilinear plate bending elements for vibration and stability,” *Journal of Sound and Vibration*, **20**(3), 1972, 381–397.