

GERHARD RÄGO

**Matemaatika  
tööraamat**  
keskkoolidele

Analüüsi alged  
Statistika alged

5. klassi kursus

K. O.-Ü. «Loodus», Tartu

A-6287

151

TÜ RAAMATUKOGU



10300015213533

A-6287

GERHARD RÄGO

# Matematika tööraamat keskkoolidele

Analüüsi alged  
Statistika alged

5. klassi kursus

K. O.-Ü. «Loodus», Tartu  
1932

K. O./Ü. „Looduse“ keeleline korrektor H. P ü r k o p

TARTU ÜLIKOOLI  
RAAMATUKOGU

K. Mattieseni trükikoda o./ü., Tartu, 1932

## Sisukord.

### Peatükk I: Funktsiooni 2. tuletis.

Harjutis I: Nähtuse käigu kiirenduse mõiste . . . . .	1
Harjutis II: Tuletise mõiste rakendusi . . . . .	8
Harjutis III: Tuletisi kaudsel olenemisel . . . . .	11
Harjutis IV: Täiendavaid ülesandeid tuletise mõiste rakendamiseks . . . . .	15
Harjutis V: Funktsiooni käigu uurimise ülesandeid . . . . .	18

### Peatükk II: Integraali mõiste.

Harjutis VI: Ligikaudseid valemeid pindalade ja ruumalade määramiseks . . . . .	22
Harjutis VII: Piiri mõiste rakendusi pindalade ja ruumalade arvutamisel . . . . .	27
Harjutis VIII: Nähtuse käigu määramine teadaolevast kiiruskäigust . . . . .	29
Harjutis IX: Integraali mõiste . . . . .	37
Harjutis X: Integraali mõiste rakendusi . . . . .	44

### Peatükk III: Siinusfunktsiooni ja logaritmifunktsiooni tuletised.

Harjutis XII *): Siinusfunktsiooni tuletis . . . . .	50
Harjutis XIII: Trigonomeetriliste funktsioonide tuletiste rakendusi . . . . .	55
Harjutis XIV: Logaritmifunktsiooni ja eksponentfunktsiooni tuletis . . . . .	58
Harjutis XV: Vea hindamise küsimusi . . . . .	62

### Peatükk IV: Polünoomide rakendamine arvutusabinõuna.

Harjutis XVI: Newton'i binoomvalem . . . . .	68
Harjutis XVII: Avaldiste lähendamine polünoomidega . . . . .	72

\*) Eksikombel on harjutiste nummerdamisel number XI välja jäänud.

## Peatükk V: Statistilise meetodi alged.

Harjutis XVIII:	Nähtuse tõenäosuse mõiste . . . . .	81
Harjutis XIX:	Tõenäosuste arvutamine juhtude loenda- mise teel . . . . .	87
Harjutis XX:	Tõenäosuste liitmis- ja korrutamislauseid . .	90
Harjutis XXI:	Kindlustusmatemaatika alged . . . . .	94
Harjutis XXII:	Statistilise rea keskvärtusi ja hajumismõõte	101
Harjutis XXIII:	Sagedusjaotusi . . . . .	108
<hr/>		
Suremustabel ja kindlustusarvutuste abiarvud . . . . .		114

# Peatükk I.

## Funktsiooni 2. tuletis.

### Harjutis I:

Nähtuse käigu kiirenduse mõiste.

1. 1<sup>o</sup>. Kujutleme kergelt kelku siledal rõhtsal jääväljal. Anname kelgule tõuke. Katse näitab, et kelk, tõuke saanud, liigub tükk aega edasi nõnda, et teekasvud on võrdelised ajavahemikkudega, milles nad omandatud. Säärast liikumist nimetatakse ühtlaseks liikumiseks.

Olgu aegadeks  $t_1$ ,  $t_2$  ja  $t$  käidud teed vastavalt  $s_1$ ,  $s_2$  ja  $s$ . Avalda tee  $s$  aja  $t$  funktsioonina. Missugusel kujul esineb  $s$ -käik  $t$ - $s$ -diagrammis? Selgita selle kordaja tähendust, mis seisab aja  $t$  ees muutuja  $s$  avaldises.

2<sup>o</sup>. Olgu tegemist kerge kelguga jäätunud mäenõlvakul. Anname kelgule tõuke nõlvaku kalde suunas. Katse näitab, et kelk, tõuke saanud, liigub tükk aega edasi nõnda, et kiiruskasvud on võrdelised ajavahemikkudega, milles nad omandatud. Sääraselt toimuvat liikumist nimetatakse ühtlaselt kiirenevaks liikumiseks.

Olgu aegadel  $t_1$ ,  $t_2$  ja  $t$  liikumiskiirus vastavalt  $v_1$ ,  $v_2$  ja  $v$ . Avalda kiirus  $v$  aja  $t$  funktsioonina. Missugusel kujul esineb  $v$ -käik  $t$ - $v$ -diagrammis? Selgita selle kordaja tähendust, mis seisab aja  $t$  ees kiiruse  $v$  avaldises.

2. Mõõdetagu pikkusi cm-tes, aegu sekundites, kiiruse vastavalt cm/sec-tes. Kuidas tuleb mõista seda sümbolit cm/sec?

Kuidas tuleb mõista sümbolit cm/sec/sec  
või lühemalt

$$\text{cm/sec}^2 ?$$

Mis tähenduses tuleb mõista sümboleid

$$\text{km/tund}^2, \text{ m/min}^2 ?$$

3. Kujutagu mõni kõverjoon mitteühtlaselt kiireneva liikumise kiiruskäiku. Olgu  $t$  ja  $t + \Delta t$  kaks ajamomenti ja  $v$  ning  $v + \Delta v$  neile vastavad kiiruse väärtused. Avalda ajavahele  $\Delta t$  vastav keskmine kiirendus.

Millena kujuneb see keskmine kiirendus kiiruskäigu diagrammis?

Keskmise kiirenduse piirväärtust ajavahe  $\Delta t$  lõpmatul vähenemisel nimetatakse kiirenduseks ajamomendil  $t$ . Anna eeskiri selle kiirenduse arvutamiseks, kui kiirus on teada aja funktsioonina.

Millena kujuneb see kiirendus kiiruskäigu diagrammis?

Arvuta kiirendus juhtudel

$$1^0. v = 0,4 t^2$$

$$2^0. v = -3 + 0,7 t^2$$

$$3^0. v = 10 - 1,2 t$$

4. Mees, kelle kõrgus on 1,75 m, sammub sirges joones piki kõnniteed. Kõnnitee kohal, 6 m kõrgusel, ripub elektrilamp; selle kiired heidavad kõnniteele mehe varju. Anna varju tipu liikumise seadus, teades, et mees liigub seaduse järgi

$$s = s(t).$$

Siin tähendab  $t$  aega,  $s$  — selle ajani käidud teed, viimast lähtekohast arvates.

Näited. 1<sup>o</sup>.  $s = 6t - 0,01 t^2$

2<sup>o</sup>.  $s = 28 - 5t$

Määra varju liikumise kiirus ja kiirendus.

5. Auto sõidab piki tänavat (joonis 1). Auto laternast  $L$  tulevad kiired heidavad telefoniposti  $P$  varju  $V$  maja seinale. Anna varju liikumise seadus, kasutades joonisel märgitud andmeid ja teades, et auto liigub seaduse järgi

$$s = s(t).$$

Näited. 1<sup>o</sup>.  $s = 20 + 0,1 t^2$

2<sup>o</sup>.  $s = -11 - 8t - 0,5 t^2$

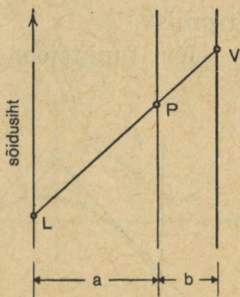
3<sup>o</sup>.  $s = 7 + 2t + t^2$

Määra varju liikumise kiirus ja kiirendus.

6. 1<sup>o</sup>. Voolutugevust veevärgitorus mõõdetakse ühikutes l/sec. Missuguses tähenduses tuleb mõista sümbolit l/sec<sup>2</sup>?

2<sup>o</sup>. Keemilise reaktsiooni (näit. raua roostetamise, väävelhappe tekki-  
mise jne.) kiirust mõõdetakse ühi-  
kutes g/sec. Missuguses tähenduses  
tuleb mõista sümbolit g/sec<sup>2</sup>?

7. Toimugu keha liikumine sir-  
ges joones. Mõjugu kehale samas sir-  
ges joones jõud. Newton'i teise  
seaduse järgi kiirendab see jõud  
liikumist; sellejuures see jõud  $F$  on  
võrdeline tema tekitatud liikumise kiirendusega  $a$ .  
Avalda jõud  $F$  kiirenduse  $a$  kaudu, märkides võrdetegurit  
tähega  $m$ . Allpool on antud rida liikumiskäike:  $s$  tähendab  
käidud teed,  $t$  — aega. Avalda kiirused  $v$ , kiirendused  $a$   
ja mõjuvad jõud  $F$ .



Joonis 1.

1<sup>o</sup>.  $s = 0,3t^2 + 5$

2<sup>o</sup>.  $s = 17 - 4,5t$

3<sup>o</sup>.  $s = 0,6t^2 + 1,5t + 5,2$

4<sup>o</sup>.  $s = 3,8t^3 - 0,9t^2$

5<sup>o</sup>.  $s = 0,07t^3 - 1,2t^2 + 2,6t$

8. Olgu  $y = f(x)$ . Selle funktsiooni kasvamise kiirus avaldub tuletisena  $y' = f'(x)$ . Sama funktsiooni kasvamise kiirendus avaldub tuletise tuletisena:  $(y')' = [f'(x)]'$ , ehk lühemalt, funktsiooni  $f(x)$  teise tuletisena:  $y'' = f''(x)$ .

Anna järgmiste funktsioonide kasvamise kiirused ja kiirendused:

1<sup>o</sup>.  $y = ax + b$

2<sup>o</sup>.  $y = x^2 + px + q$

3<sup>o</sup>.  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

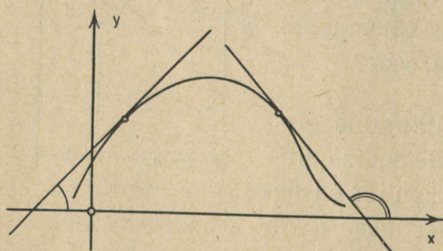
4<sup>o</sup>.  $y = ax - \frac{c}{x}$

5<sup>o</sup>.  $y = \sqrt{2px}$

9. Funktsiooni  $f(x)$  käigu kujutisest (joonis 2) näeme järgmist:

Kui funktsioon  $f(x)$  kasvab, siis on  $f'(x) > 0$ ,

„ „  $f(x)$  kahaneb, „ „  $f'(x) < 0$ .



Joonis 2.

Kujuta joonisel üks kiirendatult ja üks aeglustatult kasvav funktsioon.

10. Näita, tuginedes joonisele, et ülespoole kumera kõvera  $y = f(x)$  puhul argumenti kasvades  $f'(x)$  väheneb,

Näita, et lause lubab ennast pöörata.

Kirjuta funktsiooni  $f'(x)$  kasvamise ja kahanemise tunnused. Sõnasta funktsiooni  $f(x)$  kiirendatud ja aeglustatud kasvamise tunnused.

seega  $f''(x) < 0$ , ülespoole nõgusa kõvera puhul argumendi kasvades  $f'(x)$  kasvab, seega  $f''(x) > 0$ .

Näita, et lause lubab ennast pöörata.

Sõnasta kõvera  $y = f(x)$  kumeruse ja nõgususe tunnused.

11. 1<sup>o</sup>. Näita, et kõver

$$y = 3x^2 - 12x + 1$$

on kogu oma ulatusel ülespoole nõgus. Määra kõvera madalaim täpp. Vii koordinaatide algus sellesse täppi, telgede sihte muutmata jättes. Missuguse kuju omandab kõvera võrrand uues teljestikus?

2<sup>o</sup>. Näita, et kõver

$$y = -0,3 + 6x - 5x^2$$

on kogu oma ulatusel ülespoole kumer. Leia kõvera kõrgeim täpp. Vii koordinaatide algus sellesse täppi, telgede sihte muutmata jättes. Missuguse kuju omandab kõvera võrrand uues teljestikus?

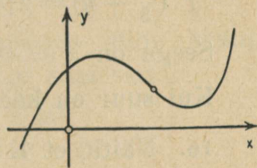
12. Kõvera täppi, mille ordinaat on maksimaalne või minimaalne, nimetame kõvera pöördetäpiks.

Olgu antud parabool

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Missugusel tingimusel on parabool ülespoole kumer? — ülespoole nõgus? Missugused on tema pöördetäpi koordinaadid?

Missuguse kuju omandab parabooli võrrand, kui viia koordinaatide algus parabooli pöördetäppi, telgede sihte muutmata jättes?



Joonis 3.

13. Määra piirkonnad, milles järgmised kõverad on ülespoole kumerad ja milles nad on ülespoole nõgusad:

1<sup>o</sup>.  $y = 3x + 5$

5<sup>o</sup>.  $y = x^3 - 2$

2<sup>o</sup>.  $y = x^2 - 7x + 12$

6<sup>o</sup>.  $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 30$

3<sup>o</sup>.  $y = 3 + 2x - x^2$

7<sup>o</sup>.  $y = \frac{x-1}{x+2}$

4<sup>o</sup>.  $y = (x-1)(x+5)$

8<sup>o</sup>.  $y = x^2 + \frac{4}{x}$

14. Täppi, mis lahutab kõvera kumerat osa nõgusast, nimetatakse kõvera k ä ä n u t ä p i k s (joonis 3).

Olgu joonisel kujutatud kõvera võrrand  $y=f(x)$ . Olgu funktsiooni  $f(x)$  esimene ja teine tuletis pidevad  $x$ -i funktsioonid. Näita, et käänutäpist üleminekul  $f''(x)$  omandab väärtuse null, muutes märgi plussilt miinusele või ümberpöördult.

15. Olgu antud kõver oma võrrandiga

$$y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6.$$

Järgmine skeem näitab selle kõvera käänutäpi abstsissi leidmist.

Anna tarvilised seletused.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 5$$

$$f''(x) = 6x - 4 = 2(3x - 2)$$

$$2(3x - 2) = 0; 3x - 2 = 0; x = +\frac{2}{3}.$$

Tähendagu  $h$  mingit vabalt võetud kuitahes väikest positiivset arvu. Siis on

$$f''\left(\frac{2}{3} - h\right) = 2\left[3\left(\frac{2}{3} - h\right) - 2\right] = 2[-3h] < 0$$

ja

$$f''\left(\frac{2}{3} + h\right) = 2\left[3\left(\frac{2}{3} + h\right) - 2\right] = 2[+3h] > 0.$$

Seega on  $x = +\frac{2}{3}$  käänutäpi abstsiss.

Kui suur on käänutäpi ordinaat?

16. Näita, et 1. ja 2. astme joontel

$$y = mx + n$$

ja

$$y = ax^2 + bx + c$$

ei ole käänutäppe.

17. Maksimumitäpis on kõveral  $y=f(x)$  rõhtsihiline puutuja ja kõver on ise ülespoole kumer. Miinimumitäpis on kõveral  $y=f(x)$  rõhtsihiline puutuja ja kõver on ülespoole nõgus. Selgita asja joonisega.

Kas pöördlaused on õiged?

Avalda funktsiooni  $f(x)$  maksimumi ja miinimumi küllaldased tingimused tuletiste  $f'(x)$  ja  $f''(x)$  kaudu.

18. Olgu antud funktsioon

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2.$$

Järgmine skeem näitab selle funktsiooni maksimumi ja miinimumi leidmist. Põhjenda skeemi igat sammu.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$$

$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$$

$$3(x^2 - 2x - 3) = 0, \quad x^2 - 2x - 3 = 0,$$

$$x = 1 + \sqrt{1 + 3} = 1 + \sqrt{4},$$

$$x_1 = 1 + 2 = 3, \quad x_2 = 1 - 2 = -1.$$

$$f'(x_1) = 3(3^2 - 2 \cdot 3 - 3) = 0,$$

$$f'(x_2) = 3[(-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 3] = 3(1 + 2 - 3) = 0.$$

$$f''(x_1) = 6(3 - 1) = 6 \cdot 2 > 0,$$

$$f''(x_2) = 6(-1 - 1) = 6 \cdot (-2) < 0.$$

Seega siis annab  $x_1 = 3$  funktsiooni  $f(x)$  miinimumi ja  $x_2 = -1$  funktsiooni  $f(x)$  maksimumi.

Funktsiooni miinimum on  $3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 2 = -25$ , funktsiooni maksimum on  $(-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) + 2 = -1 - 3 + 9 + 2 = +7$ .

19. Määra järgmiste kõverate pöörde- ning käänutäpid ja valmista nende käigust vabal käel skits:

$$1^0. \quad y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$$

$$2^0. \quad y = 8x^3 - 18x^2 + 54x - 27$$

$$3^0. \quad y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$$

$$4^0. \quad y = x^4 - 2x^2 + 10$$

$$5^0. \quad y = 3x^4 - 4x^3 + 1$$

$$6^0. \quad y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$$

20. Olgu

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

üldine kolmanda astme kõvera võrrand. Näita, et sellel kõveral on ikka olemas käänutäpp ja nimelt üks ainus.

Vii koordinaatide algus käänutäppi telgede sihte muutamata jättes.

Näita saadud võrrandi põhjal, et uuritav kõver on ikka sümmeetriline oma käänutäpi suhtes.

Järelda siit, et juhul, kui sel kõveral on olemas maksimumtäpp, siis temal on olemas ka miinumtäpp. Kuidas avalduvad miinumtäpi koordinaadid maksimumtäpi koordinaatide kaudu?

### Harjutis II:

Tuletise mõiste rakendusi.

1. Olgu antud funktsioon

$$y = x^3 - 12x^2 + 45x - 48.$$

Tahetagu kujutada selle funktsiooni käiku vahemikus  $+2 \leq x \leq +5$ .

Olgu tarvitada leht paberit  $10 \times 10$  cm<sup>2</sup>.

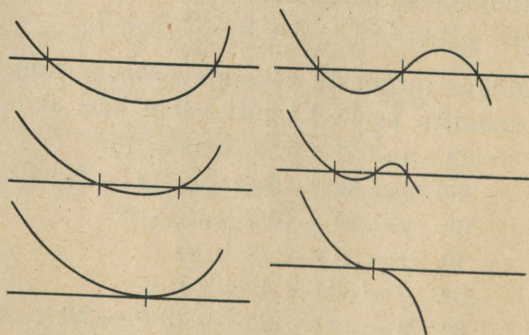
Kui suur on  $y$ -väärtuste kõikumine?

Kuidas tuleb valida mõõtühikud?

Kui peenelt saab jooniselt määrata  $y$ -väärtusi?

Kuhu tuleb paberil paigutada  $x$ -telg?

Kas  $y$ -telg on paberil näha?



Joonis 4.

2. 10. Olgu  $f(x)$  mingi polünoom. Joonis 4 näitab võrrandi

$$f(x) = 0$$

kordsete lahendite (kahe ja kolme võrdse lahendi) tekki-

mist mitme erineva lahendi piiramatul lähenemisel üksteisele. Võrrandi  $f(x) = 0$  kordse lahendi puhul on nii funktsiooni enese väärtus kui ka funktsiooni tuletise väärtus 0, sümbolites:

$$f(x) = 0, f'(x) = 0.$$

Põhjenda seda geomeetriliselt.

2<sup>o</sup>. Olgu võrrandil  $f(x) = 0$  kordne lahend  $x = a$ ; siis võib teda ikka kirjutada kujus

$$(x - a)^2 \cdot g(x) = 0;$$

teguri  $g(x)$  saame, jagades  $f(x)$  vahega  $x - a$  ja saadust veel kord vahega  $x - a$ . Põhjenda seda. Näita, et tehtud oletusel täpis  $x = a$  tõepoolest  $f'(x) = 0$ .

3. Nagu eelmises ülesandes selgus, on võrrandi  $f(x) = 0$  kordse lahendi puhul

$$\text{nii} \quad f(x) = 0$$

$$\text{kui ka} \quad f'(x) = 0.$$

1<sup>o</sup>. Tuleta sellest tingimus, mida peavad rahuldama võrrandi

$$x^2 + px + q = 0$$

kordajad, et võrrandil oleks kaks võrdset lahendit.

2<sup>o</sup>. Sama ülesanne võrrandi puhul

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

3<sup>o</sup>. Sama ülesanne võrrandi puhul

$$x^3 + px + q = 0.$$

4. Täpes, mis kujutavad võrrandi  $f(x) = 0$  kordseid lahendeid, peab olema ka  $f'(x) = 0$ . Leia sellest märkusest lähtudes järgmiste võrrandite kordsed lahendid (kui niisugused olemas):

$$1^o. 9x^2 + 12x + 4 = 0$$

$$2^o. 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$3^o. x^3 - 3x^2 + 4 = 0$$

$$4^o. x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$$

5. 1<sup>o</sup>. Määra parabool

$$y = a + bx + cx^2,$$

mis läheb läbi täpi  $(0|+3)$  ja mille miinimumtäpp asetseb kohal  $(+1|+2)$ .

2<sup>o</sup>. Määra parabool, mille tõus kohal  $(+2|0)$  on  $-1$  ja mille maksimumtäpp asetseb kohal abstsissiga  $+1$ .

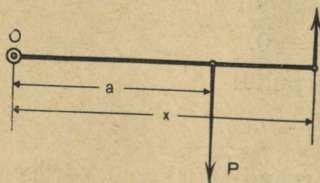
6. On antud ruut küljega  $a$ . Kujuta temasse ristkülik maksimaalse pindalaga.

7. Olgu ette antud silindri telglõike ümbermõõt  $2c$ . Kuidas tuleb valida silindri mõõted, et silindri ruumala saaks maksimaalne?

8. Missugused mõõted peaksid olema meie kahekroonisel hõberahal, kui tahaksime, et ta võimalikult vähe kuluks (s. t. et tema pind oleks minimaalne antud kaalu puhul)?

9. Olgu mingi eseme kaugus optilisest läätsest  $e$ , läätse antud kujutise kaugus  $p$ , läätse fokaalkaugus  $f$ . Missugusel korral on kaugus eseme ja tema pildi vahel minimaalne?

10. Olgu antud ristkülik, mille pikkus on  $2a$  ja laius



Joonis 5.

2b. Kujuta tema ümber romb nõnda, et rombi küljed läheksid läbi ristküliku tipude ja rombi pindala oleks maksimaalne; — rombi ümbermõõt oleks minimaalne.

11. Koonuse aluse raadius on  $R$ , kõrgus  $H$ . Missugused on maksimaalse ruumalaga silindri mõõted, mida saab kujutada koonusesse?

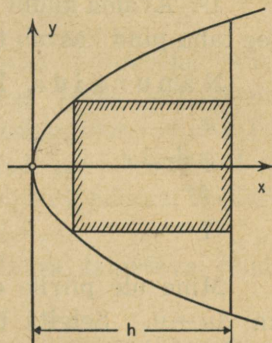
12. Näita, et ühe ja sama ümbermõöduga ringsektoritest suurim pindala on sellel, mille ümbermõõdu kõver osa on võrdne ümbermõõdu sirgete osade summaga.

13. Eelseisev 5. joonis kujutab kangi, mille kinnistäpiks on  $O$  ja millele on rakendatud kaks tasakaalustuvat jõudu  $P$  ja  $Q$ , vastavalt kaugustele  $a$  ja  $x$ . Kaalugu kangi pikkusühik  $k$ . Olgu jõud  $P$  antud. Missuguse kauguse  $x$ -i puhul on jõud  $Q$  ekstremaalne?

Uuri juhtu, kus  $x > 0$ , ja juhtu, kus  $x < 0$ .

14. On antud kera raadiusega  $R$ . Sellesse on kujutatud maksimaalse ruumalaga koonus. Missugused on selle mõõted?

15. On antud parabooli  $y^2 = 2px$  segment (joonis 6), mille alus on risti teljega ja mille kõrgus on  $h$ . Sellesse segmentisse on kujutatud maksimaalse pindalaga ristkülik. Missugused on selle ristküliku mõõted?



Joonis 6.

### Harjutis III:

Tuletisi kaudsel olenemisel.

1. Näide 1. Veepaisu kogunenud vees peituv töövaru  $V$  on veepinna kõrguse  $h$  funktsioon:

$$V = V(h);$$

veepinna kõrgus  $h$  on omakord aja  $t$  funktsioon:

$$h = h(t).$$

Nõnda on siis töövaru

$$V = V[h(t)],$$

kust nähtub, et  $V$  oleneb  $t$ -st k a u d s e l t, nimelt  $h$  kaudu.

Näide 2. Pendli võnkekestus (periood)  $T$  on pendli pikkuse  $l$  funktsioon:

$$T = T(l);$$

pendli pikkus on omakord temperatuuri  $\theta$  funktsioon:

$$l = l(\theta).$$

Nõnda on siis pendli võnkekestus

$$T = T[l(\theta)],$$

kust nähtub, et  $T$  oleneb  $\theta$ -st k a u d s e l t, nimelt  $l$  kaudu. Anna 5 uut kaudse olenemise näidet.

2. Olgu tegemist metallist kuubiga. Selle serv  $u$  on temperatuuri  $x$  funktsioon:  $u = u(x)$ .

1<sup>o</sup>. Avalda kuubi tahu pind  $S$  ja määra kiirus, millega see tahu pind kasvab temperatuuri kasvades.

N ä p u n ä i d e. Koosta skeem:

$x$	$u$	$S =$
$x + \Delta x$	$u + \Delta u$	$S + \Delta S =$
$\Delta x$	$\Delta u$	$\Delta S =$
1	$\frac{\Delta u}{\Delta x}$	$\frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{\Delta S}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} =$

Mine üle piirile eeldusel, et  $\Delta x \rightarrow 0$  ja ühes sellega ka  $\Delta u \rightarrow 0$ . Selgita üksikasjaliselt igat toimingut selles skeemis.

2<sup>o</sup>. Kontrolli tulemust, rakendades  $S$  avaldisele korruptise tuletisvalemit.

3<sup>o</sup>. Missugustes mõõtetudes tuleb mõõta  $u$  tuletist  $x$ -i järgi,  $S$  tuletist  $u$  järgi ja  $S$  tuletist  $x$ -i järgi, kui pikkused on mõõdetud cm-tes ja temperatuurid kraadides?

4<sup>o</sup>. Olgu  $u = u_0(1 + ax)$ . Leia  $u'$  ja  $S'$ .

Missugune füüsikaline tähendus on kordajatel  $u_0$  ja  $a$ ?

3. Olgu tegemist metallkuubiga. Selle serv  $u$  on temperatuuri  $x$  funktsioon:  $u = u(x)$ .

1<sup>o</sup>. Avalda kuubi ruumala  $V$  ja määra kiirus, millega see ruumala kasvab temperatuuri kasvades.

2<sup>o</sup>. Missuguses mõõdus tuleb mõõta leitud kiirust?

3<sup>o</sup>. Olgu  $u = u_0(1 + ax)$ . Leia  $V'$ .

4. Rakenda eelmistes ülesannetes leitud eeskirju funktsioonide

$$[u(x)]^2 \text{ ja } [u(x)]^3$$

tuletiste leidmiseks järgmistel juhtudel:

1<sup>o</sup>.  $(1 + 3x)^2$

5<sup>o</sup>.  $(2x + 5)^3$

2<sup>o</sup>.  $(3 - 2x)^2$

6<sup>o</sup>.  $(1 - x)^3$

3<sup>o</sup>.  $(1 - \frac{x}{5})^2$

7<sup>o</sup>.  $(1 + x^2)^3$

4<sup>o</sup>.  $(a + bx)^2$

8<sup>o</sup>.  $(a + bx^2)^3$

Kontrolli tulemusi, avades andmeis esmalt sulud ja rakendades saadusele polünoomi tuletise leidmise eeskirja.

5. Olgu ilm vagune ja järvepind peegelsile. Vis-kame kivi järve. Tekkinud lainetus levib radiaalselt. Välise ringlaine raadius on aja funktsioon:  $r = r(t)$ . Kui kiiresti kasvab lainetava vee pindala ajamomendil  $t$ ? Missuguses mõõdus on vastus antud, kui pikkusi mõõdetakse cm-tes ja aegu sekundites?

N ä i d e. Olgu  $r = r_0 + ct$ . Määra lainetava pindala kasvamise kiirus.

6. Olgu tegemist udus langeva kerakujulise rahe-teraga. Udumullikeste jäätumisel kasvab tera järjest, nii et tera raadius on aja funktsioon:  $r = r(t)$ . Olgu jää erikaal  $e$ . Kui kiiresti kasvab rahetera kaal ajamomendil  $t$ ? Missuguses mõõdus on vastus antud, kui pikkusi mõõdetakse mm-tes, aega sekundites ja kaalu grammides?

N ä i d e. Olgu  $r = r_0 + ct$ . Määra rahetera kaalu kasvamise kiirus.

7. Olgu tegemist pidevalt töötava käiaga. Kahanegu tema kaal kulumise tõttu ühtlaselt kiirusega  $k$  g/min. Olgu käia paksus  $h$  cm, tema aine erikaal  $e$  g/cm<sup>3</sup>. Olgu ajamomendil  $t$  käia raadius  $r = r(t)$ . Määra käia raadiuse kahanemise kiirus momendil  $t$ . Kuidas see kiirus oleneb raadiusest  $r$ ?

8. Määra järgmiste avaldiste tuletised:

1<sup>o</sup>.  $(x - \frac{1}{x})^2$

3<sup>o</sup>.  $(a + \frac{b}{x})^3$

2<sup>o</sup>.  $(\frac{x-1}{2x+3})^2$

4<sup>o</sup>.  $(\frac{x}{x-1})^3$

## 9. Olgu

$$u = \frac{1}{v(x)},$$

nii et  $u$  oleneb muutujast  $x$  funktsiooni  $v(x)$  kaudu. Määra  $u$  tuletis  $x$ -i järgi.

Näpunäide. Rakenda 2. ülesandes tarvitatud arvutusskeemi muutujate jaoks  $x$ ,  $v$  ja  $u$ .

10. Õhupallis on  $m$  kg vesinikku. Päikesepaistel kasvab tema ruumala seaduse järgi  $v = v_0(1 + \beta t)$ , kus  $t$  tähendab temperatuuri.

Gaasi tihedus  $\mu$  on ruumala  $v$  funktsioon ja oleneb selle kaudu temperatuurist  $t$ :  $\mu = \mu(t)$ . Määra tiheduse  $\mu$  muut  $\Delta\mu$  temperatuuri väikesel tõusmisel väärtuselt  $t$  väärtusele  $t + \Delta t$ .

Mitu protsenti  $\Delta\mu$  moodustab  $\mu$  väärtusest?

11. Leia järgmiste funktsioonide tuletised:

$$1^{\circ}. \frac{1}{1+2x}$$

$$3^{\circ}. \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$2^{\circ}. \frac{\alpha}{1-\beta x}$$

$$4^{\circ}. \frac{1}{\sqrt{x}}$$

12. Lennukil asuva vaatleja silmapiiri raadius kilomeetrites on

$$r = 3,6\sqrt{h},$$

kus  $h$  tähendab lennuki kõrgust üle maapinna meetrites. Et  $h$  on aja funktsioon, siis on seda tema kaudu ka  $r$ .

Olgu teada lennuki tõusmise kiirus  $h'$  ajal  $t$ . Missuguse kiirusega laieneb lennukil asuva vaatleja silmapiir?

13. Katsed näitavad, et tühjuses langeva keha kiirus  $v$  oleneb langemiskaugusest  $s$  valemi järgi:

$$v = \sqrt{19,6s}.$$

Et langemiskaugus  $s$  on aja funktsioon, siis on seda ka kiirus  $v$ . Avalda langemise kiirendus olenevuses ajast  $t$ .

14. Olgu  $y = \sqrt{u}$ , kus  $u = u(x)$ . Näita, et

$$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

Näpunäide. Koosta tuletise  $y'$  arvutamise skeem analoogiliselt 2. ülesandes antuga.

15. Toricelli' seaduse järgi on anuma august voolava vee kiirus m/sec-tes

$$v = \sqrt{9,8 h},$$

kus  $h$  tähendab sügavust m-tes, mille võrra auk asetseb allpool veepinda.

Tõusku vee pideva juurdevoolu tõttu vedeliku pind anumast seaduse järgi

$$h = h_0 + kt,$$

kus  $t$  tähendab aega.

Mis tähenduses esinevad siin kordajad  $h_0$  ja  $k$ ?

Avalda anumast voolava vee kiirendus.

16. Pendli võnkumisperiood sekundites

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{981}} \sqrt{l},$$

kus  $l$  tähendab pendli pikkust cm-tes. Pendli pikkus  $l$  on temperatuuri funktsioon:

$$l = l_0 (1 + at).$$

Mille võrra muutub periood  $T$  temperatuuri kasvades  $0^{\circ}$ -lt  $15^{\circ}$ -le, kui pendel  $0^{\circ}$  temperatuuril märgib täpsalt sekundeid ja pendli aine jaoks on  $a = 17 \cdot 10^{-6}$ ? Mille võrra jääb kell ööpäeva vältel taha  $15^{\circ}$  soojas toas?

17. Leia järgmiste funktsioonide tuletised:

$$1^{\circ}. \sqrt{1+x}$$

$$3^{\circ}. \sqrt{1+x-x^2}$$

$$2^{\circ}. \sqrt{a^2-x^2}$$

$$4^{\circ}. x\sqrt{1-x^2}$$

18. Olgu  $y = y(u)$  ja  $u = u(x)$ . Tuleta valem

$$y'x = y'u \cdot u'x;$$

siin näitavad alumised märgikesed muutujaid, mille järgi vastavad tuletised on võetud.

### Harjutis IV:

Täiendavaid ülesandeid tuletise mõiste rakendamiseks.

1. Kujuta kalendris leiduvate andmete järgi päeva pikkuse muutumiskäik ajavahemikus 15. XII — 27. XII ja 15. VI — 27. VI.

Kui suur on päeva pikkuse muutumise kiirus 21. XII?  
— 21. VI?

Mis moodsus on kohane seda kiirust mõõta?

Kui suur on päeva pikkuse muutumise kiirus 21. IX?  
— 21. III?

Kus asetsevad päeva pikkusekäigu kujudjoone käänutäpid?

2. Olgu galvaanilise elemendi klemmide potentsiaalide vahe  $e$  volti, elemendi seesmine takistus  $r$  oomi. Missuguse välistakistuse  $R$  puhul on ahelas tekkinud soojushulk maksimaalne?

N ä p u n ä i d e. J o u l e'i seaduse järgi on juhtmes sekundis tekkinud soojushulk kalorites

$$q = 0,24 Ri^2,$$

kus  $i$  tähendab voolu tugevust amprites.

Rakenda edasi O h m'i seadust.

3. Kujuta ringisse raadiusega  $r$  maksimaalse ümbermõõduga ristkülik.

4. Olgu antud ellips, mille poolteljed on  $a$  ja  $b$ .

1<sup>0</sup>. Kujuta sellesse ellipsisse ristkülik maksimaalse pindalaga.

2<sup>0</sup>. Kujuta sellesse ellipsisse ristkülik maksimaalse ümbermõõduga.

5. Kujuta ringisse raadiusega  $r$  võrdhaarne kolmnurk maksimaalse pindalaga.

6. Olgu antud ellips pooltelgedega  $a$  ja  $b$ . Kujuta temasse maksimaalse pindalaga võrdhaarne kolmnurk, mille alus oleks rööbik ellipsi suure teljega.

7. Kujuta antud koonusesse teine, tipuga esimese põhja keskkohas, nii et selle teise koonuse ruumala oleks maksimaalne.

8. Missugused mõõted peavad olema silindrikujulisel liiter-mõõdul, kui tahame, et tema valmistamiseks kuluks minimaalne hulk plekki?

9. 1<sup>o</sup>. Missugusel silindritest etteantud pinnaga  $S$  on maksimaalne ruumala?

2<sup>o</sup>. Missugusel silindritest etteantud ruumalaga  $V$  on minimaalne pind?

10. Missugusel argumenti väärtusel omandab funktsioon

$$y = \frac{(x - a)(b - x)}{x^2}$$

maksimaalse ja missugusel minimaalse väärtuse?

Kas uuritaval funktsioonil on olemas kõige suurem väärtus?

11. Missugusel argumenti väärtusel omandab funktsioon

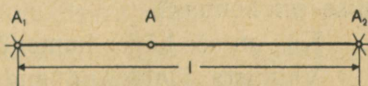
$$y = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{a - x}$$

maksimaalse ja missugusel minimaalse väärtuse?

Kas uuritaval funktsioonil on olemas kõige suurem väärtus?

12. Pikast plekitahvlist, mille laius on 30 cm, soovitakse valmistada lahtine renn trapetsitaolise ristilõikega, nii et küljed ja põhi oleksid ühelaiused. Kui lai peab olema renn ülevalt, et tema veemahutus oleks maksimaalne?

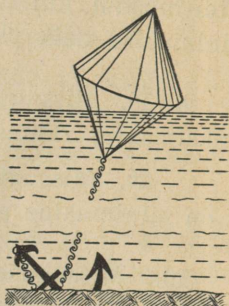
13. Täppidesse  $A_1$  ja  $A_2$  (joonis 7) on paigutatud valguseallikad, mille tugevused on vastavalt  $I_1$  ja  $I_2$ . Kaugus  $A_1 A_2 = l$ . Missuguses täpis  $A$  sirgel  $A_1 A_2$  on valgusetugevus maksimaalne?



Joonis 7.

14. Koonusetaoline plekklehter peab mahutama  $V \text{ cm}^3$  vedelikku. Missugused peab valima tema mõõted, et tema peale kuluv pleki hulk oleks minimaalne?

15. Kahest ühesuurusest ringitaolisest plekk-lestast raadiusega  $r \text{ cm}$  ehitatakse kaksikoonus ujuvaks poiuks (joonis 8). Missugused sektorid peab välja lõikama plekk-lestast, et poiu ruumala saaks maksimaalne?



Joonis 8.

### Harjutis V:

Funktsiooni käigu uurimise ülesandeid.

1. Olgu  $y = f(x) = |\sqrt{25 - x^2}|$ .

Missugused kaks arvu on  $x$ -i muutumise tõketeks?

Kas on  $f(x)$  määratud oma avaldisega iga  $x$ -i väärtuse jaoks nimetatud kahe tõkke vahel?

Missugune on  $f(x)$  määramise piirkond? Märki ta joonisel.

Kas  $f(x)$  käigukõver on sümmeetriline  $x$ -telje suhtes? —  $y$ -telje suhtes? — alguse suhtes?

Missugusel  $x$ -i väärtusel omandab  $f(x)$  oma kõige suurema väärtuse? — kõige väiksema väärtuse?

Arvuta need  $f(x)$  väärtused.

Kas on funktsiooni  $f(x)$  muutumine tõkestatud?

Määra joonisel rõhtne riba, milles asetseb kogu  $f(x)$  käigukõver.

Missuguses piirkonnas  $f(x)$  kasvab? — kahaneb?

Kuidas muutub  $f(x)$  käigukõvera tõus  $f(x)$  määramise piirkonnas?

Kus on see kõver kumer? — kus nõgus?

Valmista ülal-leitud andmeil kõvera käigu skits.

Missuguse kõveraga on tegemist?

$$2. \text{ Olgu } g(x) = \frac{5}{1+x^2}.$$

Kas on  $g(x)$  määratud oma avaldisega iga  $x$ -i väärtuse jaoks?

Mis mõte on ütlusel: „ $g(x)$  määramise vahemik on piiramatult“?

Näita, et funktsioonil  $g(x)$  on püsiv märk. Mis sugune nimelt?

Kas funktsiooni  $g(x)$  käigukõver on sümmeetriline  $x$ -telje suhtes? —  $y$ -telje suhtes? — alguse suhtes?

Kuidas muutub antud funktsioon  $x$ -i absoluutväärtuse kasvamisel? — kahanemisel?

Missuguse  $x$ -i puhul on funktsioonil  $g(x)$  suurim väärtus? Määra viimane.

Missuguste tōkete  $y_1$  ja  $y_2$  vahel asetsevad kõik funktsiooni  $g(x)$  väärtused? Kas need tōkked kuuluvad funktsiooni  $f(x)$  väärtuste hulka?

Kujuta  $x$ - $y$ -tasapinnas rõhtriba, milles asetseb funktsiooni  $g(x)$  käigukõver kõigi oma täppidega.

Määra piirkonnad, milles  $f(x)$  käigukõver tõuseb; — milles langeb; — milles ta on kumer ja milles nõgus.

Määra  $f(x)$  käigukõvera käänutäpid.

Kui suur on kõvera kalle neis täpes?

Valmista  $f(x)$  käigukõvera skits.

3. Uuri eelmisis ülesandeis seletatud viisil funktsiooni

$$h(x) = \frac{5x}{1+x^2}$$

käigukõverat ja valmista temast vabal käel skits.

4. Olgu

$$i(x) = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

1<sup>o</sup>. Uuri funktsiooni käiku ülesandeis 1 ja 2 näidatud viisil ja valmista  $i(x)$  käigukõvera skits.

2<sup>o</sup>. Mida võib öelda funktsiooni  $i(x)$  väärtustest ja mida vahe  $1 - i(x)$  väärtustest piiramatult kasvava  $x$ -i puhul?

Näpunäide. Jaga lugejat ja nimetajat  $x$ -i kõrgema astmega ja hinda nõnda teisendatud  $i(x)$  avaldise väärtust piiramatult kasvava  $x$ -i juhuks.

3<sup>o</sup>. Olgu  $\varepsilon$  mingi vabalt etteantud positiivne arv (nii väike kui arvuvalija seda soovib). Ikka on siis võimalik leida niisugust arvu  $N$ , et kui aga  $x \geq N$ , siis kindlasti

$$1 - i(x) < \varepsilon.$$

Näita seda.

Kõnesolev tõsiasi avaldatakse sõnades:  $i(x)$  käigujoon läheneb asümptootiliselt sirgele  $y = 1$ . Sirge  $y = 1$  on kõvera  $y = i(x)$  asümptoot.

5. Näita, et igaljuhul järgmisist kõveraist on asümptootiks  $x$ -telg:

$$1^{\circ}. \quad y = \frac{1}{x}$$

$$4^{\circ}. \quad y = \frac{5}{1+x^2}$$

$$2^{\circ}. \quad y = \frac{1}{x^2}$$

$$5^{\circ}. \quad y = \frac{5x}{1+x^2}$$

$$3^{\circ}. \quad y = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$6^{\circ}. \quad y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

6. Kas lähenevad järgmised funktsioonid mingile lõplikule piirväärtusele argumendi piiramatul kasvamisel?

$$1^{\circ}. \quad \frac{x+2}{5x+3}$$

$$5^{\circ}. \quad \frac{x^2+4}{x}$$

$$2^{\circ}. \quad \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$6^{\circ}. \quad x^2 - \frac{1}{x^2}$$

$$3^{\circ}. \quad \frac{10x}{x^2+5}$$

$$7^{\circ}. \quad \frac{x+1}{x^2-7x+10}$$

$$4^{\circ}. \quad \frac{4+x}{x^2}$$

$$8^{\circ}. \quad \frac{2x^2-5}{x^2-x-2}$$

7. Olgu

$$j(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Anna selle funktsiooni määramisvahemik.

Missugusel  $x$ -i väärtusel pole  $j(x)$  määratud?

Näita, et  $j(x)$  on püsiva märgiga. Mis järgneb siit tema käigukõvera kohta?

Kas  $j(x)$  käigukõver on sümmeetriline  $x$ -telje,  $y$ -telje, alguse suhtes?

Kas  $j(x)$  väärtused on tõkestatud alt? — ülevalt?

Näita, et nii  $x$ -telg kui  $y$ -telg on  $j(x)$  käigukõvera asümptoodiks.

Kus on  $j(x)$  käigukõver kumer? — kus nõgus?

Kus tõuseb see kõver? — kus langeb?

Valmista uuritava kõvera skits.

### 8. Uuri funktsiooni

$$k(x) = \frac{1}{x}$$

käigukõverat, kaaludes järgmisi küsimusi:  $k(x)$  määramispiirkond;  $x$ -i väärtused, millel  $k(x)$  pole määratud;  $k(x)$  märk  $x$ -i muutudes;  $k(x)$  käigukõvera sümmeetria telgede ja alguse suhtes;  $k(x)$  käik  $x$ -i tõkestamata kasvamisel;  $k(x)$  käik  $k(x)$  määramatuse koha ümbruses;  $k(x)$  kõvera asümptoodid;  $k(x)$  ekstreemumid;  $k(x)$  käigukõvera tõusmine ja langemine;  $k(x)$  käigukõvera kumerus, nõgusus ja käänukohad.

Saadud andmeil valmista  $k(x)$  käigukõvera skits.

9. Liikugu täpp  $P$  sirgel  $AB$  muutumatus suunas ikka kaugemale ja kaugemale. Olgu lõigu  $AB$  pikkus  $a$ . Misugusele väärtusele läheneb suhe  $\frac{AP}{BP}$  täpi  $P$  piiramatul kaugenemisel?

N ä p u n ä i d e. Avalda uuritav suhe kauguse  $BP$  funktsioonina.

### 19. 10. Näita, et polünoom

$$p(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$$

kasvab üle iga määra  $x$ -i piiramatul kasvamisel.

N ä p u n ä i d e. Kirjuta polünoom kujul

$$p(x) = c_n x^n \left[ 1 + \frac{c_{n-1}}{c_n} \frac{1}{x} + \frac{c_{n-2}}{c_n} \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{c_0}{c_n} \frac{1}{x^n} \right].$$

20. Põhjenda väide, et polünoomi käigukõveral ei ole ei püst- ega rõhtasümptoote.

## Peatükk II.

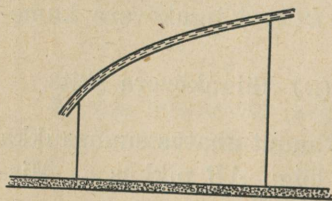
# Integraali mõiste.

### Harjutis VI:

Ligikaudseid valemmeid pindalade ja ruumalade määramiseks.

1. Joonista mõne puu (pärna, vahtra, kase või mõne teise puu) lehe kontuur mm-paberile ja määra lehe pindala lähisväärtus puudusega, arvestades ainult neid ruutmillimeetreid, mis täielikult asetsevad kontuuri sees.

Määra lehe pindala lähisväärtus liiaga, arvestades täie ette ka neid ruutmillimeetreid, mis osalt ulatuvad üle lehe kontuuri.



Joonis 9.

Määra uus lehe pindala lähisväärtus, moodustades eelmise kahe aritmeetilise keskmise. Missuguse veaga kujutab see viimane halvemal juhul lehe tõelist pindala?

2. Plaan on tehtud mõõtkavas 1:1000. Plaanil on mõõdetud teatav pindala ja leitud sellena  $a$  mm<sup>2</sup>. Missugune pind sellele vastab väljal?

3. Määra geograafilisel kaardil Peipsi järve pindala, kattes kaarti läbipaistva mm-paberiga ja loendades järve kontuuris asetsevaid ruutmillimeetreid.

4. Joonis 9 kujutab asunduse heinamaad suurtee, oja ja kahe piirjoone vahel, mis moodustavad tee sihiga täisnurgad. Määra heinamaa pindala. Joonise mõõtkava on 1:5000.

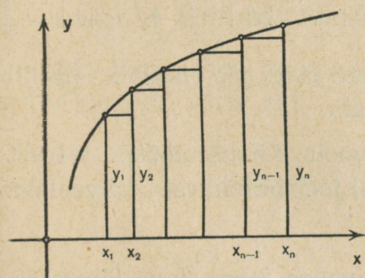
5. Joonis 10-a näitab, kuidas kõvera poolt piiratud pindala saab määrata ligikaudu, lähendades seda pindala ristkülikute summaga:

$$u \approx y_1 \cdot (x_2 - x_1) + y_2 \cdot (x_3 - x_2) + \dots + y_{n-1} \cdot (x_n - x_{n-1})$$

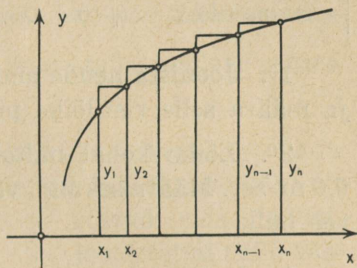
või lühemalt:

$$u \approx y_1 \cdot \Delta x_1 + y_2 \cdot \Delta x_2 + \dots + y_{n-1} \cdot \Delta x_{n-1}.$$

Joonis 10-b annab teise viisi sama pindala lähendamiseks. Anna vastav valem selle pindala arvutamiseks.



Joonis 10-a.



Joonis 10-b.

Millise kuju omandavad viimased kaks „ristkülikutevalemite“, kui jaotised on võetud võrdsete vahemikkude takka, see tähendab  $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_{n-1} = \Delta x$ ?

N ä p u n ä i d e. Tarvilikke ordinaatide summasid on kõige hõlpsam saada, märkides ordinaadid, nagu nad valemis esinevad, üksteise järele serpentiinpaelale ja mõõtes saadud lõiku cm-paelaga või m-puuga.

6. Moodusta eelmises ülesandes saadud pindala ligikaudseist avaldisist aritmeetiline keskmine ja näita, misugune geomeetriline tähendus on nõnda saadud uuel pindala ligikaudsel valemil.

Missuguse kuju valem omandab, kui kõik vahemikud  $\Delta x$  võtta võrdsetena:

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_{n-1} = \Delta x?$$

7. Näita kohasel joonisel, et eelmises ülesandes leitud „trapetsite-valem“ annab nõutava pindala puudusega, kui pinda piirav kõver (asetledes ülalpool  $x$ -telge) on k u m e r ülespoole, ja liiga, kui see kõver on n õ g u s ülespoole.

8. Allpool seisev tabel kujutab jõe sügavuse mõõtmise tulemusi:

Kaugus kaldast meetrites	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Sügavus meetrites	0	4,8	6,7	8,0	7,6	6,6	4,7	2,8	0

10. Joonista nende andmete järgi jõe ristilõike profiil ja määra selle ristilõike pindala.

20. Lõike kohal näitab voolu kiirusemõõtja kiirust 0,6 m/sec. Määra sekundi vältel jõe ristilõikest läbi voolava vee hulk.

9. Joonista poolring raadiusega 8 cm, jaga läbimõõt, millele poolring toetub, 16 ossa ja rakenda selle poolringi pindala määramiseks järjest kõiki 3 senini tundma õpitud ligikaudset valemit.

Määra iga valemi poolt antud väärtuse absoluutne ja protsentuaalne viga.

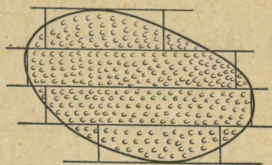
10. Joonista ellips pooltelgedega 5 ja 8 cm, jaga suurem telg 16 ossa ja rakenda ellipsi pindala arvutamiseks kõiki 3 senini tundma õpitud ligikaudset valemit.

Määra iga valemi poolt antud väärtuse absoluutne ja protsentuaalne viga, teades, et ellipsi pindala täppis väärtus on  $5 \cdot 8 \cdot \pi = 40 \pi$ .

11. Missuguse pinna piirjoone puhul ristkülikute-valemi abil saab määrata pindala t ä p s a t väärtust?

Missuguse pinna piirjoone puhul trapetsite-valemi abil saab määrata pindala t ä p s a t väärtust?

12. Joonisel 11 on kujutatud tükk kallihinnalist karusnahka. Selle naha pindala määramiseks kopeerime naha kontuuri paberile, katame saadud joonise rõhtjoonte reaga ja paneme rea püstlõike silma järgi nõnda, et iga kaks säärase püstlõigu juures tekkivat korrapäratut kolmnurka oleksid pindvõrdsed. Naha pindala saab siis määrata ristkülikute summana.

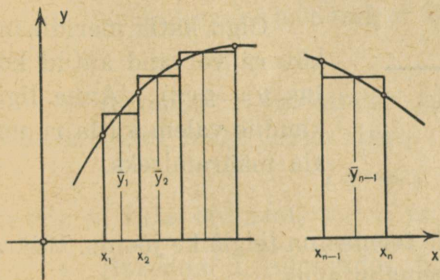


Joonis 11.

Rakenda võtet näit. muti naha suuruse määramiseks.

13. Määra oma saapa- või kingatalla pindala mitme ülalkäsiteldud võtte abil.

14. Joonis 12 näitab veel üht võtet kõvera,  $x$ -telje ja kahe ordinaadi poolt piiratud pindala  $u$  määramiseks: on



Joonis 12.

võetud rida jaotisi, joonistatud neile vastavad ordinaadid, läbi pandud silma järgi rida rõhtlõike nõnda, et üleval- ja allpool neid tekkivad korrapäratud kolmnurkakesed oleksid pindvõrdsed. Kui tähistada nende abilõikude

ordinaadid järjest  $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_{n-1}$ , siis saame valemi

$$u \approx \bar{y}_1 \cdot \Delta x_1 + \bar{y}_2 \cdot \Delta x_2 + \dots + \bar{y}_{n-1} \cdot \Delta x_{n-1}$$

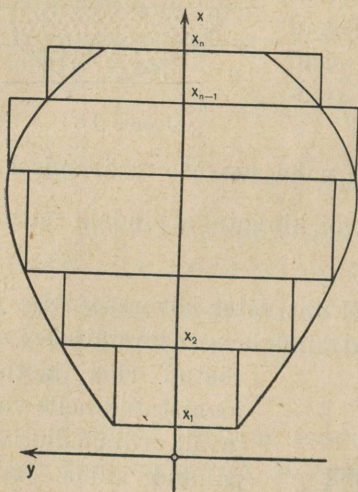
või lühemalt

$$u \approx \sum y \cdot \Delta x.$$

Viimast sümbolit tuleb mõista järgmise eeskirja lühendusena: „Jaga vahemik, milles pindala määrad, allvahemikkudeks; olgu üks neist  $\Delta x$ ; olgu selles vahemikus

$y$  teatav keskmine ordinaat; moodusta korrutised  $y \cdot \Delta x$  ja võta kõigi nende summa.“

15. Rakenda eelmises ülesandes antud valem poolringi pindala määramiseks. Poolringi raadiuseks võta näit. 6 cm, jagamistäpid võta iga cm takka.



Joonis 13.

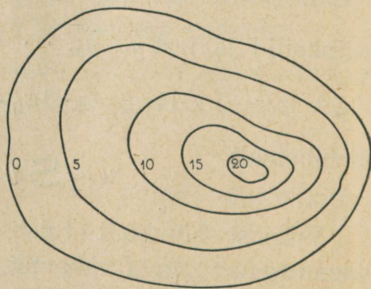
Kui suur on tulemuse protsentuaalne viga?

16. Joonis 13 kujutab kartulite aurutamiseks tarvitatava katla telglõiget. Määra selle katla ruumala, lähendades viimast silindrite summaga. Mõõtkava on 1:100.

Olgu katla meridiaankõvera võrrand antud kujus  $y = y(x)$ . Anna ligikaudne valem katla ruumala määramiseks.

17. Valmista endale teemasina telglõike joonis. Määra selle järgi teemasina veemahutavus.

18. Joonis 14 kujutab liivakünka rõhtlõikeid kõrgustel 0, 5, 10, 15 ja 20 meetrit. Teades, et  $1 \text{ m}^3$  liiva kaalub 1,8 tonni, arvuta, mitu tonni liiva tuleks ära vedada, kui tee-ehitamine nõuaks künka eemaldamist.



Joonis 14.

## Harjutis VII:

Piiri mõiste rakendusi pindalade ja ruumalade arvutamisel.

1. Joonista mõni täisnurkne kolmnurk hästi suures mõõtkavas, võttes ühe kaateti rõhtsihis, teise püstsihis. Olgu need kaatetid märgitud vastavalt  $a$  ja  $h$ . Jaga rõhtkaatet  $n$  võrdseks osaks ja määra kolmnurga pindala, rakendades ligikaudset 1. ristkülikute-valemit. Näita joonisel pindala, mis kujutab leitud lähisväärtuse viga.

Võta nüüd jaotised 2 korda tihedamalt, kui eelmisel juhul ja rakenda uuesti sama ristkülikute-valemit. Näita joonisel pindala, mis kujutab leitud 2. lähisväärtuse viga.

Mida võib öelda vea pindala kohta, kui edasi võtta jaotised 4, 8, 16 jne. korda tihedamalt?

Määra antud kolmnurga pindala, mõistes seda ülal-leitud lähisväärtuse piirina arvu  $n$  piiramatul kasvamisel.

2. Sama ülesanne eeldusel, et töötatakse 2. ristkülikute-valemiga.

3. Rakenda 1. ülesandes tarvitatud võtet pindala määramiseks, mida piirab sirge

$$y = mx,$$

$x$ -telg ja kaks ordinaati  $x = a$  ja  $x = b$ .

4. Rakenda 1. ülesandes tarvitatud võtet pindala määramiseks, mida piirab sirge

$$y = mx + n,$$

$x$ -telg ja kaks ordinaati  $x = a$  ja  $x = b$ .

5. Olgu antud parabool

$$y = x^2.$$

10. Avalda selle parabooli,  $x$ -telje ja ordinaadi  $x = b$  poolt piiratud pindala ligikaudu 2. ristkülikute-valemi abil, võttes jaotised  $x$ -teljel  $\frac{b}{n}$  takka. Anna saadud valemile lihtsaim kuju.

20. Tõesta täielise induksiooni viisil, et valemis esinev summa

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

30. Leia nõutud pindala, määrates saadud ligikaudse avaldise piirväärtus arvu  $n$  piiramatul kasvamisel.

6. Kui suur on pind, mis asetseb parabooli

$$y = cx^2,$$

$x$ -telje ja sirge  $x = b$  vahel?

7. Rakendades eelmises ülesandes leitud valemit, määra parabooli segmenti pind, mida piirab parabool

$$y = cx^2$$

ja sirge

$$y = h,$$

kui  $c > 0$  ja  $h > 0$ ?

Missuguse osa see segmenti pind moodustab ristkülikust, millel sama laius ja kõrgus kui segmentilgi?

8. Näita, et pind, mida piirab parabool

$$y = cx^2,$$

ordinaadid  $x = a$  ja  $x = b$  ja  $x$ -telg on võrdne

$$\frac{1}{6} (b-a) [y_a + 4y_m + y_b],$$

kus  $y_a$ ,  $y_b$  ja  $y_m$  tähendavad vastavalt ordinaate täpis  $x = a$ , täpis  $x = b$  ja kesktäpis viimase kahe vahel.

9. Olgu antud parabool

$$y^2 = 2px.$$

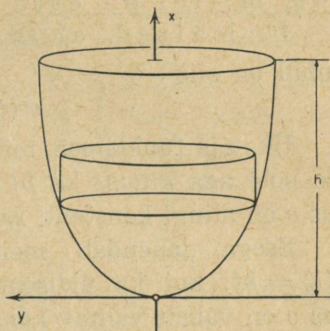
Pöorelgu see ümber  $x$ -telje. Vaatleme ruumala  $V$ , mida piirab tekkiv pöördpind ja tasapind risti  $x$ -teljega täpis  $x = h$ . Selle  $V$  arvutamiseks jaga lõik  $h$   $n$  ossa, ehita saadud vahemikkudel, kui kõrgustel, silindrid (joonis 15) avalda nende silindrite ruumalad, moodusta nende summa ja leia selle summa piirväärtus eeldusel, et  $n \rightarrow \infty$ .

Missuguse osa see pöördparaboloidi segment moodustab silindrist, millel on sama alus ja kõrgus?

10. Sirge  $y = \frac{r}{h} x$

pöörleb ümber  $x$ -telje, moodustades koonuse.

Määra ruumala, mida piirab see koonus ja tasapind, mis pandud läbi täpi  $x = h$  risti  $x$ -teljega. Selleks jaga lõik  $h$   $n$  ossa, ehita saadud vahemikkudel kui kõrgustel silindrid, avalda nende silindrite ruumalad, moodusta nende viimaste summa ja arvuta selle summa piirväärtus, eeldusel, et  $n \rightarrow \infty$ . Misuguse osa see koonus moodustab silindrist, millel on sama alus ja sama kõrgus?



Joonis 15.

11. Ring

$$x^2 + y^2 = r^2$$

pöörleb ümber  $x$ -telje. Määra tekkiva keha ruumala, rakendades eelmises ülesandes näidatud võtet.

12. Ellips

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

pöörleb ümber  $x$ -telje, moodustades lamendatud pöördellipsoidi. Määra selle pinna poolt piiratud ruumala.

13. Ellips

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

pöörleb ümber  $x$ -telje, moodustades pikerguse pöördellipsoidi. Määra selle pinna poolt piiratud ruumala.

### Harjutis VIII:

Nähtuse käigu määramine teadaolevast kiiruskäigust.

1. Olgu antud liikumise kiirus  $v$  aja  $t$  funktsioonina:

$$v = v(t).$$

Nõutagu liikumise seadust, s. t. nõutagu sidet käidud tee  $s$  ja aja  $t$  vahel.

Liikumise seadus peab esinema kujus:

$$s = s(t);$$

teada aga on andmeist

$$s' = v(t).$$

Nõnda tuleb leida säärane aja  $t$  funktsioon, millel on ette antud tuletis  $v(t)$ .

10. Näited. a) Olgu  $v(t) = b =$  konstant; sel puhul on siis

$$s'(t) = b.$$

Üks aja funktsioon, mille tuletis on konstant  $b$ , on  $bt$ ; see pole aga ainus: ka  $bt + 1$ ,  $bt - 2,5$ , üldiselt  $bt + c$ , kus  $c$  on mingi konstant, rahuldab nõuet. Miks?

Seega lahendab meie ülesannet nii funktsioon  $s(t) = bt$ , kui ka üldisemalt funktsioon  $s(t) = bt + c$ , kus  $c$  on vabalt valitav konstant.

$\beta$ ) Olgu  $v(t) = at$ ; sel puhul on siis

$$s'(t) = at.$$

Üks aja funktsioon, mis nõuet rahuldab, on  $\frac{1}{2}at^2$ ; kuid nõuet rahuldab ka  $\frac{1}{2}at^2 + c$ , kus  $c$  on mingi konstant. Miks?

Seega lahendab meie ülesannet nii funktsioon  $s(t) = \frac{1}{2}at^2$ , kui ka üldisemalt  $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + c$ , kus  $c$  on mingi vabalt valitav konstant.

20. Kas määravad antud kiiruskäigud liikumiskäigu üheselt?

Mitu liikumiskäiku vastavad antud kiiruskäikudele?

30. Näita, et liikumiskäik meie juhtudel on määratud täielikult, kui peale kiiruskäigu on teada veel liikuva keha koht teataval ajal, näit. kui ajal  $t = t_0$  keha koht on määratud võrdusega  $s = s_0$ . Millega peab võrduma meie näiteis konstant  $c$ , et oleks rahuldatud tingimus:

$$\text{kui } t = t_0, \text{ siis } s = s_0?$$

Harilikult tähendavad  $t_0$  ja  $s_0$  lähteaga ja lähtekaugust.

2. Alljärgnevas tabelis on antud rida kiiruskäike ühes liikumise lähteaegadega ja lähtekohtadega. Määra nõutavad liikumiskäigud.

Pikkused, ajad ja kiirused on mõeldud mõõtudes m, sec ja m/sec.

Nr.	Kiiruskäik	Üldine tee avaldis	Lähteaeg	Lähtekaugus	Liikumiskäik
1 <sup>o</sup> .	$v = 5$	$s = 5t + c$	10	-80	$s = 5t - 130$
2 <sup>o</sup> .	$v = -1,5$		8	10	
3 <sup>o</sup> .	$v = t + 1$		-6	-50	
4 <sup>o</sup> .	$v = 2t - 3$		0	0	
5 <sup>o</sup> .	$v = 10 - \frac{1}{2}t$		-2	20	

3. Olgu antud liikumise kiirendus aja funktsioonina:

$$w = w(t).$$

Nõutagu kiiruskäiku.

Kiiruskäik peab esinema kujus:

$$v = v(t).$$

Andme ja nõude vahelülks on võrdus

$$v' = w(t).$$

Anna probleemi sõnastus matemaatilises keeles.

1<sup>o</sup>. Näited. a)  $w = -kt$ . b)  $w = k = \text{konstant}$ .

Anna kiiruse avaldised.

Mitu kiiruskäiku vastab andmeile a) ja b)?

2<sup>o</sup>. Olgu peale kiirenduse avaldise veel teada lähtekiirus: kui  $t = t_0$ , olgu  $v = v_0$ . Kas kiirenduse avaldis ühes lähtekiiruse väärtusega määrab kiiruskäigu üheselt? Tõesta oma väide.

4. Olgu teada liikuva keha kiirendus aja funktsioonina:

$$w = w(t).$$

Olgu teada, et liikumise alul, momendil  $t_0$ , keha liikus kiirusega  $v_0$  ja asetses kaugusel  $s_0$  kauguste algusest.

Kuidas neist andmeist leida esiteks kiiruskäik  $v = v(t)$  ja sealt edasi liikumiskäik  $s = s(t)$ ?

Alljärgnevas tabelis on antud rida kiirenduskäike ühes liikumise lähteagega, lähtekiiruse ja lähtekohtadega. Määra nõutavad kiiruskäigud ja sealt edasi liikumiskäigud.

Pikkused, ajad, kiirused ja kiirendused on mõeldud mõõtudes: m, sec, m/sec, m/sec<sup>2</sup>.

Nr.	Kiirenduskäik	Lähteage	Lähtekiirus	Kiiruskäik	Lähtekaugus	Liikumiskäik
1 <sup>o</sup> .	$w = 3$	4	0		10	
2 <sup>o</sup> .	$w = -2$	-6	10		-20	
3 <sup>o</sup> .	$w = 10 + t$	20	-80		-100	
4 <sup>o</sup> .	$w = 0,5t - 1$	-10	-5		45	
5 <sup>o</sup> .	$w = -1,2t + 8$	0	10		-60	

5. Olgu  $t$  olenematu muutuja; otsitagu niisugust funktsiooni

$$u = F(t),$$

mille tuletis

$$u' = f(t)$$

on teada.

Säärast funktsiooni  $F(t)$  nimetatakse  $f(t)$  algfunktsiooniks.

1<sup>o</sup>. Olgu  $F(t)$  ja  $F_1(t)$  kaks  $f(t)$  algfunktsiooni. Näita, et nende vahe  $F(t) - F_1(t)$  tuletis on null iga  $t$  väärtuse puhul.

2<sup>o</sup>. Anna näitlik tõestus lausele: „Kui funktsioon on vahemikus  $t = a$  kuni  $t = b$  pidev ja funktsiooni tuletis on null igal  $t$  väärtusel selles vahemikus, siis on funktsioon ise konstantne.“

Kas pidevuse nõue on oluline?

3<sup>o</sup>. Joonisest 16 on näha, et

$$F(t_2) - F(t_1) = (t_2 - t_1) \cdot F'(t^*), \text{ kus } t_1 < t^* < t_2.$$

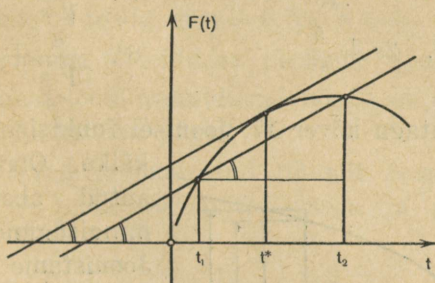
Tõesta selle võrduse põhjal punkt 2<sup>o</sup>. formuleeritud lause.

4<sup>o</sup>. Järelda eelmisest, et iga kaks  $f(t)$ -le vastavat algfunktsiooni  $F(t)$  ja  $F_1(t)$  võivad erineda vaid konstanti võrra.

5<sup>o</sup>. Olgu kuidagi leitud üks  $f(t)$  algfunktsioon  $F(t)$ . Näita, et kõik teised saadakse avaldisest

$$F(t) + C,$$

kus  $C$  on vabalt valitav konstant.



Joonis 16.

6. Olgu olenematu muutuja tähistatud  $t$ . Anna algfunktsioonide üldavaldised, mis vastavad järgmistele tuletisfunktsioonidele:

- |                                 |                                     |
|---------------------------------|-------------------------------------|
| 1 <sup>o</sup> . 2              | 6 <sup>o</sup> . $3t$               |
| 2 <sup>o</sup> . $\frac{7}{10}$ | 7 <sup>o</sup> . $\frac{1}{2}t - 2$ |
| 3 <sup>o</sup> . $t$            | 8 <sup>o</sup> . $3 - 4t$           |
| 4 <sup>o</sup> . $t - 1$        | 9 <sup>o</sup> . $at$               |
| 5 <sup>o</sup> . $3 - t$        | 10 <sup>o</sup> . $at + b$          |

7. Olgu olenematu muutuja tähistatud  $x$ . Anna algfunktsioonide avaldised, mis vastavad järgmistele tuletisfunktsioonidele:

- |                                  |                                   |
|----------------------------------|-----------------------------------|
| 1 <sup>o</sup> . $x^2$           | 6 <sup>o</sup> . $x^2 - 3x$       |
| 2 <sup>o</sup> . $3x^2$          | 7 <sup>o</sup> . $x^2 - x + 1$    |
| 3 <sup>o</sup> . $0,9x^2$        | 8 <sup>o</sup> . $x^2 - 5x + 6$   |
| 4 <sup>o</sup> . $\frac{x^2}{2}$ | 9 <sup>o</sup> . $2x^2 - 3x - 4$  |
| 5 <sup>o</sup> . $x^2 + 1$       | 10 <sup>o</sup> . $ax^2 + bx + c$ |

8. Olgu olenematu muutuja tähistatud  $s$ . Anna algfunktsioonide avaldised, mis vastavad järgmistele tuletsifunktsioonidele:

$$1^{\circ}. \quad -\frac{1}{s^2}$$

$$5^{\circ}. \quad \frac{1}{2\sqrt{s}}$$

$$2^{\circ}. \quad \frac{3}{s^2}$$

$$6^{\circ}. \quad -\frac{1}{\sqrt{s}}$$

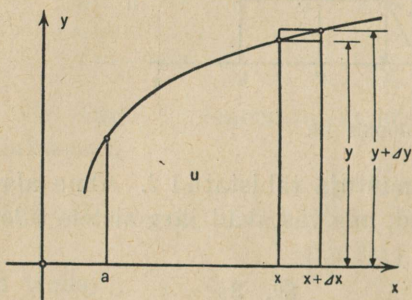
$$3^{\circ}. \quad s - \frac{1}{s^2}$$

$$7^{\circ}. \quad \frac{6}{\sqrt{s}}$$

$$4^{\circ}. \quad 2s + \frac{5}{s^2}$$

$$8^{\circ}. \quad \frac{a}{\sqrt{s}} + \frac{s}{b}$$

9. Kujutagu kõver 17. joonisel funktsiooni  $y = y(x)$



Joonis 17.

käiku. Olgu  $a$  kindel antud abstsiss ja  $x$  mingisugune abstsiss. Joonistame neil abstsissidel kaks ordinaati. Ühiselt kõvera ja  $x$ -teljega need ordinaadid piiravad teatava pinna; tähistame selle suurust  $u$ . See on abstsissi  $x$ -i funktsioon; sümbolites:  $u = u(x)$ . Miks?

Järgmine skeem kujutab funktsiooni  $u(x)$  kasvamis-kiiruse leidmist:

Joonisest saame:

$$y \cdot \Delta x < \Delta u < (y + \Delta y) \cdot \Delta x;$$

siit järeldame:

$$y < \frac{\Delta u}{\Delta x} < y + \Delta y$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y$$

$$u' = y.$$

Seleta igat mõttekäigu sammu ja sõnasta tulemus.

10. Olgu antud funktsioon  $y = y(x)$ . Funktsiooni käigukõver,  $x$ -telg ja ordinaadid täpes  $a$  ja  $x$  piiravad teatava pinna; tähistame tema suurust tähega  $u$ ; siis

$$u = u(x).$$

Eelmise ülesande lõpptulemuse põhjal on selle pinna kasvamiskiirus

$$u' = y(x).$$

Peale selle on teada, et  $u = 0$ , kui  $x = a$ .

Sõnasta pinna  $u$  leidmise ülesanne analüüsi keeles.

Mitu funktsiooni rahuldavad nõuet, et nende tuletis oleks antud funktsioon  $y(x)$ ?

Kas on pind  $u$  määratud üheselt tema kasvamis-kiirusega? — tema kasvamiskiirusega ja pinna lähte-suurusega?

N ä i d e. Olgu  $y = 2x$  ja  $a = 1$ .

Anna pinna  $u$  kasvamiskiiruse avaldis; avalda edasi üks  $y(x)$  algfunktsioonidest, anna üldine  $y(x)$  algfunktsiooni avaldis ja määra selles esinev konstant nõnda, et oleks rahuldatud lähtetingimus: kui  $x = 1$ , siis on  $u = 0$ .

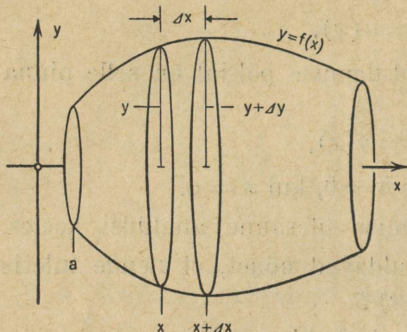
Kui suur on pind joone  $y = 2x$ ,  $x$ -telje ja ordinaatide vahel  $x = 1$  ja  $x = 5$ ?

Kontrolli tulemust joonisel, rakendades tuntud pinna-valemit.

11. Määra järgmises tabelis nõutavad pinnad:

Nr.	Piirav joon $y = y(x)$	Abstsissi alamraja	Abstsissi ülemraja	Pind $u$
1 <sup>0</sup> .	$y = h$ ( $h > 0$ )	$a$	$x$ ( $x > a$ )	
2 <sup>0</sup> .	$y = x$	$a$ ( $a > 0$ )	$h$ ( $h > a$ )	
3 <sup>0</sup> .	$y = \frac{1}{3}x + 1$	+ 3	+ 8	
4 <sup>0</sup> .	$y = x^2$	0	$x$ ( $x > 0$ )	
5 <sup>0</sup> .	$y = x^2 - x$	+ 1	+ 4	
6 <sup>0</sup> .	$y = 1 + 2x - x^2$	+ 2	+ 5	

12. Kujutagu kõver 18. joonisel funktsiooni  $y = y(x)$  käiku. Pöörelde ümber  $x$ -telje moodustab see kõver teatava pöördpinna.



Joonis 18.

Lõikame seda kahe tasapinnaga, mis võetud läbi  $x$ -telje täppide  $a$  ja  $x$  risti  $x$ -teljega. Olgu pinna ja kahe tasapinna poolt piiratud ruumala tähistatud  $V$ . See  $V$  on  $x$ -i funktsioon:

$$V = V(x).$$

Miks?

Kui suur on  $V$  väärtus  $x$ -i eriväärtusel  $a$ ?

Järgmine skeem kujutab funktsiooni  $V(x)$  kasvamis-kiiruse leidmist:

Joonisest saame:

$$\pi y^2 \cdot \Delta x < \Delta V < \pi (y + \Delta y)^2 \cdot \Delta x;$$

siit järeldame:

$$\pi y^2 < \frac{\Delta V}{\Delta x} < \pi (y + \Delta y)^2$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = \pi y^2$$

$$V' = \pi y^2.$$

Seleta igat mõttekäigu sammu ja sõnasta tulemus.

13. Võtame tähised nagu eelmises ülesandes.

Olgu antud meridiaankõver oma võrrandiga

$$y = y(x)$$

ja nõutagu pöördpinna ruumala

$$V = V(x).$$

Andme ja otsitava vahelülks on võrdus

$$V' = \pi [y(x)]^2.$$

Sõnasta pöördpinna ruumala leidmise ülesanne analüüsi keeles. Mitu funktsiooni rahuldavad nõuet, et nende tuletis oleks antud funktsiooni  $y$  ruudu  $\pi$  kordne?

Kas on pöördpinna ruumala  $V$  määratud selle ruumala kasvamiskiirusega? — tema kasvamiskiirusega ja ruumala lähteväärtusega, s. t. ruumala väärtusega  $x$ -eriväärtusel  $a$ ?

N ä i d e. Olgu  $y = x - 2$  ja  $a = 2$ .

Anna ruumala  $V$  kasvamiskiiruse avaldis; avalda edasi üks sellele vastav algfunktsioonidest, anna üldine algfunktsiooni avaldis ja määra selles konstant kokkulas lähtetingimusega: kui  $x = 2$ , on  $V = 0$ .

Kui suur on uuritava pöördpinna ruumala tasapindade vahel, mis lõikavad  $x$ -telge täpes  $x = 2$  ja  $x = 7$  ja on risti  $x$ -teljega?

14. Määra järgmises tabelis nõutavad pöördpindade ruumalad:

Nr.	Meridiaankõvera võrrand $y = y(x)$	Abstsissi alamraja	Abstsissi ülemraja	Pöördkeha ruumala $V$
1 <sup>o</sup> .	$y = r \ (r > 0)$	$a$	$x \ (x > a)$	
2 <sup>o</sup> .	$y = 2x$	0	$h \ (h > 0)$	
3 <sup>o</sup> .	$y = \frac{x}{2} - 1$	-2	+4	
4 <sup>o</sup> .	$y =  \sqrt{x} $	0	+4	
5 <sup>o</sup> .	$y = \frac{1}{x}$	+1	+10	

### Harjutis IX:

Integraali mõiste.

1. Olgu kujutatud funktsiooni  $y = y(x)$  käik. Joonistame täpes  $x = a$  ja  $x = b$  ordinaadid. Funktsiooni käigukõver, need kaks ordinaati ja  $x$ -telg piiravad teatava pinna;

olgu selle tähiseks  $u$ . Jaotame mõttes vahemiku  $a \leq x \leq b$  väikesteks osadeks  $\Delta x$ ; olgu säärase osa algustäpile vastav ordinaat  $y(x)$ . Siis võime kirjutada  $u \approx \sum y \cdot \Delta x$ , või üle minnes piiramatult peenenevatele jaotistele:

$$u = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_a^b y(x) \cdot \Delta x.$$

Viimast sümbolit kirjutatakse lühemalt kujul

$$\int_a^b y(x) \cdot dx$$

ja loetakse: „funktsiooni  $y(x)$  integraal rajast  $a$  rajani  $b$ “.

On kokku lepitud, et sümboli  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_a^b$  asendamisel sümboliga  $\int_a^b$  endine kasvutähis  $\Delta x$  asendatakse tähisega  $dx$ .

Lähtudes sümboli

$$\int_a^b y(x) \cdot dx$$

geomeetrilisest tähendusest näita, et

$$1^0. \int_a^a y(x) \cdot dx = 0$$

$$2^0. \int_a^b y(x) \cdot dx = - \int_b^a y(x) \cdot dx$$

$$3^0. \int_a^c y(x) \cdot dx + \int_c^b y(x) \cdot dx = \int_a^b y(x) \cdot dx,$$

kui  $a < c < b$ .

$$4^{\circ}. \int_a^b cy(x) \cdot dx = c \int_a^b y(x) \cdot dx$$

$$5^{\circ}. \int_a^b [f(x) + g(x)] \cdot dx = \int_a^b f(x) \cdot dx + \int_a^b g(x) \cdot dx$$

$$6^{\circ}. \int_a^b [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_a^b f(x) \cdot dx - \int_a^b g(x) \cdot dx$$

2. Lähtudes integraali definitsioonist:

$$\int_a^b y(x) \cdot dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_a^b y(x) \cdot \Delta x,$$

näita, et integraal kindlasti on  $> 0$ , kui vahemikus  $a \leq x \leq b$  funktsioon  $y(x) > 0$

ja et integraal kindlasti on  $< 0$ , kui vahemikus  $a \leq x \leq b$  funktsioon  $y(x) < 0$ .

Esimesel juhul saab integraali tõlgendada pinnana, mida piirab kõver  $y = y(x)$ ,  $x$ -telg ja kaks ordinaati  $x = a$  ja  $x = b$ . Sama tõlgendamist saab rakendada ka teisel juhul, ainult tuleb sel puhul pinda mõista negatiivseks.

3. Näita, arvestades integraali geomeetrilist tähendust, et

$$\int_a^b y(x) \cdot dx = \int_a^b y(t) \cdot dt = \int_a^b y(s) \cdot ds = \dots$$

Sõnasta nende võrduste reas peituv lause.

4. Olgu antud funktsioon  $y = y(x)$ . Tee joonis, mis selgitab sümboli

$$\int_a^b y(x) \cdot dx$$

tähendust.

Kinnista mõttes raja  $a$  ja muuda raja  $b$ . Näita, et sel puhul meie integraal on  $b$  funktsioon. Olgu viimane tähistatud  $u(b)$ .

Näita, et

$$u(b) = 0, \text{ kui } b = a$$

ja

$$u'(b) = y(b) \text{ igal } b \text{ väärtusel.}$$

Et  $b$  nüüd on lihtsalt mingi  $x$ -i väärtus, siis võib funktsiooni  $u$  omadusi nõnda kirjutada:

$$u(x) = 0, \text{ kui } x = a$$

ja

$$u'(x) = y(x) \text{ igal } x\text{-i väärtusel.}$$

Sõnasta need funktsiooni  $u$  omadused.

Põhjenda nendega järgmine eeskiri

$$\int_a^b y(x) \cdot dx$$

määramiseks:

„Leia üks  $y(x)$ -le vastavaist algfunktsioonest; anna üldine  $y(x)$ -le vastava algfunktsiooni avaldis; määra selles esinev konstant nõnda, et avaldis saaks nulliks väärtusel  $x = a$ ; asenda saaduses täht  $x$  tähega  $b$ .“

Näited. Arvuta eelseisva eeskirja järgi järgmised integraalid:

$$1^{\circ}. \int_a^b \frac{dx}{2}$$

$$4^{\circ}. \int_0^{10} \frac{x \cdot dx}{5}$$

$$2^{\circ}. \int_a^b \frac{x}{r} dx$$

$$5^{\circ}. \int_9^{25} \frac{dx}{|\sqrt{x}|}$$

$$3^{\circ}. \int_a^b \frac{dx}{x^2}$$

$$6^{\circ}. \int_{-10}^{+10} (x^2 + x + 1) \cdot dx$$

5. Olgu antud funktsioon  $y = y(x)$ . Selle algfunktsiooni üldavaldist tähistatakse sümboliga

$$\int y(x) \cdot dx .$$

Nii on

$$\int dx = x + C, \quad \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C,$$

$$\int (1 + x^2) dx = x + \frac{x^3}{3} + C,$$

kus  $C$  tähendab mingit konstanti.

Selle vabaltvõetava konstandi  $C$  tõttu, mis esineb

$\int y(x) \cdot dx$  avaldises, nimetatakse seda sümbolit funktsiooni  $y(x)$  määramatuks integraaliks.

Sümbol  $\int y(x) \cdot dx$  on saadud sümbolist  $\int_a^b y(x) \cdot dx$

rajamärke  $a$  ja  $b$  ära jättes.

Anna järgmiste määramatute integraalide avaldised, mõistes  $x$ -i muutujana, teisi tähti aga konstantidena.

$$1^{\circ}. \int N \cdot dx$$

$$5^{\circ}. \int (2x - 1) \cdot dx$$

$$2^{\circ}. \int 0 \cdot dx$$

$$6^{\circ}. \int (3x^2 - 4) \cdot dx$$

$$3^{\circ}. \int px \cdot dx$$

$$7^{\circ}. \int (x - 1)^2 \cdot dx$$

$$4^{\circ}. \int \frac{x^2}{a^2} \cdot dx$$

$$8^{\circ}. \int (x + 1)(x - 3) \cdot dx$$

6. Olgu

$$\int y(x) \cdot dx = F(x) + C .$$

Näita, et

$$\int_a^b y(x) \cdot dx = F(b) - F(a) .$$

Paremat kätt seisvat vahet kirjutatakse sageli teisiti nõnda:

$$F(x) \Big|_{x=b} - F(x) \Big|_{x=a}$$

või, lühemalt,

$$F(x) \Big|_a^b.$$

N ä i d e. Nõutagu  $\int_2^5 (1-x) \cdot dx$  väärtust.

$$\int (1-x) \cdot dx = \int dx - \int x \cdot dx = x - \frac{x^2}{2} + C$$

$$\begin{aligned} \int_2^5 (1-x) \cdot dx &= \left( x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_2^5 = \left( x \left( 1 - \frac{x}{2} \right) \right) \Big|_2^5 = \\ &= 5 \left( 1 - \frac{5}{2} \right) - 2 \left( 1 - \frac{2}{2} \right) = -7 \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Arvuta järgmised integraalid:

$$1^0. \int_0^a (a-x) dx$$

$$4^0. \int_0^{4a} \frac{2a dx}{\sqrt{x}}$$

$$2^0. \int_0^a x(a+x) dx$$

$$5^0. \int_a^{na} \frac{dx}{x^2}$$

$$3^0. \int_0^a x(a^2 - x^2) dx$$

## 7. Võrdus

$$\int f(x) \cdot dx = F(x) + C$$

tähendab sama, mis võrdus

$$f(x) = F'(x) .$$

Nõnda on ikka

$$\int F'(x) \cdot dx = F(x) + C.$$

Sümbolit  $F'(x) \cdot dx$

nimetatakse funktsiooni  $F(x)$  elementiks ehk differentsiaaliks ja seda kirjutatakse ka  $dF(x)$ :

$$dF(x) = F'(x) \cdot dx.$$

Kokkukõlas sellega nimetatakse sümbolit  $dx$  ole-matu muutuja elementiks ehk differentsiaaliks.

Olgu antud funktsioonid

$$x^2, \quad \frac{1}{x}, \quad \sqrt{x}.$$

Anna nende elementide avaldised.

8. Anna funktsiooni elemendi definitsioon eeldades, et on teada funktsiooni kasvamise kiirus.

Näited. 1<sup>o</sup>. Liikugu keha seaduse järgi

$$s = s(t).$$

Missugust mõtet avaldab võrdus

$$ds = s'(t) \cdot dt ?$$

2<sup>o</sup>. Tähendagu  $q$  vee kaalu lahtises anumal. Auru-mise tõttu väheneb see kaal järjest. Avaldugu vee kaalu käik aja muutudes kujul

$$q = q(t).$$

Missugust mõtet avaldab võrdus

$$dq = q'(t) \cdot dt ?$$

3<sup>o</sup>. Õhu rõhumine  $b$  antud kohal on kõrguse  $h$  funktsioon, kõrgust merepinnast arvates:

$$b = b(h).$$

Missugust mõtet avaldab võrdus

$$db = b'(h) \cdot dh ?$$

Täienda näidete rida 3 uue näitega.

9. Olgu tegemist funktsiooniga  $y = y(x)$ . Tähen-  
dagu  $\Delta x$  väikest  $x$ -i kasvu ja  $\Delta y$  sellele vastavat  $y$  kasvu.  
Siis on

$$\Delta y \approx y'(x) \cdot \Delta x$$

ja see võrdus on maksev seda täpsamalt, mis väiksem  
on  $\Delta x$ . Kogu viimases lauses avaldatud mõtet kirjutame  
lühemalt kujus

$$dy = y'(x) \cdot dx .$$

Näited. 1<sup>o</sup>. Olgu  $y = y(x)$  mingi kõver  $x$ - $y$ -tasa-  
pinnas. Võtame kaks ordinaati abstsissidel  $a$  ja  $x$ . Kõvera,  
selle kahe ordinaadi ja  $x$ -telje vahel olev pindala  
 $u = u(x)$ . Missuguses mõttes tuleb mõista võrdust

$$du = y(x) \cdot dx ?$$

2<sup>o</sup>. Pöörelgu kõver  $y = y(x)$  ümber  $x$ -telje. Võtame  
kaks tasapinda täpes  $a$  ja  $x$  risti  $x$ -teljega. Tekkinud  
pöördpind ja need kaks tasapinda piiravad teatava ruum-  
ala  $V = V(x)$ . Missuguses mõttes tuleb mõista võrdust

$$dV = \pi [y(x)]^2 \cdot dx ?$$

## Harjutis X :

Integraali mõiste rakendusi.

1. Määra integreerimise teel kolmnurga pindala,  
mida piiravad sirged

$$y = 2x + 1, \quad y = \frac{1}{4}(15 - 3x), \quad x = 5 .$$

2. Määra integreerimise teel pindala, mida piiravad  
kõverad

$$y = x^2 \quad \text{ja} \quad y = \frac{1}{x^2}$$

ja sirge  $x = 6$  .

3. Määra pindala, mida piiravad  
kõver

$$y = (2 + x)(3 - x)$$

ja sirge

$$y = -(2 + x) .$$

Tee vabal käel otsitava pinna skits.

4. Määra integreerimise teel järgmiste kõverate ja  $x$ -telje poolt piiratud pindalad:

$$1^0. y = (x - 3)(x - 7) \quad 4^0. y = 4 + 3x - x^2$$

$$2^0. y = (x - 2)(x + 3) \quad 5^0. y = x(x - 4)^2$$

$$3^0. y = x^2 - 7x + 10 \quad 6^0. y = (x - 2)(x - 5)^2$$

5. Pöörelgu kõver  $y^2 = 2px$  ümber  $x$ -telje.

Määra integreerimise teel ruumala, mida piirab tekkinud pind ja selle ristilõige täpis  $x = h$ .

Võrdle tulemust ennemalt ülesandes VII, 9 leitud tulemusega.

6. Kõver  $y = \sqrt{2 - x}$  pöörleb ümber  $x$ -telje.

Missuguse ruumala piirab tekkiv pind ja kaks tasapinda, mis pandud läbi täppide  $x = a$  ja  $x = b$  risti  $x$ -teljega?

7. On antud jooned

$$y = x$$

$$\text{ja } y = \sqrt{x}.$$

Kumbki moodustab pöörlemisel ümber  $x$ -telje pöördpinna. Määra keha ruumala, mida piiravad need kaks pöördpinda.

8. Määra integreerimise teel ruumala, mida piirab pind, mis tekib kõvera

$$4x^2 + y^2 = 4$$

pöörlemisel ümber  $x$ -telje.

Sama ülesanne juhuks, et kõver pöörleb ümber  $y$ -telje.

9. Hüperbool  $x^2 - 4y^2 = 1$  pöörleb ümber  $x$ -telje. Määra ruumala ristilõigete vahel, mille abstsissid on  $x = 2$  ja  $x = 4$ . Kui palju erineb see ruumala tüvikoonuse ruumalast, mis määratud samade ristilõigetega?

10. Määra integreerimise teel ruumala, mida piirab pind, mis tekib kõvera

$$x^2 + y^2 = r^2$$

pöörlemisel ümber  $x$ -telje.

11. Määra integreerimise teel ruumala, mida piirab pind, mis tekib kõvera

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0$$

pöörlemisel ümber  $x$ -telje.

12. Ringi  $x^2 + y^2 = r^2$  osa sirgete vahel  $x = r - h$  ja  $x = r$  pöörleb ümber  $x$ -telje. Määra tekkiva kerasegmenti ruumala.

13. Kõver

$$y^2 = \frac{x^3}{a}$$

pöörleb ümber  $x$ -telje. Määra ruumala, mida piirab tekkiv pind ja selle ristilõige kohas  $x = h$ .

Valmista pöördpinna skits.

14. Olgu antud kaks erikujulist pinda  $x$ - $y$ -tasapinnas kahe püstsirge vahel täpes  $x = a$  ja  $x = b$  (joonis 19). Lõikame neid pindu mingi sirgega, mis on risti  $x$ -teljega. Olgu  $l_1(x)$  ja  $l_2(x)$  kaks nõnda saadud pindade laiust. Näita, et pindade suurused  $u_1$  ja  $u_2$  avalduvad integraalidena:

$$u_1 = \int_a^b l_1(x) \cdot dx \quad \text{ja} \quad u_2 = \int_a^b l_2(x) \cdot dx .$$

Olgu erijuhul i g a  $x$ -i p u h u l

$$l_1(x) = l_2(x) .$$

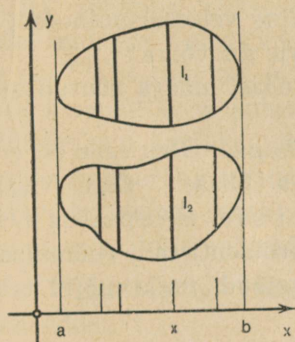
Näita, et siis  $u_1 = u_2$  .

Sõnasta vastav lause.

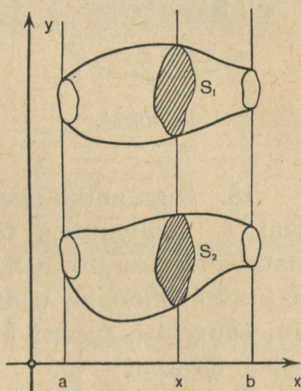
15. Olgu antud kaks keha tasapindade vahel, mis läbi-  
vad täppe  $x = a$  ja  $x = b$  ja on risti  $x$ -teljega (joonis 20).  
Lõikame kehi mingi vahepealse tasapinnaga, mis on samuti  
risti  $x$ -teljega. Olgu selle poolt tekitatud ristilõigete  
suurused  $S_1(x)$  ja  $S_2(x)$ . Näita, et kehade mahud on siis

$$V_1 = \int_a^b S_1(x) \cdot dx \quad \text{ja} \quad V_2 = \int_a^b S_2(x) \cdot dx .$$

Olgu erijuhul i g a  $x$ -i p u h u l  
 $S_1(x) = S_2(x)$  .



Joonis 19.



Joonis 20.

Näita, et siis ka  $V_1 = V_2$  .

Sõnasta vastav lause.

Lause kannab C a v a l i e r i' printsiibi nime.

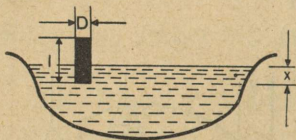
16. Olgu traatspiraali (vedru) pikkus venitamata ole-  
kus  $l_0$ . Katse näitab, et spiraali pikenemine venitava jõu  
mõjul on võrdeline venitava jõuga. Venigu spiraal 1 kg  
jõu mõjul  $k$  cm võrra. Kui suurt tööd nõuab spiraali  
venitamine pikkuselt  $l_0$  pikkusele  $l$  ?

N ä p u n ä i d e. Olgu  $x$  mingi spiraali vahepealne  
pikkus. Kui suurt jõudu peab rakendama spiraalile, et ta  
omandaks selle pikkuse? Kui suurt tööd nõuab spiraali

edaspidine venitamine pikkuskasvu  $dx$  võrra? Siit edasi määra nõutud töö.

17. Olgu antud laiema anum veega (näit. pesukauss) (joonis 21). Kui suurt tööd nõuab korgi vettesurumine, kui korgi läbimõõt on  $D$ , pikkus  $l$  ja erikaal  $\sigma$ ?

Avalda nõutud töö ka korgi ruumala  $V$ , erikaalu  $\sigma$  ja korgi pikkuse  $l$  kaudu.



Joonis 21.

N ä p u n ä i d e. Olgu kork surutud vette sügavuseni  $x$ . Kui suur tõrjejõud mõjub korgile? Kui suurt tööd nõuab korgi edaspidine vettesurumine sügavuskasvu  $dx$  võrra?

Siit edasi määra nõutud töö.

18. Olgu antud anum mingi õliga. Olgu selle õli erikaal  $\varepsilon$ . Paigutame tahi otsaga õlisse. Olgu väljaulatuva tahiosa pikkus  $l$ . Olgu tahi laius  $n$  ja paksus  $m$  ja võtku tahi kiudaine enda alla  $p$  protsenti tahi ruumalast. Kui suure töö teevad kapillaarsusjõud, mille mõjul taht imbub õli täis?

N ä p u n ä i d e. Võtame mingi kõrgusel  $x$  ribaelemendi pikkusega  $dx$ . Kui suure hulga õli see riba osa enesse mahutab? Kui palju see osa õli kaalub? Kui suure töö nõudis selle osakese tõstmine kõrgusele  $x$ ? Siit edasi määra nõutud töö.

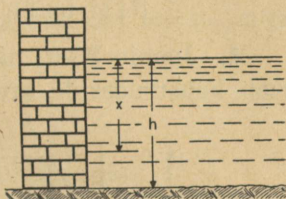
19. Olgu teada, et 1 cm pikkune, 1 cm<sup>2</sup> ristilõikega raudvarras pikeneb 1-kilogrammise venitava jõu mõjul  $\lambda$  cm võrra. Mille võrra pikeneb oma kaalu mõjul püsti rippuv raudvarras, mille pikkus rõhtseisus mõõtes on  $h$  cm, mille ristilõige on  $S$  cm<sup>2</sup> ja mille aine erikaal on  $\varepsilon$ ?

Avalda arvutatud varda pikenemine varda kaalu, varda ristilõike ja varda pikkuse kaudu.

N ä p u n ä i d e. Olgu võetud kaugusel  $x$  kinnisotsast arvates varda elemendike pikkusega  $dx$ . Missugune jõud venitab seda osakest? Mille võrra võetud elemendike pikeneb selle jõu mõjul? Siit edasi määra kogu varda pikenedmine.

20. Joonis 22. näitab tugiseina, mida ühelt poolt rõhub vesi. Olgu seina pikkus  $a$  m, kõrgus  $b$  m, paksus  $c$  m ja vee kõrgus  $h$  meetrit. Olgu  $s$  selle kivi erikaal, millest sein valmistatud. Kui paks peab sein vähemalt olema, et vee rõhk teda ei paiskaks ümber?

N ä p u n ä i d e. Olgu  $x$  mingi sügavus. Võta sellel seina rõhtriba paksusega  $dx$ . Kui suur on vee rõhk sellele ribale? Kui suur on selle rõhuosa moment telje suhtes, mille ümber sein kalduks? Kui suur on kogu veerõhu moment? Kui suur on seina omakaalu moment sama telje suhtes?



Joonis 22.

Viimati-leitud vastustest saab tuletada nõutud lahendust.

21. Olgu tegemist vardaga, mille pikkus  $a$ ; olgu varda pikkusühiku mass  $\lambda$ . Pöörelgu varras ühtlaselt ümber telje, mis risti vardaga. Tehku varras  $N$  tiiru sekundis. Määra varda hoog.

N ä p u n ä i d e. Võta mingil kaugusel  $x$  varda osake, mille pikkus  $dx$ , ja avalda selle osa mass, kiirus ja hoog. Leia saadud avaldise integreerimise teel terve varda hoog.

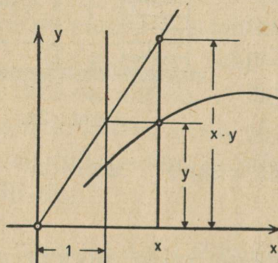
### Peatükk III.

## Siinusfunktsiooni ja logaritm-funktsiooni tuletised.

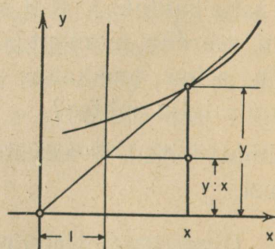
### Harjutis XII:

Siinusfunktsiooni tuletis.

1. Joonis 23-a näitab, kuidas kohal abstsissiga  $x$  saab konstrueerida ordinaadist  $y$  ordinaati  $x \cdot y$ .



Joonis 23-a.



Joonis 23-b.

Joonis 23-b näitab, kuidas samal kohal abstsissiga  $x$  saab konstrueerida ordinaadist  $y$  ordinaati  $\frac{y}{x}$ .

Põhjenda võtted.

2. Joonista eelmises ülesandes näidatud võtte abil kõverad

$$1^0. y = x \cdot \sqrt{1 - x^2}$$

$$2^0. y = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} .$$

Kirjelda saadud kõveraid.

3. Olgu  $g(x) = x \cdot \sin x$ .

1<sup>o</sup>. Kas on  $x$ -i väärtusi, millel  $g(x)$  pole määratud?  
Anna funktsiooni  $g(x)$  määramise piirkond.

Missugustel  $x$ -i väärtustel  $g(x) = 0$ ?

Näita, et funktsioon  $g(x)$  muudab oma märki piiramatult hulk kordi.

Kas kõver  $y = g(x)$

on sümmeetriline  $x$ -telje suhtes? —  $y$ -telje suhtes? —  
koordinaatide alguse suhtes?

Kuidas muutub funktsioon  $g(x)$  muutuja  $x$ -i absoluutväärtuse kasvamisel? — kahanemisel?

Näita, et kõver jääb kogu oma ulatusel nurka, mida piiravad sirged  $y = x$  ja  $y = -x$ .

2<sup>o</sup>. Joonista kõver

$$y = \sin x,$$

võttes tarvilikud  $\sin x$  väärtused ühikringist.

Konstrueeri, saadud joonisest lähtudes, kõver

$$y = x \cdot \sin x.$$

Kas joonis kinnitab tulemusi, millele jõudsid punktis 1<sup>o</sup>?

3<sup>o</sup>. Kas funktsiooni  $g(x)$  väärtused on tõkestatud ülalt? — on tõkestatud alt?

Kas on  $\lim_{x \rightarrow \infty} |x \cdot \sin x| = \infty$  ?

Miks ei?

Kas on  $\lim_{x \rightarrow 0} |x \cdot \sin x| = 0$  ?

Põhjenda oma väited.

4. Olgu  $h(x) = \frac{\sin x}{x}$ .

1<sup>o</sup>. Kas on  $x$ -i väärtusi, millel  $h(x)$  pole määratud?  
Anna funktsiooni  $h(x)$  määramise piirkond.

Missugustel  $x$ -i väärtustel  $h(x) = 0$  ?

Näita, et funktsioon  $h(x)$  muudab oma märki piiramatult hulk kordi.

Kas on kõver

$$y = h(x)$$

sümmeetriline  $x$ -telje suhtes? —  $y$ -telje suhtes? — koordinaatide alguse suhtes?

Kuidas muutub antud funktsioon  $x$ -i absoluutväärtuse kasvamisel? — kahanemisel?

Näita, et kõver jääb ribasse, mida piiravad jooned

$$y = \frac{1}{x} \text{ ja } y = -\frac{1}{x} .$$

Kas alguspunkti ümbruses kõver  $y = h(x)$  ulatub kõverateni  $y = \frac{1}{x}$  ja  $y = -\frac{1}{x}$  ?

20. Joonista kõver

$$y = \sin x ,$$

võttes tarvilikud  $\sin x$  väärtused ühikringist.

Konstrueeri saadud joonisest lähtudes kõver

$$y = \frac{\sin x}{x} .$$

Kas saadud joonis kinnitab tulemusi, millele jõudsid punktis 10?

30. Kas nähtub joonisest, et funktsiooni  $h(x)$  väärtused on tõkestatud ülalt? — on tõkestatud alt?

Näita, et

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0 .$$

Mis ütleb joonis piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

kohta?

5. Järgmine skeem näitab piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

leidmist, kusjuures esimene võrdus on kirjutatud 24. joonise põhjal.

Põhjenda igat sammu selles mõttekäigus, eriti viimast sammu.

$$2 \sin x < 2x < 2 \tan x$$

$$\sin x < x < \tan x$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

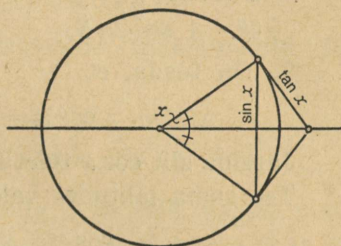
### 6. Võrdust

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

võib kirjutada ka kujus:

$$\lim_{2x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{2x} = 1.$$

Sõnasta selles võrduses peituv lause ainult kaare ja kõõlu mõisteid tarvitades (vt. joonist 24).



Joonis 24.

### 7. Järgmine skeem kujutab funktsiooni

$$y = \sin x$$

tuletise leidmist. Põhjenda igat mõttekäigu sammu ja sõnasta tulemus.

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

$$= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$= \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \\ &= 1 \cdot \cos x. \end{aligned}$$

Järelda siit  $\sin x$  tuletisvalem:

$$(\sin x)' = \cos x.$$

8. Leia järgmiste funktsioonide tuletised:

- |                                     |                                   |
|-------------------------------------|-----------------------------------|
| 1 <sup>o</sup> . $\sin 2x$          | 5 <sup>o</sup> . $\sin(a + x)$    |
| 2 <sup>o</sup> . $\sin \frac{x}{2}$ | 6 <sup>o</sup> . $\sin(c - x)$    |
| 3 <sup>o</sup> . $\sin px$          | 7 <sup>o</sup> . $\sin(px + q)$   |
| 4 <sup>o</sup> . $A \sin 2\pi Nx$   | 8 <sup>o</sup> . $A \sin(px + q)$ |

9. On teada, et

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Järelda siit  $\cos x$  tuletisvalem.

Tee sama lähtudes valemist

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

10. Leia järgmiste funktsioonide tuletised:

- |  |   |
|--|---|
| 1 <sup>o</sup> . $\tan x$              | 4 <sup>o</sup> . $\sin^2 x$               |
| 2 <sup>o</sup> . $\cot x$              | 5 <sup>o</sup> . $\sin^2 x + \cos^2 x$    |
| 3 <sup>o</sup> . $\sin x \cdot \cos x$ | 6 <sup>o</sup> . $1 - \cos^2 \frac{x}{2}$ |

11. Nurgaks kõvera ja sirge vahel nimetatakse seda nurka, mida moodustab sirge ühes puutujaga, mis tõmmatud kõverale kõvera ja sirge ühistäpis.

Kui suured on nurgad, mida moodustavad kõverad

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \tan x$$

lõikumisel  $x$ -teljega?

Sama küsimus kõverate puhul

$$y = \sin ax, \quad y = \cos \frac{x}{c}, \quad y = A \tan Nx.$$

12. Missuguse kuju omandab  $\sin a$  tuletisvalem, kui pole antud absoluutmõõdus, nagu senini eeldatud, vaid on

antud kraadides? — on antud minutites? — on antud sekundites?

13. Leia pindala, mida piirab kõvera  $y = \sin x$  pool lainet ühiselt  $x$ -teljega.

14. Leia pindala, mida piiravad kõverad  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$  ja  $x$ -telje lõik  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ .

### Harjutis XIII:

Trigonomeetriliste funktsioonide tuletiste rakendusi.

1. Leia järgmiste funktsioonide maksimumid ja miinimumid:

$$1^0. \sin x + \cos x$$

$$3^0. \sin x + \cos 2x$$

$$2^0. \sin x \cdot \cos x$$

$$4^0. \sin x \cdot \sin (a - x).$$

2. On antud kolmnurga külg  $a$  ja selle vastas olev nurk  $\alpha$ . Kui suured peab valima kaks teist nurka  $\beta$  ja  $\gamma$ , et kolmnurga pindala saaks maksimaalne?

3. Kujuta poolringi ümber võrdhaarne kolmnurk minimaalse pinnaga.

N ä p u n ä i d e. Muutujaks võta alusnurk.

4. Kujuta poolringisse diameetrile toetuv trapets maksimaalse pindalaga.

N ä p u n ä i d e. Muutujaks võta nurk suurema aluse juures.

5. Rida lapsi töötab, istudes ümber ümmarguse laua, mille läbimõõt on  $d$ . Laua keskpäiga kohal ripub kõrgusel  $h$  lamp. Kuidas peab valima selle kõrguse  $h$ , et laua äärel, kus asetsevad lahtilöödud raamatud ja vihud, valgustus oleks maksimaalne?

N ä p u n ä i d e. Muutujaks vali valgusekiirte kalde nurk  $\alpha$  laua ääre kohal.

6. Tiirelgu täpp  $P$  ühtlaselt ringi mööda, mille raadius on  $a$ . Tehku täpp  $N$  tiiru sekundis. Olgu täpp aja alul ringi ja rõhtdiameetri lõikepunktis. Olgu ringil tiirleva täpi projektsioon püstdiameetrile tähistatud  $Q$ . Võta see diameeter  $x$ -teljeks.

1<sup>o</sup>. Anna täpi  $Q$  liikumise seadus, s. t. side aja  $t$  ja sellele vastava koordinaadi  $x$  vahel.

Missugustes piirides toimub liikumine?

Kuidas esineb graafilises kujutuses  $t$ - $x$ -side?

Käsiteldavat liikumist nimetatakse harmooniliseks võnkumiseks.

2<sup>o</sup>. Määra liikumise kiirus. Seleta üksikasjaliselt, kuidas kiirus muutub ajaga.

3<sup>o</sup>. Määra liikumise kiirendus. Avalda see täpi  $Q$  asendi ja tasakaalukoha vahelise kauguse abil.

4<sup>o</sup>. Olgu liikuva täpi mass  $m$ . Missuguse jõu mõjul täpp  $Q$  liiguks seletatud viisil?

7. Liikugu täpp  $Q$   $x$ -teljel seaduse järgi

$$x = a \cdot \cos 2\pi Nt$$

ja  $x$ -telg samal ajal  $y$ -telje sihis seaduse järgi

$$y = a \cdot \sin 2\pi Nt.$$

1<sup>o</sup>. Leia täpi  $Q$  poolt kujutatud kõvera, s. o. täpi  $Q$  orbiidi võrrand.

2<sup>o</sup>. Mitu tiiru täpp teeb 1 sekundi vältel?

Olgu aeg, mida täpp vajab täie tiiru tegemiseks, tähistatud  $T$ . Seda aega nimetatakse perioodiks. Avalda see aeg tiirude arvu  $N$  kaudu.

3<sup>o</sup>. Leia täpi kiiruse osad  $x$ - ja  $y$ -telje sihis.

Avalda need kiiruse osad täpi koordinaatide kaudu ja näita, et täpi kiirus on igal ajamomendil sihitud orbiidi puutujat mööda. Leia kiiruse suurus  $v$ . Kas see on ajaga muutuv?

4<sup>o</sup>. Leia täpi kiirenduse osad  $x$ - ja  $y$ -telje sihis. Avalda need osad täpi koordinaatide kaudu. Näita, et kiirendus on igal ajamomendil sihitud ringi keskkoha

poole. Kui suur on see kiirendus? Kas ta on suuruselt muutuv?

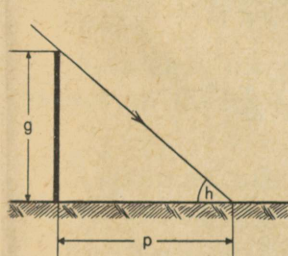
Näita, et kiirendus uuritud liikumises avaldub kujul  $v^2 : a$ .

50. Olgu liikuva täpi mass  $m$ . Missuguse jõu peaks täpile rakendama, et ta selle jõu mõjul liiguks praegu kirjeldatud viisil?

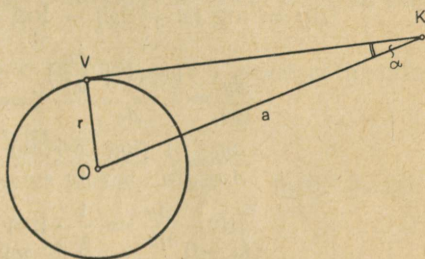
8. Täisnurkne kolmnurk on antud oma kaatetiga  $b (\pm \Delta b)$  ja selle lähisnurgaga  $a (\pm \Delta a)$ . Kui kõrgele võib küündida teise kaateti  $a$  määramise viga?

Näide.  $b = 13,5 (\pm 0,2)$ ;  $a = 40^\circ 28' (\pm 2')$ . Määra  $\Delta a$ .

9. Päikese kõrguse (nurga  $h$ ) mõõtmiseks (joonis 25) tarvitati juba vanal ajal nn. g n o o m o n i t. Olgu



Joonis 25.



Joonis 26.

selle kõrgus  $g$ . Mõõtes gnomoni varju pikkust  $p$ , leiame  $\tan h = \frac{g}{p}$ . Olgu meetrites  $g = 3,46 (\pm 0,02)$  ning  $p = 5,2 (\pm 0,5)$ . Kui täpsalt saab määrata nurka  $h$ ?

Näpunäide. Leia jagatise  $\frac{g}{p}$  alammäär, ülemmäär, nende aritmeetiline keskmine  $a$  ja viimase võimalik viga  $\Delta a$ . Rakendades edasi vea arvutamise põhivalemit, avalda viga  $\Delta h$  vea  $\Delta a$  kaudu.

10. Kuu kaugus maakerast määratakse valemi põhjal (joonis 26):

$$a = \frac{r}{\sin \alpha}$$

Maakera raadius  $r$  on kilomeetrites 6370, nurk  $\alpha = 57'$ . Kui suur viga võib tekkida kauguse  $a$  määramisel nurga kindlusetuse tõttu poole minuti võrra?

### Harjutis XIV:

Logaritmfunksiooni ja eksponentfunksiooni tuletis.

1. 10. Tähistame arvu  $x$  kümnendlogaritmi tähega  $y$ :  

$$y = \log x .$$

Selle funktsiooni väärtusi saab võtta tabelitest.

Järgmine skeem näitab selle logaritmfunksiooni tuletise leidmist. Põhjenda igat sammu, eriti viimast kahte.

$$y = \log x$$

$$y + \Delta y = \log (x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \log (x + \Delta x) - \log x = \log \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)}{\Delta x} = \frac{\log (1 + \delta x)}{x \cdot \delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \frac{\log (1 + \delta x)}{\delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\log (1 + \delta x)}{\delta x}$$

Viimasel piiriavaldisel on lihtne tähendus:

$$\lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\log (1 + \delta x)}{\delta x} = (\log x)'_{x=1}$$

Näita seda tuletise definitsiooni rakendades.

Seda  $(\log x)'_{x=1}$  väärtust tähistame tähega  $M$ .

20. Joonista võimalikult hoolsalt kõver

$$y = \log x \quad (0,01 \leq x \leq 10)$$

hästi suures mõõtkavas (näit. lehel  $20 \times 5 \text{ cm}^2$ ) ja määra saadud jooniselt

$$(\log x)'_{x=1}$$

väärtus.

Täpsam  $M$  väärtus on 0,4343.

30. Kümnenlogaritmi tuletisvalem omandab varemini-öeldu põhjal kuju

$$(\log x)' = \frac{M}{x}.$$

Sõnasta tulemus.

Kuidas oleneb  $\log x$  kasvamiskiirus argumenti väärtusest?

2. 10. Olgu tegemist kahe logaritmsüsteemiga, mille alused on vastavalt  $a$  ja 10.

Näita logaritmi definitsioonivõrrandist lähtudes, et

$$\log_a x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} a}.$$

20. Anna valem  $(\log_a x)'$  määramiseks.

30. Valem omandab lihtsaima kuju, kui temas esinev kordaja saab võrdseks 1-ga. Missuguse aluse  $a$  puhul see on nõnda?

Seda alust märgitakse sümboliga  $e$ ; arvu  $e$  täpsam väärtus on (kuuekohaliselt)

2,71828.

Logaritme, mis võetud sellel alusel, nimetatakse *naturaalseiks*.

40. Naturaalse logaritmi tuletis on eelmise põhjal

$$(\log_e x)' = \frac{1}{x}.$$

Sõnasta tulemus.

3. Naturaalse logaritmi tuletisvalemi erakordne lihtsus on põhjuseks, miks analüüsis pea eranditult töötatakse just naturaalse logaritmiga. Seda viimast kirjutame edasi sümboliga  $\log$ , alust  $e$  märkimata jättes.

Arvutamisele asudes tuleb üle minna kümnenlogaritmele: need on kohasemad arvutamiseks, mispärast ka tabelites just need logaritmid esinevad.

Anna valem üleminekuks naturaalseilt logaritmelt kümnenlogaritmele.

4. Olgu  $u$  mingi  $x$ -i funktsioon:  $u = u(x)$ . Siis on  $\log u(x)$   $x$ -st kaudselt olenev funktsioon. Järelda siit valem:

$$[\log u(x)]' = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Kuidas oleneb funktsiooni logaritmi kasvamiskiirus funktsiooni väärtusest?

5. Määra järgmiste funktsioonide tuletised:

1 <sup>o</sup> . $\log 5x$	5 <sup>o</sup> . $x \log x - x$
2 <sup>o</sup> . $\log 3$	6 <sup>o</sup> . $\log(a + x)$
3 <sup>o</sup> . $\log x^3$	7 <sup>o</sup> . $\log(ax + b)$
4 <sup>o</sup> . $\log ax^2$	8 <sup>o</sup> . $\log(x^2 - 3x + 1)$

6. Määra järgmiste funktsioonide tuletised:

1 <sup>o</sup> . $\log \sin x$	4 <sup>o</sup> . $\log \cot \frac{x}{2}$
2 <sup>o</sup> . $\log \cos ax$	5 <sup>o</sup> . $\log \sin(a - bx)$
3 <sup>o</sup> . $\log \tan x$	6 <sup>o</sup> . $\log \tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})$

7. Määra järgmiste funktsioonide tuletised:

1 <sup>o</sup> . $\log \frac{a}{x}$	3 <sup>o</sup> . $\log \sqrt{x}$
2 <sup>o</sup> . $\log \frac{1+x}{1-x}$	4 <sup>o</sup> . $\log \sqrt{1+x^2}$

8. 1<sup>o</sup>. Näita, lähtudes naturaalogaritmi tuletisvalemist, et

$$\int_1^N \frac{dx}{x} = \log N.$$

Joonista funktsiooni  $\frac{1}{x}$  käigukõver ja tõlgenda viimati-leitud võrdust graafiliselt.

2<sup>o</sup>. Olgu  $c$  mingi arv. Näita, et

$$\int_c^{cN} \frac{dx}{x} = \int_1^N \frac{dx}{x}.$$

Tõlgenda asi graafiliselt.

9. Joonista hästi suures mõõtkavas võrdhaarne hüperbool

$$y = \frac{1}{x} .$$

Arvestades võrdust

$$\int_1^{10} \frac{dx}{x} = \log 10 ,$$

määra mingi ligikaudse võtte abil 10 naturaallogaritm ja selle põhjal  $\log_{10} e$  ning edasi  $e$ .

10. Olgu tegemist eksponentfunktsiooniga

$$y = a^x .$$

Võta mõlemal pool naturaalne logaritm ja rakenda selle logaritmi tuletisvalem. Leia siit eksponentfunktsiooni tuletisvalem.

Kuidas oleneb funktsiooni  $a^x$  kasvamiskiirus funktsiooni enese suurusest?

11. Rakenda eelmises ülesandes leitud valem  $a^x$  tuletise leidmiseks erijuhul  $a = e$ .

Kuidas on seotud funktsiooni  $e^x$  kasvamiskiirus selle funktsiooni väärtusega?

12. Määra järgmiste funktsioonide tuletised:

1 <sup>o</sup> . $2e^x$	4 <sup>o</sup> . $e^{ax+b}$	7 <sup>o</sup> . $e^{x^2}$
2 <sup>o</sup> . $e^{-x}$	5 <sup>o</sup> . $xe^{ax}$	8 <sup>o</sup> . $e^{-hx^2}$
3 <sup>o</sup> . $e^{ax}$	6 <sup>o</sup> . $he^{-kx}$	9 <sup>o</sup> . $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

13. Arvestades võrdust

$$x^n = e^{\log x^n} = e^{n \log x}$$

näita, et valem

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

on maksev igasuguse  $n$ -i puhul.

## Harjutis XV :

Vea hindamise küsimusi.

1. Olgu

$$y = \log_{10} x .$$

1<sup>o</sup>. Olgu  $x$ -i väärtus saadud mõõtmise teel ja olgu  $\Delta x$  mõõtmistulemuse võimalik viga. Kui suure vea see  $\Delta x$  tingib tabelist võetavas  $x$ -i logaritis?

2<sup>o</sup>. Oletame, et  $x$ -i mõõtmisviga ulatub  $p$  protsendini  $x$ -i väärtusest. Näita, et siis  $x$ -i logaritmi viga

$$\Delta \log_{10} x = \frac{Mp}{100} ,$$

kus  $M$  tähendab  $\log_{10} e = 0,43429 \approx 0,43$  .

3<sup>o</sup>. Koosta endale tabel:

$p$	1	2	3	5	8	10	12
$\frac{Mp}{100}$							

Missugusest  $p$  väärtusest peale viga  $\Delta x$  annab ennast tunda juba logaritmi sajandikkudes? — logaritmi kümnendikkudes?

4<sup>o</sup>. Mitu kohta ülimalt on mõtet võtta töötamiseks logaritmidega, kui logaritmitavate arvude relatiivne viga ületab 2%? — ületab 11%?

2. Logaritmide tabelid koostatakse harilikult nõnda, et tabelis seisvad logaritmid ei erine õigetest enam kui  $\frac{1}{2}$  võrra viimse kümnendkoha ühikust. Selle tõttu neljakohalisest tabelist võetud logaritmide viga on  $\leq 0,00005$ .

Kui täpsalt (protsentuaalselt) peavad andmed olema teada, et oleks kohane nende logaritmimisel kasutada kolmekohalisi tabelleid? — neljakohalisi tabelleid? — viiekohalisi tabelleid?

Nä p u n ä i d e. Rakenda eelmises ülesandes tuleta-  
tud valemit  $\Delta \log_{10} x$  jaoks.

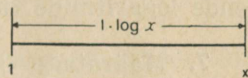
3. 1<sup>o</sup>. Olgu arv  $x$  antud nelja kohaga, nii et arvu  
viga ei ületa  $\frac{1}{2}$ -neljanda koha ühikust. Näita, et arvu  
relatiivne viga küünib siis halvemal juhul  $\frac{1}{2000}$ -ni.

Näita, et säärane viga arvu logaritmi tuhandendikke  
veel ei mõjusta, küll aga kümnetuhandendikke (halbemal  
juhul 2 võrra). Mitme kohaga tuleb võtta arvu  $x$  loga-  
ritm?

2<sup>o</sup>. Olgu tarvitada nelja kohalised logaritmid  
tabelid. Sealt saadavate logaritmid viga  $\Delta \log x$  ei ületa  
0,00005. Näita, et logaritmi järgi määratava arvu  $x$  rela-  
tiivne viga võib küündida ümmarguselt 0,0001-ni. Mitme  
kohaga saab sel puhul määrata arvu  $x$ ?

4. Näita, et üldiselt tuleb tarvitada nii mitme koha-  
lisi logaritme, kui mitme maksva kohaga on antud arvud.

5. Olgu tegemist logaritmilise arvutuslükatiga, mille  
skaala on valmistatud pikkusmõõ-  
dus  $l$  mm. Skaala konstruktsiooni-  
printsip on näha joonisest 27:  
märgime mingi täpi sirgel arvuga  
1, kanname sellest täpist alates  
sirgele lõigu  $l \cdot \log_{10} x$  ja kirjutame lõigu lõpukriipsu  
juurde argumendi  $x$  väärtuse.



Joonis 27.

1<sup>o</sup>. Olgu minimaalne pikkusvahe, mida veel skaalal  
selgesti näha suudame, märgitud  $\lambda$  mm. Selle  $\lambda$  mm  
võrra võib skaalal niidiseade õigest erineda, ilma et silm  
seda märkaks. Olgu sellest silma lahetusvõime puudulikkus-  
est tekkiv  $x$ -i lugemi viga  $\Delta x$  ja sellega  $x$ -i lugemi rela-  
tiivne viga  $\frac{\Delta x}{x}$ . Avalda viimane  $\lambda$  ja  $l$  kaudu.

2<sup>o</sup>. Näita saadud avaldise põhjal, et skaalal märgi-  
tud arvude lugemite relatiivne viga on kogu skaalal  
konstantne.

30. Näita, et töötamisel logaritmilise arvutuslükatiga saaduste täpsus on võrdeline mõõtühikuga, milles skaala ehitatud, ja võrdeline silma lahtusvõimega.

Näited. a) Olgu mm-tes  $l = 125$ ,  $\lambda = 0,2$ . Määra lugemite võimalik protsentuaalne viga.

b) Sama ülesanne juhul  $l = 250$ ,  $\lambda = 0,2$ .

c) Missuguse pikkusmõõdu  $l$  peab valima, et arvutuslukat võimaldaks ümmarguselt sama täpsuse, mis neljakohalised logaritmid tabelid?

6. Funktsiooni  $f(x)$  naturaalogaritmi tuletis avaldub kujul

$$[\log f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Olgu  $u = u(x)$  ja  $v = v(x)$  muutuva  $x$ -i funktsioonid. Leia avaldiste

$$uv, \frac{u}{v} \text{ ja } u^n$$

tuletised, võttes esiti nende avaldiste logaritmid ja leides nende logaritmid tuletised.

7. Määratagu suurus  $x$  otsese mõõtmise teel; määratagu suurus  $u$  selle mõõtmise saadusest  $k$  a u d s e l t valemi põhjal:

$$u = u(x).$$

Olgu  $x$ -i mõõtmisel tehtud viga  $\Delta x$ , sellest tingitud  $u$  viga  $\Delta u$  ja  $u$  naturaalogaritmi määramise viga  $\Delta \log u$ .

Näita, et suuruse  $u$  naturaalogaritmi viga on võrdne suuruse  $u$  relatiivse veaga.

8. Olgu

$$S = x^2,$$

$$V = x^3,$$

.....

$$W = x^n.$$

Määratagu suurus  $x$  otsese mõõtmise teel ja olgu  $\Delta x$  selle mõõtmisviga. Avalda suuruste  $S, V, \dots W$  võimalikud protsentuaalsed vead  $x$ -i protsentuaalse vea kaudu.

N ä p u n ä i d e. Rakenda eelmises ülesandes tuletatud lauset.

N ä i t e d. Määra sel teel ruudu pindala ja kuubi ruumala relatiivne viga.

9. Määratagu nurk  $\alpha$  otsese mõõtmise teel ja arvutatagu suurused

$$p, q \text{ ja } r$$

valemite abil

$$p = a \cdot \sin \alpha, \quad q = b \cdot \cos \alpha, \quad r = c \cdot \tan \alpha,$$

kus  $a, b$  ja  $c$  on täpsalt teada olevad konstandid.

Ulatugu  $a$  mõõtmisviga  $\Delta a$ -ni. Anna valemid  $p, q$  ja  $r$  protsentuaalsete vigade arvutamiseks juhuks, et  $a$  on mõõdetud nurga absoluutmõõdus; — juhuks, et  $a$  on mõõdetud kraadides; — juhuks, et  $a$  on mõõdetud sekundites.

N ä p u n ä i d e. Rakenda eelviimases ülesandes tuletatud lauset.

10. Olgu ristküliku mõõted  $a$  ja  $h$  temperatuuri  $t$  funktsioonid. Siis on seda ka ristküliku pindala:

$$S(t) = a(t) \cdot h(t).$$

Kasvagu temperatuur  $\Delta t$  võrra. Avalda pinna  $S$  relatiivne kasv külgede  $a$  ja  $h$  relatiivsete kasvude kaudu.

N ä p u n ä i d e. Logaritmi  $S(t)$  avaldist, võta saaduse tuletis ja korruta leitud võrduse mõlemad pooled  $\Delta t$ -ga.

11. Olgu

$$z = \frac{u(x) \cdot v(x)}{w(x)}.$$

Ulatugu  $u$ -viga halvemal juhul  $\Delta u$ -ni,  $v$ -viga  $\Delta v$ -ni ja  $w$ -viga  $\Delta w$ -ni. Näita, et

$$\left| \frac{\Delta z}{z} \right| \leq \left| \frac{\Delta u}{u} \right| + \left| \frac{\Delta v}{v} \right| + \left| \frac{\Delta w}{w} \right|.$$

Nä p u n ä i d e. Võta  $z$  naturaalogaritm; see koosneb kolmest liikmest. Iga liikme viga saab avaldada andmeis. Halvemal juhul liituvad kõik kolm viga.

12. 10. Täisnurkses kolmnurgas on mõõdetud hüpotenuus  $c$  meetrites ja nurk  $a$  kraadides. Hüpotenuusi mõõtmisviga ulatub halvemal juhul  $\Delta c$ -ni, nurga  $a$  mõõtmisviga  $\Delta a$ -ni. Anna kaateti  $a$  arvutamistulemuse võimalik relatiivne viga.

20. Täisnurkses kolmnurgas on mõõdetud kaatet  $b$  sentimeetrites ja nurk  $a$  kraadides. Võimalikud mõõtmisvead küünivad vastavalt  $\Delta b$ -ni ja  $\Delta a$ -ni. Anna kaateti  $a$  arvutamistulemuse relatiivne viga.

Nä i t e d. a)  $c = 34,7 (\pm 0,3)$ ;  $a = 28^\circ (\pm 0^{\circ},5)$ .  
Määra  $\frac{\Delta a}{a}$ .

b)  $b = 78,6 (\pm 0,2)$ ;  $a = 62^\circ (\pm 0^{\circ},2)$ . Määra  $\frac{\Delta a}{a}$ .

13. Kaldnurkses kolmnurgas on mõõdetud üks külg ja kaks selle lähisnurka. Mõõtmistulemused on vastavalt

$$b (\pm \Delta b), \quad a (\pm \Delta a), \quad \gamma (\pm \Delta \gamma).$$

Anna külje  $a$  arvutamistulemuse võimalik relatiivne viga.

Nä i d e.  $b = 120,6 (\pm 0,4)$ ;  $a = 26^{\circ},5 (\pm 0^{\circ},1)$ ;  
 $\gamma = 78^{\circ},4 (\pm 0^{\circ},2)$ . Määra  $\frac{\Delta a}{a}$ .

14. Olgu mõõdetud kaldnurkse kolmnurga kaks külge ja nende vahel olev nurk. Olgu mõõtmistulemused vastavalt

$$a (\pm \Delta a), \quad b (\pm \Delta b), \quad \gamma (\pm \Delta \gamma).$$

Neist andmeist saab arvutada kolmnurga pindala  $S$ . Milleni võib ümmarguselt küündida pindala arvutamistulemuse relatiivne viga?

Näide.  $a = 0,78$  ( $\pm 0,04$ );  $b = 0,48$  ( $\pm 0,02$ );  
 $\gamma = 134^{\circ},5$  ( $\pm 0^{\circ},2$ ). Määra  $\frac{\Delta S}{S}$ .

## Peatükk IV. Polünoomide rakendamine arvutus- abinõuna.

### Harjutis XVI:

Newtoni binoomvalem.

1. Võttes tuletise funktsiooni  $y(x)$  1. tuletisest saame funktsiooni 2. tuletise, võttes tuletise sellest saame funktsiooni 3. tuletise, võttes tuletise sellest viimasest saame funktsiooni 4. tuletise jne. Esimesi kolme kirjutatakse  $y'$ ,  $y''$ ,  $y'''$ ;  $k$ -järgu tuletist kirjutatakse juhul, kui  $k > 3$ ,  $y^{(k)}$ .

1<sup>o</sup>. Määra funktsiooni  $y = x^2$  esimesed 4 tuletist. Missugused on kõik järgmised?

2<sup>o</sup>. Määra funktsiooni  $y = ax^2 + bx + c$  esimesed 3 tuletist. Missugused on kõik järgmised?

2. Olgu  $y = x^n$ . Anna  $y'$ ,  $y''$ ,  $y'''$ , ...  $y^{(k)}$  avaldised. Anna  $y^{(n)}$  avaldis.

Missugune on  $y^{(n+1)}$  ja kõik järgmised tuletised?

3. Näita, et  $n$ -da astme polünoomi  $(n + 1)$ -ne tuletis ja kõik sellele järgnevad on nullid.

4. Korrutatist  $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$  märgitakse lühemalt sümboliga

$$n!$$

(loe:  $n$ -faktoriaal).

Anna funktsiooni  $n!$  väärtuste tabel vahemiku jaoks  $1 \leq n \leq 10$ . Kujuta selle funktsiooni käik graafiliselt.

5. Olgu  $y = \frac{1}{x}$ . Anna  $y', y'', y''', \dots, y^{(k)}$  avaldised.

6. Kasvagu summa  $a$  krooni liitprotsendiliselt ja olgu kapitali tuluprotsent aasta kohta  $p$ . Anna üksliikmeline avaldis kapitali suuruse jaoks

1. a. lõpul, 2. a. lõpul, 3. a. lõpul, ...  $n$ -da a. lõpul.

Anna tulemusele ülevaatlikum kuju, märkides murd

$\frac{p}{100}$  lühemalt  $r$ . Missuguse summani  $s$  kasvab 1 kroon  $n$ -da aasta lõpuks?

Näited. Arvuta  $s$  erijuhtudel

$$n = 10; p = 3, p = 5, p = 10.$$

7. Olgu raadiolambi ruumala  $V$  cm<sup>3</sup>. Lambi tühjendamiseks õhust ühendatakse ta õhupumbaga. Viimane imeb iga käigu puhul  $p$  protsenti lambis olevast õhust. Kui palju õhku jääb lampi peale 1. käiku, 2. käiku, 3. käiku, ...  $n$ -dat käiku? Vastused anna üksliikme kujus.

Kirjuta tulemused ülevaatlikumalt, märkides murd

$\frac{p}{100}$  lühemalt  $r$ . Missuguse kuju omandavad saadud avaldised erijuhul  $V = 1$ ?

Näide. Olgu  $V = 1, p = 90$ . Kui palju õhku jääb raadiolampi peale pumba 10. käiku?

8. Avaldis  $1 + x$  on 1. astme polünoom;

„  $(1 + x)^2$  „ 2. „ „

„  $(1 + x)^3$  „ 3. „ „

nagu seda näitavad 2. ja 3. avaldise arendised. Tõesta täielise induktsiooni viisil, et avaldis  $(1 + x)^n$  on  $n$ -da astme polünoom.

9. Avaldis  $(1 + x)^n$  on  $n$ -da astme polünoom. Sellepärast võib kirjutada:

$$(1 + x)^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n,$$

kus kordajad  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$  on esiotsta teadmata. Leia need kordajad.

Näpunäide. Viimatikirjutatud võrdus peab olema maksev iga  $x$ -i puhul. Samuti on maksvad iga  $x$ -i puhul kõik need võrdused, mis saame, kui võtame eelmise võrduse mõlema poole 1., 2., 3., ...  $n$ -da järgu tuletise. Asetades antud ja saadud võrdustes  $x$ -i asemele mingi väärtuse, näiteks nulli, saame määrata kordajad  $c$ .

Leia need kordajad ja anna üldine valem avaldise  $(1+x)^n$  arendamiseks.

Saadud valem kannab Newton'i binoomvalem nime.

10. Avaldist  $(a+b)^n$  võib ikka kirjutada kujul

$$\left[ a \left( 1 + \frac{b}{a} \right) \right]^n$$

või kujul

$$a^n \left( 1 + \frac{b}{a} \right)^n.$$

Tuginedes sellele märkusele anna valem

$$(a+b)^n$$

arendamiseks.

11. Näita, et Newton'i binoomvalem kordajate summa on  $2^n$ .

Näpunäide. Arenda avaldis  $(1+1)^n$ .

12. Anna valem avaldise  $(1-x)^n$  arendamiseks.

Näita, et saadud arendise kordajate summa on null.

13. Arenda Newton'i binoomvalem abil järgmised avaldised:

$$1^0. (1+a)^2$$

$$2^0. (1+a)^3$$

$$3^0. (1-a)^2$$

$$4^0. (1-a)^3$$

$$5^0. (1+s)^4$$

$$6^0. (p+q)^5$$

$$7^0. (1-r)^6$$

$$8^0. \left( u + \frac{1}{u} \right)^{10}.$$

14. Arvuta järgmised astmed peenelt neljanda kohani, rakendades selleks N e w t o n'i binoomvalemit. Arendisest võta ainult tarvilik hulk liikmeid.

$$\begin{array}{ll} 10. (1,1)^8 & 40. (0,95)^6 \\ 20. (1,05)^{12} & 50. (0,99)^5 \\ 30. (1,002)^{10} & 60. (0,998)^{20} \end{array}$$

15. Kordajat  $c_k$  N e w t o n'i binoomvalemis, nimelt

$$c_k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k},$$

kus  $k$  tähendab üht arvudest 1, 2, 3, ...  $n$ , märgitakse lühemalt sümboliga

$$\binom{n}{k}$$

(loe:  $n$  üle  $k$ ).

Kirjuta N e w t o n'i binoomvalem, märkides kordajaid praegunäidatud viisil.

16. Anna järgmiste sümbolite arvuline väärtus:

$$\begin{array}{ll} 10. \binom{5}{3} & 30. \binom{8}{7} \\ 20. \binom{10}{4} & 40. \binom{12}{10} \end{array}$$

17. Näita, et sümbolit  $\binom{n}{k}$  saab kirjutada kujus

$$\frac{n!}{k! (n-k)!}.$$

Järelda siit, et

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Rakenda viimast valemit järgmiste sümbolite väärtuse arvutamiseks:

$$\binom{8}{7} \quad \binom{10}{8} \quad \binom{12}{9}.$$

18. Laienda sümboli  $\binom{n}{k}$  mõiste juhule  $k=0$ . Mis väärtus tuleks anda sümbolile  $\binom{n}{0}$ ?

Mis väärtus tuleks anda sümbolile  $0!$ ?

19. Näita, et

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

20. Rakenda eelmises ülesandes seisvat valemit N e w t o n'i binoomlause tõestamiseks täielise induktsiooni viisil.

N ä p u n ä i d e. Eelda, et

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \cdot x + \binom{n}{2} \cdot x^2 + \dots + \binom{n}{n} \cdot x^n;$$

näita, et siis kindlasti

$$(1+x)^{n+1} = \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} \cdot x + \binom{n+1}{2} \cdot x^2 + \dots + \binom{n+1}{n+1} \cdot x^{n+1};$$

veendu, et eeldus on maksev  $n$ -i eriväärtusel 1; järelda eelkäivast, et valem on maksev iga  $n$ -i puhul.

Siin esitatud N e w t o n'i binoomvalemi tuletamisviis ei eelda tuletise mõiste tundmist.

## Harjutis XVII:

Avaldiste lähendamine polünoomidega.

1. Olgu valmistatud hõbedast ruutdetsimeetri mudel. Olgu selle mudeli külje pikkus  $0^0$  temperatuuril parajasti 1 dm. Hõbedajaonpaisumistegur on  $20 \cdot 10^{-6}$ .

1<sup>o</sup>. Avalda mudeli pindala  $S$  temperatuuri funktsioonina. Anna selle pindala avaldis arendatud kujul.

2<sup>o</sup>. Kõikugu temperatuur 0 ja 100 kraadi vahel. Kui suured on 1. ja 2. astme liikmed minimaalselt ja maksimaalselt? Mitu korda vähemalt 1. astme liige ületab 2. astme liikme?

3<sup>o</sup>. Olgu valmistatud  $t$ - $S$ -diagramm. Olgu temperatuuriteljel pikkuseühikuks 10 mm ja pindala-teljel 100 mm. Kas on joonisel näha 2. astme liikmelt antud lisa?

Kuidas toimetada kõige otstarbekohasemalt  $S$ -käigu graafilist kujutamist?

$$40. \text{ Polünoomi } S_1 = 1 + 40 \cdot 10^{-6} t$$

nimetatakse polünoomi

$$S = 1 + 40 \cdot 10^{-6} t + 40 \cdot 10^{-11} t^2$$

lähispolünoomiks. Miks?

2. Olgu valmistatud tsingist kuupdetsimeetri mudel. Olgu selle mudeli külg  $0^{\circ}$  temperatuuril parajasti 1 dm. Tsingi joonpaisumistegur on  $30 \cdot 10^{-6}$ .

10. Avalda mudeli ruumala  $V$  temperatuuri funktsioonina. Anna selle ruumala avaldis arendatud kujul.

20. Kõikugu temperatuur 0 ja 100 kraadi vahel. Kui suured on 1., 2. ja 3. astme liikmed minimaalselt ja maksimaalselt? Mitu korda vähemalt 1. astme liige ületab 2. ja 3. astme liikmed? Mitu korda vähemalt 2. astme liige ületab 3. astme liikme?

30. Olgu valmistatud  $t$ - $V$ -diagramm. Olgu temperatuuriteljel pikkusühikuks 1 cm, ruumala-teljel 100 cm. Missuguste pikkustena kujunevad 2. ja 3. astme liikmete maksimumid? Kuidas toimetada kõige otstarbekohasemalt  $V$ -käigu graafilist kujutamist?

40. Missugused on  $V$  esimesed kaks lähispolünoomi  $V_1$  ja  $V_2$ ?

3. 10. Kandku raha aastas  $p$  protsenti tulu. Missuguse summani  $u$  kasvab 1 kroon  $n$ -da aasta lõpuks, kui tulu arvestada lihtprotsendiliselt?

Missuguse summani  $v$  kasvab 1 kroon  $n$ -da aasta lõpuks, kui tulu arvestada liitprotsendiliselt?

Missuguse kuju omandavad leitud valemid, kui  $\frac{p}{100}$  märkida lühemalt tähega  $r$ ?

20. Arenda  $v$  avaldis. Mille võrra (ümmarguselt) erinevad teineteisest  $v$  ja  $u$ ?

30. Olgu protsendimäär  $p = 5$ . Mis aastast peale sel juhul hakkab ennast tunda andma arendise 2. liige

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} r^2,$$

s. t. mis aastast peale annab see liige vähemalt 1-sendise lisandi? Missuguse  $n$  väärtuseni võib meie juhul lähendada eksponentfunktsiooni

$$v = (1 + r)^n$$

polünoomiga

$$u = 1 + rn \quad ?$$

40. Arvuta otseselt järgmises tabelis nõutavad suurused, võttes  $r = 0,05$ :

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8
$(1 + r)^n$								
$1 + rn$								

Kujuta nende andmete põhjal 1 krooni kasvumiskäik 5-protsendise aastatulu puhul juhuks, et kasvamine toimub lihtprotsendiliselt, ja juhuks, et see toimub liitprotsendiliselt. Mõlemad juoned valmistatakse ühes ja samas koordinaatvõrgus.

4. 10. Olgu vedeliku ruumpaisumistegur  $\beta$ . Olgu vedeliku tihedus  $0^\circ$  temperatuuril  $d_0$ . Näita, et siis tema tihedus  $t^\circ$  temperatuuril

$$d = \frac{d_0}{1 + \beta t}$$

20. Näita otsese jagamise teel, et

$$d = d_0 [1 - \beta t + \beta^2 t^2 - \dots + (-1)^n \frac{\beta^n t^n}{1 + \beta t}]$$

Viimane sulgudes seisev liige kannab avaldise  $\frac{1}{1 + \beta t}$  arendise jäakliikme nime.

Kontrolli viimatikirjutatud võrdust korrutamise teel.

30. Piirituse puhul on  $d_0 = 0,80$ ,  $\beta = 1 \cdot 10^{-3}$ .

Kõikugu temperatuur  $t$  0 ja 50 kraadi vahel. Kui suured on 1., 2. ja 3. astme liikmed maksimaalselt? Kas

2. ja 3. astme liikmed mõjustavad oluliselt tiheduse  $d$  väärtust? Mida võib öelda 4. ja järgmiste, eriti ka jääkliikme mõjustuse kohta?

40. Avaldis

$$d_0(1 - \beta t)$$

on murdratsionaalse funktsiooni

$$\frac{d_0}{1 + \beta t}$$

lähisavaldiseks.

Näita, et viga, millega avaldis  $d_0(1 - \beta t)$  kujutab funktsiooni  $\frac{d_0}{1 + \beta t}$  on ümmarguselt võrdne  $d_0\beta^2 t^2$ .

50. Kuidas esineks  $t$ - $d$ -olenevus vahemikus  $0 < t < 50$ , kui seda olenevust saaks graafiliselt kujutada täpsalt? Millena ta esineb 1. lähenduses?

5. 10. Olgu antud murdratsionaalne funktsioon

$$y = \frac{1}{1 - x}.$$

Näita otsese jagamise teel, et

$$y = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1 - x}.$$

Kontrolli tulemust korrutamise teel.

Näita, et viga, millega polünoom

$$y_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$$

kujutab funktsiooni  $y$ , on väikese  $x$ -i puhul ümmarguselt  $x^{n+1}$ .

20. Polünoomid

$$y_1 = 1 + x, y_2 = 1 + x + x^2, \dots$$

$$y_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$$

on funktsiooni  $y$  lähispolünoomideks.

Kujuta graafiliselt funktsiooni  $y$  käik vahemikus  $-2 < x < +1$ . Kujuta samas koordinaatvõrgus polünoomi  $y_1$  käik, sellest lähtudes  $y_2$  käik ning edasi  $y_3$  käik.

Missuguses vahemikus joonisel pole võimalik eraldada  $y$ - ja  $y_1$ -kõverat? —  $y$ - ja  $y_2$ -kõverat? —  $y$ - ja  $y_3$ -kõverat?

## 30. Vahed

$$v_1 = y - y_1, \quad v_2 = y - y_2, \quad v_3 = y - y_3, \quad \dots$$

on  $v$  e a d, millega polünoomid  $y_1, y_2, y_3 \dots$  kujutavad funktsiooni  $y$ .

Kujuta uues koordinaatvõrgus nende vigade käik  $x$ -i muutudes, võttes vigade väärtused endiselt jooniselt ja kujutades  $x$ -i väärtusi samas moods, milles endiselgi joonisel.

## 6. 10. Olgu

$$y = \frac{x}{1+x^2}.$$

Anna selle murdratsionaalse funktsiooni 1., 3. ja 5. astme lähispolünoomid.

20. Kujuta graafiliselt funktsiooni  $y$  käik vahemikus  $-3 < x < +3$ . Kujuta samas koordinaatvõrgus funktsiooni  $y$  lähispolünoomide  $y_1, y_3$  ja  $y_5$  käik vahemikus  $-2 < x < +2$ .

30. Missuguses vahemikus joonisel langevad ühte  $y$ - ja  $y_3$ -käigukõverad? —  $y$ - ja  $y_5$ -käigukõverad?

## 7. 10. Olgu

$$y = \frac{1}{1+x^2}.$$

Anna selle murdratsionaalse funktsiooni 0. astme, 2., 4. ja 6. astme lähispolünoomid.

20. Kujuta graafiliselt murdratsionaalse funktsiooni  $y$  käik vahemikus  $-3 \leq x \leq +3$ .

Kujuta samas koordinaatvõrgus lähispolünoomide  $y_0, y_2, y_4$  ja  $y_6$  käik vahemikus  $-1,5 \leq x \leq +1,5$ .

Missuguses vahemikus joonisel pole võimalik eraldada  $y$ - ja  $y_0$ -joont? —  $y$ - ja  $y_2$ -kõverad? —  $y$ - ja  $y_4$ -kõverad? —  $y$ - ja  $y_6$ -kõverad?

30. Mida ütleb joonis küsimuse kohta, kas uuritavat lähendamist meie polünoomidega  $y_0, y_2, y_4, y_6$  jne. on võimalik teostada igas  $x$ -i puhul, või ainult teatud vahemikus?

8. Kõigil varemini-käsiteldud juhtudel lähendasime funktsioone polünoomidega ja nimelt täpi  $x = 0$  ümbruses. Säärast lähendamist on aga ka võimalik teostada iga teise täpi ümbruses. Selleks tarvitseb vaid üle viia koordinaatide algus sellesse täppi, teisendada vastavalt sellele antud funktsiooni avaldis ja toimetada, nagu varemini näidatud.

Olgu

$$y = \frac{1}{1+x^2}.$$

Lähenda see funktsioon 1., 2., 3. ja 4. astme polünoomiga punkti  $x = 1$  ümbruses.

9. Olgu antud irratsionaalne funktsioon

$$y = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}.$$

Mõistame selle  $y$  all võrrandi  $y^2 - (1+x) = 0$  positiivset lahendit. Lähendagu teda teatud  $x$ -i vahemikus polünoom

$$y_n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n.$$

Olgu viga, millega see polünoom kujutab funktsiooni  $y$ , märgitud  $v_n(x)$ .

Siis on

$$y(x) = y_n(x) + v_n(x).$$

Kordajaid  $c$  saab määrata, seades täiendavaid nõudeid. Nõuame, näiteks, et  $x$ -i eriväärtusel  $x = 0$  lähendus  $y_n$  omandaks sama väärtuse, mis  $y$ -gi:  $y = y_n$ ; siis on  $v_n(0) = 0$  ja  $c_0 = 1$ . Kui nõuame edasi, et eriväärtusel  $x = 0$  ka  $y' = y_n'$ , siis saame  $v'(0) = 0$  ja  $c_1 = \frac{1}{2}$ . Kui nõuame edasi, et eriväärtusel  $x = 0$  oleks  $y'' = y_n''$ ,  $y''' = y_n'''$  jne.  $y^{(n)} = y_n^{(n)}$ , saame järjest määrata kõik kordajad  $c$ . Tee seda.

Kujuta funktsiooni  $y$  käik vahemikus  $-1 \leq x \leq +3$ .

Kujuta samas võrgus lähispolünoomide  $y_1, y_2, y_3, y_4$  käik vahemikus  $-2 \leq x \leq +2$ .

Mis ütleb joonis nende lähenduste headuse kohta?

## 10. Olgu

$$y = \sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}}.$$

Mõistame selle  $y$  all võrrandi  $y^2 - (1-x) = 0$  positiivset lahendit.

Anna selle funktsiooni esimesed 4 lähispolünoomi.

## 11. 10. Eelmises kahes ülesandes leidsime:

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4$$

ja 
$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4.$$

Valemid on seda täpsamad, mida väiksem on  $x$ . Miks? Olgu näiteks  $x < 0,1$ . Kui suure lisandi annab halvemal juhul 3. astme liige? — 4. astme liige?

Kui peenelt saab määrata  $\sqrt{1+x}$  ja  $\sqrt{1-x}$  valemite järgi

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \text{ ja } \sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$$

juhul, et  $x$  ei küüni 0,1-ni?

20. Määra viimati-antud valemite abil järgmised ruutjuured ja kontrolli saadused:

$$\sqrt{\frac{21}{20}} \quad \sqrt{1,07} \quad \sqrt{\frac{37}{40}} \quad \sqrt{0,92}.$$

12. Eelmises ülesandes näidatud võtet ruutjuurte määramiseks saab rakendada iga juurealuse puhul. Tuleb vaid esiotsa ruutjuur vastavalt teisendada. Järgmised näited selgitavad, kuidas seda teha:

$$\begin{aligned} \sqrt{65} &= \sqrt{64+1} = \sqrt{64\left(1+\frac{1}{64}\right)} = 8\sqrt{1+\frac{1}{64}}; \\ \sqrt{41} &= \sqrt{\frac{41 \cdot 25}{25}} = \frac{1}{5}\sqrt{1025} = \frac{1}{5}\sqrt{1024+1} = \\ &= \frac{1}{5}\sqrt{1024\left(1+\frac{1}{1024}\right)} = \frac{32}{5}\sqrt{1+\frac{1}{1024}}; \\ \sqrt{3} &= \sqrt{\frac{3 \cdot 16}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{48} = \frac{1}{4}\sqrt{49-1} = \frac{1}{4}\sqrt{49\left(1-\frac{1}{49}\right)} = \\ &= \frac{7}{4}\sqrt{1-\frac{1}{49}}. \end{aligned}$$

Sõnasta võte.

Arvuta siin antud kolm ruutjuurt ja kontrolli saadused.

Arvuta sama võtte abil

$$\sqrt{5}, \sqrt{13}, \sqrt{17}, \sqrt{23}.$$

13. 10. Olgu  $y = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$ .

Anna selle funktsiooni 3 esimest lähispolünoomi.

20. Rakenda 3. astme lähispolünoom

$$\sqrt[3]{345} \text{ ja } \sqrt[3]{2} \text{ arvutamiseks.}$$

Näpunäide.

$$\sqrt[3]{345} = \sqrt[3]{343+2} = \sqrt[3]{343(1+\frac{2}{343})} = 7\sqrt[3]{1+\frac{2}{343}}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2} &= \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 64}{64}} = \frac{1}{4} \sqrt[3]{128} = \frac{1}{4} \sqrt[3]{125+3} = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt[3]{125(1+\frac{3}{125})} = \frac{5}{4} \sqrt[3]{1+\frac{3}{125}}. \end{aligned}$$

30. Sõnasta üldine eeskiri  $\sqrt[3]{a}$  leidmiseks praegunäidatud viisil.

14. 10. Olgu

$$y = \sin x.$$

Anna selle funktsiooni 1., 2., 3., 4. ja 5. lähispolünoomid  $y_1, y_2, y_3, y_4$  ja  $y_5$ .

Kas polünoomid  $y_2$  ja  $y_4$  erinevad vastavalt polünoomidest  $y_1$  ja  $y_3$ ?

20. Kujuta mm-paberil ( $25 \times 25 \text{ cm}^2$ ) sin  $x$  käik vahemikus  $-2\pi \leq x \leq +2\pi$  ja samal joonisel ka sin  $x$  esimese lähispolünoomi käik. Sellest lähtudes kujuta  $y_3$  käik ja edasi  $y_5$  käik.

Missuguses vahemikus joonisel pole võimalik eraldada sin  $x$  ja  $y_1$  käigujooni? — sin  $x$  ja  $y_3$  käigujooni? — sin  $x$  ja  $y_5$  käigujooni?

3<sup>o</sup>. Kujuta uues koordinaatvõrgus, samas mõõtkavas mis varem inigi, vigade  $v_1(x)$ ,  $v_3(x)$  ja  $v_5(x)$  käigud.

Tarvilikud andmed selleks võta eelmiselt jooniselt.

15. 1<sup>o</sup>. Olgu

$$y = \cos x.$$

Anna selle funktsiooni 0., 1., 2., 3. ja 4. lähispolünoomid  $y_0$ ,  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  ja  $y_4$ .

Kas polünoomid  $y_1$  ja  $y_3$  erinevad vastavalt polünoomidest  $y_0$  ja  $y_2$ ?

2<sup>o</sup>. Kujuta mm-paberil ( $25 \times 25 \text{ cm}^2$ )  $\cos x$  käik vahemikus  $-2\pi \leq x \leq +2\pi$  ja samal joonisel ka  $\cos x$  lähispolünoomi  $y_0$  käik. Sellest lähtudes kujuta  $y_2$  käik ja edasi  $y_4$  käik.

Missuguses vahemikus joonisel pole võimalik eraldada  $\cos x$  ja  $y_0$  käigujooni? —  $\cos x$  ja  $y_4$  käigujooni?

## Peatükk V.

# Statistilise meetodi alged.

### Harjutis XVIII:

Nähtuse tõenäosuse mõiste.

1. 10. Võta mäng kaarte, sega nad hästi läbi, tõmba mõni kaart ja märgi tulemus. Pane tulnud kaart teiste sekka, sega kaardid uuesti läbi, tõmba kaart ja märgi tulemus. Korda katset samal viisil mõnikümmend korda.

Pöörame tähelepanu tulnud kaardi värvile. Kas on märgata mingit seaduspärasust musta ja punase kaardi esinemiste reas?

Pöörame tähelepanu kaardi pildile. Kas on märgata mingit seaduspärasust kuninga, emanda ja teiste kaartide esinemiste reas?

20. Võta 25-sendine raha, sea ta äärega lauale, pane ta pöörlema, oota, kuni ta pöörlemise lõppedes lauale langeb, ja märgi tulemus: vapp või kiri. Korda katset veel paarkümmend korda. Kas on märgata mingit korrapärasust vapi ja kirja esinemiste reas?

30. Võta täring, viska ta lauale ja märgi tulnud silmade arv. Korda katset mõnikümmend korda. Kas on märgata mingit reegli pärasust silmade 1, 2, 3, 4, 5 ja 6 esinemiste reas?

2. Olgu tegemist mingi katsega; kordame teda hulk kordi; järgneva saadud katseteseerias katsetulemused üksteisele reegli päratult, allumata mingile seadusele või korrale; sel puhul kirjutame katsetulemuse juhusemängu arvele.

10. Kas on võimalik ette öelda, missugune kaart just tuleb esile, kui hästi läbi segatud kaartide mängust võtta üks kaart?

Kas on võimalik ette öelda, missugune silmade arv just ilmub täringul tema 5., 8., 21., 99.,  $N$ -dal viskel?

Olgu vappkiri-mängu puhul teada esimese  $n$  katse tulemus. Kas on võimalik ette öelda, missuguse tulemuse annab  $(n + 1)$ -ne katse? — mingi muu kindla järjenumbriga katse?

20. Kana muneb aasta jooksul teatava hulga mune. Kas neil munadel on kõigil täpsalt sama kaal? Kas saab, teades esimese  $n$  muna kaalu, kindlasti ette öelda, missuguse kaaluga saab olema  $(n + 1)$ -ne muna? — mingi teine suurema järjenumbriga muna?

30. Mõõdame sammudega kooli ja kodu vahelise tee pikkust. Kordame seda mõõtmist mitmel korral. Kas jõuame igal juhul ühele ja samale tulemusele? Miks?

Kas on võimalik, teades  $n$  mõõtmise tulemust, ette öelda, missugune on mingi suurema järjenumbriga mõõtmise tulemus?

40. Täringu viskel tulev silmade arv, kana muna kaal ja kauguse mõõtmise tulemus on juhusest olenevad suurused. Anna uusi juhusest oleneva suuruse näiteid.

3. Korda vappkiri-mängu 10 korda; määra selles katseteseerias vapi esinemise sagedus  $a_1$  ja vapi esinemise relatiivne sagedus  $\frac{a_1}{10}$ . Pikenda katsete rida veel 10 katse võrra, määra vapi esinemise sagedus  $a_2$  nüüd juba 20 katses ja vastav relatiivne sagedus  $\frac{a_2}{20}$ . Jätka katsete rida ja määra vapi esinemise relatiivne sagedus järjest 30, 40, 50, ... 100 katses. Kujuta nende relatiivsete sageduste käik graafiliselt. Mida võiks joonise põhjal oletada vapi esinemise relatiivse sageduse kohta katseteseeria edaspidisel pikendamisel?

4. „Eesti Statistika“ andmeil on Eestis 1928. a. sündinud lapsi:

Maakond ühes sinna kuuluvate linnadega	Poeglapsi	Tütarlapsi
Viru	1495	1343
Järva	574	571
Harju	1565	1683
Lääne	748	702
Saare	586	586
Pärnu	857	808
Viljandi	664	640
Tartu	1596	1453
Valga	357	340
Võru	849	819
Petseri	930	898

Kui suur on neil andmeil poeglaste esinemise relatiivne sagedus vastsündinute hulgas Viru maakonnas? — Viru ja Järva maakonnas? — esimeses kolmes tabelis märgitud maakonnas? — esimeses neljas maakonnas? — viies? — kuues? — üheteistkümnes?

Kujuta leitud relatiivsete sageduste käik graafiliselt.

Nõutud väärtused anna nelja kohaga.

Mida võiks joonise põhjal oletada poeglaste esinemise relatiivse sageduse kohta vastsündinute registri edaspidisel pikendamisel (näit. Läti maakondi juurde võttes)?

5. Võta mõni eestikeelne kirjanduslik teos ja löö ta mõnel leheküljel lahti; võta sellel leheküljel 5 trükirida, loenda neis esinevate tähtede hulk ja määra selles hulgas esineva *a*-tähe sagedus.

Kui suur on *a*-tähe relatiivne sagedus võetud 5 reas?

Võta veel 5 rida juurde. Kui suur on *a*-tähe relatiivne sagedus võetud 10 reas? Määra edasi *a*-tähe relatiivne sagedus 15 reas; — 20 reas; — tervel leheküljel. Kujuta leitud *a*-tähe relatiivsed sagedused graafiliselt nende olenevuses võetud ridade arvust.

Kui suur on ümmarguselt  $a$ -tähe relatiivne sagedus eesti keeles?

Kuidas saaks nõutud arvu määrata ikka täpsamalt ja täpsamalt?

6. Määra kõrvu eelmises ülesandes leitud  $a$ -tähe relatiivse sagedusega eesti keeles ka veel  $h$ -tähe relatiivne sagedus.

Mis järgneb öeldust tähtede  $a$  ja  $h$  tarviliku tüüpide hulga kohta trükikoja ladumiskastis?

7. 10. Olgu tegemist pika võidusõiduteega. Olgu seal iga 10. kilomeeter märgitud suurema postiga, kõik teised kilomeetrid väiksemate postidega. Kui suur on suurte km-postide relatiivne sagedus? — väikeste km-postide relatiivne sagedus?

20. Eraldame kõigest km-postide hulgast osahulga, võttes sinna näit. 0., 2., 4. jne. km-posti. Kui suur on selles osahulgas suurte km-postide relatiivne sagedus?

30. Eraldame kõigest km-postidest osahulga, võttes sinna need, millel märgitud algarvulised km-te arvud. Kui suur on selles osahulgas suurte km-postide relatiivne sagedus?

40. Vastuste võrdlemine näitab, et suurte km-postide relatiivne sagedus oluliselt muutub, kui üle minna ühelt kindlalt osahulgalt teisele. See asjaolu on tingitud tõsiasiast, et väikesed ja suured km-postid vahelduvad kindla korra järgi. Põhjenda seda väidet.

8. 10. Võta mingi pikem täringuvisete seeria, näit. 100-viskeline seeria. Kas on märgata mingit korrapärasust „3 silma“ esinemistes? Kui suur on „3 silma“ esinemiste relatiivne sagedus?

20. Vali antud seeriast osaseeria, võttes sinna näit. ainult need silmaarvud, mis vastavad paarisarvulistele visetele. Kas selles osaseerias on

märgata mingit korrapärasust „3 silma“ esinemistes? Kui suur on selles osaseerias „3 silma“ esinemiste relatiivne sagedus?

3<sup>0</sup>. Samad küsimused osaseeria kohta, milles esinevad vaid algarvulise järjenumbriga katsed.

4<sup>0</sup>. Samad küsimused osaseeria kohta, milles esinevad vaid nende järjenumbritega katsed, mis saadud järjenumbrite loosimise teel.

5<sup>0</sup>. Kas jääb meie näites maksvaks „korrapärase nähtuse“ ka osaseeriade kohta? Kas jääb neis osaseeriais maksvaks „relatiivse sageduse püsivuse“ nähtus?

9. Ülesandes XVIII, 5 määrati *a*-tähe relatiivne sagedus, toimetades tähtede loendamist ridade kaupa. Tähe *a* sagedust saab aga ka teisiti määrata. Üks tee on järgmine: võta leht läbipaistvat paberit, joonista sellele hästi keeruline joon, aseta paber varemini-uuritud leheküljele ja loenda kõigi joonele langevate tähtede arv ja samale joonele langevate *a*-tähtede arv. Kas nõnda saadud *a*-tähe relatiivne sagedus erineb tunduvalt varemini-leitust?

Kas selle juhuslikult valitud joone kuju oluliselt mõjustab *a*-tähe relatiivse sageduse määramise tulemust?

Milles tuleb esile „*a*-tähe relatiivse sageduse püsivuse nähtus“ eestikeelses tekstis?

10. Kirglikud õnnemängijad on harilikult arvamusel, et on võimalik õnnemängul (täringumäng, ruletimäng jne.) piiramatult rikastuda, kui aga leida „mängusüsteem“, mille rakendamine viib järjekindlalt võidule. Millega on seletatav, et senini ükski esitatud loendamatuist „mängusüsteemest“ pole täitnud temale pandud lootusi?

11. Olgu tegemist katsega, mida põhimõtteliselt on võimalik korrata piiramatu arv kordi. (Niisugusteks „katseteks“ on näit. silmade arvu määramine täringuvisetel, sireliõite õielehekeste arvu loendamine, noorsõdu-

rite kasvu mõõtmine, vastsündinud laste kaalumine jne.). Olgu katse tulemuseks nähtus  $A$  või nähtus  $B$  või mõni muu, ja määraku juhuse katsetulemuse. Esinegu seerias, milles  $s$  katset, nähtus  $A$   $a$  korda; siis kujutab murd  $\frac{a}{s}$  nähtuse  $A$  relatiivset sagedust.

Loendamatud kogemused õnnemängude, mõõtmiste ja muude massiliste nähtuste alalt näitavad, et murd  $\frac{a}{s}$  küllalt suure  $s$  puhul omandab püsiva väärtuse, s. t. murru  $\frac{a}{s}$  väärtus ei muutu kuigi tunduvalt katsete arvu edaspidisel kasvamisel. Seda murru  $\frac{a}{s}$  püsivat väärtust nimetatakse nähtuse  $A$  tõenäosuseks.

Tõsiasi, et nähtuse relatiivne sagedus pikas katsete reas on ligikaudu olenematu katsete hulgast, nimetatakse „suurte arvude seaduseks“.

Tõenäosust, et kõnes-oleva katse tulemuseks osutub nähtus  $A$ , võiks defineerida kujul

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{a}{s} .$$

Sõnasta vastav definitsioon.

Just nagu iga eseme mõõteid, kaalu, temperatuuri ja teisi omadusi saab ikka määrata vaid ligikaudu, nõnda saab ka nähtuse tõenäosust leida ikka vaid ligikaudu. Miks?

12. Peenrale külitud 200 kurgiseemnerast idanes 185. Kui suur on kurgiseemne idanemisprotsent?

Mida võib oletada ülejäänud seemnetagavara idanemisvõime kohta? Kui suur on sellest tagavarast võetud seemnetera idanemise tõenäosus?

13. Redisepeenralt võeti prooviks 350 redist. Nende läbilõikamisel selgus, et neist 107 oli ussidest rikutud. Kui suur on tervete rediste protsent? Kui suur on tõenäosus, et peenralt vabalt võetud redis on söömiskõlblik? Mitu söömiskõlblikku redist võib oodata peenralt võetud 10 kimbus, kui igasse kimpu on pandud 8 redist?

14. Rahvaväekomisjon võttis teataval päeval 340 isikut noorsõduriteks vastu, kõik 21 aasta vanuses. Leia raamatu lõpul leiduva suremustabeli järgi, kui suur on 21-aastase mehe tõenäosus surra järgmise aasta vältel. Kui suur on oodatavate loomulikkude surmajuhtumite arv 340 noorsõduri peres järgmise aasta kestel?

15. Miks pole mingit kindlat mõtet ütlustel: „h o m s e, M u k d e n i a l l l ö ö d a v a l a h i n g u v ö i t m i s e t õ e n ä o s u s“, „tõenäosus, et õpilane Kuusk käesoleval kevadel õiendab küpsuseksami“, „tõenäosus, et Karu äri sel kuul jääb maksujõuetuks“, „tõenäosus, et õpetaja Säsk järgmisel aastal sureb“? Sõnasta eeldused, mis peavad olema täidetud, et üldse saaks rääkida nähtuse tõenäosusest.

### Harjutis XIX:

Tõenäosuste arvutamine juhtude loendamise teel.

1. Olgu tegemist hoolsalt valmistatud mängutäringuga. Viskame ta lauale. Pealmisel tahul võib täringul esile tulla kas 1 või 2 või 3 ... või 6 silma. Toimetame pika seeria sääraseid viskeid ja määrame iga silmade arvu sageduse. Katse näitab, et kõik silmade arvud 1, 2, 3, 4, 5 ja 6 ilmuvad selles seerias ligikaudu võrd-sagedasti, igaüks ümmarguselt ühel kuuendikul kõigist juhtudest. Näib loomulik olevat väikesed kõrvalekaldu-mised sellest arvust panna juhuse mängu arvele. Ütleme siis, et silmade 1, 2, 3, ... 6 esiletulekud on võrd-sagedad või võrdtõenäosed või võrdvõimalikud.

Täringut, mille puhul see tingimus täidetud, nimetame õigeks.

Kuidas toimetada täringu proovimist tema mängu-kõlblikkuse suhtes?

Kas proov annab absoluutselt maksva vastuse?

2. 1<sup>o</sup>. Olgu tegemist loterii urniga, milles on suurem arv loose, ütleme,  $n$  tükki. Olgu need loosid nummerdatud 1, 2, 3, ...  $n$ . Segame loosid läbi, võtame pimesi ühe neist, märgime ta numbri; paneme loosi tagasi, segame loosid läbi, võtame pimesi ühe neist, märgime ta numbri ja kordame katset samal viisil suur hulk kordi, näit.  $N$  korda. Senini korjatud kogemused näitavad, et sel puhul kõik loosid ilmuvad ligikaudu võrdsage d a s t i, iga loos ümmarguselt  $\frac{N}{n}$  korda. Näib loomulik olevat seletada väikesi kõrvalekaldumisi sellest arvust juhuse mänguga ja lugeda kõigi looside esiletulemisi võrdvõimalikkudeks.

2<sup>o</sup>. Olgu meie urnis  $m$  loosi, mis toovad võidu. Mitu korda ümmarguselt esineb võit seerias  $N$  loositõmbest? Kui suur on võidu relatiivne sagedus ses tõmmete seerias? Kui suur on tõenäosus  $p$ , et pimesi võetud loos toob võidu?

3<sup>o</sup>. Urnis on meil üldse  $n$  loosi, millest  $m$  toovad võidu. Kõiki võimalusi loosi võtta on  $n$ , võidule soodsaid võimalusi  $m$ . Sõnasta valemis

$$p = \frac{m}{n}$$

peituv eeskiri tõenäosuse  $p$  arvutamiseks, et pimesi võetud loos toob võidu.

3. Vandeseltsis on 15 meest ja 10 naist. Vandeseltsi otsuse täidesaatja määratakse loosiga. Kui suur on tõenäosus, et otsuse täidesaatmine langeb meesliikmele? — et otsuse täidesaatmine langeb naisliikmele?

4. Olgu tegemist loteriiga, milles iga loos toob võidu. Kui suur on tõenäosus, et võit langeb pimesi võetud loosile?

Kui suur on kindlasti esineva sündmuse tõenäosus? Kui suur on kindlasti mitte esineva sündmuse tõenäosus?

5. Viskame korraka kaks täringut. Kui suur on tõenäosus, et kummalgi neist esile tuleb 6 silma?

N ä p u n ä i d e. Kirjuta üles kõik võimalikud silmade kombinatsioonid.

6. Visatakse korraka 3 ühesugust raha. Kui suur on tõenäosus, et viskel ilmub 3 vappi? — 2 vappi ja 1 kiri? — 1 vapp ja 2 kirja? — 3 kirja?

Kui suur on kõigi nende tõenäosuste summa?

N ä p u n ä i d e. Kirjuta üles kõik võimalikud kombinatsioonid, milles võivad meie juhul esineda vapp ja kiri, lühendades sõna „vapp“ tähega *v* ja sõna „kiri“ tähega *k*.

7. Olgu olemas 5 kaarti, mis märgitud vastavalt tähtedega

A, J, K, L, O.

Kaardid segatakse ja laotakse lauale üksteise järele. Kui suur on tõenäosus, et esile tuleb nimi

„K A L J O“?

8. On olemas 6 kaarti, mis märgitud vastavalt tähtedega

E, E, E, P, R, T.

Kaardid segatakse ja laotakse lauale ritta üksteise järele. Kui suur on tõenäosus, et esile tuleb nimi

„P E E T E R“?

9. Viskame 25-sendise raha kaks korda järgemööda lauale. Kui suur on tõenäosus, et vähemalt üks kord esile tuleb vapp?

10. Nähtuse tõenäosust, mis määratud mõeldavate võrdvõimalikkude juhtude loendamise teel, nimetatakse nähtuse teoreetiliseks tõenäosuseks.

Nähtuse tõenäosust, mis määratud nähtuse relatiivse sagedusena pikkade katseridade alusel, nimetatakse n ä h t u s e s t a t i s t i l i s e k s t õ e n ä o s u s e k s.

10. B u f f o n a. 1777 korraldas 4040 katset rahaga: 2048 korda ilmus vapp, 1992 korda kiri. Anna vapi ja kirja relatiivsed sagedused peenelt 0,001-ni.

Mille võrra vapi esiletulemise statistiline tõenäosus erineb teoreetilisest tõenäosusest?

20. Möödunud sajandi lõpul Westergaard korraldas 10 000 tõmmet urnist, milles oli võrdselt valgeid ja musti kuule. Iga tulnud kuul pandi enne uut katset urni tagasi ning segati urni sisu põhjalikult läbi.

Valge kuuli tuleku statistiline tõenäosus osutus 0,5011. Mille võrra see arv erineb valge kuuli tuleku teoreetilisest tõenäosusest?

11. Suuremas osas praktiliselt tähtsaist juhtumeist saab nähtuse tõenäosust määrata ainult statistilisel teel. See on nõnda näiteks rahekahju tõenäosusega mingis maakonnas, õnnetu surma saamise tõenäosusega automatkal jne. Miks pole võimalik neil juhtudel rääkida teoreetilisest tõenäosusest?

## Harjutis XX:

Tõenäosuste liitmis- ja korrutamise-  
laused.

1. Suremustabelist näeme, et  $l_x$  mehest, kelle vanadus on  $x$  aastat, elab ühe aasta järel veel  $l_{x+1}$  meest. Kui palju neist  $l_x$  mehest sureb  $(x+1)$ . aasta vältel? Märgime nende viimaste meeste arvu  $d_x$ .

Kui suur on tõenäosus, et  $x$  aastat vana mees on ühe aasta pärast veel elus? — on ühe aasta pärast juba surnud?

Kui suur on mõlema tõenäosuse summa?

2. Olgu urnis  $m$  ühesugust musta kuuli ja  $v$  täpsalt samasugust valget kuuli. Segame nad hästi läbi ja võtame pimesi ühe kuuli. Olgu oodatavaks sündmuseks valge kuuli tulek. Siis on musta kuuli tulek selle vastassündmus. Näita, et sündmuse ja vastassündmuse tõenäosuste summa on 1.

3. Olgu kirja kaotsimineku tõenäosus meie postiasutistes  $a$ . Kui suur on tõenäosus, et kiri adressaadile kätte jõuab?

4. Olgu tegemist mõne õnnemänguga. Lõppegu mäng eranditult kas võidu või kaotusega. Olgu tõenäosus mängu võita 0,6. Kui suur on tõenäosus mängu kaotada?

5. Olgu urnis  $v$  valget,  $m$  musta ja  $p$  punast kuuli, mis muus ei erine kui värvis. Kuulid segatakse läbi ja võetakse pimesi üks neist. Kui suur on tõenäosus, et tõmbe tulemuseks on valge kuul? — et tõmbe tulemuseks on must kuul? — et tõmbe tulemuseks on  $k$  a s valge v õ i must kuul?

Kuidas on kolm leitud tõenäosust seotud üksteisega?

6. Kallihinnaline ese loositakse välja heategevuse otstarbeks. Looside arv on  $l$ . Mees ostab endale  $m$  loosi ja oma naisele  $n$  loosi. Kui suur on tõenäosus, et võit langeb abielupaariile, s. t. võit langeb kas mehele või naisele?

7. Raha visatakse järjestikku kaks korda lauale. Kui suur on tõenäosus, et vapp tuleb esile kas 1. või 2. viskel?

Kas saab lahendada meie ülesannet vapi ja kirja esiletulemistele tõenäosuste liitmise teel? Miks? Kas vapi esiletulek 1. ja 2. viskel on teineteist eemaldavad sündmused?

8. Olgu tegemist katsega, mille tulemus võib olla kas sündmus  $S_1$  või sündmus  $S_2$  või mitte mingi neist. Olgu sündmused  $S_1$  ja  $S_2$  teineteist eemaldavad sündmused, nii et nad ühiselt esineda ei saa.

Olgu  $a$  juhtu soodsad selleks, et tuleb esile  $S_1$ , kuid ei tule esile  $S_2$ .

Olgu  $b$  juhtu soodsad selleks, et ei tule esile  $S_1$  ja tuleb esile  $S_2$ .

Olgu  $c$  juhtu soodsad selleks, et ei tule esile  $S_1$  ega tule esile  $S_2$ .

Näita, et tõenäosus, et esile tuleb kas sündmus  $S_1$  või  $S_2$ , on võrdne nende tõenäosuste summaga, et esile tuleb  $S_1$  ja esile tuleb  $S_2$ ; sümbolites:

$$p = p_1 + p_2.$$

Lause kannab tõenäosuste liitmislause nime.

9. Olgu antud kaks mängu kaarte, milles kummaski on 52 kaarti. Kumbki mäng segatakse hästi läbi ja tõmmatakse pimesi üks kaart ühest ja üks kaart teisest mängust. Kui suur on tõenäosus, et tõmbel nii 1. kui ka 2. mängust esile tuleb kuningas?

Kuidas avaldub see tõenäosus nende tõenäosuste kaudu, et kuningas tuleb 1. mängust ja kuningas tuleb 2. mängust?

Kas viimatinimetatud sündmused on teineteisest olenevad?

Näpunäide. Mitu kaardipaari on võimalik moodustada, võttes ühe kaardi 1. ja ühe kaardi 2. mängust? Mitu kuningapaari on võimalik moodustada, võttes ühe kuninga 1. mängust ja ühe kuninga 2. mängust?

10. Olgu antud kaks urni; olgu esimeses  $v_1$  valget ja  $m_1$  musta kuuli ja teises  $v_2$  valget ja  $m_2$  musta kuuli. Võtame pimesi ühe kuuli ühest urnist ja ühe kuuli teisest. Kui suur on tõenäosus, et 1. urnist tulnud kuul on valge? — et 2. urnist tulnud kuul on valge? — et nii 1. kui ka 2. urnist tulnud kuul on valge?

Märgime tõenäosused, et 1. urnist tuleb valge kuul, et 2. urnist tuleb valge kuul ja et nii 1. kui ka 2. urnist tuleb valge kuul vastavalt  $p(S_1)$ ,  $p(S_2)$  ja  $p(S)$ .

Näita, et

$$p(S) = p(S_1) \cdot p(S_2).$$

Sõnasta viimases võrduses peituv tõenäosuste korrutamislause.

11. Eksam koosneb kolmest katsest: emakeeles, võimlemises ja matemaatikas. Võib ette arvata, et esimese õiendab rahuldavalt 90% katsutavaist, teise 80% ja kolmanda 60%. Mitu % katsutavaist arvatavasti õiendab rahuldavalt kõik 3 katset?

12. Urnis on  $v$  valget ja  $m$  musta kuuli. Urnist võetakse pimesi kuul ja märgitakse tema värv. Kuul pannakse tagasi urni, seal olevad kuulid segatakse läbi ja võetakse pimesi uuesti kuul. Kui suur on tõenäosus, et nii 1. kui ka 2. katsel tulnud kuul on valge?

13. 1<sup>o</sup>. Kui suur on tõenäosus, et vappkiri-mänguseerias 10 korda järgemööda esile tuleb vapp?

2<sup>o</sup>. Vappkiri-mängus on vapp esile tulnud järjest 9 korda. Kui suur on tõenäosus, et vapp esile tuleb ka veel järgmisel 10. viskel?

Põhjenda oma vastuseid üksikasjaliselt.

14. Kui suur on tõenäosus saada kahe täringu viskamisel  $n$  korda järgemööda ikka 7 silma?

Kui suur on tõenäosus, et selles katsetereas 7 silma ei esine ainustki korda?

15. Loteriis on 90 loosi, millest 5 toovad võidu. Kui suur on tõenäosus,

1<sup>o</sup>. et ühele ostetud loosile parajasti langeb võit?

2<sup>o</sup>. et kahest ostetud loosist kas esimene või teine toob võidu?

3<sup>o</sup>. et nii esimene kui teine loosidest toob võidu?

4<sup>o</sup>. et esimesele langeb võit, teisele mitte?

5<sup>o</sup>. et vähemalt ühele kahest loosist langeb võit?

16. Kahest sõbrast on üks 33, teine 39 aastat vana.

Kui suur on tõenäosus,

1<sup>o</sup>. et 10 aasta pärast on esimene neist veel elus?

2<sup>o</sup>. — on teine neist veel elus?

3<sup>o</sup>. — on mõlemad, s. t. nii üks kui teine elus?

4<sup>o</sup>. — on üks neist surnud, teine elus?

N ä p u n ä i d e. Kasuta suremustabelit.

17. Olgu tegemist kolme sama lennu ülikoolilõpetajaga, kelle ead on 20, 24 ja 29 aastat. Kui suur on tõenäosus, et vähemalt üks neist on veel elus 30 aasta järel?

Näpunäide. Määra suremustabelist iga isiku jaoks surma tõenäosus, siis tõenäosus, et nad kõik surnud on 30 aasta pärast, ja siit edasi tõenäosus, et nad veel kõik surnud pole.

18. Tehtagu 25-sendise rahaga  $n$  viset. Kui suur on tõenäosus, et vähemalt üks kord selles seerias esineb vapp?

Näpunäide. Kui suur on tõenäosus, et selles seerias vappi ei esine?

19. Mängitakse vappkiri-mängu. Mitu viset vähemalt peab endale nõutama, et saaks tõenäosusega suuremaga kui  $\frac{1}{2}$  oodata vapi esinemist mängitud seerias vähemalt üks kord?

Näpunäide. Märgi nõutud arv tähega  $n$  ja kasuta eelmise ülesande lahendit.

20. Mängitakse täringuga. Mitu viset vähemalt peab endale nõutama, et saaks tõenäosusega suuremaga kui  $\frac{1}{2}$  oodata 6 silma esinemist mängitud seerias vähemalt üks kord? (Chevalier de Méré Pascal'ile a. 1654.)

## Harjutis XXI:

Kindlustusmatemaatika alged.

1. Postipakki võib saata kadumise vastu kindlustult. Viimasel korral võtab post paki pealt teatavat kindlustusmaksu, kohustudes paki väärtust tasuma, kui pakk peaks kaduma.

Näidaku pika aastaterea jooksul korjatud statistilised andmed, et saadetud postipakkidest (varguse tõttu, õnnetuse tõttu ja teadmata põhjustel) kaduma läheb  $m$  ‰ pakkide koguarvust. Oletame lihtsuse mõttes, et kõik postipakid on võrdkallilt hinnatud. Kui kõrge vähemalt

tuleks siis määrata postipaki kindlustusmaks, seda maksu paki väärtuse promillides arvates?

Näita, tuginedes suurte arvude seadusele, et ka postipakkide erinevate väärtuste puhul kindlustusmaksu neilt tuleks võtta endise promillide määra kohaselt.

2. Näidaku aastaid toimunud vaatlused, et Läänemeresel ristlevaist purjekaist aasta kestel hukub tormi käes  $n$  ‰ nende sõidukite koguarvust. Kui kõrge vähemalt peaks olema purjeka hukkumise vastu kindlustamiseks tasutav aastamaks (preemia<sup>1</sup>), seda maksu purjeka väärtuse promillides arvates?

Millele toetad oma väidet?

3. Näidaku pikema aja jooksul korjatud andmed, et Tallinnas aasta jooksul mitmesugustel põhjustel (õnnetusjuhtumite tõttu, sissemurdmise puhul või ulakuse tagajärjel) puruneb keskmiselt  $p$  ‰ äride vaateaknaid. Kui kõrge vähemalt peaks määratama vaateakende purunemise vastu kindlustamiseks tasutav aastamaks, seda maksu kindlustatava eseme hinna promillides arvates? Põhjenda oma väidet üksikasjaliselt.

4. 1<sup>o</sup>. Peaaegu iga aasta kannatavad Tartu linnas Emajõe madalamatel kallastel asetsevad mõnedkümnend majad liigvee (üleujutamise) all. Veidi kõrgemal asetsevate majadeni ei ulatu aga vesi iialgi. Kas on mõeldav, et Tartu linnas kunagi asutatakse liigvee vastu kindlustamise selts? Miks ei?

2<sup>o</sup>. Miks oleks lootusetu asutada 5—6 naabervallas rahe vastu kindlustamise seltsi, see aga oleks hästi mõeldav ülemaalises ulatuses?

---

<sup>1</sup> Olgu tähendatud, et sõna „preemia“ sageli tarvitatakse vales mõttes, nimelt kindlustusvõtjale makstava summa mõttes. Kindlustusalal mõistetakse „preemia“ all eranditult summat, mida kindlustusvõtja tasub kindlustusseltsile aasta või poolaasta või kuu viisi.

30. Laulupeo või näituse kindlustamist vihma vastu saab võtta ainult „õnnemänguna“ kindlustusandja poolt. Miks?

5. Kindlustusselts avab murdvarguse vastu kindlustamise osakonna. Kuidas leitakse aastamaksu alammäär, mida tuleb võtta varanduse kindlustamisel murdvarguse vastu?

6. 10. Kasvagu teatav kapital  $k$  krooni liitprotsendilisel. Moodustagu aastakasu  $p$  protsenti tulutoova kapitali suurusel. Missuguse suuruseni  $K$  kasvab kapital  $n$  da aasta lõpuks?

Missuguse kuju omandab leitud valem, kui murdu  $\frac{p}{100}$  märkida tähega  $i$ ?

20. Missuguse kapitali  $k$  krooni peab praegu panema hoiule liitprotsendilisel, et  $n$  aasta pärast ta moodustaks ühiselt toodud tuluga summa  $K$  krooni?

Missuguse kuju omandab viimane valem, kui suurust  $(1 + i)^{-1}$  märkida tähega  $v$ ?

30. Teatav kapital kasvab liitprotsendilisel, kandes tulu  $p\%$  aastas;  $n$  aasta pärast ta on  $K$  krooni suur. Missugune on kapitali praegune väärtus?

Missugune väärtus oli tal  $m$  aastat tagasi?

Suurust  $(1 + i)^{-1}$  ehk  $(1 + \frac{p}{100})^{-1}$  nimetatakse diskontivaks teguriks ja tähistatakse  $v$ .

Avalda ülalleitud kapitali praegune väärtus  $v$  funktsioonina.

Näide. Olgu  $p = 4$ . Arvuta suurused  $v^2, v^3, v^4$  ja  $v^{-1}, v^{-2}, v^{-3}, v^{-4}$  viie kohaga. Võrdle tulemusi  $v$  astmete väärtustega, mis leitud logaritmidel abil.

7. Suremustabeliks nimetatakse tabelit, mis näitab, kui palju on veel elus  $l_x$  isikust  $x$ -aastases eas

1, 2, 3... aastat hiljem. Seda tabelit võiks kirjutada näit. nõnda:

...	20	21	22	...	$x$	$x + 1$	$x + 2$	...	$\omega$	$\omega + 1$
...	$l_{20}$	$l_{21}$	$l_{22}$	...	$l_x$	$l_{x+1}$	$l_{x+2}$	...	$l_\omega$	0

Siin tähendab  $\omega + 1$  iga, milleks kõik tabelisse võetud isikud on surnud. Harilikult võetakse  $\omega$ -ks arv 100.

Kas on  $l_x$ -arvu  $x$  funktsioon? Miks?

Kui suur on  $l_{\omega+1}$ ,  $l_{\omega+2}$ ,  $l_{\omega+3}$  jne.?

Kas on  $l_x$  kasvav või vähenev  $x$ -i funktsioon?

8. P. S. Laplace (1749—1827) pani ette koostada suremustabelit järgmisel teel: võtame näit. 10 000 samal aastal sündinut, jälgime nende elukäiku surmani, kustutame oma nimestikust iga surnu ja loendame iga aasta lõpuks veel elusolevad.

Kui palju aastaid nõuaks suremustabeli koostamine seletatud teel?

Kas säärane suremustabel näitaks meile inimeste suremuskorda, mis praegu valitseb?

Kas praeguse aja elava liiklemise ja kohast kohale rändamise puhul üldse oleks mõeldav 10 000 inimese elukäigu pidev jälgimine?

Kas Laplace'i ettepanek on tehniliselt läbiviidav?

9. Tegelik suremustabeli koostamine toimub sel teel, et statistiliselt määratakse „tõenäosus  $q_x$  surra eas  $x$  ja  $x + 1$  aasta vahel“ ja arvudest  $q_x$  leitakse tõenäosus  $p_x$ , et  $x$ -aastane inimene elab ka veel  $x + 1$  aasta vanuseks. Edasi võetakse vabalt arv  $l_a$ , mis tähendab mingit suuremat arvu (näit. 10 000) inimesi, eas  $a$  aastat, ja tuletatakse arvude  $p_a$ ,  $p_{a+1}$ ,  $p_{a+2}$ , ... abil järjest arvud

$$l_{a+1}, l_{a+2}, l_{a+3}, \dots, l_\omega.$$

Anna valem  $p_x$  määramiseks, kui  $q_x$  teada.

Anna valemid  $l_{a+1}$ ,  $l_{a+2}$ ,  $l_{a+3}$ , ...  $l_\omega$  määramiseks.

Missugused paremused on suremustabeli kirjeldatud koostamisviisil võrreldes eelmises ülesandes käsitletud võttega?

Eelmärkus. Kõik allpool järgnevad elukindlustusülesanded lahenevad hõlpsasti, kui tugineda järgmistele oletustele:

a) Kindlustuslepingu sõlmib mitte üks ainus  $x$  aastat vana kindlustusvõtja, vaid iga  $l_x$  suremustabelis seisvatest isikutest (kindlustusvõtjate fiktiivühing);

b) igal ajal on kindlustusvõtjate fiktiivühingu ja kindlustusseltsi kohustised tasakaalus.

Võrdlusajaks on kohane võtta  $l_x$  isiku ühist sündimisaeg a.

Parema ülevaate saamiseks maksude jadast on kohane abiks võtta püstsihis aja telg, aastamärkidega  $0, 1, 2, \dots, x, x+1, x+2, \dots, \omega$ .

Nende märkide vastu kirjutatakse ühes tulbas õiendatavad maksud, teises nende maksude väärtus kindlustatute sündimisajal, kolmandas kindlustusseltsi kohustised ja neljandas nende kohustiste koguväärtus kindlustusvõtjate sündimisajal.

10. 1<sup>o</sup>. Olgu tegemist  $l_x$  inimesega  $x$ -aastases eas. Maksku igauks neist kindlustusseltsile 1 kroon. Kui suur on kogu sissemaks kindlustusseltsile?

Kui suur on selle sissemaksu väärtus nende  $l_x$  inimese sündimisajal?

Korrutist  $l_x v^x$  tähistatakse  $D_x$ . Selle  $D_x$  väärtused leiduvad protsentmäära  $p=4$  puhul suremustabeli 4. tulbas.

2<sup>o</sup>. Olgu tegemist  $l_x$  inimesega  $x$ -aastases eas. Maksku igauks neist kindlustusseltsile 1 kroon otsekohe ja samuti edasi iga-aastaselt ette, kuni surmani. Kui suur on kogu sissemakstud summa? Kui suur on selle summa väärtus nende  $l_x$  inimese sündimisajal?

Summat  $D_x + D_{x+1} + \dots + D_\omega$  märgitakse lühemalt  $N_x$ . Selle  $N_x$  väärtused leiduvad suremustabeli 5. tulbas.

11. 1<sup>o</sup>. Kindlustusseltsi tegevusaastal sureb  $d_x$  inimest  $x$ -aastases eas. Olgu igauks neist kindlustanud oma

pärijaile summa 1 kroon. Kui suur on kindlustusseltsi kogukohustis nende pärijate vastu? Kui suur on selle kohustise väärtus nende  $d_x$  surnute sündimisajal, kui eeldada, et kindlustusselts õiendab oma kohustise kindlustatu suremisaasta lõpul?

Korrutist  $d_x v^{x+1}$  tähistatakse  $C_x$ . Selle  $C_x$  väärtused leiduvad suremustabeli 6. tulbas.

2<sup>o</sup>. Igaüks  $l_x$  isikust, eas  $x$  aastat, kindlustab oma surma puhuks oma pärijaile 1 krooni. Kui suur on kindlustusseltsi kogukohustis ja selle kohustise väärtus nende isikute sündimisajal?

Summat  $C_x + C_{x+1} + \dots + C_\omega$  märgitakse  $M_x$ . Selle  $M_x$  väärtused leiduvad suremustabeli 7. tulbas.

12. 1<sup>o</sup>. Kindlustusselts maksab  $x$  aastat vanale  $l_x$  isikule surmani iga aasta alul igapähele 1 kroon. Kui suur on seltsi kogukohustis ja selle kohustise väärtus nende isikute sündimisajal?

2<sup>o</sup>.  $l_x$  isikut  $x$ -aasta vanuses on kindlustanud endile iga-aastase 1-kroonise pajuki alates  $(x+n)$ -dast aastast surmani. Kui suur on kindlustusseltsi kogukohustis ja selle kohustise väärtus nende isikute sündimisajal?

3<sup>o</sup>.  $l_x$  isikut  $x$  aasta vanuses on kindlustanud endile iga-aastase 1-kroonise pajuki, mille maksmine kohe algab ja  $n$  aasta pärast lõpeb. Kui suur on kindlustusseltsi kogukohustis ja selle väärtus nende isikute sündimisajal?

13. Olgu tegemist  $x$  aastat vana terve isikuga. Misuguse ühekordse maksu  $E$  krooni ta peab kohe õiendama kindlustusseltsile, et tema ise või surma korral pärijad seltsilt  $n$  aasta möödumisel saaksid ühekordse toetuse 1 krooni suuruses? —  $s$  krooni suuruses?

N ä p u n ä i d e. Eelda, et tegemist on fiktiivühinguga  $l_x$  kindlustajast.

14. Missuguse ühekordse maksu  $A$  peab tasuma  $x$  aastat vana isik, et surma puhuks kindlustada oma pärijaile 1 krooni? —  $s$  krooni?

N ä p u n ä i d e. Eelda, et tegemist on fiktiivühinguga  $l_x$  kindlustajast.

15. Olgu tegemist  $x$  aastat vana isikuga. Missuguse ühekordse maksu  $E$  ta peaks tasuma, et saada kindlustusseltsilt eluaegselt pajukit 1 krooni suuruses aastas?

16. Kui suure aastase sissemaksu (p r e e m i a)  $P$  peab  $x$ -aastane isik õiendama kindlustusseltsile, et kindlustada oma pärijaile surma korraks  $K$  krooni?

17. 38-aastane isik maksab aastas 60 krooni preemia oma pere aineliseks kindlustuseks oma surma juhuks. Kui suure ühekordse preemiaga võiks asendada iga-aastasi makse?

18. 36-aastane mees kindlustab oma surma juhuks perele 10 000 krooni. Kui suur aastapreemia tuleb tal maksta?

Kui suure ühekordse maksuga ta võiks asendada oma iga-aastase preemia maksmise?

19. Keegi maksab kindlustusseltsile 28 aasta vanuselt kr. 2000, 5 aasta pärast veel kr. 1500 ja järgmise 5 aasta pärast veel kr. 1000. Kui suur summa oleks tema pärijaile kindlustatud surma juhuks?

20. Isa kindlustab oma 20-aastasele tütrele oma surma juhuks iga-aastase toetussumma, mida tuleb tasuda tütre surmani. Kui suur on see summa, kui kindlustuslepingu sõlmimisel isa on 50 aastat vana ja ta kavatseb oma surmani tasuda iga aasta preemia kr. 250?

21. 40-aastane pereisa kohustub maksuma kindlustusseltsile ellujäämisel 15 aasta jooksul, muidu aga surmani, preemiat 250 krooni aastas. Kui suure summa saab kindlustusselts maksta perele isa surma puhul?

22. Keegi 40-aastases eas maksab kindlustusseltsile summa 5000 krooni tingimusega, et selts temale arvates 55. eluaastast 15 aasta jooksul maksaks kindla aasta-pajuki. Kui suur see on?

23. Missuguse aastamaksu peab maksma matusekassale 40-, 45-, 50-, 55- ja 60-aastane isik, et kindlustada oma surma korraks matusekulud 200 krooni suuruses?

### Harjutis XXII:

Statistilise rea keskvärtusi ja hajumismõõte.

1. 1<sup>o</sup>. Suuremate loteriide loosimisel määratakse loosiga kõige pealt võidu suurus (kr. 10, 50, 100, ...), siis alles pileti number, millele see võit langeb. Olgu tulnud võidu suurused järjest kr. 10, 50, 10, 10, 100, 10 000, 250, 10, ... Me ütleme siis, et loosimisel tulev võit on juhusest olenev suurus. Selle väärtused 10, 50, 10, 10, 100, ... moodustavad statistilise rea.

2<sup>o</sup>. Möödunud nädala päevadel puudus klassis õpilasi  
6, 1, 4, 0, 2, 1.

Need arvud moodustavad statistilise rea. Miks?

3<sup>o</sup>. Mõõdame sammudega kauguse kodust kooli. Kordame seda iga päev terve kuu jooksul. Mõõtmistulemused moodustavad statistilise rea. Miks?

4<sup>o</sup>. Anna 5 uut statistilise rea näidet.

2. 1<sup>o</sup>. Olgu tegemist statistilise reaga, milles pole võrdseid liikmeid, näit. reaga

2, 7, 6, 1, 3, 9, 10, 4, 11.

Korraldades need arvud suuruse järgi

1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11,

näeme, et väiksemaid arvust 6 on sama palju liikmeid kui suuremaid temast. Arv 6 on meie reas mediaanväärtuseks.

2<sup>o</sup>. Olgu tegemist reaga

$$4, 9, 3, 7, 2, 10, 11, 8.$$

Vahemik arvust 7 arvuni 8 on meie reas *mediaanvahemik*: kui selles võtame mingi väärtuse, näit. 7,2, siis on sama palju väiksemaid sellest kui temast suuremaid.

3<sup>o</sup>. Üldista eelmist mõttekäiku ja anna mediaanväärtuse ja mediaanvahemiku definitsioon ning võte nende määramiseks.

4<sup>o</sup>. Oletame, et statistilises reas elemendid on järjestatud suuruse järgi:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n;$$

esinegu nad vastavalt sagedustega

$$f_1, f_2, f_3, \dots, f_{n-1}, f_n.$$

Sel puhul määrame rea mediaani järgmiselt: moodustame summa  $f_1 + f_2 + \dots + f_n$ , võtame selle summa poole  $f$ , moodustame järjest summad  $f_1 + f_2$ ,  $f_1 + f_2 + f_3$ , ... kuni jõuame summani  $f_1 + f_2 + \dots + f_k$ , mis ületab  $f$ . Siis on  $x_{k-1}$  mediaanväärtus, või vahemik  $x_{k-1}$  kuni  $x_k$  mediaanvahemik.

3. Võta mingi statistiline rida (näit. riigi kulud aastail 1920—1930, sademetehulgad möödunud kuu päevadel, oma klassi õpilaste kaalud jne.) ja määra rea mediaanväärtus või mediaanvahemik.

4. Määra suremustabeli järgi inimese elupikkuse mediaanväärtus ehk inimese nn. tõenäone eluiga. Anna selle arvu definitsioon.

5. Olgu  $a$  arv, mis võetud selleks, et ümmarguselt kujutada statistilise rea arve:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n.$$

Mingi  $x$ -dest, näit.  $x_i$ , erineb sellest arvust  $a$  hälbe võrra, või, absoluutselt võetult,

$$a - x_i$$

$$| a - x_i |$$

võrra.

On arusaadav, et arv  $a$  kujutab igat  $x$ -i seda paremini, mida väiksem on hälbe absoluutväärtus  $|a - x|$ ; arv  $a$  kujutab  $x$ -de kogu seda paremini, mida väiksem on nende absoluutväärtuste summa:

$$S = |a - x_1| + |a - x_2| + \dots + |a - x_n| .$$

See summa iseloomustab  $x$ -i väärtustekogu hajumist väärtuse  $a$  ümber. Selgita seda graafiliselt.

Numbriline näide. On antud kaks statistilist rida:

9, 7, 12, 10, 6, 14, 13  
ja 10, 6, 15, 19, 2, 5, 14.

Mõlema rea ulatus (liikmete arv) on sama.

Esitage igat rida ümmarguselt tema mediaaniga. Kui suur see on ühel ja teisel juhul? Missugusel real on suurem hajumine mediaani suhtes? Kujuta kummagi rea andmed graafiliselt kahel rööbikul teljel.

6. Olgu tegemist kahe statistilise reaga, mille ulatused erinevad:

$$x_1, x_2, x_3, \dots x_n$$

$$y_1, y_2, y_3, \dots y_m .$$

Olgu nende mediaanväärtused vastavalt  $a$  ja  $b$ . Et võrrelda nende liikmete hajumisi, määrame iga rea jaoks lineaarse hajumismõõdu:

$$\frac{|a - x_1| + |a - x_2| + \dots + |a - x_n|}{n}$$

ja

$$\frac{|b - y_1| + |b - y_2| + \dots + |b - y_m|}{m} .$$

Mida näitab lineaarne hajumismõõt?

Näide:

$x$ -rida: 2, 6, 7, 3, 8, 9, 4, 5, 10, 11, 12 ;

$y$ -rida: 12, 0, 6, 7, 15.

Määra lineaarsed hajumismõõdud.

7. Olgu antud statistiline rida:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n.$$

Tema liikmete hajumismõõtu võib määrata iga arvu  $A$  suhtes. Näita, et lineaarne hajumismõõt omandab minimaalse väärtuse arvu  $A$  ühtumisel rea mediaanväärtusega  $a$ .

Näpunäide. Kujuta  $x$ -d kasvavas järjekorras  $x$ -teljel ja uuri hajumismõõdu muutumist  $a$  kasvades väärtustelt allapoole väiksemat  $x$ -i väärtustele ülespoole suuremat  $x$ -i.

8. 10. Olgu tegemist loteriiga, milles

$f_0$  piletit toob võidu 0 krooni

$f_1$  „ „ „  $v_1$  „

$f_2$  „ „ „  $v_2$  „

.....

$f_n$  „ „ „  $v_n$  krooni.

Olgu kõigi piletite arv  $N$ . Näita, et võidu aritmeetiline keskmine ehk võidu keskmine väärtus  $\bar{v}$  avaldub võidu suuruste 0,  $v_1$ ,  $v_2$ , ...  $v_n$  ja nende esiletulemist tõenäosuste  $p_0$ ,  $p_1$ ,  $p_2$ , ...  $p_n$  kaudu kujul:

$$\bar{v} = 0 \cdot p_0 + v_1 \cdot p_1 + v_2 \cdot p_2 + \dots + v_n \cdot p_n.$$

20. Olgu klassis  $N$  õpilast. Nende sportlikkude võimete katsumisel on saanud  $f_1$  õpilast  $v_1$  punkti igaüks,  $f_2$  õpilast  $v_2$  punkti, ...  $f_n$  õpilast  $v_n$  punkti.

Kui suur on õpilase saavutatud keskmine punktide arv  $\bar{v}$ ?

Avalda see arv punktide  $v_1$ ,  $v_2$ , ...  $v_n$  relatiivsete sageduste  $p_1$ ,  $p_2$ , ...  $p_n$  kaudu.

30. Olgu  $x$  suurus, mille väärtused määrab juhus. Olgu nende väärtuste

$$x_1, x_2, x_3, \dots x_n$$

tõenäosused vastavalt

$$p_1, p_2, p_3, \dots p_n.$$

Avalda  $x$ -de keskmine väärtus  $\bar{x}$ .

9. Olgu antud kaks kohta soisel maal ja nõutagu nende vahelist kaugust. Olgu mõõteriistaks näit. meeter-sirkel. Kaugust korduvalt mõõtes leiame üldiselt lahku-minevad andmed, näiteks

$$1246, 1255, 1239, 1242, 1258.$$

Missugune on kauguse tõeline väärtus, seda meie ei tea ega saagi teada. Miks?

Kauguse arvatav väärtus peitub nähtavasti 1239 ja 1258 meetri vahel. Temaks võetakse harilikult mõõtesaaduste keskmine. Kui suur on see meie korral?

Olgu sama kauguse mõõtmisel mõõtepaelaga saadud arvud:

$$1249, 1248, 1245, 1250, 1248.$$

Kui suur on kauguse arvatav väärtus nende mõõtesaaduste põhjal? Kujuta mõlema mõõtmisterea andmed samal teljel (ära jättes 1200): 1. rea andmed ja nende keskmine ülespoole joonistatud kriipsukeste abil, 2. rea andmed ja nende keskmine allapoole joonistatud kriipsukeste abil. Missugune kahest mõõtmistereast näitab paremat mõõtesaaduste kokkukõla? — suuremat mõõtesaaduste hajumist, seda hajumist mõõtesaaduste keskmise suhtes arvates?

10. Olgu  $x$  suurus, mille väärtused määrab juhus. Olgu  $x_1, x_2, \dots x_n$  rühm suuruse  $x$  eriväärtusi ja  $a$  mingi arv.  $x$ -i väärtuste hälbed, arvates sellest  $a$ , on siis

$$a - x_1, a - x_2, \dots a - x_n.$$

Hälvete ruutude summa on

$$(a - x_1)^2 + (a - x_2)^2 + \dots + (a - x_n)^2,$$

hälbe ruudu keskmine

$$\frac{(a - x_1)^2 + (a - x_2)^2 + \dots + (a - x_n)^2}{n}$$

ja hälbe ruutkeskmise

$$\sqrt{\frac{(a - x_1)^2 + (a - x_2)^2 + \dots + (a - x_n)^2}{n}}.$$

Näita, et hälbe ruutkeskmise omandab minimaalse väärtuse, kui arvuna  $a$  võtta  $x$ -de keskmine väärtus.

Näpunäide. Loe arv  $a$  ruutkeskmise avaldises muutuvaks ja rakenda tingimust, millel juurealune avaldis saab miinumiks.

11. Olgu mõni suurus (näit. mõni kaugus) mõõdetud korduvalt, kokku  $n$  korda. Olgu mõõtesaadused vastavalt

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n.$$

Harilikult lähevad need üksteisest lahku ja kujutavad suuruse „õiget“ väärtust  $x$  vaid ligikaudu (mõned puudusega, teised liiaga). Mõõtmisvead on vastavalt

$$x - x_1, x - x_2, x - x_3, \dots, x - x_n$$

ja viimaste ruutude summa

$$S = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + (x - x_3)^2 + \dots + (x - x_n)^2.$$

Suuruse „õigeks“ väärtuseks loetakse seda, mille suhtes arvutatud vead annavad minimaalse ruutude summa.

Näita, et nõnda määratud suuruse „õige“ väärtus langeb ühte mõõtesaaduste aritmeetilise keskmisega.

12. Olgu  $x_1, x_2, \dots, x_n$  juhusest oleneva suuruse eriväärtuste rida ja  $\bar{x}$   $x$ -de keskmine väärtus. Arvu

$$\sigma = \sqrt{\frac{(\bar{x} - x_1)^2 + (\bar{x} - x_2)^2 + \dots + (\bar{x} - x_n)^2}{n}}$$

nimetatakse siis rea ruut-hajumismõõduks ehk lühidalt hajumismõõduks.

Kui suur on see  $\sigma$ , kui kõik  $x$ -d ühte langevad?

Mitmekordseks see  $\sigma$  kasvab, kui kõik  $x$ -d kasvavad  $k$ -kordseks?

Arvuta  $\sigma$  väärtus 9. ülesande 1. ja 2. rea andmeil.

13. Avalda rea

$$x_1, x_2, \dots x_n$$

ruut-hajumismõõt, eeldades, et need  $x$ -i väärtused esinevad vastavalt sagedustega

$$f_1, f_2, \dots f_n.$$

14. Koolis on kaks paralleelklassi  $A$  ja  $B$ . Mõlemad klassid kirjutavad sama kirjaliku töö. Hinnangud väga hea, hea, rahuldav, nõrk, väga nõrk märgitakse numbritega 5, 4, 3, 2, 1. Töötulemused on järgmised:

<u>A</u>		<u>B</u>	
Hinnang	Õpilasi	Hinnang	Õpilasi
5	1	5	5
4	10	4	7
3	19	3	8
2	8	2	6
1	0	1	4

Kui kõrge on õpilase keskmine hinnang klassis  $A$  ja klassis  $B$ ? Missugune neist klassidest on ühtlasem koostisega?

15. Kaks äri  $A$  ja  $B$  näitavad nädala kestel järgmisi päevasissetulekuid:

Nädalapäev	E	T	K	N	R	L
$A$ sissetulek krooni	238	312	298	373	435	528
$B$ sissetulek krooni	341	360	337	360	349	653

Kui suur on äride keskmine päevane sissetulek? Missugusel kahest ärist  $A$  ja  $B$  on rahulikum käik?

16. Teatud tunnuse muutlikkust mingis indiviidide kogus iseloomustatakse sageli selle protsendiga, mida tunnuse hajumismõõt moodustab tunnuse keskmisest väärtusest.

Võta 10 oma kaasõpilast, mõõda igaihe pikkus, rinnaümbermõõt ja kaal. Missugune neist kolmest tunnusest on kõige muutlikum? — on kõige püsivam?

### Harjutis XXIII:

#### Sagedusjaotusi.

1. Koolivalitsus korraldas mitmes linnaalgkoolis ühe ja sama klassi õpilastele arvutamistesti 100 ülesandest. Selle testi tulemused on järgmised:

0 — 10	ülesannet lahendas	1
10 — 20	„ „	5
20 — 30	„ „	9
30 — 40	„ „	18
40 — 50	„ „	30
50 — 60	„ „	46
60 — 70	„ „	62
70 — 80	„ „	38
80 — 90	„ „	22
90 — 100	„ „	9

Kujuta andmed sammasdiagrammi viisil, võttes sambad vahedeta.

Joonisel saadud „treppjoon“ näitab õpilaste sagedusjaotust nende arvutamisvõime järgi.

Mida kujutab pind saadud treppjoone all, kui eeldada, et lahendatud ülesannete arv on 1. rühmas keskmiselt 5, 2. rühmas 15, 3. rühmas 25 jne.?

Kui suur on lahendatud ülesannete mediaan? — lahendatud ülesannete keskmine? — lahendatud ülesannete hajumismõõt?

2. Et selgusele jõuda külitud hernesordi viljakuse kohta, võeti karbitäis kaunu ja loeti ära terade hulk igas kaunas. Töö tulemuseks oli tabel:

Terade arv:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Kaunte arv:	3	6	14	17	34	45	70	94	75	48	23	28	5

Kujuta andmed tulpdiagrammis.

Täienda joonist *murdjoonega*, mille tipud on tulpade lõpupunktid. See *murdjoon* näitab kaunte *sagedusjaotust* hernerade arvu järgi.

Lisa mõlemal pool saadud joonist veel üks lisaintervall ja pikenda *murdjoon* nende intervallide keskpunktideni. Kui suur on saadud *murdjoone* poolt piiratud pindala?

Kui suur on hernerade hulga mediaan?

Missugust osa mängib sellele vastav ordinaat joonisel?

Kui suur on hernerade hulga keskmine?

Kui suur on hernerade hulga hajumismõõt?

3. Noorsõdurite jaotus nägemisteravuse järgi, ametnikkude jaotus palgaastme järgi, linna elanikkude jaotus vanaduse järgi on *sagedusjaotuse* näited. Anna veel 5 säärast näidet.

4. Viskame korraka 2 täringut. Täringutel esile tulevate silmade koguarv kõigub 2 ja 12 vahel. Määra kõigi nende summade esinemiste tõenäosused. Kujuta need tõenäosused graafiliselt tulpdiagrammina.

Kujutame ette pika seeria viskeid kahe täringuga. Ennemalt valmistatud joonis näitab ka silmadesummade 2, 3, 4, ... 11, 12 sagedusjaotust meie visete seerias. Põhjenda seda.

5. Olgu tegemist katsega, mille tulemuseks on kas sündmus  $A$  või sündmus  $B$ . Olgu sündmuse  $A$  esiletulemise tõenäosus  $p$ , sündmuse  $B$  oma  $q$ , nii et  $p + q = 1$ . Kordame katset samul tingimusil 2, 3, 4, ... korda.

Arvuta tõenäosused, et katse kordamisel sündmuste  $A$  ja  $B$  esinemiste järg on:

$AA, AAB, AABA, AABAB, AABABB,$   
 $AABABBB, AABABBBA, \dots$

Missuguse valemi saame otsitava tõenäosuse jaoks üldjuhul

$A A B A B B B A \dots A B,$

kus  $A$  esineb  $a$  korda,  $B$  esineb  $b$  korda, mõlemad ettekirjutatud kindlas järjekorras?

6. Olgu tegemist katsega, mille tulemuseks on kas sündmus  $A$  või sündmus  $B$ . Kordame katset  $s$  korda. Tähendagu  $A A B A B B B A \dots A B$  tulemusrida. Esinegu sündmus  $A$  selles reas  $a$  korda, sündmus  $B$  vastavalt  $b$  korda, nii et  $a + b = s$ . Näita, et on  $\frac{s!}{a! b!}$  üksteisest erinevat rida tähtedest  $A$  ja  $B$ , milles igäühes  $A$  esineb  $a$  korda ja  $B$  esineb  $b$  korda.

N ä p u n ä i d e. Olgu otsitav ridadearv  $x$ . Mitmel viisil saab ümber paigutada  $A$ -sid omavahel, ilma et rea ilme muutuks? — mitmel  $B$ -sid? — mitmel nii  $A$ -sid kui  $B$ -sid? Mitu rida saab siis üldse tuletada elementide ümberpaigutamise teel  $x$  erinevast reast lähtudes? Mitu ümberpaigutust on võimalik teha reas  $s$  elemendist? Viimase kahe küsimuse vastusest leia  $x$ .

7. Olgu tegemist katsega, mille tulemuseks on kas sündmus  $A$  või sündmus  $B$ . Olgu sündmuse  $A$  esiletulemise tõenäosus  $p$ , sündmuse  $B$  esiletulemise tõenäosus  $q$ , nii et  $p + q = 1$ . Kordame katset  $s$  korda. Esinegu saadud katseseerias sündmus  $A$   $a$  korda, sündmus  $B$   $b$  korda, nii et  $a + b = s$ . Tõenäosus, et reas  $s$  katsest sündmus

A tuleb esile just  $a$  korda, sündmus  $B$  just  $b$  korda, need sündmused aga mistahes järjekorras, on võrdne

$$\frac{s!}{a! b!} p^a q^b.$$

Näita seda, rakendades eelmise ülesande tulemust ja tõenäosuste liitmislauset.

8. Olgu tegemist katsega, mille tulemuseks on kas sündmus  $A$  või sündmus  $B$ . Olgu sündmuse  $A$  esiletulemise tõenäosus  $p$ , sündmuse  $B$  esiletulemise tõenäosus  $q$ , nii et  $p + q = 1$ .

Kirjuta tõenäosuste avaldised juhuks, et  $s$  katsest koosnevas seerias sündmus  $A$  esineb parajasti

$$s, s-1, s-2, \dots, 3, 2, 1, 0 \text{ korda.}$$

Näita, et need tõenäosuste avaldised saadakse binoomi

$$(p + q)^s$$

arendise liikmeina.

9. Mängitagu mingit õnnemängu. Olgu mängija  $M$  võidu tõenäosus  $\frac{2}{3}$ . Kui suur on tõenäosus, et ta 7-st mängust võidab 5?

10. Mängitakse vappkiri-mängu. Milleks on enam šansse, kas võita neljast mängust kolm või kaheksast mängust viis?

11. Pikemaaegsed vaatlused on näidanud, et lapse sündimisel võib tõenäosusega 0,51 oodata poeglast. Avalda tõenäosus, et 100 sündivast lapsest 55 on poeglased.

12. Olgu pikemaajalised vaatlused näidanud, et 2 protsenti lastest on vasakukäelised. Koolis on 320 last. Avalda tõenäosus, et nende laste seas pole vasakukäelisi; — et niisuguseid on just 1; — et niisuguseid on 3; — et niisuguseid on 10.

13. Kui suur on tõenäosus, et kümnes rahaviskes vapp tuleb esile just

10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0  
korda?

Kujuta nende tõenäosuste käik graafiliselt.

Saadud joonis illustreerib sageduste 10, 9, ... 1, 0 „binomiaalset jaotust“.

14. Urnis on 3 valget ja 5 musta kuuli. Urnist toimetatakse kuuli võtmist 7 korda, iga kord tulnud kuuli tagasi pannes ja kuule läbi segades.

Kui suur on tõenäosus, et valge kuul esile tuleb selles seerias 7-st katses just

7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0  
korda?

Kujuta nende tõenäosuste käik graafiliselt.

15. Mängitakse vappkiri-mängu. Arvuta 1, 2, 3 jne. vapi esiletulemise tõenäosuste jaotustabelid juhuks, et visete arv on 5, 9, 13. Kujuta ühel ja samal joonisel, ühes ja samas mõõtkavas leitud tõenäosuste jaotusjooned.

Mida ütleb joonis kõige tõenäosema sageduse ja selle sageduse tõenäosuse kohta katseteseeria pikenemisel?

Mida ütleb joonis kujutatud tõenäosuste hajumise kohta katseteseeria pikenemisel?

16. Olgu tegemist katsega, mille tulemus on kas nähtus  $A$  või nähtus  $B$ . Määraku katsetulemuse juhus. Olgu nähtuse  $A$  esiletulemise tõenäosus  $p$ . Kordame katset  $s$  korda. Olgu meie katseteseerias nähtuse  $A$  sagedus  $a$ . Näita tõenäosuste binomiaalset jaotust aluseks võttes,

1<sup>o</sup>. et sageduse  $a$  keskmine väärtus  $\bar{a} = sp$  ;

2<sup>o</sup>. et sageduse  $a$  hajumismõõt  $\sigma = \sqrt{sp(1-p)}$  .

Kuidas muutub sageduse  $a$  hajumismõõt katseteseeria piiramatul kasvamisel?

Näpunäide. Hälbe  $\bar{a} - a$  tõenäosus on sama, mis sageduse  $a$ -gi oma. Avalda  $\sigma$ , võta ühised tegurid sulgude ette ja teisenda  $\sigma$  avaldis nõutud kujuliseks.

17. Esinegu nähtus  $A$   $a$  korda seerias  $s$  katses. Olgu nähtuse  $A$  tõenäosus  $p$ . Näita, et relatiivse sageduse hajumismõõt

$$q = \sqrt{\frac{p(1-p)}{s}}$$

Kuidas muutub relatiivse sageduse hajumismõõt katseteseeria piiramatul kasvamisel?

Kas on tulemus kokkukõlas „suurte arvude seaduse“ väitega?

18. Sügavam binomiaalse jaotuse uurimine on näidanud järgmist:

tõenäosus, et juhuslik hälve $ \bar{x} - x $ ei küüni $\frac{1}{2}\sigma(x)$ -ni, on	0,3830
„ „ „ „ „ „ „ $\sigma(x)$ -ni „	0,6826
„ „ „ „ „ „ „ $2\sigma(x)$ -ni „	0,9544
„ „ „ „ „ „ „ $3\sigma(x)$ -ni „	0,9974

Koosta tabel, kust saaks võtta tõenäosused, et juhuslik hälve  $|\bar{x} - x|$  ületab

$$\frac{1}{2}\sigma(x), \sigma(x), 2\sigma(x), 3\sigma(x).$$

Kas saab kergel käel kirjutada juhusemängu arvele nähtust, kus hälve ületab kolmekordse hajumismõõdu? Miks?

19. Katsepõllult võeti prooviks 10 naerist. Nende kaalumine andis grammides (ümmandatult):

260 250 250 240 170 260 280 230 240 240.

Missuguste proovide puhul kaalu erinemist keskmisest kaalust võib seletada juhusemänguga, missuguste proovide puhul säärane seletus oleks kahtlane?

Millisel korral oleksid õigustatud ütlused: „tunduvalt üle keskmise“, „tunduvalt alla keskmise“?

## Suremustabel ja kindlustusarvutuste abiarvud.

$x$	$l_x$	$d_x$	$D_x$	$N_x$	$C_x$	$M_x$	$x$
<b>20</b>	100 000	327	45 639	935 157	143,5	9671,5	<b>20</b>
21	99 673	326	43 740	889 518	137,5	9528,0	21
22	99 347	326	41 920	845 778	132,2	9390,5	22
23	99 021	326	40 176	803 858	127,1	9258,3	23
24	98 695	326	38 503	763 682	122,6	9131,2	24
25	98 369	329	36 900	725 179	118,5	9008,6	25
26	98 040	330	35 362	688 279	114,6	8890,1	26
27	97 710	333	33 887	652 917	111,1	8775,5	27
28	97 377	338	32 473	619 030	108,3	8664,4	28
29	97 039	346	31 116	586 557	106,5	8556,1	29
<b>30</b>	96 693	357	29 812	555 441	105,8	8449,6	<b>30</b>
31	96 336	372	28 560	525 629	106,3	8343,8	31
32	95 964	394	27 355	497 069	107,9	8237,5	32
33	95 570	420	26 195	469 714	110,6	8129,6	33
34	95 150	452	25 077	443 519	114,5	8019,0	34
35	94 698	489	23 998	418 442	119,3	7904,5	35
36	94 209	530	22 956	394 444	124,1	7785,2	36
37	93 679	571	21 949	371 488	128,7	7661,1	37
38	93 108	613	20 976	349 539	132,7	7532,4	38
39	92 495	655	20 036	328 563	136,4	7399,7	39
<b>40</b>	91 840	697	19 129	308 527	139,6	7263,3	<b>40</b>
41	91 143	738	18 254	289 398	142,2	7123,7	41
42	90 405	781	17 410	271 144	144,6	6981,5	42
43	89 624	827	16 596	253 734	147,3	6836,9	43
44	88 797	878	15 810	237 138	150,2	6689,6	44
45	87 919	932	15 052	221 328	153,6	6539,4	45
46	86 987	995	14 319	206 276	157,4	6385,8	46
47	85 992	1061	13 611	191 957	161,5	6228,4	47
48	84 931	1132	12 926	178 346	165,7	6066,9	48
49	83 799	1206	12 263	165 420	169,7	5901,2	49
<b>50</b>	82 593	1282	11 622	153 157	173,4	5731,5	<b>50</b>
51	81 311	1360	11 002	141 535	177,0	5558,1	51
52	79 951	1442	10 401	130 533	180,4	5381,1	52
53	78 509	1527	9 821	120 132	183,7	5200,7	53
54	76 982	1616	9 260	110 311	186,9	5017,0	54
55	75 366	1708	8 716	101 051	190,0	4830,1	55
56	73 658	1806	8 191	92 335	193,0	4640,1	56
57	71 852	1905	7 683	84 144	195,8	4447,1	57
58	69 947	2006	7 192	76 461	198,3	4251,3	58
59	67 941	2109	6 717	69 269	200,5	4053,0	59
<b>60</b>	65 832	2213	6 258	62 552	202,4	3852,5	<b>60</b>
$x$	$l_x$	$d_x$	$D_x$	$N_x$	$C_x$	$M_x$	$x$

$x$	$l_x$	$d_x$	$D_x$	$N_x$	$C_x$	$M_x$	$x$
61	63 619	2319	5 815	56 294	203,8	3650,1	61
62	61 300	2418	5 388	50 479	204,4	3446,3	62
63	58 882	2508	4 976	45 091	203,8	3241,9	63
64	56 374	2585	4 581	40 115	202,0	3038,1	64
65	53 789	2647	4 203	35 534	198,9	2836,1	65
66	51 142	2700	3 842	31 331	195,0	2637,2	66
67	48 442	2746	3 499	27 489	190,8	2442,2	67
68	45 696	2790	3 174	23 990	186,3	2251,4	68
69	42 906	2832	2 866	20 816	181,9	2065,1	69
<b>70</b>	40 074	2869	2 574	17 950	177,2	1883,2	<b>70</b>
71	37 205	2890	2 297	15 376	171,6	1706,0	71
72	34 315	2885	2 037	13 079	164,7	1534,4	72
73	31 430	2848	1 794	11 042	156,4	1369,7	73
74	28 582	2791	1 569	9 248	147,3	1213,3	74
75	25 791	2710	1 361	7 679	137,6	1066,0	75
76	23 081	2613	1 171	6 318	127,5	928,4	76
77	20 468	2495	998,9	5 147,4	117,1	800,9	77
78	17 973	2362	843,4	4 148,5	106,5	683,8	78
79	15 611	2209	704,4	3 305,1	95,88	577,26	79
<b>80</b>	13 402	2044	581,4	2 600,7	85,27	481,38	<b>80</b>
81	11 358	1867	473,8	2 019,3	74,87	396,11	81
82	9 491	1680	380,7	1 545,5	64,78	321,24	82
83	7 811	1485	301,3	1 164,8	55,10	256,46	83
84	6 326	1292	234,6	863,5	46,95	201,36	84
85	5 034	1102	179,5	628,9	37,79	155,31	85
86	3 932	922	134,8	449,4	30,40	117,52	86
87	3 010	756	99,22	314,59	23,95	87,12	87
88	2 254	605	71,46	215,37	18,44	63,17	88
89	1 649	472	50,27	143,91	13,85	44,73	89
<b>90</b>	1 177	360	34,49	93,64	10,13	30,88	<b>90</b>
91	817	256	23,03	59,15	7,20	20,75	91
92	551	192	14,94	36,12	5,01	13,55	92
93	359	135	9,35	21,18	3,39	8,54	93
94	224	92	5,60	11,83	2,20	5,15	94
95	132	59	3,18	6,23	1,37	2,95	95
96	73	36	1,70	3,05	0,80	1,58	96
97	37	20	0,83	1,35	0,44	0,78	97
98	17	11	0,36	0,52	0,22	0,34	98
99	6	4	0,13	0,16	0,09	0,12	99
<b>100</b>	2	2	0,03	0,03	0,03	0,03	<b>100</b>
$x$	$l_x$	$d_x$	$D_x$	$N_x$	$C_x$	$M_x$	$x$

Hind 2 kr. 40 senti

Rbl. 3. —