

Lehrbuch
der
ebenen Trigonometrie

zum Gebrauch

bei

dem Unterrichte in Gymnasien und höheren Unterrichtsanstalten

von

W. Nerling,

weil. Collegienrath und Ritter, Oberlehrer am Gymnasium zu Dorpat

Zweite verbesserte Auflage.



Dorpat.

Schnakenburg's Druck und Verlag.

1879.

Lehrbuch
der
ebenen Trigonometrie

zum Gebrauch

bei

dem Unterrichte in Gymnasien und höheren Unterrichtsanstalten

von

W. Nerling,

weil. Collegienrath und Ritter, Oberlehrer am Gymnasium zu Dorpat.

Zweite verbesserte Auflage.



Dorpat.
Schnakenburg's Druck und Verlag.
1879.

Von der Censur gestattet.

Dorpat, den 14. October 1878.

Nr 162.

Σt.



6112

Vorrede zur ersten Auflage.

Schon bei der Herausgabe meines Lehrbuches der Planimetrie habe ich meine Ansicht darüber ausgesprochen, welche Anforderungen an die Einrichtung eines Lehrbuchs der Mathematik zu stellen sind. Der dort ausgesprochenen Ansicht bin ich auch bei der Abfassung der vorliegenden Arbeit gefolgt, und kann mich daher rücksichtlich der Behandlung und Darstellung des Lehrstoffes auf das bereits Gesagte beziehen.

Es dürfte vielleicht auffallen, daß man in vorliegendem Leitfaden Lehrsätze über das sphärische Dreieck, die eigentlich zur Stereometrie gehören, vor der sphärischen Trigonometrie aufgestellt finden wird. Zu dieser Anordnung bewogen mich zwei Gründe; nämlich einmal der Umstand, daß in Secunda, in welcher Klasse auf unsern Gymnasien die Stereometrie gelehrt wird, zur

Behandlung der erwähnten Lehrsätze zu wenig Zeit übrig bleibt und dann die Ueberzeugung, daß es zweckmäßig sei, die Sätze von der körperlichen Ede aufzufrischen und anzuwenden.

Dorpat, den 10. März 1853.

Der Verfasser.

Einleitung.

§ 1. Die Geometrie lehrt, wie man ein Vieleck, sobald eine hinreichende Anzahl Linien und Winkel gegeben sind, construirt. Diese Angabe der einzelnen Stücke kann auf zweierlei Art geschehen; entweder werden die betreffenden Linien und Winkel geradezu selber vorgelegt, oder ihre Maaße angegeben. Im erstern Falle ließe sich die Construction unmittelbar anführen, im zweiten Falle dagegen müßte man die Linien erst durch Abtragung mittelst eines Maaßstabes und die Winkel durch mechanische Theilung des Kreises zur Anschauung bringen, ehe man zur Construction des Vielecks schreiten könnte; wollte man aber die gesuchten Stücke ebenfalls in Zahlen ausgedrückt haben, so würden die durch Construction erhaltenen Linien und Winkel noch zu messen sein.

Man sieht wohl ein, daß dieses Verfahren eben so unständig als ungenau ist; daher sucht man die gesuchten Stücke durch Rechnung abzuleiten, und diese Berechnungen lehrt die Trigonometrie (τρίγωνον, μετρεῖν).

§ 2. Jedes Vieleck läßt sich in Dreiecke zertheilen, deshalb behandelt denn auch die Trigonometrie vorzugsweise das Dreieck.

Man unterscheidet aber zweierlei Arten von Dreiecken, ebene und sphärische oder Kugeldreiecke; hiernach wird die Trigonometrie selbst in die ebene und sphärische eingetheilt.

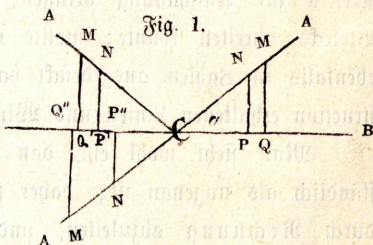
§ 3. Da sowohl unter den gegebenen als unter den gesuchten Stücken eines Dreiecks Winkel vorkommen, so muß die erste Frage sein, wie man diese Größen in Rechnung zu bringen habe, da Seiten und Winkel eines Dreiecks ungleichartige Größen sind, und sich daher durch Rechnung nicht mit einander verbinden lassen. Man hat deshalb den Gebrauch der Winkel gänzlich beseitigt, und für dieselben die Verhältnisse der Seiten substituirt, was in Folge der Lehre der Ähnlichkeit möglich ist, indem bei gleichen Winkeln die Seitenverhältnisse und umgekehrt sich nicht ändern können.

Die Lehre von diesen Seitenverhältnissen nennt man auch Goniometrie (γωνία Winkel).

I. Goniometrie.

§ 4. Um die Seitenverhältnisse aller Winkel angeben zu können, nehme man den einen Schenkel des Winkels als fest und den andern als rotirend an.

Es sei $\angle ACB = \angle \alpha$ ein spitzer Winkel; man nehme auf dem rotirenden Schenkel beliebige Punkte, N, M u., an und ziehe von denselben Senkrechte auf den andern Schenkel, NP, MQ, dadurch



entstehen lauter ähnliche Dreiecke, in welchen die Seitenverhältnisse immer dieselben sind, also $\frac{NP}{CN} = \frac{MQ}{CM}$ oder $\frac{CP}{CN} = \frac{CQ}{CM}$ u. s. w.

Wird der Winkel durch die Drehung des Schenkels CA größer als R , so fallen die Senkrechten auf die Verlängerung des festen Schenkels und die Seitenverhältnisse sind ebenfalls gleich,

als $\frac{NP'}{CN} = \frac{MQ'}{CM}$ oder ist der Winkel ein converger, so ist auch

$$\frac{NP''}{CN} = \frac{MQ''}{CM} \text{ u. s. w.}$$

Das Verhältniß der Senkrechten zum rotirenden Schenkel eines concaven oder convergen Winkels bleibt demnach immer das-
selbe, man mag den Punkt N annehmen, wo man will, und wenn
der Winkel α eine bestimmte Größe hat, so muß auch dieses Ver-
hältniß einen bestimmten Werth besitzen. Sält z. B. der Winkel
 30° , so ist das Verhältniß der Gegenkathete zur Hypotenuse $\frac{1}{2}$,
und findet sich umgekehrt das Verhältniß einer Kathete zur Hy-
potenuse $= \frac{1}{2}$, so liegt ihr auch wieder ein Winkel von 30°
gegenüber.

§ 5. Der Winkel α und jenes Seitenverhältniß stehen
also in einem solchen gegenseitigen Zusammenhange, daß jedem
bestimmten Winkel ein bestimmtes Verhältniß entspricht und daß
umgekehrt zu jedem solchen Verhältniß ein ganz bestimmter Winkel
gehört. Sobald aber die Größe des Winkels sich ändert, ändert
sich auch das Verhältniß zwischen dem Schenkel und dem Perpen-
dikel. Winkel und Seitenverhältnisse sind also von einander ab-
hängig, und solche Größen, die von andern Größen abhängen,
nennt man Funktionen dieser Größen; daher nennt man diese
Seitenverhältnisse goniometrische oder trigonometrische Funk-
tionen, und sind als Quotienten zweier gleichartig benannten
Zahlen unbenannte Zahlen.

§ 6. Es giebt sechs trigonometrische Funktionen, die ver-
schiedene Namen führen:

1) Das Perpendikel NP (Fig. 1) dividirt durch den roti-
renden Schenkel CN heißt der Sinus des Winkels BCA, also:

$$\frac{NP}{CN} = \sin. BCA;$$

2) Der feste Schenkel CP oder dessen Verlängerung dividirt

durch den rotirenden CN heißt der Cosinus des Winkels BCA, also: $\frac{CP}{CN} = \cos. BCA;$

3) Das Perpendikel NP dividirt durch den festen Schenkel CP oder dessen Verlängerung heißt die Tangente des Winkels BCA, also: $\frac{NP}{CP} = \text{tang. } BCA;$

4) Der feste Schenkel CP oder dessen Verlängerung dividirt durch das Perpendikel NP heißt die Cotangente des Winkels BCA, also: $\frac{CP}{NP} = \text{cotg. } BCA;$

5) der rotirende Schenkel CN dividirt durch den festen CP oder dessen Verlängerung heißt die Sekante des Winkels BCA, also: $\frac{CN}{CP} = \text{sec. } BCA;$

6) der rotirende Schenkel CN dividirt durch das Perpendikel NP heißt die Cosekante des Winkels BCA, also: $\frac{CN}{NP} = \text{cosec. } BCA.$

Anmerkung. Sin., cos. u. s. w. sind Symbole, nicht Factoren.

— Die Herleitung des lateinischen Kunstwortes sinus ist schwierig. Godin († 1760) giebt folgende Erklärung. Da die Chorden der Bogen im Lateinischen auch inscriptae heißen, so habe man ihre Hälften, die Sinusse, semisses inscriptarum genannt, und dieses abgekürzt s. ins. geschrieben, woraus denn das Wort sinus entstanden sei. Die Benennungen anderer goniometrischer Functionen, Cosinus, Cotangente, sind wirklich Zusammenziehungen von Co. sinus, d. i. complementi sinus u. s. w.

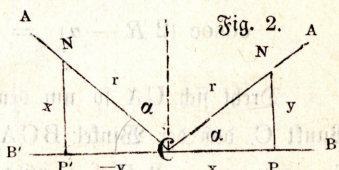
§ 7. Bezeichnet man in dem rechtwinkligen Dreiecke NCP (Fig. 1) die Gegenkathete eines spitzen Winkels α durch y, die Nebenkathete desselben Winkels durch x, die Hypotenuse, welche bei der Drehung immer dieselbe Länge behielt, durch r, und die Verlängerung des festen Schenkels über den Scheitel hinaus, so wie das Perpendikel des convergen Winkels durch negativ (—),

so findet man zwischen den trigonometrischen Funktionen der spitzen und stumpfen Winkel folgenden Zusammenhang:

$$\left. \begin{aligned} \frac{y}{r} &= \sin \alpha = \cos (R - \alpha) \\ \frac{x}{r} &= \cos \alpha = \sin (R - \alpha) \\ \frac{y}{x} &= \tan \alpha = \cotg (R - \alpha) \\ \frac{x}{y} &= \cotg \alpha = \tan (R - \alpha) \\ \frac{r}{x} &= \sec \alpha = \operatorname{cosec} (R - \alpha) \\ \frac{r}{y} &= \operatorname{cosec} \alpha = \sec (R - \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A})$$

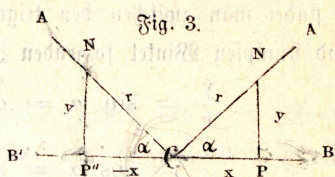
Cosinus ist der Sinus des Complementwinkels, $\angle \text{CNP} = 90^\circ - \alpha$, hier ist NP der feste Schenkel und CP das Perpendikel, also nach § 6, 2: $\frac{NP}{NC} = \cos (R - \alpha) = \frac{y}{r}$ u. s. w.

Dreht sich CA so um den Punkt C, daß der Winkel $\text{BCA} = R + \alpha$ wird, so fällt das Perpendikel von N auf die Verlängerung des festen Schenkels CB und $\triangle \text{CNP}' \cong \triangle \text{CNP}$ folglich ist $\text{NP}' = x$ und $\text{CP}' = \text{NP}$, aber negativ, also $\text{CP}' = -y$.



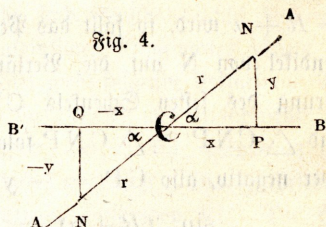
$$\left. \begin{aligned} \sin (R + \alpha) &= \frac{x}{r} = \cos \alpha \\ \cos (R + \alpha) &= \frac{-y}{r} = -\sin \alpha \\ \tan (R + \alpha) &= -\frac{x}{y} = -\cotg \alpha \\ \cotg (R + \alpha) &= -\frac{y}{x} = -\tan \alpha \\ \sec (R + \alpha) &= -\frac{r}{y} = -\operatorname{cosec} \alpha \\ \operatorname{cosec} (R + \alpha) &= \frac{r}{x} = \sec \alpha \end{aligned} \right\} \quad (\text{B})$$

Dreht sich CA so um den Punkt C, daß der $\angle BCA = 2R - \alpha$ wird, so fällt das Perpendikel NP'' ebenfalls auf die Verlängerung des festen Schenkels CB und $\triangle CNP'' \cong \triangle CNP$, folglich $NP' = NP = y$ und $CP'' = CP$ aber negativ, also $= -x$.



$$\left. \begin{aligned} \sin (2R - \alpha) &= \frac{y}{r} = \sin \alpha \\ \cos (2R - \alpha) &= -\frac{x}{r} = -\cos \alpha \\ \text{tang } (2R - \alpha) &= -\frac{y}{x} = -\text{tang } \alpha \\ \text{cotg } (2R - \alpha) &= -\frac{x}{y} = -\text{cotg } \alpha \\ \sec (2R - \alpha) &= -\frac{r}{x} = -\sec \alpha \\ \text{cosec } (2R - \alpha) &= \frac{r}{y} = \text{cosec } \alpha \end{aligned} \right\} \text{(C)}$$

Dreht sich CA so um den Punkt C, daß der Winkel BCA ein converger $= 2R + \alpha$ wird, so fällt das Perpendikel NQ auf die Verlängerung des festen Schenkels und ist den frühern Perpendikeln entgegengesetzt. Nun ist $\triangle CNQ \cong \triangle CNP$, folglich $NQ = NP$, $CQ = CP$, aber entgegengesetzt.



$$\left. \begin{aligned} \sin (2R + \alpha) &= \frac{-y}{r} = -\sin \alpha \\ \cos (2R + \alpha) &= \frac{-x}{r} = -\cos \alpha \\ \text{tang } (2R + \alpha) &= \frac{-y}{-x} = \text{tang } \alpha \\ \text{cotg } (2R + \alpha) &= \frac{-x}{-y} = \text{cotg } \alpha \end{aligned} \right\} \text{(D)}$$

Ist der converge Winkel
 $BCA = 3R - \alpha$, so ist CQ'
 $= -y$ und $NQ' = -x$

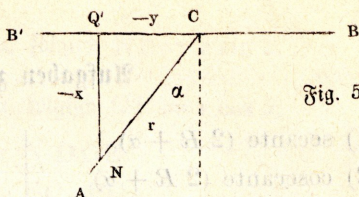


Fig. 5.

$$\left. \begin{aligned} \sin(3R - \alpha) &= \frac{-x}{r} = -\cos \alpha \\ \cos(3R - \alpha) &= \frac{-y}{r} = -\sin \alpha \\ \text{tang}(3R - \alpha) &= \frac{-x}{-y} = \cotg \alpha \\ \cotg(3R - \alpha) &= \frac{-y}{-x} = \text{tang} \alpha \end{aligned} \right\} \textbf{(E)}$$

Ist der converge $\angle BCA = 3R + \alpha$, so ist $CQ'' = y$ und
 $NQ'' = -x$.

$$\left. \begin{aligned} \sin(3R + \alpha) &= \frac{-x}{r} = -\cos \alpha \\ \cos(3R + \alpha) &= \frac{y}{r} = \sin \alpha \\ \text{tang}(3R + \alpha) &= \frac{-x}{y} = -\cotg \alpha \\ \cotg(3R + \alpha) &= \frac{+y}{-x} = -\text{tang} \alpha \end{aligned} \right\} \textbf{(F)}$$

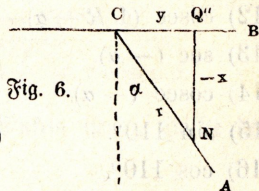


Fig. 6.

Ist der converge Winkel $BCA = 4R - \alpha$, so ist $CP = x$ und
 $NP = -y$. Den concaven Winkel BCA kann man sich entstan-
 den denken durch Drehung des rotirenden Schenkels in entgegen-
 gesetzter Richtung. Dann nennt man den Winkel negativ.

$$\left. \begin{aligned} \sin(4R - \alpha) &= \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(4R - \alpha) &= \cos(-\alpha) = \cos \alpha \\ \text{tang}(4R - \alpha) &= \text{tang}(-\alpha) = -\text{tang} \alpha \\ \cotg(4R - \alpha) &= \cotg(-\alpha) = -\cotg \alpha \end{aligned} \right\} \textbf{(G)}$$

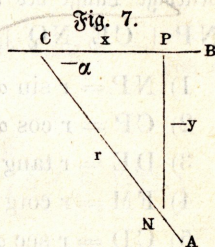


Fig. 7.

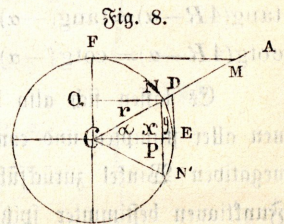
Es lassen sich also die Funktio-
 nen aller stumpfen und convergen, sowie
 negativen Winkel zurückführen auf die
 Funktionen bestimmter spitzer Winkel.

Aufgaben zu § 7.

- | | |
|---------------------------------|----------------------------------|
| 1) secante ($2R + \alpha$). | 20) $\cos 198^\circ 12' 42''$. |
| 2) cosecante ($2R + \alpha$). | 21) $\sin 124^\circ 32' 14''$. |
| 3) $\sec (3R - \alpha)$. | 22) $\sin 309^\circ 10' 50''$. |
| 4) cosec ($3R - \alpha$) | 23) $\sin 241^\circ 15' 36''$. |
| 5) $\sec (3R + \alpha)$. | 24) $\cos 124^\circ 32' 14''$. |
| 6) cosec ($3R + \alpha$). | 25) $\sin 358^\circ 24' 33''$. |
| 7) $\sin (4R - \alpha)$. | 26) $\sin 130^\circ 15' 46''$. |
| 8) $\cos (4R - \alpha)$. | 27) $\sin 74^\circ 41' 50''$. |
| 9) $\tan (4R - \alpha)$. | 28) $\sin 210^\circ 40' 20''$. |
| 10) $\cotg (4R - \alpha)$. | 29) $\cos 130^\circ 15' 46''$. |
| 11) $\sec (4R - \alpha)$. | 30) $\cos 309^\circ 10' 50''$. |
| 12) cosec ($4R - \alpha$). | 31) $\cos 241^\circ 15' 36''$. |
| 13) $\sec (-\alpha)$. | 32) $\tan 122^\circ 14'$. |
| 14) cosec ($-\alpha$). | 33) $\tan 205^\circ 18' 24''$. |
| 15) $\sin 110^\circ$. | 34) $\tan 322^\circ 48' 37''$. |
| 16) $\cos 110^\circ$. | 35) $\cotg 98^\circ 15' 20''$. |
| 17) $\sin 48^\circ$. | 36) $\cotg 199^\circ 4' 54''$. |
| 18) $\sin 198^\circ 12' 42''$. | 37) $\cotg 255^\circ 59' 10''$. |
| 19) $\sin 156^\circ 15' 46''$. | 38) $\cotg 300^\circ 14' 22''$. |

§ 8. Lehrf. 1. Ist $\angle \alpha$ ein spitzer Winkel, $CN = r$ eine beliebige Länge des rotirenden Schenkels, $DE \perp CE$, $CF \perp CE$, $NP \perp CE$, $NQ \perp CF$, $MF \perp FC$, so ist:

- 1) $NP = r \sin \alpha$ (Sinuslinie);
- 2) $CP = r \cos \alpha$ (Cosinuslinie);
- 3) $DE = r \tan \alpha$ (Tangentenl.);
- 4) $FM = r \cotg \alpha$ (Cotg.-Linie);
- 5) $CD = r \sec \alpha$ (Secantenl.);
- 6) $CM = r \operatorname{cosec} \alpha$ (Cosec.-L.);



Bew. 1) $\frac{NP}{r} = \sin \alpha$, folglich $NP = r \sin \alpha$.

2) $\frac{CP}{r} = \cos \alpha$, folglich $CP = r \cos \alpha$.

3) $\frac{\triangle NCP \propto \triangle DCE}{DE : NP = EC : PC}$

$$DE = r \cdot \frac{y}{x} = r \tan \alpha$$

4) $\frac{\triangle FMC \propto \triangle CQN}{MF : NQ = FC : QC}$
 $NQ = CP$
 $QC = NP$

$$MF = r \cdot \frac{x}{y} = r \cot \alpha$$

5) Aus 3 folgt $DC : NC = CE : CP$

$$DC = r \cdot \frac{r}{x} = r \sec \alpha$$

6) Aus 4 folgt $CM : CN = FC : CQ$

$$CM = r \cdot \frac{r}{y} = r \operatorname{cosec} \alpha$$

Lehrs. 2. Die Sinuslinie eines Winkels ist die Hälfte der Sehne des doppelten Winkels (Bogens).

Bew. Verlängert man NP bis zur Peripherie, so ist NN' die Sehne eines Bogens, dessen Centriwinkel NCN' ist. Da nun CP die Sehne NN', wie auch den Centriwinkel NCN' halbiert, so ist $NP = \frac{1}{2}$ Chorde $NN' = r \sin \alpha$.

Bz. Ist $NN' = r$, so ist $\angle \alpha = 30^\circ$ und $r \sin 30^\circ = \frac{1}{2} r$.

§ 9. Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen eines Winkels.

Lehrs. 3. Für jeden Winkel α ist 1) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
 und 2) $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Bew. Ist $\angle \alpha$ ein spitzer Winkel, so ist:

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{r \sin \alpha}{r \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \left(\begin{array}{l} \S 7 \text{ u. Lehrs.} \\ 1, 1. 2. \end{array} \right)$$

$$\cot \alpha = \frac{x}{y} = \frac{r \cos \alpha}{r \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Ist $\angle \alpha > R$, z. B. $\alpha = R + \beta$, wo $\angle \beta$ ein spitzer Winkel bedeutet, so ist $\tan(R + \beta) = \frac{x}{-y} = \frac{r \sin(R + \beta)}{r \cos(R + \beta)}$ (§ 7, B),

setzt man wieder für $R + \beta = \alpha$, so ist $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ u. s. w.

Lehrs. 4. Für jeden Winkel α ist $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ *).

Bew. Ist $\angle \alpha < R$, so ist $y^2 + x^2 = r^2$, folglich $r^2 \sin^2 \alpha + r^2 \cos^2 \alpha = r^2$, durch r^2 dividirt giebt: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Ist $\angle \alpha = 2R - \beta$, so ist (Fig. 3) $y^2 + (-x)^2 = r^2$, folglich $r^2 \sin^2(2R - \beta) + r^2 \cos^2(2R - \beta) = r^2$ durch r^2 dividirt und für $2R - \beta = \alpha$ gesetzt, erhält man

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ u. s. w.}$$

Zus. Aus den beiden vorhergehenden Sätzen läßt sich nun, wenn eine Funktion eines Winkels gegeben ist, hieraus jede der übrigen finden.

Folgende Formeln zu entwickeln:

$$1) \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}.$$

$$2) \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

$$3) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}.$$

$$4) \cotg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}.$$

$$5) \tan \alpha \cdot \cotg \alpha = 1.$$

$$6) \sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}.$$

$$7) \cos \alpha = \frac{\cotg \alpha}{\sqrt{1 + \cotg^2 \alpha}}.$$

$$8) \sin \alpha = \frac{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}{\sec \alpha}.$$

$$9) \tan \alpha = \sqrt{\sec^2 \alpha - 1}.$$

$$10) \operatorname{cosec} \alpha = \frac{\sec \alpha}{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}.$$

$$11) 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

$$12) 1 + \cotg^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

$$13) \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}.$$

$$14) \cos \alpha = \frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}}{\operatorname{cosec} \alpha}.$$

*) Der Ausdruck $\sin^2 \alpha$, soviel als $(\sin \alpha)^2$, bedeutet das Quadrat des Sinus eines Winkels, und ist nicht mit dem Sinus des Quadrats des Winkels α oder $\sin(\alpha^2)$ zu verwechseln, was keinen Sinn hat. Eben dies gilt von den übrigen trigonometrischen Funktionen.

§ 10. Beziehungen zwischen den trigonometrischen Functionen zweier Winkel.

Lehrs. 5. Sind $\angle \alpha$ und $\angle \beta$ beliebige Winkel, so ist:

$$1) \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$2) \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$3) \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$4) \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

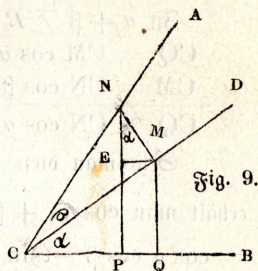


Fig. 9.

Bew. zu 1) u. 2). Wenn α und β spitze Winkel sind, so kann ihre Summe $\angle R$ (Fig. 9) oder $\angle R$ (Fig. 10) sein.

Man lege die Winkel so an einander, daß der feste Schenkel des Winkels β mit dem beweglichen Schenkel des Winkels α zusammenfällt, so ist für Winkel $\alpha + \beta$

CB der feste und CA der bewegliche Schenkel; darauf nehme man einen beliebigen Punkt N in dem

rotirenden Schenkel CA und ziehe $NM \perp CD$, $MQ \perp CB$, $NP \perp CB$, $ME \perp NP$, so ist $\sin(\alpha + \beta) = \frac{NP}{CN}$.

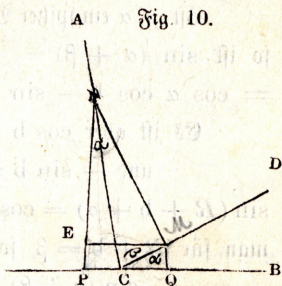


Fig. 10.

so ist $\sin(\alpha + \beta) = \frac{NP}{CN}$.

Nun ist $NP = EP + NE$

$$EP = MQ = CM \sin \alpha$$

$$CM = CN \cos \beta$$

$$EP = CN \sin \alpha \cos \beta$$

und $EN = NM \cos \alpha$

$$NM = CN \sin \beta$$

$$EN = CN \cos \alpha \sin \beta$$

$$\begin{array}{l} \angle EMC = \angle \alpha \\ \angle ENM + \angle EMN = \angle EMN + \angle EMC \\ \hline \angle ENM = \angle \alpha. \end{array}$$

Setzt man die Werthe für EP und EN in $\frac{NP}{CN}$ hinein, so erhält man:

$$\begin{aligned} 1) \sin(\alpha + \beta) &= \frac{CN \sin \alpha \cos \beta + CN \cos \alpha \sin \beta}{CN} \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

$$2) \cos(\alpha + \beta) = \frac{CP}{CN} = \frac{CQ - PQ}{CN}$$

Ist $\alpha + \beta > R$ (Fig. 10), so ist CP negativ.

$$CQ = CM \cos \alpha$$

$$PQ = EM = NM \sin \alpha$$

$$CM = CN \cos \beta$$

$$NM = CN \sin \beta$$

$$CQ = CN \cos \alpha \cos \beta$$

$$PQ = CN \sin \alpha \sin \beta$$

Setzt man diese Werthe für CQ und PQ in 2) hinein, so erhält man $\cos(\alpha + \beta) = \frac{CN \cos \alpha \cos \beta - CN \sin \alpha \sin \beta}{CN}$

$$= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Ist $\angle \alpha$ ein spitzer Winkel und $\angle \beta > R$, also $\angle \beta = R + b$, so ist $\sin(\alpha + \beta) = \sin(R + [\alpha + b]) = \cos(\alpha + b) = \cos \alpha \cos b - \sin \alpha \sin b$.

$$\text{Es ist aber } \cos b = \sin(R + b) = \sin \beta$$

$$\text{und } -\sin b = \cos(R + b) = \cos \beta, \text{ folglich}$$

$\sin(R + b + \alpha) = \cos \alpha \sin(R + b) + \sin \alpha \cos(R + b)$, setzt man für $R + b = \beta$, so erhält man:

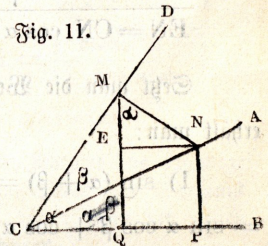
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

Ebenso $\cos(\alpha + \beta) = \cos(R + b + \alpha) = -\sin(b + \alpha) = -\sin b \cos \alpha - \sin \alpha \cos b$, aber $-\sin b = \cos(R + b) = \cos \beta$ und $\cos b = \sin(R + b) = \sin \beta$, also $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.

Sind $\angle \alpha$ und $\angle \beta$ stumpfe Winkel, z. B. $\angle \alpha = R + a$ und $\angle \beta = R + b$, so ist $\sin(\alpha + \beta) = \sin(2R + a + b) = -\sin(a + b) = -\sin a \cos b - \cos a \sin b$, aber $-\sin a = \cos(R + a) = \cos \alpha$ und $\cos b = \sin(R + b) = \sin \beta$, $\cos a = \sin(R + a) = \sin \alpha$ u. $-\sin b = \cos(R + b) = \cos \beta$, folglich $\sin(\alpha + \beta) = \sin(2R + a + b) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$ u. s. w.

Bew. zu 3) u. 4). Ist $\angle BCD$ Fig. 11.

$= \alpha$ u. $> \angle \beta$, so lege man den festen Schenkel des Winkels β auf den rotirenden Schenkel des Winkels α und den rotirenden Schenkel CA in den Winkel α , so wird $\angle BCA = \alpha - \beta$ werden. Nimm



man in dem rotirenden Schenkel CA einen beliebigen Punkt N an und zieht $NP \perp CB$, $NM \perp CD$, $MQ \perp CB$, $NE \perp MQ$,

$$\text{so ist } \sin(\alpha - \beta) = \frac{NP}{CN} = \frac{MQ - ME}{CN}$$

$$MQ = CM \sin \alpha$$

$$ME = MN \cos \alpha$$

$$CM = CN \cos \beta$$

$$MN = CN \sin \beta$$

$$MQ = CN \sin \alpha \cos \beta$$

$$ME = CN \cos \alpha \sin \beta.$$

$$\text{Also } \sin(\alpha - \beta) = \frac{CN \sin \alpha \cos \beta - CN \cos \alpha \sin \beta}{CN}$$

$$= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

$$4) \cos(\alpha - \beta) = \frac{CP}{CN} = \frac{CQ + QP}{CN} \quad (\text{Fig. 11.})$$

$$CQ = CM \cos \alpha.$$

$$QP = EN = MN \sin \alpha$$

$$CM = CN \cos \beta$$

$$MN = CN \sin \beta$$

$$CQ = CN \cos \alpha \cos \beta$$

$$QP = CN \sin \alpha \sin \beta, \text{ folglich}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Ist $\angle \alpha$ ein stumpfer und $\angle \beta$ ein spitzer oder auch ein stumpfer Winkel, so ist der Beweis wie bei 1) und 2) für stumpfe Winkel.

Lehrs. 6. Sind $\angle \alpha$ und $\angle \beta$ beliebige Winkel, so ist:

$$1) \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta},$$

$$2) \cotg(\alpha \pm \beta) = \frac{\cotg \alpha \cotg \beta \mp 1}{\cotg \beta \pm \cotg \alpha}.$$

$$\text{Bew. } 1) \text{ Es ist } \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)}$$

$$= \frac{\sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta}.$$

Dividirt man Zähler und Nenner

des letzten Ausdrucks durch $\cos \alpha \cos \beta$, so erhält man:

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} \pm \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} \mp \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}.$$

$$2) \cotg(\alpha \pm \beta) = \frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\sin(\alpha \pm \beta)} = \frac{\cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta}.$$

dividirt man Zähler und Nenner des letzten Ausdrucks durch $\sin \alpha \sin \beta$, so erhält man: $\cotg (\alpha \pm \beta) = \frac{\cotg \alpha \cotg \beta \mp 1}{\cotg \beta \pm \cotg \alpha}$.

Zus. Aus Lehrf. 5 und 6 ergeben sich folgende Formeln, wenn man $\angle \beta = \angle \alpha$ setzt:

$$1) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \text{ (Lehrf. 5, } _1);$$

$$2) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \text{ (Lehrf. 5, } _2);$$

$$3) \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \text{ (Lehrf. 6, } _1);$$

$$4) \cotg 2\alpha = \frac{\cotg^2 \alpha - 1}{2 \cotg \alpha} \text{ (Lehrf. 6, } _2);$$

Setzt man in (2) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ für $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$, so wird $\cos 2\alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$, also

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}, \text{ für } 2\alpha = a \text{ gesetzt, giebt}$$

$$5) \sin \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}.$$

Setzt man in $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ für $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$,

$$\text{so wird } \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1, \text{ folglich } \cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}},$$

setzt man wieder für $2\alpha = a$, so erhält man

$$6) \cos \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}};$$

$$7) \tan \frac{1}{2} a = \frac{\sin \frac{1}{2} a}{\cos \frac{1}{2} a} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}};$$

$$8) \cotg \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{1 - \cos a}}.$$

Lehrf. 7. Sind $\angle a$ und $\angle b$ beliebige Winkel, so ist:

$$1) \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{1}{2} (a + b) \cos \frac{1}{2} (a - b);$$

$$2) \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{1}{2} (a + b) \sin \frac{1}{2} (a - b);$$

$$3) \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{1}{2} (a + b) \cos \frac{1}{2} (a - b);$$

$$4) \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{1}{2} (a + b) \sin \frac{1}{2} (a - b) = 2 \sin \frac{1}{2} (a + b) \sin \frac{1}{2} (b - a).$$

Bew. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ (I)

$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$ (II)

$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta.$

Setzt man für $\alpha + \beta = a$ und $\alpha - \beta = b$, so ist $\alpha = \frac{1}{2}(a + b)$ und $\beta = \frac{1}{2}(a - b)$, folglich

1) $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2}(a - b).$

Subtrahirt man dagegen II von I, so erhält man:

$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$, setzt man für α, β die obigen Werthe ein, so folgt

2) $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{1}{2}(a + b) \sin \frac{1}{2}(a - b).$

Addirt oder subtrahirt man folgende Gleichungen:

$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$, so erhält man

3) $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2}(a - b).$

4) $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{1}{2}(a + b) \sin \frac{1}{2}(a - b) = 2 \sin \frac{1}{2}(a + b) \sin \frac{1}{2}(b - a),$

da $-\sin z = \sin(-z)$ ist, also $-\sin \frac{1}{2}(a - b) = \sin \frac{1}{2}(b - a).$

Aufgaben zu § 10.

1) $\tan 2\alpha = \frac{2 \cotg \alpha}{\cotg^2 \alpha - 1}.$

2) $\cotg 2\alpha = \frac{1}{2}(\cotg \alpha - \tan \alpha).$

3) $\tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}.$

4) $\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}.$

5) $-\cotg \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta}.$

6) $-\cotg \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta}.$

7) $\tan \alpha \pm \tan \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}.$

8) $\cotg \beta \pm \cotg \alpha = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}.$

§ 11. Zu- und Abnahme der trigonometrischen Funktionen.

Hat der rotirende Schenkel (§ 7) noch keine Drehung gemacht, also liegt der Schenkel CA auf dem Schenkel CB, so ist $\angle \alpha = 0$, $y = 0$ und $x = r$, folglich

$$\sin 0 = \frac{0}{r} = 0$$

$$\cos 0 = \frac{r}{r} = 1$$

$$\text{tang} 0 = \frac{0}{r} = 0$$

$$\text{cotg} 0 = \frac{r}{0} = \infty \text{ (unendlich groß).}$$

Anmerk. Je kleiner der Divisor, desto größer der Quotient; ist der Divisor unendlich klein (0), so ist der Quotient unendlich groß (∞). Man muß sich aber hüten, die unendlich kleine, sowie die unendlich große Zahl für eine fest bestimmte Zahl anzusehen.

Fängt der Schenkel an sich zu drehen, so wird y größer und x kleiner; ist endlich $\angle \alpha = R$, so fällt der Punkt P in C und $y = r$, $x = 0$, folglich

$$\sin R = \frac{r}{r} = 1$$

$$\cos R = \frac{0}{r} = 0$$

$$\text{tang} R = \frac{r}{0} = \infty$$

$$\text{cotg} R = \frac{0}{r} = 0.$$

Tritt der rotirende Schenkel in den zweiten Quadranten, so wird y kleiner und x größer, ist endlich $\angle \alpha = 2 R$, so ist $y = 0$, $x = r$, folglich:

$$\sin 2 R = \frac{0}{r} = 0$$

$$\cos 2 R = - \frac{r}{r} = - 1$$

$$\text{tang} 2 R = \frac{0}{r} = 0$$

$$\text{cotg} 2 R = - \frac{r}{0} = \infty.$$

Im dritten Quadranten wird y wieder größer und x kleiner; wird $\angle \alpha = 3 R$, so ist $y = r$, $x = 0$, folglich:

$$\sin 3 R = -\frac{r}{r} = -1$$

$$\cos 3 R = \frac{0}{r} = 0$$

$$\operatorname{tang} 3 R = \frac{r}{0} = \infty$$

$$\operatorname{cotg} 3 R = \frac{0}{r} = 0.$$

Im vierten Quadranten wird y kleiner und x größer; ist $\angle \alpha = 4 R$, so ist:

$$\sin 4 R = \frac{0}{r} = 0$$

$$\cos 4 R = \frac{r}{r} = 1$$

$$\operatorname{tang} 4 R = \frac{0}{r} = 0$$

$$\operatorname{cotg} 4 R = \frac{r}{0} = \infty.$$

Hieraus folgt:

Der Sinus wächst im ersten und dritten Quadranten von 0 bis 1, und nimmt im zweiten und vierten von 1 bis 0 ab. Er ist im ersten und zweiten Quadranten positiv, im dritten und vierten negativ.

Der Cosinus nimmt im ersten und dritten Quadranten von 1 bis 0 ab, und wächst im zweiten und vierten von 0 bis 1. Er ist im ersten und vierten Quadranten positiv, im zweiten und dritten negativ.

Die Tangente wächst im ersten und dritten Quadranten von 0 bis ∞ , und nimmt im zweiten und vierten von ∞ bis 0 ab. Dabei ist sie im ersten und dritten Quadranten positiv, im zweiten und vierten negativ.

Die Cotangente nimmt im ersten und dritten Quadranten von ∞ bis 0 ab, und wächst im zweiten und vierten von 0 bis ∞ . Sie ist im ersten und dritten Quadranten positiv, im zweiten und vierten negativ.

Der Sinus, sowie der Cosinus, kann nie über Eins betragen, die Tangente und Cotangente dagegen jede beliebige Zahl sein. Zu jedem Winkel gehört nur eine einzige trigonometrische Funktion; dagegen gehören zu jeder trigonometrischen Funktion unzählig viele Winkel. So ist z. B. $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, dagegen gehören zu einem Sinus, welcher $\frac{1}{2}$ ist, die Winkel 30° , 150° , so wie alle Winkel, welche man erhält, wenn man zu 30° und 150° beliebig viele ganze

Umdrehungen addirt. Weiß man daher von einem Winkel, daß er $< 2 R$ ist, wie dieß bei jedem Dreieckswinkel der Fall sein muß, und kennt man dann seinen Sinus, so kann der Winkel spitz oder stumpf sein. Die Bestimmung eines Dreieckswinkels durch seinen Sinus ist daher im Allgemeinen zweideutig; nicht so verhält es sich mit dem Cosinus, der Tangente und der Cotangente, da diese für spitze Winkel positiv, für stumpfe negativ sind.

	0°	R	$2 R$	$3 R$	I Q. *)	II Q.	III Q.	IV Q.
$\sin \alpha$	0	1	0	-1	+	+	-	-
$\cos \alpha$	1	0	-1	0	+	-	-	+
$\tan \alpha$	0	∞	0	∞	+	-	+	-
$\cotg \alpha$	∞	0	∞	0	+	-	+	-

Aufgaben zu § 11.

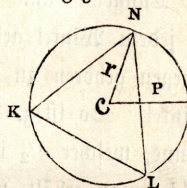
1) $\sec R$.5) $\sec 3 R$.2) $\operatorname{cosec} R$.6) $\operatorname{cosec} 3 R$.3) $\sec 2 R$.7) $\sec 4 R$.4) $\operatorname{cosec} 2 R$.8) $\operatorname{cosec} 4 R$.

§ 12. Die Berechnung der trigonometrischen Funktionen.

Für einzelne Winkel ergeben sich die Zahlenwerthe der Sinusse, mithin auch die übrigen trigonometrischen Funktionen, direct aus geometrischen Betrachtungen. Aus Lehrsatz 2 ergibt sich, daß, wenn man die Länge der Seite eines regelmäßigen Vielecks kennt, auch der Sinus des halben Centriwinkels gegeben ist.

Nehmen wir ein gleichseitiges Dreieck KLN und beschreiben um dasselbe einen Kreis, verbinden den Mittelpunkt C mit N und errichten aus C eine Senkrechte auf NL, so ist $\angle NCP = 60^\circ$,

Fig. 12.



*) Q. = Quadrant.

$$CP = \frac{1}{2} r \text{ und } NP = \frac{r\sqrt{3}}{2}, \text{ folglich}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{NP}{CN} = \frac{r\sqrt{3}}{2r} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ.$$

$$\cos 60^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 60^\circ} = \sqrt{1 - (\frac{1}{2}\sqrt{3})^2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ.$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} = \cotg 30^\circ.$$

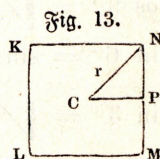
$$\cotg 60^\circ = \frac{1}{\tan 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan 30^\circ.$$

Nehmen wir ein regelmäßiges Viereck KLMN und ziehen aus dem Mittelpunkte C desselben CN, und $CP \perp NM$, so ist $\angle NCP = 45^\circ$,

$$CP = NP = \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{2}, \text{ folglich:}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{NP}{CN} = \frac{r\sqrt{2}}{2r} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ.$$

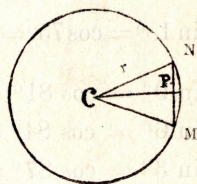
$$\tan 45^\circ = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = 1 = \cotg 45^\circ.$$



Nehmen wir ein regelmäßiges Sechseck (Planimetrie, Aufg. 64, 75), so ist Winkel $NCP = 18^\circ$, die Seite $NM =$

$$\frac{r(-1 + \sqrt{5})}{2}, NP = \frac{r(-1 + \sqrt{5})}{4}, \text{ folglich:}$$

$$\sin 18^\circ = \frac{NP}{r} = \frac{r(-1 + \sqrt{5})}{4r} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} = \cos 72^\circ.$$



$$\begin{aligned} \cos 18^\circ &= \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ} = \sqrt{1 - \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{3 - \sqrt{5}}{8}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} = \sin 72^\circ. \end{aligned}$$

$$\tan 18^\circ = \frac{\sin 18^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5 + \sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{2\sqrt{5 + \sqrt{5}}} = \cotg 72^\circ.$$

$$\cotg 18^\circ = \frac{2\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{\sqrt{10} - \sqrt{2}} = \tan 72^\circ.$$

Aus $\sin 30^\circ$ ergibt sich nach Lehrj. 6, Auf. 5, 6:

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \cos 75^\circ.$$

$$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \sin 75^\circ.$$

Aus $\sin 18^\circ$ ergibt sich:

$$\sin 9^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 18^\circ}{2}} = \cos 81^\circ.$$

$$\cos 9^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 18^\circ}{2}} = \sin 81^\circ.$$

$$\sin 6^\circ = \sin (15^\circ - 9^\circ) = \sin 15^\circ \cos 9^\circ - \sin 9^\circ \cos 15^\circ.$$

$$\sin 3^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 6^\circ}{2}} = \cos 87^\circ.$$

Führt man die angegebenen Rechnungen aus, so erhält man:

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = 0,866025.$$

$$\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = 0,5.$$

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = 0,707107.$$

$$\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = 0,309017.$$

$$\cos 18^\circ = \sin 72^\circ = 0,951056.$$

$$\sin 15^\circ = \cos 75^\circ = \sqrt{\frac{1 - 0,866025}{2}} = \sqrt{0,0669875} = 0,258819.$$

$$\sin 9^\circ = \cos 81^\circ = \sqrt{0,024472} = 0,156434.$$

$$\sin 6^\circ = \cos 84^\circ = 0,104528.$$

$$\sin 3^\circ = \cos 87^\circ = 0,052336.$$

Aus diesen Beispielen sieht man die Möglichkeit, die Werthe der verschiedenen Functionen zu berechnen; ordnet man sie alsdann nach einem gewissen System, so entstehen die trigonometrischen Tafeln.

§ 13. Die Unbequemlichkeit, mit den in irrationalen Brüchen ausgedrückten goniometrischen Functionen Berechnungen des Multiplicirens oder Dividirens, Potenzirens und Extrahirens auszuführen, wie die Gestalt der Formeln, zu welchen trigonometrische Untersuchungen führen, solche häufig genug fordert, hat den Ent-

wurf solcher trigonometrischer Tafeln veranlaßt, in denen nicht die Funktionen selbst, sondern vielmehr ihre Logarithmen enthalten sind *). Da nun aber jene größtentheils ächte Brüche und nur die Tangenten von 45° bis 90° oder Cotangenten von 45° bis 0° größer als die Einheit, also die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen zum größten Theil negative Zahlen sind, so hat man der Gleichförmigkeit und Bequemlichkeit wegen alle Logarithmen um 10 zu groß angesetzt, und muß deshalb bei jedem -10 hinzugefügt denken. So ist z. B. $\log \sin 30^\circ = \log \frac{1}{2} = -0,3010300$, oder, nach Angabe der Tafeln, die dekadische Ergänzung $9,6989700$, weil $+10 - 0,3010300 - 10 = 9,6989700 - 10$ mit jenem negativen Logarithmus identisch ist.

Die besondere Einrichtung und den Gebrauch der logarithmisch-trigonometrischen Tafeln findet man gemeiniglich in der Einleitung derselben; daher glaube ich, um Raum zu ersparen, darauf hinweisen zu dürfen.

Aufgaben zu § 12 u. 13.

1) $\tan 60^\circ$.	Die Zahlenwerthe zu berechnen.	14) $\tan 3^\circ$.	Die Zahlenwerthe zu berechnen.
2) $\tan 30^\circ$.		15) $\cotg 15^\circ$.	
3) $\tan 18^\circ$.		16) $\cotg 9^\circ$.	
4) $\cotg 60^\circ$.		17) $\cotg 6^\circ$.	
5) $\cotg 30^\circ$.		18) $\cotg 3^\circ$.	
6) $\cotg 18^\circ$.		19) $\log \sin 36^\circ 12' 14''$.	
7) $\cos 15^\circ$.		20) $\log \cos 25^\circ 18' 16''$.	
8) $\cos 9^\circ$.		21) $\log \tan 64^\circ 18' 12''$.	
9) $\cos 6^\circ$.		22) $\log \cotg 14^\circ 17' 10''$.	
10) $\cos 3^\circ$.		23) $\log \sin 3^\circ 42' 16''$.	
11) $\tan 15^\circ$.		24) $\log \cos 87^\circ 37' 49''$.	
12) $\tan 9^\circ$.		25) $\log \tan 4^\circ 21' 37''$.	
13) $\tan 6^\circ$.		26) $\log \cotg 86^\circ 2' 4''$.	

*) Man hat auch Tafeln, wo die Funktionen selbst für bestimmte Winkel berechnet sind.

- 27) $\log \cotg 65^{\circ} 39' 4,37''$.
- 28) $\log \tan 78^{\circ} 49' 59,6''$.
- 29) $\log \cos 73^{\circ} 42' 33,7''$.
- 30) $\log \sin 82^{\circ} 15' 0,32''$.
- 31) $\log \sin 38^{\circ} 44' 53''$.
- 32) $\log \cos 42^{\circ} 10' 45,6''$.
- 33) $\log \cos 89^{\circ} 15' 7,4''$.
- 34) $\log \tan 0^{\circ} 32' 24,6''$.
- 35) $\log \cotg 85^{\circ} 26' 53,2''$.
- 36) $\log \sin 2^{\circ} 33' 45,5''$.
- 37) $\log \sin 1^{\circ} 5' 12,09''$.
- 38) $\log \cotg 87^{\circ} 20' 10,7''$.
- 39) $\log \cos 88^{\circ} 19' 5,38''$.
- 40) $\log \tan 2^{\circ} 8' 48,6''$.
- 41) $\log \tan 247^{\circ} 14' 22,7''$.
- 42) $\log \cos 265^{\circ} 31' 42,05''$.
- 43) $\log \sin 280^{\circ} 18' 28,5''$.
- 44) $\log \tan 108^{\circ} 41' 22,02''$.
- 45) $\log \cos 116^{\circ} 31' 11,04''$.
- 46) $\log \sin 102^{\circ} 51' 19,32''$.
- 47) $\log \cotg 348^{\circ} 4' 26,34''$.
- 48) $\log \sin 137^{\circ} 29' 23''$.
- 49) $\log \sin 117^{\circ} 16' 14''$.
- 50) $\log \cos 214^{\circ} 36' 14''$.
- 51) $\log \tan 335^{\circ} 7' 46''$.
- 52) $\log \sin 203^{\circ} 15'$.
- 53) $\log \sin 314^{\circ} 50' 0,14''$.
- 54) $\log \cos 217^{\circ} 15' 16,3''$.
- 55) $\log \tan 143^{\circ} 9' 0,17''$.
- 56) $\log \cotg 301^{\circ} 10' 5,23''$.
- 57) $\log \sin 242^{\circ} 59' 42,4'$.
- 58) $\log \tan 234^{\circ} 14' 0,2''$.
- 59) $\log \sin x = 9,6389576$.
- 60) $\log \cos x = 9,5927638$.
- 61) $\log \tan x = 9,8625439$.
- 62) $\log \cotg x = 10,1317658$.
- 63) $\log \sin x = 9,7328467 n$.
- 64) $\log \cotg y = 10,5836710 n$.
- 65) $\log \tan x = 9,9875672 n$.
- 66) $\log \cotg x = 10,0056772$.
- 67) $\log \cos x = 9,3591267 n$.
- 68) $\log \sin x = 8,7931245$.
- 69) $\log \cotg x = 9,8783040$.
- 70) $\log \tan x = 9,5670893$.
- 71) $\log \cos x = 8,5096735$.
- 72) $\log \cotg x = 10,3867459$.
- 73) $\log \tan x = 10,3456712$.
- 74) $\log \cos x = 9,0003471 n$.
- 75) $\log \sin x = 8,0097631 n$.
- 76) $\log \cos x = 8,5670034 n$.
- 77) $\log \tan x = 10,0945678 n$.
- 78) $\log \sin x = 9,9982835$.
- 79) $\sin x = 0,75$.
- 80) $\cos x = \frac{2}{3}$.
- 81) $\tan x = 504,23$.
- 82) $\sin x = -\frac{2}{3}$.
- 83) $\cotg x = -1289,57$.
- 84) $\cos x = -0,4286$.
- 85) $\sin x = \frac{13}{50}$.
- 86) $\sin y = 0,06843$.
- 87) $\tan x = -28,35$.
- 88) $\cos x = -0,546$.
- 89) $\sin x = \frac{15}{16}$.
- 90) Aus dem Sinus eines Winkels α die übrigen Funktionen desselben Winkels zu berech.

nen. Es sei gegeben $\sin \alpha = 0,856$, so find $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$, $\sec \alpha$, $\operatorname{cosec} \alpha$, und $\angle \alpha$ wie groß?

91) Desgl. $\cos \alpha = 0,407$;

wie groß find: $\sin \alpha$, $\tan \alpha$,

94) $x = \sin 108^\circ 10' \cdot \tan 95^\circ 20'$.

95) $x L = \frac{738 \text{ Fuß } \sin 24^\circ 16' 13''}{\sin 55^\circ 21' 13''}$.

96) $x = \frac{(34,14)^3 \sin^2 15^\circ 14' 22''}{(0,0043)^2}$.

$\cot \alpha$, $\sec \alpha$, $\operatorname{cosec} \alpha$ und $\angle \alpha$?

92) Desgl. $\tan \alpha = 2,34$; wie groß find: $\cot \alpha$, $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $\sec \alpha$, $\operatorname{cosec} \alpha$ und $\angle \alpha$?

93) Desgleichen $\sin x = \frac{5}{7}$.

II. Berechnung der ebenen Dreiecke.

§ 14. Ein Dreieck wird durch drei von einander unabhängige Stücke bestimmt. Stellt man zwischen vier unabhängigen Stücken des Dreiecks eine Gleichung auf, so kann jedes derselben aus den drei gegebenen anderen berechnet werden. Folgende drei Fälle sind möglich (die Maaszahlen der drei Seiten bezeichnen wir mit a , b , c und die gegenüberstehenden Winkel mit α , β , γ):

1) Zwei Seiten und zwei Gegenwinkel (a , b , α , β).

2) Zwei Seiten, ein Gegenwinkel und ein anliegender Winkel (a , b , α , γ).

3) Drei Seiten und ein Winkel (a , b , c , α).

Lehrs. 8. Die Seiten verhalten sich wie die Sinusse der gegenüberstehenden Winkel: $a : c = \sin \alpha : \sin \gamma$.

Fig. 15.

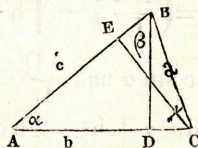
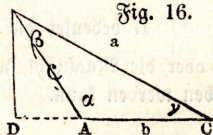


Fig. 16.



Bew. Man ziehe im Dreieck ABC (Fig. 15 u. 16) aus der Spitze B die Höhe BD , so ist $BD = a \sin \gamma = c \sin \alpha$ (§ 7 C), folglich $a : c = \sin \alpha : \sin \gamma$. Um den Satz für die anderen Seiten zu beweisen, muß man die anderen Höhen ziehen.

Lehrs. 9. Die Summe zweier Seiten verhält sich zu dem Unterschiede dieser Seiten, wie die Tangente der halben Summe der gegenüberstehenden Winkel zu der Tangente der halben Differenz derselben Winkel. $a + b : a - b = \tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta) : \tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

Bew. $a : b = \sin \alpha : \sin \beta$ (Lehrs. 8); hieraus folgt:
 $a + b : a - b = \sin \alpha + \sin \beta : \sin \alpha - \sin \beta$, oder
 $a + b : a - b = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) : 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$
 (Lehrs. 7). Dividirt man die Glieder des zweiten Verhältnisses durch $2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, so erhält man:
 $a + b : a - b = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} : \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$, also
 $a + b : a - b = \tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta) : \tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

Lehrs. 10. In jedem Dreiecke ist das Quadrat der Maaßzahl jeder Seite gleich der Summe der Quadrate der Maaßzahlen der beiden andern Seiten weniger dem doppelten Producte der Maaßzahlen dieser Seiten mal dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels. $a^2 = b^2 + c^2 - 2 b c \cos \alpha$.

Bew. $a^2 = \left(\frac{BD}{L}\right)^2 + \left(\frac{DC}{L}\right)^2$ *) (Fig. 15.) $\frac{BD}{L} =$
 $c \sin \alpha$ und $\frac{DC}{L} = b - c \cos \alpha$, folglich

$$a^2 = c^2 \sin^2 \alpha + (b - c \cos \alpha)^2 = c^2 \sin^2 \alpha + b^2 - 2 b c \cos \alpha + c^2 \cos^2 \alpha \\ = c^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + b^2 - 2 b c \cos \alpha = b^2 + c^2 - 2 b c \cos \alpha.$$

Sieht man von C nach AB eine Senkrechte, so ist: $b^2 = c^2 + a^2 - 2 a c \cos \beta$.

Ist $\angle \alpha$ ein stumpfer Winkel (Fig. 16), so ist:
 $a^2 = \left(\frac{DB}{L}\right)^2 + \left[b + \frac{AD}{L}\right]^2$. Nun ist $\frac{DB}{L} = c \sin (180^\circ - \alpha)$
 $= c \sin \alpha$ und $\frac{AD}{L} = c \cos (180^\circ - \alpha) = - c \cos \alpha$, also $a^2 =$
 $c^2 \sin^2 \alpha + b^2 - 2 b c \cos \alpha + c^2 \cos^2 \alpha = b^2 + c^2 - 2 b c \cos \alpha$.

*) L bedeutet die Maaßeinheit, und $\frac{BD}{L}$ u. s. w. die Verhältniszahl oder die Maaßzahl, welche als unbenannte Zahl nur zu einer Potenz erhoben werden kann.

Berechnung der rechtwinkligen Dreiecke.

§ 15. Zur Auflösung eines rechtwinkligen Dreiecks sind nur zwei Stücke nötig, unter denen wenigstens eine Seite sein muß. In allen Aufgaben sei $\angle \gamma$ der rechte Winkel und JF der Flächeninhalt des Dreiecks.

Es sind nur folgende Aufgaben möglich:

- 1) Gegeben c, α ; gesucht a, b, β, J .
- 2) „ a, α ; „ b, c, β, J .
- 3) „ c, α ; „ b, α, β, J .
- 4) „ a, b ; „ c, α, β, J .
- 5) „ J, α ; „ a, b, c, β .
- 6) „ J, a ; „ b, c, α, β .
- 7) „ J, c ; „ a, b, α, β .

1. Aufg. Aus der Hypotenuse c und einem spitzen $\angle \alpha$ die übrigen Stücke und den Inhalt des Dreiecks zu finden.

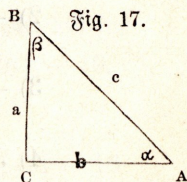
Aufl. 1) $\angle \beta = 90^\circ - \alpha$

$$2) a = c \sin \alpha.$$

$$3) b = c \cos \alpha.$$

$$4) J = \frac{ab}{2} = \frac{c^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2} =$$

$$\frac{c^2 \sin 2\alpha}{4}.$$



Beispiel. $cL = 45,93$ Fuß und $\angle \alpha = 23^\circ 41' 52''$.

$$1) \angle \beta = 66^\circ 18' 8''.$$

$$2) \log a = \log 45,93 + \log \sin 23^\circ 41' 52''.$$

$$\log 45,93 = 1,6620964$$

$$\log \sin 23^\circ 41' 52'' = 9,6041312 - 10$$

$$\log a = 1,2662276$$

$$a = \text{Num. log } 1,2662276 = 18,4598$$

$$aL = 18,4598 \text{ Fuß} = 2 \text{ Faden } 4 \text{ Fuß } 5,5 \text{ Zoll.}$$

$$4) \log b = \log 45,93 + \log \cos 23^\circ 41' 52''$$

$$\log 45,93 = 1,6620964$$

$$\log \cos 23^\circ 41' 52'' = 9,9617429 - 10$$

$$\log b = 1,6238393$$

$$b = 42,0571$$

$$bL = 42,0571 \text{ Fuß} = 6 \text{ Faden } 0 \text{ Fuß } 0,6 \text{ Zoll.}$$

$$4) \log J = 2 \log 45,93 + \log \sin 23^\circ 41' 52'' + \log \cos 23^\circ 41' 52'' - \log 2$$

$$2 \log 45,93 = 3,3241928$$

$$\log \sin 23^\circ 41' 52'' = 9,6041312 - 10$$

$$\log \cos 23^\circ 41' 52'' = 9,9617429 - 10$$

$$2,8900669$$

$$\log 2 = 0,3010300$$

$$\log J = 2,5890369$$

$$J = 388,1833$$

$$JF = 388,1833 \text{ Fuß} = 7 \text{ Faden } 45 \text{ Fuß } 26 \text{ Zoll.}$$

2. Aufg. Aus einer Kathete a und einem spitzen $\angle \alpha$ die übrigen Stücke und den Inhalt des Dreiecks zu berechnen.

$$\text{Aufg. } 1) \angle \beta = 90^\circ - \alpha.$$

$$2) \frac{a}{c} = \sin \alpha; c = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

$$3) \frac{a}{b} = \tan \alpha; b = \frac{a}{\tan \alpha} = a \cotg \alpha.$$

$$4) J = \frac{ab}{2} = \frac{a^2 \cotg \alpha}{2}.$$

Beisp. $aL = 3 \text{ Fd. } 4 \text{ Fuß } 11 \text{ Zoll u. } \angle \alpha = 48^\circ 14' 10''.$

$$1) \angle \beta = 41^\circ 45' 50''.$$

$$2) \log c = \log 311 - \log \sin 48^\circ 14' 10''$$

$$\log 311 = 12,4927604 - 10$$

$$\log \sin 48^\circ 14' 10'' = 9,8726782 - 10$$

$$\log c = 2,6200822$$

$$c = 416,948$$

$$cL = 416,948 \text{ Zoll} = 4 \text{ Faden } 6 \text{ Fuß } 8,948 \text{ Zoll.}$$

$$3) \log b = \log 311 + \log \cotg 48^\circ 14' 10''$$

$$\log 311 = 2,4927604$$

$$\log \cotg 48^\circ 14' 10'' = 9,9508367 - 10$$

$$\log b = 2,4435971$$

$$b = 277,71$$

$$bL = 277,71 \text{ Zoll} = 3 \text{ Faden } 2 \text{ Fuß } 1,71 \text{ Zoll.}$$

$$\begin{array}{rcl}
 4) \log J & = & 2 \log 311 + \log \cotg 48^\circ 14' 10'' - \log 2 \\
 2 \log 311 & = & 4,9855208 \\
 \log \cotg 48^\circ 14' 10'' & = & 9,9508367 - 10 \\
 \hline
 & & 4,9363575 \\
 \log 2 & = & 0,3010300 *) \\
 \hline
 \log J & = & 4,6353275
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} 2 \log 311 & = & 4,9855208 \\ \log \cotg 48^\circ 14' 10'' & = & 9,9508367 - 10 \\ \log 2 & = & 0,3010300 *) \end{array}} \right\} \begin{array}{r} 4,9855208 \\ 9,9508367 - 10 \\ \text{oder: } 9,6989700 - 10 \\ \hline 4,6353275 \end{array}$$

$J = 43184,46$ und $JF = 43184,46 \square \text{Zoll} = 6 \square \text{Zaden } 5 \square \text{Fuß}$
 $128,46 \square \text{Zoll}.$

3. Aufg. Aus der Hypotenuse c und einer Kathete a die übrigen Stücke und den Inhalt des Dreiecks zu berechnen.

Aufl. 1) $\sin \alpha = \frac{a}{c}.$

2) $\cos \beta = \frac{a}{c}.$

3) $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a) \cdot (c-a)}.$

4) $J = \frac{ab}{2} = \frac{a \sqrt{(c+a) \cdot (c-a)}}{2}.$

Beispiel. $cL = 410,531$ Fuß und $aL = 149,002$ Fuß.

1) $\log \sin \alpha = \log a - \log c = 9,5598461 - 10.$

$\angle \alpha = 21^\circ 16' 53,2''.$

2) $\log \cos \beta = \log a - \log c$

$\log \cos \beta = 9,5598461 - 10$

$\angle \beta = 68^\circ 43' 6,8''.$

3) $\log b = \frac{1}{2} [\log (c+a) + \log (c-a)]$

$\log 559,533 = 2,7478257$

$\log 261,529 = 2,4175198$

$\hline 2 \mid 5,1653455$

$\log b = 2,5826727$

$bL = 382,536$ Fuß $= 54$ Zaden 4 Fuß 6 Zoll.

4) $\log J = \log a + \frac{1}{2} [\log (c+a) + \log (c-a)] - \log 2$

$\log 149,002 = 2,1731921$

$\log b = 2,5826727$

$\text{Compl. } \log 2 = 9,6989700 - 10$

$\hline \log J = 4,4548348$

$JF = 28499,34 \square \text{Fuß} = 581 \square \text{Zaden } 30 \square \text{Fuß } 48,96 \square \text{Zoll}.$

*) Statt zu subtrahiren zieht man $\log 2$ von 10 ab, welches das Complement heißt, u. addirt, weil $-0,3010300 = 9,6989700 - 10$ ist.

4. Aufg. Aus den beiden Katheten a, b die übrigen Stücke und den Inhalt des Dreiecks zu berechnen.

$$\begin{array}{l|l} \text{Aufsl. 1) } c = \sqrt{a^2 + b^2} & 3) \tan \beta = \frac{b}{a} \\ 2) \tan \alpha = \frac{a}{b} & 4) J = \frac{ab}{2}. \end{array}$$

Beispiel. $aL = 33$ Fuß und $bL = 24$ Fuß 9 Zoll.

$$\begin{array}{l} 1) \log c = \frac{1}{2} \log (a^2 + b^2) \\ \frac{1}{2} \log 245025 = 2 \mid 5,3892104 \\ \log c = 2,6946052 \end{array}$$

$cL = 495$ Zoll = 5 Faden 6 Fuß 3 Zoll.

$$\begin{array}{l} 2) \log \tan \alpha = \log a - \log b \\ \log 396 = 2,5976952 \\ \log 297 = 2,4727564 \\ \log \tan \alpha = 0,1249388 \end{array}$$

$$\angle \alpha = 53^\circ 7' 48,4''.$$

$$\begin{array}{l} 3) \log \tan \beta = \log b - \log a = 9,8750612 - 10 \\ \angle \beta = 36^\circ 52' 11,6''. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4) \log J = \log a + \log b - \log 2 = 4,7694216 \\ JF = 58806 \square \text{Zoll} = 8 \square \text{Faden } 16 \square \text{Fuß } 54 \square \text{Zoll}. \end{array}$$

5. Aufg. Aus dem Inhalte J und einem spitzen $\angle \alpha$ eines rechtwinkligen Dreiecks die übrigen Stücke zu berechnen.

Aufsl. 1) $\angle \beta = 90^\circ - \angle \alpha$.

$$2) J = \frac{a^2 \cotg \alpha}{2}; a = \sqrt{\frac{2J}{\cotg \alpha}} = \sqrt{2J \tan \alpha}.$$

$$\begin{array}{l} 3) c = \frac{a}{\sin \alpha} = \sqrt{\frac{2J \tan \alpha}{\sin^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{2J}{\sin \alpha \cos \alpha}} = \\ \sqrt{\frac{4J}{\sin 2\alpha}}. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4) b = \frac{a}{\tan \alpha} = \sqrt{\frac{2J \tan \alpha}{\tan^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{2J}{\tan \alpha}} = \\ \sqrt{2J \cotg \alpha}. \end{array}$$

Beispiel. $JF = 45 \square$ Fuß 72 $\square$ Zoll und $\angle \alpha = 73^\circ 47'$.

$$1) \angle \beta = 16^\circ 13'.$$

$$2) \log a = \frac{1}{2} (\log 2 J + \log \tan \alpha).$$

$$\log 13104 = 4,1174039$$

$$\log \tan 73^\circ 47' = 10,5363424 - 10$$

$$\underline{2 \mid 4,6537463}$$

$$\log a = 2,3268731$$

$$aL = 212,26 \text{ Soll} = 2 \text{ Faden } 3 \text{ Fuß } 8,26 \text{ Soll.}$$

$$3) \log c = \frac{1}{2} (\log 4 J - \log \sin 2 \alpha)$$

$$\log 26204 = 4,4184339 - 10$$

$$\log \sin 32^\circ 26' *) = 9,7294223$$

$$\underline{2 \mid 4,6890116}$$

$$\log c = 2,3445058$$

$$cL = 221,05 \text{ Soll} = 2 \text{ Faden } 4 \text{ Fuß } 5,05 \text{ Soll.}$$

$$4) \log b = \frac{1}{2} (\log 2 J + \log \cotg \alpha)$$

$$\log 13104 = 4,1174039$$

$$\log \cotg 73^\circ 47' = 9,4636576$$

$$\underline{2 \mid 3,5810615}$$

$$\log b = 1,7905307$$

$$bL = 61,73 \text{ Soll} = 5 \text{ Fuß } 1,73 \text{ Soll.}$$

6. Aufg. Aus dem Inhalte J und einer Kathete a die übrigen Stücke des rechtwinkligen Dreiecks zu berechnen.

Aufl. 1) $b = \frac{2J}{a}.$

$$2) \tan \alpha = \frac{a^2}{2J}.$$

$$3) \tan \beta = \frac{2J}{a^2}.$$

$$4) c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + \frac{4J^2}{a^2}}.$$

Beispiel. $JF = 100$ Deffätinen und $aL = 100$ Saschen.

(100 Deffätinen = 240000 □ Saschen.)

$$1) b = \frac{2 \cdot 240000}{100} = 4800.$$

$$bL = 4800 \text{ Saschen} = 9 \text{ Werst } 300 \text{ Saschen.}$$

*) $\sin 2\alpha = \sin 147^\circ 34' = \sin 32^\circ 26'.$

$$2) \log \tan \alpha = 2 \log a - \log 2 J = 8,3187588$$

$$\angle \alpha = 1^\circ 11' 36,6''.$$

$$3) \log \tan \beta = \log 2 J - 2 \log a = 11,6812412$$

$$\angle \beta = 88^\circ 48' 23,4''.$$

$$4) c = \sqrt{23050000} = 4801,04$$

$$cL = 4801,04 \text{ Saſchen} =$$

9 Werſt 301 Saſchen 0 Arſchin 1,92 Werſchoß.

7. Aufg. Aus dem Inhalte J und der Hypotenuse c die übrigen Stücke des rechtwinkligen Dreiecks zu berechnen.

Aufl. 1) $\sin 2 \alpha = \frac{4 J}{c^2}.$

$$2) a^2 + b^2 = c^2$$

$$2 ab = 4 J$$

$$a + b = \sqrt{c^2 + 4 J}$$

$$a - b = \sqrt{c^2 - 4 J}$$

$$a = \frac{\sqrt{c^2 + 4 J} + \sqrt{c^2 - 4 J}}{2}$$

$$3) b = \frac{\sqrt{c^2 + 4 J} - \sqrt{c^2 - 4 J}}{2}$$

$$4) \angle \beta = R - \angle \alpha.$$

Beispiel. $JF = 30 \square \text{Saſch. } 5 \square \text{Arſchin, } cL = 20 \text{ Saſch. } 2 \text{ Al.}$

$$1) \log \sin 2 \alpha = \log 4 J - 2 \log c = 9,4566093$$

$$2 \alpha = 16^\circ 37' 41,6'' \text{ oder } 163^\circ 22' 18,4''$$

$$\alpha = 8^\circ 18' 50,8'' \text{ oder } 81^\circ 41' 9,2''.$$

$$2) a = \frac{\sqrt{4944} + \sqrt{2744}}{2} = \frac{70,3 + 52,3}{2} = 61,3$$

$$aL = 61,3 \text{ Arſchin} = 20 \text{ Saſchen } 1 \text{ Arſchin } 4,8 \text{ Werſchoß.}$$

$$3) b = \frac{\sqrt{4944} - \sqrt{2744}}{2} = 9.$$

$$bL = 3 \text{ Saſchen.}$$

4) Hier iſt $a > b$, folglich auch $\angle \alpha > \angle \beta$, alſo:

$$\angle \alpha = 81^\circ 41' 9,2'' \text{ und } \angle \beta = 8^\circ 18' 50,8''.$$

Berechnung der schiefwinkligen Dreiecke.

§ 16. Es sind folgende Aufgaben nur möglich:

- 1) Gegeben a, α, β ; gesucht b, c, γ, J .
- 2) „ a, b, α ; „ c, β, γ, J ($a > b$).
- 3) „ a, b, γ ; „ c, α, β, J .
- 4) „ a, b, c ; „ α, β, γ, J .
- 5) „ a, b, J ; „ c, α, β, γ .
- 6) „ a, β, J ; „ b, c, α, γ .
- 7) „ a, α, J ; „ b, c, β, γ .
- 8) „ α, β, J ; „ a, b, c, γ .

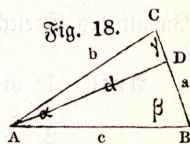
1. Aufg. Aus einer Seite a und zwei Winkeln α, β eines Dreiecks die übrigen Stücke und den Inhalt des Dreiecks zu berechnen.

Aufl. 1) $\angle \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$.

$$2) b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} \text{ (Lehrsatz 8.)}$$

$$3) c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{a \sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha}.$$

$$4) J = \frac{a d}{2} = \frac{a c \sin \beta}{2} = \frac{a^2 \sin \beta \sin (\alpha + \beta)}{2 \sin \alpha}.$$



Beispiel. $aL = 594$ Faden 6 Fuß 10 Zoll; $\angle \alpha = 69^\circ 43' 52,5''$ und $\angle \beta = 60^\circ 59' 10,2''$.

$$1) \angle \gamma = 49^\circ 16' 57,3''.$$

$$2) \log b = \log a + \log \sin \beta - \log \sin \alpha$$

$$\log 49978 = 4,6987789$$

$$\log \sin 60^\circ 59' 10,2'' = 9,9417611 - 10$$

$$\text{Compl. } \log \sin 69^\circ 43' 52,5'' = 0,0277611 \quad *)$$

$$\log b = 4,6683011$$

$$bL = 554 \text{ Faden } 4 \text{ Fuß } 6,9 \text{ Zoll.}$$

$$3) \log c = \log a + \log \sin \gamma - \log \sin \alpha$$

$$\log 49978 = 4,6987789$$

$$\log \sin 49^\circ 16' 57,3'' = 9,8796326 - 10$$

$$\text{Compl. } \log \sin 69^\circ 43' 52,5'' = 0,0277611$$

$$\log c = 4,6061726$$

$$cL = 40380,58 \text{ Zoll} = 480 \text{ Faden } 5 \text{ Fuß } 0,58 \text{ Zoll.}$$

*) Man subtrahirt, indem man den Subtrahend mit entgegengesetzten Vorzeichen addirt, folglich addirt man $-\log \sin \alpha$ oder $+10 - 9,9722389 = 0,0277611$.

$$4) \log J = 2 \log a + \log \sin \beta + \log \sin (\alpha + \beta) - \log 2 - \log \sin \alpha$$

$$2 \log 49978 = 9,3975578$$

$$\log \sin 60^\circ 59' 10,2'' = 9,9417611 - 10$$

$$\log \sin 49^\circ 16' 57,3 = 9,8796326 - 10$$

$$\text{Compl. log } 2 = 9,6989700 - 10$$

$$\text{Compl. log sin } 69^\circ 43' 52,5'' = 0,0277611$$

$$\log J = 8,9456826$$

$$JF = 882434620 \square \text{Zoll} =$$

$$125061 \square \text{Zaden } 29 \square \text{Fuß } 28 \square \text{Zoll.}$$

2. Aufg. Aus zwei Seiten a, b und dem der größern Seite gegenüberliegenden Winkel α die übrigen Stücke und den Inhalt des Dreiecks zu berechnen.

$$\text{Aufg. } 1) \sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}.$$

$$2) \angle \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta).$$

$$3) c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} \text{ oder } c = b \cos \alpha + \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 \alpha}$$

(Lehrs. 10.) Da $a > b$ ist, so ist auch $\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 \alpha}$ größer als $b \cos \alpha$, daher ist nur die positive Wurzel zu nehmen.

$$4) J = \frac{c b \sin \alpha}{2} \text{ oder } \frac{a b \sin \gamma}{2}.$$

Beispiel. $aL = 8$ Saßhen 2 Arschin 15 Verschock,

$$bL = 1 \text{ S. } 1 \text{ A. } 10 \text{ W.}, \angle \alpha = 102^\circ 32' 44''.$$

$$1) \log \sin \beta = \log b + \log \sin \alpha - \log a$$

$$\log 74 = 1,8692317$$

$$\log \sin 77^\circ 27' 16'' = 9,9895047 - 10$$

$$\text{Cpl. log } 431 = 7,3655227 - 10$$

$$\log \sin \beta = 9,2242591 - 10$$

$\angle \beta = 9^\circ 38' 52''$. (Hier kann nur der spitze Winkel von β genommen werden, da $\angle \alpha > \angle \beta$ ist.)

$$2) \angle \gamma = 67^\circ 48' 24''.$$

$$3) \log c = \log a + \log \sin \gamma - \log \sin \alpha$$

$$\log 431 = 2,6344773$$

$$\log \sin 67^{\circ} 48' 24'' = 9,9665709 - 10$$

$$\text{Cpl. } \log \sin 77^{\circ} 27' 16'' = 0,0104953$$

$$\log c = 2,6115435$$

$$cL = 408,83 \text{ Verschof} = 8 \text{ Safch. } 1 \text{ Arschin } 8,83 \text{ Versch.}$$

$$4) \log J = \log a + \log b + \log \sin \gamma - \log 2 = 4,1692499$$

$$JF = 14765,55 \square \text{ Verschof} = 6 \square \text{ Safch. } 3 \square \text{ A. } 173,55 \square \text{ B.}$$

Wenn in dieser Aufgabe der der kleinern Seite gegenüberliegende Winkel gegeben ist, so sind zwei verschiedene Dreiecke möglich, wie auch die Planimetrie lehrt.

3. Aufg. Aus zwei Seiten a, b und dem eingeschlossenen Winkel γ eines Dreiecks die übrigen Stücke und den Inhalt desselben zu berechnen.

$$\text{Aufsl. } \alpha + \beta = 180^{\circ} - \gamma,$$

$$\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{a-b}{a+b} \tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{a-b}{a+b} \cotg \frac{1}{2}\gamma.$$

$$1) \angle \alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}(\alpha - \beta).$$

$$2) \angle \beta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$3) c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} \text{ oder } c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}.$$

$$4) J = \frac{ab \sin \gamma}{2}.$$

Beispiel. $aL = 8 \text{ Arschin } 11 \text{ Verschof}, bL = 10 \text{ A. } 5 \text{ B.}$
und $\angle \gamma = 42^{\circ} 4' 10''.$

$$\log \tan \frac{1}{2}(\beta - \alpha) = \log(b - a) + \log \cotg \frac{1}{2}\gamma - \log(b + a)$$

$$\log 26 = 1,4149733$$

$$\log \cotg 21^{\circ} 2' 5'' = 0,4150365$$

$$\text{Cpl. } \log 304 = 7,5171264 - 10$$

$$\log \tan \frac{1}{2}(\beta - \alpha) = 9,3471362 - 10$$

$$\frac{1}{2}(\beta - \alpha) = 12^{\circ} 32' 18''$$

$$\frac{1}{2}(\beta + \alpha) = 68^{\circ} 57' 55''.$$

$$1) \angle \beta = 81^{\circ} 30' 13''.$$

$$2) \angle \alpha = 56^{\circ} 25' 37''.$$

$$3) \log c = \log a + \log \sin \gamma - \log \sin \alpha = 2,0483701.$$

$$cL = 111,78 \text{ Verschof} = 6 \text{ Arschin } 15,78 \text{ Verschof.}$$

$$4) \log J = \log a + \log b + \log \sin \gamma - \log 2 = 3,8855635.$$

$$JF = 7683,58 \square \text{Versch.} = 30 \square \text{Arshin } 3,58 \square \text{Versch.}$$

4. Aufg. Aus den drei Seiten, a , b , c eines Dreiecks die drei Winkel und den Inhalt desselben zu berechnen.

Aufsl. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ (Lehrf. 10).

$$1) \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$2) \cos \beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$3) \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$4) J = \frac{bc \sin \alpha}{2}.$$

Die Formeln 1, 2, 3 sind für die logarithmische Berechnung nicht bequem; man muß daher diese Ausdrücke umformen. Man addire 1 zu beiden Seiten der Gleichung (1), so ist:

$$1 + \cos \alpha = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc}.$$

Nun ist der Unterschied zweier Quadrate gleich dem Producte der Summe mit dem Unterschiede der Zahlen selbst, folglich:

$$1 + \cos \alpha = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}. \text{ Es ist aber } 1 + \cos \alpha =$$

$$2 \cos^2 \frac{1}{2} \alpha, \text{ also } \cos^2 \frac{1}{2} \alpha = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc} =$$

$$\frac{1}{bc} \left(\frac{b+c+a}{2} \right) \left(\frac{b+c-a}{2} \right).$$

Bezeichnet man die Summe der drei Seiten durch s , so ist $\frac{b+c+a}{2} = \frac{1}{2}s$ und $\frac{b+c-a}{2} = \frac{1}{2}s - a$, folglich: $\cos \frac{1}{2} \alpha =$

$$\sqrt{\frac{\frac{1}{2}s (\frac{1}{2}s - a)}{bc}}. \text{ Zieht man die Gleichung (1) von 1 ab, so}$$

erhält man:

$$1 - \cos \alpha = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} =$$

$$\frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}.$$

Es ist aber $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha$, folglich:

$$\sin^2 \frac{1}{2} \alpha = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc} = \frac{1}{bc} \left(\frac{a+b-c}{2} \right) \left(\frac{a+c-b}{2} \right). \text{ Nun ist}$$

$$\frac{a+b-c}{2} = \frac{1}{2}s - c \text{ und } \frac{a+c-b}{2} = \frac{1}{2}s - b, \text{ also } \sin \frac{1}{2} \alpha =$$

$$\sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s - b)(\frac{1}{2}s - c)}{bc}}. \text{ Ebenso entwickelt man:}$$

$$2) \cos \frac{1}{2} \beta = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}s(\frac{1}{2}s - b)}{ac}} \text{ und } \sin \frac{1}{2} \beta =$$

$$\sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s - c)(\frac{1}{2}s - a)}{ac}}.$$

$$3) \cos \frac{1}{2} \gamma = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}s(\frac{1}{2}s - c)}{ab}} \text{ und } \sin \frac{1}{2} \gamma =$$

$$\sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s - a)(\frac{1}{2}s - b)}{ab}}.$$

Die Wurzeln sind durchgehends mit dem Zeichen + zu nehmen; denn da die Summe aller drei Winkel des ebenen Dreiecks immer gleich 180° , und folglich jeder einzelne Winkel kleiner als 180° ist, so ist der halbe Winkel immer kleiner als 90° und somit Sinus und Cosinus positiv.

Multipliziert man $\cos \frac{1}{2} \alpha$ mit $\sin \frac{1}{2} \alpha$, so ist:

$$\cos \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{bc} \sqrt{\frac{1}{2}s(\frac{1}{2}s - a)(\frac{1}{2}s - b)(\frac{1}{2}s - c)}. \text{ Nun}$$

$$\text{ist } 2 \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha = \sin \alpha, \text{ also } \sin \alpha =$$

$$\frac{2}{bc} \sqrt{\frac{1}{2}s(\frac{1}{2}s - a)(\frac{1}{2}s - b)(\frac{1}{2}s - c)}.$$

$$4) J = \frac{bc \sin \alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}s(\frac{1}{2}s - a)(\frac{1}{2}s - b)(\frac{1}{2}s - c)}.$$

Beispiel:

$$aL = 435,42 \text{ Fuß}$$

$$bL = 389,04 \text{ Fuß}$$

$$cL = 107,37 \text{ Fuß}$$

$$\frac{1}{2}s = 465,915$$

$$\frac{1}{2}s - a = 30,495$$

$$\frac{1}{2}s - b = 76,875$$

$$\frac{1}{2}s - c = 358,545.$$

$$1) \log \cos \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2} [\log \frac{1}{2}s + \log (\frac{1}{2}s - a) - \log b - \log c]$$

$$\log \cos \frac{1}{2} \alpha = 9,7658290 - 10$$

$$\frac{1}{2} \alpha = 54^\circ 19' 22,7'' \text{ und } \angle \alpha = 108^\circ 38' 45,4'.$$

$$2) \log \cos \frac{1}{2} \beta = \frac{1}{2} [\log \frac{1}{2} s + \log (\frac{1}{2} s - b) - \log a - \log c]$$

$$\log \cos \frac{1}{2} \beta = 9,9421502 - 10$$

$$\frac{1}{2} \beta = 28^\circ 55' 15,9'' \text{ und } \angle \beta = 57^\circ 50' 31,8''.$$

$$3) \log \sin \frac{1}{2} \gamma = \frac{1}{2} [\log (\frac{1}{2} s - a) + \log (\frac{1}{2} s - b) - \log a - \log b]^*)$$

$$\log 30,495 = 1,4842286$$

$$\log 76,875 = 1,8857851$$

$$\text{Cpl. } \log 435,42 = 7,3610916 - 10$$

$$\text{Cpl. } \log 389,04 = 7,4100057 - 10$$

$$2 \mid 18,1411110 - 20$$

$$\log \sin \frac{1}{2} \gamma = 9,0705555 - 10$$

$$\frac{1}{2} \gamma = 6^\circ 45' 21,4'' \text{ und } \angle \gamma = 13^\circ 30' 42,8''.$$

$$4) \log J = \frac{1}{2} [\log \frac{1}{2} s + \log (\frac{1}{2} s - a) + \log (\frac{1}{2} s - b) + \log (\frac{1}{2} s - c)]$$

$$\log 465,915 = 2,6683067$$

$$\log 30,495 = 1,4842286$$

$$\log 76,875 = 1,8857851$$

$$\log 358,545 = 2,5545437$$

$$2 \mid 8,5928641$$

$$\log J = 4,2964320$$

$$JF = 19789,37 \square \text{Fu\ss} = 19789 \square \text{Fu\ss} 53 \square \text{Zoll}.$$

5. Aufg. Aus zwei Seiten a , b und dem Inhalte J eines Dreiecks die übrigen Stücke desselben zu berechnen.

$$\text{Aufg. 1) } \sin \gamma = \frac{2J}{ab} \text{ (Aufg. 3.)}$$

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \sin^2 \gamma} = \frac{1}{ab} \sqrt{a^2 b^2 - 4J^2}.$$

$$2) c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = a^2 + b^2 - 2\sqrt{a^2 b^2 - 4J^2}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\sqrt{(ab + 2J)(ab - 2J)}}.$$

$$3) J = \frac{ac \sin \beta}{2}; \sin \beta = \frac{2J}{ac}.$$

$$4) \angle \alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma) \text{ oder } \sin \alpha = \frac{2J}{bc}.$$

Oder man berechnet, nachdem man $\angle \gamma$ gefunden hat, $\angle \alpha$ und $\angle \beta$ nach Lehrf. 9.

*) Für kleine Winkel nimmt man den Sinus.

Beispiel. $aL = 464$ Saſchen 1 Arſchin, $bL = 90$ Saſchen
2 Arſchin und $JF = 3789 \square$ Saſchen 5 $\square$ Arſchin.

$$1) \log \sin \gamma = \log 2J - \log a - \log b = 9,2553408$$

$$\angle \gamma = 10^\circ 22' 17'' \text{ oder } 169^\circ 37' 43''.$$

$$2) \begin{array}{r} a^2 = 1940449 \\ b^2 = 73984 \\ \hline a^2 + b^2 = 2014433 \end{array}$$

$$ab = 378896$$

$$2J = 68212$$

$$ab + 2J = 447108$$

$$ab - 2J = 310684$$

$$\log 447108 = 5,6504125$$

$$\log 310684 = 5,4923189$$

$$2 \mid 11,1427314$$

$$5,5713657$$

$$2 \sqrt{(ab + 2J)(ab - 2J)} = \pm 745410$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \sqrt{(ab + 2J)(ab - 2J)}} = \sqrt{1269023} = 1126,5 \text{ od.}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2 \sqrt{(ab + 2J)(ab - 2J)}} = \sqrt{2759843} = 1661,2.$$

$$3) \log \sin \beta = \log 2J - \log a - \log c$$

$$\log 68212 = 4,8338608$$

$$\text{Cpl. } \log 1393 = 6,8560489 - 10$$

$$\text{Cpl. } \log 1126,5 = 6,9482688 - 10$$

$$\log \sin \beta = 8,6381785 - 10$$

$\angle \beta = 2^\circ 29' 28,9''$. Da $c > b$ iſt, ſo muß $\angle \beta$ ein
ſpitzer Winkel ſein. Nimmt man für c den zweiten Werth,
ſo iſt

$$\log 68212 = 4,8338608$$

$$\text{Cpl. } \log 1393 = 6,8560489 - 10$$

$$\text{Cpl. } \log 1661,2 = 6,7795781 - 10$$

$$\log \sin \beta = 8,4694878 - 10$$

$$\angle \beta = 1^\circ 41' 20,8''.$$

$$4) \angle \alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma) = 180^\circ - (2^\circ 29' 28,9'' + 10^\circ 22' 17'') \\ = 167^\circ 8' 14,1'' \text{ oder } \angle \alpha = 180^\circ - (1^\circ 41' 20,8'' + \\ 169^\circ 37' 43'') = 8^\circ 40' 56,2''.$$

Dieſe Aufgabe enthält zwei verſchiedene Dreiecke, in dem
einen iſt: $cL = 1126,5$ Arſchin $= 375$ Saſchen 1 Arſchin 8 W.,
 $\angle \alpha = 167^\circ 8' 14,1''$, $\angle \beta = 2^\circ 29' 28,9''$ und $\angle \gamma = 10^\circ 22' 17''$;
in dem andern Dreiecke iſt $cL = 1661,2$ Arſchin $= 553$ Saſchen 2
Arſchin 3 Verſchock, $\angle \alpha = 8^\circ 40' 56,2''$, $\angle \beta = 1^\circ 41' 20,8''$ und
 $\angle \gamma = 169^\circ 37' 1,3''$.

Wird die Aufgabe nach Lehrf. 9 berechnet, so erhält man dieselben Werthe.

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{a-b}{a+b} \cotg \frac{1}{2}\gamma; \quad \angle \gamma \text{ sei gleich } 10^\circ 22' 17''$$

$$\log 1121 = 3,0496056$$

$$\log \cotg 5^\circ 11' 8,5'' = 11,0421276 - 10$$

$$14,0917332 - 10$$

$$\log 1665 = 3,2214142$$

$$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 10,8703190 - 10$$

$$\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 82^\circ 19' 22,6''$$

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 84^\circ 48' 51,5''$$

$$\angle \alpha = 167^\circ 8' 14,1''$$

$$\angle \beta = 2^\circ 29' 28,9''.$$

Ist $\angle \gamma = 169^\circ 37' 43''$, so ist

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{1121}{1665} \cotg 84^\circ 48' 51,5''$$

$$\log 1121 = 3,0496056$$

$$\log \cotg 84^\circ 48' 51,5'' = 8,9578725 - 10$$

$$\text{Cpl. } \log 1165 = 6,7785858 - 10$$

$$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 8,7860639 - 10$$

$$\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 3^\circ 29' 47,8''$$

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 5^\circ 11' 8,5''$$

$$\angle \alpha = 8^\circ 40' 56,3''$$

$$\angle \beta = 1^\circ 41' 20,7''.$$

6. Aufg. Aus einer Seite a , einem anliegenden Winkel β und dem Inhalte J eines Dreiecks die übrigen Stücke desselben zu berechnen.

Aufsl. 1) $c = \frac{2J}{a \sin \beta}$. (1 Aufg. 4.)

2) $a+c:a-c = \cotg \frac{1}{2}\beta : \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha - \gamma)$; $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha - \gamma)$

$$= \frac{a-c}{a+c} \cotg \frac{1}{2}\beta = \frac{a^2 \sin \beta - 2J}{a^2 \sin \beta + 2J} \cotg \frac{1}{2}\beta.$$

Hieraus findet man α und 3) $\angle \gamma$.

4) $b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$.

Beispiel. $aL = 44$ Fuß, $\angle \beta = 42^\circ 14' 25''$ und $JF = 784$ □ Fuß 100 □ Soll.

$$1) \log c = \log 2J - \log a - \log \sin \beta = 2,8039541$$

$$cL = 636,72 \text{ Soll} = 53 \text{ Fuß } 0,72 \text{ Soll.}$$

$$2) \log \tan^{1/2}(\gamma - \alpha) = \log(c - a) + \log \cotg^{1/2} \beta - \log(c + a)$$

$$\log \tan^{1/2}(\gamma - \alpha) = 9,3831949 - 10$$

$$^{1/2}(\gamma - \alpha) = 13^\circ 35' 7,2''$$

$$^{1/2}(\gamma + \alpha) = 68^\circ 52' 47,5''$$

$$\angle \alpha = 55^\circ 17' 40,3''.$$

$$3) \angle \gamma = 82^\circ 27' 54,7''.$$

$$4) \log b = \log a + \log \sin \beta - \log \sin \alpha = 2,6352408$$

$$bL = 431,75 \text{ Soll} = 35 \text{ Fuß } 11,75 \text{ Soll.}$$

7. Aufg. Aus einer Seite a , einem Gegenwinkel α und dem Inhalt J eines Dreiecks die übrigen Stücke desselben zu berechnen.

Aufl. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.

$$bc = \frac{2J}{\sin \alpha}$$

$$b^2 + c^2 = a^2 + \frac{4J \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$2bc = \frac{4J}{\sin \alpha}$$

$$b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + \frac{4J}{\sin \alpha} (1 + \cos \alpha) =$$

$$a^2 + \frac{8J \cos^2 \frac{1}{2} \alpha}{\sin \alpha}, \text{ hieraus die Wurzel gezogen und}$$

für $\sin \alpha = 2 \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha$ gesetzt, giebt:

$$(A) \ b + c = \sqrt{a^2 + \frac{8J \cos \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha}{2 \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha}} = \sqrt{a^2 + 4J \cotg \frac{1}{2} \alpha}.$$

$$\text{Ebenso findet man } b^2 - 2bc + c^2 = a^2 - \frac{4J}{\sin \alpha} (1 - \cos \alpha) =$$

$$a^2 - \frac{8J \sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{\sin \alpha}, \text{ also}$$

(B) $b - c = \sqrt{a^2 - 4J \tan \frac{1}{2} \alpha}$. Addirt und subtrahirt man (A) und (B), so erhält man:

$$1) \ b = \frac{1}{2} (\sqrt{a^2 + 4J \cotg \frac{1}{2} \alpha} + \sqrt{a^2 - 4J \tan \frac{1}{2} \alpha}).$$

$$2) c = \frac{1}{2} (\sqrt{a^2 + 4J \cotg \frac{1}{2}\alpha} - \sqrt{a^2 - 4J \tan \frac{1}{2}\alpha}).$$

$$3) \sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}.$$

$$4) \angle \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta).$$

Beispiel. $aL = 8$ Fuß 4 Zoll, $\angle \alpha = 42^\circ 37' 18''$ und $JF = 33$ □ Fuß 25 □ Zoll.

$$\log 4J \cotg \frac{1}{2}\alpha = \log 4J + \log \cotg \frac{1}{2}\alpha = 4,6900376$$

$$4J \cotg \frac{1}{2}\alpha = 48982,12$$

$$a^2 + 4J \cotg \frac{1}{2}\alpha = 58982,12.$$

$$\log 4J \tan \frac{1}{2}\alpha = \log 4J + \log \tan \frac{1}{2}\alpha = 3,8723928.$$

$$4J \tan \frac{1}{2}\alpha = 7454,06$$

$$a^2 - 4J \tan \frac{1}{2}\alpha = 2545,94.$$

$$1) b = \frac{1}{2} (\sqrt{58982,12} + \sqrt{2545,94}) =$$

$$\frac{1}{2} (242,86 + 50,45) = 146,66$$

$$bL = 146,66 \text{ Zoll} = 12 \text{ Fuß } 2,66 \text{ Zoll.}$$

$$2) c = \frac{1}{2} (242,86 - 50,45) = 96,2$$

$$cL = 96,2 \text{ Zoll} = 8 \text{ Fuß } 0,2 \text{ Zoll.}$$

$$3) \log \sin \beta = \log b + \log \sin \alpha - \log a = 9,9969992.$$

$$\angle \beta = 83^\circ 16' 20'' \text{ oder } 96^\circ 43' 40''.$$

Hier ist $\angle \beta = 96^\circ 43' 40''$ denn nimmt man den spitzen Winkel für β , so ist $\angle \gamma > \angle \alpha$, welches nicht möglich ist, da Seite $c < a$ ist.

$$4) \angle \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - 139^\circ 20' 58'' = 40^\circ 39' 2''.$$

8. Aufg. Aus zwei Winkeln α , β und dem Inhalt J eines Dreiecks die übrigen Stücke desselben zu berechnen.

Aufl. 1) $\angle \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta).$

$$2) a = \sqrt{\frac{2J \sin \alpha}{\sin \beta \sin (\alpha + \beta)}}. \quad (1. \text{ Aufg. } 4.)$$

$$3) J = \frac{c^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin \gamma}; \quad c = \sqrt{\frac{2J \sin \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}}.$$

$$4) b = \sqrt{\frac{2J \sin \beta}{\sin \alpha \sin \gamma}}.$$

Beispiel. $\angle \alpha = 50^\circ 40' 30''$, $\angle \beta = 50^\circ 40' 30''$ und
 $JF = 200$ Fuß.

1) $\gamma = 78^\circ 39'$.

2) $\log a = \frac{1}{2} (\log 2J - \log \sin \gamma) = 1,3053187$

$aL = 20,198$ Fuß $= 20$ Fuß 2,37 Zoll.

3) $bL = 20$ Fuß 2,37 Zoll.

4) $\log c = \frac{1}{2} (\log 2J + \log \sin \gamma - 2 \log \sin \alpha) = 1,4082451$

$cL = 25,6$ Fuß $= 25$ Fuß 7,2 Zoll.

F r a g e n.

- 1) Was lehrt die Trigonometrie?
- 2) Wie theilt man die Trigonometrie ein?
- 3) Was lehrt die Goniometrie?
- 4) Was heißt eine Funktion?
- 5) Wie viele trigonometrische Funktionen giebt es?
- 6) Wie definiert man sie?
- 7) Was heißt es: im ersten, zweiten u. s. w. Quadranten?
- 8) In welchen Quadranten sind die trigonometrischen Funktionen positiv?
- 9) In welchen negativ?
- 10) Welche Vorzeichen haben die trigon. Funktionen im ersten, zweiten u. s. w. Quadranten?
- 11) Haben die trigon. Funktionen von Winkeln, die größer als 90° sind, andere Werthe als die der spitzen Winkel?
- 12) Zwischen welchen Gränzen liegen die trig. Funktionen?
- 13) Ist $\sin \alpha$ gleich sinus mal α ?
- 14) Was heißt ein negativer Winkel?
- 15) Welche Vorzeichen haben die trig. Funktionen eines negativen Winkels?
- 16) Sind die trig. Funktionen benannte oder unbenannte Zahlen?
- 17) Welche sind die trig. Linien?
- 18) Man soll die trig. Funktionen durch den Sinus desselben Winkels ausdrücken.

- 19) In welcher Beziehung steht die Tangente zur Cotangente eines und desselben Winkels und umgekehrt?
- 20) Wie unterscheidet sich die Formel für eine trig. Funktion der Summe zweier Winkel von der der Summe zweier trigon. Funktionen?
- 21) Wie findet man den Sinus der Summe zweier Winkel?
- 22) Wie den Cosinus, die Tangente und Cotangente der Summe zweier Winkel?
- 23) Wie findet man den Sinus des Unterschiedes zweier Winkel?
- 24) Wie den Cosinus, die Tangente und Cotangente des Unterschiedes zweier Winkel?
- 25) Wie drückt man die Summe oder den Unterschied zweier Sinusse oder zweier Cosinusse durch ein Product aus?
- 26) Wie findet man die Zahlenwerthe für die trig. Funktionen?
- 27) Wie findet man aus dem Zahlenwerthe einer trig. Funktion eines Winkels den Zahlenwerth einer trig. Funktion eines halben Winkels?
- 28) Weshalb sind die Logarithmen der trig. Funktionen zu groß genommen?
- 29) Weshalb nimmt man beim Auffuchen der Logarithmen für den Sinus und die Tangente die nächst kleinere, hingegen für den Cosinus und die Cotangente die nächst größere Zahl?
- 30) Weshalb sind die Logarithmen der trig. Funktionen nur für Winkel bis 45° berechnet?
- 31) Welchen trig. Funktionen kann man jeden beliebigen Zahlenwerth geben? und welche können nur ächte Brüche sein?
- 32) Was versteht man unter Maaßzahl der Seiten?
- 33) Wie viele Größen sind zur Bestimmung eines Dreiecks nöthig?
- 34) Warum bestimmen 3 Winkel nicht die Größe eines Dreiecks?
- 35) Wenn x ein kleiner Winkel ist, was nimmt man für $\sin x$, $\cos x$ u. s. w.?
- 36) Wie viele Relationen bestehen zwischen den Seiten und Winkeln eines ebenen Dreiecks?
- 37) Wenn man Logarithmen subtrahiren soll, so kann man statt dessen das Complement oder die dekadische Ergänzung addiren. Warum?

Aufgaben aus der ebenen Trigonometrie. (§ 15 und 16.)

- 1) In einem rechth. Dreiecke ist die Hypotenuse $cL = 232,35$ Fuß und $\angle \beta = 34^\circ 14' 32''$ gegeben; man soll die übrigen Stücke und den Inhalt des Dreiecks finden.
- 2) Desgleichen $cL = 162$ Fuß und $\angle \beta = 14^\circ 7' 8''$.
- 3) In einem rechth. Dreiecke ist die Hypotenuse $cL = 213,16$ Fuß und eine Cathete $aL = 116,13$ Fuß gegeben; man soll die übrigen Stücke und den Inhalt des Dreiecks berechnen.
- 4) Desgleichen $cL = 52,17$ Fuß und $aL = 31,19$ Fuß.
- 5) In einem rechth. Dreiecke ist eine Cathete $aL = 315,46$ Fuß und der ihr anliegende $\angle \beta = 42^\circ 44' 15''$ gegeben; man soll die übrigen Stücke und den Inhalt des Dreiecks finden.
- 6) Desgleichen $a = 785,34$ und $\angle \beta = 67^\circ 2' 35''$.
- 7) In einem rechth. Dreiecke ist eine Cathete $aL = 23,14$ Fuß und der ihr gegenüberliegende $\angle \alpha = 12^\circ 13' 14''$ gegeben; man soll die übrigen Stücke und den Inhalt des Dreiecks finden.
- 8) Desgleichen $aL = 12,14$ Fuß u. $\angle \alpha = 15^\circ 13' 11''$.
- 9) In einem rechth. Dreiecke sind die beiden Catheten $aL = 69,13$ Faden und $bL = 18,6$ Faden gegeben; man soll die übrigen Stücke und den Inhalt des Dreiecks finden.
- 10) Desgleichen $a = 18,5$ und $b = 16,5$.
- 11) Der Inhalt $JF = 116 \square$ Fuß eines rechth. Dreiecks und der $\angle \alpha = 13^\circ 14' 5''$ sind gegeben; man soll die übrigen Stücke des Dreiecks berechnen.
- 12) Desgleichen $\angle \alpha = 23^\circ 8' 52''$ und $JF = 92 \square$ Fuß.
- 13) In einem rechth. Dreiecke sind beide Catheten $bL = 3476$ Faden 2 Fuß 7 Zoll und $aL = 854$ Faden 3 Fuß 6 Zoll gegeben; man soll die übrigen Stücke berechnen.
- 14) In einem rechth. Dreiecke ist die Hypotenuse $cL = 10$ Faden 4 Fuß 5 Zoll und der $\angle \beta = 80^\circ 59' 45''$ gegeben; man soll die übrigen Stücke des Dreiecks berechnen.
- 15) In einem rechth. Dreiecke ist eine Cathete $bL = 10236$ Faden 4 Fuß 8 Zoll und $\angle \beta = 48^\circ 50' 30''$ gegeben; man soll die übrigen Stücke des Dreiecks finden.

16) In einem gleichschenkligen Dreiecke ist die Grundlinie $cL = 4$ Fd. 6 Fuß und eine Seitenlinie $aL = 12$ Fd. 5 Fuß; die übrigen Stücke und den Inhalt des Dreiecks zu berechnen.

17) In einem gleichschenkligen Dreiecke ist eine Seitenlinie $aL = 12376$ Fuß 8 Zoll und der Winkel an der Spitze $\gamma = 150^\circ 27' 18''$; gesucht werden die übrigen Stücke und der Inhalt des Dreiecks.

18) In einem gleichschenkligen Dreiecke ist die Grundlinie $cL = 38$ Faden 2 Fuß 2 Zoll und ein anliegender Winkel $\alpha = 89^\circ 59' 50''$; gesucht werden die übrigen Stücke und der Inhalt des Dreiecks.

19) Aus einer Seite $a = 1546,33$ und zwei $\angle \beta = 62^\circ 43' 55''$ und $\angle \gamma = 53^\circ 22' 37''$ eines Dreiecks die übrigen Stücke und den Inhalt des Dreiecks zu berechnen.

20) Desgleichen $aL = 2789$ Zoll, $\angle \alpha = 24^\circ 18' 12''$, $\angle \beta = 36^\circ 14' 26''$.

21) Es sind zwei Seiten $aL = 325,54$ Fuß, $bL = 415,64$ Fuß eines Dreiecks und ein Gegenwinkel $\beta = 68^\circ 42'$ gegeben; man soll die übrigen Stücke und den Inhalt des Dreiecks berechnen.

22) Es sind zwei $\angle \alpha = 32^\circ 15' 20''$, $\angle \beta = 105^\circ 46' 32''$ und die Zwischenseite $cL = 328$ Faden 9 Fuß 7 Zoll eines Dreiecks gegeben; gesucht werden die übrigen Stücke und der Inhalt des Dreiecks.

23) Es sind zwei $\angle \alpha = 80^\circ 40' 10''$, $\angle \beta = 87^\circ 50' 36''$ und eine Gegenseite $aL = 1789$ Faden 8 Fuß eines Dreiecks gegeben; man berechne die übrigen Stücke und den Inhalt des Dreiecks.

24) Es sind zwei Seiten $aL = 349,73$ Meter, $cL = 230,23$ Meter und ein Gegenwinkel $\alpha = 37^\circ 49' 25''$ eines Dreiecks gegeben; gesucht werden die übrigen Stücke und der Inhalt desselben.

25) Es sind zwei Seiten $bL = 348,25$ Meter, $cL = 256,96$ Meter und der eingeschlossene $\angle \alpha = 56^\circ 27'$ eines Dreiecks gegeben; man soll die übrigen Stücke und den Inhalt desselben berechnen.

26) Es sind zwei Seiten $aL = 16$ Faden, $cL = 12$ Faden und ein Gegenwinkel $\alpha = 50^\circ$ eines Dreiecks gegeben; man soll die übrigen Stücke und den Inhalt desselben berechnen.

27) Es sind drei Seiten $aL = 1415,7$ Fuß, $bL = 1389,9$ Fuß und $cL = 2627,54$ Fuß eines Dreiecks gegeben; man berechne die Winkel und den Inhalt des Dreiecks.

28) Desgleichen $aL = 323,4$ Zoll, $bL = 297,5$ Zoll und $cL = 300$ Zoll.

29) Die Seiten eines Dreiecks zu berechnen, von welchem $\angle \alpha = 36^\circ 52'$, $\angle \beta = 110^\circ 5'$ und der Flächeninhalt $J = 1476$ gegeben sind.

30) Die unbekannten Stücke eines Dreiecks zu finden, wenn dessen Grundlinie $cL = 87,75$ Fuß, der Gegenwinkel $\gamma = 73^\circ 20'$ und die Differenz der Basiswinkel $\beta - \alpha = 13^\circ 4'$ ist.

31) Desgleichen, wenn $cL = 117,3$ Fuß, $\angle \gamma = 92^\circ 18'$ und das Verhältniß der andern Seiten $8 : 11$ ist.

32) Desgleichen, wenn $\angle \alpha = 49^\circ 17' 10''$, $\angle \beta = 95^\circ 36' 20''$, $aL = 5$ Faden 9 Zoll gegeben sind.

33) Desgleichen, wenn $aL = 917$ Faden 5 Fuß 9 Zoll, $bL = 1289$ Faden 5 Zoll und $\angle \alpha = 35^\circ 27' 16''$ gegeben sind.

34) Desgleichen, wenn $bL = 9095$ Fuß 5 Zoll, $cL = 746985$ Fuß und $\angle \alpha = 47^\circ 19' 41''$ gegeben sind.

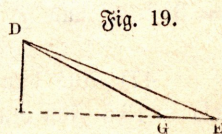
35) Desgleichen, wenn $aL = 150$ Saßchen, $cL = 227$ Saßchen 2 Arschin 4 Werchow, $\angle \alpha = 40^\circ 40' 40''$ gegeben sind.

36) Aus der Länge einer senkrechten Stange $AB = 9$ Fuß und derjenigen ihres horizontalen Schattens $AC = 11,7$ Fuß die Sonnenhöhe, d. h. $\angle \gamma$, zu bestimmen.

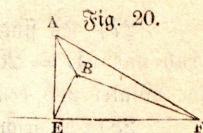
37) Aus der Sonnenhöhe $\angle \gamma = 48^\circ 10'$ und der Länge des horizontalen Schattens $AC = 201$ Fuß die Höhe eines Thurmes AB zu berechnen.

38) Die Seite eines regulären Siebenecks sei $sL = 5,73$ Arschin; wie groß ist der Radius des umschriebenen Kreises?

39) Der Gipfel D eines Berges erscheint in E unter dem Winkel $19^\circ 16'$, in G unter dem Winkel $20^\circ 42'$ und $GE = 937$ Fuß. Wie hoch ist der Berg?



40) Die Höhe eines Thurmes AB zu bestimmen, wenn die Standlinie $EF = 844$ Fuß, $\angle EFA = 34^\circ 16'$, $\angle AEF = 92^\circ 32'$ und $\angle AEB = 16^\circ 44'$ ist.

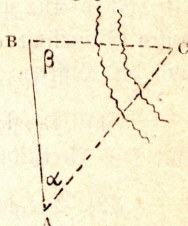


41) Wie groß ist die Seite eines regulären Neunecks, wenn der Radius des umschriebenen Kreises $rL = 5$ Arschin ist?

42) Die Sehne eines Kreisbogens ist $aL = 141$ Faden 1 Fuß lang, der Durchmesser des Kreises $dL = 1200$ Faden. Wie lang ist der Kreisbogen?

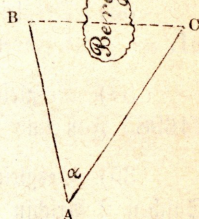
Fig. 21.

43) Eine Linie BC auf dem Felde zu messen, welche nur an ihrem Endpunkte B zugänglich ist. Gegeben $AB = 314$ Fuß, $\angle \alpha = 41^\circ 10'$ und $\angle \beta = 63^\circ 50'$.



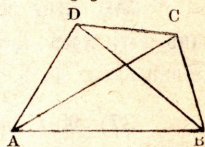
44) Desgleichen, wenn sie an beiden Endpunkten zugänglich, aber weder unmittelbar zu messen, noch zu übersehen ist. Gegeben $AC = 1073$ Fuß, $AB = 1182$ Fuß und $\angle \alpha = 45^\circ 3'$.

Fig. 22.



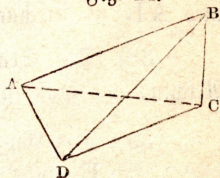
45) Desgleichen eine Linie DC , die an keinem ihrer Endpunkte zugänglich ist. Gegeben die Standlinie $AB = 534$ Fuß, $\angle ABC = 65^\circ 42'$, $\angle ABD = 38^\circ 16'$, $\angle BAD = 52^\circ 8'$, u. $\angle BAC = 29^\circ 4'$.

Fig. 23.



46) Desgleichen eine Linie AC , wenn die Standlinie BD dieselbe durchschneidet. Gegeben $BD = 1038$ Faden, $\angle DBA = 26^\circ 36'$, $\angle BDA = 85^\circ 7'$, $\angle DBC = 31^\circ 42'$ und $\angle BDC = 19^\circ 44'$.

Fig. 24.



47) Aus dem Centriwinkel $\alpha = 92^\circ 6'$ und dem Radius $rL = 13,5$ Fuß den Kreisabschnitt KF zu berechnen.

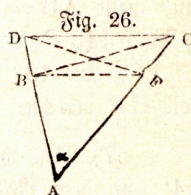
48) Die Weite des Gesichtskreises für den Gipfel eines Berges zu bestimmen, welcher 5460 par. Fuß über der Meeresfläche liegt, wenn der Erdradius 3267000 Toisen angenommen wird. (1 Toise = 6 par. Fuß.)

49) Die Seiten eines Vierecks ABCD sind: AB = 12 Fuß, BC = 10 Fuß, CD = 9 Fuß, DA = 8 Fuß, der $\angle \alpha = 85^\circ 30'$. Man berechne die andern Winkel, die Diagonalen und den Flächeninhalt des Vierecks.

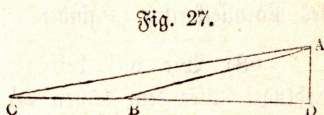
50) Wie weit muß man sich von einem Berge, der 5000 ruff. Fuß hoch ist, entfernen, um ihn aus dem Horizont zu verlieren? 1) Wenn das Auge sich in der Erdsfläche selbst befindet; 2) wenn es 5 Fuß darüber erhoben ist. (Der Erdradius = 859,5 geogr. Meilen, 15 geogr. Meilen = 104 Werst, 1 Werst = 3500 ruff. Fuß.)

51) Wenn die Höhe des Aetna's 10000 par. Fuß beträgt, was für einen Theil desselben wird man noch aus einer Entfernung von 20 Meilen sehen können? (1 Meile = 3806,7 Toisen, rL = 859,5 Meilen.)

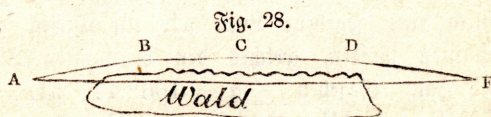
52) Die Linien BD, CF treffen in A unter einem $\angle \alpha = 60^\circ$ zusammen. Von diesem Punkte A gemessen ist AB = 800 Fuß, AC = 1200 Fuß, AD = 920 Fuß AF = 1050 Fuß, welches sind die gegenseitigen Entfernungen der Punkte B, C, D, F?



53) Um die Höhe eines Thurmes zu bestimmen, welchem man sich nicht unmittelbar nähern kann, nimmt man vor demselben auf einer horizontalen Ebene zwei Punkte B, C an, welche mit dem Thurme in gerader Linie liegen, und mißt die Entfernung BC = 791,8 Fuß, die Höhenwinkel ABD = $15^\circ 11' 48''$ und ACD = $8^\circ 2' 24''$; wie hoch ist der Thurm?

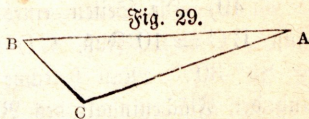


54) Ein Wald, welcher zwei Stationen A, F trennt, soll in der Richtung der.



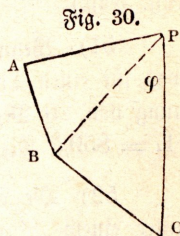
selben durchhauen werden, d. h. wie groß ist der Winkel BAF ?
 Gegeben $AB = 518$ Saschen, $BC = 425$ Saschen, $CD = 368$
 Saschen, $DF = 374$ Saschen, $\angle ABC = 178^\circ 24'$, $\angle BCD$
 $= 175^\circ 11'$ und $CDF = 173^\circ 34'$.

55) Wie groß ist die Entfernung AB eines in horizontaler Ebene gelegenen, unzugänglichen Punktes A von dem in derselben Ebene gelegenen Standpunkte B , wenn A sowohl von B als von dem zweiten Standpunkte C aus sichtbar, und durch wirkliche Messung $BC = 726$ Ellen, $\angle ABC = 39^\circ 14' 3''$, $\angle ACB = 127^\circ 34' 18''$ groß gefunden worden ist? und wie groß wird die Distanz AC sein?



56) Es soll die Entfernung eines Ortes B von dem Thurme P gemessen werden, ohne den Thurm von B aus sehen zu können.

Aufl. Man nehme zwei andere Punkte A und C , in welchen man P erblicken kann, und messe $AB = 2$ Werst 340 Saschen, $BC = 3$ Werst 145 Saschen, $\angle BAP = 76^\circ 15' 10''$, $\angle BCP = 43^\circ 20' 12''$, $\angle ABC = 169^\circ 24' 38''$. Hieraus soll BP berechnet werden.

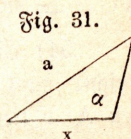


57) Aus der geographischen Breite eines Ortes $\beta = 38^\circ 14'$ und dem Radius der Erde $rL = 860$ Meilen den Radius des Parallelkreises zu finden.

58) Wie viel beträgt der Umfang des Parallelkreises der Erdfugel unter dem 45sten Grade der Breite?

59) Aus der Höhe $CD = 5$ Fuß 2 Zoll und den Winkeln $\alpha = 59^\circ 5' 10''$ und $\angle \beta = 45^\circ 8' 5''$ den Inhalt und die Seiten des Dreiecks zu ermitteln.

60) Es soll von einem gegebenen $\angle \alpha$ durch eine gegebene Linie aL ein Dreieck abgeschnitten werden, welches den bestimmten Inhalt JF hat. Gegeben $\angle \alpha = 106^\circ 44'$, $aL = 34$ Fuß 8 Zoll, $JF = 120 \square$ Fuß 83 $\square$ Zoll.



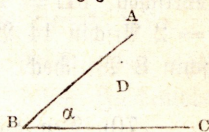
61) Aus der Sehne AB und dem Radius AC den Inhalt des Kreisabschnitts zu finden. Gegeben $AB = 4$ Fuß 10 Zoll, $AC = 6$ Fuß.

62) Aus dem Mittelpunktswinkel $\alpha = 49^\circ 15' 36,5''$ und dem Radius $rL = 9$ Fuß eines Kreises den Inhalt des Kreisabschnitts zu finden.

63) Es ist die Sehne $AB = 3$ Arschin 9 Werschoß und der Mittelpunktswinkel $\alpha = 41^\circ 15'$ gegeben; man soll den Inhalt des Abschnitts ermitteln.

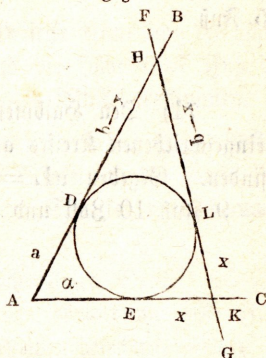
64) Es ist $\angle ABC = \angle \alpha = 40^\circ$ und innerhalb dieses Winkels ein Punkt D gegeben; man soll auf dem Schenkel BC den Mittelpunkt desjenigen Kreises finden, welcher den Schenkel AB berührt und dessen Peripherie durch D geht. Gegeben $BD = aL = 2$ Saschen 1 Arschin und $DBC = \angle \beta = 20^\circ 15'$.

Fig. 32.



65) Es sind die beiden Tangenten AB und AC eines gegebenen Kreises bekannt; es soll an diesen Kreis eine dritte Tangente FG dergestalt gelegt werden, daß das von den beiden erstern Tangenten abgeschnittene Stück derselben, nämlich HK , eine bestimmte Größe hat.

Fig. 33.

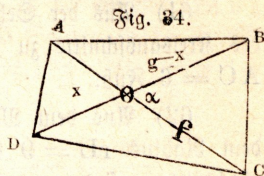


Aufsl. Da die Tangenten AB u. AC gegeben, also AD und $\angle BAC$ bekannt sind, so hat man nur noch die Linie EK dergestalt zu bestimmen, daß die aus dem Endpunkte K dieser Linie nach dem gegebenen Kreise gezogene Tangente HK die bestimmte Größe hat. — Gegeben $AD = aL = 14$ Werschoß, $\angle BAC = \angle \alpha = 60^\circ$, $HK = bL = 1$ Arschin 14 Werschoß.

66) Den Umfang und den Inhalt eines regelmäßigen Neunecks zu finden, wenn der Halbmesser des umschriebenen Kreises $rL = 18$ Fuß 6 Zoll ist.

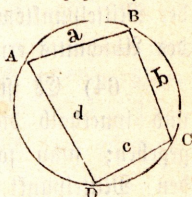
67) Wie weit wird sich der Schatten einer 80 Fuß hohen Pyramide auf einer Ebene erstrecken, wenn die Sonne 25 Grad über dem Horizont steht?

68) Den Inhalt eines jeden Vierecks aus seinen beiden Diagonalen und dem von denselben eingeschlossenen Winkel zu finden. Gegeben $AC = fL = 6 \text{ Fuß } 4 \text{ Zoll}$, $BD = gL = 7 \text{ Fuß } 1 \text{ Zoll}$ und $\angle BOC = \angle \alpha = 58^\circ 15' 22''$.



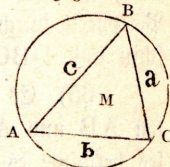
69) Den Inhalt eines im Kreise eingeschriebenen Vierecks aus seinen vier Seiten zu berechnen. Gegeben $aL = 3 \text{ Arschin } 10 \text{ Werschok}$, $bL = 4 \text{ Arschin } 7 \text{ Werschok}$, $cL = 2 \text{ Arschin } 14 \text{ Werschok}$ und $dL = 7 \text{ Arschin } 8 \text{ Werschok}$.

Fig. 35.



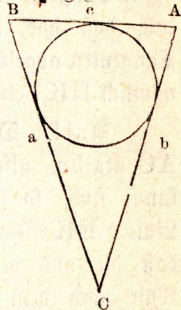
70) Den Halbmesser des um ein Dreieck beschriebenen Kreises aus seinen drei Seiten zu finden. Gegeben $aL = 4 \text{ Faden } 3 \text{ Fuß}$, $bL = 3 \text{ Faden } 2 \text{ Fuß } 9 \text{ Zoll}$ und $cL = 6 \text{ Faden } 5 \text{ Fuß}$.

Fig. 36.



71) Den Halbmesser des in ein Dreieck eingeschriebenen Kreises aus seinen drei Seiten zu finden. Gegeben $aL = 10 \text{ Fuß } 11 \text{ Zoll}$, $bL = 9 \text{ Fuß } 10 \text{ Zoll}$ und $cL = 8 \text{ Fuß } 9 \text{ Zoll}$.

Fig. 37.



72) Wie groß werden die Seiten und Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks sein, wenn die Summe der Hypotenuse und der einen Kathete 9 Zoll, die Summe der Hypotenuse und der andern Kathete dagegen 8 Zoll beträgt?

73) In einem rechth. Dreiecke sind die Hypotenuse und die eine Kathete zusammen 423,6068 Faden lang, dagegen ist 123,6068 Faden der Unterschied der Längen der Hypotenuse und der andern Kathete. Wie groß werden die Seiten und Winkel desselben Dreiecks sein?

74) Es soll ein rechth. Dreieck gebildet werden, in welchem sich das aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypothenuse gefällte Perpendikel zu der einen Kathete wie 3 zu 4 verhält und die Hypothenuse 683,31 Zoll lang ist. Wie groß werden demnach die Katheten und die spitzen Winkel dieses Dreiecks sein?

75) Es ist der Umfang 10 Werschok und die Höhe 1 Werschok eines rechth. Dreiecks gegeben. Man soll die Seiten und Winkel dieses Dreiecks berechnen.

76) Es ist die Summe 16 Fuß der beiden Katheten, sowie auch der Flächeninhalt $15 \square$ Fuß eines rechth. Dreiecks gegeben. Wie groß werden die Seiten und Winkel dieses Dreiecks sein.

77) Wie groß werden die Seiten und Winkel eines rechth. Dreiecks sein, dessen Umfang 10 Werst und dessen Flächeninhalt $1 \square$ Werst beträgt?

78) Wie groß werden die Schenkel und Winkel eines gleichschenkligen Dreiecks sein, dessen Grundlinie 36 Zoll und dessen Höhe 70 Zoll beträgt?

79) Von einem gleichschenkligen Dreiecke kennt man die Länge 87,3 Fuß eines der beiden Schenkel und die Höhe 60,7 Fuß des Dreiecks. Man soll die Grundlinie und die Winkel bestimmen.

80) In einem gleichschenkligen Dreiecke, dessen Höhe 38643 Millimeter beträgt, ist jeder der beiden Winkel an der Basis $30^{\circ} 30' 30''$ groß. Welche Basis und welche Schenkel wird demnach dieses Dreieck haben?

81) Es ist die Höhe eines gleichschenkligen Dreiecks 36 Fuß und die Summe des Schenkels und der Grundlinie 105 Fuß. Es sollen die drei Seiten und Winkel desselben berechnet werden.

82) Wie groß werden in einem gleichschenkligen Dreieck die drei Seiten und Winkel sein, wenn der Umfang 1 Arschin und die Höhe $\frac{1}{4}$ Arschin ist?

83) In einem dreieckigen Hofraume betragen die drei Winkel $\angle \alpha = 55^{\circ}$, $\angle \beta = 60^{\circ}$ und $\angle \gamma = 65^{\circ}$; die eine Mauer ist $aL = 37\frac{1}{8}$ Fuß lang. Wie viel $\square$ Fuß Flächenraum enthält dieser Hof?

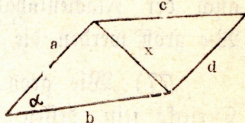
84) In einem Rhomboid sind zwei anliegende Seiten 683 und 700 Toisen lang, der von ihnen eingeschlossene Winkel aber

ist $60^{\circ} 50' 40''$ groß. Man soll, wenn die Seite von 700 Toisen als Grundlinie angesehen wird, nicht nur den Flächeninhalt desselben, sondern auch dessen Höhe berechnen.

85) Von einem Trapez kennt man die Basis $aL = 3,7$ Fuß, die an derselben liegenden Winkel $\alpha = 30^{\circ} 14' 16''$ und $\angle \beta = 40^{\circ} 40' 38''$, sowie die Höhe des Trapezes, die 0,378 Fuß beträgt. Man soll die Länge der der Basis parallel liegenden Seite, sowie den Flächeninhalt dieses Trapezes angeben

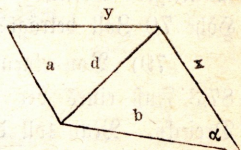
86) In einem Viereck sind zwei anliegende Seiten $aL = 2,95$ Fuß und $bL = 2,08$ Fuß, ferner der von ihnen eingeschlossene Winkel $\alpha = 36^{\circ} 4\frac{3}{4}'$ gegeben, die andern beiden Seiten sind $cL = 3,74$ Fuß und $dL = 2,5$ Fuß. Man verlangt den Flächeninhalt dieses Vierecks.

Fig. 38.



87) Von einem Viereck kennt man zwei anliegende Seiten, welche $aL = 8\frac{1}{2}$ Faden und $bL = 10\frac{3}{4}$ Faden lang sind, ferner die aus dem von diesen beiden Seiten gebildeten Winkel ausgehende Diagonale $dL = 15\frac{3}{8}$ Faden, endlich den dieser Diagonale gegenüberliegenden Winkel $\alpha = 45^{\circ} 0' 8,03''$, der an der $10\frac{3}{4}$ Faden langen Vierecksseite sich befindet. Wie groß werden demnach die beiden andern Seiten und der Flächeninhalt des Vierecks sein?

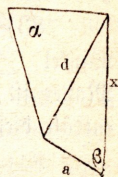
Fig. 39.



88) Man kennt die vier Seiten von 10 Ellen 3 Zoll, 12 Ellen 7 Zoll, 13 Ellen und 15 Ellen 5 Zoll Länge eines Vierecks, sowie dessen eine Diagonale von 14 Ellen Länge. Es soll der Flächeninhalt dieses Vierecks bestimmt werden.

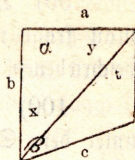
89) Es ist die Diagonale $dL = 10$ Fuß eines Vierecks gegeben, in welchem die der Diagonale gegenüberliegenden Winkel $\alpha = 40^{\circ} 0' 10''$ und $\angle \beta = 50^{\circ} 0' 40''$ betragen. Der letztere Winkel liegt an derjenigen Vierecksseite, welche $aL = 7\frac{1}{2}$ Fuß lang ist. Wie viel Fuß werden demnach die Längen der übrigen Seiten des Vierecks betragen?

Fig. 40.



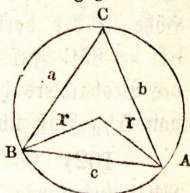
90) Von einem Viereck kennt man die 3 auf einander folgenden Seiten $aL = 452$ Millimetern, $bL = 610$ Millim. und $cL = 411$ Millim., sowie die von ihnen gebildeten Winkel $\alpha = 92^\circ 5'$ und $\angle \beta = 68^\circ 53'$. Wie groß werden die beiden übrigen Winkel und die vierte Seite dieses Vierecks sein?

Fig. 41.



91) Es sind zwei an einander stoßende Sehnen in einem Kreise gegeben, nämlich $aL = 10,6$ Zoll und $bL = 11,9$ Zoll, der von diesen Sehnen gebildete Winkel beträgt $\gamma = 60^\circ 0' 30''$. Wie groß wird der Halbmesser dieses Kreises sein?

Fig. 42.



92) Drei Faden ist die Entfernung eines Punktes von dem Centrum eines Kreises, dessen Halbmesser $\frac{1}{2}$ Faden beträgt. Wenn nun der besagte Punkt mit dem Mittelpunkt des Kreises durch eine gerade Linie verbunden wird; welchen Winkel wird alsdann mit dieser Verbindungslinie eine vom besagten Punkte aus nach der Peripherie des Kreises gezogene Tangente bilden? und wie lang wird diese Tangente selbst sein?

93) Wie groß wird der Centriwinkel sein, den zwei nach den Endpunkten einer 6,3 Zoll langen Sehne gezogene Radien $rL = 4,45$ Zoll eines gegebenen Kreises unter sich bilden?

94) Wie groß werden die Seiten eines regelmäßigen, in und um den Kreis von 9 Zoll Halbmesser gelegten Siebenecks sein?

95) Wie groß werden die Halbmesser der in und um ein regelmäßiges Siebeneck beschriebenen Kreise sein, sobald die Länge der Seite des Siebenecks 0,84376 Fuß beträgt?

96) Ein Kreis hat einen Durchmesser von $7\frac{3}{4}$ Arschin; wie groß werden demnach die Seiten eines regelmäßigen, in und um diesen Kreis zu konstruierenden Achtecks sein?

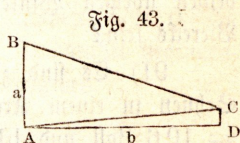
97) Wie groß werden die Halbmesser der in und um ein regelmäßiges Achteck beschriebenen Kreise sein müssen, wenn die Länge einer Seite des Achtecks $8\frac{3}{7}$ Fuß beträgt?

98) Der Umfang eines Kreises ist 876 Decimeter groß. Wie groß werden die Flächenräume des in und um diesen Kreis beschriebenen regelmäßigen Fünfecks sein?

99) Der Durchmesser eines Kreises beträgt 3 Fuß 6 Zoll; man fragt nach dem Flächeninhalt des, in und um diesen Kreis beschriebenen, regelmäßigen Sechsecks.

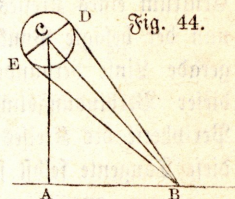
100) Ein $5\frac{1}{2}$ Fuß großer Mensch erscheint einem andern unter dem Sehwinkel von $2^\circ 16' 35''$ in welcher Entfernung?

101) Unter welchem Sehwinkel erscheint ein Object von $aL = 186$ Fuß Höhe in der horizontalen Entfernung von $bL = 856$ Fuß, vorausgesetzt, das Auge des Beobachters befindet sich in einer Höhe von $5\frac{1}{2}$ Fuß über dem Boden?



102) In welcher Entfernung scheint eine 35 Fuß breite Allee zusammen zu laufen? (Unter einem Sehwinkel von 40 Sekunden sind Gegenstände noch sichtbar.)

103) Ein 50 Fuß im Durchmesser haltender Luftballon erscheint in einer Richtung, die mit dem Horizonte einen Winkel von ungefähr 12° bildet, nur noch als Punkt. Wie weit ist derselbe muthmaßlich von dem Beobachter entfernt, und wie hoch schwebt er über der Erde?



104) In einem beliebigen Dreiecke sind die $\angle \beta = 56^\circ$ und $\angle \gamma = 54^\circ$, sowie die Summe zweier Seiten $(a + c)L = 634$ Centimeter gegeben; gesucht werden die drei Seiten.

105) Die Summe der drei Seiten eines Dreiecks, in welchem die Winkel α, β, γ resp. $49^\circ 50', 56^\circ 40'$ und $73^\circ 30'$ betragen, ist $sL = 6,8437$ Meter. Wie groß werden die Seiten sein?

106) Wenn in einem Dreieck ABC die auf a, b, c resp. gefällten Höhen $h = 4, h' = 5$ und $h'' = 6$ gegeben sind; die Winkel und Seiten des Dreiecks zu bestimmen.

107) Zwei regelmäßige Polygone, ein 36eck und ein 60eck, verhalten sich zu einander wie $m : n$ ($5 : 4$) und enthalten zusammen soviel Flächenraum als ein Kreis, dessen Umfang $pL = 108$ Sassen bekannt ist. Wie groß werden demnach die resp. Seiten xL und yL dieser beiden Polygone sein?

108) In einem ebenen Dreiecke ABC sind die Seiten $AC = 15$ Sassen 2 Arschin und $BC = 10$ Sassen 1 Arschin nebst

dem von ihnen eingeschlossenen Winkel $\gamma = 42^\circ 34' 10''$ bekannt. Man soll aus der Spitze A eine Gerade AD so durch das Dreieck ABC ziehen, daß das hierdurch entstandene Dreieck ADC der mte (3te) Theil vom Dreieck ABC ist. Wie groß wird demnach der Winkel DAC angenommen werden müssen.

109) Wenn im Dreiecke ABC die Basis $BC = aL = 6$ Saschen 4 Fuß, der Winkel $BAC = \angle \alpha = 58^\circ 14' 15,2''$ und die Summe der Seiten AB und $AC = sL = 12$ Saschen 5 Fuß bekannt ist; wie groß wird alsdann der Unterschied der beiden Winkel β und γ sein?

110) In dem ebenen Dreiecke ABC ist die Seite $BC = aL = 5$ Saschen 2 Fuß 10 Zoll, der Winkel $ACB = \angle \gamma = 98^\circ 14' 12,6''$ und die Differenz der Seiten AC und AB $dL = 4$ Saschen 4 Fuß 3 Zoll gegeben. Es soll der Winkel $BAC = \alpha$ bestimmt werden.

Auflösung der Aufgaben aus der Goniometrie. (§ 7.)

- | | |
|-------------------------|------------------------|
| 1) — secante α . | 8) $\cos \alpha$. |
| 2) — cosec α . | 9) — tang α . |
| 3) — cosec α . | 10) — cotg α . |
| 4) — sec α . | 11) sec α . |
| 5) cosec α . | 12) — cosec α . |
| 6) — sec α . | 13) sec α . |
| 7) — sin α . | 14) — cosec α . |
- 15) $\cos 20^\circ$ oder $\sin 70^\circ$.
- 16) — $\sin 20^\circ = -\cos 70^\circ$.
- 17) $\cos 42^\circ$.
- 18) — $\sin 18^\circ 12' 42'' = -\cos 71^\circ 47' 18''$.
- 19) $\cos 66^\circ 15' 46''$ oder $\sin 23^\circ 44' 14''$.
- 20) — $\cos 18^\circ 12' 42''$ oder — $\sin 71^\circ 47' 18''$.
- 21) $\cos 34^\circ 32' 14''$ oder $\sin 55^\circ 27' 46''$.
- 22) — $\cos 39^\circ 10' 50''$ oder — $\sin 50^\circ 49' 10''$.

- 23) — $\sin 61^{\circ} 15' 36''$ oder — $\cos 28^{\circ} 44' 24''$.
 24) — $\sin 34^{\circ} 32' 14''$ oder — $\cos 55^{\circ} 27' 46''$.
 25) — $\cos 88^{\circ} 24' 33''$ oder — $\sin 1^{\circ} 35' 27''$.
 26) $\cos 40^{\circ} 15' 46''$ oder $\sin 49^{\circ} 44' 14''$.
 27) $\cos 15^{\circ} 18' 10''$.
 28) — $\sin 30^{\circ} 40' 20''$ oder — $\cos 59^{\circ} 19' 40''$.
 29) — $\sin 40^{\circ} 15' 46''$ oder — $\cos 49^{\circ} 44' 14''$.
 30) $\sin 39^{\circ} 10' 50''$ oder $\cos 50^{\circ} 49' 10''$.
 31) — $\cos 61^{\circ} 15' 36''$ oder — $\sin 28^{\circ} 44' 24''$.
 32) — $\cotg 32^{\circ} 14'$ oder — $\tan 57^{\circ} 46'$.
 33) $\tan 25^{\circ} 18' 24''$ oder $\cotg 64^{\circ} 41' 36''$.
 34) — $\cotg 52^{\circ} 48' 37''$ oder — $\tan 37^{\circ} 11' 23''$.
 35) — $\cotg 81^{\circ} 44' 40''$ oder — $\tan 8^{\circ} 15' 20''$.
 36) $\cotg 19^{\circ} 4' 54''$ oder $\tan 70^{\circ} 55' 6''$.
 37) $\cotg 75^{\circ} 59' 10''$ oder $\tan 14^{\circ} 0' 50''$.
 38) — $\tan 30^{\circ} 14' 22''$ oder — $\cotg 59^{\circ} 45' 38''$.

§ 11.

- | | |
|---------------|---------------|
| 1) ∞ . | 5) ∞ . |
| 2) 1. | 6) -1 . |
| 3) -1 . | 7) 1. |
| 4) ∞ | 8) ∞ . |

§ 12 u. § 13.

- | | |
|--------------|----------------------|
| 1) 1,73205. | 12) 0,15838. |
| 2) 0,57735. | 13) 0,10510. |
| 3) 0,32492. | 14) 0,052407. |
| 4) 0,57735. | 15) 3,73205. |
| 5) 1,73205. | 16) 6,31375. |
| 6) 3,07768. | 17) 9,51436. |
| 7) 0,96592. | 18) 19,08113. |
| 8) 0,98768. | 19) 9,7713379 — 10. |
| 9) 0,99452. | 20) 9,9561922 — 10. |
| 10) 0,99863. | 21) 10,3176782 — 10. |
| 11) 0,26794. | 22) 10,5940757 — 10. |

- | | |
|-----------------|------------------|
| 23) 8,8102978. | 36) 8,6504200. |
| 24) 8,6164510. | 37) 8,2779577. |
| 25) 8,8822310. | 38) 8,6676748. |
| 26) 8,8408756. | 39) 8,4675994. |
| 27) 9,6556596. | 40) 8,5738790. |
| 28) 10,7046467. | 41) 10,3772189. |
| 29) 9,4479482. | 42) 8,8919045n. |
| 30) 9,9960150. | 43) 9,9929335n. |
| 31) 9,7965029. | 44) 10,4707287n. |
| 32) 9,8698457. | 45) 9,6498273n. |
| 33) 8,1157344. | 46) 9,9889756. |
| 34) 7,9744180. | 47) 10,6752910n. |
| 35) 8,9069841. | |
-
- 48) $\log \sin 42^\circ 30' 37'' = 9,8297683.$
 49) $\log \cos 27^\circ 16' 14'' = 9,9488298.$
 50) $\log - \cos 34^\circ 36' 4'' = 9,9154660n.$
 51) $\log - \cotg 65^\circ 7' 46'' = 9,6661061n.$
 52) $\log - \sin 23^\circ 15' = 9,5963154n.$
 53) 9,8507443n. 56) 9,7816558n.
 54) 9,9008881n. 57) 9,9498620n.
 55) 9,8747463n. 58) 10,1424641.
- 59) $x = 25^\circ 48' 55''$ oder $154^\circ 11' 5''.$
 60) $x = 66^\circ 57' 1''$ oder $293^\circ 2' 59''.$
 61) $x = 36^\circ 4' 50''$ oder $216^\circ 4' 50''.$
 62) $x = 36^\circ 26' 18''$ oder $216^\circ 26' 18''.$
 63) $x = 212^\circ 43' 19''$ oder $327^\circ 16' 41''.$
 64) $y = 165^\circ 22' 55,8''$ oder $345^\circ 22' 55,8''.$
 65) $x = 135^\circ 49' 13''$ oder $315^\circ 49' 13''.$
 66) $x = 44^\circ 37' 32''$ oder $224^\circ 37' 32''.$
 67) $x = 103^\circ 12' 58''$ oder $256^\circ 47' 2''.$
 68) $x = 3^\circ 33' 38''$ oder $176^\circ 26' 22''.$
 69) $x = 52^\circ 55' 28''$ oder $232^\circ 55' 28''.$
 70) $x = 20^\circ 15' 24''$ oder $200^\circ 15' 24''.$

- 71) $x = 88^{\circ} 8' 49''$ oder $271^{\circ} 51' 11''$.
 72) $x = 22^{\circ} 18' 55,5''$ oder $202^{\circ} 18' 55,5''$.
 73) $x = 65^{\circ} 43' 1,5''$ oder $245^{\circ} 43' 1,5''$.
 74) $x = 95^{\circ} 44' 37,5''$ oder $264^{\circ} 15' 22,5''$.
 75) $x = 180^{\circ} 35' 9,5''$ oder $359^{\circ} 24' 50,5''$.
 76) $x = 92^{\circ} 6' 53''$ oder $267^{\circ} 53' 7''$.
 77) $x = 128^{\circ} 48' 38,3''$ oder $308^{\circ} 48' 38,3''$.
 78) $x = 84^{\circ} 54' 33''$ oder $95^{\circ} 5' 27''$.
 79) $x = 48^{\circ} 35' 25''$ oder $131^{\circ} 24' 35''$.
 80) $x = 48^{\circ} 11' 22''$ oder $311^{\circ} 48' 38''$.
 81) $x = 89^{\circ} 53' 11''$ oder $269^{\circ} 53' 11''$.
 82) $x = 203^{\circ} 34' 41''$ oder $336^{\circ} 25' 19''$.
 83) $x = 179^{\circ} 57' 21''$ oder $359^{\circ} 57' 21''$.
 84) $x = 115^{\circ} 22' 44''$ oder $244^{\circ} 37' 16''$.
 85) $x = 15^{\circ} 4' 12''$ oder $164^{\circ} 55' 48''$.
 86) $y = 3^{\circ} 55' 25,7''$ oder $176^{\circ} 4' 34,3''$.
 87) $x = 92^{\circ} 1' 13''$ oder $272^{\circ} 1' 13''$.
 88) $x = 123^{\circ} 5' 35''$ oder $236^{\circ} 54' 25''$.
 89) $x = 69^{\circ} 38' 9''$ oder $110^{\circ} 21' 51''$.
 90) $\cos \alpha = 0,516...$, $\tan \alpha = 1,658...$,
 $\cotg \alpha = 0,602...$, $\sec \alpha = 1,937...$,
 $\operatorname{cosec} \alpha = 1,168...$, $\angle \alpha = 58^{\circ} 52' 13''$.
 91) $\sin \alpha = 0,913428$, $\tan \alpha = 2,24429$,
 $\cotg \alpha = 0,44557$, $\sec \alpha = 2,457002$,
 $\operatorname{cosec} \alpha = 1,094777$, $\angle \alpha = 65^{\circ} 59' 11''$.
 92) $\cotg \alpha = 0,427...$, $\cos \alpha = 0,3931...$,
 $\sin \alpha = 0,9194...$, $\sec \alpha = 2,54388...$,
 $\operatorname{cosec} \alpha = 1,08766...$, $\angle \alpha = 66^{\circ} 51' 37''$.
 93) $\cos x = 0,699854$, $\cotg x = 0,979803$,
 $\tan x = 1,02061$, $\sec x = 1,42886$,
 $\operatorname{cosec} x = 1,40001$, $\angle x = 45^{\circ} 35' 4''$.
 94) $x = -10,17796$.
 95) $xL = 368,734$ ѿнѣ.
 96) $x = 148689617$.

Auflösung der Aufgaben aus der ebenen Trigonometrie.

(§ 15 u. § 16).

- 1) $aL = 192,08$ Fuß, $bL = 130,74$ Fuß,
 $\angle \alpha = 55^\circ 45' 28''$, $JF = 12556,2 \square$ Fuß.
- 2) $aL = 157,106$ Fuß, $bL = 39,517$ Fuß,
 $\angle \alpha = 75^\circ 52' 52''$, $JF = 3104,21 \square$ Fuß.
- 3) $\angle \alpha = 33^\circ 0' 40''$, $\angle \beta = 56^\circ 59' 20''$,
 $bL = 178,75$ Fuß, $JF = 10379,03 \square$ Fuß.
- 4) $\angle \alpha = 36^\circ 42' 58''$, $\angle \beta = 53^\circ 17' 2''$,
 $bL = 41,81$ Fuß, $JF = 652,179 \square$ Fuß.
- 5) $\angle \alpha = 47^\circ 15' 45''$, $bL = 291,48$ Fuß,
 $cL = 429,507$ Fuß, $JF = 45975,2 \square$ Fuß.
- 6) $\angle \alpha = 22^\circ 57' 25''$, $b = 1854,02$,
 $c = 2013,49$, $J = 728017$.
- 7) $bL = 106,84$ Fuß, $cL = 109,32$ Fuß,
 $\angle \beta = 77^\circ 46' 46''$, $JF = 1236,15 \square$ Fuß.
- 8) $bL = 44,6219$ Fuß, $cL = 46,2439$ Fuß,
 $\angle \beta = 74^\circ 46' 49''$, $JF = 270,85 \square$ Fuß.
- 9) $\angle \alpha = 74^\circ 56' 27''$, $\angle \beta = 15^\circ 3' 33''$,
 $cL = 71,59$ Faden, $JF = 642,909 \square$ Faden.
- 10) $\angle \alpha = 48^\circ 16' 14''$, $\angle \beta = 41^\circ 43' 46''$,
 $c = 24,79$, $J = 152,625$.
- 11) $aL = 7,387$ Fuß, $bL = 31,408$ Fuß,
 $cL = 32,265$ Fuß, $\angle \beta = 76^\circ 45' 55''$.
- 12) $aL = 8,87$ Fuß, $bL = 20,75$ Fuß,
 $cL = 22,56$ Fuß, $\angle \beta = 66^\circ 51' 8''$.
- 13) $cL = 3579$ Faden 5 Fuß 11 Zoll,
 $\angle \alpha = 13^\circ 48' 35''$, $\angle \beta = 76^\circ 11' 25''$,
 $JF = 1485279 \square$ Faden $9 \square$ Fuß $80 \square$ Zoll.
- 14) $\angle \alpha = 9^\circ 0' 15''$, $aL = 1$ Faden 4 Fuß 7,76 Zoll,
 $bL = 10$ Faden 3 Fuß 5,99 Zoll,
 $JF = 8 \square$ Faden $36 \square$ Fuß $3,3 \square$ Zoll.
- 15) $\angle \alpha = 41^\circ 9' 30''$, $cL = 13596$ Faden 3 Fuß,
 $aL = 8948$ Faden 2 Fuß 8 Zoll,
 $JF = 45800799 \square$ Faden $46 \square$ Fuß $76 \square$ Zoll.

- 16) $\angle \alpha = \angle \beta = 78^\circ 59' 17,5''$, $\angle \gamma = 22^\circ 1' 25''$,
JF = 30 □ Faden 15 □ Fuß 20 □ Zoll.
- 17) $\angle \alpha = \angle \beta = 14^\circ 46' 21''$,
cL = 23935 Fuß 1,5 Zoll,
JF = 37772769 □ Fuß 14 □ Zoll.
- 18) aL = bL = 395095 Faden 1 Fuß 8 Zoll,
 $\angle \gamma = 0^\circ 0' 20''$,
JF = 7567954 □ Faden 30 □ Fuß 60 □ Zoll.
- 19) $\angle \alpha = 63^\circ 53' 28''$, b = 1530,682,
c = 1382,078, J = 949826,7.
- 20) bL = 4006,13 Zoll, cL = 5900,55 Zoll,
 $\angle \gamma = 119^\circ 27' 22''$, JF = 4864388 □ Zoll.
- 21) $\angle \alpha = 46^\circ 51' 48''$ $\angle \gamma = 64^\circ 26' 12''$,
cL = 402,443 Fuß, JF = 61031,01 □ Fuß.
- 22) aL = 262 Faden 6 Fuß 0,44 Zoll,
bL = 473 Faden 6 Fuß 10,3 Zoll,
 $\angle \gamma = 41^\circ 58' 8''$,
JF = 41658 □ Faden 40 □ Fuß 92 □ Zoll.
- 23) cL = 361 Faden 2 Fuß 1,4 Zoll,
bL = 1812 Faden 6 Fuß 0,24 Zoll,
 $\angle \gamma = 11^\circ 29' 14''$,
JF = 323147 □ Faden 29 □ Fuß.
- 24) $\angle \beta = 118^\circ 22' 1''$, $\angle \gamma = 23^\circ 48' 34''$.
bL = 501,825 Meter, JF = 35424,96 □ Meter.
- 25) aL = 297,312 Meter, $\angle \beta = 77^\circ 28' 17''$,
 $\angle \gamma = 46^\circ 4' 43''$, JF = 37289,12 □ Meter.
- 26) bL = 20,809 Faden, $\angle \gamma = 35^\circ 4' 1''$,
 $\angle \beta = 94^\circ 55' 59''$, JF = 95,6444 □ Faden.
- 27) $\angle \alpha = 20^\circ 43' 15''$, $\angle \beta = 20^\circ 19' 34''$,
 $\angle \gamma = 138^\circ 57' 11''$, JF = 646066,2 □ Fuß.
- 28) JF = 282 □ Fuß 10,5 □ Zoll, $\angle \alpha = 65^\circ 32' 12''$,
 $\angle \beta = 56^\circ 51' 33''$, $\angle \gamma = 57^\circ 36' 15''$.
- 29) b = 92,0515, c = 53,4524, a = 58,8022.
- 30) bL = 79,219 Fuß, aL = 66,772 Fuß,
JF = 2533,715 □ Fuß,
 $\angle \alpha = 46^\circ 48'$ und $\angle \beta = 59^\circ 52'$.

- 31) $aL = 67,712$ Fuß, $bL = 93,104$ Fuß,
 $\angle \alpha = 35^\circ 13' 30,4''$, $\angle \beta = 52^\circ 28' 29,6''$,
 $JF = 3149,586$ □ Fuß.
- 32) $bL = 6$ Faden 4 Fuß $11,27$ Zoll,
 $cL = 3$ Faden 6 Fuß $1,5$ Zoll,
 $JF = 9$ □ Faden 41 □ Fuß $79,8$ □ Zoll,
 $\angle \gamma = 35^\circ 6' 30''$.
- 33) $\angle \beta = 54^\circ 33' 18,7''$, $\angle \gamma = 89^\circ 59' 25,3''$,
 $cL = 1580$ Faden 1 Fuß.
- 34) $\angle \gamma = 132^\circ 9' 17''$, $\angle \beta = 0^\circ 31' 2''$.
 $aL = 740850$ Fuß $1,6$ Zoll,
 $JF = 2497684305$ □ Fuß 80 □ Zoll.
- 35) $\angle \gamma = 81^\circ 45' 6,8''$, $\angle \beta = 57^\circ 34' 13,2''$,
 $bL = 194$ Saßchen $11,6$ Werßchoß,
 $JF = 14417$ □ Saßch. 3 □ Mr. 234 □ Werßchoß.
- 36) $\angle \gamma = 37^\circ 34' 6,9''$.
- 37) $AB = b \tan \gamma \cdot L = 224$ Fuß $6,5$ Zoll.
- 38) $r = \frac{s}{2 \sin 25^\circ 42' 51,4''}$; $rL = 6,60315$ Arschin.
- 39) Die Höhe des Berges = 4369 Fuß.
- 40) $AB = \frac{EF \sin EFA \cdot \sin AEB}{\sin EAF} = 170,87$ Fuß.
- 41) $s = 10 \sin 20^\circ$, $sL = 3$ Arschin $6,7$ Werßchoß.
- 42) Den Mittelpunktswinkel x des Kreisbogens berechnet man
 zuerst, $\sin \frac{1}{2} x = \frac{a}{d}$, $x = 13^\circ 30' 34''$; dann ist
 der Kreisbogen $bL = \frac{dx \pi}{360} L = 141$ Faden 3 Fuß $3,5$ Zoll.
- 43) $\angle \gamma = 75^\circ$, $BC = \frac{AB \sin \alpha}{\sin \gamma} = 213,982$ Fuß.
- 44) $\angle \gamma = 74^\circ 7' 22,6''$, $\angle \beta = 60^\circ 49' 37,4''$,
 $BC = 869,708$ Fuß.
- 45) $AD = 330,72$ Fuß, $AC = 488,37$ Fuß,
 $\angle DAC = 23^\circ 4'$, $\angle ADC = 121^\circ 47' 33''$,
 $\angle ACD = 35^\circ 8' 27''$, $DC = 225,12$ Fuß.
- 46) $AD = 500,28$ Fd., $DC = 697,59$ Fd., $AB = 1113,26$ Fd.,
 $CB = 448,24$ Fd., $AC = 956,97$ Faden.

$$47) K = r^2 \left(\frac{\alpha \pi}{360} - \frac{\sin \alpha}{2} \right) = 55,41495,$$

$$KF = 55,41495 \text{ □ Fuß.}$$

$$48) \text{ Der Centriwinkel des Bogens ist } = 1^\circ 21' 8''.$$

$$\text{Der Bogen} = 77103,6 \text{ Toisen.}$$

$$49) \angle \beta = 75^\circ 19' 14,9'', \angle \gamma = 93^\circ 48' 3,2''.$$

$$\angle \delta = 105^\circ 22' 41,9''.$$

$$\text{die Diagonalen } 13,89 \text{ Fuß und } 13,533 \text{ Fuß.}$$

$$JF = 92,754 \text{ □ Fuß.}$$

$$50) (\text{Fig. 46.}) 1) \text{ Der Centriwinkel des Bogens } AC = 1^\circ 15' 16''.$$

$$\text{Der Bogen} = 130 \text{ Werst } 1651,3 \text{ Fuß.}$$

$$2) (\text{Fig. 45.}) \cos AEC = \frac{CE}{AE}, \sin \frac{1}{2} CEB$$

$$\sqrt{\frac{BD}{2BE}}. \text{ Der Centriwinkel des Bogens } DF \text{ ist } = 1^\circ 17' 38''. \text{ Der Bogen} = 134 \text{ Werst } 2010,2 \text{ Fuß.}$$

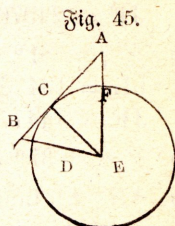


Fig. 45.

$$51) AD = 20 \text{ Meilen}$$

$$\angle AED = \angle \alpha = 1^\circ 19' 59,6''$$

$$CB = \left(h - \frac{2r \sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{\cos \alpha} \right) L =$$

$$10000 \text{ Fuß} - 5315,86 \text{ Fuß} =$$

$$4684,14 \text{ Fuß.}$$

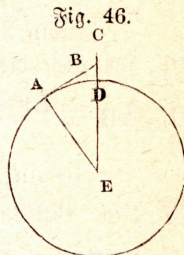


Fig. 46.

$$52) BF = 950 \text{ Fuß, } BC = 1058 \text{ Fuß, } DF = 991 \text{ Fuß,}$$

$$DC = 1087,4 \text{ Fuß.}$$

$$53) AD = \frac{CB \sin \gamma \sin \beta}{\sin \alpha} = 232,9 \text{ Fuß.}$$

$$54) \angle BAC = 0^\circ 43' 16'', \angle CAD = 1^\circ 35' 54'',$$

$$\angle DAF = 2^\circ 20' 2'', \text{ addirt, giebt}$$

$$\angle BAF = 4^\circ 39' 12''.$$

$$55) AB = 2520,993 \text{ Ellen, } AC = 2011,76 \text{ Ellen.}$$

$$56) \angle \varphi = 32^\circ 36' 2'',$$

$$BP = 4 \text{ Werst } 95 \text{ Saßchen } 2 \text{ Fuß.}$$

$$57) xL = 675,527 \text{ Meilen.}$$

- 58) $xL = 3818,3$ Meilen.
- 59) $cL = 8$ Fuß 2,8 Zoll, $bL = 6$ Fuß 0,2 Zoll,
 $aL = 7$ Fuß 3,4 Zoll, $JF = 21$ □ Fuß 39,91 □ Zoll.
- 60) $x + y = \sqrt{a^2 + 4J \cotg \frac{1}{2} \alpha}$, $x - y = \sqrt{a^2 - 4J \tng \frac{1}{2} \alpha}$.
 $xL = 31$ Fuß 6,12 Zoll, $yL = 7$ Fuß 11,9 Zoll.
- 61) $\angle \alpha = 47^\circ 30' 14''$, $xF = 14$ □ Fuß 133,02 □ Zoll.
- 62) $xF = 4$ □ Fuß 19,278 □ Zoll.
- 63) $xF = 198,359$ □ Verschoß.
- 64) Die Entfernung des Mittelpunktes des gesuchten Kreises sei $EB = xL$ und der Radius $ED = rL$, der Berührungspunkt der Tangente BA sei G ; so ist $ED = EG = x \sin \alpha$ und $x^2 \sin^2 \alpha = a^2 + x^2 - 2ax \cos \beta$. Hieraus findet man:

$$x = \frac{a (\cos \beta \pm \sqrt{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)})}{\cos^2 \alpha}$$
, $xL = 5$ Easchen
 2,65 Arschin oder 2 Easchen 0,24 Arschin.
- 65) $b^2 = (a + b - x)^2 + (a + x)^2 - 2(a + x)(a + b - x) \cos \alpha$

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - (a^2 + ab) \tng^2 \frac{1}{2} \alpha}$$

 $xL = 19,43$ Verschoß oder 10,57 Verschoß.
- 66) $UL = 113$ Fuß 10,71 Zoll, $JF = 989$ □ Fuß 140,1 □ Zoll.
- 67) $xL = 171$ Fuß 6 Zoll.
- 68) $\triangle ABC = \frac{f(g - x) \sin \alpha}{2} \cdot F$,
 $\triangle ADC = \frac{f x \sin \alpha}{2} \cdot F$,
 $ABCD = \frac{f g \sin \alpha}{2} \cdot F = 19$ □ Fuß 10,81 □ Zoll.
- 69) $\triangle ABC = \frac{1}{2} ad \sin A$
 $\triangle ADC = \frac{1}{2} bc \sin (180^\circ - A)$

$$ABCD = \left(\frac{ad + bc}{2} \right) \sin A$$

 $s = a + b + c + d$

$$\sin A = \frac{\sqrt{(s - 2a)(s - 2b)(s - 2c)(s - 2d)}}{2(ad + bc)}$$

$$ABCD = \sqrt{\left(\frac{1}{2} s - a \right) \left(\frac{1}{2} s - b \right) \left(\frac{1}{2} s - c \right) \left(\frac{1}{2} s - d \right)} \cdot F$$

 $= 17$ □ Arschin 19,61 □ Verschoß.

$$70) \quad r = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{abc}{4 \sqrt{\frac{1}{2}s(\frac{1}{2}s-a)(\frac{1}{2}s-b)(\frac{1}{2}s-c)}}$$

rL = 3 Faden 5 Fuß 6,52 Zoll.

$$71) \quad \triangle BMC = \frac{ar}{2}; \triangle ABC = \frac{(a+b+c)r}{2}$$

$$r = \frac{2 \sqrt{\frac{1}{2}s(\frac{1}{2}s-a)(\frac{1}{2}s-b)(\frac{1}{2}s-c)}}{a+b+c}$$

rL = 33,226 Zoll = 2 Fuß 9,226 Zoll.

$$72) \quad xL = 5 \text{ Zoll (Hypotenuse)}, yL = 4 \text{ Zoll (Kathete)},$$

$$zL = 3 \text{ Zoll (Kathete)}, \angle \alpha = 36^\circ 52' 11,64'',$$

$$\angle \beta = 53^\circ 7' 48,36''.$$

$$73) \quad xL = 223 \text{ Faden 4 Fuß 2,9 Zoll (Hypotenuse)},$$

$$yL = 200 \text{ Faden (Kathete)}, zL = 100 \text{ Fod. (Kathete)},$$

$$\angle \alpha = 26^\circ 33' 53,3'', \angle \beta = 63^\circ 26' 6,7''.$$

$$74) \quad y = \frac{h\sqrt{7}}{4}, yL = 451,96 \text{ Zoll},$$

$$z = \frac{3h}{4}, zL = 512,48 \text{ Zoll}.$$

$$\angle \alpha = 48^\circ 35' 25'', \angle \beta = 41^\circ 24' 35''.$$

$$75) \quad \text{Hypotenuse } x = \frac{(u-h)^2 + h^2}{2(u-h)}, xL = 4\frac{5}{9} \text{ Verschoß},$$

$$z = \frac{(u-h)^2 - h^2}{2(u-h)}, zL = 4\frac{4}{9} \text{ Verschoß}.$$

$$\cotg \alpha = \frac{(u-h)^2 - h^2}{2(u-h)h}, \alpha = 12^\circ 40' 49''.$$

$$76) \quad y = \frac{a + \sqrt{a^2 - 8b}}{2}, yL = 13,83 \text{ Fuß},$$

$$x = \frac{a - \sqrt{a^2 - 8b}}{2}, xL = 2,17 \text{ Fuß},$$

$$z = \sqrt{a^2 - 4b}, zL = 14 \text{ Fuß},$$

$$\angle \alpha = 8^\circ 55' 0,4''.$$

$$77) \quad y = \frac{a^2 + 4b + \sqrt{(a^2 - 4b)^2 - 16a^2b}}{4a}$$

$$yL = 4,7817 \text{ Werst}, xL = 0,4183 \text{ Werst},$$

$$zL = 4,8 \text{ Werst}, \angle \alpha = 85^\circ 0' 2''.$$

$$78) \quad x = \frac{1}{2} \sqrt{4h^2 + a^2}, xL = 72,27 \text{ Zoll},$$

$$\angle B = 75^\circ 36' 55'', \angle A = 28^\circ 47' 48,8''.$$

- 79) $xL = 125,48$ Fuß, $\angle A = 44^\circ 3' 51''$,
 $\angle B = 91^\circ 53' 49,8''$.
- 80) $yL = 76119,3$ Millimeter, $xL = 131162$ Millimeter,
 $\angle \alpha = 118^\circ 59'$.
- 81) $yL = 58,6$ Fuß, $xL = 46,4$ Fuß,
 $\angle \alpha = 50^\circ 52' 59''$, $\angle \beta = 78^\circ 14' 12''$.
- 82) $a = \frac{u^2 + 4h^2}{4u}$, $aL = 5$ Verschoß, $cL = 6$ Verschoß,
 $\angle \alpha = 53^\circ 7' 48''$, $\angle \beta = 73^\circ 44' 24''$.
- 83) $J = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$, $JF = 660,505$ □ Fuß.
- 84) $JF = 417524,7$ □ Loifen, $hL = 596,46$ Loifen.
- 85) $x = a - \frac{h \sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$, $xL = 2,6117$ Fuß,
 $J = ah - \frac{h^2 \sin (\alpha + \beta)}{2 \sin \alpha \sin \beta}$, $JF = 1,19291$ □ Fuß,
- 86) $x = 1,76$, $s = c + d + x$,
 $J = \frac{ab \sin \alpha}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} s (\frac{1}{2} s - c) (\frac{1}{2} s - d) (\frac{1}{2} s - x)}$
 $JF = 3$ □ Fuß, $97,344$ □ Zoll.
- 87) $x = b \cos \alpha \pm \sqrt{d^2 - b^2 \sin^2 \alpha} = 20,9654$,
 $xL = 20$ Faden 6 Fuß 9 Zoll. Die Seite y ist unbestimmbar, warum?
- 88) $JF = 145$ □ Ellen $101,2$ □ Zoll.
- 89) $xL = 13,0039$ Fuß. Die beiden andern Seiten des Vierecks sind unbestimmbar, warum?
- 90) $\angle y + \angle t = 79^\circ 47' 27,1''$.
 $\angle z = 119^\circ 14' 32,9''$,
 $fL = 483,213$ Millimeter.
- 91) $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$
 $c = \sqrt{r^2 + r^2 - 2r^2 \cos 2\gamma}$
 $r = \frac{1}{2 \sin \gamma} \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$
 $rL = 6,5205$ Zoll.
- 92) Die Tangente $= 2$ Faden 6 Fuß 8 Zoll,
Der Winkel $= 9^\circ 35' 38,7''$.

- 93) Der Centriwinkel $= 90^{\circ} 7' 22,6''$.
- 94) Die Seite des eingeschriebenen Siebenecks
 $= 18 \sin 25^{\circ} 42' 51,4'' = 7,8099$ Zoll. Die Seite des
 umschriebenen Siebenecks $= 18 \tan 25^{\circ} 42' 51,4'' \cdot F =$
 $8,6683$ Zoll.
- 95) Der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises $= 0,87604$ Fuß.
 Der Halbmesser des umschriebenen Kreises $= 0,97233$ Fuß.
- 96) Die Seite des eingeschriebenen Achtecks $= 2$ Arschin 15,45
 Verschock. Die Seite des umschriebenen Achtecks 3 Arschin
 $3,36$ Verschock.
- 97) Der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises $= 10,17419$ Fuß.
 Der Halbmesser des umschriebenen Kreises $= 11,01256$ Fuß.
- 98) Der Flächenraum des eingeschriebenen Fünfecks $=$
 $\frac{5}{8} \left(\frac{876}{\pi} \right)^2 \sin 72^{\circ} \cdot F = 46216,24$ □Decimeter. Der
 Flächenraum des umschriebenen Fünfecks $=$
 $\frac{5}{4} \left(\frac{876}{\pi} \right)^2 \tan 36^{\circ} \cdot F = 70612,15$ □Decimeter.
- 99) Der Flächeninhalt des eingeschriebenen Sechsecks $=$
 $3 \cdot 21^2 \sin 60^{\circ} \cdot F = 1145,751$ □Zoll. Der Flächen-
 inhalt des umschriebenen Sechsecks $= 6 \cdot 21^2 \tan 30^{\circ} \cdot F =$
 $1527,669$ □Zoll.
- 100) In einer Entfernung von 138,36 Fuß.
- 101) $\angle ACB = 12^{\circ} 16' 30''$.
- 102) Die Allee scheint in einer Entfernung von 180481,6 Fuß
 vom Beobachter zusammen zu laufen.
- 103) $AC = DC \cotg 20'' = 257831$ Fuß,
 $CB = AC \sin 12^{\circ} = 53606$ Fuß.
- 104) $a = \frac{317 \sin 110^{\circ}}{\sin 82^{\circ} \cos 28^{\circ}}, aL = 340,6874$ Centimeter
 $cL = 293,3126$ Centimeter, $bL = 300,5709$ Centimeter.
- 105) $a = \frac{s \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}, aL = 2,04409$ Meter,
 $bL = 2,234854$ Meter, $cL = 2,564756$ Meter.

$$106) \sin \frac{1}{2} A = \frac{1}{24} \sqrt{\frac{(h h' + h' h'' - h'' h)(h' h'' + h'' h - h h')}{h' h''}}$$

$$\angle A = 85^{\circ} 27' 33,6'',$$

$$\sin B = \frac{h \sin A}{h''}, \angle B = 41^{\circ} 38' 58,8'',$$

$$\angle C = 52^{\circ} 53' 27,5'', a = \frac{h''}{\sin C} = 7,52366,$$

$$b = 5,01574, c = 6,01889.$$

$$107) x = \frac{p}{6} \sqrt{\frac{m \tan g 5^{\circ}}{(m+n) \pi}}; y = \frac{p}{2} \sqrt{\frac{n \tan g 3^{\circ}}{15 \pi (m+n)}}$$

$$xL = 2 \text{ Saschen } 0 \text{ Arschin } 11,46 \text{ Verschock},$$

$$yL = 1 \text{ Saschen } 0 \text{ Arschin } 9,784 \text{ Verschock}.$$

$$108) \tan g DAC = \frac{BC \sin \gamma}{m AC - BC \cos \gamma}$$

$$\angle DAC = 10^{\circ} 3' 47,5''.$$

$$109) \cos \frac{1}{2} (\gamma - \beta) = \frac{s \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha}{a}, \gamma - \beta = 39^{\circ} 23' 14,8''.$$

$$110) \tan g \frac{1}{2} \alpha = \frac{d + a \cos \gamma}{a \sin \gamma}, \angle \alpha = 71^{\circ} 14' 49''.$$

Verbesserungen.

Seite 11 Zeile 13 von unten statt $\frac{-y}{x}$ lies $\frac{y}{-x}$.

„ 15 Fig. 10 am Fußpunkt der Senkrechten von N auf CD ist M zu setzen.

„ 35 Zeile 9 von unten statt 00277611 lies 0,0277611.

„ 41 „ 10 „ „ „ 41, „ 41'.

„ 41 „ 1 „ „ „ 1,3'' „ 43''.

„ 44 „ 8 „ „ „ 180^g „ 180^o.

„ 49 „ 3 „ „ „ 16 „ 16'.

„ 62 „ 10 „ „ „ 11'' „ 1''.

Inhalt.

	Seite
Einleitung	5
I. Goniometrie	6
Die trigonometrischen Funktionen	7
Aufgaben	12
Die trigonometrischen Linien	12
Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen eines Winkels	13
Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen zweier Winkel	15
Aufgaben	19
Zu- und Abnahme der trig. Funktionen	20
Aufgaben	22
Die Berechnung der trig. Funktionen	22
Aufgaben	25
II. Berechnung der ebenen Dreiecke	27
Berechnung der rechtwinkligen Dreiecke	29
Berechnung der schiefwinkligen Dreiecke	35
Fragen	45
Verschiedene Aufgaben	47
Auflösung der Aufgaben aus der Goniometrie und ebenen Trigonometrie	59
