TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

Ene Tiit

RIDADE ÜMBERJÄRJESTAMISEST

Dissertatsioon

füüsika-matemaatika kandidaadi teadusliku

kraadi taotlemiseks

Teaduslik juhendaja

Tartu Riikliku Ülikooli professor

füüsika-matemaatika doktor

G. Kangro

Tartu 1963

S I S S E J U H A T U S

Fourier' ridadega seotud uurimustes märkis Dirichlet [34] 1829.aastal,et koonduvate arvridade käsitlemisel tuleb vahet teha tingimisi[1] ja absoluutselt[2] koonduvate ridade vahel,ning tõestas, et arvrea tingimisi koonduvus on samaväärne mitteabsoluutse[3] koonduvusega.

1853.aastal,teostades samuti uurimusi Fourier' ridade alal, käsitles sama küsimust Riemann [12] , kes formuleeris ja tõestas teoreemi tingimisi koonduva arvrea ümberjärjestatavusest mistahes etteantud reaalarvuks koonduvaks reaks. Nimetatud teoreem kuulub praegu Riemanni teoreemi nime all matemaatilise analüüsi põhikursusesse.

1910. ja 1911.aastail täpsustas Riemanni teoreemi Sierpinski [70,71] ,kes näitas, et ridu võib nii ümber

---

[1] Tingimisi koonduvaks reaks nimetatakse niisugust koonduvat rida,mille summa sõltub liikmete järjestusest /vt. def. 1.1.1 ja 1.2.3/.

[2] Absoluutselt koonduvaks nimetatakse niisugust rida,mille liikmete absoluutväärtustest moodustatud rida koondub.

[3] Mitteabsoluutselt koonduvaks nimetatakse niisugust koonduvat rida,mis ei ole absoluutselt koonduv.

järjestada, et lähtereas jäävad paigale kas kõik positiivsed või kõik negatiivsed liikmed, sõltuvalt sellest, kas ettenantud reaalarv on lähterea summast suurem või väiksem. Seda tõsiasja kasutatakse ka käesolevas töös teoreemi 3.1.1 konstruktiivsel tõestamisel[1].

1905. aastal ilmus P.Lèvy [51] töö, milles autor üldistab Riemanni tulemuse kompleksarvulistele ridadele ja näitab, et kompleksarvulise tingimisi koonduva rea ümberjärjestamisel saadud ridade[2] summade hulk ehk summade piirkond /vt. def. 1.2.5/ moodustab kas kogu komplekstasandi või ühe sirge sellel tasandil; lisaks väidab Lèvy, et tulemus on üldistatav n-dimensionaalsesse eukleidilisse ruumi, kusjuures rea summade piirkonnaks on sel juhul m-dimensionaalne eukleidiline ruum, $0 \leq m \leq n$.

Lèvy töö ilmumisega enam-vähem samaaegselt alustas oma uurimusi ka E.Steinitz [72], kes oma mahukas ja põhjalikus töös parandas Lèvy tõestuskäikudes esinevad puudused ja esitas vastandina oma eelkäija lakoonilisusele, korrektse ja põhjaliku, tõsi küll, kaunis pika tõestuse teoreemile, mida hilisemad autorid nimetavad kas Lèvy-Steinitzi või

---

1 Teoreemide, definitsioonide ja valemite numeratsioonis tähistab esimene arv peatüki, teine paragrahvi ning kolmas vastava teoreemi, definitsiooni või valemi numbrit. Nii on käesolev teoreem 3.peatüki 1.paragrahvi 1.teoreem.

2 Rea ümberjärjestamisel saadud ridu nimetatakse edaspidi rea ümberjärjestuseks /vt. def. 1.2.1/.

lihtsalt Steinitzi teoreemiks, ja mis on sõnastatud järgnevalt: Tingimisi koonduva vektorrea summade piirkonnaks n-dimensionaalses eukleidilises ruumis on m-dimensionaalne eukleidiline ruum, $0 < m \leq n$.

Juba Steinitzi töö ilmumise ajal oli olemas sama teoreemi järgmine, tunduvalt kompaktsem tõestus, mis kuulus Threlfallile [75]; kuid veel enne Threlfalli tööd jõudsid trükis ilmuda Grossi [37] uurimus ning Bergströmi [30,31] artiklid, mis kõik andsid uusi, lühemaid tõestusi Lévy-Steinitzi teoreemile.

Olgu märgitud, et kõik need tööd, samuti nagu kõik järgnevadki /Šiljarski [23] , Kadetsi [9]/ sama teoreemi tõestused põhinesid teatavale geomeetrilise iseloomuga lemmale, nn. "lemmale murdjoonest". See lemma väidab, et iga tõkestatud lülipikkusega kinnise murdjoone lülisid on võimalik ümber järjestada /vt. def. 1.1.1 ja 1.2.1/ nii, et saadud murdjoon sisalduks sfääris, mille raadius sõltub ainult ruumi dimensioonist ja lülipikkuse tõkkest, ei olene aga lülide arvust murdjoones. Lemmale murdjoontest tugineb kaks olulist momenti Lévy-Steinitzi teoreemi tõestuskäigus: esiteks näidatakse märgitud lemma põhjal, et rea kõigi ümberjärjestuste kõigi kuhjumispunktide[1] hulk langeb ühte rea kõigi koonduvate ümberjärjestuste hulgaga, moodustades summade piirkonna

---

1 Vt. viide lk. 31.

/vt. def. 1.2.4 ja 1.2.5 / ,ning et suvaline punkt c , mis asub kahe summade piirkonda kuuluva punktiga a ja b ühel sirgel /eriti nende vahelisel lõigul/, kuulub samuti summade piirkonda.

Lemmat murdjoontest on uurinud terve rida autoreid /Hadwiger [40, 39] ,Kadets [8] , Bergström [31] / , kes on kindlaks teinud , et murdjoont sisaldava sfäari raadius ruumi dimensiooni tõkestamatul kasvamisel läheneb lõpmatusele /murdjoone lülipikkuse tõkke konstantsuse puhul/.See asjaolu muudab võimatuks lemma üldistamise lõpmatudimensionaalsesse ruumi.

Hilisematest uurimustest märgiksime ära Ptaki [62] töö, kes kasutas lemmat murdjoontest pidevate funktsioonide aproksimeerimisel.

Kasutades rea kuhjumispunkte, võib defineerida summade piirkonna S^* ka hajuvate ridade jaoks /vt. def. 1.2.4/,kusjuures selliselt defineeritud summade piirkond tingimisi koonduvate ridade korral langeb ühte varem defineeritud summade piirkonnaga. Niisuguse definitsiooni andis Jarnik [46] , kes käsitles hajuvaid ridu komplekstasandil, ning näitas, et selliselt defineeritud summade piirkonnal võib komplekstasandil olla 7 erinevat kuju, nimelt peale punkti, sirge ja tasandi, mis on iseloomulikud absoluutselt ja tingimisi koonduvatele ridadele, võib summade piirkond olla

veel tühi hulk või omandada mitmesuguseid "võre" kujusid, millega kohtume ka hiljem. Üheks sellistest võredest on näiteks hulk $\{\alpha+\beta\nu : \nu\in\mathcal{T}\}$, (kus $\mathcal{T}$ on kõigi täisarvude hulk), s.o. ekvidistantsete punktide hulk sirgel.

Jarniki tulemustele andis süstemaatilisema ning kompaktsema esituse Behrend [29], kes, muide, käsitles summade piirkonda mis tahes eukleidilises n-dimensionaalses ruumis.

Lähemalt uuris hajuvate ridade summade piirkondi veel Ružička [13], kes määras summade piirkonna kuju sõltuvalt konkreetsest reast, ning tegi kindlaks käesolevas töös edaspidi olulise fakti, et summade piirkonna struktuur sõltub nimelt rea liikmete vahede hulgast. Muuhulgas näitas Ružička, et n-dimensionaalses ruumis on summade piirkonna erinevate võimalike kujude arvuks $\frac{(n+1)(n+2)}{2}+1$.

Kõrvuti summade piirkonna kuju uurimisega hakati otsima vastust küsimusele - millisel juhul rea summa ümberjärjestamisel üldse muutub. Kuna rea liikmetele esitatavate tingimuste osas oli küsimus põhiliselt juba Dirichlet' ja Riemanni töödega lahendatud, hakati põhjalikumalt uurima substitutsioone /vt. def. 1.1.1 /, mis määravad rea ümberjärjestused / vt. def. 1.2.1/.

Erinevate substitutsioonide võrdlemiseks defineeris Hadwiger [44] ümberjärjestustugevuse, ning eraldas substitutsioonide hulgast "tähtsusetud" /Wirkungslose/ substitutsioonid, s.o. sel-

lised, mis ei muuda ühegi tingimisi koonduva rea summat, ülejäänud substitutsioonid aga jaotas tugevuse järgi klassidesse. Sarnase klassifikatsiooni võttis kasutusele ka Kronrod [10], kes defineeris olulise substitutsiooni kui sellise, mis muudab vähemalt ühe tingimisi koonduva rea summat, ning andis tarvilikud ja piisavad tingimused substitutsiooni olulisuseks reaalarvulise ja ka kompleksarvulise rea jaoks /definitsioonina 1.1.7 me esitamegi Kronrodi tarviliku ja piisava tingimuse/. Kronrodi tulemused on autori poolt üldistatud n-dimensionaalsesse eukleidilisse ruumi [76]. Sarnased tingimused on tuletatud erinevas vormis veel ka Levi [50] ja Žitomirski [7] poolt /olgu märgitud, et nende tingimuste matemaatiline esitus on küllaltki komplitseeritud/.

Edasistes töödes on käsitletud rea ümberjärjestuste koonduvust ning summa muutuvust sõltuvana niihästi substitutsioonist kui ka reast. Nimetaksime siin järgnevaid töid. Szüsz [74] /näitab, et vastavalt igale etteantud substitutsioonile leidub rida, mille summat see substitutsioon ei muuda/; Jasek [47] /näitab piisava, kuid mitte tarviliku tingimuse selleks, et kompleksarvulise rea puhul substitutsioon säilitaks koonduvuse ja summa/, Cano Caravaca [33] /näitab tarviliku ja piisava tingimuse rea kommutatiivsuseks[1]/; Karadžic [48] /uurib rea

---

[1] Kommutatiivseks nimetab Cano Caravaca rida, mille liikmete jada on nulljada ning mis ei ole tingimisi koonduv ega ka tingimisi hajuv /vt. def. 1.22 ja 1.23/, seega säilitades mistahes ümberjärjestuse korral oma lõpliku või lõpmatu summa.

positiivsete ja negatiivsete liikmete osajadadest tulenevaid tingimusi rea tingimisi koonduvuseks/. Substitutsioonidele esitatavaid tingimusi on puudutanud veel Rado [64] ja Bourbaki [1]; Stenberg [73] käsitleb osajadade vahede käitumist rea ümberjärjestamisel, Rajagopal [65] annab ka valemi rea ümberjärjestuse summa arvutamiseks; Agnew [26] näitab piisava tingimuse selleks, et substitutsioon säilitaks lähterea summa.

Substitutsioonide omaduste uurimisel on kasutatud ka funktsionaalanalüüsi meetodeid. Sengupta [68, 69], Agnew [25] ning Pál László [59] defineerisid substitutsioonide hulga kui ruumi $\mathcal{C}$ Frechet' meetrikaga

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|},$$

kus $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ ja $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ on naturaalarvude jada mingid ümberjärjestused /vt. def. 12.1/. Vaadeldes nüüd mingit tingimisi koonduvat rida $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$, osutub, et igale ruumi $\mathcal{C}$ punktile vastab rea $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ mingi ümberjärjestus, ning huvipakkuv on uurida, millistele punktidele vastab koonduv, millistele hajuv ümberjärjestus, s.o. vaadelda rea $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ käitumist ruumi $\mathcal{C}$ punktides. Autorid said ruumi $\mathcal{C}$ ja koonduvatele ümberjärjestustele vastava hulga A jaoks terve rea huvitavaid tulemusi. Tõestatakse, et niihästi $\mathcal{C}$ kui ka $\mathcal{C}-A$ on II kategooria hulgad, et $\mathcal{C}$ on kontiinuumi võimsusega ja et iga punkt hulgas $\mathcal{C}$ on kuhjumispunktiks kontiinuumi võimsusega punktide hulgale ruu-

mis $\mathcal{E}$,milledest igaühele vastab rea[1] $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ käitumine etteantud viisil /koondumine, hajumine teatavate kuhjumispunktide olemasolul jne./ ; hulk A osutub hulga $\mathcal{E}$ kõikjal tihedaks alamhulgaks.

Kõik need tulemused kajastavad teatud määral tõsiasja, et rea ümberjärjestamise puhul lõplik substitutsioon /vt. definitsioon 1.1.5/ ei mõju rea koonduvusele, kuid Frechet' meetrikas määrab punktidevahelise kauguse lõplik arv jada /antud juhul substitutsiooni/ esimesi liikmeid, mis seega vastab nimelt lõplikule substitutsioonile; seetõttu ei ole nimetatud meetrika kõige sobivam kaugemaleulatuvate uurimuste teostamiseks.[2]

---

[1] Edaspidi kasutame $\sum_i c_i = \sum_{i=1}^{\infty} c_i$.

[2] Võrdleme näiteks kahte substitutsioonide paari x ja y ning x ja z ,kusjuures y ning z on määratud järgnevalt:

$y_1 = x_2$,
$y_2 = x_1$,
$y_i = x_i$, $i = 3,4,\ldots$; siis ilmselt $d(x,y) = \frac{3}{8}$;
$z_1 = x_1$,
$z_2 = x_2$,
$z_i \neq x_i$, $i = 3,4,\ldots$, siis

$$d(x,z) < \frac{2}{8}, \qquad (*)$$

sõltumatult $z_i (i = 1,2,\ldots$ konkreetsest definitsioonist.Iga tingimisi koonduva rea

$$\sum_i c_i \qquad (**)$$

puhul leiab aset seos

$$\sum_i c_i(x) = \sum_i c_i(y),$$

s.t. rida $(**)$ käitub ühteviisi punktides x ja y ,kuna aga vastavalt igale reale $(**)$ ja igale etteantud arvule M on võimalik valida punkt z nii,et see rahuldab tingimust $(*)$ ning leiab aset seos

$$\left| \sum_i c_i(x) - \sum_i c_i(z) \right| > M, \qquad (***)$$

ning siinjuures on võimalik seos $(*)$ asendada kuitahes range seosega

$$d(x,z) < 2^{-N},$$

alnult võttes $x_\nu = z_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots,N$,mis ei muuda võrratust $(***)$.

Käesolevas töös huvitavad ka meid mitmesugused substitutsioonide eritüübid; paragrahvis 1.1 on antud meile sobiv substitutsioonide klassifikatsioon [15]. Et töös käsitletakse suurelt osalt summeeruvate ridade ümberjärjestamist, ei sobi meile kirjanduses varem esitatud substitutsioonide klassifikatsioonid, nagu Hadwigeri [44] oma, sest summeeruva rea summa muutmiseks on substitutsioonide tarvis esitada vähem rangeid nõudeid. Edaspidi iseloomustame /peatükkides II ja III/ käsitletavaid substitutsioone meie poolt esitatud klassifikatsiooni alusel. Ainsa kirjanduses varem tuntud klassina kuulub meie klassifikatsiooni Kronrodi [10] oluliste substitutsioonide klass /vt. def.1.1.8/. Eriklassi moodustavad jadadega määratud lihtsubstitutsioonid, millede omaduste uurimisele on pühendatud paragrahv 1.3 .Ka sellisel viisil defineeritud substitutsioone ega jadadeklassi $\mathcal{E}$ mõistet /vt. def.1.3.1 - 1.3.6, järg. 1.3.1-1.3.5/ ei ole autor kirjanduses varem kohanud.

Üldiselt on dissertatsioonis viidetega varustamata ainult üldtuntud mõisted /substitutsioon, maatriksmenetlus jne./, mis on paigutatud I peatükki töö loetavuse huvides, ning käesolevas töös esmakordselt kasutatavad mõisted /sõltumatu substitutsioon, parandrida jne./.

See, et Levy-Steinitzi teoreemi nende autorite poolt kasutatud meetodiga, mida lõplikudimensionaalses ruumis ka kõik järgnevad uurijad ainult väheoluliselt muutsid, ei saa lõpmatu-

dimensionaalsesse ruumi üldistada, selgus juba murdjoonte lemma mitteüldistatavuse tõestusest [40 , 42] . Kuid uute meetodite otsingud on jätkunud.

Esimeseks oluliseks sammuks, enne kui asuda Steinitzi teoreemi üldistamisele lõpmatudimensionaalses ruumis, oli koonduvuse erinevate liikide vahekorra selgitamine sellises ruumis. Siin tuleb märkida tervet rida uurijaid alates S. Banachist [28], kes tegi kindlaks, et tingimatu ja absoluutne koonduvus lõpmatudimensionaalses ruumis ei lange alati ühte, ja Orliczist [57], [58], kes näitas, et ruumis $\mathcal{L}$ leidub mitteabsoluutselt, kuid tingimatult koonduvaid ridu. Samale probleemile pühendasid oma tähelepanu veel Pettis [63], Moore [55] ja Hildebrandt [45]; viimane võttis kokku oma eelkäijate tulemused tingimisi, tingimatu, absoluutse ja mitteabsoluutse koondumise kohta, ning näitas erinevate määrangute ekvivalentsust lineaarses normeeritud ruumis.

Sammu edasi astus Hadwiger [43], kes näitas Hilberti ruumis kuue erineva koonduvusliigi olemasolu, lisades eelpooldefineerituile veel eriklassidena read, mis erinevais ümberjärjestustes võivad erinevaiks summadeks koonduda, ning read, mis erinevais ümberjärjestustes võivad kas hajuda või koonduda, viimasel juhul aga omavad ainult ühte summadest / bedingte Summe, unbedingte Summe/.

Banachi ruumis käsitleb sama tingimust veel Macphail [53], kes näitab, et ruumides $\mathcal{L}$ ja ℓ ei lange tingimatu ja absoluut-

ne koonduvus ühte /esimene tulemus kordab õieti Orliczit [57]/. Edasi võiks märkida veel Munroe [56] ja Šmuljani [24] töid, kes vaatlevad koonduvuse vahekordi mõningate erijuhtude jaoks, kuna Dvoretzky ja Rogers [35] tõestavad täielikult, et absoluutne ja tingimatu koonduvus langevad ühte ainult lõplikudimensionaalses ruumis. Gelbaum [36] uurib tingimisi ja tingimatu koonduvuse vahekordi rühmateooria meetodite abil.

Siia hulka kuulub ka Besicovitchi töö [32], kes konstruktiivselt näitab selliste funktsionaalridade olemasolu, mis koonduvad iga ümberjärjestuse korral, koondumata sealjuures absoluutselt, ning Hadwigeri töö [41].

Oluline erinevus lõpliku- ning lõpmatudimensionaalsete ruumide vahel tingimatu ning absoluutse koonduvuse seisukohalt kajastub ka summade piirkondade uurimisega seotud töödes. Järgnevaks raskuspunktiks ongi summade piirkonna defineerimine lõpmatudimensionaalses ruumis.

Nagu märgitud, defineeritakse lõplikudimensionaalses ruumis summade piirkond rea koonduvate ümberjärjestuste summade hulgana, kuid tõestuskäigus näidatakse murdjoonte lemma põhjal, et selliselt defineeritud summade piirkond langeb ühte kõigi ümberjärjestuste kõigi kuhjumispunktide hulgaga, millist asjaolu kasutatakse Steinitzi teoreemi tõestamisel.

Lõpmatudimensionaalses ruumis ei lange nimetatud hulgad ühte: leidub ridu [42], millede koonduvatel ümberjärjestustel on üksainus summa, kuid mis võivad teatavate ümberjärjestuste

puhul olla hajuvad, s.t. nende ümberjärjestuste kuhjumispunktide hulk sisaldab rohkem punkte kui koonduvate ümberjärjestuste summade hulk. See annab meile loogilise võimaluse kahe erineva summade piirkonna defineerimiseks, mida me käesolevas töös teemegi [18].

Summade piirkonnaks kitsamas mõttes $\underline{S}$ /vt. def.125 / nimetame rea kõigi koonduvate ümberjärjestuste hulka, summade piirkonnaks laiemas mõttes $\bar{S}$ /vt.def. 124/ - rea kõigi ümberjärjestuste kõigi kuhjumispunktide hulka. Viimast hulka uuris ka Hadwiger,kuid ainult Hilberti ruumis ridade puhul,mille liikmete jada on nulljada. Sellisest kitsendusest loobumine summade piirkonna $\bar{S}$ defineerimisel võimaldas meid $\bar{S}$ erijuhuna uurida ka Jarnik-Behrend- Ružička summade piirkonda S^*, kellede tulemused erijuhuna järelduvad meie tulemustest [18], samuti kui ka Hadwiger'i tulemused. Viimane töö pakub meile erilist huvi sellepärast, et selles on püstitatud esmakordselt lõpmatudimensionaalses ruumis küsimus: milline on summade piirkonna $\bar{S}$ struktuur siis,kui ta ei ole alamruum. Hadwiger [42] leiab, et $\bar{S}$ on moodul,s.o. hulk,millesse koos kolme punktiga u, v ja w kuulub alati ka punkt $u+v-w$.

Hulga $\bar{S}$ struktuuri täielik kindlakstegemine lineaarses normeeritud loenduva baasiga ruumis on dissertatsiooni II peatüki üheks ülesandeks. Teiseks,tunduvalt keerukamaks ülesandeks on hulga $\underline{S}$ struktuuri selgitamine loenduva baasiga ruumis.

Selle kohta ei ole kirjanduses seni ühtki viidet. Ainsateks töödeks summade piirkonna $\underline{S}$ kohta on Kadetsi [9] töö ruumis ℓ_p, milles uuritakse, missugustel kitsendustel ridadele osutub $\underline{S}$ alamruumiks, ning Talaljani [14] töö, mis näitab ruumis ℓ_p rea olemasolu, mille summade piirkonnaks on mõõtuvate funktsioonide ruum /koonduvust mõistetakse mõõdu järgi koonduvusena/; sellist rida nimetab töö autor ümberjärjestuste suhtes universaalseks.

Summade piirkondade uurimise probleemiga Banachi ruumis on tihedasti seotud terve rida töid Banachi ruumi geomeetria alal, kus autorid käsitlevad mitmesuguseid projekteerimisega seotud küsimusi /Steinitzi tõestus on oma iseloomult punktgeomeetriline, baseerudes n-dimensionaalse ruumi projekteerimisele $(n-1)$ - dimensionaalsesse ruumi/. Siia hulka kuuluvad Pelczynski ja Bessaga [60, 61] tööd, Grünbaumi [38] ja Schäfferi [67] uurimused, samuti Gapoškini [2,4], Olevski [11], Grinbljumi [5] ja Gurevitši [6] tööd, lõpuks ka Uljanovi [19–22] tööd tingimatu koonduvuse ja tingimatu summeeruvuse kohta. Kuna aga kõigi autorite tulemused piirduvad põhiliselt tingimatu koonduvusega, me neil pikemalt ei peatu.

Seega on, hoolimata probleemi küllaltki ulatuslikust ajaloost, materjali hulk, millele võime tugineda summade piirkondade $\underline{S}$ ja $\bar{S}$ uurimisel lõpmatudimensionaalses ruumis, üsnagi piiratud.

Summade piirkonna $\bar{S}(\xi_i r_i)$ uurimise lineaarses normeeritud ruumis $\mathcal{X}$ taandame me II peatüki algul summade piirkonna ja käsitletava ruumi suvalise sirge ühisosa uurimisele; tõestame kõigepealt /§ 2.1/, et kahe punkti x ja y olemasolust summade piirkonnas $\bar{S}(\xi_i r_i)$ /vastavalt $\underline{S}(\xi_i r_i)$/ järeldub "võre" $\{x+n(y-x): n\in T\}$ olemasolu selles summade piirkonnas /tõestus on konstruktiivne, kuid sarnaneb summade piirkonna $\bar{S}(\xi_i r_i)$ jaoks tõestusega Steinitzi teoreemis/. Samasuguse tulemuse saame nn. ε-ridade[1] juhul summadepiirkonna $\underline{S}(\xi_i r_i)$ jaoks. Edasi /§ 2.2/ analüüsime olukorda, kus summade piirkond sisaldab mitut üksteisele asetatud võret ühel sirgel, mis sõltuvalt nende võrede konkreetsest konstruktsioonist taandub kas üheks võreks või sellel sirgel kõikjal tihedaks hulgaks. Lõpuks teeme kindlaks olulise erinevuse summade piirkondade $\bar{S}(\xi_i r_i)$ ja $\underline{S}(\xi_i r_i)$ vahel: $\bar{S}(\xi_i r_i)$ on alati kinnine, kuna $\underline{S}(\xi_i r_i)$ jaoks ei saa seda väita. Sellest tuleneb /§2.3/, et $\underline{S}\cap\Lambda$ jaoks kõikvõimalike kujude hulk, kus Λ on suvaline sirge ruumis $\mathcal{X}$ ja rida $\sum r_i$ - ε-rida, on järgmine: 1. tühi hulk; 2. ainus punkt; 3. "võre" $\{\alpha+\nu\beta : \nu\in T\}$; 4. sirgel Λ kõikjal tihe hulk $\{\alpha+\sum_{i=1}^{N} n_i\beta_i : n_i\in T,\ i=1,2,\dots,N\}$ / N lõplik või lõpmatu/; 5. sirge Λ; kuna $\bar{S}\cap\Lambda$ jaoks on võimalikud ainult kujud 1, 2, 3 ja 5.

Loenduva baasiga lineaarses normeeritud ruumis $\bar{\mathcal{X}}$ on võimalik välja kirjutada ka summade piirkonna $\bar{S}(\sum r_i)$ ja ε- rea jaoks ka $\underline{S}(\sum r_i)$ üldavaldised /Vt. teoreem 2.3.1/. Need oleksid järgnevad:

$$\underline{S}(\sum r_i) = \{\sum \mu_i b_i\},\quad \bar{S}(\sum r_i) = \overline{\{\sum \nu_i b_i\}},$$

kus $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ on ruumi baas, ja reaalarvud μ_i $(i=1,2,\dots)$ võivad omandada väärtusi, mis vastavad ülalmärgitud kujudele 1-5;

[1] Vt. lk. 49.

kus reaalarvud $v_i (i = 1,2,\dots)$ võivad omandada väärtusi, mis vastavad kujudele 1 - 4.[1]

Lõpuks /§ 2.4/ toome näiteid summade piirkonna S mitmesuguste kujude kohta; näited on esitatud ruumis l_2, kusjuures sirgeks Λ on valitud sirge $(\lambda, 0, 0, \dots)$. Näidete iseloomu tõttu on arvutused, kuigi elementaarset laadi, küllaltki komplitseeritud.

Teine ümberjärjestusprobleemide uurimissuund, millel me peatume, on seotud koonduvusmõiste üldistamisega summeeruvuseks. Nimelt vaatleme mingit teatud maatriksmenetlusega A summeeruvat rida $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$; selle rea A- summade piirkonna /vt. def. 1.26/ defineerime rea kõigi A- summeeruvate ümberjärjestuste A - summade hulgana.

Esimeseks tööks sel alal on Mazuri töö [54], kus autor näitab, et C_1- summeeruva rea summade piirkonnaks on tõkestatud liikmetejadaga rea puhul kas ainus punkt või sirge, /vrd. Riemanni teoreemiga koonduvate ridade jaoks!/ ning et see tulemus on üldistatav ka Abeli menetlusega summeeruvatele ridadele.

Järgmine töö kuulub Hagemihlile ja Erdösile [27], kes näitavad, et C_1- summeeruva rea summade piirkonnal võib olla

[1] Vt. viide lk. 64.

veel kuju $\{\alpha+\beta\nu : \nu \in T\}$, ning toodud võimalustega piirdubki C_1-summeeruvate ridade kõikvõimalike C_1-summade piirkondade hulk.

Järgmiseks huvipakkuvaks tööks on Lorentzi ja Zelleri uurimus [52], kes näitavad, et iga maatriksmenetluse A korral on A-summeeruva rea A-summade piirkonnaks analüütiline hulk[1], ja vastavalt igale etteantud analüütilisele hulgale on võimalik konstrueerida rida /reaks valivad autorid spetsiaalse kiiresti kasvavate liikmetega rea/ ning maatriks A nii, et selle rea A-summade piirkond langeb ühte ette antud analüütilise hulgaga.

Mõningaid huvipakkuvaid tulemusi on veel Robertsonil [66],

1 Analüütilised hulgad /ka A-hulgad/ defineeritakse järgnevalt: Olgu meil antud mingis ruumis aiamhulkade süsteem $\{s\}$. Olgu igale lõplikule järjestatud täisarvude hulgale

$$i_1, i_2, \ldots, i_p$$

seatud vastavusse hulk

$$s_{i_1 i_2 \ldots i_p} \in \{s\}.$$

Siis vastab igale täisarvude jadale $i_1, i_2, \ldots$ süsteemi $\{s\}$ kuuluvate hulkade jada $s_{i_1}, s_{i_1 i_2}, \ldots$.

Hulk

$$T = \bigcup_{(i_1, i_2, \ldots)} \bigcap_{\nu=1}^{\infty} s_{i_1 i_2 \ldots i_p},$$

kus summa on võetud jada $i_1, i_2, \ldots$ kõik-võimalike substitutsioonide järgi, on analüütiline hulk.

Analüütilised hulgad topoloogilises ruumis sisaldavad erijuhuna kõiki lahtisi ja kinnisi hulki, samuti Boreli (B-) hulki.

Analüütilised hulgad sirgel defineeritakse, võttes hulkadeks $s_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ lõigud sellel sirgel.

kes uuris, millistel tingimustel rea ümberjärjestused säilitavad summeeruvuse. Karlinil [49], kes paralleelselt tingimatu koonduvusega vaatles tingimatu summeeruvuse küsimusi, Gapoškinil ja Olevskil [3, 4, 11], kes vaatlevad koguni summeeruvaid ridu Banachi ruumis. Kuna aga kõik mainitud uurijad piirduvad tingimatu summeeruvuse küsimustega, jääb kokkupuutepind käesoleva töö probleemidega väga kitsaks, mistõttu me neile rohkem aega ei pühenda.

Käesoleva töö III peatükis vaatleme multiplikatiivse menetlusega A summeeruvate ridade A-summade piirkondi $S_A(\sum_{i=1}^{\infty} r_i)$. Osutub, et erinevate ridade $\sum_i r_i$ ning erineva kujuga menetluste puhul võib $S_A(\sum_i r_i)$ olla väga mitmesugune. Töö seisukohalt osutus otstarbekaks jaotada kõik A-summeeruvad read sobivate tunnuste alusel klassidesse, ning uurida eraldi üksikutesse klassidesse kuuluvate ridade A-summade piirkondi. Nii on § 3.1 pühendatud ridadele, mille liikmete jadaks on nulljada, ning kindlaks tehtud, et kõigi nende ridade summade piirkonnaks on arvsirge [15]. Olukord on keerukam tõkestatud liikmete jadaga ridade puhul. Selliseid ridu on uuritud paragrahvides 3.2- 3.7 [16, 17]. Osutub, et selliste ridade A-summade piirkond võib olla, sõltuvalt menetlusest A, küllaltki meelevaldse kujuga, alludes aga teatavatele üldreeglitele: juhul, kui ei ole tegemist tühja hulga või ainsa punktiga, sisaldab A-summade piirkond kindlasti võret $\{\alpha + \beta\nu : \nu \in J\}$ /§ 3.2/. /See asjaolu ei välista võimalust, et summade piirkond langeb kokku arvsirgega /§3.3//. Selliste tulemuste saavutamiseks

on meil tarvis uurida tõkestatud liikmetejadadega ridade erijuhte $(\rho-\bar{c})$- , $(\rho-\bar{c})^*$ -ridu, $(\rho-\overline{\bar{c}})$- ja $(\overline{\rho-\bar{c}})$ ridu[1] , millede summade piirkonnad on suhteliselt lihtsalt määratavad / § 3.4/ . Nii on $(\overline{\rho-\bar{c}})^*$ -rea A-summade piirkond alati esitatav üldvalemiga

$$\{\sigma + a(m+\delta)(\rho-\bar{c}) : m \in \Gamma, \delta \in \mathfrak{D}\},$$

kus $\mathfrak{D}$ on lõigul $[0,1]$ sisalduv meelevaldne analüütiline nulk, ainus punkt või ka kogu lõik $[0,1]$ /§ 3.5/.

Mitmete nende erijuhtude kohta on esitatud näiteid paragrahvis 10 [17] .

Kasutades $(\rho-\bar{c})$- ridade kohta saadud tulemusi, saame /sarnaselt mõttekäikudele peatüki II paragrahvides 2 ja 3 / teha järeldusi ka mistahes tõkestatud liikmete jadaga A- summeeruvate ridade A- summade piirkonna kohta. Seda oleme teinud paragrahvis 3.7, kusjuures rakendame ka paragrahvis 3.6 saadud tulemusi $(\rho-\bar{c}-\bar{n})$-ridadele[2] , mis on $(\rho-\bar{c})$- ridade vahetuks üldistuseks.

Kasvava liikmete jadaga ridadest on põhjalikumalt uuritud ridu, kus rea liikmete vahede jadaks on nulljada /§ 3.9/ [15] , ning on näidatud , et selliste ridade summade piirkonnas sisaldub alati poolsirge . § 3.8 on pühendatud lõpmatu aritmeetilise rea summade piirkonna vaatlemisele. Selle rea summade

---

[1] Vt. definitsioonid 3.2.1, 3.3.1, 3.4.1, 3.4.3.

[2] Vt. def. 1.6.1.

piirkonna uurimisel saab ulatuslikult kasutada konstantide jadasid sisaldavate, s.o. $(\varphi - \tau)$ - ridade summade piirkondade kohta kindlaks tehtud tõsiasju. Osutub, et selliste ridade summade piirkond on juba küllaltki meelevaldse kujuga.

Kõigi vaadeldud summade piirkondade kohta esitatud näited on koondatud paragrahvi 3.10.

Mis puutub veelgi kiiremini kasvava liikmete jadaga ridadesse, siis, nagu näitasid Lorentz ja Zeller, leidub nende nulgas ridu, millede A - summade piirkond veelgi üldisemate maatriksmenetluste korral võib omandada kõiki summade piirkondade võimalikke kujusid, seega ei paku edasine uurimine enam erilist huvi.

Samuti menetlustele esitatavate kitsenduste ärajätmisel /koregulaarsed ning konull-menetlused/ suureneb summade piirkonna meelevaldsus.

Lõpuks puudutaksime lühidalt käesolevas töös esinevat viidete süsteemi.

Teoreemid, definitsioonid jne., samuti valemid on nummerdatud paragrahvide kaupa, alates ühest. Viidetes sama paragrahvi ulatuses kasutame valemi või teoreemi numbrit üksi, nii nagu see on vastavalt nummerdamise juures märgitud /teoreem 3, valem (12) /. Viidetes sama peatüki teisele paragrahvile, paigutame valemi või teoreemi numbri ette paragrahvi numbri /teoreem 4.3, valem (5.12) /. Viidates teisele peatükile, lisame ka peatüki numbri /teoreem 1.4.8, valem (3.5.12), paragrahv 3.2, eraldades numbrid omavahel punktidega.

I PÕHILISI MÕISTEID

§ 1. Substitutsioon

Esimeses peatükis esitame edaspidiseks tööks vajalike mõistete definitsioonid. Siinjuures on töö loetavuse huvides ära toodud ka mõningad olulisemad kirjanduses varem tuntud määratlused, nagu näit substitutsioon jne. Samuti koondasime sellesse peatükki rea definitsioonidest vahetult järelduvaid abitulemusi, mis leiavad kasutamist töö II ja III peatükis.

Alustame substitutsiooni definitsioonist:

Definitsioon 1. Substitutsiooniks nimetame operaatorit $\mathcal{K}$, mis kujutab kõigi naturaalarvude hulga $\{n\}$ üksüheselt iseeneseks.

Substitutsioonide korrutise ja astmed defineerime alljärgnevate seoste kaudu:

$$(\mathcal{K}_1 \cdot \mathcal{K}_2)(n) = \mathcal{K}_2[\mathcal{K}_1(n)],$$

$$\mathcal{K}^1(n) = \mathcal{K}(n); \quad \mathcal{K}^m(n) = \mathcal{K}[\mathcal{K}^{m-1}(n)].$$

Definitsioon 2. Ütleme, et substitutsioonide jadal

$$\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \ldots \qquad (1)$$

eksisteerib lõpmatu korrutis

$$\mathcal{K} = \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{K}_i \qquad (2)$$

parajasti siis, kui iga naturaalarvu n jaoks leidub indeks k_n ja naturaalarv n' nii, et

$$\mathcal{K}_\nu(n) = n, \quad \nu = k_n + 1, \dots, \tag{3}$$

$$\Big[\prod_{\nu=1}^{k_n} \mathcal{K}_\nu\Big](n') = n. \tag{4}$$

Siis defineerime $\mathcal{K}(n)$ iga n jaoks seosega[1]

$$\mathcal{K}(n) = \Big[\prod_{\nu=1}^{k_n} \mathcal{K}_\nu\Big](n) \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{5}$$

On lihtne kontrollida, et selliselt defineeritud operaator $\mathcal{K}$ on substitutsioon: tõepoolest, $\mathcal{K}(n)$ on määratud iga naturaalarvu jaoks, ning tema väärtuste hulgaks on naturaalarvude hulk. Tuleb veel kontrollida operaatori $\mathcal{K}$ üksühesust. Tõestame seda vastuväiteliselt. Oletame kõigepealt, et $\mathcal{K}$ ei ole ühene. See tähendab, et leidub naturaalarv n^*, mille puhul leiavad aset võrdused

$$\mathcal{K}(n^*) = \bar{n},$$
$$\mathcal{K}(n^*) = \bar{\bar{n}},$$

kusjuures

$$\bar{n} \neq \bar{\bar{n}}.$$

Kasutades definitsioonivalemit (5), saame

$$\mathcal{K}(n^*) = \Big[\prod_{\nu=1}^{k_{\bar{n}}^*} \mathcal{K}_\nu\Big](n^*) = \bar{n}, \tag{6}$$

$$\mathcal{K}(n^*) = \Big[\prod_{\nu=1}^{k_{\bar{\bar{n}}}^*} \mathcal{K}_\nu\Big](n^*) = \bar{\bar{n}}, \tag{7}$$

kusjuures kehtivad eelduse (3) kohaselt seosed

---

[1] Kasutades lk.-l 8 esitatud meetrikat, ning tähistades $\mathcal{K}(n) = x$, $\prod_{i=1}^{k_n} \mathcal{K}_\nu = x^n$, näeme et

$$d(x, x^n) \leq \frac{1}{2^n},$$

seega $\mathcal{K} = \lim_{n\to\infty} \prod_{\nu=1}^{k_n} \mathcal{K}_\nu$, ning siit on lihtne näidata, et $\mathcal{K} = \lim_{n\to\infty} \prod_{\nu=1}^{n} \mathcal{K}_\nu$ tooduu meetrika mõttes.

$$\mathcal{K}_\nu(m^*) = m^*, \quad (\nu = \kappa_{\bar{m}^*}+1, \kappa_{\bar{m}^*}+2, \dots) \quad (8)$$

ja

$$\mathcal{K}_\nu(m^*) = m^*, \quad (\nu = \kappa_{\bar{\bar{m}}^*}+1, \kappa_{\bar{\bar{m}}^*}+2, \dots). \quad (9)$$

Tähistame

$$\max(\kappa_{\bar{m}^*}, \kappa_{\bar{\bar{m}}^*}) = \kappa_{m^*},$$

ning defineerime lõpliku korrutise

$$\mathcal{K}^* = \prod_{\nu=1}^{\kappa_{m^*}} \mathcal{K}_\nu.$$

$\mathcal{K}^*$ on substitutsioon. Seostest (6) -(9) järelduvad võrdused:

$$\mathcal{K}^*(m^*) = \Big[\prod_{\nu=1}^{\kappa_{\bar{m}^*}} \mathcal{K}_\nu\Big](m^*) = \Big[\prod_{\nu=1}^{\kappa_{\bar{m}^*}} \mathcal{K}_\nu \cdot \prod_{\nu=\kappa_{\bar{m}^*}+1}^{\kappa_{m^*}} \mathcal{K}_\nu\Big](m^*) =$$

$$= \Big[\prod_{\nu=1}^{\kappa_{\bar{m}^*}} \mathcal{K}_\nu\Big](m^*) = \bar{m},$$

$$\mathcal{K}^*(m^*) = \Big[\prod_{\nu=1}^{\kappa_{m^*}} \mathcal{K}_\nu\Big](m^*) = \Big[\prod_{\nu=1}^{\kappa_{\bar{\bar{m}}^*}} \mathcal{K}_\nu \cdot \prod_{\nu=\kappa_{\bar{\bar{m}}^*}+1} \mathcal{K}_\nu\Big](m^*) = \Big[\prod_{\nu=1}^{\kappa_{\bar{\bar{m}}^*}} \mathcal{K}_\nu\Big](m^*) = \bar{\bar{m}},$$

mis on vastuolus substitutsiooni $\mathcal{K}^*$ ühesusega, ja seega lükkavad ümber meie väitevastase oletuse. Substitutsiooni $\mathcal{K}^*$ üksühesuse tõestame sarnase mõttekäigu varal.

Substitutsioonide korrutamine ei ole üldiselt kommutatiivne. Vaatleme, millisel juhul siiski esineb korrutise kommutatiivsus. Selleks defineerime veel mõningad mõisted:

Definitsioon 3. Nimetame substitutsioone $\mathcal{K}_1$ ja $\mathcal{K}_2$ sõltumatuteks, kui kehtivad seosed:

kui $\mathcal{K}_1(n) \neq n$, siis $\mathcal{K}_2(n) = n$,

kui $\mathcal{K}_2(n) \neq n$, siis $\mathcal{K}_1(n) = n$.

Substitutsioonide süsteemi[1] $\{\mathcal{K}_i\}_{i=1}^{\infty}$, kus substitutsioonid $\mathcal{K}_i$ ja $\mathcal{K}_j$ on sõltumatud alati, kui $i \neq j$, nimetame sõltumatuks.

---

[1] Jadade puhul kasutame sageli sümbolit $\{k_i\} = \{k_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Definitsioonist 3 ning substitutsioonide korrutamise eeskirjast järeldub:

Järeldus 1. Sõltumatute substitutsioonide korrutis on kommutatiivne.

Teoreemist 1 ja definitsioonist 3 järeldub veel:

Järeldus 2. Sõltumatu substitutsioonide süsteemi (1) korrutis (2) eksisteerib alati.

Tõepoolest, sõltumatu süsteemi puhul vastab igale naturaalarvule m selline indeks n_m, et

$$\mathcal{K}_\nu(m) = m \quad \text{, kui} \quad \nu \neq n_m ;$$

võttes siis $k_m = n_m$, ning

$$\prod_{i=1}^{k_m} \mathcal{K}_\nu = \mathcal{K}^*_{n_m},$$

$$m' = \mathcal{K}^{*-1}_{n_m}(m),$$

millised suurused on alati määratud, seega on tingimused (3) ja (4) täidetud.

Definitsioon 4. Substitutsiooni $\mathcal{K}$ nimetame lihtsubstitutsiooniks, kui

$$\mathcal{K}^2(n) = n \quad (n = 1,2,\dots).$$

Lihtsubstitutsiooni puhul kasutame sümbolit $\leftrightarrow$:

$$i \leftrightarrow \mathcal{K}(i).$$

Lihtsubstitutsioonide puhul on õige:

Järeldus 3. Sõltumatute lihtsubstitutsioonide süsteemi korrutis on lihtsubstitutsioon.

Tõestame nüüd järgneva teoreemi.

T e o r e e m 1. Iga substitutsioon $\mathcal{K}$ on esitatav kahe

lihtsubstitutsiooni $\mathcal{K}_1$ ja $\mathcal{K}_2$ korrutisena.

T õ e s t u s. Olgu antud mingi substitutsioon $\mathcal{K}$. Määrame indeksi i_0^1 järgnevalt: $\mathcal{K}(\nu) = \nu$, $\nu = 1,2,\dots, i_0^1 - 1$, $\mathcal{K}(i_0^1) \neq i_0^1$ $(i_0^1 \geq 1)$. Edasi defineerime indeksid i_ν^1, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ järgnevalt: olgu $\mathcal{K}(i_\nu^1) = i_{\nu+1}^1$, $\mathcal{K}^{-1}(i_\nu^1) = i_{\nu-1}^1$ $(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. On kolm võimalust:

1°. leidub $\nu' \geq 1$ nii, et $i_{\nu'}^1 = i_{-\nu'}^1$,

2°. leidub $\nu'' \geq 1$ nii, et $i_{\nu''}^1 = i_{-\nu''+1}^1$,

3°. ei leidu lõplikku indeksit ν' ega ν'', mille puhul leiaks aset 1° või 2°.

Defineerime kõigepealt lihtsubstitutsioonid $\mathcal{K}_1^{(1)}$ ja $\mathcal{K}_2^{(1)}$:

$\mathcal{K}_1^{(1)}$: $i_\nu^1 \leftrightarrow i_{-\nu+1}^1$, $\nu = 1,2,\dots,\nu'$, või $\nu = 1,2,\dots,\nu''$, või $\nu = 1,2,\dots$, sõltuvalt sellest, kas jada $\{i_\nu^1\}$ korral kehtib seos 1°, 2° või 3°, ning samuti

$\mathcal{K}_2^{(1)}$: $i_\nu^1 \leftrightarrow i_{-\nu+2}^1$, $\nu = 1,2,\dots,\nu'$ või $\nu = 1,2,\dots,\nu''$ või $\nu = 1,2,\dots$.

Näeme, et $\mathcal{K}_1^{(1)}\mathcal{K}_2^{(1)}(i_\nu^1) = \mathcal{K}_2^{(1)}(i_{-\nu+1}^1) = i_{\nu+1}^1 = \mathcal{K}(i_\nu^1)$, ja

$$[\mathcal{K}_1^{(1)}\mathcal{K}_2^{(1)}]^{-1}(i_\nu^1) = [\mathcal{K}_1^{(1)}]^{-1}\{[\mathcal{K}_2^{(1)}]^{-1}(i_\nu^1)\} = \mathcal{K}_1^{(1)}[\mathcal{K}_2^{(1)}(i_\nu^1)] =$$

$$= \mathcal{K}_1^{(1)}(i_{-\nu+2}^1) = i_{\nu-1}^1 = \mathcal{K}^{-1}(i_\nu^1).$$

Tähistame esimese naturaalarvu μ, $\mu \neq i_\nu^1$ $(\nu = 1,2,\dots)$, mille puhul $\mathcal{K}(\mu) \neq \mu$, sümboliga i_0^2, ning määrame jada $\{i_\nu^2\}$ / ν omandab lõpliku või lõpmatu hulga väärtusi sarnaselt ν-ga jadas $\{i_\nu^1\}$, vt. juhud 1°–3°/.

Kui meil on määratud jadad $\{i_\nu^\varkappa\}$ $(\varkappa = 1,2,\dots,j-1)$, määrame i_0^j kui esimese μ, mille puhul $\mathcal{K}(\mu) \neq \mu$ ja mis ei kuulu ühessegi jadadest $\{i_\nu^\varkappa\}$ $(\varkappa = 1,2,\dots,j-1)$.

Vastavalt igale jadadest $\{i_\nu^j\}_{\nu=1}^{\infty}$ $(j=1,2,\dots)$ määrame substitutsioonid $K_1^{(j)}$ ja $K_2^{(j)}$ ülalkirjeldatud viisil. Siis kehtib seos

$$K_1^{(j)} \cdot K_2^{(j)}(i_\nu^j) = K(i_\nu^j).$$

Kuna iga naturaalarv μ, mille puhul $K(\mu) \neq \mu$, kuulub täpselt ühte jadadest $\{i_\nu^j\}_{\nu=1}^{\infty}$ $(j=1,2,\dots)$, on seega iga μ, $K(\mu)\neq\mu$ jaoks määratud mingil viisil $K_1^{(j)}$ ja $K_2^{(j)}$.

Sellisel viisil defineeritud substitutsioonid $\{K_1^{(j)}\}$ ja $\{K_2^{(j)}\}$ moodustavad vastavalt sõltumatud süsteemid ja seega eksisteerivad järelduse 2 põhjal substitutsioonid K_1 ja K_2, mis on defineeritud lõpmatute korrutistena:

$$K_1 = \prod_{j=1}^{\infty} K_1^{(j)} \; ; \quad K_2 = \prod_{j=1}^{\infty} K_2^{(j)}.$$

/Erijuhul võib olla substitutsioone $K_1^{(j)}, K_2^{(j)}$ ka lõplik arv, $j=1,2,\dots r$, sel juhul on meil tegemist lõpliku korrutisega, kuid kogu mõttekäik üldiselt jääb samaks/. Järelduse 3 põhjal on K_1 ja K_2 lihtsubstitutsioonid. Eelpooltõestatu põhjal leidub iga μ, $K(\mu)\neq\mu$ korral jada $\{i_\nu^j\}$ nii, et $\mu \in \{i_\nu^j\}$, ja seega on õige:

$$K_1 \cdot K_2(\mu) = K_1^{(j)} \cdot K_2^{(j)}(\mu) = K(\mu),$$

ning kuna substitutsioonid $K_1^{(j)}, K_2^{(j)}$ $(j=1,2,\dots)$ paigutavad ümber ainult selliseid naturaalarve μ, millede puhul $K(\mu)\neq\mu$, on õige ka seos

$$K_1 \cdot K_2(\mu) = \mu.$$

Sellega on õige, et

$$K = K_1 \cdot K_2,$$

ja meie teoreem on tõestatud.

Anname nüüd mõningad definitsiooniu, mis iseloomustavad substitutsioone:

Definitsioon 5. Lõplikuks substitutsiooniks nimetame sellist substitutsiooni $\mathcal{K}$, mille puhul leidub niisugune naturaalarv N, et $\mathcal{K}(n) = n$, $n = N+1, N+2, \ldots$.

Substitutsiooni $\mathcal{K}$, mis ei ole lõplik, nimetame lõpmatuks.

Definistioon 6. Tõkestatud substitutsiooniks nimetame sellist substitutsiooni $\mathcal{K}$, mille puhul leidub niisugune naturaalarv d, et kehtib seos

$$|n - \mathcal{K}(n)| \leq d \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{10}$$

Substitutsiooni $\mathcal{K}$, mis ei ole tõkestatud, nimetame tõkestamatuks.

Definitsioonidest (5) ja (6) järeldub:

Järeldus 4. Iga lõplik substitutsioon on tõkestatud.

Definitsioon 7. m - kordseks substitutsiooniks nimetame sellist substitutsiooni $\mathcal{K}$, mille puhul leidub niisugune naturaalarv N, et iga naturaalarvu n puhul, $n = N+1, N+2, \ldots$, kehtib seos

$$\mathcal{K}(\nu_i) < n < \nu_i \tag{11}$$

ülimalt m naturaalarvu ν_i korral, kusjuures leidub selline lõpmatu jada n_k, mille puhul võrratust (11) rahuldavaid arve $\nu_i^{(n)}$ on täpselt m.

Kui substitutsioon ei ole m-kordne ühegi lõpliku arvu

m puhul, on ta lõpmatu-kordne.

Järeldus 5. Iga tõkestatud substitutsioon on m-kordne, $m \leq d$.

Tõestame nüüd järgneva teoreemi:

T e o r e e m 2 . Iga m-kordne lihtsubstitutsioon on esitatav m sõltumatu ühekordse lihtsubstitutsiooni korrutisena.

T õ e s t u s. Defineerime jada $\{\nu_i^1\}_{i=1}^{\infty}$ järgnevalt: ν_1^1 on selline naturaalarv, et kehtivad seosed

$$\mathcal{K}(\mu) = \mu \ , \quad \mu = 1,2,\dots,\nu_1^1 - 1 \ ;$$

$$\mathcal{K}(\nu_1^1) > \nu_1^1 .$$

Kui on määratud ν_1^{j-1} ,siis defineerime ν_1^j nii, et $\nu_1^j > \mathcal{K}(\nu_1^{j-1})$,kusjuures kehtivad seosed

$$\begin{cases} \mathcal{K}(\mu) \leq \mu \ , \quad \mu = \mathcal{K}(\nu_1^{j-1}) + 1, \dots, \nu_1^{j-1}, \\ \mathcal{K}(\nu_1^j) > \nu_1^j, \end{cases} \tag{12}$$

ning substitutsiooni $\mathcal{K}_1$ defineerime seostega $\nu_1^j \leftrightarrow \mathcal{K}(\nu_1^j)$ $(j = 1,2,\dots)$. Edasi defineerime jada $\{\nu_2^j\}$ sarnaselt jadaga $\{\nu_1^j\}$,valides selle jada liikmed hulgast $\{n\} - \{\nu_1^j\}$, ja defineerime substitutsiooni $\mathcal{K}_2$ seostega $\nu_2^j \leftrightarrow \mathcal{K}(\nu_2^j)$. Jätkame selliselt,defineerides $\mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3, \dots, \mathcal{K}_m$.

Oletame vastuväiteliselt, et eksisteerib ka lõpmatu substitutsioon $\mathcal{K}_{m+1}$. Siis peaks leiduma jada $\{\nu_{m+1}^j\}_{j=1}^{\infty}$ nii, et $\mathcal{K}_{m+1}$ oleks defineeritud seostega $\nu_{m+1}^j \leftrightarrow \mathcal{K}(\nu_{m+1}^j)$.

Definitsioonivalemite kohaselt peaks iga indeksi jaoks siis leiduma naturaalarvud $\nu_{\mu_j}^k$, $k = 1,2,\dots,m$ nii, et kehtiksid võrratused

$$\nu_{\mu_j}^k \leq \nu_{m+1}^j \leq \mathcal{K}(\nu_{\mu_j}^k),$$

kuid see viib vastuoluni eeldusega substitutsiooni $\mathcal{K}$ m-kordsusest, mis tõestabki meie väite. Ühtlasi järeldub valemitest (12) ja substitutsioonide $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \ldots, \mathcal{K}_m$ definitsioonist nende substitutsioonide sõltumatus. Sellega on teoreem tõestatud.

Teoreemidest 2 ja 3 järelduvad:

Järeldus 6. Iga m-kordne substitutsioon $\mathcal{K}$ on esitatav μ ühekordse lihtsubstitutsiooni korrutisena, $m \le \mu \le 2m$.

Järeldus 7. Iga lihtsubstitutsioon on esitatav sõltumatute ühekordsete lihtsubstitutsioonide korrutisena.

Järeldus 8. Iga substitutsioon on esitatav ühekordsete lihtsubstitutsioonide korrutisena.

Toome siin ära veel Kronrodi [10] poolt antud olulise substitutsiooni mõiste. Selleks on meil tarvis defineerida järgmised lisamõisted:

Olgu meil antud substitutsioon $\mathcal{K}$ ja naturaalarv n. Tähistame sümbolitega

$$l_1(n) < l_2(n) < \ldots < l_{t(n)}(n) \tag{13}$$

kõik sellised naturaalarvud, millede puhul

$$l_{t(n)}(n) \le n \quad \text{ja} \quad \mathcal{K}^{-1}(l_i(n)) > n \quad (i = 1, 2, \ldots, t(n)),$$

ning sümbolitega

$$m_1(n) < m_2(n) < \ldots < m_{t(n)}(n) \tag{14}$$

kõik sellised naturaalarvud, millede puhul

$$m_1 > n \quad \text{ja} \quad \mathcal{K}^{-1}(m_i(n)) \le n \quad (i = 1, 2, \ldots, t(n)).$$

Arvud $l_1, \ldots, l_{t(n)}$ moodustavad $\Delta(n)$ naturaalarvulist

lõiku; arvud $m_1, \dots, m_{t(n)} - \bar{\Pi}(n)$ naturaalarvulist lõiku.

Tähistame

$$\Lambda_K(n) = \bar{\Lambda}(n) + \underline{\Lambda}(n),$$

siis

$$\Pi_K(n) = \Lambda_K^{-1}(n).$$

Definitsioon 8. Substitutsiooni K nimetame oluliseks, kui

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \min [\Lambda_K(n), \Pi_K(n)] = \infty . \qquad (15)$$

§ 2. Rea summeerimispiirkond

Olgu meil antud rida[1]

$$\sum_i r_i , \quad r_i \in R . \qquad (1)$$

Rea osasummad tähistame edaspidi

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = s_n . \qquad (2)$$

Peatükis III R on reaalarvude hulk $\mathcal{R}_1$ /arvsirge/, peatükis II - lineaarne normeeritud ruum $\mathcal{X}$,kusjuures peatüki II paragrahvis 3 nõuame veel, et $\mathcal{X}$ oleks loenduva baasiga. Koonduvusena ruumis $\mathcal{X}$ mõistame alati,kui pole märgitud muud, tugevat koonduvust.

Definitsioon 1. Rea (1) K - ümberjärjestuseks /ehk lihtsalt ümberjärjestuseks/ nimetame rida

$$\sum_i r_{K(i)}, \qquad (3)$$

kus $K(i)$ on substitutsioon /vt. def. 1.1/.

---

[1] Vt.viide lk. 9

Ühe rea erinevate ümberjärjestuste võrdlemiseks on meil otstarbekas kasutada järgnevaid seoseid:

Olgu meil antud lähterida $\sum_i x_i$ ja selle mingi ümberjärjestus $\sum_i x_{K(i)} = \sum_i x_{p_i}$.

Ütleme, et

$$\{x_i\}_{i=1}^{k} \supset \{x_{p_i}\}_{i=1}^{l}, \tag{4}$$

kui indeksite kui naturaalarvude vahel kehtib seos

$$\{i\}_{i=1}^{k} \supset \{p_i\}_{i=1}^{l}.$$

Sel korral saame defineerida ka vahe

$$\{x_i\}_{i=1}^{k} - \{x_{p_i}\}_{i=1}^{l} = \{x_{q_i}\}_{i=1}^{l-k}, \tag{5}$$

mis kujutab $l-k$ esimest liiget mingist uuest ümberjärjestusest, mille liikmed tähistame sümboliga $\sum_i x_{q_i}$.

Definitsioon 2 Nimetame rida (1) tingimisi hajuvaks, kui tal on kaks /erinevat või ühtelangevat/ ümberjärjestust $\sum_i x_i'$ ja $\sum_i x_i''$ nii, et rea $\sum_i x_i'$ osasummade jadal $\{s_j'\}$ on lõplik kuhjumispunkt[1] a, rea $\sum_i x_i''$ osasummade jadal $\{s_i''\}$-lõplik kuhjumispunkt b, $a \neq b$.

Selline tingimisi hajuva rea definitsioon on üldisem kui Kronrodi [10] poolt antud ruumis R_2, kuna pole nõutud tingimuse

$$x_i \to 0 \tag{6}$$

täidetust; Kronrodi tingimisi hajuvad read osutuvad ühtlasi tingimisi koonduvaks ruumis R_2, kuna aga lõpmatudimensionaalses ruumis $\mathcal{X}$ ei piisaks ka tingimuse (6) rahuldamisest selleks, et tingimisi hajuv rida (1) oleks ühtlasi tingimisi koonduv,

[1] Rea kuhjumispunktiks nimetame rea osasummade jada kuhjumispunkte.

/vt. definitsioon 3/, jäs me loobusime sellest.

Definitsioon 3. Nimetame rida (1) tingimisi koonduvaks, kui tal leidub kaks erinevateks summadeks koonduvat ümberjärjestust $\sum_i r_i' = a$, $\sum_i r_i'' = b$, $a \neq b$.

Definitsioon ei lange päris kokku suure osa autorite poolt antud tingimisi koonduva rea definitsiooniga, kuna sageli nõutakse et real oleks ü k s koonduv ümberjärjestus ja mingi ümberjärjestus, mis samaks punktiks ei koondu /võib olla ka hajuv/; meie teoreemide tõestamiseks on vajalik esitada lisanõue, et leiduks vähemalt kaks erinevat koonduvat ümberjärjestust, seega kitsendame tingimisi koonduvate ridade klassi nii, et see langeb Hilberti ruumis ühte Hadwigeri [43] klassiga BS.

Definitsioon 4. Nimetame rea (1) summade piirkonnaks laiemas mõttes $\bar{S}(\sum_i r_i)$ rea (1) kõigi ümberjärjestuste kõigi lõplike kuhjumispunktide hulka.

Definitsioon 5. Nimetame rea (1) summade piirkonnaks kitsamas mõttes $\underline{S}(\sum_i r_i)$ rea (1) kõigi koonduvate ümberjärjestuste summade hulka.

Olgu A mingi maatriksmenetlus. Edaspidi eeldame, et ta on koonduvust säilitav, s.t. rahuldab tingimusi

$$\begin{aligned} &1^0 \quad \lim_{n\to\infty} \sum_\nu a_{n\nu} = \alpha\,[A] = a, \\ &2^0 \quad \lim_{n\to\infty} a_{n\nu} = a_\nu \quad (\nu = 1,2,\dots), \\ &3^0 \quad \sum_\nu |a_{n\nu}| \le M \quad (n = 1,2,\dots). \end{aligned} \tag{7}$$

Käesolevas töös teeme menetluste jaoks lisaeelduse, et nad on multiplikatiivsed, s.o. rahuldavad järgnevaid tingimusi

$$\begin{cases} a \neq 0, \\ a_\nu = 0 \quad (\nu = 1,2,\dots). \end{cases} \tag{8}$$

Definitsioon 6. Nimetame rea (1) A-summade piirkonnaks $S_A(\sum_i r_i)$ rea (1) kõigi A-summeeruvate ümberjärjestuste A-summade hulka.[1]

Käesoleva paragrahvi definitsioonidest 1–6 tuletame järeldused:

Järeldus 1. Tarvilik ja piisav tingimus selleks, et rea (1) summade piirkond $\bar{S}(\sum_i r_i)$ sisaldaks vähemalt ühe punkti, on et vähemalt ühe rea (1) ümberjärjestuse osasummade jadal oleks lõplik kuhjumispunkt.

Järeldus 2. Tarvilik ja piisav tingimus selleks, et rea (1) summade piirkond $\bar{S}(\sum_i r_i)$ sisaldaks vähemalt 2 punkti, on, et rida (1) oleks tingimisi hajuv.

Järeldus 3. Tarvilik ja piisav tingimus selleks, et rea (1) summade piirkond $\underline{S}(\sum_i r_i)$ sisaldaks vähemalt ühe punkti, on, et real (1) oleks koonduv ümberjärjestus.

Juhul, kui real on koonduv ümberjärjestus, loeme selle lähtereaks, ning seega rea (1) koonduvaks. Tähistame siis

$$\sum_{i=1}^{\infty} r_i = A. \tag{9}$$

Järeldus 4. Tarvilik ja piisav tingimus selleks, et rea (1) summade piirkond $\underline{S}(\sum_i r_i)$ sisaldaks vähemalt 2 punkti, on, et rida (1) oleks tingimisi koonduv.

Järeldus 5. Tarvilik ja piisav tingimus selleks, et rea (1) A-summade piirkond $S_A(\sum_i r_i)$ sisaldaks vähemalt ühe punkti, on, et real (1) oleks vähemalt 1 A-summeeruv ümberjärjestus.

---

[1] Vt. [27], [52].

Juhul, kui real (1) on mingi A-summeeruv ümberjärjestus, loeme selle ümberjärjestuse lähtereaks, ning seega rea (1) A-summeeruvaks. Tähistame siis

$$A\{\sum_i r_i\} = 6. \qquad (10)$$

§ 3. Naturaalarvude jadad.

Olgu $\mathcal{E} = \{e\}$ naturaalarvude jada $\{n\}$ kõigi lõpmatute osajadade hulk.

Vastavalt igale jadale e defineerime täiendjada $\bar{e}$ seosega

$$\bar{e} = \{n\} - e. \qquad (1)$$

Kõigi selliste jadade hulka, millede puhul

$$e \in \mathcal{E},\ \bar{e} \in \mathcal{E},\ e\,\bar{e} \in \Omega \quad (\Omega \text{ on tühi hulk}) \qquad (2)$$

tähistame sümboliga $\bar{\mathcal{E}}$.

Jada e saame esitada ka naturaalarvuliste lõikude jadana:[1]

---

1 Esitame jadade e kohta mõned näited:
Näide 1.

$e_{\bar{I}} = \{1,5,6,10,11,12,14,18,19,20,\dots\} = \{1,5,6,10,11,12,14,k,k=18,19,\dots\}$,
$g_1 = h_1 = 1,\ g_2 = 5,\ h_2 = 6,\ g_3 = 10,\ h_3 = 12,\ g_4 = h_4 = 14,\ g_5 = 18$

$e_{\bar{II}} = \{2k : k \in \mathcal{T}\} = \{2,4,6,8,\dots\}$,
$g_k = h_k = 2k \quad (k = 1,2,\dots)$

$e_{\bar{III}} = \{[2^{2k-1}, 2^{2k}] : k \in \mathcal{T}\} = \{2,3,4,8,9,10,11,12,13,14,15,16,32,33,\dots\}$,
$g_k = 2^{2k-1},\ h_k = 2^{2k} \quad (k = 1,2,\dots)$

$e_{\bar{IV}} = \{2^{2k}+4 : k \in \mathcal{T}\} = \{8,20,68,\dots\}$,
$g_k = h_k = 2^{2k}+4 \quad (k = 1,2,\dots)$

$e_{\bar{I}}, e_{\bar{II}}, e_{\bar{III}}, e_{\bar{IV}} \in \mathcal{E}$.

$$e = \{[g_k, h_k]\}_{k=1}^{\infty} = \{[g_k^e, h_k^e]\}_{k=1}^{\infty} \quad (g_k \le h_k;\ h_k \le g_{k+1}-1,\ k=1,2,\dots) \tag{3}$$

/tähistust g_k^e, h_k^e kasutame ainult neil juhtudel, kui vastasel korral oleks karta arusaamatusi/.

Jada $\bar{e}$ oleks lõikude jadana esitatav järgnevalt:

$$\bar{e} = \{[\bar{g}_k, \bar{h}_k]\}_{k=1}^{\infty} = \{[\bar{g}_k^e, \bar{h}_k^e]\}_{k=1}^{\infty} = \{[g_k^{\bar{e}}, h_k^{\bar{e}}]\}_{k=1}^{\infty} \quad (\bar{g}_k \le \bar{h}_k;\ \bar{h}_k \le \bar{g}_{k+1}-1,\ k=1,2,\dots) \tag{4}$$

Kehtivad seosed:

kui $g_1 = 1$, siis $\bar{g}_1$ ja $\bar{h}_1$ ei ole määratud, kuid

$$\bar{g}_k = h_{k-1}+1,\ \bar{h}_k = g_k - 1,\quad k = 2,3,\dots\ ;$$

kui $g_1 > 1$, siis $\bar{g}_1 = 1$, $\bar{h}_k = g_k - 1$, $k=1,2,\dots$ ja $\bar{g}_k = h_{k-1}+1$, $k=2,3,\dots$

$\bar{e}_{\underline{I}} = \{2,3,4,7,8,9,13,15,16,17\}$,

$\bar{g}_2 = 2$, $\bar{h}_2 = 4$, $\bar{g}_3 = 7$, $\bar{h}_3 = 9$, $\bar{g}_4 = \bar{h}_4 = 13$, $\bar{g}_5 = 15$, $\bar{h}_5 = 17$,

$e_{\underline{I}} \bar{\in} \mathcal{E}$

$\bar{e}_{\underline{II}} = \{2k-1\ ;\ k \in \mathcal{N}\} = \{1,3,5,7,\dots\}$,

$\bar{g}_k = \bar{h}_k = 2k-1$, $k = 1,2,\dots$.

$\bar{e}_{\underline{III}} = \{[2^{2k-2}+1,\ 2^{2k-1}-1]\ k \in \mathcal{N}\} = \{1,5,6,7,17,18,\dots\}$,

$\bar{g}_k = 2^{2k-2}+1$, $k=2,\dots$; $\bar{g}_1 = 1$; $\bar{h}_k = 2^{2k-1}-1$, $k=1,2,\dots$.

$\bar{e}_{\underline{IV}} = \{[2^{2k}+5,\ 2^{2k+1}+3]\ k \in \mathcal{N}\} = \{1,2,3,4,5,6,7,9,10,\dots\}$,

$\bar{g}_1 = 1$, $\bar{g}_k = 2^{2k}+5$, $k=1,2,\dots$; $\bar{h}_k = 2^{2k+1}+3$.

$\bar{e}_{\underline{II}}, \bar{e}_{\underline{III}}, \bar{e}_{\underline{IV}} \in \mathcal{E}$,

$e_{\underline{I}} \bar{\in} \bar{\mathcal{E}}$; $e_{\underline{II}}, e_{\underline{III}}, e_{\underline{IV}} \in \bar{\mathcal{E}}$.

$e_{\underline{II}}$ ja $e_{\underline{III}}$ ei ole ortogonaalsed, sest

$$e_{\underline{II}} \cap e_{\underline{III}} \supset \{2^k : k \in \mathcal{N}\}\ ;\ \{2^k : k \in \mathcal{N}\} \in \mathcal{E}.$$

$e_{\underline{II}}$ ja $e_{\underline{IV}}$ on ortogonaalsed, sest

$$e_{\underline{II}} \cap e_{\underline{IV}} = \{8\}\ ;\ \{8\} \bar{\in} \mathcal{E}.$$

$e_{\underline{II}}$ ja $e_{\underline{III}}$ on sõltuvad, sest

$$\{g_k^{\underline{III}} : k \in \mathcal{N}\} \subset \{g_k^{\underline{II}} : k \in \mathcal{N}\}$$

$e_{\underline{I}}$ ja $e_{\underline{IV}}$ on sõltumatud, sest seos (7) ei kehti ühegi k ega l korral.

Kõigi selliste jadade $\{e\}$ hulka, millede puhul

$$g_{k+1} - g_k \leq P \quad (k = 1,2,\dots,), \tag{5}$$

tähistame sümboliga $\mathcal{E}^*$.

Definitsioon 1. Nimetame jadasid e_1 ja e_2 ortogonaalseteks, kui

$$e_1 \cap e_2 \in \mathcal{E} \quad \text{või} \quad e_1 \cap e_2 \neq \Omega. \tag{6}$$

Definitsioon 2. Jadasid e_1 ja e_2 nimetame sõltuvateks siis, kui leiduvad lõpmatud indeksite jadad $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$ ja $\{l_i\}_{i=1}^{\infty}$ nii, et

$$g_{k_i}^{e_1} = g_{l_i}^{e_2} \quad \text{või} \quad l_{k_i}^{e_1} = l_{l_i}^{e_2} \quad (i = 1,2,\dots). \tag{7}$$

Kui jadad e_1 ja e_2 ei ole sõltuvad, nimetame neid sõltumatuteks.

Vahetult definitsioonidest tuleneb

Järeldus 1. Ortogonaalsed jadad on sõltumatud.

Definitsioon 3. Nimetame jadade süsteemi $\{e_i\}, e_i \in \bar{\mathcal{E}}$, paralleelseks, kui

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} e_{\nu_i} \in \bar{\mathcal{E}}, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} e_{\nu_i} \neq \Omega$$

jada $\{i\}$ iga lõpliku või lõpmatu osajada $\{\nu_i\}$ /võib ka $\{\nu_i\} = \{i\}$/ korral.

Järeldus 2. Paralleelses süsteemis ei leidu ortogonaalsete jadade paari.

Definitsioon 4. Nimetame jadade süsteemi $\{e_i\}, e_i \in \bar{\mathcal{E}}$, sõltumatuks, kui iga jadadepaar sellest süsteemist on sõltumatu.

Definitsioon 5. Jadade süsteemi $\{e_i\}$ nimetame monotoonseks, kui kehtib seos

$$g_1^{e_j} \leq g_1^{e_{j+1}} \quad (j = 1,2,\dots). \tag{8}$$

Tähistame

$$k(w) = \max_{g_1^{e_k} \leq w} k. \qquad (9)$$

Definitsioon 6. Nimetame jadade süsteemi $\{e_i\}$ korrapäraseks, kui ta on paralleelne ja monotoonne, ning kehtib seos:

$g_1^e \leq w$ iga e korral, kui $e = \bigcap_{i=1}^{\mu} e_i$, kus $i < k(w), \mu < w$. (10)

/vt. näide 2/[1].

1

Näide 2

Süsteem $\{e_i\}$, kus

$$e_i = \{[(2k-1)2i, 4ki-2] : k \in \omega\} \cup \{2k-1 : k \in \omega\},$$

on korrapärane.

Tõepoolest, $\bigcap_{i=1}^{\infty} e_i \supset \{2k-1 : k \in \omega\} \in \mathfrak{k}$,

seega süsteem on paralleelne

$g_1^i = 1 \ (i = 1, 2, \ldots)$, seega süsteem on monotoonne ja ilmselt kehtib seos (10).

Süsteem $\{e_i^*\}$, kus

$$e_i^* = \{[(2k-1)2i, 4ki-2] k \in \omega\},$$

ei ole paralleelne, sest

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} e_i^* = \Omega,$$

kuid on monotoonne, kuna $g_1^{e_i^*} = 2i$.

Süsteemi $\{e_i^*\}$ iga ümberjärjestus $\{e_i'\}$ ei ole monotoonne. Mõlemad viimatimärgitud süsteemid ei ole ka korrapärased.

Klassi $\bar{\mathcal{E}}$ kuuluvate jadade ja lõpmatute ühekordsete lihtsubstitutsioonide hulga vahel on üksühene vastavus, mis realiseerub valemina

$$\mathcal{K}(g_k) = \bar{g}_{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots). \tag{11}$$

Tähistame edaspidi lõpmatuid ühekordseid lihtsubstitutsioone sümboliga $\mathcal{K}^e$, kus e on vaadeldavale lihtsubstitutsioonile vastav naturaalarvude jada.

Järeldus 3. Sõltumatute jadade e_1 ja e_2 puhul on substitutsioonid $\mathcal{K}^{e_1}$ ja $\mathcal{K}^{e_2}$ sõltumatud.

Järeldus 4. Kui $e \in \mathcal{E}^*$, siis on $\mathcal{K}^e$ tõkestatud.

Olgu meil antud mingi maatriksmenetlus A ja jada $e \in \bar{\mathcal{E}}$. Tähistame sümboliga A^e menetluse $\{a^e_{nv}\}$, mis on defineeritud järgneva eeskirja abil:

$$\begin{cases} a^e_{nv} = a_{nv}, & v \in e, \\ a^e_{nv} = 0, & v \bar{\in} e; \quad n = 1, 2, \dots. \end{cases} \tag{12}$$

Järeldus 5. Kui A on multiplikatiivne menetlus, siis on mentluse A^e multiplikatiivsuseks tarvilik ja piisav, et eksisteerib $\alpha[A^e] \neq 0$ /vt. [27]/.

§ 4. Rea summa muutumine ümberjärjestamisel

Definitsioon 1. Substitutsiooni $\mathcal{K}$ poolt määratud parandreaks nimetame rida

$$\sum_i \rho_i^{\mathcal{K}} = \sum_i \left(r_{\mathcal{K}(i)} - r_i \right), \tag{1}$$

mis võib sõltumatult lähterea koonduvusest olla koonduv või hajuv.

Koonduva parandrea puhul tähistame selle summa sümboliga $\mathcal{R}^{\mathcal{K}}$, s.t.

$$\sum_i \rho_i^{\mathcal{K}} = \mathcal{R}^{\mathcal{K}}, \tag{2}$$

kuna alati

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i^{\mathcal{K}} = \mathcal{R}_n^{\mathcal{K}}. \tag{3}$$

Parandrea n-da osasumma arvutamiseks kasutame suurusi (1.13) ja (1.14) ; saame

$$\sum_{i=1}^{n} r_{\mathcal{K}(i)} = \sum_{i=1}^{n} r_i + \sum_{j=1}^{t(n)} r_{m_j(n)} - \sum_{j=1}^{t(n)} r_{e_j(n)},$$

ja seega

$$\mathcal{R}_n^{\mathcal{K}} = \sum_{i=1}^{n} \rho_i^{\mathcal{K}} = \sum_{j=1}^{t(n)} \left[r_{m_j(n)} - r_{e_j(n)} \right]. \tag{4}$$

Kuna me tingimisi koonduva rea puhul eeldasime lähterea koonduvust, on tingimisi koonduva rea $\mathcal{K}$-ümberjärjestuse koonduvuseks tarvilik ja piisav $\mathcal{K}$-parandrea koonduvus. Siis

$$\sum_i r_{\mathcal{K}(i)} = s + \mathcal{R}^{\mathcal{K}} \tag{5}$$

samuti on A-summeeruva rea puhul $\mathcal{K}$-ümberjärjestuse A-summeeruvuseks tarvilik ja piisav $\mathcal{K}$-parandrea A-summeeruvus.

Siis

$$A\{\sum_i r_{\mathcal{K}(i)}\} = \sigma + A\{\sum_i \rho_i^{\mathcal{K}}\}.$$

Eriti lihtne on olukord koonduva parandrea puhul; kuna A on eeldatud koonduvustsäilitava menetlusena, on siis parandrida kindlasti A-summeeruv.

Kultiplikatiivse menetluse korral avaldub koonduva parandrea $\sum_i \rho_i^{\mathcal{K}}$ puhul $\mathcal{K}$- ümberjärjestuse A- summa järgnevalt:

$$A\{\sum_i r_{\mathcal{K}(i)}\} = \sigma + a\,R_{\mathcal{K}}. \qquad (6)$$

millist seost me kasutasegi edaspidi /ptk.III,§ 1/ korduvalt.

Suhteliselt lihtne on tuletada summamuutuse valemit ka ühekordse lihtsubstitutsiooni jaoks. Nagu järeldub $\mathcal{K}^e$ definitsioonist, kehtib seos

$$\sum_{i=1}^{n} r_{\mathcal{K}^e(i)} = \sum_{i=1}^{n} r_i \qquad \text{,kui} \quad \bar{g}_k \le n < g_k \quad (n \in \bar{e}),$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_{\mathcal{K}^e(i)} = \sum_{i=1}^{n} r_i + r_{\bar{g}_{k+1}} - r_{g_k} \qquad \text{,kui} \quad g_k \le n < \bar{g}_{k+1}, (n \in e), \qquad (7)$$

kust järeldub, et

$$A\{\sum_i r_{\mathcal{K}^e(i)}\} = \lim_{k\to\infty}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}\Big[r_{\bar{g}_{k+1}} - r_{g_k}\Big]\sum_{\nu=g_k}^{h_k} a_{n\nu}\Big\} + A\{\sum_i r_i\} \qquad (8)$$

Nimetame jada e γ- jadaks rea (2.1) suhtes, kui kehtib seos

$$r_{\bar{g}_{k+1}} - r_{g_k} = \gamma \quad (k = 1,2,\dots). \qquad (9)$$

Valem (8) lihtsustub, kui e on rea (2.1) suhtes γ-jada :

$$A\{\sum_i r_{\mathcal{K}^e(i)}\} = \sigma + \gamma \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=g_k}^{h_k} a_{n\nu},$$

ning võttes arvesse A^e definitsiooni (3.12), avaldub viimane

valem järgnevalt

$$A\{\sum_i r_{\mathcal{K}}{}^{e}{}_{(i)}\} = \sigma + \gamma \lim_{n\to\infty} \sum_\nu a_{n\nu}^{e} \qquad (10)$$

Tuletatud valemi põhjal on lihtne tõestada järgnev teoreem:

T e o r e e m 1 . Olgu meil antud rida (2.1), γ-jada e selle rea suhtes, ja selline multiplikatiivne menetlus A, et $\alpha[A^e] = a\sigma$. Siis kehtib seos

$$A\{\sum_i r_{\mathcal{K}}{}^{e}{}_{(i)}\} = \sigma + \gamma a\sigma. \qquad (11)$$

Tõestuseks tuleb vaid valemisse (10) paigutada $\alpha[A^e]$ väärtus /vt. (2.1)/.

Järeldus 1. Olgu meil antud rida (2.1), selle rea suhtes ortogonaalsed jadad e_1 ja e_2, ning selline multiplikatiivne menetlus A, et $\alpha[A^{e_1}] = a\sigma_1$ ja $\alpha[A^{e_2}] = a\sigma_2$. Siis kehtib seos:

$$A\{\sum_i r_{\mathcal{K}}{}^{e_1}{}_{\mathcal{K}}{}^{e_2}{}_{(i)}\} = \sigma + \gamma a(\sigma_1 + \sigma_2). \qquad (12)$$

Järeldusest 1 tuleneb omakorda tugevam järeldus:

Järeldus 2. Olgu meil rida (2.1), sõltumatud γ-jadad selle rea suhtes e_1 ja e_2 ning selline multiplikatiivne menetlus A, et $\alpha[A^{e_1}] = a\sigma_1$ ja $\alpha[A^{e_2}] = a\sigma_2$. Siis kehtib seos (12).

Järeldus 3. Olgu meil rida (2.1), sõltumatud γ-jadad selle rea suhtes e_1 ja e_2 ning multiplikatiivne menetlus A. Siis kehtib seos

$$A\{\sum_i r_{\mathcal{K}}{}^{e_1}{}_{\mathcal{K}}{}^{e_2}{}_{(i)}\} = \sigma + \gamma \lim_{n\to\infty} \left[\sum_\nu a_{n\nu}^{e_1} + \sum_\nu a_{n\nu}^{e_2}\right] \qquad (13)$$

alati, kui eksisteerib parempoolne piirväärtus võrduses

(13) ,sõltumatult suuruste $\alpha[A^{e_1}]$ ja $\alpha[A^{e_2}]$ eksisteerimisest.

Järeldus 4. Olgu meil rida (2.1) ,sõltumatu γ - jadade süsteem $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ selle rea suhtes ning multiplikatiivne summeerimismenetlus A .Siis kehtib seos

$$A\{\sum_i r_{K^*(i)}\} = 6 + \gamma \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{n\nu}^{e_j}\right) \qquad (14)$$

alati,kui parempoolne piirväärtus eksisteerib, kusjuures

$$K^* = \prod_{i=1}^{\infty} K^{e_i} ;$$

/sellise lõpmatu korrutise olemasolu tuleneb järeldustest 1.2 ja 3.4 / .

II SUMMADE PIIRKONDADEST LINEAARSES NORMEERITUD RUUMIS

§ 1 Võre summade piirkondade $\underline{S}(\sum_i x_i)$ ja $\bar{S}(\sum_i x_i)$ koostisosana

Käesolevas peatükis vaatleme summade piirkondade $\bar{S}(\sum_i x_i)$ ja $\underline{S}(\sum_i x_i)$ struktuuri, kusjuures

$$\sum_i x_i , \quad x_i \in \mathcal{X} . \tag{1}$$

$\mathcal{X}$ on lineaarne normeeritud ruum, paragrahvis 3 aga [illegible] loenduva baasiga, lineaarne normeeritud ruum $\bar{\mathcal{X}}$.

Kõigepealt teeme kindlaks, et iga tingimisi koonduva /vt. jär. 1.2.4/ rea (1) summade piirkond

$$\underline{S}(\sum_i x_i), \tag{2}$$

ja iga tingimisi hajuva rea (1) summade piirkond /vt. jär. 1.2.2/

$$\bar{S}(\sum_i x_i) \tag{3}$$

sisaldavad "võret", s.o. punktide hulka kujuga

$$\{x + \mu(y+x) : \mu \in \mathcal{J}\} \quad (\mathcal{J} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}), \tag{4}$$

kus $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{X}$.

Alustame vajalike lemmade tõestusega:

Lemma 1 Kui real (1) on kaks erinevat kuhjumispunkti[1] x ja y, siis leidub vastavalt igale täisarvule μ selle rea ümber-

---

[1] Vt. viide lk. 31.

järjestus

$$\sum_i x_{\tilde{\kappa}(n)(i)} = \sum_i \tilde{x}_i , \tag{5}$$

mille kuhjumispunktiks on punkt

$$x + \mu(y-x). \tag{6}$$

T õ e s t u s . Valime monotoonselt nullile laheneva jada $\{\varepsilon_k\}$ .Eelduse põhjal leiduvad indeksite jadad $\{m_k\}$ ja $\{m_k'\}$ nii, et $m_k < m_k' < m_{k+1}$ $(k=1,2,\dots)$, ja kehtivad võrratused

$$\Big\| \sum_{i=1}^{m_k} x_i - x \Big\| < \varepsilon_k \quad ; \quad \Big\| \sum_{i=1}^{m_k'} x_i - y \Big\| < \varepsilon_k . \tag{7}$$

Siis on õige ka

$$\Big\| \sum_{i=m_k+1}^{m_k'} x_i - (y-x) \Big\| < 2\varepsilon_k . \tag{8}$$

Olgu $\mu > 0$. Moodustame rea (1) ümberjärjestuse (5) nii, et leiduks jada $\{j_k\}_{k=1}^{\infty}$,mille puhul kehtiks seos:

$$\Big\| \sum_{i=1}^{j_k} \tilde{x}_i - [x + \mu(y-x)] \Big\| < \eta_k \quad (\eta_k \to 0) \tag{9}$$

Võtame kasutusele järgnevad tähistused:

$$m_k' - m_k = \mu_k \; ; \; m_1 = M_0^0 \; ; \; m_{k\mu+1} = M_0^k , \tag{10}$$

$$M_0^k + \sum_{i=1}^{\nu} \mu_{k\mu+i} = M_\nu^k \quad (\nu = 1,2,\dots \mu \; ; \; k = 1,2,\dots).$$

Defineerime nüüd ümberjärjestuse (5) liikmed $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{M_0^0}$ järgnevalt:

$$\tilde{x}_i = x_i \qquad (i = 1,2,\dots, M_0^0).$$

Oleme nüüd õigustatud tegema induktsiooni eeldust, et meil mingi k puhul $(k = 0,1,2,\dots)$ on defineeritud rea (5) liikmed $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{M_0^k}$, ning defineerime rea (5) liikmed $\tilde{x}_{M_0^k+1}, \dots, \tilde{x}_{M_\mu^k}$ seostega:

$$\tilde{x}_{M_\nu^k + i} = x_{m_{k\mu+\nu+1}+i} \quad (i = 1,2,\dots, \mu_{k\mu+\nu+1} \; ; \; \nu = 0,1,\dots,\mu-1), \tag{11}$$

aga liikmed $\tilde{x}_{M_\mu^k+1}, \dots, \tilde{x}_{M_0^{k+1}}$ kui rea (1) seni kasutamata jäänud liikmed kuni indeksini M_0^{k+1} esialgses järjestuses.

Seega sisaldab rea (5) liikmete jada kuni indeksini M_0^{k+1} täpselt neidsamu liikmeid, mis ka rida (1) kuni sama indeksini, ja on õige võrdus:

$$\sum_{i=1}^{M_0^{k+1}} \tilde{x}_i = \sum_{i=1}^{M_0^{k+1}} x_i .$$

See aga tähendab seose (7) põhjal, et

$$\left\| \sum_{i=1}^{M_0^{k+1}} \tilde{x}_i - x \right\| < \varepsilon_{k\mu} ;$$

Valemit (8) ja definitsioonieeskirju (10) ja (11) arvesse võttes saame aga siit

$$\left\| \sum_{i=1}^{M_\nu^k} \tilde{x}_i - [x+\nu(y-x)] \right\| \le \left\| \sum_{i=1}^{M_0^k} \tilde{x}_i - x \right\| + \left\| \sum_{i=M_0^k+1}^{M_1^k} \tilde{x}_i - (y-x) \right\| + \dots$$

$$+ \left\| \sum_{i=M_{\nu-1}^k+1}^{M_\nu^k} \tilde{x}_i - (y-x) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{M_0^k} x_i - x \right\| + \left\| \sum_{i=m'_{k\mu+1}+1}^{m'_{k\mu+1}} x_i - (y-x) \right\| + \dots$$

$$+ \left\| \sum_{i=m'_{k\mu+\nu}+1}^{m'_{k\mu+\nu}} x_i - (y-x) \right\| \le 2(\nu+1)\varepsilon_{k\mu} \quad (\nu = 1,2,\dots,\mu ;\ k = 1,2,\dots).$$

Tähistame $2(\mu+1)\varepsilon_{k\mu} = \eta_\mu$, $M_\mu^k = j_k$ $(k = 1,2,\dots)$, ja võtame $\nu = \mu$, ning nõutav võrratus (8) ongi täidetud.

Juhul $\mu < 0$ on tõestuseks põhiliselt sama konstruktsioon, kusjuures ainult valemis (10) on suurus m_k asendatud suurusega m'_k, aga m'_k – indeksiga m_{k+1}

Seega on lemma 1 täielikult tõestatud.

T e o r e e m 1. Kui $x \in \bar{S}\left(\sum_i x_i\right)$ ja $y \in \bar{S}\left(\sum_i x_i\right)$, siis $\bar{S}\left(\sum_i x_i\right) \supset \{x + \mu(y-x) : \mu \in J\}$.

T õ e s t u s. Lemma 1 tulemusi arvesse võttes pakub meile huvi vaid juhtum, kus x ning y on erinevate ümberjärjestuste kuhjumispunktideks.

Oletame lihtsuse mõttes, et x on lähterea (1) kuhjumispunktiks, kuna y on ümberjärjestuse

$$\sum_i r_{k(i)} = \sum_i \bar{r}_i \tag{12}$$

kuhjumispunktiks.

Valime monotoonselt nulliks kahaneva jada $\{\varepsilon_k\}$. Selguse kohaselt eksisteerivad siis sellised jadad $\{n_k\}$ ja $\{n_k'\}$, et

$$\left\| \sum_{i=1}^{n_k} r_i - x \right\| < \varepsilon_k \; ; \quad \left\| \sum_{i=1}^{n_k'} \bar{r}_i - y \right\| < \varepsilon_k . \tag{13}$$

Defineerime nüüd jadad $\{n_k\}$ ja $\{n_k'\}$ järgnevalt :

$$n_1 = n_1'$$

kuna n_k' on minimaalne indeks n_i', mis rahuldab tingimusi

$$n_k' > n_k',$$
$$\{\bar{r}_i\}_{i=1}^{n_k'} \supset \{r_i\}_{i=1}^{n_k} ;$$

/vt. seoseid (1.2.4)/ ning n_{k+1}-minimaalne indeks n_i, mis rahuldab tingimusi

$$n_{k+1} > n_{k+1}',$$
$$\{r_i\}_{i=1}^{n_{k+1}} \supset \{\bar{r}_i\}_{i=1}^{n_k'} \quad (k = 1, 2, \dots). \tag{14}$$

Saime seega seosed:

$$\{r_i\}_{i=1}^{n_k} \subset \{\bar{r}_i\}_{i=1}^{n_k'} \subset \{r_i\}_{i=1}^{n_{k+1}} \subset \{r_i\}_{i=1}^{n_{k+1}'} \subset \dots \quad (k = 1, 2, \dots),$$

millede põhjal defineerime ridade (1) ja (12) liikmete hulgad $\{r_i^{(k)}\}_{i=1}^{\nu_k}$ ja $\{\bar{r}_i^{(k)}\}_{i=1}^{\bar{\nu}_k}$ $(k = 1, 2, \dots)$:

$$\{r_i^{(k)}\}_{i=1}^{\nu_k} = \{r_i\}_{i=1}^{n_{k+1}} - \{\bar{r}_i\}_{i=1}^{n_k'} \quad (\nu_k = n_{k+1} - n_k', \; k = 1, 2, \dots), \tag{15}$$

$$\{\bar{r}_i^{(k)}\}_{i=1}^{\bar{\nu}_k} = \{\bar{r}_i\}_{i=1}^{n_k'} - \{r_i\}_{i=1}^{n_k} \quad (\bar{\nu}_k = n_k' - n_k \; ; \; k = 1, 2, \dots)$$

/vt. seoseid 1.2.5 /.

Saadud hulkade abil konstrueerime nüüd rea (1) sellise

ümberjärjestuse

$$\sum_i r_{\varkappa'(i)} = \sum_i r_i', \qquad (16)$$

mille kuhjumispunktideks oleksid niihästi punkt x kui ka punkt y, s.t., leiduksid jadad $\{m_\kappa\}, \{m_\kappa'\}$ ja $\{\varepsilon_\kappa'\}, \varepsilon_\kappa' \to 0$ nii, et kehtiksid seosed

$$\left\| \sum_{i=1}^{m_\kappa} r_i' - x \right\| < \varepsilon_\kappa' \; ; \; \left\| \sum_{i=1}^{m_\kappa'} r_i' - y \right\| < \varepsilon_\kappa' \quad (\varepsilon_\kappa' \to 0). \qquad (17)$$

Rea (16) defineerime järgnevate seoste abil

$$\left.\begin{cases} r_i' = r_i & (i = 1,2,\dots,m_1), \\ r_{i+m_\kappa} = \bar{r}_i^{(\kappa)} & (i = 1,2,\dots,\mu_\kappa'), \\ r_{i+m_\kappa'}' = r_i^{(\kappa)} & (i = 1,2,\dots,\mu_\kappa), \end{cases}\right\} (\kappa = 1,2,\dots), \qquad (18)$$

ning tõepoolest, kasutades definitsioonivalemeid (14), (15) ja (18), saame:

$$\sum_{i=1}^{m_\kappa} r_i' = \sum_{i=1}^{m_1} r_i' + \sum_{i=m_1+1}^{m_1'} r_i' + \sum_{i=m_1'+1}^{m_2} r_i' + \dots + \sum_{i=1}^{m_\kappa} r_i' =$$

$$= \sum_{i=1}^{m_1} r_i + \sum_{i=1}^{\mu_1'} \bar{r}_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{\mu_1} r_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{\mu_2'} \bar{r}^{(2)} + \dots + \sum_{i=1}^{\mu_\kappa} r_i^{(\kappa-1)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m_1} r_i + \left(\sum_{i=1}^{m_1'} \bar{r}_i - \sum_{i=1}^{m_1} r_i \right) + \left(\sum_{i=1}^{m_2} r_i - \sum_{i=1}^{m_1'} \bar{r}_i \right) + \left(\sum_{i=1}^{m_2'} r_i' - \sum_{i=1}^{m_2} r_i \right) + \dots$$

$$\dots + \left(\sum_{i=1}^{m_\kappa} r_i - \sum_{i=1}^{m_{\kappa-1}'} \bar{r}_i \right) = \sum_{i=1}^{m_\kappa} r_i .$$

Samuti

$$\sum_{i=1}^{m_\kappa'} r_i' = \sum_{i=1}^{m_\kappa'} \bar{r}_i ,$$

seega tõepoolest seoste (13) ja (14) põhjal kehtivad võrratused (17), ning rida (16) rahuldab lemma 1 eeldusi, selle lemma põhjal aga leidub iga μ jaoks rea (16), ühtlasi aga ka lähterea (1) selline ümberjärjestus (5), mille kuhjumispunktiks on (6), ja sellega ongi meie teoreem tõestatud.

T e o r e e m 2. Substitutsioon $\mathcal{K}^{(\mu)}$ ei ole oluline. Kui lähterea liikmed rahuldavad tingimust (1.2.6), on $\mathcal{K}^{(\mu)}$ lõpmatukordne.

T õ e s t u s. Vastavalt meie konstruktsioonile kentib sõis

$$\Lambda_{\mathcal{K}^{(\mu)}(m_k)} = \Pi_{\mathcal{K}^{(\mu)}(m_k)} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

ja seega ei ole täidetud tingimus (1.1.15), ning $\mathcal{K}^{(\mu)}$ ei ole oluline.

Oletame vastuväiteliselt, et rea (1) liikmed täidavad tingimust (1.2.6), ning $\mathcal{K}^{(\mu)}$ on n-kordne.

Tähistame

$$\max_{\nu \geq n} \left| r_{[\mathcal{K}^{(\mu)}]^{-1}(\nu)}, r_\nu, r_{\mathcal{K}^{(\mu)}(\nu)} \right| = \varepsilon_n ;$$

siis (1.2.6) põhjal

$$\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0.$$

Kuna $t(n) \leq n$ iga n korral /vt. (1.1.13), (1.1.14), siis järeldub valemist (1.4.4):

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i^{\mathcal{K}(\mu)} = \sum_{j=1}^{t(n)} (r_{m_j} - r_{\ell_j}) \leq 2n\varepsilon_n,$$

ja seega $\sum_i \rho_i^{\mathcal{K}(\mu)} = 0$, mis viib vastuollu meie eeldusega substitutsiooni $\mathcal{K}^{(\mu)}$ kohta.

Teoreem 2 on sellega tõestatud.

Summadepiirkonda $S(\sum_i x_i)$ vaatleme edaspidi ainult selliste ridade (1) puhul, milledel leiduvad alati, kui eksisteerib 2 koonduvat ümberjärjestust (1) ja (12), indeksite jadad $\{n_i\}$ ja $\{n_i'\}$ nii, et vastavalt igale indeksile ν $(\nu = 1, 2, \dots, p_k)$ ja ν' $(\nu' = 1, 2, \dots, p_k')$ eksisteerivad indeksid $f^{\mu}(\nu)$ ja $\bar{f}^{\mu}(\nu)$ nõnda, et iga naturaalarvu k ja μ korral kehtivad seosed

$$\left\| \sum_{i=1}^{\nu} x_i^{(k)} + \sum_{i=1}^{f^{\mu}(\nu)} \bar{x}_i^{(k+\mu)} \right\| \leq M_\mu \varepsilon_k, \tag{19}$$

$$\left\| \sum_{i=f^{\mu}(\nu-1)}^{\bar{c}} \bar{x}_i^{(k+\mu)} \right\| \leq M_\mu \varepsilon_k \quad (0 \leq \bar{c} \leq f^{\mu}(\nu) - f^{\mu}(\nu-1)) \tag{20}$$

ja

$$\left\| \sum_{i=1}^{\nu'} \bar{x}_i^{(k)} + \sum_{i=1}^{\bar{f}^{\mu}(\nu)} x_i^{(k+\mu+1)} \right\| \leq M_\mu \varepsilon_k, \tag{21}$$

$$\left\| \sum_{i=\bar{f}^{\mu}(\nu-1)}^{\bar{c}'} x_i^{(k+\mu+1)} \right\| \leq M_\mu \varepsilon_k \quad (0 \leq \bar{c}' \leq \bar{f}^{\mu}(\nu) - \bar{f}^{\mu}(\nu-1)) \tag{22}$$

kus $\varepsilon_k \to 0$, konstant M_μ ei sõltu indeksist k.

Seoste (19) – (22) kehtivus juhul, kui $\mu = 0$, järeldub ridade (1) ja (12) koonduvusest.

Selliseid ridu (1), millede puhul seosed (19) – (22) kehtivad iga μ väärtuse puhul, nimetame $\mathcal{E}$-ridadeks.

Kõik kirjanduses käsitletud read /sealhulgas ka näidetes 1 ja 2 /lk.65/ defineeritud read kuuluvad $\mathcal{E}$-ridade hulka.

Tõestame nüüd järgneva teoreemi:

T e o r e e m 3. Kui $x \in S(\sum_i x_i)$, $y \in S(\sum_i y_i)$, kus $\sum_i y_i$ on $\mathcal{E}$-rida, siis ka $\{x + \mu(y - x) : \mu \in \delta\} \subset S(\sum_i x_i)$.

T õ e s t u s. Olgu lähterea summaks x, aga ümberjärjestuse (12) summaks y /siin on erinevalt teoree-

mist 1 eeldatud rea (12) koonduvust. Tingimus (1.2.6) mis on piisav lõpmatudimensionaalses ruumis, osutub siin mittepiisavaks/.

Olgu meil antud suvaline täisarv μ .

Rakendame nüüd meie reale teoreemis 1 antud konstruktsiooni, kusjuures kasutame jadasid $\{a_i\}$ ja $\{a_i'\}$. mis on antud ε- rea definitsioonis.

Teoreemi 1 kohaselt eksisteerib real (1) ümberjärjestus (5), mille kuhjumispunktiks on (6), s.t. leidub selline jada $\{j_k\}$, et kehtib seos (9).

Tarvis on veel tõestada, et rida (5) saab ümber järjestada nii, et saadud rida

$$\sum_i r_{k(i)} = \sum_i r_i \qquad (23)$$

rahuldab seoseid

$$\sum_{i=1}^{j_k} r_i = \sum_{i=1}^{j_k} r_i \qquad (k=1,2,\dots) \qquad (24)$$

ja

$$\Big\| \sum_{i=j_{k+1}} r_i \Big\| \le \delta_k, \quad \text{kui } j_k < \nu \le j_{k+1} \ (k=1,2,\dots) \qquad (25)$$

Seostest (9), (24) ja (25) järeldubki, et rida (23) rahuldab meie teoreemi nõudeid.

Selleks teostame ümberjärjestuse ainult rea (5) liikmete hulkades

$$\hat{R}^k = \{r_{j_k+1}, r_{j_k+2}, \dots, r_{j_{k+1}}\} \quad (k=1,2,\dots)$$

jättes hulkade $\hat{R}^k$ esialgse omavahelise paigutuse muut-

matuks, seega on garanteeritud seos (24) .

Võrratuse (25) tõestamisel kasutame ära eeldust, et rida (1) on $\mathcal{E}$-rida. Vastavalt rea (5) konstruktsioonile on $\{r_i^{(k)}\}_{i=1}^{m_k} + \{\bar{r}_i^{(\mu+k)}\}_{i=1}^{m_{k+\mu}} = \tilde{R}^k$.

Tähistame

$$f_{(v)}^{\mu} - \bar{f}_{(v-1)}^{\mu} = \Delta_v \geq 0$$

ning defineerime rea (23) liikmed järgnevalt:

$$\check{r}_{m_k+v+\bar{f}(v)+1} = r_{v+1}^{(k)},$$

$$\check{r}_{m_k+v+\bar{f}(v)+1+i} = r_{\bar{f}(v)+1}^{(\mu+k+1)} \quad (i=0,1,\dots,\Delta_{v+1}),$$

$$\check{r}_{m_k+\mu_k+\bar{f}(\mu_k-1)+i} = r_{\bar{f}(\mu_k-1)+i}^{(\mu+k+1)} \quad (i=\bar{\mu}_{k+\mu_{k+1}}-\bar{f}(\mu_k-1)),$$
$$(k=1,2,\dots).$$

Arvestades seoseid (19)-(21) näeme, et

$$\Big\| \sum_{i=j_k+1}^{x} \check{r}_i \Big\| = \Big\| \sum_{i=1}^{v(x)} r_i^{(k)} + \sum_{i=1}^{\bar{f}(v(x)-1))+\bar{\iota}} \bar{r}_i^{(k+\mu)} \Big\| \leq 2M_\mu \varepsilon_k,$$

kus

$$v(x) + \bar{f}(v(x)-1) \leq x < v(x) + \bar{f}(v(x)).$$

Seega saadud rida (23) rahuldab tingimusi (22) ja (25), kui võtta $j_k = m_k \ (k=1,2,\dots)$ ning meie teoreem on tõestatud.

T e o r e e m 4 . Substitutsioon $\check{\mathcal{K}}$ on oluline.

Selle teoreemi tõestus sarnaneb vastava teoreemi tõestusega komplekstasandil / vt. [10] / ,mistõttu me seda ei esita.

Seega oleme kindlaks teinud, et kui kumbki summade piirkondadest (2) ja (3) sisaldab kahte punkti x ja y ,siis ta sisaldab ka nende punktide abil moodustatud "võret" (4) , mis asub neid punkte läbival sirgel. Olgu märgitud, et "võre" avaldis on x ja y suhtes sümmeetriline; tõepoolest , iga μ^* korral kehtib seos

$$x+\mu^*(y-x)=y+(1-\mu^*)(x-y).$$

§ 2. M i t m e s t v õ r e s t m o o d u s t a t u d s u m m a d e p i i r k o n n a d

Käesolevas paragrahvis vaatleme juhtumit, kusarea

$$\sum_i r_i \ , \quad r_i \in \mathfrak{X}, \tag{1}$$

/ $\mathfrak{X}$ on lineaarne normeeritud ruum/ summade piirkonda kuuluvaid punkte on antud rohkem kui kaks. Olgu selliseid punkte kõigepealt kolm. Tõestame järgmise teoreemi

T e o r e e m 1 . Kui $x \in \underline{S}(\sum_i r_i)$, $y \in \underline{S}(\sum_i r_i)$, $z \in \underline{S}(\sum_i r_i)$, siis $\underline{S}(\sum_i r_i) \supset \{x+\mu_1(y-x)+\mu_2(z-x) : \mu_1, \mu_2 \in T\}$.

T õ e s t u s. Olgu punktid x, y ja z vastavalt lähterea (1) ,ümberjärjestuse $\sum_i r_i'$ ja ümberjärjestuse $\sum_i \bar{r}_i$ summadeks,

s.t., kehtivad seosed

$$\sum_i r_i = x, \quad \sum_i r_i' = y, \quad \sum_i \bar{r}_i = z.$$

Olgu antud monotoonne nulljada $\{\varepsilon_k\}$.

Valime siis indeksite jadad $\{m_k'\}, \{m_k''\}, \{\bar{m}_k\}, \{\bar{\bar{m}}_k\}$ nii, et kehtivad seosed

$$\left\| \sum_{i=1}^{m_k'} r_i - x \right\| < \varepsilon_k; \quad \left\| \sum_{i=1}^{m_k''} r_i' - y \right\| < \varepsilon_k; \quad \left\| \sum_{i=1}^{\bar{m}_k} r_i - x \right\| < \varepsilon_k, \quad \left\| \sum_{i=1}^{\bar{\bar{m}}_k} \bar{r}_i - z \right\| < \varepsilon_k$$

ja

$$\{r_i\}_{i=1}^{m_k'} \subset \{r_i'\}_{i=1}^{m_k''} \subset \{r_i\}_{i=1}^{\bar{m}_k} \subset \{\bar{r}_i\}_{i=1}^{\bar{\bar{m}}_k} \subset \{r_i\}_{i=1}^{m_{k+1}'} \subset \ldots \quad (k=1,2,\ldots).$$

Edasi määrame samuti kui teoreemi 1.2 tõestuseski hulgad

$$\{r_i^{(k)}\}_{i=1}^{\nu_k'}, \quad \{r_i'^{(k)}\}_{i=1}^{\nu_k''}, \quad \{\bar{r}_i^{(k)}\}_{i=1}^{\bar{\nu}_k}, \quad \{\bar{\bar{r}}_i\}_{i=1}^{\bar{\bar{\nu}}_k}:$$

$$\{r_i^{(k)}\}_{i=1}^{\nu_k'} = \{r_i'\}_{i=1}^{m_k''} - \{r_i\}_{i=1}^{m_k'}, \quad \nu_k' = m_k'' - m_k';$$

$$\{r_i'^{(k)}\}_{i=1}^{\nu_k''} = \{r_i\}_{i=1}^{\bar{m}_k} - \{r_i'\}_{i=1}^{m_k''}, \quad \nu_k'' = \bar{m}_k - m_k'';$$

$$\{\bar{r}_i^{(k)}\}_{i=1}^{\bar{\nu}_k} = \{\bar{r}_i\}_{i=1}^{\bar{\bar{m}}_k} - \{r_i\}_{i=1}^{\bar{m}_k}, \quad \bar{\nu}_k = \bar{\bar{m}}_k - \bar{m}_k;$$

$$\{\bar{\bar{r}}_i^{(k)}\}_{i=1}^{\bar{\bar{\nu}}_k} = \{r_i\}_{i=1}^{m_{k+1}'} - \{\bar{r}_i\}_{i=1}^{\bar{\bar{m}}_k}, \quad \bar{\bar{\nu}}_k = m_{k+1}' - m_k'',$$

ning jätkame konstruktsiooni nagu teoreemi 1.2 tõestuses, millega käesolev teoreem osutubki tõestatuks.

<u>Järeldus 1</u>. Kui $x \in \underline{S}(\sum_i r_i)$, $y \in \underline{S}(\sum_i r_i)$, $z \in S(\sum_i r_i)$ ja $y - x = \frac{\nu}{q}(z - x)$, kus $\frac{\nu}{q}$ on taandumatu murd, siis

$$\{x + \mu w : \mu \in \Gamma\} \in \underline{S}\left(\sum_i r_i\right), \quad \text{kus } w = \frac{y-x}{\nu} = \frac{z-x}{q}.$$

Selle järelduse tuletamiseks kasutame tuntud fakti, et on vastavalt etteantud täisarvudele μ, ν ja q on võimalik valida täisarvud m_1 ja m_2 nii, et võrdus (2) kehtiks

$$\mu = m_1 \mu + m_2 q. \qquad (2)$$

Teoreemist 1 ja järeldusest 1 tulenevad vahetult veel järgnevad huvitavad järeldused:

Järeldus 2. Kui $x_j \in \underline{S}\left(\sum_i r_i\right)$ $(j = 1, 2, \dots, \omega)$ ja leidub selline ruumi $\mathfrak{X}$ element w, ning ühistegurita täisarvud ν_j $(j = 1, 2, \dots, \omega)$ nii, et kehtivad seosed

$$x_1 - x_j = w \nu_j \quad (j = 2, 3, \dots, \omega),$$

siis

$$\{x_1 + \mu w : \mu \in \mathfrak{T}\} \subset \underline{S}\left(\sum_i r_i\right).$$

Järeldus 3. Kui $x_j \in \underline{S}\left(\sum_i r_i\right)$ $(j = 1, 2, \dots)$, ning leiduvad ruumi $\mathfrak{X}$ elemendid w_k ja indeksid l_k $(k = 1, 2, \dots, K$ või $k = 1, 2, \dots ;$ $1 = l_1 < \dots < l_k < l_{k+1} < \dots)$ nii, et

$x_1 - x_j = \nu_k^j w_k$ $(j = l_k + 1, \dots, l_{k+1})$, kus $\{\nu_k^j\}_{j,k=1}^{\infty}$ või $\{\nu_k^j\}_{j=1}^{\infty}$ $(k = 1, 2, \dots, K)$ on ühistegurita täisarvude hulk, ja

$w_k = \alpha_{kj} w_j$, kus α_{kj} ei ole ratsionaalarv, kui $j \neq k$

siis

$$\{x_1 + \sum_{k=1}^{K} \mu_k w_k : \mu_k \in \mathfrak{T}\} \subset \underline{S}\left(\sum_i r_i\right),$$

/K võib olla lõplik või $+\infty$ /.

Tõestuse käigust järeldub vahetult, et sarnasugused tulemused kehtivad ka summade piirkonna $\bar{S}\left(\sum_i r_i\right)$ jaoks. Sõnastame neist kõige üldisema:

Järeldus 4. Kui $x_j \in \bar{S}\left(\sum_i r_i\right)$ $(j = 1, 2, \dots)$, ning leiduvad ruumi $\mathfrak{X}$ elemendid w_k ja indeksid l_k $(k = 1, 2, \dots, K$ või $k = 1, 2, \dots ;$ $1 = l_1 < \dots < l_k < l_{k+1} < \dots)$ nii, et

$x_1 - x_j = \nu_k^j w_k$ $(j = l_k + 1, \dots, l_{k+1})$, kus ν_k^j on ühistegurita täisarvud, ja

$w_k = \alpha_{kj}\, w_j$,kus α_{kj} ei ole ratsionaalarv,kui $j \neq k$

siis

$$\left\{ x_1 + \sum_{k=1}^{K} \mu_k w_k : \mu_k \in \Gamma \right\} \subset \bar{S}\left(\sum_i r_i\right)$$

/K võib olla lõplik või $+\infty$ /.

Kuid summade piirkonna $\bar{S}(\sum_i r_i)$ kohta saab tõestada rohkemgi kui summade piirkonna $\underline{S}(\sum_i r_i)$ kohta:

T e o r e e m 2. Summade piirkond $\bar{S}(\sum_i r_i)$ on kinnine ruumis $\mathcal{X}$.

T õ e s t u s. Selle teoreemi tõestus sarnaneb sama teoreemi tõestusega lõplikudimensionaalses ruumis /vt. [72] /.

Olgu meil jada $\{\nu_n\}$, $\nu_n \in \bar{S}(\sum_i r_i)$, $\nu_n \to \nu$, $\nu \in \mathcal{X}$.

Olgu ν_1 lähterea (1) kuhjumispunktiks. Teoreemi 1.1 kohaselt saame moodustada reale (1) sellise ümberjärjestuse $\sum_i r_i^{(2)}$, et saadud rea kuhjumispunktideks on ν_1 ja ν_2.

Olgu meil saadud rea (1) ümberjärjestus $\sum_i r_i^{(k)}$, mille kuhjumispunktideks on $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$;teoreemi 1 põhjal saame moodustada sama rea ümberjärjestuse $\sum_i r_i^{(k+1)}$ kuhjumispunktidega $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k, \nu_{k+1}$ $(k = 1, 2, \dots)$.

Konstruktsiooni piiramatult jätkates saame rea $\sum_i r_i^{(\infty)}$ kuhjumispunktidega $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k, \nu_{k+1}$ $(k = 1, 2, \dots)$; vastavalt mingile etteantud jadale $\varepsilon_{k(1)} \to 0$ leidub real $\sum_i r_i^{(\infty)}$ lõpmata palju osasummasid $s_{n_k}^{\infty(1)} = \sum_{\nu=1}^{n_k} r_\nu^{(\infty)}$ nii,et $\| s_{n_k}^{\infty(1)} - \nu_1 \| < \varepsilon_1$, lõpmata palju osasummasid $s_{n_k}^{\infty(2)}$ nii, et $\| s_{n_k}^{\infty(2)} - \nu_2 \| < \varepsilon_2$, jne,s.t. iga ν korral lõpmata palju osasummasid $s_{n_k}^{\infty(\nu)}$ nii, et

$\|s_{n_k}^{\infty}(\nu) - \nu_\nu\| < \varepsilon \; (\nu = 1,2,\dots;\ k = 1,2\dots)$; seega $\|s_{n_k}^{\infty}(\nu) - \nu\| < \varepsilon_\nu + \|\nu - \nu_\nu\| < \delta_\nu$, $\delta_\nu \to 0$, ja seega ongi punkt ν lähterea osasummade jada kuhjumispunktiks.

Summade piirkonna $\underline{S}(\sum_i x_i)$ kohta sarnast teoreemi üldiselt tõestada ei saa, kuigi see lõplikudimensionaalses ruumis aset leiab [72] . Siit tulenebki erinevus summade piirkondade $\underline{S}(\sum_i x_i)$ ja $\bar{S}(\sum_i x_i)$ vahel lõpmatudimensionaalses ruumis.

§ 3. Summade piirkonna üldine kuju loenduva baasiga lineaarses normeeritud ruumis $\bar{\mathcal{X}}$

Eelmises paragrahvis tõestatud teoreemide ja neist tehtud järelduste põhjal saame kindlaks teha summade piirkonna üldise struktuuri ühes osas lineaarsetest normeeritud ruumidest $\mathcal{X}$ - nimelt loenduva baasiga ruumis $\bar{\mathcal{X}}$.

Tõestame järgnevad lemmad /mõned neist veel üldises lineaarses normeeritud ruumis $\mathcal{X}$ / ε-ma jaoks.

Lemma 1. Kui hulk $\underline{S}(\sum_i x_i) \cap \Lambda$, kus $x_i \in \mathcal{X}$ ja Λ on meelevaldne sirge lineaarses normeeritud ruumis $\mathcal{X}$, on ülimalt loenduv, omab ta ühte järgnevatest kujudest:

1° tühi hulk,

2° üks punkt,

3° võre $\{x + \mu w \,;\, \mu \in \mathcal{T}\}$, (1)

4° sirgel Λ kõikjal tihe hulk $\{x + \sum_{i=1}^{n} m_i w_i : m_i \in \mathcal{T}\}$ (2)

($n = N$ või $n = 1,2,\dots$);

T õ e s t u s . Olgu $S(\sum_i r_i) \cap \Lambda = \mathcal{F}$. Hulga $\mathcal{F}$ jaoks on järgnevad võimalused:

1. $\mathcal{F}$ on tühi hulk. See juhtum on kooskõlas meie lemma väitega.

2. $\mathcal{F}$ sisaldab lõpliku hulga punkte; siis peab $\mathcal{F}$ koosnema ainsast punktist, kuna vastasel korral ta sisaldaks teoreemi 1.2 põhjal lõpmatu hulga punkte.

3. $\mathcal{F}$ sisaldab loenduva hulga punkte. Vaatleme lähemalt seda juhtu.

Valime suvalise punkti $x_0 \in \mathcal{F}$ ja moodustame hulga $\mathcal{F}_0 = \{x - x_0 : x \in \mathcal{F}\}$. Seame igale punktile $x' \in \mathcal{F}_0$ vastavusse klassi $\mathcal{G}(x')$; $x'' \in \mathcal{F}_0$ kuulub klassi $\mathcal{G}(x')$ siis ja ainult siis, kui leidub selline täisarv m , et kehtib võrdus $mx'' = x'$. Ükski klass $\mathcal{G}(x')$ ei ole tühi, kuna sisaldab vähemalt punkti x' , ning iga klass võib sisaldada lõpliku arvu või lõpmatu /eelduse põhjal aga loenduva/ hulga punkte.

Jaotame hulga $\mathcal{F}_0$ kaheks osaks: hulka $\bar{\mathcal{F}}$ kuuluvad kõik sellised elemendid $\bar{x} \in \mathcal{F}_0$, millede jaoks $\mathcal{G}(\bar{x})$ sisaldab lõpliku hulga elemente; hulka $\underline{\mathcal{F}}$ kuuluvad kõik sellised punktid $\underline{x} \in \mathcal{F}_0$, millede puhul $\mathcal{G}(\underline{x})$ sisaldab lõpmatu hulga elemente.

Ärgu olgu hulk $\bar{\mathcal{F}}$ tühi. Siis tal leidub selline mittetühi alamhulk $\bar{\bar{\mathcal{F}}}$, mis sisaldab selliseid punkte $\bar{\bar{x}}$, et $\mathcal{G}(\bar{\bar{x}})$ koosneb ainsast punktist $\bar{\bar{x}}$. Järjestame hulga $\bar{\bar{\mathcal{F}}}$ liikmed /neid

on ülimalt loenduv hulk, kuna $\bar{\bar{\mathcal{F}}} \subset \mathcal{F}$ ja $\mathcal{F}$ oli loenduv hulk/, ning moodustame summad

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{\bar{x}}_i , \qquad (3)$$

$m_i = 0, 1, 2, \ldots$; $n = N$, kui $\bar{\bar{\mathcal{F}}}$ on lõplik hulk, mis sisaldab N elementi, või $n = 1, 2, \ldots$, kui $\bar{\bar{\mathcal{F}}}$ on lõpmatu. Hulga $\bar{\bar{\mathcal{F}}}$ iga punkt on m_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ja n sobiva valiku korral esitatav valemina (3).

Tõepoolest, kuulugu $\bar{x}^*$ hulka $\bar{\mathcal{F}}$. Vaatleme klassi $\mathcal{G}(\bar{x}^*)$ Kuna klass $\mathcal{G}(\bar{x}^*)$ sisaldas lõpliku arvu elemente /eelduse põhjal hulga $\bar{\mathcal{F}}$ jaoks/, siis on nende hulgas ka normi poolest minimaalne, olgu selleks $\bar{\bar{x}}^*$. Vaatleme klassi $\mathcal{G}(\bar{\bar{x}}^*)$; see peab koosnema ainsast elemendist /vastasel korral leiduks $\tilde{x}^* \subset \mathcal{G}(\bar{\bar{x}}^*)$, $\tilde{m} > 1$, $\tilde{x}^* \tilde{m} = \bar{\bar{x}}^*$, $\|\tilde{x}^*\| \tilde{m} = \|\bar{\bar{x}}^*\|$, $\tilde{x}^* \subset \mathcal{G}(\bar{x}^*)$, mis viib vastuoluni/, s.t., leidub selline indeks j^*, et $\bar{\bar{x}}^* = \bar{\bar{x}}_{j^*}$, ning siis leidub selline täisarv m^*, et $\bar{\bar{x}}^* = m^* \bar{\bar{x}}_{j^*}$; seda oligi meil tarvis tõestada.

Olgu nüüd hulk $\underline{\mathcal{F}}$ mittetühi. Moodustame vastavalt igale hulga $\underline{\mathcal{F}}$ elemendile $\underline{x}$ hulga $\mathcal{H}(x)$ järgneval viisil : $\underline{x} \in \mathcal{H}(x)$ siis ja ainult siis, kui leidub ratsionaalarv ρ nii, et kehtib võrdus

$$\underline{\underline{x}} = \rho \underline{x} .$$

Valime mingisuguse $x' \in \mathcal{F}$, ning vaatleme klassi $\mathcal{G}(x')$. Järjestame kõik selle klassi elemendid mingil viisil: $x_1', x_2', \ldots$, ning moodustame summad:

$$\sum_{i=1}^{n'} m_i' x_i' \qquad (m_i' \in \mathcal{J} ; n' = 1, 2, \ldots) . \qquad (4)$$

Hulga $\mathcal{H}(x')$ iga element avaldub summana (4) indeksite

m_i' ja n' sobival valikul. Tähistame $\mathcal{H}(x') = \mathcal{H}_1$ .Juhul,kui hulk $\bar{\sigma}\mathcal{H}_1$ on mittetühi, valime mingi $x'' \in \bar{\sigma}\mathcal{H}$,tähistame hulga $\mathcal{H}(x'') = \mathcal{H}_2$, ning moodustame summad $\sum_{i=1}^{n'} m_i x_i''$ .Jätkame seda protsessi. Kuna hulki $\mathcal{H}_k$ on ülimalt loenduv hulk, avalduvad summana

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n^{(k)}} m_i^{(k)} x_i^{(k)} \qquad (m_i^{(k)} \in \bar{\sigma};\ n^k = 1,2,\dots;\ \alpha = 1,2,\dots)$$

kõik hulga $\underline{\sigma}^*$ elemendid.

Tähistades kõik $\bar{x}_i$, $x_i^{(k)}$ $(k = 1,2,\dots)$,sümboliga w_i , saamegi summa (2) .

Erijuhul,kui $\bar{\sigma}$ koosneb ainsast punktist,kuid $\underline{\sigma}$ on tühi hulk, saame olukorra,kus $\bar{\sigma}$ omab kuju (1) . Lemma on tõestatud.

Vaatleme nüüd juhtu, kus hulk $\bar{\sigma}$ sisaldab mingit lõiku.

Lemma 2. Kui hulk $\bar{\sigma} - \underline{S}(\sum_i v_i) \cap \Lambda$ sisaldab mingit lõiku $[w_0, w_1]$, siis langeb ta ühte kogu sirgega Λ .

Tõestus. Eelduse kohaselt hulk $\bar{\sigma}$ sisaldab iga punkti w ,mis avaldub kujul

$$w = w_0 - \tau(w_1 - w_0) \qquad (0 \le \tau < 1).$$

Näitame, et sel juhul hulk $\bar{\sigma}$ langeb ühte sirgega Λ . Tõepoolest, iga punkti $w^* \in \Lambda$ jaoks leiduvad sellised arvud m^* /naturaalarv/ ja $\tau^* \in [0,1]$,et

$$w^* = w_0 + (m^* + \tau^*)(w_1 - w_0).$$

Tähistame $w_0 + \tau^*(w_1 - w_0) = \bar{w}$ ja avaldame w^* punkti $\bar{w}$ kaudu:

$$w^* = \bar{w} + m^*(w_1 - \bar{w}) - m^*(w_0 - \bar{w}).$$

Siin $\bar{w}, w_0, w_1 \in \mathfrak{F}$, ja seega teoreemi 2.1 kohaselt ka $w^* \in \mathfrak{F}$. Lemma on tõestatud.

Järgneva lemma tõestamisel tuleb eeldada, et ruum $\mathcal{X}$ oleks loenduva baasiga.

Lemma 3. Hulk $\underline{S}(\sum_i r_i) \cap \Lambda$, kus Λ on meelevaldne sirge lineaarses normeeritud loenduva baasiga ruumis $\bar{\mathcal{X}}, r_i \in \bar{\mathcal{X}}$, on analüütiline hulk.[1]

T õ e s t u s. Tähistame baasi ruumis $\bar{\mathcal{X}}$ sümboliga $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$, rea $\sum_i r_i$ saame esitada baasielementide kaudu järgnevalt:

$$\sum_i r_i = \sum_i (\rho_i^1 b_1, \rho_i^2 b_2, \dots).$$

Juhul, kui rida $\sum_i r_i$ on koonduv, leiavad aset seosed

$$\sum_i \rho_i^j b_j = R_j b_j \quad (j = 1, 2, \dots),$$

$$\sum_i r_i = (R_1 b_1, R_2 b_2, \dots),$$

ning koonduvuseks on tarvilik, et eksisteeriksid summad $R_j \ (j = 1, 2, \dots)$ ning $\{R_j b_j\}_{j=1}^{\infty} \in \bar{\mathcal{X}}$.

Vastavalt igale ümberjärjestusele $\mathcal{K}$ saame rea $\sum_i r_{\mathcal{K}(i)}$, mille summa, juhul kui ta on koonduv, tähistame $\{R_j(\mathcal{K}) b_j\}_{j=1}^{\infty}$.

Tähistame kõigi selliste ümberjärjestuste hulka $\mathcal{K}_\alpha$, millede puhul summad $R_j(\mathcal{K}_\alpha)$ eksisteerivad $(j = 1, 2, \dots)$, ja $\{R_j(\mathcal{K}_\alpha) b_j\}_{j=1}^{\infty} \in \bar{\mathcal{X}}$ sümboliga $\mathfrak{K}$. Sel juhul avaldub meid huvitav hulk $\underline{S}(\sum_i r_i) \cap \Lambda$ järgmiselt:

$$\underline{S}(\sum_i r_i) \cap \Lambda = \{R_{j*}(\mathcal{K}_\alpha) b_{j*} : \mathcal{K}_\alpha \in \mathfrak{K}\},$$

kui sirge Λ on sirge αb_{j*} , $(-\infty < \alpha < \infty)$.

Sarnaselt Lorentz-Zelleri teoreemi tõestusega [52] on võimalik näidata, et selline hulk on analüütiline hulk,

---

1 Vt. viide lk. 17

Kitsendus, et sirge Λ avaldub bassielemendi b_j^* kaudu, ei ole oluline. Seega on $\underline{S}(\sum_i r_i)\cap\Lambda$ analüütiline hulk iga sirge $\Lambda\in\bar{\mathcal{X}}$ korral. Lemma on tõestatud.

Lemma 4. Kui hulk $\mathcal{F}=\underline{S}(\sum_i r_i)\cap\Lambda$, kus Λ on suvaline sirge lineaarses normeeritud loenduva baasiga ruumis $\bar{\mathcal{X}}$, $r_i\in\bar{\mathcal{X}}$, on mitteloenduv, langeb ta ühte kogu sirgega Λ.

T õ e s t u s. Kasutades ära eelmist lemmat, on piisav, kui me tõestame, et alati, kui $\mathcal{F}$ on mitteloenduv, sisaldab ta mingit lõiku $[w_0, w_1]$.

Lemma 3 põhjal järeldub, et $\mathcal{F}$ on analüütiline hulk. Järelikult sisaldab ta mitteloenduvuse tõttu perfektset alamhulka P. Üldsust kitsendamata[1] võime eeldada, et leidub lõik $[u,v]$ /vrd. $[w_0, w_1]$ lemmas 2/ nii, et $P\subset[u,v]$, $u,v\in P$, seega ei ole hulga $\mathcal{F}$ isoleeritud punktideks. Hulk P, kuna ta ei sisalda lõiku /vastasel korral oleks lemma tõestus triviaalne/, on moodustatud lõigust $[u,v]$ loenduva hulga vahemike $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_{00}, \mathcal{D}_{02}, \mathcal{D}_{000}, \mathcal{D}_{002}, \mathcal{D}_{020}, \mathcal{D}_{022}, \mathcal{D}_{0000}, \dots$ /hulga $\{\mathcal{D}_\nu\}$/ eraldamisel/. Hulk $\{\mathcal{D}_\nu\}$ on täielikult järjestatud. Kui me määrame mingi vahemiku $\mathcal{D}_m=\mathcal{D}_{c_1^*,\dots,c_\mu^*}$, kus $c_i^*=0$ või 2, $i=1,2,\dots,\mu$, on ühtlasi määratud ka hulk $\bigcup_{\nu=1}^{m}\mathcal{D}_\nu$, s.t. kõigi selliste vahemike $\mathcal{D}_\nu$ hulk $\{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_{00}, \mathcal{D}_{02}, \dots\}=\{\mathcal{D}_{c_1 c_2,\dots c_{m-1}}\}\bigcup_{c_i=0 \text{ või } 2}$

---

[1] Kui P on tõkestamatu, tuleb meil P asemel valida mingi P tõkestatud perfektne osahulk P'.

$\cup\{\mathcal{D}_{c_1 c_2 \dots c_\mu} : c_i \le c_i^*,\ i = 1, 2, \dots, \mu\}$.

Valime mingi punkti $x \in [u, v]$.

Nüüd on kaks võimalust: $x \in P$, või leidub selline vahemik $\mathcal{D}_m$, et $x \in \mathcal{D}_{m_1}$. Esimesel juhul oleks meie väide otsekohe tõestatud. Vaatleme teist juhtu. Asume uurima hulka $P_1 = [u, v] - \bigcup_{\nu=1}^{m_1} \mathcal{D}_\nu$. Tähistame vahemiku $\mathcal{D}_{m_1}$ alumise raja tähega v_1. Kindlasti leidub hulgas P_1 lõik $[u_1, v_1] \subset P_1$, kusjuures $u_1 \in P$. Siis leidub ka naturaalarv $n_1 \ge 1$ nii, et

$$v_1 + (n_1 - 1)(v_1 - u_1) < x \le v_1 + n_1 (v_1 - u_1).$$

Kuna $v_1 \in P$ ja $u_1 \in P$, siis kuulub teoreemi 1.3 põhjal koos iga punktiga $v_2 \in Q = P \cap P_1$, ka punkt $b_2 + n_1(v_1 - a_1)$ hulka F.

Seega leidub punkt $x_1 \in F$ nii, et $x - x_1 < v_1 - u_1$.

Edasi on jälle kaks võimalust: leidub punkt $v_2 \in Q_1$ nii, et $v_2 + n_1(v_1 - u_1) = x$, millisel juhul meie teoreem oleks tõestatud, või sellist punkti ei leidu. Siis aga leidub kindlasti mingi vahemik $\mathcal{D}_{m_2}$ nii, et $x - n_1(v_1 - u_1) \subset \mathcal{D}_{m_2}$. Vaatleme nüüd hulka $P_2 = [u, v] - \bigcup_{\nu=1}^{m_2} \mathcal{D}_\nu$. Selles hulgas sisalduvad kindlasti punktid $v_2 = \inf_{x \in \mathcal{D}_{m_2}} x$, ning $u_2 \in P$ nii, et $[u_2, v_2] \subset P_2$. Määrame jälle naturaalarvu n_2 nii, et

$$x_1 + (n_2 - 1)(v_2 - u_2) < x \le x_1 + n_2 (v_2 - u_2).$$

Jällegi kuulub koos iga punktiga $v_3 \in Q_2 = P \cap P_2$ hulka F ka punkt $v_3 + n_2(v_2 - u_2)$.

Juhul, kui leidub punkt $v_3 \in Q_2$ nii, et $v_3 + n_3(v_2 - u_2) = x$, on sellega konstruktsioon lõppenud. Kui ei, fikseerime vaid punkti $x_2 \in \bar{F}$, $x_1 - x_2 < v_2 - u_2$, ning jätkame konstruktsiooni eelpool kirjeldatud viisil.

Vastavalt igale punktile x_N on võimalik defineerida substitutsioon $\mathcal{K}^{(N)}$ lõpmatul hulgal viisidel /vt. teoreem 1.1/, kuna jada $\{n_k\}$, vastavalt ka $\{n_{N_k}\}$ on võimalik määrata lõpmatul hulgal erinevatel viisidel. Seega on võimalik valida substitutsioonid $\mathcal{K}^{(\nu)}$ nii, et eksisteerib ka nende lõpmatu korrutis

$$\mathcal{K} = \prod_{\nu=1}^{\infty} \mathcal{K}^{(\nu)},$$

/vt. teoreem 1.1.1/, ning et rida $\sum_i \tau_{\mathcal{K}(i)}$ rahuldab tingimust

$$\sum_{i=1}^{\nu} \tau_{\mathcal{K}(i)} = x_N + \varepsilon_N \quad \text{, kui} \quad \nu \geq N_N, \tag{6}$$

kus $\varepsilon_N \to 0$.

Konstruktsiooni põhjal kehtivad seosed

$$x - x_N \leq v_N - u_N, \tag{7}$$

$$v_N - u_N \to 0. \tag{8}$$

Seostest (6), (7) ja (8) järeldub, et

$$\sum_{i=1}^{\nu} \tau_{\mathcal{K}(i)} = x + \delta_N \quad \text{, kui} \quad \nu \geq N_N,$$

kus $\delta_N \to 0$, ja seega

$$\sum_i \tau_{\mathcal{K}(i)} = x,$$

mis tähendabki, et $x \in \bar{F}$, ja sellega on meie lemma tõestatud.

Tõestatud lemmadest tulenevad järgmised teoreemid.

T e o r e e m 1. ε-Rea $\sum_i r_i$ summade piirkonnaks $S(\sum_i r_i)$ loenduva baasiga lineaarses normeeritud ruumis $\bar{\mathcal{X}}$ on hulk

$$\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i b_i \right\},$$

kus reaalarvude $\mu_i (i = 1,2,\dots)$ suhtes on järgmised võimalused /ja ainult need/:

1° μ_i ei omanda ainsatki reaalarvulist väärtust,

2° $\mu_i = \alpha$ /fikseeritud arv/,

3° $\mu_i \in \{\alpha + m\beta : m \in \tilde{J}\}$ / α, β fikseeritud / - nn. "võre",

4° $\mu_i \in \{\alpha + \sum_{i=1}^{\nu} m_i \beta_i : m_i \in \tilde{J}\}$ / α, β_i fikseeritud, $i = 1,2,\dots \nu$, ν lõplik või lõpmatu/- kõikjal tihe hulk sirgel 5°,

5° $\mu_i = \gamma$, $-\infty < \gamma < \infty$ /sirge/.

T õ e s t u s tuleneb vahetult lemmadest 1-4 .

Samasugused lemmad võib tõestada ka summade piirkonna $\bar{S}(\sum_i r_i)$ jaoks. Kasutades neid, ja teoreemi 2.2, saame tõestada järgneva teoreemi.

T e o r e e m 2. Rea $\sum_i r_i$ summade piirkonnaks $\bar{S}(\sum_i r_i)$ lineaarses normeeritud loenduva baasiga ruumis $\bar{\mathcal{X}}$ on hulk[1]

$$\overline{\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i b_i \right\}},$$

kus reaalarvude ν_i $(i = 1,2,\dots)$ suhtes on järgmised või-

---

[1] Sümboliga $\bar{\mathcal{Z}}$ tähistatakse hulga $\mathcal{Z}$ sulundit vaadeldavas ruumis.

malused / ja ainult need/ .

1° ν_i ei omanda ainsatki reaalarvulist väärtust,

2° $\nu_i = \alpha$ /fikseeritud arv/,

3° $\nu_i \in \{\alpha + m\beta : m \in \overline{J}\}$ (α, β fikseeritud) nn. "võre",

4° $\nu_i = \gamma$, $-\infty < \gamma < \infty$ (sirge).

§ 4. N ä i t e i d

Illustratsiooniks paragrahvides 1-3 tõestatud teoreemidele esitame mõningaid näiteid.

Näitena toodavad read on defineeritud ruumis l_2 kusjuures sirgeks Λ on sirge $(\lambda, 0, 0, \dots)$.

Näide 1. Defineerime rea

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j , \tag{1}$$

$x_j = \{\xi_j^i\}_{i=1}^{\infty}$ nii, et $\Lambda \cap \underline{S}\left(\sum_j x_j\right) = \{(n, 0, 0, \dots) : n \in \overline{J}\}$.

Rea liikmete defineerimiseks kasutame abisuurusi a_{nk}, millede kaudu realiikmed x_j avalduvad järgnevatest seostest:

$$x_{(n)+k} = a_{n+1,k} \quad (k = 1, 2, \dots, (n+1)!), \qquad \sum_{\nu=1}^{n} \nu! = (n). \tag{2}$$

Suurused $\{a_{nk}\}$ $(k = 1, 2, \dots, n!;\ n = 1, 2, \dots)$ on samuti jadad ruumis l_2 :

$$a_{nk} = (\alpha_{nk}^i)\ (i = 1, 2, \dots), \tag{3}$$

kusjuures suurused α_{nk}^{i} avalduvad järgnevalt:

$$\alpha_{nk}^{i} = \frac{1}{n!}\, c_i\, M_{nk}^{i}, \tag{4}$$

kus M_{nk}^{i} on määratud valemitega

$$\left\{\begin{array}{l} M_{11}^{1} = 1\,; \\ M_{n,(k-1)n+s}^{i} = -M_{n-1,k}^{i}, \quad i = 1,2,\dots,(n-1);\ k = 1,2,\dots,(n-1)!, \\ M_{nk}^{i} = 1\,; \quad q = 1,2,\dots,n-s, \\ M_{nk}^{i} = -s+1; \quad q = n-s+1, \\ M_{nk}^{i} = 0 \ \text{ülejäänud juhtudel.} \end{array}\right. \left.\begin{array}{l} \\ \\ \left.\begin{array}{l} \\ \end{array}\right\} i = (n-1)! + \mu(n-1) + q; \\ \qquad k = \mu n + s \\ \qquad \mu = 0,1,\dots,(n-1)!-1, \end{array}\right\} s = 1,2,\dots,n, \tag{5}$$

$$(n = 1,2,\dots).$$

Suurused c_i määrame järgnevalt:

$$c_1 = 1,$$

$$c^2_{(n-1)!+k} = \frac{n^2 n!}{(n-1)(n-k)(n-k+1)}, \quad k = 1,2,\dots,(n-1), \quad n = 2,3,\dots, \tag{6}$$

$$c_{(n-1)!+\mu(n-1)+k} = c_{(n-1)!+k}, \quad \mu = 1,2,\dots,n-1.$$

Selliselt määratud suurused c_i on lahenditeks võrrandsüsteemile, mille saame avaldistest

$$\sum_{i=(n-1)!+1}^{(n-1)!+k-1} c_i^2 + (n-k)^2 c^2_{(n-1)!+k} = nn!, \tag{7}$$

andes indeksile k väärtused $k = 1,2,\dots,n-1$.

Arvutame veel mõned edaspidiseks vajalikud suurused:

$$\sum_{i=1}^{k} c^2_{(n-1)!+i} = \frac{nn!\,k}{(n-1)(n-k)}, \tag{8}$$

$$\sum_{i=k'+1}^{k''} c^2_{(n-1)!+i} = \frac{n^2 n!\,(k''-k')}{(n-1)(n-k')(n-k'')}. \tag{9}$$

Suurused M_i on esitatud tabelis 1; kuna seal on ka kordajate c_i väärtused, on suurused α_i selle tabeli põhjal lihtsalt arvutatavad; väljaarvutatud suurused α_i on esitatud

tabelis II[1].

Edasi näitame, et selliselt defineeritud real leidub 2 koonduvat ümberjärjestust $\sum_i \bar{r}_i$ ja $\sum_i \bar{\bar{r}}_i$. Lähteridа on hajuv, kusjuures, nagu on kerge kontrollida, kehtivad seosed:

$$\sum_{j=1}^{(2n)} r_j = (0,0,\dots), \tag{10}$$

$$\sum_{j=1}^{(2n+1)} r_j = (1,0,0,\dots) \qquad (n = 1,2,\dots). \tag{11}$$

Tähistame

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \nu_i + (k-1)(n+2) = t(k,n), \tag{12}$$

ning defineerime

$$\left.\begin{aligned} &\bar{r}_{t(k,n)} = a_{nk}, \\ &\bar{r}_{t(k,n)+1+j} = a_{n+1,(n+1)(k-1)+j}, \quad j = 1,2,\dots,(n+1) \end{aligned}\right\} \begin{matrix} k=1,2,\dots,n! \\ n=2\nu+1, \\ \nu = 0,1,2,\dots \end{matrix} \tag{13}$$

Siis

$$\sum_{j=1}^{t(k,n)} \bar{r}_j = \sum_{j=1}^{(2\nu)} \bar{r}_j + \sum_{(2\nu)+1}^{t(k,n)} \bar{r}_j = (0,0,\dots) + \sum_{(2\nu)+1}^{t(k,n)} \bar{r}_j = (0,0,\dots) + \tag{14}$$
$$+ \sum_{x=1}^{k-1} \left(a_{nx} + \sum_{j=(n+1)(x-1)+1}^{(n+1)x} a_{n+1,j} \right) = (0,0,\dots),$$

kuid

$$\left\| \sum_{j=t(k,n)+1}^{t(k,n)+\nu} \bar{r}_j \right\| \le \| a_{nk} \| \quad (\nu = 1,2,\dots, t(k+1,n) - t(k,n)). \tag{15}$$

Rea $\sum_i \bar{\bar{r}}_i$ defineerime seostega

$$\begin{cases} \bar{\bar{r}}_{t(k,n)+1} = a_{nk}, \\ \bar{\bar{r}}_{t(k,n)+1+j} = a_{n+1,(n+1)(k-1)+j}, \quad j = 1,2,\dots,n+1, \\ \qquad (k = 1,2,\dots,n!\ ;\ n = 2\nu;\ \nu = 0,1,2,\dots), \end{cases} \tag{16}$$

ning saame

$$\sum_{j=1}^{t(k,n)} \bar{\bar{r}}_j = (0,0,\dots), \tag{17}$$

kusjuures

$$\left\| \sum_{j=t(k,n)}^{t(k,n)+\nu} \bar{\bar{r}}_j \right\| \le \| a_{nk} \| \quad (\nu = 1,2,\dots,n+1). \tag{18}$$

---

1 Tabelid I ja II on käesoleva § lõpus, lk.76 ja 77.

Tõestuse lõpulelviimiseks on tarvis näidata, et

$$\lim_{n\to\infty} \| a_{nk} \| = 0 \qquad (k = 1,2,\dots,n!). \tag{19}$$

Vaatleme kõigepealt piirväärtust

$$\lim_{n\to\infty} \| a_{n1} \| .$$

Definitsiooni (3), (4), (5) ja (7) kohaselt, võttes arvesse võrdust (8), kus $n = \nu$ ja $k = \nu - 1$, kehtib seos

$$\| a_{n1} \|^2 = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{i=1}^{\nu-1} (\alpha_{n1}^{i})^2 = \left(\frac{1}{n!}\right)^2 \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{i=1}^{\nu-1} c^2_{(\nu-1)!+i} = \left(\frac{1}{n!}\right)^2 \sum_{\nu=1}^{n} \nu\nu!,$$

kust

$$\lim_{n\to\infty} \| a_{n1} \| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \nu\nu!} = 0. \tag{20}$$

Kuna aga valemite (4), (5) ja (7) põhjal

$$\sum_{i=(\nu-1)!+1}^{(\nu-1)!+\nu-1} c_i^2 \left(\mathcal{M}_{nk}^{i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{k-1} c_i^2 + (\nu-1-k)^2 c_{(\nu-1)!+k} = \nu\nu! \qquad (k = 1,2,\dots,\nu-1),$$

s.t. $\sum_{i=(\nu-1)!+1}^{(\nu-1)!+\nu-1} \left(\alpha_{nk}^{1}\right)^2 = \nu\nu!$, $k = 1,2,\dots,\nu-1$, siis, võttes arvesse seost (6), kehtib võrdus

$$\| a_{n1} \| = \| a_{nk} \| , \quad k = 2,3,\dots,n!, \tag{21}$$

millega järeldubki seostest (20) ja (21) seos (19), ning ridade $\sum_i \bar{r}_i$ ja $\sum_i \bar{\bar{r}}_i$ koonduvus on tõestatud.

Teoreemi 1.2 põhjal võib seega vastavalt igale ettenantud täisarvule n defineerida rea $\sum_j r_j$ sellise ümberjärjestuse, mis koondub punktiks $(n, 0, 0, \dots)$. Kuna teoreem on tõestatud konstruktiivselt, on sellega ühtlasi antud eeskiri vastava näite konstrueerimiseks, mida me siinkohal kordama ei hakka.

Lahtiseks jääb küsimus: kas leidub selline reaalarv $\delta, 0<\delta<1$, et rea (1) summade piirkonda kuuluks punkt $(\delta, 0, 0, \dots)$.

Selle küsimuse lahendamiseks vaatleme edaspidi paralleelselt reaga (1) ridu

$$\sum_j r_j' = \sum_j \rho_j' \tag{22}$$

ja

$$\sum_j r_j'' = \sum_j (r_j - r_j'). \tag{23}$$

Valemite (3) - (6) kohaselt

$$\sum_{j=1}^{(2n)+m} r_j' = \frac{m}{2n!}, \quad m = 1, 2, \dots, (2n+1)! \tag{24}$$

ja

$$\sum_{j=1}^{(2n+1)+m} r_j' = 1 - \frac{m}{2n!}. \tag{25}$$

Samuti leidub iga $\delta (0<\delta\leq\frac{1}{2})$ jaoks selline jada $\{m_\varkappa(\delta)\}_{\varkappa=1}^{\infty}$, et

$$\left| \sum_{j=1}^{m_\varkappa} r_j' - \delta \right| < \varepsilon_\varkappa, \quad \varepsilon_\varkappa \to 0, \tag{26}$$

kuna igale $\delta' (\frac{1}{2} \leq \delta' < 1)$ väärtusele vastava rea summa hindamiseks kasutame suuruste a_{nk}'' definitsioonist järelduvat seost

$$\| a_{nk}'' \| = \| a_{n,n!-k}'' \|. \tag{27}$$

Näitame, et alati leiab aset võrratus

$$\left\| \sum_{j=1}^{m_\varkappa} r_j'' \right\| > 2\delta - \varepsilon_\varkappa. \tag{28}$$

Arvutame

$$r_{m_\varkappa}'' = a_{n_\varkappa k_\varkappa} - a_{n_\varkappa k_\varkappa}' = a_{n_\varkappa k_\varkappa}'';$$

/ $n_\varkappa$ ja $k_\varkappa$ väärtused vastavalt $m_\varkappa$-le on arvutatavad valemite

(2) kaudu/; edaspidi tähistame lihtsalt $a''_{n\varkappa k_\varkappa} = a''_{nk}$, ja kasutame definitsioonist (2) - (6) järelduvat võrdust

$$\sum_{j=1}^{m_\varkappa} r_j'' = \sum_{k=1}^{m_\varkappa} a''_{n_\varkappa k} = \sum_{k=1}^{m} a''_{nk} .$$

Avaldame indeksi $m (m < n!)$ järgnevalt

$$m = \sum_{i=2}^{n} m_i(m) \frac{n!}{i!} \quad ; \quad 0 \le i-1 , \; m_i(m) = 0 , \; i = n+1, \dots , \tag{29}$$

ning defineerime suurused

$$p_\nu(m) = \sum_{i=\nu}^{n} m_i(m) \frac{n!}{i!} , \tag{30}$$

$$\pi_\nu(m) = \sum_{i=2}^{\nu-1} m_i(m) \frac{(\nu-1)!}{i!} , \tag{31}$$

$$g_\nu(m) = \begin{cases} 0, \text{kui } m_{\nu+1}^{(m)} = \dots = m_n(m) = \dots = 0, \\ p_\nu(m) - p_{\nu+1}(m)[\nu - s_\nu(m)] \\ \qquad \text{ülejäänud juhtudel} \end{cases} \tag{32}$$

$$s_\nu(m) = \begin{cases} 0, \text{kui } m_\nu(m) = m_{\nu+1}(m) = \dots = m_n(m) = \dots = 0, \\ \nu - m_\nu(m), \\ \dots\dots \quad , \text{kui } m_\nu(m) \neq 0, \; m_{\nu+1}(m) = \dots = m_n(m) = 0, \\ \nu - m_\nu(m) - 1 \quad \text{ülejäänud juhtudel,} \end{cases} \tag{33}$$

$$g_\nu(m \begin{cases} \nu - 1 \quad , \text{kui } m_\nu(m) = m_{\nu+1}(m) = \dots = m_n(m) = 0, \\ m_\nu(m) - 1 \quad , \text{kui } m_\nu(m) \neq 0 , \; m_{\nu+1}(m) = \dots = m_n(m) = 0, \\ m_\nu(m) \quad \text{ülejäänud juhtudel.} \end{cases} \tag{34}$$

Kõik need suurused on alati mittenegatiivsed. Kasutades vastdefineeritud suurusi, saame avaldada valemeis (2) -(6) defineeritud suurused järgnevalt /vrdl.tabelitega I,II/

$$\alpha_{nk}^{i} = \begin{cases} (-1)^{n+\nu} e_i \cdot \frac{1}{n!} , \quad i = (\nu-1)! + \pi_\nu(k)(\nu-1) + 1, \dots , (\nu-1)! + \pi_\nu(k)(\nu-1) + s_\nu(k), \\ (-1)^{n+\nu+1} g_\nu(k) \frac{1}{n!} \cdot e_i , \quad i = (\nu-1)! + \pi_\nu(k)(\nu-1) + s_\nu(k) + 1, \\ 0 \qquad \text{ülejäänud juhtudel.} \end{cases} \tag{35}$$

ja

$$\sum_{k=1}^{m} a_{nk}^{i} = \begin{cases} (-1)^{n+\nu}\, \mu_\nu(m)\, c_i \cdot \frac{1}{n!}, & i = (\nu-1)! + \pi_\nu(m)(\nu-1)+1, \dots, (\nu-1)! + \pi_\nu(k)(\nu-1) + s_\nu(k), \\ (-1)^{n+\nu+1}\, g_\nu(k)\, c_i\, \frac{1}{n!}, & i = (\nu-1)! + \pi_\nu(m)(\nu-1) + s_\nu(k) + 1, \\ 0 & \text{ülejäänud juhtudel.} \end{cases} \tag{36}$$

Olgu meil m fikseeritud; sel juhul kasutame lihtsustatud sümboolikat: $m_i(m) = m_i$, $\mu_i(m) = \mu_i$ jne.

Kasutades valemeid (30) - (36), saame

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} a_{nk} \right\|^2 = \left(\frac{1}{n!}\right)^2 \sum_{\nu=2}^{\nu} \frac{\nu\nu!}{\nu-1} \left(\frac{\mu_\nu^2 s_\nu}{\nu - s_\nu} + \frac{q_\nu^2 \nu}{(\nu - s_\nu)(\nu - s_\nu - 1)} \right). \tag{37}$$

Asume nüüd võrratuse (28) tõestamisele. Märgime, et iga m puhul leidub indeks $\mu^{(m)}$ nii, et $\mu_\mu(m) = m$.

Juhul, kui $s_\mu \neq 0$, saame võrdusest (37) suuruste μ, $\mu - s_\mu$ ja $\mu - s_\mu - 1$ mittenegatiivsuse tõttu /vt. valem (33); juhul $s_\mu = 1$, $m_{\mu+1} = \dots = 0$ langeb teine liidetav ära/:

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} a_{nk}'' \right\|^2 \geq \left(\frac{1}{n!}\right)^2 \frac{\mu\mu!\, s_\mu}{(\mu-1)(\mu - s_\mu)}\, m^2 \geq \left(\frac{2m}{n!}\right)^2, \text{ kui } \mu \geq 2,$$

kust (28) järeldubki vahetult valemite (23) ja (26) kaudu.

Kui aga $s_\mu = 0$, on meil järgnevad võimalused

a/ $m_\mu(m) = \dots = 0$, siis aga (30) põhjal $\mu_\mu = 0$, ja siis eelduse kohaselt ka $m = \mu_\mu = 0$; juhtum on triviaalne.

b/ $m_\mu \neq 0$, $\mu_\nu = \mu_\mu = m$, $\nu = 2, 3, \dots, \mu - 1$, $s_\nu = \nu - 1 > 0$, $\nu = 2, 3, \dots, \mu - 1$; kui $\mu > 2$, on rakendatav sama mõttekäik; juhul $m_2 = 1$ kasutame seost (27).

Edasiseks sammuks on tõestada võrratuse (28) kehtivus ka rea (1) iga ümberjärjestuse korral.

Selleks piisab, kui meil õnnestub kontrollida järgneva võrratuse õigsust

$$\left\| \sum_{k=m_1}^{\nu_1} a''_{n_1 k} + \sum_{k=m_2}^{\nu_2} a''_{n_2 k} + \ldots + \sum_{k=m_\mu}^{\nu_\mu} a''_{n_\mu k} \right\| \geq 2 \left| \sum_{k=m_1}^{\nu_1} a'_{n_1 k} + \sum_{k=m_2}^{\nu_2} a'_{n_2 k} + \ldots + \sum_{k=m_\mu}^{\nu_\mu} a'_{n_\mu k} \right| \quad (38)$$

Võrratuse vasak pool väljendab rea (1) suvalise ümberjärjestuse suvalist osasummat; summad on siin sobivalt ümber järjestatud, kusjuures summad, mille puhul $n < n_1$, võrduvad definitsiooni kohaselt nulliga.

Vaatleme summat (38) kahes osas

1. Juhul $n_1 = n_2 = \ldots = n_N = n$ saame

$$\left\| \sum_{k=m_1}^{\nu_1} a''_{nk} + \sum_{k=m_2}^{\nu_2} a''_{nk} + \ldots + \sum_{k=m_\mu}^{\nu_\mu} a''_{nk} \right\| . \quad (39)$$

Lihtsuse pärast vaatleme selle asemel ainult summat

$$\left\| \sum_{k=m_1}^{\nu_1} a''_{nk} + a''_{n m_2} \right\| . \quad (40)$$

Suuruste a''_{nk} definitsiooni põhjal kehtib võrdus

$$\left\| \sum_{k=m_1}^{\nu_1} a''_{nk} \right\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{\nu_1 - m_1 + 1} a''_{nk} \right\|^2 ,$$

ning seetõttu võime arvutuste lihtsustamiseks arvutada summa (39) asemel summa

$$\left\| \sum_{k=1}^{\nu_1 - m_1 + 1} a''_{nk} + a''_{n m_2 - m_1 + 1} \right\| \text{ või lihtsalt } \left\| \sum_{k=1}^{m} a''_{nk} + a''_{n\bar{m}} \right\| .$$

Tõestame võrratuse

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} a''_{nk} + a''_{n\bar{m}} \right\| \geq \left\| \sum_{k=1}^{m+1} a''_{nk} \right\| ,$$

kust siis ammugi järeldub (28).

Avaldame saadud summad valemite (28)- (34) kaudu. Märgime selleks, et leidub $\mu \geq 2$ nii, et

$$m_\nu(m) = m_\nu(\bar{m}), \quad \nu < \mu ,$$

$$m_\mu(m) < m_\mu(\bar{m}) \quad (\text{kuna } m < \bar{m}).$$

Lihtsuse mõttes tähistame valemites (28) - (34)

$\nu(m) = \mu$, $\nu(\bar{m}) = \bar{\mu}$, jne.

Siis kehtivad seosed

$$\pi_\nu = \bar{\pi}_\nu\,,\quad s_\nu = \bar{s}_\nu\,,\quad \nu < \mu,\quad \pi_\mu = \bar{\pi}_\mu,\quad s_\mu > \bar{s}_\mu .$$

Kasutades valemeid (28) - (36), saame

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_{nk}^{i} + \alpha_{nm}^{i} = \begin{cases} (-1)^{n+\nu}(p_\nu + 1)c_i \cdot \frac{1}{n!}\,, & i = (\nu-1)! + \pi_\nu(\nu-1) + 1, \dots \\ & \dots (\nu-1)! + \pi_\nu(\nu-1) + s_\nu\,, \\ (-1)^{n+\nu}(q_\nu - g_\nu)c_i \cdot \frac{1}{n!}\,, & i = (\nu-1)! + \pi_\nu(\nu-1) + s_\nu + 1 \\ (-1)^{n+\mu}(p_\mu + 1)\,c_i \cdot \frac{1}{n!}\,, & i = (\mu-1)! + \pi_\mu(\mu-1) + 1, \dots \\ & \dots (\mu-1)! + \pi_\mu(\mu-1) + \bar{s}_\mu\,, \\ (-1)^{n+\mu}(p_\mu - \bar{g}_\mu)c_i \cdot \frac{1}{n!}\,, & i = (\mu-1)! + \pi_\mu(\mu-1) + \bar{s}_\mu + 1\,, \\ (-1)^{n+\mu} p_\mu\, c_i \cdot \frac{1}{n!}\,, & i = (\mu-1)! + \pi_\mu(\mu-1) + \bar{s}_\mu + 2, \dots \\ & \dots (\mu-1)! + \pi_\mu(\mu-1) + s_\mu\,, \\ (-1)^{n+\mu} q_\mu\, c_i \cdot \frac{1}{n!}\,, & i = (\mu-1)! + \pi_\mu(\mu-1) + s_\mu + 1, \\ (-1)^{n+\nu} p_\nu\, c_i \cdot \frac{1}{n!}\,, & i = (\nu-1)! + \pi_\nu(\nu-1) + 1, \dots \\ & \dots (\nu-1)! + \pi_\nu(\nu-1) + s_\nu, \\ (-1)^{n+\nu} q_\nu \cdot c_i \cdot \frac{1}{n!}\,, & i = (\nu-1)! + \pi_\nu(\nu-1) + s_\nu + 1, \\ (-1)^{n+\nu} c_i \cdot \frac{1}{n!}\,, & i = (\nu-1)! + \bar{\pi}_\nu(\nu-1) + 1, \dots \\ & \dots (\nu-1)! + \bar{\pi}_\nu(\nu-1) + s_\nu\,, \\ (-1)^{n+\nu} g_\nu\, c_i \cdot \frac{1}{n!}\,, & i = (\nu-1)! + \bar{\pi}_\nu(\nu-1) + \bar{s}_\nu + 1\,, \\ 0 & \end{cases} \tag{46}$$

ülejäänud juhtudel.

Seejärel arvutame saadud summa normi ruudu

$$\Big\| \sum_{k=1}^{m} a_{nk} + a_{nm} \Big\|^2 = \Big(\frac{1}{n!}\Big)^2 \Bigg\{ \sum_{\nu=2}^{\mu-1} \Big[(p_\nu + 1)^2 \sum_{i=(\nu-1)!+1}^{(\nu-1)+s_\nu} c_i^2 + (q_\nu - g_\nu)^2 c^2_{(\nu-1)!+s_\nu+1} \Big] +$$

$$+(p_\mu+1)^2\sum_{i=(\mu-1)!+1}^{(\mu-1)!+\bar{s}_\mu} c_i^2+(p_\mu-\bar{q}_\mu)^2 c^2_{(\mu-1)!+\bar{s}_\mu+1}+p_\mu^2\sum_{i=(\mu-1)!+\bar{s}_\mu+2}^{(\mu-1)!+s_\mu} c_i^2+$$

$$+q_\mu^2 c^2_{(\mu-1)!+s_\mu+1}+\sum_{\nu=\mu+1}^{n}\Big[p_\nu^2\sum_{i=(\nu-1)!+1}^{(\nu-1)!+s_\nu} c_i^2+q_\nu^2 c^2_{(\nu-1)!+s_\nu+1}+VV'\Big]\Big\},$$

ja normide ruutude vahe

$$\Big\|\sum_{k=1}^{m} a''_{nk}+a''_{n\bar{m}}\Big\|^2-\Big\|\sum_{k=1}^{m+1} a''_{nk}\Big\|^2=\Big(\frac{1}{n!}\Big)^2\sum_{\nu=\mu+1}^{n} 2p_\nu(\nu-3)!(\nu^2-3\nu+1)\geq 0, \tag{42}$$

kui $\nu\geq 2$.

Viimane võrratus on saadud kaunis tülikate ja mahukate, kuigi täiesti elementaarsete arvutuste tulemusena, kusjuures rakendatakse ainult valemeid (2) -(7) ja (28) - (36) .

Samal viisil on võimalik tõestada võrratus

$$\Big\|\sum_{k=m_1}^{p_\mu} a''_{nk}+\ldots+\sum_{k=m_\mu}^{p_\mu} a''_{nk}\Big\|\leq\Big\|\sum_{k=1}^{(p_1+\ldots+p_\mu)-(m_1+\ldots+m_\mu)+\mu} a''_{nk}\Big\|. \tag{43}$$

Vaadeldajääb veel juhtum, kuiikõik indeksid m_i on üksteisest erinevad.

Lihtsuse pärast võtame lähtealuseks jälle summa

$$\Big\|\sum_{k=1}^{m} a''_{n_1k}+a''_{n_2\bar{m}}\Big\|. \tag{44}$$

Olgu $n_1<n_2$; siis võib definitsiooni (2) - (7) põhjal kirjutada

$$\sum_{k=1}^{m} a''_{n_1k}=\sum_{k=1}^{\frac{n_2!}{n_1!}m} a''_{n_2k}\cdot(-1)^{n_2-n_1}.$$

Edasine tõestuskäik langeb ühte eelneva juhuga. Põhiliselt sarnane on tõestus ka juhul, kui $n_1>n_2$, ning seega võime lugeda võrratuse (38) tõestatuks, ning on tõestatud, et ühegi

ümberjärjestuse tulemusena ei ole saavutatav rida, mis koonduks punktiks $(\delta, 0, 0, \dots)$, kus $0 < \delta < 1$.

Näide 2. Defineerime rea $\sum_j \bar{r}_j$ nii, et $\underline{S}(\sum_j \bar{r}_j) \cap \Lambda = \{(u+\sqrt{2}v, 0, \dots) ; u, v \in \mathbb{Z}\}$. Siis ilmselt $\bar{S}(\sum_j \bar{r}_j) = \Lambda$, kuna alati $\bar{S}(\sum_j r_j) \supset \underline{S}(\sum_j r_j)$, ning $\bar{S}(\sum_j r_j)$ on kinnine. Käesolevaga on ühtlasi toodud näide rea kohta, mille jaoks $\bar{S}(\sum_j r_j) \neq \underline{S}(\sum_j r_j)$.

Rea $\sum_j \bar{r}_j$ defineerime näite (1) jaoks sissetoodud suuruste a_{nk} abil:

$$\bar{r}_j = \{\bar{\rho}_j^i\}_{i=1}^{\infty},$$

$$\begin{cases} \bar{\rho}_{2j-1}^{2i-1} = \rho_j^i, \\ \bar{\rho}_{2j-1}^{} = 0, \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots),$$

$$\begin{cases} \bar{\rho}_{2j}^{1} = \sqrt{2}\,\rho_j^1, \\ \bar{\rho}_{2j}^{2i-1} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots), \\ \bar{\rho}_{2j}^{2i-2} = \sqrt{2}\,\rho_j^1 \quad (i = 2, 3, \dots), \\ \qquad\qquad (j = 1, 2, \dots). \end{cases}$$

Tabel I

			C_i	1	2	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{6}}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{6}}{2}$	$\frac{4\sqrt{6}}{3}$	$\frac{8\sqrt{3}}{3}$	8	$\frac{4\sqrt{6}}{3}$	$\frac{8\sqrt{3}}{3}$	8	$\frac{4\sqrt{6}}{3}$	$\frac{8\sqrt{3}}{3}$	8	$\frac{4\sqrt{6}}{3}$	$\frac{8\sqrt{3}}{3}$	8	$\frac{4\sqrt{6}}{3}$	$\frac{8\sqrt{3}}{3}$	8	$\frac{4\sqrt{6}}{3}$	$\frac{8\sqrt{3}}{3}$	8	$\frac{5\sqrt{6}}{3}$	$\frac{5\sqrt{6}}{2}$	$5\sqrt{3}$	$5\sqrt{6}$
$\frac{(k+i-1)!}{(i-1)!}$	n	$\frac{1}{n!}$	$\frac{i}{k}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
1	1		1	+																											
2	2	$\frac{1}{2}$	1	−	+																										
3			2	−	−																										
4	3	$\frac{1}{6}$	1	+	−	+	+																								
5			2	+	−	+	−																								
6			3	+	−	-2																									
7			4	+	+			+	+																						
8			5	+	+			+	−																						
9			6	+	+		·	-2																							
10	4	$\frac{1}{24}$	1	−	+	−	−			+	+	+																			
11			2	−	+	−	−			+	+	−																			
12			3	−	+	−	−			+	-2																				
13			4	−	+	−	−			-3																					
14			5	−	+	−	+						+	+	+																
15			6	−	+	−	+						+	+	−																
16			7	−	+	−	+						+	-2																	
17			8	−	+	−	+						-3																		
18			9	−	+	2										+	+	+													
19			10	−	+	2										+	+	−													
20			11	−	+	2										+	-2														
21			12	−	+	2										-3															
22			13	−	−			−	−										+	+	+										
23			14	−	−			−	−										+	+	−										
24			15	−	−			−	−										+	-2											
25			16	−	−			−	−										-3												
26			17	−	−			−	+													+	+	+							
27			18	−	−			−	+													+	+	−							
28			19	−	−			−	+													+	-2								
29			20	−	−			−	+													-3									
30			21	−	−			2																	+	+	+				
31			22	−	−			2																	+	+	−				
32			23	−	−			2																	+	-2					
33			24	−	−			2																	-3						
34	5	$\frac{1}{120}$	1	+	+	+	+			−	−	−																+	+	+	+
35			2	+	+	+	+			−	−	−																+	+	+	−
36			3	+	+	+	+			−	−	−																+	+	-2	
37			4	+	+	+	+			−	−	−																+	-3		
38			5	+	+	+	+			−	−	−																-4			

Tabel II

			c_i																											
Vrstica	n	$\frac{1}{n!}$	k'	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
1	1	1	1	1000																											
2	2	$\frac{1}{2}$	1	-500	1000																										
3			2	-500	-1000																										
4	3	$\frac{1}{6}$	1	167	-333	354	613																								
5			2	167	-333	354	-613																								
6			3	167	-333	-707																									
7			4	167	-333			354	613																						
8			5	167	-333			354	-613																						
9			6	167	-333			-707																							
10	4	$\frac{1}{24}$	1	-42	83	88	153			136	193	333																			
11			2	-42	83	88	153			136	193	-333																			
12			3	-42	83	88	153			136	-386																				
13			4	-42	83	88	153			-408																					
14			5	-42	83	88	-153						136	193	333																
15			6	-42	83	88	-153						136	193	-333																
16			7	-42	83	88	-153						136	-386																	
17			8	-42	83	88	-153						-408																		
18			9	42	83	-177										136	193	333													
19			10	-42	83	-177										136	193	-333													
20			11	-42	83	-177										136	-386														
21			12	-42	83	-177										-408															
22			13	-42	-83			88	153										136	193	333										
23			14	-42	-83			88	153										136	193	-333										
24			15	-42	-83			88	153										136	-386											
25			16	-42	-83			88	153										-408												
26			17	-42	-83			88	-153													136	193	333							
27			18	-42	-83			88	-153													136	193	-333							
28			19	-42	-83			88	-153													136	-386								
29			20	-42	-83			88	-153													-408									
30			21	-42	-83			-177																	136	193	333				
31			22	-42	-83			-177																	136	193	-333				
32			23	-42	-83			-177																	136	-386					
33			24	-42	-83			-177																	-408						
34	5	$\frac{1}{120}$	1	8	-17					-27	-39	-67																51	66	93	161
35			2	8	-17					-27	-39	-67																51	66	93	-161
36			3	8	-17					-27	-39	-67																51	66	186	
37			4	8	-17					-27	-39	-67																51	198		
38			5	8	-17					-27	-39	-67																-204			

III SUMMEERUVATE RIDADE A-SUMMADE PIIRKONDADEST

§ 1. Read, mille liikmed moodustavad nulljada

Käesolevas peatükis vaatleme summeeruvaid arvridu. Käsitluse otstarbekuse huvides jaotame need read sobivate tunnuste alusel klassidesse, milledest esimesena asume vaatlema ridade klassi, kuhu kuuluvad read , mille liikmed moodustavad nulljada.

Nende ridade ümberjärjestustega on mõnes mõttes kõige lihtsam opereerida, kuna saame sageli kasutada koonduvaid parandridu /vt. def. 1.4.1 , valemid (1.4.2) ja (1.4.6) , millede konstruktsioon sarnaneb Riemanni teoreemis [12] antud konstruktsiooniga, osalt ka Sierpinski konstruktsioonidega [70] , [71] .

Vaatleme seega ridu

$$\sum_i r_i , \quad r_i \in R_1 , \tag{1}$$

mis rahuldavad tingimust

$$r_i \to 0 , \tag{2}$$

ning eeldame, et rida (1) on summeeruv multiplikatiivse /vt. (1.2.7) , (1.2.8) , (1.2.10) menetluse A abil .

Menetluse A multiplikatiivsuse tõttu saame Riemanni teoreemist [12] järeldada absoluutselt koonduvate ridade kohta järgneva teoreemi.

Absoluutselt koonduva rea A - summade piirkonnaks on üksainus punkt - lähterea A-summa σ.

Edaspidi pakuvad meile huvi ainult absoluutselt mittekoonduvad /s.t. mitteabsoluutselt koonduvad ja hajuvad / read.[1]

Jaotame rea (1) liikmed kahte klassi

$$r_{p_i} > 0 \; ; \quad r_{q_i} \leq 0 . \tag{3}$$

Vastavalt igale indeksile n leiduvad täisarvud $P(n)$ ja $Q(n)$ nii, et

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{i=1}^{P(n)} r_{p_i} + \sum_{i=1}^{Q(n)} r_{q_i} , \qquad P(n) + Q(n) = n .$$

Tähistame

$$\varepsilon_\nu = \max_{\mu \geq \nu} |r_\mu| \; ; \quad \varepsilon_\nu \to 0 .$$

Järjestame nüüd jada $\{r_{p_i}\}$ monotoonselt, ning tähistame saadud ümberjärjestuse sümboliga $\{r_i^+\}$. Seega

$$r_i^+ \geq r_{i+1}^+ . \tag{4}$$

Tõestame nüüd mõned edaspidiseks vajalikud lemmad.

<u>Lemma 1</u>. Kui $\sum_i r_{p_i} = \infty$, siis leidub vastavalt igale negatiivsele reaalarvule c $(c < 0)$ substitutsioon $\mathcal{K}_c$ nii, et

$$\mathcal{R}^{\mathcal{K}_c} = c .$$

T õ e s t u s. Vastavalt igale negatiivsele arvule c leidub selline indeks n_1, et

---

[1] Vt. viide lk. 2

$$\sum_{i=1}^{P(n_1)} r_{p_i} + c = \eta_1 \; ; \; 0 \le \eta_1 < \varepsilon_{n_1} .$$

Indeksi n_1 määrame seosest

$$r^+_{m_1+1} < \frac{\varepsilon_{n_1}}{P(n_1)} \le r^+_{m_1} ,$$

ning defineerime nüüd ümberjärjestuse

$$\sum_i r_{k^c(i)} \qquad (5)$$

esimesed n_1 liiget:

$$r_{k(p_i)} = r^+_{m_1+i} \quad (i = 1, 2, \dots, P(n_1)) \; ; \; r_{k(q_i)} = r_{q_i} \; (i = 1, 2, \dots, Q(n_1)).$$

Nagu näha, jätsime kõik mittepositiivsed realiikmed oma endistele kohtadele, sarnaselt Sierpinski tõestusele Riemanni teoreemi täienduseks [71].

Saame nii summa, mille tähistame sümboliga ξ_1:

$$\sum_{i=1}^{P(n_1)} r^+_{m_1+i} = \xi_1 \; ; \quad 0 < \xi_1 \le P(n_1)\, r^+_{m_1+1} < \varepsilon_{n_1} ,$$

ja vahe δ_1:

$$\delta_1 = \sum_{i=1}^{n_1} \rho_1^{k} - c = \sum_{i=1}^{P(n_1)} r_{k(p_i)} - \sum_{i=1}^{P(n_1)} r_{p_i} - c = \xi_1 - (\eta_1 - c) - c = \xi_1 - \eta_1 .$$

Nii saame

$$|\delta_1| < \varepsilon_{n_1} .$$

Olgu[1] mingil viisil määratud indeksid $n_1, \dots, n_k$ ja neile vastavad ümberjärjestuse (4) liikmed nii, et kehtiks võiratus

$$|\delta_k| \le \varepsilon_{n_k} \qquad \text{, kus} \quad \delta_k = \sum_{i=1}^{n_k} \rho_i^{k} - c . \qquad (6)$$

Näitame, et siis saab määrata indeksi n_{k+1} ja realiikmeid $r_{k(n_k+1)}, \dots, r_{k(n_{k+1})}$ nii, et seosed (5) jääksid kehtima ka indeksi k asendamisel indeksiga $k+1$.

Tähistame

$$\bar{r}_k = \max_{r_i^+ \in \{r_{k(i)}\}_{i=1}^{n_k}} r_i^+ , \qquad (7)$$

---

[1] Vt. (1.4.1), (1.4.3)

s.o. jada $\{r_i^+\}$ maksimaalne /vähima indeksiga / element, mis ei sisaldu rea (4) liikmete $r_{K(1)}, \dots, r_{K(n_K)}$ hulgas.

Defineerime siis indeksi n_{K+1} nii, et kehtiks seos

$$\sum_{i=P(n_K)+1}^{P(n_{K+1})} r_{pi} - (\bar{r}_K + \delta_K) = \eta_{K+1}, \quad 0 \le \eta_{K+1} < \varepsilon_{n_{K+1}}, \tag{8}$$

ning tähistame seejärel

$$\mathcal{G}_{K+1} = P(n_{K+1}) - P(n_K) - 1; \tag{9}$$

indeksi m'_{K+1} määrame aga nii, et oleksid rahuldatud võrratused

$$r^+_{m'_{K+1}} < \frac{\varepsilon_{n_{K+1}}}{\mathcal{G}_{K+1}} \le r^+_{m'_K}. \tag{10}$$

Indeksi m'_{K+1} põhjal saame määrata ka m_{K+1}:

$$m_{K+1} = \max(m'_{K+1}, m_K + \mathcal{G}_K).$$

Tähistades

$$\sum_{i=1}^{\mathcal{G}_{K+1}} r_{m_{K+1}+i} = \xi_{K+1},$$

saame võrratuse

$$0 < \xi_{K+1} < \varepsilon_{n_{K+1}}.$$

Rea (4) järgmised $n_{K+1} - n_K$ liiget määrame järgnevalt:

$$\begin{aligned} &r_{K[P(n_K)+1]} = \bar{r}_K, \\ &r_{K[P(n_K)+i+1]} = r^+_{m_{K+1}+i} \quad (i = 1, 2, \dots, \mathcal{G}_{K+1}), \\ &r_{K(q_i)} = r_{q_i} \qquad (i = Q(n_K)+1, \dots, Q(n_{K+1})). \end{aligned} \tag{11}$$

Niiviisi saame defineerida δ_{K+1}:

$$\delta_{K+1} = \sum_{i=1}^{n_{K+1}} s_i^K - c = \delta_K + \sum_{i=P(n_K)+1}^{P(n_{K+1})} r_{K(p_i)} - \sum_{i=P(\eta_K)+1}^{P(n_{K+1})} r_{p_i};$$

kust järeldub

$$\delta_{k+1} = \delta_k + (\bar{r}_k + \xi_{k+1}) - (\eta_{k+1} + \bar{r}_k + \delta_k) = \xi_k - \eta_{k+1},$$

s.t.,

$$|\delta_{k+1}| < \varepsilon_{n_k+1},$$

ning seega ongi tõestatud seose (5) kehtivus indeksi k asendamisel indeksiga $k+1$.

Valime nüüd suvalise indeksi ν, $n_k \leq \nu < n_{k+1}$.

Vaatleme vahet

$$\sum_{i=1}^{\nu} \rho_i^{k} - c = \vartheta_\nu.$$

Kuna kõik liikmed r_{pi} on positiivsed, võime kirjutada

$$|\vartheta_\nu| \leq \left|\sum_{i=1}^{n_k} \rho_i^{k} - c\right| + \left|\sum_{i=p(n_k)+1}^{p(n_{k+1})} r_{K(i)}\right| + \left|\sum_{i=p(n_k)+1}^{p(n_k+1)} r_i\right| \leq$$

$$\leq |\delta_k| + \bar{r}_k + \xi_{k+1} + \eta_{k+1} + \bar{r}_k + |\delta_k|,$$

kust tuleneb võrratus

$$|\vartheta_\nu| \leq 2\bar{r}_k + 4\varepsilon_{n_k};$$

et $\bar{r}_k \to 0$ k tõkestamatul kasvamise eelduse (2) tõttu, on õige

$$\vartheta_\nu \to 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots), \tag{12}$$

ning meie lemma on tõestatud.

Lemma 2. Kui $\sum_i r_{pi} = \infty$ ja $\sum_i r_{qi} = Q$ /vt. valem (3)/, siis leidub vastavalt igale positiivsele arvule b selline A - summeeruv ümberjärjestus

$$\sum_i r_{K_b(i)},$$

et[1]

---

[1] Vt. valemit (1.2.10)

$$A\left\{\sum_i r_{\mathcal{K}_\delta(i)}\right\} = \delta + ab.$$

T õ e s t u s. Defineerime read $\sum_i r'_{p_i}$ ja $\sum_i r'_{q_i}$ järgnevalt:

$$\begin{cases} r'_{p_i} = r_i, & r_i > 0, \quad r'_{p_i} = 0, \quad r_i \leq 0, \\ r'_{q_i} = r_i, & r_i < 0, \quad r'_{q_i} = 0, \quad r_i \geq 0. \end{cases} \tag{13}$$

Siis avaldub iga reaalige r_i summana

$$r_i = r'_{p_i} + r'_{q_i},$$

kuna summade vahel kehtivad järgmised võrdused:[1]

$$\sum_{i=1}^{n} r'_{p_i} = \sum_{i=1}^{P(n)} r_{p_i}, \quad \sum_{i=1}^{n} r'_{q_i} = \sum_{i=1}^{Q(n)} r_{q_i},$$

kusjuures iga nullist erineva reaalliikme r'_{p_i} korral on õige seos

$$r_{p_{\vartheta(i)}} = r'_{p_i}.$$

Read $\sum_i r'_{p_i}$ ja $\sum_i r'_{q_i}$ on mõlemad A - summeeruvad

$$A\left\{\sum_i r'_{q_i}\right\} = aQ; \quad A\left\{\sum_i r'_{p_i}\right\} = A\left\{\sum_i r_i\right\} - A\left\{\sum_i r'_{q_i}\right\} = \delta - aQ = \delta^+. \tag{14}$$

Defineerime kõigepealt sobiva substitutsiooni rea $\sum_i r_{p_i}$ jaoks. Näitame, et iga δ puhul, $0 < \delta < 1$, leidub selline substitutsioon $\mathcal{K}_\delta$, et kehtivad võrdused

$$\sum_{i=1}^{P(\nu)} r_{\mathcal{K}_\delta(p_i)} = \delta \sum_{i=1}^{P(\nu)} r_{p_i} + \vartheta'_\nu, \quad \vartheta'_\nu \to 0, \quad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{15}$$

Indeksi n_1 määrame nii, et vahe

$$\sum_{i=1}^{P(n_1)} r_{p_i} - \frac{1}{\delta} r_{n_1}^+ = \eta'_1$$

rahuldaks võrratust

$$0 \leq \eta'_1 < \varepsilon_{n_1}.$$

Siin on t_1^+ defineeritud seostega (4), ning indeks m_1 valitud nii, et

$$r_{m_1+1}^+ < \frac{\varepsilon_{n_1}}{P(n_1)-1} \leq r_{m_1}^+.$$

---

[1] Vt. seost (3).

Nüüd võime defineerida ümberjärjestuse $\sum_i r_{K_\delta(i)}$ liikmed järgnevalt:

$$r_{K_\delta(\nu_1)}, r_{K_\delta(\nu_2)}, \dots, r_{K_\delta(\nu_{P(\nu_1)})}$$

$$r_{K_\delta(\nu_1)} = r^+_{\nu_1},$$

$$r_{K_\delta(\nu_1+i)} = r^+_{\nu_1+i} \quad (i = 1, 2, \dots, P(\nu_1)-1).$$

Tähistame

$$\sum_{i=1}^{P(\nu_1)-1} r^+_{\nu_1+1} = \xi_1'.$$

Kuna kehtib võrratus $0 < \xi_1' < \varepsilon_{\nu_1}$, siis saame avaldada suuruse δ_1' järgnevalt

$$\delta_1' = \sum_{i=1}^{P(\nu_1)} r_{K_\delta(\nu_i)} - \delta \sum_{i=1}^{P(\nu_1)} r_{\nu_i} = r^+_{\nu_1} + \xi_1' - \delta\left(\frac{1}{\delta} r^+_{\nu_1} + \eta_1'\right) = \xi_1' - \delta\eta_1',$$

ja siit

$$|\delta_1'| < \varepsilon_{\nu_1}.$$

Tõestuskäigu jätkamiseks teeme samuti kui lemmas 1 kindlaks, et kui on defineeritud indeksid $\nu_1, \dots, \nu_k$ ning rea liikmed $r_{K_\delta(1)}, r_{K_\delta(2)}, \dots, r_{K_\delta(\nu_k)}$ nii, et kehtib võrratus

$$|\delta_k'| < \varepsilon_{\nu_k},$$

kus

$$\delta_k' = \sum_{i=1}^{P(\nu_k)} r_{K_\delta(\nu_i)} - \delta \sum_{i=1}^{P(\nu_k)} r_{\nu_i}, \tag{16}$$

siis järgnevad liikmed

$$r_{K_\delta(\nu_{P(\nu_k)+1})}, \dots, r_{K_\delta(\nu_{P(\nu_{k+1})})}$$

saab määrata nii, et seos (16) säilib ka indeksi k asendamisel indeksiga $k+1$.

Selleks määrame $\bar{r}_k$ seosest (7), võttes vaid liikmete $r_{K(1)}, \dots, r_{K(\nu_k)}$ asemele liikmed $r_{K_\delta(\nu_1)}, \dots, r_{K_\delta[\nu_{P(\nu_k)}]}$,

aga indeksi n_{k+1} defineerime nii, et on õiged järgnevad seosed

$$\sum_{i=P(n_k)+1}^{P(n_{k+1})} r_{\mu_i} - \frac{1}{\delta}(\bar{r}_k + \delta_k') = \eta_{k+1}' ; \quad 0 \le \eta_{k+1}' < \varepsilon_{n_{k+1}} ; \tag{17}$$

seejärel defineerime suurused ϑ_{k+1}, $r^+_{n_{k+1}}$ ja vastavalt määratud suurustele ka ümberjärjestuse $\sum_i r_{K_\delta(\mu_i)}$ liikmed $r_{K_\delta(\mu_{P(n_k)+1})}, \dots, r_{K_\delta(\mu_{P(n_{k+1})})}$ valemitest (11), (9) ja (10). Kasutades valemeid (9)–(11) ja (16), saame suuruse δ_{k+1}' jaoks järgmise hinnangu:

$$\delta_{k+1}' = \sum_{i=1}^{P(n_{k+1})} r_{K_\delta(\mu_i)} - \delta \sum_{i=1}^{P(n_{k+1})} r_{\mu_i} = \delta_k' + \bar{r}_k + \xi_{k+1} - \delta\left(\frac{1}{\delta}\bar{r}_k + \frac{1}{\delta}\delta_k' + \eta_{k+1}'\right),$$

kust järeldubki võrratuse (16) õigsus indeksi k asendamisel indeksiga $k+1$.

Seos (15) tõestatakse sarnaselt seosega (12).

3. Olgu meil antud suvaline positiivne arv h. Valime mingi arvu $\delta\,(0<\delta<1)$ ning defineerime sellise substitutsiooni K_δ, et oleks täidetud (15).

Tähistame sümboliga h' järgneva avaldise[1]

$$h' = h + \frac{1-\delta}{a}\,\delta^+. \tag{18}$$

Vaatleme kõigepealt juhtu, kus $h' > 0$.

Defineerime sellise substitutsiooni $\bar{K}_h$, et

$$\sum_{i=1}^{P(\nu)} r_{\bar{K}_h(\mu_i)} - \sum_{i=1}^{P(\nu)} r_{K_\delta(\mu_i)} - h' = \vartheta_\nu'', \qquad \text{kusjuures } \vartheta_\nu'' \to 0 \ (\nu = 1,2,\dots).$$

Selleks määrame kõigepealt sellise indeksi n_1, et kehtiksid seosed

$$\sum_{i=1}^{P(n_1)} r_{\mu_i} - \sum_{i=1}^{P(n_1)} r_{K_\delta(\mu_i)} - h' = \eta_1'', \quad 0 \le \eta_1'' < \varepsilon_{n_1},$$

---

[1] Vt. seost (14)

seejärel defineerime realiikmed $r\bar{\mathcal{K}}_\mu(\mu_i)$ seosega

$$r\bar{\mathcal{K}}_\mu(\mu_i) = r_{\mu_i} \quad (i = 1, 2, \dots, P(\nu_1)).$$

Tähistanud

$$\sum_{i=1}^{P(\nu_k)} r\bar{\mathcal{K}}_\mu(\mu_i) - \sum_{i=1}^{P(\nu_k)} r\mathcal{K}_\sigma(\mu_i) - b' = \delta_k'' , \quad \delta_1'' = \eta_1'' ,$$

jätkame ümberjärjestuse $\sum_i r\bar{\mathcal{K}}_\mu(\mu_i)$ liikmete defineerimist valemite (6) - (9) ja (10) kohaselt, sarnaselt lemmasl esitatud konstruktsioonidega, asendades vaid valemites esinevad suurused δ_k, η_k ja realiikmed r_{μ_i} vastavalt suurustega δ_k'', η_k'' ja realiikmetega $r\mathcal{K}_\sigma(\mu_i)$.

Untlasi on õige ka seos

$$\sum_{i=1}^{P(\nu)} r\bar{\mathcal{K}}_\mu(\mu_i) - \sum_{i=1}^{P(\nu)} r\mathcal{K}_\sigma(\mu_i) - b' = \vartheta_\nu'' \qquad (19)$$

Sellega on defineeritud substitutsioon $\bar{\mathcal{K}}_\mu$ rea $\sum_i r'_{\mu_i}$ jaoks. Substitutsiooni $\mathcal{K}_\mu$ defineerime nii, et kõik rea (1) negatiivsed liikmed jätame nende vanadele kohtadele, kuna rea (1) positiivsete liikmete jadale, mis langeb ühte rea $\sum_i r'_{\mu_i}$ nullist erinevate, s.o. positiivsete liikmete jadaga, rakendamine substitutsiooni $\bar{\mathcal{K}}_\mu$.

Seega oleks siis substitutsiooni $\mathcal{K}_\mu$ definitsioon järgmine

$$r\mathcal{K}_\mu(i) = r_i, \qquad r_i \le 0,$$

$$r\mathcal{K}_\mu(i) = r\bar{\mathcal{K}}_\mu(\mu_{P(i)}), \quad r_i > 0.$$

Siis aga järeldub valemitest (13), (15) ja (19):

$$\sum_{i=1}^{\nu} r\mathcal{K}_\mu(i) = \sum_{i=1}^{\nu} r'\mathcal{K}_\mu(\mu_i) + \sum_{i=1}^{\nu} r'\mathcal{K}_\mu(q_i) = \sum_{i=1}^{P(\nu)} r\bar{\mathcal{K}}_\mu(\mu_i) + \sum_{i=1}^{\nu} r_{q_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{P(\nu)} r\mathcal{K}_\sigma(\mu_i) + b' + \vartheta_\nu'' + \sum_{i=1}^{\nu} r'_{q_i} = \delta \sum_{i=1}^{P(\nu)} r_{\mu_i} + \vartheta_\nu' + b' + \vartheta_\nu'' + \sum_{i=1}^{\nu} r_{q_i} =$$

$$= \delta \sum_{i=1}^{\nu} r'_{\mu_i} + \sum_{i=1}^{\nu} r'_{q_i} + b' + \vartheta_\nu' + \vartheta_\nu'' \quad (\nu = 1, 2, \dots),$$

Vt. (1, 3).

kust valemite (14,18) põhjal tuleneb

$$A\{\sum_i r_{K_b(i)}\} = \delta A\{\sum_i r'_{p_i}\} + A\{\sum_i r'_{q_i}\} + ah' = \delta\delta^+ + aQ +$$

$$+ a(b + \frac{1-\delta}{a}\delta^+) = \delta + ab,$$

je meie lemma on tõestatud juhuks $b' > 0$.

5. Juhul kui $b' < 0$,moodustame reale $\sum_i r_{K_\delta(p_i)}$ lemma 1 põhjal sellise parandrea $\sum_i \rho_i^{K_{b'}}$,et

$$\sum_i \rho_i^{K_{b'}} = b'.$$

Saame sel juhul seose

$$\sum_{i=1}^{P(\nu)} r_{K_{b'}(p_i)} = \sum_{i=1}^{P(\nu)} r_{K_\delta(p_i)} + b' + \vartheta_\nu , \quad \vartheta_\nu \to 0,$$

mis langeb ühte valemiga (19) ; edasine tõestuskäik on mõlema juhu jaoks ühine, kusjuures juhtum $b' = 0$ on triviaalne: siis $K_b = K_\delta$.

Seega on lemma 2 tõestatud.

Lemma 3 .Tarvilik tingimus selleks, et rea (1) substitutsioonile K vastava parandrea

$$\sum_i \rho_i^K$$

summa erineks nullist, on substitutsiooni K lõpmatukordsus.

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et substitutsioon K on m -kordne.

Tähistame $\max_{\nu \geq n} |r_{K^{-1}(\nu)}, r_\nu, r_{K(\nu)}| = \varepsilon_n$.

Seose (2) põhjal $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

Kuna $t(n) \leq n$ iga n korral /vt. (1.1.13) , (1.1.14) /, siis järeldub valemist (1.4.4)

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \rho_i^K\right| = \left|\sum_{i=1}^{t_n} (r_{m_i} - r_{e_i})\right| \leq 2m\varepsilon_n,$$

ja seega $\sum_i \rho_i^{\varkappa} = 0$, aga siis ka menetluse A multiplikatiivsuse tõttu

$$A\{\sum_i \rho_i^{\varkappa}\} = 0,$$

ja meie lemma ongi tõestatud.

Lemmade 1-3 põhjal tõestame järgneva teoreemi:

T e o r e e m 1. Tingimust (2) rahuldava absoluutselt mittekoonduva rea (1) A-summade piirkonnaks on arvsirge, kusjuures rea A-summa muutub ainult lõpmatukordse substitutsiooni toimel.

T õ e s t u s. Vastleme eraldi järgnevaid juhtumeid

1. $\sum_i v_{p_i} = \infty$; $\sum_i v_{q_i} = -\infty$.

Olgu meil antud suvaline reaalarv γ. Kui $\frac{\gamma-\sigma}{a} < 0$, siis rakendame lemmat 1, mille põhjal leidub vastavalt igale negatiivsele arvule c parandrida $\sum_i \rho_i^{\varkappa_c} = c$.

Kui $\frac{\gamma-\sigma}{a} > 0$, saame rakendada sama lemmat, kasutades vaid osajada $\sum_i v_{p_i}$ asemel osajada $\sum_i v_{q_i}$, ning seega saame vastavalt igale positiivsele arvule h konstrueerida parandrea $\sum_i \rho_i^{\varkappa_h} = h$. Juhul, kui $\frac{\gamma-\sigma}{a} = 0$, $\gamma = \sigma$ ja $\gamma \in S_A$ eelduse põhjal.

Seega vastab tõesti igale reaalarvule γ selline substitutsioon $\varkappa^{\gamma}$, et $A\{\sum_i v_{\varkappa^{\gamma}(i)}\} = \sigma + a\left(\frac{\gamma-\sigma}{a}\right) = \gamma$.

2. $\sum_i v_{p_i} = \infty$, $\sum_i v_{q_i} = Q$.

Kui $\frac{\gamma-\sigma}{a} < 0$, rakendame lemmat 1.

Kui $\frac{\gamma-\sigma}{a} > 0$, rakendame lemmat 2.

Ülejäänud mõttekäik on analoogiline juhuga 1.

3. $\sum_i \varkappa_{\mu_i} = P$, $\sum_i \varkappa_{q_i} = -\infty$. Tõestus samasugune kui juhul 2.

Sellega ongi ammendatud kõik ridade (1), (2) juhud kus rida (1) ei koondu absoluutselt.

Teoreemi teine väide tuleneb vahetult lemmast 3.

Järeldus 1. Kui rea (1) liikmete jada sisaldab osajada $\{\varkappa_{x_i}\}$, mis rahuldab tingimusi

$$\sum_i \varkappa_{x_i} = \infty\,, \quad \varkappa_{x_i} \to 0,$$

ning $\{\varkappa_{\mu_i}\}$, mis rahuldab tingimusi

$$\sum_i \varkappa_{\mu_i} = -\infty\,, \quad \varkappa_{\mu_i} \to 0,$$

siis iga multiplikatiivse menetluse A korral on selle rea A-summade piirkonnaks arvsirge.

Järeldus 2. Kui rea (1) liikmete jada sisaldab sellist osajada $\{\varkappa_{\mu_i}\}$, et $\sum_i \varkappa_{\mu_i} = \infty$, $\varkappa_{\mu_i} \to 0$, ja rida $\sum_\nu \varkappa'_\nu$ on A-summeeruv, kus $\varkappa'_\nu = \varkappa_\nu$, kui $\varkappa_\nu \in \{\varkappa_{\mu_i}\}_{i=1}^{\infty}$ ja $\varkappa'_\nu = 0$, kui $\varkappa_\nu \bar{\in} \{\varkappa_{\mu_i}\}_{i=1}^{\infty}$, siis selle rea A-summade piirkonnaks on arvsirge.

Järeldus 3. Kui rea (1) liikmete jada sisaldab osajada $\{\varkappa_{\mu_i}\}$, $\sum_i |\varkappa_{\nu_i}| = \infty$, $\varkappa_{\nu_i} \to 0$, siis selle rea A-summade piirkond sisaldab poolsirget.

Järeldus 4. Kui rea (1) liikmed avalduvad kujul $\varkappa_i = R + \varkappa'_i$, $\varkappa'_i \to 0$, ja leiduvad sellised jada $\{\varkappa'_i\}$ osajadad $\{\varkappa'_{\mu_i}\}$ ja $\{\varkappa'_{x_i}\}$, et $\sum_i \varkappa_{\mu'_i} = \infty$, $\sum_i \varkappa'_{x_i} = -\infty$, siis rea (1) summade piirkond on arvsirge.

Järeldus 5. Kui rea (1) liikmete jada sisaldab osajada $\{\varkappa_{x_i}\}$,

mis avaldub kujul

$$r_{x_i} = R + r'_{x_i}\,, \quad r'_{x_i} \to 0\,, \quad \sum_i |r'_{x_i}| = 0\,,$$

siis rea (1) A- summade piirkond sisaldab poolsirget $(-\infty, \sigma]$ või $[\sigma, \infty)$.

Järeldus 6. Olgu $S_A(\sum_i r_i) = S_1$ ning koondugu rida $\sum_i \varepsilon_i$ absoluutselt, $\sum_i \varepsilon_i = \eta$. Siis rea $\sum_i r_i + \varepsilon_i$ summade piirkond avaldub järgnevalt

$$S_A(\sum_i r_i) = S_1 + a\eta = \{x + a\eta : x \in S_1\}.$$

§ 2. Võre $(\rho - \tau)$- rea summade piirkonnas

Käesolevas paragrahvis vaadeldavale ridade tüübile esitame erilaadse kitsenduse: sisaldagu uuritava rea liikmete jada konstantseid osajadasid.

Definitsioon 1. Nimetame rida

$$\sum_i r_i \tag{1}$$

$(\rho - \tau)$-reaks, kui leiduvad sellised indeksite jadad $\{j_i\}$ ja $\{l_i\}$, et kehtivad seosed:

$$j_i < l_i < j_{i+1} < \dots\,, \tag{2}$$

$$r_{j_i} = \tau\,, \quad r_{l_i} = \rho \quad (i = 1, 2, \dots). \tag{3}$$

Käesoleva / aga samuti ka järgnevate - 3, 4, 5, 6. paragrahvi vältel loeme iga rida (1) , mille kohta pole midagi

muud märgitud, $(\rho-\bar{\tau})$- reaks.

Niisugune tingimus on püstitatud selle pärast, et iga kahte erinevat konstantide jada sisaldava liikmetejadaga A-summeeruva rea summade piirkond sisaldab alati "vöret", s.o. hulka kujuga[1]

$$\{\sigma + ma(\rho-\bar{\tau}) : m \in S\} \tag{4}$$

/vt. valemeid (1.2.7) ja (1.2.10); märgitud tulemus on suhteliselt kergesti saavutatav, ja jääb aluseks kõigiks edaspidisteks uurimusteks tõkestatud liikmetejadaga ridade jaoks. Tõestame [illegible] teoreemi.

T e o r e e m 1. Vastavalt igale $(\rho-\bar{\tau})$reale (1), multiplikatiivsele menetlusele A ja täisarvule m leidub selline substitutsioon $\mathcal{K}^{(m)}$, et

$$A\{\sum_i r_{\mathcal{K}^{(m)}(i)}\} = \sigma + am(\rho-\bar{\tau}). \tag{5}$$

T õ e s t u s. Olgu $m>0$. Defineerime substitutsiooni $\mathcal{K}^{(m)}$ järgnevalt

$$\begin{cases} \mathcal{K}^{(m)}(l_i) = \begin{cases} j_i & (i=1,2,\dots,m), \\ l_{i-m} & (i=m+1,\dots), \end{cases} \\ \mathcal{K}^{(m)}(j_i) = j_{i+m} \quad (i=1,2,\dots). \end{cases} \tag{6}$$

Sellest definitsioonist järeldub, et

$$\sum_{i=1}^{n} r_{\mathcal{K}^{(m)}(i)} = s_m + m(\rho-\bar{\tau}) \quad \text{, kui } n \geq l_m;$$

$$A\{\sum_i r_{\mathcal{K}^{(m)}(i)}\} = \lim_{n\to\infty}\Big\{\sum_{\nu=1}^{l_m-1} a_{n\nu}\sum_{i=1}^{\nu} r_{\mathcal{K}^{(m)}(i)} + \sum_{\nu=l_m}^{\infty} a_{n\nu}[s_\nu + m(\rho-\bar{\tau})]\Big\} =$$

---

1 Seda on märkinud juba Lorentz ja Zeller [52] regulaarse menetluse A puhul, kuid tõestuseta. Kuna tõestus pole pikk, esitame selle siin.

$$= \sigma + a_n(\rho - \tau).$$

Seega on võrdus (5) tõestatud positiivse täisarvu n jaoks.

Negatiivse n jaoks saame kasutada samuti valemeid (6), vahetades neis omavahel ümber jadad $\{j_i\}$ ja $\{l_i\}$. Võttes siis n asemele $n' = -n$, saame:

$$A\left\{\sum_i r_{l_i}^{(n)}(i)\right\} = \sigma + a_{n'}(\tau - \rho) = \sigma + a_n(\rho - \tau).$$

Seega on teoreem täielikult tõestatud. Teoreemi 1 illustreerivad näited 1-12 /§ 10./

Teoreemist 1 tulenevad vahetult järeldused:

Järeldus 1. Substitutsioon $\mathcal{L}^{(n)}$ on n-korrane.

Järeldus 2. $(\rho - \tau)$-rea (1) A-summade piirkond multiplikatiivse menetluse A puhul sisaldub alati "võret", s.o. hulka

$$\{\sigma + a_n(\rho - \tau) : n \in \mathfrak{I}\}. \qquad (7)$$

Kasutades § 1 tulemusi, saame tõestada järgneva teoreemi.

Teoreem 2. Leidugu A-summeeruva rea (1) liikmete jadal osajadad $\{r_{l_i}\}$ ja $\{r_{j_i}\}$ nii, et on täidetud tingimus (2) ja tingimus

$$\begin{cases} r_{j_i} = \rho + \varepsilon_i, \\ r_{l_i} = \tau + \varepsilon'_i, \end{cases}$$

kusjuures

$$\sum_i (|\varepsilon_i| + |\varepsilon'_i|) < \infty.$$

Siis rea (1) summade piirkond sisaldab võret (4).[1]

---

[1] See teoreem täpsustab veidi üht tulemust töös [27]. Nimelt jaotavad Bagemihl ja Erdös read klassidesse, eraldades read, kus $r_i \to \infty$, ning read, kus $|r_i| > \delta$, kui $r_i \neq 0$.
Viimasesse klassi sobivad aga sisuliselt ka read, mis on esitatavad kujul $r_i + \varepsilon_i$, kus $\sum |\varepsilon_i| < \infty$, kuid $|r_i| \geq \delta$, kui $r_i \neq 0$, sest ka nende summade piirkonnaks võib olla "võre". Sellistele ridadele aga autorid ei ole tähelepanu osutanud.

T õ e s t u s. Olgu meil antud mingi täisarv n. Defineerime eeskirja (4) kohaselt substitutsiooni $\mathcal{K}^{(n)}$.

Moodustame read $\sum_i r_i'$ ja $\sum_i r_i''$:

$$r'_{j_i} = \rho_i,\ r'_{l_i} = \bar{c},\ r'_\nu = r_\nu,\ \nu \neq j_i,\ l_i \quad (i = 1,2,\dots),$$

$$r''_\nu = r_\nu - r'_\nu,\ \text{s.t.}\ r''_\nu = 0,\ \nu \neq j_i, l_i,$$

$$r''_{j_i} = \varepsilon_i,\ r''_{l_i} = \varepsilon'_i.$$

Siis

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{i=1}^{n} r_i' + \sum_{i=1}^{n} r_i'', \tag{8}$$

ja

$$A\left\{\sum_i r_{\mathcal{K}(i)}\right\} = A\left\{\sum_i r'_{\mathcal{K}(i)}\right\} + A\left\{\sum_i r_i''\right\},$$

kui vaid kõik read on A-summeeruvad.

Rakendame reale (8) substitutsiooni $\mathcal{K}^{(n)}$ ja summeerime meetodi A abil. Saame siis

$$A\left\{\sum_i r'_{\mathcal{K}^{(n)}(i)}\right\} = A\left\{\sum_i r'_{\mathcal{K}^{(n)}(i)}\right\} + A\left\{\sum_i r''_{\mathcal{K}^{(n)}(i)}\right\}.$$

Rida $\sum_i r_i'$ on $(\rho - \bar{c})$-rida. Eelmise teoreemi põhjal saame

$$A\left\{\sum_i r'_{\mathcal{K}^{(n)}(i)}\right\} = A\left\{\sum_i r_i'\right\} + n a (\rho - \bar{c}).$$

Kuna rida $\sum_i r_i''$ on absoluutselt koonduv, kehtib seos

$$A\left\{\sum_i r''_{\mathcal{K}^{(n)}(i)}\right\} = A\left\{\sum_i r_i''\right\},$$

ja seega saame

$$A\left\{\sum_i r_{\mathcal{K}^{(n)}(i)}\right\} = A\left\{\sum_i r_i\right\} + n a (\rho - \bar{c}) + A\left\{\sum_i r_i''\right\} = A\left\{\sum_i r_i\right\} + n a (\rho - \bar{c}),$$

ja meie teoreem on tõestatud.

§ 3. $(\rho-\bar{c})$ - r e a d , m i l l e p u h u l s u m m a d e p i i r k o n n a k s o n a r v s i r g e

Käesolevas paragrahvis vaatleme, milistel eeldustel menetluse A jaoks on $(\rho-\bar{c})$ rea

$$\sum_i r_i , \qquad (1)$$

/mille liikmete kohta me midagi muud ei eelda/ summade piirkonnaks arvsirge.

Kuna $(\rho-\bar{c})$-rea summade piirkond sisaldab alati võret (2.4), on selleks, et summade piirkond oleks arvsirge, piisav, kui summade piirkond sisaldab veel lõiku $[0, a(\rho-\bar{c})]$, kusjuures iga selle lõigu punkt olgu saavutatav reaaliikmete ρ ja $\bar{c}$ omavaheliste ümberpaigutuse tulemusena.

Jadad e (vt. I, § 3), kus $g_k \to \rho$, $\bar{g}_k \to \bar{c}$ $(k = 1,2,\dots)$, on γ-jadad rea (1) suhtes, ning nende jaoks on rakendatavad teoreem 1.4.1 ja järeldused 1.4.1 - 1.4.4.

Näeme, et piisav tingimus selleks, et rea (1) A-summade piirkond sisaldaks lõiku $[0, a(\rho-\bar{c})]$, on vastavalt igale reaalarvule δ $(0 < \delta < 1)$ sellise jada e^δ eksisteerimine, et

$$\sum_i r_{k e^\delta(i)} \le \sigma + a\delta(\rho-\bar{c}).$$

Lähtudes sellest tõsiasjast tõestamegi järgneva teoreemi.

T e o r e e m 1. Piisavad tingimused selleks, et $(\rho-\bar{c})$-rea (1) summade piirkonnaks $S_A\left(\sum_i r_i\right)$ oleks multiplikatiivse menetluse A puhul arvsirge, on järgnevad:

$$1^{\circ}\quad \frac{\sum_{\nu=j_{k+1}}^{l_{k+1}-1} a_{n\nu}}{\sum_{\nu=j_{k+1}}^{l_{k+1}-1} a_{n\nu}} \le \frac{\sum_{\nu=l_k}^{j_{k+1}-1} a_{n\nu}}{\sum_{\nu=l_k}^{j_{k+1}-1} a_{n\nu}} \le \frac{\sum_{\nu=j_k}^{l_k-1} a_{n\nu}}{\sum_{\nu=j_k}^{l_k-1} a_{n\nu}} \le \frac{\sum_{\nu=1}^{\mu} a_{n\nu}}{\sum_{\nu=1}^{\mu} a_{n\nu}} \le K, \quad (2)$$

$(n \le m)$,

kus $\mu = j_1 - 1$,kui $j_1 > 1$; $\mu = l_1 - 1$, r kui $j_1 = 1$,

ja

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{\nu=j_k}^{\infty} |a_{n\nu}| = 0 \qquad \text{,kus} \quad n = j_k, \dots, l_{k+1}. \quad (3)$$

T ö e s t u s. Tõestuseks on vastavalt etteantud suurusele $\delta\ (0<\delta<1)$ sellise $(\rho-\bar{c})$-jada e^{δ} konstrueerimine, et

$$\alpha[A^e] = a\delta. \quad (4)$$

Selleks konstrueerime kõigepealt sellise $(\rho-\bar{c})$ -jada e , et

$$\begin{cases} \sum_{\nu=1}^{h_k} a^e_{h_k\nu} = a\delta + o(1), \\ \sum_{\nu=1}^{\bar{h}_k} a^e_{\bar{h}_k\nu} = a\delta + o(1), \end{cases} \quad (5)$$

seejärel aga näidatakse, et seostest (5) järeldub

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} a^e_{n\nu} = a\delta, \quad (6)$$

aga ühtlasi seose (3) põhjal

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} a^e_{n\nu} = a\delta. \quad (7)$$

Tõestame kõigepealt teoreemi erijuhul, kui kehtib tingimus

$$\frac{\sum_{\nu=j_k}^{l_k-1} a_{n\nu}}{\sum_{\nu=j_k}^{l_k-1} a_{n\nu}} = \frac{\sum_{\nu=l_k}^{j_{k+1}-1} a_{n\nu}}{\sum_{\nu=l_k}^{j_{k+1}-1} a_{n\nu}} = \frac{a_{n\nu_1}}{a_{n\nu_1}} \le 1 \quad (8)$$

$(1 < j_{k+1}-1 \le n \le m)$.

Tõestuse teostame matemaatilise induktsiooni meetodil.

Olgu meil antud mingi $\delta, 0 < \delta < 1$, ning mingil viisil määratud $g_1, h_1, \dots, g_\kappa$ nii, et

$$\sum_{\nu=1}^{h_\kappa} a^e_{\bar{h}_\kappa, \nu} = \sum_{\nu=1}^{\kappa-1} \sum_{i=g_\nu}^{h_\nu} a_{\bar{h}_\kappa, i} \leq a\delta. \tag{9}$$

/Kui me tähistame $\sum_{\nu=1}^{h_0} a_{\bar{h}_0, \nu} = 0$, mis ei ole meie definitsiooniga vastuolus, kuna indeks h_0 ei ole seni määratud, kehtib seos (9) ka κ väärtusel 1/.

Määrame nüüd indeksi h_κ nii, et kehtivad võrratused

$$\sum_{\nu=1}^{h_\kappa} a^e_{\bar{h}_\kappa, \nu} = \sum_{\nu=1}^{\kappa} \sum_{i=g_\nu}^{h_\nu} a_{\bar{h}_\kappa, i} > a\delta, \tag{10}$$

ja

$$\sum_{\nu=1}^{h'_\kappa} a^e_{h'_\kappa, \nu} = \sum_{\nu=1}^{\kappa-1} \sum_{i=g_\nu}^{h_\nu} a_{h'_\kappa, i} + \sum_{i=g_\kappa}^{h'_\kappa} a_{h'_\kappa, i} \leq a\delta, \tag{11}$$

kus

$$h'_\kappa = \max(lg_\kappa - 1, \bar{h}_\kappa), \text{ s.t. } h'_\kappa < h_\kappa.$$

Indeks h'_κ on võimalik nii määrata menetluse A multiplikatiivsuse tõttu.

Tähistame

$$\sum_{\nu=1}^{h_\kappa} a^e_{h_\kappa, \nu} - a\delta = \delta'_\kappa \geq 0. \tag{12}$$

Seejärel määrame $\bar{h}_{\kappa+1}$ nii, et kehtiksid võrratused

$$\begin{cases} \sum_{\nu=1}^{\bar{h}_{\kappa+1}} a^e_{\bar{h}_{\kappa+1}, \nu} = \sum_{\nu=1}^{\kappa} \sum_{i=g_\nu}^{h_\nu} a_{\bar{h}_{\kappa+1}, i} \leq a\delta, \\ \sum_{\nu=1}^{\bar{h}_{\kappa+1}} a^e_{h''_{\kappa+1}, \nu} = \sum_{\nu=1}^{\kappa} \sum_{i=g_\nu}^{h_\nu} a_{h''_{\kappa+1}, i} > a\delta, \end{cases} \tag{13}$$

kus

$$h''_{k+1} = \max(j_{\mu_{k+1}-1}, h_k), \text{ s.t. } h''_{k+1} < \bar{h}_{k+1} \; ; \qquad (14)$$

seoste (13) määramine on samuti A multiplikatiivsuse tõttu võimalik.

Võrratuse (9) põhjal järeldub siis seosest (13):

$$0 \le \delta''_{k+1} = a\sigma - \sum_{\nu=1}^{\bar{h}_{k+1}} a^{e}_{\bar{h}_{k+1},\nu} < \sum_{\nu=1}^{k} \sum_{i=g_\nu}^{h_\nu} a_{h''_{k+1},i} - \sum_{\nu=1}^{k} \sum_{i=g_\nu}^{h_\nu} a_{\bar{h}_{k+1},i} .$$

Suuruse δ''_{k+1} hindamiseks anname kõigepealt hinnangu suurusele $1 - \dfrac{a_{\bar{h}_{k+1},1}}{a_{h''_{k+1},1}}$. Seostest (13), (8) ja (14) järeldub, et kehtib võrratus $1 - \dfrac{a_{\bar{h}_{k+1},1}}{a_{h''_{k+1},1}} \le 1 - \dfrac{a_{j_{\mu_{k+1}}-1,1}}{a_{j_{\mu_{k+1}-1}-1,1}}$, ning menetluse A multiplikatiivsuse tõttu kehtib seos

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{j_{\mu_{k+1}-1}-1,\nu} - \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{j_{\mu_{k+1}}-1,\nu} = o(1) \quad (k \to \infty).$$

Avaldame nüüd

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{j_{\mu_{k+1}-1}-1,\nu} - \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{j_{\mu_{k+1}}-1,\nu} = \left(1 - \frac{a_{j_{\mu_{k+1}}-1,1}}{a_{j_{\mu_{k+1}-1}-1,1}}\right) \sum_{\nu=1}^{j_{\mu_{k+1}-1}-1} a_{j_{\mu_{k+1}-1}-1,\nu} + \sum_{\nu=j_{\mu_{k+1}-1}}^{\infty} a_{j_{\mu_{k+1}-1}-1,\nu} +$$

$$+ \sum_{\nu=j_{\mu_{k+1}}-1}^{\infty} a_{j_{\mu_{k+1}}-1,\nu}$$ ja kasutame seost (3), ning saame

$$o(1) = (a + o(1))\left(1 - \frac{a_{j_{\mu_{k+1}}-1,1}}{a_{j_{\mu_{k+1}-1}-1,1}}\right) + o(1). \qquad (15)$$

Siis on õige ka võrdus

$$1 - \frac{a_{j_{\mu_{k+1}}-1,1}}{a_{j_{\mu_{k+1}-1}-1,1}} = o(1),$$

ning me saame seosest (15) hinnangu suurusele δ_k'':

$$\delta''_k = a\sigma - \sum_{\nu=1}^{\bar{h}_k} a^{e}_{\bar{h}_k,\nu} = o(1). \qquad (16)$$

Suuruse δ'_k hindamiseks kasutame jada e täienduse definitsioonist /vt. (1.3.1)/ tulenevat seost

$$\delta_k' = \sum_{\nu=1}^{h_k} a_{h_k,\nu} - \sum_{\nu=1}^{h_k} a^{\bar{e}}_{h_k,\nu} - \alpha + \alpha(1-\delta) =$$

$$= \Big(\sum_{\nu=1}^{h_k} a_{h_k\nu} - \alpha\Big) + \Big[\alpha(1-\delta) - \sum_{\nu=1}^{h_k} a^{\bar{e}}_{h_k,\nu}\Big]. \qquad (17)$$

Kuna tingimused (13) vastavad tingimustele (10,11) jada $\bar{e}$ puhuks, järeldub seosest (16) ka seos $\delta_k' = o(1)$ ning seega ongi võrdused (5) tõestatud.

Defineerime nüüd iga indeksi n jaoks suuruse γ_n:

$$\gamma_n = \sum_{\nu=1}^{n} a^{e}_{n\nu} - \alpha\delta. \qquad (18)$$

Olgu meil nüüd antud suvaline n, $h_k \le n < \bar{h}_{k+1}$; siis kehtivad võrratused

$$\sum_{\nu=1}^{h_k} a^{e}_{n\nu} = \frac{a_{n1}}{a_{h_k1}} \sum_{\nu=1}^{h_k} a^{e}_{h_k\nu} = \frac{a_{n1}}{a_{h_k1}} (\alpha\delta + \delta_k') \le \alpha\delta + \delta_k',$$

$$\sum_{\nu=1}^{h_{k+1}'} a^{e}_{n\nu} = \frac{a_{n1}}{a_{\bar{h}_{k+1}',1}} \sum_{\nu=1}^{\bar{h}_{k+1}} a^{e}_{\bar{h}_{k+1},\nu} = \frac{a_{n1}}{a_{\bar{h}_{k+1},1}} (\alpha\delta + \delta''_{k+1}) \ge \alpha\delta + \delta''_{k+1},$$

aga kuna

$$\sum_{\nu=1}^{n} a^{e}_{n\nu} = \sum_{\nu=1}^{h_k} a^{e}_{n\nu} = \sum_{\nu=1}^{\bar{h}_{k+1}} a^{e}_{n\nu},$$

järeldub siit, et $\gamma_n \to 0$ k lähenemisel lõpmatusele iga n puhul, $h_k \le n < \bar{h}_{k+1}$.

Samuti saab jada $\bar{e}$ vahendusel tõestada, et ka iga n puhul, $\bar{h}_k \le n < h_k$ leiab aset seos $\gamma_n = o(1)$, seega ongi tõestatud seos (6) ja ühtlasi ka (7) multiplikatiivse menetluse A jaoks, mis rahuldab tingimusi (2) ja (3).

Selleks et tõestada teoreemi üldjuhul, on meil otstarbekas teostada praegu mõningad arvutused.

Olgu meile antud suvaline naturaalarvude jada $1 = m_0 < m_1 < m_2 < \dots$. Arvutame vahed

$$\sum_{\nu=m_{\varkappa-1}}^{m_\varkappa - 1} a^e_{n\nu} - \delta \sum_{\nu=m_{\varkappa-1}}^{m_\varkappa - 1} a_{n\nu} \qquad (\varkappa = 1,2,\dots).$$

Seosest (7) järeldub võrdus

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} \left(\sum_{\nu=m_{\varkappa-1}}^{m_\varkappa - 1} a^e_{n\nu} - \delta \sum_{\nu=m_{\varkappa-1}}^{m_\varkappa - 1} a_{n\nu} \right) = o(1),$$

jada $\{m_\varkappa\}$ valikust sõltumatult.

Vaatleme nüüd juhtu, kus (8) ei ole täidetud. Siis leidub selliste indeksite jada $1 < n_1 < n_2 < \dots$, et

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{\mu} a_{n_\kappa,\nu}}{\sum_{\nu=1}^{\mu} a_{n_\kappa - 1,\nu}} = \tilde{r}_\kappa > 1 \qquad (\kappa = 1,2,\dots) \ (\tilde{r}_\kappa \in K).$$

(μ def. nt. (2)).

Siis leidub aga ka niisuguste indeksite jada $1 < m_0^\kappa < m_1^\kappa < \dots$ ning arvude jada $\tilde{r} < \beta_0^\kappa = \tilde{r}_\kappa > \beta_1^\kappa > \beta_2^\kappa > \dots$, et

$$a_{n_\kappa \nu} = \beta_\varkappa^\kappa a_{n_\kappa - 1,\nu} \qquad \text{kui} \quad m_\varkappa^\kappa \le \nu < m_{\varkappa+1}^\kappa,$$

ning leiavad aset seosed

$$\sum_{\nu=1}^{n_\kappa} a^e_{n_\kappa \nu} = \sum_{\nu=1}^{n_\kappa - 1} a^e_{n_\kappa \nu} = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa_\kappa} \sum_{\nu=m_\varkappa^\kappa}^{m_{\varkappa+1}^\kappa - 1} a^e_{n_\kappa \nu} = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa_\kappa} \beta_\varkappa^\kappa \sum_{\nu=m_\varkappa^\kappa}^{m_{\varkappa+1}^\kappa - 1} a^e_{n_\kappa - 1,\nu} =$$

$$= \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa_\kappa} \beta_\varkappa^\kappa \left[\delta \sum_{\nu=m_\varkappa^\kappa}^{m_{\varkappa+1}^\kappa - 1} a_{n_\kappa - 1,\nu} + \left(\sum_{\nu=m_\varkappa^\kappa}^{m_{\varkappa+1}^\kappa - 1} a^e_{n_\kappa - 1,\nu} - \delta \sum_{\nu=m_\varkappa^\kappa}^{m_{\varkappa+1}^\kappa - 1} a_{n_\kappa - 1,\nu} \right) \right] =$$

$$= \delta \sum_{\nu=1}^{n_\kappa - 1} a_{n_\kappa \nu} + \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa_\kappa} \beta_\varkappa^\kappa \left[\sum_{\nu=m_\varkappa^\kappa}^{m_{\varkappa+1}^\kappa - 1} a^e_{n_\kappa - 1,\nu} - \delta \sum_{\nu=m_\varkappa^\kappa}^{m_{\varkappa+1}^\kappa - 1} a_{n_\kappa - 1,\nu} \right].$$

Juhul $\kappa = 1$ tuleneb siit

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n_1} a^e_{n_1 \nu} - \delta \sum_{\nu=1}^{n_1} a_{n_1 \nu} \right| \le \tilde{r}_1 \left| \gamma_{n_1} - 1 \right| + a_{n_1 n_1}.$$

Teostades jada e konstruktsiooni ülalkirjeldatud meetodil valemite (10),(11) ja (13) põhjal, sama samasuguse

hinnangu kõigi indeksite n_ν puhuks, samuti järelduvad siit, nagu eelnevalgi juhul seosed (6) ja (7), ning sellega ongi teoreem täielikult tõestatud. Illustratsiooniks selle kohta, et tingimuste (2) ja (3) mittetäitmisel ei ole summade piirkonnaks arvsirge, on näited 1 ja 2 /§ 10/.

Märkus. Tingimuste (2) ja (3) täidetust on raske kontrollida, kuna nad sõltuvad niihästi menetlusest A kui ka reast (1.1).

Selleks et vältida kahepoolset sõltuvust ning tuletada efektiivseid tingimusi, defineerime $(\rho-\tilde{c})^*$ - ridade klassi.

Definitsioon 1. $(\rho-\tilde{c})$ -rida (1.1) nimetame $(\rho-\tilde{c})^*$-reaks, kui leidub vähemalt üks $(\rho-\tilde{c})$-jada e selle rea suhtes nii, et $e \in \mathcal{E}^*$ /vt. definitsioon 1.3.5/.

$(\rho-\tilde{c})^*$- ridade jaoks saame teha teoreemist 1 rakendusteks sobiva järelduse:

Järeldus 1. Piisavad tingimused selleks, et iga A -summeeruva $(\rho-\tilde{c})^*$- rea (1) A -summade piirkonnaks kolmnurkse multiplikatiivse menetluse A korral oleks arvsirge, on järgmised [1]

$$1.\quad \lim_{n\to\infty} a_{n\nu} = 0, \tag{19}$$

$$2.\quad \frac{a_{n\nu}}{a_{n\nu}} \le \frac{a_{n\nu-1}}{a_{n\nu-1}} \le K \quad (\nu \le n \le m). \tag{20}$$

Tõepoolest, tingimustest (20) järeldub alati (2), ja kui $e \in \mathcal{E}^*$ ja A on kolmnurkne, järeldub tingimustest (19) ja (20) ka tingimus (2).

---

[1] Tingimus (20) on nn. keskväärtusteoreemi jaoks piisav tingimus [77].

Selle kohta, et tingimus, et rida oleks $(\rho-\tilde{c})^*$- rida, on oluline, sobib näiteks Bageminl-Erdösi [27] näide 2. Tõepoolest, menetlus C_1 rahuldab tingimusi (19) ja (20), kuid defineeritud rida ei ole $(\rho-\tilde{c})^*$- rida, kuigi on $(\rho-\tilde{c})$-rida $(\rho-0,\ \tilde{c}=1)$, ja seega ei ole summade piirkonnaks arvsirge, vaid võre.

Menetluse C_1 puhul saab sellist $(\rho-\tilde{c})$-rida, mille ükski ümberjärjestus, mis on $(\rho-\tilde{c})^*$-reaks, ei ole C_1-summeeruv, konstrueerida ainult lõpmatult kasvava /ja küllalt kiiresti kasvava/ rea liikmete osajada abil; seetõttu on tõkestatud liikmete jadaga rea puhul summade piirkonnaks ainult kas punkt või arvsirge [54].

Tingimusi (2) ja (3) saab nõrgendada, kuid seejuures muutuvad nad komplitseeritumaks. Näiteks võib nõuda, et tingimus (2) /või (20)/ oleks täidetud menetluste A^e ja $A^{\bar{e}}$ jaoks eraldi, kus e on mingi $(\rho-\tilde{c})$-jada, ja A^e ning $A^{\bar{e}}$ oleksid multiplikatiivsed. Selline olukord on näidetes 10 ja 11, kus aga ei ole täidetud (3) ega (19). Näide 12 aga tõestab, et tingimused (2) ja (3) ei ole üldiselt tarvilikud, vaid võib konstrueerida spetsiaalsele reale vastava maatriksi A, mis ei rahulda tingimusi (2) ja (3), kuid summade piirkonnaks on arvsirge.

§ 4. Read, mille summade piirkonnaks on võre

Käesolevas paragrahvis vaatleme selliseid ridu, mille

liikmete jada koosneb kahest konstantsest osajadast. Defineerime vastava ridadeklassi.

Definitsioon 1 $(\rho-\tau)$-rida $\sum_i r_i$ (1)

nimetame $(\rho\overline{-\tau})$-reaks siis, kui selle rea kõik liikmed võrduvad ühega konstantidest ρ ja τ, $\rho \neq \tau$, kusjuures mõlemad konstantide jadad on lõpmatud.

Käesolevas paragrahvis tähistab meie rida (1) alati $(\rho\overline{-\tau})$-rida.

Niisugune kitsendus on tehtud sellepärast, et käesolevas paragrahvis seame, eelnevatest paragrahvidest erinevalt, endile eesmärgiks määrata rea summade piirkond täielikult, s.t., garanteerida, et summade piirkond ei sisalda peale võrepunktide ainsatki muud punkti; seda on aga võimalik tagada ainult siis, kui rea kõik liikmed on fikseeritud, mida me lihtsamal võimalikul viisil tegimegi.

$(\rho\overline{-\tau})$-ridade kohta saame tõestada lisaks paragrahvis 11 tõestatud teoreemidele veel järgneva lemma.

Lemma 1. $(\rho\overline{-\tau})$-rea (1) puhul on mistahes kahe ühekordse lihtsubstitutsiooni $\mathcal{K}^{e_1'}$ ja $\mathcal{K}^{e_2'}$ korrutis $\mathcal{K}^{e_1'}\cdot\mathcal{K}^{e_2'}$ teisendatav kahe sõltumatu ühekordse lihtsubstitutsiooni $\mathcal{K}^{e_1''}$ ja $\mathcal{K}^{e_2''}$ korrutiseks nii, et kehtib seos

$$\mathcal{K}^{e_1'}\mathcal{K}^{e_2'} = \mathcal{K}^{e_1''}\cdot\mathcal{K}^{e_2''}. \qquad (2)$$

T õ e s t u s . $(\rho\overline{-\tau})$-rea puhul saame iga jada e_1 esitada järgneva summana:

$$e_1 = e_1^{\circ} + e_1^{\circ\circ} + e_1^{+} + e_1^{++},$$

kus e_1° on $(\rho-\rho)$- jada, $e_1^{\circ\circ}$ - $(\bar{\tau}-\bar{\tau})$ - jada, e_1^{+} - $(\rho-\bar{\tau})$- jada ja e_1^{++} - $(\bar{\tau}-\rho)$ - jada. Esitus on üksühene.

Seega on õige seos

$$\mathcal{K}^{e_1} = \mathcal{K}^{e_1^{\circ}} \cdot \mathcal{K}^{e_1^{\circ\circ}} \cdot \mathcal{K}^{e_1^{+}} \cdot \mathcal{K}^{e_1^{++}} = \mathcal{K}^{e_1^{+}} \mathcal{K}^{e_1^{++}}.$$

Viimane võrdus tuleneb summamuutuse valemist (1.4.10), mille põhjal $(\rho-\rho)$ - ja $(\bar{\tau}-\bar{\tau})$ - substitutsioonid rea summat ei muuda.

Kuna $(\rho-\bar{\tau})$- ja $(\bar{\tau}-\rho)$- jadad e_1^{+} ja e_1^{++}, aga seega ka substitutsioonid $\mathcal{K}^{e_1^{+}}$ ja $\mathcal{K}^{e_1^{++}}$ on sõltumatud, võime edasise mõttekäigu juures lihtsuse mõttes eeldada, et $\mathcal{K}^{e_1'}$ on $(\rho-\bar{\tau})$--substitutsioon.

Jadade e_1' ja e_2' osajadade suhtes on meil nüüd järgnevad võimalused.

Võivad leiduda:

1. Osajadad $\{\kappa_i\}, \{l_i\}, \{m_i\}, \{w_i\}$, mille puhul kehtivad seosed

$$g_{\kappa_i}^{e_1'} = g_{e_i}^{e_2'}, \quad h_{m_i}^{e_1'} = h_{w_i}^{e_2'} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Tähistame $\{[g_{\kappa_i}^{e_1'}, h_{e_i}^{e_1'}]\}_{i=1}^{\infty} = e_1^*$.

Definitsioonist järeldub, et

$$\mathcal{K}^{e_1'} \mathcal{K}^{e_2'}(\nu) = \nu, \text{ kui } \nu \in e^*,$$

seega defineerides jadasid e_1'' ja e_2'', saame kindlasti

$$e_1'' \subset e_1' - e_1^*,$$

$$e_2'' \subset e_2' - e_1^*.$$

2. Osajadad $\{\kappa_j\}, \{l_j\}$, mille puhul kehtib seos

$g_{\kappa_j}^{e_1'} = g_{l_j}^{e_2'}$, kuid $h_{m_j}^{e_1'} \neq h_{w_j}^{e_2'}$ $(j = 1, 2, \dots)$.

iga osajada $\{m_j\}, \{n_j\}$ puhul.

Meie definitsiooni kohaselt siis

$g_{\kappa j}^{e_1'} = \varrho$, $h_{\nu j}^{e_1'} = \bar{c}$, ja siis $K^{e_1'}(g_{\kappa j}^{e_1'}) = \bar{c}$, $K^{e_1'}(h_{\nu j}^{e_1'}) = \varrho$ $(j = 1, 2, \dots)$.

$h_{\nu j}^{e_2'}$ jaoks on kaks võimalust

a. $h_{\nu j}^{e_2'} = \bar{c}$ Sel juhul on $K^{e_1'} K^{e_2'}(g_{\kappa j}^{e_1'}) = K^{e_1'}(g_{\kappa j}^{e_1'}) = \bar{c}$,

ja me võime defineerida jada e_2^* :

$$g_j^{e_2^*} = g_{\kappa j}^{e_1'}, \quad h_j^{e_2^*} = h_{\kappa j}^{e_1'} \quad (j = 1, 2, \dots),$$

ja siis

$$e_2'' \subset e_2' - e_2^*. \tag{3}$$

b. Teine võimalus on

$h_{\nu j}^{e_2'} = \varrho$. Sel juhul kehtivad definitsiooni kohaselt seosed: $K^{e_1'} K^{e_2'}(g_{\kappa j}^{e_1'}) = g_{\kappa j}^{e_1'} = \varrho$,

$K^{e_1'} K^{e_2'}(h_{\nu j}^{e_1'}) = \bar{c}$, $K^{e_1'} K^{e_2'}(h_{\nu j}^{e_2'}) = \varrho$, ja me võime defineerida e^*:

$$g_j^{e_2^*} = h_{\kappa j}^{e_1'}, \quad h_j^{e_2^*} = h_{\nu j}^{e_2'} \quad (j = 1, 2, \dots),$$

kuna e_2'' jaoks kehtib jälle seos (3) .

Analoogiliselt on konstruktsioon võimalik ka kõigil ülejäänud juhtudel jadade e_1' ja e_2' sõltuvuse puhul, nimelt, kui

3. $g_{\kappa\mu}^{e_1'} = g_{e\mu}^{e_2'}$, $h_{m\mu}^{e_1'} = g_{m\mu}^{e_2'}$ $(\mu = 1, 2, \dots)$,

4. $g_{\kappa q}^{e_1'} \neq g_{eq}^{e_2'}$, $h_{mq}^{e_1'} = g_{mq}^{e_2'}$ $(q = 1, 2, \dots)$.

ning defineerida sarnaselt jadadega e_1^* ja e_2^* jadad e_3^* ja e_4^*.

Seega saame eraldada kõik jadad, milledel ümberjärjestused e_1' ja e_2' on sõltuvad, kuna jadad

$$\bar{e}_1 = e_1' - e_1^* - e_2^* - e_3^* - e_4^*$$

ja

$$\bar{e}_2 = e_2' - e_1^* - e_2^* - e_3^* - e_4^*$$

on sõltumatud.

Konstruktsiooni põhjal on sõltumatud ka jadad

$\bar{e}_2$ ja e_2^*, $\bar{e}_2$ ja e_3^* ning $\bar{e}_2$ ja e_4^*.

Defineerides

$$e_1'' = \bar{e}_1 + e_2^* + e_3^* + e_4^*,$$
$$e_2'' = \bar{e}_2$$

saame jadad, mis rahuldavad meie lemma väidet, kuna kehtib ka seos (2).

Äsjatõestatud lemma ja teoreemi 1.1.2 põhjal saame järeldada

Järeldus 1 $(\rho-\overline{\tau})$ - r idade puhul on iga substitutsioon esitatav sõltumatute ühekordsete lihtsubstitutsioonide $\mathcal{K}^{e_i}$ korrutisena $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{K}^{e_i}$ /korrutis võib olla ka lõplik, eriti juhul, kui substitutsioon on ν-kordne/ .

Edaspidiseks on meil otstarbekas eraldada $(\rho-\overline{\tau})$-idade hulgast üks eriti lihtne klass, mis aga vajab teistest erinevat käsitlust.

Definitsioon 2. Rida (1), mis alates mingist indeksist ν omab kuju $r_{\nu+2i} = \rho$, $r_{\nu+2i+1} = -\rho$ $(i = 1, 2, \dots)$, nimetame $(\rho+\rho)$- reaks.

Definitsioon 3 $(\overline{\rho-\tau})$ -rida, mis ei ole $(\rho-\bar{\sigma})$ -rida, nimetame $(\overline{\overline{\rho-\tau}})$ -reaks. $(\overline{\overline{\rho-\tau}})$ -rea puhul kehtib järgmine lihtne lemma.

Lemma 2 $(\overline{\overline{\rho-\tau}})$ -ridade puhul on õige üks järgnevatest seostest

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty, \tag{4}$$

või leidub hulgal $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ vähemalt kolm erinevat kuhjumispunkti

$$s', s'', s'''. \tag{5}$$

Tõestust me selle lihtsuse tõttu ei esita.

Käesoleva paragrahvi põhitulemuseks on järgnev teoreem

T e o r e e m 1. Olgu meil antud $(\overline{\overline{\rho-\tau}})$ -rida, arvud σ ja $a \neq 0$. Siis leidub selline kolmnurkne multiplikatiivne menetlus A, et

$$S_A\left(\sum_i r_i\right) = \{\sigma + a(\rho-\tau) : a \in S\}.$$

T õ e s t u s . Tõestuse esitame kahes osas.

1. Kõigepealt vaatleme sellist rida (1), mille puhul kehtib seos (4). vastavalt igale indeksile n defineerime siis indeksi $m(n)$ nii, et

$$m(n) = \max m.$$

$$s_m \leq \frac{1}{2} s_n \tag{6}$$

Siis leiduvad alati indeksid $k_1 \geq 1$ ja $k_2 > 1$ nii, et

$$\begin{cases} s_n > 0, \quad n = k_1, k_1+1, \dots; \text{ siis ka } s_n - s_{m(n)} > 0, \text{ kui } n_1 = k_1, k_1+1, \dots, \\ s_{m(n)} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, k_2 - 1; \quad s_{m(n)} > 0, \quad n = k_2, k_2+1, \dots. \end{cases} \tag{7}$$

Koostame võrrandsüsteemi

$$\begin{cases} x + y = a, & (8) \\ s_n x + s_{m(n)} y = b, & (9) \end{cases} \qquad (n = \kappa_1, \kappa_1 + 1, \dots).$$

Selle lahendite abil moodustame maatriksi A:

$$\begin{cases} a_{nn} = x, \\ a_{n,m(n)} = y, \quad (n = \kappa_1, \kappa_1 + 1, \dots), \\ a_{n\nu} = 0, \quad \nu \neq n, m(n). \end{cases}$$

Lahendid on olemas seoste (7) põhjal; definitsioonivalemist ja seosest (9) järeldub, et siis tõepoolest

$$A\left\{\sum_i r_i\right\} = b. \qquad (10)$$

Menetluse A multiplikatiivsus on ilmne ja seosest (8) tuleneb, et $\alpha[A] = a$ mistõttu teoreemi 2.1 põhjal

$$S_A\left(\sum_i r_i\right) \supset \{b + a m(\rho - \tau) : n \in \mathfrak{N}\}. \qquad (11)$$

Valime mingi punkti $x \in S_A\left(\sum_i r_i\right)$. Siis leidub selline ümberjärjestus $\mathcal{K}$, et

$$A\left\{\sum_i r_{\mathcal{K}(i)}\right\} = x.$$

Alati leidub täisarv μ ja reaalarv ξ, $0 \leq \xi < 1$ nii, et

$$x = b + (\mu + \xi) a (\rho - \tau).$$

Kuna $\overline{(\rho - \tau)}$ -rea iga ümberjärjestus on $(\rho - \tau)$ -rida, saame reale $\sum_i r_{\mathcal{K}(i)}$ rakendada teoreemi 2.1, ja konstrueerida substitutsiooni $\mathcal{K}^{(-\mu)}$ nii, et

$$A\left\{\sum_i r_{\mathcal{K}\mathcal{K}^{(-\mu)}(i)}\right\} = A\left\{\sum_i r_{\mathcal{K}^*(i)}\right\} = A\left\{\sum_i r_i^*\right\} = x - \mu a(\rho - \tau) = b + \xi a(\rho - \tau). \qquad (12)$$

Vastleme nüüd substitutsiooni $\mathcal{K}^*$.

Järelduse 1 põhjal avaldub substitutsioon $\mathcal{K}^*$ korrutisena

$$\mathcal{K}^* = \prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{K}^{e_j} = \prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{K}^{e_j'} \cdot \mathcal{K}^{e_j''},$$

kus e_j' on $(\rho - \tau)$-jada, e_j'' - $(\tau - \rho)$ -jada. Siinjuures vaatleme korrutist lõpmatuna, kuna lõplik erijuht tuleneb siit vahetult.

Järelduse 1.4.4 /vt. valem (1.4.14)/ põhjal kehtib siis

$$A\left\{\sum_i v_{\mathcal{K}^*}(i)\right\} = \sigma + \lim_{n\to\infty}\left[\sum_j \sum_\nu \left(a_{n\nu}^{e_j'} - a_{n\nu}^{e_j''}\right)\right](\rho - \tau).$$

Vaatleme nüüd summat

$$\sum_j \sum_\nu \left(a_{n\nu}^{e_j'} - a_{n\nu}^{e_j''}\right).$$

Sõltumatuse tõttu leidub vastavalt igale indeksile ν /positiivne või negatiivne/ täisarv $k(\nu)$ nii, et kehtib seos

$$\sum_j \sum_\nu \left(a_{n\nu}^{e_j'} - a_{n\nu}^{e_j''}\right) = \sum_\nu k(\nu) a_{n\nu}. \qquad (13)$$

Rähistades

$$k_\nu^+ = \begin{cases} k(\nu), & \text{kui } k(\nu) > 0, \\ 0, & \text{kui } k(\nu) \le 0, \end{cases}$$

ja

$$k_\nu^- = \begin{cases} k(\nu), & \text{kui } k(\nu) < 0, \\ 0, & \text{kui } k(\nu) \ge 0, \end{cases}$$

saame summa (13) esitada kujul

$$\sum_j \sum_\nu \left(a_{n\nu}^{e_j'} - a_{n\nu}^{e_j''}\right) = \sum_\nu k_\nu^+ a_{n\nu} + \sum_\nu k_\nu^- a_{n\nu}.$$

Vaatleme nüüd saadud summat, mille jaoks valemite (12) ja (13) põhjal kehtib järgmine võrdus

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_\nu k_\nu^+ a_{n\nu} + \sum_\nu k_\nu^- a_{n\nu}\right] = \xi a,$$

$$0 \le \xi < 1.$$

Meil on selle piirväärtuse arvutamisel järgnevad võimalused

1. Olgu $\kappa_\nu^- \neq 0$ ainult lõpliku arvu indeksite ν korral,

$\kappa_\nu^+ \neq 0$ ainult lõpliku arvu indeksite ν korral.

Siis $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sum\limits_\nu \kappa_\nu^+ a_{n\nu} + \sum\limits_\nu \kappa_\nu^- a_{n\nu}\right] = 0,$

ja $\xi = 0.$

Sel juhul $x \in \{\sigma + m\omega(\rho-\tau) : m \in \mathfrak{I}\}.$

2. Olgu $\kappa_\nu^+ = 0$ ainult lõpliku arvu indeksite ν korral.

Siis peab $\kappa_\nu^- \neq 0$ ainult lõpliku arvu indeksite ν korral, ja

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_\nu \kappa_\nu^+ a_{n\nu} + \sum_\nu \kappa_\nu^- a_{n\nu}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_\nu a_{n\nu} + \sum_\nu (\kappa_\nu^+ - 1) a_{n\nu}\right] =$$

$$= a + \lim_{n\to\infty} \sum_\nu (\kappa_\nu^+ - 1)\, a_{n\nu},$$

kus $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_\nu (\kappa_\nu^+ - 1)a_{n\nu} \geq 0,$ kui selline piirväärtus üldse eksisteerib /vt. ka juhuseid 3 ja 4/, seega saime vastuolu eeldusega, et $\xi < 1.$

3. Olgu $\kappa_\nu^- \neq 0$ ainult lõpliku arvu indeksite korral, ja

$$\kappa_\nu^+ = 1, \text{ kui } \nu \in e, \; e \in \mathfrak{E}.$$

Siis $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sum\limits_\nu \kappa_\nu^+ a_{n\nu} + \sum\limits_\nu \kappa_\nu^- a_{n\nu}\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_\nu a_{n\nu}^e,$

kuid vastavalt meetodi konstruktsioonile

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_\nu a_{n\nu}^e = a,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \sum_\nu a_{n\nu}^e = 0,$$

alati, kui $e \in \mathfrak{E}$, $e \neq \Omega$, seega piirväärtust ei eksisteeri.

4. Olgu $\kappa_\nu^- \neq 0$ ainult lõpliku arvu indeksite korral, ja $\kappa_\nu^+ \neq 0$, kui $\nu \in e$, $e \in \mathfrak{E}$, $e \neq \Omega$.

siis sarnaseid seosele juhule

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{\nu}' a^{e}_{n\nu} k^{+}_{\nu} \geq a,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{\nu} a^{e}_{n\nu} k^{+}_{\nu} = 0.$$

5. Kuna suurust k_ν saame käsitleda sarnaseid suurusega k^{+}_{ν}, ainsa erinevusega, et ta on negatiivne, viivad kõigi üle-jäänud juhtude puhul arutlused meid samuti vastuolule, mis kinnitab, et ainus võimalus on

$$\xi = 0,$$

millega meie teoreem on vaadeldaval juhul tõestatud.

Vaatleme nüüd juhtu, kus $|s_n| < M \quad (n = 1, 2, \dots)$. Lemma 2 põhjal leiab siis kindlasti aset seos (4). Seega leiduvad jadad $\{j_k\}, \{l_k\}$ ja $\{m_k\}$ nii, et

$$\lim_{k\to\infty} s_{j_k} = s'; \quad \lim_{k\to\infty} s_{l_k} = s''; \quad \lim_{k\to\infty} s_{m_k} = s'''.$$

Iga n korral määrame $\bar{n}$ ja $\bar{\bar{n}}$ seostega

$$s_{\bar{n}} = \max_{j_k, l_k, m_k \leq n} (s_{j_k}, s_{l_k}, s_{m_k}),$$

ja

$$s_{\bar{\bar{n}}} = \max_{j_k, l_k, m_k < \bar{n}} (s_{j_k}, s_{l_k}, s_{m_k}),$$

ning noodustame jäänegi võrrandsüsteemi

$$\begin{cases} x + y = a, \\ x s_{\bar{n}} + y s_{\bar{\bar{n}}} = \sigma, \end{cases}$$

mis on meie eeldustel lahenduv alates n väärtusest $N = \max(j_1, l_1, m_1)$. Saame maatriksi määrata seostega:

$$a_{n\bar{u}} = x,$$

$$a_{n\bar{\bar{u}}} = y,$$

$$a_{nv} = 0, \quad v \neq \bar{u}, \quad v \neq \bar{\bar{u}}.$$

Ka see maatriksmenetlus osutub multiplikatiivseks, nii et teoreemi 1.4.1 põhjal

$$S_A\left(\sum_i w_i\right) \supset \{\sigma + a_m(\rho - \tau) : m \in S\},$$

kuna vastupidise seose

$$S_A\left(\sum_i v_i\right) \subset \{\sigma + a_m(\rho - \tau) : m \in S\}$$

tõestus sarnaneb vastavale tõestusele eelneval juhul.

Ülejäänud juhtudel on tõestus põhimõtteliselt samasugune.

Näideteks ridade ja menetluste kohta, millede puhul summade piirkonnaks on võre, on näited 1, 2 ja 11 paragrahvist 10.

§ 5. $(\rho-\overline{\tau})$- r i d a d e s u m m a d e p i i r k o n n a ü l d i n e k u j u

Vaatleme nüüd, milliseid võimalusi $(\rho-\overline{\tau})$- ridade summade piirkonna jaoks on veel olemas. Nagu eelnevaski paragrahvis, nii kasutame ka siin konstruktiivset tõestusmeetodit, andes ette testava hulga /mis allub mõningatele kitsendavatele tingimustele, näiteks sisaldab võret(1.24)/, ning konstrueerime vastavalt etteantud $(\rho-\tau)$- reale ning hulgale sellise kolmnurkse multiplikatiivse maatriksi A, et vaadeldava rea A- summade piirkond langeks ühte etteantud hulgaga.

T e o r e e m 1. Olgu meil antud $(\overline{\overline{\rho-\tau}})^*$- rida

$$\sum_i x_i \qquad (1)$$

ja arvud $\sigma, a\neq 0$ ja $\delta^*(0<\delta^*\leq 1)$. Siis leidub selline kolmnurkne multiplikatiivne summeerimismeetod A, et

$$S_A\left(\sum_i x_i\right)=\{\sigma+(m+\delta)a(\rho-\tau): m\in J,\ \delta\in\mathcal{D}\}, \qquad (2)$$

$\mathcal{D}=\{0,\delta^*\}$.

T õ e s t u s. a/ Vaatleme kõigepealt juhtu, kus on täidetud tingimus (4.3). Sel juhul võime teoreemi väidet veelgi tugevdada, andes ette meelevalitse $(\rho-\tau)^*$- jada e^*, ning konstrueerides meetodi A nii, et

$$A\left\{\sum_i x_k e^*_{(i)}\right\}=\sigma+\delta^* a(\rho-\tau). \qquad (3)$$

Tähistame

$$n_1 = \max_{\substack{\nu \le n \\ \nu \in e^*}} \nu \quad ; \quad n_2 = \max_{\substack{\nu \le n \\ \nu \in \bar{e}^*}} \nu \quad ; \quad n_3 = \max_{\substack{s_\nu \le \frac{1}{2} s_{n_2} \\ \nu \in \bar{e}^*}} \nu . \tag{4}$$

Kuna $e^* \in \bar{\mathcal{E}}$, siis (vt.1.3.2), järeldub seosest (4)

$$\lim_{n\to\infty} n_1 = \infty \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} n_2 = \infty , \tag{5}$$

ja siis ka (4.3) põhjal

$$\lim_{n\to\infty} n_0 = \infty . \tag{6}$$

Kasutame jällegi võrranditesüsteemi

$$\begin{cases} b_n s_{n_3} + c_n s_{n_2} + a\delta^* s_{n_1} = \sigma , \\ b_n + c_n + a\delta^* = a . \end{cases} \tag{7}$$

Alates mingist n väärtusest (vrdl. (4.7)) eksisteerivad lahendid

$$c_n = \frac{\sigma - a[(1-\delta^*)s_{n_3} + \delta^* s_{n_1}]}{s_{n_2} - s_{n_3}} \quad ; \quad b_n = \frac{\sigma - a[(1-\delta^*)s_{n_2} - \delta^* s_{n_1}]}{s_{n_3} - s_{n_2}} . \tag{8}$$

Menetluse A määrame menetluste A^{e^*} ja $A^{\bar{e}^*}$ summana; viimased defineerime valemitega

$$\begin{cases} a_{n n_1}^{\bar{e}^*} = a\delta^* , \\ a_{n\nu} = 0 , \quad \nu \neq n_1 , \ \nu \in e^* , \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} a_{n n_2}^{e^*} = c_n , \\ a_{n n_3}^{e^*} = b_n , \\ a_{n\nu}^{e^*} = 0 , \quad \nu \neq n_2, n_3 , \ \nu \in \bar{e}^* . \end{cases} \tag{10}$$

Sellisel viisil määratud menetlus A on kolmnurkne. A^{e^*} on multiplikatiivne, ning seega järeldub seosest (7) ka (3). Edasi tuleb meil näidata menetluse A multiplikatiivsust.

1° Definitsioonivalemist (10), võttes arvesse seoseid (5) ja (6), järeldub, et

$$\lim_{n\to\infty} a_{n\nu} = 0 .$$

2^0 Seosest (8) järeldub, et $\alpha[A]=a$.

3^0 Kuna rida (1) on $(\rho-\bar{c})^*$-rida, kehtivad järgnevad võrratused /vt. 1.3.5/:

$$|s_{N_1}-s_{N_2}| \le P_{max}(|\rho|,|\bar{c}|); \quad s_{N_3}-\frac{s_{N_2}}{2} \le P_{max}(|\rho|,|\bar{c}|).$$

Kuid seoste (4) põhjal on siis õiged ka võrdused

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_{N_3}}{s_{N_2}-s_{N_3}}=1;\ \lim_{n\to\infty}\frac{s_{N_1}}{s_{N_2}-s_{N_3}}=2;\ \lim_{n\to\infty}\frac{s_{N_2}}{s_{N_3}-s_{N_2}}=-2;\ \lim_{n\to\infty}\frac{s_{N_1}}{s_{N_3}-s_{N_2}}=-2,$$

ja eksisteerivad piirväärtused

$$b=\lim_{n\to\infty}b_n=2a; \quad c=\lim_{n\to\infty}c_n=-a(1+\delta^*),$$

ja seega seoste (9) ja (10) põhjal kehtib ka võrratus

$$\sum_{\nu}|a_{n\nu}|<M,$$

ning menetluse A multiplikatiivsus on tõestatud. Siis aga leiab aset seos

$$S_A\Big(\sum_i z_i\Big)\supset\{\sigma+(m+\delta)a(\rho-\bar{c});\ m\in J,\ \delta\in\mathfrak{D}\},\qquad \mathfrak{D}=\{0,\delta^*\}. \tag{11}$$

Vastupidise seose tõestamine langeb põhimõtteliselt ühte samasuunalise seose tõestamisega teoreemis 4.1. Seega on õige (2), ning ühtlasi järeldub konstruktsioonist ka (3).

b. Vaatleme nüüd juhtu, kus

$$|s_N|<M. \tag{12}$$

Olgu meil antud selline $(\rho-\bar{c})$-jada e^*, et[1]

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,s_N^{e^*}\neq\underline{\lim_{n\to\infty}}\,s_N^{e^*};\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\,s_N^{\bar{e}^*}\neq\underline{\lim_{n\to\infty}}\,s_N^{\bar{e}^*}. \tag{13}$$

---

[1] Sellist $(\rho-\bar{c})$-jada e^*, mille puhul kehtib (13), on võimalik iga $(\rho-\bar{c})^*$-rea jaoks leida, mis rahuldab tingimust (12).

Siis saame jällegi väita, et kehtib seos (4) .

Tähistame

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} s_n^{e^*} = s_1 ; \underline{\lim_{n\to\infty}} s_n^{e^*} = s_2 ; \overline{\lim_{n\to\infty}} s_n^{\bar{e}^*} = \bar{s}_1 ; \underline{\lim_{n\to\infty}} s_n^{\bar{e}^*} = \bar{s}_2 .$$

Leiduvad sellised ortogonaalsed jadad e_1 , e_2 , $\tilde{e}_1$ ja $\tilde{e}_2$, et $e_1, e_2, \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \in \tilde{\mathcal{E}}$, ja

$$e_1 \cup e_2 \subset e^*, \quad \tilde{e}_1 \cup \tilde{e}_2 \subset \bar{e}^*, \quad \lim_{n\to\infty} s_n^{e_1} = s_1 ; \quad \lim_{n\to\infty} s_n^{e_2} = s_2 ,$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n^{\tilde{e}_1} = \bar{s}_1 ; \quad \lim_{n\to\infty} s_n^{\tilde{e}_2} = \bar{s}_2 \quad \text{, kusjuures } s_1 \neq s_2 \text{ ja } \bar{s}_1 \neq \bar{s}_2 .$$

Tähistame veel

$$\max_{\substack{m \le n \\ m \in e_1}} m = n_1 ; \quad \max_{\substack{m \le n \\ m \in e_2}} m = n_2 ; \quad \max_{\substack{m \le n \\ m \in \tilde{e}_1}} m = \bar{n}_1 ; \quad \max_{\substack{m \le n \\ m \in \tilde{e}_2}} m = \bar{n}_2 .$$

Määrame menetlused A^{e^*} ja $A^{\bar{e}^*}$ järgnevalt:

Kui $n_1 > n_2$, siis $a_{n n_1} = a\delta^*$,

$$a_{n \bar{n}_1} = b_n ,$$

$$a_{n \bar{n}_2} = c_n ,$$

kus b_n ja c_n määratakse süsteemist

$$\begin{cases} b_n + c_n = a(1-\delta^*), \\ b_n s_{\bar{n}_1} + c_n s_{\bar{n}_2} = \delta - a\delta^* s_{n_1}, \end{cases}$$

aga kui $n_2 > n_1$, siis

$$a_{n n_2} = a\delta^*,$$

$$a_{n \bar{n}_1} = b_n' ,$$

$$a_{n \bar{n}_2} = c_n' ,$$

kus b_n' ja c_n' määratakse süsteemist

$$\begin{cases} b_n' + c_n' = a(1-\delta^*), \\ b_n' s_{\bar{n}_1} + c_n' s_{\bar{n}_2} = \delta - a\delta^* s_{n_2} . \end{cases}$$

Menetluse A multiplikatiivsuse tõestus, samuti seose (3) näitamine sarnanevad eelnevale juhule.

Näiteks rea ja menetluse kohta, mis omavad ülalmärgitud summade piirkonna, on näited 3.10 ja 11.

T e o r e e m 2. Olgu meil antud $(\overline{\overline{\rho-\bar{c}}})^*$ rida (1), arvud $a \neq 0$, b ja δ_i, $\sum_i |\delta_i| < \infty$, $0 < \delta_i < 1$ $(i = 1, 2, \ldots)$, ning selline ortogonaalne $(\rho-\bar{c})$- jadade süsteem[1] $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, et $\bar{e} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{e}_i$, kus $\bar{e} = \bar{c}^*$, kusjuures ärgu olgu õige seos (14)

$$\lim_{n \to \infty} s_n^{\bar{c}} = c, \quad n = N+1, \ldots \tag{15}$$

ühegi lõpliku konstandi c korral.

Siis leidub selline kolmnurkne multiplikatiivne summeerimismenetlus A, et

$$S_A\left(\sum_i r_i\right) = \left\{b + (m+\delta) a (\rho-\bar{c}) : m \in S,\ \delta = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \delta_i,\ c_i \in C\right\},$$
$$C = \{0, 1\},$$

kusjuures

$$A\left\{\sum_{\nu} r_{k_\nu} e_{i(\nu)}\right\} = b + a\delta_i (\rho-\bar{c}) \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{16}$$

T õ e s t u s. Tähistame $n_i = \max_{\substack{m \le n \\ m \in e_i}} m$, i_n on maksimaalne selliste indeksite i hulgast, mille jaoks n_i on määratud; defineerime

$$a_{N n_i} = \delta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, i_n;\ n = N, N+1, \ldots),$$

kus N on selline arv, millest alates on n_i määratud; menetluse $A^{\bar{e}}$ defineerime suuruste b_n ja c_n kaudu sarnaselt eelneva teoreemiga.

Kuna teoreemi tõestus sarnaneb eelmise teoreemi tõestusega, siis me seda siin ei esita.

Näites 4 on toodud selline menetlus A, mis on konstrueeritud teoreemi 2 järgi, lõpliku hulga arvude δ_i jaoks: $\delta_1 = \frac{1}{12}$

---

[1] Sellise süsteemi konstrueerimine on $(\overline{\overline{\rho-\bar{c}}})^*$-rea puhul alati võimalik.

$\delta_2 = \frac{1}{6}$, $\delta_3 = \frac{1}{3}$.

Näites 6 rakendatakse teoreemi 2 lõpmatule punktide hulgale $\{\delta_i\}$: $\delta_i = \frac{1}{2^{i+1}}$; $i = 1, 2, \dots$.

Teoreemist 2 tuleneb järeldus:

<u>Järeldus 1</u>. Olgu meil antud $(\overline{\overline{\rho - \tau}})^*$-rida (1) ,arvud $\sigma, a \neq 0$ ja $\delta'(0 < \delta' \leq 1)$. Siis eksisteerib selline kolmnurkne multiplikatiivne summeerimismenetlus A ,et

$$S_A\left(\sum_i r_i\right) = \{\sigma + (m+\delta)a(\rho - \tau) : m \in \mathcal{T};\ 0 < \delta < \delta'\}.$$

Selleks tuleb vaid valida $\delta_i = \delta' \cdot \frac{1}{2^{i+1}}$ $(i = 1, 2, \dots)$,nagu seda on tehtud näites 7. Järeldust aitavad illustreerida veel näited 8, 9 ja 12.

T e o r e e m 3. Olgu meil antud $(\overline{\overline{\rho - \tau}})^*$- rida (1) ,arvud $a \neq 0$ ja σ ning arvude süsteem $\mathcal{D} = \{\delta_j\}$ $(0 < \delta_j < 1)$,ning korrapärane /vt. def. (1.3.6)/ $(\rho - \tau)$-jadade süsteem $\{e_j\}$,kusjuures, kui $\bar{e}$ on määratud seosega (14) ,ärgu kehtigu (15) .

Siis eksisteerib selline kolmnurkne multiplikatiivne summeerimismenetlus A ,et on õige

$$S_A\left(\sum_i r_i\right) = \{\sigma + (m+\delta)a(\rho - \tau) : m \in \mathcal{T},\ \delta \in \mathcal{D}\},$$

kusjuures kehtib ka (16) .

T õ e s t u s. Konstrueerime menetluse A menetluste A^e ja $A^{\bar{e}}$ summana, kus $e = \bigcup_{i=1}^{\infty} e_i$.

Menetluse A^e konstruktsioon on alljärgnev.

Olgu $n \in \bigcup_{j=1}^{k(n)} e_j$. Siis eksisteerivad indeksid $\nu_1, \dots, \nu_{j(n)}$ nii, et

$$n \in \bigcap_{j=1}^{j(n)} e_{\nu_j} \qquad (1 \leq j(n) \leq k(n)).$$

Tähistame $\min\limits_{j=1,\dots,j(w)} \delta_j = \delta_{w_1}$, ning defineerime

$a_{w w} = \delta_{w1}$.

Edasi on 2 võimalust:

1. Leidub selline indeks $\mu_1(w)$, et $\mu_1(w) \in \bigcap\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq w_1}}^{k(w)} e_i$.

Siis määrame $\delta_{w_2} = \min (\delta_{\nu_j} - \delta_{w_1}, \delta_{\mu_j})$,

$\nu_j = \nu_1, \dots, \nu_{j(w)}$,

$\mu_j = 1, 2, \dots, k(w)$, $\mu_j \neq \nu_j$,

$\mu_j, \nu_j \neq w_1$.

ja

$$a_{w \mu_1(w)} = \delta_{w2} .$$

2. Kui sellist indeksit $\mu_1(w)$ ei leidu, leidub eelduse tõttu niisugune indeks $\mu_1'(w)$, et $\mu_1'(w) \in \bigcap\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq w_1}}^{k(w)-1} e_j$; siis defineerime $\delta_{w_2}' = \min (\delta_{\nu_j} - \delta_{w_1}, \delta_{\mu_j})$ ja $a_{w \mu_1'(w)} = \delta_{w_2}'$.

$\nu_j = \nu_1, \dots, \nu_{j(w)}$,

$\mu_j = 1, 2, \dots, k(w)-1$, $\mu_j \neq \nu_j$,

$\mu_j, \nu_j \neq w_1$.

ja

Seejärel teeme kindlaks , kas eksisteerib sellist indeksit $\mu_2(w)$, et $\mu_2(w) \in \bigcap\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq w_1, w_2}}^{k(w)} e_j$; (vastasel korral $\mu_2(w) \in \bigcap\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq w_1, w_2'}}^{k(w)} e_j$),

määrame siis $\delta_{w_3} = \min (\delta_{\nu_j} - \delta_{w_1} - \delta_{w_2} ; \delta_{\mu_j} - \delta_{w_2})$, või

$\nu_j = \nu_1, \dots, \nu_{j(w)}$,

$\mu_j = 1, 2, \dots, k(w)$; $\mu_j \neq \nu_j$,

$\mu_j, \nu_j \neq w_1, w_2$.

vastavalt $\delta_{w_3} = \min (\delta_{\nu_j} - \delta_{w_1} - \delta_{w_2}' ; \delta_{\mu_j} - \delta_{w_2}', \delta_{k(w)})$, kui $k(w) \neq \nu_j$,

$\nu_j = \nu_1, \dots, \nu_{j(w)}$,

$\mu_j = 1, 2, \dots, k(w)$; $\mu_j \neq \nu_j$,

$\mu_j, \nu_j \neq w_1, w_2'$.

või

$$\delta_{N3} = \min\left(\delta_{\nu_j} - \delta_{N_1} - \delta_{N_2}' \,;\, \delta_{\mu_j} - \delta_{N_2}' \,,\, \delta_{k(N)} - \delta_{N1}\right),$$

$\nu_j = \nu_1, \dots, \nu_{j(N)}$,

$\mu_j = 1, 2, \dots, k(N)$, $\mu_j \neq \nu_j$,

$\mu_j, \nu_j \neq N_1, N_2$'.

kui aga sellist suurust $\mu_2(N)$ ei ole, määrame indeksi $\mu_2'(N)$, mille olemasolu on garanteeritud eeldusega.

Selliselt võib määrata $k(N)$ suurust $a^{e}_{N\nu}$, mis üldiselt erinevad nullist.

Menetluse $A^{\bar{e}}$ konstruktsioon ning kogu järgnev teoreemi tõestuskäik sarnanevad põhimõtteliselt teoreemiga 1.

Illustratsiooniks teoreemile 3 on näide 5, kus $\delta_1 = \frac{1}{12}$, $\delta_2 = \frac{1}{6}$ ja $\delta_3 = \frac{1}{3}$, ning näide 6, kus hulk ϑ langeb kokku kõigi ratsionaalarvude hulgaga.

Teoreemidest 2 ja 3 võib tuletada järeldused:

Järeldus 2. Olgu meil antud $(\rho - \bar{\tau})^*$ rida (1), arvud $0 < \delta^* < \delta_1 < \delta_2 < \dots < \delta_k < 1$, σ ja $a \neq 0$. Siis eksisteerib niisugune kolmnurkne multiplikatiivne summeerimismenetlus A, et

$$S_A\left(\sum_i r_i\right) = \left\{\sigma + (m+\delta)\,a\,(\rho - \bar{\tau}) : m \in J,\ \delta = \delta_i + \delta'\right\}_{(0 \le \delta' < \delta^*,\ i = 0,1,\dots,k)}.$$

Järelduse 2 rakenduseks on näide 8.

Järeldus 3. Olgu meil antud $(\rho - \bar{\tau})^*$ rida (1), arvude jadad δ_i, δ_i^*, $0 = \delta_0' < \delta_0^* < \delta_1' < \delta_1^*, \dots, < 1$, arvud $a \neq 0$ ja σ. Siis eksisteerib niisugune kolmnurkne multiplikatiivne summeerimismenetlus A, et

$$S_A\left(\sum_i r_i\right) = \left\{\sigma + (m+\delta)\,a\,(\rho - \bar{\tau}) : m \in J\,;\ \delta_i \le \delta < \delta_i^*,\ i = 1,2,\dots\right\}.$$

Illustratsiooniks järeldusele 3 on näide 9.

Kõik järeldustes 2 ja 3 mainitud menetlused konstrueeri-

takse sobivalt sõltuvate jadade $\{r_i\}$ süsteemi vastavalt diskreetsetele punktidele $\{\sigma_i\}$ ja sõltumatute jadade süsteemid $\{e_j'\}$ vastavalt lõikudele $\{[\sigma_j', \sigma_j^*]\}$.

T e o r e e m 4. Olgu meil antud $(\rho-\bar{c})^*$-rida (1.1), arvud $a \neq 0$ ja σ, ning suvaline analüütiline hulk $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D} \subset [0,1]$. Siis eksisteerib selline kolmnurkne multiplikatiivne maatriksmenetlus A, et

$$S_A\left(\sum_i r_i\right) = \{\sigma + (m+\delta)a(\rho-\bar{c}) : m \in \mathfrak{I},\ \delta \in \mathfrak{D}\}.$$

T õ e s t u s. Ärgu olgu hulk $\mathfrak{D}$ tühi. Siis võime üldsust kitsendamata eeldada, et hulk $\mathfrak{D}$ sisaldab ka nullpunkti, ning sisaldub mingis lõigus $[\delta', 1+\delta']$ $(\delta' \leq 0)$ $\delta' \in \mathfrak{D}$, ning asendada siis suurus σ suurusega $\sigma' = \sigma - \delta'$. Hulk $\mathfrak{D}$, mis sisaldub lõigus $[\delta', 1+\delta']$, on avaldatav summana $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}' \cup \mathfrak{D}''$, kus $\mathfrak{D}' = [\delta', 0] \cap \mathfrak{D}$ ja $\mathfrak{D}'' = [0, 1+\delta'] \cap \mathfrak{D}$, kusjuures meie teoreemi 21 põhjal $x \in [\delta', 0)$ puhul $\sigma + xa(\rho-\bar{c}) \in S_A\left(\sum_i r_i\right)$ parajasti siis, kui ka $x' = x+1$ puhul $\sigma + x'a(\rho-\bar{c}) \in S_A\left(\sum_i r_i\right)$.

Seega võime hulga $\mathfrak{D}'$ asendada hulgaga $\bar{\mathfrak{D}} = \{x+1 : x \in \mathfrak{D}'\}$ ning saamegi siis hulga $\mathfrak{D}^* = \bar{\mathfrak{D}} \cup \mathfrak{D}''$, mis rahuldab tingimusi

$$0 \in \mathfrak{D}^*, \quad \mathfrak{D}^* \subset [0,1]. \tag{17}$$

Vaatleme nüüd analüütilist hulka $\mathfrak{D}$, mis rahuldagu tingimusi (17). Definitsiooni kohaselt[1] on $\mathfrak{D}$ esitatav järgneval kujul

$$\mathfrak{D} = \bigcup_{(k_1, k_2, \ldots)} \bigcap_{p=1}^{\infty} \Delta_{k_1, k_2, \ldots, k_p},$$

---

1 Vt. viide lk. 17.

kus $\Delta_{k_1,\dots,k_\nu}$ on mingi lõik, mis üldsust kitsendamata kuulub ka lõiku $[0, 1]$.

Kui punkt 0 kuulub hulka $\mathfrak{D}$, peab ta sisalduma ka ühes hulkadest $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} \Delta_{k_1, k_2, \dots, k_\nu}$. Olgu selleks hulk $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} \Delta_{k_1^*,\dots,k_\nu^*}$.

Seega $0 \subset \Delta_{k_1^*, k_2^*, \dots, k_\nu^*}$, $\nu = 1, 2, \dots$.

Moodustame nüüd hulgad $\mathfrak{D}_i$ järgnevalt:

$$\mathfrak{D}_1 = \Delta_{k_1^*},$$

$$\mathfrak{D}_2 = \Delta_{k_1^*} \cap \Delta_{k_1^* k_2^*} \cup \Delta_{k_2^*} \cap \Delta_{k_2^* k_1^*},$$

$$\mathfrak{D}_N = \bigcup_{(k_1,\dots,k_N)} \bigcap_{\nu=1}^{N} \Delta_{k_1^*,\dots,k_\nu^*}.$$

$$\lim_{N\to\infty} \mathfrak{D}_N = \mathfrak{D}^*.$$

Kuna definitsioonivalemis on summeeritud hulgad kõikvõimalike indeksite $k_1, k_2, \dots$ järjestuste järgi, ei ole oluline, milline neist järjestustest valida lähtejärjestuseks definitsiooniva lemis. Kuna $k_1^*, k_2^*, \dots$ oli üks definitsioonivalemis esineva järjestuse ümberjärjestusi[s], võime ka selle valida lähtejärjestuseks ning seega määrab see järjestus sama hulga $\mathfrak{D}$, tähendab:

$$\lim_{N\to\infty} \mathfrak{D}_N = \mathfrak{D}^* = \mathfrak{D}.$$

Maatriksi A moodustame järgnevalt.

Vastavalt igale N väärtusele on võimalik konstrueerida maatriks A_N nii, et

$$S_{A_N}\left(\sum_i r_i\right) = \{\sigma + \alpha(\rho - \tau)(m + \delta) : m \in \mathfrak{I};\ \delta \in \mathfrak{D}_N\} = \mathfrak{D}_{A_N}.$$

Maatriks A on määratud valemitega

$$a_{m\nu} = a_{m\nu}^{(N)}, \quad \text{kus} \quad m = m_N, \dots, m_{N+1} - 1,$$
$$N = 1, 2, \dots.$$

kusjuures jada $\{m_n\}$ valime nii, et maatriks A oleks kolmnurkne. See on võimalik, kuna kõik maatriksid A_n on eelnevate teoreemide põhjal kolmnurksed. Samuti järeldub maatriksite A_n regulaarsusest maatriksi A regulaarsus.

Näitame nüüd, et selliselt defineeritud maatriksi A puhul leiab aset seos

$$S_A\left(\sum_i r_i\right) = \{\sigma + \alpha(\rho - \bar{\tau})(m+\delta) : m \in \bar{S};\ \delta \in \mathfrak{D}\} = \mathfrak{D}_A .$$

/Tähistame viimase avaldise lihtsuse mõttes sümboliga $\mathfrak{D}_A$ /

Selleks on tarvis näidata, et kehtivad seosed

$$S_A\left(\sum_i r_i\right) \supset \mathfrak{D}_A \tag{18}$$

ja

$$S_A\left(\sum_i r_i\right) \subset \mathfrak{D}_A . \tag{19}$$

Olgu meil mingi punkt $x \in \mathfrak{D}_A$. Siis leidub naturaalarv N nii, et $x \in \mathfrak{D}_{A_n}$, $n = N, N+1, \ldots$.

Vastavalt siis aga maatriksite A_n konstruktsioonile

$x \in S_{A_n}\left(\sum_i r_i\right)$, $n = N, N+1, \ldots$ ja A konstruktsiooni põhjal siis ka $x \in S_A\left(\sum_i r_i\right)$. Seega on õige (18).

Teiselt poolt, olgu meil mingi $x \in S_A\left(\sum_i r_i\right)$. See tähendab, et leidub indeks N^* nii, et $x \in S_{A_n}\left(\sum_i r_i\right)$, $n = N^*, N^*+1, \ldots$ Teoreemide 1-3 põhjal võime väita, et siis kindlasti x peab avalduma kujul

$$x + \sigma + \alpha(\rho - \bar{\tau})(m^* + \delta), \quad \text{kus } \delta \in \mathfrak{D}_n,\ n = N^*, N^*+1, \ldots$$

ja seega $x \in \mathfrak{D}_A$ ja kehtib (19).

Teoreem on tõestatud.

Ühtlasi on Lorentz-Zelleri tulemuse põhjal [52] toodud

hulk kõige üldisem võimalik hulk, mis sisaldub $(\rho\overline{-\varepsilon})$ rea summade piirkonnas, kuna hulk

$$\{\sigma + a(\rho-\varepsilon)(m+\delta) : m \in \mathfrak{T};\ \delta \in \mathfrak{G} \subset [0,1]\},$$

kus $\mathfrak{G}$ ei ole analüütiline hulk, ei ole samuti analüütiline hulk, ning ei saa seega olla rea $\sum_i r_i$ A - summade piirkonnaks.

Selleks, et saavutada üldisi tulemusi kõikvõimalike $(\rho-\varepsilon)$-ridade kohta, tuleb meil veel uurida $(\rho+\rho)$ - ridade summade piirkondi. $(\rho+\rho)$ - ridade jaoks ei olnud võimalik tõestada juba teoreemi (4.1) , ja seega jäid automaatselt tõestamata ka kõik käesoleva paragrahvi teoreemid. Tõepoolest, $(\rho+\rho)$ - ridade puhul ei pea paika ei seos (4.4) ega ka (45) .

Mingi etteantud σ ja a -korral maatriksi A koostamine taandub üldjuhul võrrandsüsteemi

$$\begin{cases} x + y = a, \\ x s_1 + y s_2 = \sigma \end{cases}$$

lahendamisele, kusjuures $s_2 - s_1 = 2\rho$.

/Siin x on tähiseks kõigi s_1 -ga võrdsetele summadele vastavate maatriksi n -da rea elementide summale, y - vastavalt s_2 -ga võrdsetele summadele vastavate n -da rea elementide summale./

Summade piirkond $S_A(\sum_i r_i)$ sisaldab teoreemi (4.1) kohaselt hulka

$$\{\sigma + 2\rho a m : m \in \mathfrak{T}\},$$

kuid osutub, et sellega summade piirkonna punktide hulk ei piirdu, vaid ümberjärjestused $\mathcal{K}^{e_1}$ ja $\mathcal{K}^{e_2}$, kus $e_1 = \{2n\}_{n=1}^{\infty}$

ja $e_2=\{2n+1\}_{n=1}^{\infty}$ annavad veel summade piirkonda punktid

$$\{\sigma+2\rho a(m+\delta): m\in\mathfrak{I},\ \delta\in\bar{\mathcal{D}}\},$$

$$\bar{\mathcal{D}}=\{x,-y\}.$$

/miinusmärk y ees tuleneb sellest, et e_2 on $(-\rho-\rho)$ jada/; teostanud arvutused, saame siis täielikult avaldada hulga $\bar{\mathcal{D}}$:

$$S_A\left(\sum_i x_i\right)=\{\sigma+2\rho a(m+\delta): m\in\mathfrak{I},\ \delta\in\bar{\mathcal{D}}\},$$

$$\bar{\mathcal{D}}=\{0,\ \frac{\sigma-as_1}{2\rho},\ -\frac{\sigma-as_2}{2\rho}\}.$$

Samasugused täiendavad punktid saame ka ülejäänud teoreemide 1-4 analoogide tõestamisel $(\rho+\rho)$-ridade jaoks, kusjuures kindlasti iga $(\rho-\bar{\tau})$-jada /täpsemalt $(\rho+\rho)$-jada/ on sõltuv jadadest e_1 ja e_2, seega esinevad pubktid x ja y summade piirkonnas nö. "omaette", mitte liidetuna ühegi ülejäänud punktiga $\delta\in\mathcal{D}$.

Seega on $(\rho+\rho)$-ridadel hulga $\bar{\mathcal{D}}$ suvalisus veidi kitsendatud, võrreldes $(\overline{\rho-\bar{\tau}})$-ridadega, kuid summade piirkonna kuju üldised tüübid jäävad samaks.

Edasi jääb veel üle vaadelda, kuivõrd oluline on kitsendus, et $(\overline{\rho-\bar{\tau}})$- rida oleks $(\overline{\rho-\bar{\tau}})^*$-rida. Nagu tõestuste käigust järeldub, kasutame seda kitsendust ainult selliste ridade puhul, millede puhul on täidetud tingimus $\overline{\lim_{n\to\infty}} s_n=\infty$, ning tõepoolest selliste ridade puhul ei oleks võimalik teostada konstruktsioone, mis on antud teoreemide 4.1 ja 1-4 puhul, kui iga $(\rho-\bar{\tau})$-jada e puhul leiaks aset seos

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\ \frac{sg_k}{s\bar{g}_k}=\infty$$

/vt.tähistused (1.3.3) ja(1.3.4) /.Sel juhul oleks vastavale

reale võimalik moodustada seda summeerivaid maatriksmenetlusi A ainult vastavalt teatavale osale summade piirkonnast, mida käsitlesime käesolevas paragrahvis.

Näidetes 10 , 11 ja 12 on esitatud $(\rho+\rho)$-ridade summade piirkondi.

§ 6. $(\rho-\bar{\iota}-\bar{\pi})$- r i d a d e s u m m a d e p i i r k o n n a d

Käesolevas paragrahvis vaatleme ridu, mis sisaldavad kolme konstantide jada, et nende kaudu üle minna üldiste tõkestatud liikmetejadadega ridade vaatlemisele.

Definitsioon 1. Nimetame $(\rho-\bar{\iota}-\bar{\pi})$-reaks rida

$$\sum_i x_i , \tag{1}$$

mille liikmete jada sisaldab osajadasid $\{x_{j_k}\}$, $\{x_{l_k}\}$ ja $\{x_{m_k}\}$ nii, et

$$j_k < l_k < m_k < j_{k+1} < l_{k+1} < m_{k+1} \dots \quad (k = 1,2, \dots), \tag{2}$$

$$x_{j_k} = \rho \; ; \quad x_{l_k} = \bar{\iota} \; ; \quad x_{m_k} = \bar{\pi}. \tag{3}$$

T e o r e e m 1. Iga $(\rho-\bar{\iota}-\bar{\pi})$-rea A-summade piirkond sisaldab hulka

$$\{6 + a m_1(\rho-\tau) + a m_2(\pi-\bar{\iota}) : m_1, m_2 \in \bar{\tau}\}. \tag{4}$$

Teoreemi tõestamisel kasutame teoreemiga 1.2.1 sarnast

konstruktsiooni, rakendades seda kõigepealt lähtereale kui $(\rho-\bar{\tau})$-reale, seejärel saadud reale kui $(\pi-\bar{\tau})$-reale.

Edasi pakub huvi huiga (4) lähem uurimine, mis sarnaneb peatüki II paragrahvis 2 teostatud summade piirkondade $\underline{S}(\sum_i r_i)$ ja $\bar{S}(\sum_i r_i)$ uurimisega.

Vaatleme järgnevaid juhtumeid.

1° $\frac{\rho-\bar{\tau}}{\pi-\bar{\tau}} = \frac{p}{q}$, s.t., leidub reaalarv γ nii, et $\rho-\bar{\tau}=p\gamma$, $\pi-\bar{\tau}=q\gamma$, p q on ühistegurita täisarvud. Siis omandab hulk (3) kuju

$$\{\sigma + am\gamma : m \in \mathbb{Z}\}$$

/vt. järeldus 2.2.1/ , ning summade piirkonna edasine uurimine sarnaneb eelnevale juhule.

2°. $\frac{\rho-\bar{\tau}}{\pi-\bar{\tau}}$ on irratsionaalarv. Sel juhul on hulk (3) arvsirgel kõikjal tihe /vt. järeldus 2.2.3 / . Näidetes 1 ja 2 on meil tegemist ülalvaadeldud juhuga 1°.

T e o r e e m 2. Summade piirkond $S_A(\sum_i r_i)$ ei ole iga $(\rho-\bar{\tau}-\pi)$-rea (1) ja multiplikatiivse summeerimismeetoduse A puhul kinnine.

T õ e s t u s. Tõestus on konstruktiivne: me defineerime sellise $(\rho-\pi-\bar{\tau})$- rea (1) ja maatriksi A , millede puhul summade piirkond $S_A(\sum_i r_i)$ ei ole kinnine.

Maatriksi A defineerime järgmiselt

$$\begin{cases} a_{n,n} = 1, & n = 1,2,\dots \\ a_{n,n-6} = 1, & n = 4k+1 \\ a_{n,n-2} = 1, & n \neq 4k+1 \\ a_{n,\nu} = 0 & \text{ülejäänud juhtudel} \end{cases}$$

Rida $\sum_i r_i$ olgu määratud järgmiste seostega /arvutame lihtsuse mõttes otsekohe ka osasummad ja maatriksi A

abil teisendatud rea osasummade jada/:

$$r_{8k+1}=1, \quad s_{8k+1}=1, \quad \sigma_{8k+1}=\sum_{\nu=1}^{8k+1} a_{8k+1,\nu}s_\nu = 1\cdot(-1)+1\cdot 1=0,$$

$$r_{8k+2}=-1, \quad s_{8k+2}=0, \quad \sigma_{8k+2}=0+0=0,$$

$$r_{8k+3}=-1, \quad s_{8k+3}=-1, \quad \sigma_{8k+3}=1-1=0,$$

$$r_{8k+4}=1, \quad s_{8k+4}=0, \quad \sigma_{8k+4}=0+0=0,$$

$$r_{8k+5}=\sqrt{2}, \quad s_{8k+5}=\sqrt{2}, \quad \sigma_{8k+5}=1(-\sqrt{2})+\sqrt{2}=0,$$

$$r_{8k+6}=-\sqrt{2}, \quad s_{8k+6}=0, \quad \sigma_{8k+6}=0+0=0,$$

$$r_{8k+7}=-\sqrt{2}, \quad s_{8k+7}=-\sqrt{2}, \quad \sigma_{8k+7}=\sqrt{2}-\sqrt{2}=0,$$

$$r_{8(k+1)}=\sqrt{2}, \quad s_{8(k+1)}=0, \quad \sigma_{8(k+1)}=0+0=0$$

Seega lähterida on A-summeeruv ning $\sigma=A\{\sum_i r_i\}=a$. Nagu definitsioonist järeldub, on $\alpha[A]=a=2$, ja seega teoreemi 2.1 põhjal kehtib sisalduvusseos

$$S_A\left(\sum_i r_i\right)\supset\{4(m_1+\sqrt{2}\,m_2): m_1, m_2\in J\}. \qquad (5)$$

Hulk $\mathfrak{D}=\{4(m_1+\sqrt{2}\,m_2): m_1, m_2\in J\}$ on arvsirgel kõikjal tihe. Näitame, et

$$\mathfrak{D}=S_A\left(\sum_i r_i\right).$$

Olgu α mingi meelevaldne punkt, mis ei kuulu hulka $\mathfrak{D}$.

Olgu meil antud mingi jada $\varepsilon_\nu>0$, $\varepsilon_\nu\to 0$. Siis leiduvad kindlasti jadad $\{m_1^{(\nu)}\}_{\nu=1}^{\infty}$, $\{m_2^{(\nu)}\}_{\nu=1}^{\infty}$ (mida me võime absoluutväärtuse poolest lugeda monotoonselt kasvavateks, kui $\nu=1,2,\ldots$), nii, et

$$\left|4(m_1^{(\nu)}+\sqrt{2}\,m_2^{(\nu)})-\alpha\right|<\varepsilon_\nu.$$

Vastavalt igale arvudepaarile $m_1^{(\nu)}$, $m_2^{(\nu)}$ on võimalik defineerida substitutsioon $\bar{\mathcal{K}}^{(\nu)}$ nii, et $\mathcal{K}^{(\nu)}=\prod_{\mu=1}^{\nu}\bar{\mathcal{K}}^{(\mu)}$, ja

$$A\{\sum_i r_{\mathcal{K}^{(\nu)}(i)}\} = 4(m_1^{(\nu)} + \sqrt{2}\, m_2^{(\nu)}),$$

kusjuures teoreemiga 1 on ühtlasi garanteeritud ümberjärjestatud rea A-summeeruvus.

Substitutsioonid $\bar{\mathcal{K}}^{(\nu)}$ on võimalik /sarnaselt substitutsiooniga $\mathcal{K}$ lemmas 2.3.4 /defineerida ka nii , et eksisteerib korrutis

$$\mathcal{K} = \prod_{\nu=1}^{\infty} \bar{\mathcal{K}}^{(\nu)}.$$

Osutub aga, et rida $\sum_i r_{\mathcal{K}(i)}$ ei ole A- summeeruv.

Näitame seda.

Avaldame rea $\sum_i r_{\mathcal{K}(i)}$ osasummad $\sum_{i=1}^{n} r_{\mathcal{K}(i)} = \bar{s}_n$ .Kehtib seos

$$\bar{s}_n = s_n + 2m_1^{(n)} + 2\sqrt{2}\, m_2^{(n)},$$

kusjuures meie eelduse kohaselt

$$|m_1(n)| = 1,2,\dots \quad (n = 1,2,\dots),$$

ja ka

$$|m_2(n)| = 1,2,\dots \quad (n = 1,2,\dots).$$

Avaldame ka teisendatud rea osasummad

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{n\nu}\bar{s}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} a_{n\nu} s_\nu + 2m_1(n-2) + 2\sqrt{2}\, m_2(n-2) + 2m_1(n) +$$

$$+ 2\sqrt{2}\, m_2(n) = 2[m_1(n-2) + \sqrt{2}\, m_2(n-2) + m_1(n) + \sqrt{2}\, m_2(n)]$$

$(z = 2$ või $6)$.

Oletame,et leidub jada n_k nii, et

$$|\sum_{\nu=1}^{n_k} a_{n_k\nu}\bar{s}_\nu - \alpha| < \varepsilon_k, \quad s.t.$$

s.t.

$$|2[m_1(n_k - 2) + \sqrt{2}\, m_2(n_k - 2) + m_1(n_k) + \sqrt{2}\, m_2(n_k)] - \alpha| < \varepsilon_k.$$

Kindlasti leidub siis $\bar{n}_k$ nii, et

$$m_1(\bar{n}_k) = m_1(n_k) + 1.$$

Siis on õige võrratus

$$m_2(n_k) \le m_2(\bar{n}_k) \le m_2(n_k) + 1,$$

ja samuti kehtivad seosed

$$m_1(n_k) - 2 \le m_1(n_k - 2) \le m_1(n_k),$$

$$m_1(n_k) - 1 \le m_1(n_k - 1) \le m_1(n_k); \quad m_1(n_k - 2) \le m_1(n_k - 1),$$

ja samad seosed vastavalt $m_2(n_k - 2)$, $m_2(n_k - 1)$ ja $m_2(n_k)$ jaoks, kust, võttes arvesse, et $m_1(k)$ ja $m_2(k)$ omandavad ainult täisarvulisi väärtusi, saame:

$$\left| \sum_{\nu=1}^{\bar{n}_k} a_{\bar{n}_k, \nu} s_\nu - \alpha \right| > \frac{1}{2} - \varepsilon_k, \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

ja sellega on näidatud, et rida $\sum_i \tau_{k(i)}$ ei ole A-summeeruv.

Teoreem 2 on tõestatud.

Märkus. Samasuguse tõestusega on võimalik näidata, et Bagemihl-Erdösi näites 3 (vt. [27]) esitatud rea lõpmatu-korrased ümberjärjestused ei ole C_1-summeeruvad, milline tõsiasi on vastuolus autorite väitega C_1-summeeruvate ridade C_1-summade piirkonna kinnisusest.

Edasi näitame, et $(\rho - \bar{c} - \bar{\pi})$-rea summade piirkond on üldiselt sama kujuga kui $(\rho - \bar{c})$-rea summade piirkondki.

Olgu $(\rho - \bar{c} - \bar{\pi})$-rea /mida me võime käsitleda ka $(\rho - \bar{c})$-reana/ kui $(\rho - \bar{c})$-rea summade piirkonnaks $S_1 = \{ \sigma + a(m + \delta)(\rho - \bar{c}) : m \in \bar{S}, \delta \in \mathfrak{D}_1 \}$, n. o. rea kõigi selliste ümberjärjestuste hulk, mis on saadud realiikmete ρ ja $\bar{c}$ omavaheliste ümberpaigutuste teel/, ja rea (1.1) kui $(\bar{\pi} - \bar{c})$-rea summade piirkonnaks hulk $S_2 = \{ \sigma + a(m + \delta)(\bar{\pi} - \bar{c}) : m \in \bar{S}, \delta \in \mathfrak{D}_2 \}$, ning rea (1.1) kuni $(\rho - \bar{\pi})$-rea summade piirkonnaks hulk $S_3 = \{ \sigma + a(m + \delta)(\rho - \bar{\pi}) : m \in \bar{S}, \delta \in \mathfrak{D}_3 \}$.

Siis $$S\left(\sum_i r_i\right) \supset \{\sigma + a(m_1+\delta_1)(\rho-\bar\tau) + a(m_2+\delta_2)(\bar\pi-\bar\xi) : m_1, m_2 \in \mathfrak{J},$$
$$\delta_1 \in \mathfrak{D}_1 \cup 0,\ \delta_2 \in \mathfrak{D}_2 \cup 0,\ \text{või}\quad \delta_1 = \delta_2 \in \mathfrak{D}_3\}.$$

kuid see hulk ei ammenda summade piirkonda üldjuhul.

1. Juhul, kui $\mathfrak{D}_1$ ja $\mathfrak{D}_2$ sisaldavad ülimalt loenduva hulga punkte, omandavad ka δ_1 ja δ_2 valemis (4) ülimalt loenduva hulga väärtusi, mis avalduvad järgmiselt:

Kui $\delta_1 = \delta_1' \in \mathfrak{D}_1$, siis rida $\sum_i r_i' = \sum_i r_{k\varphi(i)}$, mille puhul $A\{\sum_i r_i'\} = \sigma + a\delta_1'(\rho-\bar\tau)$, on $(\bar\pi-\bar\tau)$-rida; selle $(\bar\pi-\bar\tau)$-rea summade piirkonnaks jadade $\bar\pi$ ja $\bar\tau$ ümberjärjestamisel on

$$S_2' = \{\sigma + (m+\delta_2')a(\rho-\bar\tau) : m \in \mathfrak{J};\ \delta_2' \in \mathfrak{D}_2'\}.$$

Selliselt saame vastavalt igale reale $\sum_i r_i^j = \sum_i r_{k\varphi_j(i)}$, mille puhul $A\{\sum_i r_i^j\} = \sigma + a\delta_1^j(\rho-\bar\tau)$, määrata summade piirkonna $S_2^j = \{\sigma + (m+\delta_2^j)a(\rho-\bar\tau) : m \in \mathfrak{J};\ \delta_2^j \in \mathfrak{D}_2^j\}$,

ning meie otsitav summade piirkond sisaldab hulka

$$S_A\left(\sum_i r_i\right) \supset \{\sigma + a[(m_1+\delta_1^j)(\rho-\bar\tau) + (m_2+\delta_2^j)(\rho-\bar\tau)] :$$
$$m_1, m_2 \in \mathfrak{J};\ \delta_2^j \in \mathfrak{D}_2^j\ (j=1,2,\ldots)\}\quad \{\delta_1^j\}_{j=1}^{\infty} = \mathfrak{D}_1 \quad (6)$$

Juhul, kui üks hulkadest $\mathfrak{D}$ või $\mathfrak{D}_2$ on mitteloenduv, /vt. 2.3.1/, on summade piirkonnaks $S_A\left(\sum_i r_i\right)$ arvsirge.

Seega võivad vaadeldaval juhul olla summade piirkonnaks järgnevad hulgad

1. Võre $\{\sigma + \gamma m : m \in \mathfrak{J}\}$.
2. Hulk $\{\sigma + (m+\delta)a\gamma : m \in \mathfrak{J};\ \delta \in \mathfrak{D}\}$

/ $\mathfrak{D}$ määratud teoreemi 5.4 järgi/.

3. Kõikjal tihe hulk $\{\sigma + \alpha[m_1(\rho - \bar{c}) + m_2(\bar{\pi} - \bar{c})] : m_1, m_2 \in \mathfrak{I}\}$.

4. Kõikjal tihe hulk (6).

5. Arvsirge.

§ 7. Üldise tõkestatud liikmetega rea summade piirkond

Vaatleme suvalise tõkestatud liikmetejadaga rea

$$\sum_i x_i \tag{1}$$

summade piirkonda.

Vaatleme hulka

$$\bar{R} = \{\overline{x_i}\}_{i=1}^{\infty}. \tag{2}$$

Hulk (2) ei ole kindlasti tühi. Tähistame selle elemendid $\{\bar{x}_i\}$. Rea (1) iga liige x_i on avaldatav kujul

$$x_i = \bar{x}_{\alpha(i)} + \varepsilon_i.$$

Kui mingile $\bar{x}^*$ -le hulgast $\bar{R}$ vastab selline jada $\{x_{jk}\}$, et

$$x_{jk} = \bar{x}^* + \varepsilon_{jk}, \tag{3}$$

$$\sum_k |\varepsilon_{jk}| = \infty, \tag{4}$$

saame teoreemi 1.1 põhjal järeldada, et $S_A(\sum_i x_i)$ sisaldab vähemalt poolsirget; alati, kui $\bar{R}$ sisaldab vähemalt 2 erinevat punkti, ja leidub indeksite jada $\{j_k\}$, mis rahuldab tingimusi (3) ja (4), on summade piirkonnaks arvsirge.

Edasi vaatleme juhte, kus ühelgi hulga (2) punktile ei vasta ainsatki jada $\{j_k\}$, mis rahuldaks tingimusi (3) ja (4).

Sellisel juhul teeme kõigepealt kindlaks, kas hulk $\bar{R}$ sisaldab vähemalt kahte erinevat punkti $\bar{x}_1$ ja $\bar{x}_2$. Kui ei,

siis on rida absoluutselt summeeruv ning tema summade piirkonnaks on ainus punkt /vt. § 1/.

Vastasel korral sisaldab summade piirkond võret (24), kus $\rho = \bar{\tau}_1$ ja $\tau = \bar{\tau}_2$.

Järgnevalt huvitab meid, kas menetlus A ja rida (1) rahuldavad tingimusi (3.2) ja (3.3), viimaste asemel võivad olla rahuldatud ka tingimused (3.19) ja (3.20), kusjuures rida (1) peab olema $(\rho - \tau)^*$ -rida. Juhul, kui see on nii, on summade piirkonnaks arvsirge.

Vastasel korral valime mingi $\bar{\bar{\tau}} \in \bar{R}$ ning vaatleme hulka $\{\bar{\tau} - \bar{\bar{\tau}} : \bar{\tau} \in \bar{R}\}$ /see hulk võib ka lõplik olla/. Meil on kaks võimalust: leidub mingi lõplik arv γ nii, et $\bar{\tau} - \bar{\bar{\tau}} = \mu\gamma$ iga $\bar{\tau} \in \bar{R}$ korral, kus μ on mingi täisarv /kuna μ peab olema erinev iga erineva $\bar{\tau}$ korral, on see võimalik vaid juhul, kui $\bar{R}$ on ülimalt loenduv hulk/. Sel juhul

$$S_A = \{\sigma + \alpha m\gamma : m \in J\}$$

/tõestus sarnaneb tõestusega järelduses 2.2.2 /.

Juhul, kui leiduvad $\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2, \bar{\tau}_3 \in \bar{R}$ nii, et $\frac{\bar{\tau}_1 - \bar{\tau}_2}{\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_3} = \alpha$, kus α on irratsionaalarv, sisaldab summade piirkond arvsirgel kõikjal tihedat hulka

$$\{\sigma + \alpha[m_1(\bar{\tau}_1 - \bar{\tau}_2) + m_2(\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_3)] : m_1, m_2 \in J\}.$$

Edaspidine uurimiskäik langeb põhiliselt kokku teoreemi 2.3.1 /koos vastavate lemmadega/ tõestusega. Nii saame, et juhul, kui $\bar{R}$ on mitteloenduv, on summade piirkonnaks

arvsirge, juhul aga,kui $\bar{\mathcal{R}}$ on ülimalt loenduv, sisaldab summade piirkond hulka

$$\left\{ \sigma + a\sum_{i=1}^{\infty} m_i(\bar{x}_i - \bar{x}_0) : m_i \in \mathcal{T} \ (i=1,2,\dots) \right\}. \qquad (5)$$

Vaadeldes rida (1) kui $(\bar{x}_i - \bar{x}_0)$-rida, saame määrata summade piirkonnad S_i /analoogilise käsitlusega kui eelnevas paragrahvis teostatud konstruktsioonid/. Juhul, kui mingi summade piirkond S_i sisaldab mitteloenduva hulga $\mathcal{D}$, saame summade piirkonnaks arvsirge. Juhul, kui iga S_i sisaldab ainult loenduva hulga punkte, on kas summade piirkond loenduv, avaldudes kujul

$$\left\{ \sigma + a\sum_{i=1}^{\infty} (m_i + \delta)(\bar{x}_i - \bar{x}_0) : m_i \in \mathcal{T} \ (i=1,2,\dots); \delta \in \mathcal{D} \right\}, \qquad (6)$$

kus $\mathcal{D}$ sisaldab kõiki hulki, $\mathcal{D}_i$ aga ka teatavaid kombinatsioone viimastest /vt. 5,6/, või langeb kokku arvsirgega.

Seega on üldise tõkestatud liikmetejadaga rea puhul uueks summade piirkonna tüübiks vaid hulgad (5) ja (6), mis on aga sisuliselt samuti kõikjal tihedad loenduvad hulgad, nagu ka (4) ja (6) eelmises paragrahvis.

§ 8. L õ p m a t u a r i t m e e t i l i s e r e a s u m m a d e p i i r k o n n a d

Käesolevas paragrahvis vaatleme lõpmatu aritmeetilise rea, s.t. rea (1.1) mille liikmed avalduvad järgneva seosega:

$$r_i = i\varkappa , \qquad (1)$$

summade piirkondi.

Vaatleme kõiki selliseid jadasid e, mille puhul alates mingist i väärtusest $i = J$ kehtib seos

$$h_i^e - g_i^e = e$$

ja tähistame neid sümboliga $e^{(c)}$, $\{e^{(c)}\} = \mathcal{E}^{(c)}$, kus c on konstant /naturaalarv/. Iga jada e^c on γ-jadaks rea (1) suntes, $\gamma = c\varkappa$.

Siit tuleneb järgnev teoreem.

T e o r e e m 1. Multiplikatiivse menetluse A puhul, kui leidub jada $e^{(c)}$ nii, et

$$\alpha[A^{e^{(c)}}] = \sigma^{(c)}$$

sisaldab lõpmatu aritmeetilise rea (1) summadepiirkond punkti

$$\sigma + c\varkappa\sigma^{(c)}.$$

Sarnaselt teoreemidele 5.1–5.4 saame näidata lõpmatut aritmeetilist rida summeerivate menetluste A olemasolu, millede puhul vastavalt etteantud sõltuvatele või sõltumatutele jadadele $e^{(c_j)}$ eksisteerivad multiplikatiivsed menetlused $A^{e^{(c_i)}}$, kusjuures vastavalt etteantud väärtusele σ_i kehtivad seosed $\alpha[A^{e^{(c_i)}}] = \sigma_i$.

Selle põhjal saame teoreemist 5.4 järeldusena tuletada järgneva teoreemi.

T e o r e e m 2. Olgu $\mathfrak{D}$ mingi analüütiline hulk. Vasta-

valt igale lõpmatule aritmeetilisele reale (1) leidub selline kolmnurkne multiplikatiivne maatriksmenetlus A, et

$$S_A\left(\sum_i r_i\right) = \mathfrak{D}.$$

Eriti vaatleme veel juhtu, kus leidub jada $e^{(c)}$ nii, et

$$\alpha\left[A^{e^{(c)}}\right] = \delta,$$

kusjuures $e^{-(c)} = e^{(\bar{c})}$.

Sel juhul

$$A\left\{\sum_i r_{\mathcal{K}} e^{(c)}_{(i)}\right\} = \sigma + a \varkappa c$$

ja

$$A\left\{\sum_i r_{\mathcal{K}} \bar{e}^{(c)}_{(i)}\right\} = \sigma + (a-\delta)\varkappa \bar{c}.$$

Rida $\sum_i r_{\mathcal{K}} e^{(c)}$ ei ole enam lõpmatu aritmeetiline rida, kuid seile rea suhtes on jada $e^{-(c)} \varkappa (2\bar{c}+c)$ -jadaks, nii et saame:

$$A\left\{\sum_i r_{\mathcal{K}} e^{(c)} \mathcal{K} \bar{e}^{(c)}_{(i)}\right\} = \sigma + a\varkappa c + (a-\delta)\varkappa(2c+\bar{e});$$

saadud rea suhtes on jada $e^{(c)}\ \varkappa(2c+3\bar{c})$- reaks, nii et saame

$$A\left\{\sum_i r_{\mathcal{K}} e^{(c)} \mathcal{K} \bar{e}^{(c)} \mathcal{K} e^{(c)}_{(i)}\right\} = \sigma + a\varkappa c + (a-\delta)\varkappa(2\bar{c}+c) + a\varkappa(2\bar{c}+3c),$$

jne, seega on A summeeruv iga rida, mis on saadud lähtereale substitutsioonide

$$\mathcal{K}^{2n} = \left[\mathcal{K}^{e^{(c)}} \cdot \mathcal{K}^{\bar{e}^{(c)}}\right]^n, \quad \mathcal{K}^{2n+1} = \left[\mathcal{K}^{e^{(c)}} \mathcal{K}^{\bar{e}^{(c)}}\right]^n \cdot \mathcal{K}^{e^{(c)}},$$

$$\bar{\mathcal{K}}^{2n} = \left[\mathcal{K}^{\bar{e}^{(c)}} \mathcal{K}^{e^{(c)}}\right]^n \quad \bar{\mathcal{K}}^{2n+1} = \left[\mathcal{K}^{\bar{e}^{(c)}} \mathcal{K}^{e^{(c)}}\right]^n \mathcal{K}^{\bar{e}^{(c)}}$$

rakendamisel, kusjuures vastavalt

$$A\left\{\sum_i r_{\mathcal{K}^{2n}(i)}\right\} = \sigma + a\varkappa c + (a-\delta)\varkappa(2\bar{c}+c) + a\varkappa(2\bar{c}+3c) + \ldots$$

$$= \sigma + a\varkappa \sum_{k=1}^{n} [2(k-1)\bar{c} + (2k-1)c] + (a-\delta)\varkappa \sum_{k=1}^{n} [2k\bar{c} + (2k-1)c],$$

seega

$$A\left\{\sum_i r_{\mathcal{K}^{2n}(i)}\right\} = \sigma + \varkappa\{a(n^2-n)\bar{c} + n^2 c] + (a-\delta)[(n^2+n)\bar{c} + n^2 c]\},$$

$$A\left\{\sum_i r_{\mathcal{K}^{2n+1}(i)}\right\} = \sigma + \varkappa\{a[(n^2+n)\bar{c} + n^2 c] + (a-\delta)[(n^2+n)\bar{c} + n^2 c]\},$$

$$A\left\{\sum_i r_{\bar{\mathcal{K}}^{2n}(i)}\right\} = \sigma + \varkappa\{(a-\delta)[(n^2-n)\bar{c} + n^2 c] + a[(n^2+n)\bar{c} + n^2 c]\},$$

$$A\left\{\sum_i r_{K^{2n+1}_{(i)}}\right\} = \delta + \varkappa\{(a-\delta)[(n^2+n)\bar{c} + n^2 c] + a[(n^2+n)\bar{c} + n^2 c]\}.$$

Summade piirkond omaks siis kuju

$$S_A\left(\sum_i r_i\right) = \delta + \varkappa\{a'[(n^2 \pm n)\bar{c} + n^2 c + a''[(n^2+n)\bar{c} + n^2 c] : n \in \mathfrak{I},$$
$$a', a'' \in A, a' \neq a''\}\ (A = \{a, a-\delta\}),$$

see on punktide hulk, millede vahed kasvavad aritmeetilises progressioonis .

§ 9. Ühe eritüüpi tõkestamatult kasvava liikmetejadaga rea summade piirkond

Käesolevas paragrahvis vaatleme selliseid tõkestamatult kasvava liikmetejadaga ridu

$$\sum_i r_i, \tag{1}$$

millede puhul leiavad aset seosed

$$\begin{cases} r_i \to \infty, \\ \Delta r_i \to 0. \end{cases} \tag{2}$$

Osutub, et selliste ridade puhul saab samuti rakendada paragrahvis 3.1 käsitletud koonduvate parandridade konstrueerimise meetodit. Tõestame kõigepealt järgneva lemma:

Lemma 1. Olgu meil antud rida (1), mis rahuldab tingimusi (2). Vastavalt igale etteantud mittenegatiivsele arvule h leidub ümberjärjestus $\mathcal{K}^h$ nii, et $\mathcal{R}^{\mathcal{K}^h} = h$.

T õ e s t u s. Tähistame

$$\tilde{\Delta} r_i = \max_{\nu \geq i} \Delta r_\nu,$$

siis $\tilde{\Delta} r_i \to 0$, kuna tema olemasolu järeldub seosest (2) .

Defineerime järgnevalt indeksite jada $\{\mathcal{I}_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Olgu i selline indeks, et kehtib võrratus

$$\tilde{\Delta} r_i \leq \frac{h}{3n^2} < \tilde{\Delta} r_{i-1}\,; \tag{3}$$

tähistame siis

$$i = \mathcal{J}_n \quad (n = n(h),\ n(h)+1,\ \dots),$$
$$n(h) = \left[\sqrt{\frac{h}{3\tilde{\Delta} r_1}}\right] + 1. \tag{4}$$

Valime $n = n(h)$, ning defineerime jada $\{i_j^n\}\ (j = 1,2,\dots,n)$ järgnevalt: $i_1^n = \mathcal{J}_n$,

$$r_{i_j^n} - r_{i_{j-1}^n} \geq 2\tilde{\Delta} r_{\mathcal{J}_n} > r_{i_j^n - 1} - r_{i_{j-1}^n}. \tag{5}$$

See on võimalik suuruste $\tilde{\Delta} r_i$ definitsiooni ja seose (2) tõttu; jada $\{l_j^n\}\ (j = 1,2,\dots,n;\ l_j^n \neq i_k^n,\ k = 1,2,\dots,n)$ määratakse nii, et kehtiks võrratus

$$\left| r_{l_j^n} - r_{i_j^n} - \frac{h}{n} \right| \leq \tilde{\Delta} r_{i_j^n}, \tag{6}$$

mis on meie rea puhul alati võimalik.

Defineerime nüüd lihtsubstitutsiooni $\mathcal{K}^h$ järgneval viisil

$$r_{l_j^n} \longleftrightarrow r_{i_j^n} \qquad (j = 1,2,\dots,n), \tag{7}$$

kui aga on määratud ümberjärjestuse $\sum_i r_{\mathcal{K}^h(i)}$ liikmed $r_{\mathcal{K}^h(1)}, r_{\mathcal{K}^h(2)}, \dots, r_{\mathcal{K}^h(l_{kn}^n)}$, siis määrame edasi indeksid $i_{kn+1}^n, i_{kn+2}^n, \dots, i_{kn+n}^n$ järgmiselt

$$r_{i_j^n} = r_{l_{j-n}^n + 1} \quad (j = kn+1, \dots, (k+1)n;\ k = 1,2,\dots,\mu_n), \tag{8}$$

kus on defineeritud seeliselt, et peaks paika võrratus

$$i_{(\mu_n - 1)n+1}^n \leq \mathcal{J}_{n+1} < i_{\mu_n - n + 1}^n. \tag{9}$$

Hindame nüüd parandrea $\sum_i \rho_i^{\mathcal{K}^h}$ m-nest osasummat, kasutades valemit (1.4.4). Iga m-jaoks leiduvad sel-

lised indeksid n ja j^*, et

$$\gamma_n < i_{j^*}^n < m \le i_{j^*+1}^n .$$

Siis

$$\sum_{i=j^*+1}^{j^*+n-1} [r_{\ell_j^n} - r_{i_j^n}] \le \sum_{i=1}^{m} \rho_i \varkappa^h \le \sum_{i=j^*+1}^{j^*+n} [r_{\ell_j^n} - r_{i_j^n}],$$

kuid seoste (3), (5) ja (6) põhjal

$$\sum_{i=j^*+1}^{j^*+n-1} [r_{\ell_j^n} - r_{i_j^n}] \ge (n-1)\left(\frac{h}{n} - \tilde{\Delta} r_i\right) \ge h\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{3n}\right),$$

ja

$$\sum_{j=j^*+1}^{j^*+n} [r_{\ell_j^n} - r_{i_j^n}] \le n\left(\frac{h}{n} + \tilde{\Delta} r_i\right) \le h\left(1 + \frac{1}{3n}\right),$$

s.t.

$$\left| \sum_{i=1}^{m} \rho \varkappa^h - h \right| \le \frac{4h}{3n} .$$

Defineerime nüüd

$$r_{i_1^{n+1}} = r_{\ell^n_{(r_n-1)n+j^*+1}} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \qquad (10)$$

ning realiikmed $r_{\ell_1^{n+1}}, \dots, r_{\ell_{n+1}^{n+1}}$ vastavalt valemile (7), aga realiikme $r_{i_{n+1}^{n+1}}$ nii, et kehtiks (6).

Seejärel määrame indeksid $i^{n+1}_{kn+1}, \dots, i^{n+1}_{(k+1)n}$ ja $e^{n+1}_{kn+1}, \dots$ $\dots e^{n+1}_{(k+1)n}$ $(k = 1, 2, \dots, \nu_{n+1})$ valemite (8) ja (6) kohaselt, ja ümberjärjestuse $\sum_i r_{\varkappa^h(i)}$ indeksite ν, $\nu = i_1^{n+1}, \dots$ $\dots i^{n+1}_{\nu_{n+1}(n+1)}$ jaoks vastavalt valemile (7).

Kõik mõttekäigud, mis kehtivad n väärtusel $n(h)$, jäävad paika pidama ka n väärtusel $n(h)+1$; ümberjärjestuse $\sum_i r_{\varkappa^h(i)}$ liikmete defineerimist jätkame ülalkirjeldatud meetodil, mille tagajärjel saame

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_i \varkappa^h = h + \varepsilon_m, \quad |\varepsilon_m| \le \frac{4h}{3n}, \text{ kui } i_1^n \le m < i_1^{n+1}.$$

Indeksi $J_n(4)$ ning suuruse μ_n definitsioonist (9) järeldub eelduse (2) põhjal, et kui $n \to \infty$, siis ka $n \to \infty$ ja seega $\varepsilon_m \to 0$, ning meie teoreem on tõestatud.

Järeldus 1. Kui rea (1) liikmete jada sisaldab osajada $\{r_{\mu_i}\}$, $r_{\mu_i} \to \infty$, $\Delta r_{\mu_i} \to 0$, siis leidub vastavalt igale mittenegatiivsele täisarvule h selline substitutsioon K^h, et $R^{K^h} = h$.

Tõepoolest, sellise substitutsiooni K^h saab defineerida realiikmetele nii, et osajada $\{r_{\mu_i}\}$ liikmed paigutatakse ümber eeskirja kohaselt, mis on antud lemmas 1, kuna ülejäänud realiikmed jäetakse endistele kohtadele.

Lemma 2. Selleks, et substitutsioon K muudaks rea (11), mis rahuldab tingimusi (1) ja (2), summat, on tarvilik, et substitutsioon K oleks tõkestamatu.

T õ e s t u s. Olgu substitutsioon K tõkestatud konstandiga d /vt. def. 1.1.5/. Valemist (1.4.4) järeldub, et

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_i^K \le \sum_{j=1}^{d} |r_{m-d+j} - r_{m+j}| \le d^2 \max_{i>m-d} |\Delta r_i| = \varepsilon_m, \quad \varepsilon_m \to 0,$$

ja lemma on tõestatud.

Lemmade 1 ja 2 põhjal on võimalik tõestada järgnev teoreem.

T e o r e e m 1. Rea (1.1), mis rahuldab tingimusi (1) ja (2), summade piirkonnaks võib olla ainult kas arvsirge või poolsirge, kusjuures rea summa muutub ainult tõkestamatu substitutsiooni rakendamisel.

T õ e s t u s . Olgu $a>0$ .Rea (1.1) jaoks, mis rahuldab tingimust (1), kehtib alati üks seostest $r_{p_i} \to \infty$ või $r_{q_i} \to -\infty$. Lihtsuse mõttes eeldame, et kehtib $r_{p_i} \to \infty$. Siis lemma 1 põhjal

$$S_A\left(\sum_i r_i\right) \supset [\sigma, \infty),$$

Oletame, et leidub lõplik või lõpmatu hulk punkte $\{c_i\}$, $c_i < 0$ nii,et $\sigma + c_i \in S_A\left(\sum_i r_i\right)$ .Vaatleme järg nevaid juhte:

1. Olgu hulk $\{\sigma + c_i\}$ alt tõkestatud,ning olgu

$$\inf\{\sigma + c_i\} = \sigma + c .$$

Siis $S_A\left(\sum_i r_i\right) = [\sigma + c, \infty)$ või $S_A\left(\sum_i r_i\right) = (\sigma + c, \infty)$, sõltuvalt sellest, kas punkt $\sigma + c$ kuulub summade piirkonda $S_A\left(\sum_i r_i\right)$ või mitte.

Tõepoolest ,iga punkti $\gamma^* \in (\sigma + c, \infty)$ jaoks leidub selline punkt c^* ,et $\gamma^* - \sigma - c^* = b^* > 0$; rida $\sum_i r_{\varkappa^*(i)}$,mille puhul $A\left\{\sum_i r_{\varkappa^*(i)}\right\} = \sigma + c^*$, rahuldab samuti tingimusi (1) ja (2) ,ning lemma 1 põhjal on tema jaoks olemas parandrida $\sum_i \rho_i^{\varkappa/\beta} = \beta$; $\beta = \frac{b^*}{a}$ .Seega

$$A\left\{\sum_i r_{\varkappa^*(i)}\right\} + A\left\{\sum_i \rho_i^{\varkappa/\beta}\right\} = \sigma + c^* + a\frac{b^*}{a} = \gamma^* ; \quad \gamma \in S_A\left(\sum_i r_i\right).$$

2. Juhul,kui hulk $\{\sigma - c_i\}$ ei ole alt tõkestatud, näitab samasugune arutelu, et summade piirkonnaks on arvsirge.

Kõik arutelud on sarnased ka juhul,kui $r_{q_i} \to \infty$. Summade piirkond sisaldab sel juhul vastavalt hulka $(-\infty, \sigma + c]$ $(-\infty, \sigma + c)$ või $(-\infty, \infty)$.

<u>Järeldus 2.</u> Kui rea (1) liikmetejada sisaldab osajadasid $\{r_{\mu_i}\}, \{r_{\nu_i}\}$ nii, et $r_{\mu_i} \to \infty$, $r_{\nu_i} \to -\infty$, $\Delta r_{\mu_i} \to 0$, $\Delta r_{\nu_i} \to 0$.

siis on selle rea A-summade piirkonnaks arvsirge iga multipliikatiivse menetluse A korral.

§ 10. N ä i t e i d

Eelmistes paragrahvides toodud teoreemide illustreerimiseks esitame käesolevas paragrahvis rea näiteid. Kõik käesoleva paragrahvi näited kinnitavad tõsiasja, et iga A-summeeruva $(\rho-\bar{c})$-rea summade piirkond sisaldab vöret $\{\bar{c}+a(\rho-\bar{c})m;\ m\in\mathfrak{I}\}$, mis on väljendatud paragrahvis 2.

Paragrahvis 3 esitatavat teoreemi illustreerivad näited 1,2,10,11 ja 12.

Menetluseks, mille puhul on summade piirkonnaks arvsirge, ning mis rahuldab tingimusi (319) ja (320), sobib iga $(\rho-\bar{c})^*$ rea korral näiteks menetlus C_1; kuna see on üldtuntud, me seda ei esita.

Näidetes 1 ja 2 ei ole piisavad tingimused (32) ja (33) teoreemi 3.1 jaoks täidetud, ja, nagu me näitame, on summade piirkonnaks vöre.

Reaks $\sum_i r_i$ on mõlemas näites järgnev rida

$$\begin{cases} r_1 = 1, \\ r_{6k+1} = -1, \\ r_{6k+2} = -1, \\ r_{6k+3} = 2, \\ r_{6k+4} = -2, \\ r_{6k+5} = 1, \\ r_{6(k+1)} = 1 \qquad (k = 1, 2, \dots). \end{cases} \tag{1}$$

Kuigi hulk $\bar{R}$ sisaldab 4 erinevat punkti -2,-1, 1 ja 2, avalduvad kõik vahed $\bar{x}_i - \bar{x}_j$ vahe 2-1=1 kaudu, nii et teoreemi 6 järgi võime rida vaadelda $(\rho - \tilde{c})$ - reana, s.o. $(2-1)$-reana.

Maatriksi A, näites 1 konstrueerisime järgnevalt: Reaga (1) on määratud jadad e', e'' ja e° nii, et $s_n^{e'} = 1$, $s_n^{e''} = 2$, $s_n^{e^\circ} = 0$ $(n = 1,2,\dots)$.

Tähistame jadasse e' kuuluvate naturaalarvude arvu lõigul $[\nu, n]$ tähisega $k^{e'}(\nu, n)$.

Olgu siis

$$a_{n\nu}^{e^\circ} = 0, \quad \nu = 1,2,\dots; \; n = 1,2,\dots,$$

$$a_{n\nu}^{e'} = \frac{1}{2} k^{e'}(\nu, n) - 1, \quad \nu = 1,2,\dots,n; \; \nu \in e',$$

$$a_{n\nu}^{e''} = -\frac{1}{2} k^{e''}(\nu, n), \quad \nu = 1,2,\dots,n, \; \nu \in e'',$$

$$a_{n\nu}^{e''} = 0, \quad \begin{matrix} \nu \bar{\in} e'' \\ \nu \neq n. \end{matrix}$$

Nagu näeme, ei ole rahuldatud tingimus (3.3) ühegi jada c korral; kuna jadade e', e'' ja e° ulatuses on küll rahuldatud tingimus (3.2), kuid et, nagu rea definitsioonist järeldub, ei ole ükskõki neist jadadest γ-jada, ei ole ka see tingimus piisav.

Ja tõepoolest, ühegi $\bar{e} \in e'$ korral, kui $\bar{e} \in \bar{\mathcal{E}}$, $e' - \bar{e} \in \bar{\mathcal{E}}$, ei eksisteeri suurust $\alpha[A^{\bar{e}}]$, kuna siis alati

$$\overline{\lim} \sum_\nu a_{n\nu}^{\bar{e}} > 1,$$

$$\underline{\lim} \sum_\nu a_{n\nu}^{\bar{e}} < 1.$$

Sama on võimalik näidata ka mistahes meelevalduse $\tilde{e}$ jaoks,

mis erineb lõpmatu jada võrra jadadest e', e'' ja e°. Seega ei leidu ühtegi γ-jada e, mille jaoks eksisteeriks A^{e}, ja teoreemi 4.1 põhjal ei leidu summade piirkonnas ühtegi punkti peale võrepunktide.

Seega on näide ühtlasi illustratsiooniks paragrahvile 4, kuigi maatriks A on konstruktsioonilt keerukam, kui teoreemis 4.1 esitatu.

Näites 2 on sama rea korral täidetud küll tingimus (3.18), seega on (33) täidetud iga γ-jada e^{*} korral, milliseid meie rea puhul leidub lõpmata palju. Kuid tingimus (3.2) ei ole sarnaselt näitega 1 täidetud, ja seega on summadepiirkonnaks jällegi võre.

Näide 3 on vahetuks illustratsiooniks teoreemile 5.1, kusjuures rida (1) on valitud selliselt, et ta rahuldab tingimust (3.4).

Näide 4 illustreerib teoreemi 5.2. Rida (1) rahuldab tingimust (5.5).

Teoreemile 5.2 järgnevat järeldust 5.1 illustreerib näide 7.

Teoreemi 5.3 kohta käivad näited 5 ja 6. Kuna korrapärasuse nõue on jadade süsteemi jaoks küllaltki range nõue, on seiliste maatriksite konstrueerimine tunduvalt tülikam, kui kõigis eelnevates näidetes esitatud maatriksite konstrueerimine. Seetõttu on ka näites 6 kõigi reaalarvude nulgast näitesse "mahtunud" maatriksosa" abil kättesaadavad vaid nii

esimest $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$,mis muidugi ei kitsenda näite üldsust, küll aga näitab konstruktiivseid raskusi,mis kerkivad keerukamatele hulkadele vastavate maatriksite esitamisel.

Näited 8 ja 9 annavad summade piirkonna mitmesuguseid lõikude süsteeme .

Näidetes 10 ja 11 on esitatud $(\rho+\rho)$- ridade summade piirkondi.

Näites 10 on summade piirkonnaks ühe lisapunktiga võre, mis on n.ö. reeglipäraseks $(\rho+\rho)$- rea summade piirkonnaks

$$\{\sigma+2a\rho(m+\delta): m\in\mathcal{T};\ \delta\in\mathcal{D}\}\quad (\mathcal{D}=\{0,\delta^*\}).$$

Sisuliselt samasuguse summade piirkonnaga on meil tegemist ka näites 11, kuid siin asetseb vahepunkt võrelõigu keskkohas, ja seega tandub summade piirkond võreks kujuga $\{\sigma+amg: m\in\mathcal{T}\}$ mis näitab, et sobiva $\alpha[A^e]$ ja $\alpha[A^{\bar{e}}]$ valiku korral võib ka $(\rho+\rho)$- rea summade piirkonnaks olla võre.

Näide 12 on tõestuseks, et tingimused (3.2) ja (3.3) ei ole tarvilikud. Nimelt saab etteantud $(\rho-\tau)$- rea jaoks konstrueerida maatriksi A ,mis ei rahulda kumbagi tingimustest (3.2) ja (3.3) ,kuid mille puhul summade piirkonnaks on arvsirge. Võti selliseks konstruktsiooniks on tegelikult antud järeldusega 5.1 . Nimelt määrame ortogonaalsete jadade süsteemi $\{e_i\}_{i=}^{\infty}$ nii, et $\alpha[A^{e_i}]=\frac{1}{2^i}$ /Näite ulatuses on määratud jadade e_1, e_2, e_3 ja e_4 esimesed liikmed/ viimased on määratud eeskirja järgi

$$e_i=\{(2_k^i+2^{i-1})2-1\}_{k=1}^{\infty}\quad (i=1,2,\dots).$$

Määratgu maatriksi nii, et

$$a'_{nn} = c,$$

kus c on meelevaldne konstant, seame, et tingimus (3.3) ei ole ühegi γ- jada puhul täidetud, kuna näitega 2 sarnase konstruktsiooni abil võime saavutada olukorra, et pole täidetud ka (3.2).

Selle tõttu aga on A - summade piirkonnaks arvsirge ainult spetsiaalselt valitud $(\rho-\bar{c})$-ridade puhul. Asjaolu, et tegemist on $(\rho+\rho)$ reaga, ei oma siin mingit tähtsust: rida on selliselt valitud vaid konstruktsiooni lihtsustamiseks.

Kuna ülejäänud paragrahvides esitatavad teoreemid on kas lihtsalt illustreeritavad tuntud summeerimismenetluste abil (§ 1, § 9), või nende jaoks on näited tuletatavad siin esitatuist (§ 7 , § 8), piirdume toodud näidetega.

Náide 1

$$S_A\left(\sum_i r_i\right) = \sqrt{}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
r	1	-1	2	-2	1	1	-1	-1	2	-2	1	1	-1	-1	2	-2	1	1	-1	-1	2	-2	1	1	-1
s	1	0	2	0	1	2	1	0	2	0	1	2	1	0	2	0	1	2	1	0	2	0	1	2	1
σ	1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	0	$\frac{1}{32}$	0	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	0	0	$\frac{1}{128}$	0	$\frac{1}{256}$
r'	2	-1	2	-2	1	1	-1	-1	2	-2	1	1	-1	-1	2	-2	1	1	-1	-1	2	-2	1	1	-1
s'	2	1	3	1	2	3	2	1	3	1	2	3	2	1	3	1	2	3	2	1	3	1			
σ'	2	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{17}{16}$	$\frac{17}{16}$	$\frac{31}{32}$	$\frac{31}{32}$	$\frac{33}{32}$	$\frac{63}{64}$	$\frac{65}{64}$	$\frac{65}{64}$	$\frac{127}{128}$	$\frac{127}{128}$	$\frac{129}{128}$	$\frac{255}{256}$	$\frac{257}{256}$
1	1																								
2	1																								
3	1		$-\frac{1}{2}$																						
4	1		$-\frac{1}{2}$																						
5	$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$		1																				
6	$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{4}$		1	$-\frac{1}{2}$																			
7	$\frac{1}{4}$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1																		
8	$\frac{1}{4}$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1																		
9	$\frac{1}{4}$		$-\frac{1}{8}$		$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{2}$																	
10	$\frac{1}{4}$		$-\frac{1}{8}$		$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{2}$																	
11	$\frac{1}{8}$		$-\frac{1}{8}$		$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$		1															
12	$\frac{1}{8}$		$-\frac{1}{16}$		$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$		1	$-\frac{1}{2}$														
13	$\frac{1}{16}$		$-\frac{1}{16}$		$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1													
14	$\frac{1}{16}$		$-\frac{1}{16}$		$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1													
15	$\frac{1}{16}$		$-\frac{1}{32}$		$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$		$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1			$-\frac{1}{2}$										
16	$\frac{1}{16}$		$-\frac{1}{32}$		$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$		$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1			$-\frac{1}{2}$										
17	$\frac{1}{32}$		$-\frac{1}{32}$		$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$		$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$			$-\frac{1}{2}$		1								
18	$\frac{1}{32}$		$-\frac{1}{64}$		$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{32}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{16}$		$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$			$-\frac{1}{4}$		1	$-\frac{1}{2}$							
19	$\frac{1}{64}$		$-\frac{1}{64}$		$\frac{1}{32}$	$-\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{16}$		$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$			$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1						
20	$\frac{1}{64}$		$-\frac{1}{64}$		$\frac{1}{32}$	$-\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{16}$		$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$			$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1						
21	$\frac{1}{64}$		$-\frac{1}{128}$		$\frac{1}{32}$	$-\frac{1}{64}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{32}$		$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$			$-\frac{1}{8}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1		$-\frac{1}{2}$				
22	$\frac{1}{64}$		$-\frac{1}{128}$		$\frac{1}{32}$	$-\frac{1}{64}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{32}$		$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$			$-\frac{1}{8}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1		$-\frac{1}{2}$				
23	$\frac{1}{128}$		$-\frac{1}{128}$		$\frac{1}{64}$	$-\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$-\frac{1}{32}$		$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$			$-\frac{1}{8}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$		1		
24	$\frac{1}{128}$		$-\frac{1}{256}$		$\frac{1}{64}$	$-\frac{1}{128}$	$\frac{1}{32}$	$-\frac{1}{64}$		$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{32}$	$\frac{1}{8}$			$-\frac{1}{16}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{4}$		1	$-\frac{1}{2}$	
25	$\frac{1}{256}$		$-\frac{1}{256}$		$\frac{1}{128}$	$-\frac{1}{128}$	$\frac{1}{64}$	$-\frac{1}{64}$		$\frac{1}{32}$	$-\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$			$-\frac{1}{16}$		$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1

Nälde 2

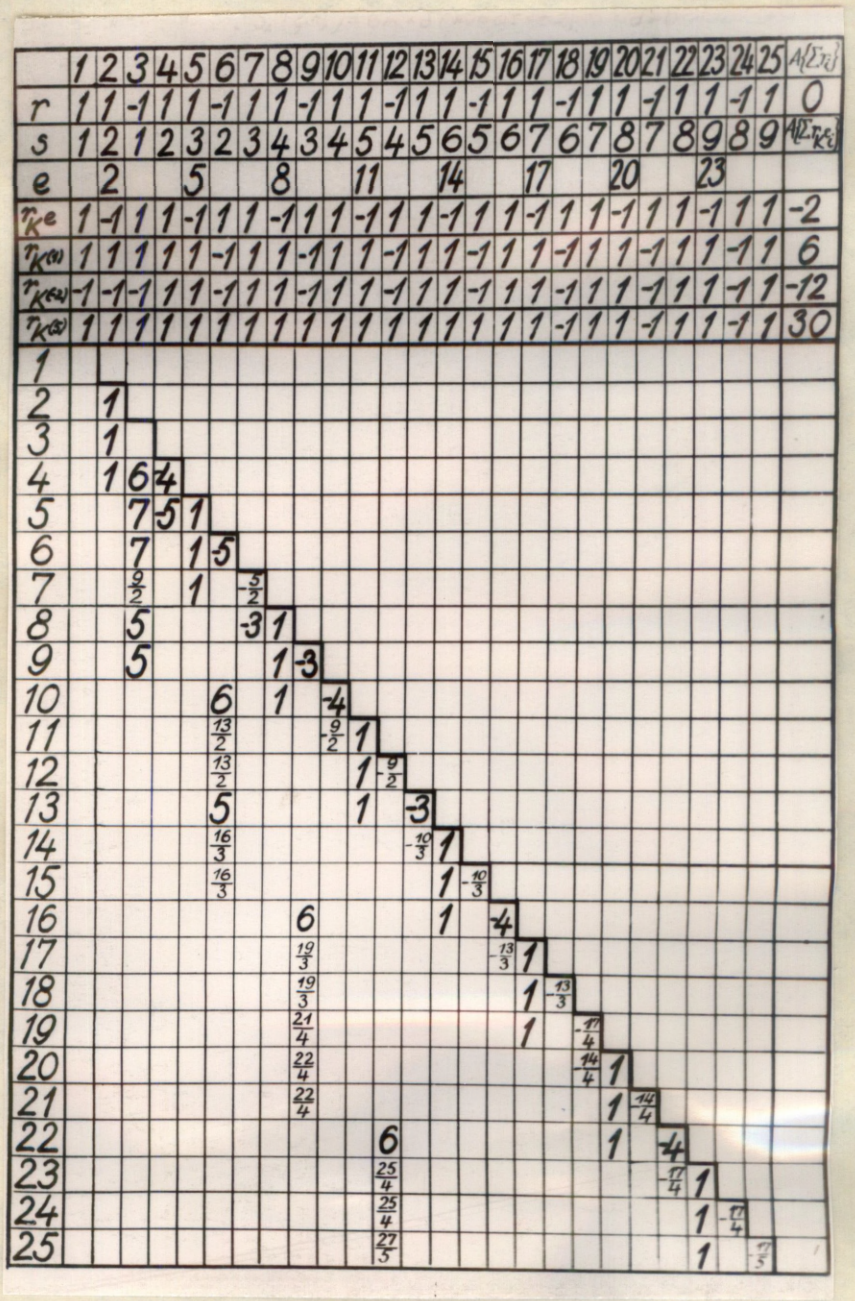
$$S_A\left(\sum_i r_i\right) = \left\{\frac{n}{2} : n \in \mathbb{Z}\right\}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
r	1	1	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2	1	1
s	1	0	1	2	1	0	2	0	1	2	1	0	2	0	1	2	1	0	2	0	1	2
σ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1						$-\frac{1}{2}$															
2			1	$-\frac{1}{2}$																		
3	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$			$-\frac{1}{4}$															
4	$\frac{1}{2}$			$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$					$-\frac{1}{4}$												
5	$\frac{1}{2}$			$-\frac{1}{4}$					$\frac{1}{2}$				$-\frac{1}{4}$									
6			$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$					$-\frac{1}{4}$			$-\frac{1}{4}$									
7			$\frac{1}{2}$				$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$												
8					$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$				$-\frac{1}{4}$									
9	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$		$-\frac{1}{6}$			$-\frac{1}{6}$												
10	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$			$-\frac{1}{6}$		$\frac{1}{3}$				$-\frac{1}{6}$									
11	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$			$-\frac{1}{6}$				$\frac{1}{3}$					$-\frac{1}{6}$						
12	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$			$-\frac{1}{6}$								$\frac{1}{3}$				$-\frac{1}{6}$			
13			$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{3}$				$-\frac{1}{6}$						$-\frac{1}{6}$			
14			$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$					$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$		$-\frac{1}{6}$									
15			$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$					$-\frac{1}{6}$					$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$						
16				$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$								$-\frac{1}{6}$			
17					$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{3}$				$-\frac{1}{6}$		$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$			$-\frac{1}{6}$			
18				$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$						$\frac{1}{3}$		$-\frac{1}{6}$		$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$						
19							$-\frac{1}{6}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$			$-\frac{1}{6}$			
20	$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$						$-\frac{1}{6}$			$-\frac{1}{6}$			
21	$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{3}$		$-\frac{1}{6}$			$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$		$-\frac{1}{6}$									
22	$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{3}$		$-\frac{1}{6}$			$-\frac{1}{6}$					$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$						
23	$\frac{1}{3}$						$-\frac{1}{6}$		$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$								$-\frac{1}{6}$			
24	$\frac{1}{3}$								$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$			$-\frac{1}{6}$		$\frac{1}{3}$				$-\frac{1}{6}$			
25	$\frac{1}{3}$						$-\frac{1}{6}$				$\frac{1}{3}$		$-\frac{1}{6}$		$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$						
26			$\frac{1}{3}$				$-\frac{1}{6}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$		$-\frac{1}{6}$						$-\frac{1}{6}$			
27			$\frac{1}{3}$						$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$			$-\frac{1}{6}$		$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$						
28			$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$							$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$			$-\frac{1}{6}$			
29	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$		$-\frac{1}{8}$		$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$			$-\frac{1}{8}$									
30	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$		$-\frac{1}{8}$			$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$					$-\frac{1}{8}$						

Näide 3

$$S_A\left(\sum_i r_i\right) = \{6m + \delta : m \in \mathbb{Z},\ \delta \in \mathcal{D}\}$$

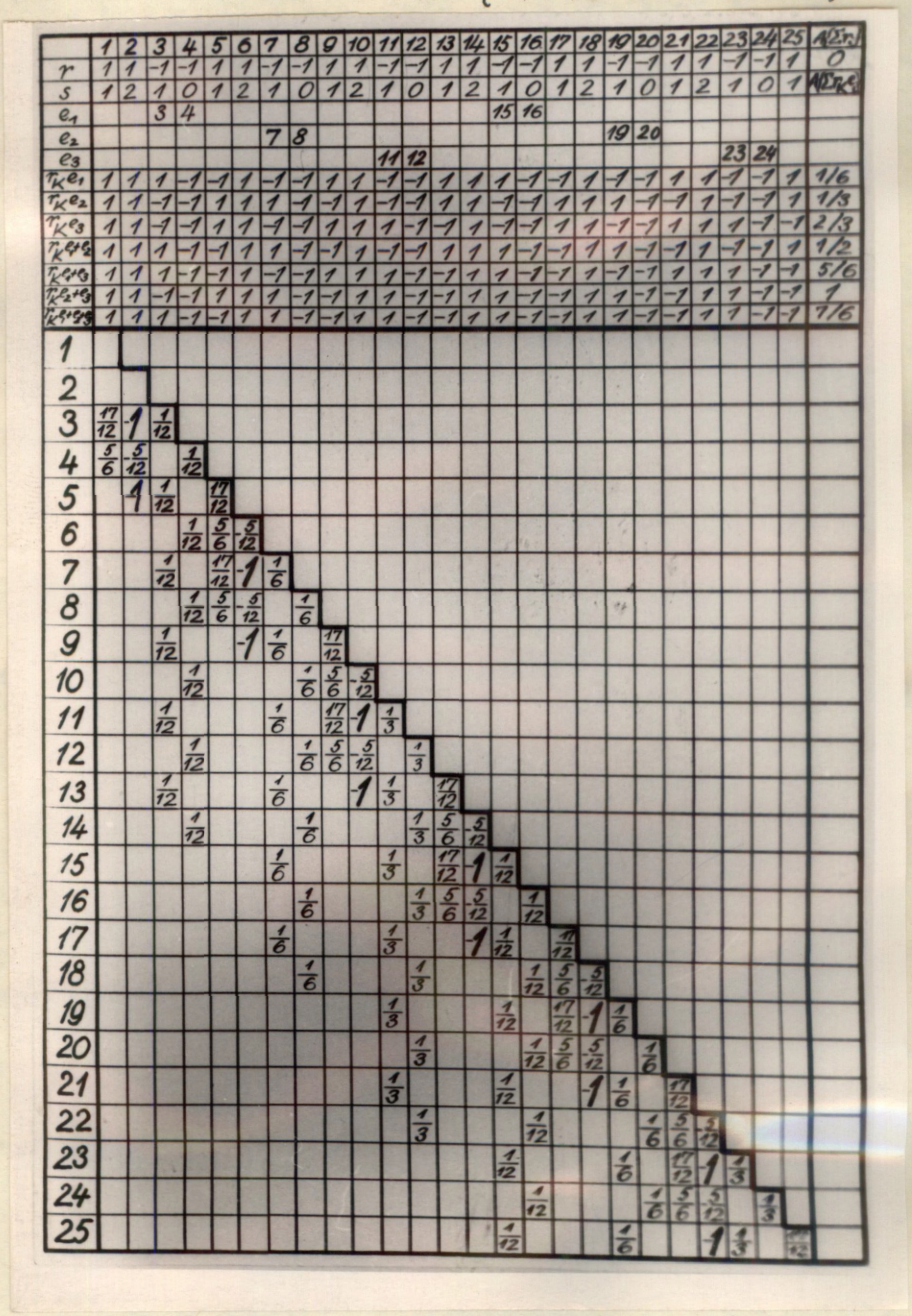
$$\mathcal{D} = \{0, -2\}$$



Náloe 4

$$S_A\left(\sum_i r_i\right) = \{2m+\delta : m \in \mathbb{Z},\ \delta \in \mathcal{D}\}$$

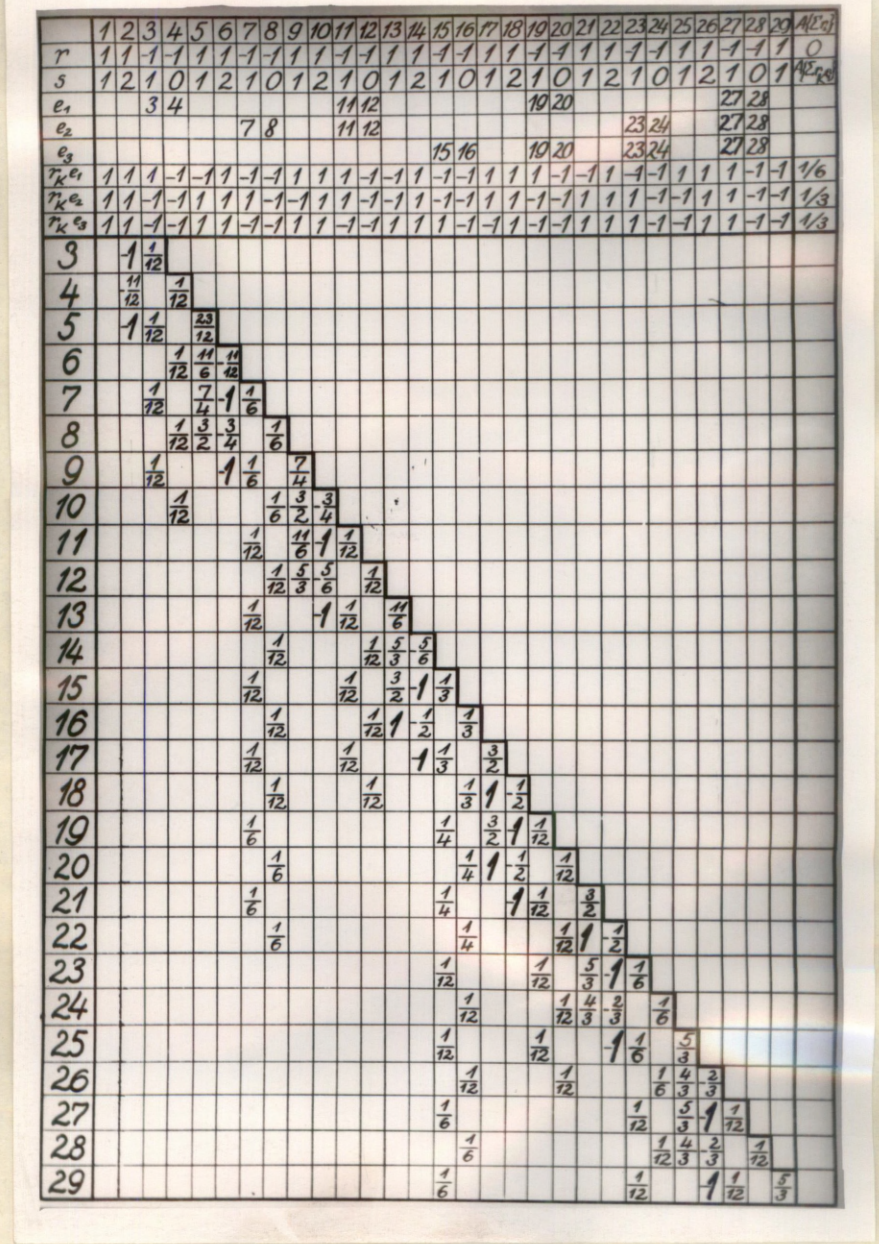
$$\mathcal{D} = \left\{0, \tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{5}{6}, 1, \tfrac{7}{6}\right\}$$



Näide 5

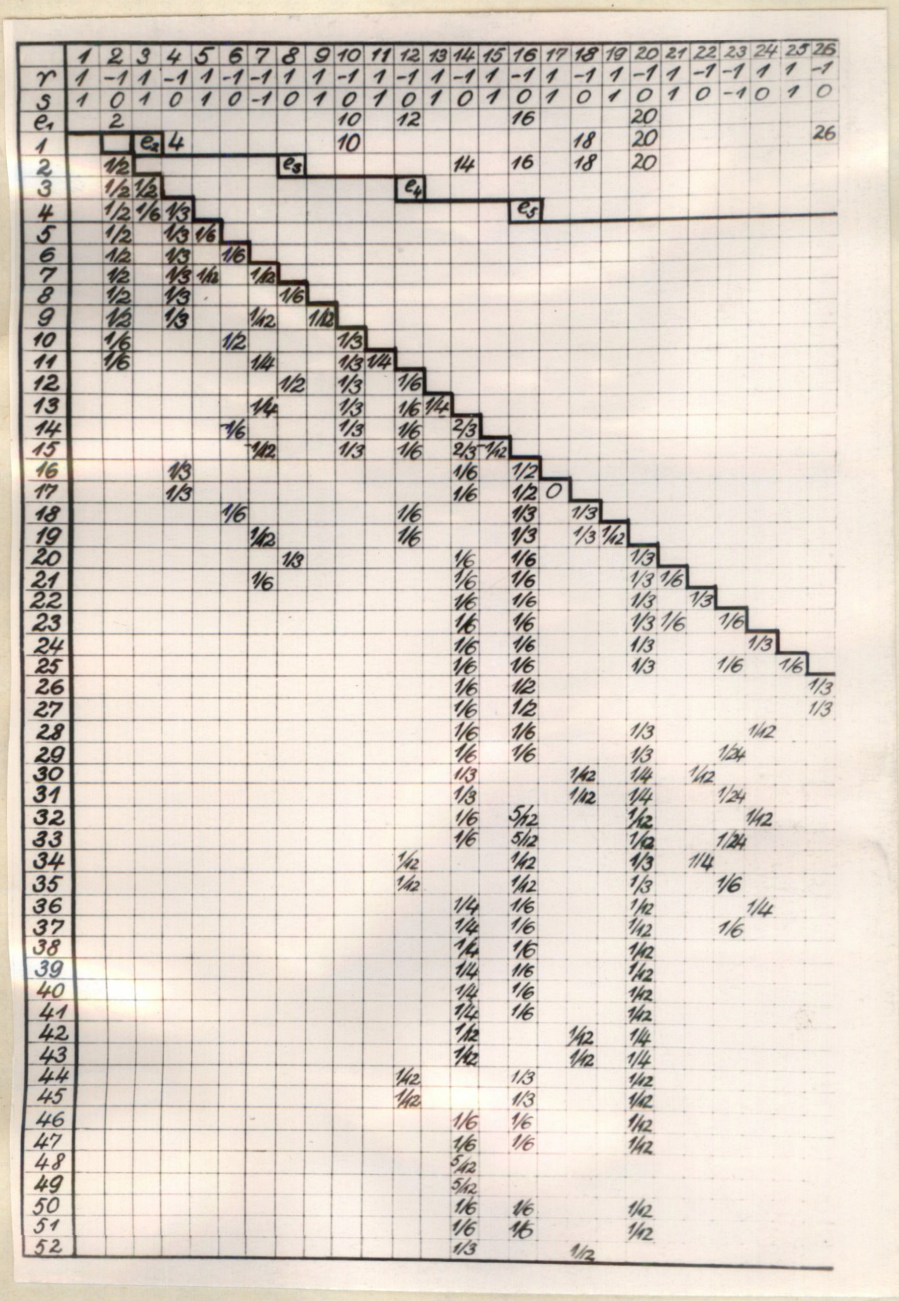
$$S_A\left(\sum_i r_i\right) = \{2m + \delta : m \in \mathbb{Z},\ \delta \in \mathcal{D}\}$$

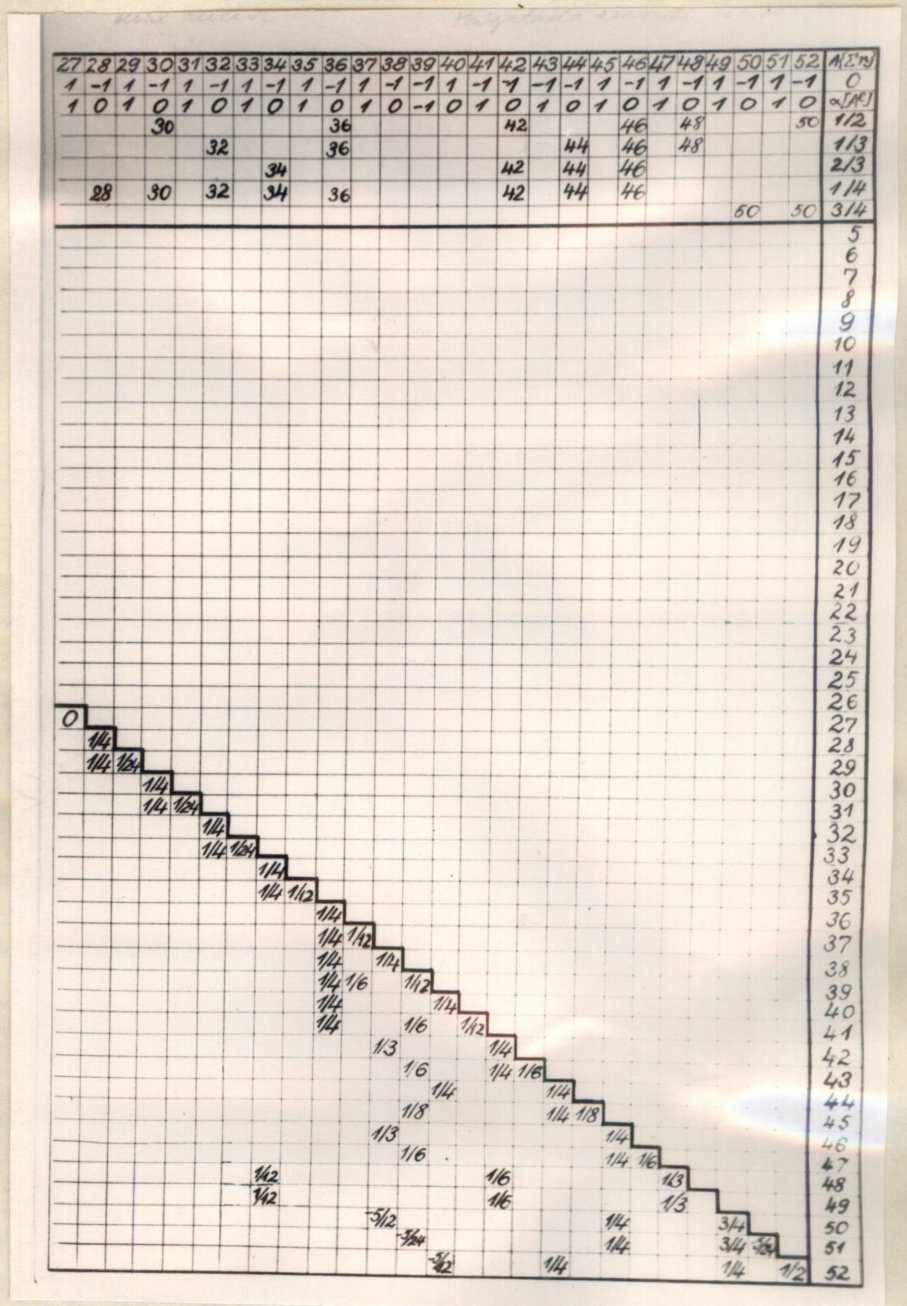
$$\mathcal{D} = \left\{0, \tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right\}$$



Naide 6

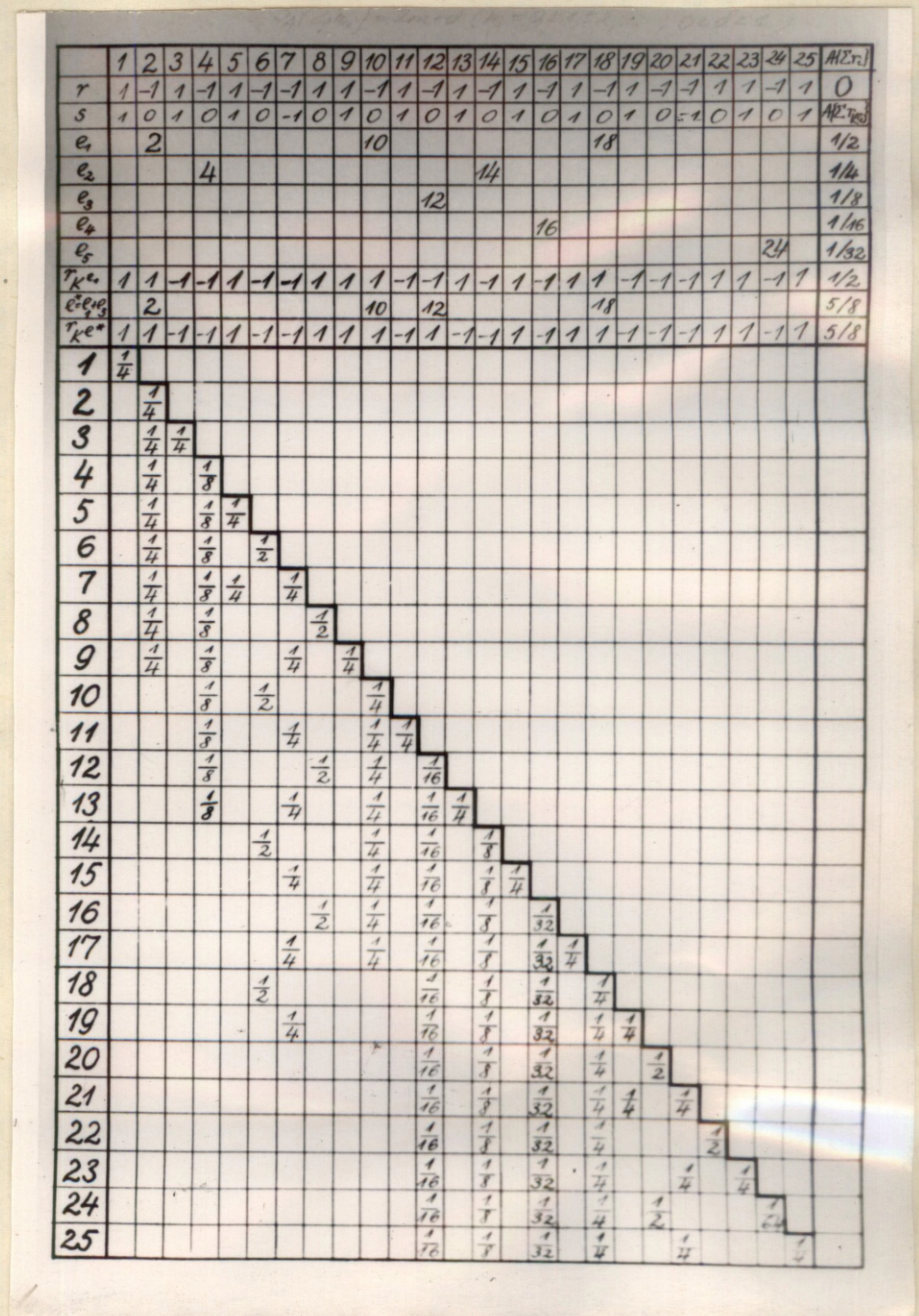
$$S_A\left(\sum_i r_i\right) = R_1$$




27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 A(Σ'n)
1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 -1 1 -1 -1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 0
1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 -1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 α[A']
30 36 42 46 48 50 1/2
32 36 44 46 48 1/3
34 42 44 46 2/3
28 30 32 34 36 42 44 46 1/4
50 50 3/4
0
1/4
1/4 1/24
1/4
1/4 1/24
1/2
1/4 1/24
1/4
1/4 1/12
1/4
1/4
1/4
1/4
1/4 1/12
1/4
1/4
1/4 1/6
1/12
1/4
1/6
1/12
1/4
1/3
1/4 1/6
1/6
1/4
1/8
1/4 1/8
1/3
1/4
1/6
1/4 1/6
1/3
1/2
1/2
1/6
1/6
1/3
-5/12
-3/24
-1/12
1/4
1/4
3/4
3/4 -1/24
1/4 1/2
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52

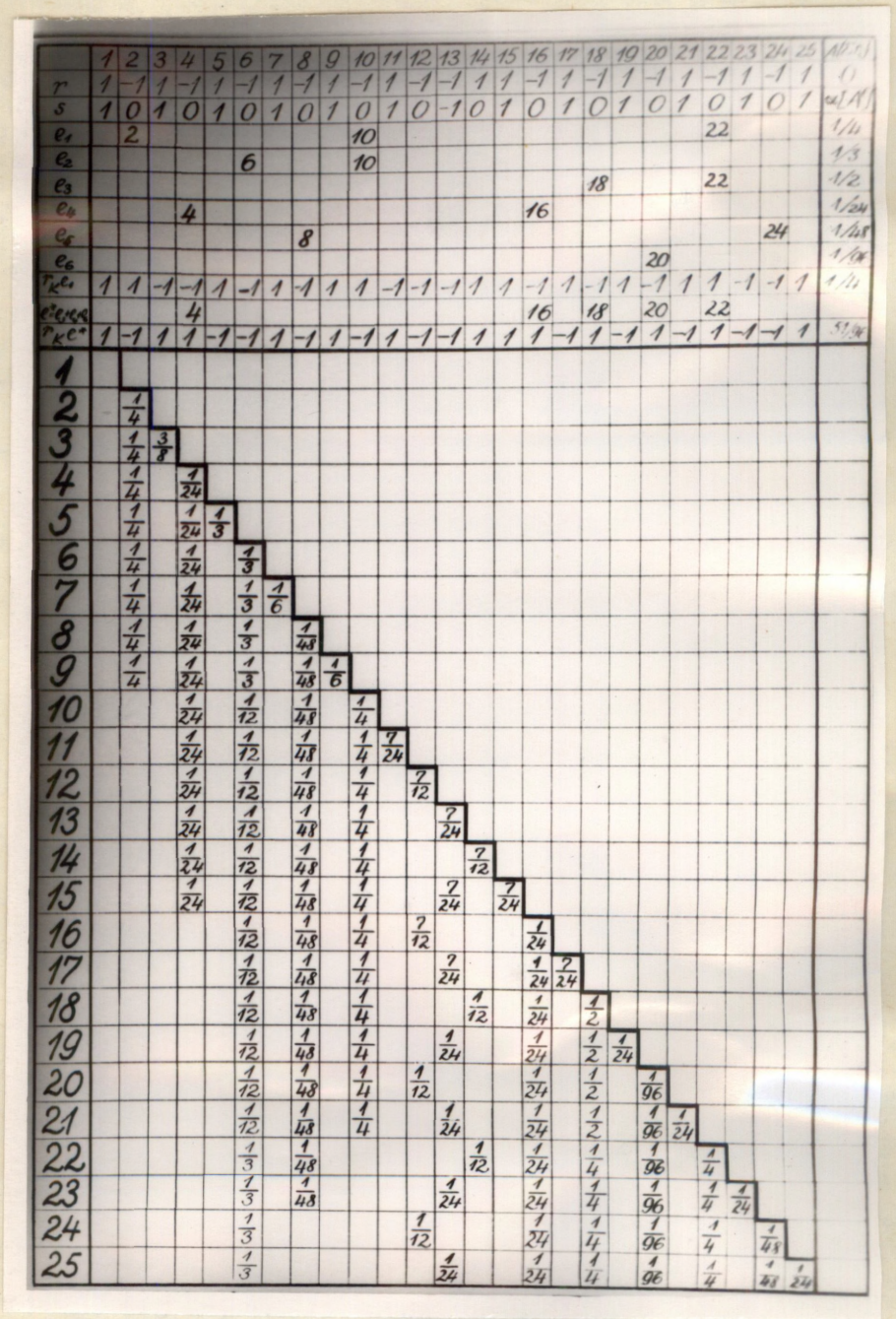
Náide 7

$$S_A\left(\sum_i \tau_i\right) = \{2m+\delta;\ m \in \mathbb{Z},\ \delta \in [0,1]\}$$



Näide 8

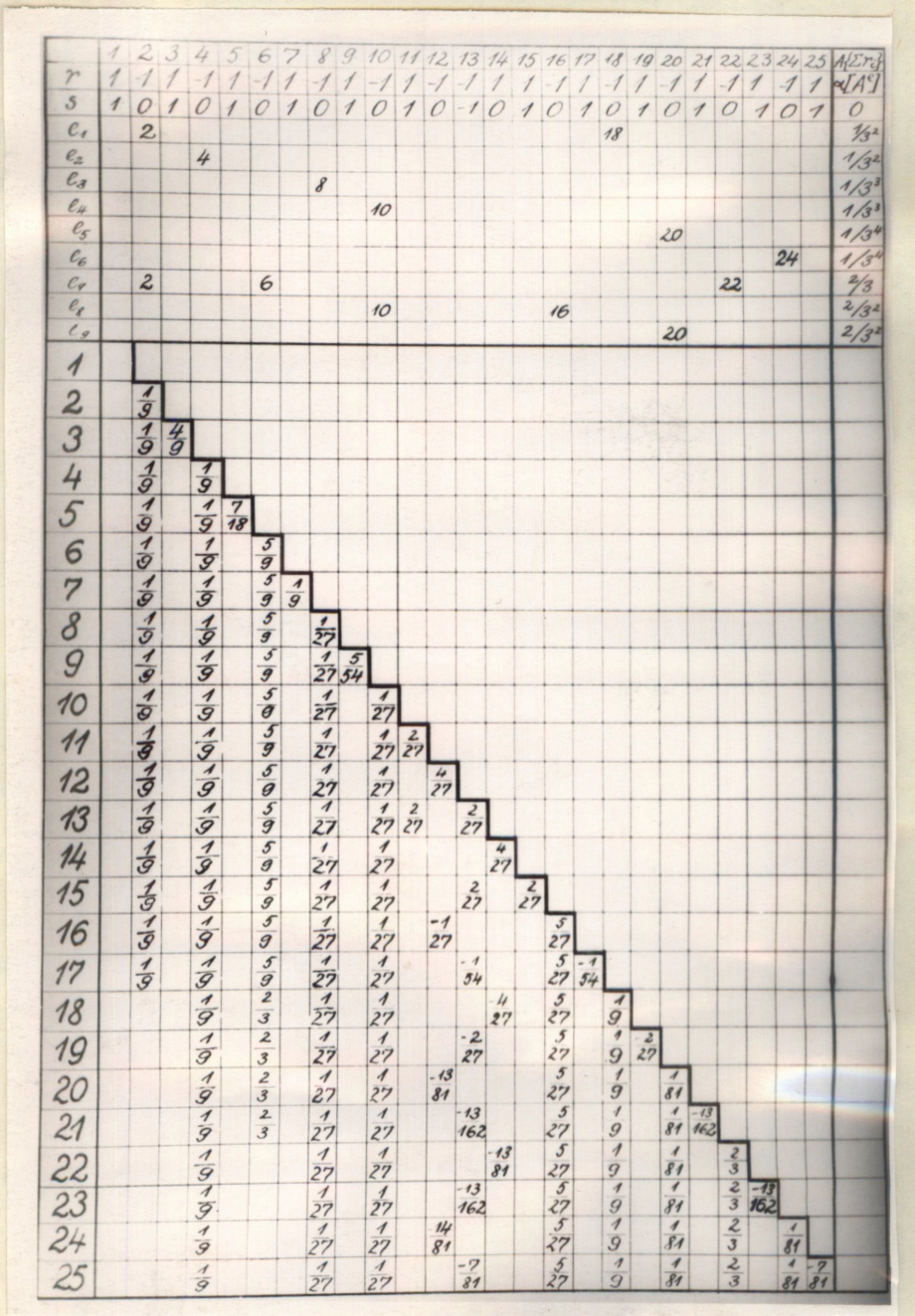
$$S_A\left(\sum_i x_i\right) = \left\{2m+\delta : m \in \mathbb{Z},\ \delta \in [0, \tfrac{1}{12}) \cup [\tfrac{1}{4}, \tfrac{5}{12}) \cup [\tfrac{1}{2}, \tfrac{7}{12})\right\}$$



Näide 9

$$S_A\left(\sum_i r_i\right) = \left\{2m+\delta : m \in \mathbb{Z},\ \delta \in \bigcup_{i=1}^{\infty}\left[2\sum_{k=1}^{k}\frac{1}{3^i},\ 2\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{3^i}+\frac{1}{3^{k+1}}\right]\right\}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{0}\frac{1}{3^i} = 0\right)$$



N a i d e 10

$$S_A\left(\sum_i r_i\right) = \{2 + 12m + 4n : m \in \mathcal{T},\ n \in \mathcal{D}\}$$

$$\mathcal{D} = \{0, 1\}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
r_n	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
s_n	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
G_n	0	2	2	3	3	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	$3\frac{3}{4}$	$3\frac{7}{8}$	$3\frac{7}{8}$	$3\frac{15}{16}$	$3\frac{15}{16}$	$3\frac{31}{32}$	$3\frac{31}{32}$
1															
2	4	-1													
3	4	-1													
4	2	$-\frac{1}{2}$	4	-1											
5	2	$-\frac{1}{2}$	4	-1											
6	1	$-\frac{1}{4}$	2	$-\frac{1}{2}$	4	-1									
7	1	$-\frac{1}{4}$	2	$-\frac{1}{2}$	4	-1									
8	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	1	$-\frac{1}{4}$	2	$-\frac{1}{2}$	4	-1							
9	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	1	$-\frac{1}{4}$	2	$-\frac{1}{2}$	4	-1							
10	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	1	$-\frac{1}{4}$	2	$-\frac{1}{2}$	4	-1					
11	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	1	$-\frac{1}{4}$	2	$-\frac{1}{2}$	4	-1					
12	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	1	$-\frac{1}{4}$	2	$-\frac{1}{2}$	4	-1			
13	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	1	$-\frac{1}{4}$	2	$-\frac{1}{2}$	4	-1			
14	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{64}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{16}$	1	$-\frac{1}{4}$	2	$-\frac{1}{2}$	4	-1	
15	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{64}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{16}$	1	$-\frac{1}{4}$	2	$-\frac{1}{2}$	4	-1	

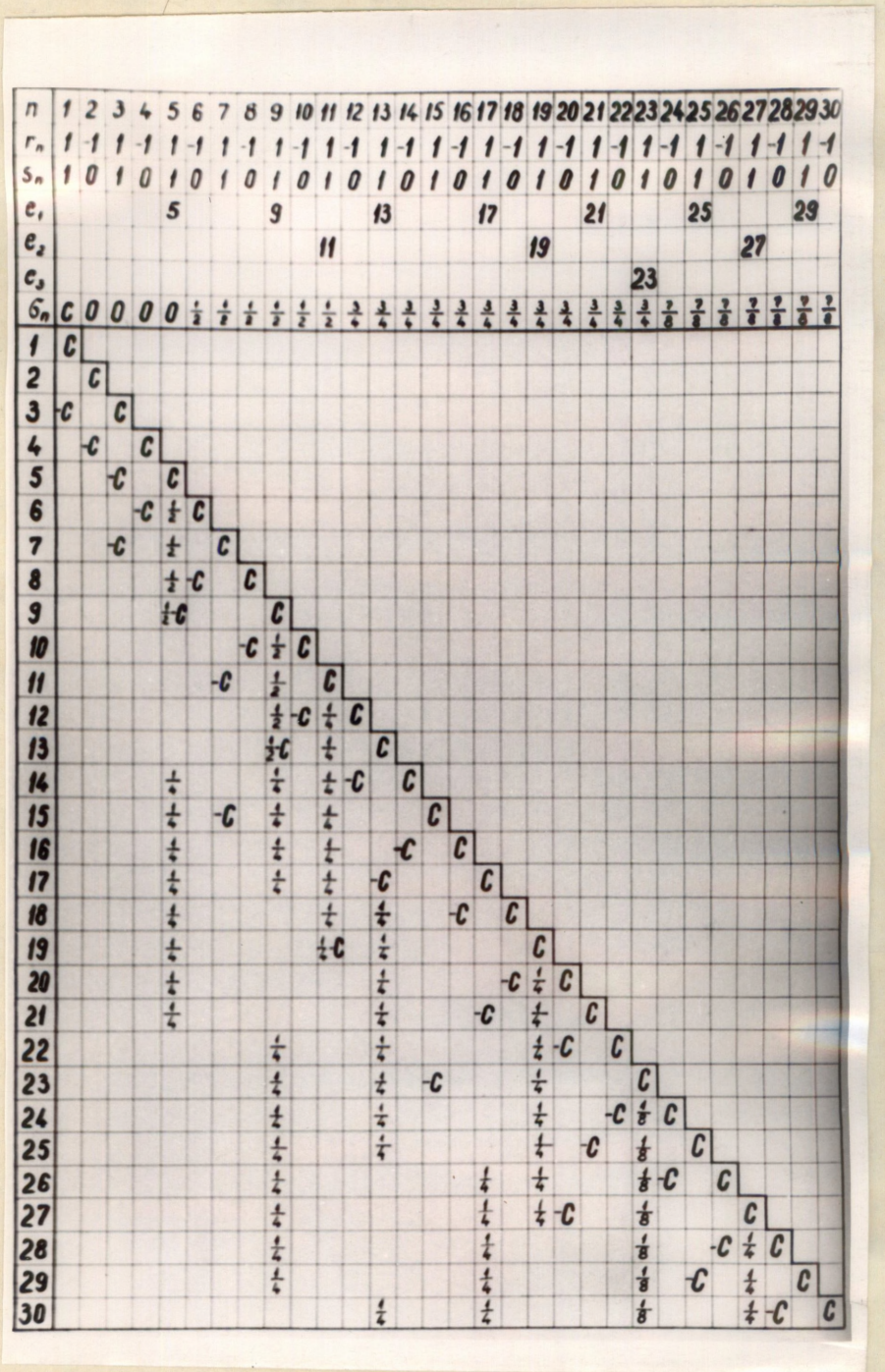
N á i d e 11

$$S_A\left(\sum_i \varepsilon_i\right) = \{2+4m : m \in \mathbb{N}\}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
r	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
s	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
G	1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{31}{16}$	$\frac{31}{16}$	$\frac{63}{32}$	$\frac{63}{32}$	$\frac{127}{64}$	$\frac{127}{64}$	$\frac{255}{128}$	$\frac{255}{128}$	$\frac{511}{256}$
1	3	-1															
2	3	-1															
3	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3	-1													
4	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3	-1													
5	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3	-1											
6	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3	-1											
7	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3	-1									
8	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3	-1									
9	$\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3	-1							
10	$\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3	-1							
11	$\frac{3}{32}$	$-\frac{1}{32}$	$\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3	-1					
12	$\frac{3}{32}$	$-\frac{1}{32}$	$\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3	-1					
13	$\frac{3}{64}$	$-\frac{1}{64}$	$\frac{3}{32}$	$-\frac{1}{32}$	$\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3	-1			
14	$\frac{3}{64}$	$-\frac{1}{64}$	$\frac{3}{32}$	$-\frac{1}{32}$	$\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3	-1			
15	$\frac{3}{128}$	$-\frac{1}{128}$	$\frac{3}{64}$	$-\frac{1}{64}$	$\frac{3}{32}$	$-\frac{1}{32}$	$\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3	-1	
16	$\frac{3}{128}$	$-\frac{1}{128}$	$\frac{3}{64}$	$-\frac{1}{64}$	$\frac{3}{32}$	$-\frac{1}{32}$	$\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3	-1	
17	$\frac{3}{256}$	$-\frac{1}{256}$	$\frac{3}{128}$	$-\frac{1}{128}$	$\frac{3}{64}$	$-\frac{1}{64}$	$\frac{3}{32}$	$-\frac{1}{32}$	$\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3

N ä i d e 12

$$S_A\left(\sum_i r_{1i}\right) = \mathcal{R}_1$$



L õ p p j ä r e l d u s

Peatükis II leitud summade piirkondade $\underline{S}(\sum_i r_i)$ ja $\bar{S}(\sum_i r_i)$ ning lineaarse normeeritud ruumi $\mathcal{X}$ meelevaldse sirge Λ ühisosade $\underline{S}(\sum_i r_i)\cap\Lambda$ ja $\bar{S}(\sum_i r_i)\cap\Lambda$ võrdlemine peatükis III leitud summeeruva arvrea summade piirkonnaga $S_A(\sum_i r_i)$ näitab, et mõlemate hulkade vahel on palju ühist. Põhiliste kujude hulka kuuluvad mõlemal juhul tühi hulk, punkt, võre $\{\alpha+\nu\beta : \nu\in\mathbb{Z}\}$ ja sirge, osal juhtudest ka sirgel kõikjal tihe hulk $\{\alpha+\sum_i m_i\beta_i : m_i\in\mathbb{Z}\ (i=1,2,\dots)\}$ millistest kujudest kõik peale viimase esinevad ka sirgel /lõpmatudimensionaalses ruumis/ hajuva rea summade piirkonna $\bar{S}(\sum_i r_i)$ korral, kusjuures suurus β sõltub rea liikmete vahest /või reaalliikmete teatud hulkade vahest, vt. teoreemid 2.1.1 ja 2.1.3 /.

See tulemus on täiesti loomulik, kuigi varem kirjanduses pole sellele tähelepanu pööratud, sest mõlematel juhtudel summade piirkonnad alluvad tervele reale ühistele seaduspärasustele, millede tulemuseks on mitmed sarnased teoreemid peatükkides II ja III /vrdl. 2.1.1 ja 3.2.1, 2.1.3 ja 3.2.1, 2.2.1 ja 3.6.1, näide § 2.4 ja teoreem 3.6.2/.

Erinevuseks on aga asjaolu, et summeeruva rea summade piirkonna tüüpe on rohkem, esinevad ka nö. "mittekorrapärased kujud /vt. § 3.5 ja näited 3-9 § 3.10/, milliseid summade piirkondade $\bar{S}(\sum_i r_i)$ ja $\underline{S}(\sum_i r_i)$ puhul ei tunta.

Põhjuseks on siin menetluste defineerimisel esinev suur meelevaldsus; nö. "korrapärase" ehitusega maatriksite korral /teor. 3.3.1/ on ka summade piirkonna kuju korrapärane, omandades mõne ülalmainitud põhikujudest.

Võimalik, et üldisemate ruumide puhul, mõningate sobivate kitsenduste ärajätmisel, näiteks normeerituse nõudest loobumisel, võib ka summade piirkondade $\underline{S}(\sum_i r_i)$ ja $\bar{S}(\sum_i r_i)$ kujusid mitmekesistada.

K i r j a n d u s

1. Бурбаки Н., Общая топология. Москва, 1958.

2. Гапошкин В. Ф., О безусловных базисах в пространствах l_p $(p>1)$. Успехи матем. наук, 1958, 13, 4, 179-184.

3. Гапошкин В. Ф., О безусловно суммируемых рядах в банаховых пространствах. Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, 6, 87-95.

4. Гапошкин В. Ф., Олевский М. К., О безусловно суммируемых числовых рядах. Научн.докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, 6, 81-86.

5. Гринблюм М. М., Некоторые теоремы о базисе в пространстве типа (B). Докл. АН СССР, 81, 5, 428-432.

6. Гуревич Л. А., О базисе безусловной сходимости. Успехи матем. наук, 1953, 8, 5, 158-160.

7. Никольский С. К., О сходимости некоторых числовых рядах. Успехи матем. наук, 1952, 7, 4, 1958-56.

8. Кадец М. И., Об одном свойстве векторных ломаных. Успехи матем. наук, 1953, 8, 1, 139.

9. Кадец М. И., Об условно сходящихся рядах в пространстве l_p. Успехи матем. наук, 1954, 9, 1, 107-109.

10. Кронрод А. С., О перестановках членов числовых рядов, Матем. сборник, 1946, 18, 2, 287-280.

11. Олевский М. К., Безусловная суммируемость функциональных рядов. Докл. АН СССР, 1959, 125, 22, 269-272.

12. Риман Б., Сочинения. Москва-Ленинград 1948. (orig. Ueber die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe. Abhandl. d. Königl. Gesellsch. der Wiss, 1867).

13. Ружичка Я., О перестановках бесконечных рядов с гиперкомплексными членами. Чехосл. матем. ж., 1958, 8, 1, 28-73.

14. Талалян Л. А., О рядах универсальных относительно перестановок. Изв. АН СССР, сер матем., 1960, 24, 4, 567-604.

15. Тийт Э., А-области сумм некоторых суммируемых рядов. Труды Ин-та Физ. и Астрон. АН ЭССР, 1962, 20, 14-28.

16. Тийт Э., А-области сумм одного типа суммируемых рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, 328-337.

17. Тийт Э., Некоторые новые А-области суммируемых рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, 338-356.

18. Тийт Э., Об областях сумм в линейных нормированных пространствах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, 308-322.

19. Ульянов П. Л., Безусловная суммируемость. Изв. АН СССР, сер. матем., 1959, 23, 5, 781-808.

20. Ульянов П. Л., О безусловной сходимости и суммируемости. Изв. АН СССР, сер. матем, 1958, 22, 811-840.

21. Ульянов П. Л., О безусловной сходимости почти всюду. Изв. АН СССР, сер. матем, 1958, 22, 6, 811-840.

22. Ульянов П.Л., Сильно безусловно сходящиеся ряды, Изв. АН СССР, сер. матем, 1960, 24, 1, 75-92.

23. Шкляркий Л. О., Условно сходящиеся ряды векторов. Успехи матем. наук, 1944, 10, 51-59.

24. Шмулян В. А., О коммутативно сходящихся и абсолютно сходящихся рядах. Успехи матем. наук, 1952, 7, 6, 209-210.

25. Agnew, R. P., On rearrangements of sets. Bull. Amer. Math. Soc., 1940, 46, 797-799.

26. Agnew, R. P., Permutations preserving convergence of series, Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 61, 563-564.

27. Bagemihl, F. Erdös, P., On rearrangements of C_1-summable series, Acta Math., 1954, 92, 35-53.

28. Banach, S., Theorie des operations lineaires, Warsaw, 1923.

29. Behrend, F., Über einem Satz von Herrn Jarnik. Math. Z., 1933, 36, 298-301.

30. Bergström, V., Ein neues Beweis eines Satzes von E. Steinitz, Abhandl. math. Semin. Univ. Hamburg, 1931, 8, 148-152.

31. Bergström, V., Zwei Sätze über ebene Vektorpolygone, Abhandl. math. Semin. Univ. Hamburg, 1931, 8, 206-214.

32. Besicovitch A. S., On rearrangement of conditionally convergent series. J. London Math. Soc., 1953, 28

33. Cano Caravaca, La propiedad conmutativa en las series infinitas..., Gac.mat., 1959, 11, nr. 7-8, 188-190

34. Dirichlet, P. G., Sur la convergencr des series trigonometriques, J. reine und angew. Math., 1829

35. Dworetzky, A., Rogers C. A., Absolute and anconditional convergence in normed linear spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1950, 192-197.

36. Gelbaum B., Conditional and unconditional convergence in Banach spaces, Anais Acad. Brasil Cienc., 1958, 30, 21-27.

37. Gross W., Bedingt konvergente Reihen, Monatsh. Math. u. Physik, 1917, 28, 221-237.

38. Grünbaum, A., Projection constants., Trans. Amer. Math. Soc., 1960, 95, nr. 3, 451-465.

39. Hadwiger, H. Ein Satz über bedingt konvergente Vektorreihen, Math. Z, 1942, 47, 663-668.

40. Hadwiger H. Ein Satz über geschlossene Vektorpolygon des Hilbertschen Raumen, Math. Z., 1936, 41, 732-738.

41. Hadwiger, H. Eine Bemerkung über Umordnung von Reihen ruller Funktionen. Tôhoku Mtth. J., 1939, 46, 22-25.

42. Hadwiger H. Über das Umordnungsproblem im Hilbertschen Raum., Math. Z., 1940, 46, 70-79.

43. Hadwiger H. Über die Konvergenzarten Unendlichen Reihen im Hilbertschen Raum, Math. Z., 1942, 47, nr. 3, 325-329.

44. Hadwiger H. Über die Umordnungsstärke und eine Erweiterung des Steinitzschen Satzes. Math. Ann., 1943, 118, 702-717.

45. Hilderbrandt, T. A., On unconditional convergence in normed spaces., Bull. Amer. Math. Soc., 1940, 52, 959-962.

46. Jarnik, V., Über die Umordnung unendlichen Reihen, Ves. Kral Čes spol. nauk, Třida mat. přes, 1927, 8, 1-45.

47. Jasek, B., Über Umordnung von Reihen., Colloq. Math., 1960, 7, [illegible] 2, 257-279.

48. Karadžič, L., Un thioreme se rapportant aux séries semi - convergentes, Publ. Elektrotehn. fak. Univ. Beogradu, Mat. i fiz., 1961, nr. 55-58, 11-14.

49. Karlin, S., Unconditional convergence in Banach Spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 1948, 54,2 [illegible] 148.

50. Levi F. M., Rearrangement of Convergent Series, Duke Math. J., 1946, 13, 579-585.

51. Levi P., Sur les series semi-convergentes, Nouv. ann. Math., 1905, 64, 4, ser.5.

52. Lorentz, B. B, Zeller K., Series rearrangements and analytic sets, Acta math., 1958, 100, 149-169.

53. Macphail, M. S., Absolute and unconditional convergence, Bull. Amer. Math. Soc., 1947, 53, 121-123.

54. Mazur S. Über bedingt summierbare Reihen., Arch.Tow. Nauk. Lwow. wydz. III, Mat. Przyz., IV, 1929, 411-424.

55. Moore, E. H., General Analysis., Memoirs of the Amer. Phil. Soc., 1939, I, 2.

56. Munroe, M. E., Absolute and unconditional convergence in Banach spaces. Duke Math. J., 1946, 13, 351-365.

57. Orlicz, W., Über die unabhängig von dem Umordnung fast überall konvergenten Funktionenreihen, Bull. International Acad. Polon. Sci ser. A, 1927, 3, 117-125.

58. Orlicz W. Über unbedingt Konvergenz in Funktionenraumen II, Studia Math, 1933, 4, 41-47.

59. Pal Laszlo G., Egy sorelmileti proble maroi, Mat. lapok, 1961, 12, nr. 1-2, 38-43.

60. Pelczynski, A., A connection between weakly unconditionally convergence and weakly completedness of B. space., Bull. Acad. Polon. Sci, 1958, 6, 251-253.

61. Pelczynski A., Bessaga C., On bases and unconditional convergence of series in B. spaces, Studia Math. 1958, 17, nr. 2, 151-164.

62. Ptak V., O absolutně konvexniem..., časop. pěstov. mat., 1958., 83, 343-347.

63. Pettis, B.J., Integration in vector spaces, Trans. Amer.Math.Soc., 1938, 44, 281-282.

64. Rado R. The distributive law for for products of infinite series, J. Math./Oxford/, 1940., 11, 229-242.

65. Rajagopal C. T., On the rearrangement of conditionally convergent series. Ann. Math., 1941, 42, 604-613.

66. Robertson A. P., On rearrangement of infinite series Proc. Glasgow Math. Assoc., 1958, 3, 4, 182-193.

67. Schäffer J., A geometrical property of normed vector spaces, Fac. Ing. Agrimen Montevideo Publ. Inst. Math. Estadist, 1957/58, 6, 337-341.

68. Sengupta H. M., On rearrangemento of series, Proc. Amer. Math., Soc., 1950, 1 71-75.

69. Sengupta H. M., Rearrangements of Series, Proc. Amer. Math. Soc., 1950, 7, 3, 347-350.

70. Sierpinski M. W., Remarque sur le theoreme de Riemann relatif aux series semiconvergentes., Prace Mathematyczno - Fizyczne, 1910, 21, 17-20.

71. Sierpinski M. W., Sur une propriete des series qui ne sont pas absolument convergentes, Bull. International Acad. Sci Cracowie, Ser A, Sci math. 1911.

72. Steinitz E., Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme, J. reine und angew. Math, 1913, 143, 128-175; 1914, 144, 1-40.

73. Stenberg W., On rearrangements of infinite series, Proc. Koninkl.nedere. akad. wet, 1961, A 64, 4, 459-475; Indagationes math, 1961, 23, 4, 459-475.

74. Szüsz P., Über die Umordnung bedingt konvergenter Reihen, Magyar tud. akad. Mat. kutato, 1959, 4, nr. 2, 167-169.

75. Threlfall W., Bedingt Konvergente Reihen.

Math. Z. 1926, 24, 212-214.

76. Tiit, E., Steinitzi teoreemist, TRÜ Matemaatika Loodusteaduskonna üliõpilaste teaduslikke töid I 1960, 3-12.

77. Zeller K.,Theorie des Limitierungsverfahren /Ergebnisse der Mathematik/, Berlin 1958.

Sisukord

Sissejuhatus

I Põhilisi mõisteid

§ 1. Substitutsioon 21

§ 2. Rea summade piirkond 30

§ 3. Naturaalarvude jadad $\{e\}$ 34

§ 4. Rea summamuutus ümberjärjestamisel 39

II Summade piirkondadest lineaarses normeeritud ruumis

§ 1. Võre kui summade piirkondade $\underline{S}(\sum_i r_i)$ ja $\overline{S}(\sum_i r_i)$ koostisosa 43

§ 2. Mitmest võrest moodustatud summade piirkonnad . .52

§ 3. Summade piirkonna üldine kuju loenduva baasiga lineaarses normeeritud ruumis 56

§ 4. Näiteid 65

III Summeeruvate ridade summade piirkondadest

§ 1. Read, millede liikmed moodustavad nulljada . . . 78

§ 2. Võre $(\rho-\bar{c})$-rea summade piirkonnas 90

§ 3. $(\rho-\bar{c})$ -read, millede summade piirkonnaks on arvsirge 94

§ 4. Rida, mille summade piirkonnaks on võre 101

§ 5. $(\overline{\rho-\bar{c}})$- ridade summade piirkonna üldine kuju . .112

§ 6. $(\rho-\tau-\pi)$-ridade summade piirkonnad . . . 125

§ 7. Üldise tõkestatud liikmetejadaga rea summade piirkonnad 131

§ 8. Lõpmatu aritmeetilise rea summade piirkond 134

§ 9. Ühe eritüüpi tõkestamatult kasvava liikmetejadaga rea summade piirkond . . . 136

§ 10. Näiteid 141

Lõppjäreldus 159

Kirjandus 160

Sisukord 166