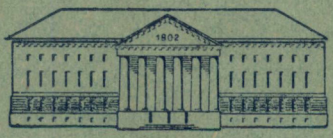
TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

ALUSTATUD 1893. a. VIHIK 129 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ в 1893 г.

MATEMAATIKA- JA MEHHAANIKA-ALASEID TÖID

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ

III



TARTU 1962

Fer. A 1167
-129

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ALUSTATUD 1893. a. VIHIK 129 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ в 1893 г.

MATEMAATIKA- JA MEHHAANIKA-ALASEID TÖID

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ

III

AÕN TARTU KULTUURIHOONE
RAAMATUKOGU
Tartu Linna
Keskraamatukogu
VAHETUSFOND
77126
INV. NR.

TARTU 1962

Redaktsioonikolleegium:
Ü. Lepik (esimees), S. Baron (vast. toimetaja), P. Kard, I. Kull, K. Rebane.

Редакционная коллегия:
Ю. Лепик (председатель), С. Барон (отв. редактор), П. Кард, И. Кулль, К. Ребане.

TARTU ÜLIKOOLI
RAAMATUKOGU

ОБ ЭНДОМОРФИЗМАХ ПОЛУГРУПП

Е. Габович
Кружок СНО при кафедре геометрии

Настоящая работа посвящена изучению свойств эндоморфизмов полугрупп, т. е. гомоморфных отображений полугруппы в себя [1]. До сих пор изучались в основном автоморфизмы полугрупп или эндоморфизмы групп. Из работ, относящихся к этим последним, упомянем статьи З. Н. Кишкиной [1] и Крулля [5], часть результатов которых переносится в настоящей работе на случай полугрупп.

В теории эндоморфизмов совершенно естественно возникают две тесно связанные между собой задачи теории эндоморфизмов: прямая и обратная. Прямая задача теории эндоморфизмов предполагает заданными свойства полугруппы и требует описания свойств эндоморфизмов этой полугруппы; обратная задача теории эндоморфизмов считает известными свойства эндоморфизмов и спрашивает, что можно сказать в этом случае о самой полугруппе.

Первые три параграфа работы посвящены прямой задаче теории эндоморфизмов, в последнем параграфе получены некоторые результаты, связанные с обратной задачей теории.

Результаты статьи были доложены на IV Всесоюзном коллоквиуме по общей алгебре, состоявшемся в мае 1962 года в Киеве.

Работа выполнена под руководством Я. В. Хиона, которому автор, пользуясь благоприятной возможностью, приносит свою искреннюю благодарность.

§ 1. Эндоморфизмы и обобщенные полукольца

1. Ниже приводятся некоторые простейшие свойства эндоморфизмов, необходимые в дальнейшем. При этом все используемые понятия, относящиеся к теории полугрупп, предпола-

[1] О более широкой трактовке термина «эндоморфизм» см. [3], стр. 40.

гаются известными; с ними можно ознакомиться по монографии Ляпина [3].

Обозначения, применяемые ниже, отличны от принятых в упомянутой монографии. В дальнейшем греческими буквами $\varphi, \chi, \psi, \ldots$ будут обозначаться эндоморфизмы, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ — автоморфизмы. Запись $\varphi = \varphi_{a,b}$ будет обозначать, что эндоморфизм φ переводит элемент a в элемент b. Результат применения эндоморфизма φ к элементу a будем обозначать через $a\varphi$.

2. Произведение эндоморфизмов φ и ψ полугруппы A определяется как результат их последовательного применения: $a(\varphi\psi) = (a\varphi)\psi$ для любого $a \in A$. Относительно этой операции эндоморфизмы образуют полугруппу $\mathfrak{A}$ с единицей, в роли которой выступает тождественный автоморфизм ε.

Подгруппу этой полугруппы образуют все автоморфизмы полугруппы A. Эта подгруппа содержит любую подгруппу полугруппы эндоморфизмов, содержащую ε.

Подполугруппу в $\mathfrak{A}$ образуют все эндоморфизмы, отображающие какой-нибудь элемент полугруппы A в себя или какое-нибудь подмножество полугруппы A в себя. Другую подполугруппу образуют эндоморфизмы, тождественные на всей A, кроме, быть может, конечной ее части.

3. Пусть A — коммутативная полугруппа, а φ и ψ — ее эндоморфизмы. Определим отображение $\varphi + \psi$ полугруппы A в себя следующим образом: $a(\varphi + \psi) = a\varphi \cdot a\psi$ для любого $a \in A$. Аналогично тому, как это делается в случае абелевых групп (см., например, [2], стр. 136), можно показать, что определенная таким образом сумма двух эндоморфизмов сама является эндоморфизмом, сложение эндоморфизмов ассоциативно, коммутативно и связано с определенным выше умножением эндоморфизмов двусторонним дистрибутивным законом; иными словами в том, что *эндоморфизмы коммутативной полугруппы образуют полукольцо $\mathfrak{A}$ с единицей* в смысле следующего определения.

4. Система $(R, +, \cdot)$, состоящая из двух бинарных операций «$+$» и «$\cdot$», определенных на множестве R, называется *полукольцом*, если

1. $(R, +)$ — коммутативная полугруппа;
2. $(R, \cdot)$ — полугруппа (не обязательно коммутативная);
3. если $a, b, c \in R$, то $a(b + c) = ab + ac$, $(b + c)a = ba + ca$.

Полукольцо R называется *коммутативным* или *полукольцом с единицей*, если полугруппа $(R, \cdot)$ соответственно коммутативная или с единицей. Обычным образом определяется *подполукольцо*.

5. Если полугруппа A обладает нулем 0, то при любом эндоморфизме нулю соответствует он сам, ибо для любого $a \in A$ имеем $a \cdot 0 = 0$ и $a\varphi \cdot 0\varphi = 0\varphi$, откуда $0\varphi = 0$. В этом случае нуль имеется и в полукольце эндоморфизмов; им является эндо-

морфизм, оторобратающий любой элемент из A в нуль. Если же A не имеет нуля, $\mathfrak{A}$ все же может иметь мультипликативный нуль, не имея аддитивного. Соответствующий пример приведен в 2.10.

Отображение, ставящее каждому элементу полугруппы в соответствие некоторый фиксированный идемпотент, является эндоморфизмом полугруппы. Этот эндоморфизм сам является идемпотентом мультипликативной полугруппы эндоморфизмов.

Для того, чтобы эндоморфизмы, оставляющие неподвижным какой-нибудь элемент $a \in A$, образовывали подполукольцо $\mathfrak{A}'$ в полукольце $\mathfrak{A}$, необходимо и достаточно, чтобы этот элемент был идемпотентом: из $\varphi,\ \psi \in \mathfrak{A}'$, $a(\varphi+\psi) = a\varphi \cdot a\psi = a \cdot a = a$ следует $\varphi+\psi \in \mathfrak{A}'$ и наоборот.

Для того, чтобы множество $\mathfrak{A}'$ всех эндоморфизмов, отображающих некоторое подмножество A_0 полугруппы A в себя, являлось подполукольцом полукольца $\mathfrak{A}$, достаточно, чтобы A_0 было подполугруппой полугруппы A.

6. В случае, когда A не является коммутативной полугруппой, определенное в 1.3 отображение $\varphi+\psi$ может не оказаться эндоморфизмом. Во преодоление этого затруднения будем рассматривать операцию сложения только в случае так называемых суммируемых эндоморфизмов: эндоморфизмы φ и ψ полугруппы A называются *суммируемыми*, если для любых a, $b \in A$ имеет место равенство

$$a\varphi \cdot b\varphi \cdot a\psi \cdot b\psi = a\varphi \cdot a\psi \cdot b\varphi \cdot b\psi.$$

Если φ и ψ — суммируемые эндоморфизмы, то и отображение $\varphi+\psi$ является эндоморфизмом. Действительно, при любых $a, b \in A$ имеем

$$ab(\varphi+\psi) = (ab)\varphi \cdot (ab)\psi = a\varphi \cdot b\varphi \cdot a\psi \cdot b\psi =$$

$$= a\varphi \cdot a\psi \cdot b\varphi \cdot b\psi = a(\varphi+\psi) \cdot b(\varphi+\psi).$$

7. Лемма. *Если суммируемы пары эндоморфизмов φ, χ и χ, ψ, то из суммируемости эндоморфизмов $\varphi+\chi$ и ψ следует суммируемость эндоморфизмов φ и $\chi+\psi$, и наоборот.*

Доказательство. Для любых $a, b \in A$ в этом случае имеем [2]

$$a\varphi \cdot b\varphi \cdot a(\chi+\psi) \cdot b(\chi+\psi) = a\varphi \cdot b\varphi \cdot a\chi \cdot a\psi \cdot b\chi \cdot b\psi =$$

$$\overset{S(\chi,\psi)}{=} a\varphi \cdot b\varphi \cdot a\chi \cdot b\chi \cdot a\psi \cdot b\psi \overset{S(\varphi,\chi)}{=} a\varphi \cdot a\chi \cdot b\varphi \cdot b\chi \cdot a\psi \cdot b\psi =$$

$$= a(\varphi+\chi) \cdot b(\varphi+\chi) \cdot a\psi \cdot b\psi =$$

$$\overset{S(\varphi+\chi,\psi)}{=} a(\varphi+\chi) \cdot a\psi \cdot b(\varphi+\chi) \cdot b\psi = a\varphi \cdot a\chi \cdot a\psi \cdot b\varphi \cdot b\chi \cdot b\psi =$$

$$= a\varphi \cdot a(\chi+\psi) \cdot b\varphi \cdot b(\chi+\psi),$$

что и требовалось доказать.

[2] Запись $S(\varphi,\chi)$ означает, что эндоморфизмы φ и χ суммируемы.

8. Если все эндоморфизмы полугруппы A суммируемы, то, ввиду ассоциативности операции сложения эндоморфизмов, совокупность $\mathfrak{A}$ всех эндоморфизмов полугруппы A образует полугруппу относительно сложения.

В общем случае, однако, только некоторые пары эндоморфизмов полугруппы A суммируемы. При этом, если эндоморфизмы φ и χ суммируемы, то эндоморфизмы $\varphi\psi$ и $\chi\psi$, а также $\psi\varphi$ и $\psi\chi$ суммируемы при любом эндоморфизме ψ. Поэтому *эндоморфизмы произвольной полугруппы образуют обобщенное полукольцо или полукольцо с частичным суммированием* в смысле следующего отеделения.

9. Множество R называется *обобщенным полукольцом*, если

1) относительно определенного на нем умножения это множество является полугруппой;

2) для некоторых пар a, b элементов из R определена операция сложения $a+b \in R$, причем, если определены суммы $(a+b)+c$ и $a+(b+c)$, то они равны;

3) если определена сумма $a+b$, то определены и суммы $ac+bc$ и $ca+cb$;

4) если $a, b, c \in R$ удовлетворяют условию 3), то

$$(a+b)c = ac+bc, \quad c(a+b) = ca+cb.$$

Если множество R удовлетворяет только условию 2), то оно называется *обобщенной полугруппой.*

10. Понятие суммируемости эндоморфизмов является частным случаем аналогично определяемого понятия суммируемости гомоморфизмов.

Множество $\mathfrak{C}$ всех гомоморфизмов из полугруппы A в полугруппу B удовлетворяет в общем случае условию 2) предыдущего пункта и образует, следовательно, обобщенную полугруппу. Если же B коммутативна, то все гомоморфизмы из $\mathfrak{C}$ попарно суммируемы и $\mathfrak{C}$, очевидно, превращается в коммутативную полугруппу.

§ 2. Обобщенные полукольца эндоморфизмов некоторых полугрупп

1. Пусть A — полугруппа с нулем 0, в которой произведение любых двух элементов равно нулю. Любое однозначное отображение φ полугруппы A в себя, оставляющее неподвижным нуль, является эндоморфизмом этой полугруппы. Действительно, если $a\varphi = a_1$, $b\varphi = b_1$, то $(ab)\varphi = 0\varphi = 0 = a\varphi \cdot b\varphi = a_1 \cdot b_1 = 0$. При этом умножение эндоморфизмов есть обычное умножение преобразований множества элементов полугруппы, любые два эндоморфизма суммируемы, причем их сумма является нулевым эндоморфизмом.

2. Пусть A — полугруппа, произведение любых двух элементов которой равно левому сомножителю. Эндоморфизмами этой полугруппы являются все однозначные отображения множества A в себя. Действительно, $(ab)\varphi = a\varphi = a\varphi \cdot b\varphi$.

Этот пример интересен тем, что, несмотря на сильную некоммутативность полугруппы A: для любых $a \neq b$ имеем $a = ab \neq ba = b$, любая пара эндоморфизмов рассматриваемой полугруппы суммируема. При этом сумма двух эндоморфизмов равна левому слагаемому: $a(\varphi + \psi) = a\varphi \cdot a\psi = a\varphi$.

3. В рассмотренных выше примерах автоморфизмами будут все взаимно однозначные отображения полугруппы на себя (оставляющие неподвижным нуль в первом случае).

Любопытно заметить, что во второй полугруппе сумма любых двух автоморфизмов сама является автоморфизмом, тогда как в первой полугруппе сумма автоморфизмов всегда равняется (нулевому) эндоморфизму.

В связи с этим возникает вопрос: при каких условиях сумма любых двух автоморфизмов некоторой полугруппы является вновь автоморфизмом? Этот вопрос остается пока открытым.

4. Легко находятся эндоморфизмы бесконечной моногенной полугруппы, изоморфной, как известно, аддитивной полугруппе натуральных чисел.

Пусть эндоморфизм φ переводит число 1 в число r. Тогда для любого n имеем $n\varphi = (n \cdot 1)\varphi = n(1\varphi) = nr$. Итак, любому эндоморфизму соответствует натуральное число и, наоборот, конечно, каждому натуральному числу соответствует эндоморфизм; при этом сумме и произведению эндоморфизмов соответствует сумма и произведение соответствующих натуральных чисел: из $1\varphi = r$ и $1\psi = q$ следует $1(\varphi\psi) = (1\varphi)\psi = r\psi = rq$, $1(\varphi + \psi) = 1\varphi + 1\psi = r + q$, т. е. *полукольцо эндоморфизмов бесконечной моногенной полугруппы изоморфно полукольцу натуральных чисел.*

5. Таким же оказывается полукольцо эндоморфизмов для любой полугруппы A натуральных чисел (относительно обычной операции сложения), больших некоторого фиксированного числа s: $A = \{x \mid x \geqslant s \geqslant 1\}$.

В самом деле, любому натуральному числу $n \in A$ при любом эндоморфизме φ может соответствовать лишь число, кратное числу n. Действительно, если $n\varphi = k$ и $(n+1)\varphi = l$, то $n[(n+1)\varphi] = nl$, а $(n+1)n\varphi = (n+1)k$. Ввиду равенства $(n+1)(n\varphi) = n[(n+1)\varphi] = [n(n+1)]\varphi$ имеем $nl = (n+1)k$, откуда $k = n(l-k)$.

К тому же, если $n\varphi = nr$, то для любого $m \in A$ будет $m\varphi = mr$. Действительно, если $m\varphi = x$, то $m(n\varphi) = n(m\varphi) = mnr = nx$. Отсюда $x = mr$.

Если теперь $n\varphi = nr$ и $n\psi = nq$, то $n(\varphi + \psi) = n\varphi + n\psi =$

$= nr + nq = n(r+q)$ и $n(\varphi\psi) = (n\varphi)\psi = (nr)\psi = nrq$, что и доказывает наше утверждение.

6. В 2. 4. фактически найдено и полукольцо эндоморфизмов конечной моногенной полугруппы типа (h, d), т. е. такой полугруппы, состоящей из степеней некоторого элемента x, что $x^{h+d} = x^h$. И эту полугруппу можно представить себе в виде аддитивной полугруппы натуральных чисел, в которой, однако, числа, большие, чем $h + d - 1$, редуцируются по модулю d до тех пор, пока не окажутся в промежутке между числами $h - 1$ и $h + d$ (строго между).

Ввиду этого полукольцо эндоморфизмов конечной моногенной полугруппы типа (h, d) получается из полукольца натуральных чисел, если все числа, их суммы и произведения, большие числа $h + d - 1$, редуцируются по модулю d до чисел, находящихся на отрезке $[h, h + d - 1]$.

7. В случае конечной циклической группы, являющейся моногенной полугруппой типа $(1, d)$, получаем известный результат: кольцо эндоморфизмов циклической группы порядка d изоморфно кольцу вычетов по модулю d.

Строение кольца вычетов хорошо известно: свойства его аддитивной группы — конечной циклической группы — подробно описаны, например, в монографии [4], а его мультипликативная полугруппа исследована в работе [6].

Будем обозначать через $P_{h,d}$ полукольцо эндоморфизмов моногенной полугруппы типа (h, d). Следующий результат устанавливает связь между этим полукольцом и кольцом вычетов по модулю d.

8. Лемма. *В полукольце $P_{h,d}$ подмножество $\{h, h+1, \ldots, h+d-1\}$ является подкольцом, изоморфным кольцу $P_{1,d}$ вычетов по модулю d.*

Доказательство. Отнесем элементу $k \in P_{h,d}$ элемент $k_1 \in P_{1,d}$ такой, что $k \equiv k_1 \pmod d$. Это соответствие взаимно однозначно, поскольку оба кольца состоят из одого и того же количества элементов, являющихся следующими друг за другом натуральными числами. Это соответствие является изоморфизмом, что следует из хорошо известного свойства сравнений по модулю: если $k \equiv k_1 \pmod d$ и $l \equiv l_1 \pmod d$, то $k + k_1 \equiv l + l_1 \pmod d$ и $kk_1 \equiv ll_1 \pmod d$.

9. Если прибегнуть к образным сравнениям, отказываясь временно от строгости изложения, и представить себе моногенную полугруппу типа (h, d) в виде кометы, «ядром» которой являются числа $h, h+1, \ldots, h+d-1$, образующие циклическую группу, а «хвост» которой образуют числа $1, 2, \ldots, h-1$, то полукольцом эндоморфизмов этой полугруппы будет являться та же комета, ядро которой теперь уже является кольцом.

Поскольку строение этого «ядра» можно считать известным, то при изучении этой второй кометы основное внимание нужно

обратить на роль элементов «хвоста». В частности, ввиду того, что числа $2, 3, \ldots, h-1$ не являются идемпотентами, единственный идемпотент вне «ядра» — это число 1. Поэтому (см. [6]) общее число идемпотентов полукольца $P_{h,d}$ есть 2^r+1, где r — число различных простых сомножителей в каноническом разложении числа d.

10. Мультипликативная полугруппа полукольца $P_{h,d}$ является объединением 2^r+1 непересекающейся подполугруппы, каждая из которых задается одним из идемпотентов и состоит из всех чисел, некоторая степень которых равна этому идемпотенту (см. [3], стр. 162). Аддитивная полугруппа этого полукольца является моногенной полугруппой типа (h, d), строение которой хорошо известно.

Заканчивая рассмотрение полукольца $P_{h,d}$, отметим, что, хотя аддитивная полугруппа этого полукольца не обязана обладать нулевым элементом (конечная моногенная полугруппа типа (h, d) имеет нулевой элемент тогда и только тогда, когда $d=1$), таковой всегда существует в мультипликативной полугруппе. Именно, нулём является число d, если $d \geqslant h$, или то кратное nd числа d, для которого имеет место неравенство $h \leqslant nd < h+d$. Это кратное, очевидно, определено единственным образом, ввиду чего из тривиального $k \cdot nd \equiv nd \pmod{d}$ как раз и имеем $k \cdot nd = nd$.

11. В заключение параграфа рассмотрим следующий пример. Пусть R_a^+ — аддитивная полугруппа положительных рациональных чисел, удовлетворяющих при некотором фиксированном $a > 0$ неравенству $x \geqslant a$ (или $x > a$). Ясно, что умножение на любое положительное рациональное число из R_1^+ определяет в R_a^+ эндоморфизм. Покажем, что эндоморфизмами подобного рода исчерпываются эндоморфизмы полугруппы R_a^+.

Пусть φ — эндоморфизм и $a=\frac{p}{q}$. Если $a\varphi = \frac{p}{q}\varphi = \frac{p}{q}\cdot t$, где t — рациональное число и $t \geqslant 1$, то для любого $\frac{r}{s} = \frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}$ $(m > n)$ ввиду $n\cdot\frac{r}{s} = m\cdot\frac{p}{q}$ имеем $n(\frac{r}{s}\varphi) = m(\frac{p}{q}\varphi) = m\cdot\frac{p}{q}\cdot t$. Отсюда $\frac{r}{s}\varphi = \frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}\cdot t = \frac{r}{s}\cdot t$, т. е. любой эндоморфизм есть умножение на рациональное число из R_1^+.

Пусть φ и ψ — два эндоморфизма. Если $\frac{p}{q}\varphi = \frac{p}{q}\cdot t$ и $\frac{p}{q}\psi = \frac{p}{q}\cdot u$, то $\frac{p}{q}(\psi+\varphi) = \frac{p}{q}\varphi + \frac{p}{q}\psi = \frac{p}{q}t + \frac{p}{q}u = \frac{p}{q}(t+u)$ и $\frac{p}{q}(\varphi\cdot\psi) = (\frac{p}{q}\varphi)\psi = (\frac{p}{q}t)\psi = \frac{p}{q}tu$. Итак, *полукольцо эндоморфизмов полукольца R_a^+ есть R_1^+.*

§ 3. Эндоморфизмы полугруппы, разлагающейся в прямое произведение

1. Будем говорить, что полугруппа A есть *прямое произведение полугрупп* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, и записывать это в виде $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$, если A состоит из всех формальных произведений n элементов, взятых из различных полугрупп A_i, умножением является приписывание и

а) элементы из любых двух полугрупп A_i и A_j, $i \neq j$, перестановочны между собой;

b) всякий элемент $a \in A$ однозначно записывается в виде произведения $a = a_1 a_2 \ldots a_n$, где $a_i \in A_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

В случае, когда A — полугруппа с единицей e и пересечение $A_i \cap A_j = e$ для любых $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq j$, понятие прямого произведения полугрупп является обобщением соответствующего понятия теории групп.

2. Как показала З. М. Кишкина [1], кольцо эндоморфизмов коммутативной группы G, разлагающейся в прямое произведение своих подгрупп A_i, изоморфно кольцу матриц, элементами которых являются гомоморфные отображения одних прямых множителей A_i в другие. Аналогичная теорема имеет место и для коммутативных полугрупп.

Именно, пусть коммутативная полугруппа A представлена в виде прямого произведения $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Через $\mathfrak{A}_{ii}$ обозначим полукольцо эндоморфизмов полугруппы A_i, а через $\mathfrak{A}_{ij}$ — полугруппу гомоморфизмов полугруппы A_i в A_j при $i \neq j$. Тогда справедлива

Теорема. *Полукольцо эндоморфизмов $\mathfrak{A}$ полугруппы A изоморфно полукольцу квадратных матриц (φ_{ij}) порядка n, где $\varphi_{ij} \in \mathfrak{A}_{ij}$, с обычными для матриц определениями операций сложения и умножения.*

Эта теорема является следствием доказываемой ниже теоремы 3. 8. Прямое доказательство теоремы совершенно аналогично доказательству упомянутой выше теоремы Кишкиной. Последнее приведено в монографии [2] на странице 140.

3. Рассмотрим полугруппу A (в общем случае некоммутативную), представимую в виде прямого произведения:

$$A = \prod_{i=1}^{n} A_i.$$

Пусть $\mathfrak{A}_{ii}$ обозначает обобщенное полукольцо эндоморфизмов полугруппы A_i, а $\mathfrak{A}_{ij}$ — обобщенную полугруппу гомоморфизмов полугруппы A_i в полугруппу A_j ($i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$).

Пусть $a_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ — произвольный элемент полугруппы A_i, φ — эндоморфизм полугруппы A и $a_i \varphi = a_{i1} a_{i2} \ldots$

$\ldots a_{in}$, где $a_{ij} \in A_j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Отображения $\varphi_{ij} : a_i \to a_{ij}$ являются гомоморфизмами из $\mathfrak{A}_{ij}$. Действительно, если еще $b_i \in A_i$, то

$$(a_i \cdot b_i)\varphi = a_i\varphi \cdot b_i\varphi = a_{i1}a_{i2}\ldots a_{in} \cdot b_{i1}\, b_{i2}\ldots b_{in} =$$
$$\overset{\text{a)}}{=} a_{i1}b_{i1} \cdot a_{i2}b_{i2} \cdot \ldots \cdot a_{in}\, b_{in},$$

откуда

$$(a_i \cdot b_i)\varphi_{ij} = a_{ij}\, b_{ij} = a_i\varphi_{ij} \cdot b_i\varphi_{ij}.$$

Таким образом каждому эндоморфизму φ полугруппы A можно поставить в соответствие матрицу

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \ldots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \ldots & \varphi_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \ldots & \varphi_{nn} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $\varphi_{ij} \in \mathfrak{A}_{ij}$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$. При этом, очевидно, различным эндоморфизмам соответствуют различные матрицы.

Постараемся выяснить, какие из матриц (1) определяют эндоморфизмы полугруппы A.

4. Лемма. *Каждый эндоморфизм $\varphi \in \mathfrak{A}$ удовлетворяет следующему условию:*

(К) *Для любых $a_i \in A_i$ из $a_i\varphi = \prod_{j=1}^{n} a_{ij}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ следует, что при каждом фиксировании $j = 1, 2, \ldots, n$ любые два произведения, получаемые из произведения $\prod_{i=1}^{k} a_{ij}$ при $k \leqslant n$ в результате перестановки первых индексов множителей a_{ij}, равны.*

Доказательство. Рассмотрим две произвольные перестановки $i_1 i_2 \ldots i_k$ и $i'_1 i'_2 \ldots i'_k$. С одной стороны имеем

$$(\prod_{l=1}^{k} a_{i_l})\varphi = \prod_{l=1}^{k}(a_{i_l}\varphi) = \prod_{l=1}^{k}\prod_{m=1}^{n} a_{i_l m} \overset{\text{a)}}{=} \prod_{m=1}^{n}\prod_{l=1}^{k} a_{i_l m},$$

а с другой стороны (аналогичное вычисление)

$$(\prod_{l=1}^{k} a_{i'_l})\varphi = \prod_{m=1}^{n}\prod_{l=1}^{k} a_{i'_l m}.$$

Ввиду a) элементы $(\prod_{l=1}^{k} a_{i_l})\varphi$ и $(\prod_{l=1}^{k} a_{i'_l})\varphi$ равны, а ввиду b) при любом $j = 1, 2, \ldots, n$ имеет место равенство

$$\prod_{l=1}^{k} a_{i_l j} = \prod_{l=1}^{k} a_{i'_l j},$$

которое и доказывает лемму.

5. Лемма. *Если эндоморфизмы φ и ψ полугруппы A суммируемы, $a=\prod_{i=1}^{n} a_i$ и $b=\prod_{i=1}^{n} b_i$ — произвольные элементы из A $(a_i, b_i \in A_i)$, $a_i\varphi=\prod_{j=1}^{n} a_{ij}$, $b_i\varphi=\prod_{j=1}^{n} b_{ij}$, $a_i\psi=\prod_{j=1}^{n} a'_{ij}$, $b_i\psi=\prod_{j=1}^{n} b'_{ij}$, то выполняется условие:*

(K_1) *при любом $j=1, 2, \ldots, n$ имеет место равенство*

$$\prod_{i=1}^{n} a_{ij} \prod_{i=1}^{n} b_{ij} \prod_{i=1}^{n} a'_{ij} \prod_{i=1}^{n} b'_{ij} = \prod_{i=1}^{n} a_{ij} \prod_{i=1}^{n} a'_{ij} \prod_{i=1}^{n} b_{ij} \prod_{i=1}^{n} b'_{ij}.$$

Замечание. Условие (K_1) равносильно утверждению того, что эндоморфизмы $\varphi_j : a \to \prod_{i=1}^{n} a_{ij}$ и $\psi_j : a \to \prod_{i=1}^{n} a'_{ij}$ суммируемы.

Доказательство. По определению суммируемости эндоморфизмов для произвольных элементов $a, b \in A$ имеем

$$a\varphi \cdot b\varphi \cdot a\psi \cdot b\psi = a\varphi \cdot a\psi \cdot b\varphi \cdot b\psi. \tag{2}$$

Подставляя в левую часть равенства (2) значения элементов a и b, получим

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)\varphi \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right)\varphi \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)\psi \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right)\psi =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (a_i\varphi) \cdot \prod_{i=1}^{n} (b_i\varphi) \cdot \prod_{i=1}^{n} (a_i\psi) \cdot \prod_{i=1}^{n} (b_i\psi) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} b_{ij} \cdot \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} a'_{ij} \cdot \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} b'_{ij} =$$

$$\overset{(K)}{=} \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{n} b_{ij} \cdot \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{n} a'_{ij} \cdot \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{n} b'_{ij} =$$

$$\overset{a)}{=} \prod_{j=1}^{n} \left(\prod_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot \prod_{i=1}^{n} b_{ij} \cdot \prod_{i=1}^{n} a'_{ij} \cdot \prod_{i=1}^{n} b'_{ij}\right).$$

Аналогичная операция для правой части равенства (2) даст нам выражение

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \prod_{i=1}^{n} a'_{ij} \cdot \prod_{i=1}^{n} b_{ij} \cdot \prod_{i=1}^{n} b'_{ij}\right).$$

Применяя однозначность разложения на множители, получаем отсюда утверждение леммы.

6. Лемма. *Если эндоморфизму φ полугруппы A соответствует матрица* (1), *а эндоморфизму ψ — матрица*

$$\begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \dots & \psi_{1n} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \dots & \psi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_{n1} & \psi_{n2} & \dots & \psi_{nn} \end{pmatrix} \tag{3}$$

и эндоморфизмы φ и ψ суммируемы, то эндоморфизму $\varphi + \psi$ соответствует матрица, являющаяся суммой матриц (1) *и* (3): $(\varphi + \psi)_{ij} = \varphi_{ij} + \psi_{ij}$, *из чего следует, что гомоморфизмы φ_{ij} и ψ_{ij} суммируемы при любых $i, j = 1, 2, \dots, n$.*

Доказательство. Пусть $a_i \in A_i$, $a_i\varphi = \prod_{j=1}^{n} a_{ij}$, $a_i\psi = \prod_{j=1}^{n} a'_{ij}$, $a_i\varphi_{ij} = a_{ij}$ и $a_i\psi_{ij} = a'_{ij}$. Тогда, ввиду

$$a_i(\varphi + \psi) = a_i\varphi \cdot a_i\psi = \prod_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \prod_{j=1}^{n} a'_{ij} = \prod_{j=1}^{n} (a_{ij} a'_{ij}),$$

имеем

$$a_i(\varphi + \psi)_{ij} = a_{ij} \cdot a'_{ij} = a_i\varphi_{ij} \cdot a_i\psi_{ij} = a_i(\varphi_{ij} + \psi_{ij}),$$

что и доказывает лемму.

7. Лемма. *Если φ и ψ — эндоморфизмы полугруппы A и* (1) *и* (3) *— соответствующие им матрицы, то соответствующая эндоморфизму $\varphi\psi$ матрица является произведением матриц* (1) *и* (3).

Доказательство. Имеем

$$a_i(\varphi\psi) = (a_i\varphi)\psi = (\prod_{j=1}^{n} a_{ij})\psi = (\prod_{j=1}^{n} a_i\varphi_{ij})\psi =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} (a_i\varphi_{ij})\psi = \prod_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{n} (a_i\varphi_{ij})\psi_{jk}.$$

Поскольку $(a_i\varphi_{ij})\psi_{jk} \in A_k$ и ввиду а) можно писать дальше

$$a_i(\varphi\psi) = \prod_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} (a_i\varphi_{ij})\psi_{jk} = \prod_{k=1}^{n} (a_i \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}\psi_{jk}).$$

Отсюда

$$(\varphi\psi)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}\psi_{jk},$$

что и требовалось доказать.

8. Теорема. *Эндоморфизмы некоммутативной в общем случае полугруппы A, разлагающейся в прямое произведение $\prod_{i=1}^{n} A_i$ своих подполугрупп, находятся во взаимно однозначном соответствии с матрицами вида* (1), *удовлетворяющими условию* (К). *При этом произведению эндоморфизмов соответствует произведение матриц, соответствующих перемножаемым эндомор-*

физмам, а сумма двух суммируемых эндоморфизмов и сумма соответствующих этим эндоморфизмам матриц соответствуют друг другу тогда и только тогда, когда выполняется условие (K_1).

Доказательство. Пусть нам дана матрица (1), удовлетворяющая условию (К). Для произвольного $a = \prod_{i=1}^{n} a_i \in A$ определим отображение φ следующим образом:

$$a\varphi = \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{n} a_i \varphi_{ij}.$$

Пусть еще $b = \prod_{i=1}^{n} b_i \in A$ и

$$b\varphi = \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{n} b_i \varphi_{ij}.$$

Тогда

$$(ab)\varphi = (\prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{i=1}^{n} b_i)\varphi \overset{а)}{=} (\prod_{i=1}^{n} a_i b_i)\varphi =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} (a_i b_i)\varphi_{ij} = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} (a_i \varphi_{ij} \cdot b_i \varphi_{ij}).$$

Отсюда, используя (К) и а), получаем

$$(ab)\varphi = \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{n} a_i \varphi_{ij} \cdot \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{n} b_i \varphi_{ij} = a\varphi \cdot b\varphi.$$

Следовательно, φ — эндоморфизм полугруппы A и между эндоморфизмами и матрицами установлено требуемое взаимно однозначное соответствие.

Остается еще показать, что при выполнении условия (K_1) сумме матриц соответствует сумма эндоморфизмов.

Пусть матрицы (1) и (3) определяют, соответственно, эндоморфизмы φ и ψ, причем выполнено условие (K_1). Покажем, что эндоморфизмы φ и ψ суммируемы, т. е. что для любых $a, b \in A$ имеет место равенство (2).

Учитывая определение эндоморфизмов φ и ψ, можем писать

$$a\varphi \cdot b\varphi \cdot a\psi \cdot b\psi = \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{n} a_i \varphi_{ij} \cdot \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{n} b_i \varphi_{ij} \cdot \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{n} a_i \psi_{ij} \cdot \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{n} b_i \psi_{ij} =$$

$$\overset{а)}{=} \prod_{j=1}^{n} (\prod_{i=1}^{n} a_i \varphi_{ij} \prod_{i=1}^{n} b_i \varphi_{ij} \prod_{i=1}^{n} a_i \psi_{ij} \prod_{i=1}^{n} b_i \psi_{ij}).$$

Но ввиду (K_1) это равняется выражению

$$\prod_{j=1}^{n}\Big(\prod_{i=1}^{n} a_i\varphi_{ij}\cdot\prod_{i=1}^{n} a_i\psi_{ij}\cdot\prod_{i=1}^{n} b_i\varphi_{ij}\cdot\prod_{i=1}^{n} b_i\psi_{ij}\Big)=$$

$$\overset{\text{а)}}{=}\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{n} a_i\varphi_{ij}\cdot\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{n} a_i\psi_{ij}\cdot\prod_{i=1}^{n}\prod_{i=1}^{n} b_i\varphi_{ij}\cdot\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{n} b_i\psi_{ij}=a\varphi\cdot a\psi\cdot b\varphi\cdot b\psi.$$

Теорема доказана.

§ 4. Транзитивные полугруппы эндоморфизмов

1. В этом параграфе будет использована аддитивная запись.

Первые три параграфа работы были посвящены изучению полуколец эндоморфизмов. При этом мы всегда исходили из заданных свойств полугруппы.

Ниже будет проведено исследование, в обратном направлении. Именно, будет показано, что если полугруппа эндоморфизмов удовлетворяет некоторому условию, то исходная аддитивная полугруппа превратима в коммутативное полукольцо с единицей, т. е. на ней может быть определено умножение.

Идея такого рассмотрения принадлежит Круллю, в работе [5] которого аналогичное исследование проведено для абелевых групп. Результаты, приводимые ниже, являются непосредственным обобщением результатов первого параграфа упомянутой работы Крулля. При этом метод доказательства также заимствован из этой работы.

2. Исходной точкой последующих рассуждений будет следующая лемма, все утверждения которой почти очевидны.

Лемма. *Пусть на коммутативной полугруппе A определено умножение, относительно которого A является не обязательно коммутативным полукольцом. Отображение $\varphi_a: c\varphi_a = c\cdot a$ для любого $c\in A$, определенное для какого-нибудь фиксированного элемента $a\in A$, является эндоморфизмом полугруппы A, а множество $\mathfrak{B}$ всех таких эндоморфизмов при различных $a\in A$ образует полугруппу, изоморфную мультипликативной полугруппе полукольца A. Поэтому полукольцо A коммутативно тогда и только тогда, когда коммутативна полугруппа $\mathfrak{B}$. Если полукольцо A обладает единицей e, то для любого $a\in A$ найдется один и только один эндоморфизм $\varphi\in\mathfrak{B}$ такой, что $e\varphi = a$.*

3. Полугруппа $\mathfrak{A}$ эндоморфизмов полугруппы A называется *a-транзитивной* ($a\in A$), если для любого $b\in A$ найдется по крайней мере один эндоморфизм $\varphi\in\mathfrak{A}$, для которого $a\varphi = b$. Если для каждого $b\in A$ найдется один и только один такой эндоморфизм, то $\mathfrak{A}$ называется *a-просто-транзитивной*.

В качестве примера a-просто-транзитивной полугруппы эндоморфизмов приведем полугруппу эндоморфизмов моногенной

полугруппы, порожденной элементом a. Действительно, задание элемента моногенной полугруппы, соответствующего элементу a, определяет эндоморфизм моногенной полугруппы и притом однозначно.

Другой пример получим, рассмотрев свободную полугруппу со множеством образующих B. Полугруппа $\mathfrak{A}$ эндоморфизмов такой полугруппы b-транзитивна относительно любого элемента из B. Действительно, если $c \in A$, то, поставив элементу $b \in B$ в соответствие элемент c и определив произвольно образы остальных элементов из B, получим эндоморфизм, переводящий b в c. В то же время $\mathfrak{A}$ не является b-просто-транзитивной, если множество B содержит по крайней мере два различных элемента.

4. Лемма. *Пусть полугруппа эндоморфизмов $\mathfrak{A}$ полугруппы A коммутативна и a-просто-транзитивна для какого-нибудь $a \in A$. Если для элемента $b \in A$ найдется в $\mathfrak{A}$ эндоморфизм $\alpha = \varphi_{b,a}$, то α — автоморфизм. Такая полугруппа эндоморфизмов тогда и только будет b-просто-транзитивной, когда эндоморфизм $\varphi_{a,b}$ будет автоморфизмом.*

Доказательство. Имеем $a(\varphi_{a,b} \cdot \varphi_{b,a}) = (a\varphi_{a,b})\varphi_{b,a} = b\varphi_{b,a} = a = a\varepsilon$. Но, ввиду a-простой-транзитивности, эндоморфизм, переводящий a в a, определен однозначно и, следовательно, $\varphi_{a,b} \cdot \varphi_{b,a} = \varepsilon$. Ввиду коммутативности также $\varphi_{b,a} \cdot \varphi_{a,b} = \varepsilon$, т. е. $\varphi_{b,a}$ — автоморфизм и $(\varphi_{b,a})^{-1} = \varphi_{a,b}\,\varphi_{b,a}$ определен однозначно, ибо однозначно определен $\varphi_{a,b}$.

Если теперь $c \in A$, то $b(\varphi_{b,a} \cdot \varphi_{a,c}) = (b\varphi_{b,a})\varphi_{a,c} = a\varphi_{a,c} = c$, причем отображение $\varphi_{b,c} = \varphi_{b,a} \cdot \varphi_{a,c}$ определено однозначно, ибо оба множителя определены однозначно, т. е. $\mathfrak{A}$ оказывается b-просто-транзитивной. Наоборот, если $\mathfrak{A}$ — b-просто транзитивна, то существует отображение $\varphi_{b,a}$, но, как было показано выше, оно является автоморфизмом.

5. Теорема. *Пусть полугруппа эндоморфизмов $\mathfrak{A}$ абелевой полугруппы A коммутативна и a-просто-транзитивна. Если определить обычным образом сложение эндоморфизмов, то окажется, что $\varphi_{a,b} + \varphi_{a,c} = \varphi_{a,b+c}$, и $\mathfrak{A}$ превратится в коммутативное полукольцо эндоморфизмов.*

Доказательство. Пусть $b, c, d \in A$ и $d(\varphi_{a,b} + \varphi_{a,c}) = d\varphi_{a,b} + d\varphi_{a,c}$. Тогда

$$d(\varphi_{a,b} + \varphi_{a,c}) = d\varphi_{a,b} + d\varphi_{a,c} = a\varphi_{a,d}\,\varphi_{a,b} + a\varphi_{a,d}\,\varphi_{a,c} =$$
$$= a\varphi_{a,b}\,\varphi_{a,d} + a\varphi_{a,c}\,\varphi_{a,d} = b\varphi_{a,d} + c\varphi_{a,d} = (b + c)\varphi_{a,d} =$$
$$= a\varphi_{a,b+c}\varphi_{a,d} = a\varphi_{a,d}\varphi_{a,b+c} = d\varphi_{a,b+c},$$

откуда, ввиду произвольности d, $\varphi_{a,b} + \varphi_{a,c} = \varphi_{a,b+c}$.

Поэтому сумма любых двух эндоморфизмов — снова эндоморфизм. Поскольку сложение эндоморфизмов сводится к сложению элементов полугруппы, а последнее коммутативно и ассоциативно, то таково же и первое.

Чтобы закончить доказательство теоремы, нужно показать, что сложение эндоморфизмов связано с умножением дистрибутивным законом. Это делается так:

$$f(\varphi_{a,b}+\varphi_{a,c})\varphi_{a,d}=a\varphi_{a,f}(\varphi_{a,b}+\varphi_{a,c})\varphi_{a,d}=$$
$$=a(\varphi_{a,b}+\varphi_{a,c})\varphi_{a,f}\varphi_{a,d}=(b+c)\varphi_{a,f}\varphi_{a,d}=$$
$$=(b+c)\varphi_{a,d}\varphi_{a,f}=(b\varphi_{a,d}+c\varphi_{a,d})\varphi_{a,f}=$$
$$=(a\varphi_{a,b}\varphi_{a,d}+a\varphi_{a,c}\varphi_{a,d})\varphi_{a,f}=a(\varphi_{a,b}\varphi_{a,d}+\varphi_{a,c}\varphi_{a,d})\varphi_{a,f}=$$
$$=a\varphi_{a,f}(\varphi_{a,b}\varphi_{a,d}+\varphi_{a,c}\varphi_{a,d})=f(\varphi_{a,b}\varphi_{a,d}+\varphi_{a,c}\varphi_{a,d}).$$

6. Теорема. *Если выполнено условие предыдущей теоремы, причем в полугруппе A введено с помощью $\mathfrak{A}$ a-умножение по правилу $(b\cdot c)_a=a(\varphi_{a,b}\varphi_{a,c})$ для любых b, $c\in A$, то A становится коммутативным полукольцом с единицей a, изоморфным полукольцу $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Достаточно убедиться в том, что отображение ψ: $b\to\varphi_{a,b}$ полугруппы A на полукольцо $\mathfrak{A}$ является изоморфизмом. Это же, ввиду $\varphi_{a,b+c}=\varphi_{a,b}+\varphi_{a,c}$ и легко выводимого равенства $\varphi_{a,(b\cdot c)_a}=\varphi_{a,b}\cdot\varphi_{a,c}$, очевидно.

7. Теорема. *Пусть выполняется условие теоремы* 4.5. *Тогда для любого автоморфизма $\alpha_{a,b}$ из $\mathfrak{A}$ в полугруппе A наряду с a-умножением вводимо и b-умножение, причем получаемые таким образом коммутативные полукольца изоморфны и этот изоморфизм осуществляется автоморфизмом $\alpha_{a,b}$.*

Доказательство. По лемме 4.4. полугруппа эндоморфизмов $\mathfrak{A}$ является также и b-просто-транзитивной и поэтому по теореме 4.6. после введения b-умножения $(c\cdot d)_b=b(\varphi_{b,c}\varphi_{b,d})$ A превращается в коммутативное полукольцо с единицей b, изоморфное, также как и полукольцо, получаемое из A с помощью a-умножения, полукольцу $\mathfrak{A}$; поэтому эти полукольца изоморфны друг другу.

Этот изоморфизм осуществляется автоморфизмом $\alpha_{a,b}=\varphi_{a,b}$. Действительно, из $b\varphi_{a,c}=a\varphi_{a,b}\varphi_{a,c}=a\varphi_{a,c}\varphi_{a,b}=c\cdot\varphi_{a,b}=c\alpha_{a,b}$ следует

$$\varphi_{a,c}=\varphi_{b,c}\alpha_{a,b}.$$

Поэтому

$$((c\cdot d)_a)\alpha_{a,b}=a\varphi_{a,c}\varphi_{a,d}\alpha_{a,b}=a\alpha_{a,b}\varphi_{a,c}\varphi_{a,d}=$$
$$=b\varphi_{a,c}\varphi_{a,d}=b\cdot\varphi_{b,c}\alpha_{a,b}\varphi_{b,d}\alpha_{a,b}=(c\alpha_{a,b}\cdot d\alpha_{a,b})_b,$$

что и требовалось доказать.

8. Таким образом показано, что каждая просто-транзитивная относительно какого-нибудь элемента $a\in A$ абелева полугруппа эндоморфизмов может быть использована для превращения полугруппы A в коммутативное полукольцо с единицей. Это превращение может быть осуществлено многими способами, однако все получающиеся при этом полукольца изоморфны.

7126

Литература

1. Кишкина З. М., Эндоморфизмы p-примитивных абелевых групп без кручения. Изв. АН СССР, сер. мат., 1945, **9**, 201—232.
2. Курош А. Г., Теория групп. Москва, 1953.
3. Ляпин Е. С., Полугруппы. Москва, 1960.
4. Fuchs, L., Abelian groups. Budapest, 1958.
5. Krull, W., Über die Endomorphismen von total geordneten Archimedischen Abelschen Gruppen. Math. Z., 1960, **74**, 81—90.
6. Parizek, B., Schwarz, Š., O multiplikativnej pologrupe zvyškovych tried (mod m). Mat-fyz. časop., 1958, 8, № 3, 136—150.

Поступило
7 IV 1962

POOLRÜHMADE ENDOMORFISMIDEST

J. Gabovitš

ÜTÜ ring geomeetria kateedri juures

Resümee

Töö koosneb neljast paragrahvist.

§ 1. On defineeritud endomorfismide summeeruvuse mõiste ning on näidatud, et suvalise poolrühma endomorfismid moodustavad üldistatud poolringi.

§ 2. On leitud mõnede konkreetsete poolrühmade endomorfismid.

§ 3. On täielikult kirjeldatud otsekorrutisena avalduva poolrühma endomorfismid. Sellega on üldistatud Kiškina [1] tuntud tulemus Abeli rühmade endomorfismide kohta.

§ 4. On leitud tingimused, mida peab rahuldama antud poolrühma endomorfismide poolrühm, et antud poolrühmal oleks defineeritav veel üks operatsioon. Saadud tulemused üldistavad Krulli [5] tulemusi.

DIE ENDOMORPHISMEN DER HALBGRUPPEN

J. Gabowitsch

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit besteht aus vier Teilen.

Im § 1 wird die Summierung der Endomorphismen definiert und es wird gezeigt, daß die Endomorphismen einer beliebigen Halbgruppe einen verallgemeinerten Halbring bilden.

§ 2. Für einige bestimmte Halbgruppen sind die Endomorphismenhalbringe gefunden.

§ 3. Es werden die Endomorphismen solcher Halbgruppen völlig beschrieben, die ein direktes Produkt ihrer Unterhalbgruppen sind. Dadurch wird ein bekanntes Ergebnis von Kischkina [1] verallgemeinert.

§ 4. Hier sind solche Bedingungen für die Endomorphismenhalbgruppe der gegebenen Halbgruppe gefunden, daß in der gegebenen Halbgruppe noch eine algebraische Operation definiert werden kann. Diese Ergebnisse sind die Verallgemeinerung der Ergebnisse von Krull [5].

ОБ АРХИМЕДОВСКИ УПОРЯДОЧЕННЫХ Ω-ГРУППАХ

Е. Габович
Кружок СНО при кафедре геометрии

Частично упорядоченная Ω-группа G называется *архимедовски упорядоченной*, если её аддитивная группа архимедова, т. е. если для любых двух элементов $a, b \in G$ $(b \neq 0)$ найдётся такое целое число n, что $nb \geqslant a$.

Все частично упорядоченные Ω-группы (см. [3]) предполагаются в дальнейшем дистрибутивными.

Поскольку определением архимедовски упорядоченной Ω-группы не накладывается никаких дополнительных условий на систему операторов Ω, можно утверждать, что все свойства архимедовски упорядоченных групп переносятся на соответствующий класс Ω-групп. Поэтому, например, частично упорядоченная Ω-группа G является архимедовски упорядоченной в том и только в том случае, если её аддитивная группа не содержит нетривиальных собственных выпуклых подгрупп (см. [2]).

Отсутствие нетривиальных собственных выпуклых Ω-подгрупп является необходимым, но не достаточным условием архимедовости частично упорядоченной Ω-группы.

Если в частично упорядоченной группе G отношение порядка, определённое лишь для некоторых пар элементов, можно определить для всех остальных пар так, что G превратится в линейно упорядоченную группу, то группа G называется *доупорядочиваемой*. Частично упорядоченную Ω-группу G называют *доупорядочиваемой*, если после доупорядочения её аддитивной группы она превратится в линейную упорядоченную Ω-группу.

Теорема 1. *Любая архимедовски частично упорядоченная локально нильпотентная группа G коммутативна и изоморфна подгруппе частично упорядоченной аддитивной группы действительных чисел.*

Доказательство. Группа G не содержит элементов конечного порядка (см. [2]) и по теореме Мальцева [4] доупорядочиваема, как частично упорядоченная локально нильпотентная группа без элементов конечного порядка.

Будем обозначать полугруппу положительных элементов группы G до доупорядочивания через G^+, а после доупорядочивания — через $G^{+\prime}$. Ясно, что $G^+ \subset G^{+\prime}$.

Но если архимедовски частично упорядоченная группа G доупорядочиваема, то линейно упорядоченная группа, полученная в результате доупорядочивания, также упорядочена архимедовски, ибо уже в силу архимедовости порядка, существовавшего до доупорядочивания, для любых элементов a, $b \in G$ $(b \neq 0)$ можно найти такое целое число n, что $n\,b \geqslant a$, поэтому, подавно, такое целое число найдётся после доупорядочивания.

Применим теперь к группе G теорему Гёльдера (см., например, [1], стр. 312), согласно которой любая архимедовски линейно упорядоченная группа коммутативна и изоморфна подгруппе упорядоченной аддитивной группы действительных чисел. Поскольку алгебраическая структура группы G не изменилась при доупорядочивании, можем утверждать, что линейно упорядоченная группа G коммутативна и изоморфна подгруппе D_0 линейно упорядоченной аддитивной группы действительных чисел D.

При этом изоморфизме полугруппа G^+ изоморфно отображается на полугруппу D_0^+ положительных элементов группы D_0, а её подполугруппа $G^{+\prime}$ на подполугруппу $D_0^{+\prime}$ полугруппы D_0^+. Эта полугруппа $D_0^{+\prime}$ определяет в D_0 частичный порядок; группа D_0 с этим частичным порядком изоморфна первоначально взятой частично упорядоченной группе G, что и доказывает теорему.

Следствие. *Всякая архимедовски частично упорядоченная нильпотентная группа коммутативна и изоморфна подгруппе частично упорядоченной аддитивной группы действительных чисел.*

Следствием теоремы 1 является также теорема автора о коммутативных архимедовски частично упорядоченных группах, непосредственно доказанная в работе [2].

Ω-группа G называется ΩA-группой, если её аддитивная группа коммутативна.

Теорема 2. *Всякая архимедовски частично упорядоченная ΩA-группа доупорядочиваема.*

Доказательство. Пусть G — архимедовски частично упорядоченная ΩA-группа и d — какой-нибудь фиксированный положительный элемент из G. Если $a \in G$ $(a \neq 0)$, то ввиду архимедовости группы G найдется такое целое число n, что $na \geqslant d > 0$. Если $a \geqslant 0$, то при любом натуральном n $na \geqslant a \geqslant 0$ и, наоборот, $na \geqslant 0$ только при целом положительном n.

Исходя из этого, определим в G новое отношение порядка (будем обозначать его при помощи знака $\cdot\geqslant$) следующим образом: $a \cdot\geqslant 0$, если $a = 0$ или $a \neq 0$ и найдётся такое целое число $n > 0$, что $na > 0$.

Для $a > 0$ можно принять $n = 1$, поэтому, из $a > 0$ всегда следует $a \cdot\geqslant 0$. Кроме того, по определению, $0 \cdot\geqslant 0$. Поэтому

введенное нами отношение порядка является продолжением ранее существовавшего.

Как и обычно, будем считать, что $a \cdot\geqslant b$ тогда и только тогда, когда $a - b \cdot\geqslant 0$. Для любых $a, b \in G$ $(a \neq b)$, ввиду архимедовости, найдется такое целое число n, что $n(a-b) > 0$. Если $n > 0$, то $a \cdot\geqslant b$, если же $n < 0$, то $-n > 0$ и, ввиду $-n(b-a) > 0$, $b \cdot\geqslant a$. Итак, выполняется условие линейности порядка.

Покажем теперь, что относительно этого лиейного порядка G является упорядоченной Ω-группой. Для этого проверим, выполнены ли условия теоремы 1 работы [3].

Если $a \cdot\geqslant 0$ и $b \cdot\geqslant 0$, $b \neq 0 \neq a$, то найдутся такие натуральные числа m и n, что $ma > 0$ и $nb > 0$. Но тогда $mna > 0$, $mnb > 0$, откуда $mn(a+b) > 0$ и $a + b \cdot\geqslant 0$. Если же хотя бы один из элементов a и b, скажем a, равен нулю, то $a + b = b$ и, опять-таки, $a + b \geqslant 0$. Поэтому множество $G^{+\cdot}$ положительных элементов Ω-группы G относительно отношения $\cdot\geqslant$ является полугруппой.

Покажем, что G^+ — Ω-полугруппа. Пусть $a_i \cdot\geqslant 0$. Если хотя бы один из элементов $a_i = 0$, то и $a_1 a_2 \ldots a_n \omega = 0 \cdot\geqslant 0 (\omega \in \Omega)$. Пусть, поэтому, все элементы $a_i \neq 0$. Тогда найдутся такие натуральные числа m_i, что $m_i a_i > 0$. Но тогда

$$(m_1 a_1)(m_2 a_2) \ldots (m_n a_n)\omega = m_1 m_2 \ldots m_n (a_1 a_2 \ldots a_n \omega) \geqslant 0.$$

Если $a_1 a_2 \ldots a_n \omega \neq 0$, то

$$m_1 m_2 \ldots m_n (a_1 a_2 \ldots a_n \omega) > 0$$

и

$$a_1 a_2 \ldots a_n \omega \cdot\geqslant 0.$$

Если же $a_1 a_2 \ldots a_n \omega = 0$, то, подавно, $a_1 a_2 \ldots a_n \omega \cdot\geqslant 0$. Итак, из $a_i \cdot\geqslant 0$ всегда следует $a_1 a_2 \ldots a_n \omega \cdot\geqslant 0$. т. е. $G^{+\cdot}$ является Ω-полугруппой.

Остается еще показать, что $G^{+\cdot}$ удовлетворяет условиям U1 и U2. Ввиду коммутативности, условие U1 тривиально выполняется. Для проверки условия U2 используем тот факт, что подполугруппа G^+ полугруппы $G^{+\cdot}$, состоящая из всех элементов группы G, неотрицательных при первоначальном порядке $\geqslant$, удовлетворяет этому условию.

Пусть $a \in G^{+\cdot}$ и $-a \in G^{+\cdot}$. Тогда для некоторых натуральных чисел m и n $ma \in G^+$ и $n(-a) \in G^+$. Поэтому $mna \in G^+$ и $-mna \in G^+$, откуда $mna = -mna = 0$, что возможно лишь при $a = -a = 0$.

Теорема доказана.

Следствие. *Любое архимедовски частично упорядоченное кольцо или линейное векторное пространство, а также любая архимедовски частично упорядоченная алгебра доупорядочиваемы.*

Теорема 3. *Любое архимедовски частично упорядоченное кольцо, либо является кольцом с нулевым умножением, либо изоморфно подкольцу поля действительных чисел.*

Для доказательства теоремы доупорядочим кольцо (ввиду приведённого выше следствия это возможно) и к полученному архимедовски упорядоченному кольцу применим теорему Я. В. Хиона [5].

Литература

1. Биркгоф Г., Теория структур. Москва, 1952.
2. Габович Е., Частично упорядоченные группы, лишенные нетривиальных выпуклых подгрупп. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 289—293.
3. Габович Е., Частично упорядоченные Ω-группы. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 294—300.
4. Мальцев А. И., О доупорядочении групп. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1951, **38**, 173—175.
5. Хион Я. В., Архимедовски упорядоченные кольца. Успехи матем. наук, 1954, **9**, № 4 (62), 237—242.

Поступило
10 V 1962

ARHIMEEDILISELT JÄRJESTATUD Ω-RÜHMADEST

J. Gabovitš

ÜTÜ ring geomeetria kateedri juures

Resümee

Töö kujutab endast artikli [3] jätku. Esitame tähtsamad tulemused.

Teoreem 1. *Iga arhimeediliselt osaliselt järjestatud lokaalselt nilpotentne rühm on kommutatiivne ja isomorfne reaalarvude aditiivse rühma osaliselt järjestatud alamrühmaga.*

Teoreem 3. *Ida arhimeediliselt osaliselt järjestatud ring kas on nullkorrutamisega ring, või on isomorfne reaalarvude korpuse osaliselt järjestatud alamringiga.*

ON THE ARCHIMEDEAN ORDERED Ω-GROUPS

J. Gabovitch

Summary

This paper is an extension for [3].

Theorem 1. *Each locally nilpotent group with Archimedean partial ordering is isomorphic to a partial ordered subgroup of the additive group of real numbers.*

Theorem 3. *Each ring with Archimedean partial ordering is a ring with a nil-multiplication or is isomorphic to a partial ordered subring of the field of real numbers.*

ОБ ОДНОМ АСПЕКТЕ НЕГОЛОНОМНОЙ ГЕОМЕТРИИ

М. Рахула

Кафедра геометрии

Неголономная геометрия — это вполне определённый круг вопросов в дифференциальной геометрии, объединённых одной общей идеей, которую в общих чертах можно высказать следующим образом.

Объектами изучения дифференциальной геометрии являются дифференцируемые многообразия и различные отображения этих многообразий друг в друга. Пусть, например, рассматривается некоторое отображение μ: $V_n \to V_m$ многообразия V_n в многообразие V_m. Изучение отображения μ значительно упрощается при помощи дифференциала $d\mu$ и взаимного отображения $d^*\mu$, которые позволяют применить теорию векторных пространств и свести исследования к простым алгебраическим операциям над матрицами и системами линейных уравнений. Эта проблема «линеаризации» ставит две задачи — прямую и обратную. Прямая задача заключается в изучении отображения $\mu : V_n \to V_m$ с помощью линейных отображений $d\mu$ и $d^*\mu$, в то время как обратная, наоборот, предполагает заданным некоторое линейное отображение между векторными пространствами, касательными к многообразиям V_n и V_m, и ставит вопрос о существовании и поведении соответствующего отображения μ. Можно сказать, что круг вопросов, связанных с прямой задачей, составляет проблематику *голономной геометрии,* а *неголономная геометрия* охватывает вопросы, возникающие при постановке обратной задачи.

Настоящая статья посвящается анализу этой основной идеи неголономной геометрии. При этом вводятся понятия линейной связи между многообразиями и ее формы кривизны, играющие, при постановке обратной задачи, фундаментальную роль.

§ 1. Предварительные обозначения и определения

Прежде всего дадим перечень основных понятий.

V_n — вполне параллелизуемое аналитическое многообразие n измерений; заметим, что n-мерное аналитическое многообразие называется вполне параллелизуемым, если оно допускает на себе n аналитических векторных полей, линейно независимых в каждой точке ξ многообразия (ср. [2], стр. 13).

F — множество аналитических скалярных функций, заданных на V_n; F есть алгебра над полем вещественных чисел R_1.

L — алгебра Ли аналитических векторных полей, заданных на V_n; векторное поле X, заметим, принадлежит L, если $Xf \in \mathsf{F}$ для любой функции $f \in \mathsf{F}$ ([6], стр. 124). Скобка $[XY]$ полей $X, Y \in \mathsf{L}$ определяется формулой

$$[XY] = XY - YX.$$

L^* — дуальное пространство аналитических 1-форм, заданных на V_n; 1-форма Φ, заметим, принадлежит L^*, если $\Phi(X) \in \mathsf{F}$ для любого поля $X \in \mathsf{L}$.

R — система реперов на V_n, образуемая множеством n векторных полей из L, линейно независимых в каждой точке $\xi \in V_n$.

Θ — система кореперов на V_n, образуемая множеством n 1-форм из L^*, линейно независимых в каждой точке $\xi \in V_n$.

L_ξ — касательное векторное пространство к многообразию V_n в точке $\xi \in V_n$.

L_ξ^* — пространство ковекторов, дуальное к пространству L_ξ.

X_ξ — вектор поля $X \in \mathsf{L}$ в точке $\xi \in V_n$, $(X_\xi \in L_\xi)$.

Φ_ξ — ковектор, определяемый 1-формой $\Phi \in \mathsf{L}^*$ в точке $\xi \in V_n$, $(\Phi_\xi \in L_\xi)$.

R_ξ — репер пространства L_ξ, определяемый системой реперов R в точке $\xi \in V_n$.

Θ_ξ — корепер пространства L^*_ξ, определяемый системой кореперов Θ в точке $\xi \in V_n$.

Наряду с многообразием V_n рассматривается другое вполне параллелизуемое аналитическое многообразие V_m m измерений, для которого принимаются соответственно следующие обозначения: F', L', $\mathsf{L}^{*\prime}$, R', Θ', L'_η, $L^{*\prime}_\eta$, X'_η, Φ'_η, R'_η, Θ'_η,
где $\eta \in V_m$; $X' \in \mathsf{L}'$; $\Phi' \in \mathsf{L}^{*\prime}$.

§ 2. Системы реперов R и кореперов Θ на V_n

Рассмотрим системы реперов R и кореперов Θ на многообразии V_n более подробно.

Теорема 1. *Система реперов* R *на многообразии* V_n *есть базис алгебры Ли* L; *при этом каждое векторное поле* $X \in \mathsf{L}$ *может быть представлено формулой*[1]

$$X = \mathsf{R}x, \tag{1}$$

где $x \in \mathsf{F}$.

Доказательство. Вектор X_ξ поля X в точке $\xi \in V_n$ может быть представлен в пространстве L_ξ относительно репера R_ξ формулой

$$X_\xi = R_\xi x_\xi, \tag{2}$$

где x_ξ — скаляры (см. [6], стр. 118). Так как такое представление имеет место в каждой точке $\xi \in V_n$, то для поля X справедлива формула (1), где каждая компонента x^i есть отображение $\xi \to x^i{}_\xi$ $(i = 1, \ldots, n)$, т. е. скалярная функция на V_n. Далее, для любой функции $f \in \mathsf{F}$ имеем

$$Xf = (\mathsf{R}f)x,$$

где функции Xf, $\mathsf{R}f$ — аналитические. Отсюда, в силу произвольности функции $f \in \mathsf{F}$, следует, что и компоненты x — аналитические функции, т. е. $x \in \mathsf{F}$.

Теорема 2. *Система кореперов* Θ *на многообразии* V_n *есть базис дуального пространства* L*; *при этом каждая* 1*-форма* $\Phi \in \mathsf{L}^*$ *может быть представлена формулой*

$$\Phi = \varphi\Theta, \tag{3}$$

где $\varphi \in \mathsf{F}$.

Доказательство. Ковектор $\Phi_\xi \in L^*{}_\xi$ может быть представлен относительно корепера Θ_ξ формулой

$$\Phi_\xi = \varphi_\xi \Theta_\xi, \tag{4}$$

где φ_ξ — скаляры. Этим устанавливается формула (3), где компоненты φ — скалярные функции на V_n (ср. (2) и (1)). Покажем, что эти функции — аналитические. Для любого векторного поля $X = \mathsf{R}x \in \mathsf{L}$ имеем

$$\Phi(X) = \varphi\Theta(\mathsf{R})x;$$

---

[1] Везде, где можно, будет применяться матричная запись формул.

это справедливо при любом выборе системы R, в частности, когда $\Theta(\mathsf{R}) = E$ (E — единичная матрица); в этом случае,

$$\Phi(X) = \varphi x. \tag{5}$$

Так как здесь функции $\Phi(X)$ и x — аналитические, а поле X произвольно, то компоненты φ тоже аналитические функции, т. е. $\varphi \in \mathsf{F}$.

Замечание. В случае, когда $\Theta(\mathsf{R}) = E$, системы R и Θ называются *дуальными*. В дальнейшем символы R и Θ будут обозначать именно дуальные системы (при этом у символов R и Θ допускаются одинаковые индексы, — например, R' и Θ'). Часто будем говорить просто о «системе R, Θ». След поля (1) на 1-форме (3) при этом будет определятся формулой (5).

Формулы (1) и (3) можно обобщить для случая аналитического тензорного поля $\boldsymbol{T}$, p раз контравариантного и q раз ковариантного, представив это поле следующим образом:

$$\boldsymbol{T} = \mathsf{R}_{i_1} \odot \ldots \odot \mathsf{R}_{i_p} T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots i_q} \Theta^{j_1} \odot \ldots \odot \Theta^{j_q}, \tag{6}$$

где компоненты $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ — аналитические функции из F.

Прежде чем сформулировать две следующие теоремы, вспомним понятия дифференциала функции и внешнего дифференциала 1-формы.

Дифференциалом функции $f \in \mathsf{F}$ называется 1-форма $df \in \mathsf{L}^*$, определяемая равенством

$$df(X) = Xf; \quad X \in \mathsf{L}. \tag{7}$$

Если при этом поле X представлено формулой (1), а df — формулой

$$df = \partial f \Theta \tag{8}$$

(ср. (3)), то функция Xf представляется формулой

$$Xf = \partial f x \tag{9}$$

(см. (5) и (7)).

Внешним дифференциалом 1-формы $\Phi \in \mathsf{L}^*$ называется 2-форма $D\Phi$, определяемая равенством [2]

$$D\Phi(X, Y) = X\Phi(Y) - Y\Phi(X) - \Phi([XY]). \tag{10}$$

Назовем n внешних дифференциалов $D\Theta^i$ 1-форм Θ^i системы кореперов Θ *формами неголономности* [3] *системы* R, Θ и приведем формулу

$$[\mathsf{R}_i \mathsf{R}_j] = -\mathsf{R}_k D\Theta^k(\mathsf{R}_i \mathsf{R}_j), \tag{11}$$

---

[2] Аналогично можно определить внешний дифференциал любой p-формы Θ — см. [1], стр. 36, формула (18.12).

[3] Отметим аналогию с объектом неголономности системы референции — см [4], стр. 71.

связывающую формы неголономности $D\Theta^k$ со скобкой $[\mathsf{R}_i\mathsf{R}_j]$ полей R_i и R_j системы реперов R. Эта формула следует непосредственно из (10) с учётом того, что $\Theta(\mathsf{R}) = E - \text{Const}$, а также из очевидной формулы $X = \mathsf{R}_i\Theta^i(X)$, $(X \in \mathsf{L})$.

Теорема 3. *Скобка* $[XY]$ *двух полей*

$$X = \mathsf{R}x \quad \text{и} \quad Y = \mathsf{R}y \tag{12}$$

может быть относительно системы R, Θ *представлена формулой*

$$[XY] = \mathsf{R}(Xy - Yx - D\Theta(X, Y)). \tag{13}$$

Доказательство. Действительно, имеем

$$[XY] = [\mathsf{R}_i x^i; \mathsf{R}_j y^j] = \mathsf{R}_i((\mathsf{R}_j y^i)x^j - (\mathsf{R}_j x^i)y^j) + \\ + [\mathsf{R}_i\mathsf{R}_j]x^i y^j = \mathsf{R}_i(Xy^i - Yx^i) + [\mathsf{R}_i\mathsf{R}_j]x^i y^j,$$

откуда в силу (11) и следует формула (13).

Теорема 4. *Внешний дифференциал* $D\Phi$ *1-формы*

$$\Phi = \varphi\Theta$$

может быть относительно системы R, Θ *представлен формулой*

$$D\Phi = d\varphi \wedge \Theta + \varphi D\Theta. \tag{14}$$

Доказательство. Эта формула следует из (10), если в правую часть подставить (12), (13), (3), учесть (5) и вспомнить определение операции внешнего произведения «$\wedge$»:

$$D\Phi(X, Y) = X(\varphi y) - Y(\varphi x) - \varphi(Xy - Yx - D\Theta(X, Y)) = \\ = (X\varphi)y - (Y\varphi)x + \varphi D\Theta(X, Y) = (d\varphi \wedge \Theta + \varphi D\Theta)(X, Y).$$

Заметим, что формула (14) свидетельствует о том, что глобальное определение внешнего дифференциала $D\Phi$ формулой (10) эквивалентно с классическим определением не только в локальном рассмотрении, но и глобально относительно системы R, Θ.

§ 3. Отображение $\mu\colon V_n \to V_m$

В этом параграфе рассмотрим аналитическое отображение μ многообразия V_n на многообразие V_m $(n \geqslant m)$:

$$\mu\colon V_n \to V_m, \tag{15}$$

его дифференциал $d\mu$ и взаимное отображение $d^*\mu$.

Прежде всего обратим внимание на то, что отображение μ порождает гомоморфизм алгебры F' в алгебру F:

$$g \to g \circ \mu; \quad g \in \mathsf{F}'; \quad g \circ \mu \in \mathsf{F}, \tag{16}$$

так как

$$(gg') \circ \mu = (g \circ \mu)(g' \circ \mu); \quad g, g' \in \mathsf{F}'; \tag{17}$$

$$(\lambda g + \lambda' g') \circ \mu = \lambda(g \circ \mu) + \lambda'(g' \circ \mu); \quad g, g' \in \mathsf{F}; \tag{18}$$

где λ, λ' — скаляры.

Опираясь на понятия этого гомоморфизма, дадим следующие определения.

Дифференциалом $d\mu$ *отображения* μ называется отображение

$$d\mu\colon X \to d\mu X, \tag{19}$$

где $X \in \mathsf{L}$, а поле $d\mu X$ из L' определяется формулой

$$(d\mu X g)\circ\mu = X(g\circ\mu); \quad g \in \mathsf{F}'. \tag{20}$$

Взаимным отображением $d^*\mu$ называется отображение

$$d^*\mu : \Psi \to d^*\mu\Psi, \tag{21}$$

где $\Psi \in \mathsf{L}^{*\prime}$, а 1-форма $d^*\mu\Psi$ из L^* определяется формулой

$$d^*\mu\Psi(X) = (\Psi(d\mu X))\circ\mu; \quad X \in \mathsf{L}. \tag{22}$$

Отображение (21) распространяется и на 2-формы: если $\Psi, \Psi' \in \mathsf{L}^{*\prime}$, то 2-форме $\Psi \wedge \Psi'$ ставится в соответствие 2-форма $d^*\mu(\Psi \wedge \Psi')$, определяемая равенством [4]

$$d^*\mu(\Psi \wedge \Psi')(X, Y) = (\Psi \wedge \Psi'(d\mu X, d\mu Y))\circ\mu. \tag{23}$$

Теорема 6. *Отображение* $d\mu$ (19) *сохраняет скобочную операцию, т. е.*

$$d\mu[XY] = [d\mu X, d\mu Y]; \quad X, Y \in \mathsf{L}. \tag{24}$$

Доказательство. Действительно, учитывая (20), имеем

$$(d\mu X d\mu Y g)\circ\mu = X((d\mu Y g)\circ\mu) = XY(g\circ\mu); \quad g \in \mathsf{F}'; \tag{25}$$

меняя здесь X и Y местами и отнимая результат из (25), получаем

$$([d\mu X, d\mu Y]g)\circ\mu = [XY](g\circ\mu) = (d\mu[XY]g)\circ\mu,$$

откуда и следует (24) (ср. [6], стр. 128).

Теорема 7. *Отображение* $d^*\mu$ (21) *сохраняет операцию внешнего дифференцирования, т. е.*

$$d^*\mu D\Psi = Dd^*\mu\Psi; \quad \Psi \in \mathsf{L}^{*\prime}. \tag{26}$$

Доказательство [5]. Используя формулы (23), (10), (20), (24), (22), получаем:

$$\begin{aligned} d^*\mu D\Psi(X, Y) &= (D\Psi(d\mu X, d\mu Y))\circ\mu = \\ &= (d\mu X\cdot\Psi(d\mu Y) - d\mu Y\cdot\Psi(d\mu X) - \Psi(d\mu[XY]))\circ\mu = \\ &= X((\Psi(d\mu Y))\circ\mu) - Y((\Psi(d\mu X))\circ\mu) - d^*\mu\Psi([XY]) = \end{aligned}$$

---

[4] Аналогично определяется p-форма $d^*\mu\Theta$ для любой p-формы Θ, заданной на V_m (ср. [6], стр. 220; [1], стр. 36).

[5] Здесь проводится доказательство формулы (26) с глобальной точки зрения, в отличие от локальных доказательств [2], стр. 24; [6], стр. 221; [1], стр. 37. Доказательство формулы (26) для любой p-формы Θ не представляет трудностей.

$$= Xd^*\mu\Psi(Y) - Yd^*\mu\Psi(X) - d^*\mu\Psi([XY] =$$
$$= Dd^*\mu\Psi(X, Y),$$

что и устанавливает формулу (26).

Рассмотрим теперь на многообразии V_n систему R, Θ, а на многообразии V_m — систему R', Θ' (см. § 2).

При отображении $d\mu$ (19) системе реперов R, образованной n векторными полями из L, ставится в соответствие совокупность n векторных полей $d\mu\mathsf{R}$ из L', которые можно представить формулой

$$d\mu\mathsf{R} = \mathsf{R}'M, \tag{27}$$

где M — матрица, элементы которой — функции из F' (см. теорема 3).

Аналогично, при отображении $d^*\mu$ (21) системе кореперов Θ', образованной m 1-формами из $\mathsf{L}^{*\prime}$, ставится в соответствие совокупность m 1-форм $d^*\Theta'$ из L^*, которые можно представить формулой

$$d^*\mu\Theta' = (M \circ \mu)\Theta, \tag{28}$$

где матрица $M \circ \mu$ получена из матрицы M в результате гомоморфизма (16). Формула (28) следует из следующей записи (см. (22) и (27)):

$$d^*\mu\Theta'(\mathsf{R}) = (\Theta'(d\mu\mathsf{R})) \circ \mu = M \circ \mu.$$

Теорема 8. *Если векторные поля X и $d\mu X$ заданы формулами*

$$X = \mathsf{R}x; \quad d\mu X = \mathsf{R}'x', \tag{29}$$

то их компоненты x и x' связаны с помощью матрицы M соотношением

$$x' \circ \mu = (M \circ \mu)x. \tag{30}$$

Доказательство. Пусть $g \in \mathsf{F}'$ и $dg = \partial' g\Theta'$ (ср. (8)); тогда $(d\mu Xg) \circ \mu = X(g \circ \mu) = \mathsf{R}(g \circ \mu)x = (d\mu\mathsf{R}g) \circ \mu x$, откуда $(\partial' gx') \circ \mu = (\partial' gM) \circ \mu x$; это и даёт (30).

Теорема 9. *Если 1-формы Ψ и $d^*\mu\Psi$ заданы формулами*

$$\Psi = \psi'\Theta'; \quad d^*\mu\Psi = \psi\Theta, \tag{31}$$

то их компоненты ψ' и ψ связаны с помощью матрицы M соотношением

$$\psi = (\psi' M) \circ \mu. \tag{32}$$

Доказательство. В силу (22), (5) и (30) имеем

$$\psi x = (\psi' x') \circ \mu = (\psi' M) \circ \mu x,$$

откуда и следует формула (32).

Полученные формулы (30) и (32) позволяют ввести понятие ковектора $\mathsf{M}_{\xi,\eta}$ с векторными значениями, которое мы обобщим

в следующем параграфе при определении линейной связи между многообразиями V_n и V_m.

Пусть ξ — точка многообразия V_n и η — её образ из V_m при отображении μ: $V_n \to V_m$, т. е., $\eta = \mu(\xi)$. Обозначим через M_η значение матрицы M в точке η (или, что то же, значение матрицы $M \circ \mu$ в точке ξ) и рассмотрим в пространстве $L^*{}_\xi$ ковектор

$$\mathbf{M}_{\xi,\eta} = R'_\eta M_\eta \Theta_\xi \tag{33}$$

с векторными значениями в пространстве L'_η. Из формул (27) и (28) следует, что n векторов $\mathbf{M}_{\xi,\eta}(R_\xi) = R'_\eta M_\eta$ в пространстве L'_η есть векторы n полей $d\mu\mathbf{R}$ в точке η, т. е.

$$(d\mu\mathbf{R})_\eta = \mathbf{M}_{\xi,\eta}(R_\xi) = R'_\eta M_\eta, \tag{34}$$

а m ковекторов $\Theta'_\eta(\mathbf{M}_{\xi,\eta})$ в пространстве $L_\xi{}^*$ есть ковекторы, определяемые в точке ξ m 1-формами $d^*{}_\mu\Theta'$, т. е.

$$(d^*\mu\Theta')_\xi = \Theta'_\eta(\mathbf{M}_{\xi,\eta}) = M_\eta \Theta_\xi. \tag{35}$$

Более того, как следует из формул (30) и (32), ковектор $\mathbf{M}_{\xi,\eta}$ (33) с векторными значениями определяет одновременно оба отображения $d\mu$ (19) и $d^*\mu$ (21), поставив каждому вектору

$$X_\xi = R_\xi x_\xi$$

из $\boldsymbol{L}_\xi$ в соответствие вектор

$$(d\mu X)_\eta = \mathbf{M}_{\xi,\eta}(X_\xi) = R'_\eta M_\eta x_\xi \tag{36}$$

из L'_η, принадлежащий полю $d\mu X$, а каждому ковектору

$$\Psi_\eta = \Psi'_\eta \Theta'_\eta$$

из $L_\eta{}^*$ — ковектор

$$(d^*\mu\Psi)_\xi = \Psi_\eta(\mathbf{M}_{\xi,\eta}) = \Psi'_\eta M_\eta \Theta_\xi \tag{37}$$

из $L_\xi{}^*$, принадлежащий 1-форме $d^*\mu\Psi$.

Формулы (24) и (26) можно переписать в виде:

$$\mathbf{M}_{\xi,\eta}([XY]_\xi) = [\mathbf{M}_{\xi,\eta}(X_\xi);\ \mathbf{M}_{\xi,\eta}(Y_\xi)]; \tag{38}$$

$$D\Psi_\eta(\mathbf{M}_{\xi,\eta};\ \mathbf{M}_{\xi,\eta}) = D(\Psi_\eta(\mathbf{M}_{\xi,\eta})). \tag{39}$$

Заметим, что выводы этого параграфа останутся в силе и при рассмотрении отображения μ многообразия V_n в многообразие $V_m (n < m)$, если вместо V_m рассмотреть образ $\mu(V_n) \subset V_m$.

§ 4. Линейная связь S между многообразиями V_n и V_m

Будем говорить, что между многообразиями V_n и V_m дана *линейная связь* S, если для каждой пары касательных векторных пространств L_ξ и L'_η ($\xi \in V_n$; $\eta \in V_m$) определено некоторое линейное отображение пространства L_ξ в пространство L_η.

Теорема 10. *Линейная связь* S *между многообразиями* V_n *и* V_m *определяется относительно систем* R, Θ *и* R′, Θ' *некоторой матрицей* S *порядка* $n \times m$, *элементы которой — скалярные функции на многообразии* $V_n \times V_m$.

Доказательство. Пусть на $V_n \times V_m$ задана некоторая матрица S порядка $n \times m$; обозначим через $S_{\xi,\eta}$ — её значение в точке $(\xi, \eta) \in V_n \times V_m$, где ξ и η — произвольные точки многообразий V_n и V_m соответственно. Образуем в пространстве L_ξ^* ковектор

$$\mathsf{S}_{\xi,\eta} = R'_\eta S_{\xi,\eta} \Theta_\xi \tag{40}$$

с векторными значениями в пространстве L'_η. Он определяет линейное отображение пространства L_ξ в пространство L'_η, а поскольку точки ξ и η произвольны, то множество всех ковекторов (40) определяет линейную связь между V_n и V_m. Обратно, каждая линейная связь S предполагает, по определению, для каждой пары точек $\xi \in V_n$, $\eta \in V_m$ формулу (40), которая, в свою очередь, определяет матрицу S порядка $n \times m$ на многообразии $V_n \times V_m$.

Существенно отметить, что задание линейной связи S между многообразиями V_n и V_m определяет также для каждого пространства $L_\eta^{*'}$ линейное отображение в каждое пространство L_ξ^* — в дуальном смысле.

Далее рассмотрим *аналитическую линейную связь* S между многообразиями V_n и V_m, когда элементы матрицы S — аналитические функции на $V_n \times V_m$.

Пусть дано некоторое отображение μ многообразия V_n в многообразие V_m. Сопоставим точке $\xi \in V_n$ точку $\eta = \mu(\xi)$. Для этой пары точек ковекторы с векторными значениями $\mathsf{S}_{\xi,\eta}$ (40) ставят каждому векторному полю $X \in \mathsf{L}$ в соответствие векторное поле $\mathsf{S}(X)$ на $\mu(V_n)$, точнее, каждому вектору $X_\xi \in L_\xi$ — вектор $\mathsf{S}_{\xi,\eta}(X_\eta)$, а каждой 1-форме Ψ, заданной на $\mu(V_n)$ — 1-форму $\Psi(\mathsf{S})$ из L^*, точнее, ковектору $\Psi_\eta \in L_\eta^{*'}$ — ковектор $\Psi_\eta(\mathsf{S}_{\xi,\eta}) \in L_\xi^*$. Представляет интерес выяснить, существует ли во множестве всевозможных отображений $\mu : V_n \to V_m$ такое отображение, для которого дифференциал $d\mu$ и его взаимное отображе-

ние $d^*\mu$ определялись бы линейной связью S, т. е. ковекторами с векторными значениями $\mathbf{S}_{\xi,\eta}$ (40), подобно ковектору с векторными значениями $\mathbf{M}_{\xi,\eta}$ (33). Подход к этому вопросу с локальной точки зрения дается в следующем параграфе.

В заключение этого параграфа введем понятие скобки $[\mathbf{S}_{\xi,\eta}(X_\xi);\ \mathbf{S}_{\xi,\eta}(Y_\eta)]$ двух векторов $\mathbf{S}_{\xi,\eta}(X_\xi)$ и $\mathbf{S}_{\xi,\eta}(Y_\xi)$ из L'_η. Обычно, когда даны два поля X и Y из L, то скобкой $[X_\xi,\ Y_\eta]$ векторов $X_\xi,\ Y_\xi \in L_\xi$ называется тот вектор $[XY]_\xi \in L_\xi$, который определяется полем $[XY]$ в точке $\xi \in V_n$:

$$[X_\xi,\ Y_\xi] = [XY]_\xi.$$

Здесь, однако векторы $\mathbf{S}_{\xi,\eta}(X_\xi)$ и $\mathbf{S}_{\xi\,\eta}(Y_\xi)$ не определяются в точке $\eta \in V_m$ векторными полями из L^*; поэтому естественно исходить из формулы (13), определив скобку $[\mathbf{S}_{\xi,\eta}(X_\xi);\ \mathbf{S}_{\xi,\eta}(Y_\xi)]$ формулой

$$[\mathbf{S}_{\xi,\eta}(X_\xi);\ \mathbf{S}_{\xi,\eta}(Y_\xi)] = R'_\eta(\mathbf{S}_{\xi,\eta}(X_\xi)(S_{\xi,\eta}\,y_\xi) - \mathbf{S}_{\xi,\eta}(Y_\xi)(S_{\xi,\eta}\,x_\xi) - D\Theta'(\mathbf{S}_{\xi,\eta}(X_\xi);\ \mathbf{S}_{\xi,\eta}(Y_\xi))), \tag{41}$$

где [6]

$$\mathbf{S}(X)(S_i^\alpha y^i) = (\partial'_\beta S_i^\alpha S_j^\beta + \partial_j S_i^\alpha)\,x^j y^i + S_i^\alpha X y^i;$$

$$\mathbf{S}(Y)(\mathrm{S}_i^\alpha x^i) = (\partial'_\beta S_i^\alpha S_j^\beta + \partial_j S_i^\alpha)\,y^j x^i + S_i^\alpha Y x^i;$$

$$(i, j = 1, \ldots, n;\ \alpha, \beta = 1, \ldots, m)$$

(значения всех функций соответствуют точкам ξ и η).

§ 5. Форма кривизны линейной связи S

В § 3 мы видели, что ковекторы с векторными значениями $\mathbf{M}_{\xi,\eta}$ (см. (33)) удовлетворяют равенству (38); это значит, что соответствующие линейные отображения между L_ξ и L'_η сохраняют скобочную операцию. В случае линейной связи S ковекторы с векторными значениями $\mathbf{S}_{\xi,\eta}$ (40), вообще говоря, не удовлетворяют этому условию и соответствующие им линейные отображения не сохраняют скобочной операции. Если линейные отображения, определяемые ковекторами с векторными значениями

[6] Напомним, что ∂f означает компоненты дифференциала df ($f \in \mathsf{F}$) относительно системы Θ, а $\partial' g$ — компоненты дифференциала dg ($g \in \mathsf{F}'$) относительно системы Θ'.

$\mathbf{S}_{\xi,\eta}$ (40), сохраняют скобочную операцию, то назовём линейную связь $\mathbf{S}$ между V_n и V_m *голономной*; если же они не сохраняют скобочной операции, то связь $\mathbf{S}$ назовём *неголономной*.

Рассмотрим в L'_η вектор

$$\Omega_{\xi,\eta}(X_\xi,\ Y_\xi) = [\mathbf{S}_{\xi,\eta}(X_\xi);\ \mathbf{S}_{\xi,\eta}(Y_\xi)] - \mathbf{S}_{\xi,\eta}([X_\xi,\ Y_\xi]);$$
$$X_\xi,\ Y_\xi \in L_\xi. \tag{42}$$

Формула (42) определяет в точке ξ 2-ковектор $\Omega_{\xi,\eta}$ с векторными значениями в пространстве L'_η. Множество всех $\Omega_{\xi,\eta}$ ($\xi \in V_n$; $\eta \in V_m$) назовём *формой кривизны* Ω линейной связи $\mathbf{S}$.

Так как, в силу (13),

$$\mathbf{S}_{\xi,\eta}([X_\xi,\ Y_\xi]) = R'_\eta S_{\xi,\eta}(Xy - Yx - D\Theta(X,\ Y))_\xi,$$

то, с учётом (41), формула (42) может быть представлена и в следующей форме:

$$\Omega_{\xi,\eta}(X_\xi,\ Y_\xi) = (R'_\eta)_\alpha \left[2(\partial'_\beta S^\alpha_{[i} S^\beta_{j]} - \partial_{[i} S^\alpha_{j]}) y^i x^j + S_i{}^\alpha D\Theta^i(X, Y) - \right.$$
$$\left. - D\Theta'^\alpha(\mathbf{S}(x),\ \mathbf{S}(Y))\right]_{\xi,\eta}. \tag{43}$$

Теорема 11. *Для голономной линейной связи* $\mathbf{S}$ *между многообразиями* V_n и V_m *существует локальное*[7] *отображение многообразия* V_n *в многообразие* V_m, *дифференциал* $d\lambda$ *и взаимное отображение* $d^*\lambda$ *которого определяются ковекторами с векторными значениями* $\mathbf{S}_{\xi,\eta}$ (40).

Доказательство. Формула (43) примет более простой вид в локальном представлении. Пусть U и U' — координатные окрестности точек ξ и η соответственно, где заданы локальные координаты ξ^i и η^α. Рассмотрим на U и U' соответственно системы $\mathbf{e}_i$, $d\xi^i$ и ε_α, $d\eta^\alpha$ естественных реперов и кореперов (см. [1], стр. 15). Пусть системы $\mathbf{R}$, Θ и $\mathbf{R}'$, Θ' на U и U' выразятся формулами

$$\mathbf{R} = \mathbf{e}A; \quad \Theta = A^{-1}d\xi;$$
$$\mathbf{R}' = \varepsilon A'; \quad \Theta' = A'^{-1}d\eta;$$

тогда (40) представится следующим образом:

$$\mathbf{S}_{\xi,\eta} = \varepsilon(A'_\eta S_{\xi,\eta} A_\xi^{-1})\, d\xi = \varepsilon S'_{\xi\,\eta}\, d\xi, \tag{44}$$

где $S'_{\xi,\eta} = A'_\eta S_{\xi,\eta} A_\xi^{-1}$. Далее, т. к. формы неголономности $D\Theta$ и $D\Theta'$ естественных систем $d\xi$ и $d\eta$ обращаются в нуль, то

[7] Для любой точки $\xi \in V_n$ найдется окресность U, аналитически отображающаяся во многообразие V_m.

формула (43) примет вид

$$\Omega_{\xi,\eta}(X_\xi,\ Y_\xi) = 2\varepsilon_\alpha(\partial'_\beta S'^{\alpha}_{[i} S'^{\beta}_{j]} - \partial_{[i} S'^{\alpha}_{j]})_{\xi,\eta}\, y^i_\xi x^j_\xi,$$

где ∂_i и ∂'_α — символы частного дифференцирования по координатам ξ^i и η^α соответственно. Отсюда видим, что форма кривизны Ω линейной связи S локально представится формулой

$$\Omega = \varepsilon_\alpha(\partial_{[i} S'^{\alpha}_{j]} - \partial'_\beta S'^{\alpha}_{[i} S'^{\beta}_{j]})\, d\xi^i \wedge d\xi^j. \tag{45}$$

Условие голономности связи S выразится равенством

$$\partial'_\beta S'^{\alpha}_{[i} S'^{\beta}_{j]} - \partial_{[i} S'^{\alpha}_{j]} = 0. \tag{46}$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$d\eta^\alpha = S'^{\alpha}_i d\xi^i; \tag{47}$$

при выполнении равенства (46) эта система вполне интегрируема. Поэтому, в случае голономной связи S, система (47) допускает единственное решение (при заданных начальных условиях ξ_0, η_0 — см. [5], стр. 130), которое представим в виде

$$\eta = \lambda(\xi). \tag{48}$$

Это решение и определяет локальное отображение многообразия V_n в многообразие V_m. Дифференциал $d\lambda$ этого отображения определяется с помощью формул (20) и (30), где вместо μ следует подставить λ. Формула (30) примет вид

$$(\partial' g x') \circ \lambda = (\partial' g S') \circ \lambda x,$$

откуда

$$x'_\eta = S'_{\xi,\eta} x_\xi; \tag{49}$$

таким образом, дифференциал $d\lambda$ есть отображение

$$X_\xi = e x_\xi \to X'_\eta = \varepsilon x'_\eta = \varepsilon S'_{\xi,\eta} x_\xi, \tag{50}$$

которое и есть отображение, определяемое ковектором с векторными значениями $S_{\xi,\eta}$ (см. (40) или (44)). Взаимное отображение $d^*\lambda$ определяется, очевидно, также с помощью $S_{\xi,\eta}$. Теорема доказана.

Глобальное рассмотрение вопроса, затронутого в теореме 11, требует специального исследования, которое выходит за рамки этой статьи.

В заключение приведем примеры линейной связи между многообразиями, ограничившись лишь некоторыми простейшими из них.

а) Обычная 1-форма $\Phi \in L^*$ определяет линейную связь

между многообразием V_n, на котором она задана, и числовой прямой R_1. Нетрудно видеть, что внешний дифференциал $D\Phi$ есть форма кривизны этой линейной связи. В голономном случае $D\Phi = 0$, и форма Φ локально представляется в виде полного дифференциала некоторой функции, которая, в свою очередь, определяет локальное отображение многообразия V_n в R_1.

б) Рассмотрим систему уравнений в частных производных

$$\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i} = S_i^\alpha \ (z^1, \ldots, z^m; \ x^1, \ldots, x^n),$$

$$(i = 1, \ldots, n; \ \alpha = 1, \ldots, m).$$

где функции S_i^α — аналитические по всем переменным. Эти уравнения эквивалентны системе уравнений в полных дифференциалах

$$dz^\alpha = S_i^\alpha dx^i.$$

Отсюда следует, что любая система уравнений в частных производных первого порядка определяет линейную связь между двумя числовыми пространствами R_n и R_m — пространствами переменных x^i и z^α. Условие голономности этой связи совпадает с условием вполне интегрируемости системы.

в) Пусть G — локальная группа Ли преобразований некоторой области Γ n-мерного евклидова пространства R_n (см [3], стр. 429). Основные дифференциальные уравнения группы G устанавливают между G и Γ голономную линейную связь (см. [3], стр. 430, формулы (7) и (12)).

Важные примеры неголономной линейной связи появляются при задании на многообразии V_n неинволютивных распределений, а также при рассмотрении на V_n линейных связностей с отличной от нуля кривизной. Можно надеяться, что приведённые выше понятия дают общую основу для их исследования с точки зрения неголономной геометрии.

Литература.

1. Лихнерович А., Теория связностей в целом и группы голономий. Москва, 1960.
2. Номидзу К., Группы Ли и дифференциальная геометрия. Москва, 1960.
3. Понтрягин Л. С., Непрерывные группы. Москва, 1954.
4. Схоутен И. А., Стройк Д. Дж., Введение в новые методы дифференциальной геометрии, т. 1. Москва—Ленинград, 1939.
5. Фиников С. П., Метод внешних форм Картана. Москва—Ленинград, 1948.
6. Шевалле К., Теория групп Ли, т. I. Москва, 1948.

Поступило
12 III 1962

ÜHEST MITTEHOLONOOMSE GEOMEETRIA ASPEKTIST

M. Rahula

Geomeetria kateeder

Resümee

Kõiki mitteholonoomse geomeetria küsimusi ühendab üks ühine idee. Diferentsiaalgeomeetria tavalisteks objektideks on diferentseeruvad muutkonnad ja nende mitmesugused kujutused üksteisesse. Vaadeldes muutkonna V_n kujutust μ muutkonda V_m ($\mu : V_n \to V_m$), väärivad tähelepanu diferentsiaal $d\mu$ ja tema kaaskujutus $d^*\mu$; nad võimaldavad kasutada vektorruumide teooriat ja lihtsaid algebralisi operatsioone maatriksite ning lineaarvõrrandite süsteemide vahel. Selline «lineariseerimise» probleem omab kaht külge. Esimene neist seisneb kujutuse $\mu : V_n \to V_m$ uurimises lineaarkujutuste $d\mu$ ja $d^*\mu$ abil, teine aga lähtub, vastupidi, mingisugusest muutkondi V_n ja V_m puutuvate vektorruumide vahelisest lineaarkujutusest ja esitab küsimuse vastava kujutuse μ eksisteerimise ning tema struktuuri kohta. Võib öelda, et holonoomse geomeetria problemaatika on seotud nimelt selle «lineariseerimise» probleemi esimese küljega, mitteholonoomse geomeetria problemaatika aga teise küljega. Artikkel ongi pühendatud mitteholonoomse geomeetria põhiidee täpsustamisele. Seejuures tuuakse sisse muutkondadevahelise lineaarse seose ja tema kõverusvormi mõisted.

ON AN ASPECT OF NONHOLONOMIC GEOMETRY

M. Rahula

Summary

All problems of nonholonomic geometry are based on a common idea. The objects of differential geometry are usually differentiable manifolds and their various representations. In the consideration of a representation μ of manifold V_n to other manifold V_m($\mu : V_n \to V_m$) differential $d\mu$ and its conjugate representation $d^*\mu$ claim attention, which allow the application of the theory of vector spaces and reduce the investigations to simple algebraical operations over the matrices and systems of linear equations. Such a method of "linearization" puts two problems — direct and inverse. The first problem consists in the study of the representation $\mu : V_n \to V_m$ by the linear representations $d\mu$ and $d^*\mu$, the other, on the contrary, proposed having a certain linear representation between the tangent vector spaces to V_n and V_m and puts the question about the existence and behaviour of the corresponding representation μ. One may say that the problem connected with the direct problem of linearization consists of the main themes of holonomic geometry, but the main themes of nonholonomic geometry are connected with the inverse problem. The principles of nonholonomic geometry are defined more precisely in this paper. With this aim the concepts of linear relation between the manifolds and its curvature form are introduced, which played a fundamental role by putting the inverse problem.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ДЕРИВАЦИЙ НА МНОГООБРАЗИИ

М. Рахула
Кафедра геометрии

Рассматривается аналитическое многообразие V_n. Назовём деривацией нулевого порядка обычное векторное поле на V_n, деривацией первого порядка — дифференцирование Ли над векторными полями, т. е. над деривациями нулевого порядка, деривацией второго порядка — дифференцирование Ли над деривациями первого порядка, и т. д., деривацией i-го порядка — дифференцирование Ли над деривациями $(i - 1)$-го порядка. В статье строится такая последовательность дериваций, исходя из группы преобразований многообразия V_n. С некоторыми из формул первых двух параграфов читатель знаком в принципе уже ранее [1, 2, 3, 6], но мы приведём их в другой, более единой форме для того, чтобы обосновать общую схему построения дериваций. В конце § 2 даётся сводка основных формул (49)—(57), которые могут интерпретироваться как с теоретико-групповой точки зрения, так и с чисто геометрической. Общая схема деривацій даётся в § 3. В последнем, четвёртом параграфе приведены вычислительные формулы для деривацій нулевого, первого и второго порядков в локальной координатной системе.

Следует отметить, что многие фундаментальные понятия, такие, например, как продолженные группы преобразований и дифференциальные инварианты, присоединённые группы в теории групп, понятия связностей и их групп голономий, [7, 4, 2], могут быть освещены с единой точки зрения, если исходить из идеи дифференцирования Ли. При этом построение последовательных деривацій является существенным моментом.

Введём следующие обозначения:

V_n — аналитическое многообразие n измерений ([6], гл. III);
F — множество скалярных аналитических функций, заданных на V_n; F есть алгебра над полем действительных чисел R_1;
L — множество аналитических векторных полей, заданных на

V_n; L есть векторное пространство над F и алгебра Ли над полем действительных чисел R_1;

L^* — векторное пространство, дуальное по отношению к L, т. е. множество заданных на V_n аналитических 1-форм.

§ 1. Алгебра Ли L^1 дериваций первого порядка

Схема A

G	G^1
a	$\longrightarrow$ da
a_t	$\longrightarrow$ da_t
$\downarrow$	$\downarrow$
X	$\longrightarrow$ δ_X

В первом параграфе рассматриваются зависимости, изображённые в схеме A. Прежде всего даётся определение группы G преобразований многообразия V_n (n°1). Каждая однопараметрическая подгруппа a_t группы G индуцирует на V_n векторное поле X (n°2). Затем рассматривается множество дифференциалов da преобразований $a \in \mathsf{G}$, которое образует группу G^1 (n°3). При гомоморфизме $a \to da$ группы G на группу G^1 однопараметрической подгруппе $a_t \subset \mathsf{G}$ соответствует однопараметрическая подгруппа $da_t \subset \mathsf{G}^1$, которая порождает дифференцирование δ_X первого порядка. Множество дифференцирований δ_X образует алгебру Ли L^1, а отображение $X \to \delta_X$ оказывается гомоморфизмом алгебры Ли L на алгебру Ли L^1 (n°4).

1. Группа G преобразований многообразия V_n. *Аналитическим преобразованием a многообразия V_n* называется аналитическое отображение многообразия V_n на себя, обладающее обратным отображением a^{-1}, которое также аналитическое.

Множество всех аналитических преобразований многообразия V_n образует группу. Она обозначается через G и называется *группой преобразований многообразия V_n*.

Заметим, что каждое преобразование $a \in \mathsf{G}$ порождает автоморфизм алгебры F:

$$f \to f \circ a; \quad f \in \mathsf{F}. \tag{1}$$

Действительно, отображение (1) взаимно-однозначно и сохраняет алгебраические операции:

$$(\lambda f + \mu g) \circ a = \lambda (f \circ a) + \mu (g \circ a); \quad \lambda, \mu \in R_1; \quad f, g \in \mathsf{F};$$

$$(fg) \circ a = (f \circ a)(g \circ a); \quad f, g \in \mathsf{F}.$$

2. Однопараметрическая подгруппа $a_t \subset \mathsf{G}$; векторное поле X. *Однопараметрической подгруппой группы* G называется множество преобразований $a_t \subset \mathsf{G}(t \in R_1)$, если выполнены следующие условия:

а) a_t при каждом фиксированном значении $t \in R_1$ есть элемент группы G, т. е. аналитическое преобразование многообразия V_n;

б) отображение $(t, \xi) \to a_t(\xi)$ есть аналитическое отображение $R_1 \times V_n$ на V_n;

в) $a_{t+s} = a_t a_s$ для любых значений t, $s \in R_1$; (ср. [3]; стр. 16).

Из условия в) следует при $s = 0$, что $a_0 = e \in \mathsf{G}$ (e — тождественное преобразование), а при $s = -t$ имеем $a_0 = a_t a_{-t}$, откуда $a_t^{-1} = a_{-t}$.

Однопараметрическая подгруппа $a_t \subset \mathsf{G}$ индуцирует на V_n *векторное поле* $X \in \mathsf{L}$; оно определяется равенством

$$Xf = \lim_{t \to 0} \frac{f \circ a_t - f}{t}; \quad f \in \mathsf{F}, \tag{2}$$

где функции $f \circ a_t (t \in R_1)$ определены соответствующими автоморфизмами вида (1).

3. Группа G^1 автоморфизмов алгебры Ли L. Дифференциалом da преобразования $a \in \mathsf{G}$ многообразия V_n называется отображение

$$da: \; X \to daX; \quad X \in \mathsf{L}, \tag{3}$$

где векторное поле daX определяется формулой

$$daXf = (X(f \circ a)) \circ a^{-1}; \quad f \in \mathsf{F}. \tag{4}$$

Покажем, что *отображение* (3) *есть автоморфизм алгебры Ли* L.

Прежде всего, отображение (3) отображает векторное пространство L в себя линейно. Действительно, векторное поле $f_1X + f_2Y (f_1 f_2 \in \mathsf{F})$, являющееся линейной комбинацией векторных полей $X, Y \in \mathsf{L}$, отображается в векторное поле $da(f_1X + f_2Y)$, которое, в результате следующей выкладки (см. (4)):

$$da(f_1X + f_2Y)g = ((f_1X + f_2Y)(g \circ a)) \circ a^{-1} = (f_1 \circ a^{-1})daXg + \\ + (f_2 \circ a^{-1})daYg = ((f_1 \circ a^{-1})daX + (f_2 \circ a^{-1})daY)g; \quad g \in \mathsf{F},$$

можно выразить в виде

$$da(f_1X + f_2Y) = (f_1 \circ a^{-1})daX + (f_2 \circ a^{-1})daY, \tag{5}$$

т. е. в виде линейной комбинации векторных полей daX и daY.

Инвариантность скобочной операции

$$[XY] = XY - YX; \quad X, Y \in \mathsf{L}$$

при отображении (3) выражается формулой

$$da[XY] = [daX, daY]. \tag{6}$$

Для того, чтобы установить эту формулу, напишем соотношение

$$(daXdaYf) \circ a = X((daYf) \circ a) = XY(f \circ a),$$

где дважды применена формула (4). Отсюда имеем

$$[daX, daY]f = ([XY](f \circ a)) \circ a^{-1} = da[XY]f,$$

откуда и следует (6) — ср. также [6], стр. 128.

Наконец, следует показать взаимную однозначность отображения (3). Рассматривая произведение ab двух преобразований $a, b \in \mathsf{G}$, можно заметить, что дифференциал $d(ab)$ преобразования $ab \in \mathsf{G}$ есть произведение дифференциалов da и db преобразований a и b, т. е.

$$d(ab) = da \circ db. \tag{7}$$

Действительно, в силу равенства

$$f \circ ab = (f \circ a) \circ b,$$

имеем

$$d(ab)Xf = (X(f \circ ab)) \circ b^{-1}a^{-1} = ((X((f \circ a) \circ b)) \circ b^{-1}) \circ a^{-1} =$$
$$= (dbX(f \circ a)) \circ a^{-1} = (da \circ db)Xf,$$

откуда получаем формулу (7) (ср. [6], стр. 119). В случае, когда $b = a^{-1}$, из (7) следует, что

$$da \circ da^{-1} = de, \tag{8}$$

где de — тождественное отображение L на себя. Поэтому дифференциал da^{-1} обратного преобразования $a^{-1} \in \mathsf{G}$ есть отображение L на себя, обратное по отношению к отображению da (3). Отображение (3), следовательно, взаимно-однозначно.

В силу последнего замечания, формул (5) при $f_1, f_2 \in R_1$ и (6), отображение (3) является автоморфизмом алгебры Ли L.

Множество всех дифференциалов da ($a \in \mathsf{G}$) образует, очевидно, группу. Она обозначается через G^1 и называется *группой автоморфизмов алгебры Ли* L. Как следует из формул (7) и (8), отображение

$$a \to da; \quad a \in \mathsf{G} \tag{9}$$

есть гомоморфизм группы G на группу G^1.

Заметим, что каждый автоморфизм $da \in \mathsf{G}^1$ порождает *взаимное отображение* d^*a в дуальном пространстве L^*:

$$d^*a\colon \Phi \to d^*a\Phi; \quad \Phi \in \mathsf{L}^*, \tag{10}$$

где 1-форма $d^*a\Phi$ определяется формулой

$$d^*a\Phi(X) = (\Phi(daX)) \circ a; \quad X \in \mathsf{L}. \tag{11}$$

При этом формуле (7) соответствует формула

$$d^*(ab) = d^*b \circ d^*a. \tag{12}$$

Здесь имеет место формула

$$d^*a(df) = d(f \circ a); \quad f \in \mathsf{F}, \tag{13}$$

так что дифференциалу df функции $f \in \mathsf{F}$ при отображении (10) ставится в соответствие дифференциал функции $f \circ a$, полученной из функции f в результате автоморфизма (1). Действительно, так как, по определению дифференциала функции,

$$df(X) = Xf; \quad d(f \circ a)(X) = X(f \circ a); \quad X \in \mathsf{L},$$

то, с учётом (11) и (4), имеем:

$$d^*a(df)(X) = (df(daX)) \circ a = (daXf) \circ a = X(f \circ a) = \\ = d(f \circ a)(X); \quad X \in \mathsf{L}.$$

4. Однопараметрическая подгруппа $da_t \subset \mathsf{G}^1$. Деривация δ_X. Гомоморфизм $a \to da$ группы G на группу G^1 отображает однопараметрическую подгруппу a_t группы G в однопараметрическую подгруппу da_t группы G^1.

Подобно тому, как однопараметрическая подгруппа $a_t \subset \mathsf{G}$ порождает над функциями из F дифференцирование (2), индуцируя на V_n векторное поле X, соответствующая ей однопараметрическая подгруппа $da_t \subset \mathsf{G}^1$ порождает над векторными полями из L и 1-формами из L^* так называемое дифференцирование Ли (см., например, [1], п°п° 45, 47). Мы обозначим это дифференцирование через δ_X, будем называть его *деривацией первого порядка* и определим следующими формулами:

$$\delta_X Y = \lim_{t \to 0} \frac{Y - da_t Y}{t}; \quad Y \in \mathsf{L}; \tag{14}$$

$$\delta_X \Phi = \lim_{t \to 0} \frac{d^*a_t \Phi - \Phi}{t}; \quad \Phi \in \mathsf{L}^*; \tag{15}$$

при этом будем говорить, что деривация δ_X индуцируется однопараметрической подгруппой $a_t \in \mathsf{G}$, или полем X.

Деривация δ_X характеризуется следующими свойствами:

$$\delta_X[YZ] = [\delta_X Y, Z] + [Y, \delta_X Z]; \quad Y, Z \in \mathsf{L}; \tag{16}$$

$$X(\Phi(Y)) = \delta_X \Phi(Y) + \Phi(\delta_X Y); \quad \Phi \in \mathsf{L}^*; \quad Y \in \mathsf{L}. \tag{17}$$

Первая из этих формул следует обычным путём из равенства

$$da_t[YZ] = [da_t Y, da_t Z],$$

которое, в свою очередь, следует из (6). Вторая формула (17) справедлива в силу следующей выкладки (см. (15), (11) и (14)):

$$\delta_X \Phi(Y) = \lim_{t\to 0} \frac{d^* a_t \Phi(Y) - \Phi(Y)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(\Phi(da_t Y)) \circ a_t - (\Phi(Y)) \circ a_t + (\Phi(Y)) \circ a_t - \Phi(Y)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \left(\Phi\left(\frac{da_t Y - Y}{t} \right) \right) \circ a_t + X(\Phi(Y)) = X(\Phi(Y)) - \Phi(\delta_X Y).$$

Кроме того, имеют место следующие формулы:

$$\delta_X(\lambda^i Y_i) = (X\lambda^i) Y_i + \lambda^i \delta_X Y_i; \quad \lambda^i \in \mathsf{F}; \tag{18}$$

$$\delta_X(\varphi_j \Phi^j) = (X\varphi_j) \Phi^j + \varphi_j \delta_X \Phi^j; \quad \varphi_j \in \mathsf{F}; \tag{19}$$

$$(i = 1, \ldots, p;\ j = 1, \ldots, q),$$

где $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ — множество векторных полей из L; и $\Phi^1, \Phi^2, \ldots, \Phi^q$ — множество 1-форм из L^*. Докажем формулу (18). С учётом (14), (5) и (2), получим:

$$\delta_X(\lambda^i Y_i) = \lim_{t\to 0} \frac{\lambda^i Y_i - da_t(\lambda^i Y_i)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\lambda^i Y_i - \lambda^i (da_t Y_i) + \lambda^i (da_t Y_i) - (\lambda^i\ a_{-t})(da_t Y_i)}{t} =$$

$$= \lambda^i \lim_{t\to 0} \frac{Y_i - da_t Y_i}{t} + \left(\lim_{t\to 0} \frac{\lambda^i \circ a_t - \lambda^i}{t} \right) Y_i = \lambda^i \delta_X Y_i + (X\lambda^i) Y_i,$$

что и даёт (18). Для того, чтобы установить формулу (19), напишем сначала соотношение

$$d^* a_t(\varphi_i \Phi^i) = (\varphi_i \circ a_t)\, d^* a_t \Phi^i,$$

которое следует из формулы (11). Подставляя в формулу (15) вместо Φ 1-форму $\varphi_i \Phi^i$ и используя написанное соотношение, получаем таким же приёмом формулу (19).

Формулы (18) и (19) могут служить основой для определения деривации $\delta_X \boldsymbol{T}$ для любого тензорного поля $\boldsymbol{T}$, p раз контравариантного, q раз ковариантного. Если, например, многообразие V_n вполне параллелизуемо, на нём заданы дуальные системы реперов R и кореперов Θ (см. [5], §§ 1, 2), то тензорное поле $\boldsymbol{T}$ определяется формулой

$$\boldsymbol{T} = \mathsf{R}_{i_1} \odot \ldots \odot \mathsf{R}_{i_p} T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \Theta^{j_1} \odot \ldots \odot \Theta^{j_q}, \tag{20}$$

где $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \in \mathsf{F}$ (см. [5], формула (6)). Тогда деривация $\delta_X \boldsymbol{T}$ определяется следующей формулой:

$$\delta_X \boldsymbol{T} = \mathsf{R}_{i_1} \odot \ldots \odot \mathsf{R}_{i_p} (XT^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}) \Theta^{j_1} \odot \ldots \odot \Theta^{j_q} +$$

$$+ \delta_X \mathsf{R}_{i_1} \odot \ldots \odot \mathsf{R}_{i_p} T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \Theta^{j_1} \odot \ldots \odot \Theta^{j_q} + \ldots$$

$$\ldots + \mathsf{R}_{i_1} \odot \ldots \odot \delta_X \mathsf{R}_{i_p} T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \Theta^{j_1} \odot \ldots \odot \Theta^{j_q} +$$

$$+ \mathsf{R}_{i_1} \odot \ldots \odot \mathsf{R}_{i_p} T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \delta_X \Theta^{j_1} \odot \ldots \odot \Theta^{j_q} + \ldots$$

$$\ldots + \mathsf{R}_{i_1} \odot \ldots \odot \mathsf{R}_{i_p} T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \Theta^{j_1} \odot \ldots \odot \delta_X \Theta^{j_q}. \qquad (21)$$

Переходим к рассмотрению множества дериваций $\delta_X (X \in \mathsf{L})$. Оно является векторным пространством над полем скалярных функций, заданных на V_n; более того, в нём можно определить скобочную операцию

$$[\delta_X \delta_Y] = \delta_X \delta_Y - \delta_Y \delta_X. \qquad (22)$$

Убедимся в том, что формулой (22) определённая скобка двух дериваций δ_X и δ_Y есть, действительно, деривация, а именно та деривация, которая соответствует скобке $[XY]$, т. е.

$$[\delta_X \delta_Y] = \delta_{[XY]}. \qquad (23)$$

Согласно (17), имеем:

$$Y(\Phi(Z)) = \delta_Y \Phi(Z) + \Phi(\delta_Y Z);\ Y,\ Z \in L;\ \Phi \in \mathsf{L}^*;$$

$$XY(\Phi(Z)) = \delta_X \delta_Y \Phi(Z) + \delta_Y \Phi(\delta_X Z) + \delta_X \Phi(\delta_Y Z) + \Phi(\delta_X \delta_Y Z),$$

поэтому

$$[XY](\Phi(Z)) = [\delta_X \delta_Y] \Phi(Z) + \Phi([\delta_X \delta_Y] Z).$$

С другой стороны (см. (17)),

$$[XY](\Phi(Z)) = \delta_{[XY]} \Phi(Z) + \Phi(\delta_{[XY]} Z).$$

Имея в виду произвольность выбора $\Phi \in \mathsf{L}^*$ и $Z \in \mathsf{L}$, сравнение двух последних формул и даёт (23). Таким образом, множество дериваций δ_X $(X \in \mathsf{L})$ есть алгебра Ли над полем действительны чисел R_1; мы её обозначим через L^1 и назовём *алгеброй Ли дериваций первого порядка.*

Формула (23) свидетельствует о том, что отображение

$$X \to \delta_X \qquad (24)$$

есть гомоморфизм L на L^1.

§ 2. Алгебра Ли L^2 дериваций второго порядка

Схема B

	G_1	$G_1{}^1$	
	$b \to aba^{-1}$	$\longrightarrow$ $db \to da \circ db \circ da^{-1}$	
	$b_\tau \to a_t b_\tau a_{-t}$	$\longrightarrow$ $db_\tau \to da_t \circ db_\tau \circ da_{-t}$	
	$\downarrow$	$\downarrow$	
G^1	$Y \to da_t Y$	$\longrightarrow$ $\delta_Y \to \delta_{da_t Y}$	G^2
	$\downarrow$	$\downarrow$	
	$\delta_X : Y \to [XY]$	$\longrightarrow$ ${}^2\delta_X : \delta_Y \to [\delta_X \delta_Y]$	

Во втором параграфе раскрывается более глубокое содержание деривации первого порядка δ_X; именно: внутренний автоморфизм группы G, соответствующий элементу $a \in G$, порождает дифференциал da (n° 1), а однопараметрическая подгруппа группы внутренних автоморфизмов G_1, соответствующая однопараметрической подгруппе $a_t \subset G$, порождает однопараметрическую подгруппу $da_t \subset G^1$ и индуцирует деривацию δ_X (n° 2) — см. левый столбец схемы *B*. Рассматривая гомоморфизм $a \to da$ (9) группы G на группу G^1, мы увидим, что группе внутренних автоморфизмов G_1 группы G соответствует группа внутренних автоморфизмов $G_1{}^1$ группы G^1. Подобно тому, как внутренний автоморфизм группы *G* порождает автоморфизм алгебры Ли L (элемент группы G^1), соответствующий ему внутренний автоморфизм группы G^1 порождает автоморфизм алгебры Ли L^1 дериваций первого порядка — элемент группы, которая будет обозначаться G^2 (n° 3). Однопараметрическая подгруппа группы G^2 индуцирует деривацию второго порядка ${}^2\delta_X$, действующую над дериваций первого порядка. Множество дериваций второго порядка, оказывается, представляет собой опять-таки алгебру Ли; она будет обозначаться L^2 (n° 4). Будет установлен ряд формул, которые раскроют все эти связи и позволят в следующем параграфе сформулировать общее понятие деривации i-го порядка ${}^i\delta_X$.

1. Группа внутренних автоморфизмов G_1 группы G. *Внутренний автоморфизм* в группе G, порожденный элементом $a \in G$, есть отображение группы G на себя

$$b \to aba^{-1}; \quad b \in G. \tag{25}$$

Обозначим *группу внутренних автоморфизмов* группы G через G_1.

При отображении (25) однопараметрическая подгруппа $b \subset \mathsf{G}$ переходит в однопараметрическую подгруппу $ab_\tau a^{-1} \subset \mathsf{G}$.

$$b_\tau \to ab_\tau a^{-1}. \tag{26}$$

Пусть первая из этих подгрупп $b \subset \mathsf{G}$ индуцирует на V_n векторное поле $Y \in \mathsf{L}$, определяемое формулой (см. (2)):

$$Yf = \lim_{\tau \to 0} \frac{f \circ b_\tau - f}{\tau}; \quad f \in \mathsf{F}, \tag{27}$$

а вторая подгруппа $ab_\tau a^{-1} \subset \mathsf{G}$ пусть аналогично индуцирует на V_n векторное поле $Y' \in \mathsf{L}$ — оно определяется формулой

$$Y'f = \lim_{\tau \to 0} \frac{f \circ ab_\tau a^{-1} - f}{\tau}; \quad f \in \mathsf{F}.$$

Оказывается, поле Y' есть поле daY, определённое выше формулой (4). Действительно, так как

$$Y'f = \lim_{\tau \to 0} \frac{f \circ ab_\tau a^{-1} - f}{\tau} = \left(\lim_{\tau \to 0} \frac{(f \circ a) \circ b_\tau - f \circ a}{\tau} \right) \circ a^{1-} =$$

$$= (Y(f \circ a)) \circ a^{-1},$$

то, в силу (4), имеем

$$Y' = daY.$$

Тем самым доказана формула

$$daYf = \lim_{\tau \to 0} \frac{f \circ ab_\tau a - f}{\tau}; \quad f \in \mathsf{F}, \tag{28}$$

раскрывающая связь между группой внутренних автоморфизмов группы G и группой G^1 автоморфизмов алгебры Ли L, (ср. [3], стр. 19).

2. Однопараметрическая подгруппа $b \to a_t b a_{-t}$ ($b \in \mathsf{G}$) группы G_1. Дериваций δ_X. Рассмотрим однопараметрическую подгруппу a_t группы G, индуцирующую на V_n векторное поле X (см. (2)).

Заметим, что соответствие, при котором каждому элементу $a \in \mathsf{G}$ соответствует внутренний автоморфизм (25) группы G, есть гомоморфизм группы G на группу G_1. Поэтому однопараметрической подгруппе $a_t \subset \mathsf{G}$ соответствует в группе G_1 также однопараметрическая подгруппа

$$b \to a_t b a_{-t}; \quad b \in \mathsf{G}. \tag{29}$$

Полученная выше формула (28) устанавливает связь между этой однопараметрической подгруппой (29) группы G, и соот-

ветствующей однопараметрической подгруппой da_t группы $\mathbf{G}^1$ (см. § 1, n° 4). Имеем формулу (см. (28)):

$$da_t Yf = \lim_{\tau \to 0} \frac{f \circ a_t b_\tau a_{-t} - f}{\tau}; \quad f \in \mathbf{F}, \tag{30}$$

где b_τ — однопараметрическая подгруппа группы $\mathbf{G}$, индуцирующая на V_n векторное поле Y (см. (27)). С помощью этой формулы (30) получим следующую важную формулу для дериваций δ_X:

$$\delta_X Y = [XY]. \tag{31}$$

На самом деле, учитывая формулы (14), (27) и (28), получаем:

$$\delta_X Yf = \lim_{\substack{t \to 0 \\ \tau \to 0}} \frac{f \circ b_\tau - f - f \circ a_t b_\tau a_{-t} + f}{t\tau} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ \tau \to 0}} \frac{f \circ b_\tau a_t - f \circ a_t b_\tau}{t\tau}; \tag{32}$$

с другой стороны, в силу того, что

$$XYf = X\left(\lim_{\tau \to 0} \frac{f \circ b_\tau - f}{\tau}\right) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ \tau \to 0}} \frac{f \circ b_\tau a_t - f \circ a_\tau - f \circ b_\tau + f}{t\tau},$$

имеем

$$[XY]f = (XY - YX)f = \lim_{\substack{t \to 0 \\ \tau \to 0}} \frac{f \circ b_\tau a_t - f \circ a_t b_\tau}{t\tau}. \tag{33}$$

Сравнение (32) и (33) и даёт (31).

Дериванию δ_X можно теперь представить как отображение

$$\delta_X: \quad Y \to [XY]; \quad Y \in \mathbf{L}. \tag{34}$$

Приведённая выше формула (16) примет благодаря формуле (31) вид известного *тождества Якоби*

$$[X[YZ]] + [Y[ZX]] + [Z[XY]] = 0, \tag{35}$$

которое, в свою очередь, можно переписать в виде

$$([\delta_X \delta_Y] - \delta_{[XY]})Z = 0,$$

откуда следует формула (23). Таким образом, формулы (16), (23) и (35) есть лишь различные записи одного и того же тождества Якоби.

3. Группа $\mathbf{G}^2$ автоморфизмов алгебры Ли $\mathbf{L}^1$. В силу того, что отображение (9) $a \to da$ есть гомоморфизм группы $\mathbf{G}$ на группу $\mathbf{G}^1$, внутреннему автоморфизму (25) группы $\mathbf{G}$ соответствует внутренний автоморфизм группы $\mathbf{G}^1$:

$$db \to da \cdot db \cdot da^{-1}; \quad db \in \mathbf{G}^1. \tag{36}$$

Множество всех отображений (36) при $da \in \mathsf{G}^1$ образует *группу* G_1^1 *внутренних автоморфизмов группы* G^1.

При отображении (36) однопараметрическая подгруппа $db_\tau \in \mathsf{G}^1$ переходит в однопараметрическую подгруппу $da \circ db_\tau \circ da^{-1} \subset \mathsf{G}^1$:

$$db_\tau \to da \circ db_\tau \circ da^{-1} \tag{37}$$

(ср. (26)). Пусть первая из них порождает деривацию $\delta_Y \in \mathsf{L}^1$, определяемую формулой (ср. (14)):

$$\delta_Y Z = \lim_{\tau \to 0} \frac{Z - db_\tau Z}{\tau}; \quad Z \in \mathsf{L}, \tag{38}$$

а вторая — деривацию $\delta' \in \mathsf{L}^1$, которая определяется формулой

$$\delta' Z = \lim_{\tau \to 0} \frac{Z - da \circ db_\tau \circ da^{-1} Z}{\tau}, \quad Z \in \mathsf{L}.$$

Правую часть этого выражения можно переписать следующим образом (см. (14), (31) и (6)):

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{Z - da \circ db_\tau \circ da^{-1} Z}{\tau} = da \left(\lim_{\tau \to 0} \frac{da^{-1} Z - db_\tau (da^{-1} Z)}{\tau} \right) =$$
$$= da \delta_Y da^{-1} Z = da [Y; da^{-1} Z] = [daY; Z] = \delta_{daY} Z,$$

откуда следует, что

$$\delta' = \delta_{daY}.$$

Следовательно, имеем формулу

$$\delta_{daY} Z = \lim_{\tau \to 0} \frac{Z - d(ab_\tau a^{-1}) Z}{\tau}; \quad Z \in \mathsf{L}. \tag{39}$$

Впрочем, эта формула следует непосредственно и из (38), если слева вместо Y подставить daY и справа учесть то, что поле daY индуцируется однопараметрической подгруппой $ab_\tau a^{-1} \subset \mathsf{G}$ (см. (28)).

Отметим еще одну формулу:

$$\delta_{daY} = da \delta_Y da^{-1} \tag{40}$$

(см. выкладку выше). Эта формула может быть положена в основу определения деривации δ_{daY} (ср. формулу (4)).

Итак, автоморфизму $da : Y \to daY$; $Y \in \mathsf{L}$ алгебры Ли L соответствует отображение

$$\delta_Y \to \delta_{daY}, \tag{41}$$

порожденное внутренним автоморфизмом (36) группы G^1 (см. схему B). Легко видеть, что отображение (41) есть автомор-

физм алгебры Ли L^1 дериваций первого порядка. Покажем, например, инвариантность скобочной операции (см. (40) и (23)):

$$\delta_{da[XY]} = da[\delta_X \delta_Y] da^{-1} = [(da\delta_X da^{-1})(da\delta_Y da^{-1})] = [\delta_{daX};\ \delta_{daY}].$$

Множество автоморфизмов (41) образует группу; обозначим её через G^2 и назовём *группой автоморфизмов алгебры Ли* L^1 *дериваций первого порядка.*

4. Однопараметрическая подгруппа группы G^2. Деривация $^2\delta_X$. Рассмотрим снова однопараметрическую подгруппу $a_t \subset G$, индуцирующую на V_n векторное поле X. Так как соответствие, ставящее каждому элементу $a \in G$ в соответствие элемент (41) группы G^2, есть гомоморфизм группы G на группу G^2, то однопараметрической подгруппе $a_t \subset G$ соответствует в группе G^2 также однопараметрическая подгруппа, а именно, множество отображений

$$\delta \to \delta_{da_t}. \tag{42}$$

Подобно тому, как была определена деривация первого порядка над алгеброй Ли L (см. (14)), определим теперь дифференцирование Ли над алгеброй Ли L^1, т. е. деривацию над дериваций $\delta_\delta = {}^2\delta$, следующей формулой

$$^2\delta_X \delta = \lim_{t \to 0} \frac{\delta - \delta_{da_t}}{t}; \quad \delta \in L^1. \tag{43}$$

Оказывается, $^2\delta_X$ можно представить как отображение

$$^2\delta_X : \delta_Y \to [\delta_X \delta_Y]; \quad \delta_Y \in L^1. \tag{44}$$

Для этого установим формулу

$$^2\delta_X \delta_Y = [\delta_X \delta_Y]. \tag{45}$$

Проследим следующую выкладку (см. (43), (14), (31) и (23)):

$$^2\delta_X \delta_Y = \lim_{t \to 0} \frac{\delta_Y - \delta_{da_t Y}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\delta_{(Y - da_t Y)}}{t} = \delta_{\lim\limits_{t \to 0} \frac{Y - da_t Y}{t}} =$$

$$= \delta_{[XY]} = [\delta_X \delta_Y];$$

отсюда и следует (45).

Отображение (44) называется *деривацией 2-го порядка* над дериваций L^1 первого порядка. Множество всех дериваций 2-го порядка образует алгебру Ли над полем действительных чисел R_1; обозначим ее через L^2 и назовём *алгеброй Ли дериваций 2-го порядка.* Скобка в алгебре Ли L^2 определяется формулой

$$[^2\delta_X {}^2\delta_Y] = {}^2\delta_X {}^2\delta_Y - {}^2\delta_Y {}^2\delta_X; \tag{46}$$

при этом имеет место формула

$$[^2\delta_X {}^2\delta_Y] = {}^2\delta_{[XY]}; \tag{47}$$

действительно (см. (45), (35)):

$$[{}^2\delta_X{}^2\delta_Y]\delta_Z = \delta_{[X[YZ]]} - \delta_{[Y[XZ]]} = \delta_{[X[YZ]]+[Y[ZX]]} = \delta_{[[XY]Z]} = {}^2\delta_{[XY]}\,\delta_Z .$$

Обратим внимание ещё на ряд равенств

$$^2\delta_X\delta_Y Z = [\delta_X\delta_Y]Z = \delta_{[X\overline{Y}]}Z = \delta_{\delta_X\overline{Y}}Z = [[XY]Z], \tag{48}$$

которые следуют из изложенного выше.

В заключение параграфа дадим сводку основных формул. Здесь a_t, b_τ и c_s — три однопараметрические подгруппы группы G, индуцирующие на V_n соответственно векторные поля X, Y и Z, а f — некоторая скалярная функция из F.

$$Xf = \lim_{t\to 0}\frac{f\circ a_t - f}{t}; \tag{49}$$

$$db_\tau Xf = \lim_{t\to 0}\frac{f\circ b_\tau a_t b_{-\tau} - f}{t}; \tag{50}$$

$$\delta_{\overline{Y}}X = \lim_{\tau\to 0}\frac{X - db_\tau X}{\tau}; \tag{51}$$

$$\delta_{\overline{Y}}Xf = \lim_{\substack{t\to 0\\ \tau\to 0}}\frac{f\circ a_t b_\tau a_{-t} b_{-\tau} - f}{t_\tau}; \tag{52}$$

$$\delta_{dc_sY}X = \lim_{\tau\to 0}\frac{X - d(c_s b_\tau c_{-s})X}{\tau}; \tag{53}$$

$$\delta_{dc_sY}Xf = \lim_{\substack{t\to 0\\ \tau\to 0}}\frac{f\circ a_t(c_s b_\tau c_{-s})\,a_{-t}(c_s b_{-\tau} c_{-s}) - f}{t_\tau}; \tag{54}$$

$$^2\delta_Z\delta_{\overline{Y}} = \lim_{s\to 0}\frac{\delta_Y - \delta_{dc_s\overline{Y}}}{s}; \tag{55}$$

$$^2\delta_Z\delta_{\overline{Y}}X = \lim_{\substack{\tau\to 0\\ s\to 0}}\frac{X - d(c_s b_\tau c_{-s} b_{-\tau})X}{\tau s}; \tag{56}$$

$$^2\delta_Z\delta_{\overline{Y}}Xf = \lim_{\substack{t\to 0\\ \tau\to 0\\ s\to 0}}\frac{f\circ a_t(b_\tau c_s b_{-\tau} c_{-s})\,a_{-t}(b_\tau c_s b_{-\tau} c_{-s})^{-1} - f}{t\tau s}. \tag{57}$$

§ 3. Деривации более высоких порядков

Теперь, исходя из результатов первых двух параграфов, дадим общее определение деривации i-го порядка ($n°$ 1). Затем приведём схему D, которая установит связи между деривациями и соответствующими группами ($n°$ 2).

1. Деривация i-го порядка ${}^i\delta_X$. Пусть a_t — однопараметрическая подгруппа группы G, индуцирующая на V_n векторное поле X и δ_Y — некоторая деривация из L^1 (см. (38)). Деривация 2-го порядка ${}^2\delta_X$ определяется формулой (см. (43)):

$$ {}^2\delta_X\delta_Y = \lim_{t\to 0} \frac{\delta_Y - \delta_{da_tY}}{t}. \tag{58} $$

Аналогично введём понятие *деривации 3-го порядка.* Пусть ${}^2\delta_Y$ — некоторая деривация из L^2; определим деривацию 3-го порядка ${}^3\delta_X$ формулой:

$$ {}^3\delta_X{}^2\delta_Y = \lim_{t\to 0} \frac{{}^2\delta_Y - {}^2\delta_{da_tY}}{t}. \tag{59} $$

Так, шаг за шагом, можно построить деривацию любого порядка. Если ${}^{i-1}\delta_Y$ — определённая уже деривация $(i-1)$-го порядка, то следующая деривация ${}^i\delta_X$ определяется формулой:

$$ {}^i\delta_X\,{}^{i-1}\delta_Y = \lim_{t\to 0} \frac{{}^{i-1}\delta_Y - {}^{i-1}\delta_{da_tY}}{t}. \tag{60} $$

Рассмотрим $i+1$ векторных полей

$$ X_0, X_1, \ldots, X_i, $$

заданных на V_n. Нетрудно установить следующие формулы:

$$ \delta_{X_1}X_0 = [X_1X_0]; \tag{61} $$

$$ {}^2\delta_{X_2}\delta_{X_1}X_0 = \delta_{\delta_{X_2}X_1}X_0 = [[X_2X_1]X_0]; \tag{62} $$

$$ {}^3\delta_{X_3}{}^2\delta_{X_2}\delta_{X_1}X_0 = \delta_{\delta_{\delta_{X_3}X_2}X_1}X_0 = [[[X_3X_2]X_1]X_0]; \tag{63} $$

. . . . . .

$$ {}^i\delta_{X_i}\,{}^{i-1}\delta_{X_{i-1}}\ldots\delta_{X_1}X_0 = \delta_{\delta_{\ldots\delta_{X_iX_{i-1}}\ldots X_1}}X_0 = [[\ldots[X_iX_{i-1}]\ldots X_1]X_0]. \tag{64} $$

Действительно, формула (61) следует из (31), формула (62) — из (48). Формулу (63) получим с учётом (59), (62) и (51) в результате следующей записи: пусть поле X_3 индуцируется на V_n однопараметрической подгруппой $a_t \subset \mathsf{G}$; тогда

$$ {}^3\delta_{X_3}{}^2\delta_{X_2}\delta_{X_1}X_0 = \lim_{t\to 0} \frac{{}^2\delta_{X_2}\delta_{X_1}X_0 - {}^2\delta_{da_tX_2}\delta_{X_1}X_0}{t} = $$

$$ = \lim_{t\to 0} \frac{[[X_2X_1]X_3] - [[da_tX_2; X_1]X_3]}{t} = [[\lim_{t\to 0}\frac{X_2 - da_tX_2}{t}; X_1]X_0] = $$

$$ = [[[X_3X_2]X_1]X_0]; $$

формула (64) становится после этого очевидной.

Приведём еще две формулы, справедливые для дериваций i-го порядка:

$$[{}^i\delta_X {}^i\delta_Y] = {}^i\delta_{[XY]}; \tag{65}$$

$${}^i\delta_{X[i} {}^{i-1}\delta_{X_{i-1}} \dots \delta_{X_1} X_{0]} = 0. \tag{66}$$

Первая из этих формул доказывается с помощью (64) и тождества Якоби (35). Так как, по определению,

$$[{}^i\delta_X {}^i\delta_Y] = {}^i\delta_X {}^i\delta_Y - {}^i\delta_Y {}^i\delta_X \tag{67}$$

(ср. (46)), то

$$[{}^i\delta_X {}^i\delta_Y]^{i-1}\delta_{X_{i-1}} \dots \delta_{X_1} X_0 = [\dots[([X[YX_{i-1}]] -$$

$$- [Y[XX_{i-1}]]), X_{i-2}] \dots X_0] = [\dots[[XY]X_{i-1}] \dots X_0] =$$

$$= {}^i\delta_{[XY]} {}^{i-1}\delta_{X_{i-1}} \dots \delta_{X_1} X_0,$$

откуда и следует (65).

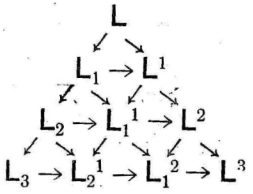
Для того, чтобы доказать вторую формулу (66), заметим, что

$${}^i\delta_{X_i} {}^{i-1}\delta_{X_{i-1}} \dots \delta_{X_1} X_0 = [{}^{i-1}\delta_{X_i} \dots \delta_{X_2} X_1;\ X_0]. \tag{68}$$

Отсюда следует, что формула (66) справедлива для i, если она справедлива для $i-1$. Для $i=2$ она, действительно, справедлива в силу тождества Якоби; поэтому она справедлива для $i=3$, а также и для всех остальных значений i.

Нами построен целый ряд алгебр Ли. Дадим этим алгебрам соответствующие обозначения и объединим их в общей схеме C.

Схема C



и т. д.

Обозначения:

L — алгебра Ли векторных полей, заданных на V_n;
L_1 — линейная оболочка векторных полей вида $[XY]$; $X, Y \in \mathsf{L}$;
L_2 — линейная оболочка векторных полей вида $[[XY]Z]$; $X, Y, Z \in \mathsf{L}$;
L_i — линейная оболочка векторных полей вида

$$[\dots[[X_iX_{i-1}]X_{i-2}] \dots X_0];\ X_0, \dots, X_i \in \mathsf{L};$$

TARTU ÜLIKOOLI
RAAMATUKOGU

L^1 — алгебра Ли дериваций первого порядка δ_X; $X \in \mathsf{L}$;
$\mathsf{L}_1{}^1$ — множество дериваций первого порядка δ_{X_1}, где $X_1 \in \mathsf{L}_1$;
. . . . . .
$\mathsf{L}_i{}^1$ — множество дериваций первого порядка δ_{X_i}, где $X_i \in \mathsf{L}_i$;
. . . . . .
L_i — алгебра Ли дериваций i-го порядка ${}^i\delta_X$; $X \in \mathsf{L}$;
$\mathsf{L}_1{}^i$ — множество дериваций i-го порядка ${}^i\delta_{X_1}$, где $X_1 \in \mathsf{L}_1$;
. . . . . .
$\mathsf{L}_j{}^i$ — множество дериваций i-го порядка ${}^i\delta_{X_j}$, где $X_j \in \mathsf{L}_j$.

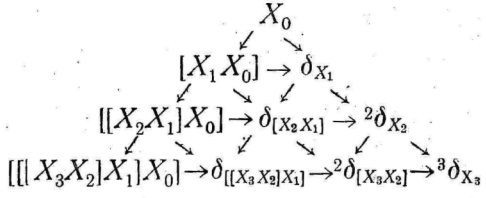
Очевидно,

$$\mathsf{L}^i \supset \mathsf{L}_1{}^i \supset \ldots \supset \mathsf{L}_{j-1}{}^i \supset \mathsf{L}_j{}^i \supset \ldots, \tag{69}$$

где $\mathsf{L}_j{}^i$ есть идеал алгебры Ли $\mathsf{L}_{j-1}{}^i$.

Схему $\boldsymbol{C}$ можно более наглядно представить ещё следующим образом, выбрав из каждой алгебры Ли $\mathsf{L}_i{}^j$ характерный элемент:

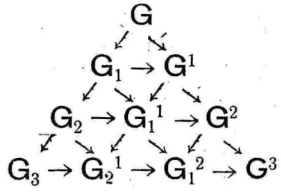
Схема C'



и т. д.

2. Группы $\mathsf{G}_j{}^i$. Приведём прежде всего схему.

Схема D



и т. д.

Здесь введены следующие обозначения:

G — группа преобразований многообразия V_n;
G_1 — группа внутренних автоморфизмов группы G;

G_2 — группа внутренних автоморфизмов группы G_1;

. . . . . .

G_i — группа внутренних автоморфизмов группы G_{i-1};
G^1 — группа автоморфизмов $da (a \in G)$ алгебры Ли L;
G^2 — группа автоморфизмов $\delta \to \delta_{da}$ алгебры Ли L^1;

. . . . . .

G^i — группа автоморфизмов ${}^{i-1}\delta \to {}^{i-1}\delta_{da}$ алгебры Ли L^{i-1};
$G_j{}^i$ — группа внутренних автоморфизмов группы $G_{j-1}{}^i$, где

$$i = 0, 1, \ldots; \; j = 1, 2, \ldots \text{ и } G_0{}^i = G^i, \; G_i{}^0 = G_i.$$

В первом параграфе была рассмотрена зависимость $G \to G^1$ между группами G и G^1; она выражена формулой (4). По схеме A мы знаем, что группы G и G^1 связаны с алгебрами Ли L и L^1, именно: однопараметрическая подгруппа a_t группы G индуцирует векторное поле X из L (см. формулу (2)), а однопараметрическая подгруппа da_t группы G^1 индуцирует деривацию δ_X первого порядка из L^1 (см. формулу (14)). Во втором параграфе мы рассматривали соответственные группы внутренних автоморфизмов G_1 и $G_1{}^1$ групп G и G^1 (см. (25) и (36)). При этом элемент da группы G^1 порождается тем внутренним автоморфизмом группы G, который соответствует элементу $a \in G$ (см. формулу (28)). Эта зависимость между группами G_1 и G^1 на схеме D выражена стрелкой $G_1 \to G^1$. В схеме B были приведены зависимости

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \to & G^1 \\ & \searrow \quad \searrow & \\ & G_1{}^1 \to & G^2 \end{array}$$

В основу определения группы G^1 может быть положена либо формула (4), исходя из группы G, либо формула (28), исходя из группы G_1. Пользуясь аналогией, группа G^2 может быть определена либо формулой (39), исходя из группы $G_1{}^1$, либо формулой (40), исходя из группы G^1. Однако, более глубокое определение группы G^2 может быть дано, исходя из группы внутренних автоморфизмов G_2 группы G_1; при этом определяющей формулой будет

$$\delta_{daγ} f = \lim_{\substack{t \to 0 \\ \tau \to 0}} \frac{f \circ a_t - f \circ (a b_\tau a^{-1})\, a_t (a b_\tau a^{-1})^{-1}}{t\tau} \qquad (70)$$

(ср. формулу (54)). Однопараметрическая подгруппа группы G_2, соответствующая подгруппе $a_t \subset G$, порождает однопараметрическую подгруппу $db \to da_t \circ db \circ da_{-t} (db \in G^1)$ группы $G_1{}^1$ и однопараметрическую подгруппу (42) группы G^2, индуцируя деривацию ${}^2\delta_X$ из L^2 (см. формулу (43)). Таким образом возникают зависимости $G_2 \to G_1{}^1 \to G^2$ (см. сх. D). Этот процесс

ESTSV AUN Tartu Kultuuriheeno

можно продолжать, переходя к следующей, четвёртой, строке схемы D, и так далее.

Существенно отметить, что если через каждый элемент группы G можно провести некоторую однопараметрическую подгруппу группы G, то из формулы (28) следует, что ядром гомоморфизма $a \to da$ (см. (9)) группы G на группу G^1 служит центр S группы G. При этом условии, оказывается, группы каждой строки схемы D изоморфны между собой; именно, группы второй строки будут изоморфны с фактор-группой G/S, группы третьей строки будут изоморфны с фактор-группой группы G/S по своему центру и т. д. Если в группе G при этом нет центральных элементов, кроме единицы группы, то все группы схемы D, очевидно, изоморфны между собой.

§ 4. Локальное исследование дериваций первого и второго порядков

В этом параграфе будут рассмотрены деривации первого и второго порядка с локальной точки зрения. Пусть U — некоторая координатная окрестность многообразия V_n, где введена локальная система координат. Поскольку U гомеоморфна n-мерному числовому пространству R_n, то исследование будет проводиться в R_n, а результаты могут быть перенесены на U с помощью этого гомеоморфизма.

Обозначим через R базис пространства R_n, состоящий из n линейно независимых векторов, и через $d\xi$ — дуальный базис, состоящий из n дифференциалов координат точки $\xi \in R_n$. Векторное поле X в R тогда может быть задано формулой $X = Rx$, где компоненты x — скалярные функции, заданные в R_n; при этом каждой точке $\xi \in R_n$ ставится в соответствие вектор $X_\xi = Rx(\xi)$. 1-форма Φ в R_n может быть задана формулой $\Phi = \varphi d\xi$, где компоненты φ — функции, заданные в R_n; при этом каждой точке $\xi \in R_n$ ставится в соответствие ковектор $\Phi_\xi = \varphi(\xi)\, d\xi$. След поля X на 1-форме Φ определяется формулой $\Phi(X) = \varphi x$.

1. Группа преобразований G. Точечное аналитическое преобразование a пространства R_n определяется системой n аналитических функций от n аргументов

$$\xi' = a(\xi) \qquad (1)'$$

с отличным от нуля якобианом

$$\det \|\partial a\| \neq 0.$$

Через ∂a обозначена якобиева матрица преобразования (1)′. Обратному преобразованию a^{-1} соответствует система

$$\xi = a^{-1}(\xi') \qquad (2)'$$

с якобиевой матрицей ∂a^{-1}. Якобиевы матрицы ∂a и ∂a^{-1} связаны между собой равенствами

$$(\partial a^{-1} \circ a)\partial a = (\partial a \circ a^{-1})\partial a^{-1} = E, \qquad (3)'$$

где E — единичная матрица порядка n.

Произведению ab двух преобразований a и b, определённых системами

$$\xi'' = a(\xi'); \ \xi' = b(\xi), \qquad (4)'$$

соответствует система

$$\xi'' = ab(\xi) = a(b(\xi)) \qquad (5)'$$

с якобиевой матрицей

$$\partial(ab) = (\partial a \circ b)\partial b. \qquad (6)'$$

Группу всех преобразований $(1)'$ обозначим через G.

Однопараметрическая подгруппа $a_t \subset G$ представляется множеством систем

$$\xi_t = a_t(\xi) = a(\xi, t), \qquad (7)'$$

удовлетворяющим условиям (ср. § 1, $n°2$):

а) при каждом фиксированном значении $t \in R_1$ система $(7)'$ определяет в R_n аналитическое преобразование;

б) функции $a(\xi, t)$ аналитические в пространстве R_{n+1};

в) для всех $t, s \in R_1$

$$a(\xi, t+s) = a(a(\xi, t), s). \qquad (8)'$$

Однопараметрическая подгруппа $a_t \subset G$ $(7)'$ индуцирует в R_n векторное поле X (ср. (2)); оно определяется следующим образом: пусть f — некоторая функция, заданная в R_n; тогда

$$Xf = \lim_{t \to 0} \frac{f \circ a_t - f}{t} = (f \circ a_t)'_{t=0} = \partial f a'_{t=0}, \qquad (9)'$$

где штрих означает производную по параметру t. Если поле X задано формулой $X = Rx$, то $Xf = df(X) = \partial f x$. Поэтому из $(9)'$ следует, что компоненты x поля X, индуцируемого подгруппой $a_t \subset G$, есть производные от функций $a_t(\xi)$ по t при $t = 0$, т. е.

$$x = a'_{t=0} = (a(\xi, t))'_{t=0}. \qquad (10)'$$

2. Группа G^1. Дифференциалы $da (a \in G)$ образуют группу автоморфизмов алгебры Ли векторных полей, заданных в R_n (см. § 1, $n°$ 3). Обозначим её через G^1.

Зададим поля X и daX предварительно в виде

$$X = Rx; \ daX = Rx'$$

и найдём компоненты x' поля daX. Из (4) будем иметь

$$df x' = ((\partial f \circ a)\partial a x) \circ a^{-1} = \partial f((\partial a x) \circ a^{-1}),$$

откуда, в силу произвольности функции f, получим

$$x' = (\partial a x) \circ a^{-1}. \qquad (11)'$$

Поле daX выразится формулой

$$daX = R(\partial a x) \circ a^{-1}. \qquad (12)'$$

Рассмотрим взаимное отображение d^*a. Пусть $\Phi = \varphi d\xi$ — некоторая 1-форма, заданная в R_n; тогда из формулы (11)′, с учётом (12)′, следует

$$d^*a\Phi(X) = (\Phi(daX)) \circ a = (\varphi(\partial a x) \circ a^{-1}) \circ a = (\varphi \circ a)\partial a x.$$

Следовательно, 1-форма $d^*a\Phi$ имеет вид:

$$d^*a\Phi = (\varphi \circ a)\partial a\, d\xi. \qquad (13)'$$

Итак, дифференциал da и взаимное отображение d^*a преобразования $a \in G$ вполне определяются якобиевой матрицей ∂a преобразования a — см. (12)′ и (13)′. Группа G^1, таким образом, представляется якобиевыми матрицами преобразований группы G. При этом групповая композиция в G^1 представляется следующим образом: пусть a, b — два преобразования из группы G и ∂a, ∂b — их якобиевы матрицы, представляющие дифференциалы da, $db \in G^1$; тогда произведение $da \circ db = d(ab)$ представляется матрицей $(\partial a \cdot b)\partial b$, якобиевой для преобразования $ab \in G$ (см. (6)′).

Переходим к рассмотрению однопараметрической подгруппы $da_t \subset G^1$, соответствующей однопараметрической подгруппе $a_t \subset G$, которая, в свою очередь, представлена функциями (7)′. Дифференциалу da_t преобразования a_t, при каждом фиксированном значении $t \in R_1$, соответствует матрица

$$A_t = \partial a_t. \qquad (14)'$$

Подгруппе $da_t \subset G^1$ соответствует множество этих матриц при всех $t \in R_1$. При этом имеет место формула

$$A_{t+s} = (A_t \circ a_s)A_s, \qquad (15)'$$

которая следует из (8)′ в результате частного дифференцирования с учётом (14)′. Полагая в (15)′ $s = 0$ и $s = -t$, получим ещё две формулы

$$A_0 = E; \qquad (16)'$$

$$(A_t \circ a_{-t})A_{-t} = E. \qquad (17)'$$

Поскольку операции частного дифференцирования и дифференцирования по параметру перестановочны, то из (10)′, с учётом (14)′, получим

$$\partial x = A'_{t=0}. \qquad (18)'$$

Эта матрица, оказывается, определяет деривацию δ_X. Действительно, подставим в формулу (14) выражения

$$Y = Ry,$$
$$da_t Y = R(A_t y) \circ a_{-t}$$

(см. (12)′ и (14)′); получим

$$\delta_X Y = R \lim_{t\to 0} \frac{y - (A_t y)\circ a_{-t}}{t} = R \lim_{t\to 0} \frac{y\circ a_t - A_t y}{t} =$$

$$= R\left(\lim_{t\to 0} \frac{y\circ a_t - y}{t} - \lim_{t\to 0} \frac{A_t - E}{t} y\right) = R(Xy - A'_{t=0} y) =$$

$$= R(Xy - \partial x y).$$

Далее, подставив в формулу (15)′ выражения

$$\Phi = \varphi d\xi;\ d^* a_t \Phi = (\varphi \circ a_t) A_t\, d\xi$$

(см. (13)′ и (14)′), получим

$$\delta_X \Phi = \lim_{t\to 0} \frac{(\varphi\circ a_t) A_t - \varphi}{t} d\xi = \lim_{t\to 0} \frac{(\varphi\circ a_t) A_t - \varphi A_t + \varphi A_t - \varphi}{t} d\xi =$$

$$= \left(\lim_{t\to 0} \frac{\varphi\circ a_t - \varphi}{t} A_t + \varphi \lim_{t\to 0} \frac{A_t - E}{t}\right) d\xi = (X\varphi + \varphi A'_{t=0})\, d\xi =$$

$$= (X\varphi + \varphi\partial x)\, d\xi.$$

Таким образом, установлены формулы

$$\delta_X Y = R(Xy - \partial x y); \qquad (19)'$$
$$\delta_X \Phi = (X\varphi + \varphi\partial x)\, d\xi, \qquad (20)'$$

откуда и видим, что деривация δ_X представляется матрицей (18)′.

Приведём здесь схему A'; сопоставив её со схемой A, по ней можно легко установить, какие функции и матрицы соответствуют элементам схемы A в локальном представлении. Укажем, что горизонтальная стрелка может быть интерпретирована как операция частного дифференцирования, а вертикальная — как операция дифференцирования по параметру.

Схема A'

G		G^1
a	$\longrightarrow$	da
a_t	$\longrightarrow$	$A_t = \partial a_t$
$\downarrow$		$\downarrow$
$x = a'_{t=0}$	$\longrightarrow$	$\partial x = A'_{t=0}$

3. Группы внутренних автоморфизмов G_1, G_1^1 и группа G^2. Пусть a_t и b_τ — две однопараметрические подгруппы группы G, индуцирующие в R_n поля

$$X = Rx \text{ и } Y = Ry$$

соответственно. Тогда $x = a'_{t=0}$; $y = b'_{\tau=0}$; $\partial x = A'_{t=0}$; $\partial y = B'_{\tau=0}$, где $A_t = \partial a_t$; $B_\tau = \partial b_\tau$.

Рассмотрим внутренний автоморфизм группы G, порождённый элементом $a \in G$ (ср. (25)). Подтвердим прежде всего формулу (12)′, исходя из формулы (28):

$$daYf = \lim_{\tau \to 0} \frac{f \circ ab_\tau a^{-1} - f}{\tau} = (f \circ ab_\tau a^{-1})'_{\tau=0} =$$
$$= \partial f(\partial a \circ a^{-1})(b'_{\tau=0} \circ a^{-1}) = \partial f(\partial ay) \circ a^{-1}.$$

Действительно, отсюда имеем

$$daY = R(\partial ay) \cdot a^{-1}. \qquad (21)'$$

Рассматривая однопараметрическую подгруппу группы внутренних автоморфизмов G_1 группы G, порождённую однопараметрической подгруппой $a_t \subset G$ (ср. (29)), мы видим из (21)′, что ей соответствует однопараметрическая подгруппа da_t группы G^1.

Аналогично можно подтвердить формулу (19)′, исходя из (32); действительно,

$$\delta_X Yf = -\lim_{\substack{t \to 0 \\ \tau \to 0}} \frac{(f\ a_t b_\tau a_{-t} - f) - (f \circ b_\tau - f)}{t\tau} = -((f \circ a_t b_\tau a_{-t})'_{\tau=0})'_{t=0} =$$
$$= -(\partial f(\partial a_t \circ a_{-t})(b'_{\tau=0} \circ a_{-t}))'_{t=0} = -\partial f((A_t y) \circ a_{-t})'_{t=0} =$$
$$= -\partial f(\partial xy - \partial yx) = \partial f(Xy - Yx);$$

отсюда имеем формулу, равносильную с формулой (19)′:

$$\delta_X Y = R(Xy - Yx). \qquad (22)'$$

Переходя к рассмотрению группы внутренних автоморфизмов G_1^1 группы G^1 (ср. (36)), на основе результатов $n°$ 2 мы видим, что внутренний автоморфизм группы G^1

$$db \to da \circ db \circ da^{-1};\ \ db \in G^1,$$

порождённый элементом $da \in G^1$, представляется соответствием якобиевых матриц преобразований b и aba^{-1}:

$$\partial b \to (\partial a \circ ba^{-1})(\partial b \circ a^{-1})\partial a^{-1}. \qquad (23)'$$

Множество соответствий (23)′ при всех $a \in G$ представляет группу G_1^1.

Деривация δ_Y, как мы знаем, определяется матрицей ∂y (см.

$n°$ 2); деривация же δ_{daY}, в силу того, что компоненты поля daY суть $(\partial ay)\circ a^{-1}$ (см. (21)′), определяется матрицей

$$\partial((\partial ay)\circ a^{-1}). \qquad (24)'$$

По аналогии с формулой (18)′, матрица (24)′ может быть получена из якобиевой матрицы

$$(\partial a\circ b_\tau a^{-1})(\partial b_\tau\circ a^{-1})\partial a^{-1}$$

преобразования $ab_\tau a^{-1}$ (ср. (23)′) в результате дифференцирования по τ при $\tau=0$, так что

$$\partial((\partial ay)\circ a^{-1}) = ((\partial a\circ b_\tau a^{-1})(\partial b_\tau\circ a^{-1})\partial a^{-1})'_{\tau=0} \qquad (25)'$$

(выкладку опустим). Таким образом, отображению дериваций

$$\delta_Y \to \delta_{daY}$$

(см. (41)) соответствует отображение определяющих их матриц

$$\partial y \to \partial((\partial ay)\circ a^{-1}). \qquad (26)'$$

Таково представление группы автоморфизмов G^2 алгебры Ли дериваций первого порядка.

Деривация 2-го порядка ${}^2\delta_X$ определяется как отображение

$${}^2\delta_X : \delta_Y \to \delta_{[XY]}$$

(см. (44) и (23)). Поскольку деривация δ_Y определяется матрицей ∂y, а деривация $\delta_{[XY]}$ — матрицей $\partial(Xy - Yx)$ (см. (22)′), то деривация ${}^2\delta_X$ представляется в R_n соответствием матриц

$$\partial y \to \partial(Xy - Yx). \qquad (27)'$$

Матрица, стоящая в (27)′ справа, может быть получена и следующим образом. Рассматривая в группе G^2 однопараметрическую подгруппу, определённую множеством матричных соответствий (см. (26)′):

$$\partial y \to \partial((A_t y)\circ a_{-t}), \qquad (28)'$$

дифференцируем правую матрицу по t при $t=0$. В результате получим матрицу $\partial(Xy - Yx)$. Таким образом, учитывая (25)′, имеем формулу

$$\partial(Xy - Yx) = \partial((A_t y)\circ a_{-t})'_{t=0} = \qquad (29)'$$
$$= (((A_t\circ b_\tau a_{-t})(B_\tau\circ a_{-t})A_{-t})'_{\tau=0})'_{t=0}.$$

В заключение приведём схему B', повторяющую схему B в локальном представлении. Здесь, так же как и в схеме A', средняя горизонтальная стрелка может быть интерпретирована как операция частного дифференцирования, а вертикальная — как операция дифференцирования по параметру.

Схема B'

G_1		G_1^1
$b_\tau \to aba^{-1}$	$\to$	$\partial b \to (\partial a \circ ba^{-1})(\partial b \circ a^{-1})\partial a^{-1}$
$b_\tau \to a_t b_\tau a_{-t}$	$\to$	$B_\tau \to (A_t \circ b_\tau a_t)(B_\tau \circ a_{-t})A_{-t}$
$\downarrow$		$\downarrow$
G^1 $y = b'_{\tau=0} \to (A_t y) \circ a_{-t}$	$\to$	$\partial y = B'_{\tau=0} \to (\partial(A_t y) \circ a_{-t})A_{-t}$ G^2
$\downarrow$		$\downarrow$
$Y \to Xy - Yx$	$\to$	$\partial y \to \partial(Xy - Yx)$

Литература

1. Gasparini, I. C., Sulle connessioni infinitesimale nello spazio fibrato dei riferimenti affini di una V_n, Rend. mat. e applic., (5), 1958, 17, 3—62.
2. Лихнерович А., Теория связностей в целом и группы голономий. Москва, 1960.
3. Номидзу К., Группы Ли и дифференциальная геометрия. Москва, 1960.
4. Понтрягин Л. С., Непрерывные группы. Москва, 1954.
5. Рахула М. О., Об одном аспекте неголономной геометрии, Настоящий сборник, стр. 23—36.
6. Шевалле К., Теория групп Ли, т. I. Москва, 1948.
7. Эйзенхарт Л. П., Непрерывные группы преобразований. Москва, 1947.

Поступило
24 III 1962

DERIVATSIOONIDE JADA MUUTKONNAL

M. Rahula

Geomeetria kateeder

Resümee

Artiklis on antud skeem järjestikkude derivatsioonide moodustamiseks muutkonnal V_n.

Olgu G — muutkonna V_n teisenduste rühm,
G_1 — rühma G siseautomorfismide rühm,
G_2 — rühma G_1 siseautomorfismide rühm jne.,
G_i — rühma G_{i-1} siseautomorfismide rühm.

Rühma G üheparameetriline alamrühm indutseerib muutkonnal V_n vektorvälja ehk 0-järku derivatsiooni. Rühma G_1 üheparameetriline alamrühm indutseerib muutkonnal V_n Lie diferentseerimise ehk esimest järku derivatsiooni. Rühma G_2 üheparameetriline alamrühm indutseerib muutkonnal V_n teist järku derivatsiooni jne., rühma G_i üheparameetriline alamrühm indutseerib muutkonnal V_n $(i-1)$-järku derivatsiooni. Seejuures iga i-järku derivatsioon $(i>0)$ on diferentseerimine

(i—1)-järku derivatsioonide kohal (vt. valem (60)). Osutub, et i-järku derivatsioonide hulk moodustab Lie algebra L^i suluoperatsiooniga (67), ja igale rühma G^i siseautomorfismile (iga rühma G^{i+1} elemendile) vastab Lie algebra L^i automorfism. Nullindat, esimest ja teist järku derivatsioonide jaoks on toodud ka arvutusvalemid lokaalses vaatluses.

Toodud skeemi võib rakendada nii diferentsiaalinvariantide ja jätkatud teisendusrühmade teoorias kui ka adjungeeritud rühmade, lineaarseostuste ning vektorväljade uurimiseks.

A SEQUENCE OF DERIVATIONS ON THE MANIFOLD

M. Rahula

Summary

This paper gives a scheme of construction for successive derivations on the manifold V_n.

Let G denote the group of transformations of V_n;
G_1 — the group of internal automorphisms of G;
G_2 — the group of internal automorphisms of G_1, etc.;
G_i — the group of internal automorphisms of G_{i-1}.

The one-parametric subgroup of G induces on the manifold V_n a vector field called a derivation of order 0. The one-parametric subgroup of G_1 induces on the V_n a Lie differentiation called a derivation of order 1. The one-parametric subgroup of G_2 induces on the V_n by analogy a derivation of order 2, etc.; the one-parametric subgroup of G_i induces on the V_n a derivation of order i. At the same time each of the derivations of order i is a differentiation over the derivations of order (i—1), (cf. formula (60)). A set of the derivations of order i form a Lie algebra L^i with bracket operation (67) and each of the internal automorphisms of the group G^i (i. e. every element of G^{i+1}) assign an automorphism of L^i. The calculation formulas for the derivations of orders 0, 1 and 2 in the local consideration are also given.

These results bear a relation to both the theory of differential invariants and continuation groups of transformations and the theories of adjoint groups, linear connections and also vectorfields.

О МАКСИМАЛЬНО СИММЕТРИЧНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ МНОГОМЕРНОГО ЭВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Р. Муллари

Вычислительный центр

В настоящей статье рассматриваются возможности такого погружения m-мерного пространства постоянной кривизны S_m в эвклидово пространство R_n $(n > m)$, чтобы все движения в S_m, образующие, как известно, $\frac{1}{2}m(m+1)$-параметрическую группу, были бы индуцированы движениями в самом пространстве R_n. Поверхности в R_n, реализирующие такое погружение, называются *максимально симметричными,* или допускающими свободное движение в R_n. Если такая поверхность m-мерна и погружается в своей k-той соприкасающейся плоскости, то она обозначается через $S_m{}^k$.

В статье получена общая пфаффовая система, определяющая поверхности $S_m{}^k$. Интегрирование этой системы доведено до конца пока лишь в случае $S_m{}^1$.

§ 1. Точка максимальной симметрии

1. Пусть задана m-мерная поверхность V_m эвклидова пространства R_n и пусть $\{\boldsymbol{M}, \boldsymbol{e}_a\}$ $(a, a_0, a_1, \ldots, b, b_0, \ldots = 1, \ldots, m)$ — подвижный касательный репер к V_m в некоторой ее точке M. Плоскость R_m, определяемая векторами $\boldsymbol{e}_a$, называется касательной плоскостью к V_m в M.

Инфинитезимальные преобразования касательного репера определяются формулами

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{M} &= \omega^c \boldsymbol{e}_c, \\ d\boldsymbol{e}_a &= \omega_a{}^c \boldsymbol{e}_c + \boldsymbol{w}_a, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\boldsymbol{w}_a$ ортогональны к R_m. Внешнее дифференцирование [4] первого уравнения (1) дает соотношения

$$D\omega^a = [\omega^c \omega_c{}^a], \quad [\boldsymbol{w}_c \omega^c] = 0,$$

откуда получается

$$\boldsymbol{w}_a = \omega^c \boldsymbol{e}_{ac}.$$

Здесь векторы $\boldsymbol{e}_{ac}$ ортогональны к R_m и $\boldsymbol{e}_{ac} = \boldsymbol{e}_{ca}$.

Плоскость, определяемая векторами $\boldsymbol{e}_{ab}$, называется первой нормальной плоскостью к поверхности V_m в M. Обозначим ее через $R_m{}^1$. Плоскость $R_{m,1}$, натянутая на плоскости R_m и $R_m{}^1$, называется первой соприкасающейся плоскостью к V_m в M.

Для дифференциалов векторов $\boldsymbol{e}_{ab}$ получаются выражения

$$d\boldsymbol{e}_{ab} = \omega^c_{ab}\, \boldsymbol{e}_c + \omega^{cd}_{ab}\, \boldsymbol{e}_{cd} + \boldsymbol{w}_{ab}, \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{w}_{ab}$ ортогональны к $R_{m,1}$. Внешнее дифференцирование второго уравнения (1) дает теперь соотношения

$$D\omega^b_a = [\omega^c_a\, \omega^b_c] + [\omega^c\, \omega^b_{ac}],$$
$$[\omega^{ed}_{ac} - \delta^e_c\, \omega^d_a - \delta^e_a\, \omega^d_c,\ \omega^c]\, \boldsymbol{e}_{ed} = 0,$$
$$\boldsymbol{w}_{ab} = \boldsymbol{e}_{abc}\omega^c,$$

где векторы $\boldsymbol{e}_{abc}$ симметричны по нижним индексам и ортогональны к $R_{m,1}$. Их плоскость $R_m{}^2$ называется второй нормальной плоскостью к V_m в M, а плоскость, натянутая на $R_{m,1}$ и $R_m{}^2$ — второй соприкасающейся плоскостью к V_m в M.

Выражаем теперь дифференциал вектора $\boldsymbol{e}_{abc}$, дифференцируем внешним образом уравнение (2) и т. д. После l-го шага получим соотношения

$$\boldsymbol{w}_{a_0 \ldots a_{l-1}} = \omega^c\, \boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_{l-1}\, c}, \qquad (3)$$

где векторы $\boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_l}$ определяют l-ую нормальную, а вместе с плоскостью $R_{m,\,l-1}$ и l-ую соприкасающуюся плоскость к поверхности V_m в точке M, обозначаемые через $R_m{}^l$ и $R_{m,\,l}$ соответственно.

Векторы $\boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_l}$ являются симметричными относительно всех своих индексов и при линейном преобразовании векторов $\boldsymbol{e}_a$ преобразуются как $(l+1)$-валентные ковариантные тензоры. Последнее следует из линейности операторов дифференцирования и проектирования.

Если при некотором $l = l'$ все $\boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_{l'}} = 0$, тогда и все векторы $\boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_{l'+s}}$ равны нулю. Так как пространство R_n имеет конечную размерность, то такое l' всегда существует.

2. Тензор

$$B_{a_0 \ldots a_l;\, b_0 \ldots b_l} = \boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_l}\, \boldsymbol{e}_{b_0 \ldots b_l}$$

назовем *тензором l-ой внешней кривизны* поверхности V_m в точке M. Он однозначно определяется строением поверхности V_m

вблизи точки M. Тензоры римановой и первой внешней кривизн связаны следующим соотношением [5]:

$$R_{ab;\,cd} = B_{ac;\,bd} - B_{ad;\,bc}.$$

Точку M поверхности V_m, в которой координаты всех тензоров внешней кривизны при ортонормированном касательном репере не зависят от выбора репера, назовем *точкой максимальной* (локальной) *симметрии* поверхности V_m. В этом случае при вращении ортонормированного касательного репера, система соответствующих векторов $\boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_l}$ вращается вместе с ним как твердое тело. Примерами точек максимальной симметрии являются точки плоскости и сферы в R_3.

Для того, чтобы координаты тензора $B_{a_0 \ldots a_l;\, b_0 \ldots b_l}$ не изменились при всевозможных вращениях ортонормированного репера в касательной плоскости R_m, необходимо и достаточно тождественное равенство нулю их производных относительно пфаффовых форм $\omega_a{}^b$. Это равносильно тому, что после инфинитезимальных преобразований, заданных формулами

$$\boldsymbol{e}_a{}' = (\delta_a{}^c + \omega_a{}^c)\,\boldsymbol{e}_c, \tag{4}$$

где $\omega_a{}^c = -\omega_c{}^a$, в выражениях новых координат тензора $B_{a_0 \ldots a_l;\, b_0 \ldots b_l}$ через старые, все конечные приведенные коэффициенты при линейных формах $\omega_a{}^b$ — производные от $B_{a_0 \ldots a_l;\, b_0 \ldots b_l}$ по этим формам — обращались в нуль. Коэффициенты при произведениях форм $\omega_a{}^b$ обращаются в нуль уже как следствия.

Рассмотрим координату тензора $B_{a_0 \ldots a_l;\, b_0 \ldots b_l}$, у которой в первой группе индексов число индексов a_1 равно p_1, а число индексов a_2 равно p_2. Во второй группе индексов пусть эти числа равны q_1 и q_2 соответственно. Обозначим эту координату условно через $B^{a_1 a_2,\, l}_{p_1 p_2;\, q_1 q_2}$.

Так, например, обозначим координату $B_{11133;\,12333}$ через $B^{12,5}_{30;\,11}$, или через $B^{13,5}_{32;\,13}$, или через $B^{23,5}_{02;\,13}$. Очевидно, что символ $B^{a_1 a_2,\, l}_{p_i p_2;\, q_1 q_2}$ не определяет координату $B_{a_0 \ldots a_l;\, b_0 \ldots b_l}$ однозначно, но мы пользуемся им лишь условно, для упрощения записи.

Нетрудно проверить, что после инфинитезимального преобразования (4) в выражении новой координаты $B^{a_1 a_2;\, l}_{p_1 p_2;\, q_1 q_2}$ через старые приведенный коэффициент при линейной форме $\omega^{a_2}_{a_1} = -\omega^{a_1}_{a_2}$ равен

$$K^{a_1 a_2,\, l}_{p_1 p_2;\, q_1 q_2} = p_1 B^{a_1 a_2,\, l}_{p_1 - 1,\, p_2 + 1;\, q_1 q_2} + q_1 B^{a_1 a_2,\, l}_{p_1 p_2;\, q_1 - 1,\, q_2 + 1} -$$

$$- p_2 B^{a_1 a_2,\, l}_{p_1 + 1,\, p_2 + 1;\, a_1 q_2} - q_2 B^{a_1 a_2,\, l}_{p_1 p_2;\, q_1 + 1,\, q_2 - 1}.$$

Здесь предполагается, что значения индексов, отличных от a_1 и a_2, не изменяются.

Так, например, для координаты $B_{12;\,11}$ тензора первой внешней кривизны получим после преобразования (4)

$$B'_{12;\,11} = (\delta_1{}^a + \omega_1{}^a)(\delta_2{}^b + \omega_2{}^b)(\delta_1{}^c + \omega_1{}^c)(\delta_1{}^d + \omega_1{}^d)B_{ab;\,cd} \cong$$
$$\cong B_{12;\,11} + (B_{22;\,11} + 2B_{12;\,12} - B_{11;\,11})\omega_1{}^2 +$$
$$+ (B_{2A;\,11} + 2B_{12;\,1A})\omega_1{}^A + B_{1A;\,11}\,\omega_2{}^A,$$

где $A = 3, \ldots, m$. Здесь $K^{12,2}_{11;\,20} = B_{22;\,11} + 2B_{12;\,12} - B_{11;\,11}$, $K^{1A,\,2}_{10;\,20} = B_{2A;\,11} + 2B_{12;\,1A}$ и $K^{2A,\,2}_{10;\,00} = B_{1A;\,11}$.

В итоге получается следующая

Теорема. *Для того, чтобы точка M поверхности V_m оказалась точкой максимальной симметрии, необходимо и достаточно соблюдение соотношений $K^{a_1a_2,\,l}_{p_1p_2;\,q_1q_2} = 0$ в ортонормированном репере при любом выборе величин a_1, a_2, l, $p_1 + p_2 \leqslant l$ и $q_1 + q_2 \leqslant l$.*

Для примера, координаты тензора первой внешней кривизны должны удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned} &B_{aa;\,ab} = 0,\\ &B_{aa;\,bb} + 2B_{ab;\,ab} - B_{aa;\,aa} = 0,\\ &B_{aa;\,bc} = 0,\\ &B_{ab;\,ac} = 0,\\ &B_{ab;\,cd} = 0 \end{aligned} \qquad (5)$$

для всех a, b, c, d, различных между собой.

3. Точка максимальной симметрии поверхности V_m является частным случаем такой точки, в которой все касательные направления к V_m являются главными направлениями поверхности. Последнее требование равносильно тому, чтобы вектор нормальной кривизны поверхности V_m в точке M [3] имел во всех направлениях одну и ту же длину.

В ортонормированном репере необходимыми и достаточными условиями этого являются следующие соотношения между координатами тензора первой внешней кривизны поверхности:

$$\begin{aligned} &B_{aa;\,ab} = 0,\\ &B_{aa;\,bb} + 2B_{ab;\,ab} - B_{aa;\,aa} = 0,\\ &B_{aa;\,bc} + 2B_{ab;\,ac} = 0,\\ &B_{ab;\,cd} + B_{ac;\,db} + B_{ad;\,bc} = 0 \end{aligned} \qquad (6)$$

для всех a, b, c, d, различных между собой.

Выполнение соотношений (5) обеспечит и выполнение соотношений (6).

§ 2. Максимально симметричные поверхности

4. Рассмотрим поверхность V_m, являющуюся системой импримитивности некоторой p-параметрической группы движений T пространства R_n $(p \geqslant m)$. Здесь касательный репер к V_m в ее точке M испытывает при T p-параметрическую группу движений. Но так как в данном случае точки поверхности V_m перемещаются вместе с касательным репером, то пфаффовые уравнения (см. п. 1)

$$\begin{aligned} &d\boldsymbol{M} = \omega^c \boldsymbol{e}_c, \\ &d\boldsymbol{e}_{a_0} = \omega^c_{a_0} \boldsymbol{e}_c + \omega^c \boldsymbol{e}_{a_0 c}, \\ &d\boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_l} = \omega^{c_0 \ldots c_{l-1}}_{a_0 \ldots a_l} \boldsymbol{e}_{c_0 \ldots c_{l-1}} + \omega^{c_0 \ldots c_l}_{a_0 \ldots a_l} \boldsymbol{e}_{c_0 \ldots c_l} + \omega^c \boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_l c}, \end{aligned} \tag{7}$$

характеризующие эти перемещения, должны быть инвариантны относительно движений группы T. Здесь $l = 1, \ldots, k$ и $\boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_{k+1}} = 0$. Соотношения $\omega^{c_0 \ldots c_s}_{a_0 \ldots a_l} \boldsymbol{e}_{c_0 \ldots c_s} = 0$ $(s < l - 1)$ следуют из условия ортогональности различных нормальных плоскостей к V_m в M, т. е. из условия

$$d(\boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_l} \boldsymbol{e}_{b_0 \ldots b_s}) =$$

$$\omega^{c_0 \ldots c_s}_{a_0 \ldots a_l} \boldsymbol{e}_{c_0 \ldots c_s} \boldsymbol{e}_{b_0 \ldots b_s} + \omega^{c_0 \ldots c_l}_{b_0 \ldots b_s} \boldsymbol{e}_{c_0 \ldots c_l} \boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_l} = 0,$$

и из (3). Также следуют соотношения

$$d(\boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_l} \boldsymbol{e}_{b_0 \ldots b_{l+1}}) =$$

$$= \omega^c \boldsymbol{e}_{a \ldots a_l c} \boldsymbol{e}_{b_0 \ldots b_{l+1}} + \omega^{c_0 \ldots c_l}_{b_0 \ldots b_{l+1}} \boldsymbol{e}_{c_0 \ldots c_l} \boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_l} = 0. \tag{8}$$

Инвариантность системы (7) означает, что система векторов $\boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_l}$, построенная после перемещения касательного репера, конгруэнтна системе, построенной до перемещения репера, т. е. координаты всех тензоров кривизны остаются неизменными. Это условие равносильно соотношениям

$$d(\boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_l} \boldsymbol{e}_{b_0 \ldots b_l}) =$$

$$= (\omega^{c_0 \ldots c_l}_{a_0 \ldots a_l} \boldsymbol{e}_{b_0 \ldots b_l} + \omega^{c_0 \ldots c_l}_{b_0 \ldots b_l} \boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_l}) \boldsymbol{e}_{c_0 \ldots c_l} = 0. \tag{9}$$

Отсюда следует, что поверхности V_m, являющиеся системами импримитивности групп движений, являются интегральными многообразиями пфаффовой системы (*), состоящей из уравнений (7), (8) и (9). Для определения конкретных систем импримитивности некоторой группы движений T, нужно задать еще соответствующие начальные значения точки M и векторов $\boldsymbol{e}_{a_0}$, $\boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_l}$, удовлетворяющие, конечно, условиям ортогональности

различных нормальных плоскостей и условиям интегрируемости системы (*).

5. Поверхности $S_m{}^k$, очевидно, являются интегральными многообразиями системы (*) при начальных значениях векторов $\boldsymbol{e}_{a_0 \ldots a_l}$, удовлетворяющих при ортонормированном касательном репере условиям теоремы п. 2.

Рассмотрим некоторые простейшие виды поверхностей $S_m{}^k$.

В случае $\boldsymbol{e}_{a_0 a_1} = 0$ получается в виде поверхности $S_m{}^0$ m-мерная плоскость R_m.

Для $k = 1$ система (*) принимает вид

$$\begin{aligned} &d\boldsymbol{M} = \omega^c \boldsymbol{e}_c, \\ &d\boldsymbol{e}_a = \omega_a{}^c \boldsymbol{e}_c + \omega^c \boldsymbol{e}_{ac}, \\ &d\boldsymbol{e}_{ab} = \overset{c}{\omega}_{ab} \boldsymbol{e}_c + \overset{cd}{\omega}_{ab} \boldsymbol{e}_{cd}, \\ &\overset{cd}{\omega}_{ab} B_{cd;\, ef} = - \overset{cd}{\omega}_{ef} B_{cd;\, ab}, \\ &\overset{a}{\omega}_{bd} = - \omega^c B_{ac;\, bd}, \end{aligned} \tag{9a}$$

где третье и пятое уравнения дают

$$d\boldsymbol{e}_{ab} = - \sum_c \omega^d B_{cd;\, ab}\, \boldsymbol{e}_c + \overset{cd}{\omega}_{ab} \boldsymbol{e}_{cd}.$$

Дифференциальным следствием здесь является

$$\omega_e{}^c B_{cd;\, ab} + \omega_d{}^c B_{ec;\, ab} + \overset{cf}{\omega}_{ab} B_{ed;\, cf} = \omega^c F_{ab;\, edc}, \tag{9b}$$

где $F_{ab;\, cde}$ симметричны как относительно первых двух, так и последних трех индексов. Если сложить сюда уравнение

$$\omega_a{}^c B_{cb;\, ed} + \omega_b{}^c B_{ac;\, ed} + \overset{cf}{\omega}_{ed} B_{ab;\, cf} = \omega^c F_{ed;\, abc} \tag{9c}$$

и учитывать четвертое уравнение системы (9a) и условия теоремы п. 2, получается

$$F_{ab;\, edc} = - F_{ed;\, abc}. \tag{9d}$$

Также можно писать

$$F_{ed;\, abc} = F_{ed;\, acb} = - F_{ac;\, edb},$$

которое вместе с (9d) дает

$$F_{ab;\, edc} = 0.$$

Теперь из (9b), (9c) и условий теоремы п. 2 следует

$$\overset{cf}{\omega}_{ab} B_{cf;\, ed} = \omega_a{}^c B_{cb;\, ed} + \omega_b{}^c B_{ac;\, ed},$$

или, что эквивалентно,

$$\overset{cd}{\omega}_{ab} \boldsymbol{e}_{cd} = \omega_a{}^c \boldsymbol{e}_{cb} + \omega_b{}^c \boldsymbol{e}_{ac}.$$

С этим третье уравнение системы (9ª) принимает вид

$$d\boldsymbol{e}_{ab} = -\sum_c \omega^d B_{cd;\,ab}\,\boldsymbol{e}_c + \omega_a{}^c\,\boldsymbol{e}_{cb} + \omega_b{}^c\,\boldsymbol{e}_{ac}.$$

Обозначим

$$B_{ce;\,ee} = \beta^2 \quad \text{и} \quad B_{ef;\,ef} = \alpha^2 \quad (e \neq f),$$

тогда с учетом (5) получается

$$d\boldsymbol{e}_{ab} = -\alpha^2\,\omega^b\,\boldsymbol{e}_a - \alpha^2\,\omega^a\,\boldsymbol{e}_b - \delta_{ab}(\beta^2 - 2\alpha^2)\,\omega^c\,\boldsymbol{e}_c + \omega_a{}^c\,\boldsymbol{e}_{cb} + \omega_b{}^c\,\boldsymbol{e}_{ac}.$$

Дифференциальным следствием этого уравнения является соотношение

$$(4\alpha^2 - \beta^2)\{[\omega^b\,\omega^c]\boldsymbol{e}_{ac} + [\omega^a\,\omega^c]\boldsymbol{e}_{bc}\} = 0.$$

Отсюда получается два различных вида поверхностей $S_m{}^1$:

1) Сфера S_m, как вырожденная поверхность $S_m{}^1$, соответствующая случаю $B_{ab;\,ab} = 0$ при $a \neq b$, т. е. $\boldsymbol{e}_{aa} = \boldsymbol{e}_{bb}$ и $\boldsymbol{e}_{ab} = 0$. Этот случай в дальнейшем рассматривать не будем.

2) Невырожденная поверхность $S_m{}^1$, соответствующая случаю $B_{aa;\,aa} = 2B_{aa;\,bb} = 4B_{ab;\,ab} = 4\alpha^2 \neq 0$ $(a \neq b)$, где α^2 — кривизна поверхности $S_m{}^1$.

Здесь получается, что все векторы $\boldsymbol{e}_{ab}$ линейно независимы. Следовательно, $S_m{}^1$ погружается в пространстве $R_{\frac{1}{2}m(m+3)}$.

6. Выпишем систему (*) с учетом условий интегрируемости для поверхности $S_m{}^1$:

$$\begin{aligned} &d\boldsymbol{M} = \omega^c\,\boldsymbol{e}_c, \\ &d\boldsymbol{e}_a = \omega_a{}^c\,\boldsymbol{e}_c + \omega^c\,\boldsymbol{e}_{ac}, \\ &d\boldsymbol{e}_{ab} = -\alpha^2\,\omega^b\,\boldsymbol{e}_a - \alpha^2\,\omega^a\,\boldsymbol{e}_b + \omega_b{}^c\,\boldsymbol{e}_{ac} + \\ &+ \omega_a{}^c\,\boldsymbol{e}_{bc} - 2\alpha^2\delta_{ab}\,\omega^c\,\boldsymbol{e}_c, \end{aligned} \tag{10}$$

где $\alpha = \text{const}$.

Для вектора $\boldsymbol{M}^* = \boldsymbol{M} + \frac{1}{2\alpha^2(m+1)}\sum_c \boldsymbol{e}_{cc}$ получим $d\boldsymbol{M}^* = 0$. Следовательно, поверхность $S_m{}^1$ находится на гиперсфере $S_{\frac{1}{2}m(m+1)}$ с радиусом $r = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{2m}{m+1}}$ пространства $R_{\frac{1}{2}m(m+3)}$. Точку M^* — центр гиперсферы $S_{\frac{1}{2}m(m+1)}$ — назовем *центром* поверхности $S_m{}^1$.

Из системы (10), если взять ее по mod $(\omega^\varrho, \omega_a{}^\varrho)$ $(\varrho = l+1, \ldots, m)$, видно, что все l-мерные геодезические подповерхности поверхности $S_m{}^1$ являются поверхностями $S_l{}^1$ определенными той же величиной α. В частности, геодезические линии являются окружностями с радиусом $\frac{1}{2\alpha}$. При этом, две геоде-

зические линии, проходящие через точку M поверхности $S_m{}^1$, в других точках уже не пересекаются. Например, плоскости векторов $\boldsymbol{e}_a$, $\boldsymbol{e}_{aa}$ и $\boldsymbol{e}_b$, $\boldsymbol{e}_{bb}$, соответствующие геодезическим линиям в направлениях векторов $\boldsymbol{e}_a$ и $\boldsymbol{e}_b$ соответственно, имеют только одну общую точку M. Следовательно, связная компонента поверхности $S_m{}^1$ топологически гомеоморфна m-мерному проективному пространству. Учитывая еще то, что кривизна α^2 поверхности $S_m{}^1$ постоянна, можно утверждать, что m-мерная площадь одной связной части поверхности $S_m{}^1$ равна половине площади сферы S_m с той же кривизной α^2.

Имеет смысл рассматривать поверхность $S_m{}^1$ как состоящую из двух связных компонент, симметричных относительно их общего центра.

7. Пусть M^0 — точка максимальной симметрии поверхности V_{m+1}, $\boldsymbol{e}_a$ и $\boldsymbol{e}_*$ — ее ортонормированные касательные векторы, а $\boldsymbol{e}_{ab}$, $\boldsymbol{e}_{a*}$ и $\boldsymbol{e}_{**}$ — соответствующие векторы в первой нормальной плоскости к V_{m+1} в M^0 (здесь «*» — один определенный индекс). Если при неизменном M^0 касательный репер свободно вращается, то конец вектора $\boldsymbol{e}_{**}$, отложенного от M^0, описывает некоторую поверхность V_m, называемую индикатрисой нормальной кривизны поверхности V_{m+1} в точке M^0 [3]. Оказывается, что индикатриса нормальной кривизны поверхности V_{m+1} в ее точке максимальной симметрии является одной из двух связных компонент поверхности $S_m{}^1$.

Для доказательства можно обозначить $\boldsymbol{e}_{**} = \boldsymbol{M}$. Все дифференциалы вектора $\boldsymbol{M}$ находятся при помощи тензорного закона преобразования векторов $\boldsymbol{e}_{**}$, $\boldsymbol{e}_{a*}$, $\boldsymbol{e}_{ab}$ при инфинитезимальном вращении касательного репера $\boldsymbol{e}_*$, $\boldsymbol{e}_a$.

8. Рассмотрим подробнее поверхность $S_2{}^1$. Она находится на сфере, кривизна которой равна $3\alpha^2$. Но этой же величине равен и квадрат вектора средней кривизны [3] поверхности $S_2{}^1$. При этом вектор средней кривизны обращен к центру поверхности $S_2{}^1$. Это означает, что $S_2{}^1$ можно рассматривать еще как минимальную поверхность постоянной кривизны эллиптического пространства S_4. В таком виде ее нашел Борувка [6] (см. также [1]).

Выберем ортонормированный репер $\{\boldsymbol{M}, \boldsymbol{f}_i\}$ $(i = 1, \ldots, 5)$, так что

$$\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_1,$$
$$\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{e}_2,$$
$$\boldsymbol{f}_3 = \frac{1}{2\alpha}(\boldsymbol{e}_{11} - \boldsymbol{e}_{22}),$$
$$\boldsymbol{f}_4 = \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{e}_{12},$$
$$\boldsymbol{f}_5 = -\frac{\sqrt{3}}{6\alpha}(\boldsymbol{e}_{11} + \boldsymbol{e}_{22}).$$

Затем вычислим дифференциал вектора $\boldsymbol{M}' = \boldsymbol{M} + \sum_i x_i \boldsymbol{f}_i$, где x_i — постоянные, учитывая систему (10).

Пусть $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{r}_3$ — множители соответственно форм ω^1, ω^2 и $\omega_1{}^2$ в выражении вектора $d\boldsymbol{M}'$. Они охарактеризуют инфинитезимальные перемещения точки M' с радиусом-вектором $\boldsymbol{M}'$ при трехпараметрической группе движений T, порождаемой в пространстве R_5 поверхностью $S_2{}^1$. Для того, чтобы M' оказалась точкой двумерной системой импримитивности группы T (поверхностью $S_2{}^1$), необходимо и достаточно компланарность векторов $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{r}_3$. Отсюда следует, что все двумерные системы импримитивности группы T, вместе взятые, заполняют в пространстве R_5 трехмерный конус, заданный уравнениями

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= x_4(\pm\sqrt{x_3{}^2 + x_4{}^2} + \sqrt{3}\, x_5), \\ x_1{}^2 - x_2{}^2 &= 2x_3(\pm\sqrt{x_3{}^2 + x_4{}^2} + \sqrt{3}\, x_5). \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь уже векторы $\boldsymbol{f}_i$ фиксированы и начало репера перенесено в центр поверхности $S_2{}^1$. Все двумерные системы импримитивности группы T, очевидно, являются пересечениями конуса (11) со сферами, имеющими общий центр с поверхностью $S_2{}^1$.

При помощи векторов $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{r}_3$ можно исследовать и трехмерные системы импримитивности группы T. Они являются специальными ортогональными 3-сопряженными системами [2].

§ 3. Центральные поверхности для $S_m{}^1$

9. В этом параграфе рассмотрим некоторые поверхности, инвариантно связанные с поверхностью $S_m{}^1$.

Так как l-мерная геодезическая подповерхность поверхности $S_m{}^1$, проходящая через точку M и касающаяся там плоскость векторов $\boldsymbol{e}_A$ ($A, B = 1, \ldots, l$), является одной связной компонентой поверхности $S_l{}^1$ с той же кривизной α^2, то точка $M_l{}^*$ с радиусом-вектором

$$\boldsymbol{M}_l{}^* = \boldsymbol{M} + \frac{1}{\alpha(l+1)} \sum_A \boldsymbol{e}_{AA}$$

окажется ее центром.

Дифференцирование вектора $\boldsymbol{M}_l{}^*$ с учетом (10) дает

$$d\boldsymbol{M}_l{}^* = \frac{1}{l+1}\omega^\varphi \boldsymbol{e}_\varphi + \sum_A \frac{1}{l+1}\omega_A{}^\varphi \boldsymbol{e}_{A\varphi}, \tag{12}$$

где $\varphi, \psi = l+1, \ldots, m$. Следовательно, центры l-мерных геодезических подповерхностей $S_l{}^1$ поверхности $S_m{}^1$ образуют $(l+1)(m-l)$-мерную поверхность $S^1{}_{m,\,l}$, касательная плоскость которой в точке $M_l{}^*$ вполне ортогональна плоскости соответ-

ствующей геодезической подповерхности S_l^1. Назовем $S^1_{m,l}$ *l-центральной поверхностью* для поверхности S_m^1.

Поверхность $S^1_{m,l}$ находится на гиперсфере пространства $R_{\frac{1}{2}m(m+3)}$, центр которой совпадает с центром M^* поверхности S_m^1, а радиус равен

$$r_l = |\boldsymbol{M}^* - \boldsymbol{M}_l^*| = \frac{\sqrt{2}}{2\alpha(m+1)(l+1)}\sqrt{(m-l)(m+ml+l+1)}.$$

Так как $S^1_{m,l}$, очевидно, является системой импримитивности группы движений T, порождаемой поверхностью S_m^1 в пространстве $R_{\frac{1}{2}m(m+3)}$, то группа T имеет системы импримитивности различных размерностей.

10. Дифференциалы векторов $\boldsymbol{e}_\varphi$ и $\boldsymbol{e}_{A\varphi}$, касательных к поверхности $S^1_{m,l}$ в точке M_l^* (12), вычисленные при помощи (10), определяют соответствующие векторы $\boldsymbol{e}_{ij}{}^l$ $(i, j = \varphi, (A\varphi))$. Таким образом получим

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{e}^l_{\psi\psi} = (l+1)\boldsymbol{e}_{\psi\psi} && \boldsymbol{e}^l_{(A\psi)(A\psi)} = (l+1)(\boldsymbol{e}_{\psi\psi} - \boldsymbol{e}_{AA})\\
&\boldsymbol{e}^l_{\psi\varphi} = (l+1)\boldsymbol{e}_{\psi\varphi} && \boldsymbol{e}^l_{(A\psi)(B\psi)} = -(l+1)\boldsymbol{e}_{AB}\\
&\boldsymbol{e}^l_{\psi(A\varphi)} = -(l+1)\boldsymbol{e}_A && \boldsymbol{e}^l_{(A\psi)(A\varphi)} = (l+1)\boldsymbol{e}_{\psi\varphi}\\
&\boldsymbol{e}^l_{\psi(A\varphi)} = 0 && \boldsymbol{e}^l_{(A\psi)(B\varphi)} = 0
\end{aligned}\right\}, \qquad (13)$$

где $A \neq B$ и $\varphi \neq \psi$. Отсюда видно, что поверхность $S^1_{m,l}$ является поверхностью $\tilde{S}_m{}^1$ тогда и только тогда, когда $l = m - 1$, т. е. в случае геодезических гиперповерхностей. Эта поверхность $\tilde{S}_m{}^1$ охарактеризуется величиной $\tilde{\alpha} = m\alpha$.

Соотношения $\boldsymbol{e}^l_{\psi(A\varphi)} = 0$ (см. (13)) обозначают, что направление вектора $\boldsymbol{e}_\psi$, касательного к поверхности $S^1_{m,l}$ в точке M_l^* (12), имеет $l(m-l-1)$-мерное ортогональное к нему сопряженное направление — направление векторов $\boldsymbol{e}_{(A\varphi)}$. Из максимальной симметричности поверхности $S_m{}^1$ следует, далее, существование $l(m-l-1)$-мерного ортогонального сопряженного направления в точке M_l^* поверхности $S^1_{m,l}$ каждому одномерному направлению в плоскости векторов $\boldsymbol{e}_\psi$, касательных к $S^1_{m,l}$ в M_l^*. Точно так же следует из соотношений (13) существование $(l-1)(m-l-1)$-мерного ортогонального сопряженного направления каждому одномерному направлению в плоскости векторов $\boldsymbol{e}_{A\psi}$.

11. Дифференциальным формам $\omega_A{}^\varphi$ соответствуют инфинитезимальные вращения l-мерной геодезической подповерхности

S_l^1, определенной направлением векторов e_A, вокруг точки M поверхности S_m^1. Эти вращения не оставляют подповерхность S_l^1 неподвижным. На поверхности $S_{m,l}^1$ этим же формам ω_A^φ соответствуют смещения точки M_l^* в направлениях векторов $e_{A\varphi}$ (12). При этом формы $\omega_{A\varphi,l}^{\varphi}$ и $\omega_{A\varphi,l}^{\psi}$, соответствующие вращениям плоскости касательных векторов $e_{A\varphi}$ к $S_{m,l}^1$ в M_l^*, не зависят от форм ω_A^φ. Следовательно, *центры геодезических подповерхностей S_l^1 поверхности S_m^1, проходящих через точку M, образуют на поверхности $S_{m,l}^1$ $l(m-l)$-мерную геодезическую подповерхность, проходящую через точку M_l^* в направлении векторов $e_{A\varphi}$.*

В заключение автор выражает благодарность доц. Ю. Г. Лумисте, который при составлении настоящей работы помог ему многими ценными указаниями.

Литература

1. Лумисте Ю. Г., К теории двумерных минимальных поверхностей II. Поверхности постоянной кривизны. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 16—28.
2. Рыжков В. В., Сопряженные системы на многомерных поверхностях. Тр. Моск. матем. о-ва, 1958, **7**, 179—226.
3. Схоутен И. А., Стройк Д. Дж., Введение в новые методы в дифференциальной геометрии, т. II. Москва—Ленинград, 1948.
4. Фиников С. П., Метод внешних форм Картана. Москва—Ленинград, 1948.
5. Эйзенхарт Л. П., Риманова геометрия. Москва, 1948.
6. Borůvka, O., Sur une classe de surfaces minima plongees dans un espace a quatre dimensions a courbure constante. C. r. Acad. Sci., 1928, **187**, 334—336.

Поступило
17 III 1962

MITMEMÕÕTMELISE EUKLEIDILISE RUUMI MAKSIMAALSELT SÜMMEETRILISTEST PINDADEST

R. Mullari

Arvutuskeskus

Resümee

Töös vaadeldakse mitmemõõtmelise konstantse kõverusega ruumi S_m sellise sisestamise võimalusi eukleidilisse ruumi R_n $(n > m)$, et ta kõik liikumised oleksid indutseeritud ruumi R_n liikumiste poolt. Pindu, mis realiseerivad sellise sisestamise, nimetatakse maksimaalselt sümmeetrilisteks. Kui selline pind on m-mõõtmeline ja ta asetseb oma k-ndas kooldumistasandis, siis tähistatakse teda S_m^k.

Töös on antud üldine pindu S_m^k määrav diferentsiaalvõrrandite süsteem. Viimase triviaalseks lahendiks on tasand. Juhul $k = 1$ saadakse kaks lahendit, millest üks on sfäär S_m, teine aga kahest sidusast osast koosnev pind ruumi $R_{\frac{1}{2}m(m+3)}$ hüpersfääril. Uuritakse selle pinna geodeetiliste alampindade keskpunktide poolt moodustatud pindu.

ÜBER DIE MAXIMAL SYMMETRISCHEN FLÄCHEN IM N-DIMENSIONALEN EUKLIDISCHEN RAUM

R. Mullari

Zusammenfassung

In der Arbeit werden die Möglichkeiten behandelt, die Räume S_m konstanter Krümmung so in den euklidischen Raum $R_n (n > m)$ einzubetten, daß ihre sämtlichen Bewegungen sich von den Bewegungen des Raumes R_m induzieren lassen. Diejenigen Flächen, welche diese Einbettung realisieren, werden maximal symmetrisch genannt. Wenn eine solche Fläche die Dimensionalzahl m besitzt und sich in seiner Schmiegungsebene k-ter Ordnung befindet, so wird sie durch S_m^k bezeichnet.

In der Arbeit ist das System der Differentialgleichungen hergeleitet, welches die Fläche S_m^k bestimmt. Eine triviale Lösung ist die Ebene. Im Falle $k = 1$ erhält man zwei Lösungen; eine von diesen ist die Sphäre S_m, die zweite aber die aus zwei konnexen Teilen zusammenstehende Fläche in der Hypersphäre des Raumes $R_{\frac{1}{2}m(m+3)}$. Es wird die Mittelpunktfläche der geodätischen Unterflächen solcher Fläche S_m^1 untersucht.

К ТЕОРИИ ДВУМЕРНЫХ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ III. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА И ИЗГИБАНИЕ

Ю. Лумисте

Кафедра геометрии

Настоящая статья является продолжением работы [1], посвященной общей теории кривизны двумерной минимальной поверхности V_2 в n-мерном эвклидовом или неэвклидовом пространстве R_n или S_n. Там были получены следующие основные результаты: 1) все нормальные плоскости минимальной V_2 двумерны, кроме, может быть, последней, которая при нечетном n всегда одномерна; 2) индикатрисы кривизны на двумерных нормальных плоскостях — овальные линии второго порядка, внутренние центры которых находятся в точке M поверхности V_2; индикатриса кривизны на одномерной нормали — отрезок с центром M.

Эти результаты показывают, что строение окрестности точки M на минимальной V_2 является достаточно простым для того, чтобы построить геометрически содержательную теорию, подобную, с одной стороны, теории кривых в R_n, с другой стороны, классической теории поверхностей в R_3.

В настоящей статье дается основная теорема об определении минимальной V_2 в R_n или S_n внутренней метрикой, главными кривизнами и углами между главными направлениями различных порядков — теорема, напоминающая как теорему об определении кривой по натуральным уравнениям, так и теорему Петерсона из классической теории поверхностей в R_3 (см. [2], стр. 109).

В последнем параграфе доказывается возможность непрерывного изгибания минимальной V_2 в классе минимальных же поверхностей пространства R_n или S_n с сохранением главных кривизн первого порядка.

§ 1. Полуканонический репер

1. Пусть в R_n или S_n задана минимальная V_2. К каждой её точке M присоединяем подвижный ортонормальный касательный репер

$$R = \{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$$

— пару ортогональных нормированных векторов [1] $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ в точке M, лежащих в касательной плоскости поверхности V_2 в M. Выбор репера R определяет некоторые реперы и в двумерных нормальных плоскостях поверхности V_2 (см. [1]). Именно, на i-ой нормальной плоскости определяются *векторы i-ой нормальной кривизны* в направлениях векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\frac{\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2}{\sqrt{2}}$ — векторные компоненты вычисленных в этих направлениях аналитических точек $\frac{d^{i+1}M}{ds^{i+1}}$ на i-ой нормальной плоскости. Эти векторы обозначим $a_{2i-1}\,\boldsymbol{n}_{2i-1}$ и $a_{2i}\boldsymbol{n}_{2i}$, где $\boldsymbol{n}_{2i-1}$ и $\boldsymbol{n}_{2i}$ — нормированные линейно независимые векторы. В i-ой нормальной плоскости определяется репер

$$N_i = \{\boldsymbol{n}_{2i-1},\ \boldsymbol{n}_{2i}\}.$$

2. Рассмотрим сперва случай четного n и обозначим $n = 2p + 2$. Тогда реперы

$$R,\ N_1,\ \ldots,\ N_p$$

образуют, вместе с точкой M, полный репер в пространстве R_n или S_n. *Формулы инфинитезимального перемещения* этого репера можно, на основании результатов статьи [1], писать в виде:

$$\begin{aligned}
dM &= R\Theta\\
dR &= -cM\overset{*}{\Theta} + R\omega + N_1\beta_1\\
dN_1 &= R\tilde{\beta}_1 + N_1\vartheta_1 + N_2\beta_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
dN_i &= N_{i-1}\,\tilde{\beta}_i + N_i\vartheta_i + N_{i+1}\,\beta_{i+1}\\
dN_p &= N_{p-1}\,\tilde{\beta}_p + N_p\vartheta_p,
\end{aligned} \tag{1.1}$$

где c — кривизна пространства, Θ — следующий столбец из 1-форм:

$$\Theta = \begin{pmatrix}\theta^1\\ \theta^2\end{pmatrix},$$

---

[1] В неэвклидовом случае вектором в точке M называется любая аналитическая точка на поляре точки M по отношению к абсолюту пространства.

а ω, ϑ_i, β_i — следующие матрицы из 1-форм:

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1^2 \\ \omega_1^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vartheta_i = \begin{pmatrix} \vartheta_{2i-1}^{2i-1} & \vartheta_{2i}^{2i-1} \\ \vartheta_{2i-1}^{2i} & \vartheta_{2i}^{2i} \end{pmatrix}, \quad \beta_i = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{2i-1}}{a_{2i-3}}\,\Theta^1 & -\dfrac{a_{2i-1}}{a_{2i-2}}\,\Theta^2 \\ \dfrac{a_{2i}}{a_{2i-3}}\,\Theta^2 & -\dfrac{a_{2i}}{a_{2i-2}}\,\Theta^1 \end{pmatrix}$$

(здесь нужно считать $a_{-1} = a_0 = 1$). Знак * означает операцию транспонирования.

3. Так как вообще при двух строках векторов $A = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$, $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ получим, по обычным правилам матричного исчисления, для их *скалярного произведения* следующее выражение:

$$(\overset{*}{A}B) = (\overset{*}{B}A)^* = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{b}_1) & (\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{b}_2) \\ (\boldsymbol{a}_2\,\boldsymbol{b}_1) & (\boldsymbol{a}_2\,\boldsymbol{b}_2) \end{pmatrix},$$

то в данном случае

$$(\overset{*}{R},\, N_i) \equiv 0, \quad (\overset{*}{N}_i,\, N_j) = 0 \quad (i \neq j), \tag{1.2}$$

$$(\overset{*}{R},\, R) \equiv E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\overset{*}{N}_i,\, N_i) \equiv g_i = \begin{pmatrix} 1 & \cos\gamma_i \\ \cos\gamma_i & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

где γ_i — угол между векторами $\boldsymbol{n}_{2i-1}$ и $\boldsymbol{n}_{2i}$.

Дифференцированием получаются из этих тождеств следующие *уравнения инвариантности метрики*

$$\tilde{\beta}_i = -\,g_{i-1}^{-1}\,\overset{*}{\beta}_i\,g_i \quad (g_0 \equiv E), \tag{1.4}$$

$$\overset{*}{\omega} + \omega = 0, \tag{1.5}$$

$$dg_i = \vartheta_i^*\,g_i + g_i\vartheta_i. \tag{1.6}$$

4. Если продифференцировать формулы (1.1) внешним образом, то получим следующие *условия интегрируемости* (или *структурные уравнения*):

$$\begin{aligned} D\Theta &= -\,[\omega\Theta], \\ D\omega &= c[\Theta\Theta^*] - [\omega\omega] - [\tilde{\beta}_1\beta_1], \\ D\vartheta_i &= -\,[\beta_i\,\tilde{\beta}_i] - [\vartheta_i\,\vartheta_i] - [\tilde{\beta}_{i+1}\,\beta_{i+1}], \\ D\beta_i &= -\,[\beta_i\vartheta_{i-1}] - [\vartheta_i\,\beta_i] \quad (\vartheta_0 \equiv \omega;\ i = 1, \ldots, p). \end{aligned} \tag{1.7}$$

5. При нечетном n обозначим $n = 2p + 3$ и вводим дополнительно нормированный вектор $\boldsymbol{n}_{2p+1}$ на последней, одномерной нормали. Последняя формула (1.1) заменяется тогда следующими формулами:

$$\begin{aligned} dN_p &= N_{p-1}\,\tilde{\beta}_p + N_p\,\vartheta_p + \boldsymbol{n}_{2p+1}\,\beta_{p+1}, \\ d\boldsymbol{n}_{2p+1} &= N_p\,\tilde{\beta}_{p+1}, \end{aligned} \tag{1.1a}$$

где

$$\beta_{p+1} = \left(\frac{a_{2p+1}}{a_{2p-1}}\Theta^1 + \frac{b_{2p+1}}{a_{2p-1}}\Theta^2,\ \frac{b_{2p+1}}{a_{2p}}\Theta^1 - \frac{a_{2p+1}}{a_{2p}}\Theta^2\right)$$

и

$$\tilde{\beta}_{p+1} = -g_p^{-1}\overset{*}{\beta}_{p+1}. \tag{1.8}$$

К условиям интегрируемости (1.7) присоединяется соотношение

$$D\beta_{p+1} = -[\beta_{p+1}\vartheta_p], \tag{1.7a}$$

которое получается внешним дифференцированием формул (1.1a).

§ 2. Главные направления и главные кривизны

1. Формулы инфинитезимального перемещения (1.1) позволяют легко найти векторный компонент

$$N_i\beta_i\beta_{i-1}\ldots\beta_1\Theta$$

аналитической точки $d^{i+1}M$ на i-ой нормальной плоскости. Если этот компонент делить на ds^{i+1}, где

$$ds^2 = \overset{*}{\Theta}\Theta = (\Theta^1)^2 + (\Theta^2)^2,$$

то получается вектор в точке M, который выше был назван вектором i-ой нормальной кривизны. Геометрическое место концов этих векторов, отложенных от точки M, называется *i-ой индикатрисой кривизны* поверхности V_2 в точке M (см. [4]).

Обозначим угол поворота вектора $dM = R\Theta$ от вектора $\boldsymbol{e}_1$ через φ. Тогда

$$\Theta^1 = ds\cos\varphi,\ \Theta^2 = ds\sin\varphi,$$

и, следовательно,

$$\beta_1 = ds\begin{pmatrix} a_1\cos\varphi & -a_1\sin\varphi \\ a_2\sin\varphi & a_2\cos\varphi\end{pmatrix},\quad \beta_2 = ds\begin{pmatrix} \frac{a_3}{a_1}\cos\varphi & -\frac{a_3}{a_2}\sin\varphi \\ \frac{a_4}{a_1}\sin\varphi & \frac{a_4}{a_2}\cos\varphi\end{pmatrix},$$

и т. д. Поэтому

$$\beta_1\Theta = ds^2(a_1\cos 2\varphi,\ a_2\sin 2\varphi),$$
$$\beta_2\beta_1\Theta = ds^3(a_3\cos 3\varphi,\ a_4\sin 3\varphi),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

или вообще

$$\beta_i\beta_{i-2}\ldots\beta_1\Theta = ds^{i+1}(a_{2i-1}\cos(i+1)\varphi,\ a_{2i}\sin(i+1)\varphi).$$

Таким образом, направлению вектора

$$\frac{dM}{ds} = \boldsymbol{e}_1 \cos\varphi + \boldsymbol{e}_2 \sin\varphi \qquad (2.1)$$

соответствует вектор i-ой нормальной кривизны

$$\boldsymbol{n}_{2i-1}\, a_{2i-1} \cos(i+1)\varphi + \boldsymbol{n}_{2i}\, a_{2i} \sin(i+1)\varphi \qquad (2.2)$$

и i-ая индикатриса кривизны является, следовательно, овальной линией второго порядка, внутренний центр которой совпадает с точкой M поверхности V_2 (см. [1]).

2. Для каждого значения i $(i = 1, \ldots p)$ определяются две серии направлений, которым на i-ой нормальной плоскости соответствуют главные направления i-ой индикатрисы кривизны. Эти направления, составляющие последовательно друг с другом одинаковые углы $\frac{\pi}{2(i+1)}$, называются *главными направлениями i-ого порядка* минимальной поверхности V_2 (см. [1]). Им соответствуют экстремальные значения нормы вектора i-ой нормальной кривизны, которые называются *главными кривизнами i-ого порядка* и обозначаются через k_{2i-1} и k_{2i}.

Интегральные линии полей главных направлений i-ого порядка называются линиями кривизны i-ого порядка минимальной V_2.

Точка на минимальной V_2, в которой i-ая индикатриса кривизны является окружностью и в которой, следовательно, главные направления i-ого порядка не определены, называется *точкой округления* i-ого порядка [2]. В дальнейшем такие точки исключаются из рассмотрения.

3. При определении главных кривизн можно пользоваться формулами

$$\delta_i = a_{2i-1}^2 + a_{2i}^2, \quad \Delta_i = a_{2i-1}\, a_{2i} \sin\gamma_i, \qquad (2.3)$$

в которых, в силу инвариантности этих величин [1],

$$\delta_i = k_{2i-1}^2 + k_{2i}^2, \quad \Delta_i = k_{2i-1}\, k_{2i}. \qquad (2.4)$$

Обратно, величины a_{2i-1}, a_{2i} и γ_i можно выразить через главные кривизны k_{2i-1}, k_{2i} и угол φ_i между направлением вектора $\boldsymbol{e}_1$ и каким-нибудь главным направлением i-ого порядка. Действительно, если направление вектора совпадает с главным направлением i-ого порядка, то вектор (2.2) является радиусом-вектором вершины i-ой индикатрисы кривизны и, следовательно,

---

[2] В теории поверхностей многомерного пространства целесообразно различить понятия омбилической точки и точки округления, называя *омбилической* точку, в которой сам вектор нормальной кривизны не зависит от направления на касательной плоскости, а *точкой округления* такую точку, в которой неизменной остается только длина этого вектора. В случае гиперповерхности эти понятия совпадают.

ортогонален к своему производному по φ

$$(i+1)[-\boldsymbol{n}_{2i-1}\, a_{2i-1} \sin(i+1)\varphi + \boldsymbol{n}_{2i}\, a_{2i} \cos(i+1)\varphi].$$

Поэтому

$$(a_{2i-1}^2 - a_{2i}^2) \sin 2(i+1)\varphi_i - 2a_{2i-1}\, a_{2i} \cos\gamma_i \cdot \cos 2(i+1)\varphi_i = 0. \quad (2.5)$$

Из формул (2.3—5) можно выразить:

$$\cot\gamma_i = \frac{k_{2i-1}^2 - k_{2i}^2}{2k_{2i-1}k_{2i}} \sin 2(i+1)\varphi_i, \quad (2.6)$$

$$a_{2i-1} = \sqrt{\delta_i} \cos\alpha_i, \quad a_{2i} = \sqrt{\delta_i} \sin\alpha_i, \quad (2.7)$$

где

$$\cos 2\alpha_i = \frac{k_{2i-1}^2 - k_{2i}^2}{k_{2i-1}^2 + k_{2i}^2} \cos 2(i+1)\varphi_i. \quad (2.8)$$

4. Если $n = 2p+3$, то на минимальной V_2 определяются еще главные направления и главные кривизны $(p+1)$-го порядка. Именно, на касательной плоскости имеется две серии направлений — главных направлений $(p+1)$-го порядка —, в которых вектор $(p+1)$-ой нормальной кривизны

$$\frac{1}{ds^{p+2}} \boldsymbol{n}_{2p+1}\, \beta_{p+1}\beta_p\beta_{p-1}\ldots\beta_1\Theta = \boldsymbol{n}_{2p+1}[a_{2p+1}\cos(p+2)\varphi + b_{2p+1}\sin(p+2)\varphi]$$

имеет экстремальную длину $\pm k_{2p+1}$, где

$$k_{2p+1} = \sqrt{a_{2p+1}^2 + b_{2p+1}^2}. \quad (2.9)$$

Величина k_{2p+1} называется главной кривизной $(p+1)$-го порядка. Угол φ_{p+1} между направлением вектора $\boldsymbol{e}_1$ и каким-нибудь главным направлением $(p+1)$-го порядка определяется формулой

$$\tan(p+2)\varphi_{p+1} = \frac{b_{2p+1}}{a_{2p+1}}. \quad (2.10)$$

Обратно, величины a_{2p+1} и b_{2p+1} выражаются через главную кривизну k_{2p+1} и угол φ_{p+1} формулами

$$a_{2p+1} = \frac{\cos(p+2)\varphi_{p+1}}{k_{2p+1}}, \quad b_{2p+1} = \frac{\sin(p+2)\varphi_{p+1}}{k_{2p+1}}. \quad (2.11)$$

§ 3. Формулы инфинитезимального перемещения канонического репера

Репер, построенный в § 1, направления векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ которого совпадают с главными направлениями 1-го порядка, называется *каноническим репером 1-го порядка.* Тогда угол φ_i является углом между главным направлением 1-го порядка и главным направлением i-ого порядка, и поэтому

$$\varphi_1 = 0. \tag{3.1}$$

Отметим, что направления векторов $\boldsymbol{n}_{2i-1}$ и $\boldsymbol{n}_{2i}$ канонического репера совпадают с направлениями векторов i-ой нормальной кривизны линий кривизны 1-го порядка.

Каноническими величинами i-ого порядка условимся называть в дальнейшем величины, функционально зависящие только от главных кривизн $k_1, k_2, \ldots k_{2i-1}, k_{2i}$ и от углов $\varphi_2, \ldots \varphi_i$, а также, может быть, от их производных до некоторого порядка относительно форм Θ^1 и Θ^2. Такими являются, например, величины γ_i, a_{2i-1}, a_{2i} $(i = 1, \ldots, p)$ и a_{2p+1}, b_{2p+1}.

Теорема 1. *Если репер, присоединенный к точке M минимальной поверхности V_2 в R_n или S_n, лишенной точек округления, является каноническим 1-го порядка, то формы его инфинитезимального перемещения — элементы матриц ω, β_i, $\tilde{\beta}_i$, ϑ_i в формулах (1.1) — являются линейными комбинациями форм Θ^1 и Θ^2, коэффициенты которых — некоторые канонические величины i-ого порядка.*

Доказательство. Формы, являющиеся элементами матриц β_i и $\tilde{\beta}_i$, имеют требуемое строение в силу формул (1.4), (1.8) и (2.6). Остается исследовать строение элементов матриц ω и ϑ_i.

Из (2.6) и (2.3) получается, в силу (3.1), следующие равенства:

$$\gamma_1 = \frac{\pi}{2}, \; k_1 = a_1, \; k_2 = a_2.$$

Следовательно, $g_1 = E$ и переход к элементам в матричном равенстве (1.6) при $i = 1$ дает:

$$\vartheta_1{}^1 = \vartheta_2{}^2 = 0, \; \vartheta_2{}^1 = -\vartheta_1{}^2.$$

Если перейти к элементам в условии интегрируемости (1.7_4) при $i = 1$, то получаются следующие квадратичные уравнения:

$$\begin{aligned}
&[dk_1\Theta^1] + [2k_1\omega_1{}^2 - k_2\vartheta_1{}^2, \; \Theta^2] = 0,\\
&[2k_1\omega_1{}^2 - k_2\vartheta_1{}^2, \; \Theta^1] - [dk_1\Theta^2] = 0,\\
&[dk_2\Theta^1] + [2k_2\omega_1{}^2 - k_1\vartheta_1{}^2, \; \Theta^2] = 0,\\
&[2k_2\omega_1{}^2 - k_1\vartheta_1{}^2, \; \Theta^1] - [dk_2\Theta^2] = 0,
\end{aligned}$$

из которых

$$dk_1 = \Theta^1\partial_1 k_1 + \Theta^2\partial_2 k_1,$$
$$dk_2 = \Theta^1\partial_1 k_2 + \Theta^2\partial_2 k_2,$$
$$2k_1\omega_1{}^2 - k_2\vartheta_1{}^2 = \Theta^1\partial_2 k_1 - \Theta^2\partial_1 k_1,$$
$$2k_2\omega_1{}^2 - k_1\vartheta_1{}^2 = \Theta^1\partial_2 k_2 - \Theta^2\partial_1 k_2.$$

Так как точка M, по нашему предположению, не является точкой округления, то $k_1{}^2 - k_2{}^2 \neq 0$ и из последних двух уравнений следует, что

$$\omega_1{}^2 = \Gamma'\Theta^1 + \Gamma''\Theta^2, \tag{3.2}$$
$$\vartheta_1{}^2 = \Lambda_1{}'\Theta^1 + \Lambda_1{}''\Theta^2, \tag{3.3}$$

где

$$2(k_1{}^2 - k_2{}^2)\Gamma' = k_1\partial_2 k_1 - k_2\partial_2 k_2,$$
$$2(k_1{}^2 - k_2{}^2)\Gamma'' = -k_1\partial_1 k_1 + k_2\partial_1 k_2,$$
$$(k_1{}^2 - k_2{}^2)\Lambda_1{}' = k_2\partial_2 k_1 - k_1\partial_2 k_2,$$
$$(k_1{}^2 - k_2{}^2)\Lambda_1{}'' = k_1\partial_1 k_2 - k_2\partial_1 k_1.$$

Утверждение теоремы в случае $i = 1$ доказано.

Дальнейшее доказательство проведем методом математической индукции. Допустим, что утверждение теоремы доказано для матриц $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{i-1}$. Переходим к элементам в условии интегрируемости (1.7_4). Получим квадратичные уравнения

$$\begin{aligned}
[\Sigma_{2i-1}\Theta^1] + [\Pi_{2i-1}\Theta^2] &= 0,\\
[\Pi'_{2i-1}\Theta^1] - [\Sigma'_{2i-1}\Theta^2] &= 0,\\
[\Sigma_{2i}\,\Theta^1] + [\Pi_{2i}\,\Theta^2] &= 0,\\
[\Pi'_{2i}\,\Theta^1] - [\Sigma'_{2i}\,\Theta^2] &= 0.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\Sigma_{2i-1} &= da_{2i-1} - \frac{a_{2i-1}}{a_{2i-3}}\,da_{2i-3} - a_{2i-1}(\vartheta_{2i-3}^{2i-3} - \vartheta_{2i-1}^{2i-1}),\\
\Sigma_{2i} &= da_{2i} - \frac{a_{2i}}{a_{2i-2}}\,da_{2i-2} - a_{2i}\,(\vartheta_{2i-2}^{2i-2} - \vartheta_{2i}^{2i}),\\
\Pi_{2i-1} &= a_{2i-1}\omega_1{}^2 + \frac{a_{2i-3}}{a_{2i-2}}\,a_{2i-1}\vartheta_{2i-3}^{2i-2} + a_{2i}\vartheta_{2i}^{2i-1},\\
\Pi_{2i} &= a_{2i}\,\omega_1{}^2 - \frac{a_{2i-2}}{a_{2i-3}}\,a_{2i}\vartheta_{2i-2}^{2i-3} - a_{2i-1}\vartheta_{2i-1}^{2i},
\end{aligned} \tag{3.5}$$

а

$$\Sigma'_{2i-1} = \Sigma_{2i-1} + a_{2i-1}\sigma_{i-1},$$
$$\Sigma'_{2i} = \Sigma_{2i} - a_{2i}\,\sigma_{i-1},$$
$$\Pi'_{2i-1} = \Pi_{2i-1} - a_{2i-1}\pi_{i-1},$$
$$\Pi'_{2i} = \Pi_{2i} + a_{2i}\,\pi_{i-1},$$

где

$$\sigma_{i-1} = d \ln \frac{a_{2i-3}}{a_{2i-2}} + \vartheta_{2i-3}^{2i-3} - \vartheta_{2i-2}^{2i-2},$$

$$\pi_{i-1} = \frac{a_{2i-3}}{a_{2i-2}} \vartheta_{2i-3}^{2i-2} + \frac{a_{2i-2}}{a_{2i-3}} \vartheta_{2i-2}^{2i-3}.$$

По нашему индуктивному предположению

$$\sigma_{i-1} = f'_{i-1}\Theta^1 + f''_{i-1}\Theta^2,$$
$$\pi_{i-1} = g'_{i-1}\Theta^1 + g''_{i-1}\Theta^2,$$

где коэффициенты в правых частях — канонические величины $(i-1)$-го порядка.

Теперь из (3.4) следует, что

$$\begin{aligned} \Sigma_{2i-1} &= h'_{2i-1}\Theta^1 + h''_{2i-1}\Theta^2, \\ \Sigma_{2i} &= h'_{2i}\Theta^1 + h''_{2i}\Theta^2, \\ \Pi_{2i-1} &= h''_{2i-1}\Theta^1 - [h'_{2i-1} + a_{2i-1}(f'_{i-1} + g''_{i-1})]\Theta^2, \\ \Pi_{2i} &= h''_{2i}\Theta^1 - [h'_{2i} - a_{2i}(f'_{i-1} + g''_{i-1})]\Theta^2. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Если учитывать выражения $(3.5_{3,4})$ для Π_{2i-1} и Π_{2i}, формулу (3.2) и наше индуктивное предположение, то отсюда находим, что

$$\begin{aligned} \vartheta_{2i-1}^{2i} &= \Lambda_i'\Theta^1 + \Lambda_i''\Theta^2, \\ \vartheta_{2i}^{2i-1} &= \tilde{\Lambda}_i'\Theta^1 + \tilde{\Lambda}_i''\Theta^2. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Так как из (1.6), в силу (1.3), следует:

$$\vartheta_{2i-1}^{2i-1} = -\vartheta_{2i-1}^{2i}\cos\gamma_i, \quad \vartheta_{2i}^{2i} = -\vartheta_{2i}^{2i-1}\cos\gamma_i, \tag{3.8}$$

то для доказательства теоремы остается показать, что коэффициенты Λ_i', Λ_i'', $\tilde{\Lambda}_i'$ и $\tilde{\Lambda}_i''$ — канонические величины i-ого порядка. Для этого подставим выражения (3.7) и (3.8) в уравнения (3.6), в которых

$$\begin{aligned} da_{2i-1} &= \Theta^1\partial_1 a_{2i-1} + \Theta^2\partial_2 a_{2i-1}, \\ da_{2i} &= \Theta^1\partial_1 a_{2i} + \Theta^2\partial_2 a_{2i}, \end{aligned}$$

и приравниваем коэффициенты при линейно независимых формах Θ^1 и Θ^2. Получается система из 8 линейных уравнений для определения 8 неизвестных

$$h'_{2i-1},\ h''_{2i-1};\ h'_{2i},\ h''_{2i};\ \Lambda_i',\ \Lambda_i'';\ \tilde{\Lambda}_i',\ \tilde{\Lambda}_i''.$$

Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & a_{2i-1}\cos\gamma_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & a_{2i-1}\cos\gamma_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & a_{2i}\cos\gamma_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & a_{2i}\cos\gamma_i \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{2i} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{2i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -a_{2i-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{2i-1} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{2i-1}^2 a_{2i}^2 \sin^4\gamma_i$$

является канонической величиной i-го порядка, отличной от нуля, а столбец свободных членов также состоит из канонических величин i-го порядка. Теорема доказана.

Замечание. В доказательстве мы не пользовались частью из уравнений, получаемых из (1.6), и условиями интегрируемости (1.$7_{2,3}$). Если найденные выражения для элементов матриц ω и ϑ_i $(i=1,\ldots,p)$ подставить в указанные условия, то получаются некоторые уравнения, связывающие главные кривизны $k_1, k_2, \ldots, k_{2p-1}, k_{2p}; k_{2p+1}$, углы $\varphi_2, \ldots, \varphi_p; \varphi_{p+1}$ и их производные по формам Θ^1 и Θ^2. Мы не будем явно выписывать эти соотношения. Их можно коротко назвать *уравнениями интегрируемости*. Они являются, вместе с выражениями для Γ_1, Γ_2 и для Λ_i', Λ_i''; $\tilde{\Lambda}_i'$, $\tilde{\Lambda}_i''$ $(i=1,\ldots,p)$, далеко идущими обобщениями формул Гаусса и Петерсона-Кодацци из теории обычных V_2 в R_3.

§ 4. Основная теорема

Теперь мы можем приступить к доказательству следующей основной теоремы.

Теорема 2. *Если имеется дифференцируемое отображение одной минимальной поверхности V_2, лишенной точек округления, на другую такую же поверхность V_2' в пространстве R_n или S_n, при котором:*

1° *сохраняется внутренняя метрика,*

2° *линии кривизны всевозможных порядков поверхности V_2 отображаются в такие же линии поверхности V_2',*

3° *значения главных кривизн всевозможных порядков в соответствующих точках равны,*

то поверхности V_2 и V_2' конгруэнтны, т. е. они могут быть совмещены движением в пространстве R_n или S_n.

Доказательство. Прежде всего отметим, что в предположениях теоремы канонические реперы в соответствующих точках поверхностей V_2 и V_2' конгруэнтны. Действительно, из 1° и 2° следует, что в соответствующих точках совпадают значения углов $\varphi_2, \ldots, \varphi_p$, а из 3° следует, что одинаковы и значения

главных кривизн k_1, $k_2, \ldots, k_{2p-1}$, k_{2p}, k_{2p+1}. Наше утверждение следует теперь из формул (2.6). Вместе с тем ясно, что в соответствующих точках поверхностей V_2 и V_2' совпадают также все канонические величины i-ого порядка ($i = 1, \ldots, p+1$).

Из условия 1° следует, что имеет место тождество $ds'^2 \equiv ds^2$, или

$$(\Theta'^1)^2 + (\Theta'^2)^2 \equiv (\Theta^1)^2 + (\Theta^2)^2,$$

где «штрих» означает принадлежность соответствующей величины или формы к поверхности V_2'. Поэтому

$$\Theta'^1 = \Theta^1, \quad \Theta'^2 = \Theta^2.$$

Результат, полученный в § 3, позволяет теперь утверждать, что все элементы матриц ω, β_i, $\tilde{\beta}_i$ и ϑ_i ($i = 1, \ldots, p$) в формулах (1.1) совершенно одинаковы на V_2 и V'_2.

Кроме того, можно, без ограничения общности, предположить, что некоторые соответствующие точки M_0 и M_0' на поверхностях V_2 и V'_2, а также канонические реперы в этих точках, уже приведены в совпадение подходящим образом выбранным движением в R_n или S_n.

Координаты точки M и векторов реперов R, $N_1, \ldots, N_p$ (а также вектора $\boldsymbol{n}_{2p+1}$ при $n = 2p+3$) как поверхности V_2, так и поверхности V_2' являются теперь двумя решениями одной и той же системы (1.1) (и (1.1a) при $n = 2p+3$), удовлетворяющими одними и теми же начальными условиями, и поэтому совпадают. Но это и означает возможность совместить поверхности V_2 и V_2' некоторым движением. Теорема доказана.

Замечание. Для существования минимальной поверхности V_2 при заданной внутренней метрике и заданным величинам $\varphi_2, \ldots, \varphi_p$; φ_{p+1} и $k_1, k_2, \ldots k_{2p}$, k_{2p+1} необходимо выполнение определенных уравнений интегрируемости, о которых говорилось выше. Доказательство существования минимальной V_2, если эти уравнения удовлетворены, получается с помощью системы (1.1).

§ 5. Изгибание с сохранением главных кривизн первого порядка

1. Минимальную поверхность V_2 в R_3 можно, как известно [3], непрерывно изгибать с сохранением главных кривизн. В настоящем параграфе доказывается следующий более общий результат:

Теорема 3. *Минимальная поверхность V_2 в R_n или S_n допускает непрерывное изгибание в классе минимальных же поверхностей V_2 в R_n или S_n с сохранением главных кривизн первого порядка.*

Что касается следующих условий (1. 7) и (1. 7а), то они, очевидно, выполнены.

Следовательно, существует поверхность $\bar{V}_2 = \bar{V}_2(\alpha)$, описываемая точкой $\bar{M}$, и присоединенный к ней репер $\bar{R}$, $\bar{N}_1, \ldots, \bar{N}_p$; $\bar{n}_{2p+1}$, для которого матрицы (5. 1) являются соответствующими матрицами в формулах его инфинитезимального перемещения, аналогичных формулам (1. 1).

Решение вполне интегрируемой системы

$$\bar{\Theta} - A\Theta = 0$$

при заданных начальных условиях устанавливает соответствие между точками поверхностей V_2 и $\bar{V}_2 = V_2(\alpha)$, являющееся изометрическим, так как

$$d\bar{s}^2 = \overset{*}{\bar{\Theta}}\bar{\Theta} = \overset{*}{\Theta}\overset{*}{\bar{A}}A\Theta = \overset{*}{\Theta}\Theta = ds^2.$$

При изменении параметра α получается непрерывное изгибание заданной минимальной поверхности $V_2 = V_2(0)$.

Остается доказать, что поверхность $\bar{V}_2$ является также минимальной поверхностью, главные кривизны первого порядка которой совпадают с главными кривизнами первого порядка поверхности V_2. Для этого исследуем строение матрицы $\bar{\beta}_1$:

$$\bar{\beta}_1 = \beta_1 A = \begin{pmatrix} k_1\Theta^1 & -k_1\Theta^2 \\ k_2\Theta^2 & k_2\Theta^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} k_1(\Theta^1\cos\alpha - \Theta^2\sin\alpha) & -k_1(\Theta^1\sin\alpha + \Theta^2\cos\alpha) \\ k_2(\Theta^1\sin\alpha + \Theta^2\cos\alpha) & k_2(\Theta^1\cos\alpha - \Theta^2\sin\alpha) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} k_1\bar{\Theta}^1 & -k_1\bar{\Theta}^2 \\ k_2\bar{\Theta}^2 & k_2\bar{\Theta}^1 \end{pmatrix}.$$

Наше утверждение следует отсюда непосредственно. Теорема доказана.

2. Для изгибания минимальных поверхностей V_2 в четырехмерных пространствах теорема 3 дает окончательный результат. Семейство минимальных поверхностей $V_2(\alpha)$ в R_4 или S_4 естественно назвать, по аналогии с трехмерным случаем, семейством *ассоциированных* минимальных поверхностей к данной минимальной поверхности V_2. В частности, поверхность $V_2\left(\frac{\pi}{4}\right)$ естественно назвать *присоединенной* к данной V_2. Главные кривизны k_1 и k_2 в соответствующих точках поверхностей V_2 и $V_2\left(\frac{\pi}{4}\right)$ равны; линии кривизны одной сети (k_1-сети) отображаются при изгибании на линии кривизны другой сети (k_2-сети).

Доказательство. Пусть задана система форм — элементы матриц Θ, ω, β_1, $\vartheta_1, \ldots$ β_p, ϑ_p, β_{p+1}, $\tilde{\beta}_i = -g_{i-1}^{-1}\overset{*}{\beta}_i g_i$ (где g_i — заданная матрица типа (1.3) и $g_1 = E$), удовлетворяющих условиям (1.5), (1.6), (1.7) и (1.7a). Тем самым однозначно определена некоторая двумерная поверхность V_2 вместе с прикрепленным к ей точке M репером — решение системы (1.1) при некоторых определенных начальных условиях

$$M|_0 = M_0,\ R|_0 = R^{(0)},\ N_i|_0 = N_i^{(0)},$$

удовлетворяющих условиям (1.2) и (1.3). Это следует непосредственно из того, что (1.7) и (1.7a) являются условиями интегрируемости системы (1.1).

Пусть теперь Θ, ω, β_1, $\vartheta_1, \ldots, \beta_p$, ϑ_p, β_{p+1} — матрицы в формулах инфинитезимального перемещения (1.1) канонического репера первого порядка некоторой минимальной поверхности V_2. Рассмотрим новую систему форм — элементов матриц

$$\overline{\Theta} = A\Theta,\ \overline{\omega} = \omega,\ \overline{\beta}_1 = \beta_1 A,\ \overline{\vartheta}_1 = \vartheta_1,\ \overline{\beta}_i = \beta_i,\ \overline{\vartheta}_i = \vartheta_i,\ \overline{\beta}_{p+1} = \beta_{p+1},$$

$$\overline{\tilde{\beta}}_1 = \bar{\beta}_1{}^*,\ \overline{\tilde{\beta}}_i = -g_{i-1}^{-1}\bar{\beta}_i{}^* g_i,$$

$$(i = 2, \ldots, p), \qquad (5.1)$$

где $A = A(\alpha)$ — ортогональная матрица второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что эта система также удовлетворяет условиям (1.7) и (1.7а). Действительно, матрицы

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1^2 \\ \omega_1^2 & 0 \end{pmatrix},\quad [\Theta\Theta^*] = \begin{pmatrix} 0 & [\Theta^1\Theta^2] \\ -[\Theta^1\Theta^2] & 0 \end{pmatrix},$$

$$[\tilde{\beta}_1\beta_1] = -[\beta_1{}^*\beta_1] = \begin{pmatrix} 0 & +(k_1^2+k_2^2)[\Theta^1\Theta^2] \\ -(k_1^2+k_2^2)[\Theta^1\Theta^2] & 0 \end{pmatrix},$$

как легко видеть, коммутируемы с матрицами A и $A^* = A^{-1}$, и поэтому

$$D\overline{\Theta} = AD\Theta = -A[\omega\Theta] = -[\omega A\Theta] = -[\overline{\omega}\overline{\Theta}],$$

$$D\overline{\omega} = D\omega = cA[\Theta\Theta^*]A^* - [\omega\omega] + A^*[\beta_1{}^*\beta_1]A =$$

$$= c[\overline{\Theta}\overline{\Theta}^*] - [\overline{\omega}\overline{\omega}] - [\overline{\tilde{\beta}}_1\overline{\beta}_1],$$

$$D\overline{\beta}_1 = D\beta_1 A = -[\beta_1\omega]A - [\vartheta_1\beta_1]A = -[\overline{\beta}_1\overline{\omega}] - [\overline{\vartheta}_1\overline{\beta}_1],$$

$$D\overline{\vartheta}_1 = D\vartheta_1 = +[\beta_1 AA^*\beta_1{}^*] - [\vartheta_1\vartheta_1] - [\tilde{\beta}_2\beta_2] =$$

$$= -[\overline{\beta}_1\overline{\tilde{\beta}}_1] - [\overline{\vartheta}_1\overline{\vartheta}_1] - [\overline{\tilde{\beta}}_2\overline{\beta}_2].$$

В пространствах с размерностью $n > 4$ картина в части, касающейся главных направлений и кривизн более высокого порядка, сильно усложняется. Это связано с тем, что репер $\overline{R}$, $\overline{N}_1, \ldots, \overline{N}_p$, $\overline{\boldsymbol{n}}_{2p+1}$, присоединенный к точке $\overline{M}$ поверхности $\overline{V}_2 = V(\alpha)$, не является уже каноническим.

3. Рассмотрим, например, поведение главных кривизн и главных направлений второго порядка при изгибании минимальной V_2, определяемом системой (5. 1), в пяти- и шестимерных пространствах.

Исследуем, во-первых, случай $n = 5$, и найдем главную кривизну 2-го порядка $\overline{k}_3$ и угол $\overline{\varphi}_2$ между главными направлениями 1-го и 2-го порядка поверхности $\overline{V}_2 = V_2(\alpha)$. Для этого отметим, что

$$\overline{\beta}_3 = \beta_3 = \left\{\frac{a_3}{k_1}\Theta^1 + \frac{b_3}{k_1}\Theta^2,\ \frac{b_3}{k_2}\Theta^1 - \frac{a_3}{k_2}\Theta^2\right\} =$$

$$= \left\{\frac{\overline{a}_3}{k_1}\overline{\Theta}^1 + \frac{\overline{b}_3}{k_1}\overline{\Theta}^2,\ \frac{\overline{b}_3}{k_2}\overline{\Theta}^1 - \frac{\overline{a}_3}{k_2}\overline{\Theta}^2\right\},$$

где, в силу равенства $\Theta = A^*\overline{\Theta}$,

$$\bar{a}_3 = a_3 \cos\alpha - b_3 \sin\alpha,$$

$$\overline{b}_3 = a_3 \sin\alpha + b_3 \cos\alpha.$$

Следовательно, по формулам (2. 9) и (2. 10)

$$\overline{k}_3 = k_3,\ \overline{\varphi}_2 = \varphi_2 + \frac{\alpha}{3}. \tag{5. 2}$$

Рассмотрим теперь случай $n = 6$, и найдем также главные кривизны $\overline{k}_3$ и $\overline{k}_4$ и угол $\overline{\varphi}_2$ поверхности $\overline{V}_2 = V_2(\alpha)$. Имеем, с одной стороны,

$$\overline{N}_2\overline{\beta}_2 = \overline{N}_2\beta_2 = \{\overline{\boldsymbol{n}}_3,\ \overline{\boldsymbol{n}}_4\}\begin{pmatrix} \frac{a_3}{k_1}\Theta^1 & -\frac{a_3}{k_2}\Theta^2 \\ \frac{a_4}{k_1}\Theta^2 & \frac{a_4}{k_2}\Theta^1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left\{\frac{1}{k_1}(a_3\overline{\boldsymbol{n}}_3\Theta^1 + a_4\overline{\boldsymbol{n}}_4\Theta^2),\ \frac{1}{k_2}(a_1\overline{\boldsymbol{n}}_4\Theta^1 - a_3\overline{\boldsymbol{n}}_3\Theta^2)\right\},$$

с другой стороны,

$$\overline{N}_2\overline{\beta}_2 = \left\{\frac{1}{k_1}(\overline{a}_3\overline{\boldsymbol{n}}_3'\overline{\Theta}^1 + \overline{a}_4\overline{\boldsymbol{n}}_4'\overline{\Theta}^2),\ \frac{1}{k_2}(\overline{a}_4\overline{\boldsymbol{n}}_4'\overline{\Theta}^1 - \overline{a}_3\overline{\boldsymbol{n}}'_3\overline{\Theta}^2)\right\},$$

где $\overline{\boldsymbol{n}}_3'$ и $\overline{\boldsymbol{n}}_3'$ — векторы канонического репера 1-го порядка, присоединенного к точке $\overline{M}$ поверхности $\overline{V}_2$. Сравнение дает, в силу равенства $\Theta = A^*\overline{\Theta}$, следующие соотношения:

$$\bar{a}_3\bar{\boldsymbol{n}}_3' = a_3\bar{\boldsymbol{n}}_3\cos\alpha - a_4\bar{\boldsymbol{n}}_4\sin\alpha,$$
$$\bar{a}_4\bar{\boldsymbol{n}}_4' = a_3\bar{\boldsymbol{n}}_3\sin\alpha + a_4\bar{\boldsymbol{n}}_4\cos\alpha. \tag{5.3}$$

Если сложить скалярные квадраты этих векторов, то получается равенство

$$\bar{a}_3^2 + \bar{a}_4^2 = a_3^2 + a_4^2,$$

если взять их косое произведение, имеем:

$$\bar{a}_3\bar{a}_4\sin\bar{\gamma}_2 = a_3a_4\sin\gamma_2. \tag{5.4}$$

Отсюда, по формулам (2.3) и (2.4), следует, что

$$\bar{k}_3 = k_3,\ \bar{k}_4 = k_4. \tag{5.5}$$

При скалярном умножении векторов (5.3) получается:

$$\bar{a}_3\bar{a}_4\cos\bar{\gamma}_2 = \frac{a_3^2 - a_4^2}{2}\sin 2\alpha + a_3a_4\cos\gamma_2\cos 2\alpha.$$

Отсюда, используя формулы (5.4) и (2.6—8), можно получить следующее простое соотношение между углами $\bar{\varphi}_2$ и φ_2, которые главные направления 2-го порядка составляют с главными направлениями 1-го порядка, соответственно, на поверхностях $\bar{V}_2$ и V_2:

$$\bar{\varphi}_2 = \varphi_2 + \frac{\alpha}{3}. \tag{5.6}$$

Таким образом, при рассматриваемом в п. I изгибании минимальной поверхности V_2 в 5- и 6-мерных пространствах сохраняются главные кривизны не только 1-го порядка, но и 2-го порядка; угол φ_2 между главными направлениями 1-го и 2-го порядка изменяется по простому закону (5.6).

Продолжение этих исследований в пространствах с более высокой размерностью $n > 6$ наталкивается на серьезные трудности, связанные с дифференцированием векторов (5.3), что и вынудило нас ограничиваться рассмотренными случаями $n \leqslant 6$.

Литература

1. Лумисте Ю. Г., К теории двумерных минимальных поверхностей I. Теория кривизны. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 3—15.
2. Петерсон К. М., Об изгибании поверхностей. В сб. «Истор.-матем. исследования», вып. 5, Москва, 1952, стр. 87—112.
3. Фиников С. П., Дифференциальная геометрия. Москва, 1961.
4. Bořůvka, O., Recherches sur la courbure des surfaces dans des espaces à n dimensions à courbure constante, I, II, III. Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk, 1932, **165**, 1—22; 1935, **212**, 1—20; 1935, **214**, 1—25.

Поступило
29 II 1962

KAHEMÕÕTMELISTE MINIMAALPINDADE TEOORIAST III. PÕHITEOREEM JA PAINUTAMINE

Ü. Lumiste

Geomeetria kateeder

Resümee

Käesolevas artiklis, mis kujutab endast autori töö [1] järge, tõestatakse n-mõõtmelise eukleidilise ruumi R_n või mitteeukleidilise ruumi S_n kahemõõtmeliste minimaalpindade V_2 teooria põhiteoreem pinna V_2 määramisest sisemeetrikaga, peakõverustega ja mitmesugust järku peasihtide vaheliste nurkadega. Näidatakse, et minimaalpinda V_2 võib pidevalt painutada minimaalpindade klassis, nii et esimest järku peakõverused säilivad.

ZUR THEORIE DER ZWEIDIMENSIONALEN MINIMALFLÄCHEN III. GRUNDSATZ UND VERBIEGUNG

Ü. Lumiste

Zusammenfassung

In diesem Artikel, der eine Erweiterung des Aufsatzes des Autors [1] darstellt, wird ein Grundsatz der Theorie der zweidimensionalen Minimalflächen V_2 im n-dimensionalen euklidischen Raum R_n oder nichteuklidischen Raum S_n über der eindeutigen Bestimmung der V_2 mit innerer Metrik, Hauptkrümmungen und Winkeln zwischen Hauptrichtungen verschiedener Ordnung bewiesen. Es wird gezeigt, daß die Minimalfläche V_2 sich in der Klasse der Minimalflächen stetig verbiegen läßt, so daß die Hauptkrümmungen erster Ordnung sich erhalten.

К ТЕОРИИ ДВУМЕРНЫХ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ IV. ПОВЕРХНОСТИ С ОКРУЖНОСТЯМИ КРИВИЗНЫ

Ю. Лумисте
Кафедра геометрии

В нашей предыдущей статье [7], посвященной общей теории двумерных минимальных поверхностей в n-мерном эвклидовом пространстве R_n или неэвклидовом пространстве S_n, были исключены поверхности с точками округления i-ого порядка (т. е. с точками, в которых i-ая индикатриса кривизны является окружностью). В настоящей работе мы, наоборот, интересуемся минимальными поверхностями V_2, состоящими целиком из точек округления i-ого порядка. Такие поверхности, вернее некоторые их частные случаи, были предметом уже нескольких исследований. Первыми из них являются работы С. Квиетневского, К. Коммерелла и Л. П. Эйзенхарта (см. [9], стр. 124), в которых установлено, что в R_4 класс таких поверхностей совпадает с классом так называемых комплексно аналитических поверхностей — поверхностей, которые в ортонормированных декартовых координатах x, y, u, v определяются аналитическими функциями $w = f(z)$, где $w = u + iv$, $z = x + iy$.

Продолжением этих исследований являются работы О. Борувки [10, 11, 12]. В [12], например, доказано, что минимальные поверхности V_2 в эвклидовом пространстве R_n или неэвклидовом пространстве S_n, первые l индикатрис кривизны которых окружности, существуют с произволом $2(n-l-2)$ функций одного аргумента и в случае пространства R_{2p} при $l = p$ совпадают с комплексно аналитическими поверхностями [1].

Недавно минимальные поверхности V_2 с $m-1$ окружно-

[1] Иначе говоря, являются образами аналитической кривой унитарного эвклидова пространства $U_p(i)$. Отметим, что эта интересная связь таких поверхностей в R_{2p} с аналитическими кривыми в $U_p(i)$ не обобщается на случай неэвклидового пространства S_{2p}, потому что риманово пространство V_{2p}, изометричное неэвклидовому унитарному пространству $K_p(i)$, не имеет уже постоянную кривизну (см. [7], стр. 696).

стями кривизны в неэвклидовом пространстве S_{2m+1} исследовал К. Свобода. В [14] он дал необходимые и достаточные условия того, чтобы поверхность проективного пространства P_{2m+1} могла быть превращена в минимальную поверхность с $m-1$ окружностями кривизны введением в P_{2m+1} проективной метрики. В [15] исследованы минимальные поверхности V_2 с окружностями кривизны постоянного радиуса в S_{2m+1}.

В настоящей статье дается, во-первых, теорема об определении минимальной поверхности V_2 с l окружностями кривизны в R_n или S_n 1) внутренней метрикой, 2) радиусами окружностей кривизны, 3) углами между линиями кривизны высших порядков и 4) главными кривизнами высших порядков. Дальше доказывается, что свойство l-ых индикатрис кривизны минимальной V_2 в R_n или S_n быть окружностями равносильно тому, что поверхность V_{2l+2} соприкасающихся плоскостей $(l-1)$-го порядка поверхности V_2 является минимальной поверхностью. Устанавливается еще одно свойство внутренней метрики минимальной V_2 с окружностями кривизны в R_n или S_n, обобщающее известный результат Риччи о внутренней метрике минимальной V_2 в R_3.

§ 1. Основная теорема

Пусть в R_n или S_n задана минимальная поверхность V_2, первые l индикатрис кривизны которой в любой точке M являются окружностями. Тогда главные направления 1-го, 2-го, ..., l-го порядка поверхности V_2 не определены, но все те построения и результаты из общей теории минимальных V_2 (см. [7]), которые предшествуют введению понятия главного направления, остаются в силе. Интересующие нас поверхности выделяются среди общих минимальных поверхностей V_2 равенствами

$$k_1 = k_2 = \varkappa_1,\ k_3 = k_4 = \varkappa_1\varkappa_2, \ldots,\ k_{2l-1} = k_{2l} = \varkappa_1\varkappa_2 \ldots \varkappa_l, \quad (1.1)$$

обеспечивающими как раз то, что первые l индикатрисы кривизны — окружности (см. [7], § 2, п. 2). Эти соотношения приводят к следующим следствиям:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_l = \frac{\pi}{2}, \quad (1.2)$$

$$a_1 = a_2 = \varkappa_1,\ a_3 = a_4 = \varkappa_1\varkappa_2,\ \ldots,\ a_{2l-1} = a_{2l} = \varkappa_1\varkappa_2 \ldots \varkappa_l \quad (1.3)$$

(см. [7], формулы (2.6), (2.7) и (2.8)), из которых, в свою очередь, вытекают равенства

$$g_1 = g_2 = \ldots = g_l = E, \quad (1.4)$$

$$\tilde{\beta}_1 = -\beta_1^*,\ \tilde{\beta}_2 = -\beta_2^*, \ldots,\ \tilde{\beta}_l = -\beta_l^*, \quad (1.5)$$

$$\vartheta_1^* + \vartheta_1 = \vartheta_2^* + \vartheta_2 = \ldots = \vartheta_l^* + \vartheta_l = 0, \quad (1.6)$$

$$\beta_1 = \varkappa_1\Theta,\ \beta_2 = \varkappa_2\Theta, \ldots,\ \beta_l = \varkappa_l\Theta, \quad (1.7)$$

где

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta^1 & -\Theta^2 \\ \Theta^2 & \Theta^1 \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

(см. [7], формулы (1.3), (1.6) и выражения для β_i).

Канонические реперы 1-го, 2-го, ..., l-го порядка в данном случае неопределены, потому что не определены главные направления этих порядков. Если $n > 2l+2$, то репер можно канонизировать с помощью главных направлений $(l+1)$-го порядка, повернув вектор $\boldsymbol{e}_1$ в какое-нибудь из этих главных направлений. Соответствующий репер, характеризуемый равенством

$$\varphi_{l+1} = 0,$$

называется каноническим репером $(l+1)$-го порядка.

Каноническими величинами i-ого порядка $(i \leqslant l)$ условимся в данном случае называть величины, функционально зависящие только от $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_l$, а также, может быть, от их производных до некоторого порядка относительно форм Θ^1 и Θ^2. Канонические величины более высоких порядков определяются точно так же, как в [7], с той только разницей, что нужно учитывать равенства (1.1) и не требовать зависимости от углов $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$, которые в данном случае неопределены.

Имеет место следующая теорема (ср. теорема 1 в [7]).

Теорема 1. а) *Формы инфинитезимального перемещения репера, присоединенного к точке M минимальной поверхности V_2 в R_{2p} или S_{2p}, все индикатрисы кривизны которой окружности, выражаются в виде сумм, первые слагаемые которых — целочисленные кратные формы $\omega_1{}^2$, вторые слагаемые — линейные комбинации форм Θ^1 и Θ^2 с каноническими величинами в качестве коэффициентов.*

б) *Если репер, присоединенный к точке M минимальной поверхности V_2 в R_n или S_n, первые l индикатрисы которой в произвольной точке — окружности, является каноническим $(l+1)$-го порядка $(n > 2l+2)$, то формы его инфинитезимального перемещения являются линейными комбинациями форм Θ^1 и Θ^2, коэффициенты которых — канонические величины.*

Доказательство. Переходим к элементам в матричном условии интегрируемости

$$D\beta_i = -[\beta_i \vartheta_{i-1}] - [\vartheta_i \beta_i] \quad (i = 1, \ldots, l),$$

(см. [1], (1.7)), учитывая равенства (1.6) и (1.7). Мы получим сперва

$$[d\varkappa_i\, \Theta] + \varkappa_i D\Theta = -\varkappa_i([\Theta\vartheta_{i-1}] + [\vartheta_i\, \Theta]),$$

и отсюда

$$[d \ln \varkappa_i,\ \Theta^1] + [\omega_1{}^2 + \vartheta_{2i-3}^{2i-2} - \vartheta_{2i-1}^{2i},\ \Theta^2] = 0,$$

$$[\omega_1{}^2 + \vartheta_{2i-3}^{2i-2} - \vartheta_{2i-1}^{2i},\ \Theta^1] - [d \ln \varkappa_i,\ \Theta^2] = 0.$$

Следовательно,

$$d \ln \varkappa_i = \Theta^1 \partial_1 \ln \varkappa_i + \Theta^2 \partial_2 \ln \varkappa_i, \tag{1.9}$$

$$\omega_1{}^2 + \vartheta_{2i-3}^{2i-2} - \vartheta_{2i-1}^{2i} = \Theta^1 \partial_2 \ln \varkappa_i - \Theta^2 \partial_1 \ln \varkappa_i \ (i = 1, 2, \ldots, l). \tag{1.10}$$

Отсюда при $i = 1$ (учитывая, что $\vartheta_{-1}^{0} \equiv \omega_1{}^2$; см. [7], (1.7)) получаем

$$2\omega_1{}^2 - \vartheta_1{}^2 = \Theta^1 \partial_2 \ln \varkappa_1 - \Theta^2 \partial_1 \ln \varkappa_1,$$

при $i = 2$ получаем

$$\omega_1{}^2 + \vartheta_1{}^2 - \vartheta_3{}^4 = \Theta^1 \partial_2 \ln \varkappa_2 - \Theta^2 \partial_1 \ln \varkappa_2$$

и т. д. Так как, в силу (1.5), среди элементов матрицы ϑ_i $(i = 1, \ldots, l)$ существенный только один — ϑ_{2i-1}^{2i}, то утверждение а) теоремы 1 доказано (см. еще (1.7)).

Что касается утверждения б), то дальнейшее его доказательство мало чем отличается от доказательства теоремы 1 из статьи [7], и мы его повторить не будем.

Переходим к формулировке и доказательству основной теоремы.

Теорема 2. а) *Если в R_{2p} или S_{2p} заданы две минимальных поверхности V_2 и $\overline{V}_2$, все индикатрисы кривизны которых — окружности, и дифференцируемое отображение V_2 на $\overline{V}_2$, при котором:*

1° *сохраняется внутренняя метрика,*

2° *индикатрисы-окружности кривизны одного и того же порядка имеют в соответствующих точках одинаковый радиус,*

то поверхности V_2 и $\overline{V}_2$ конгруэнтны. Они могут быть совмещены движением в R_{2p} или S_{2p} (определяемым с точностью до вращения вокруг ортогонального дополнения касательной плоскости).

б) *Если в R_n или S_n $(n > 2l + 2)$ заданы две минимальных поверхности V_2 и $\overline{V}_2$, первые l индикатрис кривизны которых окружности, и дифференцируемое отображение V_2 на $\overline{V}_2$, при котором*

1° *сохраняется внутренняя метрика,*

2° *индикатрисы-окружности кривизны одинаковых порядков $1, \ldots, l$ имеют в соответствующих точках одинаковый радиус,*

3° *линии кривизны поверхности V_2, начиная с порядка l, отображаются на такие же линии поверхности $\overline{V}_2$,*

4° *значения главных кривизн, начиная с порядка l, в соответствующих точках равны,*

то поверхности V_2 и $\overline{V}_2$ конгруэнтны.

Доказательство. Из условия 1° следует, точно так же, как при доказательстве теоремы 2 в [7], что

$$\bar{\Theta}^1 = \Theta^1, \quad \bar{\Theta}^2 = \Theta^2.$$

Теперь из условия интегрируемости

$$D\Theta = -[\omega\Theta]$$

(см. [7], формула (1.7_1)) следует, что

$$D\Theta^1 = -[\omega_1{}^2\Theta^2], \quad D\Theta^2 = [\omega_1{}^2\Theta^1],$$

$$D\Theta^1 = -[\bar{\omega}_1{}^2\Theta^2], \quad D\Theta^2 = [\bar{\omega}_1{}^2\Theta^1].$$

Отсюда

$$[\bar{\omega}_1{}^2 - \omega_1{}^2, \ \Theta^2] = 0, \ [\bar{\omega}_1{}^2 - \omega_1{}^2, \ \Theta^1] = 0,$$

т. е.

$$\bar{\omega}_1{}^2 = \omega_1{}^2. \tag{1.11}$$

Возьмем на V_2 и $\bar{V}_2$ некоторую пару соответствующих точек M_0 и $\bar{M}_0$. Так как реперы, присоединенные к этим точкам, в случае а), ортонормальны (см. (1.4)), то их можно совместить некоторым движением в R_{2p} или S_{2p}. Из формулы (1.11), теоремы 1 а) и условия 2° теоремы 2 а) следует теперь, что координаты точки M и векторов присоединенного к ней репера как на поверхности V_2, так и на поверхности $\bar{V}_2$ являются двумя решениями одной и той же системы (составленной из формул инфинитезимального перемещения репера), удовлетворяющими одним и тем же начальным условиям. Отсюда и следует, что поверхности V_2 и $\bar{V}_2$ после сделанного нами движения совпадают. Но это движение определяется с точностью до вращения вокруг ортогонального дополнения касательной плоскости, так как репер, присоединенный к точке M поверхности V_2, можно в случае а) свободно вращать в касательной плоскости. Теорема 2 а) доказана.

Теорема 2б) доказывается аналогичным путем (ср. доказательство теоремы 2 из [7]).

§ 2. Поверхность соприкасающихся плоскостей

Плоскость, натянутая на касательную плоскость и первые $l-1$ нормальные плоскости в заданной точке M минимальной поверхности V_2 в R_n или S_n, называется соприкасающейся плоскостью $(l-1)$-го порядка поверхности V_2 в точке M. В общем случае, когда $n \geqslant 2l$, она имеет размерность $2l$. Если взять такую плоскость в произвольной точке поверхности V_2, то в R_n или S_n

образуется 2-параметрическое семейство $2l$-мерных плоскостей, которое при $n > 2l+2$ является некоторой $(2l+2)$-мерной поверхностью V_{2l+2}, называемой поверхностью соприкасающихся плоскостей $(l-1)$-го порядка минимальной поверхности V_2.

Имеет место следующая

Теорема 3. *Поверхность V_{2l+2} соприкасающихся плоскостей $(l-1)$-го порядка минимальной поверхности V_2 в R_n или S_n $(n > 2l+2)$ является минимальной поверхностью*[2] *тогда и только тогда, если l-ая индикатриса кривизны в произвольной точке поверхности V_2 является окружностью.*

Доказательство. Поверхность V_{2l+2} описывается точкой

$$\tilde{M} = \lambda M + RV + N_i U^i \quad (i = 1, \ldots, l-1), \tag{2.1}$$

где

$$V = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}, \quad U^i = \begin{pmatrix} u^{2i-1} \\ u^{2i} \end{pmatrix}.$$

Коэффициент λ в эвклидовом пространстве R_n равен $\lambda = 1$, а в неэвклидовом пространстве S_n выбирается так, чтобы аналитическая точка $\tilde{M}$ была нормирована условием $(\tilde{M}\tilde{M}) = \frac{1}{c}$ (см., напр., [4]).

Репер, присоединенный к точке $\tilde{M}$, состоит из следующих строк векторов в точке $\tilde{M}$:

$$\tilde{R} = cU^*M - R,$$
$$\tilde{N}_i = c(U^i)^*M - N_i \quad (i = 1, \ldots, l-1),$$
$$\tilde{N}_l = N_l, \ \tilde{N}_\varrho = N_\varrho, \quad (\varrho = l+1, \ldots).$$

(В эвклидовом пространстве R_n $c = 0$, и тогда получим строки из обычных векторов.)

Продифференцируем соотношение (2.1), используя при этом формулы инфинитезимального перемещения (1.1) из статьи [7]. Если перейти к новому реперу $\{\tilde{M}, \tilde{R}, \tilde{N}_1, \ldots\}$, то получим:

$$d\tilde{M} = \tilde{R}\tilde{\Theta} + \tilde{N}_i \tilde{\Theta}^i + \tilde{N}_l \tilde{\Theta}^l,$$

---

[2] Напомним, что поверхность V_m в R_n или S_n называется минимальной, если вариация объема ее области, ограниченной произвольной замкнутой подповерхностью, равна нулю при закрепленной границе. Для этого необходимо и достаточно равенство нулю вектора средней кривизны (см. [9], стр. 100).

где, в частности,

$$\tilde{\Theta}^l = \beta_l U^{l-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_{2l-1}}{a_{2l-3}}\Theta^1 & -\frac{a_{2l-1}}{a_{2l-2}}\Theta^2 \\ -\frac{a_{2l}}{a_{2l-3}}\Theta^2 & \frac{a_{2l}}{a_{2l-2}}\Theta^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{2l-3} \\ u^{2l-2} \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\tilde{\Theta}^{2l-1} = a_{2l-1}(v^{2l-3}\Theta^1 - v^{2l-2}\Theta^2),$$
$$\tilde{\Theta}^{2l} = a_{2l}(v^{2l-3}\Theta^2 + v^{2l-2}\Theta^1),$$

где

$$v^{2l-3} = \frac{u^{2l-3}}{a_{2l-3}}, \quad v^{2l-2} = \frac{u^{2l-2}}{a_{2l-2}}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \Theta^1 &= w^{2l-3}a_{2l}\tilde{\Theta}^{2l-1} + w^{2l-2}a_{2l-1}\tilde{\Theta}^{2l}, \\ \Theta^2 &= -w^{2l-2}a_{2l}\tilde{\Theta}^{2l-1} + w^{2l-3}a_{2l-1}\tilde{\Theta}^{2l}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где w^{2l-3} и w^{2l-2} — некоторые новые параметры, выражающиеся через старые параметры u^{2l-3}, u^{2l-2}.

Среди векторов, касательных к поверхности V_{2l+2}, только векторы строки N_l дают при дифференцировании нормальные компоненты:

$$N_{l+1}\beta_{l+1} = (\boldsymbol{n}_{2l+1}, \boldsymbol{n}_{2l+2}) \begin{pmatrix} \frac{a_{2l+1}}{a_{2l-1}}\Theta^1 & -\frac{a_{2l+1}}{a_{2l}}\Theta^2 \\ \frac{a_{2l+2}}{a_{2l-1}}\Theta^2 & \frac{a_{2l+2}}{a_{2l}}\Theta^1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{a_{2l+1}}{a_{2l-1}}\Theta^1\boldsymbol{n}_{2l+1} + \frac{a_{2l+2}}{a_{2l-1}}\Theta^2\boldsymbol{n}_{2l+2}, \; -\frac{a_{2l+1}}{a_{2l}}\Theta^2\boldsymbol{n}_{2l+1} + \frac{a_{2l+2}}{a_{2l}}\Theta^1\boldsymbol{n}_{2l+2}\right). \tag{2.3}$$

Если сюда подставить выражения (2.2) для форм Θ^1 и Θ^2, то можно найти компоненты второго фундаментального тензора поверхности V_{2l+2}. В самом деле, в общем случае поверхности V_m в R_n или S_n, когда имеют место формулы

$$\begin{aligned} &d\boldsymbol{M} = \boldsymbol{e}_i\Theta^i, \\ &d\boldsymbol{e}_i = -cg_{ij}\Theta^j\boldsymbol{M} + \omega_i{}^j\boldsymbol{e}_j + b_{ij}{}^\alpha\Theta^j\boldsymbol{n}_\alpha, \\ &(i, j = 1, \ldots, m;\ \alpha = m+1, \ldots, n), \end{aligned}$$

вторым фундаментальным тензором называется, как известно, система величин $b_{ij}{}^\alpha$. Поэтому в данном случае поверхности V_{2l+2}

получаются, в силу (2.2) и (2.3), следующие равенства (где для простоты обозначено $2l-1=p$, $2l=q$, $2l+1=\sigma$, $2l+2=\tau$):

$$b^{\sigma}_{pp}=a_{\sigma}\frac{a_q}{a_p}w^{2l-3},\quad b^{\sigma}_{pq}=a_{\sigma}w^{2l-2},\quad b^{\sigma}_{qq}=-a_{\sigma}\frac{a_p}{a_q}w^{2l-3},$$

$$b^{\tau}_{pp}=-a_{\tau}\frac{a_q}{a_p}w^{2l-2},\quad b^{\tau}_{pq}=a_{\tau}w^{2l-3},\quad b^{\tau}_{qq}=a_{\tau}\frac{a_p}{a_q}w^{2l-2}.$$

Все остальные компоненты второго фундаментального тензора поверхности V_{2l+2} равны нулю.

Поверхность V_m в R_n или S_n является минимальной тогда и только тогда, если

$$g^{ij}b^{\alpha}_{ij}=0$$

(см. [9], стр. 100), где g^{ij} — компоненты контравариантного метрического тензора. В случае поверхности V_{2l+2}, в силу (1.3) из [7],

$$g_l^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sin^2\gamma_l} & -\dfrac{\cos\gamma_l}{\sin^2\gamma_l}\\ -\dfrac{\cos\gamma_l}{\sin^2\gamma_l} & \dfrac{1}{\sin^2\gamma_l}\end{pmatrix},$$

т. е.

$$g^{pp}=\frac{1}{\sin^2\gamma_l},\quad g^{pq}=-\frac{\cos\gamma_l}{\sin^2\gamma_l},\quad g^{qq}=\frac{1}{\sin^2\gamma_l}.$$

Поэтому для минимальности поверхности V_{2l+2} необходимо и достаточно выполнение следующих равенств:

$$a_{\sigma}[(a_p^2-a_q^2)w^{2l-3}+2\cos\gamma_l w^{2l-2}]=0,$$
$$a_{\tau}[(a_p^2-a_q^2)w^{2l-2}-2\cos\gamma_l w^{2l-3}]=0,$$

из которых, так как w^{2l-3} и w^{2l-2} произвольны,

$$a^2_{2l-1}=a^2_{2l},\quad \cos\gamma_l=0 \tag{2.4}$$

(исключаются, конечно, поверхности V_2, у которых $a_{2l+1}=a_{2l+2}=0$, т. е. поверхности V_2 $(2l+2)$-мерного пространства). Условия (2.4) и означают, что l-ая индикатриса кривизны минимальной поверхности V_2 в произвольной точке является окружностью. Теорема доказана.

Замечание. Мы уже указывали на результат Борувки [10]: поверхность V в R_{2p} является комплексно аналитической тогда и только тогда, если она минимальная и её индикатрисы кривизны всех порядков — окружности. Теперь мы получим интересное свойство комплексно аналитической поверхности V_2 в R_{2p}: *все поверхности, образованные из касательных или со-*

прикасающихся плоскостей комплексно аналитической поверхности V_2 в R_{2p}, оказываются минимальными поверхностями. Отметим, что все они являются образами поверхностей касательных или соприкасающихся плоскостей той аналитической кривой унитарного пространства $U_p(i)$, образом которой в R_{2p} является рассматриваемая комплексно аналитическая поверхность V_2. Поэтому все эти поверхности принадлежат к классу комплексно аналитических поверхностей, которые, в свою очередь, являются частными случаями так называемых сильно минимальных поверхностей в R_{2p} (см. [1, 3]).

§ 3. О внутренней метрике минимальных V_2 с окружностями кривизны

1. В настоящем параграфе докажем следующую теорему, которая в некотором смысле обобщает известный результат Риччи о внутренней метрике минимальной V_2 в R_3 (см. [2], стр. 189).

Теорема 4. *Если ds^2 и K — внутренняя метрика и гауссова кривизна минимальной V_2 в R_n или S_n, первые индикатрисы кривизны которой — окружности, то гауссова кривизна $\tilde{K}$ метрики*

$$d\tilde{s}^2 = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(c-K)}\,ds^2$$

(где c — кривизна пространства) выражается через величины, характеризующие первые и вторые индикатрисы кривизны поверхности V_2, следующим образом:

$$\tilde{K} = \frac{1}{3}\left(c - \frac{k_3^2 + k_4^2}{x_1^2}\right).$$

Доказательство. Рассмотрим, вообще, как преобразуются формы ω_i^j, если от метрики

$$ds^2 = g_{ij}\,\Theta^i\,\Theta^j \quad (i, j = 1, \ldots, m)$$

умножением ее на скалярный множитель e^σ перейти к метрике

$$d\tilde{s}^2 = \tilde{g}_{ij}\,\tilde{\Theta}^i\,\tilde{\Theta}^j,$$

где

$$\tilde{g}_{ij} = e^\sigma g_{ij}, \tag{3.1}$$

$$\tilde{\Theta}^i = \Theta^i. \tag{3.2}$$

При внешнем дифференцировании уравнений (3.2) и при развертывании полученных ковариантов получается

$$\tilde{\omega}_i^j - \omega_i^j = h_{ik}^j\,\Theta^k, \quad h_{ik}^j = h_{ki}^j. \tag{3.3}$$

Дифференцированием уравнений (3.1) получается, с одной стороны, (см. (1.5) в [5])

$$d\tilde{g}_{ij} = e^{\sigma}(d\sigma g_{ij} + g_{kj}\,\omega_i{}^k + g_{ik}\,\omega_j{}^k),$$

с другой стороны, в силу (3.3)

$$d\tilde{g}_{ij} = e^{\sigma}[g_{kj}(\omega_i{}^k + h_{il}{}^k\,\Theta^l) + g_{ik}(\omega_j{}^k + h_{jl}{}^k\,\Theta^l)].$$

Следовательно, если

$$d\sigma = \sigma_l\,\Theta^l,$$

то

$$g_{ij}\,\sigma_l = g_{kj}\,h_{il}{}^k + g_{ik}\,h_{jl}{}^k.$$

Если здесь дважды совершить круговую перестановку индексов, то из полученных трех уравнений следует:

$$h_{ij}{}^k = \frac{1}{2}(\delta_i{}^k\,\sigma_j + \delta_j{}^k\,\sigma_i - g_{ij}\,g^{kl}\,\sigma_l). \tag{3.4}$$

В случае ортонормированного репера имеем: $g_{ij} = \delta_{ij}$, $g^{ij} = \delta^{ij}$, и из (3.3) и (3.4), для частного случая $m = 2$, получается

$$\tilde{\omega}_1{}^1 - \omega_1{}^1 = \tilde{\omega}_2{}^2 - \omega_2{}^2 = \frac{1}{2}\,d\sigma,$$

$$\tilde{\omega}_1{}^2 = \omega_1{}^2 + \frac{1}{2}(\sigma_1\Theta^2 - \sigma_2\Theta^1).$$

В рассматриваемом конкретном случае

$$e^{\sigma} = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(c - K)} = \sqrt[3]{\varkappa_1{}^2}, \tag{3.5}$$

так как $K = c - (a_1{}^2 + a_2{}^2) = c - 2\varkappa_1{}^2$ (см. (3.1) и (3.4) из [5], и (1.3) настоящей статьи).

Следовательно, в силу (1.9)

$$d\sigma = \frac{2}{3}\,d\ln\varkappa_1 = \frac{2}{3}(\Theta^1\partial_1\ln\varkappa_1 + \Theta^2\partial_2\ln\varkappa_1),$$

т. е.

$$\sigma_1 = \frac{2}{3}\,\partial_1\ln\varkappa_1,\quad \sigma_2 = \frac{2}{3}\,\partial_2\ln\varkappa_1,$$

и, стало быть, в силу (1.10),

$$\tilde{\omega}_1{}^2 = \omega_1{}^2 + \frac{1}{3}(\Theta^2\partial_1\ln\varkappa_1 - \Theta^1\partial_2\ln\varkappa_1) =$$

$$= \omega_1{}^2 + \frac{1}{3}(-2\omega_1{}^2 + \vartheta_1{}^2) = \frac{1}{3}(\omega_1{}^2 + \vartheta_1{}^2),$$

или, в матричной форме,

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{3}(\omega + \vartheta_1) + \frac{1}{2}\,d\sigma, \tag{3.6}$$

где

$$d\sigma = \begin{pmatrix} d\sigma & 0 \\ 0 & d\sigma \end{pmatrix}.$$

Если вторые индикатрисы кривизны не являются окружностями, то канонизируем репер с помощью главных направлений второго порядка. Тогда

$$\beta_1 = \varkappa_1 \Theta, \ \tilde{\beta}_1 = -\beta_1^*,$$

(см. (1.5) и (1.7)) и

$$\beta_2 = \begin{pmatrix} \frac{k_3}{\varkappa_1}\Theta^1 & -\frac{k_3}{\varkappa_1}\Theta^2 \\ \frac{k_4}{\varkappa_1}\Theta^2 & \frac{k_4}{\varkappa_1}\Theta^1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\beta}_2 = -\beta_2^*.$$

Такие же равенства получаются и тогда, если вторые индикатрисы кривизны — окружности; тогда только $k_3 = k_4 = \varkappa_1\varkappa_2$.

При внешнем дифференцировании соотношения (3.6) получаем (см. формулы (1.7) из [7]):

$$D\tilde{\omega} = \frac{1}{3}\{c[\Theta\Theta^*] - [\omega\omega] + [\beta_1^*\beta_1] +$$

$$+ [\beta_1\beta_1^*] - [\vartheta_1\vartheta_1] + [\beta_2^*\beta_2]\} = \frac{1}{3}\{c[\Theta\Theta^*] + [\beta_2^*\beta_2]\},$$

и, следовательно,

$$D\tilde{\omega}_1^{\,2} = -\frac{1}{3}\left(c - \frac{k_3^2 + k_4^2}{\varkappa_1^{\,2}}\right)[\Theta^1\Theta^2].$$

Здесь коэффициент, взятый с обратным знаком, является, как известно (см., напр., [2, стр. 79]), как раз гауссовой кривизной метрики. Теорема доказана.

2. Наибольший интерес представляют здесь частные случаи. Именно, если $n = 4$, то $k_3 = k_4 = 0$, и метрика $d\tilde{s}^2$ имеет постоянную гауссову кривизну

$$\tilde{K} = \tfrac{1}{8}c.$$

В случае эвклидова пространства R_4, когда $c = 0$, метрика $d\tilde{s}^2$ имеет, следовательно, нулевую гауссову кривизну. Класс рассматриваемых нами поверхностей V_2 в этом случае, по результатам Коммерелла и Эйзенхарта (см. [9], стр. 124), совпадает с классом комплексно аналитических поверхностей V_2 в R_4. Получается следующий результат:

Если ds^2 и K являются, соответственно, внутренней метрикой и гауссовой кривизной комплексно аналитической поверхности V_2 в R_4, то метрика

$$d\tilde{s}^2 = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}K}\, ds^2 \qquad (3.7)$$

имеет нулевую гауссову кривизну.

Этот результат имеет некоторую аналогию с известным результатом Риччи (см. [2], стр. 189) о внутренней метрике минимальной поверхности V_2 обычного пространства R_3: метрика ds^2 является метрикой некоторой минимальной V_2 в R_3 тогда и только тогда, если метрика

$$d\tilde{s}^2 = \sqrt{-K}\, ds^2,$$

где K — гауссова кривизна метрики ds^2, имеет нулевую гауссову кривизну.

Один конкретный пример, построенный Пинлом [13], показывает, что в пространстве R_4 имеется минимальная поверхность V_2, которая не обладает этим свойством, т. е. которая не обладает метрикой минимальной V_2 в R_3. Легко доказать, что соответствующим примером может служить и любая комплексно аналитическая V_2 в R_4.

Литература

1. Беклемишев Д. В., Сильно минимальные поверхности. Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1958, **3**(4), 13—23.
2. Бляшке В., Введение в дифференциальную геометрию. Москва, 1957.
3. Лумисте Ю. Г., О геометрическом строении комплексно аналитической поверхности V_{2n} в пространстве R_{2N}. Докл. АН СССР, 1957, **114**, 259—262.
4. Лумисте Ю. Г., О трехмерных поверхностях с тремя ортогональными семействами асимптотических. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, **3** (10), 173—185.
5. Лумисте Ю. Г., К теории двумерных минимальных поверхностей I. Теория кривизны. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 3—15.
6. Лумисте Ю. Г., К теории двумерных минимальных поверхностей II. Поверхности постоянной кривизны. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 16—28.
7. Лумисте Ю. Г., К теории двумерных минимальных поверхностей III. Основная теорема и изгибание. Настоящий сборник, стр. 74—89.
8. Розенфельд Б. А., Неевклидовы геометрии. Москва, 1955.
9. Схоутен И. А., Стройк Д. Дж., Введение в новые методы дифференциальной геометрии, т. II. Москва, 1948.
10. Borůvka, O., Sur une classe der surfaces minima plongées dans un espace à quatre dimensions à courbure constante. C. r. Acad. Sci., 1928, **187**, 334—336.
11. Borůvka, O., Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace à cinq dimensions à courbure constante. C. r. Acad. Sci., 1928, **187**, 1271—1273.
12. Borůvka, O., Recherches sur la courbure des surfaces dans des espaces à n dimensions à courbure constante, I, II, III. Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk, 1932, **165**, 1—22; 1935, **212**, 1—20; 1935, **214**, 1—25.
13. Pinl, M., Über einen Satz von G. Ricci-Curbastro und die Gaußsche Krümmung der Minimalflächen. Arch. Math., 1953, **1**, 369—373.
14. Svoboda, K., Projektivní vlastnosti minimálních ploch s kružnicemi normalni křivosti. Časop. pěstov. mat., 1958, **83**, 287—316.
15. Svoboda, K., Poznámka o minimálnich plocchách s kružnicemi normální křivosti konstantniho poloměru. Časop. pěstov. mat., 1960, **85**, 291—299.

Поступило
3 III 1962

KAHEMÕÕTMELISTE MINIMAALPINDADE TEOORIAST IV. KÕVERUSRINGJOONTEGA PINNAD

Ü. Lumiste

Geomeetria kateeder

Resümee

Minimaalpindadele V_2 n-mõõtmelistes eukleidilistes ruumides R_n või mitteeukleidilistes ruumides S_n, mille normaalkõverusindikatrissideks on ringjooned, on pühendatud rida töid [10—12, 14, 15]. On selgunud eukleidilise ruumi R_{2m} niisuguste pindade V_2 huvitav seos kompleksmuutuja analüütiliste funktsioonidega.

Käesolevas artiklis üldistatakse kõigepealt eelmise artikli [7] põhiteoreem vaadeldavate pindade juhule. Seejärel tõestatakse, et minimaalpinna V_2 $(l-1)$-st järku kooldumistasandite poolt moodustatud pind V_{2l+2} $(2l+2<n)$ on minimaalpind parajasti siis, kui l-indaks kõverusindikatrissiks on pinna V_2 igas punktis ringjoon. Uuritakse niisuguste minimaalpindade V_2 sisemeetrikat, mille esimesteks kõverusindikatrissideks on ringjooned. Eukleidilise ruumi R_4 kompleksanalüütiliste pindade erijuhul saadakse Ricci tulemuse [2, lk. 189] analoog: kui ds^2 ja K on kompleks-analüütilise pinna V_2 sisemeetrika ja Gaussi kõverus, siis meetrika (3.7) Gaussi kõverus on võrdne nulliga.

ZUR THEORIE DER ZWEIDIMENSIONALEN MINIMALFLÄCHEN IV. FLÄCHEN MIT KRÜMMUNGSKREISEN

Ü. Lumiste

Zusammenfassung

Die Minimalflächen V_2 im n-dimensionalen euklidischen Raum R_n oder nichteuklidischen Raum S_n mit Kreisen als Indikatrizen der Normalkrümmung waren der Gegenstand einer Reihe von Arbeiten [10—12, 14, 15]. Es ergab sich ein interessanter Zusammenhang der Flächen dieser Art im euklidischen Raum R_{2m} mit den analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

In dem vorliegenden Aufsatz wird zunächst der Grundsatz des vorhergehenden Artikels [7] auf den Fall der betrachteten Flächen verallgemeinert. Demnach wird gezeigt, daß die Fläche V_{2l+2} $(2l+2<n)$, welche von der Schmiegebenen $(l-1)$-er Ordnung der Minimalfläche V_2 erzeugt wird, dann und nur dann eine Minamalfläche V_{2l+2} ist, wenn die l-te Krümmungsindikatrize in allen Punkten der Fläche V_2 sich als Kreis erweist. Es wird die innere Metrik solcher Minimalflächen untersucht, deren erste Krühmmungsindikatrizen Kreise sind. Im Spezialfall der komplex-analytischen Flächen im euklidischen Raum R_4 wird ein Analogon des Satzes von Ricci [2, S. 189] erhalten: wenn ds^2 und K die innere Metrik und die Gaußsche Krümmung der kompleks-analytischen Fläche V_2 sind, so verschwindet die Gaußsche Krümmung der Metrik (3.7).

МИНИМАЛЬНЫЕ ДЕМИКОНГРУЭНЦИИ В ЭВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ R_4

Л. Туулметс

Кафедра геометрии

Линейчатые гиперповерхности V_3 эвклидова пространства R_4 — двухпараметрические семейства прямых в R_4 — делятся, как известно [1], на три класса: 1) конгруэнции (нормали в точках одной образующей параллельны между собой, имеется два семейства торсов), 2) демиконгруэнции (нормали в точках одной образующей параллельны двухмерной плоскости, имеется одно семейство торсов), 3) псевдоконгруэнции (нормали в точках одной образующей параллельны образующим конуса второго порядка, торсов нет). Отметим, что такие названия для поверхностей этих классов в [1] еще отсутствуют.

С другой стороны, в теории гиперповерхностей эвклидова пространства давно известен класс минимальных гиперплоскостей, характеризуемый равенством нулю средней кривизны [5]:

$$g^{ij} b_{ij} = 0. \qquad (0.1)$$

Минимальные конгруэнции V_3 (т. е. минимальные V_3 ранга 2) в R_4 уже рассматривались в статье [3]. В настоящей работе изучаются минимальные демиконгруэнции V_3 в R_4. Оказывается, что фокальные линии любой минимальной демиконгруэнции V_3 лежат в двухмерных плоскостях, проходящих через фиксированную точку P. Минимальная демиконгруэнция V_3 имеет два семейства двухмерных асимптотических подповерхностей. Поверхности одного семейства образуются касательными к плоским фокальным линиям; поверхности другого семейства — конусы с вершиной P, образующие которых не совпадают с образующими минимальной демиконгруэнции.

Рассматриваются и некоторые частные случаи минимальных демиконгруэнций.

Работа выполнена под руководством доц. Ю. Г. Лумисте, которому автор выражает свою искреннюю благодарность.

§ 1. Существование минимальной демиконгруэнции

1. Выбор подвижного репера. К каждой точке M_0 рассматриваемой минимальной демиконгруэнции присоединяем ортонормальный подвижный репер так, чтобы единичный вектор $\boldsymbol{e}_0$ был направлен вдоль образующей, а единичный вектор $\boldsymbol{e}_3$ — вдоль нормали к поверхности V_3 в точке M_0. В формулах

$$d\boldsymbol{M}_0 = \omega^I \boldsymbol{e}_I,\ d\boldsymbol{e}_I = \omega^K{}_I \boldsymbol{e}_K\ (I, J, K \ldots = 0, 1, 2, 3), \qquad (1.1)$$

определяющих инфинитесимальное перемещение подвижного репера, имеем тогда

$$\omega^3 = 0,\ \omega^J{}_I = -\omega^J{}_I. \qquad (1.2)$$

При продолжении уравнения $\omega^3 = 0$, получаем соотношения

$$\omega^3{}_0 = b_{00}\omega^0 + b_{0i}\omega^i,\quad \omega^3{}_i = b_{0i}\omega^0 + b_{ij}\omega^j,$$

где

$$b_{ij} = b_{ij},\ (i, j, k, \ldots = 1, 2).$$

Пусть точка M_0 перемещается вдоль образующей. Если мы обозначим соответствующий символ дифференцирования через δ, то $\delta\boldsymbol{M} = \omega^0(\delta)\boldsymbol{e}_0$, т. е. $\omega^i(\delta) = 0$. При таком перемещении вектор $\boldsymbol{e}_0$ не меняется, т. е. $\delta\boldsymbol{e}_0 = 0$, и, так как

$$d\boldsymbol{e}_0 = \omega^i{}_0 \boldsymbol{e}_i + (b_{00}\omega^0 + b_{0i}\omega^i)\boldsymbol{e}_3,$$

то $\omega^i{}_0(\delta) = 0$, $b_{00} = 0$. Таким образом, $\omega^i{}_0 = 0 \pmod{\omega^i}$ или

$$\omega^i{}_0 = a^i{}_j \omega_j.$$

Обозначим еще

$$b_{0i} = a^3{}_i. \qquad (1.3)$$

Тогда

$$\omega^\varrho{}_0 = a^\varrho{}_i \omega^i, \qquad (1.4)$$

$$\omega^3{}_i = a^3{}_i \omega^0 + b_{ij}\omega^j,\ b_{ij} = b_{ji}\ (\varrho, \sigma, \ldots = 1, 2, 3). \qquad (1.5)$$

При продолжении уравнений (1.4) и (1.5) получаем соотношения

$$da^\varrho{}_i = a_j{}^\varrho\, \omega^j{}_i - a^\sigma{}_i\, \omega^\varrho{}_\sigma - a^\varrho{}_j a^j{}_i \omega^0 + a^\varrho{}_{ij}\omega^j, \qquad (1.6)$$

$$db_{ij} = b_{kj}\,\omega^k{}_l + b_{ik}\,\omega^k{}_j + (a^3{}_{ij} - a^k{}_i\, b_{kj} - a^k{}_j\, b_{ik})\,\omega^0 + \\ + (b_{jik} - a^3{}_j\, a_{ik} - a^3{}_i\, a_{jk})\,\omega^k, \qquad (1.7)$$

где $a^\varrho{}_{ij}$ и b_{ij} симметричны по нижним индексам и

$$\boldsymbol{a}_i = a^\varrho{}_i \boldsymbol{e}_\varrho, \qquad (1.8)$$

$$a_{ij} = (\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{a}_j). \qquad (1.9)$$

2. Плоскость нормальных направлений. Рассмотрим произвольную точку $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_0 + \lambda\boldsymbol{e}_0$ на образующей.

В силу (1. 1—4)

$$d\boldsymbol{M} = (\omega^0 + d\lambda)\boldsymbol{e}_0 + (\boldsymbol{e}_i + \lambda a^i{}_i \boldsymbol{e}_j + \lambda a^3{}_i \boldsymbol{e}_3)\omega^i.$$

Отсюда следует, что нормаль поверхности V_3 в точке M определяется вектором

$$\boldsymbol{N} = [\boldsymbol{e}_1 + \lambda a_1 \boldsymbol{e}_j + \lambda a^3{}_1 \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_2 + \lambda a^j{}_2 \boldsymbol{e}_j + \lambda a^3{}_2 \boldsymbol{e}_3] =$$
$$= (\lambda^2 a^2 - \lambda a^3{}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\lambda^2 a^1 - \lambda a^3{}_2)\boldsymbol{e}_2 + (\lambda^2 a + \lambda a^i{}_i + 1)\boldsymbol{e}_3,$$

где

$$a^1 = a_{[1}{}^1 a^3{}_{2]},$$
$$a^2 = a_{[1}{}^2 a^3{}_{2]},$$
$$a = a_{[1}{}^1 a^3{}_{2]}.$$

Обозначим

$$x^1 = \lambda^2 a^2 - \lambda a^3{}_1,\ \ x^2 = \lambda^2 a^1 - \lambda a^3{}_2,\ \ x^3 = \lambda^2 a + \lambda a^i{}_i + 1,$$

тогда

$$\boldsymbol{N} = x^1 \boldsymbol{e}_1 + x^2 \boldsymbol{e}_2 + x^3 \boldsymbol{e}_3.$$

Конус, описываемый прямой, проходящей через некоторую фиксированную точку в направлении вектора $\boldsymbol{N}$, называется *конусом нормальных направлений* гиперповерхности V_3 для данной образующей [1].

Мы интересуемся случаем, когда конус нормальных направлений вырождается в плоскость, которую мы будем называть *плоскостью нормальных направлений.* В таком случае,

$$\Delta = \left(\boldsymbol{N}, \frac{d\boldsymbol{N}}{d\lambda}, \frac{d^2\boldsymbol{N}}{d\lambda^2}\right) = 0,$$

или

$$a^3{}_1 a^1 - a^3{}_2 a^2 = 0,$$

но $a^3{}_1$ и $a^3{}_2$ оба не равны нулю (потому что при $a^3{}_1 = a^3{}_2 = 0$ имеем $\boldsymbol{N} = x^3 \boldsymbol{e}_3$). Плоскость нормальных направлений определяется уравнением

$$a^3{}_2 x^1 - a^3{}_1 x^2 = 0.$$

Если вектор $\boldsymbol{e}_2$ направить в плоскость нормальных направлений, то

$$a^3{}_1 = a^2{}_1 = 0,\ \ a^3{}_2 \neq 0. \qquad (1.10)$$

Условие минимальности (0. 1) в ортонормальном репере имеет вид

$$b_{11} = -b_{22}. \qquad (1.11)$$

Введем следующие обозначения

$$a^1{}_1 = \alpha,\ a^1{}_2 = \beta,\ a^2{}_2 = \varepsilon,\ a^3{}_2 = f,\ b_{11} = -b_{22} = b,\ b_{12} = c, \qquad (1.12)$$

и назовем эти величины *величинами первой группы*. Отметим, что здесь

$$f \neq 0. \tag{1.13}$$

3. Исследование пфаффовой системы, определяющей минимальную демиконгруэнцию. Пфаффовы уравнения минимальной демиконгруэнции имеют, в силу (1.4—5) и (1.10—11), вид

$$\begin{aligned} &\omega^3 = 0, && \omega^3{}_0 = f\omega^2, \\ &\omega_0{}^1 = a\omega^1 + \beta\omega^2, && \omega^3{}_1 = b\omega^1 + c\omega^2, \\ &\omega_0{}^2 = \varepsilon\omega^2, && \omega^3{}_2 = f\omega^0 + c\omega^1 - b\omega^2. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Настоящий пункт посвящается доказательству того, что для совместности этой системы необходимо равенство

$$b = 0. \tag{1.15}$$

Напишем прежде всего уравнения (1.6) и (1.7), с учётом (1.10—12), в виде

$$\begin{aligned} &\omega^2{}_1 = \sigma\omega^1 + \tau\omega^2, \\ &da = -a^2\omega^0 + \varrho\omega^1 + (\eta + \beta\tau)\omega^2, \\ &d\beta = -\beta(a+\varepsilon)\omega^0 + \{fb + \eta + (\varepsilon - a)\sigma\}\omega^1 + \vartheta\omega^2, \\ &d\varepsilon = (f^2 - \varepsilon^2)\omega^0 + \{fc - \beta\sigma + (a-\varepsilon)\tau\}\omega^1 + \mu\omega^2, \\ &df = -2\varepsilon f\omega^0 + \{(a-\varepsilon)c - \beta b - f\tau\}\omega^1 + \\ &\qquad + \{f\sigma + (a-\varepsilon)b + \beta c\}\omega^2, \\ &db = -(ab + f\sigma)\omega^0 + (s + 2c\sigma)\omega^1 + (t + 2c\tau)\omega^2, \\ &dc = -(f\tau + \varepsilon c + \beta b)\omega^0 + (t - af - 2b\sigma)\omega^1 - (s + f\beta + \\ &\qquad + 2b\tau)\omega^2. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Величины σ, τ, ϱ, η, ϑ, μ, s, t назовем *величинами второй группы*.

При продолжении уравнения (1.16_1) находим

$$d\sigma = (fb - a\sigma)\omega^0 + \varphi\omega^1 + \psi\omega^2, \tag{1.17}$$

$$d\tau = (fc - \beta\sigma - \varepsilon\tau)\omega^0 + (b^2 + c^2 - \sigma^2 - \tau^2 - a\varepsilon + \psi)\omega^1 + \chi\omega^2. \tag{1.18}$$

При продолжении уравнения (1.16_4) получаем

$$d\mu = \mu_0\omega^0 + \mu_1\omega^1 + z\omega^2, \tag{1.19}$$

где

$$\begin{aligned} \mu_0 &= -2\varepsilon\mu + 2bf(a-\varepsilon) + f\beta c + (\beta^2 + 2f^2)\sigma - (a-\varepsilon)\beta\tau, \\ \mu_1 &= -2\mu\tau + (a-\varepsilon)\chi - \sigma\vartheta - \beta\psi - fs + \eta\tau - (a-\varepsilon)\sigma\tau - \\ &\quad - \beta\varepsilon^2 - 2bf\tau + (a-\varepsilon)cb + c^2\beta + \beta\sigma^2 + \beta\tau. \end{aligned}$$

Величины φ, ψ, χ, z назовем *величинами третьей группы*

При продолжении уравнения (1.16_5) получим соотношение между величинами первой и второй группы

$$\mu = (a-\varepsilon)\sigma + \beta\tau + \frac{b}{f}\{\beta^2 + (a-\varepsilon)^2\}, \tag{1.20}$$

и равенство

$$f\chi = -f\varphi - b(\varrho + \vartheta) + 2(\varepsilon - \alpha)s - 2\beta\tau - f\beta\varepsilon + 4(\varepsilon - \alpha)\sigma + \tag{1.21}$$

$$+ 3b\beta\sigma - 4c\beta\tau + 3b(\varepsilon - \alpha)\tau - \frac{cb}{f}\{\beta^2 + (\alpha - \varepsilon)^2\}.$$

При продолжении остальных уравнений системы (1.16) можно найти аналогичные выражения для $d\varrho$, $d\eta$, $d\vartheta$, ds, dt и равенство

$$f\varphi = -b(\varrho + 2cf) - 2\alpha s + 3\{(\varepsilon - \alpha)c + b\beta + f\tau\}\sigma, \tag{1.22}$$

но новых конечных соотношений для величин первой и второй группы, подобных соотношению (1.20), не будет.

Продифференцируем уравнение (1.20), используя соотношения (1.16—18), и сравним полученный результат с уравнением (1.19). Так как формы ω^α ($\alpha = 0, 1, 2$) линейно независимы, их соответствующие коэффициенты в обеих выражениях должны быть равными: получим три уравнения. Первое из них (т. е. равенство коэффициентов при форме ω^0) можно написать в виде

$$\{b(\varepsilon - \alpha) - \sigma f\}\{f^2 + \beta^2 + (\alpha - \varepsilon)^2\} = 0.$$

Здесь, в силу (1.13), $f^2 + \beta^2 + (\alpha - \varepsilon)^2 \neq 0$, и мы имеем:

$$\sigma = \frac{b(\varepsilon - \alpha)}{f}. \tag{1.23}$$

Если найти $d\sigma$ и сравнить результат с уравнением (1.17), то в силу (1.22), при предположении $\alpha + \varepsilon \neq 0$, найдём

$$s = -\frac{3b}{\alpha + \varepsilon}(fc + (\alpha - \varepsilon))\left\{\tau + \frac{b\beta}{f}\right\}, \tag{1.24}$$

$$f\psi = -(\alpha - \varepsilon)t - b\eta - 2(\alpha - \varepsilon)c\tau + \frac{b\beta}{f}\{c(\alpha - \varepsilon) + b\beta\}. \tag{1.25}$$

Отметим, что случай $\alpha + \varepsilon = 0$ невозможен. Если $\alpha + \varepsilon = 0$, то $d\alpha + d\varepsilon = 0$ и, в силу $(1.16_{1,4})$, $f^2 - 2\alpha^2 = 0$. Дифференцируя последнее соотношение, получаем $f^2 + \alpha^2 = 0$, что в силу (1.13) невозможно. В силу (1.13) (1.16_4), можно утверждать, что

$$\varepsilon \neq 0. \tag{1.26}$$

Второе из вышеупомянутых уравнений (равенство коэффициентов при форме ω^1) можно, после многократных преобразований и учета (1.20—25), написать в виде

$$\frac{b}{\alpha + \varepsilon}\{f^2 + \beta^2 + (\alpha - \varepsilon)^2\}\{2\varepsilon\tau - fc + \frac{2\varepsilon b\beta}{f}\} = 0. \tag{1.27}$$

Так как $f^2+\beta^2+(\alpha-\varepsilon)^2\neq 0$, то здесь возможны два случая: или $b=0$, что и требовалось доказать, или

$$2\varepsilon\tau - fc + \frac{2\varepsilon b\beta}{f} = 0. \tag{1.28}$$

Покажем, что и во втором случае получим равенство (1.15).

В силу (1.13), (1.26), равенство (1.28) можно написать в виде

$$\tau = \frac{fc}{2\varepsilon} - \frac{b\beta}{f}. \tag{1.29}$$

Продифференцируем уравнение (1.29), и сравним результат с уравнением (1.18). Равенство коэффициентов формы ω^0 дает соотношение

$$fc(f^2-2\varepsilon^2)=0.$$

Здесь, в силу (1.13), (1.26), $f\neq 0$ и $f^2-2\varepsilon^2\neq 0$. Действительно, если бы $f^2-2\varepsilon^2=0$, то дифференцирование последнего соотношения дало бы, в силу линейной независимости форм ω , равенство $2f^2-\varepsilon^2=0$, что невозможно. Следовательно,

$$c=0. \tag{1.30}$$

Из (1.29), в силу (1.30), получаем

$$\tau = -\frac{b\beta}{f}. \tag{1.31}$$

Из (1.20), в силу (1.23) и (1.31), следует, что $\mu=0$ и уравнения (1.16_{4-5}) можно представить в виде

$$d\varepsilon = (f^2-\varepsilon^2)\omega^0, \tag{1.32}$$
$$df = -2\varepsilon f\omega^0. \tag{1.33}$$

Внешнее дифференцирование последнего соотношения дает, в силу (1.13), (1.26), (1.32), равенство

$$\beta=0. \tag{1.34}$$

В силу (1.34), из (1.31) и (1.24) вытекает, что

$$\tau=0,\ s=0, \tag{1.35}$$

а, в силу (1.35), из (1.18):

$$\chi=0. \tag{1.36}$$

В силу (1.22—23) и (1.29—36), уравнение (1.21) можно написать в виде

$$(\alpha-\varepsilon)^2 b=0.$$

Если $\alpha-\varepsilon=0$, то из (1.23) следует, что $\sigma=0$ и отсюда

$d\sigma = 0$; но из (1. 17) в силу (1. 13) получим соотношение (1. 15), что и надо было доказать.

4. Совместность пфаффовой системы, определяющей минимальную демиконгруэнцию. В силу (1. 14—26) пфаффову систему, определяющую минимальную демиконгруэнцию, можно написать в виде

$$\begin{aligned} &\omega^3 = 0, && \omega^3{}_0 = f\omega^2, \\ &\omega_0{}^1 = \alpha\omega^1 + \beta\omega^2, && \omega^3{}_1 = c\omega^2, \\ &\omega_0{}^2 = \varepsilon\omega^2, && \omega^3{}_0 = f\omega^0 + c\omega^1 \end{aligned} \tag{1.37}$$

и систему (1. 16) в виде

$$\begin{aligned} &\omega^2{}_1 = \tau\omega^2, \\ &d\alpha = -\alpha^2\omega^0 + \varrho\omega^1 + (\eta + \beta\tau)\omega^2, \\ &d\beta = -\beta(\alpha + \varepsilon)\omega^0 + \eta\omega^1 + \vartheta\omega^2, \\ &d\varepsilon = (f^2 - \varepsilon^2)\omega^0 + \{fc + (\alpha - \varepsilon)\tau\}\omega^1 + \beta\tau\omega^2, \\ &df = -2\varepsilon f\omega^0 + \{(\alpha - \varepsilon)c - f\tau\}\omega^1 + \beta c\omega^2, \\ &dc = -(\varepsilon c + f\tau)\omega^0 - (\alpha f + 2c\tau)\omega^1 - f\beta\omega^2. \end{aligned} \tag{1.38}$$

Система ковариантов для системы (1. 37—38) имеет вид

$$\begin{aligned} &[\Delta\tau, \omega^2] = 0, \\ &[\Delta\varrho, \omega^1] + [\Delta\eta, \omega^2] = 0, \\ &[\Delta\eta, \omega^1] + [\Delta\vartheta, \omega^2] = 0, \end{aligned} \tag{1.39}$$

откуда при помощи леммы Картана получаем

$$\begin{aligned} &d\tau = (fc - \varepsilon\tau)\omega^0 + (c^2 - \tau^2 - \alpha\varepsilon)\omega^1 - \beta\varepsilon\omega^2, \\ &d\varrho = \varrho_0\omega^0 + \xi_1\omega^1 + (\xi_2 + \varrho_2\omega^2), \\ &d\eta = \eta_0\omega^0 + \xi_2\omega^1 + \xi_3\omega^2, \\ &d\vartheta = \vartheta_0\omega^0 + (\vartheta_1 + \xi_3)\omega^1 + \xi_4\omega^2, \end{aligned} \tag{1.40}$$

где ϱ_0, ϱ_2, η_0, ϑ_0, ϑ_1 — вполне определенные многочлены из величин первой и второй группы, и ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 — новые неизвестные величины.

Следовательно, произвол общего интегрального элемента определяется $N = 4$ произвольными коэффициентами. При определении характеров системы получается, что $s_1 = 2$, $s_2 = 1$, $s_3 = 0$, т. е. число Картана $Q = 4$, и $Q = N$. Рассматриваемая система (1. 37—38) находится в инволюции ([6], стр. 259), и ее решение определяется с произволом одной функции двух аргументов.

Следовательно, *минимальная демиконгруэнция существует, в выбранном репере она определяется системой Пфаффа* (1. 37—38) и *зависит от одной функции двух аргументов.*

§ 2. Построение минимальной демиконгруэнции

1. Асимптотические подповерхности. Асимптотический конус

$$(d^2\boldsymbol{M}, \boldsymbol{e}_3) \equiv b_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta = 0 \qquad (\alpha, \beta, \ldots = 0, 1, 2)$$

минимальной демиконгруэнции V_3 в R_4 имеет, в силу (1.3), (1.10) и (1.12), уравнение $fx^0x^2 + cx^1x^2 = 0$ и, следовательно, распадается на две пересекающиеся плоскости: $x^2 = 0$, $fx^0 + cx^1 = 0$. Эти асимптотические плоскости пересекаются по прямой, направление которой будем называть *двойным асимптотическим направлением*. Единичным вектором двойного асимптотического направления является вектор

$$\boldsymbol{f}_0 = \lambda(c\boldsymbol{e}_0 - f\boldsymbol{e}_1), \text{ где } \lambda = \frac{1}{\sqrt{f^2+c^2}}.$$

Оказывается, что поля асимптотических плоскостей инволютивны, т. е. соответствующие уравнения Пфаффа

$$\omega^2 = 0, \tag{2.1}$$
$$f\omega^0 + c\omega^1 = 0 \tag{2.2}$$

вполне интегрируемы:

$$D\omega^2 = 0 \pmod{\omega^2}, \; D(f\omega^0 + c\omega^1) = 0.$$

Следовательно, оба поля асимптотических плоскостей минимальной демиконгруэнции огибают подповерхности, которые мы будем называть *асимптотическими подповерхностями*. Уравнения $d\boldsymbol{e}_I = \omega_I{}^K \boldsymbol{e}_K$ являются частью из (1.1) и имеют в выбранном репере, в силу (1.12), вид

$$\begin{aligned}
d\boldsymbol{e}_0 &= (\alpha\omega^1 + \beta\omega^2)\boldsymbol{e}_1 + \varepsilon\omega^2\boldsymbol{e}_2 + f\omega^2\boldsymbol{e}_3,\\
d\boldsymbol{e}_1 &= -(\alpha\omega^1 + \beta\omega^2)\boldsymbol{e}_0 + \tau\omega^2\boldsymbol{e}_2 + c\omega^2\boldsymbol{e}_3,\\
d\boldsymbol{e}_2 &= -\varepsilon\omega^2\boldsymbol{e}_0 - \tau\omega^2\boldsymbol{e}_1 + (f\omega^0 + c\omega^1)\boldsymbol{e}_3,\\
d\boldsymbol{e}_3 &= -f\omega^2\boldsymbol{e}_0 - c\omega^2\boldsymbol{e}_1 - (f\omega^0 + c\omega^1)\boldsymbol{e}_3.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

В силу (1.38_{5-6}), из (2.3) следует, что

$$d\boldsymbol{f}_0 = \lambda(f\omega^0 + c\omega^1)\{(\varepsilon + \lambda f\tau')\boldsymbol{e}_1 - (\tau + \lambda e\tau')\boldsymbol{e}_0\} + \alpha'\omega^2\boldsymbol{e}_2, \tag{2.4}$$

где

$$\alpha' = \lambda(\varepsilon c - f\tau), \; \tau' = -\lambda(f\varepsilon + c\tau). \tag{2.5}$$

Из (2.4) видно, что при перемещении вдоль двойного асимптотического направления на одной из асимптотических подповерхностей имеем

$$d\boldsymbol{f}_0 = 0 \pmod{\omega^2, f\omega^0 + c\omega^1}.$$

Следовательно, интегральные линии полей двойных асимптоти-

ческих направлений — прямые, и *обе асимптотические подповерхности являются линейчатыми подповерхностями.*

2. Плоские асимптотические подповерхности. Из (2.3) следует, что при любом перемещении вдоль асимптотической подповерхности $\omega^2 = 0$ ее касательная плоскость — координатная плоскость $\{\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{e}_1\}$ — не изменяется. Следовательно, асимптотические подповерхности (2.1) являются плоскими подповерхностями.

Кроме того, из (1.1), (1.38_2), (2.4—5) получаем, что $d(\boldsymbol{M}_0 - \frac{1}{\alpha'}\boldsymbol{f}_0) = 0$, т. е., точка $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{M}_0 - \frac{1}{\alpha'}\boldsymbol{f}_0$ минимальной демиконгруэнции V_3 не меняется при любом перемещении вдоль поверхности V_3.

Следовательно, минимальную демиконгруэнцию V_3 можно рассматривать как однопараметрическое семейство плоских асимптотических подповерхностей, т. е. однопараметрических семейств прямых, лежащих в плоскостях R_2. При этом плоскости R_2 проходят, как видно, через фиксированную точку P. Плоскости R_2 будем называть *плоскими образующими минимальной демиконгруэнции.* Прямые однопараметрических семейств на плоских образующих, являющиеся образующими минимальной демиконгруэнции, огибают на каждой плоской образующей кривую — фокальную линию [7] минимальной демиконгруэнции.

3. Конические асимптотические подповерхности. Асимптотические подповерхности, определяемые уравнением (2.2): $f\omega^0 + c\omega^1 = 0$, являются конусами с вершиной P. Прямолинейные образующие этих конических асимптотических подповерхностей, имеющие направление вектора $\boldsymbol{f}_0$, не принадлежат, однако, семейству образующих минимальной демиконгруэнции.

Следовательно, на V_3 имеется второе семейство прямых, пересекающихся в точке P. Из (2.1—2.5) видно, что касательная плоскость к V_3 остается постоянной вдоль этих прямых, так что V_3 имеет ранг 2 (ср. [2], где аналогичный результат получен для минимальной гиперповерхности V_3 с семейством плоских образующих).

Минимальную демиконгруэнцию (как множество точек) можно рассматривать также как линейчатую гиперповерхность с направлением образующей $\boldsymbol{f}_0$. Угол φ между образующими $\boldsymbol{e}_0$ и $\boldsymbol{f}_0$ определяется формулой

$$\cos\varphi = (\boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{f}_0) = \lambda c.$$

В силу (1.13) образующие в направлениях векторов $\boldsymbol{e}_0$ и $\boldsymbol{f}_0$ не могут в случае минимальной демиконгруэнции совпадать. Совпадение возможно только тогда, когда минимальная демиконгруэнция вырождается в минимальную конгруэнцию [3].

4. Основная теорема. В п. 2 мы видели, что фокальную подповерхность V_2 минимальной демиконгруэнции V_3 можно рассматривать как однопараметрическое семейство фокальных линий, располагающихся в двухмерных плоских образующих, проходящих через фиксированную точку P.

С другой стороны, в [2] доказано, что если минимальная гиперповерхность V_3^* обладает семейством двухмерных плоских образующих, то все эти образующие пересекаются в одной точке P. Теперь, на основании вышесказанного доказана следующая

Теорема. *Произвольную минимальную демиконгруэнцию V_3 в R_4 можно получить, если на некоторой минимальной гиперповерхности с семейством плоских образующих взять двухмерную подповерхность, пересекающую каждую плоскую образующую по некоторой линии, и провести касательные ко всем этим линиям. Все эти касательные и образуют минимальную демиконгруэнцию.*

§ 3. Некоторые частные случаи

1. Дифференциальная окрестность образующей. В настоящем параграфе мы используем понятия и результаты из работы [1]. Там вводятся следующие величины:

$$\gamma_{ij} = (\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{a}_j) = g_{kl}\, a^k{}_i\, a^l{}_j + a^3{}_i\, a^3{}_j, \tag{3.1}$$

$$\nu_i = (\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{n}), \tag{3.2}$$

$$\mu_{ij} = (\boldsymbol{n}\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{e}_j),\ \mu_{ij} = \mu_{(ij)}, \tag{3.3}$$

где векторы $\boldsymbol{a}_i$ определяются равенством (1.8) и $\boldsymbol{n}$ равен обычному векторному произведению векторов $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ в гиперплоскости, ортогональной к образующей

$$[\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{a}_j] = \varepsilon_{ij} \boldsymbol{n}. \tag{3.4}$$

В правой части выражения для μ_{ij} (3.3) стоит обычное смешанное произведение в той же гиперплоскости. С помощью этих величин выражают (см. [1]):
тангенциальный и нормальный параметры распределения линейчатой подповерхности V_2

$$p_t = \frac{\nu_i \omega^i}{\sqrt{\gamma_{ij}\omega^i \omega^j}}, \tag{3.5}$$

$$p_n = \frac{\mu_{ij}\omega^i \omega^j}{\gamma_{ij}\omega^i \omega^j}; \tag{3.6}$$

средний и полный параметры минимальной демиконгруэнции (ср. [4], стр. 36)

$$2h = p_1 + p_2 = \frac{\gamma_{11}\mu_{22} - 2\gamma_{12}\mu_{12} + \gamma_{22}\mu_{11}}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}, \tag{3.7}$$

$$k = p_1 \cdot p_2 = \frac{\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}^2}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}, \tag{3.8}$$

где p_1, p_2 — главные нормальные параметры минимальной демиконгруэнции;
главный тангенциальный параметр минимальной демиконгруэнции

$$p_0^2 = \gamma^{ij} y_i y_j = \nu^i \nu_i; \tag{3.9}$$

нулевые линейчатые подповерхности (торсы и псевдоторсы)

$$\mu_{ij}\, \omega^i \omega^j = 0; \tag{3.10}$$

линейчатые подповерхности нулевого тангенциального распределения

$$\nu_i\, \omega^i = 0; \tag{3.11}$$

распределительные подповерхности

$$a_{ij}\, \omega^i \omega^j = 0, \tag{3.12}$$

где

$$a_{ij} = \frac{1}{2}\, \varepsilon^k{}_i\, \mu_{kj} + \varepsilon^k\, \mu_{ki},$$

$$\varepsilon^k{}_i = \varepsilon_{ij}\, \gamma^{jk};$$

и, наконец, *главные подповерхности*

$$\varepsilon^{ij}\, \gamma_{ik}\, a_{jl}\, \omega^k \omega^l = 0. \tag{3.13}$$

В случае минимальной демиконгруэнции эти величины и уравнения имеют в применяемом нами репере, соответственно, следующий вид:

$$\gamma_{11} = \alpha^2,\ \gamma_{22} = f^2 + \varepsilon^2 + \beta^2,\ \gamma_{12} = \alpha\beta, \tag{3.1a}$$

$$\nu_1 = 0, \quad \nu_2 = \frac{f}{\sqrt{f^2 + \varepsilon^2}}, \tag{3.2a}$$

$$\mu_{11} = 0,\ \mu_{22} = -\frac{\varepsilon\beta}{\sqrt{f^2 + \varepsilon^2}},\ \mu_{12} = \frac{f^2 + \varepsilon^2 - \alpha\varepsilon}{2\sqrt{f^2 + \varepsilon^2}}; \tag{3.3a}$$

$$p_t = \frac{f\omega^2}{\sqrt{(f^2 + \varepsilon^2)\{\alpha^2(\omega^1)^2 + 2\alpha\beta\omega^1\omega^2 + (f^2 + \varepsilon^2 + \beta^2)(\omega^2)^2\}}}; \tag{3.5a}$$

$$p_n = \frac{(f^2 + \varepsilon^2 - \alpha\varepsilon)\,\omega^1\omega^2 - \beta\varepsilon\,(\omega^2)^2}{\sqrt{f^2 + \varepsilon^2}\,\{\alpha^2\,(\omega^1)^2 + 2\,\alpha\beta\omega^1\,\omega^2 + (f^2 + \varepsilon^2 + \beta^2)\,(\omega^2)^2\}}; \tag{3.6a}$$

$$2h = -\frac{\beta}{\alpha\sqrt{f^2 + \varepsilon^2}}; \tag{3.7a}$$

ESV AÜN Tartu Kultuurihoone

$$k = -\frac{(f^2+\varepsilon^2-\alpha\varepsilon)^2}{4\alpha^2(f^2+\varepsilon^2)^2}; \tag{3.8$_a$}$$

$$p_0 = \frac{f}{f^2+\varepsilon^2}; \tag{3.9$_a$}$$

$$\omega^2 = 0,\ (f^2+\varepsilon^2-\alpha\varepsilon)\omega^1 - \beta\varepsilon\omega^2 = 0, \tag{3.10$_a$}$$

$$\omega^2 = 0, \tag{3.11$_a$}$$

$$\alpha^2(f^2+\varepsilon^2-\alpha\varepsilon)(\omega^1)^2 - 2\alpha^2\beta\varepsilon\omega^1\omega^2 - \{(f^2+\varepsilon^2)(f^2+\varepsilon^2-\alpha\varepsilon) + \alpha\varepsilon\beta^2\}(\omega^2)^2 = 0, \tag{3.12$_a$}$$

и

$$\alpha^2\beta(\omega^1)^2 + 2\alpha(f^2+\varepsilon^2+\beta^2-\alpha\varepsilon)\omega^1\omega^2 + \beta(f^2+\varepsilon^2+\beta^2-2\alpha\varepsilon)(\omega^2)^2 = 0. \tag{3.13$_a$}$$

2. Нормальная минимальная демиконгруэнция. Минимальную демиконгруэнцию V_3 будем называть *нормальной минимальной демиконгруэнцией* V_3', если ее средний параметр распределения равен нулю: $h = 0$. Для этого, в силу (3.7а), необходимо и достаточно, чтобы

$$\beta = 0. \tag{3.14}$$

В выбранном нами подвижном репере пфаффовы уравнения (1.36) нормальной минимальной демиконгруэнции V_3' принимают вид

$$\begin{aligned} &\omega^3 = 0, && \omega^3{}_0 = f\omega^2, \\ &\omega^1{}_0 = \alpha\omega^1, && \omega^3{}_1 = c\omega^2, \\ &\omega^2{}_0 = \varepsilon\omega^2, && \omega^3{}_2 = f\omega^0 + c\omega^1, \end{aligned} \tag{3.15}$$

а систему (1.38) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &\omega^2{}_1 = \tau\omega^2, \\ &d\alpha = -\alpha^2\omega^0 + \varrho\omega^1, \\ &d\varepsilon = (f^2-\varepsilon^2)\omega^0 + \{fc + (\alpha-\varepsilon)\tau\}\omega^1, \\ &df = -2\varepsilon f\omega^0 + \{(\alpha-\varepsilon)c - f\tau\}\omega^1, \\ &dc = -(\varepsilon c + f\tau)\omega^0 - (f\alpha + 2c\tau)\omega^1. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Из системы ковариантов (1.39) остаются только уравнения

$$[\Delta\tau, \omega^2] = 0, \quad [\Delta\varrho, \omega^1] = 0 \tag{3.17}$$

и уравнения (1.40) принимают вид

$$\begin{aligned} &d\tau = (fc - \varepsilon\tau)\omega^0 + (c^2 - \tau^2 - \alpha\varepsilon)\omega^1, \\ &d\varrho = -3\alpha\varrho\omega^0 + z\omega^1. \end{aligned} \tag{3.18}$$

В силу (3.17—18) получаем, что $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, $N = 1$, $Q = 1$, $Q = N$ (см. [6], стр. 259). Следовательно, рассматриваемая система (3.15—16, 18) находится в инволюции и ее решение определяется с произволом одной функции одного аргумента.

В случае нормальной минимальной демиконгруэнции V_3'

уравнение $\omega^0 = 0$, в силу (3.15), вполне интегрируемо, т. е. *имеется семейство подповерхностей, ортогонально пересекающихся с каждой образующейся. Фокальная подповерхность нормальной минимальной демиконгруэнции* V_3' *совпадает с одной граничной поверхностью* V_3', *а псевдофокальная подповерхность совпадает с другой граничной подповерхностью* V_3'. Легко показать, что *фокальные линии* V_3' (как и при нормальной конгруэнции в R_3 [7]) *являются геодезическими линиями фокальной подповерхности.*

Из (3.10_a—12_a) и (3.13—14) получаем следующий результат: в общем случае нормальной минимальной демиконгруэнции V_3', когда $f^2 + \varepsilon^2 - a\varepsilon \neq 0$, $a \neq 0$, *одна асимптотическая подповерхность, одна из главных подповерхностей и торс, проходящие через данную образующую, совпадают с плоской образующей поверхности* V_3'; *другая главная подповерхность и псевдоторс также совпадают друг с другом.*

3. Параболическая минимальная демиконгруэнция. Минимальную демиконгруэнцию V_3 в R_4 будем называть *параболической минимальной демиконгруэнцией* V_3'', если ее полный параметр распределения $k = 0$. Для этого, в силу (3.8_1), необходимо и достаточно, чтобы

$$f^2 + \varepsilon^2 - a\varepsilon = 0. \tag{3.19}$$

В случае параболической минимальной демиконгруэнции пфаффовы уравнения (1.36) можно в силу (1.37), (3.19) написать в виде

$$\begin{aligned} &\omega^3 = 0, && \omega^3{}_0 = f\omega^2, \\ &\omega^1{}_0 = \frac{f^2 + \varepsilon^2}{\varepsilon}\omega^1 + \beta\omega^2, && \omega^3{}_1 = c\omega^2, \\ &\omega^2{}_0 = \varepsilon\omega^2, && \omega^3{}_2 = f\omega^0 + c\omega^1, \end{aligned} \tag{3.20}$$

а система (1.38) примет вид

$$\begin{aligned} &\omega^2{}_1 = \tau\omega^2, \\ &d\beta = -\frac{\beta}{\varepsilon}(f^2 + 2\varepsilon^2)\omega^0 + \frac{f\beta}{\varepsilon^2}(2c\varepsilon - f\tau)\omega^1 + \vartheta\omega^2, \\ &d\varepsilon = (f^2 - \varepsilon^2)\omega^0 + \frac{f}{\varepsilon}(c\varepsilon + f\tau)\omega^1 + \beta\tau\omega^2, \\ &df = -2\varepsilon f\omega^0 + \frac{f}{\varepsilon}(fc - \varepsilon\tau)\omega^1 + \beta c\omega^2, \\ &dc = -(\varepsilon c + f\tau)\omega^0 - \frac{1}{\varepsilon}\{f(f^2 + \varepsilon^2) + 2c\varepsilon\tau\}\omega^1 - \beta f\omega^2. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Система ковариантов (1.39)

$$[\Delta\tau\,\omega^2] = 0, \quad [\Delta\vartheta\,\omega^2] = 0 \tag{3.22}$$

и система (1.40) получаются в виде

$$d\tau = (fc - \varepsilon\tau)\omega^0 + (c^2 - \tau^2 - f^2 - \varepsilon^2)\omega^1 - \beta\varepsilon\omega^2, \quad (3.23)$$
$$d\vartheta = \vartheta_0\omega^0 + \vartheta_1\omega^1 + y\omega^2.$$

Из (3.22—23) видно, что $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, $N = 1$, $Q = 1$, $Q = N$. Следовательно, система (3.20—21) находится в инволюции ([6] стр. 259), *параболическая минимальная демиконгруэнция существует и определяется произволом одной функции одного аргумента.* Из (3.8_a) получим, что в случае параболической минимальной демиконгруэнции V_3'' один из главных нормальных параметров V_3'' равен нулю.

В общем случае линейчатых гиперповерхностей в R_4 псевдофокусы расположены симметрично относительно центра на расстоянии $\sqrt{-k}$ от последнего [2]. Следовательно, в силу (3.19), *фокус и псевдофокус параболической минимальной демиконгруэнции совпадают с центром образующей, фокальная подповерхность и псевдофокальная подповерхность совпадают со средней подповерхностью.*

Из (1.13), (2.1), ($3—10_1—13_1$) следует, что в случае параболической минимальной демиконгруэнции V''_3 *одна из распределительных подповерхностей, асимптотическая подповерхность, торс и псевдоторс совпадают с плоской образующей поверхности* V_3''. В случае параболической конгруэнции в R_3 фокальные линии являются асимптотическими линиями на фокальной поверхности. Отметим, что *фокальные линии параболической минимальной демиконгруэнции* V_3'' *в* R_4 *не являются асимптотическими линиями фокальной подповерхности.*

4. Нормальная параболическая минимальная демиконгруэнция. Параболическую минимальную демиконгруэнцию будем называть *нормальной параболической минимальной демиконгруэнцией* и обозначить V_3''' (или симметричной минимальной демиконгруэнцией $\bar{V}_3'''$), если для нее имеет место еще равенство (3.14). Можно доказать, что пфаффова система, определяющая демиконгруэнцию V_3''',

$$\omega^3 = 0, \qquad \omega^3{}_0 = f\omega^2,$$
$$\omega^1{}_0 = \frac{f^2 + \varepsilon^2}{\varepsilon}\omega^1, \qquad \omega^3{}_1 = c\omega^2,$$
$$\omega^2{}_0 = \varepsilon\omega^2, \qquad \omega^3{}_2 = f\omega^0 + c\omega^1$$

вполне интегрируема. *Нормальная параболическая минимальная демиконгруэнция* V_3''' *существует и определяется с произволом постоянных.* В случае V_3''' $k = 0$, $h = 0$, т. е. нормальный параметр распределения равен тождественно нулю. Поэтому *обе фокальные, псевдофокальные и граничные подповерхности совпадают со средней подповерхностью;* в силу ($3.10_a—13_a$), (3.14)

и (3. 19), *псевдоторсы, распределительные и главные подповерхности демиконгруэнции* V_3''' *неопределенны.*

Отметим, что здесь нет аналогии с теорией конгруэнции пространства R_3. Нормальной параболической конгруэнции в R_3 не существует.

Литература

1. Лумисте Ю. Г., Дифференциальная геометрия линейчатых гиперповерхностей V_3 в R_4. Матем. сб., 1960, **50**(92), № 2, 203—220.
2. Лумисте Ю. Г., Минимальные n-мерные поверхности, имеющие в каждой точке $(n-1)$-мерное асимптотическое направление. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, **62**, 117—138.
3. Лумисте Ю. Г., Туулметс Л. А., Минимальные конгруэнции V_3 в евклидовом пространстве R_4. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1962, **1**(26), 74—82.
4. Норден А. П., Теория поверхностей. Москва, 1956.
5. Схоутен И. А., Стройк Д. Дж., Введение в новые методы дифференциальной геометрии, т. II. Москва, 1948.
6. Фиников С. П., Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Москва—Ленинград, 1948.
7. Фиников С. П., Теория конгруэнций. Москва—Ленинград, 1950.

Поступило
6 IV 1962

MINIMAALDEMIKONGRUENTSID EUKLEIDILISES RUUMIS R_4

L. Tuulmets

Geomeetria kateeder

Resümee

Eukleidilises ruumis R_4 esineb, nagu teada [1], kolme liiki joonhüperpindu: 1) kongruentsid, 2) demikongruentsid, 3) pseudokongruentsid.

Artiklis [3] on uuritud minimaalkongruentse, s. t. minimaalhüperpindu astakuga 2. Käesolevas töös uuritakse minimaaldemikongruentse — minimaaljoonhüperpindu ühe tasanduvate alampindade parvega. Osutub, et suvalise minimaaldemikongruentsi V_3 fokaaljooned asetsevad kahemõõtmelisel tasandil, mis läbivad fikseeritud punkti P. Minimaaldemikongruents V_3 omab 2 parve kahemõõtmelisi asümptootilisi alampindu. Üks parv asümptootilisi alampindu moodustatakse tasandiliste fokaaljoonte puutujate poolt, kuna teise parve asümptootilised alampinnad osutuvad koonusteks tipuga P, kusjuures koonuste moodustajad ei lange ühte minimaaldemikongruentsi moodustajatega.

Iga etteantud minimaaldemikongruentsi V_3 ruumis R_4 võib saada, kui mingil tasandiliste moodustajate parvega minimaalhüperpinnal võtta kahemõõtmeline alampind, mis lõikab iga tasandilist moodustajat mööda mingit joont ja tõmmata puutujad kõigile saadud joontele. Saadud puutujad moodustavadki soovitud minimaaldemikongruentsi.

Töös vaadeldakse ka mõningaid minimaaldemikongruentsi erijuhte.

MINIMAL DEMI-CONGRUENCES IN THE EUCLIDEAN SPACE R_4

L. Tuulmets

Summary

The Euclidean space R_4 is known to contain three types of ruled hypersurfaces V_3 (1) congruences, (2) demi-congruences, (3) pseudo-congruences. The article discusses minimal congruences, i. e. minimal hypersurfaces with rank 2.

In this paper minimal demi-congruences — minimal ruled V_3 with one family developable subsurfaces are investigated. It appears that the focal lines of any minimal demi-congruence V_3 are in two-dimensional planes that pass the fixed point P. Minimal demi-congruence V_3 has two families of two-dimensional asymptotical subsurfaces. One family of the asymptotical subsurfaces is formed by the tangents of the plane focal lines, while the asymptotical surfaces of the other family are cones with tops P, but the generators of the cones do not coincide with the tangents of the minimal demi-congruence.

Any minimal demi-congruence V_3 in the Euclidean space R_4 is obtained as follows: in any minimal V_3^* with a family plane generators a V_2 is taken, intersecting each plane generator on any line, and tangents are drawn to all these lines. All these tangents form the desired minimal demi-congruence.

In addition some particular cases of the minimal demi-congruence are dealt with.

НОВЫЕ ОБЩИЕ МЕТОДЫ СУММИРОВАНИЯ

Э. Реймерс
Кафедра математического анализа

Введение

В настоящей статье определяются новые общие методы суммирования числовых последовательностей, основанные на алгебре Буля E, элементами которой являются последовательности, состоящие из чисел 0 и 1.

В § 1 аксиоматически определяется сумма для последовательностей из E, при помощи которых затем определяется сумма для всех (так называемых) почти ограниченных последовательностей, класс которых шире класса ограниченных последовательностей m. Аксиоматическим определением суммы для ограниченных последовательностей занимались Банах [4], Лоренц [7] и особенно Эрве [5], но у нас аксиомы частично другого вида, более конкретизированы и подход другой.

В § 2, основываясь на алгебре Буля E, определяются общие методы суммирования $\mathfrak{A}$, которые обладают значительно лучшими свойствами по сравнению с обычными матричными методами суммирования. Доказываются теоремы, дающие условия для суммируемости (теоремы 2. 1. 1 и 2. 1. 2) и условия для консервативности метода $\mathfrak{A}$ (Теорема 2. 2. 1).

В § 3 исследуется вопрос о суммировании методом $\mathfrak{A}$ ограниченных последовательностей. Здесь вводится понятие $\mathfrak{A}$-интеграла для последовательности. Даются условия для существования $\mathfrak{A}$-интеграла (теоремы 3. 1. 2 и 3. 1. 3), а также условия для того, чтобы метод $\mathfrak{A}$ суммировал все ограниченные последовательности (теорема 3. 2. 1). В частности, отсюда получаем, что регулярный метод $\mathfrak{A}$ может суммировать все ограниченные последовательности — свойство, которого нет у матричных методов суммирования [8].

В § 4 дается общий вид линейного непрерывного функционала в пространстве ограниченных последовательностей и определяется ее норма. Выводятся также некоторые частные виды функционала в подпространствах.

В § 5 даются примеры методов $\mathfrak{A}$ и изучаются их свойства, связанные с суммированием ограниченных последовательностей.

Отметим еще, что ниже мы используем некоторые упрощения для символики, смысл которых мы поясним на следующих примерах:

$$\lim \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \alpha_n, \quad \lim_n \alpha_{nk} = \lim_{n\to\infty} \alpha_{nk}, \quad \Sigma\alpha_k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k, \quad \Sigma_k \alpha_{nk} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk}.$$

Для индексов, пределы изменения которых не указаны, полагаем, что они принимают все значения 0, 1, ... Для двух бесконечных последовательностей $x = (x_0, x_1, \ldots) = \{x_k\}$ и $y = (y_0, y_1, \ldots) = \{y_k\}$ мы используем сложение, вычитание и умножение в следующем смысле:

$$x \pm y = \{x_k \pm y_k\}, \quad xy = \{x_k y_k\}.$$

§ 1. Основные понятия и вспомогательные результаты

1.1. Множество E. Обозначим через $\omega = \{\delta_k\}$ бесконечную последовательность, элементы δ_k которой 0 и 1 в произвольном расположении. Множество всех последовательностей ω обозначим через E. Множество E, как известно, имеет мощность континуума. Используем для последовательностей ω ещё следующие обозначения: $\Theta = (0, 0, \ldots)$, $e = (1, 1, \ldots)$, $e_k = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, где 1 стоит на k-том месте ($k = 0, 1, \ldots$). Последовательности Θ, e, e_k принадлежат также множеству E.

Введем в E частичное упорядочение. Пусть последовательности $\omega = \{\delta_k\}$ и $\omega' = \{\delta_k'\}$ принадлежат E. Мы будем считать, что ω больше ω' (и пишем $\omega > \omega'$ или $\omega' < \omega$), если $\delta_k \geqslant \delta'_k$ при всех $k = 0, 1, \ldots$ и при этом $\delta_k > \delta'_k$ хотя бы при одном k. Если $\delta_k = \delta'_k$, то пишем $\omega = \omega'$. Запись $\omega \geqslant \omega'$ будет означать, что $\omega > \omega'$ или $\omega = \omega'$. Поскольку δ_k и δ'_k могут принимать только значения 0 или 1, то $\omega > \omega'$ значит, что в ω те же места заняты числами 1, что и в ω' и по крайней мере еще одно $\delta_k = 1$. Таким образом, в E наибольшим элементом будет e и наименьшим Θ. Для всех остальных ω имеем $\Theta < \omega < e$. При таком упорядочении будут выполнены условия:

I. $\omega > \omega'$ *исключает* $\omega = \omega'$,

II. *если* $\omega > \omega'$ *и* $\omega' > \omega''$, *то и* $\omega > \omega''$.

Верхней гранью или супремумом последовательностей ω' и ω'' будем называть наименьшую из последовательностей ω при котором $\omega' \leqslant \omega$ и $\omega'' \leqslant \omega$.

Пусть даны последовательности $\omega' = \{\delta'_k\}$ и $\omega'' = \{\delta''_k\}$. Составим последовательность $\omega = \{\delta_k\}$, где

$$\delta_k = \max\{\delta'_k, \delta''_k\}.$$

Последовательность ω будет верхней гранью последовательностей ω' и ω''. При этом мы пишем $\omega = \omega' \vee \omega''$.

Аналогично определяем нижнюю грань или инфимум. Нижней гранью последовательностей $\omega' = \{\delta'_k\}$ и $\omega'' = \{\delta''_k\}$ будет последовательность $\omega = \{\delta_k\}$, где $\delta_k = \delta'_k \delta''_k$ (или $\delta_k = \min(\delta'_k, \delta_k'')$). При этом мы пишем $\omega = \omega'\omega''$.

Если для двух последовательностей ω' и ω'' будет $\omega'\omega'' = \Theta$, то их верхней гранью будет

$$\omega' \vee \omega'' = \omega' + \omega''.$$

Таким образом, в E выполняется условие

III. *Для любых последовательностей* $\omega', \omega'' \in E$ *существуют их супремум и их инфимум.*

Ввиду условий I, II, III множество E будет структурой (см. [1]).

Структуру называют *полной*, если всякое ее не пустое подмножество имеет верхнюю и нижнюю грани. Структура E полна, так как всякое ее подмножество имеет грани, вычисляемые по координатам. Например, если последовательности $\omega_i \in E$, где $\omega_i = \{\delta_k^i\}$, составляют некоторое подмножество в E, то $\omega = \{\delta_k\}$ будет его верхней гранью, если $\delta_k = \max\limits_i \delta_k^i$, и нижней гранью, если $\delta_k = \min\limits_i \delta_k^i$.

Структура E будет также дистрибутивной, т. е.

$$(\omega \vee \omega')\omega'' = (\omega\omega'') \vee (\omega'\omega'').$$

Назовем последовательность $C\omega$ *дополнением к последовательности* ω, если $\omega \vee C\omega = e$ и $\omega C\omega = \Theta$. В структуре E для любого ω имеется его дополнение $C\omega = e - \omega$.

Ввиду сказанного мы можем структуру E рассматривать как полную булеву алгебру.

1.2. Разложения в E. Назовем две последовательности ω и ω' из E *дизъюнктными* (и пишем $\omega \mathrm{d} \omega'$), если $\omega\omega' = \Theta$. Множество попарно дизъюнктных последовательностей $\{\omega_\nu\}$ ($\nu = 0, 1, \ldots, m$) назовем *разложением последовательности* ω, если $\omega = \omega_0 \vee \ldots \vee \omega_m$, т. е. если

$$\omega = \sum_{\nu=0}^{m} \omega_\nu.$$

Такое множество $\{\omega_\nu\}$ будем называть *полным*, если в E не существует отличного от Θ последовательности, дизъюнктного всем ω_k. Если множество попарно дизъюнктных последовательностей ω_ν ($\nu = 0, 1, \ldots, m$) полно, то

$$\sum_{\nu=0}^{m} \omega_\nu = e.$$

Действительно, если положим

$$\omega = \sum_{\nu=0}^{m} \omega_\nu$$

и $\omega < e$, то $C\omega > \Theta$, причем $C\omega \mathrm{d} \omega$, но тогда также $C\omega \mathrm{d}\omega_\nu$ при всех $\nu = 0, 1, \ldots, m$ и мы получаем, что $\{\omega_\nu\}$ не полно, что противоречит предположению.

Полные разложения $\{\omega_\nu\}$ будем обозначать через q, т. е. $q = \{\omega_\nu\}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, m)$ будет означать разложение последовательности e.

Пусть $q = \{\omega_k\}$ $(k = 0, 1, \ldots, l)$ и $q_1 = \{\omega'_\nu\}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, m)$. Если q и q_1 совпадают, то пишем $q = q_1$. Разложение q_1 будем считать продолжением разложения q (и пишем $q_1 > q$ или $q < q_1$), если q_1 получается из q путем разложения его членов ω_k. Запись $q_1 \geqslant q$ будет означать, что $q_1 > q$ или $q_1 = q$. Если даны разложения q, q_1, q_2, где $q_1 \geqslant q$ и $q_2 \geqslant q$, то пишем $q_1, q_2 \geqslant q$, а если $q \geqslant q_1$ и $q \geqslant q_2$, то пишем $q \geqslant q_1, q_2$, и т. д.

Аналогичную запись мы используем и при символах $>$ и $<$. Имеет место следующая

Лемма 1.2.1. *Для двух произвольных разложений q_1 и q_2 всегда существует такое разложение q, что $q > q_1, q_2$.*

Доказательство. Пусть $q_1 = \{\omega_k'\}$ $(k = 0, 1, \ldots, l)$ и $q_2 = \{\omega''_\nu\}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, m)$. Рассмотрим множество последовательностей $\{\omega_{k\nu}\}$, где

$$\omega_{k\nu} = \omega'_k \omega''_\nu \quad (k = 0, 1, \ldots, l;\ \nu = 0, 1, \ldots, m).$$

Последовательности $\omega_{k\nu}$ попарно дизъюнктны. Например, при $k \neq p$ имеем $\omega'_k \mathrm{d} \omega'_p$, а $\omega_{k\nu} \leqslant \omega'_k$ и $\omega_{p\mu} \leqslant \omega'_p$, следовательно $\omega_{k\nu} \mathrm{d} \omega_{p\mu}$.

Для разложения q_1 имеем из-за дистрибутивности структуры E, что

$$\omega'_k = \omega'_k e = \omega'_k \sum_{\nu=0}^{m} \omega''_\nu = \sum_{\nu=0}^{m} \omega'_k \omega''_\nu = \sum_{\nu=0}^{m} \omega_{k\nu}.$$

Аналогично, для q_2 получаем, что

$$\omega''_\nu = \sum_{k=0}^{l} \omega_{k\nu}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{k=0}^{l} \sum_{\nu=0}^{m} \omega_{k\nu} = \sum_{k=0}^{l} \omega'_k = e.$$

Значит множество $\{\omega_{k\nu}\} = q$ — полное разложение и $q > q_1, q_2$.

Лемма доказана.

1.3. Сумма для ω. Мы скажем, что последовательность $\omega_1 = \{\delta'_k\}$ получается из последовательности $\omega = \{\delta_k\}$ *сдвигом* (на l элементов), если $\delta'_k = \delta_{k+l}$ ($k = 0, 1, \ldots$; $l = 0, \pm 1, \ldots$; $\delta_{-1} = \delta_{-2} = \ldots = 0$).

Сгруппируем элементы последовательности $\omega = \{\delta_k\}$ в конечные группы следующим образом:

$$(\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_l)\,(\delta_{l+1}, \delta_{l+2}, \ldots, \delta_m)\,(\delta_{m+1}, \ldots) \ldots .$$

Скажем, что в ω сделана *конечная перестановка*, если в группах вида $(0, 1, \ldots, 1, 0)$ или $(1, 0, \ldots, 0, 1)$ соседние числа 0 и 1, а также 1 и 0 переставлены местами. Например, группа $(0, 1, 1, 0)$ преобразуется при этом в группу $(1, 0, 0, 1)$.

Последовательности ω и ω' мы будем называть *конгруэнтными* (и пишем $\omega \sim \omega'$), если их можно сдвигами и конечными перестановками привести к совпадению. Например, последовательности $\omega = (0, 1, 0, 1, \ldots)$ и $\omega' = (0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, \ldots)$ конгруэнтны. Если $\omega = \omega_1$, то $\omega \sim \omega_1$. Если $\omega \sim \omega_1$ и $\omega_1 \sim \omega_2$, то $\omega \sim \omega_2$.

Обозначим сумму последовательности ω через $s(\omega)$. Для определения суммы $s(\omega)$ мы будем требовать, чтобы она удовлетворяла условиям

1° $s(e) = 1$,

2° $s(\omega) \geqslant 0$,

3° если $\omega_1 \mathrm{d} \omega_2$, то $s(\omega_1 + \omega_2) = s(\omega_1) + s(\omega_2)$,

4° если $\omega_1 \sim \omega_2$, то $s(\omega_1) = s(\omega_2)$.

Эти условия мы будем называть *аксиомами суммы*. Из них как следствия заключаем остальные важные свойства суммы:

5° если $\omega \geqslant \omega_1$, то $s(\omega - \omega_1) = s(\omega) - s(\omega_1)$,

6° $s(\Theta) = 0$,

7° если $\omega_1 \leqslant \omega_2$, то $s(\omega_1) \leqslant s(\omega_2)$.

Действительно, пусть $\omega = \omega_1 + \omega_2$, тогда $s(\omega) = s(\omega_1) + s(\omega_2)$, откуда $s(\omega_2) = s(\omega) - s(\omega_1)$, где $\omega_2 = \omega - \omega_1$, что доказывает 5°. Далее, $s(\Theta) = s(e - e) = s(e) - s(e) = 0$. И, наконец, если $\omega_1 \leqslant \omega_2$, то $s(\omega_2 - \omega_1) \geqslant 0$, откуда $s(\omega_2) \geqslant s(\omega_1)$.

При помощи аксиом мы можем определить сумму $s(\omega)$. Для Θ и e сумма уже определена: $s(\Theta) = 0$, $s(e) = 1$. Пусть теперь ω_1 и ω_2 такие, что $e = \omega_1 + \omega_2$ и $\omega_1 \sim \omega_2$, тогда из аксиом следует, что $s(\omega_1) = s(\omega_2) = \frac{1}{2}$. Пусть ω_1, ω_2, ω_3 такие, что $e = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ и $\omega_1 \sim \omega_2 \sim \omega_3$, тогда $s(\omega_1) = s(\omega_2) = s(\omega_3) = \frac{1}{3}$ и $s(\omega_1 + \omega_2) = \frac{2}{3}$. Продолжая аналогично, мы при помощи аксиом определим сумму $s(\omega)$ для всех последовательностей ω, для которых сумма будет рациональным числом, причем всякое рациональное число $\xi \in [0, 1]$ будет суммой некоторой последовательности ω. Сумма $s(\omega)$ для ω будет при этом однозначно определена, однако две различные последовательности ω и ω_1 могут иметь одну и ту же сумму $s(\omega) = s(\omega_1)$. Например, для $\omega = (0, 1, 0, 1, \ldots)$ и $\omega' = (0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, \ldots)$ будет

$s(\omega) = s(\omega') = \frac{1}{2}$. Все последовательности, в которых чисел 1 конечное число, имеют сумму 0. В частности $s(e_k) = 0$.

Обозначим через ω_r последовательности, суммы которых мы определили, причем $s(\omega_r) = r$. Для всех остальных $\omega \in E$ положим

$$s(\omega) = \sup_{\omega_r \leqslant \omega} s(\omega_r). \tag{1.3.1}$$

Единственность суммы (1.3.1) следует из построения. Однако нам нужно еще показать, что сумма удовлетворяет аксиомам. Для этого немного видоизменим прицип построения суммы для ω. Разложим e на две части ω_1 и ω_2 так, чтобы вторая последовательность ω_2 получалась из первой ω_1 сдвигом влево на 1 элемент. Такими будут $\omega_1 = (0, 1, 0, 1, \ldots)$ и $\omega_2 = (1, 0, 1, 0, \ldots)$. При этом мы имеем $s(\Theta) = 0$, $s(\omega_1) = \frac{1}{2}$, $s(\omega_1 + \omega_2) = s(e) = 1$. Разложим теперь аналогично ω_1 на две части ω_{11}, ω_{12}, и ω_2 на две части ω_{21}, ω_{22}, где ω_{12} получается из ω_{11}, а ω_{22} из ω_{21} сдвигом влево на 2 элемента. Такими будут

$$\omega_{11} = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \ldots), \quad \omega_{12} = (0, 1, 0, 0, 0, 1, \ldots),$$
$$\omega_{21} = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \ldots), \quad \omega_{22} = (1, 0, 0, 0, 1, 0, \ldots).$$

Мы имеем:

$$s(\omega_{11}) = \tfrac{1}{4},\ s(\omega_{11} + \omega_{12}) = s(\omega_1) = \tfrac{1}{2},\ s(\omega_{11} + \omega_{12} + \omega_{21}) = \tfrac{3}{4}.$$

Таким образом, мы получили последовательности ω_{r_k} с суммами

$$s(\omega_{r_k}) = r_k = \frac{k}{4} \quad (k = 0, 1, \ldots, 4),$$

где $\omega_{r_0} = \Theta$, $\omega_{r_1} = \omega_{11}$, $\omega_{r_2} = \omega_{11} + \omega_{12}$ и т. д..

Продолжая аналогично, мы через l шагов получим последовательности ω_{r_k} с суммами

$$s(\omega_{r_k}) = r_k = \frac{k}{2^l} \quad (k = 0, 1, \ldots, 2^l). \tag{1.3.2}$$

Определим такие последовательности ω_r для всех l.

Определим теперь для каждого числа $\xi \in [0, 1]$ последовательность

$$\omega_\xi = \sup_{r \leqslant \xi} \omega_r = \inf_{r \geqslant \xi} \omega_r.$$

Такие последовательности ω_ξ существуют из-за полноты алгебры E. Найдем для последовательности ω_ξ сумму $s(\omega_\xi)$. При каждом l мы можем выбрать из (1.3.2) два соседних рациональных числа r_i и r_{i+1} так, что $r_i \leqslant \xi \leqslant r_{i+1}$, тогда $\omega_{r_i} \leqslant \omega_\xi \leqslant \omega_{r_{i+1}}$ и в силу монотонности суммы (свойство 7°) имеем

$$s(\omega_{r_i}) \leqslant s(\omega_\xi) \leqslant s(\omega_{r_{i+1}}).$$

Однако, разницу $s(\omega_{r_{i+1}}) - s(\omega_{r_i}) = r_{i+1} - r_i$ мы можем сделать сколь угодно малой соответствующим выбором l. Поэтому $s(\omega_\xi) = \xi$.

Таким образом, мы определили для некоторого множества $E' \subset E$ последовательностей ω_ξ сумму $s(\omega_\xi)$, удовлетворяющую аксиомам суммы.

Примечание 1.3.1. Практически можно для каждого ξ построить эти последовательности $\omega_\xi \in E'$ следующим образом. Определим для каждого $n = 0, 1, \ldots$ число m так, чтобы соотношение $\frac{m}{n+1}$ было наибольшим при котором еще $\frac{m}{n+1} \leqslant \xi$. Выберем в последовательности $\omega_\xi = \{\delta_k\}$ элементы δ_k так, чтобы при каждом $n = 0, 1, \ldots$ было

$$m = \sum_{k=0}^{n} \delta_k.$$

Тогда $\omega_\xi \in E'$ и $s(\omega_\xi) = \xi = \lim_n \frac{m}{n+1}$.

Если в последовательности $\omega_\xi \in E'$ заменить конечное число нулей на единицы или наоборот, то сумма последовательности ω_ξ не изменится, так как $s(e_k) = 0$ при всех k. Все такие последовательности вместе с множеством E' обозначим через E''.

Рассмотрим теперь последовательности ω' для которых $\Theta < \omega' < \omega_\xi$ $(\omega_\xi \in E'')$ и $\inf_\xi s(\omega_\xi) = 0$. Такими будут последовательности с конечным числом единиц, но могут быть последовательности и с бесконечным числом единиц. Например, такой будет последовательность $\omega' = \{\delta_k'\}$, где

$$\delta'_k = \begin{cases} 1, \text{ при } k = 2^n - 1 \ (n = 0, 1, \ldots), \\ 0, \text{ при остальных } k. \end{cases} \qquad (1.3.3)$$

Если положить в $\omega_\xi = \{\delta_k\}$ при произвольном $h = 0, 1, \ldots$

$$\delta_k = \begin{cases} 1, \text{ при } k = 0, 1, \ldots, 2^h - 1 \text{ и } k = 2^h\mu - 1 \ (\mu = 2, 3, \ldots), \\ 0, \text{ при остальных } k, \end{cases}$$

то $\Theta < \omega' < \omega_\xi$, $\omega_\xi \in E''$ и $s(\omega_\xi) = 2^{-h}$. Отсюда следует, что $s(\omega') \leqslant 2^{-h}$ при всех $h = 0, 1, \ldots$, т. е. $s(\omega') = 0$. Все такие последовательности ω', а также последовательности $\omega = \omega_\xi \pm \omega' \in E$, где $\omega_\xi \in E''$ добавим к множеству E''. Полученное множество обозначим через E_0. Последовательности из E_0 удовлетворяют аксиомам суммы.

Примечание 1.3.2. Для всех $\omega = \{\delta_k\} \in E_0$

$$s(\omega) = \lim_n \frac{\sum_{k=0}^{n} \delta_k}{n+1}.$$

В существовании этого предела можно убедиться геометрически, изобразив соотношения, стоящие справа, точками на плоскости при $n = 0, 1, \ldots$ (см. примечание 1.3.1).

Множество E_0 будет только частью множества E. Однако, мы определили $s(\omega)$ уже для всех $\omega \in E$, так как произвольную $\omega \in E$ мы можем конечными перестановками и сдвигами перевести в E_0. Для этого нужно только конечными перестановками в последовательности ω распределить элементы 0 и 1 равномерно по всей последовательности, а затем сдвигом на $l = 0, 1, \ldots$ элементов привести ω в E_0. Например, если мы конечными перестановками получили последовательность $(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, \ldots)$, то сдвигом на 2 элемента вправо получим последовательность из E_0.

Таким образом, сумма $s(\omega)$, определяемая равенством (1.3.1), удовлетворяет аксиомам суммы.

Примечание 1.3.3. Сумму $s(\omega)$ можно рассматривать как меру некоторого множества последовательностей из E. Пусть $\omega_1 < \omega_2$ и $\omega' = \omega_2 - \omega_1$. Обозначим через $\Omega(\omega)$ множество последовательностей ω для которых $\omega_1 \leqslant \omega \leqslant \omega_2$. Назовем *мерой* множества $\Omega(\omega)$ величину

$$\mu\Omega = s(\omega_2) - s(\omega_1) = s(\omega').$$

Таким образом, $s(\omega')$ есть мера множества последовательностей, заключенных между ω_1 и $\omega_1 + \omega'$.

Пусть $\omega' = \{\delta'_k\}$ определена формулами (1.3.3). Множество $\Omega(\omega)$, где $\Theta \leqslant \omega \leqslant \omega'$, имеет мощность континуума, однако его мера $s(\omega') = 0$. Аналогично можно строить и другие множества мощности континуума с мерой нуль.

1.4. Сумма для $x \in m$. Пусть даны последовательность $x = \{x_k\}$ и разложение $q = \{\omega_\nu\}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, m)$. Пусть в $\omega_\nu = \{\delta_k^\nu\}$ числа $\delta_k^\nu = 1$ расположены в местах, где индекс k принимает значения $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n, \ldots$, т. е.

$$\delta_k^\nu = \begin{cases} 1, \text{ при } k = \nu_n \ (n = 0, 1, \ldots), \\ 0, \text{ при остальных } k. \end{cases}$$

Отметим, что количество единиц в ω_ν до места ν_n включительно равно $n+1$. Определим теперь последовательности $x\omega_\nu = \{x_{\nu_n}\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$, где x_{ν_n} — те элементы последовательности x, которые попали в $x\omega_\nu$. Например, если $\omega_\nu = (1, 0, 1, 0, \ldots)$, то $x\omega_\nu = (x_0, 0, x_2, 0, \ldots) = \{x_{\nu_n}\}$, где $x_{\nu_0} = x_0$, $x_{\nu_1} = x_2, \ldots$.

Составим сумму

$$s_n(x,\ q) = \sum_{\nu=0}^{m} x_{\nu_n} s(\omega_\nu). \qquad (1.4.1)$$

Определение 1.4.1. *Число $s(x)$ мы будем называть обычной суммой последовательности x, если соответственно каждому $\varepsilon > 0$ можно найти такое q_0, что для всех $q \geqslant q_0$ выполняется неравенство*

$$|s(x) - s_n(x,\ q)| < \varepsilon$$

при $n > N(q_0)$.

Следствие 1.4.1. *Сумма $s(x)$ для x определяется однозначно.*

Доказательство. Предположим, что определение 1.4.1 дает для x две суммы $s_1(x)$ и $s_2(x)$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существуют такие разложения q_1 и q_2, что

$$|s_1(x) - s_n(x,\ q)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для } q \geqslant q_1,$$

$$|s_2(x) - s_n(x,\ q)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для } q \geqslant q_2$$

при достаточно большом n. Пусть $q_0 \geqslant q_1,\ q_2$, тогда эти неравенства также выполняются для всех $q \geqslant q_0$. Но тогда должно быть

$$|s_1(x) - s_2(x)| < \varepsilon,$$

откуда ввиду произвольности ε получаем, что $s_1(x) = s_2(x)$.

Следующие теоремы дают условия для существования суммы $s(x)$.

Теорема 1.4.1. *Сумма $s(x)$ для последовательности x существует тогда и только тогда, когда соответственно каждому $\varepsilon > 0$ можно найти такое q_0, что для всех $q,\ q' \geqslant q_0$ выполняется неравенство*

$$|s_n(x,\ q) - s_l(x,\ q')| < \varepsilon \qquad (1.4.2)$$

при $n,\ l > N(q_0)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть x имеет сумму $s(x)$, тогда

$$|s_n(x,q) - s_l(x,\ q')| \leqslant |s_n(x,\ q) - s(x)| + |s(x) - s_l(x,\ q')|.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Выберем такое q_0, что

$$|s(x) - s_n(x,\ q)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $q \geqslant q_0$, если $n > N(q_0)$. Следовательно, для всех $q,\ q' \geqslant q_0$

$$|s_n(x,\ q) - s_l(x,\ q')| < \varepsilon$$

при $n,\ l > N(q_0)$.

Достаточность. Пусть $\varepsilon_m > 0$ и $\lim\limits_m \varepsilon_m = 0$. Ввиду условий (1.4.2) мы можем найти такие разложения

$$q_1, q_2, \ldots, q_m, \ldots,$$

что выполняются неравенства

$$|s_n(x, q) - s_l(x, q')| < \varepsilon_m \qquad (1.4.3)$$

для всех $q, q' \geqslant q_m$ при $n, l > N(q_m)$.

Построим теперь последовательность полных разложений p_1, $p_2, \ldots, p_m, \ldots$ так, чтобы было

$$p_1 < p_2 < \ldots < p_m < \ldots \text{ и } p_m > q_m.$$

Такое построение возможно ввиду леммы 1.2.1. На основании неравенства (1.4.3)

$$|s_n(x, p) - s_l(x, p')| < \varepsilon_m \qquad (1.4.4)$$

для всех $p, p' \geqslant p_m$, если $n, l > N(p_m)$.

Таким образом, выполняется неравенство

$$|s_n(x, p_i) - s_l(x, p_k)| < \varepsilon_m$$

для всех $i, k \geqslant m$, если $n, l > N(m)$. Следовательно, последовательность $\{z_{ni}\}$, где $z_{ni} = s_n(x, p_i)$, сходится при $n, i \to \infty$. Пусть $z = \lim\limits_{n, i} z_{ni}$. Положим в (1.4.4) $p = p_i$, тогда

$$|z_{ni} - s_l(x, p')| < \varepsilon_m$$

для $p' \geqslant p_m$, $i \geqslant m$, если $n, l > N(p_m)$. В пределе при $n, i \to \infty$ мы получим

$$|z - s_l(x, p')| < \varepsilon_m$$

для всех $p' \geqslant p_m$, если $l > N(p_m)$.

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Выберем такое большое число m, что $\varepsilon_m < \varepsilon$, тогда также выполняется неравенство

$$|z - s_l(x, p)| < \varepsilon$$

для всех $p \geqslant p_m$, если $l > N(p_m)$. Следовательно, z есть сумма для x по определению.

Теорема доказана.

Примечание 1.4.1. Из доказательства теоремы 1.4.1 видно, что если $s(x)$ сумма для x, то можно выбрать такую последовательность разложений $q_1 < q_2 \ldots < q_m < \ldots$, что

$$s(x) = \lim_{m, n} s_n(x, q)$$

при $q \geqslant q_m$, причем можно положить $m = n$.

Теорема 1.4.2. *Сумма $s(x)$ для последовательности x суще-*

ствует тогда и только тогда, когда соответственно каждому $\varepsilon > 0$ *можно найти такое* q_0, *что для всех* $q \geqslant q_0$ *выполняется неравенство*

$$|s_n(x, q) - s_l(x, q_0)| < \varepsilon \qquad (1.4.5)$$

при $n, l \geqslant N(q_0)$.

Доказательство. Покажем, что условия (1.4.2) и (1.4.5) равносильны. Пусть выполняется (1.4.5). Выберем q_0 так, чтобы было

$$|s_n(x, q) - s_l(x, q_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $q \geqslant q_0$ при $n, l > N(q_0)$. Пусть $q, q' \geqslant q_0$, тогда

$$|s_n(x, q) - s_l(x, q')| \leqslant$$
$$\leqslant |s_n(x, q) - s_k(x, q_0)| + |s_k(x, q_0) - s_l(x, q')| < \varepsilon,$$

если $n, l, k > N(q_0)$. Следовательно, условие (1.4.2) выполнено.

Пусть теперь выполняется (1.4.2). Возьмем там $q' = q_0$ и мы получим условие (1.4.5).

Теорема доказана.

Пусть $x(q) = \{x\omega_\nu\}$ обозначает множество последовательностей $x\omega_\nu$, составленных при помощи разложения $q = \{\omega_\nu\}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, m)$. Мы имеем

$$x = \sum_{\nu=0}^{m} x\omega_\nu .$$

Следовательно, $x(q)$ можно рассматривать как разложение последовательности x.

Лемма 1.4.1. *Пусть* $x \in m$. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *можно найти такое* q_0, *что для* $x\omega_\nu = \{x_{\nu_n}\}$ *во всех разложениях* $x(q) = \{x\omega_\nu\}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, m)$, *где* $q \geqslant q_0$, *будет*

$$|x_{\nu_k} - x_{\nu_n}| < \varepsilon \quad (\nu = 0, 1, \ldots, m). \qquad (1.4.6)$$

Доказательство. Пусть $x = \{x_k\} \in m$. Выберем такие числа a и b, что $a < x_k < b$. Разложим отрезок $[a, b]$ на $m + 1$ частей точками

$$a = \eta_0 < \eta_1 < \ldots < \eta_{m+1} = b.$$

Распределим элементы x_k на отрезке $[a, b]$ по их величине. Элементы x_k, оказавшиеся на полуотрезке $[\eta_\nu, \eta_{\nu+1})$, обозначим через x_{ν_n} $(n = 0, 1, \ldots)$. Ввиду этого

$$\eta_\nu \leqslant x_{\nu_n} < \eta_{\nu+1} \quad (\nu = 0, 1, \ldots, m). \qquad (1.4.7)$$

Пусть в последовательности ω_ν числа 1 расположены в тех

местах, где в последовательности $x = \{x_k\}$ располагаются элементы x_{ν_n}, а остальные элементы равны 0. Тогда

$$\sum_{\nu=0}^{m} \omega_\nu = e,$$

т. е. $\{\omega_\nu\} = q$ — полное разложение. Элементы x_{ν_n} из (1.4.7) будут элементами последовательности $x\omega_\nu$. Таким образом, мы получили для x некоторое разложение $x(q) = \{x\omega_\nu\}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, m)$.

Если на отрезке $[a, b]$ к выбранным точкам η_k добавить еще новые точки, то соответствующее разложение $q_1 \geqslant q$.

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Выберем точки η_ν так густо, что $\max(\eta_{\nu+1} - \eta_\nu) < \varepsilon$, тогда, ввиду (1.4.7), для каждого $x\omega_\nu$ будет выполняться условие (1.4.6), причем оно будет выполняться также для всех продолжений разложения q.

Лемма доказана.

Определение 1.4.2. *Мы скажем, что последовательность $x = \{x_\nu\}$ почти ограничена, если она ограничена при исключении из нее части $x\omega$, где $s(\omega) = 0$.*

Ввиду примечания 1.3.3 мы можем сказать, что почти ограниченная последовательность может содержать множество неограниченных подпоследовательностей с мерой нуль. Класс почти ограниченных последовательностей будет шире класса ограниченных последовательностей m.

Теорема 1.4.3. *Последовательность x имеет сумму $s(x)$ тогда и только тогда, когда она почти ограничена.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x = \{x_\nu\}$ имеет сумму $s(x)$. Тогда из определения 1.4.1 следует, что

$$|s_n(x, q)| < \varepsilon + |s(x)|$$

для всех $q \geqslant q_0$ при $n > N(q_0)$, т. е. последовательность $\{s_n(x, q)\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ ограничена независимо от $q \geqslant q_0$.

Предположим, что при $q = \{\omega_\nu\} \geqslant q_0$ последовательность $x\omega_\nu = \{x_{\nu_n}\}$, где $s(\omega_\nu) \neq 0$, неограничена. Тогда в (1.4.1) член $x_{\nu_n} s(\omega_\nu)$ может быть сделан сколь угодно большим при дальнейшем разложении q путем отделения от ω_ν некоторых e_k, где индекс k меньше, чем ν_n. Поскольку $s(e_k) = 0$, то в (1.4.1) новых членов не добавится и $s(\omega_\nu)$ не измениться, но в слагаемом $x_{\nu_n} s(\omega_\nu)$ индекс ν_n примет уже другое большее значение, так как количество чисел 1 в ω_ν до места ν_n равно $n + 1$. Так мы можем это слагаемое сделать сколь угодно большим при постоянстве других. Значит последовательность $\{s_n(x, q)\}$ не

может быть ограничена для всех $q \geqslant q_0$. Полученное противоречие доказывает необходимость условия.

Достаточность. Пусть $x' = \{x'_k\}$ почти ограничена. Элементы неограниченной части $x'\omega$ (причем $s(\omega) = 0$) заменим нулями и полученную последовательность обозначим через $x = \{x_k\}$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. На основании леммы 1.4.1 выберем такое разложение $q_0 = \{\omega_\nu\}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, m)$, что для каждого $x\omega_\nu = \{x_{\nu_n}\}$ будет $|x_{\nu_k} - x_{\nu_n}| < \varepsilon$.

Пусть $q = \{\omega'_\nu\}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, r)$ и $q \geqslant q_0$, тогда

$$s_n(x, q) - s_l(x, q_0) = \sum_{\nu=0}^{r} x_{\nu_n} s(\omega'_\nu) - \sum_{\nu=0}^{m} x_{\nu_l} s(\omega_\nu).$$

Продолжим разложение последовательностей ω_ν так, чтобы q_0 совпала с разложением q. Такое продолжение возможно из-за того, что $q \geqslant q_0$. При этом каждая $s(\omega_\nu)$ может разложиться на несколько частей. Оставим при всех полученных частях те же элементы x_{ν_l} которые были при соответствующих исходных $s(\omega_\nu)$, тогда $s_l(x, q_0)$ не изменится. Например, если получилось разложение $\omega_\nu = \omega_{\nu_1} + \omega_{\nu_2}$ то в $s_l(x, q_0)$ будем вместо $x_{\nu_l} s(\omega_\nu)$ иметь $x_{\nu_l} s(\omega_{\nu_1}) + x_{\nu_l} s(\omega_{\nu_2})$. Ввиду этого

$$s_n(x, q) - s_l(x, q_0) = \sum_{\nu=0}^{r} (x_{\nu_n} - x'_{\nu_l}) s(\omega'_\nu),$$

где x'_{ν_l} обозначает те элементы x_{ν_l}, которые мы оставили в $s_l(x, q_0)$ при продолжении разложений q_0.

Теперь мы имеем

$$|s_n(x, q) - s_l(x, q_0)| \leqslant \sum_{\nu=0}^{r} |x_{\nu_n} - x'_{\nu_l}| s(\omega'_\nu) <$$

$$< \varepsilon \sum_{\nu=0}^{r} s(\omega') = \varepsilon.$$

Следовательно, последовательность x имеет сумму по теореме 1.4.2. Значит сумму имеет и исходная неограниченная последовательность x', так как добавление элементов последовательности $x'\omega$, где $s(\omega) = 0$, ничего не изменит.

Теорема доказана.

Примечание 1.4.2. Если последовательность $x = \{x_k\}$ сходится, т. е. если существует предел $\lim x_k = \xi$, то независимо от q имеем

$$\lim_n s_n(x, q) = \sum_{\nu=0}^{m} \lim_n x_{\nu_n} s(\omega_\nu) = \xi \sum_{\nu=0}^{m} s(\omega_\nu) = \xi$$

и из определения 1.4.1 получим, что $s(x) = \xi$. Таким образом,

определение 1.4.1 обобщает обычное понятие сходимости на почти ограниченные последовательности.

Аналогично почти ограниченным последовательностям мы можем ввести и понятие почти сходящейся последовательности. Мы скажем, что последовательность x *почти сходится* к ξ, если она сходится к ξ при исключении из нее элементов последовательности $x\omega$, где $s(\omega) = 0$ (предполагается, что в ω чисел 1 бесконечно много). При этом определение 1.4.1 дает сумму $s(x) = \xi$.

Теорема 1.4.4. *Если в определении* 1.4.1 *требовать, что* $|s_n(x, q)| < M$ *для всех* q $(n = 0, 1, \ldots)$, *то сумма* $s(x)$ *существует тогда и только тогда, когда* $x \in m$.

Доказательство. Достаточность условия вытекает из теоремы 1.4.3. Необходимость условия следует из того, что $s_n(x, q) = x_n$, если $q = \{e\}$.

Примечание 1.4.3. Содержание этого раздела 1.4 сохраняет силу, если мы ограничимся только теми разложениями $q = \{\omega_\nu\}$, где каждая ω_ν содержит бесконечно много единиц, так как $s(\omega) = 0$, если ω с конечным числом единиц. Только в лемме 1.4.1 условие (1.4.6) будет тогда выполнено при $k, n > N(q_0)$. Если же рассматривать всевозможные q, то в определении 1.4.1 условие «при $n > N(q_0)$» можно заменить на «при всех $n = 0, 1, \ldots$». Это не сузит и не расширит определения. Тогда и в теоремах 1.4.1 и 1.4.2 можно ограничение «$n, l > N(q_0)$» отбросить.

§ 2. Суммирование последовательностей

2.1. Определение метода $\mathfrak{A}$. Поставим в соответствие для каждой последовательности $\omega \in E$ матрицу чисел $\{a_{nk}(\omega)\}$, где $a_{nk}(\omega) = 0$, если $e_k\omega = \Theta$. Определим теперь элементы $a_{nk}(q)$, соответствующие разложению $q = \{\omega_\nu\}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, m)$, полагая

$$a_{nk}(q) = \sum_{\nu=0}^{m} a_{nk}(\omega_\nu).$$

В сумме справа всегда будет только одно слагаемое $a_{nk}(\omega_\nu)$, где ν такой, что $e_k\omega_\nu = e_k$. В результате мы получаем матрицу $\mathfrak{A} = \{a_{nk}(q)\}$, элементы $a_{nk}(q)$ которой зависят от выбора разложения q.

Пусть $x = \{x_k\}$ — некоторая последовательность. Положим

$$\mathfrak{A}_n(x, q) = \sum_k x_k\, a_{nk}(q), \qquad (2.1.1)$$

где ряд предполагается сходящимся.

Определение 2.1.1. *Мы скажем, что последовательность x $\mathfrak{A}$-ограничена (или ограничена методом $\mathfrak{A}$), если ряд* (2.1.1) *сходится и существует такое число $M > 0$, что*

$$|\mathfrak{A}_n(x, q)| < M \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

для всех q.

Определение 2.1.2. *Мы скажем, что последовательность x $\mathfrak{A}$-суммируема (или суммируема методом $\mathfrak{A}$) к сумме $\mathfrak{A}(x)$, если x $\mathfrak{A}$-ограничена и если соответственно каждому $\varepsilon > 0$ можно найти такое q_0, что для любого $q \geqslant q_0$ выполняется неравенство*

$$|\mathfrak{A}(x) - \mathfrak{A}_n(x, q)| < \varepsilon \qquad (2.1.2)$$

при $n > N(q_0)$.

Естественно поставить вопрос об единственности суммы $\mathfrak{A}(x)$ для x.

Следствие 2.1.1. *Метод $\mathfrak{A}$ определяет для $\mathfrak{A}$-суммируемой последовательности x сумму $\mathfrak{A}(x)$ однозначно.*

Доказательство. Предположим, что x $\mathfrak{A}$-суммируема к двум суммам $\mathfrak{A}_1(x)$ и $\mathfrak{A}_2(x)$. Тогда по определению 2.1.2 при произвольном $\varepsilon > 0$ мы вправе написать

$$|\mathfrak{A}_1(x) - \mathfrak{A}_n(x, q)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для} \quad q \geqslant q_1,$$

$$|\mathfrak{A}_2(x) - \mathfrak{A}_n(x, q)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для} \quad q \geqslant q_2,$$

если $n > N(q_1, q_2)$. Полагая теперь $q_0 > q_1, q_2$, видим, что эти неравенства будут выполнены для всех $q \geqslant q_0$, откуда следует, что

$$|\mathfrak{A}_1(x) - \mathfrak{A}_2(x)| < \varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε мы имеем $\mathfrak{A}_1(x) = \mathfrak{A}_2(x)$.

Обычный матричный метод можно рассматривать как частный случай метода $\mathfrak{A}$. Если при каждом q выполняется равенство $a_{nk}(q) = a_{nk}(q_1)$ для всех $q_1 > q$, то метод $\mathfrak{A}$ будет обычным матричным методом. Действительно, тогда при произвольных q_1 и q_2 мы имеем для $q_3 > q_1, q_2$, что $a_{nk}(q_3) = a_{nk}(q_1)$, $a_{nk}(q_3) = a_{nk}(q_2)$, откуда следует, что $a_{nk}(q_1) = a_{nk}(q_2)$, т. е. $a_{nk}(q)$ не зависит от q. Поэтому мы можем написать $a_{nk}(q) = a_{nk}(e) = a_{nk}$ *и метод $\mathfrak{A}$ превращается в матричный метод* $A = (a_{nk})$. Тогда вместо (2.1.2) имеем

$$|\mathfrak{A}(x) - \sum_k x_k a_{nk}| < \varepsilon$$

при $n > N(\varepsilon)$, т. е.

$$\mathfrak{A}(x) = \lim_n \sum_k x_k a_{nk}.$$

Если $A = (a_{nk})$ — единичная матрица ($a_{nk} = 1$ при $k = n$ и

$a_{nk} = 0$ при $k \neq n$), то $\mathfrak{A}_n(x, q) = x_n$ и метод $\mathfrak{A}$ определяет обычную сходимость для последовательности x.

Определим теперь *треугольный метод* $\mathfrak{A}$. Пусть в последовательности $\omega_\nu = \{\delta_k^\nu\}$ элементы $\delta_k^\nu = 1$ расположены в местах, где индекс k принимает значения $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n, \ldots$. Если для всех $\omega_\nu \in E$ числа $a_{nk}(\omega_\nu) = 0$ при $k > \nu_n$, то скажем, что метод $\mathfrak{A}$ треугольен.

Треугольный метод $\mathfrak{A}$ будем называть *единичным методом* $\mathfrak{I}$, если

$$a_{nk}(\omega_\nu) = \begin{cases} 0, \text{ при } k < \nu_n \\ s(\omega_\nu), \text{ при } k = \nu_n. \end{cases}$$

Тогда вместо (2. 1. 1) мы будем иметь

$$\mathfrak{A}_n(x,\ q) = \sum_{\nu=0}^{m} x_{\nu_n} s(\omega_\nu) = s_n(x,\ q).$$

Следовательно, при $\mathfrak{A} = \mathfrak{I}$ будет $\mathfrak{A}(x) = s(x)$, т. е. метод $\mathfrak{I}$ дает обычную сумму $s(x)$ для последовательности x. Таким образом, единичный метод $\mathfrak{I}$ суммирует все ограниченные последовательности и только такие (см. теорему 1. 4. 4).

Метод $\mathfrak{A}$ — линейный метод суммирования, так как выполняются следующие условия:

1) Если последовательности $x = \{x_k\}$ и $y = \{y_k\}$ $\mathfrak{A}$-суммируемы, то и последовательность $x + y = \{x_k + y_k\}$ $\mathfrak{A}$-суммируема, причем $\mathfrak{A}(x + y) = \mathfrak{A}(x) + \mathfrak{A}(y)$.

2) Если $x = \{x_k\}$ $\mathfrak{A}$-суммируема, то и последовательность $\alpha x = \{\alpha x_k\}$ (α — число) $\mathfrak{A}$-суммируема, причем $\mathfrak{A}(\alpha x) = \alpha \mathfrak{A}(x)$.

Докажем первую из них. Составим величины $\mathfrak{A}_n(x, q)$ и $\mathfrak{A}_n(y, q)$. Мы имеем:

$$\mathfrak{A}_n(x + y, q) = \mathfrak{A}_n(x, q) + \mathfrak{A}_n(y, q).$$

Так как x и y $\mathfrak{A}$-суммируемы, то для каждого $\varepsilon > 0$ будет

$$|\mathfrak{A}(x) - \mathfrak{A}_n(x, q)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{если } q \geqslant q_1,$$

$$|\mathfrak{A}(y) - \mathfrak{A}_n(x, q)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{если } q \geqslant q_2$$

при $n > N(q_1, q_2)$. Мы также имеем для всех q и n

$$|\mathfrak{A}_n(x + y)| < 2M.$$

Пусть $q_0 \geqslant q_1, q_2$, тогда для всех $q \geqslant q_0$

$$|\mathfrak{A}(x) + \mathfrak{A}(y) - \mathfrak{A}_n(x + y, q)| \leqslant |\mathfrak{A}(x) - \mathfrak{A}_n(x, q)| + |\mathfrak{A}(y) - \mathfrak{A}_n(y, q)| < \varepsilon$$

при $n > N(q_0)$. Следовательно, $x + y$ $\mathfrak{A}$-суммируема и $\mathfrak{A}(x + y) = \mathfrak{A}(x) + \mathfrak{A}(y)$.

Следующие две теоремы дают условия для последовательности x, чтобы она была $\mathfrak{A}$-суммируема.

Теорема 2. 1. 1. *$\mathfrak{A}$-ограниченная последовательность x $\mathfrak{A}$-суммируема тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти такое q_0, что для всех q, $q' \geqslant q_0$*

$$|\mathfrak{A}_n(x, q) - \mathfrak{A}_l(x, q)| < \varepsilon$$

при n, $l > N(q_0)$.

Теорема 2. 1. 2. *$\mathfrak{A}$-ограниченная последовательность x $\mathfrak{A}$-суммируема тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти такое q_0, что для всех $q \geqslant q_0$*

$$|\mathfrak{A}_n(x, q_0) - \mathfrak{A}_l(x, q)| < \varepsilon$$

при n, $l \geqslant N(q_0)$.

Доказательство этих теорем аналогично доказательству теорем 1. 4. 1 и 1. 4. 2.

Аналогично примечанию 1. 4. 1 мы можем заключить, что если x $\mathfrak{A}$-суммируема, то можно выбрать такую последовательность разложений $q_1 < q_2 < \ldots < q_m < \ldots$, что

$$\mathfrak{A}(x) = \lim_{m, n} \mathfrak{A}_n(x, q),$$

где $q \geqslant q_m$, причем можно положить $m = n$.

Отметим, что выражению (2. 1. 1) мы можем дать следующий вид:

$$\mathfrak{A}_n(x, q) = \sum_k x_k \sum_{\nu=0}^{m} a_{nk}(\omega_\nu) = \sum_{\nu=0}^{m} \sum_k x_k\, a_{nk}(\omega_\nu). \qquad (2.1.3)$$

Ниже иногда мы будем обозначать

$$\varepsilon_n(x, q) = \mathfrak{A}(x) - \mathfrak{A}_n(x, q),$$

тогда условие (2. 1. 2) перепишется в виде $|\varepsilon_n(x, q)| < \varepsilon$.

2. 2. *c*-консервативные методы $\mathfrak{A}$. В этом разделе мы дадим условия для того, чтобы метод $\mathfrak{A}$ суммировал все $x \in c$, т. е. все сходящиеся последовательности.

Определение 2. 2. 1. *Мы скажем, что метод $\mathfrak{A}$ c-консервативен (или сохраняет сходимость), если он суммирует все сходящиеся последовательности, и, что метод $\mathfrak{A}$ c-регулярен, если он суммирует все сходящиеся последовательности к их обычной сумме.*

Теорема 2. 2. 1. *Метод $\mathfrak{A}$ c-консервативен тогда и только тогда, когда*

1° *существует число $M > 0$, что*

$$\sum_k |a_{nk}(q)| < M \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

для всех q,

2° *e_k $\mathfrak{A}$-суммируемы,*

3° *e $\mathfrak{A}$-суммируема.*

При этом для всех $x = \{x_k\} \in c$ *будет*

$$\mathfrak{A}(x) = \lim x_k \varrho(\mathfrak{A},\ e) + \Sigma x_k \mathfrak{A}(e_k), \qquad (2.2.1)$$

где

$$\varrho(\mathfrak{A},\ e) = \mathfrak{A}(e) - \Sigma \mathfrak{A}(e_k).$$

Доказательство. Достаточность. Пусть выполнены условия 1°, 2°, 3°. Убедимся сначала, что сумма (2.2.1) существует. Мы можем написать

$$\sum_{k=0}^{l} |\mathfrak{A}(e_k)| \leqslant \sum_{k=0}^{l} |\mathfrak{A}(e_k) - \mathfrak{A}_n(e_k,\ q)| + \sum_{k=0}^{l} |\mathfrak{A}_n(e_k,\ q)|.$$

По условию 1°

$$\sum_{k=0}^{l} |\mathfrak{A}_n(e_k,\ q)| = \sum_{k=0}^{l} |a_{nk}(q)| < M$$

для всех q и n. Пусть задано произвольное число $\varepsilon > 0$. Ввиду условия 2° мы можем найти при сколь угодно большом l такое разложение q_l, что

$$\sum_{k=0}^{l} |\mathfrak{A}(e_k) - \mathfrak{A}_n(e_k,\ q)| < \varepsilon$$

для всех $q \geqslant q_l$ при $n > N(q_l)$. Таким образом, при любом l

$$\sum_{k=0}^{l} |\mathfrak{A}(e_k)| < \varepsilon + M.$$

Ввиду произвольности ε отсюда заключается, что

$$\Sigma |\mathfrak{A}(e_k)| \leqslant M.$$

Следовательно, условия 1°, 2°, 3° обеспечивают существование суммы (2.2.1).

Докажем теперь, что любая $x \in c$ $\mathfrak{A}$-суммируема к сумме (2.2.1). Обозначим

$$\varepsilon_n(x,\ q) = \mathfrak{A}(x) - \mathfrak{A}_n(x,\ q).$$

Число $\mathfrak{A}_n(x,\ q)$ существует из-за условия 1°. Для всех $x = \{x_k\} \in c$ выполняется равенство

$$\varepsilon_n(x,\ q) = \xi \varepsilon_n(e,\ q) + \sum_k (x_k - \xi) \varepsilon_n(e_k,\ q), \qquad (3.2.2)$$

где $\xi = \lim x_k$. Выберем l столь большим, чтобы

$$|x_k - \xi| < \frac{\varepsilon}{4M}$$

при всех $k > l$. Ввиду условий 2° и 3° мы можем выбрать такое разложение q_l, что

$$|\xi \varepsilon_n(e,\ q) + \sum_{k=0}^{l} (x_k - \xi) \varepsilon_n(e_k,\ q)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $q \geqslant q_l$ при $n > N(q_l)$. Тогда $|\varepsilon_n(x,\ q)| < \varepsilon$ для всех $q \geqslant q_l$ при $n > N(q_l)$, т. е. x $\mathfrak{A}$-суммируема.

Необходимость. Пусть метод $\mathfrak{A}$ суммирует все последовательности $x \in c$. Из $e_k, e \in c$ следует необходимость условий 2° и 3°. Величина

$$\mathfrak{A}_n(x,\ q) = \sum_k x_k\, a_{nk}(q)$$

должна быть ограничена ($n = 0,\ 1, \ldots$) при каждом q для всех x, сходящихся к нулю, для чего условие 1° необходимо (см. [3], стр. 62). При этом M не будет зависеть также и от q, так как в противном случае мы могли бы выбрать последовательность разложений $q_1 < q_2 < \ldots < q_m < \ldots$ такую, что для некоторой подпоследовательности $\{n_m\}$ чисел $n = 0,\ 1, \ldots$ будет

$$\lim_m \sum_k |\, a_{n_m k}(q_m)\,| = +\infty,$$

и выбрать затем последовательность x, сходящуюся к нулю, так что

$$\lim_m \mathfrak{A}_{n_m}(x,\ q_m) = +\infty.$$

А это противоречит понятию $\mathfrak{A}$-суммируемости.

Теорема доказана.

Для c-регулярности метода $\mathfrak{A}$ необходимо и достаточно дополнительно к условиям теоремы 2. 2. 1 требовать, чтобы было $\mathfrak{A}(e_k) = 0$, $\mathfrak{A}(e) = 1$. Тогда $\mathfrak{A}(x) = \lim x_k$.

Для последовательностей, сходящихся к нулю, в теореме 2. 2. 1 условие 3° надо опустить.

§ 3. Суммирование ограниченных последовательностей

3. 1. $\mathfrak{A}$-интеграл. Предположим, что существует число

$$\varrho(\mathfrak{A},\ \omega) = \mathfrak{A}(\omega) - \Sigma\mathfrak{A}(e_k\omega)$$

для всех $\omega \in E$. Пусть дано разложение $q = \{\omega_\nu\}$ $(\nu = 0,\ 1, \ldots,\ m)$, где в ω_ν числа 1 расположены в местах ν_n $(n = 0,\ 1, \ldots)$. Разложим последовательность $x = \{x_k\}$ на части $x\omega_\nu = \{x_{\nu_n}\}$ и составим сумму

$$S_n^{\mathfrak{A}}(x,\ q) = \sum_{\nu=0}^{m} x_{\nu_n}\varrho(\mathfrak{A},\ \omega_\nu). \qquad (3.\ 1.\ 1)$$

Определение 3. 1. 1. *Число $S_{\mathfrak{A}}(x)$ будем называть $\mathfrak{A}$-интегра-*

лом для последовательности x, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое q_0, что для всех $q \geqslant q_0$

$$|S_{\mathfrak{A}}(x) - S_n^{\mathfrak{A}}(x, q)| < \varepsilon \qquad (3.1.2)$$

при $n > N(q_0)$.

Из определения следует, что если x $\mathfrak{A}$-интегрируема, то последовательность

$$\{S_n^{\mathfrak{A}}(x, q)\} \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

ограничена для всех $q \geqslant q_0$.

Если $\mathfrak{A}$-интеграл для x существует, то он однозначно определен. Это доказывается аналогично следствию 1.4.1. Назовем число

$$W_{\mathfrak{A}}(q) = \sum_{\nu=0}^{m} |\mathfrak{A}(\omega_\nu)|$$

вариационной суммой метода $\mathfrak{A}$.

Лемма 3.1.1. *Если разложения q_1 и q_2 такие, что $q_1 < q_2$, то*

$$W_{\mathfrak{A}}(q_1) \leqslant W_{\mathfrak{A}}(q_2).$$

Это следует непосредственно из определения вариационной суммы, так как q_2 продолжение разложения q_1.

Определение 3.1.2. *Мы скажем, что метод $\mathfrak{A}$ с ограниченной вариацией, если существует такое число $M > 0$, что для всех q*

$$W_{\mathfrak{A}}(q) < M.$$

Если метод $\mathfrak{A}$ с ограниченной вариацией, то

$$\Sigma |\mathfrak{A}(e_k)| < M.$$

Действительно, пусть

$$q_r = (e_0, e_1, \ldots, e_r, e - \sum_{k=0}^{r} e_k),$$

тогда

$$W_{\mathfrak{A}}(q_r) = \sum_{k=0}^{r} |\mathfrak{A}(e_k)| + |\mathfrak{A}(e - \sum_{k=0}^{r} e_k)| < M$$

для всех $r = 0, 1, \ldots$, вследствие чего ряд $\Sigma |\mathfrak{A}(e_k)|$ сходится.

Верхнюю грань вариационных сумм $W_{\mathfrak{A}}(q)$ мы назовем *вариацией метода* $\mathfrak{A}$. Вариацию метода $\mathfrak{A}$ обозначим через $\operatorname{Var} \mathfrak{A}$, а верхнюю грань сумм

$$\sum_{\nu=0}^{m} |\varrho(\mathfrak{A}, \omega_\nu)|$$

— через $\operatorname{Var} S_{\mathfrak{A}}$.

Лемма 3. 1. 2. *Пусть метод* $\mathfrak{A}$ *с ограниченной вариацией, тогда*

$$\operatorname{Var}\mathfrak{A} = \operatorname{Var} S_{\mathfrak{A}} + \Sigma\,|\mathfrak{A}(e_k)|. \tag{3. 1. 3}$$

Доказательство. Ввиду леммы 3. 1. 1 для произвольного $q = \{\omega_\nu\}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, m)$ мы можем написать

$$W_{\mathfrak{A}}(q) \leqslant \sum_{\nu=0}^{m} |\mathfrak{A}(\omega_\nu) - \sum_{k=0}^{n} \mathfrak{A}(e_k)| + \sum_{k=0}^{n} |\mathfrak{A}(e_k)| = W_{\mathfrak{A}}(q_1) \leqslant \operatorname{Var}\mathfrak{A}$$

$(n = 0, 1, \ldots)$, так как $q_1 \geqslant q$. При $n \to \infty$ получим:

$$W_{\mathfrak{A}}(q) \leqslant \sum_{\nu=0}^{m} |\varrho(\mathfrak{A}, \omega_\nu)| + \Sigma\,|\mathfrak{A}(e_k)| \leqslant \operatorname{Var}\mathfrak{A}$$

для всех q, откуда и следует (3. 1. 3).

Теорема 3. 1. 1. *Если выполняется условие*

$$\sum_{k} |a_{nk}(q)| < M \tag{3. 1. 4}$$

для всех q, *то метод* $\mathfrak{A}$ *с ограниченной вариацией.*

Доказательство. Пусть $p = \{\omega'_\nu\}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, l)$ — произвольное полное разложение. Из-за (3. 1. 4)

$$\sum_{\nu=0}^{m} |\mathfrak{A}_n(\omega'_\nu, q)| \leqslant \sum_{k} |a_{nk}(q)| < M$$

для всех q $(n = 0, 1, \ldots)$. Полагая

$$\varepsilon_n(\omega'_\nu, q) = \mathfrak{A}(\omega'_\nu) - \mathfrak{A}_n(\omega'_\nu, q),$$

мы можем написать

$$\sum_{\nu=0}^{l} |\mathfrak{A}(\omega'_\nu)| \leqslant \sum_{\nu=0}^{l} |\varepsilon_n(\omega'_\nu, q)| + \sum_{\nu=0}^{l} |\mathfrak{A}_n(\omega'_\nu, q)|$$

для всех q $(l, n = 0, 1, \ldots)$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Так как все $\omega \in E$ $\mathfrak{A}$-суммируемы, то при каждом l мы можем выбрать q_0 так, что

$$\sum_{\nu=0}^{l} |\varepsilon_n(\omega'_\nu, q)| < \varepsilon$$

для $q \geqslant q_0$ при $n > N(q_0)$. Таким образом,

$$\sum_{\nu=0}^{l} |\mathfrak{A}(\omega'_\nu)| < \varepsilon + M,$$

откуда ввиду произвольности разложения p заключаем, что метод $\mathfrak{A}$ с ограниченной вариацией, причем $\operatorname{Var}\mathfrak{A} \leqslant M$ из-за произвольности $\varepsilon > 0$.

Аналогично теоремам 1. 4. 3 и 1. 4. 4 мы можем доказать следующие теоремы.

Теорема 3. 1. 2. *Если метод* $\mathfrak{A}$ *с ограниченной вариацией, то* $\mathfrak{A}$*-интеграл для* x *существует, когда* x *ограничена за исключением, может быть, ее части* $x\omega_0$*, где* ω_0 *такая, что* $\varrho(\mathfrak{A}, \omega) = 0$ *для всех* $\omega \geqslant \omega_0$.

Теорема 3. 1. 3. *Пусть метод* $\mathfrak{A}$ *с ограниченной вариацией. Если в определении* 3. 1. 1 *требовать, что* $|S_n^{\mathfrak{A}}(x, q)| < M$ *для всех* q, то $\mathfrak{A}$*-интеграл для* x *существует, когда* x *ограничена.*

Условия теорем 3. 1. 2 и 3. 1. 3 в общем не необходимы, так как числа $\varrho(\mathfrak{A}, \omega)$ по сравнению с $s(\omega)$ могут иметь другие свойства.

Отметим, что при $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}$ бдует $S_n^{\mathfrak{A}}(x, q) = s_n(x, q)$. Аналогично примечанию 1. 4. 2 и здесь в определении 3. 1. 1 можем ограничиться только разложениями $q = \{\omega_\nu\}$, где каждая ω_ν содержит бесконечно много единиц, так как $\varrho(\mathfrak{A}, \omega) = 0$, если в ω единиц конечное число. Тогда в определении условие «$n > N(q_0)$» существенно. Если же q произвольные, то оно не существенно.

Примечание 3. 1. 1. Если $x \in c$, то существует

$$\lim_n S_n^{\mathfrak{A}}(x, q) = \lim_n x_n \sum_{\nu=0}^{m} \varrho(\mathfrak{A}, \omega_\nu) = \lim x_n \varrho(\mathfrak{A}, e)$$

и из определения 3. 1. 1 получим:

$$S_{\mathfrak{A}}(x) = \lim x_n \varrho(\mathfrak{A}, e). \qquad (3.1.4)$$

Таким образом, (3. 1. 4) можно рассматривать как метод суммирования. Вариация такого метода

$$\operatorname{Var} S_{\mathfrak{A}} = |\varrho(\mathfrak{A}, e)|.$$

3. 2. m-консервативные методы $\mathfrak{A}$. В этом разделе мы дадим условия для того, чтобы метод $\mathfrak{A}$ суммировал все ограниченные последовательности.

Определение 3. 2. 1. *Мы скажем, что метод* $\mathfrak{A}$ m*-консервативен, если* $\mathfrak{A}$ *суммирует все ограниченные последовательности.*

Определение 3. 2. 2. *Мы скажем, что метод* $\mathfrak{A}$ m*-регулярен, если* $\mathfrak{A}$ *суммирует все ограниченные последовательности к их обычной сумме* (см. определение 1. 4. 1).

Таким образом, m-регулярный метод $\mathfrak{A}$ будет также c-регулярным методом, поскольку для $x = \{x_k\} \in c$ имеем $s(x) = \lim x_k$ (см. примечание 1. 4. 2).

Теорема 3. 2. 1. *Метод* $\mathfrak{A}$ m*-консервативен тогда и только тогда, когда*

1° *существует число* $M > 0$, *что*

$$\sum_k |a_{nk}(q)| < M \quad \text{для всех } q \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

2° *все* ω $\mathfrak{A}$*-суммируемы.*

При этом для всех $x = \{x_k\} \in m$

$$\mathfrak{A}(x) = S_{\mathfrak{A}}(x) + \sum x_k \mathfrak{A}(e_k). \qquad (3.2.1)$$

Доказательство. Достаточность. Пусть условия 1° и 2° выполнены. Убедимся прежде всего, что при этих условиях сумма (3.2.1) существует для всех $x \in m$. При доказательстве теоремы 2.2.1 мы уже видели, что из-за условия 1° ряд $\sum |\mathfrak{A}(e_k)|$ сходится, поэтому ряд

$$\sum x_k \mathfrak{A}(e_k)$$

сходится для всех $x \in m$. По теореме 3.1.1 метод $\mathfrak{A}$ с ограниченной вариацией и из теоремы 3.1.3 следует, что $\mathfrak{A}$-интеграл существует для всех $x \in m$. Значит сумма (3.2.1) существует.

Докажем теперь, что любая $x \in m$ $\mathfrak{A}$-суммируема к сумме (3.2.1). Пусть $q = \{\omega_\nu\}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, m)$ и p — произвольные разложения. Мы имеем:

$$\mathfrak{A}(x) - \mathfrak{A}_n(x, p) = S_{\mathfrak{A}}(x) + \sum x_k \mathfrak{A}(e_k) - \mathfrak{A}_n(x, p) =$$

$$= [S_{\mathfrak{A}}(x) - S_n{}^{\mathfrak{A}}(x, q)] + [S_n{}^{\mathfrak{A}}(x, q) + \sum x_k \mathfrak{A}(e_k) - \mathfrak{A}_n(x, p)] =$$

$$= \mathrm{I} + \mathrm{I}'.$$

Преобразуем выражение I′. Мы можем написать

$$I' = I' - \sum_{\nu=0}^{m} x_{\nu_n} \mathfrak{A}_n(\omega_\nu, p) + \sum_{\nu=0}^{m} x_{\nu_n} \mathfrak{A}(\omega_\nu, p),$$

а также, что

$$\sum x_k \mathfrak{A}(e_k) = \sum_{\nu=0}^{m} \sum_k \mathfrak{A}(e_k \omega_\nu),$$

$$\mathfrak{A}_n(x, p) = \sum_{\nu=0}^{m} \sum_k \mathfrak{A}_n(e_k \omega_\nu, p)$$

(см. преобразование (2.1.3)), поэтому

$$I' = [\sum_{\nu=0}^{m} x_{\nu_n} \mathfrak{A}(\omega_\nu) - \sum_{\nu=0}^{m} x_{\nu_n} \mathfrak{A}_n(\omega_\nu, p)] + \sum x_k \mathfrak{A}(e_k) -$$

$$- \mathfrak{A}_n(x, p) - \sum_{\nu=0}^{m} x_{\nu_n} \sum_k \mathfrak{A}(e_k \omega_\nu) + \sum_{\nu=0}^{m} x_{\nu_n} \mathfrak{A}_n(\omega_\nu, p) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m} x_{\nu_n} [\mathfrak{A}(\omega_\nu) - \mathfrak{A}_n(\omega_\nu, p)] + \sum_{\nu=0}^{m} \sum_k (x_k - x_{\nu_n}) [\mathfrak{A}(e_k \omega_\nu) -$$

$$- \mathfrak{A}_n(e_k \omega_\nu, p)].$$

Следовательно,

$$\varepsilon_n(x, p) = [S_{\mathfrak{A}}(x) - S_n^{\mathfrak{A}}(x, q)] + \sum_{\nu=0}^{m} x_{\nu_n}\varepsilon_n(\omega_\nu, p) +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{m} \sum_{k} (x_k - x_{\nu_n})\varepsilon_n(e_k\omega_\nu, p) = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}.$$

Оценим это выражение по частям. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Выберем разложение $q = \{\omega_\nu\}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, m)$, так, что $|\mathrm{I}| < \frac{\varepsilon}{3}$ и для всех $x\omega_\nu$

$$|x_{\nu_k} - x_{\nu_n}| < \frac{\varepsilon}{12M}$$

при $\nu_k, \nu_n > l$, где l некоторое достаточно большое число. Такой выбор q возможен из-за существования $\mathfrak{A}$-интеграла и леммы 1. 4. 1.

Из-за условия 2° мы можем выбрать такое разложение p_1, что для всех $p \geqslant p_1$ будет $|\mathrm{II}| < \frac{\varepsilon}{3}$. И, наконец, для оценки III, разделим его на две части:

$$\mathrm{III} = \sum_{\nu=0}^{m} \sum_{k=0}^{l} + \sum_{\nu=0}^{m} \sum_{k=l+1}^{\infty} = \mathrm{III}_1 + \mathrm{III}_2.$$

Из-за условия 2° мы можем выбрать разложение p_2 так, что для всех $p \geqslant p_2$ будет $|\mathrm{III}_1| < \frac{\varepsilon}{6}$ при $n > N(p_2)$. Для III_2 имеем:

$$|\mathrm{III}_2| \leqslant \sum_{\nu=0}^{m} \sum_{k=l+1}^{\infty} |x_k - x_{\nu_n}|\,|\varepsilon_n(e_k\omega_\nu, p)| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{12M} \sum_{\nu=0}^{m} \sum_{k=p+1}^{\infty} |\varepsilon_n(e_k\omega_\nu, p)| = \frac{\varepsilon}{12M} \sum_{k=p+1}^{\infty} |\varepsilon_n(e_k, p)| < \frac{\varepsilon}{12M} 2M = \frac{\varepsilon}{6}.$$

Следовательно, $|\mathrm{III}| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Пусть теперь $p_0 \geqslant q, p_1, p_2$, тогда $|\varepsilon_n(x, p)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ для всех $p \geqslant p_0$ при $n > N(p_0)$. Значит, последовательность x $\mathfrak{A}$-суммируема к сумме (3. 2. 1).

Необходимость. Пусть метод $\mathfrak{A}$ суммирует все $x \in m$. Необходимость условия 2° следует непосредственно из того, что все $\omega \in m$. Необходимость условия 1° вытекает из теоремы 2. 2. 1, поскольку метод $\mathfrak{A}$ в данном случае суммирует все $x \in c$. Теорема доказана.

Для m-регулярности метода $\mathfrak{A}$ необходимо и достаточно дополнительно к условиям теоремы 3. 2. 1 требовать, чтобы было

$\mathfrak{A}(\omega) = s(\omega)$ для всех $\omega \in E$. Тогда $\mathfrak{A}(e_k) = 0$, $S_{\mathfrak{A}}(x) = s(x)$ и сумма (3. 2. 1) примет вид

$$\mathfrak{A}(x) = s(x).$$

При этом для $x \in c$ будет $\mathfrak{A}(x) = \lim x_k$ (см. примечание 1. 4. 2).

Примечание 3. 2. 1. Как показал Штейнгауз ([8], см. также [5]), никакой регулярный матричный метод суммирования $A = (a_{nk})$ не может суммировать все ограниченные последовательности. Метод A, суммирующий все ограниченные последовательности, будет конулевым методом [9]. Однако c-регулярный метод $\mathfrak{A}$, как мы только что доказали, может суммировать все ограниченные последовательности. Примеры таких методов будут даны ниже в § 5. Поэтому метод $\mathfrak{A}$ обладает лучшими свойствами, чем обычный матричный метод.

§ 4. Линейные непрерывные функционалы в пространстве m

4. 1. Общий вид функционала. Определим во множестве ограниченных последовательностей m для каждой $x = \{x_k\}$ норму

$$\|x\| = \sup |x_k|,$$

тогда мы можем рассматривать множество m как линейное нормированное пространство, где всюду плотное множество составляют последовательности ω (см. [6]).

Пусть $x = \{x_k\} \in m$. Составим при помощи разложения $q = \{\omega_\nu\}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, m)$ последовательность

$$x_n(q) = \sum_{\nu=0}^{m} x_{\nu_n} \omega_\nu, \qquad (4.1.1)$$

где x_{ν_n} — элементы последовательности $x\omega_\nu$, причем по лемме 1. 4. 1 мы можем для каждого $\varepsilon > 0$ их так выбрать, что $|x_{\nu_n} - x_{\nu_n}| < \varepsilon$ для всех $q \geqslant q_0$, где q_0 — разложение, зависящее от ε и от x. Если в некотором ω_ν чисел 1 конечное число $(l+1$ штук), то в $x\omega_\nu = \{x_{\nu_n}\}$ индекс n принимает конечное число значений $(n = 0, 1, \ldots, l)$. Поэтому, если n такой, что в (4. 1. 1) при каждом ω_ν будет x_{ν_n}, то $\|x - x_n(q)\| < \varepsilon$.

Пусть f — произвольный линейный непрерывный функционал в пространстве m с нормой $\|f\|$. Тогда

$$|f(x) - f(x_n(q))| \leqslant \|f\| \ \|x - x_n(q)\| < \|f\|\varepsilon \qquad (4.1.2)$$

для всех $q \geqslant q_0$ при некоторых значениях n.

Определим треугольный метод суммирования $f = \{\alpha_{nk}(q)\}$ с элементами

$$\alpha_{nk}(q) = \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_{nk}(\omega_\nu),$$

где

$$\alpha_{nk}(\omega_\nu)=\left\{\begin{array}{l} f(e_k),\ \text{если}\ e_k\omega_\nu=e_k\ \text{и}\ k<\nu_n,\\ f(\omega_\nu)-\sum\limits_{i=0}^{\nu_n-1} f(e_i\omega_\nu),\ \text{если}\ k=\nu_n,\\ 0,\ \text{при остальных}\ k. \end{array}\right\} \qquad (4.1.3)$$

Мы обозначили этот метод суммирования также через f потому что, как мы сейчас увидим, он суммирует все $x\in m$ к значению $f(x)$. Для этого разложим каждое ω_ν из $q=\{\omega_\nu\}$ следующим образом:

$$\omega_\nu=\sum_{k=0}^{\nu_n-1} e_k\omega_\nu+(\omega_\nu-\sum_{k=0}^{\nu_n-1} e_k\omega_\nu).$$

Полученное продолжение разложения q обозначим через p_n. Составим последовательность

$$x_n(p_n)=\sum_{\nu=0}^{m}[\sum_{k=0}^{\nu_n-1} x_k e_k\omega_\nu+x_{\nu_n}(\omega_\nu-\sum_{k=0}^{\nu_n-1} e_k\omega_\nu)].$$

Тогда, принимая во внимание (2.1.3), мы получим:

$$f_n(x,\ q)=\sum_{\nu=0}^{m}\sum_{k} x_k\,\alpha_{nk}(\omega_\nu)=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{m}[\sum_{k=0}^{\nu_n-1} x_k f(e_k\omega_\nu)+x_{\nu_n}(f(\omega_\nu)-\sum_{i=0}^{\nu_n-1} f(e_i\omega_\nu))]=$$

$$=f(x_n(p_n)).$$

Из теорем 3.2.1 и 3.1.1 следует, что метод f с ограниченной вариацией. Покажем, что для всех q

$$\sum_k|\alpha_{nk}(q)|\leqslant\|f\|. \qquad (4.1.4)$$

Действительно, пусть $\varepsilon_k=\operatorname{sign}\alpha_{nk}(q)$, тогда

$$\sum_k|\alpha_{nk}(q)|=\sum_k\varepsilon_k\,\alpha_{nk}(q)=\sum_{\nu=0}^{m}\sum_k\varepsilon_k\,\alpha_{nk}(\omega_\nu)=$$

$$=f\sum_{\nu=0}^{m}[\sum_{k=0}^{\nu_n-1}\varepsilon_k e_k\omega_\nu+\varepsilon_{\nu_n}(\omega_\nu-\sum_{i=0}^{\nu_n-1} e_i\omega_\nu)]\leqslant\|f\|,$$

так как

$$\|\sum_{\nu=0}^{m}[\ldots]\|=1.$$

Ввиду теоремы 3.1.1 тогда также

$$\sum_{\nu=0}^{m}|f(\omega_\nu)|\leqslant\|f\|. \qquad (4.1.5)$$

Ввиду (4. 1. 2)

$$|f(x) - f_n(x,\ q)| = |f(x - x_n(p_n))| \leqslant \|f\|\,\|x - x_n(p_n)\| < \|f\|\varepsilon$$

для всех $q \geqslant q_0$ при $n > N(q_0)$. Следовательно, x f-суммируема к $f(x)$.

Из (4. 1. 4) следует, что ряд $\Sigma|f(e_k)|$ сходится (см. раздел 3. 1). По теореме 3. 1. 2 интеграл $S_f(x)$ существует для всех $x \in m$. Ввиду теоремы 3. 2. 1

$$f(x) = S_f(x) + \Sigma x_k f(e_k),$$

что и является общим видом линейного непрерывного функционала f в пространстве m.

Поскольку метод $f = \{a_{nk}(q)\}$ суммирует все $x \in m$, то мы можем для каждого $x \in m$ выбрать такую последовательность разложений $q_0 < q_1 < \ldots < q_n < \ldots$, что

$$f(x) = \lim_n \Sigma a_{nk}(q_n)\, x_k, \tag{4. 1. 6}$$

причем из-за треугольности метода f

$$a_{nk}(q_n) = 0 \text{ при } k > k_n,$$

где k_n — некоторое число, зависящее от n и q.

4. 2. Норма функционала. Из (4. 1. 5) следует, что

$$\mathrm{Var} f \leqslant \|f\|. \tag{4. 2. 1}$$

Докажем, что норма для функционала f дается равенством

$$\|f\| = \mathrm{Var} f. \tag{4. 2. 2}$$

Действительно, для любого $q = \{\omega_\nu\}$ $(\nu = 0,\ 1, \ldots,\ m)$ и любого $x = \{x_\nu\} \in m$

$$\Big|\sum_{\nu=0}^{m} x_{\nu_n} f(\omega_\nu)\Big| \leqslant \sum_{\nu=0}^{m} |x_{\nu_n}|\,|f(\omega_\nu)| \leqslant \mathrm{Var} f \|x\|.$$

Следовательно,

$$|f(x)| - \mathrm{Var} f\,\|x\| \leqslant |f(x)| - \Big|\sum_{\nu=0}^{m} x_{\nu_n} f(\omega_\nu)\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \Big|f(x) - \sum_{\nu=0}^{m} x_{\nu_n} f(\omega_\nu)\Big| = |f(x) - f(x_n(q))|.$$

Ввиду (4. 1. 2) мы можем при произвольном $\varepsilon > 0$ выбрать q так, что $|f(x) - f(x_n(q))| < \varepsilon$. Тогда

$$|f(x)| - \mathrm{Var} f\,\|x\| < \varepsilon.$$

Следовательно, из-за произвольности ε,

$$|f(x)| - \mathrm{Var} f\,\|x\| \leqslant 0$$

или

$$|f(x)| \leqslant \mathrm{Var} f\,\|x\|,$$

откуда следует, что

$$\|f\| \leqslant \mathrm{Var} f. \tag{4.2.3}$$

Сравнивая (4.2.1) и (4.2.3), мы получим равенство (4.2.2).

Ввиду леммы 3.1.2 справедлива

Теорема 4.2.1. *Любой линейный непрерывный функционал $f(x)$ в пространстве ограниченных последовательностей m имеет вид*

$$f(x) = S_f(x) + \Sigma a_k x_k, \tag{4.2.4}$$

причем

$$\|f\| = \mathrm{Var}\, S_f + \Sigma|a_k| \tag{4.2.5}$$

и $a_k = f(e_k)$.

Выражение (4.2.4) мы можем заменить на (4.1.6). В (4.1.4) для $q_0 < \ldots < q_n < q_{n+1} < \ldots$

$$\sum_k |\alpha_{nk}(q_n)| \leqslant \sum_k |\alpha_{n+1\,k}(q_{n+1})|,$$

при этом мы можем положить

$$\sum_{\nu=0}^{m} |f(\omega_\nu)| = \sum_k |\alpha_{0k}(q_0)|.$$

Таким образом, имеет место

Теорема 4.2.2. *Пусть f — произвольный линейный непрерывный функционал в m. Для каждого $x \in m$ можно выбрать такие числа α_{nk}, что*

$$f(x) = \lim_n \sum_k \alpha_{nk} x_k,$$

причем

1° $\alpha_{nk} = 0$ *при* $k > k_n$, *где* k_n — *некоторое число,*

2° $\sum\limits_k |\alpha_{nk}| \leqslant \|f\|$,

3° $\lim\limits_n \sum\limits_k |\alpha_{nk}| = \|f\|$.

Такими числами α_{nk} будут $\alpha_{nk} = \alpha_{nk}(q_n)$ из (4.1.6), причем q_n подбирается так, чтобы условие 3° имело место, что возможно ввиду (4.2.2).

4.3. Некоторые частные виды функционала. Пусть $x \in c$, тогда ввиду примечания 3.1.1,

$$S_f(x) = \lim x_n \varrho(f, e), \quad \mathrm{Var} S_f = |\varrho(f, e)|.$$

Следовательно, функционал примет вид

$$f(x) = \alpha \lim x_n + \Sigma a_k x_k,$$

где $\alpha = \varrho(f, e)$, причем норма (4.2.5) в c будет

$$\|f\|_c = |\alpha| + \Sigma|a_k|.$$

Пусть $x \in m_s$, где m_s — сепарабельное подпространство прост-

ранства m. Пусть последовательности $x^i = \{x_k^i\}$ $(i = 0, 1, \ldots)$ составляют всюду плотное множество в m_s. Поскольку все $x^i \in m$, то они все суммируемы методом $f = \{\alpha_{nk}(q)\}$, где $\alpha_{nk}(q)$ определены формулами (4. 1. 3). Пусть числа $\varepsilon_m > 0$ $(m = 0, 1, \ldots)$ такие, что $\lim \varepsilon_m = 0$. Ввиду сказанного мы можем выбрать такие разложения q_0 и q_1', что

$$|f(x^0) - f_n(x^0, q_0)| < \varepsilon_1 \text{ при } n \geqslant n_0,$$

и

$$f(x^1) - f_n(x^1, q_1') < \varepsilon_1 \text{ при } n = n_1 > n_0.$$

Пусть $q_1 > q_0, q_1'$, тогда

$$|f(x^i) - f_n(x^i, q_1)| < \varepsilon_1 \text{ для } i = 0, 1 \text{ при } n = n_1.$$

Продолжая аналогично, мы можем найти такое $q_m > q_{m-1}$, что $|f(x^i) - f_n(x^i, q_m)| < \varepsilon_m$ для $i = 0, 1, \ldots, m$ при $n = n_m > n_{m-1}$. Пусть $\alpha_{mk} = \alpha_{n_m k}(q_m)$, тогда мы можем написать

$$|f(x^i) - \sum_k \alpha_{mk} x_k^i| < \varepsilon_m \text{ для } i = 0, 1, \ldots, m.$$

Следовательно,

$$f(x^i) = \lim_m \sum_k \alpha_{mk} x_k^i \text{ для всех } i = 0, 1, \ldots,$$

причем $\alpha_{mk} = \alpha_{n_m k}(q_m) = 0$ при $k > k_m$ (k_m — некоторое число).

Напишем неравенство

$$|f(x) - \sum_k \alpha_{mk} x_k| \leqslant |f(x) - f(x^i)| +$$

$$+ |f(x^i) - \sum_k \alpha_{mk} x_k^i| + \sum_k |\alpha_{mk}||x_k^i - x_k| \leqslant$$

$$\leqslant 2\|f\| \, \|x - x^i\| + |f(x^i) - \sum_k \alpha_{mk} x_k^i|.$$

При произвольном $\varepsilon > 0$ мы можем выбрать x^i так, что $\|x - x^i\| < \frac{\varepsilon}{2M}$, где $M > 2\|f\|$. По доказанному

$$|f(x^i) - \sum_k \alpha_{mk} x_k^i| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при } m > N(\varepsilon).$$

Следовательно,

$$|f(x) - \sum_k \alpha_{mk} x_k| < \varepsilon \quad \text{при } m > N(\varepsilon).$$

Таким образом, можно выбрать такие числа α_{mk}, что для всех $x \in m_s$

$$f(x) = \lim_m \sum_k \alpha_{mk} x_k,$$

причем

1° $\alpha_{mk} = 0$ при $k > k_m$ (k_m — некоторое число),

2° $\sum\limits_k |a_{mk}| \leqslant \|f\|_s$,

3° $\lim\limits_m \sum\limits_k |a_{mk}| = \|f\|_s$,

где $\|f\|_s$ означает норму функционала в m_s.

Условие 3° доказывается аналогично условию 3° из теоремы 4. 2. 2. (при этом учитываем, что $n_m > n_{m-1}$). Общий вид линейного непрерывного функционала в пространстве m_s нашел Мазур (см. [4], стр. 72).

Как видно из теоремы 4. 2. 2 линейный непрерывный функционал в m_s и в m выглядит одинаково, только в m_s числа α_{nk} уже независимы от $x \in m_s$.

§ 5. Методы, порождаемые числовой матрицей

5. 1. Метод $\mathfrak{A}_1$. Пусть $A = (a_{nk})$ $(n, k = 0, 1, \ldots)$ какая-нибудь числовая матрица. Обозначим столбцы этой матрицы через $a^k = (a_{0k}, a_{1k}, \ldots, a_{nk}, \ldots) = \{a_{nk}\}$. Положим, как и выше, что в разложениях $q = \{\omega_\nu\}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, m)$ в каждой последовательности ω_ν числа 1 расположены в местах с индексами ν_n $(n = 0, 1, \ldots)$. Тогда

$$s_n(a^k, q) = \sum_{\nu=0}^{m} a_{\nu_n k} s(\omega_\nu). \tag{5. 1. 1}$$

Определим для матрицы A следующие условия:

$$\sum_k |a_{nk}| < M, \tag{5. 1. 2}$$

$$\lim_n \sum_k a_{nk} = a, \tag{5. 1. 3}$$

$$\lim_n a_{nk} = a_k. \tag{5. 1. 4}$$

Если выполнено условие (5. 1. 2), то $a^k \in m$ при всех $k = 0, 1, \ldots$ и тогда (5. 1. 1) определяет число $s(a_k)$ (см. теорема (1. 4. 4).

Составим матрицу $\mathfrak{A}_1 = \{a^1{}_{nk}(q)\}$, где

$$a^1{}_{nk}(q) = s_n(a^k, q).$$

По определению 2. 1. 2 матрица $\mathfrak{A}_1$ определяет некоторый метод суммирования $\mathfrak{A}$, которого мы обозначим через $\mathfrak{A}_1$. Через $c\mathfrak{A}_1$ обозначим множество последовательностей, суммируемых методом $\mathfrak{A}_1$.

Матрица $A = (a_{nk})$ также определяет обычный матричный метод суммирования A. Обозначим через mA множество последовательностей $x = \{x_k\}$, которые метод A ограничивает, т. е. для которых последовательность $y = \{y_n\} \in m$, где

$$y_n = \sum_k a_{nk} x_k.$$

Теорема 5. 1. 1. *Имеет место равенство*

$$c\mathfrak{A}_1 = mA,$$

т. е. множество $c\mathfrak{A}_1$ *совпадает с множеством* mA.

Доказательство. Пусть $x = \{x_k\} \in mA$. Мы можем написать (где $\mathfrak{A}_n^1(x, q)$ обозначает величину (2. 1. 1) для метода $\mathfrak{A}_1$):

$$\mathfrak{A}_n^1(x, q) = \sum_k x_k s_n(a^k, q) = \sum_{\nu=0}^{m} s(\omega_\nu) \sum_k x_k a_{\nu_n k}.$$

Таким образом,

$$\mathfrak{A}_n^1(x, q) = \sum_{\nu=0}^{m} y_{\nu_n} s(\omega_\nu) = s_n(y, q). \qquad (5. 1. 5)$$

Для того, чтобы установить $\mathfrak{A}_1$-суммируемость последовательности x, нам нужно, ввиду определения 1. 4. 1, определить, когда существует число $s(y)$ для $s_n(y, q)$, ограниченных по $n = 0, 1, \ldots$ (см. определение 2. 1. 2). По теореме 1. 4. 4 число $s(y)$ существует тогда и только тогда, когда последовательность y ограничена. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое q_0, что для всех $q \geqslant q_0$

$$|s(y) - s_n(y, q)| < \varepsilon$$

при $n > N(q_0)$. Так как $s_n(y, q) = \mathfrak{A}_n'(x, q)$, то $s(y) = \mathfrak{A}_1(x)$.

Теорема доказана.

Теорема 5. 1. 2. *Метод* $\mathfrak{A}_1$ *т-консервативен тогда и только тогда, когда выполняется условие* (5. 1. 2).

Доказательство. Из теоремы 5. 1. 1 мы уже знаем, что $c\mathfrak{A}_1 = mA$. Поэтому нам нужно установить, когда $m \subset mA$. Для этого, как известно, условие (5. 1. 2) необходимо и достаточно. Этот же результат получается также из теоремы 3. 2. 1.

Теорема 5. 1. 3. *Если матрица* A *удовлетворяет условиям* (5. 1. 2), (5. 1. 3), (5. 1. 4), *то метод* $\mathfrak{A}_1$ *суммирует все* $x = \{x_k\} \in c$ *к сумме*

$$\mathfrak{A}_1(x) = (a - \sum a_k) \lim x_k + \sum a_k x_k. \qquad (5. 1. 5)$$

Доказательство. При указанных условиях матричный метод A суммирует все $x \in c$ к сумме

$$\lim y_n = (a - \sum a_k) \lim x_k + \sum a_k x_k$$

(см. [3], стр. 62). Из этого ввиду равенства (5. 1. 1) и примечания (1. 4. 2) и следует равенство (5. 1. 5).

5. 2. Метод $\mathfrak{A}_2$. Этот метод мы также определим при помощи числовой матрицы $A = (a_{nk})$. Пусть дано разложение $q = \{\omega_\nu\}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, m)$, где попрежнему в последователь-

ностях ω_ν числа 1 расположены в местах ν_μ $(\mu = 0, 1, \ldots)$. Положим

$$a_{nk}^2(\omega_\nu) = \begin{cases} s(\omega_\nu)\, a_{n\mu}, & \text{когда } k = \nu_\mu, \\ 0, & \text{когда } k \neq \nu_\mu \end{cases}$$

и

$$a_{nk}^2(q) = \sum_{\nu=0}^{m} a_{nk}^2(\omega_\nu).$$

Полученная матрица $\mathfrak{A}_2 = \{a_{nk}^2(q)\}$ определяет некоторый метод суммирования $\mathfrak{A}$, которую мы обозначим через $\mathfrak{A}_2$.

Мы можем написать для $\mathfrak{A}_2$-суммируемой последовательности $x = \{x_k\}$, что

$$\mathfrak{A}_n^2(x, q) = \sum_{\nu=0}^{m} \sum_{k} x_k\, a_{nk}^2(\omega_\nu) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m} \sum_{\mu} x_{\nu_\mu} a^2{}_{n\nu_\mu}(\omega_\nu) = \sum_{\nu=0}^{m} s\,\omega_\nu \Big) \sum_{\mu} x_{\nu_\mu} a_{n\mu} =$$

$$= \sum_{\mu} a_{n\mu} \sum_{\nu=0}^{m} x_{\nu_\mu} s(\omega_\nu).$$

Следовательно,

$$\mathfrak{A}_n^2(x, q) = \sum_{\mu} a_{n\mu} s_\mu(x, q).$$

Теорема 5. 2. 1. *Метод $\mathfrak{A}_2$ m-консервативен тогда и только тогда, когда матрица A удовлетворяет условиям* (5. 1. 2) *и* (5. 1. 3), *причем для каждой $x \in m$ будет*

$$\mathfrak{A}_2(x) = as(x).$$

Доказательство. Проверим, что условия 1° и 2° теоремы 3. 2. 1 выполнены. Мы можем написать

$$\sum_{k} |a_{nk}^2(q)| = \sum_{k} \sum_{\nu=0}^{m} |a_{nk}^2(\omega_\nu)| =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m} \sum_{k} |a_{nk}^2(\omega_\nu)| = \sum_{\nu=0}^{m} \sum_{\mu} |a^2{}_{n\nu_\mu}(\omega_\nu)| =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m} s(\omega_\nu) \sum_{\mu} |a_{n\mu}| = \sum_{\mu} |a_{n\mu}|.$$

Следовательно, условие 1° выполнено тогда и только тогда, когда выполнено условие (5. 1. 2).

Для проверки условия 2° возьмем произвольную последовательность ω. Выберем разложение q_0 так, чтобы оно содержало последовательность ω; тогда для всех $q \geqslant q_0$ будет

$$\mathfrak{A}_n^2(\omega, q) = s(\omega) \sum_{\mu} a_{n\nu}.$$

Поэтому

$$\mathfrak{A}_2(\omega) = s(\omega)a.$$

Отсюда следует, что $\mathfrak{A}_2(e_k) = 0$. Для произвольного разложения q мы можем написать

$$S_n(x, q) = \sum_{\nu=0}^{m} x_{\nu_n} \varrho(\mathfrak{A}_2, \omega_\nu) = a \sum_{\nu=0}^{m} x_{\nu_n} s(\omega_\nu) = a s_n(x, q).$$

Таким образом, равенство (3. 2. 1) будет иметь вид

$$\mathfrak{A}_2(x) = as(x).$$

5. 3. Метод $\mathfrak{A}_3$. Этот метод мы определим путем соединения принципов построения методов $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$.

Пусть метод $\mathfrak{A}$ определен матрицей $\mathfrak{A}_3 = \{a_{nk}{}^3(q)\}$, где элементы

$$a_{nk}{}^3(q) = \sum_{\nu=0}^{m} a_{nk}{}^3(\omega_\nu)$$

определяются следующим образом:

$$a_{nk}{}^3(\omega_\nu) = \begin{cases} s(\omega_\nu) s_n(a^\mu, q), & \text{если } k = \nu_\mu, \\ 0, & \text{если } k \neq \nu_\mu. \end{cases}$$

Метод $\mathfrak{A}$ с такими элементами обозначим через $\mathfrak{A}_3$.

Для $\mathfrak{A}_3$-суммируемой последовательности $x = \{x_k\}$ мы можем написать

$$\mathfrak{A}_n{}^3(x, q) = \sum_k x_k a_{nk}{}^3(q) = \sum_{\nu=0}^{m} \sum_k a_{nk}{}^3(\omega_\nu) x_k =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m} s(\omega_\nu) \sum_k s_n(a^k, q) x_{\nu_k} = \sum_k s_n(a^k, q) \sum_{\nu=0}^{m} x_{\nu_k} s(\omega_\nu).$$

Следовательно,

$$\mathfrak{A}_n{}^3(x, q) = \sum_k s_n(a^k, q) s_k(x, q).$$

Теорема 5. 3. 1. *Метод $\mathfrak{A}_3$ m-консервативен, если матрица A удовлетворяет условию* (5. 1. 2), *причем для каждой $x \in m$ будет*

$$\mathfrak{A}_3(x) = s(\bar{a}) s(x),$$

где $\bar{a} = \{A_k(e)\} = \{\sum_k a_{nk}\}$.

Доказательство. Проверим, что условия 1° и 2° теоремы 3. 2. 1 выполнены. Действительно,

$$1^\circ \quad \sum_k |a_{nk}{}^3(q)| = \sum_{\nu=0}^{m} \sum_k |a_{nk}{}^3(\omega_\nu)| = \sum_{\nu=0}^{m} s(\omega_\nu) \sum_k |s_n(a^k, q)| < M,$$

так как

$$\sum_k |s_n(a^k, q)| = \sum_k \Big| \sum_{\nu=0}^{m} a_{\nu_n k} s(\omega_\nu) \Big| \leqslant \sum_{\nu=0}^{m} s(\omega_\nu) \sum_k |a_{\nu_n k}| < M.$$

2° Пусть $\omega \in E$ — произвольная последовательность. Выберем q_0 так, чтобы оно содержало последовательность ω. Тогда для всех $q \geqslant q_0$ мы можем написать

$$\mathfrak{A}_n^3(\omega, q) = s(\omega) \sum_k s_n(a^k, q) = s(\omega) \sum_{\nu=0}^{m} s(\omega_\nu) \sum_k a_{\nu_n k} =$$

$$= s(\omega) s_n(\bar{a}, q),$$

где

$$\bar{a} = \{\sum_k a_{nk}\} \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Так как из-за условия (5. 1. 2) $\bar{a} \in m$, то сумма $s(\bar{a})$ существует и последовательность ω оказывается $\mathfrak{A}_3$-суммируемой к сумме

$$\mathfrak{A}(\omega) = s(\bar{a}) s(\omega).$$

Найдем сумму $\mathfrak{A}_3(x)$ для $x \in m$. Мы имеем:

$$\varrho(\mathfrak{A}, \omega) = s(\omega) s(\bar{a}),$$

отсюда

$$S_n^{\mathfrak{A}}(x, q) = \sum_{\nu=0}^{m} x_{\nu_n} s(\omega) s(\bar{a}) = s(\bar{a}) s_n(x, q),$$

откуда и следует $\mathfrak{A}_3(x) = s(\bar{a}) s(x)$.

Примечание 5. 3. 1. Для m-консервативности метода $\mathfrak{A}_3$ необходимо и достаточно выполнение условий

1° $\sum_k |s_n(a^k, q)| < M$,

2° $\lim_n \sum_k s_n(a^k, q)$ существует и конечен.

Это доказывается аналогично теореме 5. 2. 1. Там в доказательстве нужно только заменить $a_{n\mu}$ на $s_n(a^\mu, q)$.

5. 4. Обобщения классических методов. Методы $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{A}_3$ мы определили через произвольную матрицу $A = (a_{nk})$. Пусть теперь матрица $A = (a_{nk})$ определяет метод Чезаро C^α, т. е. метод A, где

$$a_{nk} = \frac{A_{n-1}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}}, \quad A_n^{\alpha} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)},$$

тогда методы $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{A}_3$, соответствующие этой матрице, дадут некоторые обобщения метода Чезаро. Эти обобщения мы обозначим через $\mathfrak{C}_1^\alpha$, $\mathfrak{C}_2^\alpha$ и $\mathfrak{C}_3^\alpha$.

Матрица метода $\mathfrak{C}_1^\alpha$ удовлетворяет условию (5. 1. 2), а также

условиям (5. 1. 3) и (5. 1. 4) при $a=1$ и $a_k=0$. Из теоремы 5. 1. 1 следует, что $c\mathfrak{C}_1{}^{\alpha}=mC^{\alpha}$, т. е. метод $\mathfrak{C}_1{}^{\alpha}$ суммирует все те последовательности, которые метод C^{α} ограничивает, и только такие. Из теоремы 5. 1. 2 следует, что метод $\mathfrak{C}_1{}^{\alpha}$ m-консервативен, а из теоремы 5. 1. 3 следует, что метод $\mathfrak{C}_1{}^{\alpha}$ также c-регулярен.

Соответственно из теорем 5. 2. 1 и 5. 3. 1 следует, что методы $\mathfrak{C}_2{}^{\alpha}$ и $\mathfrak{C}_3{}^{\alpha}$ m-регулярны.

Аналогичные обобщения можно выписать и для классических методов Рисса, Вороного-Нерлунда, Хаусдорфа и других.

Литература

1. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. Москва—Ленинград, 1950.
2. Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. Москва, 1960.
3. Харди Г., Расходящиеся ряды. Москва, 1951.
4. Banach, S., Théorie des opérations linéaires. Warszawa, 1932.
5. Erwe, F., Axiomatische Fragen der Limitierungstheorie. Bonn. math. Schr., 1957, **4**, 1—70.
6. Hill, J. D., Hamilton, H. J., Operation theory and multiple sequence transformations. Duke Math. J., 1941, 8, 154—162.
7. Lorentz, G. G., A contribution to the theory of divergent sequences. Acta math., 1948, **80**, 167—190.
8. Steinhaus, H., Remarks on the generalization of the idea of limit. Prace mat. fiz., 1911, **22**, 121—134.
9. Wilansky, A., An application of Banach linear functionals to summability. Trans. Amer. Math. Soc., 1949, **67**, 59—68.

Поступило
27 VII 1962

UUED ÜLDISED SUMMEERIMISMENETLUSED

E. Reimers
Matemaatilise analüüsi kateeder

Resümee

Käesolevas töös me defineerime uued üldised summeerimismenetlused, tuginedes Boole'i algebrale E, mille elementideks on arvudest 0 ja 1 koosnevad jadad ω.

Paragrahvis 1 defineerime aksiomaatiliselt summa $s(\omega)$ jadadele $\omega\in E$, mille abil seejärel defineerime summa $s(x)$ igale tõkestatud jadale x.

Paragrahvis 2 anname uue üldise summeerimismenetluse definitsiooni maatriksi $\mathfrak{A}=\{a_{nk}(q)\}$ abil, mille elemendid $a_{nk}(q)$ sõltuvad E elementidest. Tavalisi maatriksmenetlusi võib vaadelda kui erijuhte neist üldistest menetlustest. Me tõestame 3 teoreemi, mis annavad tingimused selleks, et jada x oleks summeeruv menetlusega $\mathfrak{A}$ (teoreemid 2.1.1 ja 2.1.2) ja selleks, et menetlus $\mathfrak{A}$ oleks konservatiivne ja ka regulaarne (teoreem 2.2.1).

Paragrahvis 3 tuletame tingimused selleks, et menetlus $\mathfrak{A}$ summeeriks kõik tõkestatud jadad (teoreem 3.2.1). Siit järeldub, et regulaarne menetlus $\mathfrak{A}$ võib

summeerida kõik tõkestatud jadad. Seda omadust pole tavalistel maatriksmenetlustel.

Paragrahvis 4 antakse üldine kuju pidevale ja lineaarsele funktsionaalile tõkestatud jadade ruumis. Samuti leitakse ka tema norm.

Paragrahvis 5 anname mõned näited menetluste $\mathfrak{A}$ kohta.

NEW GENERAL METHODS OF SUMMABILITY

E. Reimers

Summary

In the present paper we define the new general methods of summability basing on Boole's algebra E the elements of which are the sequences ω consisting of the numbers 0 and 1.

In paragraph I we define axiomatically the sum $s(\omega)$ for the sequences $\omega \in E$, with the help of which we then define the sum $s(x)$ for every bounded sequence x.

In paragrahp 2 we give the definition of the new general method of summability $\mathfrak{A}$ by means of the matrix $\mathfrak{A} = \{a_{nk}(q)\}$, the elements $a_{nk}(q)$ of which depend on the elements of E. The usual matrix methods will be considered as special cases of these methods $\mathfrak{A}$. We prove three theorems which give the conditions for the sequence x to be summable $\mathfrak{A}$ (theorems 2.1.1 and 2.1.2) and for the method $\mathfrak{A}$ to be conservative and also regular (theorem 2.2.1).

In paragraph 3 we derive the conditions in order that method $\mathfrak{A}$ would be summable all bounded sequences (theorem 3.2.1). Hence it follows that regular method $\mathfrak{A}$ can summable all bounded sequences. This property is absent at the usual matrix methods.

In paragraph 4 the general form of the continuous linear functional in the space of bounded sequences is given. The norm of this functional is also found.

In paragraph 5 we give some examples of the methods $\mathfrak{A}$.

МНОЖИТЕЛИ СУММИРУЕМОСТИ И АБСОЛЮТНОЙ СУММИРУЕМОСТИ ДЛЯ ДВОЙНЫХ РЯДОВ, АБСОЛЮТНО СУММИРУЕМЫХ МЕТОДОМ ВЗВЕШЕННЫХ СРЕДНИХ РИССА

Г. Кангро и С. Барон
Кафедра математического анализа

§ 1. О методе взвешенных средних Рисса

Метод взвешенных средних Рисса (коротко метод P) треугольен и в виде преобразования последовательности в последовательность определяется матрицей [1]

$$a_{mnkl} = \frac{p_{kl}}{P_{mn}},$$

в виде преобразования ряда в последовательность — матрицей

$$a_{mnkl} = 1 - \frac{1}{P_{mn}} (P_{m,\,l-1} + P_{k-1,\,n} - P_{k-1,\,l-1}),$$

а в виде преобразования ряда в ряд — матрицей

$$\bar{a}_{mnkl} = \bar{\Delta}_{mn} \frac{P_{k-1,\,l-1} - P_{m,\,l-1} - P_{k-1,\,n}}{P_{mn}}.$$

Для дальнейшего нам нужна обратная матрица $(\bar{\eta}_{mnkl})$ метода P, заданного в виде преобразования ряда в ряд. Зная

[1] Здесь и всюду в дальнейшем обозначаем $P_{mn} = \sum\limits_{k,l=0}^{m,n} p_{kl}$, $P_m = \sum\limits_{k=0}^{m} p_k$ и т. п., причем предполагаем $p_{kl} \neq 0$, $P_{mn} \neq 0$.

Дополнительные указания, вроде $m, n = 0, 1, \ldots$ или $m = 0, 1, \ldots$, будем, как правило, опускать. У знака суммы пределы суммирования опускаем, когда суммирование происходит по всем целочисленным значениям индексов от 0 до ∞. Выражения с отрицательными индексами считаем равными нулю, а отношение $\frac{0}{0} = 1$.

элементы обратной матрицы метода P (см. [11], стр. 32), заданного в виде преобразования последовательности в последовательность, убеждаемся в том (ср. [5], формулы (8)), что

$$\bar{\eta}_{mnkl} = \begin{cases} \dfrac{P_{kl}}{p_{kl}} & \text{при } m, n = k, l, \\ \dfrac{P_{k+1,\,l} - P_{kl}}{p_{k+1,\,l}} - \dfrac{P_{kl}}{p_{kl}} & \text{при } m, n = k+1, l, \\ \dfrac{P_{k,\,l+1} - P_{kl}}{p_{k,\,l+1}} - \dfrac{P_{kl}}{p_{kl}} & \text{при } m, n = k, l+1, \\ 1 - \dfrac{P_{k,\,l+1} - P_{kl}}{p_{k,\,l+1}} - \dfrac{P_{k+1,\,l} - P_{kl}}{p_{k+1,\,l}} + \dfrac{P_{kl}}{p_{kl}} & \text{при } m, n = k+1, l+1, \\ 0 & \text{при } m > k+1 \text{ или } n > l+1. \end{cases}$$

Отсюда, метод P нормален, если $p_{kl} \neq 0$.

Если метод P факторизируем, т. е. $p_{kl} = p_k p'_l$, то

$$\alpha_{mnkl} = \left(1 - \frac{P_{k-1}}{P_m}\right)\left(1 - \frac{P'_{l-1}}{P'_n}\right),$$

$$\bar{\alpha}_{mnkl} = \frac{P_{k-1,\,l-1}\, p_{mn}}{P_{m-1,\,n-1}\, P_{mn}},$$

$$\bar{\eta}_{mnkl} = \begin{cases} \dfrac{P_{kl}}{p_{kl}} & \text{при } m, n = k, l, \\ -\dfrac{P_{k-1,\,l}}{p_{kl}} & \text{при } m, n = k+1, l, \\ -\dfrac{P_{k,\,l-1}}{p_{kl}} & \text{при } m, n = k, l+1, \\ \dfrac{P_{k-1,\,l-1}}{p_{kl}} & \text{при } m, n = k+1, l+1, \\ 0 & \text{при } m > k+1 \text{ или } n > l+1. \end{cases}$$

Следовательно, (ср. [5], стр. 169; или [6], стр. 196) имеет место

Лемма 1. *Факторизируемый метод P сохраняет абсолютную сходимость тогда и только тогда, если*

$$P_{k-1,\,l-1} \sum_{m,n=k,l}^{\infty} \left| \frac{p_{mn}}{P_{m-1,\,n-1}\, P_{mn}} \right| = O(1).$$

§ 2. Неэффективные точные условия для множителей суммируемости типов (A_l, B), (A_l, B_b) и (A_l, B_r)

Комплексные числа ε_{mn} называются *множителями суммируемости типа* (X, Y), если из X-суммируемости двойного ряда $\sum\limits_{m,n} u_{mn}$ всегда следует Y-суммируемость двойного ряда $\sum\limits_{m,n} \varepsilon_{mn} u_{mn}$. Найти множители суммируемости означает: найти эффективные точные (т. е. необходимые и достаточные) условия для того, чтобы числа ε_{mn} были множителями суммируемости заданного типа.

До сих пор известны множители суммируемости типа (X, Y) для того случая, когда X и Y — методы суммирования Чезаро [4], а также некоторые типы множителей сходимости для метода взвешенных средних Рисса [7].

Пусть B — произвольный треугольный метод суммирования, заданный в виде преобразования ряда в последовательность матрицей $B = (\beta_{mnkl})$, удовлетворяющей условию

$$\lim_{m,n} \beta_{mnkl} = 1. \tag{1}$$

Основной целью настоящей статьи[2] — найти точные условия для множителей суммируемости типов (P_l, B), (P_l, B_b), (P_l, B_r) и (P_l, B_l), где значки l, b и r указывают соответственно на абсолютную, ограниченную и полную суммируемость[3]. Для этой цели мы начинаем с изложения общей теории множителей суммируемости, аналогичной статье [7], относительно абсолютного суммирования.

Рассмотрим сначала первые три из названных типов множителей суммируемости для произвольного нормального метода A. Согласно определению, задача нахождения множителей суммируемости типов (A_l, B) (соответственно (A_l, B_b) или (A_l, B_r)) сводится к следующей:

Найти точные условия для того, чтобы из абсолютной сходимости двойного ряда

$$\sum_{m,n} u'_{mn}, \tag{2}$$

где

$$u'_{mn} = \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} a_{mn\mu\nu} u_{\mu\nu} = \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} \Delta_{mn} a_{mn\mu\nu} U_{\mu\nu}, \tag{3}$$

всегда следовала сходимость (соответственно b-сходимость или

[2] Результаты данной статьи докладывались 7 июля 1961 г. на заседании секции теории функций IV Всесоюзного математического съезда.

[3] См. [7], стр. 4—5.

r-сходимость) двойной последовательности

$$U''_{mn} = \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} \beta_{mn\mu\nu}\, \varepsilon_{\mu\nu}\, u_{\mu\nu}. \tag{4}$$

Для решения поставленной задачи воспользуемся методом обратного преобразования. Действительно, при помощи обратной матрицы метода A из (3) выводим

$$u_{\mu\nu} = \sum_{k,\,l=0}^{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu kl}\, u'_{kl}. \tag{5}$$

Вставляя (5) в (4), находим

$$U''_{mn} = \sum_{k,\,l=0}^{m,\,n} c_{mnkl}\, u'_{kl}, \tag{6}$$

где

$$c_{mnkl} = \sum_{\mu,\nu=k,l}^{m,n} \beta_{mn\mu\nu}\, \eta_{\mu\nu kl}\, \varepsilon_{\mu\nu}.$$

Применяя к матричному преобразованию (6) ряда в последовательность условия преобразований $l \to c$ (соответственно $l \to mc$ или $l \to r$) ([11], стр. 21), получаем следующее предложение.

Теорема 1. *Пусть метод A нормален и B треугольен. Для того, чтобы числа ε_{mn} были множителями суммируемости типов* а) (A_l, B), б) (A_l, B_b) *или* в) (A_l, B_r), *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$c_{mnkl} = O(1) \qquad (m,\ n \geqslant N) \tag{b^3}$$

и существование предела

$$\lim_{m,\,n} c_{mnkl} = c_{kl}, \tag{d^1}$$

причем $N = 0$ в случаях б) *и* в), *а в случае* в), *кроме того, должны существовать*

$$\lim_{m} c_{mnkl} \ \text{и} \ \lim_{n} c_{mnkl}. \tag{f^1}$$

Условия теоремы 1 неэффективны: их практически трудно проверять. Однако, с их помощью ниже найдем более эффективные точные условия для нашей проблемы.

§ 3. Основные необходимые условия для типа (A_l, B)

Из (4), (6) и (3) выводим соотношение

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} \beta_{mn\mu\nu}\, \varepsilon_{\mu\nu}\, u_{\mu\nu} = \sum_{\varkappa,\lambda=0}^{m,n} c_{mn\varkappa\lambda} \sum_{\mu,\nu=0}^{\varkappa,\lambda} \Delta_{\varkappa\lambda}\, a_{\varkappa\lambda\mu\nu}\, U_{\mu\nu}. \tag{7}$$

Потребуем, чтобы все последовательности [4] $\{\delta_{\mu\nu kl}\}$ $(k,\ l=0,1,\ldots)$ были A_l-суммируемыми, т. е. (см. (3)) потребуем выполнение условия

$$\sum_{m,n=k,l}^{\infty} |\overline{\Delta}_{mn}\, a_{mnkl}| < \infty. \tag{8}$$

Тогда из (7) и теоремы 1 при $U_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu kl}$ получаем условие

$$\Delta_{kl}(\beta_{mnkl}\,\varepsilon_{kl}) = \sum_{\varkappa,\lambda=k,l}^{\infty} c_{mn\varkappa\lambda}\,\overline{\Delta}_{\varkappa\lambda}\,a_{\varkappa\lambda kl} \quad \textit{вместе с } (\mathrm{b}^3), \tag{9}$$

откуда, учитывая условие (d^1) теоремы 1 и условия (1) и (8), при $m,\ n\to\infty$ выводим

$$\Delta_{kl}\,\varepsilon_{kl} = \sum_{\varkappa,\lambda=k,l}^{\infty} c_{\varkappa\lambda}\,\overline{\Delta}_{\varkappa\lambda}\,a_{\varkappa\lambda kl} \quad \textit{при } c_{\varkappa\lambda}=O(1). \tag{10}$$

Итак, доказана

Лемма 2. *Пусть нормальный метод A удовлетворяет условию* (8) *и треугольный метод B — условию* (1). *Тогда для множителей суммируемости типа $(A_l,\ B)$ необходимы условия* (9) *и* (10).

Для получения других необходимых условий потребуем существования следующих [5] пределов

$$\begin{aligned} &\lim_m \beta_{mnkl} = \beta'_{nl} \quad (\textit{независимо от } k),\\ &\lim_n \beta_{mnkl} = \beta_{mk} \quad (\textit{независимо от } l), \end{aligned} \tag{11}$$

$$\lim_m c_{mn\varkappa\lambda} = c'_{n\varkappa\lambda} \ \ (n\geqslant N),\ \lim_n c_{mn\varkappa\lambda} = c_{m\varkappa\lambda} \ \ (m\geqslant N). \tag{12}$$

Теперь переходя в (9) к пределу один раз при $m\to\infty$, другой раз при $n\to\infty$, в силу условия (8) и леммы 2 получаем следующее предложение.

Лемма 3. *Пусть нормальный метод A удовлетворяет условию* (8) *и треугольный метод B — условиям* (11). *Если, сверх того, существуют пределы* (12), *то для множителей суммируемости типа $(A_l,\ B)$ необходимы условия*

$$\Delta_{kl}(\beta'_{nl}\,\varepsilon_{kl}) = \sum_{\varkappa,\lambda=k,l}^{\infty,n} c'_{n\varkappa\lambda}\,\overline{\Delta}_{\varkappa\lambda}\,a_{\varkappa\lambda kl} \quad \textit{при } c'_{n\varkappa\lambda}=O(1) \ \ (n\geqslant N), \tag{13}$$

$$\Delta_{kl}(\beta_{mk}\,\varepsilon_{kl}) = \sum_{\varkappa,\lambda=k,l}^{m,\infty} c_{m\varkappa\lambda}\,\overline{\Delta}_{\varkappa\lambda}\,a_{\varkappa\lambda kl} \quad \textit{при } c_{m\varkappa\lambda}=O(1) \ \ (m\geqslant N).$$

---

[4] Символ $\delta_{\mu\nu kl}=\delta_{\mu k}\,\delta_{\nu l}$, где $\delta_{\mu k}=\begin{cases}1 & \text{при } \mu=k,\\ 0 & \text{при } \mu\neq k.\end{cases}$

[5] Для множителей суммируемости типа $(A_l,\ B_r)$ из условий (f^1) теоремы 1 уже следует существование пределов (12) с $N=0$.

Для получения дальнейших необходимых условий предположим метод A факторизируемым, т. е. $A = A''\odot A'$, а также сохраняющим абсолютную сходимость. Введем вспомогательный факторизируемый метод

$$Z = A''\odot E,$$

где E — метод сходимости. Так как (см. [1], теоремы 7 и 6) метод

$$AZ^{-1} = (A''\odot A')\,(A''\odot E)^{-1} = E\odot A'$$

удовлетворяет условиям для преобразования $l \to l$ ([11], стр. 21), то (см. [11], стр. 29, теорема VI) $Z_l \subset A_l$. Поэтому любое условие, необходимое для множителей суммируемости типа (Z_l, B), подавно необходимо и для типа (A_l, B). Обозначим матрицу метода A'' в виде преобразования последовательности в последовательность через (a_{mk}). Далее, положим в (7) $A = Z$ и $u_{\mu\nu} = \overline{\Delta}_\mu\,\delta_{\mu\nu kl}$, что допустимо из-за условия (8). Тогда, учитывая теорему 1, получаем условие

$$\Delta_k(\beta_{mnkl}\,\varepsilon_{kl}) = \sum_{\varkappa=k}^{m} c_{mn\varkappa l}\,\overline{\Delta}_\varkappa\,a_{\varkappa k} \quad \textit{вместе с } (\mathrm{b}^3), \tag{14}$$

из которого, учитывая условия (d^1) теоремы 1, (1) и (8), при $m, n \to \infty$ заключаем

$$\Delta_k\,\varepsilon_{kl} = \sum_{\varkappa=k}^{\infty} c_{\varkappa l}\,\overline{\Delta}_\varkappa\,a_{\varkappa k} \quad \textit{при } c_{\varkappa l} = O(1). \tag{15}$$

Аналогично выводится необходимость условий

$$\Delta_l(\beta_{mnkl}\,\varepsilon_{kl}) = \sum_{\lambda=l}^{n} c_{mnk\lambda}\,\overline{\Delta}_\lambda\,a'_{\lambda l} \quad \textit{вместе с } (\mathrm{b}^3), \tag{16}$$

$$\Delta_l\,\varepsilon_{kl} = \sum_{\lambda=l}^{\infty} c_{k\lambda}\,\overline{\Delta}_\lambda\,a'_{\lambda l} \quad \textit{при } c_{k\lambda} = O(1), \tag{17}$$

где (a'_{nl}) — матрица метода A' в виде преобразования последовательности в последовательность.

Если же выполняются условия (11) и (12), то из условий (14) и (16) вытекают соответственно условия

$$\Delta_k(\beta_{mk}\,\varepsilon_{kl}) = \sum_{\varkappa=k}^{m} c_{m\varkappa l}\,\overline{\Delta}_\varkappa\,a_{\varkappa k} \quad \textit{при } c_{m\varkappa,\lambda} = O(1) \quad (m \geqslant N), \tag{18}$$

$$\Delta_l(\beta'_{nl}\,\varepsilon_{kl}) = \sum_{\lambda=l}^{n} c'_{n\varkappa\lambda}\,\overline{\Delta}_\lambda\,a'_{\lambda l} \quad \textit{при } c_{n\varkappa\lambda} = O(1) \quad (n \geqslant N). \tag{19}$$

Итак, доказана

Лемма 4. *Пусть нормальный метод A факторизируем, сохраняет абсолютную сходимость и удовлетворяет условию* (8), *а треугольный метод B — условию* (1). *Тогда для множителей суммируемости типа (A_l, B) необходимы условия* (14), (15), (16) *и* (17). *Если, сверх того, существуют пределы* (12), *а B удовлетворяет условиям* (11), *то необходимы также условия* (18) *и* (19).

§ 4. Множители суммируемости типов (P_l, B), (P_l, B_b) и (P_l, B_r)

Применим полученные результаты к методу P. Имеет место следующая основная

Теорема 2. *Пусть метод P факторизируем и сохраняет абсолютную сходимость, а метод B — треугольный, факторизируем и факторы его представляют собой регулярные*[6] *методы суммирования простых рядов. Тогда для того, чтобы числа ε_{mn} были множителями суммируемости типов* а) (P_l, B), б) (P_l, B_b), в) (P_l, B_r), *необходимы и достаточны условия*

1° $\varepsilon_{kl} = O(1)$;

2° $\Delta_{kl}\,\varepsilon_{kl} = O(a_{klkl})$;

3° $\Delta_k\,\varepsilon_{kl} = O(a_{kk})$, $\Delta_l\,\varepsilon_{kl} = O(a'_{ll})$;

4° $b'_{nl}\Delta_k\,\varepsilon_{kl} = O(a_{klkl})$, $b_{mk}\,\Delta_l\,\varepsilon_{kl} = O(a_{klkl})$;

5° $b_{mk}\,\varepsilon_{kl} = O(a_{kk})$, $b'_{nl}\,\varepsilon_{kl} = O(a_{ll})$;

6° $b_{mnkl}\,\varepsilon_{kl} = O(a_{klkl})$;

где

$$b_{mnkl} = b_{mk}\,b'_{nl} = \Delta_k\,\beta_{mk}\,\Delta_l\,\beta'_{nl},$$
$$a_{klkl} = a_{kk}a'_{ll},\quad P_k\,a_{kk} = p_k,\quad P'_l\,a'_{ll} = p'_l.$$

Доказательство. Необходимость условия 1° следует из леммы 3 статьи [4].

Далее, так как метод P сохраняет абсолютную сходимость, то условие (8) выполнено по лемме 1, ибо, например, (ср. [6], стр. 223)

$$\sum_{m=k}^{\infty} |\bar{\Delta}_m\,a_{mk}| = \left|\frac{p_k}{P_k}\right|\left(1 + |P_k| \sum_{m=k+1}^{\infty}\left|\frac{p_m}{P_m P_{m-1}}\right|\right) = O(a_{kk}) = O(1),$$

и, следовательно,

$$\sum_{\varkappa,\lambda=k,l}^{\infty} |\bar{\Delta}_{\varkappa\lambda}\,a_{\varkappa\lambda kl}| = O(a_{klkl}). \tag{20}$$

---

[6] Фактически нам лишь нужны вытекающие отсюда условия (см. [10], стр. 83)

$$\beta_{mk} = O(1),\quad \beta'_{nl} = O(1),\quad \lim_m \beta_{mk} = \lim_n \beta'_{nl} = 1.$$

Из последнего условия следуют условия (11).

Учитывая последнее, по условию (10) леммы 2 (ср. [2], стр. 282 и 284) получаем необходимость условия 2°.

Аналогично, из условий (15) и (17) леммы 4 и (20) непосредственно вытекают условия 3°.

Далее, так как (см. [8], формула (12))

$$\Delta_{kl}(\beta'_{nl}\,\varepsilon_{kl}) = \Delta_l(\beta'_{nl}\,\Delta_k\,\varepsilon_{kl}) = b'_{nl}\,\Delta_k\,\varepsilon_{kl} + \beta'_{n,l+1}\,\Delta_{kl}\,\varepsilon_{kl}, \qquad (21)$$

то, ввиду регулярности[6] факторов метода B, из (20), условия (13) леммы 3 (для метода P пределы (12) существуют) и условия 2° вытекает необходимость первого из условий 4° (ибо необходимость его в случае а) при $n < N$ следует из треугольности метода B и первого из условий 3°). Необходимость второго из условий 4° доказывается аналогично.

Из условий (18) и (19) леммы 4, условий 3°, (20) и регулярности[6] факторов метода B при помощи соотношения, аналогичного (21), вытекает необходимость условий 5° (необходимость их в случае а) при m, $n < N$ следует из треугольности метода B и условия 1°).

Наконец, из-за необходимости условий 2° и 4°, ввиду (20) и регулярности[6] факторов метода B, при помощи формулы (13) статьи [8], из условия (9) леммы 2 заключаем необходимость условия 6° (необходимость его в случае а) при $m < N$ и $n < N$ выводим из треугольности метода B и условий 5°).

Достаточность. Достаточно доказать, что из условий 1°—6° следует условие (b^3) теоремы 1, так как ее другие условия выполнены.

Аналогично формуле (7.1) статьи [9] имеем (для произвольного B)

$$c_{mnkl} = \frac{P_{kl}}{p_{kl}}\Delta_{kl}(\beta_{mnkl}\,\varepsilon_{kl}) + \frac{P'_l}{p'_l}\Delta_l(\beta_{mn,k+1,l}\,\varepsilon_{k+1,l}) + \frac{P_k}{p_k}\Delta_k(\beta_{mnk,l+1}\varepsilon_{k,l+1}) + \beta_{mn,k+1,l+1}\varepsilon_{k+1,l+1}.$$

Применяя формулы (12) и (13) статьи [8], получаем

$$\begin{aligned} c_{mnkl} = \frac{P_{kl}}{p_{kl}}\,(&b_{mnkl}\,\varepsilon_{kl} + \Delta_l\,\beta_{mn,k+1,l}\cdot\Delta_k\,\varepsilon_{kl} + \Delta_l\,\varepsilon_{kl}\cdot\Delta_k\,\beta_{mnk,l+1} + \\ &+ \beta_{mn,k+1,l+1}\cdot\Delta_{kl}\,\varepsilon_{kl}) + \\ &+ \frac{P'_l}{p'_l}\,(\varepsilon_{k,l+1}\,\Delta_k\,\beta_{mnk,l+1} + \Delta_l\,\varepsilon_{k+1,l}\cdot\beta_{mn,k+1,l+1}) + \\ &+ \frac{P_k}{p_k}\,(\varepsilon_{k+1,l}\,\Delta_l\,\beta_{mn,k+1,l} + \Delta_k\,\varepsilon_{k,l+1}\cdot\beta_{mn,k+1,l+1}) + \\ &+ \varepsilon_{k+1,l+1}\,\beta_{mn,k+1,l+1}. \end{aligned} \qquad (22)$$

Теперь оценка первого слагаемого тождества (22) следует из условия 6°; а в силу регулярности [6] факторов метода B оценка второго и третьего — из 4°, четвертого — из 2°, пятого и седьмого — из 5°, шестого и восьмого — из 3°, девятого — из 1°.

Дополнение к теореме 2. *Если* $\varepsilon_{mn} = \varepsilon_m \varepsilon'_n$, *то в теореме* 2 *можем опустить условия* 3°, 4° *и* 5°.

В теории простых рядов теорема, аналогичная теореме 2, доказана для частных случаев Пейеримхоффом в [2], а для общего случая в [6].

§ 5. Неэффективные точные условия для множителей суммируемости типа (A_l, B_l)

Задача нахождения множителей суммируемости типа (A_l, B_l) сводится к следующей:

Найти точные условия для того, чтобы из абсолютной сходимости двойного ряда (2) всегда следовала абсолютная сходимость двойного ряда

$$\sum_{m,n} u''_{mn},$$

где

$$u''_{mn} = \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} \bar{\beta}_{mn\mu\nu}\, \varepsilon_{\mu\nu}\, u_{\mu\nu}, \tag{23}$$

$$\bar{\beta}_{mnkl} = \bar{\Delta}_{mn}\, \beta_{mnkl}.$$

Вставляя (5) в (23), находим

$$u''_{mn} = \sum_{k,\,l=0}^{m,n} \bar{c}_{mnkl}\, u'_{kl}, \tag{24}$$

где

$$\bar{c}_{mnkl} = \sum_{\mu,\nu=k,l}^{m,n} \bar{\beta}_{mn\mu\nu}\, \bar{\eta}_{\mu\nu kl}\, \varepsilon_{\mu\nu} = \bar{\Delta}_{mn}\, c_{mnkl}.$$

Применяя к матричному преобразованию (24) ряда в ряд условия преобразования $l \to l$ ([11], стр. 21), получаем следующее предложение.

Теорема 3. *Пусть метод* A *нормален и* B *треугольен. Для того, чтобы числа* ε_{mn} *были множителями суммируемости типа* (A_l, B_l), *необходимо и достаточно условие*

$$\sum_{m,n=k,l}^{\infty} |\bar{c}_{mnkl}| = O(1). \tag{g^1}$$

§ 6. Основные необходимые условия для типа (A_l, B_l)

Из (23), (24) и (3) выводим соотношение

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} \overline{\beta}_{mn\mu\nu}\,\varepsilon_{\mu\nu}\,u_{\mu\nu} = \sum_{\varkappa,\lambda=0}^{m,n} \overline{c}_{mn\varkappa\lambda} \sum_{\mu,\nu=0}^{\varkappa,\lambda} \overline{\Delta}_{\varkappa\lambda}\,a_{\varkappa\lambda\mu\nu}\,U_{\mu\nu}. \qquad (25)$$

Если метод A удовлетворяет условию (8), то из (25) при $U_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu kl}$, в силу теоремы 3, получаем условие

$$\Delta_{kl}(\overline{\beta}_{mnkl}\,\varepsilon_{kl}) = \sum_{\varkappa,\lambda=k,l}^{m,n} \overline{c}_{mn\varkappa\lambda}\,\overline{\Delta}_{\varkappa\lambda}\,a_{\varkappa\lambda kl} \quad \text{вместе с } (g^1). \qquad (26)$$

Итак, доказана

Лемма 5. *Пусть нормальный метод A удовлетворяет условию* (8) *и метод B треугольен. Тогда для множителей суммируемости типа (A_l, B_l) необходимо условие* (26).

Для получения дальнейших необходимых условий потребуем существование пределов (11) и введем обозначения [7]

$$\overline{\beta}'_{nl} = \overline{\Delta}_n\,\beta'_{nl}, \qquad \overline{\beta}_{mk} = \overline{\Delta}_m\,\beta_{mk},$$
$$\overline{c}'_{n\varkappa\lambda} = \overline{\Delta}_n\,c'_{n\varkappa\lambda}, \qquad \overline{c}_{m\varkappa\lambda} = \overline{\Delta}_n\,c_{m\varkappa\lambda}.$$

Просуммировав обе части соотношения (26) по индексу m (от $m = k$ до ∞), учитывая (g^1) и (8), получаем

$$\Delta_{kl}(\overline{\beta}'_{nl}\,\varepsilon_{kl}) = \sum_{\varkappa,\lambda=k,l}^{\infty,n} \overline{c}'_{n\varkappa\lambda}\,\overline{\Delta}_{\varkappa\lambda}\,a_{\varkappa\lambda kl} \quad \text{при} \quad \sum_{n=\lambda}^{\infty} |\overline{c}'_{n\varkappa\lambda}| = O(1). \qquad (27)$$

Аналогично, необходимо условие

$$\Delta_{kl}(\overline{\beta}_{mk}\,\varepsilon_{kl}) = \sum_{\varkappa,\lambda=k,l}^{m,\infty} \overline{c}_{m\varkappa\lambda}\,\overline{\Delta}_{\varkappa\lambda}\,a_{\varkappa\lambda kl} \quad \text{при} \quad \sum_{m=\varkappa}^{\infty} |\overline{c}_{m\varkappa\lambda}| = O(1). \qquad (28)$$

Итак, в силу леммы 5, доказана

Лемма 6. *Пусть нормальный метод A удовлетворяет условию* (8) *и треугольный метод B — условиям* (11). *Тогда для множителей суммируемости типа (A_l, B_l) необходимы условия* (27) *и* (28).

Аналогично вышеизложенному вместо леммы 4 получается

Лемма 7. *Пусть нормальный метод A факторизируем, сохраняет абсолютную сходимость и удовлетворяет условию* (8),

---

[7] Существование пределов (12) с $N = 0$ следует непосредственно из условия (g^1), так как, например,

$$\sum_{m=\varkappa}^{\infty} \sum_{q=\lambda}^{n} \overline{c}_{mq\varkappa\lambda} = \sum_{m=\varkappa}^{\infty} \overline{\Delta}_m\,c_{mn\varkappa\lambda} = c'_{n\varkappa\lambda}.$$

а треугольный метод B условию (11). *Тогда для множителей суммируемости типа* (A_l, B_l) *необходимы условия*

$$\Delta_k(\overline{\beta}_{mk}\,\varepsilon_{kl}) = \sum_{\varkappa=k}^{m} \overline{c}_{m\varkappa\lambda}\,\overline{\Delta}_\varkappa\, a_{\varkappa k} \quad \textit{при} \quad \sum_{m=\varkappa}^{\infty} |\overline{c}_{m\varkappa\lambda}| = O(1),$$

$$\Delta_l(\overline{\beta}'_{nl}\,\varepsilon_{kl}) = \sum_{\lambda=l}^{n} \overline{c}'_{n\varkappa\lambda}\,\overline{\Delta}_\lambda\, a_{\lambda l} \quad \textit{при} \quad \sum_{n=\lambda}^{\infty} |\overline{c}'_{n\varkappa\lambda}| = O(1).$$

§ 7. Множители суммируемости типа (P_l, B_l)

Имеет место основная

Теорема 4. *Пусть методы P и B факторизируемы и сохраняют абсолютную сходимость, а факторы метода B представляют собой треугольные регулярные методы суммирования простых рядов. Тогда для того, чтобы числа ε_{mn} были множителями суммируемости типа (P_l, B_l), необходимы и достаточны условия* 1°—3° *теоремы* 2 *и*

4° $\sum\limits_{n=l}^{\infty} |\overline{\Delta}_n\, b'_{nl}|\Delta_k\,\varepsilon_{kl} = O(a_{klkl}), \qquad \sum\limits_{m=k}^{\infty} |\overline{\Delta}_m\, b_{mk}|\Delta_l\,\varepsilon_{kl} = O(a_{klkl});$

5° $\sum\limits_{m=k}^{\infty} |\overline{\Delta}_m\, b_{mk}|\varepsilon_{kl} = O(a_{kk}), \qquad \sum\limits_{n=l}^{\infty} |\overline{\Delta}_n\, b'_{nl}|\varepsilon_{kl} = O(a'_{ll});$

6° $\sum\limits_{m,n=k,l}^{\infty} |\overline{\Delta}_{mn}\, b_{mnkl}|\varepsilon_{kl} = O(a_{klkl}).$

Доказательство. Необходимость условий 1°—3° вытекает из теоремы 2.

Необходимость, например, первого из условий 4° следует из условия 2°, вытекающих из условия (27) леммы 6 и (20) соотношений

$$\sum_{n=l}^{\infty} |\Delta_{kl}(\overline{\beta}'_{nl}\,\varepsilon_{kl})| \leqslant \sum_{\varkappa,\lambda=k,l}^{\infty} |\overline{\Delta}_{\varkappa\lambda}\, a_{\varkappa\lambda kl}| \sum_{n=\lambda}^{\infty} |\overline{c}'_{n\varkappa\lambda}| = O(a_{klkl}),$$

формулы (21) и условия

$$\sum_{m,n=k,l}^{\infty} |\overline{\beta}_{mnkl}| = \sum_{m=k}^{\infty} |\overline{\beta}_{mk}| \sum_{n=l}^{\infty} |\overline{\beta}'_{nl}| = O(1), \tag{29}$$

которому метод B удовлетворяет, поскольку он сохраняет абсолютную сходимость.

Необходимость условий 5° получаем при помощи леммы 7, условий 3° и (29), формулы (12) статьи [8] и (20).

Наконец, из (20), (29), условия (26) леммы 5 и условий 2° и 4° теоремы 4 заключаем необходимость условия 6°.

Достаточность. Аналогично, как в теореме 2, из усло-

вий 1°—6° теоремы 4 выводится условие (g^1) теоремы 3. Для доказательства следует воспользоваться формулой (22), заменить в ней β_{mnkl} на $\overline{\beta}_{mnkl}$ и учесть условие (29).

Дополнение к теореме 4. *Если* $\varepsilon_{mn} = \varepsilon_m \varepsilon'_n$, *то в теореме* 4 *можем опустить условия* 3°, 4° *и* 5°.

В теории простых рядов теорема, аналогичная теореме 4, доказана в [6].

§ 8. Один частный случай

Если на метод B наложить более сильные ограничения, то условия 4°—6° теорем 2 и 4 можно упростить. Именно, имеет место

Теорема 5. *Пусть методы* P *и* B *удовлетворяют условиям теоремы* 4, *а метод* B, *кроме того, нормален и удовлетворяет условию* [8]

$$\sum_{m,n=k.l}^{\infty} |\overline{\Delta}_{mn} b_{mnkl}| = O(b_{klkl}). \tag{30}$$

Тогда для множителей суммируемости типов а) (P_l, B), б) (P_l, B_b), в) (P_l, B_r), г) (P_l, B_l), *необходимы и достаточны условия* 1°—3° *теоремы* 2 *и*

4° $b'_{ll} \Delta_k \varepsilon_{kl} = O(a_{klkl})$, $b_{kk} \Delta_k \varepsilon_{kl} = O(a_{klkl})$;

5° $b_{kk} \varepsilon_{kl} = O(a_{kk})$, $b'_{ll} \varepsilon_{kl} = O(a'_{ll})$;

6° $b_{klkl} \varepsilon_{kl} = O(a_{klkl})$.

Доказательство. Необходимость условий 4°—6° вытекает из соответствующих условий теоремы 2, если в последних положить $m = k$, $n = l$.

Достаточность непосредственно следует из (30) и теоремы 4.

Дополнение к теореме 5. *Если методы* P *и* B, *кроме условий теоремы* 5, *удовлетворяют еще условию* [9]

$$a_{klkl} = O(b_{klkl}), \tag{31}$$

то в теореме 5 *можно опустить условия* 3° *и* 5°.

Доказательство. Выведем для примера первое из условий 3°. Действительно, из (31) и первого из условий 4° теоремы 5 заключаем

$$\frac{\Delta_k \varepsilon_{kl}}{a_{kk}} = \frac{a'_{ll}}{b'_{ll}} b'_{ll} \frac{\Delta_k \varepsilon_{kl}}{a_{klkl}} = O(1).$$

---

[8] Условие (30) очевидно выполнено, если $\overline{\Delta}_{mn} b_{mnkl} = \Delta_{kl} \overline{\beta}_{mnkl}$ знакопостоянно. Условие (30) — это условие типа теорем о среднем значении.

[9] Условие (31) — это условие типа включения.

§ 9. Применение к методу взвешенных средних Рисса

Пусть в теореме 5 метод $B = Q$, где Q метод взвешенных средних Рисса, определенный последовательностью $q_{mn} = q_m q'_n$ и удовлетворяющий условиям

$$\lim_m Q_m = \infty, \quad \lim_n Q'_n = \infty. \tag{32}$$

Поскольку метод Q, согласно лемме 1 и (20), удовлетворяет условию (30), то вследствие теоремы 5 налицо

Теорема 6. *Пусть методы P и Q факторизируемы и сохраняют абсолютную сходимость, а метод Q, кроме того, удовлетворяет условиям* (32). *Тогда для того, чтобы числа ε_{mn} были множителями суммируемости типов* а) (P_l, Q), б) (P_l, Q_b), в) (P_l, Q_r), г) (P_l, Q_l), *необходимы и достаточны условия* 1°—6° *теоремы* 5 *при*

$$b_{kk} = \frac{q_k}{Q_k}, \quad b'_{ll} = \frac{q'_l}{Q'_l}.$$

§ 10. Применение к методу Чезаро. Множители сходимости

Пусть $B = C^{\gamma,\delta}$ является методом Чезаро комплексного порядка γ, δ с $\operatorname{Re}\gamma$, $\operatorname{Re}\delta \geqslant 0$. Условия теоремы 5 выполнены [10] лишь при $0 < \operatorname{Re}\gamma, \operatorname{Re}\delta \leqslant 1$ и при $0 \leqslant \gamma, \delta \leqslant 1$, ибо (см. [4], формулу (3); [8], формулы (12) и (14); [3], формулу (57)) в данном случае, например,

$$\bar{\Delta}_m b_{mk} = \frac{1}{mA_m^{\gamma}}\left(k A_{m-k}^{\gamma-2} - A_{m-k-1}^{\gamma-1}\right),$$

$$\sum_{m=k}^{\infty} |\bar{\Delta}_m b_{mk}| = \begin{cases} O[(k+1)^{-\operatorname{Re}\gamma}] & \text{при } 0 \leqslant \operatorname{Re}\gamma \leqslant 1, \\ O[(k+1)^{-1}] & \text{при } \operatorname{Re}\gamma \geqslant 1. \end{cases}$$

Однако, и в данном случае теоремы 2 и 4 упрощаются. Действительно, из условия 5° теоремы 2 вытекает (см. [8], формула (3)) необходимое условие

$$P_k \varepsilon_{kl} = O(p_k A_k^{\gamma}) = O[p_k (k+1)^{\operatorname{Re}\gamma}];$$
$$P_k \varepsilon_{kl} = O[p_k (A_{2k}^{\gamma} : A_k^{\gamma-1})] = O[p_k (k+1)].$$

Аналогичные упрощения допустимы и в других условиях теоремы 2.

В итоге, в силу теорем 2 и 4, справедлива

---

[10] При $\operatorname{Re}\gamma = 0$ $(\gamma \neq 0)$ или $\operatorname{Re}\delta = 0$ $(\delta \neq 0)$ не выполняется условие (29).

Теорема 7. *Пусть метод P удовлетворяет условиям теоремы 2, а числа γ, δ — либо неотрицательные, либо имеют положительные вещественные части. Тогда для того, чтобы числа ε_{mn} были множителями суммируемости типов* а) $(P_l, C^{\gamma,\delta})$, б) $(P_l, C_b^{\gamma,\delta})$, в) $(P_l, C_r^{\gamma,\delta})$, г) $(P_l, C_l^{\gamma,\delta})$, *необходимы и достаточны условия* 1°—6° *теоремы* 5, *где*

$$b_{kk} = \begin{cases} (k+1)^{-\operatorname{Re}\gamma} & \text{при } \operatorname{Re}\gamma \leqslant 1, \\ (k+1)^{-1} & \text{при } \operatorname{Re}\gamma \geqslant 1, \end{cases}$$

$$b'_{ll} = \begin{cases} (l+1)^{-\operatorname{Re}\delta} & \text{при } \operatorname{Re}\delta \leqslant 1, \\ (l+1)^{-1} & \text{при } \operatorname{Re}\delta \geqslant 1. \end{cases}$$

Положив в теореме 7 $\gamma = \delta = 0$ и учитывая дополнение к теореме 5, получаем следующее предложение.

Теорема 8. *Пусть метод P удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда для того, чтобы числа ε_{mn} были относительно P_l множителями*[3] *сходимости, b-сходимости, r-сходимости, необходимы и достаточны условия* 1°, 2°, 4° *и* 6° *теоремы* 5 *с* $b_{kk} = b'_{ll} = 1$.

Замечание. Положив в теоремах 7 и 8 $p_{mn} = 1$, непосредственно получаем, как следствие, теоремы о множителях суммируемости или сходимости для метода арифметических средних (см. [4], теорема 3).

Литература

1. Adams, C. R., On summability of double series. Trans. Amer. Math. Soc., 1932, **34**, 215—230.
2. Peyerimhoff, A., Untersuchungen über absolute Summierbarkeit. Math. Z., 1953, **57**, 265—290.
3. Барон С., Множители суммируемости для двойных рядов, суммируемых или ограниченных методом Чезаро вещественного порядка. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 91—117.
4. Барон С., Множители суммируемости и абсолютной суммируемости для двойных рядов, абсолютно суммируемых методом Чезаро. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 118—134.
5. Кангро Г., О суммируемости бесконечных рядов при помощи матричных методов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1955, **37**, 150—190.
6. Кангро Г., О множителях суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1955, **37**, 191—232.
7. Кангро Г., О множителях суммируемости для двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1957, **46**, 3—42.
8. Кангро Г., Барон С., Множители суммируемости для Чезаро-суммируемых и Чезаро-ограниченных двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1959, **73**, 3—49.
9. Кангро Г., Вихманн Ф., Об абстрактных множителях суммируемости для метода взвешенных средних Рисса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 209—225.

10. Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. Москва, 1960.
11. Кулль И. Г., Умножение суммируемых двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, **62**, 3—59.

Поступило
5 II 1962

SUMMEERUVUS- JA ABSOLUUTSED SUMMEERUVUSTEGURID RIESZI KAALUTUD KESKMISTE MENETLUSEGA ABSOLUUTSELT SUMMEERUVATE KAHEKORDSETE RIDADE JAOKS

G. Kangro ja S. Baron
Matemaatilise analüüsi kateeder

Resümee

Märgime tähega P Rieszi kaalutud keskmiste menetluse ja tähega B suvalise kolmnurkse maatriksmenetluse kahekordsete ridade jaoks. Käesoleva artikli põhieesmärgiks on tarvilike ja piisavate tingimuste leidmine summeeruvusteguritele tüüpi (P_l, B), (P_l, B_b), (P_l, B_r) ja (P_l, B_l), kus indeksid b, r, l viitavad tõkestatud, regulaarsele, vastavalt absoluutsele summeeruvusele (teoreemid 2 ja 4). Töös [7] on antud meetod efektiivsete tarvilike tingimuste leidmiseks kahekordsete ridade summeeruvustegurite jaoks. Vaadeldaval juhul annab see meetod aga vaid ühe osa otsitavatest tarvilikkudest tingimustest. Juhul kui menetlused P ja B on faktoriseeruvad, antakse üldine meetod täiendavate efektiivsete tarvilike tingimuste saamiseks. Eriti vaadeldakse juhte, kus B rahuldab kitsendusi (30) või (31) (teoreem 5), või kui B kujutab Rieszi kaalutud keskmiste menetlust (teoreem 6), või Cesáro menetlust $C^{\gamma, \delta}$, kus $\operatorname{Re}\gamma, \operatorname{Re}\delta > 0$ või $\gamma, \delta \geqslant 0$ (teoreemid 7 ja 8).

SUMMIERBARKEITS- UND ABSOLUTE SUMMIERBARKEITSFAKTOREN FÜR DOPPELREIHEN, DIE DURCH DAS VERFAHREN BEWICHTETER MITTEL VON RIESZ ABSOLUT SUMMIERBAR SIND

G. Kangro und S. Baron

Zusammenfassung

Es werde mit P das Verfahren der bewichteten Mittel von Riesz und mit B ein beliebiges dreieckiges Matrixverfahren für Doppelreihen bezeichnet. Das Hauptziel der vorliegenden Note ist die Aufstellung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen der Summierbarkeitsfaktoren von den Typen (P_l, B), (P_l, B_b), (P_l, B_r) und (P_l, B_l), wo die Indizes b, r, l die beschränkte, reguläre, bzw. absolute Summierbarkeit anweisen (Theoremen 2 und 4). In [7] wurde eine Methode für die Auffindung der effektiven notwendigen Bedingungen der Summierbarkeitsfaktoren von Doppelreihen dargestellt. Jedoch ergibt diese Methode für unseren Fall nur einen Teil von gesuchten notwendigen Bedingungen. Falls die Verfahren P und B faktorisierend sind, wird eine allgemeine Methode für das Aufstellen von weiteren effektiven notwendigen Bedingungen ausgearbeitet. Besonders werden die Fälle betrachtet, wo B die Einschränkungen (30) oder (31) erfüllt (Theorem 5), oder wenn B das Verfahren der bewichteten Mittel von Riesz (Theorem 6) oder das Cesàrosche Verfahren $C^{\gamma, \delta}$ mit $\operatorname{Re}\gamma, \operatorname{Re}\delta > 0$ oder $\gamma, \delta \geqslant 0$ darstellt (Theoremen 7 und 8).

РАСПРОСТРАНЕНИЕ МЕТОДА ПЕЙЕРИМХОФФА НА СЛУЧАЙ ОБОБЩЕННЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ СУММИРУЕМОСТИ

Ф. Вихманн
Вычислительный центр

§ 1. Введение

Пусть даны нормальные методы суммирования простых рядов A и B и метод суммирования двойных рядов C. Будем обозначать класс C-суммируемых двойных рядов через C_c, класс ограниченно C-суммируемых двойных рядов через C_b и класс вполне C-суммируемых рядов через C_r. В дальнейшем буква ω будет обозначать c, b или r.

Комплексные числа [1] ε_{kl} называются *множителями суммируемости типа* $(|A|, |B|, C_\omega)$ (или $(|A|, B, C_\omega)$, или $(|A|, B_O, C_\omega)$), если ряд [2] $\sum\limits_{k,l} \varepsilon_{kl} x_k y_l$ принадлежит классу C_ω при всех $|A|$-суммируемых рядах $\sum\limits_k x_k$ и $|B|$-суммируемых (или B-суммируемых, или B-ограниченных) рядах $\sum\limits_l y_l$.

В настоящей работе распространяется метод Пейеримхоффа, разработанный в статьях [11, 12] для множителей суммируемости простых рядов и обобщенный Кангро [4, 5] для изучения некоторых типов множителей суммируемости первого рода и множителей сходимости второго рода двойных рядов, на множители суммируемости типов $(|A|, |B|, C_\omega)$, $(|A|, B, C_\omega)$ и $(|A|, B_O, C_\omega)$ в случае, когда метод C является методом сходимости I или факторизируемым методом [3] AB. Полученные ре-

[1] Всюду в статье, если не оговорено противное, свободные индексы имеют значения 0, 1, ...

[2] Если не оговорено противное, то индексы суммирования пробегают значения 0, 1, ...

[3] Если $A = (\alpha_{mk})$ и $B = (\beta_{nl})$ методы суммирования простых рядов, то через AB будет обозначаться факторизируемый метод суммирования двойных рядов с матрицей $(\gamma_{mnkl}) = (\alpha_{mk}\beta_{nl})$.

зультаты применяются в случаях, когда методами A и B являются методы взвешенных средних Рисса или Чезаро.

Пусть A и B — нормальные методы суммирования, заданные преобразованиями последовательностей в последовательности

$$\sigma_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_{mk} X_k, \quad \tau_n(y) = \sum_{l=0}^{n} b_{nl} y_l$$

или преобразованиями рядов в последовательности

$$\sigma_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_{mk} x_k, \quad \tau_n(y) = \sum_{l=0}^{n} \beta_{nl} y_l,$$

где $a_{mk} = \sum_{s=k}^{m} a_{ms}$, $\beta_{nl} = \sum_{t=l}^{n} b_{nt}$, $x_k = \overline{\Delta} X_k$, $y_l = \overline{\Delta} y_l (X_{-1} = y_{-1} = 0)$.

Введем обозначения $\overline{a}_{mk} = \overline{\Delta}_m a_{mk}$ и $\overline{b}_{nl} = \overline{\Delta}_n b_{nl} (a_{-1,\,k} = b_{-1,\,l} = 0)$.

Ввиду нормальности A и B,

$$X_m = \sum_{k=0}^{m} \xi_{mk} \overline{\Delta} \sigma_k(x), \quad x_m = \sum_{k=0}^{m} \overline{\xi}_{mk} \overline{\Delta} \sigma_k(x), \tag{1}$$

$$Y_n = \sum_{l=0}^{n} \eta_{nl} \overline{\Delta} \tau_l(y), \quad y_n = \sum_{l=0}^{n} \overline{\eta}_{nl} \overline{\Delta} \tau_l(y), \tag{2}$$

$$Y_n = \sum_{l=0}^{n} \eta'_{nl} \tau_l(y), \quad y_n = \sum_{l=0}^{n} \overline{\eta'}_{nl} \tau_l(y). \tag{3}$$

Будем обозначать поле суммирования (или нулевого суммирования) метода A через A^* (или A_0^*), поле абсолютного суммирования (или нулевого суммирования) метода A через $|A|^*$ (или $|A|_0^*$) и поле ограниченности метода A через A_O^*. Если [4] $\lim_m a_{mk} = 0$, то в A_0^* имеет место сходимость по отрезкам [5] тогда и только тогда, когда

$$\left| \sum_{k=0}^{p} a_{mk} X_k \right| \leqslant M \quad (m \geqslant p,\ x = \{X_k\} \in A_0^*),$$

где постоянная M зависит от x (см. [13]). Если $\lim_m a_{mk} = 0$ и $\sum_{m=k}^{\infty} |\overline{a}_{mk}| < \infty$, то по [8] в $|A|_0^*$ имеет место сходимость по

[4] $\lim_m a_{mk}$ означает $\lim_{m \to \infty} a_{mk}$, $\lim_{m,n} s_{mn}$ — $\lim_{m,n \to \infty} s_{mn}$.

[5] Определение сходимости по отрезкам см. [13].

отрезкам тогда и только тогда, когда

$$\lim_m \sum_{k=m+1}^{\infty} \Big| \sum_{s=0}^{m} \bar{a}_{ks} X_s \Big| = 0 \quad (x \in |A|_0^*).$$

Сходимость по отрезкам в A_0^* (или $|A|_0^*$) влечет за собой условие $a_{nn} X_n = o(1)$ для $x \in A_0^*$ (или $x \in |A|_0^*$) (см. [2], леммы 10 и 14). Из сходимости по отрезкам в A_0^* следует совершенство [6] метода A [11, 12], а из сходимости по отрезкам в $|A|_0^*$ — абсолютное совершенство метода A [8].

В дальнейшем нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Если преобразование*

$$\sigma_{mn}(x, y) = \sum_{k,l} d_{mnkl} x_k y_l \tag{4}$$

переводит пространство $(l \times c \ (\sum_k |x_k| < \infty$ *и* $\lim_l y_l$ *существует)* *в пространство*: а) *сходящихся (в смысле Прингсхейма) последовательностей*, б) *ограниченно или вполне сходящихся последовательностей*, в) *ограниченных последовательностей, то*

$$\sum_l |d_{mnkl}| \leqslant M \quad (m, n \geqslant N),$$

причем в случаях б) *и* в) $N = 0$, *а в случае* а) $\sup_k \sum_l |d_{mnkl}| < \infty$ *при всех* $m, n = 0, 1, \ldots$. *В случаях* а) *и* б) *справедлива формула*

$$\lim_{m,n} \sigma_{mn}(x, y) = \sum_{k,l} d_{kl} x_k y_l + \lim_n y_n \Big(\sum_k d_k x_k - \sum_{k,l} d_{kl} x_k \Big)$$

$$\Big(\lim_{m,n} d_{mnkl} = d_{kl}, \ \lim_{m,n} \sum_l d_{mnkl} = d_k \Big).$$

Лемма 2. *Если преобразование* (4) *переводит пространство* $l \times m \ (\sum_k |x_k| < \infty$ *и* $y_l = O(1))$ *в пространство:* а) *сходящихся (в смысле Прингсхейма) последовательностей*, б) *ограниченно или вполне сходящихся последовательностей, то*

$$1^\circ \ \sum_l |d_{mnkl}| \leqslant M \quad (m, n \geqslant N), \qquad 2^\circ \ \lim_{m,n} \sum_l |d_{mnkl} - \lim_{m,n} d_{mnkl}| = 0,$$

причем в случае б) $N = 0$, *а в случае* а) $\sup_k \sum_l |d_{mnkl}| < \infty$ *при всех* $m, n = 0, 1, \ldots$. *Справедлива формула*

$$\lim_{m,n} \sigma_{mn}(x, y) = \sum_{k,l} d_{kl} x_k y_l \quad \Big(\lim_{m,n} d_{mnkl} = d_{kl} \Big).$$

---

[6] Определение совершенного метода см. [10], а абсолютно совершенного метода см. [12].

Лемма 3. *Если преобразование* (4) *переводит пространство* $l \times l$ *в пространство:* а) *сходящихся (в смысле Прингсхейма) последовательностей,* б) *ограниченно или вполне сходящихся последовательностей, то*

$$|d_{mnkl}| \leqslant M \quad (m, n \geqslant N),$$

причем в случае б) $N = 0$, *а в случае* а) $\sup\limits_{k,l} |d_{mnkl}| < \infty$ *при всех* $m, n = 0, 1, \ldots$. *Справедлива формула*

$$\lim_{m,n} \sigma_{mn}(x, y) = \sum_{k,l} d_{kl}\, x_k\, y_l \quad (\lim_{m,n} d_{mnkl} = d_{kl}).$$

Доказательство леммы можно провести методом, разработанным И. Куллем в [7].

Лемма 4. *Пусть метод* $A = (a_{mk})$ *нормален и абсолютно совершенен, метод* $B = (b_{nl})$ *нормален и совершенен (абсолютно совершенен), а* (d_{mnkl}) *— произвольная четырехмерная матрица, у которой существует*[7] $r\text{-}\lim\limits_{m,n} d_{mnkl}$. *Если существует*

$$C_{mn}(x, y) = \sum_{k,l} d_{mnkl}\, X_k\, Y_l$$

при всех $x \in |A|_0^*$ *и* $y \in B_0^*$ ($y \in |B|_0^*$) *и* $C_{mn}(x, y) = O(1)$, *то последовательность* $\{C_{mn}(x, y)\}$ *вполне сходится. Если* $r\text{-}\lim\limits_{m,n} d_{mnkl} = 0$, *то и* $r\text{-}\lim\limits_{m,n} C_{mn}(x, y) = 0$.

Доказательство. Докажем первый вариант леммы. Вследствие (1), (3) и леммы 1,

$$C_{mn}(x, y) = \lim_{s,t} \sum_{k,l=0}^{s,t} d_{mnkl}\, X_k\, Y_l =$$

$$= \lim_{s,t} \sum_{k,l=0}^{s,t} d_{mnkl} \sum_{p,q=0}^{k,l} \xi_{kp}\, \eta'_{lq}\, \overline{\Delta}\sigma_p(x)\, \tau_q(y) =$$

$$= \lim_{s,t} \sum_{p,q=0}^{s,t} c^{st}_{mnpq}\, \overline{\Delta}\sigma_p(x)\, \tau_q(y) = \sum_{p,q} c_{mnpq}\, \overline{\Delta}\sigma_p(x)\, \tau_q(y).$$

Здесь по лемме 1а) $\lim\limits_{s,t} c^{st}_{mnpq} = c_{mnpq}$ и $\sum\limits_q |c_{mnpq}| \leqslant M_{mn}$. Но поскольку $C_{mn}(x, y) = O(1)$, то по лемме 1b) $\sum\limits_q |c_{mnpq}| = O(1)$. Ввиду абсолютного совершенства метода A и совершенства ме-

[7] Существование $r\text{-}\lim\limits_{m,n} S_{mn}$ означает полную сходимость двойной последовательности S_{mn}, а $r\text{-}\lim\limits_{m,n} S_{mn} = 0$ соответственно $\lim\limits_{m,n} S_{mn} = \lim\limits_{m} S_{mn} = \lim\limits_{n} S_{mn} = 0$.

тода B, для любого $\varepsilon > 0$, $x \in |A|_0^*$ и $y \in B_0^*$ найдутся отрезки $\bar{x}$ и $\bar{y}$, что

$$\sum_p |\bar{\Delta}\sigma_p(x - \bar{x})| < \varepsilon \quad \text{и} \quad \sup_q |\tau_q(y - \bar{y})| < \varepsilon.$$

Покажем теперь, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся натуральные числа K и L такие, что при всех $m, n > k, l \geqslant K, L$

$$|C_{mn}(x, y) - C_{kl}(x, y)| < \varepsilon,$$

т. е. последовательность $\{C_{mn}(x, y)\}$ сходится в смысле Прингсхейма. Исходим из неравенства

$$|C_{mn}(x, y) - C_{kl}(x, y)| \leqslant |C_{mn}(x, y - \bar{y})| + |C_{mn}(x - \bar{x}, y)| + \\ + |C_{mn}(\bar{x}, \bar{y}) - C_{kl}(\bar{x}, \bar{y})| + |C_{kl}(\bar{x}, y - \bar{y})| + |C_{kl}(x - \bar{x}, y)|.$$

Очевидно, последовательность $\{C_{mn}(\bar{x}, \bar{y})\}$ сходится, т. е. для произвольного $\varepsilon > 0$ найдутся натуральные числа K и L такие, что $|C_{mn}(\bar{x}, \bar{y}) - C_{kl}(\bar{x}, \bar{y})| < \varepsilon$ при всех $m, n > k, l \geqslant K, L$. Так как $|C_{mn}(x, y - \bar{y})| \leqslant \sum_{p,q} |C_{mnpq}|\,|\Delta\sigma_p(x)|\,|\tau_q(y - \bar{y})| = O(1)\varepsilon$, $C_{mn}(x - \bar{x}, \bar{y}) = O(1)\varepsilon$, $C_{kl}(\bar{x}, y - \bar{y}) = O(1)\varepsilon$ и $C_{kl}(x - \bar{x}, y) = O(1)\varepsilon$, то из вышеприведенного неравенства немедленно вытекает фундаментальность последовательности $\{C_{mn}(x, y)\}$. Аналогично можно показать, что при любых $\varepsilon(l) > 0$ и $\varepsilon(k) > 0$ найдутся натуральные числа $K(l)$ и $L(k)$, что

$$|C_{mi}(x, y) - C_{kl}(x, y)| < \varepsilon(l) \quad (m > k \geqslant K(l),\ l = 0, 1, \ldots)$$

и

$$|C_{kn}(x, y) - C_{kl}(x, y)| \leqslant \varepsilon(k) \quad (n > l \geqslant L(k),\ k = 0, 1, \ldots),$$

т. е. существуют $\lim\limits_m C_{mn}(x, y)$ и $\lim\limits_n C_{mn}(x, y)$. Если же $r\text{-}\lim\limits_{m,n} d_{mnkl} = 0$, то из неравенства

$$|C_{mn}(x, y)| \leqslant |C_{mn}(x - \bar{x}, y - \bar{y})| + |C_{mn}(x - \bar{x}, \bar{y})| + \\ + |C_{mn}(x, y - \bar{y})| + |C_{mn}(\bar{x}, \bar{y})|$$

следует $r\text{-}\lim\limits_{m,n} C_{mn}(x, y) = 0$.

Доказательство второго варианта леммы опирается на лемму 3 и вполне аналогично доказательству первого варианта.

Примечание. Если в первом варианте леммы выбрать $(d_{mnkl}) = (d'_{mk}\, d''_{nl})$, где $\lim\limits_m d'_{mk} = d'_k$, $d''_{nl} = 0$, если $l > 0$, и $\lim\limits_n d''_{n0} = 1$ (вместо $r\text{-}\lim\limits_{m,n} d_{mnkl} = 0$ можно требовать $d'_k = 0$), то получится лемма 11 из [12]. При выборе $\lim\limits_n d''_{nl} = d''_l$, $d'_{mk} = 0$, если $k > 0$, и $\lim\limits_m d'_{m0} = 1$ (вместо $r\text{-}\lim\limits_{m,n} d_{mnkl} = 0$ можно требовать $d''_l = 0$), получится теорема 3 из [10].

§ 2. Множители ω-сходимости относительно $|A|$ и $|B|$, $|A|$ и B, $|A|$ и B_O

1. Пусть треугольной матрицей (γ_{mnkl}) задан метод суммирования двойных рядов C. Если комплексные числа ε_{kl} являются множителями суммируемости типа $(|A|, |B|, C_\omega)$, то должен существовать предел

$$\lim_{m,n} w_{mn} = \lim_{m,n} \sum_{s,t=0}^{m,n} \gamma_{mnst}\, \varepsilon_{st}\, x_s\, y_t \tag{5}$$

при всех $|A|$-суммируемых рядах $\sum\limits_s x_s$ и $|B|$-суммируемых рядах $\sum\limits_t y_t$. При помощи (1) и (2) легко получить равенство

$$w_{mn} = \sum_{p,q=0}^{m,n} c_{mnpq}\, \bar{\Delta}\sigma_p(x)\, \bar{\Delta}\tau_q(y), \tag{6}$$

где

$$c_{mnpq} = \sum_{s,t=p,q}^{m,n} \gamma_{mnst}\, \varepsilon_{st}\, \bar{\xi}_{sp}\, \bar{\eta}_{tq}. \tag{7}$$

Пусть $\lim\limits_{m,n} \gamma_{mnst} = 1$, $\sum\limits_{m=k}^{\infty} |\bar{a}_{mk}| < \infty$ и $\sum\limits_{n=l}^{\infty} |\bar{b}_{nl}| < \infty$. Тогда из (5) и (6) по лемме 3 при[8] $x = \{X_s\} = \{\delta_{sk}\}$ и $y = \{Y_t\} = \{\delta_{tl}\}$ следует необходимое условие

$$\Delta_{kl}\, \varepsilon_{kl} = \sum_{s,t=k,l}^{\infty} c_{st}\, \bar{a}_{sk}\, \bar{b}_{tl}, \tag{8}$$

где $c_{st} = \lim\limits_{m,n} c_{mnst}$ и $c_{st} = O(1)$. Допустим теперь, что существуют пределы

$$\lim_m c_{mlkl} = c'_{kl} \quad \text{и} \quad \lim_n c_{knkl} = c''_{kl}. \tag{9}$$

По лемме 3 и известной теореме Хана[9] о линейном преобразовании $l \to c$ легко убедиться в том, что при любой матрице (c_{mnkl}), которая переводит пространство $l \times l$ в пространство сходящихся двойных последовательностей и удовлетворяет условиям (9), для $\sum\limits_k |z_k| < \infty$ выполнены условия

$$\lim_m \sum_{k=0}^{m} c_{mlkl}\, z_k = \sum_k c'_{kl}\, z_k,$$

$$\lim_n \sum_{l=0}^{n} c_{knkl}\, z_l = \sum_l c''_{kl}\, z_l.$$

---

[8] Символ Кронекера $\delta_{sk} = \begin{cases} 1, & \text{если } s = k, \\ 0, & \text{если } s \neq k. \end{cases}$

[9] См. [3], лемма 6.

При $x = \{X_s\} = \{\delta_{sk}\}$ и $y = \{Y_t\} = \{\delta_{tl}\}$ из (6) следует

$$\Delta_{kl}(\gamma_{mnkl}\,\varepsilon_{kl}) = \sum_{s,t=k,l}^{m,n} c_{mnst}\,\bar{a}_{sk}\,\bar{b}_{tl}. \tag{10}$$

Если $C = I$, где I — единичный метод, то при $m = k$ и $n \to \infty$, соответственно, при $n = 1$ и $m \to \infty$, отсюда следуют необходимые условия

$$\begin{aligned} \Delta_k\,\varepsilon_{kl} &= b_{ll} \sum_{s=k}^{\infty} c'_{sl}\,\bar{a}_{sk}, \\ \Delta_l\,\varepsilon_{kl} &= a_{kk} \sum_{t=l}^{\infty} c''_{kt}\,b_{tl}. \end{aligned} \tag{11}$$

По лемме 1 здесь $c'_{sl} = O(1)$ и $c''_{kt} = O(1)$. По той же лемме для множителей суммируемости типа $(|A|, |B|, C_\omega)$ необходимо и условие

$$|c_{klkl}| \leqslant M \quad (k, l \geqslant N), \tag{12}$$

где в случаях $\omega = b$ и $\omega = r$ $N = 0$.

Теорема 1. *Пусть A и B — нормальные методы суммирования, для которых* $\lim\limits_m a_{m0} \neq 0$ *и* $\lim\limits_n \beta_{n0} \neq 0$. *Если в* $|A|_0^*$ *и* $|B|_0^*$ *имеет место сходимость по отрезкам и существуют пределы* (9), *то комплексные числа ε_{kl} являются множителями ω-сходимости относительно $|A|$ и $|B|$ тогда и только тогда, когда*

1° $\Delta_{kl}\,\varepsilon_{kl} = \sum\limits_{s,t=k,l}^{\infty} c_{st}\,\bar{a}_{sk}\,\bar{b}_{tl}$ $(c_{st} = O(1))$,

2° $\Delta_k\,\varepsilon_{kl} = b_{ll} \sum\limits_{s=k}^{\infty} c'_{sl}\,\bar{a}_{sk}$ $(c'_{sl} = O(1))$,

3° $\Delta_l\,\varepsilon_{kl} = a_{kk} \sum\limits_{t=l}^{\infty} c''_{kt}\,\bar{b}_{tl}$ $(c''_{kt} = O(1))$,

4° $\varepsilon_{kl} = O(a_{kk}\,b_{ll})$.

Доказательство. Необходимость условий теоремы следует из (8), (11) и (12).

Достаточность. Покажем, что условия теоремы гарантируют полную сходимость ряда $\sum\limits_{k,l} \varepsilon_{kl}\,x_k\,y_l$ при всех $x \in |A|^*$ и $y \in |B|^*$. Пусть сперва $x \in |A|_0^*$ и $y \in |B|_0^*$. Тогда при помощи преобразования Абеля—Харди

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=0}^{m+1,n+1} \varepsilon_{kl}\,x_k\,y_l &= \sum_{k,l=0}^{m,n} (\Delta_{kl}\,\varepsilon_{kl}) X_k\,Y_l + X_{m+1} \sum_{l=0}^{n} (\Delta_l\,\varepsilon_{m+1,\,l})\,Y_l + \\ &+ Y_{n+1} \sum_{k=0}^{m} (\Delta_k\,\varepsilon_{k,\,n+1}) X_k + \varepsilon_{m+1,\,n+1}\,X_{m+1}\,Y_{n+1} = \\ &= \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV}. \end{aligned} \tag{13}$$

Поскольку

$$|\mathrm{I}| = \Big|\sum_{k,l=0}^{m,n} X_k Y_l \sum_{s,t=k,l}^{\infty} c_{st}\,\bar{a}_{sk}\,\bar{b}_{tl}\Big| =$$

$$= \Big|\sum_{k,l=0}^{m,n} X_k Y_l \Big(\sum_{s,t=k,l}^{m,n} + \sum_{s,t=m+1,n+1}^{\infty} + \sum_{s,t=k,n+1}^{m,\infty} + \sum_{s,t=m+1,l}^{\infty,n}\Big) c_{st}\,\bar{a}_{sk}\,\bar{b}_{tl}\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s,t=0}^{m,n} |c_{st}\,\bar{\Delta}\sigma_s(x)\bar{\Delta}\tau_t(y)| + \sum_{s=m+1}^{\infty} \Big|\sum_{k=0}^{m} \bar{a}_{sk} X_k\Big| \sum_{t=n+1}^{\infty} |c_{st}|\Big|\sum_{l=0}^{n} \bar{b}_{tl} Y_l\Big| +$$

$$+ \sum_{s=0}^{m} |\bar{\Delta}\sigma_s(x)| \sum_{t=n+1}^{\infty} |c_{st}|\Big|\sum_{l=0}^{n} \bar{b}_{tl}\, Y_l\Big| +$$

$$+ \sum_{t=0}^{n} |\bar{\Delta}\tau_t\,(y)| \sum_{s=m+1}^{\infty} |c_{st}|\Big|\sum_{k=0}^{m} \bar{a}_{sk}\, X_k\Big| = O(1),$$

$$|\mathrm{II}| = |a_{m+1,\,m+1} X_{m+1}|\Big|\sum_{l=0}^{n} Y_l \sum_{t=l}^{\infty} c''_{m+1,\,t}\bar{b}_{tl}\Big| \leqslant$$

$$\leqslant |a_{m+1,\,m+1}\, X_{m+1}|\Big(\sum_{t=0}^{n} |c_{m+1,\,t}\,\bar{\Delta}\tau_t(y)| + \sum_{t=n+1}^{\infty} |c_{m+1,\,t}|\Big|\sum_{l=0}^{n} \bar{b}_{tl}\, Y_l\Big| = O(1),$$

$$|\mathrm{III}| = O(1) \quad \text{и} \quad |\mathrm{IV}| = O(1)\,|a_{m+1,\,m+1} X_{m+1} b_{n+1,\,n+1} Y_{n+1}| = O(1),$$

то по лемме 4 последовательности I—IV вполне сходятся. Если же $x \bar{\in} |A|_0^*$ и $y \bar{\in} |B|_0^*$, то найдутся $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $x_{k_0} \neq 0$ и $y_{l_0} \neq 0$, что $\sum_k (x_k - \alpha\delta_{kk_0}\, x_{k_0}) \in |A|_0^*$ и $\sum_l (y_l - \beta\delta_{ll_0}\, y_{l_0}) \in |B|_0^*$. Тогда

$$A_{m+1,\,n+1} = \sum_{k,l=0}^{m+1,n+1} \varepsilon_{kl}\, x_k\, y_l = \sum_{k,l=0}^{m+1,n+1} \varepsilon_{kl}(x_k - \alpha\delta_{kk_0} x_{k_0})\,(y_l - \beta\delta_{ll_0} y_{l_0}) +$$

$$+ \alpha x_{k_0} \sum_{l=0}^{n} (\Delta_l\, \varepsilon_{k_0 l})\, \bar{Y}_l + \alpha x_{k_0}\, \varepsilon_{k_0,\,n+1}\, \bar{Y}_{n+1} + \beta y_{l_0} \sum_{k=0}^{m} (\Delta_k\, \varepsilon_{kl_0})\, \bar{X}_k +$$

$$+ \beta y_{l_0}\, \varepsilon_{m+1,\,l_0}\, \bar{X}_{m+1} + \alpha\beta\, \varepsilon_{k_0 l_0}\, x_{k_0}\, y_{l_0}, \qquad (14)$$

где

$$\bar{X}_k = X_k - \alpha x_{k_0} \sum_{s=0}^{k} \delta_{sk_0} \quad \text{и} \quad \bar{Y}_l = Y_l - \beta y_{l_0} \sum_{t=0}^{l} \delta_{tl_0}.$$

Отсюда, ввиду уже доказанного и условий 2°—4°, при помощи примечания к лемме 4 следует полная сходимость последовательности $\{A_{m+1,\,n+1}\}$ при всех $x \bar{\in} |A|_0^*$ и $y \bar{\in} |B|_0^*$. Случаи, когда $x \bar{\in} |A|_0^*$ и $y \in |B|_0^*$ или $x \in |A|_0^*$ и $y \bar{\in} |B|_0^*$ рассматриваются аналогично.

2. Если комплексные числа ε_{kl} являются множителями суммируемости типа $(|A|, B, C_\omega)$ $((|A|, B_O, C_\omega))$, то должен суще-

ствовать предел (5) при всех $|A|$-суммируемых рядах $\sum\limits_s x_s$ и B-суммируемых (B-ограниченных) рядах $\sum\limits_t y_t$. При помощи (1) и (3) легко получить равенство

$$\sum_{s,t=0}^{m,n} \gamma_{mnst}\,\varepsilon_{st}\,x_s\,y_t = \sum_{p,q=0}^{m,n} d_{mnpq}\,\overline{\Delta}\sigma_p(x)\,\tau_q(y), \tag{15}$$

где

$$d_{mnpq} = \sum_{s,t=p,q}^{m,n} \gamma_{mnst}\,\varepsilon_{st}\,\overline{\xi}_{sp}\,\overline{\eta}'_{tq}. \tag{16}$$

Пусть $\lim\limits_{m,n} \gamma_{mnst} = 1$, $\sum\limits_{m=k}^{\infty} |\bar{a}_{mk}| < \infty$ и $\lim\limits_{n} b_{nl} = 0$. Тогда из (5) и (15) по лемме 1 (2) следует необходимое для множителей суммируемости типа $(|A|, B, C_\omega)$ $((|A|, B_0, C_\omega))$ условие

$$\Delta_{kl}\,\varepsilon_{kl} = \sum_{s,t=k,l}^{\infty} d_{st}\,\bar{a}_{sk}\,b_{tl}, \tag{17}$$

где $\sum\limits_t |d_{st}| = O(1)$. Допустим теперь, что существуют пределы

$$\lim_m d_{mlkl} = d'_{kl} \text{ и } \lim_n d_{knkl} = d''_{kl}. \tag{18}$$

По лемме 1 (2) и известным теоремам Хана[10] и Кожима—Шура (Хана и Шура) легко убедиться в том, что при любой матрице (d_{mnkl}), которая переводит пространство $l \times c$ $(l \times m)$ в пространство сходящихся двойных последовательностей и удовлетворяет условиям (18), для $\sum\limits_k |z_k| < \infty$ и $\{W_l\} \in c_0$ $(\sum\limits_k |z_k| < \infty$ и $\{W_l\} \in m)$ выполнены условия

$$\lim_m \sum_{k=0}^{m} d_{mlkl}\,z_k = \sum_k d'_{kl}\,z_k,$$

$$\lim_n \sum_{l=0}^{n} d_{knkl}\,W_l = \sum_l d''_{kl}\,W_l.$$

При $x = \{X_s\} = \{\delta_{sk}\}$ и $y = \{Y_t\} = \{\delta_{tl}\}$ из (15) следует

$$\Delta_{kl}(\gamma_{mnkl}\,\varepsilon_{kl}) = \sum_{s,t=k,l}^{m,n} d_{mnst}\,\bar{a}_{sk}\,b_{tl}. \tag{19}$$

Если $C = I$, то при $m = k$ и $n \to \infty$, соответственно, при $n = l$ и $m \to \infty$, отсюда следуют необходимые условия

$$\begin{aligned} \Delta_k\,\varepsilon_{kl} &= b_{ll} \sum_{s=k}^{\infty} d'_{sl}\,\bar{a}_{sk}, \\ \Delta_l\,\varepsilon_{kl} &= a_{kk} \sum_{t=l}^{\infty} d''_{kt}\,b_{tl}. \end{aligned} \tag{20}$$

[10] См. [3], леммы 1, 4 и 6.

По лемме 1 (2) здесь $d'_{sl} = O(1)$ и $\sum\limits_{t} |d''_{kt}| = O(1)$. Так как по лемме 2 в случае множителей суммируемости типа $(|A|, B_O, C_\omega)$ $\lim\limits_{m,\,n} \sum\limits_{l=0}^{n} |d_{mnkl} - \lim\limits_{m,\,n} d_{mnkl}| = 0$, то, ввиду $\lim\limits_{l} \lim\limits_{m;\,n} d_{mnkl} = 0$, отсюда следует условие $\lim\limits_{l} d'_{sl} = 0$. По лемме 1 (2) для множителей суммируемости типа $(|A|, B, C_\omega)$ $((|A|, B_O, C_\omega))$ необходимо условие

$$|d_{klkl}| \leqslant M \quad (k,\ l \geqslant N), \tag{21}$$

где в случаях $\omega = b$ и $\omega = r$ $N = 0$.

Теорема 2. *Пусть A и B — нормальные методы суммирования, для которых $\lim\limits_{m} \alpha_{m0} \neq 0$ и $\lim\limits_{n} \beta_{n0} \neq 0$. Если в $|A|_0{}^*$ и $B_0{}^*$ имеет место сходимость по отрезкам и существуют пределы* (18), *то комплексные числа ε_{kl} являются множителями ω-сходимости относительно $|A|$ и B тогда и только тогда, когда*

$$1^\circ\ \Delta_{kl}\,\varepsilon_{kl} = \sum_{s,\,t=k,\,l}^{\infty} d_{st}\,\bar{a}_{sk}\,b_{tl} \quad \left(\sum_{t} |d_{st}| = O(1)\right),$$

$$2^\circ\ \Delta_{k}\,\varepsilon_{kl} = b_{ll} \sum_{s=k}^{\infty} d'_{sl}\,\bar{a}_{sk} \quad (d'_{sl} = O(1)),$$

$$3^\circ\ \Delta_{l}\,\varepsilon_{kl} = a_{kk} \sum_{t=l}^{\infty} d''_{kt}\,b_{tl} \quad \left(\sum_{t} |d''_{kt}| = O(1)\right),$$

$$4^\circ\ \varepsilon_{kl} = O(a_{kk}\,b_{ll}).$$

Доказательство. Необходимость условий, в силу (17), (20) и (21), очевидна. Доказательство достаточности опирается на первый вариант леммы 4 и аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть A и B — нормальные методы суммирования, для которых $\lim\limits_{m} \alpha_{m0} \neq 0$ и $|b_{nl}| \leqslant M_l$. Если в $|A|_0{}^*$ имеет место сходимость по отрезкам, $|\sum\limits_{l=0}^{q} b_{nl}\,Y_l| \leqslant M(y)$ $(n \geqslant q)$ при всех $y \in B_O{}^*$ и существуют пределы* (18), *то комплексные числа ε_{kl} являются множителями ω-сходимости относительно $|A|$ и B_O тогда и только тогда, когда выполнены условия* 1°—4° *теоремы* 2 *с существованием $\lim\limits_{l} d'_{sl}$ и*

$$5^\circ\ \varepsilon_{kl} = o\,(b_{ll}) \quad (l \to \infty).$$

Доказательство. Необходимость условий 1°—4° очевидна, а необходимость условия 5° следует по теореме Шура [10] из сходимости ряда $\sum\limits_{l} \varepsilon_{kl}\,y_l$ при всех $y \in B_O{}^*$.

Достаточность. Исходим из (13) и докажем, что усло-

вия теоремы гарантируют сходимость ряда $\sum\limits_{k,\,l} \varepsilon_{kl}\, x_k\, y_l$ при всех $x \in |A|_0^*$ и $y \in B_O^*$. Покажем, что последовательность $\mathrm{I} = \{S_{m+1,\,n+1}\}$ в (13) фундаментальна при всех $x \in |A|_0^*$ и $y \in B_O^*$, т. е. сходится. Так как

$$S_{mn} - S_{kl} = \Big(\sum_{s,\,t=0,\,l+1}^{m,\,n} + \sum_{s,\,t=k+1,\,0}^{m,\,l}\Big)(\Delta_{st}\,\varepsilon_{st})\;X_s\,Y_t = A + B,$$

$$|A| = \Big|\sum_{s,\,t=0,\,l+1}^{m,\,n} X_s\,Y_t\Big(\sum_{\mu,\nu=s,\,t}^{m,\,\infty} + \sum_{\mu,\nu=m+1,\,t}^{\infty}\Big)\, d_{\mu\nu}\,\bar{a}_{\mu s}\,b_{\nu t}\Big| =$$

$$= O(1)\Big(\sum_{\mu} |\bar{\Delta}\sigma_\mu(x)|\sum_{\nu=l+1}^{\infty} |d_{\mu\nu}| + \sum_{\mu=m+1}^{\infty} \Big|\sum_{s=0}^{m} \bar{a}_{\mu s}\,X_s\Big|\Big),$$

$$|B| = \Big|\sum_{s,\,t=k+1,\,0}^{m,\,l} X_s\,Y_t\Big(\sum_{\mu,\,\nu=s,\,t}^{m,\,\infty} + \sum_{\mu,\,\nu=m+1,\,t}^{\infty}\Big)\, d_{\mu\nu}\,\bar{a}_{\mu s}\,b_{\nu t}\Big| =$$

$$= O(1)\Big(\sum_{\mu=k+1}^{\infty} |\bar{\Delta}\sigma_\mu(x)| + \sum_{\mu=k+1}^{\infty}\Big|\sum_{s=0}^{k} \bar{a}_{\mu s}\,X_s\Big| + \sum_{\mu=m+1}^{\infty}\Big|\sum_{s=0}^{m} \bar{a}_{\mu s}\,X_s\Big|\Big),$$

то легко усмотреть, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся натуральные числа K и L, что при $m,\ n > k,\ l \geqslant K,\ L$

$$|S_{mn} - S_{kl}| < \varepsilon.$$

Поскольку $S_{ml} - S_{kl} = B$, то $\{S_{ml}\}$ — фундаментальная последовательность при всех $l = 0,\ 1,\ \ldots$, т. е. существует $\lim\limits_{m} S_{ml}$. Аналогично показывается существование предела $\lim\limits_{n} S_{kn}$. Так как ($r = \min\ (n,\ t)$, $s = \min\ (n+p,\ t)$)

$$|\mathrm{II}| = |a_{m+1,\,m+1}\,X_{m+1}\sum_{t} d''_{m+1,\,t}\sum_{l=0}^{r} b_{tl}\,Y_l| = O(1)\,|a_{m+1,\,m+1}\,X_{m+1}|$$

и

$$\Big|\sum_{l=n}^{n+p} Y_l \sum_{t=l}^{\infty} d''_{mt}\,b_{tl}\Big| = \Big|\sum_{t=n}^{\infty} d''_{mt}\sum_{l=n}^{s} b_{tl}\,Y_l\Big| = O(1)\sum_{t=n}^{\infty} |d''_{mt}|,$$

то $\lim\limits_{n} \mathrm{II}$ существует и $\lim\limits_{m,\,n} \mathrm{II} = \lim\limits_{m} \mathrm{II} = 0$. Из условий 2° и 5° следует

$$\sum_{s=k}^{\infty} \lim_{l}\, d'_{sl}\,\bar{a}_{sk} = 0,$$

откуда, ввиду абсолютного совершенства метода A, $\lim\limits_{l} d'_{sl} = \mathrm{const}$ (см. [12], стр. 271). Значит, всегда можно подобрать в условии 2° d'_{sl} так, что $\lim\limits_{l} d'_{sl} = 0$. Из равенств

$$\mathrm{III} = b_{n+1,\,n+1}\,Y_{n+1}\Big(\sum_{\mu=0}^{m} d'_{\mu,\,n+1}\,\bar{\Delta}_\mu\,\sigma_\mu(x) + \sum_{\mu=m+1}^{\infty} d'_{\mu,n+1}\sum_{s=0}^{m} \bar{a}_{\mu s}\,X_s\Big)$$

и

$$\mathrm{IV} = O(1)|a_{m+1,\,m+1}\,X_{m+1}| \quad \text{и} \quad \varepsilon_{m+1,\,n+1}\,X_{m+1},\,Y_{n+1} =$$

$$= \frac{\varepsilon_{m+1,\,n+1}}{b_{n+1,\,n+1}}\,X_{m+1}\,b_{n+1,\,n+1}\,Y_{n+1}$$

теперь немедленно следует существование $\lim\limits_{m}\mathrm{III}$ и $\lim\limits_{m,\,n}\mathrm{III} = \lim\limits_{n}\mathrm{III} = r\text{-}\lim\limits_{m,\,n}\mathrm{IV} = 0$. Если же $x \overline{\in} |A|_0^*$, то найдутся $\alpha \neq 0$ и $x_{k_0} \neq 0$, что $\sum\limits_{k}(x_k - \alpha\,\delta_{kk_0}x_k) \in |A|_0^*$, и полная сходимость ряда $\sum\limits_{k,\,l}\varepsilon_{kl}\,x_k\,y_l$ следует из тождества

$$\sum_{k,\,l=0}^{m+1,\,n+1}\varepsilon_{kl}\,x_k\,y_l = \sum_{k,\,l=0}^{m+1,\,n+1}\varepsilon_{kl}(x_k - \alpha\,\delta_{kk_0}\,x_{k_0})\,y_l + \alpha\,x_{k_0}\sum_{l=0}^{n}(\Delta_l\,\varepsilon_{k_0 l})\,Y_l +$$

$$+ \alpha x_{k_0}\,\varepsilon_{k_0,\,n+1}\,Y_{n+1}.$$

При конкретном применении теорем 1—3 нам понадобятся следующие легко доказуемые леммы.

Лемма 5. *Если* $x \in l_0$, $c_{kl} = O(1)$ *и существует* $\lim\limits_{l} c_{kl}$, *то*

$$\sum_{k} c_{kl}\,x_k = \sum_{k} d_{kl}\,X_k,$$

где $d_{kl} = \Delta_k\,c_{kl}$. *Обе суммы и* $\lim\limits_{l} d_{kl}$ *существуют. Если* $\sum\limits_{s=0}^{k} d_{sl} = O(1)$ *и существует* $\lim\limits_{l} d_{kl}$, *то*

$$\sum_{k} d_{kl}\,X_k = \sum_{k} e_{kl}\,x_k, \tag{22}$$

где $e_{kl} = \sum\limits_{s=0}^{k-1} d_{sl}$ $(k > 0)$ и $e_{0l} = 0$. *Обе суммы и* $\lim\limits_{l} e_{kl}$ *существуют. Равенство* (22) *остается в силе, если* e_{kl} *заменить* $e_{kl} + e'_l$ $(e'_l = O(1))$.

Если $c_{kl} = c_k$ и $d_{sl} = d_s$, то лемма 5 совпадает с леммами 2 и 3 из [12].

Лемма 6. *Если* $x \in l_0$, $y \in m$ *и* $\sum\limits_{l}|c_{kl}| = O(1)$, *то*

$$\sum_{k,\,l} c_{kl}x_k\,Y_l = \sum_{k,\,l} d_{kl}\,X_k\,Y_l,$$

где $d_{kl} = \Delta_k\,c_{kl}$. *Обе суммы существуют. Если* $x \in l_0$, $y \in m$ *и* $\sum\limits_{l}|\sum\limits_{k=0}^{m} d_{kl}| = O(1)$, *то*

$$\sum_{k,\,l} d_{kl}\,X_k\,Y_l = \sum_{k,\,l} e_{kl}\,x_k\,Y_l, \tag{23}$$

где $e_{kl} = \sum_{s=0}^{k-1} d_{sl}$ $(k > 0)$ *и* $e_{0l} = 0$. *Обе суммы существуют и равенство* (23) *остается в силе, если* e_{kl} *заменить* $e_{kl} + e'_l$ $(\sum_l |e'_l| < \infty)$.

Лемма 7. *Если метод* A *сохраняет абсолютную сходимость,* $\lim_m a_{mk} = 1$ *и* $\sum_{m=k}^{\infty} |\bar{\Delta}_m a_{mk}| = O(a_{kk})$, *то условия* 1° *и* 3° *теоремы* 2 *эквивалентны условию*

$$\Delta_l \varepsilon_{kl} = \sum_{s,\, t=k,\, l}^{\infty} f_{st} \bar{\Delta}_s a_{sk} b_{tl} \quad (\sum_t |f_{st}| = O(1)).$$

§ 3. Множители суммируемости типов $(|A|, |B|, (AB)\omega)$, $(|A|, B, (AB)\omega)$ и $(|A|, B_O, (AB)\omega)$

Будем рассматривать такие нормальные методы A и B, которые удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=0}^{m} |a_{mk} X_k| \leqslant M(x) \text{ при } x \in |A|_0^*, \tag{24}$$

$$\sum_{l=0}^{n} |b_{nl} Y_l| \leqslant M(y) \text{ при } y \in |B|_0^*, \tag{25}$$

$$\sum_{m=k}^{\infty} |\xi'_{mk}| < \infty, \text{ где } (\xi'_{mk}) = (a_{mk})^{-1}, \tag{26}$$

$$\sum_{k=0}^{m} a_{mk} = 1. \tag{27}$$

Теорема 4. *Пусть* A *и* B — *нормальные регулярные, сохраняющие абсолютную сходимость методы, которые удовлетворяют условиям* (24) *и* (25). *Если в* $|A|_0^*$ *и* $|B|_0^*$ *имеет место сходимость по отрезкам, то комплексные числа* ε_{kl} *являются множителями суммируемости типа* $(|A|, |B|, (AB)\omega)$ *тогда и только тогда, когда*

$$1^\circ\ \Delta_{kl} \varepsilon_{kl} = \sum_{s,\, t=k,\, l}^{\infty} c_{st} \bar{a}_{sk} \bar{b}_{tl} \quad (c_{st} = O(1)),$$

$$2^\circ\ \Delta_k \varepsilon_{kl} = \sum_{s=k}^{\infty} c'_{sl} \bar{a}_{sk} \quad (c'_{sl} = O(1)),$$

$$3^\circ\ \Delta_l \varepsilon_{kl} = \sum_{t=l}^{\infty} c''_{kt} \bar{b}_{tl} \quad (c''_{kt} = O(1)),$$

$$4^\circ\ \varepsilon_{kl} = O(1).$$

Доказательство. Необходимость. Условие 1° совпадает с условием (8). Если A и B сохраняют абсолютную

сходимость, то все необходимые условия для множителей суммируемости типов [11] $(|A|, |E|, C_\omega)$ и $(|E|, |B|, C_\omega)$ являются необходимыми и для типа $(|A|, |B|, C_\omega)$. В случае множителей суммируемости типа $(|A|, |E|, C_\omega)$ при помощи (1) и леммы 3 легко получить равенство

$$\lim_{m,\,n}\sum_{s,\,t=0}^{m,\,n}\gamma_{mnst}\,\varepsilon_{st}\,x_s\,y_t=\sum_{s,\,t}e_{st}\,\overline{\Delta}\sigma_s(x)\,\overline{\Delta}\tau_t(y)\quad(e_{st}=O(1)),$$

откуда при $x=\{\delta_{sk}\}$ и $y=\{\delta_{tt}-\sum_{\varrho=0}^{l-1}\delta_{t\varrho}\}$ вытекает условие 2°. Доказательство необходимости условия 3° аналогично. Так как A и B сохраняют абсолютную сходимость, то метод $D=(\gamma_{mnkl}\,\varepsilon_{kl})$ переводит пространство $l\times l$ в пространство сходящихся двойных последовательностей. Ввиду $\lim\limits_{m,\,n}\gamma_{mnkl}=1$, по лемме 3 отсюда следует условие 4°.

Достаточность. Покажем, что условия теоремы гарантируют $(AB)_r$-суммируемость ряда $\sum\limits_{k,\,l}\varepsilon_{kl}\,x_k\,y_l$ при всех $x\in|A|^*$ и $y\in|B|^*$. Для этого исходим из (13), предполагая, что $x\in|A|_0^*$ и $y\in|B|_0^*$. Поскольку $(AB)_r\supset I_r$, то последовательность I в (13) по доказательству теоремы 1 $(AB)_r$-суммируема. Докажем, что последовательность II $(AE)_r$-суммируема, откуда, ввиду $(AB)_r\supset(AE)_r$, последует ее $(AB)_r$-суммируемость. Так как

$$\Big|\sum_{k=0}^{m}a_{m\,k}\,X_k\sum_{l=0}^{n}(\Delta_l\,\varepsilon_{kl})\,Y_l\Big|=$$

$$=O(1)\sum_{k=0}^{m}|a_{mk}\,X_k|\,\Big(\sum_{l}|\overline{\Delta}\tau_l(y)|+\sum_{t=n+1}^{\infty}\Big|\sum_{l=0}^{n}\overline{b}_{tl}\,Y_l\Big|\Big)=O(1),$$

то по лемме 4 последовательность II $(AE)_r$-суммируема. Аналогично последовательность III $(AB)_r$-суммируема. По условиям 4°, (24) и (25)

$$\sum_{k=0}^{m}|\,a_{mk}\,X_k\,|\sum_{l=0}^{n}|b_{nl}\,Y_l\,||\,\varepsilon_{kl}|=O(1),$$

откуда по лемме 4 следует $(AB)_r$-суммируемость последовательности IV. Если же $x\overline{\in}|A|_0^*$ или $y\overline{\in}|B|_0^*$, то доказательство аналогично доказательству соответствующего места теоремы 1.

Теорема 5. *Пусть A — нормальный регулярный, сохраняющий абсолютную сходимость метод, который удовлетворяет условиям* (24), (26) *и* (27), *и B — нормальный регулярный метод. Если в $|A|_0^*$ и B_0^* имеет место сходимость по отрезкам, то комплексные*

[11] E — единичный метод.

числа ε_{kl} *являются множителями суммируемости типа* $(|A|, B, (AB)_\omega)$ *тогда и только тогда, когда*

1° $\Delta_{kl}\,\varepsilon_{kl} = \sum\limits_{s,\,t=k,\,l}^{\infty} d_{st}\,\bar{a}_{sk}\,b_{tl}$ $\left(\sum\limits_{l} |d_{sl}| = O(1)\right)$,

2° $\Delta_k\,\varepsilon_{kl} = \sum\limits_{s=k}^{\infty} d'_{sl}\,\bar{a}_{sk}$ *и* $d'_{0l} = \varepsilon_{0l}$ $\left(d'_{sl} = O(1)\right)$,

3° $\Delta_l\,\varepsilon_{kl} = \sum\limits_{t=l}^{\infty} d''_{kt}\,b_{tl}$ $\left(\sum\limits_{t} |d''_{kt}| = O(1)\right)$,

4° $\varepsilon_{kl} = O(1)$.

Доказательство. Необходимость. Условие 1° совпадает с условием (16). Необходимые условия для множителей суммируемости типов $(|A|, E, C_\omega)$ и $(|E|, B, C_\omega)$ являются необходимыми и для множителей типа $(|A|, B, C_\omega)$. В случае множителей суммируемости типа $(|A|, E, C_\omega)$ при помощи (1) и леммы 1 легко получить равенство

$$\lim \sum_{s,\,t=0}^{m,\,n} \gamma_{mnst}\,\varepsilon_{st}\,x_s\,y_t = \tag{28}$$

$$= \sum_{s,\,t} g_{st}\,\overline{\Delta}\sigma_s(x)\ \ (Y_t - \lim_{l} Y_l) + \lim_{i} Y_t \sum_{s} g_s\,\overline{\Delta}\sigma_s(x),$$

где $\sum\limits_{t} |g_{st}| = O(1)$ и $g_s = O(1)$. При $x = \{\delta_{sk}\}$ и $y = \{\delta_{tt} - \sum\limits_{\varrho=0}^{l-1} \delta_{t\varrho}\}$ отсюда следует

$$\Delta_k\,\varepsilon_{kl} = -\sum_{s,\,t=k,\,0}^{\infty,\,l-1} g_{st}\,\bar{a}_{sk} + \sum_{s=k}^{\infty} g_s\,\bar{a}_{sk} = \sum_{s=k}^{\infty} d'_{sl}\,\bar{a}_{sk}.$$

Если же взять в (28) $x = \{\delta_{ss}\}$ и $y = \{\delta_{tt} - \sum\limits_{\varrho=0}^{l-1} \delta_{t\varrho}\}$, то оно превратится в условие $d'_{0l} = \varepsilon_{0l}$, чем необходимость условия 2° доказана. В случае множителей суммируемости типа $(|E|, B, C_\omega)$ при помощи (3) и леммы 1 нетрудно получить равенство

$$\lim \sum_{m,\,n\,s,\,t=0}^{m,\,n} \gamma_{mnst}\,\varepsilon_{st}\,x_s\,y_t =$$

$$= \sum_{s,\,t} d''_{st}\,x_s(\tau_t(y) - \lim_{l} \tau_l(y)) + \lim_{l} \tau_l(y) \sum_{s} d_s\,x_s,$$

где $\sum\limits_{t} |d''_{st}| = O(1)$ и $d_s = O(1)$. При $x = \{\delta_{ss} - \sum\limits_{\varrho=0}^{k-1} \delta_{s\varrho}\}$ и $y = \{\delta_{tl}\}$ отсюда следует условие 3°. Поскольку метод $D = (\gamma_{mnkl}\,\varepsilon_{kl})$ переводит пространство $l \times c$ в пространство сходящихся двойных

последовательностей, то и пространство $l \times l$ в пространство сходящихся двойных последовательностей. Значит, ввиду $\lim\limits_{m,\,n} \gamma_{mnkl} = 1$, по лемме 1 условие 4° необходимо.

Достаточность. Исходим из (13), предполагая, что $x \in |A|_0^*$ и $y \in B_0^*$. Аналогично доказательству теоремы 1, опираясь на лемму 4, можно показать, что последовательность I вполне сходится. Ввиду $(AB)_r \supset I_r$, последовательность I $(AB)_r$-суммируема. Так как

$$\left|\sum_{k=0}^{m} a_{mk} X_k \sum_{l=0}^{n} \left(\sum_{t=l}^{\infty} d''_{kl}\, b_{tl}\right) Y_l\right| = O(1) \sum_{k=0}^{m} |a_{mk} X_k| \left(\sum_{t} |d''_{kt}\, \sigma_t(y)| + \right.$$

$$\left. + \sum_{t=n+1}^{\infty} |d''_{kt}| \left|\sum_{l=0}^{n} b_{tl} Y_l\right|\right) = O(1),$$

то по лемме 4 последовательность II $(AE)_r$-суммируема, т. е. и $(AB)_r$-суммируема. Ввиду условия (25) из 1° и 2° следуют

$$\sum_{k=m}^{\infty} \xi'_{km}\, \Delta_k\, \varepsilon_{kl} = \sum_{s=m}^{\infty} d'_{sl} \sum_{k=m}^{s} \bar{a}_{sk}\, \xi'_{km} = \Delta_m\, d'_{ml}$$

и

$$\sum_{k=m}^{\infty} \xi'_{km}\, \Delta_{kl}\, \varepsilon_{kl} = \sum_{t=l}^{\infty} \Delta_m\, d_{mt}\, b_{tl}.$$

Отсюда

$$\Delta_l\, d'_{ml} = \sum_{t=l}^{\infty} (d_{mt} - d_{0t})\, b_{tl} + \Delta_l\, d'_{0l} = \sum_{t=l}^{\infty} (d_{mt} - d_{0t})\, b_{tl} + \Delta_l\, \varepsilon_{0l}$$

и

$$\sum_{l} |\Delta_l\, d'_{ml}| = O(1).$$

Поскольку

$$\sum_{t=0}^{n+1} b_{n+1,\,t}\, Y_t\, d'_{st} = \sum_{t=0}^{n} (\Delta_t\, d'_{st}) \sum_{\mu=0}^{t} b_{n+1,\,\mu}\, Y_\mu + d'_{s,\,n+1} \sum_{t=0}^{n+1} b_{n+1,\,t}\, Y_t = O(1),$$

то

$$\left|\sum_{t=0}^{n+1} b_{n+1,\,t}\, Y_t \sum_{k=0}^{m} (\Delta_k\, \varepsilon_{kt})\, X_k\right| = O(1) \left(\sum_{s} \left|\sum_{t=0}^{n+1} b_{n+1,\,t}\, Y_t\, d'_{st}\right| \left|\overline{\Delta}\sigma_s(x)\right| + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=m+1}^{\infty} \left|\sum_{t=0}^{n+1} b_{n+1,\,t}\, Y_t\, d'_{st}\right| \left|\sum_{k=0}^{m} \bar{a}_{sk}\, X_k\right|\right) = O(1).$$

Значит, последовательность III по лемме 4 $(EB)_r$-суммируема и тем самым $(AB)_r$-суммируема. Для завершения доказательства нам нужна легко доказуемая

Лемма 8. *Условия* 3° *и* 4° *теоремы* 5 *эквивалентны условию*

$$\varepsilon_{kl} = d_k + \sum_{t=l}^{\infty} d''_{kt}\, \beta_{tl} \quad (d_k = O(1)).$$

Теперь по лемме 8 ($\varrho = \min(t, n)$)

$$\left|\sum_{k=0}^{m} a_{mk} X_k \sum_{l=0}^{n} b_{nl} Y_l \varepsilon_{kl}\right| =$$

$$= O(1) + \sum_{k=0}^{m} |a_{mk} X_k| \sum_{t} |d''_{kt}| \left|\sum_{l=0}^{\varrho} b_{nl} \beta_{tl} Y_l\right| = O(1),$$

откуда по лемме 4 следует $(AB)_r$-суммируемость последовательности IV. Если же $x \overline{\in} |A|_0^*$ и $y \overline{\in} B_0^*$, то $(AB)_r$-суммируемость ряда $\sum_{k,\,l} \varepsilon_{kl} x_k y_l$ следует из (14). Не представляют и трудностей случаи, когда $x \overline{\in} |A|_0^*$ и $y \in B_0^*$ или $y \overline{\in} B_0^*$ и $x \in |A|_0^*$.

Теорема 6. *Пусть A — нормальный регулярный, сохраняющий абсолютную сходимость метод, который удовлетворяет условиям* (24), (26) *и* (27), *и B — нормальный регулярный метод. Если в $|A|_0^*$ имеет место сходимость по отрезкам и $\left|\sum_{l=0}^{q} b_{nl} Y_l\right| \leqslant M(y)$ $(n \geqslant q)$ при всех $y \in B_0^*$, то комплексные числа ε_{kl} являются множителями суммируемости типа $(|A|, B_0, C_\omega)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия* 1°—4° *теоремы* 5 *с существованием* $\lim_l d'_{sl}$ *и*

$$5^\circ \quad \varepsilon_{kl} = o(1) \quad (l \to \infty).$$

Доказательство. Необходимость. Так как множители суммируемости типа $(|A|, B_0, C_\omega)$ являются и множителями суммируемости типа $(|A|, B, C_\omega)$, то условия 1°, 3° и 4° необходимы. Необходимые условия для множителей суммируемости типа $(|A|, E_0, C_\omega)$ являются необходимыми и для типа $(|A|, E_0, C_\omega)$. В случае множителей суммируемости типа $(|A|, E_0, C_\omega)$, при помощи (3) по лемме 2 получаем равенство

$$\lim_{m,\,n} \sum_{s,\,t=0}^{m,\,n} \gamma_{mnst} \varepsilon_{st} x_s y_t = \sum_{s,\,t} g_{st} \overline{\Delta} \sigma_s(x) Y_t, \tag{29}$$

где $\sum_t |g_{st}| = O(1)$. При $x = \{\delta_{sk}\}$ и $y = \{\delta_{tt} - \sum_{\varrho=0}^{l-1} \delta_{t\varrho}\}$ отсюда следует

$$\Delta_k \varepsilon_{kl} = \sum_{s,\,t=k,\,l}^{\infty} g_{st} \bar{a}_{sk} = \sum_{s=k}^{\infty} d'_{sl} \bar{a}_{sk}.$$

Сразу видно, что существует $\lim_l d'_{sl}$. Если взять в (29) $x = \{\delta_{ss}\}$ и $y = \{\delta_{tt} - \sum_{\varrho=0}^{l-1} \delta_{t\varrho}\}$, то $\varepsilon_{0l} = d'_{0l}$, чем необходимость условия 2°

доказана. Поскольку существует $\lim\limits_{m,\,n}\sum\limits_{t=0}^{m}\gamma_{mnkt}\,\varepsilon_{kt}\,y_t$ для всех $y\in m$, то при помощи (3) по известной теореме Шура [10] при $C=AB$ из этого следует условие 5°.

В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма 9 ([12], теорема 8). *Если нормальный метод A абсолютно совершенен, то из условия* (24) *следует* $\sum\limits_{k=0}^{m}|a_{mk}\,X_k|=o(1)$ *для* $x\in|A|_0{}^*$.

Достаточность. Исходим из (13), предполагая, что $x\in|A|_0{}^*$ и $y\in B_0{}^*$. По доказательству теоремы 3 последовательность I в (13) $(AB)_r$-суммируема. Поскольку (AE)-трансформация последовательности II:

$$|T_{mn}|=\Big|\sum_{k=0}^{m}a_{mk}\,X_k\sum_{l=0}^{n}\sum_{\nu=l}^{\infty}d''_{k\nu}\,b_{\nu l}\,Y_l\Big|=\Big|\sum_{k=0}^{m}a_{mk}\,X_k\Big(\sum_{\nu=0}^{n}d''_{k\nu}\,\tau_\nu(y)+$$

$$+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}d''_{k\nu}\sum_{l=0}^{n}b_{\nu l}\,Y_l\Big)\Big|=O(1)\sum_{k=0}^{m}|a_{mk}\,X_k|,$$

то ясно, что $\lim\limits_{n}T_{mn}$ существует и по лемме 9 $\lim\limits_{m,\,n}T_{mn}=\lim\limits_{m}T_{mn}=0$. Ввиду $(AB)_r\supset(AE)_r$, последовательность II $(AB)_r$-суммируема. Выпишем (EB)-трансформацию последовательности III:

$$R_{mn}=\sum_{k,\,l=0}^{m,\,n}b_{nl}\,Y_l\,X_k\sum_{\mu=k}^{\infty}d'_{\mu l}\,\bar a_{\mu k}=\sum_{\mu=0}^{m}\Big(\sum_{l=0}^{n}b_{nl}\,Y_l\,d_{\mu l}\Big)\,\overline{\Delta}\,\sigma_\mu(x)+$$

$$+\sum_{\mu=m+1}^{\infty}\Big(\sum_{l=0}^{n}b_{nl}\,Y_l\,d'_{\mu l}\Big)\sum_{k=0}^{m}\bar a_{\mu k}\,X_k=A_{mn}+B_{mn}.$$

Как было показано в доказательстве теоремы 3, всегда можно подобрать d'_{sl} так, что $\lim\limits_{l}d'_{sl}=0$. Теперь

$$h_{n\mu}=\sum_{l=0}^{n}b_{nl}\,Y_l\,d'_{\mu l}=\sum_{l=0}^{n-1}(\Delta_l\,d'_{\mu l})\sum_{\nu=0}^{l}b_{n\nu}\,Y_\nu+d'_{\mu n}\sum_{\nu=0}^{n}b_{n\nu}\,Y_\nu,$$

откуда, ввиду $\sum\limits_{\nu=0}^{l}b_{n\nu}\,Y_\nu=O(1)$ $(n\geqslant l)$, $\lim\limits_{n}b_{n\nu}=0$ и $\sum\limits_{l}|\Delta_l\,d'_{\mu l}|=O(1)$, по известной теореме Хана [9] следуют $\lim\limits_{n}h_{n\mu}=0$ и $|h_{n\mu}|\leqslant M$.

Очевидно, что $\lim\limits_{n}A_{mn}=0$ и $\lim\limits_{m}A_{mn}$ существует. Выберем по $\varepsilon>0$ натуральные числа K и L такие, что $\sum\limits_{\mu=k+1}^{\infty}|\overline{\Delta}\sigma_\mu(x)|<\frac{\varepsilon}{2M}$ и $|h_{n\mu}|<\frac{\varepsilon}{2}\big(\sum\limits_{\mu}|\overline{\Delta}\sigma_\mu(x)|\big)^{-1}$ при $n>L$ равномерно относительно

$\mu = 0, 1, \ldots, K$. Тогда для $m, n > K, L$

$$|A_{mn}| \leqslant \sum_{\mu=0}^{k} |h_{n\mu}|\,|\overline{\Delta}\,\sigma_\mu(x)| + \sum_{\mu=k+1}^{\infty} |h_{n\mu}|\,|\overline{\Delta}\,\sigma_\mu(x)| < \varepsilon,$$

т. е. $\lim\limits_{m,\,n} A_{mn} = 0$. Очевидно, $\lim\limits_{n} B_{mn} = 0$. Из

$$B_{mn} = O(1) \sum_{\mu=m+1}^{\infty} \Big|\sum_{k=0}^{m} a_{\mu k} X_k\Big|$$

следует $\lim\limits_{m} B_{mn} = \lim\limits_{m,n} B_{mn} = 0$. Значит, последовательность III $(AB)_r$-суммируема. По лемме 8

$$\text{IV} = d_{m+1} X_{m+1} Y_{n+1} + X_{m+1} Y_{n+1} \sum_{t=n+1}^{\infty} d''_{m+1,\,t}\,\beta_{t,\,n+1}.$$

Ввиду условия 5° $d_m = 0$. Поскольку

$$|S_{mn}| = \Big|\sum_{k,\,l=0}^{m,\,n} a_{mk}\, b_{nl}\, X_k\, Y_l \sum_{t=l}^{\infty} d''_{kt}\,\beta_{tl}\Big| = O(1) \sum_{k=0}^{m} |a_{mk}\, X_k|,$$

то $\lim\limits_{m,\,n} S_{mn} = \lim\limits_{m} S_{mn} = 0$. Из $(\varrho = \min(n, t))$

$$\sum_{l=0}^{n} b_{nl}\, Y_l \sum_{t=l}^{\infty} d''_{kt}\,\beta_{tl} = \sum_{t} d''_{kt} \sum_{l=0}^{\varrho} b_{nl}\, Y_l\,\beta_{tl} = \sum_{t} d''_{kt}\, r_{n\varrho}\, t,$$

ввиду $r_{n\varrho t} = O(1)$ и $\lim\limits_{n} r_{n\varrho t} = 0$ при фиксированном t, по теореме Хана [9] вытекает $\lim\limits_{n} S_{mn} = 0$. Значит, последовательность IV $(AB)_r$-суммируема. Случай, когда $x \in \overline{|A|}_0{}^*$ и $y \in B_0{}^*$, доказывается аналогично соответствующему месту в доказательстве теоремы 3.

§ 4. Применение результатов §§ 2 и 3 к методам взвешенных средних Рисса и Чезаро

В этом параграфе методами A и B являются методы взвешенных средних Рисса [12] (R, p_n) и (R, q_n) (для краткости мы будем обозначать их через P и Q) и методы Чезаро C^α и C^β. Если P сохраняет абсолютную сходимость, Q — сходимость (абсолютную сходимость), $\sum\limits_{k=0}^{n} p_k = P_n \to \infty$ и $\sum\limits_{k=0}^{n} q_k = Q_n \to \infty$, то

[12] Определение методов (R, p_n) и C^α см. [12].

в $|P|_0^*$ и Q_0^* ($|Q|_0^*$), как легко установить, имеет место сходимость по отрезкам. Если $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$, то и в $|C^\alpha|_0^*$ и $C_0{}^{\beta *}$ ($|C^\beta|_0^*$) по [11, 12] имеет место сходимость по отрезкам.

Теорема 7. *Если метод P ($P_n \nrightarrow \infty$) сохраняет абсолютную сходимость и метод Q ($Q_n \nrightarrow \infty$) — сходимость, то комплексные числа ε_{kl} являются множителями ω-сходимости относительно $|P|$ и Q тогда и только тогда, когда*

$$1^\circ \quad P_k \sum_l |Q_l \Delta_l \frac{\Delta_{kl}\varepsilon_{kl}}{q_l}| = O(p_k),$$

$$2^\circ \quad P_k Q_l \Delta_k \varepsilon_{kl} = O(p_k q_l),$$

$$3^\circ \quad P_k \sum_l |Q_l \Delta_l \frac{\Delta_l \varepsilon_{kl}}{q_l}| = O(p_k),$$

$$4^\circ \quad P_k Q_l \varepsilon_{kl} = O(p_k q_l),$$

и множителями ω-сходимости относительно $|P|$ и Q_0 тогда и только тогда, когда вдобавок к условиям 1° — 4° выполнено

$$5^\circ \quad Q_l \varepsilon_{kl} = o(q_l) \quad (l \nrightarrow \infty).$$

Доказательство. Условия 1°—3° следуют из условий 1°—3° теоремы 2, а условия 4° и 5° совпадают с условиями 4° теоремы 2 и 5° теоремы 3. Ввиду условия 5°, по лемме 5 существует и $\lim\limits_l d'_{sl}$. Заменяя по леммам 5 и 6 условия 1° и 2° теоремы 2 эквивалентными им

$$\Delta_{kl}\varepsilon_{kl} = p_k q_l \sum_{s,\,t=k,\,l}^{\infty} \frac{e_{st}}{P_s Q_t} \left(\sum_t |\sum_{s=0}^{m} e_{st}| = O(1)\right),$$

$$Q_l \Delta_k \varepsilon_{kl} = p_k q_l \sum_{s=k}^{\infty} \frac{f_{sl}}{P_s} \left(\sum_{s=0}^{m} f_{sl} = O(1)\right) \tag{30}$$

и выбирая

$$e_{st} = P_s Q_t \Delta_{st} \frac{\Delta_{st}\varepsilon_{st}}{p_s q_t}, \qquad f_{sl} = P_s \frac{Q_l}{q_l} \Delta_s \frac{\Delta_s \varepsilon_{sl}}{p_s},$$

$$d''_{kt} = \frac{P_k}{p_k} Q_t \Delta_t \frac{\Delta_t \varepsilon_{kt}}{q_t},$$

нетрудно убедиться, что (30) и условие 3° теоремы 2 соблюдаются.

Теорема 8. *Комплексные числа ε_{kl} являются множителями*

ω-сходимости относительно $|C^\alpha|$ *и* C^β *тогда и только тогда, когда* [13]

$$1^\circ \quad k^{\alpha+1} \sum_l (l+1)^\beta \left| \Delta_{kl}^{\alpha\beta+1} \frac{\varepsilon_{kl}}{k} \right| = O(1) \quad (k > 0),$$

$$2^\circ \quad \sum_l (l+1)^\beta \left| \Delta^{\beta+1} \varepsilon_{0l} \right| < \infty,$$

$$3^\circ \quad (k+1)^\alpha (l+1)^\beta \varepsilon_{kl} = O(1),$$

и множителями ω-сходимости относительно $|C^\alpha|$ *и* C_Q^β *тогда и только тогда, когда вдобавок к условиям* 1°—3° *выполнено*

$$4^\circ \quad (l+1)^\beta \varepsilon_{kl} = o(1) \quad (l \to \infty).$$

Доказательство. Условия 3° и 4° совпадают с условиями 4° теоремы 2 и 5° теоремы 3. По статье [12] (стр. 288—89) условие 2° теоремы 2 и $(l+1)^\beta \varepsilon_{kl} = O(1)$ эквивалентны условиям $k^{\alpha+1}(l+1)^\beta \Delta_k^\alpha \frac{\varepsilon_{kl}}{k} = O(1)$ $(k > 0)$ и $(l+1)^\beta \varepsilon_{kl} = O(1)$, которые являются следствиями условия 3°. Ввиду условия 4°, по лемме 5 существует и $\lim\limits_l d'_{sl}$. По лемме 7 условия 1° и 3° теоремы 2 равносильны

$$\frac{\Delta_l \varepsilon_{kl}}{k} = \sum_{s,\, t=k,\, l}^{\infty} f_{st} \frac{A_{s-k}^{\alpha-1} A_{t-l}^{\beta-1}}{s A_s^\alpha A_t^\beta} \quad (k > 0), \tag{31}$$

$$\Delta_l \varepsilon_{kl} = \sum_{t=l}^{\infty} f_{0t} \frac{A_{t-l}^{\beta-1}}{A_t^\beta} \quad \left(\sum_t |f_{st}| = O(1)\right). \tag{32}$$

Из (31) следует условие 1°, а (32) по [11] (стр. 43) эквивалентно условию 2°. Если теперь выбрать

$$f_{st} = s A_s^\alpha A_t^\beta \Delta_{st}^{\alpha\beta+1} \frac{\varepsilon_{st}}{s} \quad (s > 0),$$

то при помощи известной леммы Андерсена ([9], лемма 1) убеждаемся, что равенство (31) соблюдается.

Вполне аналогично доказываются и следующие две теоремы.

Теорема 9. *В предпосылках теоремы 7 относительно P и Q комплексные числа* ε_{kl} *являются множителями суммируемости*

---

[13] По определению $\Delta_{kl}^{\alpha\beta} \varepsilon_{kl} = \sum\limits_{s,\, t=k,\, l}^{\infty} A_{s-k}^{-\alpha-1} A_{t-l}^{-\beta-1} \varepsilon_{st}$ и $\Delta_k^\alpha \varepsilon_{kl} = \sum\limits_{s=k}^{\infty} A_{s-k}^{-\alpha-1} \varepsilon_{sl}$.

типа $(|P|, Q, (PQ)_\omega)$ *тогда и только тогда, когда*

$$1^\circ \quad P_k \sum_l |Q_l \Delta_l \frac{\Delta_{kl}}{q_l} \varepsilon_{kl}| = O(p_k),$$

$$2^\circ \quad P_k \Delta_k \varepsilon_{kl} = O(p_k),$$

$$3^\circ \quad \sum_l |Q_l \Delta_l \frac{\Delta_l \varepsilon_{kl}}{q_l}| = O(1),$$

$$4^\circ \quad \varepsilon_{kl} = O(1),$$

и множителями суммируемости типа $(|P|, Q_O, (PQ)_\omega)$ *тогда и только тогда, когда вдобавок к условиям* 1°—4° *выполнено*

$$5^\circ \quad \varepsilon_{kl} = o(1) \quad (l \to \infty).$$

Теорема 10. *Комплексные числа* ε_{kl} *являются множителями суммируемости типа* $(|C^\alpha|, C^\beta, (C^\alpha C^\beta)_\omega)$ *тогда и только тогда, когда*

$$1^\circ \quad k^{\alpha+1} \sum_l (l+1)^\beta |\Delta_{kl}^{\alpha\beta+1} \frac{\varepsilon_{kl}}{k}| = O(1) \quad (k > 0),$$

$$2^\circ \quad k^{\alpha+1} \Delta^\alpha \frac{\varepsilon_{kl}}{k} = O(1) \quad (k > 0),$$

$$3^\circ \quad \sum_l (l+1)^\beta |\Delta^{\beta+1} \varepsilon_{0l}| < \infty,$$

$$4^\circ \quad \varepsilon_{kl} = O(1),$$

и множителями суммируемости типа $(|C^\alpha|, C_O^\beta, (C^\alpha C^\beta)_\omega)$ *тогда и только тогда, когда вдобавок к условиям* 1°—4° *выполнено*

$$5^\circ \quad \varepsilon_{kl} = o(1) \quad (l \to \infty).$$

Поскольку множители суммируемости типов $(|A|, |B|, C_\omega)$ и $(|AB|, C_\omega)$ совпадают, то при $A = P$ и $B = Q$ из теорем 1 и 4 следуют частные случаи теоремы 2 из [6], а при $A = C^\alpha$ и $B = C^\beta$ — теоремы, эквивалентные частным случаям теоремы 3 из [1].

Литература

1. Барон С., Множители суммируемости и абсолютной суммируемости для двойных рядов, абсолютно суммируемых методом Чезаро. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 118—134.
2. Вихманн Ф., Об обобщенных множителях суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 226—248.
3. Кангро Г., О множителях суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1955, **37**, 191—232.
4. Кангро Г., О распространении метода Пейеримхоффа на двойные ряды. Докл. АН СССР, 1956, **107**, 629—632.
5. Кангро Г., О множителях суммируемости для двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1957, **46**, 3—42.

6. Кангро Г., Барон С., Множители суммируемости для двойных рядов, абсолютно суммируемых методом взвешенных средних Рисса. Настоящий сборник, стр. 155—169.
7. Кулль И. Г., Умножение суммируемых двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, **62**, 3—59.
8. Реймерс Э., Теоремы о среднем значении для абсолютного суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1956, **42**, 113—134.
9. Andersen, A. F., Comparison theorems in the theory of Cesàro summability. Proc. London Math. Soc., (2), 1928, **27**, 39—71.
10. Jurkat, W., Peyerimhoff A., Mittelwertsätze und Vergleichssätze für Matrixtransformationen. Math. Z., 1952, **56**, 152—178.
11. Peyerimhoff, A., Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren. Math. Z., 1951, **55**, 23—54.
12. Peyerimhoff, A., Untersuchungen über absolute Summierbarkeit. Math. Z., 1953, **57**, 265—290.
13. Zeller, K., Abschnittskonvergenz in FK-Räumen. Math. Z., 1951, **55**, 55—70.

Поступило
9 II 1962

PEYERIMHOFFI MEETODI ÜLEKANDMINE ÜLDISTATUD SUMMEERUVUSTEGUREILE

F. Vichmann
Arvutuskeskus

Resümee

Kompleksarve ε_{kl} nimetatakse $(|A|, |B|; C_\omega)$ ($(|A|, B, C_\omega)$ või $(|A|, B_O, C_\omega)$) tüüpi summeeruvustegureiks, kui rida $\sum\limits_{k,\,l} \varepsilon_{kl} x_k y_l$ on C_ω-summeeruv iga $|A|$-summeeruva rea $\sum\limits_k x_k$ ja $|B|$-summeeruva (B-summeeruva või B-tõkestatud) rea $\sum\limits_l y_l$ korral. Siin ω on kas c, b või r; kahekordne rida on C_ω-summeeruv, kui tema C-transformatsioon on koonduv, tõkestatud ja koonduv või vastavalt regulaarselt koonduv. Käesolevas artiklis üldistatakse A. Peyerimhoffi poolt artiklites [11, 12] välja töötatud meetod summeeruvustegurite uurimiseks üldistatud summeeruvusteguritele juhul, kui menetlus C on kas ühikmenetlus või faktoriseeruv menetlus AB. Saadud tulemusi rakendatakse juhul, kui menetlusteks A ja B on Rieszi kaalutud keskmiste või Cesàro menetlused.

EXTENSION OF THE PEYERIMHOFF METHOD TO GENERALIZED SUMMABILITY FACTORS

F. Vichmann

Summary

Complex numbers ε_{kl} are defined as summability factors of type $(|A|, |B|, C_\omega)$ ($(|A|, B, C)$ or $(|A|, B_O, C_\omega)$) when the series $\sum\limits_{k,\,l} \varepsilon_{kl} x_k y_l$ is ω-summable by method C for each series $\sum\limits_k x_k$ absolutely summable by method A and series

$\sum_l y_l$ absolutely summable (summable, bounded) by method B. Here ω may be c, b or r, and ω-summability of double series by method C denotes that C-transformation of it is convergent, or bounded and convergent, or regularly convergent. In the present article the method for the investigation of summability factors created by A. Peyerimhoff in [11, 12] has been extended to these generalized summability factors when method C is the unit method or factorizing method AB. The obtained results have been applied in the cases when A and B are the Riesz methods of summability or the Cesàro methods of summability.

ТЕОРЕМЫ ТИПА БОРА-ХАРДИ ДЛЯ ДВОЙНЫХ РЯДОВ

Ф. Вихманн
Вычислительный центр

Как известно, эффективные необходимые и достаточные условия для множителей суммируемости получены главным образом для конкретных методов. Для произвольных методов удалось найти только частные типы множителей суммируемости. В [5—8] Бором и Харди доказаны теоремы о множителях суммируемости типов [1] (C^α, C^α) и (C_O^α, C^α), где C^α — метод суммирования Чезаро целого порядка α. В [9, 10] Юркат и Пейеримхофф, накладывая на метод A некоторые ограничения, рассмотрели множители суммируемости типов (A, A) и $(|A|, A)$. Автором в [2] получены аналогичные теоремы для обобщенных множителей суммируемости. Для двойных рядов Кангро [4] найдены шесть типов множителей сходимости относительно произвольного метода. В настоящей статье даются аналоги теорем Бора-Харди для двойных рядов при произвольных методах.

Пусть нормальный факторизируемый с регулярными факторами метод C для преобразования последовательностей в последовательности задан матрицей $AB = (a_{mk}\, b_{nl})$. Будем обозначать поле нулевого b-суммирования (или ограниченности) метода C через $\mathfrak{C}_b^0$ (или $\mathfrak{C}_O$). Мы предполагаем, что метод C удовлетворяет условиям [2]:

$$|U_{mn}^{kl}| = \Big|\sum_{s,\,t=0}^{k,\,l} a_{ms}\, b_{nt}\, U_{st}\Big| \leqslant M(u) \quad \text{для } u = \{U_{st}\} \in \mathfrak{C}_b^0(\mathfrak{C}_O)\ m, n \geqslant k, l, \tag{1}$$

$$\sum_{m=k}^{\infty} |a'_{mk}| < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{n=l}^{\infty} |b'_{nl}| < \infty, \tag{2}$$

где $(a_{mk})^{-1} = (a'_{mk})$ и $(b_{nl})^{-1} = (b'_{nl})$.

[1] Определение соответствующих типов множителей суммируемости см. [3, 4].

[2] Всюду индексы суммирования и свободные индексы имеют значения 0, 1, ...

Теорема 1. *Пусть нормальный факторизируемый с регулярными факторами метод C удовлетворяет условиям* (1) *для* $u \in \mathfrak{C}_0$ *и* (2). *Комплексные числа* ε_{kl} *являются множителями суммируемости типов* (C_0, C), (C_0, C_b) *или* (C_0, C_r) *тогда и только тогда, когда* [3]

$$1^\circ\ \Delta_{kl}\,\varepsilon_{kl} = \sum_{s,\,t=k,\,l}^{\infty} c_{st}\,a_{sk}\,b_{tl},\ \sum_{s,\,t}|c_{st}| < \infty,$$

$$2^\circ\ \Delta_k\,\varepsilon_{kl} = \sum_{s=k}^{\infty} d_{sl}\,a_{sk},\ \sum_{s}|d_{sl}| = o(1),$$

$$3^\circ\ \Delta_l\,\varepsilon_{kl} = \sum_{t=l}^{\infty} e_{kt}\,b_{tl},\ \sum_{t}|e_{kt}| = o(1),$$

$$4^\circ\ \lim_{k,\,l}\varepsilon_{kl} = 0.$$

Доказательство. Необходимость. Необходимость условия 1° вытекает из теоремы 2 статьи [4]. Так как [4] $(AB)_0 \supset (AE)_0$ и $(AB)_0 \supset (EB)_0$, то необходимые условия для множителей суммируемости типов $((AE)_0, C)$ и $((EB)_0, C)$ являются необходимыми и для множителей суммируемости типа (C_0, C). В случае множителей суммируемости типа $((AE)_0, C)$ из первой формулы на стр. 13 статьи [4] при [5] $U_{\varkappa\lambda} = \delta_{\varkappa k}\,(\delta_{\lambda\lambda} - \sum_{\varrho=0}^{l-1}\delta_{\lambda\varrho})$ вытекает условие 2°. Аналогично доказывается необходимость условия 3°. Необходимость условия 4° следует из формулы (42a) статьи [4].

Достаточность. Покажем, что ряд $\sum_{k,\,l}\varepsilon_{kl}\,u_{kl}$ $(AB)_r$-суммируем при всех $u \in \mathfrak{C}_0$. Исходим из равенства

$$\sum_{s,\,t=0}^{m,\,n}\varepsilon_{st}\,u_{st} = \sum_{s,\,t=0}^{m-1,\,n-1}(\Delta_{st}\,\varepsilon_{st})\,U_{st} + \sum_{s=0}^{m-1}(\Delta_s\,\varepsilon_{sn})\,U_{sn} + \sum_{t=0}^{n-1}(\Delta_t\,\varepsilon_{mt})\,U_{mt} +$$

$$+ \varepsilon_{mn}\,U_{mn} = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV}.$$

По доказательству теоремы 14 статьи [4] последовательность I вполне сходится и, в силу включения $(AB)_r \supset (EE)_r$, $(AB)_r$-суммируема. Умножая в условиях 1° и 2° обе стороны равенств на a'_{km}, суммируя по k от m до ∞ и переставляя в правых частях полученные равенств порядок суммирования (что

---

[3] $\lim_{k,\,l}\varepsilon_{kl}$ и $\lim_{k}\varepsilon_{kl}$ означают $\lim_{k,\,l\to\infty}\varepsilon_{kl}$ и $\lim_{k\to\infty}\varepsilon_{kl}$.

[4] E — единичный метод.

[5] Символ Кронекера $\delta_{\varkappa k} = \begin{cases} 1, & \varkappa = k, \\ 0, & \varkappa \neq k. \end{cases}$

допустимо по (2)), получаем соотношения, из сравнения которых следует

$$\Delta_l d_{kl} = \sum_{t=l}^{\infty} c_{kt} b_{tl}.$$

Аналогично из условий 1° и 3° следует

$$\Delta_k e_{kl} = \sum_{s=k}^{\infty} c_{sl} a_{sk}.$$

Из этих равенств, в силу регулярности A и B, вытекают

$$\sum_{k,\,l} |\Delta_l d_{kl}| < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{k,\,l} |\Delta_k e_{kl}| < \infty. \tag{3}$$

Выпишем (EB)-трансформацию последовательности II ($f = \min(s, m-1)$)

$$T_{m-1,\,n} = \sum_{k,\,l=0}^{m-1,\,n} b_{nl} (\Delta_k \varepsilon_{kl}) U_{kl} = \sum_{s,\,l=0}^{\infty,\,n} b_{nl} d_{sl} \sum_{k=0}^{f} a_{sk} U_{kl} =$$

$$= \sum_{s,\,l=0}^{\infty,\,n-1} U_{sn}^{fl} \Delta_l d_{sl} + \sum_{s} d_{sn} U_{sn}^{fn}.$$

Отсюда, ввиду условий 2°, (1) и (3), следует существование предела $\lim\limits_{m} T_{m-1,\,n}$ и $\lim\limits_{m,\,n} T_{m-1,\,n} = \lim\limits_{n} T_{m-1,\,n} = 0$. Вследствие $(AB)_r \supset (EB)_r$, последовательность II $(AB)_r$-суммируема. Аналогично показывается $(AB)_r$-суммируемость последовательности III. Выпишем (AB)-трансформацию последовательности IV:

$$R_{mn} = \sum_{k,\,l=0}^{m,\,n} a_{mk} b_{nl} \varepsilon_{kl} U_{kl} = \sum_{k,\,l=0}^{m-1,\,n-1} U_{mn}^{kl} \Delta_{kl} \varepsilon_{kl} + \sum_{k=0}^{m-1} U_{mn}^{kn} \Delta_k \varepsilon_{kn} +$$

$$+ \sum_{l=0}^{n-1} U_{mn}^{ml} \Delta_l \varepsilon_{ml} + \varepsilon_{mn} U_{mn}^{mn}. \tag{4}$$

Из условий 1°—3° вытекают $\sum\limits_{k,\,l} |\Delta_{kl} \varepsilon_{kl}| < \infty$, $\sum\limits_{k} |\Delta_k \varepsilon_{kl}| = o(1)$ и $\sum\limits_{l} |\Delta_l \varepsilon_{kl}| = o(1)$. В силу этих условий и регулярности A и B, в правой части равенства (4) при $m, n \to \infty$ первые три последовательности вполне сходятся к нулю. Так как из условий 1°—4° следуют $\lim\limits_{m} \varepsilon_{mn} = \lim\limits_{n} \varepsilon_{mn} = 0$ и $\varepsilon_{mn} = O(1)$, то и $r\text{-}\lim\limits_{m,\,n} (\varepsilon_{mn} U_{mn}^{mn}) = 0$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть нормальный факторизируемый с регулярными факторами метод C удовлетворяет условиям* (1) *для* $u \in \mathfrak{C}_b^0$ *и* (2). *Комплексные числа* ε_{kl} *являются множителями суммируе-*

мости типов: а) (C_b, C) *и* (C_b, C_b), б) (C_b, C_r) *тогда и только тогда, когда выполнены условия* 1°—3° *теоремы* 1 *и*

4° а) $\varepsilon_{kl} = O(1)$, б) $\varepsilon_{kl} = O(1)$, $\lim\limits_k \varepsilon_{kl} = \lim\limits_l \varepsilon_{kl} = 0$.

Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 1.

Применим теоремы 1 и 2 в случае, когда методом C является факторизируемый метод взвешенных средних Рисса PQ. Как показано в [4], если P и Q регулярны, то условие (1) выполнено. Легко проверяется и выполнение условия (2).

Теорема 3. *Если методы* P *и* Q *регулярны, то комплексные числа* ε_{kl} *являются множителями суммируемости типов:* а) (C_0, C), (C_0, C_b) *и* (C_0, C_r), б) (C_b, C) *и* (C_b, C_b), в) (C_b, C_r) *тогда и только тогда, когда*

$$1°\ \sum_{k,\,l} |P_k Q_l \Delta_{kl} \frac{\Delta_{kl}\varepsilon_{kl}}{p_k q_l}| < \infty,$$

$$2°\ \lim_k \sum_l |Q_l \Delta_l \frac{\Delta_l \varepsilon_{kl}}{q_l}| = \lim_l \sum_k |P_k \Delta_k \frac{\Delta_k \varepsilon_{kl}}{p_k}| = 0,$$

$$3°\ \lim_k \frac{\Delta_k \varepsilon_{kl}}{p_k} = \lim_l \frac{\Delta_l \varepsilon_{kl}}{q_l} = 0,$$

4° а) $\lim\limits_{k,\,l} \varepsilon_{kl} = 0$, б) $\varepsilon_{kl} = O(1)$,

в) $\varepsilon_{kl} = O(1)$ *и* $\lim\limits_k \varepsilon_{kl} = \lim\limits_l \varepsilon_{kl} = 0$.

Когда методом C является метод Чезаро (C, α, β), где $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$, то по [4] условие (1) выполнено, а условие (2) проверяется без затруднений. Теперь из теорем 1 и 2 следуют частные случаи теорем 2 и 3 статьи [1].

Литература

1. Барон С., Множители суммируемости для двойных рядов, суммируемых или ограниченных методом Чезаро вещественного порядка. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 91—117.
2. Вихманн Ф., Распространение метода Пейеримхоффа на случай обобщенных множителей суммируемости. Настоящий сборник, стр. 170—193.
3. Кангро Г., О множителях суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1955, **37**, 191—232.
4. Кангро Г., О множителях суммируемости для двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1957, **46**, 3—42.
5. Bohr, H., Sur la série de Dirichlet. C.r. Acad. sci., 1909, **148**, 75—80.
6. Bohr, H., Bidrag til de Dirichlet'ske Rækker's Theorie. Kopenhagen, 1910.
7. Hardy, G. H., Generalisation of a theorem in the theory of divergent series. Proc. London Math. Soc., 1907, **6**, 255—264.
8. Hardy, G. H., The application to Dirichlet's series of Borel's exponential method of summation. Proc. London Math. Soc., 1909, 8, 277—294.

9. Jurkat, W., Peyerimhoff, A., Mittelwertsätze bei Matrix- und Integraltransformationen. Math. Z., 1951, **55**, 92—108.
10. Peyerimhoff, A., Untersuchungen über absolute Summierbarkeit. Math. Z., 1953, **57**, 265—290.

Поступило
23 II 1962

BOHR-HARDY TÜÜPI TEOREEMID KAHEKORDSETE RIDADE KORRAL

F. Vichmann
Arvutuskeskus

Resümee

Artiklites [5—8] vaatlesid Bohr ja Hardy (C^α, C^α) ja (C_0^α, C^α) tüüpi summeeruvustegureid, kus C^α on α järku Cesàro menetlus. Käesolevas artiklis tõestatakse analoogilised teoreemid kahekordsete ridade jaoks juhul, kui menetlus C on faktoriseeruv regulaarsete faktoritega normaalne menetlus, mis rahuldab tingimusi (1) ja (2).

THEOREMS OF TYPE BOHR-HARDY FOR DOUBLE SERIES

F. Vichmann

Summary

In [5—8] Bohr and Hardy have considered factors of summability of types (C^α, C^α) and (C_0^α, C^α) where C^α is the method of Cesàro of order α. In the present article in the case when method C is a factorizing normal method with regular factors and follows conditions (1) and (2) analogous theorems are proved for double series.

ОБОБЩЕННЫЕ МНОЖИТЕЛИ СУММИРУЕМОСТИ ДЛЯ МЕТОДА ВЗВЕШЕННЫХ СРЕДНИХ РИССА

Ф. Вихманн
Вычислительный центр

§ 1. Введение

Пусть даны методы суммирования простых рядов A и B и метод суммирования двойных рядов C. Будем обозначать класс C-суммируемых двойных рядов через C_c, класс ограниченно C-суммируемых рядов — через C_b и класс вполне C-суммируемых рядов — через C_r. В дальнейшем буква ω будет обозначать c, b или r.

Комплексные числа [1] ε_{kl} называются *множителями суммируемости типа* $(|\mathfrak{A}|, |\mathfrak{B}|, C_\omega)$ $((|\mathfrak{A}|, \mathfrak{B}, C_\omega)$, $(|\mathfrak{A}|, \mathfrak{B}_O, C_\omega))$, если ряд $\sum\limits_{k,\,l} \varepsilon_{kl} X_k Y_l$ принадлежит классу C_ω при всех $|A|$-суммируемых последовательностях $\{X_k\}$ и $|B|$-суммируемых (B-суммируемых, B-ограниченных) последовательностях $\{Y_l\}$, и *типа* $(|A|, |B|, C_\omega)$ $((|A|, B, C_\omega)$, $(|A|, B_O, C_\omega))$, если ряд $\sum\limits_{k,\,l} \varepsilon_{kl} x_k y_l$ принадлежит классу C_ω при всех $|A|$-суммируемых рядах $\sum\limits_k x_k$ и $|B|$-суммируемых (B-суммируемых, B-ограниченных) рядах $\sum\limits_l y_l$.

Если нормальный метод суммирования двойных рядов D является факторизируемым методом $AB = (a_{mk}\, b_{nl})$, то множители суммируемости типа $(|\mathfrak{D}|, C_\omega)$ $((|D|, C_\omega))$ совпадают с множителями суммируемости типа $(|\mathfrak{A}|, |\mathfrak{B}|, C_\omega)$ $((|A|, |B|, C_\omega))$.

В настоящей статье рассмотрен случай, когда методами A и B являются методы взвешенных средних Рисса (R, p_n) и (R, q_n) (см. [2], стр. 193).

Множители суммируемости простых рядов для метода Рисса

[1] Всюду в статье, если не оговорено противное, свободные индексы и индексы суммирования имеют значения 0, 1, 2, ...

изучались Юркатом и Пейеримхоффом [8—12] и Кангро [2], а некоторые типы множителей суммируемости для двойных рядов — Кангро [3]. Множители суммируемости типа $(|PQ|, C_\omega)$ рассмотрены Кангро и Бароном [4].

При доказательстве основных теорем нам необходимы следующие леммы.

Лемма 1. *Билинейное преобразование*

$$w_{mn} = \sum_{k,\,l} c_{mnkl}\, u_k\, v_l \tag{1}$$

переводит пространство $l \times c$ $(\sum_k |u_k| < \infty$ *и* [2] $\lim_l v_l = v$ *существует*): а) *в пространство сходящихся (в смысле Прингсхейма) последовательностей,* б) *в пространство ограниченно сходящихся последовательностей,* в) *в пространство вполне сходящихся последовательностей,* г) *в пространство ограниченных последовательностей тогда и только тогда, когда*

1° $\sum_l |c_{mnkl}| \leqslant M$ $(m,\ n \geqslant N)$,

2° *существует* [3] $\left.\begin{matrix}\text{а) } \lim \\ \text{б) } \lim \\ \text{в) } r\text{-}\lim\end{matrix}\right\}$ c_{mnkl} *при* $m,\ n \to \infty$,

3° *существует* $\left.\begin{matrix}\text{а) } \lim \\ \text{б) } \lim \\ \text{в) } r\text{-}\lim\end{matrix}\right\}$ $\sum_l c_{mnkl}$ *при* $m,\ n \to \infty$,

причем в случаях б), в) *и* г) $N = 0$, *а в случае* а) $\sup_k \sum_l |c_{mnkl}| < \infty$ *при всех* $m,\ n = 0,\ 1, \ldots$.

Если выполнены условия леммы, то в случаях а), б) *и* в)

$$\lim_{m,\,n} w_{mn} = \sum_{k,\,l} c_{kl}\, u_k\, v_l + v\Big(\sum_k c_k\, u_k - \sum_{k,\,l} c_{kl}\, u_k\Big),$$

где $c_{kl} = \lim_{m,\,n} c_{mnkl}$ *и* $c_k = \lim_{m,\,n} \sum_l c_{mnkl}$. *Если* $v = 0$, *то условие* 3° *можно опустить.*

Лемма 2. *Билинейное преобразование* (1) *переводит пространство* $l \times m$ $(\sum |u_k| < \infty$ *и* $v_l = O(1))$: а) *в пространство сходящихся последовательностей,* б) *в пространство ограниченно сходящихся последовательностей,* в) *в пространство вполне сходящихся последовательностей тогда и только тогда, когда выполнены условия* 1° *и* 2° *леммы* 1 *и*

---

[2] $\lim_n S_n$ означает $\lim_{n\to\infty} S_n$.

[3] Под символом $\lim_{m,\,n} S_{mn}$ подразумевается предел в смысле Прингсхейма, а под термином «существует $r\text{-}\lim S_{mn}$» — полная сходимость последовательности $\{S_{mn}\}$.

3° $\lim\limits_{m,\,n}\sum\limits_{l}|c_{mnkl}-c_{kl}|=0,$

в) $\begin{cases}\lim\limits_{m}\sum\limits_{l}|c_{mnkl}-\lim\limits_{m}c_{mnkl}|=0,\\ \lim\limits_{n}\sum\limits_{l}|c_{mnkl}-\lim\limits_{n}c_{mnkl}|=0.\end{cases}$

Если выполнены условия леммы, то

$$\lim_{m,\,n} w_{mn}=\sum_{k,\,l} c_{kl}\,u_k\,v_l.$$

Лемма 3. *Линейное преобразование*

$$w_{mn}=\sum_{k} c_{mnk}\,u_k$$

переводит пространство l: а) *в пространство сходящихся последовательностей,* б) *в пространство ограниченно сходящихся последовательностей,* в) *в пространство вполне сходящихся последовательностей тогда и только тогда, когда*

1° $|c_{mnk}|\leqslant M$ $(m,\,n\geqslant N)$,

2° *существует* $\left.\begin{matrix}\text{а) }\lim\\ \text{б) }\lim\\ \text{в) }r\text{-}\lim\end{matrix}\right\}$ c_{mnk} *при* $m,\,n\to\infty$,

причем в случаях б) *и* в) $N=0$ *и в случае* а) $\sup\limits_{k}|c_{mnk}|<\infty$ *при всех* $m,\,n=0,\,1,\ldots$.

Если выполнены условия леммы, то

$$\lim_{m,\,n} w_{mn}=\sum_{k} c_k\,u_k,$$

где $c_k=\lim\limits_{m,\,n} c_{mnk}$.

Лемма 4. *Если билинейное преобразование* (1) *переводит пространство* $l\times l$ *в пространство сходящихся последовательностей, то необходимо условие* $c_{kl}=O(1)$.

Доказательство лемм 1—4 можно легко провести методом, разработанным И. Куллем в статье [6]. Частично леммы 1—3 приведены уже в [1].

Из леммы 1 вытекает следующая

Лемма 5. *Если билинейное преобразование* (1) *переводит топологическое произведение пространства абсолютно сходящихся последовательностей и пространства сходящихся последовательностей* $\left(\sum\limits_{k}|\overline{\Delta}u_k|<\infty\right.$ *и* $\left.\lim\limits_{l} v_l \text{ существует}\right)$ *в пространство сходящихся последовательностей, то*

$$\sum_{l}\Big|\sum_{s=0}^{k} c_{mnsl}\Big|\leqslant M\ \ (m,\,n\geqslant N).$$

Лемма 6 (см. [2], стр. 196). *Метод P сохраняет сходимость тогда и только тогда, когда*

1° *существует* $\lim\limits_{n} P_n$ (*конечный или бесконечный*),

2° $\sum\limits_{k=0}^{n} |p_k| = O(P_n)$.

Лемма 7 (см. [2], стр. 196). *Метод P сохраняет абсолютную сходимость тогда и только тогда, когда*

$$|P_k| \sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \frac{p_n}{P_{n-1} P_n} \right| = O(1).$$

§ 2. Множители суммируемости типа ($|\mathfrak{P}|$, $\mathfrak{Q}$, C_ω)

Лемма 8. *Пусть даны нормальные методы суммирования $A = (a_{mk})$ и $B = (b_{nl})$ в виде преобразований последовательностей в последовательности и метод суммирования $C = (\gamma_{mnkl})$ в виде преобразования рядов в последовательности. Комплексные числа ε_{kl} являются множителями суммируемости:* а) *типа* ($|\mathfrak{A}|$, $\mathfrak{B}$, C_c), б) *типа* ($|\mathfrak{A}|$, $\mathfrak{B}$, C_b), в) *типа* ($|\mathfrak{A}|$, $\mathfrak{B}$, C_r) *тогда и только тогда, когда*

1° $\lim\limits_{k,\,l} d_{mns}^{kl} = d_{mns}$,

2° $|d_{mns}^{kl}| \leqslant M_{mn}$,

3° *существует* $\left.\begin{matrix} \text{а) } \lim \\ \text{б) } \lim \\ \text{в) } r\text{-}\lim \end{matrix}\right\} d_{mns}$ *при* $m, n \to \infty$,

4° $|d_{mns}| \leqslant M \quad (m, n \geqslant N)$,

5° $\lim\limits_{k,\,l} c_{mnst}^{kl} = c_{mnst}$,

6° $\sum\limits_{t=0}^{l} |c_{mnst}^{kl}| \leqslant M_{mn}$,

7° *существует* $\left.\begin{matrix} \text{а) } \lim \\ \text{б) } \lim \\ \text{в) } r\text{-}\lim \end{matrix}\right\} c_{mnst}$ *при* $m, n \to \infty$,

8° $\sum\limits_{t} |c_{mnst}| \leqslant M \quad (m, n \geqslant N)$,

причем в случаях б) *и* в) $N = 0$ *и в случае* а) $\sup\limits_{s} |d_{mns}| < \infty$ *и* $\sup\limits_{s} \sum\limits_{t} |c_{mnst}| < \infty$ *при всех* $m, n = 0, 1, \ldots$.

Здесь

$$\left.\begin{aligned} d^{kl}_{mns} &= \sum_{\mu,\nu=s,0}^{k,l} \gamma_{mn\mu\nu}\,\varepsilon_{\mu\nu}\,a_{\mu s}\sum_{t=0}^{\nu}\beta_{\nu t}, \\ c^{kl}_{mnst} &= \sum_{\mu,\nu=s,t}^{k,l} \gamma_{mn\mu\nu}\,\varepsilon_{\mu\nu}\,a_{\mu s}\,\beta_{\nu t}, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где

$$(a_{\mu s}) = (\overline{\Delta}_\mu\, a_{\mu s})^{-1} \;\text{ и }\; (\beta_{\nu t}) = (b_{\nu t})^{-1}.$$

Доказательство. Так как $x'_s = \overline{\Delta}_s \sum_{\varkappa=0}^{s} a_{s\varkappa} X_\varkappa$, $Y'_t = \sum_{\lambda=0}^{t} b_{t\lambda}\, Y_\lambda$ и при B-суммируемости $\{Y_\lambda\}$ существует $\lim_t Y'_t = Y'$, то при помощи обратных преобразований легко получить равенство

$$S_{mnkl} = \sum_{\varkappa,\lambda=0}^{k,l} \gamma_{mn\varkappa\lambda}\,\varepsilon_{\varkappa\lambda}\,X_\varkappa\,Y_\lambda =$$

$$= \sum_{s,t=0}^{k,l} c^{kl}_{mnst}\,x'_s\,(Y'_t - Y') + Y' \sum_{s=0}^{k} d^{kl}_{mns}\,x'_s. \qquad (3)$$

При $\{Y'_t\} = \{\delta_{tt}\}$ из (3) следует, что в случаях а) и б) существование предела $\lim_{m,n}\lim_{k,l}\sum_{s=0}^{k} d^{kl}_{mns}\,x'_s$ и в случае в) — предела $r\text{-}\lim_{m,n}\lim_{k,l}\sum_{s=0}^{k} d^{kl}_{mns}\,x'_s$ при всех $\sum_s |x'_s| < \infty$ необходимо для множителей суммируемости типа $(|\mathfrak{A}|, \mathfrak{B}, C_\omega)$. Для существования этого предела по лемме 3 необходимы и достаточны условия 1°—4°. Теперь при помощи равенства (3) по лемме 1 уже легко убедиться в том, что условия 1°—8° являются необходимыми и достаточными в случаях а) и б) для существования предела $\lim_{m,n}\lim_{k,l} S_{mnkl}$ и $|\lim_{k,l} S_{mnkl}| \leqslant M$ $(m,\ n \geqslant N)$, а в случае в) для существования предела $r\text{-}\lim_{m,n}\lim_{k,l} S_{mnkl}$ при всех $|A|$-суммируемых последовательностях $\{X_\varkappa\}$ и B-суммируемых последовательностях $\{Y_\lambda\}$, т. е. для того, чтобы числа $\varepsilon_{\varkappa\lambda}$ были множителями суммируемости типа $(|\mathfrak{A}|, \mathfrak{B}, C_\omega)$. Поэтому из (3) следует равенство

$$\lim_{m,n}\sum_{\varkappa,\lambda}\gamma_{mn\varkappa\lambda}\,\varepsilon_{\lambda\varkappa}\,X_\varkappa\,Y_\lambda = \sum_{s,t} c_{st}\,x'_s\,(Y'_t - Y') + Y'\sum_s d_s\,x'_s, \qquad (4)$$

где

$$c_{st} = \lim_{m,n} c_{mnst},\quad d_s = \lim_{m,n} d_{mns},\quad c_{st} = O(1) \;\text{ и }\; d_s = O(1).$$

Теорема 1. *Пусть метод P сохраняет абсолютную сходимость и метод Q — сходимость. Если метод $C = C'C'' = (\gamma_{mnkl}) = (\gamma'_{mk}\gamma''_{nl})$ является факторизируемым методом с корегулярными факторами и*[4] $\lim\limits_{k}\gamma'_{mk} = \lim\limits_{l}\gamma''_{nl} = 0$, *то комплексные числа ε_{kl} являются множителями суммируемости типа $(|\mathfrak{P}|, \mathfrak{Q}, C_\omega)$ тогда и только тогда, когда*

1° $P_k \sum\limits_{l} |Q_l \Delta_l \frac{\varepsilon_{kl}}{q_l}| = O(p_k)$,

2° $\sum\limits_{l} |Q_l \sum\limits_{s=0}^{k} \Delta_l \frac{\varepsilon_{sl}}{q_l}| = O(1)$,

3° $P_k \sum\limits_{l} |\varepsilon_{kl}| = O(p_k)$,

4° $\sum\limits_{s,\,t=0}^{k,\,l} \varepsilon_{st} = O(1)$,

5° *ряд* $\sum\limits_{k,\,l} \varepsilon_{kl}$ *$(C'E)$-суммируем*[5], *когда* $\omega = c$ *и* $\omega = b$, *и вполне $(C'E)$-суммируем, когда* $\omega = r$,

6° *ряд* $\sum\limits_{k} \varepsilon_{kl}$ *C'-суммируем.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\lim\limits_{m}\gamma'_{ms} = \gamma'_s$ и $\lim\limits_{n}\gamma''_{nt} = \gamma''_t$. Так как метод P сохраняет абсолютную сходимость и метод Q — сходимость, то по лемме 5

$$\sum_{l} |\sum_{s=0}^{k} \gamma_{mnsl}\,\varepsilon_{sl}| \leqslant M \quad (m, n \geqslant N),$$

откуда, ввиду корегулярности метода C'' $(\lim\limits_{l}\gamma''_l \neq 0)$, следует $\sum\limits_{l} |\sum\limits_{s=0}^{k} \gamma'_s\,\varepsilon_{sl}| = O(1)$. Поскольку $\lim\limits_{s}\gamma'_s \neq 0$, то найдутся число $d > 0$ и натуральное число S такие, что $|\gamma'_s| > d$ при $s \geqslant S$. Для $k > S$ при помощи преобразования Абеля мы находим:

$$\sum_{l} |\sum_{s=S}^{k} \varepsilon_{sl}| \leqslant \frac{1}{d^2} \sum_{s=S}^{k-1} |\Delta\gamma'_s| \sum_{l} |\sum_{\mu=S}^{s} \gamma'_\mu\,\varepsilon_{\mu l}| + \frac{1}{d} \sum_{l} |\sum_{\mu=S}^{k} \gamma'_\mu\,\varepsilon_{\mu l}|,$$

откуда, в силу корегулярности метода C', вытекает условие

[4] Как показано в [2], стр. 199, метод, для которого $\lim\limits_{k}\gamma'_{mk} \neq 0$, суммирует только сходящиеся ряды.

[5] E — метод сходимости.

$\sum_l |\sum_{s=S}^{k} \varepsilon_{sl}| = O(1)$. Так как существует предел $\lim_{m,n} \sum_l \gamma_{mnkl}\, \varepsilon_{kl}\, Y_l$ при всех сходящихся последовательностях $\{Y_l\}$, то по известной теореме Кожима—Шура $\sum_l |\varepsilon_{kl}| < \infty$. Следовательно, доказана необходимость условия $\sum_l |\sum_{s=0}^{k} \varepsilon_{sl}| = O(1)$, следствием которого и является условие 4°.

Если[6] $x = \{X_\varkappa\} = \{\delta_{\varkappa k}\}$ и $y = \{Y_\lambda\} = \{\delta_{\lambda l}\}$, то условие (4) превратится в равенство

$$\gamma'_k \gamma''_l \varepsilon_{kl} = \sum_{s,\, t=k,\, l}^{\infty} c_{st} \bar{\Delta}_s a_{sk} b_{tl} + \\ + \lim_t b_{tl} \{ \sum_{s=k}^{\infty} d_s \bar{\Delta}_s a_{sk} - \sum_{s,\, t=k,\, 0}^{\infty} c_{st} \bar{\Delta}_s a_{sk} \}. \tag{5}$$

Пусть $A = P$, $B = Q$, метод P сохраняет абсолютную сходимость и метод Q — сходимость. Тогда по леммам 6 и 7 из (5) вытекают условия

$$P_k Q_l \varepsilon_{kl} = O(p_k q_l) \tag{6}$$

и

$$\gamma'_k P_k \sum_k |Q_l \Delta_l \frac{\gamma''_l \varepsilon_{kl}}{q_l}| = O(p_k). \tag{7}$$

Поскольку

$$\gamma''_{l+1} \Delta_l \frac{\varepsilon_{kl}}{q_l} = \Delta_l \frac{\gamma''_l \varepsilon_{kl}}{q_l} - \frac{\varepsilon_l}{q_l} \Delta\gamma''_l, \tag{8}$$

то из условий (6) и (7) и корегулярности методов C' и C'' вытекает

$$P_k \sum_l |\gamma''_{l+1} Q_l \Delta_l \frac{\varepsilon_{kl}}{q_l}| = O(p_k),$$

откуда, ввиду $\lim_l \gamma''_l \neq 0$, непосредственно следует условие 1°.

Из (5) выводим:

$$|\gamma'_k| \sum_l |\gamma''_l \varepsilon_{kl}| \leqslant \sum_{s=k}^{\infty} |\bar{\Delta}_s a_{st}| \sum_t |c_{st}| \sum_{l=0}^{t} |b_{tl}| + \\ + \sum_l |\lim_t b_{tl}| \left(\sum_{s=k}^{\infty} |d_s \bar{\Delta}_s a_{sk}| + \sum_{s,\, t=k,\, 0}^{\infty} |c_{st} \bar{\Delta}_s a_{sk}| \right) = O\left(\frac{p_k}{P_k}\right),$$

откуда, в силу корегулярности C' и C'', следует условие 3°. Из

[6] $\delta_{\varkappa k}$ есть символ Кронекера, $\delta_{\varkappa k} = \begin{cases} 1 \text{ при } \varkappa = k, \\ 0 \text{ при } \varkappa \neq k. \end{cases}$

(5) находим:

$$Q_l \sum_{s=0}^{k} \gamma'_s \Delta_l \frac{\gamma''_l \varepsilon_{sl}}{q_l} = \sum_{s=0}^{k} \sum_{\varkappa=s}^{\infty} c_{\varkappa l} \overline{\Delta}_\varkappa a_{\varkappa s}.$$

Теперь

$$\sum_l |Q_l \sum_{s=0}^{k} \gamma'_s \Delta_l \frac{\gamma''_l \varepsilon_{sl}}{q_l}| \leqslant \sum_l |\sum_{s=0}^{k} \sum_{\varkappa=s}^{k} c_{\varkappa l} \overline{\Delta}_\varkappa a_{\varkappa s}| + \sum_l |\sum_{s=0}^{k} \sum_{\varkappa=k+1}^{\infty} c_{\varkappa l} \overline{\Delta}_\varkappa a_{\varkappa s}| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_\varkappa |\sum_{s=0}^{\varkappa} \overline{\Delta}_\varkappa a_{\varkappa s}| \sum_l |c_{\varkappa l}| + \sum_{\varkappa=k+1}^{\infty} |\sum_{s=0}^{k} \overline{\Delta}_\varkappa a_{\varkappa s}| \sum_l |c_{\varkappa l}| = O(1). \qquad (9)$$

Из (5) следует

$$Q_l \sum_{s=0}^{k} \gamma'_s \varepsilon_{sl} = O(q_l),$$

что вместе с условием (9), в силу тождества (8) и корегулярности C'', дает

$$\sum_l |Q_l \sum_{s=0}^{k} \gamma'_s \Delta_l \frac{\varepsilon_{sl}}{q_l}| = O(1),$$

откуда уже легко получить условие 2°. Необходимость условий 5° и 6° очевидна.

Достаточность. Покажем, что условия 1°—6° гарантируют выполнение условий леммы 8. Так как при $A = P$ и $B = Q$ $\alpha_{ss} = \frac{P_s}{p_s}$, $\alpha_{ks} = 1$ при $k > s$, $\alpha_{ks} = 0$ в остальных случаях, $\beta_{ss} = \frac{Q_s}{q_s}$, $\beta_{s+1,\,s} = -\frac{Q_s}{q_{s+1}}$, $\beta_{ks} = 0$ в остальных случаях, то по формулам (2) легко найти величины d^{kl}_{mns}, d_{mns}, c^{kl}_{mnst} и c_{mnst}:

$$\left.\begin{aligned} d^{kl}_{mns} &= \gamma'_{ms} \frac{P_s}{p_s} \sum_{\lambda=0}^{l} \gamma''_{n\lambda} \varepsilon_{s\lambda} + \sum_{\varkappa,\lambda=s+1,0}^{k,\,l} \gamma_{mn\varkappa\lambda} \varepsilon_{\varkappa\lambda} \quad (k > s), \\ d^{kl}_{mnk} &= \gamma'_{mk} \frac{P_k}{p_k} \sum_{\lambda=0}^{l} \gamma''_{n\lambda} \varepsilon_{k\lambda}, \\ d_{mns} &= \gamma'_{ms} \frac{P_s}{p_s} \sum_{\lambda} \gamma''_{n\lambda} \varepsilon_{s\lambda} + \sum_{\varkappa,\lambda=s+1,0}^{\infty} \gamma_{mn\varkappa\lambda} \varepsilon_{\varkappa\lambda}; \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
c^{kl}_{mnst} &= \gamma'_{ms}\frac{P_s}{p_s}Q_t\,\Delta_t\frac{\gamma''_{nt}\,\varepsilon_{st}}{q_t} + Q_t\sum_{\varkappa=s+1}^{k}\gamma'_{m\varkappa}\,\Delta_t\frac{\gamma''_{nt}\,\varepsilon_{\varkappa t}}{q_t} \\
&\qquad\qquad (k>s,\ l>t),\\
c^{kl}_{mnsl} &= \gamma_{mnsl}\frac{P_s Q_l}{p_s q_l}\varepsilon_{sl} + \gamma''_{nl}\frac{Q_l}{q_l}\sum_{\varkappa=s+1}^{k}\gamma'_{m\varkappa}\,\varepsilon_{\varkappa l}\quad (k>s),\\
c^{kl}_{mnkt} &= \gamma'_{mk}\frac{P_k}{p_k}Q_t\,\Delta_t\frac{\gamma''_{nt}\,\varepsilon_{kt}}{q_t}\quad (l>t),\\
c^{kl}_{mnkl} &= \gamma_{mnkl}\frac{P_k Q_l}{p_k q_l}\varepsilon_{kl},\\
c_{mnst} &= \gamma'_{ms}\frac{P_s}{p_s}Q_t\,\Delta_t\frac{\gamma''_{nt}\,\varepsilon_{st}}{q_t} + Q_t\sum_{\varkappa=s+1}^{\infty}\gamma'_{m\varkappa}\,\Delta_t\frac{\gamma''_{nt}\,\varepsilon_{\varkappa t}}{q_t}.
\end{aligned}
\right\}\quad (11)
$$

Из (10) и (11) сразу видно, что условия 3°, 5° и 6° гарантируют выполнение условий 1°, 3°, 5° и 7° леммы 8. Поскольку

$$
\sum_t |c_{mnst}| \leqslant \left|\gamma'_{ms}\frac{P_s}{p_s}\right|\sum_t|\gamma''_{n,\,t+1}|\left|Q_t\,\Delta_t\frac{\varepsilon_{st}}{q_t}\right| +
$$

$$
+ |\gamma'_{ms}|\sum_t\left|\frac{P_s Q_t}{p_s q_t}\varepsilon_{st}\right||\Delta_t\gamma''_{nt}| + \sum_{k=s+1}^{\infty}|\Delta_k\gamma'_{mk}|\left(\sum_t|\gamma''_{n,\,t+1}|\left|Q_t\sum_{\varkappa=s+1}^{k}\Delta_t\frac{\varepsilon_{\varkappa t}}{q_t}\right| +\right.
$$

$$
\left. + \sum_t|\Delta_t\gamma''_{nt}|\left|\frac{Q_t}{q_t}\sum_{\varkappa=s+1}^{k}\varepsilon_{\varkappa t}\right|\right) = L_{mns},
$$

то, в силу условий 1°—4°, вытекающих из них условий (6) и $Q_t\sum_{s=0}^{k}\varepsilon_{st} = O(q_t)$ и корегулярности C' и C'', условие 8° леммы 8 выполнено. Из неравенства (для получения его используется $\lim\limits_k \gamma'_{mk} = \lim\limits_l \gamma''_{nl} = 0$)

$$
|d_{mns}| \leqslant \left|\gamma'_{ms}\frac{P_s}{p_s}\right|\sum_t|\gamma''_{nt}\,\varepsilon_{st}| + \sum_{\varkappa,\,\lambda=s+1,0}^{\infty}|\Delta_\varkappa\gamma'_{m\varkappa}\,\Delta_\lambda\gamma''_{n\lambda}|\Big|\sum_{k,\,l=s+1,0}^{\varkappa,\,\lambda}\varepsilon_{kl}\Big|,
$$

в силу условий 3° и 4° и корегулярности C' и C'', следует выполнение условия 4° леммы 8. Если $k>s$, то

$$
\sum_{t=0}^{l}|c^{kl}_{mnst}| \leqslant L_{mns} + \left|\gamma_{mnsl}\frac{P_s Q_l}{p_s q_l}\varepsilon_{sl}\right| + \left|\gamma'_{mk}\gamma''_{nl}\frac{Q_l}{q_l}\sum_{\varkappa=s+1}^{k}\varepsilon_{\varkappa l}\right| +
$$

$$
+ |\gamma'_{mk}|\sum_t\left(|\Delta_t\gamma''_{nt}|\left|\frac{Q_t}{q_t}\sum_{\varkappa=s+1}^{k}\varepsilon_{\varkappa t}\right| + \left|\gamma''_{n,t+1}\,Q_t\sum_{\varkappa=s+1}^{k}\Delta_t\frac{\varepsilon_{\varkappa t}}{q_t}\right|\right) +
$$

$$
+ \left|\gamma''_{nl}\frac{Q_l}{q_l}\right|\sum_{\varkappa=s+1}^{\infty}|\Delta_\varkappa\gamma'_{m\varkappa}|\Big|\sum_{\lambda=s+1}^{\varkappa}\varepsilon_{\lambda l}\Big|,
$$

и выполнение условия 6° леммы 8 следует из условий 1°—4° и корегулярности C' и C''. Аналогично показывается, что $\sum_{t=0}^{l} |c_{mnkt}^{kl}| = O(1)$. Из неравенства $(k > s)$

$$|d_{mns}^{kl}| \leqslant \left|\gamma'_{ms}\frac{P_s}{p_s}\right| \sum_{\lambda} |\gamma''_{n\lambda}\varepsilon_{s\lambda}| + \sum_{\varkappa,\lambda=s+1,0}^{\infty} |\Delta_\varkappa \gamma'_{m\varkappa}\Delta_\lambda \gamma''_{n\lambda}| \Big| \sum_{\sigma,\tau=s+1,0}^{\varkappa,\lambda} \varepsilon_{\sigma\tau}\Big| +$$

$$+ |\gamma''_{nl}| \sum_{\varkappa=s+1}^{\infty} |\Delta_\varkappa \gamma'_{m\varkappa}| \Big| \sum_{\sigma,\tau=s+1,0}^{\varkappa,l} \varepsilon_{\sigma\tau}\Big| + |\gamma'_{mk}| \sum_{\lambda} |\Delta_\lambda \gamma''_{n\lambda}| \Big| \sum_{\sigma,\tau=s+1,0}^{k,\lambda} \varepsilon_{\sigma\tau}\Big| +$$

$$+ |\gamma'_{mk}\gamma''_{nl}| \Big| \sum_{\sigma,\tau=s+1,0}^{k,l} \varepsilon_{\sigma\tau}\Big|$$

и неравенства

$$|d_{mnk}^{kl}| \leqslant \left|\gamma'_{mk}\frac{P_k}{p_k}\right| \sum_{\lambda} |\gamma''_{n\lambda}\varepsilon_{k\lambda}|$$

непосредственно следует, ввиду условий 3° и 4° и корегулярности C' и C'', условие 2° леммы 8.

Теорема полностью доказана.

§ 3. Множители суммируемости типа $(|\mathfrak{P}|, \mathfrak{D}_O, C_\omega)$

Лемма 9. *В предпосылках леммы* 8 *относительно методов* A, B *и* C *комплексные числа* ε_{kl} *являются множителями суммируемости*: а) *типа* $(|\mathfrak{A}|, \mathfrak{B}_O, C_c)$, б) *типа* $(|\mathfrak{A}|, \mathfrak{B}_O, C_b)$, в) *типа* $(|\mathfrak{A}|, \mathfrak{B}_O, C_r)$ *тогда и только когда, когда выполнены условия* 5°, 6°, 7° *и* 8° *леммы* 8 *и*

$$9°\ \lim_{k,l}\sum_{t} |c_{mnst}^{kl}| = \sum_{t} |c_{mnst}|,$$

$$10°\ \lim_{m,n}\sum_{t} |c_{mnst}| = \sum_{t} |c_{st}|,$$

$$\text{в)}\ \begin{cases} \lim\limits_{m}\sum\limits_{t} |c_{mnst}| = \sum\limits_{t} |\lim\limits_{m} c_{mnst}|, \\ \lim\limits_{n}\sum\limits_{t} |c_{mnst}| = \sum\limits_{t} |\lim\limits_{n} c_{mnst}|, \end{cases}$$

где $c_{st} = \lim\limits_{m,n} c_{mnst}$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 8 и опирается на лемму 2.

Лемма 10 (Прингсхейм [13], стр. 290). *Если двойная последовательность* $\{S_{mn}\}$ *сходится, то*

$$\lim_{m,\,n} S_{mn} = \lim_{m} \overline{\lim_{n}}\, S_{mn} = \overline{\lim_{m}} \lim_{n} S_{mn}.$$

Теорема 2. *В предпосылках теоремы* 1 *относительно методов* P, Q *и* C *комплексные числа* ε_{kl} *являются множителями суммируемости типа* $(|\mathfrak{P}|, \mathfrak{Q}_O, C_\omega)$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия* 1°—6° *теоремы* 1 *и*

$$7^\circ \lim_{l} Q_l \frac{\varepsilon_{kl}}{q_l} = 0,$$

$$8^\circ \lim_{m,\,n} \frac{Q_n}{q_n} \sum_{\varkappa} \gamma'_{m\varkappa}\, \varepsilon_{\varkappa n} = 0.$$

Доказательство. Необходимость. Так как множители суммируемости типа $(|\mathfrak{P}|, \mathfrak{Q}_O, C_\omega)$ являются и множителями суммируемости типа $(|\mathfrak{P}|, \mathfrak{Q}, C_\omega)$, то условия 1°—6° теоремы 1 необходимы. Если метод P сохраняет абсолютную сходимость, то должен существовать предел $\lim\limits_{m,\,n} \sum\limits_{l} \gamma_{mnkl}\, \varepsilon_{kl}\, Y_l$ при всех Q-ограниченных последовательностях $\{Y_l\}$. По теореме 14 статьи [2] для этого необходимо условие 7°. Исходим из равенства $(l > 0)$

$$\sum_{t=0}^{l-1} c_{mnst} = \gamma'_{ms} \frac{P_s}{p_s} \sum_{t=0}^{l} \gamma''_{nt}\, \varepsilon_{st} - \gamma'_{ms}\, \gamma''_{nl} \frac{P_s Q_l}{p_s q_l}\, \varepsilon_{sl} +$$

$$+ \sum_{t=0}^{l} \gamma''_{nt} \sum_{\varkappa=s+1}^{\infty} \gamma'_{m\varkappa}\, \varepsilon_{\varkappa t} - \gamma''_{nl} \frac{Q_l}{q_l} \sum_{\varkappa=s+1}^{\infty} \gamma'_{m\varkappa}\, \varepsilon_{\varkappa l}.$$

По условию 10° леммы 9 и (11) существует $\lim\limits_{m,\,l} \sum\limits_{t=0}^{l-1} \lim\limits_{n} c_{mnst}$. При помощи 1°—4° легко убедиться, что существуют и пределы $\lim\limits_{m,\,l} \lim\limits_{n}$ первых трех членов правой части равенства. Значит, существует

$$\lim_{m,\,l} \gamma''_l \frac{Q_l}{q_l} \sum_{\varkappa} \gamma'_{m\varkappa}\, \varepsilon_{\varkappa l},$$

откуда, ввиду $\lim\limits_{l} \gamma''_l \neq 0$, следует существование

$$\lim_{m,\,l} \frac{Q_l}{q_l} \sum_{\varkappa} \gamma'_{m\varkappa}\, \varepsilon_{\varkappa l}.$$

Поскольку

$$\lim_{m} \lim_{l} \frac{Q_l}{q_l} \sum_{\varkappa} \gamma'_{m\varkappa}\, \varepsilon_{\varkappa l} = \lim_{m} \lim_{l} \sum_{\varkappa} \Delta \gamma'_{m\varkappa} \sum_{s=0}^{\varkappa} \varepsilon_{sl} \frac{Q_l}{q_l} = 0,$$

то, ввиду леммы 10, отсюда вытекает необходимость условия 8°.

Достаточность. Докажем, что условия теоремы 2 гарантируют $(C'E)\,\omega$-суммируемость ряда $\sum\limits_{k,\,l} \varepsilon_{kl} X_k Y_l$ при всех $|P|$-суммируемых $\{X_k\}$ и Q-ограниченных $\{Y_l\}$. Вследствие $(C'C'')\,\omega \supset (C'E)\,\omega$ из этого последует $(C'C'')\,\omega$-суммируемость ряда $\sum\limits_{k,\,l} \varepsilon_{kl} X_k Y_l$. Возьмем в (11) $C'' = E$ и покажем, что условия леммы 9 выполнены. Очевидно, достаточно показать выполнение условий 9° и 10° леммы 9. Первое из условий 10° леммы превратится в равенство

$$\lim_{m,\,n}\left(\sum_{t=0}^{n-1}\left|\gamma'_{ms}\frac{P_s}{p_s}Q_t\,\Delta_t\frac{\varepsilon_{st}}{q_t}+Q_t\sum_{\varkappa=s+1}^{\infty}\gamma'_{m\varkappa}\,\Delta_t\frac{\varepsilon_{\varkappa t}}{q_t}\right|+\right.$$
$$\left.+\left|\gamma'_{ms}\frac{P_s Q_n}{p_s q_n}\varepsilon_{sn}+\frac{Q_n}{q_n}\sum_{\varkappa=s+1}^{\infty}\gamma'_{m\varkappa}\,\varepsilon_{\varkappa n}\right|\right)=$$
$$=\sum_t\left|\gamma'_s\frac{P_s}{p_s}Q_t\,\Delta_t\frac{\varepsilon_{st}}{q_t}+\lim_m Q_t\sum_{\varkappa=s+1}^{\infty}\gamma'_{m\varkappa}\,\Delta_t\frac{\varepsilon_{\varkappa t}}{q_t}\right|,$$

которое, ввиду условий 1°—4°, 7° и 8°, соблюдается. Аналогично можно убедиться, что выполнено условие 10° в). Вследствие конечностроочности матрицы метода E, выполнение условия 9° леммы 9, если принять во внимание (11), очевидно.

§ 4. Множители суммируемости типа ($|P|$, Q, C_ω)

Лемма 11. *Пусть даны нормальные методы суммирования* $A = (a_{mk})$ *и* $B = (b_{nl})$ *в виде преобразований последовательностей в последовательности и метод суммирования* $C = (\gamma_{mnkl})$ *в виде преобразования рядов в последовательности. Если* $\sum\limits_{t=0}^{\nu} \beta'_{\nu t} = \delta_{\nu 0}$, *то комплексные числа* ε_{kl} *являются множителями суммируемости*: а) *типа* ($|A|$, B, C_c), б) *типа* ($|A|$, B, C_b), в) *типа* ($|A|$, B, C_r) *тогда и только тогда, когда*

1° $\lim\limits_{\substack{k,\,l\\ l}} f^{kl}_{mnst} = f_{mnst}$,

2° $\sum\limits_{t=0} |f^{kl}_{mnst}| \leqslant M_{mn}$,

3° *существует* $\left.\begin{matrix}\text{а) }\lim\\ \text{б) }\lim\\ \text{в) }r\text{-}\lim\end{matrix}\right\}$ f_{mnst} *при* $m,\ n \to \infty$,

4° $\sum\limits_t |f_{mnst}| \leqslant M$ $(m,\ n \geqslant N)$,

5° *существует* $\left.\begin{matrix}\text{а) }\lim\\ \text{б) }\lim\\ \text{в) }r\text{-}\lim\end{matrix}\right\}$ $\sum\limits_{\varkappa} \gamma_{mn\varkappa 0}\,\varepsilon_{\varkappa 0}\,u_\varkappa$ *при* $m,\ n \to \infty$

для всех $|A|$*-суммируемых рядов* $\sum_{\varkappa} u_{\varkappa}$, *причем в случаях* б) *и* в) $N = 0$ *и в случае* а) $\sup_s \sum_t |f_{mnst}| < \infty$ *при всех* $m, n = 0, 1, \ldots$.

Здесь

$$f^{kl}_{mnst} = \sum_{\mu,\nu=s,\,t}^{k,\,l} \gamma_{mn\mu\nu}\, \varepsilon_{\mu\nu}\, \alpha'_{\mu s}\, \beta'_{\nu t}, \tag{12}$$

где

$$(\alpha'_{\mu s}) = (\overline{\Delta}_{\mu} \sum_{k=s}^{\mu} a_{\mu k})^{-1} \text{ и } (\beta'_{\nu t}) = (\sum_{l=t}^{\nu} b_{\nu l})^{-1}.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 7.

Лемма 12. (Кангро [2]). *Если метод* $A = P$ *сохраняет абсолютную сходимость и метод* $C = C'C'' = (\gamma'_{mk}\gamma''_{nl})$ *является факторизируемым методом с регулярными факторами, то условие* 5° *леммы* 11 *эквивалентно условиям*

1° $\varepsilon_{\mu 0} = O(1)$,

2° $P_{\mu}\, \Delta_{\mu}\, \varepsilon_{\mu 0} = O(p_{\mu})$,

3° $P_{\mu}\, \varepsilon_{\mu 0}\, \Delta_{\mu}\, \gamma'_{m\mu} = O(p_{\mu})$,

4° $|\gamma'_{m\mu}\, P_{\mu} \frac{\varepsilon_{\mu 0}}{p_{\mu}}| \leqslant M_m$.

Теорема 3. *Пусть метод* P *сохраняет абсолютную сходимость и метод* Q — *сходимость. Если метод* $C = C'C'' = (\gamma_{mnkl}) = (\gamma'_{mk}\gamma''_{nl})$ *является факторизируемым методом с регулярными факторами, то комплексные числа* ε_{kl} *являются множителями суммируемости типа* $(|P|, Q, C_{\omega})$ *тогда и только тогда, когда*

1° $\varepsilon_{kl} = O(1)$,

2° $P_k \sum_l \left| Q_l\, \Delta_l \frac{\Delta_{kl}\, \varepsilon_{kl}}{q_l} \right| = O(p_k)$,

3° $P_k\, \Delta_k\, \varepsilon_{kl} = O(p_k)$,

4° $\sum_l \left| Q_l\, \Delta_l \frac{\Delta_l\, \varepsilon_{kl}}{q_l} \right| = O(1)$,

5° $P_k\, \varepsilon_{kl}\, \Delta_k\, \gamma'_{mk} = O(p_k)$ $(m \geqslant N)$,

6° $\sum_l \left| Q_l\, \varepsilon_{k+1,\,l}\, \Delta_l \frac{\Delta_l \gamma''_{nl}}{q_l} \right| = O(1)$ $(n \geqslant N)$,

7° $P_k \sum_l \left| Q_l\, \Delta_k\, \varepsilon_{k,\,l+1}\, \Delta_l \frac{\Delta_l \gamma''_{nl}}{q_l} \right| = O(p_k)$ $(n \geqslant N)$,

8° $P_k(\Delta_k \gamma'_{mk}) \sum_l \left| Q_l\, \Delta_l \frac{\Delta_l\, \varepsilon_{kl}}{q_l} \right| = O(p_k)$ $(m \geqslant N)$,

9° $P_k(\Delta_k \gamma'_{mk}) \sum_l \left| Q_l\, \varepsilon_{k,\,l+1}\, \Delta_l \frac{\Delta_l \gamma''_{nl}}{q_l} \right| = O(p_k)$ $(m,\, n \geqslant N)$,

$$10^\circ\ \left|\frac{P_k}{p_k}\gamma'_{mk}\right|\sum_l\left|Q_l\Delta_l\frac{\Delta_l(\gamma''_{nl}\varepsilon_{kl})}{q_l}\right|\leqslant M_{mn},$$

$$11^\circ\ \left|\gamma''_{nl}\frac{P_k Q_l}{p_k q_l}\Delta_k(\gamma'_{mk}\varepsilon_{kl})\right|\leqslant M_{mn},$$

$$12^\circ\ \left|\gamma'_{mk}\gamma''_{nl}\frac{P_k Q_l}{p_k q_l}\varepsilon_{kl}\right|\leqslant M_{mn},$$

причем в условиях 5°—9° *в случаях* $\omega = b$ *и* $\omega = r$ $N = 0$, *а в случае* $\omega = c$ *при всех* m, $n = 0, 1, \ldots$ $\sup\limits_k$ $(\sup\limits_{k,\,l})$ *конечен.*

Доказательство. Необходимость. Поскольку при $A = P$ и $B = Q$

$$\alpha'_{ss} = \frac{P_s}{p_s},\ \alpha'_{s+1,\,s} = -\frac{P_s}{p_{s+1}},\ \alpha'_{ks} = 0 \text{ в остальных случаях},$$

$$\beta'_{ss} = \frac{Q_s}{q_s},\ \beta'_{s+1,\,s} = -Q_s\left(\frac{1}{q_s}+\frac{1}{q_{s+1}}\right),\ \beta'_{s+2,\,s} = \frac{Q_s}{q_{s+1}},$$

$\beta'_{ks} = 0$ в остальных случаях,

то по формуле (12) легко найти величины f^{kl}_{mnst} и f_{mnst}:

$$f^{kl}_{mnst} = \frac{P_s}{p_s}Q_t\Delta_t\frac{\Delta_{st}(\gamma_{mnst}\varepsilon_{st})}{q_t} + \gamma'_{m,\,s+1}Q_t\Delta_t\frac{\Delta_t(\gamma''_{nt}\varepsilon_{s+1,\,t})}{q_t}$$
$$(k > s,\ l-1 > t),$$

$$f^{kl}_{mns,\,l-1} = f_{mns,\,l-1} - \gamma_{mns,\,l+1}\frac{P_s Q_{l-1}}{p_s q_l}\varepsilon_{s,\,l+1} + \gamma_{mn,\,s+1,\,l+1}\frac{P_s Q_{l-1}}{p_s q_l}\varepsilon_{s+1,\,l+1} -$$
$$- \gamma_{mn,\,s+1,\,l+1}\frac{Q_{l-1}}{q_l}\varepsilon_{s+1,\,l+1}\quad (k > s), \qquad (13)$$

$$f^{kl}_{mnsl} = \gamma''_{nl}\frac{P_s Q_l}{p_s q_l}\Delta_s(\gamma'_{ms}\varepsilon_{sl}) + \gamma_{mn,\,s+1,\,l}\frac{Q_l}{q_l}\varepsilon_{s+1,\,l}\quad (k > s),$$

$$f^{kl}_{mnkt} = \gamma'_{mk}\frac{P_k}{p_k}Q_t\Delta_t\frac{\Delta_t(\gamma''_{nt}\varepsilon_{kt})}{q_t}\quad (l-1 > t),$$

$$f^{kl}_{mnk,\,l-1} = \gamma'_{mk}\frac{P_k}{p_k}Q_{l-1}\Delta_l\frac{\Delta_l(\gamma''_{n,\,l-1}\varepsilon_{k,\,l-1})}{q_{l-1}} - \gamma'_{mk}\gamma''_{n,\,l+1}\frac{P_k Q_{l-1}}{p_k q_l}\varepsilon_{l+1,\,k},$$

$$f^{kl}_{mnkl} = \gamma_{mnkl}\frac{P_k Q_l}{p_k q_l}\varepsilon_{kl},$$

$$f_{mnst} = f'_{mnst} + f''_{mnst} = \frac{P_s}{p_s}Q_t\Delta_t\frac{\Delta_{st}(\gamma_{mnst}\varepsilon_{st})}{q_t} +$$
$$+ \gamma'_{m,\,s+1}Q_t\Delta_t\frac{\Delta_t(\gamma''_{nt}\varepsilon_{s+1,\,t})}{q_t}. \qquad (14)$$

Если P сохраняет абсолютную сходимость и Q — сходимость, то метод $\overline{C} = (\gamma_{mnkl}\varepsilon_{kl})$ переводит пространство $l\times l$ в простран-

ство сходящихся двойных последовательностей, и по лемме 4 условие 1° необходимо. Пусть величины ε_{kl} являются множителями суммируемости типа $(|A|, B, C_\omega)$. Так как

$$x'_s = \overline{\Delta}_s \sum_{\mu=0}^{s} \left(\sum_{k=\mu}^{s} a_{s\mu}\right) x_\mu, \quad Y'_t = \sum_{\lambda=0}^{t} \left(\sum_{l=\lambda}^{t} b_{tl}\right) y_\lambda$$

и при B-суммируемости ряда $\sum\limits_{\lambda} y_\lambda$ существует $\lim\limits_{t} Y'_t = Y'$, то при помощи обратных преобразований и предельного перехода, по лемме 1, получим равенство

$$\sum_{s,\,t} \gamma_{mnst}\, \varepsilon_{st}\, x_s\, y_t = \sum_{s,\,t} f_{mnst}\, x'_s\, (Y'_t - Y') + Y' \sum_{s} f_{mns}\, x'_s, \qquad (15)$$

откуда, по лемме 1 и 3, следует

$$\lim_{m,\,n} \sum_{s,\,t} \gamma_{mnst}\, \varepsilon_{st}\, x_s\, y_t = \sum_{s,\,t} f_{st}\, x'_s (Y'_t - Y') + Y' \sum_{s} f_s\, x'_s \qquad (16)$$

при всех $|A|$-суммируемых рядах $\sum\limits_{s} x_s$ и B-суммируемых рядах $\sum\limits_{t} y_t$. Здесь $f_{mnst} = \lim\limits_{k,\,l} f^{kl}_{mnst}\, f_{st} = \lim\limits_{m,\,n} f_{mnst}$, где f^{kl}_{mnst} дается формулой (12), и $\sum\limits_{t} |f_{mnst}| \leqslant M \quad (m, n \geqslant N)$, $|f_{mns}| \leqslant M \quad (m, n \geqslant N)$, $\sum\limits_{t} |f_{st}| = O(1)$ и $f_s = O(1)$, причем, если $N \neq 0$, то $\sup\limits_{s} \sum\limits_{t} |f_{mnst}| < \infty$ и $\sup\limits_{s} |f_{mns}| < \infty$ при всех $m, n = 0, 1, \ldots$. В дальнейшем во всех условиях, в которых фигурируют $m, n \geqslant N$, $m \geqslant N$ или $n \geqslant N$, будет подразумеваться конечность sup по свободному индексу при всех $m, n = 0, 1, \ldots$. Мы не будем это в каждом случае специально подчеркивать.

При $x = \{X_s\} = \{\delta_{sk}\}$ и $y = \{Y_t\} = \{\delta_{tl}\}$ из (16) следует равенство

$$\Delta_{kl}\, \varepsilon_{kl} = \sum_{s,\,t=k,\,l}^{\infty} f_{st}\, \overline{\Delta}_s\, a_{sk}\, b_{tl} + \lim_{t} b_{tl} \left(\sum_{s=k}^{\infty} f_s\, \overline{\Delta}_s\, a_{sk} - \sum_{s,\,t=k,\,0}^{\infty} f_{st}\, \overline{\Delta}_s\, a_{sk} \right),$$

откуда, если $A = P$, $B = Q$, метод P сохраняет абсолютную сходимость и метод Q — сходимость (см. леммы 6 и 7), вытекает условие 2°.

Если метод B сохраняет сходимость, то необходимые условия для множителей суммируемости типа $(|A|, E, C_\omega)$ являются необходимыми и для типа $(|A|, B, C_\omega)$. При $B = E$, $x = \{X_s\} = \{\delta_{sk}\}$ и $y = \{Y_t\} = \{\delta_{tt} - \sum\limits_{\varrho=0}^{l-1} \delta_{t\varrho}\}$ из (16) мы получим:

$$\Delta_k\, \varepsilon_{kl} = \sum_{s,\,t=k,\,l}^{\infty} f_{st}\, \overline{\Delta}_s\, a_{sk} + \sum_{s=k}^{\infty} f_s\, \overline{\Delta}_s\, a_{sk} - \sum_{s,\,t=k,\,0}^{\infty} f_{st}\, \overline{\Delta}_s\, a_{sk},$$

откуда, если $A = P$, сразу вытекает условие 3°. Теперь при помощи преобразования Абеля из условий 2° и 3° следует

$$P_k Q_l \Delta_{kl} \varepsilon_{kl} = O(p_k q_l). \tag{17}$$

При $B = E$, $x = \{\delta_{sk}\}$ и $y = \{\delta_{tt} - \sum_{\varrho=0}^{l-1} \delta_{t\varrho}\}$ из (15) следует равенство

$$\gamma''_{nl} \Delta_k (\gamma'_{mk} \varepsilon_{kl}) = \sum_{s,\, t=k,\, l}^{\infty} f_{mnst} \bar{\Delta}_s a_{sk} + \sum_{s=k}^{\infty} f_{mns} \bar{\Delta}_s a_{sk} - \sum_{s,\, t=k,\, 0}^{\infty} f_{mnst} \bar{\Delta}_s a_{sk},$$

откуда, если $A = P$, перейдя к пределу при $n \to \infty$, выводим условие

$$P_k \Delta_k (\gamma'_{mn} \varepsilon_{kl}) = O(p_k) \quad (m \geqslant N).$$

Но поскольку

$$\frac{P_k}{p_k} \Delta_k (\gamma'_{mk} \varepsilon_{kl}) = \frac{P_k}{p_k} \varepsilon_{kl} \Delta_k \gamma'_{mk} + \gamma'_{m,\, k+1} \frac{P_k}{p_k} \Delta_k \varepsilon_{kl},$$

то, ввиду условия 3° и регулярности C', отсюда следует условие 5°.

Аналогично при $A = E$, $x = \{\delta_{ss} - \sum_{\varrho=0}^{k-1} \delta_{s\varrho}\}$ и $y = \{\delta_{tl}\}$ из (16) получим необходимое условие:

$$\Delta_l \varepsilon_{kl} = \sum_{t=l}^{\infty} f_{kt} b_{tl} + \lim_t b_{tl} (f_k - \sum_t f_{kt}),$$

откуда, если $B = Q$, сразу вытекает условие 4°. В свою очередь, из 1° и 4° следует

$$Q_l \Delta_l \varepsilon_{kl} = O(q_l). \tag{18}$$

Если $A = E$, $x = \{\delta_{ss} - \sum_{\varrho=0}^{k-1} \delta_{s\varrho}\}$ и $y = \{\delta_{tl}\}$, то (15) превращается в равенство

$$\gamma'_{mk} \Delta_l (\gamma''_{nl} \varepsilon_{kl}) = \sum_{t=l}^{\infty} f_{mnkt} b_{tl} + \lim_t b_{tl} (f_{mnk} - \sum_t f_{mnkt}),$$

откуда при $B = Q$ вытекает

$$\sum_l \left| Q_l \Delta_l \frac{\Delta_l (\gamma''_{nl} \varepsilon_{kl})}{q_l} \right| = O(1) \quad (n \geqslant N).$$

Поскольку

$$Q_l \Delta_l \frac{\Delta_l(\gamma''_{nl}\varepsilon_{kl})}{q_l} = \gamma''_{n,\,l+2} Q_l \Delta_l \frac{\Delta_l \varepsilon_{kl}}{q_l} + Q_l \frac{\Delta_l \varepsilon_{kl}}{q_l} \cdot \Delta_l \gamma''_{n,\,l+1} +$$

$$+ Q_l \varepsilon_{k,\,l+1} \Delta_l \frac{\Delta_l \gamma''_{nl}}{q_l} + Q_l \frac{\Delta_l \varepsilon_{kl}}{q_l} \cdot \Delta_l \gamma''_{nl},$$

то, ввиду условий 4°, (18) и регулярности C'', отсюда заключаем условие 6°.

При $x = \{\delta_{sk}\}$ и $y = \{\delta_{tl}\}$ из (15) следует

$$\Delta_{kl}(\gamma_{mnkl}\varepsilon_{kl}) = \sum_{s,\,t=k,\,l}^{\infty} f_{mnst}\,\overline{\Delta}_s\, a_{sk}\, b_{tl} + \lim_t b_{tl}\Big(\sum_{s=k}^{\infty} f_{mns}\,\overline{\Delta}_s\, a_{sk} -$$

$$- \sum_{s,\,t=k,\,0}^{\infty} f_{mnst}\,\overline{\Delta}_s\, a_{sk}\Big),$$

откуда, если $A = P$ и $B = Q$, вытекает

$$P_k \sum_l \left| Q_l \Delta_l \frac{\Delta_{kl}(\gamma_{mnkl}\varepsilon_{kl})}{q_l} \right| = O(p_k) \quad (m, n \geqslant N). \tag{19}$$

Перейдя в (19) к пределу при $m \to \infty$, получаем условие

$$P_k \sum_l \left| Q_l \Delta_l \frac{\Delta_{kl}(\gamma''_{nl}\varepsilon_{kl})}{q_l} \right| = O(p_k) \quad (n \geqslant N),$$

откуда при помощи тождества

$$\frac{P_k}{p_k} Q_l \Delta_l \frac{\Delta_{kl}(\gamma''_{nl}\varepsilon_{kl})}{q_l} = \gamma''_{n,\,l+2} \frac{P_k}{p_k} Q_l \Delta_l \frac{\Delta_{kl}\varepsilon_{kl}}{q_l} +$$

$$+ \frac{P_k}{p_k} Q_l \Delta_k \varepsilon_{k,\,l+1} \Delta_l \frac{\Delta_l \gamma''_{nl}}{q_l} + \frac{P_k Q_l}{p_k q_l} (\Delta_{kl}\varepsilon_{kl})(\Delta_l \gamma''_{nl} + \Delta_l \gamma''_{n,\,l+1}),$$

в силу условий 2°, (17) и регулярности C'', следует условие 7°.

Аналогично, перейдя в (19) к пределу при $n \to \infty$, получим условие

$$P_k \sum_l \left| Q_l \Delta_l \frac{\Delta_{kl}(\gamma'_{mk}\varepsilon_{kl})}{q_l} \right| = O(p_k) \quad (m \geqslant N),$$

откуда при помощи тождества

$$\Delta_{kl}(\gamma'_{mk}\varepsilon_{kl}) = \gamma'_{m,\,k+1}\Delta_{kl}\varepsilon_{kl} + \Delta_l \varepsilon_{kl} \Delta_k \gamma'_{mk},$$

в силу условия 2° и регулярности C', следует условие 8°. Из условий 5° и 8° вытекает

$$P_k Q_l \Delta_l \varepsilon_{kl} \Delta_k \gamma'_{mk} = O(p_k q_l) \quad (m \geqslant N). \tag{20}$$

Поскольку

$$\frac{P_k}{p_k} Q_l \Delta_l \frac{\Delta_{kl}(\gamma_{mnkl}\varepsilon_{kl})}{q_l} = \gamma'_{m,\,k+1}\frac{P_k\,Q_l}{p_k\,q_l}(\Delta_{kl}\varepsilon_{kl})(\Delta_l\gamma''_{nl}+\Delta_l\gamma''_{n,\,l+1})+$$

$$+\gamma'_{m,\,k+1}\gamma''_{n,\,l+2}\frac{P_k}{p_k}Q_l\Delta_l\frac{\Delta_{kl}\varepsilon_{kl}}{q_l}+\gamma'_{m,\,k+1}\frac{P_k}{p_k}Q_l\Delta_k\varepsilon_{k,\,l+1}\Delta_l\frac{\Delta_l\gamma''_{nl}}{q_l}+$$

$$+\frac{P_k}{p_k}(\Delta_k\gamma'_{mk})Q_l\Delta_l\frac{\Delta_l\varepsilon_{kl}}{q_l}\cdot\gamma''_{n,\,l+2}+\frac{P_k\,Q_l}{p_k\,q_l}(\Delta_l\varepsilon_{kl})\Delta_k\gamma'_{mk}(\Delta_l\gamma''_{nl}+$$

$$+\Delta_l\gamma''_{n,\,l+1})+\frac{P_k}{p_k}(\Delta_k\gamma'_{mk})Q_l\varepsilon_{k,\,l+1}\Delta_l\frac{\Delta_l\gamma''_{nl}}{q_l}, \qquad (21)$$

то, ввиду условий 2°, 7°, 8°, (17), (20) и регулярности C' и C'', из (19) следует условие 9°.

По условию 2° леммы 11 $\sum\limits_{t=0}^{l}|f^{kl}_{mnkt}|\leqslant M_{mn}$, из чего, если иметь в виду (13), вытекает необходимость условий 10° и 12°. Так как из условия 12° следует

$$|\gamma'_{mk}\gamma''_{nl}\frac{Q_l}{q_l}\varepsilon_{kl}|\leqslant M_{mn},$$

то из необходимого условия $|f^{kl}_{mnsl}|\leqslant M_{mn}$ $(k>s)$ непосредственно вытекает условие 11°. Тем самым необходимость условий теоремы 3 доказана.

Достаточность. Докажем, что из условий теоремы 3 следуют условия леммы 11, в которых величины f^{kl}_{mnst} и f_{mnst} определены по формулам (13) и (14). Имея в виду (13) и (14) и регулярность C' и C'', очевидно, что условия 1°·и 3° леммы 12 выполнены. По лемме 12 выполнено, в силу условий 1°, 3°, 5°, 12°, лемм 6 и 7, и условие 5° леммы 11. В силу условий 2°, 3°, 5°, 7°, 8°, 9°, вытекающих из них (17) и (20) и регулярности C' и C'', из (21) следует условие (19), т. е.

$$\sum_t|f'_{mnst}|\leqslant M\quad(m,\,n\geqslant N).$$

Так как

$$\sum_t|f''_{mnst}|\leqslant|\gamma'_{m,\,s+1}|\left(\sum_t|\gamma''_{n,\,t+2}|\left|Q_t\Delta_t\frac{\Delta_t\varepsilon_{s+1,\,t}}{q_t}\right|+\right.$$

$$+\sum_t\left|Q_t\frac{\Delta_t\varepsilon_{s+1,\,t}}{q_t}|\Delta_t\gamma''_{n,\,t+1}|+\sum_t\right|Q_t\varepsilon_{s+1,\,t+1}\Delta_t\frac{\Delta_t\gamma''_{nt}}{q_t}\Bigg|+$$

$$+\sum_t\left|Q_t\frac{\Delta_t\varepsilon_{s+1,\,t}}{q_t}\right||\Delta_t\gamma''_{nt}|,$$

то, ввиду условий 1°, 4°, 6°, вытекающего из них (18) и регуляр-

ности C' и C'', $\sum\limits_t |f''_{mnst}| = O(1)$ $(n \geqslant N)$. Следовательно, условие 4° леммы 11 выполнено. Остается доказать выполнение условия 2° леммы 11. Пусть $k > s$. Тогда

$$\sum_{t=0}^{l} |f^{kl}_{mnst}| \leqslant \sum_t |f_{mnst}| + \left| \gamma_{mn,\, s+1,\, l+1} \frac{P_s Q_{l-1}}{p_s q_l} \varepsilon_{s+1,\, l+1} - \right.$$
$$- \gamma_{mns,\, l+1} \frac{P_s Q_{l-1}}{p_s q_l} \varepsilon_{s,\, l+1} - \left. \gamma_{mn,\, s+1,\, l+1} \frac{Q_{l-1}}{q_l} \varepsilon_{s+1,\, l+1} \right| +$$
$$+ \left| \frac{P_s Q_l}{p_s q_l} \Delta_s (\gamma_{mnsl}\, \varepsilon_{sl}) + \gamma_{mn,\, s+1,\, l} \frac{Q_l}{q_l} \varepsilon_{s+1,\, l} \right| = \qquad (22)$$
$$= \sum_t |f_{mnst}| + A_{mnsl} + B_{mnsl}.$$

По доказанному $\sum\limits_t |f_{mnst}| \leqslant M_{mn}$ (так как при $N \neq 0$ $\sup\limits_s \sum\limits_t |f_{mnst}| < \infty$ при всех $m,\ n = 0,\ 1,\ \ldots$). Исходим из тождества

$$A_{mnsl} = \gamma_{mn,\, s+1,\, l+1} \varepsilon_{s+1,\, l+1} + \frac{P_s Q_l}{p_s q_l} \Delta_{sl} (\gamma_{mnsl}\, \varepsilon_{sl}) + \qquad (23)$$
$$+ \gamma'_{m,\, s+1} \frac{Q_l}{q_l} \Delta_l (\gamma''_{nl}\, \varepsilon_{s+1,\, l}) + \gamma''_{n,\, l+1} \frac{P_s}{p_s} (\Delta_k (\gamma_{mnk0}\, \varepsilon_{k0}) - B_{mnsl}.$$

Поскольку

$$\frac{P_k}{p_k} \sum_{t=0}^{l-1} Q_t \Delta_t \frac{\Delta_{kt} (\gamma_{mnkt}\, \varepsilon_{kt})}{q_t} = \frac{P_k}{p_k} (\Delta_k (\gamma_{mnk0}\, \varepsilon_{k0}) - \Delta_k (\gamma_{mnk,\, l+1}\, \varepsilon_{k,\, l+1})) -$$
$$- \frac{P_k Q_l}{p_k q_l} \Delta_{kl} (\gamma_{mnkl}\, \varepsilon_{kl})$$

и

$$\gamma''_{nl} \frac{P_k}{p_k} \Delta_k (\gamma'_{mk}\, \varepsilon_{kl}) = \gamma''_{nl} \frac{P_k}{p_k} \varepsilon_{kl}\, \Delta_k\, \gamma'_{mk} + \gamma'_{m,\, k+1}\, \gamma''_{nl} \frac{P_k}{p_k} \Delta_k\, \varepsilon_{kl},$$

то, в силу условий 3°, 5°, (19) и регулярности C' и C'',

$$\left| \frac{P_k Q_l}{p_k q_l} \Delta_{kl} (\gamma_{mnkl}\, \varepsilon_{kl}) \right| \leqslant M_{mn}. \qquad (24)$$

Из тождества

$$\gamma'_{mk} \frac{P_k}{p_k} \sum_{t=0}^{l-1} Q_t \Delta_t \frac{\Delta_t (\gamma''_{nt}\, \varepsilon_{kt})}{q_t} = \gamma'_{mk} \frac{P_k}{p_k} \left(\sum_{t=0}^{l} \Delta_t (\gamma''_{nt}\, \varepsilon_{kt}) - \right.$$
$$\left. - \frac{Q_l}{q_l} \Delta_l (\gamma''_{nl}\, \varepsilon_{kl}) \right),$$

ввиду условий 10°, 12° и леммы 7, следует

$$|\gamma'_{mk}\frac{P_kQ_l}{p_kq_l}\Delta_l(\gamma''_{nl}\varepsilon_{kl})|\leqslant M_{mn}. \tag{25}$$

Так как из условий 11° и 12° вытекает, что $|B_{mnsl}|\leqslant M_{mn}$, то условия 1°, 11°, 12°, (24) и (25) и регулярность C' и C'', согласно (24), влекут за собой $|A_{mnsl}|\leqslant M_{mn}$. Следовательно, $\sum\limits_{t=0}^{l}|f^{kl}_{mnst}|\leqslant \leqslant M_{mn}$ $(k>s)$. Если $k=s$, то

$$\sum_{t=0}^{l}|f^{kl}_{mnkt}|\leqslant\left|\gamma'_{mk}\frac{P_k}{p_k}\right|\sum_t\left|Q_t\Delta_t\frac{\Delta_t(\gamma''_{nt}\varepsilon_{kt})}{q_t}\right|+$$

$$+2|\gamma'_{mk}\gamma''_{nl}\frac{P_kQ_l}{p_kq_l}\varepsilon_{kl}|+|\gamma'_{mk}\gamma''_{n,\,l+1}\frac{P_k}{p_k}\varepsilon_{k,\,l+1}|+$$

$$+|\gamma'_{mk}\frac{P_kQ_l}{p_kq_l}\Delta_l(\gamma''_{nl}\varepsilon_{kl})|,$$

и условие 2° леммы 11 при $k=s$ выполнено в силу условий 10°, 12° и (25).

Теорема доказана.

Примечание. Если матрицы методов суммирования C' и C'' конечнострочны, то условия 10°—12° можно опустить.

§ 5. Множители суммируемости типа $(|P|, Q_0, C_\omega)$

Лемма 13. *В предпосылках леммы* 11 *относительно методов A, B и C комплексные числа* ε_{kl} *являются множителями суммируемости*: а) *типа* $(|A|, B_0, C_c)$, б) *типа* $(|A|, B_0, C_b)$, в) *типа* $(|A|, B_0, C_r)$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия* 1°—4° *леммы* 11 *и*

$$5°\ \lim_{k,\,l}\sum_{t=0}^{l}|f^{kl}_{mnst}|=\sum_t|f_{mnst}|,$$

$$6°\ \lim_{m,\,n}\sum_t|f_{mnst}-f_{st}|=0,$$

$$\text{в)}\begin{cases}\lim\limits_m\sum\limits_t|f_{mnst}-\lim\limits_m f_{mnst}|=0,\\ \lim\limits_n\sum\limits_t|f_{mnst}-\lim\limits_n f_{mnst}|=0.\end{cases}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 11.

Теорема 4. *Если* $\lim\limits_l\gamma''_{nl}=0$, *то в предпосылках теоремы* 3 *относительно методов P, Q и C комплексные числа* ε_{kl} *являются множителями суммируемости типа* $(|P|, Q_0, C_\omega)$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия* 1°—12° *теоремы* 3 *и*

13° $\lim\limits_{l} Q_l \dfrac{\Delta_l \varepsilon_{kl}}{q_l} = 0,$

14° $\lim\limits_{n} \sum\limits_{l} \left| Q_l \varepsilon_{k,\, l+1} \Delta_l \dfrac{\Delta_l \gamma''_{nl}}{q_l} \right| = 0,$

15° $\lim\limits_{l} \gamma''_{nl} Q_l \dfrac{\varepsilon_{kl}}{q_l} = 0,$

16° $\lim\limits_{l} Q_l \dfrac{\varepsilon_{kl}}{q_l} \Delta_l \gamma''_{nl} = 0.$

Доказательство. Необходимость. Так как множители суммируемости типа $(|P|,\ Q_O,\ C_\omega)$ являются и множителями суммируемости типа $(|P|,\ Q,\ C_\omega)$, то условия 1°—12° теоремы 3 необходимы. Поскольку последовательность $\{X_\nu\} = \{\delta_{\nu k}\}$ $|P|$-суммируема, то необходимость условий 13°—16° следует из теоремы 10 статьи [5].

Достаточность. Докажем, что условия теоремы 4 гарантируют выполнение условий леммы 13, в которых величины f^{kl}_{mnst} и f_{mnst} определены формулами (13) и (14). Очевидно, достаточно показать, что условия теоремы 4 влекут за собой условия 5° и 6° леммы 14.

Имея в виду тождество (21), легко получить неравенство

$$\begin{aligned}
\sum_t |f_{mnst} - f_{st}| \leqslant{}& \left| \gamma'_{m,\, s+1} \frac{P_s}{p_s} \right| \sum_t \left| Q_t \frac{\Delta_{st}\, \varepsilon_{st}}{q_t} \right| (|\Delta_t \gamma''_{nt}| + |\Delta_t \gamma''_{n,\, t+1}|) + \\
&+ \left| \frac{P_s}{p_s} \right| \sum_t |\gamma'_{m,\, s+1}\, \gamma''_{n,\, t+1} - 1| \left| Q_t \Delta_t \frac{\Delta_{st}\, \varepsilon_{st}}{q_t} \right| + \\
&+ \sum_t |\gamma'_{m,\, s+1}\, \gamma''_{n,\, t+1} - 1| \left| Q_t \Delta_t \frac{\Delta_t\, \varepsilon_{s+1,\, t}}{q_t} \right| + \\
&+ |\gamma'_{m,\, s+1}| \sum_t \left| Q_t \frac{\Delta_t\, \varepsilon_{s+1,\, t}}{q_t} \right| (|\Delta_t \gamma''_{nt}| + |\Delta_t \gamma''_{n,\, t+1}|) + \\
&+ \left| \gamma'_{m,\, s+1} \frac{P_s}{p_s} \right| \sum_t \left| Q_t \Delta_s\, \varepsilon_{s,\, t+1} \Delta_t \frac{\Delta_t \gamma''_{nt}}{q_t} \right| + \\
&+ \left| \frac{P_s}{p_s} \Delta_s \gamma'_{ms} \right| \sum_t \left| Q_t \Delta_t \frac{\Delta_t\, \varepsilon_{st}}{q_t} \right| |\gamma''_{n,\, t+2}| + \\
&+ \left| \frac{P_s}{p_s} \Delta_s \gamma'_{ms} \right| \sum_t \left| Q_t\, \varepsilon_{s,\, t+1} \Delta_t \frac{\Delta_t \gamma''_{nt}}{q_t} \right| + \\
&+ |\gamma'_{m,\, s+1}| \sum_t \left| Q_t\, \varepsilon_{s+1,\, t+1} \Delta_t \frac{\Delta_t \gamma''_{nt}}{q_t} \right| + \\
&+ \left| \frac{P_s}{p_s} \Delta_s \gamma'_{ms} \right| \sum_t \left| Q_t \frac{\Delta_t\, \varepsilon_{st}}{q_t} \right| (|\Delta_t \gamma''_{n,\, t+1}| + |\Delta_t \gamma''_{nt}|),
\end{aligned}$$

в правой части которого первые пять рядов, ввиду условий 2°, 4°, 13° и регулярности методов C' и C'', равномерно сходятся относительно m и n. Поэтому отсюда при $m, n \to \infty$, в силу условия 14° и регулярности C' и C'', следует первое из условий 6° леммы 13.

Исходя из (21), легко получить

$$\sum_t |f_{mnst} - \lim_m f_{mnst}| \leqslant |\gamma'_{m,\,s+1} - 1| \sum_t \left| Q_t \Delta_t \frac{\Delta_{st}(\gamma''_{nt}\varepsilon_{st})}{q_t} \right| +$$

$$+ |\gamma'_{m,\,s+1} - 1| \left| \frac{P_s}{p_s} \right| \left(\sum_t \left| Q_t \frac{\Delta_{st}\varepsilon_{st}}{q_t} \right| (|\Delta_t \gamma''_{nt}| + |\Delta_t \gamma''_{n,\,t+1}|) + \right.$$

$$\left. + \sum_t \left| Q_t \Delta_t \frac{\Delta_{st}\varepsilon_{st}}{q_t} \cdot \gamma''_{n,\,t+2} \right| + \sum_t \left| Q_t \Delta_s \varepsilon_{s,\,t+1} \Delta_t \frac{\Delta_t \gamma''_{nt}}{q_t} \right| \right) +$$

$$+ \left| \frac{P_s}{p_s} \Delta_s \gamma'_{ms} \right| \left(\sum_t \left| Q_t \Delta_t \frac{\Delta_t \varepsilon_{st}}{q_t} \cdot \gamma''_{n,\,t+2} \right| + \sum_t \left| Q_t \frac{\Delta_t \varepsilon_{st}}{q_t} \right| (|\Delta_t \gamma''_{nt}| + \right.$$

$$\left. + |\Delta_t \gamma''_{n,\,t+1}|) + \sum_t \left| Q_t \varepsilon_{s,\,t+1} \Delta_t \frac{\Delta_t \gamma''_{nt}}{q_t} \right| \right),$$

откуда сразу следует выполнение второго из условий 6° леммы 13. Аналогично можно получить неравенство

$$\sum_t |f_{mnst} - \lim_n f_{mnst}| \leqslant \left| \gamma'_{m,\,s+1} \frac{P_s}{p_s} \right| \sum_t \left| Q_t \frac{\Delta_{st}\varepsilon_{st}}{q_t} \right| (|\Delta_t \gamma''_{n,\,t+1}| + |\Delta_t \gamma''_{nt}|) +$$

$$+ \left| \gamma'_{m,\,s+1} \frac{P_s}{p_s} \right| \sum_t |\gamma''_{n,\,t+2} - 1| \left| Q_t \Delta_t \frac{\Delta_{st}\varepsilon_{st}}{q_t} \right| +$$

$$+ \left| \frac{P_s}{p_s} \Delta_s \gamma'_{ms} \right| \sum_t |\gamma''_{n,\,t+2} - 1| \left| Q_t \Delta_t \frac{\Delta_t \varepsilon_{st}}{q_t} \right| +$$

$$+ \left| \frac{P_s}{p_s} \Delta_s \gamma'_{ms} \right| \sum_t \left| Q_t \frac{\Delta_t \varepsilon_{st}}{q_t} \right| (|\Delta_t \gamma''_{nt}| + |\Delta_t \gamma''_{n,\,t+1}|) +$$

$$+ |\gamma'_{m,\,s+1}| \sum_t |\gamma''_{n,\,t+2} - 1| \left| Q_t \Delta_t \frac{\Delta_t \varepsilon_{s+1,\,t}}{q_t} \right| +$$

$$+ |\gamma'_{m,\,s+1}| \sum_t \left| Q_t \frac{\Delta_t \varepsilon_{s+1,\,t}}{q_t} \right| (|\Delta_t \gamma''_{nt}| + |\Delta_t \gamma''_{n,\,t+1}|) +$$

$$+ \left| \gamma'_{m,\,s+1} \frac{P_s}{p_s} \right| \sum_t \left| Q_t \Delta_s \varepsilon_{s,\,t+1} \Delta_t \frac{\Delta_t \gamma''_{nt}}{q_t} \right| +$$

$$+ \left| \frac{P_s}{p_s} \Delta_s \gamma'_{ms} \right| \sum_t \left| Q_t \varepsilon_{s,\,t+1} \Delta_t \frac{\Delta_t \gamma''_{nt}}{q_t} \right| +$$

$$+ |\gamma'_{m,\,s+1}| \sum_t \left| Q_t \varepsilon_{s+1,\,t+1} \Delta_t \frac{\Delta_t \gamma''_{nt}}{q_t} \right|,$$

в правой части которого первые шесть рядов, в силу условий 4°, 13° и регулярности C'', сходятся равномерно относительно n. Поэтому отсюда при $n \to \infty$, ввиду условия 14°, вытекает третье из условий 6° леммы 13.

Если $k > s$, то на основании (13), (14) и (23)

$$\sum_{t=0}^{l} |c^{kl}_{mnst}| = \sum_{t=0}^{l-2} |c_{mnst}| + |c_{mns,\, l-1} + A_{mnsl}| + |B_{mnsl}|. \qquad (26)$$

Очевидно $\lim\limits_{l} c_{mns,\, l-1} = 0$ и, вследствие условия 13°, также $\lim\limits_{l} B_{mnsl} = 0$. Поскольку

$$\frac{Q_l}{q_l} \Delta_l (\gamma''_{nl}\, \varepsilon_{s+1,\, l}) = \frac{Q_l}{q_l} \varepsilon_{s+1,\, l}\, \Delta_l \gamma''_{nl} + \gamma''_{n,\, l+1} \frac{Q_l}{q_l} \Delta_l \varepsilon_{s+1,\, l}$$

и

$$\frac{Q_l}{q_l} \Delta_{sl} (\gamma_{mnsl}\, \varepsilon_{sl}) = \Delta_s \left(\gamma'_{ms} \left(\gamma''_{n,\, l+1} \frac{Q_l}{q_l} \Delta_l \varepsilon_{sl} + Q_l \frac{\varepsilon_{sl}}{q_l} \Delta_l \gamma''_{nl} \right) \right),$$

то, ввиду условий 1°, 13°, 15°, 16° и $\lim\limits_{l} \gamma''_{nl} = 0$, из (23) следует $\lim\limits_{l} A_{mnsl} = 0$. Из (26) теперь сразу вытекает выполнение условия 5° леммы 13 при $k > s$. Случай $k = s$ доказывается аналогично.

Теорема доказана.

Примечание. Если матрицы методов C' и C'' конечнострочны, то условия 10°, 11°, 12°, 15° и 16° можно опустить.

§ 6. Некоторые частные случаи

При $C' = (R, r_n)$ и $C'' = (R, s_n)$ из теорем 3 и 4 вытекают следующие предложения.

Теорема 5. *Если метод P сохраняет абсолютную сходимость, метод Q — сходимость, методы R и S — регулярны, то комплексные числа ε_{kl} являются множителями суммируемости типа $(|P|, Q, (RS)_\omega)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия* 1°—4° *теоремы* 3 *и*

$$5°\quad P_k r_k \varepsilon_{kl} = O(p_k R_k),$$

$$6°\quad \sum_{l=0}^{n-1} \left| Q_l \varepsilon_{k,\, l+1} \Delta_l \frac{s_l}{q_l} \right| = O(S_n),$$

$$7°\quad Q_l s_l \varepsilon_{kl} = O(q_l S_l),$$

$$8°\quad P_k \sum_{l=0}^{n-1} \left| Q_l (\Delta_k \varepsilon_{k,\, l+1}) \Delta_l \frac{s_l}{q_l} \right| = O(p_k S_n),$$

$$9^\circ \quad P_k Q_l s_l \Delta_k \varepsilon_{kl} = O(p_k q_l S_l),$$

$$10^\circ \quad P_k r_k \sum_l \left| Q_l \Delta_l \frac{\Delta_l \varepsilon_{kl}}{q_l} \right| = O(p_k R_k),$$

$$11^\circ \quad P_k r_k \sum_{l=0}^{n-1} \left| Q_l \varepsilon_{k,\,l+1} \Delta_l \frac{s_l}{p_l} \right| = O(p_k S_n),$$

$$12^\circ \quad P_k r_k Q_l s_l \varepsilon_{kl} = O(p_k R_k q_l S_l).$$

Теорема 6. *В предпосылках теоремы* 5 *относительно методов* P, Q, R *и* S *комплексные числа* ε_{kl} *являются множителями суммируемости типа* $(|P|, Q_0, (RS)_\omega)$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия* 1°—12° *теоремы* 5 *и*

$$13^\circ \quad \lim_l Q_l \frac{\Delta_l \varepsilon_{kl}}{q_l} = 0,$$

$$14^\circ \quad \lim_n \frac{1}{S_n} \sum_{l=0}^{n-1} \left| Q_l \varepsilon_{k,\,l+1} \Delta_l \frac{s_l}{q_l} \right| = 0,$$

$$15^\circ \quad \lim_l \frac{Q_l s_l}{q_l S_l} \varepsilon_{kl} = 0.$$

Если $R = P$ и $Q = S$, то из теорем 5 и 6 вытекает теорема 9 статьи [1].

Если $R_n = O(r_n)$ и $S_n = O(s_n)$, т. е. методы R и Q эквивалентны методу сходимости [7], то из теорем 5 и 6 следует теорема 7 из [1].

Если в теоремах 1—6 выбрать ε_{kl} так, что $\varepsilon_{kl} = \varepsilon'_k \cdot \varepsilon''_l$ при $\varepsilon'_k = 0$ $(k > 0)$ и $\varepsilon'_0 \neq 0$ или $\varepsilon''_l = 0$ $(l > 0)$ и $\varepsilon''_0 \neq 0$, то теоремы 1—6 превратятся в соответствующие теоремы о множителях суммируемости для простых рядов статьи [2].

Литература

1. Вихманн Ф., Распространение метода Пейеримхоффа на случай обобщенных множителей суммируемости. Настоящий сборник, стр. 170—193.
2. Кангро Г., О множителях суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1955, **37**, 191—232.
3. Кангро Г., О множителях суммируемости для двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1957, **46**, 3—42.
4. Кангро Г., Барон С., Множители суммируемости и абсолютной суммируемости для двойных рядов, абсолютно суммируемых методом взвешенных средних Рисса. Настоящий сборник, стр. 155—169.
5. Кангро Г., Вихманн Ф., Об абстрактных множителях суммируемости для метода взвешенных средних Рисса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 209—225.
6. Кулль И. Г., Умножение суммируемых двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 249—262.
7. Hill, Y. D., Some properties of summability. Duke Math. J., 1942, **9**, 373—381.

8. Jurkat, W., Über Konvergenzfaktoren bei Rieszschen Mitteln. Math. Z., 1951, **54**, 262—271.
9. Jurkat, W., Peyerimhoff, A., Mittelwertsätze bei Matrix- und Integraltransformationen. Math. Z., 1952, **55**, 92—108.
10. Jurkat, W., Peyerimhoff, A., Summierbarkeitsfaktoren. Math. Z., 1953, **57**, 265—290.
11. Peyerimhoff, A., Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren. Math. Z., 1952, **55**, 23—54.
12. Peyerimhoff, A., Untersuchungen über absolute Summierbarkeit. Math. Z., 1953, **57**, 265—290.
13. Pringsheim, A., Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre, B. I. Leipzig-Berlin, 1923.

Поступило
25 XI 1961

ÜLDISTATUD SUMMEERUVUSTEGURID RIESZI KAALUTUD KESKMISTE MENETLUSE KORRAL

F. Vichmann
Arvutuskeskus

Resümee

Kompleksarve ε_{kl} $(k, l = 0, 1, \ldots)$ nimetatakse $(|\mathfrak{A}|, \mathfrak{B}, C_\omega)$ $((|\mathfrak{A}|, \mathfrak{B}_O, C_\omega))$ tüüpi summeeruvustegureiks, kui rida $\sum_{k,l} \varepsilon_{kl} X_k Y_l$ on C_ω-summeeruv iga $|A|$-summeeruva jada $\{X_k\}$ ja B-summeeruva (B-tõkestatud) jada $\{Y_l\}$ korral, ja $(|A|, B, C_\omega)$ $((|A|, B_O, C_\omega))$ tüüpi summeeruvustegureiks, kui rida $\sum_{k,l} \varepsilon_{kl} x_k y_l$ on C_ω-summeeruv iga $|A|$-summeeruva rea $\sum_k x_k$ ja B-summeeruva (B-tõkestatud) rea $\sum_l y_l$ korral. Siin ω on kas c, b või r; rida on C_ω — summeeruv, kui tema C-transformatsioon on koonduv (Pringsheimi mõttes), tõkestatud ja koonduv või vastavalt regulaarselt koonduv. Käesolevas artiklis on antud tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et ε_{kl} $(k, l = 0,1, \ldots)$ oleksid ülaltoodud tüüpi summeeruvustegurid juhul, kui menetlusteks A ja B on Rieszi kaalutud keskmiste menetlused (R, p_n) ja (R, q_n).

GENERALIZED SUMMABILITY FACTORS FOR THE METHOD OF RIESZ

F. Vichmann

Summary

Complex numbers ε_{kl} $(k, l = 0,1, \ldots)$ are defined as summability factors of type $(|\mathfrak{A}|, \mathfrak{B}, C_\omega)$ $((|\mathfrak{A}|, \mathfrak{B}_O, C_\omega))$ when the series $\sum_{k,l} \varepsilon_{kl} X_k Y_l$ is ω-summable by method C for each sequence $\{X_k\}$ absolutely summable by method A and sequence $\{Y_l\}$ summable (bounded) by method B, and type $(|A|, B, C_\omega)$ $((|A|, B_O, C_\omega))$ when the series $\sum_{k,l} \varepsilon_{kl} x_k y_l$ is ω-summable by method C for each

series $\sum_k x_k$ absolutely summable by method A and series $\sum_l y_l$ summable (bounded) by method B. Here ω may be c, b or r, and ω-summability of double series by method C denotes that C-transformation of it is convergent (in the sense of Pringsheim), or is bounded and convergent, or regularly convergent. In the present article necessary and sufficient conditions are given for ε_{kl} $(k, l = 0,1, \ldots)$ to be the above enumerated summability factors when the methods A and B are the Riesz methods of summability (R, p_n) and (R, q_n).

МНОЖИТЕЛИ СУММИРУЕМОСТИ ДЛЯ ДВОЙНЫХ РЯДОВ, СУММИРУЕМЫХ ИЛИ ОГРАНИЧЕННЫХ МЕТОДОМ ВЗВЕШЕННЫХ СРЕДНИХ РИССА

С. Барон
Кафедра математического анализа

§ 1. Вводные замечания

Цель настоящей статьи — установить точные условия для множителей суммируемости[1] двойных рядов типов $(X, У)$, где X — один из P_r, P_b или P_O, а $У$ — один из методов суммирования B, B_b или B_r. При этом, *во всей статье*, предполагаем, что B *треуголен*, P *и* B *факторизируемы, и факторы их суть регулярные методы суммирования простых рядов.* Следовательно, B удовлетворяет (см. [11], стр. 79—83) условиям

$$\lim_m \beta_{mk} = \lim_n \beta'_{nl} = 1, \tag{1}$$

$$\lim_m b_{mk} = \lim_n b'_{nl} = 0, \tag{2}$$

$$\beta_{mk} = O(1), \quad \beta'_{nl} = O(1), \tag{3}$$

$$\sum_{k,\,l=0}^{m,n} |b_{mnkl}| = O(1), \tag{4}$$

на которые будем опираться во всем дальнейшем.

Из рассматриваемых нами множителей суммируемости двойных рядов до сих пор изучены частные случаи $X = P_b$ и $X = P_O$ при $B = P$ (см. [5], теорема 3) или $B = E$ (см. [7], теоремы 16 и 17). Также изучены случаи, когда X и $У$ — методы Чезаро вещественного порядка [8, 4].

Что касается теории множителей суммируемости простых рядов для метода взвешенных средних Рисса, то начали ее с некоторых частных случаев развивать немецкие математики

[1] В настоящей статье придерживаемся определений и обозначений, использованных в [7, 9], а также пользуемся некоторыми выкладками статьи [9], обычно не ссылаясь на них в каждом отдельном случае.

А. Пейеримхофф и В. Юркат в 50-х годах и закончил ее в самом общем виде Г. Ф. Кангро в 1955 г. (см. [6], стр. 218—220, 223—225).

§ 2. Неэффективные условия

Итак, согласно определению множителей суммируемости, в настоящей статье рассматриваются следующие проблемы: каким условиям должна удовлетворять двойная последовательность комплексных чисел $\{\varepsilon_{mn}\}$, чтобы из r-сходимости (или b-сходимости, или ограниченности) двойной последовательности комплексных чисел

$$U'_{mn} = \sum_{k,l=0}^{m,n} a_{mnkl}\, U_{kl} = \sum_{k,l=0}^{m.n} a_{mnkl}\, u_{kl}, \tag{5}$$

где для метода P

$$a_{mnkl} = \frac{p_{kl}}{P_{mn}}, \quad a_{mnkl} = \left(1 - \frac{P_{k-1}}{P_m}\right)\left(1 - \frac{P'_{l-1}}{P'_n}\right),$$

всегда следовала сходимость (или b-сходимость, или r-сходимость) двойной последовательности

$$U''_{mn} = \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} \beta_{mn\mu\nu}\, \varepsilon_{\mu\nu}\, u_{\mu\nu}. \tag{6}$$

Поставленные проблемы (также, как в статье [9]) будем решать методом обратного преобразования. Действительно, при помощи обратной матрицы метода P (см. [6], стр. 217) из (5) выводим

$$u_{\mu\nu} = \sum_{k,l=0}^{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu kl}\, U'_{kl} = \sum_{k,l=0}^{\mu,\nu} \eta_{\mu k}\, \eta'_{\nu l}\, U'_{kl},$$

и, следовательно, подставляя последнее в (6), сводим все к исследованию следующего матричного преобразования

$$U''_{mn} = \sum_{k,l=0}^{m,n} c_{mnkl}\, U'_{kl} \tag{7}$$

последовательности в последовательность, где

$$c_{mnkl} = \sum_{\mu,\nu=k,l}^{m,n} \beta_{mn\mu\nu}\, \eta_{\mu\nu kl}\, \varepsilon_{\mu\nu} = P_{kl}\, \Delta_{kl} \frac{\Delta_{kl}(\beta_{mnkl}\, \varepsilon_{kl})}{p_{kl}}.$$

Применяя к преобразованию (7) соответствующие (приведенные в § 2 статьи [8]) условия Кожима [2], Робисона [3] и Га-

мильтона [1], последние упрощаются, поскольку из треугольности метода B и (1) при $m, n \to \infty$ вытекает, например,

$$\sum_{k,l=0}^{m,n} c_{mnkl} = \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} p_{\mu\nu} \sum_{k,l=\mu,\nu}^{m,n} \Delta_{kl} \frac{\Delta_{kl}(\beta_{mnkl}\varepsilon_{kl})}{p_{kl}} = \beta_{mn00}\varepsilon_{00} \to \varepsilon_{00}.$$

В результате получаем следующие теоремы, в которых

$$c_{kl} = \lim_{m,n} c_{mnkl} = P_{kl}\Delta_{kl}\frac{\Delta_{kl}\varepsilon_{kl}}{p_{kl}},$$

$$c'_{nkl} = \lim_{m} c_{mnkl}, \quad c_{mkl} = \lim_{n} c_{mnkl}.$$

Теорема 1. *Для того, чтобы числа* ε_{kl} *были множителями суммируемости типов* а) (P_r, B), б) (P_r, B_b), в) (P_r, B_r), *необходимо и достаточно в случае* а) — *условие*

$$\sum_{k,l=0}^{m,n} |c_{mnkl}| \leqslant M \quad (m, n \geqslant N), \tag{b^1}$$

а в случаях б) *и* в) — *условие*

$$\sum_{k,l=0}^{m,n} |c_{mnkl}| \leqslant M. \tag{c^1}$$

Теорема 2. *Для того, чтобы числа* ε_{kl} *были множителями суммируемости типов* а) (P_b, B), б) (P_b, B_b), в) (P_b, B_r), *необходимы и достаточны в случае* а) *условия* (b^1) *и*

$$\lim_{m,n} \sum_{k=0}^{m} |c_{mnkl} - c_{kl}| = 0, \tag{d$_1^4$}$$

$$\lim_{m,n} \sum_{l=0}^{n} |c_{mnkl} - c_{kl}| = 0; \tag{d$_2^4$}$$

в случае б) — *условия* (c^1), (d$_1^4$) *и* (d$_2^4$); *а в случае* в) — *условия* (c^1), (d$_1^4$), (d$_2^4$) *и*

$$\lim_{m} \sum_{k=0}^{m} |c_{mnkl} - c'_{nkl}| = 0, \tag{f$_1^4$}$$

$$\lim_{n} \sum_{l=0}^{n} |c_{mnkl} - c_{mkl}| = 0. \tag{f$_2^4$}$$

Теорема 3. *Для того, чтобы числа* ε_{kl} *были множителями суммируемости типов* а) (P_0, B), б) (P_0, B_b), в) (P_0, B_r), *необходимы и достаточны в случае* а) — *условия* (b^1) *и*

$$\lim_{m,n} \sum_{k,l=0}^{m,n} |c_{mnkl} - c_{kl}| = 0; \tag{d^5}$$

в случае б) — *условия* (c^1) *и* (d^5); *в случае* в) — *условия* (c^1), (d^5), (f_1^4) *и* (f_2^4).

Ниже с помощью теорем 1, 2 и 3 найдем более эффективные для практической проверки точные условия для исследуемых типов множителей суммируемости.

§ 3. Некоторые необходимые условия

Относительно метода P нам нужна следующая

Лемма 1. *Факторизируемый метод P суммирует все r-сходящиеся ряды к их обыкновенной сумме тогда и только тогда, если* [2]

$$r\text{-}\lim_{m,n} |P_{mn}| = \infty, \tag{8}$$

$$\sum_{k,\,l=0}^{m,n} |p_{kl}| = O(P_{mn}). \tag{9}$$

Доказательство вытекает из теоремы 132 статьи [1] и формулы (25) статьи [12].

Условия (8) и (9) выполнены, если факторы метода P — регулярные методы суммирования простых рядов (ср. [6], стр. 196).

Прежде чем приступить к нахождению эффективных необходимых условий, отметим, что из условия (9) леммы 1 вытекает условие

$$P_{kl} = O(P_{mn}) \text{ при } k, l \leqslant m, n, \tag{10}$$

на которое будем постоянно опираться во всем дальнейшем.

Основное необходимое условие выведем из теоремы 1 статьи [7], для применения которой к множителям суммируемости типа (P_r, B) нам нужна еще следующая лемма, вытекающая из формулы (25) статьи [12], причем *rcrn* означает класс последовательностей $\{U_{\varkappa\lambda}\}$, удовлетворяющих условию $r\text{-}\lim_{\varkappa,\lambda} U_{\varkappa\lambda} = 0$.

Лемма 2. *Если матрица (c_{mnkl}) суммирует все rcrn-сходящиеся последовательности, то для каждой такой последовательности*

$$\lim_{m,n} \sum_{\varkappa,\lambda} c_{mn\varkappa\lambda} U_{\varkappa\lambda} = \sum_{\varkappa,\lambda} c_{\varkappa\lambda} U_{\varkappa\lambda}.$$

Теперь, так как P нормален, то в силу леммы 2 и условия

[2] Под символом $r\text{-}\lim_{m,n} S_{mn} = S$ мы подразумеваем $\lim_{m,n} S_{mn} = \lim_{m} S_{mn} = \lim_{n} S_{mn} = S$.

(8) леммы 1, все условия теоремы 1 статьи [7] для метода P выполняются, если положить в ней $\mathfrak{L}' = rc$ и $\mathfrak{L}'' = rcrn$. Вследствие этого и условия (b^1) теоремы 1 получаем (ср. [7], стр. 14), учитывая (1), необходимость условия

$$\Delta_{kl}\,\varepsilon_{kl} = \sum_{\varkappa,\lambda=k,l}^{\infty} c_{\varkappa\lambda}\,a_{\varkappa\lambda kl} \quad при \quad \sum_{\varkappa,\lambda} |c_{\varkappa\lambda}| < \infty. \tag{11}$$

Дальнейшие необходимые условия выведем для множителей суммируемости типа (Z_r, B), где $Z = A''\odot E$ и A'' — фактор метода P, ибо, в силу включения $Z_r \subset P_r$ (см. [12], стр. 21 и 29), условия, необходимые для (Z_r, B), подавно необходимы и для множителей суммируемости типа (P_r, B).

Для метода Z имеем (ср. [8], формула (6))

$$c_{mnkl} = \sum_{\mu,\nu=k,l}^{m,n} \beta_{mn\mu\nu}\,\eta_{\mu k} A^{-2}_{\nu l}\,\varepsilon_{\mu\nu} = P_k\,\Delta_{kl}\,\frac{\Delta_k(\beta_{mnkl}\,\varepsilon_{kl})}{p_k},$$

откуда, в силу (1) и условия (b^1) теоремы 1, для метода Z получаем (ведь теорема 1 имеет место и в случае, если в ней P_r заменить через Z_r)

$$\sum_{k=0}^{m}\Big|\sum_{l=\nu}^{n} c_{mnkl}\Big| = \sum_{k=0}^{m}\left|P_k\Delta_k\,\frac{\Delta_k(\beta_{mnk\nu}\,\varepsilon_{k\nu})}{p_k}\right| \leqslant M \quad (m \geqslant N,\ \nu \leqslant n).$$

Последнее условие и аналогичное ему при помощи леммы 1 статьи [8] и (1) влекут за собой условия

$$\sum_{k}\left|P_k\,\Delta_k\,\frac{\Delta_k\,\varepsilon_{kl}}{p_k}\right| = O(1), \quad \sum_{l}\left|P'_l\,\Delta_l\,\frac{\Delta_l\,\varepsilon_{kl}}{p'_l}\right| = O(1), \tag{12}$$

$$P_k\,\Delta_k\,\varepsilon_{kl} = O(p_k),\ P'_l\,\Delta_l\,\varepsilon_{kl} = O(p'_l), \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{m}\left|P_k\,\varepsilon_{k+1,l}\,\Delta_k\,\frac{b_{mk}}{p_k}\right| = O(1)\ \ (m \geqslant N),\\ &\sum_{l=0}^{n}\left|P'_l\,\varepsilon_{k,l+1}\,\Delta_l\,\frac{b'_{nl}}{p'_l}\right| = O(1)\ \ (n \geqslant N), \end{aligned} \tag{14}$$

в силу доказательства теоремы 15 статьи [6].

Итак, доказана

Лемма 3. *Для множителей суммируемости типа* (P_r, B) *необходимы условия* (11), (12), (13) *и* (14).

§ 4. Множители суммируемости типов $(P_r, У)$

Имеет место основная

Теорема 4. *Для того, чтобы числа* ε_{kl} *были множителями сум-*

мируемости типов а) (P_r, B), б) (P_r, B_b), в) (P_r, B_r), *необходимы и достаточны условия* [3]

$$1^\circ \sum_{k,l} \left| P_{kl} \Delta_{kl} \frac{\Delta_{kl} \varepsilon_{kl}}{p_{kl}} \right| < \infty ;$$

$$2^\circ \lim_k \frac{\Delta_{kl} \varepsilon_{kl}}{p_{kl}} = \lim_l \frac{\Delta_{kl} \varepsilon_{kl}}{p_{kl}} = 0;$$

$$3^\circ \sum_{l=0}^{n} \left| P_{kl} \left(\Delta_l \frac{b'_{nl}}{p_{kl}} \right) \Delta_k \varepsilon_{k,\, l+1} \right| = O(1), \quad \sum_{k=0}^{m} \left| P_{kl} \left(\Delta_k \frac{b_{mk}}{p_{kl}} \right) \Delta_l \varepsilon_{k+1,l} \right| = O(1);$$

$$4^\circ \sum_{k,l=0}^{\infty,n} \left| P_{kl} \left(\Delta_l \frac{b'_{nl}}{p'_l} \right) \Delta_k \frac{\Delta_k \varepsilon_{k,l+1}}{p_k} \right| = O(1),$$

$$\sum_{k,l=0}^{m,\infty} \left| P_{kl} \left(\Delta_k \frac{b_{mk}}{p_k} \right) \Delta_l \frac{\Delta_l \varepsilon_{k+1,l}}{p'_l} \right| = O(1);$$

$$5^\circ \sum_{k,l=0}^{m,n} \left| P_{kl} \varepsilon_{k+1,l+1} \Delta_{kl} \frac{b_{mnkl}}{p_{kl}} \right| = O(1).$$

Доказательство. Достаточность условий 1°—5° доказывается при помощи следующей леммы, дающей некоторые следствия из необходимых условий.

Лемма 4. *Из условий* 1°, 2° *и* (10) *вытекают условия* [4]

$$r\text{-}\lim_{k,l} \frac{P_{kl}}{p_{kl}} \Delta_{kl} \varepsilon_{kl} = 0, \tag{15}$$

$$\lim_l \sum_k \left| P_{kl} \Delta_k \frac{\Delta_{kl} \varepsilon_{kl}}{p_{kl}} \right| = \lim_k \sum_l \left| P_{kl} \Delta_l \frac{\Delta_{kl} \varepsilon_{kl}}{p_{kl}} \right| = 0. \tag{16}$$

Доказательство леммы 4. Как показано в [7], стр. 22, из 1° и 2° следует условие (11). Из условия (11), в силу (10), выводим

$$\frac{P_{kl}}{p_{kl}} \Delta_{kl} \varepsilon_{kl} = O(1) \sum_{\varkappa,\lambda=k,l}^{\infty} |c_{\varkappa\lambda}|,$$

$$\sum_k \left| P_{kl} \Delta_k \frac{\Delta_{kl} \varepsilon_{kl}}{p_{kl}} \right| = O(1) \sum_{\lambda=l}^{\infty} \sum_k |c_{k\lambda}|,$$

---

[3] В условиях 3°—5° и др., ввиду треугольности метода B,

$$\Delta_k \frac{b_{mk}}{p_k} = \frac{b_{mm}}{p_m} \text{ при } k = m, \quad \Delta_l \frac{b'_{nl}}{p'_l} = \frac{b'_{nn}}{p'_n} \text{ при } l = n.$$

[4] Положив в лемме 4 $p_{kl} = 1$, получаем отсюда частные случаи лемм 5 и 6 статьи [4], если учесть доказательства лемм 17, 14 и 18 статьи [8].

из которых заключаем (15) и первое из условий (16). Лемма доказана.

Далее, воспользуемся вытекающим из (5. 2) статьи [10] тождеством

$$
\begin{aligned}
c_{mnkl} = P_{kl} \Big\{ & \beta_{mn,k+2,l+2}\, \Delta_{kl} \frac{\Delta_{kl}\, \varepsilon_{kl}}{p_{kl}} + h_{mk}\, h'_{nl} \frac{\Delta_{kl}\, \varepsilon_{kl}}{p_{kl}} + \\
& + \beta_{m,k+2}\, h'_{nl}\, \Delta_k \frac{\Delta_{kl}\, \varepsilon_{kl}}{p_{kl}} + h_{mk}\, \beta'_{n,l+2}\, \Delta_l \frac{\Delta_{kl}\, \varepsilon_{kl}}{p_{kl}} + \\
& + h_{mk} \left(\Delta_l \frac{b'_{nl}}{p_{kl}} \right) \Delta_k\, \varepsilon_{k,l+1} + \left(\Delta_k \frac{b_{mk}}{p_{kl}} \right) h'_{nl}\, \Delta_l\, \varepsilon_{k+1,l} + \\
& + \beta_{m,k+2} \left(\Delta_l \frac{b'_{nl}}{p'_l} \right) \Delta_k \frac{\Delta_k\, \varepsilon_{k,l+1}}{p_k} + \left(\Delta_k \frac{b_{mk}}{p_k} \right) \beta'_{n,l+2}\, \Delta_l \frac{\Delta_l\, \varepsilon_{k+1,l}}{p'_l} + \\
& + \left(\Delta_{kl} \frac{b_{mnkl}}{p_{kl}} \right) \varepsilon_{k+1,l+1} \Big\},
\end{aligned}
\tag{17}
$$

где обозначено

$$h_{mk} = b_{mk} + b_{m,k+1}, \quad h'_{nl} = b'_{nl} + b'_{n,l+1}.$$

При помощи (17), леммы 4 и условий (3) и (4) из условий 1°—5° вытекает условие (c^1) теоремы 1, т. е. условия 1°—5° (вместе) достаточны для множителей суммируемости типа (P_r, B_r).

Необходимость. Из условия (11) леммы 3 вытекают условия 1° и 2° (ср. [7], стр. 22).

Далее, из соотношения

$$\Delta_{kl}(\beta_{mnkl}\, \varepsilon_{kl}) = \sum_{\varkappa, \lambda = k, l}^{m, n} c_{mn\varkappa\lambda}\, a_{\varkappa\lambda kl},$$

тождественно имеющего место для метода P, и (1), аналогично, как на стр. 25—26 статьи [7] (положив $\mathfrak{L}' = rc$ и $\mathfrak{L}''' = rcrn$, что допустимо в силу (8)) при $m \to \infty$ выводим

$$\Delta_{kl}(\beta'_{nl}\, \varepsilon_{kl}) = \sum_{\varkappa, \lambda = k, l}^{\infty, n} c'_{n\varkappa\lambda}\, a_{\varkappa\lambda kl},$$

откуда при помощи (10) и условия (b^1) теоремы 1 вытекает

$$\sum_{l=0}^{n} \left| P_{kl}\, \Delta_l \frac{\Delta_{kl}(\beta'_{nl}\, \varepsilon_{kl})}{p_{kl}} \right| = O(1) \sum_{\varkappa=k}^{\infty} \sum_{l=0}^{n} |c'_{n\varkappa l}| \leqslant M \quad (n \geqslant N). \tag{18}$$

RSV AÜN Tartu Kultuurihoone

Теперь, воспользовавшись вытекающим из формулы (5.2) статьи [10] тождеством

$$\left(\Delta_l \frac{b'_{nl}}{p_{kl}}\right) \Delta_k \varepsilon_{k,l+1} = \Delta_l \frac{\Delta_{kl}(\beta'_{nl}\varepsilon_{kl})}{p_{kl}} - h'_{nl} \frac{\Delta_{kl}\varepsilon_{kl}}{p_{kl}} - \beta'_{n,l+2} \Delta_l \frac{\Delta_{kl}\varepsilon_{kl}}{p_{kl}}, \quad (19)$$

в силу необходимости условия (18) и условий (15) и (16) леммы 4, и, так как B удовлетворяет условиям (3) и (4), убеждаемся в том, что необходимо первое из условий 3° при $n \geqslant N$. Однако, из-за треугольности метода B и необходимости условий (13) леммы 3 можем положить здесь $N = 0$. Необходимость второго из условий 3° доказывается аналогично.

Кроме того, из условий 1°, (16) леммы 4 и (18), при помощи соотношения

$$c'_{nkl} = P_{kl}\left\{\beta'_{n,l+2}\Delta_{kl}\frac{\Delta_{kl}\varepsilon_{kl}}{p_{kl}} + h'_{nl}\Delta_k\frac{\Delta_{kl}\varepsilon_{kl}}{p_{kl}} + \left(\Delta_l\frac{b'_{nl}}{p'_l}\right)\Delta_k\frac{\Delta_k\varepsilon_{k,l+1}}{p_k}\right\},$$

вытекающего из (17) и (1), выводим необходимость первого из условий 4° при $n \geqslant N$, причем вследствие треугольности B и необходимости условий (12) леммы 3 можем здесь положить $N = 0$.

Наконец, при помощи (17) из необходимости условий 1°—4°, условий (15) и (16) леммы 4 и (b^1) теоремы 1 заключаем необходимость условия 5° при $m, n \geqslant N$; при этом можем здесь положить $N = 0$, ввиду треугольности B и необходимости условий (14) леммы 3.

§ 5. Множители суммируемости типов $(P_b, У)$

Прежде чем перейти к основной теореме настоящего параграфа, отметим, что имеет место

Лемма 5. *Из условий* 1°—5° *теоремы* 4 *вытекают условия* (12), (13) *и* (14) *леммы* 3 *и*

$$\lim_k \sum_{l=0}^{n} \left| P_{kl}\left(\Delta_l \frac{b'_{nl}}{p_{kl}}\right)\Delta_k \varepsilon_{k,l+1}\right| = \lim_l \sum_{k=0}^{m} \left| P_{kl}\left(\Delta_k \frac{b_{mk}}{p_{kl}}\right)\Delta_l \varepsilon_{k+1,l}\right| = 0. \quad (20)$$

Доказательство. Ввиду (19), (3) и (4), условия (18), (15) и (16) влекут за собой первое из условий (20) при $n \geqslant N$. Условия (20), вместе с условиями (12), (13) и (14), как необходимые для множителей суммируемости типа (P_r, B_b), являются по теореме 4 следствиями точных условий 1°—5°. Лемма доказана.

Теперь может быть доказана следующая основная

Теорема 5. *Для того, чтобы числа* ε_{kl} *были множителями*

суммируемости типов а) (P_b, B), б) (P_b, B_b), в) (P_b, B_r), *необходимы и достаточны условия* 1°—5° *теоремы* 4, *и*

$$6°\ \lim_n \sum_{l=0}^{n} \left| P'_l \left(\Delta_k \frac{\Delta_k \varepsilon_{k,l+1}}{p_k} \right) \Delta_l \frac{b'_{nl}}{p'_l} \right| = \lim_m \sum_{k=0}^{m} \left| P_k \left(\Delta_l \frac{\Delta_l \varepsilon_{k+1,l}}{p'_l} \right) \Delta_k \frac{b_{mk}}{p_k} \right| = 0;$$

а в случае в), *предполагая метод B нормальным, вдобавок к ним,*

$$7°\ \lim_m \sum_{k=0}^{m} \left| P_k \left(\Delta_k \frac{b_{mk}}{p_k} \right) \varepsilon_{k+1,l} \right| = \lim_n \sum_{l=0}^{n} \left| P'_l \left(\Delta_l \frac{b'_{nl}}{p'_l} \right) \varepsilon_{k,l+1} \right| = 0.$$

Доказательство. Докажем, что соответствующие условия теоремы 5 и лемм 4 и 5 влекут за собой условия $(d_1{}^4)$ и $(f_1{}^4)$ теоремы 2, ибо условия $(d_2{}^4)$ и $(f_2{}^4)$ аналогичны последним. Этим будет доказано, что условия теоремы 5 достаточны для рассматриваемых типов множителей суммируемости, так как, доказывая теорему 4, мы убедились, что условия 1°—5° влекут за собой условия (b^1) и (c^1) теоремы 2. Попутно будет доказана необходимость условий 6° и 7°.

Начнем с условия $(d_1{}^4)$. Применяя к $(d_1{}^4)$ тождество (17), получаем последовательно для каждого его слагаемого следующие оценки.

Из условия 1° при помощи (3) и (1) для первого слагаемого (17) вытекает

$$\lim_{m,n} \sum_{k,l} \left| (\beta_{mn,\,k+2,\,l+2} - 1) P_{kl} \Delta_{kl} \frac{\Delta_{kl} \varepsilon_{kl}}{p_{kl}} \right| = 0. \tag{21}$$

Из условия (15) при помощи (4) и теоремы 25 статьи [1] (см. [8], стр. 6) для второго слагаемого (17) выводим

$$\lim_{m,n} \sum_{k,\,l=0}^{m,n} |h_{mk} h'_{nl} \frac{P_{kl}}{p_{kl}} \Delta_{kl} \varepsilon_{kl}| = 0. \tag{22}$$

Из (16) при помощи (3), (2) и (4) и теоремы 4 книги [13] для третьего и четвертого слагаемых (17) получаем

$$\begin{aligned} &\lim_{m,n} \sum_{k,\,l=0}^{m-2,n} \left| \beta_{m,\,k+2} h'_{nl} P_{kl} \Delta_k \frac{\Delta_{kl} \varepsilon_{kl}}{p_{kl}} \right| = \\ &= \lim_n O(1) \sum_{l=0}^{n} |h'_{nl}| \sum_k \left| P_{kl} \Delta_k \frac{\Delta_{kl} \varepsilon_{kl}}{p_{kl}} \right| = 0, \end{aligned} \tag{23}$$

$$\lim_{m,n} \sum_{k,\,l=0}^{m,n-2} \left| h_{mk} \beta'_{n,l+2} P_{kl} \Delta_l \frac{\Delta_{kl} \varepsilon_{kl}}{p_{kl}} \right| = 0. \tag{24}$$

Из (13), (4) и (2) для пятого слагаемого (17) вытекает

$$\lim_{m,n} \sum_{k=0}^{m} |h_{mk} P_{kl} \left(\Delta_l \frac{b'_{nl}}{p_{kl}} \right) \Delta_k \varepsilon_{k,\,l+1}| = \lim_n O(1) \left| P'_l \Delta_l \frac{b'_{nl}}{p'_l} \right| = 0.$$

Из (12), (3) и (2) для седьмого слагаемого (17) заключаем

$$\lim_{m,n} \sum_{k=0}^{m} \left| \beta_{m,\,k+2} P_{kl} \left(\Delta_l \frac{b'_{nl}}{p'_l} \right) \Delta_k \frac{\Delta_k \varepsilon_{k,l+1}}{p_k} \right| = \lim_{n} O(1) \left| P'_l \Delta_l \frac{b'_{nl}}{p'_l} \right| = 0.$$

Наконец, из (14) и (2) для шестого и девятого слагаемых (17) следует

$$\lim_{m,n} \sum_{k=0}^{m} |P_{kl} h'_{nl} \left(\Delta_k \frac{b_{mk}}{p_{kl}} \right) \Delta_l \varepsilon_{k+1,l}| = \lim_{n} O(1) \left| \frac{P'_l}{p'_l} h'_{nl} \right| = 0.$$

$$\lim_{m,n} \sum_{k=0}^{m} |P_{kl} \left(\Delta_{kl} \frac{b_{mnkl}}{p_{kl}} \right) \varepsilon_{k+1,\,l+1}| = 0.$$

Итак, остается восьмое слагаемое (17) и, вследствие этого, условие (d_1^4) теоремы 2 равносильно следующему

$$\lim_{m,n} \beta'_{n,l+2} \sum_{k=0}^{m} \left| P_{kl} \left(\Delta_k \frac{b_{mk}}{p_k} \right) \Delta_l \frac{\Delta_l \varepsilon_{k+1,\,l}}{p'_l} \right| = 0,$$

которое, ввиду (1), является вторым из условий 6°.

Этим мы завершаем доказательство случаев а) и б) теоремы 5.

Переходя к случаю в) теоремы 5, заметим предварительно, что из (17) и (1) выводим

$$\begin{aligned} c_{mnkl} - c'_{nkl} = P_{kl} \Big\{ & (\beta_{m,k+2} - 1) \beta'_{n,l+2} \Delta_{kl} \frac{\Delta_{kl} \varepsilon_{kl}}{p_{kl}} + h_{mk} h'_{nl} \frac{\Delta_{kl} \varepsilon_{kl}}{p_{kl}} + \\ & + (\beta_{m,\,k+2} - 1) h'_{nl} \Delta_k \frac{\Delta_{kl} \varepsilon_{kl}}{p_{kl}} + h_{mk} \beta'_{n,l+2} \Delta_l \frac{\Delta_{kl} \varepsilon_{kl}}{p_{kl}} + \\ & + h_{mk} \left(\Delta_l \frac{b'_{nl}}{p_{kl}} \right) \Delta_k \varepsilon_{k,l+1} + \left(\Delta_k \frac{b_{mk}}{p'_{kl}} \right) h'_{nl} \Delta_l \varepsilon_{k+1,l} + \\ & + (\beta_{m,k+2} - 1) \left(\Delta_l \frac{b'_{nl}}{p'_l} \right) \Delta_k \frac{\Delta_k \varepsilon_{k,\,l+1}}{p_k} + \\ & + \left(\Delta_k \frac{b_{mk}}{p_k} \right) \beta'_{n,l+2} \Delta_l \frac{\Delta_l \varepsilon_{k+1,\,l}}{p'_l} + \left(\Delta_{kl} \frac{b_{mnkl}}{p_{kl}} \right) \varepsilon_{k+1,l+1} \Big\}. \end{aligned}$$

Отсюда, применяя условия 1°, 2°, 6°, (15), (16), (12) и (20), (1), (3), (2) и (4), в силу теоремы 4 из [13] и лемм 3 и 4, заключаем, что условие (f_1^4) превращается в следующее

$$\lim_{m} \sum_{k=0}^{m} \left| P_{kl} \left\{ \left(\Delta_k \frac{b_{mk}}{p_{kl}} \right) h'_{nl} \Delta_l \varepsilon_{k+1,\,l} + \left(\Delta_{kl} \frac{b_{mnkl}}{p_{kl}} \right) \varepsilon_{k+1,\,l+1} \right\} \right| = 0, \quad (25)$$

и, положив здесь $n = l$, если метод B нормален, получаем

$$\lim_m \frac{P'_l}{p'_l} b'_{ll} \sum_{k=0}^{m} \left| P_k \left\{ \left(\Delta_k \frac{b_{mk}}{p_k} \right) \Delta_l \varepsilon_{k+1,l} + \left(\Delta_k \frac{b_{mk}}{p_k} \right) \varepsilon_{k+1,l+1} \right\} \right| =$$

$$= \frac{P'_l}{p'_l} b'_{ll} \lim_m \sum_{k=0}^{m} \left| P_k \left(\Delta_k \frac{b_{mk}}{p_k} \right) \varepsilon_{k+1,l} \right| = 0,$$

т. е. первое из условий 7°. Наоборот, из последнего условия непосредственно следует условие (25).

Этим завершается доказательство и случая в) теоремы 5.

Из теоремы 5 при $B = E$ получаем теорему 17 статьи [7] для факторизируемого метода P.

§ 6. Множители суммируемости типов (P_O, y)

Здесь имеет место следующая основная

Теорема 6. *Для того, чтобы числа* ε_{kl} *были множителями суммируемости типов* а) (P_O, B), б) (P_O, B_b), в) (P_O, B_r), *необходимы и достаточны условия* 1°, 2°, 3° *и* 7° *теоремы* 5 *и, вдобавок к ним, следующие*

$$3^{\circ} \lim_{k,n} \sum_{l=0}^{n} \left| P_{kl} \left(\Delta_l \frac{b'_{nl}}{p_{kl}} \right) \Delta_k \varepsilon_{k,l+1} \right| = \lim_{m,l} \sum_{k=0}^{m} \left| P_{kl} \left(\Delta_k \frac{b_{mk}}{p_{kl}} \right) \Delta_l \varepsilon_{k+1,l} \right| = 0;$$

$$4^{\circ} \lim_n \sum_{k,\, l=0}^{\infty,n} \left| P_{kl} \left(\Delta_k \frac{\Delta_k \varepsilon_{k,l+1}}{p_k} \right) \Delta_l \frac{b'_{nl}}{p'_l} \right| =$$

$$= \lim_m \sum_{k,\, l=0}^{m,\infty} \left| P_{kl} \left(\Delta_l \frac{\Delta_l \varepsilon_{k+1,l}}{p'_l} \right) \Delta_k \frac{b_{mk}}{p_k} \right| = 0;$$

$$5^{\circ} \lim_{m,n} \sum_{k,\, l=0}^{m,n} \left| P_{kl}\, \varepsilon_{k+1,l+1}\, \Delta_{kl} \frac{b_{mnkl}}{p_{kl}} \right| = 0.$$

Доказательство. Достаточность. Докажем, что условия теоремы 6 влекут за собой условие (d^5) теоремы 3. Этим будет доказано, что условия теоремы 6 достаточны для здесь рассматриваемых типов множителей суммируемости, ибо, доказывая теорему 5, мы убедились, что условия 1°—7° влекут за собой условия (b^1), (c^1), (f_1^4) и (f_2^4) теоремы 3.

Учитывая, что из условий 1° и 2° вытекают (21), (22), (23) и (24), то, ввиду (17), условие (d^5) превращается в следующее

$$\lim_{m,n} \sum_{k,\, l=0}^{m,n} \left| P_{kl} \left\{ h_{mk} \left(\Delta_l \frac{b'_{nl}}{p_{kl}} \right) \Delta_k \varepsilon_{k,l+1} + \left(\Delta_k \frac{b_{mk}}{p_{kl}} \right) h'_{nl}\, \Delta_l \varepsilon_{k+1,l} + \right. \right.$$

$$+ \beta_{m,k+2} \left(\Delta_l \frac{b'_{nl}}{p'_l} \right) \Delta_k \frac{\Delta_k \varepsilon_{k,l+1}}{p_k} + \qquad (26)$$

$$\left. \left. + \left(\Delta_k \frac{b_{mk}}{p_k} \right) \beta'_{n,l+2}\, \Delta_l \frac{\Delta_l \varepsilon_{k+1,\,l}}{p'_l} + \left(\Delta_{kl} \frac{b_{mnkl}}{p_{kl}} \right) \varepsilon_{k+1,l+1} \right\} \right| = 0.$$

Из условий 3° и 3°° следует, что в (26) можем первые два слагаемых опустить, так как матрица $(|h_{mk}|\delta_{nl})$, в силу (2) и (4), удовлетворяет условиям для преобразования $bcn \to cn$ (см. [1], § 6, теорема 28), и, поэтому, например,

$$\lim_{m,n} \sum_{k=0}^{m} |h_{mk}| \sum_{l=0}^{n} \left| P_{kl}\left(\Delta_l \frac{b'_{nl}}{p_{kl}}\right) \Delta_k \varepsilon_{k,\,l+1} \right| = 0.$$

В силу сказанного, условие (26) непосредственно следует из условий 4°° и 5°° при помощи (3).

Из условий 4°° вытекают условия 4° и 6°, а из 5°° и 7° — условие 5°.

Необходимость. Из условия (26) заключаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N = N(\varepsilon)$, что при $m, n \geqslant N$ и $s = 0, 1, \ldots$ будет

$$\sum_{k,\,l=0}^{s,n} |P_{kl}\{\ldots\}| < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда и из (2) и (1) при $m \to \infty$ получаем

$$\sum_{k,\,l=0}^{s,n} \left| P_{kl}\left(\Delta_l \frac{b'_{nl}}{p'_l}\right) \Delta_k \frac{\Delta_k \varepsilon_{k,\,l+1}}{p_k} \right| < \varepsilon \quad (n \geqslant N),$$

что, ввиду 4°, дает первое из условий 4°°. Аналогично доказывается необходимость второго из условий 4°°.

При помощи леммы 4 статьи [8] из условия (b^1) теоремы 2, примененной для метода Z, и (1) выводим

$$\lim_{n} \sum_{k} \left| P_k \Delta_k \frac{\Delta_k \varepsilon_{kn}}{p_k} \right| = \lim_{n} \sum_{k} \left| P_k \left\{ \Delta_k \frac{\Delta_k \varepsilon_{kn}}{p_k} - \lim_{l} \Delta_k \frac{\Delta_k \varepsilon_{kl}}{p_k} \right| \leqslant \right.$$

$$\leqslant \lim_{n} \sum_{l=n}^{\infty} \sum_{k} \left| P_k \Delta_{kl} \frac{\Delta_k \varepsilon_{kl}}{p_k} \right| = 0, \tag{27}$$

вследствие чего условие (d^5) для метода Z дает

$$\lim_{m,n,\nu} \sum_{k=0}^{m} \left| P_k \Delta_k \frac{\Delta_k(\beta_{mnk\nu}\, \varepsilon_{k\nu})}{p_k} - P_k \Delta_k \frac{\Delta_k \varepsilon_{k\nu}}{p_k} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{m,n,\nu} \sum_{k,\,l=0}^{m,n} |c_{mnkl} - c_{kl}| = 0,$$

что при помощи тождества (5. 2) статьи [10] принимает вид

$$\lim_{m,n,l} \sum_{k=0}^{m} |P_k\{(\beta_{mn,k+2,l} - 1)\Delta_k \frac{\Delta_k \varepsilon_{kl}}{p_k} + \beta'_{nl} h_{mk} \frac{\Delta_k \varepsilon_{kl}}{p_k} +$$

$$+ \beta'_{nl}\left(\Delta_k \frac{b_{mk}}{p_k}\right) \varepsilon_{k+1,l}\}| = 0. \tag{28}$$

Из условий (13) и (8) следует, например,

$$\frac{\Delta_k \varepsilon_{kn}}{p_k} = \sum_{\varkappa=k}^{\infty} \Delta_\varkappa \frac{\Delta_\varkappa \varepsilon_{\varkappa n}}{p_\varkappa},$$

и, значит, учитывая (10), также

$$\frac{P_k}{p_k} \Delta_k \varepsilon_{kn} = O(1) \sum_{\varkappa=k}^{\infty} \left| P_\varkappa \Delta_\varkappa \frac{\Delta_\varkappa \varepsilon_{\varkappa n}}{p_\varkappa} \right|. \tag{29}$$

При помощи (29) из условий (13) и (27) выводим

$$\lim_{k,n} \frac{P_k}{p_k} \Delta_k \varepsilon_{kn} = 0. \tag{30}$$

Отсюда и из условия (13) заключаем, что

$$\lim_{m,l} \sum_{k} |h_{mk} \frac{P_k}{p_k} \Delta_k \varepsilon_{kl}| = 0, \tag{31}$$

так как матрица $(|h_{mk}|\delta_{nl})$, в силу (2) и (4), удовлетворяет условиям для преобразования $bcn \to cn$ (см. [1], § 6, теорема 28). Теперь, в силу (12), (31), (1) и (3) из условия (28) вытекает необходимость условия

$$\lim_{m,l} \sum_{k=0}^{m} |P_k \left(\Delta_k \frac{b_{mk}}{p_k} \right) \varepsilon_{k+1,l}| = 0. \tag{32}$$

Если в (28) тройной предел заменить на двойной при $m, n \to \infty$, то вместо (32) получаем необходимость первого из условий 7°.

Далее, из тождества (58) статьи [6] выводим

$$\sum_{k=0}^{m} |P_{kl} \left(\Delta_k \frac{b_{mk}}{p_{kl}} \right) \Delta_l \varepsilon_{k+1,l}| =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \left| P_k \left(\Delta_k \frac{b_{mk}}{p_k} \right) \left(\varepsilon_{k+1,0} - \varepsilon_{k+1,l} - \sum_{\nu=0}^{l-1} P'_\nu \Delta_\nu \frac{\Delta_\nu \varepsilon_{k+1,\nu}}{p'_\nu} \right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{m} |P_k \left(\Delta_k \frac{b_{mk}}{p_k} \right) (\varepsilon_{k+1,0} - \varepsilon_{k+1,l})| + \sum_{k,\nu=0}^{m,\infty} \left| P_{k\nu} \left(\Delta_\nu \frac{\Delta_\nu \varepsilon_{k+1,\nu}}{p'_\nu} \right) \Delta_k \frac{b_{mk}}{p_k} \right|;$$

вследствие которого и необходимости условий 4°°, 7° и (32) заключаем необходимость второго из условий 3°°.

Наконец, из (26) при помощи 3°, 3°°, 4°°, (2), (4) и (3) получаем необходимость условия 5°°.

Из теоремы 6 при $B = E$ получаем теорему 16 статьи [7] для факторизируемого метода P.

§ 7. Некоторые частные случаи

Положив в теоремах 4, 5 и 6 $\varepsilon_{kl} = 1$, непосредственно получаем следующее предложение.

Теорема 7. *Для того, чтобы имели место включения*

$$B \supset P_r,\ B_b \supset P_r,\ B_r \supset P_r,\ B \supset P_b \text{ или } B_b \supset P_b,$$

необходимы и достаточны условия

$$\sum_{k=0}^{m} \left| P_k \Delta_k \frac{b_{mk}}{p_k} \right| = O(1),\ \sum_{l=0}^{n} \left| P'_l \Delta_l \frac{b'_{nl}}{p'_l} \right| = O(1); \tag{33}$$

а для того, чтобы имели место включения

$$B_r \supset P_b,\ B \supset P_O,\ B_b \supset P_O \text{ или } B_r \supset P_O,$$

необходимы и достаточны условия

$$\lim_m \sum_{k=0}^{m} \left| P_k \Delta_k \frac{b_{mk}}{p_k} \right| = \lim_n \sum_{l=0}^{n} \left| P'_l \Delta_l \frac{b'_{nl}}{p'_l} \right| = 0.$$

При помощи теоремы 7 легко доказывается

Теорема 8. *Если выполнены условия* (33), *то для того, чтобы числа* ε_{kl} *были множителями суммируемости типов:* а) (P_r, B), (P_r, B_b) *или* (P_r, B_r), б) (P_b, B) *или* (P_b, B_b), в) (P_b, B_r), г) (P_O, B), (P_O, B_b) *или* (P_O, B_r), *необходимы и достаточны в случае* а) *условия* 1°, (12) *и*

$$\lim_k \frac{\Delta_k \varepsilon_{kl}}{p_k} = \lim_l \frac{\Delta_l \varepsilon_{kl}}{p'_l} = 0; \tag{34}$$

в случае б) — *условия* 1°, (12), (34) *и*

$$\lim_l \Delta_k \varepsilon_{kl} = \lim_k \Delta_l \varepsilon_{kl} = 0; \tag{35}$$

в случае в), *при нормальном* B, — *условия* 1°, (12), (34) *и*

$$\lim_l \varepsilon_{kl} = \lim_k \varepsilon_{kl} = 0; \tag{36}$$

в случае г) — *условия* 1°, (34) *и*

$$\lim_{k,l} \varepsilon_{kl} = 0, \tag{37}$$

$$\lim_l \sum_k \left| P_k \Delta_k \frac{\Delta_k \varepsilon_{kl}}{p_k} \right| = \lim_k \sum_l \left| P'_l \Delta_l \frac{\Delta_l \varepsilon_{kl}}{p'_l} \right| = 0. \tag{38}$$

Доказательство. Достаточность. В условия теоремы 8 превращаются условия теорем 4, 5 и 6, если положить в них $B = P$, и учесть, что при помощи соотношения (29)

(вытекающего из (34) и (10)) условия (13) и $\varepsilon_{kl} = O(1)$ следуют из (12) (или (38)) и (34), условие (30) — из (34) и (38), а условия (36) — из (34), (38) и (37). По теореме 7 те же условия достаточны при любом B, удовлетворяющий условиям (33).

Необходимость условий (35), (36) и (37) дают нам леммы 4, 6 и 9 статьи [8], а необходимость условий (12), (34) и (38) — лемма 3, условия (8), (35) и (27).

Условиям (33) удовлетворяет, например, любой метод $B = TP$, т. е. любой метод B, для которого

$$b_{mnkl} = p_{kl} \sum_{\varkappa,\lambda=k,\, l}^{m,n} \frac{t_{mn\varkappa\lambda}}{P_{\varkappa\lambda}}$$

(здесь $T = (t_{mnkl})$ — матрица преобразования последовательности в последовательность), где факторы методов T и B — треугольные регулярные (см. [11], стр. 102) методы суммирования простых рядов.

Из теоремы 8 вытекает, в частности, теорема 3 статьи Вихмана [5], так как (27) показывает, что условия (38) необходимы и для множителей суммируемости типа (P_b, B), а, ввиду (29), условия (38) влекут за собой (35). При $p_{kl} = 1$ из теоремы 8 получаем частные случаи теорем 1, 2 и 3 статьи [4] (теорем 5, 6 и 7 статьи [8]).

Литература

1. Hamilton, H. J., Transformations of multiple sequences. Duke Math. J., 1936, **2**, 29—60.
2. Kojima, G., On the Theory of Double Sequences. Tôhoku Math. J., 1922. **21**, 3—14.
3. Robison, G. M., Divergent double sequences and series. Trans. Amer. Math. Soc., 1926, **28**, 50—73.
4. Барон С., Множители суммируемости для двойных рядов, суммируемых или ограниченных методом Чезаро вещественного порядка. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 91—117.
5. Вихманн Ф., Теоремы типа Бора-Харди для двойных рядов. Настоящий сборник, стр. 194—198.
6. Кангро Г., О множителях суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1955, **37**, 191—232.
7. Кангро Г., О множителях суммируемости для двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1957, **46**, 3—42.
8. Кангро Г., Барон С., Множители суммируемости для Чезаро-суммируемых и Чезаро-ограниченных двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1959, **73**, 3—49.
9. Кангро Г., Барон С., Множители суммируемости и абсолютной суммируемости для двойных рядов, абсолютно суммируемых методом взвешенных средних Рисса. Настоящий сборник, стр. 155—169.
10. Кангро Г., Вихманн Ф., Об абстрактных множителях суммируемости для метода взвешенных средних Рисса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 209—225.

11. Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. Москва, 1960.
12. Кулль И. Г., Умножение суммируемых двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, **62**, 3—59.
13. Харди Г., Расходящиеся ряды. Москва, 1951.

Поступило
6 III 1962

SUMMEERUVUSTEGURID RIESZI KAALUTUD KESKMISTE MENETLUSEGA SUMMEERUVATE VÕI TÕKESTATUD KAHEKORDSETE RIDADE KORRAL

S. Baron
Matemaatilise analüüsi kateeder

Resümee

Käesolev artikkel kujutab artikli [9] jätku ja selles kasutatakse tööde [7, 9] definitsioone ja tähistusi.

Tähendagu P Rieszi kaalutud keskmiste summeerimismenetlust.

Käesolevas artiklis leitakse kahekordsete ridade jaoks summeeruvustegurid tüüpi (X, Y), kus X on P_r, P_b või P_O, Y aga üks summeerimismenetlustest B, B_b või B_r. Jättes siinjuures B meelevaldseks kolmnurkseks menetluseks, eeldame, et P ja B on faktoriseeruvad ning nende faktorid on harilike ridade regulaarsed summeerimismenetlused.

Saadud tulemused esitame teoreemidena 4, 5 ja 6. Viimastest järeldub teoreem 8, milles P ja B on seotud omavahel teatud sisalduvusseostega, mis on antud teoreemiga 7.

SUMMABILITY FACTORS FOR DOUBLE SERIES SUMMABLE OR BOUNDED BY THE RIESZ MEAN

S. Baron

Summary

This paper is a continuation of the paper [9] and the definitions and notations from [7, 9] are used.

Let P be the Riesz mean. In the present article summability factors for double series of type (X, Y), where X is P_r, P_b or P_O and Y — one of the means of B, B_b or B_r, have been found. Leaving the mean B arbitrary triangular, we suppose that P and B are factorizing means with factors which are regular means for the summing or ordinary series.

The obtained results are presented as theorems 4, 5 and 6. They imply the Theorem 8, where P is bounded up with B by a certain type of consistency, which given by Theorem 7.

О МНОЖИТЕЛЯХ СУММИРУЕМОСТИ ДЛЯ МЕТОДА ЭЙЛЕРА-КНОППА

Х. Эспенберг
Кафедра геометрии

§ 1. Введение

Рассматриваем треугольный метод суммирования A, который определяется матрицей $A = (a_{nk})$. Пусть дан комплексный ряд[1] Σu_k с частичными суммами $U_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Если существует $\lim U'_n = U'$, где $U'_n = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} U_k$, то ряд Σu_k (или последовательность $\{U_n\}$) называется A-суммируемым к сумме U'.

Числа ε_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ называются *множителями суммируемости в последовательности*, если последовательность $\{\varepsilon_k U_k\}$ является B-суммируемой при всех A-суммируемых последовательностях $\{U_k\}$. Для краткости назовем их множителями суммируемости типа $(A, B)_0$. Если B является методом сходимости, то числа ε_k называются *множителями сходимости в последовательности* относительно A.

Числа ε_k называются *множителями суммируемости первого типа*, если ряд $\Sigma \varepsilon_k U_k$ является B-суммируемой при всех A-суммируемых последовательностях $\{U_k\}$. Для краткости назовем их множителями суммируемости типа $(A, B)_1$. Если B является методом сходимости, то числа ε_k называются *множителями сходимости первого типа* относительно A.

В настоящей статье мы будем рассматривать множители суммируемости типа $(A, B)_0$ и $(A, B)_1$ в случае, когда A и B являются методами Эйлера-Кноппа. Метод Эйлера-Кноппа порядка[2] λ определяется матрицей $E_\lambda = (a_{nk})$, где

$$a_{nk} = \binom{n}{k} (1 - \lambda)^{n-k} \lambda^k.$$

[1] Если пределы суммирования не указаны, то суммирование происходит по индексам от 0 до ∞.

[2] λ — комплексное или действительное число.

Метод E_λ сохраняет сходимость, если $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Если $\lambda = 1$, то получается метод сходимости. Если $\lambda = 0$, то получается метод суммирования, который суммирует всякую последовательность $\{U_k\}$ к сумме U_0. Поэтому в дальнейшем предположим, что $\lambda \neq 0$. Метод E_λ является частным случаем метода Хаусдорфа (H, μ) при $\mu_k = \lambda^k$ ([2], стр. 308, [5], стр. 401). Так как здесь $\mu_k \neq 0$, то метод E'_λ, обратный методу E_λ, имеет вид $E'_\lambda = (H, \frac{1}{\mu})$ ([2], стр. 325). Следовательно, метод E'_λ определяется матрицей $E'_\lambda = (a'_{nk})$, где

$$a'_{nk} = \binom{n}{k} (1 - \lambda^{-1})^{n-k} \lambda^{-k},$$

т. е.

$$a'_{nk} = \binom{n}{k} (\lambda - 1)^{n-k} \lambda^{-n}. \tag{1}$$

Элементы матрицы E'_λ найдены другим методом в статье [3].

§ 2. Множители сходимости в последовательности относительно E_λ

Пусть последовательность $\{U_k\}$ E_λ-суммируема. Из соотношения (1) следует, что

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\lambda - 1)^{n-k} \lambda^{-n} U'_k. \tag{2}$$

Тогда

$$\varepsilon_n U_n = \sum_{k=0}^{n} b_{nk} U'_k,$$

где

$$b_{nk} = \binom{n}{k} (\lambda - 1)^{n-k} \lambda^{-n} \varepsilon_n.$$

Значит, числа ε_n являются множителями сходимости в последовательности тогда и только тогда, когда метод B, определенный матрицей $B = (b_{nk})$, сохраняет сходимость. По теореме Кожима-Шура ([2], теорема 1) получаем для этого следующие необходимые и достаточные условия:

1° $\lim_n \binom{n}{k} (\lambda - 1)^n \lambda^{-n} \varepsilon_n = b_k$,

2° $\lim \varepsilon_n = \varepsilon$,

3° $|\varepsilon_n| \left(1 + \frac{|1-\lambda|}{|\lambda|}\right)^n \leqslant M$ при всех n.

Здесь из условия 3° следует условие 1°, ибо

$$\binom{n}{k}|\lambda-1|^n|\lambda|^{-n}|\varepsilon_n| \leqslant M\binom{n}{k}\left(\frac{|1-\lambda|}{1+|1-\lambda|}\right)^n \to 0.$$

Следовательно, имеет место следующая

Теорема 1. *Числа* ε_n, $\lim \varepsilon_n = 0$, *являются множителями сходимости в последовательности относительно* E_λ *тогда и только тогда, когда*

$$(1+|1-\lambda|)^n \varepsilon_n = O(\lambda^n). \tag{3}$$

Примечание. Случай $\varepsilon \neq 0$ не представляет интереса, так как в таком случае непосредственно ясно, что числа ε_n являются множителями сходимости в последовательности относительно E_λ тогда и только тогда, когда E_λ не сильнее метода сходимости $E = E_1$, т. е. когда $\lambda \geqslant 1$.

§ 3. Множители суммируемости типа $(E_\lambda, E_\mu)_0$

Пусть последовательность $\{U_k\}$ E_λ-суммируема. Последовательность $\{\varepsilon_k U_k\}$ является E_μ-суммируемой, если существует $\lim U''_n$, где

$$U''_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1-\mu)^{n-k}\mu^k \varepsilon_k U_k.$$

В силу соотношения (2)

$$U''_n = \sum_{m=0}^{n} c_{mn} U'_m,$$

где

$$c_{nm} = \binom{n}{m}\frac{(1-\mu)^n}{(1-\lambda)^m}\Delta^{n-m}\alpha_m,$$

$$\alpha_m = \left[\frac{\mu(1-\lambda)}{\lambda(1-\mu)}\right]^m \varepsilon_m.$$

Отсюда и из теоремы Кожима-Шура вытекает

Теорема 2. *Числа* ε_n *являются множителями суммируемости типа* $(E_\lambda, E_\mu)_0$ *тогда и только тогда, когда*

1° $\lim\limits_n \binom{n}{m}(1-\mu)^n \Delta^{n-m}\alpha_m = c_m$,

2° *последовательность* $\{\varepsilon_n\}$ E_μ-*суммируема*,

3° $\sum\limits_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\frac{|1-\mu|^n}{|1-\lambda|^m}\left|\Delta^{n-m}\alpha_m\right| \leqslant M$ *при всех* n.

Примечание. Если при $\mu \neq 0$ c_m существует для каж-

дого m, то $c_m = 0$ $(m = 0, 1, \ldots)$. Действительно, переходя в равенстве

$$\binom{n}{m}(1-\mu)^n \Delta^{n-m}\alpha_m = \frac{n}{n-m}(1-\mu)^n \binom{n-1}{m}\Delta^{n-1-m}\alpha_m - \frac{m+1}{n-m}\binom{n}{m+1}(1-\mu)^n \Delta^{n-m-1}\alpha_{m+1}$$

к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$c_m = (1-\mu)c_m - 0 \cdot c_{m+1},$$

откуда

$$-\mu c_m = 0.$$

Так как $\mu \neq 0$, то $c_m = 0$.

Из теоремы 2 для степенных множителей суммируемости типа $(E_\lambda, E_\mu)_0$ следует

Теорема 3. *Числа x^n являются множителями суммируемости типа $(E_\lambda, E_\mu)_0$ тогда и только тогда, когда*

1° $|\mu x| + |\lambda(1-\mu) - \mu(1-\lambda)x| \leqslant |\lambda|$,

2° $|1 - \mu + \mu x| < 1$.

При $x = 1$ условие 2° отпадает.

Доказательство. Если $\varepsilon_n = x^n$, то

$$\Delta^{n-m}\alpha_m = \left[\frac{\mu(1-\lambda)x}{\lambda(1-\mu)}\right]^m \cdot \left[1 - \frac{\mu(1-\lambda)x}{\lambda(1-\mu)}\right]^{n-m} = \frac{[\mu(1-\lambda)x]^m}{\lambda^n(1-\mu)^n} \cdot [\lambda(1-\mu) - \mu(1-\lambda)x]^{n-m}$$

и условие 1° теоремы 2 принимает вид

$$\lim_n \binom{n}{m}\frac{(\mu x)^m}{\lambda^n}[\lambda(1-\mu) - \mu(1-\lambda)x]^{n-m} = c_m,$$

или

$$\begin{cases} |\lambda(1-\mu) - \mu(1-\lambda)x| < |\lambda| & \text{при } x \neq 0, \\ |1-\mu| < 1 & \text{при } x = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Условие 2° теоремы 2, как показано в [3], выполнено тогда и только тогда, когда $|1 - \mu + \mu x| < 1$ или $x = 1$. Условие 3° теоремы 2 превращается в

$$\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\frac{|\mu x|^m}{|\lambda|^n}|\lambda(1-\mu) - \mu(1-\lambda)x|^{n-m} \leqslant M \text{ при всех } n,$$

или

$$|\mu x| + |\lambda(1-\mu) - \mu(1-\lambda)x| \leqslant |\lambda|. \tag{5}$$

Но (4) непосредственно следует из (5) (так как $\mu \neq 0$) и условия 2° теоремы 3.

Из теоремы 3 при $x = 1$, в частности, следует, что каждая E_λ-суммируемая последовательность является E_μ-суммируемой тогда и только тогда, когда

$$|\mu| + |\lambda - \mu| \leqslant |\lambda|,$$

т. е. когда $|\mu| \leqslant |\lambda|$ и $\arg \lambda = \arg \mu$. Этим мы получили известный результат Агнью [3]; *метод* E_μ *включает метод* E_λ *тогда и только тогда, когда*

$$\mu = \Theta\lambda, \quad \text{где} \quad 0 < \Theta \leqslant 1.$$

§ 4. Множители сходимости первого типа относительно E_λ

Пусть последовательность $\{U_k\}$ E_λ-суммируема. Ряд $\Sigma \varepsilon_k U_k$ сходится, если существует $\lim U''_n$, где

$$U''_n = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k U_k.$$

В силу соотношения (2)

$$U''_n = \sum_{m=0}^{n} d_{nm} U'_m,$$

где

$$d_{nm} = \sum_{k=0}^{n-m} \binom{k+m}{m} (\lambda - 1)^k \lambda^{-k-m} \varepsilon_{k+m}.$$

По теореме Кожима-Шура получаем следующие необходимые и достаточные условия для того, чтобы числа ε_k были множителями сходимости первого типа относительно E_λ:

$$\sum_k \binom{k+m}{m} \left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)^k \varepsilon_{k+m} \text{ сходится при всех } m, \tag{6}$$

$$\Sigma \varepsilon_k \text{ сходится}, \tag{7}$$

$$\sum_{m=0}^{n} \left| \frac{1}{(\lambda-1)^m} \sum_{k=0}^{n-m} \binom{k+m}{m} \eta_{k+m} \right| \leqslant M \text{ при всех } n, \tag{8}$$

где

$$\eta_k = \left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)^k \varepsilon_k.$$

Так как множители сходимости первого типа относительно E_λ являются множителями сходимости в последовательности относительно E_λ, то по теореме 1 необходимо выполнение условия (3). Но из условия (3) следует условие (6). Следовательно, имеет место

Теорема 4. *Числа ε_n являются множителями сходимости первого типа относительно E_λ тогда и только тогда, когда выполнены условия* (3), (7) *и* (8). *При $\lambda \geqslant 1$ отпадает условие* (3), *а при остальных значениях λ — условие* (7).

Из (8) вытекает добавочное необходимое условие

$$\sum_{m=0}^{n} \left| \frac{1}{(\lambda-1)^m} \sum_k \binom{k+m}{m} \eta_{k+m} \right| \leqslant M \text{ при всех } n. \tag{9}$$

Из теоремы 4 для степенных множителей сходимости первого типа относительно E_λ следует

Теорема 5. *Числа x^n являются множителями сходимости первого типа относительно E_λ тогда и только тогда, когда*

$$\begin{array}{ll} 1^\circ & |x| + |x - \lambda x| \leqslant |\lambda|, \\ 2^\circ & |x| < |\lambda + x - \lambda x|, \\ 3^\circ & |x| < 1. \end{array}$$

Доказательство. При $\varepsilon_n = x^n$ условия (3) и (7) теоремы 4 совпадают с условиями 1° и 3° теоремы 5, а условие (9) теоремы 4 принимает вид

$$\sum_{m=0}^{n} \left| \frac{x^m}{\lambda^m} \sum_k \binom{k+m}{m} \left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)^k x^k \right| \leqslant M \text{ при всех } n,$$

или

$$\left| \frac{\lambda}{\lambda + x - \lambda x} \right| \sum_{m=0}^{n} \left| \frac{x}{\lambda + x - \lambda x} \right|^m \leqslant M \text{ при всех } n,$$

которое равносильно условию

$$|x| < |\lambda + x - \lambda x|.$$

Остается доказать, что из условий теоремы 5 следует условие (8) теоремы 4, т. е. что

$$\sum_{m=0}^{n} \left| \frac{x^m}{\lambda^m} \sum_{k=0}^{n-m} \binom{k+m}{m} \left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)^k x^k \right| \leqslant M \text{ при всех } n.$$

Заметим, что условие 2° теоремы 5 можно заменить условием

$$\arg z \neq 0 \quad \text{при} \quad |x| + |x - \lambda x| = |\lambda|, \tag{10}$$

где $z = \dfrac{x(\lambda-1)}{\lambda}$. Действительно, если $\arg z \neq 0$, то $|x| = |\lambda| - |x - \lambda x| < |\lambda + x - \lambda x|$.

Так как $R_{n-m-1} = \sum_{k=n-m+1}^{\infty} \binom{k+m}{m} z^k$ является остаточным чле-

ном ряда Тейлора для функции $(1-z)^{-m-1}$, то по теореме Грэвса (см. [1], стр. 145)

$$R_{n-m+1} = (n+1)\binom{n}{m} z^{n-m+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-m}}{(1-tz)^{n+2}}\, dt.$$

Следовательно,

$$\sum_{m=0}^{n} \left| \frac{x^m}{\lambda^m} \sum_{k=0}^{n-m} \binom{k+m}{m} \left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)^k x^k \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=0}^{n} \left| \frac{x^m}{\lambda^m} \sum_k \binom{k+m}{m} z^k \right| + \sum_{m=0}^{n} \left| \frac{x^m}{\lambda^m} R_{n-m+1} \right| = P_n + Q_n.$$

Здесь $P_n = O(1)$ в силу условия 2° теоремы 5. Для Q_n получим

$$Q_n \leqslant \sum_{m=0}^{n} \left|\frac{x}{\lambda}\right|^m (n+1)\binom{n}{m} |z|^{n-m+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-m}}{(1-tz)^{n+2}}\, dt =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \left|\frac{x}{\lambda}\right|^m (n+1)\binom{n}{m} |z|^{n-m+1} \frac{(1-\tau)^{n-m}}{|1-\tau z|^{n+2}},$$

где $0 < \tau < 1$. Отсюда следует, что

$$Q_n \leqslant \frac{(n+1)|z|}{|1-\tau z|^{n+2}} \left[\left|\frac{x}{\lambda}\right| + (1-\tau)|z|\right]^n =$$

$$= \frac{(n+1)|z|}{|1-\tau z|^2} \left[\frac{|x| + (1-\tau)|x(\lambda-1)|}{|\lambda - \tau x(\lambda-1)|}\right]^n = o(1),$$

так как, в силу условия 1° теоремы 5 и (9), по крайней мере одно из неравенств

$$|x| + (1-\tau)|x(\lambda-1)| \leqslant |\lambda| - \tau|x - \lambda x| \leqslant |\lambda - \tau x(\lambda-1)|$$

является строгим.

В 1952 году Пейеримхофф [6] выяснил, что при $0 < \lambda < 1$ числа $\varepsilon_k = \left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)^k$ являются и числа $\varepsilon_k = \left(-\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)^k$ не являются множителями сходимости первого типа относительно E_λ. В статье [4] показано, что при $0 < \lambda < 1$ числа $\varepsilon_k = \left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)^k e^{ik\varphi}$ являются множителями сходимости первого типа относительно E_λ при всех значениях $\varphi \neq \pi$. Этот результат непосредственно вытекает из теоремы 5, имея в виду формулу (10).

§ 5. Множители суммируемости типа $(E_\lambda, E_\mu)_1$

Гайер и Пейеримхофф получили ([4], стр. 236) следующий результат:

Пусть $0 < \lambda < \mu \leqslant 1$. *Ряд* $\Sigma x^n u_n$ *является* E_μ*-суммируемым при всех* E_λ*-суммируемых рядах* Σu_k *тогда и только тогда, когда*

$$\begin{array}{ll} 1^\circ & \mu|x| + |\lambda(1-\mu) - \mu(1-\lambda)x| \leqslant \lambda, \\ 2^\circ & |x| < |\lambda + x - \lambda x|. \end{array} \tag{11}$$

Для степенных множителей суммируемости типа $(E_\lambda, E_\mu)_1$ имеет место

Теорема 6. *Пусть* $0 < \lambda < \mu \leqslant 1$. *Числа* x^n *являются множителями суммируемости типа* $(E_\lambda, E_\mu)_1$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия* (11).

Доказательство. Достаточность этих условий следует из вышеприведенного результата Гайера-Пейеримхоффа и теоремы 3, а необходимость из леммы 1 статьи [4] при помощи преобразования Абеля

$$\sum_{k=0}^{n} x^k u_k = (1-x) \sum_{k=0}^{n-1} x^k U_k + x^n U_n.$$

Литература

1. Гаврурин М. К., Аналитические методы исследования нелинейных функциональных преобразований. Уч. зап. Ленингр. гос. ун-та, сер. матем., 1950, **19**, № 137, 59—154.
2. Харди Г., Расходящиеся ряды. Москва, 1951.
3. Agnew, R. P., Euler transformations. Amer. J. Math., 1944, **66**, 318—338.
4. Gaier, D., Peyerimhoff, A., Summierbarkeitsfaktoren bei Eulerschen Reihentransformationen. Math. Z., 1953, **58**, 232—242.
5. Garabedian, H. L., Hausdorff matrices. Amer. Math. Monthly, 1939, **46**, 390—410.
6. Peyerimhoff, A., Konvergenzfaktoren beim Euler-Knoppschen Limitierungsverfahren. Math. Z., 1952, **55**, 288—291.

Поступило
5 III 1962

SUMMEERUVUSTEGURITEST EULER-KNOPPI MENETLUSE PUHUL

H. Espenberg
Geomeetria kateeder

Resümee

Arve ε_n nimetame summeeruvustegureiks tüüpi $(A, B)_0$ (vastavalt $(A, B)_1$), kui iga A-summeeruva jada $\{U_n\}$ korral jada $\{\varepsilon_n U_n\}$ (vastavalt rida $\Sigma\varepsilon_n U_n$) on B-summeeruv. Käesolevas töös antakse tarvilikud ja piisavad tingimused ülalmainitud tüüpi summeeruvustegureile, kus A ja B on Euler-Knoppi menetlused. Erijuhul, kui $\varepsilon_n = x^n$, on nimetatud tingimustele antud efektiivne kuju.

ÜBER SUMMIERBARKEITSFAKTOREN BEIM EULER-KNOPPSCHEN VERFAHREN

H. Espenberg

Z u s a m m e n f a s s u n g

Man nennt die Zahlen ε_n Summierbarkeitsfaktoren des Typus $(A, B)_0$ (bzw. $(A, B)_1$), wenn für jede A-summierbare Folge $\{U_n\}$ die Folge $\{\varepsilon_n U_n\}$ (bzw. die Reihe $\Sigma\varepsilon_n U_n$) B-summierbar ist. In der vorliegenden Arbeit werden genaue Bedingungen für Summierbarkeitsfaktoren der obengenannten Typen, wo A und B die Euler-Knoppschen Verfahren sind, aufgestellt. Im Spezialfall, wenn $\varepsilon_n = x^n$, ist diesen Bedingungen die effektive Form gegeben.

О МНОЖИТЕЛЯХ СУММИРУЕМОСТИ ДЛЯ МЕТОДА ХАУСДОРФА

Х. Эспенберг
Кафедра геометрии

1. Пусть $\varphi(t)$ функция с ограниченным изменением на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$. Числа

$$\mu_n = \int_0^1 t^n \, d\varphi(t) \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

называются моментами функции $\varphi(t)$. Последовательность моментов $\{\mu_n\}$ определяет метод Хаусдорфа $H(\varphi)$ матрицей (a_{nk}), где

$$a_{nk} = \binom{n}{k} \Delta^{n-k} \mu_k = \binom{n}{k} \int_0^1 (1-t)^{n-k} t^k \, d\varphi(t).$$

Если $\varphi(+0) = \varphi(0) = 0$ и $\varphi(1) = 1$, то метод $H(\varphi)$ регулярен.

Пусть $\varphi(t) = 1$ при $\varrho \leqslant t \leqslant 1$. Следуя Агнью [4], назовем число $r = \inf \varrho$ *порядком метода* $H(\varphi)$. Метод $H(\varphi)$ порядка r будем обозначать через $H(\varphi, r)$. В статье [4] доказано, что последовательность $\{z^n\}$ суммируема регулярным методом $H(\varphi, r)$, если

$$|1 - r + rz| < 1, \tag{1}$$

и не суммируема этим же методом, если

$$|1 - r + rz| > 1.$$

Область комплексной плоскости, определенная неравенством (1), называется кругом суммируемости $H^*(\varphi, r)$ для метода $H(\varphi, r)$.

2. Пусть даны матричные методы суммирования A и B.

Числа ε_n называются *множителями суммируемости в последовательности типа* (A, B), если последовательность $\{\varepsilon_n U_n\}$ является B-суммируемой при всех A-суммируемых последовательностях $\{U_n\}$.

До сих пор изучены множители суммируемости в последовательности для методов Чезаро [5], Эйлера-Кноппа [3] и взве-

шенных средних Рисса [1]. В настоящей статье мы выводим одно необходимое условие для степенных множителей суммируемости в последовательности, когда A и B — соответственно *регулярные* методы Хаусдорфа $H(\varphi, r)$ и $H(\varphi, s)$. Называя такие множители суммируемости *множителями суммируемости типа* (φ, ψ), мы получаем следующую теорему:

Теорема. *Для того, чтобы числа* x^n *были множителями суммируемости типа* (φ, ψ), *необходимо выполнение условия*

$$|sx| + |r(1-s) - s(1-r)x| \leqslant r. \tag{2}$$

Доказательство. Для того, чтобы числа x^n были множителями суммируемости типа (φ, ψ), необходимо выполнение условия

$$xz \in H^*(\psi, s) \quad \textit{при всех} \quad z \in H^*(\varphi, r). \tag{3}$$

Из соотношения (1) следует, что $z \in H^*(\varphi, r)$ тогда и только тогда, когда

$$z = \frac{r-1}{r} + ae^{i\alpha},$$

где α произвольное и $0 \leqslant a < \frac{1}{r}$. Следовательно, мы можем условию (3) придать вид:
при всех $z \in H^*(\varrho, r)$

$$|1 - s + sxz| < 1$$

или при всех α и $0 \leqslant a < \frac{1}{r}$

$$|r(1-s) - s(1-r)x + rsxae^{i\alpha}| < r.$$

Пусть $\arg[r(1-s) - s(1-r)x] = \beta$. Выберем γ так, чтобы $\arg xe^{i\gamma} = \beta$. При $\alpha = \gamma$ условие (3) принимает вид

$$|r(1-s) - s(1-r)x| + |rsxae^{i\gamma}| < r$$

при $0 \leqslant a < \frac{1}{r}$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $a \to \frac{1}{r}$, получаем условие (2).

3. Пусть $H(\varphi, r) = E_\lambda$ и $H(\psi, s) = E_\mu$, где E_γ, E_μ — регулярные методы Эйлера-Кноппа. Тогда $r = \lambda$, $s = \mu$ (см. [2], стр. 324). Следовательно, из доказанной теоремы следует:

Для того, чтобы числа x^n *были множителями суммируемости в последовательности типа* (E_λ, E_μ), *где* $0 < \lambda, \mu \leqslant 1$, *необходимо выполнение условия*

$$|\mu x| + |\lambda(1-\mu) - \mu(1-\lambda)x| \leqslant \lambda. \tag{4}$$

Добавочным необходимым условием является E_μ-сумми-

руемость последовательности $\{x^n\}$ (так как последовательность $\{1, 1, \ldots, 1, \ldots\}$ является $E\lambda$-суммируемой), т. е. условие

$$|1 - \mu + \mu x| < 1. \tag{5}$$

Но из теоремы 3 статьи [3] следует, что условия (4) и (5) являются не только необходимыми, но и достаточными для того, чтобы числа x^n были множителями суммируемости в последовательности типа $(E\lambda, E\mu)$, где $0 < \lambda, \mu \leqslant 1$.

Литература

1. Кангро Г., Тыннов М., Множители суммируемости в последовательности для метода взвешенных средних Рисса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 209—225.
2. Харди Г., Расходящиеся ряды. Москва, 1951.
3. Эспенберг Х., О множителях суммируемости для метода Эйлера-Кноппа. Настоящий сборник, стр. 241—249.
4. Agnew, R. P., Analytic extension by Hausdorff methods. Trans. Amer. Math. Soc., 1942, **52**, 217—237.
5. Bosanquet, L. S., On convergence and summability factors in a sequence. Mathematika, 1954, **1**, 24—44.

Поступило
7 III 1962

SUMMEERUVUSTEGURITEST HAUSDORFFI MENETLUSE PUHUL

H. Espenberg
Geomeetria kateeder

Resümee

Käesolevas töös antakse tarvilik tingimus jada summeeruvusteguritele tüüpi (A, B), kus A ja B on regulaarsed Hausdorffi menetlused. Rakendusena vaadeldakse erijuhtu, kus A ja B on Euler-Knoppi menetlused.

ÜBER SUMMIERBARKEITSFAKTOREN BEI HAUSDORFFSCHEN VERFAHREN

H. Espenberg

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird eine notwendige Bedingung für Folgensummierbarkeitsfaktoren des Typus (A, B), wo A und B die regulären Hausdorffschen Verfahren sind, aufgestellt. Als Anwendung wird der Spezialfall, wo A und B die Euler-Knoppschen Verfahren sind, betrachtet.

НЕКОТОРЫЕ ТИПЫ МНОЖИТЕЛЕЙ СУММИРУЕМОСТИ ДЛЯ МЕТОДА РИССА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Х. Тюрпу
Кружок СНО при кафедре математического анализа

§ 1. Вводные замечания

В настоящей статье выводятся в основном необходимые и достаточные условия для множителей суммируемости типов $(|\mathfrak{P}^2|, B)$, $(|\mathfrak{P}^2|, |B|)$, $(\mathfrak{P}^2, B)$, $(\mathfrak{P}_O{}^2, B)$ и $(\mathfrak{P}^2, |B|)$, где $\mathfrak{P}^2$ означает нормальный метод Рисса второго порядка, а B — любой треугольный регулярный метод.[1] Следовательно, B удовлетворяет (см. [5], стр. 83—84) условиям:

$$\beta_{nk} = O(1), \tag{1}$$

$$\lim_n \beta_{nk} = 1, \tag{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} |b_{nk}| = O(1), \text{ где } b_{nk} = \Delta\beta_{nk}. \tag{3}$$

Используемый в статье метод Рисса второго порядка треугольен, и в виде преобразования ряда в последовательность задается матрицей (см. [6])

$$a_{n\nu} = \left(1 - \frac{P_{\nu-1}}{P_n}\right)\left(1 - \frac{P_{\nu-1}}{P_{n+1}}\right),$$

где $P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k \neq 0$, а p_k — произвольная последовательность комплексных чисел, причем $p_k \neq 0$ и $p_{k+1} + p_k \neq 0$.

Напомним, что *комплексные числа ε_k называются множителями суммируемости типа $(\mathfrak{A}, B)$, если ряд $\sum \varepsilon_k U_k$ B-суммируем при всех $\mathfrak{A}$-суммируемых последовательностях $\{U_k\}$.*

[1] В данной статье придерживаемся определений и обозначений статьи [4]. Кроме того свободные индексы во всех условиях и оценках принимают значения: 0, 1, 2, ...

Остальные типы множителей суммируемости определяются аналогично.

Рассматриваемые нами типы множителей суммируемости для метода $\mathfrak{P}^2$ до сих пор не исследованы. Отметим, что в статьях [7, 8] рассматриваются другие типы множителей суммируемости и метод Рисса определяется там иначе. Что касается теорий множителей суммируемости для метода Рисса первого порядка, то начали ее с некоторых частных случаев развивать немецкие математики А. Пейеримхофф и В. Юркат в 50-х годах и закончил ее в самом общем виде Г. Ф. Кангро в 1955 г. за исключением типов $(\mathfrak{P}_0, |B|)$, $(\mathfrak{P}, |B|)$ и $(\mathfrak{P}_O, |B|)$ (см. [2] стр. 210—225). Однако в данной статье мы исследуем и последние, так как их условия необходимы для соответствующих множителей суммируемости метода $\mathfrak{P}^2$.

В дальнейшем нам нужны следующие леммы:

Лемма 1. *Для того, чтобы P^2 сохранял абсолютную сходимость, необходимо и достаточно условие*

$$P_{k-1} \sum_{n=k}^{\infty} \left| \left(1 - \frac{P_{k-1}}{P_n}\right) \frac{p_n + p_{n+1}}{P_{n-1} P_{n+1}} \right| = O(1).$$

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы Суноути (см. [2], стр. 199).

Примечание 1. *Для того, чтобы P^2 сохранял сходимость, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

существует $\lim\limits_n P_n \neq 0$ *(конечный или бесконечный) и*

$$\sum_{k=0}^{n} \left| p_k \sum_{\nu=k}^{n} (p_\nu + p_{\nu+1}) \right| = O(P_n P_{n+1}).$$

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы Хана (см. [2], стр. 198).

Лемма 2. *Если P^2 и P сохраняют абсолютную сходимость, тогда справедливо включение $|P| \subset |P^2|$.*

Доказательство. По теореме 12 статьи [4] для включения $|P^2| \supset |P|$ необходимо и достаточно

$$P_k \sum_{n=k}^{\infty} \left| \left(1 - \frac{P_k + P_{k-1}}{P_n}\right) \frac{p_n + p_{n+1}}{P_{n-1} P_{n+1}} \right| = O(1),$$

которое в силу леммы 1 получает вид

$$P_k P_{k-1} \sum_{n=k}^{\infty} \left| \frac{p_n + p_{n+1}}{P_{n-1} P_n P_{n+1}} \right| = O(1).$$

Последнее условие выполнено по лемме II статьи [2].

Лемма 3. *Если P^2 и P сохраняют сходимость, тогда справедливо включение $P \subset P^2$.*

Доказательство. По следствию 1 из теоремы 15 статьи [2] доказываемое включение имеет место тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=0}^{n} |P_k(p_k + p_{k+1})| = O(P_n P_{n+1}).$$

Последнее условие выполнено по лемме I статьи [2].

§ 2. Неэффективные условия

По определению множителей суммируемости мы должны исследовать сходимость или абсолютную сходимость последовательности

$$U''_n = \sum_{\nu=0}^{n} \beta_{n\nu} \varepsilon_\nu U_\nu \tag{4}$$

при условии, что ряд $\Sigma u'_\nu$, где

$$u'_\nu = \sum_{k=0}^{\nu} \overline{\Delta} a_{\nu k} U_k \quad \text{и} \quad a_{\nu k} = \Delta a_{\nu k}, \tag{5}$$

имеет ограниченные частичные суммы, сходится или абсолютно сходится. Для решения поставленной проблемы воспользуемся методом обратного преобразования. Для этого, при помощи матрицы, обратной к $\mathfrak{P}^2$, из (5) выводим

$$U_\nu = \sum_{k=0}^{\nu} \overline{\xi}_{\nu k} u'_k, \tag{6}$$

$$\overline{\xi}_{\nu k} = \begin{cases} \dfrac{P_\nu P_{\nu+1}}{(p_\nu + p_{\nu+1}) p_\nu} & \text{при } \nu = k, \\ \dfrac{P_\nu (p_\nu - P_{\nu-2})}{p_\nu (p_\nu + p_{\nu-1})} & \text{при } \nu = k+1, \\ 1 & \text{при } \nu > k+1. \end{cases}$$

Подставляя (6) в (4), получаем

$$U''_n = \sum_{k=0}^{n} \tau_{nk} u'_k, \tag{7}$$

причем

$$\tau_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} \beta_{n\nu} \overline{\xi}_{\nu k} \varepsilon_\nu =$$

$$= \frac{P_k P_{k+1}}{p_k + p_{k+1}} \Delta(\beta_{nk} e_k) + P_{k+1} \beta_{n,\,k+1} e_{k+1} + \sum_{\nu=k+2}^{n} \beta_{n\nu} \varepsilon_\nu, \tag{8}$$

обозначая здесь и всюду в дальнейшем

$$e_k = \frac{\varepsilon_k}{p_k},$$

чем проблема сведена к исследованию матричного преобразования ряда в последовательность. Применяя к преобразованию (7) леммы 6, 7, 5 и 8 из статьи [2] и теорему 6 из статьи [9], получаем следующие теоремы:

Теорема 2. *Для того, чтобы числа ε_k являлись множителями суммируемости типа $(|\mathfrak{P}^2|, B)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

$$\lim_n \tau_{nk} = \tau_k, \tag{9}$$

$$\tau_{nk} = O(1). \tag{10}$$

Теорема 2. *Для того, чтобы числа ε_k являлись множителями суммируемости типа $(|\mathfrak{P}^2|, |B|)$, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\sum_{n=k}^{\infty} |\bar{\Delta}\tau_{nk}| = O(1). \tag{11}$$

Теорема 3. *Для того, чтобы числа ε_k являлись множителями суммируемости типа $(\mathfrak{P}^2, B)$, необходимо и достаточно выполнение условий* (9) *и*

$$\sum_{k=0}^{n} |\Delta\tau_{nk}| = O(1). \tag{12}$$

Теорема 4. *Для того, чтобы числа ε_k являлись множителями суммируемости типов $(\mathfrak{P}_O^2, B)$, необходимо и достаточно выполнение условий* (9) *и*

$$\lim_n \sum_{k=0}^{n} |\Delta\tau_{nk}| = \sum |\Delta\tau_k|. \tag{13}$$

Теорема 5. *Для того, чтобы числа ε_k являлись множителями суммируемости типов $(\mathfrak{P}_o^2, |B|)$, $(\mathfrak{P}^2, |B|)$ или $(\mathfrak{P}_O^2, |B|)$, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\sum_k \Big| \sum_{n=k}^{\infty} \bar{\Delta}(\Delta\tau_{nk}) d_n \Big| < \infty \tag{14}$$

при любых $d_n = O(1)$.

Применяя теперь к преобразованию (18) статьи [2] теорему 6 из статьи [9], получаем следующую теорему.

Теорема 6. *Для того, чтобы числа ε_k являлись множителями суммируемости типов $(\mathfrak{P}_o, |B|)$, $(\mathfrak{P}, |B|)$ или $(\mathfrak{P}_O, |B|)$, необходимо и достаточно выполнение следующего условия*

$$\sum_k \Big| \sum_{n=k}^{\infty} (\bar{\Delta}c_{nk}) d_n \Big| < \infty \tag{15}$$

при любых $d_n = O(1)$, *где*

$$\bar{\Delta} c_{nk} = P_k \Delta (\bar{\Delta} \beta_{nk}\, e_k). \tag{16}$$

Условия теорем 1—6, хотя и легко доказываются, являются неэффективными в том смысле, что их в практике трудно проверять. В дальнейшем мы выводим новые теоремы с более эффективными условиями путем накладывания на $\mathfrak{P}^2$ и B некоторых слабых ограничений или рассматривая частные случаи (например, теоремы 11, 12 и 13).

§ 3. Множители суммируемости типов $(|\mathfrak{P}^2|, B)$ и $(|\mathfrak{P}^2|, |B|)$

Теорема 7. *Пусть* $\mathfrak{P}^2$ *и* $\mathfrak{P}$ *сохраняют абсолютную сходимость и пусть* B *регулярен. Для того, чтобы числа* ε_k *являлись множителями суммируемости типа* $(|\mathfrak{P}^2|, B)$, *необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

Ряд $\Sigma \varepsilon_k$ B-*суммируем и имеет ограниченные частичные суммы,* (17)

$$P_k\, \varepsilon_k = O(p_k), \tag{18}$$

$$P_k\, P_{k+1}\, \Delta e_k = O(p_k + p_{k+1}), \tag{19}$$

$$P_k\, P_{k+1}\, b_{nk}\, \varepsilon_k = O[p_k (p_k + p_{k+1})]. \tag{20}$$

Доказательство. Необходимость. По лемме 2 все условия необходимые для множителей суммируемости типа $(|\mathfrak{P}|, B)$, подавно необходимы для типа $(|\mathfrak{P}^2|, B)$, поэтому необходимость условий (17) и (18) следует из теоремы 11 статьи [2]. Далее из условий (9) и (10) теоремы 1 следует, что

$$\tau_k = O(1). \tag{21}$$

В силу условий (2), (17) и (18) условие (21) превращается в условие (19). Наконец, при помощи тождества

$$\Delta (\beta_{nk}\, e_k) = \beta_{n,\,k+1}\, \Delta e_k + e_k\, b_{nk} \tag{22}$$

из условий (10), (1), (17), (18) и (19) заключаем необходимость условия (20).

Достаточность. Условие (9) теоремы 1 вытекает из условий (17) теоремы 7 и (2); условие (10) — из условий (17), (18), (19), (22), (20) и (1).

Теорема 8. *Пусть* $\mathfrak{P}^2$, $\mathfrak{P}$ *и* B *сохраняют абсолютную сходимость и пусть* B *регулярен. Для того, чтобы числа* ε_k *являлись множителями суммируемости типа* $(|\mathfrak{P}^2|, |B|)$, *необходимо и достаточно выполнение условий* (18), (19) *и*

$$\sum_{n=k}^{\infty} \Big| \sum_{\nu=k+2}^{n} \varepsilon_\nu\, \bar{\Delta} \beta_{n\nu} \Big| = O(1), \tag{23}$$

$$P_k P_{k+1} \varepsilon_k \sum_{n=k}^{\infty} |\Delta b_{nk}| = O[p_k(p_k + p_{k+1})]. \tag{24}$$

Доказательство. Необходимость. Условия (18) и (19) следуют из теоремы 7. Условие (23) — из условия 4° теоремы 3 статьи [2]. Условие (24) вытекает из условия (11) теоремы 2 и условий (18), (19), (23) и леммы 7 статьи [2] при помощи тождества (22).

Достаточность. Условие (11) теоремы 2 вытекает из условий (18), (19), (23), (24) и леммы 7 статьи [2] при помощи тождества (22).

Примечание 2. *Условие* (23) *можно заменить условиями:*

$$\sum_{n=k}^{\infty} \Big| \sum_{\nu=0}^{k} \varepsilon_\nu \Delta \beta_{n\nu} \Big| = O(1),$$

ряд $\Sigma \varepsilon_k$ $|B|$*-суммируем и имеет ограниченные частичные суммы.*

§ 4. Множители суммируемости типов ($\mathfrak{P}^2$, B) и ($\mathfrak{P}_O{}^2$, B)

Теорема 9. *Пусть* $\mathfrak{P}^2$ *и* $\mathfrak{P}$ *сохраняют сходимость и пусть* B *регулярен. Для того, чтобы числа* ε_k *являлись множителями суммируемости типа* ($\mathfrak{P}^2$, B), *необходимо и достаточно выполнение условий* (19) *и*

$$\Sigma |\varepsilon_k| < \infty, \tag{25}$$

$$\Sigma \left| P_k P_{k+1} \Delta \frac{\Delta e_k}{p_k + p_{k+1}} \right| < \infty, \tag{26}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left| P_k P_{k+1} e_{k+1} \Delta \frac{b_{nk}}{p_k + p_{k+1}} \right| = O(1). \tag{27}$$

Доказательство. Необходимость. Условие (25) следует из условия (25) статьи [2]. Далее, из условий (9) и (12) следует $\Sigma |\Delta \tau_k| < \infty$, т. е. условие (26). Условие (19) следует из леммы 3 и из условий (25), (26) и (18) (ср. 1° теоремы 10 статьи [2]) при помощи тождества

$$\sum_{\nu=0}^{k-1} \Delta \tau_\nu = \sum_{\nu=0}^{k} \varepsilon_\nu - P_{k+1} e_{k+1} - \frac{P_k P_{k+1}}{p_k + p_{k+1}} \Delta e_k.$$

Наконец, при помощи тождества:

$$\Delta \frac{\Delta (\beta_{nk} e_k)}{p_k + p_{k+1}} = \Delta \frac{\Delta e_k}{p_k + p_{k+1}} \beta_{n,\, k+2} + \frac{\Delta e_k}{p_k + p_{k+1}} (b_{nk} + b_{n,\, k+1}) +$$

$$+ e_{k+1} \Delta \frac{b_{nk}}{p_k + p_{k+1}}, \tag{28}$$

из условий (1), (3), (19) и (26) следует условие (27).

Достаточность. Условие (9) теоремы 3 вытекает из условий (2) и (25) настоящей теоремы, а условие (12) — из условий (3), (1), (19), (26) и (27) при помощи тождества (28).

Теорема 10. *Пусть* $\mathfrak{P}^2$ *и* $\mathfrak{P}$ *сохраняют сходимость и пусть* B *регулярен. Для того, чтобы числа* ε_k *являлись множителями суммируемости типа* $(\mathfrak{P}_O{}^2, B)$ *необходимо и достаточно выполнение условий* (25), (26) *и*

$$P_k P_{k+1} \Delta e_k = o(p_k + p_{k+1}), \tag{29}$$

$$\lim_n \sum_{k=0}^{n} \left| P_k P_{k+1} e_{k+1} \Delta \frac{b_{nk}}{p_k + p_{k+1}} \right| = 0. \tag{30}$$

Доказательство. Необходимость. Из условий (9) и (13) теоремы 4 следует, что $\tau_k = o(1)$ откуда, учитывая условия (1), (2), (25), 2° теоремы 14 статьи [2] и лемму 3, вытекает условие (29). Условия (25) и (26) следуют из теоремы 9. Наконец, из условий (1), (13), (3), (2), (29) и (26) при помощи тождества (28) выводим условие (30).

Достаточность. Учитывая доказательство теоремы 9, остается показать, что условие (13) вытекает из условий (26), (29) и (30) теоремы 10. Действительно, при помощи неравенства

$$\left| \sum_{k=0}^{n} |\Delta \tau_{nk}| - \sum_{k=0}^{n} |\Delta \tau_k| \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{P_k P_{k+1}}{p_k + p_{k+1}} \Delta e_k (b_{nk} + b_{n,k+1}) \right| +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} \left| (\beta_{n,k+2} - 1) P_k P_{k+1} \Delta \frac{\Delta e_k}{p_k + p_{k+1}} \right| + \sum_{k=0}^{n} \left| P_k P_{k+1} e_{k+1} \Delta \frac{b_{nk}}{p_k + p_{k+1}} \right|$$

из условий (1), (29), (3), (26), (2) и (30) теоремы 10 вытекает условие (13) теоремы 4.

§ 5. Множители суммируемости типа $(\mathfrak{A}, |B|)$

Как уже отмечалось в § 1, множители суммируемости типа $(\mathfrak{A}, |B|)$ не исследованы при $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}$. Так как получение общих результатов затруднительно, то ниже мы ограничиваемся некоторыми частными случаями, а потом используем некоторые из них для исследования множителей суммируемости типа $(\mathfrak{P}^2, |Q|)$, где Q означает метод Рисса первого порядка, определенный последовательностью $\{q_k\}$.

Теорема 11. *Пусть* $\mathfrak{P}$ *сохраняет сходимость, а* B *— абсолютную сходимость и регулярен, удовлетворяя, сверх того, одному из условий*

а) $|B| \supset |P|$,

б) $\sum_{n=k}^{\infty} |\Delta b_{nk}| = O(\beta_{kk})$, *где* B *нормален.*

Для того, чтобы числа ε_k являлись множителями суммируемости типов $(\mathfrak{P}_0, |B|)$, $(\mathfrak{P}, |B|)$ или $(\mathfrak{P}_O, |B|)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:
в случае а) (25) *и*

$$\Sigma |P_k \Delta e_k| < \infty, \tag{31}$$

в случае б) (31) *и*

$$\Sigma |P_k e_k \beta_{kk}| < \infty. \tag{32}$$

Доказательство. Необходимость. а) Условия (25) и (31) вытекают из условия (25) и из теоремы 10 статьи [2].

б) Условие (31) вытекает из теоремы 10 статьи [2], а условие (32) из условия (4) статьи [10] (см. стр. 34).

Достаточность. В обеих случаях условие (15) теоремы 6 вытекает из условий (31), (25), (32) и из леммы 7 статьи [2] при помощи неравенства

$$\sum_k \Big| \sum_{n=k}^{\infty} \overline{\Delta}(c_{nk}) d_n \Big| \leqslant M \sum_k |P_k \Delta e_k| \sum_{n=k}^{\infty} |\overline{\Delta}\beta_{n,k+1}| + M \sum_k |\varepsilon_k| \left| \frac{P_k}{p_k} \right| \sum_{n=k}^{\infty} |\overline{\Delta} b_{nk}| =$$

$$= M \sum_k |P_k \Delta e_k| \sum_{n=k}^{\infty} |\overline{\Delta}\beta_{n,k+1}| + M \sum_k |P_k e_k \beta_{kk}| \frac{1}{|\beta_{kk}|} \sum_{n=k}^{\infty} |\overline{\Delta} b_{nk}|. \tag{33}$$

При $B = C^\alpha$, где C^α означает метод Чезаро комплексного порядка α, причем $\operatorname{Re}\alpha > 0$ или $\alpha = 0$ (т. е. C^α сохраняет абсолютную сходимость и регулярен), получаем следующую теорему.

Теорема 12. *Пусть $\mathfrak{P}$ сохраняет сходимость. Для того, чтобы числа ε_k являлись множителями суммируемости типов $(\mathfrak{P}_0, |C^\alpha|)$, $(\mathfrak{P}, |C^\alpha|)$ или $(\mathfrak{P}_O, |C^\alpha|)$, необходимо и достаточно выполнение условий* (31) *и* (32), *если положить в последнем*

$$\beta_{kk} = \begin{cases} (k+1)^{-\operatorname{Re}\alpha} & \text{при } 0 < \operatorname{Re}\alpha \leqslant 1 \text{ или } \alpha = 0, \\ (k+1)^{-1} & \text{при } \operatorname{Re}\alpha \geqslant 1. \end{cases}$$

Доказательство. Необходимость. При $0 < \operatorname{Re}\alpha \leqslant 1$ или $\alpha = 0$ условие (32) вытекает из условия (4) статьи [10]. Докажем необходимость условия (32) при $\operatorname{Re}\alpha \geqslant 1$. Из условия (15) теоремы 6, условия (31) настоящей теоремы и из того, что C^α сохраняет абсолютную сходимость, при помощи тождества (22) получаем необходимость условия:

$$\sum_k \left| P_k \frac{\varepsilon_k}{p_k} \right| \left| \sum_{n=k}^{\infty} d_n \Delta \frac{k A_{n-k}^{\alpha-1}}{n A_n^\alpha} \right| < \infty. \tag{34}$$

При $d_n = \dfrac{A_n^\alpha}{A_n^{\alpha+i\varphi}}$ ($\varphi \neq 0$ и вещественно), условие (34) превращается (ср. [1], стр. 137—140) в условие

$$\sum_k |P_k e_k| \left| \Delta \sum_{n=k}^{\infty} \frac{k A_{n-k}^{\alpha-1}}{n A_n^{\alpha+i\varphi}} \right| = \sum_k \left| P_k e_k \Delta \frac{1}{A_k^{i\varphi}} \right| = \left| \frac{i\varphi}{1+i\varphi} \right| \sum_k \left| P_k e_k \frac{1}{A_k^{1+i\varphi}} \right| < \infty,$$

которое равносильно условию (32) при $\operatorname{Re}\alpha \geqslant 1$.

Достаточность. Условие (15) теоремы 6 вытекает из оценки (см. [3], стр. 156)

$$\sum_{n=k}^{\infty} |\overline{\Delta} b_{nk}| = \begin{cases} O[(k+1)^{-\operatorname{Re}\alpha}] & \text{при } 0 \leqslant \operatorname{Re}\alpha \leqslant 1 \\ O[(k+1)^{-1}] & \text{при } \operatorname{Re}\alpha \geqslant 1 \end{cases}$$

и из условий (31) и (32) при помощи неравенства (33), где $B = C^{\alpha}$.

Теорема 13. *Пусть* $\mathfrak{P}^2$ *и* $\mathfrak{P}$ *сохраняют сходимость, а* Q *— абсолютную сходимость и пусть* Q, *сверх того, регулярен. Для того, чтобы числа* ε_k *являлись множителями суммируемости типов* $(\mathfrak{P}_0^2, |Q|)$, $(\mathfrak{P}^2, |Q|)$ *или* $(\mathfrak{P}_0^2, |Q|)$, *необходимо и достаточно выполнение условий* (26) *и*

$$\sum \left| \frac{P_k q_k}{p_k Q_k} \varepsilon_k \right| < \infty, \tag{35}$$

$$\sum \left| \frac{P_k P_{k+1} q_k}{(p_k + p_{k+1}) p_k Q_k} \varepsilon_k \right| < \infty, \tag{36}$$

$$\sum \left| \frac{P_k P_{k+1} q_{k+1}}{(p_k + p_{k+1}) Q_{k+1}} \Delta e_k \right| < \infty. \tag{37}$$

Доказательство. Необходимость. Условие (26) следует из теоремы 9, а условие (35) из леммы 3 и из условия (32) теоремы 11. Условие (36) вытекает из условия (4) статьи [10]. Далее, из того, что Q сохраняет абсолютную сходимость, из условия (14) теоремы 5 и из условий (35), (36) и (26) настоящей теоремы при помощи тождества:

$$\Delta \frac{\Delta(\beta_{nk} e_k)}{p_k + p_{k+1}} = \Delta \frac{\Delta e_k}{p_k + p_{k+1}} \beta_{n,k+2} + \frac{b_{n,k+1} \Delta e_k}{p_k + p_{k+1}} + \frac{b_{nk} e_k}{p_k + p_{k+1}} - \frac{b_{n,k+1} e_{k+1}}{p_{k+1} + p_{k+2}}$$

получаем условие:

$$\sum_k \left| \frac{P_k P_{k+1}}{p_k + p_{k+1}} \Delta(e_k) q_{k+1} \right| \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \left(\frac{1}{Q_n} - \frac{1}{Q_{n-1}} \right) d_n \right| < \infty,$$

из которого при

$$d_n = \operatorname{sgn} \left(\frac{1}{Q_n} - \frac{1}{Q_{n-1}} \right)$$

вытекает условие (37).

Достаточность. Условие (14) теоремы 5 вытекает из того, что Q сохраняет абсолютную сходимость, и из условий (26), (35), (36) и (37) настоящей теоремы при помощи неравенства

$$\sum_k \left| \overline{\sum_{n=k}^{\infty}} \overline{\Delta} (\Delta \tau_{nk}) d_n \right| \leqslant M \sum_k \left| P_k P_{k+1} \Delta \frac{\Delta e_k}{p_k + p_{k+1}} \right| \overline{\sum_{n=k+2}^{\infty}} |\overline{\Delta} \beta_{n,k+2}| +$$

$$+ \left(\sum_k \left| \frac{P_k P_{k+1} q_{k+1}}{p_k + p_{k+1}} \Delta e_k \right| + \sum_k \left| \frac{P_k P_{k+1} q_k e_k}{p_k + p_{k+1}} \right| + \sum_k \left| \frac{P_k P_{k+1} q_{k+1} e_{k+1}}{p_{k+1} + p_{k+2}} \right| + \right.$$

$$\left. + \sum_k |P_{k+1} q_{k+1} e_{k+1}| \right) \; M \overline{\sum_{n=k}^{\infty}} \left| \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \right|.$$

Литература

1. Барон С., Множители абсолютной суммируемости для Чезаро-суммируемых и Чезаро-ограниченных двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 135—155.
2. Кангро Г., О множителях суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1955, **37**, 191—232.
3. Кангро Г., Барон С., Множители суммируемости и абсолютной суммируемости для двойных рядов, абсолютно суммируемых методом взвешенных средних Рисса. Настоящий сборник, стр. 155—169.
4. Кангро Г., Вихманн Ф., Об абстрактных множителях суммируемости для метода взвешенных средних Рисса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 209—225.
5. Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. Москва, 1960.
6. Burkill, H., On Riesz and Riemann Summability. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1961, **57**, 55—60.
7. Guha, U., Convergence factors for Riesz summability. J. London Math. Soc., 1956, **31**, 311—319.
8. Maddox, I., Convergence and Summability factors for Riesz means. Proc. London Math. Soc., 1962, **12**, 345—366.
9. Peyerimhoff, A., Über Summierbarkeitsfaktoren und verwandte Fragen bei Cesàroverfahren I. Publs. Inst. math. Acad. serbe sci., 1955, **8**, 139—156.
10. Peyerimhoff, A., Über ein Lemma von H. C. Chow. J. London Math. Soc., 1957, **32**, 33—36.

Поступило
6 X 1962

MÕNED SUMMEERUVUSTEGURITE TÜÜBID TEIST JÄRKU RIESZ'I MENETLUSE JAOKS

H. Türnpu

ÜTÜ ring matemaatilise analüüsi kateedri juures

Resümee

Käesolevas töös leitakse efektiivsed tarvilikud ja piisavad tingimused järgmist tüüpi summeeruvusteguritele: $(|\mathfrak{P}^2|, B)$, $(|\mathfrak{P}^2|, |B|)$, $(\mathfrak{P}^2, B)$, $(\mathfrak{P}_O{}^2, B)$, $(\mathfrak{P}_o{}^2 |Q|)$, $(\mathfrak{P}^2, |Q|)$, $(\mathfrak{P}_O{}^2, |Q|)$, $(\mathfrak{P}_o, |B|)$, $(\mathfrak{P}, |B|)$, $(\mathfrak{P}_O, |B|)$, $(\mathfrak{P}_o, |C^\alpha|)$, $(\mathfrak{P}, |C^\alpha|)$ ja

$(\mathfrak{P}_O, |C^\alpha|)$, kus $\mathfrak{P}$ ja $\mathfrak{P}^2$ tähistavad vastavalt esimest ja teist järku jadaga $\{p_n\}$ määratud Riesz'i menetlust, Q — esimest järku jadaga $\{q_n\}$ määratud Riesz'i menetlust ning C^α — α-järku Cesàro menetlust. B-ga tähistame mistahes kolmnurkset regulaarset menetlust, välja arvatud tüüpides $(\mathfrak{P}_o, |B|)$, $(\mathfrak{P}, |B|)$ ja $(\mathfrak{P}_O, |B|)$, kus menetlus B peab rahuldama ühte tingimustest: $|B| \supset |P|$ või $\sum_{n=k}^{\infty} |\overline{\Delta} b_{nk}| = O(\beta_{kk})$.

EINIGE TYPEN VON SUMMIERBARKEITSFAKTOREN FÜR DAS RIESZSCHE VERFAHREN ZWEITER ORDNUNG

H. Türnpu

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für Summierbarkeitsfaktoren folgender Typen gefunden: $(|\mathfrak{P}^2|, B)$, $(|\mathfrak{P}^2|, |B|)$, $(\mathfrak{P}^2, B)$, $(\mathfrak{P}_O{}^2, B)$, $(\mathfrak{P}_o{}^2, |Q|)$, $(\mathfrak{P}^2, |Q|)$, $(\mathfrak{P}_O{}^2, |Q|)$, $(\mathfrak{P}_o, |B|)$, $(\mathfrak{P}, |B|)$, $(\mathfrak{P}_O, |B|)$, $(\mathfrak{P}_o, |C^\alpha|)$, $(\mathfrak{P}, |C^\alpha|)$ und $(\mathfrak{P}_O, |C^\alpha|)$. Hier bezeichnen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}^2$ ein mit einer Folge $\{p_n\}$ gegebenes Rieszsches Verfahren erster bzw. zweiter Ordnung; Q bezeichnet ein mit einer Folge $\{q_n\}$ gegebenes Rieszsches Verfahren erster Ordnund und C^α — ein Cesàrosches Verfahren komplexer Ordnung α. Mit B bezeichnen wir ein willkürliches regulares dreieckiges Matrixverfahren, mit Ausnahme der Typen $(\mathfrak{P}_o, |B|)$, $(\mathfrak{P}, |B|)$ und $(\mathfrak{P}_O, |B|)$, bei welchen B entweder die Bedingung $|B| \supset |P|$ oder die Bedingung $\sum_{n=k}^{\infty} |\overline{\Delta} b_{nk}| = O(\beta_{kk})$ erfüllen soll.

О НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ ТИПА МЕРСЕРА ДЛЯ СТЕСНЕННОЙ СХОДИМОСТИ

Т. Сырмус
Кафедра математического анализа

В последнее время связывают многие вопросы теории двойных рядов и последовательностей с понятием так называемой стесненной сходимости. Понятие стесненной сходимости, впервые рассмотренное Муром [4], определяется следующим образом.

Говорят, что последовательность $\{s_{mn}\}$ *стесненно сходится* к пределу s, если соотношение [1] $\lim s_{mn} = s$ справедливо для индексов m и n, удовлетворяющих условию $\frac{1}{\zeta} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \zeta$, где ζ — любое фиксированное число из полупромежутка $[1, \infty)$; в этом случае пишут: $\zeta\text{-}\lim s_{mn} = s$. Класс стесненно сходящихся последовательностей мы будем обозначать символом c_ζ. Классы сходящихся и ограниченно сходящихся последовательностей обозначим, соответственно, через c и bc.

В настоящей статье, которая является продолжением статей [7—10], рассматриваются те же методы суммирования, что и в указанных статьях. Здесь мы докажем аналог теоремы Мерсера 2.1 из [9] для стесненной сходимости. Доказательство этой теоремы дано в § 3 данной статьи. В § 1 приведены основные понятия и теоремы, а в § 2 расширена одна, нужная нам, теорема Челидзе — теорема 2 из [11].

1. Основные понятия и теоремы

При доказательстве нашей основной теоремы, мы используем нижеследующие результаты из работы Челидзе [11].

---

[1] Символы $\lim s_{mn}$ и $\lim s_n$ означают везде $\lim\limits_{m,n\to\infty} s_{mn}$ и, соответственно, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$. По мере надобности применяется также символ $\lim\limits_{n} s_n$.

Известно, что теоремы I и II Робисона из [6] дают необходимые и достаточные условия регулярности методов суммирования двойных последовательностей. Введя новые понятия особых классов двойных последовательностей, Челидзе удалось обобщить вышеуказанные теоремы Робисона и на случай неограниченных последовательностей. Классы последовательностей, в которых имеют место расширенные теоремы Робисона, определяет Челидзе следующим образом.

Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — две произвольно заданные положительные функции на полуотрезке $[0, \infty)$, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} \psi(x) = \infty.$$

Определение 1. *Двойную последовательность* $\{s_{mn}\}$ *мы будем называть последовательностью класса* $K_{\varphi\psi}$, *если она удовлетворяет условиям* [2]: $\{s_{mn}\} \in c$ *и*

$$\lim_m \frac{s_{mn}}{\varphi(m)} = 0, \qquad \lim_n \frac{s_{mn}}{\psi(n)} = 0. \tag{1.1}$$

Определение 2. *Бесконечную матрицу* $A = (a_{mnkl})$ *мы будем называть матрицей класса* ξ-$T_{\varphi,\psi}$, *если для всякой двойной последовательности* $\{s_{mn}\} \in K_{\varphi,\psi}$ *двойной ряд* $\sum\limits_{k,l} a_{mnkl} s_{kl}$ *сходится для любых* m, n *и справедливо равенство*

$$\xi\text{-}\lim_{k,\,l} \sum a_{mnkl} s_{kl} = \lim s_{mn}.$$

Обобщение достаточности условий теоремы Робисона II из [6] представляет собой следующая, доказанная Челидзе

Теорема 1.1. *Для того, чтобы матрица* $A = (a_{mnkl})$ *была матрицей класса* ξ-$T_{\varphi,\psi}$, *достаточно выполнение следующих условий*:

1) $\xi\text{-}\lim\limits_{m,\,n} a_{mnkl} = 0$;

2) $\sum\limits_{k,\,l} |a_{mnkl}| < \infty$;

3) $\xi\text{-}\lim\limits_{m,\,n} \sum\limits_{k,\,l} a_{mnkl} = 1$;

---

[2] Символы $\sum\limits_{k,l} x_{kl}$ и $\sum\limits_{k} x_k$ означают, соответственно, $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} x_{kl}$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$. Во всех условиях и оценках, если не оговорено противное, свободные индексы имеют значения 0, 1, 2, ...

4) $\sum\limits_{k} \varphi(k)|a_{mnkl}| < \infty$;

5) $\sum\limits_{l} \psi(l)|a_{mnkl}| < \infty$;

6) $\xi\text{-}\overline{\lim\limits_{m,\,n}} \sum\limits_{k} \varphi(k)|a_{mnkl}| < \infty$;

7) $\xi\text{-}\overline{\lim\limits_{m,\,n}} \sum\limits_{l} \psi(l)|a_{mnkl}| < \infty$;

8) *существует такое положительное число* M, *что для любой пары* [3] $(m, n)_\xi$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{k,\,l} |a_{mnkl}| < M.$$

При помощи этой теоремы доказывает Челидзе следующую теорему, обобщение которой дано в следующем параграфе.

Теорема 1.2. *Если двойная последовательность* $\{s_{mn}\}$ *сходится к числу* s *и удовлетворяет при этом условиям*

$$\lim_{m} \frac{s_{mn}}{m+1} = 0, \qquad \lim_{n} \frac{s_{mn}}{n+1} = 0, \tag{1.2}$$

то она стесненно [4] $C^{\varkappa,\tau}$*-суммируема к числу* s.

2. Обобщение теоремы Челидзе

Ниже мы используем следующее обобщение теоремы 1.2.

Теорема 2.1. *Если двойная последовательность* $\{s_{mn}\}$ *сходится к числу* s *и удовлетворяет, при этом, условиям* (1.2), *то она стесненно суммируема методом Хаусдорфа* [5] (H, μ_{kl}), *если* (H, μ_{kl}) *— регулярный метод с положительными элементами и, кроме того, удовлетворяет условиям:*

$$1)\ \overline{\lim_{n}}\, n \binom{n}{l} \Delta^{0,\,n-l} \mu_{0l} < \infty; \qquad 2)\ \overline{\lim_{m}}\, m \binom{m}{k} \Delta^{m-k,\,0} \mu_{k0} < \infty. \tag{2.1}$$

---

[3] Парой индексов $(m, n)_\xi$ называется такая пара индексов m и n, которая удовлетворяет условию $\frac{1}{\xi} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \xi$.

[4] Определение метода Чезаро $C^{\varkappa,\tau}$ см. [2] или [3].

[5] Определение метода Хаусдорфа (H, μ_{kl}) см. [1] или [5].

Доказательство. Так как последовательность $\{s_{kl}\}$ удовлетворяет условиям (1.2), то $\{s_{kl}\} \in K_{\varphi,\psi}$, где $\varphi(x) = x+1$ и $\psi(x) = x+1$.

Далее покажем, что матрица метода Хаусдорфа

$$\left(\binom{m}{k}\binom{n}{l} \Delta^{m-k,\,n-l}\,\mu_{kl}\right),$$

при условиях нашей теоремы, является матрицей класса ξ-$T_{\varphi,\psi}$. Для этого докажем, что рассматриваемый метод (H, μ_{kl}) удовлетворяет всем условиям теоремы 1.1.

Из регулярности метода Хаусдорфа следует, по теореме I из [6], что

$$\lim_{m,\,n}\binom{m}{k}\binom{n}{l}\Delta^{m-k,\,n-l}\,\mu_{kl} = 0,$$

$$\lim_{m,\,n}\sum_{k,\,l=0}^{m,\,n}\binom{m}{k}\binom{n}{l}\Delta^{m-k,\,n-l}\,\mu_{kl} = 1,$$

$$\sum_{k,\,l=0}^{m,\,n}\binom{m}{k}\binom{n}{l}|\Delta^{m-k,\,n-l}\,\mu_{kl}| < M.$$

Выполнение условий 1), 2), 3) и 8) в теореме 1.1 теперь очевидно. Для проверки остальных условий теоремы 1.1 заметим, что в случае регулярного метода Хаусдорфа

$$\mu_{kl} = \int_0^1\int_0^1 u^k v^l\,d_u\,d_v\,\chi(u, v), \tag{2.2}$$

где $\chi(u, v)$ есть функция с ограниченным изменением в квадрате $U\{u \in [0, 1],\ v \in [0, 1]\}$. Сказанное справедливо ввиду теоремы 5 из [1]. Для проверки условия 4) теоремы 2.1 проведем для любых фиксированных m, n и l следующую оценку:

$$\sum_{k=0}^{m}(k+1)\binom{m}{k}\binom{n}{l}|\Delta^{m-k,\,n-l}\,\mu_{kl}| <$$

$$< (m+1)\binom{n}{l}\int_0^1\int_0^1\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}u^k(1-u)^{m-k}\,v^l(1-v)^{n-l}\,d_u\,d_v\,\chi(u, v) =$$

$$= (m+1)\binom{n}{l}\int_0^1\int_0^1 v^l(1-v)^{n-l}\,d_u\,d_v\,\chi(u, v) \leqslant$$

$$\leqslant (m+1)\binom{n}{l}\max_{v\in[0,1]} v^l(1-v)^{n-l}\,V_{00}^{11}\,\chi(u, v) =$$

$$= (m+1)\binom{n}{l}\left(\frac{l}{n}\right)^l\left(1-\frac{l}{n}\right)^{n-l} V_{00}^{11}\,\chi(u, v) < \infty.$$

В полученном неравенстве символ $V_{00}^{11}\,\chi(u, v)$ означает полное изменение функции $\chi(u, v)$ в квадрате U.

Аналогично доказывается выполнение условия 5) теоремы 1. 1. Наконоец, покажем, что выполнено и условие 6) теоремы 1. 1, т. е. найдется такая, только от l зависящая последовательность A_l, что при любом фиксированном l

$$\xi\text{-}\overline{\lim_{m,\,n}} \sum_{k=0}^{m} (k+1) \binom{m}{k}\binom{n}{l} |\Delta^{m-k,\,n-l}\mu_{kl}| \leqslant \xi A_l < \infty.$$

Используя часть оценки, полученной при доказательстве условия 4), имеем:

$$\sum_{k=0}^{m} (k+1) \binom{m}{k}\binom{n}{l} |\Delta^{m-k,\,n-l}\mu_{kl}| <$$

$$< (m+1)\binom{n}{l}\int_0^1\int_0^1 v^l(1-v)^{n-l}\,du\,dv\,\chi(u,v) =$$

$$= (m+1)\binom{n}{l}\Delta^{0,\,n-l}\mu_{0l}.$$

Ввиду условий теоремы, отсюда вытекает:

$$\xi\text{-}\overline{\lim_{m,\,n}} \sum_{k=0}^{m} (k+1) \binom{m}{k}\binom{n}{l} |\Delta^{m-k,\,n-l}\mu_{kl}| \leqslant$$

$$\leqslant \xi\,\overline{\lim_{n}}\,(n+1)\binom{n}{l}\Delta^{0,\,n-l}\mu_{0l} =$$

$$= \xi A_l < \infty \quad (l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Аналогично доказывается условие 7) теоремы 1. 1.

Так как все условия теоремы 1. 1 выполнены, то наша теорема доказана.

Можно проверить, что в случае метода Чезаро $C^{\varkappa,\tau}$ условия (2. 1) теоремы 2. 1 выполнены. Поэтому теорема Челидзе 1. 2 вытекает из нашей теоремы 2. 1, как частный случай. Выполнение условий (2. 1) теоремы 2. 1 можно проверить и в случае метода Эйлера-Кноппа $(E;\ q_1,\ q_2)$, который определен, как метод Хаусдорфа $(H,\ \mu_{kl})$ с $\mu_{kl} = \nu'_k \cdot \nu''_l$, где $\nu'_k = \dfrac{1}{(1+q_1)^k}$ и $\nu''_l = \dfrac{1}{(1+q_2)^l}$. Таким образом справедлива еще следующая теорема.

Теорема 2. 2. *Если двойная последовательность* $\{s_{mn}\}$ *сходится к числу* s *и удовлетворяет, при этом, условиям* (1. 2), *то она стесненно* $(E;\ q_1,\ q_2)$*-суммируема к числу* s.

3. Теорема типа Мерсера в случае стесненной сходимости

Для доказательства нашей основной теоремы мы нуждаемся еще в одном следствии теоремы 2. 1 из [9], которое мы сформулируем в виде следующей леммы.

Лемма 3. 1. *Если* $\alpha > 0$, *а метод* $R = (r_{mnkl})$ *определен элементами*

$$r_{mnkl} = \begin{cases} \alpha & \text{при } k = m \text{ и } l = n, \\ (1-\alpha)\binom{m-1}{k}\binom{n-1}{l}\Delta^{m-1-k,\,n-1-l}\mu_k\nu_l & \text{при } (k = 0, 1, 2, \ldots, m-1; \\ & \qquad l = 0, 1, 2, \ldots, n-1), \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где последовательности Хаусдорфа $\{\mu_k\}$ *и* $\{\nu_l\}$ *абсолютно монотонны и* $\mu_0\nu_0 = 1$, $\lim\limits_m \Delta^m \mu_0 = \lim\limits_n \Delta^n \nu_0 = 0$, *то метод* R^{-1} *регулярен.*

Доказательство. Пусть элементы метода R^{-1} суть r'_{mnkl} $(k, l = 0, 1, 2, \ldots)$. Тогда из равенства

$$t_{mn} = \sum_{k,\,l=0}^{m,\,n} r_{mnkl}\, s_{kl},$$

вытекает равенство

$$s_{mn} = \sum_{k,\,l=0}^{m,\,n} r'_{mnkl}\, t_{kl},$$

в котором элементы r'_{mnkl} определены равенствами, соответствующими равенствам (2. 7), (2. 8), (2. 11), (2. 12), (2. 13) и (2. 15) из [9]. В условиях леммы, для произвольной последовательности $\{t_{mn}\}$ класса bc определена последовательность $\{s_{mn}\}$, удовлетворяющая условиям: 1) $\{s_{mn}\} \in c$ и 2) $\lim t_{mn} = \lim s_{mn}$, что вытекает из теоремы 2. 1 в [9].

Этим регулярность метода R^{-1} доказана.

Теперь мы в состоянии доказать следующую теорему типа Мерсера.

Теорема 3. 1. *Если* $\alpha > 1$, $s \neq \infty$, *последовательности Хаусдорфа* $\{\mu_k\}$ *и* $\{\nu_l\}$ *абсолютно монотонны и удовлетворяют условиям* $\mu_0\nu_0 = 1$, $\lim\limits_m \Delta^m \mu_0 = \lim\limits_n \Delta^n \nu_0 = 0$, *а*

$$t_{mn} = \alpha s_{mn} + (1-\alpha) \sum_{k,\,l=0}^{m-1,\,n-1} \binom{m-1}{k}\binom{n-1}{l}\Delta^{m-1-k,\,n-1-l}\mu_k\nu_l\, s_{kl}, \tag{3. 1}$$

причем $\{t_{mn}\} \in K_{\varphi\psi}$, *где* $\varphi(x) = x + 1$ *и* $\psi(x) = x + 1$. *то из равенства*

$$\lim t_{mn} = s$$

вытекает равенство

$$\xi\text{-}\lim s_{mn} = s.$$

Доказательство. Понятно, что матрица преобразования (3. 1) есть матрица метода Хаусдорфа. Обозначим ее через $T = \left(\binom{m}{k}\binom{n}{l}\Delta^{m-k,\,n-l}\tau_{kl}\right)$, где $\{\tau_{kl}\}$ определена преобразованием (3. 1). Тогда результат обращения равенства (3. 1) можно представить в виде

$$s_{mn} = \sum_{k,\,l=0}^{m,\,n}\binom{m}{k}\binom{n}{l}\Delta^{m-k,\,n-l}\frac{1}{\tau_{kl}}t_{kl}. \qquad (3.\,2)$$

Так как последовательность $\{\tau_{kl}\}$ зависит от параметра $\lambda = \frac{1-\alpha}{\alpha}$, естественно ввести обозначение $\tau_{kl} = \tau_{kl}(\lambda)$.

С другой стороны, матрица T совпадает с матрицей R леммы 3. 1. Ввиду условий нашей теоремы и леммы 3. 1, метод, определенный матрицей T^{-1}, регулярен. Кроме того, мы в праве утверждать, что элементы матрицы T^{-1} положительны, что гарантируется условиями нашей теоремы и формулами (2. 7), (2. 8), (2. 11), (2. 12), (2. 13) и (2. 15) из [9]. По этим же формулам выясняется и справедливость равенств

$$\binom{n}{l}\Delta^{0,\,n-l}\frac{1}{\tau_{0l}(\lambda)} = 0 \qquad (l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$

$$\binom{m}{k}\Delta^{m-k,\,0}\frac{1}{\tau_{k0}(\lambda)} = 0 \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1),$$

которые гарантируют выполнение условий (2. 1) в теореме 2. 1.

Но теперь выполнены все условия теоремы 2. 1 и, следовательно, $\{s_{mn}\} \in c_\zeta$, причем

$$\xi\text{-}\lim s_{mn} = \lim t_{mn} = s,$$

что и требовалось доказать.

В формулировке нижеследующей теоремы, которая представляет собой следствие теоремы 3. 1, воспользуемся символом $Q_{mn}^{(i)}$ $(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$, под которым мы подразумеваем следующее: $Q_{mn}^{(1)} = C_{mn}^{\varkappa,\tau}$ и $Q_{mn}^{(2)} = H_{mn}^{\varkappa,\tau}$ при $\varkappa, \tau > 0$; $Q_{mn}^{(3)} = \dfrac{\sum\limits_{k,\,l=0}^{m,\,n} x_{kl}}{(m+1)(n+1)}$, а $Q_{mn}^{(4)} = E_{mn}^{p,q}$, где $p = \frac{1-a}{a}$, $q = \frac{1-a_1}{a_1}$ и $0 < a,\ a_1 < 1$.

Теорема 3. 2. *Если* $\alpha > 1$, $s \neq \infty$, *а*

$$t_{mn}^{(i)} = \alpha s_{mn} + (1-\alpha)\,Q_{m-1,\,n-1}^{(i)} \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

причем $\{t_{mn}^{(i)}\} \in K_{\varphi,\psi}$, *где* $\varphi(x) = x + 1$ *и* $\psi(x) = x + 1$, *то из равенства* $\lim t_{mn}^{(i)} = s$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ *вытекает равенство*

$$\zeta\text{-}\lim s_{mn} = s.$$

Теорема 3.2 при $Q_{mn}^{(3)}$ есть аналог теоремы Мерсера для случая стесненной сходимости.

Литература

1. Adams, C. R., Hausdorff transformations for double sequences. Bull. Amer. Math. Soc., 1933, **39**, 303—312.
2. Agnew, R. P., On summability of double sequences. Amer. J. Math., 1932, **54**, 648—656.
3. Moore, Ch. N., Sur les facteurs de convergence dans les séries doubles et sur la série double de Fourier. C. r. Acad. sci., 1912, **155**, 126—129.
4. Moore, Ch. N., On the summability of the double Fourier's series of discontinuous functions. Math. Ann., 1913, **74**, № 1, 555—572.
5. Ramanujan, M. S., On Hausdorff transformations for double sequences. Proc. Indian Acad. Sci., 1955, **A 42**, № 3, 131—135.
6. Robison, G. M., Divergent double sequences and series. Trans. Amer. Math. Soc., 1926, **28**, 50—73.
7. Сырмус Т., Об одном обобщении теоремы Мерсера на случай двойных последовательностей. Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, 1961, **102**, 156—168.
8. Сырмус Т., О некоторых обобщениях теоремы Мерсера. Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, 1961, **102**, 169—184.
9. Сырмус Т., О некоторых обобщениях теоремы Мерсера для двойных последовательностей. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1962, **11**, 37—49.
10. Сырмус Т., Об обобщенной теореме Мерсера. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1962, **11**, 99—106.
11. Челидзе В. Г., О преобразовании двойных последовательностей. Тр. Тбилисск. матем. ин-та, АН Груз. ССР, 1949, **17**, 61—94.

Поступило
12 IV 1962

MÕNINGATEST MERCERI TÜÜPI TEOREEMIDEST KITSENDATUD KOONDUVUSE KORRAL

T. Sõrmus

Matemaatilise analüüsi kateeder

Resümee

Viimasel ajal seostatakse mitmeid kahekordsete ridade ja jadade teooria küsimusi nn. kitsendatud koonduvuse mõistega. Viimast defineeritakse järgmiselt.

Öeldakse, et jada $\{s_{mn}\}$ *koondub kitsendatult, kui* $\lim s_{mn} = s$ *kehtib indeksite* m *ja* n *niisuguste väärtuste korral, mis rahuldavad võrratust* $\frac{1}{\zeta} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \zeta$, *milles* $\zeta \in [1, \infty)$. *Sel korral kirjutatakse:* $\zeta\text{-}\lim s_{mn} = s$.

Käesolevas artiklis tõestatakse ühe Merceri tüüpi teoreemi (vt. [9], teoreem 2.1) niisugune analoog, milles tõkestatud koonduvus asendatakse kitsendatud koonduvusega (teoreem 3.1). Kõne all oleva teoreemi tõestus taandub ühe

nn. Tšelidze tüüpi teoreemi (teoreem 1.2) üldistuse (teoreem 2.1) tingimuste kontrollimisele. Mainitud üldistuse tõestamisel lähtutakse mõningatest Tšelidze [11] poolt antud mõistetest ning teoreemidest, mis on tsiteeritud käesoleva artikli esimeses paragrahvis.

Artikli põhiteoreem (teoreem 3.1) sõnastatakse järgmiselt:

Kui $\alpha > 1$, $s \neq \infty$, *absoluutselt monotoonsed Hausdorffi jadad* $\{\mu_k\}$ *ja* $\{\nu_l\}$ *rahuldavad tingimused* $\mu_0\nu_0 = 1$, $\lim\limits_m \Delta^m\mu_0 = \lim\limits_n \Delta^n\nu_0 = 0$ *ning*

$$t_{mn} = \alpha s_{mn} + (1-\alpha) \sum_{k,\,l=0}^{m-1,\,n-1} \binom{m-1}{k}\binom{n-1}{l} \Delta^{m-1-k,\,n-1-l}\,\mu_k\nu_l s_{kl},$$

kusjuures

$$\lim_m \frac{t_{mn}}{m+1} = 0,$$

$$\lim_n \frac{t_{mn}}{n+1} = 0,$$

siis järeldub võrdusest

$$\lim t_{mn} = s,$$

võrdus

$$\xi\text{-}\lim s_{mn} = s.$$

Pole raske näha, et esitatud teoreemist järelduvad talle analoogilised teoreemid menetluste $C^{\alpha,\tau}$, $H^{\alpha,\tau}$, $(E;\, p,\, q)$ ja aritmeetiliste keskmiste menetluse korral (teoreem 3.2).

ÜBER EINIGE VERALLGEMEINERUNGEN DES SATZES VON MERCER FÜR RESTRINGIERTE KONVERGENZ

T. Sõrmus

Zusammenfassung

Zur Zeit verbindet man verschiedene Probleme der Reihentheorie mit den von Moore [4] definierten Begriff der sogenannten restringierten Konvergenz, die wir mit $\xi\text{-}\lim t_{mn}$ bezeichnen.

Im Artikel wird der Satz 2.1 der Arbeit [9] für den Fall der restringierten Konvergenz verallgemeinert, wozu der Satz von Tschelidze [11] für das Hausdorff-Verfahren übergetragen (der Satz 2.1) wird.

Der Grundsatz des Artikels lautet:

$\{\mu_k\}$ *und* $\{\nu_l\}$ *seien total-monotone Folgen mit den Eigenschaften* $\mu_0\nu_0 = 1$ *und* $\lim\limits_m \Delta^m\mu_0 = \lim\limits_n \Delta^n\nu_0 = 0$; *es sei* $\alpha > 1$, $s \neq \infty$ *und*

$$t_{mn} = \alpha s_{mn} + (1-\alpha) \sum_{k,\,l=0}^{m-1,\,n-1} \binom{m-1}{k}\binom{n-1}{l} \Delta^{m-1-k,\,n-1-l}\,\mu_k\nu_l s_{kl},$$

wobei

$$\lim_m \frac{t_{mn}}{m+1} = 0,$$

$$\lim_n \frac{t_{mn}}{n+1} = 0.$$

Dann folgt aus der Existenz von $\lim t_{mn}$ *auch die Existenz von* ζ-$\lim s_{mn}$ *und Gleichheit beider Grenzwerte.*

Damit ist der Mercersche Satz im Falle der restringierten Konvergenz auch für $H^{\varkappa\tau}$-Verfahren, $C^{\varkappa\tau}$-Verfahren und $(E;\ p,\ q)$-Verfahren bewiesen.

ТЕОРЕМЫ ТИПА МЕРСЕРА ДЛЯ СТЕСНЕННОЙ И ОБЫКНОВЕННОЙ СХОДИМОСТИ

Т. Сырмус
Кафедра математического анализа

Настоящая статья представляет собой продолжение исследований, проведенных в статьях [2—6]. Здесь рассматриваются теоремы типа Мерсера для более общего вида стесненной сходимости, чем в статье [6], в которой доказана теорема типа Мерсера для факторизируемого метода Хаусдорфа в случае простого вида стесненной сходимости. Кроме того, рассматриваются здесь вместо метода Хаусдорфа факторизируемые треугольные методы. Стало быть, результаты этой статьи, в известном смысле, шире, чем результаты статьи [6]. Однако, в теоремы настоящей статьи входят такие условия (см. условия (3. 1)), которые в теоремах статьи [6] отсутствуют. Ввиду сложного характера полученных условий пока не удалось установить точные соотношения между соответствующими теоремами настоящей статьи и статьи [6].

В § 1 статьи приведены из диссертации Тедеева [7] основные понятия и теоремы, посредством которых доказываются теоремы настоящей статьи. В § 2 указывается возможность обобщения одной теоремы типа Мерсера из [4] для ограниченной сходимости. Эта обобщенная теорема типа Мерсера является исходной теоремой при выводе нашей основной теоремы, доказательство которой дано в § 3. В § 4 доказывается теорема типа Мерсера со средними Рисса для стесненной сходимости, а в § 5 — приведен пример доказательства теорем типа Мерсера для случая обыкновенной сходимости двойных последовательностей.

1. Основные понятия и теоремы

В настоящей статье применим следующее понятие стесненной сходимости.

Говорят, что последовательность $\{s_{mn}\}$ *стесненно сходится*

к пределу s, если соотношение[1] $\lim s_{mn} = s$ справедливо для индексов m и n, удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{\zeta} n^p \leqslant m \leqslant \zeta n^q,$$

где $0 < p \leqslant q$ и ζ — любое фиксированное число из полуотрезка $[1, \infty)$. Класс последовательностей, сходящихся в описанном смысле, мы будем обозначать символом $c_{\zeta(p,q)}$, а соответствующий предел последовательности символом $\zeta_{(p,q)}\text{-}\lim s_{mn}$. Из приведенного видно, что справедливо соотношение $c_\zeta \subset c_{\zeta(p,q)}$, где обозначение класса c_ζ дано в [6].

Для доказательства теорем § 3, § 4 и § 5 нам нужны следующие определения и теоремы Тедеева из [7].

Определение 1. *Матрицу $A = (a_{mnkl})$ мы будем называть матрицей класса R, если ее элементы удовлетворяют условиям:*

1) $\sum\limits_{k,l} |a_{mnkl}| < M$,

где M — постоянная;

2) $\lim\limits_{m,n} \sum\limits_{k\ l} a_{mnkl} = 1$;

3) $\lim\limits_{m,n} \sum\limits_{k} a_{mnkl} = 0$;

4) $\lim\limits_{m,n} \sum\limits_{l} a_{mnkl} = 0$;

5) $\lim\limits_{m,n} a_{mnkl} = 0$.

Теорема 1.1. *Если матрица $A = (a_{mnkl})$ является матрицей класса R и последовательность*[2] *$\{s_{mn}\} \in c$ удовлетворяет условиям:*

1) *ряды $\sum\limits_{k\ l} a_{mnkl} s_{kl}$ абсолютно сходятся;*

2) $\lim\limits_{m,n} \sum\limits_{k} a_{mnkl} s_{kl} = 0$;

3) $\lim\limits_{m,n} \sum\limits_{l} a_{mnkl} s_{kl} = 0$,

то имеет место равенство

$$\lim s_{mn} = \lim \sum a_{mnkl} s_{kl}.$$

Теорема 1.2. *Пусть матрица $A = (a_{mnkl})$ является матрицей класса R и последовательность $\{s_{kl}\} \in c$ удовлетворяет условиям:*

---

[1] Обозначения символов $\lim s_{mn}$, $\lim s_n$, $\sum\limits_k x_k$ и $\sum\limits_{k,l} x_{kl}$ см. [6]. Во всех условиях и оценках, если не оговорено противное, свободные индексы имеют значения 0, 1, 2, ...

[2] Символом c обозначен класс сходящихся двойных последовательностей.

1) *ряды* $\sum\limits_{k,\,l} a_{mnkl}\, s_{kl}$ *абсолютно сходятся,*

2) *для всякого* $\varepsilon > 0$ *существует такое целое число* $N > 0$, *что для любого фиксированного* $\nu \geqslant N$ *найдется такое целое число* $M > N$, *что*

$$\Big| \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{l=0}^{\infty} a_{mnkl}\, s_{kl} \Big| < \varepsilon,$$

$$\Big| \sum_{l=0}^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} a_{m\hat{n}kl}\, s_{kl} \Big| < \varepsilon,$$

когда

$$\frac{1}{\xi} n^p \leqslant m \leqslant \xi n^q, \quad m, n > M.$$

Тогда справедливо равенство

$$\xi_{(p,\,q)}\text{-}\lim_{k,\,l} \sum a_{mnkl} = \lim s_{mn}.$$

2. О возможности обобщения одной теоремы типа Мерсера

В этом и следующих параграфах данной статьи мы будем рассматривать факторизируемые треугольные методы, т. е. методы вида $A \odot B$, факторы $A = (a_{mk})$ и $B = (b_{nl})$ которых есть нормальные регулярные методы, удовлетворяющие условиям $a_{mk}, b_{nl} \geqslant 0$ и $\sum\limits_{k,\,l=0}^{m,\,n} a_{mk}\, b_{nl} = 1$. Если факторы метода $A \odot B$ удовлетворяют выше перечисленным условиям, назовем их факторами класса F.

Обобщения теорем типа Мерсера для средних Рисса и Хаусдорфа в случае ограниченной сходимости доказаны в статьях [2] (теорема 3. 1) и [4] (теорема 2. 1). Методы доказательства указанных теорем аналогичны. Отметим, что методом доказательства теоремы 2. 1 из [4] можно доказать следующее обобщение последней теоремы.

Теорема 2. 1. *Если* $\alpha > 0$, $s \neq \infty$ *и методы простых последовательностей* $A = (a_{mk})$, $B = (b_{nl}) \in F$, *то из равенства* [3]

$$b\text{-}\lim(\alpha s_{mn} + (1 - \alpha) \sum_{k,\,l=0}^{m-k,\,n-l} a_{m-1,\,k}\, b_{n-1,\,l}\, s_{kl}) = s$$

вытекает равенство

$$b\text{-}\lim s_{mn} = s.$$

Эта теорема допускает следующие, нужные нам, следствия.

[3] Под символом $b\text{-}\lim s_{mn}$ подразумевается $\lim s_{mn}$, причем $|s_{mn}| < M$ $(m, n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Следствие 1. *Если* $\alpha > 0$ *и метод* $H = (h_{mnkl})$ *определен элементами*

$$h_{mnkl} = \begin{cases} \alpha & \text{при } k = m \text{ и } l = n, \\ (1-\alpha)\, a_{m-1,\,k}\, b_{n-1,\,l} & \text{при } (k = 0, 1, 2, \ldots, m-1; \\ & \qquad l = 0, 1, 2, \ldots, n-1), \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{2.1}$$

где методы $A = (a_{mk})$, $B = (b_{nl}) \in F$, *то метод* $H^{-1} = (h'_{mnkl})$ *регулярен.*

Доказательство следствия аналогично доказательству соответствующего следствия теоремы 2.1 из [3]. Последнее следствие сформулировано в виде леммы 3.1 в [5], где она и доказана.

Следствие 2. *Если* $\alpha > 0$ *и метод* $H = (h_{mnkl})$ *определен равенствами* (2.1), *где методы* $A = (a_{mk})$, $B = (b_{nl}) \in F$, *то матрица* $H^{-1} = (h'_{mnkl})$ *является матрицей класса* R.

Доказательство. В самом деле, при условиях следствия, метод H^{-1} — регулярен, ввиду следствия 1. Но тогда выполняются все условия теоремы I из [1], т. е.

1) $\lim\limits_{m,\,n} h'_{mnkl} = 0$,

2) $\lim\limits_{m,\,n} \sum\limits_{k,\,l=0}^{m,\,n} h'_{mnkl} = 1$,

3) $\lim\limits_{m,\,n} \sum\limits_{k=0}^{m} |h'_{mnkl}| = 0$,

4) $\lim\limits_{m,\,n} \sum\limits_{l=0}^{n} |h'_{mnkl}| = 0$,

5) $\sum\limits_{k,\,l=0}^{m,\,n} |h'_{mnkl}| \leqslant M$, где M — постоянная.

По приведенным условиям теоремы I из [1] и определению 1 теперь видно, что матрица H^{-1} принадлежит классу R, что и требовалось доказать.

3. Основная теорема типа Мерсера для стесненной сходимости

Теперь мы в состоянии доказать следующую теорему типа Мерсера.

Теорема 3.1. *Пусть* $\alpha > 0$, *а методы* $A = (a_{mk})$, $B = (b_{nl}) \in F$. *Пусть, кроме того, последовательность*

$$t_{mn} = \sum_{k,\,l=0}^{m,\,n} h_{mnkl}\, s_{kl},$$

где метод $H = (h_{mnkl})$ *определен равенствами* (2.1), *сходится и удовлетворяет при этом условию*:

для всякого $\varepsilon > 0$ *существует такое целое число* $N > 0$, *что для любого фиксированного* $\nu \geqslant N$ *найдется такое целое число* $M > N$, *что* [4]

$$\left.\begin{aligned} \Big|\sum_{k=0}^{\nu}\sum_{l=0}^{n} h'_{mnkl}\, t_{kl}\Big| &< \varepsilon, \\ \Big|\sum_{l=0}^{\nu}\sum_{k=0}^{m} h'_{mnkl}\, t_{kl}\Big| &< \varepsilon, \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

когда

$$\frac{1}{\zeta} n^p \leqslant m \leqslant \zeta n^q, \quad m, n > M.$$

При сделанных предположениях справедливо равенство

$$\xi_{(p,\,q)}\text{-}\lim s_{mn} = \lim t_{mn}. \tag{3.2}$$

Доказательство. Ввиду условий нашей теоремы и следствия 2, матрица метода H^{-1} принадлежит классу R. Учитывая, теперь, сходимость последовательности $\{t_{mn}\}$, треугольность метода H^{-1}, $H^{-1} \in R$ и, наконец, условие (3.1), мы видим, что все условия теоремы 1.2 выполнены и, следовательно, имеет место равенство (3.2), что и требовалось доказать.

В частных случаях получаем из доказанной теоремы 3.1 соответствующие теоремы типа Мерсера для методов [5] $(H, \mu_k \nu_l)$, $C^{\varkappa,\tau}$, $H^{\varkappa,\tau}$, $(E;\ p,\ q)$ и факторизируемых методов $(R;\ p_k q_l)$ и $(\overline{WN};\ p_k q_l)$.

4. Теорема типа Мерсера с нефакторизируемыми средними Рисса в случае стесненной сходимости

В конце предыдущего параграфа было указано, что для случая стесненной сходимости имеет место теорема типа Мерсера с факторизируемыми средними Рисса, т. е. со средними определенными матрицей $\left(\dfrac{p_k}{\sum_{k=0}^{m} p_k} \cdot \dfrac{q_l}{\sum_{l=0}^{n} q_l}\right)$. Теперь покажем, что аналогичную теорему можно доказать и для нефакторизируемого метода Рисса, т. е. для метода, определенного матрицей

[4] Метод $H^{-1} = (h'_{mnkl})$ можно считать известным, т. к. его элементы определяются формулами, аналогичными формулам (2.7), (2.8), (2.11), (2.12), (2.13) и (2.15) из [4].

[5] Перечисленные методы означают, соответственно, методы Хаусдорфа, Чезаро, Гелдера, Эйлера-Кноппа, средних Рисса и Вороного-Нерлунда.

$\left(\frac{p_{kl}}{\sum\limits_{k,\,l=0}^{m,\,n} p_{kl}}\right)$. Для этого, предварительно, выведем два следствия теоремы 3. 1 из [2].

Следствие 4.1. *Если* $\alpha > 0$, *а метод* $G = (g_{mnkl})$ *определен элементами*

$$g_{mnkl} = \begin{cases} \alpha & \text{при } k = m \text{ и } l = n, \\ (1-\alpha)\dfrac{p_{kl}}{\sum\limits_{k,\,l=0}^{m-1,\,n-1} p_{kl}} & \text{при } (k = 0, 1, 2, \ldots, m-1; \\ & \qquad l = 0, 1, 2, \ldots, n-1), \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{4.1}$$

где последовательность $\{p_{kl}\}$ *удовлетворяет условиям*

$$\left.\begin{aligned} & p_{kl} > 0 \quad (k, l = 0, 1. 2 \ldots), \\ & \lim_{m,\,n} \sum_{k,\,l=0}^{m,\,n} p_{kl} = \infty, \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

то метод $G^{-1} = (g'_{mnkl})$ *регулярен.*

Следствие выводится аналогично выводу леммы 3. 1 из [6].

Следствие 4.2. *Если* $\alpha > 0$, *а метод* $G = (g_{mnkl})$ *определен равенствами* (4. 1), *где последовательность* $\{p_{kl}\}$ *удовлетворяет условиям* (4. 2), *то матрица метода* $G^{-1} = (g'_{mnkl})$ *является матрицей класса R.*

Вывод следствия аналогичен выводу следствия 2 настоящей статьи.

Последнее следствие применяется при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 4.1. *Пусть* $\alpha > 0$, *последовательность* $\{p_{kl}\}$ *удовлетворяет условиям* (4. 2), *а последовательность*

$$t_{mn} = \sum_{k,\,l=0}^{m,\,n} g_{mnkl}\, s_{kl},$$

где метод $G = (g_{mnkl})$ *определен равенствами* (4. 1), *сходится и удовлетворяет при этом условию:*

для всякого $\varepsilon > 0$ *существует такое целое число* $N > 0$, *что для любого фиксированного* $\nu \geqslant N$ *найдется такое целое число* $M > N$, *что* [6]

$$\left.\begin{aligned} & \Big|\sum_{k=0}^{\nu}\sum_{l=0}^{n} g'_{mnkl}\, t_{kl}\Big| < \varepsilon, \\ & \Big|\sum_{l=0}^{\nu}\sum_{k=0}^{m} g'_{mnkl}\, t_{kl}\Big| < \varepsilon, \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

[6] Метод $G^{-1} = (g'_{mnkl})$ можно считать известным, т. к. его элементы определены формулами (10), (11) и (13) из [2].

когда

$$\frac{1}{\zeta} n^p \leqslant m \leqslant \zeta n^q, \quad m, n > M.$$

При сделанных предположениях справедливо равенство

$$\xi_{(p, q)}\text{-}\lim s_{mn} = \lim t_{mn}.$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 3. 1 настоящей статьи.

5. Теоремы типа Мерсера для обыкновенной сходимости

В заключение приведем один пример, показывающий, как при помощи теоремы 1. 1 можно доказать теоремы типа Мерсера для случая обыкновенной сходимости двойных последовательностей.

Теорема 5. 1. *Пусть* $\alpha > 0$, *а методы* $A = (a_{mk})$, $B = (b_{nl}) \in F$. *Если последовательность*

$$t_{mn} = \sum_{k, l=0}^{m, n} h_{mnkl}\, s_{kl},$$

где метод $H = (h_{mnkl})$ *определен равенствами* (2. 1), *сходится и удовлетворяет при этом условиям*:

$$\lim_{m, n} \sum_{k=0}^{m} h'_{mnkl}\, t_{kl} = 0,$$

$$\lim_{m, n} \sum_{l=0}^{n} h'_{mnkl}\, t_{kl} = 0,$$

то справедливо равенство

$$\lim s_{mn} = \lim t_{mn}.$$

Доказательство теоремы сводится к проверке условий теоремы 1. 1, ввиду того, что метод $H^{-1} = (h'_{mnkl})$ можно считать известным [4].

В частных случаях можно из доказанной теоремы получить соответствующие теоремы для методов $(H; \mu_k \nu_l)$, $C^{\alpha, \tau}$, $H^{\alpha, \tau}$, $(E; p, q)$, $(WN; p_k q_l)$ и $(R; p_{kl})$.

Литература

1. Robison, G. M., Divergent double sequences and series. Trans. Amer. Math. Soc., 1926, **28**, 50—73.
2. Сырмус Т., Об одном обобщении теоремы Мерсера на случай двойных последовательностей. Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, 1961, **102**, 156—168.
3. Сырмус Т., О некоторых обобщениях теоремы Мерсера. Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, 1961, **102**, 169—184.
4. Сырмус Т., О некоторых обобщениях теоремы Мерсера для двойных

последовательностей. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1962, **11**, 37—49.
5. Сырмус Т., Об обобщенной теореме Мерсера. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1962, **11**, 99—106.
6. Сырмус Т., О некоторых теоремах типа Мерсера для стесненной сходимости. Настоящий сборник, стр. 264—273.
7. Тедеев С. А., О суммировании двойных рядов и двойных интегралов. Тр. Сталинирск. гос. пед. ин-та, 1952, **7**, 237—277.

Поступило
19 IV 1962

MERCERI TÜÜPI TEOREEMID KITSENDATUD JA HARILIKU KOONDUVUSE KORRAL

T. Sõrmus
Matemaatilise analüüsi kateeder

Resümee

Käesolevas töös jätkatakse artiklites [2—6] alustatud uurimisi Merceri tüüpi teoreemide üldistustest kahekordsetele jadadele. Siin vaadeldakse Merceri tüüpi teoreeme üldisema kitsendatud koonduvuse mõiste korral ning avaramas maatriksite klassis, kui artiklis [6]. Üldistuste saamiseks lähtutakse Tedejevi [7] poolt antud mõistetest ning teoreemidest, mis on esitatud artikli esimeses paragrahvis. Samas antakse Hausdorffi keskmistega Merceri tüüpi teoreemi (vt. [4], teoreem 2.1) järgmine üldistus (teoreem 2.1):

Kui $\alpha > 0$, $s \neq \infty$ *ja ühekordsete jadade normaalsed ning regulaarsed menetlused* $A = (a_{mk})$ *ja* $B = (b_{nl})$ *rahuldavad tingimusi:* $a_{mk},\ b_{nl} \geqslant 0$ *ning* $\sum\limits_{k,\,l=0}^{m,\,n} a_{mk}\, b_{nl} = 1$, *siis järeldub võrdusest*

$$b\text{-lim}\,(\alpha\, s_{mn} + (1-\alpha) \sum_{k,\,l=0}^{m-1,\,n-1} a_{m-1,\,k}\, b_{n-1,\,l}\, s_{kl}) = s$$

võrdus

$$b\text{-lim}\, s_{mn} = s.$$

Lähtudes teoreemidest 1.2, 2.1 ja teoreemist 3.1 artiklis [2] ning viimaste järeldustest (järeldus 2, § 2 ja järeldus 4.2, § 4) jõutakse käesoleva artikli peamiste tulemusteni, milleks on teoreemid 3.1 ja 4.1.

Töö viimases paragrahvis esitatakse üks näide selle kohta, kuidas Tedejevi teoreemi 1.1 rakendamine võimaldab tõestada Merceri tüüpi teoreeme hariliku koonduvuse jaoks.

MERCERSCHE SÄTZE FÜR RESTRINGIERTE UND PRINGSCHEIMSCHE KONVERGENZ

T. Sõrmus

Zusammenfassung

Im vorangehenden Artikel [6] betrachtete man den Mercerschen Satz fürs Hausdorff-Verfahren und für den Fall der restringierten Konvergenz. Im vorliegenden Artikel untersucht man die Mercerschen Sätze für den allgemeineren Fall der restringierten Konvergenz und für die allgemeineren Matrixverfahren

als im [6]. Auch werden die Mercerschen Sätze für den Fall der von Pringscheim definierten Konvergenz der Doppelfolgen untersucht. Um diese allgemeinen Resultate zu erhalten, benutzt man die von Tedejew [7] behandelten Begriffe und Sätze mit der folgenden Verallgemeinerung (Satz 2.1) des Satzes 2.1 aus [4].

$A = (a_{mk})$ und $(B = b_{nl})$ seien normale und reguläre Verfahren mit den Eigenschaften $a_{mk},\ b_{nl} \geqslant 0$ und $\sum_{k,\,l=0}^{m,\,n} a_{mk}\, b_{nl} = 1$; *es sei $\alpha > 0$ und $s \neq \infty$. Dann folgt aus der Existenz von* $b\text{-}\lim_{m,\,n} (\alpha\, s_{mn} + (1-\alpha) \sum_{k,\,l=0}^{m-1,\,n-1} a_{m-1,\,k}\, b_{n-1,\,l}\, s_{kl})$ *auch die Existenz von* $b\text{-}\lim_{m,\,n} s_{mn}$ *und die Gleichheit beider Grenzwerte.*

ВКЛЮЧЕНИЕ ОГРАНИЧЕННЫХ ПОЛЕЙ СУММИРОВАНИЯ

С. Гейсберг
Ленинградский инженерно-экономический институт

В работах [2, 3] было рассмотрено включение полных полей суммирования. Оказалось, что при включении полных полей как простого, так и абсолютного суммирования имеют место норменные оценки, сходные с оценками, установленными Брудно в случае включения ограниченных полей простого суммирования (см. [1], теорема 6).

В настоящей работе доказывается, что подобные оценки также имеют место при включении ограниченных полей абсолютного (простого и абсолютного) суммирования. С помощью этих оценок в дальнейшем окажется возможным выделить класс методов абсолютного суммирования, для которых имеет место аналоги известных теорем Мазура-Орлича (см. [6], теоремы 1 и 6).

Работа состоит из трех параграфов. В § 1 даются основные понятия и обозначения; в §§ 2, 3 доказываются норменные оценки.

§ 1. Основные понятия и обозначения

1. 1. В настоящей статье рассматриваются ряды (матрицы) с ограниченными членами.

E обозначает матрицу (δ_{nk}), где δ_{nk} — символ Кронекера; символ 0 употребляется как для обозначения обычного нуля, так и ряда с нулевыми членами.

Для ряда [1] $x = \Sigma x_k$ через $\overline{x_s}$ обозначается ряд

$$\overline{x_s} = \Sigma x'_k,\ x'_k = \begin{cases} 0 \text{ при } 0 \leqslant k < s, \\ x_k \text{ при } k \geqslant s, \end{cases}$$

а через X_n — n-ая частичная сумма.

[1] Если пределы суммирования не указаны, то индекс суммирования пробегает все значения 0, 1, 2, ...

1. 2. Мы будем всюду рассматривать методы суммирования, определенные преобразованиями ряда в ряд.

Пусть $P = (p_{nk})$ — некоторая матрица. Ряд $x = \Sigma x_k$ называется

1° ограниченным методом P, или P-ограниченным, если

$$\sum_{n=0}^{m} \Sigma p_{nk} x_k = O(1),$$

2° суммируемым методом P, или P-суммируемым, если сходится ряд $\Sigma\Sigma p_{nk}x_k$,

3° абсолютно суммируемым методом P, или $|P|$-суммируемым, если $\Sigma|\Sigma p_{nk} x_k| < \infty$.

Множество P-ограниченных (P-суммируемых, $|P|$-суммируемых) рядов обозначается через P_1 (соответственно P_2, P_3). Таким образом, через E_1, E_2, E_3 обозначены множества рядов с ограниченными частичными суммами, (сходящихся, абсолютно сходящихся).

Если $x \in E_1$ или $x \in E_2$, то мы положим $\|x\|_1 = \|x\|_2 = \sup_n |X_n|$; если $x \in E_3$, то полагаем $\|x\|_3 = \Sigma|x_k|$.

Наконец, через $P(x)$ будет обозначаться ряд $\Sigma(\Sigma p_{nk} x_k)$.

1. 3. Нам понадобятся следующие вспомогательные предложения.

Лемма 1 (см. [6]). *Включение $E_2 \subset P_2$ имеет место тогда и только тогда, когда*

$$\Sigma|\Sigma(p_{ik} - p_{i,\,k+1})| = O(1).$$

Лемма 2 (см. [7]). *Включение $E_3 \subset P_3$ имеет место тогда и только тогда, когда $\Sigma |p_{nk}| = O(1)$.*

Для дальнейшего удобно обозначить

$$\|P\|_1 = \|P\|_2 = \sup_m \left[\left|\sum_{i=0}^{m} p_{io}\right| + \Sigma\left|\sum_{n=0}^{m}(p_{nk} - p_{n,\,k+1})\right|\right],$$

$$\|P\|_3 = \sup_k \Sigma|p_{nk}|.$$

Тогда из лемм 1 и 2 следует

Лемма 3. *Пусть $1 \leqslant i \leqslant 3$, $x \in E_i \subset P_i$. Тогда*

$$\|P(x)\|_i \leqslant \|P\|_i \|x\|_i.$$

§ 2. Включение вида $E_3 \to E_3$

2.1. Доказываемая ниже теорема является аналогом теоремы 1 работы [2] для включения ограниченных полей суммирования. В этом случае метод доказательства работы [2] неприменим; однако развитие идеи доказательства теоремы 1 работы [4] приводит к нужному результату.

2.2. Теорема 1. *Пусть матрицы P и Q удовлетворяют следующим условиям:*

1° $\sum\limits_k (|p_{nk} - p_{n,\,k+1}| + |q_{nk} - q_{n,\,k+1}|) < \infty \quad (n = 0,\ 1, \ldots)$,

2° $\lim\limits_{k\to\infty} (|p_{nk}| + |q_{nk}|) = 0 \quad (n = 0,\ 1, \ldots)$,

3° $E_3 \subset P_3 \cap E_1 \subset Q$.

Тогда для любого $\delta > 0$ существуют такие индекс $s(\delta)$ и число $r(\delta) > 0$, что для всех рядов $x \in E_3$

$$\|P(\bar{x}_{s(\delta)})\|_3 + \delta r(\delta)\|\bar{x}_{s\,\delta)}\|_1 \geqslant r(\delta)\|Q(\bar{x}_{s(\delta)})\|_3. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть утверждение теоремы неверно. Тогда для некоторого $\delta = \delta_0$ найдутся

а) двойная последовательность чисел $\{\varepsilon_{ls}\}$, $\varepsilon_{ls} \downarrow 0$ для каждого s,

б) двойная последовательность рядов $\{x^{ls}\}$,

$$x^{ls} \in E_3,\ x^{ls} = \sum_k x_k^{ls},$$

такие, что для всех l и s $x^{ls} \neq 0$ и

$$\|P(\bar{x}_s^{ls})\|_3 + \delta_0\varepsilon_{ls}\|\bar{x}_s^{ls}\|_1 < \varepsilon_{ls}\|Q(\bar{x}_s^{ls})\|_3.$$

Выберем для каждого $s = 1,\ 2, \ldots$ индекс r_s так, чтобы было $\varepsilon_{r_s,\,s} < 2^{-s}$, и положим

$$\varepsilon_{r_s,\,s} = \varepsilon_s,\ x^{r_s,\,s} = x^s.$$

Тогда

$$\sum_{s=n}^{\infty} \varepsilon_s \leqslant 2^{-n+1} \tag{2}$$

и для всех s

$$\|P(\bar{x}_s^s)\|_3 + \delta_0\varepsilon_s\|\bar{x}_s^s\|_1 < \varepsilon_s\|Q(\bar{x}_s^s)\|_3. \tag{3}$$

В силу леммы 2 из условия 3° следует, что

$$\|P\|_3 + \|Q\|_3 < \infty \tag{4}$$

и, так как $x^s \in E_3$, то из (4) и леммы 3 вытекает, что для каждого s существует индекс τ_s такой, что $\tau_s > s$ и[2]

$$\|P(\bar{x}^s_{\tau_s+1})\|_3 < \varepsilon_s \|Q(\bar{x}^s_s)\|_3,$$

$$\|Q(\bar{x}^s_{\tau_s+1})\|_3 < \tfrac{1}{2}\|Q(\bar{x}^s_s)\|_3.$$

Отсюда и из (3) получаем, что для всех s

$$\sum_{n}\Big|\sum_{k=s}^{\tau_s} p_{nk}\, x_k^s\Big| + \delta_0\varepsilon_s\|\bar{x}_s^s\|_1 \leqslant 4\varepsilon_s \sum_{n}\Big|\sum_{k=s}^{\tau_s} q_{nk}\, x_k^s\Big|. \tag{5}$$

Далее, из 1°, 2° и (4) следует, что существуют целочисленные функции $L(k)$ и $N(n)$ такие, что

$$L(k) \uparrow \infty, \quad N(n) \uparrow \infty,$$

и

$$\sum_{i=0}^{k}\sum_{n=L(k)}^{\infty}|q_{ni}| = \alpha_i \downarrow 0, \tag{6}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=N(n)}^{\infty}|q_{ik} - q_{i,\,k+1}| = \beta_n \downarrow 0. \tag{7}$$

Определим последовательность $\{s_j\}$ следующим образом. Возьмем $s_1 = 1$, и если $s_1, \ldots, s_j$ уже определены, то положим

$$s_{j+1} = \tau_{s_1} + \ldots + \tau_{s_j} + N(L(\tau_{s_1} + \ldots + \tau_{s_j})).$$

Тогда сегменты $[s_j, \tau_{s_j}]$ не пересекаются и мы можем построить ряд $\omega = \Sigma\omega_k$, положив

$$\omega_k = \begin{cases} \dfrac{x_k^{s_j}}{z_j}\,\Theta_j & \text{при } s_j \leqslant k \leqslant \tau_{s_j}, \\ 0 & \text{для остальных } k, \end{cases}$$

где

$$z_j = \sum_{n}\Big|\sum_{k=s_j}^{\tau_{s_j}} q_{nk}\, x_k^{s_j}\Big|, \quad \Theta_j = -\operatorname{sgn}\Big(\sum_{k=0}^{s_j-1}\omega_k \cdot \sum_{k=s_j}^{\tau_{s_j}} x_k^{s_j}\Big).$$

Покажем, что ряд $\omega \in P_3 \cap E_1$, но $\omega \bar{\in} Q_3 \cap E_1$. Действительно, в силу (5)

$$\|\omega\|_1 = \sup_k\Big|\sum_{j=0}^{k}\omega_j\Big| \leqslant 2\sup_j\left(\frac{\|\bar{x}^{s_j}_{s_j}\|_1}{z_j}\right) < \frac{8}{\delta_0}, \tag{8}$$

---

[2] Отметим, что из (3) следует, что $\|Q(\bar{x}_s^s)\|_3 > 0$.

т. е. $\omega \in E_1$. Поэтому из 1° вытекает, что для каждого n ряд

$$\sum_k p_{nk}\,\omega_k = \sum_k (p_{nk} - p_{n,\,k+1})\,W_k$$

сходится и, следовательно, для любого M

$$\sum_{n=0}^{M} \left| \sum_k p_{nk}\,\omega_k \right| = \sum_{n=0}^{M} \left| \sum_j \Theta_j \left(\sum_{k=s_j}^{\tau_{s_j}} p_{nk} \frac{x_k^{s_j}}{z_j} \right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_j \frac{1}{z_j} \sum_{n=0}^{M} \left| \sum_{k=s_j}^{\tau_{s_j}} p_{nk}\, x_k^{s_j} \right|.$$

Отсюда и из (5) и (2) получаем

$$\sum_{n=0}^{M} \left| \sum_k p_{nk}\,\omega_k \right| \leqslant 8\Sigma\varepsilon_{i_j} \leqslant 16,$$

т. е. $\omega \in P_3$. Вместе с (8) это дает, что $\omega \in P_3 \cap E_1$.

Для того, чтобы показать, что $\omega \in Q_3$, заметим, что для $j \geqslant 2$ в силу (6) и (8)

$$\sum_{n=L(\tau_{s_{j-1}})}^{L(\tau_{s_j})} \left| \sum_{k=0}^{\tau_{s_{j-1}}} q_{nk}\,\omega_k \right| = O(1) \sum_{n=L(\tau_{s_{j-1}})}^{\infty} \sum_{k=0}^{\tau_{s_{j-1}}} |q_{nk}| = O(\alpha_{\tau_{s_{j-1}}}),$$

а в силу (7) и (8)

$$\sum_{n=L(\tau_{s_{j-1}})}^{L(\tau_{s_j})} \left| \sum_{k=\tau_{s_j}+N(L(\tau_{s_j}))+1}^{\infty} q_{nk}\,\omega_k \right| =$$

$$= O(1) \sum_{n=0}^{L(\tau_{s_j})} \sum_{k=N(L(\tau_{s_j}))}^{\infty} |q_{nk} - q_{n,\,k+1}| = O(\beta_{\tau_{s_j}}).$$

Кроме того, согласно определению ряда ω

$\omega_k = 0$ при $\tau_{s_j} < k < N(L(\tau_{s_j})) + \tau_{s_j} < s_{j+1}$, и $\tau_{s_{j-1}} \leqslant k < s_j$,

следовательно,

$$\sum_{k=\tau_{s_{j-1}}+1}^{\tau_{s_j}+N(L(\tau_{s_j}))} q_{nk}\,\omega_k = \sum_{k=s_j}^{\tau_{s_j}} q_{nk}\,\omega_k.$$

Поэтому

$$\sum_{n=L(\tau_{s_{j-1}})}^{L(\tau_{s_j})} \left| \sum_k q_{nk}\,\omega_k \right| =$$

$$= \sum_{n=L(\tau_{s_{j-1}})}^{L(\tau_{s_j})} \Big| \Big(\sum_{k=0}^{\tau_{s_{j-1}}} + \sum_{k=\tau_{s_{j-1}}+1}^{\tau_{s_j}+N(L(\tau_{s_j}))} + \sum_{k=\tau_{s_j}+N(L(\tau_{s_j}))+1}^{\infty} \Big) q_{nk}\,\omega_k \Big| = \tag{9}$$

$$= O(\alpha_{\tau_{s_{j-1}}} + \beta_{\tau_{s_j}}) + \sum_{n=L(\tau_{s_{j-1}})}^{L(\tau_{s_j})} \Big| \sum_{k=s_j}^{\tau_{s_j}} q_{nk}\,\omega_k \Big|.$$

Далее, так как $s_j > N(L(\tau_{s_{j-1}}))$, то в силу (7), (6) и (8) имеем

$$\sum_{n=0}^{L(\tau_{s_{j-1}})-1} \Big| \sum_{k=s_j}^{\tau_{s_j}} q_{nk}\,\omega_k \Big| = O(1) \sum_{n=0}^{L(\tau_{s_{j-1}})-1} \sum_{k=s_j}^{\infty} |q_{nk} - q_{n,\,k+1}| = O(\beta_{\tau_{s_{j-1}}})$$

$$\sum_{n=L(\tau_{s_j})+1}^{\infty} \Big| \sum_{k=s_j}^{\tau_{s_j}} q_{nk}\,\omega_k \Big| = O(1) \sum_{k=0}^{\tau_{s_j}} \sum_{n=L(\tau_{s_j})}^{\infty} |q_{nk}| = O(\alpha_{\tau_{s_j}})$$

и из (9) получаем

$$\sum_{n=L(\tau_{s_{j-1}})}^{L(\tau_{s_j})} \Big| \sum_k q_{nk}\,\omega_k \Big| = O(\alpha_{j-1} + \beta_{j-1}) + \sum_n \Big| \sum_{k=s_j}^{\tau_{s_j}} q_{nk}\,\omega_k \Big|. \tag{10}$$

Но согласно определению ряда ω

$$\sum_n \Big| \sum_{k=s_j}^{\tau_{s_j}} q_{nk}\,\omega_k \Big| = \frac{1}{z_j} \sum_n \Big| \sum_{k=s_j}^{\tau_{s_j}} q_{nk}\,x_k^{s_j} \Big| = \frac{z_j}{z_j} = 1,$$

а в силу (6), (7) $(\alpha_j + \beta_j) \downarrow 0$, поэтому из (10) имеем

$$\sum_{n=L(\tau_{s_{j-1}})}^{L(\tau_{s_j})} \Big| \sum_k q_{nk}\,\omega_k \Big| \geqslant 1 - o(1).$$

Так как $L(k)$ строго возрастает, то это равносильно тому, что $\omega \bar{\in} Q_3$.

Таким образом, действительно $\omega \in P_3 \cap E_1$ и $\omega \bar{\in} Q_3$, в противоречие условию 3°. Следовательно, теорема доказана.

§ 3. Включение вида $E_3 \to E_2$

Доказываемая ниже теорема 2 является аналогом теоремы 1 для включения вида $E_3 \to E_2$.

Теорема 2. *Пусть матрица P удовлетворяет условиям*

1° $\sum_k |p_{nk} - p_{n,\,k+1}| < \infty$, $\lim_{k\to\infty} p_{nk} = 0$ $(n = 0,\ 1,\ \ldots)$,

2° $E_3 \subset P_3$,

а матрица Q *условиям*

3° $\sum\limits_n q_{nk} = 1 \quad (k = 0, 1, \ldots)$,

4° $E_2 \subset Q_2$,

5° $\lim\limits_{k\to\infty} q_{nk} = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots)$,

причем имеет место соотношение

6° $P_3 \cap E_1 \subset Q_2$.

Тогда по любому $\delta > 0$ *найдутся такие индекс* $s(\delta)$ *и число* $r(\delta) > 0$, *что для всех рядов* $x = \sum x_k \in E_3$ *имеет место неравенство*

$$\|P(x_{s(\delta)})\|_3 + \delta r(\delta)\|x_{s(\delta)}\|_1 \geqslant r(\delta)\|Q(x_{s(\delta)})\|_2. \tag{11}$$

Доказательство. Если (11) не имеет места, то по аналогии с выводом оценки (3) можно показать, что для некоторого $\delta = \delta_0 > 0$ найдутся последовательность рядов $\{x^s\}$, $x^s \neq 0$ и последовательность чисел $\{\varepsilon_s\}$, $\varepsilon_s \downarrow 0$ такие, что

$$x^s = \sum_k x_k^s \in E_3, \quad 0 < \varepsilon_s < 2^{-s} \tag{12}$$

и для всех s

$$\|P(\bar{x}^s)\|_3 + \delta_0 \varepsilon_s \|\bar{x}^s\|_1 \leqslant \varepsilon_s \|Q(\bar{x}^s)\|_2. \tag{13}$$

Из условий 2°, 3° и 4° в силу лемм 1 и 2 имеем

$$\|P\|_3 + \|Q\|_2 < \infty, \tag{14}$$

и, так как $x^s \in E_3$, то из (14) и леммы 3 вытекает, что для каждого s существует такой индекс τ_s, что [3]

$$\begin{aligned} \|P(\bar{x}^s_{\tau_s+1})\|_3 &\leqslant \varepsilon_s \|Q(\bar{x}^s)\|_2, \\ \|Q(\bar{x}^s_{\tau_s+1})\|_2 &\leqslant \tfrac{1}{2}\|Q(\bar{x}^s)\|_2. \end{aligned} \tag{15}$$

Отсюда и из (13) получаем, что для всех s

$$\sum_n \Big|\sum_{k=s}^{\tau_s} p_{nk} x_k^s\Big| + \delta_0 \varepsilon_s \|\bar{x}^s\|_1 < 4\varepsilon_s \sup_m \Big|\sum_{n=0}^{m} \sum_{k=s}^{\tau_s} q_{nk} x_k^s\Big|. \tag{16}$$

Далее, из 3°, 5° и (14) следует, что существуют целочисленные функции $L(m)$, $N(m)$ и $M(m)$ такие, что

$$L(m) \uparrow \infty, \quad N(m) \uparrow \infty, \quad M(m) \uparrow \infty; \quad N(m) > m, \quad L(m) > m,$$

---

[3] Нетрудно видеть, что в силу (13) $\|Q(\bar{x}^s)\|_2 > 0$.

и

$$\sup_{n \geqslant L(m)} \sup_{k \leqslant m} \Big| \sum_{i=L(m)+1}^{n} q_{ik} \Big| = \mu_m \downarrow 0, \tag{17}$$

$$\sup_{n \geqslant L(m)} \sum_{k=0}^{m} \Big| \sum_{i=0}^{n} (q_{ik} - q_{i,\,k+1}) \Big| = \alpha_m \downarrow 0, \tag{18}$$

$$\sup_{n \leqslant m} \sum_{k=N(m)}^{\infty} \Big| \sum_{i=0}^{n} (q_{ik} - q_{i,\,k+1}) \Big| = \beta_m \downarrow 0, \tag{19}$$

$$\sup_{k \geqslant M(m)} \sum_{n=0}^{m} |q_{nk}| = \gamma_m \downarrow 0. \tag{20}$$

Определим последовательность $\{s_j\}$ следующим образом. Положим $s_1 = 1$, и если $s_1, \ldots, s_j$ уже определены, то положим

$$t_j = \tau_{s_1} + \ldots + \tau_{s_j}, \quad s_{j+1} = t_j + N(L(t_j)) + M(L(t_j)).$$

Тогда сегменты $[s_j, \tau_{s_j}]$ не пересекаются и мы можем построить ряд $\omega = \Sigma\, \omega_k$, положив

$$\omega_k = \begin{cases} \dfrac{x_k^{s_{2j}}}{z_{2j}}\, \Theta_{2j} & \text{при} \quad s_{2j} \leqslant k \leqslant \tau_{s_{2j}}, \\ 0 & \text{для остальных } k, \end{cases}$$

где

$$z_{2j} = \sup_m \Big| \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=s_{2j}}^{\tau_{s_{2j}}} q_{nk}\, x_k^{s_{2j}} \Big|;$$

$$\Theta_0 = 1; \quad \Theta_{2j} = -\operatorname{sgn}\Big(\sum_{k=0}^{s_{2j}-1} \omega_k \cdot \sum_{k=s_{2j}}^{\tau_{s_{2j}}} x_k^{s_{2j}} \Big).$$

Покажем, что ряд $\omega \in P_3 \cap E_1$, но $\omega \bar{\in} Q_2$. Действительно, в силу (16)

$$\|\omega\|_1 = \sup_k |W_k| = 2 \sup_j \left(\frac{1}{z_{2j}} \sup_{s_{2j} \leqslant k \leqslant \tau_{s_{2j}}} \Big| \sum_{i=s_{2j}}^{k} x_i^{s_{2j}} \Big| \right) \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sup_j \frac{1}{z_{2j}} \|\bar{x}_{s_{2j}}^{s_{2j}}\|_1 \leqslant \frac{8}{\delta_0}, \tag{21}$$

т. е. $\omega \in E_1$. Поэтому из 1° вытекает, что для каждого n ряд

$$\sum_k p_{nk}\, \omega_k = \sum_k (p_{nk} - p_{n,\,k+1})\, W_k$$

сходится и, следовательно, для любого M

$$\sum_{n=0}^{M} \left|\sum_k p_{nk}\,\omega_k\right| = \sum_{n=0}^{M} \left|\sum_j \left(\sum_{k=s_{2j}}^{\tau_{s_{2j}}} p_{nk}\,\frac{x_k^{s_{2j}}}{z_{2j}}\,\Theta_{2j}\right)\right| \leqslant \sum_j \frac{1}{z_{2j}} \sum_{n=0}^{M} \left|\sum_{k=s_{2j}}^{\tau_{s_{2j}}} p_{nk}\,x_k^{s_{2j}}\right|.$$

Отсюда и из (12) и (16) получаем, что

$$\sum_{n=0}^{M} \left|\sum_k p_{nk}\,\omega_k\right| \leqslant 4 \sum_j \varepsilon_{i_j} \leqslant 4 \sum_j 2^{-j} \leqslant 8,$$

и, следовательно, $\omega \in P_3$. Вместе с (21) это дает, что $\omega \in P_3 \cap E_1$.

Для того, чтобы показать, что $\omega \in \overline{Q}_2$, заметим, что в силу 5°, (21) и (14) для любого n

$$\sum_k q_{nk}\,\omega_k = \sum_k (q_{nk} - q_{n,\,k+1})\,W_k.$$

В то же время в силу (18) и (21) для $j \geqslant 1$ и $L(\tau_{s_{j-1}}) \leqslant m \leqslant L(\tau_{s_j})$

$$\left|\sum_{n=0}^{m} \sum_{k=0}^{\tau_{s_{j-1}}} (q_{nk} - q_{n,\,k+1})\,W_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{\tau_{s_{j-1}}} \left(\sum_{n=0}^{m} (q_{nk} - q_{n,\,k+1})\right) W_k\right| \leqslant$$

$$\leqslant \|\omega\|_1 \sum_{k=0}^{\tau_{s_{j-1}}} \left|\sum_{n=0}^{m} (q_{nk} - q_{n,\,k+1})\right| = O(\alpha_{s_{j-1}})\,\|\omega\|_1,$$

а в силу (19) и [4] (21)

$$\left|\sum_{n=0}^{m} \sum_{k=N(L(\tau_{s_j}))+1}^{\infty} (q_{nk} - q_{n,\,k+1})\,W_k\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=N(L(\tau_{s_j}))+1}^{\infty} W_k \sum_{n=0}^{m} (q_{nk} - q_{n,\,k+1})\right| \leqslant$$

$$\leqslant \|\omega\|_1 \sum_{k=N(L(\tau_{s_j}))+1}^{\infty} \left|\sum_{n=0}^{m} (q_{nk} - q_{n,\,k+1})\right| = O(\beta_{s_j})\,\|\omega\|_1.$$

Поэтому при $L(\tau_{s_{j-1}}) \leqslant m \leqslant L(\tau_{s_j})$

$$\sum_{n=0}^{m} \sum_k q_{nk}\,\omega_k = \sum_{n=0}^{m} \sum_k (q_{nk} - q_{n,\,k+1})\,W_k =$$

---

[4] Производимая далее перемена порядка суммирования справедлива, так как в силу (14) для любого n $\sum_k |q_{nk} - q_{n,\,k+1}| < \infty$, и, следовательно,

$$\sum_{n=0}^{m} \sum_k |q_{nk} - q_{n,\,k+1}|\,|W_k| < \infty.$$

$$= \sum_{n=0}^{m} \Big(\sum_{k=0}^{\tau_{s_{j-1}}} + \sum_{k=\tau_{s_{j-1}}+1}^{N\,L(\tau_{s_j}))} + \sum_{k=N(L(\tau_{s_j}))+1}^{\infty} \Big)(q_{nk} - q_{n,\,k+1})\, W_k = \quad (22)$$

$$= \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=\tau_{s_{j-1}}+1}^{N(L(\tau_{s_j}))} (q_{nk} - q_{n,\,k+1})\, W_k + O(\alpha_{s_{j-1}} + \beta_{s_j}) \|\omega\|_1.$$

Далее, при нечетном j, т. е. $j = 2i + 1$, согласно определению ряда ω

$$W_{\tau_{s_{2i}}} = W_{\tau_{s_{2i}+1}} = \ldots = W_{N(L(\tau_{s_{2i+1}}))} = \ldots = W_{s_{2i+1}-1},$$

следовательно,

$$\sum_{k=\tau_{s_{j-1}}+1}^{N(L(\tau_{s_j}))} (q_{nk} - q_{n,\,k+1})\, W_k = W_{s_{2i}} \sum_{k=\tau_{s_{2i}}+1}^{N(L(\tau_{s_{2i+1}}))} (q_{nk} - q_{n,\,k+1}). \quad (23)$$

Кроме того, в силу (18) и (19) при $L(\tau_{s_{2i}}) \leqslant m \leqslant L(\tau_{s_{2i+1}})$

$$\sum_{n=0}^{m} \sum_{k=\tau_{s_{2i}}+1}^{N(L(\tau_{s_{2i+1}}))} (q_{nk} - q_{n,\,k+1}) = O(\alpha_{s_{j-1}} + \beta_{s_j}) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{m} \sum_{k} (q_{nk} - q_{n,\,k+1}).$$

Поэтому из (22) и (23) получаем для $L(\tau_{s_{2i}}) \leqslant m \leqslant L(\tau_{s_{2i+1}})$

$$\sum_{n=0}^{m} \sum_{k} q_{nk}\, \omega_k = W_{\tau_{s_{2i}}} \sum_{n=0}^{m} q_{n0} + O(\alpha_i + \beta_i).$$

Отсюда и из (18), (19) и 3° вытекает, что если последовательность $\{W_{\tau_{s_{2i}}}\}$ расходится, то ряд $\omega \in \bar{Q}_2$. Следовательно, в дальнейшем можно рассматривать лишь случай, когда

$$\sum_{n} \sum_{k} q_{nk}\, \omega_k = \lim_{i \to \infty} W_{\tau_{s_{2i}}} = \xi. \quad (24)$$

Теперь рассмотрим оценку (22) при четном j, т. е. $j = 2i$. Применяя преобразование Абеля, имеем для любого m

$$\sum_{n=0}^{m} \sum_{k=\tau_{s_{2i-1}}+1}^{N(L(\tau_{s_{2i}}))} (q_{nk} - q_{n,\,k+1})\, W_k = W_{\tau_{s_{2i-1}}} \sum_{n=0}^{m} q_{n\tau_{s_{2i-1}}} -$$

$$- W_{N(L(\tau_{s_{2i}}))} \sum_{n=0}^{m} q_{nN(L(\tau_{s_{2i}}))} + \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=\tau_{s_{2i-1}}+1}^{N(L(\tau_{s_{2i}}))} q_{nk}\, \omega_k. \quad (25)$$

Далее, так как $s_{2i+1} > N(L\tau_{s_{2i}})) > L(\tau_{s_{2i}}) > \tau_{s_{2i}}$, то из определения ряда ω следует, что

$$W_{\tau_{s_{2i-1}}} = W_{\tau_{s_{2i-2}}}, \quad W_{N(L(\tau_{s_{2i}}))} = W_{\tau_{s_{2i}}},$$

$$\sum_{k=\tau_{s_{2i-1}}+1}^{N(L(\tau_{s_{2i}}))} q_{nk}\,\omega_k = \sum_{k=s_{2i}}^{\tau_{s_{2i}}} q_{nk}\,\omega_k.$$

Подставляя (25) в (22) и используя последние равенства, получаем для $L(\tau_{s_{2i-1}}) \leqslant m \leqslant L(\tau_{s_{2i}})$

$$\sum_{n=0}^{m}\sum_{k} q_{nk}\,\omega_k = \sum_{n=0}^{m}\sum_{k=s_{2i}}^{\tau_{s_{2i}}} q_{nk}\,\omega_k + W_{\tau_{s_{2i-2}}}\sum_{n=0}^{m} q_{n\tau_{s_{2i-1}}} -$$

$$- W_{\tau_{s_{2i}}}\sum_{n=0}^{m} q_{nN(L(\tau_{s_{2i}}))} + O(\alpha_i + \beta_i). \tag{26}$$

Оценим выражение, стоящее справа. Из определения ряда ω следует, что

$$\sum_{n=0}^{m}\sum_{k=s_{2i}}^{\tau_{s_{2i}}} q_{nk}\,\omega_k = \frac{\Theta_{2i}}{z_{2i}}\sum_{n=0}^{m}\sum_{k=s_{2i}}^{\tau_{s_{2i}}} q_{nk}\,x_k^{s_{2i}}. \tag{27}$$

Применяя преобразование Абеля, имеем

$$\sum_{n=0}^{m}\sum_{k=s_{2i}}^{\tau_{s_{2i}}} q_{nk}\,x_k^{s_{2i}} = X_{\tau_{s_{2i}}+1}^{s_{2i}}\sum_{n=0}^{m} q_{n\tau_{s_{2i}}} -$$

$$- X_{s_{2i}-1}^{s_{2i}}\sum_{n=0}^{m} q_{ns_{2i}} + \sum_{n=0}^{m}\sum_{k=s_{2i}}^{\tau_{s_{2i}}-1}(q_{nk} - q_{n,\,k+1})\,X_k^{s_{2i}} \tag{28}$$

и, так как в силу (20)

$$\sum_{n=0}^{L(\tau_{s_{2i-1}})}(|q_{n\tau_{s_{2i}}}| + |q_{ns_{2i}}|) \leqslant 2\sup_{k \geqslant s_{2i}}\sum_{n=0}^{L(\tau_{s_{2i-1}})}|q_{nk}| \leqslant$$

$$\leqslant 2\sup_{k \geqslant M(L(\tau_{s_{2i-1}}))}\sum_{n=0}^{L(\tau_{s_{2i-1}})}|q_{nk}| \leqslant \gamma_{s_{2i-1}},$$

а в силу (19)

$$\sup_{m \leqslant L(\tau_{s_{2i-1}})}\Big|\sum_{n=0}^{m}\sum_{k=s_{2i}}^{\tau_{s_{2i}}}(q_{nk} - q_{n,\,k+1})\,X_k^{s_{2i}}\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \|\overline{x}_{s_{2i}}^{s_{2i}}\|_1 \sup_{m \leqslant L(\tau_{s_{2i-1}})}\sum_{k=s_{2i}}^{\infty}\Big|\sum_{n=0}^{m}(q_{nk} - q_{n,\,k+1})\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \|\bar{x}^{s_{2i}}_{s_{2i}}\|_1 \sup_{m \leqslant L(\tau_{s_{2i-1}})} \sum_{k=N(L(\tau_{s_{2i-1}}))}^{\infty} \Big| \sum_{n=0}^{m} (q_{nk} - q_{n,\,k+1}) \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \beta_{s_{2i-1}} \|\bar{x}^{s_{2i}}_{s_{2i}}\|_1,$$

то

$$\sup_{m \leqslant L(\tau_{s_{2i-1}}))} \Big| \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=s_{2i}}^{\tau_{s_{2i}}} q_{nk} x_k^{s_{2i}} \Big| \leqslant \|\bar{x}^{s_{2i}}_{s_{2i}}\|_1 (\gamma_{s_{2i-1}} + \beta_{s_{2i-1}}). \quad (29)$$

В то же время при $m > L(\tau_{s_{2i}})$ из (28) получаем

$$\sum_{n=L(\tau_{s_{2i}})+1}^{m} \sum_{k=s_{2i}}^{\tau_{s_{2i}}} q_{nk} x_k^{s_{2i}} = X^{s_{2i}}_{\tau_{s_{2i}}+1} \sum_{n=L(\tau_{s_{2i}})+1}^{m} q_{n\tau_{s_{2i}}} -$$

$$- X^{s_{2i}}_{s_{2i}-1} \sum_{n=L(\tau_{s_{2i}})+1}^{m} q_{ns_{2i}} + \sum_{n=L(\tau_{s_{2i}})+1}^{m} \sum_{k=s_{2i}}^{\tau_{s_{2i}}-1} (q_{nk} - q_{n,\,k+1}) X_k^{s_{2i}}$$

и, так как в силу (17) и 3°

$$\sup_{m > L(\tau_{s_{2i}})} \Big(\Big| \sum_{n=L(\tau_{s_{2i}})+1}^{m} q_{n\tau_{s_{2i}}} \Big| + \Big| \sum_{n=L(\tau_{s_{2i}})+1}^{m} q_{ns_{2i}} \Big| \Big) \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sup_{m > L(\tau_{s_{2i}})} \sup_{k \leqslant \tau_{s_{2i}}} \Big| \sum_{n=L(\tau_{s_{2i}})+1}^{m} q_{nk} \Big| = 2\mu_{\tau_{s_{2i}}},$$

а в силу (18)

$$\sup_{m > L(\tau_{s_{2i}})} \Big| \sum_{n=L(\tau_{s_{2i}})+1}^{m} \sum_{k=s_{2i}}^{\tau_{s_{2i}}-1} (q_{nk} - q_{n,\,k+1}) X_k^{s_{2i}} \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \|\bar{x}^{s_{2i}}_{s_{2i}}\|_1 \sup_{m > L(\tau_{s_{2i}})} \sum_{k=s_{2i}}^{\tau_{s_{2i}}-1} \Big| \sum_{n=L(\tau_{s_{2i}})+1}^{m} (q_{nk} - q_{n,\,k+1}) \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \|\bar{x}^{s_{2i}}_{s_{2i}}\|_1 \Big[\sup_{m > L(\tau_{s_{2i}})} \sum_{k=0}^{\tau_{s_{2i}}-1} \Big| \sum_{n=0}^{m} (q_{nk} - q_{n,\,k+1}) \Big| +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\tau_{s_{2i}}-1} \Big| \sum_{n=0}^{L(\tau_{s_{2i}})} (q_{nk} - q_{n,\,k+1}) \Big| \Big| \leqslant 2\alpha_{s_{2i}} \|\bar{x}^{s_{2i}}_{s_{2i}}\|_1,$$

то

$$\sup_{m>L(s_{2i})} \Big| \sum_{n=L(\tau_{s_{2i}})+1}^{m} \sum_{k=s_{2i}}^{\tau_{s_{2i}}} q_{nk}\, x_k^{s_{2i}} \Big| \leqslant \| \bar{x}_{s_{2i}}^{s_{2i}} \|_1 \, [2(\alpha_{2i} + \mu_{2i})]. \qquad (30)$$

Из оценок (29) и (30) вытекает, что для всех $i \geqslant 1$

$$z_{2i} = \sup_m \Big| \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=s_{2i}}^{\tau_{s_{2i}}} q_{nk}\, x_k^{s_{2i}} \Big| \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{L(\tau_{s_{2i-1}}) \leqslant m \leqslant L(\tau_{s_{2i}})} \Big| \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=s_{2i}}^{\tau_{s_{2i}}} q_{nk}\, x_k^{s_{2i}} \Big| - 2(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \mu_i) \| \bar{x}_{s_{2i}}^{s_{2i}} \|_1$$

и из (15)—(20) получаем

$$z_{2i} \geqslant (1 - o(1)) \sup_{L(\tau_{s_{2i-1}}) \leqslant m \leqslant L(\tau_{s_{2i}})} \Big| \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=s_{2i}}^{\tau_{s_{2i}}} q_{nk}\, x_k^{s_{2i}} \Big|.$$

Подставляя эту оценку в (27), окончательно имеем

$$\sup_{L(\tau_{s_{2i-1}}) \leqslant m \leqslant L(\tau_{s_{2i}})} \Big| \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=s_{2i}}^{\tau_{s_{2i}}} q_{nk}\, \omega_k \Big| = 1 - o(1). \qquad (31)$$

Далее, при $L(\tau_{s_{2i-1}}) \leqslant m \leqslant L(\tau_{s_{2i}})$

$$\sum_{n=0}^{m} q_{n\tau_{s_{2i-1}}} - \sum_{n=0}^{m} q_{nN(L(\tau_{s_{2i}}))} = \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=\tau_{s_{2i-1}}}^{N(L(\tau_{s_{2i}}))-1} (q_{nk} - q_{n,\,k+1}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{m} \sum_{k} (q_{nk} - q_{n,\,k+1}) + O(\alpha_{s_{2i-1}} + \beta_{s_{2i}}) = \sum_{n=0}^{m} q_{n0} + O(\alpha_i + \beta_i),$$

поэтому из (16), (17), (25) и (31) получаем

$$W_{\tau_{s_{2i-2}}} \sum_{n=0}^{m} q_{n\tau_{s_{2i-1}}} - W_{\tau_{s_{2i}}} \sum_{n=0}^{m} q_{nN(L(\tau_{s_{2i}}))} = \xi \sum_{n=0}^{m} q_{n0} + o(1). \qquad (32)$$

Теперь подставим оценки (31), (32) в (26) и устремим i к бесконечности. Тогда, предполагая, что $\omega \in Q_2$, получим, что

$$\Big| \sum_n \sum_k q_{nk}\, \omega_k - \xi \Big| \geqslant 1,$$

в противоречие с (24). Следовательно, $\omega \bar{\in} Q_2$.

Таким образом, $\omega \in P_3 \cap E_1$, но $\omega \bar{\in} Q_2$, что противоречит условию 5°. Это доказывает теорему.

Литература

1. Брудно А. Л., Относительные нормы матриц Теплица. Докл. АН СССР, 1953, **91**, 197—200.
2. Гейсберг С., О некоторых свойствах методов суммирования. Докл. АН СССР, 1961, **137**, 265—267.
3. Гейсберг С., О некоторых свойствах матричных преобразований. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 52—77.
4. Гейсберг С., Лакунарные тауберовы теоремы для абсолютного суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 78—90.
5. Knopp, K., Lorentz, G., Beiträge zur absoluten Limitierung. Arch. Math., 1949/50, **2**, 10—16.
6. Mazur, S., Orliez, W., Sur les methodes lineaires de saumation. C. r. Acad. Sci., 1933, **196**, 32—34.
7. Vermes, P., Series to series transformations and analytic continuation by matrix methods. Amer. J. Math., 1949, **71**, 541—562.

Поступило
20 XII 1961

TÕKESTATUD SUMMEERIMISVÄLJADE SISALDUVUSEST

S. Geisberg

Leningradi majandusinseneride instituut

Resümee

Töös leitakse seosed kahe summeerimisvälja (hariliku ja absoluutse) normide vahel juhul, kui üks väli sisaldub teises. Saadud hinnangud on analoogilised Brudno poolt saadud hinnangutega tõkestatud summeerimisväljade sisalduvuse jaoks hariliku summeeruvuse korral.

ABOUT THE CONSISTENCY OF BOUNDED FIELDS OF SUMMABILITY

S. Geisberg

Summary

In the paper correlations between norms of two fields of summability (ordinary and absolute) when one of them is joined in another have been found. The obtained estimates are analogous with Brudno's for bounded fields of summability in case of ordinary summability.

АНАЛОГИ ТЕОРЕМ МАЗУРА-ОРЛИЧА ДЛЯ АБСОЛЮТНОГО СУММИРОВАНИЯ

С. Гейсберг
Ленинградский инженерно-экономический институт

В настоящей работе рассматриваются следующие две проблемы.

А. Каким условиям должны удовлетворять матрицы P и Q, чтобы из [1] $P_3 \cap E_1 \subset Q_3$ (или $P_3 \cap E_1 \subset Q_2$) следовало, что [2] $\Sigma\Sigma_{n\,k} p_{nk} x_k = \Sigma\Sigma_{n\,k} q_{nk} x_k$ для всех $x \in P_3 \cap E_1$.

Б. Каким условиям должна удовлетворять матрица P, чтобы из $P_3 \subset E_1$ следовало $P_3 \subset E_2$.

Аналогичные проблемы для случая простого суммирования последовательностей были решены Мазуром и Орличем в работе [1] (теоремы 1 и 6), где показано, что в этом случае достаточно потребовать регулярности матриц P и Q.

Для абсолютного суммирования представляется естественным наложить на матрицы P и Q требование абсолютной регулярности. Но в этом случае, как будет показано ниже, оно оказывается недостаточным для решения проблем А и Б; поэтому на матрицы P и Q необходимо наложить дополнительное ограничение. Таким ограничением, как будет показано, может служить условие S-совершенности матрицы P.

Определение. *Матрица* $P = (p_{nk})$ *называется* S*-совершенной, если*

$$\sum_k \Big|\sum_{n=0}^{m} (p_{nk} - p_{n,\,k+1})\Big| = O(1), \tag{a}$$

$$\lim_{k\to\infty} p_{nk} = 0 \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots), \tag{b}$$

$$\sum_n |p_{nk}| = O(1), \tag{c}$$

[1] В настоящей работе всюду используются обозначения работы [3].

[2] При необозначенных пределах суммирования оно производится по всем целым неотрицательным значениям индекса.

и из условий $\sum_k \left|\sum_n \tau_n (p_{nk} - p_{n,\,k+1})\right| < \infty$ *при* $\tau_n = O(1)$ *следует, что*

$$\sum |\tau_n - \tau_{n+1}| < \infty. \tag{d}$$

Класс S S-совершенных абсолютно регулярных матриц не пуст. Так, например, в нем содержится матрица $C = (c_{nk})$,

$$c_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{k+1} \text{ при } n = k, \\ \dfrac{k}{k+1} \text{ при } n = k+1, \\ 0 \quad \text{при } n \neq k,\ n \neq k+1. \end{cases}$$

Наряду с матрицей C в S содержится любая матрица, полученная следующим образом. Возьмем матрицу D, абсолютно регулярную и удовлетворяющую условиям (a), (b), (c) и последовательность целых положительных чисел $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n \uparrow \infty$. Вставим между $2m$-ым и $(2m+1)$-ым столбцами матрицы C столбцы матрицы D с номерами $\alpha_m,\ \alpha_m + 1, \ldots,\ \alpha_{m+1} - 1$. Нетрудно видеть, что полученная матрица принадлежит классу S.

1. Мы докажем следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть матрица P S-совершенна, матрица Q удовлетворяет условию*

$$\sum_k |q_{nk}| < \infty \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots)$$

и для всех k

$$\sum_n p_{nk} = \sum_n q_{nk} = 1. \tag{1}$$

Тогда, если

$$P_3 \cap E_1 \subset Q_3,$$

то для всех $x \in P_3 \cap E_1$

$$\sum_n \sum_k p_{nk}\, x_k = \sum_n \sum_k q_{nk}\, x_k. \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть матрица P S-совершенна, матрица Q удовлетворяет условиям*

1° $E_2 \subset Q_2$,

2° $\lim\limits_{k\to\infty} q_{nk} = 0 \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots)$

и выполняется условие (1).

Тогда, если

$$P_3 \cap E_1 \subset Q_3,$$

то для всех $x \in P_3 \cap E_1$ имеет место (2).

Теорема 3. *Если матрица P S-совершенна, то из $P_3 \subset E_1$ следует $P_3 \subset E_2$.*

Теоремы 1—3 будут доказаны в п. 3—4; в следующем пункте дан пример, показывающий недостаточность требования абсолютной регулярности для решения проблем А и Б.

2. Пример. Определим метод P матрицей (p_{nk}),

$$p_{nk} = \begin{cases} -1 \text{ при } n \text{ четном, } k = n \text{ и } k = n-1, \\ 2 \text{ при } n \text{ нечетном, } k = n \text{ и } k = n-1, \\ 0 \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

а в качестве метода Q возьмем метод Чезаро второго порядка, определенный матрицей (q_{nk}),

$$q_{nk} = \begin{cases} 1, & \text{при } n = k = 0, \\ \dfrac{2k(n+1-k)}{n(n+1)(n+2)}, & \text{при } n \geqslant 1,\ n \geqslant k \geqslant 0, \\ 0, & \text{при } k > n. \end{cases}$$

Так как

$$\sum_n |p_{nk}| = O(1), \quad \sum_k \Big| \sum_{m=0}^{n} p_{mk} - p_{m,\,k+1} \Big| = O(1),$$

$$\sum_n |q_{nk}| = O(1), \quad \sum_k \Big| \sum_{m=0}^{n} q_{mk} - q_{m,\,k+1} \Big| = O(1),$$

$$\sum_n q_{nk} = \sum_n p_{nk} = 1 \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots),$$

то методы P и Q регулярны и абсолютно регулярны.

Далее, если $x \in P_3$, то ряд

$$(-x_0) + 2(x_0 + x_1) + (-x_1 - x_2) + 2(x_2 + x_3) + \ldots \qquad (3)$$

абсолютно сходится вместе с рядом

$$x_0 + (x_0 + x_1) + (x_1 + x_2) + (x_2 + x_3) + \ldots . \qquad (4)$$

Обозначая через v_n n-ый член ряда (3) и через ω_n n-ый член ряда (4), имеем

$$|x_n| \leqslant \sum_{i=0}^{n} |\omega_i|,$$

$$X_{2n} = V_{2n} + 2x_{2n}, \quad X_{2n+1} = V_{2n+1} - x_{2n+1}, \qquad (5)$$

поэтому из $x \in P_3$ следует, что $X_n = O(1)$, т. е.

$$P_3 \subset E_1.$$

Теперь покажем, что $P_3 \subset Q_3$. В силу (5) имеем

$$\Big| \sum_k q_{nk} x_k \Big| = \frac{2}{n(n+1)(n+2)} \Big| \sum_{k=0}^{n} k(n-k) x_k \Big| =$$

$$= \frac{2}{n(n+1)(n+2)} \Big| \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1-n) X_k \Big| =$$

$$= \frac{2}{n(n+1)(n+2)} \Big| \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1-n) V_k - \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} x_{2k+1}(4k+3-n) +$$

$$+ 2 \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} x_{2k}(4k+1-n) \Big| + O\left(\frac{x_n}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{2}{n(n+1)(n+2)} \left\{ \Big| \sum_{k=0}^{n} k(n-k) v_k \Big| + 3 \Big| \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} x_{2k}(4k+1-n) \Big| + \right.$$

$$\left. + \Big| \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \omega_{2k}(4k+3-n) \Big| + 2 \left| \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} x_{2k} \right| \right\} + O\left(\frac{x_n}{n^2}\right).$$

Если $x \in P_3$, то, как было показано,

$$\Sigma |v_k| < \infty, \quad \Sigma |\omega_k| < \infty, \quad x_k = O(1),$$

следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)} \Big| \sum_{k=0}^{n} k(n-k) v_k \Big| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |v_k| \sum_{n=k}^{\infty} \frac{k(n-k)}{n(n+1)(n+2)} < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)} \Big| \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (4k+3-n) \omega_{2k} \Big| \leqslant \sum_{k} |\omega_{2k}| < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)} \Big| \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} x_{2k} \Big| = O(1) \sum \frac{1}{(n+1)^2} < \infty.$$

Поэтому нам достаточно установить, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \Big| \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} x_{2k}(4k+1-n) \Big| < \infty.$$

Для этого воспользуемся тем, что при $m = \left[\frac{n-1}{2}\right]$

$$\Big| \sum_{k=0}^{m} x_{2k}(4k+1-n) \Big| = 2 \Big| \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} (m-2k)(x_{2(m-k)} - x_{2k}) \Big| + O\Big(\sum_{k=0}^{m} x_{2k} \Big),$$

$$|x_{2(s-k)} - x_{2k}| \leqslant \sum_{i=2k}^{2(s-k)} |\omega_i|.$$

Поэтому

$$\left|\sum_{k=0}^{m} x_{2k}(4k+1-n)\right| \leqslant 2\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}(m-2k)\sum_{i=2k}^{2(m-k)}|\omega_i| + O(m) =$$

$$= O(1)\left[m + \sum_{i=0}^{m}|\omega_i| \sum_{k=0}^{\left[\frac{i}{2}\right]}(m-2k) + \sum_{i=m}^{2m}|\omega_i| \sum_{k=m-\left[\frac{i}{2}\right]}^{\left[\frac{m}{2}\right]}(m-2k)\right].$$

Отсюда получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\left|\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(4k+1-n)x_{2k}\right| = O(1)\left[\Sigma\frac{1}{(n+1)^2} + \right.$$

$$\left. + \Sigma\frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{i=0}^{n} i|\omega_i| + \Sigma\frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{i=n}^{2n}(i-n)|\omega_i|\right] =$$

$$= O(\Sigma|\omega_i|) < \infty,$$

что и требовалось.

Выведенные свойства методов P и Q позволяют доказать, что условие абсолютной регулярности недостаточно для решения проблем А и Б. В случае проблемы А это следует из того факта, что методы P и Q регулярны и абсолютно регулярны, $P_3 \cap E_1 = P_3 \subset Q_3 \subset Q_2$, но ряд

$$-1+1-1+1-\ldots. \qquad (6)$$

абсолютно суммируем методом P к 1, а методом Q к $\frac{1}{2}$. В случае проблемы Б метод P абсолютно регулярен, суммирует лишь ряды из E_1, причем в их числе ряд (6); стало быть, P суммирует расходящийся ряд, а это и требовалось доказать.

3. Прежде, чем перейти к доказательству теорем 1—3, докажем две вспомогательных леммы. В доказательстве основную роль играет использование оценок, полученных в работе [2].

Лемма 1. *Пусть матрицы P и Q удовлетворяют условиям теоремы* 1. *Тогда для любого $\delta > 0$ и индекса n существуют такие последовательности $\alpha_n = \{\alpha_{n\nu}\}$, $\beta_n = \{\beta_{nk}\}$; числа γ_n, $r(\delta)$, и индекс $s(\delta)$, что*

$$|\alpha_{n\nu}| \leqslant [r(\delta)]^{-1}; \quad \sum_{k=s(\delta)}^{\infty}|\beta_{nk}| < \delta; \quad |\gamma_n| < \delta, \qquad (7)$$

$r(\delta) > 0$ *и не зависит от* n,

и для всех $x \in E_3$ *имеем*

$$\sum_{\nu} a_{n\nu} \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} p_{\nu k} x_k + \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} \beta_{nk} X_k + \gamma_n \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} x_k = \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} q_{mk} x_k, \quad (8)$$

где индекс $s(\delta)$ *не зависит от* n.

Доказательство. Обозначим через $E_{3,2}$ множество пар $z = (y, x)$ рядов $y \in E_3$, $x \in E_2$. Введем в $E_{3,2}$ обычным способом операции сложения и умножения на комплексные числа, и определим норму элемента z, положив для фиксированного $\mu > 0$

$$\|z\| = \|y\|_3 + \mu \|x\|_2.$$

Тогда $E_{3,2}$ становится B-пространством[3] $E_{3,2}^{\mu}$. Пусть $f(z)$ — функционал на $E_{3,2}^{\mu}$. Так как для любого $z = (y, x)$ имеем $z = (y, 0) + (0, x)$, то f представим в виде

$$f(z) = f_1(y) + f_2(x), \quad (9)$$

где f_1 и f_2 — функционалы соответственно на E_3 и E_2, причем, очевидно,

$$\|f_1\| \leqslant \|f\|; \quad \|f_2\| \leqslant \mu \|f\|. \quad (10)$$

Теперь заметим, что матрицы P и Q удовлетворяют условиям теоремы 1 работы [3]. Поэтому для любого $\delta > 0$ существуют такие индекс $s(\delta)$ и число $r(\delta)$, что для всех $x \in E_3$

$$\sum_{n} \Big| \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} p_{nk} x_k \Big| + \delta r(\delta) \sup_{k \geqslant s(\delta)} \Big| \sum_{i=0}^{k} x_i \Big| \geqslant r(\delta) \sum_{n} \Big| \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} q_{nk} x_k \Big|. \quad (11)$$

Из этой оценки следует, что для каждого n $f_n(z) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} q_{mk} x_k$ является функционалом, непрерывным на замыкании множества $M \subset E_{3,2}^{\delta r(\delta)}$, образованного элемента z вида $z = (y', x')$, где

$$y' = P(x'); \quad x' = \sum x'_k; \quad x'_k = \begin{cases} x_k, & k \geqslant s(\delta), \\ 0, & k < s(\delta), \end{cases} \quad \sum x_k \in E_3.$$

Поэтому $f_n(z)$ допускает представление вида (9), причем в силу (11) $\|f_n\| \leqslant [r(\delta)]^{-1}$. Отсюда и из (9) и (10), используя общий вид функционала на пространствах E_2 и E_3, получаем (7) и (8). Лемма доказана.

Пользуясь вместо теоремы 1 теоремой 2 работы [3], совершенно аналогично, можно доказать, что имеет место

---

[3] Очевидно, пространства $E_{3,2}^{\mu}$ отличаются лишь топологиями.

Лемма 2. *Пусть матрицы P и Q удовлетворяют условиям теоремы 2. Тогда для любого $\delta > 0$ и индекса n существуют такие последовательности $\alpha_n = \{\alpha_{nv}\}$, $\beta_n = \{\beta_{nk}\}$, числа γ_n, $r(\delta)$ и индекс $s(\delta)$, что они удовлетворяют (7) и для всех $x \in E_3$ имеем*

$$\sum_v \alpha_{nv} \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} p_{vk} x_k + \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} \beta_{nk} X_k + \gamma_n \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} x_k = \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} q_{mk} x_k.$$

4. Переходим к доказательству теорем 1—3.

Доказательство теоремы 1. Пусть утверждение теоремы неверно, т. е. существует ряд $u = \sum_k u_k$ такой, что $u \in P_3 \cap E_1$ и

$$\sum_n \sum_k p_{nk} u_k \neq \sum_n \sum_k q_{nk} u_k.$$

Очевидно, без ограничения общности можно считать, что

$$\sum_n \sum_k p_{nk} u_k = 0; \quad \sum_n \sum_k q_{nk} u_k = 1. \tag{12}$$

Мы сейчас покажем, что (12) противоречит условию $P_3 \cap E_1 \subset Q_3$ и этим теорема будет доказана.

Действительно, по условию для матриц P и Q справедлива лемма 1 и, следовательно, имеют место (7) и (8). Полагая в (8) последовательно [4] $x = e_{s(\delta)}, e_{s(\delta)+1}, \ldots$, получаем, в частности, что для $k \geqslant s(\delta)$

$$\sum_{i=0}^{n} (q_{ik} - q_{i,k+1}) = \sum_v \alpha_{nv}(p_{vk} - p_{v,k+1}) + \beta_{nk} \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{13}$$

Отсюда и из (2) и (7) вытекает, что

$$\sum_{k=s(\delta)}^{\infty} \left| \sum_v \alpha_{nv} (p_{vk} - p_{v,k+1}) \right| \leqslant \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} |\beta_{nk}| + \sum_{i=0}^{n} \sum_k^{\infty} |q_{ik} - q_{i,k+1}| < \infty.$$

В силу S-совершенности матрицы P это означает, что

$$\sum_k \left| \sum_v \alpha_{vn} (p_{vk} - p_{v,k+1}) \right| < \infty,$$

и, так как $\alpha_{nv} = O(1)$, то

$$\sum_v |\alpha_{nv} - \alpha_{n,v+1}| < \infty. \tag{14}$$

---

[4] Через e_i обозначается i-ый единичный ряд, т. е. ряд, i-ая частичная сумма которого равна 1, а остальные — 0.

Далее, благодаря оценкам (7) можно выделить такую последовательность индексов n_j, что для всех ν и для $k \geqslant s(\delta)$

$$\lim_{j\to\infty} a_{n_j\nu} = a_\nu{}^1, \quad \lim_{j\to\infty} \beta_{n_j k} = \beta_k{}^1. \tag{15}$$

При этом в силу (7)

$$|a_\nu{}^1| \leqslant [r(\delta)]^{-1}; \quad \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} |\beta_k{}^1| \leqslant \delta. \tag{16}$$

Устремляя в (13) n к бесконечности по индексам n_j, в силу (15), (16) и 1° имеем для $k \geqslant s(\delta)$

$$\sum_\nu a_\nu{}^1 (p_{\nu k} - p_{\nu, k+1}) = -\beta_k{}^1. \tag{17}$$

Отсюда и из (16) следует, что

$$\sum_{k=s(\delta)}^{\infty} |\sum_\nu a_\nu{}^1 (p_{\nu k} - p_{\nu, k+1})| = \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} |\beta_k{}^1| < \infty,$$

а так как матрица P S-совершенна и в силу (16) $a_\nu{}^1 = O(1)$, то

$$\sum_\nu |a_\nu{}^1 - a^1{}_{\nu+1}| < \infty. \tag{18}$$

Из (13) и (14) вытекает, что для всех $x \in P_3 \cap E_1$

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_\nu a_{n\nu} \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} p_{\nu k} x_k = \sum_\nu (a_{n\nu} - a_{n,\nu+1}) \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} \Big(\sum_{i=0}^{\nu} (p_{ik} - p_{i,k+1}) \Big) X_k + \\
&+ \lim_{\nu\to\infty} a_{n\nu} \sum_i \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} p_{ik} x_k = \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} X_k \sum_\nu (a_{n\nu} - a_{n,\nu+1}) \sum_{i=0}^{\nu} (p_{ik} - \\
&- p_{i,k+1}) + \lim_{\nu\to\infty} a_{n\nu} \sum_i \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} p_{ik} x_k = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} q_{ik} x_k - \\
&- \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} \beta_{nk} X_k + \lim_{\nu\to\infty} a_{n\nu} \sum_i \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} p_{ik} x_k.
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Аналогично из (17) и (18) получаем

$$\sum_\nu a_\nu{}^1 \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} p_{\nu k} x_k = -\sum_{k=s(\delta)}^{\infty} \beta_k{}^1 X_k + \sum_i \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} p_{ik} x_k \cdot \lim_{\nu\to\infty} a_\nu{}^1. \tag{20}$$

Наконец, из (19) и (20) окончательно имеем

$$\sum_\nu (a_{n\nu} - a_\nu{}^1) \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} p_{\nu k} x_k + \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} (\beta_{nk} - \beta_k{}^1) X_k =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} q_{nk} x_k + (\lim_{\nu\to\infty} a_{n\nu} - \lim_{\nu\to\infty} a_\nu{}^1) \sum_i \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} p_{ik} x_k. \tag{21}$$

Теперь, обозначим через σ_i ряд, i-ый член которого равен 1,

остальные — 0. Полагая в (21) $x = \sigma_{s(\delta)}$ и переходя к пределу при $n \to \infty$ по индексам n_j, в силу (1) и (15) получаем

$$\lim_{j\to\infty} \lim_{\nu\to\infty} a_{n_j\nu} - \lim_{\nu\to\infty} a_\nu{}^1 = -1.$$

Поэтому, полагая в (21) $x = u$, имеем для всех n

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} q_{ik} u_k - \sum_i \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} p_{ik} u_k =$$

$$= \sum_\nu (a_{n\nu} - a_\nu{}^1) \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} p_{\nu k} u_k + \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} (\beta_{nk} - \beta_k{}^1) U_k.$$

Возьмем $\delta = \frac{1}{4\|U\|_1}$. Тогда в силу (7) и (16)

$$\left| \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} (\beta_{nk} - \beta_k{}^1) U_k \right| \leqslant \frac{1}{2}$$

и, переходя в (21) к пределу при $n \to \infty$ по индексам n_j, в силу (1), (15) и $|P|$-суммируемости ряда u получаем

$$\left| \sum_i \sum_k q_{ik} u_k - \sum_i \sum_k p_{ik} u_k \right| \leqslant \frac{1}{2},$$

в противоречие с (12). Тем самым теорема доказана.

Теорема 2 доказывается совершенно аналогично с использованием вместо леммы 1 леммы 2.

Доказательство теоремы 3. Пусть утверждение теоремы неверно, т. е. существует ряд $u = \sum u_k$ такой, что

$$u \in P_3, \quad u \overline{\in} E_2. \tag{22}$$

Очевидно, без ограничения общности можно считать, что ряд u P-суммируем к нулю. Мы покажем, что (22) противоречит условию $P_3 \subset E_1$ и этим теорема будет доказана.

Действительно, из условия теоремы вытекает, что для матрицы $T = (t_{nk})_c$

$$t_{nk} = p_{nk} - p_{n,\,k+1}$$

справедлива теорема 5 работы [2] и, следовательно, существуют такие число $\delta > 0$ и индекс $s(\delta)$, что для всех $x \in P_3$

$$\sum_n \left| \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} (p_{nk} - p_{n,\,k+1}) X_k \right| \geqslant \delta \sup_{k \geqslant s(\delta)} |X_k|. \tag{23}$$

Из (23) следует, что P_3 является B-пространством с нормой

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{s(\delta)-1} |x_k| + \sum_n \left| \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} p_{nk} x_k \right|$$

и множество $P_3 \cap E_2$ замкнуто в этом пространстве. Применяя теорему Банаха-Хана, отсюда и из (22) получаем, что существует непрерывный на P_3 функционал f такой, что

$$f(u) = 1; \quad f(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in P_3 \cap E_2. \tag{25}$$

Далее, нетрудно видеть, что всякий функционал $g(x)$, непрерывный на P_3 в норме (24), задается с помощью чисел $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{s(\delta)-1}$ и последовательности $\{g_n\}$, $\sup\limits_n |g_n| < \infty$, формулой

$$g(x) = \sum_{k=0}^{s(\delta)-1} \alpha_k x_k + \sum_n g_n \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} p_{nk} x_k.$$

Поэтому (25) означает, что для некоторого набора чисел $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{s(\delta)-1}$ и последовательности $\{f_n\}$, $\sup\limits_n |f_n| < \infty$ имеем

$$\sum_{k=0}^{s(\delta)-1} \gamma_k x_k + \sum_n f_n \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} p_{nk} x_k = 0 \text{ при } x \in P_3 \cap E_2, \tag{26}$$

$$\sum_{k=0}^{s(\delta)-1} \gamma_k u_k + \sum_n f_n \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} p_{nk} u_k = 1. \tag{27}$$

Заметим теперь, что в силу S-совершенности метода P для всех n $\sigma_n \in P_3$. Подставляя σ_n в (26), получаем

$$\gamma_k = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, s(\delta) - 1), \tag{28}$$

$$\sum_n f_n p_{nk} = 0 \quad (k = s(\delta), s(\delta) + 1, \ldots). \tag{29}$$

Из (29) и S-совершенности метода P вытекает, что

$$\sum_k \left|\sum_n f_n p_{nk}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{s(\delta)-1} \sum_n |f_n|\,|p_{nk}| < \infty,$$

и в силу условия (d) получаем

$$\sum |f_n - f_{n+1}| < \infty.$$

Отсюда и из условия (a) вытекает, что

$$\sum_{k=s(\delta)}^{\infty} \sum_n \left|\sum_{i=0}^{n} (p_{ik} - p_{i,\,k+1})\right| |f_n - f_{n+1}| < \infty.$$

Поэтому из (29) следует, что

$$\sum_n f_n \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} (p_{nk} - p_{n,\,k+1}) U_k = \sum_n (f_n - f_{n+1}) \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} (p_{ik} - p_{i,\,k+1})\right) U_k +$$

$$+ \lim_{n\to\infty} f_n \sum_m \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} p_{mk} u_k = \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} U_k \sum_n (f_n - f_{n+1}) \sum_{i=0}^{n} (p_{ik} - p_{i,\,k+1}) = 0.$$

Это равенство вместе с (28) дает

$$\sum_{k=0}^{s(\delta)-1} \gamma_k u_k + \sum_n f_n \sum_{k=s(\delta)}^{\infty} p_{nk} u_k = 0,$$

в противоречие с (27). Тем самым теорема доказана.

Литература

1. Mazur, S., Orlicz, W., Sur les methodes lineaires de sommation. C. r. Acad. Sci., 1933, **196**, 32—34.
2. Гейсберг С., О некоторых свойствах матричных преобразований. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 78—89.
3. Гейсберг С., Включение ограниченных полей суммирования. Настоящий сборник, стр. 283—296.

Поступило
23 XII 1961

MAZUR-ORLICZI TEOREEMIDE ANALOOGID ABSOLUUTSE SUMMEERUVUSE KORRAL

S. Geisberg

Leningradi majandusinseneride instituut

Resümee

Töös esitatakse näited: a) absoluutselt regulaarsest maatriksist, mis ei summeeri absoluutselt ühtegi tõkestamata osasummadega rida ja summeerib absoluutselt tõkestatud osasummadega hajuva rea; b) kahest absoluutselt regulaarsest maatriksist, mille korral ühe absoluutne summeerimisväli sisaldub teise absoluutses summeerimisväljas ja mis summeerivad absoluutselt tõkestatud osasummadega rea, kuid erinevaiks väärtusteks.

Seetõttu absoluutselt regulaarsete maatriksite korral Mazuri ja Orliczi tulemuste analoogid (vt. [1], teoreemid 1,6) üldiselt ei kehti.

Töös on leitud absoluutselt regulaarsete meetodite alamklass, mille korral kehtivad Mazur-Orliczi teoreemide analoogid.

ANALOGIES OF THE THEOREMS OF MAZUR AND ORLICZ FOR ABSOLUTE SUMMABILITY

S. Geisberg

Summary

In the paper examples are given: a) of an absolutely regular matrix which absolutely sums up no series with unbounded partial sums and absolutely sums up a divergent series with bounded partial sums; b) of two absolutely regular matrices for which one field of absolute summability is joined in another field of absolute summability and which absolutely sum up a series with bounded partial sums but to the different values.

Therefore, for absolutely regular matrices analogies of the results of Mazur and Orlicz (see [1], theorems 1 and 6), generally, do not take place.

In the paper a subclass of absolutely regular matrices has been found for which analogies of the theorems of Mazur and Orlicz take place.

ОБ ОБЛАСТИ СУММ В ЛИНЕЙНЫХ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Э. Тийт
Кафедра математического анализа

Об области сумм условно сходящегося ряда в пространстве R_n имеется несколько работ ([12], [8], [6] и др.). В них выяснено, что областью сумм является подпространство R_m $(1 \leqslant m \leqslant n)$.

Хадвигер [7] впервые дал определение области сумм для рядов [1]

$$\sum_i r_i, \quad r_i \in X, \tag{1}$$

где X гильбертово пространство. Ряд (1) удовлетворяет условию

$$\|r_i\| \to 0. \tag{2}$$

Он показал, что в бесконечномерных пространствах область сумм не всегда является подпространством. Кадец [1] ввел ограничительное условие для пространства L^p, при котором область сумм уже будет подпространством.

Целью настоящей заметки является изучение структуры области сумм в линейных нормированных пространствах, причем мы отказались от условия (2), как несущественного.

Оказалось, что общая часть области сумм и произвольной прямой в этих пространствах может иметь, кроме формы подпространства, и форму так называемой «сетки» — т. е. множества $\{a + m\lambda\}$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ или множеств, выводимых из таких «сеток» (теорема 5). Такую же форму имеют и области сумм некоторых суммируемых числовых рядов в пространстве R_1 (см. работу [4]).

Рассмотрим ряд (1), где в дальнейшем X — линейное нормированное пространство.

---

[1] Здесь и в дальнейшем $\sum_i r_i = \sum_{i=1}^{\infty} r_i$, $r_i \to 0$ значит $\lim_{i \to \infty} r_i = 0$ и $\{m_k\} = \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Определение 1. *Назовем ряд* (1) *условно расходящимся, если он имеет перестановки* $\sum_i r'_i$ *и* $\sum_i r''_i$ *(различные или нет), имеющие предельными точками*[2] *соответственно* a *и* b, $a \neq b$, т. е. существуют подпоследовательности натурального ряда $\{n'_k\}$, $\{n''_k\}$ и точки a, b такие, что справедливы равенства

$$\lim_{i=1}^{n'_k} \sum r'_i = a, \quad \lim_{i=1}^{n''_k} \sum r''_i = b, \quad a \neq b. \tag{3}$$

Определение 2. *Назовем ряд* (1) *условно сходящимся, если он имеет сильно сходящиеся перестановки* $\sum_i r'_i$ *и* $\sum_i r''_i$ *такие, что*

$$\sum_i r'_i \neq \sum_i r''_i. \tag{4}$$

Условно расходящийся ряд определен у нас иначе, чем у Кронрода [2]: условно расходящийся ряд, определенный им в пространстве R_2, удовлетворяет условию (2), и поэтому является также условно сходящимся. В бесконечномерных пространствах не все условно расходящиеся ряды, удовлетворяющие условию (2), являются условно сходящимися (см. работы [9, 7]), и поэтому условие (2) не имеет для нас значения.

Изучение выше определенных условно расходящихся рядов позволяет из теорем настоящей статьи вывести некоторые результаты Беренда, Ярника и Ружичка [11, 5, 3] о структуре области сумм рядов, не удовлетворяющих условию (2) в конечномерном пространстве.

Определение 3. *Назовем множество конечных предельных точек всех перестановок ряда* (1) *областью сумм этого ряда в широком смысле и обозначим символом* $\overline{S}(\sum_i r_i)$.

Определение 4. *Назовем множество конечных сумм всех сходящихся перестановок ряда* (1) *областью сумм этого ряда в узком смысле и обозначим символом* $S(\sum_i r_i)$.

Из определений 1—4 непосредственно вытекают 1°—4°:

1° Необходимым и достаточным условием для того, чтобы область сумм $\overline{S}(\sum_i r_i)$ не была пустой, является существование перестановки ряда (1), имеющей конечную предельную точку.

2° Необходимым и достаточным условием для того, чтобы область сумм $S(\sum_i r_i)$ не была пустой, является существование сходящейся перестановки ряда (1).

[2] Предельными точками разумеваются предельные точки множества частичных сумм данного ряда (данной перестановки).

3° Необходимым и достаточным условием для того, чтобы область сумм $\overline{S}(\sum_i r_i)$ заключала в себе более одной точки, является условная расходимость ряда (1).

4° Необходимым и достаточным условием для того, чтобы область сумм $S(\sum_i r_i)$ заключала в себе более одной точки, является условная сходимость ряда (1).

Как следует из определений 3 и 4, для каждого ряда (1) имеет место включение

$$S(\sum_i r_i) \subset \overline{S}(\sum_i r_i),$$

однако, как показал Хадвигер [10], равенство

$$S(\sum_i r_i) = \overline{S}(\sum_i r_i),$$

действительное в конечномерных пространствах, не всегда имеет место даже для рядов (1), удовлетворяющих условию (2).

Приступим теперь к изучению структуры областей сумм.

Лемма 1. *Если ряд* (1) *имеет две различные предельные точки* a *и* b, *то он имеет соответственно произвольному целому числу* N *перестановку* $\sum_i \tilde{r}_i$ *такую, что ее предельной точкой является* $a + N(b - a)$.

Доказательство. Выберем монотонно к нулю убывающую последовательность $\{\varepsilon_k\}$. Существуют последовательности индексов $\{m_k\}$ и $\{m'_k\}$ такие, что $m_k < m'_k < m_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и справедливы неравенства

$$\|\sum_{i=1}^{m_k} r_i - a\| < \varepsilon_k, \quad \|\sum_{i=1}^{m'_k} r_i - b\| < \varepsilon_k.$$

Тогда

$$\|\sum_{i=m_k+1}^{m'_k} r_i - (b - a)\| < 2\varepsilon_k.$$

Пусть $N > 0$. Сконструируем перестановку $\sum_i \tilde{r}_i$ ряда (1) такую, что найдется последовательность $\{j_k\}$, при которой

$$\|\sum_{i=1}^{j_k} \tilde{r}_i - [a + N(b - a)]\| < \eta_k \quad (\eta_k \to 0). \tag{5}$$

Для этого обозначим $m'_k - m_k = p_k$; $m_1 = M_0^0$, $m_{k\,N+1} = M_0^k$;

$M_0^k + \sum_{i=1}^{\nu} p_{kN+i} = M_\nu^k$ $(\nu = 1, 2, \ldots N, k = 1, 2, \ldots)$. Определим $\{\tilde{r}_i\}_{i=1}^{M_0^0}$ так:

$$\tilde{r}_i = r_i \quad (i = 1, 2, \ldots, M_0^0).$$

Пусть теперь определено $\{\tilde{r}_i\}_{i=1}^{M_0^k}$. Далее положим

$$\tilde{r}_{M_\nu^k + i} = r_{m_{kN+\nu+1}+i} \quad (i = 1, 2, \ldots, p_{kN+\nu+1};\ \nu = 0, 1, \ldots, N-1), \tag{6}$$

а члены $\{\tilde{r}_i\}_{i=M_N^k+1}^{M_0^{k+1}}$ определим как оставшиеся члены ряда (1) до индекса M_0^{k+1} в первоначальном порядке. Тогда получим

$$\sum_{i=1}^{M_0^{k+1}} \tilde{r}_i = \sum_{i=1}^{M_0^{k+1}} r_i,$$

а это значит, что

$$\left\| \sum_{i=1}^{M_0^{k+1}} \tilde{r}_i - a \right\| < \varepsilon_{kN}, \quad \left\| \sum_{i=1}^{M_N^k} \tilde{r}_i - [a + N(b-a)] \right\| < 2(N+1)\varepsilon_{kN}$$
$$(k = 1, 2, \ldots).$$

Положим $2(N+1)\varepsilon_{kN} = \eta_k$, $M_N^k = j_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и тем неравенство (5) доказано.

Если $N < 0$, то можно сделать почти такую же конструкцию, заменив в определении (6) m_k на m'_k, а m'_k на m_{k+1}. Этим лемма 1 полностью доказана.

Теорема 1. *Если* $a \in \overline{S}(\sum_i r_i)$ *и* $b \in \overline{S}(\sum_i r_i)$, *то* $a + n(b-a) \in \overline{S}(\sum_i r_i)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Доказательство. Нас интересует случай, когда a и b являются предельными точками различных перестановок.

Пусть для простоты a — предельная точка исходного ряда (1), а $\{p_i\}$ — такая перестановка натурального ряда, что $\sum_i r_{p_i}$ имеет предельной точкой точку b. Определим следующие соотношения. Скажем, что $\{r_i\}_{i=1}^k \supset \{r_{p_i}\}_{i=1}^l$, если $\{i\}_{i=1}^k \supset \{p_i\}_{i=1}^l$. Имеем $\{r_i\}_{i=1}^k - \{r_{p_i}\}_{i=1}^l = \{r_{q_i}\}_{i=1}^{k-l}$, где $\{q_i\}_{i=1}^{k-l} = \{i\}_{i=1}^k - \{p_i\}_{i=1}^l$.

Пусть ради простоты $r_{p_i} = \bar{r}_i$. Выберем монотонно убывающую к нулю последовательность $\{\varepsilon_k\}$. Тогда существуют последовательности $\{n_k\}$ и $\{n'_k\}$ такие, что

$$\left\| \sum_{i=1}^{n_k} r_i - a \right\| < \varepsilon_k, \quad \left\| \sum_{i=1}^{n'_k} \bar{r}_i - b \right\| < \varepsilon_k. \tag{7}$$

Определим последовательности $\{m_k\}$ и $\{m'_k\}$ следующим образом:

$$m_1 = n_1,$$

m'_k — минимальный индекс $n'_i \geqslant n'_k$, удовлетворяющий соотношению

$$\{\bar{r}_i\}_{i=1}^{m'_k} \supset \{r_i\}_{i=1}^{m_k};$$

m_{k+1} — минимальный индекс $n_i \geqslant n_{k+1}$, удовлетворяющий соотношению

$$\{r_i\}_{i=1}^{m_k+1} \supset \{\bar{r}_i\}_{i=1}^{m'_k} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Итак, мы получили соотношения

$$\{r_i\}_{i=1}^{m_1} \subset \{\bar{r}_i\}_{i=1}^{m'_1} \subset \{r_i\}_{i=1}^{m_2} \subset \{\bar{r}_i\}_{i=1}^{m'_2} \subset \ldots,$$

на основе которых определим следующие множества:

$$\{r_i^{(k)}\}_{i=1}^{p_k} = \{r_i\}_{i=1}^{m_{k+1}} - \{\bar{r}_i\}_{i=1}^{m'_k} \quad (p_k = m_{k+1} - m'_k, \ k = 1, 2, \ldots), \tag{8}$$

$$\{\bar{r}_i^{(k)}\}_{i=1}^{p'_k} = \{\bar{r}_i\}_{i=1}^{m'_k} - \{r_i\}_{i=1}^{m_k} \quad (p'_k = m'_k - m_k, \ k = 1, 2, \ldots).$$

Теперь уже мы можем сконструировать ряд $\sum_i r'_i$ так, что

$$\left\| \sum_{i=1}^{m_k} r'_i - a \right\| < \varepsilon_k, \quad \left\| \sum_{i=1}^{m'_k} r'_i - b \right\| < \varepsilon_k \quad (\varepsilon_k \to 0). \tag{9}$$

Для этого возьмем

$$r'_i = r_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m_1),$$
$$r'_{i+m_k} = \bar{r}_i^{(k)} \quad (i = 1, 2, \ldots, p'_k),$$
$$r'_{i+m'_k} = r_i^{(k)} \quad (i = 1, 2, \ldots, p_k; \ k = 1, 2, \ldots).$$

Действительно, по определению (9)

$$\sum_{i=1}^{m_k} r'_i = \sum_{i=1}^{m_1} r'_i + \sum_{i=m_1+1}^{m'_1} r'_i + \sum_{i=m'_1+1}^{m_2} r'_i + \ldots + \sum_{i=1}^{m_k} r'_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m_1} r_i + \sum_{i=1}^{p'_1} \bar{r}^{(1)} + \sum_{i=1}^{p_1} r^{(1)} + \sum_{i=1}^{p'_2} \bar{r}^{(2)} + \ldots + \sum_{i=1}^{p_{k-1}} r_i^{(k-1)} = \sum_{i=1}^{m_k} r_i,$$

а также

$$\sum_{i=1}^{m'_k} r'_i = \sum_{i=1}^{m'_k} \bar{r}_i,$$

откуда непосредственно получаем соотношения (9).

Таким образом мы получили ряд $\sum_i r'_i$, имеющий две различные предельные точки, т. е. удовлетворяющий предположениям леммы 1. По этой лемме каждому целому числу n соответствует такая перестановка $\sum_i r''_i$ ряда $\sum_i r'_i$ (а тем самым и ряда (1)) и последовательность $\{j_k\}$, что

$$\| \sum_{i=1}^{j_k} r''_i - [a + n(b-a)] \| < \eta_k \quad (\eta_k \to 0),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Если* $a \in S(\sum_i r_i)$, $b \in S(\sum_i r_i)$, *то и* $a + n(b-a) \in S(\sum_i r_i)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Доказательство. Пусть $\sum_i r_i = a$, а $\sum_i r_{p_i} = \sum_i \bar{r}_i = b$ (мы пользуемся здесь символикой теоремы 1). По теореме 1 по заданному n существует перестановка $\sum_i r'_i$ ряда (1), такая, что

$$\lim_k \sum_{i=1}^{j_k} r'_i = a + n(b-a).$$

Остается еще показать, что элементы множества $\{r'_i\}_{i=j_k+1}^{j_{k+1}}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ можно так упорядочить, что полученные упорядоченные множества $\{\tilde{r}_i\}_{i=j_k+1}^{j_{k+1}}$ будут удовлетворять условию

$$\| \sum_{i=j_k+1}^{\nu} \tilde{r}_i \| \leqslant \delta_k \quad (j_k + 1 < \nu < j_{k+1},\ \delta_k \to 0). \tag{10}$$

Для доказательства этого воспользуемся сходимостью рядов (1) и $\sum_i \bar{r}_i$. (Условие (2), достаточное для этого доказательства в конечномерных пространствах, недостаточно в бесконечномерных пространствах; см. работу [10]).

Ввиду сходимости рядов $\sum_i r_i$, $\sum_i \bar{r}_i$ имеют место, кроме условий (7), еще следующие:

$$\| \sum_{i=1}^{\nu} r_i - a \| < \varepsilon_k, \ \| \sum_{i=1}^{\nu'} \bar{r}_i - b \| < \varepsilon_k, \text{ если } \nu \geqslant n_k, \ \nu' \geqslant n'_k, \tag{11}$$

а ввиду условий (11) и (8) можно найти соответственно каждому индексу ν $(\nu = 1, 2, \ldots, p_k)$ индекс $t(\nu)$ $(t(\nu) = 1, 2, \ldots, p'_{k+1})$ так, чтобы множества $\{r_i^{(k)}\}_{i=1}^{\nu}$ и $\{\bar{r}_i^{(k+1)}\}_{i=1}^{t(\nu)}$ вместе взятые

образовали «часть» сходящегося ряда (1) в его первоначальном порядке, т. е.

$$\| \sum_{i=1}^{\nu} r_i^{(k)} + \sum_{i=1}^{t(\nu)} r_i^{(k+1)} \| = \| \sum_{i=m_k}^{m_k+\nu+t(\nu)} r_i \| < 2\varepsilon_k,$$

и соответственно каждому индексу $\nu'(\nu' = 1, \ldots, p'_k)$ индекс $t(\nu')$ $(t(\nu') = 1, 2, \ldots, p_k)$ так, чтобы

$$\| \sum_{i=1}^{\nu'} r_i^{(k)} + \sum_{i=1}^{t(\nu')} r_i^{(k)} \| = \| \sum_{i=m'_k}^{m'_k+\nu'+t(\nu')} r_i \| < 2\varepsilon_k.$$

Тогда соответственно каждому множеству $\{r_i^{(k)}\}_{i=1}^{\nu}$ существует множество $\{r_i^{(k+n+1)}\}_{i=1}^{\bar{t}(\nu)}$ так, чтобы

$$\| \sum_{i=1}^{\nu} r_i^{(k)} + \sum_{i=1}^{\bar{t}(\nu)} r_i^{(k+n+1)} \| < 4n\varepsilon_k.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \| \sum_{i=1}^{\nu} r_i^{(k)} + \sum_{i=1}^{\bar{t}(\nu)} r_i^{(k+n+1)} \| &< \| \sum_{i=1}^{\nu} r_i^{(k)} + \sum_{i=1}^{t(\nu)} r_i^{(k+1)} \| + \\ &+ \| \sum_{i=1}^{t(\nu)} r_i^{(k+1)} + \sum_{i=1}^{t^2(\nu)} r_i^{(k+1)} \| + \ldots \\ \ldots &+ \| \sum_{i=1}^{t^{2n-1}(\nu)} r_i^{(k+n)} + \sum_{i=1}^{t^{2n}(\nu)} r_i^{(k+n+1)} \| \leqslant 4n\varepsilon_k, \end{aligned}$$

где $t[t^p(\nu)] = t^{p+1}(\nu)$ и $t^{2n}(\nu) = \bar{t}(\nu)$.

Для каждой ν определим $\bar{t}(\nu)$ так, что

$$\| \sum_{i=1}^{\nu} r_i^{(k)} + \sum_{i=1}^{\bar{t}(\nu)} r_i^{(k+n)} \| = \min_{\mu \geqslant t(\nu-1)} \| \sum_{i=1}^{\nu} r_i^{(k)} + \sum_{i=1}^{\mu} r_i^{(k+n)} \| \leqslant 4n\varepsilon_k.$$

Обозначим $t(\nu) - \bar{t}(\nu-1) = \Delta_\nu \geqslant 0$ и определим перестановку $\sum_i \tilde{r}_i$ следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{r}_{m_k+\nu+\bar{t}(\nu)+1} = r_{\nu+1}^{(k)}, \\ &\tilde{r}_{m_k+\nu+\bar{t}(\nu)+1+i} = r_{t(\nu)+1}^{(n+k+1)} \\ &\quad (i = 0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1}), \end{aligned}\right\} (\nu = 0, 1, \ldots, p_k - 1),$$

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{r}_{m_k+p_k+\bar{t}(p_k-1)+i} = r_{t(p_k-1)+i}^{(n+k+1)} \\ &\quad (i = \bar{p}_{k+n+1} - \bar{t}(p_k - 1)). \end{aligned}\right\} (k = 1, 2, \ldots)$$

Полученная перестановка $\sum_i \tilde{r}_i$ удовлетворяет условию (11), и тем наша теорема доказана.

Теорема 3. *Если* $a \in S(\sum_i r_i)$, $b \in S(\sum_i r_i)$ *и* $c \in S(\sum_i r_i)$, *то* $a + u(b-a) + v(c-a) \in S(\sum_i r_i)$ $(u, v = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Доказательство. Пусть $\sum_i r_i = a$, $\sum_i r'_i = b$, $\sum_i \bar{r}_i = c$, и задана последовательность $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k < \varepsilon_{k-1}$, $\varepsilon_k \to 0$. Тогда выберем последовательности $\{m'_k\}$, $\{m''_k\}$, $\{\bar{m}_k\}$, $\{\bar{\bar{m}}_k\}$ такие, что

$$\left\| \sum_{i=1}^{m'_k} r_i - a \right\| < \varepsilon_k; \quad \left\| \sum_{i=1}^{m''_k} r'_i - b \right\| < \varepsilon_k; \quad \left\| \sum_{i=1}^{\bar{m}_k} r_i - a \right\| < \varepsilon_k;$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{\bar{\bar{m}}_k} \bar{r}_i - c \right\| < \varepsilon_k,$$

и имеют место соотношения:

$$\{r_i\}_{i=1}^{m'_k} \subset \{r'_i\}_{i=1}^{m''_k} \subset \{r_i\}_{i=1}^{\bar{m}_k} \subset \{\bar{r}_i\}_{i=1}^{\bar{\bar{m}}_k} \subset \{r_i\}_{i=1}^{m'_{k+1}} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Далее, аналогично доказательству теоремы 2, определим множества

$$\{r_i^{(k)}\}_{i=1}^{p'_k}, \quad \{\check{r}_i^{(k)}\}_{i=1}^{p''_k}, \quad \{\bar{r}_i^{(k)}\}_{i=1}^{\bar{p}_k}, \quad \{\bar{\bar{r}}_i^{(k)}\}_{i=1}^{\bar{\bar{p}}_k},$$

где

$$p'_k = m''_k - m'_k, \; p''_k = \bar{m}_k - m''_k, \; \bar{p}_k = \bar{\bar{m}}_k - \bar{m}_k,$$
$$\bar{\bar{p}}_k = m'_{k+1} - \bar{\bar{m}}_k,$$

и тогда можно продолжать конструкцию аналогично теореме 2.

Следствие 1. *Если* $a \in S(\sum_i r_i)$, $b \in S(\sum_i r_i)$, $c \in S(\sum_i r_i)$ *и* $b - a = \frac{p}{q}(c-a)$ $(\frac{p}{q}$ — *несократимая дробь*), *то* $a + m\lambda \in S(\sum_i r_i)$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, *где* $\lambda = \frac{b-a}{p}$.

Для доказательства этого надо только применить теорему о равенстве

$$m = up + vq, \tag{12}$$

по которой данному целому числу m и целым p и q всегда можно найти целые числа u и v такие, что равенство (12) имеет место.

Отсюда непосредственно вытекают следующие следствия.

Следствие 2. *Если* $a_j \in S(\sum_i r_i)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *и найдется* λ *так, чтобы* $a_1 - a_j = \lambda p_j$ (p_j — *взаимно простые целые числа* $j = 2, 3, \ldots, n$), *то* $a_1 + m\lambda \subset S(\sum_i r_i)$, $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Следствие 3. *Если* $a_j \in S(\sum_i r_i)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *и найдутся элементы* λ_k *и индексы* l_k $(k = 1, 2, \ldots, K;\ K < n;\ l_1 = 1,\ l_{K+1} = n)$ *так, чтобы* $a_1 - a_j = p_k^j \lambda_k$ $(j = l_k + 1, l_k + 2, \ldots, l_{k+1})$, *где* p_k^j *взаимно простые целые числа, а* $\lambda_k = \alpha_{kj} \lambda_j$, *если* $j \neq k$, *где* α_{kj} *иррациональные числа, то*

$$a_1 = \sum_{k=1}^{K} m_k \lambda_k \in S(\sum_i r_i) \quad (m_k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Из доказательств сразу следует, что результаты теоремы 3 и следствий 1—3 верны и для области сумм $\overline{S}(\sum_i r_i)$. Об области сумм $\overline{S}(\sum_i r_i)$ можно сказать еще больше:

Теорема 4. *Область сумм* $\overline{S}(\sum_i r_i)$ *замкнута в пространстве* X.

Доказательство. Пусть дана последовательность $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n \in \overline{S}(\sum_i r_i)$, $\alpha_n \to \alpha$, $\alpha \in X$.

По теореме 1 можно образовать такую перестановку $\sum_i \tilde{r}_i$ и последовательность $\{j_k\}$, что $\| \sum_{i=1}^{j_k} \tilde{r}_i - \alpha_k \| < \varepsilon_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Тогда и $\| \sum_{i=1}^{j_k} \tilde{r}_i - \alpha \| < \eta_k$, где $\eta_k \to 0$, а то значит, что α является предельной точкой для $\sum_i \tilde{r}_i$, и тогда $\alpha \in \overline{S}(\sum_i r_i)$. Теорема доказана.

Теперь мы можем сделать следующие заключения о структуре общей части областей сумм данного ряда (1) и произвольной прямой $\Lambda \in X$:

Теорема 5.

I. $S(\sum_i r_i) \cap \Lambda$ *может иметь следующие формы:*

1. *Пустое множество.*
2. *Одна точка.*
3. *Сетка* $\{a + m\lambda\}$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.
4. *Всюду плотное на* Λ *множество* $\{a + \sum_{i=1}^{n} u_i \lambda_i\}$ $(u_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ n = N$ *или* $n = 1, 2, \ldots;\ \lambda_i = \alpha_{ij} \lambda_j$, α_{ij} *иррациональное число всегда, когда* $i \neq j)$.
5. *Прямая* Λ.

II. $\overline{S}(\sum_i r_i) \Pi \Lambda$ *может иметь только следующие формы:*

1. *Пустое множество.*
2. *Одна точка.*
3. *Сетка* $\{a + m\lambda\}$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.
4. *Прямая* Λ.

Доказательство. I. Пусть $S(\sum_i r_i) \cap \Lambda = A$.

Для множества A имеются следующие возможности:

1. A пустое множество.

2. A содержит конечное множество точек. Тогда A должно состоять только из одной точки, так как в противном случае по теореме 2 A содержало бы бесконечное множество точек.

3. A содержит счетное множество точек. Выберем произвольную точку a_0 и образуем множество $A^0 = \{a - a_0\}_{a \in A}$. Положим каждой точке $a' \in A^0$ в соответствие класс $E(a')$: $a'' \in A^0$ принадлежит классу $E(a')$ тогда и только тогда, когда найдется целое число m такое, что справедливо равенство $a'' = \frac{1}{m} a'$. Каждый класс $E(a')$ не пустой и может состоять из конечного или счетного множества точек.

Разобьем множество A^0 на две части: множеству $\bar{A}$ принадлежат все такие элементы $\bar{a} \in A^0$, для которых $E(\bar{a})$ содержит конечное число элементов; множеству $\underline{A}$ принадлежат все такие элементы $\underline{a} \in A^0$, для которых $E(\underline{a})$ содержит бесконечное множество элементов.

Пусть множество $\bar{A}$ не пусто. Тогда она имеет непустое подмножество $\bar{\bar{A}}$, содержащее такие элементы $\bar{\bar{a}}$, что $E(\bar{\bar{a}})$ состоит из единственной точки $\bar{\bar{a}}$. Упорядочим элементы множества $\bar{\bar{A}}$: $\bar{\bar{a}}_1, \bar{\bar{a}}_2, \ldots$ и образуем сумму

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{\bar{a}}_i \tag{14}$$

($m_i = 0, 1, 2, \ldots$; $n = N$, если $\bar{\bar{A}}$ конечное множество или $n = 1, 2, \ldots$, если $\bar{\bar{A}}$ бесконечное).

Каждую точку множества $\bar{A}$ можно представить формулой (14), выбрав подходящим образом значения m_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ и n. Действительно, пусть $\bar{a}^* \subset \bar{A}$. Рассмотрим класс $E(\bar{a}^*)$. Он имеет минимальный по норме элемент $\bar{\bar{a}}^*$. Класс $E(\bar{\bar{a}}^*)$ состоит из одного элемента, т. е. найдется индекс j^* такой, что $\bar{\bar{a}}^* = \bar{\bar{a}}_{j^*}$, и тогда найдется целое число m^* такое, что $\bar{\bar{a}}^* = m^* \bar{\bar{a}}_{j^*}$, что и требовалось доказать.

Пусть множество A не пусто. Образуем соответственно каждому элементу $\underline{a} \in \underline{A}$ множество $H(\underline{a})$: $\underline{\underline{a}} \in H(\underline{a})$ тогда и только тогда, когда найдется рациональное число p такое, что $\underline{\underline{a}} = p\underline{a}$.

Выберем какой-нибудь $a' \in \underline{A}$ и рассмотрим класс $E(a')$. Упорядочим все элементы этого класса $a'_1, a'_2, \ldots$ и образуем суммы

$$\sum_{i=1}^{n'} m'_i a'_i \quad (m'_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; n' = 1, 2, \ldots). \tag{15}$$

Всякий элемент множества $H(a')$ выражается суммой (15) при подходящем выборе m'_i и n'. Обозначим $H(a') = H_1$.

В случае, когда множество $A - H_1$ непусто, выберем $a'' \in H_1$, обозначим множество $H(a'') = H_2$ и образуем суммы $\sum_{i=1}^{n''} m_i a''_i$. Продолжим этот процесс. Так как множество H_k не более чем счетное множество, то суммой

$$\sum_{k=1}^{\varkappa} \sum_{i=1}^{n^{(k)}} m_i^{(k)} a_i^{(k)}$$

$(m_i^{(k)} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; n^{(k)} = 1, 2, \ldots, \varkappa = 1, 2, \ldots)$

выражаются все элементы множества $\underline{\underline{A}}$. Обозначив все $\underline{\underline{a}}_i$, $a_i^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ через λ_i, получим сумму вида (13).

В частном случае, когда $\underline{\underline{A}}$ состоит из одной точки, и $\underline{A}$ пусто, получим, что множество A имеет форму 3.

4. A — содержит отрезок $[\lambda_0, \lambda_1]$, т. е. каждая точка λ, выражаемая формулой $\lambda = \lambda_0 + t(\lambda_1 - \lambda_0)$, содержится в A. Докажем, что в таком случае A совпадает со всей прямой Λ. Действительно, для каждой точки $\lambda^* \in \Lambda$ найдутся целые числа m^* и $t^* \subset [0, 1)$ такие, что $\lambda^* = \lambda_0 + (m^* + t^*)(\lambda_1 - \lambda_0)$. Обозначим $\lambda_0 + t^*(\lambda_1 - \lambda_0) = \bar{\lambda}$, и выразим λ^* через $\bar{\lambda}$: $\lambda^* = \bar{\lambda} + m^*(\lambda_1 - \bar{\lambda}) - m^*(\lambda_0 - \bar{\lambda})$. Здесь $\bar{\lambda}, \lambda_0, \lambda_1 \in A$, и тогда по теореме 3 $\lambda^* \in A$.

Этот случай реализуется в частности тогда, когда $S(\sum_i r_i)$ является замкнутым: если X является конечномерным, или ряд (1) удовлетворяет специальным условиям (см. работу [1]).

II. Вторая часть теоремы доказывается аналогично. Но всегда, когда A является всюду плотным на Λ множеством, в силу замкнутости область сумм $\overline{S}(\sum_i r_i)$ совпадает со всей прямой.

Чтобы показать существенное различие между областями

сумм в бесконечномерных и конечномерных пространствах, приведем два примера. Оба они сконструированы в пространстве l^2. Первый пример показывает ряд, для которого $S(\sum_i r_i) \cap \Lambda = \{n, 0, 0, \ldots\}_{n=-\infty}^{\infty}$, где Λ — прямая $(\lambda, 0, 0, \ldots)$, т. е. проекция области сумм на прямую является сеткой $\{\pm n\}$. Второй пример дает ряд, для которого область сумм $S(\sum_i r_i)$ не является замкнутой, и тогда не совпадает с областью сумм $\overline{S}(\sum_i r_i)$; здесь $S(\sum_i r_i) \cap \Lambda = \{u + \sqrt{2}v\}$ $(u, v = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, а $\overline{S}(\sum_i r_i) \cap \Lambda = \{u + \sqrt{2}v\}$ $(u, v = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,)$, т. е. вся прямая Λ.

Пример 1. Определим ряд $\sum_j r_j$, $r_j = \{\varrho_j{}^i\}_{i=1}^{\infty}$ при помощи элементов $a_{nk} = \{a_{nk}{}^i\}_{i=1}^{\infty}$ $(k = 1, 2, \ldots n!;\ n = 1, 2, \ldots)$ следующим образом:

$r_{(N-1)+k} = a_{nk}$, где $\sum_{\nu=1}^{n} \nu! = (N)$ $(k = 1, 2, \ldots, n!;\ n = 1, 2, \ldots)$,

$$a_{nk}{}^i = \frac{1}{n!}\, c_i\, M_{nk}{}^i,$$

где $M_{nk}{}^i$ определяются по формулам

$M_{n}{}^{i}{}_{,(k-1)n+s} = -M^{i}{}_{n-1,k}$ $(s = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, (n-1)!)$,

$M_{11}{}^1 = 1$,

$$\left.\begin{array}{l} M_{nk}{}^i = 1 \quad (i = (n-1)! + p(n-1) + q; \\ \qquad\qquad k = pn + s;\ s + q \leqslant n), \\ M_{nk}{}^i = -s + 1 \quad (s + q = n + 1,\ k = pn + s), \\ M_{nk}{}^i = 0 \quad (s + q > n + 1,\ k = pn + s), \\ M_{nk}{}^i = 0 \quad (k \neq pn + s). \end{array}\right\} \begin{array}{l} (p = 0, 1, 2, \ldots, \\ (n-1)! - 1; \\ s = 1, 2, \ldots, n) \end{array}$$

Величины c_i определяем из соотношений

$$\sum_{i=(n-1)!+1}^{(n-1)!+k-1} c_i{}^2 + (n-k)^2 c^2{}_{(n-1)!+k} = nn! \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$c_{(n-1)!+p(n-1)+k} = c_{(n-1)!+k}$$
$$(p = 1, 2, \ldots, (n-1)!,\ k = 1, 2, \ldots, n-1),$$
$$c_1 = 1.$$

Пример 2. Определим ряд $\sum \bar{r}_j$, $\bar{r}_j = \{\bar{\varrho}_j{}^i\}_{i=1}^{\infty}$ при помощи ряда, определенного в примере 1, следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\varrho_{2j-1}^{2i-1} = \varrho_j^1 \\ \varrho_{2j-1}^{2i-1} = 0\end{array}\right\} \ (i = 1, 2, \ldots), \\ \varrho_{2j}^{2i-1} = \sqrt{2}\varrho_j^1, \\ \varrho_{2j}^{2i-1} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots), \\ \varrho_{2j}^{2i-2} = \sqrt{2}\varrho_j^1 \ (i = 2, 3, \ldots).\end{array}\right\} \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Вычисления, связанные с этими примерами, элементарны, но довольно громоздки, так что мы их приводить не будем.

Поступило
14 III 1962

Литература

1. Кадец М. И., Об условно сходящихся рядах в пространстве L^p. Успехи матем. наук., 1954, **9**, № 1, 107—109.
2. Кронрод А. С., О перестановках членов числовых рядов. Матем. сб., 1946, **18** (60), № 2, 237—280.
3. Ружичка Я., О перестановках бесконечных рядов с гиперкомплексными членами. Чехосл. матем. ж., 1953, **3**, № 1, 23—73.
4. Bagemihl, F., Erdös, P., Rearrangements of C_1-summable series. Acta Math., 1954, **92**, 35—53.
5. Behrend, F., Über einem Satz von Herrn Jarník. Math. Z., 1953, **36**, 298—301.
6. Bergström, V., Ein neuer Beweis eines Satzes von E. Steinitz. Abhandl. math. Semin. Univ. Hamburg, 1931, 8, 148—152.
7. Dvoretzky, A., Rogers, C. A., Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1950, 182—187.
8. Gross. W., Bedingt konvergente Reihen. Monatsh. Math. und Phys., 1917, 28, 221—237.
9. Hadwiger, H., Über die Konvergentzarten Unendlichen Reihen im Hilbertschen Raum. Math. Z., 1942, **47**, 325—329.
10. Hadwiger, H., Über das Umordnungsproblem im Hilbertschen Raum. Math. Z., 1946, **46**, 70—79.
11. Jarník, V., Über die Umordnung unendlicher Reihen. Věstnik Král Čés. spol. nauk, Trida matemat. — přír., 1927, 8, 1—45.
12. Steinitz, E., Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme. J. reine und angew. Math., 1914—1916, **143**, 128—175.

SUMMADE PIIRKONDADEST LINEAARSETES NORMEERITUD RUUMIDES

E. Tiit
Matemaatilise analüüsi kateeder

Resümee

Käesolevas töös defineeritakse rea $\sum_i r_i$ jaoks lineaarses normeeritud ruumis X järgnevad summade piirkonna üldistused:

$S(\sum_i r_i)$ — kõigi rea $\sum_i r_i$ koonduvate ümberjärjestuste summade hulk,

$\bar{S}(\sum_i r_i)$ — kõigi rea $\sum_i r_i$ ümberjärjestuste lõplike kuhjumispunktide hulk.

Tõestatakse, et hulk $S(\sum_i r_i) \cap \Lambda$ (Λ on suvaline sirge ruumis X) võib omandada järgmisi kujusid:

1. tühi hulk,
2. üks punkt,
3. «võre» $\{a + m\lambda\} (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$,
4. sirgel Λ kõikjal tihe hulk $\{a + \sum_{i=1}^{n} u_i \lambda_i\}$, $u_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $n = N$ või $n = 1, 2, \ldots$, $\lambda_i = \alpha_{ij} \lambda_j$, kus α_{ij} on irratsionaalarv alati, kui $i \neq j$,
5. sirge Λ;

aga hulk $\bar{S}(\sum_i r_i) \cap \Lambda$ kujusid 1, 2, 3 ja 5.

REARRANGEMENT SET ON LINEAR NORMED SPACE

E. Tiit

Summary

Rearrangement set $S(\sum_i r_i)$ of the conditionally convergent series $\sum_i r_i$ in the space R_n has been considered by numerous authors [2, 8, 6], and it has been stated that $S(\sum_i r_i) = R_m$, $0 < m \leqslant n$.

In infinite-dimensional space it is possible to define for every series $\sum_i r_i$ two rearrangement sets: the set of all limit points of all rearrangements of the series $\sum_i r_i$, $\bar{S}(\sum_i r_i)$, and the set of all sums of the convergent rearrangements of the series $\sum_i r_i$, $S(\sum_i r_i)$.

The following more important results of the investigation of these rearrangement sets have been published: Hadwiger showed that in Hilbert space H the rearrangement set $S(\sum_i r_i)$ of all series $\sum_i r_i$, $r_i \to 0$, is not linear subspace of space; and Kadets [1] pointed out the sufficient conditions for $S(\sum_i r_i)$ being a linear subspace of space L^p, whenever $r_i \in L^p$.

In this paper we discuss the structure of the rearrangement sets $S(\sum_i r_i)$ and $\bar{S}(\sum_i r_i)$ in linear normed space X.

We prove the following theorems:

Theorem 1. *If* $a \in \bar{S}(\sum_i r_i)$, $b \in \bar{S}(\sum_i r_i)$, *then* $a + n(b - a) \in \bar{S}(\sum_i r_i)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Theorem 2. *If* $a \in S(\sum_i r_i)$, $b \in S(\sum_i r_i)$, *then* $a + n(b - a) \in S(\sum_i r_i)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Theorem 3. *If* $a \in S(\sum_i r_i)$, $b \in S(\sum_i r_i)$, $c \in S(\sum_i r_i)$, *then* $a + u(b-a) + v(c-a) \in S(\sum_i r_i)$ $(u, v = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Theorem 4. *The rearrangement set* $\bar{S}(\sum_i r_i)$ *is closed in space* X.

From the theorems proved above we may draw conclusions about the common part of rearrangement set $S(\sum_i r_i)$ or $\bar{S}(\sum_i r_i)$ and arbitrary straight line $\Lambda \in X$:

Theorem 5. I $S(\sum_i r_i) \cap \Lambda$ *may have the following forms:*

1. *Empty set*
2. *One point*
3. *Set* $\{a + m\lambda\}$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$
4. *Everywhere dense set on the straight* Λ : $\{a + \sum_{i=1}^{n} u_i \lambda_i\}$ $(u_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ $(n = N$ *or* $n = 1, 2, \ldots)$
5. *Straight line* Λ.

II $\bar{S}(\sum_i r_i) \cap \Lambda$ *may have only one of the forms* 1, 2, 3, 5.

In example 1 is given such a series $\sum_i r_i$ that $S(\sum_i r_i) \Pi \Lambda = \{n, 0, \ldots\}_{n=-\infty}^{\infty}$ example 2 presents series $\sum_i \bar{r}_i$, for which $S(\sum_i \bar{r}_i) \Pi \Lambda = \{u + \sqrt{2}v\}$ $(u, v = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ and $\bar{S}(\sum \bar{r}_i) = \Delta$, where Δ is straight $(\Delta, 0, 0, \ldots)$, and $r_i, \bar{r}_i \subset l^2$.

A-ОБЛАСТИ СУММ ОДНОГО ТИПА СУММИРУЕМЫХ РЯДОВ

Э. Тийт
Кафедра математического анализа

В статье [1] было установлено, что A-областью сумм A-суммируемых рядов

$$\sum_i r_i, \tag{1}$$

если $r_i \to 0$, может быть только прямая или полупрямая.

В настоящей статье рассматривается A-область сумм (т. е. множество A-сумм всех A-суммируемых перестановок исходного ряда) для одного класса мультипликативными методами суммируемых рядов — класса т. н. $(\varrho - \tau)$-рядов; последовательность членов этих рядов содержит две подпоследовательности постоянных чисел ϱ и τ.

Класс $(\varrho - \tau)$-рядов выбрано потому, что области сумм рядов такого рода являются в известном смысле характерными для всех рядов с ограниченными членами. Их изучение сравнительно несложно, а из областей сумм $(\varrho - \tau)$-рядов уже легко вывести области сумм для всех рядов с ограниченными членами.

В настоящей статье устанавливается, что A-область сумм каждого $(\varrho - \tau)$-ряда содержит «сетку» — множество $\{\sigma + m(\varrho - \tau)\}$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, и исследуется, какие условия достаточны для того, чтобы A-областью сумм $(\varrho - \tau)$-ряда являлась числовая прямая.

Рассмотрим ряд (1), суммируемый мультипликативным методом $A(a_{n\nu})$, т. е. методом, удовлетворяющим следующим условиям:

$$1^\circ \lim_{n\to\infty} a_{n\nu} = 0,$$

$$2^\circ \lim_{n\to\infty} \sum_\nu a_{n\nu} = \alpha[A] = a \neq 0, \tag{2}$$

$$3^\circ \sum_\nu |a_{n\nu}| \leqslant M.$$

Пусть

$$A\{\sum_i r_i\} = \sigma, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{\nu} r_i = s_\nu. \tag{4}$$

Определение 1. *Ряд* (1) *будем называть* $(\varrho - \tau)$*-рядом, если найдутся последовательности* $\{j_i\}$ и $\{l_i\}$ *такие, что*

$$j_i < l_i < j_{i+1} < \dots, \tag{5}$$

$$r_{j_i} = \tau;\ r_{l_i} = \varrho\ \ (i = 1, 2, \dots). \tag{6}$$

Для $(\varrho - \tau)$-рядов доказывается следующая

Теорема 1. *Для каждого* $(\varrho - \tau)$*-ряда* (1), *мультипликативного метода* A *и целого числа* N *найдется перестановка* $K^{(N)}$ *такая, что* [1]

$$A\{\sum_i r_{K^{(N)}(i)}\} = \sigma + aN(\varrho - \tau). \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $N > 0$. Определим перестановку $K^{(N)}$ следующим образом:

$$\begin{cases} K^{(N)}(l_i) = j_i & (i = 1, 2, \dots, N), \\ K^{(N)}(l_i) = l_{i-N} & (i = N+1, \dots), \\ K^{(N)}(j_i) = j_{N+i} & (i = 1, 2, \dots). \end{cases} \tag{8}$$

Из определения $K^{(N)}$ следует, что $\sum_{i=1}^{n} r_{K^{(N)}(i)} = S_n + N(\varrho - \tau)$, если $n \geqslant l_N$, и

$$A\{\sum_i r_{K^{(N)}(i)}\} = \lim_{n\to\infty} \{\sum_{\nu=1}^{l_N - 1} a_{n\nu} \sum_{i=1}^{\nu} r_{K^{(N)}(i)}) +$$

$$+ \sum_{\nu=l_N}^{\infty} a_{n\nu}[s_\nu + N(\varrho - \tau)]\} = \sigma + aN(\varrho - \tau),$$

чем равенство (7) доказано при $N > 0$. Если $N < 0$, то в формуле (8) переставим местами последовательности $\{j_i\}$ и $\{l_i\}$ и, взяв вместо N число $N' = -N > 0$, получим в результате

$$A\{\sum_i r_{K^{(N)}(i)}\} = \sigma + aN'(\tau - \varrho) = \sigma + aN(\varrho - \tau).$$

Этим теорема полностью доказана.

Следствие 1. *A-область* $S_A(\sum_i r_i)$ $(\varrho - \tau)$*-ряда* (1) *содержит множество* $\{\sigma + an(\varrho - \tau)\}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, *называемое сеткой.*

[1] См. (2), (3).

Чтобы установить, при каких условиях A-область сумм содержит кроме точек «сетки» и другие точки, рассмотрим множество $E = \{e\}$ всех бесконечных подпоследовательностей натурального ряда $\{n\}_{n=1}^{\infty}$.

Обозначим $E - \Lambda = E_0$; (Λ — пустое множество).

Определим для последовательностей e, как и для множеств, обычным образом включение, общую часть, сумму и разность. Обозначим $\{n\}_{n=1}^{\infty} - e = \bar{e}$.

Множество таких последовательностей $e \in E_0$, для которых $\bar{e} \in E_0$, обозначим через $\bar{E}$.

Определение 2. *Последовательности e_1 и e_2 будем называть зависимыми, если $e_1 \cap e_2 \in \bar{E}$. Последовательности e_1 и e_2, не являющиеся зависимыми, будем называть независимыми.*

Каждую последовательность e можно представить как последовательность отрезков натурального ряда $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, т. е.

$$e = \{[g_k, h_k]\}_{k=1}^{\infty} \quad (g_k \leqslant h_k;\ h_k < g_{k+1} - 1;\ k = 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Тогда

$$\bar{e} = \{[\bar{g}_k, \bar{h}_k]\}_{k=1}^{\infty} \quad (\bar{g}_1 = 1, \text{ если } g_1 > 1,\ \bar{g}_k = h_{k-1} + 1,\ \bar{h}_k = g_k - 1), \tag{10}$$

причем справедливы также неравенства

$$\bar{g}_k \leqslant \bar{h}_k,\ \bar{h}_k < \bar{g}_{k+1} - 1,\ k = 2, 3, \ldots .$$

Множество всех таких последовательностей $e \in \bar{E}$, при которых найдется конечное число P такое, что

$$g_{k+1} - g_k \leqslant P \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{11}$$

будем обозначать через E^*, где $E^* \subset E$.

Определение 3. *Последовательность e будем называть $(\varrho - \tau)$-последовательностью относительно $(\varrho - \tau)$-ряда* (1), *если найдется конечное число Γ такая, что справедливо соотношение*

$$g_k = j_{p_k};\ \bar{g}_{k+1} = l_{q_k} \quad (k = \Gamma,\ \Gamma + 1, \ldots), \tag{12}$$

где $\{j_{p_k}\}$ и $\{l_{q_k}\}$ — такие подпоследовательности последовательностей $\{j_k\}$ и $\{l_k\}$, что для них сохраняется соотношение (5).

Определение 4. *Если найдется последовательность $e \in E^*$ такая, что она является $(\varrho - \tau)$-последовательностью относительно ряда* (1), *то ряд* (1) *называется $(\varrho - \tau)^*$-рядом, а e — $(\varrho - \tau)^*$-последовательностью относительно ряда* (1).

Каждой бесконечной простой однократной перестановке K (см. [1], определения 2, 3, и 5) взаимно-однозначно соответствует последовательность $e \in E$.

Пусть $i_1 < i_2 < \ldots$ последовательность таких натуральных

чисел, для которых $K(i_k) > i_k$. Последовательность e в этом случае определяется следующими формулами:

$$g_k = i_k; \quad \overline{g}_{k+1} = K(i_k). \tag{13}$$

Пусть задан метод A. Каждой последовательности $e \in E$ соответствует метод $A^e = (a_{nk}^e)$, определенный следующим образом:

$$\begin{cases} a^e_{nk} = a_{nk}, & \text{если } k \in e, \\ a^e_{nk} = 0, & \text{если } k \overline{\in} e. \end{cases} \tag{14}$$

Если существует $\alpha[A^e] \neq 0$, определенный формулой (2), то метод A^e является мультипликативным, так как условия 1° и 3° выполнены автоматически.

Лемма 1. *Пусть заданы ряд* (1), *мультипликативный метод* A *и* $(\varrho - \tau)$*-последовательность* e *такая, что* A^e *является мультипликативным,* $\alpha[A^e] = a\delta$, $(0 < \delta < 1)$. *Тогда последовательности* e *соответствует такая перестановка* K^e, *что*

$$A[\sum_i r_{K^e(i)}] = \sigma + a\delta(\varrho - \tau).$$

Доказательство. Обозначим

$$\sum_{j=1}^{m} r_{K^e(i)} = s'_m.$$

Тогда $s'_m = s_m + (\varrho - \tau)$, если $m = g_k, \ldots, h_k$; $s'_m = s_m$, если $m = \overline{g}_k, \ldots, \overline{h}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, и из (14) следует, что $\sum_m a_{nm} s'_m = \sum_m a_{nm} s_m + (\varrho - \tau) \sum_m a_{nm^e}$. Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} \sum_m a_{nm} s'_m = \sigma + (\varrho - \tau) \cdot \alpha[A^e] = \sigma + a\delta(\varrho - \tau).$$

Лемма доказана.

Из леммы 1 и теоремы 1 следует:

Лемма 2. *Если для* $(\varrho - \tau)$*-ряда* (1) *найдутся* $(\varrho - \tau)$*-последовательность* e *и число* δ^* *такие, что*

$$\alpha[A^e] = a\delta^*,$$

то

$$S_A(\sum_i r_i) \supset \{\sigma + (m + \delta) a(\varrho - \tau)\}$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \ \delta = 0 \text{ или } \delta^*).$$

Доказательство. Пусть задана точка $\sigma + a(m' + \delta')(\varrho - \tau)$, ($m'$ и δ' фиксированы). По теореме 1 определим перестановку $K^{(m')}$ такую, что

$$A\{\sum_i r_{K^{(m')}(i)}\} = \sigma + am'(\varrho - \tau).$$

Если $\delta' = 0$, то $K^{(m')}$ — требуемая перестановка. Если $\delta' = \delta^*$, то рассмотрим ряд $\sum\limits_i r'_i = \sum\limits_i r_{K^{(m')}(i)}$. Этот ряд также является $(\varrho - \tau)$-рядом, и каждая $(\varrho - \tau)$-последовательность e относительно ряда (1) является также $(\varrho - \tau)$-последовательностью для ряда $\sum\limits_i r'_i$. Тогда по лемме 1 $A\{\sum\limits_i r'_{K^e(i)}\} = A\{\sum\limits_i r'_i\} + a\delta^*(\varrho - \tau) = \sigma + a(m' + \delta')(\varrho - \tau)$, что и требовалось доказать.

Лемма 3. *Пусть* e_1 *и* e_2 $(\varrho - \tau)$*-последовательности для ряда* (1), $\alpha\{A^{e_1}\} = a\delta_1$, $\alpha\{A^{e_2}\} = a\delta_2$. *Тогда* $S_A(\sum\limits_i r_i) \supset \{\sigma + (m + \delta)a(\varrho - \tau)\}$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \delta = 0, \delta_1, \delta_2)$.

Если же e_1 *и* e_2 *независимы, то*

$$S_A(\sum_i r_i) \supset \{\sigma + (m + \delta)a(\varrho - \tau)\}$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \delta = 0, \delta_1, \delta_2, \delta_1 + \delta_2).$$

Доказательство. Докажем, что $\sigma + a(\delta_1 + \delta_2)(\varrho - \tau) \in S_A(\sum\limits_i r_i)$. Из определения 3 (см. (12)) следует, что если e_1 и e_2 — $(\varrho - \tau)$-последовательности, то $e_1 \cup e_2$ является $(\varrho - \tau)$-последовательностью; если e_1 и e_2 независимы, то ввиду (14) справедливо равенство $\alpha[A^{e_1 \cup e_2}] = \alpha[A^{e_1}] + \alpha[A^{e_2}] = a(\delta_1 + \delta_2)$, откуда и следует, что $A\{\sum\limits_i r_{K^{e_1 \cup e_2}(i)}\} = \sigma + a(\delta_1 + \delta_2)(\varrho - \tau)$.

Остальная часть доказательства совпадает с доказательством предыдущей леммы.

Теорема 2. *Для того, чтобы А-областью сумм* $S_A(\sum\limits_i r_i)$ $(\varrho - \tau)$*-ряда* (1) *для мультипликативного метода А являлась числовая прямая, достаточно выполнение условий:*

$$\frac{\sum\limits_{\nu=j_{k+1}}^{l_{k+1}-1} a_{m\nu}}{\sum\limits_{\nu=j_{k+1}}^{l_{k+1}-1} a_{n\nu}} \leqslant \frac{\sum\limits_{\nu=l_k}^{j_{k+1}-1} a_{m\nu}}{\sum\limits_{\nu=l_k}^{j_{k+1}-1} a_{n\nu}} \leqslant \frac{\sum\limits_{\nu=j_k}^{l_k-1} a_{m\nu}}{\sum\limits_{\nu=j_k}^{l_k-1} a_{n\nu}} \leqslant \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\mu} a_{m\nu}}{\sum\limits_{\nu=1}^{\mu} a_{n\nu}} \leqslant K, \qquad (15)$$

где $\mu = j_1 - 1$, *если* $j_1 > 1$, $\mu = l_i - 1$, *если* $j_i = 1$, *и при* $k \to \infty$

$$\sum_{\nu=j_k}^{\infty} |a_{n\nu}| \to 0, \quad \text{где } n = j_k, \ldots, l_{k+1}. \qquad (16)$$

Доказательство. Пусть задано произвольное число γ. Тогда найдутся целое число N и число δ, где $0 \leqslant \delta < 1$, такие, что $\gamma = \sigma + (N + \delta)a(\varrho - \tau)$. Из леммы 2 следует, что если

найдется такая $(\varrho-\tau)$-последовательность e, что $\alpha[A^e]=a\delta$, то $\gamma\in S_A(\sum_i r_i)$.

Основной частью доказательства является построение указанной $(\varrho-\tau)$-последовательности e. Для этого доказывается, что можно конструировать $(\varrho-\tau)$-последовательность e так, что имеют место следующие равенства (при $k\to\infty$)

$$\begin{cases} \sum\limits_{\nu=1}^{h_k} a^e_{h_k,\nu}=a\delta+o(1), \\ \sum\limits_{\nu=1}^{\bar h_k} a^e_{\bar h_k,\nu}=a\delta+o(1), \end{cases} \tag{17}$$

а затем показывается, что из (17) следует, что при $n\to\infty$

$$\sum_{\nu=1}^{n} a^e_{n\nu}-a\delta\to 0. \tag{18}$$

Ввиду (16), отсюда следует

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} a^e_{n\nu}=a\delta. \tag{19}$$

Сначала докажем теорему в частном случае, когда имеет место условие

$$\frac{\sum\limits_{\nu=j_k}^{l_k-1} a_{m\nu}}{\sum\limits_{\nu=j_k}^{l_k-1} a_{n\nu}}=\frac{\sum\limits_{\nu=l_{k-1}}^{j_k-1} a_{m\nu}}{\sum\limits_{\nu=l_{k-1}}^{j_k-1} a_{n\nu}}=\frac{a_{m1}}{a_{n1}}\leqslant 1\quad (1<j_{k+1}-1\leqslant n\leqslant m). \tag{20}$$

Пусть задано δ, где $0<\delta<1$. Определим последовательность e так, чтобы она была $(\varrho-\tau)$-последовательностью (см. (12)) и $g_1=j_1$. Пусть каким-то образом определены $g_1, h_1, \ldots, g_k$ так, что

$$\sum_{\nu=1}^{\bar h_k} a^e_{\bar h_k\nu}=\sum_{\nu=1}^{k-1}\sum_{i=g_\nu}^{h_\nu} a_{\bar h_k,i}\leqslant a\delta. \tag{21}$$

(Обозначая $\sum\limits_{\nu=1}^{h_\nu} a_{\bar h_1\nu}=0$, что не противоречит определению последовательности e, получим, что (21) имеет место и для $k=1$). Определим теперь h_k так, чтобы было справедливо

$$\begin{cases} \sum\limits_{\nu=1}^{h_k} a^e{}_{h_k\nu} = \sum\limits_{\nu=1}^{k} \sum\limits_{i=g_\nu}^{h_\nu} a_{\bar{h}_k, i} > a\delta, \\ \sum\limits_{\nu=1}^{h'_k} a^e{}_{h_k\nu} = \sum\limits_{\nu=1}^{k-1} \sum\limits_{i=g_\nu}^{h_\nu} a_{h'_k, i} + \sum\limits_{i=g_k}^{h'_k} a_{h'_k, i} \leqslant a\delta, \end{cases} \tag{22}$$

где $h'_k = \max\{l_{q_k-1}, \bar{h}_k\}$. Возможность такого определения следует из мультипликативности метода A. Обозначим

$$\sum_{\nu=1}^{h_k} a^e{}_{h_k\nu} - a\delta = \delta'_k \geqslant 0. \tag{23}$$

Затем определим g_{k+1} так, чтобы имели место

$$\begin{cases} \sum\limits_{\nu=1}^{\bar{h}_{k+1}} a^e{}_{\bar{h}_{k+1}, \nu} = \sum\limits_{\nu=1}^{k} \sum\limits_{i=g_\nu}^{h_\nu} a_{\bar{h}_{k+1}, i} \leqslant a\delta, \\ \sum\limits_{\nu=1}^{h_{k+1}} a^e{}_{h''_{k+1}, \nu} = \sum\limits_{\nu=1}^{k} \sum\limits_{i=g_\nu}^{h_\nu} a_{h''_{k+1}, i} > a\delta, \end{cases} \tag{24}$$

где $h''_{k+1} = \max(j_{p_{k+1}-1}, h_k)$. Возможность определения индекса g_{k+1} доказывается аналогично возможности определения h_k. Тогда из (16), ввиду неравенства (20), следует:

$$0 \leqslant \delta''_{k+1} = a\delta - \sum_{\nu=1}^{\bar{h}_{k+1}} a^e{}_{\bar{h}_{k+1}, \nu} \leqslant \left(1 - \frac{a_{\bar{h}_{k+1}, 1}}{a_{h''_{k+1}, 1}}\right) \sum_{\nu=1}^{k} \sum_{i=g_\nu}^{h_\nu} a_{h''_{k+1}, i}. \tag{25}$$

Для оценки величины δ''_{k+1} нам надо оценить выражение $1 - \frac{a_{\bar{h}_{k+1}, 1}}{a_{h''_{k+1}, 1}}$. Из (10), (11) и (16) следует, что справедливо: $1 - \frac{a_{\bar{h}_{k+1}, 1}}{a_{h''_{k+1}, 1}} \leqslant 1 - \frac{a^{\,p_{k+1}}_{j-1, 1}}{a^{\,p-1}_{j-1, 1}}$, а ввиду мультипликативности метода A имеет место $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_{j-1, \nu}^{\;p-1} - \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_{j-1, \nu}^{\;p} = o(1)$. Выражая теперь

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{j-1, \nu}^{\;p-1} - \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{j-1, \nu}^{\;p} = \left(1 - \frac{a^{\,p_{k+1}}_{j-1, 1}}{a^{\,p-1}_{j-1, 1}}\right) \sum_{\nu=1}^{j-1} a_{j-1}^{\;p-1} + \sum_{\nu=j}^{\infty} a_{j-1, \nu}^{\;p-1} +$$

$+\sum_{\nu=j_{p-1}}^{\infty} a_{j-1,\nu}$, $_{p_{k+1}}$ получим из (16) $o(1) = (a + o(1))\left(1 - \right.$

$\left. - \frac{a_{j-1,1}}{a_{j-1,1}} \right) + o(1)$. Тогда справедливо равенство $1 - \frac{a_{j-1,1}}{a_{j-1,1}} =$

$= o(1)$, и из (25) мы получим следующую оценку

$$\delta''_k = a\delta - \sum_{\nu=1}^{\bar{h}_k} a^{e}_{\bar{h}_k,\nu} = o(1).$$

Чтобы оценить величину δ'_k, применим следующее соотношение, вытекающее из определения $\bar{e}$ (см. (10)) и мультипликативности метода A:

$$\delta'_k = \sum_{\nu=1}^{h_k} a_{h_k,\nu} - \sum_{\nu=1}^{h_k} a^{\bar{e}}_{h_k,\nu} - a + a(1-\delta) =$$

$$= \left(\sum_{\nu=1}^{h_k} a_{h_k\nu} - a\right) + \left[a(1-\delta) - \sum_{\nu=1}^{h_k} a^{\bar{e}}_{h_k\nu}\right]. \qquad (26)$$

Так как условия (24) для e эквивалентны условиям (22) для последовательности $\bar{e}$, то из (25) следует соотношение $\delta'_k = o(1)$, и, таким образом, равенства (17) доказаны.

Определим величину γ_n для каждого n:

$$\gamma_n = \sum_{\nu=1}^{n} a^{e}_{ni} - a\delta. \qquad (27)$$

Пусть задано произвольное n, где $h_k \leqslant n < \bar{h}_{k+1}$. Имеют место неравенства:

$$\sum_{\nu=1}^{h_k} a^{e}_{n\nu} = \frac{a_{n1}}{a_{h_k,1}} \sum_{\nu=1}^{h_k} a^{e}_{h_k\nu} = \frac{a_{n1}}{a_{h_k,1}} (a\delta + \delta'_k) \leqslant a\delta + \delta'_k,$$

$$\sum_{\nu=1}^{\bar{h}_{k+1}} a^{e}_{n\nu} = \frac{a_{n1}}{a_{\bar{h}_{k+1},1}} \sum_{\nu=1}^{\bar{h}_{k+1}} a^{e}_{\bar{h}_{k+1}\nu} = \frac{a_{n1}}{a_{\bar{h}_{k+1},1}} (a\delta + \delta''_{k+1}) \geqslant a\delta + \delta''_{k+1},$$

и так как $\sum_{\nu=1}^{n} a^{e}_{nk} = \sum_{\nu=1}^{h_k} a^{e}_{nk} = \sum_{\nu=1}^{\bar{h}_{k+1}} a^{e}_{nk}$, отсюда и следует, что $\gamma_n \to 0$ при $k \to \infty$ для каждого n с $h_k \leqslant n < \bar{h}_{k+1}$.

Таким же образом, при помощи последовательности $\bar{e}$, можно

доказать, что и для $n \text{ с } \overline{h_k} \leqslant n < h_k$ имеет место $\gamma_n = o(1)$, и тем самым доказано (18), а одновременно и (19) для мультипликативного метода A, удовлетворяющего условиям (16) и (20).

Для полного доказательства теоремы 2 необходимо провести следующие вычисления:

Пусть задана произвольная последовательность натуральных чисел $1 = m_0 < m_1 < m_2 < \ldots$. Вычислив разности

$$\sum_{\nu=m_{\varkappa-1}}^{m_\varkappa - 1} a^e_{n\nu} - \delta \sum_{\nu=m_{\varkappa-1}}^{m_\varkappa - 1} a_{n\nu} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots),$$

из (27) и (18) выводим равенство

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} \Big(\sum_{\nu=m_{\varkappa-1}}^{m_\varkappa - 1} a^e_{n\nu} - \delta \sum_{\nu=m_{\varkappa-1}}^{m_\varkappa - 1} a_{n\nu} \Big) = o(1), \tag{28}$$

которое не зависит от выбора последовательности $\{m_\varkappa\}$.

Рассмотрим теперь случай, когда (20) не выполнено. Тогда существует последовательность индексов $1 < n_1 < n_2 < \ldots$ такая, что

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{\mu} a_{n_k, \nu}}{\sum_{\nu=1}^{\mu} a_{n_k - 1, \nu}} = F_k > 1 \quad (k = 1, 2, \ldots) \quad (F_k \leqslant K).$$

Тогда найдутся последовательности индексов $1 < m^k_0 < m^k_1 < \ldots$ и чисел $K \geqslant f^k_0 = F_k > f^k_1 > f^k_2 > \ldots$ такие, что

$$a_{n,k}\nu = f^k_\varkappa a_{n_k - 1, \nu}, \quad \text{если} \quad m^k_\varkappa \leqslant \nu < m^k_{\varkappa+1},$$

и имеют место следующие соотношения

$$\sum_{\nu=1}^{n_k} a^e_{n_k, \nu} = \sum_{\nu=1}^{n_k - 1} a^e_{n_k, \nu} = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa_k} \sum_{\nu=m^k_\varkappa}^{m^k_{\varkappa+1}-1} a^e_{n_k, \nu} = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa_k} f^k_\varkappa \sum_{\nu=m^k_\varkappa}^{m^k_{\varkappa+1}-1} a^e_{n_k - 1, \nu} =$$

$$= \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa_k} f^k_\varkappa \Big[\delta \sum_{\nu=m^k_\varkappa}^{m^k_{\varkappa+1}-1} a_{n_k - 1, \nu} + \Big(\sum_{\nu=m^k_\varkappa}^{m^k_{\varkappa+1}-1} a^e_{n_k - 1, \nu} - \delta \sum_{\nu=m^k_\varkappa}^{m^k_{\varkappa+1}-1} a_{n_k - 1, \nu} \Big) \Big] =$$

$$= \delta \sum_{\nu=1}^{n_k - 1} a_{n_k, \nu} + \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa_k} f^k_\varkappa \Big[\sum_{\nu=m^k_\varkappa}^{m^k_{\varkappa+1}-1} a^e_{n_k - 1, \nu} - \delta \sum_{\nu=m^k_\varkappa}^{m^k_{\varkappa+1}-1} a_{n_k - 1, \nu} \Big].$$

В случае $k = 1$ отсюда следует

$$\Big| \sum_{\nu=1}^{n_1} a^e_{n_1 \nu} - \delta \sum_{\nu=1}^{n_1} a_{n_1 \nu} \Big| \leqslant F_1 |\gamma_{n_1 - 1}| + a_{n_1 n_1}.$$

Проводя построение последовательности e по формулам (22) и (24) вышеописанным образом, получим аналогичные оценки и для всех n_k $(k = 1, 2, \ldots)$. Отсюда следуют также, как и в предыдущем случае, (18) и (19), чем теорема 2 доказана полностью.

Примечание. Выполнение условий (15) и (16) проверять трудно, так как они зависят не только от метода A, но и от ряда (1). Чтобы избежать этой двусторонней зависимости, рассмотрим класс т. н. $(\varrho - \tau)^*$-рядов (см. опр. 4). Для этого случая из теоремы 2 выводится

Следствие 2. *Для того, чтобы* $S_A(\sum_i r_i)$ *была числовой прямой для каждого* $(\varrho - \tau)^*$*-ряда* (1), *где* A *— треугольный мультипликативный метод, достаточны следующие условия:* [2]

$$a_{nn} = o(1), \tag{29}$$

$$\frac{a_{mv}}{a_{nv}} \leqslant \frac{a_{m,v-1}}{a_{n,v-1}} \leqslant K \quad (1 < v \leqslant n < m). \tag{30}$$

Действительно, из (30) всегда следует (15), а если $e \in E^*$ и A-треугольн, то из (29) и (30) следует (16).

Условие (15) не является необходимым для доказательства теоремы 2; его можно заменить более слабым, но зато более громоздким: например, достаточно, если найдется последовательность e такая, что $\alpha\{A^e\} = a$, и условие (15) выполнено для всех $a^e{}_{nv} \not\to 0$, и т. д.

Приведем некоторые примеры.

В примере 1 (см. ниже) рассматривается мультипликативный метод A_1, не удовлетворяющий условию (15), а в примере 2 — мультипликативный метод A_2, не удовлетворяющий условию (16). Тогда ни для одной последовательности e, $e \in \bar{E}$, не существует $\alpha[A^e{}_1]$ и $\alpha[A^e{}_2]$.

В статье [2] приведен пример ряда (1), являющегося $(\varrho - \tau)$-рядом, но не $(\varrho - \tau)^*$-рядом, и для которого ни для одной $(\varrho - \tau)$-последовательности e не существует $\alpha[A^e]$, хотя A — мультипликативный метод, удовлетворяющий условиям (29) и (30).

Условия, необходимые для того, чтобы $S_A(\sum_i r_i)$ являлся числовой прямой для класса $(\varrho - \tau)^*$-рядов (1), не являются необходимыми для каждого конкретного $(\varrho - \tau)^*$-ряда.

В примере 3 приведен метод A_3, не удовлетворяющий условиям (15) и (16), но имеющий для каждого δ с $0 < \delta < 1$

---

[2] При условии (30) метод A удовлетворяет теореме о среднем значении (см. [3]). В [4] отмечена возможность обобщения результатов [2] для таких методов.

последовательность e_δ такую, что $\alpha[A^e{}_\delta] = \delta$. Значит, при подходящем выборе ряда (1) может и $S_{A_3}(\sum_i r_i)$ быть числовой прямой.

Пример 1. Определим мультипликативный метод $A_1(a'_{nk})$ следующим образом:

$$a'_{nk} = \frac{1}{2^{n-k+1}} \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots),$$

$$a'_{nk} = 0 \qquad (k > n).$$

Условие (15) выполнено, так как

$$\frac{a_{mk}}{a_{nk}} = \frac{2^{n-k}}{2^{m-k}} = \frac{1}{2^{m-n}}, \quad \frac{a_{m,k-1}}{a_{n,k-1}} = \frac{1}{2^{m-n}}, \quad K \leqslant 1.$$

Таблица 1

	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2		1					
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$					
4	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$				
5	$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}$			
6		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				
7		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$			
8			$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
9	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$				
10	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$			
11	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{3}$		
12	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{3}$	
13	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$			
14	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$		
15	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{3}$	
16	$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		
17	$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$	
18	$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
19		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$			
20		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$		

Для каждого e имеем $\lim\limits_{n}\sum\limits_{\nu} a'^{e}{}_{n\nu} > \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{n}\sum a'^{e}{}_{n\nu} < \frac{1}{2}$, и, следовательно, $\alpha[A^{e}{}_{1}]$ не существует.

Пример 2. Определим метод A_2 так, чтобы a''_{nk} удовлетворяли следующим условиям:

$$\begin{cases} a''_{nk} = 0 \text{ или } \frac{1}{\nu},\ k = 1, 2, \ldots, 2\nu; \\ (a''_{n_1,k})_{k=1}^{2\nu} \neq (a''_{n_2,k})_{k=1}^{2\nu}, \text{ когда } n_1 \neq n_2, \\ \sum\limits_{k=1}^{2\nu} a''_{nk} = 1, \\ a''_{nk} = 0,\ k = 2\nu + 1, \ldots, \end{cases}$$

где $n = \sum\limits_{i=1}^{\nu-1} \binom{2i}{i} + m$, $m = 1, 2, \ldots, \binom{2\nu}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$. По этим условиям метод не определен однозначно; пример одного метода A_2, определенного по этим условиям, приведен в таблице 1. Метод A_2 является мультипликативным, также удовлетворяет условию (29), но (30) не выполнено.

Обозначим число натуральных чисел, меньших n и принадлежащих последовательности e, через $\varkappa_n$. Тогда для каждого e имеют место равенства:

$$\max_{M_{i-1}<n<M} \sum_{\nu=1}^{\infty} a''^{e}{}_{n\nu} = \min\left(1, \frac{\varkappa_i}{i}\right),$$

$$\min_{M_{i-1}<n<M} \sum_{\nu=1}^{\infty} a''^{e}{}_{n\nu} = \max\left(0, \frac{\varkappa_i - 1}{i}\right),$$

где

$$M_i = \sum_{\nu=1}^{i} \binom{2\nu}{\nu},$$

и $\alpha[A^{e}{}_{2}]$ существует лишь в случаях $\frac{\varkappa_i}{i} = 1$ или $\frac{\varkappa_i - i}{i} = 0$, т. е. $e = \{n\}$ или $e = \Lambda$, т. е. $e \in \bar{E}$.

Пример 3. Определим последовательности e_i соотношением

$$e_i = \{2^i k + 2^{i-1}\}_{k=1}^{\infty} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Эти последовательности независимы. Далее определим метод A_3 следующим образом:

$$a'''_{nn} = c, \text{ где } c \text{ произвольная константа, } c \neq 0. \qquad (31)$$

Пусть $n_i = \max\limits_{\substack{\nu \in e_i \\ \nu < n}} \nu$; $I(n)$ — максимальный индекс i, для которого n_i определен. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} n_i = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} I(n) = \infty. \tag{32}$$

Положим

$$\begin{cases} a'''_{nn_i} = -c + \bar{a}_{nn_i}, \text{ если } n \in e_i, \\ a'''_{n\nu} = \bar{a}_{n\nu}, \end{cases} \tag{33}$$

где $\{\bar{a}_{n\nu}\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n-1;\ n = 1, 2, \ldots)$ определим так, чтобы они удовлетворяли следующим условиям:

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \bar{a}^{e_i}{}_{n\nu} = \frac{1}{2^i} \quad (n = 1, 2, \ldots; i = 1, 2, \ldots), \tag{34}$$

$$\lim_{n\to\infty} \bar{a}_{n\nu} = 0, \tag{35}$$

$$\bar{a}_{n\nu} > 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1;\ n = 1, 2, \ldots), \tag{36}$$

причем $\{\bar{a}^{e_i}{}_{n\nu}\}_{\nu=2}^{n}$ не удовлетворяет условию (29), что также возможно (см. пример 2).

Определенной таким образом метод является мультипликативным. Действительно, (32) и (33) гарантируют выполнение условия 1°, из (32) и (34) следует, что

$$\sum_{\nu=1}^{n} \bar{a}_{n\nu} = \sum_{\nu=1}^{J(n)} \sum_{\nu=1}^{n} \bar{a}^{e_i}{}_{n\nu} = \sum_{i=1}^{J(n)} \frac{1}{2^i} \to 1 \text{ при } n \to \infty,$$

и ввиду (31), (33) и (36) справедливо

$$\sum_{\nu} |\bar{a}_{n\nu}| \leqslant 1 + 2c \text{ для всех } n.$$

Пусть задано произвольное δ с $0 < \delta < 1$. Тогда найдется последовательность $\{c_i\}$ ($c_i = 0$ или 1) такая, что $\delta = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{2^i}$, и по лемме 3 последовательность $e = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} c_i e_i$ определяет такой метод A^e, что $\alpha[A^e] = \delta$.

Литература

1. Тийт Э., A-области сумм некоторых суммируемых рядов. Тр. Ин-та физ. и астрон. АН ЭстССР, 1963, **20**, 14—33.
2. Bagemihl, F., Erdös, P., Rearrangements of C_1-summable series. Acta Math., 1954, **92**, 35—53.
3. Jurkat, W., Peyerimhoff, A., Mittelwertsätze bei Matrix- und Integraltransformationen. Math. Z., 1951, **55**, 92—108.
4. Lorentz, G., Zeller, K., Series rearrangements and analytic sets. Acta Math., 1958, **100**, 149—169.

Поступило
18 IV 1962

TEATUD TÜÜPI SUMMEERUVATE RIDADE A-SUMMADE PIIRKONNAD

E. Tiit
Matemaatilise analüüsi kateeder

Resümee

1954. a. ilmus Bagemihli ja Erdösi töö, milles autorid tegid kindlaks, et C_1-summeeruva rea summadepiirkonnaks võib olla üks punkt, sirge või «võre» $\{\alpha + \nu\beta\}$, $(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \beta \neq 0)$.

Käesolevas töös üldistatakse osa Bagemihli ja Erdösi tulemusi mis tahes multiplikatiivse menetluse A jaoks. Siinjuures vaadeldakse ainult $(\varrho—\tau)$-ridu, s. o. selliseid ridu, mille liikmete jada $\{r_i\}$ sisaldab osajadasid $\{r_{l_k}\}$ ja $\{r_{j_k}\}$ nii, et $r_{l_k} = \varrho$, $r_{j_k} = \tau$. Selliste ridade summade piirkondade leidmine on suhteliselt lihtne ning $(\varrho—\tau)$-ridade summade piirkonnast on kergesti tuletatav mis tahes tõkestatud liikmetejadaga rea summade piirkond.

Tõestatakse järgnevad teoreemid:

Teoreem 1. *Iga* $(\varrho—\tau)$*-rea summade piirkond*

$$S_A(\Sigma r_i) \supset \{\sigma + ma(\varrho - \tau)\} (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$
i

Teoreem 2. *Piisav tingimus selleks, et* $S_A(\Sigma r_i)$ *oleks arvsirge iga* $(\varrho—\tau)$*-*
i

rea puhul, on, et A oleks multiplikatiivne menetlus, mis rahuldab tingimusi (15) *ja* (16).

Näidetes 1 ja 2 on esitatud menetlused A_1 ja A_2, mis ei rahulda piisavaid tingimusi, ning seetõttu $S_A(\Sigma r_i)$ ei ole arvsirge ühegi $(\varrho—\tau)$-rea korral.
i

A-REARRANGEMENT SETS OF ONE TYPE OF SUMMABLE SERIES

E. Tiit

Summary

In 1954 the work by Bagemihl and Erdös was published in which the authors stated for any C_1-summable series that the rearrangement set consists either of a single number or of all numbers of the form $\{\alpha + \nu\beta\}$ $(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ for some particular real numbers α and $\beta \neq 0$, or of all the real numbers.

In the present paper part of the results of Bagemihl and Erdös is generalized for the arbitrary multiplicative method A, but only $(\varrho—\tau)$-series are discussed, that is such series, the sequence of whose members $\{r_i\}$ consists of the subsequences $\{r_{l_k}\}$ and $\{r_{j_k}\}$, so, that $r_{l_k} = \varrho$, $r_{j_k} = \tau$. The rearrangement sets of the $(\varrho—\tau)$-series are comparatively easy to study, and from the rearrangement sets of $(\varrho—\tau)$-series it is easy to infer the rearrangement set of any series, the sequence of whose members is bounded.

The following theorems are proved.

Theorem 1. *The rearrangement set of any* $(\varrho—\tau)$-series

$$S_A(\Sigma r_i) \supset \{\sigma + ma(\varrho - \tau)\} (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$
i

Theorem 2. *A sufficient condition for* $S_A(\Sigma r_i)$ *to be the set of all real numbers for the* $(\varrho—\tau)$-series Σr_i *is that the multiplicative method A should fulfil the conditions* (15) *and* (16).

In examples 1 and 2 are given the methods A_1 and A_2 which do not fulfil the sufficient conditions, and $S_{A1}(\Sigma r_i)$ and $S_{A2}(\Sigma r_i)$ are not the set of all real numbers for any $(\varrho—\tau)$-series.

ESV AUN Tartu Kultuuriheeme

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ A-ОБЛАСТИ СУММ СУММИРУЕМЫХ РЯДОВ

Э. Тийт
Кафедра математического анализа

В настоящей статье, как и в [2], рассматриваются $(\varrho - \tau)$-ряды $\sum\limits_i r_i$, суммируемые мультипликативными методами, но ограничения для членов этого ряда еще более строгие (см. определения 1 и 2). Для $(\varrho - \tau)^*$-рядов сравнительно легко установить все возможные формы для области сумм, из которых в [2] были рассмотрены только самые простые — прямая и сетка.

Метод исследования — конструктивный. Мы задаем $(\varrho - \tau)^*$-ряд (1), числа σ и $a \neq 0$ и некоторое множество действительных чисел D, $D \subseteq [0, 1]$, удовлетворяющее некоторым условиям, а затем конструируем такой метод A, что

$$S_A(\sum_i r_i) = \{\sigma + (m + \delta) a(\varrho - \tau)\} (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \delta \in D).$$

В теоремах 1—4 и следствиях 1—4 выясняется, что D может быть произвольным множеством, содержащимся в отрезке $[0, 1]$ и состоящим из не более чем счетного множества открытых и замкнутых отрезков.

В работе мы будем пользоваться всеми определениями и обозначениями, введенными в [2].

Определение 1. *Ряд*

$$\sum_i r_i \tag{1}$$

называется $(\overline{\varrho - \tau})$*-рядом, если найдется такой индекс* I, *что*

$$r_i = \varrho \text{ или } \tau, \; i = I, I + 1, \ldots . \tag{2}$$

Определение 2. *Если* $(\overline{\varrho - \tau})$*-ряд является* $(\varrho - \tau)^*$*-рядом,* (*см.* [2], (11)), *то он называется* $(\overline{\varrho - \tau})^*$*-рядом.*

Пусть задан ряд (1) и последовательность e. Обозначим $S_n = S_n^e$, если $n \in e$.

Теорема 1А. *Пусть заданы* $(\overline{\varrho-\tau})^*$*-ряд* (1), $\overline{\lim\limits_{n}}\,|S_n|=\infty$, *числа* σ, $a\neq 0$ *и* δ^* $(0<\delta^*<1)$ *и* $(\overline{\varrho-\tau})^*$*-последовательность* e^*. *Тогда найдется треугольный мультипликативный метод* A *такой, что*

$$S_A(\sum_i r_i)=\{\sigma+(m+\delta)a(\varrho-\tau)\}\ (m=0,\pm 1,\pm 2,\dots;\ \delta=0 \text{ или } \delta^*), \tag{3}$$

причем

$$A\{\sum_i r_K e^*_{(i)}\}=\sigma+a\delta^*(\varrho-\tau). \tag{4}$$

Доказательство. 1. Докажем, что

$$S_A(\sum_i r_i)\supset\{\sigma+(m+\delta)a(\varrho-\tau)\}\ (m=0,\pm 1,\pm 2,\dots,\ \delta=0 \text{ или } \delta^*). \tag{5}$$

Рассмотрим сначала случай, когда для ряда (1)

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\infty. \tag{6}$$

Обозначим

$$n_1=\max_{\substack{\nu\leqslant n\\ \nu\in e^*}}\nu;\quad n_2=\max_{\substack{\nu\leqslant n\\ \nu\in \bar{e}^*}}\nu;\quad n_3=\max_{\substack{S_\nu\leqslant \frac{1}{2}S_{n_2}\\ \nu\in \bar{e}^*}}\nu; \tag{7}$$

(см. [2], (9)). Так как $e^*\in\bar{E}$ (см. [2], (10)), то из (7) следуют

$$\lim_{n\to\infty} n_1=\infty;\quad \lim_{n\to\infty} n_2=\infty, \tag{8}$$

а, ввиду (6), и

$$\lim_{n\to\infty} n_3=\infty. \tag{9}$$

Составим систему уравнений

$$\begin{cases} b_n S_n+c_n S_n+a\delta^* S_{n_1}=\sigma & (10)\\ b_n\quad +c_n\quad +a\delta^*\quad =a & (11)\end{cases}$$

и, взяв

$$n=I+2P,\ I+2P+1,\dots \tag{12}$$

(см. [2], (11)), вычислим

$$c_n=\frac{\sigma-a[(1-\delta^*)S_{n_3}+\delta^* S_{n_1}]}{S_{n_2}-S_{n_3}},\quad b_n=\frac{\sigma-a[(1-\delta^*)S_{n_2}+\delta^* S_{n_1}]}{S_{n_3}-S_{n_2}}, \tag{13}$$

($S_{n_2}\neq S_{n_3}$ ввиду (12)).

Определим метод A как сумму $A^{e^*} + A^{\bar{e}^*}$, где $A^{\bar{e}^*}$ определяется по формулам

$$\begin{cases} a_{n,\, n_1} = a\delta^*, \\ a_{n\nu} = 0,\ \nu \neq n_1,\ \nu \in e^*, \end{cases} \tag{14}$$

$A^{\bar{e}^*}$ — по формулам

$$\begin{cases} a_{n,\, n_2} = c_n, \\ a_{n,\, n_3} = b_n, \\ a_{n\nu} = 0,\ \nu \neq n_2,\ n_3,\ \nu \in \bar{e}^*. \end{cases} \tag{15}$$

Метод A, определенный таким образом, треугольный. A^{e^*} является мультипликативным, и ввиду леммы 1 из [2] этим и доказано (4).

Покажем мультипликативность метода A^{e^*}.

1°. Из (8) и (15) следует, что для каждого ν найдется n_ν такой, что $a_{n\nu} = 0$, $n = n_\nu,\ n_\nu + 1, \ldots$.

2°. Ввиду (11), $\sum\limits_{\nu} a^{\bar{e}^*}_{n\nu} = a(1 - \delta^*)$, $n = I + 2P, \ldots$.

3°. Так как ряд (1) — $(\varrho - \tau)^*$-ряд, то справедливы следующие неравенства:

$$|S_{n_1} - S_{n_2}| \leqslant P \max(|\varrho|, |\tau|), \quad \left|S_{n_3} - \frac{S_{n_2}}{2}\right| \leqslant P \max(|\varrho|, |\tau|).$$

Но тогда, ввиду (7), справедливы равенства:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{n_3}}{S_{n_2} - S_{n_3}} = 1; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{S_{n_1}}{S_{n_2} - S_{n_3}} = 2; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{S_{n_2}}{S_{n_3} - S_{n_2}} = -2;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{n_1}}{S_{n_3} - S_{n_2}} = -2,$$

и существуют величины (см. (13)):

$$b = \lim_{n\to\infty} b_n = 2a; \quad c = \lim_{n\to\infty} c_n = -a(1 + \delta^*),$$

и, значит, ввиду (14) и (15), имеет место неравенство $\sum\limits_{\nu} |a_{n\nu}| < M$.

Для случаев, когда (6) не выполнено, метод A определяется существенно аналогично.

На основе леммы 2 из [2] из наших доказательств следует, что справедливо соотношение (5).

2. Докажем теперь, что

$$S_A(\sum_i r_i) \subset \{\sigma + (m + \delta)a(\varrho - \tau)\} (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots ;$$

$$\delta = 0 \text{ или } \delta^*). \tag{16}$$

Пусть

$$x \in S_A(\underset{i}{\Sigma} r_i).$$

Тогда существует такая перестановка K, что имеет место

$$A\{\underset{i}{\Sigma} r_{K(i)}\} = x;$$

обозначим $r_{K(i)} = r_{i'}$.

Всегда существуют целое число μ и число ξ, $0 \leqslant \xi < 1$, такие, что

$$x = \sigma + (\mu + \xi) a(\varrho - \tau).$$

Ряд $\underset{i}{\Sigma} r_{i'}$ является также $(\varrho - \tau)$-рядом. Определим перестановку $K^{(-\mu)}$ по теореме 1 из [2]. Тогда

$$A\{\underset{i}{\Sigma} r_{K^{(-\mu)}(i')}\} = x - \mu a(\varrho - \tau) = \sigma + \xi a(\varrho - \tau).$$

Рассмотрим теперь перестанвоку $K^* = KK^{(-\mu)}$.

Можно показать, что каждая перестановка K^* выражается как произведение простых однократных перестановок

$$K^* = \prod_{j=1}^{\infty} K^{e_j}.$$

Здесь, вообще говоря, e_j не являются $(\varrho - \tau)$-последовательностями, но, соответственно заданному $(\varrho - \tau)$-ряду $\underset{i}{\Sigma} r_i^{j-1} = \underset{i}{\Sigma} r_{\prod_{\nu=1}^{j-1} K^{e_\nu}(i)}$, можно каждую последовательность e_j выразить следующей суммой:

$$e_j = e_j' + e_j'' + e_j^\circ + e_j^\infty, \tag{17}$$

где e_j' — $(\varrho - \tau)$-последовательность, e_j'' — $(\tau - \varrho)$-последовательность, e_j° — $(\varrho - \varrho)$-последовательность, e_j^∞ — $(\tau - \tau)$-последовательность относительно ряда $\underset{i}{\Sigma} r_i^j$, притом так, что

$$\bigcup_{\nu=1}^{j} e'_\nu \cap \bigcup_{\nu=1}^{j} e''_\nu = \Lambda. \tag{18}$$

Тогда, ввиду (17) и (18), по леммам 2 и 3 из [2] имеют место равенства

$$\underset{i}{\Sigma} r_i^j = \underset{i}{\Sigma} r_{[\prod_{\nu=1}^{j} K^{e'_\nu} \cdot \prod_{\nu=1}^{j} K^{e''_\nu}](i)} \quad (j = 1, 2, \ldots),$$

и

$$A\{\underset{i}{\Sigma} r_{K^*(i)}\} = \sigma + (\varrho - \tau)\{\lim_{n\to\infty} [\underset{\nu}{\Sigma} a_{n\nu}^{e_j'} - \underset{\nu}{\Sigma} a_{n\nu}^{e_j''}]\}.$$

Приступим теперь к вычислению предела в правой стороне последнего равенства. Из структуры метода A следует, что единственными $(\varrho-\tau)$-последовательностями e, для которых $\alpha[A^e]$ существует, являются такие, которые отличаются от e^* только на неконечную последовательность, и единственными $(\tau-\varrho)$-последовательностями $\bar{e}$, для которых $\alpha[A^{\bar{e}}]$ существует, являются такие, которые отличаются от $\bar{e}^*$ только на конечную последовательность.

Рассмотрим теперь последовательности $e'=\bigcup_{j=1}^{\infty} e_j'$, $e''=\bigcup_{j=1}^{\infty} e_j''$. Имеются следующие возможности:

1. e' и e'' обе конечны. Тогда $A\{\sum_i r_{K^*(i)}\}=0$ и $x=\sigma+\mu a(\varrho-\tau)$, т. е. $x\in\{\sigma+(m+\delta)a(\varrho-\tau)\}(m=0,\pm 1,\pm 2,\ldots;\ \delta=0$, или $\delta^*)$.

2. e' конечная, $e''\in\bar{E}$. Для того, чтобы существовала $\alpha[A^{e''}]$, e'' должна отличаться от $\bar{e}^*$ на конечную последовательность и $K^{e''}$ должно быть однократным. Тогда $\alpha[A^{e''}]=(1-\delta^*)a$, что противоречит нашему предположению для ξ.

3. e'' конечная, $e'\in\bar{E}$. По тем же самым соображениям должно быть $\alpha[A^{e'}]=\alpha[A^{e^*}]=\delta^* a$, и тогда $x=\sigma+(\mu++\delta^*)a(\varrho-\tau)$, т. е. $x\in\{\sigma+(m+\delta)a(\varrho-\tau)\}(m=0,\pm 1,\pm\pm 2,\ldots;\ \delta=0$ или $\delta^*)$.

4. e' отличается от $\{n\}$ на конечную последовательность. В таком случае $\alpha[A^{e'}]=a$, что противоречит нашему предположению для ξ.

5. e'' отличается от $\{n\}$ на конечную последовательность. Этот случай аналогичен случаю 4.

6. e', $e''\in\bar{E}$. По структуре A в этом случае предела не существует.

Таким образом доказано, что всегда $x\in\{\sigma+(m+\delta)a(\varrho--\tau)\}$ $(m=0,\pm 1,\pm 2,\ldots;\ \delta=0$ или $\delta^*)$, и тем самым теорема 1А полностью доказана.

Иллюстрацией к теореме 1А служит пример 1. Здесь $\sigma=0$, $a=6$, $\delta^*=\frac{1}{3}$, и A-областью сумм является множество

$$\{6m+\delta\}(m=0,\pm 1,\pm 2,\ldots;\ \delta=0 \text{ или } 2).$$

Теорема 1Б. *Пусть заданы* $(\overline{\varrho-\tau})^*$*-ряд* (1) *такой, что* $|S_n|<M$, *числа* σ, $a\neq 0$, $\delta^*(0<\delta^*<1)$, *и* $(\varrho-\tau)$*-последовательность* e^* *такая, что имеют места соотношения* [1]

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} S_n^{e^*}\neq\underline{\lim_{n\to\infty}} S_n^{e^*};\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} S_n^{\bar{e}^*}\neq\underline{\lim_{n\to\infty}} S_n^{\bar{e}^*}. \tag{19}$$

[1] Такая последовательность e^*, что для нее справедливы (19), найдется для каждого $(\varrho-\tau)^*$-ряда, для которого $|S_n|<M$.

Тогда найдется треугольный мультипликативный метод A такой, что имеют место (5) *и* (6).

Доказательство. Обозначим

$$\varliminf_{n\to\infty} S_n^{e^*} = S_1; \quad \varlimsup_{n\to\infty} S_n^{e^*} = S_2; \quad \varliminf_{n\to\infty} S_n^{\bar{e}^*} = \bar{S}_1; \quad \varlimsup_{n\to\infty} S_n^{\bar{e}^*} = \bar{S}_2.$$

Найдутся независимые последовательности e_1, e_2 и $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$ такие, что $e_1 \cup e_2 \subset e^*$, $\tilde{e}_1 \cup \tilde{e}_2 \subset \bar{e}^*$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{e_1} = S_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{e_2} = S_2$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{\tilde{e}_1} = \bar{S}_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{\tilde{e}_2} = \bar{S}_2$, причем $S_1 \neq S_2$ и $\tilde{S}_1 \neq \tilde{S}_2$.

Обозначим $\max\limits_{\substack{m\leqslant n \\ m\in e_1}} m = n_1$; $\max\limits_{\substack{m\leqslant n \\ m\in e_2}} m = n_2$; $\max\limits_{\substack{m\leqslant n \\ m\in \tilde{e}_1}} m = \bar{n}_1$; $\max\limits_{\substack{m\leqslant n \\ m\in \tilde{e}_2}} m = \bar{n}_2$.

Определим методы A^{e^*} и $A^{\bar{e}^*}$ следующим образом:

Если $n_1 > n_2$, то

$$a_{nn_1} = a\delta^*,$$
$$\begin{cases} a_{n\bar{n}_1} = b_n, \\ a_{n\bar{n}_2} = c_n, \end{cases}$$

где b_n и c_n определяются из системы

$$\begin{cases} b_n + c_n = a(1 - \delta^*), \\ b_n S_{\bar{n}_1} + c_n S_{\bar{n}_2} = \sigma - a\delta^* S_{n_1}. \end{cases}$$

Если $n_2 > n_1$, то

$$a_{n,\,n_2} = a\delta^*,$$
$$\begin{cases} a_{n,\bar{n}_1} = b'_n \\ a_{n,\bar{n}_2} = c'_n, \end{cases}$$

где b'_n и c'_n определяются из системы

$$b'_n + c'_n = a(1 - \delta^*),$$
$$b'_n S_{\bar{n}_1} + c'_n S_{\bar{n}_2} = \sigma - a\delta^* S_{n_2}.$$

$a_{n\nu} = 0$ для всех остальных ν, $n = 1, 2, \ldots$.

Доказательство мультипликативности метода A, а также доказательство соотношения (16) аналогичны теореме 1.

Теорема 2. *Пусть заданы* $(\varrho - \tau)^*$*-ряд* (1), *числа* $a \neq 0$, σ *и* δ_i, $\sum\limits_i |\delta_i| < \infty$, $0 < \delta_i < 1$ *и независимая* $(\varrho - \tau)$*-система последовательностей* $\{e_i\}$ *такая, что* $\bar{e} = [\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} e_i] \in E^*$, *а в случае* $|S_n| < \infty$ $S_n^{\bar{e}}$ *еще* [1] *удовлетворяет условию* (19).

Тогда существует мультипликативный треугольный метод A такой, что

$$S_A(\sum_i r_i) = \{\sigma + (m+\delta)a(\varrho-\tau)\}$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ \delta = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \delta_i,\ c_i = 0, \text{ или } 1),$$

причем

$$A\{\sum_\nu r_K{}^{e_{i(\nu)}}\} = \sigma + a\delta_i(\varrho-\tau).$$

Доказательство. Обозначим $n_i = \max\limits_{\substack{m\leqslant n \\ n\in e_i}} m$; $i_n =$ максимальный индекс i, для которого n_i определено, и определим

$$a_{nn_i} = \delta_i \ (i = 1, 2, \ldots, i_n;\ n = I + 2P, \ldots),$$

а $A^{\bar{e}}$ определим по b_n и c_n аналогично с теоремами (1A и 1B).

Так как доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1, мы его приводить не будем.

В примере 2 приведен метод A, сконструированный по теореме 2 для конечного числа чисел δ_i: $\delta_1 = \frac{1}{12}$, $\delta_2 = \frac{1}{6}$, $\delta_3 = \frac{1}{3}$.

В примере 5 теорема 2 применяется для бесконечного множества точек δ_i: $\delta_i = \frac{1}{2^{i+1}}$, $i = 1, 2, \ldots$.

Из теоремы 2 вытекает

Следствие 1. *Пусть задан $(\varrho-\tau)^*$-ряд (1), числа σ, $a \neq 0$ и δ' $(0 < \delta' \leqslant 1)$. Тогда существует треугольный мультипликативный метод A такой, что*

$$S_A(\sum_i r_i) = \{\sigma + (m+\delta)a(\varrho-\tau)\}$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ 0 < \delta < \delta').$$

Для доказательства надо только выбрать $\delta_i = \delta' \cdot \frac{1}{2^i}$, как это сделано в примере 5.

Пусть задана система последовательностей $\{e_j\}$. Пусть они упорядочены так, что имеют место неравенства

$$g_1{}^{e_j} \leqslant g_1{}^{e_{j+1}} \quad (j = 1, 2, \ldots),$$

где $g_k{}^{e_j}$, $h_k{}^{e_j}$ — индексы g_k и h_k, определенные для последовательностей e_j (см. [2], (9)). Обозначим $k(n) = \max\limits_{g_1{}^{e_k}\leqslant n} k$.

Определение 3. *Систему $\{e_i\}$ будем называть вполне зависимой, если она удовлетворяет следующим условиям:*

1. $\bigcap_{i=1}^{\infty} e_{\nu_i} \in \bar{E}$ *для каждой подпоследовательности* $\{\nu_i\}$ *последовательности* $\{i\}$.

2. $g_1^e \leqslant n$ *для каждого* e, $e = \bigcap_{i=1}^{\mu} e_i$, *где* $\nu_i < k(n)$, $\mu < n$.

Теорема 3. *Пусть заданы* $(\varrho - \tau)$*-ряд* (1), *числа* $a \neq 0$ *и* σ *и система чисел* δ_j $(0 < \delta_j < 1)$ *и вполне зависимая система* $(\varrho - \tau)$*-последовательностей* $\{e_j\}$.

Тогда существует мультипликативный треугольный метод A *такой, что*

$$S_A(\Sigma r_i) = \{\sigma + (m + \delta) a(\varrho - \tau)\}$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \ \delta = \delta_i, \ i = 1, 2, \ldots),$$

причем

$$\sum_{\nu} r_{K^e j(\nu)} = \sigma + a(\varrho - \tau)(m + \delta_j).$$

Доказательство. Сконструируем метод A в виде суммы методов A^e и $A^{\bar{e}}$, где $e = \bigcup_{i=1}^{\infty} e_i$.

Построение метода A^e следующее.

Пусть $n \in \bigcup_{j=1}^{k(n)} e_j$. Тогда существуют индексы $\nu_1, \ldots, \nu_{j(n)}$ такие, что $n \in \bigcap_{i=1}^{j(n)} e_{\nu_j}$ $(1 \leqslant j(n) \leqslant K(n))$.

Обозначим $\min\limits_{j=1,\ldots,j(n)} \delta_{\nu_j} = \delta_{n_1}$ и определим

$$a_{nn} = \delta_{n_1}.$$

Далее имеются две возможности:

1. Найдется такой индекс $p_1(n)$, что $p_1(n) \in \bigcap\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq n_1}}^{k(m)} e_i$. Тогда определим $\delta_{n_2} = \min\limits_{\substack{\nu_j = \nu_1, \ldots, \nu_{j(n)}, \\ \mu_j = 1,2,\ldots,k(n), \mu_j \neq \nu_j, \\ \mu_j, \nu_j \neq n_1}} (\delta_{\nu_j} - \delta_{n_1}, \delta_{\mu_j})$.

и

$$a_{np_1(n)} = \delta_{n_2}.$$

2. Если такого индекса $p_1(n)$ не найдется, тогда по предпо-

ложению найдется $p'_1(n)$ такой, что $p'_1(n) \in \bigcap_{\substack{j=1 \\ j\neq n_1}}^{k(n)-1} e_j$; тогда определим

$$\delta'_{n_2} = \min_{\substack{\nu_j=\nu_1,\ldots,\nu_{j(n)}, \\ \mu_j=1,2,\ldots,k(n)-1, \mu_j\neq\nu_j, \\ \mu_j,\nu_j\neq n_1}} (\delta_{\nu_j} - \delta_{n_1}, \delta_{\mu_j}),$$

и

$$a_{np'_1(n)} = \delta'_{n_2}.$$

Затем рассмотрим, существует ли $p_2(n)$ такой, что $p_2(n) \in \bigcap_{\substack{j=1 \\ j\neq n_1,n_2}}^{k(n)} e_j$ (во втором случае $p_2(n) \in \bigcap_{\substack{j=1 \\ j\neq n_1,n_2'}}^{k(n)} e_j$), определим тогда

$$\delta_{n_3} = \min_{\substack{\nu_j=\nu_1,\ldots,\nu_{j(n)}, \\ \mu_j=1,2,\ldots,k(n), \mu_j\neq\nu_j, \\ \mu_j,\nu_j\neq n_1,n_2}} (\delta_{\nu_j} - \delta_{n_1} - \delta_{n_2},\ \delta_{\mu_j} - \delta_{n_2}),$$

или соответственно

$$\delta_{n_3} = \min_{\substack{\nu_j=\nu_1,\ldots,\nu_{j(n)}, \\ \mu_j=1,2,\ldots,k(n), \mu_j\neq\nu_j, \\ \mu_j,\nu_j\neq n_1,n_2'}} (\delta_{\nu_j} - \delta_{n_1} - \delta'_{n_2},\ \delta_{\mu_j} - \delta'_{n_3},\ \delta_{k(n)}),$$

если $k(n) \neq \nu_j$, или

$$\delta_{n_3} = \min_{\substack{\nu_j=\nu_1,\ldots,\nu_{j(n)}, \\ \mu_j=1,2,\ldots,k(n), \mu_j\neq\nu_j, \\ \mu_j,\nu_j\neq n_1,n_2'}} (\delta_{\nu_j} - \delta_{n_1} - \delta'_{n_2},\ \delta_{\mu_j} - \delta'_{n_2},\ \delta_{k(n)} - \delta_{n_1})$$

если такого $p_2(n)$ не существует, то определим $p'_2(n)$, существование которого гарантировано предположением.

Таким образом $k(n)$ можно определить из величин $a^e_{n\nu}$, вообще говоря, отличных от нуля, а остальные $a^e_{n\nu}$ можно приравнять к нулю. Построение метода $A^{\bar{e}}$ аналогично тому, как было сделано в теореме 1; аналогичен и дальнейший ход доказательства.

Иллюстрацией к теореме 3 служат пример 4, где $\delta_1 = \frac{1}{12}$, $\delta_2 = \frac{1}{6}$ и $\delta_3 = \frac{1}{3}$, и пример 3, где $\{\delta_i\}$ совпадает с множеством всех рациональных чисел.

Из теорем 2 и 3 можно вывести три следствия.

Следствие 2. *Пусть заданы* $\overline{(\varrho-\tau)}^*$*-ряд* (1), *числа* $0=\delta^0<\delta'\leqslant\delta''<1$, σ *и* $a\neq 0$. *Тогда существует треугольный мультипликативный метод* A *такой, что*

$$S_A(\sum_i r_i)=\{\sigma+(m+\delta)a(\varrho-\tau)\}$$

$$(m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots;\ 0<\delta<\delta',\ \text{или}\ \delta=\delta'').$$

Следствие 3. *Пусть заданы* $(\varrho-\tau)^*$*-ряд* (1), *числа* $0<\delta^*<\delta_1<\delta_2<\ldots<\delta_k<1$, σ *и* $a\neq 0$. *Тогда существует треугольный мультипликативный метод* A *такой, что*

$$S_A(\sum_i r_i)=\{\sigma+(m+\delta)a(\varrho-\tau)\}$$

$$(m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots;\ \delta=\delta_i+\delta',\ 0\leqslant\delta'<\delta^*,\ i=0,\ 1,\ \ldots,\ k).$$

В качестве применения следствия 3 см. пример 3.

Следствие 4. *Пусть заданы* $(\varrho-\tau)$*-ряд* (1), *система чисел* $0\leqslant\delta_0<\delta_i<\delta_i^*<\delta_{i+1}<\delta_{i+1}^*<\ldots 1$, *числа* $a\neq 0$ *и* σ. *Тогда существует треугольный мультипликативный метод* A *такой, что*

$$S_A(\sum_i r_i)=\{\sigma+(m+\delta)a(\varrho-\tau)\}$$

$$(m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots;\ \delta_i\leqslant\delta<\delta_i^*).$$

Иллюстрацией к следствию 4 служит пример 7.

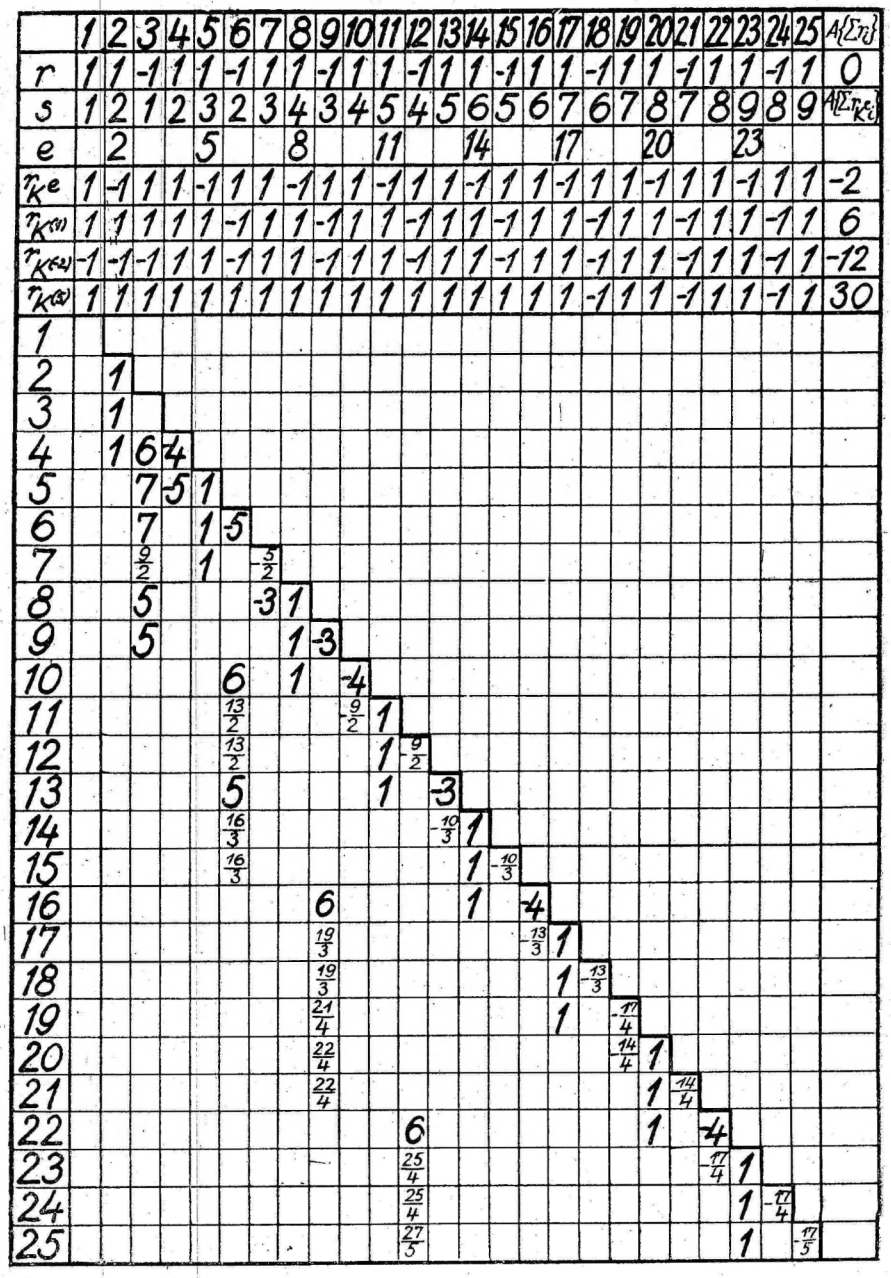
Все методы A, упомянутые в следствиях 2—4, строятся аналогично построениям теорем 1—3: путем выбора подходящих зависимых систем последовательностей $\{e_j\}$ соответственно заданным дискретным точкам $\{\delta_j\}$, а также независимых систем последовательностей $\{e'_j\}$ соответственно отрезками $\{\delta'_j,\ \delta_j^*\}$.

При помощи $(\tau-\varrho)$-последовательностей можно построить методы A, содержащие в области сумм также полуотрезки $(\delta_j,\ \delta_j^*]$, сегменты $(\delta_i,\ \delta_i^*)$, а также произвольные системы отрезков, полуотрезков и сегментов $\{(\delta_i,\ \delta_i^*),\ (\delta_j,\ \delta_j^*],\ [\delta_k,\ \delta_k^*),\ [\delta_l,\ \delta_l^*]$. На основе этих следствий можно считать доказанной следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть заданы* $(\varrho-\tau)$*-ряд* (1), *числа* $a\neq 0$, σ *и произвольная система* D, $D\subset[0,\ 1]$, *состоящая из счетного множества замкнутых и открытых отрезков. Тогда существует мультипликативный треугольный метод* A *такой, что*

$$S_A(\sum_i r_i)=\{\sigma+(m+\delta)a(\varrho-\tau)\}\quad(m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ \delta\in D).$$

Пример 1. $S_A(\sum_i r_i) = 6m + \delta$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $\delta = 0$ или -2)



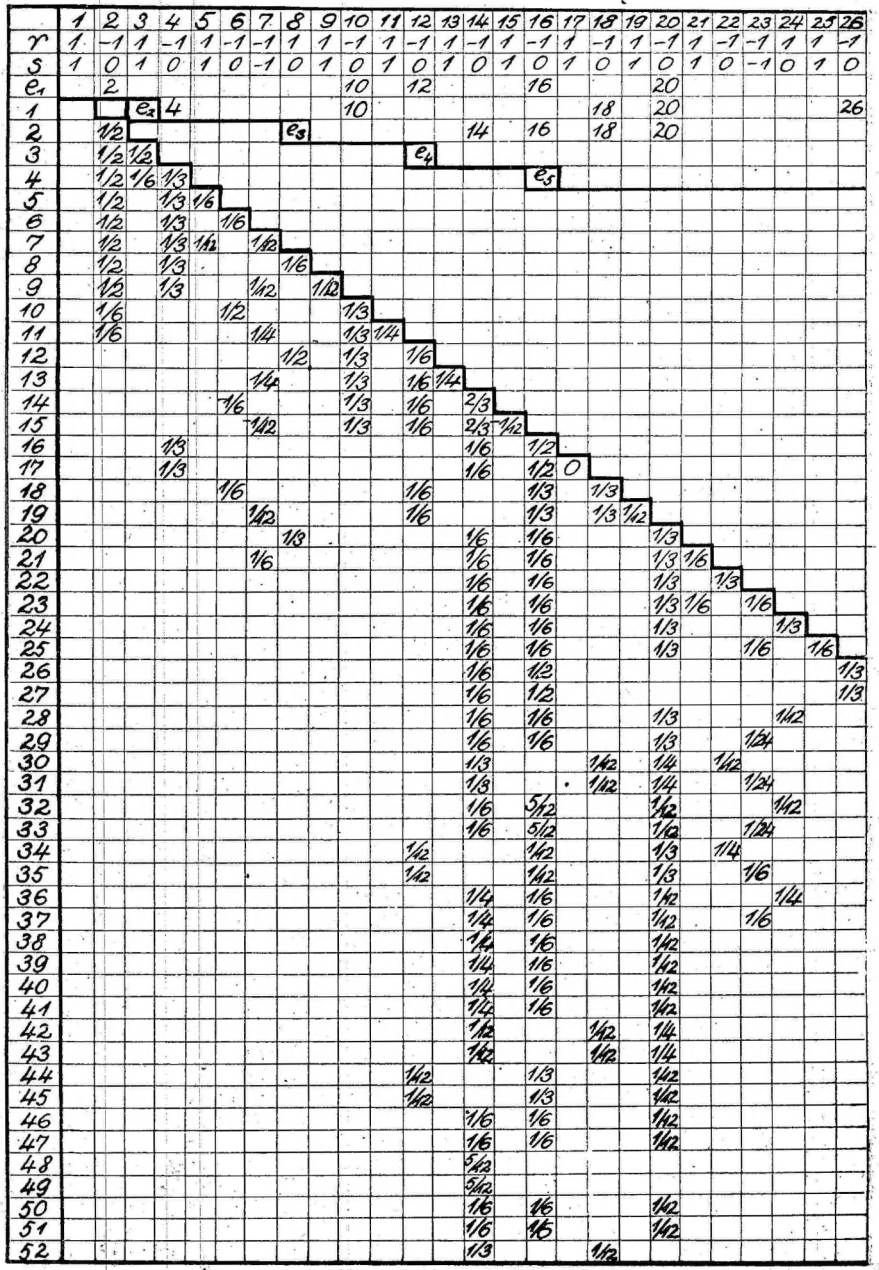
Пример 2. $S_A(\sum_i t_i) = 2m + \delta$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$

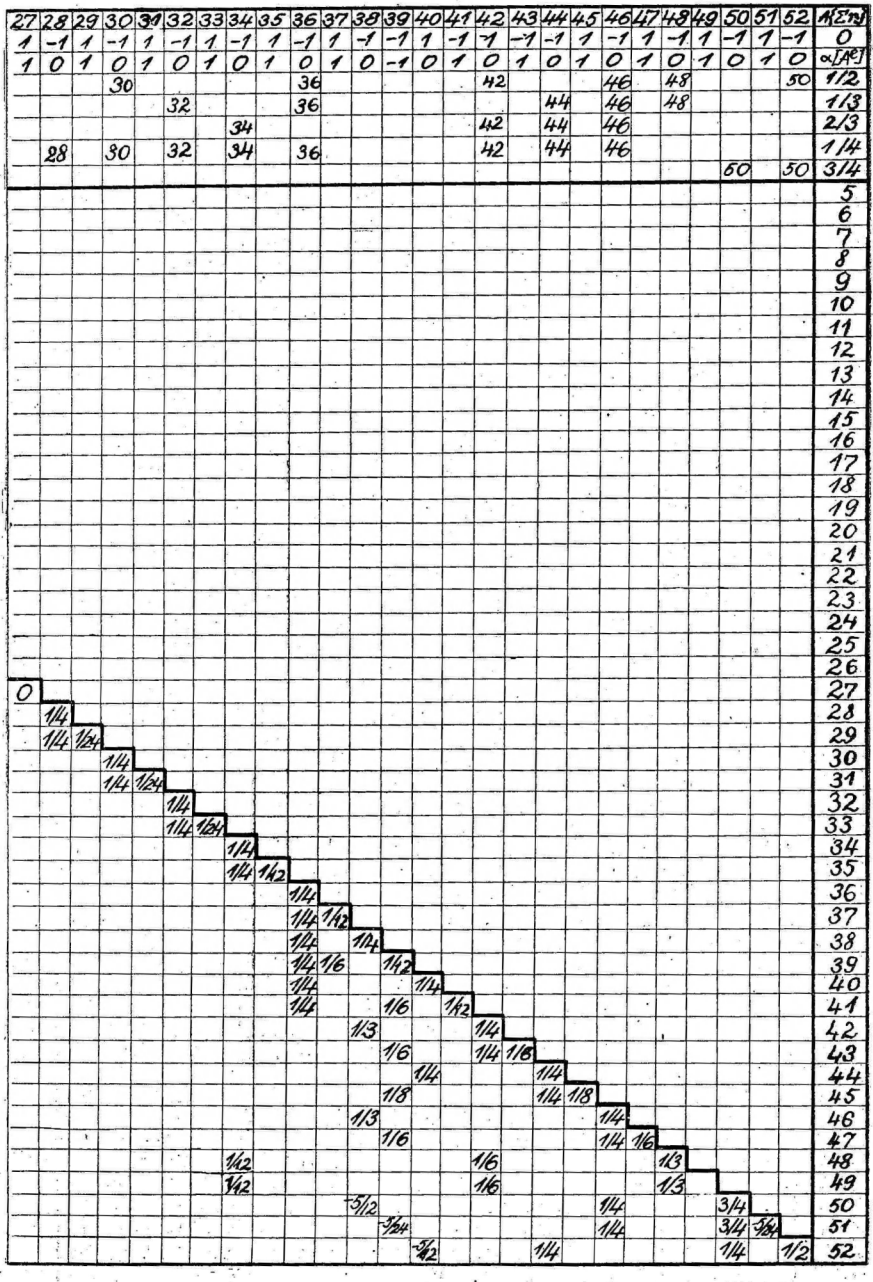
$\delta = 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1, \frac{7}{6})$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	$A[\sum t_i]$
r	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	0
s	1	2	1	0	1	2	1	0	1	2	1	0	1	2	1	0	1	2	1	0	1	2	1	0	1	$A[\sum k_i^2]$
e_1			3	4											15	16										
e_2							7	8											19	20						
e_3											11	12											23	24		
$\tau_K e_1$	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1/6
$\tau_K e_2$	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1/3
$\tau_K e_3$	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	2/3
$\tau_K e_1 e_2$	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1/2
$\tau_K e_1 e_3$	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	5/6
$\tau_K e_2 e_3$	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
$\tau_K e_1 e_2 e_3$	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	7/6

1																										
2																										
3	17/12	-1	1/12																							
4	5/6	-5/12		1/12																						
5		-1	1/12		17/12																					
6				1/12	5/6	5/12																				
7			1/12		17/12	-1	1/6																			
8				1/12	5/6	-5/12		1/6																		
9			1/12			-1	1/6		17/12																	
10				1/12				1/6	5/6	-5/12																
11			1/12				1/6		17/12	-1	1/3															
12				1/12				1/6	5/6	-5/12		1/3														
13			1/12				1/6			-1	1/3		17/12													
14				1/12				1/6				1/3	5/6	5/12												
15							1/6				1/3		17/12	-1	1/12											
16								1/6				1/3	5/6	5/12		1/12										
17							1/6				1/3			-1	1/12		17/12									
18								1/6				1/3			1/12	5/6	-5/12									
19											1/3				1/12	17/12	-1	1/6								
20												1/3			1/12	5/6	5/12		1/6							
21											1/3				1/12		-1	1/6		17/12						
22												1/3				1/12			1/6	5/6	5/12					
23															1/12				1/6		17/12	-1	1/3			
24																1/12				1/6	5/6	-5/12		1/3		
25															1/12				1/6			-1	1/3		17/12	

Пример 3. $S_A(\sum_i r_i)$ — множество всех рациональных чисел.





27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	$A[\Sigma n]$
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	-1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	$\alpha[A^e]$
			30						36						42				46		48				50	1/2
					32				36								44		46		48					1/3
							34								42		44		46							2/3
	28		30		32		34		36						42		44		46							1/4
																							50		50	3/4
																										5
																										6
																										7
																										8
																										9
																										10
																										11
																										12
																										13
																										14
																										15
																										16
																										17
																										18
																										19
																										20
																										21
																										22
																										23
																										24
																										25
																										26
0																										27
	1/4																									28
	1/4	1/24																								29
			1/4																							30
			1/4	1/24																						31
					1/4																					32
					1/4	1/24																				33
							1/4																			34
							1/4	1/12																		35
									1/4																	36
									1/4	1/12																37
									1/4		1/4															38
									1/4	1/6		1/12														39
									1/4				1/4													40
									1/4			1/6		1/12												41
											1/3				1/4											42
												1/6			1/4	1/6										43
													1/4				1/4									44
												1/8					1/4	1/8								45
											1/3								1/4							46
												1/6							1/4	1/6						47
							1/12								1/6						1/3					48
							1/12								1/6						1/3					49
											-5/12								1/4				3/4			50
												-5/24							1/4				3/4	-5/24		51
													-5/12				1/4						1/4		1/2	52

Пример 4. $S_A(\sum_i r_i) = 2m + \delta$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ \delta = 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	$A(\sum r_i)$
r	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	0
s	1	2	1	0	1	2	1	0	1	2	1	0	1	2	1	0	1	2	1	0	1	2	1	0	1	2	1	0	1	$A(\sum r_i)$
e_1			3	4							11	12							19	20							27	28		
e_2							7	8			11	12											23	24			27	28		
e_3															15	16			19	20			23	24			27	28		
$r_k e_1$	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1/6
$r_k e_2$	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1/3
$r_k e_3$	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1/3
3		-1	1/12																											
4		11/12		1/12																										
5		1	1/12		23/12																									
6				1/12	11/6	11/12																								
7			1/12		7/4	-1	1/6																							
8				1/12	3/2	3/4		1/6																						
9			1/12			-1	1/6		7/4																					
10				1/12				1/6	3/2	3/4																				
11							1/12		11/6	1	1/12																			
12								1/12	5/3	5/6		1/12																		
13							1/12			-1	1/12		11/6																	
14								1/12				1/12	5/3	5/6																
15							1/12				1/12		3/2	-1	1/3															
16								1/12				1/12	1	-1/2		1/3														
17							1/12				1/12			-1	1/3		3/2													
18								1/12				1/12				1/3	1	-1/2												
19							1/6								1/4		3/2	1	1/12											
20								1/6								1/4	1	-1/2		1/12										
21							1/6								1/4			1	1/12		3/2									
22								1/6								1/4			1/12	1	-1/2									
23															1/12				1/12		5/3	-1	1/6							
24																1/12			1/12	4/3	-2/3		1/6						
25															1/12				1/12		-1	1/6		5/3					
26																1/12			1/12			1/6	4/3	-2/3					
27															1/6							1/12		5/3	-1	1/12				
28																1/6							1/12	4/3	-2/3		1/12			
29															1/6								1/12		-1	1/12		5/3		

Пример 5. $S_A(\sum_i r_i) = 2m + \delta$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ 0 < \delta < 1)$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	$A[\Sigma r_i]$
r	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	0
s	1	0	1	0	1	0	-1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	-1	0	1	0	1	$A[\Sigma r_i]$
e_1		2								10								18								1/2
e_2				4										14												1/4
e_3												12														1/8
e_4																16										1/16
e_5																								24		1/32
$r_K e_*$	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1/2
$e_1 e_3$		2								10		12						18								5/8
$r_K e^*$	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	5/8
1	1/4																									
2		1/4																								
3		1/4	1/4																							
4		1/4		1/8																						
5		1/4		1/8	1/4																					
6		1/4		1/8		1/2																				
7		1/4		1/8	1/4		1/4																			
8		1/4		1/8				1/2																		
9		1/4		1/8			1/4		1/4																	
10				1/8		1/2				1/4																
11				1/8			1/4			1/4	1/4															
12				1/8				1/2		1/4		1/16														
13				1/8			1/4			1/4		1/16	1/4													
14						1/2				1/4		1/16		1/8												
15							1/4			1/4		1/16		1/8	1/4											
16								1/2		1/4		1/16		1/8		1/32										
17							1/4			1/4		1/16		1/8		1/32	1/4									
18						1/2						1/16		1/8		1/32		1/4								
19							1/4					1/16		1/8		1/32		1/4	1/4							
20												1/16		1/8		1/32		1/4		1/2						
21												1/16		1/8		1/32		1/4	1/4		1/4					
22												1/16		1/8		1/32		1/4				1/2				
23												1/16		1/8		1/32		1/4			1/4		1/4			
24												1/16		1/8		1/32		1/4		1/2				1/64		
25												1/16		1/8		1/32		1/4			1/4				1/4	

Пример 6. $S_A(\sum_i r_i) = 2m + \delta$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$

$\delta \in [0, \frac{1}{12}) \cup [\frac{1}{4}, \frac{5}{12}) \cup [\frac{1}{2}, \frac{7}{12}))$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	$A[\Sigma r_i]$
r	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	−1	1	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	0
s	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	−1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	$\alpha[A^e]$
e_1		2								10												22				1/4
e_2						6				10																1/3
e_3																		18				22				1/2
e_4				4												16										1/24
e_5								8																24		1/48
e_6																				20						1/96
$r_{K^{e_1}}$	1	1	−1	−1	1	−1	1	−1	1	1	−1	−1	−1	1	1	−1	1	−1	1	−1	1	1	−1	−1	1	1/4
$e^{e_2 e_4 e_5}$				4												16		18		20		22				
$r_{K^{e^*}}$	1	−1	1	1	−1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	−1	1	1	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	−1	1	31/96

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1																									
2	1/4																								
3	1/4	3/8																							
4	1/4		1/24																						
5	1/4		1/24	1/3																					
6	1/4		1/24		1/3																				
7	1/4		1/24		1/3	1/6																			
8	1/4		1/24		1/3		1/48																		
9	1/4		1/24		1/3		1/48	1/6																	
10			1/24		1/12		1/48		1/4																
11			1/24		1/12		1/48		1/4	7/24															
12			1/24		1/12		1/48		1/4		7/12														
13			1/24		1/12		1/48		1/4			7/24													
14			1/24		1/12		1/48		1/4				7/12												
15			1/24		1/12		1/48		1/4			7/24		7/24											
16					1/12		1/48		1/4		7/12					1/24									
17					1/12		1/48		1/4			7/24				1/24	7/24								
18					1/12		1/48		1/4				1/12			1/24		1/2							
19					1/12		1/48		1/4			1/24				1/24		1/2	1/24						
20					1/12		1/48		1/4		1/12					1/24		1/2		1/96					
21					1/12		1/48		1/4			1/24				1/24		1/2		1/96	1/24				
22					1/3		1/48						1/12			1/24		1/4		1/96		1/4			
23					1/3		1/48					1/24				1/24		1/4		1/96		1/4	1/24		
24					1/3						1/12					1/24		1/4		1/96		1/4		1/48	
25					1/3							1/24				1/24		1/4		1/96		1/4		1/48	1/24

Пример 7. $S_A(\sum_i r_i) = 2(m+\delta)$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$

$$2\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{3^i} < \delta < 2\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{3^i} + \frac{1}{3^k} + 1,\ i = 0, 1, 2, \ldots)$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	$A(\sum r_i)$
r	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	$=[A^0]$
s	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	-1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
e_1		2																18								$1/3^2$
e_2				4																						$1/3^2$
e_3								8																		$1/3^3$
e_4										10																$1/3^3$
e_5																				20						$1/3^4$
e_6																								24		$1/3^4$
e_7		2				6																22				$2/3$
e_8										10						16										$2/3^2$
e_9																				20						$2/3^2$
1																										
2		$\frac{1}{9}$																								
3		$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$																							
4		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{9}$																						
5		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{9}$	$\frac{7}{18}$																					
6		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{9}$		$\frac{5}{9}$																				
7		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{9}$		$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{9}$																			
8		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{9}$		$\frac{5}{9}$		$\frac{1}{27}$																		
9		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{9}$		$\frac{5}{9}$		$\frac{1}{27}$	$\frac{5}{54}$																	
10		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{9}$		$\frac{5}{9}$		$\frac{1}{27}$		$\frac{1}{27}$																
11		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{9}$		$\frac{5}{9}$		$\frac{1}{27}$		$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{27}$															
12		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{9}$		$\frac{5}{9}$		$\frac{1}{27}$		$\frac{1}{27}$		$\frac{4}{27}$														
13		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{9}$		$\frac{5}{9}$		$\frac{1}{27}$		$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{27}$		$\frac{2}{27}$													
14		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{9}$		$\frac{5}{9}$		$\frac{1}{27}$		$\frac{1}{27}$				$\frac{4}{27}$												
15		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{9}$		$\frac{5}{9}$		$\frac{1}{27}$		$\frac{1}{27}$			$\frac{2}{27}$		$\frac{2}{27}$											
16		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{9}$		$\frac{5}{9}$		$\frac{1}{27}$		$\frac{1}{27}$		$\frac{-1}{27}$				$\frac{5}{27}$										
17		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{9}$		$\frac{5}{9}$		$\frac{1}{27}$		$\frac{1}{27}$			$\frac{-1}{54}$			$\frac{5}{27}$	$\frac{-1}{54}$									
18				$\frac{1}{9}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{27}$		$\frac{1}{27}$				$\frac{-4}{27}$		$\frac{5}{27}$		$\frac{1}{9}$								
19				$\frac{1}{9}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{27}$		$\frac{1}{27}$			$\frac{-2}{27}$			$\frac{5}{27}$		$\frac{1}{9}$	$\frac{-2}{27}$							
20				$\frac{1}{9}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{27}$		$\frac{1}{27}$	$\frac{-13}{81}$					$\frac{5}{27}$		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{81}$						
21				$\frac{1}{9}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{27}$		$\frac{1}{27}$			$\frac{-13}{162}$			$\frac{5}{27}$		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{81}$	$\frac{-13}{162}$					
22				$\frac{1}{9}$				$\frac{1}{27}$		$\frac{1}{27}$				$\frac{-13}{81}$		$\frac{5}{27}$		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{81}$		$\frac{2}{3}$				
23				$\frac{1}{9}$				$\frac{1}{27}$		$\frac{1}{27}$			$\frac{-13}{162}$			$\frac{5}{27}$		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{81}$		$\frac{2}{3}$	$\frac{-13}{162}$			
24				$\frac{1}{9}$				$\frac{1}{27}$		$\frac{1}{27}$	$\frac{-14}{81}$					$\frac{5}{27}$		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{81}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{81}$		
25				$\frac{1}{9}$				$\frac{1}{27}$		$\frac{1}{27}$			$\frac{-7}{81}$			$\frac{5}{27}$		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{81}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{81}$	$\frac{-7}{81}$	

Литература

1. Тийт Э., A-области сумм некоторых суммируемых рядов. Тр. Ин-та физ. и астрон. АН ЭстССР, 1963, 20, 14—33.
2. Тийт Э., A-области сумм одного типа суммируемых рядов. Настоящий сборник, стр. 323—335.

Поступило
23 IV 1962

MÕNED UUED SUMMEERUVATE RIDADE A-SUMMADE PIIRKONNAD

E. Tiit
Matemaatilise analüüsi kateeder

Resümee

Käesolev töö on järjeks eelolevale. Siin vaadeldakse samuti multiplikatiivset menetlust A ja $(\varrho—\tau)$-ridu Σr_i, kuid rea liikmetele on esitatud veelgi rangemad
i
tingimused: alates mingist indeksist I sisaldab rida ainult liikmeid, mis võrduvad ühega konstantidest ϱ ja τ; selliseid ridu nimetame $(\overline{\varrho—\tau})$-ridadeks.

Teoreemides 1, 2 ja 3 tõestatakse konstruktiivselt selliste multiplikatiivsete menetluste olemasolu, millede puhul $S_A(\Sigma r_i)$ omandab kuju
i

$$\{\sigma+(m+\delta)a(\varrho-\tau)\}(m=0,\pm 1,\pm 2,\ldots;\ \delta\in D)$$

mitmesuguste hulkade $D\subset[0,1]$ puhul, (kirjanduses on seni olnud ainult kas $D=[0,1]$ või D on tühi hulk), ning teoreemis 4 näidatakse, et D võib olla meelevaldne loenduvast hulgast vahemikest ja lõikudest koosnev hulk lõigul $[0,1]$.

Illustratsioonina on esitatud 7 näidet mitmesuguste summade piirkondadega ridade ja menetluste kohta.

SOME NEW A-REARRANGEMENT SETS OF SUMMABLE SERIES

E. Tiit

Summary

The present paper is a continuation of the preceding article.

Here also is discussed the multiplicative method A, and $(\varrho—\tau)$-series Σr_i,
i
but the members of the series should be equal to one of two constants ϱ and τ.

In theorems 1, 2 and 3 it is constructively proved that there are such multiplicative methods A, for which $S_A(\Sigma r_i)$ has the form
i

$$\{\sigma+(m+\delta)a(\varrho-\tau)\}(m=0,\pm 1,\pm 2,\ldots;\ \delta\in D)$$

for some sets $D\subset[0,1]$ and in theorem 4 it is proved that D may be an arbitrary set which consists of numerable set open and closed intervals, $D\subset[0,1]$.

By way of illustration 7 examples are given of series with several rearrangement sets and methods.

ОБ ОБОБЩЕНИЯХ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ Э. ЛАНДАУ

С. Барон
Кафедра математического анализа

Известная в анализе теорема Э. Ландау утверждает:
Факториальный ряд

$$\Sigma \frac{n!a_n}{(x+1)\dots(x+n)} = \Sigma \frac{a_n}{A_n^x} \quad (x \neq -1, -2, \dots) \tag{1}$$

и «соответствующий» ряд Дирихле

$$\Sigma a_n (n+1)^{-x} \tag{2}$$

сходятся (абсолютно сходятся)[1] *при одних и тех же значениях x.*

Ряд Ньютона

$$\Sigma a_n \frac{(x-1)\dots(x-n)}{n!} = \Sigma (-1)^n a_n A_n^{-x} \quad (x \neq 1, 2, \dots) \tag{3}$$

и «соответствующий» ряд Дирихле

$$\Sigma (-1)^n a_n (n+1)^{-x} \tag{4}$$

сходятся (абсолютно сходятся)[2] *при одних и тех же значениях x.*

Названная теорема допускает обобщения на суммируемые ряды. Так, для метода Чезаро натурального порядка часть теоремы Э. Ландау обобщил Бор ([2], стр. 260—261), а затем Андерсен ([1], стр. 73 и 76) и для нецелого положительного порядка. Оказывается, что то же имеет место для метода взвешенных средних Рисса, удовлетворяющего некоторым условиям. Теми же доказательствами все названные результаты переносятся и на абсолютное суммирование. Кроме того, аналогичные результаты верны и для двойных рядов. Доказать это — цель настоящей заметки. Последующие простые доказательства этих обобщений

[1] См. [5], стр. 167 и 170; [4], стр. 446; [13], стр. 358.
[2] См. [5], стр. 194 и 195; [10], стр. 146—147.

основываются на теории множителей суммируемости для методов Чезаро [6—8] и взвешенных средних Рисса [9, 11, 12]. При этом сохраняем принятые в [6—9, 11, 12] обозначения, а также применяем (без ссылок на них) леммы 1 из [6, 7], формулу (1) из [6], $\Delta^a A_n^x = (-1)^a A_{n+a}^{x-a}$, формулы (56) и (58) из [7]. Последние две формулы в нашем случае имеют место и без наложенных на них в [7] ограничений (ср. [3], стр. 71). В дальнейшем всюду считаем x, y комплексными числами, порядковые числа $\alpha, \beta \geqslant 0$, $a = [\alpha]$, $b = [\beta]$.

§ 1. Простые ряды

Ряд (2) получается из ряда (1) путем умножения его членов соответственно на множители

$$g_n(x) = A_n^x (n+1)^{-x}.$$

Ряд (3) получается из ряда (4) путем умножения его членов соответственно на множители

$$g_n(-x) = (n+1)^x A_n^{-x}.$$

В дальнейшем через g_n обозначаем как $g_n(x)$, так и $g_n(-x)$.

В основе обобщения теоремы Э. Ландау на метод суммирования Чезаро лежит

Лемма 1. *Имеют место оценки*

$$\Delta^a g_n = O[(n+1)^{-a-1}], \tag{5}$$

$$\Delta^a g_n^{-1} = O[(n+1)^{-a-1}]. \tag{6}$$

Доказательство. Имеем (ср. [4], стр. 440; [5], стр. 168)

$$\Delta g_n(x) = g_n(x)\left[1 - \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-x}\right] =$$

$$= g_n(x)\left[\frac{x^2}{(n+1)^2} - \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k A_k^{x-1}\frac{1}{(n+1)^k}\right], \tag{7}$$

где для сходимости ряда можем считать $n \geqslant 1$. Далее, находим последовательно:

$$\Delta^a g_n(x) = \sum_{s=0}^{a}\binom{a}{s}\Delta^s (n+1)^{-x}\cdot\Delta^{a-s}A_{n+s}^x =$$

$$= \sum_{s=0}^{a} O(1)\,(n+1)^{-x-s}\,A_{n+a}^{x-a+s} = O[(n+1)^{-a}],$$

$$\Delta^a[g_n(n+1)^{-2}] = \sum_{s=0}^{a}\binom{a}{s}\Delta^s g_n\cdot\Delta^{a-s}(n+1+s)^{-2} =$$

$$= O[(n+1)^{-a-2}], \tag{8}$$

$$\Delta^a\Big[g_n \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k A_k^{x-1} (n+1)^{-k-p}\Big] =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k A_k^{x-1} \Delta^a \left[g_n (n+1)^{-k-p}\right] =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} |A_k^{x-1}| O\left[(n+1)^{-a-k-p}\right] = O\left[(n+1)^{a-2}\right], \qquad (9)$$

где $p = 0, 1$. Из (7), (8) и (9), ввиду $\Delta^a g_n = \Delta^{a-1}(\Delta g_n)$, в итоге выводим (5) и, следовательно, также (6), ибо

$$\Delta g_n^{-1} = -\frac{\Delta g_n}{g_n g_{n+1}} = -\frac{1}{g_{n+1}}\left[\frac{x^2}{(n+1)^2} - \right.$$

$$\left. -\left(1+\frac{x}{n+1}\right)\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k A_k^{x-1}\frac{1}{(n+1)^k}\right],$$

$$\Delta^a g_{n+1}^{-1} = \sum_{s=0}^{a}\binom{a}{s}\Delta^s (n+2)^x \cdot \Delta^{a-s}\left(A_{n+1+s}^x\right)^{-1} = O\left[(n+1)^{-a}\right].$$

Лемма 1 доказана Андерсеном ([1], стр. 68); однако мы доказали ее заново, заодно с другим рассуждением, чтобы не повторять аналогичные выкладки для двойных рядов (см. лемму 2).

Таким образом имеет место

Теорема 1. *Ряды* (1) *и* (2) *суммируемы методом* C^α (*соответственно* $|C^\alpha|$) *при одних и тех же значениях* x.

То же самое имеет место для рядов (3) *и* (4).

Доказательство. Действительно, в силу теорем 2 и 1 из статьи [6] числа g_n и g_n^{-1} являются множителями суммируемости типов (C^α, C^α) и ($|C^\alpha|$, $|C^\alpha|$), так как $g_n = O(1)$, $g_n^{-1} = O(1)$, а лемма 1 дает

$$\sum (n+1)^\alpha |\Delta^{\alpha+1} g_n| = \sum (n+1)^\alpha \sum_{k=n}^{\infty} |A_{k-n}^{a-\alpha-1}| O\left[(k+1)^{-a-2}\right] < \infty,$$

$$\Delta^\alpha g_n^{-1} = \sum_{k=n}^{\infty} A_{k-n}^{a-\alpha-1} \Delta^a g_k^{-1} = O\left[(n+1)^{-a-1}\right] = O\left[(n+1)^{-\alpha}\right].$$

Теорема Э. Ландау вытекает из теоремы 1 при $\alpha = 0$.

Далее, для метода P, т. е. для метода взвешенных средних Рисса,[3] определенного последовательностью $\{p_n\}$, получаем при помощи леммы 1 следующие теоремы.

Теорема 2. *Если метод* P *регулярен и удовлетворяет условиям*

$$\sum \left|P_n (n+1)^{-3} \frac{1}{p_n}\right| < \infty, \qquad \sum \left|P_n (n+1)^{-2} \Delta \frac{1}{p_n}\right| < \infty, \qquad (10)$$

[3] Определение метода P и условия для регулярности и сохранения абсолютной сходимости см. [11], стр. 193 и 196.

то ряды (1) *и* (2) *суммируемы методом* P *при одних и тех же значениях* x.

То же самое имеет место для рядов (3) *и* (4).

Теорема 3. *Если метод* P *регулярен, сохраняет абсолютную сходимость и удовлетворяет условию*

$$P_n = O[(n+1)^2 p_n], \tag{11}$$

то ряды (1) *и* (2) *суммируемы методом* $|P|$ *при одних и тех же значениях* x.

То же самое имеет место для рядов (3) *и* (4).

Доказательство. Теоремы 2 и 3 непосредственно вытекают из следствия 2 теоремы 15 статьи [11], следствий теорем 16 и 17 статьи [11], формулы (58) статьи [11], показывающей, что условия (10) влекут за собой условие (11), и леммы 1.

Замечания. 1) Условие (11) не является тривиальным, ибо метод P, для которого $p_{2k} = 1$ и $p_{2k+1} = (k+1)^{-2}$, являясь регулярным и сохраняющим абсолютную сходимость, условию (11) не удовлетворяет.

2) Из условия (11) и даже из условия

$$P_n = O[(n+1)^{\varepsilon} p_n] \quad \text{при } 1 < \varepsilon < 2 \tag{12}$$

не следует второе из условий (10), так как регулярный и сохраняющий абсолютную сходимость метод P с $p_{2k} = 1$ и $p_{2k+1} = (k+1)^{1-\varepsilon}$ удовлетворяет условию (12) и не удовлетворяет второму условию из (10).

Что касается первого из условий (10), то оно, являясь очевидным следствием условия (12), не вытекает из условия (11), ибо регулярный метод P при $p_{2k} = (k+1)^{-1}$ и $p_{2k+1} = (k+1)^{-2} \ln(k+2)$ удовлетворяет условию (11), но не удовлетворяет первому условию из (10).

3) Условиям теорем 2 и 3 удовлетворяет, например, любой метод P, определенный при $s \geqslant -1$ одной из последовательностей $p_n = (n+1)^s$, $p_n = \frac{1}{n+2} \ln^s (n+2)$ или $p_n = \frac{1}{(n+2)\ln(n+2)} \ln^s \ln(n+2)$, так как, например, в случае последнего p_n имеем (ср. [2], стр. 248; [3], стр. 4, 70 и 83)

$$\left| \Delta \frac{1}{p_n} \right| = \left| \int_n^{n+1} \{(x+2) \ln(x+2) \ln^{-s} \ln(x+2)\}' dx \right| =$$

$$= \int_n^{n+1} O(x^{\eta}) dx = O[(n+1)^{\eta}]$$

для любого $\eta > 0$.

4) Кроме того, условиям теорем 2 и 3 удовлетворяет любой метод P при неубывающих неограниченных $p_n > 0$, ибо тогда

$$P_n \leqslant (n+1) p_n, \quad \Sigma \left| P_n (n+1)^{-2} \Delta \frac{1}{p_n} \right| = \Sigma O[(k+1)^{-2}] < \infty.$$

§ 2. Двойные ряды

В случае двойных рядов рассматриваем ряды Дирихле

$$\sum_{m,\,n} a_{mn}\,(m+1)^{-x}\,(n+1)^{-y}, \tag{13}$$

$$\sum_{m,\,n} a_{mn}\,(m+n+1)^{-x}, \tag{14}$$

$$\sum_{m,\,n} (-1)^{m+n} a_{mn}\,(m+1)^{-x}\,(n+1)^{-y}, \tag{15}$$

$$\sum_{m,\,n} (-1)^{m+n} a_{mn}\,(m+n+1)^{-x}, \tag{16}$$

факториальные ряды

$$\sum_{m,\,n} \frac{a_{mn}}{A_m^x A_n^y} \quad (x, y \neq -1, -2, \ldots), \tag{17}$$

$$\sum_{m,\,n} \frac{a_{mn}}{A_{m+n}^x} \quad (x \neq -1, -2, \ldots), \tag{18}$$

и ряды Ньютона

$$\sum_{m,\,n} (-1)^{m+n} a_{mn}\; A_m^{-x} A_n^{-y} \quad (x, y \neq 1, 2, \ldots), \tag{19}$$

$$\sum_{m,\,n} (-1)^{m+n} a_{mn} A_{m+n}^{-x} \quad (x \neq 1, 2, \ldots). \tag{20}$$

Для методов Чезаро из теорем 2 и 1 статьи [7], теоремы 4 статьи [8] и леммы 1 непосредственно вытекает

Теорема 4. *Двойные ряды* (17) *и* (13) *суммируемы методом* $C_b^{\alpha,\beta}$ *(соответственно* $C_r^{\alpha,\beta}$ *или* $C_l^{\alpha,\beta}$*) при одних и тех же значениях* x, y.

То же самое имеет место для рядов (19) *и* (15).

Для факторизируемого метода P взвешенных средних Рисса (см. [12]), определенного двойной последовательностью $\{p_{mn}\} = \{p_m p'_n\}$, из теоремы 8 статьи [9] и теоремы 6 статьи [12] при помощи леммы 1 заключаем следующие теоремы.

Теорема 5. *Если метод* P *имеет регулярные факторы* [4], *удовлетворяющие условиям* (10), *то ряды* (17) *и* (13) *суммируемы методом* P_b *(соответственно* P_r*) при одних и тех же значениях* x, y.

То же самое имеет место для рядов (19) *и* (15).

Теорема 6. *Если метод* P *имеет регулярные факторы, сохраняющие абсолютную сходимость и удовлетворяющие условию* (11), *то ряды* (17) *и* (13) *суммируемы методом* P_l *при одних и тех же значениях* x, y.

[4] Фактор метода суммирования двойных рядов называем регулярным, если он — регулярный метод суммирования простых рядов.

То же самое имеет место для рядов (19) *и* (15).

Для того, чтобы вывести аналогичные теоремы для рядов (14), (16), (18) и (20), нам нужна

Лемма 2. *Имеют место оценки*

$$\Delta_{mn}^{\alpha\beta} g_{m+n} = O[(m+n+1)^{-\alpha-\beta-1}], \tag{21}$$

$$\Delta_{mn}^{\alpha\beta} g_{m+n}^{-1} = O[(m+n+1)^{-\alpha-\beta-1}]. \tag{22}$$

Доказательство. Для $m+n \geqslant 1$ из леммы 1 получаем

$$\Delta_{mn}^{a+1\,b+1} g_{m+n}(x) = \Delta_{mn}^{a+1\,b}(\Delta_n g_{m+n}) =$$

$$= \sum_{s,\,t=0}^{a+1,\,b} \binom{a+1}{s}\binom{b}{t} \Delta_{mn}^{a+1-s\;b-t} g_{m+n+s+t} \cdot$$

$$\cdot \Delta_{mn}^{st}\left[\frac{x^2}{(m+n+1)^2} - \left(1+\frac{x}{m+n+1}\right)\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k A_k^{x-1}\frac{1}{(m+n+1)^k}\right] =$$

$$= O[(m+n+1)^{-a-b-3}],$$

т. е. формулу (21) для целых α, β. Отсюда, если, например, α, β одновременно нецелые, выводим

$$\Delta_{mn}^{\alpha\beta} g_{m+n} = \sum_{k,\,l=m,\,n}^{\infty} A_{k-m}^{a-\alpha} A_{l-n}^{b-\beta} O[(m+n+1)^{-a-b-3}] =$$

$$= O[(m+n+1)^{-\alpha-\beta-1}].$$

Формула (22) доказывается аналогично.

При помощи леммы 2 из теорем 2 и 1 статьи [7] и теоремы 3 статьи [8] следует

Теорема 7. *Двойные ряды* (18) *и* (14) *суммируемы методом* $C_b^{\alpha,\beta}$ (*соответственно* $C_r^{\alpha,\beta}$ *или* $C_l^{\alpha,\beta}$) *при одних и тех же значениях* x.

То же самое имеет место для рядов (20) *и* (16).

Наконец, для факторизируемого метода P имеют место следующие предложения.

Теорема 8. *Если метод* P *имеет регулярные факторы, удовлетворяющие условиям* (10), *то ряды* (18) *и* (14) *суммируемы методом* P_b (*соответственно* P_r) *при одних и тех значениях* x, *если еще выполняются условия*

$$\sum_{m,\,n}\left|P_{mn}(m+n+1)^{-5}\frac{1}{p_{mn}}\right| < \infty,$$

$$\sum_{m,\,n}\left|P_{mn}(m+n+1)^{-3}\Delta_{mn}\frac{1}{p_{mn}}\right| < \infty,$$

$$\sum_{m,\,n}\left|P_{mn}(m+n+1)^{-4}\Delta_m\frac{1}{p_{mn}}\right|<\infty,$$

$$\sum_{m,\,n}\left|P_{mn}(m+n+1)^{-4}\Delta_n\frac{1}{p_{mn}}\right|<\infty.$$

То же самое имеет место для рядов (20) *и* (16).

Теорема 9. *Если метод* P *имеет регулярные факторы, сохраняющие абсолютную сходимость и удовлетворяющие условию* (1.1), *то ряды* (18) *и* (14) *суммируемы методом* P_l *при одних и тех же значениях* x, *если*

$$P_{mn}=O[(m+n+1)^3 p_{mn}].$$

То же самое имеет место для рядов (20) *и* (16).

Доказательство. Теорему 8 выводим из теоремы 8 статьи [9], формулы (58) статьи [11], леммы 2 и соотношения

$$\sum_{k,\,l=0}^{m-1,\,n-1}P_{kl}\Delta_{kl}\frac{\Delta_{kl}g_{m+n}}{p_{kl}}=\sum_{k,\,l=0}^{m,\,n}\Delta_{kl}g_{k+l}-\frac{P_m}{p_m}\sum_{l=0}^{n}\Delta_{ml}g_{m+l}-$$

$$-\frac{P'_n}{p'_n}\sum_{k=0}^{m}\Delta_{kn}g_{k+n}+\frac{P_{mn}}{p_{mn}}\Delta_{mn}g_{m+n},$$

ибо, например,

$$\frac{P'_n}{p'_n}\sum_{k=0}^{m}|\Delta_{kn}g_{k+n}|=\frac{P'_n}{p'_n}O(1)\sum(k+n+1)^{-3}=O(1)\frac{P'_n}{p'_n}(n+1)^{-2},$$

что по формуле (58) статьи [11] является следствием условий (10).

Теорему 9 заключаем из теоремы 6 статьи [12].

Замечание. Условиям теорем 8 и 9 удовлетворяют, например, методы P при $p_{mn}=A_m^s A_n^t$ с $\operatorname{Re}s$, $\operatorname{Re}t>-1$, $p_{mn}=(m+1)^s(n+1)^t$ с $\operatorname{Re}s$, $\operatorname{Re}t>-1$ или $s,t\geqslant-1$ и $p_{mn}=a^m b^n$ с $|a|,|b|>1$.

Литература

1. Andersen, A. F., Studier over Cesaro's Summabilitetsmetode. Kopenhagen, 1921.
2. Bohr, H., Über die Summabilität Dirichletscher Reihen. Nachr. Acad. Wiss. Göttingen. Math.-phys. Kl., 1909, 247—262.
3. Bohr, H., Bidrag til de Dirichlet'ske Rækker's Theorie. Kopenhagen, 1910.
4. Knopp, K., Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. Berlin, 1924.
5. Landau, E., Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen. Sitzungsber. math.-phys. Kl. Akad. Wiss. München, 1906, **36**, 151—218.
6. Барон С., Новые доказательства основных теорем о множителях суммируемости. Изв. АН Эст. ССР, сер. техн. и физ.-мат. наук, 1960, **9**, 47—68.

7. Барон С., Множители суммируемости для двойных рядов, суммируемых или ограниченных методом Чезаро вещественного порядка. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 91—117.
8. Барон С., Множители суммируемости и абсолютной суммируемости для двойных рядов, абсолютно суммируемых методом Чезаро. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 118—134.
9. Барон С., Множители суммируемости для двойных рядов, суммируемых или ограниченных методом взвешенных средних Рисса. Настоящий сборник, стр. 225—240.
10. Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей. Москва, 1959.
11. Кангро Г., О множителях суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1955, **37**, 191—232.
12. Кангро Г., Барон С., Множители суммируемости для двойных рядов, абсолютно суммируемых методом взвешенных средних Рисса. Настоящий сборник, стр. 155—169.
13. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II. Москва, 1951.

Поступило
16 X 1961

E. LANDAU ÜHE TEOREEMI ÜLDISTUSTEST

S. Baron
Matemaatilise analüüsi kateeder

Resümee

Käesolevas artiklis üldistatakse E. Landau tuntud teoreemi faktoriaalrea (1) (vastavalt Newtoni rea (3)) ja «temale vastavusse seatud» Dirichlet' rea (2) (vastavalt (4)) üheaegse koonduvuse kohta Cesàro või Rieszi kaalutud keskmiste menetlusega summeeruvatele ridadele. Vaadeldakse harilikke ja kahekordseid ridu. Tõestused toetuvad summeeruvustegurite teooriale.

ÜBER DIE VERALLGEMEINERUNGEN EINES SATZES VON E. LANDAU

S. Baron

Zusammenfassung

In dieser Notiz wird der bekannte Satz vom E. Landau über die gleichzeitige Konvergenz der Fakultätenreihe (1) (bzw. Binomialkoeffizientenreihe (3)) und die «zugeordnete» Dirichletschen Reihe (2) (bzw. (4)) auf Cesàrosummierbare oder mit bewichteten arithmetischen Mitteln summierbare Reihen verallgemeinert. Es werden gewöhnliche Reihen und Doppelreihen behandelt. Die Beweise beruhen auf der Theorie der Summierbarkeitsfaktoren.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Л. Кивистик
Кафедра геометрии

В статьях [9, 10] рассматривается сходимость некоторых итерационных процессов. В настоящей работе[1] при изучении сходимости этих процессов, в отличие от прежнего, прежде всего доказывается существование решения рассматриваемого уравнения, а затем — сходимость изучаемого процесса. Это позволяет получить результаты, лучшие, чем прежние.

§ 1. Вводные замечания

Пусть $P(x)$ — нелинейный оператор из вещественного гильбертова пространства H в то же пространство, дифференцируемый в смысле Фреше один или два раза. Рассматриваем решение операторного уравнения

$$P(x) = 0 \tag{1.1}$$

интерационными процессами типа

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\alpha \|P(x_n)\|^2}{(P'(x_n) y_n, P(x_n))} y_n \quad (0 < \alpha < 2), \tag{1.2}$$

где 1) $y_n = P'^*(x_n) P(x_n)$ ($P'^*(x)$ — сопряженный к $P'(x)$ линейный оператор) и 2) $y_n = P(x_n)$.

Для краткости воспользуемся в дальнейшем обозначениями

$$P_n = P(x_n), \quad P'_n = P'(x_n), \quad \eta_n = \|x^* - x_n\|,$$

где x^* — решение уравнения (1.1). Символом $S(x_0, r)$ обозначим замкнутую сферу $\|x - x_0\| \leqslant r$, а символ $[x_1, x_2]$ используем

[1] Результаты этой статьи приведены в диссертации автора «Об итерационных методах в пространстве Гильберта» (Тарту, 1960) и реферированы в автореферате (Тарту, 1961).

для обозначения отрезка, соединяющего точки x_1 и x_2 пространства H.

В дальнейшем нам полезны следующие оценки (см. [4]):

Если L — линейный самосопряженный оператор, удовлетворяющий при всех $h \in H$ условию:

$$\lambda\|h\|^2 \leqslant (Lh, h) \leqslant \mu\|h\|^2, \quad \lambda > 0,$$

то

$$\|Lh\|^2\|h\|^2 \leqslant \frac{(\lambda+\mu)^2}{4\lambda\mu}\,(Lh, h)^2 \tag{1.3}$$

и

$$\|h\|^4 \leqslant (Lh, h)\,(L^{-1}h, h) \leqslant \frac{(\lambda+\mu)^2}{4\lambda\mu}\,\|h\|^4. \tag{1.4}$$

Нам также нужна формула Тейлора для операторов с остаточным членом в форме Лагранжа. Известно, что в обычном смысле такая формула не имеет места [2] (см. напр. [5], стр. 54; [7], стр. 207). Отметим, что если $P(x)$ — n раз дифференцируемый в смысле Фреше оператор в H, то формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа справедлива в следующем виде (ср. [5, 8]):

$$(P(x+\Delta x), u_0) = (P(x) + P'(x)\Delta x + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\,P^{(n-1)}(x)\Delta x^{n-1} + \frac{1}{n!}\,P^{(n)}(x+\tau\Delta x)\Delta x^n, u_0), \tag{1.5}$$

где u_0 $(u_0 \neq 0)$ — произвольный, но фиксированный элемент пространства H и $0 < \tau < 1$, $\tau = \tau(u_0)$.

Если взять $u_0 = P(x+\Delta x)$, то следует отсюда неравенство

$$\|P(x+\Delta x)\| \leqslant \|P(x) + P'(x)\Delta x + \ldots + \frac{1}{n!}\,P^{(n)}(x+\tau\Delta x)\Delta x^n\|. \tag{1.6}$$

Мы будем выводить из (1.6) и другие нам нужные неравенства, выбирая для этого u_0 подходящим способом. Важно только подчеркнуть, что в качестве u_0 нельзя взять выражение, содержащее член $\frac{1}{n!}\,P^{(n)}(x+\tau\Delta x)\Delta x^n$, так как τ зависит от фиксированного элемента u_0.

В дополнение к теоремам единственности решения, приведенным в [9] (теоремы 7 и 8), мы докажем еще две аналогичные теоремы.

Теорема 1.1. *Если*

1° *для всех* $x \in S(x_0, r)$ *и* $h \in H$

$$\|P'(x)h\| \geqslant B^{-1}\|h\| \quad (B > 0) \quad \text{и} \quad \|P''(x)\| \leqslant K;$$

[2] В литературе иногда ошибаются в этом вопросе. Например, применение такой неправильной формулы приводит в [12] к результатам, которые нельзя считать обоснованными.

2° $BKr < 1$,

то уравнение (1.1) *имеет в сфере* $S(x_0, r)$ *не более одного решения.*

Доказательство. Предположим, что в сфере $S(x_0, r)$ находится по крайней мере два разных решений x^* и x^{**}. Используя формулу Тейлора (1.5), получаем

$$0 = (P(x^{**}) - P(x^*),\ P'(x^*)(x^{**} - x^*)) = \|P'(x^*)(x^{**} - x^*)\|^2 + \left(\frac{1}{2}P''(x)(x^{**} - x^*)^2,\ P'(x^*)(x^{**} - x^*)\right),$$

где $x \in [x^*, x^{**}] \subset S(x_0, r)$, откуда, в силу условий теоремы,

$$B^{-1}\|x^{**} - x^*\| \leqslant \|P'(x^*)(x^{**} - x^*)\| \leqslant \frac{1}{2}K\|x^{**} - x^*\|^2$$

или $\|x^{**} - x^*\| \geqslant \frac{2}{KB} > 2r$. Полученное неравенство противоречит предположению, что x^* и x^{**} принадлежат сфере $S(x_0, r)$.

Теорема 1.2. *Если*

1° $\|P'(x_0)h\| \geqslant B_0^{-1}\|h\|$ *для всех* $h \in H$ $(B_0 > 0)$;

2° $\|P''(x)\| \leqslant K$ *для всех* $x \in S(x_0, r)$;

3° $B_0Kr < \frac{1}{2}$,

то уравнение (1.1) *имеет в сфере* $S(x_0, r)$ *не более одного решения.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.1.

В заключение этого параграфа приведем еще два соотношения, которые вытекают из (1.2):

$$\|P_n + P_n'(x_{n+1} - x_n)\|^2 = \left[1 - 2\alpha + \alpha^2\frac{\|P_n' y_n\|^2\|P_n\|^2}{(P_n' y_n, P_n)^2}\right]\|P_n\|^2, \tag{1.7}$$

$$\eta^2{}_{n+1} = \eta_n{}^2 - \frac{2\alpha\|P_n\|^2}{(P_n' y_n, P_n)}(x_n - x^*, y_n) + \frac{\alpha^2\|P_n\|^4\|y_n\|^2}{(P_n' y_n, P_n)^2}. \tag{1.8}$$

§ 2. Сходимость итерационных процессов (1.2)

2.1. Если в (1.2) взять $y_n = P'^*(x_n)P(x_n)$, то получим итерационную формулу:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\alpha\|P(x_n)\|^2}{\|P'^*(x_n)P(x_n)\|^2}P'^*(x_n)P(x_n), \tag{2.1}$$

а если взять $y_n = P(x_n)$, то формулу —

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\alpha\|P(x_n)\|^2}{(P'(x_n)P(x_n),\ P(x_n))}P(x_n). \tag{2.2}$$

Эти процессы рассмотрены уже в статье [3] [10] и в случаях $\alpha = \frac{1}{2}$ и $\alpha = 1$ в работах [1—3, 12]. В настоящей работе ранние результаты улучшаются или исправляются [4].

Прежде всего можно несколько расширить условия теоремы 1 из [10]. Именно, в предложении, что оператор $P(x)$ дважды дифференцируем, имеет место

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия:*

1° $\|P(x_0)\| \leqslant \delta_0$;

2° *для всех* $x \in S(x_0, r)$ *и* $h \in H$

а) $\|P'^*(x)h\| \geqslant B^{-1}\|h\|$ $(B > 0)$,

б) $\|P'(x)\| \leqslant A$,

в) $\|P''(x)\| \leqslant K$;

3° *постоянные* $a_0 = B^2K\delta_0$ *и* $b = AB$ *удовлетворяют неравенствам*

$$\alpha\left[\frac{(b^2+1)^2}{4b^2} + a_0 - \frac{1}{4}\alpha^2 a_0^2\right] < 2,\ \alpha^2 a_0 < 2;$$

4° $r \geqslant r_0 = \frac{\alpha B\delta_0}{1-q}$, *где* $q = \left[\frac{\alpha^2(b^2+1)^2}{4b^2} - 2\alpha + 1\right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\alpha^2 a_0$.

Тогда уравнение (1.1) *имеет в сфере* $S(x_0, r_0)$ *решение* x^*, *к которому сходится последовательность* $\{x_n\}$, *вычисленная по формуле* (2.1), *причем*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \frac{\alpha B}{1-q}\|P(x_n)\| \leqslant \frac{\alpha B\delta_0}{1-q}q^n.$$

Доказательство. Очевидно, что $x_0 \in S(x_0, r)$. Предположим, что уже вычисленные элементы $x_0, x_1, \ldots, x_n$ принадлежат сфере $S(x_0, r)$, и докажем, что тогда и $x_{n+1} \in S(x_0, r)$.

Так как $P'(x)P'^*(x)$ — самосопряженный оператор, то, в силу (1.3) и условий 2° а), б), для всех $x \in S(x_0, r)$

$$\frac{\|P'(x)P'^*(x)P(x)\|^2\|P(x)\|^2}{(P'(x)P'^*(x)P(x),\ P(x))^2} \leqslant \frac{(b^2+1)^2}{4b^2}. \qquad (2.3)$$

Используя неравенство (1.6) и соотношение (1.7) (где $y_n = P'^*(x_n)P(x_n)$), находим, в силу неравенства (2.3) и условий теоремы, оценки

$$\|P_k\| \leqslant \|P_{k-1} + P'_{k-1}(x_k - x_{k-1})\| + \frac{1}{2}\|P''(\bar{x}_{k-1})(x_k - x_{k-1})^2\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\left[\alpha^2\frac{(b^2+1)^2}{4b^2} - 2\alpha + 1\right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\alpha^2B^2K\|P_{k-1}\|\right\}\|P_{k-1}\| = q_{k-1}\|P_{k-1}\|,$$

---

[3] В настоящей работе некоторые обозначения изменены; в частности, вместо $\frac{1}{\alpha}$ используется α.

[4] Ср. сноску [2].

где $k = 1, 2, \ldots, n$ и $\bar{x}_{k-1} \in [x_{k-1}, x_k] \subset S(x_0, r)$. Так как, ввиду условия 3°, $q < 1$, то, учитывая условие 1°, мы легко получаем неравенства: $q_k \leqslant q_{k-1} \leqslant q$ и $\|P_k\| \leqslant q_{k-1}\|P_{k-1}\| < \|P_{k-1}\|$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Таким образом, имеют место оценки

$$\|P_k\| \leqslant q_{k-1}\|P_{k-1}\| \leqslant q^k \delta_0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.4}$$

Используя условие 2° а) и неравенство (2.4), найдем из соотношения (2.1), что

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \frac{\alpha\|P_n\|^2}{\|P_n'^* P_n\|} \leqslant \alpha B\|P_n\| \leqslant \alpha B\delta_0 q^n. \tag{2.5}$$

Неравенство $\|x_{n+1} - x_0\| \leqslant \|x_{n+1} - x_n\| + \ldots + \|x_1 - x_0\| \leqslant$ $\leqslant \alpha B\delta_0(q^n + \ldots + q + 1) \leqslant \frac{\alpha B\delta_0}{1-q} \leqslant r$ показывает, что $x_{n+1} \in$ $\in S(x_0, r)$. Это значит, что вся последовательность $\{x_n\}$ принадлежит сфере $S(x_0, r)$. То, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к решению $x^* \in S(x_0, r)$ уравнения (1.1), а также оценка погрешности, следует в точности так же, как в теореме 1 из [10]. Теорема доказана.

Учитывая, что нижняя граница $r_0 = r_0(\alpha)$ радиуса сферы $S(x_0, r)$ является возрастающей функцией от α, причем $\lim\limits_{\alpha \to 0} r_0(\alpha) = B\delta_0$, получим, как следствие из теоремы 2.1, следующий результат (ср. [10], теорема 3):

Теорема 2.2. *Если для всех элементов x из некоторой сферы $S(x_0, r)$, где $r > B\|P(x_0)\|$, норма $\|P''(x)\|$ ограничена, а $P'(x)$ удовлетворяет условию*

$$\|P'^*(x)h\| \geqslant B^{-1}\|h\| \text{ для всех } h \in H \quad (B > 0),$$

то уравнение (1.1) имеет в сфере[5] $\|x - x_0\| \leqslant B\|P(x_0)\|$ *решение x^*. К этому решению сходится последовательность приближений x_n, вычисленных по формуле (2.1), где α — достаточно малое положительное число.*

2.2. Сходимость итерационного процесса (2.2) можно доказать и в предположении, что оператор $P(x)$ дифференцируем только один раз. В этом предположении имеет место

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия:*

1° $\|P(x_0)\| \leqslant \delta_0$;

2° *при всех $x \in S(x_0, r)$ линейный оператор $P'(x)$ непрерывен по x и имеют место оценки:*

а) $|(P'(x)h, h)| \geqslant B^{-1}\|h\|^2$ *для всех* $h \in H$ $(B > 0)$,

б) $\|P'(x)\| \leqslant A$;

---

[5] Из теоремы 2.1 непосредственно следует, что решение x^* принадлежит сфере $S(x_0, r)$, но от противного легко доказать, что, в действительности, оно принадлежит меньшей сфере $\|x - x_0\| \leqslant B\|P(x_0)\|$.

3° $ab^2 = \alpha A^2 B^2 < 2$;

4° $r \geqslant r_0 = \frac{\alpha B \delta_0}{1-q}$, где $q = \left[1 - \frac{\alpha}{b}(2 - \alpha b^2)\right]^{\frac{1}{2}}$.

Тогда уравнение (1.1) *имеет в сфере* $\|x - x_0\| \leqslant B\delta_0$ *решение* x^*, *к которому сходится последовательность* $\{x_n\}$, *вычисленная по формуле* (2.2), *причем*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant B\|P(x_n)\| \leqslant B\delta_0 q^n. \qquad (2.6)$$

Доказательство. Элемент x_0 принадлежит сфере $S(x_0, r)$. Предположим, что известна принадлежность элементов $x_0, x_1, \ldots, x_n$ сфере $S(x_0, r)$. Соотношение (2.2) и неравенство (1.6) при $x = x_{k-1}$, $\Delta x = x_k - x_{k-1}$ и $n = 1$ влекут за собой оценку

$$\|P_k\|^2 \leqslant \|P_{k-1} + P'(\bar{x}_{k-1})(x_k - x_{k-1})\|^2 = \|P_{k-1}\|^2 -$$

$$- 2\alpha\|P_{k-1}\|^2 \frac{(P'(\bar{x}_{k-1})P_{k-1}, P_{k-1})}{(P'_{k-1}P_{k-1}, P_{k-1})} + \alpha^2 \frac{\|P_{k-1}\|^4 \|P'(\bar{x}_{k-1})P_{k-1}\|^2}{(P'_{k-1}P_{k-1}, P_{k-1})^2},$$

где $\bar{x}_{k-1} \in [x_{k-1}, x_k] \subset S(x_0, r)$ и $k = 1, 2, \ldots, n$. Так как, в силу непрерывности $P'(x)$ и условия 2° а), скалярные произведения $(P'(x_{k-1})h, h)$ и $(P'(\bar{x}_{k-1})h, h)$ одного знака, то вытекают отсюда оценки $\|P_k\| \leqslant q\|P_{k-1}\| \leqslant q^k \delta_0$, где $k = 1, 2, \ldots, n$. В дальнейшем доказательство совпадает с доказательством теоремы 2.1, а оценки (2.6) следуют из неравенства

$$\|P(x_n)\|\|x^* - x_n\| \geqslant |(P(x^*) - P(x_n),\ x^* - x_n)| =$$
$$= |(P'(\bar{x}_n)(x^* - x_n),\ x^* - x_n)| \geqslant B^{-1}\|x^* - x_n\|^2,$$

где $\bar{x}_n \in [x^*, x_n]$.

Нижняя граница $r_0 = r_0(\alpha)$ радиуса сферы $S(x_0, r)$ является и в данном случае возрастающей функцией, причем $\lim r_0(\alpha) = bB\delta_0$. Таким образом, имеет место результат, аналогичный теореме 2.2:

Теорема 2.4. *Если для всех элементов* x *из некоторой сферы* $S(x_0, r)$, *где* $r > AB^2\|P(x_0)\|$, *оператор* $P'(x)$ *непрерывен по* x *и*

$$|(P'(x)h, h)| \geqslant B^{-1}\|h\|^2 \text{ для всех } h \in H \ (B > 0),$$
$$\|P'(x)\| \leqslant A,$$

то уравнение (1.1) *имеет в сфере* $\|x - x_0\| \leqslant B\|P(x_0)\|$ *решение* x^*. *К этому решению сходится последовательность* $\{x_n\}$, *вычисленная по формуле* (2.2), *где* α — *достаточно малое положительное число.*

Теоремы 2.2 и 2.4 аналогичны результатам, полученным М. К. Гавуриным в [6] для непреревных аналогов итерационных процессов.

§ 3. Другой способ доказательства теорем сходимости

3.1. Ниже мы докажем сходимость процессов (2.1) и (2.2) путем, отличным от прежнего. Это позволяет получить теоремы сходимости, которые часто практически легче применимы, чем теоремы 2.1 или 2.3.

Предполагая оператор $P(x)$ дважды дифференцируемым, мы в настоящем пункте докажем некоторые теоремы сходимости для процесса (2.1).

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия*:

1° $\|P(x_0)\| \leqslant \delta_0$;

2° *для всех* $x \in S(x_0, r)$ *и* $h \in H$

а) $|(P'(x)h, h)| \geqslant B^{-1}\|h\|^2 \quad (B > 0)$,

б) $\|P'(x)\| \leqslant A$,

в) $\|P''(x)\| \leqslant K$;

3° $a_0 = B^2K\delta_0 < 2 - \alpha$;

4° $r \geqslant r_0 = (1 + q)B\delta_0$,

где $q = \left[1 - \frac{\alpha}{b^2}(2 - \alpha - a_0)\right]^{\frac{1}{2}}, \quad b = AB.$

Тогда уравнение (1.1) *имеет в сфере* $\|x - x_0\| \leqslant B\delta_0$ *одно и только одно решение* x^*, *к которому сходится последовательность* $\{x_n\}$, *вычисленная по формуле* (2.1), *причем*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant B\|P(x_n)\|, \quad \|x^* - x_n\| \leqslant B\delta_0 q^n.$$

Доказательство. Так как $\|P'^*(x)h\|\,\|h\| \geqslant |(P'(x)h, h)| \geqslant B^{-1}\|h\|^2$, то, в силу теоремы 2.2, уравнение (1.1) имеет в сфере $\|x - x_0\| \leqslant B\|P_0\|$ решение x^*. Единственность решения x^* в этой сфере следует из теоремы 8 статьи [9]. Покажем, что последовательность $\{x_n\}$, вычисленная по (2.1), сходится к x^*.

Из вышесказанного следует, что

$$\eta_0 \leqslant B\|P_0\| \leqslant B\delta_0. \tag{3.1}$$

Используя соотношение $(P'^*_n P_n, \quad x_n - x^*) = \|P_n\|^2 + \frac{1}{2}(P''(\bar{x}_n)(x^* - x_n)^2, P_n)$ (где $\bar{x}_n \in [x^*, x_n]$), имеющее место в силу формулы Тейлора (1.5), и учитывая, что в данном случае $y_n = P'^*_n P_n$, мы получаем из (1.8) неравенство

$$\eta^2_{n+1} \leqslant \eta_n^2 \left\{1 - \alpha\left[(2 - \alpha)\left(\frac{\|P_n\|}{\eta_n}\right)^2 - \|P''(\bar{x}_n)\|\,\|P_n\|\right]\frac{\|P_n\|^2}{\|P_n'^* P_n\|^2}\right\}. \tag{3.2}$$

Возьмем здесь $n = 0$. Так как тогда, в силу условия 3°, выражение в квадратных скобках положительно и является возрастающей функцией от $\|P_0\|$, то из (3.2) вытекает

$$\eta_1^2 \leqslant \left\{1 - \frac{\alpha}{b^2}[2 - \alpha - BK\eta_0]\right\}\eta_0^2 \leqslant q^2\eta_0^2. \tag{3.3}$$

Оценки 2° мы использовали только в точках отрезка $[x^*, x_0]$. В дальнейшем эти оценки нам нужны на отрезках $[x^*, x_1]$, $[x^*, x_2]$, ... Покажем, что $S(x^*, \eta_1) \subset S(x_0, r_0)$. Действительно, пусть $x \in S(x^*, \eta_1)$; тогда $\|x - x_0\| \leqslant \|x - x^*\| + \|x^* - x_0\| \leqslant \eta_1 + \eta_0 \leqslant (1+q)\eta_0 \leqslant r_0$, что и требовалось доказать. Поскольку $[x^*, x_1] \subset S(x^*, \eta_1) \subset S(x_0, r_0) \subset S(x_0, r)$, то на этом отрезке имеют место оценки 2°. Используя последнее обстоятельство, находим, как и раньше, что

$$\eta_2^2 \leqslant \left\{1 - \frac{\alpha}{b^2}[2 - \alpha - BK\eta_1]\right\}\eta_1^2 \leqslant q^2\eta_1^2.$$

Так как, в силу условия 3°, $q < 1$, то отсюда следует включение $S(x^*, \eta_2) \subset S(x^*, \eta_1)$, и, следовательно, $[x^*, x_2] \subset S(x_0, r)$.

Дальше методом полной индукции для всех $n = 1, 2, \ldots$ установим соотношения

$$\eta_n \leqslant q\eta_{n-1} \leqslant q^n\eta_0.$$

В силу последних неравенств, последовательность $\{x_n\}$ сходится к решению x^* уравнения (1.1). Учитывая неравенство (3.1), получаем отсюда и априорные оценки. Апостериорные оценки следуют из неравенств:

$$\|P(x_n)\|\,\|x^* - x_n\| \geqslant |(P(x^*) - P(x_n), x^* - x_n)| = \\ = |(P'(\bar{x}_n)(x^* - x_n), x^* - x_n)| \geqslant B^{-1}\|x^* - x_n\|^2,$$

где $\bar{x}_n \in [x^*, x_n]$. Теорема доказана.

Заменяем условия 2° а), б) практически легче проверяемыми условиями. Тогда имеет место

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия:*

1° $\|P(x_0)\| \leqslant \delta_0$;

2° $|(P'(x_0)h, h)| \geqslant B_0^{-1}\|h\|^2$ *для всех* $h \in H$ $(B_0 > 0)$;

3° $\|P'(x_0)\| \leqslant A_0$;

4° $\|P''(x)\| \leqslant K$ *для всех* $x \in S(x_0, r)$;

5° $a_0 \leqslant \frac{4(2-\alpha)}{(4-\alpha)^2}$ и $a_0 < \frac{(2-\alpha)[2-\alpha+2(3-\alpha)s_0]}{2[2-\alpha+(3-\alpha)s_0]^2}$.

где $a_0 = B_0^2K\delta_0$, $b_0 = A_0B_0$ *и*

$$s_0 = \left\{1 - \frac{\alpha}{2b_0^2}[(2-\alpha)(1+\sqrt{1-2a_0}) - (4-\alpha)a_0]\right\}^{\frac{1}{2}};$$

6° $r \geqslant r_0 = \frac{2(1+s_0)B_0\delta_0}{1+\sqrt{1-2a_0}}$.

Тогда уравнение (1.1) *имеет в сфере* $\|x - x_0\| \leqslant \frac{r_0}{1+s_0}$ *одно и только одно решение* x^*, *к которому сходится последовательность* $\{x_n\}$, *вычисленная по формуле* (2.1), *и справедливы оценки*

$$\|x^* - x_0\| \leqslant \frac{2B_0\delta_0}{1+\sqrt{1-2a_0}}, \quad \|x^* - x_n\| \leqslant \frac{B_0\|P(x_n)\|}{(1+s_0)\sqrt{1-2a_0}-s_0}. \quad (3.4)$$

Доказательство. Поскольку из условия 2° вытекает существование линейного обратного оператора $[P'(x_0)]^{-1}$, а также оценка $\|[P'(x_0)]^{-1}\| \leqslant B_0$, то, в силу теоремы Л. В. Канторовича о сходимости метода Ньютона (см. [8]), уравнение (1.1) имеет в сфере $\|x - x_0\| \leqslant \frac{r_0}{1+s_0}$ в точности одно решение x^*. Докажем, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к этому решению.

Из формулы (1.5) следует тождество

$$0 = (P(x_0), x^* - x_0) + (P'(x_0)(x^* - x_0), x^* - x_0) + \\ + \frac{1}{2}(P''(\bar{x}_0)(x^* - x_0)^2, x^* - x_0),$$

где $\bar{x}_0 \in [x^*, x_0]$, откуда выводим неравенство $B_0^{-1}\eta_0 \leqslant \|P_0\| + \frac{1}{2}K\eta_0^2$, или

$$\eta_0 \leqslant \frac{2B_0\|P_0\|}{1+\sqrt{1-2B_0^2K\|P_0\|}} \leqslant \frac{2B_0\delta_0}{1+\sqrt{1-2a_0}}. \quad (3.5)$$

Из (3.2) следует теперь оценка

$$\eta_1^2 \leqslant \eta_0^2\left\{1 - \frac{\alpha}{4b_0^2}[(2-\alpha)(1+\sqrt{1-2a_0})^2 - 4a_0]\right\} = \eta_0^2 s_0^2.$$

Так как, в силу первого неравенства условия 5°, $s_0 \leqslant 1$, то $\eta_1 \leqslant s_0\eta_0 \leqslant \eta_0$. Учитывая соотношение $S(x^*, \eta_1) \subset S(x_0, r)$, для всех $x \in S(x^*, \eta_1)$ получаем

$$|(P'(x)h, h)| \geqslant B_0^{-1}[1 - (1+s_0)B_0K\eta_0]\|h\|^2 \geqslant \\ \geqslant B_0^{-1}[(1+s_0)\sqrt{1-2a_0} - s_0]\|h\|^2 \quad (3.6)$$

и

$$\|P'(x)\| \leqslant A_0\left[1 + \frac{(1+s_0)(1-\sqrt{1-2a_0})}{b_0}\right]. \quad (3.7)$$

Дальше применим идею доказательства теоремы 3.1, принимая

$$B = \frac{B_0}{(1+s_0)\sqrt{1-2a_0}-s_0} \quad \text{и} \quad A = A_0\left[1 + \frac{(1+s_0)(1-\sqrt{1-2a_0})}{b_0}\right].$$

Используя оценку

$$\|P_1\| \geqslant \frac{1}{B}\eta_1 = \frac{(1+s_0)\sqrt{1-2a_0}-s_0}{B_0}\eta_1,$$

а также неравенства $\eta_1 \leqslant s_0 \eta_0$ и (3.5) и учитывая, что выражение в квадратных скобках правой части неравенства (3.2) является, в силу 5°, при $n = 1$ возрастающей функцией от $\|P_n\|$, выводим оценку

$$\eta_2^2 \leqslant \eta_1^2 \left\{1 - \frac{\alpha}{A^2 B_0^2}\left[(2-\alpha)\left((1+s_0)\sqrt{1-2a_0} - s_0\right)^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left((1+s_0)\sqrt{1-2a_0} - s_0\right) s_0 \left(1 - \sqrt{1-2a_0}\right)\right]\right\} = q_0^2 \eta_1^2. \quad (3.8)$$

Так как, в силу второго неравенства условия 5°, $q_0 < 1$, то $\eta_2 < \eta_1$. Отсюда следует, что $S(x^*, \eta_2) \subset S(x^*, \eta_1) \subset S(x_0, r)$. Таким образом, в сфере $S(x^*, \eta_2)$ имеют место оценки (3.6), (3.7), и норму $\|P''(x)\|$ можно по-прежнему оценить числом K.

Теперь методом полной индукции уже нетрудно показать, что для всех n

$$\eta_{n+1} \leqslant q_0 \eta_n \leqslant q_0^n \eta_1,$$

где q_0 определено соотношением (3.8). Отсюда следует, что $\lim x_n = x^*$.

Оценки погрешностей следуют из неравенств (3.5) и

$$\eta_n \leqslant B\|P(x_n)\| = \frac{B_0\|P(x_n)\|}{(1+s_0)\sqrt{1-2a_0} - s_0}.$$

Теорема доказана.

Примечание 3.1. Теорема 3.2 остается в силе и ее условия упрощаются (но обращаются в несколько более строгие), если s_0 заменить единицей. Тогда условие 3° отпадает, а условия 5° заменяются одним условием:

$$a_0 = B_0^2 K \delta_0 < \frac{(2-\alpha)(8-3\alpha)}{2(5-2\alpha)^2}.$$

В этом случае можно взять

$$r = \frac{4(5-2\alpha)}{8-3\alpha} B_0 \delta_0.$$

Если условие 2° а) теоремы 3.1 и условие 2° теоремы 3.2 заменить несколько более слабыми условиями, то имеют место теоремы, аналогичные этим теоремам:

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия:*

1° $\|P(x_0)\| \leqslant \delta_0$;

2° *для всех* $x \in S(x_0, r)$ *и* $h \in H$ *имеют место оценки*

а) $\|P'(x)h\| \geqslant B^{-1}\|h\|$ и $\|P'^*(x)h\| \geqslant B^{-1}\|h\|$ $(B > 0)$,

б) $\|P'(x)\| \leqslant A$,

в) $\|P''(x)\| \leqslant K$;

3° $a_0 = B^2 K \delta_0 < \frac{4(2-\alpha)}{(4-\alpha)^2}$;

4° $r \geqslant r_0 = \dfrac{2(1+q)B\delta_0}{1+\sqrt{1-2a_0}}$, где

$$q = \left\{1 - \frac{\alpha}{2b^2}\left[(2-\alpha)\left(1+\sqrt{1-2a_0}\right) - (4-\alpha)a_0\right]\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad b = AB.$$

Тогда уравнение (1.1) *имеет в сфере* $\|x - x_0\| \leqslant B\delta_0$ *в точности одно решение* x^*, *к которому сходится последовательность* $\{x_n\}$, *вычисленная по формуле* (2.1), *причем*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \frac{2B\|P(x_n)\|}{1+\sqrt{1-2B^2K\|P(x_n)\|}}.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1. Существование решения следует из теоремы 2.2, его единственность из теоремы 1.1. Оценки погрешностей получаются из неравенства

$$\|P(x_n)\| \geqslant \|P'(x_n)(x^* - x_n)\| - \frac{1}{2}\|P''(\bar{x}_n)(x^* - x_n)^2\|$$

($\bar{x}_n \in [x^*, x_n]$), которое следует из (1.5).

Теорема 3.4. *Пусть выполнены условия:*

1° $\|P(x_0)\| \leqslant \delta_0$;

2° *для всех* $h \in H$

$$\|P'(x_0)h\| \geqslant B_0^{-1}\|h\| \quad \text{и} \quad \|P'^*(x_0)h\| \geqslant B_0^{-1}\|h\| \quad (B_0 > 0);$$

3° $\|P'(x_0)\| \leqslant A_0$;

4° $\|P''(x)\| \leqslant K$ *для всех* $x \in S(x_0, r)$;

5° $a_0 \leqslant \dfrac{4(2-\alpha)}{(4-\alpha)^2}$ *и* $a_0 < \dfrac{2(2-\alpha)[2-\alpha+(8-3\alpha)s_0]}{[2(2-\alpha)+(8-3\alpha)s_0]^2}$,

где $a_0 = B_0^2K\delta_0$, $b_0 = A_0B_0$ *и*

$$s_0 = \left\{1 - \frac{\alpha}{2b_0^2}\left[(2-\alpha)\left(1+\sqrt{1-2a_0}\right) - (4-\alpha)a_0\right]\right\}^{\frac{1}{2}};$$

6° $r \geqslant r_0 = \dfrac{2(1+s_0)B_0\delta_0}{1+\sqrt{1-2a_0}}$.

Тогда уравнение (1.1) *имеет в сфере* $\|x - x_0\| \leqslant \dfrac{r_0}{1+s_0}$ *одно и только одно решение* x^*, *к которому сходится последовательность* $\{x_n\}$, *вычисленная по формуле* (2.1), *причем*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \frac{2B_0\|P(x_n)\|}{(2+3s_0)\sqrt{1-2a_0} - 3s_0}.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.2.

Примечание 3.2. Теорема 3.4 остается в силе и ее

условия упрощаются, если s_0 заменить единицей. Тогда условие 3° отпадает, а условия 5° заменяются условием:

$$a_0 = B_0^2 K\delta_0 < \frac{4(2-\alpha)(5-2\alpha)}{(12-5\alpha)^2}.$$

В этом случае можно взять

$$r = \frac{12-5\alpha}{5-2\alpha}\, B_0\delta_0.$$

3.2. Пусть теперь $P(x) = Lx - y$, где L — линейный ограниченный оператор, а y — заданный элемент пространства H. Тогда $P'(x) = L$ и для решения уравнения

$$P(x) \equiv Lx - y = 0, \tag{3.9}$$

вместо (2.1), можем написать формулу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\alpha\|P(x_n)\|^2}{\|L^*P(x_n)\|^2}\, L^*P(x_n). \tag{3.10}$$

В данном случае имеет место соотношение

$$\eta^2{}_{n+1} = \eta_n{}^2 - \alpha(2-\alpha)\,\frac{(L^*L(x^*-x_n),\ x^*-x_n)^2}{\|L^*L(x^*-x_n\|^2}, \tag{3.11}$$

которое следует из (1.8) и тождеств: $P(x_n) = -[P(x^*) - P(x_n)] = -L(x^*-x_n)$, $\|P_n\|^2 = (L^*P_n,\ x_n - x^*)$. Учитывая, что L^*L — самосопряженный оператор, и применяя при оценке правой части равенства (3.11) неравенство (1.4), выводим следующий результат:

Теорема 3.5. *Если линейный ограниченный оператор L удовлетворяет при всех $h \in H$ условиям*

$$\|Lh\| \geqslant B^{-1}\|h\| \text{ и } \|L^*h\| \geqslant B^{-1}\|h\| \quad (0 < B < \infty),$$

то последовательность $\{x_n\}$, вычисленная по формуле (3.10), *сходится к решению x^* уравнения* (3.9), *и справедливы оценки погрешности*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant B\|P(x_n)\|,\ \|x^* - x_n\| \leqslant B\|P(x_0)\|q^n, \tag{3.12}$$

где $q = \left[1 - \frac{4\alpha(2-\alpha)b^2}{(b^2+1)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$ *и* $b = B\|L\|$.

При $\alpha = 1$ аналогичный результат получен В. М. Фридманом [11].

3.3. В настоящем пункте рассмотрим итерационный процесс (2.2), предполагая, что оператор $P(x)$ дважды дифференцируем и линейный оператор $P'(x)$ — самосопряжен[6] при всех x из некоторой сферы.

[6] Последнее требование равносильно требованию, чтобы оператор $P(x)$ был потенциален (см. [5], теорема 5.1).

Предположим еще, что существуют обратные операторы $\Gamma_n = \Gamma(x_n) = [P'(x_n)]^{-1}$. Тогда из (1.5) вытекает тождество

$$(x_n - x^*,\ P_n) = (P_n,\ \Gamma_n P_n) + \frac{1}{2}(P''(\bar{x}_n)(x^* - x_n)^2,\ \Gamma_n P_n),$$

где $\bar{x}_n \in [x^*, x_n]$. Используя последнее соотношение и неравенство (1.4), мы получаем из (1.8)

$$\eta_{n+1}^2 \leqslant \eta_n^2 - \alpha(2-\alpha)\frac{\|P_n\|^2(\Gamma_n P_n,\ P_n)}{(P_n'P_n,\ P_n)} -$$

$$- \frac{\alpha\|P_n\|^2}{(P_n'P_n,\ P_n)}(P''(\bar{x}_n)(x^* - x_n)^2,\ \Gamma_n P_n). \qquad (3.13)$$

Теорема 3.6. *Пусть выполнены условия*:

1° $\|P(x_0)\| \leqslant \delta_0$;

2° *для всех* $x \in S(x_0, r)$ *оператор* $P'(x)$ *самосопряжен и имеют место оценки*

а) $|(P'(x)h,\ h)| \geqslant B^{-1}\|h\|^2$ *для всех* $h \in H$ $(B > 0)$,

б) $\|P'(x)\| \leqslant A$,

в) $\|P''(x)\| \leqslant K$;

3° $(b+1)a_0 < 2(2-\alpha)\sqrt{b}$, *где* $b = AB$, $a_0 = B^2K\delta_0$;

4° $r \geqslant r_0 = (1+q)B\delta_0$,

где $q = \left\{1 - \frac{\alpha}{b^2}\left[(2-\alpha)\frac{2\sqrt{b}}{b+1} - a_0\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$.

Тогда уравнение (1.1) *имеет в сфере* $\|x - x_0\| \leqslant B\delta_0$ *одно и только одно решение* x^*, *к которому сходится последовательность* $\{x_n\}$, *вычисленная по формуле* (2.2), *причем*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant B\|P(x_n)\| \leqslant B\delta_0 q^n.$$

Доказательство. Существование и единственность решения x^* в сфере $S(x_0, B\delta_0)$ устанавливаются таким же образом, как в теореме 3.1. И в остальном доказательство похоже на доказательство теоремы 3.1. Для того, чтобы получить оценку, аналогичную оценке (3.3), воспользуемся обстоятельством, что, в силу 2° а), существует обратный оператор $\Gamma(x) = [P'(x)]^{-1}$ для всех $x \in S(x_0, r)$, причем $(P'(x)h, h)$ и $(\Gamma(x)h, h)$ одного знака. Из (3.13) следует

$$\eta_1^2 \leqslant \eta_0^2 - \alpha[(2-\alpha)|(\Gamma(x_0)P_0,\ P_0)| -$$

$$- K\eta_0^2\|\Gamma(x_0)P_0\|]\frac{\|P_0\|^2}{|(P_0'P_0,\ P_0)|}.$$

Так как, в силу 2°, для всех $x \in S(x_0, r)$ и $h \in H$

$$B\|h\|^2 \geqslant |(\Gamma(x)h,\ h)| \geqslant A^{-1}\|h\|^2,$$

то, применяя при оценке $|(\Gamma(x_0)P_0, P_0)|$ неравенство (1.3), а также неравенство $\eta_0 \leqslant B\|P_0\|$, получаем

$$\eta_1^2 \leqslant \eta_0^2 \left\{1 - \frac{\alpha}{A}\left[(2-\alpha)\frac{2\sqrt{AB}}{AB+1}\frac{\|P_0\|}{\eta_0^2} - K\right]\|\Gamma(x_0)P_0\|\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \eta_0^2 \left\{1 - \frac{\alpha}{b^2}\left[(2-\alpha)\frac{2\sqrt{b}}{b+1} - BK\eta_0\right]\right\} \leqslant q^2\eta_0^2.$$

В дальнейшем доказательство совпадает с доказательством теоремы 3. 1.

Теорема 3. 7. *Пусть выполнены условия*:

1° $\|P(x_0)\| \leqslant \delta_0$;

2° $|(P'(x_0)h, h)| \geqslant B_0^{-1}\|h\|^2$ *для всех* $h \in H$ $(B_0 > 0)$;

3° $\|P'(x_0)\| \leqslant A_0$;

4° *для всех* $x \in S(x_0, r)$ *оператор* $P'(x)$ *самосопряжен и* $\|P''(x)\| \leqslant K$;

5° *имеют место неравенства*:

$$a_0 \leqslant \frac{2(2-\alpha)\sqrt{b_0}(b_0+1)}{[b_0+(2-\alpha)\sqrt{b_0}+1]^2}, \quad a_0 < \frac{1+2s_0}{2(1+s_0)^2},$$

$$(b_0+1)s_0a_0 < (2-\alpha)(1+\sqrt{1-2a_0})[(1+s_0)\sqrt{1-2a_0} - s_0]^{\frac{3}{2}} \cdot$$

$$\cdot \{b_0 + 1 - [(1+s_0)\sqrt{1-2a_0} - s_0]\}^{\frac{1}{2}},$$

где $a_0 = B_0^2K\delta_0$, $b_0 = A_0B_0$ *и*

$$s_0 = \left\{1 - \frac{\alpha}{2b_0^2}\left[(2-\alpha)\frac{\sqrt{b_0}}{b_0+1}(1+\sqrt{1-2a_0})^2 - 2a_0\right]\right\}^{\frac{1}{2}};$$

6° $r \geqslant r_0 = \frac{2(1+s_0)B_0\delta_0}{1+\sqrt{1-2a_0}}$.

Тогда уравнение (1. 1) *имеет в сфере* $\|x - x_0\| \leqslant \frac{r_0}{1+s_0}$ *одно и только одно решение* x^*, *к которому сходится последовательность* $\{x_n\}$, *вычисленная по формуле* (2. 2), *и для оценки погрешности имеют место формулы* (3. 4).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3. 2.

Примечание 3. 3. Теорема 3. 7 остается в силе, если s_0 заменить единицей. Тогда условия 5° заменяются несколько более строгими, но более простыми условиями:

$$a_0 < \frac{3}{8}, \quad (b_0+1)a_0 < (2-\alpha)(1+\sqrt{1-2a_0})(2\sqrt{1-2a_0} - 1)^{\frac{3}{2}} \cdot$$

$$\cdot (b_0 + 2 - 2\sqrt{1-2a_0})^{\frac{1}{2}}.$$

В этом случае можно взять $r = \frac{8}{3}B_0\delta_0$.

3. 4. В заключении рассмотрим метод (2. 2) в случае линейного уравнения (3. 9), предполагая, как и раньше, что оператор

$P'(x) = L$ является самосопряженным или, что то же самое, $P(x)$ является потенциальным. Предположим еще, что оператор L удовлетворяет условию:

$$|(Lh, h)| \geqslant B^{-1}\|h\|^2 \text{ для всех } h \in H. \tag{3.14}$$

Мы можем, конечно, получить теорему сходимости простым следствием из предыдущих теорем, но в интересах улучшения результата используем другой путь.

По определению потенциального оператора (см. [5]) существует такой функционал $f(x)$, что его дифференциал Гато $f'(x)\Delta x$ удовлетворяет условию

$$f'(x)\Delta x = (P(x), \Delta x).$$

В силу этого

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \frac{1}{2} f''(x)\Delta x^2 =$$

$$= (P(x), \Delta x) + \frac{1}{2}(L\Delta x, \Delta x). \tag{3.15}$$

Используя соотношения (3.15), (2.2) и

$$(P_n, x^* - x_n) = -(L(x^* - x_n), x^* - x_n) = -(P_n, L^{-1}P_n), \tag{3.16}$$

а также неравенство (1.4), получаем

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n+1})}{f(x_n) - f(x^*)} = \frac{\alpha(2-\alpha)\|P_n\|^4}{(LP_n, P_n)(L^{-1}P_n, P_n)} \geqslant \alpha(2-\alpha)\frac{4b}{(b+1)^2} = c > 0,$$

где $b = B\|L\|$. Так как, в силу соотношения

$$f(x_n) - f(x^*) = \frac{1}{2}(L(x_n - x^*), x_n - x^*)$$

и условия (3.14), все разности $f(x_n) - f(x^*)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ одного знака, то отсюда следует неравенство

$$|f(x_{n+1}) - f(x^*)| \leqslant (1-c)|f(x_n) - f(x^*)|.$$

Таким образом,

$$|f(x_{n+1}) - f(x^*)| \leqslant (1-c)^{n+1}|f(x_0) - f(x^*)|.$$

Учитывая предыдущие соотношения, выводим

$$\|x_n - x^*\|^2 \leqslant 2B|f(x_n) - f(x^*)| \leqslant 2B(1-c)^n|f(x_0) - f(x^*)| =$$
$$= B(1-c)^n|(P_0, L^{-1}P_0)| \leqslant B^2(1-c)^n\|P_0\|^2.$$

Мы получили следующий результат:

Теорема 3.8. *Если L — ограниченный самосопряженный оператор, удовлетворяющий при всех $h \in H$ условию*

$$|(Lh, h)| \geqslant B^{-1}\|h\|^2 \quad (0 < B < \infty),$$

то последовательность $\{x_n\}$, *вычисленная по формуле* (2.2), *сходится к решению* x^* *уравнения* (3.9) *и имеют место оценки*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant B\|P(x_n)\|, \quad \|x^* - x_n\| \leqslant B\|P(x_0)\|q^n,$$

где $q = \left[1 - \frac{4\alpha(2-\alpha)b}{(b+1)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$ *и* $b = B\|L\|$.

Если $\alpha = 1$, то эта теорема совпадает с результатом Л. В. Канторовича о сходимости метода наискорейшего спуска (см. [8]).

Литература

1. Altman, M., On the approximate solutions of operator equations in Hilbert space. Bull. Acad. polon. sci., Cl. III, 1957, **5**, 605—609.
2. Altman, M., Concerning the approximate solutions of operator equations in Hilbert space. Bull. Acad. polon. sci., Cl. III, 1957, **5**, 711—715.
3. Altman, M., Connection between the method of steepest descent and Newton's method. Bull. Acad. polon. sci., Cl. III, 1957, **5**, 1031—1036.
4. Greub, W., Rheinholdt, W., On a generalization of an inequality of L. V. Kantorovich. Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, 407—415.
5. Вайнберг М. М., Вариационные методы исследования нелинейных операторов. Москва, 1956.
6. Гавурин М. К., Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных методов. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 5, 18—31.
7. Дубнов Я. С., Основы векторного исчисления, т. I. Москва—Ленинград, 1950.
8. Канторович Л. В., Функциональный анализ и прикладная математика. Успехи матем. наук, 1948, **3**, № 6, 89—185.
9. Кивистик Л., О методе наискорейшего спуска для решения нелинейных уравнений. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1960, **9**, 145—159.
10. Кивистик Л., О некоторых итерационных методах для решения операторных уравнений в пространстве Гильберта. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1960, **9**, 229—241.
11. Фридман В. М., Новые методы решения линейного операторного уравнения. Докл. АН СССР, 1959, **128**, 482—484.
12. Фридман В. М., Итеративный процесс с минимальными ошибками для нелинейного операторного уравнения. Докл. АН СССР, 1961, **139**, 1063—1066.

Поступило
29 XII 1961

ÜHEST ITERATSIOONIMEETODITE KLASSIST HILBERTI RUUMIS

L. Kivistik

Geomeetria kateeder

Resümee

Artiklites [9, 10] on vaadeldud mõnede iteratsioonimeetodite koonduvuse küsimust operaatorvõrrandi (1.1) ligikaudsel lahendamisel. Käesolevas töös kasutatakse nende meetodite (s. o. meetodite (2.1) ja (2.2)) koonduvusteoreemide puhul eelnevast erinevat tõestusideed, mis seisneb selles, et enne meetodi koonduvuse tõestust tõestatakse võrrandi (1.1) lahendi olemasolu. Niiviisi saadavate teoreemide praktiline kasutamine on tavaliselt lihtsam ja rakendusväli laiem kui senistel teoreemidel.

ON A CLASS OF ITERATIVE METHODS IN HILBERT SPACE

L. Kivistik

Summary

In the papers [9, 10] the convergence of some iterative methods for solving the operator equation (1.1) has been considered. The present paper is concerned with the same methods, i. e. with the methods (2.1) and (2.2), but to prove convergence theorems a new approach is used, consisting in proving the existence of the solution of the equation (1.1) before the demonstration of the convergence of an iterative method. This approach makes it possible to obtain better results than the previous one.

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ СХОДИМОСТИ ДЛЯ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ С МИНИМАЛЬНЫМИ НЕВЯЗКАМИ

Л. Кивистик
Кафедра геометрии
А. Устаал
Кружок СНО при кафедре геометрии

§ 1. Теоремы сходимости для общего случая

Пусть $P(x)$ — дважды дифференцируемый (в смысле Фреше) оператор из вещественного гильбертова пространства H в то же самое пространство H. Для решения операторного уравнения

$$P(x) = 0 \tag{1}$$

в [2] приведен общий вид одной возможной модификации итерационного процесса с минимальными невязками, выражающийся формулой

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(P(x_n), P'(x_n) y_n)}{\|P'(x_n) y_n\|^2} y_n, \tag{2}$$

где y_n — элементы пространства H. Положив в (2) $y_n = U_n P(x_n)$, где U_n — линейные операторы из H в H, мы получаем формулу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(P(x_n), P'(x_n) U_n P(x_n))}{\|P'(x_n) U_n P(x_n)\|^2} U_n P(x_n). \tag{3}$$

Частные случаи, $U_n = E$ (E — единичный оператор) и $U_n = P'^*(x_n)$ ($P'^*(x)$ — сопряженный оператор к линейному оператору $P'(x)$), рассмотрены раньше в [2] и для линейного уравнения в работе [5]. Эти случаи рассмотрим также в § 2 настоящей статьи.

Из (3) легко получаются следующие соотношения:

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \frac{\|P_n\| \, \|U_n P_n\|}{\|P'_n U_n P_n\|}, \tag{4}$$

$$\|P_n + P'_n(x_{n+1} - x_n)\|^2 = \|P_n\|^2 - \frac{(P'_n U_n P_n, P_n)^2}{\|P'_n U_n P_n\|^2}, \tag{5}$$

где обозначено

$$P_n = P(x_n) \quad \text{и} \quad P'_n = P'(x_n).$$

О сходимости итерационного процесса, определенного формулой (3), справедлива

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

1° $\|P(x_0)\| \leqslant \delta_0$, $\|U_n\| \leqslant C$ $(n = 0, 1, \ldots)$;

2° *для всех* $x \in S(x_0, r)$, $h \in H$ *и при* $n = 0, 1, \ldots$ *имеют место оценки*

а) $|(P'(x) U_n h, h)| \geqslant B^{-1}\|h\|^2$ $(B > 0)$,

б) $\|P'(x) U_n\| \leqslant A$,

в) $\|P''(x)\| \leqslant K$;

3° *постоянные* $a_0 = B^2 C^2 K \delta_0$ *и* $b = AB$ *удовлетворяют неравенствам*

$$b^2(4 - a_0)a_0 < 4, \quad a_0 < 2;$$

4° $r \geqslant r_0 = \frac{BC\delta_0}{1-q}$, *где* $q = \sqrt{1 - b^{-2}} + \frac{1}{2}a_0$.

Тогда уравнение (1) *имеет в сфере* $S(x_0, r_0)$ *решение* x^*, *к которому сходится последовательность* $\{x_n\}$, *вычисленная по формуле* (3), *причем*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \frac{B\|U_n P(x_n)\|}{1-q} \leqslant \frac{BC\delta_0 q^n}{1-q}.$$

Доказательство можно провести так же, как доказательство теоремы 2.1 из [3], используя при этом соотношения (4) и (5), или как доказательство теоремы 1 из [2], обобщением которой является данная теорема.

Примечание. Если в дополнение к условию 2° а) имеем [1]

$$|(U_n P'(x)h, h)| \geqslant \bar{B}^{-1}\|h\|^2 \quad (\bar{B} > 0)$$

для всех $x \in S(x_0, r)$ и $h \in H$, то имеет место более точная оценка погрешности:

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \bar{B}\|U_n P(x_n)\| \leqslant \bar{B}C\delta_0 q^n,$$

---

[1] Это справедливо, например, если U_n и $P'(x)$ перестановочные или самосопряженные, причем $\bar{B} = B$.

которая следует из соотношения

$$\|U_n P(x_n)\| \|x^* - x_n\| \geqslant |(U_n P(x^*) - U_n P(x_n), \quad x^* - x_n)| =$$
$$= |(U_n P'(\bar{x}_n)(x^* - x_n), x^* - x_n)| \geqslant \bar{B}^{-1}\|x^* - x_n\|^2,$$

где $\bar{x}_n \in [x^*, x_n]$.

Имеет место также следующее обобщение теоремы 2 из [2]:

Теорема 2. *Пусть выполнены условия:*

1° $\|P(x_0)\| = \delta_0 \leqslant \bar{\delta}_0, \quad \|U_n\| \leqslant C \quad (n = 0, 1, \ldots)$;

2° *для всех* $h \in H$ *и при* $n = 0, 1, \ldots$

$$|(P'(x_0) U_n h, h)| \geqslant B_0^{-1}\|h\|^2 \quad (B_0 > 0);$$

3° *для всех* $x \in S(x_0, r)$ *и при* $n = 0, 1, \ldots$

$$\|P'(x) U_n\| \leqslant A, \quad \|P''(x)\| \leqslant K; \tag{6}$$

4° *числа* $a_0 = B_0^2 C^2 K \bar{\delta}_0$ *и* $b_0 = AB_0$ *таковы, что сходится последовательность* $\{a_n\} \equiv \{B_n^2 C^2 K \bar{\delta}_n\}$, *вычисленная при помощи рекуррентных соотношений*

$$B_{k+1} = \frac{B_k}{1 - B_k^2 C^2 K \bar{\delta}_k}, \tag{7}$$

$$\bar{\delta}_{k+1} = \bar{\delta}_k \left(\sqrt{1 - (AB_k)^{-2}} + \frac{1}{2} B_k^2 C^2 K \bar{\delta}_k\right), \tag{8}$$

причем $a_n < 1$ *для всех* n;

5° $r \geqslant r_0 = \frac{1}{CK}\left(\frac{1}{B_0} - \frac{1}{B^*}\right)\frac{\delta_0}{\bar{\delta}_0}$, *где* $B^* = \lim\limits_{n\to\infty} B_n$.

Тогда уравнение (1) *имеет в сфере* $S(x_0, r)$ *решение* x^*, *к которому сходится последовательность* $\{x_n\}$, *вычисленная по формуле* (3), *причем*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \frac{1}{CK}\left(\frac{1}{B_n} - \frac{1}{B^*}\right)\frac{\delta_n}{\bar{\delta}_n}, \tag{9}$$

где $\delta_n = \|P(x_n)\|$, *а* B_n *и* $\bar{\delta}_n$ *определяются рекуррентно по формулам* (7) *и* (8).

Доказательство[2]. Так как $a_n < 1$, то $\{B_n\}$ — возрастающая последовательность; следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B^* \leqslant +\infty$. Из требования сходимости $\{a_n\}$ вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, и тем более $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{\delta}_n = 0$.

Из 3° и 5° следует выполнение условия

[2] Ср. с доказательством теорем 1 и 3 из [4].

$3^{\circ\circ}$ *для всех* $x \in S(x_0, r_0)$ *имеют место оценки* (6).

В силу условия 2°, первое приближение x_1 вычислимо. Докажем, что если x_0 заменить на x_1, то условия 1°, 2°, $3^{\circ\circ}$, 4° остаются выполненными, и, таким образом, вычислимо и следующее приближение x_2.

1) В силу условий 1°, 2° и соотношений (4), (7) заключаем

$$\|x_1 - x_0\| \leqslant B_0 C \delta_0 = \frac{1}{CK}\left(\frac{1}{B_0} - \frac{1}{B_1}\right)\frac{\delta_0}{\bar{\delta}_0} < r_0,$$

т. е. $x_1 \in S(x_0, r_0)$. Следовательно, для элементов $x \in [x_0, x_1]$ имеют место оценки (6). Пользуясь соотношением (5), получаем

$$\|P(x_1)\| \leqslant \|P(x_0) + P'(x_0)(x_1 - x_0)\| + \frac{1}{2}\|P''(\bar{x}_0)(x_1 - x_0)^2\| \leqslant$$

$$\leqslant (\sqrt{1 - b_0^{-2}} + \frac{1}{2}a_0)\|P(x_0)\|,$$

где $\bar{x}_0 \in [x_0, x_1]$. Итак,

$$\|P(x_1)\| = \delta_1 \leqslant (\sqrt{1 - b_0^{-2}} + \frac{1}{2}a_0)\delta_0 \leqslant (\sqrt{1 - b_0^{-2}} + \frac{1}{2}a_0)\bar{\delta}_0 = \bar{\delta}_1, \tag{10}$$

и условие 1° при x_1 выполнено.

2) Условие 2° также выполнено при x_1, так как

$$|(P'(x_1)U_n h, h)| \geqslant |(P'(x_0)U_n h, h)| - |(P''(\tilde{x}_0)(x_1 - x_0)U_n h, h)| \geqslant$$

$$\geqslant B_0^{-1}\|h\|^2 - B_0 C^2 K \bar{\delta}_0 \|h\|^2 =$$

$$= B_0^{-1}(1 - B_0^2 C^2 K \bar{\delta}_0)\|h\|^2 = B_1^{-1}\|h\|^2,$$

где $\tilde{x}_0 \in [x_0, x_1]$.

3) Для проверки условия $3^{\circ\circ}$ достаточно показать, что $S(x_1, r_1) \subset S(x_0, r_0)$, где $r_1 = \frac{1}{CK}\left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{B^*}\right)\frac{\delta_1}{\bar{\delta}_1}$. Пусть $x \in S(x_1, r_1)$; тогда, учитывая, что, в силу (10), $\frac{\delta_1}{\bar{\delta}_1} \leqslant \frac{\delta_0}{\bar{\delta}_0}$, получаем

$$\|x - x_0\| \leqslant \|x - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \leqslant \frac{1}{CK}\left(\frac{1}{B_1} - \frac{1}{B^*}\right)\frac{\delta_1}{\bar{\delta}_1} + B_0 C \delta_0 \leqslant r_0,$$

т. е. $x \in S(x_0, r_0)$.

4) Очевидно, что условие 4° при $a_1 = B_1^2 C^2 K \bar{\delta}_1$ и $b_1 = AB_1$ выполнено.

Мы можем, таким образом, повторить все сказанное, начиная с x_1. Методом полной индукции доказывается, что условия 1°, 2°, $3^{\circ\circ}$, 4° остаются в силе для всех x_n и процесс вычисления элементов по формуле (3) можно неограниченно продолжать. Попутно получаем неравенства

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant B_n C \delta_n = \frac{1}{CK}\left(\frac{1}{B_n} - \frac{1}{B_{n+1}}\right)\frac{\delta_n}{\bar{\delta}_n}, \qquad (11)$$

$$\delta_{n+1} \leqslant (\sqrt{1 - b_n^{-2}} + \frac{1}{2} a_n)\delta_n \leqslant (\sqrt{1 - b_n^{-2}} + \frac{1}{2} a_n)\bar{\delta}_n = \bar{\delta}_{n+1},$$

где $b_n = AB_n$,

$$|(P'(x_n)U_k h, h)| \geqslant B_n^{-1}\|h\|^2$$

и включение

$$x_{n+1} \in S(x_n, r_n) \subset S(x_{n-1}, r_{n-1}),$$

где $r_k = \frac{1}{CK}\left(\frac{1}{B_k} - \frac{1}{B^*}\right)\frac{\delta_k}{\bar{\delta}_k}$.

Остается показать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к решению уравнения (1), находящемуся в сфере $S(x_0, r_0)$. Пользуясь соотношением (11) и неравенствами $\frac{\delta_{n+k}}{\bar{\delta}_{n+k}} \leqslant \frac{\delta_n}{\bar{\delta}_n}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, выводим для всех $n = 0, 1, \ldots$ и $p = 1, 2, \ldots$ оценку

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \|x_{n+p} - x_{n+p-1}\| + \ldots + \|x_{n+1} - x_n\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{CK}\left(\frac{1}{B_n} - \frac{1}{B_{n+p}}\right)\frac{\delta_n}{\bar{\delta}_n},$$

откуда вытекает, что $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность и существует $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Переходя к пределу $p \to \infty$, получаем оценку (9). Очевидно, $x^* \in S(x_0, r_0)$. Элемент x^* есть решение уравнения (1), ибо $\|P(x^*)\| = \lim\limits_{n\to\infty}\|P(x_n)\| \leqslant \lim\limits_{n\to\infty}\bar{\delta}_n = 0$.

Теорема доказана.

Примечание. Если в дополнение к 2° выполнено условие

2°° *для всех* $h \in H$ *и при* $n = 0, 1, \ldots$

$$|(U_n P'(x_0)h, h)| \geqslant B_0^{-1}\|h\|^2,$$

то имеет место более удобная оценка погрешности

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \frac{2B_n C \delta_n}{1 + \sqrt{1 - 2a_n}} \leqslant 2B_n C \delta_n, \qquad (12)$$

где $\delta_n = \|P(x_n)\|$. Если, кроме того, $B^* < \infty$ или $\bar{\delta}_0 > \delta_0$, то уравнение (1) имеет в сфере $S(x_0, r_0)$ единственное решение.

Докажем последние утверждения. Легко видеть, что в силу 2°° получается для всех n и k оценка

$$|(U_k P'(x_n)h, h)| \geqslant B_n^{-1}\|h\|^2, \qquad (13)$$

а из формулы Тейлора [3] следует неравенство

$$|(U_n P_n, x^* - x_n)| \geqslant |(U_n P'_n(x^* - x_n),\ x^* - x_n)| - \\ - \frac{1}{2}|(U_n P''(\bar{x}_n)(x^* - x_n)^2, x^* - x_n)|,$$

где $\bar{x}_n \in [x^*, x_n]$. В силу (13) отсюда получается оценка (12). Если $B^* < \infty$ или $\bar{\delta}_0 > \delta_0$, то $B_0 C K r_0 < 1$ и для всех $x \in S(x_0, r_0)$

$$|(U_n P'(x)h, h)| \geqslant |(U_n P'(x_0)h, h)| - |(U_n P''(\bar{x}_0)(x - x_0)h, h)| \geqslant \\ \geqslant B_0^{-1}(1 - B_0 C K r_0)\|h\|^2.$$

При помощи последнего неравенства доказывается единственность решения в сфере $S(x_0, r_0)$ в точности так же, как в теореме 7 из [4].

Проверку выполнения условий теоремы 2 облегчает

Теорема 3. *Если* $a_0 b_0^2 \leqslant \frac{1}{9}$, *то условие* 4° *теоремы* 2 *выполнено.*

Доказательство приведено в статье [2].

В случае уравнения

$$P(x) \equiv Lx - y = 0, \tag{14}$$

где L — линейный ограниченный оператор, y — заданный элемент пространства H, из теоремы 1, как следствие, вытекает

Теорема 4. *Если* $\|U_n\| \leqslant C$, $\|LU_n\| \leqslant A$ *и для всех элементов* $h \in H$

$$|(LU_n h, h)| \geqslant B^{-1}\|h\|^2, \quad 0 < B < \infty,$$

то уравнение (14) *имеет решение* x^*, *к которому сходится последовательность* $\{x_n\}$, *вычисленная по формуле* (3), *причем*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \frac{BC\|P(x_n)\|}{1 - q} \leqslant \frac{BC\|P(x_0)\|}{1 - q} q^n,$$

где $q = \sqrt{1 - b^{-2}}$ *и* $b = AB$.

Если, кроме того, для всех $h \in H$

$$|(U_n Lh, h)| \geqslant \bar{B}^{-1}\|h\|^2 \quad (0 < \bar{B} < \infty),$$

то имеет место оценка

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \bar{B}C\|P(x_n)\| \leqslant \bar{B}C\|P(x_0)\|q^n.$$

---

[3] См., например, [3], формула (1.5). Там достаточно взять $x = x_n$, $\Delta x = x^* - x_n$, $u_0 = U_n^*(x^* - x_n)$ и ограничиться с тремя членами.

§ 2. Частные случаи

1. В настоящем параграфе приведем несколько теорем сходимости для частных, но в то же время важных случаев $U_n = P'^*(x_n)$ и $U_n = E$. Если U_n так выбирать, то общие теоремы, полученные в первом параграфе, удается заменить более точными, особенно при $U_n = P'^*(x_n)$. Эти случаи рассмотрены уже в [2], но к полученным там результатам прибавим еще несколько теорем сходимости, практическое применение которых обычно удобнее, чем применение теорем из [2]. Все эти теоремы доказываются тем же способом [4], как теоремы § 3 статьи [3].

В первую очередь рассмотрим случай $U_n = P'^*(x_n)$. Тогда (3) заменяется формулой

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\|P'^*(x_n)P(x_n)\|^2}{\|P'(x_n)P'^*(x_n)P(x_n)\|^2} P'^*(x_n)P(x_n). \qquad (15)$$

Предполагаем, что уравнение (1) имеет решение x^*, и обозначаем $\eta_k = \|x_k - x^*\|$. Тогда из (10) следует тождество

$$\eta^2_{n+1} = \eta_n^2 - \frac{2\|P_n'^* P_n\|^2}{\|P_n' P_n'^* P_n\|^2}(x_n - x^*,\ P_n'^* P_n) + \frac{\|P_n'^* P_n\|^6}{\|P_n' P_n'^* P_n\|^4},$$

откуда, в силу соотношений

$$(x_n - x^*,\ P_n'^* P_n) = \|P_n\|^2 + \tfrac{1}{2}(P''(\bar{x}_n)(x^* - x_n)^2,\ P_n)$$

и

$$\frac{\|P_n'^* P_n\|^6}{\|P_n' P_n'^* P_n\|^4} \leqslant \frac{\|P_n'^* P_n\|^2 \|P_n\|^2}{\|P_n' P_n'^* P_n\|^2},$$

вытекает

$$\eta^2_{n+1} \leqslant \eta_n^2 - \frac{\|P_n'^* P_n\|^2 \|P_n\|}{\|P_n' P_n'^* P_n\|^2}(\|P_n\| - \|P''(\bar{x}_n)\|\eta_n^2),$$

где $\bar{x}_n \in [x^*, x_n]$. Пользуясь последним неравенством, можно, аналогично теоремам 3.1 и 3.2 из [3], доказать следующие теоремы.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия:*

1° $\|P(x_0)\| \leqslant \delta_0$;

2° *для всех* $x \in S(x_0, r)$ *и* $h \in H$ *имеют место неравенства*

а) $\|P'(x)h\| \geqslant B^{-1}\|h\|$ *и* $\|P'^*(x)h\| \geqslant B^{-1}\|h\|$ $(B > 0)$,

б) $\|P'(x)\| \leqslant A$,

в) $\|P''(x)\| \leqslant K$;

---

[4] Этот способ доказательства применим и для общего процесса (3), но условия получаемых теорем сравнительно узки.

3° $a_0 = B^2K\delta_0 < \frac{4}{9}$;

4° $r \geqslant r_0 = \frac{2(1+q)B\delta_0}{1+\sqrt{1-2a_0}}$,

где $q = \left[1 - \frac{1}{2b^2}(1+\sqrt{1-2a_0}-3a_0)\right]^{\frac{1}{2}}$, $b = AB$.

Тогда уравнение (1) *имеет в сфере* $\|x - x_0\| \leqslant \frac{r_0}{1+q}$ *в точности одно решение* x^*, *к которому сходится последовательность* $\{x_n\}$, *вычисленная по формуле* (15), *причем*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \frac{2B\|P(x_n)\|}{1+\sqrt{1-2B^2K\|P(x_n)\|}} \leqslant \frac{2B\delta_0 q^n}{1+\sqrt{1-2a_0}}.$$

Теорема 6. *Пусть выполнены условия:*

1° $\|P(x_0)\| \leqslant \delta_0$;

2° *для всех* $h \in H$

$$\|P'(x_0)h\| \geqslant B_0^{-1}\|h\| \text{ и } \|P'^*(x_0)h\| \geqslant B_0^{-1}\|h\| \quad (B_0 > 0);$$

3° $\|P'(x_0)\| \leqslant A_0$;

4° $\|P''(x)\| \leqslant K$ *для всех* $x \in S(x_0, r)$;

5° $a_0 \leqslant \frac{4}{9}$, $a_0 < \frac{2(1+5s_0)}{(2+5s_0)^2}$, *где* $a_0 = B_0^2K\delta_0$,

$$s_0 = \left[1 - \frac{1}{2b_0^2}(1+\sqrt{1-2a_0}-3a_0)\right]^{\frac{1}{2}},\ b_0 = A_0B_0;$$

6° $r \geqslant r_0 = \frac{2(1+s_0)B_0\delta_0}{1+\sqrt{1-2a_0}}$.

Тогда уравнение (1) *имеет в сфере* $\|x - x_0\| \leqslant \frac{r_0}{1+s_0}$ *одно и только одно решение* x^*, *к которому сходится последовательность* $\{x_n\}$, *вычисленная по формуле* (15), *причем*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \frac{2B_0\|P(x_n)\|}{(2+3s_0)\sqrt{1-2a_0}-3s_0}.$$

Примечание. Теорема 6 остается в силе и ее условия упрощаются (но обращаются в несколько более узкие), если s_0 заменить единицей. Тогда условие 3° отпадает, а условия 5° заменяются условием

$$a_0 < \frac{12}{49}.$$

В этом случае можно взять

$$r = \frac{7}{3}B_0\delta_0.$$

Если иметь в виду, что в случае линейного уравнения (14)

можно при помощи условия 2° а) уточнить оценку погрешности теоремы 5, то, как следствие этой теоремы, получается [5]

Теорема 7. *Если для всех* $h \in H$

$$\|Lh\| \geqslant B^{-1}\|h\| \quad и \quad \|L^*h\| \geqslant B^{-1}\|h\| \quad (0 < B < \infty),$$

то уравнение (14) *имеет в сфере* $\|x - x_0\| \leqslant B\|P(x_0)\|$ *в точности одно решение* x^*, *к которому сходится последовательность* $\{x_n\}$, *вычисленная по формуле* (15), *и имеет место оценка*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant B\|P(x_n)\| \leqslant B\|P(x_0)\|q^n,$$

где $q = \dfrac{b^2-1}{b^2+1}$, $b = B\|L\|$.

Отметим, что в случае системы линейных алгебраических уравнений из теоремы 7 получается результаты М. А. Красносельского и С. Г. Крейна [5].

2. Пусть $U_n = E$; тогда из (3) вытекает формула

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(P(x_n),\ P'(x_n)P(x_n))}{\|P'(x_n)P(x_n)\|^2} P(x_n). \tag{16}$$

Рассмотрим случай, когда $P'(x)$ является самосопряженным оператором. Из (16) получаем тождество

$$\eta^2_{n+1} = \eta_n{}^2 - 2\frac{(P_n'P_n,\ P_n)}{\|P_n'P_n\|^2}(x_n - x^*,\ P_n) + \frac{(P_n'P_n,\ P_n)^2}{\|P_n'P_n\|^4}\|P_n\|^2. \tag{17}$$

Предполагая существования обратных операторов $\Gamma_n = [P'(x_n)]^{-1}$ и пользуясь вытекающим из формулы Тейлора соотношением

$$(x_n - x^*,\ P_n) = (P_n,\ \Gamma_n P_n) + \frac{1}{2}(P''(\bar{x}_n)(x^* - x_n)^2,\ \Gamma_n P_n),$$

где $\bar{x}_n \in [x^*, x_n]$, можем (17) переписать в виде

$$\eta^2_{n+1} = \eta_n{}^2 - 2\frac{(P_n'P_n,\ P_n)(\Gamma_n P_n,\ P_n)}{\|P_n'P_n\|^2} + \frac{(P_n'P_n,\ P_n)^2}{\|P_n'P_n\|^4}\|P_n\|^2 -$$

$$- \frac{(P_n'P_n,\ P_n)}{\|P_n'P_n\|^2}(P''(\bar{x}_n)(x^* - x_n)^2,\ \Gamma_n P_n).$$

Так как $P'(x)$ самосопряженный оператор, то (см. [1] или [3], формула (1.4))

$$\frac{(P_n'P_n,\ P_n)^2\|P_n\|^2}{\|P_n'P_n\|^4} \leqslant \frac{\|P_n\|^4}{\|P_n'P_n\|^2} \leqslant \frac{(P_n'P_n,\ P_n)(\Gamma_n P_n,\ P_n)}{\|P_n'P_n\|^2}.$$

---

[5] Эта теорема следует также из теоремы 4 статьи [2].

Используя это неравенство, найдем оценку

$$\eta^2_{n+1} \leqslant \eta_n{}^2 - \frac{(P_n' P_n, P_n)(\Gamma_n P_n, P_n)}{\|P_n' P_n\|^2} -$$

$$- \frac{(P_n' P_n, P_n)}{\|P_n' P_n\|^2} (P''(\bar{x}_n)(x^* - x_n)^2, \Gamma_n P_n). \qquad (18)$$

Теорема 8. *Пусть выполнены условия:*

$1°\ \|P(x_0)\| \leqslant \delta_0$;

$2°$ *для всех* $x \in S(x_0, r)$ *линейный оператор* $P'(x)$ *самосопряжен и имеют место оценки*

а) $|(P'(x)h, h)| \geqslant B^{-1}\|h\|^2$ *для всех* $h \in H$ $(B > 0)$,

б) $\|P'(x)\| \leqslant A$,

в) $\|P''(x)\| \leqslant K$;

$3°\ (b+1)a_0 < 2\sqrt{b}$, *где* $a_0 = B^2K\delta_0$, $b = AB$;

$4°\ r \geqslant r_0 = (1+q)B\delta_0$,

где $q = \left\{1 - \frac{2\sqrt{b}}{b^2(b+1)^2}[2\sqrt{b} - (b+1)a_0]\right\}^{\frac{1}{2}}$.

Тогда уравнение (1) *имеет в сфере* $\|x - x_0\| \leqslant B\delta_0$ *одно и только одно решение* x^*, *к которому сходится последовательность* $\{x_n\}$, *вычисленная по формуле* (16), *причем*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant B\|P(x_n)\| \leqslant B\delta_0 q^n.$$

Доказательство аналогично доказательству теорем 3.1 и 3.6 из [3]. Существование решения уравнения (1) в сфере $S(x_0, B\delta_0)$ следует из теоремы 2.2 статьи [3], а единственность из теоремы 8 статьи [4]. Неравенства

$$\eta_{n+1} \leqslant q\eta_n,$$

применяемые при доказательстве сходимости $x_n \to x^*$, получим при помощи неравенства (18) так же, как в доказательстве теоремы 3.6 из [3].

Теорема 9. *Пусть выполнены условия:*

$1°\ \|P(x_0)\| \leqslant \delta_0$;

$2°\ |(P'(x_0)h, h)| \geqslant B_0{}^{-1}\|h\|^2$ *для всех* $h \in H$ $(B_0 > 0)$;

$3°\ \|P'(x_0)\| \leqslant A_0$;

$4°$ *для всех* $x \in S(x_0, r)$ $P'(x)$ — *самосопряженный оператор, а* $P''(x)$ *удовлетворяет условию* $\|P''(x)\| \leqslant K$;

$5°$ *имеют место неравенства* $a_0 < \frac{3}{8}$ *и* $(b_0+1)a_0 < (1 + \sqrt{1-2a_0})(2\sqrt{1-2a_0} - 1)^{\frac{3}{2}}(b_0 + 2 - 2\sqrt{1-2a_0})^{\frac{1}{2}}$, *где* $a_0 = B_0{}^2K\delta_0$ *и* $b_0 = A_0B_0$;

$6°\ r \geqslant r_0 = \frac{4B_0\delta_0}{1+\sqrt{1-2a_0}}$.

Тогда уравнение (1) *имеет в сфере* $\|x - x_0\| \leqslant \frac{1}{2} r_0$ *в точности одно решение* x^*, *к которому сходится последовательность* $\{x_n\}$, *вычисленная по формуле* (16), *причем*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \frac{B_0 \|P(x_n)\|}{2\sqrt{1 - 2a_0} - 1}.$$

Примечание. Можно взять $r = \frac{8}{3} B_0 \delta_0 \geqslant r_0$.

Доказательство теоремы 9 можно провести аналогично доказательству теоремы 3.2 из [3], используя при этом неравенство (18).

В случае линейного уравнения (14) справедлива

Теорема 10. *Если для всех* $h \in H$

$$|(Lh, h)| \geqslant B^{-1} \|h\|^2 \quad (0 < B < \infty),$$

то уравнение (14) *имеет в сфере* $\|x - x_0\| \leqslant B\|P(x_0)\|$ *решение* x^*, *к которому сходится последовательность* $\{x_n\}$, *вычисленная по формуле* (16), *и имеет место оценка*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant B\|P(x_n)\| \leqslant B\|P(x_0)\| q^n,$$

где $q = \sqrt{1 - b^{-2}}$, $b = B\|L\|$.

Если L — *самосопряженный оператор, то* q *можно заменить на*

$$q' = \frac{b - 1}{b + 1}.$$

В случае симметричной матрицы этот результат получен М. А. Красносельским и С. Г. Крейном в [5]; в общем случае теорема следует из теоремы 1 в [2].

В заключение отметим, что если взять $U_n = a_n [P'(x_n)]^{-1}$, где a_n — произвольные вещественные числа, то итерационный процесс (3) превращается в метод Ньютона, сходимость которого значительно быстрее, чем сходимость рассмотренных процессов (зато применение последних не требует нахождения обратных операторов). Это приводит к мысли, что полезно выбрать U_n по возможности «близким» к $a_n [P'(x_n)]^{-1}$. Применив процессы (3) к решению некоторых систем нелинейных алгебраических уравнений, мы убедились, что довольно удовлетворительные результаты давали выборы $U_n = U$, где U — «близкий» к $a[P'(x_0)]^{-1}$ оператор.

Результаты § 1 настоящей статьи содержатся в дипломной работе А. Устаала, результаты § 2 получены раньше Л. Кивистиком.

Литература

1. Greub, W., Rheinholdt, W., On a generalization of an inequality of L. V. Kantorovich. Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, 407—415.
2. Кивистик Л. А., Об одной модификации итерационного метода с минимальными невязками для решения нелинейных операторных уравнений. Докл. АН СССР, 1961, **136**, 22—25.
3. Кивистик Л., Об одном классе итерационных процессов в гильбертовом пространстве. Настоящий сборник, стр. 365—381.
4. Кивистик Л., О методе наискорейшего спуска для решения нелинейных уравнений. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, 1960, **9**, 145—159.
5. Красносельский М. А., Крейн С. Г., Итерационный процесс с минимальными невязками. Матем. сб., 1952, **31**, 315—334.

Поступило
17 III 1962

MÕNED KOONDUVUSTEOREEMID MINIMAALSE JÄÄGI MEETODI JAOKS

L. Kivistik
Geomeetria kateeder
A. Ustaal
ÜTÜ ring geomeetria kateedri juures

Resümee

Artiklis käsitletakse mittelineaarse operaatorvõrrandi (1) lahendamist iteratsioonimeetodite abil, mis on defineeritud valemitega (3), (15) ja (16). Nende meetodite koonduvuse kohta esitatakse rida uusi teoreeme.

SOME CONVERGENCE THEOREMS FOR THE ITERATIVE METHODS WITH MINIMAL RESIDUALS

L. Kivistik and A. Ustaal

Summary

The paper deals with the iterative methods (3), (15) and (16) for solving the operator equation (1). Some new convergence theorems are presented for these methods.

ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Г. Вайникко
Кружок СНО при кафедре геометрии

§ 1. Постановка вопроса

Рассмотрим краевую задачу линейного обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{cases} P[x(s)] + Q[x(s)] = f(s), \\ U_j(x) = 0 \quad (j = 1, \ldots, n), \end{cases} \tag{1.1}$$

решение которой ищется в интервале $a \leqslant s \leqslant b$.

Предполагаем, что коэффициенты $p_i(s)$ линейного дифференциального выражения

$$P[x] \equiv \sum_{i=0}^{\nu} (p_i(s)\, x^{(i)})^{(i)} \quad (2\nu = n)$$

вещественны и i раз непрерывно дифференцируемы, причем $p_\nu(s) \neq 0$ в интервале $[a, b]$. Свободный член $f(s)$ и коэффициенты $q_i(s)$ линейного дифференциального выражения

$$Q[x] \equiv \sum_{i=0}^{l} q_i(s)\, x^{(i)} \quad (l < n)$$

предполагаем вещественными и квадратично-суммируемыми в интервале $[a, b]$. Дифференциальный оператор $\{P, U\}$, порожденный дифференциальным выражением $P[x]$ и краевыми условиями

$$U_j(x) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} \{\alpha_{ji}\, x^{(i)}(a) + \beta_{ji}\, x^{(i)}(b)\} = 0 \quad (j = 1, \ldots, n),$$

предполагаем самосопряженным.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ и $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots$ — собственные значения и собственные функции оператора $\{P, U\}$, т. е.

$$P[\varphi_k] = \lambda_k \varphi_k \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{1.2}$$

и $U_j(\varphi_k) = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$. Без ограничения общности будем считать [1]:

I $\lambda_k \neq 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$,

II $\{\varphi_k\}$ — полная ортогональная система в $L_2[a, b]$, т. е.

$$\int_a^b \varphi_k(t)\varphi_i(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k \\ \sigma_i > 0 & \text{при } i = k \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, \ldots) \qquad (1.3)$$

и каждая функция $y \in L_2[a, b]$ разлагается в сходящийся в среднем ряд

$$y(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \varphi_k(s), \quad \eta_k = \frac{1}{\sigma_k}\int_a^b y(t)\varphi_k(t)\,dt \quad (\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \eta_k^2). \qquad (1.4)$$

В настоящей статье изучается точность приближенного, по Галеркину, решения краевой задачи (1.1), если в качестве координатных функций взяты $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, ... При сделанных нами предположениях выводятся общие оценки погрешности, эффективность которых иллюстрируется применением к конкретным типам краевых задач. В § 7 выводятся аналогичные оценки погрешности для уравнений с частными производными.

В частном случае, когда $Q[x] \equiv q(s)x$ ($q(s)$ — положительная непрерывная функция) и оператор $\{P, U\}$ положительно определен, соответствующие оценки погрешности даны в [1]. Наши оценки, получаемые для этого частного случая из общих оценок погрешности, оказываются более удобными и более точными.

§ 2. Сведение метода Галеркина к интегральному уравнению

Будем искать приближенное, по Галеркину, решение краевой задачи (1.1) в виде $x_r(s) = \sum_{k=1}^{r} \xi_k \varphi_k(s)$ и потребуем, чтобы

$$\int_a^b \{P[x_r(t)] + Q[x_r(t)] - f(t)\}\varphi_i(t)\,dt = 0 \quad (i = 1, \ldots, r).$$

Учитывая (1.2) и (1.3), приходим к системе уравнений

$$\sigma_i \lambda_i \xi_i + \sum_{k=1}^{r} \xi_k \int_a^b Q[\varphi_k(t)]\varphi_i(t)\,dt = \int_a^b f(t)\varphi_i(t)\,dt \quad (i = 1, \ldots, r). \qquad (2.1)$$

[1] Если условие I не выполнено, перепишем краевую задачу (1.1) в виде $\tilde{P}[x] + \tilde{Q}[x] = f$, $U_j(x) = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$, где $\tilde{P}[x] = P[x] - \mu x$, $\tilde{Q}[x] = Q[x] + \mu x$, $\mu \neq \lambda_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Для оператора $\{\tilde{P}, U\}$ условие I уже выполнено.

Если $\xi_1^*, \ldots, \xi_r^*$ — решение системы уравнений (2. 1), то в качестве приближенного, по Галеркину, решения получаем $x_r^*(s) = \sum_{k=1}^{r} \xi_k^* \varphi_k(s)$.

Введем интегральное уравнение с вырожденным ядром:

$$y(s) + \int_a^b K_r(s,t) y(t)\,dt = f(s) \quad (y + K_r y = f), \tag{2.2}$$

где

$$K_r(s,t) = \sum_{k=1}^{r} \frac{Q[\varphi_k(s)]\varphi_k(t)}{\sigma_k \lambda_k}. \tag{2.3}$$

Очевидно, что $\int_a^b \int_a^b |K_r(s,t)|^2 ds\,dt < \infty$.

Установим связь между решением интегрального уравнения (2. 2) и приближенным, по Галеркину, решением краевой задачи (1. 1).

Теорема 1. *Приближенное, по Галеркину, решение x_r^* однозначно определяется из системы уравнений* (2. 1) *тогда и только тогда, когда интегральное уравнение* (2. 2) *имеет единственное решение y_r^* ($y_r^* \in L_2$). При этом имеют место соотношения*

$$y_r^*(s) = f(s) - Q[x_r^*(s)] \tag{2.4}$$

и

$$x_r^*(s) = \int_a^b G_r(s,t) y_r^*(t)\,dt, \tag{2.5}$$

где

$$G_r(s,t) = \sum_{k=1}^{r} \frac{\varphi_k(s)\varphi_k(t)}{\sigma_k \lambda_k}. \tag{2.6}$$

Доказательство. Решая интегральное уравнение

$$y(s) + \int_a^b \sum_{k=1}^{r} \frac{\varphi_k(s) Q[\varphi_k(t)]}{\sigma_k \lambda_k} y(t)\,dt = g(s) \quad (y + K_r^* y = g), \tag{2.7}$$

сопряженное к уравнению (2. 2), мы приходим к системе уравнений, матрицей которой является транспонированная матрица системы уравнений (2. 1). Отсюда и следует первое утверждение теоремы.

Докажем второе утверждение теоремы. Допустим, что $x_r^*(s) = \sum_{k=1}^{r} \xi_k^* \varphi_k(s)$ — приближенное, по Галеркину, решение краевой задачи (1. 1). Тогда

$$\int_a^b \{P[x_r^*(t)] + Q[x_r^*(t)] - f(t)\}\varphi_i(t)\,dt = 0 \quad (i = 1, \ldots, r).$$

Если в этих равенствах сделать, согласно (2.4), подстановку $y_r^*(t) = f(t) - Q[x_r^*(t)]$, то нам остается только убедиться, что $x_r^*(s)$ и $y_r^*(s)$ удовлетворяют соотношению (2.5) и что $y_r^*(s)$ — решение уравнения (2.2). С помощью упомянутой подстановки получаем:

$$\sigma_i \lambda_i \xi_i^* - \int_a^b \varphi_i(t) y_r^*(t)\, dt = 0 \quad (i = 1, \ldots, r).$$

Умножив эти равенства соответственно на $\frac{\varphi_i(s)}{\sigma_i \lambda_i}$ и просуммировав, мы и приходим к соотношению (2.5):

$$x_r^*(s) = \int_a^b \sum_{i=1}^r \frac{\varphi_i(s)\varphi_i(t)}{\sigma_i \lambda_i} y_r^*(t)\, dt,$$

откуда вытекает, что

$$f(s) - Q[x_r^*(s)] = f(s) - \int_a^b \sum_{i=1}^r \frac{Q[\varphi_i(s)]\varphi_i(t)}{\sigma_i \lambda_i}\, y_r^*(t)\, dt.$$

Подставив в последнем равенстве вновь $y_r^*(s) = f(s) - Q[x_r^*(s)]$, мы видим, что $y_r^*(s)$ является решением уравнения (2.2). Теорема доказана.

§ 3. Сведение краевой задачи к интегральному уравнению

Определим класс допустимых функций $\{L_2^{(n)}, U\}$, содержащий решение краевой задачи (1.1).

Обозначим через $L_2^{(i)}[a, b]$ множество функций $x(s)$, $i-1$ раз непрерывно дифференцируемых в интервале $[a, b]$, причем $x^{(i-1)}(s)$ абсолютно непрерывна и $x^{(i)} \in L_2[a, b]$. Через $\{L_2^{(n)}, U\}$ обозначим подмножество тех функций из $L_2^{(n)}[a, b]$, которые удовлетворяют краевым условиям $U_j(x) = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$.

В предположениях, сделанных нами в § 1, существует функция Грина $G(s, t)$ дифференциального оператора $\{P, U\}$. Легко убедиться, что интегральный оператор $G^{(i, 0)}$ с ядром $\frac{\partial^i G(s, t)}{\partial s^i}$ $(i = 0, \ldots, n-1;\ G^{(0, 0)} = G)$ является линейным (т. е. аддитивным и непрерывным) оператором из пространства $L_2[a, b]$ в пространство $C[a, b]$, или, короче, $G^{(i, 0)} \in [L_2 \to C]$.

Для доказательства основного результата настоящего параграфа (теоремы 2) понадобится следующая лемма.

Лемма. *Если* $y \in L_2[a, b]$, *то* $x = Gy \in \{L_2^{(n)}, U\}$, *причем*

$$x^{(i)} = G^{(i, 0)} y \quad (i = 0, \ldots, n-1), \tag{3.1}$$

$$P\left[\int_a^b G(s, t) y(t)\, dt\right] = y(s). \tag{3.2}$$

Если $x \in \{L_2^{(n)}, U\}$, *то*

$$x(s) = \int_a^b G(s,t) P[x(t)]dt. \tag{3.3}$$

Доказательство леммы легко строить, опираясь, например, на следующие факты: (3.1), (3.2) справедливы в случае непрерывной функции $y(s)$; множество непрерывных функций плотно в $L_2[a,b]$; $G^{(i,0)} \in [L_2 \to C]$ $(i = 0, \ldots, n-1)$.

Сопоставим краевой задаче (1.1) интегральное уравнение

$$y(s) + \int_a^b K(s,t) y(t)\,dt = f(s) \quad (y + Ky = f), \tag{3.4}$$

где

$$K(s,t) = Q[G(s,t)] = \sum_{i=0}^{l} q_i(s) \frac{\partial^i G(s,t)}{\partial s^i}. \tag{3.5}$$

Поскольку $q_i \in L_2[a,b]$, то $\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 ds\,dt < \infty$.

Установим связь между краевой задачей (1.1) и интегральным уравнением (3.4).

Теорема 2. *Краевая задача* (1.1) *имеет единственное решение* $x^* \in \{L_2^{(n)}, U\}$ *тогда и только тогда, когда интегральное уравнение* (3.4) *имеет единственное решение* $y^* \in L_2[a,b]$. *При этом*

$$x^*(s) = \int_a^b G(s,t) y^*(t)\,dt. \tag{3.6}$$

Доказательство. Пусть $x^* \in \{L_2^{(n)}, U\}$ — решение краевой задачи (1.1). Тогда (в смысле равенства почти везде)

$$P[x^*(s)] + Q[x^*(s)] = f(s).$$

Обозначим $y^* = P[x^*] \in L_2[a,b]$. По формуле (3.3) имеем $x^*(s) = \int_a^b G(s,t) y^*(t)\,dt$ и

$$y^*(s) + Q[\int_a^b G(s,t) y^*(t)\,dt] = f(s).$$

С учетом формул (3.1) получаем

$$y^*(s) + \int_a^b Q[G(s,t)] y^*(t)\,dt = f(s), \tag{3.7}$$

т. е. $y^* \in L_2[a,b]$ — решение интегрального уравнения (3.4). Притом y^* и x^* удовлетворяют соотношению (3.6).

Пусть теперь $y^* \in L_2[a,b]$ — (какое-нибудь) решение интегрального уравнения (3.4). Тогда имеет место равенство (3.7).

Проведя преобразования в обратном порядке, с использованием формулы (3. 2), убеждаемся, что $x^* = Gy^* \in \{L_2^{(n)}, U\}$ — решение краевой задачи (1. 1).

Соотношение (3. 6), благодаря его обратимости в соотношение $y^* = P[x^*]$, устанавливает взаимно-однозначное соответствие между решениями краевой задачи (1. 1) и решениями интегрального уравнения (3. 4). Этим и завершается доказательство теоремы.

Замечание. Рассуждениями, близкими доказательству теоремы 2, можно установить, что на краевую задачу (1. 1) распространяется альтернатива Фредгольма в следующей форме: либо краевая задача (1. 1) имеет единственное решение $x^* \in \{L_2^{(n)}, U\}$ при любом свободном члене $f \in L_2[a, b]$, либо соответствующая однородная краевая задача имеет нетривиальное решение $x \in \{L_2^{(n)}, U\}$.

§ 4. Теорема о сходимости

Докажем теорему о сходимости приближенных, по Галеркину, решений к (точному) решению краевой задачи (1. 1). В ходе доказательства теоремы выведем оценку погрешности.

Теорема 3. *Если краевая задача* (1. 1) *имеет единственное решение* $x^* \in \{L_2^{(n)}, U\}$, *то начиная с некоторого* r (а именно, с такого $r = R$, что $\|(E + K)^{-1}\| \, \|K - K_r\| < 1$ при $r \geqslant R$) *существуют приближенные, по Галеркину, решения* x_r^*. *Последовательность* $x_r^{*(i)}$ $(r = R, R + 1, \ldots)$ *сходится к* $x^{*(i)}$ *при* $i = 0, \ldots, n - 1$ *равномерно, а при* $i = n$ *в среднем.*

Доказательство. Докажем сперва, что $\lim\limits_{r \to \infty} \|K - K_r\| = 0$, после чего получим утверждения теоремы, опираясь на теоремы 1 и 2.

При каждом фиксированном $s \in [a, b]$ имеем $\dfrac{\partial^i G(s, t)}{\partial s^i} \in L_2[a, b]$ $(i = 0, \ldots, n - 1)$; в соответствии с (1. 4), (1. 2) получаем

$$\int_a^b \left| \frac{\partial^i G(s, t)}{\partial s^i} \right|^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \, |\xi_k^i(s)|^2,$$

где

$$\xi_k^i(s) = \frac{1}{\sigma_k} \int_a^b \frac{\partial^i G(s, t)}{\partial s^i} \varphi_k(t) \, dt = \frac{\varphi_k^{(i)}(s)}{\sigma_k \lambda_k}.$$

Итак,

$$\int_a^b \left| \frac{\partial^i G(s, t)}{\partial s^i} \right|^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k^{(i)}(s)|^2}{\sigma_k \lambda_k^2} \quad (i = 0, \ldots, n - 1). \tag{4. 1}$$

В силу теоремы Дини ряд (4. 1) сходится равномерно относительно s $(a \leqslant s \leqslant b)$.

С учетом (2.6) находим аналогично

$$\int_a^b \left| \frac{\partial^i G(s,t)}{\partial s^i} - \frac{\partial^i G_r(s,t)}{\partial s^i} \right|^2 dt = \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{|\varphi_k^{(i)}(s)|^2}{\sigma_k \lambda_k^2} \quad (i = 0, \ldots, n-1). \tag{4.2}$$

Из (2.3) и (3.5) следует

$$\|K - K_r\| \leqslant \sum_{i=0}^{l} \|q_i\| \sqrt{\max_{a \leqslant s \leqslant b} \int_a^b \left| \frac{\partial^i G(s,t)}{\partial s^i} - \frac{\partial^i G_r(s,t)}{\partial s^i} \right|^2 dt}$$

и, ввиду (4.2) и равномерной сходимости ряда (4.1),

$$\lim_{r \to \infty} \|K - K_r\| = 0.$$

Так как, по предположению теоремы, краевая задача (1.1) имеет единственное решение $x^* \in \{L_2^{(n)}, U\}$, то, на основании теоремы 2, интегральное уравнение (3.4) имеет единственное решение $y^* \in L_2[a, b]$ и, следовательно, существует обратный оператор $(E + K)^{-1}$, $\|(E + K)^{-1}\| < \infty$. Ввиду $\lim_{r \to \infty} \|K - K_r\| = 0$, будем, начиная с некоторого $r = R$, иметь $\|(E + K)^{-1}\| \, \|K - K_r\| < 1$ $(r \geqslant R)$.

Преобразуем уравнение (2.2)

$$y + K_r y = f,$$

предварительно вычитав из него равенство $y^* + Ky^* = f$:

$$\begin{gathered} y - y^* + K_r y - Ky^* = 0, \\ y - y^* = (E + K)^{-1}(K - K_r) y, \\ [E - (E + K)^{-1}(K - K_r)] y = y^*. \end{gathered} \tag{4.3}$$

В силу неравенства $\|(E + K)^{-1}\| \, \|K - K_r\| < 1$ $(r \geqslant R)$ и теоремы Банаха, при $r \geqslant R$ существует обратный оператор $[E - (E + K)^{-1}(K - K_r)]^{-1}$, и интегральное уравнение (2.2) имеет единственное решение

$$y_r^* = [E - (E + K)^{-1}(K - K_r)]^{-1} y^*. \tag{4.4}$$

На основании теоремы 1 при $r \geqslant R$ приближенное, по Галеркину, решение x_r^* существует и однозначно определяется из системы уравнений (2.1). Из (2.5) и (3.6) получаем

$$x^*(s) - x_r^*(s) = \int_a^b G(s, t) y^*(t) dt - \int_a^b G_r(s, t) y_r^*(t) dt, \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} x^*(s) - x_r^*(s) = {} & \int_a^b G(s, t) [y^*(t) - y_r^*(t)] dt + \\ & + \int_b^a [G(s, t) - G_r(s, t)] y_r^*(t) dt. \end{aligned}$$

Продифференцировав последнее равенство i раз, с помощью неравенства Буняковского находим

$$|x^{*(i)}(s) - x_r^{*(i)}(s)| \leqslant \sqrt{\int_a^b \left| \frac{\partial^i G(s,t)}{\partial s^i} \right|^2 dt}\, \|y^* - y_r^*\| + |e_{rr}^{(i)}(s)|$$

$$(a \leqslant s \leqslant b;\ i = 0, \ldots, n-1), \qquad (4.6)$$

где

$$e_{rr}^{(i)}(s) = \int_a^b \left[\frac{\partial^i G(s,t)}{\partial s^i} - \frac{\partial^i G_r(s,t)}{\partial s^i} \right] y_r^*(t)\, dt,$$

или, учитывая $(G^{(i,0)} - G_r^{(i,0)}) \in [L_2 \to C]$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ и

$$y_r^*(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(s)}{\sigma_k} \int_a^b y_r^*(t)\varphi_k(t)\, dt,$$

$$e_{rr}^{(i)}(s) = \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{\varphi_k^{(i)}(s)}{\sigma_k \lambda_k} \int_a^b \varphi_k(t) y_r^*(t)\, dt \quad (i = 0, \ldots, n-1). \qquad (4.7)$$

Отсюда, с учетом (2.5) и (1.4), следует [2]

$$|e_{rr}^{(i)}(s)|^2 \leqslant \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{|\varphi_k^{(i)}(s)|^2}{\sigma_k \lambda_k^2} \left(\|y_r^*\|^2 - \sum_{j=1}^{r} \sigma_j \lambda_j^2 \xi_j^{*2} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{|\varphi_k^{(i)}(s)|^2}{\sigma_k \lambda_k^2} \|y_r^*\|^2 \quad (i = 0, \ldots, n-1). \qquad (4.8)$$

Ввиду $\lim\limits_{r\to\infty} \|K - K_r\| = 0$ получаем из (4.4), что нормы $\|y_r^*\|$ $(r = R, R+1, \ldots)$ ограничены в совокупности. Из (4.8) и из равномерной сходимости ряда (4.1) следует $\lim\limits_{r\to\infty} \max\limits_{a\leqslant s\leqslant b} |e_{rr}^{(i)}(s)| = 0$ $(i = 0, \ldots, n-1)$. Из (4.3) вытекает $\lim\limits_{r\to\infty} \|y^* - y_r^*\| = 0$. Из неравенства (4.6) теперь заключаем

$$\lim_{r\to\infty} \max_{a<s\leqslant b} |x^{*(i)}(s) - x_r^{*(i)}(s)| = 0 \quad (i = 0, \ldots, n-1).$$

Обозначим через $[y]_r = \sum\limits_{k=1}^{r} \eta_k \varphi_k$ частичную сумму разложения функции $y = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \eta_k \varphi_k$. Применением дифференциального оператора $\{P, U\}$ к равенству (4.5) находим

$$P[x^* - x_r^*] = y^* - [y_r^*]_r.$$

---

[2] Напоминаем, что $x_r^*(s) = \sum\limits^{r} \xi_j^* \varphi_j(s)$.

Так как

$$\|y^* - [y_r^*]_r\| \leqslant \|y^* - [y^*]_r\| + \|[y^* - y_r^*]_r\| \leqslant$$
$$\leqslant \|y^* - [y^*]_r\| + \|y^* - y_r^*\|$$

и $\lim\limits_{r\to\infty} \|y^* - y_r^*\| = 0$, то

$$\lim_{r\to\infty} \Big\| \sum_{i=0}^{\nu} [p_i(s)\,(x^{*(i)} - x_r^{*(i)})]^{(i)} \Big\| = \lim_{r\to\infty} \|P[x^* - x_r^*]\| =$$
$$= \lim_{r\to\infty} \|y^* - [y_r^*]_r\| = 0.$$

Из последнего соотношения очевидно, что

$$\lim_{r\to\infty} \|x^{*(n)} - x_r^{*(n)}\| = 0.$$

Теорема доказана.

§ 5. Оценки погрешности

В ходе доказательства теоремы 3 мы вывели оценку (4.6) погрешности приближенного, по Галеркину, решения. С учетом (2.6) из (4.5) получается еще другая оценка:

$$|x^{*(i)}(s) - x_r^{*(i)}(s)| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{r} \frac{|\varphi_k^{(i)}(s)|^2}{\sigma_k \lambda_k^2}}\, \|y^* - y_r^*\| + |e_r^{(i)}(s)|$$
$$(a \leqslant s \leqslant b;\ \ i = 0, \ldots, n-1), \tag{5.1}$$

где

$$e_r^{(i)}(s) = \int_a^b \left[\frac{\partial^i G(s,t)}{\partial s^i} - \frac{\partial^i G_r(s,t)}{\partial s^i} \right] y^*(t)\,dt =$$
$$= \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{\varphi_k^{(i)}(s)}{\sigma_k \lambda_k} \int_a^b \varphi_k(t)\, y^*(t)\,dt, \tag{5.2}$$

$$|e_r^{(i)}(s)|^2 \leqslant \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{|\varphi_k^{(i)}(s)|^2}{\sigma_k \lambda_k^2}\, \|y^*\|^2 \quad (i = 0, \ldots, n-1). \tag{5.3}$$

Рассмотрим применение оценок (4.6) и (5.1).

Из [3] (2.3), (3.5), (4.3) и аналогичного с (4.3) равенства получаем для $y^* - y_r^*$ выражения

$$y^* - y_r^* = -(E + K)^{-1} \Big(\sum_{i=0}^{l} q_i\, e_{rr}^{(i)} \Big),$$
$$y^* - y_r^* = -(E + K_r)^{-1} \Big(\sum_{i=0}^{l} q_i\, e_r^{(i)} \Big). \tag{5.4}$$

[3] В (4.3) заменим y решением y_r^*.

Для $|e_{rr}^{(i)}|$ и $|e_r^{(i)}|$ уже даны оценки (4.8) и (5.3). При пользовании равенствами (5.4) для оценки нормы $\|y^* - y_r^*\|$ в случае, когда функции $q_i(s)$ $(i = 0, \ldots, l)$ ограничены (почти везде), целесообразно оценить $\|e_{rr}^{(i)}\|$, $\|e_r^{(i)}\|$. Если $\varphi_k^{(i)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ортогональны, из (4.7) и (5.2) получаем:

$$\|e_{rr}^{(i)}\|^2 \leqslant \sup_{k>r} \frac{\|\varphi_k^{(i)}\|^2}{\sigma_k \lambda_k^2} \left(\|y_r^*\|^2 - \sum_{j=1}^{r} \sigma_j \lambda_j^2 \xi_j^{*2}\right) \leqslant \sup_{k>r} \frac{\|\varphi_k^{(i)}\|^2}{\sigma_k \lambda_k^2} \|y_r^*\|^2,$$
$$\|e_r^{(i)}\|^2 \leqslant \sup_{k>r} \frac{\|\varphi_k^{(i)}\|^2}{\sigma_k \lambda_k^2} \|y^*\|^2 \quad (0 \leqslant i \leqslant n-1). \tag{5.5}$$

Нормы $\|y^*\|$ и $\|y_r^*\| = \|f - Q[x_r^*]\|$ можно оценить, опираясь на равенства

$$y^* = (E + K)^{-1} f, \; y_r^* = (E + K_r)^{-1} f. \tag{5.6}$$

Остается рассмотреть, как оценить нормы $\|(E+K)^{-1}\|$ и $\|(E+K_r)^{-1}\|$. Если $\|K\| < 1$, $\|K_r\| < 1$, то по теореме Банаха

$$\|(E+K)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-\|K\|}, \quad \|(E+K_r)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-\|K_r\|}. \tag{5.7}$$

Для $\|K\|$ и $\|K_r\|$ получаются оценки:

$$\|K\| \leqslant \sum_{i=0}^{l} \|q_i\| \sqrt{\max_{a \leqslant s \leqslant b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k^{(i)}(s)|^2}{\sigma_k \lambda_k^2}} = \sum_{i=0}^{l} \|q_i\| \sqrt{\max_{a \leqslant s \leqslant b} \int_a^b \left| \frac{\partial^i G(s,t)}{\partial s^i} \right|^2 dt},$$
$$\|K_r\| \leqslant \sum_{i=0}^{l} \|q_i\| \sqrt{\max_{a \leqslant s \leqslant b} \sum_{k=1}^{r} \frac{|\varphi_k^{(i)}(s)|^2}{\sigma_k \lambda_k^2}} \leqslant \sum_{i=0}^{l} \|q_i\| \sqrt{\max_{a \leqslant s \leqslant b} \int_a^b \left| \frac{\partial^i G(s,t)}{\partial s^i} \right|^2 dt}, \tag{5.8}$$

$$\|K\| \leqslant \sum_{i=0}^{l} \|G^{(i,0)}\| \cdot \operatorname{vrai} \max_{a \leqslant s \leqslant b} |q_i(s)|,$$
$$\|K_r\| \leqslant \sum_{i=0}^{l} \|G_r^{(i,0)}\| \cdot \operatorname{vrai} \max_{a \leqslant s \leqslant b} |q_i(s)|, \tag{5.9}$$

и, если $\varphi_k^{(i)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ортогональны,

$$\|G^{(i,0)}\|^2 \leqslant \sup_k \frac{\|\varphi_k^{(i)}\|^2}{\sigma_k \lambda_k^2}, \quad \|G_r^{(i,0)}\|^2 \leqslant \sup_{k \leqslant r} \frac{\|\varphi_k^{(i)}\|^2}{\sigma_k \lambda_k^2} \quad (0 \leqslant i \leqslant n-1). \tag{5.10}$$

Дадим общий прием для оценки норм $\|(E+K_r)^{-1}\|$ и $\|(E+K)^{-1}\|$. Решая интегральное уравнение (2.7) и учитывая, что нормы сопряженных операторов $(E+K_r)^{-1}$ и $(E+K_r^*)^{-1}$ равны, убеждаемся в справедливости оценки

$$\|(E+K_r)^{-1}\| \leqslant 1 + \left\{ \sum_{k=1}^{r} \sigma_k \left[\sum_{i=1}^{r} \|Q[\varphi_i]\| \cdot |\gamma_{ik}| \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где (γ_{ik}) — обратная матрицы системы уравнений (2.1). Легко доказывается: если $\|(E+K_r)^{-1}\|\,\|K-K_r\|<1$, то

$$\|(E+K)^{-1}\| \leqslant \frac{\|(E+K_r)^{-1}\|}{1-\|(E+K_r)^{-1}\|\,\|K-K_r\|}.$$

Очень простые оценки для величин $\|(E+K)^{-1}g\|$ и $\|(E+K_r)^{-1}g\|$ получаются в случае, когда оператор $\{P, U\}$ положительно определен, $Q[x]\equiv q(s)x$ и $0\leqslant q(s)\leqslant q_{\max}$ $(a\leqslant s\leqslant b)$. Пусть $\frac{g}{\sqrt{q}}\in L_2[a,b]$. Решения интегральных уравнений

$$y(s)+\int_a^b q(s)\,G(s,t)\,y(t)\,dt=g(s)\qquad (y+Ky=g),$$

$$z(s)+\int_a^b \sqrt{q(s)}\,G(s,t)\,\sqrt{q(t)}\,z(t)\,dt=\frac{g(s)}{\sqrt{q(s)}}\qquad \left(z+Hz=\frac{g}{\sqrt{q}}\right)$$

связаны соотношением $y=\sqrt{q}z$, и поэтому

$$\|(E+K)^{-1}g\|\leqslant\sqrt{q_{\max}}\,\|(E+H)^{-1}\|\left\|\frac{g}{\sqrt{q}}\right\|.$$

Ядро $H(s,t)=\sqrt{q(s)}\,G(s,t)\,\sqrt{q(t)}$ симметрично; из положительной определенности оператора $\{P, U\}$ легко следует, что характеристические значения ядра $H(s,t)$ положительны, откуда, в свою очередь, вытекают условия $\|(E+H)^{-1}\|\leqslant 1$ и

$$\|(E+K)^{-1}g\|\leqslant\sqrt{q_{\max}}\left\|\frac{g}{\sqrt{q}}\right\|. \tag{5.11}$$

Аналогично получается

$$\|(E+K_r)^{-1}g\|\leqslant\sqrt{q_{\max}}\left\|\frac{g}{\sqrt{q}}\right\|. \tag{5.11'}$$

Пусть в рассматриваемом частном случае собственные значения оператора $\{P, U\}$ расположены в порядке возрастания: $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots$. Если $\frac{f}{\sqrt{q}}\in L_2[a,b]$, то сочетанием условий (5.1), (5.3), (5.4), (5.5), (5.6), (5.11) и (5.11′) получаем оценку

$$|x^*(s)-x_r^*(s)|\leqslant\left[\sqrt{\sum_{k=1}^{r}\frac{|\varphi_k(s)|^2}{\sigma_k\lambda_k^2}}\cdot\frac{q_{\max}}{\lambda_{r+1}}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\sum_{k=r+1}^{\infty}\frac{|\varphi_k(s)|^2}{\sigma_k\lambda_k^2}}\right]\sqrt{q_{\max}}\left\|\frac{f}{\sqrt{q}}\right\|. \tag{5.12}$$

Оценка (5.12) точнее и проще соответствующей оценки в [1].

Отметим, что пользование оценками (4.8), (5.3) и (5.12) облегчается после привлечения получаемого из (4.1) равенства

$$\sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{|\varphi_k^{(i)}(s)|^2}{\sigma_k \lambda_k^2} = \int_a^b \left| \frac{\partial^i G(s,t)}{\partial s^i} \right|^2 dt - \sum_{k=1}^{r} \frac{|\varphi_k^{(i)}(s)|^2}{\sigma_k \lambda_k^2} \quad (i = 0, \ldots, n-1).$$

Если на функции $p_i(s)$ $(i = 0, \ldots, \nu)$, $q_i(s)$ $(i = 0, \ldots, l)$ и $f(s)$ наложены более сильные, чем в § 1, ограничения, то часто удается уточнить оценки величин $|e_{rr}^{(i)}(s)|$, $\|e_{rr}^{(i)}\|$, $|e_r^{(i)}(s)|$, $\|e_r^{(i)}\|$, а вместе с тем и оценки (4.6), (5.1) погрешности приближенного, по Галеркину, решения.

Предположим, что $p_i(s)$ $(i = 0, \ldots, \nu)$ непрерывно дифференцируемы $i + N (N \geqslant 0)$ раз и $f, q_1, \ldots, q_l \in L_2^{(h)}[a, b]$ $(1 \leqslant h \leqslant n + N - l)$. Тогда $\varphi_k(s)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ непрерывно дифференцируемы $n + N$ раз, $x^* \in L_2^{(m)}[a, b]$, где $m = \min\{n + N, n + h\}$ и, поскольку

$$y^*(s) = P[x^*(s)] = f(s) - Q[x^*(s)] = f(s) - \sum_{i=0}^{l} q_i(s) x^{*(i)}(s), \tag{5.13}$$

$$y_r^*(s) = f(s) - \sum_{i=0}^{l} q_i(s) \sum_{k=1}^{r} \xi_k^* \varphi_k^{(i)}(s), \tag{5.13'}$$

(ср. (2.4)), то имеем $y^*, y_r^* \in L_2^{(h)}[a, b]$. Интегрируя в (4.7) $\int_a^b \varphi_k(t) y_r^*(t)\, dt$ h раз по частям, получим

$$e_{rr}^{(i)}(s) = (-1)^h \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{\varphi_k^{(i)}(s)}{\sigma_k \lambda_k} \int_a^b \varphi_k^{(-h)}(t) y_r^{*(h)}(t)\, dt + \tag{5.14}$$

$$+ \sum_{k=r+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{h} (-1)^{j-1} [\varphi_k^{(-j)}(t) y_r^{*(j-1)}(t)]_a^b \cdot \frac{\varphi_k^{(i)}(s)}{\sigma_k \lambda_k} \quad (i = 0, \ldots, n-1),$$

где $\varphi_k^{(-j)}$ — первообразная функция для $\varphi_k^{(-j+1)}$ $(j = 1, \ldots, h;$ $\varphi_k^{(0)} = \varphi_k)$. Аналогичное выражение получим для $e_r^{(i)}(s)$ (y_r^* заменяется всюду на y^*).

Величины $y_r^{*(j)}(a)$, $y_r^{*(j)}(b)$ $(j = 0, \ldots, h-1)$ и $\|y_r^{*(h)}\|$ можно оценить, опираясь на равенство (5.13′) или на равенство $y_r^* + K_r y_r^* = f$:

$$y_r^{*(j)}(s) = f^{(j)}(s) - \frac{d^j}{ds^j} \sum_{i=0}^{l} \sum_{k=1}^{r} \frac{q_i(s) \varphi_k^{(i)}(s)}{\sigma_k \lambda_k} \int_a^b \varphi_k(t) y_r^*(t)\, dt \quad (j = 0, \ldots, h). \tag{5.15}$$

Отсюда, между прочим, легко усмотреть, что при $h \leqslant n - l$ величины $|y_r^{*(j)}(a)|$, $|y_r^{*(j)}(b)|$ $(j = 0, \ldots, h-1)$, $\|y_r^{*(h)}\|$ $(r = R, R+1, \ldots)$ ограничены в совокупности.

Для оценки величин $|y^{*(j)}(a)|$, $|y^{*(j)}(b)|$ $(j=0, \ldots, h-1)$, $\|y^{*(h)}\|$ оценим, прежде всего, $|x^{*(i)}(a)|$, $|x^{*(i)}(b)|$, $\|x^{*(i)}\|$ $(i=0, \ldots, n-1)$ из (3.6); затем, опираясь на выражение $x^{*(n)}$ через $x^{*(i)}$ $(i=0, \ldots, n-1)$, получаемое из равенства $P[x^*]+Q[x^*]=f$, оценим $|x^{*(i-1)}(a)|$, $|x^{*(i-1)}(b)|$, $\|x^{*(i)}\|$ последовательно для $i=n, \ldots, m$. После этого остается прибегнуть к (5.13).

Рассмотрим, наконец, случай, когда $y_r^* \in \{L_2^{(n)}, U\}$. Учитывая (4.7), (1.2) и самосопряженность оператора $\{P, U\}$, имеем

$$\int_a^b \varphi_k(t) y_r^*(t)\,dt = \frac{1}{\lambda_k}\int_a^b P[\varphi_k(t)] y_r^*(t)\,dt = \frac{1}{\lambda_k}\int_a^b \varphi_k(t) P[y_r^*(t)]\,dt$$

и

$$e_{rr}^{(i)}(s) = \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{\varphi_k^{(i)}(s)}{\sigma_k \lambda_k^2}\int_a^b P[y_r^*(t)]\varphi_k(t)\,dt.$$

Отсюда находим

$$|e_{rr}^{(i)}(s)|^2 \leqslant \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{|\varphi_k^{(i)}(s)|^2}{\sigma_k \lambda_k^4}\left(\|P[y_r^*]\|^2 - \sum_{j=1}^{r}\sigma_j \lambda_j^4 \xi_j^{*2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{|\varphi_k^{(i)}(s)|^2}{\sigma_k \lambda_k^4}\|P[y_r^*]\|^2 \quad (i=0, \ldots, n-1)$$

и, если $\varphi_k^{(i)}$ $(k=1, 2, \ldots)$ ортогональны,

$$\|e_{rr}^{(i)}\|^2 \leqslant \sup_{k>r} \frac{\|\varphi_k^{(i)}\|^2}{\sigma_k \lambda_k^4}\left(\|P[y_r^*]\|^2 - \sum_{j=1}^{r}\sigma_j \lambda_j^4 \xi_j^{*2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{k>r} \frac{\|\varphi_k^{(i)}\|^2}{\sigma_k \lambda_k^4}\|P[y_r^*]\|^2 \quad (0 \leqslant i \leqslant n-1).$$

Аналогичные видоизменения получим для оценок величин $|e_r^{(i)}(s)|$ и $\|e_r^{(i)}\|$, если $y^* \in \{L_2^{(n)}, U\}$.

§ 6. Примеры

Применим оценки (4.6), (5.1) и 5.12) к некоторым типам краевых задач.

Пример 1. Краевую задачу

$$\begin{cases} -x'' + q(s)x = f(s), \\ x'(0) + \alpha x(0) = 0,\ x'(1) + \alpha x(1) = 0 \quad (\alpha \neq 0) \end{cases}$$

приведем к виду (1.1), положив $P[x] \equiv -x'' + cx$, $Q[x] \equiv \{q(s) - c\}x$ $(c = \text{const},\ c \geqslant 0)$. Имеем

$$\varphi_k(s) = \cos(k\pi s + \Theta_k),\ \Theta_k = \arcsin \frac{\alpha}{\sqrt{k^2\pi^2 + \alpha^2}},$$

$$\sigma_k = \frac{1}{2},\ \lambda_k = k^2\pi^2 + c \geqslant k^2\pi^2 \quad (k=1, 2, \ldots).$$

В зависимости от выбора постоянной c и от предположений относительно функций $f(s)$ и $q(s)$ получим различные оценки погрешности приближенного, по Галеркину, решения $x_r^*(s) = \sum_{k=1}^{r} \xi_k^* \cos(k\pi s + \Theta_k)$.

а) Пусть f, q, $\frac{f}{\sqrt{q}} \in L_2[0, 1]$, $0 \leqslant q(s) \leqslant q_{max}$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$; положим $c = 0$. Оценка (5.12) дает

$$|x^*(s) - x_r^*(s)| \leqslant \left[\sqrt{\sum_{k=1}^{r} \frac{2\cos^2(k\pi s + \Theta_k)}{k^4\pi^4}} \frac{q_{\max}}{(r+1)^2\pi^2} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{2\cos^2(k\pi s + \Theta_k)}{k^4\pi^4}} \right] \sqrt{q_{\max}} \left\| \frac{f}{\sqrt{q}} \right\| \quad (0 \leqslant s \leqslant 1; \left\| \frac{f}{\sqrt{q}} \right\|^2 =$$

$$= \int_0^1 \frac{f^2(t)}{q(t)}\, dt) \text{ и, учитывая, что } \sum_{k=1}^{r} \frac{2\cos^2(k\pi s + \Theta_k)}{k^4\pi^4} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^4\pi^4} = \frac{1}{45}$$

и $\sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{2\cos^2(k\pi s + \Theta_k)}{k^4\pi^4} \leqslant \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{2}{k^4\pi^4} \leqslant \int_{r+\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{2\,dt}{t^4\pi^4} = \frac{2}{3\pi^4\left(r+\frac{1}{2}\right)^3}$,

получаем:

$$|x^*(s) - x_r^*(s)| \leqslant \left[\frac{q_{\max}}{\sqrt{15}(r+1)^2} + \frac{\sqrt{2}}{\left(r+\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right] \frac{\sqrt{q_{\max}}}{\sqrt{3}\pi^2} \left\| \frac{f}{\sqrt{q}} \right\| = O(r^{-\frac{3}{2}}).$$

Если f, $q \in L_2^{(1)}[0, 1]$, получим оценку более высокого порядка. Мы имеем $\varphi_k^{(-1)}(s) = \frac{\sin(k\pi s + \Theta_k)}{k\pi}$, $|\varphi_k^{(-1)}(0)| = |\varphi_k^{(-1)}(1)| \leqslant$ $\leqslant \frac{|\alpha|}{k^2\pi^2}$; легко проверить, что $\sqrt{2}\sin(k\pi s + \Theta_k)$ $(k = 1, 3, \ldots)$ и $\sqrt{2}\sin(k\pi s + \Theta_k)$ $(k = 2, 4, \ldots)$ образуют две ортонормальные системы в $L_2[0, 1]$. Учитывая это, находим из (4.6), (5.4), (5.6), (5.11), (5.11′), (5.14) и (5.15):

$$|x^*(s) - x_r^*(s)| \leqslant \left[\sqrt{\frac{2}{35}} \frac{q_{\max}}{\left(r+\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{2}}} + \frac{2}{\left(r+\frac{1}{2}\right)^3} \right] \frac{|\alpha|}{3\pi^4} [|y_r^*(0)| +$$

$$+ |y_r^*(1)|] + \left[\frac{\sqrt{2}\, q_{\max}}{3(r+1)^3} + \frac{2}{\left(r+\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}} \right] \frac{\|y_r^{*(1)}\|}{\sqrt{5}\pi^3} \leqslant O(r^{-\frac{5}{2}}),$$

где

$$|y_r^*(0)| + |y_r^*(1)| \leqslant |f(0)| + |f(1)| + \frac{|q(0)| + |q(1)|}{3\sqrt{5}} \sqrt{q_{\max}} \left\| \frac{f}{\sqrt{q}} \right\|,$$

$$\|y_r^{*(1)}\| \leqslant \|f^{(1)}\| + \left(\frac{\|q^{(1)}\|}{3\sqrt{5}} + \frac{3q_{\max}}{2\pi} \right) \sqrt{q_{\max}} \left\| \frac{f}{\sqrt{q}} \right\|.$$

Если $f, q \in L_2^{(2)}[0, 1]$, то получается (в (5.14) берется $h = 2$) оценка порядка $O(r^{-3})$.

б) Пусть $f,\ q \in L_2[0, 1]$, $-\pi^2 < q_{min} \leqslant q(s) \leqslant q_{\max}$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$, $\frac{q_{\max} + q_{\min}}{2} \geqslant 0$; положим $c = \frac{q_{\max} + q_{\min}}{2}$ и обозначим $d = \frac{q_{\max} - q_{\min}}{2}$.

Из (4.6), (4.8), (5.4), (5.5), (5.6), (5.7), (5.9) и (5.10) находим:

$$|x^*(s) - x_r^*(s)| \leqslant \left[\frac{\pi^2 + c}{\pi^2 + q_{\min}} \cdot \frac{d}{\sqrt{15}(r+1)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{2}}{\left(r + \frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right] \frac{\pi^2 + c}{\pi^2 + q_{\min}} \frac{\|f\|}{\sqrt{3}\pi^2} = O(r^{-\frac{3}{2}}).$$

Если $f,\ q \in L_2^{(1)}[0, 1]$ или $f,\ q \in L_2^{(2)}[0, 1]$, получаем опять оценки соответственно порядков $O(r^{-\frac{5}{2}})$ и $O(r^{-3})$.

в) Пусть $f, q \in L_2[0, 1]$, $\int_0^1 q(t)\,dt \geqslant 0$; положим $c = \int_0^1 q(t)\,dt$. Если существует оценка $d \geqslant 0$ такая, что

$$\int_0^1 q^2(t)\,dt - \left[\int_0^1 q(t)\,dt\right]^2 \leqslant d^2 < 45,$$

то из (4.6), (4.8), (5.4), (5.6), (5.7) и (5.8) находим:

$$|x^*(s) - x_r^*(s)| \leqslant \frac{15\sqrt{6}\|f\|}{(\sqrt{45} - d)^2\pi^2 \left(r + \frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} = O(r^{-\frac{3}{2}}).$$

Пример 2. Погрешность приближенного, по Галеркину, решения $x_r^*(s) = \sum_{k=1}^{r} \xi_k^* \sin k\pi s$ краевой задачи

$$\begin{cases} -x'' + q(s)x = f(s), \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases}$$

изучена многими авторами. Представляет интерес сравнить известные оценки со следующими, получаемыми из (4.6), (5.1) и (5.12) оценками.

а) Если $0 \leqslant q(s) \leqslant q_{\max}$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$, $f,\ q,\ \frac{f}{\sqrt{q}} \in L_2[0,1]$, то

$$|x^*(s) - x_r^*(s)| \leqslant \left[\frac{q_{\max}}{4(r+1)^2} + \frac{\sqrt{2}}{\left(r+\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right]\frac{\sqrt{q_{\max}}}{\sqrt{3}\pi^2}\left\|\frac{f}{\sqrt{q}}\right\| = O(r^{-\frac{3}{2}}). \tag{6.1}$$

Если $f,\ q \in L_2^{(1)}[0,1]$, получается оценка порядка $O(r^{-2})$.

б) Пусть $-\pi^2 < q_{\min} \leqslant q(s) \leqslant q_{\max}$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$, $c = \frac{q_{\max}+q_{\min}}{2} \geqslant 0$; обозначим $d = \frac{q_{\max}-q_{\min}}{2}$. Если $f, q \in L_2[0,1]$, то

$$|x^*(s) - x_r^*(s)| \leqslant \left[\sqrt{\sum_{k=1}^{r}\frac{2\sin^2 k\pi s}{k^4\pi^4}}\,\frac{\pi^2+c}{\pi^2+q_{\min}}\cdot\frac{d}{(r+1)^2+c} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\sum_{k=r+1}^{\infty}\frac{2\sin^2 k\pi s}{k^4\pi^4}}\right]\frac{\pi^2+c}{\pi^2+q_{\min}}\|f\|, \tag{6.2}$$

$$|x^*(s) - x_r^*(s)| \leqslant \left[\frac{d}{4(r+1)^2}\cdot\frac{\pi^2+c}{\pi^2+q_{\min}} + \frac{\sqrt{2}}{\left(r+\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right]\frac{\pi^2+c}{\pi^2+q_{\min}}\frac{\|f\|}{\sqrt{3}\pi^2} =$$

$$= O(r^{-\frac{3}{2}}) \tag{6.2'}$$

Если $f, q \in L_2^{(1)}[0,1]$, то

$$|x^*(s) - x_r^*(s)| \leqslant \left[\frac{d}{2\cdot\sqrt{15}\,r^{\frac{5}{2}}}\cdot\frac{\pi^2+c}{\pi^2+q_{\min}} + \frac{1}{r^2}\right]\frac{1}{2\pi^3}[|f(0)+f(1)| +$$

$$+ |f(0)-f(1)|] + \left[\frac{d}{4\sqrt{3}(r+1)^3}\,\frac{\pi^2+c}{\pi^2+q_{\min}} + \frac{\sqrt{\frac{2}{5}}}{\left(r+\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}}\right]\frac{1}{\pi^3}\left[\|f^{(1)}\| + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\|q^{(1)}\|}{4\sqrt{3}} + \frac{d}{\pi}\right)\frac{\pi^2+c}{\pi^2+q_{\min}}\|f\|\right] \leqslant O(r^{-2}). \tag{6.3}$$

Если $f, q \in L_2^{(2)}[0,1]$, то, введя оценку $q_{\max}^{(1)} \geqslant |q'(s)|$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$, имеем

$$|x^*(s) - x_r^*(s)| \leqslant \left[\frac{d}{2\sqrt{15}\,r^{\frac{5}{2}}}\cdot\frac{\pi^2+c}{\pi^2+q_{\min}} + \frac{1}{r^2}\right]\frac{1}{2\pi^3}[|f(0)+f(1)| +$$

$$+|f(0)-f(1)|+\left[\frac{d}{4\sqrt{3}(r+1)^4}\cdot\frac{\pi^2+c}{\pi^2+q_{\min}}+\frac{\sqrt{\frac{2}{7}}}{\left(r+\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{2}}}\right]\frac{1}{\pi^4}\left[\|f^2\|+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\|q^{(2)}\|}{4\sqrt{3}}+\frac{2q^{(1)}{}_{\max}}{\pi}+d\right)\frac{\pi^2+c}{\pi^2+q_{\min}}\|f\|\right]\leqslant O(r^{-2}). \qquad (6.4)$$

в) Если $f, q \in L_2[0,1]$, $\int_0^1 q(t)\,dt \geqslant 0$ и существует оценка $d \geqslant 0$ такая, что $\int_0^1 q^2(t)\,dt - [\int_0^1 q(t)\,dt]^2 \leqslant d^2 < 48$, то

$$|x^*(s)-x_r^*(s)|\leqslant\frac{16\sqrt{6}\,\|f\|}{(\sqrt{48}-d)^2\pi^2\left(r+\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}=O(r^{-\frac{3}{2}}). \qquad (6.5)$$

Оценка (6.1) точнее (примерно в 3 раза) и проще следующей оценки Н. М. Крылова (см. [2] стр. 353):

$$|x^*(s)-x_r^*(s)|\leqslant\sqrt{\frac{2q_{\max}}{(r+1)^3\pi^3}}\left[1+\frac{q_{\max}}{4\sqrt{6\pi(r+1)}}\left(1+\frac{4\sqrt{2}}{r^{3/2}\pi^2}\right)\left(1-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{q_{\max}}{\pi^2(r+1)^2}\right)^{-1}\right]\left\|\frac{f}{\sqrt{q}}\right\|=O(r^{-\frac{3}{2}}).$$

Оценка (6.2) превосходит точностью оценку Г. Бертрама [3]; она дополняет оценку Н. Лемана [5]: в одних случаях точнее последняя, в других — наша оценка. Оценка (6.2) выведена при более слабых, чем оценки Н. Лемана и Г. Бертрама, ограничениях относительно функций $f(s)$ и $q(s)$.

Предполагая двукратную непрерывную дифференцируемость функций $f(s)$, $q(s)$, $0 \leqslant q(s) \leqslant q_{\max}$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$, В. Берш-Зупан [4] вывел оценку порядка $O(r^{-2})$. При выводе оценок (6.3) и (6.4) мы пользовались более слабыми ограничениями и, кроме того, оценки (6.3) и (6.4) проще оценки В. Берш-Зупана.

Приведем численный пример, рассмотренный в [3], [4] и [5]. Для краевой задачи

$$\begin{cases} -x''+sx=2+s^2-s^3, \\ x(0)=x(1)=0, \end{cases}$$

точным решением которой является $x^*(s)=s(1-s)$, получаем $x_4^*(s)=0{,}258012\sin\pi s-0{,}000001\sin 2\pi s+0{,}009556\sin 3\pi s-$ $-0{,}000003\sin 4\pi s$. Применение различных оценок дает следующие результаты:

$\lvert x^*(s) - x_4^*(s)\rvert$	$s,\ 1-s$					
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Истинная погрешность	0,0000	0,0025	0,0007	0,0012	0,0020	0,0015
По оценке Г. Бетрама	0,0519	0,0527	0,0530	0,0533	0,0535	0,0535
По оценке Н. Лемана	0,000	0,018	0,012	0,017	0,012	0,017
По оценке (6.2)	0,000	0,017	0,011	0,016	0,012	0,016
По оценке (6.2′)	0,020					
По оценке В. Берш-Зупана	0,0000	0,0050	0,0031	0,0046	0,0033	0,0046
По оценке (6.3)	0,0047					
По оценке (6.4)	0,0043					
По оценке (6.5)	0,020					

В приведенном примере $\frac{f}{\sqrt{q}} \in L_2[0, 1]$ и оценка (6.1), а также оценка Н. М. Крылова неприменимы. Неприменима и оценка А. В. Джишкариани [1], так как не выполнено условие $q(s) > 0$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$.

Пример 3. Для приближенного, по Галеркину, решения $x_r^*(s) = \sum_{k=1}^{r} \xi_k^* \cos(k-1)\pi s$ краевой задачи

$$\begin{cases} -x'' + q(s)x = f(s), \\ x'(0) = x'(1) = 0, \end{cases}$$

где $0 < q_{\min} \leqslant q(s) \leqslant q_{\max}$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$, получаются, например, следующие оценки. Введем обозначения $c = \frac{q_{\max} + q_{\min}}{2}$, $d = \frac{q_{\max} - q_{\min}}{2}$. Если $f, q \in L_2^{(1)}[0, 1]$, то

$$|x^*(s) - x_r^*(s)| \leqslant \left[\frac{d\sqrt{c^2+45}}{3q_{\min} r^3} + \frac{\sqrt{2}}{\left(r-\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}}\right] \frac{1}{\sqrt{5}\pi^3} \left[\|f^{(1)}\| + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\sqrt{c^2+45}\,\|q^{(1)}\|}{3\sqrt{5}\,c} + \frac{d}{\pi}\right) \frac{c}{q_{\min}} \|f\|\right] \leqslant O(r^{-\frac{5}{2}}).$$

Если $f, q \in L_2^{(1)}[0,1]$, то

$$|x^*(s) - x_r^*(s)| \leqslant \left[\sqrt{\frac{2}{35}}\frac{d\sqrt{c^2+45}}{q_{\min}\left(r-\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{2}}} + \frac{2}{\left(r-\frac{1}{2}\right)^3}\right]\frac{1}{3\pi^4}\left[|f'(0)| + \right.$$

$$\left. + |f'(1)| + (|q'(0)| + |q'(1)|)\,\frac{\sqrt{c^2+45}}{3\sqrt{5}\,q_{\min}}\|f\|\right] + \left[\frac{d\sqrt{c^2+45}}{3\sqrt{5}\,q_{\min}}\frac{1}{r^4} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{\frac{2}{7}}}{\left(r-\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{2}}}\right]\frac{1}{\pi^4}\left[\,\|f^{(2)}\| + \left(\frac{\sqrt{c^2+45}\|q^{(2)}\|}{3\sqrt{5}\,c} + \frac{2q_{\max}^{(1)}}{\pi} + d\right)\frac{c}{q_{\min}}\|f\|\right] \leqslant$$

$$\leqslant O(r^{-3}).$$

Пример 4. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} x^{\mathrm{IV}} + u(s)x'' + v(s)x' + w(s)x = f(s), \\ x(0) = x''(0) = x(1) = x''(1) = 0. \end{cases}$$

Пусть $f, u, v, w \in L_2[0,1]$, $u_{\min} \leqslant u(s) \leqslant u_{\max}$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$, $|v(s)| \leqslant v_{\max}$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$, $w_{\min} \leqslant w(s) \leqslant w_{\max}$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$, $\pi^4 - \pi^2 u_{\max} - \pi v_{\max} + w_{\min} > 0$; далее, обозначив $c_1 = \dfrac{u_{\max} + u_{\min}}{2}$, $d_1 = \dfrac{u_{\max} - u_{\min}}{2}$, $c_2 = \dfrac{w_{\max} + w_{\min}}{2}$ и $d_2 = \dfrac{w_{\max} - w_{\min}}{2}$, предполагаем, что $c_1 \leqslant 0$, $0 \leqslant c_2 \leqslant 4\pi^4$.

Положив $P[x] \equiv x^{\mathrm{IV}} + c_1 x'' + c_2 x$, $Q[x] \equiv \{u(s) - c_1\}x'' + v(s)x' + \{w(s) - c_2\}x$, имеем

$$\varphi_k(s) = \sin k\pi s,$$

$$\sigma_k = \frac{1}{2}, \quad \lambda_k = k^4\pi^4 - c_1 k^2\pi^2 + c_2 \geqslant k^4\pi^4 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Из (4.6), (4.8), (5.4), (5.5), (5.6), (5.7), (5.9) и (5.10) находим

$$|x^*(s) - x_r^*(s)| \leqslant \left[\frac{\varkappa}{15\sqrt{6}}\,\frac{d_1\pi^2(r+1)^2 + (r+1)\pi v_{\max} + d_2}{(r+1)^4\pi^4 - c_1(r+1)^2\pi^2 + c_2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{2}}{\pi^4\left(r+\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{2}}}\right]\frac{\varkappa\|f\|}{\sqrt{7}} \leqslant O(r^{-2}),$$

где

$$\varkappa = \frac{\pi^4 - c_1\pi^2 + c_2}{\pi^4 - \pi^2 u_{\max} - \pi v_{\max} + w_{\min}}.$$

Если $f, u, v, w \in L_2^{(1)}[0,1]$, получается оценка порядка $O(r^{-\frac{5}{2}})$.

§ 7. Обобщение результатов на уравнения с частными производными

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} P[x(s)] + Q[x(s)] = f(s), \\ U_j(x) = 0 \ \ (j = 1, \ldots, \nu), \end{cases} \tag{7.1}$$

где $s = (s_1, \ldots, s_m)$ — точка m-мерного евклидова пространства R_m, $P[x]$ — линейное дифференциальное выражение порядка $n = 2\nu$ эллиптического типа, $U_j(x) = 0$ — однородные краевые условия на границе области $D \subset R_m$, в которой ищется решение краевой задачи (7.1), $f \in L_2(D)$ и

$$Q[x] \equiv \sum_{i \leqslant l} q_{i_1 \ldots i_m}(s) \frac{\partial^i x(s)}{\partial s_1^{i_1} \ldots \partial s_m^{i_m}} \ \ (i = i_1 + \ldots + i_m)$$

— линейное дифференциальное выражение порядка l $(l < n)$ с измеримыми, ограниченными в D, коэффициентами $q_{i_1 \ldots i_m}(s)$.

Дифференциальный оператор $\{P, U\}$, порожденный дифференциальным выражением $P[x]$ и краевыми условиями $U_j(x) = 0$, $(j = 1, \ldots, \nu)$, предполагаем самосопряженным. Пусть λ_1, $\lambda_2, \ldots$ и $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, $\ldots$ — собственные значения и собственные функции оператора $\{P, U\}$:

$$P[\varphi_k] = \lambda_k \varphi_k, \ U_j(\varphi_k) = 0 \ \ (k = 1, 2, \ldots). \tag{7.2}$$

Будем считать, что $0 < |\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots$ и что $\{\varphi_k\}$ — полная ортонормальная система в $L_2(D)$. При решении краевой задачи (7.1) методом Галеркина примем $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, $\ldots$ за координатные функции.

Пусть существует функция Грина $G(s, t)$ оператора $\{P, U\}$ и пусть $x^*(s)$ — решение краевой задачи (7.1), регулярное в том смысле, что

$$x^*(s) = \int_D G(s, t) P[x^*(t)] dt. \tag{7.3}$$

Тогда

$$Q[x^*(s)] = \int_D \sum_{i \leqslant l} q_{i_1 \ldots i_m}(s) \frac{\partial^i G(s, t)}{\partial s_1^{i_1} \ldots \partial s_m^{i_m}} P[x^*(t)] dt$$

и, как это видно из (7.1), $y^* = P[x^*]$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$y(s) + \int_D K(s, t) y(t) dt = f(s), \tag{7.4}$$

где $K(s, t) = \sum_{i \leqslant l} q_{i_1 \ldots i_m}(s) \frac{\partial^i G(s, t)}{\partial s_1^{i_1} \ldots \partial s_m^{i_m}}$. Сказанное справедливо, если $K(s, t)$ ограничено или является ядром со слабой особенностью.

Аналогично, как в § 2, устанавливаем следующее. *Если* $x_r^* = \sum_{k=1}^{r} \xi_k^* \varphi_k(s)$ — *приближенное, по Галеркину, решение краевой задачи* (7.1), *то* $y_r^*(s) = f(s) - Q[x_r^*(s)]$ *является решением интегрального уравнения*

$$y(s) + \int_D K_r(s, t) y(t)\, dt = f(s) \tag{7.5}$$

и имеет место соотношение

$$x_r^*(s) = \int_D G_r(s, t) y_r^*(t)\, dt, \tag{7.6}$$

где $G_r(s, t) = \sum_{k=1}^{r} \frac{\varphi_k(s)\varphi_k(t)}{\lambda_k}$ *и* $K_r(s, t) = \sum_{i \leqslant l} q_{i_1 \ldots i_m}(s) \frac{\partial^i G_r(s, t)}{\partial s_1^{i_1} \ldots \partial s_m^{i_m}}$.

Из (7.3) и (7.6) вытекает

$$x^*(s) - x_r^*(s) = \int_D G_r(s, t)[y^*(t) - y_r^*(t)]\, dt + \int_D [G(s, t) - G_r(s, t)] y^*(t)\, dt = \int_D G(s, t)[y^*(t) - y_r^*(t)]\, dt + \int_D [G(s, t) - G_r(s, t)] y_r^*(t)\, dt. \tag{7.7}$$

Оценим нормы $\|G_r\|$, $\|G\|$ и $\|G - G_r\|$. Если $y = \sum_{k=1}^{\infty} (y, \varphi_k)\varphi_k \in L_2(D)$, то

$$G_r y = \sum_{k=1}^{r} \frac{(y, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k, \quad Gy = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(y, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k, \quad (G - G_r) y = \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{(y, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k \tag{7.8}$$

и, следовательно, $\|G_r\| \leqslant \frac{1}{|\lambda_1|}$, $\|G\| \leqslant \frac{1}{|\lambda_1|}$, $\|G - G_r\| \leqslant \frac{1}{|\lambda_{r+1}|}$.

В соответствии с (7.7) имеем оценку

$$\|x^* - x_r^*\| \leqslant \frac{\|y^* - y_r^*\|}{|\lambda_1|} + \frac{\|z^*\|}{|\lambda_{r+1}|},$$

где за функцию z^* можно взять y_r^* или y^*. Если $\int_D |G(s, t)|^2\, dt \leqslant M$ $(s \in D)$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(s)|^2}{\lambda_k^2}$ сходится в D равномерно и имеет смысл следующая, вытекающая из (7.7), оценка:

$$|x^*(s) - x_r^*(s)| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(s)|^2}{\lambda_k^2}}\, \|y^* - y_r^*\| + \sqrt{\sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(s)|^2}{\lambda_k^2}}\, \|z^*\| \quad (s \in D).$$

Из (7.4) и (7.5) получаются для $y^* - y_r^*$, y^* и y_r^* следующие выражения:

$$y^* - y_r^* = -(E+K)^{-1}(K-K_r)y_r^* = -(E+K_r)^{-1}(K-K_r)y^*,$$
$$y^* = (E+K)^{-1}f,\ y_r^* = (E+K_r)^{-1}f.$$

Рассмотрим частный случай краевой задачи (7.1), когда оператор $\{P,\ U\}$ положительно определен, $Q[x] \equiv q(s)x$, $0 \leqslant q(s) \leqslant q_{\max}$ $(s \in D)$ и $\frac{f}{\sqrt{q}} \in L_2(D)$. Убедившись, что при $\frac{g}{\sqrt{q}} \in L_2(D)$ имеем $\|(E+K)^{-1}g\| \leqslant \sqrt{q_{\max}}\left\|\frac{g}{\sqrt{q}}\right\|$, $\|(E+K_r)^{-1}g\| \leqslant \sqrt{q_{\max}}\left\|\frac{g}{\sqrt{q}}\right\|$, получим из (7.7) оценку

$$\|x^* - x_r^*\| \leqslant \frac{q_{\max}+\lambda_1}{\lambda_1\lambda_{r+1}}\sqrt{q_{\max}}\left\|\frac{f}{\sqrt{q}}\right\| \tag{7.9}$$

и, если $\int\limits_D |G(s,\ t)|^2\,dt \leqslant M$ $(s \in D)$, оценку

$$|x^*(s) - x_r^*(s)| \leqslant \left[\sqrt{\sum_{k=1}^{r}\frac{|\varphi_k(s)|^2}{\lambda_k^2}\frac{q_{\max}}{\lambda_{r+1}}} + \sqrt{\sum_{k=r+1}^{\infty}\frac{|\varphi_k(s)|^2}{\lambda_k^2}}\right]\sqrt{q_{\max}}\left\|\frac{f}{\sqrt{q}}\right\|. \tag{7.10}$$

Оценки (7.9) и (7.10) превосходят точностью и простотой соответствующие оценки А. В. Джишкариани [1]. Кроме того, при выводе оценки (7.9) мы не предполагали, как в [1], сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(s)\varphi_k(t)}{\lambda_k}$ в $L_2(D^{(2)})$.

Если y_r^* — допустимая функция, т. е. если $y_r^*(s) = f(s) - q(s)x_r^*(s)$ достаточное число раз дифференцируема и

$$(P[y_r^*],\ \varphi_k) = (y_r^*,\ P[\varphi_k])\ \ (k = 1,\ 2,\ldots), \tag{7.11}$$

то в соответствии с (7.2), (7.8) и (7.11) имеем

$$(G - G_r)y_r^* = \sum_{k=r+1}^{\infty}\frac{(y_r^*,\ \varphi_k)}{\lambda_k}\varphi_k = \sum_{k=r+1}^{\infty}\frac{(P[y_r^*],\ \varphi_k)}{\lambda_k^2}\varphi_k.$$

Из (7.7) получаем оценку

$$\|x^* - x_r^*\| \leqslant \frac{q_{\max}+\lambda_1}{\lambda_1\lambda_{r+1}^2}\|P[y_r^*]\|,$$

и, если $\int\limits_D |G(s,\ t)|^2\,dt \leqslant M$ $(s \in D)$, оценку

$$|x^*(s) - x_r^*(s)| \leqslant \left[\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\varphi_k(s)|^2}{\lambda_k^2}\frac{q_{\max}}{\lambda_{r+1}^2}} + \sqrt{\sum_{k=r+1}^{\infty}\frac{|\varphi_k(s)|^2}{\lambda_k^4}}\right]\|P[y_r^*]\|.$$

В заключение автор пользуется случаем, чтобы выразить глубочайшую благодарность своему научному руководителю доценту Э. Тамме.

Литература

1. Джишкариани А. В., Оценки погрешности метода Ритца для неоднородного дифференциального уравнения. Сообщ. АН ГрузССР, 1960, 25, № 3, 257—262.
2. Канторович Л. В., Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа. Москва—Ленинград, 1952.
3. Bertram, G., Verschärfung einer Fehlerabschätzung zum Ritz-Galerkinschen Verfahren von Kryloff für Randwertaufgaben. Numer. Math., 1959, 1, № 3, 135—141.
4. Börsch-Supan, W., Bemerkungen zur Fehlerabschätzung beim Ritz-Galerkin-Verfahren nach Krylow. Numer. Math., 1960, 2, № 2, 79—83.
5. Lehmann, N. J., Eine Fehlerabschätzung zum Ritzschen Verfahren für inhomogene Randwertaufgaben. Numer. Math., 1960, 2, № 2, 60—66.

Поступило
23 II 1962

GALJORKINI MEETODI VEA HINNANGUD LINEAARSE DIFERENTSIAALVÕRRANDI KORRAL

G. Vainikko
ÜTÜ ring geomeetria kateedri juures

Resümee

Käesolevas artiklis tuletatakse Galjorkini meetodi vea hinnangud rajaülesannete (1.1) ja (7.1) jaoks, kui koordinaatfunktsioonideks on võetud (enesekaasse) diferentsiaaloperaatori $\{P, U\}$ omafunktsioonid. Tuuakse 4 näidet vea hinnangute rakendamisest konkreetsetele ülesannetele.

FEHLERABSCHÄTZUNGEN ZUM GALERKINSCHEN VERFAHREN FÜR LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

G. Vainikko

Zusammenfassung

Im vorliegenden Aufsatz werden die Fehlerabschätzungen zum Galerkinschen Verfahren für Randwertaufgaben (1.1) und (7.1) gegeben, wenn als Koordinatenfunktionen die Eigenfunktionen des (selbstadjungierten) Differentialoperators $\{P, U\}$ genommen werden. Es werden 4 Beispiele über die Anwendung der Fehlerabschätzungen zu den konkreten Aufgaben angeführt.

ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА РИТЦА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Г. Вайникко
Кафедра геометрии

§ 1. Постановка вопроса. Результаты

Рассмотрим краевую задачу обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{cases} P[x(s)] = \mu Q[x(s)], \\ U_j(x) = 0 \ \ (j = 1, \ldots, 2n), \end{cases} \tag{1}$$

где

$$P[x(s)] \equiv \sum_{i=0}^{n} (p_i(s)\, x^{(i)})^{(i)},$$

$$Q[x(s)] \equiv \sum_{i=0}^{l} (q_i(s)\, x^{(i)})^{(i)} \equiv \sum_{i=0}^{2l} \tilde{q}_i(s)\, x^{(i)} \ \ (l < n)$$

— дифференциальные выражения с i раз непрерывно дифференцируемыми в интервале $[a, b]$ коэффициентами $p_i(s)$ и $q_i(s)$, причем $p_n(s) \neq 0$ и $q_l(s) \neq 0$ $(a \leqslant s \leqslant b)$,

$$U_j(x) \equiv \sum_{i=0}^{2n-1} \{\alpha_{ji}\, x^{(i)}(a) + \beta_{ji}\, x^{(i)}(b)\} = 0 \ \ (j = 1, \ldots, 2n)$$

— однородные краевые условия.

Пусть дифференциальный оператор $A = \{P, U\}$, порожденный дифференциальным выражением $P[x]$ и краевыми условиями $U_j(x) = 0$ $(j = 1, \ldots, 2n)$, самосопряжен и положительно определен. Далее, пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ и $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots$ — собственные значения и собственные функции оператора A, т. е.

$$P[\varphi_k(s)] = \lambda_k \varphi_k(s), \ \ U_j(\varphi_k) = 0 \ \ (k = 1, 2, \ldots);$$

без ограничения общности будем считать, что система $\{\varphi_k\}$ полна и ортонормирована в $L_2[a, b]$. Приняв функции $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots$ за координатные, решим краевую задачу (1) методом Ритца.

Г. Бертрам [6] изучил погрешность приближенных, по Ритцу, собственных значений в случае, когда $Q[x(s)] \equiv q(s)x$, $q(s) > 0$ $(a \leqslant s \leqslant b)$. При краевых условиях $x^{(i)}(a) = x^{(i)}(b) = 0$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ рассмотрен также случай, когда $Q[x(s)] \equiv (-1)^l (q_l(s) x^{(l)})^{(l)}$, $q_l(s) > 0$ $(a \leqslant s \leqslant b)$. Эти оценки погрешности уточнил и обобщил на уравнения с частными производными А. В. Джишкариани [1, 2]; им же даны оценки погрешности и для собственных функций.

В настоящей статье выводятся оценки погрешности при более слабых ограничениях относительно дифференциального выражения $Q[x]$ и краевых условий $U_j(x) = 0$ $(j = 1, \ldots, 2n)$. *Предположим, что существуют такие краевые условия*

$$V_j(x) \equiv \sum_{i=0}^{2l-1} \{\tilde{\alpha}_{ji} x^{(i)}(a) + \tilde{\beta}_{ji} x^{(i)}(b)\} = 0 \quad (j = 1, \ldots, 2l),$$

что, во-первых, дифференциальный оператор $B = \{Q, V\}$, *порожденный дифференциальным выражением* $Q[x]$ *и этими краевыми условиями, будет самосопряженным и положительно определенным, и, во-вторых, для каждой функции*[1] $x \in D_A$ *будем иметь* $V_j(x) = 0$ $(j = 1, \ldots, 2l)$. Далее, введя гильбертово пространство H_A (см. [4]), получаемое пополнением множества D_A по норме $\|[x]\|_A = \sqrt{[x, x]_A} = \sqrt{(P[x], x)}$, и введя аналогично пространство H_B, предполагаем: *операторы* A *и* B *таковы, что каждое множество, ограниченное в* H_A, *компактно в* H_B. Обозначим через μ_k $(0 < \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots)$ и $x_k(s)$ точные, а через μ_{kr} $(0 < \mu_{1r} \leqslant \mu_{2r} \leqslant \ldots \leqslant \mu_{rr})$ и $x_{kr}(s) = \sum_{i=1}^{r} \xi_i^{(kr)} \varphi_i(s)$ — приближенные (r-ые приближения, по Ритцу) собственные значения и собственные функции краевой задачи (1). Далее, через K — K_r обозначим интегральный оператор

$$(K - K_r) y = \int_a^b \sum_{i=0}^{2l} \tilde{q}_i(s) \frac{\partial^i [G(s,t) - G_r(s,t)]}{\partial s^i} y(t)\, dt,$$

где $G(s, t)$ — функция Грина дифференциального оператора $A = \{P, U\}$ и $G_r(s, t) = \sum_{k=1}^{r} \frac{\varphi_k(s)\varphi_k(t)}{\lambda_k}$. *В этих предположениях выведем оценку*

$$0 \leqslant \mu_{kr} - \mu_k \leqslant \mu_{kr}\, \mu_k \|K - K_r\| \qquad (2)$$

---

[1] Второе требование равносильно соотношению $D_A \subset D_B$ между областями определения D_A и D_B операторов A и B соответственно. Множество D_A состоит из функций $x(s)$, $2n-1$ раз непрерывно дифференцируемых в $[a, b]$ и удовлетворяющих краевым условиям $U_j(x) = 0$ $(j = 1, \ldots, 2n)$, причем $x^{(2n-1)}(s)$ абсолютно непрерывна и $x^{(2n)} \in L_2[a, b]$.

u, *если* μ_{kr} *h-кратно:* $\mu_{kr} = \mu_{ir}$ $(i = 1, \ldots, k + h - 1)$, *оценку*

$$|[\tilde{x}_{kr} - x_k]|_B \leqslant 2\mu_{kr}\,|[x_k]|_B \cdot \|K - K_r\| \cdot \max\left\{1, \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ i \neq k, \ldots, k+h-1}} \frac{\mu_{ir}}{|\mu_{ir} - \mu_{kr}|}\right\}, \quad (3)$$

где $\tilde{x}_{kr}$ — ортогональная проекция, в метрике пространства H_B, элемента x_k на подпространство, порожденное элементами [2] x_{ir} $(i = k, \ldots, k + h - 1)$.

Для $\|K - K_r\|$ — нормы оператора $K - K_r$ в пространстве $L_2[a, b]$ — справедливы оценки:

$$\|K - K_r\| \leqslant \sum_{i=0}^{2l} \|\tilde{q}_i\| \cdot \max_{a \leqslant s \leqslant b} \sqrt{\sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{|\varphi_k^{(i)}(s)|^2}{\lambda_k^2}},$$

$$\|K - K_r\| \leqslant \sum_{i=0}^{2l} |d_r^{(i)}| \cdot \max_{a \leqslant s \leqslant b} |\tilde{q}_i(s)|,$$

где

$$|d_r^{(i)}|^2 \leqslant \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{\|\varphi_k^{(i)}\|^2}{\lambda_k^2}$$

и, если $\varphi_k^{(i)}(s)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ортогональны,

$$|d_r^{(i)}| \leqslant \sup_{k > r} \frac{\|\varphi_k^{(i)}\|}{\lambda_k} \quad (0 \leqslant i \leqslant 2l).$$

Пример. Для краевой задачи

$$\begin{cases} x^{IV} = \mu[-(q_1(s)x')' + q_0(s)x], \\ x(0) = x''(0) = x(1) = x''(1) = 0 \end{cases}$$

все сформулированные выше предположения выполнены, если $q_0(s) \geqslant 0$ непрерывна, а $q_1(s) > 0$ непрерывно дифференцируема в интервале $[0, 1]$. Имеем $\varphi_k(s) = \sqrt{2}\sin k\pi s$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и

$$\|K - K_r\| \leqslant \frac{\max\limits_{0 \leqslant s \leqslant 1} q_1(s)}{(r+1)^2\pi^2} + \frac{\max\limits_{0 \leqslant s \leqslant 1} |q'(s)|}{(r+1)^3\pi^3} + \frac{\max\limits_{0 \leqslant s \leqslant 1} q_0(s)}{(r+1)^4\pi^4}.$$

Неравенства (2) и (3) дают оценки погрешности порядка $O(r^{-2})$.

При выводе в § 2 оценок погрешности (2) и (3) мы пользуемся некоторыми средствами функционального анализа. Не представляет трудности вместо (1) рассмотреть уравнение $Ax = \mu Bx$ в любом гильбертовом пространстве, и, таким образом, мы получаем оценки погрешности и для уравнений с частными производными.

---

[2] Считая элементы x_{ir} $(i = k, \ldots, k + h - 1)$ ортонормированными в H_B, имеем $\tilde{x}_{kr} = \sum_{i=k}^{k+h-1} (Q[x_k], x_{ir})\,x_{ir}$.

ESV AUN Tartu Kultuuriheene

§ 2. Оценки погрешности в гильбертовом пространстве

1. Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве H однородное уравнение

$$Ax = \mu Bx, \tag{4}$$

где A и B — заданные линейные (т. е. аддитивные и однородные) операторы в H, μ и x — искомые собственное значение и собственный элемент. Предполагаем, что:

1° *Операторы A и B самосопряженны и положительно определены, причем $D_A \subset D_B$, и при каждом вещественном μ самосопряжен также оператор $A - \mu B$;*

2° *Операторы A и B таковы, что каждое множество, ограниченное в пространстве H_A, компактно в пространствах H и H_B.*

В этих предположениях (см. [4]) уравнение (4) имеет счетное множество собственных значений $\mu_1, \mu_2, \ldots$ $(0 < \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots)$ и собственных элементов $x_1, x_2, \ldots$:

$$Ax_k = \mu_k Bx_k, \quad x_k \in D_A \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Не ограничивая общности, будем считать, что система $\{x_k\}$ полна и ортонормирована в H_B; тогда система $\left\{\frac{x_k}{\sqrt{\mu_k}}\right\}$ полна и ортонормирована в H_A.

Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ $(0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots)$ и $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ собственные значения и собственные элементы оператора A:

$$A\varphi_k = \lambda_k \varphi_k, \quad \varphi_k \in D_A \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Существование у оператора A собственных значений и собственных элементов следует (см. [4]) из предложений 1°—2°. Без ограничения общности будем считать систему $\{\varphi_k\}$ полной и ортонормированной в H.

Приняв элементы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ за координатные, решим уравнение (4) методом Ритца. Коэффициенты приближенного собственного элемента $x_{kr} = \sum_{i=1}^{r} \xi_i^{(kr)} \varphi_i$ $(k = 1, \ldots, r)$ определяются из системы уравнений

$$\lambda_i \xi_i - \mu \sum_{j=1}^{r} (B\varphi_j, \varphi_i)\xi_j = 0 \quad (i = 1, \ldots, r), \tag{6}$$

в котором положено $\mu = \mu_{kr}$; μ_{kr} — приближенное собственное значение — определяется из условия, чтобы определитель системы уравнений (6) был равен нулю.

2. Обозначим $G = A^{-1}$ и $\Gamma = B^{-1}$. Будучи обратными положительно определенных самосопряженных операторов, операторы G и Γ самосопряженны, положительны, непрерывны и

определены во всем пространстве H. Введем гильбертово пространство H_Γ, получаемое пополнением множества $D_\Gamma = H$ по норме $|[y]|_\Gamma = \sqrt{[y, y]_\Gamma} = \sqrt{(\Gamma y, y)}$. В следующих леммах изучаются некоторые свойства этого пространства.[3]

Лемма 1. *Оператор Γ (определенный первоначально на H), имеет линейное непрерывное расширение*[4] $\Gamma \in [H_\Gamma \to H_B]$.

Доказательство. Пусть дана последовательность $y_1, y_2, \ldots$ $(y_k \in H)$, сходящаяся по метрике пространства H_Γ к $y \in H$. Тогда имеем[5]: $\lim [\Gamma(y_k - y), \Gamma(y_k - y)]_B = \lim (\Gamma(y_k - y), y_k - y) = \lim [y_k - y, y_k - y]_\Gamma = 0$, т. е. последовательность $\Gamma y_1, \Gamma y_2, \ldots$ $(\Gamma y_k \in H_B)$ сходится по метрике пространства H_B к $\Gamma y \in H_B$, и оператор Γ, таким образом, непрерывен на множестве H. Из определения пространства H_Γ следует, что множество H плотно в H_Γ; принимая еще во внимание теорему о расширении оператора по непрерывности, мы и получим утверждение леммы.

Лемма 2. *Для $y, z \in H_\Gamma$ имеем* $[y, z]_\Gamma = [\Gamma y, \Gamma z]_B$.

Доказательство. Выбрав последовательности $y_1, y_2, \ldots$ и $z_1, z_2, \ldots$ $(y_k, z_k \in H)$, сходящиеся по метрике пространства H_Γ соответственно к y и z, имеем $[y, z]_\Gamma = \lim [y_k, z_k]_\Gamma = \lim (\Gamma y_k, z_k) = \lim [\Gamma y_k, \Gamma z_k]_B = [\Gamma y, \Gamma z]_B$.

Лемма 3. *Если $\Gamma y = 0$ $(y \in H_\Gamma)$, то $y = 0$.*

Доказательство. Возьмем последовательность $y_1, y_2, \ldots$ $(y_k \in H_\Gamma)$, сходящуюся по метрике пространства H_Γ к y. Тогда последовательность $\Gamma y_1, \Gamma y_2, \ldots$ сходится по метрике пространства H_B к $\Gamma y = 0$, т. е. $\lim [y_k, y_k]_\Gamma = \lim [\Gamma y_k, \Gamma y_k]_B = 0$, откуда следует, что $y = \lim y_k = 0$.

Лемма 4. *Оператор B (определенный первоначально на D_B) имеет линейное непрерывное расширение $B \in [H_B \to H_\Gamma]$.*

Для доказательства этого утверждения достаточно убедиться, что в соответствии между элементами пространств H_B и H_Γ, которое устанавливается оператором $\Gamma \in [H_\Gamma \to H_B]$, принимает участие каждый элемент $z \in H_B$. Тогда, в силу лем-

---

[3] Леммы справедливы в случае любого линейного самосопряженного положительно определенного оператора B.

[4] Символом $[X \to Y]$ обозначаем совокупность линейных непрерывных операторов, переводящих пространство X в пространство Y.

[5] Всюду, где пределы изменения индексов не указаны, они пробегают значения 1, 2, 3, ... Поэтому ниже $\lim\limits_{k \to \infty} a_k = \lim a_k$, $\Sigma a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

мы 3, это соответствие взаимно однозначно, и по теореме Банаха существует обратный оператор $\Gamma^{-1} \in [H_B \to H_\Gamma]$, который и является требуемым расширением оператора B. Пользуясь плотностью множества D_B в пространстве H_B, выберем для любого $z \in H_B$ последовательность $z_1, z_2, \ldots$ $(z_k \in D_B)$, сходящуюся к этому элементу $z \in H_B$ по метрике пространства H_B. Тогда, как легко проверить, последовательность $Bz_1, Bz_2, \ldots$ $(Bz_k \in H \subset H_\Gamma)$ фундаментальна в пространстве H_Γ и, следовательно, сходится по метрике пространства H_Γ к некоторому $y \in H_\Gamma$. Очевидно, $z = \Gamma y$. Таким образом, в упомянутом выше соответствии принимает участие каждый элемент пространства H_B; отсюда, как мы видели, и следует утверждение леммы 4.

Лемма 5. *Если система $\{\psi_k\}$ полна и ортонормирована в H_B, то система $\{B\psi_k\}$ полна и ортонормирована в H_Γ.*

В частности, система $\{Bx_k\}$ полна и ортонормирована в H_Γ.

Доказательство. Ортонормированность системы $\{B\psi_k\}$ очевидна. Если $y \in H_\Gamma$ ортогонален всем $B\psi_k$: $[y, B\psi_k]_\Gamma = [\Gamma y, \psi_k]_B = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то $\Gamma y \in H_B$ ортогонален всем ψ_k и, в силу полноты системы $\{\psi_k\}$, $\Gamma y = 0$. По лемме 3 имеем $y = 0$, т. е. система $\{B\psi_k\}$ полна в H_Γ.

Введя пространство H_G, имеем, в частности, следующие результаты: а) оператор G (определенный первоначально на H) имеет линейное непрерывное расширение $G \in [H_G \to H_A]$ и б) система $\left\{\frac{Ax_k}{\sqrt{\mu_k}}\right\}$ полна и ортонормирована в пространстве H_G.

3. Рассмотрим операторы $K = BG$ и $K_r = BG_r$, где $G_r y = \sum_{k=1}^{r} \frac{(y, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k$ $(y \in H)$. Так как $D_A \subset D_B$ и $Gy \in D_A$ $(y \in H)$, то оператор K определен во всем пространстве H; очевидно, он замкнут, а следовательно и непрерывен: $K \in [H \to H]$.

Переписав равенство $K_r y = \sum_{k=1}^{r} \frac{(y, \varphi_k)}{\lambda_k} B\varphi_k$ $(y \in H)$ в виде $K_r y = \sum_{k=1}^{r} \frac{[y, B\varphi_k]_\Gamma}{\lambda_k} B\varphi_k$, мы тем самым получаем вполне непрерывное самосопряженное расширение $K_r \in [H_\Gamma \to H_\Gamma]$ оператора K_r. Опираясь на сформулированные выше леммы, докажем, что такое расширение имеет и оператор K.

Теорема 1. *Оператор K (определенный первоначально на H) имеет вполне непрерывное самосопряженное расширение $K \in [H_\Gamma \to H_\Gamma]$.*

Доказательство. Определим оператор I, сопоставляющий каждому элементу $y \in H_\Gamma$ элемент $Iy \in H_G$ по следующему правилу: если[6] $y = \Sigma \eta_k Bx_k$, то $Iy = \Sigma \frac{\eta_k}{\sqrt{\mu_k}} \cdot \frac{Ax_k}{\sqrt{\mu_k}}$. Очевидно, $I \in [H_\Gamma \to H_G]$. Для $y \in H$ имеем $Iy = y$:

$$Iy = \Sigma \frac{[y, Bx_k]_\Gamma}{\sqrt{\mu_k}} \cdot \frac{Ax_k}{\sqrt{\mu_k}} = \Sigma \left(y, \frac{x_k}{\sqrt{\mu_k}}\right) \cdot \frac{Ax_k}{\sqrt{\mu_k}} = \Sigma \left[y, \frac{Ax_k}{\sqrt{\mu_k}}\right]_G \cdot \frac{Ax_k}{\sqrt{\mu_k}} = y.$$

Рассмотрим оператор $KI = BGI$. Так как $I \in [H_\Gamma \to H_G]$, $G \in [H_G \to H_A]$, $H_A \subset H_B$ и $B \in [H_B \to H_\Gamma]$, то KI переводит H_Γ в H_Γ. Из предположения 2° следует, что оператор KI вполне непрерывен. Далее, выбрав для любых $y, z \in H_\Gamma$ последовательности $y_1, y_2, \ldots$ и $z_1, z_2, \ldots$ $(y_k, z_k \in H)$, сходящиеся по метрике пространства H_Γ соответственно к y и z, имеем

$$[KIy, z]_\Gamma = \lim [BGy_k, z_k]_\Gamma = \lim (Gy_k, z_k) = \lim (y_k, Gz_k) =$$
$$= \lim [y_k, BGIz_k]_\Gamma = [y, KIz]_\Gamma,$$

т. е. оператор KI самосопряжен. Так как $KIy = Ky$ для $y \in H$, то оператор KI и является требуемым расширением оператора K. Теорема доказана.

В дальнейшем вместо KI будем писать K. Введем уравнение

$$y = \mu Ky \tag{7}$$

и установим его связь с уравнением (4).

Теорема 2. *Характеристические значения уравнения* (7) *совпадают с собственными значениями* μ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ *уравнения* (4). *Между характеристическими элементами* y_k *уравнения* (7) *и собственными элементами* x_k *уравнения* (4) *имеет место соотношение*

$$y_k = Bx_k. \tag{8}$$

Доказательство теоремы станет очевидным после подстановки (8) в равенство (5). Ясно также, что уравнение (7) не может иметь характеристических значений, кроме упомянутых в теореме, так как система $\{Bx_k\}$ полна в H_Γ (см. лемму 5).

Введем еще уравнение

$$y = \mu K_r y \tag{9}$$

и установим его связь с r-ыми приближениями, по Ритцу.

---

[6] Напомним, что системы $\{Bx_k\}$ и $\left\{\frac{Ax_k}{\sqrt{\mu_k}}\right\}$ полны и ортонормированы соответственно в пространствах H_Γ и H_G.

Теорема 3. *Характеристические значения уравнения* (9) *совпадают с приближенными, по Ритцу, собственными значениями* μ_{kr} $(0 < \mu_{1r} \leqslant \ldots \leqslant \mu_{rr})$ *уравнения* (4). *Между характеристическими элементами* y_{kr} *уравнения* (9) *и приближенными, по Ритцу, собственными элементами* x_{kr} *уравнения* (4) *имеет место соотношение*

$$y_{kr} = Bx_{kr}. \tag{10}$$

Доказательство. Поскольку $K_r y = \sum_{i=1}^{r} \frac{[y, B\varphi_i]_\Gamma}{\lambda_i} B\varphi_i$ $(y \in H_\Gamma)$, то решение уравнения (9) имеет вид $y = \sum_{i=1}^{r} \xi_i B\varphi_i \in H$. Далее, с помощью непосредственной проверки убедимся, что определение коэффициентов ξ_i приводит к системе уравнений (6). Отсюда и следуют утверждения теоремы 3.

4. Известно (см. [5], стр. 259), что k-ые собственные значения $\frac{1}{\mu_k}$ и $\frac{1}{\mu_{kr}}$ $(k \leqslant r)$ вполне непрерывных самосопряженных операторов K и K_r отличаются друг от друга не больше, чем на $|[K - K_r]|_\Gamma$:

$$\left|\frac{1}{\mu_k} - \frac{1}{\mu_{kr}}\right| \leqslant |[K - K_r]|_\Gamma.$$

Легко убедиться, что[7] $[(K - K_r)y, y]_\Gamma \geqslant 0$ $(y \in H_\Gamma)$; из этого неравенства следует (см. [5]), что $\frac{1}{\mu_k} \geqslant \frac{1}{\mu_{kr}}$. Таким образом, $\left|\frac{1}{\mu_k} - \frac{1}{\mu_{kr}}\right| = \frac{\mu_{kr} - \mu_k}{\mu_{kr} \cdot \mu_k}$, и мы получили оценку погрешности

$$0 \leqslant \mu_{kr} - \mu_k \leqslant \mu_{kr}\, \mu_k\, |[K - K_r]|_\Gamma. \tag{11}$$

Нетрудно вывести оценку погрешности и для приближенного, по Ритцу, собственного элемента уравнения (4). Пусть μ_{kr} h-кратно: $\mu_{kr} = \mu_{ir}$ $(i = k, \ldots, k + h - 1)$, а $\tilde{x}_{kr}$ — ортогональная проекция, в метрике H_B, элемента x_k на подпространство,

---

[7] Действительно, выбрав последовательность $y_1, y_2, \ldots$ $(y_k \in H)$, сходящуюся по метрике пространства H_Γ к $y \in H_\Gamma$, находим:

$$[(K - K_r)y, y]_\Gamma = \lim [(K - K_r)y_k, y_k]_\Gamma = \lim ((G - G_r)y_k, y_k) \geqslant 0,$$

поскольку для любого $z = \Sigma a_k \varphi_k \in H$ имеем $Gz = \Sigma \frac{a_k}{\lambda_k} \varphi_k$, $G_r z = \sum_{k=1}^{r} \frac{a_k}{\lambda_k} \varphi_k$ и $((G - G_r)z, z) = \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{a^2_k}{\lambda_k} \geqslant 0$.

порожденное элементами x_{ir} $(i = k, \ldots, k + h - 1)$. Положим $\tilde{y}_{kr} = B\tilde{x}_{kr}$. Тогда, в силу равенств (8) и (10) и леммы 2, $y_k - \tilde{y}_{kr}$ ортогонален, в метрике H_Γ, к y_{ir} $(i = k, \ldots, k + h - 1)$ и

$$|[x_k - \tilde{x}_{kr}]|_B = |[y_k - \tilde{y}_{kr}]|_\Gamma. \tag{12}$$

Вычитая из равенства $y_k = \mu_k K y_k$ равенство $\tilde{y}_{kr} = \mu_{kr} K_r \tilde{y}_{kr}$, мы, после некоторых простых преобразований, получим:

$$y_k - \tilde{y}_{kr} = \mu_{kr} K_r (y_k - \tilde{y}_{kr}) + f,$$

где

$$f = \mu_{kr}(K - K_r) y_k + \frac{\mu_k - \mu_{kr}}{\mu_k} y_k. \tag{13}$$

Рассматривая уравнение

$$y = \mu_{kr} K_r y + f$$

в ортогональном к y_{ir} $(i = k, \ldots, k + h - 1)$ подпространстве пространства H_Γ и принимая во внимание разложение решения $y_k - \tilde{y}_{kr}$ этого уравнения по собственным элементам оператора K_r (см. [3], стр. 293), находим

$$|[\tilde{y}_{kr} - y_k]|_\Gamma \leqslant \max\left\{1, \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ i \neq k, \ldots, k+h-1}} \frac{\mu_{ir}}{|\mu_{ir} - \mu_{kr}|}\right\} \cdot |[f]|_\Gamma. \tag{14}$$

Из условий (11) и (13) вытекает, что

$$|[f]|_\Gamma \leqslant 2\mu_{kr} |[K - K_r]|_\Gamma \cdot |[y_k]|_\Gamma = 2\mu_{kr} |[K - K_r]|_\Gamma \cdot |[x_k]|_B.$$

Сопоставляя последнее неравенство с условиями (12) и (14), мы и получаем искомую оценку погрешности:

$$|[\tilde{x}_{kr} - x_k]|_B \leqslant 2\mu_{kr} |[x_k]|_B |[K - K_r]|_\Gamma \cdot \max\left\{1, \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ i \neq k, \ldots, k+h-1}} \frac{\mu_{ri}}{|\mu_{ir} - \mu_{kr}|}\right\}. \tag{15}$$

Ввиду положительной определенности оператора B, из (15) можно получить оценку и для нормы $\|\tilde{x}_{kr} - x_k\|$.

В оценках погрешности (11) *и* (15) *можно норму* $|[K - K_r]|_\Gamma$ *заменить нормой* $\|K - K_r\|$. *Именно, справедливо неравенство*

$$|[K - K_r]|_\Gamma \leqslant \|K - K_r\|. \tag{16}$$

Наметим доказательство неравенства (16). Рассмотрим в пространстве H уравнение, зависящее от положительного параметра α:

$$A(\alpha) x = \mu B x, \quad (\alpha > 0), \tag{17}$$

где

$$A(\alpha)x=\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{r}\lambda_k(x,\varphi_k)\varphi_k+\sum_{k=r+1}^{\infty}\lambda_k(x,\varphi_k)\varphi_k. \tag{18}$$

Область определения $D_{A(\alpha)}$ оператора $A(\alpha)$ — множество элементов $x\in H$, для которых ряд $\Sigma\lambda_k(x,\varphi_k)\varphi_k$ сходится (по метрике пространства H) — совпадает с областью определения D_A оператора A. Нетрудно проверить, что уравнение (17) удовлетворяет требованиям $1^\circ-2^\circ$ (с заменой в них A на $A(\alpha)$), а, следовательно, для уравнения (17) справедливы и все вытекающие отсюда выводы. В частности, если $\mu_1(\alpha)>0$ — наименьшее собственное значение уравнения (17) и $x_1(\alpha)\in D_{A(\alpha)}$ — соответствующий ему собственный элемент, то $\mu_1(\alpha)$ и $y_1(\alpha)=Bx_1(\alpha)\in H$ — наименьшее характеристическое значение и соответствующий ему характеристический элемент уравнения

$$y=\mu K(\alpha)y\quad(\alpha>0),$$

где $K(\alpha)=BG(\alpha)$, $G(\alpha)=[A(\alpha)]^{-1}$. Оператор $K(\alpha)$ вполне непрерывен и самосопряжен в пространстве H_Γ, и поэтому

$$|[K(\alpha)]|_\Gamma=\frac{1}{\mu_1(\alpha)}.$$

Так как, с другой стороны, имеем

$$\|y_1(\alpha)\|=\mu_1(\alpha)\|K(\alpha)y_1(\alpha)\|\leqslant\mu_1(\alpha)\|K(\alpha)\|\|y_1(\alpha)\|,$$

то

$$|[K(\alpha)]|_\Gamma\leqslant\|K(\alpha)\|\quad(\alpha>0). \tag{19}$$

Из равенства (18) можно заключить, что $G(\alpha)=\alpha G_r+(G-G_r)$, $K(\alpha)=\alpha K_r+(K-K_r)$ и

$$K-K_r=K(\alpha)-\alpha K_r.$$

В соответствии с (19) имеем:

$$|[K-K_r]|_\Gamma\leqslant\|K(\alpha)\|+\alpha|[K_r]|_\Gamma\leqslant$$
$$\leqslant\|K-K_r|\|+\alpha\{\|K_r\|+|[K_r]|_\Gamma\}\quad(\alpha>0).$$

Ввиду произвольности параметра $\alpha>0$, мы из последнего неравенства и получаем доказываемое условие (16).

Литература

1. Джишкариани А. В., Некоторые оценки погрешности метода Ритца-Галеркина для собственных значений и собственных функций обыкновенного дифференциального уравнения. Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, 1959, **26**, 285—306.
2. Джишкариани А. В., Оценки погрешности метода Ритца для соб-

ственных значений и собственных функций дифференциального уравнения. Сообщ. АН ГрузССР, 1960, 25, № 1, 11—18.
3. Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах. Москва, 1959.
4. Михлин С. Г., Проблема минимума квадратичного функционала. Москва—Ленинград, 1952.
5. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу. Москва, 1954.
6. Bertram, G., Fehlerabschätzungen für das Ritz-Galerkinschen Verfahren bei Eigenwertproblemen. Z. angew. Math. und Mech., 1957, 37, № 5—6, 191—201.

Поступило
8 III 1962

RITZI MEETODI VEA HINNANGUD LINEAARSE HOMOGEENSE VÕRRANDI KORRAL

G. Vainikko
Geomeetria kateeder

Resümee

Käesolevas artiklis tuletatakse vea hinnangud Ritzi meetodiga leitud lineaarse operaatorvõrrandi $Ax = \mu Bx$ omaväärtuste ja omaelementide lähenditele, kui koordinaatelementideks on võetud operaatori A omaelemendid. Esimeses paragrahvis formuleeritakse tulemus rajaülesande (1) jaoks.

FEHLERABSCHÄTZUNGEN ZUM RITZSCHEN VERFAHREN FÜR LINEARE HOMOGENE GLEICHUNGEN

G. Vainikko

Zusammenfassung

Im vorliegenden Aufsatz werden die Fehlerabschätzungen zu den Ritzschen Näherungen der Eigenwerte und Eigenelemente der Operatorgleichung $Ax = \mu Bx$ gegeben, wenn als Koordinatenelemente die Eigenelemente des Operators A genommen werden. Im ersten Paragraphen wird das Ergebnis für die Randwertaufgabe (1) formuliert.

НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

М. Левин
Институт кибернетики АН Эст. ССР

Пусть функция $f(x, y)$ определена в квадрате

$$K = [a - h \leqslant x \leqslant a + h, \quad b - h \leqslant y \leqslant b + h],$$
$$0 < h \leqslant 1, \quad f(a, b) \neq 0.$$

Определим функцию

$$F(f) = \frac{f(x, b) \cdot f(a, y)}{f(a, b)}.$$

Очевидно совпадение значений функций $f(x, y)$ и $F(f)$ вдоль прямых $x = a$ и $y = b$. Благодаря этому оказывается возможным построить формулы для приближенного вычисления двойных интегралов путем замены подынтегральной функции $f(x, y)$ функцией $F(f)$.

Лемма 1. *Пусть $P(u, v)$ — многочлен и $P(a, b) \neq 0$. Тогда верна формула*

$$\int_{a-h}^{a+h}\int_{b-h}^{b+h} P(u, v)\,du\,dv = \frac{1}{P(a, b)} \int_{a-h}^{a+h} P(u, b)\,du \int_{b-h}^{b+h} P(a, v)\,dv + R[P, h], \quad (1)$$

где $|R[P, h]| < h^6 C_P$ и C_P зависит только от многочлена $P(u, v)$.

Доказательство. Пусть $Q(x, y) = P(x + a, \ y + b)$. Тогда $Q(0, 0) \neq 0$. Докажем формулу

$$\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} Q(x, y)\,dx\,dy = \frac{1}{Q(0, 0)} \int_{-h}^{h} Q(x, 0)\,dx \int_{-h}^{h} Q(0, y)\,dy + R[Q, h]. \quad (2)$$

Этим будет доказана и (1), так как она получается из (2) заменой $u = x + a$, $v = y + b$. Пусть

$$Q(x, y) = \sum_{i,j=0}^{m,n} a_{ij} x^i y^j, \quad a_{00} \neq 0.$$

Имеем

$$R[Q, h] = \int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} \sum_{i,j=0}^{m,n} a_{ij} x^i y^j \, dx \, dy - \frac{1}{a_{00}} \int_{-h}^{h} \sum_{i=0}^{m} a_{i0} x^i \, dx \int_{-h}^{h} \sum_{j=0}^{n} a_{0j} y^j \, dy =$$

$$= \sum_{i,j=0}^{m,n} a_{ij} \frac{[h^{i+1} - (-h)^{i+1}][h^{j+1} - (-h)^{j+1}]}{(i+1)(j+1)} -$$

$$- \sum_{i,j=0}^{m,n} \frac{a_{i0} a_{0j}}{a_{00}} \frac{[h^{i+1} - (-h)^{i+1}][h^{j+1} - (-h)^{j+1}]}{(i+1)(j+1)} =$$

$$= \sum_{i,j=0}^{m,n} \left(a_{ij} - \frac{a_{i0} a_{0j}}{a_{00}} \right) \frac{[h^{i+1} - (-h)^{i+1}][h^{j+1} - (-h)^{j+1}]}{(i+1)(j+1)}.$$

Видим, если одно из чисел m, n меньше 2, то $R[Q, h] = 0$. Пусть $m, n \geqslant 2$. Тогда

$$|R[Q, h]| = \left| \sum_{k,l=1}^{\left[\frac{m}{2}\right], \left[\frac{n}{2}\right]} \left(a_{2k,\,2l} - \frac{a_{2k,\,0} a_{0,\,2l}}{a_{00}} \right) \frac{2h^{2k+1} 2h^{2l+1}}{(2k+1)(2l+1)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant h^6 \cdot 4 \max_{k,l} \left| a_{2k,\,2l} - \frac{a_{2k,\,0} a_{0,\,2l}}{a_{00}} \right| \sum_{k,l=1}^{\left[\frac{m}{2}\right], \left[\frac{n}{2}\right]} \frac{h^{2k+2l-4}}{(2k+1)(2l+1)} < h^6 C_Q.$$

Этим формула (2), а с ней и лемма 1, доказана.

Лемма 2. *Пусть $Q(x, y)$ многочлен, четный относительно x,* $\min\limits_{0 \leqslant x \leqslant w} |Q(x, 0)| \neq 0$, $w = \frac{\sqrt{3}}{3} h$, *тогда справедлива формула*

$$I = \int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} Q(x, y)\,dx\,dy = \frac{1}{Q(w, 0)} \int_{-h}^{h} Q(x, 0)\,dx \int_{-h}^{h} Q(w, y)\,dy + \\ + R_1[Q, h], \tag{3}$$

где $|R_1[Q, h]| < h^8 K_Q$ и K_Q не увеличивается с уменьшением h.

Доказательство. Представим

$$Q(x, y) = \sum_{i,j=0}^{m,n} a_{2i,\,j} x^{2i} y^j$$

в виде $Q(x, y) = p(x, y) + q(x, y) + r(x, y)$, где $p(x, y) = a_{00} + a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + a_{22}x^2y^2 + a_{40}x^4 + a_{04}y^4$, $q(x, y)$ состоит из остальных слагаемых $Q(x, y)$, не содержащих y или содержащих y в четной степени, $r(x, y)$ состоит из слагаемых $Q(x, y)$, содержащих y в нечетных степенях. Введем обозначения:

$$\alpha = a_{00} + \frac{1}{3}a_{20}h^2 + \frac{1}{9}a_{40}h^4, \quad \beta = \frac{2}{3}a_{02}h^3 + \frac{2}{9}a_{22}h^5 + \frac{2}{5}a_{04}h^5,$$

γ_i — многочлены от h с коэффициентами, зависящими только от $a_{2k, l}$ $(k = 0, 1, \ldots, m;\ l = 0, 1, \ldots, n)$. Тогда имеем:

$$\int_{-h}^{h} p(w, y)\,dy = 2h\alpha + \beta; \quad \int_{-h}^{h} q(w, y)\,dy = \gamma_1 h^7; \quad \int_{-h}^{h} r(w, y)\,dy = 0;$$

$$\int_{-h}^{h} r(x, 0)\,dx = 0; \quad \int_{-h}^{h} q(x, 0)\,dx = \gamma_2 h^7;$$

$$\int_{-h}^{h} p(x, 0)\,dx = 2ha_{00} + \frac{2}{3}a_{20}h^3 + \frac{2}{5}a_{40}h^5; \quad Q(w, 0) = \alpha + \gamma_3 h^6.$$

Используя это и имея в виду (3), получаем:

$$I = \frac{[(\alpha + \gamma_3 h^6)2h + \gamma_4 h^7 + \beta][(2ha_{00} + \frac{2}{3}h^3 a_{20} + \frac{2}{5}h^5 a_{40}) + \gamma_2 h^7]}{\alpha + \gamma_3 h^6} +$$

$$+ R_1[Q, h] =$$

$$= 2h\left(2ha_{00} + \frac{2}{3}h^3 a_{20} + \frac{2}{5}h^5 a_{40}\right) + 2\gamma_2 h^8 +$$

$$+ \frac{(\beta + \gamma_4 h^7)[(2ha_{00} + \frac{2}{3}h^3 a_{20} + \frac{2}{3}h^5 a_{40} + \gamma_3 2h^7) - \gamma_6 h^7 + \gamma_5 h^5]}{\alpha + \gamma_3 h^6} +$$

$$+ R_1[Q, h] =$$

$$= 4h^2 a_{00} + \frac{4}{3}h^4 a_{20} + \frac{4}{5}h^6 a_{40} + 2\gamma_2 h^8 + 2h\beta + 2\gamma_4 h^8 +$$

$$+ \frac{\gamma_8 h^8}{\alpha + \gamma_3 h^6} + R_1[Q, h].$$

Отсюда

$$I = 4h^2 a_{00} + \frac{4}{3}h^4 a_{20} + \frac{4}{5}h^6 a_{40} + \frac{4}{3}h^4 a_{02} + \frac{4}{9}h^6 a_{22} + \frac{4}{5}h^6 a_{04} +$$

$$+ \gamma_9 h^8 + \frac{\gamma_8 h^8}{Q(w, 0)} + R_1[Q, h]. \tag{4}$$

В то же время

$$I = \int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} Q(x, y)\,dx\,dy = 4h^2 a_{00} + \frac{4}{3}h^4 a_{20} + \frac{4}{5}h^6 a_{40} + \frac{4}{3}h^4 a_{02} +$$

$$+ \frac{4}{9}h^6 a_{22} + \frac{4}{5}h^6 a_{04} + \gamma_{10} h^8. \tag{5}$$

Вычитая из равенства (4) равенство (5), получаем

$$R_1[Q,\ h] = h^8\left(\gamma_{10} - \gamma_9 - \frac{\gamma_8}{Q(w,\ 0)}\right).$$

Из этого равенства и из того, что $\min\limits_{0\leqslant x\leqslant w} |Q(x,\ 0)| \neq 0$, следует, что существует число K_Q такое, что $|R_1[Q,\ h]| < h^8 K_Q$, и этим лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть $f(u, v)$ имеет в K непрерывные частные производные $\frac{\partial^{i+j}}{\partial u^i \partial v^j} f(u, v)$, $(i, j \leqslant 4)$; $f(a, b) \neq 0$. Тогда верна формула*

$$\int\limits_{a-h}^{a+h}\int\limits_{b-h}^{b+h} f(u, v)\,du\,dv = \frac{1}{f(a, b)} \int\limits_{a-h}^{a+h} f(u, b)\,du \int\limits_{b-h}^{b+h} f(a, v)\,dv + O(h^6). \quad (6)$$

Доказательство. Пусть $\Phi(x, y) = f(x + a, y + b)$. Достаточно доказать формулу:

$$I = \int\limits_{-h}^{h}\int\limits_{-h}^{h} \Phi(x, y)\,dx\,dy = \frac{1}{\Phi(0, 0)} \int\limits_{-h}^{h} \Phi(x, 0)\,dx \int\limits_{-h}^{h} \Phi(0, y)\,dy + O(h^6). \quad (7)$$

Пусть число M такое, что в $K' = [-h \leqslant x \leqslant h,\ -h \leqslant y \leqslant h]$ $\left|\frac{\partial^4}{\partial x^4}\Phi\right| < M$, $\left|\frac{\partial^4}{\partial y^4}\Phi\right| < M$ и $\left|\frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial y^4}\Phi\right| < M^2$, а также обозначим

$$N = \frac{1}{9}\left|\frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2}\Phi(0, 0) - [\Phi(0, 0)]^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(0, 0)\cdot\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi(0, 0)\right|.$$

Применим следующую формулу (см. [3]):

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \sum_{\mu,\,\nu=0}^{m,\,n} \frac{x^\mu y^\nu}{\mu!\,\nu!}\frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial x^\mu \partial y^\nu}\Phi(0, 0) + R_{m,\,n}, \\ R_{m,\,n} &= \frac{x^{m+1}}{(m+1)!}\frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}}\Phi(\xi, y) + \frac{y^{n+1}}{(n+1)!}\frac{\partial^{n+1}}{\partial y^{n+1}}\Phi(x, \eta) - \\ &\quad - \frac{x^{m+1}y^{n+1}}{(m+1)!\,(n+1)!}\frac{\partial^{m+n+2}}{\partial x^{m+1}\partial y^{n+1}}\Phi(\xi, \eta). \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Взяв здесь $m = n = 3$, получаем

$$\Phi(x, y) = Q(x, y) + R_3(x, y),$$

где

$$Q(x, y) = \sum_{\mu,\,\nu=0}^{3} \frac{x^\mu y^\nu}{\mu!\,\nu!}\frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial x^\mu \partial y^\nu}\Phi(0, 0),$$

$$R_3(x, y) = \frac{x^4}{24}\frac{\partial^4}{\partial x^4}\Phi(\xi, y) + \frac{y^4}{24}\frac{\partial^4}{\partial y^4}\Phi(x, \eta) - \frac{x^4 y^4}{576}\frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial y^4}\Phi(\xi, \eta),$$
$$(\xi, \eta) \in K'.$$

Обозначим

$$R[\Phi, h] = \int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}\Phi(x, y)\,dxdy - \frac{1}{\Phi(0, 0)}\int_{-h}^{h}\Phi(x, 0)\,dx\int_{-h}^{h}\Phi(0, y)\,dy.$$

Тогда

$$I = \frac{1}{\Phi(0, 0)}\left\{\int_{-h}^{h}[Q(x, 0) + R_3(x, 0)]\,dx\int_{-h}^{h}[Q(0, y) + R_3(0, y)]\,dy\right\} + R[\Phi, h],$$

откуда

$$I = \int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}\frac{1}{\Phi(0, 0)}Q(x, 0)\,Q(0, y)\,dxdy + \frac{1}{\Phi(0, 0)}\left\{\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}[Q(x, 0)R_3(0, y) + R_3(x, 0)\,Q(0, y) + R_3(x, 0)R_3(0, y)]\,dxdy\right\} + R[\Phi, h]. \tag{9}$$

С другой стороны,

$$I = \int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}Q(x, y)\,dxdy + \int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}R_3(x, y)\,dxdy,$$

или, так как $Q(0, 0) = \Phi(0, 0)$, то

$$I = \frac{1}{\Phi(0, 0)}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}Q(x, 0)\,Q(0, y)\,dxdy + R[Q, h] + \int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}R_3(x, y)\,dxdy. \tag{10}$$

Сравнение (9) и (10) дает:

$$R[\Phi, h] = \int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}\left\{R_3(x, y) - \frac{1}{\Phi(0, 0)}[Q(x, 0)R_3(0, y) + R_3(x, 0)\,Q(0, y) + R_3(x, 0)R_3(0, y)]\right\}dxdy + R[Q, h]. \tag{11}$$

Учитывая выбор числа M, имеем

$$|R_3(x, y)| < \frac{h^4}{12} M + \frac{h^8}{576} M^2,$$

$$|Q(x, 0) R_3(0, y)| < \left(M + \frac{h^4}{24} M\right) \frac{h^4}{24} M,$$

$$|R_3(x, 0) R_3(0, y)| < \frac{h^8}{576} M^2,$$

$$|R_3(x, 0) Q(0, y)| < \left(M + \frac{h^4}{24} M\right) \frac{h^4}{24} M.$$

Из оценки для $R[Q, h]$, выведенной в конце доказательства леммы 1, получаем

$$R[Q, h] \leqslant h^6 N.$$

Учитывая все это, в силу (11) имеем

$$R[\Phi, h] < 4h^2 \left\{\frac{h^4}{12} M + \frac{h^8}{576} M^2 + \frac{1}{|\Phi(0, 0)|} \left[2\left(M + \frac{h^4}{24} M\right) \frac{h^4}{24} M + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{h^8}{576} M^2\right]\right\} + h^6 N,$$

откуда

$$R[\Phi, h] < h^6 \left[N + \frac{M}{3} + \frac{M^2}{144} h^4 + \frac{1}{|\Phi(0, 0)|} \left(M^2 \cdot \frac{1}{3} + M^2 \frac{h^4}{48}\right)\right],$$

или

$$R[\Phi, h] < h^6 \left[N + \frac{M}{3} + \frac{M^2}{3|\Phi(0, 0)|}\right] + h^{10} \left(\frac{M^2}{144} + \frac{M^2}{48|\Phi(0, 0)|}\right).$$

Теорема доказана.

Применяя формулу Гаусса для приближенного вычисления интегралов по значениям подынтегральной функции в 3-х точках, получаем из (7) следующую формулу для приближенного вычисления двойных интегралов:

$$\int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} \Phi(x, y)\, dx dy \approx \frac{25h^2}{81} [1{,}6\Phi(0, 0) + \Phi(0, u) + \Phi(0, -u)] \cdot$$
$$\cdot \left[1{,}6 + \frac{\Phi(u, 0) + \Phi(-u, 0)}{\Phi(0, 0)}\right], \tag{12}$$

где $u = \sqrt{0{,}6}\, h = 0{,}77459667\ h$.

Учитывая выражение ошибки для формулы Гаусса и теорему 1, получаем, что для функции $\Phi(x, y)$, имеющей в $K' = [-h \leqslant x \leqslant h,\ -h \leqslant y \leqslant h]$ непрерывные частные производные $\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} \Phi(x, y)$ $(i, j \leqslant 6)$, погрешность формулы (12) имеет порядок малости h^6. Формулу (12) можно получить и из общей

формулы статьи [1], если там взять границы интегрирования $\pm h$, $n = 2$ и за точки (x_i, y_i) взять точки $(-u, 0)$; $(0, 0)$; $(u, 0)$.

Теорема 2. *Пусть $f(x, y)$ — четная относительно x функция, имеющая в K' непрерывные частные производные*

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} f(x, y) \quad (i, j \leqslant 6),$$

$$\min_{0 \leqslant x \leqslant w} |f(x, 0)| \neq 0, \quad \min_{0 < x < w} |f(0, 0) + \frac{x^2}{2} f''_{x^2}(0, 0) + \frac{x^4}{24} f^{IV}_{x^4} \quad (0, 0)| \neq 0,$$

где $w = \frac{h}{\sqrt{3}}$. Тогда верна формула

$$\int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} f(x, y)\, dx dy = \frac{1}{f(w, 0)} \int_{-h}^{h} f(x, 0)\, dx \int_{-h}^{h} f(w, y)\, dy + R_1[f, h], \quad (13)$$

где $|R_1[f, h]| < h^8 K_f$ и K_f не возрастает с уменьшением h.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 и основывается на применении формулы (8) (в ней надо взять $m = n = 5$) и леммы 2.

Аналогично получается

Теорема 3. *Пусть $f(x, y)$ — четная относительно каждого переменного функция, имеющая на K' непрерывные частные производные $D_x^{2i} D_y^{2j} f(x, y)$ $(i, j \leqslant 4)$, причем*

$$\min_{0 < x, y < w} |f(x, y)| \neq 0,$$

$$\min_{0 < x, y \leqslant w} \left| \sum_{\mu, v=0}^{3} \frac{x^{2\mu} y^{2v}}{(2\mu)!\,(2v)!} D_x^{2\mu} D_y^{2v} f(0, 0) \right| \neq 0, \quad w = \frac{\sqrt{3}}{3} h.$$

В этом случае верна формула

$$\int_0^h \int_0^h f(x, y)\, dx\, dy = \frac{1}{f(w, w)} \int_0^h f(x, w)\, dx \int_0^h f(w, y)\, dy + R_3[f, h],$$

где $|R_3[f, h]| \leqslant h^{10} \cdot K_f$ и K_f не возрастает с уменьшением h.

Представим $f(x, y)$ в виде

$$f(x, y) = h(x, y) + g(x, y),$$

где

$$h(x, y) = \frac{1}{2} [f(x, y) + f(-x, y)],$$

$$g(x, y) = \frac{1}{2} [f(x, y) - f(-x, y)].$$

Кроме того, введем обозначение

$$\omega(x, y) = \frac{1}{2}[h(x, y) + h(x, -y)],$$

и тогда будем иметь

$$\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} f(x, y)\,dx\,dy = \int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} h(x, y)\,dx\,dy = 4\int_{0}^{h}\int_{0}^{h} \omega(x, y)\,dx\,dy. \quad (18)$$

Так как $h(x, y)$ четна относительно x, $\omega(x, y)$ четна относительно каждого переменного, то из (18) и теорем 2 и 3 получаются

Следствие 1. *Пусть $f(x, y)$ имеет на $[-h, h; -h, h]$ непрерывные частные производные $f^{(i+j)}_{x^i y^j}$ (x, y) $(i, j \leqslant 6)$,*

$$\min_{0 \leqslant x \leqslant w} |h(x, 0)| \neq 0,$$

$$\min_{0 \leqslant x \leqslant w} \left|h(0, 0) + \frac{x^2}{2} h''_{x^2}(0, 0) + \frac{x^4}{24} h^{\mathrm{IV}}_{x^4}(0, 0)\right| \neq 0, \quad w = \frac{h}{\sqrt{3}}.$$

Тогда справедлива формула

$$\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} f(x, y)\,dx\,dy = \frac{2}{h(w, 0)} \int_{0}^{h} h(x, 0)\,dx \int_{-h}^{h} h(w, y)\,dy + R_2[f, h],$$

где $|R_2[f, h]| \leqslant h^8 K_f$ и K_f не возрастает с уменьшением h.

Следствие 2. *Пусть $f(x, y)$ имеет на $[-h, h; -h, h]$ непрерывные частные производные $f^{(2i+2j)}_{x^{2i} y^{2j}}$ (x, y) $(i, j \leqslant 4)$, причем*

$$\min_{0 \leqslant x, y \leqslant w} |\omega(x, y)| \neq 0,$$

$$\min_{0 \leqslant x, y \leqslant w} \left| \sum_{\mu, \nu = 0}^{3} \frac{x^{2\mu} y^{2\nu}}{(2\mu)!\,(2\nu)!}\, \omega^{(2\mu+2\nu)}_{x^{2\mu} y^{2\nu}}(0, 0) \right| \neq 0.$$

В этом случае верна формула

$$\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} f(x, y)\,dx\,dy = \frac{4}{\omega(w, w)} \int_{0}^{h} \omega(x, w)\,dx \int_{0}^{h} \omega(w, y)\,dy + R_3[f, h],$$

где $|R_3[f, h]| \leqslant h^{10} K_f$ и K_f не возрастает с уменьшением h.

Замечание. Улучшить оценки теорем 1, 2 и 3 нельзя, что видно из примеров

$$R_1[1 + x^2 + y^2, h] = \frac{4}{9} h^6,$$

$$R_2[1 + x^4 + y^2, h] = \frac{16}{135} \cdot \frac{h^8}{1 + \frac{2}{9} h^4},$$

$$R_3[1 + x^4 + y^4, h] = \frac{64}{2025} \frac{h^{10}}{1 + \frac{2}{9} h^4}.$$

Пример.

$$I = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{dxdy}{(x + y + 10)^2} = 0{,}04082$$

Вычислим этот интеграл по (7), отбросив остаточный член:

$$I \approx 100 \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x + 10)^2} \int_{-1}^{1} \frac{dy}{(y + 10)^2} = 100 \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right)^2 = 0{,}04081.$$

Ошибка: 0,00001.

Вычисление по формуле (12) дает тот же результат: $I \approx 0{,}04081$.

Замечание. Формулы типа (6) и (12) легко получить для случаев, когда область интегрирования есть прямоугольник или круг.

Литература

1. Левин М. И., Об одном способе вычисления двойных интегралов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 338—341.
2. Микеладзе Ш. Е., Численные методы математического анализа. Москва, 1953.
3. Стефенсен И. Ф., Теория интерполяции. Москва—Ленинград, 1935.

Поступило
19 X 1961

MÕNINGAD VALEMID KAHEKORDSETE INTEGRAALIDE LIGIKAUDSEKS ARVUTAMISEKS

M. Levin

Eesti NSV TA Küberneetika Instituut

Resümee

Artiklis antakse valemid kahekordsete integraalide ligikaudseks arvutamiseks ja esitatakse vea hinnangud. Artikli põhiresultaadiks on valemid (6) ja (13).

SOME FORMULAS FOR APPROXIMATE CALCULATION OF DOUBLE INTEGRALS

M. Levin

Summary

This article gives formulas for approximate calculation of double integrals and estimations of errors in calculation. The principal result of this article are the formulas (6) and (13).

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

М. Левин
Институт кибернетики АН Эст. ССР

Пусть на плоскости xy задан круг Q с центром O, радиусом r и окружностью C, z и t независимые комплексные переменные на $Q+C$. Далее, пусть область D лежит в Q и не имеет общих точек с C. Будем рассматривать функции $f(z, t)$, аналитические на $Q+C$ по каждому переменному и удовлетворяющие на C условию $|f(z, t)| \leqslant M$. Тогда верна

Теорема 1. *Для кубатурной формулы*

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \sum_{k=1}^{N} A_k f(x_k, y_k) + R[f(x, y)] \tag{1}$$

выполнено неравенство

$$|R[f(x, y)]| \leqslant Mr^2 \max_{|z|=|t|=r} \left| R\left[\frac{1}{(z-x)(t-y)}\right]\right|. \tag{2}$$

Доказательство. Применяя повторно формулу Коши, получаем

$$f(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_C \frac{1}{z-x}\int_C \frac{f(z, t)\,dt}{t-y}\,dz = -\frac{1}{4\pi^2}\int_C\int_C \frac{f(z, t)\,dz\,dt}{(z-x)(t-y)}.$$

Отсюда и из (1) имеем

$$R[f(x, y)] = -\frac{1}{4\pi^2}\iint_D \int_C\int_C \frac{f(z, t)\,dz\,dt}{(z-x)(t-y)}\,dx\,dy -$$

$$-\left(-\frac{1}{4\pi^2}\right)\sum_{k=1}^{N} A_k \int_C\int_C \frac{f(z, t)\,dz\,dt}{(z-x_k)(t-y_k)} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int_C\int_C f(z,\,t)\left[\iint_D \frac{dx\,dy}{(z-x)(t-y)} - \sum_{k=1}^{N} A_k \frac{1}{(z-x_k)(t-y_k)}\right] dz\,dt =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int_C\int_C f(z,\,t) R\left[\frac{1}{(z-x)(t-y)}\right] dz\,dt,$$

откуда и следует (2), и этим теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если формула* (1) *такова, что* $R[f(x,\,y)] = 0$, *когда* $f(x,\,y)$ *есть многочлен относительно* x *степени* $< m$ *и относительно* y *степени* $< n$, *то верно неравенство*

$$|R[f(x,\,y)]| \leqslant Mr^2 \max_{|z|=|t|=r} |R[\psi]|, \tag{3}$$

$$\psi = \frac{1}{(z-x)(t-y)}\left(\frac{x^m}{z^m} + \frac{y^n}{t^n} - \frac{x^m y^n}{z^m t^n}\right).$$

Доказательство. Так как

$$\frac{1}{(z-x)(t-y)} = \frac{1}{zt}\sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{x^i y^j}{z^i t^j} = \frac{1}{zt}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3),$$

где

$$\varphi_1 = \sum_{i,j=0}^{m-1,n-1} \frac{x^i y^j}{z^i t^j},$$

$$\varphi_2 = \sum_{i=m}^{\infty} \frac{x^i}{z^i} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{t^j} = \frac{x^m}{z^m}\cdot\frac{zt}{(z-x)(t-y)},$$

$$\varphi_3 = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{x^i}{z^i} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{y^j}{t^j} = \frac{z}{z-x}\left(1 - \frac{x^m}{z^m}\right)\frac{y^n}{t^n}\cdot\frac{t}{t-y},$$

и по условию теоремы $R[\varphi_1] = 0$, то, используя (2), получаем

$$|R[f(x,\,y)]| \leqslant Mr^2 \max_{|z|=|t|=r} \left|R\left[\frac{1}{zt}(\varphi_2 + \varphi_3)\right]\right| =$$

$$= Mr^2 \max_{|z|=|t|=r} \left|R\left[\frac{1}{(z-x)(t-y)}\left(\frac{x^m}{z^m} + \frac{y^n}{t^n} - \frac{x^m y^n}{z^m t^n}\right)\right]\right| =$$

$$= Mr^2 \max_{|z|=|t|=r} |R[\psi]|,$$

и теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть в формуле* (1) $D = [0,\,1;\,0,\,1]$, $A_k \geqslant 0$ $(k =$

$= 1, 2, \ldots, N$). *Если* $R[f(x, y)] = 0$, *когда* $f(x, y)$ *многочлен относительно* x *степени* $< m$ *и относительно* y *степени* $< n$, *то*

$$|R[f(x, y)]| < \frac{M}{mr^m} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{r}\right)^2} \left(1 + \frac{m}{nr^{n-m}} + \frac{1}{nr^n}\right). \qquad (4)$$

Доказательство основывается на применении теоремы 2. Мы можем написать $\psi = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, где

$$\alpha_1 = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{x^{m+i} y^j}{z^{m+i+1} t^{j+1}}, \quad \alpha_2 = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{x^i y^{n+j}}{z^{i+1} t^{n+j+1}},$$

$$\alpha_3 = -\sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{x^{m+1} y^{n+j}}{z^{m+i+1} t^{n+j+1}}.$$

$$R[\psi] = R[\alpha_1] + R[\alpha_2] + R[\alpha_3].$$

$$R[\alpha_1] = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{1}{z^{m+i+1} t^{j+1}} R[x^{m+i} y^j] =$$

$$= \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{1}{z^{m+i+1} t^{j+1}} \left[\frac{1}{(m+i+1)(j+1)} - \sum_{k=1}^{N} A_k x_k^{m+i} y_k^j\right].$$

Так как $A_k \geqslant 0$, $(x_k, y_k) \in [0, 1; 0\ 1]$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$, то

$$\sum_{k=1}^{N} A_k x_k^{m+i} y_k^j - \sum_{k=1}^{N} A_k x_k^{m-1} = \sum_{k=1}^{N} A_k x_k^{m-1} (x_k^{i+1} y_k^j - 1) \leqslant 0,$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{N} A_k x_k^{m+i} y_k^j \leqslant \sum_{k=1}^{N} A_k x_k^{m-1} = \int_0^1 \int_0^1 x^{m-1}\, dx\, dy - R[x^{m-1}] = \frac{1}{m}.$$

Поэтому

$$\max_{|z|=|t|=r} |R[\alpha_1]| < \frac{1}{m} \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{1}{r^{m+i+1} r^{j+1}} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{r^{m+2}} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{r^i}\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{mr^m (r-1)^2}.$$

Аналогично находим

$$\max_{|z|=|t|=r} |R[\alpha_2]| < \frac{1}{nr^n (r-1)^2},$$

$$\max_{|z|=|t|=r} |R[\alpha_3]| < \frac{1}{mnr^{m+n} (r-1)^2}.$$

Значит,

$$|R[f(x, y)]| < Mr^2\left[\frac{1}{mr^m(r-1)^2} + \frac{1}{nr^n(r-1)^2} + \frac{1}{mnr^{m+n}(r-1)^2}\right],$$

откуда и следует (4).

Замечание. Формула (4) упрощается, если $m = n$. Тогда

$$|R[f(x, y)]| < \frac{M}{mr^m} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{1}{r}\right)^2}\left(2+\frac{1}{mr^m}\right). \qquad (5)$$

Пример. Применяя теорему 1, оценим остаточный член формулы

$$\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} f(x, y)\,dx\,dy = 4h^2 f(0, 0) + R[f].$$

Имеем

$$R\left[\frac{1}{(z-x)(t-y)}\right] = \int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} \frac{dx\,dy}{(z-x)(t-y)} - \frac{4h^2}{zt} =$$

$$= 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1}\left(\frac{h}{z}\right)^{2k+1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1}\left(\frac{h}{t}\right)^{2l+1} - \frac{4h^2}{zt} =$$

$$= 4\frac{h}{z}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2l+1}\left(\frac{h}{t}\right)^{2l+1} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}\left(\frac{h}{z}\right)^{2k+1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1}\left(\frac{h}{t}\right)^{2l+1}.$$

Отсюда следует

$$\left|R\left[\frac{1}{(z-x)(t-y)}\right]\right| < \frac{4}{3}\frac{h^4}{r^4} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{h}{r}\right)^2}\left[2 + \frac{h^2}{3r^2} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{h}{r}\right)^2}\right].$$

Используя это, получаем по (2)

$$|R[f]| < \frac{4Mh^4}{3r^2} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{h}{r}\right)^2}\left[2 + \frac{h^2}{3r^2} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{h}{r}\right)^2}\right],$$

или

$$|R[f]| = M\frac{h^4}{r^2}O(1).$$

Поступило
23 XII 1961

MÕNED HINNANGUD ANALÜÜTILISTE FUNKTSIOONIDE KUBATUURVALEMITE JAOKS

M. Levin
Eesti NSV TA Küberneetika Instituut

Resümee

Olgu funktsioon $f(z, t)$ ringis Q keskpunktiga O ja raadiusega r mõlema muutuja järgi analüütiline. Piirkonnas $D \subset Q$ tõestatakse valemi (1) kohta järgmised väited:

1) kehtib võrratus (2);

2) kui $R[f(x, y)] = 0$, kus $f(x, y)$ on ülimalt $m-1$ astme polünoom x-i suhtes ja ülimalt $n-1$ astme polünoom y suhtes, siis kehtib võrratus (3);

3) kui veel $D = [0,1; 0,1]$, siis on rahuldatud võrratus (4).

SOME ESTIMATIONS OF THE QUADRATURE IN TWO DIMENSIONS FOR THE ANALYTICAL FUNCTIONS

M. Levin

Summary

For the function $f(x, t)$ analytical on every variable in the circle Q of centre O and the radius r, the region $D \subset Q$ and the formula (1) the next sentences have been proved:

1) the inequality (2) is just,

2) if $R[f(x, y)] = 0$ when $f(x, y)$ is a polynomial with the power $< m$ relative to x and with the power $< n$ relative to y the inequality (3) is just,

3) if to the same $D = [0,1; 0,1]$ then inequality (4) is just.

ОБОБЩЕНИЕ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ ГАУССА ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

М. Левин
Институт кибернетики АН Эст. ССР

В этой заметке дается обобщение квадратурной формулы Гаусса для случая кратного интегрирования.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_p)$ $(p > 1)$ определена в p-мерном кубе со сторонами $[-1, 1]$ (ограничение на сторону куба вводится для простоты изложения) и имеет все те частные непрерывные (а где этого достаточно — интегрируемые) производные, которые ниже будут содержаться в формулах. Считая значения

$$x_k^{(r_k)} \quad (k = 1, \ldots, p;\ r_k = 1, \ldots, m_k)$$

заданными такими, что все $\left|x_k^{(r_k)}\right| \leqslant 1$ и $x_k^{(r_k)} \neq x_k^{(r_{k_1})}$ при $r_k \neq r_{k_1}$ $(k = 1, \ldots, p;\ r_k = 1, \ldots, m_k;\ r_{k_1} = 1, \ldots, m_k)$, введем обозначения

$$\omega_k(x_k) = (x_k - x_k^{(1)})(x_k - x_k^{(2)}) \ldots (x_k - x_k^{(m_k)}),$$

$$l_{r_k}(x_k) = \frac{\omega_k(x_k)}{(x_k - x_k^{(r_k)})\,\omega_k'(x_k^{(r_k)})},$$

$$\alpha_{r_k}(x_k) = \left[1 - (x_k - x_k^{(r_k)})\frac{\omega_k''(x_k^{(r_k)})}{\omega_k'(x_k^{(r_k)})}\right] l_{r_k}^2(x_k),$$

$$\beta_{r_k}(x_k) = (x_k - x_k^{(r_k)})\, l_{r_k}^2(x_k),$$

$$\delta_{i_k}(x_k) = \begin{cases} \alpha_{r_k}(x_k) & \text{при } i_k = 0, \\ \beta_{r_k}(x_k) & \text{при } i_k = 1, \end{cases}$$

$$\varphi_{i_1 \ldots i_k} = \delta_{i_1}(x_1)\,\delta_{i_2}(x_2) \ldots \delta_{i_k}(x_k) \quad (k > 0) \quad \text{и} \quad \varphi_{i_0} = 1,$$

$$(k = 1, 2, \ldots, p;\quad r_k = 1, 2, \ldots, m_k).$$

Кроме этого мы будем использовать функцию

$$\overline{x^i} = \begin{cases} \dfrac{x^i}{i!} & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x \leqslant 0, \end{cases} \tag{1}$$

и обозначать

$$U_{m_k}(x_k, t_k) = \overline{(x_k - t_k)^{2m_k-1}} - \sum_{r_k=1}^{m_k} \Big[\alpha_{r_k}(x_k) \overline{(x_k^{(r_k)} - t_k)^{2m_k-1}} + \beta_{r_k}(x_k) \overline{(x_k^{(r_k)} - t_k)^{2m_k-2}} \Big]. \tag{2}$$

Рассмотрим сначала случай двух переменных.

Теорема 1. *Имеет место формула*

$$f(x_1, x_2) = \sum_{r_1, r_2=1}^{m_1, m_2} \sum_{i_1, i_2=0}^{1} \varphi_{i_1 i_2} f_{x_1^{i_1} x_2^{i_2}}^{(i_1+i_2)}(x_1^{(r_1)}, x_2^{(r_2)}) + R_2(x_1, x_2), \tag{3}$$

где

$$R_2(x_1, x_2) = \int_{-1}^{1} U_{m_1}(x_1, t_1) f_{x_1^{2m_1}}^{(2m_1)}(t_1, x_2)\, dt_1 + \sum_{r_1=1}^{m_1} \Big[\alpha_{r_1}(x_1) \int_{-1}^{1} U_{m_2}(x_2, t_2) f_{x_2^{2m_2}}^{(2m_2)}(x_1^{(r_1)}, t_2)\, dt_2 + \beta_{r_1}(x_1) \int_{-1}^{1} U_{m_2}(x_2, t_2) \cdot f_{x_1 x_2^{2m_2}}^{(1+2m_2)}(x_1^{(r_1)}, t_2)\, dt_2 \Big].$$

Доказательство. Мы будем исходить из интерполяционной формулы Эрмита

$$\psi(x_1) = \sum_{r_1=1}^{m_1} \Big[\alpha_{r_1}(x_1) \psi(x_1^{(r_1)}) + \beta_{r_1}(x_1) \psi'(x_1^{(r_1)}) \Big] + R_1(x_1), \tag{4}$$

где, как известно, $R_1(x_1) = 0$, когда ψ есть многочлен степени $\leqslant 2m_1 - 1$. Найдем интегральный вид для $R_1(x_1)$. По формуле Тейлора, обозначая многочлен степени $2m_1 - 1$ через P_{2m_1-1}, мы можем написать, используя функцию (1),

$$\psi(x_1) = P_{2m_1-1} + \int_{-1}^{1} \psi^{(2m_1)}(t_1) \overline{(x_1 - t_1)^{2m_1-1}}\, dt_1. \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4), находим

$$R_1(x_1) = \int_{-1}^{1} \psi^{(2m_1)}(t_1) \overline{(x_1 - t_1)^{2m_1-1}}\, dt_1 - \sum_{r_1=1}^{m_1} \Big[\alpha_{r_1}(x_1) \int_{-1}^{1} \psi^{(2m_1)}(t_1) \cdot \overline{(x_1^{(r_1)} - t_1)^{2m_1-1}}\, dt_1 + \beta_{r_1}(x_1) \int_{-1}^{1} \psi^{(2m_1)}(t_1) \overline{(x_1^{(r_1)} - t_1)^{2m_1-2}}\, dt_1 \Big].$$

Учитывая (2), получаем

$$R_1(x_1) = \int_{-1}^{1} \psi^{(2m_1)}(t_1)\, U_{m_1}(x_1, t_1)\, dt_1. \tag{6}$$

Теперь по формуле (4) с остаточным членом в виде (6) мы можем написать

$$f(x_1, x_2) = \sum_{r_1=1}^{m_1} [\alpha_{r_1}(x_1) f(x_1^{(r_1)}, x_2) + \beta_{r_1}(x_1) f'_{x_1}(x_1^{(r_1)}, x_2)] + \int_{-1}^{1} f^{(2m_1)}_{x_1^{2m_1}}(t_1, x_2)\, U_{m_1}(x_1, t_1)\, dt_1, \tag{7}$$

$$f(x_1^{(r_1)}, x_2) = \sum_{r_2=1}^{m_2} [\alpha_{r_2}(x_2) f(x_1^{(r_1)}, x_2^{(r_2)}) + \beta_{r_2}(x_2) f'_{x_2}(x_1^{(r_1)}, x_2^{(r_2)})] + \int_{-1}^{1} f^{(2m_2)}_{x_2^{2m_2}}(x_1^{(r_1)}, t_2)\, U_{m_2}(x_2, t_2)\, dt_2, \tag{8}$$

$$f'_{x_1}(x_1^{(r_1)}, x_2) = \sum_{r_2=1}^{m_2} [\alpha_{r_2}(x_2) f'_{x_1}(x_1^{(r_1)}, x_2^{(r_2)}) + \beta_{r_2}(x_2) f''_{x_1x_2}(x_1^{(r_1)}, x_2^{(r_2)})] + \int_{-1}^{1} f^{(1+2m_2)}_{x_1x_2^{2m_2}}(x_1^{(r_1)}, t_2)\, U_{m_2}(x_2, t_2)\, dt_2. \tag{9}$$

Подставляя (8) и (9) в (7) и проведя группировку слагаемых, мы получим равенство (3), что и доказывает теорему.

Для получения кубатурной формулы умножим равенство (3) на вес $Q(x_1, x_2)$ и проинтегрируем его, что даст

$$\iint_D Q(x_1, x_2) f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \sum_{r_1, r_2=1}^{m_1, m_2} \sum_{i_1, i_2=0}^{1} A_{r_1r_2i_1i_2} f^{(i_1+i_2)}_{x_1^{i_1}x_2^{i_2}}(x_1^{(r_1)}, x_2^{(r_2)}) + R_2, \tag{10}$$

$$A_{r_1r_2i_1i_2} = \iint_D Q(x_1, x_2)\, \delta_{i_1}(x_1)\, \delta_{i_2}(x_2)\, dx_1\, dx_2,$$

$$R_2 = \iint_D Q(x_1, x_2) \left[\int_{-1}^{1} f^{(2m_1)}_{x_1^{2m_1}}(t_1, x_2)\, U_{m_1}(x_1, t_1)\, dt_1 \right] dx_1\, dx_2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m_1} \int_{-1}^{1} [s_i(t_2) f^{(2m_2)}_{x_2^{2m_2}}(x_1^{(i)}, t_2) + P_i(t_2) f^{(1+2m_2)}_{x_1x_2^{2m_2}}(x_1^{(i)}, t_2)]\, dt_2,$$

$$s_i(t_2) = \iint_D Q(x_1, x_2)\, \alpha_i(x_1)\, U_{m_2}(x_2, t_2)\, dx_1\, dx_2,$$

$$P_i(t_2) = \iint_D Q(x_1, x_2)\, \beta_i(x_1)\, U_{m_2}(x_2, t_2)\, dx_1\, dx_2.$$

Очевидно, что $R_2 = 0$, если $f(x_1, x_2)$ есть многочлен степени

$2m_1 - 1$ и $2m_2 - 1$ соответственно относительно x_1 и x_2. Рассмотрим некоторые частные формулы, получающиеся из (10).

1. Пусть $D = [-1, 1; -1, 1]$, $Q(x_1, x_2) = (1-x_1)^{\alpha_1} \cdot (1+x_1)^{\beta_1}(1-x_2)^{\alpha_2}(1+x_2)^{\beta_2}$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > -1$. Выберем за $x_1^{(r_1)}$ $(r_1 = 1, \ldots, m_1)$ и $x_2^{(r_2)}$ $(r_2 = 1, \ldots, m_2)$ корни соответственных многочленов Якоби $I_{m_1}^{(\alpha_1, \beta_1)}(x_1)$ и $I_{m_2}^{(\alpha_2, \beta_2)}(x_2)$. В этом случае $A_{r_1 r_2 i_1 i_2} = 0$, если одно из i_1, i_2 отлично от нуля, и (10) превращается в известную формулу Гаусса для двойных интегралов.

2. Пусть $D = [-1, 1; -1, 1]$, $Q(x_1, x_2) \equiv 1$, а $x_1^{(r_1)}$ $(r_1 = 1, \ldots, m_1)$ и $x_2^{(r_2)}$ $(r_2 = 1, \ldots, m_2)$ удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-1}^{1} \alpha_i(x_1)\,dx_1 = 0 \qquad (i = 2, \ldots, m_1), \qquad \int_{-1}^{1} \beta_1(x_1)\,dx_1 = 0; \\ &\int_{-1}^{1} \alpha_j(x_2)\,dx_2 = 0 \qquad (j = 2, \ldots, m_2), \qquad \int_{-1}^{1} \beta_1(x_2)\,dx_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Для $m_1, m_2 \leqslant 7$ значения $x_1^{(r_1)}$ и $x_2^{(r_2)}$, удовлетворяющие условиям (11), вычислены и приведены в [3].

В рассматриваемом случае мы получаем формулу

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 \approx 4f(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) + \sum_{i=2}^{m_1} B_i f'_{x_1}(x_1^{(i)}, x_2^{(1)}) + \sum_{i=2}^{m_2} C_i f'_{x_2}(x_1^{(1)}, x_2^{(i)}) + \sum_{i,j=2}^{m_1, m_2} D_{ij} f''_{x_1 x_2}(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}), \tag{12}$$

точную для многочленов степени $2m_1 - 1$ и $2m_2 - 1$ соответственно относительно x_1 и x_2.

В (12) использованы обозначения

$$B_i = \int_{-1}^{1} \alpha_1(x_2)\,dx_2 \int_{-1}^{1} \beta_i(x_1)\,dx_1,$$

$$C_i = \int_{-1}^{1} \alpha_1(x_1)\,dx_1 \int_{-1}^{1} \beta_i(x_2)\,dx_2,$$

$$D_{i,j} = \int_{-1}^{1} \beta_i(x_1)\,dx_1 \int_{-1}^{1} \beta_j(x_2)\,dx_2 \quad (i = 2, \ldots, m_1;\ j = 2, \ldots, m_2).$$

Пример. Возьмем в (12) $m_1 = m_2 = 2$. По [3] можем взять $x_1^{(1)} = x_2^{(1)} = -0{,}3933198$, $x_1^{(2)} = x_2^{(2)} = 0{,}2270833$. Для нахождения B_2, C_2 и D_{22} поступим так: подставим в (12) последовательно $f = x, y$ и xy, для этих функций (12) превращается в точное равенство, и мы получим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 4x_1^{(1)} + B_2, \\ 0 &= 4x_2^{(1)} + C_2, \\ 0 &= 4x_1^{(1)} x_2^{(1)} + B_2 x_2^{(1)} + C_2 x_1^{(1)} + D_{22}. \end{aligned}\right\}$$

Решение этой системы вместе с (12) при $m_1 = m_2 = 2$ дает нам формулу

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x, y)\,dx\,dy \approx 4f(&-0{,}3933198,\ -0{,}3933198) + \\ &+ 1{,}5732792\, f'_x(0{,}2270833,\ -0{,}3933198) + \\ &+ 1{,}5732792\, f'_y(-0{,}3933198,\ 0{,}2270833) + \\ &+ 0{,}6188019\, f''_{xy}(0{,}2270833,\ 0{,}2270833), \end{aligned}$$

которая точна для многочленов третьей степени относительно каждого переменного.

Обобщим изложенное на случай p переменных.

Теорема 2. *Имеет место формула*

$$f(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{r_1, \ldots, r_p=1}^{m_1, \ldots, m_p} \sum_{i_1, \ldots, i_p=0}^{1} \varphi_{i_1 \ldots i_p} f^{(i_1+\ldots+i_p)}_{x_1^{i_1} \ldots x_p^{i_p}}\left(x_1^{(r_1)}, \ldots, x_p^{(r_p)}\right) + R_p(x_1, \ldots, x_p), \tag{13}$$

где

$$R_p(x_1, \ldots, x_p) = \int_{-1}^{1} U_{m_1}(x_1, t_1) f^{(2m_1)}_{x_1^{2m_1}}(t_1, x_2, \ldots, x_p)\,dt_1 +$$

$$+ \sum_{k=2}^{p} \sum_{r_1, \ldots, r_{k-1}=1}^{m_1, \ldots, m_{k-1}} \sum_{i_1, \ldots, i_{k-1}=0}^{1} \varphi_{i_1 \ldots i_{k-1}} \cdot$$

$$\cdot \int_{-1}^{1} U_{m_k}(x_k, t_k) f^{(i_1+\ldots+i_{k-1}+2m_k)}_{x_1^{i_1} \ldots x_{k-1}^{i_{k-1}} x_k^{2m_k}}\left(x_1^{(r_1)}, \ldots, x_{k-1}^{(r_{k-1})}, t_k, x_{k+1}, \ldots, x_p\right) dt_k.$$

Доказательство. Докажем теорему индукцией. Для случая $p = 2$ формула (13) превращается в формулу (3), которая доказана в теореме 1.

Пусть теперь (13) верна для $p = q - 1$, и покажем, что тогда она верна и для $p = q$. Для этого (13) запишем в виде $f(x_1, \ldots, x_p) = H_p(x_1, \ldots, x_p) + R_p(x_1, \ldots, x_p)$. Фиксируя значение x_q, мы вправе записать

$$f(x_1, \ldots, x_{q-1}, x_q) = \sum_{r_1, \ldots, r_{q-1}=1}^{m_1, \ldots, m_{q-1}} \sum_{i_1, \ldots, i_{q-1}=0}^{1} \varphi_{i_1 \ldots i_{q-1}} \cdot$$

$$\cdot f^{(i_1+\ldots+i_{q-1})}_{x_1^{i_1} \ldots x_{q-1}^{i_{q-1}}}\left(x_1^{(r_1)}, \ldots, x_{q-1}^{(r_{q-1})}, x_q\right) + R_{q-1}(x_1, \ldots, x_{q-1}).$$

Используя (4) и (6), имеем

$$f(x_1, \ldots, x_{q-1}, x_q) = \sum_{r_1, \ldots, r_{q-1}=1}^{m_1, \ldots, m_{q-1}} \sum_{i_1, \ldots, i_{q-1}=0}^{1} \varphi_{i_1, \ldots, i_{q-1}} \left\{ \sum_{r_q=1}^{m_q} \left[a_{r_q}(x_q) \cdot \right. \right.$$

$$f^{(i_1+\ldots+i_{q-1})}_{x_1^{i_1}\ldots x_{q-1}^{i_{q-1}}}\left(x_1^{(r_1)},\ldots,x_q^{(r_q)}\right)+\beta_{r_q}(x_q)f^{(i_1+\ldots+i_{q-1}+1)}_{x_1^{i_1}\ldots x_{q-1}^{i_{q-1}}x_q}\left(x_1^{(r_1)},\ldots,x_q^{(r_q)}\right)\Big]+$$

$$+\int_{-1}^{1} f^{(i_1+\ldots+i_{q-1}+2m_q)}_{x_1^{i_1}\ldots x_{q-1}^{i_{q-1}}x_q^{2m_q}}\left(x_1^{(r_1)},\ldots,x_{q-1}^{(r_{q-1})},t_q\right)U_{m_q}(x_q,t_q)\,dt_q\Big\}+$$

$$+R_{q-1}(x_1,\ldots,x_{q-1}).$$

Отсюда, так как $\varphi_{i_1,\ldots,i_k}=\varphi_{i_1,\ldots,i_{k-1}}\cdot\delta_{i_k}(x_k)$, следует

$$f(x_1,\ldots,x_q)=H_q(x_1,\ldots,x_q)+$$

$$+\sum_{r_1,\ldots,r_{q-1}=1}^{m_1,\ldots,m_{q-1}}\ \sum_{i_1,\ldots,i_{q-1}=0}^{1}\varphi_{i_1,\ldots,i_{q-1}}\cdot$$

$$\cdot\int_{-1}^{1} f^{(i_1+\ldots+i_{q-1}+2m_q)}_{x_1^{i_1}\ldots x_{q-1}^{i_{q-1}}x_q^{2m_q}}\left(x_1^{(r_1)},\ldots,x_{q-1}^{(r_{q-1})},t_q\right)U_{m_q}(x_q,t_q)\,dt_q+$$

$$+R_{q-1}(x_1,\ldots,x_{q-1})=H_q(x_1,\ldots,x_q)+R_q(x_1,\ldots,x_q),$$

и этим (13) верна для $p=q$, что и завершает доказательство теоремы.

Теперь уже легко получить общую кубатурную формулу. Умножая равенство (13) на $Q(x_1,\ldots,x_p)$ и интегрируя его по области v_p, имеем

$$\int\ldots\int_{v_p}Q(x_1,\ldots,x_p)f(x_1,\ldots,x_p)\,dx_1\ldots dx_p=$$

$$=\sum_{r_1,\ldots,r_p=1}^{m_1,\ldots,m_p}\ \sum_{i_1,\ldots,i_p=0}^{1}A_{r_1\ldots r_p i_1\ldots i_p}f^{(i_1+\ldots+i_p)}_{x_1^{i_1}\ldots x_p^{i_p}}\left(x_1^{(r_1)},\ldots,x_p^{(r_p)}\right)+R_p,\qquad(13)$$

$$A_{r_1\ldots r_p i_1\ldots i_p}=\int\ldots\int_{v_p}Q(x_1,\ldots,x_p)\varphi_{i_1\ldots i_p}\,dx_1\ldots dx_p,$$

$$R_p=\int\ldots\int_{v_p}Q(x_1,\ldots,x_p)\,R_p(x_1,\ldots,x_p)dx_1\ldots dx_p.$$

Ясно, что в этой формуле $R_p=0$, если f есть многочлен степени $\leqslant 2m_i-1$ относительно x_i $(i=1,\ldots,p)$. Накладывая на $x_i^{(r_i)}$ дополнительные ограничения, мы сможем число $A_{r_1,\ldots r_p i_1\ldots i_p}$, отличных от нуля, значительно уменьшить.

Пусть v_p есть p-мерный куб со сторонами $[-1,\ 1]$, $Q(x_1,\ \ldots,\ x_p)=\prod_{k=1}^{p}(1-x_k)^{\alpha_k}(1+x_k)^{\beta_k}$, $\alpha_i,\ \beta_i>-1$ $(i=1,\ldots,p)$, $x_k^{(r_k)}$ $(r_k=1,\ldots,m_k)$ — нули многочленов Якоби $I_{m_k}^{(\alpha_k,\beta_k)}(x_k)$. В этом случае $A_{r_1,\ldots r_p i_1\ldots i_p}=0$, если хотя бы одно из $i_k(k=1,\ldots,p)$ отлично от нуля, и (14) превращается в фор-

мулу Гаусса для случая p-переменных, которая, например, при $Q(x_1, \ldots, x_p) \equiv 1$ получена в [1].

Интегральная форма R_p позволяет повышать точность формулы (14) методами, которые для случая $p = 1$ изложены в [2].

Литература

1. Гребенюк Д. Г., Обобщение квадратурной формулы Гаусса на случай m-переменных. Изв. АН Уз ССР, сер. физ.-мат. н., 1958, 2, 69—76.
2. Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов. Москва, 1959.
3. Kopal, Z., Carrus, P., Kavanagn, K. E., A new formula for repeated mechanical quadratures. J. Math. and Phys., 1951, 30, 44—48.

Поступило
23 IV 1962

GAUSSI VALEMI ÜLDISTUS MITME MUUTUJA FUNKTSIOONIDE JAOKS

M. Levin

Eesti NSV TA Küberneetika Instituut

Resümee

Hermite'i valemi abil on leitud üldine valem (14) kordsete integraalide arvutamiseks, mis üldistab Gaussi kvadratuurvalemit. On saadud avaldis jääkliikme jaoks integraalkujul. On vaadeldud mõningaid erijuhte.

GENERALIZATION OF THE GAUSS FORMULA FOR FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES

M. Levin

Summary

Hermite's formula has been used to obtain the general formula (14) for integrations in several dimensions and generalizing the Gauss quadrature formula. Some particular cases are considered.

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ

М. Левин
Институт кибернетики АН Эст. ССР

Пусть k и p целые положительные числа. Будем считать, что класс $W_0^{[k,\,p]}(M_{k+p})$ состоит из функций $f(x)$, заданных на отрезке $[0,\ 1]$, непрерывных и имеющих непрерывные производные до $(k+p-1)$-го порядка включительно и кусочно-непрерывную производную $(k+p)$-го порядка на $[0,\ 1]$, удовлетворяющих условиям

$$f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(k-1)}(0)=0,\quad |f^{(k+p)}(x)|\leqslant M_{k+p}. \qquad (1)$$

Для функций этого класса общие квадратурные формулы не являются наиболее целесообразными, так как они не учитывают отсутствие в представлении $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности 0 первых k слагаемых. В настоящей заметке строятся квадратурные формулы для функций класса $W_0^{[k,\,p]}(M_{k+p})$ с учетом (1).

Пусть $f(x)\in W_0^{[k,\,n+1]}(M_{k+n+1})$ и нам заданы числа $x_i\in[0,\ 1]$ $(i=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$ такие, что $x_i\neq 0$ и $x_i\neq x_k$ $(i\neq k)$ $(i,k=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$. Построим интерполяционную формулу

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}A_i(x)f(x_i)+R[f(x)],$$

такую, чтобы выполнялись равенства

$$R[x^i]=0\quad (i=k,\ k+1,\ \ldots,\ k+n).$$

Для нахождения $A_i(x)$ имеем систему уравнений

$$x^{k+i}=A_0(x)x_0^{k+i}+A_1(x)x_1^{k+i}+\ldots+A_n(x)x_n^{k+i}\ (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n).$$

Решая ее, находим

$$A_i(x)=\frac{x^k\omega(x)}{x_i^k(x-x_i)\omega'(x_i)}\quad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n),$$

где $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$, что дает нам формулу

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^k \omega(x)}{x_i^k (x - x_i) \omega'(x_i)} f(x_i) + R[f(x)]. \qquad (2)$$

Здесь $R[f(x)] = 0$ в точках x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Учитывая это и то, что $f^{(i)}(0) = 0$ $(i = 0, \ldots, k-1)$, получаем по теореме Ролля

$$R[f(x)] = \frac{x^k \omega(x)}{(k+n+1)!} f^{(k+n+1)}(\xi), \quad 0 < \xi < 1. \qquad (3)$$

Умножая равенство (2) на вес $p(x)$ и интегрируя его, имея в виду (3), получаем квадратурную формулу для $f(x) \in W_0^{[k, n+1]}(M_{k+n+1})$

$$\int_0^1 p(x) f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) + R, \qquad (4)$$

где

$$A_i = \frac{1}{x_i^k \omega'(x_i)} \int_0^1 \frac{1}{x - x_i} p(x) x^k \omega(x)\, dx \quad (i = 0, 1, \ldots, n), \qquad (5)$$

$$R = \frac{1}{(k+n+1)!} \int_0^1 p(x) x^k \omega(x) f^{(k+n+1)}(\xi)\, dx. \qquad (6)$$

Из (6) имеем оценку

$$|R| \leqslant \frac{M_{k+n+1}}{(k+n+1)!} \int_0^1 |p(x) x^k \omega(x)|\, dx.$$

В (4) $R = 0$, когда $f(x) = x^k, x^{k+1}, \ldots, x^{k+n}$. Будем говорить, что (4) имеет порядок точности $k+n$. При построении формулы (4) узлы x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ были выбраны почти произвольно. Накладывая на их выбор дополнительные ограничения, мы сможем порядок точности (4) увеличить Для примера построим формулу типа формул Гаусса.

Теорема. *Для того, чтобы формула*

$$\int_0^1 p(x) f(x)\, dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) \qquad (7)$$

была точна для всех многочленов вида

$$Q_{[k, 2n+1]}(x) = \sum_{i=k}^{k+2n+1} a_i x^i,$$

необходимо и достаточно, чтобы

1) A_i $(i=0, 1, \ldots, n)$ *были вычислены по* (5)

2) *многочлен* $\omega(x)$ *был ортогонален по весу* $x^k p(x)$ *ко всякому многочлену* $Q_n(x)$ *степени* $\leqslant n$ *на* $[0, 1]$.

Доказательство. Необходимость. Пусть (7) точна для любого $Q_{[k,\ 2n+1]}(x)$. Тогда

$$\int_0^1 p(x)\,\frac{x^k\,\omega(x)\,dx}{x_i^k(x-x_i)\,\omega'(x_i)} = \sum_{j=0}^{n} A_j \frac{x_j^k}{x_i^k\,\omega'(x_i)}\left[\frac{\omega(x)}{x-x_i}\right]_{x=x_j} = A_i$$

$$(i=0, 1, \ldots, n).$$

и, значит, все A_i вычислены по (5).

Функция $f(x) = x^k\,\omega(x)\,Q_n(x)$ есть многочлен вида $Q_{[k,\ 2n+1]}(x)$ и поэтому для неё (7) точна. Значит,

$$\int_0^1 p(x)\,x^k\,\omega(x)\,Q_n(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} A_i\,x_i^k\,\omega(x_i)\,Q_n(x_i) = 0.$$

Необходимость условий 1) и 2) доказана.

Достаточность. Пусть A_i $(i=0, 1, \ldots, n)$ вычислены по (5) и $\omega(x)$ ортогонален на $[0, 1]$ по весу $x^k p(x)$ к любому $Q_n(x)$. Мы всегда можем написать

$$Q_{[k,\ 2n+1]}(x) = x^k\,\omega(x)\,Q_n(x) + x^k\,r_n(x),$$

где $Q_n(x)$ и $r_n(x)$ многочлены степени $\leqslant n$. Поэтому

$$\int_0^1 p(x)\,Q_{[k,\ 2n+1]}(x)\,dx = \int_0^1 p(x)\,x^k\,r_n(x)\,dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} A_i\,x_i^k\,r_n(x_i) = \sum_{i=0}^{n} A_i\,Q_{[k,\ 2n+1]}(x_i),$$

что и доказывает теорему.

Пусть $f(x) \in W_0^{[k,\ 2n+2]}(M_{k+2n+2})$, и мы имеем квадратурную формулу

$$\int_0^1 p(x)\,f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} A_i\,f(x_i) + R_1, \tag{8}$$

где x_i $(i=0, 1, \ldots, n)$ нули многочлена $\omega(x)$, ортогонального на $[0, 1]$ по весу $x^k\,p(x)$ к любому многочлену степени $\leqslant n$ и A_i $(i=0, 1, \ldots, n)$ вычислены по (5). Найдем оценку для R_1.

Используя теорему, функцию

$$E(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

и представление $f(x)$ по формуле Тейлора, получим, рассуждая так же, как это делается в [2], выражение для остатка фор-

мулы (8) для $f(x) \in W_0^{[k,\ 2n+2]}(M_{k+2n+2})$

$$R_1 = \frac{1}{(k+2n+1)!}\int_0^1 f^{(k+2n+2)}(t)\,K(t)\,dt, \tag{9}$$

где

$$K(t) = \int_t^1 p(x)\,(x-t)^{k+2n+1}\,dx - \sum_{i=0}^{n} A_i\,E(x_i - t)\,(x_i - t)^{k+2n+1}.$$

Из (9) следует оценка

$$|R_1| \leqslant \frac{M_{k+2n+2}}{(k+2n+1)!}\int_0^1 |K(t)|\,dt.$$

Пример на применение вышеизложенного для построения общих квадратурных формул. Пусть $\omega(x)$ на $[0, 1]$ ортогонален по весу x^k ко всякому многочлену степени $\leqslant n$, A_i $(i = 0, 1, \ldots n)$ вычислены по (5) и

$$B_r = \frac{1}{r!}\left[\frac{1}{r+1} - \sum_{i=0}^{n} A_i\,x_i^r\right] \quad (r = 0,\ 1,\ \ldots,\ k-1).$$

Тогда справедлива формула

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) + \sum_{r=0}^{k-1} B_r\,f^{(r)}(0),$$

точная уже для произвольного многочлена степени $\leqslant k + 2n + 1$.

Литература

1. Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов. Москва, 1959.
2. Никольский С. М., Квадрдатурные формулы. Москва, 1958.

Поступило
17 VIII 1962

KVADRATUURVALEMID ÜHE FUNKTSIOONIDE KLASSI JAOKS

M. Levin

Eesti NSV TA Küberneetika Instituut

Resümee

Tingimusi (1) rahuldavate funktsioonide $f(x)$ jaoks moodustatakse valem (8) nii, et $R_1 = 0$ kui $f(x) = x^k,\ x^{k+1},\ \ldots,\ x^{k+2n+1}$. Valemi veahinnang esitatakse võrratusega (9).

QUADRATURE FORMULAE FOR THE CLASS OF FUNCTIONS

M. Levin

Summary

In this article is given the formula (8) for the functions $f(x)$, which meet the demands (1). In this formula $R_1 = 0$ when $f = x^k,\ x^{k+1},\ \ldots,\ x^{k+2n+1}$. The estimation of the error is given by (9).

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА РЭЛЕЯ

А. Драгилев
Вычислительный центр

В работе Р. Рейссига [11] даны достаточные условия существования периодического решения для уравнения

$$x'' + F(x') + G(x) = 0. \tag{1}$$

Условия Рейссига не включают результат автора, относящийся к частному виду уравнения (1), а именно к уравнению

$$x'' + F(x') + x = 0 \tag{2}$$

(см. [1], теорема 1, следствие 1).

Используя прием, приведший автора в 1948 г. к обобщению результатов В. С. Иванова [2] и Н. Левинсона и О. К. Смита [8], относящихся к существованию периодического решения уравнения

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0 \tag{3}$$

(эту теорему автора см. [4], стр. 153—161), в настоящей работе получается обобщение теоремы Рейссига, включающее как частный случай упомянутый выше результат автора из [1].

Рассматриваем уравнение (1) *или систему*

$$\begin{aligned} x' &= v \\ v' &= -F(v) - G(x) \end{aligned} \tag{4}$$

при следующих условиях:

1°. *Функции* $F(v)$ *и* $G(x)$ *удовлетворяют условиям Липшица на каждом ограниченном интервале.*

2°. *Для достаточно малых* $|v|$ *справедливо неравенство*

$$vF(v) \leqslant 0.$$

3°. $xG(x) > 0$ *для* $x \neq 0$.

4°. *Существуют числа* $V > 0$, k, k' $(k > k')$ *такие, что* $F(v) \geqslant k$ *для* $v \geqslant V$ *и* $F(v) \leqslant k'$ *для* $v \leqslant V$.

5°. Введем обозначения:

$$f = \min F(v) \quad при \quad 0 \leqslant v \leqslant V \quad (очевидно,\ f \leqslant 0),$$
$$F = \max F(v) \quad при \quad -V \leqslant v \leqslant 0 \quad (F \geqslant 0),$$
$$F_1 = \max\ \{F, k'\},\quad f_1 = \min\ \{f, k\}.$$

Существует $X > 0$ *такое, что для некоторого* $\delta > 0$ *справедливы неравенства*

$$G(x) \geqslant -f_1 + \delta \quad \text{при } x \geqslant X,$$
$$G(x) \leqslant -F_1 - \delta \quad \text{при } x \leqslant -X.$$

Теорема. *Система* (4) *при выполнении условий* 1°—5° *имеет по крайней мере одну замкнутую траекторию, или, что то же, уравнение* (1) *имеет по крайней мере одно периодическое решение.*

Доказательство.[1] Введем обозначение $I(x) = \int_0^x G(z)\,dz$ и рассмотрим (традиционную) функцию $\lambda(x,\ v) = \frac{1}{2}v^2 + I(x)$. Вдоль траекторий системы (4)

$$d\lambda/dt = vv' + G(x)x' = -vF(v), \tag{5}$$
$$d\lambda/dx = -F(v), \tag{6}$$
$$d\lambda/dv = \frac{vF(v)}{F(v) + G(x)} \tag{7}$$

Мы будем учитывать также, что

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{F(v) + G(x)}{v}. \tag{8}$$

Как известно, $\lambda(x, v) = C$ есть уравнение семейства простых замкнутых кривых, окружающих начало координат, причем возрастанию C отвечает переход на внешние кривые семейства (см. условия 3° и 5°). В силу формулы (5) и условия 2° интегральные кривые не могут примыкать при возрастании t к началу координат, единственной особой точке системы (4).

Траектории системы (3) «спиралевидны» при возрастании t, т. е. траектория, выходящая из произвольной точки (x, v), неограниченное число раз окружает начало координат с ростом t. Докажем, например, что траектория, входящая в 3 четверть через точку $(0, a)$, $a < 0$, встретит при возрастании t отрицательную полуось x-ов. В этом случае, в силу $x' = v < 0$, x монотонно убывает с ростом t. В силу (8) $dv/dx = -\frac{F(v) + G(x)}{v}$. В третьей четверти всюду справедливо неравенство: $\frac{F(v) + G(x)}{-v} \leqslant \frac{F_1}{-v}$. Сле-

[1] При доказательстве мы будем, для просготы, считать, что $k > k' \geqslant 0$. Это предположение не ограничивает общности, так как случай $k > o > k'$ более простой, а случай $0 \geqslant k > k'$ сводится к рассмотренному заменой в системе (4) x на $-x$ и v на $-v$.

довательно, участок траектории $v = v(x)$ будет лежать выше решения уравнения $dv/dx = -\frac{F_1}{v}$; $v(0) = a < 0$, т. е. выше ветви параболы

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}a^2 = -F_1 x,$$

$$v = -\sqrt{a^2 - 2F_1 x}.$$

Следовательно, траектория системы (4) не может уйти в $-\infty$ при конечном (отрицательном) значении x. Далее, при $x \leqslant -X$, $v < 0$ справедливо неравенство

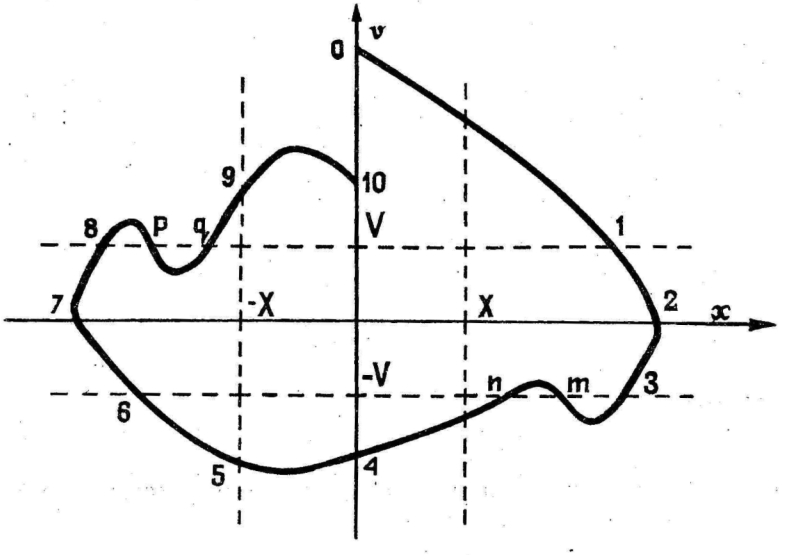
$$\frac{F(v) + G(x)}{-v} \leqslant \frac{\delta}{v}.$$

Значит, если траектория системы (4) достигнет точки $(-X, b)$, $b < 0$ (траектория может встретить отрицательную полуось x-ов и, следовательно, уйти в четвертую четверть, не пересекая прямой $x = -X$, тогда наше предложение доказано), то траектория пойдет выше ветви параболы $dv/dx = \frac{\delta}{v}$; $v(-X) = b < 0$;

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}b^2 = \delta(x + X),$$

$$v = -\sqrt{b^2 + 2\delta(x + X)}.$$

Эта парабола встречает отрицательную полуось x-ов при $x = -\frac{b^2}{2\delta} - X$. Значит и траектория системы (4) должна встре-



тить отрицательную полуось x-ов и покинуть третью четверть. То, что траектория впоследствии покинет вторую четверть через положительную полуось v и т. д., окружая начало координат, доказывается еще проще.

Рассмотрим теперь первый виток 0—1—2—3—4—5—6—7—8—9—10 траектории, начинающейся в точке $0(0, v_0)$, при достаточно большом $v_0 > 0$ (см. чертеж).

Наша задача доказать, что при достаточно большом v_0 будет выполняться неравенство $v_{10} < v_0$.

Тогда, согласно известной теореме Бендиксона, внутри области 0—1—2—3—4—5—6—7—8—9—10 будет существовать по крайней мере одна замкнутая траектория (предельный цикл) системы (4).

Если при $v_0 \to +\infty$ координата x_7 крайней левой точки витка 0—1—2—3—4—5—6—7—8—9—10 остается ограниченной, то v_{10} также остается ограниченным, так как траектории, выходящие из точек $(x, 0)$, при произвольно больших по абсолютной величине отрицательных x должны встречать полуось $v > 0$ с ростом t.

Пусть теперь при $v_0 \to +\infty$ $x_7 \to -\infty$. В этом случае, при достаточно большом v_0, дуги 1—2 и 6—7 будут лежать вне полосы $|x| \leqslant X$ и абсциссы их концов будут расти неограниченно по абсолютной величине с ростом v_0. При этом разности $x_2 - x_1$, $\lambda_2 - \lambda_1$ и $|x_7 - x_6|$, $\lambda_7 - \lambda_6$ будут оставаться ограниченными.

Действительно, $\lambda_2 - \lambda_1 = -\int_{x_1}^{x_2} F(v)\,dx \leqslant -f_1(x_2 - x_1)$,

$$I(x_2) - I(x_1) \leqslant -f_1(x_2 - x_1) + \frac{1}{2} V^2.$$

С другой стороны,

$$I(x_2) - I(x_1) = G(\xi)\,(x_2 - x_1) \geqslant (-f_1 + \delta)\,(x_2 - x_1)$$

(здесь $x_1 < \xi < x_2$),

$$(-f_1 + \delta)\,(x_2 - x_1) \leqslant -f_1(x_2 - x_1) + \frac{1}{2} V^2,$$

$$x_2 - x_1 \leqslant \frac{1}{2\delta} V^2 = C_1, \tag{9}$$

$$\lambda_2 - \lambda_1 \leqslant -\frac{f}{2\delta} V^2 = C_2. \tag{10}$$

(Аналогично доказывается ограниченность величин $|x_7 - x_6|$ и $\lambda_7 - \lambda_6$).

Переходя к основному моменту доказательства, заметим, что дуга 0—1 лежит целиком в полосе $v \geqslant V$, так как $v' = -F(v) - G(x) < 0$ при $x \geqslant 0$ и $v \geqslant V$. Аналогично доказывается, что дуга 5—6 лежит целиком в полосе $v \leqslant -V$. Путем увеличения

v_0 можно добиться (в данном случае), чтобы дуга 4—5 также лежала в полосе $v < -V$.

Добиться путем увеличения v_0 того, чтобы дуга 9—10 лежала целиком выше линии $v = V$, как на чертеже, может не удаться лишь в том случае, когда v_{10} остается ограниченным при $v_0 \to +\infty$, и неравенство $v_{10} < v_0$ тривиально.

При следующих оценках мы будем предполагать, что на дуге 9—10 $v \geqslant V$. Имеем:

$$\lambda_1 - \lambda_0 = -\int_0^{x_1} F(v)\,dx \leqslant -kx_1 \leqslant -k(x_2 - C_1), \tag{11}$$

$$\lambda_2 - \lambda_1 \leqslant C_2, \tag{12}$$

$$\lambda_4 - \lambda_2 \leqslant k'x_2 + \frac{1}{2}V^2. \tag{13}$$

Действительно, на участке 2—3 $\Delta\lambda \leqslant \frac{1}{2}V^2$; на участках типа $m - n$ (т. е. лежащих выше прямой $v = -V$) $\Delta\lambda \leqslant 0$, на участках типа $3 - m$, (т. е. лежащих ниже прямой $v = -V$)

$$\lambda_m - \lambda_3 = -\int_{x_3}^{x_m} F(v)\,dx \leqslant k'\Delta x,$$

$$\lambda_6 - \lambda_4 = -\int_0^{x_6} F(v)\,dx \leqslant k'|x_6| \leqslant k'|x_7|, \tag{14}$$

$$\lambda_7 - \lambda_6 \leqslant C_3, \tag{15}$$

$$\lambda_{10} - \lambda_7 \leqslant -(k' + \delta)|x_7| + \frac{1}{2}V^2. \tag{16}$$

где $0 < \delta \leqslant k - k'$. Действительно, на участке 7—8

$$\lambda_8 - \lambda_7 = \frac{1}{2}V^2 + I(x_8) - I(x_7) = \frac{1}{2}V^2 + (x_8 - x_7)\,G(\xi) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}V^2 - (F_1 + \delta)(x_8 - x_7) \leqslant \frac{1}{2}V^2 - (k' + \delta)\Delta x.$$

На участках типа $p - q$ (т. е. лежащих ниже прямой $v = V$ и имеющих концы на этой прямой)

$$\lambda_q - \lambda_p = I(x_q) - I(x_p) = G(\xi)(x_q - x_p) \leqslant -(k' + \delta)\Delta x.$$

На участках типа $8 - p$ (т. е. лежащих выше прямой $v = V$)

$$\lambda_p - \lambda_8 = -\int_{x_8}^{x_p} F(v)\,dx \leqslant -k\Delta x \leqslant -(k' + \delta)\Delta x.$$

Складывая неравенства (11) — (16) получим:

$$\lambda_{10} - \lambda_0 \leqslant -(k - k')x_2 - \delta|x_7| + C. \tag{17}$$

Из (17) вытекает, что при достаточно большом v_0 будет $\lambda_{10} < \lambda_0$, т. е. $v_{10} < v_0$.

Теорема доказана полностью.

Замечания. **1.** Легко показать на примерах, что при $k' = k$ и соблюдении остальных условий теоремы, предельный цикл может отсутствовать.

2. Легко убедиться, что утверждение теоремы о существовании периодического решения настоящей заметки распространяется на несколько более общую систему

$$\begin{aligned} x' &= \varphi(v) \\ v' &= -F(v) - G(x) \end{aligned} \tag{18}$$

при прежних ограничениях на функции $F(v)$ и $G(x)$, если потребовать, чтобы $\varphi(v)$ локально удовлетворяла условию Липшитца, а также

$$\operatorname{sgn}\varphi(v) = \operatorname{sgn} v \quad \text{и} \quad \int_0^{\pm\infty} \varphi(v)\,dv = \infty.$$

Для этого нужно рассмотреть функцию $\lambda(x, v) = \int_0^v \varphi(z)\,dz + \int_0^x G(z)\,dz$ и внести соответствующие очевидные изменения в доказательство [2]. Таким образом мы получаем обобщение теоремы Мунтяну [9]. Система (18) удобна тем, что к ее частным случаям сводятся как уравнение типа Релея (1), так и уравнение типа Ван дер Поля (3) (если положить $G(x) = x$).

3. Если в формулировке теоремы положить $G(x) \equiv x$, то получаются вышеупомянутые результаты автора [1, 3]. Более сильный результат для данного частного случая вытекает из теоремы А. Ф. Филиппова [5].

4. Доказанная теорема пересекается с результатами Опяля [10] и Ри Хон-фан [3], относящимися к уравнению

$$x'' + f(x, x')x' + g(x) = e(t), \tag{19}$$

а именно, обобщает эти результаты в случае, когда $e(t) \equiv 0$ и $f(x, x')x' = F(x')$.

Метод настоящей статьи применим и к общему уравнению (19). Аналогичный метод использовал А. Ф. Филиппов в [6], стр. 120—121.

---

[2] Соответствие между траекториями систем (18) и (4) можно обнаружить также с помощью замены

$$\int_0^v \varphi(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}z^2, \quad (\operatorname{sgn} v = \operatorname{sgn} z).$$

Литература

1. Драгилев А. В., Периодические решения дифференциального уравнения нелинейных колебаний. Прикл. матем. и механ., 1952, **16**, № 1, 85—88.
2. Иванов В. С., Обоснование одной гипотезы Ван дер Поля в теории автоколебаний. Уч. зап. ЛГУ, 1940, **10**, 111—119.
3. Луй Хун-фань (в подл. Ри Хон-фан), О существовании периодических решений дифференциальных уравнений второго порядка. Р. Ж. Математика, 1960, № 5244.
4. Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений. Москва—Ленинград, 1949.
5. Филиппов А. Ф., Достаточные условия существования устойчивого предельного цикла для уравнения второго порядка. Матем. сб., 1952, **30** (72), 171—180.
6. Филиппов А. Ф., Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Матем. сб., 1960, **51** (93), № 1, 99—128.
7. Lefschetz, S., Differential equations: geometric theory. New York — London, 1957.
8. Levinson, N., Smith, O. K., A general equation of relaxation oscillations. Duke Math. J., 1942, **9**, 382—403.
9. Munteanu, I., O theorema de existenta a-solutiilor periodice. Studii şi cercetâri mat. Acad. RPR. Fil. Cluj. 1960, **11**, № 1, 107—117.
10. Opial, Z., Demonstration d'un theoreme de N. Levinson and C. Langehop. Ann. polon. Math., 1960, **7**, № 3, 241—246.
11. Reissig, R., Selbsterregung eines einfachen Schwingers. Math. Nachr., 1956, **15**, № 3, 191—196.

Поступило
16 IV 1962

RAYLEIGH-TÜÜPI VÕRRANDI PERIOODILINE LAHEND

A. Dragilev
Arvutuskeskus

Resümee

Antakse piisavad tingimused võrrandi

$$x'' + F(x') + G(x) = 0$$

perioodilise lahendi olemasoluks, mis osutuvad autori [4], lk. 153—161, [1], R. Reissig [11] ja I. Munteanu [9] tingimuste üldistuseks.

PERIODISCHE LÖSUNGEN DER GLEICHUNG DES RAYLEIGHSCHEN TYPUS

A. Dragilev

Zusammenfassung

In dieser Arbeit sind die hinreichenden Bedingungen für die Existenz der periodischen Lösungen der Gleichung

$$x'' + F(x') + G(x) = 0$$

gegeben, die eine Verallgemeinerung der analogischen Bedingungen von Autor [4], S. 153—161, [1], R. Reissig [11] und I. Munteanu [9] sind.

К РАСЧЕТУ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ПОЛОГИХ АРОК

Э. Йыги
Кафедра теоретической механики

В работе [1] составлены дифференциальные уравнения равновесия к исследованию устойчивости пологих арок при плоской упругой деформации, и решен ряд конкретных задач.

Целью настоящей работы является обобщение результатов Э. И. Григолюка за предел упругости.

Так как напряженное состояние является неоднородным, то при деформации в арке образуются упругие и пластические зоны. Примем, для определенности, что материал арки следует схеме линейного упрочнения (λ — параметр упрочнения).

Будем рассматривать плоскую пологую арку, поперечное сечение которой имеет две оси симметрии. Пусть $Z = f(x)$ — уравнение центральной оси недеформированной арки (рис. 1). Символом h и $b(z)$ обозначим высоту и ширину сечения.

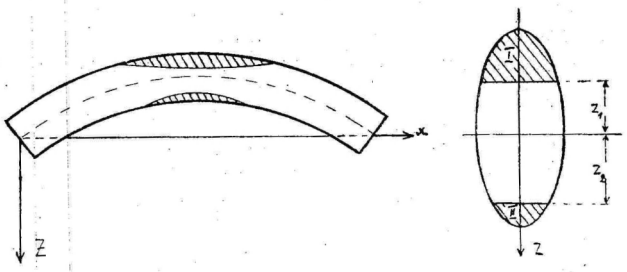


Рис. 1.

Арка находится под воздействием равномерного поперечного давления q.

Обозначим:

u и w — перемещения точек центральной оси соответственно вдоль координатных осей x и Z,

ε — относительная осевая деформация центральной оси арки,

σ — нормальное напряжение в поперечном сечении,
E — модуль упругости,
l — длина арки.

1. Симметричная деформация

Допустим, что в арке имеются зоны пластических деформаций: I зона от сжатия, II от растяжения (рис. 1). Пусть координаты z_1 и z_2 определяют границы упругих и пластических деформаций в данном сечении.

Пренебрегая надавливанием волокон друг на другу в процессе деформации, можно нормальное напряжение в поперечном сечении волокна $z = \text{const}$ выразить формулами:

1) в зоне упругих деформаций

$$\sigma = E\left(\varepsilon - \frac{z}{l^2}w''\right),$$

2) в I зоне

$$\sigma = E(1-\lambda)\left(\varepsilon - \frac{z}{l^2}w''\right) - E\lambda\varepsilon_s,$$

3) во II зоне

$$\sigma = E(1-\lambda)\left(\varepsilon - \frac{z}{l^2}w''\right) + E\lambda\varepsilon_s$$

(ε_s — относительная деформация при текучести).

Здесь и дальше штрихами обозначены производные по ξ, причем $\xi = \frac{x}{l}$.

При деформации арки в ее сечениях возникают поперечная сила Q, нормальная сила N и изгибающий момент M, имеющие следующие выражения:

$$N = \int\limits_{(F)} \sigma dF = E\lambda\frac{w''}{l^2}(S_1 + S_2) - E\lambda F_1(\varepsilon_s + \varepsilon) + \\ + E\lambda F_2(\varepsilon_s - \varepsilon) + E\varepsilon F, \qquad (1)$$

$$M = \int\limits_{(F)} z\sigma dF = \frac{Ew''}{l^2}(\lambda I_1 + \lambda I_2 - I) - E\lambda S_1(\varepsilon_s + \varepsilon) + \\ + E\lambda S_2(\varepsilon_s - \varepsilon),$$

где F — площадь сечения, I — момент инерции сечения,

$$F_1 = \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{z_1} b(z)dz; \qquad S_1 = \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{z_1} zb(z)dz; \qquad I_1 = \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{z_1} z^2 b(z)dz;$$

$$F_2 = \int\limits_{z_2}^{\frac{h}{2}} b(z)dz; \qquad S_2 = \int\limits_{z_2}^{\frac{h}{2}} zb(z)dz; \qquad I_2 = \int\limits_{z_2}^{\frac{h}{2}} z^2 b(z)dz.$$

Исходя из гипотезы плоских сечений можем написать, что

$$\varepsilon_z = \varepsilon - \frac{z}{l^2} w''$$

и получим

$$\varepsilon_s + \varepsilon = \frac{z_1}{l^2} w'', \tag{2}$$

$$\varepsilon_s - \varepsilon = -\frac{z_2}{l^2} w'',$$

$$z_2 = z_1 - \frac{2\varepsilon_s l^2}{w''}. \tag{3}$$

На основании этих результатов

$$N = \frac{Ew''}{l^2} [\lambda(S_1 + S_2) + z_1(F - \lambda F_1) - z_2 \lambda F_2] - EF\varepsilon_s, \tag{4}$$

$$M = \frac{Ew''}{l^2} [\lambda(I_1 + I_2 - S_1 z_1 - S_2 z_2) - I]. \tag{5}$$

Основная система состоит из уравнений (2) — (5) и из уравнений (данных в работе [1]) в виде

$$N = \text{const}, \quad M' = Ql,$$

$$Q' = -\frac{N}{l} [f''(x) + w''] - ql, \tag{6}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{l^2} \left[u'l + w'f'(x) + \frac{1}{2} w'^2\right], \tag{7}$$

представляющих из себя уравнения равновесия и геометрических условий.

Из (5) и (6) после вычисления производных и упрощений получим

$$[\lambda(I_1 + I_2 - S_1 z_1 - S_2 z_2) - I] w^{IV} - 2\lambda(S_1 z'_1 + S_2 z'_2) w^{III} -$$
$$- \lambda[S_1 z''_1 + S_2 z''_2 + z_1 b(z_1) z'^2_1 - z_2 b(z_2) z'^2_2] w'' =$$
$$= -\frac{Nl^2}{E} [f''(x) + w''] - \frac{ql^4}{E}. \tag{8}$$

Элиминируя ε из уравнений (1) и (7), интегрируя результат по ξ и удовлетворяя граничным условиям

$$u(0) = u(1) = 0$$

найдем

$$\int_0^1 \frac{Nl^2 - E\lambda w''(S_1 + S_2) + E\lambda\varepsilon_s l^2 (F_1 - F_2)}{E[F - \lambda(F_1 + F_2)]} d\xi - \int_0^1 w'f'(x) d\xi -$$
$$- \frac{1}{2} \int_0^1 w'^2 d\xi = 0. \tag{9}$$

Для решения проблемы получены уравнения (3), (4), (8) и (9).

В качестве примера рассмотрим задачу об изгибе шарнирно-опертой по краям синусоидальной арки с прямоугольным поперечным сечением. Тогда

$$f(x) = -a\sin\pi\xi;\quad b(z) = b;\quad F = bh;\quad I = \frac{bh^3}{12}.$$

Переходим к следующим безразмерным величинам

$$w^* = \frac{w}{h};\qquad l^* = \frac{l}{h};\qquad z_1^* = \frac{z_1}{h};\qquad z_2^* = \frac{z_2}{h};\qquad q^* = \frac{ql^4}{EIa};$$

$$a^* = \frac{a}{h};\qquad m = \frac{4I}{Fa^2};\qquad n = \varepsilon_s l^{*2};\qquad k^2 = -\frac{Nl^2}{EI}.$$

Основные уравнения (3), (4), (8) и (9) принимают теперь вид

$$z_2^* = z_1^* - \frac{2n}{w^{*\prime\prime}}, \tag{10}$$

$$6[\lambda(z_2^{*2} - z_1^{*2} - z_1^* - z_2^*) + 2z_1^*]w^{*\prime\prime} + k^2 - 12n = 0, \tag{11}$$

$$[2\lambda(z_2^{*3} - z_1^{*3}) + \frac{3}{2}\lambda(z_1^* - z_2^*) + \lambda - 1]w^{*\mathrm{IV}} -$$

$$- 3\lambda[(4z_1^{*2} - 1)z_1^{*\prime} + (1 - 4z_2^{*2})z_2^{*\prime}]w^{*\mathrm{III}} - \tag{12}$$

$$- \frac{3}{2}\lambda[(4z_1^{*2} - 1)z_1^{*\prime\prime} + (1 - 4z_2^{*2})z_2^{*\prime\prime} +$$

$$+ 8(z_1^* z_1^{*\prime 2} - z_2^* z_2^{*\prime 2})]w^{*\prime\prime} = k^2(a^*\pi^2\sin\pi\xi + w^{*\prime\prime}) - a^* q^*,$$

$$\frac{k^2}{6}\int_0^1 \frac{d\xi}{1 - \lambda - \lambda(z_1^* - z_2^*)} + \lambda\int_0^1 \frac{(z_1^{*2} - z_2^{*2})w^{*\prime\prime} - 2n(z_1^* + z_2^*)}{1 - \lambda - \lambda(z_1^* - z_2^*)}d\xi -$$

$$- 2a^*\pi\int_0^1 w^{*\prime}\cos\pi\xi d\xi + \int_0^1 w^{*\prime 2}d\xi = 0. \tag{13}$$

Из уравнений (11) — (13) вытекают следующие особые случаи:

1° если $z_1^*(\xi) \leqslant -\frac{1}{2}$ и $z_2^*(\xi) \geqslant \frac{1}{2}$, то в уравнения следует подставить $z_1^* = -\frac{1}{2}$, $z_2^* = \frac{1}{2}$ и $z_1^{*\prime} = z_1^{*\prime\prime} = z_2^{*\prime} = z_2^{*\prime\prime} = 0$. В результате получим уравнения упругой арки.

2° если $z_2(\xi) \geqslant \frac{1}{2}$ используется подстановка $z_2^* = \frac{1}{2}$, $z_2^{*\prime} = z_2^{*\prime\prime} = 0$, и в арке возникает только одна пластическая зона от сжатия. Уравнения (11) — (13) принимают вид

$$\left[6\lambda z_1^{*2} - 6(2 - \lambda)z_1^* + \frac{3}{2}\lambda\right]w^{*\prime\prime} - k^2 + 12n = 0, \tag{14}$$

$$\left(2\lambda z_1^{*3} - \frac{3}{2}\lambda z_1^* - \frac{\lambda}{2} + 1\right) w^{*IV} + 3\lambda(4z_1^{*2} - 1) z_1^{*\prime} w^{*\prime\prime\prime} +$$

$$+ \frac{3}{2}\lambda[(4z_1^{*2} - 1) z_1^{*\prime\prime} + 8 z_1^* z_1^{*\prime 2}] w^{*\prime\prime} + k^2 w^{*\prime\prime} =$$

$$= a^*(q^* - k^2\pi^2 \sin \pi\xi), \qquad (15)$$

$$\frac{k^2}{3}\int_0^1 \frac{d\xi}{2\lambda z_1^* - 2 + \lambda} - \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \frac{4n(2z_1^* + 1) - (4z_1^{*2} - 1) w^{*\prime\prime}}{2\lambda z_1^* - 2 + \lambda} d\xi +$$

$$+ 2a^*\pi \int_0^1 w^{*\prime} \cos \pi\xi d\xi - \int_0^1 w^{*\prime 2} d\xi = 0.$$

Задаемся выражением для прогиба

$$w^* = w_0^* \sin \pi\xi,$$

удовлетворяющим граничным условиям

$$w^*(0) = w^*(1) = w^{*\prime\prime}(0) = w^{*\prime\prime}(1) = 0,$$

где w_0 — прогиб посредине арки $\left(\xi = \frac{1}{2}\right)$.

Используя метод Галеркина, получим из (12)

$$w_0^*\pi^5 \int_0^{\frac{1}{2}} \left[2\lambda(z_2^{*3} - z_1^{*3}) + \frac{3}{2}\lambda(z_1^* - z_2^*) + \lambda - 1\right] \sin^2 \pi\xi d\xi +$$

$$+ 3\lambda w_0^*\pi^4 \int_0^{\frac{1}{2}} [(4z_1^{*2} - 1) z_1^{*\prime} + (1 - 4z_2^{*2}) z_2^{*\prime}] \sin \pi\xi \cos \pi\xi d\xi +$$

$$+ \frac{3}{2}\lambda w_0^*\pi^3 \int_0^{\frac{1}{2}} [(4z_1^{*2} - 1) z_1^{*\prime\prime} + (1 - 4z_2^{*2}) z_2^{*\prime\prime} + 8(z_1^* z_1^{*\prime 2} -$$

$$- z_2^* z^{*\prime 2})] \sin^2 \pi\xi d\xi + \frac{1}{4} k^2\pi^3 (w_0^* - a^*) + a^* q^* = 0, \qquad (16)$$

а уравнение (13) можно переписать следующим образом

$$\frac{k^2}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d\xi}{1 - \lambda - \lambda(z_1^* - z_2^*)} - 2\lambda \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2n(z_1^* + z_2^*) + w_0^*\pi^2(z_1^{*2} - z_2^{*2}) \sin \pi\xi}{1 - \lambda - \lambda(z_1^* - z_2^*)} d\xi -$$

$$- w_0^*\pi^2 \left(a^* - \frac{w_0^*}{2}\right) = 0. \qquad (17)$$

Систему (10), (11), (16), (17) решаем численно, используя метод упругих решений. Ход решения таков. Задаем w_0^* и m $(0 < m < 1)$. Из упругого решения [1] определяем

$$a^* = \sqrt{\frac{1}{3m}}, \quad k^2 = 3\pi^2 w_0^*(2a^* - w_0^*),$$

$$q^* = \frac{\pi^3[w_0^*(\pi^2 - k^2) + a^* k^2]}{4a^*}.$$

Из системы (10) и (11) найдем теперь z_1^*, z_2^* и их производные в первом приближении. В точках, где

1° $z_2^* \geqslant \frac{1}{2}$, возьмем как показано выше $z_2^* = \frac{1}{2}$ и $z_2^{*\prime} = z_2^{*\prime\prime} = 0$, а величины z_1^*, $z_1^{*\prime}$, $z_1^{*\prime\prime}$ вычислим по формуле (14).

2° $z_1^* \leqslant -\frac{1}{2}$, возьмем $z_1^* = -\frac{1}{2}$ и $z_1^{*\prime} = z_1^{*\prime\prime} = 0$.

Исходя из уравнения (16) определим w_0^* (второе приближение) и из (17) k^2. На основе этих приближений вычисляем новые значения z_1^*, z_2^* и их производные и повторяем вычисления пока будет достигнута желаемая точность.

2. Несимметричная деформация

При некоторых значениях геометрических параметров пологие арки теряют устойчивость при несимметричной форме деформации. Сжато-изогнутая арка сохраняет симметричную форму до критической нагрузки после чего эта форма деформации сменяется несимметричной. В критической стадии происходит пере-

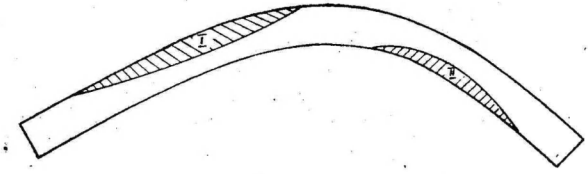


Рис. 2.

распределение напряжений и расположение пластических зон изменяется. Зона передвигается влево и в случае упруго-пластического материала в средней части арки возникает зона разгрузки. Учет влияния зоны разгрузки ведет к большим затруднениям математического характера. Поэтому в дальнейшем влиянием этой зоны пренебрегаем. Это значит — материал арки будем считать нелинейно упругим.

Допустим, что образуются пластические деформации от сжатия в I и во II области (рис. 2). Пусть $z_1 = z_1(\xi)$ и $z_2 = z_2(\xi)$ будут уравнениями кривых, которые разделяют зоны упругих и пластических деформаций, соответственно в I и во II области.

В I области $F_2 = S_2 = I_2 = 0$. Из уравнений (1) и (7) найдем тогда после упрощений

$$u^{*\prime}l^* = \frac{k^2 - 6\lambda n(2z_1^* + 1) + 3\lambda(2z_1^{*2} - \frac{1}{2})w^{*\prime\prime}}{6(2\lambda z_1^* - 2 + \lambda)} + a^*\pi w^{*\prime}\cos\pi\xi - \frac{1}{2}w^{*\prime 2}. \tag{18}$$

Основными зависимостями для этой области являются (14), (15) и (18).

Для *II* области получим следующие выражения

$$\left[6\lambda z_2^{*2} + 6(2-\lambda)z_2^* + \frac{3}{2}\lambda\right] w^{*\prime\prime} + k^2 - 12n = 0, \tag{19}$$

$$\left(2\lambda z_2^{*3} - \frac{3}{2}\lambda z_2^* + \frac{\lambda}{2} - 1\right) w^{*\mathrm{IV}} + 3\lambda(4z_2^{*2} - 1) z_2^{*\prime} w^{*\prime\prime\prime} +$$

$$+ \frac{3}{2}\lambda[(4z_2^{*2} - 1) z_2^{*\prime\prime} + 8z_2^* z_2^{*\prime 2}] w^{*\prime\prime} - k^2 w^{*\prime\prime} =$$

$$= a^*(\pi^2 k^2 \sin \pi\xi - q^*), \tag{20}$$

$$u^{*\prime} l^* = \frac{k^2 - 6\lambda n(1 + 2z_2^*) + 3\lambda(\frac{1}{2} - 2z_2^{*2}) w^{*\prime\prime}}{6(\lambda - 2 - 2\lambda z_2^*)} + a^* \pi w^{*\prime} \cos \pi\xi -$$

$$- \frac{1}{2} w^{*\prime 2}. \tag{21}$$

Следуя работе [1], зададимся выражением для прогиба

$$w^* = w_0^* \sin \pi\xi + w_1^* \sin 2\pi\xi.$$

Здесь также используется метод упругих решений. Схема решения задачи теперь следующая. Задаем q^*, m и n. Из упругого решения находим

$$a^* = \sqrt{\frac{1}{3m}}, \qquad w_0^* = \frac{4}{3} a^* \left(1 - \frac{q^*}{\pi^5}\right),$$

$$w_1^* = \sqrt{\frac{1}{2} a^* w^*{}_0 - \frac{1}{4} w^{*2}{}_0 - \frac{1}{3}}, \quad k^2 = 4\pi^2.$$

Точка перегиба деформированной арки определяется из соотношения

$$\xi_1 = \frac{1}{\pi} \arccos\left(-\frac{w_0^*}{8w_1^*}\right). \tag{22}$$

По методу Галеркина на основании (15) и (20) получим следующую систему

$$\begin{cases} \lambda \int_0^1 (\varphi_1 + 6\varphi_2 + 3\varphi_3) sg(\xi_1 - \xi) \sin \pi\xi d\xi + \frac{k^2\pi^2}{2}(a^* - w_0^*) - \\ \qquad - \frac{2a^*q^*}{\pi} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{4}\right)\pi^4 w_0^* = 0, \\ \lambda \int_0^1 (\varphi_1 + 6\varphi_2 + 3\varphi_3) sg(\xi_1 - \xi) \sin 2\pi\xi d\xi - 2\pi^2 k^2 w_1^* + \\ \qquad + 8\pi^4 w_1^* \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) = 0, \end{cases} \tag{23}$$

где

$$\varphi_1 = \left(2z^{*3} - \frac{3}{2}z^*\right) w^{*IV},$$

$$\varphi_2 = \left(2z^{*2} - \frac{1}{2}\right) z^{*\prime} w^{*\prime\prime\prime},$$

$$\varphi_3 = \left[\left(2z^{*2} - \frac{1}{2}\right) z^{*\prime\prime} + 4z^* z^{*\prime 2}\right] w^{*\prime\prime}.$$

В этих формулах под символом z^* следует понимать величину z_1^* если $0 \leqslant \xi \leqslant \xi_1$ и z_2^* если $\xi_1 \leqslant \xi \leqslant 1$.

Учитывая условие непрерывности величины $u^*(\xi_1)$ и формулы (18) и (21), найдем

$$\frac{k^2}{3}\left\{\int_0^{\xi_1} \frac{d\xi}{2\lambda z_1^* - 2 + \lambda} + \int_{\xi_1}^{1} \frac{d\xi}{\lambda - 2 - 2\lambda z_2^*}\right\} -$$

$$- \frac{\lambda}{2}\int_0^{\xi_1} \frac{4n(2z_1^* + 1) - (4z_1^{*2} - 1) w^{*\prime\prime}}{2\lambda z_1^* - 2 + \lambda} d\xi -$$

$$- \frac{\lambda}{2}\int_{\xi_1}^{1} \frac{4n(1 - 2z_2^*) - (1 - 4z_2^{*2}) w^{*\prime\prime}}{\lambda - 2 - 2\lambda z_2^*} d\xi +$$

$$+ \pi^2\left(a^* w_0^* - 2w_1^{*2} - \frac{w_0^{*2}}{2}\right) = 0. \qquad (24)$$

Чтобы найти w_0^*, w_1^*, и k^2 (второе приближение), вычисляем из (14) и (19) z_1^*, z_2^* и их производные. В точках, где $z_1^* \leqslant -\frac{1}{2}$ возьмем $z_1^* = -\frac{1}{2}$, $z_1^{*\prime} = z_1^{*\prime\prime} = 0$, а где $z_2^* \geqslant \frac{1}{2}$ там $z_2^* = \frac{1}{2}$, $z_2^{*\prime} = z_2^{*\prime\prime} = 0$. Из системы (23) определяем w_0^* и w_1^*, а из (24) k^2. Повторяем вычисления до достижения желаемой точности.

Результаты должны удовлетворять условию

$$k^2 - 12n - 6\pi^2(w_0^* \sin \pi\xi + 4w_1^* \sin 2\pi\xi) > 0$$

так как лишь в этом случае в арке не возникает пластических деформаций от растяжения.

Литература

1. Григолюк Э. И., К расчету устойчивости пологих арок. Инженерный сб., 1951, **9**, 177—200.
2. Динник А. Н., Устойчивость арок. Москва, 1946.
3. Ильюшин А. А., Пластичность. Москва, 1948.
4. Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем. Москва, 1955.

Поступило
23 IV 1962

LAMEDATE ELASTILIS-PLASTILISTE KÕVERATE VARRASTE ARVUTAMISEST

E. Jõgi
Teoreetilise mehhaanika kateeder

Resümee

Käesolevas artiklis üldistatakse töös [1] saadud tulemusi juhuks, kui vardas tekivad elastsete ja plastiliste deformatsioonide piirkonnad. Sõltuvalt geomeetrilistest parameetritest võivad stabiilsuse kaol tekkivad deformatsioonid olla sümmeetrilised või mittesümmeetrilised. Koostatakse probleemi põhivõrrandid. Konkreetse näitena vaadeldakse šarniirselt toetatud ristkülikukujulise ristlõikega sinusoidaalset varrast. Lahendamisel kasutatakse Galjorkini ja elastsete lahendite meetodit.

ZUR BERECHNUNG EINES SCHWACH GEKRÜMMTEN ELASTISCH-PLASTISCHEN STABES

E. Jõgi

Zusammenfassung

Im vorliegenden Aufsatz werden die Resultate der Arbeit [1] verallgemeinert für den Fall, wenn im Stabe die Zonen der elastischen und plastischen Deformationen entstehen. Abhängig von geometrischen Parametern kann der Deformationenzustand bei der Beanspruchung entweder symmetrisch oder unsymmetrisch sein. Die Grundgleichungen sind in der vorliegenden Arbeit zusammengestellt. Als Beispiel wird der in seinem Enden gelenkig gelagerte schwach gekrümmte sinusförmige Stab mit einem Rechteckquerschnitt betrachtet. Bei der Lösung werden die Methode Galerkins und die der elastischen Lösungen gebraucht.

О ПРОЩЕЛКИВАНИИ ПОЛОГИХ АРОК

Э. Йыги
Кафедра теоретической механики

В настоящей статье рассматривается задача о прощелкивании пологой круговой и параболической арки. Исследуется симметричная и несимметричная формы потери устойчивости в случае упругих деформаций. Для приближенного решения задачи применяется метод Галеркина. Получены формулы для определения критической нагрузки и соответствующих прогибов.

1. Основные соотношения для круговой арки

Рассмотрим пологую арку, ось которой в недеформированном состоянии является дугой круга радиуса r, нагруженную постоянной радиальной нагрузкой с интенсивностью q. Концы арки будем предполагать опертыми или жестко заделанными. Пусть ось x проходит точки закрепления (начало координат в левом конце арки). Оси y_1 и z_1 — оси симметрии поперечного сечения. Допустим еще, что прощелкивание происходит в плоскости xz_1, за положительное направление оси z_1 примем направление прогибов w.

Будем исходить из уравнений Кирхгофа (см. [2], стр. 433) для пологой арки

$$N = \text{const}, \quad \frac{dQ}{ds} + \frac{N}{r} + q = 0, \quad \frac{dM}{ds} - Q = 0, \tag{1.1}$$

где N — нормальная сила, Q — поперечная сила, M — изгибающий момент.

Обозначим еще: l — длина арки, u — перемещение точки центральной оси в направлении касательной, ε — относительная осевая деформация центральной оси арки, σ — нормальное напряжение в поперечном сечении, I — момент инерции сечения, F — площадь сечения, E — модуль упругости, $\varkappa$ — величина дополнительного искривления оси арки.

Деформации оси выражаются [4] через перемещения

$$\varepsilon = \frac{du}{ds} - \frac{w}{r} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{ds}\right)^2, \quad \varkappa = \frac{d^2w}{ds^2}.$$

В дальнейшем мы заменим дифференцирование по s дифференцированием по проекции дуги x, что допустимо в пологом стержне при рассматриваемой точности вычислений. Перейдем к безразмерной величине $\xi = \frac{x}{l}$. Штрихами обозначим производные по ξ. Тогда

$$\varepsilon = \frac{u'}{l} - \frac{w}{r} + \frac{1}{2l^2} w'^2, \quad \varkappa = \frac{w''}{l^2}, \tag{1.2}$$

а уравнения равновесия (1.1) можно писать в виде

$$N = \text{const}, \quad Q' = -\frac{Nl}{r} - ql, \quad M' = Ql. \tag{1.3}$$

Из последней системы выводим

$$M'' + \frac{Nl^2}{r} + ql^2 = 0.$$

Для составления уравнения устойчивости необходимо учесть изменение кривизны, равную $\varkappa$. Тогда

$$M'' + Nl^2\left(\frac{1}{r} + \varkappa\right) + ql^2 = 0. \tag{1.4}$$

Если принять гипотезу плоских сечений, можно нормальное напряжение в поперечном сечении волокна $z_1 = \text{const}$ выразить формулой

$$\sigma = E\left(\varepsilon - \frac{z_1}{l^2} w''\right),$$

а внутренние усилия — соотношением

$$N = E\varepsilon F, \quad M = -\frac{EI}{l^2} w''. \tag{1.5}$$

Подставляя (1.5) в (1.4) и учитывая изменение кривизны (1.2), получим

$$w^{IV} + k^2 w'' = \frac{l^2(q^* - k^2)}{r}, \tag{1.6}$$

причем

$$k^2 = -\frac{Nl^2}{EJ}, \quad q^* = \frac{ql^2 r}{EJ}.$$

Общее решение последнего уравнения будет

$$w = C_1 \sin k\xi + C_2 \cos k\xi + C_3\xi + C_4 + \frac{l^2(q^* - k^2)}{2k^2 r}\xi^2. \tag{1.7}$$

Из первых уравнений (1.2) и (1.5) найдем

$$u' = \frac{Nl}{EF} + \frac{wl}{r} - \frac{1}{2l} w'^2. \qquad (1.8)$$

Уравнения (1.6) и (1.8) — основные уравнения проблемы.

2. Круговая арка с шарнирно опертыми краями

Рассмотрим задачу о прощелкивании шарнирно опертой по краям круговой арки. Удовлетворяя граничным условиям

$$w(0) = w(1) = w''(0) = w''(1) = 0,$$

из общего решения (1.7) найдем, что

$$w = \frac{l^2(q^* - k^2)}{k^4 r_0}\left[\tan\frac{k}{2}\sin k\xi + \cos k\xi - \frac{k^2}{2}\xi(1-\xi) - 1\right]. \qquad (2.1)$$

Обозначая $w_0 = w\left(\frac{1}{2}\right)$, из (2.1) заключаем

$$w_0 = \frac{l^2(q^* - k^2)}{k^4 r}\left[\sec\frac{k}{2} - \frac{k^2}{8} - 1\right]. \qquad (2.2)$$

Если теперь подставить выражение (2.1) в (1.8) и интегрировать, удовлетворяя граничным условиям $u(0) = u(1) = 0$, то

$$(q^* - k^2)^2\left[\frac{k}{2}\left(\tan^2\frac{k}{2} - 2\tan\frac{k}{2}\sin^2 k + 5\right) - \right.$$

$$\left. - (4 + \cos^2 k)\tan\frac{k}{2} + \frac{k^3}{12}\right] - 2k^3(q^* - k^2)\left(\frac{2}{k}\tan\frac{k}{2} - \frac{k^2}{12} - 1\right) +$$

$$+ \frac{8k^9\alpha}{\pi^6} = 0, \qquad (2.3)$$

где

$$\alpha = \frac{\pi^6 I r^2}{4Fl^4}.$$

Задаваясь различными значениями k^2, можно построить график зависимости $q^* = q^*(k^2)$ для различных значений α. В этом случае, когда возможна потеря устойчивости, этот график представляет собой петлеобразную кривую [1, 3]. Подставляя сопряженную пару значений q^* и k^2 в соотношение (2.1), определим прогибы произвольной точки арки.

Ввиду сложности этих вычислений, приведем приближенное решение задачи. Задаемся выражением для прогиба

$$w = w_0 \sin \pi\xi.$$

Постоянное w_0 определяется методом Галеркина из основного уравнения (1. 6):

$$\int_0^1 \left[w_0\pi^4 \sin \pi\xi - w_0 k^2 \pi^2 \sin \pi\xi - \frac{l^2(q^* - k^2)}{r} \right] \sin \pi\xi d\xi = 0.$$

После интегрирования находим

$$q^* = \frac{\pi^3 r w_0 (\pi^2 - k^2)}{4l^2} + k^2, \tag{2.4}$$

а из основного уравнения (1. 8) —

$$k^2 = \frac{\pi^5 r w_0 (8l^2 - \pi^3 r w_0)}{16 a l^4}. \tag{2.5}$$

Подставляя полученный результат в (2. 4), приходим к выражению

$$q^* = \frac{\pi^5 r w_0 [\pi^6 r^2 w_0^2 - 12\pi^3 l^2 r w_0 + 16 l^4 (a+2)]}{64 a l^6}. \tag{2.6}$$

Для нахождения критического значения $q^*_{\pm}$ (при q^*_- происходит прощелкивание арки вниз, при q^*_+ — обратно вверх) приравниваем нулю производную $\frac{dq^*}{dw_0}$ и определяем соответствующие прогибы

$$w_{0\pm} = \frac{4l^2}{\pi^3 r}\left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{1-a}\right), \tag{2.7}$$

а из (2. 6)

$$q^*_{\pm} = \pi^2 \left(1 \mp \frac{2\sqrt{3}}{9} \frac{1-a}{a} \sqrt{1-a}\right). \tag{2.8}$$

Приравнивая (2. 6) и (2. 8) определим другие прогибы

$$w_{01,2} = \frac{4l^2}{\pi^3 r}\left(1 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{1-a}\right),$$

соответствующие критическим значениям параметра нагрузки.

Имея в виду (2. 5), мы вправе писать

$$k^2_{\pm} = \frac{\pi^2}{3}\left(1 + \frac{2}{a}\right), \quad k^2_{1,2} = \frac{\pi^2}{3}\left(4 - \frac{1}{a}\right).$$

Прощелкивание возможно, когда параметр a находится в пределах $0 < a < 1$. При $a = 1$ обе критические нагрузки сливаются в одну, а при $a > 1$ кривая состояния равновесия не имеет экстремальных точек, арка не теряет устойчивость, а плавно деформируется в соответствии с изменением нагрузки.

Сравниваем точное и приближенное решения. Задав k^2, найдем из (2. 2) и (2. 3) точные значения q_T^* и $\frac{r}{l^2} w_0$. Приближен-

ные результаты $q^*_П$ и $k^2_П$ получим из (2. 5) и (2. 6). В таблицах 1 и 2 приведено некоторые результаты вычислений при $\alpha = 0{,}7$. В этом случае критическими значениями являются $\frac{r}{l^2} w_{0-} = 0{,}0882$ и $\frac{r}{l^2} w_{0+} = 0{,}170$.

Как показывают вычисления, получим хорошее совпадение в окрестности $\frac{r}{l^2} w_{0-}$, а в близи $\frac{r}{l^2} w_{0+}$ разница между точным и приближенным решениями увеличивается с уменьшением α.

Таблица 1

$\frac{r}{l^2} w_0$	0,0306	0,0513	0,0748	0,0835	0,0971	0,153	0,170	0,181
$q^*_П$	6,84	9,33	10,60	10,74	10,70	9,17	8,98	9,10
$q^*_Т$	7,11	9,35	10,58	10,71	10,64	9,30	9,12	9,19
Разница в %	−3,8	−0,2	+0,2	+0,3	+0,6	−1,4	−1,5	−1,0

Таблица 2

$\frac{r}{l^2} w_0$	0,0306	0,0513	0,0748	0,0835	0,0971	0,153	0,170	0,181
$k^2_П$	5,90	8,98	11,61	12,35	13,24	13,61	12,70	11,78
$k^2_Т$	6,25	9,00	11,56	12,25	12,96	12,96	12,25	11,56
Разница в %	−5,6	−0,2	+0,4	+0,8	+2,2	+5,0	+3,7	+1,9

Для некоторых значений геометрических параметров пологие арки теряют устойчивость при несимметричной форме деформации. Дальше найдем критические нагрузки несимметричной формы деформации и предел параметра α до которого справедливы полученные соотношения.

Приведем приближенное решение задачи по методу Галеркина, задавая

$$w = w_0 \sin \pi\xi + w_1 \sin 2\pi\xi.$$

На основании (1. 6) определим постоянные w_0 и w_1 из уравнений

$$\int_0^1 \left[w_0\pi^2(\pi^2 - k^2) \sin \pi\xi + 4w_1\pi^2(4\pi^2 - k^2) \sin 2\pi\xi - \right.$$

$$\left. - \frac{l^2(q^* - k^2)}{r} \right] \sin \pi\xi d\xi = 0,$$

$$\int_0^1 \left[w_0\pi^2(\pi^2 - k^2)\sin\pi\xi + 4w_1\pi^2(4\pi^2 - k^2)\sin 2\pi\xi - \right.$$
$$\left. - \frac{l^2(q^* - k^2)}{r} \right] \sin 2\pi\xi d\xi = 0,$$

откуда

$$w_0 = \frac{4l^2(q^* - k^2)}{\pi^3 r(\pi^2 - k^2)}, \quad 4\pi^2 w_1 - k^2 w_1 = 0, \tag{2.9}$$

и

$$q^* = \frac{\pi^3 r w_0(\pi^2 - k^2)}{4l^2} + k^2. \tag{2.10}$$

Из уравнения (1.8) вытекает

$$k^2 = \frac{\pi^5 r[8l^2 w_0 - \pi^3 r(w_0^2 + 4w_1^2)]}{16\alpha l^4}.$$

Подставляя полученный результат в (2.9), получаем систему уравнений

$$\pi^{11} r^3 w_0^3 - 12\pi^8 r^2 l^2 w_0^2 + 4\pi^5 r(\pi^6 r^2 w_1^2 + 4\alpha l^4 + 8l^4) w_0 -$$
$$- 16\pi^8 r^2 l^2 w_1^2 - 64\alpha l^6 q^* = 0,$$
$$4\pi^6 r^2 w_1^3 + (\pi^6 r^2 w_0^2 - 8\pi^3 r l^2 w_0 + 64\alpha l^4) w_1 = 0.$$

Из этой системы следует:

1° если $w_1 = 0$, то налицо исследованный случай симметричной деформации;

2° если $w_1 \neq 0$, тогда $k^2 = 4\pi^2$ и

$$w_0 = \frac{4l^2}{3\pi^5 r}(4\pi^2 - q^*), \quad w_1^2 = \frac{2l^2}{\pi^3 r} w_0 - \frac{1}{4} w_0^2 - \frac{16\alpha l^4}{\pi^6 r^2}.$$

Из условия $w_1 = 0$ определим критические прогибы

$$w_{0\pm} = \frac{4l^2}{\pi^3 r}(1 \pm \sqrt{1 - 4\alpha}), \tag{2.11}$$

и из (2.10) соответствующие нагрузки

$$q^*_{\pm} = \pi^2(1 \mp 3\sqrt{1 - 4\alpha}).$$

Критическим значениям параметра нагрузки соответствуют также прогибы

$$w_{01,2} = \frac{4l^2}{\pi^3 r}\left[1 \pm \frac{1}{2}(\sqrt{1 - 4\alpha} + \sqrt{1 + 8\alpha})\right].$$

Приравнивая выражения (2.7) и (2.11), получаем после преобразований, $\alpha = \frac{2}{11} = 0{,}1818$.

Итак, когда $0{,}1818 < \alpha < 1$, прощелкивание происходит при симметричной деформации, но когда $0 < \alpha < 0{,}1818$, то при несимметричной деформации.

3. Круговая арка с жестко заделанными краями

Из общего решения (1.7), после удовлетворения граничным условиям

$$w(0) = w(1) = w'(0) = w'(1) = 0,$$

получим

$$w = \frac{l^2(q^* - k^2)}{2k^3 r}\left[\sin k\xi + \cot\frac{k}{2}\cos k\xi - k\xi(1-\xi) - \cot\frac{k}{2}\right], \quad (3.1)$$

а в середине арки —

$$w_0 = \frac{l^2(q^* - k^2)}{2k^3 r}\left(\tan\frac{k}{4} - \frac{k}{4}\right). \quad (3.2)$$

Подставляя (3.1) в уравнение (1.8), удовлетворяя граничным условиям $u(0) = u(1) = 0$, найдем

$$(q^* - k^2)^2\left[\left(2\cos k + \frac{k}{2}\cot\frac{k}{2} + 1\right)\cot\frac{k}{2} + \frac{5}{6}k - \frac{8}{k} + 2\sin k\right] -$$

$$- 4k^2(q^* - k^2)\left(\frac{2}{k} - \frac{k}{6} - \cot\frac{k}{2}\right) + \frac{k^7\beta}{2\pi^4} = 0, \quad (3.3)$$

где $\beta = \frac{16\pi^4 r^2 I}{Fl^4}$.

Соотношения (3.2) и (3.3) позволяют построить графики зависимостей $q^* = q^*(k^2)$ и $q^* = q^*(w_0)$.

Для приближенного решения целесообразно взять аппроксимирующей функцией

$$w = w_0 \sin^2 \pi\xi.$$

Подставляя ее в (1.6) и применяя метод Галеркина, получим

$$w_0 = \frac{l^2(q^* - k^2)}{\pi^2 r(4\pi^2 - k^2)},$$

и

$$q^* = \frac{\pi^2 r w_0(4\pi^2 - k^2)}{l^2} + k^2. \quad (3.4)$$

Из (1.8) найдем после удовлетворения граничным условиям

$$k^2 = \frac{4\pi^4 r w_0(2l^2 - \pi^2 r w_0)}{\beta l^4}. \quad (3.5)$$

Подставляя полученный результат в (3.4), имеем

$$q^* = \frac{4\pi^4 r w_0 [\pi^4 r^2 w_0^2 - 3\pi^2 r l w_0 + l^4 (2+\beta)]}{\beta l^6}. \qquad (3.6)$$

Экстремальные значения q^* и w_0 находим обычном методом, вследствие чего

$$w_{0\pm} = \frac{l^2}{\pi^2 r}\left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{1-\beta}\right), \qquad (3.7)$$

$$q^*{}_{\pm} = 4\pi^2\left(1 \mp \frac{2\sqrt{3}}{9}\frac{1-\beta}{\beta}\sqrt{1-\beta}\right). \qquad (3.8)$$

Имея в виду (3.5) и (3.7) —

$$k^2{}_{\pm} = \frac{4\pi^2}{3}\left(1 + \frac{2}{\beta}\right).$$

Приравнивая (3.6) и (3.8), определим другие прогибы соответствующие критическим значениям параметра нагрузки

$$w_{01,2} = \frac{l^2}{\pi^2 r}\left(1 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{1-\beta}\right),$$

а из (3.5) параметр нормальной силы

$$k^2{}_{1,2} = \frac{4\pi^2}{3}\left(4 - \frac{1}{\beta}\right).$$

При несимметричной форме деформации примем

$$w = w_0 \sin^2 \pi\xi + w_1 \sin^2 \pi\xi \cos \pi\xi.$$

Дальше решаем как в рассмотренных выше случаях. Приводим окончательные результаты:

$$k^2 = 8{,}2\pi^2,$$

$$w_{0\pm} = \frac{l^2}{\pi^2 r}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{41}{20}\beta}\right), \qquad (3.9)$$

$$q^*{}_{\pm} = \pi^2\left(4 \mp \frac{21}{5}\sqrt{1 - \frac{41}{20}\beta}\right),$$

$$w_{01,2} = \frac{l^2}{\pi^2 r}\left[1 \pm \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 - \frac{41}{20}\beta} + \sqrt{1 + \frac{43}{20}\beta}\right)\right].$$

Приравнивая (3.7) и (3.9) получим, что $\beta = \frac{40}{103}$. Если $0 < \beta < 0{,}3883$, то прощелкивание происходит при несимметричной формы деформации, $0{,}3883 < \beta < 1$ при симметричной.

4. Параболическая арка с шарнирно опертыми краями

Используя общую теорию расчета пологих арок Э. И. Григолюка [1], будем рассматривать задачу о прощелкивании параболической пологой арки, находящейся под воздействием равномерного поперечного давления q.

Уравнением центральной оси недеформированной арки является

$$z = -\frac{4a}{l^2}x(l-x),$$

где a — высота арки.

Из уравнений (данных в работе [1])

$$N = \text{const.},\ M' = Ql,\ Q' = -\frac{N}{l}(z'' + w'') - ql,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{l^2}(u'l + w'z' + \tfrac{1}{2}w'^2),$$

получим основные уравнения

$$w^{IV} + k^2 w'' = a(q^* - 8k^2), \tag{4.1}$$

$$u' = \frac{Nl}{EF} - \frac{1}{l}z'w' - \frac{1}{2l}w'^2, \tag{4.2}$$

причем $q^* = \frac{ql^4}{EIa}$.

Удовлетворяя граничным условиям, из общего решения уравнения (4.1) заключаем, что

$$w = \frac{a(q^* - 8k^2)}{k^4}\left[\tan\frac{k}{2}\sin k\xi + \cos k\xi - 1 + \frac{k^2}{2}\xi(\xi - 1)\right], \tag{4.3}$$

а в середине арки

$$w_0 = \frac{a(q^* - 8k^2)}{k^4}\left(\sec\frac{k}{2} - \frac{k^2}{8} - 1\right).$$

Учитывая (4.3) и граничные условия, из (4.2) вытекает, что

$$(q^* - 8k^2)^2\left(\frac{1}{2}\tan^2\frac{k}{2} - \frac{5}{k}\tan\frac{k}{2} + \frac{k^2}{12} + \frac{5}{2}\right) -$$

$$- 8k(q^* - 8k^2)\left(4\tan\frac{k}{2} - 2k - \frac{k^3}{6}\right) + \frac{512k^8\gamma}{\pi^6} = 0,$$

где $\gamma = \frac{\pi^6 I}{256Fa^2}$.

Для приближенного решения уравнения (4.1) примем

$$w = w_0 \sin\pi\xi.$$

	Шарнирно опертая арка	
	Симметричная форма деформации	Несимметричная форма деформации
$w_{0\pm}$	$c_1\left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{1-m}\right)$	$c_1\,(1 \pm \sqrt{1-4m})$
$w_{01,2}$	$c_1\left(1 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{1-m}\right)$	$c_1\,[1 \pm \frac{1}{2}\,(\sqrt{1-4m} + \sqrt{1+8m})]$
$q^*{}_{\pm}$	$c_2\left(1 \mp \frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{1-m}{m}\sqrt{1-m}\right)$	$c_2\,(1 \mp 3\sqrt{1-4m})$
$k^2{}_{\pm}$	$\frac{\pi^2}{3}\left(1+\frac{2}{m}\right)$	$4\pi^2$
$k^2{}_{1,2}$	$\frac{\pi^2}{3}\left(4-\frac{1}{m}\right)$	

Аналогично предыдущему получим критические величины:

$$w_{0\pm} = \frac{32a}{\pi^3}\left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{1-\gamma}\right),$$

$$q^*{}_{\pm} = 8\pi^2\left(1 \mp \frac{2\sqrt{3}}{9}\frac{1-\gamma}{\gamma}\sqrt{1-\gamma}\right),$$

$$w_{01,2} = \frac{32a}{\pi^3}\left(1 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{1-\gamma}\right),$$

$$k^2{}_{\pm} = \frac{\pi^2}{3}\left(1+\frac{2}{\gamma}\right), \quad k^2{}_{1,2} = \frac{\pi^2}{3}\left(4-\frac{1}{\gamma}\right).$$

При несимметричной форме деформации

$$w = w_0 \sin \pi\xi + w_1 \sin 2\pi\xi,$$

характерные величины следующие:

$$w_{0\pm} = \frac{32a}{\pi^3}\,(1 \pm \sqrt{1-4\gamma}),$$

$$q^*{}_{\pm} = 8\pi^2\,(1 \mp 3\sqrt{1-4\gamma}),$$

$$w_{01,2} = \frac{32a}{\pi^3}\,[1 \pm \frac{1}{2}\,(\sqrt{1-4\gamma} + \sqrt{1+8\gamma})].$$

Таблица 3

Жестко заделанная арка	
Симметричная форма деформации	Несимметричная форма деформации
$c_3\left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{1-m_1}\right)$	$c_3\left(1 \pm \sqrt{1-\frac{41}{20}m_1}\right)$
$c_3\left(1 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{1-m_1}\right)$	$c_3\left[1 \pm \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-\frac{41}{20}m_1}+\sqrt{1+\frac{43}{20}m_1}\right)\right]$
$c_4\left(1 \mp \frac{2\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{1-m_1}{m_1}\sqrt{1-m_1}\right)$	$c_5\left(4 \mp \frac{21}{5}\sqrt{1-\frac{41}{20}m_1}\right)$
$\frac{4\pi^2}{3}\left(1+\frac{2}{m_1}\right)$	$\frac{41}{5}\pi^2$
$\frac{4\pi^2}{3}\left(4-\frac{1}{m_1}\right)$	

5. Параболическая арка с жестко заделанными краями

Из общего решения уравнения (4. 1) находим, что

$$w = \frac{a(q^* - 8k^2)}{2k^3}\left[\sin k\xi + \cot\frac{k}{2}(\cos k\xi - 1) + k\xi(\xi - 1)\right],$$

$$w_0 = \frac{a(q^* - 8k^2)}{2k^3}\left(\tan\frac{k}{4} - \frac{k}{4}\right),$$

а из (4. 2)

$$(q^* - 8k^2)^2\left[\frac{1}{2}\cot^2\frac{k}{2} + \frac{1}{k}(1 + 2\cos k)\cot\frac{k}{2} + \frac{2}{k}\sin k - \frac{8}{k^2} + \frac{5}{6}\right] -$$

$$- 16(q^* - 8k^2)\left(4 - 2k\cot\frac{k}{2} - \frac{k^2}{3}\right) + \frac{4k^2\delta}{\pi^4} = 0,$$

где $\delta = \frac{\pi^4 I}{4Fa^2}$.

Для приближенного решения задачи, задаемся

$$w = w_0 \sin^2 \pi\xi,$$

и получим

$$w_{0\pm} = \frac{8a}{\pi^2}\left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{1-\delta}\right),$$

$$q^*_{\pm} = 32\pi^2\left(1 \mp \frac{2\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{1-\delta}{\delta}\sqrt{1-\delta}\right),$$

$$w_{01,2} = \frac{8a}{\pi^2}\left(1 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{1-\delta}\right),$$

$$k^2_{\pm} = \frac{4\pi^2}{3}\left(1 + \frac{2}{\delta}\right); \quad k^2_{1,2} = \frac{4\pi^2}{3}\left(4 - \frac{1}{\delta}\right).$$

При несимметричной форме деформации, положив

$$w = w_0 \sin^2 \pi\xi + w_1 \sin^2 \pi\xi \cos \pi\xi,$$

мы вправе писать, что

$$w_{0\pm} = \frac{8a}{\pi^2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{41}{20}\delta}\right),$$

$$q^*_{\pm} = 8\pi^2\left(4 \mp \frac{21}{5}\sqrt{1 - \frac{41}{20}\delta}\right),$$

$$w_{01,2} = \frac{8a}{\pi^2}\left[1 \pm \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 - \frac{41}{20}\delta} + \sqrt{1 + \frac{43}{20}\delta}\right)\right].$$

6. Выводы

На основании [1] и настоящей работы можно получить общие формулы для расчета синусоидальной и параболической арки под равномерным поперечным давлением и для круговой арки под постоянной радиальной нагрузкой (табл. 3). Соответствующие постоянные найдем из табл. 4.

Таблица 4

	Круговая	Параболическая	Синусоидальная
c_1	$\frac{4l^2}{\pi^3 r}$	$\frac{32a}{\pi^3}$	a
c_2	π^2	$8\pi^2$	$\frac{\pi^5}{4}$
c_3	$\frac{l^2}{\pi^2 r}$	$\frac{8a}{\pi^2}$	$\frac{8a}{3\pi}$
c_4	$4\pi^2$	$32\pi^2$	$\frac{32\pi^3}{3}$
c_5	π^2	$8\pi^2$	$\frac{8\pi^3}{3}$
m	$\frac{\pi^6 r^2 I}{4Fl^4}$	$\frac{\pi^6 I}{256a^2 F}$	$\frac{4I}{a^2 F}$
m_1	$\frac{16\pi^4 r^2 I}{Fl^4}$	$\frac{\pi^4 I}{4a^2 F}$	$\frac{9\pi^2 I}{4a^2 F}$
q^*	$\frac{ql^2 r}{EI}$	$\frac{ql^4}{EIa}$	$\frac{ql^4}{EIa}$

Прощелкивание происходит при несимметричной деформации, если $0 < m < 0{,}1818$ или $0 < m_1 < 0{,}3883$, а при симметричной, — когда $0{,}1818 < m < 1$ или $0{,}3883 < m_1 < 1$.

Литература

1. Григолюк Э. И., К расчету устойчивости пологих арок. Инженерный сб., 1951, **9**, 177—200.
2. Ржаницын А. Р., Устойчивость равновесия упругих систем. Москва, 1955.
3. Biezeno, C. B., Das Durchschlagen eines schwach gekrümmten Stabes. Z. angew. Math. und Mech., 1938, **18**; № 1, 21—30.
4. Roos, E., Spannungstheorie II. Ordnung und Durchschlagbelastung für den kreisförmig gekrümmten Zweigelenkbogen. Stahlbau, 1961, **30**, № 3, 65—74.

Поступило
13 XI 1962

LAMEDATE KÕVERJOONELISTE VARRASTE STABIILSUSEST

E. Jõgi

Teoreetilise mehhaanika kateeder

Resümee

Käesolevas artiklis käsitletakse vabalt toetatud ja jäigalt kinnitatud lameda ringkaare ning paraboolse kaare läbilööki, kui kaarele mõjub ühtlaselt jaotatud koormus. Vaadeldakse stabiilsuse kaol tekkivaid sümmeetrilisi ja mittesümmeetrilisi deformatsioone. Ligikaudsel lahendamisel kasutatakse Galjorkini meetodit. Lõpptulemusena saadakse valemid kriitilise koormuse ja vastavate läbipainete arvutamiseks.

ZUM STABILITÄTSPROBLEM EINES SCHWACH GEKRÜMMTEN STABES

E. Jõgi

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird das Durchschlagen eines schwach gekrümmten kreisförmigen und eines parabolischen Stabes behandelt, in dem Fall, wenn der Stab unter der Wirkung einer verteilten Last mit Intensivität q sich befindet. Der Stab ist in seinen beiden Enden gelenkig oder unverschieblich gelagert. Es wird der symmetrische und unsymmetrische Deformationenzustand betrachtet. Bei der angenäherten Lösung wird die Methode Galerkins gebraucht. In dem Aufsatz werden Formeln gegeben, aus denen die kritische Last und die dazuhörigen Durchbiegungen berechnet werden können.

О НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ КРУГЛЫХ ПЛАСТИНОК, ПОДВЕРГНУТЫХ НЕЙТРОННОМУ ОБЛУЧЕНИЮ

Ю. Лепик
Кафедра теоретической механики

Как известно [1, 2], радиационное облучение вызывает значительные изменения в пластических свойствах материала. Особенно чувствительным в отношении облучения является предел текучести, который может быть повышен в два-три раза по сравнению с пределом текучести необлученного материала. Изменения в пределе текучести в свою очередь обусловливают изменение несущей способности облученной детали.

В данной заметке сделана попытка решить задачу о несущей способности круглых облученных пластинок, исходя из концепции жестко-пластического тела. Считается, что к пластинке приложена осесимметричная поперечная нагрузка, и поток нейтронов направлен нормально к одной из поверхностей пластинки. Хотя в настоящей заметке рассматриваются лишь пластинки со свободно опертым краем, указанный метод решения может быть перенесен и на другие случаи (пластинки с защемленным контуром, кольцевые пластинки и т. д.).

1. Рассмотрим круглую пластинку с радиусом a и толщиной h. Край пластинки $r = a$ будем считать свободно опертым. Допустим, что к пластинке приложена поперечная нагрузка, которая распределена равномерно по площади круга $0 \leqslant r \leqslant r_1$, причем $r_1 \leqslant a$. Пусть одна из сторон пластинки $z = \pm h/2$ подвергнута нейтронному облучению, направление которого перпендикулярно к пластинке. Суммарный поток нейтронов N_0 nvt будем считать постоянным по всей площади пластинки.

При определении несущей способности облученной пластинки исходим из обычных в теории предельного равновесия предположений: 1) материал пластинки является жестко-пластическим без упрочнения; 2) влиянием сжимаемости пренебрегаем (объемное расширение в грубом приближении прямо пропорционально суммарному потоку нейтронов и у металлов и пластмасс достигает нескольких процентов [1, 2]; 3) деформации

в пластинке будем считать чисто-пластическими; 4) напряженное и деформационное состояние имеют осевую симметрию; 5) в качестве условия текучести выбираем условие Треска-Сен-Венана, соединяя его с ассоциированным законом течения.

Доза облучения, проникающая от поверхности пластинки до некоторой глубины $z = \text{const}$, определяется выражением

$$N = N_0 e^{-\mu(h/2 \pm z)} \tag{1.1}$$

В этой формуле символом μ обозначено макроскопическое эффективное сечение (это константа материала); знаки «$\pm$» перед буквой z соответствуют случаю, когда нейтронный поток N_0 направлен со стороны поверхностей $z = -h/2$ или $z = h/2$.

Предел текучести материала σ_s является функцией дозы облучения, т. е. $\sigma_s = \sigma_s(N)$. Согласно формуле (1.1) величина N в свою очередь зависит от координаты z; следовательно, $\sigma_s = \sigma_s(z)$ и нам, по существу, следует решать задачу о несущей способности неоднородной пластинки [3].

Обозначим главные напряжения в пластинке символами σ_r и σ_θ. В случае свободно опертой пластинки должно быть

$$|\sigma_r| < |\sigma_\theta| = \sigma_s(z). \tag{1.2}$$

Из условия равновесия усилий в некотором сечении пластинки $r = \text{const}$ находим, что

$$-\int_{-h/2}^{z_0} \sigma_s(z)\,dz + \int_{z_0}^{h/2} \sigma_s(z)\,dz = 0 \tag{1.3}$$

(Символом z_0 в этой формуле обозначено то значение координаты z, при котором компоненты напряжений претерпевают разрывы). Переходя от напряжений σ_r, σ_θ к изгибающим моментам

$$M_r = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_s(z)\,z\,dz, \quad M_\theta = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_s(z)\,z\,dz, \tag{1.4}$$

приходим, в силу (1.2), к условию

$$M_r \leqslant M_\theta = M_s, \tag{1.5}$$

где

$$M_s = -\int_{-h/2}^{z_0} \sigma_s(z)\,z\,dz + \int_{z_0}^{h/2} \sigma_s(z)\,z\,dz. \tag{1.6}$$

Уравнение равновесия элемента пластинки имеет вид

$$\frac{d}{dr}(r M_r) = M_\theta - \begin{cases} {}^1/_2\, qr^2 \text{ при } r \leqslant r_1, \\ {}^1/_2\, qr_1^2 \text{ при } r_1 \leqslant r \leqslant a. \end{cases} \tag{1.7}$$

Определяя при заданной зависимости $\sigma_s = \sigma_s(z)$ координату

поверхности разрыва z_0 из формулы (1.3), вычисляя величину M_s по формуле (1.6) и интегрируя уравнение (1.7) при $M_\theta = M_s$ и граничном условии $M_r(a) = 0$, окончательно находим

$$q = \frac{2M_s}{r_1^2}\left(1 - \frac{2}{3}\frac{r_1}{a}\right)^{-1}. \qquad (1.8)$$

Формулой (1.8) определяется и несущая способность неоднородной пластинки.

2. Исходя из зависимости $\sigma_s = \sigma_s(N)$, найденной из экспериментальных данных, выведем формулу для определения величины M_s. При этом целесообразно перейти согласно формуле (1.1) от координаты z к новому переменному N. Обозначив символом N_1 дозу облучения, проникающую через пластинку, символом N^* — дозу облучения в слое $z = z_0$, имеем

$$N_1 = N_0 e^{-\mu h}, \quad N^* = N_0 e^{-\mu(h/2 \mp z_0)}. \qquad (2.1)$$

В формуле (1.3) после замены переменных получаем

$$\int_{N_1}^{N^*} \frac{\sigma_s(N)}{N}\, dN = \int_{N^*}^{N_0} \frac{\sigma_s(N)}{N}\, dN. \qquad (2.2)$$

Из формулы (2.2) определим величину N^*; это можно сделать, например, графически (нужно найти такое значение величины N, при котором обе площади I_1 и I_2 на фиг. 1 равны).

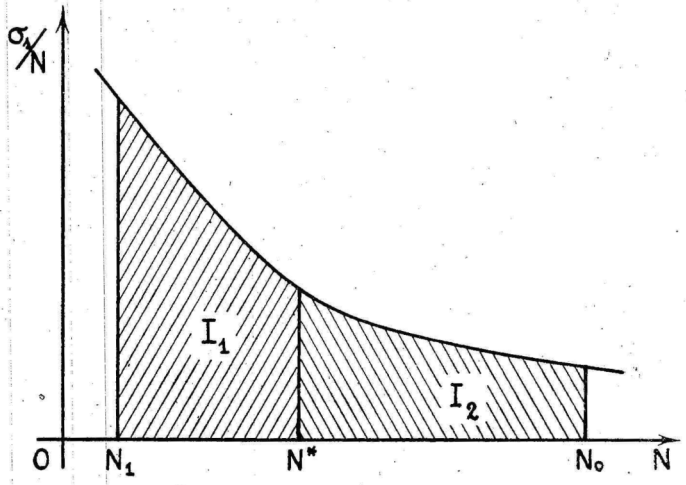


Рис. 1.

Формула (1.6) прибретает вид

$$M_s = \frac{1}{\mu^2}(I_3 - I_4), \qquad (2.3),$$

где

$$I_3 = \int_{N_1}^{N^*} \frac{\sigma_s(N)}{N} \ln \frac{N_0}{N}\, dN, \quad I_4 = \int_{N^*}^{N_0} \frac{\sigma_s(N)}{N} \ln \frac{N_0}{N}\, dN \qquad (2.4)$$

Интегралы I_3 и I_4 можно опять вычислить графическим путем, если построить график функции $\sigma_s(N)/N\, ln\, N_0/N$. Нетрудно видеть, что всегда $I_3 > I_4$.

Обозначим символами q° и σ_s° предельную нагрузку и предел текучести необлученной пластинки. Так как

$$q^\circ = \frac{\sigma_s^\circ h^2}{2r_1^2}\left(1 - \frac{2}{3}\frac{r_1}{a}\right)^{-1}$$

то на основании формул (1.8) и (2.3) имеем

$$\frac{q}{q^0} = \frac{4(I_3 - I_4)}{\sigma_s^\circ (\mu h)^2}. \qquad (2.4)$$

Для иллюстрации рассмотрим следующий численный пример. В качестве материала выбираем кремний — углеродистую сталь А-212В; зависимость предела текучести от суммарного нейтронного потока для этого материала дана на фиг. 3 в работе [1]. Для N_0 выбираем значение $N_0 = 10^{20}$ nvt. Допустим, что в пластинку проникает 1/10 часть всей дозы облучения, тогда $N_1 = 10^{19}$ nvt. По формулам (2. 1)—(2. 4) находим, что $\mu h = \ln\ 10$, $N^* = 3{,}5 \cdot 10^{19}$ nvt, $I_3 = 10{,}7 \cdot 10^3$ кг/см^2, $I_4 = 3{,}3 \cdot 10^3$ кг/см^2. Учитывая, что в случае необлученного материала $\sigma_s^\circ = 3300$ кг/см^2, из формулы (2.4) следует, что $q/q_0 = 1{,}71$. Таким образом, мы видим, что предельная нагрузка при материале, подвергнутом облучению, на 71% больше, чем при необлученном материале.

3. Решение поставленной задачи можно упростить, если аппроксимировать в промежутке $N_1 \leqslant N \leqslant N_0$ зависимость $\sigma_s = \sigma_s(N)$ эмпирической кривой. Рассмотрим, например, случай степенной зависимости, когда

$$\sigma_s(N) = \sigma_s^\circ + AN^\varkappa \qquad (3.1)$$

(здесь A и $\varkappa$ — константы, которые определяются из опытных данных).

Введем для краткости следующие обозначения:

$$\gamma = \frac{\sigma_s^\circ}{AN_0^\varkappa}, \quad \nu_1 = \left(\frac{N_1}{N_0}\right)^\varkappa, \quad \nu^* = \left(\frac{N^*}{N_0}\right)^\varkappa. \qquad (3.2)$$

Формула (2. 2), из которой определим величину v^*, теперь получит вид

$$v^* + \gamma \ln v^* = \frac{1}{2}(1 + v_1 + \gamma \ln v_1) \qquad (3.3)$$

Нетрудно видеть, что это уравнение имеет в интересующем нас промежутке $v_1 \leqslant v^* \leqslant 1$ лишь одно решение.

Вычисляя интегралы (2. 4) в случае зависимости (3. 1), приходим к следующему результату

$$\frac{q}{q_0} = \frac{2}{(\mu \varkappa h)^2}\{(\ln v_1)^2 - 2(\ln v^*)^2 - \\ - \frac{2}{\gamma}[1 + v_1(1 - \ln v_1) - 2v^*(1 - \ln v^*)]\}. \qquad (3.4)$$

Литература

1. Ильюшин А. А., Огибалов П. М., О прочности оболочек толстостенного цилиндра и полого шара, подвергнутых облучению. Инженерный сб., 1960, 28, 134—144.
2. Ленский В. С., Влияние радиоактивных облучений на механические свойства твердых тел. Инженерный сб. 1960, 28, 97—133.
3. Лепик Ю. Р., Несущая способность круглых жестко-пластических пластинок в случае неоднородного материала. Тр. Ин-та физ. и астрон. АН ЭстССР, 1961, **16**, 3—14.

Поступило
19 VII 1961

NEUTRONKIIRGUSELE ALLUTATUD ÜMMARGUSTE PLAATIDE KANDEVÕIMEST

Ü. Lepik

Teoreetilise mehhaanika kateeder

Resümee

Käesolev märkus on jätkuks autori varasemale tööle [3], milles anti valem mittehomogeensete jäik-plastiliste plaatide kandevõime arvutamiseks. Töös uuritakse ümmarguste plaatide kandevõimet juhul, kui plaadile mõjub ühtlaselt jaotatud ristkoormis ja neutronkiirgus, mis on risti plaadi pinnaga.

THE CARRYING CAPACITY OF PLATES SUBJECTED TO NEUTRON IRRADIATION

Ü. Lepik

Summary

The present note is an extension of the earlier paper [3], where the carrying capacity of rigid-plastic plates of nonhomogeneous material was found. The case of a circular plate under a uniformly distributed load and neutron irradiation, which is directed perpendiculary to a surface of the plate, is discussed.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАЩЕМЛЕННЫХ ПЛАСТИНОК ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Л. Роотс и Т. Таутс

Кафедра теоретической механики

1. Рассмотрим некоторую тонкую пластинку (S), весь контур которой жестко защемлен (рис. 1). Пусть к этой пластинке

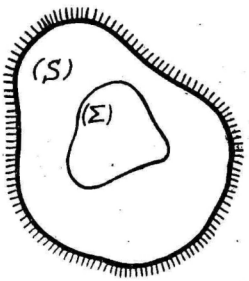


Рис. 1.

приложены силы, действующие в ее плоскости, вследствие чего в пластинке возникает некоторое определенное напряженное состояние.

Обозначим через p параметр, характеризующий приложенную к пластинке (S) нагрузку и возрастающий монотонно с увеличением нагрузки.

Если нагрузка возрастает до некоторого уровня, плоская форма равновесия пластинки становится неустойчивой и происходит выпучивание пластинки. Обозначим значение параметра p, соответствующее этой нагрузке, через $p^S_{\text{кр}}$ и назовем критическим значением параметра p для пластинки (S).

Рассмотрим кроме пластинки (S) еще некоторую часть ее (Σ), как самостоятельную, жестко защемленную пластинку. Используем и при ней для характеризования напряженного состояния параметр p. При одинаковых значениях p напряженное

состояние в (Σ), как части (S), так и в (Σ), как самостоятельной пластинки, одинаково.

Пусть критическое значение параметра p для пластинки (Σ) равно $p^{\Sigma}_{\text{кр}}$. Тогда справедливо неравенство

$$p^{S}_{\text{кр}} \leqslant p^{\Sigma}_{\text{кр}}. \qquad (1)$$

Действительно, если рассматривать (Σ) частью пластинки (S) и допускать, что увеличение параметра p до $p^{\Sigma}_{\text{кр}}$ не обусловливает потерю устойчивости пластинки (S) в целом, то при

$$p = p^{\Sigma}_{\text{кр}}$$

пластинка (S) непременно потеряет устойчивость, ибо выпучивается ее часть (Σ), находящаяся в условиях пластинки, защемленной по всему контуру. Следовательно, не может быть

$$p^{S}_{\text{кр}} > p^{\Sigma}_{\text{кр}},$$

откуда следует, что неравенство (1) окажется верным.

2. Справедливость неравенства (1) подтверждается результатами решения задач об устойчивости защемленных пластинок во многих частных случаях. Например:

1) равномерно сжатая круглая пластинка [5];

2) равномерно сжатый сектор кольца [2];

3) параллелограмная пластинка под однодименсиональным сжатием [1];

4) параллелограмная пластинка под сдвигающими усилиями на кромках [7];

5) равномерно сжатые трапециевидные пластинки [3].

Имеются, однако, и некоторые работы (о сжатом в одном направлении параллелограмма [6], о равномерно сжатом эллипсе [4], стр. 311, о сжатого в одном направлении прямоугольника [4], стр. 308), результаты которых полностью не согласуются с неравенством (1); в них можно найти некоторые слу-

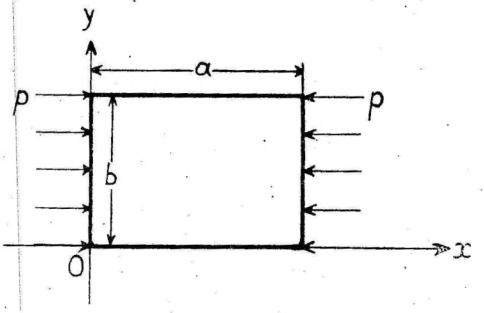


Рис. 2.

чаи, где критическая нагрузка увеличивается с увеличением размеров пластинки. Авторы настоящей статьи объясняют это несогласие неточностью метода, примененного авторами этих работ (во всех упомянутых случаях решения приближенные).

3. Особенно нужно остановиться на решении С. П. Тимошенко для равномерно сжатой в направлении одной пары сторон прямоугольной пластинки (рис. 2). В [4] С. П. Тимошенко приводит некоторые численные данные, относящие к этому случаю, полученные им при помощи энергетического метода. Не все из этих данных согласуются с неравенством (1). Но и примененный С. П. Тимошенко метод приближенный, причем в вычислениях взято выражение для w в одних случаях с тремя, в других только с двумя параметрами. Более точные вычисления, проведенные Т. Таутс, при которых взяли

$$w = \left(1 - \cos\frac{2\pi y}{b}\right) f(x)$$

и применяли метод Власова-Канторовича, дали для $p_{кр}$ результаты, монотонно убывающие с возрастанием отношения длин сторон прямоугольника (см. табл. 1 и рис. 3). Таким образом, и в этом случае неравенство (1) оказывается выполненным.

Таблица 1

$\frac{a}{b}$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,14	1,2	1,3
$\frac{b^2}{D} p_{кр}$	194,1	160,0	126,0	112,8	105,9	103,0	102,3	102,3	97,7	91,9
	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,86	1,9	2,0	2,1	2,2
	88,1	85,6	84,2	83,5	83,3	83,3	82,4	80,8	79,6	78,7

$\frac{a}{b}$	2,3	2,4	2,5	2,55	2,6	2 7	2,8	2,9	3,0	3,1
$\frac{b^2}{D} p_{кр}$	78 3	78,0	78,0	78,0	77,5	76,8	76,3	76,0	75,8	75,7
	3,2	3,22	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,89	3,9
	75,7	75,7	75,4	75,0	74,8	74,6	74,6	74,5	74,5	74,2

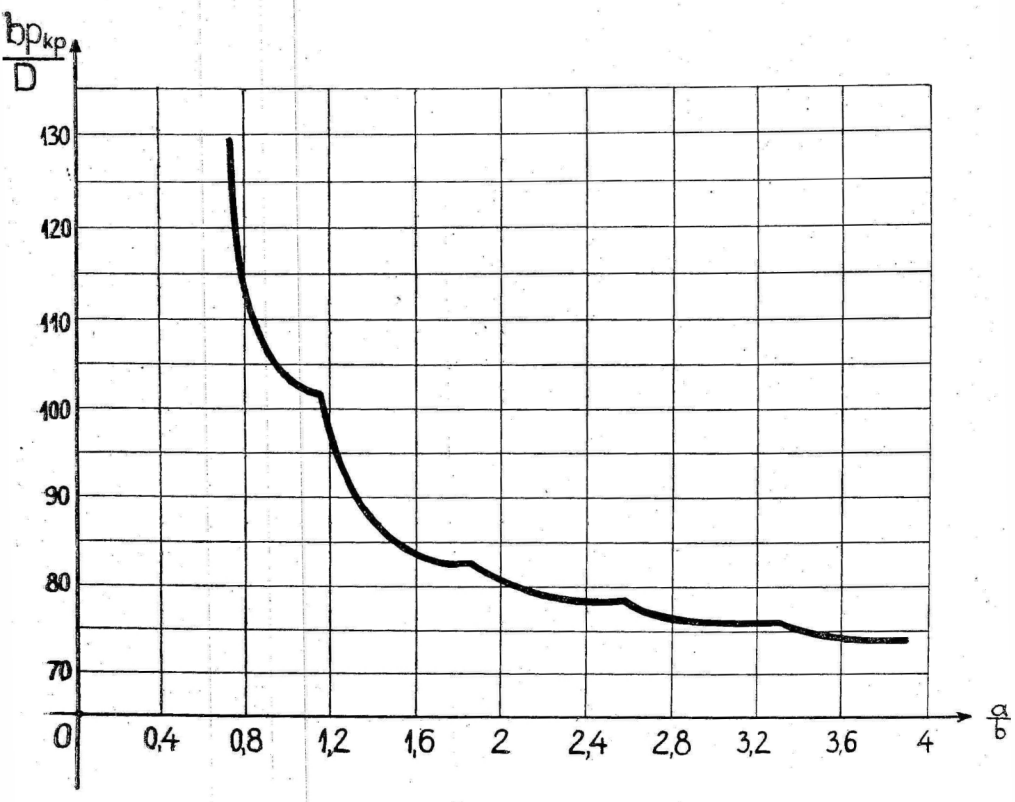


Рис. 3.

4. Используя неравенство (1), можно в некоторых случаях найти приближенные значения критических нагрузок защемленных пластинок различной формы.

Рассмотрим, например, защемленную трапециевидную пластинку, высота которой равна b, а длины оснований a и λa (рис. 4). Пусть эта пластинка сжата равномерно распределенными силами на непараллельных кромках. По (1) критическое

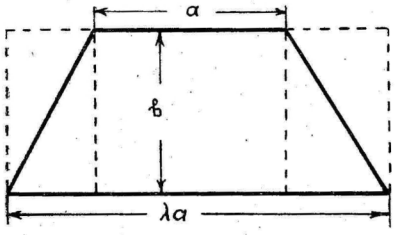


Рис. 4.

напряжение сжатия для этой трапеции $\sigma_{кр}$ удовлетворяет неравенствам

$$\sigma^{о}_{кр} \leqslant \sigma_{кр} \leqslant \sigma^{в}_{кр}, \qquad (2)$$

где $\sigma^{о}_{кр}$ и $\sigma^{в}_{кр}$, соответственно, критические напряжения сжатия для очерченной и вписанной прямоугольников (на рис. 4 вычерченных пунктиром).

Для случая $a = 2b$ авторами настоящей статьи составлена таблица (табл. 2), в которой приведены для некоторых значений λ $\sigma^{о}_{кр}$, $\sigma^{в}_{кр}$ и их арифметическое среднее

$$\bar{\sigma}_{кр} = \frac{1}{2}(\sigma^{о}_{кр} + \sigma^{в}_{кр}).$$

Таблица 2

λ	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
$\frac{b^2}{D}\sigma^{в}_{кр}$	80,8	80,8	80,8	80,8	80,8	80,8	80,8	80,8	80,8	80,8
$\frac{b^2}{D}\sigma^{о}_{кр}$	80,8	78,7	78,0	77,5	76,3	75,8	75,7	75,0	74,6	74,5
$\frac{b^2}{D}\bar{\sigma}_{кр}$	80,8	79,7	79,4	79,1	78,5	78,5	78,2	77,9	77,7	77,6

Как видно из этой таблицы, при $1 \leqslant \lambda \leqslant 1,9$ различие между $\sigma^{о}_{кр}$ и $\sigma^{в}_{кр}$ не превышает 9% от $\sigma^{о}_{кр}$. Если взять для критического напряжения для трапеции среднее арифметическое $\bar{\sigma}_{кр}$, то, следовательно, погрешность этого значения во всяком случае не более 5% (считая данные таблицы 1 точными). Ясно, что в таком случае не имеет смысла путем сложных вычислений изыскивать более точное значение $\sigma_{кр}$.

Если $\frac{a}{b} > 2$, то различие между $\sigma^{о}_{кр}$ и $\sigma^{в}_{рк}$ уменьшается (при неизменном λ). Следовательно, и в этих случаях описанный метод нахождения приближенного критического напряжения применим, притом еще более успешно.

Литература

1. Лоповок Б. Н., Трапезин И. И., Устойчивость пластины, очерченной по параллелограмму, защемленной по контуру, при напряжениях, больших предела пропорциональности. Тр. Моск. авиац. ин-та, 1956, **69**, 39—50.

2. Роотс Л. М., Об устойчивости пластинки в форме сектора кольца при напряжениях, больших предела пропорциональности. Тр. Ин-та физ. и астрон. АН ЭстССР, 1961, **13**, 12—19.
3. Роотс Л. М., Об устойчивости пластинок различной формы, в частности треугольных и трапециевидных. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 351—365.
4. Тимошенко С. П., Пластинки и оболочки. Москва—Ленинград, 1948.
5. Bryan, C. H., On the Stability of a Plane Plate under Thurst in its own Plane, with Applications to the "Buckling" of the Sides of a Ship. Proc. London Math. Soc., 1891, **22**, 54—67.
6. Wittrick, W. H., Buckling of Oblique Plates with Clamped Edges under Uniform Compression. Aeron. Quart., 1953, **4**, 151—163.
7. Wittrick, W. H., Buckling of Oblique Plates with Clamped Edges under Uniform Shear. Aeron. Quart., 1954, **5**, 39—51.

Поступило
10 I 1962

MEELEVALDSE KUJUGA JÄIGALT KINNITATUD PLAATIDE STABIILSUSEST

L. Roots ja T. Tauts
Teoreetilise mehhaanika kateeder

Resümee

Artiklis tuletatakse võrratus 1, millest järeldub, et sama pingeseisundi korral ei saa jäigalt kinnitatud plaadi kriitiline koormus olla suurem, kui kriitiline koormus tema mis tahes osa jaoks, mis on samuti kontuuril jäigalt kinnitatud. Tuuakse näiteid, kuidas seda võrratust kasutada jäigalt kinnitatud trapetsikujulise plaadi kriitilise koormuse ligikaudseks määramiseks.

ON THE STABILITY OF CLAMPED PLATES OF ANY SHAPE

L. Roots and T. Tauts

Summary

In this paper an inequality is derived which shows that the critical load of a clamped plate is the same stress state cannot be bigger than the critical load of any part of this plate. This inequality in some cases enables us to determine approximately the critical load of the clamped plate. As an example the critical load of the plate, tapered in planform is determined.

SV AÜN Tartu Kultuurihoone

СОДЕРЖАНИЕ — SISUKORD

Е. Габович. Об эндоморфизмах полугрупп 3
J. Gabovitš. Poolrühmade endomorfismidest. *Resümee* 18
J. Gabovitsch. Die Endomorphismen der Halbgruppen. *Zusammenfassung* 18

Е. Габович. Об архимедовски упорядоченных Ω-группах 19
J. Gabovitš. Arhimeediliselt järjestatud Ω-rühmadest. *Resümee* . . . 22
J. Gabovitch. On the Archimedean ordered Ω-groups. *Summary* . . . 22

М. Рахула. Об одном аспекте неголономной геометрии 23
M. Rahula. Ühest mitteholonoomse geomeetria aspektist. *Resümee* . . 36
M. Rahula. On an aspect of nonholonomic geometry. *Summary* . . . 36

М. Рахула. Последовательность деривaций на многообразии 37
M. Rahula. Dervitatsioonide jada muutkonnal. *Resümee* 60
M. Rabula. A sequence of dervitations on the manifold. *Summary* . . 61

Р. Муллари. О максимально симметричных поверхностях многомерного эвклидова пространства 62
R. Mullari. Mitmemõõtmelise eukleidilise ruumi maksimaalselt sümmeetrilistest pindadest. *Resümee* 72
R. Mullari. Über die maximal symmetrischen Flächen im n-dimensionalen euklidischen Raum. *Zusammenfassung* 73

Ю. Лумисте. К теории двумерных минимальных поверхностей III. Основная теорема и изгибание 74
Ü. Lumiste. Kahemõõtmeliste minimaalpindade teooriast. III. Põhiteoreem ja painutamine. *Resümee* 89
Ü. Lumiste. Zur Theorie der zweidimensionalen Minimalflächen. III. Grundsatz und Verbiegung. *Zusammenfassung* 89

Ю. Лумисте. К теории двумерных минимальных поверхностей IV. Поверхности с окружностями кривизны 90
Ü. Lumiste. Kahemõõtmeliste minimaalpindade teooriast IV. Kõverusringjoontega pinnad. *Resümee* 102
Ü. Lumiste. Zur Theorie der zweidimensionalen Minimalflächen IV. Flächen mit Krümmungskreisen. *Zusammenfassung* 102

Л. Туулметс. Минимальные демиконгруэнции в эвклидовом пространстве R_4 103
L. Tuulmets. Minimaaldemikongruentsid eukleidilises ruumis R_4. *Resümee* 117
L. Tuulmets. Minimal demi-congruences in the Euclidean space R_4. *Summary* 118

Э. Реймерс. Новые общие методы суммирования 119
E. Reimers. Uued üldised summeerimismenetlused. *Resümee* 153
E. Reimers. New general methods of summability. *Summary* 154

Г. Кангро и С. Барон. Множители суммируемости и абсолютной суммируемости для двойных рядов, абсолютно суммируемых методом взвешенных средних Рисса 155

G. Kangro ja S. Baron. Summeeruvus- ja absoluutsed summeeruvustegurid Rieszi kaalutud keskmiste menetlusega absoluutselt summeeruvate kahekordsete ridade jaoks. *Resümee* 169
G. Kangro und S. Baron. Summierbarkeits- und absolute Summierbarkeitsfaktoren für Doppelreihen, die durch das Verfahren bewichteter Mittel von Riesz absolut summierbar sind. *Zusammenfassung* . . 169
Ф. Вихманн. Распространение метода Пейеримхоффа на случай обобщенных множителей суммируемости 170
F. Vichmann. Peyerimhoffi meetodi ülekandmine üldistatud summeeruvustegureile. *Resümee* 192
F. Vichmann. Extension of the Peyerimhoff method to generalized summability factors. *Summary* 192
Ф. Вихманн. Теоремы типа Бора-Харди для двойных рядов 194
F. Vichmann. Bohr-Hardy tüüpi teoreemid kahekordsete ridade korral. *Resümee* 198
F. Vichmann. Theorems of type Bohr-Hardy for double series. *Summary* 198
Ф. Вихманн. Обобщенные множители суммируемости для метода взвешенных средних Рисса 199
F. Vichmann. Üldistatud summeeruvustegurid Rieszi kaalutud keskmiste menetluse korral. *Resümee* 223
F. Vichmann. Generalized summability factors for the method of Riesz. *Summary* 223
С. Барон. Множители суммируемости для двойных рядов, суммируемых или ограниченных методом взвешенных средних Рисса . . . 225
S. Baron. Summeeruvustegurid Rieszi kaalutud keskmiste menetlusega summeeruvate või tõkestatud kahekordsete ridade korral. *Resümee* . 240
S. Baron. Summability factors for double series summable or bounded by the Riesz mean. *Summary* 240
Х. Эспенберг. О множителях суммируемости для метода Эйлера-Кноппа 241
H. Espenberg. Summeeruvusteguritest Euler-Knoppi menetluse puhul. *Resümee* 248
H. Espenberg. Über Summierbarkeitsfaktoren beim Euler-Knoppschen Verfahren. *Zusammenfassung* 249
Х. Эспенберг. О множителях суммируемости для метода Хаусдорфа 250
H. Espenberg. Summeeruvusteguritest Hausdorffi menetluse puhul. *Resümee* 252
H. Espenberg. Über Summierbarkeitsfaktoren bei Hausdorffschen Verfahren. *Zusammenfassung* 252
Х. Тюрнпу. Некоторые типы множителей суммируемости для метода Рисса второго порядка 253
H. Türnpu. Mõned summeeruvustegurite tüübid teist järku Rieszi menetluse jaoks. *Resümee* 262
H. Türnpu. Einige Typen von Summierbarkeitsfaktoren für das Rieszsche Verfahren zweiter Ordnung. *Zusammenfassung* 263
Т. Сырмус. О некоторых теоремах типа Мерсера для стесненной сходимости 264
T. Sõrmus. Mõningatest Merceri tüüpi teoreemidest kitsendatud koonduvuse korral. *Resümee* 271
T. Sõrmus. Über einige Verallgemeinerungen des Satzes von Mercer für restringierte Konvergenz. *Zusammenfassung* 272
Т. Сырмус. Теоремы типа Мерсера для стесненной и обыкновенной сходимости 274
T. Sõrmus. Merceri tüüpi teoreemid kitsendatud ja hariliku koonduvuse korral. *Resümee* 281
T. Sõrmus. Mercersche Sätze für restringierte und Pringscheimsche Konvergenz. *Zusammenfassung* 281

С. Гейсберг. Включение ограниченных полей суммирования 283
S. Geisberg. Tõkestatud summeerimisväljade sisalduvusest. *Resümee* . 296
S. Geisberg. About the consistency of bounded fields of summability. *Summary* 296
С. Гейсберг. Аналоги теорем Мазура-Орлича для абсолютного суммирования 297
S. Geisberg. Mazur-Orliczi teoreemide analoogid absoluutse summeeruvuse korral. *Resümee* 307
S. Geisberg. Analogies of the theorems of Mazur and Orlicz for absolute summability. *Summary* 307
Э. Тийт. Об области сумм в линейных нормированных пространствах 308
E. Tiit. Summade piirkondadest lineaarsetes normeeritud ruumides. *Resümee* 320
E. Tiit. Rearrangement set on linear normed space. *Summary* 321
Э. Тийт. *A*-области сумм одного типа суммируемых рядов 323
E. Tiit. Teatud tüüpi summeruvate ridade *A*-summade piirkonnad. *Resümee* 336
E. Tiit. *A*-rearrangement sets of one type of summable series. *Summary* 336
Э. Тийт. Некоторые новые *A*-области сумм суммируемых рядов . . . 338
E. Tiit. Mõned uued summeeruvate ridade *A*-summade piirkonnad. *Resümee* 356
E. Tiit. Some new *A*-rearrangement sets of summable series. *Summary* 356
С. Барон. Об обобщениях одной теоремы Э. Ландау 357
S. Baron. E. Landau ühe teoreemi üldistustest. *Resümee* 364
S. Baron. Über die Verallgemeinerungen eines Satzes von E. Landau. *Zusammenfassung* 364
Л. Кивистик. Об одном классе итерационных процессов в гильбертовом пространстве 365
L. Kivistik. Ühest iteratsioonimeetodite klassist Hilberti ruumis. *Resümee* 380
L. Kivistik. On a class of iterative methods in Hilbert space. *Summary* 381
Л. Кивистик и А. Устаал. Некоторые теоремы сходимости для итерационных процессов с минимальными невязками 382
L. Kivistik ja A. Ustaal. Mõned koonduvusteoreemid minimaalse jäägi meetodi jaoks. *Resümee* 393
L. Kivistik and A. Ustaal. Some convergence theorems for the iterative methods with minimal residuals. *Summary* 393
Г. Вайникко. Оценки погрешности метода Галеркина для линейного дифференциального уравнения 394
G. Vainikko. Galjorkini meetodi vea hinnangud lineaarse diferentsiaalvõrrandi korral. *Resümee* 416
G. Vainikko. Fehlerabschätzungen zum Galerkinschen Verfahren für lineare Differentialgleichungen. *Zusammenfassung* 416
Г. Вайникко. Оценки погрешности метода Ритца для линейного однородного уравнения 417
G. Vainikko. Ritzi meetodi vea hinnangud lineaarse homogeense võrrandi korral. *Resümee* 427
G. Vainikko. Fehlerabschätzungen zum Ritzschen Verfahren für lineare homogene Gleichungen. *Zusammenfassung* 427
М. Левин. Некоторые формулы для приближенного вычисления двойных интегралов 428
M. Levin. Mõningad valemid kahekordsete integraalide ligikaudseks arvutamiseks. *Resümee* 436
M. Levin. Some formulas for approximate calculation of double integrals. *Summary* 436

М. Левин. Некоторые оценки кубатурных формул для аналитических функций 437
M. Levin. Mõned hinnangud analüütiliste funktsioonide kubatuurvalemite jaoks. *Resümee* 441
M. Levin. Some estimations of the quadrature in two dimensions for the analytical functions. *Summary* 441
М. Левин. Обобщение квадратурной формулы Гаусса для функций многих переменных 442
M. Levin. Gaussi valemi üldistus mitme muutuja funktsioonide jaoks. *Resümee* 448
M. Levin. The generalization of Gauss formula for function of several variables. *Summary* 448
М. Левин. Квадратурные формулы для одного класса функций . . . 449
M. Levin. Kvadratuurvalemid ühe funktsioonide klassi jaoks. *Resümee* 452
M. Levin. Quadrature formulae for one class of functions. *Summary* 452
А. Драгилев. Периодические решения уравнения типа Рэлея 453
A. Dragilev. Rayleigh-tüüpi võrrandi perioodiline lahend. *Resümee* . 459
A. Dragilev. Periodische Lösungen der Gleichung des Rayleighschen Typus. *Zusammenfassung* 459
Э. Йыги. К расчету упруго-пластических пологих арок 460
E. Jõgi. Lamedate elastislis-plastiliste kõverate varraste arvutamisest. *Resümee* 468
E. Jõgi. Zur Berechnung eines schwach gekrümmten elastisch-plastischen Stabes. *Zusammenfassung* 468
Э. Йыги. О прощелкивании пологих арок 469
E. Jõgi. Lamedate kõverjooneliste varraste stabiilsusest. *Resümee* . . . 481
E. Jõgi. Zum Stabilitätsproblem eines schwach gekrümmten Stabes. *Zusammenfassung* 481
Ю. Лепик. О несущей способности круглых пластинок, подвергнутых нейтронному облучению 482
Ü. Lepik. Neutronkiirgusele allutatud ümmarguste plaatide kandevõimest. *Resümee* 486
Ü. Lepik. The carrying capacity of plates subjected to neutron irradiation. *Summary* 486
Л. Роотс и Т. Таутс. Об устойчивости защемленных пластинок произвольной формы 487
L. Roots ja T. Tauts. Meelevaldse kujuga jäigalt kinnitatud plaatide stabiilsusest. *Resümee* 492
L. Roots and T. Tauts. On the stability of clamped plates of any shape. *Summary* 492

Тартуский государственный университет
Тарту, ул. Юликооли, 18

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ III

На русском, эстонском, немецком и английском языках

Отв. редактор С. Барон

Корректоры Л. Брафманн, Э. Ууспылд, К. Канн, О. Мутт

Сдано в набор 10/V 1962. Подписано к печати 20/XII 1962. Бумага 60 × 90, 1/16. Печатных листов 31. Уч.-издательских листов 37. Тираж 500 экз. МВ-08795. Заказ № 4462.

Типография им. Ханса Хейдеманна. ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 17/19. II.

Цена 2 р. 59 к.