Oskar Pärli

H Treffneri gümnaasiumi õpetaja

RUUMI ALGÕPETUS

II anne

(Ühes trigonomeetria kursusega)

NOOR-EESTI KIRJASTUS TARTUS

OSKAR PÄRLI
H. TREFFNERI GÜMNAASIUMI ÕPETAJA

RUUMI ALGÕPETUS

II ANNE

(Ühes trigonomeetria kursusega.)

KOLMAS TRÜKK

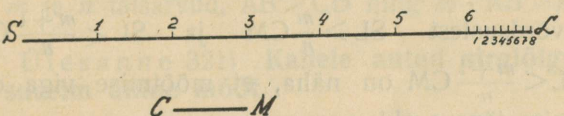
NOOR-EESTI KIRJASTUS TARTUS

Trükitud G. Roht'i trükikojas
Tartus, 1931. a.

VI-es peatükk: Sirglõikude mõõtmine ja suhe.

119. Sirglõikude ligikaudne mõõtmine. Sirglõigu mõõtmiseks tuleb, nagu me nägime § 12, kõige esiti valida mõõtühik, millega mõõta tahetakse, ja siis tema mahutada mõõdetava sirglõigu peale nii mitu korda kui see võimalik. Asetub mõõtühik mõõdetava sirglõigu peale täpsalt, siis ilmub mõõtmise tulemusena, mõõtarvuna, täisarv. Ei asetu mõõtühik ise, vaid tema mitmendik asetub mõõdetava sirglõigu peale täpsalt, siis ilmub mõõtmise tulemusena murdarv.

Kui meil milgi põhjusel korda ei lähe leida ühiku niisugust jagu, mis mõõdetava sirglõigu peale täpsalt mahub, või kui me ei tahagi niisugust jagu otsida, siis peame leppima ligikaudse mõõtmisega, nagu me seda teeme igapäevases elus.



156. joonis.

Kui me tahame SL-i mõõta CM-iga (sentimeetriga) peenelt kuni $\frac{1}{10}$-kuni, siis jaotame CM 10-ks võrdseks jaoks ja asetame ühe niisuguse jao SL-i peale nii mitu korda kui see võimalik. Mahtugu see $\frac{1}{10}$ CM-st SL peale 68 korda ja jäägu üle tükike, mis vähem on kui $\frac{1}{10}$ CM-st.

Siis on . . . . **SL** $>$ $\frac{68}{10}$ **CM** ja **SL** $<$ $\frac{69}{10}$ **CM.**

Me võtame nüüd SL väärtuseks $\frac{68}{10}$ CM või $\frac{69}{10}$ CM ja kirjutame: . . . . **SL** $\approx$ 6,8 **CM** või **SL** $\approx$ 6,9 **CM.**

[Märk $\approx$ loetakse: „on ligikaudu võrdne“.]

Selle juures teeme v e a; see viga on vähem kui $\frac{1}{10}$ CM ja me kõneleme, et SL on mõõdetud peenelt ehk täpsalt kuni $\frac{1}{10}$-ni CM-st; 6,8 CM on LS ligikaudne väärtus p u u d u s e g a ja 6,9 CM on SL ligikaudne väärtus l i i a g a.

Kui me tahame SL mõõta CM-ga peenelt ehk täpsalt kuni $\frac{1}{100}$-ni, siis jaotame CM 100-ks võrdseks jaoks ja asetame

ühe niisuguse jao SL peale nii mitu korda kui võimalik. Mahtugu ta 683 korda jäägiga, mis on vähem kui $\frac{1}{100}$ CM.
Siis on . . . . SL $> \frac{683}{100}$ MC ja SL $< \frac{684}{100}$ CM.
ja me kirjutame . . . . SL $\approx$ 6,83 CM või SL $\approx$ 6,84 CM.
Selle juures tehtud viga on vähem kui $\frac{1}{100}$ CM ja mõõtmise täpsus on $\frac{1}{100}$ CM.

Üldse, kui me tahame SL mõõta CM-ga peenelt kuni $\frac{1}{n}$-dikuni, siis jaotame CM n võrdseks jaoks ja asetame ühe niisuguse jao SL peale nii mitu korda kui võimalik. Mahub $\frac{1}{n}$CM mõõdetava sirglõigu SL peale m korda jäägiga, mis väiksem on kui $\frac{1}{n}$ CM, siis ütleme ja kirjutame:

$$SL \approx \frac{m}{n}\,CM \text{ või } SL \approx \frac{m+1}{n}\,CM.$$

$\frac{m}{n}$ CM on SL ligikaudne väärtus puudusega ja $\frac{m+1}{n}$ CM on SL ligikaudne väärtus liiaga, sest SL $> \frac{m}{n}$ CM ja SL $< \frac{m+1}{n}$ CM. Nende ligikaudsete väärtuste vahe $\frac{1}{n}$ CM on mõõtmise täpsus ehk peensus ja vahe antud sirglõigu ja tema ligikaudse väärtuse vahel on mõõtmise viga.

Ebavõrdsustest SL $> \frac{m}{n}$ CM ja SL $< \frac{m+1}{n}$ CM ehk $\frac{m}{n}$ CM $<$ SL $< \frac{m+1}{n}$ CM on näha, et mõõtmise viga on vähem kui mõõtmise täpsus ehk peensus.

Mida suurem on arv n, seda vähem on täpsust näitaja murd $\frac{1}{n}$, kuna viga veel vähem on. Et me arvu n võime teha nii suureks kui me tahame, siis võime ka vea teha nii väikseks kui me tahame. See tähendab, et ligikaudne mõõtmine on mõeldav nii peen kui me seda iganes soovime.

Mõõtarvuna esineb niisugusel mõõtmisel ligikaudne arv.

Mõõdetuks loetavat sirglõiku tähistatakse kas ühe väikese tähega, või kahe suure sirglõigu otsapunktide juures seisva tähega, mille üle on tõmmatud kriips, näiteks: sirglõik a, sirglõik x, sirglõik $\overline{AB}$, sirglõik $\overline{OX}$; niisugune tähistus on sirglõigule ühtlasi mõõtarvuks kui ka nimetuseks.

Märkus I. Kõik meie mõõtmised on ligikaudsed; täppis mõõtmine on vaid mõeldav. Täpsa mõõtmise läbiviimist takistab meie meelte ja mõõtmisriistade ebatäielikkus.

Märkus II. Mis öeldud on sirglõikude mõõtmisest, maksab ka nurkade, kaarte ja teiste suuruste mõõtmise kohta.

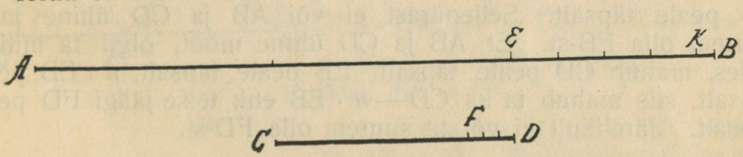
120. Kahe sirglõigu ühine mõõt. Kui me tahame sirglõiku mõõta täpsalt, siis peame leidma mõõtühiku niisuguse mitmendiku, mis mõõdetava sirglõigu peale mahub täpsalt, s. t. ilma jäägita ja puudutulekuta. Niisugust mõõtühiku mitmendikku nim. mõõtühiku ja sirglõigu ühiseks mõõduks.

Kahe sirglõigu ühiseks mõõduks nim. iga kolmandat sirglõiku, mis kummagi sirglõigu peale mahub ilma jäägita ja puudutulekuta.

Arusaadav on, et kui kahel sirglõigul on olemas üks ühine mõõt, siis on neil ka lõpmata palju ühiseid mõõte, sest ühe ühise mõõdu mitmendik on jälle nende sirglõikude ühine mõõt. Seepärast ei saa kõnelda kahe sirglõigu vähimast ühisest mõõdust, kuna suurim ühine mõõt küll olemas on, sest ühine mõõt ei või suurem olla kui vähem sirglõik.

Samuti arusaadav on, et kui mingi sirglõik EF mahub täpsalt sirglõikude AB ja CD peale, siis mahub ta täpsalt iga järgmise sirglõigu peale: 1) $AB + CD$; 2) $AB - CD$; 3) $m \cdot AB$; 4) $n \cdot CD$; 5) $m \cdot AB + n \cdot CD$; 6) $m \cdot AB - n \cdot CD$; selle juures on m ja n täisarvud, $AB > CD$ ning $m \cdot AB > n \cdot CD$.

121. Ülesanne 321) **Kahele antud sirglõigule AB ja CD leida suurim ühine mõõt.**



157. joonis.

Lahendus. Asetame vähema sirglõigu CD suurema sirglõigu AB peale nii mitu korda kui võimalik. Mahtugu CD sirglõigu AB peale m korda ja olgu jääk EB.

Siis on . . . . $AB = m \cdot CD + EB$. (1)

Jäägi EB asetame vähema sirglõigu CD peale nii mitu korda kui võimalik. Mahtugu EB vähema sirglõigu CD peale n korda ja olgu jääk FD. Siis on . . $CD = n \cdot EB + FD$. (2)

Teise jäägi FD asetame esimese jäägi EB peale nii mitu korda kui võimalik. Mahtugu FD EB peale p korda ja olgu jääk KB. Siis on . . . . $EB = p \cdot FD + KB$. (3)

Kolmanda jäägi KB asetame teise jäägi peale nii mitu korda kui võimalik. Niiviisi toimime edasi niikaua, kuni me jäägi saame, mis eelmise jäägi peale mahub ilma uue jäägita. Siis on see viimane jääk antud sirglõikude AB ja CD suurim ühine mõõt. Mahtugu meie näites kolmas jääk KB teise jäägi FD peale k korda ilma uue jäägita nii, et $FD = k \cdot KB$. (4) Siis tõestame meie, et KB on AB ja CD suurim ühine mõõt.

T õ e s t u s: Näitame esiteks, et KB on AB ja CD ühine mõõt.

Et KB mahub täpsalt iseenese peale ja FD peale, siis mahub ta ka täpsalt p korda võetud $FD + KB$ peale; see tähendab: KB mahub EB peale täpsalt.

Et KB mahub täpsalt FD peale ja täpsalt EB peale, siis mahub ta ka täpsalt n korda võetud $ED + FD$ peale; see tähendab: KB mahub CD peale täpsalt.

Et KB mahub EB peale täpsalt ja CD peale täpsalt, siis mahub ta ka m korda võetud $CD + EB$ peale täpsalt; see tähendab: KB mahub täpsalt AB peale.

Niiviisi mahub viimane jääk KB täpsalt kummagi antud sirglõigu AB ja CD peale ja on sellega nende ühine mõõt.

Teiseks näitame, et KB on kõigist ühistest mõõtudest suurim.

$$AB - m \cdot CD = EB;$$
$$CD - n \cdot EB = FD;$$
$$EB - p \cdot FD = KB.$$

Sirglõikude AB ja CD ühine mõõt, olgu ta milline tahes, mahub AB peale täpsalt, CD peale täpsalt, $m \cdot CD$ peale täpsalt; järelikult mahub ta ka $AB - m \cdot CD$ ehk esimese jäägi EB peale täpsalt. Sellepärast ei või AB ja CD ühine mõõt suurem olla EB-st. Et AB ja CD ühine mõõt, olgu ta milline tahes, mahub CD peale täpsalt, EB peale täpsalt, $n \cdot EB$ peale täpsalt, siis mahub ta ka $CD - n \cdot EB$ ehk teise jäägi FD peale täpsalt. Järelikult ei või ta suurem olla FD-st.

Et AB ja CD ühine mõõt, olgu ta milline tahes, mahub EB peale täpsalt, FD peale täpsalt, $p \cdot FD$ peale täpsalt, siis mahub ta ka $EB - p \cdot FD$ ehk kolmanda jäägi KB peale täpsalt ning järelikult ei saa ta suurem olla KB-st.

Et aga KB on AB ja CD ühine mõõt ja temast suuremat ühist mõõtu olla ei saa, siis ongi KB sirglõikude AB ja CD suurim ühine mõõt. M. o. t. t.

Siin kirjeldatud suurima ühise mõõdu leidmise viisi nim. *aheljagamiseks*.

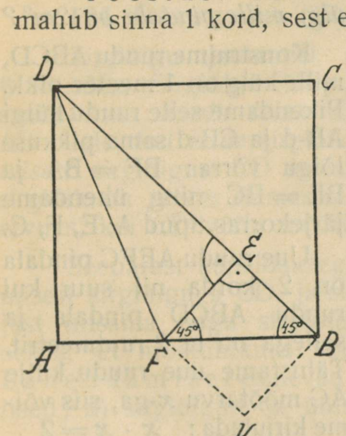
Kui aheljagamise abil ei ole võimalik leida kahele sirglõigule ühist mõõtu, siis neil ei olegi ühist mõõtu.

Tõepoolest, kui neil oleks ühine mõõt, siis peaks see täpsalt mahtuma esimese, teise ja iga järgmise jäägi peale. Järel., kui nüüd kahel sirglõigul ei leidu niisugust jääki, mis eelmise sisse mahuks täpsalt, siis ei ole neil ka ühist mõõtu.

Ülesanne 322) Trapetsi alused on 54 mm ja 36 mm pikad, küljed 15 mm ja 21 mm. Kui pikk lõik on suurimaks ühiseks mõõduks alustele? külgedele? kõigile neljale küljele?

122. Ühismõõduta sirglõigud. Kui kahel sirglõigul on olemas ühine mõõt, siis nim. neid ühismõõdulisteks; kui neil ühist mõõtu ei ole, siis nim. neid ühismõõduta sirglõikudeks. Ühismõõduta sirglõikude olemasolu tõestab järgmine **lause: Ruudu diagonaalil ja küljel ei ole ühist mõõtu.**

Tõestus: Asetame külje DA diagonaali DB peale; ta mahub sinna 1 kord, sest et $1\,DA < DB$ ja $DA + AB = 2\,DA > DB$.



158. joonis.

Jääk on EB, nii et $DB = 1 \cdot DA + EB$.

Et seda jääki EB-d asetada DA ehk AB peale, selleks tõmbame punktist E ristjoone DB-le kuni lõikumiseni AB-ga punktis F: $EF \perp DB$.

$\triangle$-rgas BEF on: $\hat{E} = 90°$, $\hat{B} = 45°$; järel. $\hat{F} = 45° = \hat{B}$. Järel. $EF = EB$.

Vaatleme $\triangle DEF$ ja $\triangle DAF$:
$DE = DA$, $DF = DF$ ja $\hat{E} = \hat{A} = 90°$.

Järel. $\triangle DEF \equiv \triangle DAF$; järel. $EF = AF$.

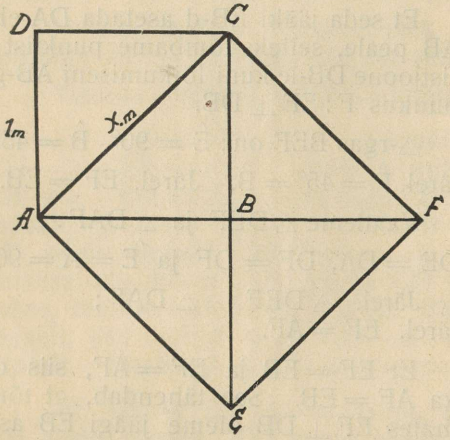
Et $EF = EB$ ja $EF = AF$, siis on ka $AF = EB$. See tähendab, et tõmmates $EF \perp DB$ oleme jäägi EB asetanud külje AB peale 1 kord.

Edasi peaksime EB asetama FB peale. Aga $\triangle FEB$ on pool ruudust BEFK, mille küljeks on EB ja diagonaaliks FB, ja nii tuleks jällegi ruudu külg asetada diagonaali peale; niisugusest asetamisest teame aga juba, et ta sünnib jäägiga ja taandub endiseks ülesandeks. Niiviisi võib seda asetamist mõttes jätkata kuni lõpmatuseni, aga ikkagi ei saa meie niisugust jääki, mis eelmise jäägi sisse mahuks ilma uue jäägita. See tähendab, et ruudu diagonaalil ja küljel ei ole ühist mõõtu. M. o. t. t.

123. Irratsionaalne arv ja ratsionaalne arv. Mõõtühikuga ühismõõduta sirglõigul on lõpmata palju ligikaudsete väärtuste paare, igaüks erilise täpsusega. Need sirglõigud on seepärast muutuvad suurused, kuna antud sirglõik on jääv (konstant) suurus. Et antud sirglõigu ja tema ligikaudse väärtuse vahe võib tehtud saada nii väikseks kui iganes soovitav, siis on vahe lõpmata vähenev suurus ja antud sirglõik on oma ligikaudsete väärtuste piir.

Igale sirglõigu ligikaudsele väärtusele vastab sirglõigu ligikaudne arvuline väärtus, mis seda sirglõigu ligikaudset väärtust täpsalt mõõdab ja tema mõõtarvuks on. Seepärast tuleb meil eeldada, et on olemas ka arv, mis täpsalt mõõdab mõõtühikuga ühismõõduta sirglõiku ja on selle sirglõigu täpsaks mõõtarvuks. See arv ei või aga olla ei täisarv ega murd, sest neid arve esindajad sirglõigud on mõõtühikuga ühismõõdulised. Seepärast peame arvu mõistet laiendama ja uut liiki arvud sisse tooma.

N ä i d e: *Kui pikk on ruudu külg, mille pindala on* $2m^2$?



159. joonis.

Konstruime ruudu ABCD, mille külg on 1 meeter pikk. Pikendame selle ruudu külgi AB-d ja CB-d sama pikkuse lõigu võrra: BF = BA ja BE = BC ning ühendame järjekorras tipud A, E, F, C.

Uue ruudu AEFC pindala on 2 korda nii suur kui ruudu ABCD pindala ja sellega on ta 2 ruutmeetrit. Tähistame uue ruudu külje AC mõõtarvu x-ga, siis võime kirjutada: $x \cdot x = 2$
ehk $x^2 = 2$.

Kui me hakkame otsima seda arvu x, siis me teda täisarvude hulgast ei leia, sest $1 \cdot 1 < 2$ ja $2 \cdot 2 > 2$.

Ka murdude hulgas ei leia meie teda mitte, sest iga murd iseenesega korrutatult annab murru.

Selle arvu x ligikaudseid väärtusi võime leida katse teel. Nii leiame: $1{,}5 > x$ ja $1{,}4 < x$, sest et $1{,}5^2 > 2$ ja $1{,}4^2 < 2$

$1{,}42 > x$ ja $1{,}41 < x$ $\quad 1{,}42^2 > 2$ ja $1{,}41^2 < 2$

$1{,}415 > x$ ja $1{,}414 < x$ . . . .

$1{,}4143 > x$ ja $1{,}4142 < x$ jne. . . . .

Meie ei kahtle, et ruudu ABCD diagonaalile AC, mille pikkus on muutumatu, vastab üksainus kindel arv, mida me loeme selle diagonaali täpsaks mõõtarvuks, selle peale vaatamata, et ruudu diagonaalil AC ei ole ruudu küljega AB, mis on mõõtühikuks, ühist mõõtu ja et me seda arvu ei leia ei täisarvude ega murdude hulgast.

Arvu, mis täpsalt mõõdab mõõtühikuga ühismõõduta sirglõiku, nim. irratsionaalseks arvuks.

Arvud, mis ligikaudu mõõdavad seda sirglõiku, on selle irratsionaalse arvu ligikaudsed väärtused. Me võime ütelda: *irratsionaalne arv on oma ligikaudsete väärtuste piir.*

Irratsionaalsete arvude vastandina nim. täisarve ja murde *ratsionaalseteks arvudeks.*

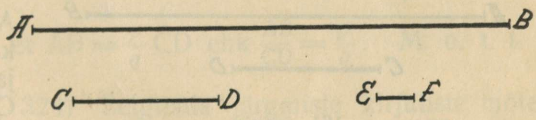
124. Ülesanne 323) *Sirglõik AB jagada sirglõiguga CD!*

Sirglõigu jaotamist n võrdseks jaoks oleme vaadelnud § 80-ndas. Sirglõigu AB jagamisel sirglõiguga CD tahame teada saada mitu korda *teine* sirglõik CD mahub esimese sirglõigu AB peale, kui *teine* sirglõik on *lühem* esimesest, või millise osa *teisest* sirglõigust CD moodustab esimene sirglõik AB, kui *teine* sirglõik on *pikem* esimesest. Jagatisena ilmuv arv on AB mõõtarvuks, kui CD võtta mõõtühikuks.

Seepärast kõneldaksegi väga sagedasti sirglõigu AB mõõtmisest sirglõiguga CD, ja sirglõigu jagamine sirglõiguga toimubki just niisama nagu sirglõigu mõõtmine; erinevus seisab vaid selles, et mõõtühikuks võetav sirglõik on erijuhul erisugune. Lahendamisel esinevad 2 juhtu: 1) sirglõigud on ühismõõdulised; 2) sirglõigud on ühismõõduta.

I-ne juht: Sirglõigud AB ja CD on ühismõõdulised.

Võtame AB ja CD ühise mõõdu EF ning mahutame tema kummagi sirglõigu peale nii mitu korda kui võimalik. Mahtugu ühine mõõt EF sirglõigu AB peale m korda ja sirglõigu CD peale n korda:



160. joonis.

$AB = m \cdot EF$ ja $CD = n \cdot EF$. Järelikult $EF = \frac{1}{n} \cdot$ CD-st ning

$AB = \frac{m}{n} \cdot CD.$

Viimast kirjutist loeme: „AB on m n-dikku CD-st". Selles lauses väljendubki mõte, et $\frac{m}{n}$ on AB mõõtarv, kui CD on võetud mõõtühikuks, olgu siis CD vähem kui AB või suurem. Seesama kirjutis ja seesama lause ütlevad ka, et $\frac{m}{n}$-dikku on AB jagatis CD-ga, sest $\frac{m}{n}$-dikku on otsitav korrutaja, kui antud on korrutis AB ja korrutatav CD.

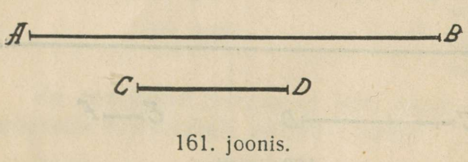
Teisiti kirjutatakse lauset „AB jagatis CD-ga on $\frac{m}{n}$-dikku" nii: $\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}$. See kirjutis väljendab selgemini mõtet: „AB-s on m samasugust võrdset jagu, missuguseid CD-s on n tükki", ehk: „kui CD jagada n võrdseks jaoks, siis on AB-s niisuguseid jagusid m tükki", näiteks: $\frac{AB}{CD} = \frac{17}{5}$ tähendab, et AB-s on 17 samasugust jagu (mõõtu), missuguseid CD-s on 5.

Soome laensõna abil loetakse kirjutist „$\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}$" veel nii: „AB suhe CD-sse on m n-dikku" ehk „AB suhtub CD-sse nagu m suhtub n-isse."

Soome laensõna „suhe" seletuseks võime ütelda: *„kahe sirglõigu suhteks nim. esimese sirglõigu mõõtarvu, kui teine sirglõik on võetud mõõtühikuks."*

Kui teine sirglõik ise on nende sirglõikude ühine mõõt, mille jagatist ehk suhet otsitakse, siis ilmub tulemusena täisarv, näit. $KM = 7PR$ ehk $\frac{KM}{PR} = 7 = \frac{7}{1}$.

II-ne juht: Kui sirglõigud AB ja CD on ühismõõduta, siis peame leppima nende suhte ligikaudse väärtusega, mida me aga leida võime nii peenelt kui iganes soovime.



161. joonis.

Et leida sirglõikude AB ja CD suhet peenelt kuni $\frac{1}{100}$-ni, selleks jagame *teise* sirglõigu CD 100-ks võrdseks jaoks ja ühe niisuguse jao mahutame esimese sirglõigu AB peale nii mitu korda kui võimalik. Mahtugu $\frac{1}{100}$ CD esimese sirglõigu AB peale 267 korda jäägiga, mis on vähem kui $\frac{1}{100}$ CD.

Siis on $AB > \frac{267}{100}$ CD ja $AB < \frac{268}{100}$ CD.

Kui me nüüd jäägi arvesse võtmata jätame ja võtame suhte väärtuseks $\frac{267}{100}$ või $\frac{268}{100}$ kirjutades $\frac{AB}{CD} \approx \frac{268}{100}$ või $\frac{AB}{CD} \approx \frac{268}{100}$, siis teeme vea, see viga on aga vähem kui $\frac{1}{100}$, nagu me alguses kokku leppisime.

Et leida AB suhet CD-ga peenelt kuni $\frac{1}{n}$-dikuni, jagame *teise* sirglõigu CD n võrdseks jaoks ja ühe niisuguse jao mahutame esimese sirglõigu AB peale nii mitu korda kui ta mahub.

Mahtugu see $\frac{1}{n}$ CD esimese sirglõigu AB peale m korda jäägiga, mis on vähem kui $\frac{1}{n}$ CD; siis on $AB > \frac{m}{n} CD$ ja $AB < \frac{m+1}{n} CD$.

Kui me nüüd jäägi tähele panemata jätame ja

võtame $AB \approx \frac{m}{n} CD$ või $AB \approx \frac{m+1}{n} CD$,

ehk teises kirjutusviisis: $\frac{AB}{CD} \approx \frac{m}{n}$ või $\frac{AB}{CD} \approx \frac{m+1}{n}$,

siis teeme vea; see viga on aga vähem kui $\frac{1}{n}$, nagu me alguses kokku leppisime.

Et me n võime teha nii suureks kui me iganes soovime, siis saab ka $\frac{1}{n}$ nii väikseks kui me iganes soovime.

Tegelikult kergendatakse sirglõikude suhte leidmist sellega, et sirglõikude asemele võetakse nende mõõtarvud. See võte põhjeneb lausel: *Sirglõikude suhe võrdub nende mõõtarvude suhtega.*

T õ e s t u s: Olgu mõõtühikuks MT (meeter) ja olgu $AB = p \cdot MT$ ja $CD = q \cdot MT$, kus p ja q on mis tahes arvud; siis on $MT = \frac{AB}{p}$ ja $MT = \frac{CD}{q}$. Siit leiame, et $\frac{AB}{p} = \frac{CD}{q}$.

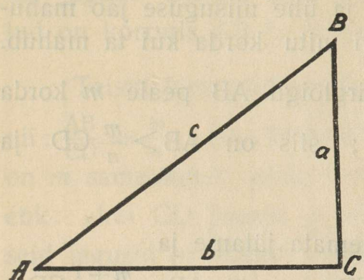
Sellest järgneb, et $AB = \frac{p}{q} CD$ ehk $\frac{AB}{CD} = \frac{p}{q}$. M. o. t. t.

Ü l e s a n d e i d. 324) Selgitada järgmiste kirjutiste mõte: 1) $AB = \frac{26}{9} OA$; 2) $\frac{KL}{MP} = \frac{7}{5}$; 3) $CD \approx 3{,}47\ AB$; 4) $\frac{MN}{PR} \approx 0{,}618$.

325) Kui suur on õppetunni (= 45 min.) suhe vahetunnisse (= 10 min.) ja kui suur suure vahetunni (= 20 min.) suhe õppetunnisse?

326) Aasta jooksul oli 205 koolipäeva. Leida kõik suhted kodanliku aasta, koolipäevade arvu ja koolide tööst vaba päevade arvu vahel?

125. Mõningaid suhteid täisnurkses kolmnurgas. Erilist tähtsust omavad sirglõikude suhted täisnurkses kolmnurgas.



162. joonis.

Täisnurkses kolmnurgas nim. valitud nurga siinuseks vastaskaateti suhet hüpotenuusisse.

Me kirjutame:

$$\frac{BC}{AB} = \sin A \quad \text{ehk} \quad \sin A = \frac{BC}{AB};$$

$$\frac{a}{c} = \mathbf{sin\ A} \qquad \mathbf{sin\ A} = \frac{a}{c}.$$

Täisnurkses kolmnurgas nim. valitud nurga tangensiks vastaskaateti suhet lähiskaatetisse.

Me kirjutame: $\frac{BC}{AC} = \tan A$ ehk $\tan A = \frac{BC}{AC};$

$$\frac{a}{b} = \mathbf{tan\ A} \qquad \mathbf{tan\ A} = \frac{a}{b}.$$

Ülesandeid. 327) Millimeetripaberil võtke veerandring, mille raadius on 100 mm, ringjoonel märkige kaared iga 5° tagant; jaotuspunktid ühendage ringi keskpunktiga ning jaotuspunktidest tõmmake ristjooned alla rõhtsale raadiusele. Ristjoonte pikkust on võimalik lugeda joonisest peenelt kuni 1 mm. Ristjoone pikkuse suhe hüpotenuusisse, milleks on raadius 100 mm, annab vastava nurga siinuse. Koostada siinuste tabel nurkadele iga 5° tagant.

328) Millimeetripaberil võtke veerandring, mille raadius on 100 mm; ringjoonel märkige kaared iga 5° tagant. Sellele veerandringile tõmmake puutuja rõhtsa raadiuse otsapunktis. Läbi ringi keskpnnkti ja kaare jaotuspunktide tõmmake sirged kuni lõikumiseni puutujaga. Lõikepunkti kaugus puutepunktist on täisnurkse kolmnurga üheks kaatetiks, mille vastasnurk meile on teada; selle nurga lähiskaatetiks on puutepunkti tõmmatud raadius 100 mm. Esimest kaatetit saame määrata joonisest täpsalt kuni 0,01-ni. Selle joonise abil koostada tangensite tabel nurkade jaoks 5°-st kuni 75°-ni iga 5° tagant.

329) Kolmnurga kaatetid on 3 cm ja 4 cm. Kasutades Pythagorase teoreemi leida selles kolmnurgas kummagi teravnurga siinus ja tangens.

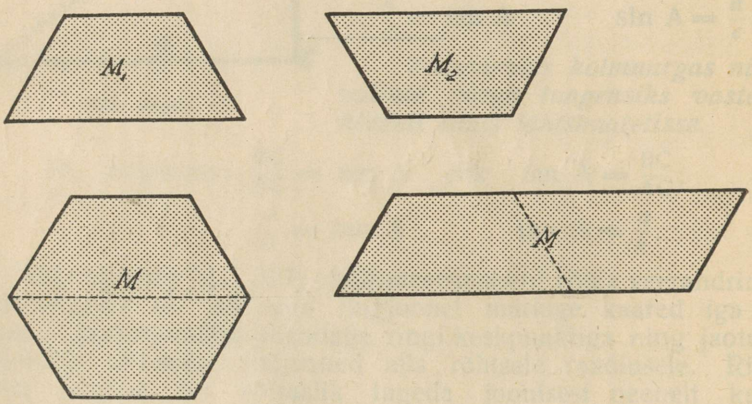
330) Hüpotenuus on 17 cm ja kaatet 15 cm. Leida kummagi teravnurga siinus ja tangens.

331) Kasutades enese koostatud tabelit leida, kui järsult tõuseb seina najale toetatud 4 m pikk redel, mille alumine ots on seinast 1,7 m kaugel.

332) Vabadussõjas langenute auks Kadrinas püstitatud mälestussammas paistab maapinnalt vaadates 50°-lises nurgas, kui temast eemalduda 8 m kaugusele. Kui kõrge on see mälestussammas?

VII-es peatükk: Pindalade mõõtmine.

126. Kujundite summa. Kui me kaks kujundit M_1 ja M_2 ühel tasapinnal teineteise külge liidame nii, et nad omavad ühiseid piirdeosi, ilma et nad ühiseid sisemisi punkte omaksid, ja kui me siis ühised piirdeosad hävitame, siis tekib uus



163. joonis.

kujund M, mida me nimetame antud kujundite *summaks*: $M = M_1 + M_2$; ühtlasi on antud kujundid M_1 ja M_2, uue kujundi M osad ning kumbki on uue kujundi ja teise antud kujundi vahe: $M_1 = M - M_2$ ja $M_2 = M - M_1$.

Selge on: 1) et kahe kujundi summal võib olla väga mitmesugune kuju; see oleneb antud kujundite kujust ja sellest kohast, kus nad teineteisega liituvad; ning 2) et kujundite summa ümbermõõt on vähem kui antud kujundite ümbermõõtude summa, sest ühised piirdeosad hävivad.

See suurus aga, mille poolest uus kujund M on antud kujundite M_1 ja M_2 summa, on kujundi *pindala*.

127. Pindala mõiste ja pindala mõõtmise põhilaused. On olemas arvamusi, mille järele „kujundi pindala on omapärane suurus“, kuulub põhimõistete hulka; on teisi arvamusi, mille järele „kujundi pindala on mingisugune arv“. Meie pooldame esimest arvamust; kuid mõnikord on kasulik põhjeneda ka teisel vaatel.

Pindala mõõtmise aluseks võtame järgmised **põhilaused** (aksioomid):

I. Ühtuvate kujundite pindalad on isekeskis võrdsed.

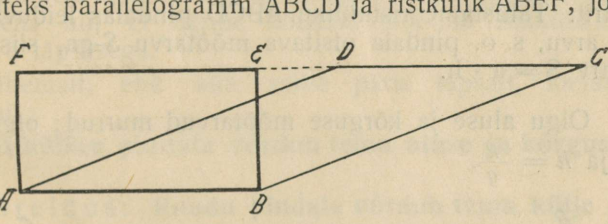
II. Kahe kujundi summa pindala võrdub nende kujundite pindalade summaga.

Neist põhilauseist järgneb:

1) Kahe hulknurga pindalad on võrdsed, kui neid hulknurki on võimalik lahutada ühepalju vastavalt ühtuvateks kolmnurkadeks. Niisuguseid hulknurki nim. lahutusvõrdseteks. Näiteks kuusnurk ja parallelogramm joonises 163.

2) Kahe hulknurga pindalad on võrdsed, kui me saame lahutusvõrdsed hulknurgad sel teel, et me kummagi hulknurgaga liidame lahutusvõrdsed hulknurgad. Niisuguseid hulknurki nim. täiendusvõrdseteks.

Näiteks parallelogramm ABCD ja ristkülik ABEF, joon. 164



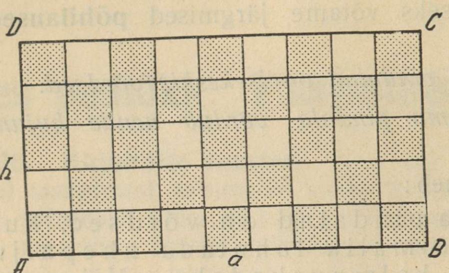
164. joonis.

ei ole lahutusvõrdsed, küll on nad aga täiendusvõrdsed, sest kui parallelogrammiga ABCD liita △ADF, siis saame trapetsi ABCF; ja kui ristkülikuga ABEF liita △BCE, siis saame sama trapetsi ABCF; seejuures on △ADF ≡ △BCE.

Neist põhilausetest ja nende järeldustest selgub, et ka mitteühtuvatel kujunditel võivad olla võrdsed pindalad. Võrdsete pindaladega kujundeid nim. võrdseteks ehk pindvõrdseteks.

128. Pindala mõõtühik ja mõõtarv. *Pindala mõõtühikuks võetakse niisuguse ruudu pindala, mille külg on üks joonühik,* näit. ruutmeeter, ruutkilomeeter, ruuthektomeeter = 1 hektaar, 1 ruutsüld jne. Kujundi pindala mõõtmise tulemusena ilmuvat arvu nim. selle kujundi pindala *mõõtarvuks.*

129. Lause: Ristküliku pindala mõõtarv võrdub tema aluse ja kõrguse (ehk pikkuse ja laiuse) **mõõtarvude korrutisega,** kui alus ja kõrgus on mõõdetud vastavates joonühikutes.

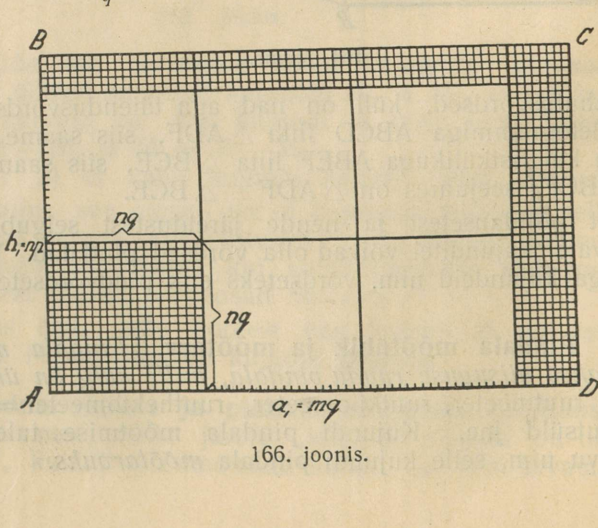


165. joonis.

Tõestus: I. Jagame aluse AB meetriteks; mahtugu meeter AB-sse ära täpsalt, nimelt a korda. Siis on alus AB $= a$ m. Läbi jaotuspunktide tõmbame paralleeljooned kõrgusele AD. Selle läbi jaotame ristküliku ribadeks ja ristkülikus saab a riba; iga riba laius on 1 m. Jagame siis kõrguse AD meetriteks; mahtugu meeter AD-sse täpsalt, nimelt h korda. Siis on kõrgus AB $= h$ m. Läbi jaotuspunktide tõmbame paralleeljooned alusele AB. Seeläbi jaotame iga riba ruutudeks, nimelt ruutmeetriteks, ja igas ribas saab h ruutmeetrit.

Et ristkülikus on a riba ja igas ribas h ruutmeetrit, siis on terves ristkülikus ABCD a korda h ruutmeetrit, ehk $(a \cdot h)$ ruutmeetrit. Tähistame ristküliku ABCD pindalas leiduvate ruutmeetrite arvu, s. o. pindala otsitava mõõtarvu S-ga, siis on see otsitav arv $S = a \cdot h$.

II. Olgu aluse ja kõrguse mõõtarvud murrud; olgu nimelt $a = \frac{m}{n}$ ja $h = \frac{p}{q}$.



166. joonis.

Teeme need murrud samanimelisteks: $a = \frac{mq}{nq}$ ja $h = \frac{np}{nq}$.

Nüüd võtame abiks uued mõõtühikud. Uueks joonühikuks võtame $\frac{1}{nq}$-ndiku meetrist; neid on siis 1-s meetris nq tükki. Uuele joonühikule vastavaid uusi ruutühikuid on ruutmeetris $nq \cdot nq$ tükki (I-se juhu põhjal).

Alust ja kõrgust uue ühikuga mõõtes saame neile uued mõõtarvud, mis on täisarvud, nimelt: $a_1 = mq$ ja $h_1 = np$. I-se juhu põhjal on siis uueks pindala mõõtarvuks S_1-ks aluse ja kõrguse mõõtarvude korrutis: $S_1 = a_1 \cdot h_1$,

ehk $S_1 = mq \cdot np$.

Et ühes ruutmeetris on $nq \cdot nq$ uut ruutühikut, siis on ristküliku ABCD pindala ruutmeetrite arv

$$S = \frac{S_1}{nq \cdot nq} = \frac{mq \cdot np}{nq \cdot nq} = \frac{mq}{nq} \cdot \frac{np}{nq} = a \cdot h.$$

Järel. ka siis, kui aluse ja kõrguse mõõtarvud on murrud, on ikkagi

$$S = a \cdot h. \qquad \text{M. o. t. t.}$$

III. Kui arvud a ja h, või üks nendest, on irratsionaalsed, siis võime neid igatahes avaldada ligikaudselt lõplikkude kümnendmurdudena nii, et nende korrutis mõõdab ristküliku pindala soovitava täpsusega.

Lühemalt, ehk küll mitte päris täpsalt, loetakse seda lauset nii:

Ristküliku pindala võrdub tema aluse ja kõrguse korrutisega.

Järeldus: **Ruudu pindala võrdub tema külje ruuduga.**

130. Ülesandeid. 333) Talu viljapuuaed on täisnurkne nelinurk; tema pikkus — 105 m., laius — 80 m. Mitu viljapuud võib istutada sellesse aeda, kui ühe puu jaoks arvata 35 ruutmeetrit pinda?

334) Ruudu külg on 1 m; ta kasvab järjest 1 m võrra. Mitme ruutmeetri võrra kasvab tema pindala?

335) Konstruida ruut, mille pindala on: a) 2 korda, b) 4 korda, c) 8 korda, d) 9 korda nii suur kui antud ruudu pindala.

336) Ruudu diagonaal on 10 m. Leida tema pindala!

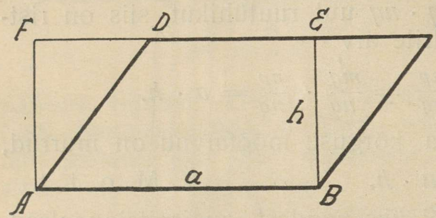
337) Ristküliku pindala on 144 cm^2. Missugused väärtused omandab selle ristküliku pikkus, kui tema laius on 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, ... 12 cm?

338) Kirjutuslaud on 1,5 m pikk ja tema pindala on 1,35 m². Laua katteks tarvitatava paksu paberipoogna pindala on 7242 cm² ja laius — 71 cm. Kui laiad ääred jäävad otsadel ja külgedel, kui see paberileht asetada kesk lauda?

339) Kooli õue ümbermõõt on 600 m, laius on $\frac{2}{3}$ osa pikkusest. Kui suur on õue pindala?

340) Nelinurkse pildi ümbermõõt on 216 cm; tema ümber on 7 cm laiune raam. 1 cm² raami maksab 1 sent. Kui palju maksab see raam?

131. Lause: Rööpküliku (parallelogrammi) pindala võrdub tema aluse ja kõrguse korrutisega.



167. joonis.

Tõestus: Pikendame CD-d ja tõmbame $BE \perp AB$ ja $AF \perp AB$. Siis tekib ristkülik ABEF, mis on lahutusvõrdne rööpkülikuga ABCD, sest et $\triangle ADF \equiv \triangle BCE$.

Järelikult

$$S_{ABCD} = S_{ABEF} = a \cdot h.$$

Nii siis

$$S_{\#} = a \cdot h.$$

Järeldus: *Võrdsete aluste ja võrdsete kõrgustega rööpkülikud on pindvõrdsed.*

132. Ülesandeid. 341) Rööpküliku üks külg on 20 cm pikk ja tema kaugus vastasküljest 17,5 cm. Leida rööpküliku pindala!

342) 37 cm kõrge rööpküliku pindala on 999 cm². Kui pikk on alus?

343) Rööpküliku ABCD alus AB = 25 cm; tema peale tõmmatud kõrgus on 14,4 cm. Külg BC = 18 cm. Kui pikk on tema peale tõmmatud kõrgus?

344) Rööpküliku lühemad küljed b on teineteisest d kaugusel; kui kaugel on teineteisest pikemad küljed a? $a = 14,3$ m; $b = 9,1$ m; $d = 7,7$ m.

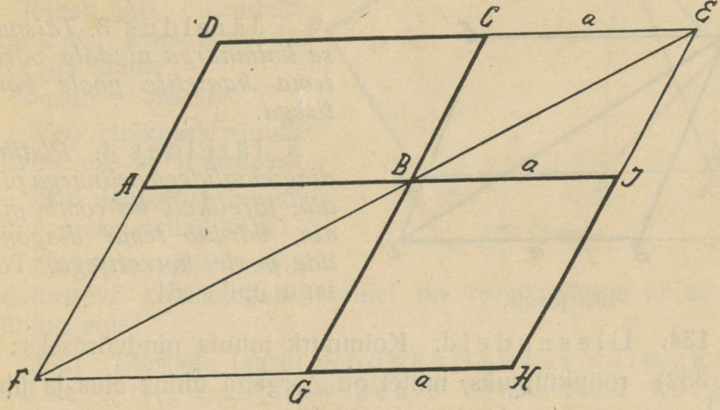
345) Rööpküliku tipp D on küljest AB 2,1 m ja küljest BC 3,5 m kaugel; rööpküliku ümbermõõt on 16 m. Kui pikad on küljed?

346) Rööpküliku tipp D on tipust A m kaugel ja tipust C n kaugel; küljele AB on tipp D c võrra lähemal kui küljele BC. Leida rööpküliku pindala! $m = 12$ cm; $n = 16,8$ cm; $c = 2,8$ cm.

347) Rööpküliku ümbermõõt on $2p$ ja tema vastasküigede kaugused d_1 ja d_2. Leida pindala! $2p = 30$ m; $d_1 = 3,5$ m; $d_2 = 4$ m.

348) Rööpküliku pindala on s ja tema kõrgused h_1 ja h_2. Kui pikk on selle rööpküliku ümbermõõt? $s = 161,5$ m^2; $h_1 = 8,5$ m; $h_2 = 9,5$ m.

349) *Antud rööpkülik muuta temaga pindvõrdseks rööpkülikuks, millel on antud alus a!*



168. joonis.

Lahendus: Pikendame külgi AB-d ja DC-d ning külgi DA-d ja CB-d; DC pikenduse peale asetame antud aluse: CE $= a$. Läbi punkti E ja rööpküliku tipu B tõmbame sirge, mis lõikab DA pikendust punktist F. Läbi F tõmbame rööpjoone AB-le ja läbi E rööpjoone BC-le. Need rööpjooned lõikuvad punktis H. FH lõikab CB pikendust punktis G ja EH lõikab AB pikendust punktis J. BGHJ on otsitav rööpkülik. Tõestagu õpilased!

350) Antud ristkülik muuta pindvõrdseks ristkülikuks, millel on antud kõrgus m!

351) Antud rööpkülik muuta pindvõrdseks ristkülikuks, millel on antud alus b!

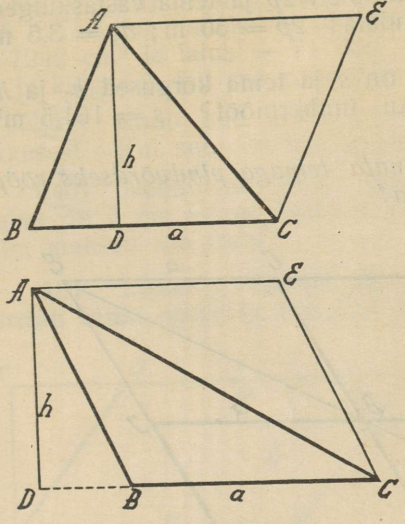
133. **Lause. Kolmnurga pindala võrdub tema aluse ja kõrguse poole korrutisega.**

Tõestus: Tõmbame AE$\parallel$BC ja CE$\parallel$BA. Siis on ABCE — rööpkülik ja $\triangle ABC \equiv \triangle AEC$. Järelikult:

$$S_{ABC} = S_{AEC} = \tfrac{1}{2} S_{ABCE} = \tfrac{1}{2} a \cdot h.$$

Nii siis

$$S_{\triangle} = \tfrac{1}{2} a \cdot h.$$



169. joonis.

Järeldus 1. *Võrdsete aluste ja võrdsete kõrgustega kolmnurgad on pindvõrdsed.*

Järeldus 2. *Ühise alusega pindvõrdsete kolmnurkade tipud asuvad alusega paralleelsetel sirgetel, mis on alusest kolmnurga kõrguse kaugusel.*

Järeldus 3. *Täisnurkse kolmnurga pindala võrdub tema kaatetite poole korrutisega.*

Järeldus 4. *Ristikute diagonaalidega nelinurga pindala, järelikult ka rombi pindala, võrdub tema diagonaalide poole korrutisega.* Tõestagu õpilased!

134. Ülesandeid. Kolmnurk muuta pindvõrdseks:

352) rööpkülikuks, millel on △-rgaga ühine alus ja ühine nurk!

353) rööpkülikuks, millel on △-rgaga ühine kõrgus ja ühine nurk!

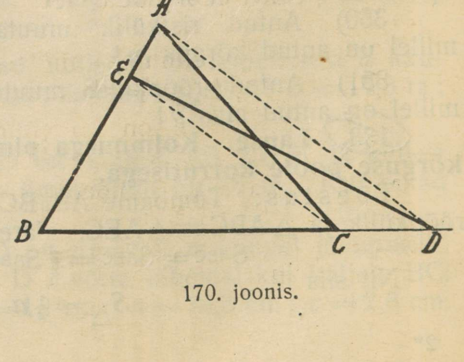
354) ristkülikuks, millel on △-rgaga ühine alus!

355) ristkülikuks, millel on △-rgaga ühine kõrgus ja mis on lahutusvõrdne antud △-rgaga.

356) △-rgaks, millel on antud △-rgaga ühine nurk ja mille alus on 2 korda nii pikk kui antud △-rga alus!

357) *Kolmnurk muuta pindvõrdseks kolmnurgaks, millel on antud alus a!*

Lahendus: Aluse BC peale asetame uue aluse $a = BD$; D ühendame tipuga A ja läbi C tõmbame AD-le paralleeljoone, mis lõikab AB-d punktis E. Ühendame E ja D; siis saame otsitava △ EBD.



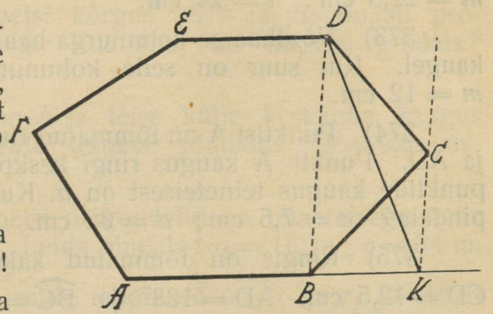
170. joonis.

Tõestus: $S_{EBD} = S_{EBC} + S_{ECD} = S_{EBC} + S_{ECA} = S_{ABC}$, sest et $\triangle$-kadel ECD ja ECA on ühine alus EC ja tipud asuvad alusega paralleelsel sirgel AD.

358) *Hulknurk muuta pindvõrdseks hulknurgaks, millel on külgi ühe võrra vähem!*

Lahendus: Ühendame D B-ga ja tõmbame läbi C DB-le paralleeljoone, mis lõikab AB pikendust punktis K. Ühendame D ja K, siis saame:

$S_{AKDEF} = S_{ABCDEF}$.



171. joonis.

359) Hulknurk muuta pindvõrdseks kolmnurgaks!

360) Hulknurk muuta pindvõrdseks ristkülikuks!

361) Rööpkülik muuta pindvõrdseks kolmnurgaks, millel on rööpkülikuga ühine nurk ja ühine alus!

362) Tõestada lause: Rööpkülikus ja kolmnurgas on ühe külje ja tema peale tõmmatud kõrguse korrutis sama suur kui teise külje ja tema peale tõmmatud kõrguse korrutis.

135. Ülesandeid. 363) Kolmnurga alus on 7,5 m ja kõrgus 4,8 m pikk. Leida pindala!

364) Kolmnurga kaatetid on $a = 55$ cm ja $b = 96$ cm. Kui suur on pindala?

365) Võrdhaarse kolmnurga alus on $b = 62,5$ cm ja kõrgus $h = 48$ cm. Leida pindala!

366. Leida rombi pindala tema diagonaalide abil $d_1 = 18,75$ cm $d_2 = 16$ cm!

367) Leida nelinurga pindala, mille diagonaalid d_1 ja d_2 on teineteisega risti! $d_1 = 8$ cm; $d_2 = 9,5$ cm.

368) Kui kõrge on kolmnurk, mille pindala on 150 cm^2 ja alus on 25 cm?

369) Kolmnurga pindala S ja kõrguse h kaudu määrata alus! $S = 149,6$ m^2; $h = 13,6$ m.

370) Kolmnurga üks külg on a ja tema peale tõmmatud kõrgus h_a; teine külg on b. Kui pikk on selle peale tõmmatud kõrgus? $a = 21$ m; $h_a = 4,2$ m; $b = 9$ m.

371) Kolmnurga külje b vastastipp on sellest küljest m kaugusel. Kui kaugel on küljest a tema vastastipp? $a = 19{,}8$ m; $b = 15{,}4$ m; $m = 10{,}8$ m.

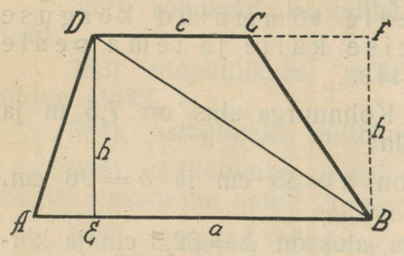
372) Ringi peal võetud punkt A on diameetri DJ otsapunktidest m ja n kaugel. Kui suur on kolmnurga ADJ pindala? $m = 22{,}5$ cm; $n = 24$ cm.

373) Võrdhaarse kolmnurga haar a on aluse keskkohast m kaugel. Kui suur on selle kolmnurga pindala? $a = 75$ cm; $m = 12$ cm.

374) Punktist A on tõmmatud ringile mõlemad puutujad AB ja AD. Punkti A kaugus ringi keskpunktist O on d ja puutepunktide kaugus teineteisest on a. Kui suur on nelinurga ABOD pindala? $a = 7{,}5$ cm; $d = 32$ cm.

375) Ringis on tõmmatud kaks kõõlu AB $= 7{,}2$ cm ja CD $= 12{,}5$ cm. $\overset{\frown}{AD} = 138°$ ja $\overset{\frown}{BC} = 42°$. Kui suur on nelinurga ADBC pindala?

136. Lause: Trapetsi pindala võrdub tema aluste poolsumma ja kõrguse korrutisega.



172. joonis.

T õ e s t u s: Diagonaal DB jagab trapetsi ABCD kaheks kolmnurgaks ABD ja BCD, millel on trapetsiga ühine kõrgus DE $=$ BF $= h$.

Järelikult:

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD};$$
$$S_{ABCD} = \tfrac{1}{2}a \cdot h + \tfrac{1}{2}c \cdot h;$$
$$S_{ABCD} = \tfrac{1}{2}(a+c) \cdot h = m \cdot h,$$

kus m on trapetsi keskjoon [77].

Nii siis

$$S_{ABCD} = \frac{a+c}{2} \cdot h = m \cdot h.$$

J ä r e l d u s: *Trapetsi pindala võrdub tema keskjoone ja kõrguse korrutisega.*

137. Ü l e s a n d e i d. 376) Trapets muuta temaga lahutusvõrdseks a) ristkülikuks; b) rööpkülikuks; c) kolmnurgaks!

377) Trapets jagada 2-ks või 3-ks pindvõrdseks trapetsiks!

378) Trapetsi alused on a ja c, kõrgus h. Leida trapetsi pindala! a) $a = 32$ m, $c = 18$ m, $h = 17{,}5$ m; b) $a = 10{,}13$ m; $c = 5{,}87$ m; $h = 5$ m.

X379) Hoone katusel on külgede poolt võrdhaarse trapetsi ja otsade poolt võrdhaarse kolmnurga kuju. Küljepoolne räästa äär on 26 m ja katuse hari 18 m pikk; räästast kuni harjani on 5,5 m. Otsapoolne räästa äär on 8,75 m ja tema kaugus harjast on 4,8 m. Leida katuse pindala!

380) Võrdhaarse trapetsi kõrgus on h ja diagonaali projektsioon aluse peale on g. Kui suur on trapetsi pindala? $h = 16$ cm; $g = 18,75$ cm.

381) Trapetsi külg on b ja teise külje keskkoha kaugus sellest küljest on k. Leida trapetsi pindala! $b = 4,8$ cm, $k = 7,5$ cm.

382) Võrdhaarse trapetsi diagonaalid on teineteisega risti; üks alus on a ja teine on c. Leida pindala! $a = 16$ m; $c = 34$ m.

383) Kahele ringile, mille raadiused on r_1 ja r_2, on tõmmatud ühine välimine puutuja, mille pikkus on t. Kui suur on nelinurga pindala, mille tippudeks on ringide keskpunktid ja puutepunktid?

384) Kahele teineteist puutujale ringile tõmmatud ühiste välimiste puutujate pikkus on a ja nende projektsioon kesksirge peale on b. Kui suur on nelinurga pindala, mille tippudeks on puutepunktid? $a = 11,25$ m; $b = 8$ m.

385) Täisnurkse võrdhaarse kolmnurga sisse joonestatud ruudu külg a asub hüpotenuusil ja kaks tippu kaatetitel. Kui suur on trapetsi pindala, mille alusteks on kolmnurga hüpotenuus ja ruudu külg?

386) Tõestada, et „diagonaalid jagavad rööpküliku neljaks pindvõrdseks kolmnurgaks“!

387) Tõestada, et „kui nelinurga külgede keskkohad järjekorras ühendada sirglõikude abil, siis on tekkinud nelinurga pindala pool antud nelinurga pindalast“!

138. Lause. Ringi puutuja-hulknurga pindala võrdub hulknurga poole ümbermõõdu ja ringi raadiuse korrutisega.

T õ e s t u s : Ühendame hulknurga tipud (joon. 173) keskpunktiga; siis jagub hulknurk kolmnurkadeks, millel on ühine tipp ringi keskpunktis ja alusteks on hulknurga küljed; puutepunktidesse tõmmatud raadiused on nende kolmnurkade kõrgusteks [89, I.].

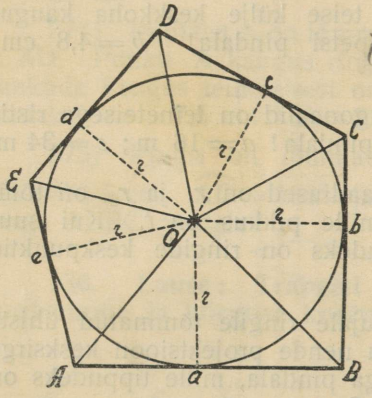
Seepärast leiame:

$$+\left\{\begin{aligned} S_{AOB} &= \tfrac{1}{2}a\cdot r\\ S_{BOC} &= \tfrac{1}{2}b\cdot r\\ S_{COD} &= \tfrac{1}{2}c\cdot r\\ &\dots\dots\dots\\ S_{EOA} &= \tfrac{1}{2}e\cdot r\end{aligned}\right.$$

Võtame $\frac{1}{2}$ sulgude ette ja r sulgude taha ning tähistame ümbermõõdu $2p$-ga: $a+b+c+\ldots+e=2p$.

$$S_{ABCDE}=\tfrac{1}{2}(a+b+c+\ldots+e)\cdot r$$

ehk $$S=p\cdot r$$



173. joonis.

139. Ülesandeid.

388) Rombi külg on b ja sissejoonestatud ringi raadius on r. Kui suur on rombi pindala?
$b=6{,}25$ m; $r=3$ m.

389) Rombi pindala on s; rombi sisse joonestatud ringi raadius on r. Kui pikk on rombi külg? $s=336$ m²; $r=13{,}44$ m.

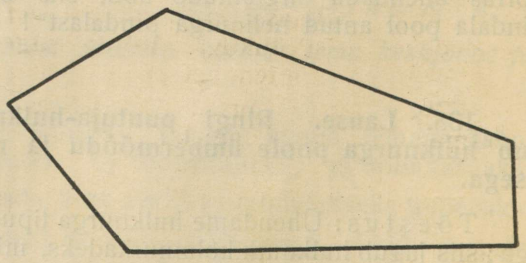
390) Täisnurkse trapetsi sisse joonestatud ringi raadius on r ja trapetsi kaldkülg on a. Leida trapetsi pindala!
$r=30$ cm; $a=61$ cm.

391) Võrdhaarse trapetsi sisse joonestatud ringi raadius on r ja trapetsi haar on b. Kui suur on trapetsi pindala?

392) Täisnurkse kolmnurga sisse joonestatud ringi raadius on r ja hüpotenuus on c. Leida kolmnurga pindala!
$r=2$ cm; $c=13$ cm.

140. Korrapäratu hulknurga pindala leidmine. Korrapäratu hulknurga pindala leidmiseks tarvitatakse mitmesuguseid võtteid.

I. Kolmnurkade-võte. Hulknurk jaotatakse kolmnurkadeks kas diagonaalide või teiste sirgete abil, mis küllalt soodsat arvutamist võimaldavad, mõõdetakse tarvisminevad elemendid, arvutatakse

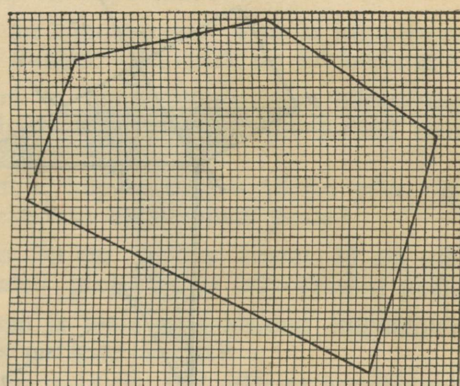

174. joonis.

üksikute tekkinud kujude pindalad eraldi ja siis liidetakse saadud arvud.

Ülesandeid 393) Maatükil on joonisel nr. 174 näidatud kuju, mille juures tuleb lugeda 1 mm joonisel = 1 süld looduses. Kui suur on selle maatüki pindala?

394) Joonestada mingisugune hulknurk ja leida tema pindala!

II. Ruutkate. Kuju, mille pindala otsitakse, kaetakse küllalt tiheda ruutude võrguga. Ruutude lugemise abil leitakse kuju pindala ligikaudselt.



175. joonis.

395) Joonise nr. 175 pindala leida ruutude lugemise teel!

III. Trapetsitevõte. Tõmmatakse mingi sirge joon ja tema peale projektitakse kõik hulknurga tipud. Nii tekib rida täisnurkseid trapetseid või ka kolmnurki, mille pindala leidmine raskusi ei sünnita; tuleb vaid mõõta üksikud sirglõigud.

396) Jooniste nr. 174 ja 175 pindalad mõõta trapetsite võtte abil.

Kloor

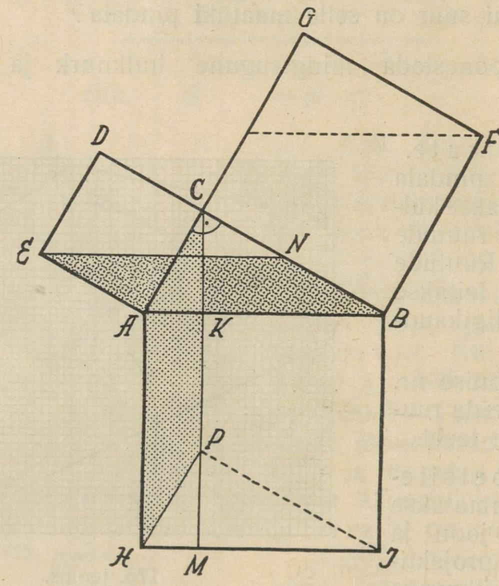
141. Euklidese lause: Kaatetist konstruitud ruut on pindvõrdne ristkülikuga, mille külgedeks on selle kaateti projektsioon hüpotenuusi peale ja hüpotenuus.

Pythagorase lause: Kaatetitest konstruitud ruutude summa on pindvõrdne hüpotenuusist konstruitud ruuduga.

Eeldus: $\hat{C} = 90°$; ACDE ja CBFG on kaatetitest konstruitud ruudud, AHJB on hüpotenuusist konstruitud ruut; $CKM \perp AB$.

Väide: $S_{ACDE} = S_{AHMK}$; $S_{ACDE} + S_{CBFG} = S_{AHJB}$.

T õ e s t u s: Tõmbame EN $\parallel$ AB ja HP $\parallel$ AC, siis tekivad rööpkülikud ABNE ja AHPC. Kui üht neist rööpkülikutest pöörda tipu A ümber täisnurga võrra, siis ühtub ta teisega; järelikult $\#$ ABNE $\equiv$ $\#$ AHPC.



176. joonis.

Kuid $S_{ABNE} = S_{ACDE}$, — täiendusvõrdsed, sest $\triangle END \equiv \triangle ABC$;

ja $\underline{S_{AHPC} = S_{AHMK}}$, — lahutusvõrdsed, sest $\triangle HMP \equiv \triangle AKC$.

$S_{ACDE} = S_{AHMK}$. M. o. t. t.

Samuti leiame, et $\underline{S_{CBFG} = S_{KMJB}}$.

Liidame need võrdused, siis saame: $S_{ACDE} + S_{CBFG} = S_{AHJB}$. Sellega on tõestatud ka Pythagorase lause.

142. Ü l e s a n d e i d. 397) Ristkülik muuta pindvõrdseks ruuduks.

L a h e n d a m i n e. Joonis nr. 176. Pikendame lühema külje AK ja asetame sinna peale pikema külje: AB = AH. AB üle tõmbame poolringi ja pikendame MK kuni lõikumiseni poolringiga punktis C. Punkti C ühendame A-ga. Siis on lõigust AC konstrueeritud ruut ACDE pindvõrdne antud ristkülikuga AHMK.

398) Antud rööpkülik muuta pindvõrdseks ruuduks!
399) Antud kolmnurk „ „ „
400) Antud trapets „ „ „
401) Antud hulknurk „ „ „

402) Hüpotenuus on 25 cm ja ühe kaateti projektsioon hüpotenuusi peale on 9 cm. Kui suur on kummastki kaatetist konstruitud ruudu pindala?

403) Kaatet on 8 cm ja tema projektsioon hüpotenuusi peale — 6,4 cm. Kui pikk on hüpotenuus?

404) Täisnurga tipp on hüpotenuusist 4 m ja hüpotenuusi lähemast otsapunktist 5 m kaugel. Kui pikk on hüpotenuus?

405) Kaatet on 5 m ja tema projektsioon hüpotenuusi peale on $1\frac{12}{13}$ m. Kui suur on hüpotenuusist konstruitud ruudu pindala?

406) Kaatet on 9 cm ja hüpotenuus — 15 cm pikk. Kui pikk on selle kaateti projektsioon hüpotenuusi peale?

407) Hüpotenuus on 50 cm ja üks kaatet 48 cm pikk. Kui pikk on kummagi kaateti projektsioon hüpotenuusi peale?

408) Kaatet on 20 cm ja tema projektsioon hüpotenuusi peale on 16 cm. Kui pikk on teine kaatet?

409) Kaatetid on 12 cm ja 16 cm. Kui pikk on hüpotenuus?

410) Hüpotenuus on 30 cm, üks kaatet on 24 cm. Kui pikk on teine kaatet?

411) Kaatetid on 3 m ja 4 m pikad. Kui pikk on selle △-rga ümbermõõt?

412) Hüpotenuus on 25 m ja üks kaatet on 15 m pikk. Kui suur on selle △-rga pindala?

413) △-rga üks kaatet on 6 m ja teine on 8 m pikk. Kasutades ülesaannet 362 leida, kui kõrge on see △, kui aluseks võtta hüpotenuus?

414) Hüpotenuus on 15 cm ja üks kaatet on 12 cm. Kui kaugel hüpotenuusist on täisnurga tipp?

415) Kaatetid on 18 cm ja 24 cm. Kui pikad on nende projektsioonid hüpotenuusi peale?

416) Üks kaatet on 3 m ja teine — 4 m. Kui suur on ruudu pindala, mille küljeks on hüpotenuusi peale tõmmatud kõrgus?

417) △-rga kaatetid on 3 m ja 4 m pikad. Kui suur on ristküliku pindala, mille külgedeks on kaatetite projektsioonid hüpotenuusi peale?

418) Hüpotenuus on 25 cm ja üks kaatet on 15 cm pikk. Kui palju on kaatetite projektsioonidest hüpotenuusi peale konstruitud ristküliku pindala suurem kui hüpotenuusi peale tõmmatud kõrgusest konstruitud ruudu pindala?

419) **Tõestada lause: Hüpotenuusi peale tõmmatud kõrgusest konstruitud ruut on pindvõrdne kaatetite projektsioonidest konstruitud ristkülikuga.**

420) Kaatetite projektsioonid hüpotenuusi peale on 32 cm ja 18 cm. Kui pikk on hüpotenuusi peale tõmmatud kõrgus?

421) Kaatetite projektsioonid hüpotenuusi peale on 9 m ja 16 m. Kui suur on selle △-rga pindala?

422) Täisnurga tipp on hüpotenuusist 7,2 m kaugel; ühe kaateti projektsioon hüpotenuusi peale on 5,4 m. Kui pikk on teise kaateti projektsioon hüpotenuusi peale?

VIII-as peatükk: Esimene kiirte lause.

143. Suhete võrdsus — võrre. Ratsionaalsete suhete kohta on iseenesest mõistetav, et: *kaks ratsionaalset suhet on isekeskis võrdsed, kui neid avaldab sama arv.*

Irratsionaalsete suhete kohta lepime kokku järgmiselt: *kaht irratsionaalset suhet loeme võrdseteks isekeskis, kui võrdsed on nende ligikaudsed väärtused, võetud sama täpsusega ja samaloomulise veaga.* Selle lause võtame definitsioonina, ehk küll võimalik on teda tõestada.

Kahe suhte ehk kahe murru *võrdsust nim. võrdeks* ehk proportsiooniks.

Näiteid. 1) $\frac{21}{14}=\frac{3}{2}$; loetakse: 21 on suurem kui 14 nii mitu korda, kui mitu korda 3 on suurem kui 2.

2) $\frac{52}{91}=\frac{4}{7}$; loetakse: 52 on vähem kui 91 nii mitu korda, kui mitu korda 4 on vähem kui 7.

Üldse 3) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; kirjutatakse ka $a:b=c:d$ ja loetakse: a jagatud b-ga on samapalju kui c jagatud d-ga, ehk a jagatis b-ga on sama suur kui c jagatis d-ga, ehk a suhtub b-sse nagu c suhtub d-sse.

Võrre koosneb 4-liikmest, nimelt 2-st esimese suhte ja 2-st teise suhte liikmest; neid võib nimetada järjekorra järele I-ks, II-ks, III-ks, IV-ks. I-st ja IV-ndat liiget nim. välisliikmeteks, II-st ja III-ndat — siseliikmeteks.

Võrde peaomadus: Võrde välisliikmete korrutis on sama suur kui siseliikmete korrutis.

Tõestus: Olgu meil antud võrre $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Korrutame võrdsuse mõlemaid pooli, s. t. kumbagi suhet bd-ga, siis saame: $\frac{a\cdot bd}{b}=\frac{c\cdot bd}{d}$, sest kui võrdseid suurusi korrutada võrdsete suurustega, siis saame võrdsed suurused. Pärast lühendamist leiame: $a\cdot d=b\cdot c$.

Selle omaduse põhjal on võimalik ümber paigutada siseliikmeid isekeskis ja välisliikmeid isekeskis. Näiteks, kui $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, siis on ka õige, et $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Ka on võimalik suhteid ümber pöörda; näiteks: $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ ehk $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$.

Kui võrde siseliikmeteks või välisliikmeteks on sama arv, siis nim. seda võrret *pidevaks võrdeks ehk ahelvõrdeks.*

Näited. 1) $\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$; 2) $\frac{12}{9} = \frac{16}{12}$; 3) $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$; 4) $\frac{y}{m} = \frac{n}{y}$.

Korduvat liiget nim. teiste liikmete keskmiseks võrdeliseks (proportsionaalseks) ehk geomeetriliseks keskmiseks.

Ahelvõrdest $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ leiame, et $x^2 = a \cdot b$ ja $x = \sqrt{a \cdot b}$.

Seepärast kirjutame asjaolu, et x on a ja b keskmine võrdeline niiviisi, et x teisel astmel võrdub a ja b korrutisega, ja kahe arvu keskmist võrdelist defiinitakse kui ruutjuurt nende arvude korrutisest.

144. Võrdelised suurused. Kui meil on kaks suurust A ja B ja suurusest A on meil rida väärtusi $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n, \ldots$ ja suurusest B rida vastavaid väärtusi $b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots b_n, \ldots$ ja kui siis suuruse A kaks väärtust annavad sama jagatise, mille annavad suuruse B vastavad väärtused, nii et $\frac{a_1}{a_n} = \frac{b_1}{b_n}$, siis nim. suurusi A ja B võrdelisteks ehk proportsionaalseteks.

Suuruse A 2 väärtust ja suuruse B 2 vastavat väärtust moodustavad võrde ka siis, kui kahe A-väärtuse jagatis on niisama suur kui B vastavate väärtuste ümberpöördud jagatis, nii et $\frac{a_1}{a_n} = \frac{b_n}{b_1}$. Viimast liiki suurusi nim. pöördvõrdelisteks ja esimest liiki suurusi — pärivõrdelisteks ehk lihtsalt võrdelisteks.

Kui sümbolite $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n$; $b_1, b_2, b_3 \ldots\ldots b_n$ all mõista suuruste arvulisi väärtusi ehk mõõtarve, siis võib nendega toimida nagu nimeta arvudega, ja võrded, mis need suurused annavad, alluvad kõigile arvuliste võrrete seadustele.

Pärivõrdeliste suuruste kohta leiame, kui võrretes

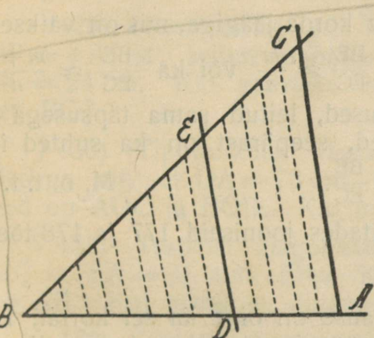
$\frac{a_1}{a_n} = \frac{b_1}{b_n}$	siseliikmed	$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_n}{b_n}$	Ehk lühemalt:
$\frac{a_2}{a_n} = \frac{b_2}{b_n}$	ümber paigutame,	$\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_n}{b_n}$	$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots \frac{a_n}{b_n} = k$;
$\frac{a_3}{a_n} = \frac{b_3}{b_n}$	et	$\frac{a_3}{b_3} = \frac{a_n}{b_n}$	k on siin ilmunud suhe, ehk, nagu kõneldakse, **võrdetegur.**

Pöördvõrdeliste suuruste kohta leiame võrretest:

$\frac{a_1}{a_n} = \frac{b_n}{b_1}$	et $a_1 \cdot b_1 = a_n \cdot b_n$	Üldse:
$\frac{a_2}{a_n} = \frac{b_n}{b_2}$	„ $a_2 \cdot b_2 = a_n \cdot b_n$	$a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = a_3 \cdot b_3 = \ldots = a_n \cdot b_n = p$,
$\frac{a_3}{a_n} = \frac{b_n}{b_3}$	„ $a_3 \cdot b_3 = a_n \cdot b_n$	kus p on jääv arv (konstant).

Me defiinime: **Võrdelisteks suurusteks nim. niisuguseid suurusi, mille vastavad väärtused annavad jääva jagatise; pöördvõrdelisteks nim. niisuguseid suurusi, mille vastavad väärtused annavad jääva korrutise.**

145. Lause. Nurga haarade lõikumisel kahe rööpsirgega tekivad haaradel võrdelised lõikude paarid.



177. joonis.

Eeldus: AC ∥ DE.

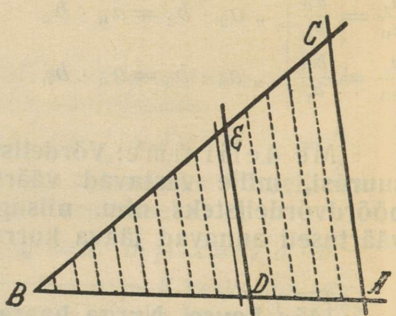
Väide: $\frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC}$.

Tõestus: Siin tuleb tõestada kahe suhte võrdsust. Et „kaks suhet on võrdsed, kui neid avaldab sama arv“, olgu see arv täppis või ligikaudne, siis tuleb siin leida kumbki suhe eraldi. Sellejuures esineb 2 juhtu.

I-ne juht. Kui BD ja DA on ühismõõdulised, siis mahutame nende ühise mõõdu sirglõikude BD ja DA peale nii mitu korda kui võimalik. Mahtugu ühine mõõt BD peale m korda ja DA peale n korda, siis on $\frac{BD}{DA} = \frac{m}{n}$.

Läbi BD ja DA jaotuspunktide tõmbame sirged rööbiti DE-ga ja AC-ga; siis jagub BE m võrdseks osaks ja EC jagub n niisamasuguseks osaks ja järel. $\frac{BE}{EC} = \frac{m}{n}$. ~~Neid suhteid~~ avaldab ~~sama arv~~; järel. on nad võrdsed: $\frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC}$. M. o. t. t.

II-ne juht. Kui BD ja DA on ühismõõduta, siis tuleb leida nende suhe ligikaudselt. Leiame selle suhte täpsalt kuni $\frac{1}{n}$-dikuni. Selleks jagame *teise* lõigu DA n võrdseks osaks ja ühe niisuguse osa mahutame BD peale nii mitu korda kui võimalik. Mahtugu $\frac{1}{n}$ DA-st BD peale m korda jäägiga, mis väiksem on kui $\frac{1}{n}$ DA-st, siis on $\frac{BD}{DA} \approx \frac{m}{n}$ või ka $\frac{BD}{DA} \approx \frac{m+1}{n}$. Teise suhte leidmiseks tõmbame nüüd läbi DA ja BD jaotuspunktide rööpsirged DE-le ja AC-le. Siis jagub EC n võrdseks jaoks ja üks niisugune jagu aseneb iseenesest BE peale m korda jäägiga, mis on väiksem kui $\frac{1}{n}$ EC-st. Seepärast on siis $\frac{BE}{EC} \approx \frac{m}{n}$ või ka $\frac{BE}{EC} \approx \frac{m+1}{n}$. Nende suhete ligikaudsed väärtused, leitud sama täpsusega ja samaloomulise veaga, on võrdsed, seepärast on ka suhted ise võrdsed isekeskis. Järel. $\frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC}$. M. o. t. t.

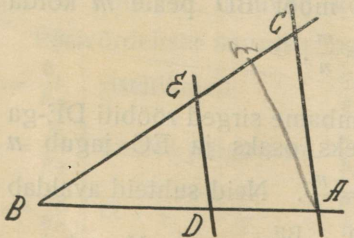


178. joonis.

Ülesandeid. 423) Tarvitades jooniseid 177 ja 178 tõestada, et $\frac{BA}{DA} = \frac{BC}{EC}$ ja $\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BE}$!

424) Näidata, et eelmine lause on õige ka sel korral, kui üks rööpsirge on ühel pool ja teine rööpsirge teisel pool nurga tippu.

146. Ümberpöördud lause. Kui nurga haarade lõikumisel kahe sirgega tekkinud vastavad lõigupaarid on võrdelised, siis on lõikajad rööbikud.



179. joonis.

Eeldus: BD : DA = BE : EC.

Väide: AC ∥ DE.

Tõestus: Läbi punkti A tõmbame mingisuguse sirge AM rööbiti DE, mis lõikab nurga B teist haara punktis M. Siis on otselause põhjal . . . BD : DA = BE : EM. Antud oli aga, et BD : DA = BE : EC.

Siit on näha, et BE : EM = BE : EC. Järelikult EM = EC. Et EM = EC, siis ühtub punkt M punktiga C ja sirge AM ühtub sirgega AC. Järel. AC ongi see DE-le tõmmatud rööpsirge: AC ∥ DE.
M. o. t. t.

147. Ülesandeid. 425) Rööpsirged HF ja IK lõikavad $\widehat{LOM}$ haaru nii, et OH = 25 cm, OI = 35 cm ja FK = 6 cm. Leida HI, OF ja OK!

426) Rööpsirged CD ja EF lõikavad $\widehat{AOB}$ haaru nii, et OE = 20 m, OC = 12 m ja OF = 24 m. Leida OD, DF ja CE!

427) Rööpsirged AB ja CD jaotavad $\widehat{STU}$ ühe haara osadeks TA = 13 cm ja AC = 7 cm ja lõikavad teise haara peal sirglõigu TD = 30 cm. Kui pikad on TC, TB ja BD?

428) $\widehat{ABC}$ haaru lõikavad rööpsirged DE ja FG nii, et BF > BD. BD = 9 cm, DF = 6 cm, EG = 9,6 cm. Leida BG, BE ja BF!

429) Hüpotenuusi AB peal on võetud punkt P nii, et BP = $\frac{3}{7}$ AP-st; sellest punktist on tõmmatud ristjoon kaatetile BC = 24 cm. Kui suurteks osadeks jaotab see ristjoon kaateti BC?

430) Tippnurkade haarad on läbi lõigatud kahe rööpsirgega nii, et OA = 78 cm, OB = 65 cm, OC = 42 cm. Sirged on AOC ja BOD. Kui pikk on BD?

431) Trapetsi diagonaalid AC ja DB lõikuvad punktis E nii, et EA = 34 mm, EB = 50 mm, EC = 17 mm. Pikem alus on AB. Kui pikad on diagonaalid?

432) Trapetsi diagonaalid AC ja BD lõikuvad punktis E nii, et EB = 6,5 m, ED = 2,6 m ja EA on EC-st 3,3 m võrra pikem. Kui pikk on diagonaal AC?

433) $\widehat{MOA}$ haarad on läbi lõigatud rööpsirgetega BC ∥ DE ∥ FG, tipust O arvates, nii, et OC = 6 cm, CE = 4 cm, EG = 8 cm, OF = 27 cm. Kui pikad on lõigud OB, BD, DF?

434) Kolm rööpsirget lõikavad kaht mitterööbikut sirget nii, et ühe mitterööbiku sirge lõigud keskmise ja äärmiste rööpsirgete vahel on 2,6 m ja 3,9 m, kuna teise mitterööbiku sirge lõik äärmiste rööpsirgete vahel on 6 m. Kui pikad on teise mitterööbiku sirge lõigud keskmise ja äärmiste rööpsirgete vahel?

435) Tõestada lause: Rööpsirgete parv jagab nurga haarad võrdelisteks lõikudeks.

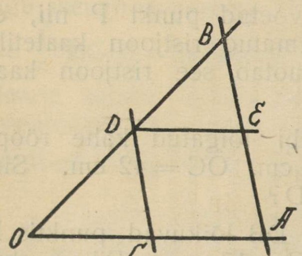
436) Tõestada lause: Kaks rööpsirget lõikavad ära kiirte kimbust võrdelised lõigud.

437) **Esimese kiirte-lause esimene osa üldkujul: Rööpsirgete parv jagab kiirte kimbu võrdelisteks lõikudeks.** Tõestada!

148. Esimese kiirte-lause teine osa.

Ülesanne. 438) Nurga AOB haarad on läbi lõigatud kahe sirgega s_1 ja s_2 punktides A_1 ja B_1, A_2 ja B_2 nii, et $OA_1 = 7$ cm, $A_1A_2 = 4$ cm ja $A_1B_1 = 49$ mm. Läbi punktide, mis OA jaotavad sentimeetriteks, tõmmata rööpsirged OB-le ja leida kui pikk on A_2B_2!

Lause: Nurga haarad lõikavad ära kahest rööpsirgest lõigud, mis on võrdelised nurga haarade lõikudega, arvatud nurga tipust kuni vastava rööpsirgeni.



180. joonis.

Eeldus: BA ∥ DC.

Väide: $\frac{BA}{DC} = \frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OC}$.

Tõestus: Tõmbame läbi punkti D sirge DE ∥ OA. Siis on nurga B haarad läbi lõigatud kahe rööpsirgega ja me saame võrde: $\frac{BA}{EA} = \frac{BO}{DO}$.

Aga $EA = DC$ kui rööpküliku EDCA küljed; paneme leitud võrdes EA asemele samapika lõigu DC, siis saame:

$$\frac{BA}{DC} = \frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OC}. \qquad \text{M. o. t. t.}$$

Ül. 439) Tõestada, et see lause on õige ka siis, kui üks rööpsirge on ühel pool ja teine rööpsirge teisel pool nurga tippu!

440) △-rgas DEF on $DF = 18$ cm ja $EF = 27$ cm. Punktist P, mis jagab külje DE (E suunas) suhtes 4 : 5, on tõmmatud PS ∥ EF ja PR ∥ DF. Leida DS, SF, ER, RF, PS ja PR!

441) Tõestada lause: Nurga haarad lõikavad ära rööpsirgete parvest lõigud, mis on võrdelised nurga haarade lõikudega, arvatud nurga tipust kuni vastava rööpsirgeni.

442) Tõestada lause: Kiirte kimp lõikab ära kahest rööpsirgest lõigud nii, et kahe kiire vahel olevad lõigud on võrdelised kiirte lõikudega, arvatud kimbu tipust kuni vastava rööpsirgeni.

443) **Esimese kiirte-lause teine osa üldkujul: Kiirte kimp lõikab ära rööpsirgete parvest lõigud nii, et kahe kiire vahel olevad lõigud on võrdelised kiirte lõikudega, arvatud kimbu tipust kuni vastava rööpsirgeni.** Tõestada!

149. Ülesandeid. 444) △-rga üks külg on jaotatud 5-ks võrdseks osaks ja läbi jaotuspunktide on tõmmatud sirged rööbiti teise küljega, mis on 10 cm pikk. Kui pikad on △-rga sees olevad sirglõigud?

445) Kui pikk on hüpotenuusi keskkohast ühe kaateti peale tõmmatud ristjoon, kui teine kaatet on 6 m pikk?

446) $\widehat{ABC}$ haarade vahel asub kaks rööbikut sirglõiku. Pikem sirglõik on 39 cm pikk ja tema kaugus nurga tipust üht haara mööda on 52 cm; lühema lõigu vastav kaugus on 36 cm. Kui pikk on lühem sirglõik?

447) Nurga MOA haarad lõikavad sirgeid s_1 ja s_2 punktides M_1, A_1 ja M_2, A_2. Sirge s_1 lõik nurga haarade vahel on 5,6 cm ja tema kaugus nurga tipust haara OM mööda on 7 cm; sirge s_2 kaugus tipust sama haara mööda on 11 cm. Kui pikk on sirge s_2 lõik nurga haarade vahel?

448) Tippnurkade haarad AOC ja BOD on läbi lõigatud rööpsirgetega, mille pikem lõik AB = 57,5 m on ühel pool tippu ja lühem lõik DC on teisel pool tippu O. AB kaugus tipust üht haara mööda on 34,5 m ja DC kaugus tipust sama haara pikendust mööda on 19,5 m. Kui pikk on DC?

449) Kaks lõikuvat sirget on läbi lõigatud kahe rööpsirgega nii, et üks rööpsirge asub ühel pool ja teine teisel pool esimeste sirgete lõikepunkti. Ühe rööpsirge kaugus tipust üht lõikuvat sirget mööda on 15 cm ja teise kaugus 21 cm. Lühem sirglõik on 8 cm pikk. Kui pikk on pikem sirglõik?

450) Rööbikud sirglõigud BC = 47,5 cm ja DE = 30 cm asuvad nurga BAC haarade vahel nii, et AB = 57 cm ja AE = 24 cm. Kui pikad on AD ja AC?

451) Kaks punktis O lõikuvat sirget AB ja CD on läbi lõigatud kahe rööpsirgega s_1 ja s_2, mille lõigud lõikuvate sirgete vahel on AC = 40,5 m ja DB = 22,5 m; OA = 45 m ja OD = 20 m. Kui pikad on OB ja OC? Vaadelda 2 juhtu!

452) Punktis T lõikuvaid sirgeid AB-d ja CD-d lõikavad rööpsirged s_1 ja s_2 punktides A, B, C, D nii, et nende lõigud lõikuvate sirgete vahel on AC = 1,5 m, BD = 72 cm; TC = 1 m ja TB = 84 cm. Kui pikad on AB ja CD? Vaadelda 2 juhtu!

453) Trapetsi alused on a ja c, küljed b ja d. Kui palju on tarvis pikendada külgi, et nad lõikuksid? Arvutustes võtta: $a = 5$ m (56 cm; 28 cm), $c = 2$ m (24 cm; 17,5 cm), $b = 3$ m (96 cm; 7,5 cm); $d = 2,4$ (75 cm; 12 cm).

454) Trapetsi alused on a ja c ning diagonaalid e ja f. Kui suurteks osadeks jaguvad diagonaalid nende lõikepunktis?

$a = 12$ cm; c = 8 cm; $e = 27$ cm; $f = 22,5$ cm.

455) Trapetsi alused on a ja c. Missuguses suhtes jaguvad diagonaalid? $a = 16$ cm; $c = 6$ cm.

456) Trapetsi alused on a ja c, kõrgus h. Kui kaugel alustest on diagonaalide lõikepunkt? $a = 24$ m; $c = 20$ m; $h = 22$ m.

457) Trapetsi pikem alus on 65 cm pikk, ja diagonaalid jaguvad omas lõikepunktis nii, et vähem osa on $\frac{7}{13}$ suuremast. Kui pikad on sirglõigud, mis lähevad rööbiti alustega diagonaalide lõikepunktist kuni lõikumiseni külgedega?

458) Trapetsi alused on 50 cm ja 30 cm. Kui pikad on sirglõigud, mis lähevad rööbiti alustega diagonaalide lõikepunktist kuni lõikumiseni külgedega?

459) Tõestada lause: *Läbi trapetsi diagonaalide lõikepunkti, alustega rööbiti, küljest küljeni minev sirglõik jagub selles punktis pooleks.*

460) Tõestada lause: *Trapetsi külgede pikenduste lõikepunktist ja diagonaalide lõikepunktist läbi minev sirge poolitab trapetsi alused.*

Konstruimisülesandeid: 461) Kolmnurgas tõmmata alusele rööpsirge, mis suhtuks alusega nagu m : n!

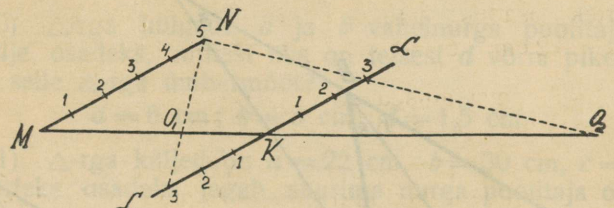
462) Kolmele antud sirglõigule a, b, c konstruida neljas võrdeline!

463) Kahele antud sirglõigule a ja b konstruida kolmas võrdeline!

464) Konstruida sirglõik x nii, et $x = \frac{abc}{de}$, kui a, b, c, d, e on antud sirglõigud!

150. Ülesanne. 465) M. talust sõitis välja rattur keskmise kiirusega 15 km tunnis ja samal ajal sama maanteed mööda sõitis K. talust välja hobusemees, kelle keskmine tunnikiirus oli 9 km. Mõlemad sõitsid O. kiriku poole ja jõudsid O. kiriku juurde just samal ajal. M. talust K. taluni on *a* km. Kui kaugel kummastki talust asub O. kirik? Joonestada!

Lahendus: Et sõiduajad on võrdsed, siis on läbisõidetud teed võrdelised kiirustega. Kujutades läbisõidetud teid sirglõiku-



181. joonis.

dena tuleb talude kaugus MK jagada võrdeliselt arvudega 15 ja 9 ehk suhtes 5 : 3. Seejuures võivad esineda 2 juhtu: 1) kohtumispunkt O asub lähtepunktide M ja K vahel; 2) kohtumispunkt O asub lähtepunktide M ja K ühendava sirglõigu pikenduse peal K suunas.

Joonestamise otstarbel tõmbame punktist M meelevaldse kiire ja punktist K temaga rööbiku sirge. Kiire MN peale asetame 5 mingisugust mõõtu ja KL peale 3 samasugust mõõtu. Kui O asub M ja K vahel, siis tuli meestel sõita teineteisele vastu ja 3 mõõtu asetame KL peale MN suunale vastassuunas; kui O asub MK pikenduse peal, siis tuli meestel sõita samas suunas, ja 3 mõõtu asetame KL peale MN suunas. Läbi viimaste jaotuspunktide 5 ja 3 tõmmatud sirged lõikavad MK-d ja tema pikendust otsitavates punktides O_1 ja O_2 nii, et $O_1M : O_1K = 5 : 3$ ja $O_2M : O_2K = 5 : 3$.

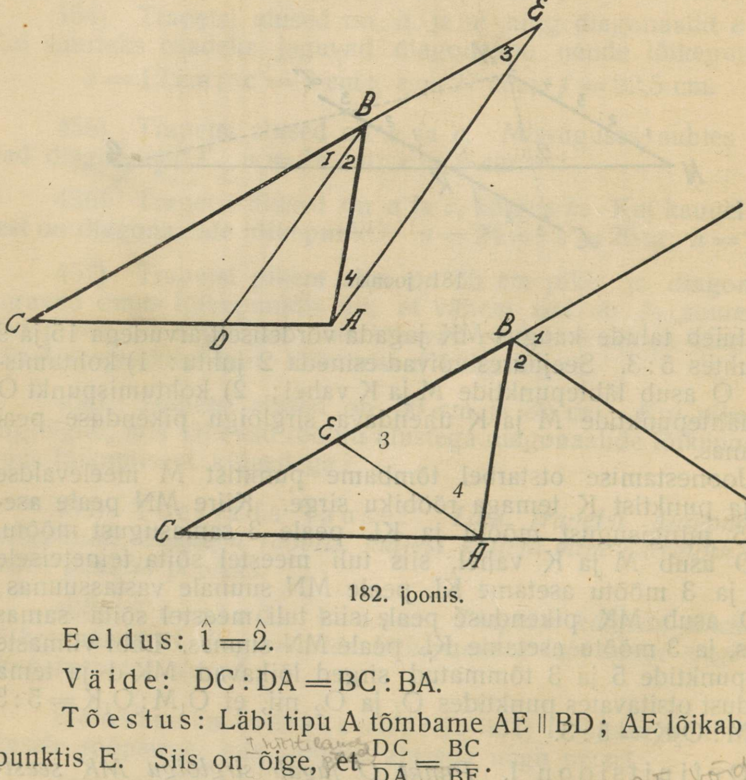
Definitsioon I. *Punkt O jagab sirglõigu MK seestpoolt kaheks osaks, kui O on M ja K vahel; punkt O jagab sirglõigu MK väljastpoolt kaheks osaks, kui O on MK pikenduse peal; osadeks loetakse O kaugused OM ja OK sirglõigu MK otsapunktidest.*

Definitsioon II. *Punktid O_1 ja O_2 jagavad sirglõigu harmooniliselt, kui O_1 jagab teda seestpoolt samas suhtes, milles jagab teda O_2 väljastpoolt:*

$$O_1M : O_1K = O_2M : O_2K.$$

Ülesanne. 466) Tõestada lause: Kui O_1 ja O_2 jagavad sirglõigu MK harmooniliselt, siis jagavad ka M ja K sirglõigu O_1 O_2 harmooniliselt.

151. Nurgapoolitaja-lause: Kolmnurgas jagab nurgapoolitaja vastaskülje — sisenurga poolitaja seestpoolt ja välisnurga poolitaja väljastpoolt — **lõikudeks võrdeliselt nende lähisküIgedega.**



182. joonis.

Eeldus: $\hat{1} = \hat{2}$.

Väide: DC : DA = BC : BA.

Tõestus: Läbi tipu A tõmbame AE ∥ BD; AE lõikab CB-d punktis E. Siis on õige, et $\frac{DC}{DA} = \frac{BC}{BE}$.

Et aga $\hat{4} = \hat{2} = \hat{1} = \hat{3}$, ehk $\hat{4} = \hat{3}$, siis on ka BE = BA.

Leitud võrdesse BE asemele pannes BA saame:

$$\frac{DC}{DA} = \frac{BC}{BA}.$$

M. o. t. t.

Järeldus. *Kolmnurgas sama tipu juures oleva sise- ja välisnurga poolitajad jagavad vastaskülje harmooniliselt.*

152. Ülesandeid. 467) △-rga küljed on 20 cm, 25 cm ja 30 cm pikad. Kui suurteks osadeks jagab iga nurgapoolitaja vastaskülje?

468) △-rgas jagab külgede $a = 14$ m ja $b = 6$ m vahelnurga poolitaja kolmanda külje osadeks, millest vähem on 3 m. Kui pikk on kolmas külg?

469) △-rgas jagab külgedele $a = 15$ m ja $b = 13$ m vahelnurga poolitaja külje c osadeks, millest pikem on 7,5 m. Kui pikk on selle △-rga ümbermõõt?

470) △-rga külgede a ja b vahelnurga poolitaja jagab vastaskülje osadeks, millest üks on teisest d võrra pikem. Kui pikk on selle △-rga ümbermõõt?

$$a = 6 \text{ cm};\ b = 8 \text{ cm};\ d = 1{,}5 \text{ cm}.$$

471) △-rga küljed on $a = 22$ cm, $b = 30$ cm, $c = 28$ cm. Kui suurteks osadeks jagab suurima nurga poolitaja oma vastaskülje?

472) △-rga küljed on $a = 27$ cm, $b = 23$ cm ja $c = 20$ cm. Kui suurteks osadeks jagab vähima nurga poolitaja oma vastaskülje?

473) △-rga küljed on $a = 21$ cm, $b = 24$ cm ja $c = 26$ cm. Kui suurteks osadeks jagab suuruse poolest keskmise välisnurga poolitaja oma vastaskülje?

474) △-rga küljed on $a = 11$ m, $b = 9$ m, $c = 14$ m. Kui suurteks osadeks jagavad suurima ja vähima välisnurga poolitajad omad vastasküljed?

475) △-rga küljed on $a = 17$ m, $b = 15$ m, $c = 13$ m. Kui kaugel on teineteisest tippudele A ja C harmoonilised punktid, mis tekkinud tipu B juures olevate nurkade poolitamisel?

476) △-rga küljed on $a = 19{,}8$ cm, $b = 12$ cm, $c = 21$ cm. Kui kaugel on teineteisest külge BC-d harmooniliselt jagavad punktid, mis tekkinud tipu A juures olevate nurkade poolitamisel?

477) △-rga ümbermõõt on 62 cm. Ühe nurga poolitaja jagab vastaskülje lõikudeks 13,2 cm ja 8,8 cm. Kui pikad on teised küljed?

478) Nurga B poolitaja △-rgas ABC jagab vastaskülje lõikudeks $23\frac{1}{3}$ m ja $36\frac{2}{3}$ m. Seda nurka piiravate külgede vahe on 40 m. Kui pikk on △-rga ABC ümbermõõt?

479) Võrdhaarse △-rga alusnurga poolitaja jagab vastaskülje osadeks 6 m ja 9 m. Kui pikk on alus?

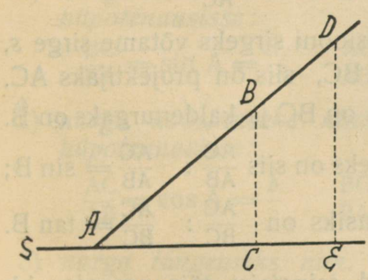
480) $\triangle$-rga ABC küljed on $a = 9$ m, $b = 16$ m, $c = 15$ m. Kui kaugel on teineteisest külje AC suhtes harmoonilised punktid, mis tekivad tipu B juures olevate nurkade poolitamisel? Mis sünnib nende punktidega, kui tipp B nihkub AB pikendust mööda tipp A-st kaugemale?

481) $\triangle$-rga ABC küljed on $a = 9$ m, $b = 16$ m ja $c = 15$ m. Kui kaugel on teineteisest külje AC suhtes harmoonilised punktid, mis tekivad tipu B juures olevate nurkade poolitamisel? Mis sünnib nende punktidega, kui tipp B nihkub külge AB-d mööda tipp A-le lähemale?

IX-as peatükk: Nurga funktsioonid.

153. Vaatleme sirglõigu projektimist sirgjoone peale tol juhul, kui sirglõigu üks otsapunkt asub sellel sirgel, mille peale sirglõiku projektitakse.

Lause: Kui muutub projektitav, aga ei muutu tema kaldenurk seda sirget vastu, mille peale teda projektitakse, siis ei muutu 1) projektija suhe projektitavasse,
2) projektija suhe projektsioonisse.



183. joonis.

T õ e s t u s: Esimese kiirtelause II osa annab meile järgmised võrded:

$$1)\ \frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AD};\ \text{ja}\ 2)\ \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE};$$

paigutame sisemised liikmed ümber, siis saame:

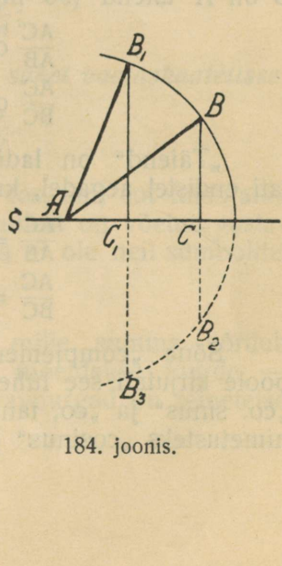
$$1)\ \frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD};\ \text{ja}\ 2)\ \frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE}.$$

M. o. t. t.

Teiste sõnadega: *Projektija suhe projektitavasse ja projektija suhe projektsioonisse ei olene projektitava sirglõigu pikkusest. Küll olenevad need suhted aga projektitava kaldenurgast.*

154. **Lause: Kui muutub kaldenurk täisnurga piirides, siis suureneb projektija ja projektsioon väheneb.**

T õ e s t u s: Kui projektitav sirglõik pöördub oma otsapunkti A ümber, siis kriipsutab teine otsapunkt kaare ja projektitava sirglõigu suund A-st B poole moodustab projektsiooni sirgega kesknurgad tipuga punktis A.



184. joonis.

Vaatleme kaart $B_1BB_2B_3$: $\quad \overset{\frown}{B_1BB_2B_3} > \overset{\frown}{BB_2}$.

Suuremale kaarele vastab pikem kõõl, kui kaar on vähem kui poolringi: $\quad B_1B_3 > BB_2$,

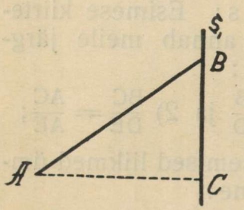
Pikem kõõl on keskpunktile ligemal: $\quad AC_1 < AC$.

Et $B_1B_3 > BB_2$, siis on ka $\frac{B_1B_3}{2} > \frac{BB_2}{2}$ ehk $B_1C_1 > BC$ ja $AC_1 < AC$.

M. o. t. t.

Järelikult: projektija suhe projektitavasse ja projektija suhe projektsioonisse olenevad projektitava kaldenurgast projektsiooni sirget vastu, teiste sõnadega — on selle nurga *funktsioonid.*

155. Nurga funktsioonid. *Projektija suhet projektitavasse nim. kaldenurga siinuseks:* $\frac{BC}{AB} = \sin A$; *projektija suhet projektsioonisse nim. kaldenurga tangensiks:* $\frac{BC}{AC} = \tan A$.



185. joonis.

Kui projektsiooni sirgeks võtame sirge *s*, mis läheb läbi BC, siis on projektijaks AC, projektsiooniks on BC ja kaldenurgaks on $\hat{B}$.

Nurga B siinuseks on siis $\frac{AC}{AB}$: $\quad \frac{AC}{AB} = \sin B$;

nurga B tangensiks on $\frac{AC}{BC}$: $\quad \frac{AC}{BC} = \tan B$.

Nurk B ja nurk A täiendavad teineteist täisnurgani, ehk $\hat{B}$ on $\hat{A}$ täiend (90°-ni) ja $\hat{A}$ on $\hat{B}$ täiend (90°-ni).

$\frac{AC}{AB}$ on $\hat{A}$ täiendi siinus;

$\frac{AC}{BC}$ on $\hat{A}$ täiendi tangens.

„Täiend" on ladina keeli complementum, seepärast kirjutati endistel aegadel, kui teaduse keeleks oli veel ladina keel:

$\frac{AC}{AB}$ = sinus complementi A;

$\frac{AC}{BC}$ = tangens complementi A.

Sõna „complementi" kirjutati lühendatult „co.". Pärastpoole kirjutati see lühendus sõnade „sinus" ja „tangens" ees nii: „co. sinus" ja „co. tangens", kus ta nende sõnadega ühte sulas nimetusteks „cosinus" ja „cotangens".

Nii on siis $\frac{AC}{AB}$ = cosinus A ehk $\frac{AC}{AB} = \cos A$;

$\frac{AC}{BC}$ = tangens A ehk $\frac{AC}{BC} = \tan A$.

Projektsiooni suhet projektitavasse nim. kaldenurga koosinuseks; projektsiooni suhet projektijasse nim. kaldenurga kootangensiks.

Võetud juhul moodustavad projektitav, projektija ja projektsioon täisnurkse kolmnurga, kus projektitav on hüpotenuusiks, projektija ja projektsioon kaatetiteks. Mõnes mõttes on kasulik vaadelda eelpool toodud suhteid ilma projektsiooni mõisteta, ainult täisnurkse kolmnurga abil.

156. Definitsioonid. Täisnurkses kolmnurgas

1) *nurga siinuseks nim. vastaskaateti suhet hüpotenuusisse:*

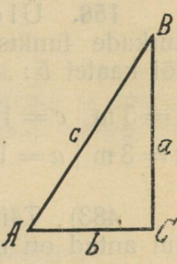
$$\frac{BC}{BA} = \sin A = \frac{a}{c} \qquad \frac{AC}{AB} = \sin B = \frac{b}{c};$$

2) *nurga koosinuseks nim. lähiskaateti suhet hüpotenuusisse:*

$$\frac{AC}{AB} = \cos A = \frac{b}{c} \qquad \frac{BC}{BA} = \cos B = \frac{a}{c};$$

3) *nurga tangensiks nim. vastaskaateti suhet lähiskaatetisse:*

$$\frac{BC}{AC} = \tan A = \frac{a}{b} \qquad \frac{AC}{BC} = \tan B = \frac{b}{a};$$



186. joonis.

4) *nurga kootangensiks nim. lähiskaateti suhet vastaskaatetisse:*

$$\frac{AC}{BC} = \cot A = \frac{b}{a} \qquad \frac{BC}{AC} = \cot B = \frac{a}{b}.$$

Märkus: Sümbolitele sin, cos, tan, cot tuleb alati juurde kirjutada nurga tähis, millest on võetud vastav funktsioon. Ilma nurga tähiseta ei ole neil sümbolitel mõtet.

157. Täiendnurk. Kaht nurka, mille summa võrdub täisnurgaga, nim. teineteise täiendiks; mõeldakse juurde — „kuni täisnurgani“. Täisnurkse △-rga teravnurgad on teineteise täiendid, sest $\hat{A} + \hat{B} = 90°$.

Definitsioonidest järgneb:

$$\sin A = \frac{a}{c} = \cos B = \cos (90^\circ\text{-}A)$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \sin B = \sin (90^\circ\text{-}A)$$

$$\tan A = \frac{a}{b} = \cot B = \cot (90^\circ\text{-}A)$$

$$\cot A = \frac{b}{a} = \tan B = \tan (90^\circ\text{-}A).$$

Sõnades väljendatult:

Täiendnurga siinus on seesama, mis antud nurga koosinus; täiendnurga koosinus on seesama, mis antud nurga siinus; täiendnurga tangens on seesama, mis antud nurga kootangens; täiendnurga kootangens on seesama, mis antud nurga tangens.

158. Ülesandeid. 482) Täisnurkses △-rgas leida teravnurkade funktsioonid, kui antud on hüpotenuus c ja kaatet a või kaatet b:

$c = 5$ m	$c = 17$ m	$c = 13$ m	$c = 37$ m	$c = 41$ m	$c = 15$ m
$a = 3$ m	$a = 15$ m	$b = 5$ m	$b = 35$ m	$a = 40$ m	$b = 9$ m.

483) Täisnurkses △-rgas leida teravnurkade funktsioonid, kui antud on mõlemad kaatetid a ja b:

$a = 8$ m	$a = 28$ m	$a = 60$ m	$a = 35$ m	$a = 10$ m	$a = 16$ m
$b = 6$ m	$b = 45$ m	$b = 11$ m	$b = 12$ m	$b = 24$ m	$b = 30$ m.

484)

Kui suure nurga siinus on sama suur kui	$\cos 62^0$	$\cos 75^0$	$\cos 34^0$	$\cos 58''$?
„ „ „ cosinus „ „ „ „	$\sin 78^0$	$\sin 64^0$	$\sin 43^0$	$\sin 17^0$?
„ „ „ tangens „ „ „ „	$\cot 47^0$	$\cot 71^0$	$\cot 22^0$	$\cot 34^0$?
„ „ „ cotangens „ „ „ „	$\tan 68^0$	$\tan 9^0$	$\tan 53^0$	$\tan 14^0$?

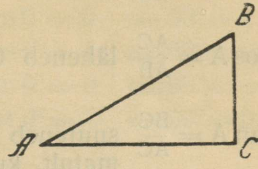
485)

Konstruida nurk α nii, et:	$\tan\alpha = 2$;	$\cot\alpha = 1\frac{1}{3}$;	$\cos\alpha = \frac{3}{5}$;	$\sin\alpha = \frac{2}{3}$.
„ „ β „ „	$\sin\beta = 0{,}8$;	$\cos\beta = 0{,}75$;	$\tan\beta = 0{,}7$;	$\cot\beta = 0{,}5$.
„ „ γ „ „	$\cot\gamma = 2\frac{1}{5}$;	$\sin\gamma = \frac{5}{8}$;	$\cos\gamma = 0{,}3$;	$\tan\gamma = 0{,}9$.
„ „ δ „ „	$\cos\delta = \frac{4}{7}$;	$\tan\delta = 1\frac{3}{4}$;	$\cot\delta = 0{,}8$;	$\sin\delta = \frac{7}{9}$.

486) Millimeetripaberi ja malli abil leida nurkade siinused, koosinused, tangensid ja kootangensid iga 5-e kraadi tagant.

159. Nurga funktsioonide muutumine. Vaatleme $\triangle$-rka ABC.

1) Kui $\hat{A} = 0$, siis õieti $\triangle$-rka ei ole; meie aga loeme siiski, et ta on olemas, kuid tingimisi, et kaatet BC ühtub punktiga C ja BC $= 0$, et hüpotenuus ühtub kaatetiga AC, nii et AC $=$ AB.



187. joon.

Siis on:

$$\sin 0^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{0}{AB} = 0;$$

$$\cos 0^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1;$$

$$\tan 0^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{0}{AB} = 0;$$

$\cot 0^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{AB}{0} = ?$; me kirjutame tingimisi: $\cot 0^\circ = \infty$.

2) Kui $\hat{A}$ erinedes 0°-st hakkab suurenema ja suureneb, siis erineb 0-st ka vastaskaatet BC, hakkab suurenema ja suureneb; siis erineb hüpotenuusist ka kaatet AC, hakkab vähenema ja väheneb.

Siis näeme, et

$\sin A = \frac{BC}{AB}$ erineb 0-st, hakkab suurenema ja suureneb;

$\cos A = \frac{AC}{AB}$ erineb 1-st, hakkab vähenema ja väheneb;

$\tan A = \frac{BC}{AC}$ erineb 0-st, hakkab suurenema ja suureneb, kuid kiiremini kui $\sin A$;

$\cot A = \frac{AC}{BC}$ omandab meile arusaadava väärtuse; nimelt nii kaua kui BC vähe erineb 0-st ja AC vähe erineb hüpotenuusist, on nende suhe väga suur arv; mida enam suureneb $\hat{A}$, seda enam suureneb BC, seda enam väheneb AC ja sellega väheneb nende suhe, õige kiiresti omandades mitmesuguseid lõplikke väärtusi.

3) Kui $\hat{A}$ suurenedes läheneb 90°-le, siis läheneb kaatet BC suurenedes hüpotenuusile AB, ja kaatet AC väheneb ja läheneb 0-le. Sellest järgneb, et nurga $\hat{A}$ lähenedes 90°-le

$\sin A = \frac{BC}{AB}$ läheneb 1-le : $\sin A = \frac{BC}{AB} \to 1$;

$\cos A = \frac{AC}{AB}$ läheneb 0-le : $\cos A = \frac{AC}{AB} \to 0$;

$\tan A = \frac{BC}{AC}$ suureneb piiramatult, sest jagaja AC väheneb piiramatult, kuna jagatav BC läheneb lõplikule suurusele AB, omandab ikka suuremaid ja suuremaid väärtusi ja läheneb lõpmatusele.

$$\tan A = \frac{BC}{AC} \to \infty;$$

$\cot A = \frac{AC}{BC}$ väheneb piiramatult, lähenedes 0-le, sest AC läheneb 0-le ja BC läheneb AB-le:

$$\cot A = \frac{AC}{BC} \to 0.$$

4) Kui $\hat{A} = 90°$, siis jällegi ei ole meil $\triangle$-ka; kuid me loeme siiski, et ta on olemas ja nimelt tingimisi, et kaatet BC ühtub hüpotenuusiga BA, nii et $BC = BA$, ja kaatet AC ühtub punktiga A, nii et $AC = 0$.

Siis on:

$$\sin 90° = \frac{BC}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1.$$

$$\cos 90° = \frac{AC}{AB} = \frac{0}{AB} = 0.$$

$\tan 90° = \frac{BC}{AC} = \frac{AB}{0} = ?$ (kirjutame tingimisi: $\tan 90° = \infty$).

$$\cot 90° = \frac{AC}{BC} = \frac{0}{AB} = 0.$$

Kirjutist $\tan 90° = \infty$ mõistame nii, et nurga piiramatult lähenedes täisnurgale läheneb selle nurga tangens piiramata suurele arvule. Samuti mõistame kirjutist $\cot 0° = \infty$, nimelt: kui nurk vähenedes piiramatult läheneb 0°-le, siis läheneb selle nurga cotangens piiramata suurele arvule.

160. Lõpptulemused: 1) Kui nurk suureneb 0°-st kuni 90°-ni,

siis tema siinus suureneb 0-st kuni 1-ni;	2) $\sin 0° = 0$	$\sin 90° = 1$
tema cosinus väheneb 1-st kuni 0-ni;	$\cos 0° = 1$	$\cos 90° = 0$
tema tangens suureneb 0-st kuni ∞-ni;	$\tan 0° = 0$	$\tan 90° = \infty$
tema cotanges väheneb ∞-st kuni 0-ni;	$\cot 0° = \infty$	$\cot 90° = 0$

3) Nurga siinus ja koosinus ei saa kunagi olla liigmurrud; nende äärmised väärtused on 0 ja 1; muidu on nad alati pärismurrud.

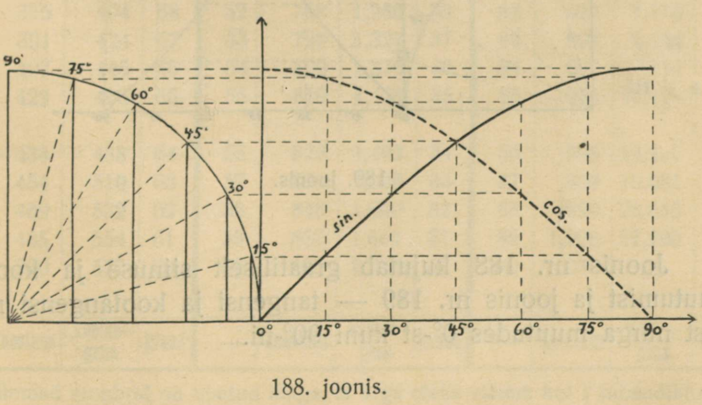
4) Nurga tangensi ja kootangensi muutumisel ei ole piiri, nad võivad omandada kõiki arvväärtusi 0-st kuni lõpmatuseni.

5) Tangens ja kootangens muutuvad kiiremini kui siinus ja koosinus.

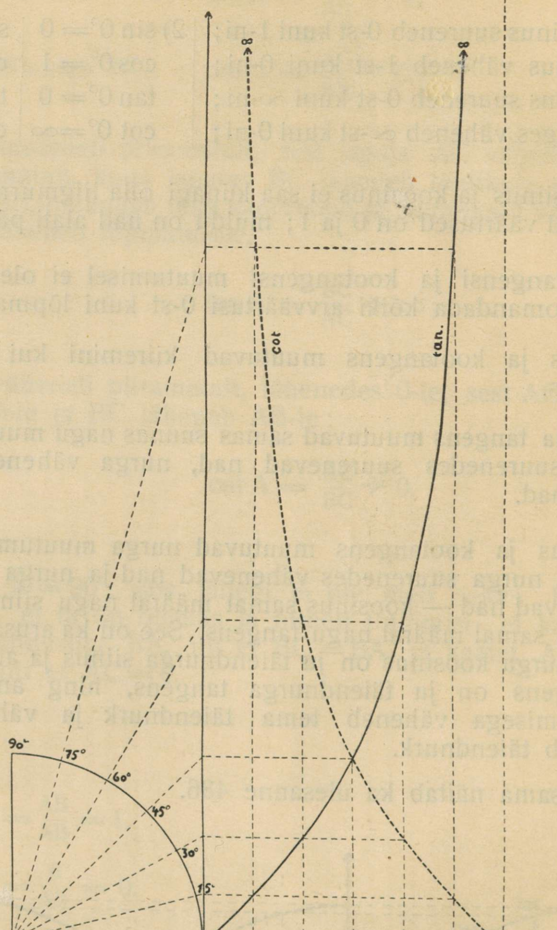
6) Siinus ja tangens muutuvad samas suunas nagu muutub nurk: nurga suurenedes suurenevad nad, nurga vähenedes vähenevad nad.

7) Koosinus ja kootangens muutuvad nurga muutumise pöördsuunas: nurga suurenedes vähenevad nad ja nurga vähenedes suurenevad nad — koosinus samal määral nagu siinus ja kootangens samal määral nagu tangens. See on ka arusaadav, sest antud nurga koosinus on ju täiendnurga siinus ja antud nurga kootangens on ju täiendnurga tangens, ning antud nurga suurenemisega väheneb tema täiendnurk ja vähenemisega suureneb täiendnurk.

Sedasama näitab ka ülesanne 486.



188. joonis.



189. joonis.

Joonis nr. 188 kujutab graafiliselt siinuse ja koosinuse muutumist ja joonis nr. 189 — tangensi ja kootangensi muutumist nurga muutudes 0°-st kuni 90°-ni.

Trigonomeetriliste suuruste loomulikud väärtused.

kraad	siinus	tangens	—	kraad	siinus	tangens	—	kraad	siinus	tangens	—
0	0,000	0,000	90	30	0,500	0,577	60	60	0,866	1,732	30
1	017	017	89	31	515	601	59	61	875	1,804	29
2	035	035	88	32	530	625	58	62	883	1,881	28
3	052	052	87	33	545	649	57	63	891	1,963	27
4	070	070	86	34	559	675	56	64	899	2,050	26
5	087	087	85	35	574	700	55	65	906	2,145	25
6	105	105	84	36	588	727	54	66	914	2,246	24
7	122	123	83	37	602	754	53	67	921	2,356	23
8	139	141	82	38	616	781	52	68	927	2,475	22
9	156	158	81	39	629	810	51	69	934	2,605	21
10	174	176	80	40	643	839	50	70	940	2,747	20
11	191	194	79	41	656	869	49	71	946	2,904	19
12	208	213	78	42	669	900	48	72	951	3,078	18
13	225	231	77	43	682	933	47	73	956	3,271	17
14	242	249	76	44	695	966	46	74	961	3,487	16
15	259	268	75	45	707	1,000	45	75	966	3,732	15
16	276	287	74	46	719	1,036	44	76	970	4,011	14
17	292	306	73	47	731	1,072	43	77	974	4,331	13
18	309	325	72	48	743	1,111	42	78	978	4,705	12
19	326	344	71	49	755	1,150	41	79	982	5,145	11
20	342	364	70	50	766	1,192	40	80	985	5,671	10
21	358	384	69	51	777	1,235	39	81	988	6,314	9
22	375	404	68	52	788	1,280	38	82	990	7,115	8
23	391	424	67	53	799	1,327	37	83	993	8,144	7
24	407	445	66	54	809	1,376	36	84	995	9,514	6
25	423	466	65	55	819	1,428	35	85	996	11,430	5
26	438	488	64	56	829	1,483	34	86	998	14,3[illegible]	[illegible]
27	454	510	63	57	839	1,540	33	87	999	19,081	[illegible]
28	469	532	62	58	848	1,600	32	88	999	28,636	2
29	485	554	61	59	857	1,664	31	89	1,000	57,290	1
30	500	577	60	60	866	1,732	30	90	1,000	∞	0
—	koosinus	kootangens	kraad	—	koosinus	kootangens	kraad	—	koosinus	kootangens	kraad

Mustemad numbrid on võetud liiaga, et viga oleks vähem kui $\frac{1}{2}$ tuhandikku.

161. Trigonomeetriliste loomulikkude väärtuste tabeli käsitamine. Toodud tabelis on antud nurga siinused, tangensid, koosinused ja kootangensid täiskraadide jaoks. Siinuse ja tangensi nimetused on üleval ja kraadid tulevad võtta vasakult poolt, lugedes ülevalt alla. Koosinuse ja kootangensi nimetused on all ja kraadid tulevad võtta paremalt poolt alt ülespoole lugedes.

Kui antud nurgas esineb ka minuteid, siis tuleb *interpoolida*. Interpoolimine on arvutamine eeldusel, et väikeses vahemikus, meie tabeli jaoks ühe kraadi piirides, funktsiooni kasv on võrdeline põhimuutuja kasvuga. Päris õige see ei ole; kuid meie arvutustes suuremalt jaolt ei teki sellest tunduvat viga. Siiski — tangensi muutumine 75°-st suuremate ja kootangensi muutumine 15°-st vähemate nurkade jaoks on küllalt kiire ja ebaühtlane, nii et võivad tekkida tunduvad vead; erinevused täpsamate arvutuste tulemustest hakkavad ilmuma juba tulemuse kolmandas numbris. Kui tarvis on täpsamaid tulemusi, siis tarvitatakse täpsamaid tabeleid ja logaritme.

Näiteid:	Kirjutatakse:
I. $\sin 26° 48' = ?$	$\sin 26° = 0{,}438$
$\sin 26° = 0{,}438;$	$d = \frac{48 \cdot 16}{60} = 0{,}8 \cdot 16 = 12{,}8$
$\sin 27° = 0{,}454.$ Siit näeme,	$\sin 26° \; 48' = 0{,}451.$

et kui nurk suureneb 1° võrra, siis tema siinus suureneb 16 tuhandiku võrra;
järel. „ „ „ 1′ „ „ „ „ „ $\frac{16}{60}$ „ „
„ „ „ „ 48′ „ „ „ „ „ $\frac{48 \cdot 16}{60}$ „ „

II. $\tan 53° \; 27' = ?$	$\tan 53° = 1{,}327$
$\tan 53° = 1{,}327;$	$d = \frac{27 \cdot 49}{60} = \frac{9 \cdot 49}{20} = \frac{441}{20} \approx 22{,}0$
$\tan 54° = 1{,}376.$ Siit näeme,	$\tan 53° \; 27' = 1{,}349.$

et kui nurk suureneb 1° võrra, siis tema tangens suureneb 49 tuhandiku võrra;
järel. „ „ „ 1′ „ „ „ „ „ $\frac{49}{60}$ „ „
„ „ „ „ 27′ „ „ „ „ „ $\frac{27 \cdot 49}{60}$ „ „

III. $\cos 67° \; 17' = ?$	$\cos 67° = 0{,}391$
$\cos 67° = 0{,}391;$	$d = -\frac{17 \cdot 16}{60} = -\frac{17 \,.\, 8}{30} \approx -4{,}5$
$\cos 68° = 0{,}375.$ Siit näeme,	$\cos 67° \; 17' = 0{,}386$

et kui nurk suureneb 1° võrra, siis tema koosinus väheneb 16 tuhandiku võrra;
järel. „ „ „ $1'$ „ „ „ „ „ $\frac{16}{60}$ „ „
„ „ „ „ $17'$ „ „ „ „ „ $\frac{17 \cdot 16}{60}$ „ „

IV. $\cot 50° 43' = ?$

$\cot 50° = 0{,}839$;

$\cot 51° = 0{,}810$. Siit näeme,

$$\begin{array}{rcr} \cot 50° = & & 0{,}839 \\ d = -\frac{43 \cdot 29}{60} & \approx & -21 \\ \hline \cot 50° 43' = & & 0{,}818 \end{array}$$

et kui nurk suureneb 1° võrra, siis tema kootangens väheneb 29 tuhandiku võrra;
järel. „ „ „ $1'$ „ „ „ „ „ $\frac{29}{60}$ „ „
„ „ „ „ $43'$ „ „ „ „ „ $\frac{43 \cdot 29}{60}$ „ „

Ümberpöördult: Kui nurga leidmiseks antud funktsiooni väärtust ei leidu tabelis, siis tuleb ka interpoolida.

Näiteid. I. $\sin A = 0{,}566$.

Tabelis leiduv lähem vähem siinus on 0,559; temale vastab nurk 34°;
„ „ „ suurem „ „ 0,574; „ „ „ 35°.

Siit näeme, et
kui siinus suureneb 15 tuhandiku võrra, siis nurk suureneb $1° = 60'$ võrra;
järelikult, „ „ „ 7 „ „ „ „ „ $(\frac{7}{15})° = \frac{7}{15} \cdot 60'$ „

Järelikult: $\hat{A} = 34° + (\frac{7}{15})° = 34° 28'$.

Kirjutatakse: $\sin A = 0{,}566$;

$$\begin{array}{lr} & \underline{559} \;.\;.\;.\;.\; 34° \\ \text{tabeli vahe } \underline{d = 15} & 7 \cdot 60' : 15 = \quad 28' \\ \hline & A = 34° 28'. \end{array}$$

II. Samuti arutame ka nurga leidmisel tema tangensi kaudu.

Kirjutatakse: $\tan x = 1{,}847$

$$\begin{array}{lr} \underline{d = 77} & \underline{804} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 61° \\ & 60' \cdot 43 : 77 = 2580' : 77 \approx 34' \\ \hline & x = 61° 34'. \end{array}$$

III. $\cos A = 0,700$.

Tabelis leiduv lähem vähem cos on 0,695; temale vastab nurk 46°;
" " " suurem " " 0,707; " " " 45°.

Siit näeme, et kui koosinus suureneb 12 tuhandiku võrra, siis nurk väheneb 60′ võrra;
järelikult " " " 5 " " " " " $\frac{5 \cdot 60'}{12}$ "

$$\text{Järelikult: } A = 46° - \frac{5 \cdot 60'}{12} = 46° - 25' = 45° \, 35'.$$

Võib arutada ka teisiti:

Näha on,
et kui koosinus väheneb 12 tuhandiku võrra, siis nurk suureneb 1° = 60′ võrra;
järel., " " " 7 " " " " " $(\frac{7}{12}) = \frac{7 \cdot 60'}{12}$ "

$$\text{Järelikult: } A = 45° + 35' = 45° \, 35'.$$

Me kirjutame:

$\cos A = 0,700$; $d = -12$;
Lähem vähem
cos on 0,695; temale vastab 46°.
$60' \cdot 5 : (-12) \ldots -25'$
$A = 45° \, 35'$.

$\cos A = 0,700$; $d = -12$
Lähem suurem cos on 0,707; temale vastab 45°;
$60' \cdot (-7) : (-12) \ldots +35'$
$A = 45° \, 35'$.

IV. Samuti arutame ka nurga leidmisel tema kootangensi kaudu.

$\cot B = 0,765$
$d = -27$ $754 \ldots\ldots 53°$
$60' \cdot 11 : (-27) \ldots -24'$
$B = 52° \, 36'$

$\cot B = 0,765$
$d = -27$ $781 \ldots 52°$
$60' \cdot (-16) : (-27) \ldots +36'$
$B = 52° \, 36'$

Märkus: Logaritmide tabeli käsitamine toimub samal põhimõttel.

Harjutisi. Leida:

sin 17° 42′	cos 9° 43′	tan 2° 41′	cot 3° 36′
sin 68° 26′	cos 38° 52′	tan 27° 51′	cot 21° 27′
sin 1° 34′	cos 64° 28′	tan 53° 17′	cot 47° 23′
sin 82° 19′	cos 85° 45′	tan 85° 40′	cot 78° 37′

Leida nurk antud funktsiooni järele:

$\sin\alpha = 0{,}099$	$\cos\alpha = 0{,}975$	$\tan\alpha = 0{,}200$	$\cot\alpha = 5{,}000$
$\sin\beta = 0{,}400$	$\cos\beta = 0{,}894$	$\tan\beta = 0{,}500$	$\cot\beta = 2{,}500$
$\sin\gamma = 0{,}537$	$\cos\gamma = 0{,}802$	$\tan\gamma = 0{,}852$	$\cot\gamma = 1{,}253$
$\sin\delta = 0{,}728$	$\cos\delta = 0{,}444$	$\tan\delta = 1{,}908$	$\cot\delta = 0{,}708$
$\sin\varphi = 0{,}870$	$\cos\varphi = 0{,}300$	$\tan\varphi = 2{,}958$	$\cot\varphi = 0{,}451$
$\sin\omega = 0{,}939$	$\cos\omega = 0{,}060$	$\tan\omega = 10{,}000$	$\cot\omega = 0{,}097$

162. Ülesandeid 487) Kui kaugel maja alusmüürist asub seinale toetuva 5 m pika redeli alumine ots, kui redel moodustab horisontaalse maapinnaga 57°-lise nurga?

488) Kui kõrgele maja seinal ulatub 4,75 m pikk redel, mis horisontaalse maapinnaga moodustab nurga 62° 30′?

489) Jaanipäeva keskpäeval on päikese kõrgus Võrus 55° 10′. Kui pikk on siis 1,67 m pika inimese vari?

490) 21. detsembril on päikese kõrgus Tallinna vaatepiirilt 7° 4′. Kui kõrge on maja, mille vari siis on 96,9 m pikk?

491) Maja lagi on 6,5 m lai ja laelt katuse harjani on 4,85 m. Kui suure nurga all tõuseb katus?

492) Maja lagi on 7,9 m lai ja katuse sarikad on 6,2 m pikad, millisest pikkusest 20 cm ulatub üle seinte räästa jaoks. Kui järsult tõuseb katus?

493) Ülemiste otstega teineteist vastu toetuvad viljarõugu redelid on 2 m pikad ja alumised otsad maa peal on teineteisest 225 cm kaugel. Kui suure nurga moodustavad teineteisega need redelid?

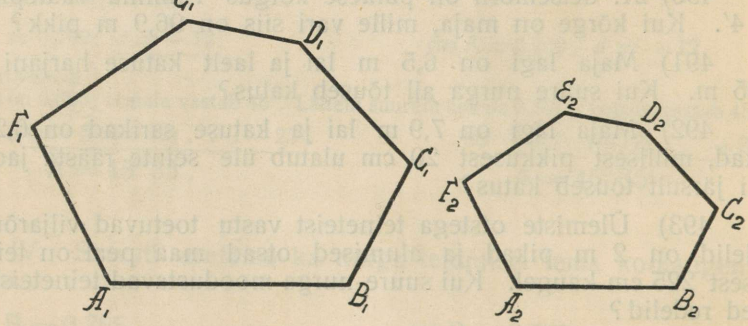
494) Tartu Pauluse kiriku torn on 47,8 m kõrge. Kiriku ukse eest otse üle Riia tänava teisele poole aia äärde on 31,1 m. Kui suure nurga all peab üles Pauluse kiriku tippu, risti otsa, vaatama inimene, kelle pikkus maapinnalt silmadeni on 1,58 m ja kes seisab teisel pool Riia tänavat otse aia ääres?

495) Maja lagi on 6,45 m lai. Kui pikad peavad olema sarikad, mis 18 cm võrra ulatuvad üle seina ääre, et katuse tõus oleks 36°?

496) Rooma ajalookirjanik Pliinius (23—79 p. Kr. s.) teatab, et pööripäeva keskpäeval on Ankoonas püsti seatud teiba vari teibast enesest $\frac{1}{5}$ osa võrra pikem. Arvutada päikese kõrgusnurk Ankoonas pööripäeva keskpäeval! Selle nurga täiend kuni 90°-ni on koha geograafiline laius. Leida Ankoona geograafiline laius!

X-nes peatükk: **Hulknurkade sarnasus.**

163. Sarnasuse mõiste. Harilikus kõnes nim. sarnasteks kaht kujundit, millel on sama kuju, kuid mis erinevad omalt suuruselt, näit. mingi pilt ja tema fotograafiline suurendis.



190. joonis.

Tingimisi tohiks üldiselt õige olla, et sarnastes kujundites on kõik punktid, paarikaupa võetult, ühtmoodi asendatud ja kõik jooned, paarikaupa võetult, võrdkordselt suurendatud või vähendatud.

Definitsioon: Kaht hulknurka nim. sarnasteks, kui nende samas järjekorras võetud nurgad on paarikaupa võrdsed ja võrdsete nurkade lähisküljed on võrdelised.

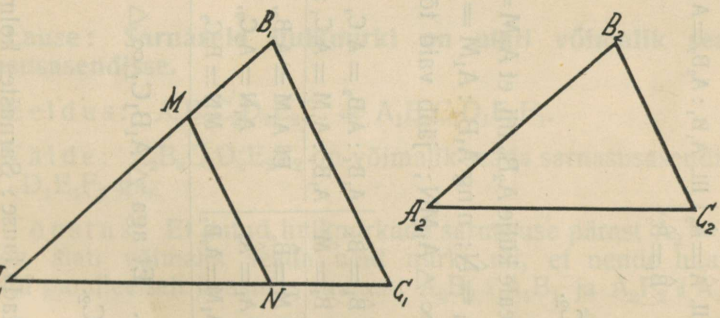
Hulknurkade sarnasuse jaoks on need kaks tunnust olulised ning piisavad. Nagu edaspidi näeme, piisab kolmnurkade sarnasuse jaoks ühestainsast tunnusest.

Sarnastes hulknurkades nim. võrdsete nurkade lähisküIgi *vastavateks*. Kõneldakse: *sarnastes hulknurkades on vastavad küljed võrdelised.* Nende külgede ühist suhet nim. *sarnasusteguriks.* Samuti nim. võrdeliste külgede paaride vahelnurki *vastavateks* ja kõneldakse: *sarnastes hulknurkades on vastavad nurgad isekeskis võrdsed.*

Järeldus: *Korrapärased samanimelised hulknurgad on sarnased.*

164. Kolmnurkade sarnasuslaused: Kaks kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga

1) 2 külge on vastavalt võrdelised teise kolmnurga 2 küljega ja nende külgede vahelnurgad on võrdsed;



191. joonis.

2) 2 nurka on vastavalt võrdsed teise kolmnurga 2 nurgaga;

3) kõik 3 külge on vastavalt võrdelised teise kolmnurga 3 küljega;

4) 2 külge on vastavalt võrdelised teise kolmnurga 2 küljega ja suuremate võrdeliste külgede vastasnurgad on isekeskis võrdsed.

Eeldus:			
I. $A_1B_1 : A_2B_2 = A_1C_1 : A_2C_2$	II. $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$	III. $A_1B_1 : A_2B_2 = A_1C_1 : A_2C_2 = B_1C_1 : B_2C_2$	IV. $A_1B_1 : A_2B_2 = A_1C_1 : A_2C_2$
$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$	$\hat{B}_1 = \hat{B}_2$		$\hat{B}_1 = \hat{B}_2$; kus $A_1C_1 > A_1B_1$
			ja $A_2C_2 > A_2B_2$

Väide: $\triangle A_1B_1C_1 \infty \triangle A_2B_2C_2$.

Tõestus: Asetame külje A_1B_1 peale külje A_2B_2 nii, et $A_1M = A_2B_2$ ja tõmbame $MN \parallel B_1C_1$. Siis leiame, et $\hat{A}_1 = \hat{A}_1$; $\hat{B}_1 = \hat{M}$; $\hat{C}_1 = \hat{N}$; ning $A_1B_1 : A_1M = A_1C_1 : A_1N = B_1C_1 : MN$ I kiirte-lause põhjal. Järelikult $\triangle A_1B_1C_1 \infty \triangle A_1MN$; jääb vaid tõestada, et $\triangle A_1MN \equiv \triangle A_2B_2C_2$.

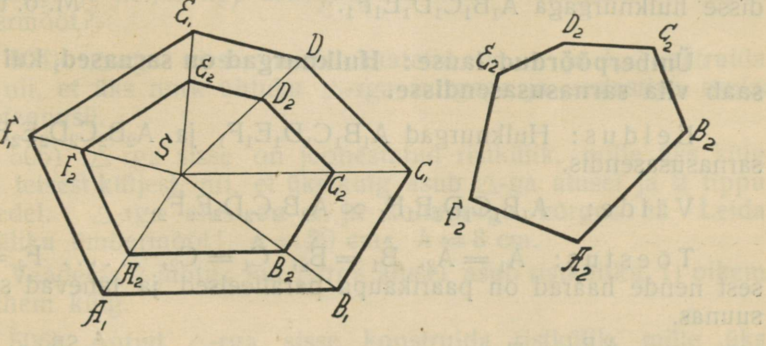
Antud oli:	$A_1B_1 : A_2B_2 = A_1C_1 : A_2C_2$	$\hat{B}_1 = \hat{B}_2$	$A_1B_1 : A_2B_2 = A_1C_1 : A_2C_2 = B_1C_1 : B_2C_2$	$A_1B_1 : A_2B_2 = A_1C_1 : A_2C_2$
Leitud on:	$A_1B_1 : A_1M = A_1C_1 : A_1N$	$\hat{B}_1 = \hat{M}$	$A_1B_1 : A_1M = A_1C_1 : A_1N = B_1C_1 : MN$	$A_1B_1 : A_1M = A_1C_1 : A_1N$
	Et $A_1M = A_2B_2$, siis on ka	$\hat{M} = \hat{B}_2$	Et $A_1M = A_2B_2$, siis on ka	Et $A_1M = A_2B_2$, siis on ka
	$A_1N = A_2C_2$; peale selle	$A_1 = \hat{A}_2$	$A_1N = A_2C_2$, ja	$A_1N = A_2C_2$; peale selle
	$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$	$A_1M = A_2B_2$	$MN = B_2C_2$	$\hat{M} = \hat{B}_1 = \hat{B}_2$

$\triangle A_1MN \equiv \triangle A_2B_2C_2$. Et aga $\triangle A_1B_1C_1 \infty \triangle A_1MN$, siis on ka

$\triangle A_1B_1C_1 \infty \triangle A_2B_2C_2$. M. o. t. t.

Ülesanne. 497) Tõestada lause: Sarnastes kolmnurkades suhtuvad vastavad kõrgused nagu vastavad küljed.

165. Hulknurgad sarnasusasendis. Kaks hulknurka loetakse olevat sarnasusasendis, kui nende küljed on paarikaupa paralleelsed ja vastavate tippude ühendussirged kõik lähevad läbi ühe punkti. Seda punkti nim. *sarnasuspunktiks.*



192. joonis.

Lause: Sarnaseid hulknurki on alati võimalik seada sarnasusasendisse.

Eeldus: $A_2B_2C_2D_2E_2F_2 \sim A_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

Väide: $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ on võimalik seada sarnasusasendisse $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$-ga.

Tõestus: Et antud hulknurkade sarnasuse pärast $\hat{A}_2 = \hat{A}_1$, siis on alati võimalik seada neid nurki nii, et nende haarad lähevad paralleelselt ja samas suunas: $A_2B_2 \parallel A_1B_1$ ja $A_2F_2 \parallel A_1F_1$.

Siis läheb aga ka $B_2C_2 \parallel B_1C_1$, sest et $\hat{B}_2 = \hat{B}_1$;

$C_2D_2 \parallel C_1D_1$, „ „ $\hat{C}_2 = \hat{C}_1$ jne.

Lõikugu ühendussirged A_1A_2 ja B_1B_2 punktis S.

Hulknurkade sarnasuse ja külgede paralleelsuse põhjal suhtub siis

$$SA_1 : SA_2 = A_1B_1 : A_2B_2 = SB_1 : SB_2 = B_1C_1 : B_2C_2.$$

Tõmbame läbi S ja C_2 kiire ja lõikugu see kiir küljega B_1C_1 punktis C.

Siis on $SB_1 : SB_2 = B_1C : B_2C_2$

Enne oli $SB_1 : SB_2 = B_1C_1 : B_2C_2$

Järelikult $\frac{B_1C}{B_2C_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2}$; sellest järgneb, et $B_1C = B_1C_1$.

Käesoleval juhul tähendab see, et kiire SC_2 ja külje B_1C_1 lõikepunkt C langeb ühte tipuga C_1 ehk, et kiir SC_2 läheb ka läbi tipu C_1.

Samuti on võimalik tõestada, et kiir SD_2 läheb läbi tipu D_1 jne.

Järelikult on hulknurk $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ seatud sarnasusasendisse hulknurgaga $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$. M. o. t. t.

Ümberpöördud lause: Hulknurgad on sarnased, kui neid saab viia sarnasusasendisse.

Eeldus: Hulknurgad $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ ja $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ on sarnasusasendis.

Väide: $A_1B_1C_1D_1E_1F_1 \infty A_2B_2C_2D_2E_2F_2$.

Tõestus: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$, $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$, ... $\hat{F}_1 = \hat{F}_2$, sest nende haarad on paarikaupa paralleelsed ja lähevad samas suunas.

Olgu $\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{m}{n}$; siis on I-se kiirte-lause põhjal ka $\frac{SB_1}{SB_2} = \frac{m}{n}$.

Järelikult ka $\frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{m}{n}$, jne.

Nii saame tõestada, et $\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{C_1D_1}{C_2D_2} = \ldots = \frac{F_1A_1}{F_2A_2} = \frac{m}{n}$.

On juba tõestatud, et $\hat{A}_1 = \hat{A}_2, \hat{B}_1 = \hat{B}_2, \hat{C}_1 = \hat{C}_2, \ldots \hat{F}_1 = \hat{F}_2$.

$$A_1B_1C_1D_1E_1F_1 \infty A_2B_2C_2D_2E_2F_2.$$

M. o. t. t.

Ül. 498) Tõestada lause: *Sarnaste hulknurkade ümbermõõdud suhtuvad nagu vastavad küljed.*

166. Ülesandeid. 499) Kolmnurga küljed on 19 cm, 23 cm, 28 cm; tema sarnase teise $\triangle$-rga lühim külg on 2 m 9 cm. Kui pikk on viimase $\triangle$-rga ümbermõõt?

500) Ringile on tõmmatud puutujad diameetri $AB = d$ otsapunktides. Ühe puutuja peal on võetud lõik $AC = a$ ja teise puutuja peal lõik $BD = b$. Kui suurteks osadeks jagab läbi C ja D minev sirge diameetri? Vaadelda 2 juhtu!

$d = 4$ cm; $a = 3{,}5$ cm; $b = 2{,}1$ cm.

501) $\triangle$-rga alus on a ja kõrgus h. Selle $\triangle$-rga sisse on konstruitud ruut, mille külg asub $\triangle$-ga alusel. Kui pikk on ruudu külg? $a = 12$ cm; $h = 8$ cm.

502) Antud △-rga sisse konstruida ruut nii, et ruudu üks külg asuks △-rga alusel.

503) △-rga kaatetid on a ja b. Selle kolmnurga sisse on konstruitud ruut nii, et ruudu 2 külge langevad ühte △-ga külgedega ja neljas tipp asub hüpotenuusil. Kui pikk on ruudu ümbermõõt?

504) △-rga sisse, mille kaatetid on a ja b, konstruida ruut nii, et üks nurk ühtuks △-rga nurgaga ja vastastipp asuks hüpotenuusil.

505) △-rga sisse on joonestatud ristkülik, mille üks külg on $\frac{3}{5}$ teisest küljest, nii, et üks külg asub △-ga alusel ja 2 tippu külgedel. △-rga alus on a ja kolmnurga kõrgus h. Leida ristküliku ümbermõõt! $a = 20$ cm; $h = 8$ cm.

Vaadelda 2 juhtu: kui △-rga alusel asub ristküliku 1) pikem 2) lühem külg.

506) Antud △-rga sisse konstruida ristkülik, mille üks külg on $\frac{3}{5}$ teisest küljest, nii, et üks külg asuks △-rga alusel.

507) △-rga alus on a ja kõrgus h. Selle △-rga sisse on konstruitud ristkülik, mille ümbermõõt on $2\,p$. Kui pikad on selle ristküliku küljed?

508) Antud △-rga sisse konstruida ristkülik, mille ümbermõõdul oleks antud pikkus $2\,p$.

509) △-rga sisse on konstruitud rööpkülik nii, et rööpküliku üks nurk ühtub △-rga ühe nurgaga ja vastastipp asub △-rga vastasküljel. Ühist nurka piiravad △-rga küljed a ja b ja rööpküliku üks külg on teisest d võrra pikem. Kui pikk on rööpküliku ümbermõõt? $a = 12$ cm; $b = 8$ cm; $d = 3$ cm.

510) Antud △-ga sisse konstruida rööpkülik nii, et rööpküliku üks nurk ühtuks △-rga ühe nurgaga ja vastastipp asuks △-ga vastasküljel ja et rööpküliku üks külg oleks teisest küljest sirglõigu d võrra pikem.

511) △-rga ABC küljed on AB = 21 m, BC = 15 m ja CA = 18 m. Külje AB peal on võetud punkt D nii, et BD = 10 m. Punktist D tõmmatud sirge DE lõikab ära △-rga ABC-ga sarnase △-rga DBE, kuid DE ei ole ‖ AC. Leida △-rga DBE küljed!

512) Diagonaal $e = 24$ cm jagab trapetsi kaheks sarnaseks △-rgaks. Pikem alus on $a = 36$ cm. Kui pikk on lühem alus?

513) Võrdhaarse △-rga sisse, mille haar on 25 cm ja alus 20 cm pikk, on joonestatud ring. Kui kaugel on teineteisest haarade puutepunktid ringiga?

514) Ringis raadiusega r on tõmmatud kõõl a. Kui pikk on sellele kõõlule vastava sektori sisse joonestatud ringi raadius? Vastus konstruida!

515) $\triangle$-rga sisse on konstruitud ruut nii, et üks nurk ühtub $\triangle$-rga nurgaga, ja üks tipp asub hüpotenuusil; kaatetite lõigud on e ja f. Kui pikk on ruudu külg? $e = 4$ cm; $f = 9$ cm.

516) $\triangle$-rga sisse on konstruitud ruut nii, et üks külg asub hüpotenuusil ja kummagi kaateti peal on üks tipp. Hüpotenuusi lõigud on m ja n. Kui pikk on ruudu ümbermõõt? $m = 4{,}5$ cm; $n = 2$ cm.

517) Ühe ringi raadius on r_1 ja teise ringi raadius r_2; nende ringide keskpunktide kaugus on $d > r_1 + r_2$. Kui kaugel teineteisest on need punktid, milles kesksirget lõikavad nende ringide ühised puutujad, välimine ja sisemine? Kuidas nim. neid punkte keskpunktide kauguse suhtes?

Arvutustes võtta: $r_1 = 9$ cm; $r_2 = 4$ cm; $d = 19{,}5$ cm.

518) Kaks ringi puutuvad teineteist väljastpoolt. Läbi puutepunkti on tõmmatud sirge, mille lõik kahe ringi vahel on a. Ringide raadiused on r_1 ja r_2. Kui pika kõõlu lõikab kumbki ring sellest sirgest? $a = 18{,}2$ cm; $r_1 = 8$ cm; $r_2 = 6$ cm.

519) Kolm ringi raadiustega $r_1 > r_2 > r_3$ puutuvad üksteist seestpoolt ühes punktis A. Puutepunktist on tõmmatud suurimale ringile kõõl AL $= a$. Kui pikad kõõlud moodustavad AL lõigud vähemates ringides?

$r_1 = 3{,}6$ cm; $r_2 = 3$ cm; $r_3 = 1{,}8$ cm; $a = 4{,}8$ cm.

520) Talukrundi plaan on kaardil 7-nurgeline. Kaardil on külgede pikkused: 17,5 cm; 12 cm; 8,5 cm; 11,5 cm; 10 cm; 8 cm ja 5 cm. Ostja mõõtis ära looduses kõige pikema külje ja leidis tema olevat, kooskõlas kaardil näidatud mõõduga, 700 m pika. Kui pikk on selle talukoha piir ja kui suur on kaardi mõõt?

521) Konstruida hulknurga ABCDE sarnane hulknurk nii, et tema nurk ühtuks nurgaga A ja et sarnasustegur oleks 0,6.

522) Konstruida viisnurga ABCDE sarnane hulknurk nii, et tema sarnasustegur oleks 1,5 ja et tipule E vastav tipp asuks väljaspool ABCDE-d.

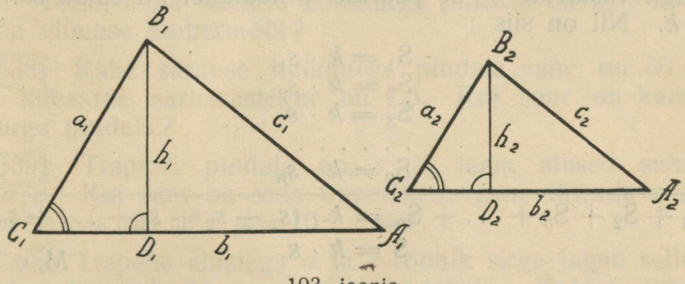
523) Konstruida korrapärane 12-nurgeline hulknurk, mille küljel oleks antud pikkus a.

524) Ristküliku ABCD küljed on AB $= 8$ cm ja BC $= 5$ cm. Kui kaugel tipust B tuleb tõmmata sirge FE, mis lõikab sellest ristkülikust tema saranase?

525) Sirge FE lõikab rööpkülikust ABCD, mille küljed on 64 cm ja 40 cm, tema sarnase. Kui pikad on selle äralõigatud nelinurga küljed, mis ei ole ABCD sarnane?

167. Sarnaste kolmnurkade pindalade suhe. Ülesanne 526) $\triangle$-rga ABC pindala on 468 cm^2 suur. Külg AB on jaotatud 3-ks (6-ks) võrdseks osaks ja läbi jaotuspunktide on tõmmatud rööpjooned AC-ga. Küljel BC tekkinud lõikepunktidest on tõmmatud rööpjooned AB-ga ja punktidest, milles viimased rööpjooned lõikavad AC-d, on tõmmatud rööpjooned BC-ga. Missugusteks ja kui suurteks osadeks jaotavad $\triangle$-rga ABC kõik need rööpjooned?

Lause: Sarnaste kolmnurkade pindalad suhtuvad nagu vastavate külgede ruudud.



193. joonis.

Eeldus: $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$.

Väide: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{b_1^2}{b_2^2} = \frac{c_1^2}{c_2^2}$.

Tõestus: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2} b_1 h_1}{\frac{1}{2} b_2 h_2} = \frac{b_1 \cdot h_1}{b_2 \cdot h_2} = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{h_1}{h_2}$;

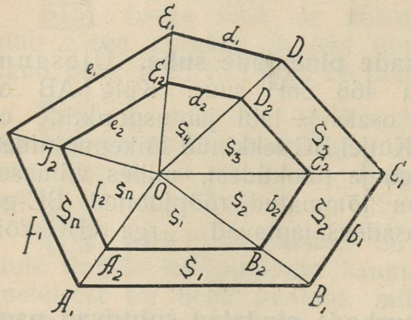
Aga $\triangle B_1C_1D_1 \sim \triangle B_2C_2D_2$, sest et $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ ja $\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 90°$;

järel. $\frac{h_1}{h_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Kõrguste suhte asemele pannes külgede b_1 ja b_2 suhte leiame:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} = \frac{b_1^2}{b_2^2} = \frac{c_1^2}{c_2^2} = \frac{a_1^2}{a_2^2}.$$ M. o. t. t.

168. Lause: Sarnaste hulknurkade pindalad suhtuvad nagu vastavate külgede ruudud.



194. joonis.

T õ e s t u s: Seame antud hulknurgad sarnasusasendisse ja ühendame tipud sarnasuspunktiga O. Siis jaguvad hulknurgad vastavalt sarnasteks kolmnurkade paarideks, mille pindalad suhtuvad nagu vastavate külgede ruudud.

Et vastavad küljed on võrdelised, siis on võrdsed ka vastavate külgede ruutude suhted:

$$\frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{b_1^2}{b_2^2} = \frac{c_1^2}{c_2^2} = \ldots = \frac{f_1^2}{f_2^2} = k,$$

ja kõigil vastavate $\triangle$-de paaride pindaladel on sama sarnasustegur k. Nii on siis

$$\begin{aligned} S_1 &= k \cdot s_1 \\ S_2 &= k \cdot s_2 \\ S_3 &= k \cdot s_3 \\ &\ldots\ldots \\ S_n &= k \cdot s_n \end{aligned}$$

$$S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n = k \cdot (s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_n) \text{ ehk}$$

$$S = k \cdot s.$$

M. o. t. t.

169. Ü l e s a n d e i d. 527) $\triangle$-ga pindala on 1 m². Üks külg on jagatud lõikudeks võrdeliselt arvudega 9, 7 ja 4, tipust arvates, ja läbi jaotuspunktide on tõmmatud rööpjooned alusele. Mitu ruutcm suur on $\triangle$-ga iga osa?

528) $\triangle$-ga külg on jagatud lõikudeks, tipust arvatud, suhtes 5 : 8 : 7 ja läbi jaotuspunktide on tõmmatud rööpjooned alusele. Nii tekkinud alumise trapetsi pindala on ülemise $\triangle$-ga pindalast 824 cm² võrra suurem. Kui suur on terve $\triangle$-ga pindala?

529) $\triangle$-ga (hulknurga) külgi suurendati 3, 4, 5, 7, 9, 10 korda; mitu korda suurenes pindala?

530) Piltpostkaart on 100 korda väiksem kui see kunstiteos, mida ta kujutab. Mitu korda on algupärane maal postkaardist pikem ja laiem, kui neil on sama kuju?

531) Kui suurteks osadeks jagab $\triangle$-rga külje a alusega rööbik sirge, mis $\triangle$-ga pindala poolitab?

532) Kui pikad on need △-rga alusega b rööbikud sirged, mis △-ga pindala 3-ks võrdseks osaks jaotavad?

533) Läbi △-rga raskuspunkti on tõmmatud alusega rööbik sirge. Kui suure osa △-rga pindalast moodustab tekkinud trapetsi pindala?

534) Punktist, mis jagab △-rga külje suhtes $m:n$, on tõmmatud kahe teise küljega rööbikud sirged. Missuguses suhtes jagub seeläbi △-rga pindala kolmeks osaks?

535) Kolmnurgal ja tema sisse joonestatud rombil on ühine nurk. Seda nurka piiravad △-rga küljed suhtuvad nagu $a:b$. Kuidas suhtub rombi pindala △-rga pindalasse? $a = 3$; $b = 2$.

536) Kaardil joonestatud hulknurgelise maa-ala pind on 300 cm^2. Kaardil 1 cm tähendab 10 m looduses. Kui suur on see maa-ala looduses?

537) Hulknurga pindala on 960 m^2; tema ümbermõõt on 146 m. Teise, tema sarnase hulknurga pindala on 21,6 m^2; kui pikk on viimase ümbermõõt?

538) Kahe sarnase hulknurga pindala vahe on 60 m^2 ja nende lineaarne sarnasustegur on 1,5. Kui suur on kummagi hulknurga pindala?

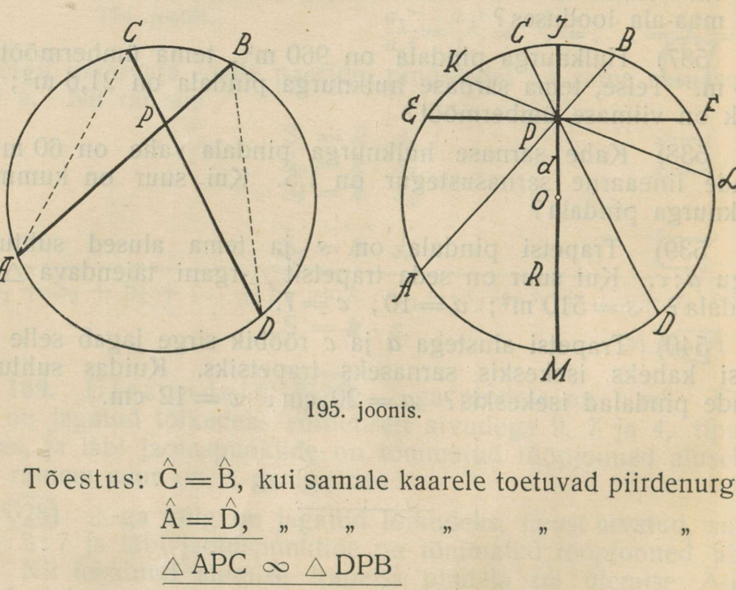
539) Trapetsi pindala on s ja tema alused suhtuvad nagu $a:c$. Kui suur on seda trapetsit △-rgani täiendava △-rga pindala? $s = 510$ m^2; $a = 10$; $c = 7$.

540) Trapetsi alustega a ja c rööbik sirge jagab selle trapetsi kaheks isekeskis sarnaseks trapetsiks. Kuidas suhtuvad nende pindalad isekeskis? $a = 20$ cm; $c = 12$ cm.

XI-nes peatükk: Teine kiirte-lause.

170. Lause: Lõikuvad kõõlud jaguvad lõikepunktis pöördvõrdelisteks osadeks, ehk:

Ringis lõikuvad kõõlud ~~jaguvad lõikepunktis~~ nii, et ühe kõõlu lõikude korrutis ~~on sama suur kui teise kõõlu~~ lõikude korrutis. võrdub teise kõõlu lõikude korrutis



195. joonis.

Tõestus: $\hat{C} = \hat{B}$, kui samale kaarele toetuvad piirdenurgad;

$\hat{A} = \hat{D}$, „ „ „ „ „

$\triangle APC \sim \triangle DPB$

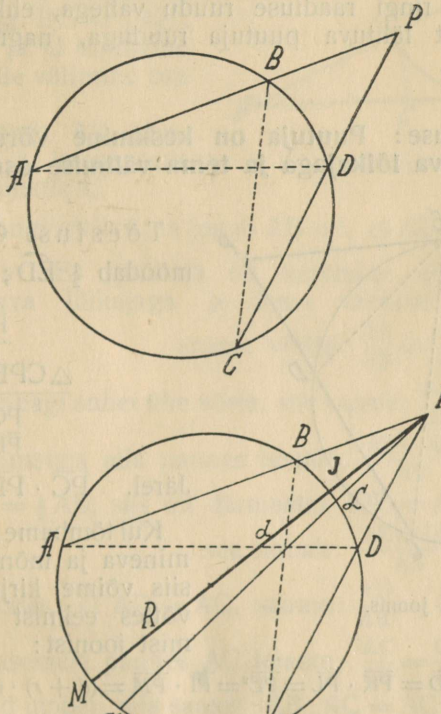
$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$; siit leiame, et $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$.

Samuti võime ka ütelda, et (vt. parempoolne joonis)

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD} = \overline{PK} \cdot \overline{PL} = \overline{PE} \cdot \overline{PF} = \overline{PE}^2 = \overline{PJ} \cdot \overline{PM} = (R - d) \cdot (R + d) = R^2 - d^2$$

See korrutis on ringis antud punktile jääv suurus; ta võrdub nimelt selle ringi raadiuse ruudu ja selle punkti keskpunktist arvatud kauguse ruudu vahega; ehk ta võrdub selle poole kõõlu ruuduga, mis on risti diameetriga selles punktis.

171. **Lause: Ühest punktist lähtuvad ringi lõikajad on pöördvõrdelised oma välimiste osadega,** ehk: **kui ühest punktist lähtuvad mitu sama ringi lõikajat, siis on ühe lõikaja korrutis oma välimise osaga sama suur kui teise lõikaja korrutis tema välimise osaga.**



196. joonis.

T õ e s t u s: $\hat{A} = \hat{C}$ kui samale kaarele toetuvad piirdenurgad;

$$\hat{P} = \hat{P};$$

$$\triangle APD \sim \triangle CPB;$$

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}.$$ Siit leiame:

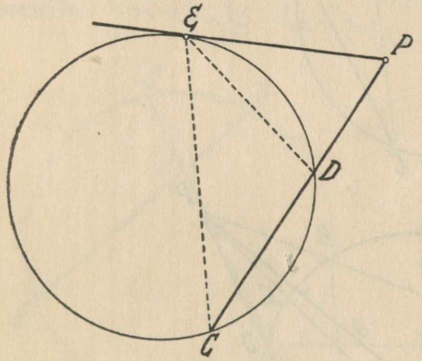
$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}.$$

Samuti võime ka ütelda, et

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD} = \overline{PK} \cdot \overline{PL} = \overline{PM} \cdot \overline{PJ} = (d + R) \cdot (d - R) = d^2 - R^2.$$

S. t. et ka see korrutis on antud ringile ja antud punktile jääv suurus; ta võrdub nimelt selle punkti keskpunktist arvatud kauguse ruudu ja ringi raadiuse ruudu vahega, ehk — ta võrdub sellest punktist lähtuva puutuja ruuduga, nagu seda tõestab järgmine lause.

172. Lause: Puutuja on keskmine võrdeline samast punktist lähtuva lõikajaga ja tema välimise osaga.



197. joonis.

Tõestus: $\hat{C} = \widehat{DEP}$, neid mõõdab $\frac{1}{2}\ \overset{\frown}{ED}$;

$$\hat{P} = \hat{P}$$

$$\triangle CPE \sim \triangle EPD$$

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{PE}}{\overline{PD}}.$$

Järel. $\overline{PC} \cdot \overline{PD} = \overline{PE}^2$.

Kui tõmbame läbi keskpunkti mineva ja mõne teise lõikaja, siis võime kirjutada, arvesse võttes eelmist lauset ja eelmist joonist:

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD} = \overline{PK} \cdot \overline{PL} = \overline{PE}^2 = \overline{PI} \cdot \overline{PM} = (d + r) \cdot (d - r) = d^2 - r^2.$$

Kõik kolm lauset võtame kokku üheks lauseks, mida nim. teiseks **kiirte-lauseks: Ringjoon lõikab kimbu kiired osadeks nii, et ühe kiire lõikude korrutis, arvatud kimbu tipust kuni lõikepunktini, on sama suur kui teise kiire lõikude korrutis ja võrdub nimelt selle punkti keskpunktist arvatud kauguse ruudu ja ringi raadiuse ruudu vahega.**

173. Kuldlõige. Ülesanne 541) **Antud sirglõik jagada kaheks nii, et suurem osa oleks keskmine võrdeline kogu sirglõigu ja tema vähema osaga.**

[Teiste sõnadega: Antud sirglõik jagada ahelvõrdeliselt.] Niisugust jagamist nim. **kuldlõikeks.**

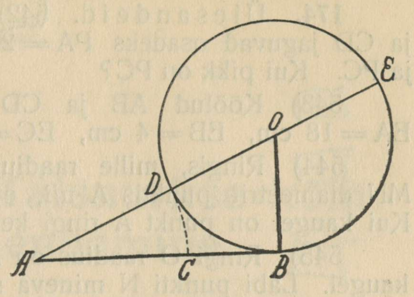
L a h e n d u s: 1) Antud sirglõigu otsapunktis tõmbame temale ristjoone $BO \perp AB$;

2) selle ristjoone peale asetame $BO = \frac{1}{2} AB$;

3) punktist O tõmbame ringi raadiusega $BO = \frac{1}{2} AB$;

4) läbi A ja O tõmbame lõikaja AE, mille välimine osa on AD;

5) raadiusega AD tõmbame punktist A kaare, mis AB-d lõikab punktis C.



198. joonis.

Punkt C ongi otsitav; ta jagab AB nii, et $AB : AC = AC : CB$.

T õ e s t u s: Et „puutuja on keskmine võrdeline samast punktist lähtuva lõikajaga ja tema välimise osaga", siis

saame võrde: $\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AD}$;

vähendame kumbagi suhet ühe võrra, siis saame: $\frac{AE}{AB} - 1 = \frac{AB}{AD} - 1$;

ühise nimetaja alla pannes leiame: $\frac{AE - AB}{AB} = \frac{AB - AD}{AD}$;

et raadius $OB = \frac{1}{2} AB$, siis on diameeter $DE = AB$;

see annab: $\frac{AE - DE}{AB} = \frac{AB - AD}{AD}$;

veel arvesse võttes, et $AD = AC$, saame: $\frac{AD}{AB} = \frac{AB - AC}{AD}$;

AD asemele pannes AC leiame: $\frac{AC}{AB} = \frac{CB}{AC}$;

pöörame suhted ümber, siis saame: $AB : AC = AC : CB$. M. o. t. t.

A l g e b r a l i n e a r v u t u s: Olgu antud sirglõigu pikkus a ja tema otsitav suurem osa x, siis saame võrde: $\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x}$.

Siit leiame võrde peaomaduse põhjal: $x^2 = a^2 - ax$;

see annab meile ruutvõrrandi: $x^2 + ax - a^2 = 0$;

selle võrrandi lahendid on: $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$;

negatiivset juurt kõrvale jättes leiame, et: $x = -\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cdot \sqrt{5}$

ehk: $x = a . \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0{,}618\, a$.

174. Ülesandeid. 542) Punktis P lõikuvad kõõlud AB ja CD jaguvad osadeks PA = 20 cm, PB = 6 cm, PD = 7,5 cm ja PC. Kui pikk on PC?

543) Kõõlud AB ja CD lõikuvad punktis E nii, et EA = 18 cm, EB = 4 cm, EC = 12 cm. Kui pikk on CD?

544) Ringis, mille raadius on 32 cm pikk, lõikab kõõl MN diameetrit punktis A nii, et AM = 20 cm ja AN = 12 cm. Kui kaugel on punkt A ringi keskpunktist?

545) Ringi O raadius on r ja punkt N on keskpunktist d kaugel. Läbi punkti N mineva sirge s jagab ring lõikudeks NA ja NB nii, et NA on $2\frac{1}{4}$ korda nii pikk kui NB. Kui pikk on NA? $r = 21$ cm; $d = 29$ cm.

546) Punkti A suurim kaugus ringist on a_1 ja lühim kaugus ringist on a_2. Kui pikk on punktist A sellele ringile tõmmatud puutuja? $a_1 = 18$ cm; $a_2 = 8$ cm.

547) Punktist A lähtuv kiir s_1 lõikab ringi punktides B ja C nii, et AB = 14 cm ja BC = 16 cm ja kiir s_2 — punktides D ja E nii, et AD = 15 cm. Kui pikk on DE?

548) Punktist A lähtuva kolme lõikaja välimised lõigud suhtuvad isekeskis nagu 1 : 2 : 3; lühim lõikaja on 18 cm pikk. Kui pikad on teised lõikajad?

549) Võrdhaarse △-rga alus on sama pikk kui kõrgus; selle △-rga ümber joonestatud ringi raadius on r. Leida △-rga pindala! $r = 10$ cm.

550) Ringi diameeter AB = 32 cm on jagatud 8-ks võrdseks osaks. Keskmisest jaotuspunktist on tõmmatud ristjoon sellele diameetrile kuni lõikumiseni ringiga. Läbi lõikepunkti ja ja esimese ja viimase jaotuspunkti on joonestatud ring. Kui pikk on selle ringi raadius?

551) Sirglõikude abil tõestada, et kahe arvu keskmine geomeetriline on vähem kui nende arvude keskmine aritmeetiline!

552) 50 cm pikkune sirglõik on jagatud kuldlõikel. Kui pikk on kumbki lõik täpsalt kuni 1 mm?

553) Kirjutuslaua ümbermõõt on 5 m ja tema mõõted on valitud kuldlõikelised. Kui pikk ja kui lai on see laud? (Täpsalt kuni 1 cm.)

554) Kui palju on tarvis pikendada kõõlu a, et pikenduse otsapunktist lähtuv puutuja võrduks selle kõõluga? $a = 1,5$ m.

555) Küünarnukk jagab kuldlõikel inimese käe, arvatud sõrmeotsadest kuni õlani. Mitu cm pikk on selle inimese küünar, kelle käsi õlast kuni sõrmeotsadeni on 86 cm pikk?

XII-nes peatükk: Täisnurkse kolmnurga lahendamine.

a) Trigonomeetriline lahendamine.

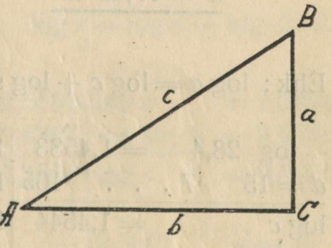
175. Täisnurkse kolmnurga trigonomeetrilised valemid.

Definitsioonidest	järgneb:	Samuti leiame:
$\sin A = \frac{a}{c}$	$a = c \cdot \sin A$ I	$b = c \cdot \sin B$ I
$\cos A = \frac{b}{c}$	$b = c \cdot \cos A$ II	$a = c \cdot \cos B$ II
$\tan A = \frac{a}{b}$	$a = b \cdot \tan A$ III	$b = a \cdot \tan B$ III
$\cot A = \frac{b}{a}$	$b = a \cdot \cot A$ IV	$a = b \cdot \cot B$ IV

Sõnades väljendatult:

I ja II — *Kaatet võrdub hüpotenuusi ja oma vastasnurga siinuse ehk lähisnurga koosinuse korrutisega.*

III ja IV — *Kaatet võrdub teise kaateti ja oma vastasnurga tangensi ehk lähisnurga kootangensi korrutisega.*



199. joonis.

176. Täisnurkse kolmnurga lahendamine. (Joonis 199.) Kolmnurgal on 6 põhielementi — 3 külge ja 3 nurka. Kolmnurka lahendada tähendab antud elementide abil määrata tundmatud elemendid.

Täisnurkse kolmnurga lahendamisel esineb 4 põhijuhtu.

I-ne juht. Antud on hüpotenuus c ja üks teravnurk. Leida teine teravnurk ja kaatetid.

Antud: $c = 28{,}47$ m; $A = 37°42'$. Leida: B, a, b.

Lahendus: 1) $B = 90° - A$; $B = 90° - 37°42'$; $\underline{\underline{B = 52°18'}}$.

2) $a = c \cdot \sin A$

$a = 28{,}47 \cdot \sin 37°42'$

$\sin 37° = 0{,}602$

$d = \frac{14 \cdot 42}{60} = \frac{14 \cdot 7}{10} \ldots +98$

$\sin 37°42' = 0{,}612$

$$\begin{array}{r|l} 28{,}47 & \\ 21\,60 & \\ \hline 17\,08 & 2 \\ 28 & 4 \\ 5 & 6 \\ \hline a = 17{,}42 & 2 \end{array}$$

$\underline{\underline{a = 17{,}42 \text{ m.}}}$

3) $b = c \cdot \sin B$

$b = 28{,}47 \cdot \sin 52°18'$

$\sin 52° = 0{,}788$

$d = \frac{11 \cdot 18}{60} = \frac{11 \cdot 3}{10} \ldots +33$

$\sin 52°18' = 0{,}791.$

$$\begin{array}{r|l} 28{,}47 & \\ 19\,70 & \\ \hline 19\,92 & 9 \\ 2\,56 & 2 \\ 2 & 8 \\ \hline b = 22{,}51 & 9 \end{array}$$

$\underline{\underline{b = 22{,}52 \text{ m.}}}$

Ehk: $\log a = \log c + \log \sin A$ $\qquad$ $\log b = \log c + \log \sin B$.

$\log 28{,}4 = 1{,}4533$	$\log c = 1{,}4544$	$\log c = 1{,}4544$
$d = 15 \quad 7 \ldots 105$	$\log \sin A = 9{,}7864$	$\log \sin B = 9{,}8983$
$\log c = 1{,}4544$	$\log a = 1{,}2408$	$\log b = 1{,}3527$
$\log \sin 37°40' = 9{,}7861$	$1{,}2408$	$1{,}3527$
$d = 16 \quad 2' \ldots 32$	$2405 \ldots 174$	$3522 \ldots 225$
$\log \sin A = 9{,}7864$	$d = 25 \quad 30:25 \ldots 1$	$d = 19 \quad 50:19 \ldots 3$
$\log \sin 52°10' = 9{,}8975$		
$d = 10 \quad 8' \ldots 8$	$\underline{\underline{a = 17{,}41 \text{ m.}}}$	$\underline{\underline{b = 22{,}53 \text{ m.}}}$
$\log \sin B = 9{,}8983$		

II-ne juht. Antud on kaatet ja teravnurk. Leida teine teravnurk, teine kaatet ja hüpotenuus.

Antud: $a = 327{,}5$ m; $B = 25°37'$. Leida: A, b, c.

Lahendus: 1) $A = 90° - B$; $A = 90° - 25°37'$; $\underline{A = 64°23'}$.

2) $b = a \cdot \tan B$

$b = 327{,}5 \cdot \tan 25°37'$

$\tan 25° = 0{,}466$

$d = \frac{37 \cdot 22}{60} = \frac{37 \cdot 11}{30} = \frac{407}{30} \ldots + 14$

$\tan B = 0{,}480$

327,5	
0840	
1310	0
262	0
b = 157,2	

3) $a = c \cdot \sin A$

$c = \frac{a}{\sin A}$.

$c = 327{,}5 : \sin 64°23'$

$\sin 64° = 0{,}899$

$d = \frac{23 \cdot 7}{60} = \frac{161}{60} \ldots + 27$

$\sin A = 0{,}902$

327,5	0,902
2706	363,1
569	
541	$c = 363{,}1$ m.
28	

Ehk: $\log b = \log a + \log \tan B$ $\qquad \log c = \log a - \log \sin A$

log 327, = 2,5145	$\log a$ = 2,5152	$\log a$ = 2,5152
$d = 14$ 5 70	log tan B = 9,6807	log sin A = 9,9551
$\log a$ = 2,5152	$\log b$ = 2,1959	$\log c$ = 2,5601
log tan 25°30′ = 9,6785	2,1959	2,5601 $d = 12$
$d = 32$ 7′ . . . 224	1959 157	5599 . . . 363
log tan B = 9,6807		20 : 12 . . . 2
	b = 157,0 m.	
log sin 64°20′ = 9,9549		c = 363,2 m.
$d = 6$ 3′ 18		
log sin A = 9,9551		

III-as juht. Antud on hüpotenuus ja kaatet. Leida teine kaatet ja nurgad.

Antud: $c = 81{,}82$ m; $b = 38{,}56$ m. Leida: B, A, a.

Lahendus: 1) $\sin B = \frac{b}{c}$

$$\sin B = \frac{38{,}56}{81{,}82}$$

38,56	81,82
32 73	0,471 $\quad d = 16$
583	469 . . . . 28°
573	60′ · 2 : 16 . . . . 8′
10	$B = 28°08'$

2) $A = 61°52'$

3) $a = c \cdot \sin A$

$$a = 81{,}82 \cdot \sin 61°52'$$

$\sin 61° = 0{,}875$

$d = \frac{52 \cdot 8}{60} = \frac{408}{60} \approx +7$

$\sin 61°52' = 0{,}882$

81,82	
2880	
6545	6
654	5
16	4
72,16	5

$a = 72{,}17$ m.

Ehk: $\log \sin B = \log b - \log c$ $\qquad \log a = \log c + \log \sin A$

$\log 38{,}5 = 1{,}5855$
$d = 11 \quad 6 \ldots . 66$
$\log b = 1{,}5862$

$\log 81{,}8 = 1{,}9128$
$d = 5 \quad 2 \ldots . 10$
$\log c = 1{,}9129$

$\log \sin 61°50' = 9{,}9453$
$d = 6 \quad 3' \ldots . 18$
$\log \sin A = 9{,}9455$

$\log b = 1{,}5862$
$\log c = 1{,}9129$
$\log \sin B = 9{,}6733$

9,6733
6716 ... 28° 0′
$d = 24$ 170 : 24 ... 7′

$B = 28°07'$

$A = 61°53'$

$\log c = 1{,}9129$
$\log \sin A = 9{,}9455$
$\log a = 1{,}8584$

1,8584
8579 ... 721
$d = 6$ 50 : 6 ... 8

$a = 72{,}18$

Märkus. Võib ka arvutada: $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(c+b)(c-b)}$.

IV-as juht. Antud on kaatetid. Leida nurgad ja hüpotenuus.

Antud: $a = 54,7$ m; $b = 39,65$ m. Leida: A, B, c.

Lahendus: 1) $\tan A = \frac{a}{b}$ 3) $a = c \cdot \sin A$

$$\tan A = \frac{54,70}{39,65} \qquad c = \frac{a}{\sin A} = \frac{54,70}{\sin 54°3'}$$

$\sin 54° = 0,809$

$d = \frac{4 \cdot 10}{60} = 0,7 \ldots 7$

$\sin A = 0,810$

5470	3965	
3965	1,380	$d = 52$
1505	1,376 .... 54°	
1189	60'·3 : 52 .... 4'	
316	A = 54°04'.	
317		
0		

2) B = 35°56'.

54,70	0,810
4860	67,54
610	$c \approx 67,54$ m.
567	
43	
40	
3	

Ehk: $\log \tan A = \log a - \log b$ $\qquad \log c = \log a - \log \sin A$

log 54,7	= 1,7380
log 39,6	= 1,5977
$d = 11$ 5	55
$\log b$	= 1,5983
log sin 54° 0'	= 9,9080
$d = 9$ 4'	36
log sin A	= 9,9084

$\log a$	= 1,7380
$\log b$	= 1,5983
log tan A	= 0,1397

0,1397
1387 ... 54°0'
$d = 27$ 100 : 27 ... 4'

A = 54°04'

2) B = 35°56'

$\log a$	= 1,7380
log sin A	= 9,9084
$\log c$	= 1,8296

1,8296
8293 ... 675
$d = 6$ 30 : 6 ... 5

c = 67,55 m.

Ülesanne 556) Harjutisi.

I. a) $c = 6$ m; $B = 38^\circ$
b) $c = 23$ cm; $A = 70^\circ$
c) $c = 72{,}5$ cm; $B = 41^\circ 24'$
d) $c = 1284$ m; $B = 23^\circ 27'$
e) $c = 289{,}4$ m; $A = 63^\circ 17'$
f) $c = 718{,}6$ m; $A = 74^\circ 48'$
g) $c = 58{,}27$ m; $B = 35^\circ 39'$
h) $c = 34{,}96$ m; $A = 68^\circ 16'$

II. a) $a = 34$ cm; $A = 65^\circ$
b) $b = 506$ cm; $A = 32^\circ 40'$
c) $a = 71{,}4$ cm; $B = 28^\circ 37'$
d) $b = 834{,}5$ m; $B = 71^\circ 15'$
e) $a = 147{,}5$ cm; $A = 51^\circ 27'$
f) $b = 28{,}94$ m; $B = 29^\circ 57'$
g) $a = 5182$ m; $B = 81^\circ 45'$
h) $b = 63{,}25$ m; $A = 63^\circ 25'$

III. a) $c = 25$ cm; $a = 24$ cm
b) $c = 1{,}7$ cm; $b = 0{,}8$ cm
c) $c = 912{,}5$ m; $a = 471$ m
d) $c = 11{,}16$ m; $b = 3{,}72$ m
e) $c = 195{,}4$ cm; $a = 108{,}3$ cm
f) $c = 3585$ m; $b = 2151$ m
g) $c = 84{,}15$ m; $b = 57{,}63$ m
h) $c = 236{,}7$ m; $a = 157{,}5$ m.

IV. a) $a = 24$ cm; $b = 7$ cm
b) $b = 12{,}56$ m; $a = 9{,}42$ m
c) $a = 19{,}08$ m; $b = 28{,}12$ m
d) $b = 18{,}94$ m; $a = 42{,}58$ m
e) $a = 583{,}4$ cm; $b = 378{,}6$ cm
f) $a = 29{,}58$ m; $b = 16{,}85$ m
g) $a = 419{,}3$ cm; $b = 678{,}2$ cm
h) $b = 18{,}78$ m; $a = 29{,}5$ m.

177. Ülesandeid. 557) Maakera raadiuse võime võtta võrdseks 6370 km. Tallinna geograafiline laius on $59^\circ 26'$. Millise tunnikiirusega pöörleb Kalevi hauaküngas maakera telje ümber?

558) Rooma linna geograafiline laius on $41^\circ 54'$ ja maakera raadiuse pikkuseks võime võtta 6370 km. Millise minutikiirusega pöörleb Rooma linn maakera telje ümber?

559) Tung 75 kg lahutada kaheks täisnurga all mõjuvaks komponendiks nii, et üks tung moodustaks antud resultandi suunaga $29^\circ 18'$ suure nurga.

560) 98,28 kg-line tung tuleb lahutada kaheks komponendiks, millest üks moodustab resultandiga nurga $47^\circ 25'$ ja teine nurga $42^\circ 35'$! Kui suured on need komponendid?

561) Ala-Rõugest Rõuge kiriku juurde viiv tee on peaaegu sirgjooneline; ta on 1,15 km pikk ja tõuseb $2^\circ 20'$ võrra. Kui palju kõrgemal Ala-Rõugest asub Rõuge kirik.

562) Raudtee muldkeha kaldkülg on 4,27 m pikk ja tema tõusunurk on $32^\circ 24'$! Kui kõrge on see muldkeha ja kui palju on ta alt laiem kui pealt?

563) Kadrioru ülemise tuletorni tipp on merepinnast 78,64 meetrit kõrgemal. Ta paistab mootorpaadilt $\alpha = 1^\circ 20'$ nurga all. Kui kaugel on see mootorpaat tuletorni kohalt? Vastus anda peenelt kuni 0,01 km.

[Tahkuna tuletorni kõrgus $h = 43{,}4$ m; $\alpha = 0^\circ 50'$]

564) Merekindluse tornkauguse mõõtja kõrgus merepinnast on 158,5 m. Vaatekiir merel olevale laevale moodustab vertikaaljoonega torni tipust nurga $\alpha = 89° 40'$. Leida laeva kaugus tornist.

565) Auriku komandosillalt oli näha kalurite vene alanemisnurgas $1° 10'$. Komandosilla kõrgus auriku veeliinilt on 8,5 m. Kui kaugel aurikust oli vene?

566) Jõe laiuse määramiseks valitakse jõe ühel kaldal otse vee ääres baas $AB = a$ nii, et siht punktist A jõe teisel kaldal otse vee ääres kasvavale puule oleks risti baasiga AB; siis mõõdetakse nurk ABC baasi AB ja sihi BC vahel. Olgu $\widehat{ABC} = \beta = 52° 25'$ ja $AB = a = 42$ m; arvutada jõe laius!

567) Teodoliidi (nurga mõõtmisriist) vaateväljale ilmus lennuk, kui teodoliit näitas kõrgusnurka 76°. Punkt, mille kohal sel momendil asus lennuk, oli teodoliidi asukohast 500 m kaugel. Kui kõrgel lendas lennuk vaatlusmomendil?

568) Mäetipp asub 90 m kõrgemal kui torni alus; torni kõrgus on 19 m. Torni tipp on mäetipult näha alanemisnurgas $3° 40'$. Määrata rõhtus kaugus mäejala ja torni aluse keskpunktide vahel!

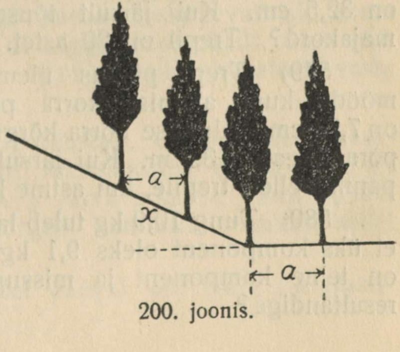
569) Lennukilt oli näha inimeste kogu jääpangal $4° 17'$-lises alanemisnurgas. Lennuki kõrgus merepinnalt oli 3000 m. Kui kaugel oli see jääpank lennuki asukoha projektsioonist merepinnale.

570) 80 m kõrge torni tipp paistab maja aknas asuvas vaatluspunktist, mis torni aluse tasapinnast on 5,6 m kõrgemal, kõrgusnurgas $\alpha = 21° 48'$. Kui kaugel on torn majast ja kui kaugel torni tipp vaatleja silmast?

571) Kuivatusrehte viiv sild tõuseb rõhtsalt maapinnalt $8° 40'$ võrra ja tema alumine ots on seinast 9,5 m kaugel. Kui pikk on see sild?

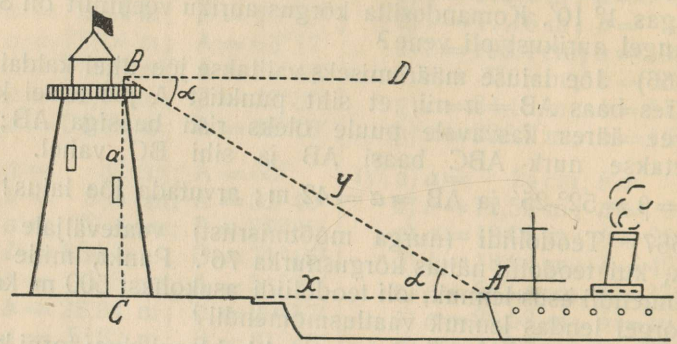
572) Maja kolmanda korra aken on maapinnast 8,25 m kõrgel. Kui pikk redel ulatub maapinnalt akna ääreni, moodustades rõhtsa maapinnaga nurga $57° 49'$? Kui kaugel seinast asub redeli alumine ots?

573) Viljapuuaed on rajatud tasasele pinnale ning järsule kaldanõlvakule. Tasasele maale kavatseti istutada viljapuid üksteisest 5,6 m kaugusele. Kui kaugele üksteisest kalda tõusu suunas tulevad puud istutada kalda nõlvakule, mille tõus on 29°, et kasvamisel puude vahemikud oleksid ikkagi võrdsed 5,6 m?



200. joonis.

574) Tuletorni tuli asub torni jalalt 27,4 m kõrgel. Tule juurest on nähä laev alanemisnurgas 14° 18′. Kui kaugel on laev tuletorni jalast ja kui kaugel tulest, kui arvata, et torni jalg (alus) ja laevalagi asuvad samal tasapinnal.



201. joonis.

575) Laevalagi ja tuletorni jalg asuvad samal rõhtsal tasapinnal. Nurk, mille moodustab rõhtsa tasapinnaga vaatekiir laevalaelt tuletorni tulele (kõrgusnurk) ehk vaatekiir tuletorni tule juurest laevalaele (alanemisnurk), on α ja laeva kaugus tuletornist on d. Kui kõrge on tuletorn ja kui kaugel vaatepunktist asub tuli? $d = 247$ m; $\alpha = 6° 15'$.

576) Seina külge riputatud 60 cm kõrge pildi ülemine äär on seinast 15 cm eemal. Kui suured nurgad moodustab see pilt seinaga ja horisontaalse tasapinnaga?

577) Mees veab venega jalakäijaid üle jõe. Jõe voolukiirus on 2,4 km tunnis ja mehe sõudekiirus on 4 km tunnis. Millises suunas peab ta sõudma, et vene läheks otse risti üle jõe?

578) Alumiselt korralt ülemisele korrale viiva trepi astme kasulik laius on 28,25 cm ja astmete äärte vaheline kaugus on 32,5 cm. Kui järsult tõuseb trepp ja kui kõrge on see majakord? Trepil on 20 astet.

579) Trepi pikkus ülemise astme äärest astmete servi mööda kuni alumise korra põrandani, sirgjoones arvestatud, on 7,73 cm. Alumise korra kõrgus ühes tema lae ja ülemise korra põrandaga on 3,6 m. Kui järsult tõuseb trepp ja mitu astet saab panna sellele trepile, kui astme kasulikuks laiuseks võtta 28,5 cm.

580) Tung 10,9 kg tuleb lahutada kaheks komponendiks nii, et üks komponent oleks 9,1 kg ja teine temaga risti. Kui suur on teine komponent ja missugused nurgad moodustavad nad resultandiga?

581) Suurim kõrgus, milleni on suutnud tõusta inimene maapinnalt (prof. Piccard, 29. mail 1931), on 16 km. Võttes Maad kerana, mille raadius on 6370 km, arvutada, kui suures nurgas paistab maakera sellelt kõrguselt ja kui suur on sellel kõrgusel vaateringi raadius, milleks lugeda meridiaani vastav kaar.

582) Teelusikas mahub teeklaasi 106 mm pikkuselt. Teeklaasi põhja läbimõõt seestpoolt on 60 mm. Valguse murdumine tõstab teeveega ääreni täidetud klaasis lusikat 23° 37′ võrra. Kui suure nurga näikse moodustavat klaasi pandud teelusikas teeklaasi vertikaalse seinaga ja kui suure nurga horisontaalse põhjaga?

583) 8 m kõrge müür andis kuuvalgel ööl 7 m pika varju. Kui kõrgel oli kuu taevavõlvil?

584) 15 m kõrge puu vari on 13,76 m pikk. Kui kõrgel on päike vaatepiirilt?

585) Narva-Jõesuu tuletorni kõrgus on 22,8 m; kalurite vene on tuletornist 450 m kaugel. Kui suures kõrgusnurgas paistab venest tuletorni tipp?

586) Oleviste kirikutorni tipp asub merepinnast 150 m kõrgemal. Oleviste kiriku juurest kuni mereranna lähemasse punkti vee juurde on 500 m. Kui suures kõrgusnurgas paistab Oleviste kirikutorni tipp lähimast mererannast?

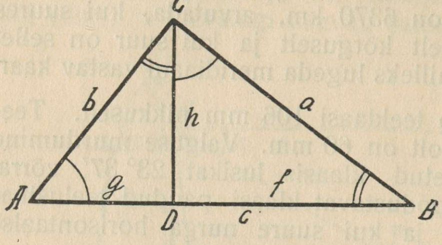
587) Ontika järsk paekallas on 50 m kõrge, merepinnast arvatud. Kalda servast linguga suutis poiss visata kivi merevette. Poisi parim viskekaugus linguga on 110 m. Kui suures vaatenurgas paistab vee äärest Ontika kallas?

588) Hiina keiser Ču-Kong (a. 1100 e. Kr.) olla leidnud, et pikima päeva keskpäeval oli 8 mõõtühikut pika varva vari 1,54 mõõtühikut pikk, ja lühima päeva keskpäeval oli sama varva vari 13,12 mõõtühikut. Kui kõrgel vaatepiirilt seisis päikene neil päevil ja kui suur on ekliptika kalle ekvaatorit vastu (nende kõrguste poolvahe)?

589) Pliinius (23—79 p. Kr.) jutustab, et pööripäeva keskpäeval olla püsti seatud varva vari Aleksandrias olnud pool nii pikk kui varb ise, Roomas aga $\frac{1}{9}$ varva pikkuse võrra lühem kui varb. Määrata päikese kõrgus kummaski linnas sellel päeval!

Päikese kõrguse täiend sellel päeval on koha geograafiline laius.

b) Geomeetriline lahendamine.



202. joonis.

178. Lause: Kaatet on keskmine võrdeline kogu hüpotenuusi ja oma projektsiooniga hüpotenuusile.

Tõestus: (Tähistused näha joonisel.)

I. $a = c \cdot \cos B$ $\qquad$ $b = c \cdot \cos A$

$a^2 = a \cdot c \cdot \cos B$ $\qquad$ $b^2 = b \cdot c \cdot \cos A$

$a^2 = c \cdot (a \cdot \cos B)$ $\qquad$ $b^2 = c \cdot (b \cdot \cos A)$

$\boldsymbol{a^2 = c \cdot f}$ $\qquad$ $\boldsymbol{b^2 = c \cdot g.}$

Ehk II. $\hat{A} = \widehat{BCD}$; $\hat{B} = \hat{B}$; järel. $\triangle ABC \sim \triangle BCD$.

Järel. $\dfrac{\text{suure } \triangle \text{ hüpotenuus}}{\text{keskm. } \triangle \text{ hüpotenuus}} = \dfrac{\text{suure } \triangle \text{ pikem kaatet}}{\text{keskm. } \triangle \text{ pikem kaatet}}$,

ehk $\dfrac{BA}{BC} = \dfrac{BC}{BD}$. Sellest järgneb: $\overline{BC}^2 = \overline{BA} \cdot \overline{BD}$.

Samuti leiame ka teise kaateti kohta:

$\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{AD}$, millest järgneb: $\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AD}$.

Algebralistes tähistustes kirjutame seda valemitena:

$$\boldsymbol{a^2 = c \cdot f}$$
$$\boldsymbol{b^2 = c \cdot g.}$$

Ülesandeid. 590) $\triangle$-rga hüpotenuus on $c = 50$ cm ja ühe kaateti projektsioon hüpotenuusile on $f = 32$ cm. Leida kaatetid! Arvutustes veel võtta: 1) $c = 15$ cm; $f = 5{,}4$ cm; 2) $c = 50$ m; $f = 3{,}92$ m; 3) $c = 26$ m; $f = 22\frac{2}{13}$ m.

591) Kaateti projektsioon hüpotenuusile on g ja $\triangle$-rga ümberringi raadius on R. Kui pikad on kaatetid? 1) $g = 1{,}8$ m; $R = 2{,}5$ m; 2) $g = 44{,}8$; $R = 35$; 3) $g = 10{,}8$; $R = 15$.

592) Ristküliku pikkus on 4 m ja selle pikkuse projektsioon diagonaalile on 3,2 m. Kui lai on see ristkülik?

593) Ringjoonel võetud punkti A projektsioon diameetrile on diameetri ühest otsapunktist 3,6 cm ja teisest otsapunktist 6,4 cm kaugel. Kui kaugel neist otsapunktidest on A ise?

179. Lause: Kaatetite ruutude summa võrdub hüpotenuusi ruuduga.

Tõestus: Eelmisest lausest (§ 178, joon. 202) teame,

et $a^2 = c \cdot f$
ja $b^2 = c \cdot g$.

Kui need võrdused liidame, c sulgude ette toome ja arvesse võtame, et $f + g = c$, siis leiame: $a^2 + b^2 = c\,(f + g) = c^2$.

Järel. $a^2 + b^2 = c^2$.

Ülesandeid. 594) Antud on $\triangle$-rga kaatetid a ja b. Leida hüpotenuus ja ümbermõõt! Arvutustes võtta: 1) $a = 3$ cm; $b = 4$ cm; 2) $a = 45$ cm; $b = 28$ cm; 3) $a = 65$ cm; $b = 72$ cm; 4) $a = 143$ cm; $b = 24$ cm.

595) Kaatetite a ja b kaudu leida $\triangle$-rga ümberringi raadius! 1) $a = 5$ cm; $b = 12$ cm; 2) $a = 33$ cm; $b = 56$ cm.

596) Kaatetid on 20 cm ja 21 cm pikad; kui pikk on hüpotenuusi mediaan?

180. Lause: Hüpotenuusile tõmmatud kõrgus on keskmine võrdeline kaatetite projektsioonidega hüpotenuusile.

Tõestus: (Joonis 202.) $\widehat{ACD} = \hat{B}$; $\hat{A} = \widehat{BCD}$; järelikult:

I. $\triangle ACD \sim \triangle BCD$. Seepärast

$$\frac{\text{väikse } \triangle \text{ lühem kaatet}}{\text{keskm. } \triangle \text{ lühem kaatet}} = \frac{\text{väikse } \triangle \text{ pikem kaatet}}{\text{keskm. } \triangle \text{ pikem kaatet}};$$

ehk: $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$. Siit leiame $\overline{CD}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{BD}$.

Algebralistes tähistustes: $h^2 = g \cdot f$.

II. $\triangle ACD : \frac{g}{h} = \tan B$; $(\widehat{ACD} = \hat{B})$.

$\triangle BCD : \frac{h}{f} = \tan B$.

Järel. $\frac{g}{h} = \frac{h}{f}$.

Ehk: $h^2 = f \cdot g$.

Ülesandeid. 597) Kaatetite projektsioonid hüpotenuusile on: 1) $f = 4$ cm; $g = 9$ cm. Leida kõrgus ja pindala! 2) $f = 2$ m; $g = 4{,}5$ m.

598) Rombi sisering jagab puutepunktis rombi külje lõikudeks m ja n. Leida rombi kõrgus ja pindala!

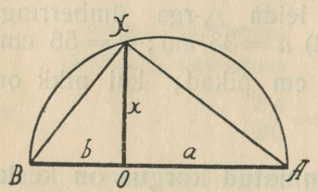
$m = 3{,}6$ m; $n = 6{,}4$ m.

599) Ühe kaateti projektsioon hüpotenuusile on g ja kõrgus on h. Leida teise kaateti projektsioon ja hüpotenuus!

$g = 64$ cm; $h = 48$ cm.

600) Võrdhaarse △-rga aluse keskkoha projektsioon haarale jagab haara lõikudeks p ja q. Kui pikk on haarale tõmmatud kõrgus ja △-rga pindala? $p = 11\frac{1}{13}$ m; $q = 1\frac{12}{13}$ m.

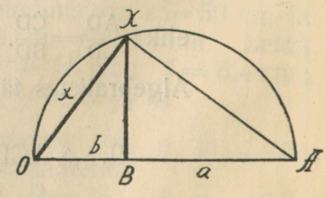
181. Konstruimisülesandeid. 601) Kahele antud sirglõigule a ja b konstruida keskmine võrdeline.



203. joonis.

I-ne lahendamisviis: Antud sirglõigud a ja b võtame kaatetite projektsioonideks hüpotenuusile ja konstruime neist täisnurkse △-rga AXB. Siis on selle △-rga kõrgus OX otsitav sirglõik lause põhjal: „kõrgus on keskmine võrdeline kaatetite projektsioonidega hüpotenuusile" ja õige on võrre: OA : OX = OX : OB ehk $a : x = x : b$, millest järgneb $x^2 = a \cdot b$ ja $x = \sqrt{a \cdot b}$.

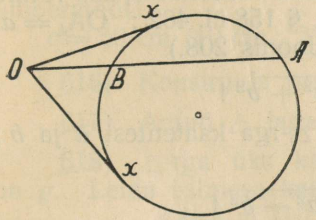
II-ne lahendamisviis: Pikema sirglõigu a võtame hüpotenuusiks ja lühema b kaateti projektsiooniks sellele hüpotenuusile. Neist andmetest konstruime täisnurkse △-rga OXA. Siis on projektsioonile OB vastav kaatet OX otsitav sirglõik lause põhjal: „kaatet on keskmine võrdeline kogu hüpotenuusi ja oma projektsiooniga hüpotenuusile".



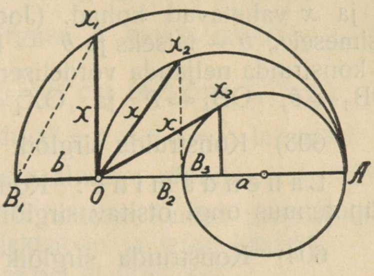
204. joonis.

Jär. OA : OX = OX : OB ehk $x = \sqrt{a \cdot b}$.

III-as lahendamisviis: Võtame antud sirglõikude vahe $a - b$ mingisuguse ringi kõõluks ja tõmbame meelevaldse raadiusega läbi punktide B ja A mineva ringi. AB pikendu-



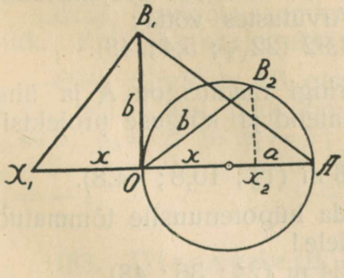
205. joonis.



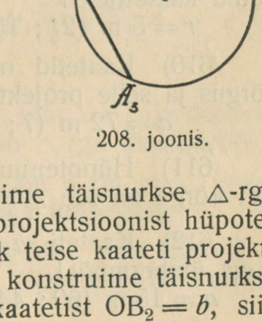
206. joonis.

sele asetame $BO = b$ ja leitud punktist O tõmbame ringile puutuja OX. OX ongi otsitav sirglõik, sest $OB = b$, $OA = b + a - b = a$ ja puutuja OX on keskmine võrdeline kogu lõikajaga ja tema välimise osaga. Joonisel 206 on kõik 3 konstruimisviisi üheskoos.

602) Kahele antud sirglõigule a ja b konstruida kolmas võrdeline. See tähendab konstruida sirglõik x, mis rahuldab võrret $a : b = b : x$.



207. joonis.



208. joonis.

Lahendamine: 1) Kui konstruime täisnurkse $\triangle$-rga AB_1X_1 kõrgusest $OB_1 = b$ ja ühe kaateti projektsioonist hüpotenuusile $OA = a$, siis esineb otsitav sirglõik teise kaateti projektsioonina $OX_1 = x$. (Joon. 207.) 2) Kui konstruime täisnurkse $\triangle$-rga OB_2A hüpotenuusist $OA = a$ ja kaatetist $OB_2 = b$, siis esineb otsitav sirglõik selle kaateti projektsioonina $OX_2 = x$. (Joon. 207.) 3) Kui võtame $OB_3 = b$ (joon. 208) mingi ringi puutujaks ja punktist O tõmbame kaare raadiusega $OA_3 = a$, siis esineb otsitav sirglõik x selle ringi lõikaja välimise osana, kuna kogu lõikajaks on $OA_3 = a$, kui $a > b$; ja x esineb kogu lõikajana, ning a lõikaja välimise osana kui $a < b$, — a ja x vahetavad kohad. (Joon. 208.) 4) Kui me a võtame esimeseks, b — teiseks ja b — kolmandaks võrdeliseks, siis võime x konstruida neljanda võrdelisena, nagu § 158 ül. 462 : $OA_4 = a$, $OB_3 = b$, $OB_4 = b$ ja $OX_4 = x$. (Joonis 208.)

603) Konstruida sirglõik $x = \sqrt{a^2 + b^2}$!

Lahendamine: Konstruime △-rga kaatetitest a ja b; hüpotenuus ongi otsitav sirglõik.

604) Konstruida sirglõik $x = \sqrt{a^2 - b^2}$!

Lahendamine: Konstruime △-rga hüpotenuusist a ja kaatetist b; teine kaatet on siis otsitav sirglõik x.

605) Konstruida sirglõik $x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$!

182. Ülesandeid. 606) Tõestada lause: *Hüpotenuusi korrutis kõrgusega on sama suur kui kaatetite korrutis.*

607) Tõestada lause: *Ühe kaateti korrutis kõrgusega on sama suur kui teise kaateti korrutis esimese kaateti projektsiooniga.*

608) Hüpotenuus on c m ja ühe kaateti projektsioon hüpotenuusile on f m pikk. Leida: 1) teise kaateti projektsioon, 2) mõlemad kaatetid ja 3) kõrgus. Arvutustes võtta:

$c = 50$ (26; 15; 75;) ja $f = 3{,}92$ ($22\frac{2}{13}$; 5,4; 48).

609) Täisnurkse △-rga ümberringi raadius on R ja ühe kaateti projektsioon on g. Leida kaatetid ja kõrguse projektsioonid kaatetitele!

$r = 5$ m ($2\frac{1}{2}$; 15; 35); $g = 3{,}6$ m ($1\frac{4}{5}$; 10,8; 44,8).

610) Kaatetid on a ja b. Leida hüpotenuusile tõmmatud kõrgus ja selle projektsioonid kaatetitele!

$a = 72$ m (7; 27; 64); $b = 54$ m (24; 36; 48).

611) Hüpotenuusi mediaan on m_c ja üks kaatet on a. Kui kõrge on see △? $m_c = 5$ m; $a = 8$ m; ($m_c = 40$; $a = 48$).

612) Kaateti a projektsioon hüpotenuusile on f. Leida △-ga ümbermõõt!

$a = 15$ m (60; 44; 45); $f = 13\frac{4}{17}$ m ($23\frac{1}{13}$; 35,2; 27).

613) Kaateti a ja kõrguse h kaudu leida △-rga ümbermõõt! $a = 65$ m (255; 20; 30); $h = 60$ m (120; 12; 24).

614) Täisnurga tipp on hüpotenuusist h m ja hüpotenuusi keskkohast m m kaugel. Kui pikad on kaatetite projektsioonid hüpotenuusile?
$h = 2{,}4$ m ($28{,}8$; $7\frac{1}{5}$); $m = 2{,}5$ m (30; $7\frac{1}{2}$).

615) Hüpotenuusi c ja kõrguse h kaudu määrata △-rga ümbermõõt!
$c = 50$ cm (10 cm; 25 m); $h = 24$ cm (4,8 cm; 6,72 m).

616) Konstruida ruutvõrrandi $x^2 \pm p\,x \pm q = o$ lahendid!

617) Antud △ jagada pooleks alusega rööbiku sirge abil!

618) △-rga üks kaatet on a ja teise kaateti projektsioon on g. Leida esimese kaateti projektsioon ja teine kaatet!
$a = 6$ m (15; 5); $g = 6{,}4$ m (16; $2\frac{1}{4}$).

619) △-rga ühe kaateti projektsioon on f ja teine kaatet on b. Kui pikk on hüpotenuus ja esimene kaatet?
$f = 23{,}04$ m ($1\frac{12}{13}$; $38\frac{11}{53}$); $b = 7$ m (13; 28).

620) Ühe kaateti projektsioon on teise kaateti projektsioonist d võrra pikem ja kõrgus on h. Kui pikk on △-rga ümbermõõt? $d = 1{,}4$ m ($9\frac{2}{13}$); $h = 2{,}4$ m ($4\frac{8}{13}$).

621) Hüpotenuus on ühest kaatetist 2 cm võrra pikem teine kaatet on 20 cm. Leida kõrgus!

622) Hüpotenuus on ühest kaatetist 32 cm võrra ja teisest kaatetist 9 cm võrra pikem. Leida △-rga ümbermõõt!

623) Kaatetite summa on 89 cm, hüpotenuus on 65 cm pikk. Kui pikk on kumbki kaatet?

624) Sirglõigu AB otsapunktide koordinaadid on A (x_1, y_1); B (x_2, y_2). Kui pikk on see sirglõik? a) $x_1 = 3$; $y_1 = 6$; $x_2 = 6$; $y_2 = 2$. b) $x_1 = 5$; $y_1 = 3$; $x_2 = 17$; $y_2 = 8$. c) $x_1 = 3$; $y_1 = 2$; $x_2 = 9$; $y_2 = 10$. d) $x_1 = +11$; $y_1 = +7$; $x_2 = -4$; $y_2 = -1$.

183. Ülesandeid. 625) Kaatetite suhe on $\frac{3}{4}$ ja ümberringi raadius on 10 cm pikk. Kui pikk on △-rga ümbermõõt?

626) Hüpotenuusile tõmmatud kõrgus on 6 cm pikk; tema jagab hüpotenuusi suhtes 9 : 16. Leida △-rga ümbermõõt!

627) Ühe kaateti projektsioon on $\frac{64}{225}$-kku teise kaateti b projektsioonist. Kui kaugel on täisnurga tipp hüpotenuusist?
$b = 60$ cm.

628) Kaateti suhe hüpotenuusisse on 0,6 ja sama kaateti projektsioon hüpotenuusile on 0,6 m. Kui pikk on see kaatet?

629) Teravnurga poolitaja jagab vastaskaateti lõikudeks 26 cm ja 10 cm. Kui pikk on selle △-rga ümbermõõt?

630) Teravnurga poolitaja lõikab vastaskaatetit punktis, mis asub hüpotenuusist 6 cm ja teise teravnurga tipust 10 cm kaugel. Kui pikk on hüpotenuus?

631) Sirglõigu AB otsapunktist A on AB-le tõmmatud ristjoon ning A ja B vahel on võetud punkt C nii, et $AC = a$ ja $CB = b$. Ristjoonel leida punkt O, millest lõigud AC ja CB paistaksid võrdsete nurkade sees! $a = 3$ cm; $b = 5$ cm.

632) Kaateti a peal leida punkt N, mis asub kaatetist b ja hüpotenuusist ühekaugel! $a = 40$ cm; $b = 9$ cm.

633) Kaatetid on 6 cm ja 8 cm pikad. Kui pikk on ruudu diagonaal, mille üks nurk ühtub selle △-rga nurgaga ja mille üks tipp asub hüpotenuusil?

634) Täisnurkse △-rga sisse on konstruitud ruut nii, et üks nurk ühtub täisnurgaga ja üks tipp asub hüpotenuusil. Kaatetite lõigud ruudu tippude ja teravnurkade tippude vahel on vastavalt m ja n. Kui pikk on △-rga ümbermõõt?
$m = 48$ cm; $n = 27$ cm.

635) Täisnurkse △-rga sisse on konstruitud ristkülik nii, et üks nurk ühtub täisnurgaga, üks tipp asub hüpotenuusil ja külgede suhe on $\frac{3}{5}$. Hüpotenuusi lõikude projektsioonid vastavatele kaatetitele on a ja b. Kui pikk on hüpotenuus?
$a = 6$ cm; $b = 10$ cm.

184. Ülesandeid. 636) Hüpotenuusi c ja kaateti a kaudu määrata △-rga pindala! $c = 109$ cm; $a = 91$ cm.

637) Täisnurga tipp on hüpotenuusist kaugusel k ja hüpotenuusi keskkohast kaugusel m. Leida △-rga pindala!

638) Kaatetite projektsioonid hüpotenuusile on f ja g. Kui suur on △-rga pindala? $f = 6{,}4$ m; $g = 3{,}6$ m.

639) Ühe kaateti projektsioon on teise kaateti projektsioonist d cm võrra pikem; kõrgus on h. Kui suur on △-rga pindala? $d = 7$ cm; $h = 12$ cm.

640) Kaateti a ja tema projektsiooni f kaudu leida △-rga pindala! $a = 3$ m; $f = 1{,}8$ m.

641) △-rga pindala s ja kaateti a kaudu leida △-rga kõrgus! $s = 1320$ m^2; $a = 48$ m.

642) Kui suurteks osadeks jagab kõrgus h täisnurkse $\triangle$-ga pindala s? $h = 6$ cm; $s = 37{,}5$ cm^2.

643) $\triangle$-rga ümbermõõt on 104 m; üks kaatet on $\frac{39}{80}$-kku teisest kaatetist. Kui suur on selle $\triangle$-rga pindala?

644) Hüpotenuus suhtub kaateti a projektsioonisse nagu 25 : 9. Leida $\triangle$-rga pindala! $a = 9$ cm.

645) Kaatetite projektsioonid hüpotenuusile suhtuvad nagu 9 : 16; lühim kõrgus on 4,8 m. Leida $\triangle$-rga pindala!

646) Kõrgus jagab täisnurkse $\triangle$-rga pindala osadeks s_1 ja s_2. Kui pikk on hüpotenuus. $s_1 = 216$ m^2; $s_2 = 384$ m^2.

647) Teravnurga poolitaja jagab vastaskaateti osadeks 21 cm ja 75 cm. Kui suur on $\triangle$-rga pindala?

648) Teravnurga poolitaja lõikab vastaskaatetit punktis, mille kaugus hüpotenuusist on 4,8 m ja hüpotenuusi teisest otsapunktist on 10,2 m. Leida $\triangle$-rga pindala!

649) Täisnurga poolitaja jagab hüpotenuusi lõikudeks a' ja b'. Leida $\triangle$-rga pindala! $a' = 4\frac{2}{7}$ m; $b' = 5\frac{5}{7}$ m.

650) Kaateti a peal võetud punkt N asub nii hüpotenuusist kui ka teisest kaatetist b ühekaugel. Kui suure $\triangle$-rga lõikab ära antud $\triangle$-rgast punktist N hüpotenuusile tõmmatud ristjoon? $a = 8$ m; $b = 6$ m.

651) $\hat{A}$ poolitaja jagab $\triangle$-rga pindala osadeks $s_1 = 9$ m^2 ja $s_2 = 15$ m^2. Leida $\triangle$-rga kaatetid!

185. Ülesandeid ristkülikust. 652) Ristküliku tipp A on lähimast tipust a cm ja kaugeimast tipust b cm kaugel. Kui suur on tema pindala?

653) Ristküliku küljed on a ja b. Kui kaugel on tema tipp vastasdiagonaalist?

654) Ristküliku tipp on vastasdiagonaalist h cm ja sümmeetria keskpunktist m cm kaugel. Kui suur on tema pindala?

655) Ristküliku tipp on vastasdiagonaalist k cm ja tema keskkohast m cm kaugel. Kui pikk on ristküliku ümbermõõt? $k = 48$; $m = 50$.

656) Ristküliku ABCD tipud A ja C on teineteisest d cm kaugel; nende projektsioonid diagonaali BD peale on teineteisest k cm kaugel. Leida ristküliku pindala ja ümbermõõt! $d = 25$; $k = 7$.

657) Ristküliku küljed on a ja b; läbi ühe tipu on tõmmatud sirge risti samast tipust lähtuva diagonaaliga. Kui kaugel sellest sirgest on teised tipud? $a = 16$ m; $b = 12$ m.

658) Ristküliku küljed on a ja b; läbi ühe tipu on tõmmatud sirge risti mitte samast tipust lähtuva diagonaaliga. Kui kaugel sellest sirgest on teised tipud? $a = 12$ m; $b = 9$ m.

659) Kui suurteks $\triangle$-kadeks jagavad ristküliku, mille küljed on a ja b, diagonaal ja vastastippudest tema peale tõmmatud ristjooned?

660) Ristküliku diagonaal on lühemast küljest 50 cm võrra pikem; pikem külg on 80 cm pikk. Leida ristküliku pindala!

661) Ringi sisse joonestatud ristküliku ühe külje projektsioon diagonaalile on f; ringi raadius on r. Leida ristküliku pindala!

662) Ristküliku pindala on s m²; tema üks tipp on lähimast tipust a m kaugel. Kui kaugel on see tipp kaugeimast tipust?

$s = 2640$; $a = 48$.

186. Ülesandeid võrdhaarsest $\triangle$-rgast.

663) Võrdhaarse $\triangle$-rga alus on 14 cm ja kõrgus 24 cm. Kui pikk on tema ümbermõõt?

664) Võrdhaarse $\triangle$-rga haar on a ja kõrgus on h. Kui kaugel haarast lõikab sümmeetriatelg $\triangle$-rga alust?

$a = 25$ cm; $h = 24$ cm.

665) Võrdh. $\triangle$-rga aluse keskkoht on haarast d kaugel. Kui pikk on haarale tõmmatud kõrgus? $d = 5$ cm.

666) Võrdh. $\triangle$-rga alus on b ja haarale tõmmatud kõrgus on h_1. Kui pikk on $\triangle$-rga ümbermõõt?

$b = 12$ m; $h_1 = 9{,}6$ m.

667) Haarale a tõmmatud kõrgus on h_1. Kui pikk on aluse mediaan? $a = 25$ cm; $h_1 = 24$ cm.

668) Võrdh. $\triangle$-rga haar on a ja haarale tõmmatud kõrgus h_1. Kni pikk on selle $\triangle$-rga alus?

$a = 75$ cm; $h_1 = 72$ cm.

669) Aluse keskkoha projektsioon võrdh. $\triangle$-rga haarale jagab selle haara lõikudeks f ja g. Kui pikk on selle $\triangle$-rga ümbermõõt? (f on tipupoolne lõik.)

$f = 69\frac{64}{85}$ m; $g = 15\frac{21}{85}$ m.

670) Võrdh. △-rga haara keskristjoon jagab kõrguse lõikudeks nii, et tipupoolne osa on a ja alusepoolne osa on b. Kui pikad on haarad? $a = 12{,}5$ cm; $b = 3{,}5$ cm.

671) Nürinurkse võrdh. △-rga alus on b ja haar a. Kui suurteks osadeks jagab aluse △-rga tipust tõmmatud ristjoon haarale? $b = 32$ cm; $a = 20$ cm.

672) Võrdh. △-rga alusele ja haarale tõmmatud kõrgused on vastavalt h ja h_1. Leida △-rga ümbermõõt?

$h = 12$ m; $h_1 = 9\frac{3}{13}$ m.

673) Võrdh. △-rga haar on a ja alus b. Kui pikk on haara keskelt kuni lõikumiseni kõrgusega tõmmatud ristjoon?

$a = 40$ cm; $b = 48$ cm.

674) Haarale tõmmatud kõrgus jagab selle haara lõikudeks m ja n, tipust arvatud; $m = 14$ m ja $n = 36$ m. Kui pikk on alusele tõmmatud kõrgus?

675) Haara projektsioon haarale on a ja aluse projektsioon samale haarale on b. Kui pikk on projektija?

$a = 7$ m; $b = 18$ m.

676) Võrdh. △-rga alus suhtub kõrgusesse nagu $51 : 70$; haar on 149 cm pikk. Kui pikk on selle △-rga ümbermõõt?

677) Kahe võrdhaarse △-rga haarad on ühepikkused, nimelt 85 cm, alused suhtuvad nagu $36 : 77$ ja tipunurkade summa annab sirge nurga. Kui pikad on alused?

678) Võrdhaarses △-rgas jagab alusnurga poolitaja kõrguse lõikudeks a ja b, tipust arvatud. Kui pikk on selle kolmnurga ümbermõõt? $a = 13$ cm; $b = 5$ cm.

679) Võrdh. △-rga alus on b ja kõrgus h. Kui suurteks lõikudeks jagab kõrguse punkt, mis asub ühekaugel haarast ja alusest? $b = 1{,}2$ m; $h = 0{,}8$ m.

680) Võrdh. △-rga ümbermõõt on $2p$ ja kõrgus h. Kui pikad on tema küljed? $2p = 256$ cm; $h = 80$ cm.

681) Alusnurga poolitaja jagab vastashaara lõikudeks k ja l, tipust arvatud. Kui pikk on haarade-vaheline sirglõik, mis on tõmmatud lõikepunktist rööbiti alusega?

682) Võrdh. △-rga alus on b ja kõrgus h. Kui suurteks osadeks jagab selle △-rga sirglõik, mis ühendab aluse ja haara keskkohti? $b = 66$ cm; $h = 56$ cm.

683) Võrdh. △-rga aluse keskkohast haaraga rööbiti minev sirglõik on $a = 0{,}25$ m pikk ja alus $2b = 0{,}6$ m pikk. Leida △-rga pindala!

684) Kui suur on võrdh. $\triangle$-rga pindala, kui tema kõrgus on h ja ümbermõõt on $2p$? $h = 6$ cm; $2p = 24$ cm.

685) Võrdh. $\triangle$-rga haarale tõmmatud kõrgus jagab haara lõikudeks f ja g. Leida $\triangle$-rga pindala! Tipupoolne lõik on $f = 1\frac{12}{29}$ m; $g = 27\frac{17}{29}$ m.

686) Võrdh. $\triangle$-rga alus on b ja haarale tõmmatud kõrgus on h_1. Leida $\triangle$-rga pindala! $b = 30$ cm; $h_1 = 24$ cm.

687) Võrdh. $\triangle$-rga alusele tõmmatud kõrgus on h ja haarale tõmmatud kõrgus on h_1. Leida $\triangle$-rga pindala!
$h = 40$ cm; $h_1 = 48$ cm.

688) 165 cm kõrge võrdh. $\triangle$-rga pindala on 8580 cm². Leida selle $\triangle$-rga ümbermõõt!

689) Võrdh. $\triangle$-rga aluse peal võetud punkt P on ühest haarast m cm ja teisest haarast n cm kaugel; haar on a cm pikk. Leida $\triangle$-rga pindala! $m = 78$ cm; $n = 18$ cm; $a = 100$ cm.

690) Aluse peal võetud punkt on $\triangle$-rga ühest haarast 2,9 cm ja teisest haarast 6,7 cm kaugel; $\triangle$-rga pindala on 48 cm². Kui pikk on $\triangle$-rga haar?

691) Võrdh. $\triangle$-rga pindala on s; aluse peal võetud punkt on ühest haarast kaugusel k ja teisest haarast kaugusel l. Kui pikk on $\triangle$-rga ümbermõõt?
$s = 12$ m²; $k = 1{,}6$ m; $l = 3{,}2$ m.

692) Võrdh. $\triangle$-rga külgede keskristjoonte lõikepunkt on tipust m cm ja alusest n cm kaugel. Kui suur on selle $\triangle$-rga pindala? $m = 25$; $n = 7$.

187. Ülesandeid rombist. 693) Rombi diagonaalid on d_1 ja d_2; kui pikk on tema ümbermõõt?
$d_1 = 153$ cm; $d_2 = 104$ cm.

694) Rombi diagonaalid on a ja b. Kui kõrge on see romb? $a = 14$ cm; $b = 48$ cm.

695) Rombi lühem diagonaal on d ja tema projektsioon küljele on g. Kui pikk on rombi ümbermõõt?
$d = 18$ cm; $g = 10{,}8$ cm.

696) Rombi diagonaal on d ja külg on a. Leida pindala!
$d = 96$ cm; $a = 73$ cm.

697) Rombi pikem diagonaal on a ja kõrgus on m. Leida ümbermõõt! $a = 40$ cm; $m = 24$ cm.

698) Rombi ümbermõõt on p ja kõrgus h. Kui kaugel tippudest on sümmeetria keskpunkt? $p = 1$ m; $h = 24$ cm.

699) Rombi sümmeetria keskpunktist läbi minev kõrgus jagab rombi külje osadeks a ja b. Leida rombi pindala! $a = 9{,}6$ m; $b = 5{,}4$ m.

700) Rombi diagonaalide suhe on $\frac{5}{12}$ ja ümbermõõt on 208 m. Leida diagonaalid!

701) Rombi pindala on 96 cm^2 ja üks diagonaal on $\frac{3}{4}$ teisest. Kui pikk on ümbermõõt?

702) Rööpküliku diagonaalide-vaheliste nurkade poolitajad lõikavad rööpküliku külgi järjekorras punktides M, N, P, R. Sümmeetria keskpunktist MN peale tõmmatud ristjoon jagab selle ühendusjoone lõikudeks m ja n. Leida nelinurga MNPR pindala ja ümbermõõt! $m = 4$ cm; $n = 9$ cm.

188. Ülesandeid trapetsist. 703) Võrdhaarse trapetsi alused on a ja c; kõrgus on h. Leida trapetsi ümbermõõt! $a = 24$ m; $c = 14$ m; $h = 12$ m.

704) Trapetsi lühem alus on c, kõrgus h; küljed on b ja d. Kui pikk on trapetsi ümbermõõt? $c = 10$ cm; $h = 12$ cm; $b = 15$ cm; $d = 20$ cm.

705) Täisnurkse trapetsi kaldkülje keskkoht on täisnurga tipust a cm ja ristküljest m cm kaugel. Kui suur on trapetsi pindala? $a = 19{,}3$ m; $m = 9{,}5$ m.

706) Trapetsi pikem alus on a; küljed on b ja d; kõrgus on h. Leida trapetsi pindala! $a = 22$ m; $b = 15$ m; $d = 13$ m; $h = 12$ m.

707) Võrdhaarse trapetsi diagonaal on e, tema projektsioon alusele on m ja haara projektsioon on n. Kui pikk on ümbermõõt? $e = 15$ cm; $m = 9$ cm; $n = 5$ cm.

708) Võrdhaarse trapetsi diagonaal on e ja kõrgus h. Kui suur on selle trapetsi pindala? $e = 109$ cm; $h = 60$ cm.

709) Võrdhaarse trapetsi diagonaalide lõikepunkt on ühest alusest m cm ja teisest n cm kaugel ja diagonaal on d. Leida selle trapetsi pindala! $m = 14$ cm; $n = 46$ cm; $d = 109$ cm.

710) Võrdhaarse trapetsi diagonaal e on risti haaraga a. Kui suur on selle trapetsi ümbermõõt? $e = 20$ cm; $a = 15$ cm.

711) Võrdhaarse trapetsi diagonaal e on risti haaraga; keskjoon on m. Kui pikad on alused? $e = 12$ m; $m = 9$ m.

712) Täisnurkse trapetsi diagonaal e jagab selle trapetsi kaheks sarnaseks $\triangle$-rgaks; trapetsi lühem alus on a. Kui pikk on selle trapetsi keskjoon ja kui suur on tema pindala?

$e = 18$ m; $a = 10{,}8$ m.

713) Võrdhaarse trapetsi diagonaal e on risti haaraga a. Kui suur on trapetsi pindala? $e = 17$ m; $a = 9\frac{1}{15}$ m.

714) Trapetsi diagonaalid on risti külgedega. Suurem alus on a ja kõrgus h. Kui pikk on selle trapetsi ümbermõõt?

$a = 10$ m; $h = 4{,}8$ m.

715) Võrdhaarne trapets muuta pindvõrdseks samakõrgeks võrdhaarseks $\triangle$-rgaks.

716) Võrdhaarse trapetsi aluste summa on m ja diagonaal on e. Kui suur on trapetsi pindala?

$m = 48$ cm; $e = 25$ cm.

717) Trapetsi diagonaalid e ja f on teineteisega risti. Kui pikk on selle trapetsi keskjoon? $e = 45$ cm; $f = 28$ cm.

718) Tõestada: Võrdhaarse ristikute diagonaalidega trapetsi pindala võrdub poole ruudu pindalaga, mille küljeks on diagonaal.

189. Ülesandeid ringist. 719) Ringi raadius on r. Kui kaugel keskpunktist on a pikkune kõõl?

$r = 29$ cm; $a = 40$ cm.

720) Kui suur on $\triangle$-rga pindala, mille tipp on ringi keskpunktis ja mille aluseks on keskpunktist d kaugusel asuv kõõl? Ringi raadius on r. $d = 48$ cm; $r = 73$ cm.

721) Kõõl a asub ringi keskpunktist kaugusel d. Kui pikk on ringi raadius? $a = 72$ cm; $d = 77$ cm.

722) Ringjoonel võetud punktist M lähtuvad kaks ristikut kõõlu; ühe kõõlu kaugus keskpunktist on a ja teise kaugus b. Kui pikk on ringi raadius? $a = 12$ cm; $b = 35$ cm.

723) Kui suur on ringis raadiusega r kõõlule a vastava segmendi sisse joonestatud võrdhaarse $\triangle$-rga pindala?

$r = 41$ cm; $a = 80$ cm.

724) Kõõl jagab temaga ristiku raadiuse lõikudeks a ja b. Kui suur on selle ringi sisse joonestatud võrdhaarse $\triangle$-rga pindala, mille aluseks on mainitud kõõl? (Vaadelda 2 juhtu). $a = 14$ cm on keskpunkti lähislõik; $b = 36$ cm on ringjoone lähislõik.

725) Ringid raadiustega r_1 ja r_2 puutuvad teineteist seestpoolt. Suurema ringi kõõl puutub vähemat ringi tema lõikumispunktis kesksirgega. Leida selle kõõlu pikkus!
$r_1 = 10,4$ cm; $r_2 = 10$ cm.

726) Kui suur on trapetsi pindala, mille alusteks on ringis raadiusega r rööbikud kõõlud a ja b, kui need kõõlud asuvad 1) ühel pool keskpunkti; 2) isepool keskpunkti?
$r = 65$ cm; $a = 32$ cm; $b = 112$ cm.

727) Ringjoonel asuva punkti kaugus ringi puutujast on k ja puutepunktist l. Kui pikk on ringi raadius?
$k = 1,9$ m; $l = 7,6$ m.

728) Kõõlud AB ja CD on isekeskis rööbikud; kõõlud CB ja AD on isekeskis ristikud. AB $= a = 4$ cm ja CD $= b = 9$ cm. Kui pikad on AC ja BD?

729) Ringis tõmmatud rööbikud kõõlud a ja b on teineteisest d kaugusel. Kui kaugel on kumbki ringi keskpunktist?
$a = 30$ cm; $b = 48$ cm; $d = 27$ cm.

730) Ringis tõmmatud rööbikud kõõlud a ja b on teineteisest d kaugusel ühel pool keskpunkti. Kui pikk on ringi raadius? $a = 126$ cm; $b = 50$ cm; $d = 44$ cm.

731) Punktist M, mis asub ringi keskpunktist a kaugusel, on tõmmatud ringile puutujad; ringi raadius on r. Kui kaugel on puutepunktid teineteisest? $a = 25$ cm; $r = 15$ cm.

732) Ringi raadius on r; puutepunkte ühendav kõõl on ringi keskpunktist m kaugel. Kui kaugel on puutujate lähtepunkt ringi keskpunktist? $r = 7$ m; $m = 1,96$ m.

733) Samast punktist ringile tõmmatud puutujad on a cm pikad; puutepunkte ühendav kõõl on ringi keskpunktist m cm kaugel. Kui pikk on ringi raadius? $a = 20$ cm; $m = 9$ cm.

734) Ringile, mille raadius on a, on tõmmatud ühest punktist puutujad. Puutepunkte ühendav kõõl on k. Kui suur on nelinurga pindala, mida piiravad puutujad ja puutepunktidesse tõmmatud raadiused? $a = 20$ cm; $k = 24$ cm.

735) Lühema kaateti a kui diameetri ümber on joonestatud ring. Selle ringi sees kõõluna asuv hüpotenuusi lõik on m. Leida $\triangle$-rga pindala! $a = 6$ m; $m = 3,6$ m.

736) Täisnurkse $\triangle$-rga pikema kaateti a üle on tõmmatud poolring, mis hüpotenuusi jagab suhtes $m : n$ $(m > n)$. Kui kaugel täisnurga tipust on poolringi ja hüpotenuusi lõikepunkt?

737) Täisnurkse $\triangle$-rga kaatetite üle on tõmmatud poolringid, mis lähevad läbi $\triangle$-rga sisemise valla. Nende poolringide sees kõõludena asuvad hüpotenuusi osad suhtuvad teineteisesse nagu $p:q\,(p>q)$; hüpotenuusile tõmmatud kõrgus on h. Kui kaugel on tõmmatud ringide keskpunktid teineteisest?

738) Täisnurkse $\triangle$-rga kõrguse kui diameetri ümber on joonestatud ring. Selle ringi sees kõõludena asuvad kaatetite lõigud on u ja v. Kui suur on $\triangle$-rga pindala?

$u = 2$ m; $v = 3$ m.

739) Kaks ringi lõikuvad nii, et lõikepunkti tõmmatud raadiused on teineteisega risti ja ühine kõõl jagab keskpunktide kauguse osadeks m ja n. Kui pikad on raadiused?

$m = 10{,}8$ cm; $n = 19{,}2$ cm.

740) Kaks ringi lõikuvad nii, et lõikepunkti tõmmatud raadiused on teineteisega risti, keskpunktide kaugus on d ja ühine kõõl on a. Kui pikk on kumbki raadius?

$d = 40$ cm; $a = 38{,}4$ cm.

741) Ringid raadiustega a ja b lõikuvad nii, et nende ühise kõõlu pikkus on k. Kui pikk lõik eraldatakse kesksirgest mõlema ringi abil? $a = 13$ cm; $b = 20$ cm; $k = 24$ cm.

742) Kaks ringi lõikuvad nii, et lõikepunktis tõmmatud puutujad on teineteisega risti ja ühine kõõl jagab keskpunktide kauguse lõikudeks a ja b. Kui pikk on mõlemale ringile ühine kesksirge osa? $a = 18$ cm; $b = 32$ cm.

743) Kaks ringi lõikuvad nii, et nende puutujad lõikepunktis on teineteisega risti; ühine kõõl jagab keskpunktide kauguse lõikudeks a ja b. Leida nelinurga pindala, mille tippudeks on ringide lõikepunktid isekeskis ja kesksirgega! Vaadelda 2 juhtu: kui ringide lõikepunktid kesksirgega on 1) keskpunktide vahel ja 2) väljaspool keskpunkte! $a = 9$ cm; $b = 16$ cm.

744) Ringide O ja C raadiused on vastavalt a ja b; nende keskpunktide kaugus d. Kui pikk on nende ühine välimine puutuja? $a = 28$ cm; $b = 20$ cm; $d = 61$ cm.

745) Ringide O ja C raadiused on vastavalt a ja b; nende keskpunktide kaugus — d. Kui pikk on nende ühine sisemine puutuja? $a = 28$ cm; $b = 20$ cm; $d = 73$ cm.

746) Ringide O ja C raadiused on a ja b; nende keskpunktide kaugus d. Kui suurteks osadeks jagab kesksirge nende ühise sisemise puutuja? $a = 14$ cm; $b = 6$ cm; $d = 29$ cm.

747) Kahe teineteist väljastpoolt puutuja ringi raadiused on vastavalt R ja r. Kui pikk on nende ühise välimise puutuja lõik puutepunktide vahel? $R = 45$ cm; $r = 20$ cm.

748) Kahe teineteist väljastpoolt puutuja ringi raadiused on R ja r. Kui pikk on nende ringide ühise sisemise puutuja lõik ühiste välimiste puutujate vahel? $R = 50$ cm; $r = 18$ cm.

749) Missugune lause järgneb kahest eelmisest ülesandest?

750) Kui pikk on kahe teineteist puutuja ringi ühise puutuja projektsioon kesksirgele? Ringide raadiused on a ja b.
$a = 9$ cm; $b = 4$ cm.

751) Kahe teineteist puutuja ringi raadiused on m ja n; neile ringidele on konstruitud ühine välimine puutuja. Kui kaugel on puutepunktid kesksirgest?

752) Kahe teineteist puutuja ringi raadiused on R ja r; neile ringidele on konstruitud ühine välimine puutuja. Kui pikad on puutepunktidesse tõmmatud raadiuste projektsioonid kesksirgele? $R = 16$ cm; $r = 9$ cm.

753) Kahele teineteist väljastpoolt puutujale ringile on tõmmatud ühine välimine puutuja, ringide raadiused r_1 ja r_2. Kui suur on nelinurga pindala, mille tippudeks on keskpunktid ja puutepunktid? $r_1 = 9$ cm; $r_2 = 4$ cm.

c) Erijuhtumid.

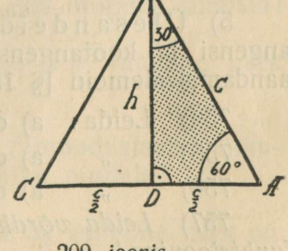
190. 30°-lise, 45°-lise, 60°-lise nurga vastaskaatet.

1) Vaatleme võrdkülgset $\triangle ABC$, mille külje tähiseks olgu c.

Kõrgus BD poolitab tipunurga B ja aluse CA.

Nii on siis $\widehat{BDA} = 90°$ ja $BA = c$ on hüpotenuus; $\widehat{DBA} = 30°$ ja kaatet $DA = \frac{c}{2} = \frac{1}{2}BA$.

S. t. *et 30°-lise nurga vastaskaatet on pool hüpotenuusi.*

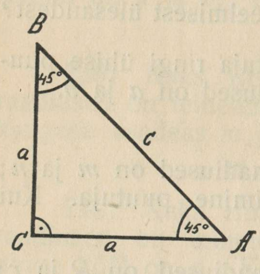


209. joonis.

2) Samas $\triangle$-rgas BDA on $\hat{A} = 60°$ ja kaateti BD leiame Püthagorase lause põhjal: $h^2 = c^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = c^2 - \frac{1}{4}c^2 = \frac{3}{4}c^2$;

$$BD = h = \sqrt{\tfrac{3}{4}c^2} = c\sqrt{\tfrac{3}{4}} = \tfrac{1}{2}c\sqrt{3}.$$

S. t. *60°-lise nurga vastaskaatet on pool hüpotenuusi korda ruutjuur kolmest.*



210. joonis.

3) Vaatleme täisnurkset võrdhaarset $\triangle ABC$, mille hüpotenuusi tähiseks olgu c. Tema teravnurgad on $\hat{A} = \hat{B} = 45°$; kaatetid olgu a. Püthagorase lause põhjal leiame: $a^2 + a^2 = c^2$; ehk $2a^2 = c^2$.

Teisendades saame

$$4a^2 = 2c^2 \quad \text{ehk} \quad a^2 = \tfrac{1}{2}c^2;$$

siit leiame: $2a = \sqrt{2c^2}$ $\quad a = \sqrt{\tfrac{1}{2}c^2}$

$2a = c\sqrt{2}$ $\quad a = c\sqrt{\tfrac{1}{2}}$

$a = \tfrac{1}{2}c\sqrt{2}$ $\quad a = c\sqrt{\tfrac{2}{4}}$.

S. t. *45°-lise nurga vastaskaatet on pool hüpotenuusi korda ruutjuur kahest.*

Meelespidamist võivad kergendada valemid:

$$a_{30} = \tfrac{1}{2}c = \tfrac{1}{2}c\sqrt{1} = c\sqrt{\tfrac{1}{4}}$$
$$a_{45} = \tfrac{1}{2}c\sqrt{2} = \tfrac{1}{2}c\sqrt{2} = c\sqrt{\tfrac{2}{4}}$$
$$a_{60} = \tfrac{1}{2}c\sqrt{3} = \tfrac{1}{2}c\sqrt{3} = c\sqrt{\tfrac{3}{4}}.$$

Märkus:

$\sqrt{2} = 1{,}414\ .\ .\ .\ .\ .$

$\sqrt{3} = 1{,}732\ .\ .\ .\ .\ .$

4) Meie nimetasime nurga siinuseks vastaskaateti suhet hüpotenuusi.

Joonise 207. järele on: $\underline{\sin 30°} = \frac{DA}{BA} = \frac{\frac{1}{2}c}{c} = \underline{\tfrac{1}{2} = \sqrt{\tfrac{1}{4}}}$

„ 208. „ „ $\underline{\sin 45°} = \frac{CA}{BA} = \frac{\frac{1}{2}c\sqrt{2}}{c} = \underline{\tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{\tfrac{2}{4}}}$

„ 207. „ „ $\underline{\sin 60°} = \frac{BD}{BA} = \frac{\frac{1}{2}c\sqrt{3}}{c} = \underline{\tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{\tfrac{3}{4}}}.$

5) Ülesandeid. Meelde tuletades nurga koosinuse, tangensi ja kootangensi definitsioone [§ 156] ja täiendnurga taandamisvalemeid [§ 157]

754) Leida: a) cos 30°; b) tan 30°; c) cot 30°!

755) „ a) cos 45°; b) tan 45°; c) cot 45°!

756) „ a) cos 60°; b) tan 60°; c) cot 60°!

757) *Leida võrdkülgse kolmnurga pindala tema külje a funktsioonina!*

191. Ülesandeid. 758) Võrdkülgse $\triangle$-rga kõrgus on h. Kui pikk on $\triangle$-rga ümbermõõt?

759) Täisnurkse võrdhaarse $\triangle$-rga ümbermõõt on m. Kui pikk on hüpotenuus?

760) Täisnurkse $\triangle$-rga üks nurk on $30°$ suur ja vastaskaatet on a. Kui pikk on $\triangle$-rga ümbermõõt? $a = 10$ cm.

761) Rombi üks nurk on $120°$ suur ja külg on a. Kui pikad on rombi diagonaalid? $a = 12$ cm.

762) Kolmnurga küljed on a ja b ja nende vahelnurk on 1) $30°$; 2) $45°$; 3) $60°$; 4) $120°$ suur. Kui suur on $\triangle$-rga pindala?

763) Rombi nurk on $120°$ suur ja pikem diagonaal on a. Kui suur on rombi pindala? $a = 8$ cm.

764) Võrdkülgse $\triangle$-rga pindala määrata tema kõrguse h kaudu!

765) Täisnurkse trapetsi kaldkülg on a, ristkülg võrdub lühema alusega ja üks nurk on $45°$ suur. Kui pikk on selle trapetsi ümbermõõt? $a = 10$ cm.

766) Täisnurkse trapetsi kaldkülg on a, ristkülg on 2 korda nii pikk kui lühem alus, ja üks nurk on $135°$ suur. Leida trapetsi pindala! $a = 10$ m.

767) Võrdhaarse trapetsi kõrgus h on pool nii pikk kui lühem alus ja üks nurk on $30°$. Kui pikk on trapetsi ümbermõõt? $h = 10$ m.

768) Võrdhaarse trapetsi lühem alus võrdub haaraga, kõrgus on h ja üks nurk on $60°$ suur. Leida trapetsi pindala!

769) Rööpküliku diagonaalide $2a$ ja $2b$ vaheline nurk on $30°$. Kui suur on rööpküliku pindala?

770) Rööpküliku diagonaalid e ja f moodustavad lõikumisel $45°$-lise nurga. Kui suur on rööpküliku pindala?

771) Rööpküliku diagonaalide d_1 ja d_2 vaheline nurk on $60°$. Kui suur on rööpküliku pindala?

d) Täisnurkse kolmnurga trigonomeetrilise lahenduse rakendusi.

192. Ülesandeid. Täisnurksest kolmnurgast.

772) Täisnurkse △-rga nurk on $\alpha = 41° 42'$; selle nurga vastaskaatet on hüpotenuusi keskkohast $d = 27,5$ cm kaugel. Kui pikk on see kaatet?

773) Hüpotenuusi keskkoht on ühe kaateti keskkohast $m = 6$ cm ja teise kaateti keskkohast $l = 17,5$ cm kaugel. Kui suured on selle △-rga nurgad?

774) Hüpotenuusi mediaan $m = 7,5$ m moodustab hüpotenuusiga nurga $\beta = 73° 44'$. Leida kaatetid!

775) Täisnurkse △-rga nurk $\alpha = 68° 40'$ on pooleks jagatud. Selle nurgapoolitaja keskkoht on täisnurga tipust $a = 10$ cm kaugel. Kui pikk on hüpotenuus?

776) Täisnurkse △-rga nurga $\beta = 71° 30'$ poolitaja keskkoht on täisnurga tipust $m = 24$ cm kaugel. Leida selle △-rga pindala!

777) Täisnurkse △-rga nurga $\beta = 65° 42'$ poolitaja keskkoht on selle nurga vastaskaatetist $l = 37$ cm kaugel. Kui pikk on hüpotenuus?

778) Hüpotenuusile tõmmatud kõrguse ja mediaani-vaheline nurk on $\alpha = 17°$; mediaan on $m = 17$ m. Kui pikad on kaatetid?

779) Hüpotenuusile tõmmatud mediaani ja kõrguse-vahe line nurk on $\beta = 12°$ ja mediaan on $m = 29$ cm. Kui suur on selle △-rga pindala?

780) Täisnurkses △-rgas on üks teravnurk teisest $\delta = 18°$ võrra suurem; hüpotenuusile tõmmatud kõrgus on $h = 1,2$ m. Kui suur on △-rga pindala?

Võrdhaarsest kolmnurgast.

781) Võrdhaarse △-rga haar on a; tipunurk on β. Leida alusnurgad, alus, kõrgus ja pindala! $a = 42,73$ m; $\beta = 78° 18'$.

782) Võrdhaarse △-rga haar on a ja alus on b. Leida nurgad! $a = 49,56$ m; $b = 24,42$ m.

783) Võrdhaarse △-rga alus on b ja tipunurk on β. Leida alusnurgad, haar, kõrgus ja pindala! $b = 1$ km; $\beta = 132° 40'$.

784) Võrdhaarse $\triangle$-rga kõrgus on h ja alusnurk on α. Leida haar ja pindala! $h = 15$ cm; $\alpha = 52°$.

785) Võrdhaarse $\triangle$-rga haar a on vastastipust kaugusel k. Kui suured on selle $\triangle$-rga nurgad? $a = 5$ m; $k = 3{,}75$ m.

786) Võrdhaarse $\triangle$-rga haarale tõmmatud kõrgus on k ja tipunurk on β. Leida haar ja alus! $k = 1{,}84$ m; $\beta = 76°28'$.

Korrapärastest hulknurkadest.

787) Leida korrap. 15-nurgelise hulknurga külg selle hulknurga ümberringi raadiuse R kaudu! $R = 9{,}5$ cm.

788) Korrap. 7-nurgelise hulknurga ümberringi raadius on R. Kui palju on sama ringi korrapärase kõõlkuusnurga apoteem pikem või lühem kui selle 7-nurgelise külg?

$R = 100$ cm.

789) Korrap. 25-nurgelise hulknurga apoteem on r. Kui suur on selle hulknurga pindala? $r = 19{,}83$ m.

790) Korrap. 18-nurgelise hulknurga apoteem on r. Kui pikk on selle hulknurga ümberringi raadius?

$r = 31{,}75$ m.

Nelinurkadest.

791) Ristküliku külg on a ja diagonaalide-vaheline nurk on α. Leida pindala ja diagonaal! $a = 8$ cm; $\alpha = 78°$.

792) Rombi külg on b ja tema nurk on β. Kui suur on rombi pindala? $b = 3{,}75$ m; $\beta = 131°24'$.

793) Tarvis konstruida romb pindalaga a^2 nii, et tema üks nurk on α. Kui pikk tuleb võtta külg?

$a^2 = 4138$ cm^2; $\alpha = 78°$.

794) Rombi külje keskkoht on vastaskülje keskkohast kaugusel a ja lähiskülje keskkohast kaugusel b. Kui suured on selle rombi nurgad ja pindala?

$a = 5{,}6$ cm; $b = 3{,}5$ cm.

795) Ristküliku külje keskkoht on lähiskülje keskkohast kaugusel a ja vastaskülje keskkohast kaugusel b. Leida diagonaalide-vaheline nurk! $a = 5{,}5$ cm; $b = 6{,}6$ cm.

796) Võrdhaarse trapetsi alused on a ja b ja üks nurk on α. Leida trapetsi pindala! $a = 11$ cm; $b = 29$ cm; $\alpha = 71°$.

797) Trapetsi külg b moodustab alusega nurga α; keskjoon on m. Leida trapetsi pindala!
$b = 22$ m; $m = 47{,}5$ m; $\alpha = 67° 35'$.

798) Trapetsi aluste keskkohti ühendav sirglõik on l, külgede keskkohti ühendav sirglõik on m ja nende sirgete vaheline nurk on α. Kui suur on trapetsi pindala?
$l = 14{,}3$ cm; $m = 19{,}8$ cm; $\alpha = 70° 45'$.

799) Võrdhaarse trapetsi kõrgus on h ja diagonaal moodustab alusega nurga δ. Kui suur on trapetsi pindala?
$h = 8{,}5$ cm; $\delta = 42° 24'$.

800) Võrdhaarse trapetsi keskjoon on m ja diagonaal moodustab alusega nurga δ. Kui suur on trapetsi pindala?
$m = 14$ cm; $\delta = 35°$.

801) Võrdhaarse trapetsi haarad on sama pikad kui lühem alus, ja pikem alus on 2,2 korda nii pikk kui lühem alus. Kui suured on trapetsi nurgad?

Ringist.

802) Ringis on tõmmatud kõõl a, millele vastab kaar α. Kui pikk on ringi diameeter?
$a = 4{,}5$ cm; $\alpha = 86°$; $a = 13$ m; $\alpha = 210°$.

803) Kui suurele kaarele vastab kõõl m, mille kaugus ringi keskpunktist on d? $m = 8{,}46$ m; $d = 5{,}25$ m.

804) Kui suur on $\triangle$-rga pindala, mille tipp on ringi keskpunktis ja aluseks on kaarele β vastav kõõl b?
$\beta = 131° 30'$; $b = 35{,}6$ m.

805) Kui suurele kaarele vastab kõõl, mille kaugus ringi keskpunktist on 0,875 tema pikkusest?

806) Punktist M ringile tõmmatud puutuja t paistab ringi keskpunktist nurga β sees. Kui kaugel on punkt M ringi keskpunktist? $t = 200$ m; $\beta = 55° 15'$.

807) Punktist A, mille kaugus ringi keskpunktist on d, on tõmmatud ringile puutujad; ringi raadius on r. Kui suure nurga moodustavad puutujad isekeskis? $d = 5{,}6$ cm; $r = 1{,}8$ cm.

808) Puutepunkti tõmmatud raadius r moodustab puutuja lähtepunkti L tõmmatud suunaga nurga β. Kui suur on $\triangle$-rga pindala, mille tippudeks on lähtepunkt L ja puutepunktid A ja B?
$r = 28{,}4$ cm; $\beta = 63° 45'$.

809) Punkti L kaugus ringi keskpunktist on d ja sellest punktist tõmmatud ringi puutujad moodustavad isekeskis nurga α. Kui kaugel on puutepunktid teineteisest?

$$d = 5{,}84 \text{ m}\,; \quad \alpha = 62^\circ\,56'.$$

810) Ringile raadiusega r on tõmmatud punktist L puutujad. Puutepunkte ühendav kõõl on a. Kui suure nurga moodustavad puutujad isekeskis? $r = 25$ cm; $a = 35$ cm.

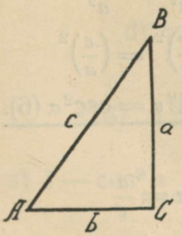
811) Ringid raadiustega R ja r puudutavad teineteist väljastpoolt. Kui suure nurga moodustab kesksirgega nende ühine välimine puutuja? $R = 16$ cm; $r = 9$ cm.

812) Kaks ringi puutuvad teineteist väljastpoolt. Nende keskpunktide kaugus on m ja ühiste välimiste puutujatevaheline nurk on α. Kui suur on nelinurga pindala, mille tippudeks on sirgete puutepunktid ringidega?

$$m = 20 \text{ m}\,; \quad \alpha = 77^\circ.$$

e) Sama nurga funktsioonide-vahelised seosed.

193. Põhivalemid. Sama nurga funktsioone seovad järgmised valemid:



211. joonis.

1) Püthagorase lause põhjal leiame . . . . $a^2 + b^2 = c^2$

Jagame mõlemad pooled c^2-ga: $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$

Ehk $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$

Definitsiooni põhjal saame siit . . . . $\underline{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$ (1).

Definitsiooni põhjal on:

2) $\tan\alpha = \frac{a}{b}$ 3) $\cot\alpha = \frac{b}{a}$

Järel. $\tan\alpha = \frac{a/c}{b/c}$ $\cot\alpha = \frac{b/c}{a/c}$

Ehk $\underline{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$ (2). $\underline{\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$ (3).

4) Võtame definitsiooni järele võrdused $\tan\alpha = \frac{a}{b}$

ja $\cot\alpha = \frac{b}{a}$

ja korrutame neid teineteisega, siis saame: $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}$

ehk $\underline{\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1}$ (4).

Nurga tangens ja kootangens on pöördsuurused; seda võis juba ette näha, sest nad on ju nii defiinitud.

Täiendavad valemid. Mõnikord võivad kasulikud olla järgmised definitsioonid:

1) Nurga seekansiks nim. hüpotenuusi suhet lähiskaatetiga . . . . $\sec\alpha = \frac{c}{b}$

2) Nurga koosekansiks nim. hüpotenuusi suhet vastaskaatetiga . . . . $\csc\alpha = \frac{c}{a}$.

1) Püthagorase lause põhjal saadud võrduse $a^2 + b^2 = c^2$ mõlemaid pooli jagades kord b-ga ja teine kord a-ga

saame: $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2}$ $\qquad$ $\frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}$

ehk: $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = \left(\frac{c}{b}\right)^2$ $\qquad$ $1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2$

ehk: $\underline{\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha}$ (5). $\qquad$ $\underline{1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha}$ (6).

2) Võtame definitsioonid: $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ ja $\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$\sec\alpha = \frac{c}{b}$ $\qquad$ $\csc\alpha = \frac{c}{a}$

ja korrutame teineteisega:

$\cos\alpha \cdot \sec\alpha = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b}$ $\qquad$ $\sin\alpha \cdot \csc\alpha = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{a}$

siis saame: $\underline{\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1}$ (7). $\qquad$ $\underline{\sin\alpha \cdot \csc\alpha = 1}$ (8).

Nurga koosinus ja seekans on pöördsuurused; nurga siinus ja koosekans on pöördsuurused; — nad on ju nii defiinitud.

194. Harjutisi.

813) Leida nurga teised funktsioonid, kui antud on:

a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ e) $\sin\beta = \frac{28}{45}$ i) $\sin\gamma = \frac{56}{65}$ n) $\sin\delta = \frac{a}{b}$

b) $\cos\alpha = \frac{8}{17}$ f) $\cos\beta = \frac{16}{65}$ k) $\cos\gamma = \frac{48}{73}$ o) $\cos\delta = \frac{m}{n}$

c) $\tan\alpha = \frac{12}{35}$ g) $\tan\beta = 4\frac{4}{9}$ l) $\tan\gamma = 3\frac{3}{7}$ p) $\tan\delta = \frac{p}{q}$

d) $\cot\alpha = \frac{9}{40}$ h) $\cot\beta = 1\frac{1}{20}$ m) $\cot\gamma = 1\frac{1}{3}$ q) $\cot\delta = \frac{k}{l}$

814) Nurga φ funktsioonid avaldada:

a) $\sin\varphi$ kaudu; b) $\cos\varphi$ kaudu; c) $\tan\varphi$ kaudu; d) $\cot\varphi$ kaudu.

815) Leida teised nurga funktsioonid, kui antud on:

a) $\sin\varphi = \frac{a-b}{a+b}$ e) $\sin\omega = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

b) $\cos\theta = \frac{\sqrt{m^2-n^2}}{m}$ f) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\tan\alpha = \frac{a}{b}$ g) $\tan\theta = \sqrt{3}$

d) $\cot\beta = \frac{\sqrt{y^2-x^2}}{x}$ h) $\cot\omega = \frac{\sqrt{5}}{2}$

816) Lihtsustada avaldised:

a) $1-\cos^2\alpha$ e) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha}$ i) $\frac{\sin\theta}{\tan\theta}$ n) $\frac{1}{1+\tan^2\varphi}$

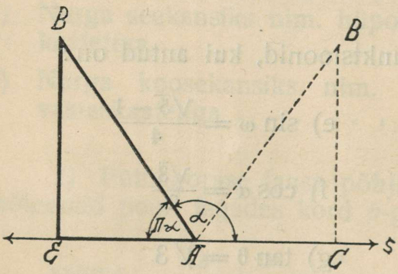
b) $1-\sin^2\alpha$ f) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$ k) $\frac{\cot\theta}{\cos\theta}$ o) $\frac{1}{1+\cot^2\varphi}$

c) $\cos\alpha\cdot\tan\alpha$ g) $\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$ l) $\frac{\tan\omega}{\cot\omega}$ p) $\sqrt{1+\tan^2\beta}$

d) $\sin\alpha\cdot\cot\alpha$ h) $\frac{\sin^2\alpha-1}{\cos^2\alpha-1}$ m) $\frac{1-\sin^2\omega}{1+\tan^2\omega}$ q) $\sqrt{1+\cot^2\beta}$

XIII-nes peatükk: **Kaldnurkse kolmnurga lahendamine.**

195. Nürinurga funktsioonid. Kui projektitava sirglõigu AB otsapunkt asub tollel sirgel *s*, millele seda sirglõiku projektitakse, siis moodustab projektitav sirglõik projektsiooni sirgega kaks nurka, mis on kõrvunurgad: üks neist on teravnurk ja teine nürinurk. Meist oleneb, kumba nurka lugeda kaldenurgaks. Kui kaldenurgaks lugeda teravnurka EAB-d, siis ei erine kaldenurga funktsioonide definitsioonid millegi poolest varem [155, 156] antud definitsioonidest.



212. joonis.

Kui kaldenurgaks lugeda nürinurka BAC-d, siis ei lange AB projektsioon mitte kaldenurga haara AC enese peale, vaid see projektsioon AE langeb haara AC pikendusele, mis läheb tipu A taha haarale AC vastassuunas.

Seepärast loeme AE-d negatiivseks ja AC-d positiivseks.

Võrreldes seda $\triangle$-rka ABE-d endise $\triangle$-rga ABC-ga, võime lugeda: $AB = AB$; $AE = -AC$; $BE = BC$ ja defiinida:

$$\sin\alpha = \sin CAB = \frac{BE}{BA} = \frac{BC}{BA} = \sin(180^\circ - \alpha) \text{ ehk: } \underline{\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha};$$

$$\cos\alpha = \cos CAB = \frac{AE}{AB} = \frac{-AC}{AB} = -\cos(180^\circ - \alpha) \text{ „ } \underline{\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha};$$

$$\tan\alpha = \tan CAB = \frac{BE}{AE} = \frac{BC}{-AC} = -\tan(180^\circ - \alpha) \text{ „ } \underline{\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan\alpha};$$

$$\cot\alpha = \cot CAB = \frac{AE}{BE} = \frac{-AC}{BC} = -\cot(180^\circ - \alpha) \text{ „ } \underline{\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot\alpha}.$$

Sõnades väljendatult:

Nürinurga siinus võrdub tema kõrvunurga siinusega;
nürinurga koosinus võrdub tema kõrvunurga vastasmärgilise koosinusega;
nürinurga tangens võrdub tema kõrvunurga vastasmärgilise tangensiga;
nürinurga kootangens võrdub tema kõrvunurga vastasmärgilise kootangensiga.

817) Harjutisi. Leida tabelist järgmiste trigonomeetriliste funktsioonide loomulikud väärtused:

$\sin 113°$	$\cos 99°$	$\tan 96°$	$\cot 94°$
$\sin 174°$	$\cos 168°$	$\tan 153°$	$\cot 167°$
$\sin 98°32'$	$\cos 106°40'$	$\tan 112°18'$	$\cot 98°44'$
$\sin 119°45'$	$\cos 128°29'$	$\tan 134°50'$	$\cot 123°35'$
$\sin 156°27'$	$\cos 149°52'$	$\tan 157°25'$	$\cot 152°15'$
$\sin 171°36'$	$\cos 162°30'$	$\tan 169°38'$	$\cot 170°42'$

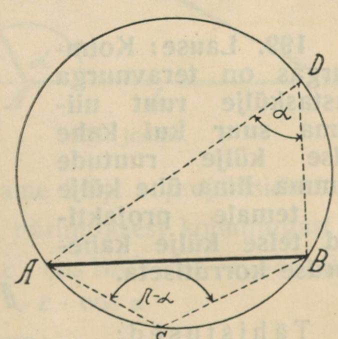
196. Kõõllause: Kõõlu pikkuse leiame, kui me ringi diameetri korrutame sellele kõõlule toetuva piirdenurga siinusega ehk sellele kõõlule vastava poole kesknurga siinusega.

Tõestus: Kõõl AB, läbi tema otsapunkti A minev diameeter AD ja kõõlu ning diameetri teisi otsapunkte ühendav kõõl DB moodustavad täisnurkse $\triangle$-rga, milles $\widehat{ADB}$ on kõõlule AB toetuv piirdenurk α. Seepärast leiame:

$$\overline{AB} = \overline{AD} \cdot \sin \widehat{ADB},$$

ehk

$$a = 2R \cdot \sin \alpha.$$



213. joonis.

Kui vaadelda teist piirdenurka $\widehat{AEB}$, mis toetub AB-le, siis teame, et $\hat{E} + \hat{D} = 180°$ [§ 111]; seepärast

$$\hat{E} = 180° - \hat{D} = 180° - \alpha \text{ ja } \sin(180° - \alpha) = \sin \alpha.$$

Siit leiame üldiselt:

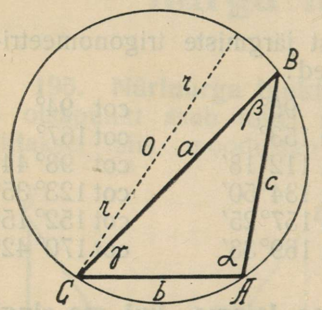
$$a = 2R \sin \alpha = 2R \sin(180° - \alpha) = 2R \sin E = 2R \sin D.$$

M. o. t. t.

197. Lause: Kolmnurga sisenurkade summa võrdub sirge nurgaga.

I-ne valem: $\underline{\alpha+\beta+\gamma=\pi}$ ehk $\underline{A+B+C=180^\circ}$.

198. Siinuslause: Kolmnurgas on ühe külje jagatis oma vastasnurga siinusega sama suur kui iga teise külje jagatis oma vastasnurga siinusega; see jagatis võrdub kolmnurga ümberringi diameetriga.



214. joonis.

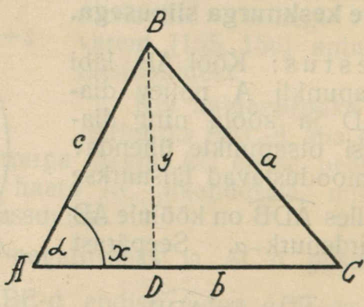
Tõestus: Joonestame $\triangle$-rga ABC ümber ringi, siis leiame kõõlu lause põhjal, et

$$a=2R\cdot\sin\alpha \text{ ehk } \frac{a}{\sin\alpha}=2R,$$
$$b=2R\cdot\sin\beta \quad \frac{b}{\sin\beta}=2R,$$
$$c=2R\cdot\sin\gamma \quad \frac{c}{\sin\gamma}=2R. \text{ Järel.}$$

II-ne valem:

$$\underline{\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R.}$$

199. Lause: Kolmnurgas on teravnurga vastaskülje ruut niisama suur kui kahe teise külje ruutude summa ilma ühe külje ja temale projektitud teise külje kahekordse korrutiseta.

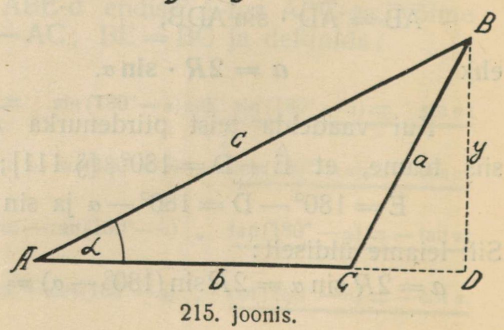


Tähistused:

Olgu $BC=a$,
$CA=b$,
$AB=c$;
$AD=x$,
$BD=y$;
siis on $CD=b-x$.

Tõestada:

$$a^2=b^2+c^2-2bx.$$



215. joonis.

T õ e s t u s:

$\triangle$-rgast BDC leiame: $\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2$

ehk: $a^2 = (b - x)^2 + y^2$;

$\triangle$-rgast ABD leiame: $y^2 = c^2 - x^2$.

Järel. $a^2 = b^2 - 2bx + x^2 + c^2 - x^2$

ehk: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$,

kus x on küljele b projektitud külg c.

Nürinurkses $\triangle$-rgas on CD $= x - b$, mis aga valemit ei muuda.

200. **Lause: Kolmnurgas on nürinurga vastaskülje ruut niisama suur kui kahe teise külje ruutude summa, suurendatud ühe külje ja temale projektitud teise külje kahekordse korrutise võrra.**

T õ e s t u s:

$\triangle$-rgast BDC leiame:

$a^2 = (b + x)^2 + y^2$

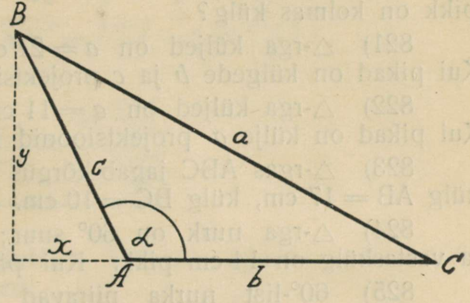
$\triangle$-rgast ABD leiame:

$\underline{y^2 = c^2 - x^2;}$

$a^2 = b^2 + 2bx + x^2 + c^2 - x^2$

ehk

$a^2 = b^2 + c^2 + 2bx$.



216. joonis.

201. **Koosinuslause:** Määrame külje c projektsiooni x-i:

teravnurksest kolmnurgast:

$x = c \cdot \cos \alpha$

nürinurksest kolmnurgast:

$x = c \cdot \cos \text{BAD} = c \cdot (-\cos \text{BAC})$

$x = -c \cdot \cos \alpha$

siit leiame:

$\underline{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha}$ $\qquad$ $\underline{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha.}$

See valem ühendab eelpool [§ 199 ja § 200] leitud valemid üheks valemiks. Ta on maksev ka täisnurkse kolmnurga jaoks, sest võttes $\alpha = 90^\circ$ leiame: $\cos \alpha = o$ ja sellega $a^2 = b^2 + c^2$, kus a on hüpotenuus ning b ja c kaatetid.

Seda valemit nim. *koosinuslauseks,* ja loetakse: **Kolmnurgas on ühe külje ruut sama suur kui kahe teise külje ruutude summa ilma nende külgede ja nende vahelnurga koosinuse kahekordse korrutiseta.**

Siit leiame: $2bc \cdot \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2.$

Järel. III-as valem: $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$

See valem on kohane kolmnurga nurkade leidmiseks, kui külgede mõõtarvud kirjutatakse ühe, kahe või isegi kolme numbriga.

202. Ülesandeid. 818) Määrata $\triangle$-rga kuju tema nurkade poolest, kui külgede pikkused on: 1) 60 m, 11 m, 61 m; 2) 7 m, 8 m, 9 m; 3) 11 m, 15 m, 20 m; 4) 15 m, 17 m, 8 m; 5) 13 m, 16 m, 19 m; 6) 9 m, 14 m, 17 m.

819) $\triangle$-rgas ABC on külg $b = 17$ cm, tema projektsioon alusele on $f = 8$ cm ja külje c projektsioon alusele on $g = 20$ cm Leida külg c?

820) $\triangle$-rga ABC alus on $a = 12$ cm, külg $b = 17$ cm ja tema projektsioon $f = 8$ cm langeb aluse pikendusele. Kui pikk on kolmas külg?

821) $\triangle$-rga küljed on $a = 21$ cm, $b = 20$ cm, $c = 13$ cm. Kui pikad on külgede b ja c projektsioonid küljele a?

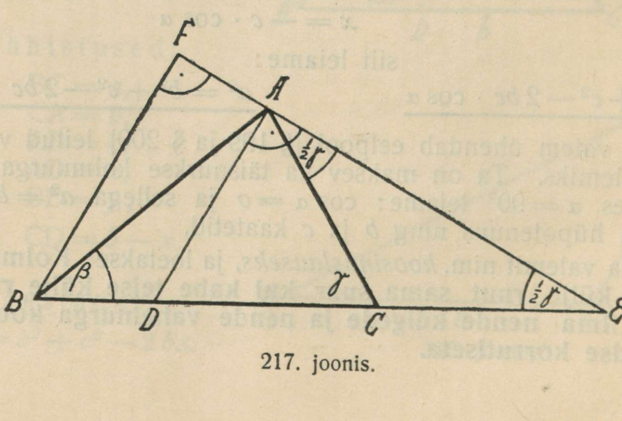
822) $\triangle$-rga küljed on $a = 11$ cm, $b = 20$ cm, $c = 13$ cm. Kui pikad on külje a projektsioonid kummalegi teisele küljele?

823) $\triangle$-rgas ABC jagab kõrgus BH aluse AC suhtes 5 : 2; külg AB = 17 cm, külg BC = 10 cm. Kui pikk on alus?

824) $\triangle$-rga nurk on 60° suur; tema lähiskülg on 16 cm ja vastaskülg on 14 cm pikk. Kui pikk on $\triangle$-rga ümbermõõt?

825) 60°-list nurka piiravad küljed $\triangle$-rgas suhtuvad nagu 8 : 3; vastaskülg on 21 cm pikk. Kui pikad on küljed?

203. Tangenslause: Kolmnurgas suhtub kahe küljesumma nende külgede vahesse nagu nende külgede vastasnurkade poolsumma tangens suhtub sama nurkade poolvahe tangensisse.



217. joonis.

T õ e s t u s: Olgu $b < a$.

Tipust C tõmbame poolringi raadiusega $CA = b$; see poolring lõikab külge CB-d punktis D ja tema pikendust punktis E nii, et

$$CD = CA = CE = b.$$

Järel. on siis $BE = a + b$ ja $BD = a - b$.

Tõmbame läbi E ja A sirge EA, ühendame D A-ga ja tõmbame $BF \perp AE$. $\widehat{DAE}$ on täisnurk, sest ta toetub diameetrile DE; järel. $DA \perp EA$. Et ka $BF \perp EA$, siis on $BF \parallel DA$. Seepärast leiame:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{BE}{BD} = \frac{FE}{FA} = \frac{FE/FB}{FA/FB} = \frac{\tan FBE}{\tan FBA}.$$

Leiame nüüd nurgad FBE ja FBA:

$$\widehat{FBE} = 90^\circ - \hat{E} = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi - \gamma}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\widehat{FBA} = \widehat{FBE} - \widehat{ABC} = \frac{\alpha+\beta}{2} - \beta = \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Järelikult:

IV-as valem: $$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

204. Mollveide valemid. Võtame eelmise paragrahvi joonise nr. 217. Sealt leiame

I. $\triangle$-rgast ABE:

$$\frac{BE}{BA} = \frac{\sin BAE}{\sin AEB}, \text{ ehk}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2} + 90^\circ\right) = \sin\left(180^\circ - 90^\circ + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$
$$= \sin\left[180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right] =$$
$$= \sin\left(90^\circ - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin(BAD + DAE)}{\sin AEB}, \text{ ehk}$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin(FBA + DAE)}{\sin AEB} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2} + 90^\circ\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}},$$

ehk $$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \quad \text{(I)}$$

See ongi n. n. **Mollveide esimene valem.**

II. $\triangle$-rgast ABD:

$$\frac{BD}{BA} = \frac{\sin BAD}{\sin ADB}, \text{ ehk}$$

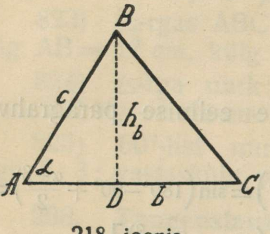
$\sin(90^\circ + \frac{1}{2}\gamma) = \sin[180^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2}\gamma] =$
$= \sin[180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}\gamma)] =$
$= \sin(90^\circ - \frac{1}{2}\gamma) = \cos\frac{1}{2}\gamma.$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin FBA}{\sin(DAE + AED)} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin(90^\circ + \frac{1}{2}\gamma)},$$

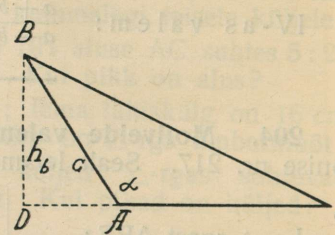
$$\text{ehk} \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} \quad \text{(II)}$$

See ongi n. n. **Mollveide teine valem.**

205. Kolmnurga pindala. Teada on, et $\triangle$-rga pindala võrdub tema aluse ja kõrguse poole korrutisega: $S = \frac{1}{2} b h_b$.



218. joonis.



219. joonis.

$$S_\triangle = \frac{1}{2} b h_b.$$

$\triangle$-rgast ABD leiame: $h_b = c \cdot \sin\alpha.$

Järel.: $S_\triangle = \frac{1}{2} bc \sin\alpha.$

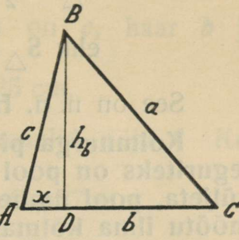
Järel. *$\triangle$-rga pindala võrdub tema kahe külje ja nende vahelnurga siinuse poole korrutisega.*

Märkus: Ka nürinurkses $\triangle$-rgas on $h_b = c \cdot \sin BAD = c \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = c \cdot \sin\alpha$; seepärast on ka nürinurkse $\triangle$-rga pindala

$$S_\triangle = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} bc \sin\alpha.$$

206. Heroni valem. Ülesanne 826) Määrata kolmnurga pindala tema kolme külje kaudu.

Lahendamine: Meie teame, et
$S_{\triangle} = \frac{1}{2} b h_b$.



220. joonis.

Kõrguse h_b leiame $\triangle$-rgast ABD:
$h_b^2 = c^2 - x^2$, ehk $h_b^2 = (c + x) \cdot (c - x)$.
x-i leiame $\triangle$-rgast ABC:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$; kust
$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}.$$

Nii siis: $h_b^2 = \left(c + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}\right) \cdot \left(c - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}\right)$; ehk

$$h_b^2 = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2b} \cdot \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2b}; \text{ ehk}$$

$$h_b^2 = \frac{1}{4b^2} \cdot (b^2 + 2bc + c^2 - a^2) \cdot (a^2 - b^2 + 2bc - c^2); \text{ ehk}$$

$$h_b^2 = \frac{1}{4b^2} \cdot [(b^2 + 2bc + c^2) - a^2] \cdot [a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)]; \text{ ehk}$$

$$h_b^2 = \frac{1}{4b^2} \cdot [(b + c)^2 - a^2] \cdot [a^2 - (b - c)^2]$$

$$h_b^2 = \frac{1}{4b^2} [(b + c + a) \cdot (b + c - a)] \cdot [(a + b - c)(a - b + c)]$$

$$h_b^2 = \frac{1}{4b^2} (a + b + c) \cdot (b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)$$

Olgu $a + b + c = 2p \qquad = 2p$;
siis on: $b + c - a = a + b + c - 2a = 2p - 2a = 2(p - a)$;
$c + a - b = a + b + c - 2b = 2p - 2b = 2(p - b)$;
$a + b - c = a + b + c - 2c = 2p - 2c = 2(p - c)$;

ja kõrguse valem omandab järgmise lihtsa kuju:

$$h_b^2 = \frac{1}{4b^2} \cdot 2p \cdot 2(p - a) \cdot 2(p - b) \cdot 2(p - c); \text{ ehk}$$

$$h_b^2 = \frac{4}{b^2} \cdot p(p - a)(p - b)(p - c); \text{ ehk}$$

$$h_b = \sqrt{\frac{4}{b^2} \cdot p(p - a)(p - b)(p - c)}; \text{ ehk}$$

$$h_b = \frac{2}{b} \cdot \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

Nüüd saame:

$$S_\triangle = \frac{b}{2} \cdot \frac{2}{b} \cdot \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$\text{ehk } S_\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

See on n. n. **Heroni valem**; teda loetakse järgmiselt:

Kolmnurga pindala võrdub ruutjuurega korrutisest, mille teguriteks on pool ümbermõõtu, pool ümbermõõtu ilma ühe küljeta, pool ümbermõõtu ilma teise küljeta ja pool ümbermõõtu ilma kolmanda küljeta.

207. Ülesandeid. 827) △-rga küljed on 26 cm, 28 cm, 30 cm pikad. Leida pindala!

828) Võrdhaarse △-rga ümbermõõt on $2p$ ja alus b. Leida pindala!

829) Võrdkülgse △-rga pindala leida tema külje a kaudu!

830) △-rga küljed on $a = 66$ cm, $b = 53$ cm, $c = 35$ cm. Leida kõrgused!

831) Rööpküliku diagonaalid on e ja f, lühem külg on a. Kui suur on rööpküliku pindala? $e = 7{,}8$ m; $f = 5$ m; $a = 4$ m.

832) Rööpküliku diagonaalid on e ja f. Kui kaugel sümmeetria keskpunktist on lühem külg a?

$c = 50$ cm; $f = 58$ cm; $a = 36$ cm.

833) Rööpküliku küljed on a ja b, diagonaal e. Kui kaugel on vastasküljed teineteisest?

$a = 25$ cm; $b = 17$ cm; $e = 28$ cm.

834) △-rga keskkohad on üksteisest vastavalt k, l ja m cm kaugel. Kui suur on selle △-rga pindala?

$k = 6{,}5$; $l = 7$; $m = 7{,}5$.

835) Võrdhaarse △-rga külgede keskkohad on üksteisest k ja l cm kaugel. Kui suur on selle △-rga pindala?

836) Nelinurga ABCD diagonaalid on e ja f; külje AB keskkoht on külje CD keskkohast g kaugusel. Kui suur on nelinurga pindala, mille tippudeks on ABCD külgede keskkohad? $e = 40$ cm; $f = 150$ cm; $g = 65$ cm.

837) Nelinurga ABCD külje BC keskkoht on teiste külgede keskkohtadest vastavalt 3,9 m; 4,2 m ja 4,5 m kaugel. Kui suur on ABCD pindala?

838) Trapetsi küljed on a, b, c ja d. Leida pindala! $a = 48$ m; $b = 29$ m; $c = 12$ m; $d = 25$ m.

839) Võrdhaarse trapetsi lühem alus on c, haar b ja diagonaal e. Leida trapetsi pindala!
$c = 12$ cm; $b = 17$ cm; $e = 25$ cm.

840) Trapetsi alused on a ja c, diagonaalid e ja f. Kui suur on selle trapetsi pindala?
$a = 55$ m; $c = 40$ m; $e = 68$ m; $f = 87$ m.

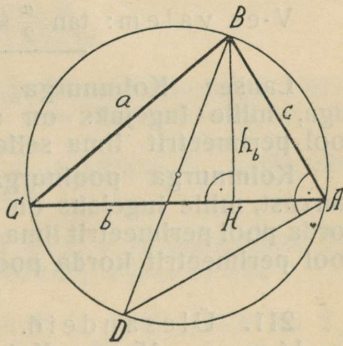
841) $\triangle$-rga küljed on $a = 44$ cm, $b = 37$ cm, $c = 15$ cm. Kui suurteks osadeks jagab külje a mediaan $\triangle$-rga pindala?

842) $\triangle$-rgas on antud küljed a ja b ja külje b mediaan m_b. Kui suur on selle $\triangle$-rga pindala?
$a = 75$ cm; $b = 64$ cm; $m_b = 53$ cm.

843) $\triangle$-rgas on antud küljed a ja b ja kolmanda külje mediaan m_c. Leida $\triangle$-rga pindala!
$a = 32$ m; $b = 53$ m; $m_c = 37{,}5$ m.

844) Kolm ringi raadiustega r_1, r_2 ja r_3 puutuvad üksteist. Leida $\triangle$-rga pindala, mille tippudeks on ringide keskpunktid! $r_1 = 20$ cm; $r_2 = 6$ cm; $r_3 = 4$ cm. Vaadelda 2 juhtu!

208. Ülesanne 845) **Kolmnurga ümberringi raadius leida külgede funktsioonina.**



221. joonis.

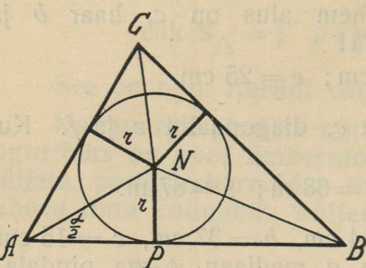
Lahendamine: Tõmbame diameetri BD ja kõrguse BH ja ühendame DA-ga. Siis on $\widehat{BAD} = \widehat{BHC}$ kui täisnurgad; $\widehat{BDA} = \widehat{BCA}$, sest mõlemad toetuvad kaarele BA.

Jär. $\triangle BDA \sim \triangle BCH$ ja $\frac{BD}{BC} = \frac{BA}{BH}$, ehk $\frac{2R}{a} = \frac{c}{h_b}$. Siit leiame: $R = \frac{ac}{2h_b}$.

Ehk $R = \frac{abc}{2bh_c}$, s. t. $R = \frac{abc}{4S}$.

Lause: Kolmnurga ümberringi raadius võrdub kõigi kolme külje korrutise ning neljakordse pindala jagatisega.

209. Ülesanne 846) **Kolmnurga siseringi raadius leida külgede funktsioonina.**



222. joonis.

Lahendamine: Ringi ümber joonestatud hulknurga pindala valem on üldine, maksev ka $\triangle$-rga kohta: $S = p \cdot r$.

Siit leiame $r = \frac{s}{p}$

ehk $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$.

Lause: Kolmnurga siseringi raadius võrdub pindala ja poole ümbermõõdu jagatisega.

210. Poolnurga-lause. Et kolmnurga nurkade poolitajad lõikuvad siseringi keskpunktis, siis on (joonis 222) $\widehat{NAP} = \frac{\alpha}{2}$; $NP = r$; $AP = p - a$. $\triangle NAP$ leiame:

$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{p-a}$; aga $r = \frac{S}{p}$ ja $S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$.

Seepärast leiame:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{p-a} = \frac{S}{p\,(p-a)} = \frac{\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}}{p\,(p-a)} = \sqrt{\frac{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{p^2\,(p-a)^2}}.$$

V-es valem: $\underline{\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{p-a}}$ ehk $\underline{\tan\alpha = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p\,(p-a)}}}$.

Lause: Kolmnurga poolnurga tangens võrdub murruga, mille lugejaks on siseringi raadius ja nimetajaks — pool perimeetrit ilma selle nurga vastasküljeta. Ehk:

Kolmnurga poolnurga tangens võrdub ruutjuurega murrust, mille lugejaks on pool meetrit ilma ühe lähisküljeta korda pool perimeetrit ilma teise lähisküljeta, ja nimetajaks on pool perimeetrit korda pool perimeetrit ilma vastasküljeta.

211. Ülesandeid. 847) $\triangle$-rga küljed on $a = 13$ m, $b = 14$ m, $c = 15$ m. Kui palju on ümberringi raadius pikem kui siseringi raadius?

848) $\triangle$-rga küljed on $a = 28$ cm, $b = 25$ cm, $c = 17$ cm. Kui suured $\triangle$-rgad tekivad, kui keskristjoonte lõikepunkt ühendada kõigi tippudega?

849) $\triangle$-rga küljed on $a = 25$ m, $b = 39$ m, $c = 40$ m. Kui suured $\triangle$-rgad tekivad, kui nurgapoolitajate lõikepunkt ühendada kõigi tippudega?

850) Võrdh. $\triangle$-rga haar on a ja kõrgus h. Kui pikk on ümberringi raadius? $a = 20$ m; $h = 16$ m.

851) Võrdh. $\triangle$-rga haar on a ja alus b. Kui pikk on ümberringi raadius? $a = 16$ m; $b = 19{,}2$ m.

852) Võrdh. $\triangle$-rga kõrgus on h ja ümberringi raadius on R. Leida $\triangle$-rga pindala! $h = 16$ cm; $R = 12{,}5$ cm.

853) Võrdh. $\triangle$-rga alus on $2\,b$ ja ümberringi diameeter — $2R$. Kui suur on $\triangle$-rga pindala ja ümbermõõt?

$2R = 25$ cm; $2\,b = 24$ cm.

854) Võrdh. $\triangle$-rga ümberringi raadius on R ja haar on a. Leida $\triangle$-rga pindala! $R = 15$ m; $a = 24$ m.

855) Võrdh. $\triangle$-rga pindala on s ja alus on b. Kui pikk on ümberringi raadius? $s = 432$ m^2; $b = 36$ m.

856) Kui pikk on võrdh. $\triangle$-rga ümberringi raadius, kui tema haar on a ja ümbermõõt $2\,p$?

$a = 5$ m; $2\,p = 16$ m.

857) Leida võrdh. $\triangle$-rga ümberringi raadius, kui antud on haar a ja tema peale tõmmatud kõrgus k.

$a = 12$ m; $k = 11{,}52$ m.

858) Võrdh. $\triangle$-rga alus on b ja haarale tõmmatud kõrgus on k. Leida ümberringi läbimõõt! $b = 24$ m; $k = 19{,}2$ m.

859) Võrdh. $\triangle$-rga haar on a ja kõrgus h. Leida siseringi raadius! $a = 15$ cm; $h = 12$ cm.

860) Võrdh. $\triangle$-rgas on antud haar a ja ümbermõõt $2\,p$ tarvis leida siseringi raadius. $a = 10$ cm; $2\,p = 32$ cm.

861) Võrdh. $\triangle$-rga kõrgus on h ja ümbermõõt on $2\,p$. Leida siseringi raadius! $h = 4$ m; $2\,p = 16$ m.

862) Võrdh. $\triangle$-rga alus on b ja kõrgus h. Selle $\triangle$-rga siseringile on tõmmatud puutuja rööbiti alusega. Kui pikk on selle puutuja lõik $\triangle$-rga haarade vahel?

$b = 0{,}6$ m; $h = 0{,}4$ m.

863) Võrdh. $\triangle$-rga kõrgus on h ja siseringi raadius on r. Kui suur on $\triangle$-rga pindala? $h = 12$ cm; $r = 4{,}5$ cm.

864) Võrdh. $\triangle$-rga siseringi raadius on r ja haarale tõmmatud kõrgus on h_1. Kui suur on $\triangle$-rga pindala?
$r = 1{,}6$ m; $h_1 = 5{,}76$ m.

865) Rombi sisering jagab puutepunktis külje osadeks m ja n. Leida pindala! $m = 6{,}4$ m; $n = 3{,}6$ m.

866) Rombi külg on a ja üks diagonaal on b. Kui pikk on selle rombi siseringi raadius? $a = 10$ cm; $b = 16$ cm.

867) Täisnurkse $\triangle$-rga kaatetite projektsioonid hüpotenuusile on f ja g. Kui pikk on siseringi raadius?
$f = 9$ cm; $g = 16$ cm

868) Täisnurkse võrdhaarse $\triangle$-rga ümberringi raadius on R. Kui suur on $\triangle$-rga pindala?

869) Täisnurkse võrdhaarse $\triangle$-rga siseringi raadius on r. Kui suur on $\triangle$-rga pindala?

870) Täisnurkse $\triangle$-rga siseringi raadius on r ja üks nurk on 30°. a) Kui pikad on $\triangle$-rga küljed? b) Kui suur on $\triangle$-rga pindala?

871) Ringi ümber joonestatud võrdhaarse trapetsi alused on a ja b. Leida trapetsi ümbermõõt ja pindala!
$a = 9$ cm; $b = 4$ cm.

872) Ringi ümber joonestatud võrdhaarse trapetsi külg jagub puutepunktis osadeks a ja b. Kui pikk on ringi raadius?
$a = 4{,}9$ m; $b = 2{,}5$ m.

873) Ringi ümber joonestatud täisnurkse trapetsi kaldkülje jagab puutepunkt osadeks m ja n. Leida trapetsi ümbermõõt ja pindala! $m = 4{,}5$ cm; $n = 2$ cm.

874) Ringi ümber on joonestatud võrdhaarne trapets; ringi raadius on R ja trapetsi haar on c. Kui pikk on trapetsi diagonaal? $R = 8$ cm; $c = 30$.

875) Võrdhaarse trapetsi siseringi puutepunkt haaraga jagab haara osadeks p ja q. Leida trapetsi pindala ja diagonaal!
$p = 12{,}5$ m; $q = 4{,}5$ m.

876) Võrdhaarse trapetsi siseringi keskpunkt on trapetsi tippudest m ja n kaugel. Kui pikk on ringi raadius?
$m = 8$ cm; $n = 6$ cm.

877) Ringi raadius on r; tema ümber joonestatud võrdhaarse trapetsi pikem alus on a. Kui kaugel üksteisest asuvad haara ja aluste puutepunktid ringiga? $r = 12$ m; $a = 32$ m.

878) Ringi ümber joonestatud trapetsi üks kaldkülg jagub puutepunktis osadeks a ja b; teise kaldkülje lühem lõik, milleks teda jagab puutepunkt, on c. Kui suur on trapetsi pindala? $a = 9$ cm; $b = 4$ cm; $c = 3$ cm.

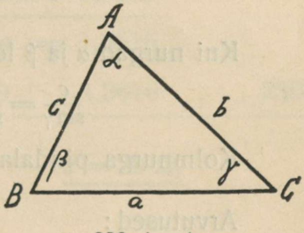
879) Ringi ümber joonestatud võrdhaarse trapetsi tipud on ringi keskpunktist a cm ja b cm kaugel. Kui suur on trapetsi pindala? $a = 15$; $b = 20$.

880) Võrdhaarse trapetsi nurk on 30° suur ja selle trapetsi siseringi raadius on r. Leida trapetsi pindala ja ümbermõõt!

881) Ringi ümber joonestatud võrdhaarse trapetsi nurk on 60° suur ja ringi raadius on r. Kui suurteks osadeks jagab puutepunkt haara?

882) Ringi raadius on r ja tema ümber joonestatud võrdhaarse trapetsi teravnurk on 45° suur. Leida trapetsi alused ja pindala!

212. Kolmnurkade lahendamine trigonomeetriliste suuruste abil. Kui $\triangle$-rga 6-st põhielemendist — 3-st küljest ja 3-st nurgast — on antud 3 elementi, mille hulgas on vähimalt 1 külg, siis on $\triangle$-rga kuju ja suurus määratud ja me võime $\triangle$-rga leida kas teda konstruides [Ruumi algõp. I: 47, 48, 49, 58] või tema elemente arvutades, rakendades selleks paragrahvides 197, 198, 201, 203, 210 esitatud valemeid. Kummalgi puhul on olemas 4 põhiülesannet, nagu on olemas 4 ühtuvuslauset ja 4 sarnasuslauset. Lahendamisel tarvitatakse pigemini trigonomeetriliste suuruste ja külgede logaritme kui neid suurusi endid.



223. joonis.

Märkus: Kolmnurga põhielementideks ehk I-se järgu elementideks loeme külgi ja nurki, II-se järgu elementideks loeme pindala ja ümber- ja siseringide raadiusi; III-nda järgu elementideks loeme kõrgusi, mediaane ja nurgapoolitajaid.

883) I-ne põhiülesanne: *Lahendada $\triangle$ kahe külje ja nende vahelnurga kaudu!*

Antud: $a = 24{,}75$ m; $b = 18{,}45$ m; $\gamma = 62^\circ 18'$.

Leida: α, β, c ja S.

Lahendamine: Rakendame tangenslauset (IV-ndat valemit, 203):

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Et $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi-\gamma}{2}$, siis saame: $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{\pi-\gamma}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}$.

Siit leiame: $\tan\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cdot\tan\frac{\pi-\gamma}{2}$.

Logaritmime:

$$\log\tan\frac{\alpha-\beta}{2} = \log(a-b) - \log(a+b) + \log\tan\frac{\pi-\gamma}{2}.$$

Pärast arvutuste teostamist leiame nurga $\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Tähistame $\frac{\alpha+\beta}{2}$, mis võrdub $\frac{\pi-\gamma}{2}$, K-ga ja leitud nurga $\frac{\alpha-\beta}{2}$ L-ga.

Siis leiame kergesti liitmise ja lahutamise abil

$$\alpha = K + L \quad \text{ja} \quad \beta = K - L.$$

Kui nurgad α ja β leitud, siis leiame siinuslause abil külje c:

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha}; \text{ kust } c = \frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Kolmnurga pindala leiame otse valemist $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

Arvutused:

1)	$a = 24{,}75$	$\pi = 179^\circ 60'$	$\log(a+b) = 1{,}6355$
	$b = 18{,}45$	$\gamma = 62^\circ 18'$	$\log(a-b) = 0{,}7993$
	$a+b = 43{,}20$	$\pi-\gamma = 117^\circ 42'$	$\log\tan 58^\circ 50' = 0{,}2184$
	$a-b = 6{,}30$	$\frac{\pi-\gamma}{2} = 58^\circ 51'$	$d = 28 \quad 1' \ldots 28$
			$\log\tan\frac{\pi-\gamma}{2} = 0{,}2187$

$\log(a-b)=$	0,7993
$-\log(a+b)=$	8,3645
$\log\tan\frac{\pi-\gamma}{2}=$	0,2187

$\log\tan\frac{\alpha-\beta}{2}=$ 9,3825

$d=55$ 3804 ... 13°30′

210 : 55 ... 4′

$\frac{\alpha-\beta}{2}=$ 13°34′

$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=58°51'$

$\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}=13°34'$

$\alpha \quad = 72°25'$

$\beta \quad = 45°17'$

2) $c=\frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$

$\log c=\log a+\log\sin\gamma-\log\sin\alpha$

log 24,7 = 1,3927

$d=18$ 5 9

$\log a$ = 1,3936

log sin 62° 10′ = 9,9466

$d=7$ 8′ 56

$\log\sin\gamma$ = 9,9472

log sin 72° 20′ = 9,9790

$d=4$ 5′ 2

$\log\sin\alpha$ = 9,9792

$\log a$	1,3936
$\log\sin\gamma$	9,9472
$-\log\sin\alpha$	0,0208

$\log c$ = 1,3616

$d=19$ 1,3616 230

$c = 23$ m.

3) $S=0{,}5\ ab\sin\gamma$

$\log S=\log 0{,}5+\log a+\log b+\log\sin\gamma$

log 0,5	9,6990
$\log a$	1,3936
$\log b$	1,2660
$\log\sin\gamma$	9,9472

$\log S$ = 2,3058

$d=21$ 3054 202

40 : 21 2

$S = 202{,}2\ m^2$

884) II-ne põhiülesanne: *Lahendada △ ühe külje ja tema lähisnurkade kaudu.*

Antud: $a = 22{,}38$ m; $\beta = 50°\,12'$; $\gamma = 71°\,34$.

Leida: α, $2R$, b, e.

Lahendamine: 1)

$\underline{\alpha = \pi - (\beta + \gamma)}$.

$$\begin{array}{rl} \beta = & 50°12' \\ \gamma = & 71°34' \\ \hline \beta+\gamma = & 121°46' \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \pi = & 179°60' \\ \beta+\gamma = & 121°46' \\ \hline \alpha = & 58°14' \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \log\ 22{,}38 & & = 1{,}3483 \\ d = 19 & 8 & \quad 152 \\ \hline \log a & & = 1{,}3498 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \log\sin 58°10' & & = 9{,}9292 \\ d = 8 & 4' \ldots\ldots & 32 \\ \hline \log\sin\alpha & & = 9{,}9295 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \log\sin 50°10' & & = 9{,}8853 \\ d = 11 & 2' \ldots\ldots & 22 \\ \hline \log\sin\beta & & = 9{,}8855 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \log\sin 71°30' & & = 9{,}9770 \\ d = 4 & 4' \ldots\ldots & 16 \\ \hline \log\sin\gamma & & = 9{,}9772 \end{array}$$

2) $\underline{2R = \dfrac{a}{\sin\alpha}}$; $\log 2R = \log a = \log\sin\alpha$.

$$\begin{array}{lll} \log a & = 1{,}3498 & \\ -\log\sin\alpha & = 0{,}0705 & \\ \hline \log 2R & = 1{,}4203 & \\ & \quad 4200 \ldots\ldots & 263 \\ d = 16 & \quad 30:16 \ldots\ldots & 2 \\ \hline \end{array}$$

$\underline{2R = 26{,}32 \text{ m.}}$

3) $\underline{b = 2R \cdot \sin\beta}$; $\log b = \log 2R + \log\sin\beta$.

$$\begin{array}{lll} \log 2R & = 1{,}4203 & \\ \log\sin\beta & = 9{,}8855 & \\ \hline \log b & = 1{,}3058 & \\ & \quad 3054 \ldots\ldots\ldots & 202 \\ d = 21 & \quad 40:21 \ldots\ldots\ldots & 2 \\ \hline \end{array}$$

$\underline{b = 20{,}22 \text{ m.}}$

4) $\underline{c = 2R \cdot \sin\gamma}$; $\log c = \log 2R + \log\sin\gamma$.

$$\begin{array}{lll} \log 2R & = 1{,}4203 & \\ \log\sin\gamma & = 9{,}9772 & \\ \hline \log c & = 1{,}3975 & \\ & \quad 3962 \ldots\ldots\ldots & 249 \\ d = 17 & \quad 130:17 \ldots\ldots\ldots & 8 \\ \hline \end{array}$$

$\underline{c = 24{,}98}$ (≈ 25) m.

885) III-as põhiülesanne: *Lahendada* $\triangle$ *tema kolme külje kaudu.*

Antud: $a=17$ m; $b=19$ m; $c=22$ m. Leida: S, r, α, β, γ.

Lahendamiseks rakendame $\triangle$-rga poolnurga tangensi valemeid:

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{p-a};\quad \tan\frac{\beta}{2}=\frac{r}{p-b};\quad \tan\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{p-c}.$$

$$\begin{array}{l|l|l|l}
a=17 & p-a=12 & \log(p-a)=1{,}0792 & \text{§§ 206 ja 209 annavad:} \\
b=19 & v-b=10 & \log(p-b)=1{,}0000 & \log r=\log S-\log p \\
c=22 & p-c=\ \ 7 & \log(p-c)=0{,}8451 & 2\log S=\log(p-a)+ \\
\hline
2p=58 & p\ \ =29 & \log p\ \ =1{,}4624 & +\log(p-b) \\
 & & \hline 2\log S=4{,}3867 & +\log(p-c) \\
 & & -\begin{cases}\log S=2{,}1934 \\ \log p=1{,}4624\end{cases} & +\log p
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l}
1)\ \left.\begin{array}{l}\log r=0{,}7310 \\ \log(p-a)=1{,}0792\end{array}\right\}- & 2)\ \left.\begin{array}{l}\log r=0{,}7310 \\ \log(p-b)=1{,}0000\end{array}\right\}- & 3)\ \left.\begin{array}{l}\log r=0{,}7310 \\ \log(p-c)=0{,}8451\end{array}\right\}- \\
\hline
\log\tan\frac{\alpha}{2}=9{,}6518 & \log\tan\frac{\beta}{2}=9{,}7310 & \log\tan\frac{\gamma}{2}=9{,}8859 \\
\quad 9{,}6518 & \quad 9{,}7310 & \quad 9{,}8859 \\
d=34\quad 6486\ldots 24^\circ 0' & d=30\quad 7287\ldots 28^\circ 10' & d=26\quad 8850\ldots 37^\circ 30' \\
\quad 320:34\ldots 9' & \quad 230:30\ldots 8' & \quad 90:26\ldots 3'
\end{array}$$

Järelkatse:

$$\frac{\alpha}{2}=24^\circ 09' \qquad \frac{\beta}{2}=28^\circ 18' \qquad \frac{\gamma}{2}=37^\circ 33'$$

$$\frac{\beta}{2}=28^\circ 18'$$

$$\frac{\gamma}{2}=37^\circ 33'$$

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=89^\circ 60'. \qquad \underline{\alpha=48^\circ 18'};\quad \underline{\beta=56^\circ 36'};\quad \underline{\gamma=75^\circ 6'}.$$

$$\begin{array}{ll}
4)\ \log r=0{,}7310 & 5)\ \log S=2{,}1934 \\
\quad 7308\ \ldots\ 538 & \quad 1931\ \ldots\ 156 \\
d=16\quad 20:16\ \ldots\ 1 & d=28\quad 30:28\ \ldots\ 1 \\
\hline
r=5{,}381\ \text{m}. & S=156{,}1\ \text{m}^2. \\
\underline{r=5{,}38\ \text{m}.} & \underline{S=156\ \text{m}^2.}
\end{array}$$

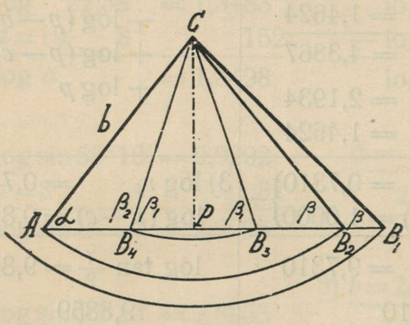
886) I V - j a s p õ h i ü l e s a n n e : *Lahendada △ kahe külje ja ühe külje vastasnurga kaudu.*

A n t u d : a, b, α. L e i d a : β, γ, c, R, S.

L a h e n d a m i n e : Siinuslausest $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ leiame

$$\sin\beta = \frac{b \,.\, \sin\alpha}{a}.$$

Et aga $\sin\beta$ väärtused alluvad teatud kitsendustele, nad on suletud piiridesse 0 ja 1, siis ei ole see ülesanne mitte igal tingimusel võimalik ja me peame teda uurima.



224. joonis.

I. Kui $a > b$, siis on ammugi $a > b \sin\alpha$ ja $\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a} < 1$. Sellega on ülesanne võimalik ja tal on 1 lahend [Ruumi algõp. I, 58]: $\triangle AB_1C$.

M ä r k u s : Iseenesest mõistetavalt peab olema antud $a > b$, kui $\alpha > 90°$ või $\alpha = 90°$.

II. Kui $a = b$, siis on ka $\alpha = \beta < 90°$; △ on võrdhaarne; sellega on ülesanne võimalik ja tal on 1 lahend: $\triangle AB_2C$.

III. Kui $a < b$, siis on võimalik, 1) et siiski on $a > b \cdot \sin\alpha$, või 2) et $a = b \cdot \sin\alpha$ ja 3) et $a < b \cdot \sin\alpha$.

1) Kui $a > b \cdot \sin\alpha = CP = h_c$, siis on $\frac{b \,.\, \sin\alpha}{a} < 1$; sellega on $\sin\beta < 1$. Niisugusele siinusele vastavad kaks nurka β — üks teravnurk ja teine nürinurk, mis täiendab esimest sirgenurgani. Sellega on ülesandel 2 lahendit. Lahenditena esinevad △△-rgad AB_3C ja AB_4C, sest punktist C raadiusega a tõmmatud kaar lõikab nurga C vastaskülge kahes punktis B_3 ja B_4.

△-rgas AB_3C on $\beta_1 = \widehat{AB_3C} < 90°$ ja

△-rgas AB_4C on $\beta_2 = \widehat{AB_4C} > 90°$, mille juures nurk

$\beta_2 = 180° - \widehat{CB_4B_3} = 180° - \beta_1$, sest et

$\widehat{CB_4B_3} = \widehat{CB_3B_4} = \beta_1$ $[CB_3 = CB_4]$.

2) Kui $a = b \cdot \sin\alpha = CP = h_c$, siis on $\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a} = 1$ ja ülesandel on 1 lahend, millena esineb täisnurkne $\triangle APC$. Arusaadav, sest punktid B_3 ja B_4 on, lähenedes teineteisele ja punktile P, ühte sulanud üheks punktiks P ja punktist C raadiusega $a = h_c = b \cdot \sin\beta$ tõmmatud kaar ainult puutub nurga α teist haara punktis P. [Ruumi algõpetus I, 58. III, 2.].

3) Kui $a < b \sin\alpha = CP = h_c$, siis on $\frac{b \cdot \sin\alpha}{a} > 1$ ja sellega peaks olema ka $\sin\beta > 1$. See on aga võimatu. Sellega on ka terve ülesanne võimatu ja tal on 0 lahendit. [Ruumi algõpetus I, 58. III, 3]. Arusaadav, sest punktist C raadiusega $a < h_c = CP = b \cdot \sin\beta$ tõmmatud kaar ei ulatugi nurga α teise haarani.

Võtame nüüd arvulise näite:

$$a = 27 \text{ m}; \quad b = 33 \text{ m}; \quad \alpha = 51°20'.$$

1) $\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a}$.

$$\log \sin\beta = \log b + \log \sin\alpha - \log a$$

$\log b$	1,5185
$\log \sin\alpha$	9,8925
$-\log a$	8,5686

$\log \sin\beta = 9,9796$

9794 . . . . $72°30'$

$d = 4$ 20 : 4 . . . . $5'$

$\beta_1 = 72°35'$; $\beta_2 = 107°25'$.

2) Kahesugusele β-le vastab kahesugune γ.

$\gamma_1 = 180° - \alpha - \beta_1$;
$\gamma_1 = (180° - \beta_1) - \alpha$;
$\gamma_1 = \beta_2 - \alpha$;
$\gamma_1 = 107°25' - 51°20'$;
$\gamma_1 = 56°5'$.

$\gamma_2 = 180° - \alpha - \beta_2$
$\gamma_2 = (180° - \beta_2) - \alpha$
$\gamma_2 = \beta_1 - \alpha$.
$\gamma_2 = 72°35' - 51°20'$;
$\gamma_2 = 21°15'$.

Samuti erinevad need △-rgad teineteisest kolmandate küljede ja pindalade poolest:

$$3)\quad \frac{c}{\sin\gamma}=\frac{a}{\sin\alpha};\qquad \underline{c=\frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}}$$

$$\log c=\log a+\log\sin\gamma-\log\sin\alpha$$

$$\begin{array}{lr}
\log\sin 56^\circ 0' & =9{,}9186\\
d=8 \qquad 5' \ldots\ldots\ldots & 40\\
\hline
\log\sin\gamma_1 & =9{,}9190
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
\log a & 1{,}4314\\
\log\sin\gamma_1 & 9{,}9190\\
-\log\sin\alpha & 0{,}1075\\
\hline
\log c_1 = & 1{,}4579
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
4579 \;.\;.\;.\;.\; 287\\
\hline
\underline{c_1=28{,}7\text{ m.}}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}
\log\sin 21^\circ 10' & =9{,}5576\\
d=33 \qquad 5' & 165\\
\hline
\log\sin\gamma_2 & =9{,}5593
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
\log a & 1{,}4314\\
\log\sin\gamma_2 & 9{,}5593\\
-\log\sin\alpha & 0{,}1075\\
\hline
\log c_2 = & 1{,}0982
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}
 & \underline{0969} \;.\;.\;.\;.\; 125\\
d=35 & 130:35 \;.\;.\;.\; 4\\
\hline
 & \underline{c_2=12{,}54\text{ m.}}
\end{array}$$

$$4)\quad \underline{S=0{,}5\,bc\sin\alpha}$$

$$\log S=\log 0{,}5+\log b+\log c+\log\sin\alpha$$

$$\begin{array}{l|l}
\log 0{,}5 & 9{,}6990\\
\log b & 1{,}5185\\
\log c_1 & 1{,}4579\\
\log\sin\alpha & 9{,}8925\\
\hline
\log S_1 = & 2{,}5679\\
 & \underline{5670} \;.\;.\;.\;.\; 369\\
d=12 & \quad 90:12 \;.\;.\;.\; 8\\
\hline
 & \underline{S_1=369{,}8\text{ m}^2.}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
\log 0{,}5 & 9{,}6990\\
\log b & 1{,}5185\\
\log c_2 & 1{,}0982\\
\log\sin\alpha & 9{,}8925\\
\hline
\log S_2 = & 2{,}2082\\
 & \underline{2068} \;.\;.\;.\;.\; 161\\
d=27 & 140:27 \;.\;.\;.\; 5\\
\hline
 & \underline{S_2=161{,}5\text{ m}^2.}
\end{array}$$

5) Ümberringide raadiused on neil △-rkadel võrdsed, sest et

$$2R=\frac{a}{\sin\alpha};\qquad \log 2R=\log a-\log\sin\alpha$$

$$\begin{array}{rl}
 & \left.\begin{array}{r}=1{,}4314\\ 0{,}1075\end{array}\right\}+\\
\hline
\log 2R = & 1{,}5389\\
 & \underline{5378} \;.\;.\;.\;.\; 345\\
d=13 & 110:13 \;.\;.\;.\; 8\\
\hline
 & 2R=34{,}58\text{ m.}\\
 & \underline{R=17{,}29\text{ m.}}
\end{array}$$

213. Harjutisi ja ülesandeid. 887) Harjutisi.

Lahendada $\triangle$, kui on antud:

I.	a)	$a = 11$ m;	$b = 8$ m;	$\gamma = 65° 30'$.
	b)	$b = 17$ cm;	$c = 14$ cm;	$\alpha = 106° 28'$.
	c)	$c = 5$ m;	$a = 3$ m;	$\beta = 58°$.
	d)	$b = 7$ m;	$a = 6$ m;	$\gamma = 130°$.
	e)	$c = 42$ cm.	$b = 28$ cm;	$\alpha = 124°$.
	f)	$a = 510$ cm;	$c = 317$ cm;	$\beta = 76° 19'$.
	g)	$a = 225$ m;	$b = 800$ m;	$\gamma = 36° 44'$.
	h)	$b = 22{,}96$ m;	$c = 16{,}87$ m;	$\alpha = 29° 52'$.
	i)	$a = 40{,}33$ m;	$c = 32{,}11$ m;	$\beta = 73° 40'$.
II.	a)	$a = 370$ m;	$\beta = 86° 4'$;	$\gamma = 50° 56'$.
	b)	$b = 28$ cm;	$\alpha = 48° 20'$;	$\gamma = 72° 16'$.
	c)	$c = 72{,}5$ m;	$\alpha = 112° 45'$;	$\beta = 29° 37'$.
	d)	$a = 614$ m;	$\beta = 107° 27'$;	$\gamma = 42° 33'$.
	e)	$b = 51{,}34$ m;	$\alpha = 51° 36'$;	$\gamma = 63° 48'$.
	f)	$c = 78{,}29$ m;	$\alpha = 78° 24'$;	$\beta = 52° 49'$.
III.	a)	$a = 6$ cm;	$b = 7$ cm;	$c = 9$ cm.
	b)	$a = 13$ cm;	$b = 14$ cm;	$c = 15$ cm.
	c)	$a = 19$ cm;	$b = 34$ cm;	$c = 49$ cm.
	d)	$a = 5{,}134$ km;	$b = 7{,}268$ km;	$c = 9{,}312$ km.
	e)	$a = 44$ m;	$b = 483$ m;	$c = 485$ m.
	f)	$a = 421{,}6$ m;	$b = 409{,}9$ m;	$c = 335{,}9$ m.
IV.	a)	$a = 34$ cm;	$b = 93$ cm;	$\alpha = 14° 15'$.
	b)	$b = 19{,}06$ m;	$c = 28{,}19$ m;	$\beta = 31° 17'$.
	c)	$a = 24$ cm;	$b = 83$ cm;	$\alpha = 26° 44'$.
	d)	$c = 9{,}52$ m;	$a = 18{,}48$ m;	$\gamma = 29° 25'$.
	e)	$b = 360$ cm;	$c = 309$ cm;	$\gamma = 21° 14'$.
	f)	$a = 53{,}6$ m;	$b = 74{,}35$ m;	$\alpha = 46° 8'$.
	g)	$c = 57$ cm;	$a = 37$ cm;	$\alpha = 37°$.
	h)	$b = 29$ cm;	$c = 48$ cm;	$\beta = 26°$.
	i)	$b = 26{,}3$ cm;	$c = 21{,}5$ cm;	$\beta = 70° 15'$.

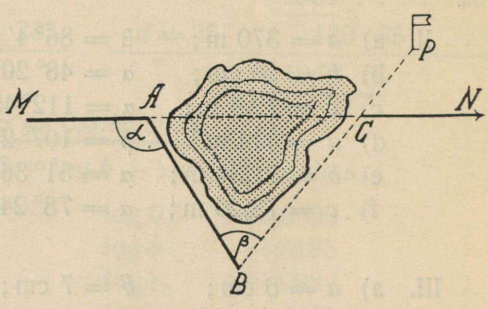
Ülesandeid. 888) Kolm ringi puutuvad üksteist väljastpoolt. Nende raadiused on 28 cm, 35 cm ja 49 cm. Kui suured on nende ringide kesksirgete-vahelised nurgad?

889) Parallelogrammi küljed on $a = 35{,}5$ cm, $b = 23{,}7$ cm ja üks diagonaal on $e = 43{,}2$ cm. Kui suured on tema nurgad?

890) Kella minuti osuti on 66 mm pikk ja tunni osuti 54 mm pikk. Kui palju aega pärast keskpäeva on nende osutite otsapunktide kaugus teineteisest 90 mm?

891) Kehale on rakendatud ühes punktis kaks tungi, $P = 17$ kg ja $Q = 23$ kg; nende resultant on $R = 15$ kg. Kui suure nurga all mõjuvad tungid P ja Q?

892) Et maapinnal võetud sihti takistusest üle pikendada, näiteks mäe taha või üle soo, toimitakse järgmiselt: võetud sirge MA otsapunktist A tähistatakse baas AB nii, et baasi otsapunktist B oleks nähtav ja ligipääsetav takistuse taga asuv maaala; siis mõõdetakse ära



225. joonis.

1) baas $AB = c$ m,

2) $\widehat{MAB} = \alpha$, mille moodustab baas võetud sirgega, ja

3) $\widehat{ABP} = \beta$, mille moodustab vaatekiir baasi otsapunktist B mingisugusele esemele P, mis asub takistuse taga.

Millised arvutused tulevad teostada, et pärast vastavaid mõõtmisi võimalik oleks määrata MA pikenduse suund?

$$c = 325 \text{ m}; \quad \alpha = 128^\circ 36'; \quad \beta = 75^\circ 42'!$$

893) Ligipääsetamatu torni kõrguse määramiseks võeti torni suunas horisontaalne baas $AB = c = 22$ m ja baasi otsapunktidest määrati torni tipu kõrgusnurgad. Punktis A oli kõrgusnurk $\alpha = 38^\circ 35'$ ja punktis B — kõrgusnurk $\beta = 22^\circ 30'$. Leida torni kõrgus.

894) Jõe laiuse määramiseks võeti jõe ühel kaldal otse vee juures baas $AB = c = 81{,}9$ m ja valiti jõe teisel kaldal otse vee juures puu C. Siis mõõdeti ära nurgad $CAB = \alpha = 68^\circ 4'$ ja $CBA = \beta = 73^\circ 13'$. Kui lai on jõgi puu C kohal?

895) Mäe nõlvakul kasvab puu. Nõlvaku kalle vastu horisontaalset tasapinda on β; päikese kõrgus taevavõlvil on α ja puu varju pikkus on l m. Kui kõrge on puu?

$l = 9{,}53$ m; $\alpha = 49°48'$; $\beta = 14°30'$.

896) Merekindluse vaatluspunktide vahe on $d = 23{,}35$ km. Laevale sihitud vaatekiir moodustab baasiga ühes vaatluspunktis nurga $\alpha = 62°\ 36'$ ja teises vaatluspunktis nurga $\beta = 37°\ 17'$. Kui kaugel on laev kummastki vaatluspunktist? [1 meremiil $\approx 1{,}855$ km].

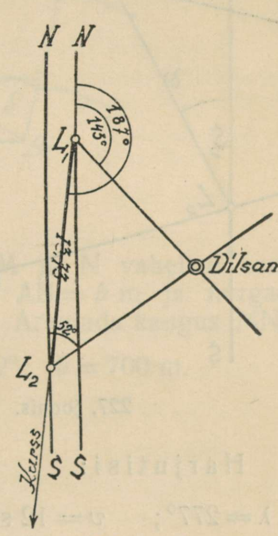
Harjutis: $d = 8{,}782$ meremiili; $\alpha = 69°\ 43'$; $\beta = 76°\ 42'$.

897) Laevalt on näha 4,475 merepenikoormat (miili) eemal olev tuletorn suunas, mis moodustab lõuna suunaga lääne poole nurga 52° 14′ [sümbol: S 52° 14′ W]. Mitu merepenikoormat tuleb laeval sõita kirde suunas, et tuletorn oleks näha põhja suunas?

898) Märkus. Laeva kursiks nimetatakse nurka laeva sõidusuuna ja meridiaani vahel; teda loetakse 0°-st kuni 360°-ni põhjast ida-lõuna-lääne kaudu (Nordist Osti poole). Peilungiks nim. nurka laeva ning peilitavat eset ühendava sirge ja meridiaani vahel. Loetakse samuti kui kurssi.

Laev sõidab kursiga $\alpha = 187°$ ja võtab Vilsandi tuletorni peilungi $\delta_1 = 143°$. Kui ta ära sõitnud 13,73 meremiili, võtab ta uuesti sama tuletorni peilungi $\delta_2 = 52°$. Leida laeva kaugus Vilsandi tuletornist teisel momendil!

$\alpha = 231°$; Ristna $\delta_1 = 167°$; $\delta_2 = 83°$; $d = 5{,}92$ m.



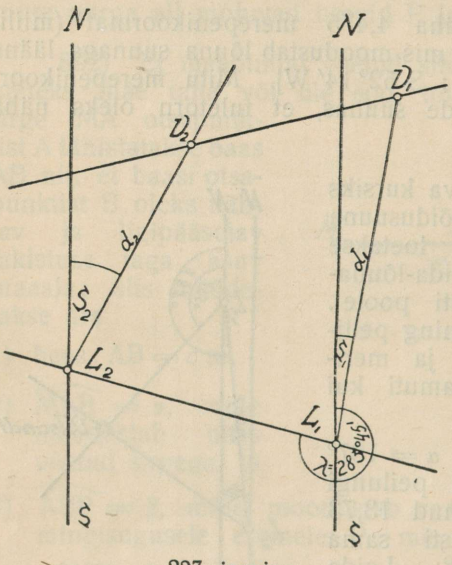
226. joonis.

899) Vaatekiir laevalt tuletorni moodustab laeva kursiga nurga $\alpha = 28°\ 55'$; 7,8 meremiili järel on see nurk 45°. Leida, kui kaugelt sõidab laev tuletornist mööda.

900) Nurk laeva kursi ja tuletorni vahel on 35° 15′; kui laev on ära sõitnud 8,75 meremiili, siis on see nurk suurenenud 45° võrra. Leida, kui kaugelt sõidab laev tuletornist mööda!

901) Järve pikkuse määramiseks märgiti tema kallaste kahel kaugeimal kohal kaks puud, ühes otsas puu A ja teises otsas puu B. Siis valiti punkt C nii, et temast oli kumbki puu näha ja ligipääsetav, ning mõõdeti kummagi puu kaugus punktist C: CA = 239 m ja CB = 320 m ja nurk ACB nende kauguste vahel. $\widehat{ACB} = 122° 48'$. Leida järve pikkus!

902) Kaks tungi P = 24 kg ja Q = 30 kg on rakendatud kehale samas punktis moodustades nurga $\alpha = 71° 30'$. Kui suur on nende tungide resultant ja millises suunas mõjub ta?



227. joonis.

903) Vahilaev märkab vaenlase laeva ning võtab tema peilungi $\varphi_1 = 8° 45'$ ja kauguse $d_1 = 11{,}7$ meremiili. Ise sõidab vahilaev kursiga $\lambda = 283° 45'$ ja kiirusega $v = 27$ sõlme (27 meremiili tunnis). $t = 20$ minuti pärast võtab ta uuesti vaenlase peilungi $\varphi_2 = 27°$ ja kauguse $d_2 = 8{,}4$ meremiili. Millise kursi ja kiirusega sõidab vaenlase laev?

Harjutisi:

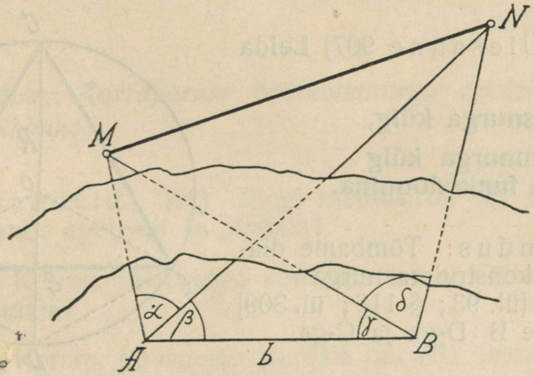
a) $\lambda = 277°$; $v = 12$ sõlme; $\varphi_1 = 167°$; $d_1 = 5{,}2$ merem.
$t = 20$ min; $\varphi_2 = 199°$; $d_2 = 9{,}3$ merem.

b) $\lambda = 44°$; $v = 30$ sõlme; $\varphi_1 = 303° 30'$; $d_1 = 6{,}3$ merem.
$t = 20$ min; $\varphi_2 = 281°$; $d_2 = 11{,}7$ merem.

c) $\lambda = 11° 30'$; $v = 15$ sõlme; $\varphi_1 = 88°$; $d_1 = 12{,}7$ merem.
$t = 30$ min; $\varphi_2 = 62°$; $d_2 = 8{,}1$ merem.

904) Kõpu tuletorn, mille tipu kõrgus merepinnast on 101,8 m, paistab laevale nurgas $\alpha = 0° 40'$. Nurk Kõpu ja Ristna tuletornide vahel on $\beta = 52° 10'$. Kõpu ja Ristna tuletornidevaheline kaugus on $d = 4{,}82$ meremiili (1 meremiil $\approx$ 1,855 km). Kui kaugel on laev kummastki tuletornist?

905) Tung $R = 20$ kg lahutada kaheks komponendiks nii, et üks nendest oleks P = 12,6 kg ja et teine Q moodustaks resultandiga nurga $p = 28° 47'$.



228. joonis.

906) Kahe ligipääsetamatu punkti M ja N vahelise kauguse määramiseks on mõõdetud baas AB = b m ja nurgad MAN = α, NAB = β, ABM = γ, MBN = δ. Arvutada kaugus MN!

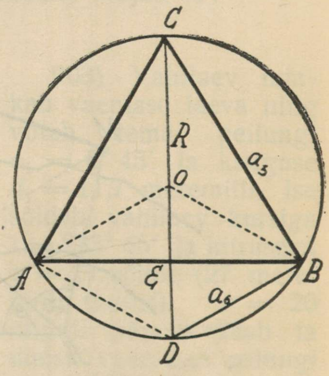
$$\alpha = 60°; \quad \beta = 44°; \quad \gamma = 32°; \quad \delta = 72°; \quad b = 700 \text{ m}.$$

XIV-nes peatükk: Korrapärased hulknurgad.

214. Ülesanne 907) **Leida korrapärase**

a) kõõlkuusnurga külg,

b) kõõlkolmnurga külg raadiuse funktsioonina.



229. joonis.

Lahendus: Tõmbame diameetri CD, konstruime nurga DOB $= 60°$ [ül. 93; § 116; ül. 309] ja ühendame B D-ga ja C-ga.

Siis on:

$$\widehat{CBD} = 180°; \quad \widehat{DB} = 60°; \quad \widehat{CB} = 120°.$$

Järelikult: $CD = 2R$; $\quad DB = a_6$; $\quad CB = a_3$.

[§ 106] järele: $\widehat{CBD} = 90°$; $\quad \widehat{DCB} = 30°$; $\quad \widehat{BDC} = 60°$.

Seepärast siis [190]: $\quad DB = \frac{1}{2} \cdot CD$; $\quad CB = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot \sqrt{3}$;

Ehk: $\quad \boldsymbol{a_6 = R}$; $\quad \boldsymbol{a_3 = R \cdot \sqrt{3}}$.

Sõnades:

a) *Korrapärase kõõlkuusnurga külg on raadiuse pikkune;*

b) *korrap. kõõlkolmnurga külg on raadius korda ruutjuur kolmest.*

Teine lahendamisviis:

a) Olgu $\quad DB = a_6$;

siis on $\quad \widehat{DOB} = 60°$;

$$\widehat{ODB} = \widehat{OBD} = \frac{180° - 60°}{2} = 60° = \widehat{DOB}.$$

Järel. $\quad DB = OD = OB$; ehk:

$$\boldsymbol{a_6 = R}.$$

b) Täisnurkses $\triangle$-rgas CBD on: $\overline{CB}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{BD}^2$; ehk

$$a_3^2 = (2R)^2 - R^2;$$
$$a_3^2 = 4R^2 - R^2$$
$$a_3 = \sqrt{3R^2}$$
$$a_3 = R\sqrt{3}.$$

Järeldus: Rombis AOBD on OD $\perp$ AB ja OE $= \frac{1}{2}$OD;

s. t. $r_3 = \frac{1}{2}R$.

Sõnades: *Korrapärase kõõlkolmnurga apoteem on poole raadiuse pikkune.*

Ülesandeid. 908) Ringi raadius on R; leida korrap. kõõlkuusnurga apoteem ja pindala!

909) Korrap. kuusnurga apoteem on r_6; leida kuusnurga külg ja pindala!

910. Korrap. kuusnurga pindala on m^2; leida selle kuusnurga ümberringi raadius ja apoteem!

911) Ringi raadius on R. Leida korrap. kõõlkolmnurga kõrgus ja pindala!

912) Ringi raadiuse r abil määrata korrap. puutuja-$\triangle$-rga ümbermõõt, kõrgus ja pindala!

913) Korrap. $\triangle$-rga külje a abil määrata tema ümber- ja siseringide raadiused!

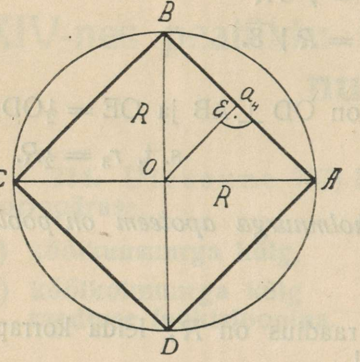
914) Korrap. $\triangle$-rga kõrgus on h. Leida selle $\triangle$-rga ümber- ja siseringide raadiused!

915) Ringi korrap. kõõlkolmnurga külg on a. Leida selle ringi korrap. puutuja-$\triangle$-rga ümbermõõt ja pindala!

916) Korrap. puutuja-$\triangle$-rga ümbermõõt on p. Leida temale vastava kõõlkolmnurga külg ja pindala!

917) Korrap. $\triangle$-rga pindala on m^2. Leida selle $\triangle$-rga ümber- ja siseringide raadiused!

215. Ülesandeid. 918) *Korrapärase kõõlnelinurga (kõõlruudu) külg leida raadiuse funktsioonina!*



230. joonis.

Lahendamine: Tõmbame I. diameetrid BD $\perp$ AC; siis on AB $= a_4$

ja $\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + OB^2$;

ehk $a_4^2 = R^2 + R^2$

$a_4^2 = 2R^2$; $\boldsymbol{a_4 = R\sqrt{2}}$.

II. apoteemi OE $\perp$ AB; siis on $\widehat{OAB} = \widehat{AOE} = 45°$; järel. [190, 3]

$OE = EA = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}OA \cdot \sqrt{2}$;

ehk $r_4 = \frac{1}{2}a_4 = \frac{1}{2}R\sqrt{2}$.

Järel. $\boldsymbol{a_4 = R\sqrt{2}}$.

Sõnades: *Korrapärase kõõlnelinurga külg on raadius korda ruutjuur kahest.*

Järeldus: *Ruudu apoteem võrdub ruudu poole küljega.*

919) Ringi raadius on $m = 9$ m. Kui suur on seda ringi puutuja-ruudu pindala?

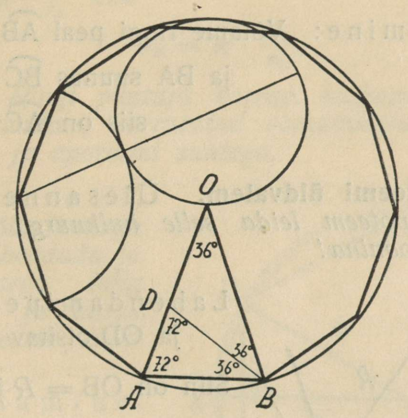
920) Ruudu apoteem on a. Kui pikk on selle ruudu ümberringi raadius?

921) Ruudu pindala on 12,5 m². Kui pikk on ümberringi raadius?

922) Võrdh. täisnurkse $\triangle$-rga kaatet on a. Kui pikk on ümbermõõt?

923) Täisnurkse võrdh. $\triangle$-rga ümbermõõt on $2p$. Kui suur on pindala?

216. Ülesanne 924) *Korrapärase kõõlkümmenurga külg leida raadiuse funktsioonina!*



231. joonis.

Lahendamine: Olgu $AB = a_{10}$.

Siis on $\widehat{AB} = \frac{1}{10}$ ringist

ja $\widehat{AOB} = 36°$.

Jär. $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = 72°$.

Tõmbame $\hat{B}$ poolitaja BD; siis on:

$$\frac{\dfrac{\widehat{DBO} = 36° = \widehat{BOD};}{OD = DB} \qquad \dfrac{\widehat{ADB} = 72° = \widehat{DAB}.}{DB = BA}}{AB = OD.}$$

Peale selle on [§ 151 põhjal] $\frac{OB}{AB} = \frac{OD}{AD}$; et aga $OB = OA$ ja $AB = OD$, siis on: $\frac{OA}{OD} = \frac{OD}{DA}$ ehk $\frac{r}{a_{10}} = \frac{a_{10}}{r - a_{10}}$.

Siit leiame $a_{10} = r\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ [173].

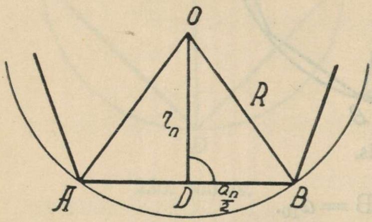
Sõnastus: *Korrapärase kõõlkümmenurga külg on sama pikk kui suurem osa kuldlõikel jagatud raadiusest, nimelt: raadius korda murd, mille lugejaks on ruutjuur viiest miinus üks ja nimetajaks kaks.*

Konstruimise viis on joonisel näha.

Ülesanne 925) *Ringi sisse konstruida korrapärane 15-nurk!*

Lahendamine: Võtame ringi peal $\overset{\frown}{AB} = \frac{1}{6}$ ringist
ja BA suunas $\overset{\frown}{BC} = \frac{1}{10}$ ringist,
siis on $\overset{\frown}{AC} = \frac{1}{15}$ ringist.

217. Apoteemi üldvalem. Ülesanne 926) *Korrap. kõõlhulknurga apoteem leida selle hulknurga külje ja ringi raadiuse funktsioonina!*



232. joonis.

Lahendamine: Olgu $AB = a_n$ ja OD-otsitav apoteem r_n.

Siin on $OB = R$ ja $BD = \frac{a_n}{2}$.

Täisnurksest $\triangle$-rgast BOD leiame:

$$r_n = \sqrt{R^2 - \frac{a^2_n}{4}}.$$

218. Ülesanne 927) *Korrapärase kõõlhulknurga külje ja ringi raadiuse abil leida samanimelise korrapärase puutuja-hulknurga külg!*

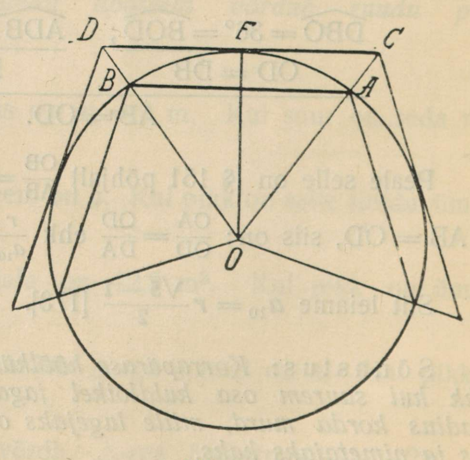
Lahendamine: Tõmbame korrap. puutuja-hulknurga külje rööbiti kõõlhulknurga küljega; siis langevad ühte nende hulknurkade apoteemid ja nende ümberringide raadiused ja

$$\triangle COD \backsim \triangle AOB.$$

Siit leiame:

$$\frac{CD}{AB} = \frac{OF}{OE},$$

ehk: $$\frac{b_n}{a_n} = \frac{R}{r_n}.$$



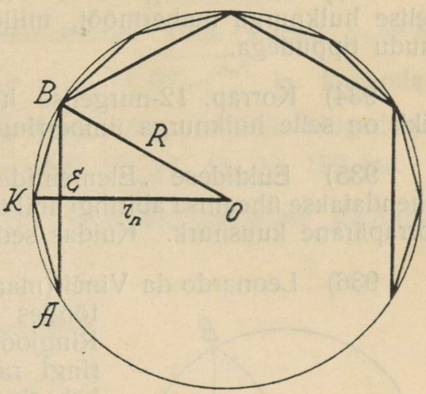
233. joonis.

See annab korrap. samanimelise puutuja-hulknurga külje valemi: $b_n = a_n \cdot \frac{R}{r_n}$ ehk

$$b_n = R \cdot \frac{a_n}{r_n}.$$

Sõnades: *Ringi puutuja korrap. hulknurga külje pikkuseks on ringi raadius, korrutatud samanimelise korrap. kõõlhulknurga külje ja apoteemi suhtega.*

219. Ülesanne 928) *Korrapärase kõõlhulknurga külgede arv kahendada ja saadud hulknurga külg leida raadiuse ja antud hulknurga apoteemi funktsioonina!*



234. joonis.

Lahendamine: Konstruimiseks jagame antud hulknurga küljele vastava kaare AB pooleks ja saadud punkti K ühendame järjekorras olevate hulknurga tippudega.

Arvutamiseks vaatleme teravnurkset △-rka OKB.

Tarvitades lauset [199] leiame:

$$\overline{BK}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OK}^2 - 2 \cdot \overline{OK} \cdot \overline{OE}$$

Siin on: $BK = a_{2n}$, $OE = r_n$, $OB = OK = R$.

Jär. $a^2_{2n} = R^2 + R^2 - 2Rr_n$, ehk

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2Rr_n}.$$

Seda valemit nim. **kahendamise valemiks.**

Tema abil on võimalik leida ka niisuguse hulknurga külje pikkus, mille külgede arv on 2 korda vähem kui antud hulknurga külgede arv.

Näiteks: Ülesanne 929) Rakendades valemeid

$$a_{10} = \sqrt{2R^2 - 2Rr_5} \text{ ja } r_5 = \sqrt{R^2 - \frac{c_5}{4}}$$

leida korrap. viisnurga külg raadiuse funktsioonina!

Vastus: $c_5 = R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$

220. Ülesandeid. 930) Määrata korrap. 12-nurgelise kõõlhulknurga külg ringi raadiuse r funktsioonina!

931) Ringi raadius on r. Kui suur on selle ringi korrap. 12-nurgelise kõõlhulknurga pindala?

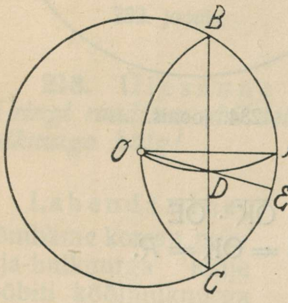
932) Ringi raadius on r. Kui suur on selle ringi korrap. 12-nurgelise puutuja-hulknurga pindala?

933) Ruudu külg on a. Kui pikk on korrapärase 8-nurgelise hulknurga ümbermõõt, mille 4 tippu langevad ühte selle ruudu tippudega.

934) Korrap. 12-nurgelise hulknurga pindala on m^2. Kui pikk on selle hulknurga ümberringi raadius?

935) Euklidese „Elementides" (IV raamat 15. peatükk) lahendatakse üheainsa abiringi abil ülesanne: Ringi sisse konstruida korrapärane kuusnurk. Kuidas seda teha?

936) Leonardo da Vinči (maalikunstnik Itaalias 1452—1519) töödes leidub kõrvalseisev joonis. Ringjoone mingist punktist A sama ringi raadiusega tõmmatud kaar lõikab ringi punktides B ja C. Punktist B on sama raadiusega tõmmatud kaar keskpunktist O kuni punktini A. B-d ja C-d ühendav kõõl lõikab kaart OA punktis D. Punktist O läbi D minev raadius lõikab ringi punktis E. Missugused kaared selles joonises vastavad korrapäraste 3-e-, 6-e-, 8-a-, 12-ne- ja 24-janurgeliste kõõlhulknurkade külgedele?



235. joonis.

937) Korrap. hulknurga nurgad on ära lõigatud nii, et tekkis korrap. hulknurk kahekordse külgede arvuga. Antud hulknurga külg on a. Kui pikk on äralõigatud $\triangle$-rga ümbermõõt?

938) Kui suured $\triangle$-rgad tulevad ära lõigata võrdkülgsest $\triangle$-rgast, et järele jääks korrap. kuusnurk? $\triangle$-rga külg on a.

939) Kui suured $\triangle$-rgad tulevad ruudu nurkadest ära lõigata, et tekiks korrap. 8-nurk? Ruudu külg on a.

940) Korrap. kõõlkolmnurga külg on a. Kui suur on sama ringi puutuja-ruudu pindala?

941) Korrap. puutuja-6-nurga pindala on m^2. Kui suur on vastava kõõlruudu pindala?

942) Ringis raadiusega $r = 10$ m on võetud kaared AN ja AK; $\overset{\frown}{AN} = 90°$ ja $\overset{\frown}{AK} = 60°$. Kui suur on △-rga AKN pindala 1) kui K asub A ja N vahel, 2) kui A asub K ja N vahel?

221. Korrapäraste hulknurkade korrapärasus valemeis.

Võtame korrapärase kõõlkuusnurga külje valemi $a_6 = R$ ja, rakendades apoteemi valemit $r_n = \sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}$ ja kahendamise valemit $a_{2n} = \sqrt{2R^2 - Rr_n}$ leiame üksteise järele külgede ja apoteemide valemid külgede arvudele 12, 24, 48, 96, 192 jne.

Rakendades valemit $b_n = R \cdot \frac{a_n}{r_n}$ leiame vastavate puutujahulknurkade külgede valemid.

Kirjutame nad kõik üles tabeliks:

$$a_3 = R\sqrt{3}$$

$$a_6 = R$$

$$a_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$a_{24} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

$$a_{48} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

$$a_{96} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$$

. . . .

$$\underset{n \geqslant 2}{a_{3 \cdot 2^n}} = R\sqrt{2 - \sqrt{\underbrace{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}_{n-2} + \sqrt{3}}}$$

$$r_3 = \tfrac{1}{2}R$$

$$r_6 = \tfrac{1}{2}R\sqrt{3}$$

$$r_{12} = \tfrac{1}{2}R\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$r_{24} = \tfrac{1}{2}R\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

$$r_{48} = \tfrac{1}{2}R\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

$$r_{96} = \tfrac{1}{2}R\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$$

. . . .

$$\underset{n\geqslant 2}{r_{3\cdot 2^n}} = \tfrac{1}{2}R\sqrt{2+\sqrt{\underbrace{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}_{n-2}+\sqrt{3}}}$$

$$b_3 = 2R\sqrt{3}$$

$$b_6 = 2R\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

$$b_{12} = 2R\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$$

$$b_{24} = 2R\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

$$b_{48} = 2R\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$$

. . . .

$$\underset{n\geqslant 2}{b_{3\cdot 2^n}} = 2R\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{2+\sqrt{\underbrace{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}_{n-2}+\sqrt{3}}}}$$ jne.

Neile valemeile võime anda veel teissuguse kuju. Selleks korrutame kõõlhulknurga külje valemis tegurit R 2-ga ja jagame teda 2-ga ja jagaja 2 viime juuremärgi alla; apoteemi valemis viime jagaja 2 juuremärgi alla. Siis saame:

$$a_3 = 2R\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$a_6 = 2R\sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$a_{12} = 2R\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

$$a_{24} = 2R\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}}$$

$$a_{48} = 2R\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{4}}$$

$$a_{96} = 2R\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{4}} \text{ jne.}$$

$$r_3 = R\sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$r_6 = R\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$r_{12} = R\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$$

$$r_{24} = R\sqrt{\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}}$$

$$r_{48} = R\sqrt{\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{4}}$$

$$r_{96} = R\sqrt{\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{4}} \text{ jne.}$$

$$b_3 = 2R\sqrt{3}$$

$$b_6 = 2R\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$b_{12} = 2R\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$$

$$b_{24} = 2R\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

$$b_{48} = 2R\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$$

$$b_{96} = 2R\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}} \text{ jne.}$$

Säärased valemid on võimalik leida ka neljaliste ja viieliste rea hulknurkade jaoks.

Korrapäraste hulknurkade korrapärasus on ka neis valemeis silmnähtav. Kuid peale selle selgub neist valemeist puutuja-hulknurga külje pikkuse arvutamisel, et selle külje pikkuse valemeis juuritava nimetajana esinev arv külgede arvu piiramatul kahendamisel lõpmata läheneb kõõlhulknurga külje pikkuse valemeis juuritava nimetajana esinevale arvule 4, kuna muus osas need valemid millegi poolest ei erine üksteisest. See tähendab aga, et külgede arvu piiramatul kahendamisel nende külgede pikkused piiramatult lähenevad teineteisele.

Kummagi valemi juuritava lugejas esinev vähendaja läheneb lõpmatult arvule 2; sellega läheneb kogu lugeja ja ühes temaga kogu avaldise väärtus 0-le. See tähendab, et need külgede pikkused lõpmata vähenevad.

Apoteemi valemis juuritava lugejana esinev arv on seesama, mis puutuja-hulknurga külje valemis esineb juuritava nimetajana; ta läheneb lõpmata 4-le. Sellega läheneb lõpmatult 1-le kogu juuravaldis ja apoteem läheneb lõpmatult raadiusele.

See kõik kinnitab vaid seda, mis meile joonisestki on silmaga nähtav.

XV-nes peatükk: **Ringjoone pikkus ja ringi pindala.**

222. Ringjoon korrapäraste hulknurkade ümbermõõtude piirina.

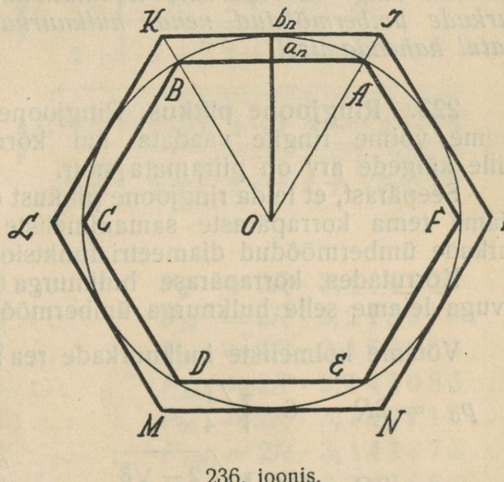
Joonisest on silmnähtav, et

$b_n > a_n$;

järel. ka $n \cdot b_n > n \cdot a_n$

ehk $P_n > p_n$.

S. t. *korrapärase puutuja-hulknurga ümbermõõt on suurem kui samanimelise kõõlhulknurga ümbermõõt.*



236. joonis.

Korrap. kõõl- ja ja puutuja-hulknurga külgede valemite vaatlemisel nägime, et külgede arvu piiramatul kahendamisel nende külgede pikkused piiramatult lähenevad teineteisele; teiste sõnadega — külgede pikkuste vahe $b_n - a_n$ on lõpmata vähenev suurus. Järelikult esineb külgede arvu piiramatul kahendamisel lõpmata väheneva suurusena ka nende korrapäraste samanimeliste puutuja- ning kõõlhulknurkade ümbermõõtude vahe $P_n - p_n = n \cdot b_n - n \cdot a_n = n \cdot (b_n - a_n)$.

Ringjoon asub ruumiliselt nende hulknurkade piirete vahel ning kummagi hulknurga piire omandab külgede arvu piiramatul kasvamisel ringjoonega piiramata palju ühiseid punkte. Seejuures paistab meile, nagu oleks ringjoon pikem kui korrap. kõõlhulknurga ümbermõõt ja lühem kui korrap. puutuja hulknurga ümbermõõt.

Kuna mainitud hulknurkade ümbermõõtude vahe on lõpmata vähenev suurus külgede arvu piiramatul kahendamisel, siis peaks vahe ringjoone pikkuse vahel ühelt poolt ning korrap. hulknurga ümbermõõdu vahel teiselt poolt ammugi olema lõpmata vähenev suurus — hulknurga külgede arvu piiramatul kahendamisel.

Paistab, nagu oleks ringjoon see piir, milleks saada püüavad korrapäraste kõõlhulknurkade ja puutuja-hulknurkade ümbermõõdud nende hulknurkade külgede arvu piiramatul kahendamisel. Meie seda tõestada ei saa; kuid meie kogemused kõnelevad selle poolt.

Seepärast lepime kokku ringjoone pikkuse suhtes — defiinime ringjoone pikkust — järgmiselt:

Ringjoone pikkuseks nimetame seda piiri, milleks saada püüavad ringi korrapäraste kõõlhulknurkade ja puutuja-hulknurkade ümbermõõdud nende hulknurkade külgede arvu piiramatul kahendamisel.

223. Ringjoone pikkus. Ringjoone definitsioonist järgneb, et me võime ringile vaadata kui korrapärasele hulknurgale, mille külgede arv on piiramata suur.

Seepärast, et leida ringjoone pikkust diameetri funktsioonina, leiame tema korrapäraste samanimeliste kõõl- ja puutuja-hulknurkade ümbermõõdud diameetri funktsioonina.

Korrutades korrapärase hulknurga külje pikkust külgede arvuga leiame selle hulknurga ümbermõõdu.

Võtame kolmeliste hulknurkade rea:

$$p_6 = 2R \cdot 6 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$p_{12} = 2R \cdot 12 \cdot \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

$$p_{24} = 2R \cdot 24 \cdot \sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}}$$

$$p_{48} = 2R \cdot 48 \cdot \sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{4}}$$

$$p_{96} = 2R \cdot 96 \cdot \sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{4}}$$

$$p_{192} = 2R \cdot 192 \cdot \sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{4}} \text{ jne.}$$

$$P_6 = 2R \cdot 6 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$P_{12} = 2R \cdot 12 \cdot \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$$

$$P_{24} = 2R \cdot 24 \cdot \sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

$$P_{48} = 2R \cdot 48 \cdot \sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$$

$$P_{96} = 2R \cdot 96 \cdot \sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}$$

$$P_{192} = 2R \cdot 192 \cdot \sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}} \text{ jne.}$$

Ehk:

$p_6 = 2R \cdot 3{,}000000\ldots$	$P_6 = 2R \cdot 3{,}464100\ldots$
$p_{12} = 2R \cdot 3{,}105828\ldots$	$P_{12} = 2R \cdot 3{,}215390\ldots$
$p_{24} = 2R \cdot 3{,}132628\ldots$	$P_{24} = 2R \cdot 3{,}159660\ldots$
$p_{48} = 2R \cdot 3{,}139350\ldots$	$P_{48} = 2R \cdot 2{,}146085\ldots$
$p_{96} = 2R \cdot 3{,}141031\ldots$	$P_{96} = 2R \cdot 3{,}142715\ldots$
$p_{192} = 2R \cdot 3{,}141452\ldots$	$P_{192} = 2R \cdot 3{,}141873\ldots$
$p_{384} = 2R \cdot 3{,}141556\ldots$	$P_{384} = 2R \cdot 3{,}141662\ldots$
$p_{768} = 2R \cdot 3{,}14158\,3\ldots$	$P_{768} = 2R \cdot 3{,}141610\ldots$
$p_{1536} = 2R \cdot 3{,}141590\ldots$	$P_{1536} = 2R \cdot 3{,}141597\ldots$

jne.

Sellest tabelist näeme selgesti, et:

1) nende hulknurkade ümbermõõtude leidmiseks tuleb ringi diameetrit korrutada igale hulknurga külgede arvule eriliselt vastava kindla arvuga;

2) see arv muutub ühelt külgede arvult teisele, kuid kindlates piirides 3 ja 4;

3) kõõlhulknurga ja puutuja-hulknurga ümbermõõdu arvulised tegurid lähenevad teineteisele, lõpmata lähenedes seejuures mingisugusele piirile.

Et me ringjoone pikkust defiinisime kui ringi kõõl- ja puutuja-hulknurkade ümbermõõtude piiri, siis võime ütelda, et ka ringjoone pikkuse leiame, kui me ringi diameetrit korrutame ühe täiesti kindla arvuga. Selleks arvuks on just see piir, milleks saada püüavad korrapäraste kõõl- ja puutuja- hulknurkade ümbermõõtude arvulised tegurid nende hulknurkade külgede arvu piiramatul kahendamisel. Seda piiri tähistatakse kreekakeelse tähega π. Nii on siis $C = 2R \cdot \pi$

ehk $C = 2\pi R$.

Lause: Ringjoone pikkuse leidmiseks tuleb ringi diameetrit korrutada arvuga π.

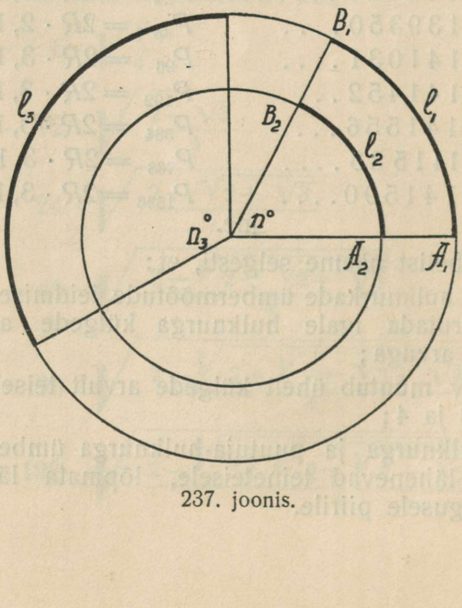
π väärtuseks võetakse korrapäraste kõõl- ja puutuja-hulknurkade arvulistest teguritest need kümnendkohad, mille poolest need tegurid ühte lähevad

Me tarvitame π väärtustena arve: 3,14; 3,1416; 3,14159; $3\frac{1}{7}$. $\pi = 3\frac{1}{7}$ on leidnud kreeka matemaatik Archimedes. Archimedes elas a. 287—212 e. Kr. Sürakuusis.

224. Kaare pikkus. 360°-lisele kaarele vastab terve ringjoon ehk 360°-lise kaare pikkus on $2\pi R$;

1° „ „ „ „ $\frac{2\pi R}{360}$;

$n°$ „ „ „ „ $\frac{2\pi R \cdot n}{360} = \frac{n \cdot \pi R}{180}$.



237. joonis.

Tähistame kaare pikkuse l; siis $l = \frac{n\pi R}{180}$.

Kui n jääb muutumatuks ja muutub R, siis

$$l = \frac{n\pi}{180} \cdot R \text{ ehk } \frac{l_1}{l_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

S. t. Eriringides on samale kesknurgale vastavad kaared võrdelised raadiustega.

$\frac{n\pi}{180}$ on konstantne võrdetegur ja R on muutuv.

Kui R jääb muutumatuks ja muutub n, siis

$$l = \frac{\pi R}{180} \cdot n \text{ ehk } \frac{l_3}{l_1} = \frac{n_3}{n_1}.$$

S. t. samas ringis on kaared võrdelised neile vastavate kesknurkadega.

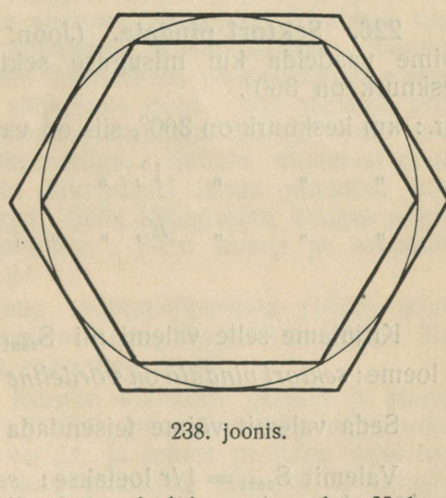
$\frac{\pi R}{180}$ on konstantne võrdetegur ja n on muutuv.

225. Ringi pindala. Silmaga on nähtav, et korrapärase puutuja-hulknurga pindala S_n on suurem kui samanimelise korrapärase kõõlhulknurga pindala s_n, ja mille võrra:

$$S_n > s_n.$$

Samuti on silmaga näha, et ringi pindala K on vähem kui puutuja-hulknurga pindala ja suurem kui kõõlhulknurga pindala, ta asub nende viimaste vahel nii asendilt kui suuruselt:

$$S_n > K > s_n.$$



238. joonis.

Korrap. puutuja- ning kõõlhulknurga külgede arvu kahendamisel väheneb puutuja-hulknurga pindala, kuna kõõlhulknurga pindala suureneb. Külgede arvu piiramatul kahendamisel saab see pindalade vahe $S_n - s_n$ lõpmata vähenevaks suuruseks, kuna ringi pindala püsib muutumatult nende pindalade vahel. Seepärast võime ütelda, et *ringi pindala on see piir, milleks saada püüavad tema korrapäraste puutuja- ning kõõlhulknurkade pindalad nende hulknurkade külgede arvu piiramatul kahendamisel.*

See vaid kinnitab ringjoone pikkuse määramisel üteldut, et me ringile võime vaadata kui korrapärasele hulknurgale, mille külgede arv on piiramatu.

Meie teame, et korrapärase puutuja-hulknurga pindala võrdub tema poole ümbermõõdu ja ringi raadiuse korrutisega:

$$S = p \cdot r \text{ ehk } S = \tfrac{1}{2}P \cdot R.$$

Külgede arvu piiramatul kahendamisel muutub piiris hulknurga pindala S ringi pindalaks K, hulknurga ümbermõõt P muutub ringjoone pikkuseks C ja me saame valemi:

$$K = \tfrac{1}{2} \cdot C \cdot R; \text{ et aga } C = 2\pi R,$$

$$\text{siis saame: } K = \tfrac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R$$

$$\text{ehk } K = \pi R^2.$$

Ringi pindala võrdub π korda raadiuse ruut.

Järeldus: *Ringide pindalad on võrdelised raadiuste ruutudega.*

226. Sektori pindala. (Joon. 237.) Terve ringi pindala võime vaadelda kui niisuguse sektori pindala, millele vastav kesknurk on 360°.

Jär.: kui kesknurk on 360°, siis on vastava sektori pindala πr^2;

„ „ „ 1°, „ „ „ „ „ $\frac{\pi r^2}{360}$;

„ „ „ $n°$, „ „ „ „ „ $\frac{\pi r^2 \cdot n}{360}$.

$$S_{sekt} = \frac{\pi r^2 n}{360}.$$

Kirjutame selle valemi nii $S_{sekt} = \frac{\pi r^2}{360} \cdot n$,

ja loeme: *sektori pindala on võrdeline temale vastava kesknurgaga.*

Seda valemit võime teisendada: $S_{sekt} = \frac{\pi r n \cdot r}{180 \cdot 2} = l \cdot \frac{1}{2} r = \frac{1}{2} l r.$

Valemit $S_{sekt} = \frac{1}{2} l r$ loetakse: *sektori pindala võrdub temale vastava kaare ja raadiuse poole korrutisega.*

Ringi segmendi pindala leidmiseks tuleb vastava sektori pindalast lahutada vastava kolmnurga pindala.

227. Ringjoone sirgestamise ja ringi ruutimise küsimusi. Ülesanded 943) *„Konstruida sirglõik, mille pikkus võrduks antud ringjoone pikkusega"* ja *„Konstruida antud ringiga pindvõrdne ruut"* on aastasajandeid päevakorral seisnud. Juba vana kreeka parim matemaatik Archimedes on temaga tegemist teinud. Alles aastal 1761 näitas Lambert, et arv π on irratsionaalne, ja alles aastal 1882 näitas Lindemann, et arv π on niisugune arv, mis ei esine ühegi täisarvuliste kordajatega võrrandi juurena (transtsedentne arv) ja mida sellepärast võimalik ei ole konstruida sirkli ja liineali abil. Ligikaudseid lahendeid on antud õige palju. Toome neist mõned. Võttes raadiuse pikkuseks mõõtühiku, $r=1$, tuleb konstruida sirglõik $c=2\pi$.

1) Kui π väärtuseks võtta $\sqrt{3}+\sqrt{2}$, siis saame π sama täpsusega, millisega leidis ta Archimedes — 0,01. Konstruigu õpilased!

2) Poolakas Kochanski (1685) andis järgmise lahenduse: Ringile tõmbame puutuja; puutepunktist tõmbame diameetri ja raadiuse pikkuse kõõlu; keskpunktist tõmbame sellele kõõlule ristjoone ja pikendame teda kuni lõikumiseni puutujaga. Nüüd asetame puutujale, saadud lõikepunktist alates puutepunkti suunas, raadiuse kolmekordse pikkuse. Leitud punkti ühendame diameetri teise otsapunktiga. Saadud sirglõik annab poolringi pikkuse ehk arvu π täpsusega kuni 0,0001.

3) Spechti lahendus. Ringile tõmbame puutuja ja puutepunktist diameetri. Puutujale asetame, puutepunktist alates, sirglõigu $2{,}2r$ ja otsapunkti ühendame keskpunktiga. Saadud ühendusjoone pikkuse asetame diameetrile, puutepunktist alates; selle lõigu teine ots asetub väljapoole ringi. Siis asetame puutujale, jällegi puutepunktist alates, sirglõigu $2{,}6r$ ja tema otsapunkti ühendame ringi keskpunktiga. Sellele ühendusjoonele tõmbame rööpsirge diameetri pikendusel leitud punktist, kuni see rööpsirge lõikub puutujaga. Selle lõikepunkti kaugus puutepunktist annab ringjoone pikkuse. Teha joonis ja arvutada, missuguse täpsusega leidub π!

4) Albrecht Dürer omas mõõtmisõpetuses (1525) käsib joonestada ruudu, mille diagonaal on $\frac{5}{4}$ ringi diameetrist. Kui täpsalt kujutab ringi pindala niisugune ruut?

5) Sonnet' lahendus. Ringile tõmbame puutuja ja puutepunktist lähtuva diameetri. Sellel diameetril võtame punkti, mille kaugus puutepunktist on $\frac{7}{6}r$, ja sellest punktist tõmbame raadiusega $4r$ kaare, mis lõikab puutujat. Saadud lõikepunkti ühendame diameetri teise otsapunktiga. See ühendusjoon lõikab ringjoont punktis, mille kaugus lõikepunktist on ringiga võrdpindse ruudu külg: $x^2=\pi r^2=\pi$. Teha joonis ja leida π täpsus!

228. Ülesandeid ringi ja kaare pikkusest.

944) Kui pikk on ringi ümbermõõt, mille raadius on 25 cm?

945) Ringi ümbermõõt on 18,85 m. Kui pikk on raadius?

946) Elva algkooli maja ees kasvava männi ümbermõõt mehe rinna kõrgusel on 298 cm. Kui suur on selle männi läbimõõt, kui männi ristlõiget võtta ringina?

947) Kui palju suureneb ringjoon, kui raadiust suurendada 5 cm võrra?

948) Veduri ratta raadius on 65 cm. Mitu pööret teeb see ratas sõidul Tartust Tallinna? Tartu-Tallinna raudtee jaamade kaugus teineteisest on 192 km. Vastus anda täpsalt kuni 100 pöördeni. $\pi = 3{,}14159$.

949) Rattal on 60 teravat hammast, mille tippude vahe on 10 cm. Kui pikk on ratta raadius?

950) Praeahju neljanurgelise suu ümbermõõt on 120 cm; ta on 10 cm laiem kui kõrge. Kas mahub sinna ahju sõõrikujuline pann, millel on sama ümbermõõt kui ahjusuul?

951) Ümmarguse palgi ümbermõõt on 282,6 cm. Kui suur on kõige jämedama neljatahulise palgi ruudukujulise ristlõike pindala, mille võib saada sellest ümmargusest palgist?

952) Ringil võetud punkt on diameetrist m cm ja diameetri otsapunktist b cm kaugel. Leida ringi ümbermõõt!

$$m = 13{,}44\,; \quad b = 48.$$

953) Ringi segmendi kõõl on a ja segmendi kõrgus b. Kui pikk on ringjoon? $a = 28$ cm; $b = 7$ cm.

954) Ringi diameeter a on jagatud 6-ks võrdseks osaks. Läbi 1-se ja 5-nda jaotuspunkti on tõmmatud ring, mis puutub esimest ringi. Kui pikk on see teine ringjoon?

955) $\triangle$-rga külgede a, b ja c kaudu määrata ümberjoonestatud ringjoone pikkus!

$$a = 56 \text{ cm}\,; \quad b = 61 \text{ cm}\,; \quad c = 75 \text{ cm}.$$

956) Võrdh. $\triangle$-rga ümbermõõt on $2p$ ja alus $2a$. Kui pikk on selle $\triangle$-rga ümber joonestatud ringjoon?

$$2p = 128 \text{ cm}\,; \quad 2a = 48 \text{ cm}.$$

957) Võrdkülgse $\triangle$-rga kõrgus on h. Kui palju on selle $\triangle$-rga ümberring pikem kui tema sisering? $h = 12$ cm.

958) Ringi puutuvad 3 sama suurt ringi nii, et igaüks nendest puutub veel korrap. $\triangle$-rga kaht külge. Ringi ümbermõõt on c. Kui pikk on $\triangle$-rga ümbermõõt? $c = 31{,}42$ m.

959) Kui pikk on 36°-line kaar ringis raadiusega 15 m?

960) 40°-line kaar on 12,5664 m pikk. Kui pikk on ringi raadius?

961) Mitu kraadi, minutit, sekundit on raadiusega ühepikkuses kaares?

962) Silla võlvi kaar on projektitud raadiusega 20 m ja sisaldab 36°. Kui pikk on see kaar meetrites?

963) Heinaniitja teeb ühe keeruga 110°-lise kaare, mille raadius on 108 cm pikk. Kui pikalt niidab ta heina maha ühe keeruga?

964) Tallinna geograafiline laius on 59° 26′. Kui kaugel ekvaatorist asub Tallinn, kui maakera raadiuseks võtta 6370 km? Vastus anda täpsalt kuni 10 km-ni.

965) Ringi raadius on 10 cm. Kui pikk kaar vastab 10 cm pikale kõõlule?

966) Ringi sisse on joonestatud korrap. kuusnurk ja ruut nii, et neil esimene tipp on ühine. Kui pikk on kaar järgmiste tippude vahel? Raadius on $r = 6$ cm.

967) Ringi A raadius on a ja ringi B raadius on b. Mitu kraadi suur on ringi B niisugune kaar, mille pikkus võrdub ringi A ümbermõõduga? $a = 15$ cm; $b = 27$ cm.

968) Läbi diameetri otsapunkti tõmmatud kõõl moodustab diameetriga 48°-lise nurga. Kui pikkadeks kaarteks jagab see kõõl poolringi? Raadius on $r = 15$ cm.

969) Ringi veerandi sisse on konstruitud uus ring, mis puutub antud ringi ja tema ristraadiusi. Antud ringi raadius on r. Kui pikk on vähema ringi kaar raadiuste puutepunktide vahel? $r = 10$ cm.

970) Ringi raadius on $r = 57{,}3$ cm; $\pi = 3{,}142$. Mitu kraadi on selle ringi 1 m pikas kaares?

971) Lõik a on jagatud n võrdseks osaks ja iga osa üle on vaheldamisi tõmmatud poolringi, kord ühel pool, siis teisel pool. Leida niiviisi tekkinud lainejoone pikkus?

972) Lõik a on jagatud n mittevõrdseks osaks $x, y, z \ldots$ jne.; iga osa üle on tõmmatud poolring, vaheldamisi — kord ühel pool, siis teisel pool. Näidata, et tekkinud lainejoone pikkus ei olene ei osade arvust ega nende pikkusest!

229. Ülesandeid ringi pindalast. 973) Kõõlu a kaugus keskpunktist on d. Leida ringi pindala!

$a = 24$ cm; $d = 5$ cm.

974) Võrdh. $\triangle$-rga alus on b ja kõrgus h. Leida selle $\triangle$-rga ümberringi pindala! $b = 24$ cm; $h = 16$ cm.

975) Võrdkülgse $\triangle$-rga kõrgus on h. Kui suur on selle $\triangle$-rga ümberringi pindala? $h = 15$ cm.

976) Ringi sisse on konstruitud võrdhaarne $\triangle$ kõrgusega h; ringi pindala on K. Kui suur on $\triangle$-rga pindala?

$h = 12{,}8$ m; $K = 314$ m^2.

977) Kahe teineteist väljastpoolt puutuja ringi ühine puutuja on a m pikk. Kui suur on ringi pindala, mis läheb läbi kõigi kolme puutepunkti? $a = 20$.

978) Kahele teineteist väljastpoolt puutujale ringile on tõmmatud ühine välimine puutuja. Ringide raadiused on a ja b. Leida niisuguse ringi pindala, mis läheb läbi kõigi kolme puutepunkti! $a = 5$ m; $b = 2$ m.

979) $\triangle$-rga küljed on $a = 3$ cm, $b = 5$ cm, $c = 6$ cm. Selle $\triangle$-rga tippudest kui keskpunktidest on tõmmatud üksteist puutujad ringid. Kui suur on iga ringi pindala?

980) Võrdhaarse $\triangle$-rga sisering jagab puutepunktis haara osadeks m ja n. Kui suur on ringi pindala? $m = 6$ cm; $n = 4$ cm (n on tipupoolne osa).

981) Ringi ümber joonestatud võrdhaarse trapetsi üks alus on $2a$ ja teine alus $2b$. Kui suur on ringi pindala?

$2a = 18$ m; $2b = 8$ m.

982) Ringi ümber joonestatud võrdhaarse trapetsi külg jagub puutepunktis osadeks m ja n. Leida ringi pindala!

$m = 1\frac{1}{4}$ m; $n = 3\frac{1}{5}$ m.

983) Ringi läbimõõt d on jagatud neljaks võrdseks osaks. Kui suur on niisuguse ringi pindala, mis läheb läbi äärmiste jaotuspunktide ja puutub esimest ringi? $d = 1{,}6$ m.

984) $\triangle$-rga sisering jagab puutepunktis hüpotenuusi lõikudeks a ja b. Kui suur on selle ringi pindala ja ümbermõõt?

$a = 9$ cm; $b = 6$ cm.

985) Ringi O ümbermõõt on 5 korda nii pikk kui ringi C ümbermõõt. Mitu korda on ringi O pindala suurem kui ringi C pindala?

986) Ringi A pindala on 100 m^2. Ringi B raadius on $\frac{1}{5}$ ringi A raadiusest. Kui suur on ringi B pindala?

987) Ringi raadius on a cm. Kui pikk ühiskeskene ringjoon jagab selle ringi pindala pooleks? $a = 25$.

988) Ringi raadius on r. Kui pikad on ühiskeskeste ringide raadiused, mis selle ringi pindala jagavad 5-ks võrdseks osaks?

989) Ühest punktist on tõmmatud 2 ringi; ühe ringi raadius on r ja teise ringi raadius on esimese ringi sisse joonestatud korrap. $\triangle$-rga külje pikkune. Kui pikk on kolmanda ringi ümbermõõt, mis pooleks jagab kahe esimese ringi vahel oleva rõnga pindala?

990) $\triangle$ kaatetitega a ja b pöördub omal tasapinnal tipu B ümber. Kui suure pindala üle libiseb kaatet b, kui $\triangle$ teeb täispöörde?

991) Ringi sisse on joonestatud ühiskeskene ring nii, et ta puutub esimese ringi kõõlu $2k$. Kui pikk on nende ringide vahelise rõngaga pindvõrdse ringi raadius?

992) Rõnga pindala on s. Kui pikk on välimise ringjoone punktist sisemisele ringile tõmmatud puutuja?

993) Korrap. kuusnurga pindala on s. Kui suur on tema sise- ja ümberringi-vahelise rõnga pindala?

994) Ruudu sisse on joonestatud 5 ühesuurust ringi nii, et üks ring on keskel ja 4-st ülejäänud ringist puutub igaüks esimest ringi ja kaht ruudu külge. Ruudu ümbermõõt on $8a$. Kui suur on kõigi ringide pindala ühtekokku?

995) Korrap. $\triangle$-rga ümber- ja siseringi-vahelise rõnga pindala on m^2. Kui suur on $\triangle$-rga pindala?

996) $\triangle$-rga ABC hüpotenuusi AB üle on tõmmatud poolringi ACB ja kummagi kaateti üle on ka tõmmatud poolring väljaspool $\triangle$-rka. Kaatetid on a ja b. Leida poolringidega piiratud sirbikeste pindalade summa! (Lunulae Hippocratis.)

997) Ringi diameetriga AB ristik sirge s lõikab AB-d punktis L. Ühel pool sirget s on tõmmatud poolring CBD raadiusega LB ja teisel pool sirget poolring EAF raadiusega LA. Lõikude EC ja FD üle on tõmmatud poolringid EIC ja FKD, mis lähevad suurema poolringi valda mööda. Tekkinud kõverjoonelist kuju AEICBDKFA on Archimedes nimetanud „salinon“. Leida salinoni pindala, teades, et ringi raadius on R!

998) Poolringi punktist N on tõmmatud diameetrile AB ristjoon NC $= h$. CA ja CB üle on tõmmatud poolringid, mis lähevad poolringi NAB valda mööda. Leida poolringidest piiratud kõverjoonelise kuju pindala ja niisuguse ringi läbimõõt, mis on selle kujuga pindvõrdne!

230. Ülesandeid sektori ja segmendi pindalast. 999) Ringi pindala on 120 cm^2. Kui suur on 57°-lise sektori pindala?

1000) 65°-lise sektori pindala on 130 m^2. Leida ringi pindala.

1001) Ringi raadius on 12 m. Kui suur on 40°-lise sektori pindala?

1002) Ringi raadius on 14 m pikk. Kui suur on sektori pindala, millele vastab 15,4 m pikk kaar? ($\pi = \frac{22}{7}$).

1003) 70°-lise sektori pindala on 22 m^2. Kui pikk on ringi raadius? ($\pi = \frac{22}{7}$).

1004) Ringi raadius on 15 m ja sektori pindala 15 m^2. Mitu kraadi on sektorile vastavas kesknurgas?

1005) Ringi raadius on 12 cm ja sektori pindala on 132 cm^2 suur. Kui pikk kaar vastab sellele sektorile?

1006) $29\frac{2}{3}$ m pikale kaarele vastava sektori pindala on 356 m^2 suur. Kui pikk on ringi raadius?

1007) Ruudu tippudest on tõmmatud kaared nii, et iga järgmine puutub eelmist kaart ruudu külje keskkohas. Kui suur on nendest kaartest piiratud kõverjoonelise kuju pindala? Ruudu külg on a.

1008) Ringi sisse joonestatud korrap. hulknurga külg on a. Kui suure sektori pindala määrab see külg, kui külgede arv on: 1) 3; 2) 6; 3) 4; 4) 10; 5) 12; 6) 8.

1009) Akna ülemine osa on ümmargune ja on konstruitud nii, et akna poole laiusega on kummastki alumise nurga tipust tõmmatud veerand ringi; need veerandringid lõpevad aknaäärtel punktides A ja B; sirglõigu AB üle on joonestatud poolring. Veerandringid on punasest klaasist, teine kõver osa rohelisest. Leida rohelise osa pindala! Akna laius on l.

1010) 60°-lisele kaarele vastava sektori siseringi pindala on m^2. Kui suur on sektori pindala?

1011) Ringi veerandi sisse on joonestatud teine ring nii, et ta puutub antud ringi ja tema raadiusi r. Kui suur on see sektori osa, mis asub väljaspool siseringi?

1012) Kui suure segmendi pindala piiravad ringi sisse joonestatud ruudu külg ja temale vastav kaar? Ringi raadius on r.

1013) Leida ringi sisse joonestatud korrap. $\triangle$-rga küljest ja temale vastavast kaarest piiratud segmendi pindala! Segmendi kõrgus on a.

1014) Kui suurteks osadeks jagab ringi pindala kõõlruudu külg a?

1015) Kahe lõikuva ringi-ühine kõõl a on ühele ringile korrap. kõõl-△-rga küljeks ja teisele kõõlruudu küljeks. Kui suur on nende ringide ühine pindala?

1016) Ringjoon on jaotatud 6-ks võrdseks osaks. Igast jaotuspunktist on tõmmatud sama ringi raadiusega kaar ühest jaotuspunktist teiseni. Need kaared moodustavad lõikudes n. n. 6-ehaaralise roseti. Leida niisuguse roseti pindala, mille ühe kaare pikkus keskpunktist tipuni on $a = 2{,}094$ m.

1017) Kui suure pindala piiravad ringis raadiusega r kõõlruudu ja korrap. kõõl-△-rga rööbiti tõmmatud küljed ja nende vahelised kaared, kui need küljed asuvad ühel pool ringi keskpunkti? [Kui suur on see pindala siis, kui ringi keskpunkt asub nende külgede vahel?]

1018) Ringi raadius on r. Diameetri AB otsapunktidest on tõmmatud sama raadiusega kaared kuni lõikumiseni ringiga. Kui suurteks osadeks jagavad need kaared ringi pindala?

1019) Diameetri AB $= a$ otsapunktist on tõmmatud korrap. kõõl-△-rga külg AC. Kui suur on nendest sirglõikudest ja nende vahelisest kaarest piiratud kiilu pindala?

1020) Punktid A, B, C jagavad ringjoone suhtes $3:4:5$. Leida kiilu pindala, mida piiravad kõõlud BA ja BC ja kaar CA. Ringi raadius on r.

231. Ülesandeid kordamiseks. 1021) Võrdhaarse △-nurga sisering jagab haara puutepunktis lõikudeks a ja b. Leida △-nurga pindala! $a = 3$ cm; $b = 12$ cm.

1022) Punktist A lähtuv kiir lõikab ringi punktides B ja C nii, et AB < AC. Keskpunktist O sellele kiirele tõmmatud ristjoon jagab AC lõikudeks DA ja DC suhtes m : n. Leida suhted $\frac{AC}{AB}$ ja $\frac{BA}{BC}$

1023) △-rga alusega rööbik sirge jagab tema küljed a ja b nii, et külje a tipupoolne lõik võrdub külje b alusepoolse lõiguga. Kui pikad on need lõigud? $a = 10$ cm; $b = 15$ cm.

1024) Rõhtsirgest d kaugusel asuvast punktist A on sellele rõhtsirgele tõmmatud kaldjoon AB $= l$. Ühel pool seda kaldjoont on tema otsapunktide vahele asetatud treppjoon ACDEF .... B. Kui pikk on see treppjoon, s. t. tema püst- ja rõhtosade summa?

1025) Kui suurteks osadeks jagub ristküliku pikem külg a lõikudes vastasküljega, kui ristkülik diagonaali mööda kahekorra murda? Lühem külg on b.

1026) Võrdhaarses $\triangle$-rgas lõikab alusnurga poolitaja kõrgust h punktis, mille kaugus haarast on m. Leida $\triangle$-rga ümbermõõt! $h = 8$ cm; $m = 3$ cm.

1027) Kuidas suhtuvad niisuguse ristküliku küljed, mille nurkade äralõikamisel tekib korrapärane kuusnurk?

1028) $\triangle$-rgas ABC on kumbki lõik IA ja IB, milleks hüpotenuusi AB jagab täisnurga C poolitaja, projektitud oma lähiskaatetile. IA projektsioon MA $= 5$ m ja IB projektsioon PB $= 3,2$ m. Leida $\triangle$-rga ABC pindala!

1029) Ringis on kõõlu AB $= a$ otsapunktist A tõmmatud ringile puutuja ja otsapunktist B ristjoon sellele puutujale. Ristjoone BD pikkus on p. Leida ringi pindala! $a = 10$; $p = 2,5$.

1030) Antud ringi diameetril AB on võetud punktid C ja D. Ühel pool AB-d on tõmmatud poolringid AC ja AD, teisel pool AB-d — poolringid BD ja BC. Näidata, 1) et kõverjoone ACBDA pikkus võrdub antud ringi ümbermõõduga ja 2) et kõverjoonega piiratud pindala suhtub ringi pindalasse, nagu võetud lõik CD suhtub diameetrisse AB!

1031) Punkt C jagab ringi diameetri AB kuldlõikel. Ühel pool AB-d on joonestatud poolring AC ja teisel pool AB-d — poolring CB. Tõestada, et kõver ACB jagab antud ringi pindala kuldlõikel!

1032) Kolm ringi raadiustega r_1, r_2 ja r_3 puutuvad üksteist väljastpoolt. Leida niisuguse ringi pindala, mis läheb läbi antud ringide puutepunktide!

1033) $\triangle$-rga küljed on 13, 14 ja 15 cm pikad. Tema nurkadest on lõigatud ära sektorid, mille raadius võrdub $\triangle$-rga siseringi raadiusega. Leida ülejäänud kuju pindala!

1034) Antud nurga sisse on joonestatud 3 ringi nii, et keskmine ring puutub äärmisi. Äärmiste ringide pindalad on S ja s. Leida keskmise ringi pindala!

1035) Nelinurga diagonaalid on teineteisega risti ja ühe külje keskkoht on selle külje lähiskülgede keskkohtadest vastavalt m ja n cm kaugel. Kui suur on selle nelinurga pindala?

1036) Võrdhaarse trapetsi pikem alus on a ja teravnurga tipp on vastashaarast b kaugel; nürinurga tipp on vastasrööpküljest c kaugel. Kui pikk on selle trapetsi keskjoon?
$a = 26$ cm; $b = 24$ cm; $c = 12$ cm.

1037) 16 cm kõrge võrdhaarse △-rga pindala on 192 cm^2. Kui suurteks osadeks jagab selle △-rga siseringi keskpunktist läbi minev alusega rööbik sirge?

1038) Võrdhaarse △-rga pindala on 768 cm^2 ja alus 48 cm. Kui suurteks osadeks jagab selle △-rga haaraga rööbik sirge, mis läheb läbi ümberringi keskpunkti?

1039) Ruudu nurgad on ära lõigatud nii, et on tekkinud korrapärane kaheksanurk. Ruudu külg on a; kui suur on tekkinud kaheksanurga pindala?

1040) Korrapärase kuusnurga nurgad on ära lõigatud nii, et järele on jäänud korrapärane 12-nurgeline hulknurk. Kuusnurga külg on a. Leida tekkinud 12-nurgelise pindala!

1041) Leida ringi sisse joonestatud korrapärase tähtkuusnurga pindala ringi raadiuse r funktsioonina!

1042) Võrdkülgse △-rga sisse on joonestatud ring raadiusega m ja sellele ringile on tõmmatud alusega rööbik puutuja. Kui suurteks osadeks jagab see puutuja △-rga pindala?

1043) Võrdhaarse △-rga sisering jagab puutepunktis haara lõikudeks e ja f; e on tipupoolne lõik ja f on aluse lähislõik. Kui suure △-rga lõikab ära antud △-rgast läbi haarade ja ringi puutepunktide minev sirge? $e = 18$ m; $f = 7$ m.

1044) Ringi ümber joonestatud võrdhaarse trapetsi tipud on ringi keskpunktist a cm ja b cm kaugel. Leida ringi pindala! $a = 15$; $b = 20$; $\pi = 3{,}1416$.

1045) Kahele teineteist väljastpoolt puutujale ringile on tõmmatud ühised välimised puutujad; ringide raadiused on a ja b. Kui suur on nelinurga pindala, mille tippudeks on puutepunktid? $a = 49$ cm; $b = 16$ cm.

1046) Kahele teineteist väljastpoolt puutujale ringile on tõmmatud ühine välimine puutuja. Ringide raadiused on a ja b. Kui suur on △-rga pindala, mille tippudeks on puutepunktid? (Tõestada, et mainitud △ on täisnurkne.)

1047) Ringide O ja C raadiused on r_1 ja r_2; nende keskpunktide kaugus — d. Kui suured on △-rgad, mille moodustavad ühine sisemine puutuja, kesksirge ja puutepunktidesse tõmmatud raadiused? $d = 109$ m; $r_1 = 36$ m; $r_2 = 24$ m.

1048) Ringide A ja B raadiused on a ja b; nende keskpunktide kaugus on $d > a + b$. Kui suured on △-rgad, mille tippudeks on ühiste sisemiste puutujate lõikepunkt ja puutepunktid?

1049) Ruudu piirde ja ruudu sisse joonestatud ringjoone vaheline pindala on s. Kui suur on ringi pindala?

1050) Korrap. kuusnurga pindala on m^2. Kui pikk on tema sisse joonestatud ringjoon?

1051) 120°-lise kaare AB ja 60°-lise kaare CD otsapunkte ristamisi ühendavad kõõlud AC ja BD on teineteisega risti, kuna kõõlud AB ja DC on isekeskis rööbikud. Ringi raadius on r. Kui suurteks osadeks jagavad kõõlud AC ja BD ringi pindala?

1052) Kahe ringi ühine kõõl a jagab kesksirge lõigu lõikuvate kaarte vahel osadeks m ja n. Kui suur on kummagi ringi ümbermõõt? $a = 60$ cm; $m = 9$ cm; $n = 6$ cm.

1053) Hüpotenuusile AB tõmmatud kõrgus CD jagab $\triangle$-rga ABC $\triangle$-rkadeks ACD ja CBD, mille siseringide raadiused on vastavalt r_1 ja r_2. Kui pikk on $\triangle$-rga ABC siseringi raadius? $r_1 = 12$ mm; $r_2 = 35$ mm.

1054) Rööbikute kõõlude a ja b kaugus teineteisest on d. Leida ringi pindala! $a = 48$ cm; $b = 30$ cm; $d = 27$ cm.

1055) Ringi sisse joonestatud trapetsi alused on a ja c, pindala on s. Leida ringi pindala!

$a = 78$ cm; $c = 50$ cm; $s = 7168$ cm^2.

1056) Haara keskristjoon jagab võrdhaarse $\triangle$-rga kõrguse lõikudeks m ja n (tipust arvates). Kui suur on $\triangle$-rga pindala?

1057) Ringi sisse joonestatud trapetsi ühele alusele vastab 90°-line kaar ja teisele alusele 60°-line kaar. Kui suur on trapetsi pindala? Ringi raadius on r. (Vaadelda 2 juhtu.)

1058) Ringis on tõmmatud 2 rööbikut kõõlu, millele vastavad kaared on 120° ja 90°; ringi raadius on r. Leida kõõludevaheline ringi pindala osa. (Vaadelda 2 juhtu.)

1059) Määrata n°-lise sektori siseringi pindala sektori raadiuse r funktsioonina, võttes

a) $n = 60$; b) $n = 90$; c) $n = 120$; d) $n = 180$.

1060) $\triangle$-rga hüpotenuus on 5 m ja siseringi raadius on 1 m pikk. Kui pikad on kaatetid?

1061) Täisnurkse $\triangle$-rga ümbermõõt on 40 cm ja pindala on 60 cm^2. Kui pikad on tema küljed?

1062) Kõrgus CD jagab täisnurkse $\triangle$-rga kaheks $\triangle$-rgaks ACD ja BCD, mille siseringide pindalad on s_1 ja s_2. Kui suur on $\triangle$-rga ABC siseringi pindala?

1063) Trapetsi diagonaalide lõikepunktist rööbiti alustega kuni kaldküljeni tõmmatud sirglõik on k. Diagonaalide lõikepunkt on ühest alusest m ja teisest n kaugusel. Kui suur on trapetsi pindala? $k = 4$ m; $m = 2$ m; $n = 5$ m.

1064) Trapetsi alused on a ja c, küljed b ja d. Kui suurteks osadeks jagab selle trapetsi sirge, mis läheb läbi külgede pikenduste ja diagonaalide lõikepunktide?

$a = 20$ m; $b = 25$ m; $c = 14$ m; $d = 29$ m.

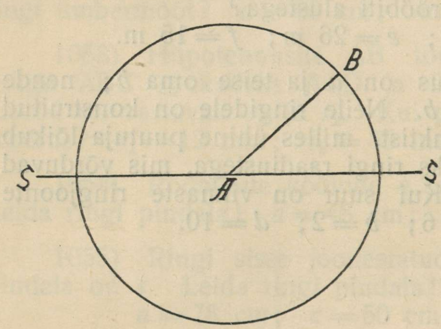
1065) Trapetsi alused on a ja c, diagonaalid e ja f. Kui suurteks osadeks jagab selle trapetsi pindala sirge, mis läheb läbi diagonaalide lõikepunkti rööbiti alustega?

$a = 30$ m; $c = 7$ m; $e = 26$ m; $f = 15$ m.

1066) Ühe ringi raadius on a ja teise oma b; nende keskpunktide kaugus $d > a + b$. Neile ringidele on konstruitud ühine sisemine puutuja. Punktist, milles ühine puutuja lõikub kesksirgega, on tõmmatud kaks ringi raadiustega, mis võrduvad vastavalt puutuja osadega. Kui suur on viimaste ringjoonte vahelise rõnga pindala? $a = 6$; $b = 2$; $d = 10$.

XVI-nes peatükk: Ringi funktsioonid.

232. Kaldenurga mõiste ja tema funktsioonide mõiste üldistamine. On mõeldav, et projektitav sirglõik AB pöördub oma otsapunkti A ümber, mis asub projektsiooni sirgel s, enam kui nürinurga võrra, et see kaldenurk võib saada 180° suureks ja veelgi suuremaks, 270°, 360° jne. — võib omandada ükskõik kui suuri väärtusi.



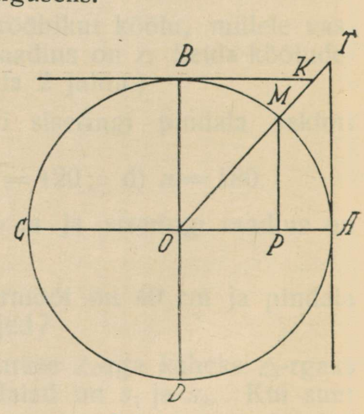
239. joonis.

Niisugusel pöördumisel kriipsutab projektitava sirglõigu AB teine ots B ringi ja meile on kasulik nurga ja tema funktsioonide mõiste laiendamiseks appi võtta ring.

Olgu meil ring, mille keskpunkti tähistame O-ga.

Selles ringis tõmbame 2 ristikut diameetrit AC ja BD; AC-d nim. I-seks diameetriks ja BD-d II-ks diameetriks. A-d nim. esimeseks alguseks ja B-d teiseks alguseks.

Raadiuse OA võtame pöörduva sirglõigu ehk n. n. liikuva raadiuse algseisandiks ja sealt alates hakkame lugema nurki — vastupäeva pöördumisel positiivseiks ja päripäeva pöördumisel negatiivseiks. Seejuures võivad need nurgad omandada kui suuri tahes absoluutseid väärtusi. Muutuva nurga AOM tähistame edaspidi näiteks α-ga. Diameetrid AC ja BD jagavad ringi 4-ks veerandiks, mida me nimetame järjekorras: AOB-d I-ks, BOC-d II-ks, COD-d III-ks ja DOA-d IV-ks.



240. joonis.

Ringi puutujat punktis A — esimeses alguses — nimetame esimeseks puutujaks ja puutujat punktis B — teises alguses — teiseks puutujaks.

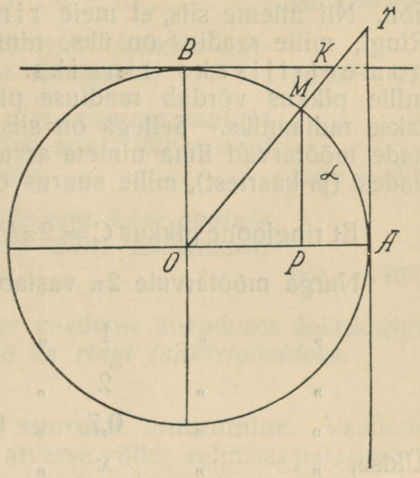
Sirglõike, mis ulatuvad esimesest diameetrist AC ülespoole — loeme positiivseiks ja allapoole — negatiivseiks; sirglõike, mis lähevad teisest diameetrist BD paremale poole, loeme positiivseiks ja vasakule poole — negatiivseiks.

Nüüd defiinime:

1) **Nurga siinuseks nim. seda suhet, mille annab liikuvat raadiust esimesele diameetrile projektiv sirglõik — ja raadius,** (ehk liikuva raadiuse projektsioon teisele diameetrile — ja raadius): $\sin\alpha = \frac{MP}{OM}$.

2) **Nurga koosinuseks nim. seda suhet, mille annab liikuva raadiuse projektsioon esimesele diameetrile — ja raadius:**

$$\cos\alpha = \frac{OP}{OM}.$$



241. joonis.

3) **Nurga tangensiks nim. seda suhet, mille annab esimese puutuja lõik, arvatud puutepunktist kuni lõikumiseni liikuva raadiuse pikendusega — ja raadius:**

$$\tan\alpha = \frac{AT}{OA}\left(=\frac{MP}{OP}\right).$$

4) **Nurga kootangensiks nim. seda suhet, mille annab teise puutuja lõik, arvatud puutepunktist kuni lõikumiseni liikuva raadiuse pikendusega — ja raadius:**

$$\cot\alpha = \frac{BK}{OB}\left(=\frac{OP}{MP}\right).$$

Sirglõiku MP, mille suhe raadiusega annab nurga siinuse, nim. *siinuslõiguks;*

Sirglõiku OP, mille suhe raadiusega annab nurga koosinuse, nim. *koosinuslõiguks;*

Sirglõiku AT, mille suhe raadiusega annab nurga tangensi, nim. *tangenslõiguks;*

Sirglõiku BK, mille suhe raadiusega annab nurga kootangensi, nim. *kootangenslõiguks.*

233. Nurga mõõtmine kaare pikkuse abil. Kui projektitav sirglõik pöördudes oma ühe otsapunkti ümber moodustab algseisandiga mitmesugused nurgad, siis kriipsutab teine otsapunkt mitmesugused kaared nii, et igale nurgale vastab üks ja ainult üks kindla pikkusega kaar. Meie kõnelemegi, et „kesknurka mõõdab temale vastav kaar“ ehk „samas ringis on kesknurgad võrdelised vastavate kaartega.“ Loomulik on siis nurki mõõta kaarte pikkuste abil, ning kaari endid mõõta nende püsiva raadiuse abil. Nii ütleme siis, et meie r i n g i r a a d i u s o n 1 — ü k s. Ringi, mille raadius on üks, nim. ü h i k r i n g i k s ehk t r i g o n o m e e t r i l i s e k s r i n g i k s. Kaare ühikuks on siis kaar, mille pikkus võrdub raadiuse pikkusega. Seda kaart nimetatakse radiaaniks. Sellega on siis meie kaarte ja ühtlasi ka nurkade mõõtarvud ilma nimeta arvud. Sel põhjal kõneldakse nurkadest (ja kaartest), mille suurus on 1; $2\frac{1}{2}$; 0,75; —3,6 jne.

Et ringjoone pikkus $C = 2\pi R$ ja $R = 1$, siis on $C = 2\pi \approx 6{,}28$.

Nurga mõõtarvule		2π	vastab	360°;
„	„	1	„	$\frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57^\circ\,17'\,45''$;
„	„	2	„	$2 \cdot 57^\circ\,17'\,45''$;
„	„	0,7	„	$0{,}7 \cdot 57^\circ\,17'\,45''$.
Üldse, „	„	x	„	$x \cdot 57^\circ\,17'\,45''$.

Ümberpöördult: 360°-le	vastab	mõõtarv	2π,
1°-le	„	„	$\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} \approx 0{,}017453\ldots$
n°-le	„	„	$\frac{n\pi}{180}$;
$-n^\circ$-le	„	„	$-\frac{n\pi}{180}$.

Nii näeme, et kaari ja nurki on võimalik mõõta ka nimeta arvude abil.

On nimetatud niisugust nurkade mõõtmist mõõtmiseks absoluutsetes mõõtudes.

N u r g a f u n k t s i o o n i d e d e f i n i t s i o o n i d ü h i k r i n g i s. Kui me nurga funktsioonide: siinuse, koosinuse, tangensi, kootangensi vaatlemiseks appi võtame ringi, ühikringi, siis ütleme, et raadius on 1:

$$OA = 1.$$

Siis tuleb meil samas mõttes ütelda, et MP $= \sin\alpha$;
OP $= \cos\alpha$;
AT $= \tan\alpha$;
BK $= \cot\alpha$.

Ühikringis nim. nurga (ehk kaare) siinuseks kaare otsapunktist esimesele diameetrile tõmmatud ristjoont . . . . $\sin\alpha = MP$;

nurga (ehk kaare) koosinuseks nim. liikuva raadiuse projektsiooni esimesele diameetrile . . . . $\cos\alpha = OP$;

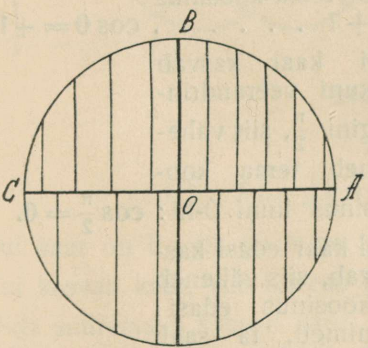
nurga (ehk kaare) tangensiks nim. esimese puutuja lõiku, arvatud puutepunktist kuni lõikumiseni liikuva raadiuse pikendusega . . . . $\tan\alpha = AT$;

nurga (ehk kaare) kootangensiks nim. teise puutuja lõiku, arvatud puutepunktist kuni lõikumiseni liikuva raadiuse pikendusega . . . . $\cot\alpha = BK$.

Kui me nurga funktsioone vaatleme ühenduses ühikringiga, siis nimetame nurgafunktsioone ka *ringi funktsioonideks.*

234. Trigonomeetriliste suuruste muutumine. Vaatleme nüüd trig. suuruste muutumist, arvesse võttes eelmises paragrahvis antud definitsioone.

I. Siinuse muutumine.



242. joonis.

Kui kaar on 0, siis on tema siinus 0: $\mathbf{\sin 0 = 0}$.

Kui kaar kasvab kuni veerandringini $\frac{\pi}{2}$, siis kasvab tema siinus kuni $+1$-ni . . $\mathbf{\sin\frac{\pi}{2} = +1}$.

Kui kaar edasi kasvab, siis hakkab tema siinus vähenema; kui kaar kasvab kuni poolringini π, siis väheneb tema siinus kuni 0-ni . . $\mathbf{\sin\pi = 0}$.

Kui kaar edasi kasvab, siis väheneb tema siinus edasi; nimelt ta saab negatiivseks, kuna tema absoluutne väärtus kasvab.

Kui kaar omandab väärtuse $\frac{3}{2}\pi$, siis on tema siinus vähenenud kuni — 1-ni . . . . $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$.

Kui kaar edasi kasvab, siis hakkab tema siinus uuesti kasvama: ta jääb küll negatiivseks, kuid tema absoluutne väärtus väheneb.

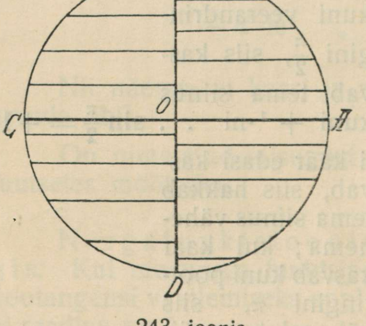
Kui kaar on kasvanud kuni täisringini 2π, siis on tema siinus kasvanud kuni 0-ni. . . . . $\sin 2\pi = 0$.

Kui kaar edasi kasvab, siis hakkavad siinuse väärtused korduma endises järjekorras.

Sellest on näha, et kaar on olenematu muutuja ja siinus tema funktsioon; ja nimelt niisugune funktsioon, mille väärtused korduvad, mille väärtused ei muutu, kui olenematu muutuja suureneb või väheneb 2π (360°) võrra. Niisugust funktsiooni nim. perioodiliseks ja see olenematu muutuja väärtus, mille tagant funktsiooni väärtused korduma hakkavad, on funktsiooni periood. Siinuse periood on 2π ehk 360°. Siinus muutub piirides $+1$ kuni -1-ni katketult. Siinuse absoluutne väärtus ei ole iialgi suurem kui 1.

Siinuse muutumine on graafiliselt kujutatud joonisel nr. 244.

II. Koosinuse muutumine.



243. joonis.

Kui kaar on 0, siis on tema koosinus $+1$ . . . . . . $\cos 0 = +1$.

Kui kaar kasvab kuni veerandringini $\frac{\pi}{2}$, siis väheneb tema koosinus kuni 0-ni: $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Kui kaar edasi kasvab, siis väheneb koosinus edasi; nimelt, ta saab negatiivseks, kuna tema absoluutne väärtus kasvab.

Kui kaar kasvab kuni poolringini, siis on tema koosinus vähenenud kuni — 1-ni . . . . $\cos\pi = -1.$

Kui kaar edasi kasvab, siis hakkab koosinus kasvama; nimelt, ta jääb küll negatiivseks, kuid tema absoluutne väärtus väheneb.

Kui kaar kasvab edasi kuni kolmveerandringini, $\frac{3}{2}\pi$, siis on koosinus kasvanud kuni 0-ni . . . . $\cos\frac{3\pi}{2} = 0.$

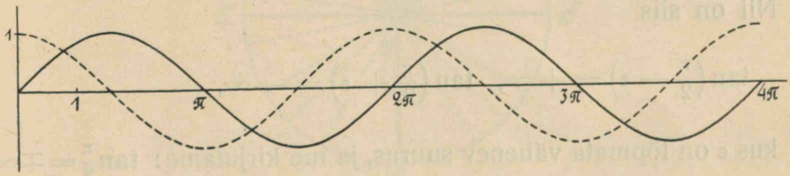
Kui kaar edasi kasvab, siis kasvab ka koosinus edasi: ta saab positiivseks ja ta absoluutne väärtus kasvab.

Kui kaar on kasvanud kuni täisringini 2π, siis on tema koosinus kasvanud kuni + 1-ni . . . . . . $\cos 2\pi = +1.$

Kui kaar edasi kasvab, siis hakkavad koosinuse väärtused endises järjekorras korduma.

Järelikult: koosinus on kaare funktsioon ja nimelt perioodiline; tema periood on 2π ehk 360°. Koosinus muutub piirides — 1-st kuni + 1-ni katketult ja tema absoluutne väärtus ei ole iialgi suurem kui 1.

Koosinuse muutumine on graafiliselt kujutatud joonisel nr. 244.



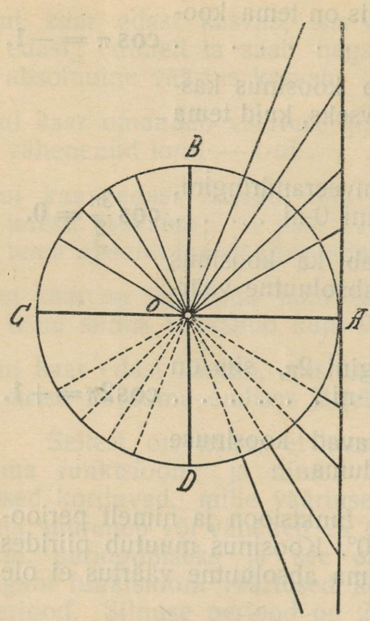
244. joonis.

III. Tangensi muutumine.

Kui kaar on 0, siis on tema tangens ka 0 . . . . $\tan 0 = 0.$

Kui kasvab kaar, siis kasvab ka tema tangens.

Mida suuremaks kasvab kaar, seda pikemaks läheb tangensi kujutav sirglõik, seda kaugemale algpunktist nihkub tangenslõigu lõikepunkt liikuva raadiuse pikendusega. Kui kaar saab veerandringi



245. joonis.

pikkuseks, võrdseks $\frac{\pi}{2}$, siis saab pikendatud raadius paralleelseks I-se puutujaga, lõikepunkt nihkub lõpmatusse ja tangens saab lõpmata suureks: $\tan\frac{\pi}{2} = \infty$.

Niipea kui kaar vähe suuremaks saab kui $\frac{\pi}{2}$, ei ole see sirge, mille lõiguks on liikuv raadius, mitte enam paralleelne I-se puutujaga, nende ülemised otsad lähevad lahku, kuid alumised otsad peavad lõikuma, lõikepunkt hüppab + lõpmatusest — lõpmatusse. Nii on siis

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = +\infty, \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) = -\infty,$$

kus ε on lõpmata vähenev suurus, ja me kirjutame: $\tan\frac{\pi}{2} = \mp\infty$.

Kui kaar edasi suureneb, siis hakkab lõikepunkt altpoolt lähenema algpunktile, tangens jääb negatiivseks, tema absoluutne väärtus väheneb; s. t. tangens kasvab.

Kui kaar saab võrdseks poolringiga π, siis on tangens kasvanud kuni 0-ni . . . . $\tan\pi = 0$.

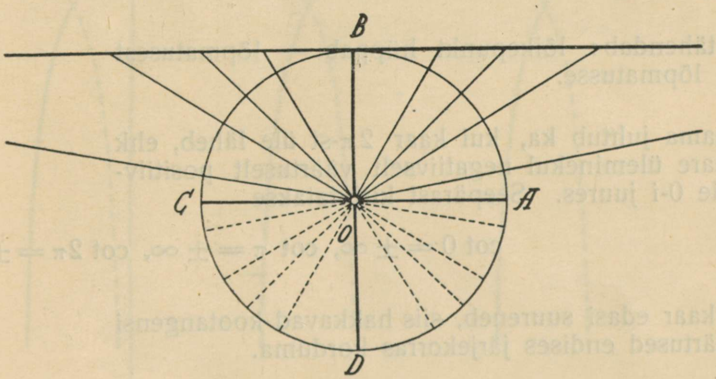
Kui kaar edasi kasvab, siis hakkavad tangensi väärtused endises järjekorras korduma.

Järelikult: tangens on kaare funktsioon ja nimelt perioodiline; tema periood on π ehk 180°. Tangensi väärtustel ei ole piiri; tangens võib omandada kõik väärtused $-\infty$-sest kuni $+\infty$-seni. Tangensi muutumisel on aga katke olemas $\frac{\pi}{2}$ ja $\frac{3\pi}{2}$ juures; seal on ta $\pm\infty$.

Tangensi muutumine on graafiliselt kujutatud joonisel nr. 247.

IV. Kootangensi muutumine.

Kui kaar on 0, siis on II-ne puutuja paralleelne raadiuse pikendusega, mis läheb läbi kaarte alguse A; lõikepunkti ei ole; kõneldakse aga, et nad lõikuvad lõpmatuses . . . . $\cot 0 = +\infty$.



246. joonis.

Niipea kui kaar vähe suureneb, ei ole nimetatud sirged enam paralleelsed, ilmub lõikepunkt, ehk ta küll veel väga kaugel on. Mida enam suureneb kaar, seda lähemale II-sele algusele tuleb lõikepunkt; s. t. kootangens väheneb.

Kui kaar saab veerandringi pikkuseks, siis lõikuvad liikuv raadius ja II-ne puutuja II-ses alguses ja kootangens on 0 . . . . $\cot\frac{\pi}{2} = 0$.

Kui kaar edasi suureneb üle veerandringi, siis nihkub lõikepunkt edasi vasakule poole, kootangens saab negatiivseks ja ta absoluutne väärtus suureneb; kõneldakse, et kootangens väheneb. Mida enam kaar suureneb, seda kaugemale vasakule poole nihkub lõikepunkt, seda enam suureneb kootangensi absoluutne väärtus; et ta aga negatiivne on, siis tuleb kõnelda, et kootangens väheneb. Kui kaar saab poolringi pikkuseks, võrdseks π-ga, siis on II-ne puutuja ja liikuv raadius jällegi paralleelsed, lõikepunkt on vasakule poole ära kadunud, lõpmatusse läinud . . . . $\cot\pi = -\infty$.

Niipea kui kaar vähe suuremaks saab kui π (ehk poolringi), lõpeb kõne all olevate sirgete paralleelsus, II-se puutuja vasakpoolne osa läheb lahku liikuva raadiuse pikendusega, nende parempoolsed osad aga peavad lõikuma ehk küll väga kaugel.

See tähendab: lõikepunkt hüppab — lõpmatusest + lõpmatusse.

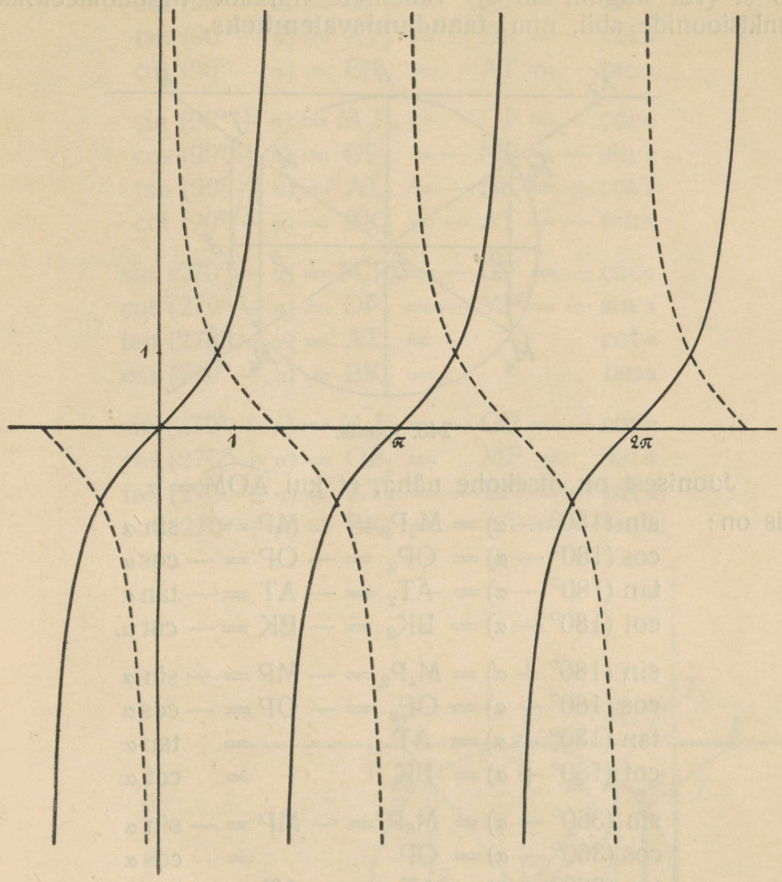
Seesama juhtub ka, kui kaar 2π-st üle läheb, ehk kaare üleminekul negatiivselt väärtuselt positiivsele 0-i juures. Seepärast kirjutatakse

$$\cot 0 = \pm\infty, \quad \cot\pi = \pm\infty, \quad \cot 2\pi = \pm\infty.$$

Kui kaar edasi suureneb, siis hakkavad kootangensi väärtused endises järjekorras korduma.

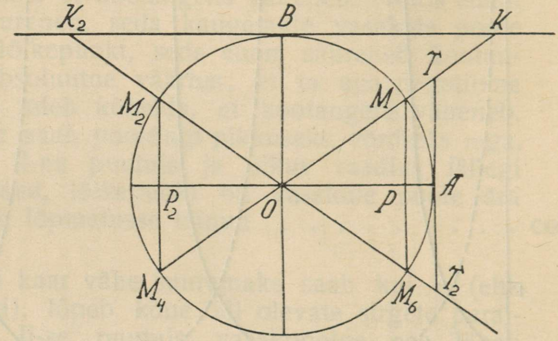
Järelikult: Kootangens on kaare funktsioon, ja nimelt perioodiline; tema periood on π ehk 180°. Kootangensi väärtustel ei ole piiri; kootangens võib omandada kõik väärtused $-\infty$-sest kuni $+\infty$-ni. Kootangensi muutumisel on aga katke olemas 0 ja π juures; seal on ta $\pm\infty$.

Kootangensi muutumine on graafiliselt kujutatud joonisel nr. 247.



247. joonis.

235. Taandamisvalemid. Iga trigonomeetriline funktsioon kulgeb ühe veerandi sees kõik need absoluutsed väärtused, mida ta üldse võib omandada. Seepärast on tarvis trigonomeetriliste suuruste või nende logaritmide tabelid koostada ainult ringi ühe veerandi jaoks. Et aga nurga trigonomeetriline funktsioon on sama suur kui täiendnurga sarnase nimega funktsioon, siis on piisav, kui meil on trig. funktsioonide või nende logaritmide tabel nurkade jaoks 0°-st kuni 45°-ni. Valemeid, mille põhjal me suuremate nurkade trigonomeetrilisi funktsioone väljendame 90°-st (või koguni 45°-st) vähemate nurkade trigonomeetriliste funktsioonide abil, nim. **taandamisvalemiteks.**



248. joonis.

Joonisest on otsekohe näha, et kui $\widehat{AOM} = \alpha$,

siis on:

$$\begin{array}{llll}
\sin(180^\circ - \alpha) = M_2P_2 = & MP = & \sin\alpha \\
\cos(180^\circ - \alpha) = OP_2 = & -\,OP = & -\cos\alpha \\
\tan(180^\circ - \alpha) = AT_2 = & -\,AT = & -\tan\alpha \\
\cot(180^\circ - \alpha) = BK_2 = & -\,BK = & -\cot\alpha.
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
\sin(180^\circ + \alpha) = M_4P_2 = & -\,MP = & -\sin\alpha \\
\cos(180^\circ + \alpha) = OP_2 = & -\,OP = & -\cos\alpha \\
\tan(180^\circ + \alpha) = AT & = & \tan\alpha \\
\cot(180^\circ + \alpha) = BK & = & \cot\alpha
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
\sin(360^\circ - \alpha) = M_6P = & -\,MP = & -\sin\alpha \\
\cos(360^\circ - \alpha) = OP & = & \cos\alpha \\
\tan(360^\circ - \alpha) = AT_2 = & -\,AT = & -\tan\alpha \\
\cot(360^\circ - \alpha) = BK_2 = & -\,BK = & -\cot\alpha
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\sin(-\alpha) = \sin(360^\circ - \alpha) = & -\sin\alpha \\
\cos(-\alpha) = \cos(360^\circ - \alpha) = & \cos\alpha \\
\tan(-\alpha) = \tan(360^\circ - \alpha) = & -\tan\alpha \\
\cot(-\alpha) = \cot(360^\circ - \alpha) = & -\cot\alpha.
\end{array}$$

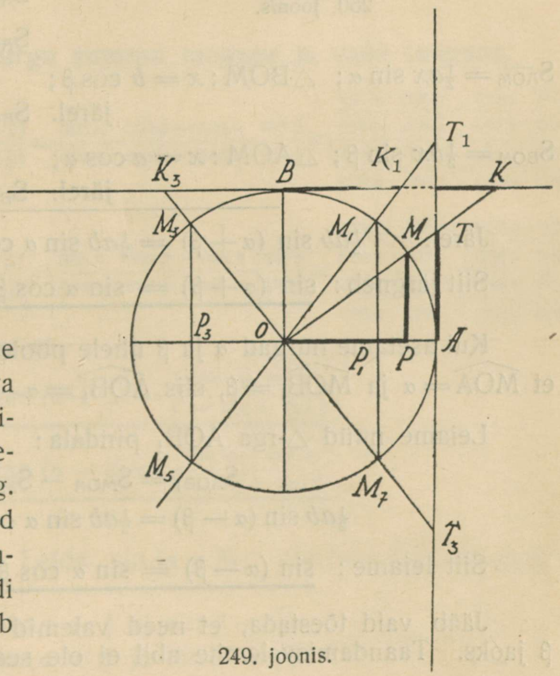
Mnemooniline juhis: Kui taandatava kaare (nurga) koosseisus esineb paaris arv veerandeid, siis on trig. suuruse nimetus seesama; märk pannakse selle veerandi järele, milles lõpeb taandatav kaar.

$$\begin{aligned}
\sin(90^\circ - \alpha) &= M_1P_1 = & OP &= \cos\alpha \\
\cos(90^\circ - \alpha) &= OP_1 = & MP &= \sin\alpha \\
\tan(90^\circ - \alpha) &= AT_1 = & BK &= \cot\alpha \\
\cot(90^\circ - \alpha) &= BK_1 = & AT &= \tan\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(90^\circ + \alpha) &= M_3P_3 = & OP &= \cos\alpha \\
\cos(90^\circ + \alpha) &= OP_3 = & -MP &= -\sin\alpha \\
\tan(90^\circ + \alpha) &= AT_3 = & -BK &= -\cot\alpha \\
\cot(90^\circ + \alpha) &= BK_3 = & -AT &= -\tan\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(270^\circ - \alpha) &= M_5P_3 = & -OP &= -\cos\alpha \\
\cos(270^\circ - \alpha) &= OP_3 = & -MP &= -\sin\alpha \\
\tan(270^\circ - \alpha) &= AT_1 = & & \cot\alpha \\
\cot(270^\circ - \alpha) &= BK_1 = & & \tan\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(270^\circ + \alpha) &= M_7P_1 = & -OP &= -\cos\alpha \\
\cos(270^\circ + \alpha) &= OP_1 = & MP &= \sin\alpha \\
\tan(270^\circ + \alpha) &= AT_3 = & -BK &= -\cot\alpha \\
\cot(270^\circ + \alpha) &= BK_3 = & -AT &= -\tan\alpha.
\end{aligned}$$



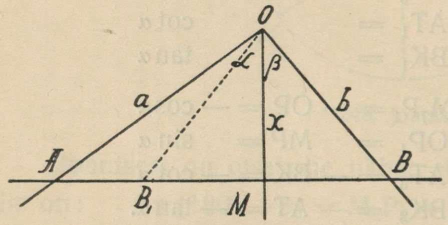
249. joonis.

Mnemooniline juhis: Kui taandatava kaare koosseisus esineb paaritu arv veerandeid, siis on trig. suuruse nimetus vaid sarnane; märk pannakse selle veerandi järele, milles lõpeb taandatav kaar.

Harjutisi. Taandada ja leida tabelist:

sin 165°	cos 199°	tan 145°	cot 111°
sin (— 78°)	cos (— 316°)	tan (— 218°)	cot (— 30°)
sin 248°	cos 849°	tan (— 4000°)	cot 254°
sin (— 290°)	cos (— 570°)	tan 5432°	cot (— 346°)
sin 793°	cos 869°	tan 759°	cot 7038°
sin 1000°	cos 2000°	tan 307°	cot 10000°.

236. Kahe nurga summa siinus ja vahe siinus. Olgu meil α ja β teravnurgad nii, et $\alpha + \beta < \pi$ ja olgu



250. joonis.

$\widehat{AOM} = \alpha$ ja $\widehat{BOM} = \beta$;

siis on $\widehat{AOB} = \alpha + \beta$.

Tõmbame sirge $AB \perp OM$ ja olgu $OA = a$, $OB = b$, $OM = x$. Leiame $\triangle$-rga AOB pindala:

$$S_{AOB} = S_{AOM} + S_{BOM};$$

$$S_{AOB} = \tfrac{1}{2}ab \sin(\alpha + \beta);$$

$S_{\overline{AOM}} = \frac{1}{2}ax \sin\alpha$; $\triangle BOM: x = b\cos\beta$;

järel. $S_{AOM} = \frac{1}{2}ab \sin\alpha\cos\beta$;

$S_{BOM} = \frac{1}{2}bx \sin\beta$; $\triangle AOM: x = a\cos\alpha$;

järel. $S_{BOM} = \frac{1}{2}ab\cos\alpha\sin\beta$.

Järel. $\frac{1}{2}ab\sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}ab\sin\alpha\cos\beta + \frac{1}{2}ab\cos\alpha\sin\beta$.

Siit järgneb: $\underline{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$.

Kui asetame nurgad α ja β ühele poole OM, ja kui $\beta < \alpha$, nii et $\widehat{MOA} = \alpha$ ja $\widehat{MOB_1} = \beta$, siis $\widehat{AOB_1} = \alpha - \beta$ ja $OB_1 = b$.

Leiame nüüd $\triangle$-rga AOB_1 pindala:

$$S_{AOB_1} = S_{MOA} - S_{MOB}; \text{ järel.}$$

$$\tfrac{1}{2}ab\sin(\alpha - \beta) = \tfrac{1}{2}ab\sin\alpha\cos\beta - \tfrac{1}{2}ab\cos\alpha\sin\beta.$$

Siit leiame: $\underline{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}$.

Jääb vaid tõestada, et need valemid on maksvad iga α ja β jaoks. Taandamisvalemite abil ei ole see raske.

237. Kahe nurga summa koosinus ja vahe koosinus. Kui kahe nurga summa ja vahe siinuste valemites nurga α asemele panna tema täiendnurk kuni täisnurgani, siis leiame:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \beta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta$, ehk

$\sin\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right] = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$; siit järgneb:

$$\underline{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta.}$$

2) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta$, ehk

$\sin\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$; siit järgneb:

$$\underline{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta.}$$

Et valemid $\sin(\alpha + \beta)$ ja $\sin(\alpha - \beta)$ on üldised, maksvad igasuguse α ja β jaoks, siis on valemid $\cos(\alpha + \beta)$ ja $\cos(\alpha - \beta)$ ka maksvad iga α ja β jaoks.

238. Kahe nurga summa tangens ja vahe tangens.

$$\operatorname{Tan}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta} = \frac{\frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} + \frac{\cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} - \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}$$

$$\operatorname{Tan}(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta} = \frac{\frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} - \frac{\cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} + \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}$$

Sellest järgneb, et

$$\underline{\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta};}$$

$$\underline{\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}.}$$

Harjutisi. Leida $\sin(\alpha \pm \beta)$; $\cos(\alpha \pm \beta)$; $\tan(\alpha \pm \beta)$ kui antud on:

a) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ ja $\cos\beta = \frac{15}{17}$;

b) $\tan\alpha = \frac{4}{3}$ ja $\tan\beta = \frac{5}{12}$.

239. Kahekordse nurga siinus, koosinus, tangens. Rakendades kahe nurga summa siinuse, koosinuse ja tangensi valemeid leiame:

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha \cos\alpha + \sin\alpha \cos\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cos\alpha - \sin\alpha \sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha \tan\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}.$$

Nii siis
$$\underline{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;}$$
$$\underline{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;}$$
$$\underline{\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.}$$

240. Poole nurga siinus, koosinus, tangens. Rakendades tuntud valemeid:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ ja $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ leiame:

$$\pm\left\{\begin{array}{l} \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 \\ \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha \end{array}\right.$$

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha \quad \text{ehk:} \quad \underline{\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}$$

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha \qquad \underline{\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

241. Trigonomeetrilistele valemitele logaritmitava kuju andmine. Nagu teada, ei ole meil võimalik summat ega vahet logaritmida. Et aga trigonomeetriliste avaldiste arvsuuruste arvutamisel tuleb rakendada peamiselt logaritme, siis on tähtis osata anda trigonomeetrilistele avaldistele logaritmitav, s. t. korrutise või murru kuju.

Samuti on tähtis avaldistele teissuguse kuju andmine funktsioonide uute omaduste avastamisel.

Tuletame selleks siin mõned valemid.

Võtame valemid:

$$\left.\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y\\ \sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y\end{aligned}\right\}\mp$$

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cos y$$

$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos x \sin y$$

Ehk: $$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Alati võime tähistada:

$$x+y=\alpha$$
$$x-y=\beta;$$

siis: $$2x=\alpha+\beta$$
$$2y=\alpha-\beta;$$

ja $$x=\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$y=\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Võtame valemid:

$$\left.\begin{aligned}\cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y\\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y\end{aligned}\right\}\mp$$

$$\cos(x-y) + \cos(x+y) = 2\cos x \cos y$$

$$\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2\sin x \sin y$$

Ehk: $$\cos\beta + \cos\alpha = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\beta - \cos\alpha = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$ kus $\beta < \alpha$.

On loomulik viimases valemis vähema nurga β koosinus enne kirjutada, vähendatavaks, ja suurema nurga α koosinus kirjutada pärast, vähendajaks, sest vähemal nurgal on suurem koosinus kui suuremal nurgal, ja siis esinevad kõik arvud positiivsetena, kui α ja β on teravad nurgad.

Kahe nurga siinuste summa on sama suur kui nende nurkade poolsumma siinuse ja poolvahe koosinuse kahekordne korrutis.

Kahe nurga siinuste vahe on sama suur kui nende nurkade poolsumma koosinuse ja poolvahe siinuse kahekordne korrutis.

Kahe nurga koosinuste summa on sama suur kui nende nurkade poolsumma ja poolvahe koosinuste kahekordne korrutis.

Kahe nurga koosinuste vahe on sama suur kui nende nurkade poolsumma ja vastaspoolvahe siinuste kahekordne korrutis.

Harjutisi. Anda logaritmitav kuju avaldisile:

1067) $\sin 29^\circ + \sin 13^\circ$
$\sin 75^\circ - \sin 27^\circ$
$\cos 14^\circ + \cos 58^\circ$
$\cos 12^\circ - \cos 72^\circ$

1068) $\tan\alpha + \tan\beta$
$\tan\alpha - \tan\beta$
$\cot\alpha + \cot\beta$
$\cot\alpha - \cot\beta$

1069) $\sin\alpha + \cos\beta$
$\cos\alpha - \sin\beta$
$\sin\alpha - \cos\alpha$
$\cos\alpha + \sin\alpha$

1070) $\tan\alpha + \cot\beta$
$\cot\alpha - \tan\beta$
$\tan\alpha - \cot\alpha$
$\cot\alpha + \tan\alpha$

1071) $1 + \sin\alpha$
$1 - \sin\alpha$
$1 - \tan\alpha$
$1 + \cot\alpha$

1072) $\frac{1}{2} + \sin\alpha$
$\frac{1}{2} - \sin\alpha$
$\cos\alpha + \frac{1}{2}$
$\cos\alpha - \frac{1}{2}$

1073) $\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos\alpha$
$\sin\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos\alpha$

1074) $\tan\alpha + \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\sqrt{3}}{3} - \cot\alpha$
$\sqrt{3} - \tan\alpha$
$\cot\alpha + \sqrt{3}$

1075) $1 + 2\sin\alpha$
$2\cos\alpha - 1$
$\sqrt{3} - 2\sin\alpha$
$\sqrt{3} + 2\cos\alpha$

1076) $2\sin\alpha + \sqrt{2}$
$2\cos\alpha - \sqrt{2}$
$\sqrt{3} + 3\cot\alpha$
$3\tan\alpha - \sqrt{3}$

1077) $\sin\alpha + \tan\alpha$
$\tan\alpha - \sin\alpha$
$\cos\alpha + \cot\alpha$
$\cot\alpha - \cos\alpha$

1078) $\cot^2\alpha - 1$
$1 - \tan^2\alpha$
$1 + \tan^2\alpha$
$1 + \cot^2\alpha$

1079) $3 - \tan^2\alpha$
$\cot^2\alpha - 3$
$\tan^2\alpha - \tan^2\beta$
$\cot^2\alpha - \cot^2\beta$

1080) $\sin(30^\circ + \alpha) + \sin(60^\circ - \alpha)$
$\sin(30^\circ + \alpha) + \cos(60^\circ + \alpha)$
$\tan(45^\circ + \alpha) + \tan(45^\circ - \alpha)$
$\tan(45^\circ + \alpha) - \tan(45^\circ - \alpha)$

1081) $1 - \cos\beta + 2\cos^2\frac{\beta}{2}$
$1 - \cos\alpha - 2\sin^2\alpha$
$1 + \cos\alpha - 2\cos^2\alpha$
$\cos 2\alpha \cdot \cos\alpha + \sin 2\alpha \cdot \sin\alpha$

1082) $\sqrt{1 + \cos\alpha} + \sqrt{1 - \cos\alpha}$
$\sqrt{1 + \cos\beta} - \sqrt{1 - \cos\beta}$
$\sin\alpha + 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$
$\frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$

1083) $2 + 3\sin\alpha$
$8\cos\alpha - 3$
$4\tan\alpha - 5$
$5\cot\alpha + 8$

242. Ülesandeid. 1084) Kaatetite summa on s ja üks nurk on α. Kui pikk on hüpotenuus?

1085) Kaatetite vahe on d; üks nurk on β. Leida $\triangle$-rga pindala!

1086) Hüpotenuusi ja pikema kaateti vahe on d; suurem teravnurk on β. Leida teine kaatet!

1087) Hüpotenuusi ja ühe kaateti summa on s; nende vahelnurk on α. Kui suur on $\triangle$-rga pindala?

1088) $\triangle$-rgas on kahe külje summa s; nende külgede vastasnurgad on α ja β. Kui pikk on kolmas külg?

$$s = 100 \text{ m}; \quad \alpha = 62^\circ 30'; \quad \beta = 35^\circ 36'.$$

1089) $\triangle$-rgas on kahe külje vahe d; nende külgede vastasnurgad on α ja β. Kui pikk on kolmas külg?

$$d = 15 \text{ m}; \quad \alpha = 72^\circ 48'; \quad \beta = 29^\circ 12'.$$

1090) $\triangle$-rgas on kahe külje summa m; nende külgede vahelnurk on γ ja pikema külje vastasnurk on α. Leida $\triangle$-rga pindala! $m = 120$ m; $\gamma = 52^\circ$; $\alpha = 78^\circ$.

1091) $\triangle$-rgas on kahe külje vahe k; nende külgede vahelnurk on β ja lühema külje vastasnurk on α. Leida $\triangle$-rga pindala! $k = 10$ m; $\beta = 57^\circ$; $\alpha = 49^\circ$.

1092) Ristküliku ümbermõõt on $4p$; tema diagonaalidevahelnurk 2α. Kui suur on selle ristküliku pindala?

$$4p = 260 \text{ m}; \quad 2\alpha = 64^\circ.$$

1093) Rööpküliku ümbermõõt on $2p$; pikem diagonaal moodustab külgedega nurgad α ja β. Kui pikk on kumbki külg?

$$2p = 94 \text{ m}; \quad \alpha = 47^\circ; \quad \beta = 32^\circ.$$

1094) $\triangle$-rga ümberringi raadius on R ja tema nurgad α ja β. Leida küljed! $R = 26{,}8$ m; $\alpha = 108^\circ$; $\beta = 42^\circ 27'$.

1095) $\triangle$-rga ümberringi raadius $R = 56$ cm; $\triangle$-rga nurgad on $\alpha = 54^\circ 45'$ ja $\beta = 49^\circ 35'$. Leida pindala!

1096) $\triangle$-rga ümberringi raadiuse R ja tema nurkade kaudu leida $\triangle$-rga ümbermõõt!

Lahendus: $2p = a + b + c = 2R\sin\alpha + 2R\sin\beta + 2R\sin\gamma =$

$$= 2R(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = 2R[\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta)] =$$

$$= 2R\left[2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right] =$$

$$= 4R\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 4R\sin\frac{180^\circ-\gamma}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} =$$

$$= 8R\sin\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} = 8R\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

1097) $\triangle$-rga ümbermõõt on $2p$, tema nurgad α, β, γ. Leida küljed!

1098) $\triangle$-rga siseringi raadius on r ja nurgad α, β, γ. Leida küljed!

1099) Rööpküliku külgede a ja b vaheline teravnurk on α. Kui suure pindala piiravad selle rööpküliku nurkade poolitajad lõikudes üksteisega?

1100) Ringi α-kraadilise sektori sisse on joonestatud uus ring; sektori raadius on R. Kui suur on siseringi pindala?

1101) $m^2 = 144$ vakamaad suurel talukrundil on niisuguse nelinurga kuju, mille 2 vastasnurka on täisnurgad; kaugemaid kupitsaid ühendav sirge jagab nürinurga osadeks $\alpha = 62°$ ja $\beta = 54°$. Kui pikk on selle talukrundi piir?

1102) Ringi sisse joonestatud $\triangle$-rga tipud jagavad ringjoone $C = 94{,}25$ m suhtes $4:5:7$. Kui suur on selle $\triangle$-rga siseringi ümbermõõt ja pindala?

1103) Ringi ümber joonestatud võrdhaarse trapetsi pikem alus on $2a$ ja teravnurk on α. Leida selle ringi ümbermõõt ja pindala!

243. Tangenslause ja Mollveide valemite teissugune tuletamine.

Meil on teada, et
$$a = 2R\sin\alpha$$
$$b = 2R\sin\beta$$
$$c = 2R\sin\gamma.$$

Järel.
$$a + b = 2R(\sin\alpha + \sin\beta)$$
$$a - b = 2R(\sin\alpha - \sin\beta).$$

Seepärast leiame:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{2R(\sin\alpha + \sin\beta)}{2R(\sin\alpha - \sin\beta)} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} = \tan\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cot\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Ehk: $$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}.\quad \text{(Tangenslause).}$$

$$\frac{a+b}{c}=\frac{2R(\sin\alpha+\sin\beta)}{2R\sin\gamma}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}=\frac{\sin\left(90^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}=\frac{\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}$$

Ehk: $\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$. Mollveide I-ne valem.

$$\frac{a-b}{c}=\frac{2R(\sin\alpha-\sin\beta)}{2R\sin\gamma}=\frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}=\frac{\cos\left(90^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}=\frac{\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}$$

Ehk: $\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$. Mollveide II-ne valem.

244. Abinurga sissetoomine. Kui eelpool § 241 tuletatud valemite abil ei ole võimalik kahe arvu summale või vahele anda logaritmitavat kuju, siis saame seda teha abinurga kaudu.

I. Vaatleme summat $A+B$, kus A ja B on positiivsed arvud.

Toome A sulgude ette, siis saame: $A+B=A\left(1+\frac{B}{A}\right)$.

Tähistame:

$\frac{B}{A}=\tan^2\varphi$, kus φ on abinurk: $A+B=A(1+\tan^2\varphi)$

$$A+B=A\cdot\sec^2\varphi, \text{ ehk}$$

$$A+B=\frac{A}{\cos^2\varphi}.$$

Abinurga φ arvutame võrdusest: $\tan^2\varphi=\frac{B}{A}$.

Ei ole tähtis, kas $A>B$ või $A<B$, sest $\tan^2\varphi$ võib omandada kõiki väärtusi 0-st kuni lõpmatuseni.

II. Vaatleme vahet A — B, kus A ja B on positiivsed arvud ja $A > B$.

Toome A sulgude ette, siis saame: $A - B = A\left(1 - \frac{B}{A}\right)$.

Tähistame: $\frac{B}{A} = \cos^2\varphi$, kus φ on abinurk.

Ehk küll $\cos^2\varphi$ võib muutuda ainult piirides 0-st kuni 1-ni, siiski on niisugune tähistus lubatav, sest $B < A$.

Pärast niisugust tähistust saame: $A - B = A\,(1 - \cos^2\varphi)$

ehk: $A - B = A \cdot \sin^2\varphi$.

Arusaadav, et ka teised tähistused on lubatavad, kui nad aga sihile viivad.

Harjutisi:

a) $\sqrt{5}\sin\alpha + 1$ c) $2\sqrt{3} + \cot\alpha$ e) $5 + 3\sin 75°$

b) $1 + \sqrt{3}\cos\alpha$ d) $2\sqrt{5} - \tan\alpha$ f) $5 - 2\cot 38°$.

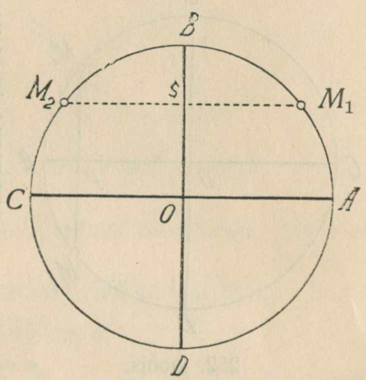
Lisa I.

245. Arkussiinusfunktsioon. Ülesanne 1104) Leida kaar, mille siinus võrdub $\frac{3}{5}$!

Lahendamine: Jaotame II-se diameetri positiivse poole 5-ks võrdseks osaks, võtame $OS = \frac{3}{5}OB$ ja läbi punkti S tõmbame sirge $M_1M_2 \parallel AC$. Siis on kaare AM_1 siinus võrdne $\frac{3}{5}$. Ühtlasi on ka kaare ABM_2 siinus võrdne $\frac{3}{5}$. Kirjutatakse

$$\widehat{AM_1} = \arcsin\tfrac{3}{5} \text{ ja}$$

$$\widehat{ABM_2} = \arcsin\tfrac{3}{5}.$$



251. joonis.

Kuid peale kaarte AM_1 ja ABM_2 on veel kaari, mille siinus võrdub $\frac{3}{5}$. Kõik nad lõpevad kas punktis M_1 või punktis M_2. Me saame need kaared kaartele AM_1 ja ABM_2 täisringide juurdelisamise teel (või ka lahutamise teel).

Peenelt kuni 0,01-ni on ligikaudu $\sin 37° = \frac{3}{5}$. Seepärast võime kirjutada: $\arcsin 0{,}6 = 37°$ ja $\arcsin 0{,}6 = 143°$.

Üldse: $\arcsin 0{,}6 = 37° + n \cdot 360°$ ja

$$\arcsin 0{,}6 = 143° + n \cdot 360° = 180° - 37° + n \cdot 360°,$$

ehk $\arcsin 0{,}6 = (2n + 1) \cdot 180° - 37°$,

kus n on täisarv, kas positiivne või negatiivne.

Me näeme, et vähim kaar 37°, mille siinus on 0,6, tuleb juurde lisada siis, kui võetud on täisringid või kui võetud poolringide arv on paarisarv ja vähim kaar 37° tuleb lahutada siis, kui võetud poolringide arv on paaritu.

Kui tähistame vähima kaare kraadide arvu a-ga või absoluutmõõtudes α-ga ja temale vastava siinuse x-ga, siis võime kõik kaared, mille siinus on x, väljendada ühe valemi abil, nimelt:

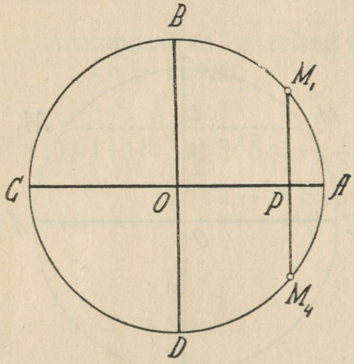
$$\underline{\arcsin x = n \cdot 180^\circ + (-1)^n \cdot a^\circ}$$

$$\text{ehk } \underline{\arcsin x = n \cdot \pi + (-1)^n \cdot \alpha},$$

sest $(-1)^n = +1$, kui n on paarisarv, ja

$(-1)^n = -1$, kui n on paaritu arv.

246. Arkuskoosinusfunktsioon. Ülesanne 1105) Leida kaar, mille koosinus võrdub $\frac{3}{4}$!



252. joonis.

Lahendamine: Jaotame I-se diameetri positiivse poole 4-ks võrdseks osaks, võtame $OP = \frac{3}{4}OA$ ja läbi punkti P tõmbame sirge $M_1M_4 \parallel BD$. Siis on kaare AM_1 koosinus võrdne $\frac{3}{4}$. Ühtlasi on ka kaare AM_4 või kaare $ABCDM_4$ koosinus võrdne $\frac{3}{4}$. Tabelitest leiame ligikaudu, peenelt kuni 0,01-ni, et

$$\overset{\frown}{AM_1} = 49^\circ;$$

$$\text{järelikult } \overset{\frown}{AM_4} = -49^\circ$$

$$\text{ja } \overset{\frown}{ABCDM_4} = 360^\circ - 49^\circ.$$

Kirjutatakse: $\overset{\frown}{AM_1} = \arccos \frac{3}{4}$ ja $\overset{\frown}{AM_4} = \arccos \frac{3}{4}$

ehk $\arccos \frac{3}{4} = 49^\circ$ ja $\arccos \frac{3}{4} = -49^\circ$.

Kuid need ei ole üksikud kaared, mille koosinuseks on $\frac{3}{4}$; niisuguseid kaari leidub lõpmata palju, kõik nad lõpevad punktis M_1 või M_4 ja me saame nad, kui me kaarele AM_1 ja kaarele AM_4 juurde lisame täisarvu ringe, ükskõik kas positiivses või negatiivses suunas. Nii võime üldse kirjutada:

$$\arccos \tfrac{3}{4} = n \cdot 360^\circ \pm 49^\circ,$$

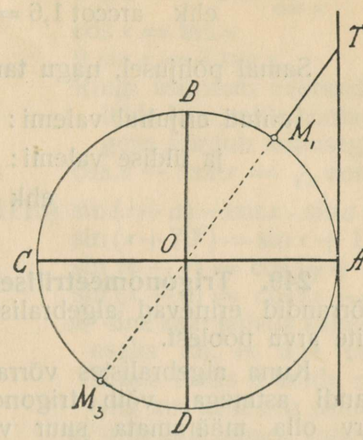
kus n on täisarv, kas positiivne või negatiivne.

Tähistades a-ga vähima kaare kraadide arvu või α-ga kaareühikute arvu vähimas kaares, mille koosinus on x, saame üldise valemi:

$$\underline{\arccos x = 2n \cdot 180^\circ \pm a^\circ}$$

$$\text{ehk } \underline{\arccos x = 2n\pi \pm \alpha}.$$

247. Arkustangensfunktsioon. Ülesanne 1106) Leida kaar, mille tangens võrdub $1\frac{1}{3}$!



253. joonis.

Lahendamine: Esimese puutuja peale asetame $AT = 1\frac{1}{3}OA$ ja läbi saadud punkti T ja ringi keskpunkti O tõmbame sirge TO, mis lõikab ringi kahes punktis M_1 ja M_3. Kaare AM_1 tangens on siis võrdne $1\frac{1}{3}$; samuti võrdub $1\frac{1}{3}$-kuga kaare $ABCM_3$ tangens. Tabelist leiame, et kaar AM_1 on ligikaudu $53°\,8'$ suur.

Kirjutatakse: $\overset{\frown}{AM_1} = \arctan 1\frac{1}{3}$

ehk $\arctan 1\frac{1}{3} = 53°\,8'$.

Et tangensi periood on poolring, siis leiame kõik teised kaared, nende seas ka kaare $ABCM_3$, kui me kaarega AM_1 liidame või sellest kaarest lahutame täisarvu poolringe. Nii on siis $\arctan 1\frac{1}{3} = 53°\,8' \pm n \cdot 180°$.

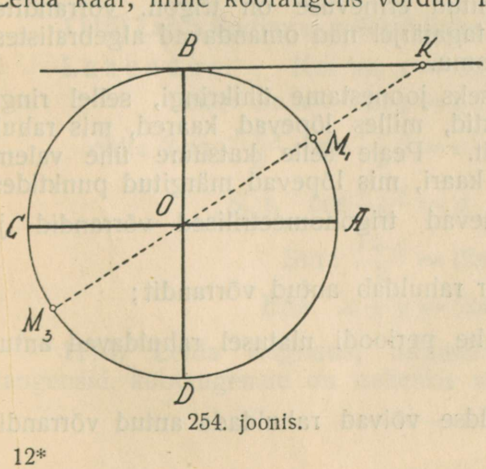
Eelpool tarvitatud tähistustes saame üldise valemi:

$$\arctan x = n \cdot 180° + a°$$

$$\text{ehk} \quad \arctan x = n\pi + \alpha,$$

kus n võib olla nii positiivne kui ka negatiivne täisarv.

248. Arkuskootangensfunktsioon. Ülesanne 1107) Leida kaar, mille kootangens võrdub 1,6.



254. joonis.

Lahendamine: Teise puutuja peale asetame $BK = 1{,}6\,OA$ ja läbi saadud punkti K ja ringi keskpunkti O tõmbame sirge KO, mis lõikab ringi kahes punktis M_1 ja M_3. Kaare AM_1 kootangens on siis võrdne 1,6; samuti võrdub 1,6-kuga kaare $ABCM_3$ kootangens.

Tabelist leiame, et kaar AM_1 on 32° suur.

Kirjutatakse: $\overset{\frown}{AM_1} = \operatorname{arccot} 1{,}6$

ehk $\operatorname{arccot} 1{,}6 = 32^\circ$.

Samal põhjusel, nagu tangensi puhul, leiame

antud erijuhul valemi: $\operatorname{arccot} 1{,}6 = 32^\circ + n \cdot 180^\circ$

ja üldise valemi: $\operatorname{arccot} x = n \cdot 180^\circ + a^\circ$

ehk $\operatorname{arccot} x = n\pi + \alpha$.

249. Trigonomeetrilised võrrandid. Trigonomeetrilised võrrandid erinevad algebralistest võrranditest peamiselt lahendite arvu poolest.

Kuna algebralistes võrrandites lahendite arv võrdub võrrandi astmega, võib trigonomeetrilistes võrrandites lahendite arv olla määramata suur võrrandi astmele vaatamata, sest ühele trigonomeetrilisele suurusele vastab määramata palju kaari (või nurki), nagu see ilmneb § 245—248.

Leitud lahenditele antakse harilikult üldkuju, mis sisaldab kõik lahendid.

Kui trig. võrrandis esineb üks tundmatu kaar ja selle kaare üksainus funktsioon, siis ei erine selle võrrandi lahendamise võte millegi poolest sama astme algebralise võrrandi lahendamise võttest.

Esinevad trig. võrrandis ühe tundmatu kaare mitmesugused funktsioonid, siis tuleb see võrrand taandada niisuguseks, milles esineb selle kaare üksainus funktsioon.

Peale alguses mainitud erinevuse on trigon. võrranditel veel teisi omadusi, mille tagajärjel nad omandavad algebralistest võrranditest erineva iseloomu.

Üldlahendite leidmiseks joonestame ühikringi, sellel ringil märgime ära need punktid, milles lõpevad kaared, mis rahuldavad antud võrrandit. Peale selle katsume ühe valemi abil kirjutada kõiki neid kaari, mis lõpevad märgitud punktides.

Lahendada alljärgnevad trigonomeetrilised võrrandid ja näidata:

1) missugune vähim kaar rahuldab antud võrrandit;

2) missugused kaared ühe perioodi ulatusel rahuldavad antud võrrandit;

3) missugused kaared üldse võivad rahuldada antud võrrandit.

1108) $5 \tan\alpha - 4 = 2 \tan\alpha + 2$
$9 \sin x = \frac{4}{\sin x}$
$2 \cos^2 x - \sqrt{3} \cos x = o$
$\cos^2 x + 1{,}75 = 4 \cos x$
$2 \cot x = \cot^2 x - 3$

1109) $5 \sin^2 x + 2 \cos^2 x = 3$
$\sin x + \cos^2 x = 1\frac{1}{4}$
$\cos x = \sin^2 x - \cos^2 x$
$\sin x + \cos^2 x = \frac{1}{4}$
$\sin x + \cos x = 1{,}4$
$\tan x + \cot x = 2$
$\tan x - \cot x = \frac{2}{\sqrt{3}}$
$\tan x + 3 \cot x = 4$

1110) $\sin x \cdot \cot x = \frac{1}{2}$
$\cos x \cdot \tan x = 0{,}875$
$\tan x : \cot x = 3$
$\cot x : \tan x = 2{,}56$

1111) $2 \cos x \sin x - \cos x = o$
$\sin x = -\cos x$
$\sin x = 2 \cos x$
$a \sin x = b \cos x$
$3 \cos x - 2 \sin x = 2 \sin x$
$5 \sin^2 x - 8 \sin x \cos x = o$
$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = o$

1112) $\sin x \cdot \tan x = 1{,}5$
$2 \tan^2 x + 4 = \frac{5}{\cos x}$
$\cos x = \tan x$
$9 \sin x = 7 \tan x$
Ringi esimeses veerandis leida kaar, mille kootangens võrdub siinusega.
$\cos x - \tan x = \frac{1}{16} \cos x$

1113) $\sin(x + a) - \cos x \cdot \sin a = \cos a$
$\sin(x + 70^\circ) = \sin x + 1{,}2 \cos x$
$\sin(\varphi - x) = \cos(\varphi + x)$
$\sin(x - a) = \cos(x + a)$
30°-line kaar jagada kaheks osaks nii, et ühe osa siinus oleks 3 korda nii suur kui teise osa siinus.
45°-line kaar jagada kaheks osaks nii, et ühe osa siinus võrduks teise osa kahekordse siinusega.

1114) $2 \sin 2x = \sqrt{2}$
$\cos 2x = 1 + \cos x$
$(\cos x + \sin x)^2 = \cos 2x$
$\sin x \cos x = \frac{1}{4}$
$\tan 2x = 3 \tan x$
$\sin 2x = \sin x$
$3(\sin x + \cos x)^2 = 8 \sin 2x$

1115) Leida tingimus, millisel kahe nurga siinused on võrdsed.

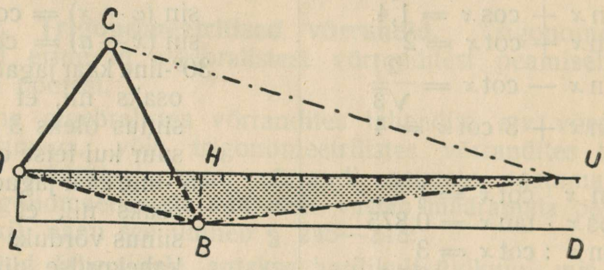
Lahendus: Kui $\sin x = \sin y$,
siis: $\sin x - \sin y = o$;
ehk: $2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} = o.$
S. t. $\cos \frac{x+y}{2} = o$ või $\sin \frac{x-y}{2} = o.$
Siit: $\frac{x+y}{2} = (2n+1) \cdot \frac{\pi}{2}$ või $\frac{x-y}{2} = n\pi$;
Ehk $x + y = (2n+1)\pi$ või $x - y = 2n\pi.$

1116) Leida tingimus, millisel kahe nurga koosinused, tangensid, kootangensid on isekeskis võrdsed.

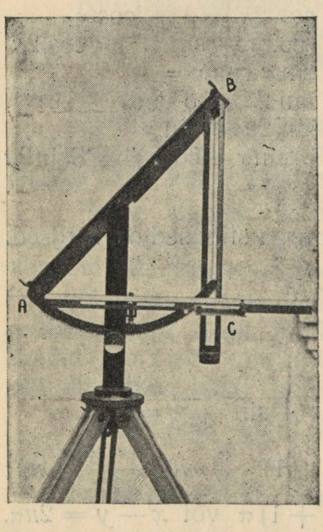
Lisa II.

(J. Sütt.)

250. Praktilisi ülesandeid.



255. joonis. *Agromeeter.* § 133-nda juurde.



256. joonis. *Hüpsomeeter ehk kõrgusmõõtja I.*

§§-ide 145—148, 164 juurde.

1. Agromeeter on joonlaud, mille laius BH on 2 cm. Et mõõta $\triangle$-rga ABC pindala, tõmbame CU $\parallel$ AB. Nüüd asetame joonlaua nii, et joonlaual märgitud cm-te 0-punkt ühtuks tipuga A ja et vastasäär läheks läbi tipu B. Siis lõikab joonlaua see äär, mis on jaotatud senti- ja millimeetriteks, CU-d punktis U. $\triangle ABC = \triangle ABU$ [133, 2]. Võtame $\triangle$-rga ABU aluseks AU, siis on kõrguseks BH $=$ 2 cm.

$$S_{ABC} = S_{ABU} = \tfrac{1}{2}\overline{BH} \cdot \overline{AU};$$

$$S_{ABC} = \tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot \overline{AU} = \overline{AU}.$$

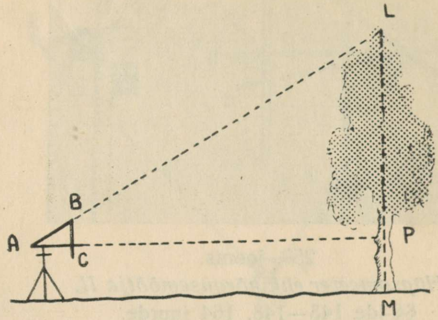
Nii võrdub siis $\triangle$ABC pindala mõõtarv sirglõigu AU mõõtarvuga, mille meie loeme joonlaualt; näiteks meie joonises AU $=$ 21 cm; järel. $S_{ABC} = 21\ cm^2$.

2. Et mõõta tasasel pinnal puu kõrgust, mille juurde on võimalik pääseda, seame hüpsomeetri üles puust teataval kaugusel AP; hüpsomeetri ühe joonlaua AC seame üles horisontaalselt, teise joonlaua AB sihime puu latva L ja kolmandal joonlaual BC laseme olla vertikaalselt. Kauguse AP mõõdame; pikkused AC ja BC loeme joonlaudadelt. Siis saame võrde:

$$LP : BC = AP : AC.$$

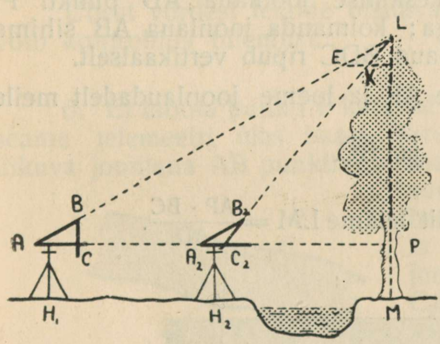
Siit leiame LP ja ka otsitava kõrguse

$$LP + PM = LM.$$



257. joonis.

3. Et mõõta horisontaalsel pinnal puu kõrgust, millele juurde ei pääse, sihime hüpsomeetri kaldkülje AB puu latva L, kinnitame tema selles asendis ja märgime üles arvud, mida näitavad AB ja BC.



258. joonis.

Siis viime hüpsomeetri asendist H_1 asendisse H_2 ja sihime külje BC puu latva L; AB jääb ||-seks AL-ga.

Mõõdame kauguse AC_2 ja loeme joonlaudadelt arvud $\overline{A_2C_2}$ ja $\overline{B_2C_2}$.

Nüüd võime mõtelda $\triangle$-rga $A_2B_2C_2$ ülekantuks asendisse ELK.

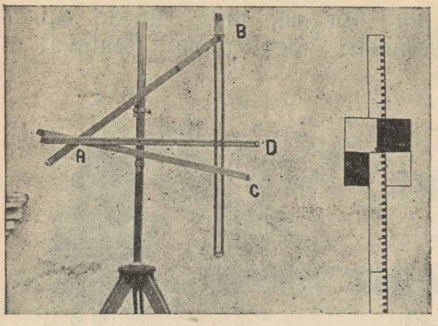
Siis saame

$$\frac{AL}{EL} = \frac{AC_2}{EK} \text{ ehk } \frac{AL}{A_2B_2} = \frac{AC_2}{A_2C_2};$$

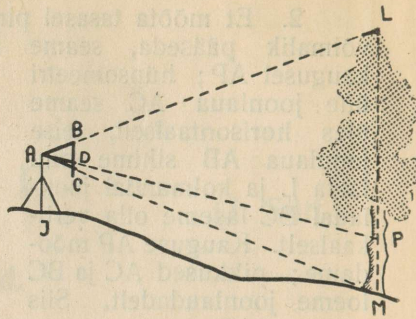
siit leiame $AL = \frac{A_2B_2 \cdot AC_2}{A_2C_2}$ ja $\frac{LP}{BC} = \frac{LA}{BA}$.

Siit leiame $LP = \frac{BC \cdot LA}{BA} = \frac{BC \cdot A_2B_2 \cdot AC_2}{BA \cdot A_2C_2} = \frac{BC \cdot AC_2}{A_2C_2}$.

Puu kõrgus LM on siis LP + hüpsomeetri kõrgus.



259. joonis.
Hüpsomeeter ehk kõrgusemõõtja II.
§§-ide 145—148, 164 juurde.



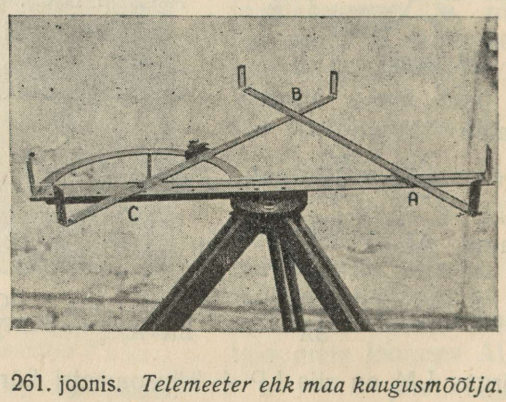
260. joonis.

4. Et mitte-horisontaalsel pinnal mõõta, kui kõrge on puu, millele võimalik on ligi pääseda, sihime hüpsomeetri alumise joonlaua AC puu tüvesse M; puul märgime hüpsomeetri kõrguse PM = AI ja sihime keskmise joonlaua AD punkti P, s. t. paralleelselt maa pinnaga; kolmanda joonlaua AB sihime puu latva L ning neljas joonlaud BDC ripub vertikaalselt.

Nüüd mõõdame kauguse AP ja loeme joonlaudadelt meile tarvilised arvud:

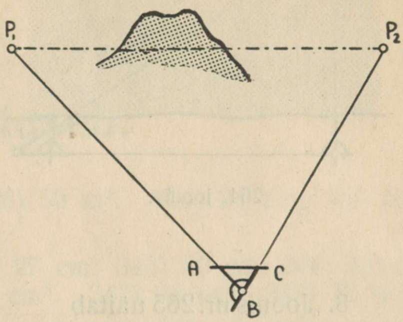
$$\overline{AD} \text{ ja } \overline{BC}.$$

Siis saame $\frac{LM}{BC} = \frac{AP}{AD}$; siit leiame $LM = \frac{AP \cdot BC}{AD}$.



261. joonis. *Telemeeter ehk maa kaugusmõõtja.*

5. Et mõõta kaugust kahe punkti P_1 ja P_2 vahel, mille vahel olev takistus vahenditut mõõtmist ei luba, seame telemeetri üles niisugusesse kohta, kust mõlemad punktid on näha ja ligipääsetavad. Siis sihime liikumatu joonlaua punkti P_2 sihis BP_2 ja teise liikuva joonlaua punkti P_1 sihis BP_1.



262. joonis.

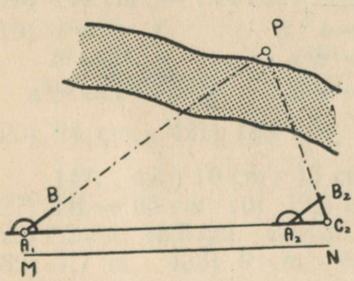
Nüüd mõõdame kaugused BP_1 ja BP_2 ning seame need arvud vastavalt joonlaudadele BA ja BC. Kolmanda (liikuva) joonlaua seame punktidesse A ja C.

Siis saame võrded

$$\frac{P_1P_2}{AC} = \frac{BP_1}{BA} \text{ ehk } \frac{P_1P_2}{AC} = \frac{BP_2}{BC}.$$

Ühest võrdest leiame otsitava kauguse P_1P_2 ja teine võrre võib kontrollida tulemust.

6. Et mõõta punkti P kaugust üle takistuse, valime baasi MN, seame telemeetri üles baasi ühes otsapunktis M, sihime ühe liikuva joonlaua AB punkti P suunas A_1BP ja kinnitame ta selles suunas. Siis viime telemeetri baasi teise otsapunkti N, seame ta seal üles, sihime teise liikuva joonlaua CB punkti P suunas C_2B_2P ja kinnitame ta selles suunas. Liikumatu joonlaud AC peab baasi sihiga ühte langema; samuti peab ühte langema A_1 M-ga ja C_2 N-ga.



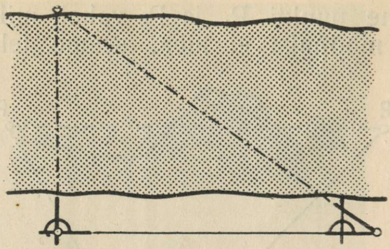
263. joonis.

Nüüd mõõdame baasi $A_1C_2 = MN$ ja loeme telemeetrilt pikkused A_2C_2, A_2B_2, C_2B_2.

Siis saame võrded

$$\frac{A_1P}{A_2B_2} = \frac{A_1C_2}{A_2C_2} \text{ ja } \frac{C_2P}{C_2B_2} = \frac{C_2A_1}{C_2A_2}.$$

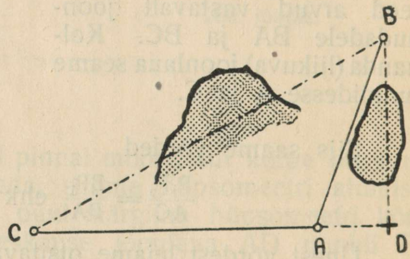
Ühest võrdest leiame otsitava kauguse ja teisest võrdest kontrollime tulemust.



264. joonis.

7. Telemeetri abil on võimalik mõõta kaugust risti baasiga, sest võimalik on telemeetri üht liikuvat joonlauda CB seada risti liikumata joonlauaga; näiteks on võimalik mõõta jõe laiust. Joonis nr. 264 on nr. 263-nda kergem erijuht.

8. Joonis nr. 265 näitab kauguse arvutamise võimalust kolmnurga külglause rakendusel. Otseteel mõõta tuleb AB, AC, AD. Ristsiht BD ⊥ AC võetakse ekkeri abil.



265. joonis.

Vastused.

130. 333) 240 puud. 336) 50 m^2. 338) 24 cm; 9,5 cm. 339) 2,16 ha. 340) 17,08 kr.

132. 341) 350 cm^2. 342) 27 cm. 343) 20 cm. 344) 4,9 m. 345) 5 m ja 3 m. 346) 117,6 cm^2. 347) 28 m^2. 348) 72 m.

135. 363) 18 m^2. 364) 2640 cm^2. 365) 1500 cm^2. 366) 150 cm^2. 367) 38 cm^2. 368) 12 cm. 369) 22 m. 370) 9,8 m. 371) 8,4 m. 372) 270 cm^2. 373) 900 cm^2. 374) 120 cm^2. 375) 45 cm^2.

137. 378) 437,5 m^2; 40 m^2. 379) 284 m^2. 380) 300 cm^2. 381) 36 cm^2. 382) 625 m^2. 383) $\frac{1}{2}t(r_1 + r_2)$. 384) 90 m^2. 385) $2a^2$.

139. 388) 37,5 m^2. 389) 12,5 m. 390) 3630 cm^2. 391) $2br$. 392) 30 cm^2.

142. 402) 225 cm^2; 400 cm^2. 403) 10 cm. 404) $8\frac{1}{3}$ m. 405) 169 m^2. 406) 5,4 cm. 407) 46,08 cm; 3,92 cm. 408) 15 cm. 409) 20 cm. 410) 18 cm. 411) 12 m. 412) 150 m^2. 413) 4,8 m. 414) 7,2 cm. 415) 10,8 ja 19,2 cm. 416) 5,76 m^2. 417) 5,76 m^2. 418) 144 cm^2 = 144 cm^2.

419)
$$\begin{array}{lll} a^2 = c \cdot f & a \cdot b = c \cdot h & \\ \underline{b^2 = c \cdot g} & \underline{a^2b^2 = c^2 \cdot h^2} & h^2 = f \cdot g. \\ a^2b^2 = c^2 \cdot f \cdot g & c^2h^2 = c^2 \cdot f \cdot g & \end{array}$$

420) 24 cm. 421) 150 m^2. 422) 9,6 m^2.

147. 425) 10 cm; 15 cm; 21 cm. 426) 14,4 m; 9,6 m; 8 m. 427) TB = 65 cm või 19,5 cm. 428) 24 cm; 14,4 cm; 15 cm. 429) 7,2 cm; 16,8 cm. 430) 35 cm või 100 cm. 431) 51 mm; 75 mm. 432) 7,7 m. 433) 9 cm; 6 cm; 12 cm. 434) 2,4 m; 3,6 m.

148. 438) 7,7 cm. 440) 8 cm; 10 cm; 15 cm; 12 cm.

149. 444) 2 cm; 4 cm; 6 cm; 8 cm. 445) 3 m. 446) 27 cm. 447) 8,8 cm. 448) 32,5 m. 449) 11,2 cm. 450) 36 cm; 38 cm. 451) 25 m ja 36 m. 452) 259 cm ja 148 cm; 91 cm ja 52 cm. 453) 2 m ja 1,6 m. 454) 10,8 cm ja 16,2 cm; 9 cm ja 13,5 cm. 455) 8 : 3. 456) 12 m; 10 m. 457) 22,75 cm. 458) 28,75 cm. 459) Sest kummagi lõigu suhe sama alusega on sama suur kui diagonaali vähema lõigu suhe terve diagonaaliga. 460) Sest kumbki aluse osa suhtub diagonaalide lõikepunktist lähtuvasse ja alustega rööbiti kuni küljeni minevasse sirglõigusse, nagu vastavate lõikepunktide kaugused külgede pikenduste lõikepunktist.

150. 466) $O_1M : O_1K = O_2M : O_2K$
$O_1M : O_2M = O_1K : O_2K$
$KO_1 : KO_2 = MO_1 : MO_2$.

152. 467) $9\frac{1}{11}$ cm; 10 cm; $13\frac{1}{3}$ cm. 468) 10 m. 469) 42 m. 470) 24,5 cm. 471) 13,2 cm; 16,8 cm. 472) 10,8 cm; 9,2 cm. 473) 100,8 cm; 124,8 cm. 474) 33 m; 63 m. 475) 55,25 m. 476) 33,6 m. 477) 16 cm; 24 cm. 478) 240 m. 479) 10 m või 22,5 m. 480) 30 m; lähenevad. 481) 30 m; kaugenevad.

162. 487) 2,72 m. 488) 3,21 m. 489) 1,16 m. 490) 12 m. 491) 56° 9′. 492) 48° 51′. 493) 68° 24′. 494) $\approx 56°$. 495) $\approx 4{,}18$ m. 496) 39° 49′; 50° 11′.

166. 499) 7,7 m. 500) 2,5 cm; 1,5 cm; 10 cm; 6 cm. 501) 4,8 cm. 503) $\frac{4ab}{a+b}$. 505) 25,6 cm; $20\frac{20}{31}$ cm. 507) $\frac{a(p-h)}{a-h}$ ja $\frac{h(a-p)}{a-h}$. 509) 3,6 cm. 511) 11 m; $9\frac{1}{6}$ m; $12\frac{5}{6}$ m. 512) 16 cm. 513) 12 cm. 514) $\frac{ar}{a+2r}$. 515) 6 cm. 516) 12 cm. 517) 21,6 cm. 518) 10,4 cm; 7,8 cm. 519) 4 cm; 2,4 cm. 520) 2,9 km; 1 : 4000. 524) $3\frac{1}{8}$ cm. 525) 40 cm ja 39 cm.

169. 527) 2025 cm²; 4375 cm²; 3600 cm². 528) 1600 cm². 531) $\frac{a}{\sqrt{2}}$ ja $a\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. 532) $b\sqrt{\frac{1}{3}}$ ja $b\sqrt{\frac{2}{3}}$. 533) $\frac{5}{9}$ osa. 534) $m^2 : n^2 : 2mn$. 535) $\frac{2ab}{(a+b)^2} = 0{,}48$. 536) 3 ha. 537) 21,9 m. 538) 48 m² ja 108 m². 539) 490 m². 540) $a : c$.

174. 542) 16 cm. 543) 18 cm. 544) 28 cm. 545) 30 cm. 546) 12 cm. 547) 13 cm. 548) 54 cm; 36 cm. 549) 128 cm². 550) 12,5 cm. 552) 30,9 cm ja 19,1 cm. 553) 1,55 m ja 0,95 m. 554) $\approx 0{,}93$ m. 555) ≈ 53 cm.

176. 556) I. a) $a = 4{,}73$ m; $b = 3{,}70$ m; b) $a = 21{,}6$ cm; $b = 7{,}9$ cm; c) $a = 54{,}38$ cm; $b = 47{,}93$ cm; d) $a = 1178$ m; $b = 511$ m; e) $a = 258{,}5$ m; $b = 130{,}1$ m; f) $a = 693{,}4$ m; $b = 188{,}4$ m; g) $a = 46{,}28$ m; $b = 33{,}96$ m; h) $a = 32{,}48$ m; $b = 12{,}95$ m. II. a) $b = 15{,}84$ cm; $c = 37{,}52$ cm; b) $a = 324{,}5$ cm; $c = 601{,}1$ cm; c) $b = 34{,}2$ cm; $c = 81{,}34$ cm; d) $a = 283{,}3$ m; $c = 881{,}3$ m; e) $b = 117{,}5$ cm; $c = 188{,}6$ cm; f) $a = 50{,}23$ m; $c = 57{,}97$ m; g) $b = 357{,}4$ m; $c = 361{,}1$ m; h) $a = 126{,}4$ m; $c = 141{,}4$.

III. a) A = 73°45′; b = 7 cm; b) A = 61° 56′; a = 1,5 cm; c) A = 31° 4′; b = 781,8 m; d) A = 70° 32′; a = 10,52 m; e) A = 33°40′; b = 162,6 cm; f) A = 53° 8′; a = 2868 m; g) A = 46° 47′; a = 61,3 m; h) A = 41° 36′; b = 177 m. IV. a) A = 73° 45′; c = 25 cm; b) A = 53° 8′; c = 15,70 m; c) A = 34° 10′; c = 34 m; d) A = 66° 1′; c = 46,2 m; e) A = 57° 1′; c = 695,5 cm; f) A = 60° 20′; c = 30 m; g) A = 31° 44′; c = 797,2 cm; h) A = 57° 31′; c = 35 m.

177. 557) 1435 km. 558) 18,56 km. 559) 65,4 kg; 36,7 kg. 560) 72,38 kg; 66,51 kg. 561) 46,9 ≈ 47 m. 562) 2,29 m; 7,21 m. 563) 3,38 km. 564) 27,24 km. 565) ≈ 417 m. 566) ≈ 54,6 m. 567) 2 km. 568) 1108 m. 569) 40 km. 570) 186 m; 200 m. 571) 9,6 m; 1,45 m. 572) 9,75 m; 573) 6,4 m. 574) 107,5 m; 110,7 m. 575) 27,05 m; 248,5 m. 576) 14° 29′. 577) 53° 4′. 578) 29° 39′; 3,22 m. 579) 27° 45′; 24 ast. 580) 6 kg; α = 33° 24′. 581) 86°; 444,6 km. 582) 58° 6′. 583) 48° 49′. 584) 47° 28′. 585) 24° 46′. 586) 16° 43′. 587) 24° 26′. 588) 79° 6′; 31° 22′; 23° 52′. 589) 63° 26′ (26° 34′); 48° 22′ (41° 38′).

178. 590) 30 cm ja 40 cm. 591) 3 m ja 4 m. 592) 3 m. 593) 6 cm ja 8 cm.

179. 594) 5 cm ja 12 cm. 595) R = 6,5 cm. 596) m_c = 14,5 cm.

180. 597) 6 cm; 39 cm². 598) 9,6 m; 96 m. 599) 36 cm; 1 m. 600) $4\frac{8}{13}$ m; 60 m².

182. 608) 14 m; 48 m; 13,44 m. 609) 6 m; 8 m; 3,84 m; 2,88 m. 610) 43,2 m; 25,92 m; 34,56 m. 611) 4,8 m. 612) 40 m. 613) 390 m. 614) 1,8 m; 3,2 m. 615) 120 cm. 618) 3,6 m; 8 m. 619) 25 m; 24 m. 620) 12 m. 621) $19\frac{61}{101}$ cm. 622) 154 cm. 623) 33 cm ja 56 cm. 624) $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

183. 625) 24 cm. 626) 30 cm. 627) $28\frac{4}{17}$ cm. 628) 1 m. 629) 90 cm. 630) 20 cm. 631) AO = 6 cm. 632) CN = 7,2 cm. 633) $\frac{24}{7}\sqrt{2}$ cm. 634) 252 cm. 635) $16\sqrt{2}$ cm.

184. 636) 2730 cm². 637) mk. 638) 48 m². 639) 150 cm². 640) 6 m². 641) $36\frac{12}{73}$ m. 642) 24 cm²; 13,5 cm². 643) 390 cm². 644) 54 cm². 645) 24 m². 646) 50 m. 647) 1344 cm². 648) 60 m². 649) 24 m². 650) 6 m². 651) 6 m; 8 m.

185. 652) $a\sqrt{b^2 - a^2}$. 653) $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. 654) $2mh$. 655) 280 cm. 656) 300 cm²; 70 cm. 657) 7,2 m; 12,8 m. 658) 5,4 m; 4,2 m; 9,6 m. 659) $\frac{a^3b}{a^2 + b^2}$; $\frac{ab^3}{a^2 + b^2}$. 660) 3120 cm². 661) $2r\sqrt{f \cdot (2r - f)}$. 662) 73 m.

186. 663) 64 cm. 664) 6,72 cm. 665) 10 cm. 666) 32 m. 667) 80 cm või 90 cm. 668) 90 cm või 120 cm. 669) 242 m. 670) 20 cm. 671) 25 cm ja 7 cm. 672) 36 m. 673) 15 cm. 674) 40 m. 675) 24 m. 676) 4 m. 677) 72 cm ja 154 cm. 678) 54 cm. 679) 0,5 m ja 0,3 m. 680) 89 cm ja 78 cm. 681) l. 682) 462 cm^2; 1386 cm^2. 683) 0,12 m^2. 684) 27 cm^2. 685) 420 m^2. 686) 300 cm^2. 687) 1200 cm^2. 688) 450 cm. 689) 4800 cm^2. 690) 10 cm. 691) 16 m või 18 m. 692) 384 cm^2.

187. 693) 370 cm. 694) 13,44 cm. 695) 60 cm. 696) 5280 cm^2. 697) 1 m. 698) 20 cm ja 15 cm. 699) 216 m^2. 700) 20 m; 48 m. 701) 40 cm. 702) 156 cm^2; 52 cm.

188. 703) 64 m. 704) 80 cm. 705) 319,2 m^2. 706) 180 m^2. 707) 44 cm. 708) 6530 cm^2. 709) 5460 cm^2. 710) 62 cm. 711) 16 m; 2 m. 712) 20,4 m; 293, 76 m^2. 713) 120 m^2. 714) 34,8 m. 716) 1·68 cm^2. 717) 36,5 cm.

189. 719) 21 cm. 720) 2640 cm^2. 721) 85 cm. 722) 37 cm. 723) 1280 cm^2 või 0,2 m^2. 724) 1536 cm^2 või 3072 cm^2. 725) 8 cm. 726) 2160 cm^2; 6912 cm^2. 727) 15,2 cm. 728) $6{,}5\sqrt{2}$ cm. 729) 20 cm ja 7 cm. 730) 65 cm. 731) 24 cm. 732) 25 m. 733) 15 cm. 734) 300 cm^2. 735) 24 m^2. 736) $a\sqrt{\frac{n}{m+n}}$. 737) $\frac{(p+q)\cdot h}{2\sqrt{pq}}$. 738) $\frac{(u^2+v^2)^2}{2uv} = 14\frac{1}{12}$ m^2. 739) $\sqrt{n(m+n)} = 24$ cm; $\sqrt{m(m+n)} = 18$ cm. 740) 24 cm; 32 cm. 741) 12 cm. 742) 20 cm. 743) 720 cm^2 või 120 cm^2. 744) 60 cm. 745) $\sqrt{d^2-(a+b)^2} = 55$ cm. 746) 6,3 cm ja 14,7 cm. 747) $2\sqrt{Rr}$. 748) $2\sqrt{Rr}$. 750) $\frac{4ab}{a+b}$. 751) $\frac{2m\sqrt{mn}}{m+n}$; $\frac{2n\sqrt{mn}}{m+n}$. 752) 4,48 cm ja 2,52 cm. 753) $(r_1+r_2)\cdot\sqrt{r_1 r_2}$.

190. 754) $\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\tan 30° = \sqrt{\frac{1}{3}}$; $\cot 30° = \sqrt{3}$. 755) $\cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\tan 45° = 1$; $\cot 45° = 1$. 756) $\cos 60° = \frac{1}{2}$; $\tan 60° = \sqrt{3}$; $\cot 60° = \sqrt{\frac{1}{3}}$. 757) $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$.

191. 758) $2h\sqrt{3}$. 759) $m(\sqrt{2}-1)$. 760) $a(3+\sqrt{3})$. 761) a ja $a\sqrt{3}$. 762) $\frac{1}{4}ab$; $\frac{1}{4}ab\sqrt{2}$; $\frac{1}{4}ab\sqrt{3}$; $\frac{1}{4}ab\sqrt{3}$. 763) $\frac{a^2}{2\sqrt{3}}$. 764) $\frac{h^2}{\sqrt{3}}$. 765) $a(1+2\sqrt{2})$. 766) $\frac{1}{2}a^2$. 767) $2h(4+\sqrt{3})$. 768) $h^2\sqrt{3}$. 769) ab. 770) $\frac{1}{4}ef\sqrt{2}$. 771) $\frac{1}{4}d_1d_2\sqrt{3}$.

192. 772) 49 cm. 773) 18° 55′; 71° 5′. 774) 9 m; 12 m. 775) $\approx$ 45,4 cm. 776) 2018 cm^2. 777) $\approx$ 18 cm. 778) 20,22 m; 27,33 m. 779) 822,6 cm^2. 780) 1,514 m^2. 781) $b = 53{,}95$ m; $h = 33{,}12$ m; $s = 894$ m^2. 782) $A = 75° 44'$. 783) $a = 457{,}9$ m;

$h = 219{,}3$ m; $S = 0{,}1095$ km² ≈ 11 ha. 784) ≈ 19 cm; 175,8 cm². 785) $B = 48°36'$. 786) 1,893 m; 2,343 m. 787) 3,95 cm. 788) 1,8 mm. 789) 1232 m². 790) 32,23 m. 791) 79 cm²; 12,7 cm. 792) 12 m². 793) 65 cm. 794) 40 cm²; 77° 22'. 795) 73° 44'. 796) $\approx$ 523 cm². 797) 966 m². 798) 267,3 m². 799) 79,12 cm². 800) 137,2 cm². 801) 53° 8'; 126° 52'. 802) 6,6 cm; 13,46 m. 803) 77° 43'. 804) 142,4 m². 805) 59° 30'. 806) 243,4 m. 807) 37° 30'. 808) 1285 cm². 809) 5,2 m. 810) 91° 10'. 811) 32° 31'. 812) 191,7 m².

193. 816) $\sin^2\alpha$; $\cos^2\alpha$; $\sin\alpha$; $\cos\alpha$; $1+\sin\alpha$; $1-\cos\alpha$; $\tan^2\alpha$; $\cot^2\alpha$; $\cos\theta$; $\frac{1}{\sin\theta}$; $\tan^2\omega$; $\cos^4\omega$; $\cos^2\varphi$; $\sin^2\varphi$; $\frac{1}{\cos^2\beta}$; $\frac{1}{\sin^2\beta}$.

202. 819) 25 cm. 820) 25 cm. 821) 16 cm; 5 cm. 822) 8,8 cm; $4\frac{3}{13}$ cm. 823) 21 cm. 824) 40 cm. 825) 9 cm; 24 cm.

207. 827) 336 cm². 828) $\frac{1}{2}b\sqrt{p(p-b)}$. 829) $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$. 830) 28 cm; 52,8 cm; $34\frac{46}{53}$ cm. 831) 18,72 m². 832) 20 cm. 833) 16,8 cm; $24\frac{12}{17}$ cm. 834) 84 m². 835) $k\sqrt{4l^2-k^2}$. 836) 1200 cm². 837) 30,24 m². 838) 600 m². 839) 300 cm². 840) 2850 m². 841) 132 cm². 842) 1440 cm². 843) 720 m². 844) 120 cm²; $\approx$ 70 cm².

211. 847) $4\frac{1}{8}$ m. 848) $30\frac{1}{3}$ cm²; $83\frac{1}{3}$ cm²; $96\frac{1}{3}$ cm². 849) 112,5 cm²; 175,5 cm²; 180 cm². 850) 12,5 m. 851) 10 m. 852) 192 cm². 853) 192 cm²; 64 cm. 854) 276,48 m². 855) 18,75 m. 856) $3\frac{1}{8}$ m. 857) 7,5 m. 858) 25 m. 859) 4,5 cm. 860) 3 cm. 861) 1,5 m. 862) 0,15 cm. 863) 108 cm². 864) 17,28 m². 865) 96 m². 866) 4,8 cm. 867) 5 cm. 868) R^2. 869) $r^2(3+2\sqrt{3})$. 870) $r+r\sqrt{3}$; $3r+r\sqrt{3}$. 871) $2(a+b)$; $\frac{1}{2}(a+b)\sqrt{ab}$. 872) 3,5 m. 873) 26 cm; 39 cm². 874) 34 cm. 875) 255 m²; $\sqrt{514}$ m. 876) 4,8 cm. 877) 19,2 m; 14,4 m; 23,04 m. 378) 168 cm². 879) 600 cm². 880) $8r^2$; $16r$. 881) $r\sqrt{3}$ ja $\frac{1}{3}r\sqrt{3}$. 882) $2r(\sqrt{2}+1)$; $2r(\sqrt{2}-1)$; $4r^2\sqrt{2}$.

213. 887) I. a) 71° 2'; 43° 28'; 10,58 m. b) 40° 54'; 32° 38'; $\approx$ 24,9 m. c) 85° 16'; 36° 44'; $\approx$ 4,25 m. d) 27° 3'; 22° 57'; $\approx$ 11,8 m. e) 34° 4'; 21° 56'; $\approx$ 62,2 cm. f) 68° 23'; 35° 18'; 533 cm. g) 12° 15'; 131° 1'; 634,3 m. h) 104° 54'; 45° 14'; 11,83 m. i) 61° 47'; 44° 33'; 43,91 m. II. a) 541,1 m; 421,2 m. b) 24,3 cm; $\approx$ 31 cm. c) 109 m; 58,44 m. d) 117,1 m; 83,04 m. e) 44,53 m; 509,9 m. f) 102 m; 82,92 m. III. a) 41° 46'; 50° 58'; 87° 16'. b) 53° 8'; 59° 30'; 67° 22'. c) 16° 26'; 30° 24'; 133° 10'. d) 33° 16'; 50° 56'; 95° 48'. e) 5°12'; 84° 48'; 90°. f) 68°; 64° 22'; 47° 38'.

IV. a) $42^\circ 19'$; $123^\circ 26$; $137^\circ 41'$; $28^\circ 4'$; 115,3 cm; 65 cm. b) $50^\circ 11'$; $98^\circ 32'$; $129^\circ 49'$; $18^\circ 54'$; 36,3 m; 11,89 m. c) võimatu. d) $72^\circ 38'$; $77^\circ 57'$; $107^\circ 22'$; $43^\circ 13'$; 18,95 m; 13,27 m. e) $24^\circ 57'$; $133^\circ 49'$; $155^\circ 3'$; $3^\circ 43'$; 615,7 cm; 55,3 cm. f) 90°; $43^\circ 52'$; 51,54 m. g) 68°; 75°; 112°; 31°; 59,4 cm; 31,7 cm. h) $43^\circ 50'$; $110^\circ 10'$; $136^\circ 10'$; $17^\circ 50'$; 62,1 cm; 20,3 cm. i) $59^\circ 28'$; $50^\circ 17'$; 24,1 cm. 888) $45^\circ 48'$; $61^\circ 14'$; $72^\circ 58'$. 889) $91^\circ 30'$; $88^\circ 30'$. 890) $\approx$ 16 min. 7 sek. 891) $139^\circ 20'$. 892) BC = 318,4 m. Nurk BCN = $127^\circ 6'$. 893) 18,95 m. 894) 94 m. 895) 8,53 m = 4 sülda. 896) 21,04 km; 14,36 km. 897) $\approx$ 5 merepenik. 898) 9,542 mpk. 899) 9,63 mpk. 900) 7,038 mpk. 901) 492,4 m. 902) 44,17 kg; $40^\circ 19'$; $31^\circ 11'$. 903) $253^\circ 54'$; $\approx$ 21 sõlme. 904) 8,748 km; 11,04 km. 905) $49^\circ 50'$ või $130^\circ 10'$; 25,65 kg või 9,4 kg. 906) 1115 m.

214. 908) $\frac{1}{2}r\sqrt{3}$; $\frac{3}{2}r^2\sqrt{3}$. 909) $\frac{2a}{\sqrt{3}}$; $2a^2\sqrt{3}$. 910) $\frac{2m}{\sqrt[4]{108}}$; $\frac{m}{\sqrt[4]{12}}$. 911) $1{,}5R$; $\frac{3}{4}R^2\sqrt{3}$. 912) $6r$; $3r$; $3r^2\sqrt{3}$. 913) $\frac{a}{\sqrt{3}}$; $\frac{a}{2\sqrt{3}}$. 914) $\frac{2}{3}h$; $\frac{1}{3}h$. 915) $6\frac{a^2}{4}$; $a^2\sqrt{3}$. 916) $\frac{p}{6}$; $\frac{p^2\sqrt{3}}{144}$. 917) $\frac{2m}{\sqrt[4]{27}}$; $\frac{m}{\sqrt[4]{27}}$.

215. 919) 324 m^2. 920) $a\sqrt{2}$. 921) 2,5 m. 922) $a(2+\sqrt{2})$. 923) $p^2(3-2\sqrt{2})$.

220. 931) $3r^2$. 932) $12r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$. 933) $4a\sqrt{4-2\sqrt{2}}$. 934) $m\sqrt{\frac{1}{3}}$. 937) a. 938) $\frac{1}{36}a^2\sqrt{3}$. 939) $\frac{1}{4}a^2(3-2\sqrt{2})$. 940) $\frac{4}{3}a^2$. 941) $\frac{m^2}{\sqrt{3}}$. 942) $\frac{1}{4}a^2(\sqrt{3}\pm 1)$.

228. 944) 157 cm. 945) 3 m. 946) $\approx$ 95 cm. 947) 15,7 cm. 948) 47000 pööret. 949) 95,5 cm. 950) rõhtsalt — ei, viltu — ja. 951) 4050 cm^2. 952) 157 cm. 953) 35π cm. 954) $\frac{13}{18}\pi a$. 955) $76{,}25\pi$. 956) 157 cm. 957) 8π. 958) $60\sqrt{3}$ m. 959) 3π. 960) 18 m. 961) $57^\circ 17' 45''$. 962) 12,57 m. 963) 207 cm. 964) 6600 km. 965) 10,5 cm. 966) π cm. 967) 200°. 968) 7π ja 8π. 969) 6,5 cm. 970) 100°. 971) $\frac{1}{2}\pi a$.

229. 973) 169π cm^2. 974) $156{,}25\pi$ cm^2. 975) 100π cm^2. 976) 122,88 m^2. 977) 100π. 978) 10π. 979) π; 4π; 16π. 980) 9π. 981) 36π. 982) 4π. 983) $\frac{25}{256}\pi d^2$. 984) 9π; 6π. 985) 25 korda. 986) 64 m^2. 987) $\pi a\sqrt{2}$ cm. 988) $r\sqrt{\frac{1}{5}}$; $r\sqrt{\frac{2}{5}}$; $r\sqrt{\frac{3}{5}}$; $r\sqrt{\frac{4}{5}}$. 989) $2\pi r\sqrt{2}$. 990) πb^2. 991) k. 992) $\sqrt{\frac{S}{\pi}}$. 993) $\frac{\pi S}{6\sqrt{3}}$.

994) $5\pi a^2(3-2\sqrt{2})$. 995) $\frac{m^2\sqrt{3}}{\pi}$. 996) $\frac{1}{2}ab$. 997) πr^2. 998) $\frac{1}{4}\pi h^2$; h.

230. 999) 19 cm². 1000) 720 m². 1001) 16π. 1002) 107,8 m². 1003) 6 m. 1004) 7,64°. 1005) 22 cm. 1006) 18 m. 1007) $a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$. 1009) $\frac{1}{2}l^2$. 1010) 1,5 m^2. 1011) $\approx 0{,}078\pi r^2$. 1012) $\frac{1}{4}r^2(\pi-2)$. 1013) $\frac{1}{3}a^2(4\pi-3\sqrt{3})$. 1014) $\frac{1}{8}a^2(\pi-2)$ ja $\frac{1}{8}a^2(3\pi+2)$. 1015) $\frac{1}{72}a^2(17\pi-18-6\sqrt{3})\approx 0{,}35a^2$. 1016) $8\pi-12\sqrt{3}$ $\approx 4{,}348$ m². 1017) $\frac{1}{12}r^2(\pi+6-3\sqrt{3}$. 1018) $\frac{1}{6}r^2(4\pi-3\sqrt{3})$. 1019) $\frac{1}{24}a^2(2\pi+3\sqrt{3})$. 1020) $\frac{1}{12}r^2(5\pi+6+3\sqrt{3})$.

231. 1021) $b\sqrt{a(a+2b)}$. 1022) $\frac{m+n}{m-n}$; $\frac{m-n}{2n}$. 1023) $\frac{ab}{a+b}$. 1024) $d+\sqrt{l^2-d^2}$. 1025) $\frac{a^2+b^2}{2a}$. 1026) $\frac{2h^2}{\sqrt{h(h-2m)}}$. 1027) $2:\sqrt{3}$. 1028) 32,4 m². 1029) $\frac{\pi a^4}{4p^2}$. 1032) $\frac{\pi r_1r_2r_3}{r_1+r_2+r_3}$. 1033) $84-8\pi$. 1034) $\sqrt{Ss}$. 1035) $2mn$. 1036) 21 cm. 1037) 75 cm² ja 117 cm². 1038) $285\frac{3}{16}$ cm² ja $482\frac{13}{16}$ cm². 1039) $\frac{1}{4}a^2(1+2\sqrt{2}$. 1040) $3a^2-\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$. 1041) $r^2\sqrt{3}$. 1042) $\frac{1}{3}$ m²$\sqrt{3}$ ja $\frac{8}{3}$ m²$\sqrt{3}$. 1043) 87,0912 m². 1044) $\frac{\pi a^2b^2}{a^2+b^2}$. 1045) $\frac{8ab\sqrt{ab}}{a+b}$. 1046) $\frac{2ab\sqrt{ab}}{a+b}$. 1047) 982,8 m²; 436,8 m². 1048) $S_1=\frac{a^2t^3}{d^2(a+b)}$; $S_2=\frac{b^2t^3}{d^2(a+b)}$; $S_3=\frac{abt^3}{d^2(a+b)}$, kus $t=\sqrt{d^2-(a+b)^2}$. 1049) $\frac{\pi s}{4-\pi}$. 1050) $\pi m\sqrt{\frac{4}{3}}$. 1051) $r^2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3}{4}-\sqrt{3}\right)$; $r^2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)$; $\frac{r^2}{4}(\pi-2+\sqrt{3})$. 1052) 156π ja 109π. 1053) 37 mm. 1054) 625π. 1055) 4225π. 1056) $(m+n)\sqrt{(m+n)(m-n)}$. 1057) $\frac{1}{4}r^2(1+\sqrt{2})(\sqrt{3}\pm\sqrt{2})$. 1058) $\frac{1}{12}r^2(\pi+6+3\sqrt{3})$; $\frac{1}{12}r^2(5\pi+6+3\sqrt{3})$. 1059) $\frac{1}{9}\pi r^2$; $\pi r^2(3-2\sqrt{2})$; $3\pi r^2(7-4\sqrt{3})$; $\frac{1}{4}\pi r^2$. 1060) 3 m ja 4 m. 1061) 8 cm; 15 cm; 17 cm. 1062) s_1+s_2. 1063) $\frac{k(m+n)^3}{2mn}$. 1064) 170 m². 1065) $\frac{(3c+a)a^2}{(a+c)^3}\cdot S$; $\frac{(3a+c)c^2}{(a+c)^3}\cdot S$, kus $S=156$ m². 1066) 18π.

241. 1081) a) 2. b) $-2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3}{2}\alpha$. c) $8\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{3}{4}\alpha$. d) $\cos\alpha$. 1082) a) $2\cos\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)$. b) $2\sin\left(45°-\frac{\beta}{2}\right)$. c) $4\sin 45°\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)$. d) $\cos\alpha$.

242. 1084) $\dfrac{S}{2\sin 45^\circ \cos(\alpha - 45^\circ)}$. 1085) $\dfrac{d^2 \sin 2\beta}{8\sin^2(45^\circ - \beta)}$.

1086) $\dfrac{d\cos\beta}{2\sin^2\left(45^\circ - \frac{\beta}{2}\right)}$. 1087) $\dfrac{S^2 \sin 2\alpha}{16\cos^4 \frac{\alpha}{2}}$. 1088) $\dfrac{s\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$.

1089) $\dfrac{d\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$. 1090) $\dfrac{m^2 \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{8\cos^2\frac{\gamma}{2}\sin^2\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)}$. 1091) $\dfrac{k^2 \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{8\sin^2\frac{\beta}{2}\cos^2\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)}$.

1092) $\dfrac{p^2\sin 2\alpha}{\cos^2(45^\circ - \alpha)}$. 1093) $\dfrac{p\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$; $\dfrac{p\sin\beta}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$.

1095) $2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$. 1097) $\dfrac{p\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$; $\dfrac{p\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$;

$\dfrac{p\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$. 1098) $\dfrac{r\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$; $\dfrac{r\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$; $\dfrac{r\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$.

1099) $\frac{1}{2}(a-b)^2\sin\alpha$. 1100) $\dfrac{\pi R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{4\sin^4\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)}$.

1101) $\dfrac{4m\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - 45^\circ\right)}{\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}}$. 1102) $\frac{4}{\pi}C^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}$.

1103) $2\pi a\tan\frac{\alpha}{2}$; $\pi a^2\tan^2\frac{\alpha}{2}$.

249. 1108) a) $\tan\alpha = 2$; $\alpha = 63^\circ 26'$. b) $\sin x = \pm\frac{2}{3}$. c) $x_1 = 90^\circ$; $x_2 = 30^\circ$. d) $x = 60^\circ$. e) $x_1 = 18^\circ 26'$; $x_2 = 135^\circ$. 1109) a) $\sin x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$. b) $x = 30^\circ$. c) $x_1 = 60^\circ$; $x_2 = 180^\circ$. d) $x_1 = 210^\circ$; $x_2 = 330^\circ$. e) $x_1 = 53^\circ 8'$; $x_2 = 36^\circ 52'$. f) $x = 45^\circ$. g) $x_1 = 60^\circ$; $x_2 = 150^\circ$. h) $x_1 = \arctan 3 = 71^\circ 34'$; $x_2 = 45^\circ$. 1110) a) $x = 60^\circ$. b) $x = 61^\circ 3'$. c) $x_1 = 60^\circ$; $x_2 = 120^\circ$. d) $x_1 = 32^\circ$; $x_2 = 148^\circ$. 1111) a) $x_1 = 90^\circ$; $x_2 = 30^\circ$. b) $x = 135^\circ$. c) $x = 63^\circ 26'$. d) $x = \arctan\frac{b}{a}$. e) $x = 36^\circ 52'$. f) $x_1 = 0$; $x_2 = 58^\circ$. g) $x_1 = 45^\circ$; $x_2 = 108^\circ 26'$. 1112) a) $x = 60^\circ$. b) $x = 60^\circ$. c) $x = 38^\circ 10'$. d) $x_1 = 0$; $x_2 = 38^\circ 56'$. e) $51^\circ 50'$. f) $36^\circ 52'$. 1113) a) $x = 90^\circ$. b) $x = 158^\circ 26'$. c) $x = 135^\circ$. d) $x = 45^\circ$. e) $22^\circ 38'$ ja $7^\circ 22'$. f) $30^\circ 22'$ ja $14^\circ 38'$. 1114) a) $x = 22^\circ 30'$. b) $x = 141^\circ 21'$. c) $x_1 = 0$; $x_2 = 135^\circ$. d) $x = 15^\circ$. e) $x_1 = 0$; $x_2 = n\ 180^\circ \pm 30^\circ$. f) $x_1 = 0$; $x_2 = 60^\circ$. g) $x = 18^\circ 26'$.

SISUKORD.

I-ne anne.

II-ne anne.

ÕIENDUSED.

Pärast trükkimist on märgatud järgmised eksitavad vead ja puudused, mida palutakse ära parandada enne raamatu tarvitamist:

					On trükitud:	Peab olema:
Lehekülg	25.	rida	7.	alt	hüpotenuusi peale	hüpotenuusile
„	27.	„	12.	„	ülesaannet	ülesannet
„	43.	„	11.	„	$\left.\frac{BC}{AC}\right\|$	$\frac{BC}{AC}$
„	101.	„	2.	„	$\sqrt{1} + \tan^2\beta$	$\sqrt{1 + \tan^2\beta}$
„	101.	„	1.	„	$\sqrt{1} + \cot^2\beta$	$\sqrt{1 + \cot^2\beta}$
„	105.	joonises	216.		CA pikenduse peal puudub	täht D
„	105.	rida	14.	alt	x-i:	x-i
„	105.	„	10.	„	siit	siis
„	109.	„	13.	„	$a^2 - (b^2 = 2bc + c^2)$	$a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)$
„	109.	„	14.	„	$a^2 - b^2 + 2bc = c^2$	$a^2 - b^2 + 2bc - c^2$
„	126.	joonises	227.		tähed S_1 S_2 tulevad lugeda	φ_1 φ_2