EESTI PÕLLUMAJANDUSE AKADEEMIA

S. RIIVES A. RUUBEL

AKSONOMEETRIA

NÄIDISÜLESANNETE LAHENDAMISEGA

TARTU 1968

EESTI PÕLLUMAJANDUSE AKADEEMIA

S. RIIVES A. RUUBEL

AKSONOMEETRIA

NÄIDISÜLESANNETE LAHENDAMISEGA

TARTU 1968

Эстонская сельскохозяйственная академия
г. Тарту, ул. Рийа, I2

З. Рийвес, А. Руубель

Аксонометрия
с примерами решения задач
На эстонском языке

A K S O N O M E E T R I A

1. AKSONOMEETRIA MÕISTE

Aksonomeetriaks ehk aksonomeetriliseks projektsioonimeetodiks nimetatakse sellist meetodit, kus kujund projekteeritakse koos koordinaattelgedega, mille külge ta on kinnistatud ja ruumipunkti projektsioonid määratakse teljestiku projektsiooni ning punkti kordinaatide järgi.

Tasandit, millele kujundit koos koordinaattelgedega projekteeritakse, nimetatakse aksonomeetriliseks projektsioonitasandiks. Nimetus aksonomeetria tuleneb kreekakeelsetest sõnadest telg- ἄξονας ja mõõtma- μετρέω.

Vastavalt projekteerivate kiirte valikule liigitame aksonomeetria:

1) tsentraalaksonomeetriaks, kui kasutatakse tsentraalprojektsiooni ning
2) paralleelaksonomeetriaks, kui projekteerivad kiired on omavahel paralleelsed.

Paralleelaksonomeetriat liigitatakse omakorda:

1) ristaksonomeetriaks, kui projekteerivad kiired on risti aksonomeetrilise projektsioonitasandiga ja
2) kaldaksonomeetriaks, kui projekteerivad kiired ei ole risti aksonomeetrilise projektsioonitasandiga.

Aksonomeetria korral on oluline, et ükski koordinaattelg, mille külge kujund on kinnistatud, ei oleks projekteerivate kiirte sihiline. Vastasel juhul üks koordinaattelgedest projekteeruks punktina ja mõõtmine tema sihil projektsioonitasandil ei oleks teostatav.

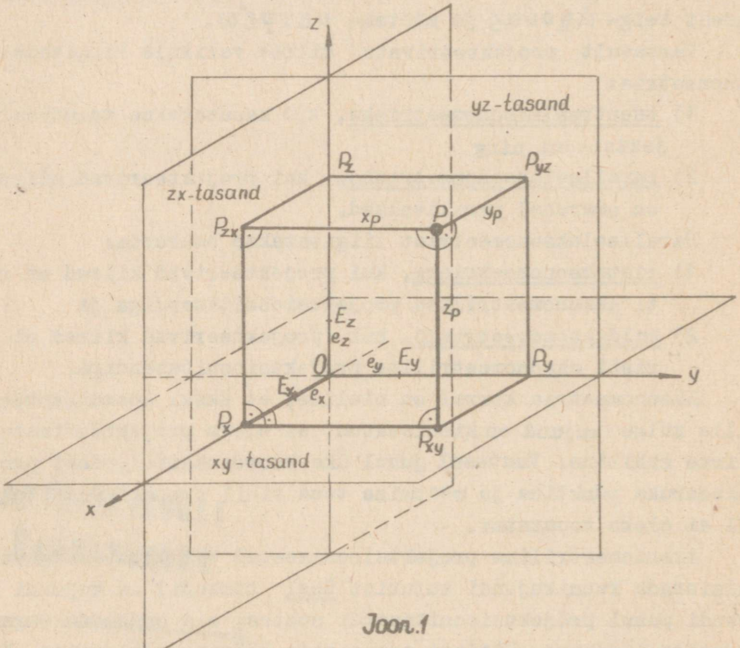
Aksonomeetriline projektsioonimeetod võimaldab kergesti valmistada ruumikujundi kujutist ühel tasandil ka kujundi üldasendi puhul projektsioonitasandi suhtes, mis omakorda tagab kujutise ilmekuse. Ühtlasi saame siin pööratava kujutise. Kujutist nimetame pööratavaks, kui tema järgi on võimalik üheselt määrata ruumikujundit.

Aksonomeetrilise kujutise saamiseks peame kõigepealt oskama seostada ruumikujundit koordinaattelgedega.

2. PUNKTI KINNISTAMINE TELGEDE KÜLGE

Iga ruumikujundit võime vaadelda teatava punktide hulgana. Vaatleme kõigepealt punkti kinnistamist koordinaattelgedega.

Analüütilisest geomeetriast teame, et iga ruumipunkt on määratav kolme koordinaadiga. Koordinaatide saamiseks valime ruumis kolm sirget, mis ei asetse ühel tasandil ja lõikuvad kõik ühes punktis. Neid sirgeid nimetatakse koordinaattelgedeks, kui neil fikseerida suund, ja nende ühist punkti koordinaatide alguspunktiks. Kui telgedel valida ühiklõigud, saame koordinaadistiku, mille suhtes saab määrata ruumipunkti üheselt. Kui teljed on omavahel risti, siis on tegemist ristkoordinaadistikuga. Aksonomeetrias rakendataksegi peamiselt just ristkoordinaadistikku.



Joon.1

Olgu meil ruumis valitud koordinaadistik Oxyz (joon. 1). Vaatleme punkti P. Olgu meil $x \perp y$, $y \perp z$ ja $z \perp x$. Siis punkti P on võimalik määrata antud koordinaadistiku suhtes kolme suunatud kauguslõigu ehk vektori abil. Punkti P kauguslõiguks tasandist xy on vektor $\overrightarrow{P_{xy}P}$, tasandist zx - $\overrightarrow{P_{zx}P}$ ning tasandist yz - $\overrightarrow{P_{yz}P}$. On ilmne, et valitud telgede korral $\overrightarrow{P_{xy}P} \parallel z$; $\overrightarrow{P_{zx}P} \parallel y$ ning $\overrightarrow{P_{yz}P} \parallel x$. Seejuures $\overrightarrow{P_{zx}P} = \overrightarrow{P_xP_{xy}}$ ning $\overrightarrow{P_{yx}P} = \overrightarrow{OP_x}$.

Kui valida telgede suunalised ühikvektorid $\overrightarrow{OE_x} = \overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{OE_y} = \overrightarrow{e_y}$ ja $\overrightarrow{OE_z} = \overrightarrow{e_z}$ ning moodustada suhted:

$$x_p = \frac{\overrightarrow{OP_x}}{\overrightarrow{OE_x}} = \frac{\overrightarrow{OP_x}}{\overrightarrow{e_x}} \ ; \quad y_p = \frac{\overrightarrow{OP_y}}{\overrightarrow{OE_y}} = \frac{\overrightarrow{OP_y}}{\overrightarrow{e_y}} = \frac{\overrightarrow{P_xP_{xy}}}{\overrightarrow{e_y}} = \frac{\overrightarrow{P_{zx}P}}{\overrightarrow{e_y}} \ ;$$

$$z_p = \frac{\overrightarrow{OP_z}}{\overrightarrow{OE_z}} = \frac{\overrightarrow{OP_z}}{\overrightarrow{e_z}} = \frac{\overrightarrow{P_{xy}P}}{\overrightarrow{e_z}} ,$$

siis saame kolm reaalarvu x_p, y_p ja z_p. Saadud kolme arvu nimetatakse punkti ristkoordinaatideks ning märgitakse $P(x_p, y_p, z_p)$. Need on positiivsed, kui jagatav ja jagaja on samasuunalised ja negatiivsed, kui need on vastassuunalised vektorid. Nüüd võib punkti P määrata ühega koordinaatmurdjoontest $OP_xP_{xy}P$, $OP_yP_{xy}P$, $OP_yP_{yz}P$ jne. Järelikult võime öelda, <u>et iga ruumipunkt on kinnistatav teljestiku külge koordinaatmurdjoone abil</u>, mille lülid on telgede sihilised, lüli pikkuseks on vaadeldavas mõõtühikus punkti vastava koordinaadi absoluutväärtus. Lüli on telje suunaline, kui koordinaat on positiivne ja vastassuunaline, kui koordinaat on negatiivne.

Igale arvkolmikule vastab üks ja ainus punkt valitud koordinaatteljestiku korral, sest nende arvude põhjal saame üheselt koordinaatmurdjoone, näit. $OP_xP_{xy}P$.

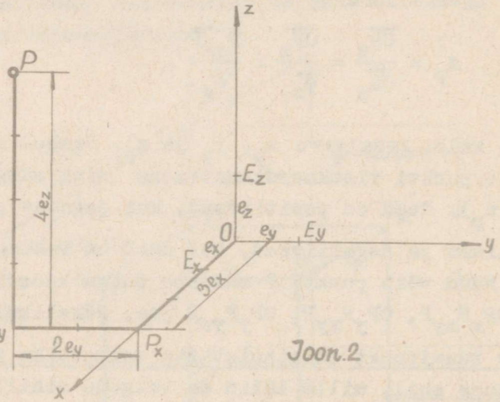
Tehniliste kujundite kinnistamisel teljestiku külge on otstarbekohane valida telgedel võrdsed ühiklõigud: $e_x = e_y =$

$e_z = e$. Sel juhul

$$x_p = \frac{\overrightarrow{OP_x}}{\overrightarrow{e}}\,; \quad x_y = \frac{\overrightarrow{P_xP_{xy}}}{\overrightarrow{e}} \quad \text{ning} \quad x_z = \frac{\overrightarrow{P_{xy}P}}{\overrightarrow{e}}\,.$$

Punkti kinnistav koordinaatmurdjoon koosneb kolmest ristuvast lülist. Nii näiteks võime konstrueerida sellise koordinaatmurdjoone, mille esimene lüli on x-telje sihiline algusega koordinaatide alguspunktis ning tema pikkuseks on esimese koordinaadi absoluutväärtus; teine lüli on y-teljega paralleelne ning tema pikkuseks teise koordinaadi absoluutväärtus ja kolmas lüli on z-teljega paralleelne ja tema pikkuseks kolmanda koordinaadi absoluutväärtus. Lüli suund on võetud vastavalt punkti koordinaadi märgile.

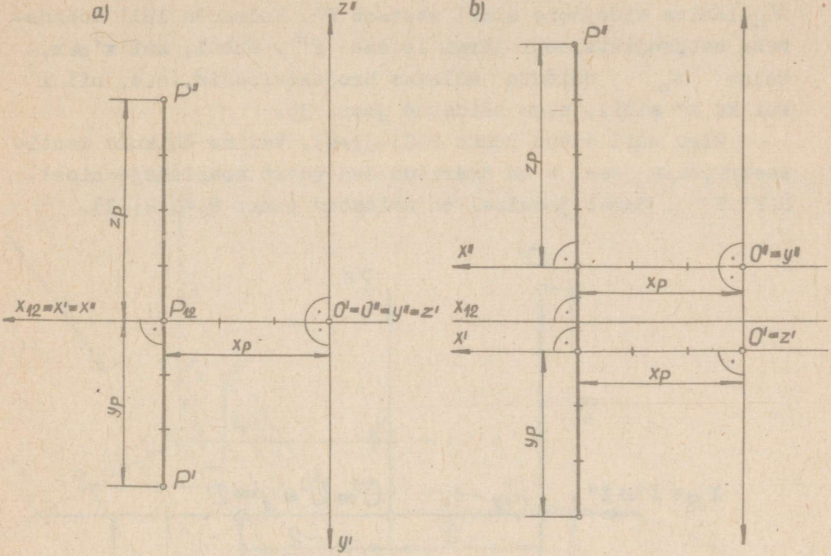
Näiteks, kui meil on antud punkt P(3;-2;4), siis antud koordinaadistiku järgi on kontrueeritud murdjoon joonisel 2.



Joon.2

3. PUNKTI MÄÄRAMINE KOMPLEKSJOONISEL (MONGE'I EPÜÜRIL EHK KAKSVAATES) KOORDINAATIDE JÄRGI NING PÖÖRDÜLESANNE

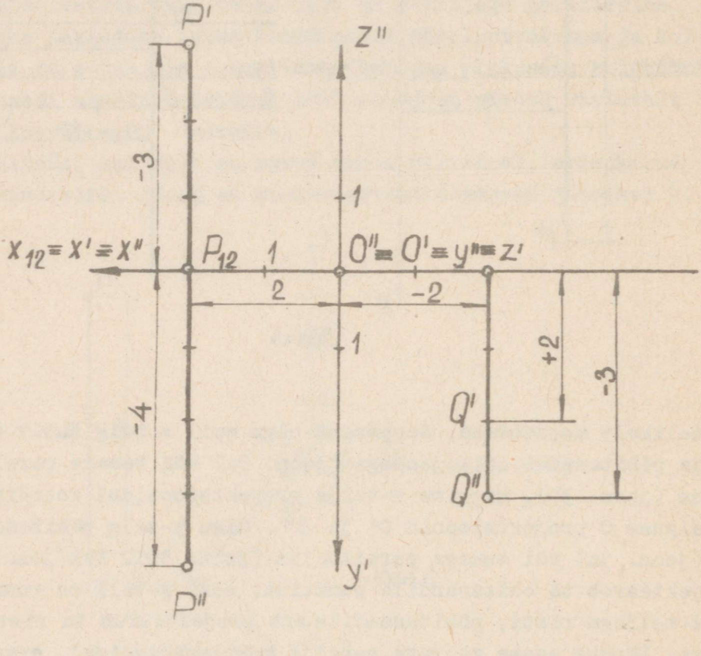
Selleks, et esitada koordinaatidega määratud punkti joonisel, tuleb kõigepealt määrata ruumis koordinaatteljed, mille külge punkt on kinnistatud. Valime sellise projektsioonitasandite asendi, et koordinaadistiku projektsioon oleks või-



Joon.3

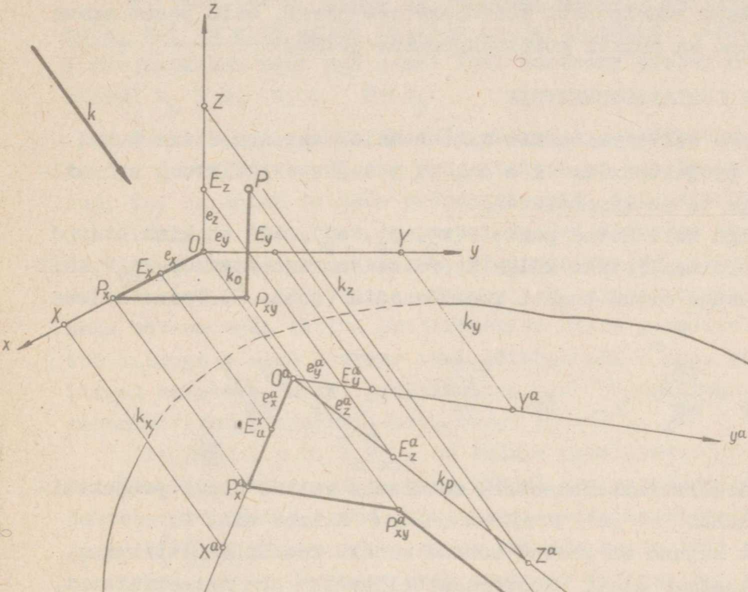
malikult moondevaba. Seepärast olgu meil x-telg ühtiv esi- ja põhitasandi lõikejoonega (joon. 3a) või temaga paralleelne (joon. 3b). Märgime x-telje projektsioonidel koordinaatide alguse O projektsioonid O' ja O". Olgu y-telg põhitasandil (joon. 3a) või temaga paralleelne (joon. 3b). Sel juhul projekteerub ta esitasandile punktina, sest y-telg on ruumis x-teljega risti, põhitasandile aga projekteerub ta risti x'-ga. Lõpuks saame määrata z-telje kompleksjoonisel, arvestades ristseisu kummagi eelmise teljega. On ilmne, et antud juhul näeme pealtvaates moondevabalt esimest ja teist koordinaatlõiku, eestvaates aga esimest ja kolmandat koordinaatlõiku, samuti ka vastavate telgede ühiklõike. Järelikult selleks,et määrata kompleksjoonisel punkti $P(x_p, y_p, z_p)$, mõõdame alguspunktist O' alates mööda x' esimese koordinaadi pikkuse lõigu vastavates ühikutes (joon. 3), arvestades märki. (Nii näiteks vasakule O'-st kantakse positiivsed suurused ja paremale negatiivsed). Edasi näitame punkti kinnistava murdjoone teise lüli, mis pealtvaates projeteerub moondevabalt. Punkti P_{12} läbiva sidejoone sihil asetseb P'. Kolmanda lüli moondevaba esiprojektsiooni järgi leiame P". Juhul, kui $x' \neq x$, tuleb x_p näidata mõlemas projektsioonis, s.o. nii x' kui ka x" sihil, nagu näidatud joon. 3b.

Olgu meil antud punkt P(2;-3;-4). Valime ühikuks sentimeetri, siis joon. 4 on määratud see punkt kompleksjoonisel P(P',P"). Samal joonisel on näidatud punkt Q(-2;2;-3).



Joon.4

<u>Pöördülesande</u> lahendamisel tuleb <u>kompleksjoonise järgi **määrata punkti koordinaadid.**</u> Kui on antud punkt kompleksjoonisel oma kahe projektsiooniga, siis tuleb valida ruumis mingi koordinaadistik, näidata kompleksjoonisel selle teljestiku projektsioonid ja tema suhtes määrata antud punkti koordinaadid. Tavaliselt valitakse teljed nii, et koordinaattasandid


z
Z
k
E_z
P
e_z
e_y
E_y
O
Y
y
E_x
e_x
k_o
P_x
P_xy
k_z
X
x
k_y
O^a
e_y^a
E_y^a
Y^a
e_x^a
e_z^a
k_x
E_a^x
y^a
E_z^a
P_x^a
k_p
P_xy^a
X^a
Z^a
P^a
x^a
z^a
ε

Joon.5

oleksid kujundi sümmeetriatasandeiks, kui tal nad on olemas. Seejuures aga arvestame kindlasti koordinaattelgede projektsioonide kohta samu tingimusi, millest oli juttu käesoleva paragrahvi alguses. Jooniselt 3 on siis näha, kuidas mõõta koordinaatlõike pärast seda, kui teljed on kompleksjoonisel näidatud. Seega näeme, et kompleksjoonise järgi saab määrata ruumipunkti koordinaate. Kui me oskame aksonomeetrilist kujutist valmistada ruumipunkti koordinaatide järgi, siis peame saama seda teha ka punkti kompleksjoonise järgi.

4. PARALLEELAKSONOMEETRIA

Nagu definitsioonist nähtub tuleb aksonomeetria puhul kujund projekteerida k o o s t e l j e s t i k u g a, mille külge ta on kinnistatud.

Olgu meil antud punkt $P(x_p, y_p, z_p)$, mis on kinnistatud ristkoordinaadistiku külge koordinaatmurdjoonega $OP_xP_{xy}P$, mille määravad antud punkti koordinaadid (joon. 5). Peame silmas, et

$$x_p = \frac{\overline{OP_x}}{\overline{OE_x}}; \qquad y_p = \frac{\overline{P_xP_{xy}}}{\overline{OE_y}}; \qquad z_p = \frac{\overline{P_{xy}P}}{\overline{OE_z}}.$$

Paralleelaksonomeetria saamiseks valime mingi projektsioonitasandi ε ja projekteerivate kiirte sihi k.

Et kujund on seotud teatud kindla koordinaadistikuga, siis alustame alati koordinaatteljestiku projekteerimisest.

Telgede projektsioonide määramiseks valime igal teljel kaks punkti, sest sirge projektsioon on määratud tema kahe punkti projektsiooniga. Antud juhul on otstarbekohane üheks määrajaks punktiks valida teljestiku alguspunkt O, mis on ühine kõigile telgedele. Teiseks määrajaks punktiks valime igal teljel suvaliselt veel ühe punkti. Olgu need vastavalt X, Y ja Z. Et me vaatleme paralleelprojektsiooni, siis tõmbame läbi valitud punktide omavahel paralleelsed kiired nii, et nad oleksid paralleelsed antud sihiga k. Seega $k_O \parallel k_X \parallel k_Y \parallel k_Z \parallel k$. Näitame nende kiirte lõikepunktid valitud aksonomeetrilise projektsioonitasandiga ε . Saame punktid

$O^a = k_O \times \varepsilon$; $X^a = k_X \times \varepsilon$; $Y^a = k_y \times \varepsilon$; $Z^a = k_Z \times \varepsilon$.

Seega on määratud telgede projektsioonid:

$$x^a \equiv O^aX^a; \quad y^a \equiv O^aY^a \quad \text{ja} \quad z^a \equiv O^aZ^a .$$

Näitame, et P^a asend on joonisel üheselt määratud pärast seda, kui on ette antud telgede projektsioonid. Antud punkti P projektsioon peab aga samal ajal asetsema projekteerival kiirel $k_p \parallel k$, s.o. $P \subset k_p$.

Punkt P oli ruumis üheselt määratud koordinaatmurdjoone kaudu. Koordinaatmurdjoone projektsioon on aga üheselt määratud, kui on antud telgede projektsioonid. Nii näiteks antud juhul esimene lüli, mis asetseb x-teljel algusega koordinaatide alguspunktis, projekteerub lõiguna sirgele x^a nii, et O-le vastab O^a. Lüli teise otspunkti P_x projektsiooni määramiseks võtame teda läbiva projekteeriva kiire paralleelselt antud kiirega k ning määrame tema lõikepunkti x^a-ga, saame P_x^a. Sirgel asetseva punkti projektsioon peab ju asetsema sirge samanimelisel projektsioonil. Seega $P_x^a \subset x^a$.

Teine lüli s.o. $\overrightarrow{P_xP_{xy}}$, on ruumis paralleelne y-teljega. Paralleelprojektsiooni omaduse põhjal aga paralleelide projektsioonid jäävad antud juhul paralleelseiks sirgeiks, seega ka $P_x^aP_{xy}^a \parallel y^a$. Joonisel saame näidata selle lüli projektsiooni sihi. Teine otspunkt peab asetsema vastava P_{xy} projekteeriva kiire ja läbi P_x^a tõmmatud y^a-teljega paralleelse sirge lõikepunktis.

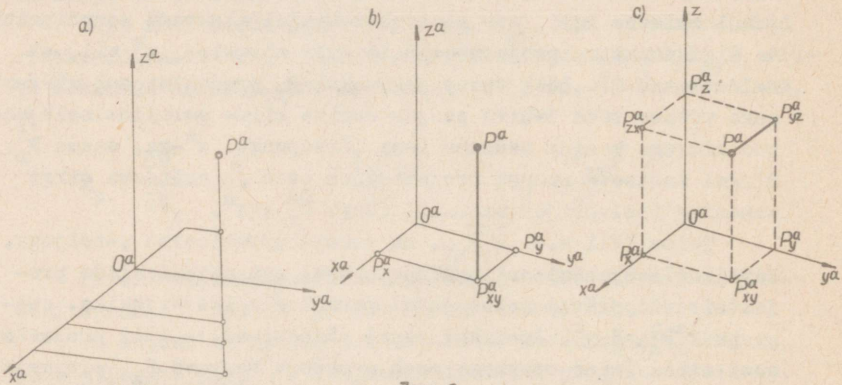
Lõpuks leiame kolmanda lüli projektsiooni arvestades analoogiliselt eelmise juhuga tema paralleelsust z-teljega. Võtame sirge läbi $P_{xy}^a \parallel z^a$ ja sellel leiame punkti, kus punkti P projekteeriv kiir k_p lõikub temaga. Nii saame punkti P^a.

Seega on näidatud, et joonisel on punkti P projektsioon üheselt määratud pärast seda, kui on antud punkti koordinaadid ja teljestiku projektsioon, mille külge punkt on kinnistatud.

5. PUNKTI JA TEMA KOORDINAATIDE MÄÄRAMINE AKSONOMEETRILISE JOONISE JÄRGI

Eespool nägime, et punkti projektsioon on üheselt määratav koordinaadistiku projektsiooni järgi, sest oskame leida teda kinnistava murdjoone projektsiooni.

Nüüd püüame lahendada pöördülesannet. Kas saab määrata ruumipunkti ja kuidas seda võimaluse korral teha, kui on antud teljestiku projektsioon x^a, y^a, z^a ja punkti enda projektsioon P^a (joon. 6). On ilmne, et ruumipunkti määramiseks peame oskama joonisel näidata seda murdjoont, mis kinnistab punkti teljestiku külge. Nagu jooniselt 6a ilmneb, punkti projekt-



Joon. 6

sioon üksinda ei võimalda üheselt näidata kinnistava koordinaatmurdjoone projektsiooni, kuigi on antud ka telgede projektsioonid.

Kui punkti aksonomeetrilisele projektsioonile P^a lisada aga näiteks punkti P läbiva mingi telje sihilise koordinaatlõigu projektsioon, siis on kinnistava murdjoone projektsioon üheselt määratud. On ilmne, et koordinaatlõigu teine otspunkt määrab punkti P ristprojektsiooni ühel koordinaattasandeist.

Nii näiteks, kui P^a-le lisada veel punkt P^a_{xy}, nii et

$\overline{P^aP^a_{xy}} \parallel z^a$ (joon. 6b), siis saame määrata P^a_x, või ka P^a_y ning seega kinnistava murdjoone projektsiooni, näit. $O^aP^a_xP^a_{xy}P^a$, kus $P^a_xP^a_{xy} \parallel y^a$. Analoogiliselt võiks võtta murdjoone $O^aP^a_y\, P^a_{xy}P^a$, kusjuures tuleb arvestada vaid lülide ümberpaigutust: $\overrightarrow{O^aP^a_y} = \overrightarrow{P^a_xP^a_{xy}}$ ja $\overrightarrow{P^a_yP^a_{xy}} = \overrightarrow{O^aP^a_x}$. Ühel koordinaattasandeist saadud punkti P ristprojektsiooni (P_{xy}, P_{yz} või P_{zx}) aksonomeetrilist projektsiooni (P^a_{xy}, P^a_{yz} või P^a_{zx}) nimetatakse punkti P teistkordseks (вторичная) projektsiooniks. Seega võime öelda, et punkt on aksonomeetrias määratud, kui on antud tema projektsioon koos mingi teistkordse projektsiooniga (joon. 6b).

Näeme, et punkti aksonomeetrilise ja tema mistahes ühe teistkordse projektsiooni järgi saame määrata ka ülejäänud kaks teistkordset. Joonisel 6c on näidatud P^a_{xy} ja P^a_{zx} määramine P^a_{yz} ja P^a järgi.

Olgu antud mingi punkt P aksonomeetrilisel joonisel (s.t. on antud punkti enda projektsioon koos mingi ühe teistkordse projektsiooniga peale teljestiku projektsiooni).

Kuidas leida punkti P koordinaate, s.o. arvkolmikut, mis määrab punkti valitud ruumiteljestiku suhtes?

Nägime, et ruumis

$$x_P = \frac{\overrightarrow{OP_x}}{\overrightarrow{OE_x}}\ ; \quad y_P = \frac{\overrightarrow{P_xP_{xy}}}{\overrightarrow{OE_y}}\ ; \quad z_P = \frac{\overrightarrow{P_{xy}P}}{\overrightarrow{OE_z}}\ .$$

Paralleelprojektsioonis säilib paralleelsete lõikude suhe, samuti lõikude jaotamine antud suhtes. Järelikult võime punkti projektsiooni järgi vahetult määrata punkti koordinaadid, kui peale telgede projektsioonide on veel teada telgede ühiklõikude projektsioonid (vt. joonis 5). Võtame projekteerivad kiired paralleelsed antud kiirega k punktidest E_x, E_y ja E_z. Punktide kuuluvuse alusel telgedele saame määrata $E^a_x \subset x^a$, $E^a_y \subset y^a$ ja $E^a_z \subset z^a$. Pärast seda leiame

$$x_P = \frac{\overrightarrow{O^aP^a_x}}{\overrightarrow{O^aE^a_x}}; \quad y_P = \frac{\overrightarrow{P^a_xP^a_{xy}}}{\overrightarrow{O^aE^a_y}}\ ; \quad z_P = \frac{\overrightarrow{P^a_{xy}P^a}}{\overrightarrow{O^aE^a_z}}\ .$$

6. AKSONOMEETRILISED MOONDETEGURID. POHLKE' TEOREEM.

Moondeteguriks nimetatakse ruumilõigu projektsiooni suhet vastavasse ruumilõiku. Aksonomeetriliseks moondeteguriks nimetatakse telje või temaga paralleelse lõigu projektsiooni suhet vastavasse ruumilõiku. Tähistame mooneteguri x-telje sihil m_x, y-telje sihil m_y ja z-telje sihil m_z.

Jooniselt 5 näeme, et

$$m_x = \frac{\overrightarrow{O^aE^a_x}}{\overrightarrow{OE_x}} = \frac{\overrightarrow{O^aX^a}}{\overrightarrow{OX}} = \frac{\overrightarrow{O^aP^a_x}}{\overrightarrow{OP_x}},$$

$$m_y = \frac{\overrightarrow{O^aE^a_y}}{\overrightarrow{OE_y}} = \frac{\overrightarrow{O^aY^a}}{\overrightarrow{OY}} = \frac{\overrightarrow{P^a_xP^a_{xy}}}{\overrightarrow{P_xP_{xy}}},$$

$$m_z = \frac{\overrightarrow{O^aE^a_z}}{\overrightarrow{OE_z}} = \frac{\overrightarrow{O^aZ^a}}{\overrightarrow{OZ}} = \frac{\overrightarrow{P^a_{xy}P^a}}{\overrightarrow{P_{xy}P}}.$$

On ilmne, et aksonomeetrilised moondetegurid sõltuvad koordinaattelgede ja projektsioonitasandi vahelistest nurkadest ning projekteerivate kiirte kaldest projektsioonitasandi suhtes.

Vastavalt moondeteguritele jaotatakse aksonomeetria kolme liiki.

1) Isomeetria ehk isomeetriline aksonomeetria, mille puhul kõik moondetegurid on omavahel võrdsed, s.o. $m_x = m_y = m_z$.

2) Dimeetria ehk dimeetriline aksonomeetria, kus kaks moondetegurit on omavahel võrdsed, kuid kolmas on neist erinev, näit. $m_x \neq m_y = m_z$.

3) Trimeetria, kui kõik kolm moondetegurit on erinevad, s.o. $m_x \neq m_y$; $m_y \neq m_z$; $m_z \neq m_x$.

Et suhe ei sõltu lõigu pikkusest, siis aksonomeetriliste moondetegurite määramisel võime kasutada telgede ühiklõike ja nende projektsioone ehk aksonomeetrilisi ühikuid.

Leiame aksonomeetrilised ühiklõigud isomeetrias. Olgu ruumitelgedel näiteks võrdsed ühikud (nagu seda enamail juhtudel just tehniliste jooniste valmistamiseks kasutatakse), s.t. $e_x = e_y = e_z = e$. Isomeetria korral $m_x = m_y = m_z$. Peame silmas, et

$$m_x = \frac{e_x^a}{e_x}; \quad m_y = \frac{e_y^a}{e_y}; \quad m_z = \frac{e_z^a}{e_z}.$$

Et $e_x = e_y = e_z = e$, siis

$$e_x^a = m_x \cdot e_x = m_x \cdot e; \quad e_y^a = m_y \cdot e_y = m_y \cdot e \quad \text{ja}$$

$$e_z^a = m_z \cdot e_z = m_z \cdot e.$$

Et antud juhul $m_x = m_y = m_z$, siis

$$e_x^a = e_y^a = e_z^a.$$

Järelikult, isomeetrias saame ruumis võrdsete ühikute puhul ka joonisel võrdsed ühikud.

Dimeetrias saame kahe telje projektsioonidel võrdsed ühikud, sest kaks moondetegurit on omavahel võrdsed, kolmas aksonomeetriline ühik tuleb erinev.

Trimeetrias on kõik aksonomeetrilised ühikud erinevad.

Kui veel silmas pidada, et paralleelaksonomeetria korral võiks esineda kas kald- või ristaksonomeetria, siis võime eristada kuus liiki paralleelaksonomeetriaid.

Nagu definitsioonist nähtub, võimaldavad moondetegurid määrata telgede sihilistele ruumilõikudele vastavaid projektsioonide pikkusi aksonomeetrilisel projektsioonil, ja vastupidi. Nii näiteks, kui meil on antud moondetegurid $m_x = 0{,}8$; $m_y = 1$; $m_z = 1{,}3$, siis saame määrata punkti kinnistavale ruumimurdjoonele vastava projektsiooni lülide pikkused samades ühikutes, mida kasutame ruumis, kui korrutame tõelised pikkused vastavate moondeteguritega:

$$\overline{O^aP^a_x} = 0{,}8 \cdot x_p; \quad \overline{P^a_xP^a_{xy}} = 1 \cdot y_p \quad \text{ja} \quad \overline{P^a_{xy}P^a} = 1{,}3 \cdot z_p$$

või üldjuhul:

$$\overline{O^aP^a_x} = m_x \cdot x_p; \quad \overline{P^a_xP^a_{xy}} = m_y \cdot y_p \quad \text{ja} \quad \overline{P^a_{xy}P^a} = m_z \cdot z_p.$$

Aksonomeetriliste telgede ja ühikute valikul lähtutakse ristkoordinaadistiku korral Pohlke' teoreemist.

Suvalised kolm lõiku, mis asetsevad kõik ühel tasandil ja lähtuvad ühest ning samast punktist on vaadeldavad ühest ja samast punktist lähtuva kolme omavahel ristuva ning võrdse lõigu paralleelprojektsioonina.(Tõestust vt. O. Rünk, N. Paluver, Kujutav geomeetria , Tallinn 1961 või Е. А. Глазунов и Н. Ф. Четверухин, Аксонометрия, Москва 1953).

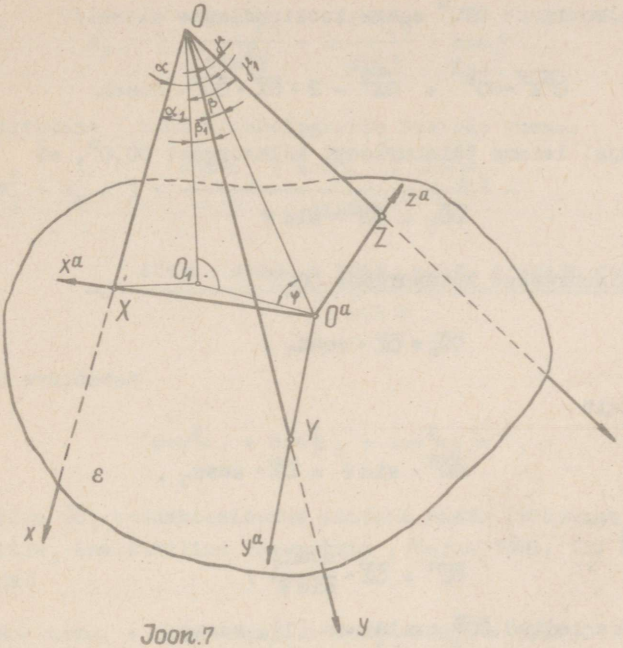
Teoreemist järeldub, et üldjuhul võime valida vabalt aksonomeetrilised teljed ja nendel ka ühikud, sest alati leidub selline koordinaatteljestiku, projekteeritavate kiirte ja projektsioonitasandi vastastikune asend, et korrapärane täisnurkne püramiid, mille tippudeks on koordinaatide alguspunkt ja mõõdupunktid telgedel, omab just etteantud kujuga projektsiooni. Üldjuhul on meil siis tegemist kaldaksonomeetriaga.

7. MOONDETEGURITE OMAVAHELINE SEOS

Moondetegurid sõltuvad projekteerivate kiirte sihist ja kaldenurkadest ekraani suhtes. Kuid koordinaatteljed ei ole suvalised sirged, vaid nad asetsevad risti üksteisega. Sellest järeldub, et nende kaldenurgad projektsioonitasandi suhtes on üksteisest sõltuvad.Seega peab ka moondetegurite vahel kehtima mingi seos.

Vaatleme üldjuhul moondetegurite sõltuvust nurgast φ, mille projekteerivad kiired moodustavad aksonomeetrilise projektsioonitasandiga. Selle sõltuvuse alusel saame määrata ka moondetegurite omavahelise seose.

Olgu meil antud ruumiteljestik ja projektsioonitasand ε, mis ei läbi koordinaatide alguspunkti (joon. 7). Lõigaku tel-



Joon.7

jed x, y, z projektsioonitasandit vastavalt punktides X, Y, Z. Määrame telgede projektsioonid. Selleks võtame projekteeriva kiire k_o läbi alguspunkti O ja määrame tema lõikepunkti projektsioonitasandiga, saame punkti O^a. Üldjuhul projekteeriv kiir OO^a ei ole risti ε-ga. Tõmbame läbi punkti O ristlõigu $\overline{OO_1}$ kuni lõikumiseni projektsioonitasandiga punktis O_1. Sel juhul $\angle OO^aO_1$ mõõdab projekteeriva kiire ja projektsioonitasandi vahelist nurka φ. Seejuures $x^a \equiv O^aX$, $y^a \equiv O^aY$ ja $z^a \equiv O^aZ$. Tähistagu α, β ja γ vastavalt nurki lõigu $\overline{OO^a}$ x-telje, y-telje ja z-telje vahel. Lõigu $\overline{OO_1}$ ja telgede vahelisi nurki tähistame vastavalt α_1, β_1 ja γ_1.

Lähtudes nendest andmetest avaldame m_x, m_y ja m_z, teades, et

$$m_x = \frac{O^aX}{OX} \; ; \quad m_y = \frac{O^aY}{OY} \; ; \quad m_z = \frac{O^aZ}{OZ} \, .$$

Kolmnurgast OXO^a saame koosinuslause alusel:

$$\overline{O^aX}^2 = \overline{OO^a}^2 + \overline{OX}^2 - 2\cdot\overline{OX}\cdot\overline{OO^a}\cdot\cos\alpha. \tag{1}$$

Samal ajal leiame täisnurksest kolmnurgast OO_1O^a, et

$$\overline{OO_1} = \overline{OO^a}\cdot\sin\varphi$$

ning täisnurksest kolmnurgast OO_1X

$$\overline{OO_1} = \overline{OX}\cdot\cos\alpha_1 .$$

Järelikult

$$\overline{OO^a}\cdot\sin\varphi = \overline{OX}\cdot\cos\alpha_1 ,$$

millest

$$\overline{OO^a} = \overline{OX}\cdot\frac{\cos\alpha_1}{\sin\varphi} .$$

Asendades leitud $\overline{OO^a}$ avaldisse (1), saame

$$\overline{O^aX}^2 = \overline{OX}^2\cdot\frac{\cos^2\alpha_1}{\sin^2\varphi} + \overline{OX}^2 - 2\,\overline{OX}^2\cdot\cos\alpha\cdot\frac{\cos\alpha_1}{\sin\varphi} .$$

Siit leiame

$$m_x^2 = \frac{O^aX^2}{OX^2} = 1 + \frac{\cos^2\alpha_1}{\sin^2\varphi} - 2\cdot\frac{\cos\alpha_1}{\sin\varphi}\cdot\cos\alpha .$$

Analoogiliselt leiame avaldised

$$m_y^2 = \frac{O^aY^2}{OY^2} \quad \text{ja} \quad m_z^2 = \frac{O^aZ^2}{OZ^2} \quad \text{jaoks:}$$

$$m_y^2 = 1 + \frac{\cos^2\beta_1}{\sin^2\varphi} - 2\cdot\frac{\cos\beta_1}{\sin\varphi}\cdot\cos\beta \ ;$$

$$m_z^2 = 1 + \frac{\cos^2\gamma_1}{\sin^2\varphi} - 2\cdot\frac{\cos\gamma_1}{\sin\varphi}\cdot\cos\gamma .$$

Arvutame nüüd moondetegurite ruutude summa:

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 3 + \frac{\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1}{\sin^2\varphi} -$$

$$-2\cdot\frac{\cos\alpha\cdot\cos\alpha_1 + \cos\beta\cdot\cos\beta_1 + \cos\gamma\cdot\cos\gamma_1}{\sin\varphi}.$$

Saadud avaldises

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1,$$

kui lõigu $\overline{OO}_1$ suunakoosinuste ruutude summa (tõestust vt. H. Merilo, Analüütiline geomeetria , Tartu 1966, lk. 67). Samal ajal

$$\cos\alpha\cdot\cos\alpha_1 + \cos\beta\cdot\cos\beta_1 + \cos\gamma\cdot\cos\gamma_1 = \cos(90^0-\varphi) =$$

$$= \sin\varphi ,$$

kui $\overline{OO}_1$ ja $\overline{OO}^a$ sihiliste ühikvektorite vahelise nurga koosinus (vt. vektorarvutusest skalaarkorrutist). Järelikult

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 3 + \frac{1}{\sin^2\varphi} - 2 = 2 + \frac{1-\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi} = 2 + \frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi},$$

millest

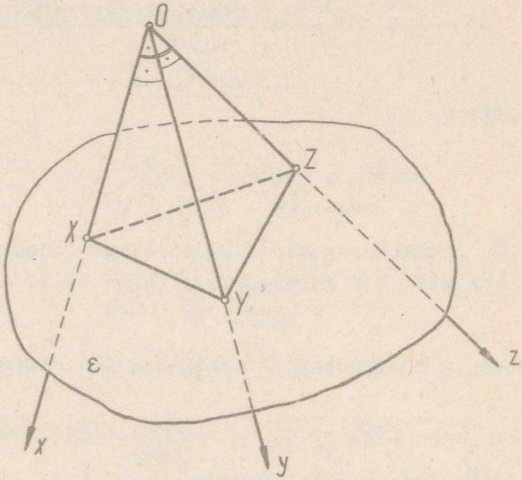
$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 2 + \cot^2\varphi .$$

Sellest seosest nähtub,et projekteerivate kiirte etteantud sihi puhul ei ole moondetegurid omavahel täiesti sõltumatud, vaid peavad täitma tuletatud tingimust.

8. JÄLGKOLMNURK

Olgu meil antud koordinaatteljed ja aksonomeetriline projektsioonitasand. Üldjuhul teljed lõikavad antud projektsioonitasandit kolmes lõplikus punktis. Erijuhul võib olla projektsioonitasandiga paralleelne üks telg või ülimalt kaks telge.

Kolmnurka, mille tippudeks on koordinaattelgede lõikepunktid projektsioonitasandiga, nimetatakse jälgkolmnurgaks (joon. 8).



Joon.8

T e o r e e m: Ristteljestiku korral jälgkolmnurk on alati teravnurkne.

Tõestuseks vaatleme külgede XY, YZ ja ZX vahelist seost. Selle tuletamiseks rakendame lõike OX, OY ja OZ ruumitelgedel. Ristkoordinaadistiku tõttu

$$\overline{XY}^2 = \overline{OX}^2 + \overline{OY}^2$$

$$\overline{YZ}^2 = \overline{OY}^2 + \overline{OZ}^2 \qquad (2)$$

$$\overline{ZX}^2 = \overline{OZ}^2 + \overline{OX}^2$$

Summeerides paariti saadud avaldised, saame

$$\overline{XY}^2 + \overline{YZ}^2 = \overline{OX}^2 + \overline{OZ}^2 + 2\overline{OY}^2$$

$$\overline{YZ}^2 + \overline{ZX}^2 = \overline{OY}^2 + \overline{OX}^2 + 2\overline{OZ}^2 \qquad (3)$$

$$\overline{XY}^2 + \overline{ZX}^2 = \overline{OY}^2 + \overline{OZ}^2 + 2\overline{OX}^2.$$

Võrreldes saadud summasid (3) avaldistega (2) näeme, et

$$\overline{XY}^2 + \overline{YZ}^2 > \overline{ZX}^2$$

$$\overline{YZ}^2 + \overline{ZX}^2 > \overline{XY}^2$$

$$\overline{XY}^2 + \overline{ZX}^2 > \overline{YZ}^2$$

Saadud võrratused kehtivad teatavasti ainult teravnurkse kolmnurga korral. Järelikult meie väide on tõestatud.

Jälgkolmnurga definitsioonist nähtub, et tema kuju sõltub koordinaattelgede ja projektsioonitasandi vastastikusest asendist. On ilmne, et jälgkolmnurga suurus, sama kuju korral, sõltub koordinaatide alguspunkti kaugusest projektsioonitasandist.

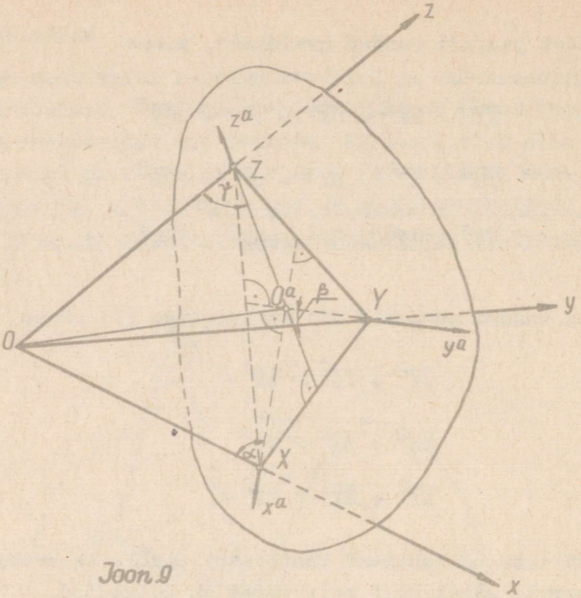
9. RISTAKSONOMEETRIA ERIOMADUSI

O m a d u s 1. Ristaksonomeetrias koordinaatteljed projekteeruvad jälgkolmnurga kõrguste sihilistena.

Tõestuseks vaatleme näiteks z-telje projektsiooni (joon.9). Näitame, et $z^a \perp XY$. Jooniselt näeme, et jälgkolmnurga külg XY on xy-tasandi lõikesirgel aksonomeetrilise projektsioonitasandiga. Seega $XY \subset$ xy-tasandil. Kuid Z-telg on risti xy-tasandiga, järelikult $z \perp XY$. Ristprojektsioonis täisnurk projekteerub täisnurgana, kui tal üks haar on projektsioonitasandiga paralleelne ja teine ei ole temaga risti. Seega antud juhul $z^a \perp XY$, sest XY on null-nivoosirge ehk jälg.

Analoogiliselt saab tõestada, et $y^a \perp XZ$ ja $x^a \perp YZ$.

J ä r e l d u s 1: Koordinaatide alguspunkt projekteerub ristaksonomeetria korral jälgkolmnurga kõrguste lõike-



Joon 9

punktiks ehk ortotsentriks.

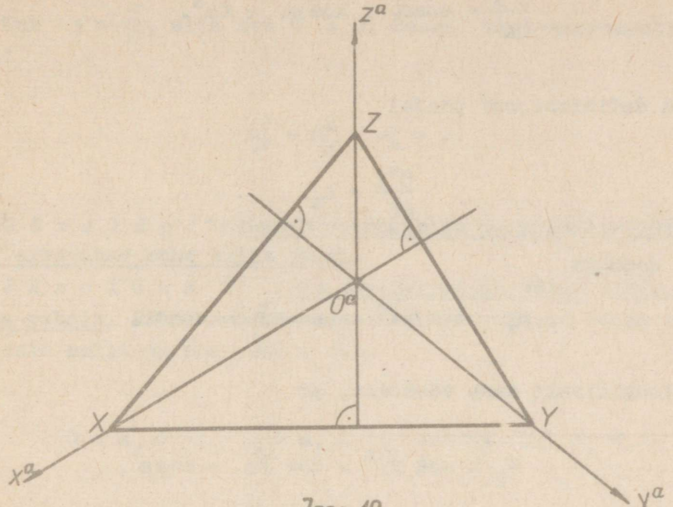
J ä r e l d u s 2: <u>Ristaksonomeetrias iga telje projektsioon jaotab kahe ülejäänud telje projektsioonide vahelist nürinurka</u>.

Tõestuseks peame silmas, et jälgkolmnurk määrab ristaksonomeetrilised teljed. Et teljed on jälgkolmnurga kõrguste sihilised ja jälgkolmnurk on teravnurkne, siis ristaksonomeetrias telgede projektsioonid kui teravnurkse kolmnurga kõrgused peavad täitma eespool nimetatud tingimust.

Seega, kui on antud jälgkolmnurk XYZ (joon. 10), siis teljed on üheselt määratud: $z^a \perp XY$ läbi punkti Z, $x^a \perp YZ$ läbi X. Alguspunkti projektsiooniks on siis $0^a \equiv z^a \times x^a$.

J ä r e l d u s 3. <u>Antud ristaksonomeetriliste telgede puhul saame üheselt määrata jälgkolmnurga kuju</u>.

Tõepoolest, kui joonisel 10 on antud telgede projektsioonid x^a, y^a, z^a (vt. järeldus 2), siis võime vabalt valida mingi punkti X teljel x^a ja lugeda seda jälgkolmnurga tipuks. Sellest punktist tõmmatud ristsirge teljele z^a määrab teljel y^a punkti Y. Leitud punktist tõmmatud ristsirge teljele x^a määrab punkti Z teljel z^a. Nii olemegi leidnud vastava



Joon. 10

jälgkolmnurga. Punkti X asendi muutus teljel x^a ei tähenda muud, kui projektsioonitasandi ja alguspunkti vahelise kauguse muutust paralleellükke teel. Seega jälgkolmnurga kuju tõepoolest ei muutu, muutub vaid suurus.

O m a d u s 2. Ristaksonomeetrias moondetegur on võrdne koordinaattelje ja projektsioonitasandi vahelise nurga koosinusega:

$$m_x = \cos \widehat{x\varepsilon} \; ; \quad m_y = \cos \widehat{y\varepsilon} \; ; \quad m_z = \cos \widehat{z\varepsilon} \, .$$

Tõestuseks lähtume aksonomeetrilise moondeteguri definitsioonist. Nii näiteks joonise 9 järgi võime öelda, et

$$m_x = \frac{O^aX}{OX} ; \quad m_y = \frac{O^aY}{OY} \quad \text{ja} \quad m_z = \frac{O^aZ}{OZ} \, .$$

Ristaksonomeetria korral $OO^a \perp \varepsilon$.

Vaatleme, näiteks kolmnurka OXO^a. On ilmne, et $OO^a \perp O^aX$ ristprojektsiooni tõttu. Järelikult

$$\frac{O^aX}{OX} = \cos\alpha \ , \ \text{kus } \alpha = \widehat{xx^a}.$$

Kuid definitsiooni põhjal

$$\frac{O^aX}{OX} = m_x.$$

Nii saamegi

$$m_x = \cos \widehat{xx^a} = \cos \widehat{x\varepsilon} = \cos\alpha .$$

Analoogiliselt saab tõestada, et

$$m_y = \cos \widehat{yy^a} = \cos \widehat{y\varepsilon} = \cos\beta ,$$

$$m_z = \cos \widehat{zz^a} = \cos \widehat{z\varepsilon} = \cos\gamma .$$

J ä r e l d u s: Ristaksonomeetrias moondetegurid omandavad väärtusi vaid nulli ja ühe vahel:

$$0 < m_x < 1; \quad 0 < m_y < 1; \quad 0 < m_z < 1.$$

O m a d u s 3: <u>Ristaksonomeetrias on moondetegurite ruutude summa võrdne 2</u>.

Tõestame, et

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 2.$$

Üldjuhul oli meil tõestatud (vt. lk. 14), et moondetegurite ruutude summa peab rahuldama tingimust

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 2 + \cot^2\varphi \ , \quad \text{kus} \quad \varphi = \widehat{k\varepsilon} \ ,$$

kus k on projekteerivate kiirte siht ja ε - ekraan.

Kui $\varphi = \frac{\pi}{2}$, siis $\cot \varphi = 0$. Seega ristaksonomeetria korral

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 2.$$

J ä r e l d u s 1: <u>Ristaksonomeetrias on kolmas moondetegur alati arvutatav kahe teise järgi</u>.

J ä r e l d u s 2: <u>Kaks moondetegurit võime üldiselt valida vabalt</u>. Ristaksonomeetria tõttu nad võivad omada väärtusi vaid nulli ja ühe vahel, s.o.

$$0 < m_x < 1; \quad 0 < m_y < 1; \quad \text{samuti} \quad 0 < m_z < 1.$$

Teiselt poolt aga on teada, et $m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 2$, siis

$$\underline{m_x^2 + m_y^2 > 1, \; m_y^2 + m_z^2 > 1 \quad \text{ja} \quad m_x^2 + m_z^2 > 1.}$$

10. NÄITEID MOONDETEGURITE ARVUTAMISE KOHTA RISTAKSONOMEETRIAS

1. Olgu antud moondetegurid ristaksonomeetrias: $m_x = 0{,}70$ ja $m_y = 0{,}90$. Leida kolmas moondetegur ja määrata ristaksonomeetria liik vastavalt moonde teguritele.

Tõepoolest : $0{,}49 + 0{,}81 = 1{,}30 > 1$.
Järelikult selline moondetegurite paar võib ristaksonomeetrias esineda. Leiame kolmanda moondeteguri m_z. Seosest

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 2$$

saame

$$m_z^2 = 2 - (m_x^2 + m_y^2) \cdot$$

Antud juhul

$$m_z^2 = 2 - 1{,}30 = 0{,}70.$$

Siit

$$m_z = \sqrt{0{,}70} \approx 0{,}84.$$

Vastavalt moondetegurite suurusele näeme, et tegemist on t r i m e e t r i l i s e ristaksonomeetriaga.

2. Moondetegurid <u>isomeetrilise ristaksonomeetria</u> korral. Isomeetria juhul $m_x = m_y = m_z$.

Lähtudes seosest

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 2,$$

saame

$$3m_x^2 = 2$$

ehk

$$m_x = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0{,}82.$$

3. Moondetegurid <u>dimeetrilise ristaksonomeetria</u> korral. Olgu $m_x = m_y$. Sel juhul saame

$$2m_x^2 + m_z^2 = 2$$

ehk

$$m_z = \sqrt{2(1-m_x^2)}.$$

Valides nüüd vabalt mingi m_x väärtuse (arvestades ristaksonomeetria lisatingimust $0 < m_x < 1$ ja $2m_x^2 > 1$) saame leida m_z. Olgu näiteks

$$m_x = 0{,}95, \text{ siis}$$

$$m_z = \sqrt{2[1-(0{,}95)^2]} \approx 0{,}45.$$

4. Moondetegurid <u>standardses dimeetrilises ristaksonomeetrias</u> (rakendatakse sageli tehniliste jooniste puhul).
Olgu

$$m_y = m_z \text{ ja } m_x = \frac{1}{2} m_y.$$

Seosest $m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 2$ saame

$$\frac{9}{4} m_y^2 = 2$$

ehk

$$m_y = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}94.$$

Seega

$$m_x = 0{,}47; \; m_y = 0{,}94 \text{ ja } m_z = 0{,}94.$$

11. TAANDATUD MOONDETEGURID AKSONOMEETRIAS

Moondeteguri definitsioonist tuleneb, et tal on üldjuhul mingi murruline väärtus (ristaksonomeetrias alati). See tingib aksonomeetrilise kujutise valmistamisel aritmeetilisi või graafilisi lisatehteid (vrd. lk. 21 joon. 13).

Olgu näiteks antud trimeetriline aksonomeetria teljestikuga x^a, y^a, z^a, kusjuures $m_x = 0,85$; $m_y = 0,93$ ja $m_z = 0,67$. Selleks, et joonisel saaksime mõõta koordinaatlõike loomulikus pikkusühikus, tuleb kõigi punktide x-telje sihilisi loomulikke koordinaatlõike korrutada 0,85-ga, y-telje sihilisi koordinaatlõike 0,93-ga jne. Vastasel juhul tuleb üle minna aksonomeetrilistele ühikutele: $e_x = 0,85 \cdot e$, $e_y = 0,93 \cdot e$ jne. Ühtlasi tähendab selline üleminek, et kõik x-telje sihilised mõõdud antud objektil esinevad aksonomeetrilisel joonisel vastava moondeteguri kordselt nagu ka ülejäänud kahe koordinaattelje sihil.

Selleks, et arvutustööd vähendada, asendatakse loomulikud (antud) moondetegurid joonise valmistamise seisukohalt "mugavamatega". Nimelt asendatakse neist üks, tavaliselt suurim, ühega ja ülejäänud määratakse nii, et säiliks moondetegurite omavaheline suhe.

Arve, mis saadakse antud moondetegurite korrutamisel niisuguse konstandiga, mille korrutis suurima moondeteguriga on üks, nimetatakse taandatud moondeteguriteks ja tähistatakse vastavalt suurte tähtedega M_x, M_y ja M_z.
Seega

$$M_x : M_y : M_z = m_x : m_y : m_z.$$

Antud näite puhul

$$m_x : m_y : m_z = 0,67 : 0,93 : 0,85 = 0,72 : 1 : 0,91 .$$

Siit nähtub, et

$$M_x = k \cdot m_x; \quad M_y = k \cdot m_y \quad \text{ja} \quad M_z = k \cdot m_z,$$

kus $k = \frac{1,0}{0,93} = 1,08$. Taandatud moondeteguri suhet tõelisesse nimetame aksonomeetriliseks taandamisteguriks.

Taandatud moondetegurite rakendamine ei muuda ilmselt projektsiooni kuju. Nende tõttu muutuvad objekti joonisel võrdeliselt telgede sihilised mõõdud. Seega meie saame objekti suurendatud või vähendatud kujutise, kusjuures suurenduse või vähenduse määrab taandamistegur. Ilmeka kujutise korral ei ole aga niivõrd oluline suurus, kuivõrd just ülevaade objektist.

N ä i d e 1. Taandatud standardse isomeetrilise ristaksonomeetria korral saame

$$M_x : M_y : M_z = 1 : 1 : 1,$$

kuna

$$m_x : m_y : m_z = 0,82 : 0,82 : 0,82.$$

Antud juhul taandamistegur

$$k = 1 : 0,82 \approx 1,22.$$

N ä i d e 2: Taandatud standardse dimeetrilise ristaksonomeetria juhul

$$M_x : M_y : M_z = \frac{1}{2} : 1 : 1,$$

kui lähtume seosest

$$m_x : m_y : m_z = 0,47 : 0,94 : 0,94.$$

Seega taandamistegur

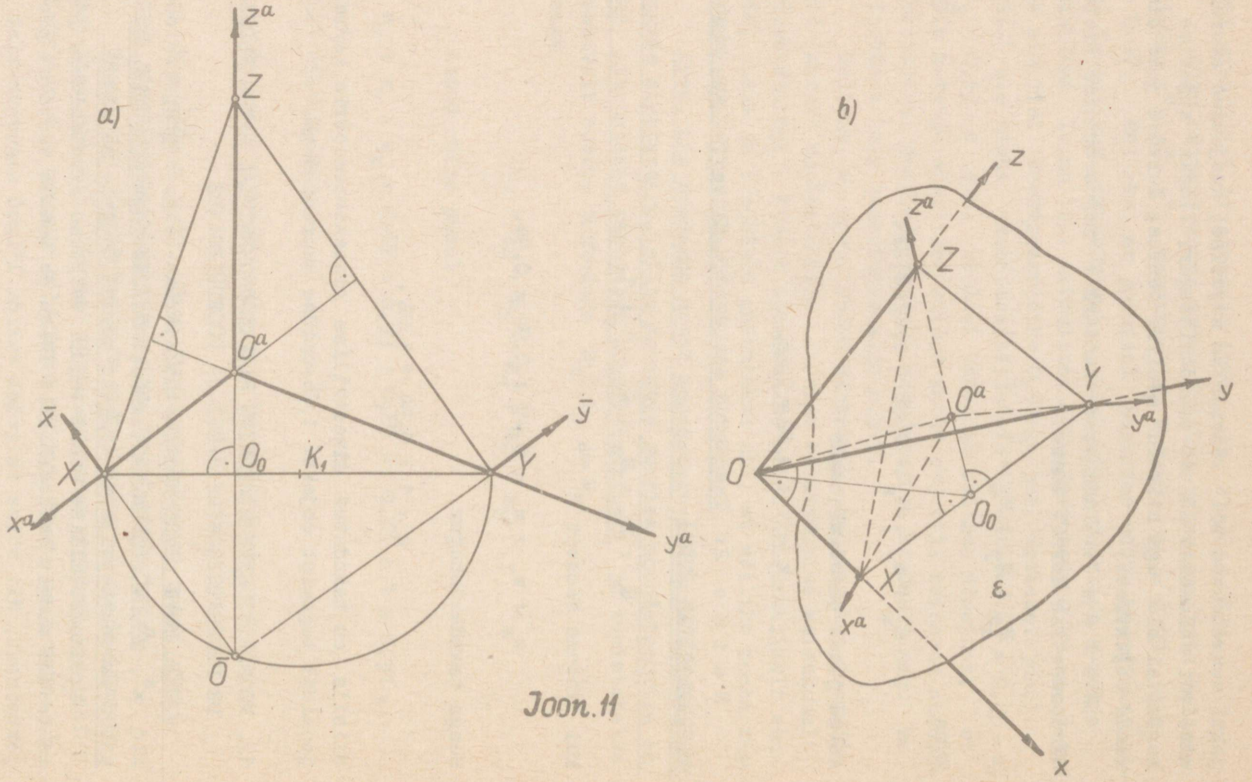
$$k = 1 : 0,94 \approx 1,06 .$$

Niisiis on taandatud dimeetrilise ristaksonomeetria korral joonisel tegemist objekti 1,06-kordse suurendusega.

12. MOONDETEGURITE MÄÄRAMINE RISTAKSONOMEETRIAS ANTUD TELGEDE PROJEKTSIOONIDE JÄRGI JA PÖÖRDÜLESANNE

Olgu meil antud ristaksonomeetrias telgede projektsioonid x^a, y^a, z^a (joon. 11a). Näitame, et moondetegurid on antud aksonomeetriliste telgede korral üheselt määratud.

Aksonomeetrilise moondeteguri väärtuse arvutamiseks peame teadma mingit teljesihilist lõiku ja temale vastavat projektsiooni. Nii võime telgedel valida lõigud alguspunktist


a)
z^a
Z
O^a
$\bar{x}$
$\bar{y}$
X
O_0
K_1
Y
x^a
y^a
$\bar{O}$
b)
z
z^a
Z
Y
y
O^a
y^a
O
O_0
X
ε
x^a
x

Joon. 11

kuni jälgkolmnurga tipuni (joon. 11b). Aksonomeetrilisel joonisel saame näidata mingi jälgkolmnurga, kui teljed on antud (§ 9, järeldus 3). Valime teljel x^a vabalt mingi punkti X ja konstrueerime vastava jälgkolmnurga XYZ.

Kuidas määrata, näiteks, $m_x = \frac{O^aX}{\overline{OX}}$? Jooniselt saame mõõta lõigu $\overline{O^aX}$. Tuleks veel vaid määrata lõigu $\overline{OX}$ tõeline pikkus. Jooniselt 11b näeme, et ruumis $\overline{OX}$ esineb täisnurkses kolmnurgas XOY. Pöörame selle kolmnurga ümber külje $\overline{XY}$ kuni ta jõuab projektsioonitasandile. Siis punkt O kirjeldab ruumis liikudes ringjoone, mis asetseb sirgega XY ristioleval tasandil σ', mille projektsiooniks on ristsirge läbi O^a. Järelikult punkt O pöörend $\bar{O}$ tuleb σ^a-le. Teiselt poolt arvestame, et kolmnurgal XOY on tipu O juures täisnurk ja sellega saame pöörendil konstrueerida selle täisnurga kui ringjoone diameetrile XY toetuva piirdenurga. Selleks leiame lõigu XY keskpunkti K_1 ning tõmbame ringjoone raadiusega $\overline{XK_1}$. Saadud kolmnurk XOY ongi otsitav kolmnurk oma tõelises suuruses ja kujus. Ühtlasi oleme saanud telgede pöörendid $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ projektsioonitasandil . Kui nüüd mõõta jooniselt lõigu $\overline{\bar{O}X}$ pikkus samades ühikutes, milles me mõõtsime lõiku $\overline{O^aX}$, saame arvutada

$$m_x = \frac{O^aX}{\bar{O}X}, \quad \text{sest} \quad \overline{\bar{O}X} = \overline{OX}.$$

Sama konstruktsiooni põhjal saame määrata ka

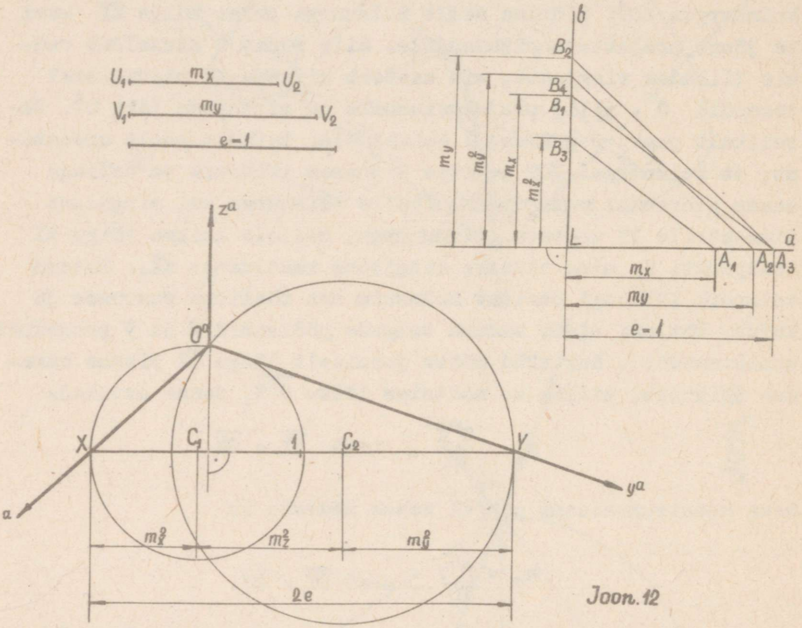
$$m_y = \frac{O^aY}{\bar{O}Y}, \quad \text{sest} \quad \overline{\bar{O}Y} = \overline{OY}.$$

Kolmanda moondeteguri võime arvutada seosest $m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 2$ pärast seda, kui kaks neist on teada. Ent graafiliste ülesannete lahendamisel on sageli hoopis kasulikum ka kolmas moondetegur määrata vahetult jooniselt. Selleks tuleb korrata eespool kirjeldatud võtet kas $\triangle$ OYZ või $\triangle$ OZX jaoks. Nende kaudu saame määrata pöörendil $\overline{OZ}$ tõelise pikkuse.

Kui ristaksonomeetrias telgede projektsioonid määravad üheselt moondetegurid, siis kerkib küsimus, kas ka pöördülesanne on üheselt lahendatav. Et moondetegurid iseloomustavad ristaksonomeetria korral kaldenurki projektsioonitasandite suhtes, siis peavad olema <u>üheselt määratud aksonomeetrilised</u>

teljed vastavalt moondeteguritele.

Vaatame, kuidas ristaksonomeetrias leida aksonomeetrilisi telgi, kui on antud moondetegurid. Olgu meil antud kaks moondetegurit, näit. m_x ja m_y lõikudena $\overline{U_1U_2}$ ja $\overline{V_1V_2}$ ning ruumis ühiklõik a. Kolmas moondetegur on siis $m_z = \sqrt{2-(m_x^2 + m_y^2)}$ (joon. 12). Moondetegurite ruudud määrame



Joon. 12

graafiliselt, nagu näidatud joonisel 12. Selleks kasutame kahte ristuvat sirget a ja b. Kanname sirgele a punktist L alates antud lõigud $\overline{U_1U_2}$ ja $\overline{V_1V_2}$ ning antud ühiku e=1. Sirgele b märgime lõigud $m_x = \overline{U_1U_2}$ ja $m_y = \overline{V_1V_2}$ alates samast punktist L. Sarnaste kolmnurkade kaudu leiame sirgel b lõigud m_x^2 ja m_y^2.

Lõigu m_x^2 määramiseks tõmbame punktist A_1 paralleeli sirgega A_3B_1. Saame kaks sarnast täisnurkset kolmnurka: $\triangle LA_3B_1$ ja $\triangle LA_1B_3$, kus

$$\frac{LA_1}{LA_3} = \frac{LB_3}{LB_1}.$$

Et $\overline{LA_1} = m_x$, $\overline{LA_3} = 1$, $\overline{LB_1} = m_x$, saame

$$\overline{LB_3} = \frac{m_x \cdot m_x}{1} = m_x^2.$$

Analoogiliselt leiame m_y^2 kolmnurgast LA_2B_4, kus $A_2B_4 \parallel A_3B_2$.

Joonisel 12 on võetud m_z^2 määramiseks lõik $\overline{XY}$ pikkusega 2e. Pärast seda, kui on leitud m_x^2 ja m_y^2, saame määrata m_z^2 lõigu $\overline{XY}$ kaudu: $m_z^2 = \overline{XY} - (m_x^2 + m_y^2)$.

Selleks, et määrata aksonomeetrilisi telgi vastavalt antud ristaksonomeetrilistele moondeteguritele, joonestame ringjooned tsentritega lõigul XY, nii et $\overline{XC_1} = m_x^2$ ja $\overline{C_2Y} = m_y^2$. Konstrueeritud ringjoonte lõikepunktid määravad aksonomeetriliste telgede alguspunkti O^a ning x-telg projekteerub sirgele O^aX, y-telg - O^aY-le ning z-telje projektsioon peab olema risti XY-ga. (Põhjendus O. Rünk, N. Paluver - "Kujutav geomeetria", Tallinn 1961, lk. 232-233).

13. KUJUNDI PROJEKTSIOON VABALT VALITUD RISTAKSONOMEETRIAS

Esitada kompleksjoonisel antud hulktahukas vabalt valitud ristaksonomeetrias (joon. 13).

Valime vabalt x^a, y^a ja z^a ühest punktist O^a, nii et neist igaüks jaotaks kahe ülejäänud telje vahelist nürinurka (ristaksonomeetrias telgede projektsioonide kohta kehtiv tingimus — §9, järeldus 2).

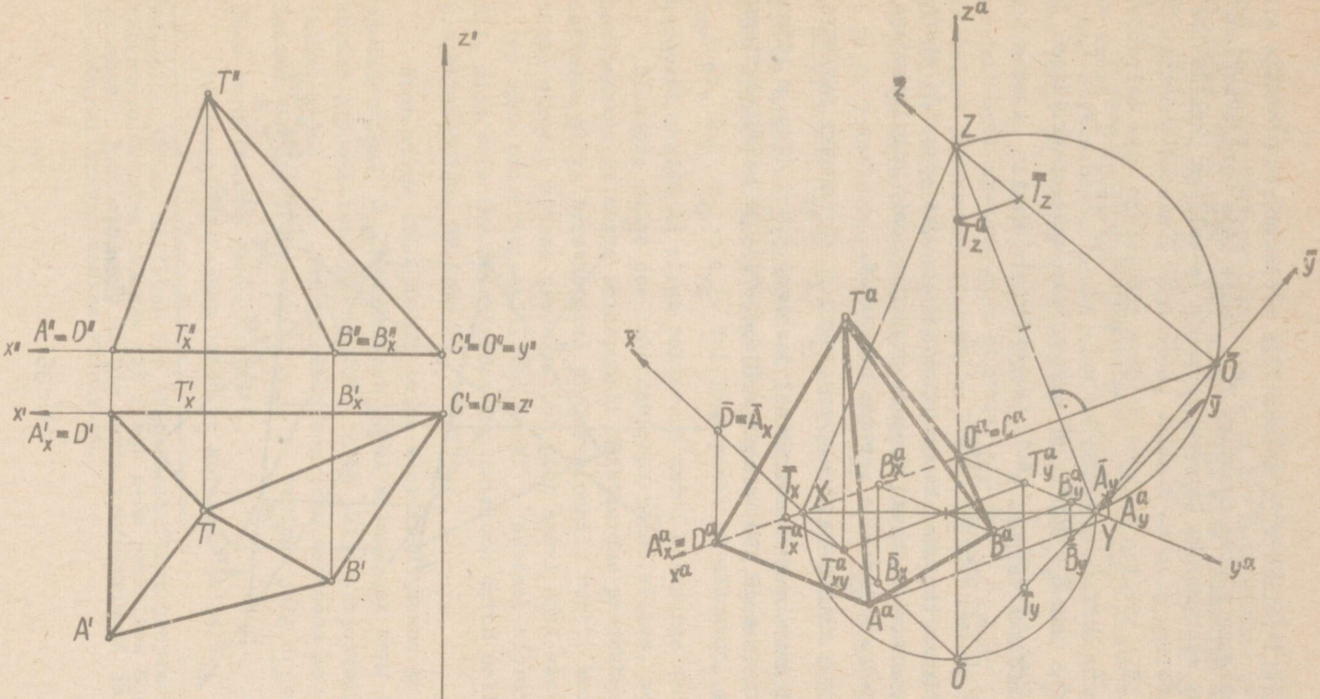
Aksonomeetrilise kujutise saamiseks kinnistame kujundi koordinaatteljestiku külge. Et kujund on antud kompleksjoonisel, peame näitama samal joonisel ka vastavad koordinaatteljed, mille külge kujundit kinnistame. Olgu x-telg valitud mööda külge DC, y-telg AD-ga paralleelne läbi tipu C. Siis z-telg olles kummagagi risti, on ühtlasi risti tahuga ABCD, mis on paralleelne põhiekraaniga. Tähistame valitud koordinaattelgede projektsioonid kompleksjoonisel. Nüüd saame kompleksjoonise kaudu määrata tippude koordinaadid naturaalühikutes. Aksonomeetrias koordinaatlõigud üldjuhul teisenevad vastavalt moondeteguritele. Järelikult tuleb eelnevalt määrata aksonomeetrilised moondetegurid vastavalt telgede projektsioonidele. Moondetegurite määramiseks kasutame jälgkolmnurka XYZ ja ruumikolmnurkade OXY ja YOZ pöörendeid, nagu eespool kirjeldatud (joon. 11). Leiame pöörendid $X\overline{O}Y$ ja $Y\overline{O}Z$ joonisel 13.

Loomulike koordinaatlõikude järgi saame nüüd määrata koordinaatlõigud valitud aksonomeetrilisel joonisel. On ilmne, et aksonomeetrilisel joonisel $C^a \equiv O^a$. Tipu D aksonomeetrilise projektsiooni määramiseks piisab vaid x-telje sihilise koordinaatlõigu projektsiooni määramisest, sest punkt D asetseb x-teljel. Mõõdame kompleksjoonisel lõigu $\overline{O'D'}$. Saadud pikkuse kanname telje x pöörendile $\overline{x}$ alates punktist $\overline{O}$. Leitud punktile $\overline{D}$ vastab aksonomeetrilisel teljel x^a punkt D^a, kus $\overline{D}D^a \parallel \overline{O}O^a$.

Punkti A ja B aksonomeetrilise projektsiooni määramiseks tuleb leida x- ja y-telje sihiliste koordinaatlõikude projektsioonid, sest teljestiku valiku tõttu kolmas koordinaatlõik on võrdne nulliga. Nii näiteks B aksonomeetrilise projektsiooni määramiseks mõõdame kompleksjooniselt kõigepealt esimese koordinaadi x-telje sihil, s.o. $x_B = \overline{O'B'}$. Selle lõigu tõelise pikkuse kanname x-telje pöörendile alates punktist $\overline{O}$, nagu punkti D korral. Vastavalt $\overline{B}_x$-le saame leida B_x^a x^a-l. Teine koordinaatlõik on kompleksjoonisel määratud lõiguga $\overline{B_xB'}$. Aksonomeetrilisel joonisel ta peab asetsema y-telje projektsiooniga paralleelsel sihil, mis läbib punkti B_x^a. Vastava koordinaatlõigu pikkuse projektsiooni saame leida $\overline{y}$ kaudu. Selleks mõõdame kompleksjooniselt $\overline{B_x'B'}$ pikkuse ja kanname $\overline{y}$-le alates punktist $\overline{O}$, nii et $\overline{\overline{O}\overline{B}_y} = \overline{B_x'B'}$. Saadud punkti $\overline{B}_y$ järgi leiame y^a-l B_y^a, kusjuures $\overline{\overline{B}_yB_y^a} \parallel \overline{O}O^a$. Mõõtes nüüd aksonomeetrilisel joonisel B_x^a-st alates y^a-teljega paralleelsel sihil $\overline{O^aB_y^a}$ pikkuse lõigu, saame aksonomeetrilisel joonisel tipu B projektsiooni B^a. (Sama punktini jõuaksime, kasutades $\overline{\overline{y}}$.)

Analoogiliselt leiame ka tipu A aksonomeetrilise projektsiooni.

Tipu T projektsiooni T^a määramiseks aksonomeetrias tuleb määrata kolmest lülist koosneva koordinaatmurdjoone projektsioon. Kahe esimese lüli projektsioonide kaudu eespool kirjelda-


z'
T''
A''=D''
x''
T''_x
$B''=B''_x$
C''=O''=y''
x'
T'_x
B'_x
C'=O'=z'
$A'_x=D'$
T'
B'
A'
y'
z^a
$\bar{z}$
Z
$\bar{T}_z$
T^a_z
$\bar{y}$
T^a
$\bar{x}$
$\bar{O}$
$\bar{D}=\bar{A}_x$
$O^a=C^a$
$\bar{T}_x$
X
B^a_x
T^a_y
B^a_y
$\bar{A}_y$
A^a_y
$A^a_x=D^a$
T^a_x
B^a
Y
y^a
x^a
T^a_{xy}
$\bar{B}_x$
$\bar{B}_y$
$\bar{T}_y$
A^a
$\bar{y}$
$\bar{O}$

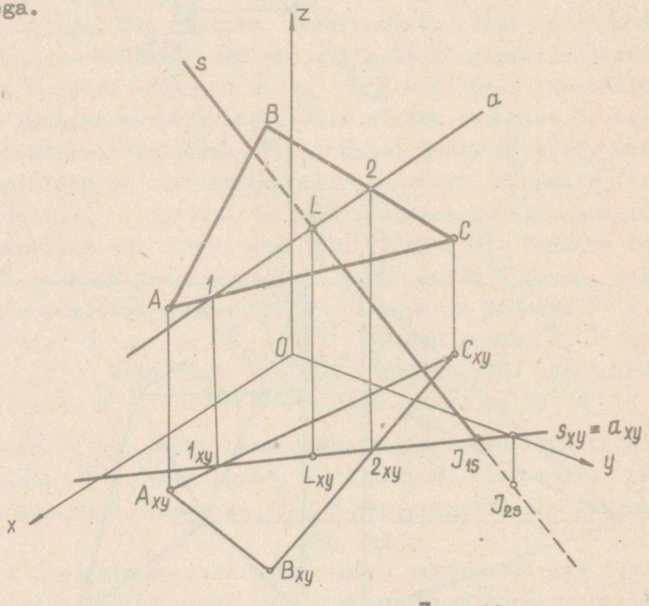
Joon. 13

tud viisil leiame T^a_{xy}. Kolmas lüli projekteerub z^a-telje sihilise lõiguna alates punktist T^a_{xy}. Selle lüli projektsiooni pikkuse määramiseks kanname kolmanda (z-teljega paralleelse) lüli tõelise pikkuse z-telje pöörendile $\overline{\overline{z}}$ alates punktist $\overline{O}$. Selle lüli tõelise pikkuse mõõdame kompleksjoonise esiprojektsioonilt, s.o. $\overline{T'_xT'}$. Seega $\overline{\overline{OT}}_x = \overline{T''_xT'}$. Vastavalt $\overline{\overline{T}}_z$ saame määrata T^a_z, kui $\overline{\overline{T}}_z T^a_z \| \overline{\overline{O}}O^a$. T^a määramiseks aksonomeetrilisel joonisel mõõdame teljega z^a paralleelsel sihil alates T^a_{xy}-st $O^aT^a_z$ pikkuse lõigu.

Pärast tippude aksonomeetriliste projektsioonide määramist ühendame vastavad tippude projektsioonid sirglõikudega arvestades hulktahuka servade nähtavust.

14. SIRGE JÄLJED KOORDINAATTASANDEIL JA LÕIKEPUNKT TASANDIGA

Määrata aksonomeetrilisel joonisel antud sirge s lõikepunkt kolmnurga ABC tasandiga (joon. 14) ja koordinaattasanditega.



Joon. 14

Teatavasti on punkt, sirge jne. aksonomeetrias antud, kui on teada tema projektsioon koos ühe teistkordse projektsiooniga. Olgu meie juhul antud sirge s ja kolmnurga tippude projektsioonid ja nende teistkordsed projektsioonid xy-tasandil.*

Sirge lõikepunkti määramiseks kasutatakse teatavasti üldjuhul abitasandit. Antud juhul on sobivaks abitasandiks sirget läbiv ja ruumis xy-tasandiga ristiolev tasand. Sel juhul abisirge a, mida mööda abitasand lõikab kolmnurga tasandit, projekteerub xy-tasandile sirgena, mis ühtub s_{xy}-ga. Et vaadeldav lõikesirge asetseb ka kolmnurga ABC tasandil, siis ta lõikab selle tasandi sirgeid. Antud juhul on kerge näha, et a-l on ühised punktid külgedega AC ja BC. Tähistame need 1 ja 2. Teistkordse projektsiooni 1_{xy} ja 2_{xy} järgi leiame 1 ja 2, kus $1\,1_{xy} \parallel z \parallel 2\,2_{xy}$. Sirge a aksonomeetrilise projektsiooni määravad punktid 1 ja 2. Otsitava lõikepunkti leiame nüüd sirge a ja antud sirge ühise punktina: $L = a \times s$ ja seega $L_{xy}L \parallel z$, kus $L_{xy} \subset s_{xy}$. Kui lõikepunkt on määratud, saame kergesti uurida ka sirge nähtavust antud kolmnurga suhtes.

Ülesande teise osa lahendamiseks peame silmas, et koordinaattasandi ja sirge lõikepunkti teistkordne projektsioon peab asetsema sirge teistkordsel projektsioonil. Punkti kuuluvuse tõttu sirgele s tema projektsioon peab samal ajal asetsema ka sirge enda projektsioonil. Kui punkt asetseb koordinaattasandil, siis tema üks teistkordne projektsioon ühtub selle punkti projektsiooniga. Näiteks $J_{1s} \equiv s \times s_{xy}$.

Sama sirge lõikepunkti teise koordinaattasandiga (näit. yz-tasandiga) J_{2s} määramiseks peame silmas, et tema teistkordne projektsioon xy-tasandil tuleb telje projektsioonile (näit. y-le). Et see projektsioon peab asetsema ka s_{xy}-l, siis leiame vastava lõikepunkti: $s_{xy} \times y$. Otsitav jälg J_{2s} on z-teljega paralleelsel sihil sirgel s.

Analoogiliselt saab leida ka kolmanda jälje J_{3s}.

---

*Edaspidi jätame näidetes ära aksonomeetrilist projektsiooni tähistava ülemise indeksi "a" (nagu seda praktikas sageli tehakse) joonistel, kus ei ole karta projektsiooni ja tõelise kujundi äravahetamise võimalusi.

15. SIRGE LÕIKEPUNKTID PINNAGA

Määrata sirge s lõikepunkt antud püramiidiga ABCT (joon. 15 ja 16).

Asetsegu püramiidi tahk ABC xy-tasandil, siis põhjatahu xz teistkordne projektsioon ühtub selle tahu enda projektsiooniga. Tipp T on määratud aga tema enda projektsiooni T ja teistkordse projektsiooniga T_{xy}. Samuti on antud sirge s.

Ülesande lahendamiseks tuleb valida mingi abitasand läbi antud sirge s ning määrata tema lõikejoon hulktahukaga. Otsitavateks punktideks on leitud lõikejoone ja antud sirge ühised punktid.

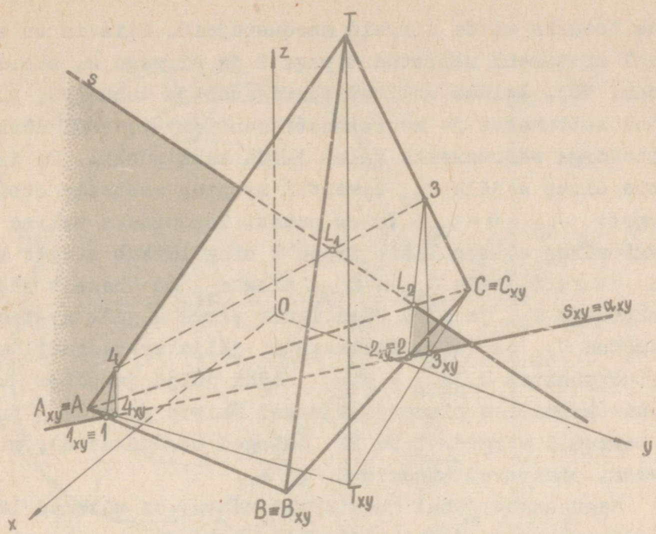
Et meil on tegemist hulktahukaga, siis lõikejooneks tuleb hulknurk, sõltumata tasandi asendist.

Nii võiksime näiteks valida abitasandi, mis läbib sirget s ja on risti xy-tasandiga (joon. 15). Lõikejooneks on hulknurk, mille tippudeks on antud hulktahuka servade lõikepunktid abitasandiga $\alpha(s \times s_{xy})$. Et abitasand on risti xy-tasandiga, siis tema teistkordseks projektsiooniks xy-tasandil α_{xy} on sirge, mis ühtib sirgega s_{xy}.

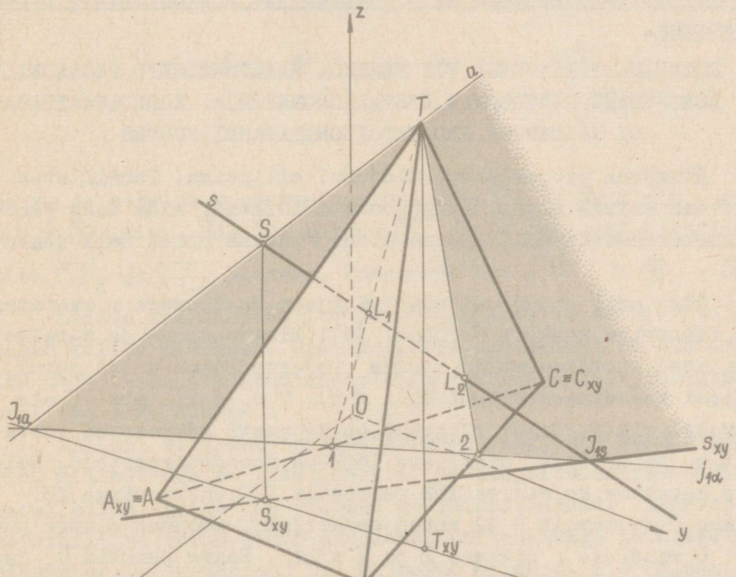
On ilmne, et antud juhul servad AB ja BC lõikavad abitasandit punktides 1 ja 2. Seejuures $1 \equiv 1_{xy} = \alpha_{xy} \times AB$ ja $2 \equiv 2_{xy} = \alpha_{xy} \times BC$.

Hulktahuka ülejäänud servade lõikepunktide määramiseks abitasandiga leiame antud juhul nende servade teistkordsed projektsioonid xy-tasandil. Jooniselt näeme, et serval AT ja CT on olemas abitasandiga ühine punkt, sest $A_{xy}T_{xy} \times \alpha_{xy} = 4_{xy}$ ja $C_{xy}T_{xy} \times \alpha_{xy} = 3_{xy}$. Nende järgi leiame z-ga paralleelsel sihil $4 \subset AT$ ja $3 \subset CT$. Ühendades sirglõikudega leitud punktid hulktahuka servadel, arvestades kuuluvust tahkudele, leiamegi abitasandi lõikejoone antud hulktahukaga. Hulknurga külgede ja antud sirge ühised punktid L_1 ja L_2 ongi otsitavateks punktideks. On ilmne, et L_1 ja L_2 teistkordsed projektsioonid xy-tasandil asetsevad sirgel s_{xy}. Seega on meie ülesanne lahendatud.

Teiselt poolt võime sama ülesande lahendamist vaadelda kui sirge ja koonilise pinna lõikepunktide määramist. Püramiidi vaatleme sel juhul koonilise pinna erikujuna. Koonilise pinna korral valime abitasandi alati läbi tipu, selleks et lõiku-



Joon. 15



Joon. 16

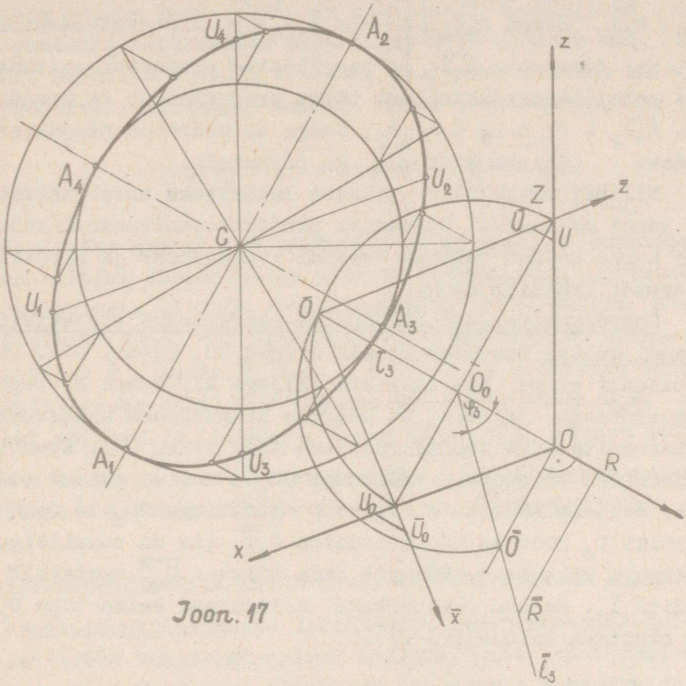
mine toimuks mööda sirgeid moodustajaid. Niisiis on antud juhul abitasand määratud tipuga T ja sirgega s, s.o.$\alpha(s,T)$ (joon. 16). Leiame valitud abitasandi ja tahu ABC, s.t. antud juhul abitasandi ja koordinaattasandi (xy-tasandi) lõikejoone. Lõikesirge määramiseks tuleb leida kaks punkti. On ilmne, et antud sirge s jälg J_{1s} tasandil xy peab asetsema otsitaval sirgel: $J_{1s} = s \times s_{xy}$. Teise punkti leidmiseks valime vabalt mingi sirge a, mis läbib tippu T ning lõikab sirget s. Olgu meil $a \times s = S$, siis $S_{xy} \subset s_{xy}$, ning a_{xy} on üheselt määratud punktidega T_{xy} ja S_{xy}. Järelikult sirge a jälg xy-tasandil on määratud $J_{1a} \equiv a \times a_{xy}$. Abitasandi jälje xy-tasandil määravad leitud punktid $J_{1s}J_{1a} \equiv j_{1\alpha}$. Läbi jälje ja põhja kontuurjoone (koonilise pinna juhtjoone) ühiste puntide 1 ja 2 saame tahkudel sirged 1T ja 2T (sirged moodustajad), millel asetsevadki otsitavad punktid L_1 ja L_2.

Nagu antud juhul joonistelt nähtub, on mõlemad lahenduskäigud samaväärsed abikonstruktsioonide arvu poolest. Viimane lahenduskäik on aga üldisem, sest seda saab rakendada mitte ainult hulktahuka, vaid ka kooniliste ja silindriliste pindade korral.

16. KOORDINAATTASANDEIL VÕI NENDEGA PARALLEELSEIL TASANDEIL ASETSEVATE RINGJOONTE RISTAKSONOMEETRIA. KOORDINAATTASANDI KALDENURK PROJEKTSIOONITASANDI SUHTES

Ringjoon projekteerub üldjuhul ellipsina. Tehnilistes detailides esineb sageli ringjoonseid lõikeid, mida saab vaadelda koordinaattasandil asetsevaina. Peatume eriti neil juhtudel.

Olgu meil antud näiteks ringjoon raadiusega r zx-tasandil tsentriga punktis C (joon. 17). Ringjoone x- ja z-telje sihilised ristdiameetrid ruumis projekteeruvad antud juhul ellipsi kaasdiameetritena $U_1U_2 \parallel x$, $U_3U_4 \parallel z$, mis ei ole omavahel risti. Nende pikkused on kergesti määratavad vastavalt x- ja z-telje sihiliste lõikude moondeteguritele. Selleks kasutame kolmnurga XOZ pöörendit $X\bar{O}Z$ ümber sirge XZ. Leiame $\bar{O}$ vastavalt § 12 antud eeskirjale. Mõõdame alates punktist $\bar{O}$ raadiuse r pikkuse $\bar{x}$ ja $\bar{z}$ sihil. Saame punktid $\bar{U}_o$ ja $\bar{U}$, kus $\overline{\bar{O}\bar{U}_o} = r$ ja $\overline{\bar{O}\bar{U}} = r$. Vastavalt leitud punktidele leia-



Joon. 17

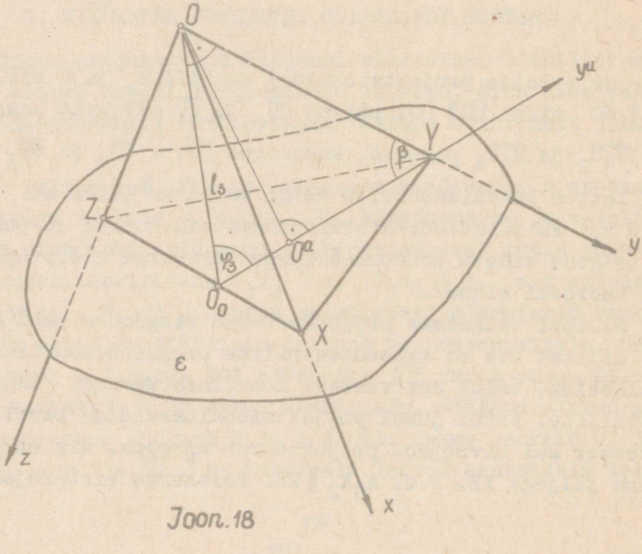
me x- ja z-telje projektsioonidel punktid U_o ja U nii, et $\overline{U}_o U_o \parallel \overline{O}O$ ning $\overline{U}U \parallel \overline{O}O$. Lõigud $\overline{OU}_o$ ja $\overline{OU}$ määravad kaasdiameetrite $\overline{U_1U_2}$ ja $\overline{U_3U_4}$ pikkuse, kusjuures $\overline{CU}_1 = \overline{OU}_o$ ja $\overline{CU}_3 = \overline{OU}$.

Leitud kaasdiameetrite järgi võiksime leida nii telgede sihid kui ka pikkused. Ristaksonomeetria korral on otstarbekam telgede vahetu konstrueerimine täisnurga ristprojektsiooni teoreemi alusel.

Ellipsi telgedeks projekteeruvad ringjoone need diameetrid, millest üks on aksonomeetrilise projektsioonitasandiga paralleelne, teine aga vastava koordinaattasandi langusjoone sihiline. Antud juhul projektsioonitasandiga paralleelne diameeter kui nivoojoon projekteerub sirgena, mis on paralleelne jäljega XZ, s.o. $A_1A_2 \parallel XZ$. Täisnurga ristprojektsiooni tõttu temaga ristuv langusjoon projekteerub sirgena $A_3A_4 \perp A_1A_2$. Seega $A_3A_4 \perp XZ$ ehk $A_3A_4 \parallel y$ ristaksonomeetria tõttu. Et diameeter $\overline{A_1A_2}$ on paralleelne projektsioonitasandiga, siis paralleelprojektsiooni tõttu projekteerub ta moondevabalt, s.o. $\overline{A_1A_2} = 2r$ ning $C \subset A_1A_2$. Seega on määratud projektsiooniks saadava ellipsi suurtelg ka pikkuselt.

Ellipsi väiketelje pikkuse leidmiseks tuleb määrata antud juhul zx-tasandi kaldenurk projektsioonitasandi suhtes. Seda nurka mõõdab vastava tasandi langusjoone ja projektsioonitasandi vaheline nurk.

Koordinaattasandi kaldenurga määramiseks projektsioonitasandi suhtes vaatleme ruumis sirget OO_o (joon. 17). Ta on zx-tasandi sirge, mis on risti jäljega XY, seega on tegemist langusjoonega. Selleks, et määrata langusjoone kaldenurka projektsioonitasandi suhtes, vaatleme tema lõiku $\overline{OO_o}$. Konstrueerime joonisel täisnurkse kolmnurga $OO_o\overline{O}$, milles esineb otsitav nurk. Selleks tõmbame punktist O ristsirge OO_o-le (ehk y) ja punktist O_o mõõdame hüpotenuusina $\overline{O_o\overline{O}}$, mis on ruumilõigu $\overline{OO_o}$ tõeliseks pikkuseks. Määrame tema lõiguna $\overline{O_o\overline{O}}$ vastavalt pöörendilt $\overline{l}_3$. Saadud täisnurkses kolmnurgas saame tipu O_o juures otsitava kaldenurga φ_3 .



Joon. 18

See kaldenurk φ_3 on arvutatav ka moondetegurite tuntud arvuliste seoste kaudu. Näiteks zx-tasandi langusjoont l_3 võime vaadelda täisnurkses kolmnurgas O_oYO (joonis 18), kus $O_oO \perp OY$. Järelikult $\sin\varphi_3 = \cos\beta$, kus β on y-telje kaldenurk projektsioonitasandi suhtes. Seega $\cos\beta = m_y$, ehk

$$\cos\varphi_3 = \sqrt{1 - \sin^2\varphi_3} = \sqrt{1 - m_y^2}.$$

Kasutades graafilist meetodit ringjoone projektsiooniks saadava ellipsi lühema telje pikkuse määramiseks, arvestame, et paralleelsete lõikude projekteerimisel suhe säilib. Mõõdame $O_o\overline{\overline{O}}$ sihil (joon. 17) ringjoone raadiuse tõelise pikkuse alates punktist O_o, saame $\overline{\overline{R}}$, s.o. $\overline{O_o\overline{\overline{R}}} = \overline{CA_1} = r$. Saadud lõigule vastavalt leiame sihil O_oO vastava moondatud lõigu $\overline{O_oR}$, mis määrabki väiketelje pikkuse. Seega $\overline{CA_3} = \overline{O_oR}$. Pärast telgede pikkuste leidmist saame konstrueerida ellipsi tuntud graafilise võttega - kontsentriliste ringjoonte (telgringjoonte võtte) abil.

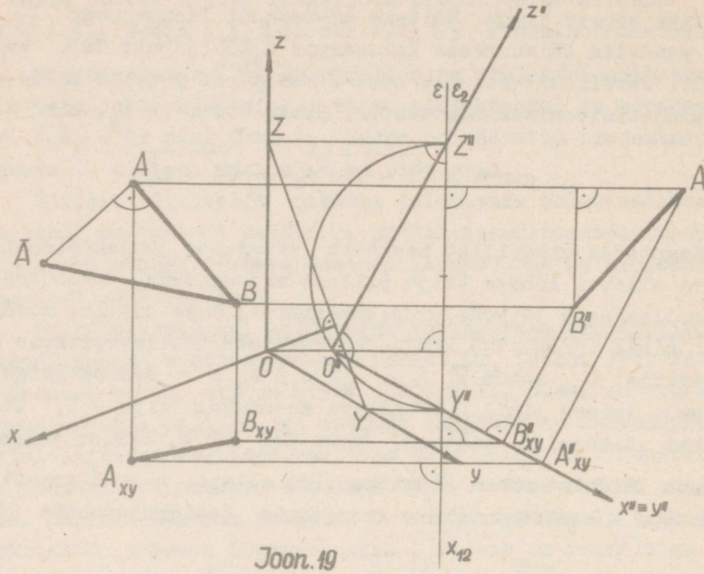
17. RISTAKSONOMEETRIAS ANTUD LÕIGU TÕELISE PIKKUSE LEIDMINE

Positsiooniülesannete lahendamine aksonomeetrias toimub analoogiliselt kompleksjoonisel rakendatavate võtetega. Mõõduülesannete lahendamine nõuab aga eri võtete rakendamist.

Näiteks vaatleme ristaksonomeetrias antud lõigu $\overline{AB}$ tõelise pikkuse leidmist. Olgu meil antud lõigu $\overline{AB}$ projektsioon koos teistkordse projektsiooniga $\overline{A_{xy}B_{xy}}$ kinnistatult teljestikulc xyz (joon. 19).

Lõigu tõelist pikkust võime määrata näiteks täisnurkse kolmnurga võttega, kui on antud tema kaks ristprojektsiooni ristuvatel ekraanidel.

Valime lisaks aksonomeetrilisele ekraanile ε veel ühe projektsioonitasandi ε_2, mis on temaga risti ning z-teljega paralleelne. Sel juhul $x_{12} \equiv \varepsilon \times \varepsilon_2$ on paralleelne z-ga. Uuele ekraanile xy-tasand projekteerub sirgena, mis on risti z-telje projektsiooniga sellel tasandil. Kui aksonomeetrilisel tasandil on antud jälgkolmnurga külg YZ, siis tema projektsioon ε_2-l peab asetsema teljel x_{12}, s.o. $Y''Z'' \equiv x_{12}$.



Joon. 19

Vaadeldes nüüd saadavat kompleksjoonist on kerge määrata z'' ja $x'' \equiv y''$, arvestades nende ristseisu. Konstrueerime lõigule $\overline{Z''Y''}$ kui diameetrile ringjoone. Punkt O'' peab asetsema punkti O läbival sidejoonel. Punktide A'' ja B'' määramiseks kasutame sidejooni, mis on risti x_{12}-ga ning teistkordsetele projektsioonidele vastavaid esiprojektsioone A''_{xy} ja B''_{xy}, mis võimaldavad iseloomustada punktide A ja B kaugusi xy-tasandist ($B''_{xy}B_{xy} \perp x_{12}$, $B''_{xy}B \perp x''$).

Punktide A ja B uute projektsioonide kaudu leiame nende kauguste vahe aksonomeetrilisest projektsioonitasandist. Selle järgi saame lõigule $\overline{AB}$ konstrueerida täisnurkse kolmnurga, mille hüpotenuusiks ongi lõigu $\overline{AB}$ tõeline pikkus.

18. STANDARDSED RISTAKSONOMEETRILISED PROJEKTSIOONID

Seni vaatlesime vabaltvalitud ristaksonomeetriat. Vabaltvalitud telgede projektsioonide järgi (nõudega nurkade jaotamise kohta) saime moondetegurid vastava jälgkolmnurga järgi, või vastupidi.

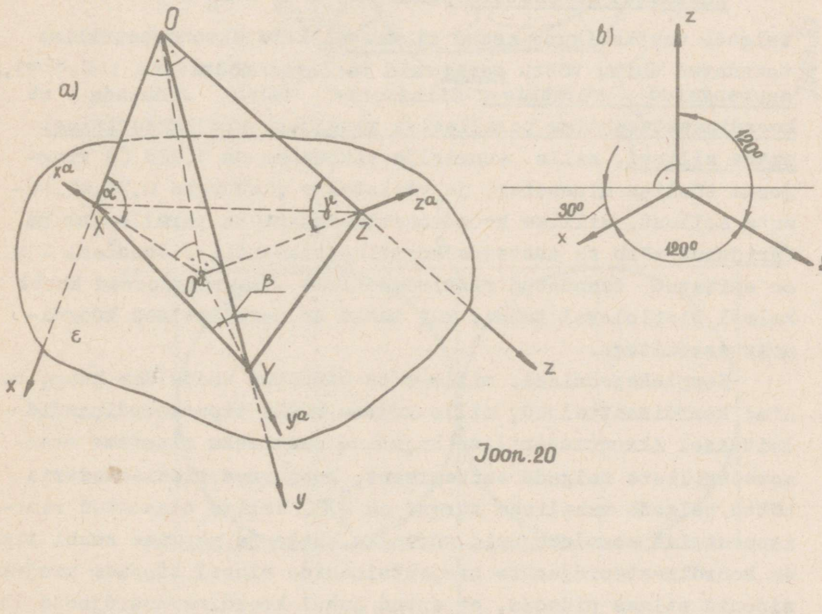
Tehnilises joonestamises rakendatakse aga sageli ristaksonomeetriat just kahel erikujul: isomeetriat ja standardset dimeetriat, kus ühe telje sihil on moondetegur pool teiste telgede sihilisest moondeteguriist. Vaatleme neil juhtudel jälgkolmnurki ja telgede vahelisi nurki.

a) Ristisomeetria. . Sel juhul $m_x = m_y = m_z$. Ent $m_x = \cos\alpha$, $m_y = \cos\beta$ ja $m_z = \cos\gamma$ (vt. § 9), kus α, β ja γ on vastavalt koordinaattelgede kaldenurgad aksonomeetrilise projektsioonitasandi suhtes. Seega antud juhul:

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma$$

ning $\alpha = \beta = \gamma$ (sest vaatleme teravnurki).

Jooniselt 20a näeme, et $\overline{OO^a}$ on täisnurksete kolmnurkade XO^aO, YO^aO ja ZO^aO üheks kaatetiks ja seega



Joon.20

$$\overline{OO^a} = \overline{OX}\sin\alpha, \quad \overline{OO^a} = \overline{OY}\sin\beta \quad \text{ja} \quad \overline{OO^a} = \overline{OZ}\sin\gamma.$$

Võrdsete nurkade puhul järeldub neist võrdustest,

$$\overline{OX} = \overline{OY} = \overline{OZ}.$$

Et need lõigud on täisnurksete kolmnurkade XYO, YZO ja ZXO kaatetiteks, siis ka nende kolmnurkade hüpotenuusid on võrdsed, s.o.

$$\overline{XY} = \overline{YZ} = \overline{ZX}.$$

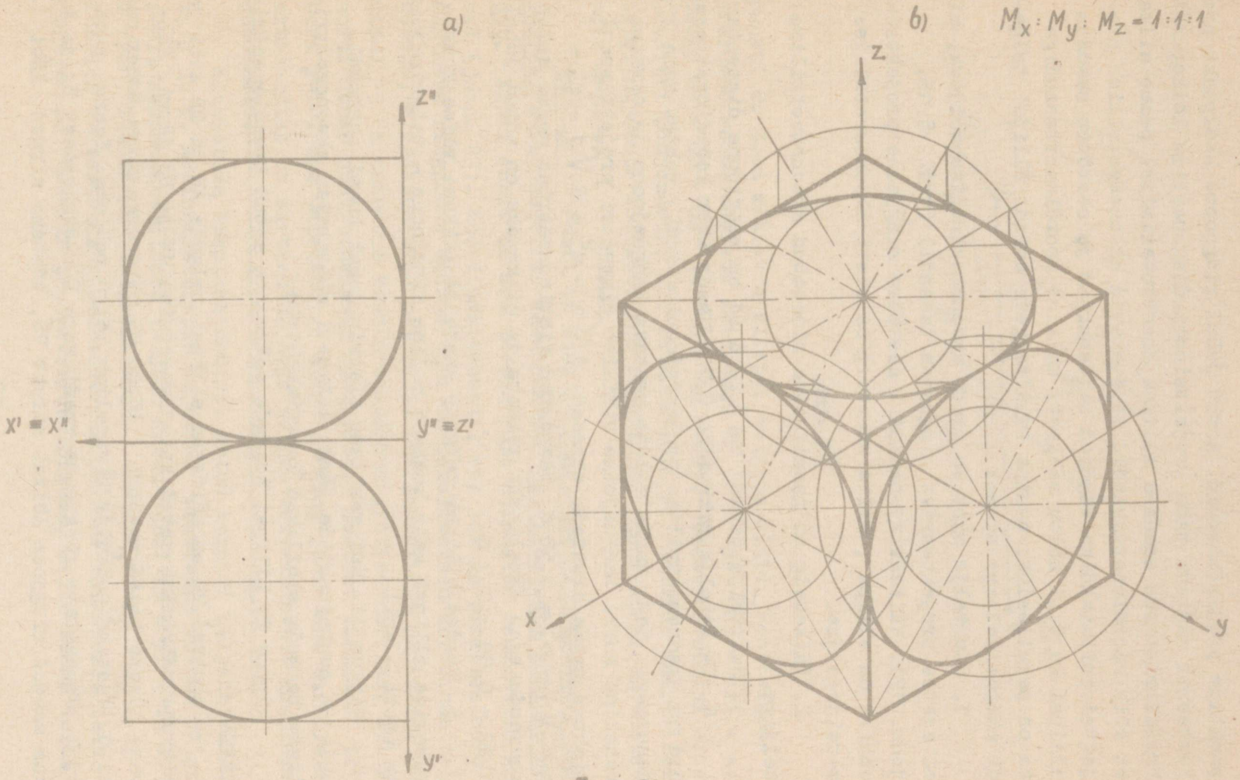
Niisiis ristisomeetria korral jälgkolmnurk on võrdkülgne.

Ristaksonomeetrias telgede projektsioonid on jälgkolmnurga kõrgusteks (§9, omadus 1). Seega antud juhul saame, et ristisomeetrias telgede projektsioonide vahelised nurgad on 120° (joon. 20b).

Taandatud isomeetria puhul $M_x : M_y : M_z = 1 : 1 : 1$ telgede vastastikune asend ei muutu, kuid aksonomeetrilise taandatud ühiku tõttu saame vaid vastavas mõõtkavas $1:0,82 \approx 1,22$ suurendatud kujutise. Siinjuures tuleb rõhutada, et koordinaattasandiga paralleelse ringjoone projekteerimisel saame ellipsi, mille suurtelje pikkuseks on 1,22d (d ringjoone tõeline diameeter) ja väiketelje pikkuseks 0,7d, sõltumata sellest, millise koordinaattasandiga ta paralleelne on (erijuhul võib ta asetseda koordinaattasandil). Joonisel 21b on esitatud taandatud ristisomeetrias siseringjooned kuubi kolmel ristioleval tahul, kui tahud on paralleelsed koordinaattasanditega.

Kompleksjoonisel, millega on määratud vaadeldav kuup, valime koordinaatteljed, mille suhtes kuubi tipu koordinaadid leitakse. Aksonomeetrilise kujutise saamiseks alustame aksonomeetriliste telgede esitamisest, kusjuures ristisomeetria tõttu telgede vahelised nurgad on $\frac{2}{3}\pi$. Valime taandatud ristisomeetrias moondetegurid võrdseks ühega ja määrame kuubi tippude koordinaatmurdjoonte projektsioonide alusel tippude projektsioonid silmas pidades, et antud juhul koordinaatmurdjoone lülid säilitavad oma loomuliku pikkuse.

Ringjoonte projektsioonide määramiseks tuleb leida kesk-



Joon.21

punktide projektsioonid. Antud juhul ringjoone keskpunkt projekteerub vastava tahu projektsiooni diagonaalide lõikepunkti. Projektsiooniks saadava ellipsi konstrueerimisel peame silmas, et kõik koordinaattasandid moodustavad aksonomeetrilise projektsioonitasandiga võrdsed kaldenurgad ja seetõttu saadava ellipsi kuju ei sõltu sellest, millise koordinaattasandiga ta on paralleelne, muutub vaid telgede asend. Ellipsi telgede määramisel arvestame:

1. Suurtelje siht on risti aksonomeetrilise teljega, mis ei asetse projekteeriva ringjoone tasandil (vrd. § 16, joon. 17). Näiteks xy-tasandil asetseva ringjoone projektsiooniks on ellips , mille suurtelg on risti aksonomeetrilise z-teljega jne.

2. Väiketelg on paralleelne nimetatud aksonomeetrilise teljega.

3. Suurtelje pikkus on 1,22 d (d on ringjoone diameeter).

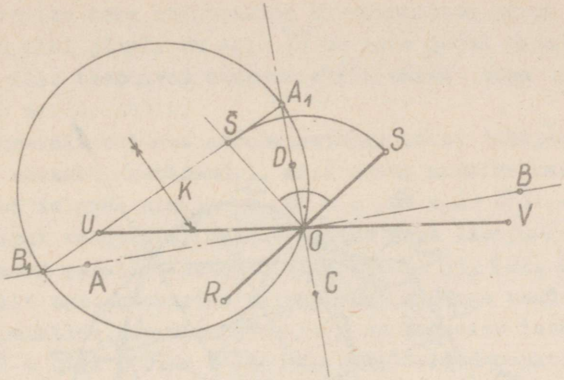
4. Väiketelje pikkus on 0,7 d, sest kõik koordinaattasandid on aksonomeetrilise projektsioonitasandi suhtes sama kaldenurgaga. Seda nurka mõõdab vastava langusjoone ja ekraani vaheline nurk. Langusjoone sihilise diameetri projektsiooni pikkuse saame arvutada seosest $d\sqrt{1 - m_x^2} = d\sqrt{1 - m_y^2} = d\sqrt{1 - m_z^2} = 0,58$ d. Taandatud ristisomeetrias saame selle suurendusega. Järelikult väiketelje pikkuseks on antud juhul $1,22 \cdot 0,58 = 0,7$ d.

5. Teades ellipsi telgede sihte ja pikkusi võime konstrueerida ellipsi kahe kontsentrilise ringjoone - telgringjoonte võtte - abil.

Märkus 1: Kui vaatleme siseringjooni kuubi tahkudel, siis on puutepunktide järgi kergesti määratavad aksonomeetriliste telgede sihilised kaasdiameetrid.

Märkus 2: Ellipsi telgede määramine antud kaasdiameetrite järgi.

Joonisel 22 on näidatud ellipsi telgede AB ja CD sihi ja pikkuse määramine antud kaasdiameetrite UV ja RS järgi. Pöörame lühema kaasdiameetri lõiku OS täisnurga võrra ümber punkti O. Jaotame punktide $\overline{US}$ vahelise lõigu pooleks. Saame punkti K. Joonestame ringjoone raadiusega $\overline{KO}$. Punktidest B_1 ja A_1, kus saadud ringjoon lõikab sirget $\overline{US}$, tõmbame sirged läbi

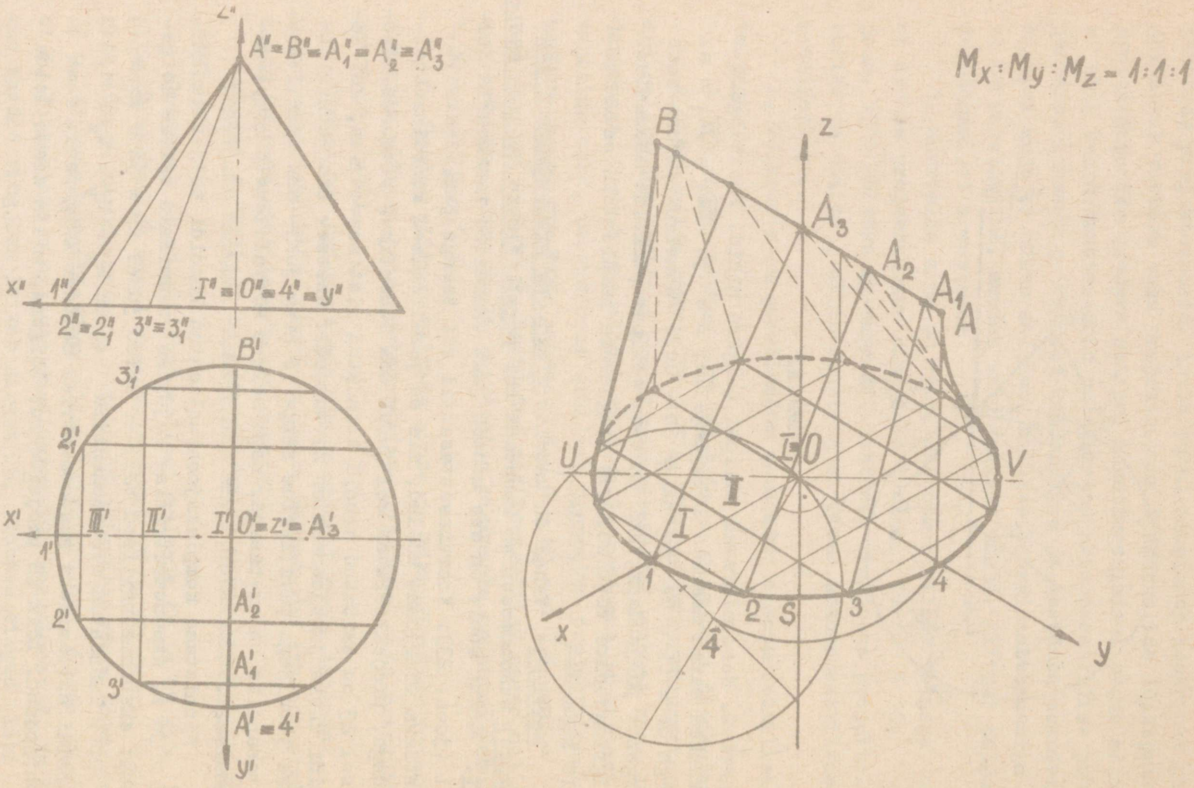


Joon. 22

punkti O. Need määravad ellipsi telgede sihid. Pooltelgede pikkused saame määrata lõikudega $\overline{UB_1} = b$ ja $\overline{UA_1} = \overline{UA_1} = a$. Seega $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{UA}$ ja $\overline{OC} = \overline{OD} = \overline{UB_1}$. Konstruktsiooni saab kergesti põhjendada, kui lähtuda ellipsi punktide määramisel telgringjoonte võttest, kus ringjoonte raadiusteks on vastavalt a ja b.

Märkus 3: Vahel on kasulik ringjoone projektsiooni määramisel aksonomeetrias kasutada nn. paralleelsete kõõlude meetodit. Eriti sobiv on see meetod just taandatud isomeetria korral (joon. 23). Koordinaattasandil või temaga paralleelselt asetseva ringjoone kõõlud, mis on paralleelsed koordinaatteljedega, projekteeruvad sel juhul oma loomulikus pikkuses. Joonisel 23 on esitatud konoid taandatud ristisomeetrias, kui konoidi üheks juhtjooneks on xy-tasandil asetsev ringjoon, teiseks y-teljega paralleelne sirge AB ning juht- ehk parallelismitasandiks on zx-tasand, nagu selgub kõrvalolevalt kompleksjooniselt.

Kinnistame kompleksjoonisel antud konoidi teljestikule x, y ja z. Aksonomeetrilise kujutise saamiseks valime kõigepealt aksonomeetrilised teljed, antud juhul $\widehat{xy} = \widehat{yx} = \widehat{zx} = 120^\circ$. Taandatud ristisomeetria tõttu $M_x = M_y = M_z = 1$. Konoidi esitamiseks aksonomeetrias näitame kõigepealt tema juhtjooned. Lõik AB projekteerub lõiguna, mille saame leida


z''
$A'' = B'' = A_1'' = A_2'' = A_3''$
x''
$1''$
$I'' = 0'' = 4'' = y''$
$2'' = 2_1''$
$3'' = 3_1''$
B'
$3_1'$
$2_1'$
x'
III'
II'
I'
$0' = z' = A_3'$
$1'$
A_2'
$2'$
A_1'
$3'$
$A' = 4'$
y'
$M_x : M_y : M_z = 1:1:1$
B
z
A_3
A_2
A_1
A
U
$\bar{I} = 0$
V
I
1
2
S
3
4
x
$\bar{4}$
y

Joon. 23

aksonomeetrias tema otspunktide koordinaatide järgi või ühe punkti ja sihi järgi. Et lõik $\overline{AB}$ on meie juhul paralleelne y-teljega, siis taandatud aksonomeetria tõttu tema pikkus projekteerub moondevabalt.

Järgnevalt esitame aksonomeetrias teise juhtjoone. Et ringjoon asetseb xy-tasandil, siis saame määrata kaasdiameetrite paari telgede sihil: $2 \cdot \overline{01} = 2 \cdot \overline{04} = 2 \cdot \overline{0'1'} = 2 \cdot \overline{0'4'}$.

Ellipsi konstrueerimiseks leiame veel lisapunkte ringjoonel näidatud paralleelsete kõõlude kaudu: $33_1 \parallel 22_1 \parallel OA$. Nende esitamiseks aksonomeetrias piisab, kui määrame nende ja x-telje lõikepunktide koordinaadid. Et on tegemist isomeetriaga, siis $\overline{OII} = \overline{O'II'}$; $\overline{OI} = \overline{O'I'}$ jne. Läbi leitud punktide tõmbame paralleelsed sirged y-teljega ning mõõdame neile vastavad pikkused $\overline{II3} = \overline{II'3}$; $\overline{III2} = \overline{III'2'}$ jne. Sõltuvalt ringjoone suurusest tuleb valida ka kõõlude arv, mille alusel ellips joonestatakse.

Peale selle võime aga arvestada, et ristaksonomeetria tõttu saame veel määrata projektsiooniks saadava ellipsi telgede sihid (§ 18, märkus 2): $\overline{UV} \perp z$ ja väiketelg RS on z-telje sihiline. Suurtelje pikkuse määrab taandamistegur k = 1,22 (§ 11), millega tuleb korrutada ringjoone diameetri pikkus. Väiketelje pikkuse võime arvutada standardse isomeetria tõttu valemist $\overline{RS}$ = o,7 d (§ 18).

Konoidi esitamisel aksonomeetrias näidatakse veel temal asetsevaid sirgeid moodustajaid ning siis tõmmatakse nähtav kõverjoonne kontuurjoon. Et kompleksjoonise järgi sirged moodustajad on paralleelsed esitasandiga, siis ruumis nad on paralleelsed zx-tasandiga. Järelikult nende teistkordsed projektsioonid on paralleelsed x-teljega.

Valime ringjoonel näiteks punktid 1, 2, 3, 4 jne. Vaatleme neid punkte läbivaid sirgeid moodustajaid $1A_3$, $2A_2$, $3A_1$, 4A jne. Rakendades ringjoone esitamiseks paralleelseid kõõle 33_1, 22_1 jne. võime määrata ringjoone punkte 1, 2, 3 jne. läbivaid sirgjoonseid moodustajaid kasutades veel sirge juhtjoonel asetsevate punktide koordinaate.

Joonisel 23 on näidatud veel väiketelje pikkuse määramine vastavalt kirjeldusele, mis on antud selle paragrahvi märkuses 2.

b) Dimeetriline standardne ristisomeetria

Määrame kõigepealt telgede projektsioonide vahelised nurgad. Nagu märgitud (§ 10, p. 4), standardses dimeetrilises ristaksonomeetrias $m_x = m_z$ ning $m_y = \frac{1}{2} m_x$, kusjuures $m_x = m_z = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Järelikult $m_x = \cos\alpha$ ja $m_z = \cos\gamma$ (§ 9, 2) tõttu $\overline{OX} = \overline{OZ}$ (joonis 24) kui hüpotenuusid ühtivates kolmnurkades OXO^a ja OO^aZ. Sellest järgneb, et jälgkolmnurk peab olema võrdhaarne, sest $\overline{XY}$ ja $\overline{YZ}$ on vastavateks külgedeks ühtivates täisnurksetes kolmnurkades, s.o. $\overline{XY} = \overline{YZ}$. Kolmanda telje projektsioon (y^a antud juhul) kui jälgkolmnurga kõrgus peab olema risti küljega ZX. Võrdhaarse kolmnurga omadusest järgneb, et $\overline{ZY_1} = \overline{Y_1X}$. Kui ühikuna vaadelda lõiku $\overline{OX}$, siis täisnurksest kolmnurgast OXZ leiame $\overline{XZ} = \sqrt{2}$. Seega $\overline{ZY_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ning $\overline{Y_1X} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Täisnurksest kolmnurgast Y_1XO^a saame $\overline{XO^a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, kui $\overline{OX}$ oli ühiklõiguks ning

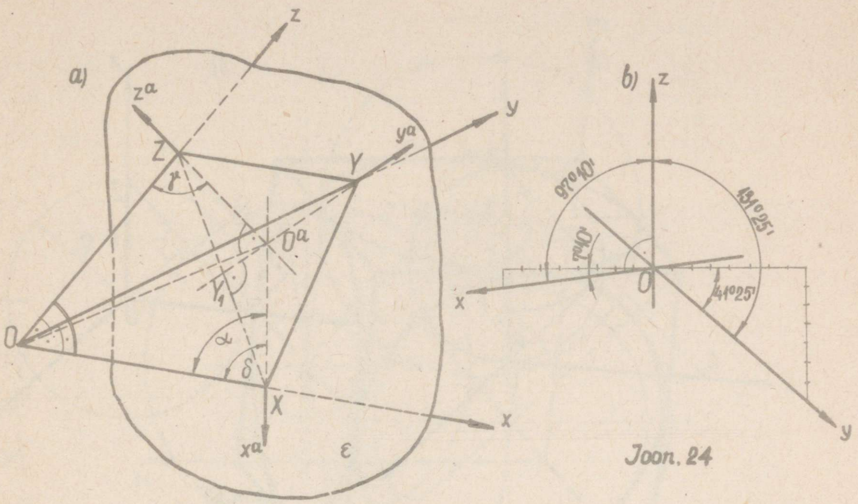
$$\sin\delta = \frac{XY_1}{XO^a} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0{,}75, \text{ millest}$$

$$\delta = 48^\circ 35'$$

ehk $\widehat{XO'Z} = 2\delta = 97^\circ 10'$.

Joonisel 24b on näidatud selle nurga graafiline ligikaudne määramine silmas pidades, et $\tan 7^\circ 10' \approx \frac{1}{8}$. Kolmanda telje projektsiooni määrame kahe aksonomeetrilise telje vahelise nurga poolitajana.

Puuduva telje projektsiooni (antud juhul y) määramiseks võime kasutada ka graafilist võtet, silmas pidades, et $\widehat{xy} = \widehat{yz} = 131^\circ 25'$. Siis vertikaalse z korral y moodustab rõhtsihiga teravnurga $41^\circ 25'$. Kuid $\tan 41^\circ 25 \approx \frac{7}{8}$. Seega y määramiseks võime rõhtsihil mõõta alguspunktist 8 meelevaldset ühikut ning siis temaga ristioleval sihil lõpp-punktist 7 sama ühikut. Saadud punkti ja alguspunkti ühendussirge ongi y-telje projektsiooniks.

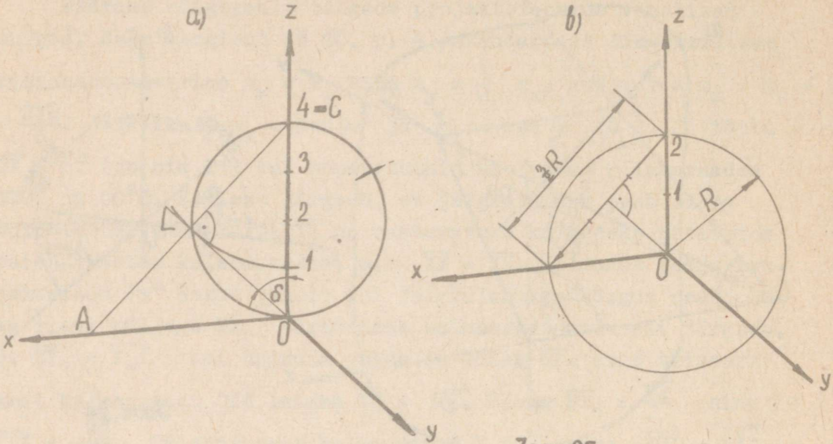


Joon. 24

Joonisel 25a on näidatud dimeetria juhuks aksonomeetriliste telgede <u>täpne konstrueerimisviis</u>. Lähtume võrdusest $\sin\delta = \frac{3}{4}$. Mõõdame vertikaalsirgel (z-teljel) meelevaldse pikkusega 4 ühikut punktist O alates. Tähistame saadud punkti C-ga. Konstrueerime sellele lõigule kui diameetrile ringjoone. Seejärel tõmbame punktist C ringjoone kaare raadiusega 3 sama pikkusühikut, mida kasutasime eespool. Ringjoonte lõikepunkt L koos punktidega O ja C määrab täisnurkse kolmnurga, nii et tipu O juures saame soovitud nurga δ, mille järgi tõmbame aksonomeetrilise y-telje. Aksonomeetrilise x-telje määramiseks leiame sirgel CL punkti A, nii et $\overline{AL} = \overline{LC}$. Joonisel 25b on näidatud dimeetrilise aksonomeetria telgede lihtne konstruktsioonivõte, mis tuleneb eespoolkirjeldatust ja mida on soovitatav kasutada praktikas.

Joonisel 26b on <u>standardses taandatud ristdimeetrias</u> esitatud <u>ringjooned kuubi kolmel ristioleval tahul, kui tahud on paralleelsed koordinaattasanditega.</u>

Kompleksjoonisel, millega on määratud vaadeldav kuup,

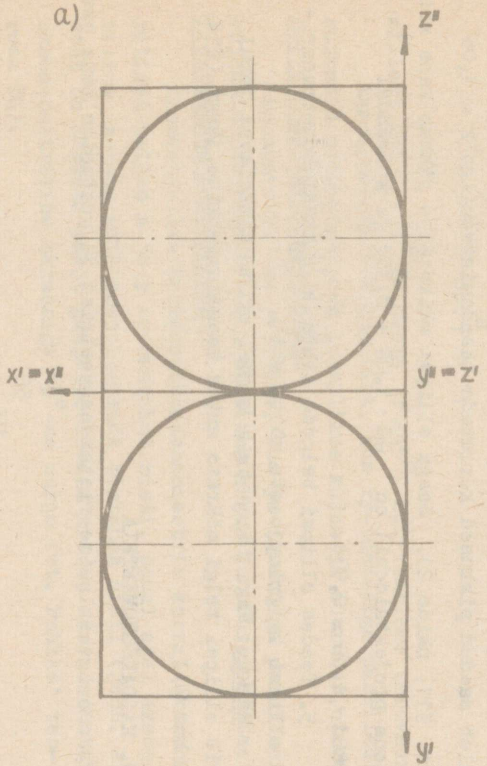


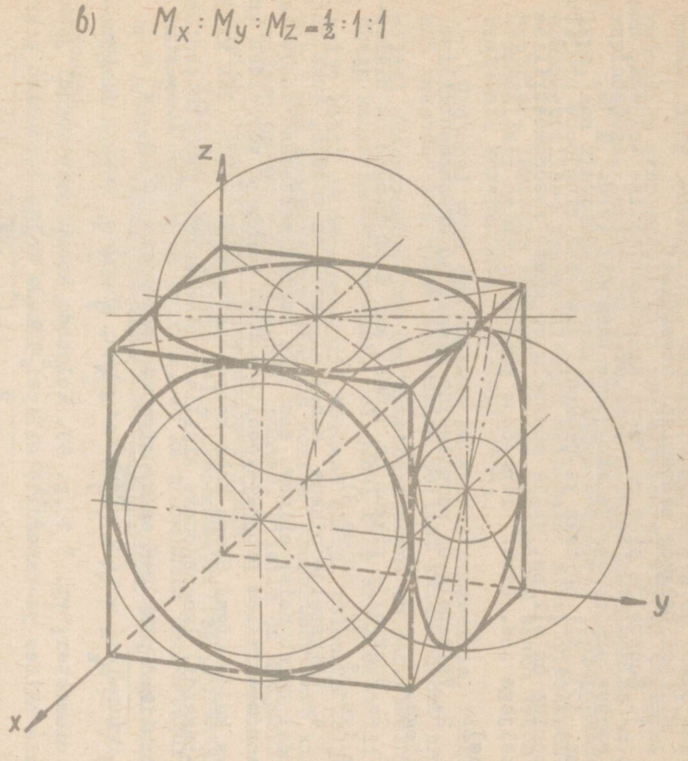
Joon.25

valime koordinaatteljed (joon. 26a). Aksonomeetrilise kujutise saamiseks konstrueerime aksonomeetrilised teljed nii, nagu näidatud joonisel 25b . Taandatud standardses dimeetrias valitud moondetegurid on siis vastavalt $M_x : M_y : M_z = \frac{1}{2} : 1 : 1$. Kuubi projektsiooni määramiseks leiame tippude projektsioonid koordinaatmurdjoone projektsiooni kaudu, silmas pidades, et esimese lüli projektsiooni pikkus on pool tema tõelisest pikkusest, ülejäänud lülid aga projekteeruvad loomulikus pikkuses.

Ringjoonte projektsioonide määramiseks tuleb esiteks määrata keskpunktide koordinaadid. Antud juhul keskpunkt projekteerub vastava tahu projektsiooni diagonaalide lõikepunkti (üldjuhul määrame aga keskpunkti koordinaatmurdjoone projektsiooni kaudu analoogiliselt tahu tippude projektsioonide määramisega).

Projektsiooniks saadava ellipsi konstrueerimisel peame silmas, et kaks koordinaattasandit moodustavad aksonomeetrilise projektsioonitasandiga võrdsed kaldenurgad. Seega nende koordinaattasanditega paralleelsete ringjoonte projektsioonid (ellipsid) säilitavad oma kuju, muutub vaid nende asend (joon. 26).





Joon. 26

Ellipsi telgede määramisel arvestame:

1. Suurtelje siht on risti aksonomeetrilise teljega, mis ei asetse projekteeriva ringjoone tasandil (vrd. § 16, joon. 17). Nii näiteks yz-tasandil asetseva ringjoone projektsiooniks on ellips, mille suurtelg on risti aksonomeetrilise x-teljega jne. (vrd. ringjoone projektsiooniga ristisomeetrias).

2. Väiketelg on paralleelne nimetatud aksonomeetrilise teljega.

3. Suurtelje pikkus on 1,06d, kui d on ringjoone diameeter (vt. § 11, näide 2).

4. Väiketelje pikkus kahel ellipsil on võrdne, kuna kolmandal tuleb neist erinev, sest üks koordinaattasand moodustab aksonomeetrilise projektsioonitasandiga teistega võrreldes erineva kaldenurga. Seega kahe koordinaattasandi (joon. 26b xy-ja zx-tasandi) langusjoonte sihiliste diameetrite projetsioonide loomulikud pikkused saame arvutada valemist: $d\sqrt{1 - m_y^2} = d\sqrt{1 - m_z^2} = d\sqrt{1 - (\frac{2\sqrt{2}}{3})^2} = d\sqrt{1 - \frac{8}{9}} = \frac{1}{3}d$, (kus d ringjoone diameeter; vt. § 10,p. 4). Kolmanda koordinaattasandi jaoks (meie näites yz-tasandil) ellipsi lühema telje loomuliku pikkuse arvutame valemist $d\sqrt{1 - m_x^2} = d\sqrt{1 - (\frac{\sqrt{2}}{3})^2} = d\sqrt{1 - \frac{2}{9}} = d\frac{\sqrt{7}}{3} \approx 0{,}88d$ (vt. §10,p. 4). Taandatud aksonomeetria tõttu tuleb saadud pikkused korrutada taandamisteguriga k = 1,06 (vt. §11, näide 2). Seega ellipsi väiketelje pikkus kahe ringjoone projektsioonil on $\frac{1}{3}d \cdot 1{,}06 \approx 0{,}35d$ ja kolmandal $0{,}88d \cdot 1{,}06 \approx 0{,}93d$.

5. Teades ellipsi telgede sihte ja pikkusi konstrueerime ellipsi telgringjoonte võtte abil.

Märkus: Nagu isomeetria korral nii ka käesoleval juhul võib ellipsi telgi määrata antud kaasdiameetrite järgi (§18, märkus 2).

19. KALDAKSONOMEETRIA

Seni vaatlesime ristaksonomeetriat ja peatusime tema omadustel ning erikujudel. Ristaksonomeetriata on raske esitada kujundite aksonomeetrilisi projektsioone, kui on tegemist kerapindadega. Teatavasti kerapinna kaldprojektsiooniks on ellips, aga ristprojektsiooniks ring. Seepärast pöördpindade aksonomeetrilised projektsioonid esitatakse alati ristaksonomeetrias, lähtudes sellest, et iga pöördpinda saame vaadelda teatavate kerapindade mähispinnana.

Üldjuhul võib aga esineda ka kaldaksonomeetria. Praktikas rakendatakse kõige sagedamini sellist kaldaksonomeetriat, millel aksonomeetriline projektsioonitasand on paralleelne ühega koordinaattasandeist. Sel juhul kahe aksonomeetrilise telje sihil on moondetegurid võrdsed ühega, kolmanda telje sihil aga moondeteguri väärtus sõltub projekteerivate kiirte kaldest projektsioonitasandi suhtes. Niisiis on üldjuhul tegemist dimeetrilise kaldaksonomeetriaga.

Erijuhul, kui kiirte kalle aksonomeetrilise projektsioonitasandi suhtes on selline, et ka kolmandaks moondeteguriks on 1, saame <u>isomeetrilise kaldaksonomeetria.</u> §7 järgi saame selleks juhuks arvutada projekteerivate kiirte kaldenurga, seosest

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 2 + \cot^2\varphi .$$

Kui $m_x = m_y = m_z = 1$, siis

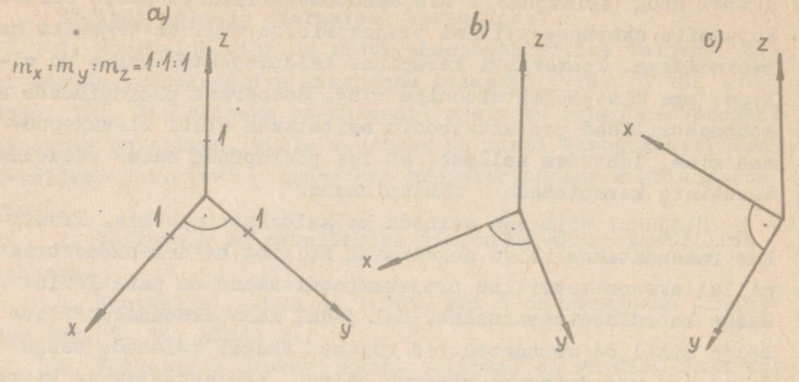
$$\cot^2\varphi = 1,$$

millest $\cot\varphi = 1$ ja seega $\varphi = 45^\circ$, kui vaatleme teravnurki.

Aksonomeetrilist kujutist, kus xy-tasandiga paralleelsed kujundid projekteeruvad loomulikus kujus ja suuruses, nimetame <u>horisontaalaksonomeetriaks</u>.

Aksonomeetrilist kujutist, kus yz-tasandiga paralleelsed kujundid projekteeruvad loomulikus kujus ja suuruses nimetame <u>frontaalaksonomeetriaks</u>.

Isomeetrilise horisontaalaksonomeetria korral aksonomeetrilised teljed x ja y on omavahel risti, samal ajal aksonomeetriline z-telg võib projekteeruda mistahes sihil (joon. 27), sest on lõpmata palju projekteerivaid kiiri, mis moodustavad aksonomeetrilise ekraaniga 45°-se nurga (vt. Pohlke' teoreem §6).



Joon.27

Tehnilises joonestamises kasutatakse sageli erikujulist dimeetrilist frontaalaksonomeetriat e. kabinetprojektsiooni, kus $m_x = \frac{1}{2} m_y$ ning $m_y = m_z = 1$, ja aksonomeetriliseks x-teljeks on teiste telgede nurgapoolitaja. Valemist

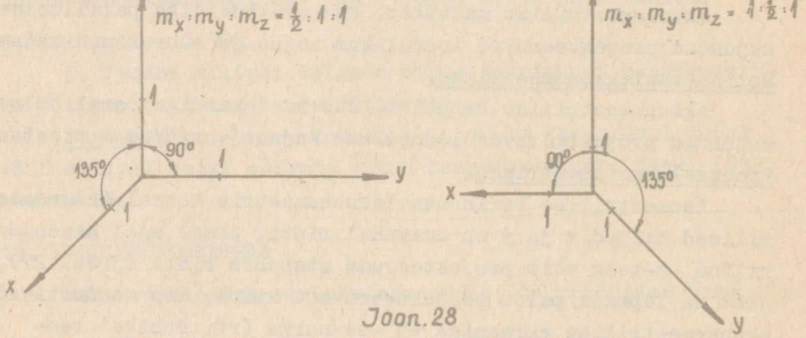
$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 2 + \cot^2\varphi$$

leiame projekteerivate kiirte kaldenurga ekraani suhtes:

$$\frac{1}{4} + 1 + 1 = 2 + \cot^2\varphi ,$$

millest $\cot\varphi = \frac{1}{2}$ ehk $\varphi = 63°30'$.

Joonisel 28 on näidatud aksonomeetrilised teljed kabinetprojektsiooni korral.



Joon. 28

20. AKSONOMEETRIA RAKENDAMISE NÄITEID TEHNILISES JOONESTAMISES

Kujundi aksonomeetrilise projektsiooni valmistamisel lähtume antud kompleksjoonisest ning taotleme võimalikult ilmekat kujutist. Selleks peame silmas järgmist üldist eeskirja.

1. Valime aksonomeetria liigi sõltuvalt projekteeritava kujundi iseloomust ja kujust. Nii näiteks, kui vaadeldaval objektil esineb kerapind või tema osa (käepide jne.) või on tegemist pöördkehaga, siis valime alati mingi ristaksonomeetria. Kui objektil on näiteks mitu pöördsilindrilist osa ühise või paralleelsete telgedega (näit. mitmeastmelised võllid), siis on soovitatav valida kabinetprojektsioon nii, et ringjooned projekteeruksid ringjoontena jne. Kui tegemist on kujundiga, millel üks mõõde on teistega võrreldes tunduvalt suurem, siis joonise ulatust arvestades on soovitatav valida näit. dimeetriline aksonomeetria, kus kolmanda mõõtme sihiline aksonomeetriline ühik on pool esimesest jne. jne.

2. Valime kujundi asendi projekteerivate kiirte ja ekraani suhtes, s.t. määrame millist osa kujundist soovime esitada nähtavana.

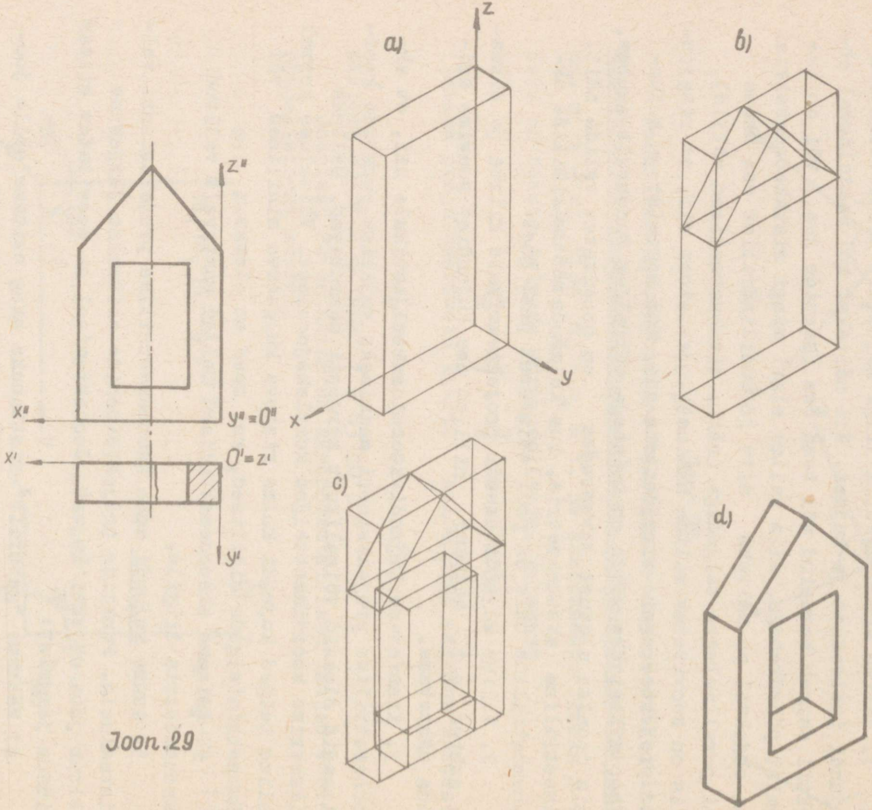
3. Kinnistame kujundi koordinaatteljestikule nii, et aksonomeetrilise projektsiooni saamiseks vajalike punktide koordinaadid oleksid võimalikult kergesti määratavad. Selleks fikseerime koordinaatteljed kompleksjoonisel. Võimaluse korral valime teljed kujundi kolme ristuva külgserva sihilised või sümmeetriatelgede sihilised, kui need on olemas.

4. Esitame aksonomeetrilised teljed vastavalt valitud aksonomeetria liigile.

5. Asume kujundi enda aksonomeetrilise projektsiooni valmistamisele. Punktide projektsioonide esitamise järjestus sõltub juba objekti kujust. Joonestamisel on soovitatav silmas pidada järgmist:

a) Määrame "gabariit"-risttahuka ning esitame selle joonisel vastavalt telgede moondeteguritele määrates külgede pikkused (joonis 29a).

b) Jaotame saadud risttahuka nii mitmeks lihtsamaks geomeetriliseks kujundiks, millesse mahuvad vaadeldava kujundi



Joon. 29

üksikosad (prisma, püramiid, silinder, koonus jne.). Märgime need joonisel (joon. 29b ja 29c). Seejuures on oluline esialgu joonisel näidata ka nähtamatuid kontuurjooni.

c) Asume üksikosade detailsemale esitamisele, kui selleks on veel vajadus. (Näit. joonisel 29 seda pole vaja, küll aga joonisel 30.)

d) Teeme lõike , kui see osutub vajalikuks kujundi sisemise struktuuri iseloomustamiseks. Selleks eraldatakse aksonomeetrias kujundi see osa (neljandik või kaheksandik või enam), mis on meile lähemal (joon. 30).

e) Katame põhijoontena kõik nähtavad kontuurjooned ja üksikosade lõikejooned, kui need on olemas ning viirutame lõikepinnad (vt. §21).

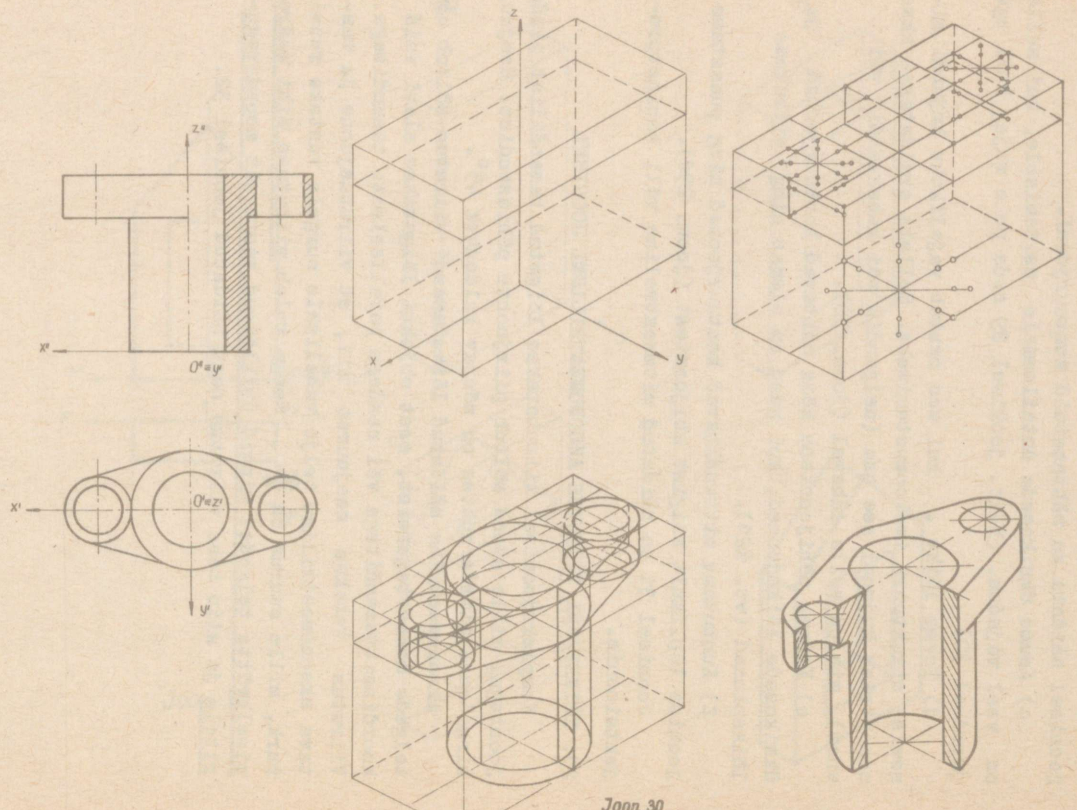
f) Kustutame mittenähtavad kontuurjooned ning puhastame joonise lõplikult kõigist abijoontest (joon. 29d).

Joonisel 31 on näidatud mitmeastmeline võll kabinetprojektsioonis.

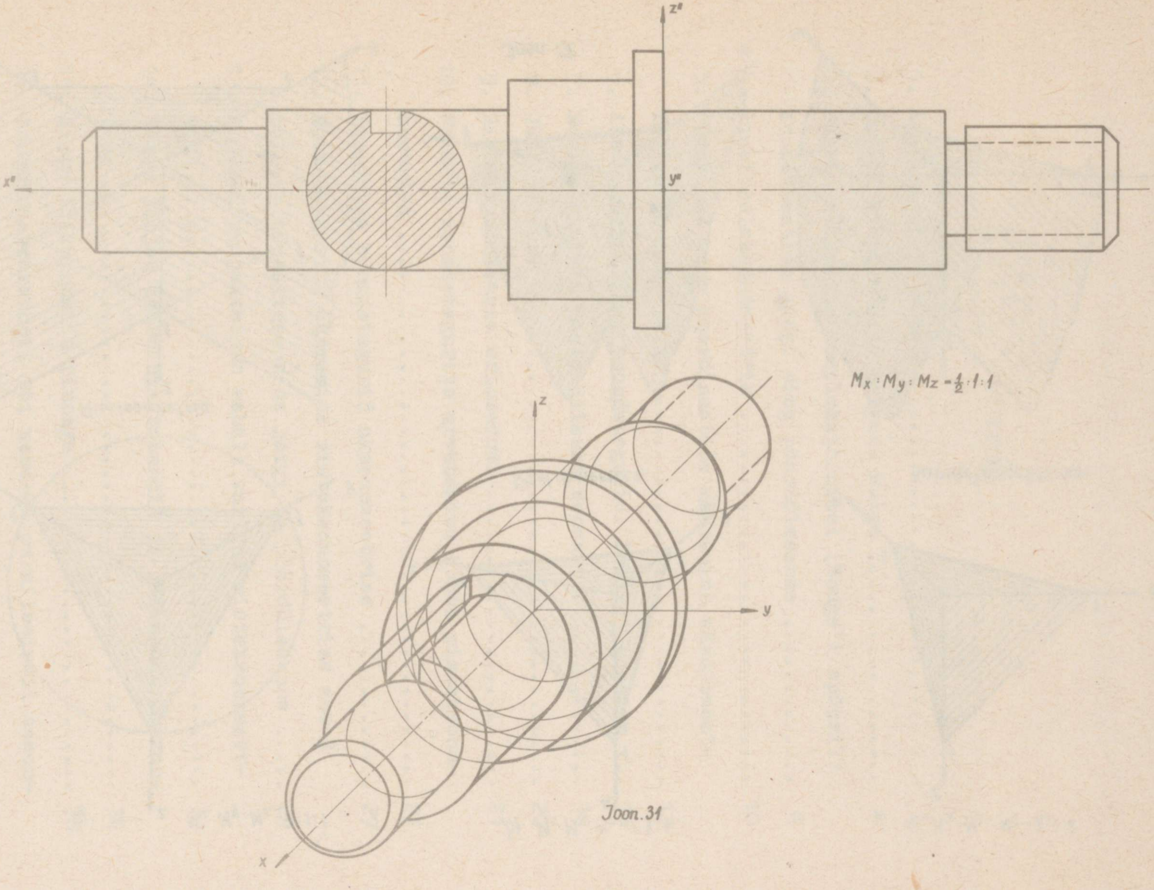
21. LÕIKEPINNA VIIRUTUS AKSONOMEETRILISEL JOONISEL

Kompleksjoonisel viirutatakse lõigatud tasandilist pinda joontega, mille asend sõltub piirjoonte põhiasendist. Seejuures sirgjoonse piirde suhtes on nõutav kaldenurk 45^o.

Aksonomeetrias näidatud lõiketasandi viirutus sõltub aga telgede moondetegureist, sest objekti lõigatakse alati vaid koordinaattasanditega või nendega paralleelsete tasanditega. Viirutus tehakse seejuures nii, et viirutusjoone ja vastava aksonomeetrilise telje vahelisele nurgale vastaks ruumis nurk, mille suurus on $\frac{\pi}{4}$. Seega tuleb viirutuse sihi määramisel võtta telgedel mingid ühiklõigud vastavalt moondeteguritele ja siis teha viirutus nagu näidatud joonisel 32.

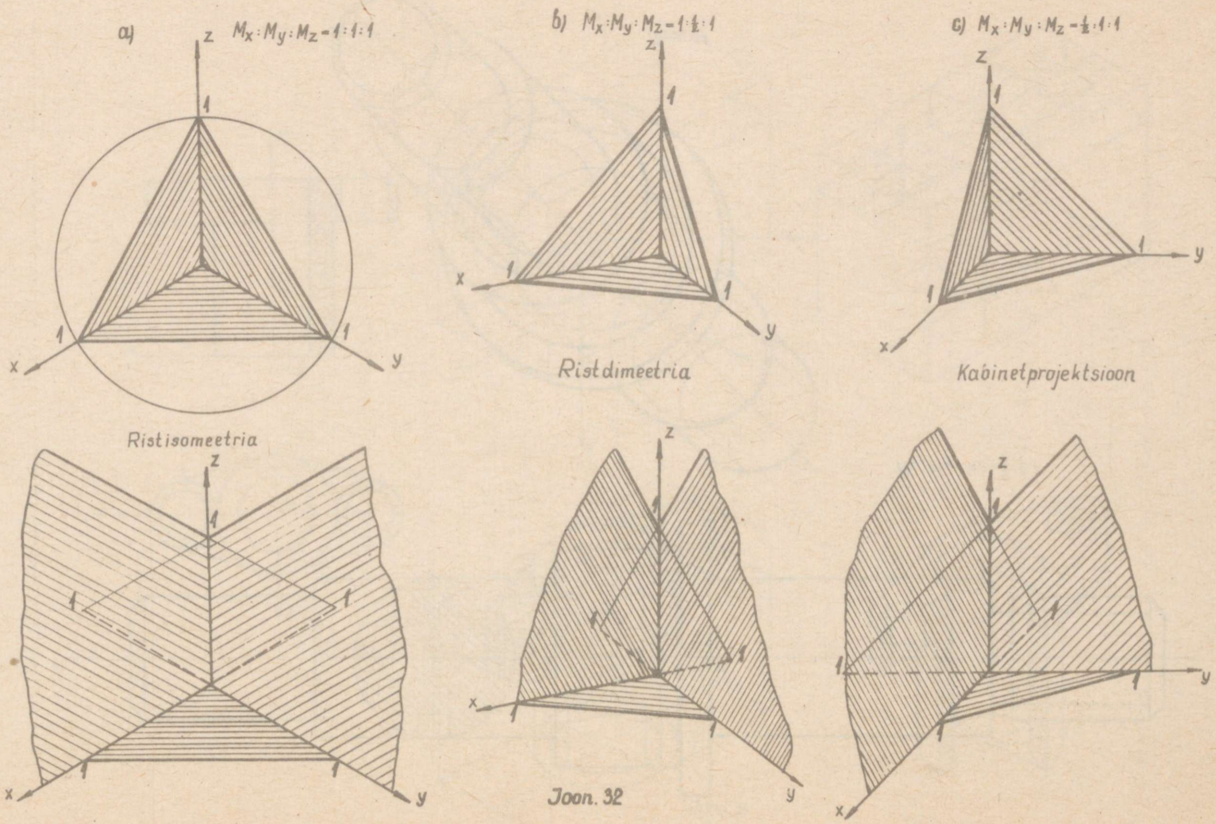


Joon. 30



$M_x : M_y : M_z = \frac{1}{2} : 1 : 1$

Joon. 31


a) $M_x : M_y : M_z = 1:1:1$
Ristisomeetria
b) $M_x : M_y : M_z = 1:\frac{1}{2}:1$
Ristdimeetria
c) $M_x : M_y : M_z = \frac{1}{2}:1:1$
Kabinetprojektsioon

Joon. 32

SISUKORD

Эстонская сельскохозяйственная академия
г. Тарту, ул. Рийа, I2
З. Рийвес, А. Руубель

Аксонометрия
с примерами решения задач
На эстонском языке

Vastutav toimetaja: L. Meijel
Korrektor: J. Hendrikson

Paljundamiseks antud 14.XI 1968. Paber 60x84/16 cm.
Trükipoognaid 4,25. Tingtrükipoognaid 3,87. Arvestuspoognaid 3,78. Tiraaž 1000. MB 09471. Tell. nr. 212

EPA rotaprint, Tartu, Riia 12
Hind 13 kop.

Hind 13 kop.