

812.—

Leitfaden

zum Unterrichte in der

A r i t h m e t i k

für den Gebrauch in Schulen bearbeitet

von
Bibliothek
Universität
Tartu
Ferdinand Lörner.



Reval, 1872.

Verlag von Franz Kluge.

811.

Vorrede
Vorwort

Der vorliegende Band enthält die vollständige
Ausgabe der Werke des berühmten Schriftstellers
L. M. L. R. ...

Von der Censur gestattet. Dorpat, den 20. Juli 1872. Nr. 79.

22.



6098

Vorwort.

Der vorliegende Leitfaden enthält ein vollständiges System der Lehrsätze und Regeln der besondern Arithmetik und ihrer Anwendungen auf die bürgerlichen Rechnungen, und zwar im engen Anschlusse an die unlängst erschienene Sammlung arithmetischer Aufgaben von Dr. Carl Hechel (Reval 1871), welche als Grundlage und zur Richtschnur in der Auswahl und Anordnung des Lehrstoffes gewählt wurde, theils weil dieselbe unter den bestehenden Sammlungen die vollständigste ist und die größte Mannigfaltigkeit und Abwechslung im Inhalte darbietet, theils weil sie bereits in unseren Gymnasien, Real- und Kreisschulen eingeführt und allgemein verbreitet ist. Das äußerst zeitraubende und immer viel Unrichtigkeiten veranlassende Dictiren in den Lehrstunden, zu welchem sich nicht selten der Lehrer bei dem Mangel einer brauchbaren kurzen Bearbeitung der Arithmetik genöthigt sieht, soll durch diesen Leitfaden in der Hand des Schülers erspart werden. In möglichst kurzer Fassung der Sätze und Regeln, deren weitere Ausarbeitung und Begründung entsprechend dem jedesmaligen, vom Lehrer gewählten Unterrichtsgange den Lernenden selbst überlassen bleibt, hat nur dasjenige Aufnahme gefunden, was bei jeder Methode des Vortrages und jedem besondern Gange in der Entwicklung des Stoffes allgemein und unabänderlich feststeht. Dabei war das Hauptaugenmerk des Verfassers auf wissenschaftliche Anordnung, auf einfache und klare Form des Ausdrucks, Vollständigkeit und Uebersichtlichkeit gerichtet. Als Quellen und Hilfsmittel wurden nur solche Werke benutzt, die auf dem neuesten Standpunkt wissenschaftlicher und methodischer Behandlung der Arithmetik stehen, vorzugsweise die arithmetischen und algebraischen Lehrbücher von Hechel, die für umfassendere Studien bestimmt, zur weiteren Belehrung über die hier nur kurz behandelten Gegenstände dienen können.

Der Verfasser.

Inhalt.

I. Einleitung	§ 1—6.
II. Die Grundrechnungen mit unbenannten Zahlen	§ 7—12.
III. Theilbarkeit der Zahlen	§ 13—16.
IV. Zerlegung in Factoren	§ 17—18.
V. Größtes gem. Maß	§ 19.
VI. Kleinstes gem. Vielfaches	§ 20.
VII. Die gewöhnlichen Brüche	§ 21—31.
VIII. Die Decimalbrüche	§ 32—48.
IX. Die Wurzelausziehung	§ 49—62.
X. Die Proportionen	§ 63—71.
XI. Reduction benannter Zahlen.	§ 72—78.
XII. Die vier Species mehrfach benannter Zahlen	§ 79—83.
XIII. Einfache Regel de tri	§ 84—87.
XIV. Procent- und Zinsrechnung	§ 88—103.
XV. Zusammengesetzte Regel de tri	§ 104—105.
XVI. Kettenregel	§ 106—108.
XVII. Gesellschaftsrechnung	§ 109—114.
XVIII. Mischungsrechnung	§ 115—118.

I. Einleitung.

§ 1. Eine Zahl giebt an, wie oft ein Ding vorhanden ist oder als vorhanden gedacht wird, z. B. zwei Rubel, drei Menschen, vier Meilen. Das Ding selbst, durch dessen Wiederholung die Zahl entsteht, wird die Einheit genannt.

Wenn die Einheit bestimmt angegeben ist, so nennt man die Zahl eine benannte oder concrete; wird aber blos die Menge der Wiederholungen einer Einheit, nicht zugleich die Art der letztern berücksichtigt, so heißt die Zahl eine unbenannte oder abstracte.

Die nähere Bestimmung der Einheit, d. h. die Angabe, welche bestimmte Einheit mehrere Mal genommen die Zahl bildet, heißt die Benennung der Zahl, z. B. zwei Pfund, fünf Kopfen, drei Häuser.

Dinge, die in gewissen Merkmalen übereinstimmen, heißen in Bezug auf dieselben gleichartig. Es sind z. B. Pfund und Loth zwar an sich verschiedenartig, aber als Bezeichnungen der Größe des Gewichts gleichartig. Ebenso sind Thaler, Rubel und Kopfen gleichartig, ferner Meilen, Fuß und Zoll.

Zahlen, welche eine und dieselbe Benennung haben, sind gleichnamig, z. B. drei Rubel und zwei Rubel, ferner ein Centner, drei Centner und vier Centner. — Zahlen von verschiedener Benennung sind ungleichnamig, z. B. drei Rubel und vier Kopfen, ein Pfund und zwei Loth u. s. w.

§ 2. Die Arithmetik ist die Lehre von den Eigenschaften der Zahlen und ihren Verbindungen mit einander.

Die einfachste Verbindung der Zahlen mit einander ist das Zählen, d. h. das Bilden von Zahlen, die nach einander stets um eine Einheit zunehmen.

Diejenige Reihe der Zahlen, in welcher die letzteren von Eins beginnend und nach einander stets um Eins wachsend in's Unendliche fortschreiten, wird die natürliche Zahlenreihe genannt.

Rechnen heißt, aus gegebenen Zahlen auf vorgeschriebene Weise andere, gesuchte Zahlen finden.

§ 3. Es giebt unzählig viele verschiedene Zahlen, aber nur für eine geringe Anzahl derselben besondere Schriftzeichen. Diese letzteren nennt man Ziffern, versteht aber darunter zuweilen auch die Zahlen selbst, für welche die Schriftzeichen gelten.

Zur Darstellung aller Zahlen bedienen wir uns der folgenden arabischen Ziffern:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Hierzu kommt noch die Null, 0, welche im Allgemeinen dazu dient, um anzuzeigen, daß in einem bestimmten Falle keine dieser einfachen Ziffern vorhanden ist. Im Gegensatz zur Null heißen die obigen neun Ziffern geltende oder bedeutende Ziffern.

Numeriren heißt, jede beliebige Zahl mit Hilfe jener zehn Ziffern richtig schreiben und jede geschriebene Zahl richtig lesen.

§ 4. Die neun ersten Zahlen heißen Einer und gehören der nullten Ordnung an. Die nächst folgende Zahl Zehn wird als eine neue Einheit betrachtet und ein Zehner genannt. Die Zehner gehören der ersten Ordnung an. Zehn Zehner geben wiederum einen Hunderter, welcher der zweiten Ordnung angehört; zehn Hunderter geben einen Tausender, welcher der dritten Ordnung angehört. Auf diese Weise fährt man fort, zehn Einheiten einer Ordnung als eine neue Einheit der nächst höhern Ordnung zu betrachten und mit einem besondern Namen zu bezeichnen.

Um nun bloß durch die Ziffern der Einer und durch die Null jede beliebige, noch so große Zahl ausdrücken zu können, legt man jeder Ziffer einen doppelten Werth bei, nämlich einen Nominalwerth oder numerischen Werth, welchen die Ziffer an und für sich ausdrückt, und einen Stellenwerth, welcher davon abhängig ist, welche Stelle die Ziffer bei ihrer Verbin-

zung mit anderen Ziffern einnimmt, indem jede Ziffer, wenn sie um eine Stelle nach links rückt, einen zehn Mal größern Werth erhält.

Demnach bedeutet jede Ziffer

in der 1sten Stelle rechts	Einer	(0te Ordnung)
„ 2ten Stelle von rechts	Zehner	(1ste Ordnung)
„ 3 „ „ „	Hunderter	(2te Ordnung)
„ 4 „ „ „	Tausender	(3te Ordnung)
„ 5 „ „ „	Zehntausender	(4te Ordnung)
„ 6 „ „ „	Hunderttausender	(5te Ordnung).

Die 7te Stelle (6te Ordnung) führt den Namen Million; die folgenden fünf Stellen heißen Zehn M., Hundert M., Tausend M., Zehntausend M., Hunderttausend M. —

In der 13ten Stelle (12te Ordnung) beginnen Billionen, dann kommen Zehn B., Hundert B., u. s. w. bis Hunderttausend B. —

In der 19ten Stelle (18te Ordnung) folgen Trillionen, in der 25ten Stelle Quadrillionen, in der 31ten Stelle Quintillionen, indem jede dieser Benennungen für 6 Stellen beibehalten wird. Ebenso folgen nach je 6 Stellen die ferneren Benennungen Sextillion, Septillion, Octillion, Nonillion, Decillion u. s. w.

Sind in einer Ordnung keine Einheiten vorhanden, so wird eine Null an die betreffende Stelle gesetzt, damit man den Stellenwerth der links auf die Null folgenden Ziffern zu erkennen im Stande sei.

§ 5. Durch die obigen Benennungen wird jede vielzifferige Zahl in Klassen von sechs Stellen getheilt, so daß es für das richtige Aussprechen jeder mit beliebig vielen Ziffern geschriebenen Zahl nur darauf ankommt, daß man jede zwei bis sechs-zifferige Zahl richtig auszusprechen versteht.

Die Zahl 125813 spricht man aus: Hundert fünf und zwanzig Tausend acht Hundert dreizehn. — Steht an einer Stelle 0, so wird sie gar nicht ausgesprochen.

Ist nun gegeben die Zahl

$$25 \overset{4}{|} 120076 \overset{3}{|} 321504 \overset{2}{|} 000980 \overset{1}{|} 079006,$$

so theile man sie von rechts in Klassen von 6 Ziffern und bezeichne die erste Ziffer der 2, 3, 4 . . . ten Klasse der Reihe nach mit den Nummern 1, 2, 3 . . . Von links anfangend spreche man jede einzelne Klasse für sich aus und gebe ihr die Benennung, welcher der darüber stehenden Nummer entspricht, also: 25 Quadrillionen, 120076 Trillionen, 321504 Billionen, 980 Millionen und 79006.

§ 6. Die im Vorhergehenden erklärte Art, blos durch zehn einfache Schriftzeichen jede beliebige Zahl darzustellen, wird das dekadische Zahlensystem oder das Decimalsystem genannt. Die Grundzahl dieses Systems ist die Zahl zehn, indem sie angiebt, wieviel Einheiten einer Ordnung zusammen genommen eine Einheit der nächst höhern Ordnung ausmachen.

Unter den nach diesem System geschriebenen Zahlen werden die Zahlen 10, 100, 1000, 10000 u. s. w. die dekadischen Einheiten oder Ordnungszahlen genannt.

II. Die Grundrechnungen mit unbenannten Zahlen.

§ 7. 1) Addiren heißt zwei oder mehrere Zahlen in eine einzige vereinigen, welche so viele Einheiten enthält als die gegebenen Zahlen zusammen enthalten.

Die gegebenen Zahlen, welche addirt werden sollen, heißen Summanden oder Addenden; die gesuchte Zahl oder das Resultat der Addition wird Summe genannt.

Das Zeichen der Addition ist ein stehendes Kreuz (+), welches zwischen die Summanden gesetzt und plus oder mehr gelesen wird.

Es ist $3 + 5$ eine Summe, deren Werth gleich 8 ist und dieses wird durch das Gleichheitszeichen (=) ausgedrückt, indem man schreibt $3 + 5 = 8$.

2) Die Ordnung, in welcher die Summanden addirt werden, ist ohne Einfluß auf die Summe. Es ist $2 + 3 + 4 = 3 + 2 + 4 = 4 + 2 + 3 = 9$.

3) Bei der Addition mehrzifferiger Zahlen können nur Ziffern von gleichem Stellenwerthe unmittelbar addirt werden. Man addire daher zuerst die Einer, dann die Zehner u. s. w. Die Summen der gleichstelligen Ziffern aller Summanden heißen Partialsummen. Wenn die Summe der Einer mehr als 9 liefert, z. B. 13, so hat man blos 3 Einer unter die Einer im Resultat zu setzen, dagegen 10 Einer, d. h. 1 Zehner den Zehnern zuzuzählen. Dasselbe gilt von den Zehnern, Hundertern u. s. w.

§ 8. 1) **Subtrahiren** heißt von einer Zahl so viele Einheiten wegnehmen, als eine andere Zahl enthält und bestimmen, wie viele Einheiten übrig bleiben.

Die Zahl, von welcher eine andere weggenommen werden soll, heißt Minuend, die Zahl, welche weggenommen wird, Subtrahend, und die gesuchte Zahl Rest, Unterschied oder Differenz.

Die Differenz zum Subtrahenden addirt, muß den Minuenden geben, worin die Probe der Subtraction besteht.

Das Zeichen der Subtraction ist ein horizontaler Strich (—), welcher zwischen den Minuenden und den auf ihn folgenden Subtrahenden gesetzt und minus oder weniger ausgesprochen wird. Z. B. $12 - 9 = 3$.

2) Bei mehrzifferigen Zahlen zieht man die gleichstelligen Ziffern von einander ab, indem man bei den Einern beginnt. Ist eine Ziffer des Minuenden kleiner als die gleichstellige des Subtrahenden, so wird von der nächst höhern Stelle des Minuenden eine Einheit geborgt und als zehn Einheiten zu der Ziffer des Minuenden, welche zu klein war, addirt, so daß jetzt die Subtraction ausgeführt werden kann.

3) Enthält der Minuend an irgend einer Stelle eine Null, so borgt man an der nächst höhern Stelle 1 und denkt sich statt der Null die Zahl 10. Folgen mehrere Nullen auf einander, so borgt man von der ersten geltenden Ziffer und der Reihe nach von jeder Null eine Einheit; alsdann gilt jede Null, von

der geborgt ist, so viel als 9, dagegen eine Null, von der nicht geborgt ist, so viel als 10. Hiernach findet man z. B. $4005 - 1234 = 2771$.

§ 9. Ein aus mehreren Zahlen, die mit einander durch die Zeichen + und — verbunden sind, bestehender Ausdruck wird ein Aggregat genannt. Die positiven oder additiven Glieder desselben haben das Zeichen +, die negativen oder subtractiven Glieder das Zeichen — vor sich.

Es bedeutet $17 - 3 + 2 - 5$, daß von 17 erst 3 subtrahirt, dann zum Reste 2 addirt, endlich von der erhaltenen Summe 5 subtrahirt werden soll.

Wenn Klammern oder Parenthesen ein Aggregat einschließen, so zeigen dieselben an, daß das Aggregat als ein Ganzes oder als eine einzige Zahl betrachtet werden soll. Der eingeklammerte Ausdruck wird erst in eine einzige Zahl verwandelt, bevor die außerhalb der Klammer angezeigte Operation zur Ausführung kommt.

Es ist $27 - (3 + 9) + 4 = 27 - 12 + 4 = 19$.

§ 10. 1) **Multiplirciren** heißt eine gegebene Zahl so oft als Summanden setzen, als eine andere gegebene Zahl Einheiten enthält. Es ist z. B.

5 multiplircirt mit 3 gleich $5 + 5 + 5 = 15$.

Die Zahl, die mehrere Mal genommen werden soll, heißt der Multiplicand, die Zahl, welche anzeigt, wie viel Mal der Multiplicand genommen werden soll, wird der Multiplikator und das Resultat der Multiplication das Produkt genannt. — Den Multiplicand sowol wie den Multiplikator nennt man einen Factor des Produktes.

Da der Multiplicand eben so viel Mal als Summand gesetzt wird, als die Einheit zur Erzeugung des Multiplikators gesetzt worden ist, so kann das Multiplirciren auch so erklärt werden: Eine Zahl aus dem Multiplicanden auf dieselbe Weise ableiten, wie der Multiplikator aus der Einheit entstanden ist.

Das Zeichen der Multiplication ist ein liegendes Kreuz (×) oder ein bloßer Punkt zwischen dem Multiplicanden und dem nachfolgenden Multiplikator und wird mal gelesen.

2) Die Reihenfolge der Factoren hat auf die Größe des Produkts keinen Einfluß, daher kann man den Multiplizanden mit dem Multiplikator vertauschen.

$$\text{Es ist } 7 \times 5 = 5 \times 7 = 35.$$

3) Das Einmaleins giebt alle möglichen Produkte je zweier Ziffern an, wie sie die folgende Pythagoräische Tafel enthält.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

4) Eine Zahl wird mit einer dekadischen Einheit 10, 100, 1000 . . . multiplicirt, wenn man derselben so viel Nullen, als die dekadische Einheit enthält, rechts anhängt. Es ist $35 \times 10 = 350$; $270 \times 100 = 27000$; $179 \times 1000 = 179000$.

5) Eine mehrzifferige Zahl wird mit einer einzifferigen multiplicirt, wenn man mit dieser zuerst die Einer, dann die Zehner u. s. w. multiplicirt und jedes Produkt an die entsprechende Stelle setzt, in dem Falle aber, wo sich ein zweizifferiges Produkt ergibt, die Zehner desselben zum nächstfolgenden Produkte addirt.

6) Eine Summe wird mit einer Zahl multiplicirt, wenn man jeden Summanden mit dieser Zahl multiplicirt und die erhaltenen Produkte addirt. Es ist z. B.

$$(3 + 2 + 5) \times 2 = 6 + 4 + 10 = 20.$$

Dasselbe erhält man, wenn man das eingeklammerte Aggregat erst in eine einzige Zahl verwandelt und diese dann mit 2 multiplicirt.

7) Ein Produkt wird mit einer Zahl multiplicirt, wenn man bloß einen von den Factoren desselben mit der Zahl multiplicirt. Es ist

$$(3 \times 5) \times 2 = 6 \times 5 = 3 \times 10 = 30.$$

8) Bei der Multiplication zweier mehrzifferigen Zahlen mit einander multiplicirt man alle Ziffern des einen Factors mit jeder einzelnen Ziffer des andern und addirt die erhaltenen Partialprodukte, d. h. die Produkte aus jeder Ziffer des einen Factors in den ganzen andern Factor.

374	374
<u>521</u>	<u>521</u>
374	1870
748	748
<u>1870</u>	<u>374</u>
194854	194854

Bei der steigend geordneten Multiplication wird der Multiplicand erst mit der niedrigsten Ziffer (1) des Multiplcators und dann der Reihe nach mit den höheren Ziffern desselben multiplicirt und jedes folgende Partialprodukt um eine Stelle weiter nach

links gerückt. — Bei der fallend geordneten Multiplication beginnt die Multiplication mit der höchsten Ziffer (5) des Multiplcators und jedes folgende Partialprodukt wird um eine Stelle weiter nach rechts gerückt.

§ 11. Ein Produkt aus lauter gleichen Factoren heißt eine Potenz. Die zu wiederholten Malen als Factor gesetzte Zahl wird die Grundzahl oder Basis, und die Zahl, welche die Anzahl der gleichen Factoren anzeigt, der Exponent genannt.

Statt $3 \cdot 3 = 9$ schreibt man $3^2 = 9$; statt $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ schreibt man $5^3 = 125$ u. s. w.

Eine Zahl, z. B. 2 zur 4ten Potenz erheben, heißt die Zahl 2 als Factor 4 Mal setzen und die Multiplication ausführen, wodurch $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ entsteht.

Jede Zahl kann man als die erste Potenz derselben betrachten. Es ist $5 = 5^1$, $4 = 4^1$ u. s. w.

Die dekadischen Einheiten sind Potenzen der Grundzahl 10, nämlich $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$ u. s. w.

Die zweite Potenz nennt man auch das Quadrat, die dritte Potenz den Kubus der Grundzahl.

§ 12. 1) **Dividiren** heißt bestimmen, wie viel Mal in einer gegebenen Zahl eine andere gegebene Zahl enthalten ist, oder — was dasselbe ist — eine Zahl in so viele gleiche Theile zerlegen, als eine andere Zahl Einheiten enthält.

Die erste Zahl, die in gleiche Theile zerlegt wird, heißt der Dividend; die zweite Zahl, welche angiebt, in wieviel gleiche Theile die erste getheilt werden soll, wird der Divisor genannt. Das Resultat der Division oder die gesuchte Zahl heißt der Quotient.

Um die Division anzuzeigen, setzt man neben den Dividenten rechts den Divisor und zwischen beide einen Doppelpunkt, oder man schreibt unter den Dividenten den Divisor und zwischen beide einen horizontalen Strich. Soll z. B. 6 durch 2 dividirt werden, so hat man

$$6 : 2 = 3 \quad \text{oder} \quad \frac{6}{2} = 3.$$

Der Divisor mit dem Quotienten multiplicirt muß den Dividenten geben, worin die Probe der Division besteht.

2) In manchen Fällen ist der Divisor nicht genau mehrere Mal in dem Dividenten enthalten, z. B. wenn 8 durch 3 dividirt werden soll. Zieht man 3 so oft als möglich von 8 ab, so erhält man als Quotienten 2 und es bleibt bei der Subtraction 2 übrig. Diese zuletzt nachbleibende Zahl, welche kleiner als der Divisor ist, nennt man den Rest der Division. Wenn bei der Division kein Rest nachbleibt, so sagt man, daß die Division aufgeht.

Hier werden zunächst nur solche Fälle betrachtet werden, in welchen die Division aufgeht.

3) Man dividirt eine Summe durch eine Zahl, wenn man jeden Summanden durch die letztere dividirt und die erhaltenen Quotienten addirt. Es ist

$$(12 + 15) : 3 = 4 + 5 = 9.$$

4) Man dividirt ein Produkt durch eine Zahl, wenn man einen Factor des Produktes durch die Zahl dividirt und den erhaltenen Quotienten mit dem andern Factor multiplicirt. Es ist

$$(8 \times 6) : 2 = 4 \times 6 = 8 \times 3 = 24.$$

5) Soll eine mehrzifferige Zahl durch eine einzifferige oder mehrzifferige dividirt werden, z. B. 2091 durch 17, so dividirt man den Divisor zuerst in so viele Ziffern des Dividenden, daß derselbe darin wenigstens 1 Mal, aber

$$\begin{array}{r|l}
 17 \quad | \quad 2.091 \quad | \quad 123 \\
 \hline
 17 \\
 \hline
 39 \\
 34 \\
 \hline
 51 \\
 51 \\
 \hline
 \end{array}$$

weniger als 10 Mal enthalten ist, indem man durch Versuche die höchste Ziffer des Quotienten (hier 1) bestimmt. Als Rest bleiben hier 3 Hunderter; diese sind gleich 30 Zehner und geben mit den im Dividenden vorhandenen 9 Zehnern zusammen 39 Zehner. Man dividirt nun

17 wiederum in 39 Zehner, wodurch man im Quotienten 2 Zehner und den Rest 5 Zehner erhält. Jetzt hat man 17 in 51 zu dividiren, wodurch man im Quotienten 3 Einer findet.

Die nachbleibenden Reste müssen immer kleiner sein als der Divisor. — Wenn man nach Herabsetzen einer neuen Ziffer des Dividenden eine Zahl erhält, die kleiner als der Divisor ist, so setzt man im Quotienten eine Null, zieht dann wieder die folgende Ziffer des Dividenden herab und fährt in der Division auf die gewöhnliche Weise fort.

III. Theilbarkeit der Zahlen.

§ 13. 1) Wenn bei der Division einer Zahl durch eine andere Zahl kein Rest nachbleibt, so sagt man, daß die erste Zahl durch die zweite aufgehe oder durch sie theilbar sei, oder man sagt auch, daß die zweite Zahl in der ersten aufgehe.

Da $21 : 7 = 3$ ist, so sagt man: 21 geht durch 7 auf, oder 21 ist durch 7 theilbar, oder 7 geht in 21 auf.

2) Eine Zahl, welche durch eine andere Zahl aufgeht, heißt ein Vielfaches der Letztern, oder man sagt, daß sie von der Letztern gemessen werde. Es ist 21 ein Vielfaches von 7 und wird von 7 gemessen.

Ein Produkt aus zwei oder mehreren Zahlen ist immer ein Vielfaches von jeder einzelnen dieser Zahlen.

3) Geht eine Zahl in einer andern (größern) auf, so wird sie ein Theiler oder ein Maß oder ein aliquoter Theil derselben genannt. Geht aber eine Zahl in einer andern, größern Zahl nicht auf, so heißt sie ein aliquanter Theil derselben.

Von der Zahl 21 sind die Zahlen 3 und 7 aliquote Theile, dagegen die Zahlen 2, 4, 5, 6, 8 bis 20 aliquante Theile.

4) Wenn eine Zahl in zwei oder mehreren Zahlen einzeln genommen aufgeht, so wird sie ein gemeinschaftliches Maß oder ein gemeinschaftlicher Theiler oder Divisor dieser Zahlen genannt.

Es ist 5 ein gem. Maß von 10 und 15, ferner 3 ein gem. Maß von 3, 6, 9, 12; die Zahlen 6, 12, 18 haben drei gem. Maße, nämlich 2, 3 und 6.

§ 14. 1) Zahlen, welche durch keine andern Zahlen als durch 1 und durch sich selbst theilbar sind, heißen Primzahlen, nämlich 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101 u. s. w.

2) Haben zwei oder mehrere Zahlen außer der Einheit kein gem. Maß, so heißen sie relative Primzahlen oder Primzahlen unter sich, z. B. 7 und 9; ebenso 8, 9, 14, obschon keine dieser drei Zahlen eine Primzahl an sich ist.

3) Alle Zahlen, welche nicht bloß durch 1 und durch sich selbst, sondern noch durch andere Zahlen theilbar sind und daher als ein Produkt aus zwei oder mehreren Factoren betrachtet werden können, heißen zusammengesetzte oder theilbare Zahlen, z. B. 4, 6, 8, 9, 10, 12 u. s. w.

4) Diejenigen Factoren einer Zahl, welche Primzahlen sind, werden Primfactoren oder einfache Factoren, alle übrigen zusammengesetzte Factoren jener Zahl genannt.

5) Alle Zahlen, welche durch 2 theilbar sind, z. B. 2, 4, 6, 8 u. s. w. werden gerade oder Paarzahlen, alle übrigen, z. B. 1, 3, 5, 7 u. s. w. ungerade oder Unpaarzahlen genannt.

Sämmtliche Primzahlen, mit Ausnahme der Zahl 2, sind Unpaarzahlen.

§ 15. 1) Eine Zahl geht in einer andern Zahl nur dann auf, wenn alle ihre Primfactoren unter den Primfactoren der andern Zahl enthalten sind.

Es ist $6 = 2 \cdot 3$ und $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$, folglich geht 6 in 18 auf. Dagegen geht 6 nicht in $15 = 3 \cdot 5$ auf; ebenso geht $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ nicht in $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ auf.

2) Wenn eine Zahl in einer andern aufgeht, so geht sie auch in jedem Vielfachen dieser andern Zahl auf.

Es geht 3 in 6 auf, folglich geht 3 auch in $2 \cdot 6 = 12$ auf.

3) Eine Zahl geht in der Summe mehrerer Zahlen auf, wenn sie in jedem einzelnen Summanden aufgeht.

Es geht 3 auf in 6, in 9, in 12; folglich geht 3 auch auf in $6 + 9 + 12 = 27$.

4) Eine Zahl geht in der Differenz zweier Zahlen auf, wenn sie im Minuenden und im Subtrahenden einzeln aufgeht.

Es geht 4 auf in 28 und in 12, folglich geht 4 auch auf in $28 - 12 = 16$.

§ 16. Für manche Zahlen giebt es Kennzeichen der Theilbarkeit durch andere Zahlen.

1) Durch **2** ist eine Zahl theilbar, wenn ihre letzte Ziffer rechts eine Null oder eine Paarzahl ist, z. B. 10, 12, 784.

2) Durch **3** oder **9** ist eine Zahl theilbar, wenn die Quersumme ihrer Ziffern durch 3 oder 9 theilbar ist.

Es ist 78 durch 3 theilbar, weil $7 + 8 = 15$ durch 3 theilbar ist; ebenso ist 9738 sowol durch 3 als durch 9 theilbar, weil $9 + 7 + 3 + 8 = 27$ sowol durch 3 als durch 9 theilbar ist.

3) Durch **4** ist eine Zahl theilbar, wenn ihre beiden letzten Ziffern, als eine Zahl betrachtet, durch 4 theilbar sind.

Solche Zahlen sind z. B. 7356 und 1080, da sowol 56 als 80 durch 4 theilbar ist.

4) Durch **5** ist eine Zahl theilbar, wenn ihre letzte Ziffer 5 oder 0 ist. *B. B.* 35, 105, 170.

5) Durch **6** ist eine Zahl theilbar, wenn sie durch 2 und zugleich durch 3 theilbar ist. *B. B.* 47412.

6) Durch **8** ist eine Zahl theilbar, wenn ihre drei letzten Ziffern, als eine Zahl betrachtet, durch 8 theilbar sind. *B. B.* 73000 und 91456.

7) Durch **10** ist eine Zahl theilbar, wenn ihre letzte Ziffer Null ist. *B. B.* 110 oder 7100.

8) Durch **11** ist eine Zahl theilbar, wenn der Unterschied der Ziffersummen an den ungeraden und geraden Stellen 0 ist oder durch 11 theilbar ist. Die Stellen können beliebig von rechts oder von links gezählt werden.

Die Zahlen 79354, 95678, 9683927 sind durch 11 theilbar, denn es ist

$$(4 + 3 + 7) - (5 + 9) = 0,$$

$$(9 + 6 + 8) - (5 + 7) = 11,$$

$$(7 + 9 + 8 + 9) - (2 + 3 + 6) = 22.$$

IV. Zerlegung einer Zahl in Factoren.

§ 17. 1) Jede zusammengesetzte Zahl läßt sich als ein Produkt darstellen, dessen Factoren sämtlich Primzahlen sind.

Um z. B. 360 in Primfactoren zu zerlegen, dividirt man 360 durch die kleinste Primzahl, durch welche 360 theilbar ist, den Quotienten wieder durch die kleinste, darin aufgehende Primzahl u. s. w., bis der letzte Quotient selbst eine Primzahl ist. Sämmtliche Divisoren nebst dem letzten Quotienten sind die verlangten Primfactoren, so daß $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ ist.

360	: 2
180	: 2
90	: 2
45	: 3
15	: 3
5	

2) Bei diesem Verfahren lassen sich für die Primzahlen 2, 3, 5, 11 die Kennzeichen ihres Aufgehens in anderen

Zahlen benutzen (§ 16). Dagegen muß durch Versuche ermittelt werden, ob die übrigen Primzahlen 7, 13, 17, 19 . . . in den zu zerlegenden Zahlen aufgehen.

Soll die Zahl 283 zerlegt werden, so erkennt man sogleich, daß sie nicht durch 2, 3, 5, 11 theilbar ist, und beginnt daher gleich die Versuche mit 7, 13, 17, 19 . . . , nämlich:

$$283 : 7 = 40 \text{ nebst dem Reste } 3$$

$$283 : 13 = 21 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad 10$$

$$283 : 16 = 17 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad 11.$$

Weitere Versuche sind nicht erforderlich. Denn hat man schon so viele, ihrer Größe nach auf einander folgende Primzahlen hineindividirt, daß der Quotient dem Divisor gleich oder kleiner als der Divisor geworden ist, ohne daß eine Division aufgegangen wäre, so kann auch keine der folgenden Primzahlen in der gegebenen Zahl aufgehen und daher ist letztere selbst eine Primzahl.

Hier ist der letzte Quotient 16 kleiner als der Divisor 17, und weil die Division nicht aufgeht, so läßt sich 283 überhaupt gar nicht in Factoren zerlegen.

3) Alle Primzahlen nach der Reihe lassen sich durch folgendes Verfahren finden, welches das Sieb des Eratosthenes genannt wird.

Man schreibt alle ungeraden Zahlen 3, 5, 7, 9, 11, 13 . . . bis zu der Gränze hin, bis zu welcher man alle Primzahlen finden will. Nun streicht man von 3 beginnend jede dritte Zahl aus, also 9, 15, 21 . . . ; hierauf streicht man von der 5 an jede fünfte Zahl aus, wobei man die bereits wegen 3 schon ausgestrichenen Zahlen mitzählt, also 15, 25, 35 . . . Von der 7 an streicht man jede siebente Zahl aus u. s. w., indem man die schon ausgestrichenen Zahlen dabei stets mitzählt. Auf diese Weise fallen aus der Reihe alle theilbaren Zahlen aus und es bleiben nur die Primzahlen stehen, zu welchen man dann noch die 2 zufügen muß.

§ 18. 1) Bei der Auffindung sämtlicher Theiler einer Zahl kommt es darauf an, nicht bloß alle Primfactoren der Zahl, sondern auch alle möglichen Produkte zu bestimmen, die sich aus jenen Primfactoren bilden lassen.

Wenn man die gegebene Zahl der Reihe nach durch 2, 3, 4, 5, 6, 7 . . . dividirt, so ist in allen den Fällen, wo die Division aufgeht, sowol der Divisor als der Quotient ein Theiler der gegebenen Zahl. Die Divisoren braucht man aus der natürlichen Zahlenreihe nur soweit zu nehmen, bis der Quotient ebenso groß oder kleiner wird als der Divisor.

Für die Zahl 210 hat man der Reihe nach die Divisoren: 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, die Quotienten: 105, 70, 42, 35, 30, 21, 15. Diese Zahlen sind die sämmtlichen Theiler von 210, mit Ausschluß der 1 und der Zahl 210 selbst.

2) Die Anzahl sämmtlicher Theiler einer Zahl findet man, wenn man die Zahl in ihre Primfactoren zerlegt, jeden Exponenten der verschiedenen Primfactoren um 1 vergrößert und diese um 1 vergrößerten Exponenten mit einander multiplicirt. In dem erhaltenen Produkte ist die Einheit und die gegebene Zahl selbst mit einbegriffen.

Für die Zahl $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, in welcher jeder Primfactor den Exponenten 1 hat, giebt es $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$, also mit Ausschluß der Einheit im Ganzen 15 Theiler, wenn 210 selbst auch zu diesen gezählt wird.

Die Zahl $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, in welcher die Primfactoren die Exponenten 2, 2, 1 haben, besitzt $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$; also mit Ausschluß der Einheit im Ganzen 17 Theiler.

V. Größtes gemeinschaftliches Maß.

§ 19. Die größte Zahl, die in zwei oder mehreren gegebenen Zahlen zugleich aufgeht, heißt das größte gemeinschaftliche Maß dieser Zahlen.

Die Zahlen 2, 3, 6 gehen einzeln sowol in 12 als in 18 auf und von denselben ist 6 das größte gem. Maß von 12 u. 18.

Das größte gem. Maß gegebener Zahlen wird entweder durch Zerlegung der Zahlen in Primfactoren oder durch die Restreihen=Division gefunden.

1) Man zerlegt jede der gegebenen Zahlen in ihre Primfactoren und multiplicirt von diesen diejenigen miteinander, die in allen gegebenen Zahlen gemeinschaftlich vorkommen. Das Produkt ist das gesuchte größte gem. Maß.

Sei gegeben 66, 88 und 198, so hat man

$$66 = 2 \cdot 3 \cdot 11, \quad 88 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11, \quad 198 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11.$$

Die drei gegebenen Zahlen haben nur die Primfactoren 2 und 11 gemeinschaftlich, folglich ist $2 \cdot 11 = 22$ das größte gem. Maß für 66, 88, 198.

Für die vier Zahlen $12 = 2^2 \cdot 3$, $15 = 3 \cdot 5$, $18 = 2 \cdot 3^2$, $27 = 3^3$ ist das größte gem. Maß gleich 3.

Die Zahlen $14 = 2 \cdot 7$ und $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$ besitzen keinen gemeinsamen Primfactor, daher auch kein gem. Maß, d. h. sie sind Primzahlen unter sich.

2) Durch die Restreihen=Division wird das größte gem. Maß z. B. für die Zahlen 60 und 138 folgendermaßen gefunden:

$$\begin{array}{r|l|l} 60 & 138 & 2 \\ & 120 & \\ \hline & 18 & 60 \mid 3 \\ & & 54 \\ & & \text{6} \mid 18 \mid 3 \\ & & 18 \end{array}$$

Man dividirt mit der kleinern Zahl die größere, mit dem Rest den vorigen Divisor und so weiter, bis die Division, bei welcher als letzter Divisor auch 1 vorkommen kann, aufhört; der letzte Divisor (hier 6) ist das gesuchte größte gem. Maß.

Wenn als letzter Divisor die Zahl 1 erscheint, wie dies bei den Zahlen 14 und 45 der Fall ist, so haben die Zahlen außer 1 kein gem. Maß, sind also Primzahlen unter sich (§ 14, 2).

Um durch die Restreihen=Division das größte gem. Maß für mehr als zwei Zahlen, z. B. für 154, 176, 319 zu finden, bestimmt man erst zwischen zwei Zahlen das größte gem. Maß, dann zwischen diesem und der dritten Zahl das größte gem. Maß, so ist letzteres das verlangte. — Das größte gem. Maß für 154 und 176 ist 22, für 22 und 319 ist es gleich 11, folglich ist 11 das größte gem. Maß für 154, 176, 319.

VI. Kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches.

§ 20. Die kleinste Zahl, in welcher zwei oder mehrere Zahlen, einzeln genommen, aufgehen, wird das kleinste gem. Vielfache oder der kleinste gem. Dividend dieser Zahlen genannt.

Die Zahlen 2, 3, 4 haben zu ihren gem. Vielfachen die Zahlen 12, 24, 36 . . . und unendlich viele noch größere Zahlen; von allen diesen ist 12 das möglich kleinste gem. Vielfache von 2, 3, 4.

Das kleinste gem. Vielfache gegebener Zahlen wird entweder durch Zerlegung der Zahlen in Primfactoren oder mit Hülfe ihres größten gem. Maßes gefunden.

1) Man findet das kleinste gem. Vielfache gegebener Zahlen, wenn man diese in ihre Primfactoren zerlegt und ein Produkt so bildet, daß darin jeder der verschiedenen Primfactoren in der höchsten Potenz vorkommt, in welcher ihn eine der gegebenen Zahlen enthält.

In den drei gegebenen Zahlen $28 = 2^2 \cdot 7$, $40 = 2^3 \cdot 5$ und $50 = 2 \cdot 5^2$ kommen überhaupt die Primfactoren 2, 5, 7 vor und die höchsten Potenzen derselben sind 2^3 , 5^2 , 7, folglich ist das kleinste gem. Vielfache gleich $2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 1400$.

Sind die gegebenen Zahlen relative Primzahlen, so ist ihr Produkt das kleinste gem. Vielfache derselben. Z. B. Für 3, 7, 8 ist das kleinste gem. Vielfache gleich $3 \cdot 7 \cdot 8 = 168$.

Wenn eine der gegebenen Zahlen in einer andern aufgeht, so wird sie ganz unberücksichtigt gelassen. Die Zahlen 4, 8, 14 haben dasselbe kleinste gem. Vielfache wie die Zahlen 8 und 14, nämlich 56.

2) Man findet das kleinste gem. Vielfache zweier Zahlen, wenn man das Produkt derselben durch ihr größtes gem. Maß dividirt.

Die Zahlen 9 und 12 haben das größte gem. Maß 3, folglich ist ihr kleinstes gem. Vielfaches $\frac{9 \times 12}{3} = 36$.

Sind mehr als zwei Zahlen gegeben, z. B. 12, 30, 50, so bestimmt man erst für zwei Zahlen 12 und 30 das kleinste

gem. Vielfache 60 und dann für dieses und die dritte Zahl 50 das kleinste gem. Vielfache 300; dieses letztere ist dann das verlangte.

VII. Die gewöhnlichen Brüche.

§ 21. Theilt man die Einheit in eine beliebige Anzahl gleicher Theile und nimmt einen dieser Theile ein oder mehrere Mal, so entsteht ein Bruch oder eine gebrochene Zahl.

Ein Bruch wird durch zwei Zahlen ausgedrückt, nämlich durch den Nenner, welcher anzeigt, in wie viele gleiche Theile die Einheit getheilt worden ist, und durch den Zähler, welcher anzeigt, wie viele solcher gleichen Theile genommen sind.

Zähler und Nenner zusammen nennt man die Glieder des Bruches und schreibt diesen so, daß man den Nenner unter den Zähler setzt und von demselben durch einen horizontalen Strich trennt.

Man kann jeden Bruch auch als einen Quotienten betrachten, bei welchem der Zähler den Dividenden und der Nenner den Divisor vorstellt.

Als Bruch bedeutet z. B. $\frac{3}{4}$ das 3fache vom 4ten Theil der Einheit, und als Quotient bedeutet $\frac{3}{4}$ den 4ten Theil von 3 Einheiten. In jeder dieser beiden Auffassungen drückt $\frac{3}{4}$ ein und dieselbe Größe aus.

§ 22. Ein echter Bruch ist ein solcher, dessen Zähler kleiner ist als der Nenner. B. B. $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$.

Ein unechter Bruch ist ein solcher, dessen Zähler größer ist als der Nenner. B. B. $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{17}{9}$.

Ein uneigentlicher Bruch ist ein solcher, dessen Nenner in dem Zähler aufgeht. B. B. $\frac{4}{4}$, $\frac{21}{7}$.

Ein einfacher Bruch oder ein Stammbruch ist ein solcher, dessen Zähler 1 ist. B. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$.

Eine gemischte Zahl ist eine Summe aus einer ganzen Zahl und einem echten Bruche. B. B. $5 + \frac{3}{4}$, wofür kürzer $5\frac{3}{4}$ geschrieben wird.

Der umgekehrte oder reciproke Werth eines Bruches entsteht, wenn man Zähler und Nenner des Bruches mit einander vertauscht. Es sind reciproke Werthe von einander

$$\frac{2}{3} \text{ und } \frac{3}{2}, \text{ ebenso } \frac{1}{4} \text{ und } \frac{4}{1} \text{ (oder 4).}$$

§ 23. Ein Bruch ist der Einheit gleich, wenn Zähler und Nenner desselben einander gleich sind.

$$\text{Es ist } \frac{4}{4} = 1, \quad \frac{17}{17} = 1 \text{ u. s. w.}$$

Ein echter Bruch ist kleiner, ein unechter aber größer als die Einheit.

$$\text{Es ist } \frac{3}{4} < 1, \text{ dagegen } \frac{7}{5} > 1.$$

Von zwei Brüchen mit gleichem Nenner ist derjenige der größere, der den größern Zähler hat.

$$\text{Es ist } \frac{2}{5} < \frac{3}{5} \text{ und } \frac{3}{7} < \frac{4}{7} < \frac{6}{7}.$$

Von zwei Brüchen mit gleichem Zähler ist derjenige der größere, der den kleinern Nenner hat.

$$\text{Es ist } \frac{2}{5} > \frac{2}{7} \text{ und } \frac{5}{6} > \frac{5}{7} > \frac{5}{9}.$$

§ 24. 1) Jede ganze Zahl läßt sich als der Zähler eines Bruches betrachten, dessen Nenner 1 ist.

$$\text{Es ist } 3 = \frac{3}{1}, \quad 105 = \frac{105}{1} \text{ u. s. w.}$$

2) Eine ganze Zahl wird in einen Bruch mit einem gegebenen, übrigens beliebigen Nenner verwandelt, wenn man die Zahl mit diesem letztern multiplicirt und unter das Produkt den gegebenen Nenner setzt.

Soll die Zahl 5 in Siebentel verwandelt werden, so hat man

$$5 = \frac{5 \cdot 7}{7} = \frac{35}{7}.$$

3) Eine gemischte Zahl wird in einen unechten Bruch verwandelt, wenn man die Ganzen mit dem Nenner des Bruches multiplicirt und das Produkt zum Zähler addirt.

$$\text{Es ist } 4\frac{3}{5} = \frac{4 \cdot 5 + 3}{5} = \frac{23}{5}.$$

Die Verwandlung gemischter Zahlen in unechte Brüche wird das Einrichten der gemischten Zahlen genannt.

4) Ein unechter Bruch wird in eine ganze oder gemischte Zahl verwandelt, wenn man die Division des Nenners in den Zähler ausführt; der Quotient giebt die Ganzen und der etwa gebliebene Rest, unter den man den gegebenen Nenner setzt, den Bruch der gemischten Zahl. B. B.

$$\frac{48}{4} = 12 \quad \text{und} \quad \frac{24}{5} = 4 \frac{4}{5}.$$

§ 25. 1) Der Werth eines Bruches bleibt unverändert, wenn man Zähler und Nenner gleichzeitig mit der nämlichen Zahl multiplicirt. B. B.

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{12}{15}.$$

Das Verfahren, mit einer beliebigen Zahl zugleich Zähler und Nenner eines Bruches zu multipliciren, wird das Erweitern des Bruches genannt.

2) Um einen Bruch auf einen vorgeschriebenen neuen Nenner zu bringen, der ein Vielfaches des ursprünglichen Nenners ist, dividirt man durch den letztern den neuen Nenner und multiplicirt mit dem erhaltenen Quotienten den Zähler und den Nenner des gegebenen Bruches.

Um $\frac{7}{13}$ auf den Nenner 65 zu bringen, hat man

$$65 : 13 = 5, \text{ also } \frac{7}{13} = \frac{7 \cdot 5}{13 \cdot 5} = \frac{35}{65}.$$

§ 26. Gegebene Brüche macht man gleichnamig, wenn man jeden Bruch auf einen Nenner bringt, der gleich ist dem kleinsten gem. Vielfachen der Nenner aller gegebenen Brüche.

Das kleinste gem. Vielfache der Nenner mehrerer Brüche wird der Generalnenner dieser Brüche genannt.

1) Um $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{10}$ gleichnamig zu machen, hat man

$$4 = 2 \cdot 2, \quad 6 = 2 \cdot 3, \quad 10 = 2 \cdot 5,$$

also den Generalnenner $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$. Auf diesen Nenner hat man jetzt jeden Bruch (nach § 25, 2) zu bringen, nämlich:

$$60 : 4 = 15, \text{ also } \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 15}{4 \cdot 15} = \frac{45}{60}$$

$$60 : 6 = 10, \text{ also } \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 10}{6 \cdot 10} = \frac{50}{60}$$

$$60 : 10 = 6, \text{ also } \frac{7}{10} = \frac{7 \cdot 6}{10 \cdot 6} = \frac{42}{60}.$$

2) Um die Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{8}$, deren Nenner relative Primzahlen sind, gleichnamig zu machen, hat man (§ 20, 1) den Generalnenner $3 \cdot 5 \cdot 8 = 120$. Nun kann man in diesem Falle die Rechnung vereinfachen. Man multiplicirt den Zähler jedes Bruches mit dem Produkte der Nenner aller übrigen Brüche und setzt unter den so erhaltenen neuen Zähler den Generalnenner, nämlich

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 5 \cdot 8}{120} = \frac{80}{120}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 3 \cdot 8}{120} = \frac{96}{120}$$

$$\frac{7}{8} = \frac{7 \times 3 \cdot 5}{120} = \frac{105}{120}.$$

§ 27. 1) Der Werth eines Bruches bleibt unverändert, wenn man Zähler und Nenner gleichzeitig durch die nämliche Zahl dividirt. Z. B.

$$\frac{9}{12} = \frac{9 : 3}{12 : 3} = \frac{3}{4}.$$

Die Division des Zählers und Nenners eines Bruches durch eine in beiden Gliedern aufgehende Zahl wird das Verkürzen, Heben oder Reduciren des Bruches genannt.

Ein Bruch, der in den möglichst kleinen Zahlen ausgedrückt ist, so daß Zähler und Nenner relative Primzahlen sind, heißt ein reducirtes Bruch.

2) Ein Bruch, dessen Zähler und Nenner gemeinsame Factoren enthalten, wird durch die möglichst kleinen Zahlen ausgedrückt, wenn man Zähler und Nenner durch ihr größtes gem. Maß dividirt.

Soll z. B. $\frac{637}{741}$ reducirt werden, so ermittelt man durch die Restreihen=Division das größte gem. Maß (13) zwischen Zähler

$$\begin{array}{r|l}
 637 & 741 & | & 1 \\
 \hline
 & 637 & & \\
 & \hline
 & 104 & | & 637 & | & 6 \\
 & & & 624 & & \\
 & & & \hline
 & & & \mathbf{13} & | & 104 & | & 8 \\
 & & & & & \hline
 & & & & & 104 & &
 \end{array}$$

und Nenner und dividirt durch dasselbe die Glieder des Bruches, nämlich

$$\frac{637}{741} = \frac{637 : 13}{741 : 13} = \frac{49}{57}.$$

Wenn bei der Restreihen-Division als letzter Divisor 1 erscheint, so ist dies ein Zeichen, daß der gegebene Bruch sich nicht aufheben läßt, also bereits ein reducirter ist.

3) Lassen sich die gemeinsamen Factoren in den Gliedern eines Bruches leicht erkennen, wie dieses bei den Factoren 2, 3, 5, 11 insbesondere der Fall ist, so pflegt man auch den Bruch durch aufeinanderfolgende Divisionen seiner Glieder durch ihre gemeinsamen Theiler zu verkürzen, indem man die Divisionen so lange fortsetzt, bis Zähler und Nenner relative Primzahlen geworden sind. B. B.

$$\frac{1452}{2178} = \frac{\overset{2}{1452}}{\overset{2}{2178}} = \frac{726}{1089} = \frac{\overset{3}{726}}{\overset{3}{1089}} = \frac{242}{363} = \frac{\overset{11}{242}}{\overset{11}{363}} = \frac{22}{33} = \frac{2}{3}.$$

Addition und Subtraction der Brüche.

§ 28. 1) Gleichnamige Brüche werden addirt oder von einander subtrahirt, wenn man die Zähler addirt oder subtrahirt und unter die Summe oder Differenz den gemeinsamen Nenner setzt. B. B.

$$\frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{5}{9} = \frac{2+1+5}{9} = \frac{8}{9}.$$

$$3\frac{5}{7} + 5\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = 3 + 5 + \frac{5+2+3}{7} = 8\frac{10}{7} = 9\frac{3}{7}.$$

$$\frac{17}{101} - \frac{13}{101} = \frac{17-13}{101} = \frac{4}{101}.$$

Ist gegeben $7\frac{1}{3} - 5\frac{2}{3}$, also im Minuenden abgesehen von den Ganzen ein kleinerer Bruch als im Subtrahenden, so borgt man erst von den Ganzen eine Einheit und addirt dieselbe als $\frac{3}{3}$ zu $\frac{1}{3}$ hinzu; alsdann ist

$$6\frac{4}{3} - 5\frac{2}{3} = (6-5) + \frac{4-2}{3} = 1\frac{2}{3}.$$

Wenn gegeben ist $8 - \frac{7}{13}$, so erhält man durch eine ähnliche Verwandlung des Minuenden

$$7\frac{13}{13} - \frac{7}{13} = 7\frac{6}{13}.$$

2) Ungleichnamige Brüche, die addirt oder von einander subtrahirt werden sollen, sind zuvor gleichnamig zu machen.

Sei gegeben $7\frac{3}{4} + 3\frac{1}{6} + 8\frac{5}{9}$. Man bestimmt den Generalnenner (36), dividirt ihn durch jeden einzelnen Nenner und multiplicirt die Quotienten 9, 6, 4 mit den Zählern der Brüche. Dadurch erhält man 27, 6, 20 als Zähler der neuen Brüche, welche alle den Nenner 36 haben. Die Addition dieser Zähler giebt 53, folglich ist die Summe der gegebenen echten Brüche $\frac{53}{36} = 1\frac{17}{36}$. Hierzu die Summe 18 der ganzen Zahlen addirt, giebt $19\frac{17}{36}$.

$$\begin{array}{r|l|l} & 36 & \\ 7\frac{3}{4} & 9 & 27 \\ 3\frac{1}{6} & 6 & 6 \\ 8\frac{5}{9} & 4 & 20 \\ \hline 18 & & 53 \\ \hline \text{also} & = & 19\frac{17}{36}. \end{array}$$

Wenn gegeben ist $7\frac{1}{2} - 4\frac{2}{3}$ und macht man die Brüche gleichnamig, so erhält man

$$7\frac{3}{6} - 4\frac{4}{6}.$$

Wird jetzt der Bruch des Minuenden durch Vorgen einer Einheit von 7 um $\frac{6}{6}$ vergrößert, so ist

$$6\frac{9}{6} - 4\frac{4}{6} = 2\frac{5}{6}.$$

3) Bei zwei Addenden, z. B. $\frac{2}{3} + \frac{1}{5}$ ist die Rechnung kurz diese:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{10+3}{15} = \frac{13}{15},$$

und im Falle einer Subtraction

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{10-3}{15} = \frac{7}{15}.$$

Man multiplicirt jeden der beiden Nenner mit dem Zähler des andern Bruches, addirt oder subtrahirt die erhaltenen Zahlen und setzt das Produkt der beiden Nenner darunter.

Sei gegeben $\frac{5}{6} \pm \frac{1}{9}$, so kann man den gemeinsamen Factor 3 der beiden Nenner bei der kreuzweisen Multiplication ganz vernachlässigen, so daß man im Zähler nur 5.3 und 1.2, des-

gleichem im Nenner mit Weglassung einer 3 nur 6.3 (anstatt 6.9) erhält, nämlich

$$\frac{5}{6} \pm \frac{1}{9} = \frac{15 \pm 2}{18} \text{ also gleich } \frac{17}{18} \text{ oder } \frac{13}{18}.$$

Multiplikation der Brüche.

§ 29. 1) Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man den Zähler mit dieser Zahl multiplicirt und den Nenner unverändert läßt. B. B.

$$\frac{3}{17} \times 5 = \frac{3 \cdot 5}{17} = \frac{15}{17}.$$

Geht die ganze Zahl in dem Nenner auf, so dividirt man den Nenner durch dieselbe und läßt den Zähler unverändert. B. B.

$$\frac{3}{8} \times 2 = \frac{3}{8:2} = \frac{3}{4}.$$

Wenn der Multiplicand eine gemischte Zahl ist, so multiplicirt man einzeln die Ganzen und den Bruch mit dem Multiplikator und addirt die erhaltenen Produkte. B. B.

$$4\frac{3}{7} \times 2 = 4 \cdot 2 + \frac{3 \cdot 2}{7} = 8\frac{6}{7}.$$

2) Eine ganze Zahl wird mit einem Bruche multiplicirt, wenn man sie mit dem Zähler multiplicirt und das Produkt durch den Nenner dividirt. B. B.

$$3 \times \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{7} = \frac{6}{7}.$$

3) Brüche werden mit einander multiplicirt, wenn man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt. B. B.

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 7} = \frac{6}{35}.$$

Gemischte Zahlen werden vor ihrer Multiplication mit einander in unechte Brüche verwandelt. B. B.

$$1\frac{2}{5} \times 3\frac{2}{3} = \frac{7}{5} \times \frac{11}{3} = \frac{77}{15} = 5\frac{2}{15}.$$

4) Gleiche Factoren werden aus Zähler und Nenner des Multiplicanden und Multiplikators vor ihrer Multiplication mit einander weggehoben. B. B.

$$2 \times \frac{5}{12} = 2 \times \frac{5}{2 \cdot 6} = \frac{5}{6}.$$

$$\frac{2}{9} \times 27 = \frac{2}{9} \times (3 \cdot 9) = 2 \times 3 = 6.$$

$$\frac{4}{7} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{9} = \frac{2 \cdot 2 \times 5 \times 7}{7 \times 2 \cdot 3 \times 9} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 9} = \frac{10}{27}.$$

Division der Brüche.

§ 30. 1) Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividirt, wenn man den Nenner mit dieser Zahl multiplicirt und den Zähler unverändert läßt. *B. B.*

$$\frac{7}{8} : 3 = \frac{7}{8 \cdot 3} = \frac{7}{24}.$$

Wenn die ganze Zahl in dem Zähler aufgeht, so dividirt man den Zähler durch die ganze Zahl und läßt den Nenner unverändert. *B. B.*

$$\frac{6}{11} : 3 = \frac{6 : 3}{11} = \frac{2}{11}.$$

2) Eine ganze Zahl wird durch einen Bruch dividirt, wenn man sie mit dem umgekehrten Bruche multiplicirt, also mit dem Nenner multiplicirt und durch den Zähler dividirt. *B. B.*

$$2 : \frac{3}{5} = 2 \times \frac{5}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}.$$

3) Brüche werden durch einander dividirt, wenn man den Dividenden mit dem umgekehrten Divisor multiplicirt, also mit dem Nenner des Divisors multiplicirt und durch den Zähler desselben dividirt. *B. B.*

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{14}{15}.$$

4) Wenn der Dividend oder der Divisor oder auch beide gemischte Zahlen sind, so verwandelt man diese zuvor in unechte Brüche. *B. B.*

$$2\frac{1}{3} : 4 = \frac{7}{3} : 4 = \frac{7}{12}.$$

$$5 : 7\frac{1}{2} = 5 : \frac{2^2}{2} = \frac{15}{2}.$$

$$12\frac{2}{5} : 3\frac{3}{4} = \frac{7}{5} : \frac{15}{4} = \frac{28}{75}.$$

5) Gleiche Factoren werden aus dem Dividenden und Divisor, wo es angeht, vor der Division weggehoben. *B. B.*

$$\frac{10}{11} : 6 = \frac{2 \cdot 5}{11} : (2 \cdot 3) = \frac{5}{11} : 3 = \frac{5}{33}.$$

$$\frac{5}{6} : \frac{8}{9} = \frac{5}{2} : \frac{8}{3} = \frac{15}{16}.$$

$$\frac{8}{9} : \frac{4}{27} = 2 : \frac{1}{3} = 6.$$

§ 31. Doppelbrüche, d. h. solche Brüche, deren Zähler oder deren Nenner selbst wieder Brüche sind, deuten eine auszuführende Division an und werden nach den Regeln der letztern immer in einfache Brüche verwandelt. *B. B.*

$$\frac{\left(\frac{3}{5}\right)}{7} = \frac{3}{5} : 7 = \frac{3}{35}.$$

$$\frac{3\frac{2}{3}}{4\frac{1}{4}} = \frac{11}{3} : \frac{17}{4} = \frac{44}{51}.$$

Zusammengesetzte Ausdrücke werden durch Ausführung der in ihnen angedeuteten Operationen in einfache Ausdrücke verwandelt. *B. B.*

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{3}{5} + 2 - \frac{7}{10}\right) = \frac{7}{6} : 1\frac{9}{10} = \frac{35}{57}.$$

VIII. Decimalbrüche.

§ 32. 1) Unter einem Decimalbruch versteht man einen Bruch, dessen Zähler irgend eine ganze Zahl und dessen Nenner 10 oder 100 oder 1000 u. s. w., überhaupt eine Potenz von 10 ist. *B. B.*

$$\frac{7}{10}, \quad \frac{13}{100}, \quad \frac{37}{1000}, \quad \frac{119}{10000}.$$

Diese Eigenschaft der Decimalbrüche, daß ihre Nenner immer dekadische Ordnungszahlen sind (§ 6), gewährt die Möglichkeit, die Decimalbrüche ohne Nenner zu schreiben und mit ihnen, wie mit ganzen Zahlen zu rechnen.

In einer mehrzifferigen Zahl hat nämlich eine Ziffer um jede Stelle von links nach rechts einen zehn Mal kleinern Werth, bis in der letzten Stelle rechts die Einer stehen. Läßt man dieses Gesetz noch über die Einer hinaus gelten, so muß die erste Ziffer rechts von den Einern Zehntel, die zweite Hundertel, die dritte Tausendtel u. s. w. bedeuten. Um anzuzeigen, welche Ziffer in der ganzen Reihe die Einer ausdrücken, setzt man nach denselben ein Komma, das sogenannte Decimalkomma.

2) Enthält eine Zahl keine Ganzen, so wird an die Stelle der Einer eine Null gesetzt. Die auf das Komma rechts folgenden Ziffern werden Decimalen oder Decimalziffern und die von ihnen eingenommenen Stellen Decimalstellen genannt. Es ist

$$13,207 = 13 + \frac{2}{10} + \frac{0}{100} + \frac{7}{1000} = 13 \frac{207}{1000},$$

$$0,5709 = \frac{5}{10} + \frac{7}{100} + \frac{0}{1000} + \frac{9}{10000} = \frac{5709}{10000}.$$

3) Die Decimalstellen werden entsprechend den auf die Einer folgenden Stellen einer ganzen Zahl benannt. Rechts vom Komma stehen

in der	1.	Stelle	Zehntel,
"	2.	"	Hundertel,
"	3.	"	Tausendtel,
"	4.	"	Zehntausendtel,
"	5.	"	Hunderttausendtel,
"	6.	"	Milliontel,
"	7.	"	Zehnmilliontel,
"	8.	"	Hundertmilliontel,

dann folgen (9. Stelle) Tausend M., — (10. Stelle) Zehntausend M., — (11. Stelle) Hunderttausend M., — (12. Stelle) Billiontel, — (13. Stelle) Zehn B. u. s. w. Weiter folgen (18. Stelle) Trilliontel, — (24. Stelle) Quadrilliontel u. s. w.

4) Wenn ein Decimalbruch vor dem Komma eine 0, also keine Ganzen hat und daher kleiner als 1 ist, so heißt er ein echter; hat er aber eine geltende Ziffer vor dem Komma, so wird er ein unechter oder gemischter genannt. +

* Zwei Decimalbrüche heißen gleichnamig, wenn sie eine gleiche Anzahl Decimalstellen haben, z. B. 5,391 und 0,047.

* **§ 33.** Ein Decimalbruch kann auf drei verschiedene Arten ausgesprochen werden.

1) Man spricht erst die Ganzen aus, dann der Reihe nach die einzelnen Ziffern. *Z. B.*

2,309 = 2 Ganze, 3 Zehntel, 0 Hundertel, 9 Tausendtel;
oder ohne Angabe des Stellenwerthes der Decimalziffern bloß:
2 Ganze, 3, 0, 9.

0,057 = 0 Ganze, 0 Zehntel, 5 Hundertel, 7 Tausendtel;
oder bloß: 5 Hundertel und 7 Tausendtel; oder endlich: 0 Komma, 0, 5, 7.

2) Man giebt die Ganzen besonders an und spricht die Decimalen zusammenhängend wie eine ganze Zahl aus mit der Benennung der letzten Decimalziffer. *Z. B.*

3,573 = 3 Ganze 573 Tausendtel,

0,0105 = 0 Ganze 105 Zehntausendtel.

3) Man spricht die Ganzen und die Decimalen zusammen als eine Zahl aus mit der Benennung der letzten Decimalziffer. *Z. B.*

9,573 = 9573 Tausendtel,

0,017308 = 17308 Milliontel.

* **§ 34.** 1) Ein Decimalbruch bleibt seinem Werthe nach unverändert, wenn man rechts beliebig viele Nullen anhängt oder wegläßt. *Z. B.*

7,03 = 7,030 = 7,0300 u. s. w.

Decimalbrüche werden gleichnamig gemacht, wenn man die Decimalstellen, die der eine Bruch weniger hat als der andere, durch Nullen ergänzt. Die Brüche 8,2, 0,07 und 3,107 verwandeln sich in

8,200, 0,070, 3,107.

2) Ein Decimalbruch wird mit 10, 100, 1000 u. s. w. multiplicirt, wenn man das Komma entsprechend um 1, 2, 3 . . . Stellen weiter nach rechts versetzt. *Z. B.*

4,72 × 10 = 47,2

4,72 × 100 = 472

4,72 × 1000 = 4720 u. s. w.

Das Komma rückt so viele Stellen nach rechts, als der Multipli-

cator Nullen hat, wobei die fehlenden Decimalstellen durch angehängte Nullen ergänzt werden. ✓

3) Ein Decimalbruch wird durch 10, 100, 1000 u. s. w. dividirt, wenn man das Komma entsprechend um 1, 2, 3 ... Stellen weiter nach links versetzt. B. B.

$$4,72 : 10 = 0,472$$

$$4,72 : 100 = 0,0472 \text{ u. s. w.}$$

Ueberhaupt rückt das Komma so viele Stellen nach links, als der Divisor Nullen hat, wobei die fehlenden Stellen durch vorgesezte Nullen ausgefüllt werden. ✗

§ 35. 1) Wenn man in einem bestimmten Falle weniger Decimalen nöthig hat, als deren ein Decimalbruch besitzt, so läßt man mehrere der letzten Stellen weg und erhält dann einen Bruch, der kleiner ist als der ursprüngliche und ein abgekürzter oder genäherter Decimalbruch genannt wird.

2) Der Fehler eines abgekürzten Decimalbruches beträgt immer weniger als eine Einheit der letzten beibehaltenen Decimalstelle. ✗

Setzt man statt 0,1798 blos 0,17, so ist der zweite Bruch um 0,0098 kleiner als der erste, und dieser Fehler beträgt weniger als 0,01.

✗ 3) Den durch die Abkürzung entstehenden Fehler kann man noch kleiner machen, so daß der Fehler nie die halbe Einheit der letzten beibehaltenen Decimalstelle übersteigt, wenn man nach folgender Regel verfährt.

Ist die erste weggelassene Decimalziffer größer als 4, so erhöhe man die letzte beibehaltene Ziffer um eine Einheit; ist sie aber gleich 4 oder kleiner als 4, so lasse man die letzte beibehaltene Ziffer unverändert. ✗

Hiernach ist also statt 0,1734508 zu setzen

in 3 Stellen 0,173

„ 4 „ 0,1735

„ 5 „ 0,17345

„ 6 „ 0,173451.

Wird die Abkürzung nach der vorstehenden Regel gemacht, so heißt der Decimalbruch regelrecht abgekürzt.

Ein abgekürzter Decimalbruch ist ohne Erhöhung der letzten beibehaltenen Decimalziffer zu klein, dagegen mit Erhöhung zu groß.

Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche.

★ § 36. 1) Soll ein gemeiner Bruch in einen Decimalbruch verwandelt werden, so muß derselbe in einen andern Bruch umgeformt werden, dessen Nenner 10 oder 100 oder 1000 u. s. w. ist. B. B. ✓

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10} = 0,5;$$

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{625}{1000} = 0,625.$$

★ Hier gibt es nun zwei Fälle; die gemeinen Brüche lassen sich nämlich in Decimalbrüche verwandeln entweder vollkommen genau, wie die beiden obigen Brüche, oder bloß näherungsweise, wie z. B. der Bruch $\frac{5}{6}$, jedoch der Art, daß man den Fehler der Abweichung beliebig klein machen kann.

Die Verwandlung geschieht in beiden Fällen nach folgender Regel:

2) Man dividirt den Nenner des gegebenen echten Bruches in den Zähler, indem man im Quotienten erst 0 Ganze setzt, hierauf dem Zähler eine 0 anhängt und den Nenner wieder darin dividirt, dann dem nachbleibenden Reste eine 0 anhängt und den Nenner abermals darin dividirt, und auf diese Weise fortfährt, bis entweder die Division aufgeht oder ein Rest erscheint, der schon einmal vorgekommen ist.

Für die Brüche $\frac{3}{8}$ und $\frac{5}{6}$ hat man hiernach

$$\begin{array}{r} 8 \overline{) 3} \quad | \quad 0,375 \\ \underline{30} \\ 24 \\ \underline{60} \\ 56 \\ \underline{40} \\ 40 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \overline{) 5} \quad | \quad 0,833 \dots \\ \underline{50} \\ 48 \\ \underline{20} \\ 18 \\ \underline{20} \end{array}$$

Demnach ist genau $\frac{3}{8} = 0,375$, während nur näherungsweise $\frac{5}{8} = 0,833 \dots$ ist, wo die Division nie aufgehen kann, weil stets der Rest 2 wiederkehrt, daher sich auch im Quotienten die Ziffer 3 beständig wiederholt. Je mehr Ziffern man dem Quotienten giebt, desto genauer drückt derselbe den Werth des Bruches $\frac{5}{8}$ aus.

3) Ein gemeiner, in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückter Bruch läßt sich immer genau in einen Decimalbruch verwandeln, wenn sein Nenner nur die Primfactoren 2 und 5 oder deren Potenzen enthält, dagegen bloß näherungsweise, wenn im Nenner andere Primfactoren allein oder mit jenen verbunden vorkommen. Z. B.

$$\frac{3}{20} = \frac{3}{2 \cdot 2 \cdot 5} \text{ ist genau } 0,15;$$

$$\frac{7}{50} = \frac{7}{2 \cdot 5 \cdot 5} \text{ ist genau } 0,14;$$

$$\frac{2}{3} \text{ ist bloß annäherungsweise } 0,666 \dots;$$

$$\frac{7}{12} = \frac{7}{2 \cdot 2 \cdot 3} \text{ ist näherungsweise } 0,5833 \dots;$$

$$\frac{8}{15} = \frac{8}{3 \cdot 5} \text{ ist näherungsweise } 0,533 \dots$$

§ 37. Wenn der Nenner eines reducirten Bruches nur die Primfactoren 2 und 5 enthält, so kann man aus diesen im Voraus bestimmen, wie viel Decimalstellen der Decimalbruch haben wird, in welchen sich der Bruch genau verwandeln läßt.

Der Decimalbruch muß so viele Stellen haben, als der Exponent desjenigen der beiden Factoren 2 und 5 anzeigt, welcher in der höchsten Potenz im Nenner des Bruches vorkommt.

Der Nenner des Bruches $\frac{7}{50}$ ist $2 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 5^2$; die höchste Potenz, welche hier die Primfactoren 2 und 5 haben, ist 5^2 ; der Exponent dieser höchsten Potenz ist 2, folglich giebt $\frac{7}{50}$ einen 2-stelligen Decimalbruch, nämlich 0,14.

Ebenso geben die folgenden Brüche genau Decimalbrüche mit 1, mit 2, mit 3 Stellen:

$$\frac{3}{10} = \frac{3}{2 \cdot 5} = 0,3; \quad \frac{3}{20} = \frac{3}{2^2 \cdot 5} = 0,15;$$

$$\frac{3}{8} = \frac{3}{2^3} = 0,375; \quad \frac{7}{250} = \frac{7}{2 \cdot 5^3} = 0,028.$$

§ 38. 1) Wenn bei der Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen Decimalbruch die Division des Nenners in den Zähler aufgeht, so heißt der dadurch entstandene Decimalbruch ein endlicher oder geschlossener.

Geht aber die Division nicht auf, so erhält man einen unendlichen Decimalbruch, der an irgend einer Stelle abgebrochen und als endlicher Decimalbruch betrachtet, nur einen Näherungswert für den gegebenen gemeinen Bruch liefert.

2) Unendliche Decimalbrüche, in welchen sich von einer gewissen Stelle an dieselben Ziffern wiederholen und in gleicher Folge ohne Ende wiederkehren, heißen periodische Decimalbrüche. Die in unveränderter Folge stets wiederkehrenden Ziffern werden die Periode des Decimalbruchs genannt.

In einem rein-periodischen Decimalbruche beginnt die Periode gleich mit der ersten Decimalstelle, z. B. 0,333... oder 5,2121...; in einem unrein-periodischen Bruche aber beginnt die Periode erst nach einer oder nach mehreren Decimalziffern, die von der Periode abweichen und daher nicht zu derselben gehören, z. B. 0,04545... oder 7,2902323... Diese von der Periode abweichenden, derselben vorangehenden Decimalziffern werden vorperiodische Ziffern oder Vorziffern genannt.

Man unterscheidet einstellige, zweistellige Perioden u. s. w. je nach der Anzahl der Ziffern, welche die Periode bilden.

3) Die Periode eines Decimalbruchs schreibt man gewöhnlich zwei Mal und setzt nach ihr einige Punkte, oder man macht sie auch durch eine Klammer kenntlich. Z. B.

$$0,77 \dots \text{ oder } 0,7(7) \dots$$

$$3,09292 \dots \text{ oder } 3,092(92) \dots \text{ oder } 3,0(92) \dots$$

§ 39. Wenn bei der Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen Decimalbruch die Division des Nenners in den Zähler

nicht aufgeht, wie weit man auch die Division fortsetzt, so ist der erhaltene Decimalbruch immer ein periodischer.

Die Periode kann höchstens so viele Stellen haben, als der um 1 verminderte Nenner beträgt. Z. B.

$$\frac{2}{7} = 0,285714(285714) \dots \text{ (6stellige Periode);}$$

$$\frac{5}{6} = 0,83(3) \dots \text{ (1stellige Periode);}$$

$$\frac{2}{165} = 0,012(12) \dots \text{ (2stellige Periode).}$$

Verwandlung der Decimalbrüche in gemeine Brüche.

§ 40. 1) Um einen endlichen Decimalbruch in einen gewöhnlichen Bruch zu verwandeln, setzt man unter die Decimalziffern den zugehörigen Nenner und hebt wo möglich den erhaltenen Bruch auf. Z. B.

$$7,04 = 7\frac{4}{100} = 7\frac{1}{25};$$

$$0,00031 = \frac{31}{100000};$$

$$0,625 = \frac{625}{1000} = \frac{5}{8}.$$

2) Ein rein-periodischer Decimalbruch wird in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt, wenn man eine Periode zum Zähler nimmt und soviel Neunen, als die Periode Stellen hat, als Nenner darunter schreibt. Z. B.

$$5,3(3) \dots = 5\frac{3}{9} = 5\frac{1}{3};$$

$$7,0041(0041) \dots = 7\frac{41}{9999};$$

$$0,345(345) \dots = \frac{345}{999} = \frac{115}{333}.$$

3) Ein unrein-periodischer Decimalbruch wird in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt, wenn man die Vorziffern und die erste Periode als eine Zahl betrachtet, davon die Vorziffern als eine Zahl betrachtet

abzieht, und der Differenz einen Nenner giebt, der aus so vielen Neunen, als die Periode Stellen hat, und aus so vielen nachfolgenden Nullen besteht, als Vorkommissen vorhanden sind. z. B.

$$0,73(3) \dots = \frac{73-7}{90} = \frac{66}{90} = \frac{11}{15};$$

$$7,05(5) \dots = 7 + \frac{5-0}{90} = 7\frac{1}{18};$$

$$0,3546(46) \dots = \frac{3546-35}{9900} = \frac{3511}{9900}.$$

4) Wenn der Decimalbruch ein abgekürzter, aber nicht periodischer ist, so erhält man für jede andere Abkürzung auch einen andern gemeinen Bruch, der dem gegebenen Decimalbruche desto näher kommt, je mehr Decimalen des letztern bei seiner Abkürzung beibehalten sind. z. B. 3,14159265 giebt bei regelrechter Abkürzung:

$$3\frac{14}{100} = 3\frac{7}{50}; \quad 3\frac{142}{1000} = 3\frac{71}{500}; \quad 3\frac{1416}{10000} = 3\frac{177}{1250} \text{ u. s. w.}$$

Addition und Subtraction der Decimalbrüche.

* § 41. 1) Die gegebenen Brüche stellt man so unter einander, daß die Kommata und daher auch nur gleichstellige Ziffern unter einander zu stehen kommen, führt dann die Rechnung wie bei ganzen Zahlen aus und setzt im Resultate das Komma genau unter die Kommata der gegebenen Brüche, d. h. dann, wenn man die Zehntel der letzteren addirt oder subtrahirt hat und im Begriffe steht, zu den Ganzen überzugehen.

Hat der Minuend weniger Decimalstellen als der Subtrahend, so kann man die fehlenden Stellen durch Nullen ergänzen.

* 2) Sollen periodische Brüche von einander subtrahirt werden, so hat man bei der Bestimmung der niedrigsten Ziffer des Restes darauf zu achten, ob die erste weggelassene Ziffer des Subtrahenden, wenn sie beibehalten wäre, die letzte beibehaltene Ziffer des Minuenden durch Vorgen um eine Einheit vermindert hätte oder nicht. Man hat z. B.

$$\begin{array}{r}
 1,08080 \dots \text{ dagegen } 1,0808 \dots \\
 \underline{0,23232 \dots} \qquad \qquad \underline{0,2323 \dots} \\
 0,84848 \dots \qquad \qquad 0,8484 \dots
 \end{array}$$

3) Sind die gegebenen Brüche theils Decimalbrüche theils gewöhnliche, so werden vorher alle gewöhnlichen Brüche in Decimalbrüche oder diese in jene verwandelt.

§ 42. 1) Wenn man eine beliebige Zahl von ihrer nächst höhern dekadischen Einheit (10, 100 . . .) abzieht, so erhält man die dekadische Ergänzung oder das Complementum decadicum jener Zahl, welches durch C. D. bezeichnet wird. Es ist z. B.

$$C. D. 7 = 10 - 7 = 3; \quad C. D. 13 = 100 - 13 = 87;$$

$$C. D. 0,537 = 10 - 0,537 = 9,463;$$

$$C. D. 75,1212 \dots = 100 - 75,1212 \dots = 24,8787 \dots$$

2) Mittels der dekad. Ergänzung läßt sich eine Subtraction in eine Addition verwandeln.

Anstatt $7,53 - 1,75$ kann man setzen

$$7,53 + (10 - 1,75) - 10, \text{ folglich}$$

$$7,53 + 8,25 - 10 = 5,78.$$

Anstatt also einen Decimalbruch zu subtrahiren, kann man die dekadische Ergänzung desselben addiren, muß aber dann von der erhaltenen Summe wieder 10 oder 100 u. s. w. subtrahiren, je nachdem die dekadische Ergänzung durch Subtraction von 10 oder 100 u. s. w. gebildet worden ist.

3) Man wendet die dekadischen Ergänzungen vortheilhaft an, wenn man von einem Decimalbruche mehrere andere Decimalbrüche oder von der Summe mehrerer Decimalbrüche einen oder mehrere Decimalbrüche zu subtrahiren hat. Bei der Berechnung des Ausdrucks

$$20,1476 - 4,08 + 95,1 - 35,8162 \text{ wird}$$

$$\text{statt } 20,1476 \text{ gesetzt } 20,1476$$

$$" - 4,08 \qquad " \qquad 5,92 \quad -10$$

$$" \quad 95,1 \qquad " \qquad 95,1$$

$$" - 35,8162 \qquad " \qquad \underline{64,1838 - 100}$$

$$185,3514 - 110 = 75,3514.$$

Multiplication der Decimalbrüche.

§ 43. 1) Zwei Decimalbrüche multiplicirt man mit einander ohne Rücksicht auf das Komma wie ganze Zahlen, und schneidet im Produkt so viele Decimalstellen ab, als in beiden Factoren zusammen vorkommen. *z. B.*

$$9,204 \times 0,04 = 0,36816.$$

2) Ist der eine Factor eine ganze Zahl, so werden von dem Produkte nur so viele Stellen abgeschnitten, als deren der Decimalbruch enthält. *z. B.*

$$9,204 \times 4 = 36,816.$$

3) Sind im Produkte nicht genug abzuschneidende Ziffern vorhanden, so werden die fehlenden links durch Nullen ergänzt. *z. B.*

$$0,07 \times 0,022 = 0,00154.$$

4) Kommen im Produkte als letzte Decimalstellen Nullen vor, so fallen sie zwar wieder weg, müssen aber bei der Bestimmung, wo das Komma im Produkte zu setzen ist, mitgezählt werden. *z. B.*

$$0,816 \times 0,25 = 0,20400 = 0,204.$$

5) Die vorstehenden Regeln finden auch Anwendung auf mehr als zwei Factoren. *z. B.*

$$0,13 \times 1,5 \times 0,026 = 0,005070 = 0,00507.$$

§ 44. 1) Ein Decimalbruch wird mit einem gewöhnlichen Bruch multiplicirt, wenn man ihn mit dem Zähler multiplicirt und das Produkt durch den Nenner dividirt. *z. B.*

$$8,796 \times \frac{5}{6} = 7,33.$$

Geht der Nenner im Produkte nicht auf, so ist es vorzuziehen, den Decimalbruch zuvor in einen gewöhnlichen Bruch zu verwandeln, die Multiplication auszuführen und das Resultat ebenfalls durch einen gewöhnlichen Bruch anzugeben. *z. B.*

$$1,07 \times \frac{2}{3} = \frac{107}{100} \times \frac{2}{3} = \frac{107}{150}.$$

2) Bei der Multiplication mit periodischen Brüchen ist es vorzuziehen, letztere zuvor in gewöhnliche Brüche zu verwandeln. z. B.

$$0,7373\dots \times 0,22\dots = \frac{73}{99} \times \frac{2}{9} = \frac{146}{891}.$$

§ 45. Die verkürzte Multiplication wird angewendet, wenn man das Produkt zweier Decimalbrüche in weniger Stellen, als ihre vollständige Multiplication liefert, zu erhalten wünscht. Will man z. B. das Produkt $7,10325 \times 6,18932$ blos

7,1032	5
6,1893	2
42,6195	
7103	
5683	
639	
22	
43,9642	

auf 4 Decimalstellen berechnen, so kann sich die Rechnung auf 4 Decimalsen jedes Factors beschränken, da die höchste Ziffer jedes Factors mit der 4ten Bruchziffer des andern multiplicirt (nämlich 6 . 2 und 7 . 3) Zehntausendtel giebt, welche die 5te Stelle bilden. Wendet man nun die fallend geordnete Multiplication an (§ 10,8), so hat man zuerst $6 . 2 = 12$; da aber die abgesonderte Ziffer 5 das Produkt $6 . 5 = 30$ giebt, also auf die 4te Decimalstelle Einfluß hat, so ist statt $6 . 2 = 12$ zu setzen 15. Ferner ist $6 . 3 = 18$ und dazu 1 gezählt u. s. w. also das erste Partialprodukt gleich 42,6195. Setzt streicht man im Multiplicanden die niedrigste Ziffer 2 weg und multiplicirt mit der folgenden Ziffer 1 des Multiplicators, nämlich $7103 \times 1 = 7103$. Dieses Partialprodukt setzt man unter das vorhergehende, so daß die niedrigsten Ziffern (5, 3) unter einander stehen. Man streicht jetzt die Ziffer 3 weg und multiplicirt 710 mit 8. Statt $8 . 0 = 0$ setzt man aber 3, denn es ist $32 \times 8 = 256$, folglich kommt zur 0 eine 2, wofür man genauer mit Erhöhung 3 setzen kann. Das dritte Partialprodukt ist nun 5683, das vierte ist $9 \times 71 = 639$, das fünfte ist $3 \times 7 = 21$, wofür man wegen $2 \times 7 = 14$ zu setzen hat 22. Aus allen, mit ihren niedrigsten Ziffern in eine senkrechte Reihe gestellten Partialprodukten findet man durch Addition das in vier Decimalstellen vollkommen genaue Produkt 43,9642.

Division der Decimalbrüche.

§ 46. 1) Ein Decimalbruch wird durch eine ganze Zahl dividirt, wenn man diese der Reihe nach in die Ganzen,

Zehntel, Hundertel u. s. w. des Dividenden dividirt, wodurch entsprechend die Ganzen, Zehntel, Hundertel u. s. w. des Quotienten gefunden werden. Das Komma wird im Quotienten dann gesetzt, sobald man die Ganzen des Dividenden dividirt hat und im Begriffe steht, zur Division der Zehntel überzugehen.
z. B.

$$\begin{array}{r} 19 \overline{) 20,995} \mid 1,105 \\ \underline{19} \\ 19 \\ \underline{19} \\ 95 \\ \underline{95} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2) \quad 8 \overline{) 5,8} \mid 0,725 \\ \underline{5} \quad 6 \\ 20 \\ \underline{16} \\ 40 \\ \underline{40} \end{array}$$

Im ersten Beispiele geht die Division auf, nachdem man alle Ziffern des Decimalbruchs als Dividenden heruntergesetzt hat, im zweiten Beispiele aber erst nach Anreihung einiger Nullen an die nachbleibenden Reste.

2) Ein Divisor, welcher nicht gleich nach bloßer Herabsetzung aller Ziffern des Decimalbruchs aufgeht, wird doch immer nach Anreihung einer oder mehrerer Nullen aufgehen, sobald derselbe keine anderen Primfactoren als 2 und 5 enthält (§ 36,3).

$$\begin{array}{r} 3) \quad 6 \overline{) 0,74} \mid 0,1233 \dots \\ \underline{6} \\ 14 \\ \underline{12} \\ 20 \\ \underline{18} \\ 20 \\ \underline{18} \\ 2 \end{array}$$

3) Hat man aber $\frac{0,74}{6}$, also einen Divisor, der nicht bloß die Primfactoren 2 und 5 enthält und der nicht schon in den Ziffern des Dividenden aufgeht, so wird die Division auch nach Anreihung von Nullen nie aufgehen, sondern im Quotienten einen periodischen Decimalbruch geben (§ 39).

4.) 2) Wenn der Dividend ein periodischer Bruch ist, so sind an die bleibenden Reste nicht Nullen, sondern die Ziffern der Periode anzureihen. Auf diese Weise findet man z. B.

$$4.) \quad \frac{1,73838 \dots}{24} = 0,0724326 \dots$$

5) § 47. 1) Ein Decimalbruch oder eine ganze Zahl wird durch einen Decimalbruch dividirt, wenn man

sowol im Dividenden wie im Divisor das Komma um so viele Stellen, als der Divisor Decimalstellen hat, nach rechts versetzt, und den Divisor, der jetzt eine ganze Zahl geworden ist, in den Dividenden (wie in § 46,1) dividirt. z. B.

$$1) \frac{24,15}{0,23} = \frac{2415}{23} = 105;$$

$$2) \frac{1,088059}{21,005} = \frac{1088,059}{21005} = 0,0518;$$

$$3) \frac{0,007344}{0,51} = \frac{0,7344}{51} = 0,0144.$$

6) Wenn der Dividend nicht so viele Stellen hat, als die Versetzung des Kommas erfordert, so reihet man an denselben Nullen an. z. B.

$$\frac{56,4}{0,015} = \frac{56400}{15} = 3760.$$

$$\frac{374}{2,4} = \frac{3740}{24} = 155,8333 \dots$$

7) 2) Wenn von beiden gegebenen Brüchen der eine ein Decimalbruch, der andere ein gemeiner Bruch ist, so kann zuvor der eine Bruch auf die Form des andern gebracht werden. — Ist der Divisor ein periodischer Decimalbruch, so ist es vortheilhaft, ihn zuvor in einen gemeinen Bruch zu verwandeln.

Häufig läßt sich auch ohne Verwandlung der Brüche in eine andere Form die Division bequem ausführen. z. B.

$$\frac{8}{25} : 0,64 = \frac{8}{25 \times 0,64} = \frac{1}{25 \times 0,08} = \frac{1}{2};$$

$$9,38 : \frac{2}{3} = \frac{9,38 \times 3}{2} = 4,69 \times 3 = 14,07.$$

§ 48. Die verkürzte Division, die man anwendet, wenn man den Quotienten nur in einer geringen Anzahl von Ziffern genau erhalten will, besteht darin, daß man nach Herabsetzung aller Ziffern des Dividenden keine Null an den Rest anreihet, sondern dafür von dem Divisor rechts nach und nach eine Ziffer wegläßt und mit dem so verkürzten Divisor die Division in jenen Rest fortsetzt.

$$\begin{array}{r|l}
 3456 & 538,39 \quad | \quad 0,15578 \\
 \hline
 & 345 \quad 6 \\
 & \underline{192} \quad 79 \\
 & 172 \quad 80 \\
 & \underline{19} \quad 99 \\
 & 17 \quad 28 \\
 & \underline{2} \quad 71 \\
 & 2 \quad 42 \\
 & \underline{29} \\
 & 27 \\
 & \underline{2}
 \end{array}$$

höhung um 1 statt dessen $238 + 4 = 242$. Auf dieselbe Weise erhält man endlich die Quotientenziffer 8.

In unserem Beispiel bleibt nach Auffindung zweier Quotientenziffern der Rest 1999, welcher durch 345 dividirt 5 giebt. In $345 \times 5 = 1725$ addirt man 3, denn die weggelassene Ziffer 6 giebt $5 \cdot 6 = 30$. Hierauf hat man $271 : 34 = 7$; also $34 \times 7 = 238$; da aber $5 \cdot 7 = 35$, so setzt man mit Zuzählung der 3 und regelmäßiger Er-

IX. Wurzelausziehung.

Quadratwurzel.

§ 49. 1) Aus einer gegebenen Zahl die 2te Wurzel oder die Quadratwurzel ausziehen, heißt eine Zahl finden, die zur 2ten Potenz erhoben die gegebene Zahl hervorbringt.

Die Quadratwurzel z. B. von 16 ist gleich 4, da $4^2 = 16$ ist. Dieses bezeichnet man durch

$$\sqrt[2]{16} = 4 \text{ oder } \sqrt{16} = 4.$$

Die Zahl 16, aus welcher die Wurzel gezogen wird, heißt der Radicand oder auch die gegebene Zahl, und die Zahl 2, welche anzeigt, die wievielte Wurzel ausgezogen werden soll, der Wurzelexponent.

2) Unter den ganzen Zahlen sind diejenigen vollkommene Quadratzahlen, die sich in zwei gleiche Factoren zerlegen lassen, nämlich $1 = 1 \cdot 1$; $4 = 2 \cdot 2$; $9 = 3 \cdot 3$; $16 = 4 \cdot 4$; $25 = 5 \cdot 5$ u. s. w.

3) Die Wurzel aus einer ganzen Zahl kann niemals ein Bruch oder eine gemischte Zahl sein.

Da z. B. $\sqrt{7}$ keine ganze Zahl ist, so läßt sich auch dafür kein echter oder unechter Bruch angeben, welcher zum Quadrate erhoben gleich 7 wäre.

4) Solche Wurzeln, die weder durch ganze noch durch gebrochene Zahlen genau ausgedrückt werden können, heißen irrationale Zahlen. Dieselben lassen sich nur näherungsweise angeben. +

5) Das Potenziren und die Wurzelausziehung sind entgegengesetzte Rechnungsarten, die bei gleichem Exponenten einander aufheben.

Erhebt man 7 zum Quadrate und zieht aus diesem die Quadratwurzel, so erhält man wieder 7, nämlich

$$7^2 = 49 \text{ und } \sqrt{49} = 7.$$

§ 50. Die Ausziehung der Quadratwurzel gründet sich auf folgende Sätze über die Erhebung einer Zahl zum Quadrate.

1) Wenn man z. B. die Zahl 27 zum Quadrate erheben will, dieselbe aber in zwei Theile ($20 + 7$) zerlegt und statt der Zahl 27 diesen zweitheiligen Ausdruck zum Quadrate erhebt, so findet man

$$27^2 = (20 + 7)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 7 + 7^2 = 729.$$

Das Quadrat einer aus zwei Theilen bestehenden Zahl ist also gleich dem Quadrate des ersten Theils, plus dem doppelten Produkte beider Theile, plus dem Quadrate des zweiten Theils. +

2) Das Quadrat der Zahl 20 allein ist 20^2 . Wenn also zu 20 die Zahl 7 hinzukommt, so ist das Quadrat von $20 + 7$ um $2 \cdot 20 \cdot 7 + 7^2$ größer als das erste Quadrat, d. h. die Zahl 20 hat die Zunahme 7 erhalten und dadurch ist ihr Quadrat um $2 \cdot 20 \cdot 7$ und um 7^2 größer geworden.

Wenn also eine Zahl eine Zunahme erhält, so wächst ihr Quadrat um das doppelte Produkt jener Zahl in ihre Zunahme und um das Quadrat der Zunahme.

3) Nach diesem Satze kann man auch das Quadrat solcher Zahlen berechnen, die nach einander mehrere Zunahmen erhalten

haben, z. B. der Zahl 243, wenn man sich diese so entstanden denkt, daß erst 200 um 40, und hierauf 240 um 3 zugenommen hat. Man findet

$$\begin{aligned} 200^2 &= \dots\dots\dots 40000 \\ 2 \cdot 200 \cdot 40 + 40^2 &= (2 \cdot 200 + 40) 40 = 17600 \\ 2 \cdot 240 \cdot 3 + 3^2 &= (2 \cdot 240 + 3) 3 = 1449 \\ \hline 243^2 &= 59049. \end{aligned}$$

Die Nullen in den einzelnen Theilen des gesuchten Quadrats können auch weggelassen werden; es ist aber jeder folgende Theil unter den vorhergehenden so zu setzen, daß die niedrigste Ziffer immer um zwei Stellen weiter nach rechts zu stehen kommt.

§ 51. Es sei nun umgekehrt die Quadratzahl 59049 gegeben und die Wurzel aus derselben gesucht.

$$\begin{array}{r} \sqrt{5|90|49} = 243 \\ 4 \\ 4 \cdot 4 \overline{)190} \\ \underline{176} \\ 48 \cdot 3 \overline{)1449} \\ \underline{1449} \end{array}$$

Man theilt die Zahl in zweizifferige Klassen, wobei die äußerste Klasse links auch nur eine Ziffer erhalten kann. Die Wurzel muß so viele Ziffern haben, als Klassen entstehen.

Mit Hülfe des Einmaleins bestimmt

man die erste Wurzelziffer 2, indem man die größte Zahl sucht, deren Quadrat (4) sich von der ersten Klasse links abziehen läßt. — An den Rest (1) reißt man die zweite Klasse (90) an, dividirt die erhaltene Zahl mit Auslassung der letzten Ziffer rechts (also 19) durch die doppelte erste Wurzelziffer (durch $2 \cdot 2 = 4$), setzt den Quotienten (4), welcher die zweite Wurzelziffer bildet, neben den Divisor und multiplicirt die erhaltene Zahl (44) mit der zweiten Wurzelziffer (4). Das Produkt (176) subtrahirt man von 190, reißt an den Rest (14) die dritte Klasse (49) an, dividirt die erhaltene Zahl mit Auslassung der letzten Ziffer (also 144) durch das Doppelte der beiden gefundenen Wurzeltheile (durch $2 \cdot 24 = 48$), wodurch die dritte Wurzelziffer (3) erhalten wird, setzt letztere neben den Divisor (48) und multiplicirt die erhaltene Zahl (483) mit der letzten Wurzelziffer (3). Zieht man das Produkt (1449) ab, so geht die Wurzelausziehung auf und es ist daher 243 die genaue Quadratwurzel der gegebenen Zahl.

§ 52. Soll aus 252007012009 die Wurzel gezogen werden, so ist für den zweiten Wurzeltheil 0 zu nehmen, denn 10 in 2 giebt 0.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{25} & 20 \ 07 \ 01 \ 20 \ 09 = 502003 \\ 25 & \\ \hline 1002 & 2007 \\ & 2004 \\ \hline 1004003 & 3012009 \\ & 3012009 \end{array}$$

Man nimmt dann sogleich 2.50 = 100 zum ersten Divisor und findet die Wurzelziffer 2. Hierauf müssen zwei Nullen nach einander in der Wurzel genommen werden, so daß der neue Dividend 3012009 aus dem gebliebenen Reste (3) und Ziffern dreier Klassen besteht.

§ 53. 1) Aus einem Decimalbruche wird die Wurzel auf die vorhin erklärte Art gezogen. Soviel Klassen die Ganzen des Decimalbruches bilden, eben so viele Ziffern werden in der Wurzel als Ganze durch das Komma abgeschnitten. z. B.

$$\sqrt{590,49} = 24,3.$$

2) Hat der gegebene Decimalbruch 0 Ganze, so erhält auch die Wurzel 0 Ganze, und finden sich in der nächsten oder in einigen der nächst folgenden Klassen lauter Nullen, so ist auch für jede einzelne dieser Klassen in der Wurzel eine Null zu setzen, so daß man die eigentliche Rechnung nicht früher als bei derjenigen Klasse beginnt, welche zuerst eine geltende Ziffer enthält. z. B.

$$\sqrt{0,059049} = 0,243 ;$$

$$\sqrt{0,00059094} = 0,0243 .$$

§ 54. 1) Wenn die gegebene Zahl keine vollkommene Quadratzahl, also ihre Wurzel irrational ist, so geht die Wurzelausziehung auch nie auf. Wenn man aber an den Rest, welcher nach Herabsetzung aller Ziffern der gegebenen Zahl geblieben ist, und ebenso an alle folgenden Reste Nullen anreicht und die Rechnung auf die gewöhnliche Weise fortsetzt, so kann man die Wurzel, obschon nie vollkommen genau, doch mit jedem beliebigen Grade der Annäherung finden, sobald nur die Rechnung weit genug fortgesetzt wird.

$$\sqrt{560,6470} = 23,677 \dots$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \hline 43 \overline{)160} \\ \underline{129} \\ 466 \overline{)3164} \\ \underline{2796} \\ 4727 \overline{)36870} \\ \underline{33089} \\ 47347 \overline{)378100} \\ \underline{331429} \\ 46671 \end{array}$$

2) Besteht die gegebene Zahl aus Ganzen und Decimalziffern, z. B. 560,647, so werden die Ganzen vom Komma nach links, die Decimalziffern aber nach rechts in zweizifferige Klassen getheilt, wobei die letzte Klasse rechts, wenn sie nur eine Ziffer enthält, durch eine Null vervollständigt wird. Nachdem für diese Klassen die entsprechenden Wurzelziffern bestimmt sind, beginnt das Anreihen von je zwei Nullen, so daß für jedes neue Nullenpaar stets eine neue Ziffer in der Wurzel erhalten wird. Je weiter man dieses Verfahren fortsetzt, desto mehr nähert sich die gefundene Zahl dem eigentlichen, wahren Werthe der irrationalen Wurzel.

Ist der gegebene Decimalbruch periodisch, so werden die Ergänzungsklassen nicht mit Nullen, sondern mit Ziffern der Periode ausgefüllt.

§ 55. 1) Aus einem gemeinen Bruche wird die Quadratwurzel gezogen, wenn man dieselbe aus dem Zähler und aus dem Nenner besonders auszieht. z. B.

$$\sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}} = \frac{6}{7};$$

$$\sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2,23606 \dots}{3} = 0,74535 \dots$$

2) Dieses Verfahren ist nur dann bequem, wenn sowohl der Zähler als der Nenner, oder wenigstens der Nenner eine vollkommene Quadratzahl ist. In allen übrigen Fällen ist es vortheilhaft, den gegebenen gemeinen Bruch zuvor in einen Decimalbruch zu verwandeln. z. B.

$$\sqrt{\frac{7}{8}} = \sqrt{0,875} = 0,93541 \dots$$

$$\sqrt{2\frac{1}{3}} = \sqrt{2,333 \dots} = 1,52752 \dots$$

3) Man kann auch Zähler und Nenner des gegebenen Bruches zuvor mit dem Nenner multipliciren, damit man als Wurzel des Nenners eine ganze Zahl erhält. z. B.

$$\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 7}{7 \cdot 7}} = \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{4,582575 \dots}{7} = 0,654653 \dots$$

§ 56. Wenn man bereits die Hälfte der Ziffern, welche man für die Wurzel einer gegebenen Zahl zu erhalten wünscht, durch das gewöhnliche Verfahren gefunden hat, so kann man die übrigen Ziffern durch abgekürzte Wurzelausziehung erhalten. Die Abkürzung besteht darin, daß man die Subtraction der Quadrate der nach einander noch aufzufindenden Wurzeltheile ganz unterläßt.

Will man $\sqrt{10}$ auf 7 Decimalen bestimmen, und hat man bereits die Ziffern 3,162 gefunden, so dividirt man den Rest 1756 nebst angehängter Null durch das Doppelte der bis dahin gefundenen Wurzeltheile, nämlich durch 2. 3162 = 6324 in verkürzter Weise, indem man statt Nullen anzureihen nach und nach eine Ziffer von dem Divisor wegstreicht und mit Rücksicht auf die weggestrichene Ziffer eine Erhöhung des Subtrahenden vornimmt.

$$\begin{array}{r} \sqrt{10} = 3,1622776 \dots \\ 9 \\ 61 \overline{)100} \\ \underline{61} \\ 626 \overline{)3900} \\ \underline{3756} \\ 6322 \overline{)14400} \\ \underline{12644} \\ 6324 \overline{)17560} \\ \underline{12648} \\ 4912 \\ \underline{4426} \\ 486 \\ \underline{442} \\ 44 \\ \underline{38} \\ 6 \end{array}$$

Kubikwurzel.

§ 57. 1) Die dritte Wurzel oder die Kubikwurzel einer gegebenen Zahl ist diejenige Zahl, die zur dritten Potenz erhoben die gegebene Zahl hervorbringt. Die Kubikwurzel von 8 ist gleich 2 oder $\sqrt[3]{8} = 2$, da $2^3 = 8$ ist.

2) Vollkommene Kubikzahlen sind einem Produkte aus drei gleichen Factoren gleich, nämlich

$$\begin{array}{ll}
 1^3 = 1, & 6^3 = 216, \\
 2^3 = 8, & 7^3 = 343, \\
 3^3 = 27, & 8^3 = 512, \\
 4^3 = 64, & 9^3 = 729, \\
 5^3 = 125, & 10^3 = 1000 \text{ u. f. w.}
 \end{array}$$

Aus solchen Zahlen läßt sich die Kubikwurzel immer genau, aus allen übrigen ganzen Zahlen aber nur näherungsweise, jedoch mit beliebigem Grade der Annäherung angeben.

§ 58. Wenn man z. B. anstatt 23 zum Kubus zu erheben, die Multiplication von

$$(20 + 3) \cdot (20 + 3) \cdot (20 + 3)$$

ausführt, so erhält man

$$23^3 = (20 + 3)^3 = 20^3 + 3 \cdot 20^2 \cdot 3 + 3 \cdot 20 \cdot 3^2 + 3^3 = 12167.$$

Der Kubus von 20 allein ist 20^3 , folglich ist durch die Zunahme der Zahl 20 um 3 der Kubus dieser Zahl gewachsen um

$$3 \cdot 20^2 \cdot 3 + 3 \cdot 20 \cdot 3^2 + 3^3.$$

Wenn also eine Zahl eine Zunahme erhält, so wächst ihr Kubus um das dreifache Produkt aus ihrem Quadrate und der Zunahme, um das dreifache Produkt aus der Zahl und dem Quadrate ihrer Zunahme, und um den Kubus der Zunahme.

§ 59. 1) Denkt man sich z. B. die Zahl 258 so entstanden, daß erst 200 um 50, dann 250 um 8 zugenommen habe, und erhebt man den dreitheiligen Ausdruck $200 + 50 + 8$ nach dem obigen Satze zum Kubus, so findet man 17173512 und kann zugleich daraus das umgekehrte Verfahren ableiten, welches bei der Ausziehung der Kubikwurzel aus der letztern Zahl anzuwenden ist.

Man theilt die Zahl in dreizifferige Klassen, wobei die letzte Klasse links auch nur zwei oder eine Ziffer erhalten kann, dann muß die Wurzel einer vollkommenen Kubikzahl so viele Ziffern haben als Klassen entstanden sind. Die größte Zahl, deren Kubus sich von 17 abziehen läßt,

ist 2 und diese ist die erste Wurzelziffer. In den Rest nebst erster Ziffer der nächsten Klasse (also in 91) dividirt man $3 \cdot 2^2 = 12$ und findet die Wurzelziffer 5. Man subtrahirt $12 \cdot 5 = 60$, reiht an den Rest 31 die folgende Ziffer 7, subtrahirt von 317 alsdann $3 \cdot 2 \cdot 5^2 = 150$ und von dem Rest nebst folgender Ziffer, also von 1673 den Kubus von 5, also 125. Setzt wiederholt sich dasselbe Verfahren, indem man $3 \cdot 25^2 = 1875$ in 15485 dividirt u. s. w.

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{17173|512} = 258 \\ 8 \overline{) 91} \\ 12 \overline{) 91} \\ \underline{60} \\ 317 \\ \underline{150} \\ 1673 \\ \underline{125} \\ 1875 \overline{) 15485} \\ \underline{15000} \\ 4851 \\ \underline{4800} \\ 512 \\ \underline{512} \end{array}$$

2) Für die besonderen Fälle, wo der Radicand ein Decimalbruch ist, oder wo Nullen in der Wurzel erscheinen, oder endlich aus einer unvollkommenen Kubikzahl die Wurzel gezogen werden soll, ergibt sich das zu beobachtende Verfahren leicht aus dem Vorstehenden, wenn man die Regeln für die entsprechenden Fälle der Quadratwurzel berücksichtigt und in analoger Weise auf die Kubikwurzel anwendet. Es ist z. B.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{17173,512} &= 25,8 ; \\ \sqrt[3]{8036054027} &= 2003 ; \\ \sqrt[3]{0,007954} &= 0,19961 \dots \end{aligned}$$

§ 60. 1) Für einen gemeinen Bruch wird die Kubikwurzel durch Ausziehung derselben aus Zähler und Nenner erhalten, welches Verfahren man aber nur dann anwendet, wenn wenigstens der Nenner eine vollkommene Kubikzahl ist. z. B.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{64}{125}} &= \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{4}{5} ; \\ \sqrt[3]{\frac{5}{8}} &= \frac{\sqrt[3]{5}}{2} = \frac{1,70997 \dots}{2} = 0,85498 \dots \end{aligned}$$

2) In allen übrigen Fällen verwandelt man den gegebenen Bruch in einen Decimalbruch oder man multiplicirt Zähler und Nenner zuvor mit dem Quadrate des Nenners. z. B.

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{0,666\dots} = 0,87358\dots$$

$$\text{oder } \sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 9}} = \sqrt[3]{\frac{18}{3}} = \frac{\sqrt[3]{18}}{3} = \frac{2,620741\dots}{3} = 0,87358\dots$$

§ 61. Ein abgekürztes Verfahren, welches sich anwenden läßt, wenn man bereits mehr als die Hälfte der verlang-

$$\sqrt[3]{0,013} = 0,235133\dots$$

$$\begin{array}{r} 12 \overline{) 5000} \\ \underline{4167} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1587 \overline{) 833000} \\ \underline{810875} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 165675 \overline{) 221250} \\ \underline{165675} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 55575 \\ \underline{49703} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5872 \\ \underline{4970} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 902 \end{array}$$

ten Wurzelziffern nach der gewöhnlichen Methode bestimmt hat, besteht darin, daß man den nachgebliebenen Rest nebst einer angeordneten Null durch das dreifache Quadrat der schon gefundenen Wurzelziffern verkürzt dividirt. Nachdem man in dem Beispiele 3 Stellen (235) auf die gewöhnliche Weise bestimmt hat, giebt die verkürzte Division von $3 \cdot 235^2 = 165675$ in den Rest nebst angereicherter Null noch drei richtige Stellen (133) der Wurzel.

§ 62. Höhere Wurzeln, deren Exponenten keine andere Primfactoren als 2 und 3 enthalten, können durch Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel berechnet werden. B. B.

$$\sqrt[4]{81} = \sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{9} = 3;$$

$$\sqrt[6]{15625} = \sqrt[3]{\sqrt{15625}} = \sqrt[3]{125} = 5.$$

X. Proportionen.

§ 63. 1) Wenn man zwei Zahlen, z. B. 6 und 3, mit einander vergleicht, indem man untersucht, wieviel Mal die eine größer ist als die andere, so bestimmt man das Verhältniß von 6 und 3, d. h. den Quotienten dieser beiden Zahlen und bezeichnet jenes Verhältniß durch $6 : 3$ oder $\frac{6}{3}$.

Die gegebenen Zahlen nennt man die Glieder, und zwar die erste Zahl das Vorderglied, die zweite das Hinterglied, und die Zahl, welche angiebt, wie viel Mal das Hinterglied in dem Vordergliede enthalten ist, also den Quotienten $6 : 3 = 2$, den Exponenten des Verhältnisses.

2) In einem steigenden Verhältniß ist das Hinterglied größer, in einem fallenden dagegen kleiner als das Vorderglied.

Verhältnisse, die denselben Exponenten haben, sind einander gleich. Von zwei Verhältnissen ist dasjenige das größere, welches den größeren Exponenten hat. z. B.

$$7 : 2 > 8 : 3 \text{ und } 4 : 5 < 6 : 7.$$

3) Ein Verhältniß bleibt seinem Werthe nach unverändert, wenn man beide Glieder desselben mit der nämlichen Zahl multiplicirt oder dividirt.

4) Werden die Glieder eines Verhältnisses mit einander wechselt, so heißt das neue Verhältniß das umgekehrte oder inverse des ursprünglichen, welches selbst im Gegensatze zu dem neuen Verhältnisse ein gerades oder directes genannt wird. Von $7 : 9$ ist das indirecte Verhältniß $9 : 7$ oder $\frac{1}{7} : \frac{1}{9}$.

5) Ein zusammengesetztes Verhältniß entsteht, wenn man alle Vorderglieder mehrerer Verhältnisse und ebenso alle Hinterglieder derselben mit einander multiplicirt. z. B. Aus $4 : 5$, $3 : 7$, $1 : 5$ erhält man $12 : 175$.

§ 64. 1) Wenn in einer Reihe gegebener Verhältnisse das Hinterglied jedes Verhältnisses gleich ist dem Vordergliede

+ des nächstfolgenden Verhältnisses, so nennt man die Verhältnisse stetige oder zusammenhängende. z. B.

$$4 : 5, 5 : 3, 3 : 7$$

wofür man kürzer $4 : 5 : 3 : 7$ zu schreiben pflegt.

Man verwandelt gegebene Verhältnisse in stetige, wenn man die Glieder jedes Verhältnisses mit den Hintergliedern aller vorhergehenden und mit den Vordergliedern aller nachfolgenden Verhältnisse multiplicirt. z. B. Aus $1 : 2, 3 : 4, 5 : 1$ erhält man

$$\begin{array}{r} 1 : 2 \\ \quad 3 : 4 \\ \hline 3 : 6 : 8 \\ \quad 5 : 1 \\ \hline 15 : 30 : 40 : 8. \end{array}$$

§ 65. 1) Eine Proportion ist die Verbindung zweier gleicher Verhältnisse durch das Gleichheitszeichen. z. B.

$$6 : 3 = 10 : 5.$$

+ Äußere Glieder einer Proportion sind das erste und das letzte Glied, innere Glieder das zweite und das dritte.

+ Vorderglieder sind das erste und das dritte Glied, Hinterglieder das zweite und das vierte.

Gleichnamige oder homologe Glieder sind die beiden Vorderglieder für sich und ebenso die Hinterglieder für sich.

+ Das vierte Glied heißt die vierte Proportionale zu den drei vorhergehenden Gliedern.

+ 2) In einer stetigen Proportion sind die beiden inneren Glieder einander gleich; jedes der beiden gleichen inneren Glieder heißt die mittlere Proportionale oder das geometrische Mittel zwischen den beiden äußeren Gliedern, während das vierte Glied die dritte Proportionale zu dem ersten und einem der beiden gleichen Glieder genannt wird.

In der Proportion $3 : 6 = 6 : 12$ ist 6 die mittlere Proportionale zwischen 3 und 12, dagegen 12 die dritte Proportionale zu 3 und 6.

+ 3) Vom geom. Mittel ist zu unterscheiden das arithmetische Mittel, worunter die halbe Summe zweier Zahlen, oder

wenn mehrere Zahlen gegeben sind, die Summe derselben, dividirt durch ihre Anzahl, verstanden wird. Z. B.

$$\frac{8+6}{2} = 7; \quad \frac{9+8+4}{3} = 7.$$

4) Wenn die Glieder zweier Verhältnisse in derselben Ordnung, in welcher sie gegeben sind, eine richtige Proportion bilden, z. B. 3 : 4 und 21 : 28, so sind dieselben direct proportional; muß man aber das eine der gegebenen Verhältnisse umkehren, damit beide zu einer richtigen Proportion mit einander verbunden werden können, so sind die Glieder indirect oder umgekehrt proportional. Z. B. Aus 7 : 1 und 13 : 91 erhält man 7 : 1 = 91 : 13.

Ex. III. m. Th.

§ 66. Für jede Proportion gelten folgende Sätze:

1) Wieviel Mal das zweite Glied größer oder kleiner ist als das erste, soviel Mal ist auch das vierte entsprechend größer oder kleiner als das dritte.

2) Das Produkt der äußeren Glieder ist gleich dem Produkte der inneren Glieder.

3) Aus zwei gleichen Produkten läßt sich stets eine Proportion bilden, wenn man jedes Produkt in zwei Factoren zerlegt und die Factoren des einen Produkts zu äußeren, die Factoren des andern zu inneren Gliedern macht.

Aus denselben zwei Produkten lassen sich 8 Proportionen, die bloß durch die Reihenfolge ihrer Glieder verschieden sind, ableiten. Aus $8 \cdot 3 = 6 \cdot 4$ folgt

- | | |
|--------------------|----------------------|
| 1) $8 : 6 = 4 : 3$ | 5) $4 : 8 = 3 : 6$ |
| 2) $8 : 4 = 6 : 3$ | 6) $4 : 3 = 8 : 6$ |
| 3) $6 : 8 = 3 : 4$ | 7) $3 : 6 = 4 : 8$ |
| 4) $6 : 3 = 8 : 4$ | 8) $3 : 4 = 6 : 8$. |

4) Jedes äußere Glied ist gleich dem Produkte der beiden innern Glieder, dividirt durch das andere äußere Glied.

Jedes innere Glied ist gleich dem Produkte der beiden äußeren Glieder, dividirt durch das andere innere Glied.

In der Proportion $8 : 6 = 4 : 3$ ist

$$8 = \frac{6 \cdot 4}{3}; \quad 3 = \frac{6 \cdot 4}{8}; \quad 6 = \frac{8 \cdot 3}{4}; \quad 4 = \frac{8 \cdot 3}{6}.$$

5) In einer stetigen Proportion ist die mittlere Proportionale gleich der Quadratwurzel aus dem Produkte beider Zahlen.

$$\text{Aus } 3 : 9 = 9 : 27 \text{ folgt } 9 = \sqrt{3 \cdot 27} = \sqrt{81}.$$

§ 67. In jeder Proportion kann man mit einander vertauschen:

- 1) Die beiden äußeren Glieder,
- 2) die beiden inneren Glieder,
- 3) die beiden äußeren Glieder mit den beiden innern,
- 4) die beiden Verhältnisse.

Aus $4 : 6 = 2 : 3$ erhält man diesen Sätzen entsprechend

$$3 : 6 = 2 : 4$$

$$4 : 2 = 6 : 3$$

$$6 : 4 = 3 : 2$$

$$2 : 3 = 4 : 6.$$

§ 68. In jeder Proportion kann man

- 1) ein äußeres und ein inneres Glied zugleich mit der nämlichen Zahl multipliciren oder dividiren;
- 2) alle Glieder zu derselben Potenz erheben;
- 3) aus allen Gliedern dieselbe Wurzel ausziehen.

Statt $3 : 5 = 2 : \frac{10}{3}$ kann man setzen

$$3 : 5 = 2 \times 3 : 10 \text{ oder } 3 : 3 \times 5 = 2 : 10 \text{ u. s. w.}$$

Die Proportion $2 : 3 = 4 : 6$ giebt

$$2^2 : 3^2 = 4^2 : 6^2 \text{ oder } 4 : 9 = 16 : 36.$$

Aus $9 : 1 = 36 : 4$ folgt durch Ausziehung der Quadratwurzel $3 : 1 = 6 : 2$.

§ 69. In jeder Proportion, z. B. $8:4 = 6:3$ verhält sich

1) die Summe oder Differenz der beiden ersten Glieder zum ersten oder zum zweiten Gliede, wie die Summe oder Differenz der beiden letzten Glieder zum dritten oder zum vierten Gliede, nämlich

$$8 \pm 4 : 8 = 6 \pm 3 : 6 \text{ oder } 8 \pm 4 : 4 = 6 \pm 3 : 3;$$

2) Die Summe oder Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede, also

$$8 \pm 6 : 4 \pm 3 = 8 : 4 = 6 : 3;$$

3) Die Summe der beiden ersten Glieder zur Differenz dieser Glieder, wie die Summe der beiden letzten Glieder zur Differenz eben dieser Glieder, also

$$8 + 4 : 8 - 4 = 6 + 3 : 6 - 3 \text{ oder } 12 : 4 = 9 : 3.$$

§ 70. 1) Wenn in zwei Proportionen drei gleichstellige Glieder gegenseitig gleich sind, so sind auch die vierten Glieder einander gleich.

$$\text{Aus } 3 : 5 = 2 : x \text{ und } 3 : 5 = 2 : y \text{ folgt } x = y = 3 \frac{1}{3}.$$

2) Wenn mehrere Proportionen lauter gleiche Verhältnisse enthalten, so bilden auch die Summen der gleichstelligen Glieder eine Proportion.

$$\text{Aus } 2 : 3 = 6 : 9$$

$$4 : 6 = 6 : 9$$

$$10 : 15 = 6 : 9 \text{ folgt}$$

$$16 : 24 = 18 : 27 = 6 : 9.$$

3) Die Produkte der gleichstelligen Glieder mehrerer Proportionen bilden wieder eine Proportion.

$$\text{Aus } 4 : 2 = 2 : 1$$

$$1 : 5 = 2 : 10$$

$$9 : 3 = 3 : 1 \text{ folgt}$$

$$36 : 30 = 12 : 10.$$

Eine Proportion welche auf diese Weise durch Multiplication mehrerer Proportionen entstanden ist, wird eine zusammengesetzte genannt.

Wenn ein äußeres Glied der einen Proportion einem innern Gliede einer andern gleich ist, so können vor der Multiplication diese Glieder aufgehoben, oder auch von gemeinsamen Factoren befreit werden.

§ 71. 1) Eine Reihe gegebener Proportionen, in welcher die Hinterglieder jeder Proportion den Vordergliedern der nächst folgenden gleich sind, heißt eine zusammenhängende oder fortlaufende Proportion. B. B.

$$2 : 3 = 6 : 9$$

$$3 : 5 = 9 : 15$$

$$5 : 7 = 15 : 21$$

wofür man kürzer zu schreiben pflegt

$$2 : 3 : 5 : 7 = 6 : 9 : 15 : 21.$$

Je zwei Glieder der einen Seite dieser Reihe haben dasselbe Verhältniß zu einander, wie zwei gleichstellige Glieder der andern Seite. Es ist nämlich auch

$$2 : 5 = 6 : 15,$$

$$2 : 7 = 6 : 21.$$

$$3 : 7 = 9 : 21,$$

2) In einer zusammenhängenden Proportion verhält sich die Summe der Glieder der einen Seite zur Summe der Glieder der andern Seite, wie irgend ein Glied jener Seite zum gleichstelligen Gliede dieser Seite. B. B.

$$(2 + 3 + 5 + 7) : (6 + 9 + 15 + 21) = 2 : 6 = 3 : 9 \text{ u. s. w.}$$

$$\text{also } 17 : 51 = 2 : 6 = 3 : 9 \text{ u. s. w.}$$

XI. Reduction benannter Zahlen.

§ 72. In einer benannten Zahl heißt die nähere Bestimmung der Einheit, durch deren Wiederholung die Zahl entstanden ist, die Benennung, und die der Benennung vorangehende reine Zahl, die bloß die Menge der Einheiten ausdrückt, der Coefficient der benannten Zahl.

Es bedeutet z. B. 7 Fuß so viel als 7 Mal ein Fuß; die Benennung der Einheit ist der Fuß und 7 der Coefficient. Die benannte Einheit (ein Fuß) ist als der Multiplicand und der Coefficient als der Multiplicator aufzufassen.

§ 73. 1) Man unterscheidet höhere und niedrigere Benennungen, durch welche benannte Zahlen ausgedrückt werden. Man pflegt nämlich jede Einheit einer höhern Benennung in eine gewisse Anzahl gleicher Theile einzutheilen, die dann Einheiten der niedrigeren Benennung sind, so daß man eine und dieselbe Größe auf sehr verschiedene Weise, durch höhere Benennungen sowol wie durch niedrigere, ausdrücken kann.

2) Gleichnamige oder gleichbenannte Zahlen haben dieselbe Benennung, aber verschiedene Coefficienten. Z. B. 7 Pfund und 13 Pfund.

Einfach benannte oder einnamige Zahlen enthalten eine einzige Benennung, z. B. 7 Loth; dagegen kommen in mehrfach benannten oder mehrnamigen Zahlen Einheiten verschiedener Benennungen zugleich vor. Z. B. 3 Stunden 8 Minuten 2 Secunden.

3) Die Verwandlung von Einheiten höherer Benennung in Einheiten niedrigerer Benennung und, umgekehrt, die Verwandlung dieser in jene heißt die Reduction der benannten Zahlen. — Insbesondere versteht man unter Resolviren die Verwandlung höherer Benennungen in niedrigere und unter Reduciren im engern Sinne bloß die Zurückführung von niedrigeren Benennungen auf höhere.

4) Die Verhältniß- oder Reductionszahl zwischen zwei Benennungen zeigt an, wieviel Einheiten der niedrigeren Benennung gleich sind einer Einheit der höheren Benennung.

§ 74. Eine höhere Benennung wird in eine niedrigere und umgekehrt diese in jene verwandelt, wenn man den Coefficienten der Benennung mit der Reductionszahl im ersten Falle multiplicirt, im zweiten dividirt.

Beispiele: 1) Es sind 3 Fuß = 3×12 Zoll = 36 Zoll;
 24 Loth = $24 \times \frac{1}{32}$ *℔*. = $\frac{24}{32}$ *℔*. = $\frac{3}{4}$ *℔*.

2) Um $2\frac{11}{48}$ Tage in Tagen, Stunden und Minuten anzugeben, hat man nur $\frac{11}{48}$ Tage zu resolviren, nämlich

$$\frac{11}{48} \text{ Tage} = \frac{11}{48} \times 24 \text{ Stunden} = 5\frac{1}{2} \text{ Stunden,}$$

$$\frac{1}{2} \text{ Stunde} = \frac{1}{2} \times 60 \text{ Minuten} = 30 \text{ Minuten,}$$

$$\text{also } 2\frac{11}{48} \text{ Tage} = 2 \text{ Tage } 5 \text{ Stunden } 30 \text{ Minuten.}$$

3) Um $23\frac{3}{4}$ Ries durch Ballen, Ries und Buch auszudrücken, hat man, da 1 Ballen = 10 Ries und 1 Ries = 20 Buch ist,

$$23 \text{ Ries} = \frac{23}{10} \text{ Ballen} = 2 \text{ Ballen nebst dem Reste } 3, \text{ d. h.}$$

$$23 \text{ Ries} = 2 \text{ Ballen } 3 \text{ Ries;}$$

$$\text{ferner } \frac{3}{4} \text{ Ries} = \frac{3}{4} \times 20 \text{ Buch} = 15 \text{ Buch,}$$

$$\text{also } 23\frac{3}{4} \text{ Ries} = 2 \text{ Ballen } 3 \text{ Ries } 15 \text{ Buch.}$$

4) Um 2 Ballen 7 Bogen bloß in Bogen auszudrücken, (24 Bogen = 1 Buch) hat man als Reductionszahl zu nehmen $10 \cdot 20 \cdot 24 = 4800$, d. h. das Produkt aller Reductionszahlen, welche überhaupt zwischen den Benennungen Ballen und Bogen der Reihe nach stattfinden. Man findet

$$2 \text{ Ballen } 7 \text{ Bogen} = 2 \cdot 4800 + 7 \text{ Bogen} = 9607 \text{ Bogen.}$$

5) Um 2,57 Stunden durch Stunden, Minuten und Secunden auszudrücken, hat man

$$0,57 \text{ St.} = 0,57 \times 60 \text{ Min.} = 34,2 \text{ Min.},$$

$$0,2 \text{ Min.} = 0,2 \times 60 \text{ Sec.} = 12 \text{ Sec.}$$

$$\text{also } 2,57 \text{ St.} = 2 \text{ St. } 34 \text{ Min. } 12 \text{ Sec.}$$

6) Soll man durch einen Decimalbruch angeben, wieviel Saschen gleich sind 6 Fuß 7 Zoll (1 Sasch. = 7 Fuß à 12 Zoll), so findet man

$$7 \text{ Zoll} = \frac{7}{12} \text{ Fuß} \text{ und } 6\frac{7}{12} \text{ Fuß} = \frac{79}{12} \text{ Fuß, folglich}$$

$$\frac{79}{12} \text{ Fuß} = \frac{79}{12 \cdot 7} \text{ Sasch.} = \frac{79}{84} \text{ Sasch.} = 0,94047 \dots \text{ Sasch.}$$

§ 75. Als Reductionszahlen sind bei dem Flächenmaße die Quadrate, und bei dem Körpermaße die Kuben der Reductionszahlen des Längenmaßes zu nehmen.

Da z. B. 1 Saschen = 7 Fuß, 1 Fuß = 12 Zoll, so ist

$$1 \square \text{ Sasch.} = 49 \square \text{ Fuß, } 1 \text{ Kub. Sasch.} = 343 \text{ Kub. Fuß,}$$

$$1 \square \text{ Fuß} = 144 \square \text{ Zoll, } 1 \text{ Kub. Fuß} = 1728 \text{ Kub. Zoll.}$$

Beispiele. 1) Um 2 □ Sasch. 9 □ Fuß 48 □ Zoll bloß in Quadrat-Fuß auszudrücken, hat man

$$2 \square \text{ Sasch.} = 2 \cdot 49 \square \text{ Fuß} = 98 \square \text{ Fuß,}$$

$$48 \square \text{ Zoll} = \frac{48}{144} \square \text{ Fuß} = \frac{1}{3} \square \text{ Fuß,}$$

also im Ganzen $98 + 9 + \frac{1}{3} = 107 \frac{1}{3} \square \text{ Fuß.}$

2) Soll man 1729728 Kubzoll reduciren, so sind es

$$\frac{1729728}{1728} \text{ Kubfuß} = 1001 \text{ Kubfuß} = \frac{1001}{343} \text{ Kbsaschen} = 2 \text{ Kbsaschen}$$

315 Kubfuß.

Eine solche Eintheilung mehrfach benannter Zahlen, nach welcher 12 oder $12 \cdot 12 = 144$ oder $12 \cdot 12 \cdot 12 = 1728$ Einheiten einer Benennung gleich sind einer Einheit höherer Benennung, wird das Duodecimalmaß genannt.

§ 76. Nach dem Decimalmaße haben mehrfach benannte Zahlen zu ihren Reductionszahlen eine Potenz von 10, also entweder 10 oder 100 oder 1000 u. s. w. Z. B.

$$1 \text{ Meter} = 10 \text{ Decimeter} = 100 \text{ Centimeter,}$$

$$1 \square \text{ Meter} = 100 \square \text{ Decim.} = 10000 \square \text{ Centim.}$$

$$1 \text{ Kb. Meter} = 1000 \text{ Kb. Decim.} = 1000000 \text{ Kb. Centim.}$$

Beispiele. 1) 7 Rbl. 9 Kop. = 7,09 Rbl. = 709 Kop.
3 Rbl. 70 Kop. = 3,7 Rbl. = 370 Kop.

2) Wird der Fuß in 10 Zoll und der Zoll in 10 Linien eingetheilt, so sind 7 Fuß 3 Zoll 5,12 Linien nach üblicher Bezeichnung

$$7' 3'' 5,12''' = 7,3512' = 73,512'' = 735,12'''.$$

3) Da 1 □ Fuß = 100 □ Zoll und 1 □ Zoll = 100 □ Lin.,
so sind 3 □ Fuß 17 □ Zoll 5,4 □ Lin. = 3,17054 □ Fuß
= 317,054 □ Zoll
= 31705,4 □ Linien.

4) Da 1 Rbfuß = 1000 Rbzoll und 1 Rbzoll = 1000 Rblin.,
so sind 2 Rbfuß 73 Rbzoll 145,6 Rblin. = 2,0731456 Rbfuß,
= 2073,1456 Rbzoll,
= 2073145,6 Rblinien.

§ 77. Soll man Duodecimalmaß (ddc) in Decimalmaß (dc) oder dieses in jenes verwandeln, so muß die gegebene Zahl erst auf diejenige Einheit, welche für beide Maßeinheiten unveränderlich bleibt, reducirt und alsdann in den verschiedenen Benennungen des anderen Maßes ausgedrückt werden. Z. B.

1) Wie viel sind 3 Fuß 4 Zoll 6 Linien Duodecimalmaß im Decimalmaß, wenn der Fuß (in 12 oder in 10 Zoll getheilt) für beide Maße derselbe bleibt?

Aufl. Im Duodecimalmaß sind

$$3' 4'' 6''' = 3\frac{3}{8}' = 3,375', \text{ also sind}$$

$$3' 4'' 6''' \text{ (ddc)} = 3,375' \text{ in beiderlei Maß} \\ = 3' 3'' 7,5''' \text{ Decimalmaß.}$$

2) Wie viel sind 5 □ Zoll 75 □ Linien Decimalmaß in Duodecimalmaß?

Aufl. 5 □'' 75 □''' (dc) = 0,0575 □ Fuß in beiderlei Maß. Bringt man 0,0575 □ Fuß durch die Reductionsanzahl 144 auf Quadrat-Zolle und Linien, so findet man

$$5 \square'' 75 \square''' \text{ (dc)} = 8 \square'' 40,32 \square''' \text{ (ddc).}$$

§ 78. Gebrochene Reductionsanzahlen entstehen, wenn mehrere Einheiten der einen Benennung gleich sind mehreren Einheiten der andern, ohne daß die beiderseitigen Coefficienten in einander aufgehen.

Es sind z. B. 3 Arschin = 7 Fuß, also ist 1 Arschin = $\frac{7}{3}$ Fuß und daher ist $\frac{7}{3}$ die Reductionszahl zwischen den Benennungen Arschin und Fuß.

Wird ferner 1 Jahr = $365 \frac{1}{4}$ Tagen gerechnet, so ist $365 \frac{1}{4}$ die Reductionszahl zwischen diesen beiden Benennungen. Es sind z. B.

$$0,064 \text{ Jahre} = 0,064 \times 365 \frac{1}{4} \text{ Tage} = 23,376 \text{ Tage};$$

$$1753,2 \text{ Tage} = \left(1753,2 : 365 \frac{1}{4}\right) \text{ Jahre} = 4,8 \text{ Jahre.}$$

XII. Die vier Species mehrfach benannter Zahlen.

§ 79. Die zur **Addition** oder **Subtraction** gegebenen Zahlen stellt man mit ihren gleichbenannten Theilen unter einander und addirt oder subtrahirt diese letzteren, von der niedrigsten Benennung beginnend, indem man die Coefficienten addirt oder subtrahirt und die Benennung beibehält. — Bei der Addition werden aus jeder einzelnen Summe gleichnamiger Zahlen die darin enthaltenen Einheiten der nächst höhern Benennung ausgesondert und zu den Einheiten dieser letzteren hinzugezählt.

Wenn bei der Subtraction an einer Stelle der Minuend kleiner als der Subtrahend ist, so wird im Minuenden von der nächst höhern Benennung eine Einheit entlehnt, und nachdem man sie in Einheiten der nächst niedrigeren Benennung verwandelt hat, zu den schon vorhandenen Einheiten der letztern addirt, um die Subtraction ausführbar zu machen.

§ 80. Für die Aufgaben aus der Zeitrechnung ist Folgendes zu merken.

1) Auf je 3 Gemeinjahre von 365 Tagen folgt ein Schaltjahr von 366 Tagen. Jedes Jahr ist ein Schaltjahr, dessen Jahreszahl sich durch 4 ohne Rest theilen läßt.

Die Monate Januar, März, Mai, Juli, August, October, December haben 31 Tage, die Monate April, Juni, September, November 30 Tage. Der Februar hat im Gemeinjahre 28, im Schaltjahre 29 Tage.

2) Das Datum einer Begebenheit zeigt an, im wievielften Jahre nach (oder vor) Christi Geburt, in welchem Monate des Jahres und am wievielften Tage des Monats dieselbe stattgefunden hat. — Von dem Datum ist die seit Christi Geburt wirklich verfllossene Zeit zu unterscheiden.

Es bezeichnet z. B. das Datum: Am 7. April 1872, daß bis zu dieser Zeit seit Christi Geburt wirklich verfllossen sind 1871 volle Jahre, und da der April der 4. Monat ist, 3 Monate und 6 Tage.

Man verwandelt also das Datum einer Begebenheit in die seit Christi Geburt verfllossenen Jahre, Monate und Tage, wenn man von jedem dieser Zeiträume 1 subtrahirt.

3) Wenn ferner seit Christi Geburt bis zu einer Begebenheit verfllossen sind z. B. 1871 Jahre 4 Monate 5 Tage, so heißt das entsprechende Datum: Im Jahre 1872 am 6. Mai.

Die seit Christi Geburt bis zu einer Begebenheit verfllossenen Jahre, Monate und Tage werden also durch das Datum der Begebenheit ausgedrückt, wenn man zu jedem dieser Zeiträume 1 addirt und aus der erhaltenen Anzahl der Monate den Namen des Monats bestimmt.

4) Wo es sich um einen bestimmten Monat handelt, hat man stets zu untersuchen, ob derselbe 30 oder 31 Tage hat, oder wenn es der Februar ist, ob dieser einem Gemein- oder Schaltjahre angehört.

Da der Beginn des Tages von Mitternacht an gerechnet wird, so daß 12 Stunden auf den Vormittag und 12 Stunden auf den Nachmittag kommen, so ist zu unterscheiden, ob es in einer Aufgabe z. B. heißt: um 7 Uhr Vormittags oder um 7 Uhr Nachmittags. Der erste Ausdruck bezeichnet bloß 7, der andere dagegen $12 + 7 = 19$ verfllossene Stunden von einem gewissen Tage.

§ 81. Es giebt drei Hauptfälle, bei der Berechnung von Aufgaben der Zeitrechnung durch Addition oder Subtraction, indem nämlich für eine Begebenheit berechnet werden kann:

Das Ende aus der Dauer und dem Anfange,
 Der Anfang aus dem Ende und der Dauer,
 Die Dauer aus dem Anfange und dem Ende. B. B.

1) Jemand war geboren am 25. Januar 1819 Morgens um 6 Uhr und erreichte ein Alter von 53 Jahren 4 Monaten 11 Tagen 14 Stunden. Wann starb derselbe?

Aufl. 1818 Jahre — Monate 24 Tage 6 Stunden
 53 — 4 — 11 — 14 —

1871 Jahre 4 Monate 35 Tage 20 Stunden.

Zu 4 Monaten kommt noch der 5te Monat (Mai = 31 Tage) hinzu, daher ist die verfllossene Zeit 1871 Jahre 5 M. 4 T. 20 St., folglich das Datum: 1872 am 5. Juni 8 Uhr Nachmittags.

2) Jemand starb am 9. Mai 1872 in einem Alter von 45 Jahren 5 Monaten 29 Tagen; wann war er geboren?

Aufl. 1871 Jahre 4 Mon. 8 Tage
 45 — 5 — 29 —

1825 Jahre 10 Mon. 9 Tage.

Der 4te Monat ist der April, der 30 Tage hat. Durch Vorgen erhält man im Minuenden 1870 Jahre 15 Mon. 38 Tage. Der Rest giebt das Datum: 1826 am 10. November.

3) Jemand war geboren am 16ten September 1834 um 4 Uhr 15 Min. Morgens und starb am 15ten März 1872 um 5 Uhr Abends. Wie alt war er geworden?

Aufl. 1871 Jahre 2 Mon. 14 Tage 17 Stunden

1833 — 8 — 15 — 4 — 15 Min.

37 Jahre 5 Mon. 28 Tage 12 Stunden 45 Min.

Der 2te Monat (Februar) des 1872sten Jahres, welches ein Schaltjahr ist, hat 29 Tage. Durch Vorgen von 1871 Jahren und von 2 Monaten erhält man im Minuenden 1870 Jahre, 13 Monate, $14 + 29 = 43$ Tage 17 Stunden.

§ 82. 1) Bei der **Multiplikation** benannter Zahlen ist jedesmal der Multiplicand benannt, dagegen der Multiplikator unbenannt. — Das Produkt ist immer benannt und zwar gleichartig mit dem Multiplicanden.

Um den Preis z. B. von 7 \mathfrak{R} einer Waare, das Pfund zu 3 Rbl., zu bestimmen, schließt man: 1 \mathfrak{R} kostet 3 Rbl., also müssen 7 \mathfrak{R} auch 7 Mal mehr kosten, daher ist der gesuchte Preis 3 Rbl. $\times 7 = 7 \times 3$ Rbl. = 21 Rbl.

2) Besteht der Multiplicand aus verschiedenen benannten Theilen, so multiplicirt man jeden Theil mit dem Multiplikator; man reducirt dann die erhaltenen Produkte auf höhere Benennungen, während man Brüche, die in ihnen vorkommen, durch Resolviren in niedrigere Benennungen wegschafft. Z. B.

$$x = (3 \text{ Tage } 8 \text{ Stunden } 54 \text{ Min.}) \times 1\frac{1}{4}, \text{ so ist}$$

$$x = 3\frac{3}{4} \text{ Tage } 10 \text{ Stunden } 67\frac{1}{2} \text{ Min.}$$

Da $\frac{3}{4}$ Tage = 18 St., und $\frac{1}{2}$ Min. = 30 Sec., so ist

$$x = 3 \text{ Tage } 28 \text{ St. } 67 \text{ Min. } 30 \text{ Sec., also}$$

$$x = 4 \text{ Tage } 5 \text{ St. } 7 \text{ Min. } 30 \text{ Sec.}$$

3) Einen mehrfach benannten Multiplicanden kann man auch zuvor auf die niedrigste Benennung resolviren, alsdann multipliciren und das Produkt wieder auf höhere Benennungen zurückführen. Dieses Verfahren ist in dem Falle das bequemere, wenn der Multiplikator ein aus sehr vielen Ziffern bestehender Bruch ist, oder wenn die verschiedenen Benennungen des Multiplicanden nach dem Decimalmaße fortschreiten. Z. B.

$$x = 7 \times (3 \text{ Fuß } 2 \text{ Zoll } 7 \text{ Lin.}) \text{ Decimalmaß, so ist}$$

$$x = 7 \times (327 \text{ Linien}) = 2289 \text{ Linien,}$$

$$x = 22 \text{ Fuß } 8 \text{ Zoll } 9 \text{ Linien.}$$

§ 83. Die **Division** benannter Zahlen umfaßt zwei wesentlich verschiedene Fälle, je nachdem nämlich der Divisor eine unbenannte oder eine benannte Zahl ist, während der Dividend immer eine benannte Zahl sein muß.

1) Der Divisor ist unbenannt, der Dividend und der Quotient sind benannt. Z. B.

$$x = (12 \text{ Rbl. } 18 \text{ Kop.}) : 3, \text{ so ist}$$

$$x = \frac{12 \text{ Rbl.}}{3} + \frac{18 \text{ Kop.}}{3} = 4 \text{ Rbl. } 6 \text{ Kop.}$$

Hier ist die Division eine Theilung des Dividenden in eine gewisse Anzahl gleicher Theile; der Quotient ist einer dieser gleichen Theile und daher immer gleichartig mit dem Dividenden benannt.

Soll man 6 Stunden 6 Min. 7 Secunden durch 5 dividiren, so dividirt man zuerst die höchste Benennung, nämlich 6 Stunden durch 5, verwandelt den Rest (1 Stunde) in Minuten, addirt die gegebenen 6 Min. hinzu, dividirt die erhaltenen 66 Min. wieder durch 5 und fährt auf diese Weise fort, bis alle Theile des Dividenden dividirt worden sind. Man erhält hier den Quotienten 1 St. 13 Min. $13\frac{2}{5}$ Sec.

$$\begin{array}{r|l} 5 \overline{) 6 \text{ Stund.}} & 1 \text{ Stunde} \\ \underline{5} & \\ 1 \text{ Stunde} & \\ 60 & \\ 5 \overline{) 66 \text{ Min.}} & 13 \text{ Min.} \\ \underline{65} & \\ 1 \text{ Min.} & \\ 60 & \\ 5 \overline{) 67 \text{ Sec.}} & 13\frac{2}{5} \text{ Sec.} \\ \underline{65} & \\ 2 & \end{array}$$

Wenn der Divisor ein Bruch ist, so multiplicirt man alle Theile des Dividenden mit dem Nenner und dividirt die erhaltenen Produkte durch den Zähler des Bruches. Die in § 82, 3 gegebene Regel findet hier ebenfalls Anwendung.

2) Der Divisor und der Dividend sind benannt, der Quotient ist unbenannt. B. B.

Sollen 4 Rbl. in 26 Rbl. dividirt werden, so heißt dieses, man solle bestimmen, wieviel Mal 4 Rbl. in 26 Rbl. enthalten sind. Man findet

$$x = \frac{26 \text{ Rbl.}}{4 \text{ Rbl.}} = 6\frac{1}{2}.$$

Die Division zweier benannter Zahlen in einander ist ein Vergleichen oder Messen des Dividenden durch den Divisor, indem untersucht wird, wie oft der erstere den letztern in sich enthält. Der Quotient ist das Verhältniß des Dividenden zum Divisor.

Wenn Divisor und Dividend in verschiedenen Benennungen gegeben sind, so müssen beide vor der Division auf eine einzige und zwar dieselbe Benennung gebracht werden. B. B.

Um 7 Stunden 20 Min. in 11 Tage zu dividiren, hat man 7 St. 20 Min. = 440 Min., 11 Tage = 11 . 24 . 60 Min. = 15840 Min., also 15840 Min. : 440 Min. = 36.

XIII. Einfache Regel de tri.

§ 84. Die Regel de tri lehrt zu drei gegebenen Zahlen die vierte Proportionalzahl finden, z. B. wenn 5 Pfund einer Waare 7 Rubel kosten, den Preis von 9 Pfund derselben Waare zu bestimmen.

In den Aufgaben der Regel de tri hat man die directe und die indirecte Proportionalität der Größen zu unterscheiden.

1) Zwei Größen, die so von einander abhängen, daß wenn die eine einige Mal größer oder kleiner wird, auch die andere entsprechend eben so viel Mal größer oder kleiner genommen werden muß, sind einander direct oder gerade proportionirt oder stehen in directem oder geradem Verhältnisse zu einander, z. B. die Menge der Waare und der Preis derselben, da für die doppelte Menge der Waare auch der doppelte Preis, für die 3fache Menge der 3fache Preis gilt u. s. w.

Hier lassen sich immer die Schlußformen anwenden:

je mehr von dem Einem, desto mehr von dem Andern,
je weniger, desto weniger

2) Hängen aber zwei Größen so von einander ab, daß wenn die eine einige Mal größer oder kleiner wird, die andere gerade umgekehrt eben so viele Mal kleiner oder größer genommen werden muß, so sind sie indirect oder verkehrt proportionirt oder stehen in indirectem oder ungeradem Verhältnisse zu einander.

In einem solchen Verhältnisse steht z. B. die Anzahl der Arbeiter zu der Zeit, in welcher eine bestimmte Arbeit vollendet wird, da die doppelte Anzahl Arbeiter nur die Hälfte, die 3fache Anzahl nur $\frac{1}{3}$ der Zeit zur Vollendung einer Arbeit nöthig hat. Es gilt hier immer der Schluß:

je mehr von dem Einem, desto weniger von dem Andern,
je weniger, desto mehr

§ 85. Die Auflösung der Aufgaben der Regel de tri geschieht entweder durch Proportionsrechnung oder durch Schlussrechnung.

Bei der ersten Methode hat man in jeder Aufgabe zwei Theile zu unterscheiden, nämlich die Angabe oder Bedingung, welche aus zwei der gegebenen, von einander abhängigen Größen besteht, und die Frage, welche zwei mit den ersteren gleichartige Größen enthält, von denen die eine gesucht wird. Z. B.

1) Wenn 2 \mathfrak{R} 6 Loth einer Waare 7 Rbl. kosten; wieviel kosten 30 Loth derselben Waare?

Aufl. Wird der gesuchte Preis mit x bezeichnet, so ist
die Angabe: 2 \mathfrak{R} 6 Loth und 7 Rbl.,
die Frage: 30 Loth und x Rbl.

Wenn nun die gegebenen Größen, wie hier, direct proportional sind, so setzt man in Proportion ein Glied der Angabe zum gleichartigen Gliede der Frage, wie das andere Glied der Angabe zum andern Gliede der Frage, also

$$2 \mathfrak{R} 6 \text{ Loth} : 30 \text{ Loth} = 7 \text{ Rbl.} : x \text{ Rbl.}$$

Die beiden ersten Glieder der Proportion müssen zuvor auf eine einzige und zwar dieselbe Benennung gebracht werden. Da 2 \mathfrak{R} 6 Loth = 70 Loth sind, so hat man

$$70 \text{ Loth} : 30 \text{ Loth} = 7 \text{ Rbl.} : x \text{ Rbl.}$$

Läßt man jetzt die gleiche Benennung Loth aus den beiden ersten Gliedern weg und dividirt das Produkt der inneren Glieder durch das erste Glied, so erhält man

$$x = \frac{30 \cdot 7 \text{ Rbl.}}{70} = 3 \text{ Rbl.}$$

2) Wenn eine gewisse Arbeit von 7 Arbeitern in 5 Tagen ausgeführt werden kann; in wieviel Tagen (x) werden 4 Arbeiter dieselbe Arbeit vollenden?

Aufl. Angabe: 7 Arbeiter und 5 Tage,
Frage: 4 Arbeiter und x Tage.

Da die gegebenen Größen indirect proportional sind, so setzt man in Proportion ein Glied der Frage zum gleichartigen Gliede der Angabe, wie das andere Glied der Angabe zum andern Gliede der Frage, also

$$4 \text{ Arbeiter} : 7 \text{ Arbeiter} = 5 \text{ Tage} : x \text{ Tage,}$$

woraus man durch dieselben Schlüsse wie im ersten Beispiele findet

$$x = \frac{7 \cdot 5 \text{ Tage}}{4} = 8 \frac{3}{4} \text{ Tage.}$$

§ 86. Für die Auflösung durch Proportionsrechnung gelten folgende Bemerkungen.

1) Je nachdem aus dem Sinne einer Aufgabe hervorgeht, daß die Unbekannte (x) einen kleinern oder einen größern Werth als die gleichartig benannte Größe der Angabe erhalten muß, setzt man die beiden anderen unter sich gleichartigen Größen der Aufgabe im ersten Fall in ein fallendes, in zweitem Fall in ein steigendes Verhältniß.

2) Die angelegte Proportion sucht man dadurch zu vereinfachen, daß man Brüche, die in ihren Gliedern vorkommen, wegschafft und gemeinschaftliche Factoren aus dem ersten Gliede und einem der beiden Mittelglieder durch Heben entfernt (§ 68,1).

3) Wenn eine von den drei gegebenen Größen der Einheit gleich ist, so besteht die Auflösung entweder bloß in einer Multiplication der beiden anderen Größen mit einander, oder bloß in einer Division derselben durch einander. *B. B.*

1 Pfund kostet 3 Rbl.; wieviel kosten 4 Pfund?

$$\text{Antwort: } 4 \times 3 \text{ Rbl.} = 12 \text{ Rbl.}$$

Wenn ein Arbeiter eine Arbeit in 4 Tagen vollendet; wieviel Tage brauchen dazu 6 Arbeiter?

$$\text{Antwort: } \frac{4 \text{ Tage}}{6} = \frac{2}{3} \text{ Tage.}$$

§ 87. Die **Schlufrechnung** besteht in der Zurückführung auf die Einheit, d. h. die gegebene Aufgabe wird in solche zwei andern Aufgaben der Regel de tri zerlegt, daß in denselben ein Glied eine benannte Einheit ist, worauf die eine dieser Aufgaben durch eine einfache Multiplication, die andere durch eine einfache Division gelöst wird. *B. B.*

1) Wenn 3 \mathcal{R} einer Waare 5 Rbl. kosten; wieviel kosten von derselben 7 \mathcal{R} ?

Aufl. 3 \mathcal{R} kosten 5 Rbl., also

1 \mathcal{R} kostet $\frac{5}{3}$ Rbl., woraus folgt, daß

$$7 \mathcal{R} \text{ kosten } 7 \times \frac{5}{3} \text{ Rbl.} = 11 \frac{2}{3} \text{ Rbl.}$$

Die Aufgabe ist in zwei neue Aufgaben zerlegt, indem man zuerst aus dem Preise von 3 \mathfrak{R} den Preis für 1 \mathfrak{R} und hierauf aus dem gefundenen Resultate den Preis für 7 \mathfrak{R} berechnet.

2) Zur Ausführung einer Arbeit brauchen 3 Arbeiter 15 Tage; wieviel Tage brauchen dazu 5 Arbeiter?

Aufl. Brauchen 3 Arbeiter 15 Tage,
so braucht 1 Arbeiter 3. 15 Tage (indirect),
also brauchen 5 Arbeiter $\frac{3 \cdot 15}{5}$ Tage = 9 Tage (indirect).

3) Wenn 4 \mathfrak{R} 16 Loth einer Waare 1 Rbl. 35 Kop. kosten; wie theuer sind $\frac{2}{5}$ \mathfrak{R} derselben Waare?

Aufl. Verwandelt man die mehrfach benannten Zahlen in einnamige, indem man 4 \mathfrak{R} 16 Loth = $\frac{9}{2}$ \mathfrak{R} und 1 Rbl. 35 Kop. = 135 Kop. setzt, so hat man

$$\begin{array}{r} \frac{9}{2} \mathfrak{R} \text{ kosten } 135 \text{ Kop.} \\ 9 \dots\dots 2 \cdot 135 \dots\dots \\ 1 \dots\dots \frac{2 \cdot 135}{9} \dots\dots \\ \frac{4}{5} \dots\dots \frac{4}{5} \times \frac{2 \cdot 135}{9} = 24 \text{ Kop.} \end{array}$$

4) Eine Vereinfachung der Schlußrechnung findet statt, wenn die gegebene Größe im Bedingungsätze und die gleichartige Größe im Fragesätze einen gemeinsamen Factor haben oder die eine dieser Größen ein Vielfaches der andern ist. Z. B.

Wenn $3\frac{1}{2}$ \mathfrak{R} einer Waare 5 Rbl. kosten; wieviel kosten 10 \mathfrak{R} 16 Loth derselben?

Aufl. Da $3\frac{1}{2}$ \mathfrak{R} = $\frac{7}{2}$ \mathfrak{R} und 10 \mathfrak{R} 16 Loth = $\frac{21}{2}$ \mathfrak{R} sind, so kann man schließen:

$$\begin{array}{l} \frac{7}{2} \mathfrak{R} \text{ kosten } 5 \text{ Rbl., also} \\ 3 \times \frac{7}{2} \mathfrak{R} = \frac{21}{2} \mathfrak{R} \text{ kosten } 3 \cdot 5 = 15 \text{ Rbl.} \end{array}$$

Hier unterbleibt der Schluß auf die Einheit, da sich wegen des gemeinsamen Factors (7) der gesuchte Preis unmittelbar durch den Schluß von der kleinern Größe auf die größere bestimmen läßt.

XIV. Procent- und Zinsrechnung.

§ 88. Von einer Zahl 1, 2, 3 . . . Procente nehmen, heißt den 100sten Theil der Zahl 1, 2, 3 . . . Mal nehmen. Procent ist also nur ein anderer Ausdruck für $\frac{1}{100}$. Ebenso bedeutet 1, 2, 3 . . . pro mille soviel als $\frac{1}{1000}$, $\frac{2}{1000}$ u. s. w.

Es sind z. B. 5 Procente von 10 gleich $\frac{10}{100} \times 5 = \frac{1}{2}$,

4 Procente von 75 Rubeln = $\frac{75}{100} \times 4 = 3$ Rubel.

7 Procente von 100 Meilen = 7 Meilen,

8 pro mille von 1750 = $\frac{1750}{1000} \times 8 = 14$.

§ 89. Besonders häufig kommen die Ausdrücke Procent und pro mille bei Geldberechnungen vor.

Die Vergütung, die Jemand einem Andern dafür zahlt, daß dieser ihm eine Summe Geldes, das sogenannte Kapital, zur Benutzung auf eine gewisse Zeit leiht, nennt man Zinsen oder Interessen des Kapitals.

Um die Größe der Zinsen zu bestimmen, wird gewöhnlich festgesetzt, wie viel Zinsen für die einjährige Benutzung eines Kapitals von hundert Geldeinheiten (z. B. Rubeln) bezahlt werden sollen.

Die Zinsen von 100 Geldeinheiten werden Procente genannt und durch $\frac{0}{0}$ bezeichnet.

Ein Kapital ist zu 7 Procenten verliehen, heißt also: Der Schuldner muß dem Gläubiger für jede geliehenen 100 Geldeinheiten jährlich 7 eben solche Geldeinheiten als Zinsen bezahlen, oder, was dasselbe ist, der Schuldner muß für die Benutzung eines Kapitals in jedem Jahre eine Zinsensumme zahlen, die gleich ist $\frac{7}{100}$ des Kapitals.

Gelten die Procente für einen andern Zeitraum als das Jahr, so wird dieses ausdrücklich angegeben.

Auf gleiche Weise gebraucht man den Ausdruck z. B. 7 pro mille, wenn für je 1000 Geldeinheiten eines Kapitals 7 eben solche Geldeinheiten gezahlt werden.

§ 90. Unter Einheitszinsen oder Zinsfuß versteht man die für das Kapital 1 während eines Jahres zu zahlenden Zinsen.

Betragen für 100 Rbl. die Zinsen 4 Rbl.,

so betragen für 1 Rbl. die Zinsen $\frac{4}{100} = \frac{1}{25}$ Rbl.

Bei 4 Procent betragen also die Zinsen $\frac{1}{25}$ des Kapitals.

Ebenso betragen bei 5 Procent die Zinsen $\frac{1}{20}$ des Kapitals u. s. w.

§ 91. Von den vier Größen: Kapital, Procente, Zins und Zeit kann jede einzelne aus den drei übrigen berechnet werden, wie die folgenden Beispiele zeigen.

Berechnung der Zinsen.

1) Wieviel Zinsen (x) tragen 515 Rbl. Kapital bei 5 Procent a) in 1 Jahre, b) in 4 Jahren?

Aufl. a) Da 5 Procente von einer Zahl so viel heißt als $\frac{5}{100}$ derselben, so ist

$$x = \frac{5}{100} \times 515 \text{ Rbl.} = 25\frac{3}{4} \text{ Rbl.}$$

Man kann auch schließen: Wie oft 100 Rbl. in 515 Rbl. enthalten sind, so viel Mal 5 Rbl. Zinsen werden in einem Jahre gezahlt, also betragen die Zinsen

$$x = \frac{515}{100} \cdot 5 = 25\frac{3}{4} \text{ Rbl.}$$

b) In 4 Jahren betragen die Zinsen 4 Mal so viel als in 1 Jahr, also ist hier

$$x = \frac{515 \times 5}{100} \times 4 = 103 \text{ Rbl.}$$

Berechnung des Kapitals.

2) Welches Kapital (x) trägt zu 6 Procent in 1 Jahre 69 Rbl. Zinsen?

Aufl. Wie oft 6 Rbl. in 69 Rbl. enthalten sind, so viel Mal 100 Rbl. muß das gesuchte Kapital betragen, also ist

$$x = \frac{69}{6} \times 100 = 1150 \text{ Rbl.}$$

3) Welches Kapital (x) trägt zu 5 Procent in 3 Jahren 57 Rbl. Zinsen?

Aufl. In 1 Jahr trägt das Kapital an Zinsen $\frac{57}{3} = 19$ Rbl. Durch dieselben Schlüsse wie in 2) hat man jetzt

$$x = \frac{19}{5} \times 100 = 380 \text{ Rbl.}$$

4) Welches ist der Einkaufspreis (x) einer Waare, wenn bei dem Verkaufe derselben 8 Procente gewonnen (oder verloren) werden und der Gewinn (oder Verlust) im Ganzen 12 Rbl. beträgt?

Aufl. Der Einkaufspreis ist als das gesuchte Kapital und die gar nicht in Betracht kommende Zeit als die Zeiteinheit, etwa als 1 Jahr anzusehen. Wie in 2) hat man daher

$$x = \frac{12}{8} \times 100 = 150 \text{ Rbl.}$$

Berechnung der Procente.

5) Wieviel Procente (x) tragen 350 Rbl. Kapital, wenn in 1 Jahr die Zinsen davon 14 Rbl. ausmachen?

Aufl. 350 Rbl. geben 14 Rbl. Zinsen,

10 Rbl. geben $\frac{14}{35}$ Rbl. Zinsen (§ 87,4)

100 Rbl. geben $\frac{14 \cdot 10}{35} = 4$ Rbl. Zinsen = x .

Ebenso erhält man durch Proportionsrechnung

350 Rbl. : 100 Rbl. = 14 Rbl. Zinsen : x , also

$$x = \frac{14 \cdot 100}{350} = 4 \text{ Rbl.}$$

6) Zu wieviel Procenten (x) sind 750 Rbl. ausgeliehen, wenn sie in 4 Jahren 180 Rbl. Zinsen tragen?

Aufl. In 1 Jahr betragen die Zinsen $\frac{180}{4}$ Rbl. = 45 Rbl.,
folglich erhält man auf dieselbe Weise wie vorhin

$$x = \frac{45 \cdot 100}{750} = 6 \text{ Rbl.}$$

7) Zu wieviel Procenten (x) ist ein Kapital verliehen, wenn die Zinsen zusammen in 15 Jahren dem Kapital gleich kommen.

Aufl. Die Größe des Kapitals ist hier gleichgiltig, da in derselben Zeit ein Kapital sich eben so viel Mal vergrößert wie irgend ein Vielfaches des Kapitals. Man schließt hier:

Es bringen 100 Rbl. in 15 Jahren 100 Rbl. Zinsen,
also bringen 100 Rbl. in 1 Jahre $\frac{100}{15} = 6\frac{2}{3}$ Rbl. Zinsen = x .

Berechnung der Zeit.

8) Wieviel Jahre (x) müssen 550 Rbl. Kapital zu 6 Procent ausstehen, um 99 Rbl. Zinsen zu tragen?

Aufl. Die einjährigen Zinsen von 550 Rbl. betragen
(zufolge 1, a)

$$\frac{6}{100} \times 550 = 33 \text{ Rbl.}$$

Das Kapital 550 Rbl. trägt also

33 Rbl. Zinsen in 1 Jahr, folglich

99 Rbl. = 3.33 Rbl. in 3 Jahren = x .

9) In wieviel Jahren (x) werden die Zinsen eines zu 5 Procent ausstehenden Kapitals dem Kapitale gleich werden?

Aufl. Es geben 100 Rbl. Kapital in 1 Jahr 5 Rbl. Zinsen; damit also die Zinsen ebenfalls 100 Rbl. betragen, sind erforderlich

$$x = \frac{100}{5} = 20 \text{ Jahre.}$$

Hieraus ergibt sich, daß sich ein Kapital durch Zinsen verdoppelt bei 5 Procent in 20 Jahren, bei 4 Procent in $100 : 4 = 25$ Jahren u. s. w.

§ 92. Zuweilen werden von den vier Größen Kapital, Procente, Zins und Zeit nur je zwei betrachtet und zwischen denselben Aufgaben der einfachen Regel de tri gebildet. Z. B.

1) Wenn ein Kapital in $1\frac{3}{4}$ Jahren 77 Rbl. Zinsen giebt; in welcher Zeit (x) werden die Zinsen 110 Rbl. betragen?

Aufl. $77 \text{ Rbl.} : 110 \text{ Rbl.} = 1\frac{3}{4} \text{ Jahr} : x$, also $x = 2\frac{1}{2}$ Jahre.
Oder durch Schlußrechnung:

Man erhält 77 Rbl. Zinsen in $\frac{7}{4}$ Jahren,

also 11 Rbl. Zinsen in $\frac{1}{4}$ Jahr,

daher 110 Rbl. Zinsen in $\frac{10}{4} = 2\frac{1}{2}$ Jahren = x.

2) Welches Kapital (x) trägt in 5 Jahren ebenso viele Zinsen als 350 Rbl. bei gleichen Procenten in 7 Jahren?

Aufl. Je kürzere Zeit ein Kapital aussteht, desto größer muß es sein, um dieselben Zinsen tragen zu können; es ist also (indirect)

$5 \text{ Jahre} : 7 \text{ Jahre} = 350 \text{ Rbl.} : x$, folglich $x = 490 \text{ Rbl.}$

Oder durch Schlußrechnung: Man erhält eine bestimmte Zinsensumme

in 7 Jahren von 350 Rbl.

also in 1 Jahre von $7 \cdot 350 \text{ Rbl.}$ (indirect),

daher in 5 Jahren von $\frac{7 \cdot 350}{5} = 490 \text{ Rbl.}$ (indirect).

§ 93. In einer andern Reihe von Aufgaben kommen von den vier Größen: Kapital, Procente, Zins und Zeit immer nur drei derselben vor und zwar in doppelten, mit einander zusammenhängenden Werthen, so daß der eine Werth aus den übrigen gefunden werden kann. Z. B.

1) Wenn 75 Rbl. in 4 Jahren 15 Rbl. Zinsen tragen; wieviel Zinsen tragen 88 Rbl. bei gleichen Procenten in 8 Jahren?

Aufsl. 75 Rbl. geben in 4 Jahren 15 Rbl. Zinsen,
 1 Rbl. giebt in 4 Jahren $\frac{15}{17}$ Rbl. Zinsen,
 88 Rbl. geben in 4 Jahren $\frac{15 \cdot 88}{75}$ Rbl. Zinsen,
 88 Rbl. geben in 8 Jahren $\frac{15 \cdot 88 \cdot 2}{75} = 35 \frac{1}{5}$ Rbl. Zinsen.

In dieser Aufgabe kommen die drei Größen Kapital, Zeit und Zins in doppelten Werthen vor, während die Procente für beide Kapitale bloß als gleich vorausgesetzt, sonst aber nicht weiter berücksichtigt werden.

2) Wie lange müssen 75 Rbl. zu 4 Procent ausstehen, um eben so viel Zinsen zu tragen als 52 Rbl. zu 5 Procent in 3 Jahren?

Aufsl. Die Zeit steht in indirectem Verhältnisse sowohl zum Kapital (bei gleichen Zinsen und Procenten), als auch zu den Procenten (bei gleichen Zinsen und Kapitalen), daher gelten hier folgende Schlüsse:

Man erhält eine bestimmte Summe an Zinsen

von 52 Rbl. bei 5 Proc. in 3 Jahren,
 ... 1 5 3.52
 ... 1 1 3.52.5 ...
 ... 75 1 $\frac{3 \cdot 52 \cdot 5}{75}$...
 ... 75 4 $\frac{3 \cdot 52 \cdot 5}{75 \cdot 4} = 2 \frac{3}{5}$ Jahren.

Eine andere Auflösung dieser Klasse von Aufgaben werden wir im folgenden Abschnitte, in der zusammengesetzten Regel de tri (§ 105) kennen lernen.

§ 94. Oft betrachtet man ein Kapital nebst den Zinsen von demselben für eine gewisse Zeit zusammen als eine einzige Größe, die man wieder aus dem Kapitale selbst, mit dessen Zinsen, mit den Procenten und der Zeit in Verbindung bringt.

Die Summe oder die Differenz aus einem Kapital und dessen Zinsen für eine gewisse Zeit nennt man das Endkapital oder den künftigen Werth des Kapitals nach jener Zeit. Das ursprüngliche Kapital allein wird das Anfangskapital genannt.

Wenn z. B. 300 Rbl. zu 5 Proc. ausstehen und daher in 1 Jahr 15 Rbl. Zinsen tragen, so sind jene 300 Rbl. das Anfangskapital, und 315 Rbl. das Endkapital oder der künftige Werth von 300 Rbl. nach 1 Jahr.

In diesem Beispiele ist das Endkapital größer als das Anfangskapital, da mit dem letztern jährlich 5 Procente gewonnen werden. Wenn aber von dem Anfangskapital 5 Procente verloren werden, so beträgt der Verlust in 1 Jahre 15 Rbl. und das Endkapital ist dann $300 - 15 = 285$ Rbl., also kleiner als das Anfangskapital.

§ 95. Von den fünf Größen: Anfangskapital, Endkapital, Zeit, Procente und Zinsen kann jede einzelne berechnet werden, wenn drei der übrigen gegeben sind.

Berechnung des Anfangskapitals.

1) Welches Kapital (x) beträgt bei 6 Procent mit seinen Zinsen zusammen nach 3 Jahren 295 Rbl.?

Aufl. Das Anfangskapital 100 Rbl. giebt in 3 Jahren 18 Rbl. Zinsen, also ist das entsprechende Endkapital gleich 118 Rbl. Man hat jetzt

118 Rbl. : 295 Rbl. = 100 Rbl. : x , also $x = 250$ Rbl.,
oder durch Schlussrechnung:

Nach 3 Jahren entstehen 118 Rbl. aus 100 Rbl.

$$\text{also } 295 \text{ Rbl. aus } \frac{100 \cdot 295}{118} = 250 \text{ Rbl.}$$

Der Kürze wegen ist hier, und häufig ebenso im Folgenden, der Schluß auf die Einheit unterlassen und sogleich von einem Vielfachen auf das andere Vielfache geschlossen worden.

2) Ein Geschäftsführer hat für Jemanden 153 Rbl. incassirt und will ihm nach Abzug des Postportos, welches 2 Procente beträgt, den Rest zusenden. Wie groß ist die abzusendende Summe?

Aufl. Von 102 Rbl. sind abzusenden 100 Rbl.

$$\text{also von } 153 \text{ Rbl. sind abzusenden } \frac{100 \cdot 153}{102} = 150 \text{ Rbl.}$$

Die abzusendende Summe (150 Rbl.) ist wie ein Anfangskapital zu betrachten, welches durch 2 Procente während einer Zeiteinheit, die hier nicht weiter in Betracht kommt, zum Endkapital 153 Rbl. anwächst.

3) Jemand will zur Bezahlung einer Schuld eine solche Summe durch die Post absenden, daß der Empfänger das Postporto mit 3 Procent bezahlen und dann noch 194 Rbl. für sich behalten kann. Wie groß muß die abzusendende Summe sein?

Aufl. Dem Empfänger bleiben nur

97 Rbl., wenn 100 Rbl. abgesendet werden,

also 194 Rbl., wenn 200 Rbl. abgesendet werden.

Die abzusendende Summe (200 Rbl.) ist ein Anfangskapital, welches sich hier durch 3 Procente Verlust in der Zeiteinheit zum Endkapital (194 Rbl.) verringert.

4) Welches ist der Einkaufspreis einer Waare, wenn diese mit 7 Procent Schaden für 186 Rbl. verkauft wird?

Aufl. Man erhält 93 Rbl. zurück von gezahlten 100 Rbl.,

also 186 Rbl. von gezahlten $\frac{100 \cdot 186}{93} = 200$ Rbl.

5) Getreide verliert beim Mahlen von seiner Masse durch Abgang 5 Procent. Wieviel Loof Getreide sind zu 76 Loof Mehl erforderlich?

Aufl. Zu 95 Loof Mehl sind nöthig 100 Loof Getreide,

also zu 76 Loof Mehl sind nöthig $\frac{100 \cdot 76}{95} = 80$ Loof Getreide.

Berechnung des Endkapitals.

6) Wie groß wird ein Kapital von 250 Rbl. in 4 Jahren durch die hinzukommenden Zinsen zu 5 Procent?

Aufl. Die 4jährigen Zinsen betragen (§ 91,1)

$$\frac{250 \cdot 5 \cdot 4}{100} = 50 \text{ Rbl.}$$

also ist das Endkapital $250 + 50 = 300$ Rbl.

Man kann auch so schließen:

Aus 100 Rbl. werden 120 Rbl. in 4 Jahren,

also aus 250 Rbl. werden $\frac{120 \cdot 250}{100} = 300$ Rbl.

7) Welches ist der Verkaufspreis (x) einer Waare, die für 25 Rbl. eingekauft einen Gewinn von 8 Procent giebt?

Aufl. Wie vorhin erhält man hier $x = 27$ Rbl.

8) Ein Zoll-Einnehmer erhält 15 Procente von der gesammten Einnahme als Gehalt. Wieviel (x) hat er von 320 Rbl. eingenommenen Zoll-Gelde nach Abzug seines Antheils als Reinertrag abzuliefern?

Aufl. 15 Proc. von 320 Rbl. betragen $\frac{15}{100} \times 320 = 48$ Rbl.
also ist $x = 320 - 48 = 272$ Rbl.

Oder man schließt:

100 Rbl. Einnahme geben 85 Rbl. Reinertrag,

also 320 Rbl. Einnahme geben $\frac{85 \cdot 320}{100} = 272$ Rbl.

Das Anfangskapital (320 Rbl.) vermindert sich um 15 Proc., daher ist das Endkapital (272 Rbl.) kleiner als jenes.

9) Welches ist der Verkaufspreis einer Waare, wenn im Ganzen 12 Rbl. a) gewonnen, b) verloren werden und dieser Gewinn oder Verlust 8 Procente des Einkaufspreises beträgt?

Aufl. a) Auf je 100 Rbl. Einkauf hat man beim Verkauf 8 Rbl. gewonnen, also 108 Rbl. erhalten. Man schließt daher:

Bei 8 Rbl. Gewinn ist der Verkaufspreis 108 Rbl., also

bei 12 Rbl. Gewinn ist der Verkaufspreis $\frac{108 \cdot 12}{8} = 162$ Rbl.

b) Auf je 100 Rbl. Einkauf hat man beim Verkauf 8 Rbl. verloren, also nur 92 Rbl. erhalten. Folglich ist bei 12 Rbl. Verlust der Verkaufspreis $\frac{92 \cdot 12}{8} = 138$ Rbl.

Hier wird das Endkapital (der Verkaufspreis) aus den Procenten und Zinsen des Anfangskapitals (des Einkaufspreises) bestimmt, wobei die Zeitdauer nicht in Betracht kommt.

Berechnung der Zeit.

10) In welcher Zeit werden 80 Rbl., die zu 4 Proc. ausstehen, mit den Zinsen zusammen 100 Rbl. betragen?

Aufl. Von 80 Rbl. betragen die Zinsen

$$\text{für 1 Jahr } \frac{4}{100} \times 80 = 3\frac{1}{5} \text{ Rbl.}$$

und für die gesuchte Zeit $100 - 80 = 20$ Rbl.

Man schließt jetzt: Es geben 80 Rbl.

$$3\frac{1}{5} \text{ Rbl. Zinsen in 1 Jahr,}$$

$$\text{also 20 Rbl. Zinsen in } 20 : 3\frac{1}{5} = 6\frac{1}{4} \text{ Jahren.}$$

11) Nach wieviel Jahren (x) wird ein Kapital von 190 Rbl., welches sich jährlich um 6 Procente vermindert, nur 133 Rbl. betragen?

Aufl. Von 190 Rbl. gehen verloren

$$\text{in 1 Jahr } \frac{6}{100} \times 190 = 11\frac{2}{5} \text{ Rbl.}$$

und in der gesuchten Zeit $190 - 133 = 57$ Rbl.,

$$\text{also ist } x = 57 : 11\frac{2}{5} = 5 \text{ Jahre.}$$

12) In welcher Zeit (x) wird ein Kapital durch seine Zinsen zu 5 Procent 3 Mal so groß?

Aufl. Das Kapital 100 Rbl. ist 3 Mal so groß geworden, wenn die Zinsen zusammen 200 Rbl. betragen. Da in 1 Jahr die Zinsen 5 Rbl. betragen, so ist

$$x = 200 : 5 = 40 \text{ Jahre.}$$

Berechnung der Procente.

13) Zu wieviel Procenten sind 250 Rbl. ausgeliehen, wenn sie nach 8 Jahren mit den Zinsen zusammen 340 Rbl. betragen?

Aufl. 250 Rbl. geben in 8 Jahren $340 - 250 = 90$ Rbl. Zinsen,

$$250 \text{ Rbl. geben in 1 Jahr } \frac{90}{8} \text{ Rbl. Zinsen,}$$

$$\text{also 100 Rbl. geben in 1 Jahr } \frac{90 \cdot 100}{8 \cdot 250} = 4\frac{1}{2} \text{ Rbl. Zinsen.}$$

14) Wieviel Procente (x) beträgt der Unterschied im Preise einer Waare, die gegen bare Zahlung für 25 Rbl., dagegen auf Credit von 8 Monaten für 27 Rbl. verkauft wird?

Aufl. 25 Rbl. geben in 8 Monaten 2 Rbl.

100 8 2.4 . . .

also 100 12 $\frac{2.4 \cdot 12}{8} = 12 \text{ Rbl.} = x.$

15) Wieviel Procente (x) trägt ein Kapital, welches in 25 Jahren durch seine Zinsen 3 Mal größer wird?

Aufl. 100 Rbl. Kapital geben in 25 Jahren 200 Rbl.

Zinsen, folglich in 1 Jahr $\frac{200}{25} = 8 \text{ Rbl. Zinsen} = x.$

Berechnung der Zinsen.

16) Wieviel muß man von 612 Rbl. abziehen, um für den Rest, welcher mit der Post versendet werden soll, das Porto mit 2 Procent bezahlen zu können?

Aufl. Von 102 Rbl. sind abzuführen 2 Rbl.,

also von 612 Rbl. sind abzuführen $\frac{2 \cdot 612}{102} = 12 \text{ Rbl.}$

17) Wenn ein Gutsbesitzer A, der 8 Procente von der gesammten Einnahme seines Gutes dem Verwalter B desselben als Gehalt abgibt, während einer gewissen Zeit einen Reinertrag von 529 Rbl. einnahm; wieviel erhielt in dieser Zeit der Verwalter als seinen Antheil?

Aufl. Von jeden 100 Rbl. der Gesammteinnahme erhielt A 92 Rbl. und B 8 Rbl. Man schließt daher:

Erhält A 92 Rbl., so erhält B 8 Rbl.,

erhält also A 529 Rbl., so erhält B $\frac{8 \cdot 529}{92} = 46 \text{ Rbl.}$

Hier werden die Zinsen des Anfangskapitals für die Zeiteinheit aus den Procenten (8) und aus dem Endkapital (529 Rbl.) gefunden, welches kleiner als das Anfangskapital ist.

Disconto, Rabatt und Procente auf Hundert und von Hundert.

§ 96. Wenn ein Schuldner eine Schuldsomme erst nach einer gewissen Zeit, z. B. einem Jahre, und zwar unverzinslich seinem Gläubiger zu bezahlen braucht, dieser aber sogleich die Summe ausgezahlt haben will, so muß sich der Gläubiger einen gewissen Abzug von der Summe gefallen lassen, da die Zinsen, welche die bar bezahlte Schuldsomme während jenes Jahres trägt, nicht mehr dem Schuldner, sondern dem Gläubiger zu gute kommen.

Dieser Abzug wegen früherer Zahlung einer Summe heißt Disconto oder Rabatt. Die sogleich gezahlte Summe, welche also um den Rabatt kleiner als die erst später fällige Schuldsomme ist, wird die Barzahlung oder auch der bare, gegenwärtige Werth der Schuldsomme genannt.

Die Zeit von dem Tage, an welchem die Barzahlung geschieht, bis zu dem Tage, an welchem die Schuldsomme eigentlich erst abzutragen ist, heißt die Verfallzeit.

Es giebt zwei verschiedene Arten, den Disconto oder Rabatt zu berechnen, nämlich auf Hundert und von (oder in) Hundert.

§ 97. Bei dem **Disconto oder Rabatt auf Hundert** ist die Barzahlung so groß, daß dieselbe mit den von ihr während der Verfallzeit getragenen Zinsen zusammengenommen der Schuldsomme gleich kommt.

Wenn z. B. Jemand einem Andern 110 Rbl. nach 2 Jahren und zwar bis dahin unverzinst auszahlen muß, so hat er gegenwärtig nur eine solche Summe zu zahlen, daß dieselbe mit den Zinsen zusammen, die sie in 2 Jahren trägt, gerade 110 Rbl. ausmacht. Rechnet man 5 Procent, so beträgt die Barzahlung nur 100 Rbl., also 10 Rbl. weniger als die Schuldsomme, da die Zinsen von 100 Rbl. in 2 Jahren 10 Rbl. ausmachen.

Hier beträgt der Disconto 10 Rbl. — Die Barzahlung (100 Rbl.) wird der auf 2 Jahre discountirte Werth von 110 Rbl. genannt.

In allen Aufgaben über den Disconto auf Hundert läßt sich die nach einer gewissen Zeit zahlbare und bis dahin unverzinsliche Summe als ein Endkapital, dagegen die Barzahlung als das Anfangskapital, endlich der Disconto als der Zins betrachten, durch welchen das Anfangskapital in jener Zeit zu dem größern Endkapital anwächst. — Die Auflösung aller hierher gehörenden Aufgaben stimmt daher mit der Auflösung derjenigen Aufgaben des § 95 überein, in welchen aus einem Anfangskapital ein größeres Endkapital entsteht. Z. B.

1) Es sind 177 Rbl. nach 3 Jahren zahlbar. Wieviel beträgt a) die Barzahlung (x), b) der Disconto (y), wenn 6 Procente gerechnet werden.

Aufl. a) Man sucht das Anfangskapital, welches durch 6 Procente in 3 Jahren zu 177 Rbl. anwächst. Wie in § 95,1 schließt man: Da das Anfangskapital 100 Rbl. in 3 Jahren 18 Rbl. Zinsen giebt, so entspricht demselben das Endkapital 118 Rbl.; nach 3 Jahren

entstehen also 118 Rbl. aus 100 Rbl.,

folglich 177 Rbl. aus $\frac{100 \cdot 177}{118} = 150$ Rbl. = x .

b) Es ist der Disconto $y = 177 - 150 = 27$ Rbl.

2) Wenn eine nach 3 Jahren zahlbare Summe von 161 Rbl. sogleich mit 140 Rbl. bezahlt wird; wieviel Procente (x) beträgt der Disconto?

Aufl. Wie in § 95,13 schließt man:

140 Rbl. geben in 3 Jahren $161 - 140 = 21$ Rbl. Zinsen,

140 Rbl. geben in 1 Jahre $\frac{21}{3}$ Rbl. Zinsen,

also 100 Rbl. geben in 1 Jahre $\frac{21 \cdot 100}{3 \cdot 140} = 5$ Rbl. Zinsen = x .

§ 98. Bei dem Disconto oder Rabatt von Hundert wird die Barzahlung erhalten, wenn man von der Schuldsomme die Zinsen abzieht, welche die Schuldsomme während der Verfallzeit trägt.

Sind z. B. 110 Rbl. nach 2 Jahren unverzinslich zahlbar, und werden 5 Procente gerechnet, so beträgt der Zins von 110 Rbl. in 2 Jahren 11 Rbl., folglich die Barzahlung nur $110 - 11 = 99$ Rbl.

Der Rabatt von Hundert ist also gleich den Zinsen, welche die nach einer bestimmten Zeit zahlbare Geldsumme während dieser Zeit trägt.

Beziehen sich die Procente nicht auf ein Jahr, sondern auf einen andern Zeitraum, so muß dieser Umstand besonders bemerkt werden. Wenn z. B. eine nach 8 Monaten fällige Summe mit einem Rabatt von $\frac{1}{2}$ Procent monatlich bezahlt wird, so sind für jeden Monat $\frac{1}{2}$ Procent, also für 8 Monate 4 Procent berechnet worden.

In den Aufgaben über den Disconto von Hundert kann man die nach gewissen Zeit zahlbare Summe als ein Anfangskapital, die Barzahlung als das Endkapital, und den Disconto als die Zinsen betrachten, durch deren Wegnahme von dem Anfangskapital dieses letztere sich zum kleinern Endkapital vermindert.

Beispiele. 1) Wenn 240 Rbl. nach 5 Monaten fällig sind und mit $\frac{1}{2}$ Procent monatlich discountirt werden; wieviel beträgt a) der Disconto (x), b) die Barzahlung (y)?

Aufl. a) 240 Rbl. tragen zu $\frac{1}{2}$ Procent monatlich in 5 Monaten an Zinsen (§ 91, 1, b)

$$x = \frac{240}{100} \times \frac{1}{2} \times 5 = 6 \text{ Rbl.}$$

b) Es ist die Barzahlung $y = 240 - 6 = 234$ Rbl.

Man kann hier auch so schließen: Da 100 Rbl. zu $\frac{1}{2}$ Proc. monatlich in 5 Monaten an Zinsen $\frac{5}{2}$ Rbl. geben, so werden

$$\text{für 100 Rbl. bar gezahlt } 100 - \frac{5}{2} = 97\frac{1}{2} \text{ Rbl.,}$$

$$\text{also für 240 Rbl. bar gezahlt } \frac{97\frac{1}{2} \times 240}{100} = 234 \text{ Rbl.}$$

2) Eine nach 10 Monaten fällige Schuld wurde mit 1 Proc. monatlich discountirt und bar mit $139\frac{1}{2}$ Rbl. bezahlt. Wieviel beträgt a) der Disconto (x), b) die Schuldsumme (y)?

Aufl. a) Für 10 Monate wurden 10 Procente gerechnet, also wurden für 100 Rbl. nur 90 Rbl. bar gezahlt. Es ist also

bei 90 Rbl. Barzahlung der Disconto 10 Rbl., folglich
 bei $139\frac{1}{2}$ Rbl. Barzahlung der Disconto $\frac{10}{90} \times 139\frac{1}{2} = 15\frac{1}{2}$ Rbl. = x.

b) Es ist die Schuldsomme $y = 139\frac{1}{2} + 15\frac{1}{2} = 155$ Rbl.

Oder: Bei 90 Rbl. Barzahlung ist die Schuld 100 Rbl., also

bei $139\frac{1}{2}$ Rbl. Barzahlung ist die Schuld $\frac{100}{90} \times 139\frac{1}{2} = 155$ Rbl.

3) Nach welcher Zeit (x) war ein Wechsel zahlbar, wenn derselbe mit 79 Rbl. bar bezahlt wurde und der Disconto zu 7 Procent gerechnet 21 Rbl. betrug?

Aufl. Der Wechsel betrug $79 + 21 = 100$ Rbl., also sind 21 Rbl. die Zinsen zu 7 Proc. von 100 Rbl. in der gesuchten Zeit x. Das Kapital 100 trägt

7 Rbl. Zinsen in 1 Jahr, folglich

21 Rbl. Zinsen in 3 Jahren = x.

§ 99. In kaufmännischen Geschäften werden die beiden Ausdrücke Disconto und Rabatt, die im Vorhergehenden als gleichbedeutend genommen wurden, in der Regel so von einander unterschieden, daß unter Disconto der Abzug wegen früherer Zahlung einer Geldsumme, dagegen unter Rabatt derjenige Abzug von einer Zahlung verstanden wird, welchen die Kaufleute bei dem Verkauf ihrer Waare dem Käufer, ohne Rücksicht darauf, wann die Zahlung stattfindet, zu bewilligen pflegen.

Wenn nun Jemand z. B. für 100 Rbl. Waare kauft und vom Verkäufer noch für 6 Rbl. Waare unentgeltlich zubekommt, also statt 106 Rbl. nur 100 Rbl. zahlt, so sind ihm 6 Procente Rabatt auf Hundert bewilligt worden.

Wenn der Käufer aber statt 100 Rbl., die er zu zahlen hat, nur 94 Rbl. bezahlt, indem ihm der Verkäufer 6 Rbl. nachläßt, so sind ihm 6 Procente Rabatt von Hundert (oder in Hundert) bewilligt.

§ 100. Wie man Rabatt auf Hundert in Rabatt von Hundert verwandelt und umgekehrt, zeigen die folgenden Beispiele.

1) Wenn von einer gewissen Zahlung 25 Procente Rabatt auf Hundert abgezogen werden; wieviel Procente (x) Rabatt von Hundert beträgt dieser Abzug?

Aufl. Hier ist folgende Aufgabe der Regel de tri zu lösen: Bei 100 + 25 Rbl. beträgt der Abzug 25 Rbl., wieviel beträgt derselbe bei 100 Rbl.? Man hat also

$$100 + 25 : 100 = 25 : x,$$

$$x = \frac{100 \times 25}{100 + 25} = 20 \text{ Procente.}$$

Wenn man also Rabatt auf Hundert verwandelt in Rabatt von Hundert, so werden die Procente kleiner.

2) Wenn der Rabatt von Hundert 10 Procente beträgt; wieviel Procente (x) beträgt dann der Rabatt auf Hundert?

Aufl. Hier liegt folgende Aufgabe der Regel de tri vor: Werden 100 — 10 Rbl. bezahlt, so gewinnt man dabei 10 Rbl., wieviel gewinnt man, wenn 100 Rbl. bezahlt werden? Es ist also

$$100 - 10 : 100 = 10 : x,$$

$$x = \frac{100 \times 10}{100 - 10} = 11 \frac{1}{9} \text{ Procent.}$$

Verwandelt man also Rabatt von Hundert in Rabatt auf Hundert, so werden die Procente größer.

3) Jemand kauft für 110 Rbl. von einem Kaufmann Waaren, der ihm 10 Procent Rabatt bewilligt. Wieviel hat er zu bezahlen, a) wenn dieser Rabatt auf Hundert, b) wenn der Rabatt von Hundert gerechnet wird?

Aufl. a) Bei Rabatt auf Hundert beträgt die Zahlung 100 Rbl., also der Abzug 10 Rbl.

b) Bei Rabatt von Hundert hat der Käufer statt 100 Rbl. zu zahlen 90 Rbl., also statt 10 Rbl. zu zahlen 9 Rbl., folglich im Ganzen 99 Rbl., daher der Abzug 11 Rbl. beträgt.

Für den Zahlenden ist es also vortheilhafter, wenn der Rabatt von Hundert gerechnet wird; für den Empfänger der Zahlung ist der Rabatt auf Hundert der vortheilhaftere.

§ 101. Wie man Rabatt auf Hundert und von Hundert unterscheidet, so werden überhaupt auch Procente auf Hundert und Procente von Hundert unterschieden.

Das Verhältniß der Werthe zweier gleichartigen Größen kann nämlich in Procenten der einen von beiden Größen auf zwei verschiedene Arten angegeben werden.

1) Wenn z. B. der Thaler mehr gilt als der Rubel (in Papier), so daß 100 Thaler gleich 125 Rbl. sind, so sagt man: Der Thaler gewinnt gegen den Rubel 25 Proc. **auf** Hundert, oder auch: Der Rubel verliert gegen den Thaler 25 Proc. **auf** Hundert.

Der Thaler ist hier die höhere oder bessere Einheit, der Rubel die geringere oder schlechtere Einheit.

Das Verhältniß zweier verschiedenen Einheiten wird also in Procenten auf Hundert ausgedrückt, wenn man 100 höhere Einheiten gleich setzt einer größern Anzahl von geringeren Einheiten.

2) Wenn 125 Rbl. = 100 Thaler sind,
so sind 100 Rbl. = 80 Thaler.

Wird nun das Verhältniß des Rubels zum Thaler so wie hier angegeben, indem man nämlich 100 geringere Einheiten gleich setzt einer kleinern Anzahl von höheren Einheiten, so ist jenes Verhältniß in Procenten von Hundert ausgedrückt, und man sagt hier: Der Thaler gewinnt gegen den Rubel 20 Procente **von** Hundert oder auch: Der Rubel verliert gegen den Thaler 20 Procente von Hundert.

Die Verwandlung der Procente auf Hundert und der Procente von Hundert in einander geschieht auf dieselbe Weise, wie die entsprechenden Arten des Rabatts in einander verwandelt werden (§ 100).

Mittlerer Zinsfuß und Zahlungstermin.

§ 102. Man hat 50 Rbl. zu 3 Proc., 60 Rbl. zu 4 Proc., 90 Rbl. zu 5 Proc. ausgeliehen und verlangt den **mittlern Zinsfuß** zu wissen, d. h. die Größe der Procente (x), zu welchen die Summe jener Kapitale verliehen jährlich eben so viel Zinsen einbringt, als die einzelnen Kapitale zu ihren Procenten zusammen jährlich einbringen.

Aufl. Die einzelnen Kapitale bringen zu ihren Procenten zusammen in 1 Jahr an Zinsen (§ 91,1)

$$\frac{50.3}{100} + \frac{60.4}{100} + \frac{90.5}{100} = \frac{50.3 + 60.4 + 90.5}{100} = 8,4 \text{ Rbl.}$$

Da nun die Summe der Kapitale, nämlich $50 + 60 + 90 = 200$ Rbl., in 1 Jahre an Zinsen 8,4 Rbl. trägt, so tragen 100 Rbl. in 1 Jahre an Zinsen

$$\frac{100 \times 8,4}{200} = 4\frac{1}{5} \text{ Rbl.} = x.$$

Die Summe der Kapitale ist demnach zu $4\frac{1}{5}$ Proc. auszuleihen.

Wenn man in dem letzten Ausdruck an die Stelle von 8,4 und von 200 die obigen gleichen Ausdrücke mit bloß angedeuteten Operationen setzt und dann aus Zähler und Nenner die Zahl 100 weghebt, so erhält man

$$x = \frac{50.3 + 60.4 + 90.5}{50 + 60 + 90} = 4\frac{1}{5} \text{ Procent.}$$

Der mittlere Zinsfuß ist also gleich der Summe aus den Produkten der einzelnen Kapitale mit ihren Procenten, dividirt durch die Summe der Kapitale.

§ 103. Jemand hat unverzinslich zu zahlen 200 Rbl. nach 3 Jahren, 500 Rbl. nach 4 Jahren und 600 Rbl. nach 7 Jahren. Welches ist der **mittlere Zahlungs-termin**, d. h. nach welcher Zeit (x) kann die ganze Schuld (1300 Rbl.) auf ein Mal bezahlt werden, so daß weder der Schuldner noch der Gläubiger dadurch einen Nachtheil erleidet?

Aufl. Zuerst muß man die baren Werthe der einzelnen Kapitale unter Annahme eines bestimmten Zinsfußes, etwa 4 Procent, berechnen und ihre Summe bestimmen.

Aus je 100 Rbl. des ersten Kapitals werden in 3 Jahren 112 Rbl., des zweiten Kapitals in 4 Jahren 116 Rbl., des dritten Kapitals in 7 Jahren 128 Rbl. Hieraus findet man (wie in § 97,1) die Barwerthe der einzelnen Kapitale und die Summe der Barwerthe

$$\frac{200.100}{112} + \frac{500.100}{116} + \frac{600.100}{128} = 1078,355 \dots \text{ Rbl.}$$

Jetzt hat man (nach § 95,10) zu berechnen, in welcher Zeit (x) diese 1078,355 ... Rbl. durch ihre Zinsen zu 4 Proc. auf 1300 Rbl. anwachsen.

Von 1078,355 ... Rbl. betragen die Zinsen

$$\text{in 1 Jahr } \frac{4}{100} \times 1078,355 \dots = 43,134 \dots \text{ Rbl.}$$

in der gesuchten Zeit $1300 - 1078,355 \dots = 221,644 \dots \text{ Rbl.};$

$$\text{also ist } x = \frac{221,644 \dots}{43,134 \dots} = 5,1384 \dots \text{ Jahre}$$

oder $x = 5 \text{ Jahre } 1 \text{ Monat } 19,8 \dots \text{ Tage.}$

XV. Zusammengesetzte Regel de tri.

§ 104. Wie in der einfachen Regel de tri aus drei gegebenen Größen eine vierte berechnet wird, so kann auch aus 5, 7, 9.. Größen, die gegeben sind, entsprechend eine 6te, 8te, 10te... Größe gefunden werden. Die gesuchte Größe kann nämlich nicht bloß, wie es dort der Fall ist, von einem Verhältnisse und von der mit ihr gleichartig gegebenen Größe, sondern auch von mehreren Verhältnissen gegebener Größen zugleich abhängig sein.

Wenn z. B. 5 Arbeiter in 6 Tagen 18 Rubel Lohn erhalten und nach dem Lohne gefragt wird, den 7 Arbeiter in 11 Tagen verdienen, so wird dieser sowohl durch die Menge der Arbeiter als durch die Anzahl der Arbeitstage bestimmt und ist daher von den beiden Verhältnissen 5:7 und 6:11 zugleich abhängig. Ebenso hängt die Größe der Zinsen nicht bloß von der Größe des Kapitals ab, sondern zugleich von der Länge der Zeit und von der Höhe der Procente.

Die hierher gehörenden Aufgaben können entweder durch Proportionsrechnung oder durch Schlussrechnung aufgelöst werden. z. B.

1) Wenn 5 Arbeiter in 6 Tagen 18 Rubel Lohn erhalten; welchen Lohn (x) erhalten dann 7 Arbeiter in 11 Tagen?

Aufl. durch Proportionsrechnung. Man unterscheidet die Angabe und die Frage der Aufgabe, nämlich

Angabe: 5 Arbeiter, 6 Tage, 18 Rbl. Lohn;

Frage: 7 Arbeiter, 11 Tage, x Rbl. Lohn.

Jedes einzelne Paar gleichartiger Glieder der Angabe und der Frage vergleicht man mit dem Frageverhältnisse 18:x, um zu ermitteln, ob dieselben direct oder indirect proportional sind. Da die Menge der Arbeiter und ebenso die Anzahl der Arbeitstage mit der Größe des Lohnes direct proportional ist, so hat man von jedem Paar gleichartiger Glieder das Glied der Angabe zu dem Gliede der Frage in Verhältniß zu setzen, also

5 Arbeiter : 7 Arbeitern,

6 Tage : 11 Tagen.

Hierauf läßt man die Benennungen weg und stellt das aus beiden Verhältnissen zusammengesetzte Verhältniß in Proportion mit dem Frageverhältnisse, nämlich

$$\left. \begin{array}{l} 5 : 7 \\ 6 : 11 \end{array} \right\} = 18 \text{ Rbl.} : x \text{ Rbl.}$$

Das Produkt der mittleren Glieder, dividirt durch das Produkt der Zahlen im ersten Gliede giebt

$$x = \frac{7 \cdot 11 \cdot 18}{5 \cdot 6} = 46\frac{1}{5} \text{ Rbl.}$$

Aufl. durch Schlußrechnung. An Lohn wird gezahlt

an 5 Arbeiter in 6 Tagen 18 Rbl.

.. 1 6 $\frac{18}{5}$

.. 1 1 $\frac{18}{5 \cdot 6}$

.. 1 11 $\frac{18 \cdot 11}{5 \cdot 6}$

.. 7 11 $\frac{18 \cdot 11 \cdot 7}{5 \cdot 6} = 46\frac{1}{5}$ Rbl.

2) Eine Mauer von 16 Faden Länge wird von 2 Arbeitern, die täglich 8 Stunden arbeiten, in 3 Wochen vollendet; in welcher Zeit (x) werden 6 Arbeiter bei 9ständiger Arbeit eine Mauer von 24 Faden Länge herstellen?

Aufl. durch Proportionsrechnung.

Angabe: 16 Faden, 2 Arbeiter, 8 Stunden täglich, 3 Wochen,

Frage: 24 Faden, 6 Arbeiter, 9 Stunden täglich, x Wochen.

Die Länge der Mauer ist mit der Arbeitszeit direct, dagegen die Menge der Arbeiter und ebenso die Anzahl der täglichen Arbeitsstunden mit der zur Vollendung der Arbeit erforderlichen Zeit indirect proportional. Das zusammengesetzte Verhältniß wird daher aus den Verhältnissen 16:24, 6:2, 9:8 gebildet, von welchen die beiden letzteren umgekehrt sind, so daß nämlich ein Glied der Frage zu dem entsprechenden Gliede der Angabe in Verhältniß gesetzt ist. Aus dem Ansätze

$$\left. \begin{array}{l} 16 : 24 \\ 6 : 2 \\ 9 : 8 \end{array} \right\} = 3 \text{ Wochen} : x \text{ Wochen.}$$

folgt $x = \frac{24 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 3}{16 \cdot 6 \cdot 9} = 1\frac{1}{3}$ Wochen.

Aufl. durch Schlußrechnung.

2 Arbeiter liefern 16 Fad. bei 8 Arbeitsst. in 3 Wochen,

2 1 8 $\frac{3}{16}$. . .

2 1 1 $\frac{3 \cdot 8}{16}$. . (indirect)

6 1 1 $\frac{3 \cdot 8}{16 \cdot 3}$. . (indirect)

6 1 9 $\frac{3 \cdot 8}{16 \cdot 3 \cdot 9}$. (indirect)

6 24 9 $\frac{3 \cdot 8 \cdot 24}{16 \cdot 3 \cdot 9} = 1\frac{1}{3}$ Woch.

§ 105. Wenn zwei im Angabe- und Fragesatze einander entsprechende Größen ungleich benannt sind, so müssen sie auf eine einzige und zwar dieselbe Benennung gebracht werden. — Gemeinschaftliche Factoren werden aus je einem äußern und einem innern Gliede der zusammengesetzten Proportion entfernt und ebenso Brüche weggeschafft. B. B.

Ein Kapital von 675 Rbl. trägt in 7 Jahren 6 Monaten an Zinsen 303 Rbl. 75 Kop.; in wieviel Jahren (x) werden 270 Rbl. bei gleichen Procenten an Zinsen $60\frac{3}{4}$ Rbl. geben?

Aufl. durch Proportionsrechnung.

Angabe: 675 Rbl. Kap., $7\frac{1}{2}$ Jahre, $303\frac{3}{4}$ Rbl. Zinsen,
 Frage: 270 — x — $60\frac{3}{4}$ —

Kapital und Zeit stehen bei gleichen Procenten und Zinsen in indirectem, dagegen Zinsen und Zeit bei gleichen Kapitalen und Procenten in directem Verhältnisse. Es ist daher

$$\left. \begin{array}{l} 270 : 675 \\ 303\frac{3}{4} : 60\frac{3}{4} \end{array} \right\} = 7\frac{1}{2} \text{ Jahre} : x.$$

Da $270 : 675$ gleich $2 : 5$, und $303\frac{3}{4} : 60\frac{3}{4}$ gleich $1215 : 243$ oder gleich $5 : 1$, so hat man

$$\left. \begin{array}{l} 2 : 5 \\ 5 : 1 \end{array} \right\} = \frac{15}{2} \text{ Jahre} : x, \text{ also } x = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4} \text{ Jahre.}$$

Aufl. durch Schlußrechnung.

675 Rbl. geben $303\frac{3}{4}$ Rbl. Zinsen in $7\frac{1}{2}$ Jahren,

675	1	$\frac{7\frac{1}{2}}{303\frac{3}{4}}$
		1	$\frac{7\frac{1}{2} \times 675}{303\frac{3}{4}}$ (indirect)
270	1	$\frac{7\frac{1}{2} \times 675}{303\frac{3}{4} \times 270}$ (indirect)
270	$60\frac{3}{4}$	$\frac{7\frac{1}{2} \times 675 \times 60\frac{3}{4}}{303\frac{3}{4} \times 270}$	$= 3\frac{3}{4}$ Jahren.

XVI. Kettenregel.

§ 106. Die Kettenregel besteht in einem praktischen Verfahren, Münzen, oder Maße oder Gewichte mittels gegebener Zwischenverhältnisse in einander zu verwandeln. Z. B.

Wenn 65 russ. Fuß gleich 61 franz. Fuß, und 37 franz. Fuß gleich 12 Meter gerechnet werden; wieviel russ. Fuß (x) betragen dann 183 Meter?

Aufl. Hier sollen 183 Meter mittels zweier gegebenen Zwischenverhältnisse in russ. Fuß verwandelt werden. Die gesuchte Anzahl russischer Fuße wird durch folgenden Ansatz erhalten:

$$\begin{array}{rcl} x \text{ russ. Fuß} & = & 183 \text{ Meter,} \\ 12 \text{ Meter} & = & 37 \text{ franz. Fuß,} \\ 61 \text{ franz. Fuß} & = & 65 \text{ russ. Fuß.} \end{array}$$

$$x = \frac{183 \cdot 37 \cdot 65}{12 \cdot 61} = 601 \frac{1}{4} \text{ russ. Fuß.}$$

Man setzt die gesuchte Zahl (x) gleich der zu verwandelnden Größe, hierauf die mit der letztern gleichnamige Größe gleich derjenigen Größe, welche mit ihr denselben Werth haben soll und immer so weiter, bis man zu einer Gleichung gelangt, die mit derselben Benennung schließt, welche die gesuchte Größe (x) hat. Das Produkt aller rechts stehenden Zahlen, dividirt durch das Produkt aller links stehenden, giebt den Werth für x .

Von dieser Form des Ansatzes, bei welcher jede folgende Gleichung mit derselben Benennung beginnt, mit welcher die vorhergehende schließt, hat die Kettenregel ihren Namen erhalten.

Vor der Berechnung des Werthes für x entfernt man aus den Zahlen der beiden Seiten des Ansatzes die gemeinschaftlichen Factoren und schafft die Nenner von Brüchen dadurch weg, daß man sie als Factoren auf die andere Seite setzt. — Mehrfach benannte Zahlen in der Aufgabe müssen immer zuvor auf eine einzige Benennung zurückgeführt werden.

§ 107. Wenn mit einer Aufgabe der einfachen Kettenregel eine Aufgabe der Regel de tri verbunden wird, so entsteht die zusammengesetzte Kettenregel. Z. B.

Wieviel Pfund Sterling erhält man in England für 168 Tschetwert Getreide, wenn ein Garnez 15 Kopfen kostet und ein Pfund Sterling zu 6 Rbl. 30. Kop. gerechnet wird?

Aufsl.	x Pfund Sterling =	168 Tschetwert,	
	1 Tschetwert	=	64 Garnez,
	1 Garnez	=	15 Kopfen,
	630 Kopfen	=	1 Pfund Sterling.
	$x = \frac{168 \cdot 64 \cdot 15}{630}$	=	256 Pfund Sterling.

§ 108. Bei der Anwendung des Kettenrules auf Procentrechnungen über Gewinn und Verlust im Handel hat man Einkaufspreis und Verkaufspreis zu unterscheiden. Sind z. B. bei dem Verkaufe einer Waare 7 Procente gewonnen, so sind

$$100 \text{ Rbl. Einkauf} = 107 \text{ Rbl. Verkauf.}$$

Sind aber 7 Procente verloren, so sind

$$100 \text{ Rbl. Einkauf} = 93 \text{ Rbl. Verkauf.}$$

Werden die Procente gesucht, so muß immer bestimmt werden, für wieviel Rubel (x) eine Waare verkauft ist, die bei ihrem Einkaufe gerade 100 Rubel gekostet hat.

Ergiebt sich für x mehr als 100, so ist der Ueberschuß der Gewinn, ergiebt sich aber weniger als 100, so ist das daran Fehlende der Verlust in Procenten.

Wenn neben dem Einkaufspreise noch Unkosten, z. B. 3 Procente angegeben sind, so müssen diese in dem Kettenrules durch eine besondere Gleichung,

$$100 \text{ Rbl. Einkauf} = 103 \text{ Rbl. Einkauf mit Unkosten,}$$

ausgedrückt werden. Z. B.

1) Ein Kaufmann bezahlte bei dem Einkaufe von Tuch für die Arschin 2 Rbl. — Wie theuer muß er die Arschin verkaufen, wenn die Transportkosten 5 Procent ausmachen und der Gewinn 20 Procent betragen soll?

A u f l.	x Rbl. Verkauf	=	2 Rbl. Einkauf,
	100 Rbl. Einkauf	=	105 Rbl. Eink. mit Unkost.,
	100 Rbl. Eink. mit Unkost.	=	120 Rbl. Verkauf.
	$x = \frac{2 \cdot 105 \cdot 120}{100 \cdot 100}$	=	2 Rbl. 52 Kop.

2) Wenn das Pfund (= 32 Loth) einer Waare für $2\frac{1}{2}$ Rbl. eingekauft worden ist, und das Loth für 10 Kop. verkauft wurde; wieviel Procente betrug der Gewinn?

A u f l.	x Rbl. Verkauf	=	100 Rbl. Einkauf,
	2,5 Rbl. Einkauf	=	32 Loth,
	1 Loth	=	10 Kop.,
	100 Kop.	=	1 Rbl. Verkauf.
	$x = \frac{100 \cdot 32 \cdot 10}{2,5 \times 100}$	=	128 Rbl.

Es sind also 28 Procente gewonnen.

Hätte sich hier für x eine Zahl, kleiner als 100 ergeben, etwa 96, so würde dieses anzeigen, daß 4 Procente bei dem Handel verloren worden sind.

3) Ein Kaufmann will eine Schuld von 112 Rbl. 32 Kop., die nach einer gewissen Zeit in Berlin zahlbar ist, sogleich mit 8 Procenten Disconto auf Hundert durch preussische Thaler bezahlen. Wenn der Thaler gegen den Rubel 4 Procente auf Hundert gewinnt; wieviel beträgt die Barzahlung?

A u f l.	x Thaler bar	=	112,32 Rbl. spätere Zahlung,
	108 Rbl. später	=	100 Rbl. bar,
	104 Rbl. bar	=	100 Thaler bar.
	$x = \frac{112,32 \times 100 \times 100}{108 \times 104}$	=	100 Thaler.

XVII. Gesellschaftsrechnung.

§ 109. Die Gesellschaftsrechnung oder Repartitionsrechnung lehrt eine gegebene Größe nach gegebenen Verhältnissen eintheilen. Die Zahlen, welche diese Verhältnisse ausdrücken, nennt man Verhältniszahlen, und die in der Aufgabe angegebene Vorschrift, auf welche Weise die Theilung geschehen soll, den Theilungsfuß.

Der Name Gesellschaftsrechnung ist von dem Gebrauche dieser Rechnung hergenommen, den man von derselben bei kaufmännischen Geschäften macht.

1) Es sollen 420 Rbl. unter 3 Personen so vertheilt werden, daß sich die Theile zu einander wie 3 : 5 : 7 verhalten.

Aufl. Die allgemeine Regel der Auflösung ist folgende:

Man erhält die gesuchten Theile, wenn man die zu theilende Größe durch die Summe aller Verhältniszahlen dividirt und die erhaltenen Quotienten mit jeder einzelnen Verhältniszahl multiplicirt.

Es ist $3 + 5 + 7 = 15$; die gesuchten Theile sind also:

$$\frac{420}{15} \times 3 = 28 \times 3 = 84 \text{ Rbl.}$$

$$\frac{420}{15} \times 5 = 28 \times 5 = 140 \text{ Rbl.}$$

$$\frac{420}{15} \times 7 = 28 \times 7 = 196 \text{ Rbl.}$$

Die Summe aller Theile $84 + 140 + 196 = 420$ kommt der zur Eintheilung gegebenen Zahl gleich.

§ 110. Haben die gegebenen Verhältniszahlen einen gemeinsamen Factor, so kann derselbe weggelassen werden. Z. B. Statt 12 : 15 : 21 kann man sehen 4 : 5 : 7.

Wenn die Verhältniszahlen Brüche sind, so macht man sie gleichnamig und betrachtet bloß die Zähler als den gegebenen Theilungsfuß. Z. B.

$$\frac{5}{6} : 1\frac{1}{2} : 2 \text{ giebt } \frac{5}{6} : \frac{9}{6} : \frac{12}{6}$$

also ist 5 : 9 : 12 der Theilungsfuß.

Zu einem gemeinsamen Geschäft giebt A 35 Rbl., B $52\frac{1}{2}$ Rbl. und C $87\frac{1}{2}$ Rbl. — Wenn mit der gesammten Einlage 70 Rbl. gewonnen werden; wieviel erhält Jeder von diesem Gewinn?

Aufl. Wenn man die Verhältnißzahlen 35, $52\frac{1}{2}$, $87\frac{1}{2}$ mit 2 multiplicirt und durch 35 dividirt, so erhält man die Zahlen 2, 3, 5, deren Summe 10 ist. Demnach bekommt

$$A \quad \frac{70}{10} \times 2 = 7 \times 2 = 14 \text{ Rbl.}$$

$$B \quad 7 \times 3 = 21 \text{ Rbl. und } C \quad 7 \times 5 = 35 \text{ Rbl.}$$

Durch Schlußrechnung läßt sich die Aufgabe so lösen:

Mit 175 Rbl. Einlage werden gewonnen 70 Rbl.,

mit 1 Rbl. Einlage werden gewonnen $\frac{70}{175} = \frac{2}{5}$ Rbl.,

$$A \text{ gewinnt also mit } 35 \text{ Rbl. Einlage } \frac{2}{5} \times 35 = 14 \text{ Rbl.,}$$

$$B \dots\dots\dots 52\frac{1}{2} \dots\dots\dots \frac{2}{5} \times 52\frac{1}{2} = 21 \text{ Rbl.,}$$

$$C \dots\dots\dots 87\frac{1}{2} \dots\dots\dots \frac{2}{5} \times 87\frac{1}{2} = 35 \text{ Rbl.}$$

§ 111. In manchen Aufgaben muß aus den Bedingungen der Aufgabe der Theilungsfuß in einer Reihe zusammenhängender Verhältnisse erst abgeleitet werden, um die Auflösung nach der allgemeinen Regel in § 109 auszuführen. B. B.

1) Eine Summe von 153 Rbl. soll unter vier Personen folgendermaßen vertheilt werden: So oft A 2 Rbl. erhält, soll B 3 Rbl. erhalten, dagegen C immer 4 Rbl. erhalten, so oft B 5 Rbl. erhält, endlich D 7 Rbl., wenn C 6 Rbl. erhält. Wieviel erhält Jeder?

Aufl. Es sollen sich verhalten die Antheile $A : B = 2 : 3$, $B : C = 5 : 4$ und $C : D = 6 : 7$. Um diese Verhältnisse in zusammenhängende zu verwandeln, hat man (§ 64)

$$\begin{array}{r}
 \text{A} \quad \text{B} \quad \text{C} \quad \text{D} \\
 2 : 3 \\
 \quad \quad 5 : 4 \\
 \hline
 10 : 15 : 12 \\
 \quad \quad \quad 6 : 7 \\
 \hline
 60 : 90 : 72 : 84 \text{ oder durch 6 gehoben} \\
 10 : 15 : 12 : 14.
 \end{array}$$

Da $10 + 15 + 12 + 14 = 51$ und $\frac{153}{51} = 3$, so erhält

$$\begin{array}{l}
 \text{A } 3 \times 10 = 30 \text{ Rbl.}, \quad \text{B } 3 \times 15 = 45 \text{ Rbl.}, \\
 \text{C } 3 \times 12 = 36 \text{ Rbl.}, \quad \text{D } 3 \times 14 = 42 \text{ Rbl.}
 \end{array}$$

2) Bei einem von drei Personen gemeinsam unternommenen Handel ergab sich ein Verlust von 105 Rbl. — Wenn A $\frac{1}{2}$ Mal mehr als C, dagegen B $\frac{1}{4}$ Mal mehr als C verlor; wie groß war der Verlust jeder einzelnen Person?

Aufl. Wenn C 1 Rbl. verliert, so verliert A $1\frac{1}{2}$ Rbl., und B $1\frac{1}{4}$ Rbl. Die Verluste von A, B, C verhalten sich also wie $1\frac{1}{2} : 1\frac{1}{4} : 1$ oder $6 : 5 : 4$. Da nun $\frac{105}{6+5+4} = 7$, so verliert

$$\text{A } 7 \cdot 6 = 42, \quad \text{B } 7 \cdot 5 = 35, \quad \text{C } 7 \cdot 4 = 28 \text{ Rbl.}$$

§ 112. Zuweilen finden sich in den Aufgaben außer den Verhältnißzahlen noch andere Zahlen angegeben, die mit jenen durch Addition oder Subtraction verbunden werden sollen. B. B.

1) Man soll 43 Rbl. so theilen, daß B 3 Mal so viel erhält als A und noch 6 Rbl., C aber $1\frac{1}{3}$ Mal so viel als B und außerdem 5 Rbl.

Aufl. Da die Anthelle des B und C durch den Antheil des A bestimmt sind, so nimmt man den letztern als Einheit an.

$$\begin{array}{l}
 \text{Erhält A } \dots \dots \dots 1 \text{ Theil} \\
 \text{so erhält B } \dots \dots \dots 3 \text{ Theile} + 6 \text{ Rbl.} \\
 \text{und C } (3 \text{ Theile} + 6 \text{ Rbl.}) \frac{4}{3} + 5 \text{ Rbl.} = 4 \text{ Theile} + 13 \text{ Rbl.}
 \end{array}$$

Zusammen 8 Theile + 19 Rbl.

Dieser Summe ist die zu theilende Zahl gleich, d. h. sie beträgt außer 8 solchen Theilen, wie der Antheil des A ist, noch 19 Rbl. in sich. Subtrahirt man also 19 zuvor von 43, so sind jene 8 Theile gleich 24 Rbl., folglich ist 1 Theil = 3 Rbl.

A erhält 1 Theil, also 3 Rbl.

B erhält 3 Theile + 6 Rbl. = 15 Rbl.,

C erhält 4 Theile + 13 Rbl. = 25 Rbl.,

Zusammen = 43 Rbl.

2) Man soll 529 Rbl. so theilen, daß B 3 Mal so viel als A erhält, weniger 100 Rbl., C aber 10 Procente mehr als B und außerdem 9 Rbl.

Aufl. Erhält A 1 Theil,

so erhält B 3 Theile — 100 Rbl.

und C $3\frac{3}{10}$ Theile — 110 Rbl. + 9 Rbl.

Zusammen $7\frac{3}{10}$ Theile — 201 Rbl.

C erhält nämlich dasselbe was B, also 3 Theile — 100 Rbl. und hiervon noch 10 Procente, d. h. den 10ten Theil, also $\frac{3}{10}$ Theile — 10 Rbl., daher im Ganzen $3\frac{3}{10}$ Theile — 110 Rbl. + 9 Rbl. = $3\frac{3}{10}$ Theile — 101 Rbl. Nun sind $7\frac{3}{10}$ Theile — 201 Rbl. gleich der zu theilenden Zahl 529 Rbl. An dieser letztern fehlen also noch 201 Rbl., damit dieselbe $7\frac{3}{10}$ solchen Theilen, deren einen A erhält, gleich sei. Addirt man daher zu 529 Rbl. das Fehlende, so sind die erhaltenen 730 Rbl. gleich jenen $7\frac{3}{10}$ Theilen, folglich ist 1 Theil gleich 100 Rbl.

A erhält 1 Theil, also = 100 Rbl.

B erhält 3 Theile — 100 Rbl. = 200 Rbl.

C erhält $3\frac{3}{10}$ Theile — 101 Rbl. = 229 Rbl.

Summe 529 Rbl.

Aus den beiden letzten Beispielen ergibt sich die folgende Regel:

Die zu den Theilen addirten Zahlen werden von der zu theilenden Größe subtrahirt, dagegen die von den Theilen subtrahirten Zahlen zu derselben addirt, worauf die gesuchten Theile auf die gewöhnliche Weise bestimmt werden.

§ 113. Häufig wird nicht nach den einzelnen Theilen des Ganzen gefragt, sondern die Bestimmung der einzelnen Einlagen oder gewisser anderer Größen verlangt. B. B.

1) Drei Personen gewannen in einem Geschäft mit ihrer gesammten Einlage von 480 Rbl. soviel, daß von dem Gewinne A als seinen Antheil 25 Rbl., B 21 Rbl. und C 14 Rbl. erhielt. Wie groß waren die einzelnen Einlagen?

Aufl. Der ganze Gewinn ist $25 + 21 + 14 = 60$ Rbl.

60 Rbl. sind gewonnen durch 480 Rbl. Einlage

1 Rbl. ist gewonnen durch 8 Rbl. Einlage;

also A gewinnt 25 Rbl. durch $25 \times 8 = 200$ Rbl. Einlage,

B 21 $21 \times 8 = 168$

C 14 $14 \times 8 = 112$

Ganze Einlage = 480 Rbl.

2) Von drei Personen, die zusammen 177 Rbl. gewonnen hatten, erhielt als Einlage und verhältnißmäßigen Gewinn A zurückgezahlt 531 Rbl., B 590 Rbl., C 649 Rbl. — Wieviel hat jede Person gewonnen?

Aufl. Einlage und Gewinn im Ganzen $531 + 590 + 649 = 1770$ Rbl.

Unter 1770 Rbl. Einlage und Gewinn sind 177 Rbl. Gewinn,

Unter 1 Rbl. Einlage und Gewinn ist $\frac{1}{10}$ Rbl. Gewinn

A) Unter 531 Rbl. Einlage und Gewinn sind 53,1 Rbl. Gewinn.

B) . . . 590 59

C) . . . 649 64,9

Zusammen 177 Rbl. Gewinn.

3) Bei einem gemeinsamen Handel betrug die Einlage des A 50 Rbl., und die Einlage des B und des C zusammen 70 Rbl. — Von dem auf 36 Rbl. sich belauenden Gewinn erhielt B 12 Rbl. ausgezahlt. Wieviel betrug die Einlage des B, ferner der Gewinn des A, endlich der Gewinn des C?

Aufl. Da von 36 Rbl. Gewinn B 12 Rbl., also $\frac{1}{3}$ des Gewinnes erhält, so hat B auch $\frac{1}{3}$ der ganzen Einlage, d. h. $(50 + 70) \times \frac{1}{3} = 40$ Rbl. eingelegt.

A hat eingelegt 50 Rbl.,

C 70 — 40 = 30 . . .

A und C gewinnen zusammen $36 - 12 = 24$ Rbl.,

A gewinnt also $\frac{24}{5+3} \times 5 = 15$ Rbl.,

B $\frac{24}{5+3} \times 3 = 9$ Rbl.

§ 114. Die **zusammengesetzte Gesellschaftsrechnung** umfaßt solche Aufgaben, für welche der Theilungsfuß durch die Verbindung zweier oder mehrerer Zahlen mit einander hergeleitet werden muß. Die Bedingungen der hierher gehörenden Aufgaben geben nämlich immer zwei oder mehrere Reihen von Verhältniszahlen, aus denen durch gliedweise Multiplication oder Division mit einander eine Reihe zusammengesetzter Verhältnisse entsteht, welche den Theilungsfuß für die Auflösung bildet. B. B.

1) Zu einem gemeinsamen Handel hat A 15 Rbl. auf 2 Monate, B 20 Rbl. auf 3 Monate, C 24 Rbl. auf 5 Monate hergegeben. Wenn der Gewinn im Ganzen 28 Rbl. beträgt; wieviel gebührt davon jedem Theilnehmer?

Aufl. Die Antheile der einzelnen Personen sind sowol von ihren Einlagen als von dem Zeiten, während welcher sie im Handel benutzt worden sind, abhängig und stehen im geraden Verhältniß zu diesen beiden Größen.

Die Einlagen verhalten sich wie 15 : 20 : 24,

die Zeiten verhalten sich wie 2 : 3 : 5.

Aus diesen beiden Reihen findet man durch gliedweise Multiplication, die man immer dann anwendet, wenn die gesuchten Zahlen (hier die Antheile) in geradem Verhältnisse zu den Größen stehen, auf welche sich die einfachen Verhältniszahlen beziehen, den Theilungsfuß

$15 \times 2 : 20 \times 3 : 24 \times 5$ oder $1 : 2 : 4$.

Nach der Regel in § 109 ist nun $\frac{28}{1+2+4} = 4$, folglich erhält

A $4 \times 1 = 4$ Rbl.

B $4 \times 2 = 8$ Rbl.

C $4 \times 4 = 16$ Rbl.

2) Von drei Kapitalen, die zusammen 225 Rbl. ausmachten und gleich lange auf Zinsen ausstanden, trug im Ganzen A bei 6 Procent 9 Rbl., B bei 8 Procent 18 Rbl., C bei 5 Procent 15 Rbl. — Wie groß war jedes Kapital?

Aufl. Die Verhältniszahlen der Zinsen sind

$$9 : 18 : 15 \text{ oder } 3 : 6 : 5.$$

Die Verhältniszahlen der Procente sind $6 : 8 : 5$.

Die Größe eines Kapitals steht mit den Zinsen in geradem, dagegen mit den Procenten in ungeradem Verhältnisse, daher muß die erste Reihe gliedweise durch die zweite dividirt werden. Man erhält dadurch den Theilungsfuß

$$\frac{3}{6} : \frac{6}{8} : \frac{5}{5} \text{ oder } 2 : 3 : 4.$$

Da nun $\frac{225}{2+3+4} = 25$, so ist

$$A = 25 \times 2 = 50 \text{ Rbl.}$$

$$B = 25 \times 3 = 75 \text{ Rbl.}$$

$$C = 25 \times 4 = 100 \text{ Rbl.}$$

Aufl. durch Schlußrechnung.

Bei 1% würde A tragen $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ Rbl. Zinsen,

.. 1% B $\frac{18}{8} = \frac{9}{4}$

.. 1% C $\frac{15}{5} = 3$, also

bei 1% würden 225 Rbl. tragen $\frac{6\frac{3}{4}}{4}$ Rbl. Zinsen.

Man erhielt also 1 Rbl. Zins von $225 : 6\frac{3}{4} = 33\frac{1}{3}$ Rbl.

folglich $\frac{3}{2}$ Rbl. Zins von $33\frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = 50$ Rbl. = A,

$\frac{9}{4}$ $33\frac{1}{3} \times \frac{9}{4} = 75$. . . = B,

3 $33\frac{1}{3} \times 3 = 100$. . . = C.

XVIII. Mischungsrechnung.

§ 115. Die in der Mischungsrechnung behandelten Aufgaben beziehen sich im Allgemeinen auf die Vermischung oder Verbindung zweier oder mehrerer Stoffe zu einem neuen Stoffe oder überhaupt zu einem Ganzen. Für die einzelnen Bestandtheile sowol als für die Mischung kommt in Betracht die Menge oder Quantität, welche durch irgend eine Maßeinheit ausgedrückt wird, und die Güte oder Qualität, welche den Preis oder Werth einer Einheit bestimmt.

Bei der Mischung von Metallen wird die Qualität derselben (der Gehalt) auf eine besondere Weise angegeben. — Reines oder feines Silber oder Gold ist solches, welches keinen Zusatz von einem andern Metall enthält; Legirt heißen aber jene Metalle, wenn sie mit einem andern Metall, etwa Kupfer, gemischt sind. Wenn nun 1 Pfund (= 96 Solotnik à 96 Doli) legirtes Silber oder Gold im Ganzen z. B. 80 Solotnik feines Silber oder Gold, also 16 Solotnik Zusatz enthält, so sagt man, das Silber oder Gold sei von der 80-er Probe. Ebenso wird eine Mischung von der 70-er Probe enthalten 70 Theile edles Metall und 26 Theile Zusatz.

In Deutschland ist das Grundgewicht für Gold und Silber das halbe kölnische Pfund oder die sogenannte Mark, so daß

$$1 \text{ Mark Silber} = 16 \text{ Loth} = 288 \text{ Grän,}$$

$$1 \text{ Mark Gold} = 24 \text{ Karat} = 288 \text{ Grän}$$

gerechnet wird. Befinden sich in einer Mark legirtem Golde z. B. nur 17 Karat feines Gold, also 7 Karat Zusatz, so heißt die Mischung 17-karätig. Enthält ferner eine Mark legirtes Silber nur 14 Loth feines Silber, also 2 Loth Zusatz, so heißt das Silber 14-löthig.

Wenn man die Zahl der Löthigkeit mit 6 multipliziert, so erhält man die entsprechende Zahl der Probehaltigkeit, und umgekehrt wird durch Division mit 6 die Probehaltigkeit auf Löthigkeit zurückgeführt. Z. B.

$$14\text{-löthiges Silber hat die } 14 \cdot 6 = 84\text{-er Probe;}$$

$$\text{Silber von der } 72\text{-er Probe ist } 72 : 6 = 12\text{-löthig.}$$

Karathaltigkeit wird in Probehaltigkeit verwandelt durch Multiplication mit 4, und umgekehrt die letztere in die erstere durch Division mit 4. *B. B.*

18-karatisches Gold hat die $18 \cdot 4 = 72$ -er Probe;

Gold der 60-er Probe ist $60 : 4 = 15$ -karatig.

Der Gehalt einer Mischung aus Zinn und Blei wird durch die Angabe bestimmt, unter wieviel Pfunden der Mischung ein Pfund Blei ist. Es ist z. B. achtpfündiges Zinn solches, von welchem 8 Pfund nur 7 Pfund reines Zinn, also 1 Pfund Blei enthalten, d. h. der 8te Theil der ganzen Mischung besteht aus Blei.

§ 116. Die Aufgaben der Mischungsrechnung zerfallen in zwei Hauptgruppen, je nachdem nämlich die Verhältnißzahlen, nach welchen die einzelnen Bestandtheile mit einander verbunden werden, schon in der Aufgabe selbst angegeben sind, oder zu den gesuchten Größen gehören.

Wir betrachten zuerst die wichtigsten Aufgaben mit gegebenen Verhältnißzahlen der Mischung.

1) Wenn man 8 \mathcal{Z} Silber von der 60-er Probe mit 4 \mathcal{Z} Silber von der 72-er Probe zusammenschmelzt; welche Probe hat die Mischung?

Aufl. 8 \mathcal{Z} der 60 Probe enthalten $8 \cdot 60 = 480$ Sol. reines Silber;
 4 . . . 72 $4 \cdot 72 = 288$
 12 \mathcal{Z} der Mischung enthalten 768 Sol. reines Silber;
 1 \mathcal{Z} der Mischung enthält also 64 Sol. reines Silber,
 d. h. die Mischung hat die 64-er Probe.

2) Wieviel reines Gold ist in 12 Loth 18-karatigem Golde enthalten?

Aufl. In 18-karatigem Golde enthalten
 24 Theile legirtes Gold nur 18 Theile reines Gold,
 daher 24 Loth legirtes Gold nur 18 Loth reines Gold,
 also 12 Loth legirtes Gold nur 9 Loth reines Gold.

Oder: Von jeder beliebigen Menge 18-karatigen Goldes sind $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$ reines Gold, also sind in 12 Loth legirten Goldes nur $12 \times \frac{3}{4} = 9$ Loth reines Gold enthalten.

3) Wenn man 7 Maß Wasser von 24 Grad Wärme und 3 Maß von 34 Grad Wärme mit einander mischt; welche Temperatur (x) hat die Mischung?

Aufl. Hier gilt die Regel: Man findet die Temperatur der Mischung, wenn die Menge jeden Bestandtheil mit seiner Temperatur multiplicirt und die Summe der Produkte durch die Summe der Mengen dividirt wird. Demnach ist

$$x = \frac{7 \cdot 24 + 3 \cdot 34}{7 + 3} = 27 \text{ Grad.}$$

4) Wenn 5 Flaschen 60=procentiger Spiritus (der in 100 Theilen 60 Theile reinen Weingeist und 40 Theile Wasser enthält) mit 4 Flaschen 75=procentigem Spiritus vermischet werden; wieviel procentig ist die Mischung?

Aufl. Es enthalten

$$5 \text{ Flaschen } 60 \text{ proc. Spir. } 5 \times \frac{60}{100} = 3 \text{ Fl. reinen Spir.}$$

$$\underline{4 \dots 75 \dots} \quad 4 \times \frac{75}{100} = 3 \dots$$

$$9 \text{ Flasche der Mischung enthalten } \underline{6} \text{ Fl. reinen Spir.}$$

$$100 \text{ Flaschen der Mischung enthalten } \frac{100 \cdot 6}{9} = 66\frac{2}{3} \text{ Fl. reinen Spir.}$$

d. h. die Mischung ist $66\frac{2}{3}$ procentig.

5) Zu 64 Solotnik Gold der 70=er Probe soll anderes Gold zugesetzt werden, so daß man 80 Solotnik Gold von der 60=er Probe erhält; von welcher Probe muß das zugesetzte Gold sein?

Auflösung.

$$80 \text{ Sol. der } 60. \text{ Probe enthalten } 80 \cdot 60 = 4800 \text{ Doli feines Gold,}$$

$$\underline{64 \dots 70 \dots} \quad 64 \cdot 70 = 4480 \dots$$

$$16 \text{ Sol. der gesuchten Probe enthalten } \quad 320 \text{ Doli feines Gold,}$$

$$1 \text{ Sol. der gesuchten Probe enthält } 320 : 16 = 20 \text{ Doli feines Gold,}$$

d. h. das Gold ist von der 20=er Probe.

6) Man will eine Sorte Wein, die Flasche zu 48 Kopeten, mit einer andern Sorte in dem Verhältnisse von 3 : 2 vermischen, so daß eine Flasche der Mischung 42 Kop. werth ist. Welchen Preis muß eine Flasche der zweiten Sorte haben?

Aufl. Nimmt man 3 Flaschen der ersten und 2 Flaschen der zweiten Sorte, so kosten

5 Flaschen der Mischung,	$5 \times 42 = 210$ Kop.,
3 Flaschen der ersten Sorte	$3 \times 48 = 144$ Kop.,
2 Flaschen der zweiten Sorte kosten	<u>66</u> Kop.,
1 Flasche der zweiten Sorte kostet	33 Kop.,

§ 117. Die zweite Hauptgruppe von Aufgaben, bei welcher nämlich die Verhältnißzahlen der Mischung gefunden werden müssen, wird die eigentliche Mischungs- oder Alligationsrechnung genannt. Diese wird in die einfache und in die zusammengesetzte getheilt, je nachdem nämlich bloß zwei Stoffe oder Bestandtheile oder mehr als zwei derselben mit einander verbunden werden sollen.

In der eigentlichen Mischungsrechnung giebt es wiederum mehrere, durch die Art ihrer Auflösung von einander sehr verschiedene Aufgaben.

1) Wenn 1 Pfund der geringern Sorte A einer Waare 4 Kop., von der bessern Sorte B aber 9 Kop. kostet; wieviel Theile sind von jeder Sorte zu nehmen, damit ein Pfund der Mischung 7 Kop. werth sei?

Aufl. Das Schema der Rechnung ist folgendes:

$$\begin{array}{r|l} 4 & 9 - 7 = 2 \text{ Theile von A,} \\ 7 - & \\ 9 & 7 - 4 = 3 \text{ Theile von B.} \end{array}$$

Man setzt nämlich die Preise der beiden Sorten unter einander und zwischen beiden den Mittelpreis, d. h. den Preis der Mischung. Wieviel Theile von jeder Sorte zu nehmen, findet man alsdann nach folgender Regel:

Der Unterschied zwischen dem Preise der Mischung und dem der geringern Sorte giebt die Verhältnißzahl für die bessere Sorte, und der Unterschied zwischen dem Preise der bessern Sorte und dem der Mischung giebt die Verhältnißzahl für die geringere Sorte.

Eine Probe der Rechnung läßt sich so anstellen:

2 \mathcal{K} der Sorte A kosten 2.4 = 8 Kop.,

3 \mathcal{K} der Sorte B kosten 3.9 = 27 Kop.,

5 \mathcal{K} der Mischung kosten 35 Kop.,

1 \mathcal{K} der Mischung kostet also 7 Kop.,

wie vorausgesetzt wurde.

2) Wieviel Silber von der 80=er Probe und wieviel von der 60=er Probe muß man zusammenschmelzen, um 20 Solotnik Silber von der 72=er Probe zu erhalten?

Aufl.	80	12	3 Theile von der 80=er Probe,
	72	—	oder
	60	8	2 Theile von der 60=er Probe,
			5

Da $20 : 5 = 4$, so hat man zu nehmen

$4 \times 3 = 12$ Sol. von A,

$4 \times 2 = 8$ Sol. von B.

Man berechnet nämlich zuerst wie in 1) die Verhältniszahlen der Mischung, 12 und 8, wofür man durch Aufheben des gemeinsamen Factors 4 setzen kann 3 und 2. Hierauf theilt man die vorgeschriebene Menge der Mischung (20 Sol.) nach der Gesellschaftsrechnung in zwei Theile, die sich wie 3 zu 2 verhalten.

3) Ein Kaufmann besitzt von einer Waare 5 Pfund, das Pfund zu $\frac{1}{2}$ Rbl. — Wieviel Pfund (x) einer bessern Sorte, das Pfund zu $\frac{5}{8}$ Rbl., muß er hinzusetzen, damit ein Pfund der Mischung $\frac{3}{4}$ Rbl. werth sei?

Aufl.	$\frac{1}{2}$ oder	6	1 Theil der schlechtern Sorte,
	$\frac{3}{4}$ —	9	—
	$\frac{5}{8}$	10	3 Theile der bessern Sorte.

Multipliziert man nämlich die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ mit dem kleinsten Vielfachen 12 ihrer Nenner, so kann man die einfacheren Zahlen 6, 9, 10 an die Stelle derselben setzen. Hieraus findet man die Verhältniszahlen 1 und 3, d. h. auf 1 \mathcal{K} der schlechtern Sorte kommen 3 \mathcal{K} der bessern, also müssen auf 5 \mathcal{K} der schlechtern Sorte zugesetzt werden $x = 15\mathcal{K}$ der bessern Sorte.

4) Man hat 10 Solotnik Gold von der 90=er Probe und will den Gehalt des Goldes verringern, so daß es nur die 81=er Probe erhält. Wieviel reines Gold (x) muß durch Schmelzen ausgeschieden werden?

Aufl. Man berechnet zuerst, in welchem Verhältnisse Gold der 81=er Probe mit reinem Golde, d. h. solchem, welches die 96=er Probe hat, gemischt werden muß, um Gold der 90=er Probe zu geben.

$$\begin{array}{r|l} 81 & 6 \quad 2 \text{ Theile der 81=er Probe,} \\ 90 & \text{oder} \\ 96 & 9 \quad \frac{3 \text{ Theile reines Gold.}}{5} \end{array}$$

Es geben also 2 Sol. der 81=er Probe und 3 Sol. reines Gold mit einander vermischt, 5 Sol. der 90=er Probe.

Hieraus schließt man nun umgekehrt, daß wenn Gold der 90=er Probe in Gold der 81=er Probe verwandelt werden soll, aus 5 Solotnik des erstern 3 Solotnik reines Gold ausgeschieden werden müssen, folglich sind aus 10 Solotnik auszuschneiden $x = 6$ Solotnik reines Gold.

Zweite Aufl. Das Verhältniß des reinen Goldes zum Zusage ist

bei der 90=er Probe gleich $90 : 6$ oder $450 : 30$,

bei der 81=er Probe gleich $81 : 15$ oder $162 : 30$,

wo beide Verhältnisse wegen besserer Vergleichung mit einander auf ein gleiches Hinterglied gebracht worden sind. — Soll nun die 90=er Probe zur 81=er Probe werden, so muß sich das erste Verhältniß $450 : 30$ in das zweite $162 : 30$ verwandeln, was dadurch geschieht, daß von dem Vordergliede 450 subtrahirt wird 288. Man muß also

von 450 Sol. reinem Golde wegnehmen 288 Sol. reines Gold,
 ... 1 Sol. $\frac{288}{450} = \frac{16}{25}$ Sol.

Da nun 10 Sol. der 90=er Probe im Ganzen $10 \times \frac{90}{96} = \frac{75}{8}$ Sol. reines Gold enthalten, so sind überhaupt auszuschneiden

$$x = \frac{16}{25} \times \frac{75}{8} = 6 \text{ Sol. reines Gold.}$$

5) Wenn man 12 Loth Silber von der 80=er Probe in Silber von der 60=er Probe verwandeln will; wieviel Loth Kupfer müssen zugelegt werden?

Aufl. Setzt man die Probehaltigkeit des Kupfers gleich 0, da es kein Silber enthält, so hat man

80	60	3 Theile Silber von der 80=er Probe,
60 —	oder	
0	20	1 Theil Kupfer.

Auf 3 Loth Silber kommt also 1 Loth Kupfer hinzu, folglich sind auf 12 Loth Silb. hinzuzusetzen 4 Loth Kupfer.

Zweite Aufl. Das reine Silber verhält sich zur ganzen Masse

bei der 80=er Probe wie 80 : 96 oder 5 : 6,
bei der 60=er Probe wie 60 : 96 oder 5 : 8.

Soll nun das erste Verhältniß in das zweite übergehen, so ist zu 9 hinzuzufügen 2, d. h. zu 6 Loth der ganzen Masse kommen 2 Loth Kupfer, also kommen zu 12 Loth hinzu 4 Loth Kupfer.

6) Jemand kauft zwei Arten Tuch, schwarzes zu 2 Rbl. und blaues zu 5 Rbl. die Arschin, im Ganzen 15 Arschin für 45 Rbl. — Wieviel Arschin hat er von jeder Art gekauft?

Aufl. Aufgaben der vorstehenden Art, in welchen es sich nicht um die Vermischung von Stoffen mit einander, sondern um andere Fragen handelt, lassen sich ebenfalls nach den Regeln der Mischungsrechnung auflösen. Zuvor ist hier die Bestimmung des Mittelpreises erforderlich. Da 15 Arschin 45 Rbl. kosten, so kostet 1 Arschin 3 Rbl. — Nun hat man

2	2 Arschin schwarzes Tuch,
3 —	
5	1 Arschin blaues Tuch.

Da $\frac{15}{2+1} = 5$, so sind gekauft worden $5 \times 2 = 10$ Arschin schwarzes und $5 \times 1 = 5$ Arschin blaues Tuch.

Zusammengesetzte Mischungsrechnung.

§ 118. Die hierher gehörenden Aufgaben, in welchen es sich um die Verbindung von mehr als zwei Bestandtheilen mit einander handelt, gestatten unendlich viele richtige Antworten auf die gestellte Frage. Oft wird aber durch Nebenbedingungen die Anzahl der verschiedenen Resultate der Auflösung sehr beschränkt, so daß sich nicht selten nur ein einziges richtiges Resultat finden läßt. — Es giebt für diese Aufgaben zwei verschiedene Auflösungsarten, die wir an den folgenden Beispielen erläutern.

1) Drei Sorten einer Waare, nämlich A zu 8, B zu 7, C zu 3 Kop. das Pfund, sollen so vermischt werden, daß ein Pfund der erhaltenen Mittelsorte M 5 Kop. kostet; wieviel Theile von jeder Sorte müssen genommen werden?

Erste Aufl.	A	8	2	Theile von A
	B	7	2	Theile von B
	M	5	—	
	C	3	5	Theile von C

Man bestimmt den Unterschied des Preises zwischen jeder gegebenen Sorte und der Mittelsorte und setzt die Summe aller Unterschiede der besseren Sorten als Verhältnißzahl für jede schlechtere Sorte, und umgekehrt die Summe aller Unterschiede der schlechteren Sorten als Verhältnißzahl für jede bessere Sorte.

Hier ist der Preis=Unterschied zwischen A und M gleich $8 - 5 = 3$, zwischen B und M gleich $7 - 5 = 2$, also setzt man $3 + 2 = 5$ als Verhältnißzahl für C. Der Preis=Unterschied zwischen M und C ist $5 - 3 = 2$, folglich setzt man 2 als Verhältnißzahl sowol für A als für B.

Probe.	2 ℔ von	A	kosten	16 Kop.,
	2 ℔ von	B	kosten	14 Kop.,
	5 ℔ von	C	kosten	<u>15</u> Kop.,
	9 ℔ der Mischung		kosten	45 Kop.,
	also 1 ℔ der Mischung		kostet	5 Kop.,

wie vorausgesetzt worden war.

Zweite Aufl.

A	8	3	$\frac{1}{3} \times 6 = 2$	$\frac{1}{3} \times 6 = 2$
B	7	2	$\frac{1}{2} \times 4 = 2$	oder $\frac{1}{2} \times 2 = 1$
M	5	—		
C	3	2	$\frac{1}{2} \times 10 = 5$	$\frac{1}{2} \times 8 = 4$ u. s. w.

Man bestimmt die Unterschiede 3, 2, 2 zwischen den gegebenen Preisen und dem Mittelpreise und bildet die umgekehrten Werthe dieser Unterschiede, also $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$. Diese umgekehrten Werthe multiplicirt man mit solchen, übrigens ganz beliebigen Factoren, daß die Summe der gewählten Factoren bei den besseren Sorten gleich ist der Summe der Factoren bei den schlechteren Sorten; die erhaltenen Produkte geben dann immer richtige Verhältnißzahlen der Mischung.

Wenn man die Factoren so annimmt, daß die Nenner aller Brüche in ihnen aufgehen, so erhält man eine Auflösung in ganzen Zahlen. Wählt man bei A und B die Factoren 6 und 4, also bei C dem Factor $6 + 4 = 10$, so erhält man die Verhältnißzahlen 2, 2, 5; wählt man aber bei A und B die Factoren 6 und 2, folglich bei C den Factor $6 + 2 = 8$, so erscheinen die Verhältnißzahlen 2, 1, 4. Auf diese Weise lassen sich unendlich viele richtige Verhältnißzahlen finden.

2) Ein Weinhändler hat von einem Weine vier Sorten, die Flasche zu 72, 74, 76 und 77 Kopfen. Wenn er durch Mischung dieser Sorten 140 Flaschen zum Preise von 75 Kop. herstellen will; wieviel Flaschen muß er von jeder Sorte dazu nehmen?

Erste Aufl.	72	3	$3 \times 10 = 30$	Flaschen
	74	1	$3 \times 10 = 30$	Flaschen
	75	—		
	76	1	$4 \times 10 = 40$	Flaschen
	77	2	$4 \times 10 = 40$	Flaschen
				140 Flaschen.

Die Preis = Unterschiede zwischen der Mittelsorte und den schlechteren Sorten sind 3 und 1 und zwischen der Mittelsorte und den besseren Sorten 1 und 2, folglich ist die Verhältnißzahl für jede der besseren Sorten gleich $3 + 1 = 4$, dagegen für jede

der schlechteren Sorten gleich $2 + 1 = 3$. Man bestimmt jetzt mittels der Gesellschaftsrechnung, wieviel Flaschen von jeder einzelnen Sorte zu nehmen sind, damit 140 Flaschen der Mischung erhalten werden. Da $140 : 14 = 10$, wo 14 die Summe der Verhältniszahlen 3, 3, 4, 4 ist, so ist jede Verhältniszahl mit 10 zu multiplizieren.

Zweite Aufl.

72	3	$\frac{1}{3} \times 9 = 3$	$\frac{1}{3} \times 3 = 1$
74	1	$\frac{1}{1} \times 3 = 3$	$\frac{1}{1} \times 1 = 1$
75	—	oder	
76	1	$\frac{1}{1} \times 4 = 4$	$\frac{1}{1} \times 2 = 2$
77	2	$\frac{1}{2} \times 8 = 4$	$\frac{1}{2} \times 2 = 1$ u. s. w.

Multipliziert man die umgekehrten Werthe $\frac{1}{3}, \frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}$ mit den Factoren 9, 3, 4, 8, wo $9 + 3 = 4 + 8$ ist, so erhält man dieselben Verhältniszahlen wie bei der ersten Auflösung; multiplicirt man sie aber mit den Factoren 3, 1, 2, 2, wo $3 + 1 = 2 + 2$ ist, so erhält man die Verhältniszahlen 1, 1, 2, 1, und da $\frac{140}{1+1+2+1} = 28$, so hat man der Reihe nach zu nehmen 28, 28, 56, 28 Flaschen. Jedes Mal, wo andere Factoren gewählt werden, erhält man auch andere Verhältniszahlen und daher auch neue Resultate, die der Aufgabe genügen.

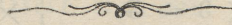
3) Aus vier Sorten Gold, von welchen A 8, B 9, C 14, D 17 karatig ist, will man 12 karatiges Gold herstellen. Wenn von der ersten Sorte A gerade 2 Mark zur Mischung genommen werden sollen; wieviel hat man dann von B, C, D zu nehmen?

Aufl. Man wendet hier am bequemsten die zweite Auflösungsart an.

A	8	4	$\frac{1}{4} \times 8 = 2$	$\frac{1}{4} \times 8 = 2$ Mark
B	9	3	$\frac{1}{3} \times 3 = 1$	$\frac{1}{3} \times 6 = 2$ Mark
12	—	oder		
C	14	2	$\frac{1}{2} \times 6 = 3$	$\frac{1}{2} \times 4 = 2$ Mark
D	17	5	$\frac{1}{5} \times 5 = 1$	$\frac{1}{5} \times 10 = 2$ Mark u. s. w.

Der Factor bei A ist so zu wählen, daß er mit $\frac{1}{4}$ multiplicirt, gerade 2 giebt, d. h. er muß 8 sein. Nimmt man nun als

übrige Factoren 3, 6, 5, indem $8 + 3 = 6 + 5$ ist, so erhält man die Lösung 2, 1, 3, 1 Mark; nimmt man aber die Factoren 6, 4, 10, indem $8 + 6 = 4 + 10$ ist, so findet man lauter gleiche Verhältniszahlen.



Im Verlage von **J. Kluge** in **Reval** sind ferner erschienen:

- Ahrens, E., Abriß einer geographischen und genealogischen Geschichte sämtlicher Staaten alter und neuer Zeit. Ein Hilfsbuch beim Gebrauche historischer Werke. 1858 1 Rbl. 20 Kop.
- Alexandrow, G., Praktisches Elementarbuch der russischen Sprache. 1859. 75 Kop.
- Allihn, Dr. Ferd., Lehrbuch der Planimetrie. 1870 50 Kop.
- Blagoweschtschensky, W., Chrestomathie zum Uebersetzen aus dem Deutschen in's Russische. 1844 1 Rbl.
- Böhm, Chr., Deutsches Lesebuch für Kreissschulen, Töchtersschulen und ähnliche Lehranstalten.
 I. Bd. 1866 70 Kop.
 II. Bd. 1867 80 Kop.
- Deutsches Lesebuch für Elementarschulen.
 I. Theil. 2. Aufl. 1872. Cartonirt 40 Kop.
 II. Theil. 2. Aufl. 1872. Cartonirt 60 Kop.
- Das Lesebuch als Schule für den schriftlichen Gedankenausdruck, enthaltend eine Sammlung ausgeführter Aufsätze. Ein Hilfsbuch für Lehrer und Lehrerinnen. 1869 50 Kop.
- Bruttan, A., Lehrbuch der Naturgeschichte. Bestimmt zum Gebrauche auf den Schulen der Ostseeprovinzen sowie zur Selbstbelehrung. 1865 80 Kop.
- Schul-Naturgeschichte. Bestimmt zum Gebrauche auf den Schulen der Ostseeprovinzen. 1870 60 Kop.
- Golotusow, F., Leitfaden zum ersten Unterrichte in der russischen Sprache für Deutsche. 9. verb. Aufl. 1872 40 Kop. Carton. 47 Kop.
- Hegel, Dr. Carl, Compendium der Planimetrie nach Legendre für den Schulgebrauch bearbeitet. 2. Aufl. 1865 50 Kop.
- Compendium der Stereometrie nach Legendre für den Schulgebrauch bearbeitet. 2. Aufl. 1865 50 Kop.
- Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie mit zahlreichen Anwendungen auf reine und praktische Geometrie, mathematische Geographie, Geodäsie und Astronomie. 1868 50 Kop.
- Stereometrische Aufgaben nebst ihren Auflösungen für den Gebrauch in höheren Lehranstalten.
 1. Heft. 1865 70 Kop.
 2. Heft. 1866 80 Kop.
- Lehrbuch der Buchstabenrechnung und Algebra für Gymnasien und Realschulen. 1869 1 Rbl.
- Leitfaden zum Unterrichte in der ebenen Trigonometrie, für den Gebrauch in Schulen bearbeitet. 1870 50 Kop.
- Die ebene analytische Geometrie mit zahlreichen Übungsaufgaben für höhere Lehranstalten. 2. verb. Aufl. 1870 60 Kop.
- Arithmetische Aufgaben für Gymnasien, Realschulen und ähnliche Lehranstalten. 1871. Cartonirt 70 Kop.
- Auflösungen der arithmetischen Aufgaben. 1872. Cartonirt . 47 Kop.
- Горданъ, Н., Краткое руководство къ географіи Россійской имперіи. 1857 60 Kop.

- Keilner, Fr. Wilh., Lehrbuch der Geographie für mittlere und höhere Lehr-
 anstalten. 1872 1 Rbl.
 Meder, G. N., Lern- und Lehrbuch der russischen Sprache für Elementarklassen.
 4. Aufl. 1872 40 Kop. Cartonn. 47 Kop.
 Nikoletsch, S., Etymologischer Theil der russischen Grammatik bearbeitet für
 Deutsche. 5. verb. Aufl. 1870 80 Kop.
 — Синтаксисъ русскаго языка (Syntax der russischen Sprache). 4. verb.
 Aufl. 1870 60 Kop.
 Bahnsch, S., Leitfaden für den Unterricht im Rechnen. 2. verbesserte Auflage.
 1860 80 Kop. Cartonn. 87 Kop.
 — Arithmetische Aufgaben. Eine Zugabe zum Leitfaden für den Unterricht
 im Rechnen. 5. verm. Aufl. 1872 . . . 70 Kop. Cartonn. 77 Kop.
 — Resultate der arithmetischen Aufgaben. 5. verm. Aufl. 1872.
 40 Kop. Cartonn. 47 Kop.
 Bihle mann, S., Praktischer Leitfaden zum Erlernen der russischen Sprache
 5. verb. Aufl. 1871 90 Kop.
 — Übungsbuch zum Uebersetzen aus dem Deutschen in's Russische 2. Aufl.
 1867 1 Rbl.
 Nathles, Dr. C., Historische Umrisse. 1853 1 Rbl. 80 Kop.
 Шафрановъ, С., и Николичъ, Русская хрестоматія для употребле-
 нія въ училищахъ прибалтійскихъ губерній.
 Часть I. Проза. 4-е издан. 1872 . . . 1 Rbl. 20 Kop.
 „ II. Поэзія. 1860 1 Rbl. 10 Kop.
 Шафрановъ, С., Chrestomathie zum Uebersetzen aus dem Deutschen in's
 Russische mit Worterklärung der schwierigsten Stellen versehen. 2. verm.
 Aufl. 1864 1 Rbl. 20 Kop.
 Schulgesangbüchlein. Auswahl von geistlichen Lieder-Versen für Schulan-
 dachten. 1864. Cartonnirt 30 Kop.
 Serno-Solowjewitsch, A., Praktische russische Grammatik für Deutsche.
 4. verb. Aufl. 1868 1 Rbl.
 Tschereschewitsch, A., Chrestomathie zum Uebersetzen aus dem Deutschen
 in's Russische. 4. verb. Aufl. 1871 1 Rbl.
 Westberg, G., Die Elemente der Geometrie. 3. verb. Auflage. 1864.
 Cartonnirt 70 Kop.
 — Grundzüge der Physik für Kreissschulen des Dorpat'schen Lehrbezirks.
 2. verb. Aufl. 1858. Cartonnirt 80 Kop.
 — Der kleine Rechner, oder Leitfaden zum theoretisch-praktischen Rechnen,
 nebst einer hinlänglichen Anzahl von Übungsaufgaben.
 I. Lehrstufe. 3. verb. Aufl. 1872. Cartonnirt . . . 35 Kop.
 II. Lehrstufe. 2. verb. Aufl. 1866. Cartonnirt . . . 35 Kop.
 — Kurze Deutsche Sprachlehre. Ein Leitfaden zum Gebrauche in Kreissschu-
 len und den unteren Klassen höherer Lehranstalten. 2. verb. Auflage.
 1869 50 Kop.