A. HUMAL, O. RÜNK, A. GARŠNEK

KUJUTAV GEOMEETRIA

I OSA

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1950 TARTU

Eessõna.

Käesolev kujutava geomeetria õpik on 2., parandatud ja täiendatud trükk samanimelisest 1946. aastal ilmunud õpikust. Esimese trükiga võrreldes on õpiku esimene osa ainult paaris kohas oluliselt muutunud: § 13 lõppu on täiendatud sirglõigu pikkuse konstruktsioonidega ja § 18 esimesse poolde on lisandunud kujundi pööramiste käsitlus. Vähemaid parandusi ja täpsustusi on tehtud kogu teksti ulatuses. Õpik on kooskõlas kujutava geomeetria uue programmiga, mis on kinnitatud Tallinna Polütehnilisele Instituudile NSV Liidu Kõrgema Hariduse Ministeeriumi poolt.

Teadusliku distsipliinina on kujutav geomeetria ümmarguselt poolteist sajandit vana, kuigi tema alged mõningate projektsioonivõtete näol küünivad juba antiikaega. Venemaal alustati kujutava geomeetria õpetamist 1809. aastal Teedeinseneride Instituudis Peterburis. Esimene venekeelne kujutava geomeetria õpik ilmus 1816. aastal sama instituudi õppejõu J. A. Savostjanovi väljaandel. 1830. aastast hakati kujutavat geomeetriat õpetama peaaegu kõigis Venemaa tehnilistes õppeasutistes. Vene teadlastelt on ilmunud hulk kujutava geomeetria õpikuid, millest väärivad esiletõstmist N. I. Makarovi, V. I. Kurdjumovi ja N. A. Rõnini teosed. Uut elavnemist kujutava geomeetria probleemide uurimisel tähistasid E. S. Fjodorovi tööd käesoleva sajandi esimestel aastakümnetel. NSV Liidus suurenes kujutava geomeetria alal töötavate teadlaste arv järsult; neist on silmapaistvamad N. F. Tšetveruhhin, N. A. Glagolev, A. K. Vlassov ja D. I. Kargin.

Kõrgemais tehnilistes õppeasutistes omab kujutav geomeetria väärikat kohta põhiainete hulgas ruumiprobleemide lahendamise peavahendina. Ülikoolide matemaatika-osakondades, kus just tuleks kasvatada uusi jõude ka kujutava geomeetria edasiarendajateks, on see õppeaine seni jäänud oma programmiliselt ulatuselt lühikeseks, kõrvaliseks abiaineks. Tartu Riiklikus Ülikoolis, kus õpiku I osa ja pool II osast juba katavad kõik kujutava geomeetria programminõuded, tuleb soovitada ka kogu ülejäänud materjali läbitöötamist iseõppimise korras neile üliõpilastele, kes spetsialiseeruvad geomeetria alale.

Õpiku koostamisel on autorid arvestanud oma kogemusi selle aine õpetamisel ja kriitilisi märkusi, mis on kujutava geomeetria kui teadusliku distsipliini arendamise kohta avaldatud eriti viimastel aastatel. Seetõttu on õpik kujunenud märksa erinevaks senistest kujutava geomeetria õpikutest. Tähtsamaid uusi juhtmõtteid, mis on õpikus rakendamist leidnud, võib lühidalt sõnastada kolmeks nõudeks: 1) paralleelprojektsioon ühel tasapinnal enne normaalprojektsioone kahel tasapinnal; 2) vaba perspektiiv enne perspektiivi valmistamise tehnilisi võtteid; 3) aksonomeetriliste meetodite arendamine kõigis projektsiooniliikides. Esimene ja teine nõue tähendavad seda, et õppija tähelepanu ei või liiga vara koormata heade tehniliste võtete rohkusega ja nii sundida teda mõtlema peamiselt operatsioonidele joonisepinnal; õigem on suunata tema mõtlemist ruumilistele objektidele ja nende asetsemisele, kasutades selleks vähest joonestamist nõudvaid meetodeid. Meie arvates saab sel teel kõrvaldada formalismi ohtu, millesse just see õppeaine võib muidu väga kergesti sattuda. Kolmas nõue rõhutab vajadust kindlustada ja süvendada teadmisi kõigis projektsiooniliikides koordinaatide kasutamise erivõtete tsükli abil, ning seega juhtida mõtlemine uuesti ruumigeomeetria probleemistikku, kui see on sealt vahepeal taandunud kujutamisvõtete rakendamisel tekkiva rutiini mõjul.

Lõpuks mõni sõna õpiku võimalikult eduka kasutamise kohta. Õpiku esimene peatükk on määratud ainult lugemiseks, kuid korduvaks lugemiseks ja läbimõtlemiseks kuni täieliku selguse saamiseni ja ruumigeomeetria põhimaterjaliga kodunemiseni; lugeja võib kujutlemise hõlbustuseks koostada kõnesolevaid kujundeid lihtsaist esemeist (pliiats, joonestamiskolmnurk, papitükk) mudelite näol ja katsuda ka joonestada vabal viisil. Järgnevate peatükkide lugemisel on juba kõigi jooniste kaasajoonestamine tingimata vajalik, sest õpikus on ainult valmisjoonised, kuid nende valmimisprotsessi saab lugeja näha ja valmistamist põhjalikult õppida üksnes siis, kui ta teksti najal oma käega samad joonised algusest peale järk-järgult valmistab.

Iseseisvaks tööks määratud harjutusülesanded on õpikus jaotatud peatükkide sisu järgi ja paigutatud iga osa vastava peatüki lõppu.

Autorid.

I. Kujundid ja nende kujutamine.

§ 1. Kujutava geomeetria eesmärk.

Kujutav geomeetria õpetab ruumikujunditest valmistama jooniseid, ruumilisi esemeid kujutama tasapinnal. Ühtlasi õpetab ta, kuidas tasapinnaliste kujutiste abil uurida ruumikujundeid, saada neist õiget kujutelma, neid „vaadelda" ja mõõta. Arendades niisiis kujutamisvõtteid ja hoolitsedes ühtlasi kujundite mõõtmisvõimaluste eest jooniste najal, on kujutav geomeetria kujunenud ruumigeomeetriliste probleemide loomulikuks lahendamismeetodiks. Kujutava geomeetria abi kasutavad seepärast kõik niisugused tehnilised ja füüsikalised teadusharud, mille probleemid on kas otseselt ruumigeomeetrilist laadi või lubavad ennast ruumigeomeetrilisteks probleemideks muuta sellekohaste abimõistete (vektoriaalsete suuruste) kaudu.

Ruumikujundite tasapinnaline esitamine ja saadud kujutiste teadlik vaatlemine (jooniste „lugemine") eeldab ruumikujundite liikide ja üldomaduste tundmist, samuti ka tasapinnaliste kujunditega opereerimise oskust. Seepärast läheb kujutava geomeetria õppimisel vaja tüsedaid eelteadmisi kooligeomeetriast, planimeetria ja eriti stereomeetria alalt.

§ 2. Kujundid ja nende omadusi.

Kõik geomeetrilised objektid ehk esemed, niinimetatud kujundid, mis ruumis leiduvad või mida ruumis leiduvatena kujutletakse, on punktid, jooned, pinnad ja kehad või koosnevad eelmainitud osistest. Kujundite geomeetrilisteks tunnusteks („omadusteks") on asukoht, vastastikune asend, kuju ja suurus.

Punkt esindab ainult asukohta (ja sedagi vaid muude kujundite suhtes), ta on koha märgiks. Tal ei ole sihti, kuju ega suurust.

Jooni liigitatakse nende kuju järgi sirgjoonteks ja kõverjoonteks, pindu — tasapindadeks ja kõverpindadeks, kehi — vastavalt sellele, kas keha on piiratud ainult tasapindadest või on piiravate pindade hulgas kõverpindu, — tahukateks ja kõverpinnalisteks kehadeks. Kõverjoonte kuju iseloomustamisel võetakse ka arvesse, kas kõverjoon mahub üleni ühele tasapinnale või väändub ruumi; esimesel juhul nimetatakse teda tasapinnaliseks ehk tasakõveraks, teisel juhul ruumiliseks ehk ruumikõveraks.

Joonte, pindade ja kehade suurus leitakse mõõtmiste kaudu. Otsene ja lihtsaim mõõtmine on sirgjoone tüki, sirglõigu mõõtmine; mõõtmistulemuseks on lõigu pikkus, lõigu otsade vaheline kaugus. Kõverjoone pikkuse mõõtmine aga nõuaks joone sirgestamist või mõõdupuu (mõõdulindi) sellekohast kõverdamist, seepärast leitakse kõverjoone pikkus kaudselt: mitme sobiva mõõtmise ja vastavate arvutuste abil.

Joont nimetatakse ühemõõteliseks, pinda kahemõõteliseks ja keha kolmemõõteliseks kujundiks, tähendades seda, et joont mööda minnakse ainult pikuti, pinda mööda aga pikuti ja laiuti, kuna kehal on pikkus, laius ja kõrgus. Vastavalt sellele mõeldakse pinna suuruse all eeskätt tema pindala ja keha suuruse all tema ruumala. Niihästi pindala kui ka ruumala leitakse geomeetrias kaudselt — kohaste kaugusemõõtmiste ja arvutuste abil. Kõverpindade pindala ja kõverpinnaliste kehade ruumala leidmine ei kuulu elementaarsete matemaatiliste probleemide hulka; sellekohaseid arvutusmeetodeid annab kõrgem matemaatika.

Antud punkt võib asetseda mõnel joonel, pinnal, kehas või väljaspool neid kujundeid; seejuures saab küsida ainult, k u s punkt asetseb, mõttetu aga oleks küsida, k u i d a s ehk mis asendis ta seal on. Seevastu on muude kujundite puhul oluline ka asendit tähele panna.

§ 3. Sirgete ja tasapindade määramine ja vastastikune asend.

1. Sirgjoon ja kiir.

Sirgjoon on teatavasti määratud oma kahe punktiga. Sirgjoon esindab ruumis sihti; sel sihil saab liikuda kahes suunas. Üks sirgjoone punkt jaotab sirge kaheks poolsirgeks ehk kiireks; kiir esindabki suunda.

2. Tasapinna määramine.

Tasapind on niisugune pind, mille mistahes kaht punkti läbiv sirgjoon asetseb üleni pinnal enesel. Tasapind on määratud oma kolme punktiga, mis ei asetse ühel sirgel; samuti määravad tasapinna üks tema sirgjoon ja üks punkt väljaspool seda sirgjoont. Et tasapinna ühele sirgele saab tasapinna ühest punktist võtta määratu palju lõikuvaid sirgeid, aga üheainsa paralleeli, siis võib öelda ka, et tasapind on määratud oma kahe lõikuva või kahe paralleelse sirgega.

Ühe tasapinna sirgjooni, mis läbivad kõik üht ja sama punkti, nimetatakse sirgete kimbuks ja sirgjoonte ühist punkti — kimbu keskpunktiks. Tasapindu, mis läbivad kõik üht ja sama sirgjoont, nimetatakse tasapindade kimbuks ning mainitud sirgjoont — tasapindade kimbu teljeks.

Üks tasapinna sirge jaotab tasapinna kaheks pooltasapinnaks ehk leheks. Tasapind jaotab ruumi kaheks poolruumiks.

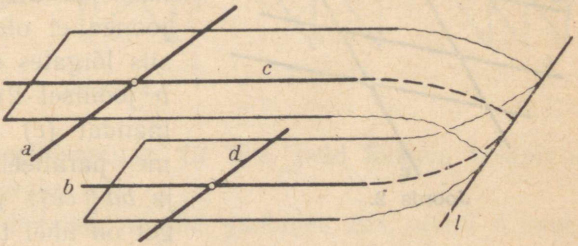
3. Kiivsirged.

Kui võetakse ruumis mingi sirgjoon ja üks punkt väljaspool seda sirgjoont, siis on seega teatavasti määratud üks tasapind; kui nüüd võetakse mingi teine punkt veel väljaspool seda tasapinda, siis need kaks punkti määravad niisuguse sirgjoone, mis ei saa eelmise sirgega lõikuda ega olla paralleelne, sest ta ei mahu sellega ühisele tasapinnale. Sirgeid, mis ei lõiku ega ole paralleelsed, nimetatakse vastastikku kiivselt asetsevateks sirgjoonteks ehk lühidalt — kiivsirgeteks.

4. Kahe tasapinna vastastikune asend.

Kaks tasapinda, milledel on ühiseid punkte, ilma et need tasapinnad lausa ühtiksid, lõikuvad mööda üht sirgjoont; sest kui väljaspool seda sirgjoont leiduks veel ainuski ühine punkt, määraks see üheskoos sirgega juba need tasapinnad ühtima.

Kaht tasapinda, milledel ei ole ühtki ühist punkti, nimetatakse vastastikku paralleelseteks tasapindadeks. Kaht kiivsirget (*a* ja *b* joonisel 1) näiteks saab mahutada kahele vastastikku paralleelsele tasapinnale; selleks tarvitseb ühel neist kiivsirgetest võtta mingi punkt ja asetada sealt paralleelsirge teise kiivsirge suhtes ($c \parallel b$), samuti teisel neist mingi punkt ja läbi selle paralleel esimese suhtes ($d \parallel a$) — üks lõikuvate sirgete paar määrab siis ühe tasapinna ja teine paar teise tasapinna. Saadud tasapinnad ei lõiku, sest vastasel korral annaks oletatav lõikejoon (l) vähemalt ühtedele paralleelsirgetele (b ja c) lõikepunkti. Selgunud asjaolu võib sõnastada ka järgmiselt:



Joonis 1.

kaks tasapinda on paralleelsed, kui ühe tasapinna kaks lõikuvat sirget on teise tasapinna kahe sirgega paralleelsed.

5. Paralleeltasapindade lõikamine tasapinnaga.

Kui kaht paralleeltasapinda lõigatakse mingi kolmanda tasapinnaga, siis lõikejoonteks tulevad paralleelsirged, sest nad on ühisel tasapinnal (nimelt sel kolmandal) ega saa lõikuda (vastasel juhul oleks paralleeltasapindadel ühine punkt).

Kaks tasapinda, milledest kumbki on paralleelne mingi kolmandaga, on teineteisega paralleelsed, sest nende lõikamisel mistahes tasapinnaga tulevad lõikejoonteks paralleelsirged.

6. Sirge ja tasapind.

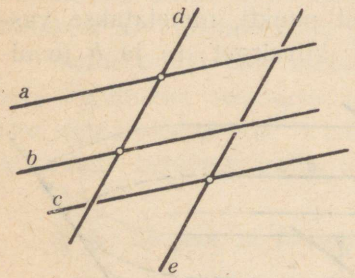
Sirget ja tasapinda nimetatakse lõikuvateks, kui neil on üksainus ühine punkt, ja paralleelseteks, kui neil pole sedagi.

Tasapinda lõikav sirge ei ole paralleelne selle tasapinna ühegi sirgega, sest muidu määraks ta koos viimasega sellesama tasapinna (miks?), niisiis asetseks sellel üleni.

Kui sirge ei asetse tasapinnal, aga on tasapinna sirgega paralleelne, siis ta on tasapinnaga paralleelne, mis eelnenust paratamatult järeldub.

7. Paralleelsirged.

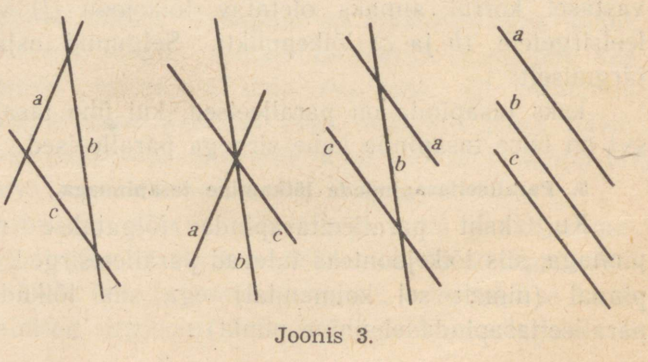
Kaks sirget, milledest kumbki on paralleelne mingi kolmandaga, on teineteisega paralleelsed. See asjaolu on ilma pikemata selge, kui kõik kolm sirget on ühel tasapinnal, sest esimese ja teise sirge lõikumisel väljuks nende lõikepunktist kolmanda sirgjoone kaks paralleeli, mis on võimatu. Kui sirgjooned ei ole kõik kolm ühel tasapinnal, siis lõigates esimest ja teist (sirgeid *a* ja *b* joonisel 2) mingi sirgega (*d*) ja kolmandat (*c*) paralleelsirgega ($e \parallel d$), saame paralleeltasapindade paarid ($ad \parallel ce$ ja $bd \parallel ce$); järelikult esimesed kaks sirget on ühel tasapinnal (tasapind *ad* ühtib tasapinnaga *bd*, sest muidu tuleks $ad \parallel bd$, mis on võimatu ühise sirge tõttu); seejuures *a* ja *b* ei saa lõikuda, mis nähtub sellest, et tasapindadel *ac* ja *bc* pole ühiseid punkte väljaspool sirget *c*.



Joonis 2.

8. Tasapinna kolm sirget.

Kolm sirget tasapinnal (joonis 3) kas 1) moodustavad kolmnurga (ühes laienditega), jaotades tasapinna 7 osaks, või 2) lõikuvad kõik ühes punktis (kuuluvad ühte kimpu), jaotades tasapinna 6 osaks, või

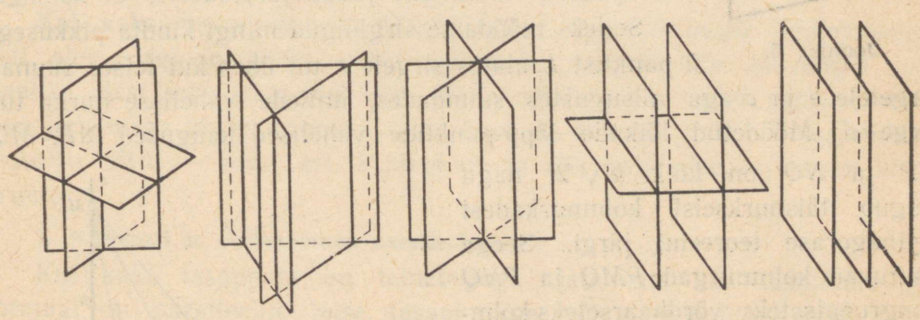


Joonis 3.

3) sisaldavad paari paralleelsirgeid ja ühe neid lõikava sirge, jaotades sel juhtumil tasapinna 6 osaks, või
4) esinevad paralleelsirgete kolmikuna, jaotades siis tasapinna 4 osaks.

9. Kolm tasapinda.

Kolm tasapinda ruumis (joonis 4) kas
1) moodustavad kolmetahulise ruumnurga (ühes täienditega), jaotades ruumi 8 osaks, või
2) lõikuvad paarikaupa mööda sirgeid, mis on üksteisega paralleelsed, ja jaotavad ruumi 7 osaks, või
3) lõikuvad kõik üht sirget mööda (kuuluvad ühte kimpu), jaotades ruumi 6 osaks, või



Joonis 4.

4) sisaldavad paari paralleeltasapindu ja ühe neid lõikava tasapinna, jaotades sel juhul ruumi 6 osaks, või
5) esinevad paralleeltasapindade kolmikuna, jaotades siis ruumi 4 osaks.

10. Kiivsirgete-vaheline nurk.

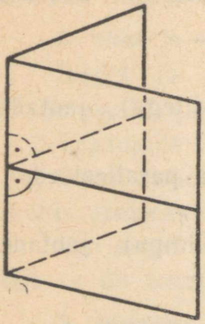
Kahe lõikuva sirge vastastikust asendit iseloomustab lähemalt nendevaheline nurk. Kahe kiivsirge vaheliseks nurgaks loetakse niisugust nurka, mille haarad on nende kiivsirgetega paralleelsed.

§ 4. Kahe tasapinna vaheline nurk; sirgjoone ja tasapinna vaheline nurk.

1. Kahetahuline nurk ja tasapindade ristseis.

Kahe lõikuva tasapinna vahelist nurka, niinimetatud kahetahulist nurka, mõõdetakse niisuguse nurga (joonnurga) abil, mille haaradeks on tasapindade lõikejoone (kahetahulise nurga serva) ristjooned kummalgi tasapinnal (joonis 5).

Kui see kahetahulise nurga suurust määrav joonnurk tuleb täisnurk, siis nimetatakse tasapindu vastastikku risti asetsevateks tasapindadeks ehk teineteise risttasapindadeks.



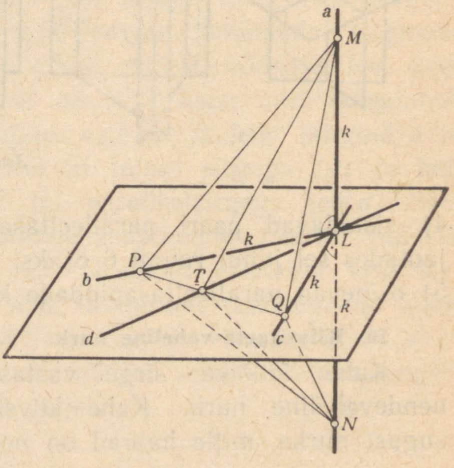
Joonis 5.

2. Tasapinna normaal.

Kui sirgjoon on risti tasapinna kahe lõikuva sirgega, siis ta on risti selle tasapinna iga sirgega.

Selle väite tõestamisel, arvestades kiivsirgete-vahelise nurga definitsiooni (§ 3, artikkel 10), võib piirduda juhtumiga, et kõik mainitud sirged läbivad üht punkti (punkti L, joonis 6). Eeldusest, et $a \perp b$ ja $a \perp c$ ning et sirgjoon d on mistahes muu sirge antud sirgete b ja c tasapinnal, tuleb siis jõuda järeldusele, et ka $a \perp d$.

Selleks mõõdame sirglõigud mingi kindla pikkusega k punktist L alates sirgele a nii ühes kui teises suunas, sirgetele b ja c aga niisugustes suundades, millede vahelisse nurka tuli sirge d. Mõõdetud lõikude lõpp-punktide vahelised kaugused MP, MQ, NP ja NQ on kõik $k\sqrt{2}$, nagu selgub täisnurkseist kolmnurkadest Pythagorase teoreemi järgi. Seega osutuvad kolmnurgad PMQ ja PNQ kongruentseteks võrdhaarseteks kolmnurkadeks; kui nad teineteisele asetada kattuvalt, siis kattuksid teineteisega ka lõigud TM ja TN.



Joonis 6.

Järelikult kolmnurk MTN on võrdhaarne, seega tema aluse poolitaja TL on alusega risti, $d \perp a$, nagu tõestada tuligi.

Sirget, mis on tasapinna iga sirgega risti, nimetatakse tasapinna ristjooneks ehk t a s a p i n n a n o r m a a l i k s.

Eelnenud teoreemi järgi näiteks osutub kahetahulise nurga serv selle nurga suurust määrava joonnurga tasapinna normaaliks.

3. Normaalide lõikumatus.

Üht punkti läbib üksainus antud tasapinna normaal. Sest kui üht punkti läbiks rohkem kui üks normaal, siis kaks niisugust määraksid tasapinna, mille lõikejoon antud tasapinnaga, olles kummagagi risti, moodustaks nendega täisnurki, mis poleks teineteisega võrdsed; järelikult tasapinna kahe normaali lõikumine on võimatu täisnurkade võrdumise pärast.

4. Normaalide paralleelsus.

Ühe tasapinna kõik normaalid on üksteisega paralleelsed. Sest kui tasapinna ühe normaali mingist punktist võtame teisele normaalile paralleeli, siis ka see on tasapinna kõigi sirgetega risti, järelikult ühtib esimese normaaliga.

5. Normaali läbiv tasapind.

Antud tasapind on risti iga tasapinnaga, mis läbib tema normaali. Sest see normaal jääb kahetahulise nurga suurust määrava joonnurga üheks haaraks ja teine haar on temaga risti tasapinna normaali definitsiooni järgi.

6. Tasapinna ja risttasapinna lõikejoone ristsirge.

Kui kaks tasapinda on teineteisega risti, siis nende lõikejoonega risti olev sirgjoon ühel neist tasapindadest osutub teise tasapinna normaaliks. Sest selle sirgjoone võib võtta kahetahulise nurga suurust määrava joonnurga üheks haaraks, teine haar on temaga risti — tasapindade ristseisu tõttu — ning art. 2 järgi on ta siis risti teise tasapinna kõigi sirgetega.

7. Normaali ja risttasapinna paralleelsus.

Kui kaks tasapinda on teineteisega risti, siis ühe tasapinna iga normaal on paralleelne teise tasapinnaga või asetseb üleni teisel tasapinnal. Sest kui normaalil on teise tasapinnaga ühine punkt, siis sel teisel tasapinnal üleni asetsev sirge, mis läbib mainitud punkti ja on tasapindade lõikejoonega risti, on eelmise artikli järgi esimese tasapinna üks normaal, aga art. 3 järgi ainus seda punkti läbiv normaal.

8. Sirgjoone risttasapind.

Sirgjoone ja tasapinna ristseis on vastastikune; kui sirgjoon on tasapinnale normaaliks, siis seda tasapinda nimetatakse *sirgjoone risttasapinnaks*.

Kõik sirged, mis läbivad üht punkti ja on risti ühe kindla sirgega, asetsevad selle sirge ühel risttasapinnal (art. 2). Antud sirgjoone risttasapinna iga sirge asetseb antud sirgega risti (§ 3, art. 10).

9. Sirgjoone risttasapindade paralleelsus.

Ühe sirgjoone kõik risttasapinnad on üksteisega paralleelsed. Sest kui neid lõigata abitasapinnaga, mis läbib seda sirget, siis lõikejooned tulevad üksteisega paralleelsed (kui antud sirgjoone ristsirged abitasapinnal); lõikamisel teise abitasapinnaga, mis ka läbib antud sirget, saadakse jällegi lõikejoonteks paralleelid, seega § 3 art. 4 järgi osutuvad need lõigatud tasapinnad ka ise paralleelseteks.

10. Kahe lõikuva tasapinna risttasapind.

Tasapind, mis on risti kahe lõikuva tasapinnaga, on risti nende lõikejoonega. Sest tema normaal, mis läbib kõigi kolme tasapinna ühist punkti, asetseb üleni tema mõlemal risttasapinnal (art. 7 järgi), järelikult ongi nende lõikejoon.

11. Sirgjoont läbiv ja tasapinnaga risti olev tasapind.

Sirgjoont, mis ei ole risti tasapinnaga, läbib selle tasapinna üksainus risttasapind. Sest sirgjoon ja üks teda lõikav tasapinna normaal määravadki ainsa niisuguse tasapinna: art. 5 põhjal on see nimelt risttasapind, art. 7 järgi aga osutub ta ainsaks, sest ta läbib kõiki normaale, mis antud sirget lõikavad.

12. Sirgjoone ja tasapinna vaheline nurk.

Sirgjoone ja tasapinna vaheliseks nurgaks loetakse niisugust nurka (joonnurka), mille üheks haaraks on sirgjoon ise ja teiseks haaraks on tasapinna lõikejoon oma risttasapinnaga, mis läbib seda sirgjoont. (Kui sirge on tasapinnaga paralleelne, siis mainitud nurka ei teki, sest „haaradeks" on paralleelid.)

Kui sirge ei ole tasapinnaga paralleelne ega risti, siis kasutatakse sirgjoone ja tasapinna vahelise nurgana teravnurka, mis on ülalantud viisil määratud (mitte aga tema nüri kõrvunurka). Teda nimetatakse ka sirgjoone k a l d e n u r g a k s tasapinna suhtes.

Sirgjoone kaldenurk tasapinna suhtes ning tasapinna normaali ja sama sirge vaheline teravnurk täiendavad teineteist täisnurgani.

13. Sirgjoone kaldenurga minimaalsus.

Sirgjoone kaldenurk tasapinna suhtes on vähim nurk, mida see sirge saab moodustada tasapinna sirgetega.

Joonis 7.

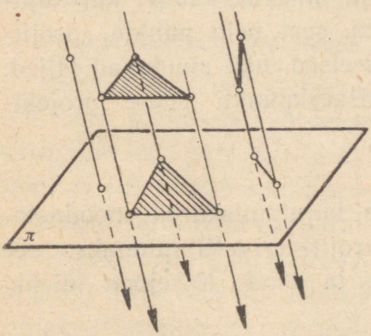
Väite tõestamiseks võtame sirgjoonel mingi punkti väljaspool tasapinda (punkt V joonisel 7) ja sealt normaali; sirge ise ja see normaal määravad tasapinna, millel asetseb kaldenurk VLN. Võrdluseks võtame esialgsel tasapinnal nüüd mingi muu sirge m läbi punkti L ja asetame punktist V tasapinnal mV ristjoone sirgele m. Tekkiv lõik VT on hüpotenuus kolmnurgas VTN, aga VN on kaatet; järelikult $VN < VT$.

Et $\sin VLN = \frac{VN}{VL}$ ja $\sin VLT = \frac{VT}{VL}$ ning seetõttu $\sin VLN < \sin VLT$ ja pealegi VLN on teravnurk, siis $VLN < VLT$, nagu väidetud oligi.

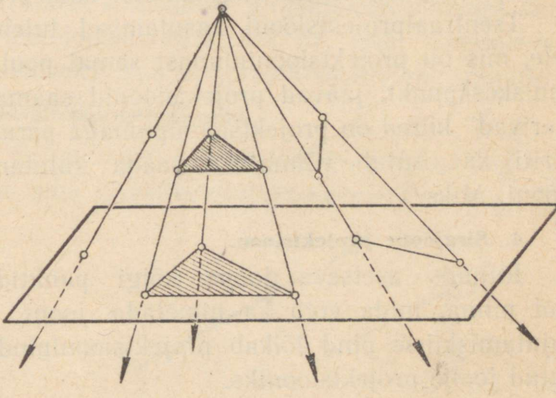
§ 5. Kujutamisviisid ja kujutiste üldomadused.

1. Paralleelprojektsioon ja tsentraalprojektsioon.

Et ruumikujundist valmistada joonist, kujutada ruumikujundit antud tasapinnal, selleks juhitakse kiired läbi ruumikujundi kõigi punktide ja lastakse need kiired lõigata joonisetasapinda; saadud lõikepunktide kogu ongi ruumikujundi joonis ehk kujutis ehk projektsioon. Neid kiiri nimetatakse siis kujutamiskiirteks ehk projitseerivaiks kiirteks ja joonisepinda — projektsioonipinnaks. Kiire ja projektsioonipinna lõikepunkti nimetatakse kiire jälgpunktiks ehk jäljeks. Kujutise saamise toimingut nimetatakse samuti kui toimingu tulemustki — projektsiooniks.



Joonis 8.



Joonis 9.

Kujutamiskiired võetakse kas kõik üksteisega paralleelsed (joonis 8) või lastakse väljuda ühest punktist (joonis 9). Paralleelsete kujutamiskiirtega tekkivat joonist nimetakse p a r a l l e e l p r o j e k t s i o o n i k s, ühest punktist väljuvate kiirtega valmistatud kujutist aga t s e n t r a a l p r o j e k t s i o o n i k s ehk perspektiiviks. Punkti, millest kujutamiskiired väljuvad, nimetakse siis kujutamiskeskpunktiks ehk perspektiivitsentriks.

Et väga kaugest punktist tulevaid kiiri saab pidada peaaegu paralleelseteks, siis võib paralleelprojektsiooni lugeda tsentraalprojektsiooni äärmiseks juhtumiks.

2. Ristprojektsioon ja kaldprojektsioon.

Paralleelprojektsioone liigitatakse selle järgi, kuidas kujutamiskiired asetsevad projektsioonipinna suhtes. Kui kujutamiskiired on projektsioonipinnaga risti (on projektsioonipinna normaalid), siis projektsioon kannab ristprojektsiooni ehk normaalprojektsiooni (ka ortogonaalprojektsiooni) nimetust; kõiki muid paralleelprojektsioone nimetatakse kaldprojektsioonideks.

Kaldprojektsiooni puhul moodustavad kujutamiskiired oma paralleelsuse tõttu võrdseid kaldenurki projektsioonipinna suhtes. (Projektsioonipinnaga paralleelsed sirged ei saa kujutamiskiirtena arvesse tulla. Miks?)

3. Punkti projektsioon.

Kõigi projektsiooniliikide kohta selgub, et punkti projektsiooniks saab tulla ainult punkt. Sest antud punkti läbiv kujutamiskiir saab lõigata projektsioonipinda ainult ühes punktis ja see, kujutamiskiire jälg, osutubki antud punkti projektsiooniks. Kui antud punkt asetseb projektsioonipinnal, siis ta ise ongi ühtlasi oma projektsioon.

Tsentraalprojektsiooni kasutamisel tuleb leppida sellega, et punktidele, mis on projektsioonipinnast samal pool ja niisama kaugel kui kujutamiskeskpunkt, jäävad projektsioonid saamata, sest neid punkte „projitseerivad" kiired on projektsioonipinnaga paralleelsed, neil puuduvad jäljed. (Eriti ka osutub võimatuks saada kujutamiskeskpunkti enese projektsiooni. Miks?)

4. Sirgjoone projektsioon.

Ruumis asetseva joone kõigi punktide kujutamiskiired moodustavad pinna, mida võib ka nimetada joont projitseerivaks pinnaks; see kujutamiskiirte pind lõikab projektsioonipinda ja nende lõikejoon tulebki antud joone projektsiooniks.

Kõverjoone kujutamiskiirte pind tsentraalprojektsiooni juhtumil on üldiselt mingi kooniline pind ja perspektiivitsenter jääb selle koonilise pinna tipuks. Paralleelprojektsiooni juhtumil aga tuleb kõverjoone kujutamiskiirte pind üldiselt silindriline.

Sirgjoone kujutamiskiirte pind on alati tasapind; selle tasapinna määramiseks on tarvilik peale sirgjoone enese ainult üks seda sirgjoont lõikav kujutamiskiir. Sirgjoone kujutamiskiirte tasapind saab lõigata projektsioonipinda ainult mööda üht sirgjoont, järelikult sirgjoone projektsioon on sirge. Erandiks jääb aga niisugune sirgjoon, mis kuulub ise kujutamiskiirte hulka — ta ise on kõigi oma punktide kujutamiskiireks; seesuguse sirge projektsiooniks on üksainus punkt, tema jälgpunkt. Lühidalt: kujutamiskiire projektsioon on punkt.

5. Projektsioonipinnaga paralleelse tasapinna kujundite projektsioonid.

Teatavasti iga koonilise pinna lõikamisel kahe paralleeltasapinnaga saadakse teineteisega sarnased lõikejooned. Kui valmistatakse tsentraalprojektsioon tasapinnalisest kõverjoonest, mille tasapind on paralleelne projektsioonipinnaga, siis tuleb projektsioon joone enesega sarnane; sest siis kujund ja tema kujutis on koonilise pinna lõikejooned kahel paralleeltasapinnal. (Öeldu on õige igakujulise tasase kõverjoone, näiteks ka kinnise või lahtise murdjoone kohta.)

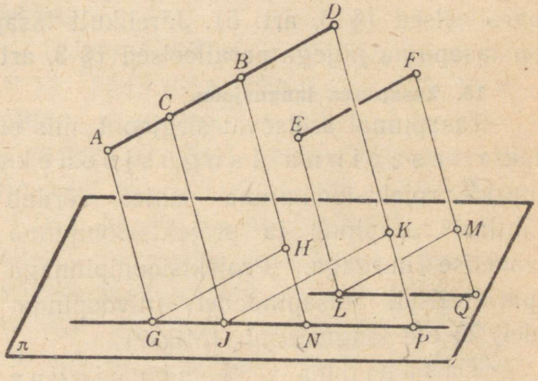
Silindrilise pinna lõikamisel kahe paralleelse tasapinnaga saadakse teatavasti kongruentsed lõikejooned. Järelikult tasapinnaline kujund, mille tasapind on projektsioonipinnaga paralleelne, ja selle kujundi paralleelprojektsioon on teineteisega ühtivad.

6. Paralleelide paralleelprojektsioonid.

Paralleelide paralleelprojektsioonid on paralleelsed, sest paralleelide kujutamiskiirte tasapinnad on üksteisega paralleelsed (§ 3, art. 4), järelikult nende lõikamisel projektsioonipinnaga saadakse üksteisega paralleelsed lõikejooned (§ 3, art. 5). (Kui kõnesolevad paralleelid osutuvad kujutamiskiirteks, siis on projektsioonideks punktid.)

7. Paralleelsete sirglõikude paralleelprojektsioonid.

Sirglõigud, mis asetsevad ühisel sirgel või üksteisega paralleelseil sirgeil, on pikkuselt võrdelised oma paralleelprojektsioonidega. Sest iga niisugune lõik (*AB*, *CD* ja *EF* joonisel 10) annab sama projektsiooni, mis temaga paralleelne ja võrdne lõik (*GH*, *JK* ja *LM*), mille üks ots asetseb projektsioonipinnal; lõikude projektsioonide (*GN*, *JP* ja *LQ*) ja lõikude eneste pikkused aga osutuvad siis vastavalt võrdelisteks tekkinud kolmnurkade (*HGN*, *KJP* ja *MLQ*) sarnasuse tõttu.

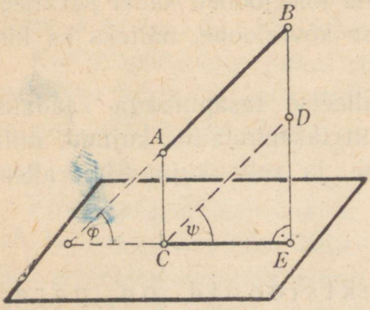


Joonis 10.

Ülalselgitatud asjaolu on õige muidugi ka lõigu ja tema osa kohta ($AB : AC = GN : GJ$); seda võib ka lühidalt öelda nõnda: paralleelprojektsioonis jääb lõigu jaotussuhe muutumatuks, ehk: paralleelprojektsioonis on lõigu jaotussuhe invariantne (muutumatu).

8. Sirglõigu normaalprojektsiooni pikkus.

Sirglõigu normaalprojektsiooni pikkuseks osutub sirglõigu enda pikkuse ja lõigu kaldenurga koosinuse korrutis. Nimelt nähtub jooniselt 11, et $CE = CD \cdot \cos \psi$, millest võrduste $CD = AB$ ja $\varphi = \psi$ tõttu järeldub, et $CE = AB \cdot \cos \varphi$.



Joonis 11.

9. Tasapinna jälgjoon ja nivoojooned.

Tasapinna ja projektsioonipinna lõikejoont nimetatakse t a s a p i n n a j ä l g j o o n e k s ehk jäljeks.

Kõik ruumi punktid, mis on projektsioonipinnast ühel pool ja ühekaugusel, moodustavad tasapinna, mida nimetatakse n i v o o p i n n a k s; niisiis projektsioonipinnaga paralleelsed tasapinnad on nivoopinnad. Kõik mingi pinna punktid, mis on projektsioonipinnast ühel pool ja ühekaugusel (järelikult ühisel nivoopinnal), moodustavad joone, mida nimetatakse selle p i n n a n i v o o j o o n e k s.

Tasapinna kõik nivoojooned on jäljega paralleelsed (§ 3, art. 5). Tasapinna iga nivoojoon on ühtlasi paralleelne nii oma paralleelprojektsiooniga kui ka tsentraalprojektsiooniga, sest tema kujutamiskiirte tasapinna lõikamisel vastava nivoopinnaga ja projektsioonipinnaga tulevad lõikesirged paralleelsed (§ 3, art. 5). Järelikult tasapinna nivoojoonte projektsioonid on tasapinna jäljega paralleelsed (§ 3, art. 7).

10. Tasapinna langusjoon.

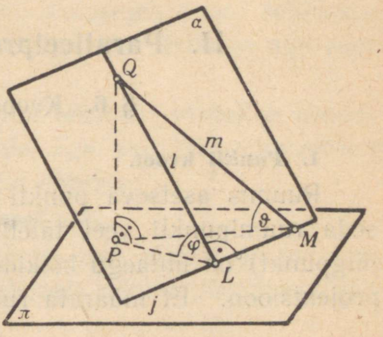
Tasapinnal asetsevat sirgjoont, mis on risti tasapinna jäljega, nimetatakse t a s a p i n n a l a n g u s j o o n e k s. Tasapinna langusjoone kaldenurk projektsioonipinna suhtes võrdub ühtlasi tasapinna ja projektsioonipinna vahelise nurgaga. Projektsioonipinnaga paralleelseil tasapindadel (nivoopindadel) ei ole langusjooni. (Miks?)

T a s a p i n n a l a n g u s j o o n e r i s t p r o j e k t s i o o n o n t a s a p i n n a j ä l j e g a r i s t i. Sest antud tasapinna langusjoone kujutamiskiirte tasapind (β joonisel 12), olles määratud langusjoonega ja projektsioonipinna normaaliga (l ja n), on risti tasapinna jälgjoonega ($\beta \perp j$; § 4, art. 2 ja 8); sama jälgjoonega on risti seepärast kujutamiskiirte tasapinna iga sirge, muude hulgas ka tema jälg (see jälg p aga ongi langusjoone l normaalprojektsioon).

Joonis 12.

11. Langusjoone kaldenurga maksimaalsus.

Tasapinna langusjoone kaldenurk on suurem kui tasapinna muude sirgete kaldenurgad. Sest iga muu sirge antud tasapinnal lõikab langusjoont (joonisel 13: sirge m lõikab langusjoont l punktis Q) ning siis need sirged ühes oma normaalprojektsioonidega, antud tasapinna jäljega ja lõikepunkti kujutamiskiirega moodustavad kolm täisnurkset kolmnurka (sirged l ja m ning tasapinna α jälg j moodustavad täisnurkse kolmnurga QML, samuti on QLP ja QMP täisnurksed kolmnurgad); esimesest kolmnurgast võtame arvesse, et kaatet on hüpotenuusist lühem ($QL < QM$), ja ülejäänud kolmnurkades võrdleme kaldenurkade siinuseid

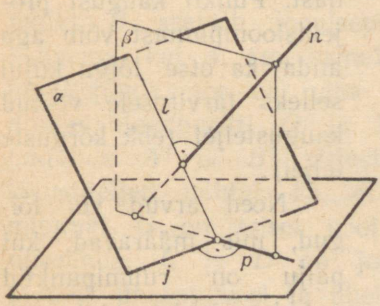


Joonis 13.

$\frac{QP}{QL} > \frac{QP}{QM}$ ehk $\sin\varphi > \sin\vartheta$): kahest teravnurgast on suurem see, kumma siinus on suurem (järelikult $\varphi > \vartheta$).

12. Tasapinna normaali ristprojektsioon.

T a s a p i n n a n o r m a a l i r i s t p r o j e k t s i o o n o n t a s a p i n n a j ä l j e g a r i s t i. (Joonisel 14: tasapinna α normaali n projektsioon p on risti jäljega j). Sest normaali kujutamiskiirte pind on risti nii tasapinna enesega (§ 4, art. 5) kui ka projektsioonipinnaga; järelikult see kujutamiskiirte pind on risti tasapinna jäljega (§ 4, art. 10), mistõttu tema iga sirge on sama jäljega risti (§ 4, art. 8). (Joonisel: et $\beta \perp j$, siis ka $p \perp j$, nagu väidetud oligi.)



Joonis 14.

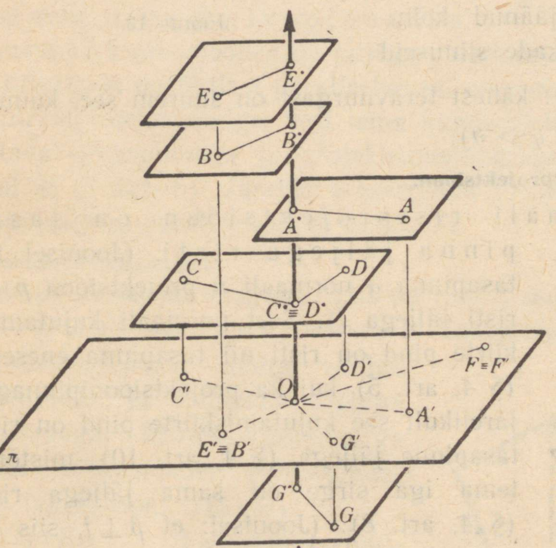
Tasapinna normaalil ja teda lõikaval langusjoonel on ühine normaalprojektsioon (p joonisel 14), sest nende kujutamiskiired moodustavad ühise tasapinna (et α langusjoon $l \perp j$, siis asetseb l tasapinnal β).

II. Paralleelprojektsioon ühele tasapinnale.

§ 6. Kvooditud normaalprojektsioon.

1. Punkti kvoot.

Ruumis asetseva punkti normaalprojektsioon joonisepinnal ei määra seda ruumipunkti veel täielikult, sest tema projektsioon (kujutamiskiire jälgpunkt) on ühtaegu kõikide tema kujutamiskiirel olevate ruumipunktide projektsioon. Et määrata ruumipunkti üheselt, tuleb anda kujutamiskiire jäljele lisaks veel kujutamiskiire lõik projektsioonipinnast kuni ruumipunktini. Selle lõigu pikkust võib anda numbriliselt; nii kirjutatakse maakaardile ja plaanile tähtsamate kohtade kõrgused merepinnast. Punkti kaugust projektsioonipinnast võib aga anda ka otse lõigu kujul selleks tarvitusele võetud kaugusteljel (ehk kõrguste teljel).



Joonis 15.

Need arvud või lõigud, mis määravad, kui palju on ruumipunktid eemal projektsioonipinnast, on saanud k v o o t i d e nimetuse (ladina sõnast *quot* — kui palju). Ühtlasi nimetatakse seda kujutamisviisi, milles punktide normaalprojektsioonide juurde kuuluvalt antakse ka punktide kaugused projektsioonipinnast, k v o o d i t u d projektsiooniks.

2. Kvooditelg ja kvootpunktid.

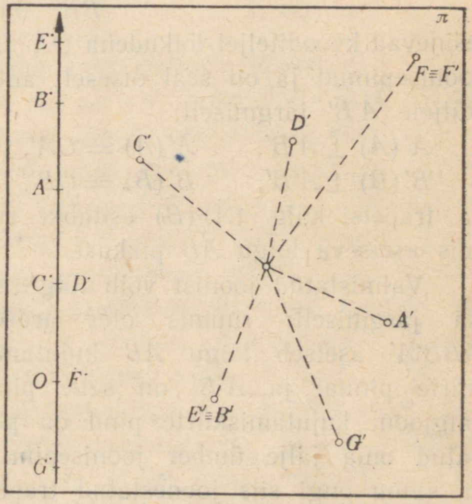
Punktide normaalprojektsioonide ja kvootide saamist võib seletada järgmiselt (joonis 15): kujutamisele tulevate punktide (*A*, *B*, *C*, *D*, *E*,

F, G) kujutamiskiired lõikavad projektsioonipinda ja annavad punktide normaalprojektsioonid (A', B', C', D', E', F', G'); samu ruumipunkte läbivate nivoopindade lõikamisel kvooditeljega saadakse teljel kvootpunktid ($A^{\cdot}$, $B^{\cdot}$, $C^{\cdot}$, $D^{\cdot}$, $E^{\cdot}$, $F^{\cdot}$, $G^{\cdot}$); viimaseid võib nimetada ruumipunktide ristprojektsioonideks kvooditeljel, sest ruumipunkti ristprojektsiooni sellekohasel sirgjoonel ehk teljel annab punkti läbiv ristsirge; see ristsirge aga asetsebki ruumipunkti läbival telje risttasapinnal.

Ei ole tähtis, missugune projektsioonipinna normaal võetakse kvooditeljeks kvootpunktide saamisel, joonisepinnale aga esitatakse kvooditelg ikka eraldi kõrvaljoonisena (enamasti vasakule äärele).

3. Punkti määramine ristprojektsiooni ja kvoodi abil.

Punkti normaalprojektsiooni ja kvoodi järgi saab punkti ennast ruumis kätte leida (ruumis „näha") eelnenud seletuste põhjal järgmiselt: läbi punkti normaalprojektsiooni tuleb asetada joonisepinna normaal ja sellele kanda, joonisepinnalt alates, kvooditeljel leiduv lõik, mis esitab punkti kvooti.



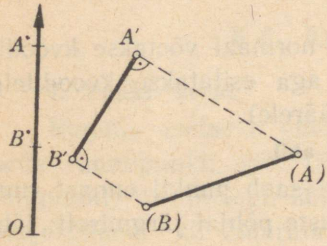
Joonis 16.

Joonis 16 annab seitsme punkti normaalprojektsioonid ja kvoodid, millede saamist selgitas eelmine artikkel. Et ruumipunkt B asetseb joonisepinnast kaugemal kui A, aga samal pool joonisepinda, see on näha kvooditelje alguspunkti O ja kvootpunktide $A^{\cdot}$ ja $B^{\cdot}$ järjestusest; kvooditeljelt nähtub ka, et ruumipunkt G on teisel pool joonisepinda, C ja D on joonisepinnast ühekaugusel ja ühel pool ning F on joonisepinnal. Punktide normaalprojektsioonide asetusest selgub aga, et ruumipunkt E asetseb punktiga B ühisel kujutamiskiirel, lõik BE on projektsioonipinnaga risti.

On kombeks võetud ühel pool joonisepinda olevatel punktidel lugeda kvoote positiivseiks ja teisel pool olevatel punktidel negatiivseiks; määravaks peetakse seda, kas vastav kvootpunkt on abijoonisel kvooditelje alguspunktist O ülalpool või allpool. Vaatleja asukohaks mõeldakse seda poolruumi, kus on positiivsete kvootidega punktid, ning vaatesuunaks võetakse kujutamiskiirte suund sellest poolruumist joonisepinna poole. Niisuguse kokkuleppe järgi tuleb öelda, et joonise 16 andmeil ruumipunkt E varjab punkti B.

4. Sirglõigu pikkuse leidmine.

Olgu antud kaks ruumipunkti oma normaalprojektsioonide ja kvootide kaudu (joonis 17); nõutakse leida nende punktide vahelise lõigu pikkus.



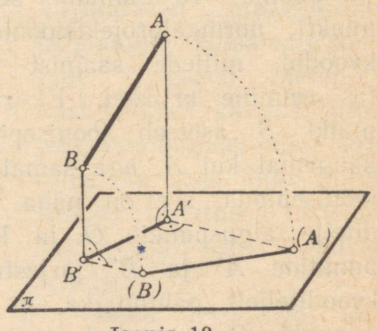
Joonis 17.

Punktide A ja B kujutamiskiired AA' ja BB' ühes lõiguga AB ja tema normaalprojektsiooniga $A'B'$ moodustavad ruumis trapetsi $ABB'A'$ (selgitav lisajoonis 18). Et kujutamiskiirteks on projektsioonipinna normaalid, siis sel trapetsil on alused ühe küljega risti, nimelt $AA' \perp A'B'$ ja $BB' \perp A'B'$.

Joonise 17 andmete hulgas leidub kõik vajalik selle trapetsi ehitamiseks: AA' ja BB' on punktide A ja B kvoodid ning esinevad kvooditeljel lõikudena $OA^{\cdot}$ ja $OB^{\cdot}$, trapetsi külg $A'B'$ asetseb aga joonisepinnal ja on seal otseselt antud. Trapets ehitataksegi joonisel 17 küljele $A'B'$ järgmiselt:

$$A'(A) \perp A'B', \qquad A'(A) = OA^{\cdot},$$
$$B'(B) \perp A'B', \qquad B'(B) = OB^{\cdot},$$

ja trapetsi külg $(A)(B)$ esitabki ruumis asetseva lõigu AB pikkust.



Joonis 18.

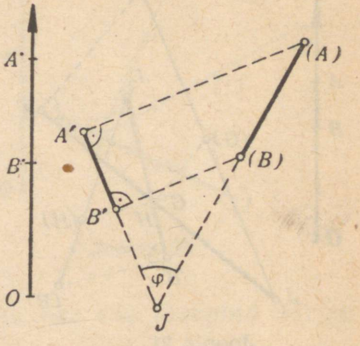
Valmistatud joonist võib tõlgitseda ka järgmiselt: ruumis olev trapets $ABB'A'$ asetseb lõigu AB kujutamiskiirte pinnal ja $A'B'$ on selle pinna jälgjoon; kujutamiskiirte pind on pööratud oma jälje ümber joonisepinnale ja sinna ongi siis joonestatud trapets, nagu ta mahapööramisel tuli — nii on otsitav lõik tulnud joonisele ja teda saab seal mõõta. Seepärast lõiku $(A)(B)$ nimetataksegi lõigu AB m a h a p ö ö r d e k s joonisepinnal.

5. Sirgjoone jälgpunkt ja kaldenurk.

Olgu antud kahe punkti normaalprojektsioonid ja kvoodid; kuidas leida neid punkte läbiva sirgjoone jälgpunkt ja kaldenurk?

Teatavasti ruumis oleva sirgjoone projektsioon on sirge, mis tekib selle sirgjoone kõigi punktide projektsioonidest, järelikult sirgjoone AB normaalprojektsioon on $A'B'$. Sirgjoone kaldenurk on sirgjoone ja tema normaalprojektsiooni vaheline nurk ning seepärast ta asetseb sirgjoone kujutamiskiirte tasapinnal. Järelikult ta tuleb joonisepinnale kujutamiskiirte tasapinna mahapööramisel.

Joonisel 19 korratakse lihtsalt sama toimingut, millega joonisel 17 saadi lõigu AB pikkus; trapetsi $(B)(A)A'B'$ külgede pikendamisel tekkiv nurk φ ongi küsitud kaldenurk ja tema tipp on sirgjoone AB jälgpunkt J. (Sirgjoone jälg on projektsioonipinnal, järelikult ta ise on oma projektsiooniks ning jääb kohale ka mahapööramisel.)



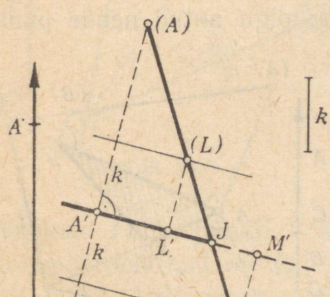
Joonis 19.

6. Antud kvoodiga punkti leidmine sirgelt.

Sirgjoonest olgu antud jälgpunkt ja veel ühe punkti normaalprojektsioon ja kvoot; kuidas leida sirgjoone need punktid, mis on joonisepinnast kaugusel k?

Teatavasti tuleb niisuguseid punkte kaks, üks ühel ja teine teisel pool joonisepinda, ning kumbki asetseb vastaval kvoodiga k määratud nivoopinnal.

Kui joonisel 20 on andmeist J, A' ja $OA^{\cdot}$ tuletatud tuttaval viisil sirgjoone mahapööre $J(A)$, siis on seega joonisepinnale pööratud ka sirgjoone kujutamiskiirte tasapind; need kujutamiskiirte tasapinna nivoojooned, mis asetsesid joonisepinnast kaugusel k, saab ka mahapöördes esitada: nende kaugus tasapinna jäljest JA' ongi k, sest kaugusi joonisepinnast mõõdetakse mööda joonisepinna normaale. Sirgjoone JA need punktid, mis asetsesid vastavatel nivoojoontel, tulevad nüüd mahapöördes esile — nad on (L) ja (M); kujutamiskiirte abil on määratud nende normaalprojektsioonid L' ja M'. Küsitud punktid L ja M on seega leitudki, sest iga punkt on üheselt määratud oma normaalprojektsiooniga ja kvoodiga (ning punktide L ja M kvoodid määras juba antud kaugus k).



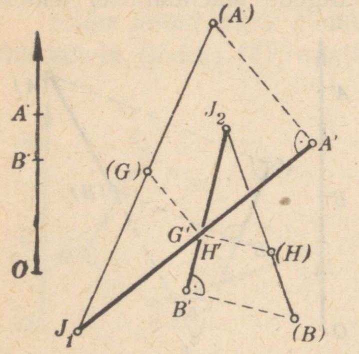
Joonis 20.

7. Sirgete lõikumine ja kiivsus.

Kaks sirgjoont on antud kumbki oma jäljega ja veel ühe punktiga (normaalprojektsiooniga ja kvoodiga); nõutakse otsustada, kas sirged lõikuvad või kumb läheb teisest üle.

Andmete J_1, A' ja $OA^{\cdot}$ abil saadakse tuntud viisil esimese sirgjoone normaalprojektsioon ja mahapööre; samuti saadakse andmete J_2, B' ja

OB' abil teise sirge normaalprojektsioon ja mahapööre (joonis 21). Nüüd tuleb tähelepanu koondada sirgjoonte projektsioonide J_1A' ja J_2B' lõikepunktile; seda punkti läbiv joonisepinna normaal lõikab kumbagi antud sirget, sest ta on kummalegi sirgele ühe punkti kujutamiskiireks — esimesele punkti G ja teisele punkti H kujutamiskiireks. Mahapöördeil on näha punktide G ja H kvoodid, nimelt $G'(G)$ ja $H'(H)$; nende võrdlemisel selgub, kas punktid G ja H on ruumis ühel ja samal kohal (siis kvoodid on võrdsed) või kumb on vaatlejale lähemal (kumma kvoot on suurem). Kvootide võrdumisel sirged lõikuksid; joonisel 21 osutub aga punkti G kvoot suuremaks kui punkti H kvoot, järelikult sirgjoon J_1A läheb üle sirgjoone J_2B ja varjab teda üleminekukohal. Joonisel on seepärast nende joonte projektsioonide lõikumiskohal tagumise joone projektsioon katkestatud.

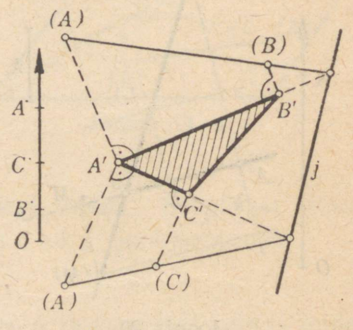


Joonis 21.

§ 7. Tasapinna jälje, kaldenurga ja normaali leidmine kvooditud projektsiooni võtteil.

1. Kolme punktiga määratud tasapinna jälgjoone leidmine.

Tasapind on määratud oma kolme punktiga; olgu antud nende punktide A, B, C normaalprojektsioonid ja kvoodid. Tasapinna ABC jälgjoone saamiseks tarvitseb ainult leida (§ 6 art. 5 võtteil) sirgjoone AB jälg ja sirgjoone AC jälg (joonis 22); neid läbiv sirgjoon ongi tasapinna ABC jälgjoon j.



Joonis 22.

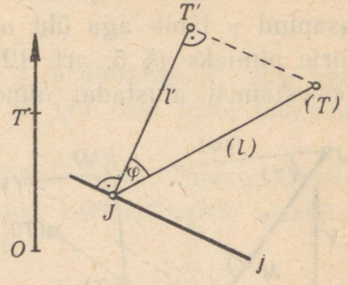
Et tasapinna kõigi sirgete jälgpunktid asetsevad tasapinna jälgjoonel, siis peab ka sirgjoone BC jälgpunkt tulema jäljele j; see asjaolu võimaldab joonise täpsuse kontrollimist.

2. Jäljega ja punktiga määratud tasapinna kaldenurga leidmine.

Olgu tasapind antud oma jäljega j ja punktiga T (selle normaalprojektsiooniga ja kvoodiga); kuidas leida tasapinna kaldenurka?

Teatavasti tasapinna kaldenurk on ühtlasi tasapinna langusjoone kaldenurk. Langusjoone kohta on aga teada, et tema normaalprojektsioon on tasapinna jäljega risti (§ 5, art. 10).

Joonisel 23 on seepärast joonestatudki punkti T läbiva langusjoone l normaalprojektsioon l' risti jäljega j ning siis leitud — § 6 art. 5 võtteil — sirgjoone l kaldenurk φ.

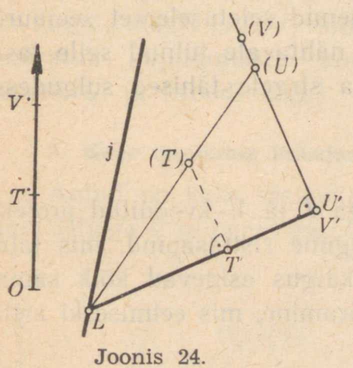


Joonis 23.

3. Punkti asetsemine tasapinnal või temast ühel või teisel pool.

Tasapind α olgu antud oma jäljega j ja punktiga T; ruumis olgu antud veel punkt V. Nõutakse otsustada, kas punkt V on tasapinnal α, ja kui ta ei ole sel tasapinnal, kas siis tasapind varjab teda või ei.

Küsimuse otsustamiseks on nähtavasti vaja uurida, kus punkti V kujutamiskiir lõikab tasapinda α. Uurimist saab teostada niisuguse tasapinna β abil, millel asetsevad punktid T ja V ühes oma kujutamiskiirtega. Et see tasapind on joonisepinnaga risti, siis ta projektsiooniks on tema jälgjoon $T'V'$. Tasapindade α ja β lõikejoone määramiseks on olemas kaks punkti: punkt T ja tasapindade jälgjoonte lõikepunkt L, mis osutub tasapindade lõikejoone jäljeks. Saadud lõikejoone TL ja kujutamiskiire VV' lõikepunkt U ongi see punkt, kus kujutamiskiir VV' lõikab tasapinda α.



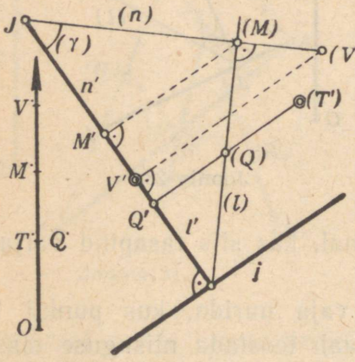
Joonis 24.

Joonisel 24 on tasapindade α ja β lõikejoon TL ja punkti V kujutamiskiir VV' nähtavale toodud tasapinna β mahapöördel; nad on $(T)L$ ja $(V)V'$. Nende lõikepunkti (U) ja punktide (V) ja V' järjekorrast selgub, et siinseil andmeil on ruumipunkt V väljaspool tasapinda α ja jääb temast varjamata.

4. Tasapinna normaal.

Tasapind α on antud oma jäljega j ja punktiga T; veel on antud ruumipunkt V. Kuidas leida punkti V läbiv tasapinna α normaal — selle jälgpunkt ja eriti ka see punkt, kus ta lõikab tasapinda α?

Teatavasti on tasapinna normaali ristprojektsioon tasapinna jäljega risti (§ 5, art. 12); selle põhjal on võimalik küsitud normaali n projektsiooni kohe joonestada: see on sirgjoon n', mis läbib punkti V' ja on risti tasapinna jäljega j (joonis 25). Et saada normaali jälgpunkti, tuleks normaali kujutamiskiirte tasapind pöörata joonisepinnale. See tasapind γ läbib aga üht α langusjoont ja on sellele ühtlasi kujutamiskiirte pinnaks (§ 5, art. 12); mainitud asjaolu võimaldabki mahapöörde joonestamist alustada: nimetatud langusjoone l jälgpunkt on tasapinna jälgjoonel, ka on veel määratud see tema punkt Q, mis asetseb punktiga T ühisel nivoojoonel.



Joonis 25.

Ülesande lahendamise lõpposa teostub tasapinnal γ juba hõlpsasti — küsitud normaal n lähtub punktist V, on risti sirgega l ja lõikab teda punktis M, mis ongi normaali n ja tasapinna α lõikepunkt; normaali jälgpunktiks osutub aga normaali ja tema projektsiooni lõikepunkt J.

Joonisel 25 on ülesanne lahendatud vastavalt eelnenud seletusele; et seejuures on tasapinnal γ asetsevad punktid ja sirged nähtavale tulnud selle tasapinna mahapööramisel, on nende punktide ja sirgete tähised sulgudesse võetud.

5. Sirgjoone risttasapind.

Kui sirgjoon n on antud oma punktidega J ja V kvooditud projektsioonis ja on vaja leida sellele sirgele niisugune risttasapind, mis läbib antud punkti T, siis ülesande lahendamise käigus esinevad kõik samad abisirged, sama abitasapind ja sama mahapööramine, mis eelmiseski artiklis, ainult uues järjekorras.

Andmeteks on nüüd J, V', $OV^{\cdot}$, T' ja $OT^{\cdot}$, otsitavateks j, M' ja $OM^{\cdot}$ (joonis 25). On teada, et sirgjoone n risttasapinna jälgjoon on risti sirgjoone normaalprojektsiooniga JV'; sama projektsiooniga on risti järelikult ka selle tasapinna iga nivoojoon ja iga nivoojoone projektsioon, muude hulgas ka $T'Q'$. Selle põhjal leitud punkt Q, mis on ühtlasi sirgjoone n kujutamiskiirte tasapinnal γ, võimaldabki sellesama tasapinna mahapöördel esitada tasapinna α langusjoont l ja seejärel leida punkti M ja jälgjoont j. Viimane läbib sirgjoone l jälgpunkti ja on risti sirgega JV'.

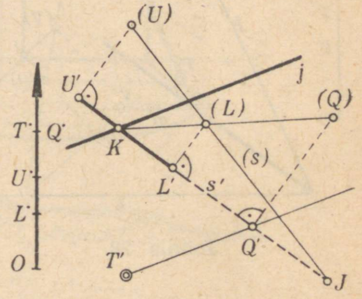
§ 8. Tasapinna ja sirgjoone lõikumise ning kahe tasapinna lõikumise käsitlemine kvooditud projektsioonis.

1. Tasapinna ja sirgjoone lõikepunkt.

Tasapind α olgu antud oma jälgjoonega j ja punktiga T, sirgjoon s olgu antud oma jälgpunktiga J ja punktiga U. On vaja leida tasapinna ja sirgjoone lõikepunkt L.

Ülesande lahendamine toetub samale asjaolule nagu eelmisteski artiklites, nimelt: tasapinna ja sirgjoone lõikepunkt asetseb sama tasapinna ja seda sirget läbiva abitasapinna lõikejoonel.

Abitasapinnaks sobib võtta sirgjoone kujutamiskiirte tasapind JUU' (joonis 26). Abitasapinna ja antud tasapinna α lõikejoone määramiseks saab hõlpsasti leida kaks punkti: jälgjoonte lõikepunkt K ja tasapinna α punkti T läbiva nivoojoone punkt Q. Abitasapinna mahapöördel tuleb otsitav lõikepunkt L seejärel kohe esile: (L) on sirgete $K(Q)$ ja $J(U)$ lõikepunkt; mahapööratud kujutamiskiir annabki projektsiooni L' ja kvoodi $L'(L)$.

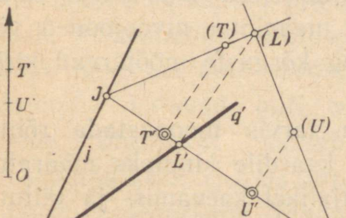


Joonis 26.

2. Kahe tasapinna lõikejoon.

Antud on kaks tasapinda: α oma jäljega j ja punktiga T, samuti β oma jäljega k ja punktiga U; kuidas leitakse tasapindade α ja β lõikejoon q?

Tasapindade lõikejoone jälgpunktiks on tasapindade jälgjoonte lõikepunkt, sest see asetseb mõlemal tasapinnal ja ka joonisepinnal. Lõikejoone teise punkti võib saada mingi niisuguse abitasapinna kaudu, mille lõikejooni kummagi antud tasapinnaga saab leida eelmistes artiklites selgitatud võtteil.



Joonis 27.

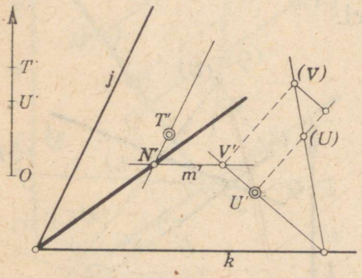
Üheks niisuguseks abitasapinnaks osutub punktide T ja U kujutamiskiiri läbiv tasapind $T'TUU'$. Selle tasapinna mahapöördel (joonis 27) esinev sirge $J(T)$ on asetsenud ilmsesti tasapinnal α ja sirge $K(U)$ on asetsenud tasapinnal β, järelikult nende sirgjoonte lõikepunkt (L) on kuulunud tasapindade lõikejoonele.

Punkti L projektsioon L' ja kvoot $L'(L)$ saadakse nüüd samalt mahapöördelt tavalisel viisil.

3. Nivoojoonte kasutamine tasapindade lõikejoone leidmisel.

Eelmises artiklis seatud ülesande lahendamisel võib abitasapinnaks kasutada ka nivoopinda.

Kui võetakse abitasapinnaks näiteks punkti T läbiv nivoopind, siis sellel asetsev tasapinna α nivoojoon on normaalprojektsioonis kohe joonestatav: see on jälgjoonega paralleelne sirge läbi T' (joonis 28).



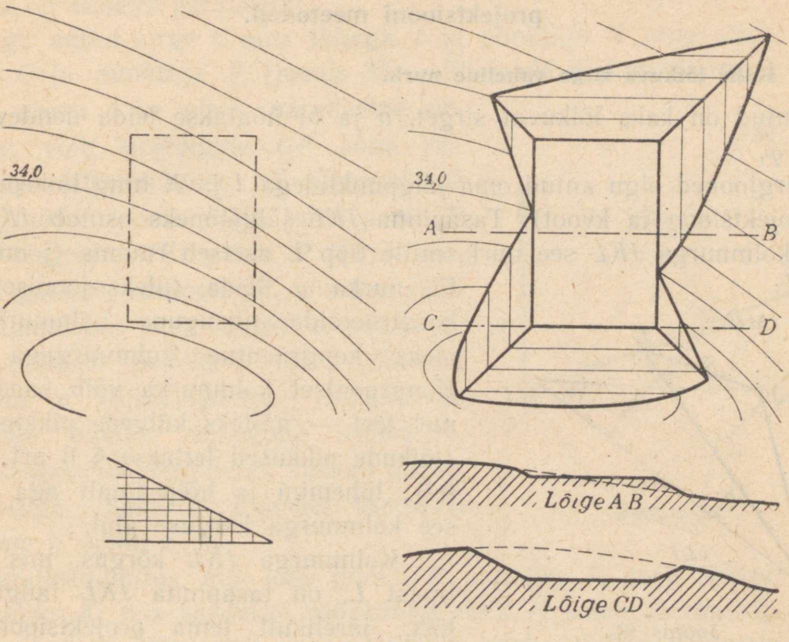
Joonis 28.

Et leida samal nivoopinnal asetsevat tasapinna β nivoojoont m, võib asetada läbi kujutamiskiire UU' mingi tasapinna γ; teatavasti asetseb siis γ risti joonisepinnaga ning seetõttu saab tema mahapöördele kohe joonestada tema nivoojoone, mille kaugus jälgjoonest võrdub punkti T kvoodiga. See nivoojoon aga läbib üht tasapinna β nivoojoone punkti V. Viimase normaalprojektsioon V' võimaldab tasapinna β nivoojoone projektsiooni m' joonestamist. Antud tasapindade nivoojoonte lõikepunkt on siis saadudki oma projektsiooniga N' ja kvoodiga, mis — nagu ette teada — võrdub punkti T kvoodiga.

4. Maastiku nivoojooned ja nende kasutamine.

Maakaartidele, eriti topograafilistele kaartidele, joonestatakse maapinna nivoojoonte normaalprojektsioonid, et maapinna kuju tuleks kaardil esile. Neid nivoojoonte projektsioone nimetatakse ka maakaardi samakõrgusjoonteks ehk isohüpsideks. Vastavad maapinna nivoojooned võetakse seejuures võrdsete kõrgusvahedega ning kõrguste mõõtarvud kirjutatakse kaardile isohüpside juurde.

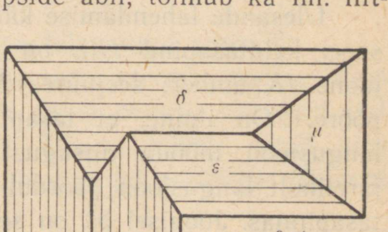
Kui kallakul ebatasasel maapinnal on tarvis moodustada rõhtne tasane väljak, mille normaalprojektsioon on kaardile kindlaks määratud, samuti ka tema kõrgus, ning kui selleks vajalikel kaevamis- ja täitmistöödel tuleb anda väljakuäärsetele külgpindadele kindlaks määratud kalle, siis valmistatakse tasase väljaku ehk tasandi ja tema ümbruse kujundamise kavand kvooditud projektsioonis nivoojoonte abil (joonis 29). Joonise esimeses osas on andmed — kavatsetava tasandi koht esialgsete isohüpsidega; tasandi kõrguseks peab tulema 34,0 ja tasandiäärsete külgpindade kaldeks (kaldenurga tangensiks) on ette nähtud $\frac{1}{2}$. Joonise teine osa on tasandi ja ümbruse kaart ühes valminud isohüpsidega. Vasakpoolne alumine osa selgitab külgpindade isohüpside vahelise kauguse leidmist, parempoolne alumine osa esitab koha kaks profiili (püstlõiget) sihtidel AB ja CD.



Joonis 29.

5. Liitkatuste joonestamine.

Samal põhimõttel nagu maapinna kuju esitamine ja ümberkujunduse kavandamine kvooditud projektsioonis isohüpside abil, toimub ka nn. liitkatuste joonestamine. Võrdsete kõrgusvahede järel asetatud nivoojoonte projektsioonid katavad pilti viirutistena, millede tihedusest nähtub vastava katusepinna kalle (joonis 30). Tiheduste leidmist kaldenurkade kaudu on selgitatud abijoonisel; katuse osade α, β ja γ kaldenurk on φ, pindade δ ja ε kaldenurk on ψ ning pinna μ kaldenurk on ϑ. Katuste nivoojooned, mis asetsevad võrdsel kõrgusel, lõikuvad arusaadavalt katustevahelisel serval (kaldharjal).



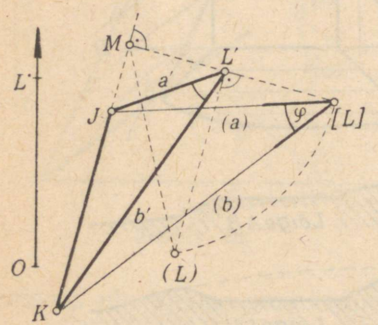
Joonis 30.

§ 9. Sirgjoonte ja tasapindade vaheliste nurkade leidmine kvooditud projektsiooni meetodeil.

1. Kahe lõikuva sirge vaheline nurk.

Antud on kaks lõikuvat sirget, a ja b; nõutakse leida nendevahelist nurka φ.

Sirgjooned olgu antud oma jälgpunktidega J ja K ning lõikepunktiga L (projektsioon ja kvoot). Tasapinna JKL jälgjooneks osutub JK. Nurk φ on kolmnurga JKL see nurk, mille tipp L asetseb ruumis (joonis 31).



Joonis 31.

Et nurka φ leida, tuleks joonisepinnale konstrueerida niisugune kolmnurk, mis oleks kongruentne kolmnurgaga JKL. Kongruentset kolmnurka võib saada mitmel teel — näiteks külgede pikkuste abil (lõikude pikkused leitakse § 6 art. 4 võttel); lühemini ja hõlpsamalt aga toimub see kolmnurga kõrguse abil.

Kolmnurga JKL kõrgus, mis lähtub tipust L, on tasapinna JKL langusjoone lõik, järelikult tema projektsioon $L'M$ on risti jälgjoonega JK. Lõigu LM pikkuse leidmiseks on langusjoone kujutamiskiirte pind maha pööratud. Ruumis oleva kolmnurgaga JKL kongruentne kolmnurk $JK[L]$ on seejärel joonestatudki, kasutades joonisepinnal olevat külge JK ja mõõtes punktist M algava kõrguse $M[L]$ võrdseks lõiguga $M(L)$.

Ülesande lahendamise käigule võib anda ka järgmise ruumilise tõlgitsuse: kaldtasapind JKL on ruumist pööratud joonisepinnale oma jälgjoone JK ümber; seejuures $M[L]$ on tasapinna langusjoone ML mahapööre. On ilmne, et tasapinna pöördumisel ümber jälgjoone pöördub langusjoon mööda niisugust tasapinda, mis on pööramisteljega risti; järelikult langusjoon pöördub oma jälgpunkti ümber oma kujutamiskiirte tasapinnas. Joonisel 31 on see pöörduminegi näidatud: lõigu ML kujutamiskiirte tasapinna mahapöördel on näha, kuidas lõik $M(L)$ on pöördunud lõiguks $M[L]$.

Seega on siin kasutatud kaht uut pööramistoimingut:

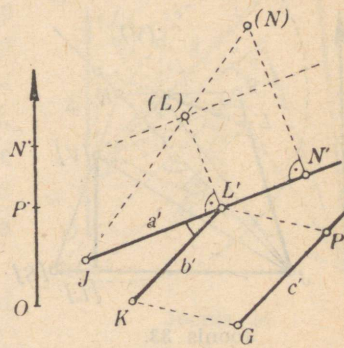
1) mistahes tasapinna mahapööramine oma jälgjoone ümber;

2) sirgjoone mahapööramine oma kujutamiskiirte tasapinda mööda oma jälgpunkti ümber.

2. Kiivsirgete-vahelise nurga leidmine.

Kahe antud kiivsirge vahelise nurga leidmiseks tuleb teatavasti (§ 3 art. 10 järgi) võtta niisugune abisirge, mis lõikab üht antud sirgeist ja on teisega paralleelne.

Olgu antud sirge *a* oma jäljega *J* ja punktiga *N* ning sirge *c* oma jäljega *G* ja punktiga *P* (joonis 32). Et saada niisugust sirget *b*, mis lõikaks sirget *a* ja oleks paralleelne sirgega *c*, võib sirglõigule *GP* anda niisuguse paralleelnihutuse, et jälgpunkt *G* liiguks mööda joonisepinda, kuna punkt *P* tuleks sirgele *a*. Et punkt *P* liigub seejuures igatahes nivoopinnal, siis see asjaolu võimaldabki leida sirgel *a* punkti *L*, kuhu ta jõuab. Selleks on maha pööratud sirgjoone *a* kujutamiskiirte tasapind ja nähtavale toodud niisugune nivoojoon, mille kaugus joonisepinnast võrdub punkti *P* kvoodiga. Sellel nivoojoonel asetsebki sirgjoone *a* punkt *L*.



Joonis 32.

Paralleelnihutus, mis toob punkti *P* punktiks *L*, toob ühtlasi punkti *G* punktiks *K*, mis saadakse rööpküliku *GP'L'K* konstrueerimisel.

Seejärel on kiivsirgete *a* ja *c* vaheline nurk φ leitav lõikuvate sirgete *a* ja *b* vahelise nurgana eelmise artikli võttel.

Olgu tähendatud, et joonisel 32 näidatud konstruktsioon on ilmsesti lahenduseks ka järgmisele ülesandele: leida sirget *a* läbiv tasapind, mis on paralleelne sirgega *c*; sest nõutud tasapind on siis *JKL*.

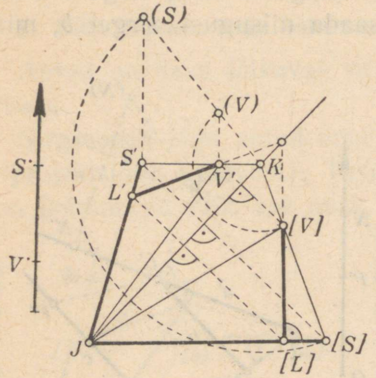
3. Sirgjoone ristsirge läbi antud punkti.

Kuidas leida antud sirget lõikav ristsirge läbi antud punkti?

Leidmisviise on kindlasti mitu. Teatavasti asetseb otsitav sirge antud sirgjoone sel risttasapinnal, mis läbib antud punkti; niisugust risttasapinda õpetab leidma § 7, art. 5; punkt, kus ta lõikab antud sirgjoont, leitakse § 8 art. 1 võttel; see punkt ühes antud punktiga määrabki küsitud ristsirge.

Teine, hõlpsam viis ülesande lahendamiseks selgub järgmisest kaalutlusest: tasapinnal, mis läbib antud sirget ja antud punkti, asetseb küsitud ristsirge ning ta satub järelikult joonisepinnale mainitud tasapinna mahapööramisel; seega on tasapinna mahapöördel võimalik nõutud sirget kohe joonestada läbi antud punkti mahapöörde risti antud sirgjoone mahapöördega.

Vastavalt teisele lahendamisviisile ongi valmistatud joonis 33. Läbi antud sirgjoone JS ja antud punkti V asetatakse tasapind; selle tasapinna jälgjoon läbib antud sirgjoone jälge J ja sirgjoone SV jälge K (mis leitakse § 6 art. 5 võttel). Nüüd pööratakse tasapind JSV joonisepinnale; et sirged $S'[S]$ ja $V'[V]$ on risti pööramisteljega JK ja $K[S] = K(S)$ samuti kui $K[V] = K(V)$, siis on seega nii sirge JS kui ka punkt V juba mahapöördel määratud. Tingimus $[V][L] \perp J[S]$ määrab küsitud ristsirge samal mahapöördel ja tingimus $[L]L' \perp JK$ annab otsitava lõikepunkti projektsiooni L'.



Joonis 33.

Tulemuse täpsust võimaldab kontrollida see asjaolu, et $[L][V]$ ja $L'V'$ peavad lõikuma sirgel JK. (Miks?)

Kõigis üksikasjus samade toimingutega, mis on teostatud joonisel 33, lahendub ka järgmine ülesanne: leida antud punkti V kaugus antud sirgest JS; sest lõik VL esitabki nõutud kaugust ning ta on oma õiges pikkuses näha joonisel lõiguna $[V][L]$.

Täiendavalt võib märkida, et kui punkt V asetseb antud sirgel JS, siis on määratu palju niisuguseid antud sirgjoone ristsirgeid, mis teda lõikavad ja läbivad punkti V; kõik need ristsirged asetsevad antud sirgjoone sel risttasapinnal, mis läbib punkti V, ja katavad teda sirgjoonekimbuna, mille keskpunkt on V. Järelikult täisnurga normaalprojektsioon saab esineda iga suurusega nurgana (nullnurgast kuni sirgnurgani); täisnurga normaalprojektsiooniks on täisnurk ainult siis, kui üks tema haar on projektsioonipinnal või projektsioonipinnaga paralleelne (üks haar on nivoojoon, teine on langusjoon) või kui mõlemad haarad on nivoojooned.

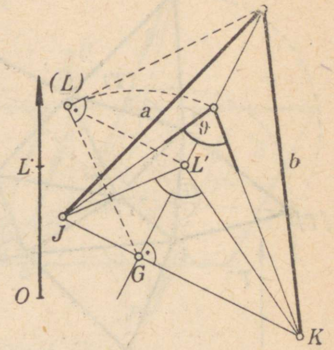
4. Kahe tasapinna vaheline nurk.

Et leida kahe antud tasapinna vahelist nurka, tuleb teatavasti (§ 4 art. 1 ja 2 järgi) võtta nende lõikejoonele mingi risttasapind; see lõikabki antud tasapindu niisuguseid sirgeid mööda, millede vaheline nurk määrab kahetahulise nurga suurust.

Joonisel 34 on andmeteks: tasapinna α jälg a, tasapinna β jälg b ja üks tasapindade ühine punkt L (projektsioon ja kvoot). Nende tasapindade lõikejoonele leitakse risttasapind γ läbi punkti L (§ 7 art. 5 võttel); selleks pööratakse mainitud lõikejoone kujutamiskiirte pind joonisepinnale ja saadakse seeläbi tasapinna γ jälgjoone punkt G (punkti L läbiva langusjoone jälgpunkt). Tasapinna γ mahapööramisel tema jälje JK ümber leitaksegi (§ 9 art. 1 järgi) otsitud nurk ϑ.

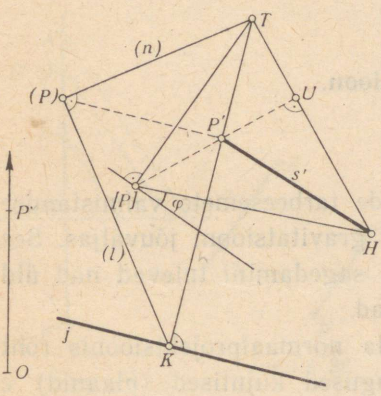
5. Sirgjoone ja tasapinna vaheline nurk.

Sirgjoone ja tasapinna vahelise nurga leidmiseks on kohane kasutada asjaolu, et nurk tasapinna normaali ja antud sirgjoone vahel täiendab otsitavat nurka täisnurgani (§ 4, art. 14). Kui antud sirgjoone mingist punktist võetakse antud tasapinna normaal, siis määrab see koos antud sirgega niisuguse tasapinna, millel asetseb kumbki mainitud nurk. Järelikult tuleb see tasapind pöörata tema jälje ümber joonisepinnale.



Joonis 34.

Sirge ja tasapind (s ja α) olgu antud oma jälgedega H ja j ja ühise punktiga P, mida määravad tema ristprojektsioon ja kvoot; nõutakse sirge ja tasapinna vahelist nurka. (Kui jäljed ja lõikepunkt ei kuulu andmete hulka, siis tuleb need enne leida § 7 art. 1 ja § 8 art. 1 järgi.)



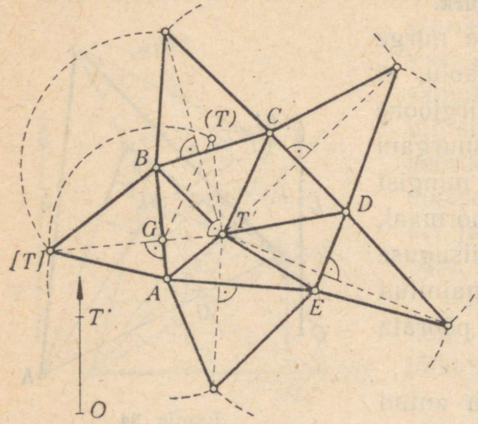
Joonis 35.

Punkti P läbiv tasapinna α normaal n ja sama punkti läbiv langusjoon l saadakse (joonisel 35) nende ühise projektsiooni $P'K$ kaudu (§ 5 art. 12 järgi $P'K \perp j$) ühise kujutamiskiirte pinna mahapöördel. Langusjoone jälg K asetseb arusaadavalt tasapinna α jälgjoonel, normaali mahapööre (n) joonestatakse langusjoone mahapöörde (l) järgi: $(n) \perp (l)$, ning normaali jälg T on tema projektsiooni ja mahapöörde lõikepunkt.

Nüüd tuleb pöörata joonisepinnale tasapind HTP ümber tema jälje HT. Punkti P vastav mahapööre $[P]$ asetseb sirgel $P'U$, mis on risti jäljega HT, ja tema kaugus punktist T on joonisel juba olemas: $T[P] = T(P)$. Mahapöördel saadud nurk $T[P]H$ on normaali n ja sirge s vaheline nurk, tema täiendus täisnurgani esitabki nõutud nurka φ.

6. Püramiidi pinnalaotuse valmistamine.

Täiendava näidisena on esitatud alljärgnevalt (joonis 36) püramiidi pinnalaotuse konstruktsioon; püramiidi põhi *ABCDE* asetseb joonisepinnal, peale selle on antud tema tipu *T* normaalprojektsioon ja kvoot. Külgtahu *ABT* mahapöörde joonestamiseks on leitud selle tahu kõrgus *TG* (lõigu *TG* kujutamiskiirte pinna mahapööramise abil); kõigi järgmiste külgtahkude mahapöörete joonestamist saab hõlbustada seeläbi, et iga külgserv esineb pinnalaotusel kaks korda. Joonise täpsuse kontrollimist võimaldab esimese ja viimase külgtahu vahelise serva pikkuste võrdlemine kummagi tahu mahapöördeil. Tavaliselt on tasapinna mahapööramisel ümber jälgjoone ükskõik, kas tasapinna mingi punkt pööratakse ühele või teisele poole jälgjoont, kuna tahukate pinnalaotuste konstrueerimisel aga pööratakse kõik külgtahud väljapoole, et nad üksteist ega põhja ei kataks.



Joonis 36.

§ 10. Kaldprojektsioon.

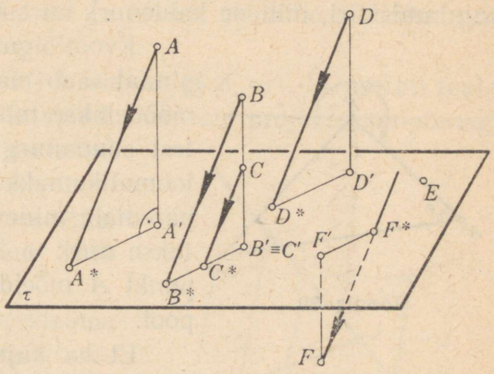
1. Punkti kaldprojektsiooni saamine.

Ehitiste kujundamisel, samuti ka paljude tarbeesemete valmistamisel arvestatakse nõuet, et nad „seisaksid püsti" gravitatsiooni jõuväljas. Seepärast antakse neile püstkehade kuju, kõige sagedamini tulevad nad üldvormilt risttahukad kui lihtsaimad püstkehad.

Püstkehi saab eriti hõlpsasti kujutada normaalprojektsioonis rõhttasapinnal, millel nad seisavad, kuid niisugused kujutised (plaanid) ei osutu kuigi ilmekaks ruumilises mõttes. Samuti on püstkehi võrdlemisi lihtne kujutada normaalprojektsioonis püstpinnal, mille ees nad püsti seisavad; asjaolu, et siis keha põhjade projektsioonideks tulevad ainult sirglõigud, teeb joonestamise hõlpsaks, kuid jätab joonise ruumiliselt ilmetuks.

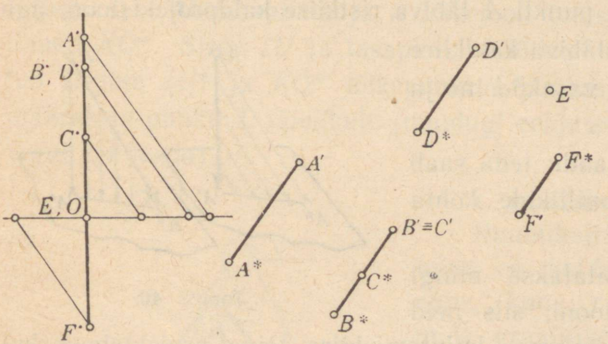
Ilmekaid ja selgeid kujutisi lihtsatest kehadest annab aga kaldprojektsioon, mispärast eeskätt selles kujutamisviisis valmistataksegi ruumigeomeetrilisi jooniseid õpperaamatuis (näiteks ka käesoleva raamatu esimeses peatükis ja mõni selgitav joonis teise peatüki alguses).

Kaldprojektsiooniliste jooniste ilmekus saavutatakse pealegi eriti vähese vaevaga — objekt ise võib projektsioonipinna suhtes jääda kas või kõige lihtsamasse asendisse, ainult kujutamiskiirte siht valitakse nõnda, et kujutisel oleks objekt nähtud sobivalt poolt.



Joonis 37.

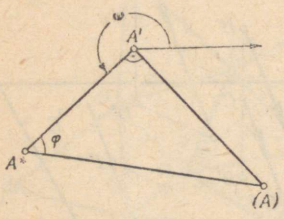
Kui punktid on antud oma normaalprojektsioonidega ja kvootidega, siis on nende punktide kaldprojektsioone samal projektsioonipinnal üsna lihtne saada: punktide kvootlõikude kaldprojektsioonid osutuvad kõik üksteisega paralleelseteks ja on pikkuselt võrdelised nende kvootlõikude enestega (§ 5, art. 7). Joonis 37 selgitab, kuidas tekivad ruumis olevate punktide A, B, C, D, E ja F kaldprojektsioonid A^*, B^*, C^*, D^*, E^* ja F^* joonisetasapinnal τ ning kuidas nad on seoses samade punktide normaalprojektsioonidega vastavate kvootlõikude kaudu. Joonis 38 näitab, kuidas tegelikult konstrueeritakse punktide kaldprojektsioone joonisepinnal, kui antud on punktide normaalprojektsioonid ja kvoodid. Kaldprojektsiooni kiirte siht on täiesti määratud juba üheainsa tuntud punkti kaldprojektsiooniga; näiteks A^* on punkti A läbiva kujutamiskiire jälgpunkt, järelikult lõikude $A'A^*$ ja $A'A$ pikkuste suhe määrab kujutamiskiire kaldenurga suuruse, aga lõigu A^*A' asetus joonisel näitab, kuhupoole on kujutamiskiired kaldu. Kui pikad tulevad muude antud punktide kvootlõikude kaldprojektsioonid, on näha kvooditelje külge valmistatud abijooniselt.



Joonis 38.

2. Lühendustegur ja suunanurk.

Olgu tähendatud, et kvootlõigu kaldprojektsiooni ja sama kvootlõigu enese pikkuste suhet nimetatakse kaldprojektsiooni lühendusteguriks (ja tähistatakse mõnikord tähega q); et ta võrdub kujutamiskiirte kaldenurga kootangensiga, võib tema väärtus tulla ka suurem kui 1. „Lühendusteguri" nimetus on õigustatud ainult sellega, et enamasti kasutatakse niisuguseid kujutamiskiiri, millede kaldenurk on suurem kui 45°.



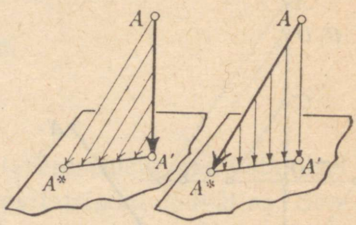
Joonis 39.

Kvootlõigu kaldprojektsiooni suunda joonisepinnal saab määrata sellekohase nurga abil, mida mõõdetakse mingi algussuuna suhtes. Mitmesugustest suunanurga mõõtmiskommetest osutub kõige loomulikumaks järgmine (joonis 39): vasakult paremale minevast suunast ülespöörduvalt mõõdetakse nurk ω kuni lõigu $A'A^*$ suunani, kusjuures punkt A mõeldakse olevat joonisepinnast vaatleja pool.

Et ka kujutamiskiire kaldenurka φ nähtavale tuua, selleks on joonisel 39 tasapind $A^*A'A$ pööratud joonisepinnale, kus kaldenurk φ esineb nurgana $A'A^*(A)$ ja ilmselt $\frac{A^*A'}{A'(A)} = \cot\varphi$.

3. Ristkiire kaldprojektsioon ja kaldkiire ristprojektsioon.

Kui joonisepinnal on esitatud mingi ruumipunkti A normaalprojektsioon A' ja kaldprojektsioon A^*, siis omandab joonisepinnal asetsev sirge $A'A^*$ kaks tähendust: ta on punkti A läbiva ristkiire kaldprojektsioon, aga ühtlasi ka sedasama punkti läbiva kaldkiire ristprojektsioon (joonise 40 vasakpoolne ja parempoolne osa).



Joonis 40.

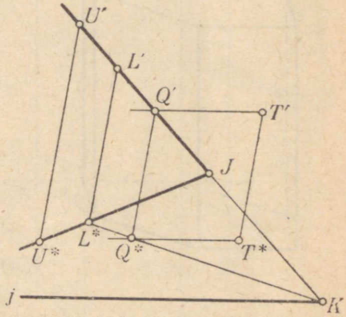
See asjaolu on üldist laadi; teda saab sõnastada kõigi projektsiooniliikide kohta järgmiselt:

kui joonisepinnal esitatakse mingi ruumipunkti kaks projektsiooni, siis neid läbiv sirgjoon on niihästi esimese kujutamiskiire teine projektsioon kui ka teise kujutamiskiire esimene projektsioon; sest ühe ruumipunkti kaks kujutamiskiirt määravad tasapinna, mille jäljeks ongi selle punkti projektsioone läbiv sirgjoon.

4. Sirgjoone ja tasapinna lõikepunkti leidmine.

Et kaldprojektsioon üksi ei määra veel ruumikujundit täielikult, siis kasutatakse kaldprojektsiooni sageli ühenduses normaalprojektsiooniga ühel ja samal joonisepinnal. Kvooditelg jäetakse sel juhtumil joonise äärelt ära, tema aset täidavad kvootlõikude kaldprojektsioonid ja lühendustegur. Kõik konstruktsioonid teostatakse siis normaalprojektsioonide ja kvootide abil, eelmistes paragrahvides käsitletud võtteil. Ainult lõikumisülesannete lahendamine lihtsustub seeläbi, et abitasapindade mahapööramised jäävad ära, sest neil asetsevaid jooni ja punkte on vähemalt ühes projektsioonis juba ilma selletagi näha.

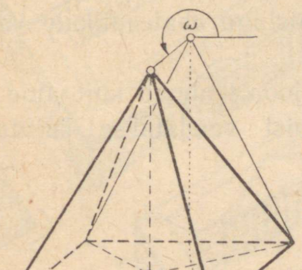
Sirgjoone ja tasapinna lõikepunkti leidmisel (§ 8, art. 1) asetati teatavasti läbi sirgjoone niisugune abitasapind, mis on projektsioonipinnaga risti; siis tasapindade lõikejoonel asetseski otsitav sirgjoone ja tasapinna lõikepunkt. Siin on lahenduse juhtmõte täpselt seesama, ainult abitasapinna mahapööramine jääb ära.



Joonis 41.

Antud sirgjoone normaalprojektsioon on JU' ja kaldprojektsioon JU^*, antud tasapinna α jälgjoon on j ja tasapinna punkti T projektsioonid on T' ja T^* (joonis 41). Et leida abitasapinna JUU' ja tasapinna α lõikejoont, võetakse tasapinna α nivoojoon läbi punkti T; selle nivoojoone normaalprojektsioon on $T'Q'$ ja kaldprojektsioon on T^*Q^* (mõlemad on paralleelsed jäljega j). Abitasapinna ja α lõikejoon on siis kaldprojektsioonis näha, nimelt KQ^*. Sirge JU ja tasapinna α lõikepunkti kaldprojektsiooniks osutub sirgete JU^* ja KQ^* lõikepunkt L^*; ühes normaalprojektsiooniga L' määrab ta punkti L täielikult (muidugi eeldusel, et projektsiooni lühendustegur on teada).

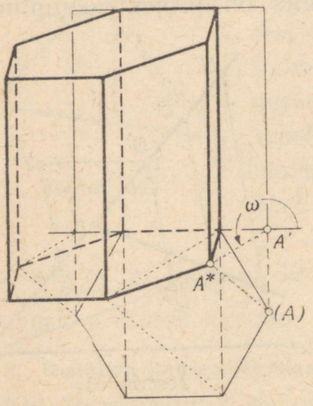
5. Püramiid ja prisma kaldprojektsioonis. Ruumikujunditest ilmeka pildi andmine on kaldprojektsiooni peamine ülesanne, kuna ruumigeomeetriliste probleemide graafiliseks lahendamiseks on teisi, sobivamaid projektsiooniliike.



Joonis 42.

Kui hõlpsasti saadakse kaldprojektsioon mõnest lihtsast tahukast, selgub joonisel 42, kus näidatakse korrapärase nelinurkse püramiidi kaldprojektsiooni valmistamist tema põhiserva ja kõrguse järgi. Kehale on antud võimalikult lihtne asend: püramiid seisab rõhtsel tasapinnal, joonisepind on vertikaalne ja läbib üht põhiserva. Et keha kõrguslõik on joonisepinnaga paralleelne, tuleb ta projektsioonis esile oma tegelikus pikkuses. Kujutamiskiired on määratud andmetega: $q = \frac{1}{2}$, $\omega = 220^0$.

Joonis 43 esitab korrapärast kuusnurkset prismat kaldprojektsioonis ja näitab ühtlasi selle kujutise saamiskäiku. Prisma toetub oma ühe külgtahuga projektsioonipinnale; et põhjade tasapinnad on risti projektsioonipinnaga, siis põhjade ristprojektsioonid osutuvad lõikudeks. Alumise põhja tasapinna mahapöördega on põhja tippude kvootlõigud toodud joonisepinnale. Kujutamiskiired on määratud andmetega $q = 0{,}8$ ja $\omega = 210^0$. Tipu A kaldprojektsioon A^* leitakse nurga ω poolt määratud sihil, võttes $A'A^* = 0{,}8 \cdot A'(A)$. Kõigi teiste tippude kaldprojektsioonid saadakse juba hõlpsamini, tõmmates nende tippude mahapöördeist paralleelid sirgele $(A)A^*$. Sest nii tekib iga tipu ristprojektsiooni, mahapöörde ja kaldprojektsiooni vahele parajasti niisugune kolmnurk, mis on sarnane kolmnurgaga $A'(A)A^*$, mistõttu kõikide kvootlõikude kaldprojektsioonid tulevadki võrdelised lõikude tõeliste pikkustega ning võrdetegur jääb samaks, mis tipu A puhul, järelikult võrdub lühendusteguriga q.



Joonis 43.

Kaldprojektsioonis valmistatud joniselt kustutatakse harilikult kõik need lisajooned, mis on olnud küll vajalikud joonise valmistamisel (ristprojektsioonid, mahapöörded jm.), kuid valmisjoonise vaatlemisel osutuksid ainult segavaks. Nii jääb joonise saamislugu ebateadlikule vaatlejale muidugi saladuseks.

Olgu tähendatud, et kaldprojektsiooniline joonis annab kujutatud esemest kõige tõepärasema mulje siis, kui joonist vaadatakse kujutamiskiirte sihis.

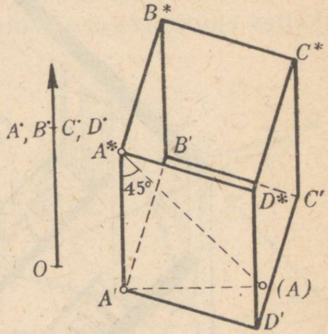
6. Militaarperspektiiv.

Püstkehi eelistatakse kujutada kaldprojektsioonis nii, et nende püstservad esineksid joonisel tõelises pikkuses. Seda võib saavutada kahel viisil. Esiteks, kasutades projektsioonipinnaks püsttasapinda, kusjuures kujutamiskiirte siht jääb vabalt valida. Teiseks, kasutades projektsioonipinnaks rõhttasapinda, aga võttes kujutamiskiirte kaldenurgaks 45^0, sest siis $q = 1$, järelikult püstservad, mis sel juhtumil esinevad ka kvootlõikudena, tulevad joonisel nähtavale oma tegelikus pikkuses.

Esimene viis on tarvitusel väga laialdaselt; selle viisi kohaselt on valmistatud ka näiteks joonised 42 ja 43 käesolevas õpikus.

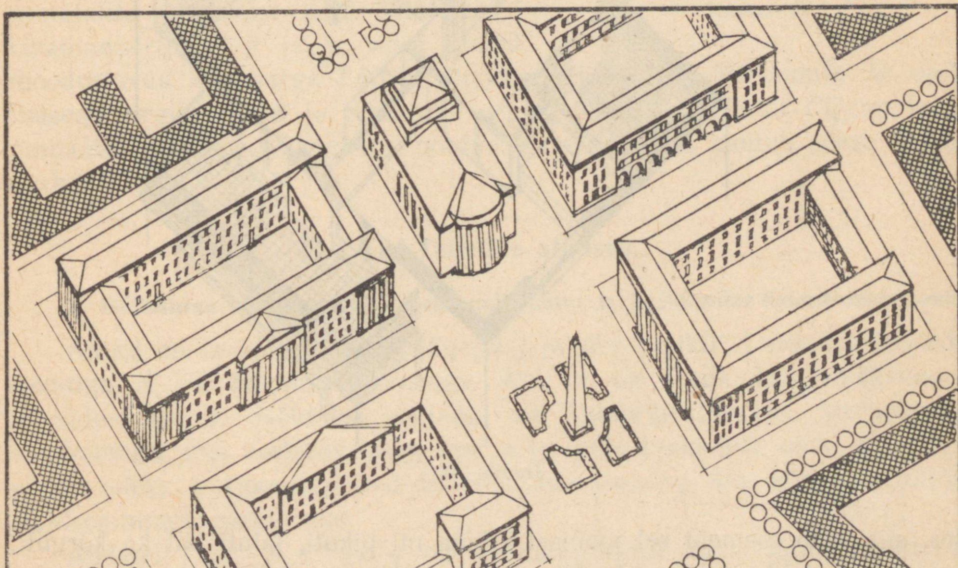
Teist kujutamisviisi nimetatakse militaarperspektiiviks (endisaegadest, mil sõjaväes kasutati teda tõelise ehk kunstnikuperspektiivi asemel). Nurk ω võetakse seejuures nimelt 90^0, et püstkeha kujutis tuleks ka vaatleja suhtes „püsti", mitte aga kaldu ega tagurpidi (nagu juhtumil $\omega = 270^0$).

Joonis 44 esitab kuubikujulist kasti militaarperspektiivis.



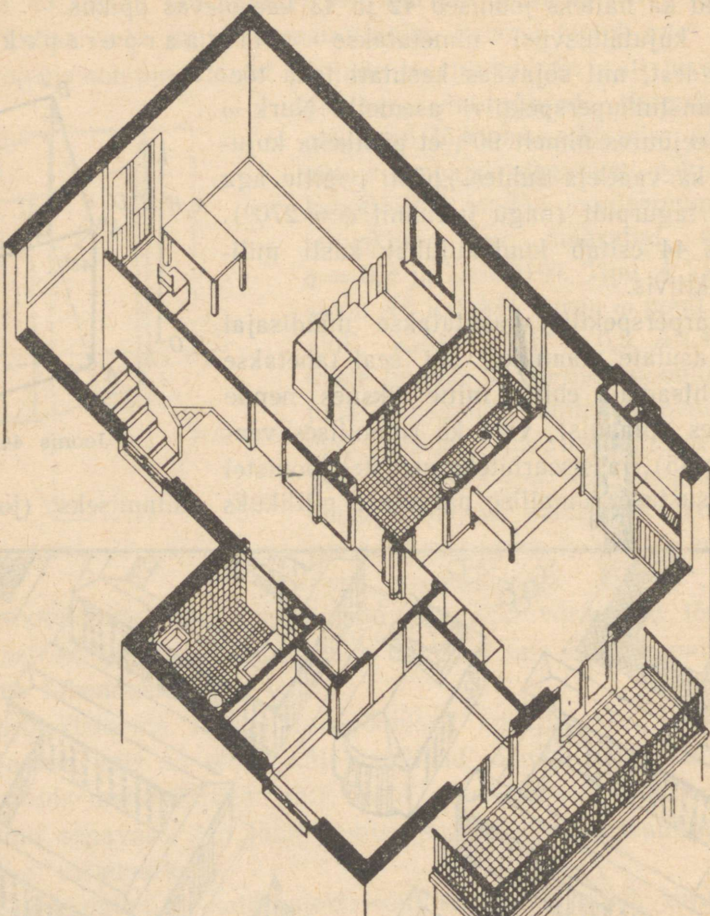
Joonis 44.

Militaarperspektiivi kasutatakse nüüdisajal peamiselt asulate plaanidel, kui seal tahetakse näidata tähtsamaid ehitisi mitte üksnes nende rõhtasetuses (plaanis), vaid ka ruumilises vaates (joonis 45), ja sisearhitektuurilistel joonistel hoonete sisustuse ruumilise paigutuse piltlikuks esitamiseks (joonis 46).



Joonis 45.

Et militaarperspektiiv joonestatakse eseme põhja tasapinnal, siis tulevad joonisel nii eseme põhi kui ka kõik põhjaga paralleelsed lõiked nähtavale tegelikus kujus. Et samuti kõrgused esinevad loomulikus pikku-



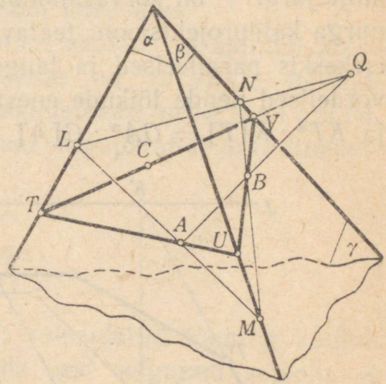
Joonis 46.

ses, siis saab esemeid sel joonisel mõõta nii pikuti, laiuti kui ka kõrguti; see asjaolu hõlbustab muidugi ka joonise valmistamist.

7. Kolme tasapinna lõikamine neljandaga.

Teatavasti üksainus projektsioon, näiteks kaldprojektsioon üksi, ei määra kujundit täielikult. Kuid mõnesuguseid konstruktsioone on võimalik teostada ka juba üheainsa projektsiooni abil. Üks niisugune osaliste andmetega lahendatav ülesanne, mille lahendamise käik ei olenegi projektsiooniliigist, on järgmine.

Ruumis on kolm lõikuvat tasapinda ja igaühel neist asetseb üks punkt — punkt A tasapinnal α, punkt B tasapinnal β ja punkt C tasapinnal γ. Antud on nende tasapindade lõikejoonte projektsioonid ja punktide A, B ja C projektsioonid (joonis 47); nõutakse samas projektsioonis esitada tasapinna ABC lõikejooned tasapindadega α, β ja γ. Et ülesande lahendamisel on ükskõik, missugusesse projektsiooniliiki (tsentraal- või paralleelprojektsiooni, rist- või kaldprojektsiooni) kuuluvad joonise andmed, siis on nende tähistamiseks joonisel kasutatud lihtsalt samu tähti, nagu nende nimetamiseks ruumiski.



Joonis 47.

Sirgjoone AB ja tasapinna γ lõikepunkti leidmiseks võetakse tasapindade α ja γ lõikejoonel mingi punkt L ja joonestatakse tasapinna ABL lõikejooned tasapindadega α, β ja γ; need jooned moodustavad kolmnurga LMN. Sirgete AB ja LN lõikepunkt Q ongi ilmsesti sirgjoone AB ja tasapinna γ lõikepunkt. Järelikult CQ on tasapindade ABC ja γ lõikejoon; nõutud lõikekujundiks osutub seega kolmnurk TUV.

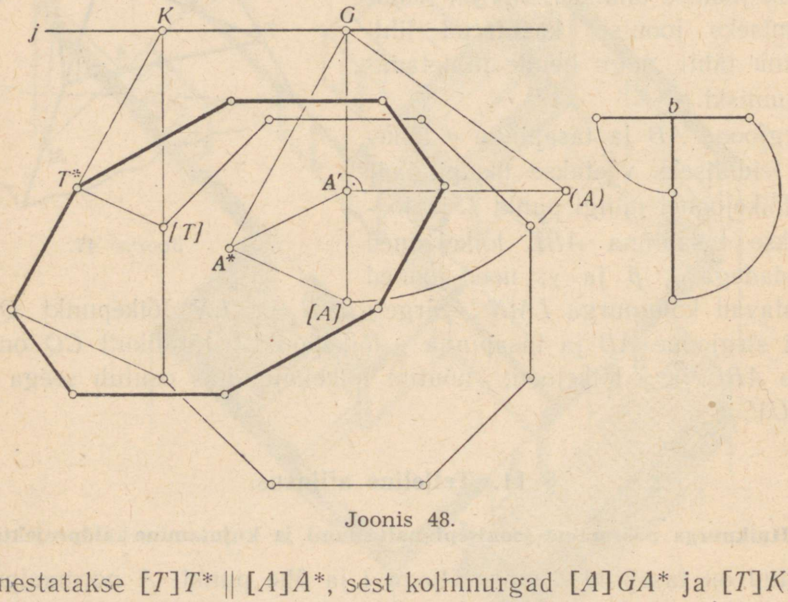
§ 11. Teljeline afiinsus.

1. Hulknurga pööramine joonisepinnalt ruumi ja kujutamine kaldprojektsioonis.

Antud on tasapind α oma jäljega j ja ühe punkti A normaalprojektsiooniga A' ja kaldprojektsiooniga A^*; ka on teada kaldprojektsiooni lühendustegur q. Nõutakse esitada ses kaldprojektsioonis korrapärane kaheksanurk, mis asetseks tasapinnal α ja mille keskpunkt oleks A, küljepikkus oleks b (joonisepinnal lõiguna antud) ning üks küljepaar oleks joonisepinnaga paralleelne.

Andmeil j, A', $A'A^*$ ja q on võimalik leida, kuhu satub punkt A, kui tasapind α pöörataks jälje ümber joonisepinnale; selleks tuleb kindlaks teha punkti A kaugus jäljest j, niisiis konstrueerida langusjoone lõik AG. Joonisepinnaga risti seisva tasapinna $AA'G$ mahapööramisel tulebki see kaugus nähtavale lõiguna $(A)G$; tuleb silmas pidada, et seejuures $A'(A) = \frac{1}{q} A'A^*$. Joonisel 48 on q võetud $\frac{3}{5}$, järelikult seal $A'(A) = \frac{5}{3} A'A^*$. Edasi on samal joonisel 48 joonestatud $G[A] \perp j$ ja $G[A] = G(A)$; siis $[A]$ ongi see koht, kuhu satub punkt A, kui tasapind α pööratakse joonisepinnale.

Mahapöördel saab valmis joonestada nõutud kaheksanurka: selleks vajalik abijoonis — korrapärase kaheksanurga keskpunkti leidmine antud külje järgi — on kõrval näidatud. Mahapöörde järgi joonestatakse kaheksanurga kaldprojektsioon: teatavasti kõigi langusjoonte kaldprojektsioonid on isekeskis paralleelsed ja langusjoonte lõikude projektsioonid on pikkuselt võrdelised nende lõikude enestega (§ 5, art. 6 ja 7); järelikult $KT^* \parallel GA^*$ ja $KT^* : K[T] = GA^* : G[A]$. Viimast võrret saab arvesse võtta seeläbi,



Joonis 48.

et joonestatakse $[T]T^* \parallel [A]A^*$, sest kolmnurgad $[A]GA^*$ ja $[T]KT^*$ osutuvad teineteisega sarnaseks. Täiesti samal viisil konstrueeritakse kõigi ülejäänud tippude kaldprojektsioonid.

Sooritatud toimingut võib lühidalt kirjeldada nõnda: korrapärane kaheksanurk pööratakse joonisepinnalt ruumi, kusjuures pööramisteljeks on joonisepinna sirgjoon j, ning siis tehakse sellest ruumis olevast kaheksanurgast projektsioon joonisepinnale.

2. Lineaarne punktteisendus ehk afiinsus.

Eelmises artiklis kirjeldatud toimingut saab rakendada igale joonisepinna punktile: iga punkti võib pöörata joonisepinnalt ruumis olevale tasapinnale α ja siis sealt projitseerida jällegi joonisepinnale; ainult pööramistelje punktid pöörduvad lihtsalt koha peal ning ühtlasi jäävad ka enestele projektsioonideks.

Iga niisugust toimingut, mida rakendatakse tasapinna (joonisepinna) punktile ja mis siis annab tulemuseks mõnesuguse punkti jällegi samal tasapinnal, nimetatakse tasapinna punktteisenduseks ehk punkttransformatsiooniks. Punkti, millele toimingut rakendatakse, võib nimetada algupärandiks ja toimingu tulemust selle algupärandi teisendiks.

Analüütilises geomeetrias määratakse punkti asukoht tasapinnal koordinaatide abil. Kui algupärandi koordinaadipaar on $(x|y)$ ja teisendi koordinaadipaar $(X|Y)$, siis teisendust iseloomustavad need valemid, millede abil saadakse teisendi koordinaadipaar algupärandi koordinaadipaarist; lineaarset punktteisendust

$$\begin{cases} X = ax + by + c \\ Y = lx + my + n \end{cases}$$

nimetatakse afiinsuseks.

On võimalik näidata, et eelmises artiklis rakendatud toiming kuulub afiinsuste hulka. Selleks tuleb kasutada seda seal selgunud asjaolu, et algupärandeid teisenditega ühendavad lõigud on 1) kõik isekeskis paralleelsed (nii $[T]T^* \parallel [A]A^*$) ja 2) kõik pikkuselt võrdelised algupärandite kaugustega pöördeteljest; nimelt nähtub sarnastest kolmnurkadest $[T]KT^*$ ja $[A]GA^*$, et $[T]T^* : [T]K = [A]A^* : [A]G$.

Olgu pöördetelje j võrrand

$$px + qy + r = 0;$$

siis on algupärandi $(x|y)$ kaugus pöördeteljest võrdeline avaldisega

$$px + qy + r,$$

millega ühtlasi tuleb võrdeliseks seada ka punktide $(x|y)$ ja $(X|Y)$ vahelise lõigu pikkus; et pealegi see lõik on püsiva suunaga (kõik seesugused lõigud on paralleelsed), siis ilmselt

$$\begin{cases} X - x = g(px + qy + r) \\ Y - y = h(px + qy + r), \end{cases}$$

milles g ja h on konstandid (võrdetegurid). Siit järeldub teisendusvalemipaar

$$\begin{cases} X = x + g(px + qy + r) \\ Y = y + h(px + qy + r) \end{cases} \quad \text{ehk} \quad \begin{cases} X = (gp + 1)x + gqy + gr \\ Y = hpx + (hq + 1)y + hr. \end{cases}$$

Teisendus osutus lineaarseks, järelikult afiinsuseks. Et see teisendus jätab kõik sirgjoone j punktid paigale, nimetatakse teda teljeliseks afiinsuseks; paigalejäävatest punktidest moodustatud sirgjoont nimetatakse afiinsuseteljeks.

3. Teljelise afiinsuse omadusi.

Vaadeldes tasapinna punktide ja sirgete mahapöördeid tasapinna jälje ümber ning samade punktide ja sirgete paralleelprojektsioone (kas normaalprojektsioone või kaldprojektsioone — kummalgi juhtumil esineb omaette afiinsus), võib tähele panna mitut teljelise afiinsuse olulist omadust, mida analüütilises geomeetrias saadakse järeldada teisendusvalemipaarist algebraliste võtetega. Need omadused on:

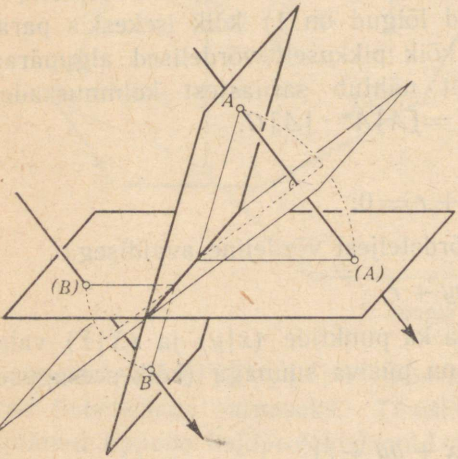
1) sirgjoon ja tema teisend lõikuvad afiinsuseteljel;

2) paralleelsetel sirgetel on teisendid paralleelsed;

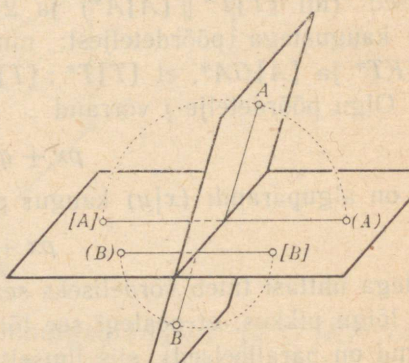
3) ühe sirgjoone lõikudel ja kõigi temaga paralleelsete sirgete lõikudel on teisendid pikkuselt võrdelised nende lõikude enestega.

4. Teljeline sümmeetria.

Kui tasapinna punktide mahapöörded ühendatakse lõikude abil selle tasapinna punktidega ruumis, kus nad olid enne mahapööramist, siis saadud lõigud on kõik üksteisega paralleelsed (joonis 49); nad on tasapinna



Joonis 49.



Joonis 50.

ja joonisepinna vahelise kahetahulise nurga poolitustasapinna normaalid, järelikult tasapinnalise kujundi mahapööre on üks tema võimalikest kaldprojektsioonidest, on üks sellekohaselt valitud kaldprojektsioon.

Tasapinda võib aga tema jälje ümber pöörata joonisepinnale kas ühele või teisele poole (joonis 50); seega on olemas kaks niisugust kaldprojektsiooni, mis esitavad tasapinnalisest kujundist joonisepinnal kongruentse kujutise. (Erandina annab nivoopinnal asetsev kujund igas paralleelprojektsioonis kongruentse kujutise.)

Tasapinnalise kujundi kaks mahapööret selle tasapinna jälje ümber on teineteisega sümmeetrilised jälgjoone suhtes. Et emba-kumba neist võib ka paralleelprojektsiooniks pidada, siis järeldub siit, et teljeline sümmeetria kuulub teljeliste afiinsuste hulka.

Harjutusülesandeid.

1. Antud on kaks punkti, A ja B, oma normaalprojektsioonidega A' ja B' ning kvootidega $OA^{\cdot}$ ja $OB^{\cdot}$. Küsitakse sirgel AB niisugust punkti C, et $OC^{\cdot} = \frac{3}{4}\, OA^{\cdot}$.

2. Antud on kaks punkti, A ja B, normaalprojektsioonidega ja kvootidega. On tarvis leida punkti A normaalprojektsiooni kaugus sirgest AB.

3. Antud on punktid A, B ja C oma normaalprojektsioonidega ja kvootidega. Punkti C läbib sirge s, mis on paralleelne sirgega AB. Leida sirgjoone s jälgpunkt J.

4. Projektsioonipinnal leiduv lõik $A'B'$ ja temal asetsev punkt J tähendagu lõigu AB ristprojektsiooni ja jälgpunkti. Leida punktide A ja B kvoodid, kui lõigu AB pikkust esitab joonisel antud lõik $k > A'B'$.

5. Tasapind α on antud oma jälgjoonega j ja kaldenurgaga φ; antud on ka ühiklõik kvootide mõõtmiseks. Nõutakse joonestada tasapinna α nivoojooned kvootidega 1, 2, 3 ja 4.

6. Antud on punktid A, B ja C normaalprojektsioonidega ja kvootidega. On vaja tuletada kolmnurga ABC nurgapoolitajate jälgpunktid.

7. Punktid A, B ja C on antud oma normaalprojektsioonidega ja kvootidega. Kolmnurka ABC saab täiendada rööpkülikuks teatavasti kolmel viisil, võttes neljanda tipu kas punktile A või B või C vastastipuks. Tuletada kõigi neljandate tippude normaalprojektsioonid ja kvoodid.

8. Leida nurk, mille võrra peaks projektsioonipinnale joonestatud rombi kallutama tema lühema diagonaali ümber, et tema normaalprojektsioon tuleks ruudukujuline.

9. Tuletada nurk, mille võrra peaks joonisepinnal antud rööpkülikut kallutama tema lühema külje ümber, et tema normaalprojektsioon tuleks rombikujuline. Mis tingimust peab rööpkülik täitma, et ülesanne oleks lahendatav?

10. Nelinurkse püramiidi põhjaks on ruut, mille üks tipp on ühtlasi püramiidi tipu ristprojektsiooniks põhja tasapinnal. Püramiidi tipu kvoo-

diks on põhiserva pikkus. Tuletada püramiidi pinnalaotus ja kaldtahkudevaheline nurk.

11. Korrapärase kolmnurkse püramiidi külgtahud olgu täisnurksed kolmnurgad. Lähtudes püramiidi ristprojektsioonist põhja tasapinnal, tuletada külgservade kaldenurk ja külgtahkude kaldenurk. Kui suur on nurk kahe külgtahu vahel?

12. Küsitakse korrapärase kuusnurkse püramiidi kahetahulisi nurki andmeil: püramiidi põhiserva pikkus on 3 cm ja külgserva pikkus 55 mm.

13. Antud on katuse ruudukujuline räästas ja tahkude kaldenurgad α, β, γ ja δ. Nõutakse servade kaldenurkade ja harja kvoodi leidmist.

14. Antud on punktid A', B', C' ja D' joonisepinna ühel sirgel; teada on ka kvootpunktid $A^{\bullet}$, $B^{\bullet}$, $C^{\bullet}$ ja $D^{\bullet}$. Leida sirgete AB ja CD lõikepunkt.

15. Antud on tasapind α oma jälgjoonega ja ühe punktiga (projektsioon ja kvoot). On tarvis leida need tasapinnad, mis on paralleelsed tasapinnaga α ja millede kaugus temast võrdub antud lõigu c pikkusega.

16. Antud on kolme tasapinna jälgjooned nõnda, et nad moodustavad kolmnurga, ja samade tasapindade nivoojooned ühisel nivoopinnal, mille kvoot on antud. Leida kolme tasapinna lõikepunkt.

17. Tasapinnast α on antud tema jälgjoon j ja väljaspool jälgjoont asetsev punkt V (normaalprojektsioon ja kvoot). On tarvis esitada need tasapinna α sirgjooned, mis läbivad punkti V ja moodustavad jäljega j nurga 45^0.

18. Nööpnõel on torgatud otsaga rõhtsesse projektsioonipinda nii, et nõelapea ristprojektsioon satub torkekohast loode poole; antud on nõela pikkus ja kaldenurk. Nõutakse tuletada nõela heitevari projektsioonipinnal, kui päike paistab lõunast ja tema kõrgusnurk on 60^0.

19. Tasapinna jälg olgu j ja kaldenurk 30^0. Sel tasapinnal asetseva 10 cm pikkuse lõigu otspunkt A on projektsioonipinnal, aga teise otspunkti B kvoot on 4 cm. Valides punkti A jäljel j vabalt, tuletada punkti B ristprojektsioon. Mitu võimalikku lahendust on ülesandel?

20. Kõik sirgjooned, mis läbivad ruumipunkti A ja moodustavad joonisepinnaga nurga φ, asetsevad ilmselt ühel koonilisel pöördpinnal, mille tipuks on A; seda koonuspinda nimetatakse k a l d e k o o n u s e k s tipuga A ja nurgaga φ. Kaldekoonuse ja joonisepinna lõikejooneks (koonuse jälgjooneks) osutub ringjoon, mille keskpunktiks on tipu A normaalprojektsioon.

Võetagu punkt A jooniselehe keskkohal kvoodiga 3 cm ja joonestatagu kaldenurkadele 20^0, 30^0, 40^0, 50^0, 60^0, 70^0 ja 80^0 vastavate kaldekoonuste jälgjooned.

21. Tasapind α on antud oma jäljega j ja väljaspool jälge asetseva punktiga V (normaalprojektsioon ja kvoot). Küsitakse neid tasapinna α sirgjooni, mis läbivad punkti V ja moodustavad joonisepinnaga nurga ψ, mille suurus on antud. Kunas leidub küsitud sirgeid kaks, kunas üks ja kunas ei leidu ühtki?

22. Antud on joonisepinna punkt P, ruumipunkt Q (normaalprojektsioon ja kvoot) ja nurk φ. Küsitakse tasapinda, mis läbib sirget PQ ja mille kaldenurk joonisepinna suhtes võrdub nurgaga φ. Kunas leidub küsitud tasapindu kaks, kunas üks ja kunas ei leidu ühtki? (Võtta arvesse, et kõigil tasapindadel, mis läbivad punkti Q ja moodustavad joonisepinnaga nurga φ, osutub punkti Q läbiv langusjoon ühe kaldekoonuse moodustajaks; langusjoone jälgpunkt asetseb järelikult kaldekoonuse jälgringjoonel.)

23. Maapind on joonisel esitatud oma isohüpsidega. Maapinna mingi kahe punkti projektsioonide järgi leida nende punktide kvoodid ja neid punkte läbiva sirgjoone kaldenurk. Maapinna kohal õhus on antud kaks punkti oma projektsioonidega ja kvootidega; küsitakse neid punkte läbiva sirgjoone ja maapinna lõikepunkti (või lõikepunkte).

24. Antud on täisnurkse kolmnurga hüpotenuus (oma otspunktidega) joonisepinnal ja tema vastastipu normaalprojektsioon. Leida vastastipu kvoot. Kus peab asetsema vastastipu normaalprojektsioon, et ülesandel oleks lahendeid?

25. Punktid A, B ja C on antud oma rist- ja kaldprojektsioonidega; seejuures ristprojektsioonid moodustavad kolmnurga, aga kaldprojektsioonid asetsevad ühel sirgel. Küsitakse sirgete AB, BC ja CA jälgpunkte.

26. Kolmnurk ABC on antud oma normaalprojektsiooniga ja militaarperspektiiviga. Esitada see kolmnurk joonisepinnal õiges kujus ja suuruses.

27. Püstprismakujuline küna, mille otsaks on võrdhaarne trapets, asetseb rõhtselt, toetudes otsapidi vastu püstiseisvat joonisepinda. Valides küna mõõted vabalt, esitada ta kaldprojektsioonis, andmeil: $q = \frac{3}{4}$; $\omega = 210^0$.

28. Antud on mingi prisma ja kõiki tema külgservi lõikava tasapinna kaks sirget — üks ühe põhja ja teine teise põhja tasapinnal. Andmed on esitatud mingis paralleelprojektsioonis. Tuletada lõikekujund samas projektsioonis.

29. Joonisepinnal asetsegu mingi n-nurk ja nivoopinnal mingi m-nurk. Nende paralleelsete hulknurkade $m + n$ tippu määravad keha, mida

nimetatakse prismatoidiks; nimetatud hulknurgad on prismatoidi põhjad. Tema külgservad ühendavad alumise ja ülemise põhja tippe; külgtahud on üldiselt kolmnurgad, võivad aga erijuhul olla ka nelinurgad. Võttes $n = 4$ ja $m = 3$, joonestada prismatoidi ristprojektsioon ja tuletada pinnalaotus.

30. Antud on kolmnurkne püramiid $ABCD$ ja tema sees punktid K ja L, millede määramiseks on kasutatud sirgjoone AK ja tahu BCD lõikepunkti M ning sirgjoone AL ja sama tahu lõikepunkti N. Kõik andmed on esitatud mingis projektsioonis. Tuletada samas projektsioonis sirgjoone KL ja püramiidi tahkude lõikepunktid.

31. Pöördsilinder toetub põhjaga vastu joonisepinda. Esitada see silinder militaarperspektiivis.

32. Antud on sirged a ja b ning punkt Q oma rist- ja kaldprojektsioonidega. Leida punkti Q läbiv sirgjoon, mis lõikab mõlemat antud sirget.

33. Antud on joonisepinnal kolm paralleelset sirglõiku: AL, BM ja CN. Lugedes punkte L, M ja N punktide A, B ja C afiinseteks teisenditeks, tuletada afiinsusetelg.

34. Antud on punktid A ja B ning väljaspool sirget AB punktid C ja D, kõik joonisepinnal. Kolmnurk ABC kallutatakse külje AB ümber mingi antud nurga φ võrra joonisepinna suhtes ja punkti C uuest asukohast U juhitakse kiir punktini D. Küsitakse kiire UD kaldenurka.

35. Joonisepinnal antud korrapäratu nelinurga $ABCD$ diagonaalide lõikepunkt on L; joonisepinna mingi muu antud punkt on M. Nelinurk $ABCD$ kallutatakse külje AB ümber mistahes nurga võrra joonisepinna suhtes ja punkti L uuest asukohast tuuakse kiir punktini M. Lugedes seda kiirt kujutamiskiireks (niisiis punkti M pidades nelinurga diagonaalide lõikepunkti kujutiseks), täiendada kolmnurk ABM kallutatud nelinurga paralleelprojektsiooniks.

36. Mis tingimust peavad täitma kahe nelinurga diagonaalid, et ühe nelinurga paralleelprojektsioon saaks tulla teise nelinurgaga sarnane?

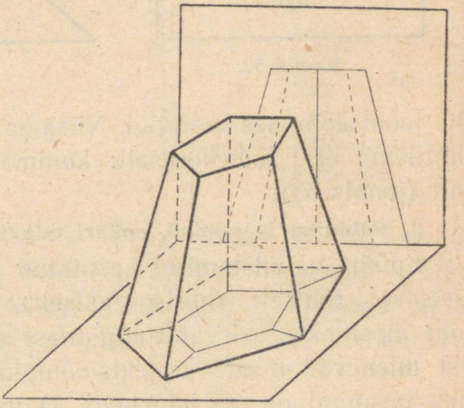
III. Normaalprojektsioon kahele tasapinnale.

§ 12. Epüür.

1. Ruumipunkti määramine kahe normaalprojektsiooni abil.

Punkti projektsioon on teatavasti punkti kujutamiskiire jälgpunkt joonisepinnal. On selge, et punkti projektsioon üksi ei määra seda punkti ruumis täielikult: ta määrab ainult kujutamiskiire, kuid jätab vabaks punkti enese asukoha sel kiirel. Kui on antud aga punkti normaalprojektsioon ja kvoot, siis on teada punkti kujutamiskiir ja ka see nivoopind, millel punkt asetseb; punkt on ruumis järelikult siis määratud ühe sirge ja ühe tasapinna lõikepunktina.

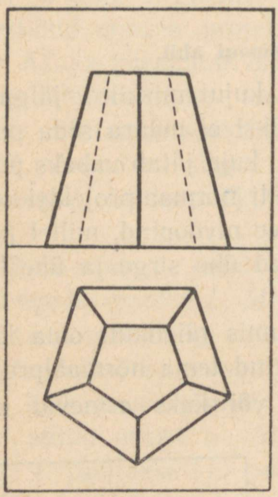
Kuid ka kaks lõikuvat sirget määravad ruumis täielikult oma lõikepunkti; nii on punkt täiesti määratud, kui on antud tema normaalprojektsioon ja kaldprojektsioon ühisel joonisepinnal või kaks erinevat kaldprojektsiooni ühisel joonisepinnal. Sest siis on teada kummagi projektsiooni kaudu eraldi kujutamiskiir, mis läbib seda ruumipunkti, järelikult ruumipunkt osutub mõlema kiire ainsaks ühiseks punktiks, nende lõikepunktiks.



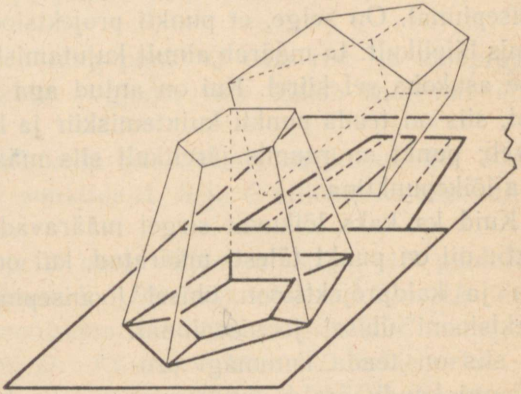
Joonis 51.

On olemas veel teine võimalus määrata ruumipunkti tema kahe kujutamiskiire abil: võib võtta kaks projektsioonipinda ja kummalegi valmistada ruumipunkti projektsiooni; siis need kaks projektsiooni määravad jällegi kaks kujutamiskiirt, mis läbivad seda ruumipunkti, järelikult ta on nende kiirte lõikepunkt. Sel asjaolul põhjenevaist meetoditest osutub kõige lihtsamaks ja käepärasemaks kahe normaalprojektsiooni võte, mida tema rajaja mälestuseks nimetatakse ka Monge'i meetodiks (Gaspard Monge, prantsuse matemaatik, elas aastail 1746 kuni 1818). Projektsioonipindadeks võetakse kaks teineteisega risti olevat tasapinda (ortogonaalsete projektsioonipindade võte), valmistatakse kummalegi eseme normaalprojektsioon (joonis 51) ja siis laotatakse projektsioonipinnad ühes tehtud kujutistega joonisepinnale (joonis 52). Sel viisil saadud normaalprojektsioonipaari nimetatakse eseme e p ü ü r i k s (prantsuskeelse sõna *épure* järgi).

Olgu tähendatud, et epüüri tegelikul valmistamisel tuleb muidugi ainult mõelda projektsioonipindu olevat teineteisega risti asetsenud ja



Joonis 52.



Joonis 53.

siis joonisepinnaks laotatud. Niisama tarvilik on epüüri vaatlemisel õppida kujutlema eset kahekordselt: kummagi normaalprojektsiooni jaoks erinevalt (joonis 53).

2. Põhipind ja esipind, epüüri telg ja punkti epüüri sidejoon.

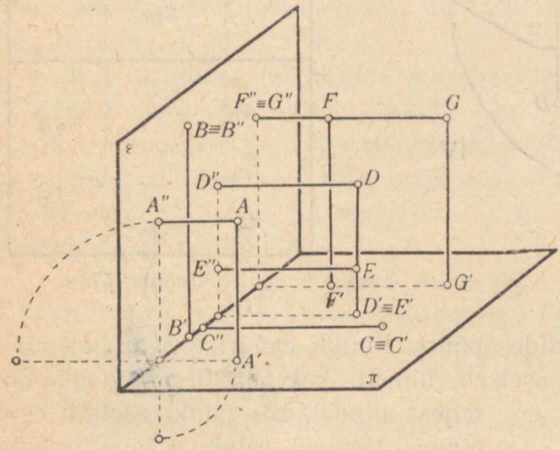
Epüüri valmistamisel kasutatud projektsioonipindadest mõeldakse üht asetsevat rõhtselt (horisontaalselt) ja teist püsti (vertikaalselt); vaatlejat mõeldakse seisvat rõhtpinnast pealpool ja püstpinnast eespool. Sellest tulenevad nende projektsioonipindade nimetused: rõhtne, vaatleja all olev tasapind on p õ h i p i n d ja vaatleja ees seisev püstpind on e s i p i n d. Normaalprojektsioon põhipinnal on lühidalt p õ h i j o o n i s ja normaalprojektsioon esipinnal on e s i j o o n i s; hoonete epüüride puhul tarvitatakse ka nimetusi — põhivaade ehk plaan ja esivaade ehk fassaad.

Mitmesuguste punktide põhijoonise ja esijoonise saamist selgitab joonis 54, samade punktide valmis epüüri näitab joonis 55. Punkti A põhijoonis on A' ja esijoonis on A'', projektsioonipaar $A'A''$ joonisel 55 on punkti A epüür. Sirget $A'A''$ nimetatakse punkti A epüüri s i d e j o oneks. Põhipinna π ja esipinna ε lõikejoont t nimetatakse epüüri teljeks.

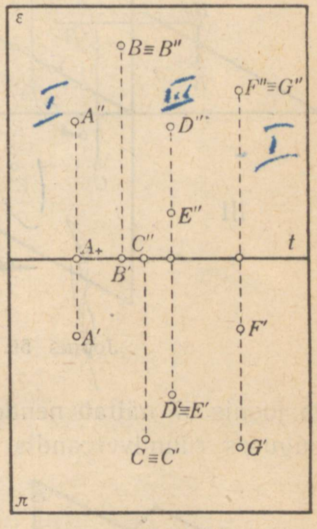
Jooniste 54 ja 55 võrdleval vaatlemisel võib konstateerida järgmisi tõsiasju:

punkti kaugus põhipinnast (põhikvoot) tuleb nähtavale esipinnal, nimelt esijoonise kaugusena teljest ($A'A = A_+A''$); samuti tuleb punkti kaugus esipinnast (esikvoot) nähtavale põhipinnal, nimelt põhijoonise kaugusena teljest ($A''A = A_+A'$);

punkti A kujutamiskiiri AA' ja AA'' (punkti A põhikiirt ja esikiirt) läbiv tasapind on teljega risti, järelikult epüüri sidejoone ja telje lõike-



Joonis 54.



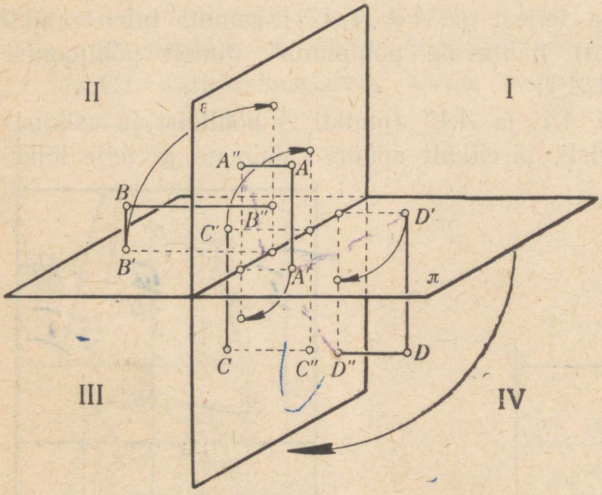
Joonis 55.

punkt A_+ on punkti A projektsioon teljel (A_+ on punkti A telgjoonis).

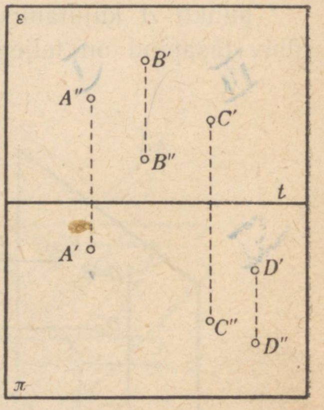
Järelikult punkti epüüri sidejoon $A'A''$ on põhikiire esijoonis ja ühtlasi esikiire põhijoonis ning asetseb teljega risti. Kõigi põhipinna punktide esijoonised on teljel, nagu ka kõigi esipinna punktide põhijoonised (punktid C ja B joonistel 54 ja 55).

3. Ruumikvadrandid ja punkti kuuluvuse selgitamine tema epüüri järgi.

Keha kujutamisel saab kasutada põhipinnaks ja esipinnaks pooltasapindu (nagu joonistel 51 ja 54), paigutades keha sellesse veerandruumi, mida need pooltasapinnad piiravad ja kus mõeldakse asetsevat ka vaatleja. Mitmesuguste konstruktsioonide teostamisel aga võivad mõned abipunktid sattuda ka väljapoole seda veerandruumi. Et ka nende punktide epüüre saada, tuleb mõelda projektsioonipindu laiuvat kummalegi poole telge, nii et nad jaotavad ruumi neljaks veerandruumiks. Neid veerandruume ehk ruumikvadrante on kombeks loendada niisuguses järjekorras, nagu näitab joonis 56. Sama joonis selgitab mitmesugustes ruumiveerandites asetsevate punktide põhijooniste ja esijooniste saamist

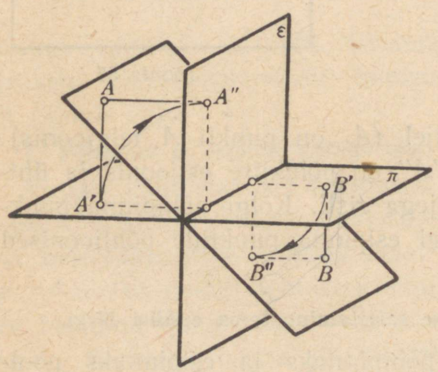


Joonis 56.



Joonis 57.

ja joonis 57 näitab nende punktide epüüre. Punkti epüürist on näha, missuguses ruumiveerandis punkt asetseb, nimelt: kui punkti põhijoonis on teljest allpool, siis punkt asetseb esipinnast eespool, esipinna taga asetsevatel punktidel aga on põhijoonised ülalpool telge; kui punkti esijoonis on teljest ülalpool, siis punkt asetseb põhipinnast ülalpool, põhipinna all asetsevatel punktidel aga on esijoonised allpool telge.



Joonis 58.

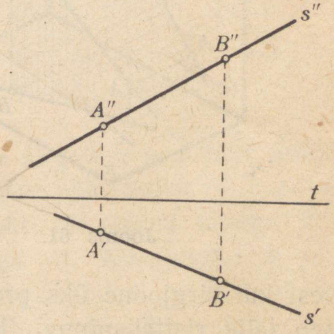
4. Kointsidentspind.

Teise või neljanda ruumiveerandi punktil on põhijoonis ja esijoonis ühel pool telge; kui nad juhtuvad veel tulema teljest võrdsele kaugusele, siis nad satuvad kokku. Sel juhtumil asetseb punkt kummastki projektsioonipinnast võrdsel kaugusel. Kõik teise ja neljanda ruumiveerandi punktid, mis on kummastki projektsioonipinnast võrdsel kaugusel, moodustavad ühe tasapinna; see poolitab teise ruumiveerandi ja samuti neljanda veerandi (joonis 58). Et tema punktidel satub esijoonis põhijoonisega kokku, siis nimetatakse teda kointsidentspinnaks (kokkusattuvuspinnaks).

§ 13. Sirgjoone epüür.

1. Sirgjoone määramine tema kahe punkti epüüriga.

Sirgjoon *s* on määratud oma kahe punktiga, *A* ja *B*: antud on kummagi punkti epüür (joonis 59). Sirgjoone projektsiooniks on teatavasti tema punktide projektsioone läbiv sirge; sirgjoone *s* epüür koosneb järelikult põhijoonisest $A'B'$ ehk s' ja esijoonisest $A''B''$ ehk s''.

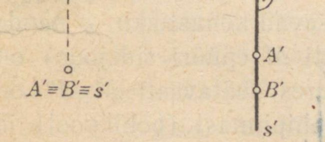


Joonis 59.

Kui sirgjoont määravate punktide põhijoonised langevad ühte, $A' \equiv B'$, siis sirgjoon on ilmselt risti põhipinnaga; tema põhijooniseks on üksainus punkt, esijooniseks aga sirge $A''B''$, mis on teljega risti (joonis 60, vasakpoolne näide).

Analoogiline on olukord juhtumil, kui $A'' \equiv B''$, — siis sirgjoone esijooniseks ongi seesama punkt, aga sirgjoone põhijoonis on teljega risti (joonis 60, parempoolne näide).

Sirgjoont määravatel punktidel ei tohi üheaegselt põhijoonised ühte langeda ja ka esijoonised ühte langeda; sest siis langeksid ruumis need punktid ise juba ühte, kuid üksainus punkt ei määra enam sirget.



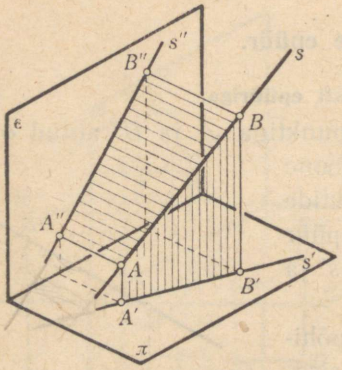
Joonis 60.

2. Sirgjoone määramine tema epüüri kaudu.

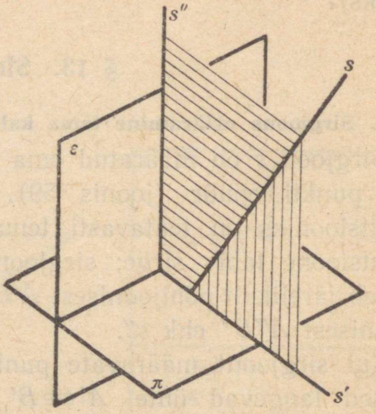
Sirgjoon on täiesti määratud oma epüüriga, sest sirgjoone põhijoonis määrab ühe kujutamiskiirte tasapinna ja sirgjoone esijoonis määrab teise kujutamiskiirte tasapinna ning nende tasapindade lõikejooneks osutubki sirgjoon ise (joonis 61).

Ainult sel juhtumil, kui sirgjoone põhijoonis on teljega risti ja ka esijoonis on teljega risti, ei ole sirgjoon oma epüüri poolt veel määratud, sest siis tema kujutamiskiirte tasapinnad ei lõiku, vaid langevad ühte (joonis 62).

Olgu tähendatud, et kui tahetakse mõnd sirgjoont anda tema epüüri näol, siis võib selleks epüüriks valida küll mistahes kaks sirget, milledest kumbki on telje suhtes kaldu, kuid ei või valida üht risti ja teist kaldu;



Joonis 61.

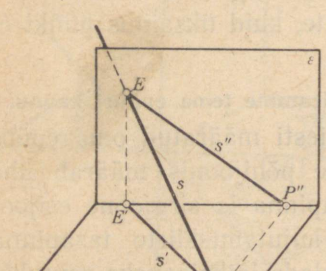


Joonis 62.

sest kui sirgjoone üks projektsioon juba on teljega risti, siis sirge asetseb telje risttasapinnal, järelikult tema teine projektsioon kas tuleb ka teljega risti või esineb punktina.

3. Sirgjoone jälgpunktid.

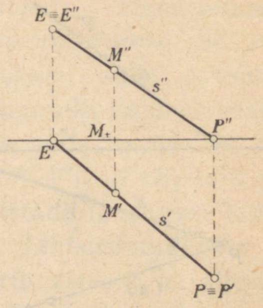
Sirgjoon saab teatavasti lõigata tasapinda ainult ühes punktis. Nimetades, nagu tavaliselt, sirgjoone ja projektsioonipinna lõikepunkti selle sirge jälgpunktiks ehk jäljeks, peab nüüd vahet tehtama kahe jälgpunkti vahel (joonis 63); sirgjoone ja põhipinna lõikepunkt on sirgjoone p õ h i j ä l g *P*, sama sirgjoone ja esipinna lõikepunkt on sirgjoone e s i j ä l g *E*.



Joonis 63.

Et leida sirgjoone jälgpunkte, kui antud on sirgjoone epüür (joonis 64), tuleb tähele panna, et sirgjoone mingi punkti *M* põhijoonis ja esijoonis asetsevad kohastikku — nende ühendussirge (punkti *M* epüüri sidejoon) on teljega risti; seejuures teatavasti M_+M'' on punkti *M* kaugus põhipinnast (põhikvoot) ja M_+M' on punkti *M* kaugus esipinnast (esikvoot). Järelikult sirgjoone põhijälg on sirgjoone see punkt *P*, mille esijoonis asetseb teljel, esijälg aga on see punkt *E*, mille põhijoonis asetseb teljel.

Kui sirgjoone üks projektsioon on teljega paralleelne, siis ilmselt sirgjoone teine jälgpunkt puudub, järelikult sirge on siis teise projektsioonipinnaga paralleelne. Teljega paralleelne sirge, mis ei asetse kummalgi projektsioonipinnal, on mõlema projektsioonipinnaga paralleelne (§ 3 art. 6 järgi), järelikult teljega paralleelsel sirgel pole kumbagi jälgpunkti — tema epüüriks on teljega paralleelsete sirgete paar.

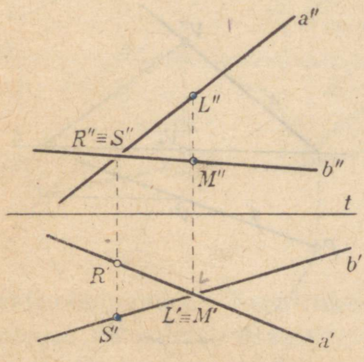


Joonis 64.

4. Kahe sirgjoone lõikumine või kiivsus.

On antud kaks sirgjoont, a ja b, kumbki epüüriga. Nõutakse otsustada, kas need sirged lõikuvad või kumb läheb teisest üle ja kumb läheb teise eest läbi.

Küsimuse otsustamiseks tuleb tähele panna sirgete a ja b neid punkte, millede! on ühine põhijoonis, — olgu sirgel a see punkt tähistatud tähega L ja sirgel b tähega M. Kui sirged a ja b lõikuksid, siis punktid L ja M langeksid ühte, järelikult peale ühise põhijoonise oleks neil ka ühine esijoonis. Sirgete a ja b esijoonistelt leitakse punktide L ja M esijoonised (joonis 65) — nad on põhijooniselt tuleval sidejoonel. Joonise 65 andmeil L'' ja M'' ei lange ühte, järelikult sirged a ja b ei lõiku; et L'' asetseb kõrgemal kui M'', siis sirgjoon a läheb ruumis üle sirgjoone b. Põhipinnale vaadates nähakse, et sirgjoon a varjab sirgjoont b, mistõttu b' on vastaval kohal katkestatud.



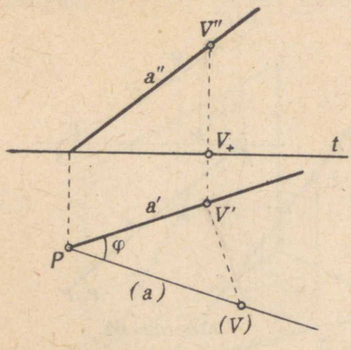
Joonis 65.

Samal viisil otsustatakse küsimus, kumb sirgeist läheb teise eest läbi. Kohastikku asetsevateks punktideks on sirgjoone a punkt R ja sirgjoone b punkt S. Et S' on eespool kui R', siis ilmselt sirgjoon b läheb sirgjoone a eest läbi, järelikult varjab teda. Seepärast on a'' vastaval kohal katkestatud.

5. Sirgjoone kaldenurk põhipinna suhtes.

Antud on sirgjoon a oma epüüriga. Küsitakse sirgjoone kaldenurka põhipinna suhtes.

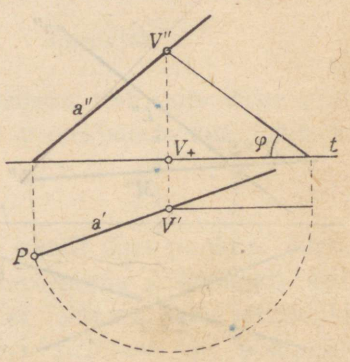
Küsitud nurgaks on teatavasti lihtsalt sirgjoone a ja tema põhijoonise a' vaheline nurk. See nurk tuleb nähtavale, kui sirgjoone a põhi-kiirte tasapind aa' pööratakse põhipinnale. Mahapöörde joonestamiseks (joonis 66) on kasutatud sirgjoone a ühe vabalt võetud punkti V põhikvooti V_+V''; nimelt on joonestatud (§ 6 art. 5 eeskujul) $V'(V) \perp a'$ ja sel sirgel võetud $V'(V) = V_+V''$. Siis nurk $V'P(V)$ ongi kaldenurk φ.



Joonis 66.

Sellesama ülesande lahendamiseks võib valmistada hõlpsamini joonise ka teisiti (joonis 67). Et otsitav nurk φ on teravnurgaks niisuguses täisnurkses kolmnurgas, mille kaatetite pikkused on PV' ja V_+V'', siis võib kasutada kohe seda asjaolu, et lõigu V_+V'' juures on juba täisnurk olemas — nimelt $V_+V'' \perp t$; jääb ainult lõik PV' pöörata paralleelseks teljega ja nihutada teljele. Soovitud kolmnurga kaatetid on seega paigal ja nurk φ leitudki.

Joonisel 67 näidatud konstruktsioonile saab anda ka ruumilise toimingu tähenduse: ruumis olevat kolmnurka $PV'V$ on pööratud tema püstkaateti $V'V$ ümber kuni esipinnaga paralleelseks saamiseni. Selles asendis aga annab kolmnurk esijooniseks juba kongruentse kujutise. Kirjeldatud pööramist võib nimetada sirgjoone a pööramiseks tema punkti V kujutamiskiire ümber. Seesugusel pööramisel liiguvad tema muud punktid ringjooni mööda (põhijälg P nimelt mööda põhipinnal olevat ringjoont, seepärast tema esijoonis jääbki teljele) ja sirgjoon moodustab nõnda tüki koonilist pöördpinda.



Joonis 67.

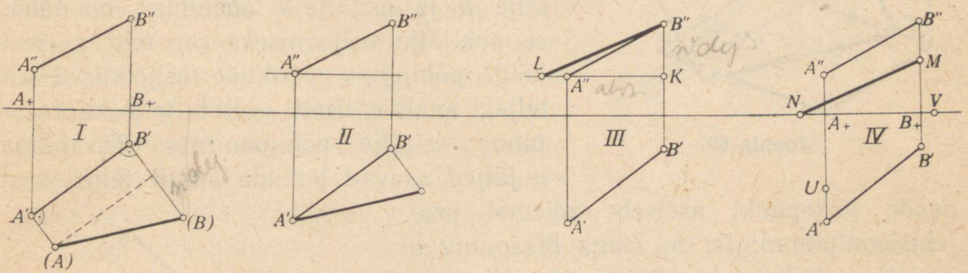
Olgu tähendatud, et joonisega 67 seletatud võtte tegelikul rakendamisel ei tule tõmmata ühtki abijoont — need kõik ainult näitavad seal sirglõigu PV kujutletavat liikumist. Tegelikult kujuneb võtte sooritamine järgmiselt: märgitakse joonisele valitud sidejoonel olevad punktid V', V_+ ja V'' (sidejoont ennast joonestamata) ja kantakse mõõtesirkli abil sirglõigu PV' pikkus epüüriteljele alates punktist V_+; seega jõutakse otsitud nurga φ tippu, millest suunataksegi teine haar punkti V''. Ilmselt osutub see võte hõlpsamaks kui joonisel 66 näidatud konstruktsioon, mis vajab abisirge $V'(V)$ tõmbamist täpselt risti juhusliku sihiga a'.

Sirgjoone ja esipinna vaheline nurk leitakse arusaadavalt samal viisil.

6. Sirglõigu pikkus.

Eelmises artiklis esitatud konstruktsioonide teostamisel tuleb sirgjoone *a* lõik *PV* joonisel nähtavale oma õiges pikkuses — hüpotenuusina kolmnurgas, mille üks teravnurk on φ. Õigupoolest osutub joonisel 66 teostatud konstruktsioon erijuhuks kvooditud projektsiooni puhul esinevast sirglõigu pikkuse leidmise võttest (§ 6, art. 4). Missuguseks kujuneb vastav konstruktsioon lõigu epüüri andmetega üldjuhul, on näha joonise 68 esimeses osas: $A'(A) \perp A'B'$, $B'(B) \perp A'B'$, $A'(A) = A_{+}A''$, $B'(B) = B_{+}B''$.

Muidugi võib trapetsi $A'B'(B)(A)$ asemel valmistada täisnurkse kolmnurga, mis jääb temast üle ristküliku eraldamisel. Lihtsustatud võte on esitatud joonise 68 teises osas. Meeldejätmist väärib asjaolu, et sirglõik on hüpotenuusiks kolmnurgas, mille üks kaatet on lõigu üks normaalprojektsioon ja teine kaatet lõigu otspunktide kauguste vahe vastavast pro-



Joonis 68.

jektsioonipinnast. Konstruktsiooni saab veelgi hõlbustada, nagu näitab joonise 68 kolmas osa: sirglõigu ühe otspunkti (näiteks *B*) epüüri sidejoont lõigatakse abisirgega, mis läbib teise otspunkti üht projektsiooni (näiteks A'') ja on paralleelne epüüriteljega; sidejoone lõik $B''K$ esitab punktide *A* ja *B* kauguste vahet põhipinnast; sidejoon ja abisirge moodustavad täisnurga, mille ühel haaral juba asetseb üks vajalik kaatet, jääb võtta teisel haaral $KL = A'B'$; hüpotenuus LB'' võrdubki lõiguga *AB*.

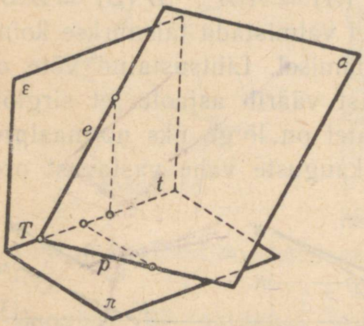
Võte ei kasuta sirglõigu otspunktide kaugusi projektsioonipindadest teisiti kui vahede näol; järelikult ei muutu midagi, kui epüüritelg kustutatakse (või andmata jäetakse). Sama olukord esineb ka edaspidi korduvalt (joonistel 82, 91—95, 106, 108 jm.). Kuid eelmiseski artiklis võib telge asendada paralleelse abijoonega (kui jäljed muidu joonisele ei mahu) ning siis joonis 67 valmib nagu 68, III.

Lõigu pikkust saab aga leida ka üsna ilma abijoonteta, ainult mõõtesirkli abil, kui telg ja sidejooned on olemas (joonis 68, IV): võetakse $B''M = A''A_{+}$ ja $B_{+}N = A'B'$; siis $MN = AB$. Võtte teiskordne rakendamine (kontrolliks, samas): $A'U = B'B_+$, $A_+V = A''B''$, annab punktide U ja V vahele sama pikkuse.

§ 14. Tasapinna jäljed, nivoojooned ja kaldenurgad.

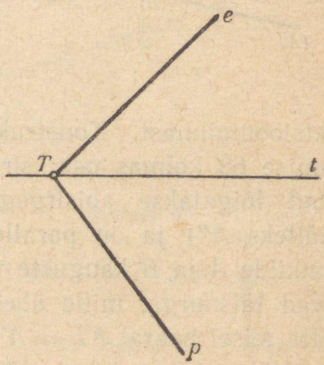
1. Tasapinna jälgjoonte epüür.

Tasapind võib määratud olla oma kolme punkti epüüriga või ühe punkti ja ühe sirgjoone epüüriga või kahe sirgjoone epüüriga. Tasapinna kaks lihtsaimat sirget on tema lõikejooned projektsioonipindadega ehk jäljed. Tasapinna jälgjoont põhipinnal nimetatakse tasapinna p õ h i j ä l j e k s ja jälgjoont esipinnal — e s i j ä l j e k s.



Joonis 69.

Joonis 69 näitab tasapinna α põhijälje p ja esijälje e tähendust; on näha, et põhijälje esijooniseks on telg t, sest kõigi põhipinna punktide esijoonised on teljel; analoogiliselt osutub telg ka tasapinna esijälje põhijooniseks. Tasapinna α jäljed saavad lõikuda ainult teljel, sest nende lõikepunkt asetseb mõlemal projektsioonipinnal; ta on seega tasapinna α ja telje t lõikepunkt. Seepärast võib teda nimetada tasapinna telgpunktiks (joonisel 69 on see punkt T). Joonis 70 on tasapinna α jälgede epüür.



Joonis 70.

2. Punktiga ja sirgega määratud tasapinna jälgede leidmine.

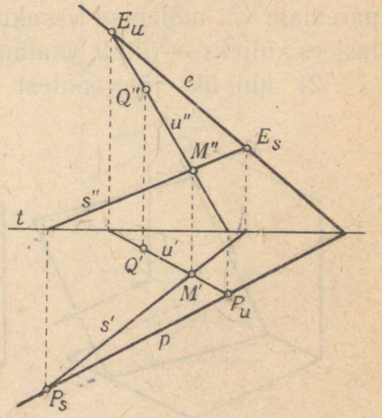
Olgu antud punkti Q ja sirgjoone s epüür; nõutakse leida seda punkti ja sirget läbiva tasapinna α jäljed.

Teatavasti sirgjoone jälgpunkt asetseb seda sirgjoont läbiva tasapinna jälgjoonel. Järelikult tasapinna α põhijälg peab läbima antud sirgjoone s põhijälge P_s, samuti aga α esijälg peab läbima sirgjoone s esijälge E_s.

Et tasapinna α jälgi saaks joonestada, läheks vaja kummastki jälgjoonest veel üks punkt. Selleks valitakse sirgel s mingi punkt M (seejuures muidugi $M'M'' \perp i$) ja asetatakse siis sirge läbi punktide M ja Q. See uus sirgjoon u asetsebki tasapinnal α, järelikult tema jälgpunktid P_u ja E_u asetsevad α jälgjoontel (joonis 71). Nii osutub P_sP_u tasapinna α

põhijäljeks p ja E_sE_u esijäljeks e. Konstruktsiooni täpsust võimaldab kontrollida see asjaolu, et jäljed p ja e peavad lõikuma teljel.

Kui tasapind on antud oma kolme punktiga, siis neist iga punktipaar määrab sirge; kõigi nende sirgete põhijäljed asetsevad teatavasti tasapinna põhijäljel ja samade sirgete esijäljed tasapinna esijäljel. Seda arvestades saabki tasapinna kolme punkti epüürist tuletada tasapinna jälgjooned.



Joonis 71.

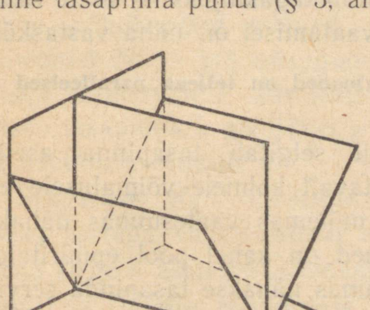
Kui tasapind on antud oma kahe sirgjoone epüüriga, toimub jälgjoonte leidmine samal põhimõttel.

3. Tasapinna ja projektsioonipindade vastastikuse asendi juhtumid.

Tasapinna jälgjoonte konstrueerimisel võib juhtuda, et üks jälgjoon tuleb teljega paralleelne. Sel juhtumil on tasapind kindlasti ka ise teljega paralleelne (§ 3, art. 6). Seejuures võib ta kas lõigata mõlemat projektsioonipinda (siis jäljed on paralleelsed) või olla teisega neist paralleelne (siis teine jälgjoon puudub).

Veel võib juhtuda, et tasapinna jäljeks osutub telg; siis esineb telg ühtlasi ka teise jälgjoone tähenduses. Telge läbiva tasapinna määramiseks peab muidugi olema antud ka veel üks punkt väljaspool telge.

Koos eelmises artiklis käsitletud jälgjoonte üldjuhtumiga on ilmselt nüüd juba kõik võimalused loetletud. Sest tasapinna ja projektsioonipindade vastastikuse asendi juhtumeid on ainult ühe võrra vähem kui üldse kolme tasapinna puhul (§ 3, art. 9) — nimelt osutub siin võimatuks kõigi kolme tasapinna paralleelsus, sest projektsioonipinnad on teineteisega risti.


Joonis 72.

4. Tasapinna külgede nähtavuse otsustamine jälgjoonte epüüri põhjal.

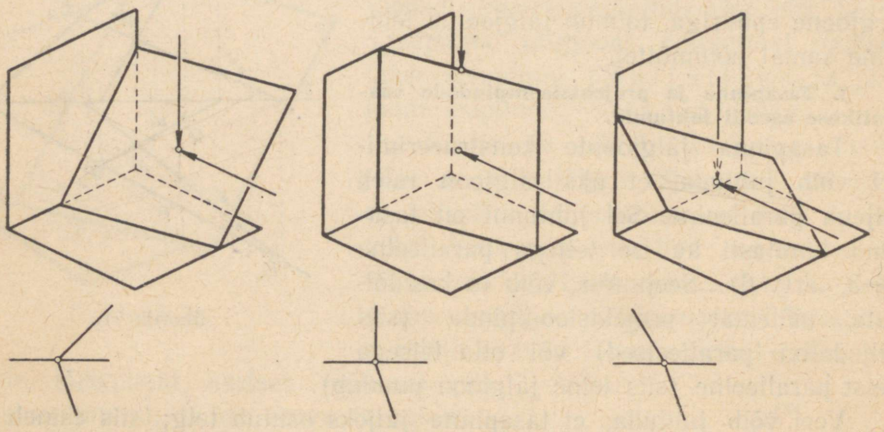
Et tasapinna andmeteks on just sageli tema jälgjoonte epüür, siis on tarvilik õppida neist andmeist järeldama, kuidas asetseb tasapind vaatleja suhtes. Vaatlejal on teatavasti epüüri „lugemiseks" kaks vaatesuunda — üks vaatesuund ülalt põhipinna poole ja teine suund eest esipinna poole.

Joonisel 72 on esitatud projektsioonipinnad ühes kolme tasapinnaga, milledel on ühine põhijälg, ja joonis 73 näitab neid tasapindu eraldi ühes mõlema vaatesuunalise kiirega; iga pildi all on näidatud ka jälgjoonte epüür.

Nende jooniste najal küsimust kaaludes jõutakse järgmisele otsusele:

1) kui jälgjooned suunduvad telgpunktist sama kätt (kas mõlemad paremale või mõlemad vasakule), siis tasapinna pealmine külg osutub ühtlasi esiküljeks — ülalt vaatamisel on näha seesama pinnakülg, mis eestki;

2) kui üks jälgjoontest on teljega risti, siis teise projektsioonipinna



Joonis 73.

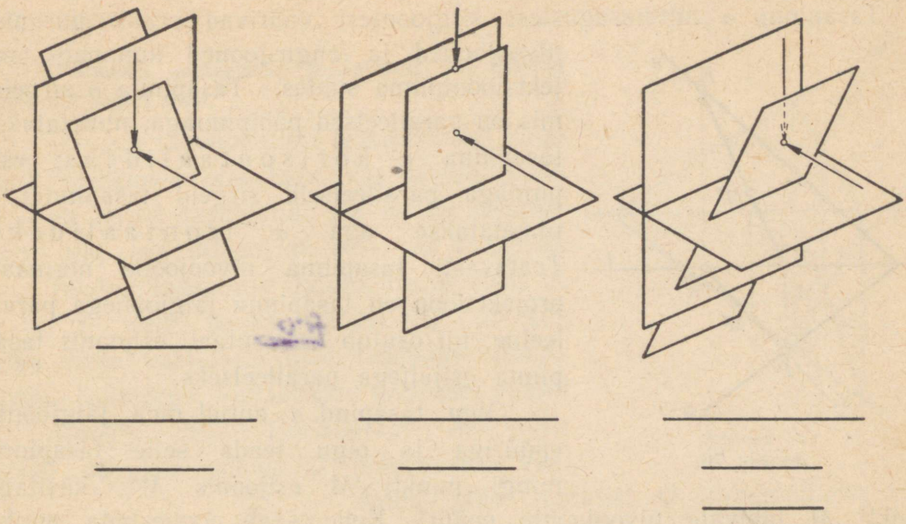
poole vaatamisel nähakse tasapinda serviti — tasapinna kõigi punktide teised projektsioonid asetsevad teisel jälgjoonel;

3) kui jälgjooned suunduvad telgpunktist ise kätt (üks paremale, teine vasakule), siis tasapinna pealmine külg osutub tagaküljeks — ülalt vaatamisel on näha tasapinna üks külg ja eest vaatamisel on näha vastaskülg.

5. Tasapinna asend vaatleja suhtes, kui jälgjooned on teljega paralleelsed või risti.

Teljega paralleelse põhijälje juhtumil selgitab tasapinna asetsemist vaatleja suhtes joonis 74, kus on vastavalt kolmele võimalusele esitatud ka jälgjoonte epüür. Siit selgub, et mõlemas vaatesuunas nähakse tasapinna üht ja sama külge, kui jälgjooned on kahel pool epüüritelge; kui üks jälgjoon puudub, siis teises vaatesuunas nähakse tasapinda serviti; tasapinna pealmine külg jääb tagaküljeks, kui jälgjooned on epüüriteljest ühel pool.

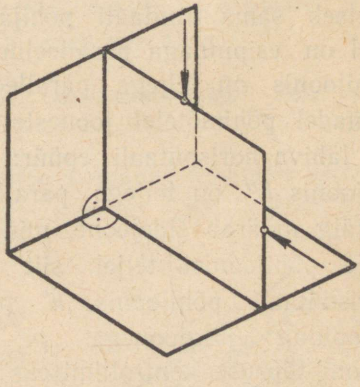
Joonis 75 näitab seda vist juba seletamatagi selget tõsiasja, et tasapind on mõlemas vaatesihis näha serviti, kui jälgjooned on teljega risti.



Joonis 74.

6. Tasapinna punkti esijoonise leidmine.

Tasapinna jälgjoonte kasutamise lihtsaimaks näidiseks olgu esitatud järgmine ülesanne: antud on tasapinna α jälgede epüür; teada on selle tasapinna mingi punkti M põhijoonis, küsitakse sama punkti esijoonist.



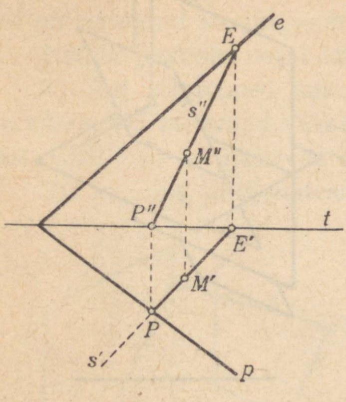
Joonis 75.

Teatavasti kõigi punkti M läbivate sirgete põhijoonised läbivad punkti M põhijoonist M' ja kui niisugune sirgjoon asetseb tasapinnal α, siis tema põhijälg asetseb tasapinna α põhijäljel p ning esijälg asetseb α esijäljel e.

Seepärast võib ülesande lahendamiseks asetada vabal valikul sirgjoone s põhijoonise s' läbi punkti M', lugeda sirge s asetsevaks tasapinnal α ja märkida selle põhjal tema põhijälje P ja esijälje põhijoonise E' (joonis 76); sidejooned juhatavad siis kätte sirgjoone s põhijälje esijoonise P'' (teljel) ja esijälje E (jälgjoonel e). Viimaseid läbib sirgjoone s esijoonis s''; sellel asetseva M'' juhatab kätte punktist M' tulev sidejoon.

7. Tasapinna horisontaalid, frontaalid ja langusjooned.

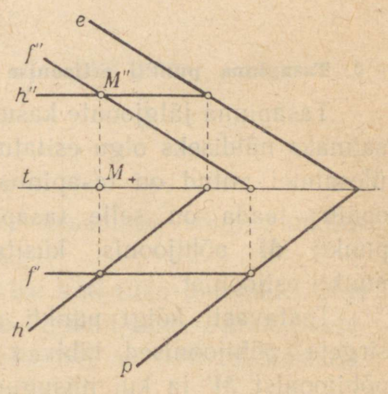
Tasapinna α mitmesugustest sirgjoontest väärivad eraldi uurimist



Joonis 76.

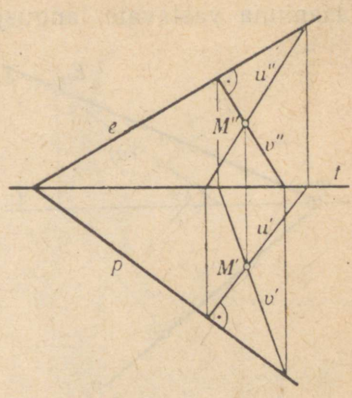
nivoojooned ja langusjooned kummagi projektsioonipinna suhtes. Tasapinna α sirgeid, mis on paralleelsed põhipinnaga, nimetatakse tasapinna α h o r i s o n t a a l i d e k s; esipinnaga paralleelseid sirgeid tasapinnal α nimetatakse aga α f r o n t a a l i d e k s. Teatavasti tasapinna nivoojoone normaalprojektsioon on tasapinna jälgjoonega paralleelne; nii osutub fro~~horiso~~ntaali esijoonis tasapinna esijäljega paralleelseks.

Olgu tasapind α antud oma jälgjoonte epüüriga ja olgu teada selle tasapinna mingi punkti M esijoonis M''; küsitagu punkti M läbivate nivoojoonte epüüri. Kohe saab joonestada punkti M läbiva frontaali esijoonist f'' — see läbib punkti M'' ja on paralleelne tasapinna esijäljega e (joonis 77). Joone f'' ja telje lõikepunkt on frontaali põhijälje esijoonis; ta määrab sidejoone, millel asetseb sama frontaali põhijälg; et frontaal on esipinnaga paralleelne, siis tema põhijoonis on teljega paralleelne. Üsna samadel põhimõtetel joonestatakse punkti M läbiva horisontaali epüür: horisontaali esijoonis h'' on teljega paralleelne, tema esijälg määrab sidejoone, mis näitab esijälje põhijoonist teljel, siit lähtub aga horisontaali põhijoonis h' paralleelsena tasapinna jälgjoonega p. Konstruktsiooni täpsuse kontrollimiseks vaadatakse, kas joonte f' ja h' lõikepunkt asetseb sirgel $M''M_+$. (Miks?)



Joonis 77.

Tasapinnal α, mille jälgjoonte epüür on antud, tahetakse joonestada punktist M väljuvate langusjoonte epüüri, kui on teada M' (joonis 78). Teatavasti tasapinna langusjoone normaalprojektsioon on tasapinna jäljega risti (§ 5, art. 10). Kui tähistada nõutud langusjoont põhipinna suhtes tähega u, siis u' läbib punkti M' ja $u' \perp p$; jälgpunktide järgi saab seejärel leida u'' ning märkida sellele M'' (sidejoone abil). Langusjoon esipinna suhtes leitakse analoogiliselt: tema esijoonis v'' läbib punkti M'' ja on risti jälgjoonega e, põhijoonis v' leitakse aga jälgpunktide kaudu.

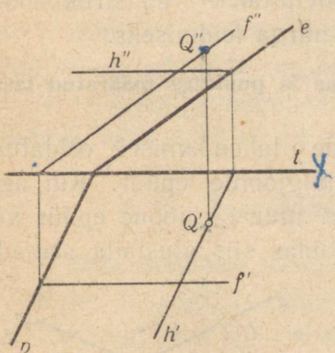


Joonis 78.

8. Punkti asetsemine tasapinnal või temast ühel või teisel pool.

Eelnenu rakendamisel lahendatakse hõlpsasti ülesanne: otsustada, kas antud punkt asetseb antud tasapinnal või on ta tasapinnast ülal- või allpool ja ees- või tagapool.

Teades tasapinna jälgjoonte epüüri, p, e ja t, ning punkti epüüri, Q' ja Q'', võib võtta vaatlusele neid tasapinna nivoojooni, milledega kohastikku nähakse punkti Q (joonis 79). Horisontaal h, mille kohal nähakse punkti Q põhipinnale vaadates, jääb punktist Q madalamale, sest Q'' asetseb ülalpool horisontaali esijoonist h''. Järelikult Q ei asetse tasapinnal, vaid on temast ülalpool. Analoogiliselt selgub, et frontaal, mille kohal nähakse punkti Q esipinnale vaadates, on punktist Q eespool; järelikult punkt jääb tasapinna taha.

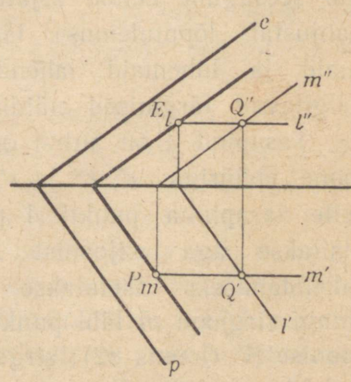


Joonis 79.

9. Tasapinna paralleeltasapind läbi antud punkti.

Üsna eelmise ülesande taoliselt lahendatakse ülesanne: asetada läbi antud punkti niisugune tasapind, mis on paralleelne antud tasapinnaga.

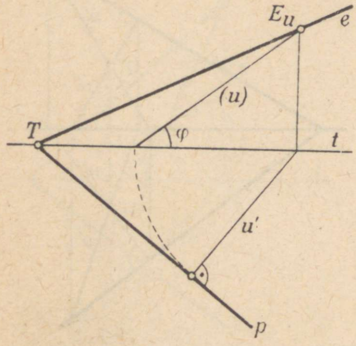
Läbi antud punkti Q asetatakse antud tasapinna jälgjoontega paralleelsed sirged $l \parallel p$ ja $m \parallel e$ (joonis 80). Otsitava tasapinna jälgjooned läbivad siis sirgjoonte l ja m jälgpunkte, järelikult selle tasapinna põhijälg läbib punkti P_m ja esijälg punkti E_l ning nad on paralleelsed antud tasapinna vastavate jälgedega. Täpsuse kontrollimist võimaldab tingimus, et jälgjooned peavad lõikuma teljel.



Joonis 80.

10. Tasapinna kaldenurk projektsioonipinna suhtes.

Tasapinna kaldenurgad projektsioonipindade suhtes on lihtsalt tasapinna vastavate langusjoonte kaldenurgad (§ 5, art. 10). Kui nende langusjoonte epüür on joonestatud (art. 7 lõpulõike kohaselt), jääb leida kummagi sirgjoone kaldenurk (§ 13 art. 5 võtteil).



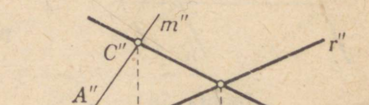
Joonis 81.

Joonis 81 näitab, kuidas tasapinna jälgjoonte epüüri järgi konstrueeritakse tasapinna ja põhipinna vaheline nurk φ. Tasapinna langusjoon põhipinna suhtes on valitud niisugusel kaugusel telgpunktist T, et joonis tuleks sobiva suurusega; langusjoone põhijoonis u' on risti tasapinna põhijäljega p. Langusjoone kujutamiskiirte pind uu' on pööratud esipinnale.

Lugejale soovitatakse konstruktsiooni kordamist sama tasapinna ja esipinna vahelise nurga leidmiseks.

11. Kahe lõikuva sirgega määratud või sirgjoone ja punktiga määratud tasapinna kasutamine ülesannete lahendamisel.

Mitmes eelmises artiklis on probleemide lahendamisel eeldatud, et tasapinda määravaks andmeks on tema jälgjoonte epüür. Kui aga tasapinda määravaks andmeks on tema kahe muu sirgjoone epüür või tema ühe sirgjoone ja ühe punkti epüür, kuidas siis alustada samade probleemide lahendamist? Võiks muidugi leida kõigepealt tasapinna jälgjooned ja alles siis asuda seatud probleemi lahendamisele tuntud võtteil. Väga tihti aga osutub seesugune eeltöö asjatuks ja koguni kahjustab lõpptulemuse täpsust. Lihtsamaid ja lühemaid lahendamisvõimalusi selgitavad järgmised näidised.

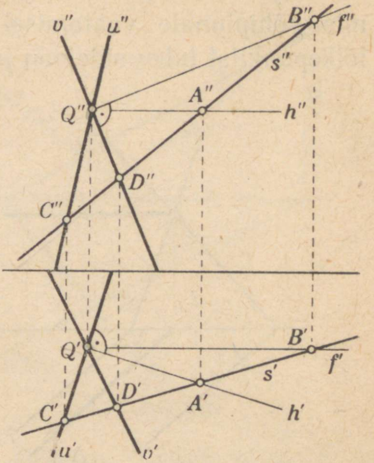


Joonis 82.

Tasapind α on antud oma kahe sirgjoone epüüriga: r', r'' ja s', s''; teatakse selle tasapinna punkti A põhijoonist A', otsitakse aga esijoonist A''. Ülesande lahendamiseks asetatakse tasapinna α mingi sirgjoon m läbi punkti A, joonestades lihtsalt m' läbi punkti põhijoonise A' (joonis 82); sirget m võib valida nii, et ta lõikab sirgeid r ja s. Lõikepunktide põhijoonistest B' ja C' viivad sidejooned esijoonisteni B''

ja C''. Et $B''C''$ on sirgjoone m esijoonis m'', siis sellel asetsebki otsitav A'' — seal, kuhu viib punktist A' tulev sidejoon.

Tasapind α on antud oma sirgjoone s ja punkti Q epüüriga; küsitakse seda punkti läbivate nivoojoonte ja langusjoonte epüüri. Horisontaali esijoonis h'' ja frontaali põhijoonis f' on teljega paralleelsed (joonis 83); punktid, kus need nivoojooned lõikavad sirgjoont s, on tähistatud A ja B; leitud A'' ja B' juhatavad sidejoonte kaudu kätte teised projektsioonid A' ja B''. Ilmselt $Q'A'$ ongi h' ja samuti $Q''B''$ on f''. Kui küsitud langusjooni tähistatakse nagu varemalt: langusjoont põhipinna suhtes tähega u ja langusjoont esipinna suhtes tähega v, siis on nüüd u' ja v'' kohe teada, sest $u' \perp h'$ ja $v'' \perp f''$. Jällegi langusjoonte ja sirge s lõikepunktide C ja D epüüri kaudu leitakse veel u'' ja v' ning ülesanne ongi lahendatud.

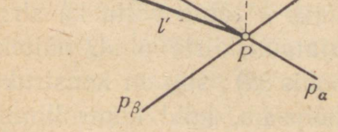


Joonis 83.

§ 15. Tasapinna lõikumine tasapinnaga ja sirgega.

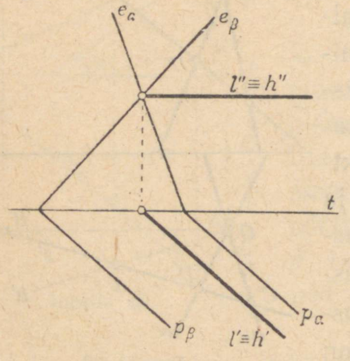
1. Kahe tasapinna lõikejoone leidmine.

Kahe tasapinna lõikejoone jälgpunktiks on teatavasti nende tasapindade jälgjoonte lõikepunkt. Kui tasapinnad α ja β on antud oma põhijälgedega p_α ja p_β ning esijälgedega e_α ja e_β, siis on tasapindade lõikejoon l oma kahe jälgpunktiga P ja E kohe määratud ja tema epüür joonestatakse tuntud viisil (joonis 84).

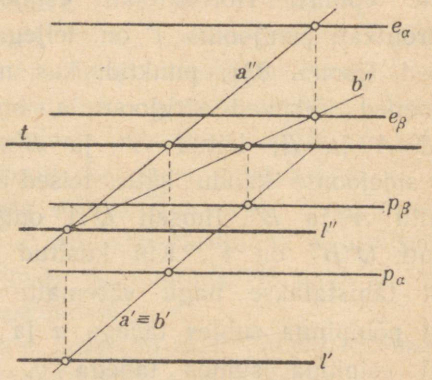


Joonis 84.

Eraldi järelemõtlemist nõuab tasapindade lõikejoone konstruktsioon, kui tasapindade ühed jälgjooned on paralleelsed, näiteks $p_\alpha \parallel p_\beta$ (joonis 85). Siis lõikejoon jääb ilma põhijäljeta, järelikult ta on põhipinnaga paralleelne (tasapinnad lõikuvad mööda horisontaali) ja seepärast tema esijoonis on teljega paralleelne. Erivõtet vajab lõikejoone leidmine, kui tasapindade kõik jäljed on paralleelsed (joonis 86). Siis saab kasutada tasapindade niisuguseid sirgeid — sirget a tasapinnal α ja sirget b tasapinnal β, millede ühed projektsioonid langevad ülestikku, aga teised projektsioonid muidugi lõikuvad. Nii on joonisel 86 kasutatud niisuguseid sirgeid a ja b, mis põhipinnale vaatamisel on näha kohastikku. Esijooniste a'' ja b'' lõikepunktist tulev sidejoon juhatab kätte ka sirgete a ja b lõikepunkti põhi-



Joonis 85.



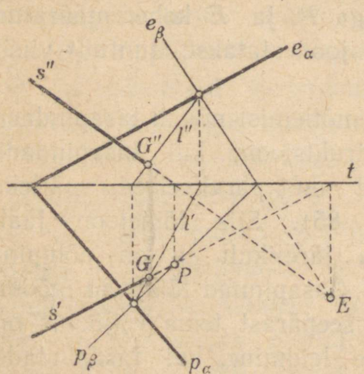
Joonis 86.

joonise. Et tasapindade lõikejoon on teljega paralleelne, on tema epüüriks lihtsalt teljega paralleelsete sirgete paar.

Kahel tasapinnal pole lõikejoont, kui nende põhijäljed on paralleelsed ja ka esijäljed on paralleelsed, kuid lõikavad põhijälgi; sest siis need tasapinnad on paralleelsed (§ 3, art. 4 lõpulõige).

2. Sirgjoone ja tasapinna lõikepunkt.

Sirgjoone s ja tasapinna α lõikepunkti G saamiseks asetatakse mingi tasapind β läbi sirge s; tasapindade α ja β lõikejoon on leitav eelmise artikli võtteil, see lõikejoon l aga lõikab sirget s nimelt punktis G (joonis 87). Et punkti G kumbki projektsioon saadakse eraldi, siis võimaldab ülesande lahendamise täpsust kontrollida punkti G epüüri sidejoon.

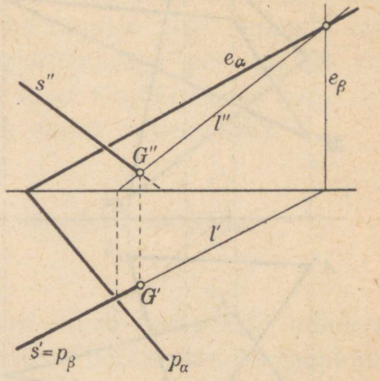


Joonis 87.

Abitasapinnaks β sobib võtta ka sirgjoone s üks kujutamiskiirte pind, näiteks tasapind ss' (joonis 88); siis on konstruktsioon märksa hõlpsam, kuid kontrollimisvõimalus langeb ära. Kontrolliks võib muidugi korrata ülesande lahendamist, kasutades teist kujutamiskiirte pinda ss''.

Eraldi läbimõtlemist vajab ülesanne

siis, kui antud sirge on teljega paralleelne (joonis 89). Kujutamiskiirte pind ss' lõikab tasapinda α nähtavasti mööda tema frontaali. Nii osutub tasapinna ja sirge lõikepunkti G esijoonis lihtsalt joonte f'' ja s'' lõikepunktiks, põhijoonis aga leitakse sidejoone kaudu.

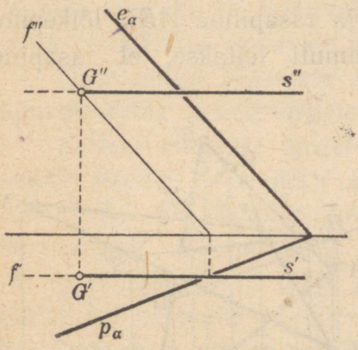


Joonis 88.

Olgu tähendatud, et kui sirge s on paralleelne tasapinnaga α, siis tasapind α ja sirget s läbiv tasapind β kas lõikuvad mööda sirge s paralleeli või osutuvad isekeskis paralleelseks.

3. Sirgjoont läbiv tasapind, mis on teise sirgega paralleelne.

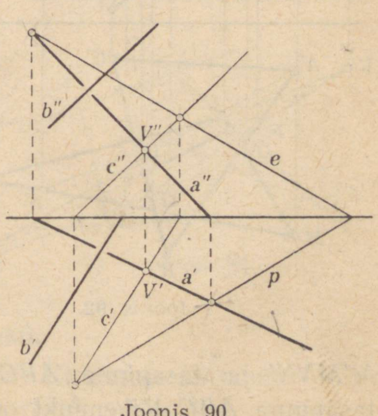
Kui nõutakse asetada läbi sirge a niisugune tasapind α, mis oleks paralleelne sirgega b, siis saab tasapinda α määrata kahe lõikuva sirgega: antud sirgega a ja tema üht vabalt valitud punkti V läbiva sirgega c, mis on paralleelne sirgega b (joonis 90). Kui tahetakse seejärel esitada nõutud tasapinda tema jälgjoonte p ja e kaudu, siis nende leidmine toimub lihtsalt § 14 art. 2 võttel; nii see joonisel 90 tehtud ongi.



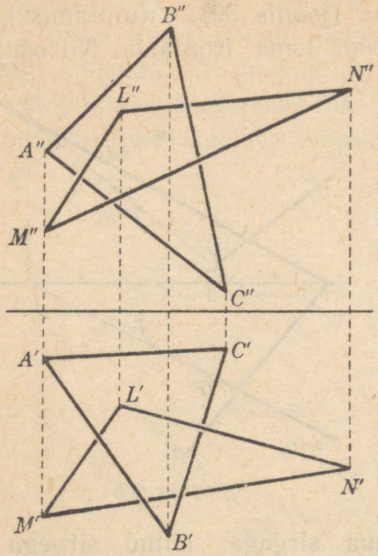
Joonis 89.

4. Erivõtteid kahe tasapinna lõikejoone leidmiseks.

Mõnikord on kaks tasapinda antud neil asetsevate punktikolmikute epüüri abil, näiteks kolmnurkade ABC ja LMN epüüriga (joonis 91). Kui nüüd nõutakse konstrueerida nende tasapindade lõikejoont, siis võib ülesande lahendamisel jälgjoonte kasutamine kujuneda ebasoodsaks: kummagi kolmnurga külgede jälgpunktid võivad sattuda väga kaugele, tasapindade jälgjooned aga võivad paisutada joonise lausa ülemääraselt suureks, sest põhijälgede lõikepunkt ja esijälgede lõikepunkt peaksid ka veel joonisele mahtuma, ning lõpuks abijoonte rohkus kahjustab alati lõpptulemuse täpsust.



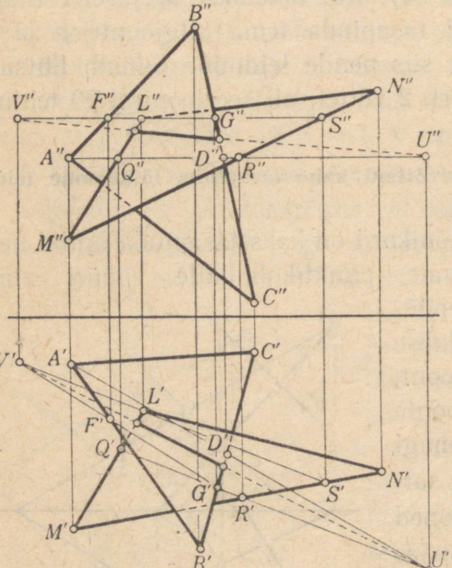
Joonis 90.



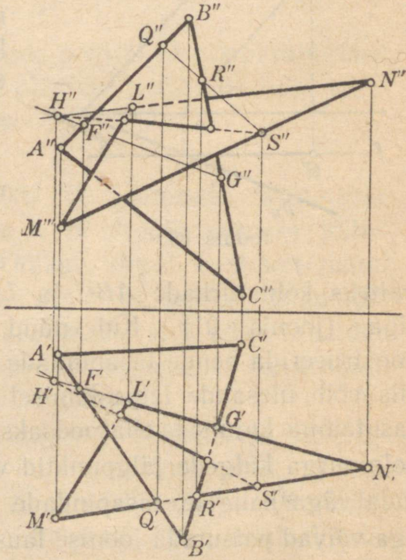
Joonis 91.

Märksa lühemaid ja hõlpsamaid võimalusi eesmärgile jõudmiseks on mitu. Võib näiteks panna kaks horisontaalpinda lõikama mõlemat tasapinda (joonis 92); horisontaalid *AD* ja *QR*, millede esijoonised langevad ühte, tulevad põhijoonisel nähtavale lahus ja määravad tasapindade lõikejoonest ühe punkti *U*; samuti horisontaalid *FG* ja *LS*, mis on teisel horisontaalpinnal, määravad lõikejoonest teise punkti *V*.

Ka saab ülesannet lahendada ühe kolmnurga külgede kujutamiskiirte pindade abil (joonis 93). Näiteks tasapind *L′LNN′* lõikab kolmnurga *ABC* tasapinda ilmselt mööda sirget *FG*, järelikult sirge *LN* ja tasapinna *ABC* lõikepunkt on *H*. Samuti leitakse, et tasapinna



Joonis 92.



Joonis 93.

M′MNN′ ja tasapinna *ABC* lõikejoon on *QR*, järelikult sirge *MN* ja tasapinna *ABC* lõikepunkt on *S*. Antud tasapindade lõikejoon ongi *HS*.

Olgu tähendatud, et jooniste 91, 92 ja 93 valmistamisel on kasutatud võtet (§ 13, art. 4), mille järgi otsustatakse, kumb kahest sirgest varjab teist. Ka tuleb märkida, et kolmnurga ABC tasapinna pealiskülg osutub ilmsesti tagaküljeks, sest esijoonisel on kolmnurga ABC tippude ringjärjestus vastupidine samade tippude ringjärjestusega põhijoonisel (tippude tähestikuline loetelu annab esijoonisel sama ringjärjestuse nagu kella numbrilaua arvude loetelu, põhijoonisel aga annab vastupidise).

§ 16. Sirgete ja tasapindade vahelised nurgad.

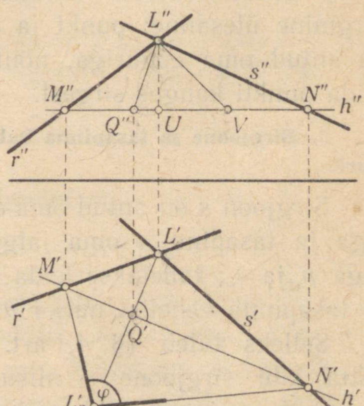
1. Kahe lõikuva sirgjoone vaheline nurk.

Kahe lõikuva sirgjoone vaheline nurk tuleb teatavasti nähtavale oma tõelises suuruses, kui nende sirgete tasapind pööratakse joonisepinnale tema jälgjoone ümber.

Et tasapinna jälgjoonte leidmine ja kasutamine teeb seejuures enamasti joonise suureks ja laialivalguvaks, on kohasem pöörata tasapind ümber tema nivoojoone vastavale nivoopinnale.

Olgu antud lõikuvate sirgjoonte r ja s epüür (joonis 94); tahetakse konstrueerida nende sirgete vahelist nurka φ.

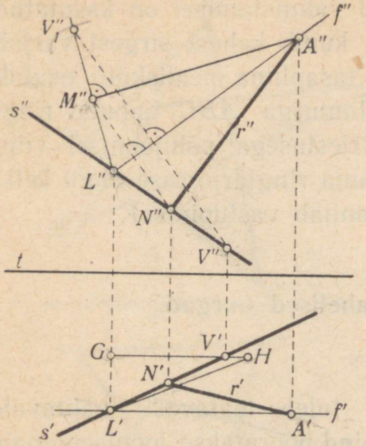
Selleks võetakse sirgete r ja s tasapinnal horisontaal h, mis ei läbi nende sirgete lõikepunkti L; h'' on teatavasti paralleelne epüüriteljega. Sidejoonte abil saab põhipinnal sirgete ja horisontaali lõikepunktide põhijoonised, M' ja N', ning neid läbiv sirge ongi h'. Kui nüüd tasapind rs pööratakse ümber horisontaali h nivoopinnale (horisontaalpinnale), siis punktid M ja N jäävad kohale, aga lõik LQ, mis on langusjoonel (seepärast siis $L'Q' \perp h'$), saab nähtavaks oma õiges pikkuses (lõigu pikkuse leidmine otspunktide L ja Q epüüri järgi toimub muidugi § 13 art. 6 järgi: $UV = L'Q'$ ja hüpotenuus $L''V$ ongi lõigu LV pikkune). Selle pikkuse abil saadakse punktile L uus koht L_2 (nii et $Q'L'_2 = L''V$) ja nurk $M'L'_2N'$ võrdubki otsitud nurgaga φ.



Joonis 94.

2. Sirgjoont lõikav ristsirge läbi antud punkti.

Antud on sirgjoone s ja punkti A epüür. Kuidas leida punkti A läbiv sirge r, mis lõikaks sirget s ja oleks temaga risti?



Joonis 95.

Selleks võib toimida järgmiselt: sirget s ja punkti A läbiv tasapind pööratakse ühe oma nivoojoone ümber nivoopinnale; seal joonestatakse küsitud ristsirge ja siis tuletatakse sellest sama ristsirge tema algasendis.

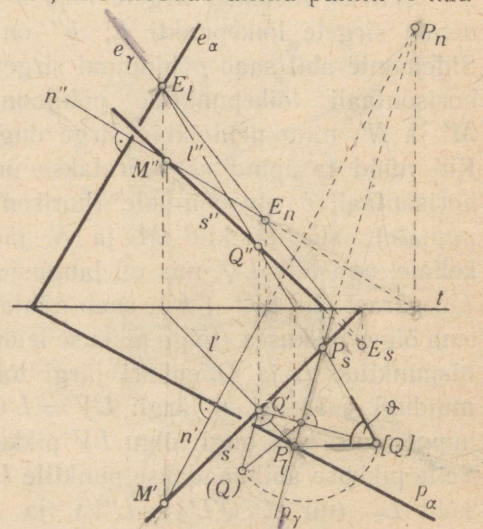
Tasapinna nivoojooneks sobib võtta näiteks punkti A läbiv frontaal f (joonis 95); see lõikab sirget s punktis L. Et joonestada sirge s uues asendis (frontaalpinnal), võetakse temal mingi punkt V väljaspool frontaali ja leitakse lõigu LV pikkus $L'H$ (nii et $GH = L''V''$). Siis saadakse punkti V uus asukoht V_1 (frontaalpinnal) tingimustest, et $V''V''_1 \perp f''$ ja $L''V''_1 = L'H$. Nüüd võetakse $A''M'' \perp L''V''_1$; et AM on otsitav ristsirge r frontaalpinnale pööratud asendis, siis M on sirgjoonte r ja s lõikepunkt sama asendi puhul. Algasendis aga selleks lõikepunktiks on sirgel s niisugune punkt N, et $M''N'' \perp f''$. Nii leitud AN ongi sirget s lõikav ristsirge r.

Et $A''M''$ esitab sirglõigu AN pikkust, mis mõõdab antud punkti A kaugust antud sirgest s, siis lahendub sama konstruktsiooni teostamisel järgmine ülesanne: punkt ja sirge on antud oma epüüriga, nõutakse leida punkti kaugus sirgest.

3. Sirgjoone ja tasapinna vaheline nurk.

Sirgjoon s on antud oma epüüriga ja tasapind α oma jälgjoontega p_α ja e_α; tahetakse leida sirge ja tasapinna vahelist nurka ϑ.

Selleks tuleb (§ 4, art. 12) võtta läbi sirgjoone s niisugune tasapind γ, mis on risti tasapinnaga α, ja leida tasapindade α ja γ lõikejoon l; siis nurk sirgjoonte s ja l vahel ongi ϑ.



Joonis 96.

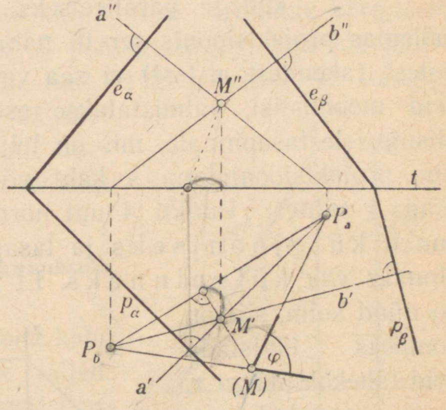
Tasapinna γ leidmiseks võetakse sirgel s mingi punkt M ja asetatakse temast läbi tasapinna α normaal n (joonis 96); teatavasti $n' \perp p_\alpha$ ja

$n'' \perp e_\alpha$ (§ 5, art. 12). Sirged s ja n määravadki tasapinna γ; tema jälgjooned p_γ ja e_γ läbivad sirgete s ja n jälgpunkte. Tasapindade α ja γ lõikejoon l joonestatakse tema jälgpunktide P_l ja E_l abil. Sirgjooned s ja l lõikuvad punktis Q. Nüüd pööratakse kolmnurk P_sQP põhipinnale ümber jälgjoone p_γ; mahapöörde joonestamiseks leitakse punkti Q kaugus jälgjoonest p_γ. Nurk $P_s\,[Q]P_l$ ongi ϑ.

4. Kahe tasapinna vaheline nurk.

Olgu tasapinnad α ja β antud oma jälgjoontega; soovitakse leida nende tasapindade vahelist nurka φ.

Lähtudes kahetahulise nurga suurust määrava joonnurga definitsioonist (§ 4, art. 1), tuleks võtta abitasapind γ, mis on risti tasapindade α ja β lõikejoonega, siis leida tasapindade α ja γ lõikejoon ning β ja γ lõikejoon ja lõpuks need lõikejooned pöörata joonisepinnale ümber γ jälgjoone; nii saaks soovitud joonnurk nähtavaks.



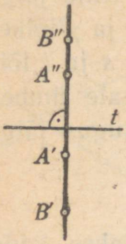
Joonis 97.

Märksa hõlpsam on aga leida kahe tasapinna vahelist nurka selle asjaolu põhjal, et tasapindade-vaheline nurk võrdub nende tasapindade normaalide vahelise nurgaga. Olgu läbi mingi punkti M asetatud tasapinna α-normaal a ja tasapinna β normaal b (joonis 97); teatavasti $a' \perp p_\alpha$ ja $a'' \perp e_\alpha$, samuti $b' \perp p_\beta$ ja $b'' \perp e_\beta$. Nüüd pööratakse kolmnurk P_aMP_b põhipinnale.

§ 17. Uus projektsioonipind.

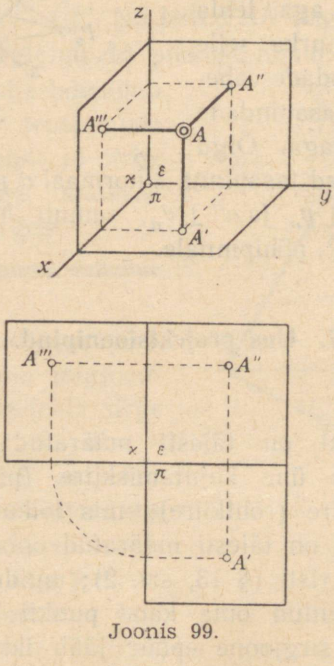
1. Kujundi külgjoonis.

Teatavasti ruumipunkt on täiesti määratud oma epüüriga, sest punkti põhijoonis määrab ühe kujutamiskiire (püstkiire) ja esijoonis määrab teise kujutamiskiire (rõhtkiire), mis lõikumisel annavadki selle ruumipunkti. Sirgjoon aga on täiesti määratud oma epüüriga ainult siis, kui ta ei ole epüüriteljega risti (§ 13, art. 2); muidugi saab epüüriteljega risti asetsev sirge olla antud oma kahe punkti epüüriga (A', A'' ja B', B'' joonisel 98), kuid sirgjoone epüür jääb ikkagi konstruktsioonide teostamisel kasutamiskõlbmatuks. Kõik üht punkti läbivad sirgjooned, mis on teljega risti, asetsevad telje risttasapinnal (§ 4, art. 8); et teljega risti

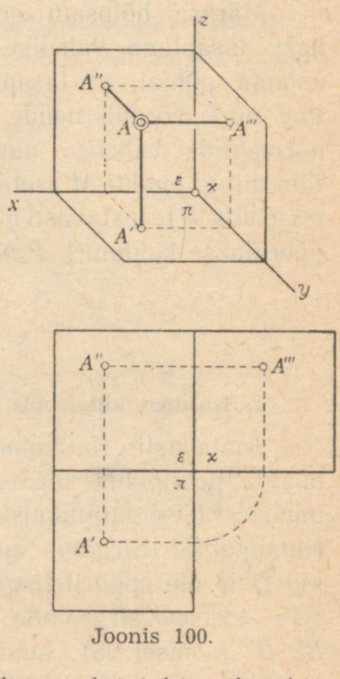


Joonis 98.

olev tasapind on ühtlasi mõlema projektsioonipinnaga risti (§ 4, art. 5), siis selle tasapinna kõigi punktide põhijoonised satuvad tasapinna põhijäljele ja esijoonised esijäljele — kummaski projektsioonis on see tasapind näha „serviti”. Kõik tasapinnalised kujundid, mis asetsevad niisugusel tasapinnal, jäävad kummaski projektsioonis nähtavale tulemata. See asjaolu jätab risttahukakujulise eseme (näiteks mingi hoone) epüüri puudulikuks, kui põhipinnaks võetakse eseme põhja tasapind ja esipind asetatakse ühtede külgtahkudega paralleelseks, sest siis teised külgtahud jäävad just mõlemas projektsioonis serviti näha — neil tahkudel asetsevaist moodustistest (akendest, ustest) ei saa veel midagi teada. Et nähtavale tuua ka neid moodustisi, valmistatakse esemest uus normaalprojektsioon ühele niisugusele tasapinnale, mis on teljega risti. Joonised 99 ja 100 näitavad uue projektsioonipinna $\varkappa$ kaht võimalikku asendit põhipinna π ja esipinna ε suhtes. Punkti A uut normaalprojektsiooni A''' nimetatakse selle punkti k ü l g j o o n i s e k s ja tasapinda $\varkappa$ nimetatakse külgjoonise tasapinnaks ehk k ü l g p i n n a k s. Et projektsioonipindade lõikejooni (telgi) on nüüd kolm, siis on kombeks tähistada neid tähekolmikuga x, y, z — vasakul asetseva külgpinna juhtumil (joonis 99) nimelt pindade $\varkappa$ ja π lõikejoont tähega x, pindade π ja ε lõikejoont tähega y ning ε ja $\varkappa$ lõikejoont tähega z, parempoolse külgpinna juhtumil (joonis 100) aga vastavalt pindade π ja ε lõikejoont tähega x, pindade $\varkappa$ ja π lõikejoont tähega y ja pindade ε ja $\varkappa$ lõikejoont tähega z. Jooniste 99 ja 100 alumine pool näitab, kuidas paigutatakse kummalgi juhtumil põhijoonis, esijoonis ja külgjoonis ühisele joonisepinnale. Mõtteline toiming on



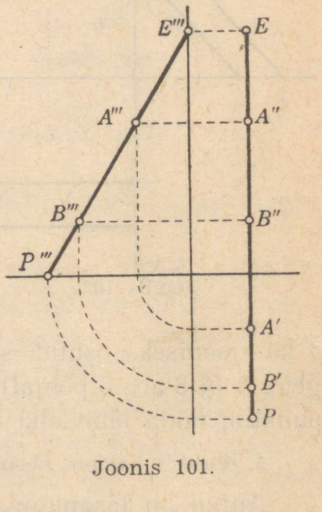
Joonis 99.



Joonis 100.

seejuures järgmine: lõigatakse tasapinnakolmik π, ε, $\varkappa$ piki pindade $\varkappa$ ja π lõikejoont lahti ja laotatakse joonisepinnale; nii saadakse asetada mõlemad püstjoonised (esijoonis ja külgjoonis) vaatleja suhtes püsti, kuna teisiti lahtilõikamisel jääks teine neist küliti või esijoonis läheks põhijoonise küljest eemale.

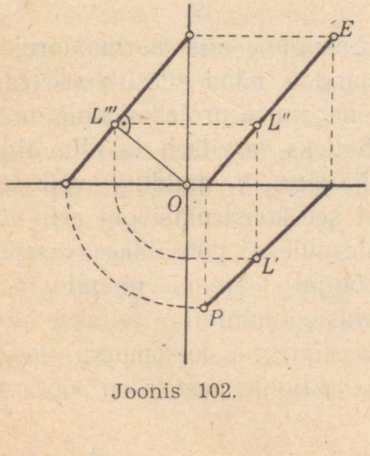
Nagu jooniste 99 ja 100 ülemisest poolest selgub, on punkti A külgjoonis A''' külgpinnal olevast rõhtteljest põhikvoodi AA' kaugusel ning püstteljest esikvoodi AA'' kaugusel. Jooniste alumisel poolel on ka näidatud, kuidas sellele vastavalt saab tuletada punkti külgjoonist põhijoonise ja esijoonise järgi: rõhtne sidejoon $A''A'''$ seab külgjoonise vajalikule kõrgusele (see, nagu öeldud, peab võrduma punkti A põhikvoodiga), aga üle lahtilõigatud telje viiv sidejoon hoolitseb selle eest, et külgjoonise A''' kaugus z-teljest võrduks punkti A esikvoodiga. Täpsust taotlev joonestaja muidugi joonestab ainult sidejoone $A''A'''$ ja kannab sellele esikvoodi lihtsalt mõõtesirkliga.



Joonis 101.

2. Epüüriteljega risti oleva sirgjoone jälgpunktide tuletamine.

Antud on teljega risti oleva sirgjoone kahe punkti epüür; tahetakse leida sirgjoone jäljed. Antud punktide külgjoonised määravad sirgjoone külgjoonise (joonis 101). Siis tuleb seal nähtavale see sirgjoone punkt P, mille põhikvoot on null, ja punkt E, mille esikvoot on null; leitud külgjooniste P''' ja E''' põhjal saabki nad üle kanda (sidejoonte abil) põhipinnale ja esipinnale, kuhu nad kuuluvad.



Joonis 102.

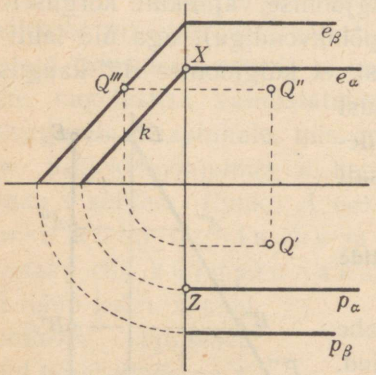
3. Sirgjoone kaugus epüüriteljest.

Sirgjoon on antud oma epüüriga; küsitakse sirgjoone seda punkti, mis on epüüriteljele lähimal, ja tema kaugust teljest.

Et punktide kaugusi teljest mõõdetakse mööda telje ristsirgeid, siis need kauguslõigud esinevad külgjoonisel oma tegelikus pikkuses; epüüritelg aga on külgpinnaga risti, järelikult tema külgjooniseks on punkt (joonisel 102 punkt O). Sirgjoone külgjoonis on valmistatud tema jälgpunktide P ja E abil. (Kui jälgpunktid asetsevad liiga kaugel, võib kasutada mistahes kaht punkti sel sirgel.) Teljele lähima punkti külgjooniseks osutub L''', ja lõik OL''' esitabki küsitud kaugust. Külgjoonise L''' põhjal tuletatakse tuntud viisil punkti L põhijoonis ja esijoonis.

4. Teljega paralleelse tasapinna paralleeltasapind läbi antud punkti.

Antud on teljega paralleelne tasapind α oma jälgjoontega p ja e ning ruumipunkt Q oma epüüriga. Nõutakse asetada läbi punkti Q tasapind β, mis oleks paralleelne tasapinnaga α, nimelt konstrueerida β jälgjooned.



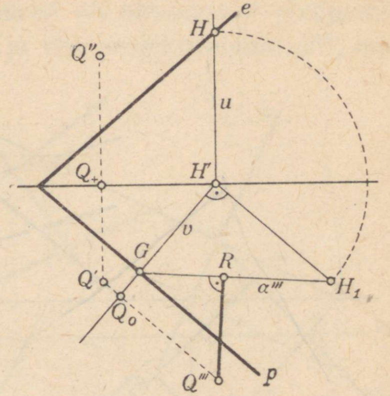
Joonis 103.

Ülesannet on lihtne lahendada külgjoonise abil (joonis 103). Külgpinnale vaatamisel on tasapind α näha serviti, tasapind β muidugi samuti. Tasapinna α külgjooniseks on seepärast tema jälgjoon külgpinnal, lühidalt — tema külgjälg; selle leidmiseks tuleb tähele panna tasapinna α neid punkte, mis asetsevad telgedel — α telgpunkte X ja Z. Külgpinnal ongi XZ arusaadavalt tasapinna α külgjälg k ja ühtlasi α külgjoonis. Kui nüüd tuletatakse punkti Q epüürist tuttaval viisil külgjoonis Q''', siis tasapinna β külgjooniseks osutub sirge, mis läbib punkti Q''' ja on paralleelne sirgega k (§ 3 art. 5 põhjal). Et see sirge on β külgjälg, siis määrab ta β telgpunktid, mida läbivadki nõutud jälgjooned p_β ja e_β.

5. Punkti kaugus tasapinnast.

Antud on tasapinna α jälgjooned ja ruumipunkti Q epüür; küsitakse punkti Q kaugust tasapinnast α.

Ülesande lahendamiseks sobib võtta niisugune uus normaalprojektsiooni pind, millele vaatamisel oleks tasapind α näha serviti; see tasapind τ ei ole enam lihtsalt külgpind, kuid ühe senise projektsioonipinnaga risti asetsevalt saab teda ometi valida. Selleks tarvitseb ta olla ainult risti vastava jälgjoonega, näiteks α põhijäljega p; muidugi võib teda asetada pealegi veel läbi punkti Q (ilma et see konstruktsiooni eriti lihtsustaks). Et kujutis tasapinnal τ nähtavale tuleks, pööratakse tasapind τ ümber vastava telje v (tasapinna τ põhijälje) joonisepinnale (joonis 104). Tasapinna α jälgjoon uuel projektsioonipinnal τ leitakse tasapindade α ja τ põhijälgede lõikepunkti G ja esijälgede lõikepunkti H abil: τ mahapööramisel ümber telje v jääb punkt G paigale, sest ta on pööramisteljel; punkt H, olles tasapinna τ esijäljel u, mis on (ruumis) risti põhijäljega v, tuleb mahapööramisel niisugusele kohale H_1, et $H'H_1 \perp v$ ja $H'H_1 = H'H$. Järelikult α on uues projektsioonis serviti näha sirgena H_1G, mis on seepärast tähistatud α'''. Punkti Q uus projektsioon Q''' saadakse punktist Q' tuleval sidejoonel, mis on risti teljega v ja millele mõõdetakse — teljest alates — punkti Q põhikvoot Q_+Q'', sest lõik Q_0Q''' peab esitama punkti Q kaugust põhipinnalt.



Joonis 104.

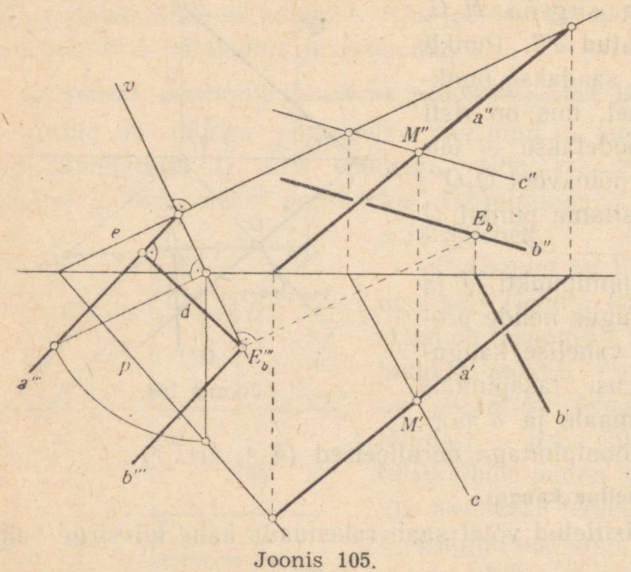
Nüüd ongi näha ruumipunkti Q ja tasapinna α vaheline kaugus nende projektsioonide Q''' ja α''' vahelise kaugusena $Q'''R$, sest kaugusi tasapinnalt mõõdetakse mööda normaale ja α normaalid on uue projektsioonipinnaga paralleelsed (§ 4, art. 7).

6. Kahe kiivsirge vaheline kaugus.

Eelmises artiklis käsitletud võtet saab rakendada kahe kiivsirge vahelise kauguse leidmisel.

Kahe sirge vaheliseks kauguseks nimetatakse lühima sirglõigu pikkust ühe sirge punktist teise sirge punktini. Kahe lõikuva sirgjoone vaheline kaugus on järelikult null ja kahe paralleelse sirgjoone vahelist kaugust mõõdetakse nende sirgjoonte tasapinnal mööda nende ristsirget (kahe paralleelse sirgjoone vahelised ristlõigud on teatavasti kõik üksteisega võrdsed). Kahe kiivsirge vahelist kaugust esitav sirglõik peab olema ka mõlema sirgega risti, sest definitsioon nõuab, et ta oleks lühim lõik, mis viib ühelt sirgjoonelt teisele. Kahel kiivsirgel on alati üksainus ühine ristsirge, mis lõikab mõlemat. Kõigepealt on selge, et kahe kiivsirge, a ja b, kõik ühised ristsirged on üksteisega paralleelsed, sest nad saadakse sirgjoone a risttasapindade lõikamisel sirgjoone b risttasapindadega. Edasi selgub, et ühiste ristsirgete hulgas on üksainus, mis lõikab mõlemat kiivsirget. Nimelt moodustavad kõik need a ja b ristsirged, mis lõikavad sirget a, ühe tasapinna ja see lõikab sirget b; lõikepunkti läbibki üksainus sellel tasapinnal olev ristsirge.

Teatavasti saab kaht kiivsirget alati asetada paralleelsete tasapindade paarile (§ 3, art. 4); niisuguste tasapindade vaheline kaugus osutubki kiivsirgete-vaheliseks kauguseks, sest kiivsirgete ühine ristjoon on nende tasapindade normaal. Kahe kiivsirge vahelise kauguse leidmiseks võib järelikult kasutada niisugust normaalprojektsiooni, et paralleelsete tasapindade paar, millel asetsevad antud kiivsirged, oleks serviti näha ja siis tasapindade normaali lõigud tuleksid nähtavale oma õiges pikkuses. Sel



Joonis 105.

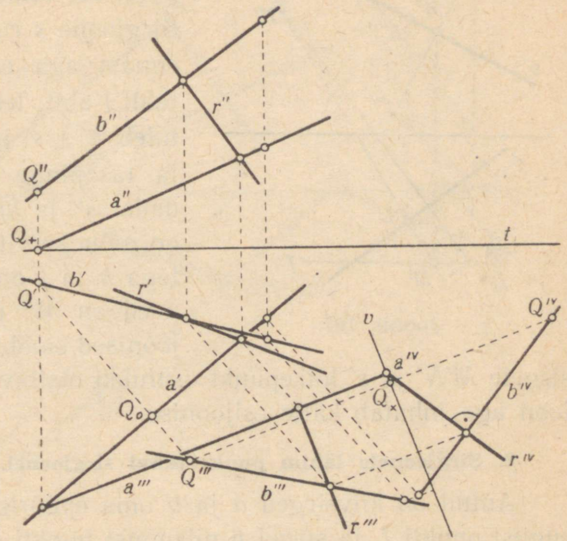
põhimõttel kahe kiivsirge vahelise kauguse leidmist näitabki joonis 105. Sirged a ja b on antud oma epüüriga. Läbi sirge a mingi punkti M asetatakse abisirge c paralleelsena sirgega b. Sirgete a ja c jälgpunktide abil saadakse tasapinna ac jälgjooned p ja e. Ühega neist jälgjoontest risti võetaksegi uus projektsioonipind τ; seekord on võetud $\tau \perp e$. Projektsioonipinna τ mahapöördel (ümber telje v) tuletatakse tuntud viisil tasapinna ac jälgjoonte p ja e kaudu uus jälg; et see on sirge a uus projektsioon (sest tasapind ac on nüüd sirgjoone a kujutamiskiirte pind), siis on ta tähistatud a'''. Sirgjoone b uus projektsioon b''' on paralleelne sirgega a''' ja leitakse b esijälje E_b abil. Projektsioonide a''' ja b''' vaheline kaugus d võrdub kiivsirgete a ja b vahelise kaugusega ja ta ongi ülesande lahendiks.

7. Kaht kiivsirget lõikav ristsirge.

Kaht kiivsirget lõikav ristsirge ise polnud eelmises artiklis tarvilik ja jäigi seal leidmata. Ka teda saab leida uute normaalprojektsioonide abil, kuigi konstruktsioon on eelmisest üsna erinev. Nimelt valmistatakse nüüd kaks uut projektsiooni — üks on vahesammuks ja teine on juba niisugune normaalprojektsioon, kus üks kiivsirgeist osutub oma kujutamiskiireks ja seetõttu annab kujutiseks punkti; selle sirge ristlõigud tulevad siis projektsioonis nähtavale õiges pikkuses. Kiivsirgete ristlõikaja aga on see esimese sirgjoone ristsirge, mis viib esimeselt sirgelt teise sirge lähimasse punkti.

Joonisel 106 on andmeteks kiivsirgete a ja b epüür. Uueks (kolmandaks) projektsioonipinnaks võetakse põhipinnaga risti olev tasapind, millel asetseb sirge a; et see on tasapind aa', siis teljeks osutub a'. Sirgjoon a

ise on oma kolmandaks projektsiooniks, mistõttu a mahapööramisel saadaksegi a'''. Sirgjoone b kolmas projektsioon on määratud tema mingi kahe punkti kaudu; mõlema tuletamine epüürist on ühesugune: põhijoonisest Q' läheb sidejoon $Q'Q'''$ risti teljega a' ja viib projektsioonini Q''', mis on teljest põhikvoodi kaugusel (seega $Q_0Q''' = Q_+Q''$).



Joonis 106.

Neljas projektsioonipind võetakse risti sirgega a. Sirgjoone a projektsiooniks tuleb siis üksainus punkt; see asetseb uuel teljel v ja on tähistatud a^{IV}. Sirgjoone b projektsioon b^{IV} leitakse jällegi kahe punkti kaudu, millede tuletamine on ühesugune: $Q'''Q^{IV} \perp v$ ja $Q_\times Q^{IV} = Q_0Q'$, sest $Q_\times Q^{IV}$ tähendab punkti Q kaugust kolmandast projektsioonipinnast, see kaugus aga esineb põhijoonisel õiges suuruses.

Neljandas projektsioonis saab juba joonestada kiivsirgete ristlõikajat r, nimelt $r^{IV} \perp b^{IV}$. Sirgete r ja b lõikepunkti kolmas projektsioon saadakse siis lihtsalt vastava sidejoone abil, kolmandast esimene ja esimesest teine projektsioon samuti. Sirgjoone r kolmas projektsioon joonestatakse selle asjaolu põhjal, et $r''' \perp a'''$ (§ 4 art. 2 ja 8 järgi). Seejärel on sirgete r ja a lõikepunkti võimalik põhijoonises ja esijoonises tuletada jällegi kohe sidejoonte abil.

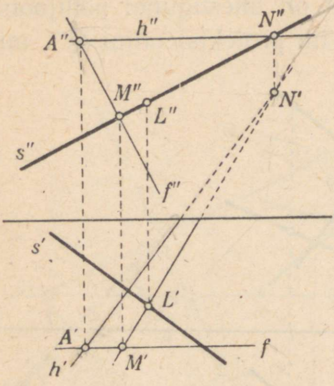
Ülesande lahendiks saadud sirgjoone r epüüri saab kontrollida mitmeti: võib epüürilt tuletada sirgete a ja b vahelise ristlõigu pikkuse ja võrrelda neljandas projektsioonis leiduva pikkusega, võib aga ka tuletada kontrolliks sirgete r'' ja t lõikepunkti (sirge r põhijälje kolmanda projektsiooni kaudu).

§ 18. Täiendavaid võtteid ja rakendamisnäiteid.

1. Antud punktile lähim punkt antud sirgjoonel.

On antud punkti A ja sirgjoone s epüür. Tarvis on leida sirgjoonel s see punkt L, mis on kõige lähemal punktile A.

Ülesannet saab lahendada mitmeti; võib näiteks kasutada sirgjoone *s* ja punkti *A* poolt määratud tasapinda, nagu § 16 art. 2. Lühemat ja hõlpsamat lahendust näitab joonis 107. Läbi punkti *A* asetatakse sirgele *s* risttasapind; see lõikabki sirget *s* nõutud punktis *L*. Sirgjoone *s* risttasapind läbi punkti *A* lubab ennast aga esitada horisontaali *h* ja frontaali *f* abil; teatavasti (§ 4 art. 2 ja 8 järgi) tuleb $h' \perp s'$ ja $f'' \perp s''$. Seejärel on sirge *s* ja tasapinna *hf* lõikepunkt leitud tasapindade ss'' ja *hf* lõikejoone *MN* kaudu: et ss'' on näha serviti, siis tema lõikepunktid sirgetega *h* ja *f* on esijoonisel kohe nähtavad — need on M'' ja N''; samade punktide põhijoonised saadakse sidejoonte kaudu ning siis sirgete $M'N'$ ja s' lõikepunkt osutubki otsitava punkti *L* põhijooniseks, sidejoon aga juhatab kätte esijoonise.



Joonis 107.

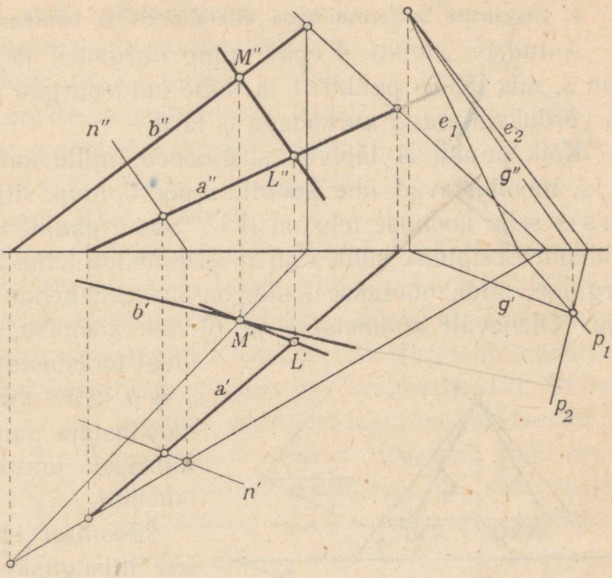
2. Sirgjoonele lähim punkt teisel sirgjoonel.

Antud on kiivsirged *a* ja *b* oma epüüriga. Küsitakse sirgjoonel *a* niisugust punkti *L* ja sirgel *b* niisugust punkti *M*, mis on teineteisele lähimal.

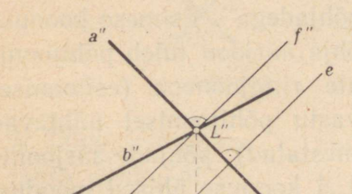
Teatavasti asetseb küsitud punktide vaheline lõik risti mõlema antud sirgega (§ 17, art. 6). Tema leidmine uute projektsioonipindade abil on tuttav eelmisest paragrahvist. Aga sama ülesannet saab lahendada ka mitmel muul viisil. Et leida esmalt mingisugune sirgete *a* ja *b* ühine ristjoon, võib kasutada seda asjaolu, et kahe kiivsirgega paralleelse tasapinna normaal ongi nendega risti; kui võetakse sirgele *b* paralleelne sirge *c*, mis lõikab sirget *a*, siis ka tasapinna *ac* normaal on risti sirgetega *a* ja *b*. Nii võiks ülesande lahendamist alustada § 17 art. 6 taoliselt ja tuletada (nagu joonisel 105) tasapinna *ac* jälgjooned. Tasapinna normaali projektsioonid on teatavasti jälgjoontega risti; kui nüüd valida normaal *n* nõnda, et ta lõikab sirget *a*, siis tasapinna *an* ja sirgjoone *b* lõikepunkt osutubki küsitud punktiks *M*. Jääb ainult veel joonestada *ML* paralleelsena sirgega *n*. On soovitav, et lugeja ise teostaks ülesande lahendamise kirjeldatud viisil.

Käsitletud ülesande lahendamise käik koosneb ilmsesti kahest osast: 1) kiivsirgete ühise ristsihi leidmine ja 2) ristsihilise sirge paigutamine niisugusele kohale, et ta lõikaks kiivsirgeid. Juhuslikkude andmetega valmistatav joonis aga võib kattuda lahendamiskäigu esimese osa teostamisel juba tihedalt joontega just seal, kuhu tuleb veel hulk jooni tõmmata lahendamiskäigu jätkamisel. Muidugi kahjustab see joonise loetavust ja tulemuste täpsust. Mitmesammuliste lahenduste kohta tuleb eriti soovitada, et iga sammu sooritamiseks vajalikku joonise osa püütaks muudest osadest eraldada, lausa lahku paigutada.

Ses mõttes pakub ülalmainitud ülesande lahendamisel häid võimalusi järgmine arutelu: kiivsirgete a ja b ühist ristsihti osutab sirge a mistahes risttasapinna ja sirge b mistahes risttasapinna lõikejoon; nende risttasapindade jälgjooned võib aga paigutada kuhugi joonise äärele, kus muidu koht tühjaks jääks, ja seal leidagi lõikejoone. Nii paigutatult esitab ülesande lahendamist joonis 108: p_1 ja e_1 on sirgjoone a risttasapinna jäljed, p_2 ja e_2 on b risttasapinna jäljed; g on tasapindade lõikejoon. Lahendamine jätkub siis tuntud põhimõttel: $n \parallel g$; tasapinna an ja sirge b lõikepunkt on M (leitakse § 15 art. 4 võttel); $ML \parallel g$.



Joonis 108.



Joonis 109.

3. Lõikuvate ristsirgete epüür.

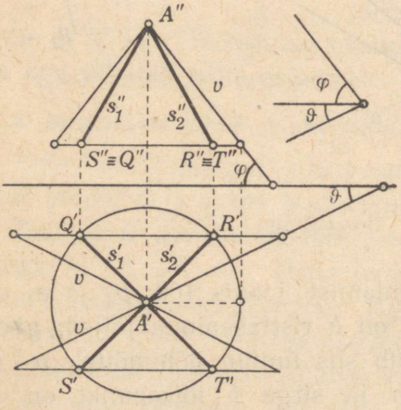
Antud on sirgjoone a epüür ja sirge b põhijoonis. Teades, et sirged a ja b lõikuvad ja on teineteisega risti, joonestada sirge b esijoonis.

Sirgete a ja b lõikepunkti põhijoonisest L' saab sidejoone abil märkida sirgel a'' ka lõikepunkti esijoonise L''. Et sirge b on sellel sirgjoone a risttasapinnal, mis läbib punkti L, siis võib sirgjoone b jäljed leida selle tasapinna jälgjoontelt. Jälgjoonte leidmiseks võib kasutada punktist L lähtuvat frontaali f (joonis 109); läbi frontaali põhijälgpunkti lähebki tasapinna põhijälg p (teatavasti $p \perp a'$) ja sellel peab asetsema sirgjoone b põhijälg P. Järelikult $L''P''$ ongi b''.

4. Sirgjoone leidmine tema ühe punkti ja kaldenurkade järgi.

Antud on punkti A epüür ning nurgad φ ja ϑ. Tarvis on leida sirgjoon s, mis läbiks punkti A ja mille kaldenurgad projektsioonipindade suhtes võrduksid antud nurkadega φ ja ϑ.

Kõik punkti A läbivad sirgjooned, mille kaldenurk põhipinna suhtes on φ, moodustavad ühe koonilise pöördpinna, niinimetatud kaldekoonuse; selle koonuse telg on AA'. Sama punkti A läbivaist sirgeist, mille kaldenurk esipinna suhtes on ϑ, moodustub teine kaldekoonus teljega AA''. Sirgjoon, mida nõutakse leida, on ilmsesti nende koonuste ühine moodustaja. Olenevalt andmeist φ ja ϑ võib koonustel tulla kas neli või kaks ühist moodustajat (vastavalt sellele, kas $\varphi + \vartheta < 90^0$ või $\varphi + \vartheta = 90^0$) või ühine moodustaja puududa (kui $\varphi + \vartheta > 90^0$); viimasel juhtumil ülesandel ei olegi lahendit.



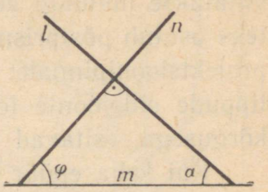
Joonis 110.

Joonisel 110 esitatakse kaldekoonused niisuguste moodustajate abil, mis on ühe projektsioonipinnaga paralleelsed. Et leida koonuste ühiseid moodustajaid, mõõdetakse kummagi koonuse moodustajaile võrdsed lõigud (vabalt valitud pikkusega v) ja varustatakse siis koonused „põhjadega". Esimese koonuse kummagi põhja äärjoon tuleb põhijoonisel nähtavale ringjoonena (esijoonisel aga lõiguna), teise koonuse põhjad on seevastu põhijoonisel nähtavad lõikudena (ja esijoonisel ringina, mida pole joonestatud); põhjade äärjoonte lõikepunktidesse Q, R, S ja T tulevadki tipust A koonuse ühised moodustajad. Järelikult AQ, AR, AS ja AT osutuvad ülesande lahenditeks.

5. Tasapinna leidmine tema ühe punkti ja kaldenurkade järgi.

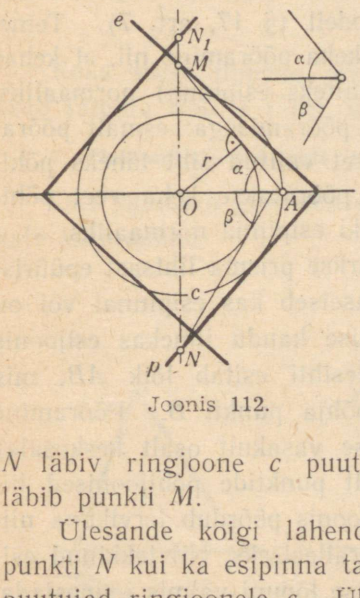
Antud on nurgad α ja β ning esipinna mingi punkt M. Küsitakse niisugust tasapinda, mis läbib punkti M ja mille kaldenurk põhipinna suhtes on α ja kaldenurk esipinna suhtes on β.

Ülesannet saab ilmsesti taandada eelmisele artiklile, sest tasapinna jäljed saab kohe joonestada, niipea kui on teada tasapinna normaali epüür; tasapinna normaali kaldenurgad aga on üsna lihtsalt määratud selle tasapinna kaldenurkade kaudu: tarvitseb ainult kujutleda tasapinna langusjoont l ja normaali n, mis teineteist lõikavad, ja joonestada nad ühes oma kaldenurkadega (joonis 111, kus m on põhipinna sirge, millest nurki mõõdetakse), — on ilmne, et tasapinna kaldenurga ja normaali kaldenurga summa on täisnurk $(\alpha + \varphi = 90^0)$. Järelikult võib käesoleva ülesande lahendamiseks leida esmalt mingi sirge, mis moodustab projektsioonipindadega nurgad $90^0 - \alpha$ ja $90^0 - \beta$, ning siis asetada sellele risttasapinna läbi punkti M.



Joonis 111.

Ülesannet saab huvitavalt lahendada ka teisiti. Kõik tasapinnad, mis läbivad punkti M ja moodustavad põhipinnaga nurga α, osutuvad ühe kaldekoonuse puutuvtasapindadeks, ja tasapindade langusjooned, mis läbivad punkti M, on selle kaldekoonuse moodustajad. Kaldekoonuse jälgjooneks põhipinnal on ringjoon c, mille keskpunkt on O ja raadius on OA (joonis 112). Et kaldekoonuse puutuvtasapinnad asetsevad kõik punktist O võrdsel kaugusel (mis on joonisel näidatud tähega r), siis osutuvad nad ühtlasi ühe kera puutuvtasapindadeks (kera raadius ongi r). Sama kera puutuvtasapindade hulgas leidub ka niisuguseid, mis moodustavad esipinnaga nurga β; ilmselt läbivad nad kõik punkti N, mis asetseb põhipinnal ja jääb keraga kokkupuutuvate langusjoonte koonuse tipuks.



Joonis 112.

Ülesande lahendiks on järelikult punkte M ja N läbiv puutuvtasapind kerale, mille keskpunkt on O ja raadius on r. Tasapinna põhijäljeks osutub punkti N läbiv ringjoone c puutuja p; esijälgjoon lõikab teda epüüriteljel ja läbib punkti M.

Ülesande kõigi lahendite kätteleidmiseks tuleb kasutada niihästi punkti N kui ka esipinna taga asetsevat punkti N_1 ja mõlemast tõmmata puutujad ringjoonele c. Ülesandel on ülimalt neli lahendit (nimelt siis neli, kui $\alpha + \beta > 90^0$), mõnikord aga kaks (kui $\alpha + \beta = 90^0$) ja mõnikord lahendit ei olegi (kui $\alpha + \beta < 90^0$); vastavalt sellele asetsevad siis punktid N ja N_1 kas väljaspool ringi või ringjoonel c või ringi sees.

6. Kujundi pööramine ümber projektsioonipinna normaali.

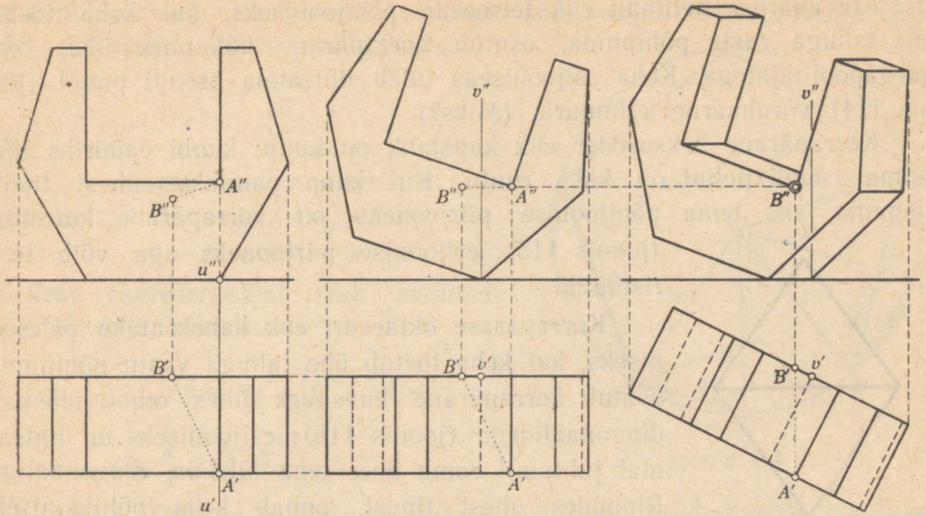
Kehade kujutamisel seatakse mõnikord ainsaks nõudeks, et joonist oleks võimalikult kerge valmistada nende andmete järgi, mis määravad keha kuju ja suuruse. Niisuguse nõude kohaselt valmistatud joonisest on jällegi kerge välja lugeda keha määramisandmeid. Kujutamise hõlpsus saavutatakse muidugi keha asendi valikuga projektsioonipindade suhtes. Näiteks osutub püstprisma epüür eriti lihtsaks, kui prisma põhi pannakse ühele projektsioonipinnale: see põhi ongi siis prisma üks projektsioon, kuna tippude sidejoonte lõigud, mis algavad epüüriteljelt ja võrduvad prisma kõrgusega, esitavad prisma külgservade teist projektsiooni.

Kui keha epüür on valmistatud hõlbustava asendi puhul, siis kumbki projektsioon eraldi jääb paratamatult ilmetuks keha kujutiseks, sest muist keha andmeid on leidnud kasutamist ainult ühe projektsiooni, muist ainult teise projektsiooni valmistamisel.

Mõnikord aga nõutakse ka keha niisugust epüüri, et üks projektsioonidest oleks võimalikult ilmekas. Selle nõude täitmiseks tuleb osata seada keha ühe projektsioonipinna suhtes nõnda, et kujutamiskiireks osutuks mingi sobivalt valitud vaatesiht kehas. Kui kehast on esialgu valmistatud võimalikult lihtne epüür, siis saadakse valitud vaatesiht kujutamiskiireks uute projektsioonipindade võtmise meetodeil (§ 17, art. 7). Teine, samaväärne võte eesmärgi saavutamiseks on keha pööramine nii, et kehas valitud siht läheks ühe projektsioonipinna (näiteks esipinna) normaaliks. On selge, et see saavutatakse kahe lihtsama pööramisega: esmalt pööratakse keha esipinna normaali ümber nõnda, et valitud siht läheks põhipinnaga paralleelseks, ning sellest asendist pööratakse keha veel põhipinna normaali ümber, kuni valitud siht saabki esipinna normaaliks.

Joonisel 113 näidatakse, kuidas kümmenurkse prisma lihtsast epüürist (joonise vasakpoolne osa, kus prisma põhi asetseb kas esipinnal või on esipinnaga paralleelne) tuletub kahe pööramise kaudu ilmekas esijoonis (joonise parempoolses osas). Valitud vaatesihti esitab lõik AB, mis küünib eespoolse põhja tipust A tagumise põhja punkti B. Pööramine ümber esipinna normaali u (üleminek joonise vasakult osalt keskosale) jätab punktide esikvoodid endisteks, järelikult punktide põhijoonised liiguvad mööda epüüritelje paralleele; keha esijoonis pöördub tervikuna niisuguse nurga võrra, et $A''B''$ saab teljega paralleelseks. Nii tekkinud esijoonise järgi saab sidejoonte abil ka põhijoonise lõpuni valmis joonestada.

Teisel pööramisel, ümber põhipinna normaali v (üleminek joonise keskosalt parempoolsele osale), jätab punktide põhikvoodid endisteks, järelikult liiguvad nüüd punktide esijoonised mööda epüüritelje paralleele; keha põhijoonis aga pöördub tervikuna niisuguse nurga võrra, et $A'B'$ läheb epüüriteljega risti. Keha uus põhijoonis võimaldab seejärel jällegi sidejoonte abil ka keha esijoonist valmis joonestada.

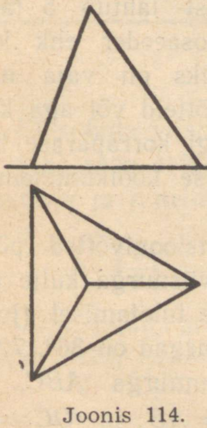


Joonis 113.

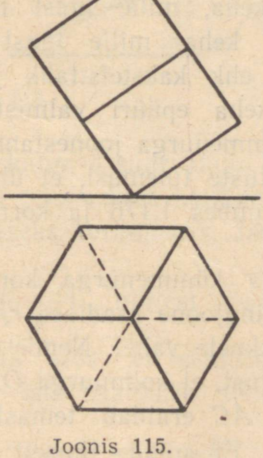
Keha kõigi tippude projektsioonide tuletamist kummalgi pööramisel saab jälgida tipu *A* järgi, mille kõik projektsioonid on esitatud.

7. Platooniliste tahukate epüürid.

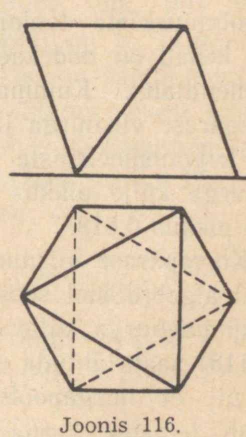
Üks kujutava geomeetria klassikalisi ülesandeid on platooniliste tahukate kujutamine.



Joonis 114.



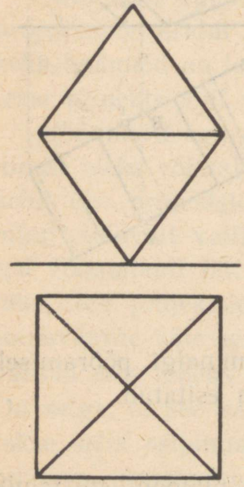
Joonis 115.



Joonis 116.

Korrapärase nelitahu ehk tetraeedri põhijooniseks, kui keha toetub ühe tahuga vastu põhipinda, osutub korrapärane kolmnurk ühes oma nurgapoolitajatega. Keha esijooniseks tuleb lihtsaima asendi puhul (joonis 114) võrdhaarne kolmnurk. (Miks?)

Korrapärane heksaeeder ehk kuustahk on kuup; kuubi epüüriks lihtsaima asendi puhul on kaks ruutu. Kui kuup pannakse ühest tipust rippuma, siis tema põhijoonise piirjooneks on korrapärane kuusnurk (joonis 115), esijoonise piirjooneks aga võib tulla ristkülik.



Joonis 117.

Korrapärase oktaeedri ehk kaheksatahu põhijooniseks, kui keha toetub ühe tahuga vastu põhipinda, osutub korrapärane kuusnurk ühes oma lühemate diagonaalidega (joonis 116); esijooniseks on lihtsaimal juhtumil romb ühes oma lühema diagonaaliga. Rippudes ühest tipust, annab keha põhijooniseks ruudu ühes diagonaalidega (joonis 117).

Et tahuka igast tipust lähtub vähemalt kolm tahku ja et kumera tahuka iga tipu ümber peab tulema tahkudel asetsevate nurkade summa väiksem kui 360°, siis saab platoonilist tahukat koostada ainult kolmnurkadest või nelinurkadest või viisnurkadest. Kolmnurkseid tahke võib ühest tipust lähtuda kas 3 või 4 või 5, nelinurkseid tahke aga ainult 3, viisnurkseid samuti 3. Järelikult võiks olla peale korrapärase tetraeedri, heksaeedri ja oktaeedri veel ainult kaks platoonilist tahukat: 1) viisnurksete tahkudega keha, mille igast tipust lähtub 3 tahku, ja 2) kolmnurksete tahkudega keha, mille igast tipust lähtub 5 tahku; need kehad on dodekaeeder ehk kaksteisttahk ja ikosaeeder ehk .kakskümmendtahk. Kummagi keha epüüri valmistamiseks on vaja tunda korrapärase viisnurga ja kümmenurga joonestamise võtteid või aga kasutada trigonomeetriliste arvutuste tulemusi, et ühikringi korrapärase kõõlviisnurga külje pikkus on umbes 1,176 ja korrapärase kõõlkümmenurga külje pikkus 0,618.

Korrapärase viisnurga ja kümmenurga konstruktsioonivõtted põhjenevad algebralistel seostel ringjoone raadiuse r, kõõlviisnurga külje v ja kõõlkümmenurga külje k pikkuste vahel. Nende seoste tuletamisel (joonisel 118) saab lähtuda asjaolust, et kolmnurga OAB nurgad on 36°, 72° ja 72°, nii et nurgapoolitaja AC eraldab temast kolmnurga ABC, mis osutub temaga sarnaseks. Et nüüd ilmselt $AC = AB$ ja $OC = AC$, siis $BC = r - k$. Seega saab sarnaste kolmnurkade küljepikkuste võrret $AB : OA = BC : AB$ kirjutada kujul

$$\frac{k}{r} = \frac{r-k}{k}$$

ehk

$$k^2 + rk - r^2 = 0$$

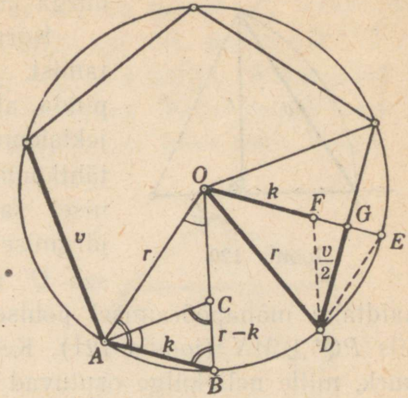
ehk ka

$$r^2 - kr - k^2 = 0.$$

Sellest ruutvõrrandist võib avaldada kas k või r, nimelt:

$$k = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + r^2},$$

$$r = \frac{k}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + k^2}.$$

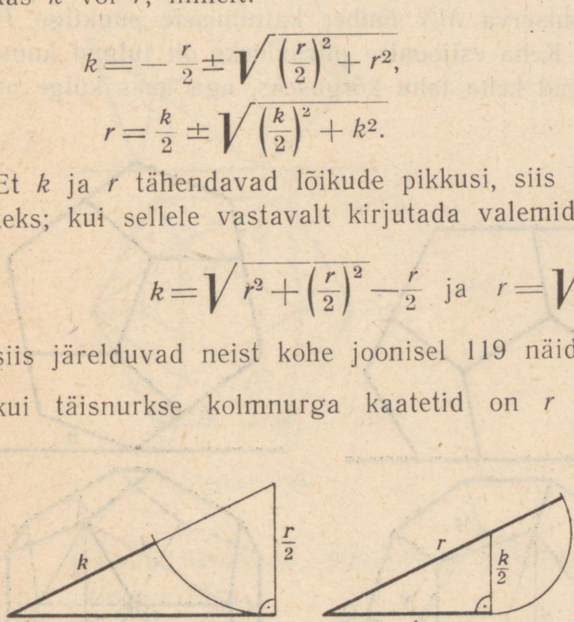


Joonis 118.

Et k ja r tähendavad lõikude pikkusi, siis neid tuleb lugeda positiivseteks; kui sellele vastavalt kirjutada valemid järgmiselt:

$$k = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} - \frac{r}{2} \quad \text{ja} \quad r = \sqrt{k^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2} + \frac{k}{2},$$

siis järelduvad neist kohe joonisel 119 näidatud konstruktsioonid. Sest kui täisnurkse kolmnurga kaatetid on r ja $\frac{r}{2}$, siis hüpotenuus ongi $\sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2}$; lahutades sellest $\frac{r}{2}$, saadakse just niisugune lõik, mis valemi põhjal on k. Teine konstruktsioon samal joonisel on järeldatav teisest valemist.



Joonis 119.

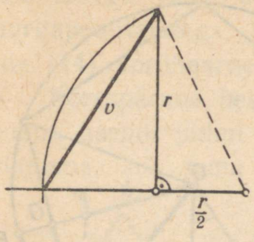
Et siduda viisnurga külge v suurustega r ja k, võib kasutada (jooniselt 118) seda asjaolu, et täisnurkses kolmnurgas ODG osutub kaatet OG lõikude k ja r aritmeetiliseks keskmiseks. Järelikult

$$\left(\frac{v}{2}\right)^2 = r^2 - \left(\frac{k+r}{2}\right)^2, \text{ millest } v^2 = 3r^2 - k^2 - 2kr.$$

Kui siin nüüd arvestada seda, et eelmise võrrandi $r^2 - kr - k^2 = 0$ põhjal $-kr = k^2 - r^2$, siis saadakse $v^2 = 3r^2 - k^2 + 2k^2 - 2r^2$ ehk

$$v^2 = r^2 + k^2.$$

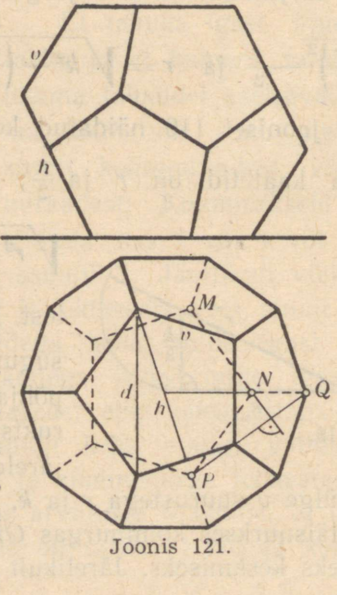
Sellest valemist ja esimesest valemist kokku saab järeldada viisnurga külje v konstruktsiooni (joonis 120).



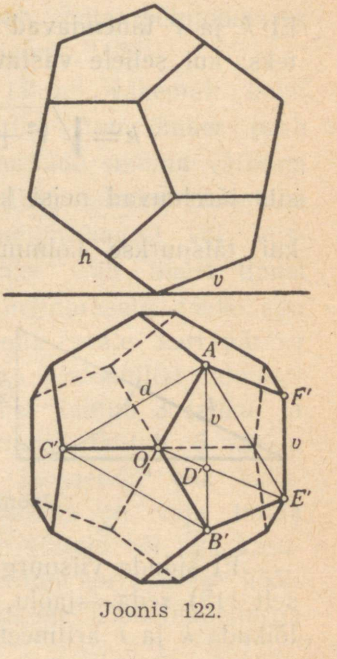
Joonis 120.

Korrapärase kaksteisttahu põhijoonise joonestamist, kui keha toetub ühe tahuga vastu põhipinda, alustataksegi sellest tahust; vastastahu projektsiooniga koos kujuneb joonisele korrapärane tähtkümmenurk. Keha piirjooneks tuleb põhijoonisel samuti kümmenurk, mille tipp Q' leitakse järgmisel kaalutlusel: korrapärasuse tõttu asetseb Q' nurga MNP poolitajal; et punkt Q tuleb kaldtahu mahapööramisel põhiserva MN ümber kattumisele punktiga P, siis $PQ' \perp MN$ (joonis 121). Keha esijoonise piirjooneks on tulnud kuusnurk, mille neli külge osutuvad keha tahu kõrguseks, aga kaks külge on keha servad õiges pikkuses.

Ühest tipust rippuma pandud dodekaeedri põhijoonise valmistamisel on kohane kõigepealt joonestada abijooniseks keha üks tahk — korrapärane viisnurk (nagu joonisel 121). Seejärel saab keha põhijoonist (joonis 122) alustada kolmnurga ABC joonestamisega — see on võrdkülgne ning $AC = d$. Edasi on võimalik kohale asetada piirjoone tipud E ja F, kasutades viisnurga diagonaalidest ja külgedest moodustuvat rombi, mille projektsiooniks tuleb rööpkülik $A'D'E'F'$. Kõik muud põhijoonise vajalikud punktid saadakse viisnurga $OA'F'E'B'$ pööramisel tipu O ümber. Keha esijoonise piirjooneks tuleb lihtsaimal juhtumil jällegi kuusnurk, mille nelja külje pikkuseks on h ja kahe külje pikkuseks v.

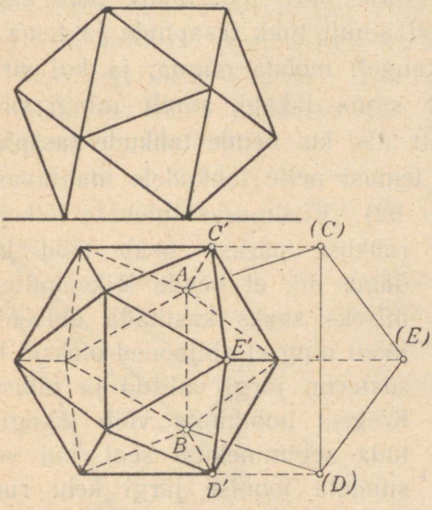


Joonis 121.

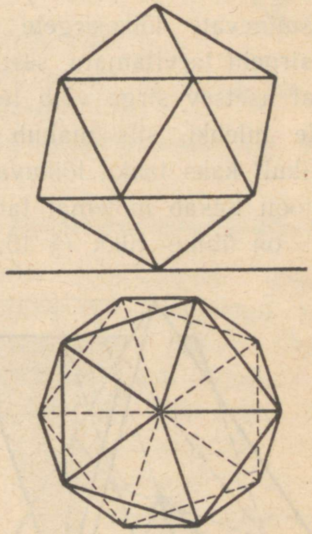


Joonis 122.

Kui korrapärane ikosaeeder toetub ühe tahuga vastu põhipinda, siis selle tahu ja vastastahu põhijoonised moodustavad tähtkuusnurga (joonis 123). Keha piirjooneks tuleb põhijoonisel korrapärane kumer kuusnurk, mille suuruse määrab see asjaolu, et CD on diagonaali pikkus niisuguses korrapärases viisnurgas, mille küljeks on AB, sest $ABD'E'C'$ on korrapärase viisnurga projektsioon ning selle viisnurga rõhtne külg ja rõhtne diagonaal esinevad joonisel õiges pikkuses. Keha esijoonise piirjooneks osutub kuusnurk, mille neljaks küljeks on keha tahu kõrgus ja kaheks küljeks serva pikkus.



Joonis 123.



Joonis 124.

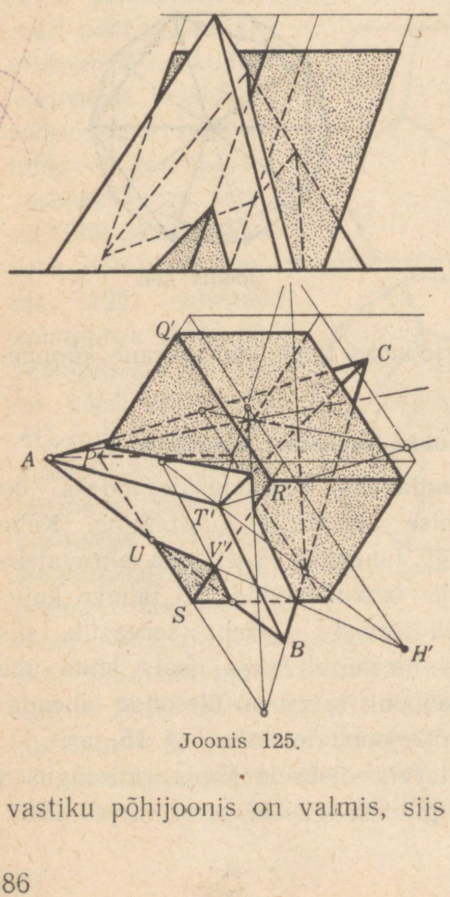
Rippuva ikosaeedri põhijoonise piirjooneks tuleb korrapärane kümmenurk (joonis 124).

8. Teineteisest läbitungivate tahukate ühise ruumitüki kujutamine.

Sisukaks ja kujutlusvõimet arendavaks rakendusülesandeks on teineteisest läbitungivate tahukate ühise ruumitüki kujutamine. Kahe tahuka ühine ruumitükk osutub jällegi tahukaks, sest teda piiravateks pindadeks on osalt ühe, osalt teise keha tahkude tükid. Et tahuka kujutamiseks joonestatakse ainult tema kõik servad — keha servastik, siis tahukate ühise ruumitüki kujutamiseks on ainult vaja osata leida ühe keha tahkude ja teise keha tahkude lõikejooni; seega on ülesande lahendamise põhitoiminguks kahe tasapinna lõikejoone leidmine (§ 15, art. 1). Tahuka servastiku joonestamisel on tarvis otsusele jõuda, missugused servad asetsevad keha nähtaval poolel ja missuguseid servi varjab keha.

Selle küsimuse otsustamine toimub § 13 art. 4 võtteil. Kui antud tahukate ühise ruumitüki külge soovitakse ka jätta antud tahukad ise, siis tulevad joonisel nähtavale muidugi ainult niisugused servad, mida kumbki antud keha ei varja.

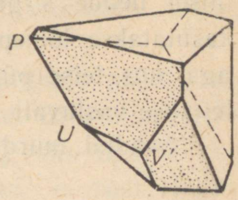
Kahe keha tahkude tasapindade lõikejooni on rohkesti — kui üks kehadest on m-tahk ja teine on n-tahk ning kui tuleks leida esimese keha iga tahu tasapinna ja teise keha iga tahu tasapinna lõikejoon, siis tarvisminevate lõikesirgete üldarv oleks mn. Tegelikult jääb aga osa lõikesirgeid tarvitamata, sest tahk on ainult tükk tasapinda ja tema tasapinnal asetsev sirge võib temast kaugelt mööda minna; ja kui sirgjoon tahule tulebki, siis mahub temast sinna ikkagi ainult mingi sirglõik. Järelikult kaks tahku lõikuvad ainult siis, kui nende tahkude tasapindade lõikejoon lõikab mõlemat tahku ja temast neile tahkudele mahtuvail lõikudel on ühine tükk (§ 15, joonis 92). Küsimusse tulevate lõikejoonte rohkuse pärast peab tööd korraldama nii, et nende lõikejoonte leidmiseks saaks kasutada ühiseid abijooni ning et abijooned oleksid kindla süsteemi järgi valitud ja tähistatud. Kõigest hoolimata võib ikkagi juhtuda segiminekuid seni, kui veel ei suudeta joonise järgi kehi ruumiliselt näha; suutmine aga saavutatakse harjutamise tulemusena.



Joonis 125.

Joonis 125 näitab prisma ja püramiidi ühise ruumitüki kujutamist; andmeks on mõlema keha epüür. Nagu esijoonisest nähtub, toetuvad kehad oma põhjadega vastu põhipinda. Abijoonteks on seepärast kohane võtta tahkude tasapindade põhijäljed (need on kehade põhiservadena kohe olemas) ja veel samade tasapindade horisontaalid, mis asetsevad püramiidi tippu läbival nivoopinnal. Oluline osa tööst toimub siis põhijoonises; kui kehade ühise ruumitüki servastiku põhijoonis on valmis, siis leitakse esijoonis juba sidejoonte abil.

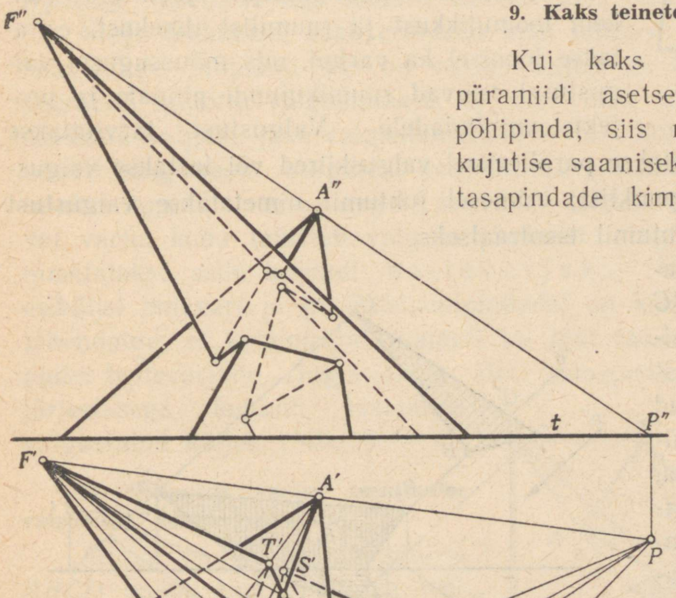
Joonisel 125 on näiteks tahkude ABT ja $PQRS$ lõikejooneks saadud sirge UH, kusjuures U on nende tahkude põhijälgede (AB ja PS) lõikepunkt ja H on samade tahkude horisontaalide lõikepunkt. Prisma serva RS ja püramiidi tahu ABT lõikepunktiks osutub selle serva ja lõikejoone UH lõikepunkt V.



Joonis 126.

Joonis 126 näitab eraldi nende lõikuvate tahukate ühisosa põhijoonist.

Et kehade ühisosa servastiku leidmine toimus põhijoonisel üsna omaette (esijooniselt on kasutatud selleks ainult kummagi keha kõrgust), siis on see konstruktsioon niisama hästi teostatav ka kvooditud projektsioonis või kaldprojektsioonis.

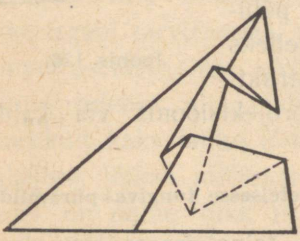


Joonis 127.

9. Kaks teineteisesse tungivat püramiidi.

Kui kaks teineteisesse tungivat püramiidi asetsevad põhjadega vastu põhipinda, siis nende kehade ühisosa kujutise saamiseks sobib kasutada abitasapindade kimpu, mille telg läbib püramiidide tippe. Joonisel 127 on andmeks püramiidide epüür; esijoonisest on näha, et põhjad BCD ja GHJ on põhipinnal. Tippe A ja F läbiva sirgjoone põhijälg on P. Edasine töö toimub üleni põhijoonisel. Esimese keha külgserva AB ja teise keha tahkude lõikepunktid leitakse abitasapinnal AFB; selle jälgjoon PB lõikab teise keha kaht põhiserva, nimelt GH ja GJ, andes lõikepunktid K ja L. Järelikult abitasapind lõikub teise keha tahkudega mööda sirgeid FK ja FL; serva AB lõikumisel nende sirgetega saadaksegi punktid M ja N. Üsna samal viisil kasutatakse lõikepunktide Q ja R leidmiseks abitasapinda AFC; punktid aga, kus teise püramiidi servad FH ja FJ lõikavad esimese keha tahke, leitakse vastavalt abitasapindade AFH ja AFJ abil.

Saadud murdjoone $MQSURNVT$ tipud kantakse seejärel esijoonisele sidejoonte abil. Eraldi (joonis 128) on toodud veel esijoonise kujul nähtavale ühe püramiidi j ä ä k — püramiidi see osa, mis jääb järele mõlema püramiidi ühisosa eraldamisel.

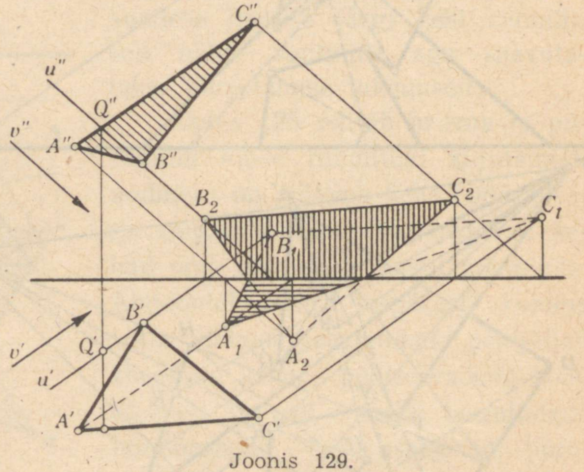


Joonis 128.

10. Kolmnurga varjud projektsioonipindadel.

Et anda ruumikujundi joonisele rohkem loomulikkust ja ruumilist ilmekust, esitatakse joonisel ka varjud, mis mõnesugusel valgustusel tekivad ruumikujundi pinnale ja projektsioonipindadele. Valgustust tarvitatakse kahesugust — kas võetakse paralleelsed valguskiired või lastakse valguskiired väljuda ühest punktist; esimesel juhtumil nimetatakse valgustust paralleelseks, teisel juhtumil tsentraalseks.

Joonisel 129 näidatakse kolmnurga ABC varjude leidmist paralleelvalgustusel; valguskiirte suund on antud ühe valguskiire v epüüriga. Et kindlaks teha, kumb kolmnurga tasapinna külg on valgustatud, võetakse järelevaatusele üht kolmnurga tippu läbiv valguskiir, näiteks kiir u, mis läbib tippu B; sel kiirel olev punkt Q, mille esijoonis satub kolmnurga külje AC esijoonisele, jääb tegelikult selle külje taha, nagu nähtub põhijoonisest. Järelikult see kiir tuleb vastu kolmnurga tasapinna tagakülge, mistõttu tagakülg on valgustatud ja muidugi siis esikülg osutub varju-



Joonis 129.

küljeks. Selle asjaolu esiletõstmiseks on $A''B''C''$ viirutatud. Kui võrrelda kolmnurga tippude ringjärjestust kummaski projektsioonis — nimelt $A'B'C'$ ja $A''B''C''$ —, siis selgub, et põhijoonisel on kolmnurk nähtav oma tasapinna tagaküljelt, niisiis esineb valgustatuna.

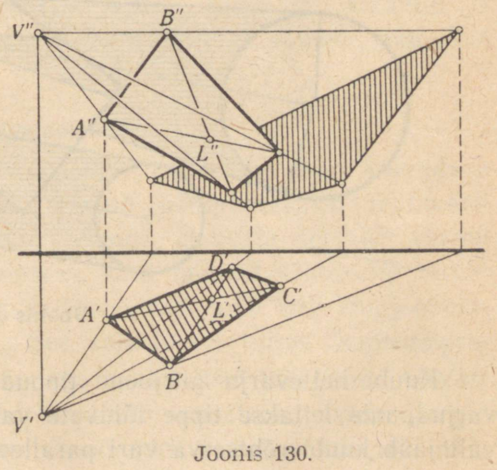
Kolmnurga tippu B läbiv valguskiir u jõuab esipinnale punktis B_2 ja põhipinnale punktis B_1 — need on tema jälgpunktid. Et valguse suunas liikumisel jõutakse punkti B_2 enne kui punkti B_1, siis tipu B vari langeb esipinnale — punkti B_2. Analoogiliselt leitakse, et tipu A vari langeb põhipinnale — punkti A_1 — ja tipu C vari langeb esipinnale — punkti C_2.

Kolmnurga ABC vari põhipinnal oleks $A_1B_1C_1$, kui esipind osa varju kinni ei peaks; samuti oleks kolmnurga vari esipinnal kolmnurk $A_2B_2C_2$. Tõeliselt aga küünib kumbki vari teljeni, kus nad ühinevad.

Varju tekkimisel saab eraldada kaht nähtust: 1) igal tasapinnal on kaks külge, milledest üks on vastu valgust ja teine on valgusest ära pööratud, seetõttu valgustamata; 2) mõni tükk tasapinna sel küljel, mis on vastu valgust, jääb valgustamata siis, kui mingi pind takistab valgust temale langemast. Valgusest ärapööratud pinnaküljel olevat varju nimetatakse kujundi o m a v a r j u k s; vastu valgust oleval pinnaküljel tekkivat varju, kuhu takistab valguse jõudmist mingi muu ettejääv kujund, nimetatakse selle kujundi h e i t e v a r j u k s. Nii on kolmnurga ABC esiküljel omavari ja projektsioonipindadel on kolmnurga heitevari. Olgu tähendatud, et kolmnurgal (samuti ka igal tasasel hulknurgal) on tippude heitevarjude ringjärjestus alati samapoolne tippude eneste ringjärjestusega kujundi tasapinna valgustatud küljel. (Miks?)

11. Nelinurga varjud tsentraalse valgustuse puhul.

Antud on tasase nelinurga $ABCD$ kolme tipu epüür ja neljanda tipu D põhijoonis; soovitakse joonestada nelinurga epüüri ühes nelinurga omavarjuga ja projektsioonipindadele langeva heitevarjuga tsentraalsel valgustusel, kui valgus tuleb punktist V, mille epüür on antud (joonis 130).

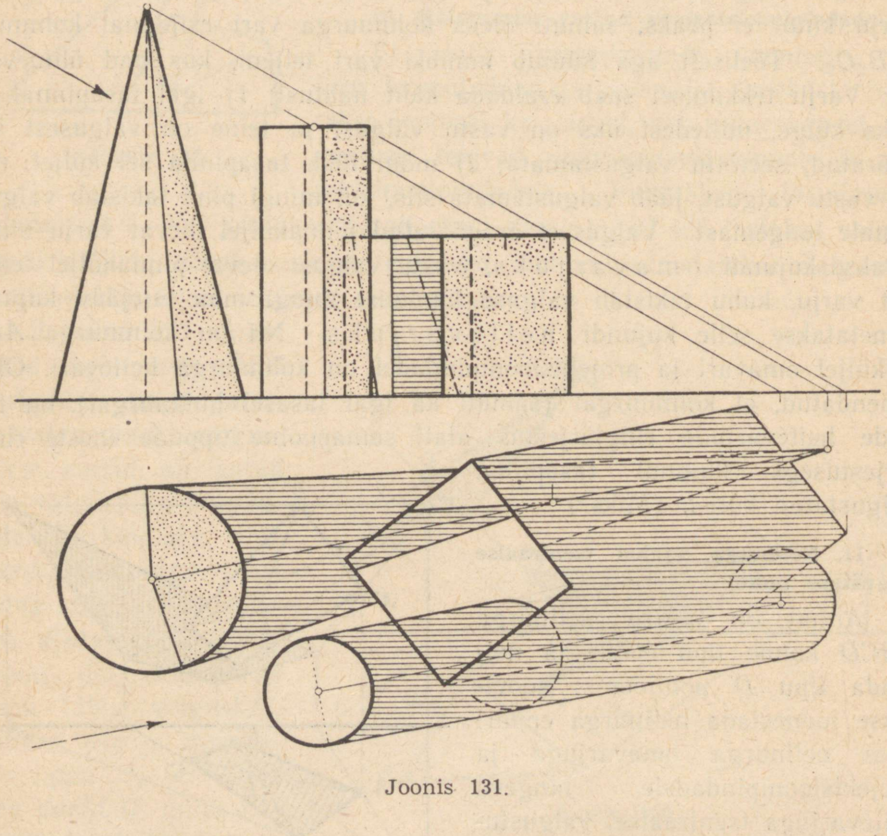


Joonis 130.

Nelinurga tipu D esijoonise saamiseks võib kasutada diagonaalide lõikepunkti L: põhijooniselt saab teda sidejoone abil üle kanda diagonaali AC esijoonisele ning seejärel kandub sirgele $B''L''$ jällegi sidejoonega ka D''. Nelinurga heitevari projektsioonipindadel on määratud valguskiirte VA, VB, VC ja VD jälgpunktide kaudu. Tippude heitevarjude ringjärjestusest selgub seejärel, kumb nelinurga tasapinna külg on vastu valgust.

12. Silinder, koonus ja kuup ühes varjudega paralleelvalgustusel.

Joonisel 131 on esitatud silinder, koonus ja kuup ühes varjudega paralleelvalgustusel. Kehad on asetatud nõnda, et silinder ja koonus heidavad varju kuubile ning kõigi kehade heitevarjud tulevad põhipinnale.



Joonis 131.

Kuubi heitevarju piirjoone tippudeks on kuubi kolme pealmise tipu varjud, mis leitakse tippe läbivate valguskiirte põhijälgedena. Arusaadavalt jääb kuubi rõhtserva vari paralleelseks serva enesega, püstserva vari aga osutub valguskiire põhijoonise sihiliseks.

Koonuse tipu vari põhipinnal on tippu läbiva valguskiire põhijälg; koonuse heitevarju piirjoon koosneb koonuse põhjaringi puutujaist, mis läbivad koonuse tipu varju. Koonuse omavarju piirjooneks on kaks moodustajat, mis läbivad heitevarju piirjoone ja põhjaringi puutepunkte. Selle asjaolu selgitamiseks tuleb arvesse võtta, et kõik valguskiired, mis puudutavad koonilist pinda, moodustavad kaks puutuvat tasapinda ning need tasapinnad läbivad koonuse tippu. Koonuse tippu läbiv valguskiir on tasapindade lõikejoon, aga heitevarju piirjooneks jäävad tasapindade jälgjooned. Et tasapindade ja koonuse puutejoonteks on kaks koonuse moodustajat, siis nende moodustajate jälgpunktid leiduvad tasapindade jälgjoontel.

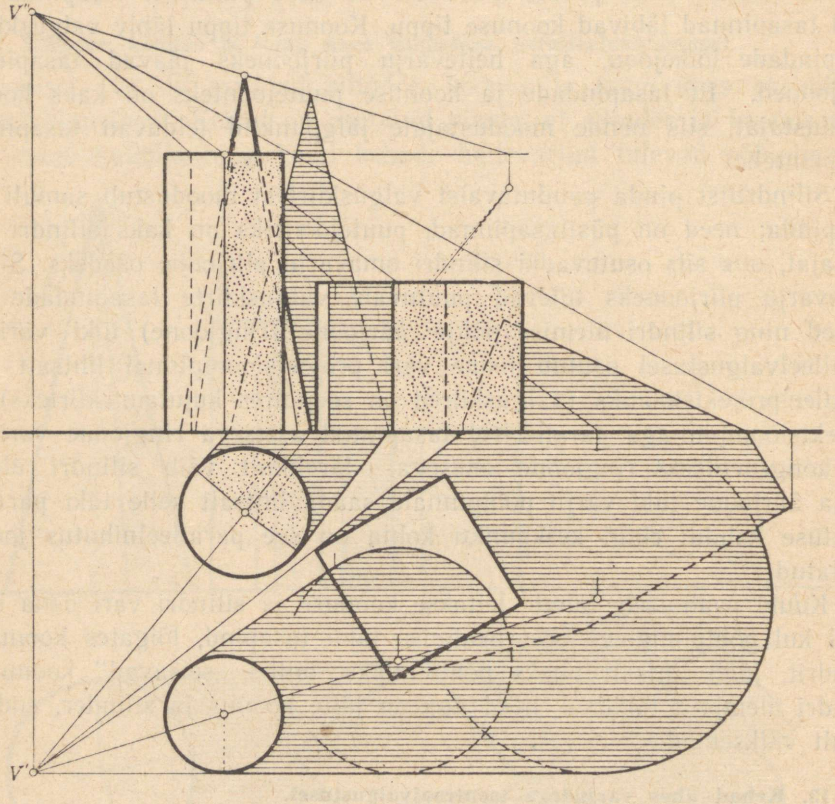
Silindrilist pinda puudutavaist valguskiirtest moodustub samuti kaks tasapinda; need on püsttasapinnad, puutejoonteks on kaks silindri moodustajat, mis siis osutuvadki silindri omavarju piirjoone osadeks. Silindri heitevarju piirjooneks tulevad puutuvate valguskiirte tasapindade jälgjooned ning silindri ülemise põhja äärjoone (ringjoone) tüki vari. Et paralleelvalgustusel osutub joone vari projektsioonipinnal lihtsalt joone paralleelprojektsiooniks (valguskiired on seejuures kujutamiskiirteks), siis projektsioonipinnaga paralleelsel tasapinnal asetseva ringjoone vari osutub kongruentseks ringjoone enesega. Järelikult võib silindri ülemise põhja äärjoone tüki varju põhipinnale saada lihtsalt selle tüki paralleelnihutuse kaudu; ringi keskpunkti kohta on see paralleelnihutus joonisel tuletatud.

Kuubi pealmisele tahule leitakse koonuse ja silindri vari üsna samal viisil kui põhipinnalegi, sest pealmise tahu tasapind, lõigates koonust ja silindrit, jääb lihtsalt uueks põhipinnaks, millel „seisavad" koonuse ja silindri ülemised tükid — need aga on jälle koonus ja silinder, endistest ainult väiksemad.

13. Kehad ühes varjudega tsentraalvalgustusel.

Joonisel 132 esinevad silinder, koonus ja kuup ühes varjudega tsentraalvalgustusel. Kehade tippude varjud põhipinnal on teatavasti tippe läbivate valguskiirte põhijäljed. Kuubi ülemiste servade varjud jäävad servade enestega küll paralleelseks, kuid tulevad vastavaist servadest pikemad. Silindri ülemise põhja äärjoone vari jääb küll ringjooneks, kuid tuleb suurem kui äärjoon ise. See asjaolu on tuttav tsentraalprojektsiooni omadusena: projektsioonipinnaga paralleelsel tasapinnal olevate kujundite projektsioonid on sarnased kujundite enestega; sarnasusteguriks on projektsioonipinna ja kujutamiskeskpunkti vahelise kauguse ning kujundi tasapinna ja kujutamiskeskpunkti vahelise kauguse jagatis.

Koonilise ja silindrilise pinna omavarju piirjoone ja heitevarju leidmisel saab korrata eelmisest artiklist tuttavaid kaalutlusi: puutuvate valguskiirte tasapindade jäljed jäävad heitevarju piirjoone osadeks, puutesirgeteks olevad moodustajad osutuvad omavarju piirjoone tükkideks. Kuubi ülemisele tahule tekkivate heitevarjude piirjooned leitakse jällegi



Joonis 132.

nagu selle tahu tasapinnast üle küündivate koonuse ja silindri tükkide heitevarjud sel nivoopinnal.

Olgu tähendatud, et samad võtted, milledega leitakse kujundite varjud projektsioonipinnale tsentraalvalgustusel, leiavad kasutamist täisväärtuslike töövõtetena ka kujundi tsentraalprojektsiooni ehk perspektiivi valmistamisel, kui andmeks võetakse kujundi epüür ja perspektiivipinnaks üks senistest projektsioonipindadest.

37. Antud on sirgjoone epüür. Küsitakse selle sirgjoone ja kointsidentspinna lõikepunkti.

38. Nõutakse esitada põhipinnaga paralleelne sirgjoon ja esipinnaga paralleelne tasapind ning leida nende lõikepunkti epüür.

39. Kaks punkti kointsidentspinnal ja üks punkt väljaspool kointsidentspinda on antud oma epüüriga. Tuletada neid punkte läbiva tasapinna jälgjooned.

40. Jälgedega antud tasapinnal asetsevast kolmnurgast on teada põhijoonis. Tuletada kolmnurga esijoonis.

41. Antud on tasapind oma jälgedega. Joonestada sel tasapinnal asetseva ruudu epüür, võttes ruudu ühe külje paralleelseks esipinnaga.

42. Jälgedega antud tasapinnal kujutada romb, mille üks paar lähisküligi asetseb tasapinna jälgedel, aga teine paar nivoojoontel; pöörata saadud romb joonisepinnale.

43. Antud on esipinna risttasapind α ja põhipinna risttasapind β. Võtta tasapind γ risti tasapindade α ja β lõikesirgega s ning leida tasapinna γ ja sirge s lõikepunkt.

44. Tasapind on antud oma jälgede epüüriga. Küsitakse tasapinna ja epüüritelje vahelist nurka.

45. Külgpinnaga paralleelne sirgjoon on antud oma kahe punkti epüüriga ja antud on väljaspool seda sirget asetseva punkti epüür. Nõutakse asetada läbi antud punkti niisugune sirgjoon, mis oleks paralleelne antud sirgjoonega, ning tuletada tema jälgpunktid.

46. Punktid A, B, C, ja D olgu epüüris antud nii, et igaüks neist asetseb erinevas ruumi veerandis. Tuletada nende punktide külgjoonised, võttes külgpinna antud punktinelikust paremal.

47. Antud on tasapinnad α ja β, mõlemad paralleelsed epüüriteljega, ja mingi sirge s. Kui pikk on sirgel s asetsev lõik, mille otspunktid asetsevad antud tasapindadel?

48. Tasapind läbib telge ja üht teljest väljaspool asetsevat punkti, mille epüür on antud. Väljaspool seda tasapinda olevast punktist, mille epüür on ka antud, tuleb asetada antud tasapinnale normaal ja leida selle lõikepunkt tasapinnal ning jälgpunktid.

49. Läbi antud punkti asetada sirge, mis on epüüriteljega risti ja lõikab teda, ning sellele sirgele risttasapind; tuletada viimase jälgjooned.

50. Antud on kaks teljega paralleelset sirgjoont oma epüüriga. Tarvis on leida neid sirgeid läbiva tasapinna jäljed.

51. Kaks teljega paralleelset tasapinda, mis ei ole teineteisega paralleelsed, on antud oma jälgedega. Nõutakse leida nende tasapindade lõikejoone epüür ja tasapindadevaheline nurk.

52. Punkt on antud oma epüüriga. On vaja asetada läbi selle punkti niisugune tasapind, mis on kointsidentspinnaga paralleelne, ja tuletada tasapinna jälgjooned.

53. Antud on kaks sirget oma epüüriga; epüüritelg on teada. Küsitakse epüüriteljega paralleelset sirget, mis lõikaks mõlemat antud sirget, ja nõutakse esitada lõikepunktide epüür.

54. Antud on sirgjoon, mis ei lõika epüüritelge; joonisepinnal on antud mingi lõik pikkusega *d*. Nõutakse leida need antud sirgjoone punktid, mis asetsevad teljest kaugusel *d*.

55. Antud on kolm tasapinda, igaüks oma jälgjoonte epüüriga. Tarvis on leida nende tasapindade ühine punkt.

56. Antud on kaks tasapinda oma jälgedega ja üks väljaspool tasapindu asetsev punkt oma epüüriga. Tuleb asetada läbi antud punkti niisugune tasapind, mis kuulub antud tasapindadega määratud kimpu, ja tuletada tema jälgjooned.

57. Antud on kolmnurga tipud: *A* asetseb põhipinnal, *B* esipinnal ja *C* teljel. Nõutakse pöörata kolmnurk *ABC* joonisepinnale.

58. Antud on kahe paralleelsirge epüür. Küsitakse sirgetevahelist kaugust. (Kui sirgeid läbiv tasapind pööratakse ühe nivoojoone ümber paralleelseks vastava projektsioonipinnaga, siis tuleb sirgetevaheline kaugus nähtavale.)

59. Tasapinna põhijälg ja kaldenurk põhipinna suhtes on antud; epüüritelje siht on teada. Nõutakse leida tasapinna kaldenurk esipinna suhtes.

60. Tasapind on antud oma jälgede epüüriga. Nõutakse tuletada antud tasapinna ja põhipinna vahelist nurka poolitava tasapinna jäljed.

61. Nõutakse selgitada, miks sirgjoone kaldenurk põhipinna suhtes ja sama sirgjoone kaldenurk esipinna suhtes ei anna nürinurgani küündivat summat. Miks seevastu tasapinna kaldenurkade summa on nürinurk või vähemalt täisnurk?

62. Tasapind on antud oma jälgjoontega ja sirgjoon oma epüüriga. Nõutakse tuletada sirgjoone ristprojektsioon tasapinnale ja esitada tulemuse epüür.

63. Antud on tasapind oma jälgedega ja sirgjoon oma epüüriga. Leida sellel tasapinnal sirge, mis lõikab antud sirget ja on temaga risti.

64. Antud on kahe kiivse sirgjoone ja ühe punkti epüür. Läbi punkti on tarvis asetada mõlemat antud sirget lõikav sirge.

65. Antud on ühe sirgjoone ja ühe punkti epüür; epüüritelg on teada. Nõutakse asetada läbi antud punkti niisugune sirge, mis lõikaks telge ja antud sirget.

66. Antud on tasapind oma jälgedega ning sirgjoon ja punkt oma epüüriga. Asetada läbi punkti niisugune sirgjoon, mis lõikaks antud sirgjoont ja oleks paralleelne antud tasapinnaga.

67. Antud on sirged a ja b ning sirgel a asetsev punkt Q. Läbi punkti Q tuleb asetada sirge, mis on risti sirgega a ja lõikab sirget b.

68. Antud on kahe punkti epüür. Epüüriteljel tuleb leida niisugune punkt, mis asetseb antud punktidest võrdsel kaugusel.

69. Antud on kolme punkti epüür. Küsitakse sirget, mille iga punkt on kolmest antud punktist võrdsel kaugusel.

70. Kolmnurk on antud oma epüüriga. Nõutakse leida kolmnurga ümberringjoone keskpunkti epüür.

71. Antud on kolme punkti epüür. Läbi nende punktide tuleb asetada sfäär, mille keskpunkt asetseks põhipinnal. Leida sfääri keskpunkt ja raadius.

72. Neli punkti, mis ei asetse ühisel tasapinnal, on antud oma epüüriga. Leida neid punkte läbiva sfääri keskpunkt.

73. Antud on ühe punkti ja kahe kiivsirge epüür. Nõutakse asetada läbi antud punkti niisugune tasapind, mis oleks paralleelne kummagi sirgega, ja tuletada tema jälgjooned.

74. Antud on kahe lõikuva sirgjoone epüür. Nõutakse leida sirgjoontevaheliste nurkade poolitajad. Kus asetsevad ruumipunktid, millel on mõlemast sirgjoonest võrdne kaugus?

75. Tasapind α on antud oma jälgjoontega. Küsitakse tasapindu β ja γ, mis on risti tasapinnaga α ja poolitavad tema jälgjoonte vahelisi nurki; nõutakse tuletada tasapindade β ja γ jälgjooned.

76. Kaks tasapinda on antud oma jälgjoontega. Nõutakse leida tasapindadevaheliste nurkade poolitustasapindade jälgjooned.

77. Antud on kahe tasapinna jälgjooned. Leida epüüritelje punktid, mis on kummastki antud tasapinnast võrdsel kaugusel.

78. Antud on kaks lõikuvat sirget ja kolmas sirge, mis ei lõika eelmisi. Leida kolmandal sirgel punkt (või punktid), mis on kahest eelmisest sirgest võrdsel kaugusel.

79. Antud on sirge, punkt väljaspool sirget ja lõik joonisepinnal, pikkusega d. Küsitakse antud sirgel neid punkte, mis asetsevad antud punktist kaugusel d.

80. Antud on sirgjoon ja kaks punkti väljaspool sirgjoont. Küsi-

takse antud sirgjoonel punkti (või punkte), millest kahte antud punkti tulevad sirged oleksid teineteisega risti.

81. Läbi antud punkti asetada tasapinnad antud sirgjoonest antud kaugusele.

82. Antud on sirgjoone jälgpunktide epüür. Küsitakse sirgjoone ja epüüritelje vahelist nurka. (Kuidas on määratud kiivsirgetevaheline nurk?)

83. Antud on sirgjoone epüür ja telg. Kui suure nurga moodustavad selle sirgjoone kujutamiskiirte pinnad? Esitada vastav joonnurk joonisepinnal.

84. Sirgjoon on antud oma epüüriga. Läbi selle sirgjoone tuleb asetada tasapind, mille kaldenurk põhipinna suhtes võrduks antud teravnurgaga, ja esitada saadud tasapinna (või tasapindade) jälgjooned.

85. Joonestada korrapärase nelinurkse püramiidi epüür järgmistel andmetel: püramiidi põhja tasapinna jälgjoonte epüür, püramiidi kõrgus ja põhiserva pikkus ning nurk, mille moodustab üks põhiserv põhja tasapinna põhijäljega. (Töö alustamiseks on kohane valmistada põhja mahapööre põhipinnal ning mahapöördest tuletada põhja epüür.)

86. Joonestada korrapärase kuusnurkse prisma epüür järgmistel andmetel: prisma ühe põhja tasapinna jälgjoonte epüür, prisma kõrgus ja põhiserva pikkus ning nurk, mille moodustab üks põhiserv tasapinna esijäljega. (Töö alustamiseks on kohane valmistada põhja mahapööre esipinnal.)

87. Esitada epüüris korrapärane nelinurkne püramiid, mille üks külgserv on põhipinnal ja moodustab esipinnaga nurga 45°; põhja üks diagonaal olgu põhipinnaga paralleelne.

88. Korrapärane kuusnurkne püramiid toetub oma tipuga põhipinnale nii, et püramiidi üks külgserv on risti põhipinnaga ja ükski külgtahk ega põhi pole risti esipinnaga. Joonestada püramiidi epüür.

89. H-kujulise põhjaga püstprisma seisab põhipinnal; tema ükski põhiserv ei ole epüüriteljega paralleelne. Nõutakse 1) joonestada selle prisma epüür, 2) keha pöörata 30° võrra ümber esipinna normaali ja tuletada epüür uue asendi tarvis, 3) keha veel pöörata põhipinna normaali ümber 45° võrra ja tuletada eelmisest epüürist lõppasendis oleva keha epüür.

90. Tetraeedrit, mille põhipinnal asetseva tahu üks serv on esipinnaga paralleelne, kallutatakse ümber esipinna normaali, mis läbib parempoolset tippu põhipinnal, kuni kõrgussirge kaldenurk põhipinna suhtes kahaneb 30°-ni. Joonestada kallutatud tetraeedri põhi-, esi- ja külgjoonis.

91. Kuup toetub ühe tahuga põhipinnale nii, et üks servanelik moodustab esipinnaga nurga 30°. Kuup lõigatakse läbi epüüritelje paralleeltasapinnaga, mis läbib ülemise tahu keskpunkti. Joonestada kuup koos lõikekujundiga kolmes vaates ja ehitada tekkinud lõikekujund joonisepinnale.

92. Põhipinnal asetsev trapets, mille alused on 7 cm ja 4 cm pikad ning kumbki haar 4 cm pikk, on ühiseks põhjaks kahele prismale, milledel on kõrgused võrdsed ja ülemised põhjad osaliselt kattuvad, misjuures ühe prisma üks tipp asetseb teise prisma põhja diagonaalide lõikepunktis. Nõutakse valmistada prismade ühisosa epüür.

93. **T**-kujuline kaheksanurk asetseb esimeses ruumiveerandis, tema tasapind on esipinnaga paralleelne ja tema alumine äär toetub vastu põhipinda. Nõutakse valida valgustav punkt nõnda, et kaheksanurga heitevari läheks osalt esipinnale, ning joonestada kujundi ja varju epüür.

94. Põhipinnal püsti seisev korrapärane kuusnurkne püramiid heidab varju üle korrapärase kuusnurkse prisma, mis lamab põhipinnal (toetudes ühele külgtahule). Joonestada kehade epüür ühes varjudega paralleelvalgustusel.

95. Rõhtsel tasasel maapinnal (põhipinnal) seisab korrapärase kaheksanurkse prisma kujuline kiosk, mida katab kaheksanurkne püramiidiline katus, rohkesti seintest väljapoole küündivate räästastega. Kioski lähedal, temast pisut kõrgemal, asetseb latern (valguspunkt); kioski katuse tipu vari langeb lähedal olevale müürile (esipinnale). Esitada kioski ja ümbruse epüür ühes kõigi varjudega.

96. Antud on korrapäratu viisnurkse püramiidi põhijoonis ja püramiidi tipu heitevari põhja tasapinnal nõnda, et püramiidi neli külgtahku on valgustatud. Püramiidist tungib läbi sirge varras, lõigates kaht kõrvuti olevat valgustatud külgtahku; lõikepunktide põhijoonised on antud. Eeldades paralleelvalgustust, joonestada varda varjud püramiidi külgtahkudel. (Esijoonist ei tule valmistada ega kasutada.)

97. Püstseina (esipinda) on löödud viis naela rõhtsesse ritta, võrdsete kauguste järel; kõigil naeltel on jäetud seinast risti ette küündima võrdse pikkusega tükid. Valguspunktiks on laelamp, mille ristprojektsioon seinal (naeltest kõrgemal) ja kaugus seinast on antud. Nõutakse joonestada naelte varjud seinal.

98. Antud on kahe kiivsirge epüür; epüüritelg on teada. Paralleelvalgustus on tarvis valida nii, et sirgete varjud põhipinnal tuleksid paralleelsed. Kas on valguskiirte siht sellega täiesti määratud? Miks osutuvad ka varjud esipinnal paralleelseks? Joonestada varjud mõlemal pinnal.

99. Antud on kahe kiivsirge epüür. Valguspunktiks on niisugune külgpinna punkt, et sirgete varjud põhipinnal ja esipinnal on kõik epüüriteljega paralleelsed. Küsitakse valguspunkti epüüri.

100. Põhipinnal seisva pöördkoonuse epüür on antud ühes koonuse tipu heitevarjuga põhipinnal. Nõutakse lõigata koonust rõhttasapinnaga, mis poolitab koonuse kõrguse, kõrvaldada keha ülemine osa ja esitada allesjääv tüvikoonus ühes omavarjuga ja heitevarjuga, eeldades paralleelvalgustust.

101. Eelmise ülesande andmeid nõutakse tõlgitseda tsentraalvalgustuse puhul ja esitada allesjääv tüvikoonus ühes varjudega, kui valguspunkti kaugus põhipinnast on tüvikoonuse kõrguse kolmekordne.

102. Silindri telg ühtib epüüriteljega. Valida silindri pinnal punktid A, B ja C nii, et ükski paar neist pole silindri ühel ja samal ristlõikepinnal ega ühes ja samas ruumi veerandis. Esitada kolmnurk ABC ning tema tasapinna ja silindri telje lõikepunkt L epüüris koos külgvaatega. Ehitada ka kolmnurk ABC ise joonisepinnale.

103. Tüvikoonuse alumise põhja raadius on 4 cm ja ülemise põhja raadius 25 mm pikk, tüvikoonuse kõrgus on 45 mm. Tüvikoonuse alumine põhi asetseb vastu põhipinda. Valgus langeb nõnda, et keha heitevarju sirged osad on paralleelsed epüüriteljega ja kaarjas osa küünib 7 cm kauguseni tüvikoonuse põhja keskpunktist. Küsitakse valguspunkti epüüri.

104. Tasapinnalise kujundi heitevari projektsioonipinnal tuleb kujundi enesega kongruentne teatavasti siis, kui valguskiired on kujundi tasapinna ja projektsioonipinna vahelist nurka poolitava tasapinnaga risti (§ 11, art. 4). Olgu antud mingi tasapind oma jälgede epüüriga; nõutakse leida kaks niisugust valguskiirte sihti, mis tekitaksid antud tasapinna kujundeist kongruentse heitevarju esipinnale, ja kaks niisugust, mis tekitaksid kongruentse heitevarju põhipinnale.

105. Pöördkeha koosneb silindrist, mis seisab põhipinnal, tüvikoonusest, mis seisab silindril ja evib temaga ühist põhja, ning silindrist, mis algab tüvikoonuse ülemiselt põhjalt. Paralleelvalgus on sihitud nii, et keha heitevari langeb põhipinnale. Nõutakse joonestada keha epüür ühes varjudega.

106. Kolm risttahukat on laotud üksteisele trepikujuliselt ja asetatud oma tagumiste tahkudega vastu püstseina. Nõutakse võtta seina tasapind projektsioonipinnaks ja esitada trepi kaldprojektsioon ühes omavarjuga ning heitevarjuga rõhtsel maapinnal ja seinal, kasutades sobivalt valitud paralleelvalgustust.

107. Püstprisma, mille põhjaks on **T**-kujuline hulknurk, seisab rõhtsel tasapinnal, millele langeb ka keha vari; valguspunkt on keha ülemisest põhjast kõrgemal. Nõutakse esitada püstiseisval joonisepinnal selle keha ja tema varjude kaldprojektsioon.

108. Esitada epüüris koos külgjoonisega nelitahk *ABCD*, mis oma tahuga *ABC* toetub põhipinnale; seejuures tahk *ABC* olgu võrdhaarne kolmnurk, mille alus *AB* on paralleelne epüüriteljega ning tipu *D* põhijoonis poolitagu serva *AB*. Esitada igas vaates ka servade *AB* ja *CD* vahelist kaugust mõõtev lõik *XY*.

Märksõnastik.

(Arvud enne sulgusid tähendavad leheküljenumbreid, sulgudes antakse paragrahvide ja artiklite numbrid.)

Sisukord.

2., parandatud, täiendatud trükk.

Vastutav toimetaja G. Kangro.
Keeleline toimetaja R. Kiiv.
Tehniline toimetaja H. Seletus.

Ladumisele antud 23. XII 1949. Trükkimisele antud 8. II 1950. Trükiarv 1000. Paber 67 × 95, 1/16. Trükipoognaid 6,5. MB-00689. Trükikoda „Hans Heidemann", Tartu, Vallikraavi tänav 4. Tellimise nr. 3347.

На эстонском языке.

А. Хумал, О. Рюнк, А. Гаршнек. Начертательная геометрия. I часть.

Hind rbl. 2.15