ТАРТУСКИЙ ГОСУНИВЕРСИТЕТ

ПРИКЛАДНЫЕ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ПРОГРАММИРУЕМОГО МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРА „ЭЛЕКТРОНИКА Б3-34"

Г. Славин

1983

ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра спортивной медицины

ПРИКЛАДНЫЕ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ПРОГРАММИРУЕМОГО МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРА „ЭЛЕКТРОНИКА БЗ-34"

Г. Славин

ТАРТУ 1983

Настоящая работа содержит 50 алгоритмов, включающих в себя различные разделы по алгебре, геометрии, численным методам и статистике. Имеется подробная инструкция по пользованию прикладными программами.

Предназначается для исследовательских работ специалистов различных нематематических специальностей, использующих математико-статистические методы, а так же для учебной и научной работы студентов.

ПРИКЛАДНЫЕ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ПРОГРАММИРУЕМОГО МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРА "ЭЛЕКТРОНИКА БЗ - 34".
Составитель Георги С л а в и н.
На русском языке.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Юликооли, 18.
Ответственный редактор Т. Кару.
Подписано к печати 10.12.1982.
Бумага ротаторная.
Формат 60x84/16.
Машинопись. Ротапринт.
Условно-печатных листов 5,12.
Учетно-издательских листов 4,68.
Печатных листов 5,5.
Тираж 800.
Заказ № 1328.
Цена 15 коп.
Типография ТГУ, ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Пялсона, 14.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математические методы находят в настоящее время применение во всех сферах общественной жизни. В частности, даже медики и биологи вынуждены пользоваться этими методами не только в научной работе, но так же при решении многих повседневных задач.

Математические методы по существу являются лишь одним из разделов обширной области человеческой деятельности, которую называют "обработка и анализ данных" или просто обработка информации. При обработке информации мы используем как математические методы, так и различные логические действия, применяем специфические для данной области знания алгоритмы (процедурные правила). Если объёмы этих работ малые, их можно выполнить в уме. Однако, часто такие анализы по одним и тем же стереотипным правилам нужно повторить десятки и сотни раз, затрачивая при поиске правильного ответа значительную умственную энергию и драгоценное время. В этих случаях нам необходимо пользоваться современными вычислительными средствами (ЭВМ, микрокалькулятор). До последнего времени хорошие программируемые микрокалькуляторы не были доступны для индивидуального пользования. Создание нашей промышленностью калькулятора"Электроника БЗ-34" открывает в этом смысле большие перспективы широкого применения вычислительной техники научными работниками разных специальностей.

Кафедра спортивной медицины Тартуского государственного университета имеет научное направление, связанное с применением вычислительной техники в спортивной медицине. Кафедра имеет собственный вычислительный центр на базе УВК СМ-I. В штате имеется 4 математика. Один из них, специалист по прикладной математике, м.н.с. Г.Славин и подготовил настоящий сборник программ. Этот сборник, как нам кажется, может быть полезным прежде всего студентам разных специальностей, как нематематикам, так и может быть математикам. В этот сборник собраны различные методы обработки результатов наблюдений и некоторые методы математической статистики. В перспективе намечается издание второго тома, где уже представлены программы в большей мере базирующиеся на логических операциях, чем на вычислительных. Мы надеемся, что этот первый сборник, который увидел свет через полгода после поступления в продажу калькулятора "Электроника БЗ-34", всё же даёт в руки его пользователей первую, хоть и не большую, но необходимую информацию.

Т.Э.Кару,
Проф., д.м.н., зав. каф.
спортивной медицины ТГУ.

ВВЕДЕНИЕ

Работа современного исследователя практически любой специальности характеризуется самым широким использованием математики. Надежный и глубокий анализ как количественных так и качественных данных - таков результат применения математико-статистических методов.

Однако исследователи нематематических специальностей, то есть врачи, биологи, психологи и другие испытывают определенные трудности при применении математического аппарата, например из-за того, что ознакомление с необходимым алгоритмом предполагает определенную математическую подготовку. Это влечет за собой сравнительно большую затрату времени, отвлекает от своего прямого, скажем биологического, профиля работы. Трудности возникают и из-за довольно большой вычислительной сложности некоторых алгоритмов. Все это может вылиться для исследователя в трудноразрешимый вопрос, а подчас и "отпугнуть" его от применения математики в должной мере, и богатство и эффективность математического аппарата не будет использовано им достаточно широко.

Разрешить часть этих трудностей, освободить от них исследователя поможет широкодоступная, недорогая, всегда готовая к работе вычислительная техника с программным обеспечением, позволяющим свести всю работу только к выбору алгоритма, вводу начальных данных и получению результата за считанные секунды. И при этом не отвлекаться той сложностью расчета, который ведет ЭВМ, а заниматься лишь интерпретацией полученных результатов.

В течении ряда лет отечественной промышленностью выпускается программируемый микрокалькулятор ЭЛЕКТРОНИКА БЗ-21, который неплохо удовлетворяет поставленным требованиям. С конца 1981 года был налажен выпуск новой модели - "ЭЛЕКТРОНИКА БЗ-34", заметно отличающейся бо́льшей памятью, увеличенными Функциональными возможностями и значительно улучшенным языком программирования. Это дает в руки пользователю набор весьма больших средств, радиус применения новой модели резко возрос, стали доступны задачи с довольно разветвленной логикой и сложными вычислительными алгоритмами.

Программируемый калькулятор обладает всеми "атрибутами" большой ЭВМ: оперативной памятью, процессором, устройством ввода-вывода. Поэтому он может считаться индивидуальной микро - ЭВМ размером с небольшую книжку и ценой сравнимой с ценой транзисторного радиоприёмника.

Быстродействие калькулятора небольшое - около 5 операций в секунду, но за один час работы он может сделать то, что требует месяцы ручного труда, и не сделает при этом ни одной арифметической ошибки.

Уже имеется определённое количество сборников алгоритмов для "ЭЛЕКТРОНИКА БЗ - 21" (например работы [2] и [3], откуда нами было взято часть численных примеров), однако все эти алгоритмы практически непригодны для микрокалькулятора "ЭЛЕКТРОНИКА БЗ -34" из-за видоизменённого языка программирования. В самом недалёком будущем можно ожидать появления огромного числа аналогичных работ для этой новой модели, а пока предлагаемая работа делает скромную попытку обеспечить на ближайшее время пользователей микрокалькулятором "Электроника БЗ-34" миниатюрным программным обеспечением.

Предлагаемый сборник содержит 50 прикладных программ, основная часть которых представляет собой различные численные и статистические методы. Алгоритмы выбраны так, чтобы они были бы полезны возможно широкому кругу специалистов, в основном биологам, социологам, психологам и другим. Мы так же надеемся что работа будет полезна студентам в их учебной и научной работе.

При составлении программ учитывалось то, что ими будут пользоваться в основном лица нематематических специальностей. Поэтому математическая часть каждого алгоритма изложена очень упрощенно и пользование программами максимально облегчено. Почти все программы сообщают о том, что было введено, а некоторые работают в диалоговом режиме - сообщают то, что надо ввести и что делать дальше.

Обращаем внимание читателя на то, что настоящая работа не в коем случае не может служить пособием по программированию для "Электроника Б3-34". Эта тема очень обширна и выходит за рамки нашей задачи.

Опыт работы с программируемым микрокалькулятором приходит довольно быстро и скоро он станет добрым и незаменимым Вашим помощником, и не только при научных исследованиях, но и в жизни, в быту, на досуге. Мы надеемся, что читателю будут интересны три "ненаучные" программы в Приложении.

Хорошим свойством программируемого калькулятора является и то, что работа с ним довольно точная модель работы с "большой" ЭВМ; и для исследователей, студентов это может оказаться весьма полезным.

РАБОТА С ПРИКЛАДНЫМИ ПРОГРАММАМИ

Процесс работы с программируемым калькулятором характеризуется особенной аккуратностью и точностью выполнения всех предписанных правил. Мы предполагаем, что читатель имеет навыки работы с обычным микрокалькулятором и хорошо ознакомлен с "Руководством по эксплуатации", прилагаемым к микрокалькулятору "Электроника Б3-34".

Напомним самые основные правила из упомянутого "Руководства". Микрокалькулятор имеет два режима работы - режим автоматической работы, при котором он выступает как обычный калькулятор, и режим программирования. Переход к последнему осуществляется нажатием клавиш F ПРГ.

При этом на индикаторе справа появляются две цифры 00 (счетчик операторов), и машина готова к вводу программы. Указанные цифры всегда будут показывать номер того оператора программы, который надо ввести. При вводе оператора на левом краю появляются два символа (чаще цифры), которые являются кодом только что введенного оператора, и при этом счетчик увеличивается на единицу. При вводе следующего оператора код предыдущего передвинется вправо. Таким образом на индикаторе высвечиваются коды только что введенного оператора, двух предыдущих и номер следующего оператора.

Когда введен весь текст программы, нажимаются клавиши F АВТ, и на индикаторе появляется число (чаще "0"). Для того, чтобы программа выполнялась с самого начала необходимо перейти на нулевой оператор нажатием на клавишу В/О; при этом на индикаторе никаких изменений не произойдет. Если после ввода программы есть подозрения, что какой-то оператор был введен неправильно, то надо нажать клавишу БП, ввести номер этого оператора, F ПРГ. Номер появится на счетчике, а с левого края - код интересующего оператора. По таблице кодов в "Руководстве" проверяется, что это за оператор. При необходимости его изменить нажимаем клавишу ШГ и вводим правильный оператор. После чего, нажатием F АВТ В/О подготавливаем калькулятор к работе.

В ходе выполнения программы появление на индикаторе сигнала "ЕГГОГ" (ошибка) показывает на то, что или начальные данные или текст программы были введены неправильно; или не правильным было выполнение инструкции (см. ниже). При этом лучше всего перейти к началу программы клавишей В/О и повторить ввод начальных данных с начала. Если же опять появится сигнал "ЕГГОГ" то необходимо проверить - не являются ли начальные данные недопустимыми для данного алгоритма, например: по ходу программы требуется вычислить $\sqrt{x}$, а х - отрицательное число. Проверять насколько правильным был ввод программы можно по указаниям "Руководства", но если программа не очень велика, быстрее и надежнее будет выключить и (через 10 секунд!) включить калькулятор и повторить ввод.

Отметим некоторые замеченные особенности работы: иногда вместо заносимого адреса перехода могут появиться другие цифры, при этом надо повторить ввод с оператора, стоящего перед оператором перехода; в редких случаях после нажатия оператора БП и адреса перехода (в режиме F АВТ) переход может быть не на тот адрес, который был указан. Это наблюдается при переходе на оператор перехода или на адрес, следующий за ним и выражается в изменении числа, находящегося в это время на индикаторе.

При печатании настоящей работы мы пользовались обозначениями: знак "↑"(ввод) обозначен символом "!"; "Х" обозначает умножение; "ХУ" - обмен содержимого регистров Х и У; "÷" или ":" обозначают знак деления; "F" - префиксная клавиша F. Все вводимые операторы везде, кроме текста программы, подчеркнуты, например: +, ИП 5, F e^x и т.д. Знаки препинания, стоящие между подчеркнутыми операторами имеют только смысловое значение. Вводимые цифры не подчеркиваются.

Некоторые клавиши микрокалькулятора имеют двойное и тройное значение. В алгоритмах мы их обозначаем по смыслу выполняемой операции.

В настоящем сборнике описание любого алгоритма состоит из следующих частей:

1. Краткое математическое или словесное описание алгоритма;
2. Текст программы;
3. Инструкция по работе с данным алгоритмом;
4. Ориентировочное время работы программы;
5. Контрольный пример.

После инструкции по работе с алгоритмом иногда могут быть некоторые примечания.

Перед началом работы с конкретном алгоритмом полезно полностью ознакомиться с его описанием, в том числе и с контрольным примером.

Математическое или словесное описание алгоритма очень кратко поясняют его суть и включают в себя формулы, по которым работает данная программа.

Текст программы оформлен в виде (обычно пяти) столбцов, с вертикальной линией каждый, разделяющей операторы и их адреса.

Инструкция по работе с данным алгоритмом всегда начинается с директивы "ввести программу". По этой директиве пользователь нажимает клавиши $\underline{\text{F ПРГ}}$, полностью вводит текст программы, и нажимает клавиши $\underline{\text{F АВТ}}$.

В некоторых алгоритмах, например при решении уравнений, требуется ввести функцию в тексте программы, что обозначено символом конкретной функции между двух многоточий. Функция программируется согласно указаниям "Руководства" в виде подпрограммы. Аргумент функции можно использовать сразу же первым оператором этой подпрограммы, и вычисленное значение никуда не записывать. Например функция $\sqrt{x}+5$: $\underline{F\sqrt{}}$ $\underline{5}$ $\underline{+}$. Если вид функции довольно сложен, то первым оператором аргумент можно записать в свободный регистр и в дальнейшем использовать, например: $\sin x+\sqrt{x}+5$: П I F sin 5 + ИП I F√ +. В подпрограмме можно использовать все свободные регистры памяти, т.е. те, которые не встречаются в тексте основной программы. В некоторых алгоритмах указываются, какие переменные в каких регистрах находятся, например: x в рг.0, y в рг.I, y' в рг.2. В таком случае при вводе функции от этих переменных используют эти регистры.

После ввода текста подпрограммы продолжается ввод текста основной программы, чаще всего остаётся оператор В/О.

Когда таким образом завершено выполнение директивы "ввести программу" и нажата клавиша F АВТ, продолжается выполнение следующих директив инструкции. Почти всегда следующая директива - В/О. После этого может быть директива о вводе некоторых служебных чисел, например I ВП 7 П 7, I,8 F I/x П 8. Эти служебные числа необходимы для некоторых операций, не упомянутых в описании алгоритма (например для взятия целой части числа). Затем производится ввод начальных данных, которые обозначены так же, как в описании или формулах. Данные вводятся или по одному числу или по два, или по трое, разделяемые оператором "↑". После ввода очередного числа или пары чисел, или тройки нажимается клавиша С/П и на индикаторе появляется номер (индекс) введенного данного. В инструкции этот номер изображается в круглых скобках, сразу за оператором С/П. Например, ввод массива данных в инструкции записан в виде строки:

a_1 С/П (I), a_2 С/П (2), a_3 С/П (3), ... , a_n С/П (n).

Массив данных - $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Всё, что обозначено в круглых скобках сразу после оператора С/П или другого, представляет собой выведенное на индикатор какое-то сообщение программы или некоторый результат и требует внимание пользователя. В инструкции всегда имеются соответствующие пояснения. Появление других, не зарегистрированных инструкцией чисел может быть оставлено без внимания. Отметим, что нажатие на любую клавишу допускается только тогда, когда на индикаторе ярко высвечивается какое-нибудь число.

В инструкции можно встретить различные операторы, выполнение которых строго обязательно и в указанном порядке.

В конце инструкции всегда стоит указание о том, что делать для обработки новых начальных данных той же программой. Часто требуется просто нажатие В/О и переход на ввод новых данных; часто требуется выполнение директив вроде Сх П 0 П 2 П 3 П 5 В/О, которые необходимы для очистки регистров.

После инструкции в некоторых алгоритмах встречается примечание, в котором указываются некоторые дополнительные возможности. Например, указывается как получить текущее значение аргумента x_i и как изменить шаг при решении дифференциального уравнения.

Всегда, где это возможно, сказано о времени, через которое на индикаторе появится то или иное сообщение при работе программы. Например, запись $T(i)=6''$, $T(\hat{x})=23''$, означает, что при вводе массива $a_1, a_2, \ldots, a_n$ после ввода очередного a_i и нажатии клавиши С/П индекс этого числа i появится через 6 секунд, а после ввода всех чисел и оператора С/П (или другого) вычисляемая величина $\hat{x}$ появится через 23 секунды. Несмотря на использованный знак равенства, время приближенно. В некоторых случаях указывается время контрольного примера.

Контрольный пример представляет собой конкретную задачу, расчитанную по данной программе с проверенным результатом. Полезно перед своей задачей повторить расчет данных этого примера (или какого-нибудь проверенного своего). Контрольный пример часто может подсказать, особенно при небольшом опыте пользователя, ход работы с данной программой, с выбранным алгоритмом.

Приведем пример работы. Пусть дан некоторый ряд наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_5$. Требуется вычислить среднюю арифметическую и стандартное отклонение. Тогда математическое описание данного алгоритма включает следующие формулы:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \; ; \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right]} \; ; \quad n=5.$$

Заметим, что программа работает именно по этим формулам. Текст программы таков:

00	П А	07	+	I4	БП	2I	ИП 0	28	-
0I	ИП I	08	П 2	I5	00	22	/-/	29	:
02	+	09	ИП 0	I6	ИП I	23	X	30	F $\sqrt{\ }$
03	П I	I0	I	I7	ИП 0	24	ИП 2	3I	С/П
04	ИП А	II	+	I8	:	25	+		
05	F x^2	I2	П 0	I9	С/П	26	ИП 0		
06	ИП 2	I3	С/П	20	F x^2	27	I		

I. Ввести программу, В/0.

По этой директиве включаем калькулятор, нажимаем клавиши F ПРГ и вводим текст программы. После ввода последнего оператора (№ 3I) нажимаем клавиши F АВТ, на индикаторе появляется число (чаще "0"); после этого нажимаем требуе- директивой клавишу В/0 .

2. x_1 С/П (I), x_2 С/П (2), ... , x_5 С/П (5).

Эта директива требует ввода начальных данных. В роли таковых используем начальные данные контрольного примера (см. ниже). Число x_1 у нас - 30,9. Набираем его на клавиатуре, после этого сразу нажимаем С/П . Примерно через 5 секунд на индикаторе появится число "I", показывающее индекс только что введенного числа (что равно количеству введенных чисел, если индекс первого числа равен I); теперь набираем x_2 - 3I,2, нажимаем С/П и опять получаем на индикаторе индекс, уже "2". Действуем аналогичным образом, пока наконец не доходим до ввода последнего числа ряда. У нас x_5 - 32 и n =5. Вводим "32", С/П и получаем на индикаторе число "5". Теперь надо сообщить калькулятору о том, что ряд исчерпан и можно перейти непосредственно к вычислению $\bar{x}$ и σ. Это и делает следующая директива:

3. БП I6 С/П ($\bar{x}$), С/П (σ).

Указание БП I6 означает, что программа будет выполнять работу вычислений по формулам. И теперь нажимаем на С/П и через I секунду получаем $\bar{x}$, который будет на индикаторе - "3I,I8"; затем опять С/П и примерно через 4 секунды получаем на индикаторе вычисленное значение σ.

Если больше вычислений нет, то можно просто выключить калькулятор. Если же надо подсчитать $\bar{x}$ и σ по этому же алгоритму для другого ряда, то надо выполнить директиву:

4. Для нового ряда: Сх П 0 П I П 2 В/0 и идти к п.2.

Указанные действия необходимы для того, что бы очистить регистры 0,I и 2, в которых накапливались суммы $\sum x_i$ и $\sum x_i^2$; а "идти к п.2" означает что можно вводить начальные данные уже новой задачи, т.е опять выполнять директивы инструкции со второго пункта. Оператор В/0, стоящий сразу же после очистки регистров нужен для того, чтобы программа для нового ряда выполнялась бы с самого начала.

То время, о котором упоминалось, в течении которого калькулятор производит вычисления той или иной величины, описывается так:

T(i)=5", T($\bar{x}$)=I", T(σ)=4".

В заключении приводим контрольный пример, который был использован в нашем расчёте.

Контрольный пример:

i:	I	2	3	4	5
x_i:	30,9	3I,2	30,3	3I,5	32,0 .

$$\bar{x} = 31{,}18 \quad , \sigma = 0{,}638$$

Таким образом был проведен примерный расчет по алгоритму, и проделанная работа очень типична для любых алгоритмов.

В работе с программируемым калькулятором, так же как и в работе с любой другой вычислительной техникой, нет понятия "большая" или "маленькая" ошибка. Любая, даже незначительная на первый взгляд небрежность обязательно приведёт к неправильному результату, который в лучшем случае, будет выведен на индикатор в виде сигнала "ЕГГОГ", а в худшем случае в виде какого-нибудь числа, которое может быть принято за правильное.

Однако, несмотря на категоричность последнего утверждения, опыт работы приходит довольно быстро. Все, кажущиеся неуклюжими на первый взгляд правила и директивы, вскоре станут Вам понятными и естественными и работа с Вашей микро - ЭВМ стала легка и очень интересна.

Тогда станет понятно насколько полезны, незаменимы, удивительны и мощны современные компьютеры, к которым относится и Ваш программируемый микрокалькулятор "ЭЛЕКТРОНИКА БЗ-34".

I. Пошаговое вычисление значений функции по заданной формуле с заданным шагом.

Вычисляются и последовательно выводятся на индикатор значения заданной функции $y=F(x)$ в равноотстоящих точках $x_i=x_0+ih$ ($i=0,I,\ldots$) , где h – заданный шаг.

```
00 | П 3
01 | ПП
02 | I3
03 | !
04 | ИП 3
05 | XY
06 | С/П
07 | ИП 2
08 | ИП 3
09 | +
I0 | П 3
II | БП
I2 | 00
I3 | ...
   | F(x)
   | В/О
```

1. Ввести программу, В/О .
2. h П 2 , x_0 П 3 .
3. С/П (y_0) ,..., С/П (y_i) ,... .
4. Для расчета новой функции: БП I3 F ПРГ , ввести новую функцию, F АВТ В/О и идти к п.2

Примечание:

а) после получения очередного y_i можно получить значение соответствующего x_i нажатием на клавишу XY ;

б) после получения очередного y_i можно менять шаг: h (новый) П 2 и продолжать расчет.

Контрольный пример:

Требуется вычислить значения функции $y=e^{\sin x}+x$ с шагом $h=0{,}1$ $x_0=0$. Заносим функцию с адреса № I3 : П 0 F sin F e^x ИП 0 + В/О .

x_i:	0	0,I	0,2	0,3
y_i:	I	I,20497	I,41978	I,64383 .

2. Вычисление значений полинома. Схема Горнера.

Вычисляются значения полинома

$$y=a_1+a_2x+a_3x^2+\ \ldots+a_{n+1}x^n\ . \qquad (n\leqslant 9)$$

Вычисляются значения по схеме Горнера:

$$y=a_1+x(a_2+x(a_3+\ \ldots\ +x(a_n+a_{n+1}x)\ldots)\ .$$

00	ИП Д	05	К ИП 0	I0	П В	I5	F x=0	20	БП
0I	П 0	06	ИП С	II	ИП 0	I6	I9	2I	06
02	ИП В	07	X	I2	!	I7	БП		
03	С/П	08	К ИП 0	I3	I	I8	00		
04	П С	09	+	I4	-	I9	ИП В		

I. Ввести программу, <u>В/0</u> .
2. n+2 <u>П Д</u> ,a_1<u>П I</u> , a_2<u>П 2</u> , ... (максимально a_{10}<u>П А</u>) .
3. <u>С/П</u> ,
4. x <u>С/П</u> (y(x)).
5. Для вычисления при новом x повторить п.4.
6. Для вычисления другого полинома : <u>В/0</u> и идти к п.2.

Примечание: если в полиноме отсутствует аргумент в некоторой степени, то считать соответствующий коэффициент равным нулю, что и занести в соответствующий регистр.

T(y(x))=I0" ÷ 50".

<u>Контрольный пример</u>:

$y=5,448+2,464x-I,I68x^2+0,234x^3$
y(0,842)=6,834308 T=I5".

3. Уравнение прямой, проходящей через две точки.

Через две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) проходит прямая, уравнение которой:

$$y = kx + b \quad , \text{где} \quad k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \; ; \qquad b = y_1 - kx_1 \; ; \quad x_1 \neq x_2 \; .$$

00	П I	04	П 2	08	ИП 3	I2	С/П	I6	ИП 3
0I	С/П	05	С/П	09	-	I3	ИП I	I7	+
02	ИП I	06	П 3	I0	ИП 2	I4	/-/	I8	С/П
03	-	07	С/П	II	:	I5	X		

I. Ввести программу, В/0 .
2. x_1 С/П , x_2 С/П , y_1 С/П , y_2 С/П (к) , С/П (в) .
3. Для нового счета идти к п.2, В/0 .

Т(к)≈3" , Т(в)≈2" .

Контрольный пример:

Даны точки (I.2; 0.056) и (I.3; 0.3).
Получаем результат: к=2,44 и в=-2,872 , т.е. уравнение прямой: у=2,44х-2,872 .

4. Расстояние от точки до прямой (на плоскости).

Расстояние от точки (x_0, y_0) до прямой $y=kx+в$ определяется по формуле:

$$d = \frac{|kx_0 + в - y_0|}{\sqrt{k^2+1}} .$$

00	П 2	05	ХУ	I0	ИП I	I5	F x^2	20	:
0I	ХУ	06	ИП 3	II	-	I6	I	2I	F √
02	П 3	07	Х	I2	F x^2	I7	+	22	БП
03	С/П	08	ИП 2	I3	П I	I8	ИП I	23	03
04	П I	09	+	I4	ИП 3	I9	ХУ		

I. Ввести программу, В/О .
2. к ! в С/П .
3. x_0 ! y_0 С/П (d).
4. Для новых x_0 и y_0 повторить п. 3.
5. Для новой прямой: В/О и идти к п.2 .

T(d)=6"

Контрольный пример:

$y=2,5x + I,7$. Найти расстояние от этой прямой до точки (4; -I50).
d =60,05387 .

5. Линейная интерполяция.

Пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) точки некоторой функции $y=y(x)$. Значение этой функции в точке x_0 : $y_0=y(x_0)$ можно приближенно найти используя формулу линейной интерполяции:

$$y_0 \approx [(x_2 - x_0)\cdot y_1 + (x_0 - x_1)\cdot y_2]/(x_2 - x_1) \ ; \quad x_2 \neq x_1 .$$

00	П 4	06	П I	I2	X	I8	X	24	-
0I	F ⟳	07	С/П	I3	П 5	I9	ИП 5	25	ИП 5
02	П 2	08	П 0	I4	ИП 2	20	+	26	XY
03	F ⟳	09	ИП I	I5	ИП 0	2I	П 5	27	+
04	П 3	I0	-	I6	-	22	ИП 2	28	БП
05	F ⟳	II	ИП 4	I7	ИП 3	23	ИП I	29	07

I. Ввести программу, В/0 .

2. x_1 ! y_1 ! x_2 ! y_2 С/П .

3. x_0 С/П (y_0).

4. Для вычисления значения в другой точке повторить п.3 .

5. Для нового счета В/0 и идти к п.2 .

$T(y_0) \approx 7''$

Контрольный пример:

y(I)=25 , y(0,5)=I0 .

x_1=0,5, y_1=I0, x_2=I, y_2=25. x_0=0,7 $y_0=y(x_0)$=I6

6. Параболическая интерполяция и полином для равноотстоящих наблюдений.

Строится интерполяционный полином Ньютона второго порядка:

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h}(x - x_0) + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1) =$$

$$= Ax^2 + Bx + C \quad ; \quad h = x_1 - x_0 \ ,$$

где (x_i, y_i), $i=0,1,2$ – наблюдения; коэффициенты A, B и C вычисляются программой. При необходимости вычисляются значения $y^* = y(x^*)$, $x_0 \leq x^* \leq x_2$.

00	П I	I3	ИП 9	26	2	39	С/П	52	ИП В
0I	ХУ	I4	+	27	+	40	ИП В	53	Х
02	П 0	I5	П А	28	П В	4I	ИП I	54	ИП 3
03	ИП I	I6	С/П	29	С/П	42	Х	55	+
04	–	I7	ИП 2	30	ИП I	43	ИП А	56	ИП 0
05	/–/	I8	+	3I	ИП 0	44	–	57	Х
06	П 9	I9	ИП 3	32	+	45	ИП 0	58	ИП 4
07	С/П	20	2	33	ИП В	46	Х	59	+
08	П 2	2I	Х	34	/–/	47	ИП 2	60	БП
09	С/П	22	–	35	Х	48	+	6I	50
I0	П 3	23	ИП 9	36	ИП А	49	П 4		
II	ИП 2	24	F x^2	37	+	50	С/П		
I2	–	25	÷	38	П 3	5I	П 0		

I. Ввести программу , В/0 .
2. x_0 ↑ x_1 С/П , y_0 С/П , y_1 С/П, y_2 С/П (A) С/П (B) С/П (C) .
3. Для вычисления y^*: x^* С/П (y^*) .
4. Для новых x^* повторить п. 3 .
5. Для новых начальных данных: В/0 и идти к п.2.

Контрольный пример:

Даны три пары равноотстоящих точек: (-I;0,3333), (0;I) и (I;3) / функция $y=3^x$ / . Составим апроксимирующий полином и найдем значение его в точке $x^*=0,5$.

$x_0=-I$, $x_1=0$; $y_0=0,3333$, $y_1=I$, $y_2=3$.

Находим: A=0,66665 B=I,33333 C=I.

$y=0,66665x^2+I,33333x+I$; $y^*(0,5)=I,83333$.

T(A)=5", T(B)=4", T(C)=3", T(y^*)=4" .

7. Проведение окружности через три точки.

Даны три точки (x_a, y_a), (x_b, y_b) и (x_c, y_c). Через них проводится окружность радиуса R и координатами центра (x^*, y^*), которые находят из уравнений:

$$\begin{cases} y^* = a_1 x^* + b_1 \\ y^* = a_2 x^* + b_2 \end{cases},$$

где:

$$a_1 = -\frac{x_b - x_a}{y_b - y_a}; \quad b_1 = \frac{1}{2(y_b - y_a)}\left[y_b^2 - y_a^2 + x_b^2 - x_a^2\right];$$

$$a_2 = -\frac{x_c - x_b}{y_c - y_b}; \quad b_2 = \frac{1}{2(y_c - y_b)}\left[y_c^2 - y_b^2 + x_c^2 - x_b^2\right];$$

$$R = \left[(x^* - x_a)^2 + (y^* - y_a)^2\right]^{1/2}.$$

Необходимо следить за тем, что бы ни одна из прямых, проходящих через две точки (любые из трёх данных), не была бы параллельна ни одной оси координат. В противном случае необходим выбор новых координат. В случае параллельности на индикаторе появляется "ЕГГОГ".

00	ИП 0	I7	F x^2	34	ХУ	5I	−	68	X
0I	ИП 2	I8	ИП 3	35	÷	52	2	69	ИП 8
02	−	I9	F x^2	36	П 8	53	X	70	+
03	ИП 3	20	−	37	ИП 3	54	ИП Д	7I	С/П
04	ИП I	2I	ИП 4	38	F x^2	55	ХУ	72	ИП I
05	−	22	F x^2	39	ИП I	56	÷	73	−
06	÷	23	+	40	F x^2	57	П 9	74	F x^2
07	П 6	24	ИП 2	4I	−	58	ИП 8	75	ИП 2
08	ИП 2	25	F x^2	42	ИП 2	59	ИП 9	76	ИП 0
09	ИП 4	26	−	43	F x^2	60	−	77	−
I0	−	27	П Д	44	+	6I	ИП 6	78	F x^2
II	ИП [illegible]	28	ИП 5	45	ИП 0	62	ИП 7	79	+
I2	ИП 3	29	ИП 3	46	F x^2	63	−	80	F $\sqrt{\ }$

I3	-	30	-	47	-	64	+	8I	С/П
I4	+	3I	2	48	П Д	65	С/П		
I5	П 7	32	X	49	ИП 3	66	П 2		
I6	ИП 5	33	ИП Д	50	ИП I	67	ИП 7		

I. Ввести программу, В/О.
2. x_a П 0, y_a П I, x_b П 2, y_b П 3, x_c П 4, y_c П 5 .
3. С/П (x^*) С/П (y^*) С/П (R).
4. для новых начальных данных: В/О и идти к п.2.

$T(x^*)=23''$, $T(y^*)=2''$, $T(R)=5''$.

Контрольный пример:

Даны три точки: (3;9), (8;II) и (I2;2).
Находим: центр окружности имеет координаты (7,368;5,33), радиус окружности R=5,705.

8. Переход от декартовых координат к полярным и обратно.

В программе используются формулы, связывающие декартовы и полярные координаты:

$x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$; $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

При пользовании данной программой необходимо внимательно следить за тем, что бы переключатель "Р-Г" находился в нужном положении!

00	!	07	F x^2	I4	ИП 3	2I	С/П	28	С/П
0I	F x=0	08	!	I5	ИП 2	22	П 2	29	ИП 3
02	2I	09	ИП 2	I6	÷	23	С/П	30	F sin
03	С/П	I0	F x^2	I7	F arctg	24	П 3	3I	ИП 2
04	П 2	II	+	I8	С/П	25	F cos	32	X
05	С/П	I2	F $\sqrt{}$	I9	БП	26	ИП 2	33	БП
06	П 3	I3	С/П	20	00	27	X	34	I8

I. Ввести программу, В/О.
2. При переходе от декартовых координат к полярным:
   0 С/П, x С/П, yС/П (ρ) С/П (φ).
   При переходе от полярных координат к декартовым:
   I С/П, ρ С/П, φ С/П (x) С/П (y).
3. Для новых начальных данных идти к п.2.

Контрольный пример:

x=I, y=I ; ρ =I,4I42I35, φ=45°.
ρ=I, φ=I7,5I ; x=0,95366, y=0,30087 .
T=4" ÷ 6 "

7

9. Факториал.

$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$; $1 \leq n \leq 69$.

00	ПО
0I	I
02	П I
03	ИП 0
04	ИП I
05	X
06	П I
07	F L0
08	03
09	ИП I
I0	С/П
II	БП
I2	00

I. Ввести программу, В/О .
2. n С/П ($n!$).
3. Для новых повторить п.2.

Примечание: если $n > 69$, на индикаторе появляется сигнал "ЕГГОГ".

$T(n!)=2\cdot n$"

Контрольный пример:

5!=I20 .

10. Размещения.

Вычисляется число размещений из n элементов по m :

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1).$$

00	ПО	06	+	12	X	18	23	24	I
01	I	07	I	13	П I	19	ИП I	25	-
02	ПI	08	+	14	ИП 0	20	С/П	26	П 0
03	С/П	09	П 2	15	ИП 2	21	БП	27	БП
04	/-/	10	ИП 0	16	-	22	00	28	10
05	ИП 0	11	ИП I	17	F x=0	23	ИП 0		

1. Ввести программу, <u>В/О</u>.
2. n <u>С/П</u> (I), m <u>С/П</u> (A_n^m).
3. Для новых начальных данных идти к п.2.

<u>Контрольный пример</u>:

A_n^m=120, T(A_n^m)=15".

$n=6$, $m=3$.

II. Сочетания.

Вычисляется число сочетаний из n элементов по m :

$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\ , \quad 1 \leq m \leq n.$$

В алгоритме использована реккурентная формула:

$$C_n^{i+1} = \frac{n-i}{i+1}\, C_n^i \ ; \quad C_n^0 = 1\ , \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

00	П C	07	ИП 0	I4	ИП I	2I	-	28	+
0I	XY	08	I	I5	:	22	F x=0	29	П 0
02	П B	09	+	I6	ИП A	23	26	30	БП
03	0	I0	П I	I7	X	24	ИП A	3I	08
04	П 0	II	ИП B	I8	П A	25	С/П		
05	I	I2	ИП 0	I9	ИП I	26	ИП 0		
06	П A	I3	-	20	ИП C	27	I		

I. Ввести программу, В/О.

2. n ↑ m С/П (C_n^m).

3. Для нового счета: Сx П 0 В/О и идти к п.2.

Примечание: результат округлить до ближайшего целого числа.

Контрольный пример:

C_6^3 =20 , T=20" ; C_{14}^{12}=9I , T=I'25" .

I2. Гиперболические функции.

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right); \quad \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right); \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.$$

00	F e^x	04	/−/	08	÷	I2	+	I6	ИП 2
0I	П 0	05	ИП 0	09	П 2	I3	2	I7	С/П
02	F I/x	06	+	I0	ИП 0	I4	÷	I8	БП
03	П I	07	2	II	ИП I	I5	П 3	I9	00

I. Ввести программу, B/0.
2. x С/П (sh), XY (ch), ± (th).
3. Для нового x повторить п.2.

T(sh)=7", T(ch)=0,5", T(th)=0,5".

Контрольный пример:

sh 2,5=6,050245 ; ch 2,5=6,I322895 ; th 2,5=0,9866I43 .

Обратные гиперболические синус и косинус:

$$\operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right); \quad \operatorname{arch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right); \quad x > 1.$$

00	П0	05	ИП 0
0I	F x^2	06	+
02	I	07	F ln
03	+	08	С/П
04	F √	09	БП
		I0	00

I. Ввести программу (при вводе программы : оператор с адресом 03 для arsh: + , для arch: −), B/0.
2. x С/П (arsh или arch).
3. Для нового x повторить п.2.

T(arsh)=T(arch)=4".

Контрольный пример:

arsh 2,5=I,64723I, arch 2,5=I,5668 .

Обратный гиперболический тангенс:

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad ; \quad |x| < 1.$$

00	П0	08	XY
0I	I	09	+
02	+	I0	F ln
03	П I	II	2
04	I	I2	+
05	ИП 0	I3	С/П
06	-	I4	БП
07	ИП I	I5	00

I. Ввести программу, В/0.
2. x С/П (arth).
3. Для нового x повторить п.2.

T(arth)=5"

Контрольный пример:

arth0,7=0,8673

13. Решение квадратного уравнения.

Квадратное уравнение решается по формуле:

$$ax^2+bx+c=0\ ;\quad D=k^2-ac\ ;\quad k=\frac{1}{2}b\ ;\quad u=-\frac{k}{a}\ ;\quad v=\frac{1}{a}\sqrt{D}\ ;$$

$$\bar{x}_{1,2}=\frac{1}{a}(-k\mp\sqrt{D})\ \text{при}\ D\geqslant 0\ ;\quad x_{1,2}=u\pm iv,\ \text{при}\ D<0,$$

где $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ действительные корни, u и v соответственно действительная и комплексная части.

00	П 2	09	П 5	18	-	27	/-/	36	/-/
01	С/П	10	ИП 2	19	F √	28	+	37	F √
02	!	11	С/П	20	!	29	ИП 2	38	!
03	2	12	П 4	21	F x≥0	30	÷	39	ИП 5
04	/-/	13	X	22	36	31	С/П	40	С/П
05	+	14	!	23	ИП 3	32	ИП 4	41	ИП 2
06	П 3	15	ИП 3	24	F x<0	33	ХУ	42	÷
07	ИП 2	16	F x^2	25	28	34	+	43	С/П
08	+	17	ХУ	26	ХУ	35	С/П		

1. Ввести программу, <u>В/0</u>.
2. a <u>С/П</u>, b <u>С/П</u>.
3. Если корни действительные:
   c <u>С/П</u> ($\bar{x}_1$), <u>С/П</u> ($\bar{x}_2$).
   Если корни комплексные:
   c <u>С/П</u> (ЕГГОГ). <u>С/П</u> (u), <u>С/П</u> (v).
4. Для нового счета: <u>В/0</u> и идти к п.2.

<u>Контрольный пример</u>:

$x^2+x-2=0$; $x_1=-2$, $x_2=1$.
$x^2+2x+2=0$; $u=v=-1$.

Алгоритм и пример описаны в работе [4].

I4. Решение уравнения F(x)=0 методом дихотомии.

Находится корень уравнения F(x)=0 в интервале [а,в] . Требуется, что бы F(x) была определена на [а,в] , изменяла там знак и только один раз. Трбуемая точность: $\varepsilon = 10^{-n}$. Вводится только целое положительное число n . Необходимое число итераций определяется автоматически. За k итераций интервал [а,в] сужается в 2^k раз и имеет новые границы: [â,ȇ] . Искомый корень – x^* .

00	!	II	ШГ	22	+	33	ИП 2	44	ИП Д
0I	3	I2	48	23	2	34	ИП Д	45	П 2
02	X	I3	ИП 2	24	+	35	X	46	БП
03	2	I4	X	25	П С	36	F x<0	47	20
04	+	I5	F x≥0	26	ПП	37	42	48	...
05	П 0	I6	20	27	48	38	ИП С		F(x)
06	ИП А	I7	I	28	П Д	39	П В		...
07	ПП	I8	/-/	29	F L0	40	БП		В/0
08	48	I9	F √	30	33	4I	20		
09	П 2	20	ИП А	3I	ИП С	42	ИП С		
I0	ИП В	2I	ИП В	32	С/П	43	П А		

I. Ввести программу, В/0.
2. а П А , в П В .
3. n С/П (x^*) , ИП Д ($F(x^*)$) , ИП А (â) , ИП В (ȇ).
4. Для нового уравнения: БП 48 F ПРГ ,ввести новое уравнение,В/0, F АВТ , В/0 и идти к п.2.

Примечание: если F(x) принимает на границах [а,в] значения одного знака или равные, то на индикаторе появляется сигнал "ЕГГОГ", после чего В/0 и идти к п.2 , вводя правильные значения а и в.

Контрольный пример:

Решаем уравнение $e^x - x^2 = 0$ на интервале $[-0,8; -0,7]$, с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$.

$a = -0,8$, $в = -0,7$, $n = 5$.

$x^* = -0,70346765$, $F(x^*) = -0,00000043$;

$\hat{a} = -0,7034684$, $\hat{в} = -0,70346685$.

$T(x^*) = 180''$. $F(x)$: <u>П 5</u> <u>F e^x</u> <u>ИП 5</u> <u>F x^2</u> <u>–</u> .

Примечание: если окажется так, что функция $F(x)$ принимает на границах интервала разные знаки, внутри интервала имеет несколько корней; то возможно: или сходимость к одному из корней, или появление на индикаторе сигнала "ЕГГОГ".

I5. Решение уравнения F(x)=0 методом Ньютона.

Ищется корень уравнения F(x)=0 с начальным приближением x_0, точность $-\varepsilon = 10^{-4}$. Программа использует численную аппроксимацию $F'(x)$.

$$x_{i+1} = x_i - \delta_i \frac{F(x_i)}{F(x_i+\delta_i)-F(x_i)} \quad ; \quad \delta_i = 10^{-5} \cdot x_i \quad ; \quad i = 0,1,\dots .$$

В связи с тем, что вопрос сходимости часто бывает трудно разрешимым, на индикатор выводятся последовательные приближения $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$. Поэтому визуально можно оценивать сходимость и её скорость.

00	П 0	07	ПП	14	X	2I	+	28	БП
0I	ПП	08	30	I5	ИП I	22	П 0	29	04
02	30	09	ИП I	I6	X	23	ПП	30	...
03	П I	I0	-	I7	ИП А	24	30		F(x)
04	ИП 0	II	П А	I8	/-/	25	П I		...
05	ИП 5	I2	ИП 5	I9	÷	26	ИП 0		В/0
06	+	I3	ИП 0	20	ИП 0	27	С/П		

1. Ввести программу, В/0 .
2. I ВП 5 /-/ П 5 .
3. x_0 С/П (x_1), С/П (x_2), ... , С/П (x_i), ...
4. Для нового уравнения: БП 30 F ПРГ , ввести новое уравнение, В/0, F АВТ В/0 и идти к п.2.

Примечание: после получения очередного x_i возможно получить значение $F(x_i)$: ИП I ($F(x_i)$).

Контрольный пример:

Решаем уравнение $x^2(x+I)-3=0$ с начальным приближением $x_0=I$.

Выписываем получаемые на индикаторе последовательные приближения:

$x_1=I,2$ P(x) : П 2 F x^2 ИП 2 I + X 3 = .

$x_2=I,I7$

$x_3=I,I75357I$

$x_4=I,I744208$

$x_5=I,I745835$

$x_6=I,I745553$

$x_7=I,I745602$; $F(x_7)=-0,000027$.

$T(x_i)=I4"$.

I6. Решение системы двух линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f. \end{cases}$$

00	ИП 2	06	П 4	I2	П 5	I8	ИП 5	24	ИП 4
0I	÷	07	С/П	I3	С/П	I9	÷	25	+
02	П 3	08	ИП 2	I4	ИП 2	20	С/П	26	С/П
03	С/П	09	÷	I5	÷	2I	ИП 3		
04	ИП 2	I0	ИП 3	I6	ИП 4	22	/-/		
05	÷	II	-	I7	-	23	X		

I. Ввести программу, В/0 .
2. а П 2, в С/П, е С/П .
3. с П 2, d С/П, f С/П (у) С/П (х).
4. Для нового счета: В/0 и идти к п.2.

T(y)=3", T(x)=2".

Контрольный пример:

$$\begin{cases} 8x-3y=2 \\ 2x+5y=35, \end{cases} \qquad \begin{matrix} y=6, \\ x=2,5 . \end{matrix}$$

17. Решение системы трёх линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = в_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = в_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = в_3 \end{cases}$$

00	ИП 9	15	-	30	ИП 6	45	С/П	60	ИП 9
01	÷	16	К ПП Д	31	-	46	ИП 4	61	!
02	К ПП Д	17	ИП 7	32	ИП 2	47	Х	62	ИП 7
03	К ПП Д	18	-	33	+	48	/-/	63	Х
04	К ПП Д	19	ИП 2	34	П 9	49	ИП 3	64	/-/
05	ИП 8	20	÷	35	ИП 3	50	+	65	ИП 6
06	-	21	П I	36	!	51	ИП 5	66	+
07	К ПП Д	22	ИП 4	37	ИП 5	52	+	67	С/П
08	ИП 7	23	!	38	+	53	С/П	68	К П 0
09	-	24	ИП 5	39	/-/	54	ИП 8	69	С/П
10	К ПП Д	25	+	40	ИП 9	55	Х	70	ИП 9
11	ИП 6	26	/-/	41	+	56	/-/	71	+
12	-	27	ИП I	42	ИП I	57	ИП 6	72	В/О
13	К ПП Д	28	+	43	+	58	+		
14	ИП 8	29	К ПП Д	44	П 9	59	П 6		

1. Ввести программу.
2. 68 П Д , 9 П 0 , В/О .
3. a_{11} П 9 , a_{12} С/П , a_{13} С/П , $в_1$ С/П ;
   a_{21} П 9 , a_{22} С/П , a_{23} С/П , $в_2$ С/П ;
   a_{31} П 9 , a_{32} С/П , a_{33} С/П , $в_3$ С/П (x_3) С/П(x_2) С/П (x_1).
4. Для новой системы идти к п.2.

$T(x_i) \approx 5''$.

ю

Контрольный пример:

$$\begin{cases} 2x_1-5x_2-6x_3=5 \\ -3x_1+2x_2+5x_3=I \\ 2x_1+4x_2-3X_3=-I6 \ , \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_3=2, \\ x_2=-3, \\ x_1=I \ . \end{matrix}$$

Примечание: в некоторых случаях точность решения может оказаться недостаточной из-за плохой обусловленности системы ; из-за довольно малых элементов на главной диагонали и ряда других причин. Поэтому рекомендуется при решении указанных систем производить проверку путем подстановки найденных корней в систему.

18. Решение нелинейной системы уравнений методом Зейделя.

Система нелинейных уравнений:

$$x = F_1(x,y), \quad y = F_2(x,y)$$

решается по следующим итерационным формулам:

$$\begin{cases} x_{i+1} = F_1(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = F_2(x_{i+1}, y_i) \end{cases}; \qquad i = 0, 1, \ldots, n \qquad x_0,\ y_0 \text{ – нач. прибл.}$$

Условия сходимости:

$$\left|\frac{\partial F_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial F_1}{\partial y}\right| < 1 \quad ; \quad \left|\frac{\partial F_2}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial F_2}{\partial y}\right| < 1 \quad ;$$

для выполнения которых над системой совершают преобразования.

00	ПП
01	10
02	П2
03	ПП
04	§§
05	П 3
06	FL0
07	00
08	0
09	С/П
10	...
	$F_1(x,y)$
	...
	В/О
§§	...
	$F_2(x,y)$
	...
	В/О

1. Ввести программу (по адресам 10 и §§ вводятся соответственно $F_1(x,y)$ и $F_2(x,y)$, каждая из которых должна оканчиваться оператором В/О. При вводе этих функций: аргументы находятся: x_i в рг.2, y_i в рг.3), В/О.
2. x_0 П 2 , y_0 П 3 , n (число итер.) П 0 .
3. С/П (0) , ИП 2 (x_n), ИП 3 (y_n).
4. Для дополнительных итераций : П 0, В/О и идти к п.3.

Контрольный пример:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}\cos y + 0.3 \\ y = \sin(x - 0.6) - 1.6 \end{cases} \qquad x_0 = 0{,}1 \qquad y_0 = -2$$

n =5 дополнит. n =2

x_5=0,1511 x_2=0,1506

y_5=–2,034 . y_2=–2,0340

T=55".

I9. Интегрирование функции, заданной аналитически.

$$J=\int_a^b F(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}\left[F(x_0)+4F(x_1)+2F(x_2)+\ldots+4F(x_{n-1})+F(x_n)\right];$$

$x_i = x_0 + \frac{b-a}{n}\cdot i$; $i=0,1,\ldots,n$; $x_0=a; x_n=b$; n – чётно!

00	П 3	09	2	I8	+	27	+	36	3
0I	-	I0	П 6	I9	П 3	28	П 5	37	+
02	ИП 0	II	6	20	ПП	29	F L0	38	С/П
03	+	I2	!	2I	39	30	II	39	...
04	П 4	I3	ИП 6	22	П 7	3I	ИП 5		F(x)
05	ИП 3	I4	-	23	!	32	ИП 7		...
06	ПП	I5	П 6	24	ИП 6	33	-		В/О
07	39	I6	ИП 3	25	X	34	ИП 4		
08	П 5	I7	ИП 4	26	ИП 5	35	X		

I. Ввести программу, В/О.
2. n П 0 , в!а С/П (J).
3. Для новой функции: БП 39 F ПРГ ,ввести новую функцию, F АВТ, В/О и идти к п.2.

Контрольный пример:

$J=\int_0^1 \sqrt{x+1}\,dx$ при $n=4$. Функция: I + F√ В/О .

J =I,2I8945I6, T(J)=40".

20. Интегрирование функции, заданной таблично

Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (n – чётно!) равноотстоящие точки и $y_0, y_1, \ldots, y_n$ соответствующие значения табличной функции $y_i = y(x_i)$. Формула Симпсона:

$$J = \int_{x_0}^{x_n} y(x_i)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \ldots + 4y_{n-1} + y_n\right];$$

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

00	+	06	ПП	I2	I5	I8	П I	24	ИП I
0I	П I	07	I5	I3	БП	I9	ИП 2	25	ИП 0
02	ИП 2	08	С/П	I4	03	20	I	26	X
03	С/П	09	!	I5	X	2I	+	27	3
04	!	I0	2	I6	ИП I	22	П 2	28	:
05	4	II	ПП	I7	+	23	В/0	29	С/П

I. Ввести программу, В/0 .

2. h П 0, y_0 ! y_n С/П (0).

3. y_1 С/П (I), ... , y_{n-1} С/П ($n-1$) .

4. БП 24 С/П (J).   5. Для новой функции: Сх П I П 2 В/0 и идти к п.2 .

$T(i)=5''$, $T(J)=6''$.

Контрольный пример:

i:	0	I	2	3	4
x_i:	0	0,25	0,5	0,75	I
y_i:	I	0,94I	0,8	0,64	0,5

$n=4$, $J=0{,}7854$.

2I. Решение обыкновенного ДУ I порядка методом Рунге – Кутта.

Уравнение решается с шагом h по формулам:

$$\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases};\qquad k_1 = h\cdot F(x_i,\ y_i),$$

$$k_2 = h\cdot F(x_i + h/2,\ y_i + k_1/2),$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i,\qquad k_3 = h\cdot F(x_i + h/2,\ y_i + k_2/2),$$

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\qquad k_4 = h\cdot F(x_i + h,\ y_i + k_3),$$

$$i = 0, 1, \ldots\qquad x_i = x_0 + ih$$

00	П 2	I4	ИП 0	28	X	42	ИП 7	56	П I
0I	2	I5	ИП 3	29	ИП 6	43	2	57	С/П
02	:	I6	+	30	+	44	X	58	БП
03	П 3	I7	П 0	3I	П 6	45	ИП 6	59	04
04	ИП I	I8	ПП	32	ПП	46	+	60	...
05	П 5	I9	60	33	60	47	П 6		F(x,y)
06	ПП	20	2	34	П 7	48	ПП		...
07	60	2I	:	35	ИП I	49	60		ИП 2
08	П 6	22	П 7	36	+	50	ИП 6		X
09	2	23	ИП I	37	П 5	5I	+		В/О
I0	:	24	+	38	ИП 3	52	6		
II	ИП I	25	П 5	39	ИП 0	53	:		
I2	+	26	ИП 7	40	+	54	ИП I		
I3	П 5	27	4	4I	П 0	55	+		

I. Ввести программу и функцию, В/О.
2. x_0 П 0, y_0 П I.
3. h С/П (y_1), С/П (y_2), ... , С/П (y_i), ...
4. Для новых x_0 и y_0 : В/О и идти к п.2.
5. Для нового уравнения: БП 60 F ПРГ, ввести новую функцию, ИП 2 X В/О, В/О и идти к п.2. (Перед последним В/О ввести F АВТ !).

Примечания:

а) При занесении функции $F(x,y)$ в программу: переменная x находится в рг.0, а переменная y в рг.5; поэтому указанные аргументы вызываются операторами ИПО и ИП 5 соответственно.

б) После получения очередного y_i можно получить значение x_i : ИП 0 (x_i) и продолжать расчет.

в) После получения очередного y_i можно менять шаг: h (новый) В/О С/П (y_{i+1} с новым шагом), ИП 0 (x_{i+1} с новым шагом), и продолжать расчет.

Контрольный пример:

Решается уравнение $y' = y - x$; $x_0 = 0$, $y_0 = 1,5$, $h = 0,25$.

Решение записываем в виде таблицы:

i	x_i	y_i
0	0	I,5
I	0,25	I,8920
2	0,5	2,3243
3	0,75	2,8085
4	I	3,3590
5	I,25	3,9950

F(x) : ИП 5 ИП 0 − .

$T(y_i) = 25"$

Все знаки верные.

22. Решение обыкновенного ДУ II порядка модифицированным методом Эйлера.

Уравнение решается с шагом h по формулам:

$$\begin{cases} y'' = F(x,y,y') \\ y(x_0)=y_0;\ y'(x_0)=y'_0 \end{cases}$$

$$\hat{y}'_{i+1} = y'_i + h\cdot F(x_i,y_i,y'_i);$$

$$\hat{y}_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(y'_i + \hat{y}'_{i+1});$$

$$x_i = x_0 + ih \qquad y'_{i+1} = y'_i + \frac{h}{2}\left(F(x_i,y_i,y'_i)+F(x_{i+1},\hat{y}_{i+1},\hat{y}'_{i+1})\right),$$

$$i = 0,1,\ldots \qquad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(y'_i + y'_{i+1}).$$

00	!	I0	ИП A	20	П 2	30	+	40	+
0I	2	II	+	2I	ИП 3	3I	П 0	4I	П I
02	:	I2	П B	22	X	32	ПП	42	С/П
03	П 3	I3	ИП 2	23	ИП 5	33	45	43	БП
04	ПП	I4	ИП 3	24	+	34	ИП 4	44	04
05	45	I5	X	25	П I	35	+	45	...
06	П A	I6	ИП I	26	ИП 3	36	П 2		F(x,y,y')
07	ИП 2	I7	+	27	2	37	ИП 3		ИП 3
08	+	I8	П 5	28	X	38	X		X
09	П 4	I9	ИП B	29	ИП 0	39	ИП 5		В/О

I. Ввести программу и функцию, В/О.
2. x_0 П 0, y_0 П I, y'_0 П 2 .
3. h С/П (y_1), С/П (y_2), ... , С/П (y_i), ...
4. Для новых x_0, y_0 и y'_0 : В/О и идти к п.2.
5. Для нового уравнения: БП 45 F ПРГ, ввести новую функцию, ИП 3 X В/О F АВТ, В/О и идти к п.2.

Примечания:

а) При занесении функции F(x,y,y') в программу: переменная x находится в рг.0, переменная y в рг.I и y' в рг.2 ; поэтому указанные аргументы вызываются операторами ИП 0, ИП I и ИП 2 соответственно.

б) После получения очередного y_i можно получить значения x_i и y'_i : ИП 0 (x_i) и ИП 2 (y'_i) и продолжать расчет.

в) После получения очередного y_i можно менять шаг: h (новый) В/О С/П (y_{i+1} с новым шагом), ИП 0 (x_{i+1} с новым шагом), ИП 2 (y'_{i+1} с новым шагом) и продолжать расчет.

Контрольный пример:

Решается уравнение $y'' = -y - y'/x$; $x_0 = 1$, $y_0 = 0{,}77$, $y'_0 = -0{,}44$, $h = 0{,}1$.

Решение записываем в виде таблицы:

i	x_i	y_i	y'_i
0	I	0,77	-0,44
I	I,I	0,7244	-0,47I2
2	I,2	0,6759	-0,4989
3	I,3	0,6248	-0,5230
4	I,4	0,57I7	-0,5432
5	I,5	0,5I64	-0,5595

F(x) : ИП 2 ИП 0 : ИП I + /-/

T(y_i)=25".

23. Численный гармонический анализ.

На интервале [0,T] аппроксимируется функция $y_k=F(x_k)$ тригонометрическим многочленом ν-го порядка при $x_k=kT/m$ $(k=0,I,2,\ \ldots\ ,m-I)$. Многочлен имеет вид:

$$Q_\nu(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\nu} \left(a_n \cos r_n x + b_n \sin r_n \cdot x\right); \qquad (1)$$

$$a_n = \frac{2}{m}\sum_{k=0}^{m-1} y_k \cos n\frac{2\pi k}{m}; \quad b_n = \frac{2}{m}\sum_{k=0}^{m-1} y_k \sin n\frac{2\pi k}{m};$$

$$r_n = \frac{2\pi n}{T}; \quad 0 \leqslant x \leqslant T; \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \nu.$$

При $m>2\nu$ многочлен (I) дает наилучшее приближение к функции $F(x_k)$ в смысле наименьших квадратов. Алгоритм и контрольный пример взяты из работы [5].

00	П 2	I5	П А	30	ИП 6	45	:	60	ИП 3
0I	2	I6	ИП 3	3I	+	46	П Д	6I	ИП 0
02	X	I7	ИП 9	32	П 6	47	ИП 5	62	X
03	Fπ	I8	X	33	ИП 9	48	X	63	ИП I
04	X	I9	П 8	34	I	49	С/П	64	:
05	ИП 0	20	F cos	35	+	50	ИП Д	65	С/П
06	:	2I	ИП А	36	П 9	5I	ИП 6	66	БП
07	П 3	22	X	37	ИП 0	52	X	67	00
08	ИП I	23	ИП 5	38	-	53	П 2	68	ИП 4
09	ИП 0	24	+	39	F x≥0	54	Cx	69	БП
I0	:	25	П 5	40	68	55	П 5	70	I2
II	П 4	26	ИП 8	4I	0	56	П 6		
I2	ИП 9	27	F sin	42	С/П	57	П 9		
I3	X	28	ИП А	43	2	58	ИП 2		
I4	С/П	29	X	44	ИП 0	59	С/П		

I. Ввести программу, В/О.
2. m П 0, Т П I .
3. n С/П (x_0), y_0 С/П (x_1), y_1 С/П (x_2), y_2 С/П (x_3), ...
...., y_{m-2} С/П (x_{m-1}), y_{m-1} С/П (0).
4. С/П (a_n), С/П (b_n), С/П (τ_n).
5. Для нового n при том же массиве (x_k, y_k): идти к п.3.
6. Для нового счета: идти к п.2.

Примечание: переключатель регистров Р – Г в положении "Р" (радианы)!

$T(x_0)=5"$, $T(x_k)=II"$, $T(a_n)=T(b_n)=T(\tau_n)=3"$.

Контрольный пример:

m =T=I2.

к :	0	I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II
x_k:	0	I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II
y_k:	95	7I	55	43	36	3I	28	26	25	45	9I	I02

n =0 : a_0=I08 ($a_0/2$ =54) ;
n =I : a_1=34,993 b_1=-6,I08 τ_1=0,5236 ;
n =2 : a_2=7,75 b_2=-II,98 τ_2=I,0472 ;
n =3 : a_3=-3 b_3=-4 τ_3=I,5708 .

24. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное двух чисел.

Находится наибольший общий делитель (НОД) и наименьшее общее кратное (НОК) двух целых положительных чисел A и B (A > B) по алгоритму Евклида.

00	П 0	08	ИП 0	I6	ИП 0	24	ИП 0	32	ИП 2
0I	П A	09	:	I7	X	25	С/П	33	П 0
02	XY	I0	ИП 8	I8	/-/	26	ИП A	34	БП
03	П I	II	-	I9	ИП I	27	ИП 0	35	07
04	ИП A	I2	ИП 7	20	+	28	:		
05	X	I3	+	2I	П 2	29	С/П		
06	П A	I4	F Bx	22	F x=0	30	ИП 0		
07	ИП I	I5	-	23	30	3I	П I		

I. Ввести программу, В/0.
2. I ВП 7 П 7, I,8 F I/x П 8 .
3. A ! B С/П (НОД), С/П (НОК).
4. Для новых A и B : В/0 и идти к п.3.

Контрольный пример:

I. A=I2, B=8: НОД=4, НОК=24; T=I5".
2. A=I970, B=I066: НОД=2, НОК=I050010; T=I'40".

25. Проверка числа на простоту.

Положительное целое число A ($A \geq 5$), которое проверяется на простоту не должно быть чётным и кратным трём (т.е сумма его цифр не должна делиться на три). Так как на проверку больших чисел (особенно 7 - 8 значных) затрачивается много времени работы калькулятора, около часа, программа сообщает ориентировочное время своей работы перед началом проверки. Время (Вр) сообщается в секундах, с точностью около I0%. Проверка производится по сокращенному алгоритму "Решето Эратосфена" (не проверяются числа кратные 2 и 3) до $\sqrt{A}$.

00	П 0	09	3	I8	0	27	+	36	С/П
0I	F√	I0	П 2	I9	С/П	28	F Bx	37	ИП 2
02	П I	II	2	20	ИП 0	29	-	38	3
03	2	I2	+	2I	ИП 3	30	/-/	39	+
04	,(запят)	I3	П 3	22	:	3I	ИП A	40	П 2
05	8	I4	ИП I	23	П A	32	+	4I	I
06	5	I5	-	24	ИП 8	33	F x=0	42	БП
07	X	I6	F x≥0	25	-	34	37	43	I2
08	С/П	I7	20	26	ИП 7	35	ИП 3		

I. Ввести программу, В/О.
2. I ВП 7 П 7, I,8 FI/x П 8.
3. A С/П (Вр), С/П ("0",если A простое; наименьший делитель числа A в противном случае (кроме кратных 2 и 3)).
4. Для нового A: В/О и идти к п.3.

Примечание: после получения Вр возможно: 60 : (Вр в мин.); 60 : (Вр в час.) .

T(Вр)=3", T("0") = Вр.

Контрольный пример:

A=I27, Вр=30" ; A=5987, Вр=3мин40" ; A=2576983, Вр=IчасI6'.

26. Цепные дроби. Приближения чисел подходящими дробями.

Положительное нецелое число A может быть представлено цепной дробью вида:

$$[A = a_0;\ a_1, a_2,\ \dots\ , a_n],$$

где n – конечно для рационального A и бесконечно для иррационального. Теория изложена в работе [7].

а) Разложение числа в цепную дробь.

$$A \approx [a_0; a_1,\ a_2,\ \dots\ , a_n]\ .$$

В связи с тем, что в калькулятор можно ввести не более чем 8 знаков числа, имеют смысл a_n при $n = 4 \div 6$.

00	П 0	03	ИП 7	06	-	09	ИП 0	I2	F I/x
0I	ИП 8	04	+	07	П I	I0	ИП I	I3	БП
02	-	05	F Bx	08	С/П	II	-	I4	00

I. Ввести программу, В/0.
2. I ВП 7 П 7, I,8 F I/x П 8.
3. A С/П (a_0), С/П (a_1), ... , С/П (a_n).
4. Для нового A: В/0 и идти к п.3.

$T(a_i) = 5''$.

Контрольный пример:

$A = \sqrt{2} \approx [I;\ 2,\ 2,\ 2,\ \dots]$.

$A = \pi \approx [3;\ 7,\ I5,\ I,\ 244,\ \dots]$.

б) Свертка цепной дроби в число.

$$[a_0; a_1, a_2,\ \dots\ , a_n] = A.$$

Здесь величина n может быть любой.

00	F I/x	I. Ввести программу, <u>В/О</u>.
0I	П 0	2. a_n <u>С/П</u>, a_{n-1} <u>С/П</u>, ... , a_2 <u>С/П</u>,
02	С/П	a_1 <u>С/П</u>, a_0 <u>+</u> (А).
03	+	3. Для новой дроби: <u>В/О</u> и идти к п.2.
04	БП	
05	00	$T(a_i)$=3".

<u>Контрольный пример:</u>

$[1;\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2] = 1{,}4142012 \quad (\sqrt{2} = 1{,}4142135).$

в) <u>Приближения чисел подходящими дробями</u>.

Подходящая к-ая дробь:

$r_k = p_k / q_k \;;\quad r_0 = a_0 / 1 \;;\quad R = \lim_{k \to \infty} r_k .$

00	ПП	II	I	22	ИП А	33	ИП 3	44	F Вх
0I	39	I2	+	23	ИП 2	34	П 2	45	-
02	П I	I3	П 2	24	X	35	ИП 6	46	П А
03	I	I4	С/П	25	ИП I	36	П 5	47	В/О
04	П 4	I5	ПП	26	+	37	БП	48	ИП 0
05	ПП	I6	48	27	П 3	38	I5	49	ИП А
06	48	I7	ИП 5	28	С/П	39	П 0	50	-
07	П 5	I8	X	29	ИП 2	40	ИП 8	5I	F I/x
08	П 6	I9	ИП 4	30	П I	4I	-	52	БП
09	ИП I	20	+	3I	ИП 5	42	ИП 7	53	39
I0	X	2I	П 6	32	П 4	43	+		

I. Ввести программу, <u>В/О</u>.
2. I <u>ВП</u> 7 <u>П 7</u>, I,8 <u>F I/x</u> <u>П 8</u>.
3. А <u>С/П</u> (p_1), <u>ИП 6</u> (q_1), <u>С/П</u> (p_2), <u>ИП 6</u> (q_2), ...
4. Для нового А: <u>В/О</u> и идти к п.3.

$T(p_1)$=I6", $T(p_i)$=I2".

Контрольный пример:

$A=\pi\approx3,1415926$

$\frac{p_0}{q_0}=\frac{3}{1}=3$

$\frac{p_1}{q_1}=\frac{22}{7}=3,1428571$

$\frac{p_2}{q_2}=\frac{333}{106}=3,1415094$

$\frac{p_3}{q_3}=\frac{355}{113}=3,1415929$

$\frac{p_4}{q_4}=\frac{86953}{27678}=3,1415926$

Примечание: так как вводится только 8 знаков числа, то полученные к-тые подходящие дроби ни при каком к не могут обеспечить точность выше, чем точность исходного числа A.

27. Выбор эмпирической формулы.

Алгоритм описан в работе [5]. Производится автоматический выбор одной из следующих семи формул:

1. $y=a+bx$;	4. $y=a+b\ln x$;	7. $y=x/(a+bx)$.
2. $y=ab^x$;	5. $y=ax^b$;	
3. $y=1/(a+bx)$;	6. $y=a+b/x$;	

Массив экспериментальных данных (x_1,y_1), ... ,(x_n,y_n) аккуратно сглаживается карандашной линией. Так получается некоторый график $\bar{y}=\bar{y}(x)$. Начальными данными для программы будут x_1 и x_n , и соответствующие им $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_n$. После их ввода работа будет следующая: калькулятор выводит на индикатор некоторое число - (x_a), при этом по графику находим значение $\bar{y}_a=\bar{y}(x_a)$ и вводим его. После этого получаем следующее число - (x_b), и вводим $\bar{y}_b=\bar{y}(x_b)$; и наконец, получая (x_c) вводим $\bar{y}_c=\bar{y}(x_c)$.

Теперь, ничего не вводя, а только нажимая на клавишу <u>С/П</u>, последовательно получаем и записываем семь чисел: $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, ... , ε_7 . Из этих чисел выбирают наименьшее по абсолютной величине; и номер подходящей для аппроксимации данного массива эмпирической формулы равен номеру (индексу) этого наименьшего числа. Параметры а и в, входящие в формулу, определяются методом наименьших квадратов (см. программу № 28).

1. Ввести программу, <u>В/О</u>.
2. x_1 <u>!</u> x_n <u>С/П</u>, $\bar{y}_1$ <u>!</u> $\bar{y}_n$ <u>С/П</u> (x_a), $\bar{y}_a$ <u>С/П</u> (x_b), $\bar{y}_b$ <u>С/П</u> (x_c), $\bar{y}_c$ <u>С/П</u> (ε_1), <u>С/П</u> (ε_2), ... , <u>С/П</u> (ε_7).
3. Для нового массива: <u>В/О</u> и идти к п.2.

$T(x_a)=7''$, $T(x_b)=T(x_c)=3''$; $T(\varepsilon_i)=2''$.

00	П 2	I4	ХУ	28	ИП А	42	П 3	56	ИП А
0I	ХУ	I5	П 3	29	:	43	ИП I	57	-
02	П I	I6	ИП 4	30	П С	44	ИП А	58	С/П
03	ИП 2	I7	+	3I	ИП 5	45	-	59	ИП 2
04	+	I8	2	32	С/П	46	С/П	60	ИП В
05	2	I9	:	33	П I	47	ИП I	6I	-
06	:	20	П А	34	ИП 6	48	ИП В	62	С/П
07	П 5	2I	ИП 3	35	F √	49	-	63	ИП 3
08	ИП I	22	ИП 4	36	С/П	50	С/П	64	ИП А
09	ИП 2	23	Х	37	П 2	5I	ИП I	65	-
I0	Х	24	П С	38	ИП 6	52	ИП С	66	С/П
II	П 6	25	F √	39	ИП 5	53	-	67	ИП 3
I2	С/П	26	П В	40	:	54	С/П	68	БП
I3	П 4	27	ИП С	4I	С/П	55	ИП 2	69	52

Контрольный пример:

x_i: I 2 3 4 5 6 7 8 9

y_i: 52I 308 240 204 I83 I7I I59 I52 I47

x_1=I, x_9=9; y_1=52I, y_9=I47.

$\bar{y}_a$ =I80, $\bar{y}_b$ =240, $\bar{y}_c$ =34I.

ε_1=I54, ε_2=I06, ε_3=48, ε_4=94, ε_5=34, ε_6=7, ε_7=II3.

Видно, что наименьшее здесь ε_6, т.е. величина с индексом равным 6; поэтому массив аппроксимируем эмпирической формулой номер 6:

$$y=a+\frac{b}{x} \quad .$$

28. Вычисление параметров эмпирических формул методом наименьших квадратов.

Вычисляются параметры эмпирических формул вида:

$y=a+вx$, $y=a+в/x$, $y=ax^в$,

$y=\frac{I}{a+вx}$, $y=ae^{вx}$, $y=a+в\ln x$.

$y=x/(a+вx)$, $y=aв^x$,

Подбор вида формулы производится исходя из физических или других соображений, или автоматически, по программе №27. Заметим, что в некоторых случаях аппроксимация экспоненциальными функциями может быть оптимизирована. Соответствующий алгоритм приводится в работе [4].
Исходный массив экспереметальных точек (x_i, y_i), $i=I,2,\ldots,n$ вводится в машину сообразно с ограничениями, которые указаны в Примечании в скобках, рядом с соответствующей формулой.

00	К НОП	I3	ИП В	26	ИП 0	39	П 4	52	ИП 6
0I	П В	I4	К НОП	27	I	40	ИП 3	53	X
02	XУ	I5	К НОП	28	+	4I	ИП 5	54	ИП 2
03	К НОП	I6	П I	29	П 0	42	X	55	ИП 3
04	П А	I7	ИП 3	30	С/П	43	ИП 6	56	X
05	ИП 2	I8	+	3I	БП	44	ИП 2	57	-
06	+	I9	П 3	32	00	45	X	58	ИП 4
07	П 2	20	ИП I	33	ИП 5	46	-	59	:
08	ИП А	2I	ИП А	34	ИП 0	47	ИП 4	60	К НОП
09	F x^2	22	X	35	X	48	:	6I	С/П
I0	ИП 5	23	ИП 6	36	ИП 2	49	К НОП		
II	+	24	+	37	F x^2	50	С/П		
I2	П 5	25	П 6	38	-	5I	ИП 0		

Примечание: в связи с тем что одна программа может работать с различными формулами, при вводе программы необходимо вносить некоторые изменения в зависимости от конретной формулы. Ниже указаны адреса и операторы, которые должны быть занесены в текст программы вместо операторов К НОП.

$y=a+вx$: изменений нет;		$y=ae^{вx}$: ($y_i>0$)	00 F ln 49 F e^x ;
$y=1/(a+вx)$: ($y_i\neq0$)	00 F 1/x ;	$y=aв^x$: ($y_i>0$)	00 F lg 49 F 10^x 60 F 10^x ;
$y=x/(a+вx)$: ($y_i\neq0$)	00 F 1/x 14 ИП А 15 X ;	$y=ax^в$: ($x_i, y_i>0$)	00 F lg 03 F lg 49 F 10^x ;
$y=a+в/x$: ($x_i\neq0$)	03 F 1/x ;	$y=a+в\ln x$: ($x_i>0$)	03 F ln .

1. Ввести программу, В/О.
2. x_1 ↑ y_1 С/П (I), ... ,x_n ↑ y_n С/П (n).
3. БП 33 С/П (а), С/П (в).
4. Для нового массива при той же формуле: идти к п.6.
5. Для новой формулы: восстановить первоначальный текст программы, ликвидировав сделанные изменения (оператором К НОП); сделать новые изменения и идти к п.6.
6. Сх П 0 П 2 П 3 П 4 П 5 П 6 В/О и идти к п.2.

$T(i)=10''$, $T(a)=7''$, $T(в)=6''$.

Контрольный пример:

x_i: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 $y=a+в/x$;
y_i: 521 308 240 204 183 171 159 152 147 ,

а=99,385432, в=420,83578. Погрешность не более 0,1%.

29. Решение системы n ($n>2$) линейных уравнений с двумя неизвестными методом наименьших квадратов.

$a_i x+b_i y=c_i$
$i=1,2,\dots,n$
$n>2;$

$$\begin{cases} x\sum_{i=1}^{n} a_i + y\sum_{i=1}^{n} b_i a_i = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i \\ x\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + y\sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} c_i b_i \ ; \end{cases} \qquad (1)$$

где a_i, b_i, c_i экспериментальные точки; x и y – неизвестные, которые требуется определить, для чего составляется система (1), которая решается методом Крамера.

00	П 2	13	+	26	П 6	39	00	52	X
01	F ⟳	14	П 3	27	ИП 1	40	ИП 3	53	–
02	П 1	15	ИП 0	28	ИП 2	41	ИП 4	54	ИП 0
03	F ⟳	16	ИП 1	29	X	42	X	55	:
04	П 0	17	X	30	ИП 7	43	ИП 5	56	С/П
05	ИП 1	18	ИП 5	31	+	44	F x^2	57	ИП 3
06	F x^2	19	+	32	П 7	45	–	58	ИП 7
07	ИП 4	20	П 5	33	ИП 8	46	П 0	59	X
08	+	21	ИП 0	34	1	47	ИП 6	60	ИП 5
09	П 4	22	ИП 2	35	+	48	ИП 4	61	ИП 6
10	ИП 0	23	X	36	П 8	49	X	62	БП
11	F x^2	24	ИП 6	37	С/П	50	ИП 5	63	52
12	ИП 3	25	+	38	БП	51	ИП 7		

1. Ввести программу, В/О.
2. a_1 ! b_1 ! c_1 С/П (1), ... , a_n ! b_n ! c_n С/П (n).
3. БП 40 С/П (x), С/П (y).
4. Для нового массива: Сх П 3 П 4 П 5 П 6 П 7 П 8 В/О и идти к п.2.

T(i)=10", T(x)=7", T(y)=2".

Контрольный пример:

a_i : 1 1 1 1
b_i : 0 8,8 12,9 16,6 x=8,5060368
c_i : 8,53 9,00 9,30 9,56 ; y=0,061771592 .

30. Вычисление относительной ошибки аппроксимации ряда наблюдений эмпирической формулой.

Ряд наблюдений $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ аппроксимирован эмпирической формулой $\bar{y}=\bar{y}(x)$. Относительная ошибка апроксимации (в %) в точках x_i составляет:

$$\delta_i = \frac{y_i - \bar{y}(x_i)}{y_i} \cdot 100\% \;;\quad i=1,2,\ldots,n.$$

00	П 2	I1	ИП 2
0I	XУ	I2	:
02	ПП	I3	С/П
03	I6	I4	БП
04	/–/	I5	00
05	ИП 2	I6	...
06	+		$\bar{y}(x)$
07	I		...
08	0		П I
09	0		В/О
I0	X		

I. Ввести программу, В/О .
2. x_i ↑ y_i С/П (δ_i) .
3. Для новых точек (x_i, y_i) повторить п.2.
4. Для нового счета : БП I6 F ПРГ , ввести новую $\bar{y}=\bar{y}(x)$, F АВТ , В/О и идти к п.2.

Примечание: после получения очередной δ_i для получения $\bar{y}(x_i)$: ИП I ($\bar{y}_i$).

$T(\delta_i) \approx 6''$.

Контрольный пример:

x_i	y_i	$\bar{y}_i$	δ_i (%)
II	22	2I,6	I,82
I2	22	22,5	-2,27
I3	23	23,4	-I,74
I4	25	24,3	2,8
I5	25	25,2	-0,8

Эмпирическая формула:

$y(x)=0{,}9x+\mathrm{II},7$.

3I. Сглаживание ряда равноотстоящих наблюдений взвешенной скользящей средней.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ряд наблюдений, которые получают значения $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ после сглаживания по формуле:

$$\bar{a}_1 = 0{,}I(7a_1 + 5a_2 - a_3 - a_4),$$
$$\bar{a}_2 = 0{,}I(3a_1 + 5a_2 + a_3 + a_4),$$
$$\bar{a}_i = 0{,}I(a_{i-2} + 2a_{i-1} + 4a_i + 2a_{i+1} + a_{i+2}),$$
$$\bar{a}_{n-1} = 0{,}I(3a_n + 5a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}),$$
$$\bar{a}_n = 0{,}I(7a_n + 5a_{n-1} - a_{n-2} - a_{n-3}).$$

00	7	I6	ИП 4	32	П 3	48	П 3	64	ИП 2
0I	ПП	I7	+	33	ИП 5	49	ИП 5	65	!
02	6I	I8	2	34	П 4	50	П 2	66	5
03	-	I9	X	35	ИП 6	5I	3	67	X
04	К ПП Д	20	+	36	К ПП Д	52	ПП	68	+
05	3	2I	!	37	БП	53	6I	69	!
06	ПП	22	ИП 3	38	I0	54	+	70	ИП 3
07	6I	23	4	39	ИП 4	55	К ПП Д	7I	ИП 4
08	+	24	X	40	П 5	56	7	72	+
09	К ПП Д	25	+	4I	ИП I	57	ПП	73	В/0
I0	П 5	26	П 6	42	П 4	58	6I	74	I
II	!	27	ИП 2	43	ИП 5	59	-	75	0
I2	ИП I	28	П I	44	П I	60	К ПП Д	76	:
I3	+	29	ИП 3	45	ИП 3	6I	!	77	С/П
I4	!	30	П 2	46	П 5	62	ИП I	78	В/0
I5	ИП 2	3I	ИП 4	47	ИП 2	63	X		

I. Ввести программу, В/О.
2. 74 П Д .
3. a_1 П I, a_2 П 2, a_3 П 3, a_4 П 4 , С/П ($\bar{a}_1$), С/П ($\bar{a}_2$).

4. a_5 <u>С/П</u> ($\bar{a}_3$), a_6 <u>С/П</u> ($\bar{a}_4$), ... , a_n <u>С/П</u> ($\bar{a}_{n-2}$).
5. <u>БП</u> <u>39</u> <u>С/П</u> ($\bar{a}_{n-1}$), <u>С/П</u> ($\bar{a}_n$).
6. Для нового ряда <u>В/О</u> и идти к п.3.

$T(\bar{a}_1 \div \bar{a}_2)$=9", $T(\bar{a}_3 \div \bar{a}_{n-3})$=II", $T(\bar{a}_{n-2} \div \bar{a}_n)$=I5".

<u>Контрольный пример:</u>

i:	I	2	3	4	5	6
a_i:	I0	20	25	30	35	45
$\bar{a}_i$:	II,5	I8,5	24,5	30,5	36,5	43,5

Примечание: количество обрабатываемых наблюдений не должно быть менее пяти.

32. Последовательное вычисление средней арифметической:

Пусть $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i$ – ряд наблюдений. После ввода очередного x_i выводится средняя арифметическая наблюдений $x_1, \ldots, x_i$.

$$\bar{x}_i = S_i / i \quad ; \quad S_i = \sum_{k=1}^{i} x_k \quad , \; i = 1, 2, \ldots \quad .$$

00	П А	04	С/П	08	ИП 0	I2	ИП А	I6	04
0I	I	05	ИП А	09	I	I3	XУ		
02	П 0	06	+	I0	+	I4	:		
03	ИП А	07	П А	II	П 0	I5	БП		

I. Ввести программу, <u>В/0</u> .

2. x_1 <u>С/П</u> (x_1), x_2 <u>С/П</u> ($\bar{x}_2$), ... , x_i <u>С/П</u> ($\bar{x}_i$), ...

3. Для нового ряда: <u>Сх</u> <u>П 0</u> <u>П А</u> <u>В/0</u> и идти к п.2.

Примечание: после получения очередного $\bar{x}_i$ можно получать значения <u>ИП 0</u> (i), <u>ИП А</u> (S_i).

$T(\bar{x}_i) = 5''$.

<u>Контрольный пример:</u>

i :	I	2	3	4
x_i :	5	5,5	6	5,7
$\bar{x}_i$:	5	5,25	5,5	5,55
S_i :	5	I0,5	I6,5	22,2

33. Вычисление статистических параметров.

Вычисляются следующие статистические параметры: средняя арифметическая ($\bar{x}$); стандартное отклонение (σ); коэффициент вариации (v); ошибка среднего арифметического (m_x) по формулам:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad ; \quad \sigma = \left[\frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2 \right) \right]^{1/2} ;$$

$$v = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\% \quad ; \quad m_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – массив исходных точек.

00	!	I2	+	24	П 4	36	П 3	48	ИП 8
0I	ИП 6	I3	П 8	25	С/П	37	С/П	49	F √
02	+	I4	С/П	26	F x²	38	!	50	:
03	П 6	I5	БП	27	!	39	ИП 4	5I	С/П
04	ХУ	I6	00	28	ИП 8	40	:	52	Сх
05	F x²	I7	ИП 8	29	Х	4I	I	53	П 6
06	ИП 7	I8	I	30	/-/	42	0	54	П 7
07	+	I9	-	3I	ИП 7	43	0	55	П 8
08	П 7	20	П 5	32	+	44	Х	56	С/П
09	ИП 8	2I	ИП 6	33	ИП 5	45	С/П	57	БП
I0	!	22	ИП 8	34	:	46	ИП 3	58	00
II	I	23	:	35	F √	47	!		

I. Ввести программу, В/0.

2. x_1 С/П (I), x_2 С/П (2), ... , x_n С/П (n).

3. БП I7 С/П ($\bar{x}$), С/П (σ), С/П (v), С/П (m_x), С/П (0).

4. Для нового массива данных: идти к п.2.

Примечание: программа может игнорировать неправильные x_i; для этого необходимо определить хмах=мах x_i и хмин=мин x_i, и занести их в регистры: хмах П I, хмин П 0. Перед вводом основной программы ввести с адреса 00 следующий фрагмент:

00	П 9	03	F x≥0	06	ИП 9	09	I2	I2	F π
0I	ИП 0	04	I2	07	-	I0	БП	I3	С/П
02	-	05	ИП I	08	F x≥0	II	I4	I4	ИП 9 ;

после чего с адреса I5 вводится текст основной программы. Теперь если введенное число окажется не в интервале [хмин, хмах], то на индикаторе появится число π (3,I4I5292), результат не будет испорчен и можно продолжать ввод. После ввода последнего числа, в п.3 инструкции после оператора <u>БП</u> вводят число не I7, а 32.

$T(\bar{x})$=4", $T(\sigma)$=2", $T(\nu)$=4", $T(m_x)$=2"; $T(\bar{x})$=9", при проверке .

<u>Контрольный пример</u>:

i : I 2 3 4 5 $\bar{x}$=I3, σ =I,58II38,

x : II I2 I3 I4 I5 ν=I2,I626, m_x=0,707I .

Примечание: после появления на индикаторе числа π, нажать клавишу <u>В/О</u> и продолжать ввод.

34. Коэффициент корреляции и уравнение линии регрессии.

Для попарно связанных наблюдений $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ коэффициент корреляции и уравнение регрессии:

$$r = A_1/\sqrt{A_2 \cdot A_3}\ ; \qquad A_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i\ ;$$

$$y = kx + b\ ;\ k = A_1/A_2\ ; \qquad A_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2\ ;$$

$$b = \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i - k\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)\ ; \qquad A_3 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i\Big)^2 .$$

00	П 2	I5	ИП 2	30	С/П	45	ИП 8	60	ХУ
0I	ХУ	I6	F x^2	3I	БП	46	:	6I	:
02	П I	I7	ИП 6	32	00	47	ИП 4	62	С/П
03	ИП 3	I8	+	33	ИП 3	48	+	63	ИП 7
04	+	I9	П 6	34	ИП 5	49	П I	64	ИП I
05	П 3	20	ИП I	35	Х	50	ИП 5	65	:
06	ИП I	2I	ИП 2	36	ИП 8	5I	F x^2	66	С/П
07	F x^2	22	Х	37	/-/	52	ИП 8	67	ИП 3
08	ИП 4	23	ИП 7	38	П 8	53	:	68	Х
09	+	24	+	39	:	54	ИП 6	69	ИП 5
I0	П 4	25	П 7	40	ИП 7	55	+	70	–
II	ИП 2	26	I	4I	+	56	ИП I	7I	ИП 8
I2	ИП 5	27	ИП 8	42	П 7	57	Х	72	:
I3	+	28	+	43	ИП 3	58	F $\sqrt{\ }$	73	С/П
I4	П 5	29	П 8	44	F x^2	59	ИП 7		

I. Ввести программу, В/0.

2. x_1 ↑ y_1 С/П (I), ... ,x_n ↑ y_n С/П (n).

3. БП 33 С/П (r), С/П (k), С/П (b).

Для нового счета: Сх П 3 П 4 П 5 П 6 П 7 П 8 В/0 и идти к п.2.

T(i)=I0", T(r)=II", T(k)=T(b)=3".

Контрольный пример:

i :	I	2	3	4	5	r =0,9383148
y_i :	22	22	23	25	25	k =0,9
x_i :	II	I2	I3	I4	I5 ;	b =II,7

Примечание: при вычислении коэффициента корреляции желательно иметь графическое изображение наблюдений (т.н. корреляционное поле). Это связано с тем, что в данном алгоритме рассматривается линейный коэффициент корреляции. Последний может иметь значение вблизи нуля даже при сильной, но нелинейной связи; при этом теряет свой смысл и линия регрессии. В таком случае можно обратиться к программе № 28 .

35. Частный коэффициент корреляции.

Пусть А, В и С три ряда наблюдений (связанных). Частный коэффициент корреляции исключает влияние какого-то одного ряда (например: Рав,с - коэффициент корреляции между А и В без учета влияния ряда С) и вычисляется по формулам:

$$P_{ab,c} = \frac{P_{ab} - P_{ac}P_{bc}}{\sqrt{(1-P^2_{ac})(1-P^2_{bc})}}\ ;\ P_{ac,b} = \frac{P_{ac} - P_{ab}P_{bc}}{\sqrt{(1-P^2_{ab})(1-P^2_{bc})}}\ ;\ P_{bc,a} = \frac{P_{bc} - P_{ab}P_{ac}}{\sqrt{(1-P^2_{ab})(1-P^2_{ac})}},$$

где Рав, Рас, и Рвс - коэффициенты корреляции между соответствующими рядами наблюдений.

00	П А	09	X	I8	ИП С	27	С/П	36	F x^2
0I	К ПП Д	I0	-	I9	ИП А	28	ИП А	37	/-/
02	П В	II	ИП 3	20	X	29	ИП С	38	I
03	К ПП Д	I2	ИП 2	2I	-	30	ИП В	39	÷
04	П С	I3	X	22	ИП I	3I	X	40	К П 0
05	К ПП Д	I4	F √	23	ИП 3	32	-	4I	F ⟲
06	ИП С	I5	:	24	X	33	ИП I	42	В/0
07	ИП В	I6	С/П	25	F √	34	БП		
08	ИП А	I7	ИП В	26	:	35	I2		

I. Ввести программу, В/0.
2. 4 П 0, 36 П Д .
3. Рав ! Рас ! Рвс С/П (Рав,с), С/П (Рас,в), С/П (Р вс,а).
4. Для нового счёта: В/0 и идти к п.2.

T(Рав,с)=II", T(Рас,в)=T(Рвс,а)=5" .

Контрольный пример:

Рав=-0,825 ; Рас=-0,69 ; Рвс=0,57 .

Рав,с=-0,725, Рас,в=-0,473, Рвс,а=0,00I8 .

36. Коэффициент ранговой корреляции Спирмена.

Пусть $P_{11}, P_{12}, \ldots, P_{1n}$ и $P_{21}, P_{22}, \ldots, P_{2n}$ вектора рангов сравниваемых рядов наблюдений. Коэффициент ранговой корреляции вычисляется по формуле:

$$\rho = 1 - \left[6\sum_{i=1}^{n}(P_{1i} - P_{2i})^2\right] / n(n^2-1).$$

00	-	07	+	I4	6	2I	ИП 2	28	С/П
0I	F x^2	08	П 2	I5	X	22	X		
02	ИП I	09	С/П	I6	П I	23	ИП I		
03	+	I0	БП	I7	ИП 2	24	XY		
04	П I	II	00	I8	F x^2	25	:		
05	ИП 2	I2	ИП I	I9	I	26	I		
06	I	I3	/-/	20	-	27	+		

I. Ввести программу, В/О.
2. P_{11} ! P_{21} С/П (I), ... , P_{1n} ! P_{2n} С/П (n).
3. БП I2 С/П (ρ).
4. Для нового счета: Сх П I П 2 В/О и идти к п.2.

$T(i)=2''$, $T(\rho)=5''$.

Контрольный пример:

i :	I	2	3	4	5
P_{1i} :	4	I	2,5	5	2,5
P_{2i} :	4,5	I	2	4,5	3

$\rho=0,95$.

37. Коэффициент корреляции Пирсона для дихотомических переменных.

Пусть А и В массивы дихотомических переменных (принимающих значения 0 или I). Тогда коэффициент корреляции вычисляется по формуле:

$$\varphi = \frac{P_{ab} - P_a \cdot P_b}{[P_a(1-P_a) \cdot P_b(1-P_b)]^{1/2}} ,$$

где Ра - доля "I" в массиве А, Рв - доля "I" в массиве В, Рав - доля "I" одновременно встречающихся в А и В.

00	П 0	06	X	I2	I	I8	-	24	ИП 4
0I	С/П	07	П 3	I3	ИП I	I9	ИП 0	25	XУ
02	П I	08	/-/	I4	-	20	X	26	:
03	С/П	09	ИП 0	I5	П 0	2I	ИП 3	27	С/П
04	П 2	I0	+	I6	I	22	X		
05	ИП I	II	П 4	I7	ИП 2	23	F√		

I. Ввести программу, В/О.

2. Рав С/П, Ра С/П, Рв С/П (φ).

3. Для нового счета: В/О и идти к п.2.

T(φ)=8".

Контрольный пример:

Рав=0,3 ; Ра=0,5 ; Рв=0,7 ; φ=-0,2I822

38. Точечно-бисериальный коэффициент корреляции Пирсона.

Пусть массивы А и У попарные ряды наблюдений, причем массив А дихотомический, а массив У числовой; тогда коэффициент корреляции вычисляется по формуле:

$$q = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_0}{\sigma} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_0}{n(n-1)}}; \quad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i; \quad y_i \in У,$$

где $\bar{x}_1$ – среднее по У объектов попарных с "I", $\bar{x}_0$ – среднее по У объектов попарных с "0", σ – стандартное отклонение массива У, n_1 – число "I", n_0 – число "0", $n = n_1 + n_0$.

00	П А	I7	F x=0	34	П I	5I	F√	68	ИП 0
0I	XУ	I8	27	35	БП	52	П 5	69	:
02	П В	I9	ИП А	36	23	53	ИП 2	70	ИП 0
03	ИП А	20	ИП 3	37	ИП 4	54	ИП I	7I	I
04	ИП 4	2I	+	38	ИП 0	55	:	72	–
05	+	22	П 3	39	:	56	П 2	73	:
06	П 4	23	ИП 0	40	П 4	57	ИП 0	74	F√
07	ИП А	24	С/П	4I	F x^2	58	ИП I	75	П А
08	F x^2	25	БП	42	ИП 0	59	–	76	ИП 2
09	ИП 5	26	00	43	/-/	60	П А	77	ИП 3
I0	+	27	ИП А	44	X	6I	ИП 3	78	–
II	П 5	28	ИП 2	45	ИП 5	62	XУ	79	ИП 5
I2	ИП 0	29	+	46	+	63	:	80	:
I3	I	30	П 2	47	ИП 0	64	П 3	8I	ИП А
I4	+	3I	ИП I	48	I	65	ИП А	82	X
I5	П 0	32	I	49	–	66	ИП I	83	С/П
I6	ИП В	33	+	50	:	67	X		

I. Ввести программу, В/О.

2. a_i ! y_i С/П (I), ... , a_n ! y_n С/П (n).

3. БП 37 С/П (q).

4. Для нового счета: Сх П 0 П I П 2 П 3 П 4 П 5 В/0 и идти к п.2.

Примечание: после получения q можно получать следующие значения: ИП 0 (n), ИП I (n_1), ИП 2 ($\bar{x}_1$), ИП 3 ($\bar{x}_0$), ИП 4 ($\bar{x}$), ИП 5 (σ).

T(i)=8", T(q)=I7".

Контрольный пример:

Вычисляется коэффициент корреляции между полом (массив А; "I" - юноши и "0" - девушки) и ростом (массив У; рост в дм.) старших школьников.
Алгоритм и пример взяты из работы [6].

i	a_i	y_i
I	I	I5
2	0	I7
3	I	I6
4	I	I6,5
5	0	I4
6	I	I8,3
7	0	I5,7
8	0	I5,2
9	I	I6,3

q =0,4007.

Из регистров получаем (как указано в Примечании) величины:

n =9
n_1 =5
$\bar{x}_1$ =I6,42
$\bar{x}_0$ =I5,475
$\bar{x}$ =I6
σ =I,243 .

39. Критерий серий массива дихотомических переменных.

Массив, состоящий из дихотомических (т.е. принимающих значения "0" и "I") переменных проверяется на случайность серий, то есть последовательностей состоящих из следующих друг за другом одинаковых переменных. Вычисляется величина u по формуле:

$$u = \left[P - \left(\frac{2n_1n_0}{n_1+n_0}+1\right)\right] \Big/ \left[\frac{2n_1n_0(2n_1n_0-n_1-n_0)}{(n_1+n_0-1)(n_1+n_0)^2}\right]^{1/2},$$

где P - количество серий в массиве, n_1 - количество "I", n_0 - количество "0". Настоящийалгоритм для $n_1, n_0 > 20$. Если $|u| < 1{,}96$ (5%) или $|u| < 2{,}58$ (I%), то порядок элементов (переменных) в массиве случаен.

00	ИП 3	08	+	I6	П 7	24	F√	32	-
0I	ИП 4	09	П 6	I7	ИП 5	25	П 7	33	ИП 7
02	X	I0	I	I8	ИП 6	26	ИП 5	34	:
03	2	II	-	I9	-	27	ИП 6	35	/-/
04	X	I2	ИП 6	20	ИП 5	28	:	36	С/П
05	П 5	I3	X	2I	X	29	I		
06	ИП 3	I4	ИП 6	22	ИП 7	30	+		
07	ИП 4	I5	X	23	:	3I	ИП 2		

I. Ввести программу, В/О.
2. Р П 2, n_1 П 3, n_0 П 4 С/П (u).
3. Для нового счета: В/О и идти к п.2.

$T(u)$=I2" .

Контрольный пример:

Дан массив наблюдений: I00I00II00I0II0I00000II000I000II0I 0000II000III0III00000I . В массиве серии подчеркнуты.

$P=28$, $n_0=33$, $n_1=23$; $u=-0{,}02987$.

40. Тетрахорический показатель связи. Четырехпольная таблица.

		Колич.наблюд., где признак В есть	Колич.наблюд., где признак В нет
Колич.набл., где признак А	есть	а	в
	нет	с	d

R – показатель взаимосвязи двух признаков А и В, встречаемость которых в наблюдении-в таблице.

$$R = \frac{ad - bc}{[(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)]^{1/2}};\quad \chi^2 = n \cdot R^2;\quad n = a+b+c+d;$$

χ^2: 3,8(5%); 6,6(I%); I0,8(0,I%).

00	ИП I	08	X	I6	X	24	ИП 2	32	ИП 5
0I	ИП 2	09	П 0	I7	ИП 0	25	ИП 3	33	ИП 6
02	+	I0	ИП I	I8	X	26	X	34	+
03	П 5	II	ИП 3	I9	F $\sqrt{}$	27	–	35	ИП 0
04	ИП 3	I2	+	20	П 0	28	ИП 0	36	F x^2
05	ИП 4	I3	ИП 2	2I	ИП I	29	:	37	X
06	+	I4	ИП 4	22	ИП 4	30	П 0	38	С/П
07	П 6	I5	+	23	X	3I	С/П		

I. Ввести программу, В/О.
2. а П I, в П 2, с П 3, d П 4, С/П (R), С/П (χ^2).
3. Для новых данных: В/О и идти к п.2.

Т(R)=I2", Т(χ^2)=4" .

Контрольный пример:

	I	2
	3	4

R =-0,089087 ,
χ^2=0,079365 .

4I. Средневзвешенная оценка экспертных заключений.

Пусть $P_1, P_2, \dots, P_n$ некоторые оценки (баллы, вероятности, заключения) полученные от экспертов №№ I,2, ... , n ; и $в_1, в_2, \dots, в_n$ – веса, приписываемые этим экспертам. Тогда средневзвешенная оценка вычисляется по формуле:

$$W = \left(\sum_{i=1}^{n} P_i \cdot в_i\right) \Big/ \sum_{i=1}^{n} в_i .$$

00	П I	05	ИП 3	I0	+	I5	П 5	20	ИП 4
0I	XY	06	+	II	П 4	I6	С/П	2I	:
02	П 2	07	П 3	I2	ИП 5	I7	БП	22	С/П
03	ИП I	08	ИП I	I3	I	I8	00		
04	X	09	ИП 4	I4	+	I9	ИП 3		

I. Ввести программу, В/0 .
2. P_1 ! $в_1$ С/П (I), ... , P_n ! $в_n$ С/П (n).
3. БП I9 С/П (W).
Для нового счета: Сх П 3 П 4 П 5 В/0 и идти к п.2.

T(i)=5", T(W)=2"

Контрольный пример:

i :	I	2	3
P_i :	2	4	6
$в_i$:	0,5	0,3	0,2

; $W = 3{,}4$.

42. Проверка гипотезы о равенстве средних при известной генеральной дисперсии.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{n_x}$ и $y_1, y_2, \ldots, y_{n_y}$ – нормально распределенные совокупности с известной генеральной дисперсией. Проверяется гипотеза: $\hat{x} = \hat{y}$. (Критерий Стьюдента).

$$t^* = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\left[\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}\right]^{1/2}} ; \quad n_x, n_y > 30.$$

00	ПП	13	ПП	26	XY	39	1	52	X
01	29	14	29	27	:	40	+	53	ИП 2
02	ИП 1	15	ИП 5	28	С/П	41	П 3	54	+
03	П 4	16	ИП 6	29	П 0	42	С/П	55	ИП 3
04	ИП 2	17	:	30	ИП 1	43	БП	56	1
05	П 5	18	ИП 2	31	+	44	29	57	–
06	ИП 3	19	ИП 3	32	П 1	45	ИП 1	58	:
07	П 6	20	:	33	ИП 0	46	ИП 3	59	П 2
08	Cx	21	+	34	F x^2	47	:	60	В/0
09	П 1	22	F$\sqrt{\ }$	35	ИП 2	48	П 1		
10	П 2	23	ИП 4	36	+	49	F x^2		
11	П 3	24	ИП 1	37	П 2	50	ИП 3		
12	С/П	25	–	38	ИП 3	51	/–/		

1. Ввести программу, В/0 .
2. x_1 С/П (1), x_2 С/П (2), ... , x_{n_x} С/П (n_x), БП 45 С/П (0).
   y_1 С/П (1), y_2 С/П (2), ... y_{n_y} С/П (n_y), БП 45 С/П(t^*).
3. Для новых выборок: БП 08 С/П (0), В/0 и идти к п.2.

Примечание: если средние арифметические $\bar{x}$ и $\bar{y}$ выборок, а так же и дисперсии σ_x^2 и σ_y^2 были вычисленны раньше, то п.2 инструкции выглядит следующим образом:

2. $\bar{x}$ П 4, σ_x^2 П 5, n_x П 6, $\bar{y}$ П 1, σ_y^2 П 2, n_y П 3, БП 15 С/П (t^*) .

$T(i)=5''$, $T(0)=10''$, $T(t^*)=11''$.

Контрольный пример:

I) x_i: 8 7 6 5 4

y_i: 7 5 3 $\qquad t^*=0{,}73855$.

2) $\bar{x}=9{,}79$; $\bar{y}=9{,}6$; $\sigma_x^2=\sigma_y^2=0{,}09$; $n_x=25$; $n_y=50$,

$t^*=2{,}585573$.

Пример сравнивания полученного значения t^* с критическим значением в таблице t-распределения Стьюдента приведен в контрольном примере программы № 43 .

43. Проверка гипотезы о равенстве средних при неизвестной генеральной дисперсии.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{n_x}$ и $y_1, y_2, \ldots, y_{n_y}$ -нормально распределенные совокупности с неизвестной генеральной дисперсией. Проверяется гипотеза: $\hat{x} = \hat{y}$. (Критерий Стьюдента).

$$t^* = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\left[\frac{(n_x-1)\sigma_x^2+(n_y-1)\sigma_y^2}{n_x+n_y-2}\cdot\frac{n_x+n_y}{n_x\cdot n_y}\right]^{1/2}}; \quad n_x, n_y \leqslant 30.$$

00	ПП	I7	+	34	П 7	5I	:	68	53
0I	53	I8	П 6	35	ИП 6	52	С/П	69	ИП I
02	ИП 0	I9	ИП 3	36	2	53	П 6	70	ИП 0
03	П 3	20	I	37	-	54	ИП I	7I	:
04	ИП I	2I	-	38	ИП 0	55	+	72	П I
05	П 4	22	ИП 5	39	X	56	П I	73	F x^2
06	ИП 2	23	X	40	ИП 3	57	ИП 6	74	ИП 0
07	П 5	24	П 7	4I	X	58	F x^2	75	X
08	Cx	25	ИП 0	42	ИП 7	59	ИП 2	76	/-/
09	П 0	26	I	43	XY	60	+	77	ИП 2
I0	П I	27	-	44	:	6I	П 2	78	+
II	П 2	28	ИП 2	45	F√	62	ИП 0	79	ИП 0
I2	С/П	29	X	46	П 7	63	I	80	I
I3	ПП	30	ИП 7	47	ИП 4	64	+	8I	-
I4	53	3I	+	48	ИП I	65	П 0	82	:
I5	ИП 0	32	ИП 6	49	-	66	С/П	83	П 2
I6	ИП 3	33	X	50	ИП 7	67	БП	84	В/О

I. Ввести программу, В/О .

2. x_1 С/П (I), x_2 С/П (2), ... , x_{n_x} С/П (n_x), БП 69 С/П(0).

3. y_1 С/П (I), y_2 С/П (2), ... , y_{n_y} С/П (n_y), БП 69 С/П(t^*).

4. Для новых выборок: БП 08 С/П(0) В/О и идти к п.2.

T(i)=6", T(t^*)=20".

Контрольный пример:

x_i: 8 7 6 5 4

y_i: 7 5 3 ; $t^*=0,79057$.

Число степеней свободы: 5+3-2=6. По таблице значений t - распределения Стьюдента находим:

$t(6;0,01)=3,71$.

Так как $t^*=0,79057<3,71$, то с надёжностью 0,99 можно считать расхождение средних случайным (незначимым).

44. Проверка гипотезы о равенстве средних (попарные выборки).

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – попарные выборки из двух нормально распределённых генеральных совокупностей с неизвестными средними $\hat{x}$ и $\hat{y}$. Проверяется гипотеза: $\hat{x} = \hat{y}$. (Критерий Стьюдента). Алгоритм описан в работе [4].

$$t^* = \frac{A}{S_A}; \quad A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i; \quad D_i = x_i - y_i; \quad S_A = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} D_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} D_i\right)^2\right)}.$$

00	–	07	F x^2	I4	С/П	2I	F x^2	28	ИП 5
0I	П 5	08	+	I5	БП	22	–	29	:
02	ИП 2	09	П 3	I6	00	23	П 5	30	F $\sqrt{\ }$
03	+	I0	ИП 4	I7	ИП 3	24	ИП 4	3I	ИП 2
04	П 2	II	I	I8	ИП 4	25	I	32	X
05	ИП 3	I2	+	I9	X	26	–	33	С/П
06	ИП 5	I3	П 4	20	ИП 2	27	!		

I. Ввести программу, В/0 .
2. x_1 ! y_1 С/П (I), x_2 ! y_2 С/П (2), ... , x_n ! y_n С/П (n).
3. БП I7 С/П (t^*).
4. Для новых выборок: Сх П 2 П 3 П 4 В/0 и идти к п.2.

T(i)=5", T(t^*)=6".

Контрольный пример:

i :	I	2	3	4	5
x_i :	9,5	II	9	I2	I2,5
y_i :	7	I0	8	II	I3

; t^*=2,II .

45. Проверка гипотезы о равенстве среднего выборки заданному числу.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – выборка из нормально распределенной генеральной совокупности с неизвестным средним и дисперсией. Проверяется гипотеза $\hat{x}=a$, где $\hat{x}$ – неизвестное среднее; a – заданное число. (Критерий Стьюдента).

$$t^* = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-a)}{S}; \quad S = \left[\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n(\bar{x})^2\right)\right]^{1/2}; \quad \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n.$$

00	П I	I0	ИП 4	20	/–/	30	ИП 2	40	:
0I	ИП 2	II	+	2I	ИП 3	3I	ИП 4	4I	С/П
02	+	I2	П 4	22	+	32	:	42	Cx
03	П 2	I3	С/П	23	ИП 4	33	С/П	43	П 2
04	ИП I	I4	БП	24	!	34	ИП 5	44	П 3
05	F x^2	I5	00	25	I	35	–	45	П 4
06	ИП 3	I6	ИП 2	26	–	36	ИП 4	46	С/П
07	+	I7	F x^2	27	:	37	F $\sqrt{}$	47	БП
08	П 3	I8	ИП 4	28	F $\sqrt{}$	38	X	48	00
09	I	I9	:	29	П I	39	ИП I		

I. Ввести программу, В/О .
2. a П 5, x_1 С/П (I), x_2 С/П (2), ... , x_n С/П (n).
3. БП I6 С/П ($\bar{x}$), С/П (t^*) , С/П (0).
4. Для новой выборки: идти к п.2.

T(i)=5", T($\bar{x}$)=5", T(t^*)=4", T(0)=2" .

Контрольный пример:

выборка: 2,87;I,33;I,93;I,0I;0,59;3,65;I,97;2,66;2,89; I,I4, a=2,2 ; n=I0 . Вычисленные величины: $\bar{x}$ =2,004 , t^* =0,62435 .

46. Последовательный анализ Вальда.

Применяется для нормально распределённого массива с известным ожидаемым коэффициентом вариации. Расчет производится для надёжности 99 %. Пусть $x_1, x_2, \ldots$ - последовательные результаты эксперемента, A_1 - верхняя ожидаемая граница $\bar{x}$, A_0 - нижняя ожидаемая граница $\bar{x}$, ν - ожидаемый коэффициент вариации.

$$L_1(n) = a \cdot n + b \ ; \quad L_0(n) = a \cdot n - b \ ; \quad a = \frac{A_1 + A_0}{2} \ ; \quad n = 1, 2, \ldots ,$$

$$b = \frac{(A_1 \cdot \nu)^2}{A_1 - A_0} \cdot \ln \frac{1-\alpha}{\alpha} \quad (\alpha = 0.01) \ ; \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \ ; \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot S_n .$$

Показания индикатора М:

$$M = \begin{cases} I, & S_n \geqslant L_1(n); \text{ принимается гипотеза } \bar{x} \geqslant A_1, \\ 0, & L_1(n) > S_n > L_0(n); \text{ продолжать ввод данных,} \\ -I, & L_0(n) \geqslant S_n; \text{ принимается гипотеза } \bar{x} \leqslant A. \end{cases}$$

Для графического изображения процесса получают a и b; строят две прямых $L_0(n)$ и $L_1(n)$. По оси абсцисс откладываются n, по оси ординат - S_n.

I. Ввести программу, В/О.
2. A_0 П 0, A_1 П I, ν П 2, 4,595 П 3 .
3. С/П (a), С/П (b) .
4. x_1 С/П (М), x_2 С/П (М), ... и далее в зависимости от М: или принять соответствующую гипотезу или продолжать ввод x_i. После получения очередного М можно ИП 4 (S_n).
5. Для расчета при новом массиве: В/О и идти к п.3.
6. Для новой задачи: идти к п.2.

T(a)=3", T(b)=5", T(M) =IO" .

00	ИП 0	II	ИП I	22	ИП 5	33	F $x \geq 0$	44	БП
0I	ИП I	I2	ИП 0	23	I	34	49	45	I8
02	+	I3	-	24	+	35	ИП 6	46	0
03	2	I4	:	25	П 5	36	ИП В	47	БП
04	:	I5	ИП 3	26	ИП А	37	-	48	I8
05	П А	I6	X	27	X	38	ИП 4	49	I
06	С/П	I7	П В	28	П 6	39	-	50	БП
07	ИП I	I8	С/П	29	ИП В	40	F $x \geq 0$	5I	I8
08	ИП 2	I9	ИП 4	30	+	4I	46		
09	X	20	+	3I	ИП 4	42	I		
I0	F x^2	2I	П 4	32	-	43	/-/		

Контрольный пример:

A_0=20, A_1=25, v=0,I.

a=22,5 b=5,74 .

I) x_i: 20 23 2I 20
   M: 0 0 0 -I .

2) x_i: 20 23 24 24 26 26
   M: 0 0 0 0 0 I .

47. Календарь 1901 - 1999 гг.

Программа принимает дату (последние две цифры года, месяц и день) и выдает день недели, который был или будет в указанную дату по новому стилю. День недели выдается в виде цифры: "0" - воскресенье, "1" - понедельник, "2" - вторник, "3" - среда, "4" - четверг, "5" - пятница, "6" - суббота. Месяц вводится своим номером: "1" - январь, "2" - февраль, "3" - март и т.д.

00	П Д	15	ИП 3	30	ПП	45	+	60	-
01	С/П	16	1	31	68	46	П Д	61	/-/
02	П 2	17	-	32	ИП Д	47	7	62	7
03	С/П	18	П 3	33	+	48	:	63	X
04	П 3	19	ИП 2	34	ИП 3	49	П 1	64	/-/
05	ИП 2	20	1	35	+	50	ПП	65	ИП Д
06	3	21	0	36	П Д	51	68	66	+
07	-	22	+	37	ИП 3	52	/-/	67	С/П
08	F x≥0	23	1	38	4	53	ИП 1	68	ИП 8
09	15	24	3	39	:	54	+	69	-
10	ИП 2	25	X	40	ПП	55	F x=0	70	ИП 7
11	2	26	1	41	68	56	59	71	+
12	-	27	-	42	ИП Д	57	0	72	F Вх
13	БП	28	5	43	+	58	С/П	73	-
14	23	29	:	44	1	59	ИП 1	74	В/0

1. Ввести программу, В/0.
2. 1 ВП 7 П 7, 1,8 F 1/x П 8.
3. Число С/П, месяц С/П, год С/П (день недели).
4. Для новой даты: В/0 и идти к п.3 .

Т(день недели)=25".

Контрольный пример:

27 августа 1982 г. : 27 С/П, 8 С/П, 82 С/П (5).

48. Генератор псевдослучайных чисел.

Алгоритм описан в работе[4]. Вырабатываются псевдослучайные числа равномерно распределённые в интервале $[A,B]$.

$P_0, P_1 \in [0,1]$; $P_{i+1} = \{11 \times P_i + \pi\}$; $\hat{P}_{i+1} = A + (B-A) \cdot P_i$,
где фигурные скобки обозначают дробную часть.
Первое случайное число P_0 выбирается произвольным, в пределах от 0 до 1.

00	П В	07	ИП 0	14	ИП 8	21	ИП 0	28	С/П
01	ХУ	08	1	15	–	22	+	29	БП
02	П А	09	1	16	ИП 7	23	П 0	30	07
03	/-/	10	Х	17	+	24	ИП В		
04	ИП В	11	F π	18	F Вх	25	Х		
05	+	12	+	19	–	26	ИП А		
06	П В	13	П 0	20	/-/	27	+		

1. Ввести программу, В/0 .
2. P_0 П 0, 1 ВП 7 П7 , 1,8 F 1/x П8.
3. А ↑ В С/П ($\hat{P}_1$), С/П ($\hat{P}_2$), ... , С/П ($\hat{P}_i$), ...
4. Для новых А и В : В/0 и идти к п.3 .

$T(\hat{P}_i) = 7''$.

Контрольный пример:

$P_0 = 0,21$; $A=1$, $B=2$.

$\hat{P}_1 = 1,451$	$\hat{P}_4 = 1,901$	$\hat{P}_7 = 1,816$	$\hat{P}_{10} = 1,851$.
$\hat{P}_2 = 1,109$	$\hat{P}_5 = 1,058$	$\hat{P}_8 = 1,125$	
$\hat{P}_3 = 1,341$	$\hat{P}_6 = 1,788$	$\hat{P}_9 = 1,519$	

49. Формула сложных процентов.

Пусть K_o - начальный капитал, положенный в банк, P - банковский процент в сотых долях (3 % = 0,03), T - время, в течении которого капитал находится в банке, K_t - капитал, выросший из начального K_o через T лет.

$$K_t = K_o (1+P)^t.$$

00	П 0	03	ИП I	06	ИП 2	09	ИП 0	I2	БП
0I	С/П	04	I	07	XУ	I0	X	I3	00
02	П 2	05	+	08	F x^y	II	С/П		

I. Ввести программу.
2. P <u>П I</u>, <u>B/O</u> .
3. K_o <u>С/П</u>, T <u>С/П</u> (K_t).
4. Для новых K_o и T при старом P идти к п.3.
5. Для новых K_o,T и P идти к п.2.

T(K_t)=8" .

<u>Контрольный пример:</u>

K_o=3750 руб. ; T=5 лет ; P=0,05 : K_5=4786,06 руб.

50. Игра " НИМ " .

Из кучи Р предметов, для определённости спичек, игроки поочереди берут некоторое количество спичек. За один раз можно взять не менее одной и не более К спичек. Число К (К<< Р) устанавливается игроками заранее. Проигрывает тот, кому останется взять последнюю спичку.

00	П 0	I0	/-/	20	ИП 8	30	+	40	П 0
0I	С/П	II	!	2I	-	3I	I	4I	ИП 2
02	!	I2	ИП 0	22	ИП 7	32	-	42	БП
03	I	I3	+	23	+	33	F x≠0	43	07
04	+	I4	П 0	24	F Вх	34	44	44	I
05	П I	I5	ИП 0	25	-	35	П 2	45	П 2
06	0	I6	I	26	ИП I	36	/-/	46	БП
07	С/П	I7	-	27	/-/	37	!	47	36
08	F x≠0	I8	ИП I	28	X	38	ИП 0		
09	I5	I9	:	29	ИП 0	39	+		

I. Ввести программу, В/О.
2. I ВП 7 П 7, I,8 F I/x П 8 .
3. Р С/П (Р), К С/П (0).
4. Если первый ход делает машина, то С/П (количество спичек взятых машиной), ввести Ваш ход С/П (ход машины) и опять Ваш ход и т.д.
5. Если первый ход хотите делать Вы, то введите число взятых вами спичек, С/П (ответный ход машины), Ваш ход, С/П (ход машины) и т.д.
6. Для новой игры: В/О и идти к п.3.

Т(хода машины)=8".

Контрольный пример: Р=23, К=4; Первой ходит машина: М:2, Вы:3, М:2, Вы:4, М:I, Вы:2, М:3, Вы:I, М:4 и Вам остаётся взять последнюю спичку. Ваш калькулятор выйграл!

Литература

I. Микрокалькулятор "ЭЛЕКТРОНИКА БЗ - 34". Руководство по эксплуатации.

2. "Программы статистической обработки данных на ПЭКВМ "ЭЛЕКТРОНИКА БЗ - 2I". МЗ Латв.ССР, Рига, 1978.

3. ФРАНЦЕВИЧ Л.И. "Обработка результатов биологических экспериментов на микро - ЭВМ "ЭЛЕКТРОНИКА БЗ - 2I", Киев, "Наукова думка", 1979.

4. ЦВЕТКОВ А.Н. "Прикладные программы для микро - ЭВМ "ЭЛЕКТРОНИКА БЗ - 2I", М.,"Финансы и статистика",1982.

5. ДАНИЛИНА Н.И., ДУБРОВСКАЯ Н.С., КВАША О.П., СМИРНОВ Г.Л., ФЕКЛИСОВ Г.И. "Численные методы",М.,"Высшая школа",1976.

6. ДЖ.ГЛАСС, ДЖ.СТЭНЛИ "Статистические методы в педагогике и психологии",М.,"Прогресс",1976.

7. ХИНЧИН А.Я. "Цепные дроби", М., "Наука",1978.

8. ОРЕ О. "Приглашение в теорию чисел", М., "Наука",1980.

Содержание

СТАТИСТИКА

ПРИЛОЖЕНИЕ

СТАТИСТИКА

ПРИЛОЖЕНИЕ