Tartu Ülikool
Sotsiaalteaduste valdkond
Psühholoogia instituut

Ella Marie Tõevere

KÕMM - korrutama õppimise mõõtmine ja muutmine teise klassi kevadel

Uurimistöö

Juhendaja: Taavi Kivisik, *MA*

Läbiv pealkiri: KÕMM 2. klassi kevadel

Tartu 2026

KÕMM - korrutama õppimise mõõtmine ja muutmine teise klassi kevadel

Kokkuvõte

Uurimistöö eesmärgiks oli hinnata, kuidas mõjutab harjutamisaegne korrutamisülesannete representatsioon ehk vorm sümbolilise korrutamise sooritust. Vormi tulemuslikkust hindasin kolme katsegrupi vahel (harilik korrutamine, numbritabel ja täpitabel) vastamisaja põhjal teises klassis. Veebipõhises uuringus osales 90 õpilast (45 poissi ja tüdrukut). Osalejad läbisid kaks samasugust korrutamisoskuste mõõtmist hariliku korrutamise („avaldis võrdub korrutis“) vormis. Kahe mõõtmiskorra vahel läbiti kolm treeningpäeva osalejale määratud vormiga harjutamiseks. Katsegruppidesse jaotamine oli randomiseeritud. Tulemused ei kinnita hüpoteesi, mille kohaselt uudse vormiga (numbritabel või täpitabel) harjutamine vähendab vastamisaega võrreldes hariliku korrutamise harjutamisega teise klassi laste seas. Kõik katsegrupid parandasid vastamisaega samaväärselt. Oluline erinevus vastamisajas esines kahe mõõtmiskorra vahel sõltumata grupist. Korrutamisoskuste harjutamine parandab vastamisaega nii koolides tüüpilise hariliku korrutamise kui uudsete visuaalsete ja ruumiliste vormide tulemusena. Tulevased uuringud võiksid hinnata uudsete vormide mõju ligilähedastele numbrisüsteemi ülesannetele.

Märksõnad: korrutamisoskus, matemaatiline representatsioon, vastamisaeg, algkool, veebipõhine õpe

KÕMM - Measuring and Modifying Multiplication Learning in the Spring of Second Grade

Abstract

The aim of this study was to assess how representation (form) of multiplication during practice affects symbolic multiplication performance. Effectiveness of form was assessed on response time between three groups (regular multiplication, number table and dot table) in second grade. 90 students (45 boys, 45 girls) participated in the online study. Participants completed two tests of multiplication skills using regular multiplication (factor × factor = product). In between two measurements, participants completed three days of training with one randomly assigned form. Results did not support the hypothesis that novel forms improve performance. Practicing with number or dot tables did not reduce response times compared to regular multiplication. Response times improved for all groups − both traditional and visual-spatial practice methods improve multiplication skill. Future research should examine the effects of novel forms on related number-system tasks.

Keywords: multiplication skills, mathematical representation, response time, elementary school, online learning

Sissejuhatus

Eestis läbiviidavad matemaatika tasemetööd näitavad, et algklassides saab oluliselt parandada matemaatiliste mõistete mõistmist ja oskust neid mitmekesisemalt rakendada. Matemaatilised oskused ja teadmised põhinevad baasteadmistel liitmisest, lahutamisest, korrutamisest ja jagamisest. Eestis alustatakse matemaatika õpetamist juba eelkoolis ning algastmetes omandatud oskusi kajastab üleriigiline neljandate klasside tasemetöö. Viimase kolme aasta tulemused osutavad, et koolilaste fakti- ja protseduurilised teadmised on paremad kui mõistelised teadmised ehk sügavam arusaam ja oskus mõisteid mitmekülgselt rakendada (Haridus- ja Noorteamet, 2024). Tasemetöö tulemuste põhjal võib arvata, et tüüpilised õppemeetodid ei paku piisavalt tuge matemaatiliste kontseptsioonide mõtestamisel, et mõistelistes teadmistes saavutada õppekavas määratud tase. Lüngad põhiteadmistes mõjutavad hilisemat õppimisele kuluvat aega ja ressurssi. Lähtudes vajadusest arendada koolilaste mõistelisi teadmisi, on käesoleva uurimistöö eesmärk hinnata uudsete sekkumiste tulemuslikkust algklassi tasemel.

Üks viis matemaatiliste teadmiste arendamiseks on väliste representatsioonide (ingl k *external representation*) kasutamine, mis tähendab informatsiooni kujutamist erinevates vormides, et teha keeruline mõte väliselt tajutavaks (Mainali, 2020). Näiteks luuakse algne arusaam araabia numbrist kui sümbolist loendatavate objektide näol. Väline representatsioon justkui defineerib matemaatilisi sümboleid, pannes need keelde, mida inimene juba tunneb. Lisaks üksikute sümbolite mõistmisele saab representatsioonidega väljendada numbritevahelisi suhteid, mis on baasiks arvutamisele, sealhulgas korrutamisoskusele (Park & Nunes, 2001). Üks näide sellest on tekstülesanne, mis väljendab sümboleid ja nendevahelisi suhteid päriselu sündmuste näol (nt „Iga komm maksab 3 eurot. Ostad 4 kommi. Kui palju pead maksma?"). Väliseid representatsioone kasutatakse ka murdude esitamisel sektorite või ruudustiku näol, et seletada, mida numbrid esindavad. Väline representatsioon on seega mingi idee esitusviis, mida on võimalik meeltega tajuda (nt pilt, sõna või objekt). Representatsioonide kasutamine on viis, kuidas luua põhjalik arusaam matemaatilistest sümbolitest ja nendega arvutamisest. Välised representatsioonid on aga kasutusel õppematerjalides eeldusega, et need loovad lapse mõttemaailmas arusaama kontseptsioonidest ja nende seostest ehk tekitavad sisemisi representatsioone.

Sisemised representatsioonid (ingl k *internal representations*) on välismaailma tõlgendused, mis muutuvad mälujälgedeks, mida meenutame ja meeles hoiame, et uut informatsiooni mõista (Rapp & Kurby, 2008). Kokkupuude erinevate väliste representatsioonidega kasvatab sisemiste mälujälgede arvukust. Sellest lähtudes võiks lihtsustatud kokkuvõte matemaatiliste teadmiste arengust olla järgmine: õpetaja kasutab väliseid representatsioone, et luua arusaam sümbolitest ja nendevahelistest suhetest, tekitades sellega õpilastes sisemisi representatsioone. Sisemisi representatsioone kombineeritakse, et ülesannet tõlgendada ning ka sellele vastus leida. Mitmed õpistrateegiad ja lahenduskäigud põhinevad sisemiste representatsioonide arendamisele.

Sisemiste representatsioonide mitmekesisus, kui oskus numbritest erinevatel viisidel mõelda, võiks lihtsustada ja kiirendada lahenduste leidmist. Korrutamist saab näiteks väljendada kui korduv liitmist, sest korrutustehte tegureid (nt $3 \cdot 5$) võib erinevatel viisidel lahti kirjutada (nt $5 + 5 + 5$ või $3 + 3 + 3 + 3 + 3$). Juba 40 aastat tagasi leiti, et selline ümbermõtestamine on üks strateegiatest, mida lapsed kasutavad korrutustehete puhul, mida ei ole pähe õpitud (Ter Heere, 1985). Suuremate numbrite puhul muutuvad lahenduskäigud veelgi mitmekesisemaks ja keerulisemaks, sest representatsioonide arvukus ja operatsioonide hulk kasvab. Selleks, et sisemiste representatsioonide seas viia läbi õiged protsessid, on vaja töömälu, milles toimub informatsiooni töötlus.

Nii väliste representatsioonide töötlemine kui ka sisemiste rakendamine toimub töömälus, mis on aga mahult piiratud. Miller (1956) leidis, et töömälu maht on 7 ± 2 ühikut, Cowan (2010) seevastu aga 4 ± 1 ühikut. Ühikuid kutsutakse känkideks, mis on tähenduslikult seostatud informatsiooni kogumid. Kuigi piirid pole täpsed, kehtib üldine arusaam, et töömälu mahtu pole võimalik kasvatada (Cowan, 2010). Inimesi eristab hoopis see, kui efektiivselt piiratud töömälu kasutatakse. Sala ja Gobet (2017) leidsid, et asjatundjad loovad tähenduslikke mälustruktuure ehk känke pikaajalises mälus, mis võimaldavad ka juhuslike stiimulite puhul märgata mustreid ja seoseid, mida on kergem meelde jätta kui üksikuid stiimuleid. Üks lihtsamaid näiteid on korrutamise õppimine: korrutamisoskus võimaldab muuta pikad avaldised lühemaks ja lihtsamaks (nt $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 6 \cdot 2$), sest informatsioon seostub teadmistega korduv liitmise ja korrutamise suhtest. Antud näites vähendab korrutamine peas tehtavaid tehteid, mis omakorda vähendab vastamisaega ja eksimise tõenäosust. Mitmekesised sisemised representatsioonid, mis kujunevad kokkupuutes väliste representatsioonidega, võimaldavad märgata ja moodustada tähenduslikke seoseid, mis omakorda toetavad paremat meeldejätmist ja meenutamist.

Struktuuride ja mustrite märkamine on lisaks mälu parandamisele vajalik ka üldiseks pädevuseks matemaatikas, kusjuures mustritele keskenduvad õppemeetodid parandavad hilisemat üldist sooritust (Mulligan & Mitchelmore, 2009). Selliste meetodite puhul on aga oluline käsitleda võrdse suurusega ühikuid, et arve adekvaatselt võrrelda ja nendevahelisi suhteid mõista (Mulligan & Mitchelmore, 2009). Lisaks matemaatilise arusaama loomisele hõlbsustavad võrdsed suurused hulkade tajumist, kuna inimesed kasutavad visuaalseid stiimuleid, et ühikud grupeerida ja neid seejärel töödelda (Ciccione & Dehaene, 2020).

Matemaatikas tuleb kasuks oskus informatsiooni tähenduslikuks muuta, ehk hulkades ja ülesannetes mustreid leida. See on oskus, mida saab õppetöös arendada kasutades võrreldavaid väliseid representatsioone numbritest. Peale täpse loendamise on täheldatud, et nii inimestel kui ka mõnedel loomaliikidel on ligikaudne arvusüsteem (ingl k *approximate number system*), millega hinnata hulga suurust ligikaudselt (Park & Brannon, 2013). See on näide automaatsest infotöötlusest, mida kasutatakse igapäevaselt kiirete otsuste tegemisel, näiteks poes lühima järjekorra valimisel. Ligikaudne arvusüsteem on treenitav ehk hulkade peal matemaatiliste operatsioonide läbiviimine teeb inimesed hulkade võrdlemisel täpsemaks (Park & Brannon, 2013). Õppimise ja õpetamise seisukohast on olulisem leid see, et treenimine parandab täiskasvanutel ka sümbolitega ehk araabia numbritega arvutamise oskust (Park & Brannon, 2013). Ligikaudse arvusüsteemi treenitavus vajab siiski veel lisauuringuid. Gebuis et al. (2016) väidavad vastu ligikaudse arvusüsteemi treenitavusele ning pakuvad alternatiivina sensoorse integratsiooni süsteemi (ingl k *sensory-integration system*).

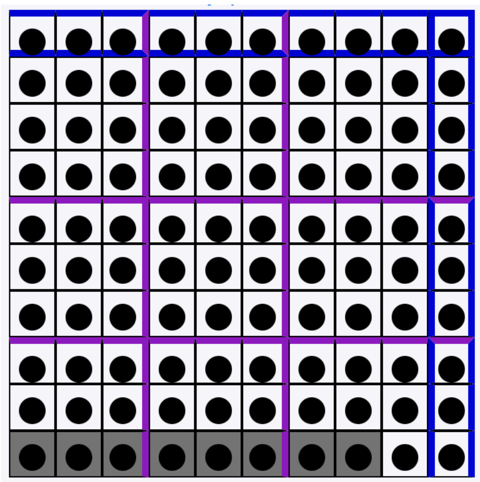
On võimalik, et hulkadega arvutamise trenn kandub üle sümbolitega arvutamise oskusesse tänu arengule ruumilises mõtlemises, sest õppijad kasutavad hulkade liitmisel ja lahutamisel mentaalset arvujoont (ingl k *mental number line*; Park & Brannon, 2013). Mentaalne arvujoon on sisemine representatsioon numbritest, mis on järjestatud suuruse järgi. Lapsed, kes on täpsemad arvu paigutamises arvujoonele (ühest kümneni), on ka kiiremad peast arvutajad (Feldman & Berger, 2022). Arvujoone representatsioon muutub kooliastmeid läbides täpsemaks: alguses areneb arusaam joone vasakust otsast (ühe ümber), seejärel paremast otsast (kümne ümber) ning lõpuks keskpunktist (viie ümber) (Feldman & Berger, 2022). Ajapikku tekib lineaarne arusaam numbrite paiknemisest ja nendevahelistest suhetest. Täpse arvujoone arenemiseks on oluline, et välised representatsioonid sümbolitest oleksid püsivad, et tekitada sisemine representatsioon numbrite lineaarsusest ja paiknevusest ruumis. See aitab omakorda leida mustreid ja seoseid, mis on vajalikud matemaatiliste oskuste arenguks.

Käesolev uurimistöö

Eelnev arutelu näitab, et matemaatiliste oskuste treenimise ja sekkumiste fookus on visuaalse ja ruumilise informatsiooni töötlus. Nende protsesside abil tekivad seosed sümbolite tähenduse ja arvuliste suhete vahel. Sissejuhatuses välja toodud uuringutes osalesid enamasti vaid täiskasvanud, kellel on sisemised representatsioonid numbritest juba moodustunud. Juba kinnistunud oskusi on võimalik kordamisega kiiremaks ja täpsemaks muuta, kuid uue materjali mõistmiseks pole see kõige efektiivsem õppemeetod (Ter Heege, 1985). Algklassides õppivad lapsed alles arendavad baasteadmisi sümbolite tähendusest ja numbritevahelistest suhetest, mis tähendab, et sekkumiste tulemuslikkust või mõju sooritusele peaks mõõtma algkooli tasemel.

Uurimistöö eesmärk on hinnata uudsetele välistele representatsioonidele ehk vormidele põhinevate sekkumiste tulemuslikkust algklassi tasemel. Selleks võrdlen õppetöös tüüpiliselt kasutatavat „avaldis võrdub korrutis“ vormis harjutamist uudse, visuaalse ja ruumilise representatsiooni ehk vormi harjutamisega. Uued vormid on loodud Taavi Kivisiku poolt. Varasema teaduskirjanduse põhjal võiks uus vorm arendada mõistelist arusaama sümbolite olemusest ja seeläbi parandada araabia numbritega („avaldis võrdub korrutis“ vormis) arvutamise kiirust.

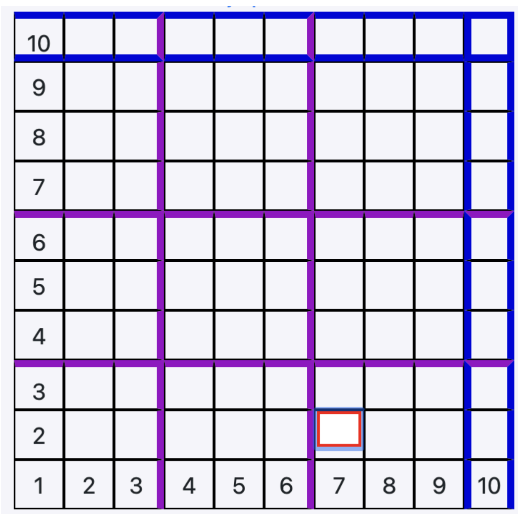
Täpitabel (vt Joonis 1) on uudne vorm õpilastele. See on koostatud lähtudes eelnevalt kirjeldatud sisemiste representatsioonide loomise põhimõtetest, näiteks ühikute püsivus, hulkade tajumine ning struktuuride ja mustrite märkamine. Nagu on kirjeldatud ka Juhe (2024) töös, on 10x10 ruudustik jaotatud üheksaks sektsiooniks lillade abijoonega. Abijooned on paigutatud iga kolme rea ja veeru tagant, sest inimesed on suutelised tajuma kolme kuni nelja suuruseid hulki automaatselt ehk loendamata (Ciccione & Dehaene, 2020). Täppide loendamine võiks olla tänu abijoontele kiirem. Lisaks on kümnendarvude eristamiseks tähistatud kümnes rida ja veerg siniste abijoontega.



Joonis 1. Täpitabel. Näidis on avaldise 8 · 1 ekvivalent, kus sarnaselt koordinaatteljestikule liigutakse vasakult paremale (nagu x-teljel), seejärel alt üles (nagu y-teljel).

Õpilase ülesanne on loendada aktiivseks muutunud ehk halli taustaga ruutude arv. Ciccione ja Dehaene (2020) leidsid, et täiskasvanud kasutavad täppide loendamisel peast korrutamist ehk jagavad hulga tajutavateks osadeks ning seejärel korrutavad selle sees olevad ühikud osade arvuga. Selline kahe arvu suhte mõistmine on korrutamise mõistmisel olulisem kui korduv liitmise harjutamine (Park & Nunes, 2001). Lähtudes nendest leidudest võib eeldada, et ka lapsed võivad kasutada täppide loendamisel otseteid tänu mustrite ja struktuuride loomisele ja leidmisele. Täpitabel annab õpilastele võimaluse oma sisemist representatsiooni arvudest ja nendevahelistest suhetest täiendada, sest sümbol esitatakse püsiva välise representatsiooni näol. Täpitabel võimaldab leida seosed sümbolite, hulkade ja lahendusviiside vahel. Lisaks aitab hulga nägemine mõista, kuidas saab erinevatel ülesannetel olla sama vastus (nt 12 täppi on väljendatav nii 3 · 4 kui ka 2 · 6 kujul; Juhe, 2024).

Numbritabeli (vt Joonis 2) struktuur sarnaneb täpitabelile. Ruudustik on aga tühi ning esimene rida ja veerg on nummerdatud ühest kümneni. Ühe ülesande raames muutub üks ruut aktiivseks. Aktiivne ruut vastab avaldise tulemusele, kusjuures ruudustikus liigutakse vasakult paremale ja seejärel alt üles, et märgistada avaldise tegureid. Numbritabelis harjutavad õpilased sümbolitega korrutamist, mis puudub täpitabelis. Samas ei rõhuta numbritabeli vorm hulga suurust ega pindala, mis on täpitabelis rõhutatud halli taustaga. Numbritabeli väärtus seisneb nii sümbolitega harjutamises kui ka ruumilise paiknevuse õppimisel. See ruumiline paiknevus võib osutuda mälueeliseks sarnaselt asukohtade meetodile (ingl k *method of loci*), mille raames paigutatakse informatsioon kindlasse asukohta, mis muutub vihjeks info meenutamisel. Asukohtade meetodit peetakse efektiivseks meetodiks, kuigi eksperimentide metoodika viitab mõningatele puudujääkidele (Twomey & Kroneiseni, 2021).



Joonis 2. Numbritabel. Näide on avaldise 7 · 2 ekvivalent. Osaleja sisestab vastuse aktiivseks muutunud ruutu, mis on märgitud punase kastiga.

Uurimistöö raames hindan nende uute vormide tulemuslikkust arvutamisoskuses, võrreldes erinevate rühmade vastamisaega enne ja pärast kindla vormiga harjutamist. Lähtudes sissejuhatuses kirjeldatud uuringutest eeldan, et täpitabel ja numbritabel parandavad vastamisaega enam kui harilik korrutamine. Uued vormid võimaldavad luua sisemisi representatsioone, mis toetavad lahenduste leidmist ja meenutamist. Korrutama õppimise mõõtmise ja muutmise (KÕMM) uuringu raames testin hüpoteesi, et harjutamine uudse vormiga parandab teise klassi laste korrutamisoskust rohkem kui tavapärane araabia numbritega harjutamine ning avaldub vastamisaja vähenemises.

Meetod

Valim

Uuring viidi läbi 2024. ja 2025. aasta kevadel teise klassi õpilastega. Sama uuringut korrati, et kasvatada valimit ja koguda rohkem andmeid. Toimumisaeg hoiti konstantsena, et tagada sarnane osalejate vanus ja koolis omandatud teadmiste tase. Uurimistöö raames võtsin koolidega ühendust meili ja telefoni teel 2025. aasta kevadel ning palusin neil saata uuringus osalemise teave vanematele Stuudiumi või eKooli kaudu. Sama meetod oli kasutusel 2024. aasta kevadel. Kooli poolt edastatud kutses paluti lapsevanematel registreerida laps uuringusse läbi LimeSurvey küsimustiku ning lisaks täitis nii vanem (vt Lisa A) kui ka õpilane (vt Lisa B) informeeritud nõusolekuvormi. Andmeanalüüs viidi läbi nende 90 õpilase (45 tüdrukut ja 45 poissi) andmete põhjal, kes läbisid kaks mõõtmist ja kolm treeningpäeva täismahus. Õpilastele määrati juhuslikult üks kolmest katsegrupist: harilik korrutamine, numbritabel või täpitabel. Täismahus osalenud õpilased jaotusid gruppidesse järgmiselt: 30 hariliku korrutamise grupis, 29 numbritabeli grupis ja 31 täpitabeli grupis.

Katsedisain ja protseduur

Viisin läbi käesoleva uurimistöö pikaajalisema ja laiahaardelisema KÕMM uuringu raames. Uurimistöö andmed pärinevad KÕMM uuringu esimesest nädalast. Uurimistöö protseduur sarnaneb Juhe (2024) läbiviidud tööle, mis põhineb samuti KÕMM uuringu andmetel. Juhe (2024) töös analüüsiti sekkumiste mõju 3.-4. klasside esmaste andmete peal. Käesoleva uurimistöö raames hindan vormide mõju aga teise klassi kevadel, mil ollakse korrutamise omandamise algfaasis.

Uuring viidi läbi Taavi Kivisiku loodud veebikeskkonnas komm.cs.ut.ee. Esimesel uuringu päeval täitsid osalejad testi, et hinnata nende matemaatilisi oskusi enne kindla vormiga harjutamist. Esimest testi kutsun esimeseks mõõtmiskorraks. Pärast esimest mõõtmiskorda jagati osalejad juhuslikult katsegruppidesse: harilik korrutamine, numbritabel või täpitabel. Pärast kindla vormiga harjutamist täitsid osalejad uuesti esimese mõõtmiskorra testi. Uurimistöös nimetan seda teiseks mõõtmiskorraks. Võrdlus esimese ja teise mõõtmiskorra vahel võimaldas hinnata muutust vastamisajas sõltumata katsegrupist.

Mõlemal mõõtmiskorral lahendasid kõik osalejad 90 ülesannet, mis olid jaotatud üheksaks plokiks: kolm liitmisülesannete, kaks lahutusülesannete ja neli korrutamisülesannete plokki. Igas plokis pidid osalejad vastama kümnele ülesandele, mis olid harilikus araabia numbritega vormis. Peale ploki läbimist pidid osalejad tegema vähemalt viie sekundilise pausi enne kui said liikuda järgmise ülesandeploki juurde. Eeldatav ajakulu terve mõõtmise peale oli 10 kuni 15 minutit.

Uurimistöös on sõltuvaks muutujaks vaid korrutamisülesannetele vastamiseks kulunud aeg. Analüüsis on seega kasutatud vastuseid 40-le korrutamistehtele mõlema mõõtmiskorra kohta (kokku 80 vastust). Mõõtmispäevadel esitati erineva raskusastmega korrutamistehted, kus esinesid nii koolis õpetatud kui ka järgmises klassis õpetatavad ülesanded. Vastamisaja mõõtmiseks salvestati reavahetusnupu vajutamiseks kulunud aeg iga ülesande raames. Analüüsis kasutasin ainult neid vastuseid, mille andmiseks kulus vähemalt sama palju aega, kui antud ülesandele kõige kiiremini sisestatud õige vastuse aeg.

Esimesele mõõtmiskorrale järgnes katsegruppidesse jaotumine ja katsegrupile vastava vormiga harjutamine. Harjutamiseks oli uurimistöö raames kolm treeningpäeva. Eeldatav uuringu läbimise kord on seega järgmine: esimene mõõtmiskord neljapäeval, kolm treeningpäeva (esmaspäev, teisipäev ja kolmapäev) ja teine mõõtmiskord neljapäeval. Kirjeldatud on eeldatav mõõtmiste ja treeningute tegemise aeg ehk see, millal antud kodutööd veebikeskkonnas avanesid. Mõõtmiskorrad olid kõikidele osalejatele samad. Treeningpäeva struktuur oli osalejate vahel sama, kuid sisu sõltus katsegrupist.

Käesoleva uurimistöö raames on sõltumatuks muutujaks treeningu vorm ehk see, millise välise representatsiooniga (harilik korrutamine, numbritabel või täpitabel) osaleja korrutamist harjutas. Hariliku korrutamise grupp vastas „avaldis võrdub korrutis“ formaadis nagu ka mõõtmisel, mis tegi antud grupist aktiivse kontrollrühma. Numbritabeli grupp sisestas aktiivsesse korrutustabeli ruutu rea ja veeru korrutise. Täpitabeli grupp sisestas halli taustaga ruutude arvu. Numbritabeli ja täpitabeli rühma võrdlemine hariliku korrutamise rühmaga võimaldas hinnata, kuidas erineb uudsete visuaalsete ja ruumiliste esitusvormidega harjutamine koolis tavapärasest hariliku korrutamise harjutamisest. Esimene mõõtmiskord ja hariliku korrutamise grupp võrdlusalusena võimaldas hinnata muutusi vastamisajas sõltuvalt katsegrupist.

Igal treeningpäeval vastasid osalejad 90-le küsimusele, mille eeldatav ajakulu oli 10 kuni 15 minutit. Ülesanded esitati osaleja katsegrupi põhjal. Iga osaleja puhul esitati 90 ülesannet kõigil kolmel mõõtmispäeval ühes esitusvormis: hariliku korrutamisena, numbritabelina (vt Joonis 2) või täpitabelina (vt Joonis 1). Treeningpäevadel jagati 90 ülesannet nelja plokki: soojendus, kordamine, õppimine ja harjutamine. Soojenduse raames küsiti küsimusi üle-eelmisel päeval õpitu kohta, mis oli võimalik vaid kolmandal treeningpäeval. Kordamise osa puudutas eelneval päeval õpitut ja seega toimus teisel ja kolmandal treeningpäeval. Eelnimetatud plokkide puudumisel esimesel ja/või teisel päeval hoiti küsimuste arvuga ajakulu 10 kuni 15 minuti juures. Õppimise plokis vastasid osalejad treenimata ülesannetele. See võimaldas kasvatada avaldiste väärtusi treeningpäevade jooksul (esimesel treeningpäeval korrutati kahega ($2 \cdot 10$ piires), kolmandal päeval aga neljaga ($4 \cdot 10$ piires)). Harjutamise plokis esitati ülesandeid kõikides eelnevalt õpitud vahemikes. Kõikidel päevadel oli kohustuslik teha plokkide vahel vähemalt viiesekundiline paus. Jätkamiseks pidi õpilane pausi ise katkestama.

Õpilased lahendasid kõik ülesanded veebi teel talle ligipääsetavas digiseadmes. Soovitatav oli kasutada arvutit, kuid aparatuur ei olnud korraldajate poolt kontrolli all. Eeldatavaks mõõtmise või treeningu (ehk kodutöö) täitmise ajaks oli vastav avanemise päev veebikeskkonnas, kuid kodutööd oli võimalik täita kuni kaks nädalat pärast selle avanemist. Osalejad, kes ei sooritanud kodutööd eeldatavatel päevadel võisid päevas täita vaid ühe kodutöö. Aastal 2024 saadeti teavitus avanenud kuid tegemata kodutööde kohta meili teel. Aastal 2025 oli osalejatel võimalik kodutööde avanemise aega ise jälgida ja meeldetuletus tegemata töö osas saadeti neile, kes hilinesid kolme või enama päevaga. Osalejatel paluti vastata võimalikult õigesti ja kiiresti. Iga mõõtmis- või treeningkorra alguses esitati vastav kodutöö juhend ja näidisülesanne, mida oli võimalik vaadata ka vastamise ajal. Mõõtmispäevadel ei saanud õpilased tagasisidet vastuste õigsuse kohta. Treeningpäevadel kuvati, kas sisestatud vastus oli õige või vale, ja näidati äsja vastatud tehe ja õige vastus harilikus vormis (nt „Ups. Õige on $3 \cdot 4 = 12$“).

Eetiline külg

KÕMM uuringul on Tartu Ülikooli inimuuringute eetika komitee luba. Katses osalemine nõudis vaimset pingutust sarnaselt matemaatika tundidele koolis. Ebamugavuse korral oli osalejatel võimalus katse katkestada ning seda tuletati nii lapsele kui lapsevanemale meelde. KÕMM uuringu raames salvestati lapse vanus, sugu, eelmise õppeperioodi hinne matemaatikas ja lapsevanema hinnang sellele, kui keeruline matemaatika lapsele on. Mõõtmispäevadel salvestati korrutamistehete vastuste õigsus ja vastamise kiirus. Uurimistöös kasutatavad andmed olid isikuandmetest puhastatud enne, kui need autorile edastati.

Statistiline analüüs

Andmete analüüsimiseks kasutasin IBM SPSS programmi (versioon 31.0.1.0 (49)). Lõin mitmetasemelise üldistatud lineaarse segamudeli (ingl k *generalized linear mixed model*, GLMM), et hinnata mõõtmiskorra ja katsegrupi mõju vastamisajale. Antud meetod võimaldab analüüsida normaaljaotusest hälbivaid andmeid. Lisaks arvestab segamudel nii fikseeritud mõjusid (ingl k *fixed effects*) kui ka juhuslikke mõjusid (ingl k *random effects*). Fikseeritud mõjud väljendavad sõltumatute muutujate mõju, osutades keskmisele muutusele vastamisajas erinevate tasemete vahel. Loodud segamudelis olid fikseeritud muutujateks mõõtmiskord (esimene või teine), katsegrupp (hariliku korrutamise, numbritabeli või täpitabeli grupp) ning mõõtmiskorra ja katsegrupi interaktsioon. Juhuslikud mõjud võimaldavad arvestada erinevaid baasvastamisaegu osalejate vahel. See tähendab, et segamudel ei kasuta vabaliikmena kõikide osalejate keskmist vastamisaega esimesel mõõtmiskorral, vaid iga osaleja kohta erinevaid vastamisaegu. Sõltuv muutuja oli vastamisaeg sekundites, mille mudeldasin gamma jaotuse järgi, kasutades logaritmilist seosefunkstiooni (ingl k *link function*), sest vastamisaja andmetel oli kõrge positiivne asümmeetriakordaja (4.383) ja ekstsess (34.028). Lisasin mudelisse iga osaleja kohta juhusliku vabaliikme arvestamaks individuaalseid erinevusi vastamisajas.

Andmete puhastamise viis läbi Taavi Kivisik, rakendades MedCouple'i meetodit. Lisaks eemaldati vastused, milles sisestati järjestikku sama vale väärtus, ning vastused, mis saabusid enam kui kaks nädalat pärast ülesande avanemist. Analüüsist jäeti välja vastamisplokid, mille õigete vastuste osakaal oli alla 50%. Puhastamise järel kõrvaldati ka osalejad, kellel jäi analüüsikõlblikuks vähem kui 50% vastustest. Pärast andmete puhastamist jäi analüüsi 90 katseisikult kogutud 4979 vastamisaega.

GLMM-ide eelis on see, et ei eeldata andmete normaaljaotuslikkust. See põhimõte laieneb ka segamudeli jääkide analüüsile, mistõttu on visuaalne eelduste hindamine keeruline. Vastavalt ei olnud käesolevas analüüsis standardiseeritud jääkide jaotus normaaljaotuslik (ekstsess = 19.067 ja asümmeetriakordaja = 3.390, normaaljaotuse korral oleksid mõlemad väärtused vahemikus [−1;1]). Standardiseeritud jääkide ja mudeli ennustatud väärtuste hajuvusdiagramm (vt Lisa C) ei näidanud mustrit, mis viitaks nendevahelisele seosele. Visuaalse hindamise kõrval ei viidanud standardiseeritud jäägid ülehajuvusele, sest Pearson χ^2 statistiku ja vabadusastmete suhe oli lähedal ühele (Pearson $\chi^2/df = 0.98$). See osutab, et mudeli ennustatud andmete hajuvus vastas gamma jaotuse eeldatud hajuvusele. GLMM-ides eeldatakse tüüpiliselt, et juhuslikud mõjud on normaaljaotuslikud. Selle hindamiseks kasutasin ekstsessi ja asümmeetriakordaja kriteeriumit [−1;1]. Segamudelis kasutatud juhuslikud vabaliikmed olid normaaljaotuslikud, kusjuures ekstsess oli 0.505 ja asümmeetriakordaja 0.615.

Autori panus

Uurimistöö raames koostas autor ülevaate varasemast kirjandusest. Võttis ühendust koolidega ja leidis võimalusi valimi suurendamiseks 2025. aasta kevadel. Autor tutvus mitmetasemeliste üldistatud lineaarsete segamudelitega seotud meetoditega, viis läbi vajalikud analüüsid ja tõlgendas saadud tulemusi. Autor kirjutas käesoleva uurimistöö.

Tulemused

Mudeli Akaike informatsioonikriteerium (AIC) oli 14483.474 ja Bayesi informatsioonikriteerium (BIC) 14496.495, kusjuures madalamad väärtused viitaksid paremale sobivusele. Mudelis kasutatud fikseeritud ja juhuslikud mõjud seletasid 9.6% vastuste variatsioonist (tingimuslik pseudo $R^2 = .096$; ingl k *conditional pseudo-R square*). Mudeli fikseeritud muutujad olid statistiliselt olulised (F (5, 4973) = 16.197, $p < .001$) ehk vastamisaja hajuvus oli oluliselt seletatav mudeli muutujatega. Juhuslike vabaliikmete hajuvus oli statiliselt oluline (Hinnang = 0.156, SE = 0.027, Z = 5.715, $p < .001$), mis osutab katseisikute vastamisaja erinevuste arvestamise olulisusele mudeli ülesehitamisel. Jääkhajuvuse olulisus (Hinnang = 1.028, SE = 0.021, Z = 49.418, $p < .001$) osutas mudeli poolt seletamata jäänud hajuvusele ka pärast muutujate mõju arvestamist.

Tabel 1 kajastab segamudeli fikseeritud efekte vastamisajas. Koefitsiendid kajastavad muutust võrreldes esimese mõõtmiskorra ja hariliku korrutamise grupi tulemusega nii logaritmilisel skaalal kui ka originaalskaalal. Selleks, et viia koefitsient originaalskaalale tõstsin konstandi e astmele beeta, ehk kasutasin arvutuskäiku e^{β}. See e^{β} näitab, mis kordaja võrra suureneb või väheneb mudeli ennustatav keskmine reaktsiooniaeg, kui fikseeritud muutuja muutub ühe ühiku võrra. Erandiks on vabaliige, mis on arvutuskäigu tulemusena kajastatud sekundites. Tabelist on näha, et mõõtmiskord oli statistiliselt oluline muutuja ehk esines peamõju, kus teisel mõõtmiskorral oli vastamisaeg oluliselt lühem kui esimesel korral (28,5% langus). Puudus katsegrupi statistiliselt oluline peamõju ehk katsegrupid ei erinenud vastamisaja osas statistiliselt olulisel määral võrreldes hariliku korrutamise grupiga esimesel mõõtmiskorral. Sekkumisgrupi ja mõõtmiskorra vahel ei esinenud statistiliselt olulist interaktsiooni. Kõigis kolmes grupis toimus vastamisaja vähenemine seega samas suurusjärgus. Uudsete vormidega korrutamise harjutamine ei suurendanud ega vähendanud vastamisaega võrreldes hariliku korrutamise grupiga.

Tabel 1

Mitmetasemelise üldistatud lineaarse segamudeli fikseeritud efektid vastamisajas

Muutuja		β	e^{β}	*SE*	*t*	*p*
Vabaliige		2.769	15.943	0.078	35.661	<.001
Mõõtmiskord						
	1	0	0			
	2	-0.336	0.715	0.056	-5.979	<.001
Katsegrupp						
	Harilik korrutamine	0	0			
	Numbritabel	-0.163	0.850	0.122	-1.339	.181
	Täpitabel	-0.094	0.910	0.105	-0.900	.368
Interaktsioon (mõõtmiskord x katsegrupp)						
	2 x numbritabel	0.067	1.069	0.086	0.776	.438
	2 x täpitabel	0.024	1.024	0.086	0.281	.779
	2 x harilik korrutamine	0	0			
	1 x numbritabel	0	0			
	1 x täpitabel	0	0			
	1 x harilik korrutamine	0	0			

Märkus. Tulemused põhinevad gamma jaotusel ja logaritmilisel seosefunktsioonil. Baaskategooriaks mõõtmiskord = 1, sekkumisgrupp = harilik korrutamine. 0 tähistab tulemust, mis on tabelis eelnevalt kajastatud. β = koefitsient logaritmilisel skaalal, vabaliikme e^{β} = vabaliige sekundites, e^{β} = korrutustegur originaalskaalal, *SE* = standardviga.

Uurimistöö küsimustele vastamiseks kasutasin tulemusi originaalsest täismudelist, mis arvestas kõiki muutujaid. Võrdlesin mudelit ka lihtsamate versioonidega, et hinnata mudeli stabiilsust. Eemaldasin täismudelist eraldi katsegrupi mõju ning interaktsiooni katsegrupi ja mõõtmiskorra vahel, sest antud muutujad ei olnud täismudelis statistiliselt olulised. Interaktsiooni eemaldamine vähendas AIC ja BIC väärtusi (võrreldes täismudeliga muutusid vastavalt −9.268 ja −9.267 võrra). Nii interaktsiooni kui katsegrupi mõju eemaldamine vähendas neid väärtusi veelgi (võrreldes täismudeliga muutusid vastavalt −10.532 ja −10.530 võrra). Väärtuste vähenemine viitab sellele, et lihtsam mudel on eelistatud, sest see kirjeldab suure osa samade tulemuste hajuvusest kasutades vähem muutujaid. Mudeli paranemine muutujate eemaldamisel kinnitab täismudeli põhjal tehtud järeldust, et mõõtmiskordade vaheline muutus vastamisajas ei sõltu sekkumisrühmast.

Arutelu

Uurimuse eesmärk oli hinnata, kuidas mõjutab harjutamisaegne korrutamisülesannete representatsioon ehk vorm (harilik korrutamine, numbritabel ja täpitabel) sümbolilise korrutamise sooritust. Vormi tulemuslikkust hindasin vastamisaja põhjal algklassi tasemel. Tulemused ei kinnita KÕMM uuringu raames püstitatud hüpoteesi, mille kohaselt uudse vormiga (numbritabel või täpitabel) harjutamine vähendab korrutamiseks kulunud aega võrreldes hariliku korrutamise harjutamisega teise klassi laste seas. Oluline erinevus vastamisajas esines kahe mõõtmiskorra vahel sõltumata grupist, mis viitab üldisele soorituse paranemisele.

Soorituse paranemist võib tõlgendada mitmeti. Esiteks on võimalik, et uuringu sekkumine ehk erinevate vormide kasutamine ei oma mõju vastamisajale. Käesolevas uurimistöös kasutasin andmeid vaid esimesest nädalast pikaajalisema KÕMM uuringu raames. Seetõttu võib üldine vastamisaja paranemine tuleneda muudest asjaoludest peale harjutamise. Näiteks on võimalik, et tulemus kajastab katseisikute harjumist uurimuses osalemisega. Juhised osalejatele olid selgelt sõnastatud enne kõiki mõõtmis- ja harjutusülesandeid, kuid nendest arusaamist ei olnud võimalik kontrollida, sest osalemine toimus virtuaalselt. Peale juhiste mõistmise võis rolli mängida ka trükkimise kiirus. On võimalik, et osalejad harjutasid korrutamisoskuste kõrval ka seadmesse trükkimist ja vastuse sisestamist, mille tagajärjel vastamisaeg paranes. Selleks, et mõõta vaid korrutamiseks kulunud aega võiks vastust esitada verbaalselt, kuid see eeldaks katse läbiviimist kohapeal, nagu on tehtud varasemates uuringutes (nt Campbell et al., 2015; Ciccione & Dehaene, 2020). Viimaks võis mõju omada ka samaaegne koolitöös osalemine, mille kohaselt oleks vastamisaeg paranenud ka siis, kui laps KÕMM uuringus ei osalenud. Uuringu raames oleks kõikide nende kitsaskohtade parandamiseks võimalik kasutada passiivset kontrollgruppi, kes lahendab ülesandeid vaid mõõtmispäevadel ehk ei osale treeningus. Selline kontrollgrupp võimaldaks hinnata KÕMM uuringus osalemise lisaväärtust võrreldes vaid koolitöös osalemisega.

Passiivse kontrollgrupi kasutamise probleemiks on see, et osalejad võivad tuvastada sekkumise puudumise. Selle tulemusel võib muutuda ootus soorituse muutumise kohta, mille tagajärjel võib langeda motivatsioon uuringus osaleda. Negatiivne ootus ja madal motivatsioon mõjutavad omakorda sooritust negatiivselt. Passiivse kontrollgrupi tulemus, mis on mõjutatud kontrollimata muutujate poolt (nt ootus) ei ole otseselt võrreldav sekkumisgrupi tulemusega. Kui sekkuvad muutujad langetavad kontrollgrupi sooritust, kuid tulemuslikkust hinnatakse kontroll- ja sekkumisgrupi erinevuste põhjal, võib treeningu mõju olla ülepaisutatud (Melby-Lervåg et al., 2016). KÕMM uuringu tugevuseks on aktiivse kontrollgrupi kasutamine hariliku korrutamise näol. Antud grupp on sarnane platseebogrupile, sest katseisik ei ole teadlik soorituse muutumise ootusest (kas see peaks paranema või langema). Osaleja ootus ei mõjuta tema sooritust, kuid motivatsioon osaleda säilib ning tulemused on sekkumisgrupiga võrreldavad, sest katsetingimused on sarnased.

Teine viis tulemuste tõlgendamiseks on vastamisaja paranemine harjutamise tagajärjel. Kognitiivses psühholoogias kehtib üldine printsiip, mille kohaselt võib ülesande harjutamine parandada antud ülesande tulemust, kuid ülekandeefekte vähemsarnastes ülesannetes ei esine (Melby-Lervåg et al., 2016). Sõltumata grupist parandab KÕMM uuringus osalemine laste vastamisaega sümbolilistes korrutamistehetes. Eeldades, et tulemus pärineb sekkumisest, toetab uudsete vormidega harjutamine matemaatilist oskust sarnaselt hariliku korrutamise meetodile. Seega esinevad KÕMM uuringu näitel ülekandeefektid uudsete vormidega ja sümbolilise korrutamise vahel. Varasemalt on leitud, et hulkadega arvutamise mõju kandub üle sümbolitega arvutamisesse täiskasvanutel (Park & Brannon, 2013). Eeldades, et käesoleva uuringu tulemused kajastavad harjutamise mõju, võib järeldada, et KÕMM uuringu raames on Parki ja Brannoni (2013) leid saanud kinnitust ka laste seas. Selline ligikaudse arvusüsteemi (ingl k *approximate number system*) treenimise ülekandumine matemaatikaoskusesse ei ole aga kõikides uuringutes kinnitust saanud (Gebuis et al., 2016). Võimalikke treeningu efekte põhjendatakse ka erinevatel viisidel, näiteks kasutades sensoorset integratsiooni süsteemi (ingl k *sensory-integration system*; Gebuis et al., 2016).

Ülekandeefekt võib tuleneda sellest, et KÕMM uuringu täpitabel võimaldab lastel sooritada peast korrutamist, sest hulka saab visuaalselt grupeerida. On võimalik, et lapsed kasutavad hulkadega arvutades korrutamist nagu täiskasvanud seda teevad. Täppide loendamisel jagavad täiskasvanud hulga osadeks ja seejärel korrutavad selle sees olevad ühikud osade arvuga (Ciccione & Dehaene, 2020). Kuna antud näitel tõlgitakse hulk peas sümboliteks, väljendab see oskust mõista fikseeritud suhteid arvude vahel (nt 3 osa, mille sees on 2 täppi = $3 \cdot 2$). Laste seas on leitud, et arvudevaheliste fikseeritud suhete mõistmine parandab hilisemaid matemaatilisi oskusi (Park & Nunes, 2001). Hilisemaid oskusi ennustab ka arusaam visuaalsetest ja ruumilistest mustritest (Mulligan & Mitchelmore, 2009). Kokkuvõttes on visuaalne grupeerimine, mis hõlmab mustrite ja matemaatiliste suhete mõistmist, üks võimalik meetod selgitamaks tulemuste samaväärsust uudsete vormide ja hariliku korrutamise vahel. KÕMM uuringus osalejate kasutatud arvutuskäik vastuses ei kajastu.

Ülekandeefektid numbritabeliga ja sümbolilise korrutamise vahel võivad tuleneda sümbolitega harjutamisest kui ka numbritabeli asukohaomaduse kasutamisest. Võrreldes täpitabeliga võib numbritabeliga harjutamise ülekandumine sümbolilisse korrutamisesse olla vahetum, sest avaldis esitatakse araabia numbrites. Numbritabeli ruumilisus toetub visuaalse grupeerimise asemel asukohtade meetodile (ingl k *method of loci*). Selle mnemotehnika raames paigutatakse informatsioon kindlasse asukohta, mis muutub vihjeks info meenutamisel. Harilikus korrutamises võib avaldist nähes meenuda vastuse ruumiline asukoht numbritabelis, mis võib vastuse leidmist kiirendada. Twomey ja Kroneiseni (2021) metaanalüüsi põhjal on asukohtade meetod tõhus mnemotehnika. Autorid toovad välja ka eksperimentide metoodilised puudujäägid, näiteks randomiseerimise raporteerimata jätmine (Twomey & Kroneisen, 2021). Sellised puudujäägid võivad viidata eksperimentaatori kallutatusele või üldisemale püüdele näidata uuritavat tehnikat tõhusamana, kui see tegelikult on. Metaanalüüsi (Twomey & Kroneisen, 2021) näitel hinnatakse tehnika mõjusust tüüpiliselt sõnavara õppimise põhjal, mitte arvutamise raames. Seetõttu pole asukohtade meetodi tõhusus matemaatika raames veel selge. Osalejate poolt kasutatud strateegiaid KÕMM uuringu raames aga ei uuritud.

Käesolevas uuringus ei leitud sekkumisgrupi peamõju. Siiski võisid uudsete vormidega harjutavatel osalejatel tekkida uued sisemised representatsioonid numbritest ja nendevahelistest suhetest. Töömälu uurimine on näidanud, et üldist töömälu mahtu pole võimalik suurendada, aga tähenduslikud seosed võimaldavad känke suurendada (Sala & Gobert, 2017). Selle põhimõtte kohaselt muudab sisemiste representatsioonide mitmekesisus ehk oskus numbritest erinevatel viisidel mõelda arvutamise kiiremaks ja lihtsamaks. Käesoleva uurimistöö tulemused osutavad, et isegi, kui uued representatsioonid tekkisid, ei ole nende kasutamine efektiivsem kui hariliku korrutamise tulemusel tekkinud teadmiste kasutamine. On võimalik, et uudsetel representatsioonidel on lisaväärtus matemaatilistes oskustes, mida antud uurimistöö käigus ei avastatud, sest tulemuslikkust mõõdeti vaid korrutamistehete põhjal. Saadud tulemuste põhjal võib eeldada, et uudsete vormidega harjutamine kandub üle sümbolilisse korrutamisoskusesse. Selgitamaks kuivõrd harjutamise mõju teistesse ülesannetesse üldistub, oleks oluline hinnata vormi mõju erisuguste matemaatiliste probleemide lahendamisele. Kuna täpitabel ja numbritabel lisavad korrutustehetele ruumilise elemendi, oleks huvitav uurida nende mõju ka ligilähedaste numbrisüsteemide ülesannetele, näiteks pindala leidmisele, mida õpetatakse Eestis 4. klassis, ja koordinaatteljestike õppimisele, mida õpetatakse Eestis 6. klassis.

Sisemiste representatsioonide mitmekesisus võib väljenduda erinevates ülesannetes. On võimalik, et mitmekesisuse kasu avalduks alles hilisemas õppetöös, mil erinevate teadmiste seostamine muutub olulisemaks. Viimane toetub eelnevalt mainitud arusaamale, et sisemiste representatsioonide mitmekesisus lihtsustab lahenduste leidmist läbi känkide suurendamise (Sala ja Gobet, 2017). Antud uurimistöö raames jäi hindamata uuringus osalemise pikaajaline mõju. Puudub hinnang sellele, kas vastamisaja kiirus säilib, kui treening lõpeb. Lahenduseks oleks osalejate korrutamisaja hindamine mõni aeg pärast treeningu lõppemist. See meetod on KÕMM uuringus kasutusel, kuid käesoleva uurimistöö fookus on uudsete sekkumiste tulemuslikkus, mitte pikaajaline püsivus. Pikaajalise uuringuga oleks võimalik hinnata nii üldise treeningu mõju püsivust kui ka võimalike uudsete sisemiste representatsioonide kasu pikas perspektiivis.

Uurimistöö panus valdkonda seisneb sekkumise mõjususe hindamises laste peal. Varasemalt on uuritud erisuguseid sekkumisi korrutamisoskusele. Näiteks lõid Mulligan ja Mitchelmore (2009) testi hindamaks arusaama numbrilistest ja ruumilistest struktuuridest, mis ennustas hilisemaid oskusi matemaatikas. Park ja Nunes (2001) õpetasid lastele korrutamist kahel erineval viisil ning leidsid, et korrutamine põhineb arvudevahelise suhte mõistmisel, mitte korduv liitmisel. KÕMM uuringus kasutatud uudsed representatsioonid tuginevad aga meetoditele, mida on uuritud täiskasvanute seas. Näiteks on visuaalne grupeerimine täpitabelis kooskõlas Ciccione ja Dehaene (2020) leiuga, et täppide loendamiseks kasutatakse peast korrutamist. Lisaks leidsid Park ja Brannon (2013), et hulkadega arvutamise treening kandub üle sümbolilisse matemaatikaoskusesse. Täiskasvanute jaoks pole korrutamine aga uus oskus. Matemaatiliste oskuste arengu paremaks mõistmiseks ja toetamiseks tuleb sekkumismeetodeid hinnata nende peal, kes nendest tulevikus kõige otsesemalt kasu saavad, ehk lastel. Uuringu tugevuseks on seega kasutatud valim – teise klassi õpilased, kes alles õpivad korrutama.

Kokkuvõttes näitasid tulemused, et oskuste harjutamine parandab vastamiseks kuluvat aega nii koolides kasutatava hariliku korrutamise kui ka uudsete visuaalsete ja ruumiliste esitusvormide puhul. Seega ei leidnud püstitatud hüpotees kinnitust. Uuringu eesmärk sai siiski täidetud − hindasin, kuidas mõjutab harjutamisaegne korrutamisülesannete vorm sümbolilise korrutamise sooritust. Nimelt on hariliku korrutamise ja uudsete vormide mõju korrutamisoskusele sarnane, kuid tulemus viitab ülekandeefekidele uute vormide ja sümbolilise korrutamise vahel. Eeldades, et tulemus kajastab KÕMM uuringu sekkumise mõju, on võimalik, et lapsed kasutavad uudsete vormidega harjutamisel sarnaseid meetodeid kui täiskasvanud. Läbi visuaalse gruppeerimise ja asukoha meenutamise kandub uudsete vormidega harjutamine üle sümbolilisse korrutamisesse. Lisaks on võimalik, et numbri- või täpitabeliga harjutamine omab lisaväärtust teiste matemaatiliste oskuste raames, mida tuleks tulevikus täpsemalt uurida. Tulemuslikkuse hindamisele seavad piirid meetodi kitsaskohad: uuringus osalemisega harjumine (ülesande mõistmine ja trükkimise kiirus) ning koolis käimise mõju määramatus. Uurimistöö panus valdkonda on uudsete vormide mõju hindamine algklassi laste peal, kes sekkumismeetoditest kõige otsesemalt kasu saavad.

Kasutatud kirjandus

Campbell, J. I. D., Dufour, K. D., & Chen, Y. (2015). Retrieval-induced forgetting of multiplication facts and identity rule. *Memory & Cognition, 43*(4), 672–680. https://doi.org/10.3758/s13421-014-0483-1

Ciccione, L., & Dehaene, S. (2020). Grouping Mechanisms in Numerosity Perception. *Open Mind*, *4*, 102–118. https://doi.org/10.1162/opmi_a_00037

Cowan, N. (2010). The Magical Mystery Four: How Is Working Memory Capacity Limited, and Why? *Current Directions in Psychological Science*, *19*(1), 51–57. https://doi.org/10.1177/0963721409359277

Feldman, A., & Berger, A. (2022). Development of the Mental Number Line Representation of Numbers 0–10 and Its Relationship to Mental Arithmetic. *Brain Sciences*, *12*(3), 335. https://doi.org/10.3390/brainsci12030335

Gebuis, T., Cohen Kadosh, R., & Gevers, W. (2016). Sensory-integration system rather than approximate number system underlies numerosity processing: A critical review. *Acta Psychologica, 171*, 17–35. https://doi.org/10.1016/j.actpsy.2016.09.003

Haridus- ja Noorteamet. (2024). *Aruanne 2023/2024. õppeaasta I kooliastme matemaatika tasemetöö tulemustest*. https://projektid.edu.ee/spaces/THO/pages/184849363

Juhe, L. (2024). KÕMM – korrutama õppimise mõõtmine ja muutmine: korrutamise mentaalne representatsioon 3.-4. klassis [Uurimistöö]. Tartu Ülikool.

Mainali, B. (2020). Representation in Teaching and Learning Mathematics. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, *9*(1), 1–21. https://doi.org/10.46328/ijemst.1111

Melby-Lervåg, M., Redick, T. S., & Hulme, C. (2016). Working Memory Training Does Not Improve Performance on Measures of Intelligence or Other Measures of “Far

Transfer": Evidence From a Meta-Analytic Review. *Perspectives on Psychological Science, 11*(4), 512–534. https://doi.org/10.1177/1745691616635612

Miller, G. A. (1956). The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information. *Psychological Review*, *63*(2), 81–97. https://doi.org/10.1037/h0043158

Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 33–49. https://doi.org/10.1007/BF03217544

Park, J., & Brannon, E. M. (2013). Training the Approximate Number System Improves Math Proficiency. *Psychological Science*, *24*(10), 2013–2019. https://doi.org/10.1177/0956797613482944

Park, J.-H., & Nunes, T. (2001). The development of the concept of multiplication. *Cognitive Development*, *16*(3), 763–773. https://doi.org/10.1016/S0885-2014(01)00058-2

Rapp, D. N., & Kurby, C. A. (2008). The 'Ins' and 'Outs' of Learning: Internal Representations and External Visualizations. J. K. Gilbert, M. Reiner, & M. Nakhleh (Toim), *Visualization: Theory and Practice in Science Education* (lk 29–52). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-5267-5_2

Sala, G., & Gobet, F. (2017). Experts' memory superiority for domain-specific random material generalizes across fields of expertise: A meta-analysis. *Memory & Cognition*, *45*(2), 183–193. https://doi.org/10.3758/s13421-016-0663-2

Ter Heege, H. (1985). The acquisition of basic multiplication skills. *Educational Studies in Mathematics*, *16*(4), 375–388. https://doi.org/10.1007/BF00417193

Twomey, C., & Kroneisen, M. (2021). The effectiveness of the loci method as a mnemonic device: Meta-analysis. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, *74*(8), 1317–1326. https://doi.org/10.1177/1747021821993457

Lisa A. Õpilase vanema informeerimise ja teadliku nõusoleku vorm.

Uuritava vanema või eestkostja informeerimise ja teadliku nõusoleku vorm

Uuringu nimetus: Korrutama õppimise mõõtmine ja muutmine (KÕMM)

Uuringu läbiviijad: Taavi Kivisik, MA; Jaan Aru, PhD.

Mõisted: Lapsevanem – lapsevanem või eestkostja, kellel on õigus lubada enda lapse või hoolealuse uurimist.

Laps – teie laps või hoolealune, kelle kohta on teil õigus anda omapoolne nõusolek tema osalemiseks uuringus.

Informatsioon lapsevanemale: Korrutamine on liitmise ja lahutamisega alus, millele laotakse lisaoskusi elu lõpuni. Palume, et annaksite loa teie lapse osalemiseks uuringus. Paneme korrutama õppimise viisid proovile ja leiame, milline on kiireim, püsivaim, lõbusaim. Mõni õpiviis võib matemaatika õppimist tulevikuski lihtsustada. Lapsele tähendab see kuni 16 korral veebipõhise kodutöö tegemist (umbes 10-15 minutit iga kord). Ajakulu on seega kuni 4 tundi. Üldiselt antakse kodutöö neljal päeval nädalas. Viimased kodutööd antakse teistest oluliselt hiljem, et mõõta õpitu püsivust. Lapsevanemalt palume kodutööde meeldetuletamist lapsele (meie saadame meeldetuletuse vanemale). Uuring on kooskõlastatud Tartu Ülikooli inimuuringute eetika komiteega. Andmete vastutav töötleja asutus on Tartu Ülikool. Uuringu jooksul IP-aadresse ei salvestata.

Uuritavate valik: Ootame uuringusse kõiki 1-4. klasside õpilasi. Osaleda saab, kui eelnevalt on olemas lapse ja lapsevanema nõusolek (digitaalselt või kokkuleppel erandkorras paberil allkirjastatud siinne dokument).

Uuringus osalemine: Uuringus osalemine on vabatahtlik ja tasustamata. Teil ja teie lapsel on õigus igal ajal osalemine katkestada ja nõuda oma lapse katseandmete kohest hävitamist. Osalejad lapsed kutsume e-posti teel 30- ja lapsevanemad 60-minutilisele veebipõhisele mälukoolitusele, mille viib läbi uurija Taavi Kivisik.

Andmete hoidmine: Uuringu käigus kogutud andmed säilitatakse kodeeritult. Lapse kohta kogume andmeid nagu tema vanus, sugu, klass, perioodi hinne matemaatikas ja korrutama õppimisega seotud andmeid (näiteks vastused korrutustehetele). Kõik andmed kodeeritakse selliselt, et katsega otseselt mitteseotud inimestel ei oleks võimalik kokku panna katses osalejate nimesid ja kogutud andmeid.

Lastelt ja lapsevanematelt kogutud isikuandmed säilitatakse kuni 2029. aasta detsembrini. Digiandmeid hoiame Tartu Ülikooli serverites Euroopa Liidus, paberandmeid lukuga kappides Tartu Ülikoolis. Uuringu abil luuakse uusi teadmisi Tartu Ülikooli teadlaste ja üliõpilaste poolt. Uuringust lähtuvaid tulemusi ning järeldusi võidakse avaldada rahvusvahelistes teadusajakirjades ja kasutada üliõpilastöödes. Katses kogutud isikustamata andmed plaanime teaduse hüvanguks teadusalastes andmebaasides (n www.osf.io) tähtajatult avalikustada. Uurijad tagavad anonüümsuse kustutades vajadusel osa andmeid enne andmete avaldamist.

Uuringu võimalikud ebamugavused: Kasutatavad tegevused nõuavad vaimset pingutust nagu tavalises matemaatika tunnis. Mõni küsimus on koolis õpitust ees ja raskem. On võimalus, et uuringus õpetatavad võtted ei ole paremad koolis kasutatavatest võtetest.

Kui Teil tekib küsimusi uuringus osaleja õiguste kohta, siis pöörduge palun Tartu Ülikooli inimuuringute eetikakomitee poole e-posti aadressil eetikakomitee@ut.ee või telefonil 737 6215. Kaebustega isikuandmete töötlemise osas palume pöörduda Andmekaitse Inspektsiooni poole telefonil 5620 2341.

Kinnitan enda allkirjaga paberil või digitaalselt, et 1) olen informeeritud ülalmainitud uuringust ja ma olen teadlik läbiviidava uurimistöö eesmärgist, uuringu metoodikast ja uuringuga seotud võimalikest ebamugavustest, 2) annan loa enda lapsel selles uuringus osalemiseks, 3) lapsele on uuringut temale arusaadaval tasemel tutvustatud alloleva laste informeerimise vormi abil, 4) laps kinnitas suusõnaliselt lapsevanemale, et on nõus uuringus osalema. Tean, et uuringute käigus tekkivate küsimuste ja võimalike ebamugavuste ning kõrvalekallete kohta saan informatsiooni uurijatelt:

- Taavi Kivisik[1] (vastutav) MA E-post: taavi.kivisik@gmail.com
- Jaan Aru[1] (vastutav) PhD E-post: jaan.aru@ut.ee

[1] Tartu Ülikool, Loodus- ja täppisteaduste valdkond, Arvutiteaduse instituut. Narva mnt 18, Tartu.

TÄIDAB LAPSEVANEM:

Lapsevanema täispikk nimi: .... **allkiri:** .... **Kuupäev** ....

NB! Digiallkirjastatud nõusolek laadida üles https://survey.ut.ee/komm-2025-kevad keskkonnas.

Erandkorras paberil allkirjastatud nõusoleku üleandmine leppida kokku aadressil taavi.kivisik@ut.ee .

Osalema lubatava(te) lapse (või laste) täispikk nimi: ....

TÄIDAB UURIJA: Nõusoleku võtja nimi: .... allkiri:............................. Kuupäev ....

Lisa B. Õpilase informeerimise ja teadliku nõusoleku vorm.

Uuritava informeerimise ja teadliku nõusoleku vorm

Uuringu nimi: Korrutama õppimise mõõtmine ja muutmine (KÕMM)

Uuringu läbiviijad: Taavi Kivisik ja Jaan Aru Tartu Ülikoolist.

Selgitus lapsele:
Sul on võimalus osaleda uuringus, kui käid 1.-4. klassis. Palume sinu abi, et teha korrutama õppimist ja harjutamist lihtsamaks.

Mida sina uuringust saad?

1. Õpid paremini korrutama
2. Teed korrutama õppimist endale lihtsamaks
3. Teed korrutama õppimist teistele õpilastele lihtsamaks
4. Soovi korral räägime peale uuringut, kuidas asju kergemini meelde jätta (30 minutit)

Kuidas saad meid aidata?

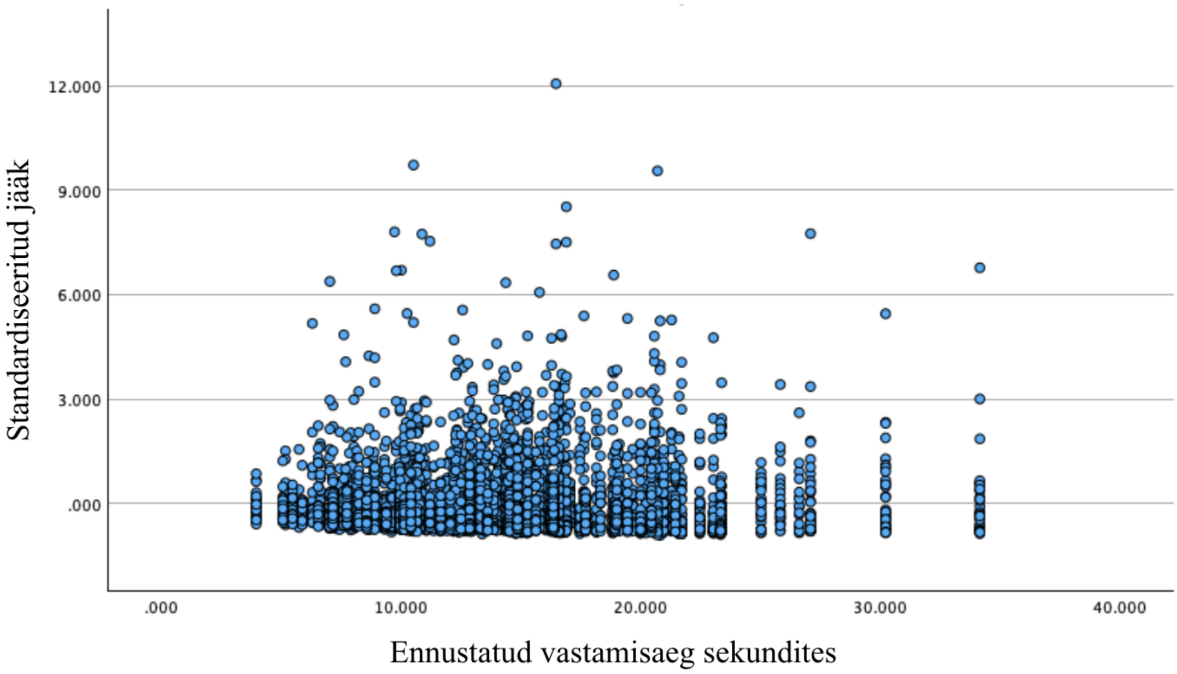
1. Palume sul teha kuni 16 kodutööd
2. Kodutöödes õpetame sulle korrutamist, mida kasutad ka 12. klassis
3. Iga kodutöö kestab umbes vahetunni jagu ehk 10-15 minutit
4. Kodutööd saad kodus teha mobiilis, tahvelarvutis või arvutis
5. Harjutused nõuavad pingutust nagu tavalises matemaatika tunnis
6. Sinu vastuseid näevad ainult uurijad, sinu õpetajad vastuseid ei näe
7. Selle eest sulle hinnet ei panda
8. Osalemiseks on vaja ka ema või isa luba

Kui sind uuringu juures midagi rõõmustab või tekib hoopis mõni mure, siis räägi sellest enda vanematele või ka uurijatele. Vanemate abiga leiame sinu murele lahenduse.

Võid igal ajal osalemise lõpetada, ka enne uuringu lõppu. Samuti võid paluda enda vastuste kohest kustutamist.

Kui oled nõus uuringus osalema, siis ütle seda oma emale või isale.

Lisa C. Hajuvusdiagramm.



Joonis 3. Hajuvusdiagramm mudeli ennustatud vastamisaegadest ja standardiseeritud jääkidest.

Käesolevaga kinnitan, et olen korrektselt viidanud kõigile oma töös kasutatud teiste autorite poolt loodud kirjalikele töödele, lausetele, mõtetele, ideedele või andmetele.
Olen nõus oma töö avaldamisega Tartu Ülikooli digitaalarhiivis.
Ella Marie Tõevere