

TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKA TEADUSKOND
Matemaatika instituut

Alina Ganina

MITTEKORREKTSETE ÜLESANNETE ISEREGULARISEERIMISEST
VÄHIMA VEA PROJEKTSIOONIMEETODIGA

Magistritöö

Juhendaja: Uno Hämarik

Autor:..... ” ” 2009

Juhendaja: ” ” 2009

Lubatud kaitsmisele

Matemaatika instituudi juhataja:..... ” ” 2009

Tartu 2009

Sisukord

| | |
|------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Sissejuhatus | 4 |
| 1 Mittekorrektse ülesanded | 6 |
| 1.1 Mittekorrektse ülesande mõiste | 6 |
| 1.2 Ligikaudse vabaliikmega ülesanne | 7 |
| 1.3 Mittekorrektsete ülesannete klassifitseerimine | 7 |
| 1.4 Regularisaatori mõiste | 8 |
| 2 Projektsioonimeetodid | 10 |
| 2.1 Projektsioonimeetodite kirjeldus | 10 |
| 2.2 Projekteeritud võrrandite lahenduvus ja stabiilsus | 12 |
| 2.3 Projektsioonimeetodite koonduvus täpsete andmete korral | 14 |
| 2.4 Veahinnangud ligikaudsete andmete korral | 15 |
| 2.5 Parameetri aprioorne valik | 17 |
| 2.6 Parameetri aposterioorne valik hälbeprintsibi abil | 17 |
| 2.7 Täiendusi koonduvusteoreemile | 20 |
| 2.8 Vähimruutude meetod | 23 |
| 2.9 Galjorkini meetod | 23 |
| 3 Vähima vea meetod | 24 |
| 3.1 Meetodi kirjeldus | 24 |
| 3.2 Meetodi koonduvus täpsete andmete korral | 25 |
| 3.3 Veahinnangud ligikaudsete andmete korral | 26 |
| 3.4 Parameetri aprioorne valik | 27 |
| 3.5 Parameetri aposterioorne valik hälbeprintsibi abil | 27 |
| 3.6 Parameetri valik tasakaaluprintsiibi alusel | 28 |
| 3.7 Parameetri valik Sobolevi ruumis | 31 |
| 4 Monotoonse vea reegel parameetri valikuks vähima vea meetodis | 34 |
| 4.1 Monotoonse vea reegli kirjeldus | 34 |
| 4.2 Vea monotoonsuse tingimus | 34 |
| 4.3 Parameetri n valik monotoonse vea reegli abil | 36 |

| | | |
|----------|-----------------------------------------------------------|-----------|
| 4.4 | Monotoonse vea reegli võrdlus hälbeprintsibiga | 36 |
| 4.5 | Monotoonse vea reegli regulariseerimisomadused | 37 |
| 5 | Numbrilised tulemused | 39 |
| 5.1 | Mudelülesande kirjeldus | 39 |
| 5.2 | Ülesande diskretiseerimine vähima vea meetodiga | 39 |
| 5.3 | Projektsiooniruumi dimensiooni valik | 41 |
| 5.4 | Arvutusvalemid vigade ja hälvete jaoks | 41 |
| 5.5 | Programmi üldine iseloomustus | 43 |
| 5.6 | Näiteülesannete numbrilised tulemused | 44 |
| 5.6.1 | Ülesanne 1 | 46 |
| 5.6.2 | Ülesanne 2 | 47 |
| 5.6.3 | Ülesanne 3 | 48 |
| 5.6.4 | Ülesanne 4 | 49 |
| 5.6.5 | Ülesanne 5 | 50 |
| 5.6.6 | Ülesanne 6 | 51 |
| 5.6.7 | Ülesanne 7 | 52 |
| 5.7 | Numbriliste tulemuste interpretatsioon | 53 |
| | Summary | 54 |
| | Kasutatud kirjandus | 56 |
| | Lisad | 58 |

Sissejuhatus

Ülesande seade korrektsuse mõiste on üks keskseid mõisteid matemaatilistes mudelites, mida kasutatakse füüsikas, juhtimisteoorias jne. Mittekorrektsete ülesannete (vt.[8,12,14,16]) puhul põhjustavad kuitahes väiksed vead lähteandmetes kuitahes suured vead ülesannete lahendites. See tähendab, et selliste ülesannete lahendamiseks on vaja spetsiaalseid regulariseerimismeetodeid, mille lähislahendid peavad olema stabiilsed lähteandmete ebatäpsuse suhtes. Nimelt valitakse regulariseerimismeetodites regularisatsiooniparameeter sõltuvalt lähteandmete veatasemest ja selle sobiv valik garanteerib lähislahendi koonduvuse täpseks lahendiks, kui veatase läheb nullile.

Regulariseerimismeetodid (näiteks Tihhonovi meetod või iteratsioonimeetod) mittekorrektsete ülesannete lahendamiseks on tavaliselt formuleeritud lõpmatumõõtmelistes ruumides ning arvutil rakendamiseks tuleb nad diskretiseerida. Nagu teada, on ülesanne lõplikumõõtmelistes ruumides täpsete algandmete korral alati korrektne, kui on garanteeritud selle ülesande ühene lahenduvus. See tähendab, et mittekorrektset ülesannet võib klassikaliste regulariseerimismeetodite asemel regulariseerida diskretisatsioonimeetodite abil. Seejuures regulariseerimisparameetriks on diskretisatsioonisamm, mis valitakse sõltuvalt veatasemest. Sellist regulariseerimist nimetatakse iseregulariseerimiseks.

Mittekorrektset ülesannet diskretiseeritakse sageli projektsioonimeetodite [9] abil. Käesoleva töö teises peatükis vaadeldakse töödele [3,4,6,15] tuginedes mittekorrektsete ülesannete lahendamist projektsioonimeetoditega, andes koonduvusetingimused täpsete andmete korral ning tingimused iseregulariseerimiseks, kui regulariseerimisparameeter valitakse apriorselt või hälbeprintsipi järgi. Lisaks on eraldi välja toodud koonduvusteoreemid vähimruutude ja Galjorkini projektsioonimeetodite jaoks. Kolmandas peatükis vaadeldakse vähima vea meetodit, mis erinevalt teistest projektsioonimeetoditest koondub täpsete andmete korral üsna avaratel tingimustel, kui lähteandmed on täpsed. Ligikaudsete andmete korral on vaadeldud iseregulariseerimist projektsiooniruumi dimensiooni valikul hälbeprintsipi abil (see nõuab rangeid lisaeldusi, vt. [3,4,15]) ning tasakaaluprintsiipi abil (see nõuab suurt arvutustöö mahtu, vt. [1]).

Hiljuti on mitmetes regulariseerimismeetodites regulariseerimisparameetri

valikuks edukalt kasutatud monotoonse vea reeglit (vt. [2,4,13]). Käesoleva töö olulised tulemused on saadud neljandas peatükis (vaata [6]), kus on uuritud vähima vea meetodis võimalusi monotoonse vea reegli tuletamiseks projektsiooniruumi mõõtme valikuks. Eeldatakse, et antud on selline projektsiooniruumide jada, kus iga järgnev projektsiooniruum sisaldab eelmist. Siis näidatakse, et täpsete andmete korral vastavate lähislahendite viga väheneb projektsiooniruumi dimensiooni suurenemisel monotoonselt ja koondub nulliks. Ligikaudsete andmete juhul on tuletatud lähislahendite vigade monotoonselt vähenemist garanteeriv tingimus, mis võimaldab formuleerida monotoonse vea reegli projektsiooniruumi mõõtme valikuks. Selle peatüki lõpus on tõestatud, et valides diskretiseerimistaseme monotoonse vea järgi, saame vähima vea meetodi vaadelda regulariseerimismeetodina.

Töö viiendas peatükis tuuakse numbriliste eksperimentide tulemused mudelülesannete lahendamisel Mathcadi keskkonnas. Graafikute ja tabelitena on esitatud arvulised tulemused, mis kinnitavad järgmist teoreetilist tulemust: kõigi vetasemete δ korral annab monotoonse vea reegel sellise indeksi n_{ME} , et $n \leq n_{ME}$ korral vead $\|u_n - u_*\|$ kahanevad monotoonselt, s.t.

$$\|u_{n_{ME}} - u_*\| \leq \|u_{n_{ME}-1} - u_*\| \leq \dots \leq \|u_{n_1} - u_*\|.$$

Lisades on esitatud Mathcad programmide tekstid.

1 Mittekorrektse ülesanded

1.1 Mittekorrektse ülesande mõiste

Ülesande seade korrektsuse mõiste võttis eelmise sajandi algul kasutusele prantsuse matemaatik J.Hadamard. Mittekorrektsete ülesannete teooria esimesed fundamentaalsed tööd ilmusid siiski alles 50 aastat hiljem. Põhitulemuste autorid on A.N.Tihhonov, V.K.Ivanov ja M.M.Lavrentjev.

Toome sisse korrektselt seotud ülesande definitsiooni. Olgu H ja F Banachi ruumid, operaator A tegutsegu ruumist H ruumi F . Vaatleme võrrandit

$$Au = f, \tag{1}$$

kus vabaliige $f \in F$ on antud ning lahend $u \in H$ on otsitav.

Definitsioon 1.1. *Ülesanne (1) on korrektselt seotud ruumide paaril H ja F ehk korrektne Hadamard'i mõttes, kui on täidetud tingimused:*

1. *ülesandel leidub lahend $u \in H$ iga vabaliikme $f \in F$ korral;*
2. *lahend on ühene;*
3. *lahend sõltub pidevalt võrrandi (1) vabaliikmest: s.t. vabaliikmete koondumisest $f_n \rightarrow f$ meetrika F mõttes järeldub vastavate lahendite koondumine $u_n \rightarrow u$ meetrika H mõttes.*

Kui vähemalt üks neist tingimustest ei ole täidetud, siis öeldakse, et ülesanne (1) on mittekorrektse seotud Hadamard'i mõttes. Teiste sõnadega, kui ülesandes (1) operaator $A : H \rightarrow F$ on pidev ja lineaarne ning sellel ülesandel eksisteerib ühene lahend $u \in H$ iga vabaliikme $f \in F$ korral, siis ülesanne on korrektne. Sellel juhul operaatoril A leidub pidev lineaarne pöördoperaator $A^{-1} : F \rightarrow H$ ning hinnangust

$$\|u_n - u\|_H \leq \|A^{-1}\| \|f_n - f\|_F$$

järeldub lahendi u pidev sõltuvus vabaliikmest f . Tähistused $\|\cdot\|_H$ ja $\|\cdot\|_F$ on vastavad normid Banachi ruumides H ja F .

1.2 Ligikaudse vabaliikmega ülesanne

Olgu võrrandi (1) vabaliige f operaatori A väärtuste piirkonnast $\mathbf{R}(A)$. Tavaliselt me ei tea ülesande (1) paremat poolt päris täpselt, s.t. f asemel on teada tema lähend $f_\delta \in F$, $\|f_\delta - f\| \leq \delta$, kus δ on antud positiivne arv. Edaspidi vaatleme järgmist võrrandit

$$Au = f_\delta. \quad (2)$$

Võrrand (1) on lahenduv eelduse $f \in \mathbf{R}(A)$ põhjal. Lähisvõrrand ei pruugi olla lahenduvaks, kuna tingimus $f_\delta \in \mathbf{R}(A)$ ei ole garanteeritud. Kui aga see tingimus on täidetud, siis võrrandi (2) lahend ei pruugi sobida võrrandi (1) lähislahendiks, kuna vabaliikme f kuitahes väike häiritus võib tuua kaasa võrrandi (2) lahendi kuitahes suure häirituse.

Näiteks, vaatame esimest liiki integraalvõrrandit (vt. [12])

$$Au(t) \equiv \int_0^t u(s)ds = f(t), \quad t \in [0, 1],$$

kus $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ on Volterra operaator. Olgu täpse vabaliikme asemel teada tema lähend $f_\delta(t) = f(t) + \delta \sin(wt)$, kus w on suvaline reaalarv. Vaadeldavat võrrandit diferentseerides saame $u_\delta = f'_\delta(t)$. Siis võime meetrika C normidest $\|f_\delta - f\|_C = |\delta|$ ja $\|u_\delta - u\|_C = |\delta w|$ järeldada, et vabaliikme väikestele vigadele võivad vastata lahendi kuitahes suured vead piisavalt suurte väärtuste $|w|$ korral.

Kui võrrandi (1) vabaliige on antud küllalt väikse täpsusega, siis saame leida selle võrrandi kuitahes täpse lähislahendi. Selleks tuleb kasutada spetsiaalseid mittekorrektsete ülesannete lahendusmeetodeid.

1.3 Mittekorrektsete ülesannete klassifitseerimine

Olgu antud Hilberti ruum H ning operaator kompaktne enesekaasne $A \in L(H, H)$, $A = A^*$. Sel juhul leidub omaväärtuste jada $\{\lambda_k\}$, nii et $\lambda_k \in [-\|A\|, \|A\|]$ ja $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$ (vt. [10]). Valides operaatori A omaelemente nii, et $(u_k, u_j) = \sigma_{kj}$, kus

$$\sigma_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{kui } k = j \\ 0, & \text{kui } k \neq j \end{cases}$$

saame esitada iga elemendi ruumist H kujul $u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, u_k) u_k$.

Tähistame

$$\mu = \sup\{\nu : \lambda_k = O(k^{-\nu})\}. \quad (3)$$

Siis ülesannet (1) võib klassifitseerida järgmiselt:

1. kui $0 < \mu \leq 1$, siis nimetatakse ülesannet nõrgalt mittekorrektseks;
2. kui $1 < \mu < \infty$, siis nimetatakse ülesannet mõõdukalt mittekorrektseks;
3. kui $\mu = \infty$, siis nimetatakse ülesannet tugevalt mittekorrektseks.

1.4 Regularisaatori mõiste

Mittekorrektsete ülesannete lahendamisel kasutatakse regulariseerimismeetodeid, mille puhul konstrueeritakse ülesande (1) regularisaator ja selle abil leitakse ülesande lähislahend.

Tähistame sümboliga $A^{-1}f$ võrrandi (1) kõigi lahendite hulka antud $f \in \mathbf{R}(A)$ korral ja toome sisse regularisaatori mõiste.

Definitsioon 1.2. Ülesande (1) regularisaatoriks nimetatakse sellist parameetrist δ sõltuvat operaatorite

$$R_\delta : F \rightarrow H \quad (0 < \delta \leq \delta_0),$$

üheparameetrilist peret, kus iga $f \in \mathbf{R}(A)$ korral protsessis $\delta \rightarrow 0$ kehtib seos

$$\sup_{\substack{f_\delta \in F, \\ \|f_\delta - f\| \leq \delta}} \inf_{u \in A^{-1}f} \|R_\delta f_\delta - u\| \rightarrow 0.$$

Regularisaatorit nimetatakse pidevaks (linearseks), kui iga operaator R_δ ($0 < \delta \leq \delta_0$) on pidev (lineaarne). Ülesannet (1) nimetatakse regulariseeruvaks (pidevalt regulariseeruvaks, lineaarselt regulariseeruvaks), kui tema jaoks leidub vähemalt üks regularisaator (pidev regularisaator, lineaarne regularisaator).

Regularisaator lubab suvalise $f \in \mathbf{R}(A)$ korral, mis on antud ligikaudselt täpsusega δ ($0 < \delta \leq \delta_0$), leida lähislahendi, mis koondub võrrandi (1) lahendiks protsessis

$\delta \rightarrow 0$. Tavaliselt praktilistes ülesannetes piirprotsessi $\delta \rightarrow 0$ teostada ei ole võimalik. Vaatamata sellele, paljudes rakendustes on $R_\delta f_\delta$ ($0 < \delta \leq \delta_0$) küllalt hea lähend täpsele lahendile.

Kokkuvõttes märgime, et regularisatsioonimeetod seisneb järgnevas:

1. regularisaatori leidmine;
2. regularisatsiooniparameetri valimine, kasutades antud ülesande lisainformatsiooni (näiteks, regularisatsiooniparameeter võib sõltuda võrrandi (1) vabaliikme f veatasemest δ).

Regulariseerimismeetodite realiseerimiseks arvutil on vaja ülesanne diskretiseerida. Sobiv diskretiseerimine võimaldab ülesannet täiendavalt regulariseerida, aga mõningatel juhtudel võib klassikalistest regularisatsioonimeetoditest üldse loobuda. Koondugu diskretisatsioonimeetod täpsete andmete korral. Siis võib ligikaudsete andmete korral seda meetodit vaadelda regularisatsioonimeetodina, kui regularisatsiooniparameetrina valida diskretisatsioonisamm sõltuvalt veatasemest δ . Sellist diskretiseerimismeetodiga regulariseerimist nimetatakse iseregulariseerimiseks. Näiteks võib iseregulariseerimine toimuda ülesande diskretiseerimisel projektsioonimeetoditega.

2 Projektsioonimeetodid

2.1 Projektsioonimeetodite kirjeldus

Olgu H ja F Hilberti ruumid. Vaatleme võrrandit (1), milles A on pidev lineaarne operaator, mis tegutseb ruumist H ruumi F , s.t. $A \in L(H, F)$. Olgu vabaliikme $f \in \mathbf{R}(A)$ asemel on antud selline element $f_\delta \in F$, et $\|f_\delta - f\| \leq \delta$, kus δ on positiivne arv. Eeldame, et operaatori A väärtuste piirkond $\mathbf{R}(A)$ ei ole kinnine.

Olgu lõplikumõõtmelised alamruumid $H_n \subset H$ ja $F_n \subset F$ ($n \in N$) valitud nii, et $\dim H_n = \dim F_n$. Projektsioonimeetod võrrandi (1) lahendamiseks seisneb järgnevas. Selle võrrandi lahendi u_* lähislahendiks valitakse element $u_n \in H_n$, mis rahuldab tingimusi

$$u_n \in H_n, (Au_n - f_\delta, v_n) = 0 \quad (\forall v_n \in F_n). \quad (4)$$

Tingimused (4) on samaväärsed võrrandiga

$$Q_n A P_n u_n = Q_n f_\delta, \quad (5)$$

kus P_n ja Q_n on ortoprojektorid ruumidest H ja F vastavatele alamruumidele H_n ja F_n ($P_n H = H_n$, $Q_n F = F_n$). Järgnevas vaatleme konkreetsemaid projektsioonimeetodeid.

Vähimruutude meetodi korral lähislahendit $u_n \in H_n$ otsime tingimusest

$$u_n \in H_n, (Au_n - f_\delta, Av_n) = 0 \quad (\forall v_n \in H_n). \quad (6)$$

Seega antakse selles projektsioonimeetodis ette alamruumid $H_n \subset H$ ning alamruumid F_n määratakse seosega $F_n = AH_n$. Olgu antud ruumi H_n baas $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. Siis lähislahend u_n avaldub kujul $u_n = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$. Projekteeritud võrrandi tingimust (6) saab kirjutada kujul

$$\left(A \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i - f_\delta, A\varphi_j \right) = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

ehk

$$\sum_{i=1}^n c_i (A\varphi_i, A\varphi_j) = (f_\delta, A\varphi_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

See on sümmeetriline lineaarne algebraalne võrrandisüsteem kordajate c_i määramiseks.

Vähima vea meetodi korral valitakse alamruumid $F_n \subset F$ ning alamruumid H_n määratakse seosega $H_n = A^*F_n$. Lähislahendit $u_n \in A^*F_n$ otsime tingimusest

$$u_n \in A^*F_n, (Au_n - f_\delta, z_n) = 0 \quad (\forall z_n \in F_n). \quad (7)$$

Kui valida ruumi F_n baasiks $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$, siis lähislahend on kujul $u_n = \sum_{i=1}^n c_i A^* \psi_i$ ning projekteerimise tingimus (7) avaldub kujul

$$\left(A \sum_{i=1}^n c_i A^* \psi_i - f_\delta, \psi_j \right) = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

ehk

$$\sum_{i=1}^n c_i (A^* \psi_i, A^* \psi_j) = (f_\delta, \psi_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

See on sümmeetriline lineaarne algebraalne võrrandisüsteem kordajate c_i määramiseks.

Galjorkini meetodist räägitakse, kui ruumid langevad kokku ehk $H = F$, $H_n = F_n$ ning $A = A^* > 0$. Lähislahendit $u_n \in H_n$ otsime tingimusest

$$u_n \in H_n, (Au_n - f_\delta, v_n) = 0 \quad (\forall v_n \in H_n). \quad (8)$$

Olgu projekteeritud ruumide baasiks $\varphi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. Lähislahendit otsime kujul $u_n = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$, mis rahuldab tingimust (8)

$$\left(A \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i - f_\delta, \varphi_j \right) = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

ehk

$$\sum_{i=1}^n (A \varphi_i, \varphi_j) = (f_\delta, \varphi_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

See on sümmeetriline lineaarne algebraalne võrrandisüsteem kordajate c_i määramiseks.

Järgmises punktis vaatleme, mis tingimustel projekteeritud võrrandid on lahenduvad.

2.2 Projekteeritud võrrandite lahenduvus ja stabiilsus

Olgu $\mathbf{N}(A)$ lineaarse operaatori A nullruum. Tähistame $A_n = Q_n A P_n \in L(H_n, F_n)$.

Lemma 2.1. *Olgu $\mathbf{N}(A) \cap H_n = \{0\}$ ning*

$$\tau_n \equiv \inf_{v_n \in H_n} \frac{\|Q_n A v_n\|}{\|A v_n\|} > 0.$$

Siis $A_n \in L(H_n, F_n)$ on pööratav ja $\chi_n \leq \|A_n^{-1}\| \leq \chi_n / \tau_n$, kus

$$\chi_n = \sup_{v_n \in H_n} \frac{\|v_n\|}{\|A v_n\|}. \quad (9)$$

Tõestus. Lemma esimese tingimuse tõttu operaator A_n on injektiivne. Kuna operaatori A_n korral $\mathbf{R}(A_n) = F_n$, siis ta on sürjektiivne. See aga tähendab, et operaatoril A_n eksisteerib pöördoperaator $A_n^{-1} : F_n \rightarrow H_n$. Näitame, et kehtib lemma teine väide. Iga $w_n \in H_n$ korral

$$\begin{aligned} \|A_n w_n\| &= \frac{\|Q_n A P_n w_n\|}{\|A w_n\|} \|A w_n\| \geq \inf_{v_n \in H_n} \frac{\|Q_n A v_n\|}{\|A v_n\|} \|A w_n\| = \\ &= \tau_n \|A w_n\| = \tau_n \frac{\|A w_n\|}{\|w_n\|} \|w_n\| \geq \tau_n \inf_{v_n \in H_n} \frac{\|A v_n\|}{\|v_n\|} \|w_n\| \geq \\ &\geq \tau_n \left(\sup_{v_n \in H_n} \frac{\|v_n\|}{\|A v_n\|} \right)^{-1} \|w_n\| = \tau_n \chi_n^{-1} \|w_n\|. \end{aligned}$$

Olgu, et elemendi $v_n \in H_n$ korral avaldises (9) saavutatakse maksimum. Siis

$$\|A_n v_n\| \leq \|Q_n\| \|A v_n\| \leq \frac{\|A v_n\|}{\|v_n\|} \|v_n\| = \chi_n^{-1} \|v_n\|.$$

Võrratustest

$$\|A_n^{-1}(A_n v_n)\| \geq \chi_n \|A_n v_n\|$$

ning

$$\|A_n^{-1}(A_n w_n)\| \leq \tau_n^{-1} \chi_n \|A_n w_n\|$$

järeldub, et

$$\chi_n \leq \|A_n^{-1}\| \leq \chi_n / \tau_n.$$

Lemma on tõestatud.

Lemma 2.2. Olgu $N(A^*) \cap F_n = 0$ ning

$$\tau_n^* \equiv \inf_{z_n \in F_n} \frac{\|P_n A^* z_n\|}{\|A^* z_n\|} > 0.$$

Siis $A_n \in L(H_n, F_n)$ on pööratav ja

$$\chi_n^* \leq \|A_n^{-1}\| \leq \chi_n^*/\tau_n^*, \quad \|A_n^{-1}Q_n A\| = 1/\tau_n^*, \quad \|A_n^{-1}Q_n A(1 - P_n)\| = \sigma_n^*,$$

kus

$$\sigma_n^* = \sup_{z_n \in F_n} \frac{\|(I - P_n)A^* z_n\|}{\|P_n A^* z_n\|}, \quad (10)$$

$$\chi_n^* = \sup_{z_n \in F_n} \frac{\|z_n\|}{\|A^* z_n\|}, \quad (11)$$

$$1/\tau_n^* = (1 + (\sigma_n^*)^2)^{1/2}. \quad (12)$$

Tõestus. Operaatori A_n kaasoperaatoriks on $A_n^* = P_n A^* Q_n \in L(F_n, H_n)$. Analoogiliselt lemma 2.1 tõestusega saab näidata, et operaatoril A_n^* leidub pöördoperaator. Võrdusest $(A_n^*)^{-1} = (A_n^{-1})^* \in L(H_n, F_n)$ järelneb, et operaator A_n on pööratav. Analoogiliselt eelmise lemma tõestusega näidatakse, et operaatori $(A_n^{-1})^*$ jaoks kehtib hinnang $\chi_n^* \leq \|(A_n^*)^{-1}\| \leq \chi_n^*/\tau_n^*$. Kuna $\|(A_n^*)^{-1}\| = \|(A_n^{-1})^*\| = \|A_n^{-1}\|$, siis esimene väide on tõestatud.

Järgneva vaatleme enesekaasset operaatorit $A_n^{-1}Q_n A(A_n^{-1}Q_n A)^* \in L(H_n, H_n)$. Olgu arv λ_n selle operaatori suurim omaväärtus ning v_n omaväärtusele λ_n vastav omavektor, s.t. $A_n^{-1}Q_n A(A_n^{-1}Q_n A)^* v_n = \lambda_n v_n$, $v_n \in H_n$. Kaasoperaatori omadusest tuleb, et $\|A_n^{-1}Q_n A(A_n^{-1}Q_n A)^*\| = \|A_n^{-1}Q_n A\|^2 = \lambda_n$ ehk $\|A_n^{-1}Q_n A\| = \lambda_n^{1/2}$. Tähistades $w_n = (A_n^*)^{-1}v_n \in F_n$, saame

$$Q_n A A^* Q_n w_n = \lambda_n A_n A_n^* w_n.$$

Suurima omaväärtuse jaoks kehtib

$$\lambda_n = \sup_{z_n \in F_n} \frac{(Q_n A A^* Q_n z_n, z_n)}{(A_n A_n^* z_n, z_n)} = \sup_{z_n \in F_n} \frac{(A^* z_n, A^* z_n)}{(P_n A^* z_n, P_n A^* z_n)} = \sup_{z_n \in F_n} \frac{\|A^* z_n\|^2}{\|P_n A^* z_n\|^2} = \frac{1}{(\tau_n^*)^2}$$

ehk võrdus $\|A_n^{-1}Q_n A\| = 1/\tau_n^*$ on tõestatud.

Võrdus $\|A_n^{-1}Q_n A(1 - P_n)\| = \sigma_n^*$ tõestatakse analoogiliselt.

Näitame, et kehtib (12).

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\tau_n^*}\right)^2 &= \sup_{z_n \in F_n} \frac{\|A^*z_n\|^2}{\|P_n A^*z_n\|^2} = \sup_{z_n \in F_n} \frac{\|P_n A^*z_n\|^2 + \|(I - P_n)A^*z_n\|^2}{\|P_n A^*z_n\|^2} = \\ &= \sup_{z_n \in F_n} \left(1 + \frac{\|(I - P_n)A^*z_n\|^2}{\|P_n A^*z_n\|^2}\right) = 1 + (\sigma_n^*)^2. \end{aligned}$$

Lemma on tõestatud.

Eeltoodud lemmad (2.1) ja (2.2) on abitulemused projektsioonimeetodite koonduvusteoreemide jaoks.

2.3 Projektsioonimeetodite koonduvus täpsete andmete korral

Kui projektsioonimeetod koondub täpsete andmete korral protsessis $n \rightarrow \infty$, siis sel juhul on võimalik mittekorrektsete ülesannete iseregulariseerimine.

Teoreem 2.1. *Olgu $A \in L(H, F)$, $f \in \mathbf{R}(A)$,*

$$\|u - P_n u\| \rightarrow 0, \text{ kui } n \rightarrow \infty \ (\forall u \in H), \quad (13)$$

$$\mathbf{N}(A^*) \cap F_n = 0 \ (n \geq n_0), \quad (14)$$

$$\|P_n A^* z_n\| \geq \tau^* \|A^* z_n\| \ (\forall z_n \in F_n, n \geq n_0), \ \tau^* = \text{const} > 0. \quad (15)$$

Siis võrrandil (1) leidub parajasti üks lahend $u_ \in H$ ning projekteeritud võrrandil $Q_n A u_n = Q_n f$ leidub parajasti üks lahend $u_n \in H_n$, kusjuures $u_n \rightarrow u_*$ protsessis $n \rightarrow \infty$.*

Tõestus. Teoreemi eeldustest (14), (15) ja lemmast 2.2 järeldub, et võrrand $Q_n A u_n = Q_n f$ on üheselt lahenduv. Kuna $f \in \mathbf{R}(A)$, siis võrrand (1) on lahenduv. Näitame, et lahend on ühene. Selleks on vaja tõestada, et $\mathbf{N}(A) = 0$. Oletame vastuväiteliselt, et leidub $u_0 \neq 0$, nii et $A u_0 = 0$. Võrrandil $A_n^* z_n = P_n u_0$ ($n \geq n_0$) leidub tingimuse (14) tõttu ühene lahend $z_n \in F_n$, kusjuures $P_n A^* z_n = P_n u_0 \rightarrow u_0$ protsessis $n \rightarrow \infty$. Eelduse (15) tõttu on jada $A^* z_n$ tõkestatud

$$\|A^* z_n\| \leq (\tau^*)^{-1} \|P_n A^* z_n\| \leq \text{const}.$$

Seega jadast A^*z_n saab eraldada nõrgalt koonduva jada. Olgu $A^*z_n \rightarrow v$. Teoreemi eelduse (13) põhjal $P_n A^*z_n \rightarrow v$ ehk $v = u_0$. See aga tähendab, et $A^*z_n \rightarrow u_0$, $(A^*z_n, u_0) \rightarrow \|u_0\|^2$. See on vastuolus seostega $(A^*z_n, u_0) = (z_n, Au_0) = 0$ ja $u_0 \neq 0$. Tõestame, et projekteeritud võrrandi lahend koondub võrrandi (1) lahendiks.

Kasutades võrdust $u_n = A_n^{-1}Q_n A u_*$ ja lemmat 2.2 saame hinnata

$$\begin{aligned} \|u_n - u_*\| &= \|u_n - P_n u_*\| + \|P_n u_* - u_*\| = \|A_n^{-1}Q_n A u_* - P_n u_*\| + \|P_n u_* - u_*\| = \\ &= \|A_n^{-1}Q_n A(I - P_n)(I - P_n)u_*\| + \|u_* - P_n u_*\| \leq \\ &\leq \|A_n^{-1}Q_n A(I - P_n)\| \|u_* - P_n u_*\| + \|u_* - P_n u_*\| = \\ &= (1 + \sigma_n^*) \|u_* - P_n u_*\| = \left(1 + \frac{(1 - (\tau_n^*)^2)^{1/2}}{\tau_n^*}\right) \|u_* - P_n u_*\|. \end{aligned}$$

Teoreemi eeldusest (15) järelneb võrratus $\tau_n^* \geq \tau^*$. Arvestades teoreemi eeldust (13), saame koonduvuse

$$\|u_n - u_*\| \leq \left(1 + \frac{(1 - (\tau^*)^2)^{1/2}}{\tau^*}\right) \|u_* - P_n u_*\| \rightarrow 0, \quad \text{kui } n \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Teoreem on tõestatud.

Selle teoreemi tingimused on piisavad ja tarvilikud lähilahendi u_n koondumiseks võrrandi (1) lahendiks u_* protsessis $n \rightarrow \infty$ iga $f \in \mathbf{R}(A)$ korral.

2.4 Veahinnangud ligikaudsete andmete korral

Vaatleme nüüd juhtu, kui võrrandi (1) parem pool f on antud ligikaudselt veaga δ ehk $\|f_\delta - f\| \leq \delta$, $f_\delta \in F$. Kui teoreemi (2.1) tingimused on täidetud, siis võrrandi (5) lahend u_n koondub võrrandi (1) lahendiks u_* kiirusega

$$\|u_n - u_*\| \leq \frac{\chi_n^*}{\tau^*} \delta + \left(1 + \frac{(1 - \tau^{*2})^{1/2}}{\tau^*}\right) \|u_* - P_n u_*\|. \quad (17)$$

Seda hinnangut näidatakse analoogiliselt teoreemi (2) tõestusega. Kasutades võrdust $A_n(u_n - P_n u_*) = Q_n(f_\delta - f) + Q_n A(u_* - P_n u_*)$, saame

$$\begin{aligned} \|u_n - u_*\| &= \|u_n - P_n u_*\| + \|P_n u_* - u_*\| = \\ &= \|A_n^{-1}Q_n(f_\delta - f) + A_n^{-1}Q_n A(u_* - P_n u_*)\| + \|P_n u_* - u_*\| \leq \\ &\leq \|A_n^{-1}\| \delta + (1 + \|A_n^{-1}Q_n A(I - P_n)\|) \|u_* - P_n u_*\| \leq \\ &\leq \frac{\chi_n^*}{\tau_n^*} \delta + (1 + \sigma_n^*) \|u_* - P_n u_*\| \leq \frac{\chi_n^*}{\tau^*} \delta + \left(1 + \frac{(1 - (\tau^*)^2)^{1/2}}{\tau^*}\right) \|u_* - P_n u_*\|. \end{aligned}$$

Olgu antud ruumide baasid $H_n = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ ja $F_n = \text{span}\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$. Siis projekteeritud võrrandi (5) lähislahendi otsitakse kujul $u_n = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$, kus kordajad c_i on määratud võrrandisüsteemist

$$\sum_{i=1}^n c_i (A\varphi_i, \psi_j) = (f_\delta, \psi_j), \quad j = 1, \dots, n. \quad (18)$$

Siis kehtivad järgmised veahinnangud

$$\|u_n - u_*\| \leq \frac{a_n}{\lambda_n} \delta + \|A_n^{-1} Q_n A u_* - u_*\|, \quad (19)$$

$$\|u_n - u_*\| \leq b_n \|A_n^{-1} Q_n\| \delta + \|A_n^{-1} Q_n A u_* - u_*\|, \quad (20)$$

kus $\lambda_n > 0$ on elementidest $(A\varphi_i, \psi_j)$ koosneva matriksi vähim omaväärtus ning

$$a_n = \max \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n \rho_i \varphi_i \right\| : \sum_{i=1}^n \rho_i^2 = 1 \right\},$$

$$b_n = \max \left\{ \sqrt{\sum_{i=1}^n \rho_i^2} : \left\| \sum_{i=1}^n \rho_i \psi_i \right\| = 1 \right\},$$

Märgime, et $a_n = 1$ ja $b_n = 1$, kui projektsiooniruumide baasid on ortonormaalised. Veahinnangute tõestused saab leida töös [8].

Üldjuhul ligikaudselt antud parema poole korral lahendid u_n protsessis $n \rightarrow \infty$ ei ole stabiilsed või ei koonu võrrandi (1) lahendiks. Sel juhul tuleb valida parameeter $n = n(\delta)$ sõltuvalt veatasemelt δ nii, et leiaiks aset koondumine $u_{n(\delta)} \rightarrow u_*$ protsessis $\delta \rightarrow 0$. Lähislahendile optimaalset järku veahinnangut garanteerivad parameetreid saab leida vaid sellistes ülesanetes, kus täpne lahend on teada. Vaatamata sellele, mõnede parameetrivaliku eeskirjade korral on võimalik tagada, et valitud parameetri korral lähislahendi viga oleks optimaalset järku.

Regulariseerimisparameetri valiku reeglid jagunevad apriorseteks ja aposterioorseks, kusjuures apriorse valiku korral kasutatakse vaid ülesande lähteandmete veataset ja lahendite klassi antud $f \in \mathbf{R}(A)$ korral. Kuna praktilistes ülesandetes selline informatsioon tihti puudub, kasutatakse aposterioorseid regulariseerimisparameetri valiku reegleid. Nende reeglite korral valitakse parameeter pärast arvutuste teostamist.

2.5 Parameetri aprioorne valik

Teoreem 2.2. Olgu $A \in L(H, F)$, $\|f_\delta - f\| \leq \delta$, $f \in \mathbf{R}(A)$ ning kehtigu teoreemi 2.1 tingimused (13)-(15). Valides $n = n(\delta)$ nii, et

$$n(\delta) \rightarrow \infty, \quad \delta \chi_{n(\delta)}^* \rightarrow 0 \quad \text{protsessis} \quad \delta \rightarrow 0, \quad (21)$$

kus

$$\chi_{n(\delta)}^* = \sup_{z_{n(\delta)} \in F_{n(\delta)}} \frac{\|z_{n(\delta)}\|}{\|A^* z_{n(\delta)}\|},$$

saame koonduvuse $\|u_{n(\delta)} - u_*\| \rightarrow 0$ protsessis $\delta \rightarrow 0$.

Tõestus. Teoreemi tõestuseks vaatame veahinnangut (17). Kasutades tingimusi (21) ja (13), saame koonduvuse $u_{n(\delta)} \rightarrow u_*$, kui $\delta \rightarrow 0$. Teoreem on tõestatud.

Teoreemi 2.2 tingimustes toimub ülesande (1) iseregulariseerimine ehk projektsiooni-meetod (4) parameetri n valikuga (21) määrab ülesande (1) regularisaatori.

2.6 Parameetri aposterioorne valik hälbeprintsibi abil

Üheks tuntuimaks aposterioorseks parameetrivaliku reegliks on hälbeprintsip, mille korral kasutatakse ainult veataseme infot $\|f_\delta - f\| \leq \delta$ ning parameetriks $n = n_D$ valitakse esimene arvudest $n = 1, 2, \dots$, mille korral

$$\|Au_n - f_\delta\| \leq b\delta,$$

kusjuures $b > 1$ on antud konstant.

Lemma 2.3. Kehtigu lemma 2.1 tingimused. Siis võrrandi (5) hälve jaoks kehtib võrratus

$$\|Au_n - f_\delta\| \leq \tau_n^{-1} \inf_{v_n \in H_n} \|f_\delta - Av_n\| \quad (22)$$

Tõestus. Olgu Q'_n ortoprojektor, $Q'_n : F \rightarrow AH_n$. Siis kehtib võrratus (tõestus on esitatud allikas [9]):

$$\|(I - Q_n)Q'_n\| \leq \|Q_n - Q'_n\| = (1 - \tau_n^2)^{1/2}.$$

Kuna võrrandi (5) lahendi u_n jaoks kehtib võrdus $Q_n(Au_n - f_\delta) = 0$, siis arvestades et $Q'_n Au_n = Au_n$, saame

$$\begin{aligned} \left(\inf_{v_n \in H_n} \|f_\delta - Av_n\| \right)^2 &= \|f_\delta - Q'_n f_\delta\|^2 = \|(f_\delta - Au_n) - Q'_n(f_\delta - Au_n)\|^2 = \\ &= \|f_\delta - Au_n\|^2 - \|Q'_n(f_\delta - Au_n)\|^2 = \|f_\delta - Au_n\|^2 - \|Q'_n(I - Q_n)(f_\delta - Au_n)\|^2 \geq \\ &\geq \|f_\delta - Au_n\|^2 - (1 - \tau_n^2)\|f_\delta - Au_n\|^2 = \tau_n^2 \|f_\delta - Au_n\|^2, \end{aligned}$$

kust järeldubki võrratus (22).

Teoreem 2.3. *Olgu $A \in L(H, F)$, $\|f_\delta - f\| \leq \delta$, $f \in \mathbf{R}(A)$,*

$$\|u - P_n u\| \rightarrow 0, \text{ kui } n \rightarrow \infty \ (\forall u \in H), \quad (23)$$

$$\mathbf{N}(A) \cap H_n = 0 \ (\forall n \geq n_0), \quad (24)$$

$$\|Q_n Av_n\| \geq \tau \|Av_n\| \ (\forall v_n \in H_n, n \geq n_0), \ \tau = \text{const}, \quad (25)$$

$$\|P_n A^* z_n\| \geq \tau^* \|A^* z_n\| \ (\forall z_n \in F_n, n \geq n_0), \ \tau^* = \text{const}, \quad (26)$$

$$\chi_{n+1} \|(I - Q'_n)A\| \leq \gamma' = \text{const} \ (n \geq n_0), \quad (27)$$

kus

$$\chi_n = \sup_{v_n \in H_n} \frac{\|v_n\|}{\|Av_n\|}$$

ja Q'_n on ortoprojektor ruumist F ruumi AH_n . Siis võrrandil (1) leidub parajasti üks lahend $u_* \in H$ ning projekteeritud võrrandil (5) leidub parajasti üks lahend $u_n \in H_n$. Kui parameetrik $n = n(\delta)$ valida esimene arvudest $n = 1, 2, \dots$ mille korral võrrand (5) on lahenduv ja

$$\|Au_n - f_\delta\| \leq b\delta, \ b = \text{const}, \ b > \tau^{-1}, \quad (28)$$

siis leidub aset koondumine $\|u_{n(\delta)} - u_*\| \rightarrow 0$ protsessis $\delta \rightarrow 0$.

Tõestus. Võrrand (5) on $n \geq n_0$ korral üheselt lahenduv teoreemi tingimuste (24) ja (25) tõttu. Kuna $f \in \mathbf{R}(A)$, siis võrrand (1) on lahenduv. Analoogiliselt teoreemile 2.1 saab näidata, et selle võrrandi lahend on ühene. Kasutades lemmas 2.1 olevat hinnangut normi $\|A_n^{-1}\|$ jaoks, saame hinnata

$$\|u_n - u_*\| \leq \frac{\chi_n}{\tau} \delta + \left(1 + \frac{(1 - \tau^{*2})^{1/2}}{\tau^*} \right) \|u_* - P_n u_*\| \quad (n \geq n_0). \quad (29)$$

Kasutades võrratust (22) ja minnes piirile, saame

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|Au_n - f_\delta\| \leq \tau^{-1} \delta$$

ehk parameetri $n = n(\delta)$ valik on teostatud.

Esiteks vaatleme juhtu, kui $n(\delta) \rightarrow \infty$ protsessis $\delta \rightarrow 0$. Kuna $n(\delta)$ on esimene parameeter, mille korral võrratus (28) kehtiv, siis $m = m(\delta) = n(\delta) - 1$ korral $\|Au_m - f_\delta\| > b\delta$. Kasutades lemmat 2.3 saame

$$\begin{aligned} b\delta &< \|Au_m - f_\delta\| \leq \tau^{-1} \inf_{v_m \in H_m} \|f_\delta - Av_m\| \leq \\ &\leq \tau^{-1} \left(\|f_\delta - f\| + \inf_{v_m \in H_m} \|f - Av_m\| \right) \leq \tau^{-1} \left(\delta + \inf_{v_m \in H_m} \|f - Av_m\| \right). \end{aligned}$$

Kuna $b > \tau^{-1}$ ja $(I - Q'_m)AP_m u_* = 0$, siis

$$\begin{aligned} \delta &\leq \frac{1}{b\tau - 1} \inf_{v_m \in H_m} \|f - Av_m\| = \\ &= \frac{1}{b\tau - 1} \|Au_* - Q'_m Au_*\| = \frac{1}{b\tau - 1} \|(I - Q'_m)A(I - P_m)u_*\|. \end{aligned}$$

Arvestades teoreemi tingimust (27), saame hinnata

$$\frac{\chi_n}{\tau} \delta \leq \frac{\chi_n}{(b\tau - 1)\tau} \|(I - Q'_{n-1})A\| \|(I - P_{n-1})u_*\| \leq \frac{\gamma'}{(b\tau - 1)\tau} \|(I - P_{n-1})u_*\|.$$

Oleme saanud, et hinnang (29) saab kuju

$$\|u_n - u_*\| \leq \frac{\gamma'}{(b\tau - 1)\tau} \|(I - P_{n-1})u_*\| + \left(1 + \frac{(1 - \tau^{*2})^{1/2}}{\tau^*} \right) \|u_* - P_n u_*\|, \quad (30)$$

kust tulebki koonduvus $u_{n(\delta)} \rightarrow u_*$ protsessis $\delta \rightarrow 0$.

Vaatleme nüüd juhtu, kui mingi jada $\delta_k \rightarrow 0$ korral eeskirja (28) abil leitud parameetrid on tõkestatud: $n(\delta_k) \leq l = \text{const}$ ($k = 1, 2, \dots$). Näitame, et ka sel juhul leidub aset koonduvus. Sel juhul jada $u_{n(\delta_k)}$ ($k = 1, 2, \dots$) paikneb lõplikumõõtmelises alamruumis ruumide H_n ($n = 1, 2, \dots, l$) lineaarkattest. Veahinnangust (29) järeldub, et jada $u_{n(\delta_k)}$ on tõkestatud. Lõplikumõõtmelises normeeritud ruumis tõkestatud jada on suhteliselt kompaktne. Kuna $\|Au_{n(\delta)} - f_\delta\| \leq b\delta$, siis $Au_{n(\delta_k)} \rightarrow f = Au_*$ protsessis $k \rightarrow \infty$. Siit järeldub, et $u_{n(\delta_k)} \rightarrow u_*$, kui $k \rightarrow \infty$. Teoreem on tõestatud.

2.7 Täiendusi koonduvusteoreemile

Vaatleme juhtu, kui teoremi 2.3 tingimustest (25) või (26) ühe täidetusest järeldub ka teise tingimuse täidetuse.

Lemma 2.4. *Kehtigu teoreemi 2.3 tingimus (25) ning suvalise $\alpha \in (0, 1]$ korral*

$$\chi_n^\alpha \|(I - P_n)(A^*A)^{\alpha/2}\| \leq \gamma = \text{const} \quad (n \geq n_0). \quad (31)$$

Siis kehtib tingimus (26), kusjuures $\tau^ = \tau(\tau^{2\alpha} + \gamma^2)^{-1/(2\alpha)}$. Analoogiliselt, kui kehtib teoreemi 2.3 tingimus (26) ning*

$$(\chi_n^*)^\alpha \|(I - Q_n)(AA^*)^{\alpha/2}\| \leq \gamma^* = \text{const} \quad (n \geq n_0), \quad (32)$$

siis kehtib (25), kusjuures $\tau = \tau^((\tau^*)^{2\alpha} + (\gamma^*)^2)^{-1/(2\alpha)}$.*

Tõestus. Tõestame lemma teist väidet. Võtame kasutusele operaatori A polaarsituse $A = (AA^*)^{1/2}U$, kus $U \in L(H, F)$ on selline, et $\|Uv\| \leq \|v\|$ ($v \in H$). Tähistame $B = (AA^*)^{1/2} \in L(F, F)$, siis

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_n^2} &= \sup_{v_n \in H_n} \frac{\|Av_n\|^2}{\|Q_n Av_n\|^2} = \sup_{z_n \in UH_n} \frac{\|Bz_n\|^2}{\|Q_n Bz_n\|^2} = 1 + \sup_{z_n \in UH_n} \frac{\|(I - Q_n)Bz_n\|^2}{\|Q_n Bz_n\|^2} \leq \\ &\leq 1 + \|(I - Q_n)B^\alpha\|^2 \sup_{z_n \in UH_n} \frac{\|B^{1-\alpha}z_n\|^2}{\|Q_n Bz_n\|^2}. \end{aligned}$$

Kasutades momentide võrratust $\|B^{1-\alpha}z_n\| \leq \|Bz_n\|^{1-\alpha}\|z_n\|^\alpha$ saame

$$\frac{\|B^{1-\alpha}z_n\|}{\|Q_n Bz_n\|} \leq \left(\frac{\|Bz_n\|}{\|Q_n Bz_n\|} \right)^{1-\alpha} \left(\frac{\|z_n\|}{\|Q_n Bz_n\|} \right)^\alpha$$

Arvestades lemma 2.1 hinnanguid

$$\begin{aligned} \sup_{z_n \in UH_n} \frac{\|Bz_n\|}{\|Q_n Bz_n\|} &= \frac{1}{\tau_n}, \\ \sup_{z_n \in UH_n} \frac{\|z_n\|}{\|Q_n Bz_n\|} &= \sup_{v_n \in H_n} \frac{\|v_n\|}{\|Q_n Av_n\|} = \sup_{w_n \in F_n} \frac{\|A_n^{-1}w_n\|}{\|w_n\|} = \|A_n^{-1}\|, \end{aligned}$$

saame

$$\frac{1}{\tau_n^2} \leq 1 + \|(I - Q_n)B^\alpha\|^2 \frac{1}{\tau_n^{2(1-\alpha)}} \|A_n^{-1}\|^{2\alpha}.$$

Kui tingimus (26) kehtib, siis lemmast 2.1 tuleb, et $\|A_n^{-1}\| \leq \chi_n^*/\tau_n^* \leq \chi_n^*/\tau^*$, kus $n \geq n_0$. Arvestades lemma tingimust (32) saame

$$\frac{1}{\tau_n^2} \leq 1 + \frac{\gamma^{*2}}{(\tau^*)^{2\alpha}(\tau_n)^{2(1-\alpha)}} \quad (n \geq n_0).$$

Siit järeldub, et jada $1/\tau_n$ on tõkestatud protsessis $n \rightarrow \infty$. Täpsem analüüs näitab, et

$$\tau_n \geq \tau^*[(\tau^*)^{2\alpha} + \gamma^{*2}]^{-1/(2\alpha)} \quad (n \geq n_0).$$

Sellega on lemma teine väide tõestatud. Esimene väide tõestatakse analoogiliselt.

Lemma 2.5. *Olgu $H = F$, $H_n = F_n$, $A = A^* > 0$. Kui suvalise $\alpha \in (0, 1]$ korral kehtib võrratus*

$$\chi_n^\alpha \|(I - P_n)A^\alpha\| \leq \gamma = \text{const} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (33)$$

siis tingimus (25) (antud juhul on samaväärne tingimusega (26)) on täidetud, kusjuures

$$n_0 = 1,$$

$$\tau = (1 + \gamma^2)^{-1/(2\alpha)}, \quad \text{kui } \alpha \in (0, 1/2],$$

$$\tau = (1 + \gamma)^{-1/\alpha}, \quad \text{kui } \alpha \in (1/2, 1].$$

Tõestus. Analoogiliselt eelmise lemmaga saab näidata, et

$$\frac{1}{\tau_n^2} \leq 1 + \|(I - P_n)A^\alpha\|^2 \sup_{v_n \in H_n} \frac{\|A^{1-\alpha}v_n\|^2}{\|P_nAv_n\|^2}.$$

Olgu $\alpha \in (0, 1/2]$. Kasutades momentide võrratust $\|A^{1-\alpha}v_n\| \leq \|Av_n\|^{1-2\alpha}\|A^{1/2}v_n\|^{2\alpha}$ ja arvestades, et $\|A^{1/2}v_n\|^2 = (P_nAv_n, v_n) \leq \|P_nAv_n\|\|v_n\|$, saame hinnata järgmiselt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_n^2} &\leq 1 + \|(I - P_n)A^\alpha\|^2 \sup_{v_n \in H_n} \frac{\|Av_n\|^{2(1-2\alpha)}}{\|P_nAv_n\|^{2(1-2\alpha)}} \sup_{v_n \in H_n} \frac{\|v_n\|^{2\alpha}}{\|P_nAv_n\|^{2\alpha}} \leq \\ &\leq 1 + \|(I - P_n)A^\alpha\|^2 \frac{1}{\tau_n^{2(1-2\alpha)}} \|A_n^{-1}\|^{2\alpha}. \end{aligned}$$

Kuna $\|A_n^{-1}\| \leq \chi_n/\tau_n$, siis lemma tingimust (33) kasutades, saame

$$\frac{1}{\tau_n^2} \leq 1 + \frac{\gamma^2}{\tau_n^{2(1-\alpha)}} \quad (n \geq 1).$$

Nagu eelmises lemmas järeldub siit jada $1/\tau_n$ tõkestatus ja täpsem analüüs annab väidetud tõkke $\alpha \in (0, 1/2]$ korral. Kuna $\|(I - P_n)A^{\alpha/2}\|^2 \geq \|(I - P_n)A^\alpha\|$, siis $\alpha \in (1/2, 1]$ korral saame lemma teist väidet.

Lemma 2.6. Iga naturaalarvu m korral kehtib võrratus

$$\|(I - Q'_n)A\| \leq \|(I - P_n)(A^*A)^{1/(2m)}\|^m. \quad (34)$$

Seega teoreemi 2.3 tingimuse (27) täitmiseks piisab, kui

$$\chi_{n+1}^{1/m} \|(I - P_n)(A^*A)^{1/(2m)}\| \leq \text{const} \quad (n \geq n_0). \quad (35)$$

Tõestus. Kasutame operaatori A polaaresitust $A = U(A^*A)^{1/2}$, kus $U \in L(H, F)$ on selline, et $\|Uv\| \leq \|v\|$, ($\forall v \in H$). Olgu P'_n ortoprojektor ruumist H ruumile $(A^*A)^{1/2}H_n$. Kuna $UP'_nH \subset AH_n$, siis $(I - Q'_n)UP'_n = 0$ ning

$$(I - Q'_n)A = (I - Q'_n)U(I - P'_n)(A^*A)^{1/2},$$

$$\|(I - Q'_n)A\| \leq \|(I - P'_n)(A^*A)^{1/2}\|.$$

Tähistagu $P_n^{(j)}$ ortoprojektori ruumi $(A^*A)^{j/(2m)}H_n$, $j = 0, 1, \dots, m$. Siis erijuhul $P_n^{(0)} = P_n$ ja $P_n^{(m)} = P'_n$. Kuna iga $v \in H$ korral $(A^*A)^{1/m}P_n^{j-1}v \in (A^*A)^{1/m}H_n$, siis kehtib seos

$$(I - P_n^{(j)})(A^*A)^{1/(2m)}P_n^{(j-1)} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m.$$

Siit järeldub, et

$$\begin{aligned} (I - P'_n)(A^*A)^{1/2} &= (I - P_n^{(m)})(A^*A)^{1/2} = (I - P_n^{(m)}) \underbrace{(A^*A)^{1/(2m)} \dots (A^*A)^{1/(2m)}}_{m \text{ tükki}} = \\ &= (I - P_n^{(m)})(A^*A)^{1/(2m)}(I - P_n^{(m-1)})(A^*A)^{1/(2m)} \dots (I - P_n^{(1)})(A^*A)^{1/(2m)}. \end{aligned}$$

Selle operaatori normi hindame järgmiselt:

$$\|(I - P'_n)(A^*A)^{1/2}\| \leq \prod_{j=1}^m \|(I - P_n^{(j)})(A^*A)^{1/(2m)}\|.$$

Võrdusest $(I - P_n^{(j)})(A^*A)^{1/(2m)} = (I - P_n^{(j)})(A^*A)^{1/(2m)}(I - P_n^{(j-1)})$ saame, et

$$\|(I - P_n^{(j)})(A^*A)^{1/(2m)}\| \leq \|(I - P_n^{(j-1)})(A^*A)^{1/(2m)}\| \leq \dots \leq \|(I - P_n)(A^*A)^{1/(2m)}\|,$$

kust tuleb lemma väide (34).

2.8 Vähimruutude meetod

Teoreem 2.4. *Olgu $\mathbf{N}(A) = \{0\}$, $f \in \mathbf{R}(A)$, $\|f_\delta - f\| \leq \delta$, $\|u - P_n u\| \rightarrow 0$ protsessis $n \rightarrow \infty$ ($\forall u \in H$) ning kehtigu suvalise naturaalarvu m korral*

$$(\chi_n + \chi_{n+1})^{1/m} \|(I - P_n)(A^* A)^{1/(2m)}\| \leq \text{const} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (36)$$

Kui vähimruutude meetodis (6) valida $n = n(\delta)$ nii, et

$$n(\delta) \rightarrow \infty, \quad \delta \chi_{n(\delta)} \rightarrow 0, \quad \text{kui } \delta \rightarrow 0, \quad (37)$$

siis $u_{n(\delta)} \rightarrow u_ = A^{-1}f$ protsessis $\delta \rightarrow 0$. Sama koonduvus leidub aset, kui parameetriks $n(\delta)$ valida esimene naturaalarvudest $n = 1, 2, \dots$, mille korral kehtib*

$$\|Au_n - f_\delta\| \leq b\delta \quad (b = \text{const} > 1).$$

Tõestus. Väited järelduvad teoreemide 2.2 ja 2.3, mille eelduste täidetust kontrollime. Tingimus (25) on vähim ruutude meetodi korral alati täidetud ($\tau = 1$). Tingimuste (13), (23) täidetust eeldasime. Tingimused (14), (24) on täidetud seoste $F_n = AH_n \subset \mathbf{R}(A) \subset \mathbf{N}(A^*)^\perp$ ja $\mathbf{N}(A) = \{0\}$ tõttu. Tingimused (15), (26) on täidetud eelduse (36) ja lemma 2.4 esimese poole põhjal. Koonduvused (21) kehtivad eelduse (37) ja võrratuste

$$\chi_n^* = \sup_{z_n \in F_n} \frac{\|z_n\|}{\|A^* z_n\|} = \sup_{v_n \in H_n} \frac{\|Av_n\|}{\|A^* Av_n\|} \leq \sup_{v_n \in H_n} \frac{\|v_n\|}{\|Av_n\|} = \chi_n$$

tõttu. Tingimus (27) on rahuldatud lemma 2.6 ja eelduse (36) põhjal.

2.9 Galjorkini meetod

Teoreem 2.5. *Olgu $H = F$, $A = A^* > 0$, $f \in \mathbf{R}(A)$, $\|f_\delta - f\| \leq \delta$, $\|u - P_n u\| \rightarrow 0$ protsessis $n \rightarrow \infty$ ($\forall u \in H$) ning kehtigu suvalise naturaalarvu m korral*

$$\chi_n^{1/m} \|(I - P_n)A^{1/m}\| \leq \gamma, \quad \chi_{n+1}^{1/m} \|(I - P_n)A^{1/m}\| \leq \text{const} \quad (n \geq 1). \quad (38)$$

Siis Galjorkni meetod määrab kõigi $n = 1, 2, \dots$ korral ühise lahendi $u_n \in H_n$. Kui valida parameeter $n = n(\delta)$ vastavalt tingimustele $n(\delta) \rightarrow \infty$, $\delta \chi_{n(\delta)} \rightarrow 0$, siis $u_{n(\delta)} \rightarrow u_ = A^{-1}f$ protsessis $\delta \rightarrow 0$. Sama koonduvus leidub aset, kui parameetriks $n = n(\delta)$ valida esimene naturaalarvudest $n = 1, 2, \dots$, mille korral*

$$\|Au_n - f_\delta\| \leq b\delta, \quad (b = \text{const}),$$

kus $b > (1 + (\gamma)^2)^{m/2}$, kui $m \geq 2$ ning $b > 1 + \gamma$, kui $m = 1$.

Tõestus. Väited järelduvad teoreemidest 2.2 ja 2.3 ning lemmadest 2.5 ja 2.6.

3 Vähima vea meetod

3.1 Meetodi kirjeldus

Eelnevalt vaadeldud projektsioonimeetodite hulgast on eriti huvitav vähima vea meetod. Võrrandi (2) täpse parema poole f korral on meetodil kaks olulist omadust.

Teoreem 3.1. *Olgu $\mathbf{N}(A^*) = \{0\}$ ning kehtigu tingimus*

$$Q_n f \rightarrow f \quad \forall f \in F \quad (n \rightarrow \infty). \quad (39)$$

Siis võrrandi (5) on $f_\delta = f$ korral üheselt lahenduv, kusjuures

1. $u_n = P_n u_*$;
2. u_n on võrrandi $Q_n A u = Q_n f$ normaallahend, kus $u \in H$.

Tõestus. Operaator $A_n^* \in L(F_n, H_n)$ on bijektiivne tingimuse $\mathbf{N}(A^*) = \{0\}$ tõttu. See aga tähendab, et operaator $A_n \in L(H_n, F_n)$ on bijektiivne ehk võrrand (5) on üheselt lahenduv. Võrdusest $P_n A^* Q_n = A^* Q_n$ jäeldub kaasoperaatorite võrdus $Q_n A = Q_n A P_n$. Siis $Q_n f = Q_n A u_* = Q_n A P_n u_* = A_n P_n u_*$, ning võrrandit $A_n u_n = Q_n f$ saab esitada kujul $A_n(u_n - P_n u_*) = 0$, kust tuleb teoreemi esimene väide.

Näitame, et u_n on võrrandi $Q_n A u = Q_n f$ normaallahend. See võrrand on samaväärne võrrandiga $Q_n A P_n u = Q_n f$, mille ainsaks lahendiks on elemendid $u_n + u'_n$, $u'_n \in H_n^\perp$. Võrratusest $\|u_n + u'_n\| = (\|u_n\|^2 + \|u'_n\|^2)^{1/2} \geq \|u_n\|$ jäeldub teoreemi teine väide. Teoreem on tõestatud.

Teoreem 3.2. *Rahuldagu alamruumid F_n tingimust*

$$F_n \subset F_{n+1} \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (40)$$

Siis võrrandi (5) vastavate lähendite normid on monotoonselt kahanevad

$$\|u_n\| \leq \|u_{n+1}\| \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Tõestus. Tingimusest (40) jäeldub, et u_{n+1} on lahendiks mõlema võrrandi $Q_{n+1}(A u - f_\delta) = 0$, $u \in H$ ja $Q_n(A u - f_\delta) = 0$, $u \in H$ jaoks. Kuna u_n on võrrandi $Q_n(A u - f_\delta) = 0$ minimaalse normiga lahend, siis väide on tõestatud.

3.2 Meetodi koonduvus täpsete andmete korral

Teoreem 3.3. *Olgu $N(A^*) = 0$ ning kehtigu teoreemi 3.1 tingimus (39). Siis leiab aset koondumine $u_n \rightarrow u_*$ protsessis $n \rightarrow \infty$.*

Tõestus. Tingimuse (39) tõttu alamruumide jada F_n , $n = 1, 2, \dots$ on piirtihe ruumis F . Siit järeldub, et ruumide jada $H_n = A^*F_n$, $n = 1, 2, \dots$ on piirtihe ruumis $\overline{R(A^*A)} = \overline{R(A^*)} = H$. Võrdusest $u_n = P_n u_*$ aga saame, et $u_n \rightarrow u_*$, kui $n \rightarrow \infty$.

Olgu $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ on ruumi F_n baas. Lähislahendi $u_n = \sum_{i=1}^n c_i A^* \psi_i$ kordajad c_i leitakse lineaarvõrrandite süsteemist

$$\sum_{i=1}^n c_i (A^* \psi_i, A^* \psi_j) = (f, \psi_j) \equiv f_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (41)$$

Järgnev lause artiklist [11] annab tingimused ülesande (1) lahenduvuse kontrolliks.

Lause 3.1. *Olgu antud $f \in \overline{R(A)}$ ning olgu kordajad $\{c_1, \dots, c_n\}$ määratud lineaarvõrrandite süsteemiga (41). Leidugu selline konstant $M > 0$, et iga n korral*

$$G_n = \sum_{i=1}^n c_i f_i \leq M. \quad (42)$$

Siis leidub $u_ \in \overline{R(A^*)}$ selline, et $u_n \rightarrow u_*$ ning $Au_* = f$.*

Tõestus. $G_n = \|u_n\|^2$, kuna suurused $\{c_1, \dots, c_n\}$ ja $\{f_1, \dots, f_n\}$ on määratud süsteemiga (41). Selge, et $m > n$ korral $\|u_m - u_n\|^2 = G_m - G_n > 0$, mis tähendab, et jada $\{G_n\}$ on monotoonselt kasvav ning eelduse (42) tõttu on tõkestatud. Siit järeldub, et $\{G_n\}$ koondub ning $\|u_m - u_n\| \rightarrow 0$, kui $m, n \rightarrow \infty$. Kuna $\overline{R(A^*)}$ on kinnine, siis leidub selline element $u_* \in \overline{R(A^*)}$, et $u_n \rightarrow u_*$, kui $n \rightarrow \infty$. Näitame, et kehtib $Au_* = f$

$$(u_*, A^* \psi_j) = \lim_n (u_n, A^* \psi_j) = \lim_n \sum_{i=1}^n c_i (A^* \psi_i, A^* \psi_j) = f_j = (f, \psi_j).$$

Märkus 3.1. *Olgu projekteeritud ruumi F_n baas valitud nii, et $\{A^* \psi_i\}$ on ortonormaalised. Siis süsteemist (41) saame $c_i = (f, \psi_i)$, $i = 1, \dots, n$ ning lähislahend avaldub kujul $u_n = \sum_{i=1}^n (f, \psi_i) A^* \psi_i$.*

3.3 Veahinnangud ligikaudsete andmete korral

Olgu võrrandi (1) parem pool antud veaga $\|f_\delta - f\| \leq \delta$. Tähistame lähislahendit $u_{n(\delta)} = \sum_{i=1}^n c_i A^* \psi_i$, kus kordajaid leitakse lineaarvõrrandite süsteemist

$$\sum_{i=1}^n c_i (A^* \psi_i, A^* \psi_j) = (f_\delta, \psi_j) = f_j^\delta \quad j = 1, \dots, n. \quad (43)$$

Olgu projektsiooniruumid rahuldavad tingimust (40). Tähistame

$$\chi_n^* = \sup_{z_n \in F_n} \frac{\|z_n\|}{\|A^* z_n\|}. \quad (44)$$

Artiklis [8] lähislahendi viga on hinnatud järgmiselt

$$\|u_{n(\delta)} - u_*\| \leq r_n \chi_n^* \delta + \text{const} \min_{v_n \in H_n} \|v_n - u_*\|. \quad (45)$$

Siin $r_n = 1$ juhul, kui $\|f_\delta - f\| \leq \delta$ ning

$$r_n = \max \left\{ \sqrt{\sum_{i=1}^n \rho_i^2} : \left\| \sum_{i=1}^n \rho_i \psi_i \right\| = 1 \right\},$$

kui δ rollis kasutada suurust $\delta = \max_{1 \leq j \leq n} |f_j^\delta - f_j|$.

Märgime, et ortonormeeritud baasfunktsioonide $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ korral suurus $r_n = 1$.

Olgu operaator $A \in L(H, F)$ antud veaga η : $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, kus $A_\eta \in L(H, F)$. Sel juhul projekteeritud ruumid sõltuvad operaatorist A_η : $H_{n,\eta} \subset H$ ja $F_{n,\eta} \subset F$. Töös [4] on tõestatud lähislahendi veahinnang juhul, kui $F_{n,\eta} = F_n$:

$$\|u_n - u_*\| \leq \|(I - P_n)u_*\| + \eta \chi_n^* \|u_*\| + \chi_{n,\eta}^* (\delta + \eta \|u_*\|), \quad (46)$$

kus χ_n^* on määratud võrrandiga (44). On teada, et lähislahend u_n võrrandi (1) lahendamiseks on optimalset järku klassis

$$M_{\mu,q} = \{u_* \in H : u_* = (A^* A)^{\frac{\mu}{2}} v, \|v\| \leq q\}, \quad \mu, q > 0, \quad (47)$$

kui

$$\sup_{u_* \in M_{\mu,q}} \|u_n - u_*\| \leq C(\delta + \eta)^{\frac{\mu}{\mu+1}}.$$

Vähima vea meetodiga regulariseerimine on optimaalset järku klassis $M_{\mu,q}$, kui on täidetud eeldus

$$\|(I - P_n)(A^* A)^{\mu/2}\| (\chi_n^*)^\mu \leq C$$

ning parameeter n on valitud nii, et

$$\chi_n^* \sim (\delta + \eta)^{\frac{-1}{\mu+1}}.$$

3.4 Parameetri aprioorne valik

Teoreem 3.4. Olgu $\mathbf{N}(A) = \{0\}$, $\mathbf{N}(A^*) = \{0\}$, $f \in \mathbf{R}(A)$, $\|f_\delta - f\| \leq \delta$ ning

$$\|z - Q_n z\| \rightarrow 0, \text{ kui } n \rightarrow \infty \quad (\forall z \in F). \quad (48)$$

Siis vähima vea meetod (6) määrab ühese lähendi u_n . Valides $n = n(\delta)$ nii, et

$$n(\delta) \rightarrow \infty, \delta \chi_{n(\delta)}^* \rightarrow 0, \text{ kui } \delta \rightarrow 0, \quad (49)$$

saame koonduvuse $u_{n(\delta)} \rightarrow u_* = A^{-1}f$ protsessis $\delta \rightarrow 0$.

Tõestus. Ühene lahenduvus tuleb lemmast 2.1. Koonduvuse saame teoreemist 2.1, mille eelduste täidetust kontrollime. Eeldus (13) on täidetud tingimuse (48) põhjal. Eelduse (14) täidetuse garanteerib tingimus $\mathbf{N}(A^*) = \{0\}$. Eeldus (15) on täidetud võrduse $H_n = A^*F_n$ tõttu.

3.5 Parameetri aposterioorne valik hälbeprintsipi abil

Teoreem 3.5. Olgu $\mathbf{N}(A) = \{0\}$, $\mathbf{N}(A^*) = \{0\}$, $f \in \mathbf{R}(A)$, $\|f_\delta - f\| \leq \delta$ ning kehtigu teoreemi 3.4 tingimus (48). Siis vähima vea meetod (7) määrab ühese lähendi u_n . Leidugu arv $m \in \mathbf{N}$, mille korral kehtivad hinnangud

$$(\chi_n^*)^{1/m} \|(I - Q_n)(AA^*)^{1/(2m)}\| \leq \gamma, \quad (50)$$

$$(\chi_{n+1}^*)^{1/m} \|(I - Q_n)(AA^*)^{1/(2m)}\| \leq \text{const} \quad (n \geq 1). \quad (51)$$

Kui parameetris $n(\delta)$ valida esimene arvudest $n = 1, 2, \dots$, mille korral kehtib

$$\|Au_n - f_\delta\| \leq b\delta, \quad b > (1 + \gamma^2)^{m/2}, \quad (52)$$

siis leiab aset koondumine $u_{n(\delta)} \rightarrow u_*$ protsessis $\delta \rightarrow 0$.

Tõestus. Kontrollime teoreemi 2.3 tingimused. Tingimus $\|P_n A^* z_n\| \geq \tau^* \|A^* z_n\|$ iga $z_n \in F_n$ korral on rahuldatud, kusjuures $\tau^* = 1$, $n \geq 1$. Kasutades lemmat 2.4, saame võrratusest (50) võrratuse $\|Q_n A v_n\| \geq \tau \|A z_n\|$, kus $\tau = (1 + \gamma^2)^{-m/2}$. Kuna $(I - Q'_n)AP_n = 0$, siis

$$\|(I - Q'_n)A\| = \|(I - Q'_n)A(I - P_n)\| \leq \|(I - P_n)A^*\|.$$

Vähima vea meetodi korral $P_n : H \rightarrow A^*F_n$. Analoogiliselt lemmale 2.6 saab näidata, et

$$\|(I - P_n)A^*\| \leq \|(I - Q_n)(AA^*)^{1/(2m)}\|^m,$$

kust järeldub

$$\chi_{n+1}^* \|(I - Q_n')A\| \leq \chi_{n+1}^* \|(I - Q_n)(AA^*)^{1/(2m)}\|^m \leq \text{const}.$$

Näitame, et iga n korral kehtib võrratus $\chi_n \leq \chi_n^*$. Iga $z_n \in F_n$ korral kehtib võrratus $\|A^*z_n\|^2 = (A^*z_n, A^*z_n) = (z_n, AA^*z_n) \leq \|z_n\| \|AA^*z_n\|$. Selle abil saame

$$\chi_n = \sup_{v_n \in H_n} \frac{\|v_n\|}{\|Av_n\|} = \sup_{z_n \in F_n} \frac{\|A^*z_n\|}{\|AA^*z_n\|} \leq \sup_{z_n \in F_n} \frac{\|z_n\|}{\|A^*z_n\|} = \chi_n^*$$

ehk teoreemi 2.3 tingimus $\chi_{n+1} \|(I - Q_n')A\| \leq \gamma' = \text{const}$ on täidetud. Teoreemist 2.3 kohe järeldub, et leidub aset koondumine $u_{n(\delta)} \rightarrow u_*$ protsessis $\delta \rightarrow 0$, kui parameeter $n(\delta)$ valitakse vastavalt tingimusele (52). Teoreem on tõestatud.

Märkus 3.2. *Tingimused (50), (51) on karmid. Olgu A kompaktne operaator ning λ_n singulaarsed arvud (operaatori $(A^*A)^{1/2}$ omaväärtused), $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$. Siis $\lambda_n \rightarrow 0$, kui $n \rightarrow \infty$. On teada (vt. [4,15]), et suvalise n -mõõtmelise alamruumi F_n korral*

$$\|(I - Q_n)(AA^*)^{1/(2m)}\| \geq \lambda_{n+1}^{1/m}, \quad \chi_n^* \geq \lambda_n^{-1}.$$

Seega on tingimus (51) ekvivalentne tingimustega

$$\|(I - Q_n)(AA^*)^{1/(2m)}\| \sim \lambda_{n+1}^{1/m}, \quad \chi_n^* \sim \lambda_n^{-1}.$$

Selliseid aproksimatsiooni- ja stabiilsuse omadusi ei rahulda kaugeltki kõik alamruumid F_n . Arvutusmeetodites kasutatavad standardsed alamruumid aproksimeerivad täpsusega $O(n^{-k})$ mingi $k > 0$ korral. Seega tingimused (50), (51) eeldavad, et operaatori A singulaarsed arvud ei kahane kiiremini kui n^{-k} (polünomiaalne kahanemine).

3.6 Parameetri valik tasakaaluprintsiibi alusel

Vastavalt punkti 3.5 lõpus toodud märkusele on vähima vea meetodis projektsiooni-ruumi dimensiooni valikuks hällbeprintsiipt kasutatav mõõdukalt mittekorrektsetes ülesannetes, kus operaatori singulaarsed arvud kahanevad polünomiaalse kiirusega. Käesolevas punktis vaatleme artiklis [1] pakutud tasakaaluprintsiipi, mis sobib dimensiooni valikuks ka tugevalt mittekorrektsetes ülesannetes, kus singulaarsed arvud

kahanevad eksponentsiaalse kiirusega.

Eeldame, et $\mathbf{N}(A) = \{0\}$, $\mathbf{N}(A^*) = \{0\}$ ning vaatleme ülesande (1) regulariseerimist vähima vea meetodiga. Lähislahendit otsime kujul $u_{n(\delta)} = A_n^{-1}f_\delta \in A^*F_n$, Eeldame, et täpsete andmete korral leiduvad sellised konstandid $c_\mu \geq 0$ ja $\mu > 0$, $\mu \in [\mu_0, \mu_1]$, nii et kehtib veahinnang

$$\|u_* - u_n\| = \inf_{v_n \in A^*F_n} \|u_* - v_n\| \leq c_\mu n^{-\mu}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (53)$$

ning ligikaudselt antud andmete korral

$$\|A_n^{-1}Q_n(f - f_\delta)\| \leq \chi_n^* \|Q_n(f - f_\delta)\| \leq \chi_n^* \delta, \quad (54)$$

kus χ_n^* on defineeritud lemmas 2.2. Tugevalt mittekorrektsete ülesannete korral operaatori $(A^*A)^{1/2}$ omaväärtused kahanevad eksponentsiaalselt. Seega arvestades veahinnangut (54) võime eeldada, et mingi $a > 0$, $q > 1$ korral kehtib

$$e^{an}\delta \leq \|A_n^{-1}Q_n(f - f_\delta)\| \leq e^{anq}\delta. \quad (55)$$

Teoreem 3.6. *Kehtigu võrratused (53) ja (55). Siis*

$$\|u_* - u_{n_*(\delta)}\| \leq 2^{\mu+1} e c_\mu (aq)^\mu \ln^{-\mu} \frac{1}{\delta},$$

kus parameeter n_* on valitud tingimusest

$$n_* = \min\{n : c_\mu n^{-\mu} \leq \delta e^{aqn}\}.$$

Artiklis [1] on see teoreem tõestatud ning ühtlasi näidatud, et siin kirjeldatud parameetri valik $n = n_*$ on allikataolistel lahenditel optimaalse järguga. Kuid praktikas seda on raske rakendada, kuna suuruste μ , c_μ , a , q väärtused peavad olema teatud aprioriselt. Järgnevalt vaatleme selles artiklis pakutud aposterioorse reegli (tasakaaluprintsiipi) n valikuks.

Olgu μ_0 ja b_0 minimaalsed suurused, mille korral kehtivad (53) ja (55). Algoritmis testitakse hüpoteesi, et astnenäitaja aq võrratuses (55) on väiksem kui mingi liige geometrilises progressioonis

$$B_q = \{b_j : b_j = b_0 q^j, j = 1, 2, \dots\}.$$

Diskretisatsiooniparameetri valime hulgast

$$N_\delta = \{n : n = 1, 2, \dots; n \leq N\},$$

kus N on määratud seosega

$$N = b_0^{-1}(\ln \frac{1}{\delta} - \mu_0 \ln \ln \frac{1}{\delta}).$$

Olgu M_j selliste parameetrite $m \in N_\delta$ hulk, et

$$\forall k, n \geq m : \|u_{n(\delta)} - u_{k(\delta)}\| \leq 2\delta(e^{b_j n} + e^{b_j k}) \quad (k, n \in N_\delta). \quad (56)$$

Defineerime jada $m_j = \min_{m \in M_j} m$, $j = 1, 2, \dots$. Pole raske näidata, et jada $\{m_j\}$ on monotoonne mittekasvav, kusjuures

$$N \geq m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_j \geq \dots \geq 1.$$

Defineerime parameetri ν nii, et $b_\nu = \max\{b_j : b_j \in B_q, b_j \leq a\}$ ning eeldame, et $\nu > 1$. Punkti lõpus toodud teoreem 3.8. tõestusele eelnevad järgmised lemmad.

Lemma 3.1. *Kehtigu (53) ja (55). Kui δ on piisavalt väike, nii et*

$$\delta^{q-1} \ln^{\mu_0(q-1)} \frac{1}{\delta} < \frac{1}{8}, \quad (57)$$

siis iga $j = 1, 2, \dots, \nu - 1$ korral

$$m_j \geq q^{-1}(N - b_0^{-1} \ln 6).$$

Lemma 3.2. *Kehtigu (53) ja (55). Kui $b_j \in B_q$ on selline, et $b_j \geq aq$, siis*

$$\|u_* - u_{m_j(\delta)}\| \leq 6e2^{\mu+1} c_\mu b_j^\mu \ln^{-\mu} \frac{1}{\delta},$$

$$m_j < q^{-1}(N - b_0^{-1} \ln 6). \quad (58)$$

Tasakaaluprintsiip.

1. Leiame $n \in N_\delta$ koral lähilahendid u_n , $n \in N_\delta$.
2. Valime iga $b_j \in B_q$, $j = 1, 2, \dots$ korrall diskretisatsiooniparameetriks vähima $m_j \in M_j$, mille korrall kehtib (58).

Olgu m_l esimene (ehk maksimalne) arvudest m_j , mis rahuldab seda tingimust. Sellele parameetrile m_l vastab $b_l = b_0 q^l \in B_q$. Siis otsitav lähilahend on $u_{m_{l+2}(\delta)}$, kus parameeter m_{l+2} on vähim m hulgas M_j , mis vastab arvule $b_{l+2} = b_l q^2 \in B_q$. Paneme tähele, et suurusi μ , c_μ ja a hinnangutest (53) ja (55) lähilahendi $u_{m_{l+2}(\delta)}$ konstrueerimisskeemis ei kasutata. Lähilahend sõltub ainult etteantud suurustest μ_0 , b_0 ja q .

Teoreem 3.7. *Kehtigu lemma (3.3) eeldused. Siis*

$$\|u_* - u_{m_{l+2}(\delta)}\| \leq c \ln^{-\mu} \frac{1}{\delta},$$

kus $c \leq 6e2^{\mu+1} c_\mu (aq^4)^\mu$.

Vaatamata sellele, et numbrilised tulemused näitavad lähilahendite vea ebastabiilsust, on sama järku täpsus garanteeritud. Tasakaaluprintsiibi kasutamine nõuab paljude lähilahendite arvutamist ning on seega üsna töömahukas.

3.7 Parameetri valik Sobolevi ruumis

Käesolevas punktis anname ülevaate artiklist [7]. Olgu võrrandis (1) operaator $A : H \rightarrow F$ kompaktne ja lineaarne ning olgu antud alamruumide jada F_1, F_2, \dots , mis rahuldab tingimusi

$$F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots \subseteq F, \quad \overline{\bigcup_{n \in \mathbf{N}} F_n} = F.$$

Vaatleme ülesande (1) regulariseerimist vähima vea meetodiga. Ülesande (1) lahendi $u_* \in \mathbf{N}(A)^\perp$ lähilahendiks on $u_n = (Q_n A)^+ Q_n f_\delta$. Tähis A^+ tähendab üldistatud pöördoperaatorit, mis rahuldab seoseid:

1. $A^+ A u = u$ iga $u \in \mathbf{N}(A)^\perp = \mathbf{R}(A^*)$ korrall;
2. $A^+ v = v$ iga $v \in \mathbf{R}(A)^\perp = \mathbf{N}(A^*)$ korrall;
3. $A^+(v_1 + v_2) = A^+ v_1 + A^+ v_2$ iga $v_1 \in \mathbf{R}(A)$ ja $v_2 \in \mathbf{N}(A^*)$ korrall.

Täpsete andmete ($\delta = 0$) korral on $u_n = P_n u_*$. Defineerime suurused

$$\bar{\gamma}_n(\mu) = \|(I - P_n)(A^*A)^\mu\|,$$

$$\bar{\bar{\gamma}}_n = \|(I - Q_n)A\|,$$

$$\underline{\gamma}_n = \inf_{z_n \in F_n} \frac{\|z_n\|}{\|(Q_n A)^+ Q_n z_n\|},$$

$$\underline{\underline{\gamma}}_n = \inf_{z_n \in F_n} \frac{\|A^* z_n\|}{\|z_n\|}.$$

Siis valides parameetri $n = n(\delta)$ nii, et

$$n(\delta) \rightarrow \infty, \quad \delta \underline{\underline{\gamma}}_{n(\delta)} \rightarrow 0$$

veahinnangust

$$\|u_n - u_*\| \leq \|(I - P_n)u_*\| + \frac{\delta}{\underline{\underline{\gamma}}_n}, \quad (59)$$

saame koonduvuse $u_{n(\delta)} \rightarrow u_*$, kui $\delta \rightarrow 0$. Kui $u_* \in \mathbf{R}(A^*A)^\mu$, $\mu > 0$, saame optimaalset järku veahinnangu $O(\bar{\gamma}_{n(\delta)}(\mu))$, kui valime parameetri $n(\delta)$ apriorioorselt nii, et $\underline{\underline{\gamma}}_{n(\delta)} \bar{\gamma}_{n(\delta)}(\mu) \sim \delta$.

Edasi vaatleme Hilberti ruumi F^- , mis sisaldab ruumi F ning tema nõrka topoloogiat. See tähendab, et ruumi F^- funktsioonid on väiksema siledusega kui ruumi F funktsioonid. Näiteks on Sobolevi ruumid $F = H^t(\Omega)$, $F^- = H^{t-p}(\Omega)$, kus $t \in \mathbf{R}$, $p > 0$. Diskretisatsiooniparameetriks h_n valime

$$h_n = C\sigma^n, \quad \text{kus } \sigma \in (0, 1).$$

Töös [7] kasutatakse järgmisi eeldusi.

Eeldus 3.1. *Operaatori A^* sileduse omadus:*

$$\|A^*\|_{F^- \rightarrow H} \leq C;$$

Eeldus 3.2. *Ruumi F_n aproksimatsiooniomadus:*

$$\|I - Q_n\|_{F \rightarrow F^-} \leq Ch_n^p, \quad p > 0.$$

Neid eeldusi kasutades, saame hinnata

$$\overline{\overline{\gamma}}_n = \|A^*(I - Q_n)\|_{F \rightarrow H} \leq \|A^*\|_{F^- \rightarrow H} \|I - Q_n\|_{F \rightarrow F^-} \leq \overline{\overline{C}} h_n^p, \quad \overline{\overline{C}} = \text{const.} \quad (60)$$

Eeldus 3.3. *Pöördvõrratus: kehtigu mingi $\tilde{p} > 0$ korral*

$$\sup_{z_n \in F_n} \frac{\|z_n\|}{\|A^* z_n\|} \leq C h_n^{-\tilde{p}}.$$

Selle eelduse korral

$$\underline{\underline{\gamma}}_n \geq \underline{\underline{\gamma}}_n \geq \underline{\underline{c}} h_n^{\tilde{p}}, \quad \underline{\underline{c}} > 0. \quad (61)$$

Eeldame, et $p = \tilde{p}$. Siis kehtib võrratus

$$\frac{\overline{\overline{\gamma}}_n}{\underline{\underline{\gamma}}_n} \leq \frac{\overline{\overline{\gamma}}_n}{\underline{\underline{\gamma}}_n} \leq \frac{\overline{\overline{C}}}{\underline{\underline{c}}}. \quad (62)$$

See tingimus garanteerib optimaalset järku koonduvuse. Valides parameetri nii, et $h_{n(\delta)}^{(1+2\mu)p} \sim \delta$, saame veahinnangust $\|u_n - u_*\| \leq C(h_n^{2\mu p} + h_n^{-p}\delta)$ optimaalset järku $O(\delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}})$ koonduvuse. Seda meetodit on raske praktikas rakendada, kuna suurus μ peab olema teatud aprioriselt. Kui diskretisatsiooniparameeter valida hälbeprintsipiibist, kui esimene arvudest $n = 1, 2, \dots$, mille korral

$$\|A u_n - f_\delta\| \leq \tau \delta, \quad \tau > 1. \quad (63)$$

siis võib formuleerida järgmise koonduvusteoreemi.

Teoreem 3.8. *Olgu $p = \tilde{p}$. Valime $\tau > \frac{\overline{\overline{C}}}{\underline{\underline{c}}}$, kus konstandid $\overline{\overline{C}}$, $\underline{\underline{c}}$ on määratud hinnangutes (60) ja (61). Siis parameetri valik (63) on teostatav iga $\delta \leq \frac{\|f\|}{\|\tau+1\|}$ ning leidub aset koondumine $u_{n(\delta)} \rightarrow u_*$ protsessis $\delta \rightarrow 0$. Kui $u_* \in \mathbf{R}(A^*A)^\mu$, $\mu \leq \frac{1}{2}$, siis saame optimalset järku täpsuse $O(\delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}})$.*

Analoogilised tulemused on artiklis [7] tõestatud ka mittelineaarsete ülesannete jaoks.

4 Monotoonse vea reegel parameetri valikuks vähima vea meetodis

4.1 Monotoonse vea reegli kirjeldus

Hiljuti on mitmetes regularisatsioonimeetodites regularisatsiooniparameetri $n = n(\delta)$ valikul traditsioonilise hälbeprintsibi asemel edukalt kasutatud monotoonse vea reeglit (vt. [2]). Monotoonse vea reegli põhjendamiseks on vajalik, et antud regularisatsioonimeetodis regularisatsiooniparameetri kasvades lähislahendi viga väheneks monotoonselt, kui lähteandmed on täpsed ($f = f_\delta$). Ligikaudsete andmete juhul otsitakse regularisatsiooniparameetrit ja veanivood seostavat tingimust, mille täidetuse korral on garanteeritud, et antud parameetrile vastava lähislahendi viga on väiksem kui väiksemale parameetrile vastava lähislahendi viga. Projektsioonimeetodi korral monotoonse vea reeglis valitakse suurim parameeter $n(\delta) = n_{ME}$, mille korral see tingimus on täidetud:

$$\|u_n - u_*\| \leq \|u_{n-1} - u_*\|, \quad n = 1, 2, \dots, n_{ME}.$$

4.2 Vea monotoonsuse tingimus

Näitame, et vähima vea meetodis täpsete lähteandmete korral on lähislahendite vea kahanemine projektsiooniruumi mõõtme kasvades garanteeritud projektsiooniruumide jada sellisel osajadal, kus iga eelnev projektsiooniruum sisaldub järgmises:

$$F_n \subset F_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (64)$$

Ligikaudsete andmete juhul tuletame lähislahendite vigade monotoonsset vähenemist garanteeriva tingimuse, mis võimaldab formuleerida monotoonse vea reegli projektsiooniruumi mõõtme valikuks.

Teoreem 4.1. *Rahuldagu vähima vea meetodi alamruumid tingimust (64). Siis vastavate lähislahendite normide jaoks kehtib*

$$\|u_n\| \leq \|u_{n+1}\| \quad (\forall n \in N). \quad (65)$$

Tõestus. Võrratusest

$$\mathbf{N}(Q_n A) = (\mathbf{R}(Q_n A)^*)^\perp = (\mathbf{R}(A^* Q_n))^\perp = (A^* F_n)^\perp$$

järeldub, et vähima vea meetodi abil leitud lähislahend $u_n \in A^*F_n$ on võrrandi $Q_n(Au - f_\delta) = 0$ miinimaalse normiga lahend. Tõepoolest, võrrandi $Q_n(Au - f_\delta) = 0$ lahendid esitatakse kujul $u = u_n + u'_n$, kus $u_n \in A^*F_n$ ja $u'_n \in (A^*F_n)^\perp$ ning lahendite normi saab hinnata järgmiselt: $\|u_n + u'_n\|^2 = \|u_n\|^2 + \|u'_n\|^2 \geq \|u_n\|^2$. Eeldusest (64) järeldub, et $u_{n+1} \in A^*F_{n+1}$ on võrrandite $Q_n(Au - f_\delta) = 0$ ja $Q_{n+1}(Au - f_\delta) = 0$ lahend, seega $\|u_n\| \leq \|u_{n+1}\|$.

Teoreem 4.2. *Rahuldagu vähima vea meetodi alamruumid tingimust (64). Siis vähima vea meetodi abil leitud lähislahendi $u_n = A^*v_n$ ($v_n \in F_n$) viga väheneb monotoonselt, kui*

$$\frac{(v_n - v_{n-1}, f_\delta)}{2\|v_n - v_{n-1}\|} > \delta. \quad (66)$$

Seejuures täpsete andmete korral

$$\|u_n - u_*\| \leq \|u_{n-1} - u_*\| \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (67)$$

ning ligikaudsete andmete korral

$$\|u_n - u_*\| < \|u_{n-1} - u_*\| \quad (n = 1, 2, \dots, n_{ME}). \quad (68)$$

Tõestus. Vaatleme normide vahet

$$\|u_{n-1} - u_*\|^2 - \|u_n - u_*\|^2 = \|u_{n-1}\|^2 - \|u_n\|^2 - 2(u_{n-1} - u_n, u_*).$$

Kuna vähima vea meetodi korral lähislahend avaldub kujul $u_n = A^*v_n$ ning rahuldab tingimust $(Au_n - f_\delta, v_n) = 0$ iga $v_n \in F_n$ korral, siis kirjutades lähislahendi normi kujul

$$\begin{aligned} \|u_n\|^2 &= \|A^*v_n\|^2 = (A^*v_n, A^*v_n) = (AA^*v_n, v_n) = \\ &= (AA^*v_n - f_\delta + f_\delta, v_n) = (Au_n - f_\delta, v_n) + (f_\delta, v_n) = (f_\delta, v_n), \end{aligned}$$

saame

$$\begin{aligned} \|u_{n-1} - u_*\|^2 - \|u_n - u_*\|^2 &= (f_\delta, v_{n-1}) - (f_\delta, v_n) - 2(v_{n-1} - v_n, Au_*) = \\ &= (v_n - v_{n-1}, f_\delta + 2(f - f_\delta)) \geq \\ &\geq (v_n - v_{n-1}, f_\delta) - 2\|v_n - v_{n-1}\|\|f - f_\delta\| \geq \\ &\geq 2\|v_n - v_{n-1}\| \left(\frac{(v_n - v_{n-1}, f_\delta)}{2\|v_n - v_{n-1}\|} - \delta \right), \end{aligned}$$

millest järeldub teoreemi väidete (67) ja (68) kehtivus.

4.3 Parameetri n valik monotoonse vea reegli abil

Rahuldagu alamruumid F_n tingimust (64). Lähislahend avaldub kujul $u_n = A^*v_n$ ($v_n \in F_n$). Arvutamisel leiame kõigepealt elemendi $v_n \in F_n$. Teoreemist 4.2 järeldub, et on võimalik formuleerida monotoonse vea reegel projektsiooniruumi mõõtme valikuks.

Monotoonse vea reegel (ME). Parameetriks $n_{ME} = n(\delta)$ valime esimene arvudest $n = 1, 2, \dots$, mille korral kehtib

$$d_{ME}(n) := \frac{(v_{n+1} - v_n, f_\delta)}{2\|v_{n+1} - v_n\|} \leq \delta. \quad (69)$$

4.4 Monotoonse vea reegli võrdlus hälbeprintsiibiga

Ligikaudsete andmete korral on vähima vea meetodis projektsiooniruumi mõõtme valikuks seni praktilise reeglina kasutatud hälbeprintsiipi, mille korral regularisatsiooni-parameetriks on esimene arvudest $n_D = 1, 2, \dots$, mille korral $\|Au_{n_D} - f_\delta\| \leq b\delta$, kus $b > 1$ on küllalt suur konstant, mis peab olema suurem raskesti hinnatavast suurusest (vt. teoreem 3.6). Võrdleme monotoonse vea reeglit ja hälbeprintsiipti jaoks.

Lemma 4.1. *Olgu vähima vea meetodi alamruumid rahuldavad tingimust (64). Siis*

$$0 \leq d_{ME}(n) \leq \frac{1}{2}\|Au_n - f_\delta\| \quad (\forall n \in N). \quad (70)$$

Tõestus. Kasutades teoreemis 4.2 saadud võrrandit $\|u_n\|^2 = (v_n, f_\delta)$, esitame funktsiooni $d_{ME}(n)$ kujul

$$d_{ME}(n) = \frac{\|u_{n+1}\|^2 - \|u_n\|^2}{2\|v_{n+1} - v_n\|}. \quad (71)$$

Teoreemi 4.1 võrratusest (65) järeldub, et $d_{ME}(n) \geq 0$. Elemendid u_n ja u_{n+1} on võrrandi $Q_n(Au - f_\delta = 0)$ lahendid. Seega võime kirjutada, et $(Au_{n+1} - f_\delta, v_n) = 0$ ja $(Au_n - f_\delta, v_n) = 0$, kust tuleb võrdus $(A(u_{n+1} - u_n), v_n) = 0$. Seose

$$(Au_n, v_{n+1} - v_n) = (AA^*v_n, v_{n+1} - v_n) = (v_n, A(u_{n+1} - u_n))$$

abil saame, et $(Au_n, v_{n+1} - v_n) = 0$. Seega funktsiooni $d_{ME}(n)$ võime kirjutada kujul

$$d_{ME}(n) = \frac{(Au_n - f_\delta, v_n - v_{n+1})}{2\|v_n - v_{n+1}\|},$$

millest saamegi hinnangu (70).

Lemma hinnangust (70) järeldub, et $n_{ME} \leq n_{D,2}$, kus parameeter $n_{D,2}$ on valitud hälbeprintsiiibi järgi, kus $b = 2$. Paneme tähele, et vähima vea meetodis hälbeprintsiiibi korral konstant b peab olema piisavalt suur: $b > (1 + \gamma^2)^{m/2}$, kus γ ja m rahuldavad teoreemi (3.6) tingimusi (50) ja (51).

4.5 Monotoonse vea reegli regulariseerimisomadused

Teoreem 4.3. *Olgu $N(A) = N(A^*) = \{0\}$ ja alamruumide jada F_n ($n = 1, 2, \dots$) piirte ruumis F , kusjuures*

$$F_n \subset F_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (72)$$

Kui parameeter n on valitud monotoonse vea reegli järgi, siis vähima vea meetod on regularisatsioonimeetod:

$$\|u_{n_{ME}(\delta)} - u_*\| \rightarrow 0 \quad (\delta \rightarrow 0). \quad (73)$$

Tõestus. Teame, et vähima vea meetodis täpsete andmete korral leidub aset koondumine (vt. teoreemi 3.3)

$$u_n = P_n u_* \rightarrow u_*, \text{ kui } n \rightarrow \infty \quad (74)$$

ning ligikaudsete andmete korral kehtib veahinnang:

$$\|u_n - u_*\| \leq \|P_n u_* - u_*\| + \delta \chi_n^* \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (75)$$

Monotoonse vea reegluga indeksi $n_{ME}(\delta)$ valikul on kaks võimalust: jada on tõkestatud $n_{ME}(\delta) = n_* < \infty$ või jada $n_{ME}(\delta) \rightarrow \infty$. Vaatleme esimest juhtu, see on võimalik parajasti siis, kui täpne lahend kuulub projektsiooniruumi $u_* \in H_{n_*}$ ehk $u_* = u_{n_*} = P_{n_*} u_*$. Seosest $\lim_{\delta \rightarrow 0} \chi_{n_{ME}(\delta)}^* = \chi_{n_*}^* < \infty$ ja hinnangust (76), juhul kui $n = n_{ME}$, järeldub väide (73).

Vaatleme nüüd põhijuhtu, kui $n_{ME}(\delta) \rightarrow \infty$ protsessis $\delta \rightarrow 0$. Olgu $n_{apr}(\delta)$ suvaline indeks, mis rahuldab parameetri n aprioorse valiku tingimust:

$$n_{apr}(\delta) \rightarrow \infty, \quad \delta \chi_{n_{apr}(\delta)}^* \rightarrow 0 \quad (\delta \rightarrow 0). \quad (76)$$

Hinnangu (75) tõttu $n = n_{apr}(\delta)$ korral, saame koonduvust $\|u_{n_{apr}(\delta)} - u_*\| \rightarrow 0$ protsessis $\delta \rightarrow 0$. Eelduse (72) tõttu jada χ_n^* monotoonselt kasvab:

$$\chi_n^* = \sup_{z_n \in F_n} \frac{\|z_n\|}{\|A^* z_n\|} \leq \sup_{z_n \in F_{n+1}} \frac{\|z_n\|}{\|A^* z_n\|} = \chi_{n+1}^* \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Kui $n_{ME}(\delta) \geq n_{apr}(\delta)$, siis saame vea monotoonsuse omaduse (68) põhjal $\|u_{n_{ME}(\delta)} - u_*\| \leq \|u_{n_{apr}(\delta)} - u_*\| \rightarrow 0$ protsessis $\delta \rightarrow 0$ ja teoreemi väide (73) kehtib. Olgu nüüd $n_{ME}(\delta) < n_{apr}(\delta)$. Täpsetele andmetele vastav esimene liige koondub $\|P_{n_{ME}(\delta)}u_* - u_*\| \rightarrow 0$ koonduvuse $n_{ME}(\delta) \rightarrow \infty$ tõttu. Veahinnangu (75) teise liikme koonduvus $\delta\chi_{n_{ME}(\delta)}^* \rightarrow 0$ ($\delta \rightarrow 0$) tuleneb koonduvusest $\delta\chi_{n_{apr}(\delta)}^* \rightarrow 0$ ($\delta \rightarrow 0$) tingimuses (76) ning võrratusest $\chi_{n_{ME}(\delta)}^* \leq \chi_{n_{apr}(\delta)}^*$, mis järeldub võrratustest $n_{ME}(\delta) < n_{apr}(\delta)$ ning sellest, et jada χ_n^* monotoonselt kasvab.

5 Numbrilised tulemused

5.1 Mudelülesande kirjeldus

Vaatleme funktsiooni f l-järku differentseerimisülesannet, kus võrrandi (1) operaatoriks on Volterra operaator $A : L_2(a, b) \rightarrow L_2(a, b)$. Võrrand (1) saab kuju

$$Au(t) \equiv \int_a^t \frac{(t-s)^{l-1}}{(l-1)!} u(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b]. \quad (77)$$

Kui $t = a$, siis integreerimisvahemik koosneb ainult ühest punktist. Seega $Au(a) = 0$, iga $u \in L_2(a, b)$ korral. Järelikult tingimus $f(a) = 0$ on tarvilik võrrandi (1) lahendi eksisteerimiseks. Osutub, et piisavaks tingimuseks on $f \in W_2^l$, $f^{(k)}(a) = 0$, $k = 0, \dots, l$, kus W_2^l on Sobolevi ruum. Antud ülesande lahendiks on

$$u_*(t) = f^{(l)}(t). \quad (78)$$

Operaatori A kaasoperaatoriks on

$$A^*(t) = \int_t^b \frac{(s-t)^{l-1}}{(l-1)!} v(s) ds. \quad (79)$$

Kui $t = b$, siis integreerimisvahemin koosneb ainult punktist ühest punktist. Seega $A^*v(b) = 0$ iga $v \in L_2(a, b)$ korral. Lähislahendit otsitakse kujul

$$u_n = \sum_{i=1}^n c_i A^* \psi_i, \quad (80)$$

kus $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ on ruumi $L_2(a, b)$ baas. Järelikult $u_n(b) = 0$ ning on hea lähislahend lahendile u_* ainult juhul, kui $u_*(b) = 0$.

5.2 Ülesande diskretiseerimine vähima vea meetodiga

Lõigul $[a, b]$ valime punktide jaotuse

$$a = t_1 < t_2 < \dots < t_m < t_{m+1} = b,$$

kus

$$t_i = a + \frac{(i-1)(b-a)}{m}, \quad i = 1, \dots, m+1. \quad (81)$$

Baasfunktsioonideks on võetud tükiti kontstantsed splineid ruumist $S_{0,1}(\Delta_m)$, kus

$$\psi_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{kui } t \in [t_i, t_{i+1}] \\ 0, & \text{kui } t \notin [t_i, t_{i+1}] \end{cases}$$

Siis funktsioonid $A^*\psi_i$, $i = 1, \dots, m$ on kujul

$$A^*\psi_i(t) = \begin{cases} \frac{(t_{i+1}-t)^l}{l!} - \frac{(t_i-t)^l}{l!}, & t \in [a, t_i] \\ \frac{(t_{i+1}-t)^l}{l!}, & t \in (t_i, t_{i+1}) \\ 0, & t \in [t_{i+1}, b] \end{cases} \quad (82)$$

Kordajate $\{c_1, \dots, c_m\}$ leidmiseks on vaja leida suurused $(B_m)_{ij} = (A^*\psi_i, A^*\psi_j)$ ja $(b_m)_j = (f_\delta, \psi_j)$, kui $i, j = 1, \dots, m$.

Arvutusvalemid suuruste $(B_m)_{ij}$ leidmiseks:

1. kui $i = j$, siis

$$\begin{aligned} (B_m)_{ij} &= (A^*\psi_i(t), A^*\psi_j(t)) = \int_a^b A^*\psi_i(t)A^*\psi_j(t)dt = \\ &= \int_a^{t_i} \left(\frac{(t_{i+1}-t)^l}{l!} - \frac{(t_i-t)^l}{l!} \right)^2 dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{(t_{i+1}-t)^{2l}}{l!^2} dt + \int_{t_{i+1}}^b 0 dt; \end{aligned} \quad (83)$$

2. kui $i > j$, siis

$$\begin{aligned} (B_m)_{ij} &= (A^*\psi_i(t), A^*\psi_j(t)) = \int_a^b A^*\psi_i(t)A^*\psi_j(t)dt = \\ &= \int_a^{t_j} \left(\frac{(t_{i+1}-t)^l}{l!} - \frac{(t_i-t)^l}{l!} \right) \left(\frac{(t_{j+1}-t)^l}{l!} - \frac{(t_j-t)^l}{l!} \right) dt + \\ &+ \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left(\frac{(t_{i+1}-t)^l}{l!} - \frac{(t_i-t)^l}{l!} \right) \frac{(t_{j+1}-t)^l}{l!} dt + \int_{t_{j+1}}^b 0 dt; \end{aligned} \quad (84)$$

3. kui $i < j$, siis

$$\begin{aligned} (B_m)_{ij} &= (A^*\psi_i(t), A^*\psi_j(t)) = \int_a^b A^*\psi_i(t)A^*\psi_j(t)dt = \\ &= \int_a^{t_i} \left(\frac{(t_{i+1}-t)^l}{l!} - \frac{(t_i-t)^l}{l!} \right) \left(\frac{(t_{j+1}-t)^l}{l!} - \frac{(t_j-t)^l}{l!} \right) dt + \\ &+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{(t_{i+1}-t)^l}{l!} \left(\frac{(t_{j+1}-t)^l}{l!} - \frac{(t_j-t)^l}{l!} \right) dt + \int_{t_{i+1}}^b 0 dt. \end{aligned} \quad (85)$$

Element $(b_m)_j$ avaldub valemiga

$$(b_m)_j = (f_\delta, \psi_j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} f_\delta(t) dt. \quad (86)$$

Märkus 5.1. Töös [4] on näidatud, et kui valida parameetrit $n = n_D$ hälbeprintsibi järgi, siis konstant b peab olema piisavalt suur. Näiteks, ülesandes (78) konstant $b > 1 + 2\sqrt{3}$, kui $l = 1$. Juhul, kui $u_*'' \in L_2(0, 1)$, siis kehtib veahinnang

$$\|u_n - u_*\| \leq \frac{\|u_*''\|}{8n^2} + 2\sqrt{3}n\delta.$$

5.3 Projektsiooniruumi dimensiooni valik

Fikseerime diskretiseerimisparameetri

$$m = 2^{n-1} \quad (87)$$

ning näitame, et kehtib tingimus $F_n \subset F_{n+1}$, ($n = 1, 2, \dots$); mis garanteerib lähislahendi u_n vea monotoonsuse juhul $n \leq n_{ME}$. Projektsiooniruumi F_{n+1} dimensioon on $2m$. Kui tükiti-konstantsete splineide

$$\psi_{1_i}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_{1_i}, t_{1_{i+1}}] \\ 0, & t \notin [t_{1_i}, t_{1_{i+1}}] \end{cases} \quad (88)$$

sõlmed on määratud seosega

$$t_{1_i} = a + \frac{(i-1)(b-a)}{2m}, \quad (i = 1, \dots, 2m+1),$$

võib projektsiooniruumi F_n baasfunktsioone kirjutada kujul

$$\psi_i = \psi_{1_{2i-1}} + \psi_{1_{2i}}, \quad (i = 1, \dots, m), \quad (89)$$

mis tähendab, et $F_n \subset F_{n+1}$ iga $n = 1, 2, \dots$ korral.

5.4 Arvutusvalemid vigade ja hälvete jaoks

Toome sisse valemid, mida hakkame kasutama funktsiooni

$$d_{ME}(n) := \frac{(v_{n+1} - v_n, f_\delta)}{2 \|v_{n+1} - v_n\|}.$$

väärtuste arvutamiseks. Tähistades elementi $v_{n+1} \in F_{n+1}$ kordajaid $\{c1_i, \dots, c1_{2m}\}$, saame

esituse $v_{n+1} = \sum_{i=1}^{2m} c1_i \psi_{1_i}$. Kuna võrduse (90) tõttu

$$v_n = \sum_{i=1}^m c_i \psi_i = \sum_{i=1}^m c_i (\psi_{1_{2i-1}} + \psi_{1_{2i}}),$$

siit saame

$$v_{n+1} - v_n = \sum_{i=1}^m [(c1_{2i-1} - c_i) \psi_{1_{2i-1}} + (c1_{2i} - c_i) \psi_{1_{2i}}], \quad (90)$$

kust tuleb

$$(v_{n+1} - v_n, f_\delta) = \sum_{i=1}^m (c1_{2i-1} - c_i) \int_{t1_{2i-1}}^{t1_{2i}} f_\delta(t) dt + \sum_{i=1}^m (c1_{2i} - c_i) \int_{t1_{2i}}^{t1_{2i+1}} f_\delta(t) dt \quad (91)$$

ning

$$\begin{aligned} \|v_{n+1} - v_n\|^2 &= \sum_{i=1}^m \left(\int_{t1_{2i-1}}^{t1_{2i}} + \int_{t1_{2i}}^{t1_{2i+1}} \right) (v_{n+1}(t) - v_n(t))^2 dt = \\ &= \frac{(b-a)}{2m} \sum_{i=1}^m [(c1_{2i-1} - c_i)^2 + (c1_{2i} - c_i)^2]. \end{aligned} \quad (92)$$

Kasutades valemeid (78) ja (82), arvutame lähilahendi vea

$$\begin{aligned} \|u_n - u_*\|^2 &= \int_a^b u_n^2(t) dt + \int_a^b u_*^2(t) dt - 2 \int_a^b u_n(t) u_*(t) dt = \\ &= \sum_{i=1}^m c_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_\delta(t) dt + \int_a^b \left(\frac{d^l f(t)}{dt^l} \right)^2 dt - \\ &- 2 \sum_{i=1}^m c_i \left[\int_a^{t_i} \left(\frac{(t_{i+1} - t)^l}{l!} - \frac{(t_i - t)^l}{l!} \right) u_*(t) dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{(t_{i+1} - t)^l}{l!} u_*(t) dt \right]. \end{aligned} \quad (93)$$

Kasutades valemi (77), arvutame hälvet

$$\begin{aligned} \|Au_n - f_\delta\|^2 &= \int_a^b \left[\int_a^t \frac{(t-s)^{l-1}}{(l-1)!} \sum_{i=1}^m c_i A^* \psi_i(s) ds - f_\delta(t) \right]^2 dt = \\ &= \sum_{k=1}^m \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\int_a^t \frac{(t-s)^{l-1}}{(l-1)!} \sum_{i=1}^m c_i A^* \psi_i(s) ds - f_\delta(t) \right]^2 dt = \\ &= \sum_{k=1}^m \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\left(\sum_{j=1}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} + \int_{t_k}^t \right) \frac{(t-s)^{l-1}}{(l-1)!} \sum_{i=1}^m c_i A^* \psi_i(s) ds - f_\delta(t) \right]^2 dt. \end{aligned} \quad (94)$$

Hälbe ligikaudse väärtuse leidmiseks kasutame punkte

$$t_{i+\frac{1}{2}} = \frac{t_i + t_{i+1}}{2}, \quad (i = 1, \dots, m)$$

ning saame

$$\begin{aligned} \|Au_n - f_\delta\|^2 \approx & \frac{(b-a)}{m} \sum_{k=1}^m \left[\frac{(b-a)}{m} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(t_{k+\frac{1}{2}} - t_{j+\frac{1}{2}})^{l-1}}{(l-1)!} \sum_{i=1}^m c_i A^* \psi_i(t_{j+\frac{1}{2}}) + \right. \\ & \left. + \frac{(b-a)}{2m} \frac{(t_{k+\frac{1}{2}} - t_k)^{l-1}}{(l-1)!} \sum_{i=1}^m c_i A^* \psi_i \left(\frac{t_{k+\frac{1}{2}} + t_k}{2} \right) - f_\delta(t_{k+\frac{1}{2}}) \right]^2. \end{aligned} \quad (95)$$

5.5 Programmi üldine iseloomustus

Mudelülesannete lahendamiseks on *Mathcad* keskkonnas koostatud protseduurid, mille abil leitakse avaldise (80) kordajad $\{c_1, \dots, c_n\}$, lähislahendi viga $\|u_n - u_*\|$, hälbed $\|Au_n - f\|$ ning parameetrid n_{opt} , n_{ME} . Vajalikud sisendandmed protseduurides on täpne lahend u_* , diferentseerimisülesande järk l , vabaliikme veatase δ , integreerimisvahemiku algus- ja lõpppunktid a , b ning diskretiseerimistase m . Järgnevas toome vastavate protseduuride lühikirjelduse.

Võrk. Protseduur *Võrk* on koostatud seosega (81) määratud sõlmede t_i , ($i = 1, \dots, m$) leidmiseks.

Kordajad. Protseduur *Kordajad* on koostatud lähislahendi u_n avaldises (80) sisalduvate ja seosega (44) määratud kordajate c_i , $i = 1, \dots, m$ leidmiseks. Protseduur kasutab valemeid (83)-(86).

nME. Protseduur *nME* on koostatud monotoonse vea reegli (69) abil saadud parameetri n_{ME} leidmiseks. Protseduur kasutab valemeid (91)-(92).

Viga_nME. Protseduur *viga_nME* on koostatud valemiga (92) arvutatava vea $\|u_{n_{ME}} - u_*\|$ leidmiseks.

Viga_nOPT. Protseduur *viga_nOPT* on koostatud valemiga (92) arvutatava vea $\|u_{n_{opt}} - u_*\|$ leidmiseks.

AA. Protseduur *AA* on koostatud seosega (82) funktsioonide $A^* \psi_i$, $i = 1, \dots, m$ leidmiseks.

Halve_nME. Protseduur *halve_nME* on koostatud valemiga (95) arvutatava vea $\|Au_{n_{ME}} - f_\delta\|$ leidmiseks.

Halve_nOPT. Protseduur *halve_nOPT* on koostatud valemiga (95) arvutatava vea $\|Au_{n_{OPT}} - f_\delta\|$ leidmiseks.

Kasutatud protseduuride täielik tekst on toodud lisa 1.

5.6 Näiteülesannete numbrilised tulemused

Numbriliste tulemuste saamiseks vaatleme diferentseerimisülesandeid Volterra integraalvõrrandi kujul

$$Au(t) \equiv \int_0^t \frac{(t-s)^{l-1}}{(l-1)!} u(s) ds = f(t), \quad t \in [0, 1]. \quad (96)$$

Igal ülesandel on teada täpne lahend u_* ning vabaliige f . Seejuures võrrandi (96) parem pool f rahuldab tingimust $f(0) = 0$, mis on tarvilik, et sellel võrrandil leiduks lahend, samuti rahuldab tingimust $f^l(1) = 0$, millest järeldub, et $u_*(1) = 0$ ning lähislahend u_n on hästi aproksimeeritav funktsioonide $A^*\psi_1, \dots, A^*\psi_n$ lineaarkombinatsiooniga.

Märkus 5.2. Kui tingimus $u_*(1) = 0$ pole täidetud, võime teadoleva $u_*(1) = q_0$ korral teha võrrandis (96) muutujavahetuse $\bar{u} = u - q_0$.

Igas ülesandes on täpsele vabaliikmele lisatud häire veatasemega δ , kus δ omandab väärtusi hulgast

$$\{10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}\}.$$

Sõlmpunktide arv $m = m(n)$ on leitud seose $m = 2^n - 1$ põhjal.

Ülesannete järel on toodud vigade $\|u_n - u_*\|$ ja hälvete $\|Au_n - f_\delta\|$ graafikud iga δ (graafikute legendis tähis d) korral ning numbrilised tulemused koondtabelina. Graafikute horisontaalteljel on toodud sõlmpunktide arv m . Vastavalt igale diskretiseerimistasemele on näidatud vead ja hälbed. Seejuures arvutusi on tehtud diskretiseerimistasemetel $n = 1, 2, \dots, n_{opt}$, kus n_{opt} on esimene indks n , mille korral vea monotoonse kahanemise tingimus

$$\|u_n - u_*\| \leq \|u_{n+1} - u_*\|.$$

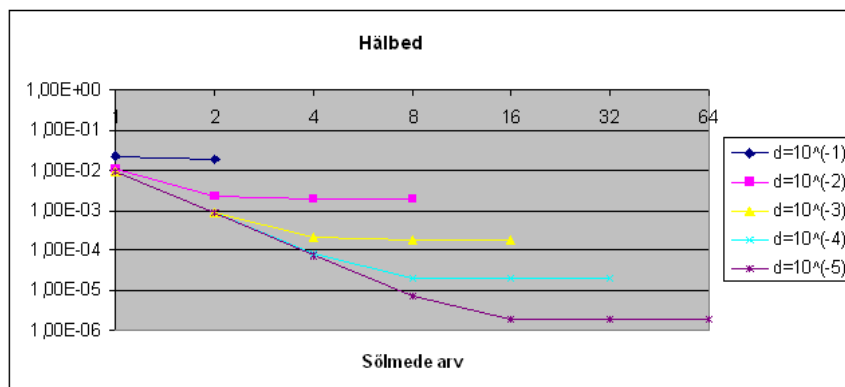
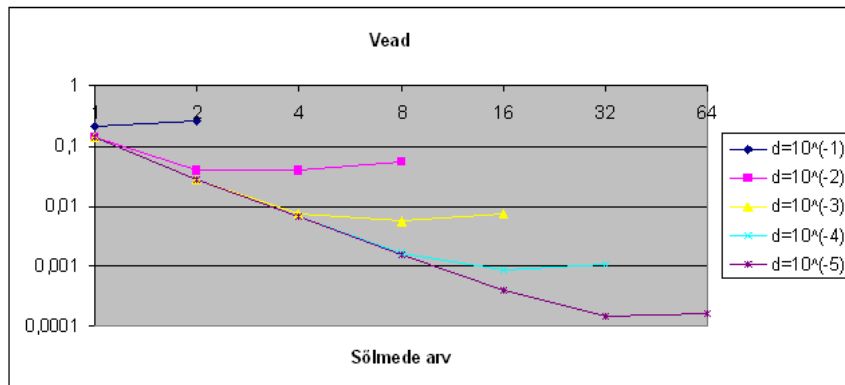
pole täidetud. Koondtabelis on esitatud igale veatasemele δ vastavad optimaalne parameeter $m_{opt} = 2^{n_{opt}-1}$ ning leitud monotoonse vea järgi parameeter m_{ME} , vead

$V_{n_{opt}} = \|u_{n_{opt}} - u_*\|$ ning $V_{n_{ME}} = \|u_{n_{ME}} - u_*\|$, hälbed $H_{n_{opt}} = \|Au_{n_{opt}} - f_\delta\|$ ning $H_{n_{ME}} = \|Au_{n_{ME}} - f_\delta\|$. Kahes viimases veerus on arvatatud suurused $b_1 = H_{n_{opt}}/\delta$ ja $b_2 = H_{n_{opt}-1}/\delta$. Kui diskretiseerimistase $n = n(\delta)$ oleks valitud hälbeprintsiibiga kui esimene n , mille korral $\|Au_n - f_\delta\| \leq b\delta$, $b \in (b_1, b_2)$, siis sel juhul on garanteeritud, et $\|u_{n_{D,b}} - u\| = \|u_{n_{opt}} - u\|$. Juhul $n_{opt} = 1$ jätame b_2 esitamata.

Näiteülesannetena on vaadeldud esimest (ül.(1),(2)), teist (ül.(3),(4)) ja kolmandat (ül.(5),(6)) järku diferentseerimisülesanded, kus $f(0) = 0$ ja $u_*(1) = 0$. Erandiks on esimest järku diferentseerimisülesanne (7), kus $f^{(l)}(1) \neq 0$, mis tähendabki, et $u_*(1) \neq 0$.

5.6.1 Ülesanne 1

$$u_*(t) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right), \quad f(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right), \quad l = 1$$

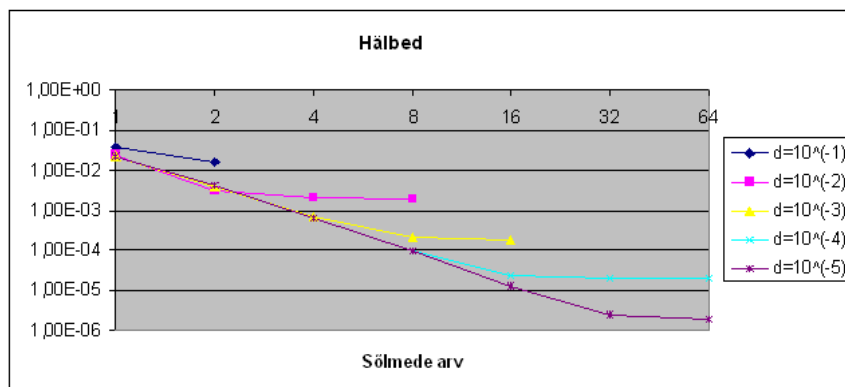
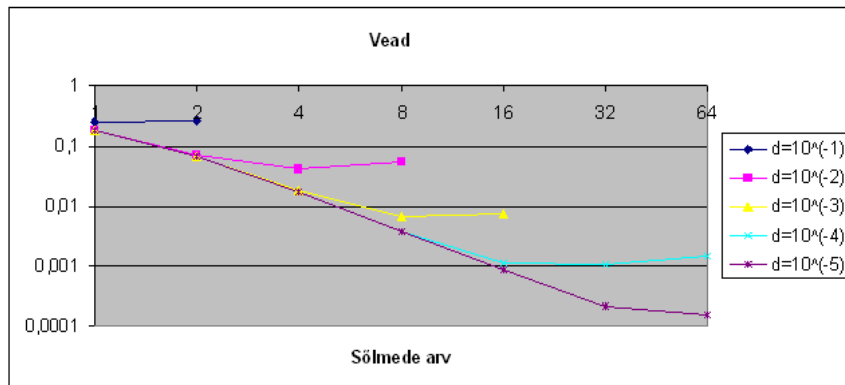


Koondtabel 1

| δ | m_{opt} | m_{ME} | $V_{n_{opt}}$ | $V_{n_{ME}}$ | $H_{n_{opt}}$ | $H_{n_{ME}}$ | b_1 | b_2 |
|-----------|-----------|----------|---------------|--------------|---------------|--------------|---------|---------|
| 10^{-1} | 1 | 1 | .218 | .218 | .215e-1 | .215e-1 | 2.16e-1 | |
| 10^{-2} | 4 | 1 | .377e-1 | .134 | .190e-2 | .103e-1 | 1.91e-1 | 2.16e-1 |
| 10^{-3} | 8 | 2 | .550e-2 | .275e-1 | .190e-3 | .907e-3 | 1.90e-1 | 2.09e-1 |
| 10^{-4} | 16 | 8 | .844e-3 | .168e-2 | .190e-4 | .202e-4 | 1.90e-1 | 2.03e-1 |
| 10^{-5} | 32 | 16 | .144e-3 | .407e-3 | .189e-5 | .200e-5 | 1.89e-1 | 2.00e-1 |

5.6.2 Ülesanne 2

$$u_*(t) = \frac{1}{3} \exp(t^2 - 1)(2t^2 + 1) - 1, \quad f(t) = \left(\frac{1}{3} \exp(t^2 - 1) - 1 \right) t, \quad l = 1$$

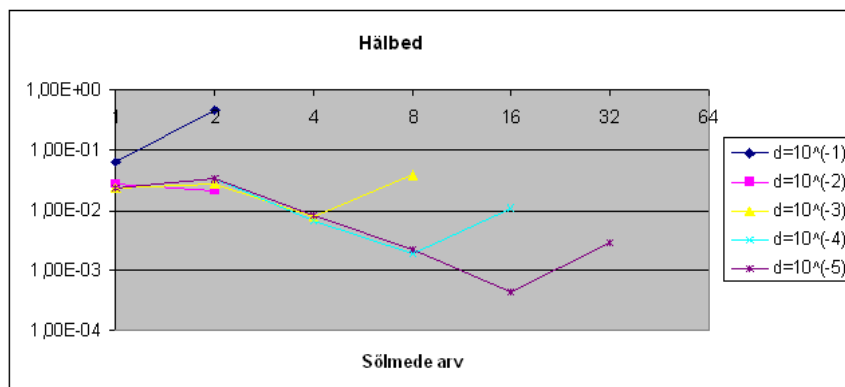
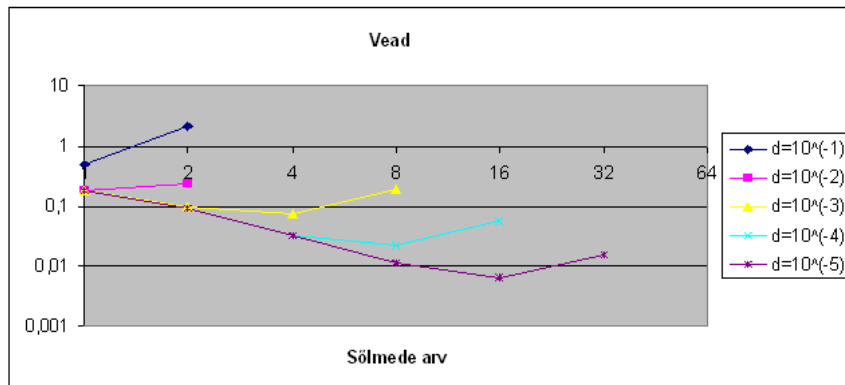


Koondtabel 2

| δ | m_{opt} | m_{ME} | $V_{n_{opt}}$ | $V_{n_{ME}}$ | $H_{n_{opt}}$ | $H_{n_{ME}}$ | b_1 | b_2 |
|-----------|-----------|----------|---------------|--------------|---------------|--------------|---------|---------|
| 10^{-1} | 1 | 1 | .248 | .248 | .352e-1 | .352e-1 | 3.52e-1 | |
| 10^{-2} | 4 | 2 | .409e-1 | .717e-1 | .194e-2 | .316e-2 | 1.95e-1 | 3.16e-1 |
| 10^{-3} | 8 | 4 | .650e-2 | .174e-1 | .212e-3 | .662e-3 | 2.13e-1 | 6.63e-1 |
| 10^{-4} | 32 | 8 | .106e-2 | .385e-2 | .190e-4 | .977e-4 | 1.91e-1 | 2.30e-1 |
| 10^{-5} | 64 | 16 | .154e-3 | .844e-3 | .191e-5 | .131e-4 | 1.91e-1 | 2.55e-1 |

5.6.3 Ülesanne 3

$$u_*(t) = t^4 - 2t^3 + t, \quad f(t) = \frac{1}{30}t^6 - \frac{1}{10}t^5 + \frac{1}{6}t^3, \quad l = 2$$



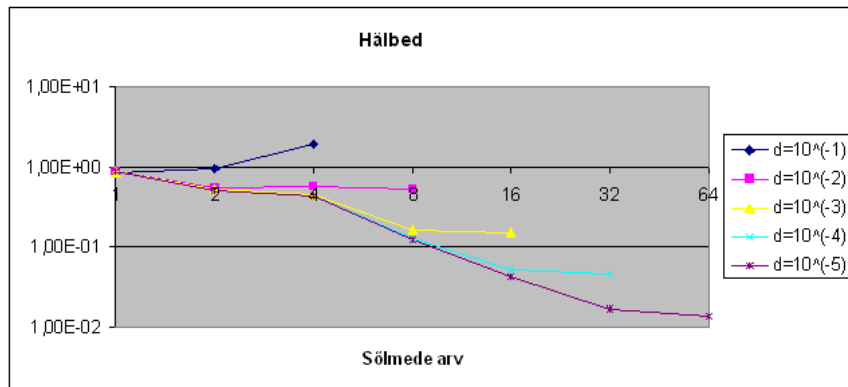
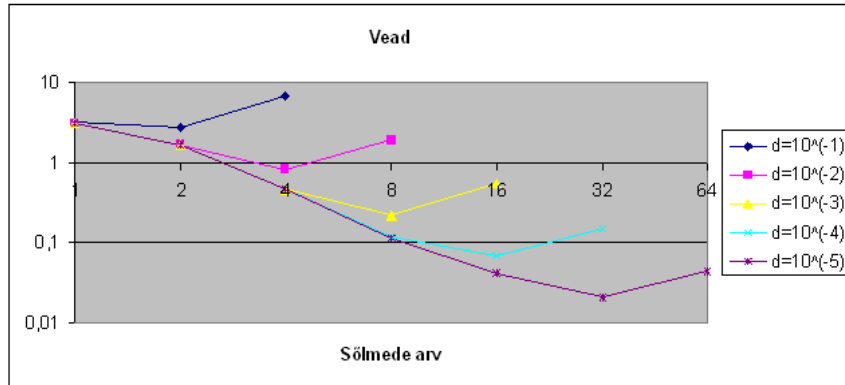
Koondtabel 3

| δ | m_{opt} | m_{ME} | $V_{n_{opt}}$ | $V_{n_{ME}}$ | $H_{n_{opt}}$ | $H_{n_{ME}}$ | b_1 | b_2 |
|-----------|-----------|----------|---------------|--------------|---------------|--------------|---------|---------|
| 10^{-1} | 1 | 1 | .481 | .481 | .642e-1 | .642e-1 | 6.42e-1 | |
| 10^{-2} | 1 | 1 | .183 | .183 | .276e-1 | .276e-1 | 2.07e | 2.77e |
| 10^{-3} | 4 | 2 | .753e-1 | .962e-1 | .759e-2 | .275e-1 | 7.59e | 2.75e+1 |
| 10^{-4} | 8 | 4 | .222e-1 | .329e-1 | .188e-2 | .675e-2 | 1.89e+1 | 6.75e+1 |
| 10^{-5} | 16 | 8 | .668e-2 | .111e-1 | .445e-3 | .222e-2 | 4.45e+1 | 2.22e+2 |

5.6.4 Ülesanne 4

$$u_*(t) = (-2\pi \sin(\pi t) - t\pi^2 \cos(\pi t) + t\pi^2(\sin(\pi t))^2) \exp(\cos(\pi t)) - \pi^2 \exp(-1),$$

$$f(t) = t \exp(\cos(\pi t)) - \frac{1}{2}\pi^2 t^2 \exp(-1) - \exp(1)t, \quad l = 2$$

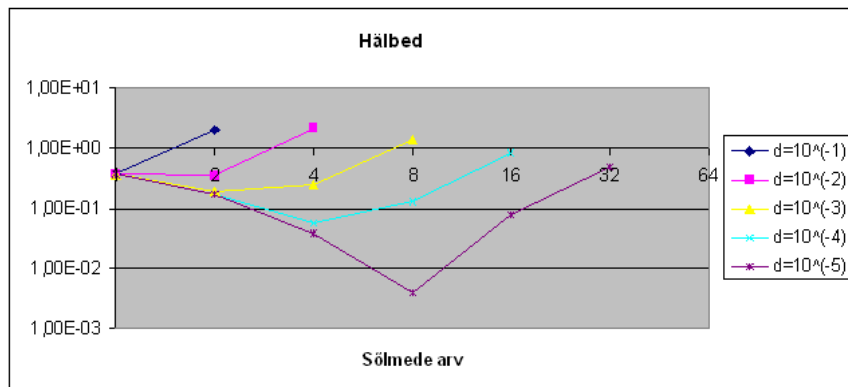
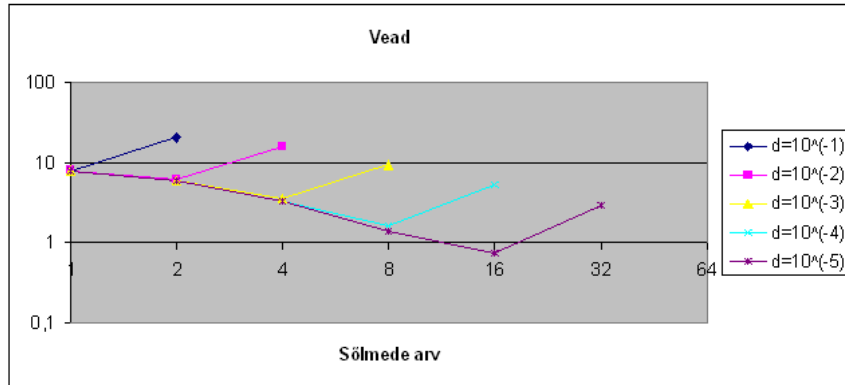


Koondtabel 4

| δ | m_{opt} | m_{ME} | $V_{n_{opt}}$ | $V_{n_{ME}}$ | $H_{n_{opt}}$ | $H_{n_{ME}}$ | b_1 | b_2 |
|-----------|-----------|----------|---------------|--------------|---------------|--------------|---------|---------|
| 10^{-1} | 2 | 1 | 2.730 | 3.225 | .935 | .841 | 9.35e | 8.42e |
| 10^{-2} | 4 | 2 | .822 | 1.696 | .577 | .552 | 5.77e+1 | 5.82e+1 |
| 10^{-3} | 8 | 4 | .225 | .466 | .166 | .443 | 1.66e+2 | 4.44e+2 |
| 10^{-4} | 16 | 8 | .685e-1 | .117 | .522e-1 | .130 | 5.23e+2 | 1.30e+3 |
| 10^{-5} | 32 | 16 | .213e-1 | .417e-1 | .173e-1 | .425e-1 | 1.74e+3 | 4.26e+3 |

5.6.5 Ülesanne 5

$$u_*(t) = t^2 - 1 - \frac{\pi^3}{32} \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right), \quad f(t) = \frac{1}{60}t^5 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) - \frac{\pi}{8}t, \quad l = 3$$



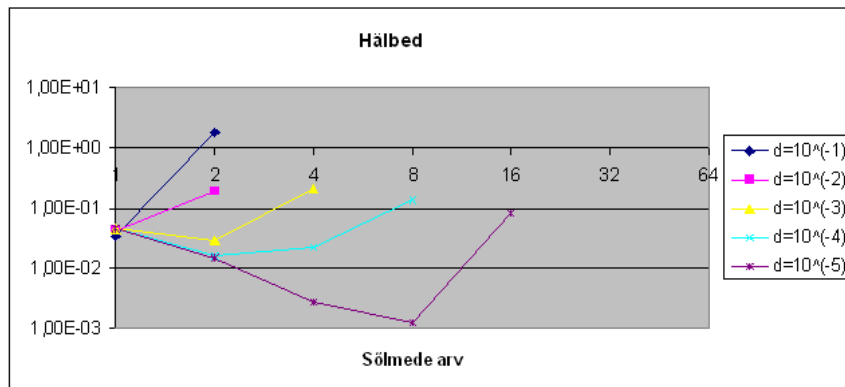
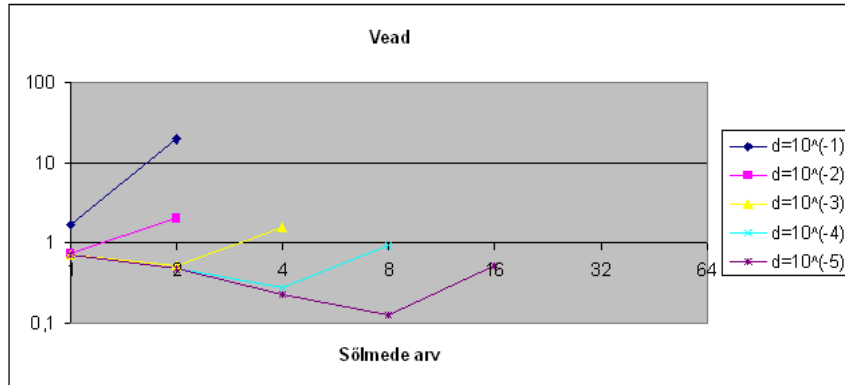
Koondtabel 5

| δ | m_{opt} | m_{ME} | $V_{n_{opt}}$ | $V_{n_{ME}}$ | $H_{n_{opt}}$ | $H_{n_{ME}}$ | b_1 | b_2 |
|-----------|-----------|----------|---------------|--------------|---------------|--------------|---------|---------|
| 10^{-1} | 1 | 1 | 1.750 | 1.750 | .336e-1 | .336e-1 | 3.62e | |
| 10^{-2} | 1 | 1 | .754 | .754 | .432e-1 | .432e-1 | 3.37e+1 | 3.71e+1 |
| 10^{-3} | 2 | 2 | .526 | .526 | .294e-1 | .294e-1 | 1.84e+2 | 3.72e+2 |
| 10^{-4} | 4 | 4 | .278 | .278 | .215e-1 | .215e-1 | 5.65e+2 | 1.70e+3 |
| 10^{-5} | 8 | 4 | .125 | .229 | .123e-1 | .276e-2 | 368.11 | 3.79e+3 |

5.6.6 Ülesanne 6

$$u_*(t) = -6 \exp(1) + \frac{18}{19} \exp(t^2) + \frac{72}{19} \exp(t^2) t^2 + \frac{24}{19} \exp(t^2) t^4,$$

$$f(t) = -t^3 \exp(1) + \frac{3}{19} t \exp(t^2) - \frac{3}{19} t, \quad l = 3$$



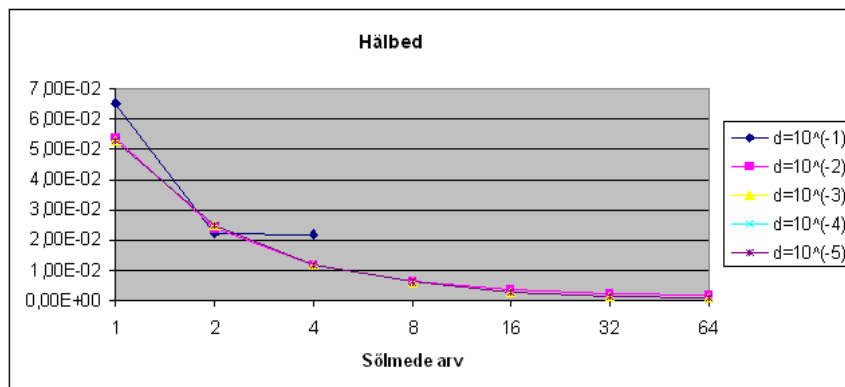
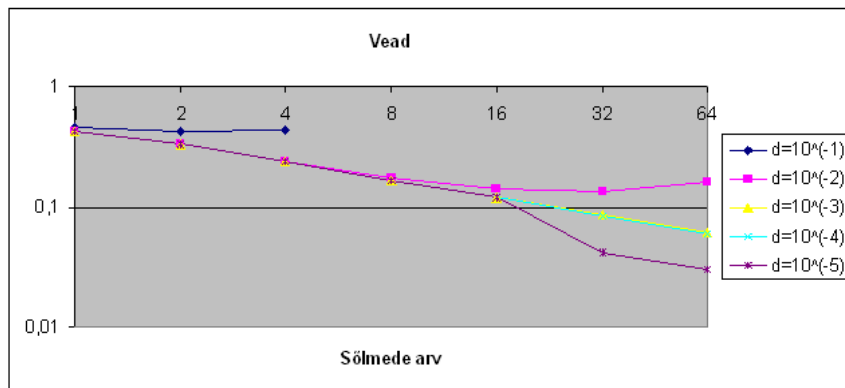
Koondtabel 6

| δ | m_{opt} | m_{ME} | $V_{n_{opt}}$ | $V_{n_{ME}}$ | $H_{n_{opt}}$ | $H_{n_{ME}}$ | b_1 | b_2 |
|-----------|-----------|----------|---------------|--------------|---------------|--------------|---------|---------|
| 10^{-1} | 1 | 1 | 8.053 | 8.053 | .361 | .361 | 3.36e-1 | |
| 10^{-2} | 2 | 2 | 6.271 | 6.271 | .336 | .337 | 4.33e | |
| 10^{-3} | 4 | 4 | 3.702 | 3.702 | .246 | .246 | 2.94e+1 | 4.43e+1 |
| 10^{-4} | 8 | 8 | 1.690 | 1.690 | .129 | .129 | 1.57e+2 | 2.16e+2 |
| 10^{-5} | 16 | 8 | .753 | 1.413 | .770e-1 | .388e-2 | 1.23e+2 | 2.76e+2 |

5.6.7 Ülesanne 7

$$u_*(t) = \frac{3}{4}2^t \ln(2)^2 + \frac{1}{4}2^t \ln(2)^3 t,$$

$$f(t) = \frac{1}{2}2^t \ln(2) + \frac{1}{4}2^t \ln(2)^2 t - \frac{1}{2} \ln(2), \quad l = 1, \quad u_*(1) \neq 0$$



Koondtabel 7

| δ | m_{opt} | m_{ME} | $V_{n_{opt}}$ | $V_{n_{ME}}$ | $H_{n_{opt}}$ | $H_{n_{ME}}$ |
|-----------|-----------|----------|---------------|--------------|---------------|--------------|
| 10^{-1} | 2 | 1 | .421 | .457 | .223e-1 | .652e-1 |
| 10^{-2} | 32 | 4 | .134 | .240 | .243e-2 | .121e-1 |
| 10^{-3} | > 256 | 16 | - | .119 | - | .304e-2 |
| 10^{-4} | > 256 | 64 | - | .596e-1 | - | .760e-3 |

5.7 Numbriliste tulemuste interpretatsioon

Graafikutel ja tabelites toodud numbrilised tulemused kinnitavad järgmist teoreetilist tulemust: kõigi vetasemete δ korral annab monotoonse vea reegel sellise indeksi n_{ME} , et $n \leq n_{ME}$ korral vead $\|u_n - u_*\|$ kahanevad monotoonselt, s.t.

$$\|u_{n_{ME}} - u_*\| \leq \|u_{n_{ME}-1} - u_*\| \leq \dots \leq \|u_{n_1} - u_*\|.$$

Seejuures n_{ME} ei olnud oluliselt väiksem optimaalsest väärtusest n_{opt} .

Esimese tuletise leidmise ülesannetes hälve $\|Au_n - f_\delta\|$ kahaneb monotoonselt n kasvades ning $\|Au_{n_{opt}} - f_\delta\|$ kahaneb monotoonselt $\delta \rightarrow 0$. Teise ja kolmanda tuletise leidmise ülesannete hälve pole monotoonne fikseeritud δ ning $n \rightarrow \infty$ korral ega n_{opt} korral, kui $\delta \rightarrow 0$. Ülesandes (7) $u_*(1) \neq 0$ ning sellest tuleneva kehva aproksimatsiooni suure arvutuste mahu tõttu ei õnnestunud optimaalse parameetri n leida.

Summary

On the self-regularization of ill-posed problems by the least error projection method

Alina Ganina

The mathematical formulation of inverse problems, as they appear in many different applications in science and industry, often takes the form of an operator equation

$$Au = f$$

with a nonlinear continuous operator $A : H \rightarrow F$ between Hilbert spaces. In applied problems typically noisy data f_δ with $\|f_\delta - f\| \leq \delta$ are given. This problem is often ill-posed in the sense that noisy data with arbitrary small noise level δ can lead to large deviations in the solution. Ill-posed problems are typically solved by iteration methods or by special regularization methods. For using computers in solution procedures the discretization is needed. If certain problems are successfully discretized, additional regularization is not required. Namely, if the discretization method converges in the case of exact data f , then in the case of noisy data this method can be viewed as regularization method, when discretization step as a regularization parameter is properly chosen according to the noise level δ . This phenomena is called as self-regularization by discretization.

For discretization of the problem often projection methods are used. From all projection methods the least error method has a minimal requirements for convergence in case of exact data. For choice of dimension of projected equation only discrepancy principle and balancing principle are studied. But the discrepancy principle requires very severe additional conditions and balancing principle large amount of computational work. The main goal of the master thesis is to propose alternative rule for choice of dimension with less restrictive conditions.

The choice of the regularization parameter is an actual problem in all regularization methods. Lately for the choice of regularization parameter in some regularized approximation u_n the monotone error rule (ME-rule) was proposed. The ME-rule is applicable in algorithms, where in the case of exact data $f = f_\delta$ the monotone convergence

$u_n \rightarrow u_*$ for $n \rightarrow \infty$ holds. The idea of ME-rule for the least error projection method is to choose in the case of the noisy data for regularization parameter $n_{ME} = n(\delta)$ the largest number, for which under information $\|f_\delta - f\| \leq \delta$ we can prove that $\|u_n - u_*\|$ is monotonically decreasing for $n \in (0, n_{ME}]$. Namely, by choosing $n_{ME} = n(\delta)$ in the least error approximation $u_n = A^*v_n$, $v_n \in F_n$, as the first index $n = 1, 2 \dots$ for which

$$d_{ME} = \frac{(v_{n+1} - v_n, f_\delta)}{2\|v_{n+1} - v_n\|} \leq \delta,$$

the inequality $\|u_n - u_*\| \leq \|u_{n-1} - u_*\|$, $n = 1, 2 \dots, n_{ME}$ holds. It is shown that least error method with discretization level chosen by ME-rule is the regularization algorithm.

Presented numerical examples illustrate and support the theoretical results.

Viited

- [1] Bruckner G., Pereverzev S. *Self-regularization of projection methods with a posteriori discretization level choice for severely ill-posed problems*. Inverse Problems 19, 2003, 147-156.
- [2] Hämarik U., Raus T. *On the a posteriori parameter choice in regularization methods*. Eesti Teaduste Akadeemia Toimetised, Füüsika - matemaatika, 1999, 48, 2, 133-145.
- [3] Hämarik U., *Lineaarsete mittekorrsete ülesannete regulariseerimine projektsioonimeetoditega*. Tartu, 1983, 69-90 (vene keeles).
- [4] Hämarik U., *Lineaarsete mittekorrsete ülesannete regulariseerimine projektsioonimeetoditega*. Diss., Tartu, 1985 (vene keeles).
- [5] Hämarik U., Tautenhahn U., *On the monotone error rule for parameter choice in iterative and continuous regularization methods*. BIT 41, 2001, 1029-1038.
- [6] Hämarik U., Avi E., Ganina A., *On the solution of ill-posed problems by projection methods with a posteriori choice of the discretization level*. Math. Modelling and Analysis 7, 2002, 241-252.
- [7] Kaltenbacher B., *Regularization by projection with a posteriori discretization level choice for linear and nonlinear ill-posed problems*. Inverse Problems 16, 2000, 1523-1539.
- [8] Kirsch A., *Introduction to Mathematical Theory of Inverse Problems*. 66-81.
- [9] Krasnoselskii M.A., Vainikko G.M., Zabreiko P.P., Rutitskii J.B., Stetsenko V.J. *Operaatorvõrrandite lahendusmeetodid*. Moskva, Nauka, 1969 (vene keeles).
- [10] Oja E., Oja P., *Funktsionaalanalüüs*. Tartu, 1991.
- [11] Petryshyn W.V., *Direct and iterative methods for the solution of linear operator equations in Hilbert space*. Trans. Amer. Math. Soc., 1962, 105, 150-159.
- [12] Tamme E., *Integraalvõrrandite lahendusmeetodid*. Tartu, 1989.
- [13] Tautenhahn U., Hämarik U., *The use of monotonicity for choosing the regularization parameter in ill-posed problems*. Inverse Problems, 1999, 15, 1487-1505.

- [14] Tihhonov A.N., Arsenin V.J., *Mittekorrektsete ülesannete lahendusmeetodid*. Moskva, Nauka, 1979 (vene keeles).
- [15] Vainikko G., Hämarik U., *Projektsioonimeetodid ja iseregulariseerimine mittekorrektsetes ülesannetes*. Iz.Vuz. Mat 29, 1985, 3-17 (vene keeles).
- [16] Vainikko G., Veretennikov A.Ju., *Iteratsiooniprotseduurid mittekorrektsetes ülesannetes*. Moskva, Nauka, 1986 (vene keeles).

Lisad

$$\text{Vork}(m, a, b) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..m \\ T_i \leftarrow a + \frac{(i) \cdot (b - a)}{m} \\ T \end{array} \right.$$

$$\text{Kordajad}(m, l, a, b) := \left| \begin{array}{l} T \leftarrow \text{Vork}(m, a, b) \\ \text{for } i \in 0..m-1 \\ \text{Fpsi}_i \leftarrow \int_{T_i}^{T_{i+1}} f_l(t) dt \\ \text{for } i \in 0..m-1 \\ \text{for } j \in 0..m-1 \\ \left| \begin{array}{l} \text{AApsi}_{i,j} \leftarrow \int_a^{T_i} \left[\frac{(T_{i+1}-t)^l}{l!} - \frac{(T_i-t)^l}{l!} \right] dt + \int_{T_i}^{T_{i+1}} \left[\frac{(T_{i+1}-t)^l}{l!} \right]^2 dt \text{ if } i = j \\ \text{AApsi}_{i,j} \leftarrow \int_a^{T_j} \left[\frac{(T_{i+1}-t)^l}{l!} - \frac{(T_i-t)^l}{l!} \right] \left[\frac{(T_{j+1}-t)^l}{l!} - \frac{(T_j-t)^l}{l!} \right] dt + \int_{T_j}^{T_{j+1}} \left[\frac{(T_{i+1}-t)^l}{l!} - \frac{(T_i-t)^l}{l!} \right] \frac{(T_j-t)^l}{l!} dt \text{ if } i > j \\ \text{AApsi}_{i,j} \leftarrow \int_a^{T_i} \left[\frac{(T_{i+1}-t)^l}{l!} - \frac{(T_i-t)^l}{l!} \right] \left[\frac{(T_{j+1}-t)^l}{l!} - \frac{(T_j-t)^l}{l!} \right] dt + \int_{T_i}^{T_{i+1}} \left[\frac{(T_{j+1}-t)^l}{l!} - \frac{(T_j-t)^l}{l!} \right] \frac{(T_{i+1}-t)^l}{l!} dt \text{ if } i < j \end{array} \right. \\ \text{Isolve}(\text{AApsi}, \text{Fpsi}) \end{array} \right.$$

```

nME(1, a, b, delta) :=
  m ← 0
  dMEm ← 10000
  m ← 1
  dMEm ← 10001
  while dMEm > delta
    m ← 2 m
    c ← Kordajad( $\frac{m}{2}$ , 1, a, b)
    c1 ← Kordajad(m, 1, a, b)
    T ← Vork( $\frac{m}{2}$ , a, b)
    T1 ← Vork(m, a, b)
    SCmult1 ←  $\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}-1} \left[ (c_{1,2i} - c_{i+1}) \cdot \int_{T_{1,2i}}^{T_{1,2i+1}} f(t) dt \right] + \sum_{i=0}^{\frac{m}{2}-1} \left[ (c_{1,2i+1} - c_{i+1}) \cdot \int_{T_{1,2i+1}}^{T_{1,2i+2}} f(t) dt \right]$ 
    SCmult2 ←  $\left[ \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=0}^{\frac{m}{2}-1} \left[ (c_{1,2i} - c_{i+1})^2 + (c_{1,2i+1} - c_{i+1})^2 \right] \right]^{\frac{1}{2}}$ 
    dMEm ←  $\frac{SCmult1}{2 \cdot SCmult2}$ 
  dME

```

$$\begin{array}{l}
\text{Viga_nME}(1, a, b) := \left\{ \begin{array}{l}
m \leftarrow \text{nME}(1, a, b) \\
c \leftarrow \text{Kordajad}(m, 1, a, b) \\
T \leftarrow \text{Vork}(m, a, b) \\
\text{for } i \in 1..m \\
\left| \begin{array}{l}
f2_i \leftarrow \int_{T_i}^{T_{i+1}} c_i \cdot fl(t) dt \\
f2 \\
uTnME_i \leftarrow \int_a^{T_i} \left[\frac{(T_{i+1} - t)^1}{1!} - \frac{(T_i - t)^1}{1!} \right] \cdot uT(t) dt + \int_{T_i}^{T_{i+1}} \frac{(T_{i+1} - t)^1}{1!} \cdot uT(t) dt \\
uTnME \\
\text{viga_nME} \leftarrow \left[\sum_{i=0}^{m-1} f2_i + \left[\int_a^b (uT(t))^2 dt \right] - 2 \cdot \sum_{i=0}^{m-1} c_i \cdot uTnME_i \right]^{\frac{1}{2}} \\
\text{viga_nME}
\end{array} \right.
\end{array}
\right.
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
AA(i, p, 1) := \left\{ \begin{array}{l}
T \leftarrow \text{Vork}(m, a, b) \\
\frac{(T_{i+1} - p)^1}{1!} - \frac{(T_i - p)^1}{1!} \text{ if } a \leq p \leq T_i \\
\frac{(T_{i+1} - p)^1}{1!} \text{ if } T_i < p \leq T_{i+1} \\
0 \text{ if } T_{i+1} < p \leq b
\end{array} \right.
\end{array}$$

```

Halve_nME(1, a, b) :=
  m ← nME(1, a, b)
  c ← Kordajad(m, 1, a, b)
  T ← Vork(m, a, b)
  for i ∈ 1..m
    
$$T_{\frac{i+1}{2}} \leftarrow \frac{T_{i+1} + T_i}{2}$$

  for k ∈ 2..m
    for j ∈ 1..k-1
      
$$\text{sum1}_{k,j} \leftarrow \left( \sum_{i=1}^m c_i \cdot \text{AA} \left( i, T_{\frac{j+1}{2}}, 1 \right) \right) \cdot \frac{\left( T_{\frac{k+1}{2}} - T_{\frac{j+1}{2}} \right)^{k-1} \cdot (T_{j+1} - T_j)}{(k-1)!}$$

  for k ∈ 1..m
    
$$\text{sum2}_k \leftarrow \left[ \sum_{i=1}^m c_i \cdot \text{AA} \left[ i, \frac{\left( T_{\frac{k+1}{2}} + T_k \right)}{2}, 1 \right] \right] \cdot \frac{\left( T_{\frac{k+1}{2}} - T_k \right)^{k-1} \cdot (T_{k+1} - T_k)}{(k-1)! \cdot 2}$$

  sum31 ← 0
  for k ∈ 2..m
    
$$\text{sum3}_k \leftarrow \sum_{j=1}^{k-1} \text{sum1}_{k,j}$$

  for k ∈ 1..m
    
$$\text{sum4}_k \leftarrow \left( \text{sum3}_k + \text{sum2}_k - \text{fl} \left( T_{\frac{k+1}{2}} \right) \right)^2$$

  halve ←  $\left( \sum_{i=1}^m \text{sum4}_i \right)^{\frac{1}{2}}$ 
  halve

```