

TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
PUHTA MATEMAATIKA INSTITUUT
FUNKTSIONAALANALÜÜSI ÕPPETOOL

Joosep Lippus

Projektorid kompaktsete operaatorite ruumile

Magistritöö

Juhendaja : Eve Oja,
prof., füüs.-mat. kand.

Tartu 2004

Sisukord

Sissejuhatus	3
1 Alamruumi täiendatavusest ja projektoritest	5
2 Aproksimatsiooniomadus ja aproksimeerivad pered	9
3 Banachi ruumide tensorkorrutised	14
4 Omadus $M^*(a, B, c)$	19
5 Meetrilised aproksimeerivad pered ja omadus $M^*(a, B, c)$	23
6 Põhiteoreem	26
7 Saphari teoreem kui põhiteoreemi rakendus	32
Summary	33
Kirjandus	34

Sissejuhatus

Käesolevas magistritöös uuritakse kompaksete operaatorite alamruumi asendit pidevate lineaarsete operaatorite ruumis. Olgu X ja Y Banachi ruumid üle ühe ja sama korpuse \mathbb{K} , kus \mathbb{K} on kas reaalarvude korpus \mathbb{R} või kompleksarvude korpus \mathbb{C} . Olgu $\mathcal{L}(X, Y)$ kõigi ruumist X ruumi Y tegutsevate pidevate lineaarsete operaatorite ruum ja $\mathcal{K}(X, Y)$ kõigi ruumist X ruumi Y tegutsevate kompaksete lineaarsete operaatorite ruum. Tänapäevani on lahendamata järgmine kuuluse probleem (vt. näiteks [8], [5], [3], [7] ja [4]). Kui $\mathcal{L}(X, Y) \neq \mathcal{K}(X, Y)$, kas siis leidub pidevaid lineaarseid projektoreid ruumist $\mathcal{L}(X, Y)$ ruumile $\mathcal{K}(X, Y)$?

1999. aastal tõestas Saphar artiklis [22], et teatud eeldustel saab reaalse Banachi ruumi Y ümber normeerida nii, et iga reaalse Banachi ruumi X korral, mille puhul $\mathcal{L}(X, Y) \neq \mathcal{K}(X, Y)$, ei leidu projektorit ruumist $\mathcal{L}(X, Y)$ ruumile $\mathcal{K}(X, Y)$, mille norm oleks väiksem etteantud arvust.

Käesoleva magistritöö põhieesmärgiks on tõestada, et kui $\mathcal{A}(X, Y)$ on ruumi $\mathcal{L}(X, Y)$ kinnine alamruum, mis sisaldab ruumi $\mathcal{K}(X, Y)$, ning $\mathcal{A}(X, Y) \neq \mathcal{K}(X, Y)$, siis Saphari teoreemiga võrreldes üldisematel eeldustel (näiteks ei pea ruumid X ja Y olema reaalsed) saab väita, et ei leidu projektorit ruumist $\mathcal{A}(X, Y)$ ruumile $\mathcal{K}(X, Y)$, mille norm oleks väiksem eeldustes etteantud arvust.

Esimeses osas uurime magistritöö teema üldisemat konteksti. Vaatleme, kuidas on Banachi ruumi alamruumi täiendatavuse küsimus seotud projektorite eksisteerimisega. Kõige olulisema tulemusena tõestame Banachi ruumi alamruumi täiendatavuse kriteeriumi projektorite kaudu.

Teises osas defineerime aproksimatsiooniomaduse ja aproksimeerivad pered ning uurime mõningaid nende omadusi. Olulisema tulemusena tõestame, et meetrilise aproksimeeriva pere olemasolu Banachi ruumis on samaväärne meetrilise aproksimatsiooniomadusega. Lisaks toome tõestuseta ära kaks Grothendiecki tulemust (vt. [6]), mida kasutame selleks, et järeldada magistritöö põhiteoreemist Saphari teoreem.

Kolmas osa on pühendatud Banachi ruumide tensorkorrutiste uurimisele. Antud osa eesmärgiks on samastada ruumi $\mathcal{K}(X, Y)$ kaasruum teatud projektiivse tensorkorrutisega ning tema teine kaasruum ruumiga $\mathcal{L}(X^{**}, Y^{**})$. Üksikud tulemused teel selle eesmärgini on ka tõestatud, üldiselt on antud referatiivse osa koostamisel tuginetud artiklile [18].

Neljandas ja viiendas osas tutvume omadusega $M^*(a, B, c)$. Toome ära hulga tulemusi artiklist [17], mida põhiteoreemi tõestamisel vaja läheb, ning valikuliselt ka tõestame neid. Viienda osa kõige olulisemaks tulemuseks on teoreem 5.5, mis annab pingul meetriliste aproksimeerivate perede kaudu kaks tarvilikku ja piisavat tingimust selleks, et meetrilise aproksimatsiooniomadusega Banachi ruumil oleks omadus $M^*(a, B, c)$.

Kuuendas osas tõestame käesoleva magistritöö põhiteoreemi 6.4.

Seitsmendas osas näitame, kuidas magistritöö põhiteoreemist järeldub Saphari teoreem.

Töös on kasutatud järgmisi tähistusi.

Sümbolitega \mathbb{N} , \mathbb{R} ja \mathbb{C} tähistame vastavalt naturaalarvude, reaalarvude ja kompleksarvude hulki. Käesolevas magistritöös vaatleme vektorruume üle korpuse \mathbb{K} , kus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ või $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Olgu X vektorruum, $A \subset X$ mingi hulk ning T ruumis X tegutsev operaator. Siis

$$\begin{aligned} \text{span } A &= \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i : a_i \in A, \lambda_i \in \mathbb{K}, i = 1, \dots, n, n \in \mathbb{N} \right\}, \\ \text{conv } A &= \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i : a_i \in A, \lambda_i \in \mathbb{K}, \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, n \in \mathbb{N} \right\}, \\ \text{ran } T &= \{Tx : x \in X\}, \\ \text{ker } T &= \{x \in X : Tx = 0\}, \end{aligned}$$

Olgu X ja Y normeeritud ruumid üle korpuse \mathbb{K} . Ruumist X ruumi Y tegutsevate pidevate lineaarsete operaatorite ruumi tähistame $\mathcal{L}(X, Y)$, selle kompaktsete operaatorite alamruumi $\mathcal{K}(X, Y)$ ning viimase lõplikumõõtmeliste operaatorite alamruumi $\mathcal{F}(X, Y)$. Ruumi X kaasruumiks nimetame pidevate lineaarsete operaatorite ruumi $L(X, \mathbb{K})$ ning tähistame X^* . Kogu magistritöös vaatleme Banachi ruumi sisestatuna oma teise kaasruumi. Operaatori $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ kaasoperaatorit tähistame $T^* : Y^* \rightarrow X^*$. Hulga $A \subset X$ sulundit tähistame \bar{A} . Ruumi X ühikoperaatorit tähistame I_X . Veel kasutame järgmisi tähistusi:

$$B(a, r) = \{x \in X : \|x - a\| < r\}, \quad a \in X, \quad r > 0,$$

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\},$$

$$S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}.$$

1 Alamruumi täiendatavusest ja projektoritest

Selles osas heidame pilgu magistritöö teema üldisemale kontekstile. Defineerime alamruumi täiendi vektorruumis ja Banachi ruumis ning selgitame, kuidas on Banachi ruumi alamruumi täiendatavuse küsimus seotud projektorite eksisteerimisega. Antud osa kõige olulisema tulemusena tõestame Banachi ruumi alamruumi täiendatavuse kriteeriumi projektorite kaudu. Käesoleva osa koostamisel on tuginetud J. Lippuse bakalaureusetööle [15], mis omakorda tugineb põhiliselt R. E. Edwardsi raamatule [25].

Alustame vektorruumi alamruumi täiendatavusest.

Definitsioon. Olgu X vektorruum ning Y ja Z tema alamruumid. Kui iga element $x \in X$ esitub ühesel viisil summana $x = y + z$, kus $y \in Y$ ja $z \in Z$, siis öeldakse, et ruum X on alamruumide Y ja Z otsesumma (tähistatakse $X = Y \oplus Z$). Seejuures öeldakse, et alamruum Z on alamruumi Y (algebraalne) täiend ja alamruum Y on alamruumi Z (algebraalne) täiend.

Saab tõestada (vt. näiteks [15]), et vektorruumi suvaline alamruum on alati algebraaliselt täiendatav ning et neid täiendeid on üldjuhul lõpmata palju.

Toome järgmiseks projektori definitsiooni ning tõestame paar põhilist omadust, mida meil edaspidi korduvalt vaja läheb.

Definitsioon. Olgu X vektorruum. Lineaarset operaatorit $P : X \rightarrow X$ nimetatakse projektoriks, kui $P^2 = P$.

Olgu $P : X \rightarrow X$ projektor. Kuna P on lineaarne, siis $\text{ran } P$ on ruumi X alamruum. Näitame, et

$$\text{ran } P = \{x \in X : Px = x\}. \quad (1.1)$$

Kui $Px = x$, siis $x \in \text{ran } P$. Kui aga $x \in \text{ran } P$, siis leidub $y \in X$ nii, et $Px = y$. Kuid siis $Px = P^2y = Py = x$.

Lause 1.1. Olgu Y vektorruumi X alamruum. Lineaarne operaator $P : X \rightarrow X$ on projektor ja $\text{ran } P = Y$ parajasti siis, kui $\text{ran } P \subset Y$ ja $Py = y$ iga $y \in Y$ korral.

Tõestus. Tarvilikkus on ilmne, kuna $\text{ran } P = \{x \in X : Px = x\}$.

Piisavus. Vaatleme suvalist elementi $x \in X$. Kuna $\text{ran } P \subset Y$, siis $Px = y \in Y$. Seega $P^2x = Py = y = Px$, mistõttu $P^2 = P$. Kuna iga $y \in Y$ korral $Py = y$, siis võrduse (1.1) põhjal saame, et $Y \subset \text{ran } P$, järelikult $\text{ran } P = Y$. \square

Lemma 1.2. Olgu X vektorruum ja P projektor. Siis $\text{ran } P = \ker(I - P)$ ja $\text{ran}(I - P) = \ker P$.

Tõestus. Esimese võrduse tõestamiseks näitame, et $\text{ran } P \subset \ker(I - P)$ ja $\ker(I - P) \subset \text{ran } P$. Olgu $x \in \text{ran } P$. Siis võrduse (1.1) põhjal $Px = x$ ja seega $Px - x = 0$ ning järelikult $x \in \ker(I - P)$. Olgu nüüd $x \in \ker(I - P)$, st. $(I - P)x = 0$. Siis $x - Px = 0$, järelikult $Px = x$. Seega $x \in \text{ran } P$.

Teise võrduse tõestamiseks näitame kõigepealt, et ka $(I - P)$ on projektor. Tõepoolest,

$$(I - P)^2 = (I - P)(I - P) = I^2 - P - P + P^2 = I - P - P + P = I - P.$$

Nüüd saame esimest võrdust kasutades $\text{ran}(I - P) = \ker(I - (I - P)) = \ker P$, millega on ka teine võrdus tõestatud. \square

Järgnev teoreem kirjeldab vektorruumi alamruumide ja nende täiendite ning projektorite vahelist seost. Alamruum ja tema täiend määravad üheselt projektori ning ka vastupidi, projektor määrab üheselt alamruumi ja tema täiendi.

Teoreem 1.3. *Olgu X vektorruum ning Y ja Z tema alamruumid. Võrdus $X = Y \oplus Z$ kehtib parajasti siis, kui leidub projektor $P : X \rightarrow X$ nii, et $\text{ran } P = Y$ ja $\ker P = Z$.*

Tõestus. Tarvilikkus. Olgu $X = Y \oplus Z$, st. iga $x \in X$ on üheselt esitatav kujul $x = y + z$, kus $y \in Y$ ja $z \in Z$. Defineerime operaatori P seosega $Px = y$.

Näitame, et P on projektor ja $\text{ran } P = Y$. Lause 1.1 järgi piisab selleks näidata, et $\text{ran } P \subset Y$ ja $Px = x$ iga $x \in Y$ korral. Sisalduvus $\text{ran } P \subset Y$ kehtib operaatori P definitsiooni kohaselt. Fikseerime suvalise elemendi $y \in Y$. Vaadel-des elementi y kui ruumi X elementi, saame

$$Py = P(y + 0) = y.$$

Seega P on projektor ja $\text{ran } P = Y$.

Näitame nüüd, et $\ker P = Z$. Selleks näitame, et $Z \subset \ker P$ ja $\ker P \subset Z$. Fikseerime suvalise $z \in Z$. Siis z ruumi X elemendina esitub kujul $z = 0 + z$, järelikult

$$Pz = P(0 + z) = 0$$

ja $Z \subset \ker P$. Fikseerime nüüd suvalise $z \in \ker P$, st. $Pz = 0$. Siis $z = 0 + z$, järelikult $z \in Z$ ja $\ker P \subset Z$. Seega $\ker P = Z$.

Piisavus. Olgu P projektor ning olgu $\text{ran } P = Y$ ja $\ker P = Z$. Siis $\text{ran}(I - P) = Z$ (vt. lemma 1.2). Iga $x \in X$ korral

$$x = Px + x - Px = Px + (I - P)x,$$

mistõttu

$$X = \text{ran } P + \text{ran}(I - P) = Y + Z.$$

Olgu $x \in Y \cap Z$. Siis $x = Px = (I - P)x$ ja järelikult

$$x = Px = P(I - P)x = P(x - Px) = Px - P^2x = Px - Px = 0.$$

Sellest, et $X = Y + Z$ ja $Y \cap Z = \{0\}$, järeldub, et $X = Y \oplus Z$, sellega on teoreem tõestatud. \square

Kuna Banachi ruum on vektorruum, siis kõik tema alamruumid on algebraliseks täiendatavad. Banachi ruumi alamruumi täiendatavus defineeritakse aga traditsiooniliselt üksnes Banachi ruumi kinniste alamruumide jaoks.

Definitsioon. *Olgu X Banachi ruum ja Y tema kinnine alamruum. Öeldakse, et Y on täiendatav, kui leidub ruumi X kinnine alamruum Z nii, et $X = Y \oplus Z$. Sellist alamruumi Z nimetatakse alamruumi Y täiendiks.*

Banachi ruumi kinnine alamruum ei pruugi üldiselt olla täiendatav. Klassikaline näide mittetäiendatavast alamruumist on kõigi nulliks koonduvate jadade alamruum c_0 kõigi tõkestatud jadade ruumis m (selle R. S. Phillipsi tulemuse detailset tõestust vt. näiteks [15]). Suurem osa käesolevast magistritööst uurib projektoreid kasutades kuulsat senilahendamata probleemi - kui mingite Banachi ruumide X ja Y korral $\mathcal{K}(X, Y) \neq \mathcal{L}(X, Y)$, kas siis kinnine alamruum $\mathcal{K}(X, Y)$ on täiendatav ruumis $\mathcal{L}(X, Y)$.

Järgnevalt tõestame käesoleva osa põhitulemuse - Banachi ruumi alamruumi täiendatavuse kriteeriumi projektorite kaudu. Kuid enne seda toome veel ühe abitulemuse, mida me kasutame põhitulemuse tõestamisel.

Lause 1.4. *Olgu X normeeritud ruum. Kui projektor $P : X \rightarrow X$ on pidev, siis ran P on kinnine.*

Tõestus. Vaatleme jada $x_n \in \text{ran } P$, kus $x_n \rightarrow x$. Projektori P pidevuse tõttu $Px_n \rightarrow Px$. Kuna $Px_n = x_n$, siis ka $x_n \rightarrow Px$, mistõttu $Px = x$. Seega $x \in \text{ran } P$ ja järelikult ran P on kinnine. \square

Teoreem 1.5 (täiendatavuse kriteerium projektorite kaudu). *Olgu X Banachi ruum. Tema kinnine alamruum Y on täiendatav parajasti siis, kui leidub projektor $P \in L(X, X)$ nii, et $Y = \text{ran } P$. Kui kinnine alamruum $Z \subset X$ on alamruumi Y täiend, siis $Z = \ker P$.*

Tõestus. Tarvilikkus. Olgu Y täiendatav. Siis leidub kinnine alamruum Z nii, et $X = Y \oplus Z$, seega iga $x \in X$ on üheselt esitatav kujul $x = y + z$, kus $y \in Y$ ja $z \in Z$. Defineerime operaatori $P : X \rightarrow X$ seosega $Px = y$. Näitame, et operaator P ongi otsitav projektor.

Kontrollime, et operaator P on lineaarne. Olgu $x_1, x_2 \in X$. Siis on need üheselt esitatavad kujul $x_1 = y_1 + z_1$ ja $x_2 = y_2 + z_2$, kus $y_1, y_2 \in Y$ ja $z_1, z_2 \in Z$. Operaatori P definitsiooni kohaselt

$$P(x_1 + x_2) = P(y_1 + z_1 + y_2 + z_2) = P(y_1 + y_2 + z_1 + z_2) = y_1 + y_2 = Px_1 + Px_2.$$

Olgu nüüd $x \in X$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$. Olgu elemendi x esitus $x = y + z$. Siis

$$P(\lambda x) = P(\lambda(y + z)) = P(\lambda y + \lambda z) = \lambda y = \lambda Px.$$

Seega operaator P on lineaarne.

Operaatori P definitsioonist on selge, et $\text{ran } P \subset Y$. Olgu $y \in Y$. Elemendi y kui ruumi $X = Y \oplus Z$ elemendi esitus on $y = y + 0$. Operaatori P definitsiooni põhjal $Py = y$. Seega lause 1.1 põhjal on operaator P projektor ja $\text{ran } P = Y$.

Näitame nüüd, et $\ker P = Z$. Selleks näitame, et $Z \subset \ker P$ ja $\ker P \subset Z$. Fikseerime suvalise $z \in Z$. Siis z ruumi X elemendina esitub kujul $z = 0 + z$, järelikult

$$Pz = P(0 + z) = 0$$

ja $Z \subset \ker P$. Fikseerime nüüd suvalise $z \in \ker P$, st. $Pz = 0$. Siis $z = 0 + z$, järelikult $z \in Z$ ja $\ker P \subset Z$. Seega $\ker P = Z$.

Näitame nüüd, et projektor P on pidev. Selleks kasutame teoreemi kinnisest graafikust, mille kohaselt Banachi ruumist Banachi ruumi tegutsev lineaarne operaator on pidev, kui tema graafik on kinnine.

Veendume, et projektori P graafik on kinnine. Vaatleme jada $x_n \rightarrow x$. Olgu $Px_n \rightarrow y$. Näitame, et $y = Px$. Projektori P definitsiooni kohaselt $x_n = Px_n + z_n$, kus $z_n \in Z$. Kuna $x_n \rightarrow x$ ja $Px_n \rightarrow y$, siis $z_n = x_n - Px_n \rightarrow x - y$. Alamruumi Z kinnisuse tõttu $x - y \in Z$. Alamruum $Y = \text{ran } P$ on samuti kinnine, seega $y \in \text{ran } P$. Järelikult leidub $x_0 \in X$ nii, et $y = Px_0$. Seega $x = Px_0 + (x - y)$. Projektori P definitsioonist saame, et $Px_0 = Px$, järelikult $y = Px$. Projektori P graafiku kinnisus on tõestatud.

Kuna projektor P on lineaarne, siis rakendades teoreemi kinnisest graafikust, saame, et projektor P on pidev. Seega $P \in L(X, X)$.

Piisavus. Leidugu projektor $P \in L(X, X)$ nii, et $Y = \text{ran } P$. Iga elemendi $x \in X$ korral $x = Px + (x - Px)$. Kuna P ja $I - P$ on pidevad projektorid, siis $\text{ran } P$ ja $\text{ran}(I - P)$ on ruumi X kinnised alamruumid. Seega, tähistades $y = Px$ ja $z = x - Px$, saame elemendi x esituse $x = y + z$, kus $y \in \text{ran } P = Y$ ja $z \in \text{ran}(I - P)$.

Näitame, et see esitus on ühene. Olgu veel $x = y_1 + z_1$, kus $y_1 \in \text{ran } P$ ja $z_1 \in \text{ran}(I - P)$. Siis $Px = Py_1 + Pz_1$. Kuna lemma 1.2 põhjal $\text{ran}(I - P) = \ker P$, siis $Pz_1 = 0$. Seega $Px = Py_1$. Samas $y_1 \in \text{ran } P$, mistõttu $Py_1 = y_1$. Seega $y_1 = Px = y$ ning $z_1 = x - y_1 = x - Px = z$. Järelikult on see esitus ühene, mistõttu $X = Y \oplus \text{ran}(I - P)$. \square

Ilma tõestuseta toome veel ühe tulemuse Banachi ruumi kinnise alamruumi täiendite paljususe kohta. Kui kinnine alamruum on täiendatav, siis järgnev lause kirjeldab, kuidas juhul, kui vaadeldav alamruum ei lange kokku kogu ruumiga ega koosne ainult nullelemendist, on võimalik antud alamruumile konstrueerida lõpmatu arv erinevaid täiendeid (detailset tõestust vt. näiteks [15, lk. 12-13]).

Lause 1.6. *Olgu X Banachi ruum ning Y ja Z tema kinnised alamruumid, kusjuures $X = Y \oplus Z$. Siis $\{Az + z : z \in Z\}$ on ruumi X kinnine alamruum ning $X = Y \oplus \{Az + z : z \in Z\}$ iga operaatori $A \in L(Z, Y)$ korral.*

2 Aproximatsiooniomadus ja aproksimeerivad pered

Käesolevas osas tutvume aproksimatsiooniomaduse ja aproksimeerivate perede mõistetega ning uurime nende meie jaoks olulisemaid omadusi. Oma käsitluses oleme tuginenud põhiliselt raamatutele [14] ja [23]. Folkloorsete faktide - lause 2.1 ja teoreemi 2.2 - detailsed tõestused on N. Morozova semestritööst [24].

Definitsioon. *Öeldakse, et Banachi ruumil X on aproksimatsiooniomadus, kui iga kompaktse hulga $K \subset X$ ning iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub operaator $A \in \mathcal{F}(X, X)$ nii, et*

$$\|Ax - x\| \leq \varepsilon \quad \forall x \in K.$$

Seega, ruumi X aproksimatsiooniomadus tähendab, et tema ühikoperaator on kompaktsetel hulkadel kuitahes hästi lähendatav lõplikumõõtmeliste operaatoritega.

Definitsioon. *Öeldakse, et Banachi ruumil X on meetriline aproksimatsiooniomadus, kui iga kompaktse hulga $K \subset X$ ning iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub operaator $A \in \mathcal{F}(X, X)$ nii, et $\|A\| \leq 1$ ning*

$$\|Ax - x\| \leq \varepsilon \quad \forall x \in K.$$

Järgmiseks näitame, et meetrilise aproksimatsiooniomaduse korral võime definitsioonis kompaktsed hulgad asendada lõplike hulkadega.

Lause 2.1. *Banachi ruumil X on meetriline aproksimatsiooniomadus parajasti siis, kui iga lõpliku hulga $K \subset X$ ning iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub operaator $A \in \mathcal{F}(X, X)$ nii, et $\|A\| \leq 1$ ning*

$$\|Ax - x\| \leq \varepsilon \quad \forall x \in K.$$

Tõestus. Tarvilikkus on triviaalne, sest iga lõplik hulk on kompaktne.

Piisavus. Fikseerime suvalise $\varepsilon > 0$ ning suvalise kompaktse hulga $K \subset X$. Hausdorffi teoreemi kohaselt leidub hulgal K lõplik $\varepsilon/3$ -võrk $\{x_1, \dots, x_n\}$, st.

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Seega iga $x \in K$ korral leidub x_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, nii, et

$$\|x - x_i\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Eelduse põhjal leidub operaator $A \in \mathcal{F}(X, X)$ nii, et $\|A\| \leq 1$ ning

$$\|Ax_i - x_i\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Järelikult iga $x \in K$ korral

$$\begin{aligned}
\|Ax - x\| &\leq \|Ax - Ax_i + Ax_i - x_i + x_i - x\| \\
&\leq \|Ax - Ax_i\| + \|Ax_i - x_i\| + \|x_i - x\| \\
&\leq \|A\|\|x - x_i\| + \|Ax_i - x_i\| + \|x_i - x\| \\
&\leq 1 \cdot \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Toome nüüd sisse aproksimeerivate pere definitsioonid ning veendume, et meetrilise aproksimeeriva pere olemasolu Banachi ruumis on samaväärne sellega, et antud ruumil on meetriline aproksimatsiooniomadus.

Definitsioon. Olgu X Banachi ruum. Peret $(K_\alpha) \subset \mathcal{K}(X, X)$ nimetatakse kompaktses aproksimeerivaks pereks, kui $K_\alpha x \rightarrow x$ iga $x \in X$ korral. Erijuhul, kui $K_\alpha \in \mathcal{F}(X, X)$ iga α korral, nimetatakse peret (K_α) aproksimeerivaks pereks.

Definitsioon. Olgu X Banachi ruum ning (K_α) kompaktne aproksimeeriv pere. Kui $K_\alpha^* x^* \rightarrow x^*$ iga $x^* \in X^*$ korral, siis öeldakse, et pere (K_α) on pingul.

Definitsioon. Olgu (K_α) aproksimeeriv pere. Kui $\sup_\alpha \|K_\alpha\| \leq 1$, siis öeldakse, et (K_α) on meetriline aproksimeeriv pere.

Teoreem 2.2. Banachi ruumil on meetriline aproksimatsiooniomadus parajasti siis, kui tal leidub meetriline aproksimeeriv pere.

Tõestus. Tarvilikkus. Olgu Banachi ruumil X meetriline aproksimatsiooniomadus. Vaatleme hulka ϑ , mille elementideks on paarid $\alpha = (K, \varepsilon)$, kus K on ruumi X kompaktne alamhulk ja $\varepsilon > 0$. Järjestame hulga ϑ järgmiselt:

$$(K_1, \varepsilon_1) \leq (K_2, \varepsilon_2) \Leftrightarrow K_1 \subset K_2 \wedge \varepsilon_1 \geq \varepsilon_2.$$

Kontrollime kõigepealt, et tegu on suunatud hulga järjestusseosega.

Kui $\alpha = (K, \varepsilon) \in \vartheta$, siis $K \subset K$ ning $\varepsilon \geq \varepsilon$, seega $\alpha \leq \alpha$.

Olgu $\alpha = (K_1, \varepsilon_1)$, $\beta = (K_2, \varepsilon_2)$, $\gamma = (K_3, \varepsilon_3) \in \vartheta$ sellised, et $\alpha \leq \beta$ ja $\beta \leq \gamma$. Siis $K_1 \subset K_2 \subset K_3$ ning $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$, seega $\alpha \leq \gamma$.

Olgu $\alpha = (K_1, \varepsilon_1)$, $\beta = (K_2, \varepsilon_2) \in \vartheta$. Näitame, et leidub $\gamma = (K, \varepsilon) \in \vartheta$ nii, et $\alpha \leq \gamma$ ja $\beta \leq \gamma$. Tähistame $K = K_1 \cup K_2$ ja $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Kuna K_1 ja K_2 on kompaktsed hulgad, siis ka K on kompaktne hulk. Kuna $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, siis ka $\varepsilon > 0$. Seega $\gamma = (K, \varepsilon) \in \vartheta$. Vastavalt definitsioonile $K_1 \subset K$ ja $\varepsilon_1 \geq \varepsilon$ ning $K_2 \subset K$ ja $\varepsilon_2 \geq \varepsilon$, seega $\alpha \leq \gamma$ ning $\beta \leq \gamma$. Oleme näinud, et tegu on tõepoolest suunatud hulga järjestusseosega.

Moodustame nüüd pere $(A_\alpha)_{\alpha \in \vartheta}$ nii, et seame igale indeksile $\alpha = (K, \varepsilon) \in \vartheta$ vastavusse operaatori $A_\alpha \in \mathcal{F}(X, X)$ meetrilise aproksimatsiooniomaduse definitsioonist. Siis $\sup_\alpha \|A_\alpha\| \leq 1$.

Olgu $x \in X$ suvaline. Näitame, et $A_\alpha x \rightarrow x$. Selleks fikseerime suvalise $\varepsilon_0 > 0$ ning näitame, et leidub α_{ε_0} nii, et kui $\alpha \geq \alpha_{\varepsilon_0}$, siis $\|A_\alpha x - x\| < \varepsilon_0$. Tähistame $\alpha_{\varepsilon_0} = (\{x\}, \varepsilon_0/2)$. Kuna $\{x_0\}$ kui lõplik hulk on kompaktne ning $\varepsilon_0/2 > 0$, siis $\alpha_{\varepsilon_0} \in \vartheta$. Kui $\alpha = (K, \varepsilon) \geq \alpha_{\varepsilon_0}$, siis

$$\{x\} \subset K \text{ ja } \frac{\varepsilon_0}{2} \geq \varepsilon.$$

Seega iga $\alpha \geq \alpha_{\varepsilon_0}$ korral

$$\|A_\alpha x - x\| \leq \varepsilon \leq \frac{\varepsilon_0}{2} < \varepsilon_0.$$

Järelikult $A_\alpha x \rightarrow x$ iga $x \in X$ korral. Kuna A_α on lõplikumõõtmeline iga α korral ning $\sup_\alpha \|A_\alpha\| \leq 1$, siis (A_α) on meetriline aproksimeeriv pere.

Piisavus. Olgu (A_α) meetriline aproksimeeriv pere Banachi ruumis X , st. iga $x \in X$ korral $A_\alpha x \rightarrow x$ ning $\sup_\alpha \|A_\alpha\| \leq 1$.

Fikseerime lõpliku hulga $K = \{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ ja $\varepsilon > 0$. Lause 2.1 põhjal piisab näidata, et leidub operaator $A \in \mathcal{F}(X, X)$ nii, et $\|A\| \leq 1$ ning $\|Ax_i - x_i\| \leq \varepsilon$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Vaatleme elementi $x_1 \in K$. Eelduse põhjal $A_\alpha x_1 \rightarrow x_1$. Seega saame leida indeksi $\alpha_1 \in \vartheta$ nii, et iga $\alpha \geq \alpha_1$ korral $\|A_\alpha x_1 - x_1\| < \varepsilon$. Vaatleme nüüd elementi $x_2 \in K$. Kuna $A_\alpha x_2 \rightarrow x_2$, siis saame leida indeksi $\alpha_2 \in \vartheta$ nii, et $\alpha_2 \geq \alpha_1$ ning iga $\alpha \geq \alpha_2$ korral $\|A_\alpha x_2 - x_2\| < \varepsilon$. Samamoodi jätkates saame, et leidub indeks $\alpha_n \in \vartheta$ nii, et $\alpha_n \geq \dots \geq \alpha_1$ ning iga $\alpha \geq \alpha_n$ korral $\|A_\alpha x_n - x_n\| < \varepsilon$. Võtame $A = A_{\alpha_n}$, siis $\|Ax_i - x_i\| < \varepsilon$, $i \in \{1, \dots, n\}$, ning $\|A\| = \|A_{\alpha_n}\| \leq 1$, seega ruumil X on meetriline aproksimatsiooniomadus. \square

Banachi ruumi meetrilisest aproksimatsiooniomadusest ei järeldu üldjuhul tema alamruumide meetriline aproksimatsiooniomadus. Järgmine teoreem näitab teatud separaablilt määratud aproksimatsiooniomadusega alamruumi olemasolu.

Teoreem 2.3. *Kui Banachi ruumil X on meetriline aproksimatsiooniomadus, siis ruumi X iga separaabel kinnine alamruum Y sisaldub ruumi X separaablis kinnises alamruumis Z , millel on meetriline aproksimatsiooniomadus.*

Tõestus. Olgu Banachi ruumil X meetriline aproksimatsiooniomadus ning olgu Y ruumi X separaabel kinnine alamruum. Vastavalt separaablil ruumi definitsioonile saame leida jada $(y_n) \subset B_Y$ nii, et $\overline{\{y_1, y_2, \dots\}} = B_Y$.

Valime $T_1 \in \mathcal{F}(X, X)$ nii, et $\|T_1\| \leq 1$ ja

$$\|T_1 y_1 - y_1\| < 1.$$

Me saame nii valida, sest ruumil X on meetriline aproksimatsiooniomadus ning ühepunktine hulk $\{y_1\}$ on kompaktne. Järgmiseks valime $T_2 \in \mathcal{F}(X, X)$ nii, et $\|T_2\| \leq 1$ ning

$$\|T_2 x - x\| < \frac{1}{2} \quad \forall x \in \{y_1, y_2\} \cup B_{T_1(X)}.$$

Me saame nii valida, sest $B_{T_1(X)}$ kui lõplikumõõtmelise ruumi $T_1(X)$ ühikera on kompaktne, seega ka hulk $\{y_1, y_2\} \cup B_{T_1(X)}$ on kompaktne. Edasi valime $T_3 \in \mathcal{F}(X, X)$ nii, et $\|T_3\| \leq 1$ ja

$$\|T_3x - x\| < \frac{1}{3} \quad \forall x \in \{y_1, y_2, y_3\} \cup B_{\text{span}(T_1(X) \cup T_2(X))}.$$

See on võimalik, sest kuna $T_1(X)$ ja $T_2(X)$ on lõplikumõõtmelised ruumid, siis ka $\text{span}(T_1(X) \cup T_2(X))$ on lõplikumõõtmeline, järelkult $B_{\text{span}(T_1(X) \cup T_2(X))}$ kui lõplikumõõtmelise ruumi ühikera on kompaktne, mistõttu ka hulk $\{y_1, y_2, y_3\} \cup B_{\text{span}(T_1(X) \cup T_2(X))}$ on kompaktne. Analoogiliselt jätkates saame jada $(T_n) \subset \mathcal{F}(X, X)$, $\|T_n\| \leq 1$, mis rahuldab tingimust

$$\|T_nx - x\| < \frac{1}{n} \quad \forall x \in \{y_1, \dots, y_n\} \cup B_{\text{span} \bigcup_{i=1}^{n-1} T_i(X)}.$$

Defineerime hulga Z järgmiselt:

$$Z = \{x \in X : x = \lim_n T_nx\}.$$

Näitame kõigepealt, et hulk Z on ruumi X alamruum. Tõepoolest, kui $x_1, x_2 \in Z$ ning α ja β on arvud, siis

$$\begin{aligned} \lim_n T_n(\alpha x_1 + \beta x_2) &= \lim_n (\alpha T_nx_1 + \beta T_nx_2) \\ &= \alpha \lim_n T_nx_1 + \beta \lim_n T_nx_2 = \alpha x_1 + \beta x_2, \end{aligned}$$

seega $\alpha x_1 + \beta x_2 \in Z$.

Näitame nüüd, et alamruum Z on kinnine. Olgu $(x_k) \subset Z$, $x_k \rightarrow x \in X$ ning olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Siis saame leida $k \in \mathbb{N}$ nii, et $\|x - x_k\| < \varepsilon/3$, seega ka

$$\|T_nx_k - T_nx\| \leq \|T_n\| \|x_k - x\| \leq \|x_k - x\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Kuna $x_k \in Z$, siis vastavalt hulga Z konstruktsioonile saame leida $N \in \mathbb{N}$ nii, et kui $n > N$, siis $\|x_k - T_nx_k\| \leq \varepsilon/3$. Seega kui $n > N$, siis

$$\|x - T_nx\| \leq \|x - x_k\| + \|x_k - T_nx_k\| + \|T_nx_k - T_nx\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

mis tähendab, et $x = \lim_n T_nx$, järelkult $x \in Z$ ning alamruum Z on kinnine.

Vastavalt alamruumi Z definitsioonile

$$Z \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n(X)}.$$

Kuna $T_n(X)$ on lõplikumõõtmeline iga $n \in \mathbb{N}$ korral, siis leidub iga n korral ruumis $T_n(X)$ lõplik põhihulk. Järelkult hulgas $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n(X)}$ leidub ülimalt loenduv põhihulk, mistõttu alamruum Z on separaabel.

Paneme tähele, et jada (T_n) valiku põhjal $\lim_n T_n y_i = y_i$, $i = 1, 2, \dots$. Kuna $\{y_1, y_2, \dots\} \subset Z$, siis

$$G = \overline{\{y_1, y_2, \dots\}} \subset \overline{Z} = Z.$$

Märkame veel, et iga $x \in X$, $T_n x \neq 0$, korral

$$\frac{T_n x}{\|T_n x\|} \in B_{T_n(X)} \subset B_{\text{span} \cup_{i=1}^n T_i(X)},$$

seega vastavalt operaatorite T_n definitsioonile

$$\begin{aligned} \|T_m T_n x - T_n x\| &= \frac{\|T_n x\|}{\|T_n x\|} \|T_m T_n x - T_n x\| = \|T_n x\| \left\| \frac{1}{\|T_n x\|} (T_m T_n x - T_n x) \right\| \\ &= \|T_n x\| \left\| T_m \frac{T_n x}{\|T_n x\|} - \frac{T_n x}{\|T_n x\|} \right\| < \|T_n x\| \cdot \frac{1}{m} \end{aligned}$$

iga $m > n$ korral. Järelikult

$$T_n x = \lim_m T_m T_n x \quad \forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N},$$

mistõttu

$$T_n(X) \subset Z \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Seega paneme tähele, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral $T_n \in \mathcal{F}(X, Z)$, järelikult

$$S_n := T_n|_Z \in \mathcal{F}(Z, Z).$$

Kuna $\|S_n\| \leq \|T_n\| \leq 1$ ning vastavalt definitsioonile $S_n x \rightarrow x$ iga $x \in Z$ korral, siis on (S_n) alamruumi Z meetriline aproksimeeriv pere, järelikult on alamruumil Z meetriline aproksimatsiooniomadus. \square

Märkus 2.4. Eelmise teoreemi väide on pööratav. Nimelt kehtib väide, et *Banachi ruumil X on meetriline aproksimatsiooniomadus parajasti siis, kui iga tema separaabel kinnine alamruum Y sisaldub separaabis kinnises alamruumis Z , millel on meetriline aproksimatsiooniomadus* (vt. näiteks [9, lemma 1 ja järeltule 1 tõestus] ja [10, lemma 3, (b)] või [23, lk. 606]). Märkime, et piisavuse tõestus on küllaltki töömahukas ning kasutab Lindenstraussi tehnikat, mis võimaldab mittepeivatest ja mittelineaarsetest operaatoritest lähtudes konstrueerida meetrilist aproksimeerivat peret.

Alljärgnev teoreem, mis on tõestatud näiteks raamatus [23, lk. 321], väidab, et Banachi ruumi kaasruumi meetrilisest aproksimatsiooniomadusest järeltule selle ruumi meetriline aproksimatsiooniomadus.

Teoreem 2.5. *Kui Banachi ruumi X kaasruumil X^* on meetriline aproksimatsiooniomadus, siis ka ruumil X on meetriline aproksimatsiooniomadus.*

Teoreem 2.6. *Olgu X selline Banachi ruum, mille kaasruum X^* on separaabel. Kui ruumil X^* on aproksimatsiooniomadus, siis on tal ka meetriline aproksimatsiooniomadus.*

Selle küllaltki raske teoreemi tõestuse võib leida raamatust [14, lk. 39]. Märkime, et pole teada, kas teoreemi väide kehtib mitteseparaabli kaasruumi X^* korral.

3 Banachi ruumide tensorkorrutised

Antud osas tutvume Banachi ruumide tensorkorrutise mõistega ning kirjeldame injektiivseid ja projektiivseid tensorkorrutisi ning nende kaasruume. Need leiavad olulist rakendust magistritöö põhiteoreemi 6.4 tõestuses. Käesoleva osa koostamisel on tuginetud põhiliselt E. Oja artiklile [18] ning ka R. A. Ryani raamatule [21].

Olgu X ja Y Banachi ruumid. Olgu fikseeritud $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in X$, $y_1, \dots, y_n \in Y$. Vaatleme operaatorit $u : X^* \rightarrow Y$,

$$u(x^*) = \sum_{i=1}^n x^*(x_i)y_i, \quad x^* \in X^*.$$

Tähistame

$$\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = u.$$

Siis $u \in \mathcal{F}(X^*, Y)$. Tõepoolest, vastavalt definitsioonile on u lineaarne ja tõkestatud ning

$$u(x^*) \in \text{span}\{y_1, \dots, y_n\}, \quad x^* \in X^*.$$

Definitsioon. Banachi ruumide X ja Y algebraliseks tensorkorrutiseks nimetatakse hulka

$$X \otimes Y = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i : n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in X, y_1, \dots, y_n \in Y \right\}.$$

Banachi ruumide algebraline tensorkorrutis on vektorruum. Märgime veel, et algebralise tensorkorrutise definitsioonist tulenevalt võib ruumi $X \otimes Y$ alati vaadelda ruumi $\mathcal{F}(X^*, Y)$ alamruumina. Edaspidises olulise erijuhuna kehtib võrdus

$$X^* \otimes Y = \mathcal{F}(X, Y).$$

Uurime nüüd, kuidas saaks muuta algebralise tensorkorrutise kõigepealt normeeritud ruumiks ning hiljem Banachi ruumiks nii, et see norm oleks kooskõlas tensorkorrutamisega.

Definitsioon. Normi $\|\cdot\|_\alpha$ tensorkorrutisel $X \otimes Y$ nimetatakse tensornormiks, kui

$$\|x \otimes y\|_\alpha = \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x \in X, \forall y \in Y.$$

Tähistame edaspidi

$$X \otimes_\alpha Y = (X \otimes Y, \|\cdot\|_\alpha).$$

Normeeritud ruum $X \otimes_\alpha Y$ ei ole üldiselt Banachi ruum.

Definitsioon. Ruumi $X \otimes_\alpha Y$ täielult tähistatakse $X \hat{\otimes}_\alpha Y$ ja nimetatakse Banachi ruumide X ja Y tensorkorrutiseks.

Ruum $X \hat{\otimes}_\alpha Y$ on Banachi ruum.

Vaatleme veidi lähemalt kahte erineva normiga Banachi ruumide tensorkorrutist - injektiivset ja projektiivset. Alustame injektiivsest tensorkorrutisest, mille definitsioon tugineb sisalduvusele $X \otimes Y \subset \mathcal{F}(X^*, Y)$.

Definitsioon. Operaatornormi tensorkorrutisel $X \otimes Y$ nimetatakse injektiivseks normiks ning tähistatakse $\|\cdot\|_\varepsilon$, st.

$$\|u\|_\varepsilon = \|u\| \quad \forall u \in X \otimes Y.$$

Injektiivne norm on tensornorm, sest Hahn-Banachi teoreemi järelduse põhjal

$$\begin{aligned} \|x \otimes y\|_\varepsilon &= \|x \otimes y\| = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \|(x \otimes y)(x^*)\| = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \|x^*(x)y\| \\ &= \sup_{\|x^*\| \leq 1} |x^*(x)| \|y\| = \|x\| \|y\|. \end{aligned}$$

Lause 3.1. Olgu X ja Y Banachi ruumid. Kui operaator $S : X \rightarrow Y$ on kujul $S = x^* \otimes y$, kus $x^* \in X^*$ ja $y \in Y$, siis $\|S\| = \|x^*\| \|y\|$.

Tõestus. Injektiivse normi definitsiooni põhjal

$$\|S\| = \|x^* \otimes y\|_\varepsilon = \|x^*\| \|y\|,$$

sest injektiivne norm on tensornorm. □

Me saame kasutada sümbolit $X \otimes_\varepsilon Y = (X \otimes Y, \|\cdot\|_\varepsilon)$.

Definitsioon. Ruumi $X \hat{\otimes}_\varepsilon Y$ nimetatakse Banachi ruumide X ja Y injektiivseks tensorkorrutiseks ja tähistatakse

$$X \check{\otimes} Y = X \hat{\otimes}_\varepsilon Y.$$

Kuna $(\mathcal{L}(X^*, Y), \|\cdot\|)$ on Banachi ruum, siis

$$X \check{\otimes} Y = \overline{X \otimes Y}^{\|\cdot\|}.$$

Meenutades, et $X^* \otimes Y = \mathcal{F}(X, Y)$, saame siit järeldada võrduse

$$X^* \check{\otimes} Y = \overline{\mathcal{F}(X, Y)} \subset \mathcal{L}(X, Y).$$

Näitame nüüd, et teatud eeldustel saab injektiivset tensorkorrutist $X^* \check{\otimes} Y$ samastada kompaksete lineaarsete operaatorite ruumiga $\mathcal{K}(X, Y)$.

Lause 3.2. Olgu X ja Y Banachi ruumid. Kui ruumil X^* või ruumil Y on aproksimatsiooniomadus, siis

$$X^* \check{\otimes} Y = \mathcal{K}(X, Y).$$

Tõestus. Olgu X ja Y Banachi ruumid. Teame juba, et $X^* \check{\otimes} Y = \overline{\mathcal{F}(X, Y)}$, seega on veel vaja tõestada, et kui ruumil X^* või ruumil Y on aproksimatsiooniomadus, siis

$$\overline{\mathcal{F}(X, Y)} = \mathcal{K}(X, Y).$$

Olgu esiteks ruumil Y aproksimatsiooniomadus ning olgu $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ ja $\varepsilon > 0$ suvalised. Näitame, et leidub $S \in \mathcal{F}(X, Y)$ nii, et $\|T - S\| \leq \varepsilon$.

Kuna operaator T on kompaktne, siis $\overline{T(B_X)}$ on kompaktne hulk ruumis Y . Ruumi Y aproksimatsiooniomaduse tõttu leidub seega operaator $R \in \mathcal{F}(Y, Y)$ nii, et iga $y \in \overline{T(B_X)}$ korral $\|y - Ry\| \leq \varepsilon$. Tähistame $S = RT$. Siis $S \in \mathcal{F}(X, Y)$ ning

$$\|T - S\| = \sup_{x \in B_X} \|Tx - Sx\| = \sup_{x \in B_X} \|Tx - RTx\| \leq \varepsilon.$$

Olgu nüüd ruumil X^* aproksimatsiooniomadus ning olgu $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ ja $\varepsilon > 0$ suvalised. Näitame, et leidub $S \in \mathcal{F}(X, Y)$ nii, et $\|T - S\| \leq \varepsilon$.

Kuna $T \in \mathcal{K}(X, Y)$, siis $T^* \in \mathcal{K}(Y^*, X^*)$, seega $\overline{T^*(B_{Y^*})}$ on kompaktne hulk ruumis X^* . Ruumi X^* aproksimatsiooniomaduse tõttu leidub operaator $R \in \mathcal{F}(X^*, X^*)$ nii, et iga $x^* \in \overline{T^*(B_{Y^*})}$ korral $\|x^* - Rx^*\| \leq \varepsilon$.

Kuna T on kompaktne, siis $T^{**}(X^{**}) \subset Y$ (vt. näiteks [16, lk. 341]), seega $T^{**}R^* \in \mathcal{F}(X^{**}, Y)$. Tähistame $S = T^{**}R^*|_X$. Siis $S \in \mathcal{F}(X, Y)$. Paneme tähele, et Hahn-Banachi teoreemi järel duse põhjal iga $x \in B_X$ korral

$$\begin{aligned} \|Tx - Sx\| &= \sup_{y^* \in B_{Y^*}} |y^*(Tx) - y^*(T^{**}R^*x)| = \sup_{y^* \in B_{Y^*}} |(T^*y^*)x - (RT^*y^*)x| \\ &\leq \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \|T^*y^* - R(T^*y^*)\| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Järelikult

$$\|T - S\| = \sup_{x \in B_X} \|Tx - Sx\| \leq \varepsilon.$$

□

Defineerime nüüd Banachi ruumide projektiivse tensorkorrutise. Selleks peame alustama projektiivse tensornormi mõistega.

Definitsioon. Projektiivne norm $\|\cdot\|_\pi$ algebraisel tensorkorrutisel $X \otimes Y$ defineeritakse järgmiselt:

$$\|u\|_\pi = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\| : u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right\}.$$

Ka projektiivne norm on tensornorm, seega võib kirjutada $X \otimes_{\pi} Y = (X \otimes Y, \|\cdot\|_{\pi})$.

Definitsioon. Ruumi $X \hat{\otimes}_{\pi} Y$ nimetatakse Banachi ruumide X ja Y projektiivseks tensorkorrutiseks ja tähistatakse

$$X \hat{\otimes} Y = X \hat{\otimes}_{\pi} Y.$$

Grothendieck on andnud projektiivsele tensorkorrutisele lihtsa kirjelduse (vt. [6], tõestust vt. näiteks [2, lk. 227]): iga $u \in X \hat{\otimes} Y$ esitub kujul

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n, \text{ kus } \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \|y_n\| < \infty$$

(rida koondub absoluutselt projektiivse normi suhtes). Lisaks sellele

$$\|u\|_{\pi} = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \|y_n\| : u = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n \right\}, u \in X \hat{\otimes} Y,$$

kus infimum on võetud üle kõikvõimalike u esituste sellisel kujul.

Projektiivse tensorkorrutise kaasruumi saab veelgi lihtsamalt kirjeldada. Ruumi $X \hat{\otimes} Y$ kaasruum on isomorfne ruumidega $\mathcal{L}(X, Y^*)$ ja $\mathcal{L}(Y, X^*)$ vastavalt duaalsuste

$$\left\langle A, \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (Ax_n)(y_n)$$

ja

$$\left\langle B, \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (By_n)(x_n)$$

kaudu. See isomorfism on ka isomeetria, seega oleme saanud järgmise tulemuse.

Lause 3.3. Olgu X ja Y Banachi ruumid. Siis

$$(X \hat{\otimes} Y)^* = \mathcal{L}(X, Y^*) \text{ ja } (X \hat{\otimes} Y)^* = \mathcal{L}(Y, X^*).$$

Kirjeldame nüüd Banachi ruumide projektiivset tensorkorrutist tuumaoperaatorite ruumi kaudu, seda küll täiendavatel eeldustel.

Definitsioon. Olgu X ja Y Banachi ruumid. Öeldakse, et operaator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ on tuumaoperaator, kui leiduvad $x_n^* \in X^*$ ja $y_n \in Y$ nii, et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^*\| \|y_n\| < \infty \quad \text{ja} \quad Tx = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) y_n \quad \forall x \in X.$$

Tähistame $T = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* \otimes y_n$. Kõigi ruumist X ruumi Y tegutsevate tuumaoperaatorite ruumi tähistame $\mathcal{N}(X, Y)$.

Ruumist $X^* \hat{\otimes} Y$ saab defineerida loomuliku pealekujutuse ruumile $\mathcal{N}(X, Y)$. See seab suvalisele elemendile $u \in X^* \hat{\otimes} Y$, mis esitub kujul

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* \otimes y_n, \quad \text{kus} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^*\| \|y_n\| < \infty,$$

vastavusse tuumaoperaatori

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^* \otimes y_n : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) y_n.$$

Kui kas ruumil X^* või ruumil Y on aproksimatsiooniomadus, siis kasutades projektiivse tensorkorrutise kaasruumi $(X^* \hat{\otimes} Y)^*$ kirjeldust kui vastavalt kas operaatorite ruumi $\mathcal{L}(Y, X^{**})$ või $\mathcal{L}(X^*, Y^*)$ ning Hahn-Banachi teoreemi, saab näidata, et mainitud loomulik pealekujutus on üks-ühene (vt. näiteks [6, ptk. I, lk. 167]). See kujutus on ka isomeetria ruumide $X^* \hat{\otimes} Y$ ja $\mathcal{N}(X, Y)$ vahel, kui ruum $\mathcal{N}(X, Y)$ varustada operaatori tuumanormiga

$$\|T\|_{\mathcal{N}} = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^*\| \|y_n\| : T = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* \otimes y_n \right\}, \quad T \in \mathcal{N}(X, Y).$$

Seega kehtib järgmine lause.

Lause 3.4. *Olgu X ja Y Banachi ruumid. Kui ruumil X^* või ruumil Y on aproksimatsiooniomadus, siis*

$$X^* \hat{\otimes} Y = \mathcal{N}(X, Y).$$

Injektiivse tensorkorrutise kaasruumi kirjeldamine on üldjuhul üsnagi töömahukas ülesanne, mis nõuab integraaloperaatori mõistet ja omadusi. Toome järgnevalt ilma tõestuseta ära injektiivse tensorkorrutise kaasruumi kirjelduse teatud eeldustel (lause 3.5 tõestust vt. [21, lk. 114]).

Definitsioon. *Öeldakse, et Banachi ruum X on Asplundi ruum, kui ruumi X iga separaablil alamruumi Y kaasruum Y^* on separaabel.*

Lause 3.5. *Olgu X ja Y Banachi ruumid. Kui Y on Asplundi ruum, siis*

$$(X^* \check{\otimes} Y)^* = \mathcal{N}(X^*, Y^*).$$

Lauses 3.5 kaasruumi kirjeldust märkiv võrdus tähendab isomeetrilist isomorfismi, mis on defineeritud duaalsusega

$$\left\langle T, \sum_{i=1}^n x_i^* \otimes y_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n (T x_i^*)(y_i).$$

4 Omadus $M^*(a, B, c)$

Käesolevas osas defineerime omaduse $M^*(a, B, c)$ ning uurime mõningaid tema omadusi. Omaduse $M^*(a, B, c)$ tõi sisse E. Oja artiklis [17], sellel samal artiklil põhineb ka magistritöö käesolev osa. Märgime, et omadus $M^*(a, B, c)$ üldistab N. J. Kaltoni poolt artiklis [12] kasutusele võetud omadust (M^*) (vt. ka [11]) ning Å. Lima poolt artiklis [13] toodud omadust (wM^*) . Täpsemalt, $(M^*) = M^*(1, \{-1\}, 1)$ ja $(wM^*) = M^*(1, \{-2\}, 0)$.

Alustuseks defineerime ülemise piirväärtuse, sest seda kasutab $M^*(a, B, c)$ definitsioon.

Definitsioon. Olgu (λ_α) pere ruumis \mathbb{R} . Pere (λ_α) ülemine piirväärtus $\limsup_\alpha \lambda_\alpha$ defineeritakse järgmiselt:

$$\limsup_\alpha \lambda_\alpha = \sup \lim_\beta \lambda_\beta,$$

kus *supremum* võetakse üle pere (λ_α) kõigi koonduvate osaperede (λ_β) .

Olgu kogu selles osas $B \subset \mathbb{K}$ kompaktne hulk ning $a, c \geq 0$.

Definitsioon. Me ütleme, et Banachi ruumil X on omadus $M^*(a, B, c)$, kui sellest, et $x^*, y^* \in X^*$ rahuldavad võrratust $\|y^*\| \leq \|x^*\|$ ning (x_ν^*) on tõkestatud pere, mis koondub $*$ -nõrgalt elemendiks x^* ruumis X^* , järeldub, et

$$\limsup_\nu \|ax_\nu^* + bx^* + cy^*\| \leq \limsup_\nu \|x_\nu^*\| \quad \forall b \in B.$$

Paneme tähele, et omaduse $M^*(a, B, c)$ definitsioonis piisab tegelikult vaadelda selliseid funktsionaale $x^*, y^* \in X^*$, et $\|y^*\| < \|x^*\|$. Tõepoolest, kehtigu võrratus

$$\limsup_\nu \|ax_\nu^* + bx^* + cy^*\| \leq \limsup_\nu \|x_\nu^*\| \quad \forall b \in B,$$

kui $\|y^*\| < \|x^*\|$. Olgu nüüd $x^*, y^* \in X^*$ sellised, et $\|y^*\| = \|x^*\|$ ning olgu $0 < t < 1$. Siis $\|ty^*\| < \|x^*\|$ ning kehtib võrratus

$$\limsup_\nu \|ax_\nu^* + bx^* + cty^*\| \leq \limsup_\nu \|x_\nu^*\| \quad \forall b \in B.$$

Minnes piirile protsessis $t \rightarrow 1$ saamegi võrratuse

$$\limsup_\nu \|ax_\nu^* + bx^* + cy^*\| \leq \limsup_\nu \|x_\nu^*\| \quad \forall b \in B.$$

Järgmiseks näitame, et omadus $M^*(a, B, c)$ pärandub alamruumidesse.

Lause 4.1. Olgu X Banachi ruum omadusega $M^*(a, B, c)$. Siis ka ruumi X kõigil alamruumidel on omadus $M^*(a, B, c)$.

Tõestus. Olgu X Banachi ruum, millel on omadus $M^*(a, B, c)$, ning olgu Y ruumi X alamruum. Oletame vastuväiteliselt, et alamruumil Y ei ole omadust $M^*(a, B, c)$, seega saame leida $b \in B$, $y^*, w^* \in Y^*$ ning tõkestatud pere (y_ν^*) nii, et $\|w^*\| \leq \|y^*\|$, pere (y_ν^*) koondub *-nõrgalt elemendiks y^* ruumis Y^* ja

$$\limsup_{\nu} \|ay_\nu^* + by^* + cw^*\| > \limsup_{\nu} \|y_\nu^*\|.$$

Vastavalt ülemise piirväärtuse definitsioonile võime osaperele üle minnes üldisust kitsendamata eeldada, et

$$\lim_{\nu} \|ay_\nu^* + by^* + cw^*\| > \lim_{\nu} \|y_\nu^*\|.$$

Olgu x_ν^* ja z^* vastavalt funktsionaalide y_ν^* ja w^* normi säilitavad jätkud ruumile X . Alaoglu teoreemi põhjal saame leida pere (x_ν^*) osapere $(x_{\nu(\mu)}^*)$ nii, et $(x_{\nu(\mu)}^*)$ koondub *-nõrgalt mingiks elemendiks x^* ruumis X^* . On ilmne, et x^* on funktsionaali y^* jätk, mistõttu $\|z^*\| \leq \|x^*\|$.

Kasutades ruumi X omadust $M^*(a, B, c)$ saame nüüd, et

$$\begin{aligned} \lim_{\nu} \|ay_\nu^* + by^* + cw^*\| &= \lim_{\mu} \|(ax_{\nu(\mu)}^* + bx^* + cz^*)\|_Y \\ &\leq \limsup_{\mu} \|ax_{\nu(\mu)}^* + bx^* + cz^*\| \\ &\leq \limsup_{\mu} \|x_{\nu(\mu)}^*\| = \lim_{\nu} \|y_\nu^*\|. \end{aligned}$$

Vastuolu. Seega alamruumil Y on omadus $M^*(a, B, c)$. □

Allolev lemma kirjeldab, kuidas teatud kompaksete aproksimeerivate pere olemasolust järeldub omadus $M^*(a, B, c)$.

Lemma 4.2. *Olgu X Banachi ruum. Kui iga ühemõõtmelise operaatori $S \in \mathcal{L}(X, X)$, $\|S\| \leq 1$, korral leidub pingul kompaktne aproksimeeriv pere (K_α) nii, et*

$$\limsup_{\alpha} \|aI_X + bK_\alpha + cS\| \leq 1 \quad \forall b \in B,$$

siis ruumil X on omadus $M^(a, B, c)$.*

Tõestus. Olgu (x_ν^*) tõkestatud pere, mis koondub *-nõrgalt elemendiks x^* ruumis X^* . Omaduse $M^*(a, B, c)$ definitsioonile järgnenud arutelu põhjal piisab vaadelda juhtu $\|y^*\| < \|x^*\|$. Valime $x \in X$ nii, et $x^*(x) = 1$ ning $\|y^*\| < 1/\|x\|$. Tähistame $S = y^* \otimes x$. Siis lause 3.1 põhjal $\|S\| = \|y^*\|\|x\| < 1$. Lisaks $y^* = S^*x^*$, sest kasutades operaatori $y^* \otimes x$ definitsiooni ning arvestades, et $x^*(x) = 1$, saame iga $z \in X$ korral

$$S^*x^*(z) = (x^*S)(z) = x^*(Sz) = x^*(y^*(z)(x)) = y^*(z)x^*(x) = y^*(z).$$

Olgu (K_α) eelduses antud pingul kompaktne aproksimeeriv pere. Kuna kompaktse operaatori kaasoperaator teisendab tõkestatud *-nõrgalt koonduvad pered normi järgi koonduvateks peredeks, siis $\|K^*(x^* - x_\nu^*)\| \rightarrow 0$ kui $K \in \mathcal{K}(X, X)$. Seega saame suvalise fikseeritud α korral

$$\begin{aligned} \limsup_{\nu} \|ax_\nu^* + bx^* + cy^*\| &= \limsup_{\nu} \|aI_{X^*}x_\nu^* + bx^* + cS^*x^* + bK_\alpha^*x_\nu^* - bK_\alpha^*x_\nu^* \\ &\quad + bK_\alpha^*x^* - bK_\alpha^*x^* + cS^*x_\nu^* - cS^*x_\nu^*\| \\ &\leq \limsup_{\nu} \|(aI_{X^*} + bK_\alpha^* + cS^*)x_\nu^*\| \\ &\quad + \limsup_{\nu} \|(bK_\alpha^* + cS^*)(x^* - x_\nu^*)\| + |b| \cdot \|x^* - K_\alpha^*x^*\| \\ &\leq \|aI_X + bK_\alpha + cS\| \cdot \limsup_{\nu} \|x_\nu^*\| + |b| \cdot \|x^* - K_\alpha^*x^*\|. \end{aligned}$$

Võttes ülemise piirväärtuse α järgi, jõuamegi soovitud võrratuseni. \square

Alljärgnevast tulemusest nähtub, et omadus $M^*(a, B, c)$ on separaablilt määratud.

Teoreem 4.3. *Kui Banachi ruumi X kõigil separaablitel kinnistel alamruumidel on omadus $M^*(a, B, c)$, siis ruumil X on omadus $M^*(a, B, c)$.*

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et ruumil X ei ole omadust $M^*(a, B, c)$. Omaduse $M^*(a, B, c)$ definitsioonile järgnenud arutelu põhjal leiduvad siis $b \in B$, $x^*, y^* \in X^*$ ja tõkestatud pere (x_ν^*) nii, et $\|y^*\| < \|x^*\|$, (x_ν^*) koondub *-nõrgalt elemendiks x^* ruumis X ning

$$\limsup_{\nu} \|ax_\nu^* + bx^* + cy^*\| > \limsup_{\nu} \|x_\nu^*\|.$$

Minnes üle osaperele, võime üldisust kitsendamata eeldada, et

$$\lim_{\nu} \|ax_\nu^* + bx^* + cy^*\| > \lim_{\nu} \|x_\nu^*\|.$$

Seega, minnes üle pere lõpposale, võime üldisust kitsendamata eeldada, et

$$\inf_{\nu} \|ax_\nu^* + bx^* + cy^*\| > \delta > \sup_{\nu} \|x_\nu^*\|$$

mingi $\delta > 0$ korral. Valime $x_0 \in S_X$ ja ν_1 nii, et $\|y^*\| < |x^*(x_0)|$ ja $|(x_{\nu_1}^* - x^*)(x_0)| < 1$. Iga $k = 1, 2, \dots$ korral valime induktiivselt $x_k \in S_X$ ja ν_{k+1} nii, et

$$|(ax_{\nu_k}^* + bx^* + cy^*)(x_k)| > \delta$$

ja

$$|(x_{\nu_{k+1}}^* - x^*)(x_0)| < \frac{1}{k+1}, \dots, |(x_{\nu_{k+1}}^* - x^*)(x_k)| < \frac{1}{k+1}.$$

Võtame $Y = \overline{\text{span}\{x_0, x_1, \dots\}}$. Siis vastavalt x_0 valikule

$$\|y^*|_Y\| \leq \|y^*\| < |x^*(x_0)| \leq \|x^*|_Y\|$$

ja $x_{\nu_n}^*(y) \rightarrow x^*(y)$ iga $y \in Y$ korral, kuid

$$\begin{aligned} \limsup_n \|(ax_{\nu_n}^* + bx^* + cy^*)|_Y\| &\geq \delta > \sup_\nu \|x_\nu^*\| \geq \sup_n \|x_{\nu_n}^*\| \\ &\geq \sup_n \|x_{\nu_n}^*|_Y\| \geq \limsup_n \|x_{\nu_n}^*|_Y\|. \end{aligned}$$

Seega ruumil Y ei ole omadust $M^*(a, B, c)$. Vastuolu. \square

Järgnevalt sõnastame ilma tõestusteta mõned laused, mida meil läheb vaja järgmistes magistritöö osades. Lause 4.4 abil järeldame käesoleva magistritöö põhiteoreemist 6.4 Saphari teoreemi 7.1, lauset 4.5 kasutame põhiteoreemi 6.4 tõestamisel ning lause 4.6 leiab rakendust järgmises osas lause 5.2 tõestuses. Kõigi nende lausete tõestused võib leida E. Oja artiklist [17, osa 1].

Lause 4.4. *Olgu $0 \leq r < 1$. Tähistame $B = \{b : |b + 1| \leq r\}$. Iga separaabel Banachi ruum X , mille kaasruum on separaabel, on ekvivalentselt ümber normeeritav nii, et tal on omadus $M^*(1, B, 0)$.*

Lause 4.5. *Kui Banachi ruumil X on omadus $M^*(a, B, c)$, kus $\max |B| + c > 1$, siis X on Asplundi ruum.*

Lause 4.6. *Olgu X Banachi ruum, millel on omadus $M^*(a, B, c)$, kus $\max |B| + c > 1$, ning olgu Y ruumi X kinnine alamruum. Kui alamruumil Y leidub meetriline aproksimeeriv pere (K_α) , siis (K_α) on pingul.*

5 Meetrilised aproksimeerivad pered ja omadus $M^*(a, B, c)$

Selle osa kõige olulisemaks tulemuseks on teoreem 5.5, mis moodustab vundamenti, millele tugineb käesoleva magistritöö põhiteoreemi 6.4 tõestus. Sellele teoreemile eelneb siin osas hulk abitulemusi, mida me tõestuses kasutame. Käesolev osa põhineb E. Oja artiklil [17], kust võib leida ka nende tulemuste tõestused, mida me siinkohal ei tõesta.

Alustame sellest, et näitame, kuidas omadusest $M^*(a, B, c)$ järeldeb teatud geometriliste omadustega pingul aproksimeerivate perede olemasolu.

Olgu kogu selles osas $B \subset \mathbb{K}$ kompaktne hulk ning $a, c \geq 0$.

Lemma 5.1. *Olgu X Banachi ruum omadusega $M^*(a, B, c)$ ning olgu Y tema separaabel kinnine alamruum. Kui ruumil Y on pingul kompaktne aproksimeeriv pere $(L_n)_{n=1}^\infty$, siis leiduvad $K_n \in \text{conv}\{L_n, L_{n+1}, \dots\}$, $n \in \mathbb{N}$, nii, et*

$$\limsup_n \|aI_Y + bK_n + cS\| \leq 1 \quad \forall b \in B, \quad \forall S \in B_{\mathcal{K}(Y, Y)}.$$

Lause 5.2. *Olgu X Banachi ruum omadusega $M^*(a, B, c)$, kus $\max|B| + c > 1$. Kui ruumi X separaablil kinnisel alamruumil Y on meetriline aproksimeeriv pere $(L_n)_{n=1}^\infty$, siis ruumil Y on ka pingul meetriline aproksimeeriv pere $(K_n)_{n=1}^\infty$ nii, et $K_n \in \text{conv}\{L_n, L_{n+1}, \dots\}$, $n \in \mathbb{N}$, ning*

$$\limsup_n \|aI_Y + bK_n + cS\| \leq 1 \quad \forall b \in B, \quad \forall S \in B_{\mathcal{K}(Y, Y)}.$$

Tõestus. Olgu X Banachi ruum, millel on omadus $M^*(a, B, c)$, ning olgu Y ruumi X separaabel kinnine alamruum, millel on meetriline aproksimeeriv pere $(L_n)_{n=1}^\infty$. Siis lause 4.6 põhjal on see pere pingul ning lemma 5.1 põhjal leiduvad $K_n \in \text{conv}\{L_n, L_{n+1}, \dots\}$, $n \in \mathbb{N}$, nii, et

$$\limsup_n \|aI_Y + bK_n + cS\| \leq 1 \quad \forall b \in B, \quad \forall S \in B_{\mathcal{K}(Y, Y)}.$$

□

Lemma 5.3. *Olgu X Banachi ruum ja $T \in B_{\mathcal{L}(X, X)}$. Kui ruumil X on meetriline aproksimatsiooniomadus ning ruumi X iga separaabel kinnine alamruum Y , millel leidub meetriline aproksimeeriv pere $(L_n)_{n=1}^\infty$, rahuldab tingimust, et iga $S \in B_{\mathcal{K}(Y, Y)}$ korral leidub jada $(K_n)_{n=1}^\infty \subset \text{conv}\{L_1, L_2, \dots\}$ nii, et*

$$\limsup_n \|aT|_Y + bT|_Y K_n + cS\| \leq 1 \quad \forall b \in B,$$

siis iga $S \in B_{\mathcal{K}(X, X)}$ korral leidub ruumil X meetriline aproksimeeriv pere (K_α) nii, et

$$\limsup_\alpha \|aT + bTK_\alpha + cS\| \leq 1 \quad \forall b \in B.$$

Järgmiseks näitame, et vaadeldavate geomeetriliste omadustega aproksimeerivate perede olemasolu on separaablilt määratud.

Teoreem 5.4. *Olgu $\max|B| + c > 1$. Kui Banachi ruumil X on meetriline aproksimatsiooniomadus ning ruumi X iga meetrilise aproksimatsiooniomadusega separaabli kinnise alamruumi Y ja iga $S \in B_{\mathcal{K}(Y,Y)}$ korral leidub pingul kompaktne aproksimeeriv pere $(K_n)_{n=1}^{\infty}$, mis rahuldab tingimust*

$$\limsup_n \|aI_Y + bK_n + cS\| \leq 1 \quad \forall b \in B,$$

siis iga $S \in B_{\mathcal{K}(X,X)}$ korral leidub ruumil X pingul meetriline aproksimeeriv pere (K_α) , mis rahuldab tingimust

$$\limsup_\alpha \|aI_X + bK_\alpha + cS\| \leq 1 \quad \forall b \in B.$$

Tõestus. Näitame kõigepealt, et ruumil X on omadus $M^*(a, B, c)$. Selleks vaatleme ruumi X suvalist separaablilt kinnist alamruumi Y . Teoreemi 4.3 põhjal piisab näidata, et alamruumil Y on omadus $M^*(a, B, c)$. Kuna ruumil X on meetriline aproksimatsiooniomadus, siis teoreemi 2.3 põhjal alamruum Y sisaldub ruumi X separaablis kinnises alamruumis Z , millel on meetriline aproksimatsiooniomadus. Eelduse kohaselt leidub iga $S \in B_{\mathcal{K}(Z,Z)}$ korral pingul kompaktne aproksimeeriv pere $(K_n)_{n=1}^{\infty}$, mis rahuldab tingimust

$$\limsup_n \|aI_Z + bK_n + cS\| \leq 1 \quad \forall b \in B,$$

seega lause 4.2 põhjal on alamruumil Z omadus $M^*(a, B, c)$. Kuna ruum Y on ka ruumi Z alamruum, siis lause 4.1 põhjal on alamruumil Y omadus $M^*(a, B, c)$.

Olgu nüüd Y ruumi X suvaline meetrilise aproksimatsiooniomadusega separaabel kinnine alamruum. Kuna ruumil X on omadus $M^*(a, B, c)$, kus $\max|B| + c > 1$, siis kasutades teoreemi eeldust ning rakendades lauset 5.2 saame, et alamruumil Y leidub pingul meetriline aproksimeeriv pere $(L_n)_{n=1}^{\infty}$, kus $L_n \in \text{conv}\{K_n, K_{n+1}, \dots\}$, $n \in \mathbb{N}$, nii, et

$$\limsup_n \|aI_Y + bL_n + cS\| \leq 1 \quad \forall b \in B, \quad \forall S \in B_{\mathcal{K}(Y,Y)}.$$

Paneme tähele, et kuna Y on ruumi X alamruum, siis $I_Y = I_X|_Y$, seega lemma 5.3 põhjal leidub ruumil X iga $S \in B_{\mathcal{K}(X,X)}$ korral meetriline aproksimeeriv pere (K_α) nii, et

$$\limsup_\alpha \|aI_X + bK_\alpha + cS\| \leq 1 \quad \forall b \in B.$$

Lause 4.6 põhjal on pere (K_α) pingul. □

Teoreem 5.5. *Olgu X Banachi ruum ning $\max|B| + c > 1$. Järgmised väited on samaväärsed:*

1°. Iga $S \in B_{\mathcal{K}(X,X)}$ korral leidub pingul meetriline aproksimeeriv pere (K_α) , mis rahuldab tingimust

$$\limsup_{\alpha} \|aI_X + bK_\alpha + cS\| \leq 1 \quad \forall b \in B.$$

2°. Ruumil X on meetriline aproksimatsiooniomadus ja omadus $M^*(a, B, c)$.

3°. Ruumil X on meetriline aproksimatsiooniomadus ning ruumi X iga aproksimatsiooniomadusega separaabli kinnise alamruumi Y korral leidub pingul meetriline aproksimeeriv pere $(K_n)_{n=1}^\infty$, mis rahuldab tingimust

$$\limsup_n \|aI_Y + bK_n + cS\| \leq 1 \quad \forall b \in B$$

iga $S \in B_{\mathcal{K}(Y,Y)}$ korral.

Tõestus. $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$. Leidugu iga $S \in B_{\mathcal{K}(X,X)}$ korral pingul meetriline aproksimeeriv pere (K_α) nii, et

$$\limsup_{\alpha} \|aI_X + bK_\alpha + cS\| \leq 1 \quad \forall b \in B.$$

Meetrilise aproksimeeriva pere olemasolust järeldub teoreemi 2.2 põhjal, et ruumil X on meetriline aproksimatsiooniomadus. Lemmat 4.2 rakendades saame, et ruumil X on ka omadus $M^*(a, B, c)$.

$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$. Olgu ruumil X meetriline aproksimatsiooniomadus ning omadus $M^*(a, B, c)$. Siis lause 5.2 põhjal leidub ruumi X iga meetrilise aproksimatsiooniomadusega separaabli kinnise alamruumi Y korral pingul meetriline aproksimeeriv pere $(K_n)_{n=1}^\infty$, mis rahuldab tingimust

$$\limsup_n \|aI_Y + bK_n + cS\| \leq 1 \quad \forall b \in B$$

iga $S \in B_{\mathcal{K}(Y,Y)}$ korral.

$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$. Olgu ruumil X meetriline aproksimatsiooniomadus ning leidugu ruumi X iga meetrilise aproksimatsiooniomadusega separaabli kinnise alamruumi Y korral pingul meetriline aproksimeeriv pere $(K_n)_{n=1}^\infty$, mis rahuldab tingimust

$$\limsup_n \|aI_Y + bK_n + cS\| \leq 1 \quad \forall b \in B$$

iga $S \in B_{\mathcal{K}(Y,Y)}$ korral. Siis teoreemi 5.4 rakendades saame, et iga $S \in B_{\mathcal{K}(X,X)}$ korral leidub ruumil X pingul meetriline aproksimeeriv pere (K_α) nii, et

$$\limsup_{\alpha} \|aI_X + bK_\alpha + cS\| \leq 1 \quad \forall b \in B.$$

□

6 Põhiteoreem

Selles osas tõestame magistritöö põhitlemuse - teoreemi 6.4. Kuid alustame kolmest abitulemusest, mida meil põhiteoreemi tõestamisel vaja läheb. Järgnev lemma on skemaatilisel tõestatud M. M. Day raamatus [1, lk. 30].

Lemma 6.1. *Olgu Z normeeritud ruum ning Z_0 tema kinnine alamruum. Siis ruumid Z_0^* ja Z^*/Z_0^\perp on isomeetriliselt isomorfsed. Seejuures*

$$\|z^*|_{Z_0}\|_{Z_0^*} = \|z^* + Z_0^\perp\|_{Z^*/Z_0^\perp} \quad \forall z^* \in Z^*.$$

Tõestus. Nende ruumide isomeetrilise isomorfisuse tõestamiseks piisab näidata, et leidub isomeetriline lineaarne pealekujutus $Z^*/Z_0^\perp \rightarrow Z_0^*$.

Olgu $i : Z_0 \rightarrow Z$ samasusteisendus. Siis $i^* : Z^* \rightarrow Z_0^*$ on pidev ja lineaarne. Defineerime operaatori $i' : Z^*/Z_0^\perp \rightarrow Z_0^*$ seosega

$$i'(z^* + Z_0^\perp) = i^*(z^*) \quad \forall z^* + Z_0^\perp \in Z^*/Z_0^\perp.$$

See definitsioon on korrektne, sest kui $z_1^* + Z_0^\perp = z_2^* + Z_0^\perp$ (st. $z_1^* - z_2^* \in Z_0^\perp$), siis iga $z \in Z_0$ korral

$$\begin{aligned} (i'(z_1^* + Z_0^\perp) - i'(z_2^* + Z_0^\perp))(z) &= (i^*(z_1^*) - i^*(z_2^*))(z) = (i^*(z_1^* - z_2^*))(z) \\ &= (z_1^* - z_2^*)(iz) = (z_1^* - z_2^*)(z) = 0, \end{aligned}$$

seega $i'(z_1^* + Z_0^\perp) = i'(z_2^* + Z_0^\perp)$. Märkame veel, et i' on lineaarne, sest i^* on lineaarne.

Kui $z_0^* \in Z_0^*$, siis Hahn-Banachi teoreemi kohaselt saame teda jätkada funktsionaaliks $z^* \in Z^*$ nii, et $\|z^*\| = \|z_0^*\|$. Seega

$$i'(z^* + Z_0^\perp)(z) = i^*(z^*)(z) = z^*(iz) = z^*(z) = z_0^*(z) \quad \forall z \in Z_0,$$

järelikult $i'(z^* + Z_0^\perp) = z_0^*$. Arvestades, et $z_0^* \in Z_0^*$ oli suvaline, oleme saanud, et i' on sürjektiivne.

Näitame nüüd, et i' on isomeetria. Olgu $\pi : Z^* \rightarrow Z^*/Z_0^\perp$ kanooniline kujutus, st. $\pi(z^*) = z^* + Z_0^\perp$, $z^* \in Z^*$. Märkame, et siis $i^* = i'\pi$. Üldtuntud tulemus (mille tõestust vt. näiteks [19, lk. 145]) väidab, et kanooniline kujutus π teisendab ruumi Z^* lahtise ühikera ruumi Z^*/Z_0^\perp lahtiseks ühikkeraks. Seega

$$\|i^*\| = \sup_{\|z^*\| < 1} \|i^*(z^*)\| = \sup_{\|z^*\| < 1} \|(i'\pi)(z^*)\| = \sup_{\|z^* + Z_0^\perp\| < 1} \|i'(z^* + Z_0^\perp)\| = \|i'\|.$$

Kuna $\|i'\| = \|i^*\| = 1$, siis saame võrratuse

$$\|i'(z^* + Z_0^\perp)\| \leq \|i'\| \|z^* + Z_0^\perp\| = \|z^* + Z_0^\perp\|, \quad z^* + Z_0^\perp \in Z^*/Z_0^\perp.$$

Teistpidi võrratuse saamiseks paneme tähele, et $i^*(z^*) = z^*|_{Z_0}$. Seega

$$\|i'(z^* + Z_0^\perp)\| = \|i^*(z^*)\| = \|z^*|_{Z_0}\|.$$

Hahn-Banachi teoreemi põhjal saame leida $y^* \in Z^*$ nii, et $y^*|_{Z_0} = z^*|_{Z_0}$ ning $\|y^*\|_{Z^*} = \|z^*|_{Z_0}\|_{Z_0^*}$. Paneme tähele, et siis $z^* - y^* \in Z_0^\perp$, järelikult

$$\|i'(z^* + Z_0^\perp)\| = \|y^*\| = \|z^* - (z^* - y^*)\| \geq \|z^* + Z_0^\perp\|.$$

Seega i' on isomeetria ning ühtlasi oleme tõestanud lemma sõnastuses toodud võrduse. \square

Definitsioon. Olgu Z Banachi ruum. Alamruumi $V \subset Z^*$ karakteristikuks nimetatakse arvu $r(V)$, mis on määratud võrdusega

$$r(V) = \inf_{z \in S_Z} \sup_{z^* \in B_V} |z^*(z)|.$$

Definitsioonist on ilmne, et $r(V) \leq 1$. Järgnevalt näitame, et teatud erijuhul on võimalik hulga karakteristikut ka alt hinnata. Tegemist on folkloorse faktiga, mida omistatakse Dixmier'le.

Lemma 6.2. Olgu Z Banachi ruum ja $V = \ker f$ mingi $f \in Z^{**}$ korral. Olgu $\rho \geq 0$. Kui iga $z \in S_Z$ ja iga $\lambda \in \mathbb{K}$ korral $\|z + \lambda f\|_{Z^{**}} \geq \rho$, siis $r(V) \geq \rho$.

Tõestus. Selle lemma tõestamisel kasutame järgmist üldtuntud tulemust (vt. näiteks [19, lk. 180]): kui X on Banachi ruum ja Y on normeeritud ruum ning $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, kusjuures $\text{ran } A$ on täielik, siis $\text{ran } A^* = (\ker A)^\perp$.

Me saame mainitud tulemust rakendada, sest kuna $\text{ran } f = \{0\}$ või $\text{ran } f = \mathbb{K}$, siis ta on täielik. Seega $\text{ran } f^* = (\ker f)^\perp$. Paneme veel tähele, et kuna $\mathbb{K}^* = \mathbb{K}$, siis

$$\text{ran } f^* = \{f^*(\lambda) : \lambda \in \mathbb{K}\} = \{\lambda f : \lambda \in \mathbb{K}\} = \text{span}\{f\},$$

ning järelikult $\text{span}\{f\} = (\ker f)^\perp$. Seetõttu

$$Z^{**}/\text{span}\{f\} = Z^{**}/(\ker f)^\perp$$

ning lemma 6.1 põhjal on see ruum isomeetriliselt isomorfne ruumiga $(\ker f)^*$, kusjuures me saame sama lemma põhjal võrduse

$$\begin{aligned} \sup_{z^* \in B_{\ker f}} |z^*(z)| &= \|z|_{\ker f}\|_{(\ker f)^*} = \|z + (\ker f)^\perp\|_{Z^{**}/(\ker f)^\perp} \\ &= \|z + \text{span}\{f\}\|_{Z^{**}/\text{span}\{f\}} = \inf_{\lambda \in \mathbb{K}} \|z + \lambda f\|. \end{aligned}$$

Järelikult jõuame soovitud võrratuseni:

$$\begin{aligned} r(V) &= r(\ker f) = \inf_{z \in S_Z} \sup_{z^* \in B_{\ker f}} |z^*(z)| \\ &= \inf_{z \in S_Z} \inf_{\lambda \in \mathbb{K}} \|z + \lambda f\| \geq \inf_{z \in S_Z} \inf_{\lambda \in \mathbb{K}} \rho = \rho. \end{aligned}$$

\square

Põhiteoreemi tõestus kasutab veel järgmist tulemust, mida kutsutakse kaasruumi normi *-nõrgaks alumiseks poolpidevuseks.

Lemma 6.3. *Olgu X normeeritud ruum. Kui pere (x_α^*) koondub *-nõrgalt elemendiks x^* ruumis X^* , siis $\|x^*\| \leq \liminf_\alpha \|x_\alpha^*\|$.*

Lemma tõestust vt. näiteks [16, lk. 227] või [1, lk. 29].

Teoreem 6.4. *Olgu X ja Y Banachi ruumid. Eeldame, et ruumil Y on omadus $M^*(a, B, c)$, kus $\max |B| + c < 1$, ning meetriline aproksimatsiooniomadus. Olgu $\mathcal{A}(X, Y)$ ruumi $\mathcal{L}(X, Y)$ kinnine alamruum, mis sisaldab ruumi $\mathcal{K}(X, Y)$. Kui $\mathcal{A}(X, Y) \neq \mathcal{K}(X, Y)$, siis ei leidu projektorit ruumist $\mathcal{A}(X, Y)$ ruumile $\mathcal{K}(X, Y)$, mille norm oleks väiksem kui $\max |B| + c$.*

Tõestus. Kõigepealt märgime, et ruumil Y leidub teoreemi 5.5 põhjal pingul meetriline aproksimeeriv pere (K_α) , st. iga indeksi α korral $K_\alpha \in \mathcal{F}(Y, Y)$, $\sup \|K_\alpha\| \leq 1$, $K_\alpha y \rightarrow y$ iga $y \in Y$ korral ning $K_\alpha^* y^* \rightarrow y^*$ iga $y^* \in Y^*$ korral. Kui $K_\alpha \in \mathcal{F}(Y, Y)$, siis $K_\alpha^* \in \mathcal{F}(Y^*, Y^*)$. Kuna $\|K_\alpha^*\| = \|K_\alpha\|$, siis $\sup \|K_\alpha^*\| \leq 1$, järelikult on ka ruumil Y^* meetriline aproksimatsiooniomadus. Lause 4.5 põhjal on Y Asplundi ruum. Seega lause 3.2, 3.5 ja 3.4 põhjal on ruumid $(\mathcal{K}(X, Y))^*$ ja $X^{**} \widehat{\otimes} Y^*$ kanooniliselt isomeetriliselt isomorfsed duaalsuse

$$\langle v, S \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{**}(S^* y_n^*), \quad v = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{**} \otimes y_n^* \in X^{**} \widehat{\otimes} Y^*, \quad S \in \mathcal{K}(X, Y),$$

kaudu. Lisaks on lause 3.3 põhjal ruumid $(\mathcal{K}(X, Y))^{**} = (X^{**} \widehat{\otimes} Y^*)^*$ ja $\mathcal{L}(X^{**}, Y^{**})$ kanooniliselt isomeetriliselt isomorfsed sarnase duaalsuse

$$\langle v, S \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (S x_n^{**})(y_n^*), \quad v = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{**} \otimes y_n^* \in X^{**} \widehat{\otimes} Y^*, \quad S \in \mathcal{L}(X^{**}, Y^{**}),$$

kaudu. Peale selle on $\mathcal{L}(X, Y)$ ja seetõttu ka $\mathcal{K}(X, Y)$ kanooniliselt sisestatavad ruumi $(\mathcal{K}(X, Y))^{**} = \mathcal{L}(X^{**}, Y^{**})$, kasutades isomeetriat $T \rightarrow T^{**}$.

Olgu nüüd P pidev lineaarne projektor ruumist $\mathcal{A}(X, Y)$ ruumile $\mathcal{K}(X, Y)$. See tähendab, et $P \in \mathcal{L}(\mathcal{A}(X, Y), \mathcal{A}(X, Y))$, P on projektor ja $\text{ran } P = \mathcal{K}(X, Y)$. Kuna $\mathcal{A}(X, Y) \neq \mathcal{K}(X, Y)$, siis $\ker P \neq \{0\}$. Näitamaks, et

$$\|P\| \geq \max |B| + c,$$

vaatleme suvalist operaatorit $T \in \ker P$, $\|T\| = 1$.

Olgu

$$V = \{v \in X^{**} \widehat{\otimes} Y^* : \langle v, T \rangle = 0\} \subset (\mathcal{K}(X, Y))^*$$

operaatori T^{**} tuum, vaadeldes operaatorit T^{**} ruumi $(\mathcal{K}(X, Y))^{**}$ elemendina.

Kuna $T \in \ker P$, siis iga $S \in S_{\mathcal{K}(X, Y)}$ ja iga $\lambda \in \mathbb{K}$ korral

$$P(S + \lambda T) = P(S) + P(\lambda T) = P(S) + \lambda P(T) = P(S) = S.$$

Seega iga $S \in S_{\mathcal{K}(X,Y)}$ ja iga $\lambda \in \mathbb{K}$ korral

$$1 = \|S\| = \|P(S + \lambda T)\| \leq \|P\| \cdot \|S + \lambda T\|,$$

järelikult iga $S \in S_{\mathcal{K}(X,Y)}$ ja iga $\lambda \in \mathbb{K}$ korral

$$\frac{1}{\|P\|} \leq \|S + \lambda T\| = \|S^{**} + \lambda T^{**}\|.$$

Lemma 6.2 põhjal oleme saanud, et

$$\frac{1}{\|P\|} \leq r(V).$$

Teoreemi tõestuse lõpetamiseks jääb veel näidata, et

$$r(V) \leq \frac{1}{\max |B| + c}.$$

Defineerime

$$\text{sign } b = \begin{cases} \frac{|b|}{b}, & \text{kui } b \neq 0, \\ 1, & \text{kui } b = 0. \end{cases}$$

Olgu b selline hulga B element, mille korral $\max |B| = |b| = b \text{ sign } b$.

Fikseerime suvalise $0 < \varepsilon < 1$. Valime kõigepealt $x \in B_X$ nii, et $\|Tx\| \geq \varepsilon$.
Me saame nii valida, sest

$$1 = \|T\| = \sup_{x \in B_X} \|Tx\| > \varepsilon.$$

Leiame $y^* \in Y^*$ nii, et $\|y^*\| = \frac{1}{\|Tx\|}$ ja $y^*(Tx) = 1$. Me saame nii valida, sest teoreem piisavast arvust funktsionaalidest ütleb, et leidub $y_0^* \in Y^*$ nii, et $\|y_0^*\| = 1$ ja $\|y_0^*(Tx)\| = \|Tx\|$. Tarvitseb võtta $y^* = \frac{1}{\|Tx\|} y_0^*$.

Vaatleme ühemõõtmelist lineaarset operaatorit

$$S = \frac{1}{\text{sign } b} y^* \otimes Tx.$$

Paneme tähele, et $S \in S_{\mathcal{K}(Y,Y)}$. Tõepoolest, $S \in \mathcal{K}(Y, Y)$, sest ta on ühemõõtmeline, ning lause 3.1 põhjal

$$\|S\| = \left\| \frac{1}{\text{sign } b} y^* \right\| \|Tx\| = \left| \frac{1}{\text{sign } b} \right| \|y^*\| \|Tx\| = 1.$$

Paneme veel tähele, et kuna

$$\left| b + \frac{c}{\text{sign } b} \right| = |\text{sign } b| \cdot \left| b + \frac{c}{\text{sign } b} \right| = |b \text{ sign } b + c| = ||b| + c| = |b| + c,$$

siis

$$\begin{aligned}\|bT + cST\| &\geq \|bTx + cSTx\| = \left\| bTx + \frac{c}{\text{sign } b} y^*(Tx)Tx \right\| \\ &= \left| b + \frac{c}{\text{sign } b} \right| \cdot \|Tx\| \geq (|b| + c)\varepsilon.\end{aligned}$$

Nüüd kasutame teoreemi 5.5. Leiame meie $S \in S_{\mathcal{K}(Y,Y)}$ jaoks pingul meetrilise aproksimeeriva pere (K_α) , mis rahuldab tingimust

$$\limsup_{\alpha} \|aI_Y + bK_\alpha + cS\| \leq 1,$$

mistõttu ka

$$\limsup_{\alpha} \|aT + bK_\alpha T + cST\| \leq 1.$$

Paneme tähele, et kuna (K_α) on pingul meetriline aproksimeeriv pere, siis $K_\alpha^* \rightarrow_{\alpha} I_{Y^*}$ ja pere $(K_\alpha T)$ on tõkestatud. Seega iga $x^{**} \in X^{**}$ ja iga $y^* \in Y^*$ korral

$$\langle x^{**} \otimes y^*, K_\alpha T \rangle = x^{**}(T^* K_\alpha^* y^*) \rightarrow_{\alpha} x^{**}(T^* y^*) = \langle x^{**} \otimes y^*, T \rangle.$$

Kuna hulk

$$\{x^{**} \otimes y^* : x^{**} \in X^{**}, y^* \in Y^*\}$$

on põhihulk projektiivses tensorkorrutises $X^{**} \widehat{\otimes} Y^*$, siis Banach-Steinhausi teoreemi põhjal saame, et $K_\alpha T \rightarrow_{\alpha} T$ ruumi $\mathcal{L}(X^{**}, Y^{**})$ *-nõrgas topoloogias, mis on indutseeritud duaalsusest ruumiga $X^{**} \widehat{\otimes} Y^*$.

Kuna

$$\left\| \frac{bK_\alpha T + cST}{\|bK_\alpha T + cST\|} \right\| = 1,$$

siis hulga V karakteristiku definitsiooni põhjal kehtib iga α korral

$$r(V) = \inf_{z \in S_{\mathcal{K}(X,Y)}} \sup_{v \in B_V} |\langle v, z \rangle| \leq \sup_{v \in B_V} \left| \left\langle v, \frac{bK_\alpha T + cST}{\|bK_\alpha T + cST\|} \right\rangle \right|.$$

Märkame, et kui $v \in V$, siis

$$\begin{aligned}\left\langle v, \frac{aT + bK_\alpha T + cST}{\|bK_\alpha T + cST\|} \right\rangle &= \left\langle v, \frac{aT}{\|bK_\alpha T + cST\|} \right\rangle + \left\langle v, \frac{bK_\alpha T + cST}{\|bK_\alpha T + cST\|} \right\rangle \\ &= \frac{a}{\|bK_\alpha T + cST\|} \langle v, T \rangle + \left\langle v, \frac{bK_\alpha T + cST}{\|bK_\alpha T + cST\|} \right\rangle = \left\langle v, \frac{bK_\alpha T + cST}{\|bK_\alpha T + cST\|} \right\rangle,\end{aligned}$$

sest $\langle v, T \rangle = 0$ vastavalt hulga V definitsioonile. Seega

$$\begin{aligned} r(V) &\leq \sup_{v \in B_V} \left| \left\langle v, \frac{aT + bK_\alpha T + cST}{\|bK_\alpha T + cST\|} \right\rangle \right| \leq \sup_{v \in B_V} \left(\|v\| \cdot \left\| \frac{aT + bK_\alpha T + cST}{\|bK_\alpha T + cST\|} \right\| \right) \\ &= \left\| \frac{aT + bK_\alpha T + cST}{\|bK_\alpha T + cST\|} \right\| \cdot \sup_{v \in B_V} \|v\| = \frac{\|aT + bK_\alpha T + cST\|}{\|bK_\alpha T + cST\|}. \end{aligned}$$

Kuna ruumi $\mathcal{L}(X^{**}, Y^{**})$ *-nõrgas topoloogias

$$bK_\alpha T + cST \rightarrow_\alpha bT + cST,$$

siis lemma 6.3 põhjal

$$\liminf_\alpha \|bK_\alpha T + cST\| \geq \|bT + cST\| \geq (|b| + c) \cdot \varepsilon.$$

Järelikult

$$r(V) \leq \frac{\limsup_\alpha \|aT + bK_\alpha T + cST\|}{\liminf_\alpha \|bK_\alpha T + cST\|} \leq \frac{1}{(|b| + c) \cdot \varepsilon}.$$

See võrratus kehtib iga positiivse arvu $\varepsilon < 1$ korral. Seega, minnes piirile protsessis $\varepsilon \rightarrow 1$, saamegi, et

$$r(V) \leq \frac{1}{|b| + c},$$

ning sellega on teoreem tõestatud. □

7 Saphari teoreem kui põhiteoreemi rakendus

Käesolevas osas demonstreerime, kuidas magistritöö põhiteoreemist saab hõlpsalt järeldada järgmise P. D. Saphari 1999. aastal ilmunud artiklis [22] tõestatud teoreemi.

Teoreem 7.1 (Saphar). *Olgu Y selline reaalne Banachi ruum, et tema kaasruum Y^* on separaabel ja aproksimatsiooniomadusega. Kui $1 < \lambda < 2$, siis saab ruumi Y ekvivalentselt ümber normeerida nii, et kui X on suvaline selline reaalne Banachi ruum, et $\mathcal{L}(X, Y) \neq \mathcal{K}(X, Y)$, siis ei leidu projektorit ruumist $\mathcal{L}(X, Y)$ ruumile $\mathcal{K}(X, Y)$, mille norm oleks väiksem kui λ .*

Tõestus. Olgu Y reaalne Banachi ruum ning olgu Y^* separaabel ja aproksimatsiooniomadusega. Olgu veel $1 < \lambda < 2$. Tähistame

$$r = \lambda - 1$$

ja

$$B = \{b : |b + 1| \leq r\}.$$

Siis B on kompaktne hulk. Kuna Y^* on separaabel, siis lause 4.4 põhjal saame ruumi Y ümber normeerida nii, et tal on omadus $M^*(1, B, 0)$. Paneme tähele, et praegu

$$\max |B| + c = |-(r + 1)| + 0 = r + 1 = \lambda,$$

Kuna Y^* on separaabel ja tal on aproksimatsiooniomadus, siis teoreemi 2.6 põhjal on tal meetriline aproksimatsiooniomadus, millest teoreemi 2.5 põhjal omakorda järeldub, et ruumil Y on meetriline aproksimatsiooniomadus. Sellega on täidetud kõik põhiteoreemi 6.4 eeldused. Rakendame seda teoreemi võttes $\mathcal{A}(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y)$. Saame, et kui $\mathcal{L}(X, Y) \neq \mathcal{K}(X, Y)$, siis ei leidu projektorit ruumilt $\mathcal{L}(X, Y)$ ruumile $\mathcal{K}(X, Y)$, mille norm oleks väiksem kui λ , mis tõestab Saphari teoreemi. \square

Summary

Projections onto the space of compact operators

Joosep Lippus

Let X and Y be Banach spaces over the same, either real or complex, field \mathbb{K} . We denote by $\mathcal{L}(X, Y)$ the Banach space of bounded linear operators from X to Y and by $\mathcal{K}(X, Y)$ its subspace of compact operators.

A classical long-standing open question is the following (see, e.g., [8], [5], [3], [7], [4] for results and references). Either $\mathcal{L}(X, Y) = \mathcal{K}(X, Y)$, or there is no bounded linear projection from $\mathcal{L}(X, Y)$ onto $\mathcal{K}(X, Y)$? Recently, the following result was established by Saphar [22].

Theorem (Saphar). *Let Y be a real Banach space such that its dual space Y^* is separable and has the approximation property. If λ is a scalar with $1 < \lambda < 2$, then Y can be equivalently renormed so that, for any real Banach space X with $\mathcal{L}(X, Y) \neq \mathcal{K}(X, Y)$, there is no projection from $\mathcal{L}(X, Y)$ onto $\mathcal{K}(X, Y)$ with norm less than λ .*

Throughout this paper, $B \subset \mathbb{K}$ will be a compact set and $a, c \geq 0$. We say that a Banach space Y has *property $M^*(a, B, c)$* if

$$\limsup_{\nu} \|ay_{\nu}^* + by^* + cz^*\| \leq \limsup_{\nu} \|y_{\nu}^*\| \quad \forall b \in B$$

whenever (y_{ν}^*) is a bounded net converging weak* to y^* in Y^* and $\|z^*\| \leq \|y^*\|$. Property $M^*(a, B, c)$ was recently introduced and studied in [17].

The following theorem is the main result of this thesis.

Theorem. *Let Y be a Banach space satisfying property $M^*(a, B, c)$ with $\max |B| + c > 1$ and having the metric approximation property. Let X be a Banach space and let $\mathcal{A}(X, Y)$ be a closed subspace of $\mathcal{L}(X, Y)$ containing $\mathcal{K}(X, Y)$. If $\mathcal{A}(X, Y) \neq \mathcal{K}(X, Y)$, then there is no projection from $\mathcal{A}(X, Y)$ onto $\mathcal{K}(X, Y)$ with norm less than $\max |B| + c$.*

In [17, Proposition 1.2], it is proved, that if $0 < r < 1$, then any Banach space Y with separable dual can be equivalently renormed to satisfy property $M^*(1, B, 0)$ with $B = \{b : |b + 1| \leq r\}$. In this case, $\max |B| + c = 1 + r$.

On the other hand, it is a well-known result, due to Grothendieck [6], that the approximation property of separable Y^* implies the metric approximation property of Y^* which in turn implies the metric approximation property of Y .

Therefore the main Theorem implies Saphar's theorem, giving also some insight into it.

Kirjandus

- [1] M. M. Day, *Normed Linear Spaces*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.
- [2] J. Diestel, J. J. Uhl, *Vector Measures*, Mathematical Surveys 15, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1977.
- [3] G. Emmanuele, *A remark on the containment of c_0 by spaces of compact operators*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc, **111** (1992).
- [4] G. Emmanuele, K. John, *Some remarks on the position of the space $K(X, Y)$ inside the space $W(X, Y)$* , New Zealand J. Math. **26** (1997).
- [5] M. Feder, *On the non-existence of a projection onto the space of compact operators*, Canad. Math. Bull. **25** (1982), 78-81.
- [6] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. **16** (1955).
- [7] K. John, *On the uncomplemented subspace $K(X, Y)$* , Czechoslovak Math. J. **42** (117) (1992), 167-173.
- [8] J. Johnson, *Remarks of Banach spaces of compact operators*, J. Funct. Anal. **32** (1979), 304-311.
- [9] W. B. Johnson, *Finite-dimensional Schauder decompositions in π_λ and dual π_λ spaces*, Illinois J. Math. **14** (1970), 642-647.
- [10] W. B. Johnson, *A complementary universal conjugate Banach space and its relation to the approximation problem*, Israel J. Math. **13** (1972), 301-310.
- [11] N. J. Kalton, *Banach spaces for which the ideal of compact operators is an M -ideal*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I **313** (1991), 509-513.
- [12] N. J. Kalton, *M -ideals of compact operators*, Illinois J. Math. **37** (1993), 147-169.
- [13] Á. Lima, *Property (wM^*) and the unconditional metric approximation property*, Studia Math. **113** (1995), 249-263.
- [14] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I*, Springer, Berlin, 1977.
- [15] J. Lippus, *Alamruumide täiendatavus*, Bakalaureusetöö, Tartu, 2002.
- [16] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer, New York, 1998.

- [17] E. Oja, *Geometry of Banach spaces having shrinking approximations of the identity*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 2801-2823.
- [18] E. Oja, *Operators which are nuclear whenever they are nuclear for a larger range space*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (to appear).
- [19] E. Oja, P. Oja, *Funktsionaalanalüüs*, Tartu Ülikool, Tartu, 1991.
- [20] R. S. Phillips, *On linear transformations*, Trans. Amer. Math. Soc. **48** (1940) 516-541.
- [21] R. A. Ryan, *Introduction to Tensor Products of Banach spaces*, Springer, London-Berlin-Heidelberg, 2002.
- [22] P. D. Saphar, *Projections from $L(E, F)$ onto $K(E, F)$* , Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 1127-1131.
- [23] I. Singer, *Bases in Banach spaces II*, Editura Acad. R. S. România, Springer, Bucharest, 1981.
- [24] Н. Морозова, *Свойство ограниченной аппроксимации*, Семестровая работа, Тарту, 2004.
- [25] Р. Эдвардс, *Функциональный анализ, теория и приложения*, Мир, Москва, 1969.