I. KIKOIN
A. KIKOIN

FÜÜSIKA

IX KLASSILE

I. KIKOIN, A. KIKOIN

FÜÜSIKA

IX klassile

3. TRÜKK

«VALGUS» · TALLINN 1973

Originaali tiitel:

И. К. Кикоин, А. К. Кикоин.
Физика.
Учебное пособие для 8 класса средней школы.
Издание третье.
Утверждено Министерством просвещения СССР.
Издательство «Просвещение»,
Москва 1972.

Vene keelest tõlkinud *V. Paju*

Kaane kujundanud *R. Tungla*

6—6—1

KINEMAATIKA

1. peatükk. ÜLDISED ANDMED LIIKUMISEST

§ 1. SISSEJUHATUS

Kõike, mis maailmas reaalselt eksisteerib, kõike, mida me võime meeleorganite abil aistida (näha, kompida), nimetatakse teaduses *mateeriaks*. Mateeria moodustab materiaalse maailma. Kõik meid ümbritsevad kehad: õhk, kivid, taimed, vesi, taevakehad jne. koosnevad mateeriast. Peale selle hõlmab mateeria mõiste veel palju niisugust, mida me tavaliselt kehadeks ei nimeta. Näiteks valgus, mis võimaldab meil näha maailma, ning raadiolained, millel põhineb raadioside ja televisioon, eksisteerivad samuti reaalselt ja on seetõttu ka materiaalsed.

Kõik see, mis looduses toimub, mida me nimetame *loodusnähtusteks*, taandub mateeria muutumisele.

Iga nähtuse kohta võib öelda, et see toimub kusagil ja millalgi. Seega toimuvad kõik nähtused *ruumis* (kus?) ja *ajas* (millal?). Ruum ja aeg on lahutamatult seotud mateeriaga ja selle muutumisega. Ei saa rääkida täiesti tühjast ruumist, omaette kulgevast ajast ega väljaspool ruumi ja aega eksisteerivast mateeriast.

Iga keha kohta võib öelda, et see asub mistahes ajahetkel ruumis mingis kindlas kohas. Kui keha asukoht ruumis aja jooksul muutub, siis öeldakse, et keha liigub. *Keha liikumiseks nimetatakse tema asukoha muutumist ruumis aja jooksul.*

Kehade liikumise uurimisega tegeleb füüsika osa, mida nimetatakse *mehhaanikaks*.

Iga loodusteaduse peamiseks mõtteks on anda inimeste käsutusse meetodid, mis aitaksid neil ette näha ühe või teise nähtuse kulgu tulevikus. Ainult sel tingimusel võib loodusnähtusi kasutada inimkonna hüvanguks. Kui näiteks keemikud ei oleks uurinud ainete vastastikust mõju, siis poleks olemas ka tänapäeva keemiatööstust, mis annab inimestele tohutul hulgal mitmesuguseid vajalikke aineid. Kui ei oleks uuritud taimi, nende toitumist ja kasvamist, siis oleks olnud raske arendada põllumajandust ja ette näha, mida me saame mingi seemnesordi külvamisel või mingi maaharimisviisi kasutamisel. Kogu tänapäeva tehnika loomisel on eelkõige peetud silmas tulevikku. Kui insener konstrueerib mingi masina või seadme, siis ta võib ette öelda, kuidas see pärast valmimist töötab. Kõik see on võimalik sellepärast, et insenerid kasutavad oma töös paljude teadusharude töötulemusi. Eriti tähtsat osa etendavad seejuures füüsika saavutused.

Mehhaanika, mida me hakkame õppima, uurib liikumist. Liikumine aga, nagu eespool öeldud, on keha asukoha muutumine ruumis aja jooksul. *Mehhaanika on teadus, mis uurib, kuidas määrata keha asukohta ruumis mistahes ajahetkel.*

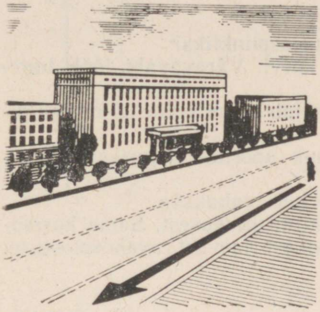
Astronoomid näiteks on põhjalikult uurinud Maa ja teiste planeetide liikumist ümber Päikese, samuti Kuu liikumist. Seetõttu võivad nad täpselt ennustada, millal toimuvad mitmesugused taevanähtused, näiteks päikese- ja kuuvarjutused. Teadlased, kelle juhtimisel lastakse välja Maa tehiskaaslased ja kosmoselaevad, teavad alati ette, kus asub tehiskaaslane või kosmoselaev mingil ajahetkel.

Mehhaanika võimaldab teada saada mitte ainult seda, kuidas keha liigub tulevikus, vaid ka seda, kuidas ta liikus minevikus. Kui ajaloolased ei oleks teadnud, millal vürst Igor läks polovetside vastu sõjaretkele, siis astronoomid oleksid võinud selle kergesti välja arvutada. Nimelt mainitakse kõigile tuntud «Loos Igori sõjaretkest», et enne Igori sõjaväe tungimist polovetside maale esines täielik päikesevarjutus. Selle põhjal võis kindlaks teha, et Igor oli oma družiinaga polovetside maa piirialadel 1. mail 1185. aastal.[1]

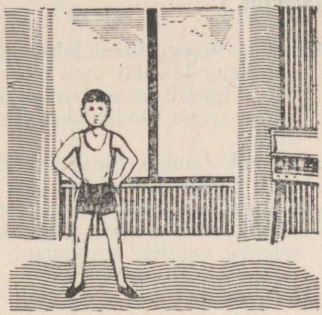
§ 2. MASSPUNKT

Et uurida keha liikumist ruumis, s. t. tema asukoha muutumist, tuleb eelkõige osata määrata tema asukohta. Seejuures tekivad siiski mõned raskused. Igal kehal on mõõtmed. Seetõttu asuvad tema erinevad osad ruumi erinevates punktides. Kuidas siis määrata kogu keha asukoht? Osutub, et alati ei ole vaja näidata keha iga osa, tema iga punkti asukohta. Eelkõige ei ole seda vaja teha niisuguste kehade liikumise uurimisel, mille mõõtmed on väikesed,

[1] Eksida siin ei saa, sest ühes ja samas kohas toimub täielik päikesevarjutus ligikaudu iga 200 aasta pärast. XII sajandil oli Doni steppides ainult üks täielik päikesevarjutus.



Joon. 1



Joon. 2

võrreldes läbitud vahemaa või kaugusega teistest kehadest. Keha ennast võib sel juhul lugeda punktiks. Selliselt toimitakse näiteks astronoomias taevakehade liikumise uurimisel. Planeedid, tähed ja Päike ei ole muidugi väikesed kehad, kuid Maa raadius on Maa ja Päikese vahelisest kaugusest peaaegu 24 000 korda väiksem. Seetõttu ei tee me suurt viga, kui loeme ümber Päikese tiirleva Maa punktiks. Täpselt samuti võime suure ookeanilaeva liikumise uurimisel vaadelda laeva punktina, sest laeva mõõtmed on tema reiside pikkustega võrreldes tähtsusetult väikesed.

Keha iga punkti asukohta ei ole vaja näidata ka sel juhul, kui kõik need punktid liiguvad ühesuguselt. Selliselt liiguvad näiteks kelgu punktid, kui poiss veab kelku mäest üles, jõel ujuva lodja ja sirgjooneliselt lendava lennuki punktid jne. Liikumist, mille puhul keha kõik punktid liiguvad ühesuguselt, nimetatakse *kulgliikumiseks.*

Kui me edaspidi räägime keha asukohast või liikumisest, siis vaatleme tegelikult ainult selle keha mingi punkti asukohta või liikumist ning jätame arvestamata keha mõõtmed. *Keha, mille mõõtmed võib jätta antud tingimustes arvestamata, nimetatakse masspunktiks.* Antud keha liikumist võib ühtedel juhtudel vaadelda masspunkti liikumisena, teistel juhtudel aga mitte. Vaatleme näiteid, mis selgitavad seda väidet.

1. Poiss läheb koolist koju ja käib ühe kilomeetri. Kuna poisi mõõtmed on väikesed, võrreldes vahemaaga, mida ta läbib, võib poissi vaadelda masspunktina (joon. 1). Kui aga sama poiss teeb hommikuvõimlemist, siis ei saa teda toas enam kuidagi masspunktiks lugeda (joon. 2).

2. Nägime, et vaadeldes Maa liikumist ümber Päikese, võib lugeda Maad masspunktiks. Kuid Maa pöörleb veel ümber oma telje. Selle liikumise vaatlemisel ei saa Maad enam masspunktiks lugeda.

Harjutus 1

Millistel alljärgnevatel juhtudel võib lugeda keha masspunktiks?

1. Tagalaua lähedal asuv korvpallur viskab palli korvi. Väravavaht lööb tugevalt jalgpalli ja see lendab 60 m kaugusele.
2. Spordiketast töödeldakse treipingil. Sportlane heidab sama ketta 55 m kaugusele.
3. Lennuk lendab Moskvast Habarovskisse. Lennuk sooritab vigurlennuharjutust, näiteks keerdlangemist.
4. Kiiruisutaja läbib võistlusmaa. Iluuisutaja sooritab vabakava.
5. Kosmoselaeva lendu jälgitakse Maal asuvast juhtimiskeskusest. Sama kosmoselaeva vaatleb kosmonaut, kes on väljunud sellest laevast avakosmosesse.

§ 3. PUNKTI ASUKOHT RUUMIS

Ühes vanas, meie ajaarvamise algusesse kuuluvas dokumendis kirjeldatakse kullakangide peidukohti. Ühe kohta neist on öeldud järgmist: «Mine küla äärmise maja idapoolse nurga juurde ja pöördu näoga põhja poole, kõnni 120 sammu, pöördu näoga itta ja kõnni veel 200 sammu. Selles kohas kaeva 10 küünra sügavune auk ja sa leiad 100 talenti[1] kulda.» Kui selles dokumendis nimetatud maja ja küla oleksid säilinud tänapäevani, poleks selle aarde leidmine raske. Kuid arusaadavatel põhjustel ei ole sellest majast ja külast jäänud jälgegi ja seepärast on aarde leidmine võimatu. Asi on selles, et punkti asukohta ei ole võimalik leida, kui ei ole teada keha, millest kaugusi mõõta.

Punkti asukohta ruumis saab määrata ainult mingi keha s u h t e s. Seda keha nimetatakse *taustkehaks*. Taustkehaks võib olla näiteks maja, milles me elame, või vagun, milles me sõidame. Taustkehadeks võivad olla ka Maa, Päike ja tähed.

Kuna me elame Maal, siis on meil mugav näidata punkti asukohta Maa suhtes.

Astronoomid valivad taustkehaks mingi tähe.

Kui taustkeha on valitud, võib punkti asukoha määrata näiteks järgmiselt. Taustkehal valitakse mingi punkt O (joon. 3) ja tõmmatakse läbi selle kolm üksteisega ristuvat sirget — OX, OY ja OZ. Neid sirgeid nimetatakse *koordinaattelgedeks*. Et näidata mingi punkti, näiteks punkti A asukohta, tuleb anda kolm arvu, mis väljendavad kolme lõigu pikkust:

1) teljel OX asuva lõigu OB pikkust,

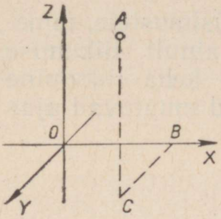
2) teljega OY paralleelse lõigu BC pikkust ja

3) teljega OZ paralleelse lõigu CA pikkust.

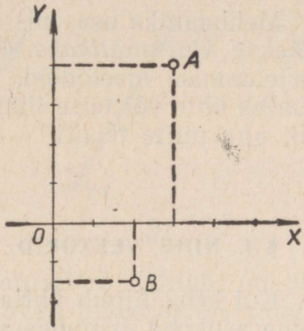
Tähistame lõigu OB pikkuse x-ga, BC pikkuse y-ga ja CA pikkuse z-ga. Kolme arvu — x, y ja z — nimetatakse punkti *A koordinaatideks*. Need määravad punkti A asukoha ruumis.

---

[1] Talent — antiikaegne kaaluühik, mis oli eri maades erineva suurusega.



Joon. 3



Joon. 4

Teada punkti asukohta ruumis — see tähendab teada tema koordinaate.

Kolm üksteisega ristuvat telge moodustavad *ristkoordinaadistiku*. Punkti *O*, millest alates loetakse koordinaate, nimetatakse *koordinaatide alguspunktiks*. Igal koordinaatteljel valitakse positiivne suund. Sellise koordinaadistiku põhjal kirjeldati ka aarde peidukohta dokumendis, millest oli juttu käesoleva paragrahvi algul. Selleks et leida aaret, tuleb teada, kus asub koordinaatide alguspunkt.

Taustkehaga seotud koordinaadistik ja valitud ajamõõtmisviis (kell) moodustavad koos taustsüsteemi.

Seega on punkti asukoht ruumis määratud kolme koordinaadiga. Me elame *kolmemõõtmelises* ruumis.

Sageli liiguvad kehad mingil pinnal. Nii liiguvad näiteks kõik maapealsed transpordivahendid. Kui kehad liiguvad mingil tasapinnal, siis koosneb ristkoordinaadistik ainult kahest teljest. Joonisel 4 on need teljed *OX* ja *OY*. Punkti asukoht tasapinnal on määratud kahe koordinaadiga — punkti kaugustega koordinaattelgedest. Näiteks punkti *A* koordinaadid on 3 ja 4, punkti *B* koordinaadid aga 2 ja —1,5.

Kui masspunkt võib liikuda ainult mööda mingit joont, siis tema asukoht ruumis on määratud ühe koordinaadiga — punkti kaugusega sellel joonel valitud koordinaatide alguspunktist. Ühe koordinaadiga võib näiteks määrata rongi asukoha raudteeliinil. Selleks koordinaadiks võib olla rongi kaugus mingist jaamast, mis võetakse koordinaatide alguspunktiks.

Kuna keha asukoht ruumis on määratud koordinaatidega, siis iseloomustab keha liikumist tema koordinaatide muutumine. Et leida keha asukoht mistahes ajahetkel, tuleb kindlaks teha, kuidas muutuvad tema koordinaadid aja jooksul. Kuid millised andmed meil peavad selleks olema? Mida me peame varem teadma? Kuidas määratakse liikuva punkti koordinaatide sõltuvus ajast?

Mehhaanika osa, mis annab vastuse nendele küsimustele, nimetatakse *kinemaatikaks*. Kinemaatikas uuritakse ainult liikumise kirjeldamise meetodeid, kuid ei vaadelda, miks keha liikumine kuulub ühte või teise liiki, miks tema koordinaadid muutuvad ajas nii, aga mitte teisiti.

§ 4. NIHE. VEKTORID

Kui keha liigub ühtlaselt mingit antud joont mööda, siis võib tema asukoha mistahes ajahetkel leida üsna lihtsalt. 7. klassi füüsika kursusest teame, et läbitud tee pikkuse l arvutamiseks tuleb keha kiirus v korrutada tee läbimiseks kulunud ajaga t:

$$l=vt.$$

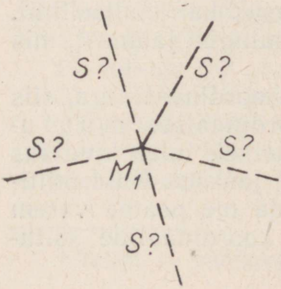
Kui on teada punkt, kus keha asus alghetkel, siis mõõtes sellest punktist läbitud tee, leiamegi koha, kus ta asub ajahetkel t.

Kuid see ülesanne on nii lihtsalt lahendatav ainult siis, kui on teada joon, mida mööda keha liigub. Seda joont nimetatakse *trajektooriks*. Trajektooriks võib olla raudtee, mida mööda liigub rong, maantee, millel liigub auto jne.

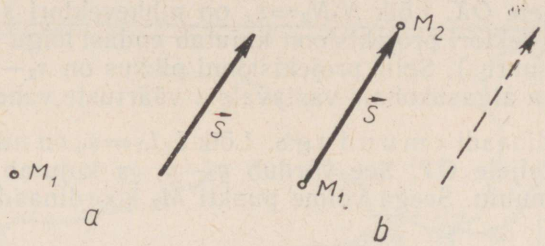
Kuid kaugeltki mitte alati ei ole trajektoor ette teada. Laeval merel, lennukil õhus ning karavanil kõrbes ei ole valmis teid ja etteantud trajektoore. Kui me teame näiteks laeva algasukohta ja teepikkust, mille laev läbib, siis ei oska me veel selle põhjal öelda, kus asub laev oma teekonna lõpul: selle tee võib ta läbida ükskõik millises suunas, mistahes trajektoori mööda.

Et ka sel juhul keha asukohta leida, tuleb teada mitte läbitud tee pikkust, vaid hoopis teist suurust — keha *nihet*. Vaatleme, mida see suurus endast kujutab.

Oletame, et liikuv keha on mingil alghetkel punktis M_1 ja teatud aja pärast mingis teises punktis, mis asub punktist M_1 kaugusel s. Kuidas leida keha uut asukohta? Selleks ei piisa ilm-



Joon. 5



Joon. 6

selt kauguse s teadmisest, sest nagu jooniselt 5 nähtub, on olemas lõpmatult suur hulk punkte, mis asuvad punktist M_1 kaugusel s (kõik need paiknevad ringjoonel raadiusega s).

Selleks et leida keha uut asukohta M_2, tuleb veel teada, millises suunas punktist M_1 see punkt asub, s. t. peale läbitud tee pikkuse s peab teada olema ka sirglõigu M_1M_2 suund. Seda suunatud sirglõiku nimetataksegi keha n i h k e k s. Nihet kujutava sirglõigu lõpp tähistatakse noole teravikuga (joon. 6, *a*). Kui paigutada nool nii, et selle algus asub punktis M_1, siis näitab noole lõpp keha uut asukohta M_2 (joon. 6, *b*).

Keha nihkeks nimetatakse suunatud sirglõiku, mis ühendab keha algasukohta tema asukohaga vaadeldaval ajahetkel.

Selleks et leida keha asukohta mistahes ajahetkel, tuleb leida nihe, mille keha on selleks hetkeks sooritanud.

Suurusi, mida iseloomustab mitte ainult arvväärtus, vaid ka suund, nimetatakse *vektoriaalseteks suurusteks* ehk lihtsalt *vektoreiks*. Järelikult kuulub nihe vektoriaalsete suuruste hulka.

Vektoriaalseid suurusi kujutatakse suunatud sirglõiguna (noolena). Lõigu pikkus kokkulepitud mõõtkavas väljendab vektoriaalse suuruse arvväärtust, lõigu suund aga näitab selle suunda. Vektoriaalseid suurusi tähistatakse tähtedega, mille kohal on nool: näiteks $\vec{s}$ on nihkevektori tähis. Sama täht ilma nooleta on selle vektori arvväärtuse tähiseks: s on nihkevektori arvväärtus. Suurusi, millel puudub suund ja mida iseloomustab ainult arvväärtus, nimetatakse *skalaarseteks suurusteks* ehk *skalaarideks*.

Iga vektoriaalse suuruse arvväärtus on samuti skalaar. Näiteks nihke pikkus on skalaarne suurus.

Niisiis, selleks et leida keha asukohta mingil ajahetkel, tuleb teada keha asukohta alghetkel ja nihkevektorit. Nihkevektori teadmine on samaväärne keha lõppasukoha (punkti M_2) koordinaatide teadmisega.

Kui aga nõutakse just keha lõppasukoha koordinaatide näitamist, siis need võib leida, kui on teada nihkevektor ja algasukoha koordinaadid.

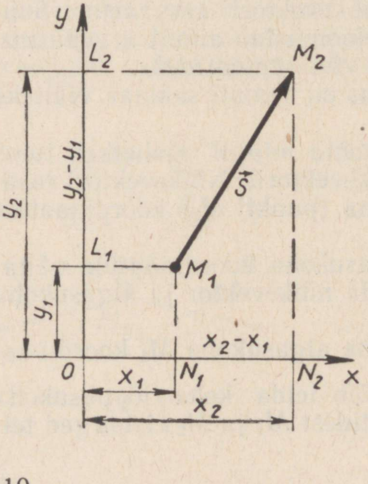
Joonisel 7 on näidatud, kuidas keha algasukoha M_1 koordinaatide x_1, y_1 ja nihkevektori $\vec{s}$ järgi võib leida keha lõppasukoha koordinaadid x_2 ja y_2. Tõmbame punktidest M_1 ja M_2 ristsirged teljele OX. Lõik $N_1N_2=s_x$ on nihkevektori $\vec{s}$ *projektsioon* teljel OX (vektori projektsioon kujutab endast lõigu pikkust ja on skalaarne suurus). Selle projektsiooni pikkus on x_2-x_1. Kuid x_2-x_1 on lõpp- ja algasukohale vastavate x väärtuste vahe. See vahe võrdub koordinaadi x muuduga. Lõik $L_1L_2=s_y$ on nihkevektori $\vec{s}$ projektsioon teljele OY. See võrdub y_2-y_1 ja kujutab endast koordinaadi y muutu. Seega võime punkti M_2 koordinaadid avaldada järgmiselt:

$$x_2=x_1+s_x,$$
$$y_2=y_1+s_y.$$

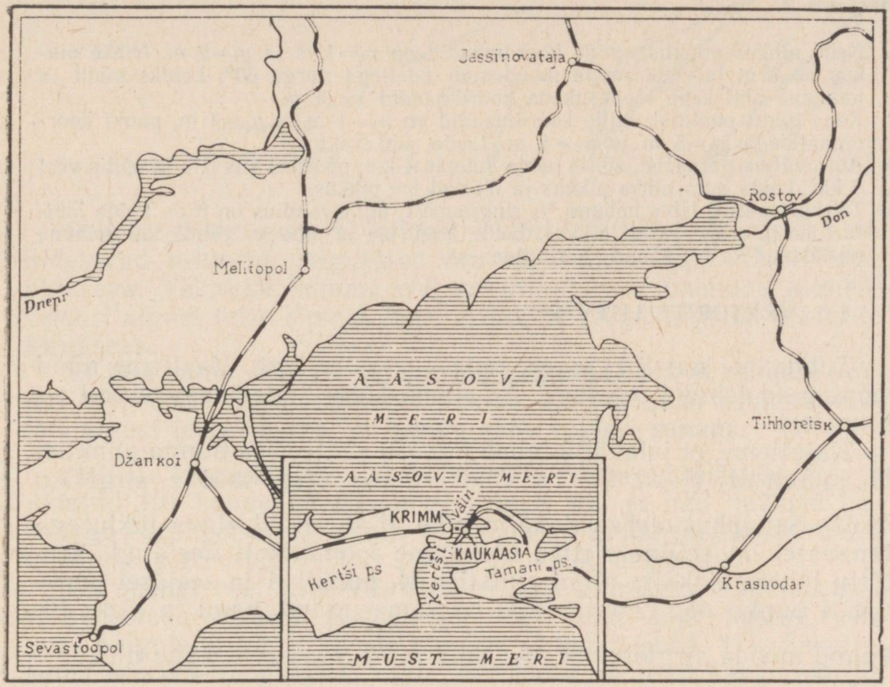
Tõsiasi, et nihkevektor ühendab keha algasukohta lõppasukohaga, ei tähenda sugugi seda, et keha liigub punktist M_1 punkti M_2 sirglõiku M_1M_2 mööda. Keha liikumise trajektoor, s. o. joon, mida mööda keha tegelikult liigub, võib nihkevektorist (sirglõigust) tunduvalt erineda. Selgitame seda järgmise näite abil.

Kaardil (joon. 8) on kujutatud Kertši väin, mis lahutab Kertši poolsaart Tamani poolsaarest. Väina mõlemale kaldale suunduvad raudteed — Kertši poolsaarel Krimmi ja Tamani poolsaarel Kaukaasia jaama. Nende jaamade vaheline kaugus on kõigest 50 km. Olgu rongil vaja viia koorem Krimmi jaamast Kaukaasia jaama. See tähendab, et koorem koos rongiga peab sooritama nihke läänest itta pikkusega 50 km.

Praegu peab väina kallaste vahel ühendust praam, mis viib rongid ühelt kaldalt teisele .Seega rongid liiguvad tegelikult joont mööda, mis ühtib nihkega. Kuid varem see polnud nii. Et pääseda Kertši poolsaarelt Tamani poolsaarele, pidid rongid sõitma Džankoi, Melitopoli, Jassinovataja, Rostovi, Tihhoretski ja Krasnodari kaudu ringi ning läbima tee, mille pikkus on üle 1000 km.



Joon. 7



Joon. 8

Joont, mida mööda keha liigub, nimetatakse teatavasti trajektooriks. Selle joone pikkust nimetatakse *teepikkuseks* ehk *läbitud teeks.*

Kui rong viiakse üle väina praamiga, siis ühtib tema liikumise trajektoor nihkega ja teepikkus võrdub nihke pikkusega. Kui aga praami ei ole, siis vajalikuks nihkeks peab rong sõitma pikemat trajektoori mööda. Sel juhul teepikkus muidugi ei võrdu enam nihke pikkusega. Kui raudteevõrk on küllalt tihe, võib rongidele valida erinevaid marsruute, nii et üks ja sama nihe saavutatakse liikumisega mööda erineva pikkusega trajektoore.

Jõudsime järgmisele tulemusele. Selleks et leida masspunkti asukohta mingil ajahetkel, kui on antud selle punkti algkoordinaadid, tuleb teada nihkevektorit, mitte aga teepikkust. Nihkevektor näitab, kuidas muutuvad punkti koordinaadid. Paigutanud nihkevektori punkti algasukohta, saame teada punkti lõppasukoha.

Harjutus 2

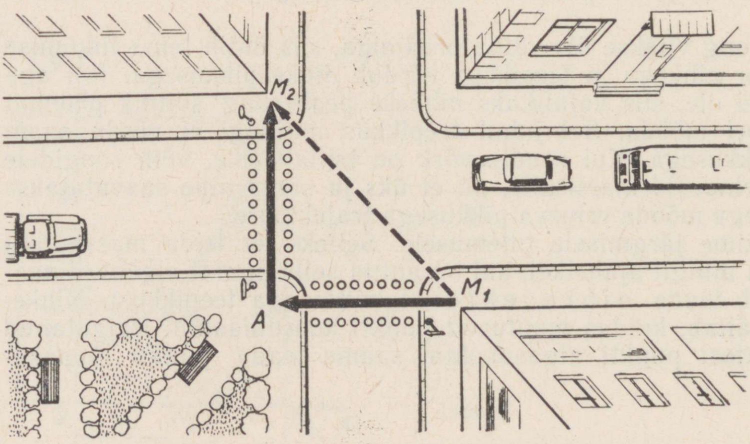
1. Keha nihkus punktist, mille koordinaadid on $x_1=1$ m ja $y_1=2$ m. Nihke pikkus on 8 m ja selle suund moodustab x-teljega nurga 60°. Leidke malli ja joonlaua abil keha lõppasukoha koordinaadid x_2 ja y_2.
2. Keha liikus punktist, mille koordinaadid on $x_1=1$ m ja $y_1=4$ m, punkt koordinaatidega $x_2=5$ m ja $y_2=1$ m. Leida nihkevektor.
3. Auto väljus garaažist, sõitis põhja suunas 4 km, pöördus siis itta ja sõitis veel 3 km. Leida auto nihke pikkus ja läbitud tee pikkus.
4. Tsirkuseareenil läbis hobune $^3/_4$ ringjoonest, mille raadius on 6 m. Leida läbitud tee ja nihkevektori pikkus. Leida kogu tee ja nihe sel juhul, kui hobune on läbinud ka ülejäänud $^1/_4$ ringjoonest.

§ 5. VEKTORITE LIITMINE

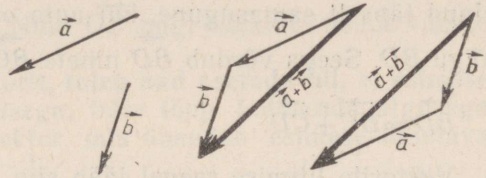
Tutvusime uut liiki suurustega — vektoritega. Vaatleme nüüd mõningaid tehteid nendega. Alustame kõige lihtsamast tehtest — liitmisest.

Kujutleme, et jalakäija tahab ületada ristteed ja minna punktist M_1 punkti M_2 (joon. 9). Ta võiks minna otse, mööda sirglõiku M_1M_2. Sel juhul oleks jalakäija nihe $\overrightarrow{M_1M_2}$. Kuid elava liiklusega tänavatel on selline risttee ületamine loomulikult keelatud. Seetõttu läheb jalakäija algul punktist M_1 punkti A ja seejärel punktist A punkti M_2. Lõpptulemus on samasugune, nagu ta oleks liikunud mööda sirglõiku M_1M_2. Nihe $\overrightarrow{M_1M_2}$ saavutati kahe nihke — $\overrightarrow{M_1A}$ ja $\overrightarrow{AM_2}$ — tulemusena. Need kaks nihet asendasid ühte nihet. Seetõttu loetakse nihe $\overrightarrow{M_1M_2}$ nende kahe nihke summaks:

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_1A}+\overrightarrow{AM_2}.$$



Joon. 9



Joon. 10

Sellest näitest selgub, kuidas vektorid liituvad. Joonisel 9 on liidetavad vektorid paigutatud nii, et esimese lõpp ühtib teise algusega. Vektorite summa ehk *resultantvektor* ühendab esimese vektori algust teise lõpuga. See on üldine reegel kõikide vektorite liitmiseks.

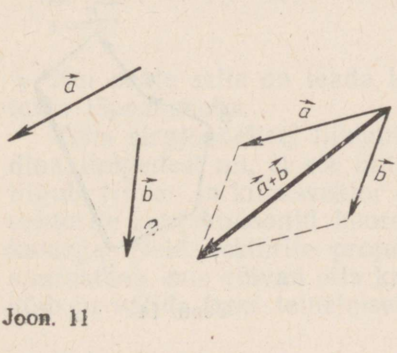
Et liita kahte vektorit, tuleb need paigutada nii, et esimese vektori lõpp ühtib teise algusega. Vektor, mis ühendab esimese vektori algust teise lõpuga, on nende kahe vektori summa.

Selliste konstruktsioonide puhul võib vektoreid (näiteks $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ joonisel 10) kanda ühest punktist teise nii, et nad jääksid iseendaga paralleelseiks. Samuti võib muuta liitmise järjekorda. Selle tulemusena resultantvektori suurus ja suund ei muutu.

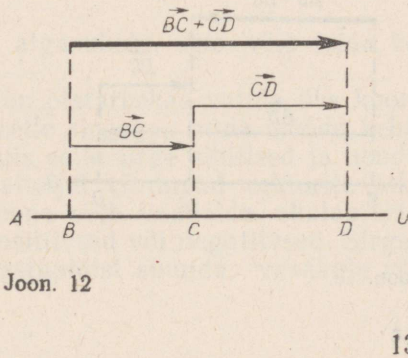
On olemas veel teine viis kahe vektori liitmiseks. Selle asemel, et paigutada vektorid järjestikku, nagu seda äsja tegime, võib need paigutada nii, et nende algused ühtivad (joon. 11). Seejärel konstrueerime rööpküliku, mille külgedeks on need kaks vektorit, ja tõmbame liidetavate vektorite alguspunktist rööpkülikule diagonaali. Saadud diagonaal ongi resultantvektor. Seda vektorite liitmise reeglit nimetatakse *rööpkülikureegliks*. Mõlemad vektorite liitmise viisid annavad muidugi ühe ja sama tulemuse.

Erinevalt arvudest liidetakse vektoreid *geomeetriliselt*. Resultantvektor on liidetavate vektorite geomeetriline summa. Kuid ühel erijuhul võrdub resultantvektori pikkus liidetavate vektorite pikkuste algebralise summaga.

Kujutleme, et sirgel teel sõidab auto. Joonisel 12 on see tee kujutatud sirgena AO. Auto läbis teelõigu BC ja peatus. Seejärel jätkas ta sõitu ja läbis teelõigu CD. On selge, et lõpptulemus oleks



Joon. 11



Joon. 12

olnud täpselt samasugune, kui auto oleks peatumata läbinud teelõigu BD. Seega võrdub $\overrightarrow{BD}$ nihete $\overrightarrow{BC}$ ja $\overrightarrow{CD}$ summaga:

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}.$$

Vektorite liitmise reegel jääb siin endiseks: teine vektor tuleb paigutada nii, et selle algus ühtib esimese vektori lõpuga, ja resultantvektori leidmiseks tuleb esimese vektori algus ühendada teise vektori lõpuga. Resultantvektori arvväärtus võrdub antud juhul liidetavate vektorite arvväärtuste aritmeetilise summaga ja resultantvektori suund ühtib liidetavate vektorite suunaga. Võime öelda, et **ühesuunaliste vektorite pikkused liituvad aritmeetiliselt.**

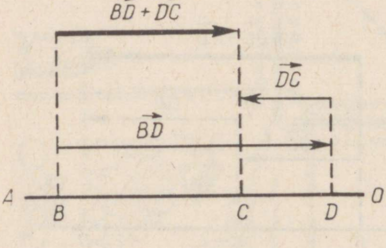
Võis juhtuda ka nii: auto sõitis algul punktist B punkti D, seejärel aga pööras ümber ja sõitis kuni punktini C (joon. 13). Kahe nihke tulemus on samasugune, nagu oleks auto sooritanud ainult ühe nihke — punktist B punkti C. Seega tuleb nihe $\overrightarrow{BC}$ lugeda nihete $\overrightarrow{BD}$ ja $\overrightarrow{DC}$ summaks:

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}.$$

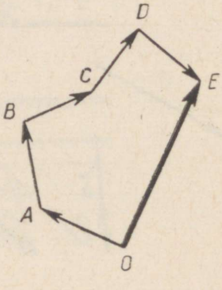
Nagu jooniselt 13 nähtub, ühtib resultantvektori suund suurema liidetava suunaga. Vektori $\overrightarrow{BC}$ pikkus võrdub aga liidetavate vektorite pikkuste vahega. See tähendab, et vektori $\overrightarrow{DC}$ arvväärtuse ette tuleb kirjutada miinusmärk.

Kui vektorid asuvad ühel sirgel või on paralleelsed, siis võrdub resultantvektori pikkus liidetavate vektorite pikkuste algebralise summaga ja tema suund ühtib suurema liidetava suunaga.

Liitmise reegel jääb kehtima ka enam kui kahe vektori liitmisel. Oletame, et keha sooritas nihke punktist O punkti A, sealt punkti B, sealt aga punkti C jne. (joon. 14). Kõik need nihked võib asen-



Joon. 13



Joon. 14

dada üheainsa nihkega $\overrightarrow{OE}$. Nihe $\overrightarrow{OE}$ ongi kõikide nende nihete summa.

Selleks et liita mitut vektorit, tuleb nad asetada nii, et esimese vektori lõpp ühtib teise algusega, teise lõpp kolmanda algusega jne. Resultantvektoriks on vektor, mis ühendab esimese liidetava algust viimase lõpuga.

§ 6. ÜHTLANE SIRGJOONELINE LIIKUMINE

Teame, et keha asukoha leidmiseks mingil ajahetkel tuleb leida nihe, mille keha on selleks ajahetkeks sooritanud. Vaatleme, kuidas leida nihet sel juhul, kui keha võtab osa kõige lihtsamast liikumisest — ühtlasest sirgjoonelisest liikumisest.

Ühtlaseks sirgjooneliseks liikumiseks nimetatakse sellist liikumist, mille puhul keha nihked mistahes võrdsetes ajavahemikes on võrdsed.

Kui keha liigub ühtlaselt ühes ja samas suunas mööda mingit sirget, siis tema nihe kogu aeg kasvab. Selleks et leida keha nihet mingi aja t pärast, tuleb teada, kui kiiresti see kasvab. Nihke kasvamise kiirus aga on määratud nihke ja selleks kulunud ajavahemiku t suhtega. Seda suhet nimetatakse liikumise *kiiruseks* ja tähistatakse tähega v. Kuna nihe on vektoriaalne suurus, aeg aga on skalaar, siis kiirus on samuti vektoriaalne suurus:

$$\vec{v} = \frac{\vec{s}}{t}.$$

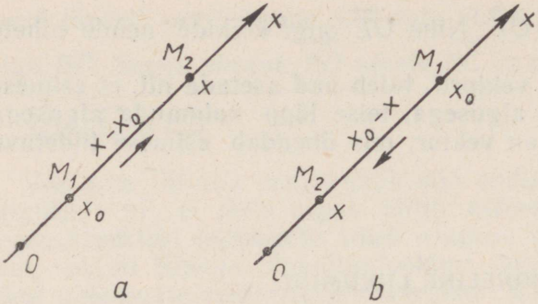
Keha liikumise kiiruseks nimetatakse suurust, mis võrdub keha nihke ja nihke sooritamiseks kulunud ajavahemiku suhtega. Seega näitab kiirus, millise nihke teeb keha ühes ajaühikus.

Kui keha kiirus on teada, siis ajavahemiku t jooksul toimunud nihke võib arvutada valemist

$$\vec{s} = \vec{v}t.$$

Kui peale selle on teada keha algasukoht, siis võib leida ka tema lõppasukoha.

Keha sirgjoonelisel liikumisel on otstarbekas valida üks koordinaatteljedest nii, et see ühtiks selle sirgega, mida mööda keha liigub. Nihke- ja kiirusvektor on siis selle sirge sihilised ja nende vektorite projektsioonid koordinaatteljel võrduvad vektorite pikkustega. Neid vektorite projektsioone võib vaadelda skalaarsete suurustena, mis võivad olla kas positiivsed või negatiivsed. Sirgel võib ju valida kaks teineteisele vastupidist suunda: vasakule või



Joon. 15

paremale, alla või üles, edasi või tagasi. Loeme edaspidi nihete ja kiiruste projektsioonid positiivseteks skalaarseteks suurusteks siis, kui nende suund ühtib koordinaattelje positiivse suunaga, ja negatiivseteks sel juhul, kui nende suund on sellele vastupidine. Seega telje suund ja pluss- või miinusmärk kiiruse ja nihke arvväärtuste ees määravad täielikult vektorite v ja s suuna.

Joonisel 15, a on kujutatud mingi sirge, mida mööda keha liigub. Valime ühe koordinaattelje, näiteks telje OX, nii et see ühtib selle sirgega. Telje positiivne suund on tähistatud noolega. Punkt O on koordinaatide alguspunkt. Kui keha liigub mingi ajavahemiku t jooksul punktist M_1 punkti M_2, kusjuures nende punktide koordinaadid on vastavalt x_0 ja x, siis võib öelda, et keha sooritas positiivse nihke, mille pikkus $s_x = x - x_0$. Kiirusvektori projektsioon teljele OX on antud juhul samuti positiivne arv v_x $(v_x = v)$, sest kiirusvektor ja nihkevektor on alati ühesuunalised. Seetõttu võime kirjutada:

$$x - x_0 = vt$$

ehk

$$x = x_0 + vt.$$

Kui nihke ja kiirusvektori suund on telje positiivsele suunale vastupidine (joon. 15, b), siis nende vektorite projektsioonid on negatiivsed arvud:

$$s_x = -(x_0 - x),$$
$$v_x = -v.$$

Seetõttu võime kirjutada:

$$-(x_0 - x) = -vt$$

ehk

$$x = x_0 - vt.$$

Saadud valemitest

$$x = x_0 + vt$$

ja

$$x = x_0 - vt$$

nähtub, et keha asukoha leidmiseks mistahes ajahetkel (antud juhul on see määratud koordinaadiga x) tuleb teada keha a l g a s u k o h t a (koordinaati x_0) ja keha liikumise k i i r u s t v.

Lõpuks märgime, et kui keha liigub sirgjooneliselt ühes suunas, siis võrdub tema nihke pikkus (arvväärtus) läbitud teega. Kuid erinevalt nihkest on teepikkus skalaarne suurus. Nimelt seda suurust mõõdabki kilomeetriloendi, mis on olemas igal autol.

Ka kiirusvektori arvväärtus on skalaarne suurus. Kui kiirusvektor on nihkevektori ja nihke sooritamiseks kulunud ajavahemiku suhe, siis kiiruse arvväärtus on teepikkuse ja selle läbimiseks kulunud ajavahemiku suhe. Seda skalaarset suurust mõõdabki spidomeeter, mis on samuti olemas igal autol.

Ülesanne. Läänest itta kulgeval teel liikusid teineteise poole kaks autot — üks itta kiirusega $60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ja teine läände kiirusega $90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Bensiinijaamas autod kohtusid ja jätkasid seejärel oma teekonda (joon. 16).

Määrata autode asukoht ja nendevaheline kaugus 30 minutit pärast kohtumist.

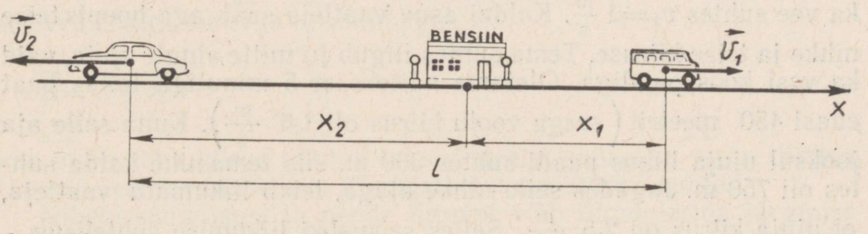
L a h e n d u s. Loeme bensiinijaama kauguste mõõtmisel alguspunktiks ja kohtumise hetke aja alghetkeks. Lepime kokku, et suund läänest itta on positiivne ja vastupidine suund negatiivne. Autode koordinaadid 0,5 tundi pärast kohtumist on järgmised:

$$x_1 = v_1 t = 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 0{,}5\ \text{h} = 30\ \text{km};$$

$$x_2 = v_2 t = -90\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 0{,}5\ \text{h} = -45\ \text{km}.$$

Autodevaheline kaugus võrdub nende koordinaatide vahega:

$$l = x_1 - x_2 = 30\ \text{km} - (-45\ \text{km}) = 75\ \text{km}.$$



Joon. 16

Harjutus 3

1. Kas viimases ülesandes arvutatud suurust l tuleb lugeda vektoriaalseks suuruseks?
2. Selgitage, milline erinevus on nihke ja läbitud tee vahel sirgjoonelisel liikumisel.
3. Selgitage, mille poolest erinevad valemitega $v=\frac{s}{t}$ ja $\vec{v}=\frac{\vec{s}}{t}$ määratud suurused teineteisest ja mida on neil ühist.

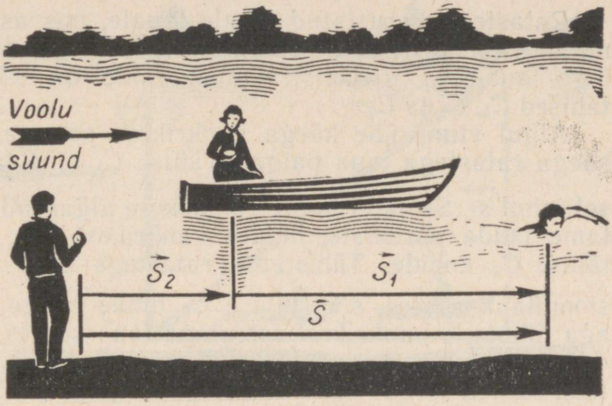
§ 7. LIIKUMISE SUHTELISUS

Teame, et punkti või keha asendit ruumis võib määrata ainult mingi teise keha — taustkeha suhtes ja et taustkehaga seotakse taustsüsteem. On ilmne, et **erinevates taustsüsteemides on punkti asukoht erinev.** Keha asend ruumis on suhteline. Kuid suhteline on mitte ainult tema asend, vaid ka liikumine. Liikumine on ju asendi muutumine.

Sageli tuleb vaadelda mingi keha liikumist erinevate taustkehade suhtes, millest üks omakorda liigub teiste suhtes. Näiteks suurtükiväelasel, kes tanki pihta tuld juhib, on tähtis teada mürsu liikumist mitte ainult Maa (liikumatu taustkeha), vaid ka tanki suhtes, mida ta tulistab (liikuv taustkeha). Lendurile, kes viskab lennukist alla koorma, on oluline teada, kuidas see koorem lennuki ja Maa suhtes liigub. Just sellistel juhtudel ilmnebki peale keha asukoha suhtelisuse veel ka tema liikumise, nihke ja kiiruse suhtelisus.

Kujutleme, et ujuja saavutab jões pärivoolu ujudes (käte ja jalgadega töötades) kiiruse v_1 (joon. 17). Vaatleme selle ujuja liikumist kalda suhtes ja jões pärivoolu ujuva aerudeta paadi suhtes, mis liigub samasuguse kiirusega kui vesi. Kujutleme, et üks vaatlejaist asub kaldal ja teine paadis. Vaatlejad mõõdavad ujuja nihet ja selleks kulunud aega.

Oletame näiteks, et paadis oleva vaatleja andmetel läbis ujuja 5 minuti jooksul paadi suhtes pärivoolu 300 m. Jagades 300 meetrit 5 minuti ehk 300 sekundiga, saame ujuja kiiruseks paadi ja seega ka vee suhtes $v_1=1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Kaldal asuv vaatleja saab aga hoopis teise nihke ja teise kiiruse. Tema suhtes liigub ju mitte ainult ujuja, vaid ka vesi koos paadiga. Oletame näiteks, et 5 minutiga liikus paat edasi 450 meetrit $\left(\text{seega voolu kiirus oli } 1{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$. Kuna selle aja jooksul ujuja liikus paadi suhtes 300 m, siis tema nihe kalda suhtes oli 750 m. Jagades selle nihke ajaga, leiab liikumatu vaatleja, et ujuja kiirus on $2{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Selles seisnebki liikumise suhtelisus.



Joon. 17

Liikuvate kehade nihked ja kiirused on üksteise suhtes liikuvates taustsüsteemides erinevad.

Võib juhtuda ka nii, et keha liigub mingi kiirusega ühes taustsüsteemis, kuid teise taustsüsteemi suhtes on ta paigal. Kui näiteks ujuja liigub pärivoolu, nii et tema kiirus kallaste suhtes võrdub vee voolamise kiirusega (s. t. ujuja lamab liikumatult veepinnal), siis paadis asuva vaatleja suhtes seisab ta paigal. Kui aga ujuja ujuks vee suhtes samasuguse kiirusega vastuvoolu, siis kallaste suhtes püsiks ta paigal. Seega on suhteline mitte ainult liikumine, vaid ka p a i g a l o l e k.

Sellest arutlusest nähtub, et keha nihe $\vec{s}$ liikumatu taustsüsteemi suhtes võrdub kahe nihke $\vec{s}_1$ ja $\vec{s}_2$ summaga, kusjuures $\vec{s}_1$ on keha nihe liikuva taustsüsteemi suhtes ja $\vec{s}_2$ on selle taustsüsteemi nihe liikumatu taustsüsteemi suhtes:

$$\vec{s}=\vec{s}_1+\vec{s}_2.$$

Täpselt samuti võrdub ka selle keha kiirus $\vec{v}$ liikumatus taustsüsteemis kiiruste $\vec{v}_1$ ja $\vec{v}_2$ summaga:

$$\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2,$$

kus $\vec{v}_1$ on keha kiirus liikuva taustsüsteemi suhtes ja $\vec{v}_2$ on liikuva taustsüsteemi enda kiirus liikumatu taustsüsteemi suhtes.

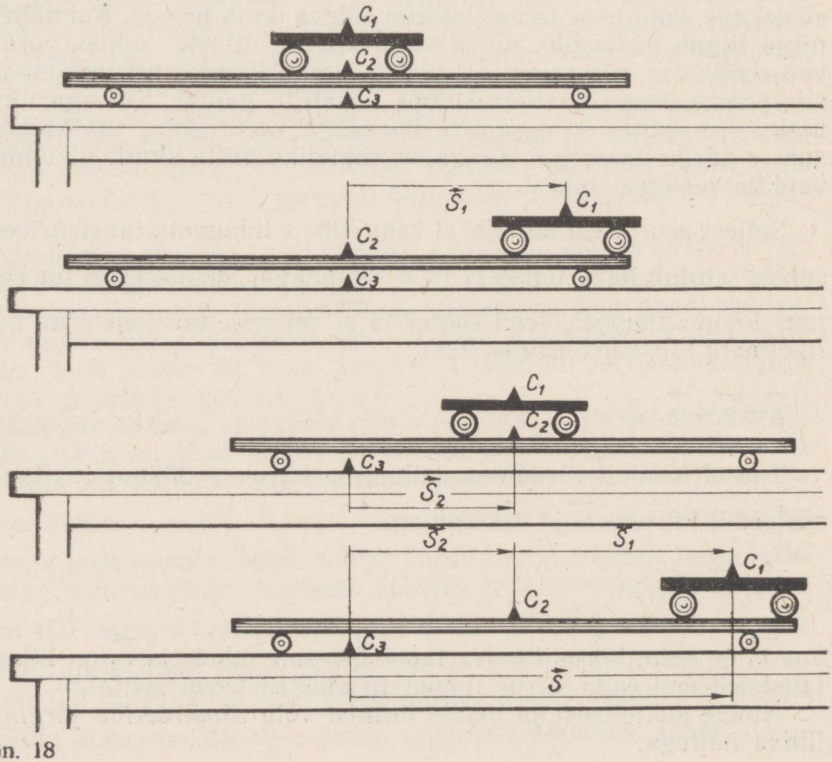
Nihete suhtelisust ja nende liitmist võib illustreerida järgmise lihtsa näitega.

Ratastega varustatud pikale lauale, mis asub demonstratsioonilaual, on paigutatud vankrike (joon. 18). Vankrikesele, ratastega lauale ja demonstratsioonilauale on kinnitatud vastavalt tähised C_1, C_2 ja C_3.

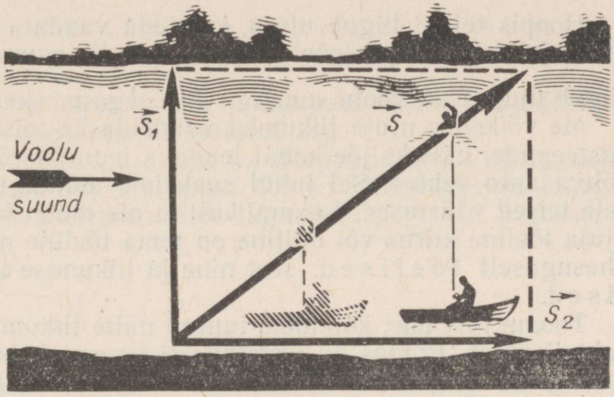
Algul viime ühe käega vankrikese paremale ja hoiame teise käega ratastega laua paigal. Tähise C_1 nihe tähise C_2 suhtes on sel juhul $\vec{s}_1$. Seejärel viime vankrikese algasendisse tagasi ja nihutame lauda paremale, hoides vankrikest nii, et tähis C_1 jääb tähise C_2 kohale. Tähistame ratastega laua nihke demonstratsioonilaua suhtes, s. o. tähise C_2 nihke tähise C_3 suhtes, $\vec{s}_2$. Kui aga nihutada vankrikest ratastega laua suhtes ja ratastega lauda demonstratsioonilaua suhtes, siis vankrikese nihe demonstratsioonilaua suhtes võrdub kahe nihke summaga:

$$\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2.$$

$\vec{s}_1$ on siin vankrikese nihe ratastega laua suhtes ja $\vec{s}_2$ selle laua nihe demonstratsioonilaua suhtes.



Joon. 18

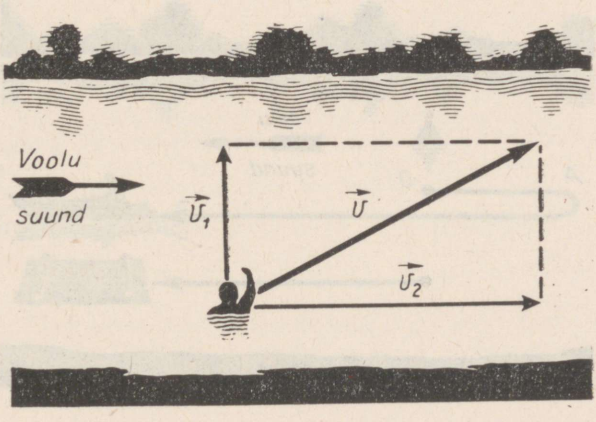


Joon. 19

Vaadeldud katses ja näites jões vastu- ja pärivoolu ujuva inimesega on nihked teineteisega paralleelsed. Nagu eespool märgitud, võib sellistel juhtudel kasutada nihkevektorite asemel nende projektsioone nihkevektoritega paralleelsele teljele. Need projektsioonid liituvad algebraliselt nagu arvud. Kuid alati ei ole see nii.

Kujutleme, et poiss ujub üle jõe, liikudes jõevooluga risti (joon. 19). Kui vaadelda ujuja liikumist kalda suhtes, siis peame arvestama, et ujuja nihe voolu suunaga risti on $\vec{s}_1$ ja et vesi koos ujujaga sooritab sama aja jooksul voolu suunas nihke $\vec{s}_2$. Need nihked ei liitu mitte algebraliselt, vaid geomeetriliselt, vektorite liitmise reegli (rööpkülikureegli) järgi. Ujuja resultantnihe $\vec{s}$ liikumatu taustkeha — kalda — suhtes on suunatud rööpküliku diagonaali mööda. Jooniselt näeme, kus jõe ületanud ujuja jõuab teisele kaldale.

Rööpkülikureegli järgi liituvad mitte ainult nihked, vaid ka kiirused (joon. 20).



Joon. 20

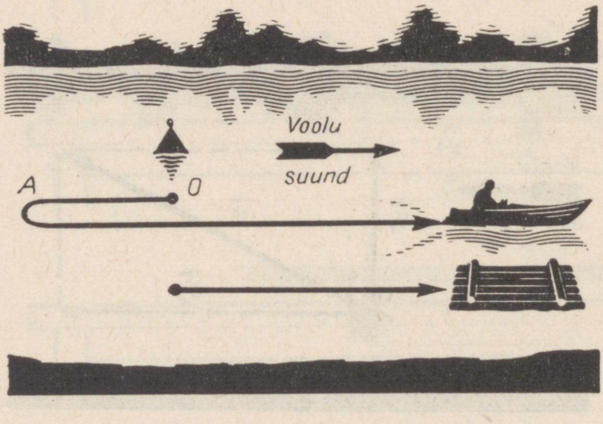
Hoopis teisiti liigub ujuja, kui teda vaadata aerudeta paadist, mis ujub vabalt pärivoolu. Sellel paadil asuva vaatleja suhtes liigub ujuja risti voolu suunaga kiirusega $\vec{v_1}$ (joon. 19).

Me võiksime ujuja liikumist vaadelda ka teiste liikuvate taustsüsteemide, näiteks jõe kohal lendava lennuki või kaldaäärsel teel sõitva auto suhtes. Sel juhul saaksime muidugi nihkele ja kiirusele teised väärtused. Loomulikult ei ole mõtet küsida, milline on ujuja tõeline kiirus või milline on tema tõeline nihe. Kõik need on ühesuguselt t õ e l i s e d, sest nihe ja liikumise kiirus on s u h t e l i s e d.

Toome veel ühe, kõikidele tuntud näite liikumise ja paigaloleku suhtelisusest. Igaüks on arvatavasti kogenud, kui raske on raudteevagunis olles kõrvalteel seisvat rongi vaadates kindlaks teha, kumb rongidest liigub, kumb seisab paigal. Kui vaadata ainult naaberrongi, mitte aga maad, hooneid ja pilvi, siis on võimatu teada saada, kumb rongidest liigub ühtlaselt sirgjooneliselt. Me jätame siin muidugi arvestamata tõuked raudteerööbaste ühenduskohtadel, löögid, vaguni kõikumised jne. Kõike seda on ju võimalik vältida. Kui ühes rongis asuv vaatleja väidab, et tema rong seisab paigal ja teine rong liigub, siis reisija teises rongis võib samasuguse õigusega öelda, et paigal seisab just tema rong, naaberrong aga liigub vastupidises suunas. Õigus on mõlemal reisijal, sest liikumine ja paigalolek on suhtelised.

Ülesanne. Vastuvoolu sõitev mootorpaat möödub ankrus seisvast poist ja kohtab sealsamas parve. 12 minutit pärast kohtumist hakkab mootorpaat sõitma pärivoolu ja jõuab parvele järele siis, kui see on poist 800 m kaugusel. Määrata nende andmete järgi jõevoolu kiirus.

L a h e n d u s. Valime taustkehaks poi ja seome sellega taustsüsteemi. Positiivseks suunaks loeme jõevoolu suuna (joon. 21). Parve liikumise kiirus poi suhtes võrdub voolu kiirusega v_2:



Joon. 21

$$v_2 = \frac{s}{t},$$

kus s on parve nihe kohani, kus mootorpaat talle järele jõudis, ja t on selle nihke sooritamiseks kulunud aeg.

Kui tähistame tähega t_1 aja, mis mootorpaadil kulus liikumiseks poist kuni pöördepunktini, s. t. lõigu $OA = l$ läbimiseks, ja tähega t_2 aja, mille vältel mootorpaat läbis tagasiteel lõigu AB pikkusega $l+s$, siis

$$t = t_1 + t_2.$$

Tähistame tähega v_1 mootorpaadi kiiruse vee suhtes. Kui mootorpaat liigub vastuvoolu, siis tema kiirus poi suhtes on $v_1 - v_2$. Pärivoolu liikumisel on aga tema kiirus sama poi suhtes $v_1 + v_2$. Seetõttu

$$t_2 = \frac{l+s}{v_1+v_2},$$

$$l = t_1(v_1 - v_2).$$

Siit saame:

$$t_2 = \frac{t_1(v_1-v_2)+s}{v_1+v_2}.$$

Kuid

$$t = t_1 + t_2.$$

Seega

$$t = t_1 + \frac{t_1(v_1-v_2)+s}{v_1+v_2}.$$

Võttes arvesse, et $t = \frac{s}{v_2}$, võime kirjutada järgmise seose:

$$t_1 + \frac{t_1(v_1-v_2)+s}{v_1+v_2} = \frac{s}{v_2}.$$

Lahendades selle võrrandi, saame:

$$v_2 = \frac{s}{2t_1},$$

$$v_2 = \frac{0{,}8 \text{ km}}{2 \cdot 0{,}2 \text{ h}} = 2 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Selle ülesande lahendamisel võime taustsüsteemi siduda ka parvega. Sel juhul loetakse parv liikumatuks. Kuid siis on ka vesi jões liikumatu. Seega parve suhtes liigub mootorpaat mõlemas suunas ühesuguse kiirusega. Niisiis, parvest eemaldumiseks ja selle juurde tagasijõudmiseks kulunud ajavahemikud on võrdsed: $t_2 = t_1$. Seega $t = 2t_1$. Aja t vältel «liikus» poi parve suhtes lõigu $OB = s$ võrra. Kuid poi «liikumise kiirus» võrdub arvuliselt jõevoolu kiirusega v_2.

Selle kiiruse võib leida järgmiselt:

$$v_2 = \frac{s}{2t_1},$$

$$v_2 = \frac{0{,}8 \text{ km}}{2 \cdot 0{,}2 \text{ h}} = 2 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Sidudes taustsüsteemi ühega liikuvatest kehadest, lihtsustasime tunduvalt ülesande lahenduskäiku. Ka teistel juhtudel, kui vaadeldakse kahe keha ühtlast liikumist, lahendub ülesanne lihtsamini, kui taustkehaks võtta üks nendest kehadest.

Harjutus 4

1. Kahel paralleelsel teel liiguvad rongid — üks kiirusega 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ja teine kiirusega 40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Kui suur on teise rongi kiirus esimese suhtes, kui rongid liiguvad a) ühes suunas ja b) vastupidistes suundades?
2. Motoriseeritud jalaväe kolonn, mille pikkus on 1200 m, liigub kiirusega 18 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ Kolonni ees asuv komandör saadab mootorratturi käsuga kolonni lõppu, kes pöördub tagasi 1 minuti 40 sekundi pärast.
Leida mootorratturi kiirus, kui ta liigub mõlemas suunas maapinna suhtes ühesuguse kiirusega.
3. Maanteel liigub ühtlaselt veoauto kiirusega 54 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ja teisel maanteel, mis on esimesega risti, sõiduauto kiirusega 72 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Autod kohtuvad ristteel. Kui kaugel on autod teineteisest 10 minutit pärast kohtumist?
Juhis. Võtta taustkehaks üks autodest, näiteks veoauto, ja leida teise auto kiirus selle suhtes. Kui lugeda veoauto liikumatuks, tuleb teed vaadelda liikuvana — tema kiirus võrdub veoauto kiirusega, kuid on sellega vastassuunaline.
4. Vihmatilgad langevad tuulevaikse ilmaga ühtlaselt liikuva rongi aknale ja jätavad sinna jäljed, mis moodustavad vertikaalsihiga nurga 60°. Kui suur on vihmatilga kiirus maapinna suhtes? Rong liigub kiirusega 36 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
5. Õppepolügoonil tulistatakse kiirusega 54 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ liikuvast tankist märklauda, mis liigub paralleelselt tankiga samas suunas kiirusega 36 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Kuulid lendavad tanki kuulipildujast välja risti märklauaga 0,1-sekundiliste ajavahemike järel. Kui kaugel üksteisest on kuuliaugud märklauas?

§ 8. VALGUSE KIIRUS[1]

Looduses on olemas üksainus kiirus, mis ei ole suhteline. See on valguse levimise kiirus tühjuses. Selle kiirusega levivad mitte ainult nähtavad valguslained, vaid ka raadiolained, ultraviolett-, röntgeni- ja gammakiirgus.

See kiirus on mitmes suhtes tähelepanuväärne.

Esiteks on see väga suur. Valgus ja teised ülalloetletud kiirgused levivad tühjuses kiirusega kolmsada miljonit meetrit sekundis $\left(3\cdot 10^8\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$. Võrdluseks meenutame, et Maa tehiskaaslasele antakse kiirus $8—11\frac{\text{km}}{\text{s}}$ ja et Maa tiirleb ümber Päikese kiirusega $30\frac{\text{km}}{\text{s}}$.

Teiseks on kõikide valgusallikate valguse kiirus ühesugune. Väikese taskulambi ja võimsa prožektori valgus, päikesevalgus ja välgu valgus levivad tühjuses ühe ja sama kiirusega.

Kolmandaks, valguse kiirust ei ole võimalik mingil viisil vähendada. Kui asetada valguse teele mingi takistus (läbipaistev keha), siis selles on küll valguse kiirus veidi väiksem, kuid takistusest väljumisel omandab ta jälle endise kiiruse. Valgust ei saa peatada. Muidugi võib teha nii, et valgus ei levi teatud kohast alates enam edasi (sellesse kohta tuleb asetada läbipaistmatu ekraan), kuid see ei tähenda, et valgus jäi seisma. Ta neeldus ekraanis ja lakkas seega lihtsalt olemast.

Kuid valguse kõige imetlusväärsem omadus seisneb selles, et tema levimise kiirus on mitte suhteline, vaid a b s o l u u t n e. See tähendab, et **valguse kiirus ei sõltu valgust kiirgava keha kiirusest ja on kõikides taustsüsteemides ühesugune.**

Kui näiteks lennukist, mis lendab kiirusega $200\frac{\text{m}}{\text{s}}\left(720\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$, tulistada liikumise suunas välja mürsk kiirusega $1000\frac{\text{m}}{\text{s}}$, siis Maa suhtes liiguks see kiirusega $1200\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Samalt lennukilt kiiratav valgus levib aga Maa suhtes samasuguse kiirusega nagu valgus, mida kiiratakse lennuväljal seisvalt lennukilt.

Kujutlegem, et kosmoselaev lendab tähtedevahelises ruumis valguse kiiruse lähedase kiirusega (selline kosmoselaev on praegu veel fantastika) ja et selles asuvad kosmonaudid mõõdavad mitmesugustelt tähtedelt tuleva valguse kiirust. Kui valguse kiirus nagu iga muu kiirus oleks suhteline, siis leiaksid kosmonaudid, et kosmoselaeva ees asuvatelt tähtedelt tuleva valguse kiirus oleks peaaegu kaks korda suurem, s. t. $6\cdot 10^8\frac{\text{m}}{\text{s}}$, ja et kosmoselaeva taga asuvate tähtede valguse kiirus oleks väga väike. Kuid tegelikult näitaksid kosmonautide mõõtmised, et kõikide tähtede valguse kiirus on ühesugune — $3\cdot 10^8\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Selliseid otseseid mõõtmisi ei ole keegi veel muidugi korraldanud, kuid valguse kiiruse absoluutsus on tõestatud paljude vaatluste ja katsetega.

Väide, et valguse kiirus ei ole suhteline, vaid on absoluutne, on Albert Einsteini poolt 1905. a. loodud *relatiivsusteooria* aluseks. Selle teooria tulemused on väga tähtsad kogu füüsika, sealhulgas ka mehhaanika seisukohalt.

Relatiivsusteooriast järgneb näiteks, et mingi keha ei saa liikuda valguse kiirusest s u u r e m a või isegi sellega v õ r d s e kiirusega. Valguse kiirus —

---

[1] Ptiikirjas trükitud tekst on mõeldud täiendavaks lugemiseks.

$3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ — on kehadele saavutamatu piirkiirus. Kuid valguse kiirusele väga lähedast (ükskõik kui lähedast, kuid sellest väiksemat) kiirust võib saavutada ja sellised kiirused on looduses olemas. Kiirust $3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ võib omada ainult valgus.[1]

Relatiivsusteooria annab täiesti teistsuguse, täpsema kiiruste liitmise eeskirja. Eelmises paragrahvis nägime, kuidas leida ujuja kiirust kalda suhtes. Selleks tuleb liita tema kiirus vee suhtes vee kiirusega kalda suhtes: $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

Kuid relatiivsusteooriast järeldub, et kui keha kiiruse arvväärtus mingi liikuva taustsüsteemi suhtes on v_1 (ujuja kiirus vee suhtes) ja taustsüsteem ise (vesi) liigub «paigaloleva» taustsüsteemi (kalda) suhtes kiirusega v_2, siis keha kiirus «paigaloleva» taustsüsteemi suhtes väljendub valemiga:

$$V = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}},$$

kus c on valguse kiirus tühjuses $\left(3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}\right)$.

Te võite kergesti veenduda, et kui kiirused v_1 ja v_2 on valguse kiirusega võrreldes väikesed, siis annab see valem peaaegu samasuguse tulemuse nagu valem $v = v_1 + v_2$. Seetõttu võib viimast valemit väikeste kiiruste puhul täie õigusega kasutada.

Kui aga kiirused v_1 ja v_2 (või üks neist) on lähedased valguse kiirusele, annab valem $v = v_1 + v_2$ ebaõige tulemuse. Selle järgi arvutatud resultantkiirus võib osutuda isegi valguse kiirusest suuremaks. Relatiivsusteooria põhjal saadud uus valem annab alati õige tulemuse, kuid seda on mõtet kasutada siis, kui kiirused on lähedased valguse kiirusele. Maailmas ei ole muidugi olemas ujujaid, kes ujuksid selliste kiirustega, ega jõgesid, kus vesi voolaks nii kiiresti. Relativistlik kiiruste liitmise valem ei ole selleks, et seda kasutada tavalises praktikas, kus kehad liiguvad valguse kiirusest tunduvalt väiksemate kiirustega.

Analüüsides relativistlikku kiiruste liitmise valemit, võib kergesti veenduda, et liitliikumise kiirus ei saa olla liidetavate kiiruste v_1 ja v_2 mistahes väärtuste puhul valguse kiirusest c suurem, ja seda isegi siis, kui mõlemad liidetavad on väga lähedased valguse kiirusele.

---

[1] Valguse kiirusega liiguvad samuti erilised osakesed — *neutriinod.*

2. peatükk. MITTEÜHTLANE SIRGJOONELINE LIIKUMINE

§ 9. SISSEJUHATUS

Ühtlasel sirgjoonelisel liikumisel on nihe ja seega ka keha asukoht igal ajahetkel määratud valemiga $\vec{s}=\vec{v}t$. Kuid sellist liikumist esineb võrdlemisi harva. Palju sagedamini kohtame liikumisi, mille kiirus aja jooksul kuidagi muutub.

Näiteks maapinnale langevad kehad liiguvad sirgjooneliselt, kuid k a s v a v a kiirusega. Vertikaalselt üles visatud keha liigub samuti sirgjooneliselt, kuid k a h a n e v a kiirusega. Muutuva kiirusega liiguvad tavaliselt rongid, autod, lennukid jne.

Liikumist, mille kiirus aja jooksul muutub, nimetatakse mitteühtlaseks liikumiseks.

Sellise liikumise puhul ei saa nihet enam arvutada valemist $\vec{s}=\vec{v}t$. Aja jooksul ju kiirus muutub ja me ei saa enam rääkida mingist kindlast kiirusest, mille väärtuse võiksime asetada sellesse valemisse.

Sellepärast selgitame nüüd, kuidas leida nihet mitteühtlasel liikumisel ja mida peab selleks teadma.

§ 10. KESKMINE KIIRUS

Mõnel juhul kasutatakse mitteühtlase liikumise iseloomustamiseks *keskmise kiiruse* mõistet.

Mis suurus see on ja millistel juhtudel võib seda kasutada? Kui keha läbis ajavahemiku t jooksul mingi tee s, siis, jagades selle tee ajaga, saamegi keskmise kiiruse v_k:

$$v_k=\frac{s}{t},$$

Keskmine kiirus näitab, kui pika tee läbib keha keskmiselt ühes ajaühikus.

Oletame näiteks, et rong läbis kahe linna vahelise tee, mille pikkus oli 600 km, 10 tunniga. See tähendab, et keskmiselt läbis ta igas tunnis 60 km:

$$v_k = \frac{600\ \text{km}}{10\ \text{h}} = 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

On ilmne, et teatud osa ajast rong üldse ei liikunud, vaid seisis jaamades. Jaamast väljumisel rongi kiirus suurenes, jaamale lähenemisel vähenes.

Kõike seda me ei võta keskmise kiiruse arvutamisel arvesse. Me arvestame, nagu läbiks rong iga tunniga 60 km, iga poole tunniga 30 km jne.

Kasutades valemit

$$v_k = \frac{s}{t},$$

kujutleme, nagu liiguks rong ühtlaselt jääva kiirusega v_k, ehkki kogu liikumise aja jooksul ei ole võib-olla ühtegi sellist tundi, milles rong läbis täpselt 60 km.

Sellele vaatamata annab see valem õige tulemuse, kuid ainult selle teelõigu puhul, mille jaoks keskmine kiirus on arvutatud. Kui kasutada seda keskmise kiiruse väärtust ja arvutada valemi põhjal

$$s = v_k t$$

näiteks 2, 4 või 5 tunni jooksul läbitud tee, siis võime saada ebaõige tulemuse. Selle põhjuseks on asjaolu, et keskmine kiirus kogu teel, mille rong läbib 10 tunniga, ei võrdu keskmise kiirusega 2, 4 või 5 tunni jooksul. Seega ei võimalda keskmise kiiruse väärtus meil lahendada mehhaanika põhiülesannet — määrata keha asukoht mistahes ajahetkel isegi siis, kui on teada keha trajektoor. Keskmise kiiruse arvutamiseks on meil tarvis teada läbitud teed s, kuid mehhaanika põhiülesanne on just vastupidine: kiiruse järgi tuleb leida tee.

Kuid paljudel juhtudel on siiski kasulik teada keskmist kiirust. Kui näiteks turistil on enda või teiste turistide kogemustest teada, et mägiteed võib läbida keskmise kiirusega $2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, siis võivad nad uuele matkale asudes seda fakti kasutada ning määrata koha, kuhu nad jõuavad päeva lõpuks. Teades auto keskmist kiirust linnas, võib leida tee, mille auto teatud aja jooksul läbib, ja selle põhjal määrata ka vajaliku kütusevaru.

Ülesanne. Auto sõitis 6 tundi. Esimese tunni liikus ta keskmise kiirusega $110 \frac{km}{h}$ ja ülejäänud 5 tundi keskmise kiirusega $50 \frac{km}{h}$. Leida auto keskmine kiirus kogu liikumise aja kohta.

Lahendus. Auto keskmise kiiruse arvutamiseks tuleb kogu tee s jagada selle läbimiseks kulunud ajaga t. Seega tuleb algul leida tee s_1, mille auto läbis esimese tunniga, ja tee s_2, mille ta läbis ülejäänud 5 tunniga:

$$s_1 = v_1 t_1,$$

$$s_2 = v_2 t_2.$$

Kuid

$$v_k = \frac{s}{t}, \quad s = s_1 + s_2 \text{ ja } t = t_1 + t_2.$$

Seega

$$v_k = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2}.$$

Asetades sellesse valemisse arvväärtused, saame

$$v_k = \frac{110 \frac{km}{h} \cdot 1h + 50 \frac{km}{h} \cdot 5\,h}{1h + 5h} = 60 \frac{km}{h}.$$

Üldiselt, kui ajavahemikel $t_1, t_2, t_3, \ldots$ keha liikus vastavalt keskmise kiirusega $v_1, v_2, v_3 \ldots$, määratakse keskmine kiirus kogu liikumise aja kohta valemiga

$$v_k = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2 + v_3 t_3 + \ldots}{t_1 + t_2 + t_3 + \ldots}.$$

Harjutus 5

1. Auto läbib 9 km kiirusega $36 \frac{km}{h}$ ja ülejäänud 27 km kiirusega $54 \frac{km}{h}$. Leida auto liikumise keskmine kiirus.
2. Veoauto läbis 30 km kiirusega $40 \frac{km}{h}$ ja peatus mahalaadimiseks 12 minutit. Pärast seda sõitis ta 15 minutit kiirusega $60 \frac{km}{h}$. Leida auto keskmine kiirus kogu tee kohta.
3. Jalgrattur läbib esimese poole tunniga 10 km. Järgneva 12 minuti jooksul liigub ta kiirusega $25 \frac{km}{h}$. Viimased 9 km sõidab jalgrattur kiirusega $18 \frac{km}{h}$. Leida jalgratturi keskmine kiirus a) kogu läbitud teel ja b) tee esimesel poolel.

§ 11. KIIRUS ANTUD AJAHETKEL

Nägime, et keskmise kiiruse abil võib leida keha asukoha antud trajektooril ainult selle ajavahemiku lõpphetkel, mille jaoks keskmine kiirus on arvutatud. Kuid keha asukohta mingil teisel, varasemal või hilisemal ajahetkel me leida ei saa, sest et keskmise kiiruse väärtused on erinevate ajavahemike jaoks erinevad.

Keha asukohta mistahes ajahetkel on võimalik leida ka mitteühtlasel liikumisel. Kuid selleks tuleb kasutada mitte keskmist kiirust, vaid *kiirust antud ajahetkel.* Mis on keha kiirus antud ajahetkel? Sellele küsimusele vastamiseks kasutame erilist võtet, milleta on raske selgitada muutuvaid suurusi.

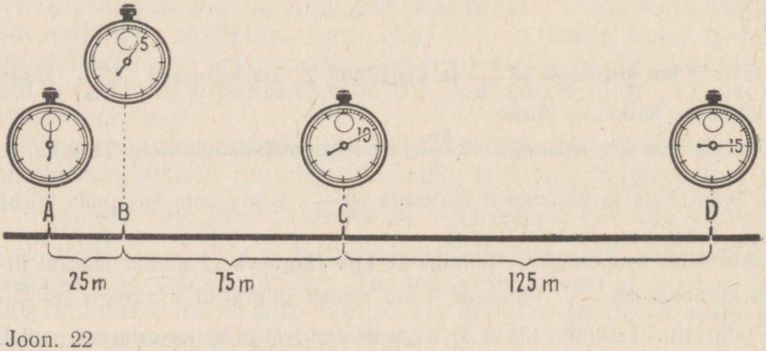
Kujutleme, et keha liigub mitteühtlaselt, näiteks kasvava kiirusega, mööda sirget. See sirge on kujutatud joonisel 22. Oletame, et keegi stopperi ja mõõtejoonlauaga varustatud vaatleja märgib alates punktist A iga v i i e s e k u n d i järel keha poolt läbitud tee. Samal ajal märgib teine, samade mõõteriistadega (stopperi ja mõõtejoonlauaga) varustatud vaatleja keha asukohad iga s e k u n d i järel ja kolmas vaatleja — iga k ü m n e n d i k s e k u n d i järel.

Joonisel 22 on kujutatud esimese vaatleja poolt saadud tulemused: viie esimese sekundiga läbis keha 25 m, viie järgneva sekundiga 75 m ja kolmanda viiesekundilise ajavahemiku jooksul 125 m. On ilmne, et keha liikus mitteühtlaselt: võrdsetes ajavahemikes läbiti mittevõrdsed teepikkused.

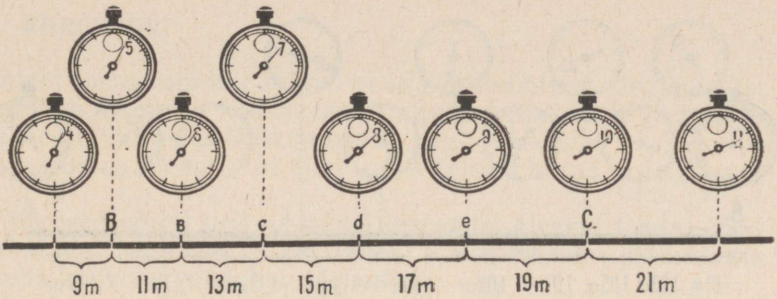
Seega keha liikus esimese, teise ja kolmanda viiesekundise ajavahemiku järgmiste keskmiste kiirustega:

$$v_k^{AB} = \frac{25\ \text{m}}{5\ \text{s}} = 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}};$$

$$v_k^{BC} = \frac{75\ \text{m}}{5\ \text{s}} = 15\,\frac{\text{m}}{\text{s}};$$



Joon. 22



Joon. 23.

$$v_k^{CD} = \frac{125\ \text{m}}{5\ \text{s}} = 25\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

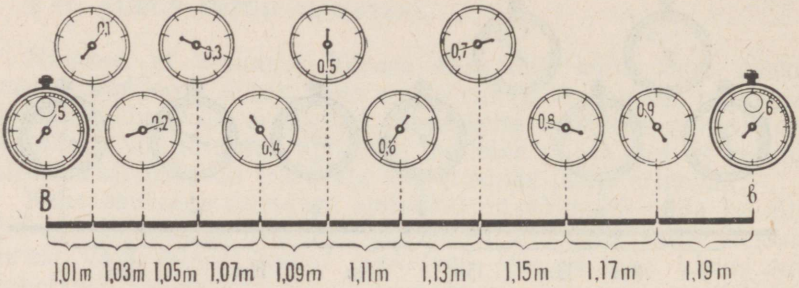
Näeme, et kolmes üksteisele järgnevas võrdses ajavahemikus on keskmised kiirused tunduvalt erinevad: üleminekul ühelt ajavahemikult teisele muutub keskmine kiirus $10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ võrra.

Vaatleme nüüd, millised tulemused sai teine vaatleja. Joonisel 23 on suurendatult kujutatud teeosa *BC*. Sellel joonisel toodud andmetest nähtub, et keskmised kiirused viies üksteisele järgnevas sekundis, mille vältel läbiti lõik *BC*, võrduvad vastavalt $11\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $13\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $17\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ja $19\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Niisiis, keskmised kiirused üksteisele järgnevates ajavahemikes, mille pikkus on üks sekund, erinevad üksteisest kõigest $2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ võrra.

Kui vaadelda kümnendiksekundilisi ajavahemikke, nagu seda teeb kolmas vaatleja, siis on keskmiste kiiruste vaheline erinevus veelgi väiksem. Kolmanda vaatleja mõõtmistulemused on kujutatud joonisel 24. Sellel joonisel on suurendatult kujutatud lõik *Bb*, mille keha läbib ühe sekundiga. Keskmine kiirus sellel teeosal oli teatavasti $11\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Kuid üksteisele järgnevates kümnendiksekundilistes ajavahemikes, milleks vaadeldav sekund jagati, on keskmised kiirused vastavalt $10{,}1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $10{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $10{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ jne. Need erinevad üksteisest kõigest $0{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ võrra.

Sellist arutlust võiks jätkata, kujutledes üha uusi vaatlejaid, kes mõõdavad läbitud tee iga sajandiku, tuhandiku jne. sekundi järel.

Vähendades ajavahemikke ja koos sellega ka vastavaid teeosi, me nagu tõmbaksime ajavahemikud kokku a j a h e t k e d e k s ja



Joon. 24

teeosad trajektoori punktideks. Keskmise kiiruse hüpped üleminekul ühelt teeosalt teisele üha vähenevad ja piiril võime rääkida mitte enam keskmisest kiirusest antud teelõigul või antud ajavahemikus, vaid kiirusest antud ajahetkel või trajektoori antud punktis. Seega liikuval kehal on igal ajahetkel või trajektoori igas punktis mingi kindel kiirus. Ühtlane liikumine erineb mitteühtlasest just selle poolest, et tema kiirus on trajektoori kõikides punktides ja kõikidel ajahetkedel ühesugune — mitteühtlase liikumise kiirus aga muutub sujuvalt üleminekul ühest punktist teise ja ühelt ajahetkelt teisele.

Kiirust antud ajahetkel või trajektoori antud punktis nimetatakse *hetkkiiruseks.*

Hetkkiirus võrdub arvuliselt piirväärtusega, millele läheneb keskmine kiirus sellele vastava ajavahemiku lõpmatul kahanemisel.

Hetkkiirus on vektoriaalne suurus. Selle suund ühtib väga väikesele (õigemini lõpmatult väikesele) ajavahemikule vastava nihkevektori suunaga.

Meenutame veel kord seda võtet, mille abil jõudsime hetkkiiruse mõisteni. Liikumise aeg jagatakse väga väikesteks vahemikeks. Neid ajavahemikke vähendatakse seni, kuni liikumist igaühes neist ei saa enam eristada ühtlasest liikumisest. Lõpuks muutuvad ajavahemikud nii väikeseks, et neid ei saa enam eristada ajahetkedest ja keha poolt läbitavaid trajektoorilõike ei saa enam eristada punktidest.[1] Jagades väikese nihke vastava ajavahemikuga, saame hetkkiiruse.

---

[1] Seda võtet, mis on diferentsiaalarvutuse aluseks, kirjeldab L. Tolstoi lühidalt, kuid ilmekalt oma romaani «Sõda ja rahu» III köite kolmanda jao esimesel leheküljel.

§ 12. KIIRENDUS

Eelmises paragrahvis nägime, et iga mitteühtlast sirgjoonelist liikumist võib vaadelda koosnevana paljudest üksteisele järgnevatest, peaaegu ühtlastest liikumistest väga väikestel trajektooriosadel, kusjuures üleminekul ühelt osalt teisele kiirus p i d e v a l t muutub.

Kui kiirused kõigil neil väikestel teeosadel oleksid teada, võiksime arvutada keha nihke mistahes ajavahemikus ja määrata seega keha asukoha mistahes ajahetkel.

Kuidas aga saada teada kõiki neid kiirusi, kui nad muutuvad üleminekul ühest punktist teise, ühelt ajahetkelt teisele? Selleks et oleks võimalik leida kiirust mistahes väikesel teeosal, mille keha läbib väikese ajavahemiku jooksul, tuleb teada, kui palju muutub kiirus igas ajaühikus, s. t. tuleb teada kiiruse muutumise kiirust.

Kui näiteks kiirus mingil ajahetkel on $\vec{v}_0$ ja pärast väikese ajavahemiku möödumist on ta $\vec{v}$, siis selles ajavahemikus muutub ta $\vec{v}-\vec{v}_0$ võrra. Seega kiiruse muut ühes ajaühikus on $\frac{\vec{v}-\vec{v}_0}{t}$. Seda suurust nimetatakse *kiirenduseks* ja tähistatakse tähega $\vec{a}$:

$$\vec{a}=\frac{\vec{v}-\vec{v}_0}{t}.$$

Kiirenduseks nimetatakse suurust, mis võrdub kiiruse muudu ja sellele vastava ajavahemiku suhtega.

Kui ajavahemik t on suur, siis ühtedel teeosadel võib kiirus muutuda kiiresti, teistel aga aeglaselt. Siis on ka kiirendus erinevail teeosadel erinev. Sel juhul tuleb ülaltoodud valemi põhjal arvutatud kiirendus lugeda keskmiseks kiirenduseks ajavahemikus t.

Kuid kiirenduse kohta võib rakendada sama võtet, mida me kasutasime hetkkiiruse mõiste selgitamisel. See viib meid järgmisele tulemusele: mitteühtlaselt liikuval kehal on igas trajektoori punktis ja igal ajahetkel mingi kindel kiirendus, mille väärtus üleminekul ühest punktist teise ja ühelt ajahetkelt teisele muutub. Kiirendust, millega keha trajektoori antud punktis või antud ajahetkel liigub, nimetatakse *hetkkiirenduseks*.

Kui kiirendus aja jooksul muutub, siis öeldakse, et liikumine on muutuva kiirendusega. Kui aga kiirendus on tee kõikides punktides ja kõikidel ajahetkedel ühesugune, nimetatakse liikumist *ühtlaselt muutuvaks*. Järgnevalt vaatlemegi ainult ühtlaselt muutuvat liikumist.

Valemist

$$\vec{a}=\frac{\vec{v}-\vec{v}_0}{t}$$

järeldub, et kui kiirendus $\vec{a}$ on teada, siis võime leida kiiruse mistahes ajahetkel (selleks ongi vaja teada kiirendust). Avaldades eelmisest valemist kiiruse $\vec{v}$, saame:

$$\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{a}t.$$

Kui kiirus alghetkel $\vec{v}_0$ võrdub nulliga, siis

$$\vec{v}=\vec{a}t.$$

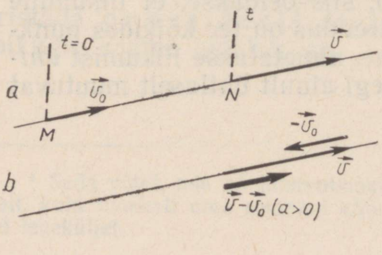
See tähendab, et ühtlasel muutuval liikumisel, mille algkiirus on null, suureneb hetkkiirus võrdeliselt ajaga.

Milline on kiirendusvektori suund? Selle suund peab ilmselt ühtima kiiruse muudu vektori $\vec{v}-\vec{v}_0$ suunaga. Kuid selleks, et teada saada selle vektori suunda, tuleb vektorist v lahutada vektor $\vec{v}_0$.

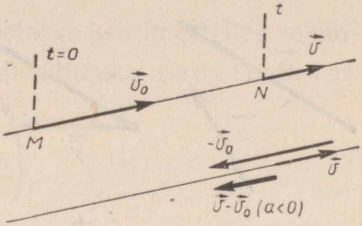
Joonisel 25, *a* on kujutatud sirge, mida mööda keha liigub. Positiivse suuna sellel sirgel valime nii, et see ühtib liikumise (kiiruse) suunaga. Punkt *M* sellel sirgel näitab keha asukohta mingil ajahetkel, mil tema kiirus on $\vec{v}_0$. Punkt *N* aga tähistab keha asukohta pärast ajavahemiku *t* möödumist, kui keha kiirus on $\vec{v}$. Joonisel kujutatud juhul on $v>v_0$, s. t. keha kiirus suureneb. Kuidas lahutada vektorist $\vec{v}$ vektorit $\vec{v}_0$?

Meenutame, et mingi arvu lahutamine on samaväärne selle arvu vastandarvu (sama arv vastupidise märgiga) liitmisega. See kehtib ka vektorite kohta. Selle asemel, et lahutada vektorist $\vec{v}$ vektorit $\vec{v}_0$, võime vektoriga $\vec{v}$ liita vektori $-\vec{v}_0$, s. o. $\vec{v}_0$-ga võrdse suurusega, kuid vastupidise suunaga vektori.

§ 5 esitatud materjalist teame, kuidas liita ühel sirgel asuvaid



Joon. 25



Joon. 26.

vektoreid. Vektori $\vec{v}-\vec{v}_0$ suund ühtib vektori $\vec{v}$ suunaga, s. o. liikumise suunaga (joon. 25, *b*).

Kui aga $v<v_0$ (joon. 26), s. t. kui kiirus aja jooksul kahaneb, siis vektor $\vec{v}-\vec{v}_0$ on liikumisele vastassuunaline.

Kui mitteühtlasel sirgjoonelisel liikumisel kiiruse arvväärtus kasvab, siis kiirendusvektor on kiirusvektoriga samasuunaline, kui aga kiiruse arvväärtus kahaneb, siis on kiirendusvektor kiirusvektoriga vastassuunaline.

Kui mingid vektorid on suunatud piki ühte sirget, millel on valitud positiivne suund, siis teatavasti võime tehted nende vektoritega asendada tehetega skalaaridega — nende vektorite projektsioonidega sellel sirgel. Sirgjoonelisel liikumisel valitakse positiivseks suunaks liikumise (kiiruse) suund. Sel juhul väljendub kiirendus kiiruse kasvamisel positiivse, kiiruse kahanemisel aga negatiivse arvuna.

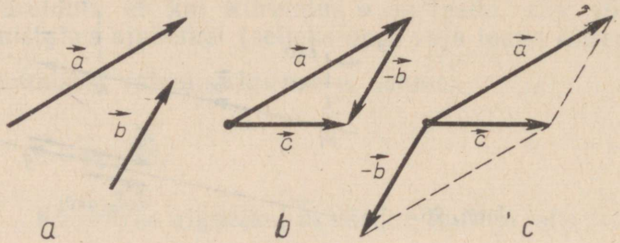
Kui näiteks auto hakkab paigalt liikuma ja tema kiirus kasvab, siis on tema kiirendus positiivne (kiirendusvektor on liikumise suunaline). Auto pidurdamisel aga on kiirendus negatiivne (kiirendusvektor on kiirusvektoriga vastassuunaline).

Kõik see, mida rääkisime kiirendusvektori suunast, kehtib ainult sirgjoonelise liikumise kohta, mille puhul kõik kolm liikumist kirjeldavat suurust — nihkevektor, kiirusvektor ja kiirendusvektor — on suunatud mööda ühte sirget, kusjuures see sirge on liikumise trajektooriks.

Teisiti on lugu siis, kui keha liikumine ei ole sirgjooneline — kui muutub mitte ainult kiirusvektori suurus, vaid ka suund, s. o. kui kiirusvektorid erinevatel ajahetkedel ja tee erinevates punktides ei asu ühel sirgel.

Kuidas sel juhul vektoreid lahutada? Oletame, et vektorist $\vec{a}$ tuleb lahutada vektor $\vec{b}$ (joon. 27, *a*). Kuid vektori $\vec{b}$ lahutamine tähendab tema vastandvektori $-\vec{b}$ liitmist:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$



Joon 27

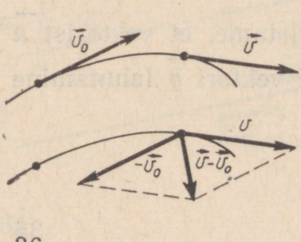
Vektorid $\vec{a}$ ja $-\vec{b}$ võime liita ükskõik kummal meile tuntud viisil, nii nagu see on näidatud joonisel 27, *b* ja *c*. Leitud vektor $\vec{c}$ ongi otsitud vahe $\vec{a}-\vec{b}$. Vektori $\vec{c}$ suund ei ühti vektori $\vec{a}$ ega vektori $\vec{b}$ suunaga.

Kui vektorid $\vec{v_0}$ ja $\vec{v}$ ei asu ühel sirgel (liikumine ei ole sirgjooneline), siis vektor $\vec{v}-\vec{v_0}$ ei ole kiirusvektoriga sama- ega vastassuunaline, vaid moodustab sellega mingi nurga (joon. 28). Kui vaadeldav ajavahemik on väga (lõpmatult) väike, siis kiirendusvektori $\vec{a}$ suund trajektoori mingis punktis ühtib vektori $\vec{v}-\vec{v_0}$ suunaga samas punktis.

Vaatleme nüüd, millistes ühikutes kiirendust mõõdetakse. Kiirenduse valemist nähtub, et kui kiiruse muudu arvväärtus ja ajavahemik t võrduvad ühikuga, siis ka kiirendus võrdub ühikuga.

Kiirendusühikuks on võetud sellise liikumise kiirendus, mille puhul kiiruse arvväärtus muutub ühes ajaühikus ühe kiirusühiku võrra.

Rahvusvahelises mõõtühikute süsteemis (SI-süsteemis) mõõdetakse kiirust meetrites sekundis $\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)$ ja aega sekundites (s). Seetõttu mõõdetakse kiirendust m e e t r i t e s s e k u n d i r u u d u k o h t a $\left(\frac{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{\mathrm{s}}=\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)$.



Joon. 28

GGS-süsteemis, milles kiirust mõõdetakse sentimeetrites sekundis $\left(\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}\right)$ ja aega sekundites, on kiirendusühikuks sentimeeter sekundi ruudu kohta $\left(\frac{\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}}{\mathrm{s}}=\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}\right)$.

On ilmne, et

$$1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}=1\cdot\frac{100\ \mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}=100\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}.$$

Harjutus 6

1. Trollibuss hakkab paigalt liikuma jääva kiirendusega $1{,}5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Kui pika aja jooksul omandab ta kiiruse $54\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$?
2. Kiirusega $36\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ liikuv auto pidurdas ja peatus 4 sekundi pärast. Kui suur oli kiirendus?

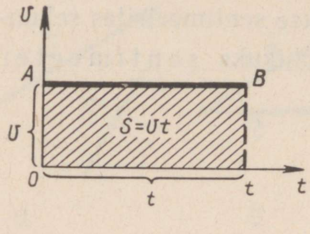
§ 13. ÜHTLASELT MUUTUVAL SIRGJOONELISEL LIIKUMISEL LÄBITUD TEE

Kõige tähtsamaks küsimuseks mehhaanika põhiülesande lahendamisel on nihke leidmine, mis lubab määrata keha asukoha mistahes ajahetkel. Nihke arvväärtuse ehk läbitud tee (ühtlaselt muutuval sirgjoonelisel liikumisel need ühtivad) määramiseks on kõige mugavam kasutada graafilist meetodit.

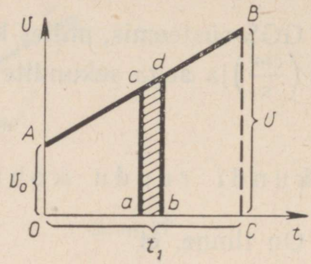
Iga graafik näitab, kuidas üks suurus sõltub teisest. Need suurused kantakse kahele ristuvale teljele, nn. koordinaattelgedele. Horisontaaltelge nimetatakse abstsissteljeks ja vertikaaltelge ordinaatteljeks.

Kanname abstsissteljele aja t ja ordinaatteljele hetkkiiruse v. Joonisel 29 on kujutatud ühtlase liikumise kiiruse graafik — sirge AB. See on ajateljega paralleelne, sest et ühtlasel liikumisel on keha kiirus igal ajahetkel ühesugune. Vaadeldav graafik näitabki, kuidas ühtlase sirgjoonelise liikumise kiirus sõltub ajast. See «sõltuvus» seisneb selles, et kiirus ajast ei sõltu.

Kiiruse graafiku järgi võib leida tee, mille keha läbib antud ajavahemikus. See võrdub viirutatud ristküliku pindalaga. Tõepoolest, ristküliku pindala võrdub ju külgede korrutisega. Üks külgedest on arvuliselt võrdne ajaga t, teine aga kiirusega v. Korrutis vt võrdubki teega, mille ühtlaselt liikuv keha läbis vaadeldavas ajavahemikus.



Joon. 29



Joon. 30

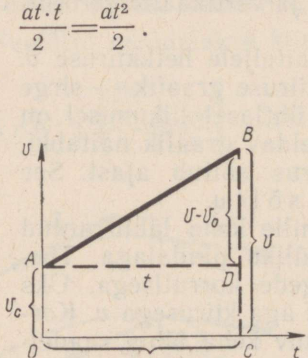
Ühtlaselt muutuval liikumisel on hetkkiirus määratud valemiga

$v = v_0 + at.$

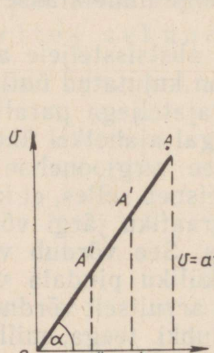
Selle liikumise kiiruse graafik on kujutatud joonisel 30. Graafiku all oleva kujundi (trapetsi) pindala võrdub ka sel juhul ajavahemiku t jooksul läbitud teega. Tõepoolest, eraldame graafikul kitsa riba *abcd,* mille laius võrdub arvuliselt väga väikese ajavahemikuga. See riba erineb väga vähe ristkülikust, kusjuures liikumist väga väikese ajavahemiku jooksul võib lugeda ühtlaseks. Seetõttu on riba pindala võrdne teega, mille keha läbib lõigule *ab* vastava aja jooksul. Sellisteks ribadeks võib ilmselt jagada kogu kiiruse graafiku alla jääva trapetsi. Seega ka mitteühtlasel liikumisel võrdub keha poolt läbitud tee arvuliselt kiiruse graafiku alla jääva kujundi pindalaga. Selle põhjuseks on asjaolu, et iga mitteühtlast liikumist võib vaadelda koosnevana paljudest, väga väikestel teeosadel toimuvatest ühtlastest liikumistest.

Leiame kujundi *OABC* pindala. Nagu jooniselt 31 nähtub, koosneb see kahest osast: ristküliku *ADCO* ja kolmnurga *ABD* pindalast. Ristküliku *ADCO* pindala on $v_0 t$. Kolmnurga *ABD* pindala võrdub aga aluse *AD* ja kõrguse *BD* poole korrutisega. Kuid $AD = t$ ja $BD = v - v_0 = at$. Seega kolmnurga *ABD* pindala võrdub

$\frac{at \cdot t}{2} = \frac{at^2}{2}$.



Joon. 31



Joon. 32

Seega:

$$S_{OABC} = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

See võrdubki teega, mille keha läbib aja t jooksul:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Kui keha algkiirus võrdub nulliga, siis kiiruse graafik läbib koordinaatide alguspunkti ja tee, mille keha läbib aja t jooksul, võrdub kolmnurga AOB pindalaga (joon. 32). Kuna kolmnurga aluseks on lõik $OB = t$ ja kõrguseks lõik $AB = v = at$, siis keha poolt läbitud tee avaldub valemiga:

$$s = \frac{at^2}{2}.$$

Kiiruse graafiku järgi võib otsustada ka keha kiirenduse suuruse üle. Jooniselt 32 näeme, et kiirenduse saamiseks tuleb kolmnurga AOB kõrgus AB jagada alusega OB:

$$\frac{AB}{OB} = \frac{at}{t} = a.$$

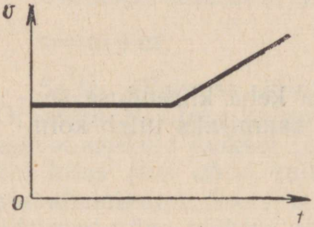
Mida suurem on nurk α, mille kiiruse graafik OA moodustab ajateljega, s. t. mida suurem on graafiku tõus, seda suurem on kiirendus. Graafiku tõusu ja seega ka kiirenduse võib määrata mitte ainult kolmnurgast AOB, vaid ka näiteks kolmnurgast $A'OB'$.

Kõik selles peatükis käsitletu taandub mehhaanika põhiülesande lahendamisele jääva kiirendusega sirgjoonelisel liikumisel, s. t. keha koordinaatide leidmisele mistahes ajahetkel tema algasukoha ja algkiiruse järgi. Selle ülesande lahendamisel me läbisime teatud ahela. Algul leidsime valemi, mis võimaldab keha kiirenduse järgi arvutada hetkkiirust mistahes ajahetkel. Kasutades seda valemit, tuletasime seejärel graafiliselt valemi keha poolt alghetkest kuni vabalt valitud ajahetkeni t läbitud tee arvutamiseks. Kuna jääva kiirendusega sirgjoonelisel liikumisel võrdub läbitud tee nihke pikkusega, siis võib mehhaanika põhiülesannet (keha asendi leidmist mistahes ajahetkel) lugeda lahendatuks. Kuid selles ahelas jäi siiski lahtiseks esimene lüli: me ei tea veel, kuidas leida kiirendust, millega keha liigub. See ülesanne lahendatakse hiljem, õpiku osas «Dünaamika».

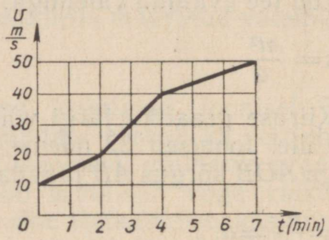
Harjutus 7

1. Kuidas liikus auto, mille kiiruse graafik on kujutatud joonisel 33?
2. Joonisel 34 on kujutatud keha kiiruse graafik. Milline oli selle keha liikumine? Kui suure kiirendusega liikus keha teise, neljanda ja seitsmenda minuti kestel?
3. Konstrueerige ühes ja samas teljestikus kahe ühtlaselt muutuvalt liikuva keha kiiruse graafikud. Esimese keha algkiirus on $1\frac{m}{s}$ ja kiirendus $0,5\frac{m}{s^2}$. Teise keha algkiirus on $9\frac{m}{s}$ ja ta liigub negatiivse kiirendusega $-1,5\frac{m}{s^2}$.

   Leidke, a) kui pika tee läbib teine keha kuni peatumiseni; b) millise aja jooksul omandavad need kehad võrdse kiiruse ja kui pika tee nad läbivad selle ajaga.

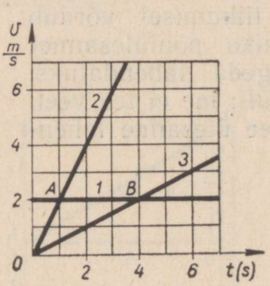


Joon. 33

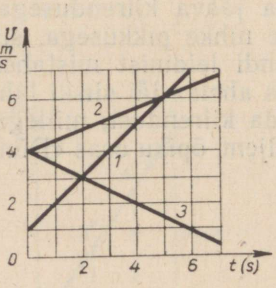


Joon. 34

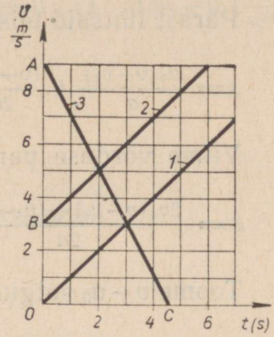
4. Joonisel 35 on kujutatud kolme keha kiiruse graafikud. Kirjeldage nende kehade liikumist.
   Mida võib öelda kehade kiiruste kohta ajahetkedel, mis vastavad punktidele *A* ja *B*?
   Määrake kiirendused ja koostage kehade liikumisvõrrandid.
5. Kasutades kehade kiiruste graafikuid, mis on kujutatud joonisel 36, lahendage järgmised ülesanded:
   a) määrake nende kehade liikumise kiirendused;
   b) koostage iga liikumise jaoks valemid, mis väljendavad hetkkiiruse ja läbitud tee sõltuvust ajast;
   c) kirjeldage, mille poolest on graafikutele 2 ja 3 vastavad liikumised teineteisega sarnased ja mille poolest nad erinevad:
   d) nimetage ajahetked, mil graafiku 1 järgi liikuva keha kiirus võrdub graafiku 2 ja graafiku 3 järgi liikuvate kehade kiirusega.



Joon. 35



Joon. 36



Joon. 37

6. Joonisel 37 on kujutatud kolme keha kiiruse graafikud. Kasutades neid graafikuid,
   a) tehke kindlaks, millele vastavad koordinaattelgede lõigud *OA*, *OB* ja *OC*;
   b) leidke kiirendused, millega liiguvad kehad;
   c) kirjutage iga keha liikumisvõrrandid (tee ja kiiruse valemid).
7. Näidake, et teed, mille ühtlaselt muutuvalt liikuv keha läbib üksteisele järgnevates võrdsetes ajavahemikes, erinevad üksteisest võrdsete suuruste võrra.
8. Keha alustab liikumist paigalseisust ja läbib viienda sekundi jooksul 18 m. Leidke kiirendus ja 10 sekundi jooksul läbitud tee.

§ 14. LÄBITUD TEE JA KIIRUSE VAHELINE SEOS ÜHTLASELT MUUTUVAL LIIKUMISEL

Mõnikord tuleb määrata keha poolt läbitud tee, ilma et me teaksime aega t, mis on möödunud liikumise alghetkest. Seda ülesannet võib lahendada, kui on teada kiirendus, algkiirus ja hetkkiirus vaadeldaval ajahetkel.

Kasutame tuntud võrrandeid:

$$v = v_0 + at,$$

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Elimineerime nendest võrranditest aja. Algul avaldame esimesest võrrandist t:

$$t = \frac{v - v_0}{a}.$$

Asetame selle avaldise teise võrrandisse:

$$s = v_0 \cdot \frac{v - v_0}{a} + a \cdot \frac{\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2}{2}.$$

Pärast lihtsaid teisendusi saame:

$$s = \frac{v_0(v-v_0)}{a} + \frac{(v-v_0)^2}{2a}.$$

Viime võrduse parema poole ühisele nimetajale:

$$s = \frac{2v_0(v-v_0)+(v-v_0)^2}{2a}.$$

Toome $v - v_0$ sulgude ette:

$$s = \frac{(v-v_0)[2v_0+(v-v_0)]}{2a} = \frac{(v-v_0)(v+v_0)}{2a};$$

$$s = \frac{v^2-v_0^2}{2a}. \qquad (1)$$

Seega me avaldasime keha nihke s hetkkiiruse v kaudu. Kasutades saadud valemit, võib lahendada ka pöördülesande — leida keha kiiruse:

$$v^2 - v_0^2 = 2as,$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2as}. \qquad (2)$$

Selle valemi põhjal võib leida keha kiiruse trajektoori mistahes punktis, kui on teada algkiirus v_0 ja kiirendus a.

Valemi kasutamisel tuleb silmas pidada, et nihke pikkust s loetakse alates sellest punktist, milles keha kiirus on v_0. Kui algkiirus on null, siis valemid (1) ja (2) omandavad kuju:

$$s = \frac{v^2}{2a}, \quad v = \sqrt{2as}.$$

Ülesanne. Jaamale lähenemisel lülitas vedurijuht veduri mootori välja. Pärast seda liikus rong negatiivse kiirendusega $a = -0{,}1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Kui pika tee läbis rong mootori väljalülitamise hetkest kuni peatumiseni, kui rongi kiirus oli $72\frac{\text{km}}{\text{h}}$? Kui pika aja pärast rong peatus?

L a h e n d u s. Läbitud tee leidmiseks kasutame valemit

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}.$$

Võttes arvesse, et $v_0=72\frac{\text{km}}{\text{h}}=20\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v=0$ ja $a=-0{,}1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, saame

$$s=\frac{-\left(20\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{-2\cdot 0{,}1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}=\frac{400}{0{,}2}\text{m}=2000\text{ m}.$$

Rongi peatamiseks kulunud aja leiame valemist

$$v=v_0+at.$$

Kuna $v=0$, siis

$$t=-\frac{v_0}{a}.$$

Pannes sellesse valemisse $v_0=20\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ja $a=-0{,}1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, saame:

$$t=-\frac{20\frac{\text{m}}{\text{s}}}{-0{,}1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}=200\text{ s}.$$

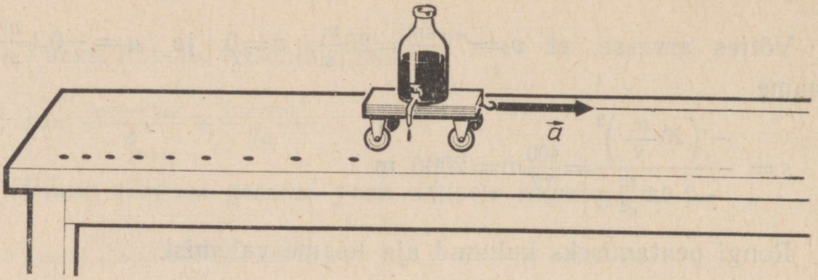
Harjutus 8

1. Rakett, mis viib Maa tehiskaaslase orbiidile, liigub 2 minutit (mootori töötamise aeg) vertikaalselt üles kiirendusega $60\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Leida raketi kiirus 250 km kõrgusel ja kiirus mootori töötamise lõpphetkel. Kui kõrgel on sel hetkel rakett?
2. Auto liikus algul ühtlaselt, kuid teatud hetkest alates hakkas ta liikuma kiirendusega $1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Läbinud kiirenevalt 180 m, saavutas ta kiiruse $21\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Kui suur oli auto ühtlase liikumise kiirus?
3. Kui auto liikus kiirusega $54\frac{\text{km}}{\text{h}}$, vajutas autojuht piduripedaalile. Sellest hetkest alates hakkas auto liikuma negatiivse kiirendusega ja peatus pärast 45 m läbimist. Leida auto kiirendus.

§ 15. KIIRENDUSE MÕÕTMINE

Kiirenduse mõõtmiseks on palju viise. Selleks on olemas isegi vastavad mõõteriistad, mida nimetatakse *aktseleromeetriteks*.

Vaatleme nüüd ühtlaselt muutuva liikumise kiirenduse kõige lihtsamat mõõtmisviisi. Ühtlaselt muutuvalt liikuvale kehale asetatakse tilguti — värvitud veega täidetud anum, millest kindlate ajavahemike järel langevad tilgad (joon. 38). Langevad tilgad



Joon. 38

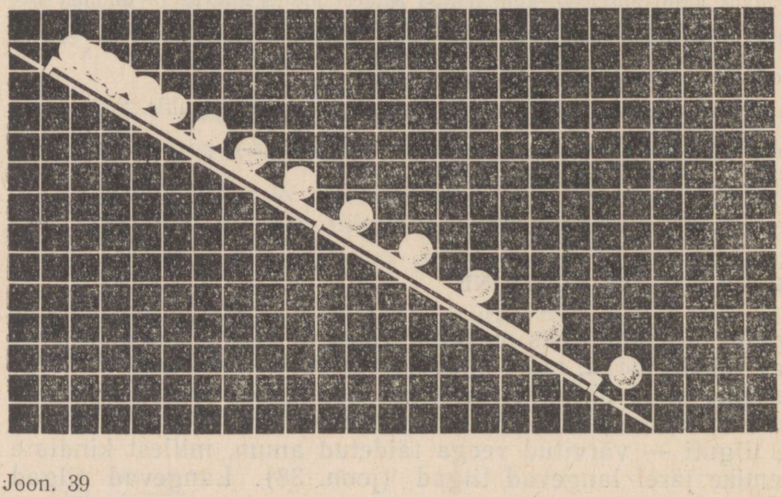
märgivad keha asendi võrdsete ajavahemike tagant. Mõõtes tilkadevahelised kaugused s_1, s_2, s_3 ... ja ajavahemikud, mille jooksul need kukkusid, võib valemist

$$s = \frac{at^2}{2}$$

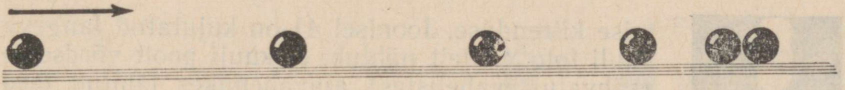
määrata kiirenduse *a*.

Sageli kasutatakse teist, täpsemat kiirenduse mõõtmise viisi — *stroboskoopilist* meetodit.

Stroboskoopiline meetod seisneb selles, et liikuvat keha valgustatakse pimedas võrdsete ajavahemike tagant heledate valgussähvatustega. Keha on nähtav ainult nendes asendites, kus ta on valgustatud. Kui liikuvat keha pildistada nii, et fotoaparaadi katik on kogu liikumise kestel avatud, siis filmile jäädvustatakse keha järjestikused asendid võrdsete ajavahemike tagant. Mõõtes keha kujutiste vahelised kaugused filmil ja teades sähvatustevahelisi ajavahemikke, võib ülaltoodud valemi põhjal arvutada kiirenduse.



Joon. 39



Joon. 40

Joonisel 39 on kujutatud kaldrenni mööda alla veereva kuulikese stroboskoopiline foto. Fotolt näeme, et kuulikese asenditevaheline kaugus kogu aeg kasvab. Sellest järeldub, et kuulikese liikumiskiirus üha suureneb.

Harjutus 9

1. Liikuvat kuulikest fotografeeritakse korduvates valgussähvatustes (stroboskoopilisel meetodil), mis järgnevad üksteisele iga 0,1 sekundi tagant (joon. 40). Leida kiirendus, millega kuulike liigub, ja kuulikese algkiirus. Lõppasendis kuulike seisab. Joonis on antud loomulikus suuruses.

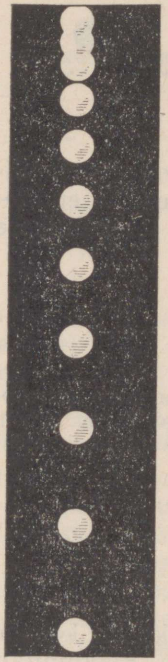
§ 16. KEHADE VABA LANGEMINE

Ühtlaselt muutuva liikumise huvitavaks erijuhuks on kehade vaba langemine. Juba väga vanal ajal teati, et iga maapinnalt ülestõstetud keha, mis ei toetu alusele ega ole millegi külge riputatud, langeb alla. Selle nähtusega kohtuvad inimesed sageli.

Alates XVI sajandi lõpust, pärast seda kui tuntud itaalia õpetlane Galileo Galilei korraldas vastavad uurimused, on teada, et **langevad kehad liiguvad ühtlaselt kiirenevalt.**

Kasutades eelmises paragrahvis kirjeldatud stroboskoopilist meetodit, võime selles veenduda ja mõõta ühtlasi ka vaba lange-

Galileo Galilei
(1564—1642)



Joon. 41

mise kiirenduse. Joonisel 41 on kujutatud langeva kuuli foto. Sellelt nähtub, et kuuli poolt võrdsetes (sähvatustevahelistes) ajavahemikes läbitud teed kasvavad. Seega on kuuli liikumine kiirenev.

Mõõtmised näitavad, et vaba langemise kiirendus on $9{,}81\frac{m}{s^2}$

Vaba langemise kiirendus on kõikidel kehadel ühesugune. See imetlusväärne tõsiasi jäi peaaegu terve sajandi jooksul mõistatuseks.

Kui me võtaksime teraskuuli, jalgpalli, laialilaotatud ajalehe, linnusule ja laseksime need mõnesaja meetri kõrguselt langeda ning mõõdaksime kiirendused, millega need kehad langevad, siis me jõuaksime tulemusele, et erinevate kehade kiirendused ei ole ühesugused. Kuid kiirenduste erinevus on seletatav sellega, et langemisel maapinnale tuleb kehadel läbida õhukiht, mis takistab nende liikumist.

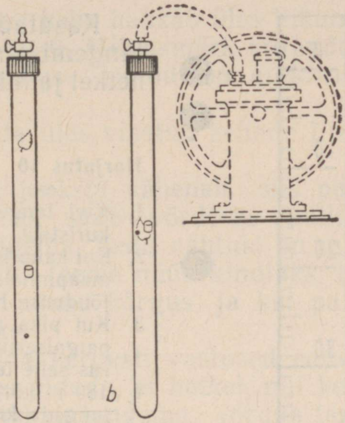
Kui aga kehad langeksid torus, kust õhk on välja pumbatud, siis oleksid nende kiirendused ühesugused. Sellist katset võib korraldada paksuseinalise klaastoruga, mille pikkus on üle 1 m ja mille üks ots on kinni sulatatud ning teises otsas asub kraan (joon. 42, *a*). Torus on kolm erinevate mõõtmete ja kaaludega keha, näiteks haavel, korgitükk ja linnusulg. Toru asetatakse vertikaalselt ja pööratakse seejärel kiiresti 180° võrra. Osutub, et need kehad jõuavad toru põhjani erinevatel aegadel: kõigepealt jõuab sinna haavel, seejärel korgitükk ja lõpuks sulg. Katse tulemused on kergesti seletatavad õhu olemasoluga torus: õhk avaldab erinevate mõõtmetega kehadele erinevat takistust.

Kui aga õhk torust välja pumbata ja seejärel toru kiiresti ümber pöörata, siis jõuavad kõik kolm keha toru põhjale üheaegselt (joon. 42, *b*). Seega langevad kõik kehad tühjuses ühesuguse kiirendusega.

Vabaks langemiseks nimetame ainult sellist langemist, mida miski ei sega.

Mõõtmised näitavad, et vaba langemise kiirendus on $9{,}81\frac{m}{s^2}$. Kiirendusvektor on suunatud vertikaalselt alla. Langeva keha kiirendusvektori suund ühtib kiirusvektori suunaga. Kiirendus on sel juhul positiivne ja kiirus kasvab.

Langeva keha kiirendus ei muutu, kui tõugata keha alla, andes talle algkiiruse v_0. Sel juhul ainult ei alga kiiruse kasvamine mitte nullist, vaid väärtusest v_0.



Joon. 42

Kuna langevad kehad liiguvad ühtlaselt kiirenevalt, siis nende liikumise kohta kehtivad eespool tuletatud valemid.

Et eristada langevate kehade liikumist igast muust ühtlaselt kiirenevast liikumisest, märgitakse vaba langemise kiirendus tähega g ja nihke pikkus tähega h. Langemise alghetkel $h=0$.

Arvestades seda tähiste vahetust, toome keha vaba langemist kirjeldavad valemid.

1. Kui aega hakatakse lugema liikumise alghetkest, siis keha kiirus mistahes ajahetkel väljendub valemiga

$$\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{g}t.$$

Kui $v_0=0$, siis

$$\vec{v}=\vec{g}t.$$

2. Keha kiiruse arvväärtus trajektoori mistahes punktis avaldub läbitud tee h kaudu järgmiselt:

$$v=\sqrt{v_0^2+2gh}.$$

Kui $v_0=0$, siis

$$v=\sqrt{2gh}.$$

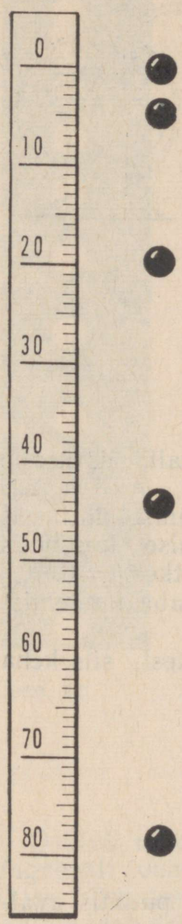
3. Teepikkuse, mille keha läbib aja t jooksul, võime leida valemist

$$h=v_0t+\frac{gt^2}{2}.$$

Kui $v_0=0$, siis

$$h=\frac{gt^2}{2}.$$

Kasutades neid valemeid, võime arvutada keha langemise aja, langeva keha kiiruse mistahes ajahetkel ja mistahes trajektoori punktis jne.



Joon. 43

Harjutus 10

1. Kivi langes kuristiku põhja 4 sekundiga. Kui sügav on kuristik?
2. Kui kaua langeks Ostankino televisioonitorni tipust (535 m) maapinnale kivi? Kui suur oleks kivi kiirus maapinnale jõudmise hetkel?
3. Kui pika aja jooksul läbib keha, mis alustab langemist paigalseisust, tee pikkusega 4,9 m? Kui suur on keha kiirus selle tee lõpus?
4. 180 m kõrguse kalju äärel seisis poiss ja laskis sealt alla langeda kivi. Ühe sekundi pärast viskas ta alla teise kivi. Kui suure algkiiruse andis ta teisele kivile, kui mõlemad kivid jõudsid maapinnale üheaegselt?
5. Keha langeb vabalt 50 m kõrguselt. Kui suure kiirusega langeb keha maapinnale? Millisel kõrgusel on keha kiirus lõppkiirusest kaks korda väiksem?
6. Joonisel 43 on kujutatud algkiirusega $v_0=0$ vabalt langeva kuulikese asukohad iga 0,1 s tagant. Määrake joonise järgi vaba langemise kiirendus. Mõõtejoonlaua skaala jaotise väärtus on 1 cm.

§ 17. VERTIKAALSELT ÜLESVISATUD KEHA LIIKUMINE

Keha teatavasti iseenesest üles ei liigu. Ta tuleb üles visata, s. t. talle tuleb anda mingi algkiirus v_0, mis on suunatud vertikaalselt üles.

Katsed näitavad, et ülesvisatud keha liigub samasuguse kiirendusega nagu vabalt langev kehagi. See kiirendus võrdub g ja on suunatud vertikaalselt alla. Kuid kiirenduse suund on nüüd liikumise suunaga v a s t u p i d i n e, s. t. vastupidine suunaga, mille me lugesime positiivseks. Seetõttu tuleb kiirenduse väärtus lugeda nüüd negatiivseks.

See tähendab, et ülesvisatud keha kiirus ei suurene nagu langemisel, vaid väheneb. Kiiruse ja nihke valemid avalduvad nüüd järgmiselt:

$$v=v_0-gt;$$

$$v^2-v_0^2=-2gh \quad (\text{ehk } v=\sqrt{v_0^2-2gh});$$

$$h=v_0t-\frac{gt^2}{2}.$$

Nihet h loetakse alates punktist, kust keha hakkab üles liikuma. See tähendab, et liikumise alghetkel $h=0$. Miinusmärk kiirendust sisaldava liikme ees näitab, et kiirenduse suund on algkiiruse suunale vastupidine.

Toodud valemite põhjal võib uurida üles visatud kehade liikumist.

Kuna ülesvisatud keha kiirus aja jooksul väheneb, siis peab kunagi saabuma hetk, mil keha kiirus saab võrdseks nulliga ($v=0$). Pärast seda hakkab keha langema. Seda nähtust on muidugi kõik vaadelnud, visates üles palli. Teeme nüüd kindlaks, kui kaua keha tõuseb, milline on suurim tõusu kõrgus ja kui palju aega kulub tal maapinnale langemiseks.

Kõigile neile küsimustele võib leida kergesti vastused eeltoodud valemite abil. Tuleb ainult meeles pidada, et hetkel, mil keha on saavutanud suurima kõrguse ja hakkab langema, võrdub tema kiirus nulliga ($v=0$).

Jätame õpilastele tõestada, et:

a) aeg t, mille vältel keha tõuseb, on määratud valemiga

$$t=\frac{v_0}{g};$$

b) suurim tõusu kõrgus H on arvutatav valemist

$$H=\frac{v_0^2}{2g};$$

c) kiirus v, mille keha omandab maapinnale tagasi jõudmisel, võrdub algkiirusega v_0;

d) keha langemise aeg võrdub tõusmise ajaga.

Ülesanne. Keha visatakse vertikaalselt üles algkiirusega $25\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Leida keha kiirus 4 s pärast. Kui suur on keha nihe selle aja möödumisel? Kui pika tee läbib keha?

L a h e n d u s. Keha kiiruse arvutame valemist

$$v=v_0-gt.$$

Kiirus neljanda sekundi lõpul on

$$v=25\frac{\text{m}}{\text{s}}-9,8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 4\,\text{s}\approx -15\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Miinusmärk näitab, et nelja sekundi pärast keha juba langeb alla. Selleks ajaks on ta jõudnud läbida kõrgeima punkti.

Leiame nüüd keha nihke pikkuse:

$$h=v_0t-\frac{gt^2}{2},$$

$$h = 25\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot 4\,\text{s} - \frac{9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 16 s^2}{2} \approx 20\ \text{m}.$$

Seega 4 sekundit pärast viske algust on keha 20 m kõrgusel nivoost, kust ta üles visati. Kuid nagu me äsja nägime, liigub keha sel hetkel juba allapoole. Seega tuleb läbitud tee leidmiseks suurimale tõusu kõrgusele liita vahemaa, mille keha läbis langemisel:

$$s = H + (H - h) = 2H - h.$$

Suurima tõusu kõrguse leiame valemist

$$H = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Seega

$$s = 2\frac{v_0^2}{2g} - h = \frac{v_0^2}{g} - h,$$

$$s = \frac{\left(25\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} - 20\ \text{m} \approx 42{,}5\ \text{m}.$$

Harjutus 11

1. Nool lastakse vibust vertikaalselt üles algkiirusega $30\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Kui kõrgele see tõuseb?
2. Vertikaalselt ülesvisatud keha langes 8 sekundi pärast tagasi maapinnale. Kui kõrgele tõusis keha? Kui suur oli keha algkiirus?
3. Vedrupüstolist, mis asub maapinnast 2 m kõrgusel, lastakse vertikaalselt üles kuul algkiirusega $5\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Leida kuuli suurim kõrgus maapinnast ja kiirus maapinnale langemise hetkel. Kui kaua liikus kuul õhus? Kui suur oli tema nihe 0,2 sekundit pärast liikumise algust?
4. Tõstekraana laseb ühtlaselt langeda konteinerit, millest kukub välja tellis. Tellise maapinnale jõudmise hetkel on konteiner 20 m kõrgusel sellest. Leida tellise langemise aeg.
   Juhis. Taustsüsteem siduda konteineriga.
5. Keha visatakse vertikaalselt üles kiirusega $40\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Kui pika aja jooksul jõuab keha 60 m kõrgusele ja kui suur on sellel kõrgusel tema kiirus?
   Juhis. Selgitage saadud kahe aja väärtuse ja kahe kiiruse väärtuse sisu.
6. Kaks keha visati erinevate algkiirustega vertikaalselt üles. Üks neist tõusis neli korda kõrgemale kui teine. Mitu korda on selle keha algkiirus suurem teise keha algkiirusest?
7. Ülesvisatud keha möödub aknast kiirusega $12\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Kui suure kiirusega möödub see keha aknast tagasi alla langedes?

3. peatükk. KÕVERJOONELINE LIIKUMINE

§ 18. SISSEJUHATUS

Looduses ja tehnikas esineb sageli liikumist, mille trajektoorid ei ole sirged, vaid kõverad. Selliseid liikumisi nimetatakse kõverjoonelisteks. Kõverjoonelist liikumist kohtame elus palju sagedamini kui sirgjoonelist. Kõveratel trajektooridel liiguvad näiteks planeedid ja tehiskaaslased kosmoses, liiklusvahendid ja masinaosad Maal jne.

Kõverjoonelise liikumise, samuti nagu sirgjoonelise liikumise uurimise eesmärgiks on leida keha algasendi ja algkiiruse järgi tema asend mistahes ajahetkel.

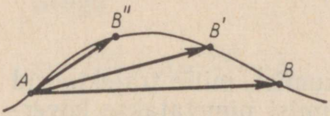
Kõverjooneline liikumine on sirgjoonelisest keerulisem, sest sellisel liikumisel ei ole nihkevektor suunatud piki trajektoori (nihkevektor on sirglõik, trajektoor aga kõverjoon). Ka kiirusvektor, mille suund ühtib alati nihkevektori suunaga, ei ole suunatud piki trajektoori. Trajektoorisuunaline ei ole ka kiirendusvektor.

Kõverjoonelist liikumist iseloomustab kiiruse suuna pidev muutumine. Kiiruse suund on ju ühtlasi ka liikumise suund. Ka kiirenduse suund ei ole kogu aeg ühesugune. Kuna just need kaks suurust on mehhaanika ülesannete lahendamisel kõige tähtsamad, siis vaatleme kõigepealt nende muutumist.

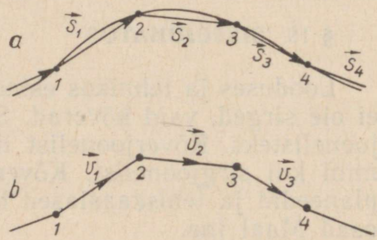
§ 19. KÕVERJOONELISE LIIKUMISE KIIRUS

Kõverjoonelisel liikumisel muutub kiirusvektori suund üleminekul ühest trajektoori punktist teise. Seega rääkides kõverjoonelise liikumise kiirusest, peame silmas, et see on hetkkiirus. Kõverjoonelise liikumise hetkkiiruse mõiste selgitamiseks kasutame sama võtet, mida kasutasime eelmises peatükis sirgjoonelise liikumise hetkkiiruse õppimisel (vt. § 11).

Joonisel 44 on kujutatud mingi kõverjoonelise trajektoori osa. Oletame, et keha liikus sellel trajektooril punktist *A* punkti *B*. Keha poolt läbitud tee võrdub kaare *AB* pikkusega. Sama aja jooksul toimunud nihe võrdub aga sirglõiguga *AB* (nool näitab nihke suunda). Nihke pikkus erineb tunduvalt kaare pikkusest, s. t. läbitud teest. Jooniselt näeme, et kui hakkame kaare pikkust vähendama (kaared *AB′* ja *AB″*), siis kaarte pikkuste ja vastavate nihkevektorite pikkuste vahed jäävad üha väiksemaks. Seetõttu võime kujutleda, et iga kõverjooneline trajektoor koosneb paljudest väga väikestest sirglõikudest, nii nagu see on näidatud joonisel 45, *a*. Selle murdjoone iga lõik on keha nihe. Igal sellisel lõigul ühtib kiiruse suund nihke suunaga. Kuid üleminekul ühelt lõigult teisele kiiruse suund muutub (joon. 45, *b*).



Joon. 44

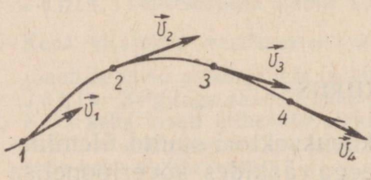


Joon. 45

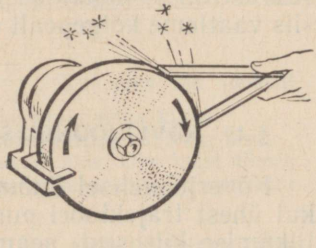
Tõeline kõverjooneline trajektoor, s. o. sujuv kõver, koosneks seega nagu väikestest nihetest, mis on ahenenud üksikuteks punktideks. See tähendab, et trajektoori igas punktis ühtib kiiruse suund kõvera puutuja suunaga samas punktis (joon. 46).

Kõverjoonelise trajektoori igas punktis ühtib keha liikumiskiiruse suund sellest punktist tõmmatud puutuja suunaga.

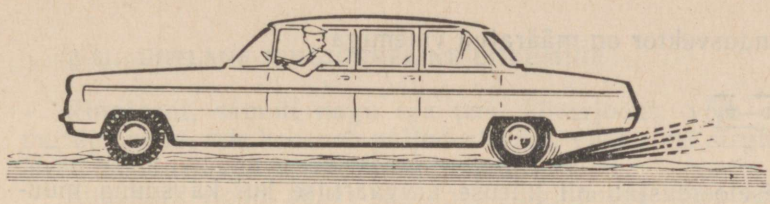
Selle väite õigsuses võime veenduda, jälgides näiteks käia töötamist (joon. 47). Kui suruda terasvarras vastu pöörlevat käiakivi, siis lendavad sellelt eemale kivi hõõguvad osakesed, mida me näeme sädemetena. Need osakesed jätkavad liikumist kiiru-



Joon. 46



Joon. 47



Joon. 48

sega, mis neil oli hetk enne käiakivi küljest lahtitulemist. On hästi näha, et sädemed lendavad alati eemale ringjoone puutujat mööda, mis on tõmmatud punktist, kus terasvarras toetub käiakivile.

Vaadeldes porisse kinnijäänud auto pöörlevalt tagarattalt paiskuvaid pritsmeid, võib samuti veenduda, et kõverjoonelisel liikumisel ühtib kiirusvektori suund kõvera puutuja suunaga (joon. 48).

Kõverjoonelisel liikumisel kiiruse suund muutub üleminekul ühest punktist teise. Ei ole olemas mingit kindlat kiiruse suunda, mis oleks ühine trajektoori mingi osa kõikidele punktidele. Kiiruse arvväärtus võib üleminekul ühest trajektoori punktist teise samuti muutuda, kuid see võib jääda ka muutumatuks. Kui kiiruse arvväärtus mingis trajektoori osas ei muutu, siis võime selle arvutada, jagades trajektoori lõigu pikkuse l selle läbimiseks kulunud ajaga t:

$$v = \frac{l}{t}.$$

Kui on teada jääva kiiruse väärtus v ja keha algasukoht, võime leida keha asukoha antud trajektooril mistahes ajahetkel. Algasukohast läbitud teepikkuse l võime arvutada valemist:

$$l = vt.$$

Kui aga kiiruse arvväärtus ei ole jääv või ei ole teada trajektoor, on keha asukohta antud ajahetkel tunduvalt raskem leida.

§ 20. KÕVERJOONELISE LIIKUMISE KIIRENDUS

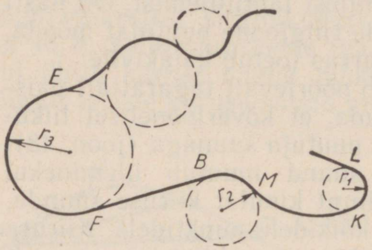
Kõverjoonelisel liikumisel muutub kiiruse suund pidevalt. Seetõttu ei saa kiirust lugeda jäävaks isegi sel juhul, kui selle arvväärtus ei muutu. Kiirus on ju vektoriaalne suurus. Kuid vektoriaalsete suuruste jaoks on arvväärtus ja suund ühesuguselt tähtsad karakteristikud. Seega kõverjooneline liikumine on alati kiirendusega liikumine.

Kiirendusvektor on määratud valemiga

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}.$$

See iseloomustab nii kiiruse arvväärtuse kui ka suuna muutumist.

Kõverjoonelisel liikumisel, nagu me eespool nägime (vt. lk. 36), moodustab kiirendusvektor kiiruse suunaga mingi nurga.



Joon. 49

Vaatleme nüüd sellist kõverjoonelist liikumist, mille puhul kiiruse arvväärtus on jääv ning muutub ainult kiiruse suund.

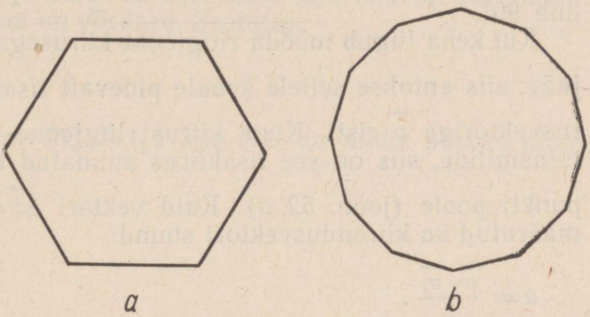
Erineva kujuga kõverjoonelisi trajektoore on lõpmatu hulk. Kas on vaja hakata otsima kiirenduse valemit igaühele neist eraldi? Osutub, et ei ole. See nähtub jooniselt 49. Seal on kujutatud keeruline kõverjooneline trajektoor, mida mööda liigub mingi keha. Võib näiteks kujutleda, et sellel joonisel on kujutatud mägitee, millel liigub auto. Oletame, et autojuht juhib autot nii, et spidomeeter näitab kogu aeg ühte ja sama kiiruse väärtust. Sirgel teelõigul liigub auto kiirenduseta. Kõverjoonelistel lõikudel on kiirendus olemas, kuid see iseloomustab mitte kiiruse suuruse, vaid ainult suuna muutumist.

Joniselt näeme, et tee kõverjoonelisi lõike võib vaadelda punktiiridega kujutatud ringjoonte osadena. Järsud kurvid (teelõigud *KL* ja *BM*) on väikeste raadiustega ringjoonte osad, lamedad kurvid (lõik *EF*) aga suurte raadiustega ringjoonte osad. Niisiis, liikumist mööda mistahes kõverjoonelist trajektoori võib vaadelda liikumisena mööda ringjoonte kaari. Kõverjoonelise liikumise kiirenduse leidmine taandub seega keha ringjoonelise liikumise kiirenduse määramisele.

§ 21. ÜHTLANE RINGJOONELINE LIIKUMINE

Ringjoont, samuti nagu iga teist kõverjoont, võib vaadelda murdjoonena, mis koosneb paljudest väga väikestest sirglõikudest. Need moodustavad korrapärase hulknurga.

Kuusnurk (joon. 50, *a*) sarnaneb ringjoonega väga vähe. Kuid kaksteistnurk (joon. 50, *b*) on sellega juba sarnasem. Kahekordistame veelgi külgede arvu ja konstrueerime kakskümmendnelinurga. Seda kujundit on juba raske palja silmaga ringjoonest eristada. Kuid võib ju konstrueerida ka tuhatnurga! Mida suurem on hulknurga külgede arv, seda lähedasem on see hulknurk ringjoonele. Niisiis, liikumist mööda ringjoont võib vaadelda liikumisena mööda hulknurka, mille külgede arv on väga suur.

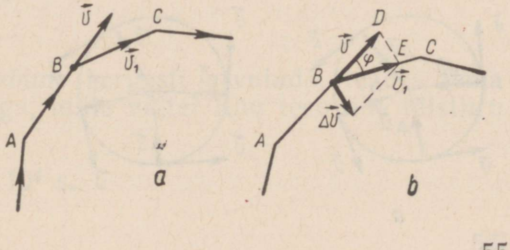


Joon. 50

Liikuva keha üleminekul hulknurga ühelt küljelt teisele muutub kiiruse suund. Näiteks keha, mis liigub lõigul *AB* kiirusega $\vec{v}$ (joon. 51, *a*), muudab punktis *B* oma liikumise suunda ja jätkab lõigul *BC* liikumist kiirusega $\vec{v}_1$. Kiiruse suurus seejuures ei muutu ($v=v_1$), sest liikumine on ühtlane.

On ilmne, et kiiruse suund muutus punktis *B* sellepärast, et kehale anti mingi lisakiirus $\Delta\vec{v}$, mis moodustab $\vec{v}$-ga mingi nurga (joon. 51, *b*):

$$\vec{v}+\Delta\vec{v}=\vec{v}_1.$$



Joon. 51

Punktis C saab keha uuesti lisakiiruse ja kiiruse suund muutub siin uuesti jne.

Millise nurga moodustab lisakiirus $\Delta\vec{v}$ kiirusega $\vec{v}$?

Kuna $\vec{v}$ arvväärtus võrdub $\vec{v}_1$ arvväärtusega, siis kolmnurk BDE on võrdhaarne ja selle alusnurgad on võrdsed.

Kujutleme ringjoont väga suure (ehk nagu matemaatikas öeldakse — lõpmatult suure) külgede arvuga hulknurgana. Kuid väga suure külgede arvu puhul on $\vec{v}$ ja $\vec{v}_1$ vaheline nurk φ lähedane nullile. Sel juhul on võrdhaarse kolmnurga BDE ülejäänud kaks nurka lähedased 90°-le (kolmnurga sisenurkade summa on 180°). Seega kiirusvektori $\vec{v}$ ja lisakiirusvektori $\Delta\vec{v}$ vaheline nurk võrdub 90°.

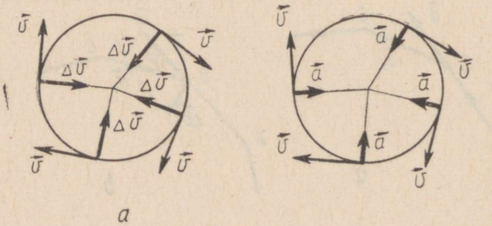
Kui keha liigub mööda ringjoont kiirusega, mille arvväärtus on jääv, siis antakse sellele kehale pidevalt lisakiirus $\Delta\vec{v}$, mis on kiirusvektoriga $\vec{v}$ risti. Kuna kiirus ringjoone igas punktis on puutujasihiline, siis on see lisakiirus suunatud mööda raadiust keskpunkti poole (joon. 52, *a*). Kuid vektori $\Delta\vec{v}=\vec{v}-\vec{v}_1$ suunaga on määratud ka kiirendusvektori suund:

$$a=\frac{\vec{v}-\vec{v}_1}{t}.$$

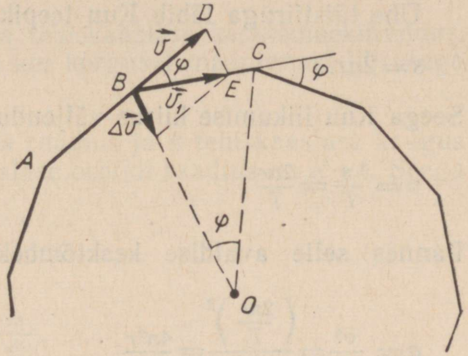
Keha ühtlasel ringjoonelisel liikumisel on kiirendusvektor suunatud ringjoone keskpunkti poole (joon. 52, *b*). Sellepärast nimetataksegi seda kiirendust *kesktõmbekiirenduseks.*

Nüüd leiame veel kesktõmbekiirenduse arvväärtuse.

Selleks kasutame joonist 53, kus ringjoon on asendatud korrapärase hulknurgaga, mille külgede arv on väga suur (just niisugusena tulebki kujutleda seda hulknurka. Nurk φ on väga väike. Seetõttu võime lugeda, et vektor $\Delta\vec{v}$ on kiirusvektoriga $\vec{v}$ risti ning on suunatud mööda raadiust OB. Samal põhjusel võime öelda, et lõik OC on risti lõiguga BC. Kuid BC on selle väikese ajavahemiku t vältel toimunud nihe, mille jooksul kiirus $\vec{v}$ muutus $\Delta\vec{v}$ võrra.



Joon. 52



Joon. 53

Kolmnurgad BOC ja BDE on sarnased, sest nad on võrdhaarsed ja nende tipunurgad on võrdsed. Seetõttu

$$\frac{BD}{OC} = \frac{DE}{BC}.$$

Kuid $BD = v$, $DE = \Delta v$, $OC = r$ ja lõik BC on nihke pikkus ning võrdub vt. Seega

$$\frac{v}{r} = \frac{\Delta v}{vt}.$$

Siit järgneb, et

$$\frac{v^2}{r} = \frac{\Delta v}{t}.$$

$\frac{\Delta v}{t}$ on kiirenduse arvväärtus a. Seega

$$a = \frac{v^2}{r}.$$

Selleks, et punkt liiguks ringjoonel raadiusega r kiirusega, mille arvväärtus v on jääv, tuleb talle pidevalt anda ringi keskpunkti suunatud kiirendus arvväärtusega $\frac{v^2}{r}$ (kesktõmbekiirendus).

Saadud valemi põhjal võime arvutada kesktõmbekiirenduse Kuu tiirlemisel ümber Maa, sest Kuu orbiiti võib lugeda ligikaudu ringjooneks.

Kuu kaugus Maast on ligikaudu 384 000 km ehk

$r = 3{,}84 \cdot 10^8$ m.

Kuu liikumise kiiruse võime kergesti arvutada, teades tema tiirlemisperioodi T, s. t. aega, mille vältel Kuu teeb ühe täistiiru ümber Maa:

$T = 27{,}5$ ööpäeva $= 2{,}36 \cdot 10^6$ s.

Ühe täistiiruga läbib Kuu teepikkuse

$$s=2\pi r.$$

Seega Kuu liikumise kiirus väljendub järgmiselt:

$$v=\frac{s}{T}=\frac{2\pi r}{T}.$$

Pannes selle avaldise kesktõmbekiirenduse valemisse, saame:

$$a=\frac{v^2}{r}=\frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r}=\frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Arvutame kiirenduse väärtuse

$$a=\frac{4\pi^2\cdot 3{,}84\cdot 10^8\mathrm{m}}{(2{,}36\cdot 10^6)^2\mathrm{s}^2}\approx 0{,}0027\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Saadud kiirendus on väga väike. See on palju kordi väiksem kehade vaba langemise kiirendusest maapinna lähedal, mis võrdub teatavasti $9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$:

$$\frac{a}{g}=\frac{0{,}0027\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}=\frac{1}{3600}=\frac{1}{60^2}.$$

Leiame Kuu orbiidi raadiuse ja Maa raadiuse ($R=6400$ km) suhte:

$$\frac{r}{R}=\frac{384\,000\ \mathrm{km}}{6400\ \mathrm{km}}=60.$$

Seega Kuu kaugus Maast on Maa raadiusest 60 korda suurem. Võime kirjutada, et

$$\frac{a}{g}=\frac{R^2}{r^2}.$$

Kuu kesktõmbekiirendus suhtub kehade vaba langemise kiirendusse Maa lähedal nagu Maa raadiuse ruut Kuu orbiidi raadiuse ruudusse.

Edaspidi me näeme, et lähtudes sellest faktist, tegi suur inglise füüsik Isaac Newton ühe tähtsaima avastuse.

Vaatleme veel ühte näidet kesktõmbekiirenduse valemi rakendamisest ülesannete lahendamisel.

Ülesanne 1. Arvutada Maa tehiskaaslase kesktõmbekiirendus, kui see liigub ringorbiidil 600 km kõrgusel maapinnast kiirusega $8\frac{\text{km}}{\text{s}}$.

L a h e n d u s. Kui R on Maa raadius ja h tehiskaaslase kaugus maapinnast, siis Maa tehiskaaslase orbiidi raadius on $R+h$. Seega

$$a=\frac{v^2}{R+h},$$

$$a=\frac{\left(8000\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{6{,}4\cdot 10^6\,\text{m}+0{,}6\cdot 10^6\,\text{m}}\approx 9{,}1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Ringjooneliselt liikumiselt võib üle minna liikumisele mistahes kujuga trajektoori mööda. Nagu eelmises paragrahvis nägime, võime kujutleda, et iga kõverjoon koosneb erinevate raadiustega ringjoonte kaartest. Kõverjoonelise trajektoori igas punktis iseloomustab keha liikumist kesktõmbekiirendus, mis on suunatud selle ringjoone keskpunkti poole, mille kaare moodustab vaadeldava punkti lähedane trajektoori osa. Kesktõmbekiirenduse arvväärtus antud punktis on samuti nagu ringjoonelisel liikumiselgi määratud valemiga

$$a=\frac{v^2}{r},$$

kus r tähendab vastava ringjoone raadiust.

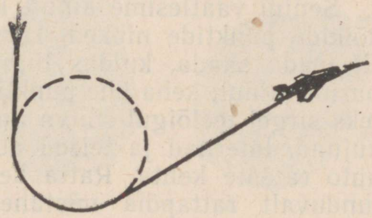
Ülesanne 2. Arvutada ringjoone raadius, mida mööda lennuk väljus pikeeringust (joon. 54), kui lennuki kiirus oli $800\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ja tema kiirendus trajektoori madalaimas punktis oli raskuskiirendusest maapinna lähedal 10 korda suurem.

L a h e n d u s. Lennuki kiirendus madalaimas punktis on kesktõmbekiirendus

$$a=\frac{v^2}{r}.$$

Leiame sellest valemist ringi raadiuse r:

$$r=\frac{v^2}{a}.$$



Joon. 54

Pannes sellesse valemisse kiirenduse ja kiiruse väärtused

$$a=10\,g=10\cdot 9{,}8\frac{m}{s^2}=98\frac{m}{s^2},$$

$$v=\frac{800\cdot 10^3\ m}{3600\ s}\approx 222\frac{m}{s},$$

saame

$$r=\frac{\left(222\frac{m}{s}\right)^2}{98\frac{m}{s^2}}\approx 500\ m.$$

Niisiis, kui keha liigub ringjoonel kiirusega, mille arvväärtus on jääv, siis tal on ringi keskpunkti poole suunatud kiirendus — kesktõmbekiirendus.

Harjutus 12

1. Käiaketas, mille raadius on 10 cm, teeb ühe täispöörde 0,2 sekundiga. Leidke pöörlemisteljest kõige kaugemal asuvate punktide kiirus.
2. Auto rataste raadius on 30 cm ja need teevad 0,1 sekundiga ühe täispöörde. Kui suure kiirusega liigub auto?
3. Kaks rihmaratast, mille raadiused on $r_1=5$ cm ja $r_2=10$ cm, on ühendatud rihmaga. Väiksema raadiusega ratta pöörlemisperiood on 0,5 s. Kui suure kiirusega liiguvad rihma punktid? Kui suur on teise rihmaratta pöörlemisperiood?
4. Esimese kosmoselaeva «Vostok» ümber Maa tiirlemise periood oli ligikaudu 90 minutit. Selle kosmoselaeva keskmine kõrgus Maa pinnast oli 320 km. Maa raadius on 6400 km. Leida kosmoselaeva kiirus.
5. Helikopteri propelleri laba pikkus on 5 m ja propelleri pöörlemisperiood on 0,25 s. Kui suure kesktõmbekiirendusega liiguvad propelleri kõige kaugemad punktid?
6. Auto liigub kurvil, mille raadius on 100 m, kiirusega $54\frac{km}{h}$. Kui suur on auto kesktõmbekiirendus?

§ 22. KÕVA KEHA PÖÖRLEMINE

Senini vaatlesime ainult keha kulgliikumist, mille puhul keha kõikide punktide nihked, kiirused ja kiirendused on ühesugused. Et teada saada, kuidas liigub kulgevalt kogu keha, piisab, kui uurime ainult keha ühe punkti liikumist. Ühesuguselt liiguvad näiteks sirgel teelõigul sõitva auto uksekäepide, radiaatorikattel olev kujund, laternad ja teised auto punktid. Kuid seda ei saa öelda auto rataste kohta. Ratta keskpunkti kiirus ja trajektoor erineb tunduvalt rattapöia mistahes punkti kiirusest ja trajektoorist.

Mille poolest siis auto ratta liikumine erineb auto teiste osade liikumisest? Ilmselt selle poolest, et rattad ei liigu ainult koos autoga tee suhtes, vaid pöörlevad ka ümber oma telje. Käesolevas paragrahvis vaatlemegi pöörlemist.

Pöörlemiseks nimetatakse sellist liikumist, mille puhul keha kõik punktid liiguvad mööda ringjooni, kusjuures nende ringjoonte keskpunktid asuvad ühel sirgel — pöörlemisteljel.

Pöörleva keha erinevad punktid läbivad ühe ja sama aja jooksul erineva pikkusega tee: punktid, mis asuvad pöörlemisteljele lähemal, läbivad lühema tee, teljest kaugemal asuvad punktid aga pikema tee. Seetõttu on erinevad ka nende punktide kiirused. Samuti on neil punktidel erinev kesktõmbekiirendus, mis, nagu me nägime, sõltub ringi raadiusest. Kuidas on võimalik kirjeldada keha pöörlemist tervikuna, kui keha erinevad punktid liiguvad erinevalt? Ei saa ju uurida iga punkti liikumist eraldi, sest kehal on punkte lõpmatult palju.

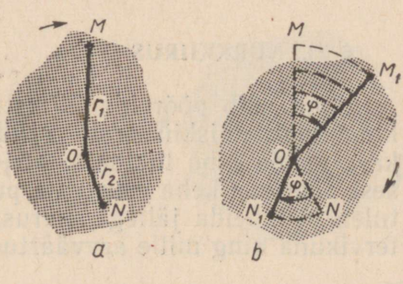
Ilmselt tuleb leida niisugune füüsikaline suurus, mis iseloomustaks kogu keha liikumist. Selliseks suuruseks võib võtta keha pöördenurga.

Vaatleme mingit keha, mis pöörleb punkti O läbiva liikumatu telje ümber (joon. 55, *a*). Pöörlemise suund on näidatud noolega. Pöörlemistelg on risti joonise tasapinnaga.

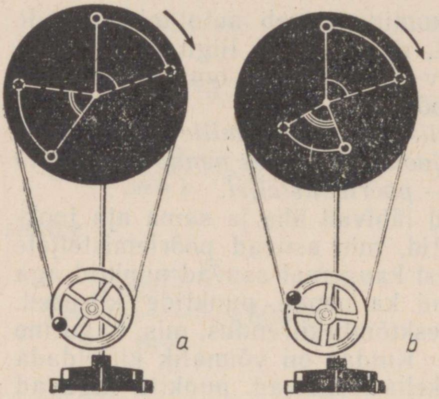
Tõmbame punktist M ristlõigu $MO = r_1$ pöörlemisteljele. Kui keha pöörleb, siis teatud ajavahemiku t pärast on punkt M liikunud asendisse M_1 ja sirglõik OM on pöördunud nurga φ võrra ning omandanud uue asendi OM_1 (joon. 55, *b*). On ilmne, et igast teisest punktist, näiteks punktist N pöörlemisteljele tõmmatud ristsirge pöördub sama ajavahemiku jooksul sama nurga φ võrra. See nurk — keha pöördenurk — tulebki võtta keha pöörlemist iseloomustavaks suuruseks.

Keha pöördenurgaks nimetatakse nurka, mille võrra pöördub keha mingist punktist pöörlemisteljele tõmmatud ristsirge. Eelnevat võib illustreerida järgmise lihtsa näitega.

Ketas või mõni teine tasapinnaline kujund kinnitatakse horisontaalsele teljele ja pannakse rihmülekande abil pöörlema (joon. 56, *a*).



Joon. 55



Joon. 56

Kahes punktis, mis asuvad pöörlemisteljest võrdsetel kaugustel, surutakse vastu ketast kriiditükid. Kui ketast mingi nurga võrra pöörata, siis kriiditükid joonistavad sellele võrdse pikkusega kaared. Need on teed, mille läbisid kriiditükkide esialgsed toetuspunktid. Nendest punktidest tõmmatud raadiuste pöördenurgad on samuti võrdsed.

Seejärel valime kaks punkti nii, et nad asuvad pöörlemisteljest erinevatel kaugustel, ja kordame katset (joon. 56, *b*). Nüüd on kaared kettal, s. o. punktide poolt läbitud teed erineva pikkusega. Kuid nendest punktidest tõmmatud raadiuste pöördenurgad on endiselt võrdsed.

Pöördenurk etendab pöörlemisel samasugust osa nagu nihe kulgliikumisel. Seda ei mõõdeta tavaliselt kraadides, vaid r a d i a a n i d e s (rad), mis on võetud SI-süsteemi ühikuks ja mille definitsioon on antud NSV Liidu riikliku standardiga.

Radiaan on kesknurk, millele vastav kaarepikkus võrdub ringi raadiusega. Siit järgneb, et pöördenurk φ radiaanides võrdub vastava kaare pikkuse s ja raadiuse r suhtega:

$$\varphi = \frac{s}{r}.$$

§ 23. NURKKIIRUS

Keha võib pöörelda kiiresti ja aeglaselt. Seetõttu võime rääkida pöörlemiskiirusest. Kuid «tavaline» kiirus, mida me seni kasutasime keha liikumise kirjeldamisel, pöörlemise jaoks ei sobi, sest pöörleva keha erinevate punktide kiirused on erinevad. Seega tuleb meil leida jällegi suurus, mis iseloomustaks pöörlevat keha tervikuna ning mille arvväärtuse järgi võiks otsustada, kui kiiresti keha pöörleb. Selliseks suuruseks on pöördenurga ja selle moodustamiseks kulunud ajavahemiku suhe. Seda suhet nimetatakse *nurkkiiruseks*. Nurkkiirust tähistatakse tähega ω (oomega):

$$\omega = \frac{\varphi}{t}.$$

Sellest valemist nähtub, et nurkkiirust mõõdetakse radiaanides sekundis $\left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$.

Keha pöörlemiskiirust väljendatakse sageli pöörete arvuga ajaühikus. Auruturbiini, mis teeb 3000 pööret minutis, loetakse kiirekäiguliseks. Hüdroturbiin aga, mis teeb kõigest 180 pööret minutis, on aeglase käiguga.

Nurkkiirus ja pöörete arv ajaühikus on teineteisega väga lihtsalt seotud. Oletame näiteks, et keha teeb aja t vältel n pööret. Ühele täispöördele vastab 2π radiaani, n pöördele aga $2\pi n$ radiaani. Seega nurkkiirus on määratud valemiga:

$$\omega = \frac{2\pi n}{t}.$$

Kuid suhe $\frac{n}{t}$ võrdub pöörete arvuga ajaühikus. Seda suurust nimetatakse *pöörlemissageduseks* ja tähistatakse tähega ν (nüü):

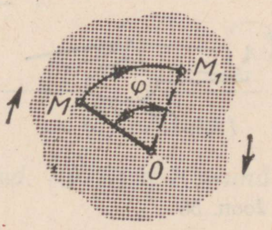
$$\nu = \frac{n}{t}.$$

Seos nurkkiiruse ja pöörlemissageduse vahel on seega järgmine:

$$\omega = 2\pi\nu.$$

Mitmesuguste ülesannete lahendamisel tuleb sageli leida pöörleva keha mingi punkti *joonkiirus*. Pöörleva keha punkti joonkiiruseks nimetatakse selle punkti kiirust, mis mõõtub selle punkti poolt läbitud kaare pikkuse ja selle läbimiseks kulunud aja suhtega.

Tuletame valemi, mis võimaldab pöörleva keha nurkkiiruse järgi arvutada punkti joonkiiruse v.



Joon. 57

Joonisel 57 on kujutatud keha, mis pöörleb nurkkiirusega ω ümber punkti O läbiva telje. Vaatleme pöörlemisteljest kaugusel r asuva punkti M liikumist. Mingi ajavahemiku t jooksul pöördub keha nurga φ võrra. Punkt M läbib selles ajavahemikus kaare MM_1, mille pikkus on s. Seega

$$v = \frac{s}{t}.$$

Kuna

$$s = r\varphi,$$

siis

$$v = \frac{r\varphi}{t}.$$

Võttes arvesse, et

$$\frac{\varphi}{t} = \omega,$$

saame

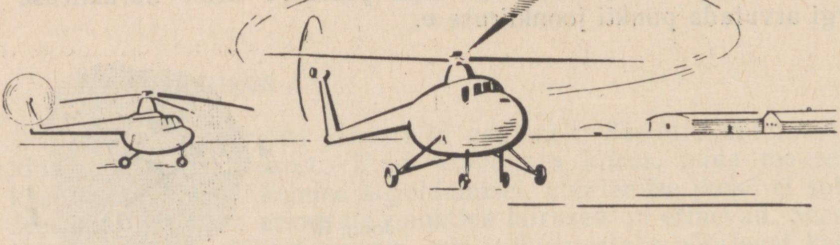
$$v = r\omega.$$

Pöörleva keha mingi punkti joonkiiruse arvväärtuse leidmiseks tuleb selle punkti kaugus pöörlemisteljest korrutada keha pöörlemise nurkkiirusega.

Ülesanne. Arvutada helikopteri propelleri laba kõige kaugema punkti joonkiirus ja kiirendus, kui propeller teeb 180 tiiru minutis ja kui laba pikkus on 5 m (joon. 58).

Lahendus. Algul leiame propelleri nurkkiiruse:

$$\omega = \frac{2\pi n}{t} = \frac{6{,}28 \cdot 180 \text{ rad}}{60 \text{ s}} = 18{,}84 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$



Joon. 58

Seejärel arvutame propelleri äärmise punkti joonkiiruse:

$$v=\omega r=18{,}84\ \frac{1}{\text{s}}\cdot 5\ \text{m}=94{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Lõpuks leiame kesktõmbekiirenduse:

$$a=\frac{v^2}{r}=\frac{\left(94{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{5\ \text{m}}\approx 1770\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

Harjutus 13

1. Moskva Kremli Spasski tornis asuva kella minutiosuti pikkus on 3,5 m. Kui suur on selle osuti otsa joonkiirus? Võrrelge selle osuti nurkkiirust käekella minutiosuti nurkkiirusega.
2. Leidke grammofoniplaadi nurkkiirused pöörlemissagedustel $33\frac{1}{3}\ \frac{\text{p}}{\text{min}}$ ja $78\ \frac{\text{p}}{\text{min}}$.
3. Võimsate auruturbiinide rootorid teevad $3000\frac{\text{p}}{\text{min}}$. Leida turbiini rootori nurkkiirus ning rootori laba lõpp-punkti joonkiirus ja kiirendus, kui tööratta diameeter on 2,7 m.
4. Vurr, mille pöörlemissagedus on $40\frac{\text{p}}{\text{s}}$, langeb 5 m kõrguselt alla. Mitu pööret teeb vurr langemisel?
5. Toru diameetriga 30 cm veeretatakse ühtlaselt 5 sekundiga 2,5 m kaugusele. Kui suur on toru nurkkiirus?

§ 24. KÕIGE OLULISEM PEATÜKIS «KINEMAATIKA»

Kui on teada keha algasukoht ja algkiirus, siis selle keha asukoha (koordinaatide) leidmiseks mistahes ajahetkel tuleb teada kiirendust $\vec{a}$.

Vaatlesime kolme kõige lihtsamat juhtu.

1. *Keha kiirendus on null* ($a=0$).

Sel juhul liigub keha ühtlaselt mööda sirget. Keha koordinaadi ajahetkel t leiame valemist

$$x=x_0+v_0t.$$

(1. peatükk)

2. *Kiirenduse $\vec{a}$ suurus ja suund on jäävad. Kiirenduse suund ühtib algkiiruse $\vec{v}_0$ suunaga.*

Keha liigub ühtlaselt muutuvalt mööda sirget, mida mööda on suunatud kiirendus. Keha koordinaadi ajahetkel t leiame valemist

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

(2. peatükk)

3. *Keha kiirendus $\vec{a}$ on jääva suurusega, kuid tema suund on kogu aeg risti kiiruse v suunaga.*

Sel juhul liigub keha ühtlaselt mööda ringjoont, mille raadius on

$$r = \frac{v^2}{a}.$$

Arvutades valemist

$$s = vt$$

keha poolt läbitud tee ja teades keha algasukohta ringjoonel, võib kergesti leida tema asukoha mistahes ajahetkel.

(3. peatükk)

Järgmises osas näidatakse, kuidas leida keha kiirendust.

Peame veel meeles pidama, et keha kiirus on suhteline: ta on erinevates, üksteise suhtes liikuvates taustsüsteemides erinev.

Kuid erinevalt kiirusest on keha kiirendus üksteise suhtes ühtlaselt ja sirgjooneliselt liikuvates taustsüsteemides ühesugune.

DÜNAAMIKA

4. peatükk. LIIKUMISSEADUSED

§ 25. SISSEJUHATUS

Eelmistes peatükkides selgus, et kehade liikumine seisneb nende suhtelise asukoha muutumises aja jooksul. See muutumine on määratud nihkega. Antud ajavahemikus toimunud nihe on omakorda määratud keha liikumiskiirusega ja kiirus — kiirendusega. Selgitame nüüd, mis on keha kiiruse muutumise, s. t. kiirenduse tekkimise põhjus ning mis määrab kiirenduse suuruse ja suuna. See võimaldab meil mõista, miks keha liigub nii või teisiti — ühtlaselt või mitteühtlaselt, sirgjooneliselt või kõverjooneliselt jne. Nendele küsimustele annab vastuse mehhaanika põhiline osa — *dünaamika.*

Mehhaanika osa, milles uuritakse kiirenduse tekkimise põhjusi ning vaadeldakse selle suuruse ja suuna määramise viise, nimetatakse dünaamikaks.

Kiirenduse tekkimise põhjuste selgitamisel lähtume katsetest ja vaatlustest. Kuid algul on meil mugavam kindlaks teha, millistel tingimustel liiguvad kehad kiirenduseta.

§ 26. KEHAD JA NENDE ÜMBRUS. NEWTONI ESIMENE SEADUS

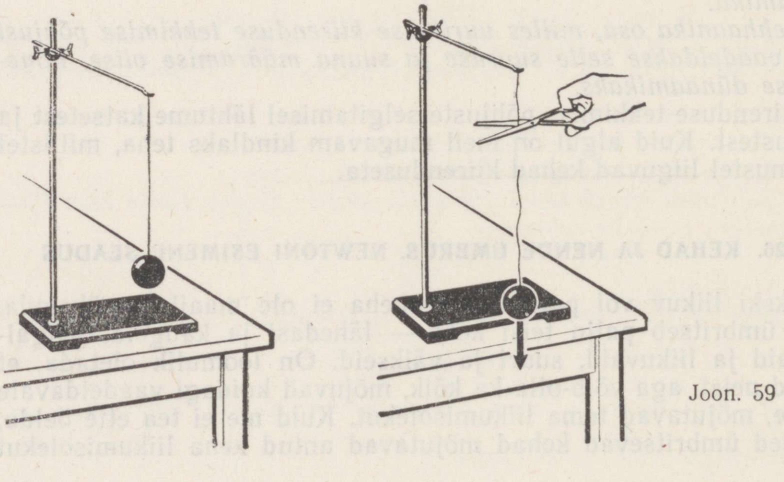
Ükski liikuv või paigalseisev keha ei ole maailmas üksinda. Teda ümbritseb palju teisi kehi — lähedasi ja kaugeid, paigalseisvaid ja liikuvaid, suuri ja väikseid. On loomulik oletada, et mõned neist, aga võib-olla ka kõik, mõjuvad kuidagi vaadeldavale kehale, mõjutavad tema liikumisolekut. Kuid me ei tea ette öelda, millised ümbritsevad kehad mõjutavad antud keha liikumisolekut oluliselt. Seda tuleb igal üksikjuhul eraldi uurida. Vaatleme algul mingit paigalseisvat keha. Joonisel 59 on kujutatud kumminööri otsas rippuv kuulike. Kuulikese ümber on palju teisi kehi: kumminöör, mille otsas ta ripub, põrand, millele toetub laud, maja, kus kuulike asub, esemed selles toas ja kõrvaltubades ning muidugi ka Maa. On selge, et kõik need kehad ei mõjuta kuulikese olekut ühesuguselt. Kui näiteks viia ära või paigutada toas ümber mööbel, siis see ei avalda kuulikesele mingit märgatavat mõju. Lihtne katse näitab, millised ümbritsevad kehad avaldavad kuulikesele olulist mõju. Lõikame kumminööri katki. Kuulike hakkab langema Maa poole. On ilmne, et kuulike muutis oma kiirust ja omandas kiirenduse Maa mõjul.

See lihtne katse näitab, et kõikidest kehadest, mis ümbritsevad kuulikest, mõjutavad teda märgatavalt ainult kaks — kumminöör ja Maa. Nende koosmõju tulemusena seisabki kuulike paigal. Kui kõrvaldasime ühe neist kehadest (kumminööri), siis kuulike ei jäänud enam paigale. Kui meil oleks võimalik eemaldada Maa ja jätta alles kumminöör, ka siis ei jääks kuulike paigale, vaid hakkaks liikuma vastupidises suunas.

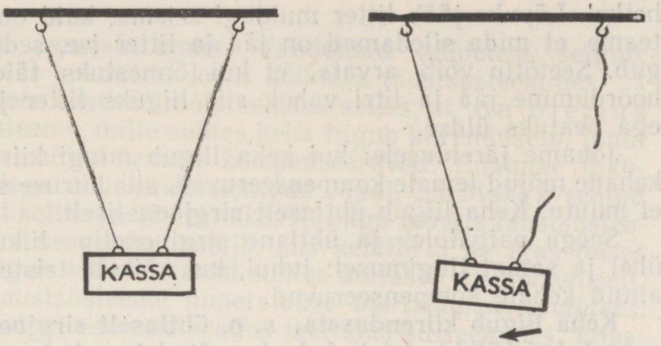
Tuleme järeldusele, et kumminööri ja Maa mõjud kuulikesele kompenseerivad teineteist. Seetõttu on kuulikese kiirus jääv — see võrdub kogu aeg nulliga.

Väljend «mitme keha mõjud kompenseerivad üksteist» tähendab seda, et nende kehade koosmõju tulemus on niisugune, nagu neid kehi ei oleks üldse olemas.

Kui mingi keha seisab paigal, siis sellele kehale mõjub alati kaks või enam keha, mille mõjud üksteist kompenseerivad. Raamat seisab laual paigal sellepärast, et laua mõju raamatule kompenseerib Maa mõju sellele. Kahe nööri külge riputatud silt (joon. 60)



Joon. 59

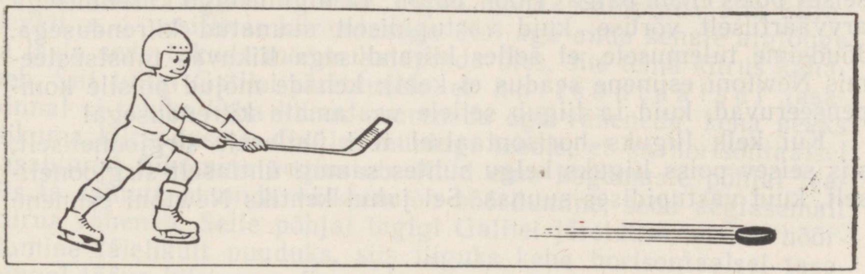


Joon. 60

seisab tasakaalus, sest kolme keha — kahe nööri ja Maa — mõjud temale kompenseerivad üksteist. Kui lõikame ühe nööridest katki, siis silt ei jää enam paigale. Nendest ja paljudest teistest sellistest näidetest järeldub: **kui paigalseisvale kehale mõjub mitu keha, nii et nende mõjud kompenseeruvad, siis keha säilitab paigaloleku.**

Täpselt samuti käituks ka keha, millele teised kehad üldse ei mõju. Kuid maailm on siiski niisuguse ehitusega, et selles ei ole olemas kehi, mis oleksid teistest kehadest täielikult isoleeritud.

Vaatleme nüüd, millistel tingimustel liiguvad kehad ühtlaselt ja sirgjooneliselt, s. o. kiirenduseta. Lähtume jällegi katsetest.



Joon. 61

Hokiväljaku siledal jääl seisab litter. Maa ja jää mõjud litrile kompenseerivad teineteist. Seetõttu jääb see paigale. Lööme hokikepiga litrit (joon. 61). Kepi lühiajalise mõju tulemusena hakkab litter liikuma mingi kiirusega. Kõige tähelepanuväärsem selles katses on asjaolu, et pärast lööki, kui kepp enam litrile mõju ei avalda, jätkab litter liikumist. Teised kehad mõjuvad litrile samasuguselt nagu enne lööki: Maa ja jää mõjud kompenseerivad endiselt teineteist, kepp litrile mingit mõju ei avalda. Kuid litter liigub mööda sirgjoont peaaegu jääva kiirusega, mille ta omandas löögi hetkel. Lõpuks jääb litter muidugi seisma, kuid oma kogemustest teame, et mida siledamad on jää ja litter ise, seda kauem ta liigub. Seetõttu võib arvata, et kui õnnestuks täiesti kõrvaldada hõõrdumine jää ja litri vahel, siis liiguks litter jääva kiirusega ega peatuks üldse.

Jõuame järeldusele: kui keha liigub mingi kiirusega ja teiste kehade mõjud temale kompenseeruvad, siis kiiruse suurus ja suund ei muutu. Keha liigub ühtlaselt sirgjooneliselt.

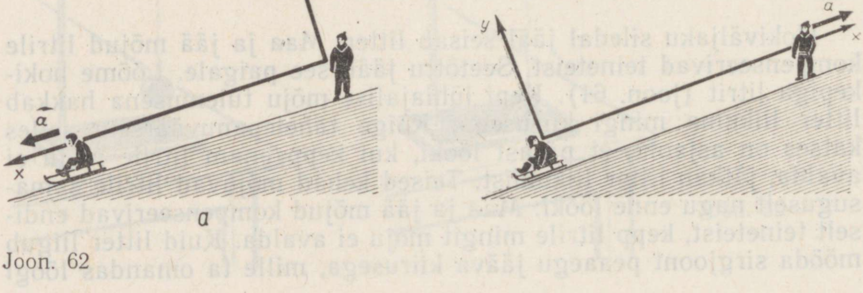
Seega paigalolek ja ühtlane sirgjooneline liikumine esinevad ühel ja samal tingimusel: juhul, kui kõikide teiste kehade mõjud antud kehale kompenseeruvad.

Keha liigub kiirenduseta, s. o. ühtlaselt sirgjooneliselt, või on paigal, kui kõikide teiste kehade mõjud temale kompenseeruvad.

See lause väljendab ühte mehhaanika põhiseadust — *Newtoni esimest seadust.*

Teises peatükis toodud materjali põhjal teame, et liikumine ja paigalolek on suhtelised. Ühe ja sama keha liikumine on erinevate taustsüsteemide suhtes erinev. Osutub, et Newtoni esimene seadus ei kehti kõikides taustsüsteemides. Selgitame seda näitega. Oletame, et mäenõlvakul seisab liikumatult poiss. Ta on paigal sellepärast, et hõõrdumine ja maapinna elastsus kompenseerivad Maa külgetõmbe. Oletame, et mäest sõidab kelguga alla teine poiss, kusjuures kelk liigub Maa suhtes, s. o. Maaga seotud taustsüsteemis kiirendusega (joon. 62, *a*). Mäest kiirendusega allasõitva poisi suhtes, s. o. kelguga seotud taustsüsteemis, ei ole mäenõlvakul seisev poiss enam paigal (joon. 62, *b*). Ta liigub kelgu kiirendusega arvväärtuselt võrdse, kuid vastupidiselt suunatud kiirendusega. Jõudsime tulemusele, et selles kiirendusega liikuvas taustsüsteemis Newtoni esimene seadus ei kehti: kehade mõjud poisile kompenseeruvad, kuid ta liigub sellele vaatamata kiirendusega!

Kui kelk liiguks horisontaalsel teel ühtlaselt sirgjooneliselt, siis seisev poiss liiguks kelgu suhtes samuti ühtlaselt sirgjooneliselt, kuid vastupidises suunas. Sel juhul kehtiks Newtoni esimene



Joon. 62

seadus mõlemas taustsüsteemis. Vaadeldud näidetest selgub, et Newtoni esimene seadus ei kehti kõikides taustsüsteemides.

Newtoni esimese seaduse mõte seisneb selles, et on olemas selliseid taustsüsteeme, mille suhtes keha liigub kiirenduseta, juhul kui teiste kehade mõjud temale kompenseeruvad. Enamike liikumiste jaoks, millega meil tuleb kohtuda Maal, on Maaga seotud taustsüsteem just selliseks süsteemiks. Kui aga mingis taustsüsteemis Newtoni esimene seadus kehtib, siis kehtib ta ka igas teises süsteemis, mis liigub selle süsteemi suhtes ühtlaselt sirgjooneliselt. Kõiki selliseid taustsüsteeme nimetatakse *inertsiaalsüsteemideks*. Seega kehtib Newtoni esimene seadus inertsiaalsüsteemides. Edaspidi kasutamegi ainult selliseid taustsüsteeme.

Mehhaanika esimese seaduse avastasid 17. sajandil itaalia füüsik Galileo Galilei ja inglise füüsik Isaac Newton.

Selle seaduse avastamisega lükati ümber üks sajandeid valitsenud väärarvamus. Selle ajani arvati, et kui kehale teised kehad ei mõju (või kõik mõjud kompenseeruvad), siis see keha võib olla ainult paigal. Arvati, et kui keha liigub jääva kiirusega, siis peavad temale pidevalt mõjuma teised kehad. Näis, et kogemused kinnitavad seda seisukohta: et koorem jääva kiirusega liiguks, peab hobune seda vedama, et laud põrandal liiguks, tuleb teda pidevalt tõmmata või lükata jne.

Galilei oli esimene, kes väitis avalikult, et see ei ole õige. Ta tuli sellele järeldusele, uurides keha liikumist kaldpinnal. Galilei katsetest selgus, et keha liigub mööda kaldpinda alla kiirenevalt, s. o. positiivse kiirendusega. Kui aga anda kehale algtõuge ja lasta seda liikuda mööda kaldpinda üles, siis tema kiirus kahaneb. Siit tuligi Galilei järeldusele, et horisontaalsel tasapinnal ei tohiks keha kiirus suureneda ega väheneda, keha peaks liikuma kiirenduseta. Galilei muidugi teadis, et ka horisontaalsel tasapinnal liikumine aeglustub. Kuid oma kogemuste põhjal teadis ta samuti, et mida väiksem on hõõrdumine, seda aeglasemalt kiirus väheneb. Selle põhjal tegigi Galilei järelduse, et kui hõõrdumine täielikult puuduks, siis liiguks keha horisontaalsel tasapinnal jääva kiirusega. Seega kasutas Galilei selle tähtsa loodusseaduse avastamisel mitte ainult katse andmeid, vaid ka oletust. Newton näitas selle seaduse üldkehtivust ja lülitas selle kehade liikumise põhiseaduste hulka.

§ 27. MIKS TEKIVAD KIIRENDUSED

Kui keha liigub jääva kiirusega sirgjooneliselt, siis vastavalt Newtoni esimesele seadusele ei mõju temale teised kehad või nende mõjud kompenseerivad üksteist.

Kui aga keha kiirus muutub, siis võib alati leida mingi teise keha, mille mõju kutsus esile kiirenduse. See järeldub paljudest eespool toodud näidetest.

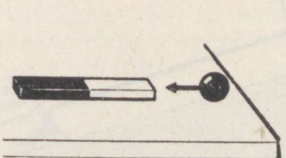
Langevad kehad liiguvad kiirenevalt. Kiirenduse kutsub nende juures esile Maa.

Jääl asuva litri kiirus muutub löögi ajal. Litrile andis kiirenduse hokikepp.

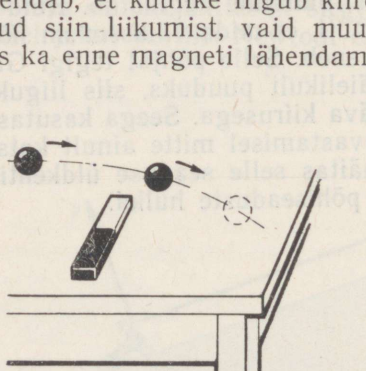
Lähendame magnetiseeritud terasvarda (püsivmagneti) laual seisvale raudkuulikesele (joon. 63). Kuulike, mis algul oli paigal, hakkab liikuma ja saab mingi kiirenduse. Kiirenduse kutsub esile magnetiseeritud varras. Kuulike liigub vardani, puutub vastu seda ja peatub. Liikuva kuulikese peatumisel esineb samuti kiiruse muutumine ja seega ka kiirendus. Kehaks, mis selle kiirenduse tekitas, on jällegi magnetiseeritud varras. Kuid varda mõju, mis kuulikese peatas, on hoopis teist liiki. Kuulike hakkas liikuma varda magnetilise mõju tõttu, kuid peatus sama varda elastsusmõju tulemusena. Kuulikese peatamisel varras ei mõjunud magnetina, vaid lihtsalt tahke kehana.

Ka jää mõjub liikuvale ja paigalseisvale litrile erinevalt. Jää mõju paigalseisvale litrile seisneb Maa mõju kompenseerimises, kuid tema mõju liikuvale litrile kutsub peale selle esile veel hõõrdumise.

Väliste mõjude tulemusena muutub mitte ainult paigalseisvate, vaid ka liikuvate kehade kiirus. Kui näiteks lähendada magnet liikuvale kuulikesele, nii nagu see on näidatud joonisel 64, siis kuulikese tee kõverdub. See tähendab, et kuulike liigub kiirendusega. Magneti mõju ei põhjustanud siin liikumist, vaid muutis ainult selle iseloomu (kuulike liikus ka enne magneti lähendamist).



Joon. 63



Joon. 64

Vaadeldud katsed näitavad, et **teiste kehade mõju antud kehale ei ole mitte liikumise enda, vaid selle muutumise, s. o. kiirenduse põhjuseks.** Siit tuleneb väga tähtis järeldus: **keha kiiruse muutumine välise mõju tõttu jätkub seni, kuni see mõju kestab.** Kui väline mõju lakkab, lakkab ka kiiruse muutumine. Liikumine ise ei lakka — see jätkub ühtlaselt ja sirgjooneliselt selle kiirusega, millega keha liikus väliste mõjude lakkamise hetkel. *Keha liikumiskiiruse säilimise nähtust väliste mõjude puudumisel sellele kehale nimetatakse inertsiks.* Keha kohta, mis jätkab liikumist pärast väliste mõjude lakkamist, öeldakse, et ta liigub inertsiaalselt ehk «inertsi mõjul».

Kuna Newtoni esimene seadus määrab kehade liikumise juhul, kui teised kehad neile ei mõju, siis nimetatakse seda seadust ka *inertsiseaduseks.* Seetõttu nimetataksegi taustsüsteeme, milles kehtib Newtoni esimene seadus, *inertsiaalsüsteemideks.*

§ 28. KEHADE VASTASTIKUNE MÕJU

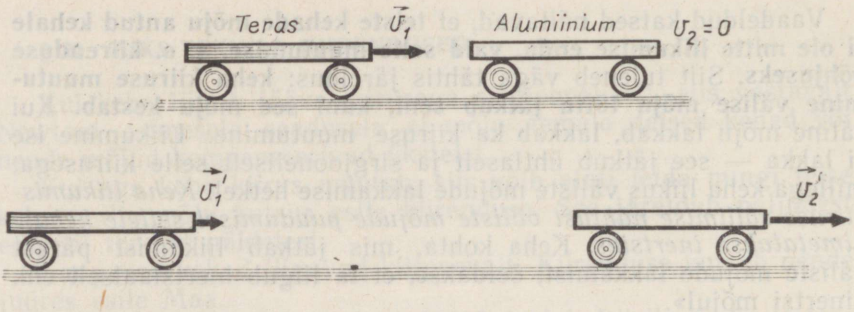
Millest sõltub liikuva keha kiirenduse suurus ja suund? Et sellele küsimusele vastust leida, lähtume jällegi katsest.

Kõige lihtsam on selline katse, millest võtavad osa kaks keha: see, mis mõjutab, ja see, mida mõjutatakse. Tegelikult on mõlemad kehad «üheõiguslikud». Kumbki neist mõjutab ja kumbagi neist mõjutatakse. Kui näiteks jalgpalliväljakul jooksevad kokku kaks mängijat, siis kummalegi neist avaldatakse mõju ja nende mõlema kiirus muutub.

Paljud katsed ja vaatlused näitavad, et kui kehale A mõjub teine keha B ja keha A saab seetõttu kiirenduse, siis alati saab kiirenduse ka keha B. Kehade mõju teineteisele on alati vastastikune. Vastastikuse mõju tulemusena omandavad kiirenduse mõlemad kehad. Selgitame nüüd, missugused on nende kiirenduste suurused ja suunad ning millest need sõltuvad.

Hoolikalt korraldatud katsete tulemusena avastati tähtis loodusseadus: **kui kaks keha mõjutavad teineteist, siis nende kehade kiirenduste arvväärtuste suhe on jääv.**[1] See suhe ei sõltu üldse sellest, kuidas need kehad teineteist mõjutavad. Kehadevaheline mõju võib seisneda näiteks kahe liikuva keha kokkupõrkamises või liikuva keha põrkamises vastu paigalseisvat. Samuti võivad teineteist mõjutada kehad, mis on omavahel ühendatud vedru abil. Kehadevaheline mõju võib olla ka selline, et kehad ise omavahel üldse kokku ei puutu. Nii mõjutavad teineteist näiteks kaks magnetit, planeedid ja Päike, Kuu ja Maa. Kõikidel juhtudel on

[1] Selles väites sisaldub Newtoni kolmanda seaduse põhiline sisu.



Joon. 65

k a h e a n t u d k e h a kiirenduste suhe jääv. Kummagi keha kiirendused ise võivad erinevate vastastikuste mõjutuste puhul olla täiesti erinevad. Muutumatuks jääb ainult kiirenduste s u h e.

Nagu juba öeldud, järeldub see tähtis seadus paljudest katsetest. Vaatleme neist ühte.

Võtame kaks vankrikest, mis võivad kõval siledal pinnal vabalt (hõõrdumiseta) veereda (joon. 65). Üks nendest on valmistatud terasest. Teine vankrike on täpselt samade mõõtmetega ja seega ka sama ruumalaga nagu esimenegi, kuid on valmistatud alumiiniumist. Anname terasvankrikesele mingi kiiruse, nii et see põrkab vastu paigalseisvat alumiiniumvankrikest. Põrkamise ajal liiguvad mõlemad vankrikesed kiirendusega. Terasvankrikese kiirendus on negatiivne — selle kiirus väheneb. Alumiiniumvankrikese kiirendus on positiivne. Kui me need kiirendused mõõdaksime (näiteks lk. 44 kirjeldatud stroboskoopilisel meetodil), siis jõuaksime tulemusele, et terasvankrikese kiirendus on alumiiniumvankrikese kiirendusest kolm korda väiksem. Olgu terasvankrikese kiirendus a_1 ja alumiiniumvankrikese kiirendus a_2, siis saame võrdsuse:

$$\frac{a_1}{a_2} = -\frac{1}{3}.$$

Miinusmärk näitab, et vankrikeste kiirendused on erimärgilised, s. t. vastassuunalised.

Võiksime terasvankrikesele anda ükskõik millise kiiruse. Võiksime vankrikeste osad vahetada, s. t. anda algkiiruse alumiiniumvankrikesele ja jätta terasvankrikese paigale. Samuti võiksime anda algkiirused mõlemale vankrikesele (muidugi sellised, et vankrikesed teineteisega kokku põrkaksid). Selliste katsete põhjal jõuaksime järgmisele tulemusele: erinevates katsetes on vankrikeste kiirendused erinevad, kuid nende kiirenduste suhe on iga kord ühesugune — terasvankrikese kiirendus on alumiiniumvankrikese kiirendusest alati kolm korda väiksem. Kuid miks vankrikeste kiirendused erinevad teineteisest just selliselt?

Harjutus 14

1. Leida joonisel 65 kujutatud alumiiniumvankrikese kiirus pärast põrget, kui terasvankrikese kiirus enne põrget on $4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ja pärast põrget $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

2. Teras- ja alumiiniumvankrikese kiirused enne põrget on vastavalt $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ja $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Alumiiniumvankrikese kiirus pärast põrget on $0{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Kui suur on terasvankrikese kiirus pärast põrget?

3. Teras- ja alumiiniumvankrike liiguvad teineteise poole kiirustega $3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Pärast põrget liigub alumiiniumvankrike suunas, kuhu algul liikus terasvankrike, kiirusega $6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Kui suur on terasvankrikese kiirus pärast põrget?

§ 29. KEHADE INERTSUS

Eelmises paragrahvis kirjeldatud katsed näitasid esiteks, et kui kaks keha mõjutavad teineteist, siis nad omandavad vastassuunalised kiirendused.

Samuti järeldub nendest katsetest, et vastastikku mõjuvate kehade kiirenduste suhe ei sõltu vastastikuse mõju viisist, vaid sõltub ainult neist kehadest endist. Igal kehal on mingi eriline omadus, mis määrabki tema ja temaga vastastikku mõjuva keha kiirenduste suhte. See on väga tähtis omadus, sest sellest sõltub keha liikumine kehade vastastikuse mõju korral.

Missugune see omadus on?

Meenutame, et keha kiirendus võrdub tema kiiruse muudu ja selleks kulunud ajavahemiku suhtega:

$$a = \frac{v - v_0}{t}.$$

Kirjeldatud katsetes mõjutavad vankrikesed teineteist ühe ja sama aja vältel, kuid nad omandavad erineva kiirenduse. Seega ka nende kiirused muutuvad erinevalt, ehkki selleks kulub ühepalju aega. Näiteks terasvankrikese kiirus muutub peaaegu kolm korda vähem kui temaga vastastikku mõjuva alumiiniumvankrikese kiirus. Mispärast? Ilmselt sellepärast, et terasvankrikesel kulub alumiiniumvankrikesega ühesuuruse kiiruse muutuse saavutamiseks r o h k e m a e g a. Selle ajaga, mille vältel vankrikesed teineteisele mõjusid, terasvankrike lihtsalt «ei jõudnud» oma kiirust nii palju muuta kui alumiiniumvankrike.

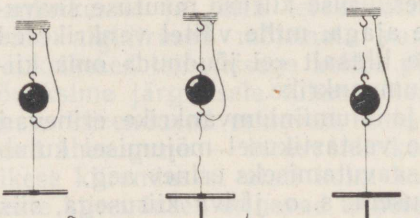
Seega võime öelda, et teras- ja alumiiniumvankrike erinevad teineteisest selle poolest, et nende vastastikusel mõjumisel kulub neil ühe ja sama kiiruse muutuse saavutamiseks erinev aeg.

Kui mingi keha liigub kiirenduseta, s. o. jääva kiirusega, siis öeldakse teatavasti, et see keha liigub «inertsi mõjul» ehk i n e r tsiaalselt. Kuid vastastikuse mõju tulemusena kehade kiirus muutub — ühtedel kehadel vähe, teistel aga palju. Kehade kohta, mis vastastikusel mõjumisel muudavad vähem oma kiirust, öeldakse, et nad on inertsemad (sest selliste kehade liikumine on lähedasem inertsiaalsele liikumisele). Terasvankrike on alumiiniumvankrikesest inertsem. *Inertsus* ongi kehade omadus, millest sõltub kiirendus kehade vastastikusel mõjumisel. Siit selgub, et keha kiiruse muutmiseks antud suuruse võrra peab vastastikune mõju kestma teatud kindla aja. Mida suurem on see aeg, seda inertsem on keha.

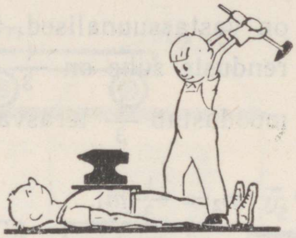
Järgmine katse näitab selgelt, kuidas ilmneb keha inertsus ja millist osa etendab aeg, mille vältel üks keha teist mõjutab.

Peene niidi otsa on riputatud massiivne kera (joon. 66, *a*). Selle külge on altpoolt kinnitatud teine samasugune niit. Kui alumisest niidist järsult rebida, siis see katkeb ja keha jääb ülemise niidi otsa rippuma (joon. 66, *b*). Kui aga tõmmata alumisest niidist aeglaselt, siis katkeb mitte alumine, vaid ülemine niit ja kera hakkab langema (joon. 66, *c*). See katse seletub järgmiselt. Kui alumist niiti järsult tõmmata, siis selle vastastikune mõju keraga kestab nii vähe aega, et kera kiirus «ei jõua» märgatavalt suureneda. Seetõttu on ka kera nihe väike. Niidi katkirebimiseks aga peaks kera nihe olema küllalt suur. Alumise niidi enda inertsus on väike: kui seda niiti rebida, siis selle alumise otsa kiirus ja nihe on küllalt suured, et niit katkeks. Kui aga tõmmata alumist niiti aeglaselt, siis selle vastastikune mõju keraga kestab kaua. Seetõttu jõuab kera saada küllalt suure kiiruse ja nihke, mis on küllaldane niigi pinguloleva ülemise niidi katkirebimiseks.

Kehade inertsuse teise näitena vaatleme ühte vana tsirkusenumbrit. Vaibal lamavale jõumehele asetatakse rinnale alasi (joon. 67). Seejärel hakkab tema assistent alasit vasaraga taguma. Jõumees talub mehiselt kõiki lööke, mis näivad pealtvaatajaile väga ohtlikena. Tegelikult jõumees neid lööke peaaegu ei tunnegi. Temale oleks ohtlik ainult alasi tunduv nihkumine, sest siis deformeeruks rinnakorv. Kuid alasi nihe on väike. Selle põhjuseks on vastastikuse mõju (löögi) väga väike kestus. Löögi kestel muutub vasara kiirus tunduvalt (vasar hüppab alasilt tagasi). Oma suure



Joon. 66



Joon. 67

inertsuse tõttu ei suuda aga alasi nii lühikese aja jooksul kuigi suurt kiirust omandada ja tema nihe jääb nii väikeseks, et see ei kahjusta jõumehe rinnakorvi. Seega peab jõumees suutma hoida oma rinnal ainult alasit — vasaralöögid sellele avaldavad muljet ainult pealtvaatajaile.

§ 30. KEHA MASS

Inertsus, mis on iseloomulik igale kehale, on üks tähtsamaid kehade omadusi, sest sellest sõltub, kuidas keha vastastikuse mõju tulemusena liigub.

Keha iga omadus väljendub mingi füüsikalise suuruse kaudu. Näiteks keha omadust võtta enda alla mingi ruumi osa väljendab ruumala. Keha tähtsat omadust — inertsust — väljendab samuti eriline suurus. Selleks suuruseks on *mass,* millega me tutvusime 7. klassis. Mida inertsem on keha, seda suurem on tema mass.

Nägime, et inertsemal kehal kulub rohkem aega selleks, et tema kiirus vastastikusel mõjumisel muutuks teatud suuruse võrra. Kui keha kiiruse muutmiseks kuluv aeg on suurem, siis tema kiirendus on väiksem. See tuleneb valemist

$$t = \frac{v - v_0}{a}.$$

Kui kaks keha mõjutavad teineteist, siis nendel kehadel on ühesugune mõjumisaeg. Seetõttu võime öelda, et kehal, mis saab suurema kiirenduse, on väiksem mass. Kui tähistada nende kehade massid tähtedega m_1 ja m_2 ning vastastikuse mõju tulemusena omandatud kiirendused vastavalt tähtedega a_1 ja a_2, siis

$$-\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}, \qquad (1)$$

s. t. kahe teineteist mõjutava keha kiirenduste suhe võrdub nende masside pöördsuhtega. Miinusmärk näitab, et kiirendused a_1 ja a_2

on vastassuunalised. Nägime, et teras- ja alumiiniumvankri kiirenduste suhe on $\frac{1}{3}$. See tähendab, et alumiiniumvankri mass moodustab $\frac{1}{3}$ terasvankri massist:

$$m_2 = \frac{1}{3} m_1.$$

Võrrandist (1) järeldub, et

$$m_2 = \left(-\frac{a_1}{a_2}\right) m_1.$$

Sellest võrdsusest näeme, et keha mass on määratud temaga vastastikku mõjuva keha (keha indeksiga 1) kiirenduse ja tema enda kiirenduse suhtega.

Keha massiks nimetatakse suurust, mis on määratud temaga vastastikku mõjuva keha kiirenduse ja selle keha enda kiirenduse suhtega.

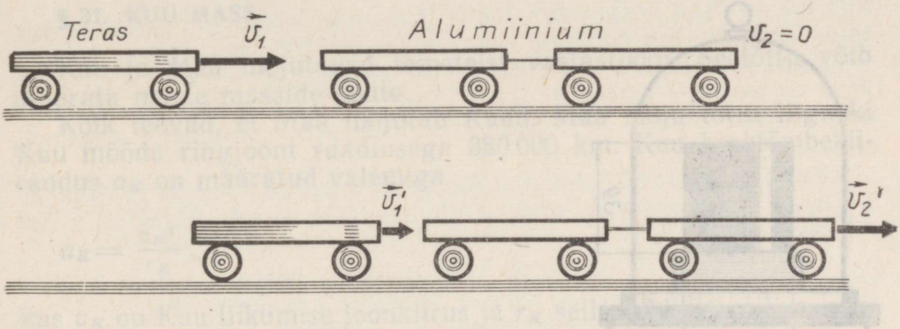
Nüüd on mõistetav, miks kahe teineteist mõjutava keha kiirenduste suhe on alati jääv. See suhe võrdub igasuguse vastastikuse mõju korral masside suhtega. Keha mass aga väljendab keha «seesmist» omadust (inertsust), mis ei sõltu vastastikusest mõjust ega keha liikumisest. Ükskõik mis selle kehaga ka ei toimuks, ükskõik kus see ka ei asuks ja kuidas ta ka ei liiguks — tema mass jääb alati ühesuguseks (seda muidugi juhul, kui kehale midagi juurde ei lisata ega mõnda tema osa ei eemaldata).

Relatiivsusteooria, millest oli juttu § 8, viib üllatavale järeldusele, et viimane väide ei olegi päris õige. Osutub, et kiiruse kasvades keha mass kasvab. Olgu mingi paigaloleva keha mass m_0. Kui keha liigub kiirusega v, siis tema mass ei ole enam m_0, vaid on

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_2}{c_2}}},$$

kus c on valguse kiirus. Seega keha mass suurenes. Kuid massi suurenemine saab märgatavaks ainult väga suurtel, valguse kiiruse lähedastel kiirustel. Seda ei või arvestamata jätta, kui kiirus on lähedane valguse kiirusele. Kuid tavalised kehad ei liigu kunagi sellise kiirusega. Maa tehiskaaslased ja kosmoselaevad on kõige kiiremad kehad, millega meil tuleb kohtuda. Nende kiirus aga ei ole senini ületanud 12 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$. Sellistel kiirustel võib massi lugeda konstantseks, kiirusest sõltumatuks.

Tutvume järgmise katse abil ühe massi huvitava omadusega (joon. 68). Ühendame omavahel kaks alumiiniumvankrikest ja vaatame, mis juhtub, kui need põrkavad kokku terasvankrikesega. Mõõtmised näitavad, et terasvankrikese kiirenduse ja kahe oma-



Joon. 68

vahel ühendatud alumiiniumvankrikese kiirenduse suhe on $\frac{2}{3}$. See tähendab, et kahe ühendatud vankrikese (neid võib vaadelda ühe kehana) mass on ühe sellise vankrikese massist kaks korda suurem: ühe vankrikese mass on ju $\frac{1}{3}$ ja kahe vankrikese mass $\frac{2}{3}$ terasvankrikese massist. **Kui kaks või mitu keha ühendada üheks kehaks, siis nende massid liituvad.**

Teeme nüüd kindlaks, kuidas väljendada kehade masse arvude abil. Mõõtes kahe teineteist mõjutava keha kiirenduste suhte, me leiame ju ainult nende kehade masside suhte, mitte aga neid masse endid. Kuidas siis määrata ühe keha massi?

Siin toimitakse samuti nagu teistegi suuruste väärtuste määramisel.

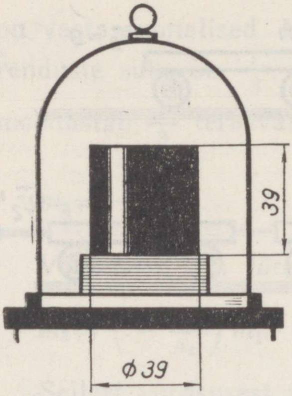
Kuidas leitakse näiteks kehade ruumalade väärtused? Selleks võrreldakse neid mingi ruumalaga, mis on võetud tinglikult ühikuks (1 m^3). Samuti määratakse masside väärtused. Selleks et mõõta masse ja väljendada neid arvudes, tuleb algul valida keha, mille mass võetakse siis massiühikuks. Sellist keha nimetatakse m a s s i e t a l o n i k s. Etaloni abil võime mõõta iga keha massi. Selleks tuleb korraldada katse, milles antud keha ja massietalon mingil viisil teineteist mõjutavad. Sel juhul saavad nad mõlemad — etalon ja keha — kiirenduse. Oletame, et uuritav keha sai kiirenduse a_1 ja etalon kiirenduse a_2. Nende kiirenduste suhe võrdub masside pöördsuhtega:

$$-\frac{a_2}{a_1}=\frac{m}{M},$$

kus m on uuritava keha mass ja M etaloni mass.

Kuna massietaloni mass võrdub meie kokkuleppe kohaselt massiühikuga, siis võib uuritava keha massi väljendada järgmiselt:

$$m=\left(-\frac{a_2}{a_1}\right)\cdot 1 \text{ massiühikut.}$$



Joon. 69

On täiesti ükskõik, milline keha võtta massietaloniks. Tuleb ainult kokku leppida, et see oleks üks ja sama kõikide maade jaoks. 1889. a. toimunud rahvusvahelisel kongressil võeti massietaloniks plaatina ja iriidiumi sulamist valmistatud silinder, mille diameeter ja kõrgus võrduvad 39 mm (joon. 69). Selle silindri mass ongi Rahvusvahelise Mõõtühikute Süsteemi massiühikuks. Seda massiühikut nimetatakse kilogrammiks (kg). Massietaloni hoitakse alal Rahvusvahelises Mõõtude ja Kaalude Büroos Prantsusmaal. Paljudes maades, sealjuures ka Nõukogude Liidus, on olemas selle etaloni täpsed koopiad.

1 liitri (1 dm^3) puhta vee mass võrdub küllalt täpselt 1 kilogrammiga.

Mass, samuti nagu pikkus ja aeg, kuulub SI- ja CGS-süsteemi põhisuuruste hulka. CGS-süsteemis on massiühikuks 0,001 kg. Seda ühikut nimetatakse grammiks (g).

Kui meil tuleb mõõta mingi keha massi, siis alati ei ole vaja lasta seda keha ja massietaloni vastastikku mõjuda ning mõõta keha ja etaloni kiirendust. Selline mõõtmisviis on praktikas ebamugav. Massi mõõdetakse enamikel juhtudel teisiti — kaalumise teel.

Kuid esineb ka selliseid juhte, kus massi mõõtmine teineteist mõjutavate kehade kiirenduste kaudu on ainsaks võimalikuks teeks. Kaalumist ei saa kasutada näiteks planeetide, tähtede ja teiste taevakehade massi määramisel. Kaalude abil ei saa mõõta ka väga väikseid masse, näiteks aatomite ja tema koostisse kuuluvate osakeste masse. Vaatame, kuidas määrata Maa loodusliku kaaslase — Kuu massi.

§ 31. KUU MASS

Kuu ja Maa mõjutavad teineteist vastastikku. Seetõttu võib määrata nende masside suhte.

Kõik teavad, et Maa mõjutab Kuud. Maa mõju tõttu liigubki Kuu mööda ringjoont raadiusega 380 000 km. Kuu kesktõmbekiirendus a_K on määratud valemiga

$$a_K = \frac{v_K^2}{r_K},$$

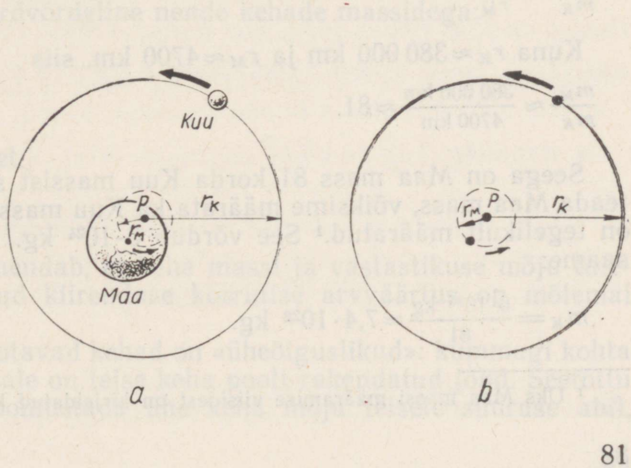
kus v_K on Kuu liikumise joonkiirus ja r_K selle orbiidi raadius, s. o. Kuu keskpunkti kaugus tema orbiidi keskpunktist.

Tavaliselt arvatakse, et Kuu tiirlemisel ümber Maa on Maa keskpunkt ka Kuu orbiidi keskpunktiks. Kui see nii oleks, siis satuksime vastuollu kehadevahelise vastastikuse mõju seadusega, sest selle põhjal liiguvad kiirendusega mõlemad teineteist mõjutavad kehad. Tegelikult mõjutab ka Kuu Maad ja annab sellele samuti kesktõmbekiirenduse. Astronoomilised vaatlused näitavad, et Kuu ei tiirle mitte ümber Maa keskpunkti, vaid ümber mingi punkti *P*, mis asub Maa keskpunktist 4700 km kaugusel (joon. 70, *a*). Sama punkti ümber tiirleb ka Maa keskpunkt (joon. 70, *b*). Maa ja Kuu tiirlevad ümber punkti *P* nii, nagu oleksid nad ühendatud jäiga varda abil, nad moodustavad nagu hantli. Kuu orbiidi raadius võrdub ligikaudu 380 000 km. Maa keskpunkt aga kujundab ringjoone raadiusega 4700 km. Kuu ja Maa teevad täistiiru ümber punkti *P* ligikaudu 27,5 ööpäevaga. Nende mõlema kesktõmbekiirendused on suunatud punkti *P* poole.

Seega on Maa ja Kuu kiirendused vastassuunalised, nagu see kahe keha vastastikuse mõju puhul peabki olema.

Maa keskpunkti liikumise kiirendus väljendub valemiga

$$a_M = \frac{v_M^2}{r_M},$$



Joon. 70

kus v_M on Maa keskpunkti joonkiirus selle liikumisel mööda ringjoont ja r_M selle ringjoone raadius ($r_M = 4700$ km).

Väikese täpsusega arvutustes ei pöörata tavaliselt tähelepanu Maa tiirlemisele ümber punkti P, sest Maa orbiidi raadius on väga väike (see on isegi Maa raadiusest väiksem ja punkt P on seega Maa sees).

Niisiis, mõlemad teineteist mõjutavad kehad — Kuu ja Maa — liiguvad kiirendustega, mida võib kasutada nende masside suhte arvutamiseks.

Paragrahvist 30 selgus, et kahe teineteist mõjutava keha kiirenduste suhe võrdub nende kehade masside pöördsuhtega.

Tähistades Maa massi m_M ja Kuu massi m_K, võime kirjutada:

$$\frac{a_K}{a_M} = \frac{m_M}{m_K}. \tag{1}$$

Selles võrduses on kiirenduste suhte eest ära jäetud miinusmärk, sest antud juhul huvitab meid ainult masside suhte arvväärtus.

Kuu ja Maa kesktõmbekiirendusi on kõige otstarbekam väljendada tiirlemisperioodi T kaudu.

Kesktõmbekiirendus väljendub teatavasti (lk. 58) valemiga

$$a = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Seetõttu

$$a_K = \frac{4\pi^2 r_K}{T^2}, \quad a_M = \frac{4\pi^2 r_M}{T^2}.$$

Pannes need avaldised valemisse (1), saame

$$\frac{m_M}{m_K} = \frac{r_K}{r_M}.$$

Kuna $r_K \approx 380\,000$ km ja $r_M \approx 4700$ km, siis

$$\frac{m_M}{m_K} \approx \frac{380\,000 \text{ km}}{4700 \text{ km}} \approx 81.$$

Seega on Maa mass 81 korda Kuu massist suurem. Kui oleks teada Maa mass, võiksime määrata ka Kuu massi. Kuid Maa mass on tegelikult määratud.[1] See võrdub $6 \cdot 10^{24}$ kg. Arvestades seda, saame:

$$m_K = \frac{6 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{81} \approx 7{,}4 \cdot 10^{22} \text{ kg}.$$

---

[1] Üks Maa massi määramise viisidest on kirjeldatud kuuendas peatükis.

Harjutus 15

1. Kaks kuuli liiguvad teineteise poole kiirustega $v_1=0,5\ \frac{m}{s}$ ja $v_2=-1,5\frac{m}{s}$. Pärast põrget hakkavad nad liikuma teineteisest eemale — esimene kiirusega $v'_1=-1\ \frac{m}{s}$ ja teine kiirusega $v'_2=0,5\ \frac{m}{s}$. Leida teise kuuli mass, kui esimese mass on 1 kg.
2. Vankrike liigub horisontaalpinnal kiirusega $50\frac{cm}{s}$. Temaga põrkab kokku teine vankrike, mis liigub samas suunas kiirusega $150\frac{cm}{s}$. Pärast kokkupõrkamist jätkavad mõlemad vankrikesed liikumist ühesuguse kiirusega, mis võrdub $100\frac{cm}{s}$. Leida nende vankrikeste masside suhe.

§ 32. JÕUD

Nüüd teame, et kahe keha vastastikusel mõjumisel saavad mõlemad kiirenduse, mille arvväärtus on pöördvõrdeline keha massiga. Tavaliselt aga huvitab meid mingi ühe keha liikumine ja meil «ei ole asja» sellega, et see keha on vastastikuses mõjutuses mingi teise kehaga. Vaadates näiteks langevat kivi, me teame, et kivi ja Maa mõjutavad teineteist vastastikku. Kuid meid huvitab ainult kivi, mitte aga Maa liikumine.

Ülesannetes, kus tuleb leida mingi keha kiirendus, on teise keha mõjule, mis seda kiirendust põhjustab, antud eriline nimetus — *jõud*. Selle asemel, et öelda: antud keha kiirenduse põhjustab tema vastastikune mõju teiste kehadega, öeldakse, et k i i r e n d u s e p õ h j u s t a b sellele k e h a l e r a k e n d a t u d j õ u d. Jõud võib olla suur või väike, jõud on füüsikaline suurus.

Kuidas väljendada jõu suurust arvuliselt?

Teame, et kahe teineteist mõjutava keha kiirenduste arvväärtuste suhe on pöördvõrdeline nende kehade massidega:

$$-\frac{a_1}{a_2}=\frac{m_2}{m_1}.$$

Siit järgneb, et

$$m_1a_1=-m_2a_2.$$

See võrdus tähendab, et keha massi ja vastastikuse mõju tulemusena omandatud kiirenduse korrutise arvväärtus on mõlemal kehal ühesugune.

Teineteist mõjutavad kehad on «üheõiguslikud»: kummagi kohta võib öelda, et temale on teise keha poolt rakendatud jõud. Seetõttu on loomulik iseloomustada ühe keha mõju teisele suuruse abil, mis on mõlema keha jaoks ühesugune. Selliseks suuruseks on *keha massi ja kiirenduse korrutis. See võetaksegi jõu arvväärtuseks.* Seega väljendub jõu arvväärtus F järgmise valemiga:

$$F = ma.$$

Kuna kiirendus on vektoriaalne suurus, siis on vektoriaalne suurus ka jõud.Seetõttu tuleb eelmine valem kirjutada vektoriaalsel kujul:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

On selge, et jõuvektor ja kiirendusvektor on ühesuunalised. Mass on ju skalaarne suurus. Vektori korrutamisel skalaariga saame tulemuseks samasuunalise vektori, muutub ainult selle pikkus.

Valemist $F=ma$ nähtub, millistes ühikutes mõõdetakse jõudu. Jõud võrdub ühikuga siis, kui ta kehale massiga üks massiühik annab kiirenduse üks kiirendusühik. SI-süsteemis mõõdetakse massi kilogrammides (kg) ja kiirendust meetrites sekundi ruudu kohta $\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)$. Seega, *SI-süsteemis on jõuühikuks jõud, mis annab kehale massiga* 1 kg *kiirenduse* $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Seda ühikut nimetatakse n j u u t o n i k s (N):

$$1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg} \cdot 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 1\,\frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Teame, et CGS-süsteemis on massiühikuks gramm (g) ja kiirenduse ühikuks sentimeeter sekundi ruudu kohta $\left(\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}\right)$. *CGS-süsteemis on jõuühikuks jõud, mis annab kehale massiga* 1 g *kiirenduse* $1\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}$. Seda ühikut nimetatakse d ü ü n i k s (dyn):

$$1\ \mathrm{dyn} = 1\ \mathrm{g} \cdot 1\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2} = 1\,\frac{\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}.$$

Nende jõuühikute vahelise seose võime kergesti leida:

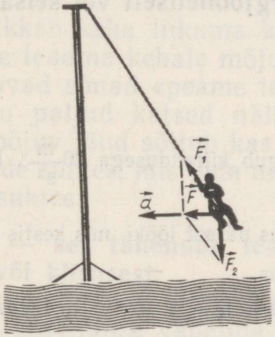
$$1\ \mathrm{N} = 1\,\frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \frac{10^3 \mathrm{g} \cdot 10^2\ \mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2} = 10^5\,\frac{\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2} = 10^5\ \mathrm{dyn}.$$

Paljudel juhtudel kasutatakse jõuühikuna veel k i l o g r a m m i. Erinevalt massiühikust 1 kg tähistatakse jõukilogrammi 1 kgf (vanemas kirjanduses 1 kG). Jõukilogramm[1] on jõud, mis annab kehale massiga 1 kg kiirenduse 9,81 $\frac{m}{s^2}$. Seetõttu.

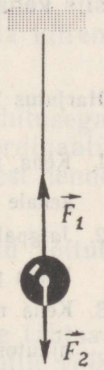
1 kgf = 9,81 N = 9,81 · 10[5] dyn.

Me kasutame edaspidi peamiselt SI-süsteemi ja väljendame jõu njuutonites.

Keha võib samaaegselt vastastikku mõjuda mitte ainult ühe, vaid ka mitme kehaga. Sel juhul mõjub kehale mitu jõudu. Kiirendus, mille keha kõikide nende jõudude mõjul omandab, võrdub kiirendusega, mille keha omandaks siis, kui temale mõjuks üksainus, nende jõudude vektoriaalse summaga võrdne jõud. Seetõttu nimetatakse seda summat kõikide kehale rakendatud jõudude *resultandiks*. Valemis $\vec{F}=m\vec{a}$ tuleb $\vec{F}$ all mõista kõikide kehale rakendatud jõudude resultanti. Vaatleme ühte näidet.



Joon. 71



Joon. 72

Joonisel 71 kujutatud pöörleval kiigel istuvale kiikujale mõjuvad üheaegselt kaks jõudu: Maa külgetõmbejõud $\vec{F_2}$, mis on suunatud vertikaalselt alla, ja nööri poolt rakendatud jõud $\vec{F_1}$, mis mõjub nööri sihis. Leiame rööpkülikureegli põhjal nende kahe jõu summa $\vec{F}$, mis ongi jõudude $\vec{F_1}$ ja $\vec{F_2}$ resultant. Jõud $\vec{F}$ annab kiikujale kiirenduse. Jooniselt nähtub, et see on suunatud ringi keskpunkti poole, nii nagu see ringjoonelisel liikumisel peabki olema. Kiikuja liigub selliselt, nagu talle ei mõjuks kaks jõudu $\vec{F_1}$ ja $\vec{F_2}$, vaid ainult üks — nende jõudude resultantjõud

$$\vec{F}=\vec{F_1}+\vec{F_2}.$$

---

[1] Jõukilogramm võrdub jõuga, millega Maa geograafilisel laiusel 45° ja merepinna kõrgusel tõmbab enda poole keha massiga 1 kg.

Erijuhul, kui kõikide kehale rakendatud jõudude vektoriaalne summa on null, võrdub ka kiirendus nulliga ja keha seisab paigal või liigub ühtlaselt sirgjooneliselt. Seda juhtu me pidasimegi silmas, kui rääkisime, et mitme keha mõjud antud kehale kompenseeruvad vastastikku. Kompenseerumine seisnebki selles, et jõud, millega need kehad mõjutavad antud keha, liituvad ja annavad nulliga võrduva resultantjõu. Kui näiteks kumminööri otsa riputatud kera seisab paigal (joon. 72), siis tähendab see, et Maa poolt kerale rakendatud jõud $\vec{F_2}$ on võrdne ja vastassuunaline jõuga $\vec{F_1}$, millega väljavenitatud kumminöör mõjutab kera:

$$\vec{F_1} = -\vec{F_2}.$$

Kasutades jõu mõistet, võib Newtoni esimese seaduse formuleerida teisiti.

Kui kehale rakendatud kõikide jõudude summa võrdub nulliga, siis keha liigub ühtlaselt sirgjooneliselt või seisab paigal.[1]

Harjutus 16

1. Keha, mille mass on 1,5 t, liigub kiirendusega $50\frac{m}{s^2}$. Kui suur jõud annab kehale selle kiirenduse?
2. Jalgpall massiga 700 g omandas pärast lööki, mis kestis 0,02 s, kiiruse $10\frac{m}{s}$. Leida pallile mõjuva jõu suurus.
3. Keha massiga 1 kg liigub kiirendusega $9,81\frac{m}{s^2}$. Leida kehale mõjuv jõud njuutonites, düünides ja jõukilogrammides.

§ 33. NEWTONI TEINE SEADUS

Eelmises paragrahvis toodud valem

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

annab jõu definitsiooni ja väljendab peale selle veel väga tähtsat, katsete põhjal kindlakstehtud fakti: kui mingi keha mõjutab teist keha, siis selle tulemuseks, s. t. jõu mõjumise tulemuseks ei ole mitte keha liikumise säilimine, tema kiiruse konstantseks jäämine, vaid liikumise muutumine, kiiruse muutumine.

[1] Tegelikult on see järeldus õige ainult masspunkti jaoks, sest keha võib ka pöörelda.

Isaac Newton
(1643—1727)

Jõu mõjul hakkab keha liikuma kiirendusega. Et seda kiirendust leida, peame teadma kehale mõjuvat jõudu.

Mida tähendavad sõnad «peame teadma jõudu»?

Maailm, nagu paljud katsed näitavad, on sellise ehitusega, et igale kehale mõjuv jõud sõltub kas tema asendist (koordinaatidest) nende kehade suhtes, mis teda mõjutavad, või kiirusest nende samade kehade suhtes.

Teada jõudu — see tähendab teada, kuidas see jõud sõltub koordinaatidest või kiirusest.

Seda sõltuvust väljendav valem saadakse katseliselt.

Jõu, massi ja kiirenduse vaheline seos väljendab ühte tähtsat mehhaanikaseadust — N e w t o n i t e i s t s e a d u s t, mille võib formuleerida järgmiselt:

kui kehale mõjuvad jõud, siis keha liigub kiirendusega, mille suurus ja suund trajektoori mistahes punktis on määratud selles punktis mõjuva resultantjõu ja keha massi suhtega.

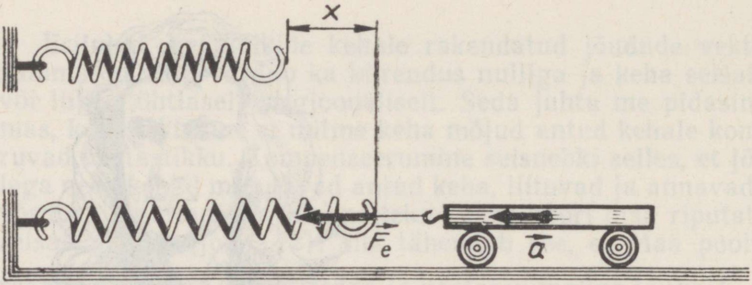
Võrrandit

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m},$$

mis seda seadust väljendab, nimetatakse sageli liikumisvõrrandiks.

Toome ühe näite, kuidas leida keha kiirendust, kui kehale mõjub meile tuntud jõud.

Liikugu vankrike väljavenitatud vedru elastsusjõu mõjul nii, nagu näidatud joonisel 73.



Joon. 73

Katseliselt on leitud, et vedru elastsusjõud F_e on võrdeline vedru pikenemisega x:

$$F_e = -kx$$

(miinusmärk näitab, et jõud ja pikenemine on vastassuunalised). Asetades jõu avaldise liikumisvõrrandisse

$$F = ma,$$

saame

$$-kx = ma.$$

Siit leiame kiirenduse, millega keha elastsusjõu mõjul liigub:

$$a = -\frac{kx}{m}.$$

Kiirenduse leidmine on viimaseks lüliks ahelas, mida mööda lahendub mehhaanika põhiülesanne: keha asukoha määramine mistahes ajahetkel tema algkoordinaatide ja algkiiruse järgi.

See ahel on järgmine: teades kehale mõjuvaid jõude ja keha massi, arvutatakse kiirendus, seejärel leitakse kiirus ja lõpuks nihe, s. t. keha koordinaadid, mistahes ajahetkel.

Teadlased, kes juhivad kosmoselaeva lendu, peavad teadma kosmoselaeva asendit igal ajahetkel ja nad leiavadki selle. Neil on teada kosmoselaeva algasend ja algkiirus (kosmoselaev on stardiväljakul, tema algkiirus on null). Neil on teada ka kosmoselaevale mõjuvad jõud. Need on Maa, Kuu, Päikese ja teiste taevakehade külgetõmbejõud ning jõud, mida arendab raketi mootor. Nende andmete põhjal võivad nad lahendada kosmoselaeva kohta mehhaanika põhiülesande.

Arvutamisel kasutatakse Newtoni teist seadust ja valemeid, mis näitavad, kuidas kosmoselaevale mõjuvad jõud sõltuvad koordinaatidest ja kiirusest. Need arvutused on keerukad, mõnikord isegi nii keerukad, et tuleb kasutada arvuteid.

Sageli vaadeldakse keha liikumist võrdlemisi väikeses ruumipiirkonnas, kusjuures selle keha kiiruse muutus ei ole suur. Neil tingimustel võivad mõnikord kehale mõjuvad jõud muutuda nii vähe, et neid võib arvutustes konstantseks lugeda. Sel juhul on mehhaanika põhiülesande lahendamine tunduvalt lihtsam. Selliseid juhte vaadeldaksegi füüsika koolikursuses.

Oleme korduvalt maininud, et mehhaanika põhiülesandeks on liikuva keha asendi määramine mistahes ajahetkel. Kuid ei tule arvata, et liikumisseadusi kasutatakse ainult selleks. Alati ei ole vaja määrata keha asendit. Praktikas tuleb sageli leida ka keha kiirus või kiirendus, kehale mõjuv jõud jne. Selliseid ülesandeid lahendatakse samuti Newtoni seaduste abil.

Märgime lõpetuseks, et **Newtoni teine seadus kehtib ainult inertsiaalsetes taustsüsteemides.**

Vaatleme nüüd, kuidas rakendada Newtoni seadusi meile juba tuntud liikumiste korral. Oletame lihtsuse mõttes, et liikumine on sirgjooneline. Valime ühe koordinaattelgedest, näiteks x-telje, nii et selle suund ühtib liikumise suunaga. Sel juhul on x ainsaks liikumise vältel muutuvaks koordinaadiks. Vaatleme kahte juhtu.

1. Olgu mingil hetkel, mida me nimetame alghetkeks (sellest alates loeme aega), keha koordinaat x_0 ja kiirus v_0. Kui kehale ei mõju jõude ehk, õigemini öeldes, kui sellele mõjub mitu jõudu, mille vektoriaalne summa on null, siis Newtoni esimese seaduse põhjal liigub keha ühtlaselt ja sirgjooneliselt kiirusega v_0, s. o. algkiirusega. Tema koordinaadi x mistahes ajahetkel t võime leida valemist

$$x = x_0 + v_0 t.$$

2. Vaatleme nüüd juhtu, kui kehale mõjub jõud. Oletame, et see jõud (või kehale mõjuva mitme jõu resultant) $\vec{F}$ muutub keha liikumisel nii vähe, et selle võib lugeda konstantseks, s. t. et see on trajektoori kõikides punktides ehk igal ajahetkel ühesugune.

Kui kehale mõjub jõud, siis ta peab liikuma kiirendusega, mille võime leida Newtoni teise seaduse põhjal:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Kuna jõud $\vec{F}$ on konstantne, siis on konstantne ka kiirendus $\vec{a}$, s. t. tema suurus ja suund ei muutu. Seega konstantse jõu mõjul liigub keha ühtlaselt muutuvalt sirgjoonelisel trajektooril. Nihke pikkus s väljendub sellisel liikumisel teatavasti valemiga:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Antud juhul liigub keha mööda x-telge. Seetõttu võisime vektorite $\vec{s}$, $\vec{v}_0$ ja $\vec{a}$ vahelise seose asendada skalaaride s, v_0 ja a vahelise seosega.

Keha liikus punktist, mille koordinaat on x_0, mingisse teise punkti, mille koordinaat on x. Seega keha nihe võrdub $x-x_0$ ja me võime kirjutada:

$$x-x_0=v_0t+\frac{at^2}{2}.$$

Kasutades seost

$$a=\frac{F}{m},$$

saame:

$$x-x_0=v_0t+\frac{Ft^2}{2m};$$

$$x=x_0+v_0t+\frac{Ft^2}{2m}.$$

Saime seose, mille põhjal võib arvutada keha koordinaadi x mistahes ajahetkel t.

Ülesanne. Rong, mille mass on 4000 t ja kiirus $36\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, alustab valgusfoori kohal pidurdamist. Pidurdumist põhjustav hõõrdejõud on konstantne ja võrdub $2\cdot10^5$ N. Kui kaugel valgusfoorist asub rong ühe minuti pärast?

L a h e n d u s. Seome taustsüsteemi valgusfooriga. Loeme rongi liikumise suuna positiivseks. Sel juhul tuleb jõu arvväärtuse ette kirjutada miinusmärk ($F=-2\cdot10^5$ N). Kui võtta koordinaatide alguseks valgusfoor, siis algkoordinaat x_0 võrdub nulliga. Rongi algkiirus on $10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\left(36\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$.

Pannes need andmed valemisse

$$x=x_0+v_0t+\frac{Ft^2}{2m},$$

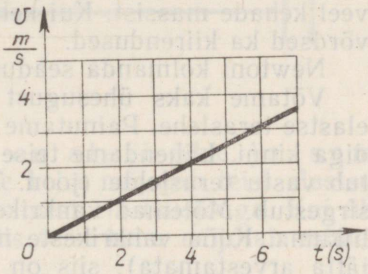
saame

$$x=10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot60\text{ s}+\frac{-2\cdot10^5\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2}\cdot(60\text{s})^2}{2\cdot4\cdot10^6\text{ kg}},$$

$$x=510\text{ m}.$$

Harjutus 17

1. Kuidas liigub keha konstantse jõu mõjul?
2. Keha liigub mingi jääva kiirusega. Kuidas hakkab keha liikuma pärast seda, kui talle rakendatakse kaks võrdse suurusega vastassuunalist jõudu?
3. Mida võib öelda keha kiirenduse kohta, kui sellele kehale on rakendatud jõud, mis kasvab võrdeliselt mõjumise ajaga?
4. Uisutaja, kelle mass on 50 kg, libiseb pärast hoovõtmist jääl ja läbib enne seismajäämist tee pikkusega 40 m. Pidurdav jõud 10 N on konstantne. Kui kaua kestis pidurdamine?
5. Tulirelva 1,8 m pikkusest rauast lendab välja mürsk massiga 16 kg. Püssirohugaaside rõhumisjõu võib lugeda konstantseks ja see võrdub $1{,}6 \cdot 10^6$ N. Määrata mürsu kiirus rauast väljalendamise hetkel.
6. Veoauto jääb pidurdamisel seisma 3 sekundiga ja läbib seejuures tee pikkusega 15 m. Leida auto algkiirus ja pidurdav jõud, kui auto mass on 2000 kg.



Joon. 74

Joonisel 74 on kujutatud keha kiiruse graafik. Leida kehale mõjuv jõud, kui keha mass on 500 kg.

8. Tööline tõukab horisontaalsel teel 0,2-tonnist vagonetti kiirendusega $80 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$. Leida vagonetile mõjuv hõõrdejõud, kui tööline rakendab vagonetile jõudu 300 N.
9. Autobuss asub autobussijaamast 2 km kaugusel ja liigub kiirusega $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Sellest hetkest hakkab bussi kiirus ühtlaselt kasvama. Kui kaugel jaamast on autobuss 2 minutit pärast kiireneva liikumise algust, kui kiirendust põhjustav jõud on 500 N ja autobussi mass 5 t?

§ 34. NEWTONI KOLMAS SEADUS

Kui kaks keha teineteist mõjutavad, siis nende kiirenduste arvväärtuste suhe võrdub nende masside pöördsuhtega:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Kiirendused on vektoriaalsed suurused. Seetõttu võime selle võrduse põhjal kirjutada:

$$m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2.$$

Kuid keha massi ja kiirenduse korrutis on jõud. See võrdus näitab, et jõud, millega kehad mõjutavad teineteist, on suuruselt võrdsed ja vastassuunalised. $m_1\vec{a}_1$ ja $m_2\vec{a}_2$ on ju esimesele ja teisele kehale mõjuvad jõud.

Kaks keha mõjutavad teineteist suuruselt võrdsete ja vastassuunaliste jõududega.

See on *Newtoni kolmas seadus*. Newtoni kolmandast seadusest nähtub, et jõud tekivad alati paaridena. Kui mingile kehale mõjub jõud, siis võib kindel olla, et mingile teisele kehale mõjub täpselt niisama suur, kuid vastassuunaline jõud.

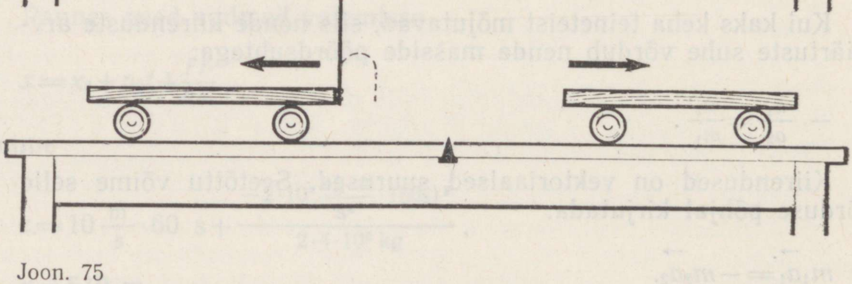
Mõlemad jõud annavad kehadele, millele nad on rakendatud, kiirenduse. Ehkki need jõud on suuruselt võrdsed, ei tarvitse võrdsed olla nende poolt põhjustatud kiirendused, sest need sõltuvad veel kehade massist. Kui kehade massid ei ole võrdsed, siis ei ole võrdsed ka kiirendused.

Newtoni kolmanda seaduse mõtet selgitab järgmine katse.

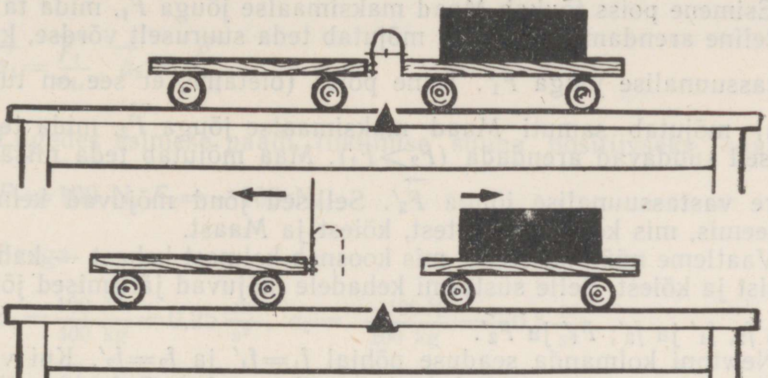
Võtame kaks ühesugust vankrikest ja kinnitame ühe külge elastse teraslehe. Painutame teraslehe kõveraks ja seome selle niidiga kinni. Lähendame teise vankrikese esimesele, nii et see puutub vastu teraslehte (joon. 75), ja põletame niidi läbi. Terasleht sirgestub. Mõlemad vankrikesed saavad kiirendused ja hakkavad liikuma. Kuna vankrikeste massid on võrdsed (vedru massi võib jätta arvestamata), siis on võrdsed ka nende kiirendused. Seda võime järeldada vankrikeste poolt läbitud teede võrdsusest.

Kui asetada ühele vankrikesele mingi koormus (joon. 76), siis teed, mille vankrikesed pärast vedru sirgestumist läbivad, ei ole enam võrdsed.

Selles näites, samuti nagu igas teiseski, võib märgata veel ühte tähtsat kahe vastastikuse mõju tulemusena tekkivate jõudude



Joon. 75



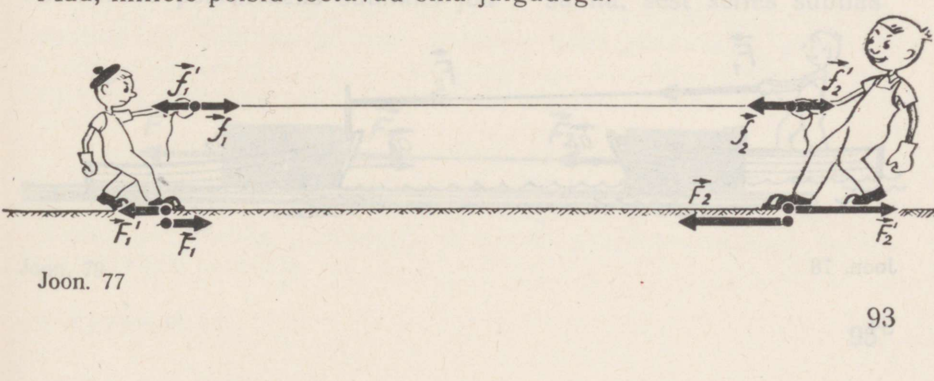
Joon. 76

omadust: need kaks jõudu on alati ühe ja sama olemusega. Kui näiteks esimene keha mõjutab teist elastsusjõuga, siis ka teine keha mõjutab esimest elastsusjõuga. Kui ühte keha mõjutab teine hõõrdejõuga, siis teist keha mõjutab esimene samuti hõõrdejõuga.

Tuleb alati meeles pidada, et kehadevahelise vastastikuse mõju tulemusena tekkivad jõud on küll suuruselt võrdsed ja vastassuunalised, kuid nad ei tasakaalusta teineteist, sest nad on rakendatud eri kehadele.

Teineteist tasakaalustada võivad ainult ühele ja samale kehale rakendatud jõud.

Teise näitena vaatleme köievedu, millest võtavad osa kaks poissi (joon. 77). Köis mõjutab poisse suuruselt võrdsete ja vastassuunaliste jõududega. Olgu need jõud $\vec{f}_1$ ja $\vec{f}_2$. Võistlejad omakorda mõjutavad köit jõududega $\vec{f}_1'$ ja $\vec{f}_2'$, mis on samuti võrdsed ja vastassuunalised. Kuid üks võistlejatest siiski võidab köieveo. See on nii sellepärast, et mängust võtab osa veel üks keha — Maa, millele poisid toetuvad oma jalgadega.



Joon. 77

Esimene poiss tõukab Maad maksimaalse jõuga $\vec{F_1}$, mida ta on suuteline arendama. Maa aga mõjutab teda suuruselt võrdse, kuid vastassuunalise jõuga $\vec{F_1'}$. Teine poiss (oletame, et see on tugevam) mõjutab samuti Maad maksimaalse jõuga $\vec{F_2}$, mida tema lihased suudavad arendada ($F_2 > F_1$). Maa mõjutab teda niisama suure vastassuunalise jõuga $\vec{F_2'}$. Sellised jõud mõjuvad kehade süsteemis, mis koosneb poistest, köiest ja Maast.

Vaatleme nüüd süsteemi, mis koosneb kolmest kehast — kahest poisist ja köiest. Selle süsteemi kehadele mõjuvad järgmised jõud: $\vec{f_1}$ ja $\vec{f_2}$; $\vec{f_1'}$ ja $\vec{f_2'}$; $\vec{F_1'}$ ja $\vec{F_2'}$.

Newtoni kolmanda seaduse põhjal $f_1 = f_1'$ ja $f_2 = f_2'$. Kui vaadelda poisse ja köit eraldi kehadena, siis nendes võrdustes esinevad jõud ei saa teineteist tasakaalustada. Kui aga vaadelda kolme keha ühe kehana, siis need jõud tasakaalustuvad.

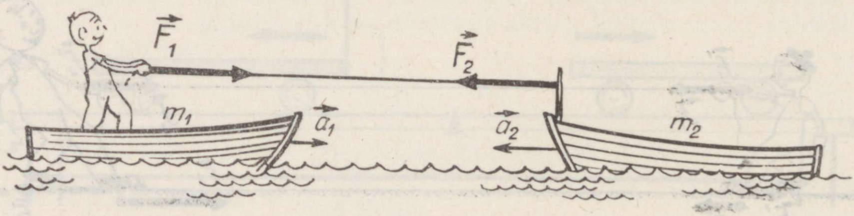
On ilmne, et $F_2' > F_1'$. Seetõttu saab kogu süsteem (mõlemad poisid ja köis) kiirenduse ja hakkab liikuma suurema jõu $\vec{F_2'}$ suunas. Seega tõmbab tugevam poiss nõrgema enda poole.

Jõud $\vec{F_1}$ ja $\vec{F_2}$ on rakendatud Maale. Kuna $F_2 > F_1$, siis nende jõudude resultant peab andma Maale mingi kiirenduse. Maa suure massi tõttu on see kiirendus väga väike.

Ülesanne 1. Poiss seisab paadis ja tõmbab teist paati nöörist enda poole (joon. 78). Esimese paadi ja poisi kogumass on 400 kg ja teise paadi mass 200 kg. Kui pika tee läbib kumbki paat 5 sekundiga, kui pinguloleva nööri elastsusjõud on 100 N? Hõõrdejõu võib jätta arvestamata ja vett võib vaadelda paigalseisvana.

L a h e n d u s. Newtoni kolmanda seaduse põhjal mõjutavad paadid teineteist väärtuselt võrdsete, kuid vastassuunaliste jõududega. Seetõttu liiguvad nad teineteise poole. Seega võime kirjutada:

$$\vec{F_1} = m_1\vec{a_1}, \quad \vec{F_2} = m_2\vec{a_2}$$



Joon. 78

ehk

$$\vec{a}_1=\frac{\vec{F}_1}{m_1},\ \vec{a}_2=\frac{\vec{F}_2}{m_2}.$$

Lugedes esimese paadi liikumise suuna positiivseks, saame:

$F_1=100$ N, $F_2=-100$ N.

Seega

$$a_1=\frac{100\ \text{N}}{400\ \text{kg}}=0{,}25\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2},\ a_2=\frac{-100\ \text{N}}{200\ \text{kg}}=-0{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Kasutades ühtlaselt muutuva sirgjoonelise liikumise teepikkuse valemit, saame

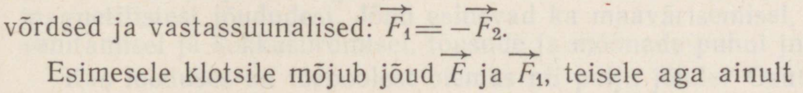
$$s_1=\frac{a_1t^2}{2}=\frac{0{,}25\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 25\ \text{s}^2}{2}=3{,}125\ \text{m},$$

$$s_2=\frac{a_2t^2}{2}=\frac{-0{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 25\ \text{s}^2}{2}=-6{,}25\ \text{m}.$$

Ülesanne 2. Siledal horisontaalsel pinnal asub kaks klotsi, mis on omavahel ühendatud niidiga (joon. 79). Esimese klotsi mass on 0,5 kg, teise mass 1,5 kg. Esimest klotsi tõmmatakse jõuga 8 N vasakule. Leidke jõud, millega niit mõjutab teist klotsi. Hõõrdumise võib jätta arvestamata.

L a h e n d u s. Vastavalt Newtoni kolmandale seadusele on jõud, millega klotsid teineteist niidi kaudu mõjutavad, suuruselt võrdsed ja vastassuunalised: $\vec{F}_1=-\vec{F}_2$.

Esimesele klotsile mõjub jõud $\vec{F}$ ja $\vec{F}_1$, teisele aga ainult jõud $\vec{F}_2$. Valime positiivseks suunaks jõu $\vec{F}$ suuna, sest selles suunas



Joon. 79

liigub kogu kehade süsteem. Sel juhul on $F_1<0$, $F_2>0$ ja $a>0$. Rakendame mõlemale klotsile Newtoni teist seadust:

$$F+F_1=m_1a,$$

$$F_2=m_2a.$$

Lahendame selle võrrandisüsteemi. Võttes arvesse, et $F_1=-F_2$, saame

$$F_2=\frac{m_2F}{m_1+m_2},\quad F_2=\frac{1{,}5\ \text{kg}\cdot 8\ \text{N}}{2\ \text{kg}}=6\ \text{N}.$$

M ä r k u s. Kõikidel juhtudel, kui liigub omavahel seotud kehade süsteem, rakendatakse Newtoni teist seadust süsteemi iga keha kohta eraldi.

Harjutus 18

1. Kaks poissi veavad köit teine teisest otsast, kumbki jõuga 500 N. Kas köis katkeb, kui ta kannatab tõmmet kuni 800 N?
2. Kui suure jõuga tõmbab enda poole Maad kivi massiga 10 kg?
3. Miks tõstja suudab tõstekangi üles tõsta, ehkki käed mõjuvad kangile ja kang kätele võrdsete ja vastassuunaliste jõududega?
4. Kaks poissi, kelle massid on 40 kg ja 60 kg, seisavad uiskudel. Esimene poiss tõukab teist jõuga 10 N. Kui suurte kiirendustega hakkavad poisid liikuma? Kui suur on esimese poisi kiirendus teise suhtes?

5. peatükk. JÕUD LOODUSES

§ 35. SISSEJUHATUS

Vastavalt Newtoni teisele seadusele on kehade liikumise muutumise, s. o. kiirenduse tekkimise põhjuseks jõud. Jõud tekib aga siis, kui kehale mõjub teine keha või üheaegselt mitu keha. Kuid mida tähendab see veidi mõistatuslik sõna «mõjub»? Millised vastastikuse mõju liigid on olemas ja kas neid on palju?

Esimesel pilgul võib näida, et jõudude liike on väga palju. Kehale võib anda kiirenduse, tõugates või tõmmates seda käega. Kiirendusega liigub iga Maale langev keha. Kiirendusega liiguvad planeedid ümber Päikese, samuti Maa tehiskaaslased ja Kuu ümber Maa. Kiirenduse saab laev, mille purjedesse puhub tuul. Lastes lahti pinguletõmmatud vibunööri, anname noolele kiirenduse. Paigalt ärasõitmisel annab mootor autole positiivse kiirenduse. Kui aga vajutada piduripedaalile või lülitada välja mootor, siis liigub ta negatiivse kiirendusega. Kõikidel neil juhtudel mõjuvad kehale jõud ja need näivad olevat täiesti erinevad. Kuid me võime nimetada veel teisi jõude. Igaüks meist on kuulnud elektrilistest ja magnetilistest jõududest. Jõud esinevad ka maavärisemisel, vedru venitamisel ja kokkusurumisel, tõusude ja mõõnade puhul jne.

Kas looduses on tõepoolest olemas nii palju jõude? Osutub, et ei ole.

Nagu eespool märgitud, tuleb kehade mehhaanilise liikumise vaatlemisel kohtuda kõigest k o l m e liiki jõududega: *elastsusjõuga, hõõrdejõuga* ja *gravitatsioonijõuga.* Nendele jõududele, mis on meile tuttavad juba 7. klassist, taanduvad kõik ülalloetletud jõud.

Kuid ka need kolm jõudu — elastsusjõud, hõõrdejõud ja gravitatsioonijõud — taanduvad ainult kahele põhilisele, teineteisest tõepoolest erinevale jõule — *elektromagnetilisele jõule* ja *gravitatsioonijõule.* Nende jõududega ja nende avaldusvormidega tutvumegi selles peatükis.

§ 36. ELEKTROMAGNETILISED JÕUD

8. klassi kursusest on teada, et elektriseeritud kehade vahel mõjuvad jõud, mida nimetatakse *elektrilisteks jõududeks*.

Elektrilised jõud võivad teatavasti olla kas tõmbe- või tõukejõud. Looduses on olemas kahte liiki elektrilaenguid. Kokkuleppeliselt nimetatakse neid positiivseteks ja negatiivseteks. Kaks samanimelise laenguga keha tõukuvad, erinimelise laenguga kehad aga tõmbuvad.

Elektrilise jõu suurus sõltub laengute suurusest ja laetud kehade vahelisest kaugusest: ta on seda suurem, mida suuremad on laengud ja mida väiksem on nendevaheline kaugus.

Elektrilistel jõududel on huvitav omadus. Kui laengud liiguvad, siis tekivad laengute vahel peale elektriliste jõudude veel *magnetilised jõud*.

Elektriline ja magnetiline jõud on omavahel nii tihedalt seotud, et neid ei saa teineteisest eraldada: nad mõjuvad ju üheaegselt. Kuna meil tuleb enamasti kohtuda liikuvate laengutega, siis ei saa nendevahelisi jõude nimetada ei elektrilisteks ega magnetilisteks. Neid nimetatakse *elektromagnetilisteks jõududeks*.

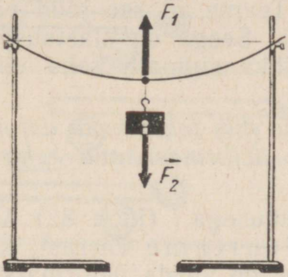
Kust siis võetakse see mõistatuslik elektrilaeng, mis kehal võib olla ja võib ka mitte olla?

8. klassi kursusest on teada, et iga keha koosneb aatomitest. Ehkki aatom on väga väike (läbimõõt mõni sajamiljondik millimeetrit), koosneb ta ise veel väiksematest osakestest — aatomituumast ja elektronidest. Tuumadel ja elektronidel ongi elektrilaeng — tuumadel positiivne, elektronidel negatiivne.

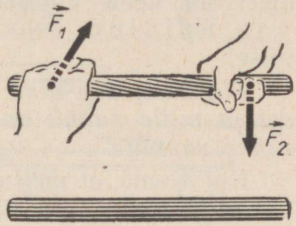
Normaaltingimustel on aatomis nii palju elektrone, et kogu nende negatiivne laeng võrdub täpselt tuuma positiivse laenguga. Seega on aatom tervikuna elektriliselt neutraalne. Sellistest neutraalsetest aatomitest koosnevad kehad on samuti elektriliselt neutraalsed. Neutraalsete kehade vahel ei mõju elektrilisi jõude.

Kuid on olemas lihtsad viisid elektrilise tasakaalu rikkumiseks. Elektrone võib väikesel hulgal teatud osalt aatomitelt «lahti rebida» ja kehast eemaldada. Sel juhul saab keha positiivse laengu. Kui aga kehale lisada teatud hulk elektrone, siis omandab ta negatiivse laengu. Selle tulemusena saavadki kehad omaduse mõjutada üksteist elektriliselt.

Tavaliselt on eri liiki laengud kehades nii hästi tasakaalustatud, et erinevate kehade laengud üksteist ei mõjuta. Kuid ühe ja sama keha naaberaatomid asuvad üksteisele nii lähedal, et nende vahel mõjuvad jõud. Tahketes kehades on need jõud väga suured. Jõudude suurus sõltub aatomite vastastikusest asendist, s. o. aatomitevahelisest kaugusest. See sõltuvus on väga keerukas ja seda ei ole teaduses seniajani õnnestunud täpselt määrata.



Joon. 80



Joon. 81

Kuid siiski on usaldusväärselt kindlaks tehtud, et need jõud võivad aatomitevaheliste kauguste muutmisel muuta oma suunda. Kui aatomid asuvad üksteisest küllalt kaugel, siis nad tõmbuvad. Kui neid aga üksteisele küllaldaselt lähendada, siis nad tõukuvad.

Kui aatomitevaheline kaugus omab teatud keskmist väärtust, siis on tõmbe- ja tõukejõud tasakaalus. Tahke keha aatomid asuvadki üksteisest just sellistel kaugustel. Need kaugused on väikesed ja mõõtuvad sajamiljondikes sentimeetrites (10^{-8} cm).

Kui aga muuta kas või veidigi aatomitevahelist kaugust, siis saab üks neist jõududest ülekaalu. Kui näiteks keha venitada, siis aatomitevahelised kaugused suurenevad. Tõmbejõud muutuvad tõukejõududest suuremaks, aatomid saavad tasakaaluasendi poole suunatud kiirenduse ja lähenevad esialgsele asendile. Kui keha kokku suruda ja sellega aatomeid üksteisele lähendada, saavad ülekaalu tõukejõud. Nende mõjul aatomid eemalduvad üksteisest ja liiguvad endistesse kohtadesse tagasi. **Keha venitamisel või kokkusurumisel tekivad temas jõud, mis püüavad keha algmõõtmeid taastada.**

Need jõud on *elastsusjõud,* mis etendavad meid ümbritsevas maailmas väga tähtsat osa.

Elastsusjõud tekivad ka keha painutamisel (joon. 80) ja väänamisel (joon. 81), sest ka neil juhtudel muutub aatomite vastastikune asend.

§ 37. ELASTSUSJÕUD

Nagu me äsja nägime, tekib keha venitamisel, kokkusurumisel, painutamisel ja väänamisel elektrilise päritoluga jõud, mis püüab keha algolekusse tagasi viia. Seda jõudu nimetatakse *elastsusjõuks.*

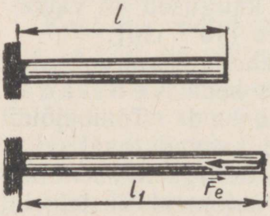
Keha mõõtmete või kuju muutust nimetatakse *deformatsiooniks,* venitatud või kokkusurutud keha ennast aga *deformeerituks.*

Milline on elastsusjõu suund? Teame, et see jõud viib deformeeritud keha algolekusse tagasi. Seega on elastsusjõu suund vastupidine keha osakeste nihke suunale keha deformeerimisel.

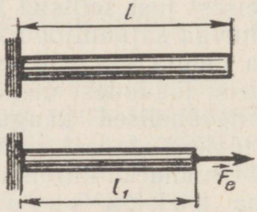
Elastsusjõuks nimetatakse jõudu, mis tekib keha deformeerimisel ja mille suund on vastupidine deformeeritava keha osakeste nihke suunale.

Kujutleme, et meil on varras pikkusega l (joon. 82). Varda üks ots olgu kinnitatud liikumatult. Venitame varrast, kuni tema pikkus on l_1. Nagu jooniselt näeme, on varda deformatsioon suunatud paremale, sest et selles suunas nihkus varda ots. Seega deformatsiooni tulemusena tekkinud elastsusjõud $\overrightarrow{F_e}$ on suunatud vasakule. See jõud annab varda osakestele kiirenduse ja varras läheb algolekusse tagasi.

Kui aga varras algpikkusega l kokku suruda väiksema pikkuseni l_1 (joon. 83), siis elastsusjõud $\overrightarrow{F_e}$ muutub vastupidiseks. Elastsusjõu suund on deformatsiooni suunale vastupidine.

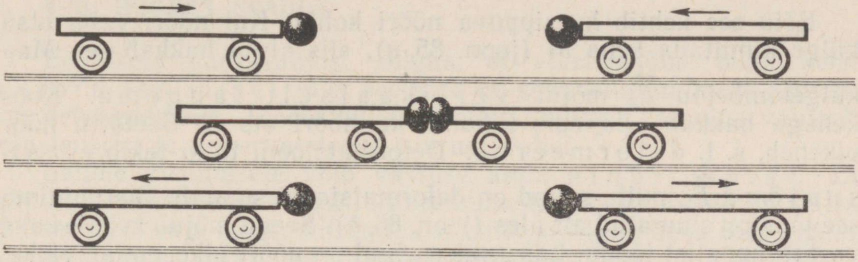


Joon. 82



Joon. 83

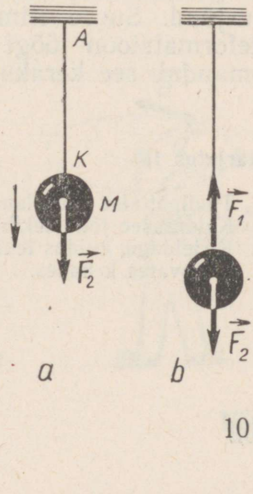
Kuidas siis deformatsioon tekib? Võtame kaks vankrikest, mille ette on kinnitatud pehmest kummist pallid (joon. 84). Paneme vankrikesed teineteise poole liikuma, nii et nad kokku põrkavad. Kokkupuutumisel muudavad pallid oma kuju — nad deformeeruvad. Samal ajal hakkavad mõlema vankrikese kiirused järk-järgult vähenema. Lõpuks vankrikesed peatuvad hetkeks ja hakkavad siis liikuma vastupidistes suundades, omandades uuesti kiirenduse. Kiirenduse tekkimise põhjuseks on elastsusjõud, mis tekib pallide deformatsiooni tõttu. Deformatsioon aga tekkis sellepärast, et pallid liikusid pärast kokkupuudet veel teatud aja endises suunas, kuni deformatsiooni tulemusena tekkinud elastsusjõud nad peatas. Pärast seda deformeeritud pallide kuju taastus ja pallid panid vankrikesed liikuma vastupidistes suundades. Kui pallide kuju oli taastunud, kadus ka elastsusjõud. Seega võib öelda, et palli deformatsiooni põhjuseks oli tema ühe osa liikumine teise suhtes, deformatsiooni tulemuseks aga elastsusjõu tekkimine. Sellest ja paljudest teistest katsetest võime järeldada, et **kokkupuutuvate kehade deformatsiooni tulemusena tekkiv elastsusjõud on kokkupuutepinnaga risti.**



Joon. 84

Kui asendame kummipallid teraskuulidega ja kordame katset, saame samasuguse tulemuse. Vankrikesed põrkavad kokku, peatuvad hetkeks ja jätkavad liikumist vastupidises suunas. Kuid palja silmaga me kuulikese kuju muutumist ei märka. See ei tähenda veel, et deformatsioon puudub. Tegelikult käituvad teraskuulidega vankrikesed täpselt samuti nagu kummipallidega vankrikesed. Teraskuulide deformatsioon on aga nii väike, et ilma eriliste riistadeta on seda võimatu vaadelda.

Sageli jääb märkamatuks mitte ainult deformatsioon, vaid ka liikumine, mille tulemusena deformatsioon tekib. Kui vaatame näiteks raamatut laual, siis me muidugi ei näe, et raamat ja laud on veidi deformeeritud. Kuid just laua silmale märkamatu deformatsioon kutsub esile elastsusjõu, mis on suunatud vertikaalselt üles ja mis t a s a k a a l u s t a b raamatule mõjuva Maa külgetõmbejõu. Seetõttu seisabki raamat paigal. Kuidas see jõud tekib? Kui asetame raamatu lauale, siis hakkab see Maa külgetõmbejõu tõttu vertikaalselt alla liikuma. Seejuures nihutab ta osakesi, millest koosneb raamatuga kokkupuutev laua osa. Laud deformeerub. Tekib vertikaalselt üles suunatud elastsusjõud, mis võrdub Maa külgetõmbejõuga.



Joon. 85 a b

Kõik see kehtib ka rippuva nööri kohta. Kui nööri vaba otsa külge kinnitada keha *M* (joon. 85, *a*), siis algul hakkab see Maa külgetõmbejõu $\vec{F_2}$ mõjul vertikaalselt langema. Koos kehaga hakkab allapoole liikuma ka nööri ots *K*. Seetõttu nöör pikeneb, s. t. deformeerub. Deformatsiooni tõttu tekib elastsusjõud $\vec{F_1}$, mille suund on deformatsiooni suunale vastupidine: see jõud on suunatud alt üles (joon. 85, *b*). Seega mõjub kehale kaks vastassuunalist jõudu. Langemise algul on nööri pikenemine väike. Seetõttu on väike ka elastsusjõud. Mida enam keha langeb ja nöör pikeneb, seda suuremaks muutub elastsusjõud. Nööri otsa riputatud keha jääb seisma siis, kui elastsusjõu ja Maa külgetõmbejõu arvväärtused on täpselt võrdsed. Kui nöör *AK* on valmistatud pehmest kummist, siis on selle pikenemine nähtav ka palja silmaga. Terastraadi pikenemist aga võib kindlaks teha ainult eriliste mõõteriistadega.

Toetuspinna või riputusvahendi elastsusjõudu nimetatakse sageli *toereaktsiooniks*.

Joon. 86

Paljudel juhtudel on elastsusjõude põhjustavad deformatsioonid hästi nähtavad. Hästi märgatav on näiteks inimese või loomade lihastelühenemine. Selle tulemusena tekib nn. *lihasejõud*, mis on samuti elastsusjõud. Lihasejõud tekib lihase deformatsiooni tulemusena. Pingutamata ehk deformeerimata lihas ei ole võimeline tekitama mingit jõudu. Ka vedru deformeerumine on kergesti nähtav. Vedru venitamisel ja kokkusurumisel tekib elastsusjõud. Suure filmimissageduse korral on näha isegi jalgpalli deformatsioon löögi ajal. Joonisel 86 on näidatud, millise kuju omandab see kerakujuline keha löögi momendil.

Harjutus 19.

1. Tindipotialus asub laual. Milline jõud tasakaalustab sellele mõjuva raskusjõu? Kuidas see jõud tekib?
2. Kirjeldage, kuidas tekib deformatsioon niidi otsa riputatud või mingile alusele toetuvates kehades.

§ 38. HOOKE'I SEADUS

Eelmisest paragrahvist selgus, et elastsusjõud tekib keha d e f o r m e e r i m i s e l ja et see jõud on seda suurem, mida suurem on deformatsioon. Teeme nüüd kindlaks, milline sõltuvus valitseb elastsusjõu ja deformatsiooni suuruse vahel.

Sellele küsimusele võib vastuse anda a i n u l t k a t s e. Et jõud on defineeritud massi ja kiirenduse korrutisena, siis on selles katses meil vaja mõõta kiirendus a, millega liigub keha massiga m elastsusjõu F_e mõjul. Seega tuleb meil deformeeritud keha külge, näiteks väljavenitatud kumminööri või vedru külge, kinnitada keha massiga m ja leida kiirendus a, millega see keha hakkab liikuma. Mõõtes keha kiirenduse kumminööri mitmesuguste pikenemiste korral, saame kiirenduse sõltuvuse pikenemisest ehk deformatsioonist. Kasutades jõu definitsiooni

$$F=ma,$$

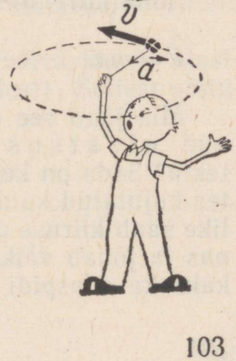
leiame seejärel elastsusjõu sõltuvuse deformatsioonist.

Vaatleme nüüd, kuidas seda katset kõige lihtsamalt korraldada. Paljudest etteantud kiirendusega liikumise juhtudest on kõige lihtsamini realiseeritav ühtlane ringjooneline liikumine. Keha kiirenduseks on sel juhul kesktõmbekiirendus, mis on suunatud ringi keskpunkti poole ja mille arvväärtus väljendub valemiga

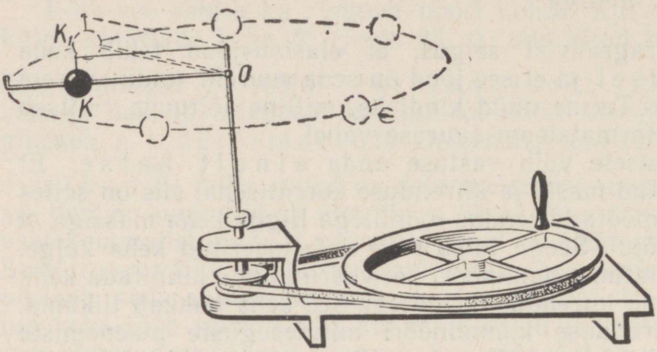
$$a=\frac{v^2}{r}.$$

Seega tuleb meil katseliselt uurida väljavenitatud niidi või vedru küljes asuva keha ringjoonelist liikumist. Paljud õpilased on korduvalt korraldanud joonisel 87 kujutatud katse. Kuid kindlasti vähesed neist on mõõtnud nööri pikenemise keha ringjoonelisel liikumisel.

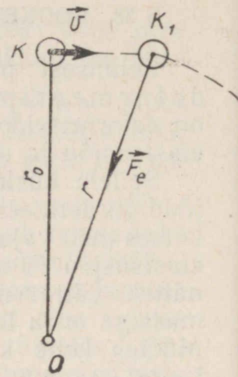
Selle katse võib korraldada ka veidi teisiti — nii, et saaksime kergesti mõõta liikuva keha kiiruse ja kumminööri pikenemise.



Joon. 87



Joon. 88



Joon. 89

Katse skeem on kujutatud joonisel 88. Kinnitame kumminööri ühe otsa külge kuulikese, mille mass *m* on teada. Kumminööri teise otsa kinnitame vertikaalse telje külge. Telg on kinnitatud rihmarattale, mille võib panna pöörlema.

Selleks et kuulike ei hakkaks langema, on temasse puuritud auk, millesse on pistetud sile poleeritud varras. Varda üks ots on kinnitatud telje külge. Kuulike võib libiseda mööda varrast väga väikese hõõrdumisega. Paneme rihmaratta pöörlema. Seejuures hakkab pöörlema ka varras koos kuulikese ja kumminööriga.

Pöörlemisel nihkub kuulike piki varrast ja kumminöör p i k e n e b. Kui varras seisab paigal, siis kuulike on asendis K. Pöörleval vardal on aga kuulike asendis K_1.

Mida kiiremini telg pöörleb, seda enam kaugeneb temast kuulike. Tähistame kuulikese trajektoori raadiuse tähega r ja nööri algpikkuse tähega r_0. Siis $r-r_0=x$ on nööri pikenemine.

Kuulike liigub mööda ringjoont kiirendusega

$$a=\frac{v^2}{r}.$$

Selle kiirenduse annab talle jõud

$$F=ma.$$

Mis jõud see on? See on ilmselt nööri deformeerumisel tekkinud e l a s t s u s j õ u d. Kuid kuidas siis nööri deformatsioon tekib? Seda on kerge mõista joonise 89 põhjal, millel on pealtvaates kujutatud kuulike ja nöör. Kui telg hakkab pöörlema, siis kuulike saab kiiruse v, mis on nööriga risti. Kuulike liigub selles suunas ja jõuab väikese ajavahemiku jooksul punkti K_1. Kuulike jätkaks ka edaspidi liikumist selles suunas. Kuid koos kuulikesega liigub ka kumminööri ots, mille külge ta on kinnitatud. Seega nöör pikeneb: kolmnurga OKK_1 hüpotenuus OK_1 on ju kaatetist OK pikem.

Niisiis, nööri deformatsioon tekkis seetõttu, et kuulikesele anti kiirus $\vec{v}$. Liikuv kuulike ise põhjustas nööri pikenemise. Selle pikenemise tulemusena tekkis elastsusjõud $\vec{F_e}$, mis mõjub nööri sihis ja on pikenemisega vastassuunaline. See jõud annabki kuulikesele kesktõmbekiirenduse. Kuulikese kiiruse arvväärtus jääb samasuguseks, nagu see oli liikumise algul. Nüüd ei ole enam raske leida, kuidas elastsusjõud sõltub deformatsiooni suurusest, antud juhul nööri pikenemisest.

Selleks tuleb mõõta nööri pikenemine kuulikese erinevatel kiirustel. Kui varras koos kuulikesega pöörleb erinevate kiirustega, siis kuulikese kiirendus a, nööri pikenemine ning järelikult ka elastsusjõud F_e omandavad erinevad väärtused. Mõõtes iga kord nööri pikkuse r ja kuulikese kiiruse v, jõuame saadud tulemuste põhjal järeldusele, et nööri pikenemine x on võrdeline kesktõmbekiirendusega $\frac{v^2}{r}$. Elastsusjõud avaldub Newtoni teise seaduse põhjal järgmiselt:

$$F_e = ma = \frac{mv^2}{r}.$$

Siit järeldub, et elastsusjõud on võrdeline nööri pikenemisega $x = r - r_0$.

See kehtib ka siis, kui elastsusjõud ei pane keha liikuma mööda ringjoont. Kõikidel juhtudel, kui deformatsiooni tulemusena tekib elastsusjõud, on see võrdeline deformatsiooni suurusega. Ei ole oluline, kas deformeerub kumminöör, terasvedru või mistahes muu keha — elastsusjõu kohta kehtib alati järgmine lihtne valem:

$$F_e = -kx.$$

See valem väljendab Hooke'i seadust: **elastsusjõud on võrdeline keha deformatsiooniga.** Miinusmärk näitab, et elastsusjõu suund on vastupidine keha punktide nihke suunale.

Nii võib katseliselt määrata ühe looduses esineva jõu — elastsusjõu — sõltuvuse keha asendist (koordinaatidest). Sellest sõltuvusest oligi meil juttu lk-l 88.

§ 39. ELASTSUSJÕUD JA NEWTONI TEINE SEADUS

Neljandas peatükis oli juttu, et kui kehale mõjuv jõud F ei ole teada, siis võrrandist

$$F=ma$$

ei saa keha liikumise kiirendust määrata.

On vaja teada veel valemit, mis näitab, kuidas jõud sõltub keha asendist (koordinaatidest) või kiirusest. Hooke'i seadust väljendav valem $F=-kx$ ongi selliseks valemiks juhul, kui keha liigub elastsusjõu mõjul. Sellest valemist nähtub, et elastsusjõud kuulub niisuguste jõudude hulka, mis ei sõltu kiirusest, vaid sõltub ainult koordinaatidest. Lahendades võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} F=ma \\ F=-kx, \end{cases}$$

leiame keha kiirenduse:

$$a=-\frac{kx}{m}.$$

Kuid teades kiirendust, algkoordinaati ja algkiirust, võib leida, kuidas keha kiirus ja nihe sõltuvad ajast.

Võrdetegur Hooke'i seaduse avaldises on tähistatud tähega k. Seda võrdetegurit nimetatakse elastse keha *jäikuseks*. Jäikuse poolest erinevadki elastsed kehad üksteisest: ühtedel kehadel on see suur, teistel väike. On ilmne, et üks ja seesama elastsusjõud tekib suure jäikusega kehas väikese deformatsiooni korral, väikese jäikusega kehas aga suure deformatsiooni korral. Nagu nägime, on väikese jäikusega kummipallide kokkupõrkamisel deformatsioon palja silmaga märgatav. Jäikade teraskuulide kokkupõrkamisel esinev deformatsioon on aga nii väike, et me seda palja silmaga ei näegi.

Kui panna kumminööri otsa seotud keha tiirlema, siis ei ole raske näha, et kumminöör venib. Kui aga asendada kumminöör terastraadiga, siis on pikenemist raske märgata, sest see on väga väike.

Hooke'i seadusest järeldub, et jäikus on määratud valemiga

$$k=-\frac{F_e}{x}.$$

On ilmne, et SI-süsteemis väljendub jäikus njuutonites meetri kohta $\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)$ ja CGS-süsteemis düünides sentimeetri kohta $\left(\frac{\mathrm{dyn}}{\mathrm{cm}}\right)$.

Hooke'i seadus kehtib ainult juhtudel, kui deformatsioonid ei ole väga suured. Igale kehale on omane mingi kindel deformatsiooni piir, mille ületamisel elastsusjõud ei ole enam võrdeline deformatsiooniga. Pärast selle piiri saavutamist kasvab elastsusjõud deformatsiooni suurenemisel aeglasemalt, kui seda näeb ette Hooke'i seadus. Deformatsiooni edasisel kasvamisel keha (näiteks nöör või vedru) katkeb.

Ülesanne 1. Kumminööri otsa, mille pikkus $l=50$ cm, on kinnitatud kivi massiga $m=40$ g. Kui keha pandi tiirlema sagedusega $60\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{min}}\left(\nu=1\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{s}}\right)$, pikenes nöör $x=10$ cm võrra. Leida nööri jäikus.

Lahendus. Kumminööri jäikuse leiame valemist

$$k=-\frac{F_e}{x}.$$

(Loeme nööri pikenemise suuna positiivseks. Sel juhul väljenduvad elastsusjõud ja kesktõmbekiirendus negatiivsete arvudena.)

Elastsusjõud annab ringjoonel liikuvale kivile kiirenduse $\frac{v^2}{r}$.

Seega

$$F_e=-\frac{mv^2}{r}=-\frac{mv^2}{l+x}.$$

Võttes arvesse, et

$$v=2\pi r\nu=2\pi(l+x)\nu,$$

saame:

$$k=\frac{4\pi^2 m(l+x)^2\nu^2}{x(l+x)}=\frac{4\pi^2 m(l+x)\nu^2}{x};$$

$$k=\frac{4\cdot 3{,}14^2\cdot 0{,}04\ \mathrm{kg}\cdot 0{,}6\ \mathrm{m}\cdot 1\frac{1}{\mathrm{s}^2}}{0{,}1\ \mathrm{m}}\approx 9{,}6\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}.$$

Ülesanne 2. Terastraadi pikkus $l=50$ cm ja selle otsa on kinnitatud kuul massiga 100 g. Leida traadi pikenemine, kui kuulikest tiirutatakse sagedusega $60\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{min}}\left(\nu=1\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{s}}\right)$. Traadi jäikus on $10\,000\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$.

Lahendus. Nööri pikenemine on määratud Hooke'i seadusega

$$x=-\frac{F_e}{k}.$$

Samuti nagu eelmises ülesandes kehtivad siin võrdused

$$F_e = -\frac{mv^2}{l+x} \text{ ja } v = 2\pi r\nu = 2\pi(l+x)\nu.$$

Seega

$$x = -\frac{F_e}{k} = \frac{m(2\pi r\nu)^2}{k(l+x)} = \frac{4\pi^2 m(l+x)\nu^2}{k}.$$

Antud juhul on traadi jäikus suur. Seetõttu on pikenemine x (võrreldes traadi pikkusega l) väga väike ja me võime jätta ta võrduse paremal poolel arvestamata. Seega võime kirjutada:

$$x \approx \frac{4\pi^2 ml\nu^2}{k}.$$

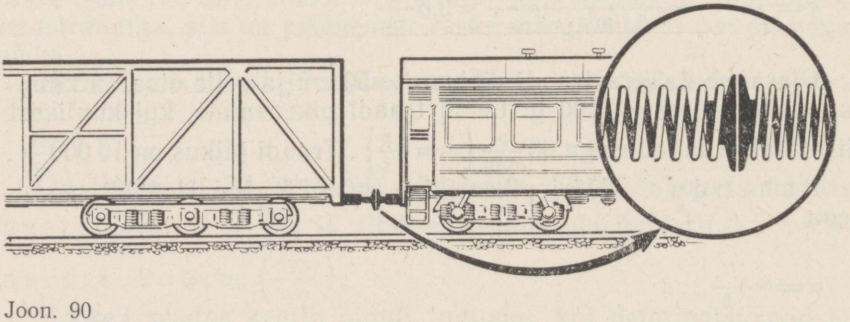
Asetades sellesse valemisse arvväärtused, saame:

$$x \approx \frac{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 0{,}1 \text{ kg} \cdot 0{,}5 \text{ m}}{10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}}} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0{,}2 \text{ mm}.$$

Osutus, et pikenemine on tõepoolest väike.

Harjutus 20

1. Üks vedru pikeneb jõu 3000 N mõjul 6 cm võrra ja teine vedru jõu 1000 N mõjul 2 cm võrra. Kumma vedru jäikus on suurem?
2. Keha massiga 50 g, mis on kinnitatud 30 cm pikkuse vedru otsa, tiirleb horisontaaltasapinnas. Kui suur peab olema pöörete arv minutis, et vedru pikeneks 5 cm võrra? Vedru jäikus on $300 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.
3 Kahe vaguni kokkupõrkamisel lühenesid nende puhvrivedrud nii, nagu see on näidatud joonisel 90. Kumma vedru jäikus oli suurem?



Joon. 90

§ 40. JÕU MÕÕTMINE. DÜNAMOMEETER

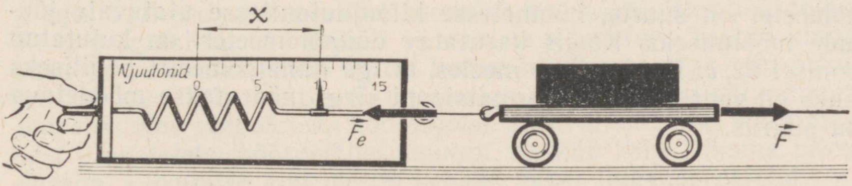
Kasutades katseliselt tuletatud Hooke'i seadust, võib lihtsalt ja mugavalt mõõta kehale rakendatud jõu, ilma et meil tarvitseks mõõta kiirendust, mille keha selle jõu mõjul omandas. Et mõõta mingit jõudu, tuleb see rakendada elastsele kehale, mille jäikus on teada. Kõige lihtsam on selleks kasutada silindrilist spiraalvedru (joon. 91). Vedru üks ots kinnitatakse liikumatult. Teise, vaba otsa külge kinnitatakse keha, millele mõjub jõud F. See keha ja koos sellega ka vedru ots saab kiirenduse ja nihkub. Nihke x teatud kindlal väärtusel võrdub elastsusjõud F_e mõõdetava jõuga F ja pärast seda, kui vedru on teinud mõne võnke, vedru edasine deformeerumine lakkab. Nüüd seisab vedru koos kehaga paigal. Mõõtes vedru pikenemise x, võime valemi

$$F_e = -kx$$

põhjal leida elastsusjõu. Vedru jäikus k peab muidugi olema teada (joonisel 91 on vedru pikenemine $x=2$ cm ja elastsusjõud $F_e = -10$ N). Mõõdetav jõud F erineb elastsusjõust ainult märgi poolest:

$$F = -F_e = kx.$$

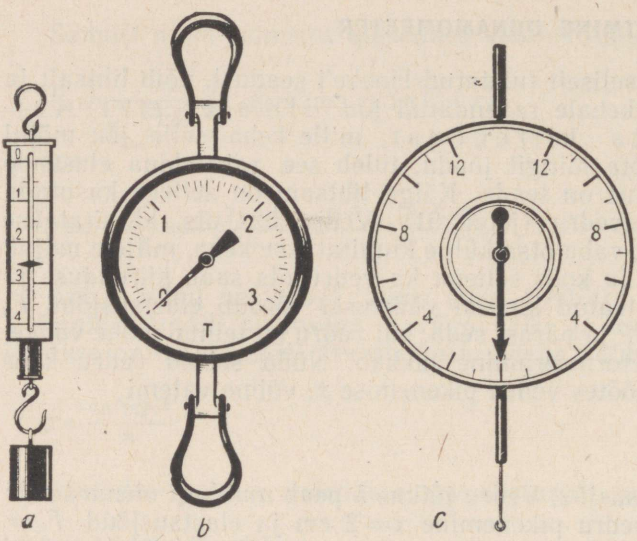
Niisiis, selle asemel et mõõta meid huvitav jõud F, mõõdame tegelikult seda jõudu tasakaalustava elastsusjõu.



Joon. 91

Jõu mõõtmiseks kasutatavat riista, mis on kujutatud joonisel 91, nimetatakse *dünamomeetriks*. Dünamomeetrite hulka kuuluvad näiteks koduses majapidamises kasutatavad vedrukaalud. Neid kasutatakse kehale mõjuva Maa külgetõmbejõu määramiseks.

Maa külgetõmbejõu mõjul hakkab keha langema ja tõmbab endaga kaasa ka vedru vaba otsa. Vedru pikeneb seni, kuni pikenemise tulemusena tekkinud elastsusjõud tasakaalustab Maa külgetõmbejõu. Vedru pikenemist näitab vedrukaalu osuti. Selle pikenemisega aga on võrdeline mõõdetav jõud — kehale mõjuv Maa külgetõmbejõud. Dünamomeetri skaala gradueeritakse mitte pikkusühikutes, vaid jõuühikutes.



Joon. 92

Seega võib vedrukaaludega (joon. 92, *a*) mõõta kehale mõjuvat Maa külgetõmbejõudu, ilma et meil oleks vaja mõõta kiirendust, millega keha langeb. Tavaliselt gradueeritakse dünamomeetrid njuutonites. Vanemad dünamomeetrid aga on gradueeritud jõukilogrammides või grammides. Sõltuvalt dünamomeetri otstarbest võib nende ehitus olla küllalt erinev. Joonisel 92, *b* kujutatud dünamomeeter on suurte, kümnetesse kilonjuutonitesse ulatuvate jõudude mõõtmiseks. Koolis kasutatav dünamomeeter on kujutatud joonisel 92, *c*. Kuid peame meeles, et iga dünamomeetri põhiliseks osaks on vedru, mille deformatsiooni järgi määratakse mõõdetava jõu suurus.

§ 41. HÕÕRDEJÕUD

Elektriliste jõudude teiseks avaldusvormiks on hõõrdejõud. See jõud tekib alati, kui mingi keha liigub teise keha suhtes ja puutub sellega kokku. Hõõrdejõu tõttu jääb iga liikuv keha lõpuks seisma, kui seda liikumist ei hoia alal mingi teine jõud, näiteks elastsusjõud või gravitatsioonijõud. Hõõrdejõu mõjul omandab keha n e g a t i i v s e kiirenduse (kui k i i r u s e s u u n d on loetud p o s i t i i v s e k s). Mõõtes selle kiirenduse a ja teades keha massi m, võib valemist

$$F_h = ma$$

arvutada hõõrdejõu F_h.

Hõõrdejõud ei mõju risti keha pinnaga nagu elastsusjõud, vaid piki kehade kokkupuutepinda — selle pinna puutuja sihis.

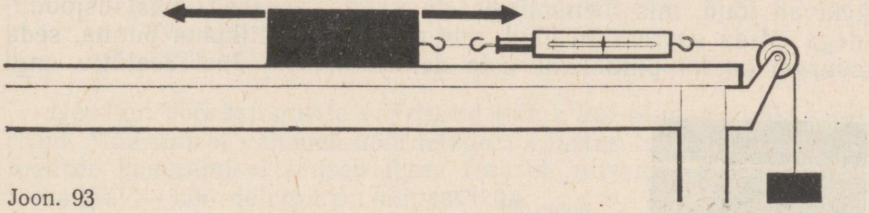
Hõõrdumine on üks kehadevahelise vastastikuse mõju liike. Hõõrdumise, samuti nagu kõikide teiste vastastikuse mõju liikide kohta kehtib Newtoni kolmas seadus. Kui üks keha mõjutab teist hõõrdejõuga, siis ka teine keha mõjutab esimest niisama suure, kuid vastassuunalise hõõrdejõuga.

Kokkupuutuvate kehade suhtelisel liikumisel tekkiv hõõrdejõud, nn. *liugehõõrdejõud*, takistab alati seda suhtelist liikumist.

Kuid hõõrdejõud ei mõju ainult liikuvate kehade vahel. Ta võib mõjuda kokkupuutuvate kehade vahel ka siis, kui need teineteise suhtes seisavad. Proovime näiteks nihutada rasket alusel seisvat eset (joon. 93). Selleks kinnitame eseme külge dünamomeetri ja dünamomeetri külge niidi. Niidi viime üle ploki ja riputame selle otsa koormuse. Algul kasutame koormusena väikest vihti. Dünamomeetri osuti nihkub, s. t. ta mõjutab keha elastsusjõuga. Kuid keha ei liikunud paigast. See tähendab, et peale elastsusjõu F_e mõjub kehale veel üks jõud, mis on sellega võrdse arvväärtusega ja vastassuunaline. Seda jõudu nimetatakse *paigaloleku hõõrdejõuks* (joonisel F_h). Nende kahe jõu koosmõju tulemusena jääbki keha paigale. Kinnitame nüüd niidi külge suurema vihi. Dünamomeetri osuti nihkub küll kaugemale, kuid keha jääb ikkagi paigale. Seega ka paigaloleku hõõrdejõud suurenes ja omandas uuesti kehale mõjuva elastsusjõuga võrdse väärtuse. See ongi paigaloleku hõõrdejõu põhiline omadus. **Paigaloleku hõõrdejõud on alati võrdne ja vastassuunaline kehale piki kokkupuutepinda rakendatud välisjõuga.** Välisjõu suurenemisel suureneb ka paigaloleku hõõrdejõud. Kuid paigaloleku hõõrdejõud ei suurene lõpmatult. Teatud kindlal välisjõu väärtusel (meie näites teatud kindla massiga vihi puhul) hakkab keha liikuma. Seega on olemas mingi suurim võimalik ehk *maksimaalne paigaloleku hõõrdejõud.* Kui välisjõud on maksimaalsest paigaloleku hõõrdejõust suurem, hakkab keha liikuma kiirendusega. Liikumise ajal mõjub kehade vahel liugehõõrdejõud.

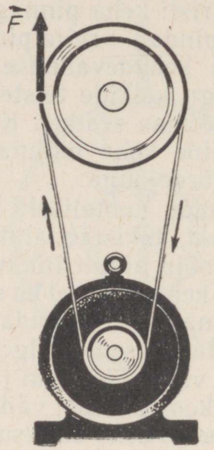
Liugehõõrdejõud on ligikaudu võrdne maksimaalse paigaloleku hõõrdejõuga.

Liugehõõrdejõud annabki kehale negatiivse kiirenduse ja aeglustab keha liikumist.



Joon. 93

Joon. 94



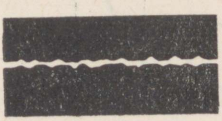
Joon. 95

Paigaloleku hõõrdejõud takistab teatavasti liikumise tekkimist: tema olemasolu tõttu ei omanda keha mingi muu jõu, näiteks elastsusjõu mõjul kiirendust. Kuid paigaloleku hõõrdumine võib olla ka liikumise tekkimise põhjuseks. Näiteks tallale rakendatud paigaloleku hõõrdejõud $\vec{F}$ annab käijale kiirenduse (joon. 94). Tallad ju ei libise maapinnal tagasi. Seega taldade ja Maa vaheline hõõrdumine on paigaloleku hõõrdumine. Kui tallad libiseksid, oleks käimine võimatu. Jõud $\vec{F}_1$ annab aga Maale kiirenduse. Ka autode ja teiste iseliikuvate sõidukite veorattad nagu tõukuksid maapinna antud kohast eemale. Veoratastele mõjuv tõukejõud ongi paigaloleku hõõrdejõud.

Jõud $\vec{F}$, mis annab rihmaratta pöiale kiirenduse (joon. 95), on jällegi paigaloleku hõõrdejõud (hõõrdejõud, millega veorihm mõjutab rihmaratast).

Hõõrdejõudude tekkimine on seotud kokkupuutuvate kehade pindadel toimuvate nähtustega.

Kokkupuutepinnad, ükskõik kui siledad need ka ei paistaks olevat, on tegelikult alati konarlikud: nendes on kühmud ja lohud, mis on mikroskoobi abil hästi nähtavad (joon. 96). Kui püüame keha teise keha pinnal nihutada, siis need lugematud kühmud deformeeruvad: tekivad jõud, mis tõenäoliselt on väga sarnased elastsusjõududega. Mida suurem on jõud, mis püüab keha liikuma panna, seda suurem on ka pinnakonaruste deformatsioon. Just seetõttu ongi


Joon. 96

paigaloleku hõõrdejõud alati võrdne välisjõuga. Kui algab libisemine, siis kühmukesed kehade pindadel purunevad. Nende asemele tekivad uued konarused, mis samuti purunevad jne. Sellega seletubki tööpindade kulumine.

Nagu katsed näitavad, sõltub liugehõõrdejõud ja seega ka maksimaalne paigaloleku hõõrdejõud jõust, mis surub pinnad teineteise vastu. See jõud on kokkupuutepinnaga risti ja seda nimetatakse *normaalrõhumiseks*. Näiteks joonisel 91 kujutatud juhul on normaalrõhumiseks kehale mõjuv Maa külgetõmbejõud. Hõõrdejõud on võrdeline normaalrõhumisega. Kui tähistada normaalrõhumine tähega F_N, siis võime kirjutada:

$$F_h = \mu F_N.$$

Kordajat μ (kreeka täht «müü») nimetatakse *hõõrdeteguriks*. Mida suurem on hõõrdetegur, seda suurem on ka hõõrdejõud. Hõõrdetegur on nimeta arv, sest ta võrdub kahe jõu suhtega:

$$\mu = \frac{F_h}{F_N}.$$

Hõõrdetegur on tavaliselt ühest väiksem arv, sest et hõõrdejõud on enamasti normaalrõhumisest väiksem. Hõõrdetegur sõltub kokkupuutuvate kehade materjalist, pindade töötlusest, nende puhtusest jne. Kuid hõõrdetegur ei sõltu kokkupuutepinna suurusest ega kehade asendist teineteise suhtes, seda muidugi juhul, kui pinnad kogu kehade ulatuses on ühesugused. Näiteks uisu ja jää vaheline hõõrdetegur on ühesugune kogu tee ulatuses. Selle poolest erinebki hõõrdejõud elastsusjõust, mis sõltub just kehade vastastikusest asendist. Liugehõõrdejõud sõltub töötavate pindade liikumiskiirusest teineteise suhtes, sest et kiiruse suuna muutumisel muutub ka hõõrdejõu suund. Kuid hõõrdejõu arvväärtus kiirusest peaaegu ei sõltu.

Mõnede materjalide hõõrdetegurid on toodud järgmises tabelis.

Materjalid	Hõõrdetegur
Puit puidul	0,25
Kummi betoonil	0,75
Teras betoonil	0,30
Teras jääl	0,04
Teras terasel	0,20

Need on hõõrdetegurite väärtused juhul, kui pinnad ei ole määritud. Määrimisel väheneb hõõrdeteguri väärtus tunduvalt. Näiteks määrde kasutamisel libiseb teras terasel niisama kergelt nagu teras jääl — hõõrdetegur on kõigest 0,04.

Mõnedel juhtudel võib hõõrdetegur olla ka ühest suurem. Siis on hõõrdejõud suurem kui normaalrõhumine. Niisugune juht esineb näiteks siis, kui kokkupuutuvad kehad on ühest ja samast materjalist (klaas — klaas, vask — vask) ja kui nende pinnad on hästi puhastatud ning poleeritud. Kaks sellist keha võivad teineteisega nii tugevasti liituda, et ühe keha nihutamiseks teise suhtes tuleb rakendada väga suurt jõudu. Selle põhjuseks on asjaolu, et väga siledate ja puhaste pindade puhul on erinevate kehade aatomid üksteisele nii lähedal, et need kehad moodustavad nagu ühe keha.

Kahe kokkupuutuva tahke keha vahelist hõõrdumist nimetatakse *kuivhõõrdumiseks*. Kuivhõõrdejõu arvväärtus sõltub väga vähe kokkupuutuvate kehade suhtelisest kiirusest. Kuivhõõrdejõu sõltuvus kiirusest seisneb selles, et kiiruse suuna muutumisel muutub ka selle jõu suund.

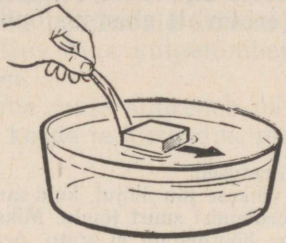
Harjutus 21

1. Klotsi veetakse ühtlaselt selle külge seotud niidi abil horisontaalsel pinnal.. Milline jõud tasakaalustab niidi elastsusjõu?
2. Poiss tõukab raamatukappi maksimaalse jõuga, mida ta on suuteline arendama, kuid raamatukapp jääb paigale (ei liigu kiirendusega). Kas see ei ole vastuolus Newtoni teise seadusega?
3. Milline jõud tuleb rakendada horisontaalsel pinnal asuvale kehale, et see nihkuks paigalt?
4. Puitklotsi massiga 20 kg veetakse ühtlaselt puitpõrandal. Kui suur on veojõud?
5. Kestval töötamisel on hobuse lihasejõud keskmiselt 600 N. Kui suurt koormat võib hobune vedada reega, mille mass on 100 kg? Reejalaste ja lume vaheline hõõrdetegur on 0,05?
6. Vertikaalse telje ümber pöörleva ketta äärel asub kuup. Millisel pöörlemissagedusel lendab kuup kettalt minema? Kuubi ja ketta vaheline hõõrdetegur on 0,2, ketta diameeter on 40 cm.

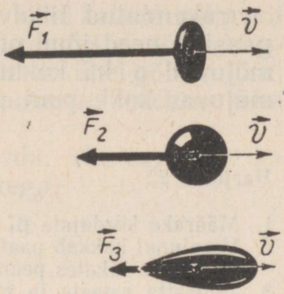
§ 42. VEDELIKUS VÕI GAASIS LIIKUVALE KEHALE MÕJUV TAKISTUSJÕUD

Takistusjõud tekib mitte ainult kokkupuutuvate tahkete kehade vahel, vaid ka keha liikumisel vedelikus või gaasis. Kuid sel juhul paigaloleku hõõrdejõud puudub. See tähendab, et vedelikus või gaasis võib ükskõik kui väike jõud panna keha liikuma, s. o. anda temale kiirenduse.

Paigaloleku hõõrdejõu puudumist vedelikus võib demonstreerida järgmise katsega. Paneme laia veega täidetud vanni puitklotsi (joon. 97). Klotsi võib panna liikuma väga väikese jõuga: piisab, kui sellele puhuda või seda paberiribaga tõugata. Kui aga sama klots asub laual, siis, nagu me nägime, võib teda liikuma



Joon. 97



Joon. 98

panna ainult küllalt suur jõud, mis on suurem maksimaalsest paigaloleku hõõrdejõust.

Paljud meist teavad oma kogemustest, et asudes parvel, võib selle kergesti kaldast eemale tõugata. Kuid täiesti võimatu on sel teel liikuma panna kuival maal asuvat parve. Vedelikud ja gaasid avaldavad kehale takistusjõudu ainult siis, kui keha nende suhtes l i i g u b, kusjuures see jõud on samuti nagu kuivhõõrdumise puhul liikumisele v a s t a s s u u n a l i n e. Kuid erinevalt kuivhõõrdejõust sõltub vedelike ja gaaside takistusjõud kiirusest. Väikestel kiirustel on takistusjõud ligikaudu võrdeline kiirusega v:

$$F = -\beta_1 v.$$

Suurtel kiirustel sõltub takistusjõud veelgi suuremal määral kiirusest — ta on võrdeline kiiruse ruuduga:

$$F = -\beta_2 v^2.$$

Kordajad β_1 ja β_2 sõltuvad oluliselt keha kujust. Võrdleme näiteks takistusjõude, mis mõjuvad joonisel 98 kujutatud kehadele, kui need liiguvad vedelikus või gaasis. Kõikide nende kehade ristlõike pindalad on võrdsed. Samuti on võrdsed nende kiirused, kuid takistusjõud on erinevad. Katse näitab, et kõige suurem takistusjõud mõjub tasasele kettale. Kerale mõjub väiksem jõud ja tilgakujulisele kehale veelgi väiksem takistusjõud.

Sellise keha geomeetrilist kuju, millele mõjub vedelikus või gaasis liikumisel väike takistusjõud, nimetatakse *voolujooneliseks kujuks*. Tilgakujuline keha on voolujooneline. Lennukitele, autodele ja teistele suure kiirusega liikuvatele transpordivahenditele antakse voolujooneline kuju ja nende välispind töödeldakse võimalikult siledaks. Selle tulemusena väheneb takistusjõud.

Liikuva tahke keha ja vedeliku või gaasi vaheline hõõrdumine on kahe keha vastastikuse mõju eriliik. Selle kohta kehtib Newtoni kolmas seadus: hõõrdumisel tekib kaks jõudu — üks neist on rakendatud liikuvale tahkele kehale, teine aga vedelikule või gaasile; need jõud on suuruselt võrdsed ja vastassuunalised ning mõjuvad piki kokkupuutepinda (erinevalt elastsusjõududest, mis mõjuvad kokkupuutepinnaga risti).

Harjutus 22

1. Määrake kordajate β_1 ja β_2 ühikute nimetused.
2. Veepinnal hakkab paat liikuma küllalt väikese jõu mõjul, kuid sama paati kaldalt vette lükates peame rakendama võrdlemisi suurt jõudu. Miks on see nii?
3. Jalgratta rataste ja maapinna vaheline hõõrdejõud ei sõltu peaaegu üldse kiirusest. Kuid on teada, et mida suurema kiirusega sõidab jalgrattur, seda suurema jõuga tuleb tal suruda jalgratta pedaalidele. Kuidas seda nähtust seletada?

§ 43. ÜLEMAAILMNE GRAVITATSIOONIJÕUD

Inimesed tundsid juba ammu jõudu, mille mõjul kõik kehad langevad Maale.

Kuni 17. sajandini arvati, et ainult Maal on eriline omadus tõmmata külge kõiki tema pinna lähedal asuvaid kehi. Kuid 1667. a. tuli Newton imetlusväärsele järeldusele, et tõmbejõud mõjuvad kõikide kehade vahel. See väide oli imetlusväärne sellepärast, et oma igapäevases elus inimesed ei märka esemete vastastikust tõmbumist.

Newtonil olid teada tema enda poolt avastatud liikumisseadused. Nende seaduste põhjal on kiirendusega liikumine võimalik ainult jõu mõjul. Et langevad kehad liiguvad Maa poole kiirendusega, siis peab neile mõjuma Maa poole suunatud jõud, mis neile selle kiirenduse annab. Ei ole põhjust arvata, et Maal on mingid erilised, ainult temale kuuluvad omadused. Kuid miks me siis ei tähelda meid ümbritsevate kehade vastastikust tõmbumist? Võib-olla on see seletatav asjaoluga, et kehadevahelised tõmbejõud on liiga väikesed? Newtonil õnnestuski näidata, et kehadevaheline tõmbejõud sõltub mõlema keha massist ja, nagu selgus, on märgatav ainult siis, kui teineteist mõjutavad kehad või vähemalt üks neist on küllalt suure massiga.

Vaba langemise kiirendusel on tõepoolest huvitav omadus: ta on kõikidel kehadel, ükskõik millise massiga need ka ei oleks, ühesugune. Esimesel pilgul tundub see omadus väga imelikuna. Newtoni teise seaduse valemist

$$a = \frac{F}{m}$$

järeldub ju, et keha kiirendus on seda suurem, mida väiksem on tema mass. Seega peaksid väikese massiga kehad langema suurema kiirendusega kui suure massiga kehad. Kuid katsed näitavad (vt. 2. peatükk), et kehade vaba langemise kiirendus ei sõltu massist. Sellele huvitavale faktile võib anda ainult ühe põhjenduse: kehale mõjuv Maa külgetõmbejõud F peab olema võrdeline keha massiga m.

Kui keha mass suureneb näiteks kaks korda, siis suureneb ka jõud kaks korda ja kiirendus, mis võrdub suhtega

$$\frac{F}{m},$$

jääb muutumatuks. Newton tuligi sellele ainsale õigele järeldusele: kehale mõjuv gravitatsioonijõud on võrdeline selle keha massiga. Kuid kehad tõmbuvad vastastikku. Newtoni kolmanda seaduse põhjal mõjuvad mõlemale kehale ühesugused jõud. Seega peab kehadevaheline tõmbejõud olema võrdeline mõlema keha massiga. Need kehad saavad kiirendused, mis ei sõltu nende massidest.

Millest siis veel sõltub kahe keha vaheline tõmbejõud? Newton oletas, et see peab sõltuma kehadevahelisest kaugusest. Maapinna lähedal on vaba langemise kiirendus teatavasti $9{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ ja kõikidel kehadel, mis langevad näiteks 1 m, 10 m ja 100 m kõrguselt, on see ühesugune. Kuid selle põhjal ei saa me veel järeldada, et kiirendus ei sõltu keha ja Maa vahelisest kaugusest. Newton tuli järeldusele, et keha kaugust ei tule lugeda mitte Maa pinnalt, vaid selle keskpunktist. Maa raadius on 6400 km. Seetõttu on mõistetav, et kauguse muutmine mõnekümne või mõnesaja meetri võrra ei muuda märgatavalt vaba langemise kiirendust.

Et kindlaks teha, kuidas sõltub tõmbejõud kehadevahelisest kaugusest, oleks vaja teada, millise kiirendusega liiguvad Maast suurtel kaugustel asuvad kehad. Kuid selleks, et seda teada saada, tuleks mõõta tuhandete kilomeetrite kõrgusel asuvate kehade vaba langemise kiirendused.

Sellist katset on muidugi väga raske korraldada. Lihtsam on mõõta Maa külgetõmbejõu mõjul ümber Maa tiirleva keha kesktõmbekiirendus. Meenutagem, et elastsusjõu õppimisel kasutasime sama võtet: mõõtsime elastsusjõu mõjul mööda ringjoont liikuva kuulikese kesktõmbekiirenduse.

Gravitatsioonijõu uurimisel tuli loodus ise meile appi. Ta võimaldas määrata ümber Maa tiirleva keha kesktõmbekiirenduse. Selleks kehaks on Maa looduslik kaaslane Kuu. Tõepoolest, kui Newtoni oletus on õige, siis Kuu kesktõmbekiirenduse tekkimise põhjuseks peab olema Maa külgetõmbejõud. Kui Kuu ja Maa vaheline gravitatsioonijõud ei sõltuks nendevahelisest kaugusest, siis võrduks Kuu kesktõmbekiirendus kehade vaba langemise kiirendusega Maa pinna lähedal. Kuid nagu me teame (vt. 3. peatükk), võrdub kiirendus, millega Kuu liigub oma orbiidil, $0{,}0027\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. See on ligikaudu 3600 korda väiksem kehade vaba langemise kiirendusest Maa pinna lähedal. Kuid samuti on teada, et Kuu ja Maa keskpunktidevaheline kaugus on 384 000 km. See on 60 korda suurem Maa raadiusest ehk Maa pinna kaugusest Maa keskpunktist. Kui suurendada kehadevahelist kaugust 60 korda, siis nende kiirendused vähenevad 60^2 korda. Siit tuleme järeldusele, et gravitatsioonijõu poolt tekitatud kiirendus ja seega ka see jõud ise on pöördvõrdeline kehadevahelise kauguse ruuduga. Sellele järeldusele tuligi Newton.

Seega võime kirjutada, et kaks keha massidega M ja m tõmbuvad teineteise poole jõuga F, mille arvväärtus väljendub valemiga

$$F = \gamma \frac{Mm}{r^2},$$

kus r on nende kehade vaheline kaugus ja γ võrdetegur, mis on kõikide kehade jaoks ühesugune. Seda võrdetegurit nimetatakse *gravitatsioonikonstandiks.*

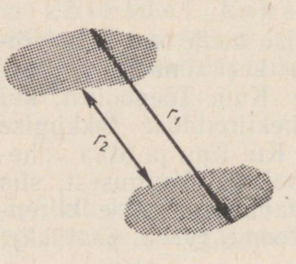
Ülaltoodud valem väljendab Newtoni poolt avastatud ülemaailmset gravitatsiooniseadust:

kaks keha tõmbuvad teineteise poole jõuga, mis on võrdeline nende massidega ja pöördvõrdeline nendevahelise kauguse ruuduga.

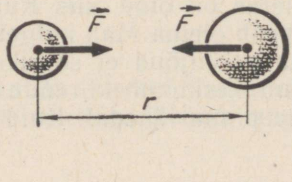
Gravitatsioonijõu mõjul liiguvad planeedid ümber Päikese ja tehiskaaslased ümber Maa.

Nüüd selgitame, mida tuleb mõista kehadevahelise kauguse all. Võtame kaks vabalt valitud kujuga keha (joon. 99). Milline kaugus tuleb siis panna ülemaailmse gravitatsiooniseaduse valemisse: kas nende kehade pindade lähimate punktide vaheline kaugus r_2 või kaugemate punktide vaheline kaugus r_1? Aga võib-olla hoopis mingi muu kaugus?

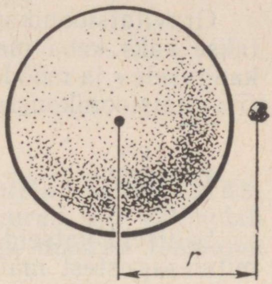
Osutub, et ülemaailmne gravitatsiooniseadus on õige ainult siis, kui kehadevaheline kaugus on kehade mõõtmetega võrreldes nii suur, et neid kehi võib lugeda masspunktideks. Maad, Kuud, Päikest ja planeete võib nende vahel mõjuva gravitatsioonijõu arvutamisel lugeda masspunktideks.



Joon. 99



Joon. 100



Joon. 101

Gravitatsiooniseadust võib rakendada ka kerakujuliste kehade kohta, mille mõõtmed on nendevahelise kaugusega võrreldavad (joon. 100). Sellised kerad tõmbuvad nagu nende keskpunktides asuvad masspunktid.

Ülemaailmse gravitatsiooniseaduse põhjal võib samuti arvutada suure raadiusega kera ja selle pinna lähedal asuva ükskõik millise kujuga väikese keha vahelist tõmbejõudu (joon. 101). Nii arvutamegi jõude, millega kehad tõmbuvad Maa poole.

Newtoni väidet, et kõikide kehade vahel mõjub gravitatsioonijõud, võib kontrollida ka kehade kiirendust mõõtmata. Kahe keha vahelist tõmbejõudu võiks mõõta küllalt tundliku dünamomeetriga. Kui Newtonil oleks olnud selline dünamomeeter, siis arvatavasti oleks ta korraldanud ka selliseid mõõtmisi. Kuid Newtoni ajal ei olnud nii tundlikke dünamomeetreid olemas. Hiljem, pärast niisuguste dünamomeetrite ehitamist, mõõdeti gravitatsioonijõudu juba otseselt. Sellised mõõtmised kinnitasid ülemaailmse gravitatsiooniseaduse kehtivust.

Gravitatsioonijõud on veel üks näide kehade omavahelisest asendist sõltuvatest jõududest.

Ülemaailmse gravitatsiooniseaduse valemis esinev võrdetegur γ ei ole lihtsalt arv, vaid dimensiooniga suurus. Gravitatsiooniseadusest järeldub, et

$$\gamma = \frac{Fr^2}{Mm}.$$

Siit nähtub, et gravitatsioonikonstandi nimetus SI-süsteemis on

$$\frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}} = \frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg \cdot s^2}}.$$

CGS-süsteemis on gravitatsioonikonstandi nimetus

$$\frac{\mathrm{dyn \cdot cm^2}}{\mathrm{g^2}} = \frac{\mathrm{cm^3}}{\mathrm{g \cdot s^2}}.$$

Gravitatsioonikonstant määratakse katseliselt. Selleks asetatakse kaks keha massidega m ja M teineteisest teatud kindlale kaugusele r ja mõõdetakse nende vahel mõjuv gravitatsioonijõud F. Gravitatsioonikonstandi võib siis arvutada valemist

$$\gamma = \frac{Fr^2}{Mm}.$$

Selliseid katseid on palju korraldatud erinevate massidega ja mitmesugustest materjalidest kehadega. Kõikides nendes katsetes saadi gravitatsioonikonstandile üks ja seesama väärtus:

$$\gamma = 6{,}68 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2} = 6{,}68 \cdot 10^{-8} \frac{\mathrm{cm}^3}{\mathrm{g} \cdot \mathrm{s}^2}.$$

Näeme, et gravitatsioonikonstant on väga väike.

Ülemaailmse gravitatsiooniseaduse valemist nähtub, et teineteisest ühikulisel kaugusel asuvate ühikuliste masside korral on γ arvuliselt võrdne F-ga.

Gravitatsioonikonstant γ on arvuliselt võrdne jõuga, millega kaks 1-kilogrammise massiga keha tõmbuvad 1 meetri kauguselt. See jõud võrdub 6,68 sajamiljardiku njuutoniga. Just seetõttu, et gravitatsioonikonstant on nii väike, ei märkagi me kehade vastastikust tõmbumist. Isegi kaks ühetonnise massiga kera tõmbuvad 1 meetri kauguselt jõuga, mis võrdub kõigest 6,68 sajatuhandiku njuutoniga.

Harjutus 23

1. Kuidas muutub kahe kerakujulise keha vaheline külgetõmbejõud,
   a) kui üks kehadest asendada kaks korda suurema massiga kehaga;
   b) kui ka teine keha asendada kaks korda suurema massiga kehaga?
2. Kuidas muutub kahe keha vaheline gravitatsioonijõud, kui nendevahelist kaugust kaks korda suurendada?
3. Maapinnal asuvad kehad tõmbuvad üksteise poole. Kuid miks need ei lähene üksteisele?
4. Kas võib määrata Maa massi, teades enda massi, gravitatsioonikonstanti ja Maa raadiust?
5. Mitu korda tuleb suurendada kehadevahelist kaugust, et külgetõmbejõud väheneks kaks korda?
6. Leidke gravitatsioonijõu suurus kahe teineteisest 1 km kaugusel asuva laeva vahel, kui kummagi mass on 50 000 t.
7. Arvutage Kuu ja Maa vaheline külgetõmbejõud. Kuu mass on $7{,}3 \cdot 10^{22}$ kg ja Maa mass $6 \cdot 10^{24}$ kg. Kuu ja Maa vaheline kaugus on $3{,}84 \cdot 10^8$ m.
8. Kui suure jõuga tõmbuks Maa poole inimene massiga 80 kg, kui ta asuks Maa keskpunktist 60 Maa raadiuse kaugusel?

§ 44. INERTSUSMASS JA GRAVITATSIOONIMASS

Gravitatsiooniseaduse valemist

$$F=\gamma\frac{m_1m_2}{r^2}$$

näeme, et antud kaugusel sõltub gravitatsioonijõud kehade massist. Seega võime öelda, et **keha mass on suurus, mis väljendab tema omadust tõmbuda teiste kehade poole ja määrab tõmbejõu suuruse.**

Kuid teiselt poolt, nagu me juba teame, on mass keha inertsust väljendav suurus, s. o. suurus, millest sõltub teiste kehade poolt sellele kehale antav kiirendus.

Need kaks omadust erinevad teineteisest niivõrd, et suurustele, mis neid kvantitatiivselt iseloomustavad, ei oleks vaja olnud anda ühesugust nimetust; samuti ei oleks vaja olnud ühesugust nimetust anda nende suuruste mõõtühikutele. Kuid ilmnes, et nende suuruste vahel ei ole mingisugust erinevust, nad on teineteisega täiesti ekvivalentsed. Mass osutus selliseks imetlusväärseks suuruseks, et ta määrab nii kiirenduse, mille keha omandab teiste kehade mõjul, kui ka tõmbejõu, millega teised kehad teda mõjutavad.

Kuid sellele vaatamata nimetatakse mõnikord Newtoni teise seaduse valemis

$$F=ma$$

esinevat massi *inertsusmassiks* ja ülemaailmse gravitatsiooniseaduse valemis

$$F=\gamma\frac{m_1m_2}{r^2}$$

esinevat massi *gravitatsioonimassiks.*

Et tänapäeval on tõestatud nende kahe füüsikalise suuruse ekvivalentsus, siis me ei hakka neid edaspidi enam teineteisest eristama. Märgime ainult seda imepärast tõsiasja, et kehade kahte erinevat omadust iseloomustab kvantitatiivselt üks ja seesama füüsikaline suurus — mass.

§ 45. RASKUSJÕUD

Gravitatsioonijõu üheks avaldusvormiks on *raskusjõud* ehk Maa külgetõmbejõud. Raskusjõu võime arvutada ülemaailmsest gravitatsiooniseadusest

$$F=\gamma \frac{M}{R^2}m,$$

kus M on Maa mass, R Maa raadius ja m vaadeldava keha mass. See jõud mõjub Maa keskpunkti poole.

Kui kehale mõjub ainult raskusjõud, siis ta langeb vabalt kiirendusega g. Selle kiirenduse võime leida Newtoni teise seaduse põhjal. Et

$$F=\gamma \frac{Mm}{R^2},$$

siis

$$a=\frac{F}{m}=\gamma \frac{M}{R^2}.$$

Sellest valemist näeme, et **vaba langemise kiirendus ei sõltu keha massist** ja on seega kõikide kehade jaoks ühesugune. Sellepärast kasutatakse tema jaoks eri tähist — tähte g. Seega

$$g=\gamma \frac{M}{R^2}.$$

Juba ammu korraldati mõõtmisi, mis näitasid, et

$$g=9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Raskusjõud võrdub keha massi ja vaba langemise kiirenduse korrutisega:

$$\vec{F}=m\vec{g}.$$

Vaba langemise kiirendus on kõikidel kehadel ühesugune. Maa eri kohtades on ta aga erinev ja seda mitmel põhjusel. Üheks põhjuseks on Maa lapikus: ta on poolustelt veidi kokku surutud. Kaugus Maa keskpunktini on poolusel väiksem kui ekvaatoril. Seetõttu peab g väärtus olema poolusel suurem kui ekvaatoril. Teiseks, veelgi tähtsamaks põhjuseks on Maa pöörlemine ümber oma telje. Pöörlemise tõttu peab g samuti poolusel suurem olema kui ekvaatoril. Poolusel $g=9{,}83\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ ja ekvaatoril $g=9{,}78\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Laiusel 45° võrdub vaba langemise kiirendus $9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Koos vaba langemise kiirendusega g muutub ka raskusjõud mg, sest keha mass on ju igal pool ühesugune.

Maa mõnedes piirkondades muutub vaba langemise kiirendus veel sellepärast, et neis leidub kivimite lademeid, mille tihedus on Maa keskmisest tihedusest suurem või väiksem. Kasulike maavarade otsimisel määravad geoloogid Maa eri kohtades vaba langemise kiirenduse.

Vaba langemise kiirendus ja seega ka raskusjõud muutub kauguse kasvades Maast. Valemis $g=\gamma\frac{M}{R^2}$ eeldatakse, et langeva keha kaugus Maa keskpunktist võrdub Maa raadiusega R. See on õige ainult Maa pinna lähedal. Maa pinnast kõrgusel h on vaba langemise kiirendus

$$g=\gamma\frac{M}{(R+h)^2}.$$

300 km kõrgusel on vaba langemise kiirendus $1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ võrra väiksem kui maapinnal.

Harjutus 24

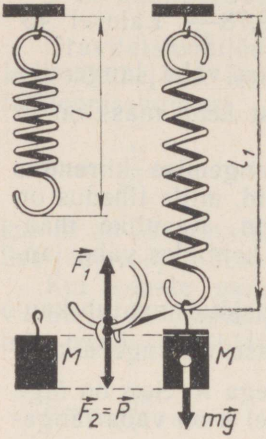
1. Kui suur on vaba langemise kiirendus kõrgusel, mis võrdub Maa kolme raadiusega?
2. Kui kõrgel Maa pinnast on raskusjõud kaks korda väiksem kui Maal?
3. Leida kehade vaba langemise kiirendus Marsil. Marsi mass on $6\cdot10^{23}$ kg ja tema raadius on 3300 km.

§ 46. KEHA KAAL

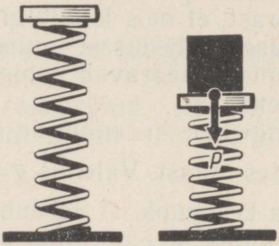
Raskusjõudu võib samuti nagu iga muud jõudugi mõõta dünamomeetriga. Raskusjõu mõõtmiseks ehitatud dünamomeetreid nimetatakse vedrukaaludeks, sest nendega võib mõõta ka keha *kaalu*. Mis on kaal?

Viiendas peatükis selgitasime, miks nöör või vedru deformeerus, kui selle otsa riputati keha.

Vaatleme veel kord vedru deformeerumist ning pöörame tähelepanu sellele, mis toimub dünamomeetri vedru külge kinnitatud kehaga. Joonisel 102 on kujutatud vedru, enne kui selle külge riputatakse keha M. Vedru pikkus on l. Kinnitame vedru alumise otsa külge keha M. Keha hakkab otsekohe Maa külgetõmbejõu ehk



Joon. 102



Joon. 103

raskusjõu $m\vec{g}$ mõjul l a n g e m a. Vabal langemisel tõmbab keha endaga kaasa vedru alumise otsa. Seetõttu vedru d e f o r m e e r u b — ta pikeneb. Vedru deformeerumine kestab seni, kuni selle tulemusena tekkinud elastsusjõud $\vec{F}_1$ saab arvuliselt võrdseks raskusjõuga ($\vec{F}_1 = -m\vec{g}$). Vedru pikkus on nüüd l_1. Elastsusjõud $\vec{F}_1$ on jõud, millega vedru mõjub kehale M. See on vedru deformatsiooniga vastassuunaline, s. o. mõjub alt üles. Elastsusjõu $\vec{F}_1$ ja raskusjõu $m\vec{g}$ resultant võrdub nulliga. Seetõttu jääb keha M, millele need jõud on rakendatud, paigale. Kuid kui vedru mõjub kehale M jõuga $\vec{F}_1$, siis v a s t a v a l t N e w t o n i k o l m a n d a l e s e a d u s e l e mõjub keha M vedrule suuruselt võrdse, kuid a l l a p o o l e suunatud jõuga $\vec{F}_2$. See jõud on rakendatud vedrule.

Millise olemusega on jõud $\vec{F}_2$? Jõud $\vec{F}_2$ on samuti elastsusjõud, sest ta tekkis keha M deformeerumise tulemusena. Keha M deformeerumine (pikenemine) on tugevasti suurendatult kujutatud joonisel 102.

Seega mitte ainult pikenenud vedru ei mõjuta keha M elastsusjõuga, vaid ka deformeerunud keha M mõjub vedrule elastsusjõuga $\vec{F}_2$. Seda jõudu nimetataksegi keha *kaaluks*. Keha kaalu tähistame edaspidi tähega P. Seega antud juhul $\vec{P} = \vec{F}_2 = -\vec{F}_1 = m\vec{g}$.

Kui keha ei ripu, vaid toetub alusele (joon. 103), siis ta mõjub ka alusele jõuga, mis võrdub tema kaaluga.

Jõudu, millega keha Maa külgetõmbe tõttu mõjutab alust või riputusvahendit (vedru, nööri), nimetatakse keha kaaluks.

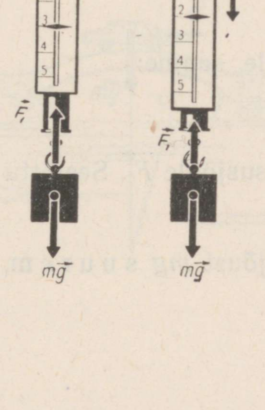
Ei ole muidugi vajalik, et keha toetuks tingimata spiraalvedrule või oleks selle külge riputatud. Keha võib riputada ka niidi või traadi külge või asetada lauale. Niidile, traadile või lauale mõjub keha kaaluga võrdne jõud, sest keha on ka antud juhul deformeeritud ja tekib elastsusjõud $\vec{F}_2$.

Äsja kirjeldatud katses on keha kaal võrdne Maa külgetõmbejõuga ehk raskusjõuga. Kas see tähendab, et kaal ja raskusjõud on alati teineteisega arvuliselt võrdsed? Osutub, et see nii ei ole. Kaal võib raskusjõust tunduvalt erineda. **Keha kaal, mida mõõdetakse vedrukaaludega, võrdub kehale mõjuva raskusjõuga ainult siis, kui need kaalud on Maa suhtes paigal või liiguvad ühtlaselt sirgjooneliselt.**

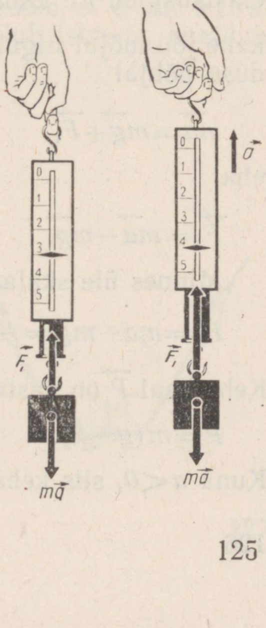
§ 47. KIIRENDUSEGA LIIKUVA KEHA KAAL

Laseme koormusel koos vedrukaaludega langeda kiirendusega a, mis on vaba langemise kiirendusest g väiksem. Selleks võtame kätte kaalud, mille külge on riputatud koormus, ja laseme käe järsult alla (joon. 104). Jälgides langemise ajal kaalude osutit, näeme, et see nihkus ülespoole. Seega keha kaal vähenes. Millega seda seletada?

Võtame vertikaalse koordinaattelje ja loeme sellel suuna ülalt alla positiivseks. Kehale mõjub raskusjõud $m\vec{g}$ ja elastsusjõud $\vec{F}_1$. Esimene neist on suunatud ülalt alla, teine alt üles. Nende kahe



Joon. 104



Joon. 105

jõu mõjul keha liigub alla kiirendusega $\vec{a}$. Newtoni teise seaduse põhjal

$$m\vec{a}=m\vec{g}+\vec{F}_1.$$

Avaldame siit $\vec{F}_1$:

$$\vec{F}_1=m\vec{a}-m\vec{g}.$$

Minnes üle skalaarsetele suurustele, võime kirjutada:

$$F_1=ma-mg=m(a-g).$$

Newtoni kolmanda seaduse põhjal mõjub keha vedrule jõuga, mis on arvuliselt võrdne jõuga $\vec{F}_1$, kuid on suunatud vertikaalselt alla. See jõud ongi keha kaal $\vec{P}=-\vec{F}_1$. Et $F_1=m(a-g)$, siis

$$P=m(g-a).$$

Kiirendus a on positiivne ja väiksem kui g, seetõttu on keha kaal raskusjõust mg väiksem.

Kujutleme nüüd, et vedrukaalud koos koormusega liiguvad kiirendusega üles. Selleks tuleb neid käega järsult tõsta. Näeme, et osuti liigub asendist, kus ta oli kaalude paigalseisu ajal, allapoole (joon. 105). See tähendab, et koormuse kaal suurenes.

Kaalu suurenemine seletub järgmiselt. Samuti nagu esimeses katses mõjuvad siin kehale kaks jõudu — raskusjõud $m\vec{g}$ ja vedru elastsusjõud $\vec{F}_1$. Esimene neist on suunatud alla, teine üles. Nende kahe jõu mõjul liigub keha üles kiirendusega $\vec{\alpha}$. Newtoni teise seaduse põhjal

$$m\vec{a}=m\vec{g}+\vec{F}_1$$

ehk

$$\vec{F}_1=m\vec{a}-m\vec{g}.$$

Minnes üle skalaarsetele suurustele, saame:

$$F_1=ma-mg=-m(g-a).$$

Keha kaal $\vec{P}$ on vastassuunaline elastsusjõule $\vec{F}_1$. Seetõttu

$$P=m(g-a).$$

Kuna $a<0$, siis keha kaal on raskusjõust mg suurem.

Nägime, et Maa suhtes kiirendusega liikuva keha kaal erineb paigalseisva või ühtlaselt sirgjooneliselt liikuva keha kaalust. **Kui keha kiirenduse suund ühtib vaba langemise kiirenduse suunaga, siis on tema kaal väiksem kui paigal olles; kui kiirenduse suund on vaba langemise kiirenduse suunale vastupidine, siis keha kaal on suurenenud.**

Vaatleme näiteid keha kaalu muutumisest sõltuvalt tema kiirendusest.

1. Kumeral sillal liikuva auto kaal on väiksem kui sama auto kaal sillal seistes (joon. 106).

Kumeral sillal liigub auto kiirendusega

$$a = \frac{v^2}{r},$$

kus v on auto kiirus ja r silla kõverusraadius. See kiirendus on suunatud silla kõveruskeskpunkti poole, s. o. a l l a. Sel juhul auto kaal, s. o. jõud, millega auto rõhub sillale,

$$P = m(g-a) = m\left(g - \frac{v^2}{r}\right).$$

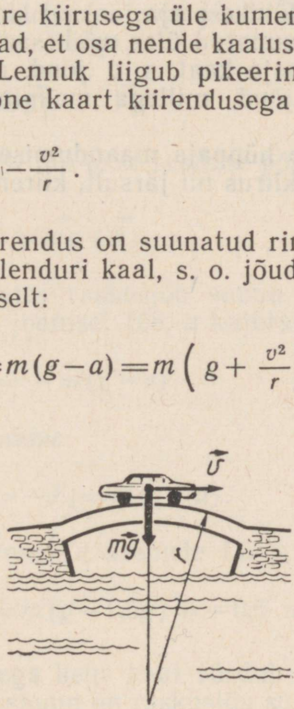
Suure kiirusega üle kumera silla sõitvas autos olevad reisijad tunnevad, et osa nende kaalust on kadunud.

2. Lennuk liigub pikeeringust väljumisel (joon. 107) mööda ringjoone kaart kiirendusega

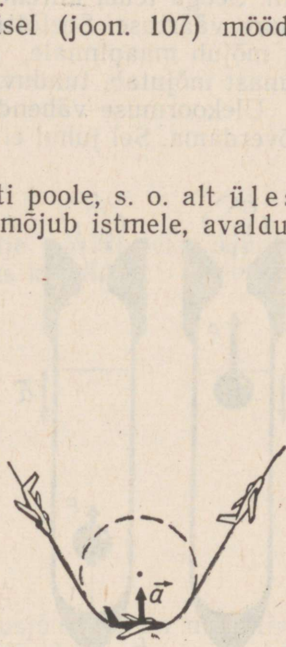
$$a = -\frac{v^2}{r}.$$

See kiirendus on suunatud ringi keskpunkti poole, s. o. alt ü l e s. Seega lenduri kaal, s. o. jõud, millega ta mõjub istmele, avaldub järgmiselt:

$$P = m(g-a) = m\left(g + \frac{v^2}{r}\right).$$



Joon. 106



Joon. 107

Kui kesktõmbekiirendus pikeeringust väljumisel $\frac{v^2}{r}$ on vaba langemise kiirendusest n korda suurem:

$$\frac{v^2}{r}=ng,$$

siis lenduri kaal

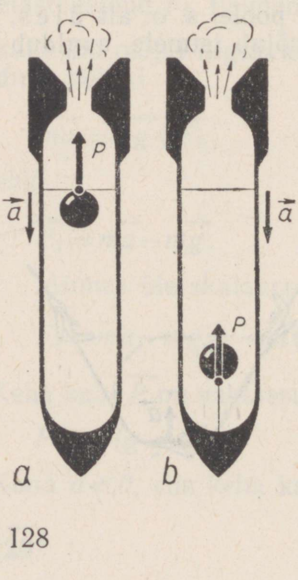
$$P=m(g+ng)=mg(n+1).$$

Seega jõud, millega lendur mõjub istmele, on tema normaalsest kaalust (kaalust paigalolekus) $n+1$ korda suurem. Kuid iste rõhub lendurit niisama suure jõuga. Ka inimese siseorganid, mis toetuvad ühele või teisele luustiku osale, on $n+1$ korda suurema kaaluga. See võib esile kutsuda haiguslikke nähtusi. *Keha kaalu suurenemist, mille põhjustab kiirendusega liikumine, nimetatakse ülekoormuseks.*

Selleks et inimorganism taluks ülekoormust, on vaja spetsiaalset treeningut. Treenitud inimene talub üsna hästi neljakordset ülekoormust. Mõnikord tuleb taluda isegi kümnekordseid ülekoormusi.

3. Kui inimene hüppab teatud kõrguselt maha, siis maapinnale jõudmisel väheneb tema kiirus väga lühikese aja jooksul kuni nullini. Seega tema kiirendus, mis on suunatud üles, võib saavutada suure väärtuse. Seetõttu ületab hüppaja kaal, s. o .jõud, millega ta mõjub maapinnale, ja seega ka jõud, millega maapind teda ennast mõjutab, tunduvalt raskusjõu.

Ülekoormuse vähendamiseks peab hüppaja maandumisel põlvi kõverdama. Sel juhul ei muutu keha kiirus nii järsult, kiirendus ja



Joon. 108

seega ka ülekoormus on siis väiksemad. Kui seda ei tehta, võib luude deformatsioon ulatuda ohtliku piirini — võib tekkida luumurd.

4. Maavärisemine on ohtlik peamiselt sellepärast, et maapind ja sellel asuvad hooned liiguvad k i i r e n d u s e g a. Selle tulemusena võib jõud, millega hoone ülemine osa rõhub alumisele, ületada lubatud piiri ja hoone võib puruneda.

Ülesanne. Rakett liigub vertikaalselt alla kiirendusega $a = 1{,}5\ g$. Milline on selles raketis asuva keha kaal, kui selle mass on m?

Vaadelda kahte juhtu: 1) keha ei ole millegi külge kinnitatud (joon. 108, *a*) ja 2) keha on kabiinis kinnitatud (joon. 108, *b*).

L a h e n d u s. Et rakett liigub kiirendusega, mis on suurem kui g, siis mõjub talle ilmselt raskusjõust suurem jõud. Raketile mõjub veel väljapaiskuvate gaaside elastsusjõud (gaasijoa reaktsioon). Kabiini külge kinnitamata kehale mõjub ainult raskusjõud, mis annab talle kiirenduse $\vec{g}$. Seetõttu jääb see keha kabiini põhjast maha ja toetub teatud hetkest alates vastu lage. Pärast seda mõjub kehale peale raskusjõu veel deformeeritud (kokkusurutud) lae elastsusjõud $\vec{F_1}$. Ka keha ise on deformeeritud (kokku surutud). Seetõttu mõjub keha niisama suure, kuid vastassuunalise jõuga laele. Laele mõjuvat jõudu $\vec{F_2}$ võimegi antud juhul nimetada keha kaaluks. Seega

$$\vec{P} = \vec{F_2} = -\vec{F_1}.$$

Newtoni teise seaduse põhjal

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F_1}.$$

Võttes raskusjõu suuna koordinaattelje positiivseks suunaks, võime joonisel 108, *a* kujutatud juhu jaoks kirjutada:

$$F_1 = -m(g-a).$$

Siit saame:

$$P = -F_1 = m(g-a).$$

Pannes a asemele 1,5 g, saame:

$$P = m(g - 1{,}5g) = -0{,}5\ mg.$$

Seega keha kaal võrdub poolega raskusjõust ja on negatiivne (selle suund on raskusjõu suunale vastupidine).

Vaatleme nüüd juhtu, kui keha on nööriga põranda külge seotud. Oletame, et nööri pikkus on kabiini kõrgusest väiksem. Keha liigub algul lae poole kiirendusega, mis on kabiini kiirendusest väiksem. Seejärel tõmbab ta nööri pingule (deformeerib seda). Sellest hetkest alates mõjub kehale kaks jõudu — raskusjõud $m\vec{g}$ ja pinguloleva nööri elastsusjõud $\vec{F_1}$. Keha ja nööri deformatsioonid on nüüd t õ m b e d e f o r m a t s i o o n i d, mitte enam survedeformatsioonid. Ka sel juhul on keha kaal negatiivne ja võrdub poolega raskusjõust.

Harjutus 25

1. Keha massiga 500 g ripub niidi otsas. Millega võrdub kehale mõjuv raskusjõud ja keha kaal? Millele on need jõud rakendatud? Kujutage need jõud joonisel.
2. Ehituspaneeli massiga 500 kg tõstetakse kraanaga ühtlaselt a) vertikaalselt üles, b) horisontaalselt ja c) lastakse alla. Millega võrdub paneeli kaal ja raskusjõud kõigil neil juhtudel?
3. Kaevandustõstuki põhjal asub koormus massiga 100 kg. Kui suur on selle koormuse kaal, kui tõstuk a) tõuseb vertikaalselt üles kiirendusega $0{,}3\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, b) liigub ühtlaselt, c) laskub kiirendusega $0{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, d) langeb vabalt?
4. Auto massiga 2000 kg sõidab kiirusega $60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ üle kumera silla, mille kõverusraadius on 100 m. Kui palju väheneb auto kaal silla kõrgeimas punktis?

§ 48. KEHADE KAALUTUS

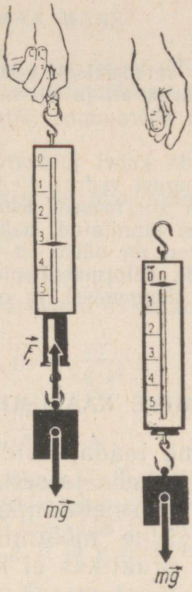
Meil jäi veel vaadelda juht, kui koormus koos kaaludega vabalt langeb. Katse näitab, et sel juhul seisab dünamomeetri osuti nulljaotisel, s. t. keha kaal võrdub nulliga. See on täiesti mõistetav. Kui koormus hakkab Maa külgetõmbejõu tõttu langema, siis vedru koos kaaludega järgneb sellele (joon. 109). Seetõttu vedru ei deformeeru. Kui see nii on, siis ei mõjuta ta üldse ka tema külge kinnitatud koormust. Seetõttu on koormus deformeerimata ega mõjuta vedrut jõuga. Koormus on kaaluta.

Vabalt langeva keha kaalu võrdumine nulliga järeldub otseselt valemist

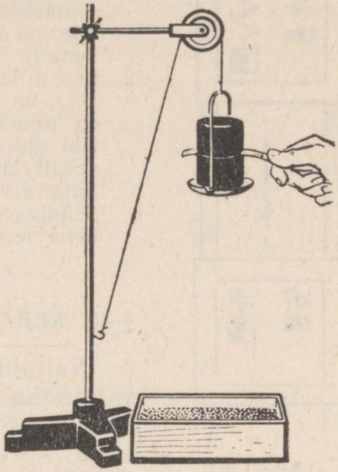
$$P = m(g - a).$$

Keha vabal langemisel $a = g$. Seega

$$P = m(g - g) = 0.$$



Joon. 109



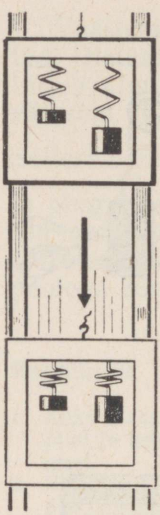
Joon. 110

Vabal langemisel ei ole keha toega vastastikuses mõjutuses.

Kaalutuse põhjuseks on keha ja tema aluse või riputusvahendi liikumine ühesuguse kiirendusega. Kuid ühesuguse kiirenduse annab kõikidele kehadele ainult üks jõud. See on ülemaailmne gravitatsioonijõud, mille avaldusvormiks on raskusjõud. **Iga keha, mis liigub ainult gravitatsioonijõudude mõjul, on kaaluta olekus.** Sellistes tingimustes ongi vabalt langev keha. **Vabalt langev keha on kaaluta olekus.**

Seda imetlusväärset tõsiasja võib illustreerida järgmise huvitava katsega (joon. 110).

Üle ploki, mis on kinnitatud statiivi külge, on viidud niit. Niidi otsas ripub kausike kahe koormusega, millel on küllalt suur mass. Üks koormus asub teise peal. Niidi teine ots on kinnitatud statiivi külge. Koormuste vahele asetatakse õhuke pabeririba, mille vaba otsa hoitakse käes. Kui niidi otsa kinnitatud koormust aeglaselt langeda lasta, siis tõmbub paber pingule ja katkeb, sest temale mõjub paigaloleku hõõrdejõud. Asendame katkenud pabeririba uuega ja kordame katset, nii et koormus vabalt langeb. Nüüd jääb pabeririba terveks. Langemisel koormused ei rõhunud teineteisele ja seetõttu võrdus paigaloleku hõõrdejõud nulliga. Sellest katsest nähtub, et vabal langemisel on koormused kaaluta olekus.



Joon. 111

Harjutus 26

1. Kas kehad, mis on visatud a) vertikaalselt alla, b) horisontaalsihis, c) horisondiga nurga all ja d) vertikaalselt üles, on kaaluta olekus? (Õhu hõõrdumine jätta arvestamata.)
2. Raami külge, mis võib libiseda kahel juhtvardal (joon. 111), on kinnitatud kaks ühesugust vedrut. Vedrude otsa on riputatud erineva massiga koormused. Kui põletada läbi niit, mille külge raam on kinnitatud, hakkab raam vabalt langema (hõõrdumine on nii väike, et selle võib jätta arvestamata) ja vedrude deformatsioonid kaovad. Selgitage, miks raami vabal langemisel ei ole vedrud deformeeritud.

§ 49. KEHADE MASSI MÕÕTMINE KAALUMISE TEEL

Neljandas peatükis saime teada, kuidas määrata keha massi, mõõtes selle keha ja sellega vastastikuses mõjutuses oleva, massietaloniks võetud keha kiirenduste suhte. Selline mõõtmisviis on muidugi ebamugav ja seda praktikas ei kasutata. Vaatleme nüüd teist, mugavamat massi mõõtmise viisi — *kaalumist*. Massi määramine kaalumise teel põhineb tõsiasjal, et kehale mõjuv raskusjõud on võrdeline selle keha massiga:

$$F = mg.$$

Raskusjõudu võib aga määrata kaaludega, sest kui kaalud koos kaalutava kehaga on Maa suhtes p a i g a l, siis võrdub see jõud keha kaaluga. Mõõtes vedrukaaludega keha kaalu P ja teades vaba langemise kiirendust kohas, kus keha kaalutakse, võib massi arvutada valemist

$$m = \frac{P}{g}.$$

Veelgi lihtsam on massi määrata kangkaalude abil. Selle massi määramise viisiga tutvusime 7. klassi füüsika kursuses. Kangkaalude abil v õ r r e l d a k s e keha ja vihtide kaalu. Kaalude tasakaalu korral võrdub keha kaal vihtide kaaluga. **Kui on võrdsed kehade kaalud, siis on võrdsed ka nende massid.** Kaaluvihtidele on märgitud vihtide massid. Seega tuleb keha massi määramiseks liita vihtidele märgitud arvud.

Kangkaalud on väga tundlikud mõõteriistad. Kõige väiksem mass, mida nende abil võib määrata, on mõni miljondik grammi.

§ 50. MAA MASS

Maa massi ei saa muidugi määrata kaalumise teel. Kuid seda võib leida vaba langemise kiirenduse valemi põhjal:

$$g=\gamma\frac{M}{R^2}.$$

Avaldades siit Maa massi, saame:

$$M=\frac{gR^2}{\gamma}.$$

g ja γ arvväärtused on määratud katseliselt:

$$\gamma=6{,}68\cdot10^{-11}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2},$$

$$g=9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Maa raadius on samuti teada. Selle määramiseks võib mõõta näiteks ühekraadise meridiaani kaare pikkuse. Selliste mõõtmiste põhjal leiti, et $R=6380\ \mathrm{km}=6{,}38\cdot10^6\ \mathrm{m}$.

Pannes g, R ja γ arvväärtused vaba langemise kiirenduse valemisse, saame:

$$M=\frac{9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot(6{,}38\cdot10^6\ \mathrm{m})^2}{6{,}68\cdot10^{-11}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}}=5{,}9\cdot10^{24}\ \mathrm{kg}=5{,}9\cdot10^{21}\ \mathrm{t}.$$

Maa mass on kuus tuhat **miljard-miljardit tonni.**

6. peatükk. LIIKUMISSEADUSTE RAKENDAMINE

§ 51. SISSEJUHATUS

Kui teame Newtoni liikumisseadusi ja oskame arvutada või mõõta looduses esinevaid jõude, siis võime lahendada mehhaanika põhiülesande: määrata jõudude järgi kiirenduse, kiirenduse järgi kiiruse ja lõpuks keha koordinaadid mistahes ajahetkel.

Väga harva juhtub, et keha liigub mingi üheainsa jõu, näiteks elastsusjõu, hõõrdejõu või gravitatsioonijõu mõjul. Enamasti mõjub liikuvale kehale üheaegselt mitu jõudu.

Sageli mõjub küll kehale mitu jõudu, kuid ainult üks neist etendab olulist osa, ülejäänud jõud võib jätta arvestamata. Vaatlemegi algul just selliseid juhte.

§ 52. VERTIKAALSELT VISATUD KEHA LIIKUMINE RASKUSJÕU MÕJUL

Vaatleme näiteid kehade liikumisest gravitatsioonijõu mõjul. Alustame juhust, kui keha liigub Maa pinna lähedal ja talle mõjub ainult raskusjõud. Õhu takistuse jätame arvestamata.

Neljandast peatükist on teada, et **keha liikumine sõltub temale mõjuvatest jõududest ja algtingimustest — algasukohast ja algkiirusest.** Vaatleme algul keha langemist juhul, kui kehale antakse vertikaalselt alla suunatud algkiirus.

Teame, et raskusjõu võib Maa pinna lähedal lugeda konstantseks, vähemalt kõrguse muutumisel mõne kilomeetri ulatuses. Seetõttu on konstantne ka vaba langemise kiirendus g, millega kehad raskusjõu mõjul liiguvad. See kiirendus on kõikidel kehadel ühesugune. Seega liigub iga keha raskusjõu mõjul ühtlaselt muutuvalt.

Keha langemist raskusjõu mõjul vaatlesime teises peatükis (§ 16). Siis me veel ei teadnud, miks kõik kehad langevad ühesuguse kiirendusega, nüüd aga on see meile teada. Näitasime, et kui koordinaatide alguseks võtta punkt, kus keha kiirus on v_0 (algkiirus), siis kiirus v, millega keha liigub aja t pärast, väljendub valemiga

$$v=v_0+gt.$$

Nihke vertikaalsihis võime leida valemist

$$h=v_0t+\frac{gt^2}{2}.$$

Nendest kahest valemist leidsime keha kiiruse v ja nihke h vahelise sõltuvuse:

$$v^2=v_0^2+2gh$$

ehk

$$v=\sqrt{v_0^2+2gh}.$$

Kui $v_0=0$, siis

$$v=\sqrt{2gh}.$$

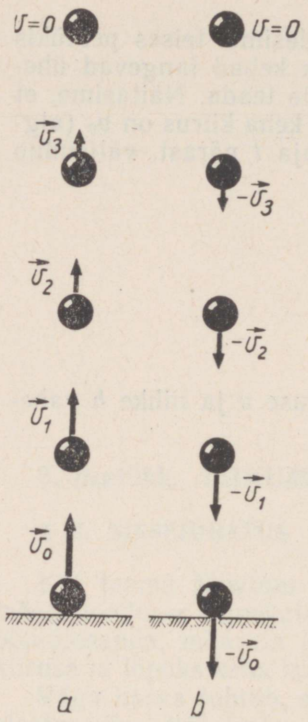
Vaatleme nüüd keha liikumist juhul, kui sellele on antud alt üles suunatud algkiirus. Selle liikumise kirjeldamiseks võib kasutada neidsamu valemeid, kuid kiirenduse väärtuseks tuleb võtta $-g$. Kiirenduse märgi muutumine on tingitud sellest, et kokkuleppeliselt lugesime positiivseks keha liikumise suuna. Antud juhul on positiivne suund vertikaalselt alt ü l e s. Kiirendusvektor $\vec{g}$ aga on suunatud a l l a. Seega kehtivad vertikaalselt üles visatud keha liikumise kohta järgmised valemid:

$$v=v_0-gt,$$

$$h=v_0t-\frac{gt^2}{2},$$

$$v^2=v_0^2-2gh \text{ ehk } v=\sqrt{v_0^2-2gh}.$$

Need valemid erinevad langeva keha liikumise valemitest ainult kiirenduse märgi poolest. See ei ole juhuslikult nii. Kui ülesvisatud keha on saavutanud maksimaalse kõrguse, siis hakkab ta langema. Keha langemine tagasi alla on nagu ümberpööratud ülesliikumine: keha läbib needsamad trajektoori punktid, kuid vastupidises järje-



Joon. 112

korras; ühtedes ja samades punktides on mõlema liikumise kiirused suuruselt võrdsed, kuid vastupidise suunaga (joon. 112). Kui viskame keha üles algkiirusega v_0, siis samasse punkti tagasijõudmisel on tema kiirus $-v_0$. Kui filmiksime vertikaalselt üles visatud keha liikumist ja seejärel demonstreeriksime seda filmi tagurpidi, siis näeksime ekraanil keha vaba langemise täpset pilti.

See näide on erijuht väga tähtsast mehhaanilise liikumise omadusest — liikumise *pööratavusest:* **kui keha, mis liigub hõõrdumiseta mingi jõu mõjul, peatada ja anda talle lõppkiirusega (kiirus enne peatumist) suuruselt võrdne, kuid vastassuunaline kiirus, siis keha liikumine kordub samal trajektooril vastupidises järjestuses.** Liikumise pööratavust võib kasutada mõnede mehhaanika ülesannete lahendamisel.

§ 53. HORISONTAALSELT VISATUD KEHA LIIKUMINE

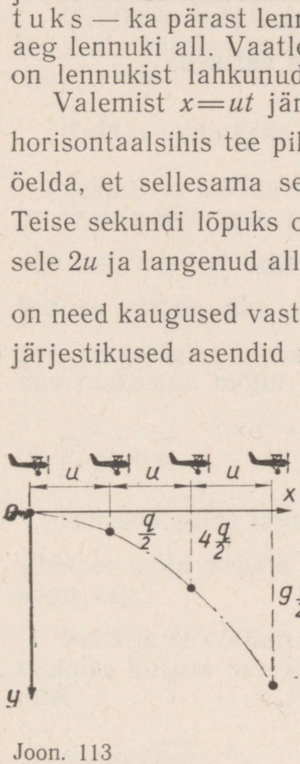
Vaatleme veel ühte juhtu, mil keha liigub raskusjõu mõjul, kuid nüüd oletame, et algtingimused on teistsugused.

Kuidas liigub keha, kui anda talle raskusjõuga risti olev, s. o. horisontaalne algkiirus?

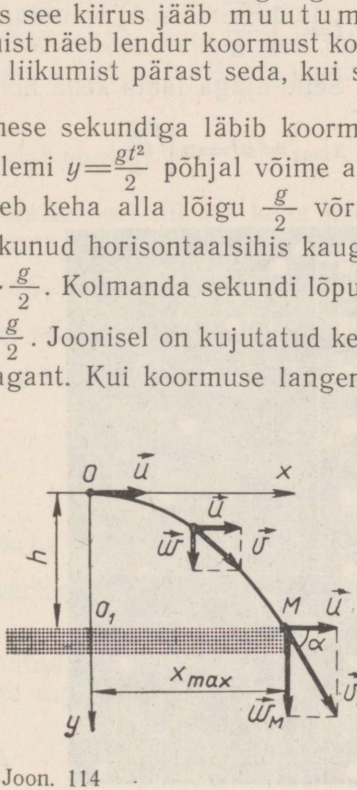
Tähistame algkiiruse tähega u. Olgu näiteks selline kiirus horisontaalselt lendaval lennukil, millelt visatakse alla koormus (joon. 113).

Ka selle juhu vaatlemisel jätame arvestamata koormusele mõjuva õhutakistuse ning loeme langemise v a b a k s. Et leida keha (koormuse) asendit mistahes ajahetkel, tuleb valida taustsüsteem, mille suhtes me keha liikumist vaatleme. Valime taustsüsteemiks Maaga seotud ristkoordinaadistiku. Koordinaatide alguspunkt asugu punktis O, kust visatakse alla koormus. Olgu positiivne suund y-teljel ülalt alla ja x-teljel vasakult paremale. Raskusjõu mõjul langeb koormus vertikaalselt alla, s. o. y-telje sihis. Kui koormus asub veel lennukil, siis liikus ta lennuki liikumise kiirusega u horisontaalsuunas. Et koormusele mingisuguseid jõude horisontaalsuunas ei mõju, siis see kiirus jääb m u u t u m a t u k s — ka pärast lennukist eraldumist näeb lendur koormust kogu aeg lennuki all. Vaatleme koormuse liikumist pärast seda, kui see on lennukist lahkunud.

Valemist $x=ut$ järeldub, et esimese sekundiga läbib koormus horisontaalsihis tee pikkusega u. Valemi $y=\frac{gt^2}{2}$ põhjal võime aga öelda, et sellesama sekundiga langeb keha alla lõigu $\frac{g}{2}$ võrra. Teise sekundi lõpuks on koormus liikunud horisontaalsihis kaugusele $2u$ ja langenud alla kaugusele $4 \cdot \frac{g}{2}$. Kolmanda sekundi lõpuks on need kaugused vastavalt $3u$ ja $9 \cdot \frac{g}{2}$. Joonisel on kujutatud keha järjestikused asendid iga sekundi tagant. Kui koormuse langemi-



Joon. 113



Joon. 114

sest on möödunud t sekundit, siis on ta horisontaalsihis läbinud tee pikkusega ut ja vertikaalsihis $\frac{gt^2}{2}$. Ühendades punktid, kus keha asub eri ajahetkedel, saame tema trajektoori. Saadud joont nimetatakse *parabooliks*. Mööda parabooli liigub ka tulirelvast horisontaalsihis tulistatud mürsk ja iga horisontaalselt visatud keha.

Toodud valemid võimaldavad leida horisontaalselt visatud keha asukoha mistahes ajahetkel. Vaatleme joonist 114. Punktis O, mis asub maapinnast kõrgusel h, on antud kehale horisontaalsuunas kiirus $\vec{u}$. Vaatame, kuidas leida kaugust O_1M, mille keha läbib langemise ajal horisontaalsihis. Tähistame selle kauguse tähega $x_{\max}$.

On ilmne, et selle kauguse läbib keha ajaga t, mille vältel ta langeb kõrguselt h maapinnale. Valemist

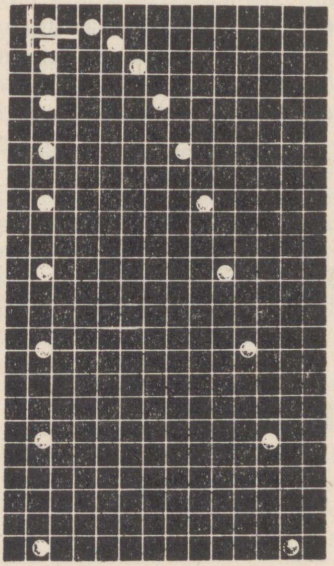
$$h = \frac{gt^2}{2}$$

leiame keha langemise aja:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Selle ajaga läbib keha horisontaalsuunas vahemaa

$$x_{\max} = ut = u\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$



Joon. 115

Sellisel kaugusel märgi kohal asuvast punktist peab lendur koormuse alla viskama, et see langeks ettenähtud kohta (tegelikult on see kaugus õhutakistuse tõttu väiksem). Aeg, mille vältel keha jõuab maapinnale, võrdub ajaga, mis kuluks kehal maapinnale jõudmiseks siis, kui tal horisontaalne kiirus puuduks. Keha vertikaalne liikumine ei sõltu üldse sellest, kas see keha liigub veel peale selle horisontaalselt või ei. Kuul, mille laskur tulistab püssist välja horisontaalsuunas, jõuab maapinnale samal hetkel nagu lasu hetkel juhuslikult mahapillatud kuulgi, mis langeb laskuri jalge ette. Ainult püssist lastud kuul jõuab maapinnale laskurist mõnisada meetrit kaugemal.

Joonisel 115 on kujutatud kahe kuulikese liikumise stroboskoopiline foto (vt. 2. peatükk). Kuulikesed alustavad langemist üheaegselt. Üks neist langeb vertikaalselt alla, teisele on antud horisontaalne kiirus. Fotolt näeme, et ühtedel ja samadel ajahetkedel, s. o. valgussähvatuse hetkedel, on mõlemad kuulikesed ühel ja samal kõrgusel. Mõlemad kuulikesed jõuavad maapinnale üheaegselt.

Leiame keha kiiruse parabooli mistahes punktis. Eriti oluline on teada, milline on keha kiirus maapinnale jõudmise hetkel.

Vaatleme veel kord parabooli, mida mööda keha liigub juhul, kui talle antakse maapinnast kõrgusel h kiirus horisontaalsuunas (joon. 114).

Kuidas leida keha kiirust maapinnal punktis M?

Teame, et mööda kõverjoonelist trajektoori liikuva keha kiirus on trajektoori igas punktis selle puutuja suunaline. Teiseltpoolt aga on ilmne, et keha kiirus $\vec{v}$ trajektoori mingis punktis on kahe kiiruse summa: üks neist on kiirus $\vec{u}$, mis anti kehale horisontaalsuunas, ja teine — vertikaalsuunaline kiirus $\vec{w}$, mille keha omandas raskusjõu mõjul. Seega

$$\vec{v}=\vec{u}+\vec{w}.$$

Horisontaalne kiirus $\vec{u}$ ei muutu keha liikumise ajal, sest selles sihis ei mõju kehale jõude. Kuid vertikaalne kiirus $\vec{w}$ suureneb kogu aeg.

Punktis M võrdub keha horisontaalne kiirus endiselt $\vec{u}$-ga. Vertikaalse kiiruse arvväärtuse võib aga määrata meile tuntud valemist

$$w_M=\sqrt{2gh}.$$

Keha resultantliikumise kiirus $\vec{v}_M$ punktis M võrdub nende kiiruste vektoriaalse summaga:

$$\vec{v}_M = \vec{u} + \vec{w}_M.$$

$\vec{v}_M$ suund ühtib parabooli puutuja suunaga. Pythagorase teoreemi põhjal

$$v_M^2 = u^2 + w_M^2 = u^2 + 2gh.$$

Seega

$$v_M = \sqrt{u^2 + 2gh}.$$

Selline on keha kiiruse arvväärtus punktis M.

Missugune on kiiruse $\vec{v}_M$ suund? Kiiruse $\vec{v}_M$ suund on täielikult määratud nurgaga, mille ta moodustab x-teljega.

Jooniselt 114 näeme, et

$$\cos\alpha = \frac{u}{v_M}$$

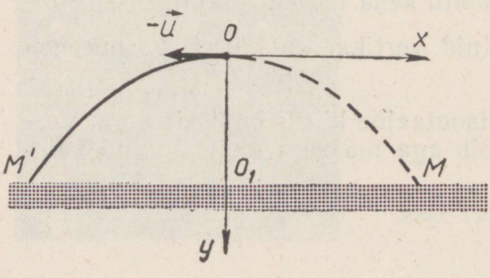
ehk

$$\cos\alpha = \frac{u}{\sqrt{u^2 + 2gh}}.$$

$\cos\alpha$ väärtuse järgi võib kergesti leida nurga α väärtuse ja seega kiiruse $\vec{v}_M$ suuna.

Kui muuta algkiiruse $\vec{u}$ suund vastupidiseks (joon. 116), siis liigub keha mööda parabooli haru OM', mis on sümmeetriline haruga OM.

Ülesanne. Kehale antakse maapinnast kõrgusel $h = 2$ m horisontaalne kiirus $u = 11 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Millise nurga all horisondiga langeb keha maapinnale? Kui pika tee horisontaalsuunas läbib keha?



Joon. 116

L a h e n d u s. Tähistame otsitava nurga tähega α. Sel juhul

$$\cos\alpha = \frac{u}{\sqrt{u^2+2gh}}.$$

Pannes u ja h väärtused sellesse valemisse, saame:

$$\cos\alpha = \frac{11\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{\sqrt{121\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}+2\cdot 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 2\ \text{m}}} \approx 0{,}86.$$

$\cos\alpha$ väärtuse tabelist leiame, et $\alpha = 30°$.

Lennu kauguse x_{max} leiame järgmiselt:

$$x_{max} = u\sqrt{\frac{2h}{g}};$$

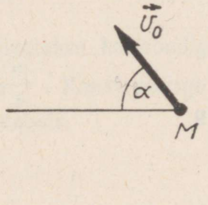
$$x_{max} = 11\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\sqrt{\frac{2\cdot 2\ \text{m}}{9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \approx 7\ \text{m}.$$

§ 54. HORISONDIGA KALDU VISATUD KEHA LIIKUMINE

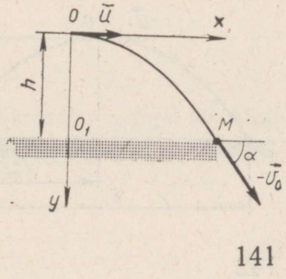
Kehale võib anda mitte ainult vertikaalse või horisontaalse algkiiruse, vaid see võib moodustada horisondiga ka mingi nullist või täisnurgast erineva nurga. Horisondiga kaldu lendab näiteks suurtükirauast välja mürsk. Nii viskavad sportlased oda ning heidavad ketast ja vasarat. Vaatleme, kuidas keha sel juhul liigub.

Asetame keha maapinnale punkti M (joon. 117) ja anname sellele kiiruse $\vec{v}_0$, mis moodustab horisondiga nurga α. Et teada saada, kuidas keha nüüd r a s k u s j õ u mõjul liigub, kasutame mehhaanilise liikumise p ö ö r a t a v u s t (vt. § 52).

Kujutleme, et keha, mis on visatud horisontaalselt kiirusega $\vec{u}$, liigub mööda p a r a b o o l i ja langeb maapinnale punktis M kiirusega $-\vec{v}_0$, mis moodustab horisondiga nurga α (joon. 118). Liikumise pööratavuse tingimusest järeldub.



Joon. 117



Joon. 118

et kui anda kehale punktis M niisama suur, kuid vastassuunaline kiirus $\vec{v}_0$, siis ta kordab täpselt horisontaalselt visatud keha liikumist, ent vastupidises järjekorras.

Siit võime järeldada, et horisondiga nurga α all visatud keha liigub mööda s a m a p a r a b o o l i, kuid mitte alla, vaid üles. Kui keha saavutab parabooli kõrgeima punkti, siis on tema kiirus $-\vec{u}$, mis on suunatud vasakule (joon. 119). Sellest hetkest alates on meil tegemist horisontaalselt visatud keha liikumisega. Keha liigub edasi parabooli vasakpoolset haru OM' mööda, mis on täiesti sümmeetriline parempoolse haruga, ja langeb maapinnale punktis M'. Seega on horisondiga kaldu visatud keha trajektooriks parabool MOM'.

Leiame veel tõusu suurima kõrguse ja kauguse $MM'=s$. Tõusu kõrguse h võime arvutada valemist $v_0^2-u^2=2gh$:

$$h=\frac{v_0^2-u^2}{2g},$$

kus v_0 on keha algkiirus ja u horisontaalne kiirus. Et $u=v_0\cdot\cos\alpha$ (vt. joon. 119), siis

$$h=\frac{v_0^2-v_0^2\cos\alpha}{2g}=\frac{v_0^2(1-\cos^2\alpha)}{2g}.$$

Arvestades, et $1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$, saame:

$$h=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}.$$

Leiame nüüd lennu kauguse $s=MM'$. Jooniselt 119 näeme, et $MM'=2x_{max}$. Kuid x_{max} on horisontaalselt visatud keha lennu kaugus. See väljendub valemiga

$$x_{max}=u\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Seega

$$s=2u\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

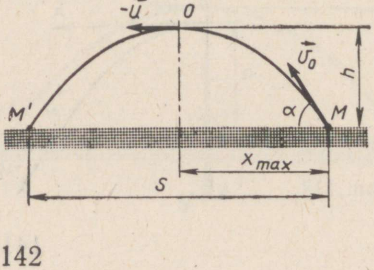
Pannes sellesse valemisse u ja h avaldised

$$u=v_0\cos\alpha \quad \text{ja} \quad h=\frac{v_0\sin^2\alpha}{2g},$$

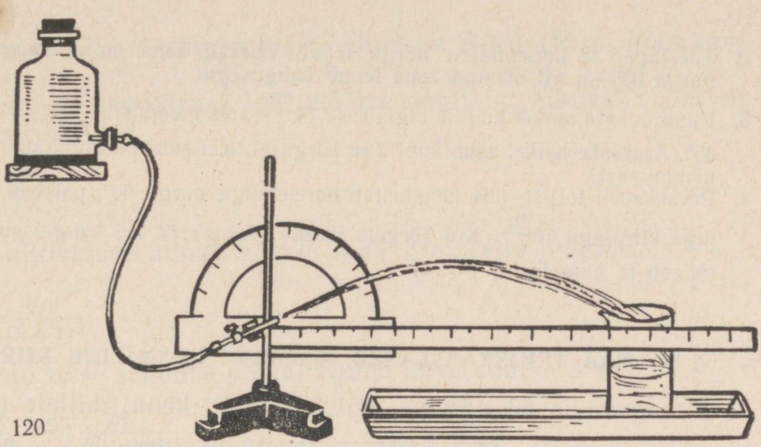
saame:

$$s=2v_0\cos\alpha\sqrt{\frac{2v_0^2\sin^2\alpha}{2g\cdot g}};$$

$$s=\frac{2v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}.$$



Joon. 119



Joon. 120

Millise nurga α puhul on lennu kaugus maksimaalne? Ilmselt siis, kui $\cos\alpha\cdot\sin\alpha$ omab suurimat väärtust. Võib näidata, et see korrutis omab suurimat väärtust siis, kui $\alpha=45°$.

Seetõttu

$$s_{max}=\frac{2v_0^2\cos 45°\sin 45°}{g}.$$

Kuid

$$\cos 45°=\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Seega

$$s_{max}=\frac{2v_0^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{g}=\frac{v_0^2}{g}.$$

Et saavutada suurtükist tulistamisel maksimaalset kaugust, peab selle toru moodustama horisondiga 45-kraadise nurga.

Õhutakistuse tõttu on tegelik lennu kaugus arvutuse teel saadud kaugusest tunduvalt väiksem.

Parabooli, mida mööda toimub ülalkirjeldatud liikumine, võib vahetult nähtavaks teha järgmise katse abil. Veega täidetud pudel asetatakse lauast teatud kõrgusele ja ühendatakse kummivooliku abil otsikuga, mis on varustatud kraaniga (joon. 120). Otsik on koos malli ja mõõtejoonlauaga kinnitatud statiivi külge. Katse algul on kraan suletud. Seejärel kraan avatakse ja mõõdetakse veeosakeste lennu kaugus. Veejoa kaldenurga suurendamisel see kaugus suureneb. Kui kaldenurk on 45°, siis veeosakeste lennu kaugus on maksimaalne. Kaldenurga edasisel suurendamisel hakkab see kaugus vähenema.

Harjutus 27

1. Keha visatakse horisondiga kaldu 30-, 45- ja 60-kraadise nurga all kiirusega $50\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Konstrueerige selle keha liikumise trajektoorid. Joonise mastaap valige vabalt.

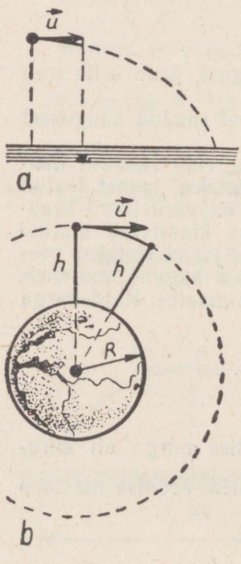
2. Tõestage, et horisondiga nurga α all visatud keha lennu kaugus võrdub nurga $90°-\alpha$ all visatud keha lennu kaugusega.
3. Kuulitõukaja annab kuulile algkiiruse $14\frac{\text{m}}{\text{s}}$, mis moodustab horisondiga nurga 45°. Äratõuke hetkel asub kuul 2 m kõrgusel. Kui suur on kuuli suurim kõrgus maapinnast?
4. Purskkaevu torust, mis moodustab horisondiga nurga 60°, paiskub välja veejuga kiirusega $10\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Kui kõrgele tõuseb veejuga ja kui kaugel purskkaevust langeb ta basseini?

§ 55. MAA TEHISKAASLASED. ESIMENE KOSMILINE KIIRUS

Paragrahvis 53 nägime, kuidas liigub keha, millele on antud horisontaalne, s. o. Maa pinnaga paralleelne algkiirus $\vec{u}$. See liigub mööda parabooli ja langeb Maale.

Selle liikumise vaatlemisel eeldasime, et Maa pind on t a s a p i n d. Kuid niisugune lihtsustus on õige ainult siis, kui kiirus $\vec{u}$ ei ole suur. Sel juhul ei ole suur ka keha nihe horisontaalsuunas.

Kui Maa pind oleks tasapind, siis liikuv keha läheneks kogu aeg Maale ja langeks vältimatult sellele (joon. 121, *a*). Kuid tegelikult on Maa kerakujuline. Seetõttu Maa pind kaugeneb kogu aeg veidi oma trajektooril liikuvast kehast (joon. 121, *b*). On ilmne, et kiirusele *u* võib valida sellise väärtuse, mille puhul Maa pind oma kõveruse tõttu kaugeneb kehast just nii palju, kui palju keha Maa külgetõmbe tõttu läheneb Maale. Sel juhul liigub keha maast jää-



Joon. 121

val kaugusel h, s. o. ringjoonel raadiusega $R+h$ (R on Maa raadius).

Kui suur on see kiirus? Igal mööda ringjoont liikuval kehal on kesktõmbekiirendus

$$a=\frac{u^2}{R+h}.$$

Selle kiirenduse annab kehale Maa gravitatsioonijõud

$$F=\gamma\frac{Mm}{(R+h)^2}.$$

Newtoni teise seaduse põhjal võime kirjutada:

$$a=\frac{F}{m}=\gamma\frac{M}{(R+h)^2}.$$

Seega

$$\frac{u^2}{R+h}=\gamma\frac{M}{(R+h)^2}.$$

Siit järeldub, et

$$u=\sqrt{\gamma\frac{M}{R+h}}. \qquad (1)$$

Tähendab, kui kehale anda horisontaalsuunas selline kiirus, hakkab ta tehiskaaslasena ümber Maa tiirlema.

Maa tehiskaaslaseks võib olla ükskõik millise massiga keha. Oluline on ainult, et sellele kehale antakse valemiga (1) määratud kiirus.

Juri Gagarin
(1934—1968)

Arvutame Maa pinna lähedal ($h=0$) tiirleva tehiskaaslase kiiruse. Sel juhul omandab valem (1) järgmise kuju:

$$u=\sqrt{\gamma\frac{M}{R}}$$

ehk

$$u=\sqrt{\gamma\frac{M}{R^2}R}.$$

Võttes arvesse, et $\gamma\frac{M}{R^2}=g$, saame valemi

$$u=\sqrt{Rg}.$$

Pannes sellesse valemisse arvväärtused

$$g=9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \text{ ja } R=6{,}38\cdot10^6 \mathrm{~m},$$

saame:

$$u=\sqrt{9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot6{,}38\cdot10^6 \mathrm{~m}}\approx8\cdot10^3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}=8\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}.$$

Kaheksa kilomeetrit sekundis — see on peaaegu 29 000 kilomeetrit tunnis! Selline kiirus tuleb anda Maa pinna lähedal asuvale kehale, et see ei langeks Maale, vaid hakkaks ümber selle tiirlema tehiskaaslasena. Seda kiirust nimetatakse *esimeseks kosmiliseks kiiruseks.*

Maa tehiskaaslased tiirlevad ümber Maa ainult gravitatsioonijõu mõjul. Seetõttu liiguvad tehiskaaslane ja selles asuvad esemed ühesuguse kiirendusega. Sel juhul võrdub nende kehade kaal nulliga (vt. § 48). Keha ja alus või tugi ei deformeeri teineteist ning seetõttu ei rõhu ka teineteisele. Kõik kehad tehiskaaslases, sealhulgas ka reisijad, on kaaluta olekus. Kosmonaudid on jutustanud kaaluta olekust, milles neil tuli kosmoselendude ajal viibida.

Esimene inimene, kes tehiskaaslasel lendas kosmoses, oli Nõukogude Liidu kodanik Juri Gagarin. 12. aprillil 1961. a. lendas ta kosmoselaeval tiiru ümber Maa.

Harjutus 28

1. Kas kosmonaut A. Leonov oli kaaluta olekus, kui ta viibis
   a) kosmoselaeva kabiinis lennu ajal orbiidil;
   b) väljaspool kosmoselaeva kosmoses?
2. Kas Maa tehiskaaslasena tiirlevas kosmoselaevas saab massi mõõta vedrudünamomeetriga? Kas selles laevas on võimalik mõõta õhurõhku elavhõbebaromeetriga, aneroidbaromeetriga?

§ 56. PLANEETIDE LIIKUMINE

Planeedid on ümber Päikese tiirlevad taevakehad. Iga planeet liigub oma orbiidil. On olemas 9 suhteliselt suurt planeeti, mis järjestuvad orbiitide raadiuste kasvamise järgi selliselt: Merkuur, Veenus, Maa, Marss, Jupiter, Saturn, Uraan, Neptuun ja Pluuto. Marsi ja Jupiteri orbiitide vahel tiirleb veel palju väikseid planeete — asteroide.

Kõikide planeetide orbiidid on ellipsid. Et aga orbiitide kuju on ringjoonele niivõrd lähedane, siis edaspidi loemegi neid lihtsuse mõttes ringjoonteks.

Oma olemuselt ei erine planeetide liikumine millegi poolest Maa tehiskaaslaste liikumisest. Samuti nagu tehiskaaslasedki liiguvad nad oma orbiitidel gravitatsioonijõu mõjul. Kuid planeetidel on gravitatsioonikeskpunktiks Päike. Seega on planeedid Päikese kaaslased. Gravitatsioonijõud, mille mõjul planeet oma orbiidil liigub, väljendub valemiga

$$F=\gamma\frac{Mm}{r^2},$$

kus M on Päikese mass, m planeedi mass ja r planeedi orbiidi raadius.

See jõud annab planeedile kesktõmbekiirenduse $\frac{v^2}{r}$. Newtoni teise seaduse põhjal võime kirjutada:

$$\frac{v^2}{r}=\frac{F}{m};$$

$$\frac{v^2}{r}=\gamma\frac{M}{r^2}.$$

Siit võime leida planeedi liikumise kiiruse:

$$v=\sqrt{\gamma\frac{M}{r}}.$$

Selgitame nüüd, millest sõltub planeedi tiirlemisperiood, s. o. aeg T, mille vältel see planeet teeb ümber Päikese ühe täistiiru. Tiirlemisperiood T võrdub ilmselt orbiidi pikkuse $2\pi r$ ja planeedi kiiruse v suhtega:

$$T=\frac{2\pi r}{v}.$$

Pannes v asemele eespool leitud väärtuse, saame:

$$T=\frac{2\pi r}{\sqrt{\gamma\frac{M}{r}}};$$

$$T^2=\frac{4\pi^2 r^3}{\gamma M}.$$

Siit tuleneb, et

$$\frac{T^2}{r^3}=\frac{4\pi^2}{\gamma M}.$$

Selle võrduse parem pool sõltub ainult Päikese massist ja on kõikide planeetide jaoks ühesugune. **Tiirlemisperioodi ruudu ja orbiidi raadiuse kuubi suhe on kõikidel planeetidel ühesugune.**

Juba enne Newtonit teati hästi, kuidas planeedid liiguvad. Astronoom Tycho Brahe vaatluste põhjal tuletas väljapaistev astronoom ja matemaatik Johannes Kepler kolm seadust (Kepleri seadused), millele allub planeetide liikumine. Üks neist kolmest seadusest (III seadus) väidabki, et pöörlemisperioodi ruudu ja orbiidi raadiuse kuubi suhe on kõikidel planeetidel ühesugune. Nagu me äsja nägime, võib selle seaduse tuletada Newtoni gravitatsiooniseadusest. Ka kaks ülejäänud Kepleri seadust järelduvad gravitatsiooniseadusest. Neid me siiski siin ei vaatle. Gravitatsiooniseaduse õigsuse parimaks tõestuseks on asjaolu, et selle rakendamisel saadi samasugused tulemused nagu vaatlustestki.

Vastavalt gravitatsiooniseadusele tõmbuvad planeedid mitte ainult Päikese, vaid ka üksteise poole. Kuid planeetide massid on Päikese massiga võrreldes väikesed. Kõikide planeetide kogumass on Päikese massist 700 korda väiksem. Seetõttu jäetakse planeetide omavaheline mõju tavaliselt arvestamata. Kuid teiste, eriti naaberplaneetide mõjul muutub teataval määral iga planeedi liikumine. Ehkki need muutused ei ole suured, võimaldasid nad omal ajal teha tähtsa avastuse, mis oli Newtoni gravitatsiooniseaduse võidukäiguks.

Kuni möödunud sajandi keskpaigani oli kõige kaugem tuntud planeet Uraan. Vaatlused näitasid, et Uraan ei liigu sugugi nii, nagu ta peaks liikuma sel juhul, kui temale mõjuksid ainult Päikese ja teiste tuntud planeetide gravitatsioonijõud.

Astronoomid Adams ja Le Verrier oletasid, et on olemas veel üks planeet, mille külgetõmbe tõttu Uraan ei liigu nii, nagu võis oodata. Gravitatsiooniseadus osutus nii täpseks, et selle põhjal võis isegi ette arvutada tundmatu planeedi asukoha. 1846. a. leidiski astronoom Galle näidatud kohas uue planeedi, mida hakati nimetama *Neptuuniks*. Hiljem selgus, et Uraani liikumishäirete seletamiseks on Neptuunist üksi vähe: päikesesüsteemis pidi olema veel üks uus planeet. Jällegi õnnestus ette arvutada koht taevavõlvil, kust seda otsida. 1930. aastal leiti ka see planeet ja jällegi oli see arvutuste teel leitud kohas. Uut planeeti hakati nimetama *Pluutoks*. Need imetlusväärsed avastused näitavad, kui täpne on gravitatsiooniseadus.

§ 57. KEHA LIIKUMINE ELASTSUSJÕU MÕJUL

Liikumiste kõrval, mis toimuvad gravitatsioonijõudude mõjul, on looduses ja tehnikas laialdaselt levinud liikumine elastsusjõu mõjul.

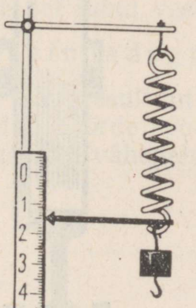
Keha liikumine elastsusjõu mõjul sõltub samuti algtingimustest, s. o. algkiiruse suurusest ja suunast. Kui algkiirus võrdub nulliga või on suunatud p i k i elastsusjõu mõjusirget, siis hoiab see jõud keha võnkliikumises.

Sellise liikumise vaatlemiseks võib korraldada järgmise katse. Spiraalvedru, mille alumise otsa külge on kinnitatud koormus, kinnitatakse statiivi külge (joon. 122). Kui tõmmata koormust mõne sentimeetri võrra allapoole ja lasta seejärel lahti, hakkab see võnkuma.

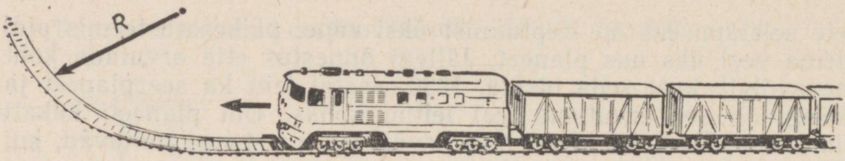
Hoopis teisiti liigub keha siis, kui algkiirus ei ole null ja on elastsusjõuga risti.

Eelmises peatükis (vt. lk. 104) me juba tutvusime ühe sellise juhuga — väljavenitatud kuminööri otsa kinnitatud keha liikumisega. Nägime, et sellistel tingimustel liigub keha mööda ringjoont, kusjuures tema kiirendus on suunatud ringjoone keskpunkti poole.

Teise näitena vaatleme raudteevaguni liikumist kurvil (joon. 123).



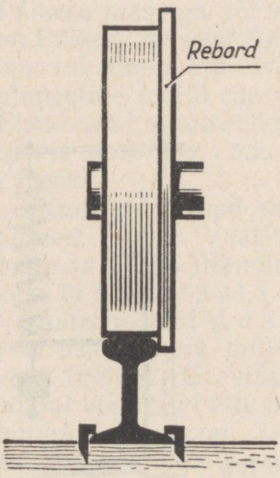
Joon. 122



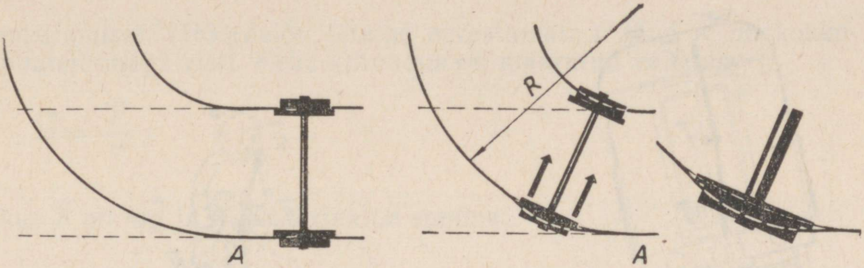
Joon. 123

Kui rong liigub sirgel teelõigul jääva kiirusega $\vec{v}$, siis igale vagunile mõjub muidugi raskusjõud, kuid see on tasakaalustatud rööbaste elastsusjõuga, mis mõjub vertikaalselt üles. Veduri veojõud aga tasakaalustab hõõrdejõu. Vagun jõuab kurvini ja hakkab liikuma mööda ringi kaart. Missugune jõud sunnib vagunit muutma oma liikumise suunda, s. o. liikuma kiirendusega? Selleks jõuks on elastsusjõud, millega rööpad mõjutavad vagunirattaid. Selleks et elastsusjõud võiks tekkida, on vagunirattad varustatud eriliste äärikutega, nn. rebordidega, mis ei puutu rööbastega kokku mitte ülalt, vaid küljelt (joon. 124). Kui vagun liigub sirgel teelõigul, siis rebordil erilist tähtsust ei ole. Sel juhul deformeerub ainult ratta see osa, mis puutub kokku rööpa pealispinnaga.

Kui ratas on jõudnud punkti A (joon. 125), siis jätkab ta liikumist endises suunas, mõjub oma rebordiga rööpale ja deformeerib seda külgsuunas, s. o. painutab rööbast väljapoole. (Sealjuures deformeerub muidugi ka rebord ise.) Tekib elastsusjõud, mis mõjub rattale rööpa külgpinnaga risti. See jõud panebki vaguni liikuma mööda ringjoont. Kui vaguniratastel rebordid puuduksid, siis ei saaks sellist jõudu tekkida ja vagun jookseks rööbastelt välja. Kui vagun liigub kurvil, mille raadius on r, kiirusega v, siis tema kesk-



Joon. 124



Joon. 125

tõmbekiirendus on $\frac{v^2}{r}$. Rebordile mõjuv jõud F, mis selle kiirenduse tekitab, on Newtoni teise seaduse põhjal

$$F = m\frac{v^2}{r},$$

kus m on vaguni mass.

Rööbas deformeerub parajasti nii palju, et tekkinud elastsusjõud F annab vagunile kiirenduse $\frac{v^2}{r}$. See deformatsioon on väga väike ega ole palja silmaga märgatav.

§ 58. NÄITEID KEHADE LIIKUMISEST MITME JÕU MÕJUL

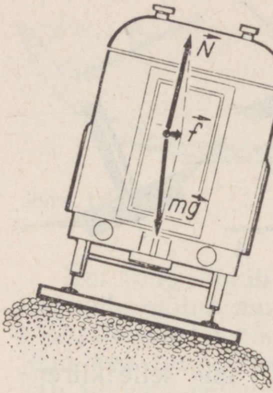
1. *Kehade kaldumine kurvidel.*

Nagu eelmises paragrahvis nägime, liigub vagun kurvil mööda ringjoone kaart seetõttu, et rööpad mõjutavad rattareborde elastsusjõuga.

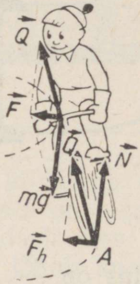
Rattarebordi ja rööpa külgpindadele mõjuva rõhumisjõu ja koos sellega ka nende pindade kulumise vähendamiseks tehakse raudteetamm kurvi kõveruskeskpunkti poole veidi kaldu (joon. 126). Keskpunkti poole suunatud jõu tekkimist soodustab sel juhul veel asjaolu, et raskusjõu $\vec{mg}$ ja rööbaste ülemiste pindadega risti mõjuva elastsusjõu (rööbaste reaktsiooni) $\vec{N}$ resultantjõud f mõjub samuti keskpunkti poole. See kergendab pöörde sooritamist, sest rattarebordile küljelt mõjuv elastsusjõud väheneb. Tõepoolest,

$$\frac{v^2}{r} = \frac{F+f}{m};$$

$$F = \frac{mv^2}{r} - f.$$



Joon. 126



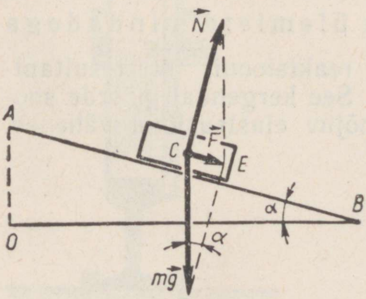
Joon. 127

Siit nähtub, et rebordile mõjuv jõud on nüüd f võrra väiksem. Seetõttu kuluvadki rööpad ja rebordid vähem.

Kuidas liigub kurvil jalgratas? Tema ratastel ju rebordid puuduvad. Samuti ei veere jalgratta rattad rööbastel. Jalgratas teeb kurvil pöörde kolme jõu — tee reaktsiooni (elastsusjõu) $\vec{N}$, hõõrdejõu $\vec{F_h}$ ja ratta ning jalgratturi raskusjõu $\vec{mg}$ koosmõju tulemusena. Selleks et resultantjõud oleks suunatud ringi keskpunkti poole, kallutab jalgrattur jalgratast selles suunas (joon. 127). Osav jalgrattur teeb seda instinktiivselt ja parajasti nii palju, et resultantjõud võrdub $\frac{mv^2}{R}$. Kui kalle on suurem või väiksem, siis jalgrattur ei säilita tasakaalu, vaid kukub. Pöörde suunas kallutavad end ka mootorratturid, ratsanikud jne.

2. Keha liikumine kaldpinnal.

Kui keha massiga m on siledal kaldpinnal (joon. 128), siis mõjub talle kaks jõudu: vertikaalselt alla suunatud raskusjõud $\vec{mg}$ ja elastsusjõud $\vec{N}$, mis tekib keha all asuva kaldpinna osa defor-



Joon. 128

meerumisel. (Hõõrdejõu jätame arvestamata.) Jõud $\vec{N}$ on kokkupuutepinnaga risti. Keha kiirendus on määratud valemiga

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m},$$

kus $\vec{F}$ on $\overrightarrow{mg}$ ja $\vec{N}$ vektoriaalne summa:

$$\vec{F} = \overrightarrow{mg} + \vec{N}.$$

Leiame resultantjõu F. Jooniselt 128 näeme, et $\angle CDE = \angle ABO$, sest nende haarad on vastavalt risti. Seega $\angle CDE = \alpha$. Kolmnurgast CDE saame:

$$CE = CD \sin \alpha.$$

Kuid $CD = mg$ ja $CE = F$.

Seega

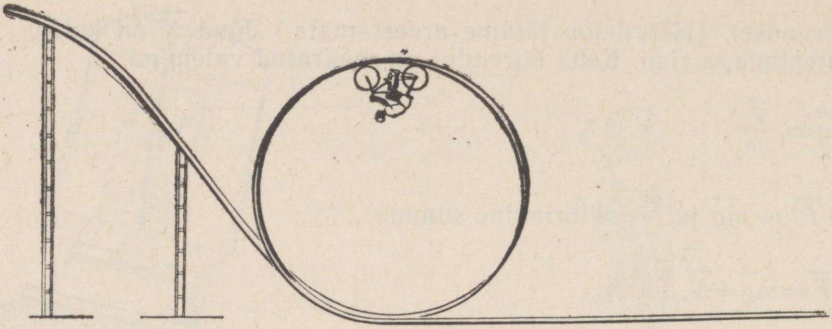
$$F = mg \sin \alpha;$$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{mg \sin \alpha}{m} = g \sin \alpha.$$

Näeme, et kiirendus a sõltub kaldenurgast α. Et $\sin \alpha$ on alati ühest väiksem, siis kiirendus a on väiksem kui g. Muutes kaldenurka α, võime laiades piirides muuta mööda kaldpinda liikuva keha kiirendust.

3. *Jalgrattur teeb surmasõlme.*

Näitena liikumisest, mille puhul kehale mõjuvad üheaegselt elastsusjõud ja raskusjõud, vaatleme veel huvitavat tsirkusenumbrit. Jalg- või mootorrattur laskub järsult kaldteelt, sõidab saadud algkiirusega silmusekujulisele teeosale, läbib selle ja jõuab uuesti horisontaalsele teele (joon. 129). Selline tsirkusenumber on teatud tingimustel selle sooritajale ohutu. Selgitame nüüd, millised on need tingimused. Kõigepealt tuleb kindlaks teha, missugused jõud mõjuvad kehale, kui see teeb surmasõlme. Ilmselt mõjub kehale raskusjõud, mis trajektoori igas punktis on suunatud alla, ja tee poolt avaldatav elastsusjõud (toereaktsioon). Elastsusjõu tekkimise põhjust on kerge mõista. Kui ringtee ülemine osa puuduks, siis jalgrattur lendaks teelt minema kiirusega, mis moodustab horisondiga nurga α ja liiguks raskusjõu mõjul parabooli mööda. See parabool on joonisel 130 kujutatud punktiirjoonega. Püüdes liikuda mööda parabooli, jalgratas d e f o r m e e r i b ringteed: ta painutab seda väljapoole. Deformatsiooni tulemusena tekib e l a s t s u s j õ u d $\vec{N}$ (joon. 131), mille suund on deformatsiooni suunale vastupidine, s. t. see jõud on suunatud sissepoole. Elastsusjõud $\vec{N}$ ongi ringtee reaktsioonijõud. Niisama suure, kuid vastassuunalise jõuga surutakse jalgrattur vastu ringteed.



Joon. 129

Jõud $\vec{N}$ on risti tee pinnaga ja on suunatud keskpunkti poole. Ringteed mööda liigub jalgrattur kiirendusega

$$a=\frac{v^2}{r},$$

mille põhjustavad kaks jõudu — raskusjõud $\overrightarrow{mg}$ ja elastsusjõud $\vec{N}$.

$$\vec{a}=\frac{\overrightarrow{mg}+\vec{N}}{m}.$$

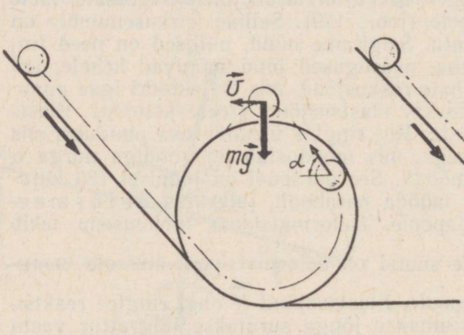
Ringtee ülemises punktis, kus mõlemad jõud mõjuvad ühes suunas, kehtib seos

$$\frac{v^2}{r}=\frac{mg+N}{m}.$$

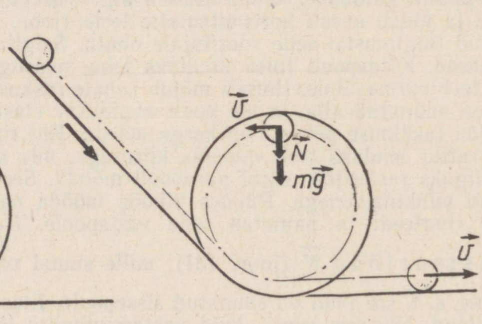
Siit saame:

$$N=\frac{mv^2}{r}-mg;$$

$$N=m\left(\frac{v^2}{r}-g\right).$$



Joon. 130



Joon 131

Sellest valemist nähtub, et mida suurem on jalgratturi kiirus, seda suurem on jõud, mis surub teda vastu ringteed. Olgu ringtee ülemises punktis kiirus selline, et kehtib seos

$$\frac{v^2}{r}=g.$$

Seega

$$v=\sqrt{rg}.$$

Sel juhul $N=0$ ja jalgrattur liigub ainult raskusjõu mõjul. Ringtee ei ole deformeeritud. Kui aga kiirus muutub kas või veidigi väiksemaks kui $\sqrt{rg}$, siis jalgrattur kaotab kontakti ringteega.

Seega valemiga

$$v=\sqrt{rg}$$

on määratud väikseim kiirus, millega sõites jalgrattur võib veel sooritada ohutult oma numbrit. Parem oleks, kui see kiirus oleks veidi suurem, nii et jalgrattur oleks kas või väikesegi jõuga surutud vastu ringteed.

Harjutus 29

1. Siledal horisontaalsel pinnal asub kuul massiga 200 g, mis on seotud 40 cm pikkuse niidi otsa. Niidi teine ots on kinnitatud telje külge. Leida elastsusjõud (niidi pinge), mis tekib, kui kuul tiirleb ümber telje sagedusega $5\frac{\text{p}}{\text{s}}$.
2. Kaldpinna tipust libiseb alla klots. Määrata klotsi kiirus kaldpinna lõpp-punktis, kui kaldpinna kõrgus on 20 cm ja pikkus 1 m. Hõõrdumine jätta arvestamata.
3. Kelk libiseb 10 m pikkusest mäest alla 2 sekundiga. Leida mäe kaldenurk. Vaba langemise kiirendus lugeda võrdseks $10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Hõõrdumine jätta arvestamata.
4. Jalgrattur teeb surmasõlme ringteel, mille raadius on 6 m. Kui suur on väikseim kiirus, millega ta võib liikuda ringtee ülemises punktis, nii et tema etteaste õnnestuks?
   Kui suure jõuga rõhub selles punktis jalgrattur ringteele? Kui suure jõuga rõhub jalgrattur ringteele selle ülemises punktis siis, kui tema kiirus on $9\frac{\text{m}}{\text{s}}$?
   Jalgratturi ja jalgratta kogumass on 80 kg.
5. Poiss tiirutab vertikaaltasapinnas 80 cm pikkuse nööri otsa seotud kuuli, mille mass on 50 g. Tiirlemisperiood on 5 s. Kui suur on niidi elastsusjõud ringjoone kõrgeimas ja madalaimas punktis?
6. 1-meetrise nööri otsa seotud keha tiirleb horisontaaltasapinnas nii, et nöör moodustab horisondiga nurga 60° ja kujundab koonuse.
   Kui suur on keha joonkiirus?
7. Uisutaja võtab liuväljal kurvi, mille raadius on 10 m, kiirusega $5\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Kui suure nurga moodustab ta horisondiga?
8. Rong liigub kurvis, mille raadius on 500 m. Rööbastevaheline kaugus on 1524 mm. Väline rööbas asub sisemisest 12 cm võrra kõrgemal.
   Kui suure kiirusega peab liikuma rong sellel kurvil, et tema rattarebordid ei rõhuks rööbastele?
9. Veoauto, mille mass koos koormaga on 6 t, liigub kumeral sillal, mille kõve-

rusraadius on 60 m, kiirusega $10\frac{m}{s}$. Kui suure jõuga rõhub auto sillale selle kõrgeimas punktis?

10. Lennuk lendab pikeeringust väljumisel kiirusega $720\frac{km}{h}$ ringjoone kaart mööda, mille raadius on 1200 m. Kui suure jõuga rõhub lendur, kelle mass on 80 kg, sel hetkel istmele?
11. Niidi otsa riputatud koormuse mõjul jääb niit terveks. Kuid miks see niit mõnikord katkeb, kui tiirutada seda koos koormusega vertikaaltasapinnas? Millises trajektoori punktis on niidi katkemine kõige tõenäolisem?
12. Miks sprinter, jalgrattur ja uisutaja, liikudes suure kiirusega, kurvis oma keha kallutavad?
13. Kui suur peaks olema Maa pöörlemisperiood, et ekvaatoril asuvad kehad oleksid kaaluta olekus?
14. Keha massiga 300 g on riputatud niidi otsa ja liigub alla kiirendusega $2{,}5\frac{m}{s^2}$. Määrata niidi elastsusjõud.
15. Kahte keha massiga 1 kg ja 2 kg, mis on niidiga kokku seotud, tõstetakse, rakendades esimesele kehale jõudu 50 N. Leida niidi elastsusjõud.
16. Üle liikumatu ploki viidud nööri otste külge on riputatud koormused massiga 1 kg ja 4 kg.
Kui suure kiirendusega koormused liiguvad?
Kui suured on koormustele mõjuvad raskusjõud ja koormuste kaalud?

§ 59. HÕÕRDEJÕU MÕJU KEHA LIIKUMISELE

Vaadeldes eelmistes paragrahvides kehade liikumist gravitatsiooni- ja elastsusjõudude mõjul, jätsime hõõrdejõu arvestamata. Kuid tegelikult mõjub Maal koos teiste jõududega alati ka hõõrdejõud.

Liugehõõrdejõu suund on teatavasti alati suhtelise liikumise suunale vastupidine. Sellega ongi määratud tema osa igas liikumises. Kiirendus, mille selline jõud Newtoni teise seaduse põhjal kehale annab, on samuti liikumisega vastassuunaline, s. o. omab negatiivset väärtust. Seega kutsub hõõrdejõud esile kiiruse vähenemise. Kui liikuvale kehale mõjub ainult hõõrdejõud, siis keha jääb lõpuks seisma. Vaatlemegi algul sellist juhtu.

Kujutleme, et liikuva rongi ette ilmus ootamatult mingi takistus ja et vedurijuht lülitas mootori välja ning pidurdas. Sellest hetkest alates mõjub rongile ainult hõõrdejõud, mille olemasolu tõttu rong mingi aja t jooksul peatub. Tema kiirus saab võrdseks nulliga. Pidurdamisel läbib rong mingi vahemaa s — nn. pidurdustee. Leiame rongi pidurdamiseks kulunud aja t ja selle jooksul läbitud teepikkuse s.

Hõõrdejõu $\vec{F}_h$ mõjul liigub rong negatiivse kiirendusega, mille võib arvutada Newtoni teisest seadusest:

$$a = -\frac{F_h}{m},$$

kus F_h on hõõrdejõu arvväärtus (see on positiivne).

Kiirendus aga on määratud valemiga

$$a = \frac{v - v_0}{t}.$$

Et meid huvitab aeg t pidurdamise algusest kuni rongi peatumiseni, siis lõppkiirus $v = 0$. Seega

$$a = -\frac{v_0}{t}.$$

Siit järgneb, et

$$\frac{F_h}{m} = \frac{v_0}{t};$$

$$t = \frac{mv_0}{F_h}.$$

Sellest valemist nähtub, et pidurdusaeg sõltub hõõrdejõust F_h ja erilisest suurusest — korrutisest mv_0. Edaspidi saame teada selle suuruse — *keha impulsi* — füüsikalise sisu. See valem kehtib muidugi ka siis, kui rongile mõjuvad peale hõõrdejõu veel teised takistusjõud.

Leiame nüüd pidurdustee s. Selleks kasutame valemit

$$v^2 - v_0^2 = 2as.$$

Et antud juhul $v = 0$, siis

$$s = -\frac{v_0^2}{2a}.$$

Kuid Newtoni teisest seadusest järeldub, et

$$a = -\frac{F_h}{m}.$$

Seega

$$s = \frac{v_0^2}{2\frac{F_h}{m}},$$

$$s = \frac{mv_0^2}{2F_h}.$$

Sellest valemist näeme, et tee, mille rong pidurdamisel läbib, sõltub hõõrdejõust ja suurusest $\frac{mv_0^2}{2}$. Lähemalt õpime seda suurust — *kineetilist energiat* — tundma paragrahvis 87. Saadud valem on õige mitte ainult hõõrdejõu, vaid ka iga muu liikumist takistava jõu kohta.

Tee, mille keha kuni seismajäämiseni läbib, on võrdeline kiiruse ruuduga. Kui kiirust suurendada kaks korda, siis on pidurdustee neli korda suurem. Seda tuleb arvestada veduri- ja autojuhtidel ning üldse kõigil, kes juhivad transpordivahendeid. Seda on vaja silmas pidada ka jalakäijail elava liiklusega tänavate ületamisel. Liikuva keha peatamiseks on vaja aega ja ruumi.

Harjutus 30

1. Kas liikuvat keha võib hetkeliselt peatada?
2. Millistest suurustest sõltub liikuva keha pidurdustee? Kuidas muutub pidurdustee, kui igaüks neist suurustest suureneb kaks korda?
3. Kui suure kiirusega liikus mootorsaan, kui ta pärast mootori väljalülitamist läbis 250 m? Hõõrdetegur on 0,02.
4. Autojuht lülitas mootori välja ja pidurdas järsult kiirusel $72\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Leida pidurdusaeg ja pidurdustee, kui hõõrdetegur on 0,2.

§ 60. KEHA LANGEMINE GAASIS VÕI VEDELIKUS

Liikumisele vastassuunalised jõud ei mõju sageli kehale üksi, vaid koos teiste jõududega. Nii on see näiteks keha langemisel gaasis või vedelikus. Vedelikus või gaasis langevale kehale mõjub peale raskusjõu veel takistusjõud, millega tutvusime paragrahvis 42.

Kuidas sel juhul keha liigub?

Enne langemist mõjub kehale ainult raskusjõud $\overrightarrow{mg}$. Kuid otsekohe, kui algab langemine, tekib hõõrdejõud $\overrightarrow{F_h}$, mis on suunatud üles. See jõud suureneb seni, kuni keha kiirus $\vec{v}$ raskusjõu mõjul kasvab. Et raskusjõud jääb konstantseks ja temaga vastassuunaline hõõrdejõud kasvab, siis saabub kindlasti kord hetk, millal need jõud on võrdsed. Sellest hetkest alates on nende kahe jõu resultant null ja vastavalt Newtoni esimesele seadusele liigub keha jääva kiirusega.

Leiame näiteks jääva kiiruse, millega langeb viithüpet sooritav langevarjur enne langevarju avamist. Et see kiirus on küllalt suur, siis takistusjõud on määratud teatavasti valemiga

$$F_h = -\beta_2 v^2.$$

Õhus langeva keha kiirenduse leiame Newtoni teisest seadusest:

$$a = \frac{mg + F_h}{m} = \frac{mg - \beta_2 v^2}{m}.$$

Kiiruse kasvamine lakkab siis, kui kiirendus saab võrdseks nulliga, s. o. kui kehale mõjuvad jõud on tasakaalus:

$$mg-\beta_2 v^2=0.$$

Sellest võrrandist leiame maksimaalse kiiruse:

$$v_{max}=\sqrt{\frac{mg}{\beta_2}}.$$

Seda kiirust nimetatakse *langemise piirkiiruseks.*

Inimese keha jaoks, mis ei ole muidugi voolujoonelise kujuga, annavad mõõtmised β_2 väärtuseks ligikaudu $0{,}2\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}$. Inimese massi võtame võrdseks 70 kg. Seega

$$v_{max}=\sqrt{\frac{70\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{0{,}2\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}}}\approx 60\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Piirkiirus saavutatakse võrdlemisi kiiresti pärast langemise algust. Sellise kiirusega langebki inimene õhus. Hüppel avatud langevarjuga on β_2 umbes 100 korda suurem ja võrdub $20\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}$. Sel juhul on langevarjuri kiirus ligikaudu $6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Väikese kiirusega liikuvale kehale mõjuv takistusjõud on võrdeline kiiruse esimese astmega:

$$F_h=-\beta_1 v.$$

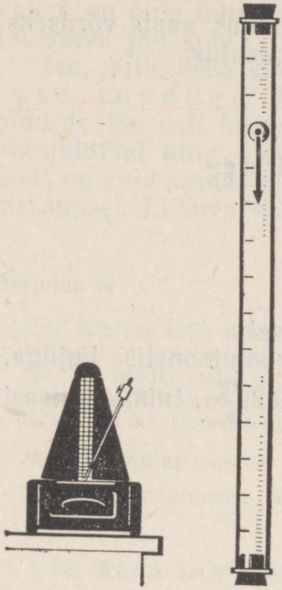
Niisiis, kui langemise piirkiirus on väike, siis tingimusest

$$mg-\beta_1 v=0$$

saame:

$$v_{max}=\frac{mg}{\beta_1}.$$

Keha liikumist vedelikus väikese piirkiirusega võib demonstreerida lihtsa katse abil. Klaastoru, mille pikkus on 1 m, suletakse alt korgiga ja täidetakse ääreni vee või glütseriiniga. Vedelikku lastakse teraskuulike ja toru ülemine ots suletakse samuti korgiga (joon. 132). Kui kuulike on jõudnud toru põhja, pööratakse toru



Joon. 132

ümber. Võib kergesti veenduda, et kuulike langeb vedelikus ühtlaselt. Selleks tehakse torule värviga jaotised ja määratakse saadud skaala abil võrdsetes ajavahemikes läbitud teed. Võrdseid ajavahemikke registreeritakse metronoomi löökide järgi.

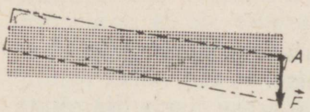
§ 61. MILLISTEL TINGIMUSTEL LIIGUVAD KEHAD KULGEVALT? MASSKESE JA RASKUSKESE

Õppides tundma kehade liikumist mitmesuguste jõudude mõjul, ei pööranud me senini tähelepanu nende mõõtmetele. Tavaliselt lugesime me kehad masspunktideks ja määrasime seejärel nende kiirendused.

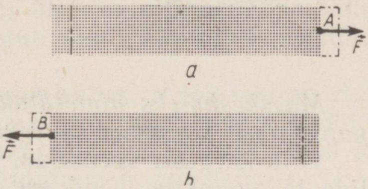
Kui keha kõik punktid liiguvad ühesuguselt, s. o. kui keha liigub kulgevalt, siis on selline lihtsustus õige. Kuid me peame siiski selgitama, millisesse keha punkti tuleb rakendada jõud, et see keha liiguks tõepoolest kulgevalt, s. t. et ta ei pöörleks.

Korraldame järgmise katse. Võtame laia joonlaua, kinnitame selle otsa külge punktis *A* niidi ja tõmbame sellest niidist suunas, mis on joonlaua teljega risti (joon. 133). Joonlaud pöördub. Joonlaua eri punktid läbivad pöördumisel eri teed ja liiguvad erisuguste kiirustega. Seega nende punktide liikumine on erinev.

Muudame nüüd jõu suunda: tõmbame joonlaua tema t e l j e s i h i s paremale (joon. 134, *a*). Joonlaua kõik punktid liiguvad nüüd ühesuguste kiirustega ja läbivad ühesugused teed. Sellist liikumist nimetatakse kulgliikumiseks. Kui niit on kinnitatud punktis A, siis on olemas ainult üks sirge, mille sihis mõjuv jõud kutsub esile keha kulgliikumise. Kui jõud mõjub ükskõik millises teises sihis, siis keha pöördub. Jõu suuna võib muuta ka vastupidiseks. Sel juhul tuleb niit kinnitada punkti B (joon. 134, *b*). Joonlaua liikumine on ka sel juhul kulgev. Seega on oluline ainult jõu mõjusirge (sirge, mida mööda jõud mõjub) asend.



Joon. 133

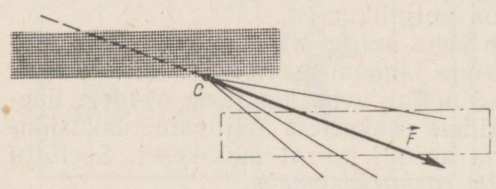


Joon. 134

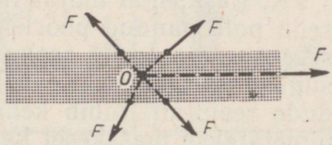
Kinnitame nüüd niidi joonlaua mingisse teise punkti, näiteks punkti C (joon. 135). Muudame jällegi niiti pingutava jõu suunda (joonisel on mõned suunad näidatud punkti C läbivate sirgetega). Näeme jällegi, et joonlaud liigub kulgevalt ainult sel juhul, kui jõud mõjub mööda teatud kindlat sirget. See sirge on joonisel kujutatud tugevama joonega. Kui punkti C rakendatud jõud mõjub ükskõik millises teises suunas, siis joonlaud pöördub. Kinnitades niidi joonlaua teistesse punktidesse, võime veenduda, et igale kinnituspunktile vastab alati üksainus jõu suund, mille puhul joonlaud ei pöördu, vaid liigub kulgevalt.

Joonisel 136 on näidatud, millistes suundades peavad mõjuma joonlaua eri punktidesse rakendatud jõud, et joonlaud liiguks kulgevalt, s. t. et selle kõik punktid liiguksid ühesuguselt. Katsed näitavad, et kõigi nende jõudude mõjusirged lõikuvad ühes punktis — punktis O.

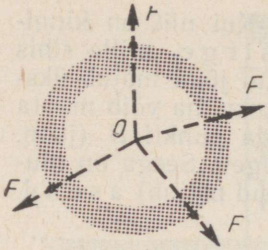
Korraldades selliseid katseid mitmesuguste kehadega, jõuame tähtsale järeldusele: igas kehas on selline punkt, milles lõikuvad keha kulgliikumise tekkimist põhjustavate jõudude mõjusirged. Iga jõud, mille mõjusirge ei läbi seda punkti, kutsub esile keha pöördumise. Seda punkti nimetatakse *masskeskmeks*.



Joon. 135



Joon. 136



Joon. 137

Masskeskmeks nimetatakse selliste jõudude mõjusirgete lõikepunkti, mis kutsuvad esile keha kulgliikumise.

Võib kergesti veenduda, et joonlaua masskese asub diagonaalide lõikepunktis. Kuid see on õige ainult siis, kui joonlaud on ühtlane (valmistatud ühest ja sellestsamast materjalist), korrapärase kuju ja ühesuguse paksusega. Kui näiteks joonlaua üks pool on valmistatud puidust ja teine terasest, siis masskese asub kuskil terasest poole sees, mille mass on suurem. Katsed näitavad, et masskeskme asukoht on määratud keha massi jaotusega selles kehas. Keha masskese võib asuda ka väljaspool keha. Näiteks homogeenne rõngas (joon. 137) võib kulgevalt liikuma hakata ainult siis, kui temale mõjub mingi jõud raadiuse sihis. Selliste jõudude mõjusirged lõikuvad rõnga geomeetrilises keskpunktis. Seal asubki tema masskese.

Kui rõnga eri osad on valmistatud erisugustest materjalidest, võib masskese asuda ka mõnes teises kohas. Sel juhul tuleb masskeskme asukoht määrata katseliselt. On muidugi olemas ka meetodid keha masskeskme koordinaatide arvutamiseks. Kuid see tee on raske ja vahel on seda isegi võimatu rakendada.

Kuid milleks on meil vaja teada keha masskeskme asukohta? Selle põhjus on järgmine. Kui keha liigub ühe või mitme jõu mõjul k u l g e v a l t, siis võime kujutleda, et see jõud või mitme jõu resultant on rakendatud masskeskmesse. Keha masskese liigub sel juhul nii, nagu oleks sellesse koondatud kogu keha mass ja nagu oleks sellele rakendatud kõik kehale mõjuvad jõud. Kui me räägime kiirendusest, millega keha liigub mingite jõudude mõjul k u l g e v a l t, siis peame silmas, et keha kõik punktid liiguvad samasuguse kiirendusega nagu masskesegi. Eelmistes paragrahvides vaatlesimegi ainult keha kulgliikumist.

Ka raskusjõu mõjul liigub keha kulgevalt (muidugi juhul, kui seda pole pandud pöörlema enne langemise algust). Selle põhjuseks on asjaolu, et raskusjõud annab keha kõikidele osadele ühesuguse kiirenduse. Keha kõikidele osakestele mõjuvate raskusjõudude resultant läbib keha iga asendi korral masskeset. Seetõttu nimetatakse masskeset ka keha *raskuskeskmeks*.

§ 62. KAS NEWTONI SEADUSI VÕIB ALATI RAKENDADA

Heites pilgu juba õpitud teemadele, peame eeskätt pöörama tähelepanu mehhaanika põhiideedele.

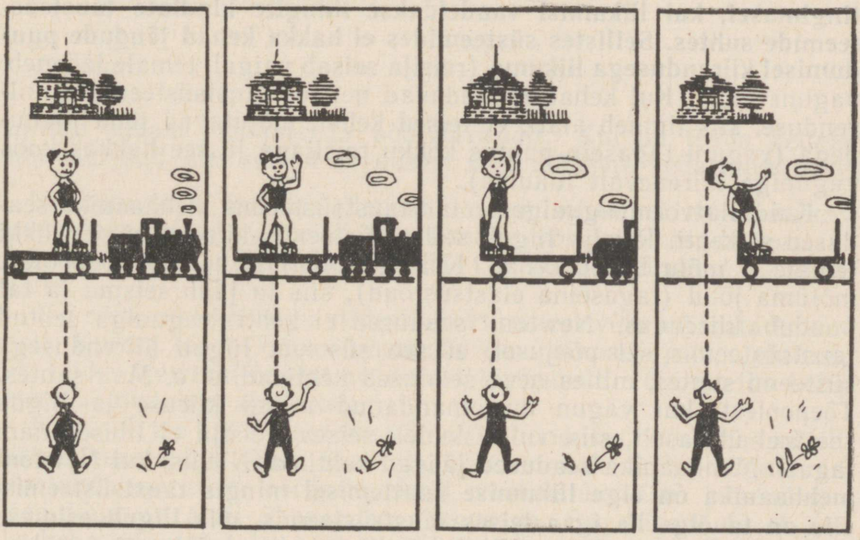
Esimene idee seisneb selles, et kui kehale ei mõju jõude või kui kõikide temale mõjuvate jõudude resultant on null, siis ta on kas paigal või liigub suuruselt ja suunalt jääva kiirusega. Kui aga keha liigub kiirendusega, siis toimub see liikumine kindlasti mingi jõu mõjul. Paigalolek või ühtlane sirgjooneline liikumine ei ole võimalik, kui kehale mõjub jõud; kiirendusega liikumine aga ei ole võimalik jõu mõjuta.

Mehhaanika teine põhiidee seisneb selles, et jõu tekitab alati mingi keha, asugu see kaugel või lähedal või olgu suur või väike. Selle kehaga võib olla vahetu kontakt, kuid see kontakt võib ka puududa. Kuid iga jõu taga peitub kindlasti mingi keha.

Nendes kahes idees on Newtoni mehhaanika kogu olemus.

Kas need põhiideed on alati õiged? Et sellele küsimusele vastata, vaatleme mõttelist katset, mida on võimalik korraldada ka tegelikult.

Reisija astub veduri külge haagitud platvormvagunisse, millel on esi- ja tagasein. Oletame, et vaguni põrand on valmistatud väga kõvast siledast materjalist ja et reisija seisab rulluiskudel, mille rullid veerevad väga väikese hõõrdumisega (joon. 138). Samuti oletame, et reisija jättis oma kaaslase jaama, et see vaat-



Joon. 138

leks vagunis toimuvaid nähtusi. Vagun hakkab paigalt liikuma. See liikumine on kiirenev. Jaama jäänud paigalseisev vaatleja näeb, et reisija jääb esialgu paigale, üksnes vaguni põrand tema all liigub edasi. Vaatleja ütleb, et mehhaanika seaduste põhjal see peabki nii olema. Reisija jääb paigale seetõttu, et talle ei mõju jõude. Alles siis, kui platvormvaguni tagasein jõuab reisijani, hakkab ta koos vaguniga liikuma. Ka see on kooskõlas mehhaanika seadustega: liikuv sein puutub reisijaga kokku, satub sellega vastastikusesse mõjutusse ja deformeerub. Tekib elastsusjõud, mis annab reisijale vaguniga võrdse kiirenduse.

Hoopis teine pilt tekib sellest olukorrast rulluiskudel seisval reisijal. Reisija näeb, et ta ise hakkab järsku vaguni suhtes kiirendusega liikuma ja et ta liigub seni, kuni jõuab vaguni tagumise seinani. Reisija leiab, et see ei ole kooskõlas mehhaanika seadustega. Ta satub ummikusse, kui ta püüab kindlaks teha, milline keha andis talle kiirenduse. Ta ei leia sellist keha. Kummal vaatlejal on siis õigus?

Olulised ei ole siin muidugi vaatlejate isikud, vaid nende asukohad, s. o. taustsüsteemid, mille suhtes liikumist vaadeldakse. Jaamas seisev vaatleja räägib liikumisest Maa suhtes. Ta loeb Maa liikumatuks taustsüsteemiks. Vagunis olev reisija aga peab silmas liikumist vaguniga seotud taustsüsteemi suhtes, mis liigub Maa suhtes kiirendusega. Kõik seisneb siin ühe taustsüsteemi (platvormvaguni) kiirendusega liikumises teise süsteemi (Maa) sultes.

Toodud näidetest selgub, et **Newtoni seadused kehtivad ainult tingimusel, kui liikumisi vaadeldakse mingite kindlate taustsüsteemide suhtes. Sellistes süsteemides ei hakka kehad jõudude puudumisel kiirendusega liikuma** (reisija seisab paigal, temale läheneb vaguni sein). Kui kehad omandavad nendes taustsüsteemides kiirenduse, siis ilmneb alati, et teised kehad mõjutavad teda jõududega (vaguni tagasein puutus kokku reisijaga ja see hakkas koos vaguniga kiirenevalt liikuma).

Kuid platvormvaguniga seotud taustsüsteemis mehhaanika seadused ei kehti. Reisija liigub selles süsteemis kiirendusega, ehkki temale ei mõju teised kehad. Kui aga reisijale hakkab tõepoolest mõjuma jõud (tagaseina elastsusjõud), siis ta jääb seisma ja tal puudub kiirendus. Newtoni seadused ei kehti vaguniga seotud taustsüsteemis sel põhjusel, et see süsteem liigub kiirendusega süsteemi suhtes, milles need seadused kehtivad, s. o. Maa suhtes. Tõepoolest, kui vagun on omandanud mingi kiiruse ja liigub seejärel ühtlaselt, siis rulluiskudel seisev reisija ei libise enam tagasi. Mehhaanika seadused jäävad kehtima. Niisiis, **kui Newtoni mehhaanika on õige liikumise vaatlemisel mingis taustsüsteemis, siis on ta õige ka igas teises taustsüsteemis, mis liigub esimese suhtes ühtlaselt sirgjooneliselt.** Selliseid taustsüsteeme on lõpmata palju. Nagu me neljandast peatükist juba teame, nimetatakse niisuguseid taustsüsteeme *inertsiaalsüsteemideks,* sest nendes kehtib inertsiseadus. Kõiki neid taustsüsteeme, mis liiguvad inertsiaalsüsteemide suhtes kiirendusega, nimetatakse *mitteinertsiaalseteks* süsteemideks, sest inertsiseadus neis ei kehti, samuti nagu ei kehti neis Newtoni teine seadus.

Harjutus 31

1. Vaguni lakke on riputatud niidi külge seotud koormus (pendel). Mis juhtub pendliga vaguni pidurdamisel? Kuidas selgitab seda nähtust a) perroonil asuv vaatleja, b) vagunis asuv vaatleja?
2. Reisija asub kaetud illuminaatoritega kajutis ja vaatab kajuti lakke riputatud koormust. Kas reisija võib koormuse asendi järgi määrata laeva liikumiskiirust? laeva kiirendust?
3. Kuidas saab vaguni lakke riputatud pendli kaldenurga järgi määrata vaguni liikumise kiirendust?
4. Koostage sellise riista projekt, mille abil saab määrata keha kiirendust.

§ 63. KÕIGE OLULISEM PEATÜKIS «DÜNAAMIKA»

Kogu dünaamika sisaldub kolmes Newtoni seaduses.

Newtoni e s i m e n e seadus väidab, et on olemas sellised taustsüsteemid (neid nimetatakse *inertsiaalsüsteemideks*), mille suhtes kehad, kui neile ei mõju teised kehad (või nende mõjud kompenseeruvad), liiguvad kiirenduseta.

Newtoni t e i n e seadus

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

kujutab endast mehhaanika põhivõrrandit. Kui on teada kehale mõjuvad jõud, siis sellest seadusest võib määrata keha kiirenduse $\vec{a}$. Newtoni teise seaduse olemus seisneb selles, et mehhaanikas vaadeldavad jõud sõltuvad kas kehade või keha osade vastastikusest asendist (koordinaatidest) või nende kiirusest üksteise suhtes.

Jõu sõltuvuse koordinaatidest või kiirustest võib määrata katseliselt. Kui on teada keha algasukoht (koordinaadid) ja algkiirus, siis, leides Newtoni teisest seadusest kiirenduse, võime leida keha asukoha mistahes ajahetkel.

Newtoni k o l m a s seadus väidab, et looduses on olemas ainult vastastikuse mõju jõud. See tähendab, et kaks keha mõjutavad teineteist suuruselt võrdsete, kuid vastassuunaliste jõududega. Need jõud on alati ühesuguse olemusega. See tähendab, et kui üks keha mõjutab teist näiteks hõõrdejõuga, siis teine keha mõjutab esimest samuti hõõrdejõuga.

Taustsüsteeme, milles kehtivad Newtoni seadused, nimetatakse inertsiaalsüsteemideks.

Newtoni seadused kehtivad väga täpselt suurte mõõtmetega kehade kohta, mille liikumise kiirused on valguse kiirusega võrreldes väikesed.

Newtoni seadused ei ole rakendatavad aatomites liikuvate osakeste kohta. Need osakesed alluvad erilistele seadustele, mis moodustavad kvantmehhaanika.

Kehade kohta, mis liiguvad valguse kiirusele lähedaste kiirustega, kehtivad relativistliku mehhaanika (relatiivsusteooria) seadused.

KEHADE TASAKAAL

7. peatükk. STAATIKA ELEMENDID

§ 64. SISSEJUHATUS

Newtoni seaduste põhjal võime leida, millise kiirenduse saavad kehad neile rakendatud jõudude mõjul.

Kuid sageli on tarvis teada, millistel tingimustel ei saa kiirendust kehad, millele võivad mõjuda mitmesugused jõud. Sellistel juhtudel öeldakse, et need kehad on t a s a k a a l u o l e k u s ehk t a s a k a a l u s. Tasakaalus on näiteks paigalolevad kehad. Kehade tasakaalu tingimuste tundmine on väga tähtis praktika seisukohalt. See on vajalik hoonete, sildade ja mitmesuguste tugede ehitamisel ning masinate ja seadmete konstrueerimisel jne. On näiteks selge, et Moskva televisioonikeskuse torn Ostankinos peab püsima kindlalt omal kohal ega tohi tuule mõjul omandada kiirendust ja nihkuda aluselt. Mehhaanika seadused võimaldavad meil selgitada, millistel tingimustel kehad on tasakaalus, eelkõige just paigalolekus.

Mehhaanika osa, mis uurib kehade tasakaalu, nimetatakse staatikaks.

Iga keha võib teatavasti liikuda kulgevalt ja peale selle veel pöörelda või pöörduda ümber mingi telje. On mõistetav, et jõudude tasakaalu korral ei tohi muutuda ei keha kulgliikumine ega pöörlemine. Erijuhul, kui nõutakse, et keha peab olema paigal, ei t o h i t a l i i k u d a k u l g e v a l t e g a p ö ö r e l d a ümber mingi telje.

Vaatleme tasakaalutingimusi nende kahe liikumise puhul eraldi.

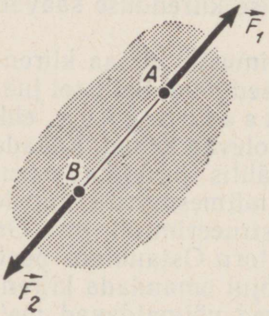
§ 65. KEHADE TASAKAAL PÖÖRLEMISE PUUDUMISEL

Kulgliikumisel liiguvad keha kõik punktid ühesuguselt. Seetõttu võib sellist liikumist vaadelda keha ühe punkti — masskeskme — liikumisena. Selleks et masskeskme kiirendus võrduks nulliga, s. o. et masskese oleks tasakaalus, peab kõikide temale rakendatud jõudude geomeetriline summa (nende jõudude resultant) võrduma nulliga. See ongi keha tasakaalutingimus pöörlemise puudumisel.

Kehale rakendatud jõud tasakaalustuvad, kui nende resultant võrdub nulliga.

Tasakaalus on näiteks keha, millele mõjuvad ühel sirgel kaks suuruselt võrdset, kuid vastassuunalist jõudu (joon. 139).

Tasakaaluolek ei tähenda tingimata paigalolekut. Kui kõikide kehale rakendatud jõudude resultant võrdub nulliga, siis Newtoni esimese seaduse põhjal võib see ka ühtlaselt sirgjooneliselt liikuda. Sellisel juhul on keha samuti tasakaalus. Näiteks langevarjur, kes langeb jääva kiirusega, on tasakaalus.

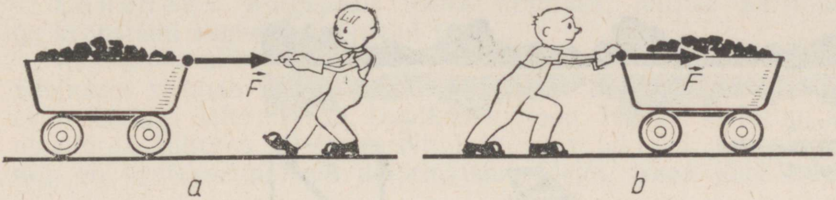


Joon. 139

Joonisel 139 kujutatud juhul ei ole mõlemad jõud rakendatud keha ühte punkti. Kuid me nägime, et tähtis ei ole jõu rakenduspunkt, vaid sirge, mida mööda jõud mõjub. Jõu rakenduspunkti ülekandmine jõu mõjusirgel ei muuda keha liikumist ega tasakaalu. On selge, et kui vagonetti tõmbamise asemel lükata (joon. 140, *a* ja *b*), siis selle tulemusena ei muutu midagi.

Kui kehale rakendatud jõudude resultant ei võrdu nulliga, siis selleks, et keha jääks tasakaalu, tuleb talle rakendada veel üks jõud, mis on resultantjõuga arvuliselt võrdne, kuid vastassuunaline. Seda jõudu nimetatakse *tasakaalustavaks jõuks*.

Selgitame katse abil, mis on resultantjõud ja tasakaalustav jõud. Kinnitame raami ülemise liistu kahte punkti dünamomeetrid *1* ja *2* (joon. 141) ja riputame niitide abil nende külge koormuse kaaluga $\vec{P}$. Niitide ühine punkt olgu O. Kolme jõu $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ ja $\vec{P}$ mõjul on punkt O tasakaalus. Nüüd asendame need kaks jõudu, millega

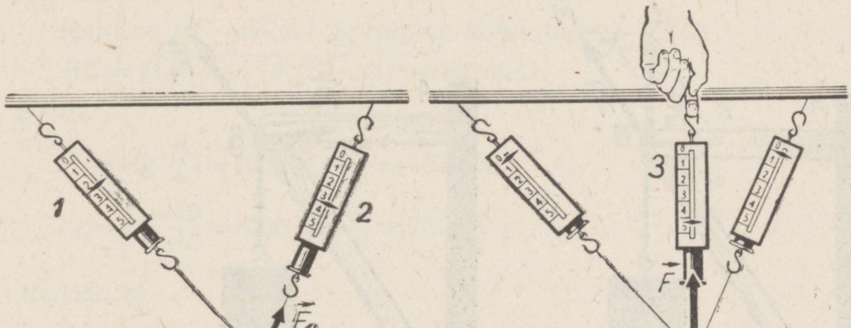


Joon. 140

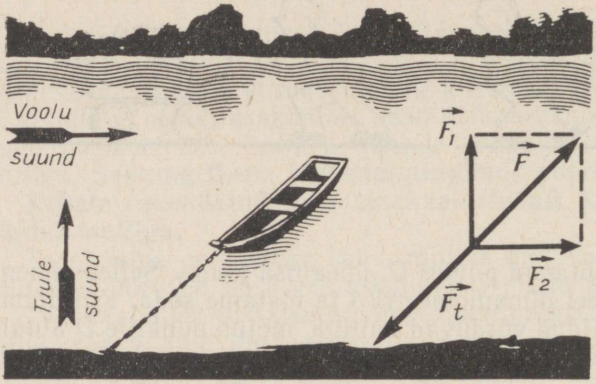
dünamomeetrid mõjutavad punkti O, üheainsa jõuga. Selleks ühendame punktiga O veel dünamomeetri *3* ja tõstame seda. Kui dünamomeetrite *1* ja *2* näidud võrduvad nulliga, mõjub punktile O ainult kaks jõudu. Üks neist — dünamomeetri *3* vedru elastsusjõud, mida see dünamomeeter mõõdab, on jõudude $\vec{F_1}$ ja $\vec{F_2}$ resultant. Koormuse kaal $\vec{P}$ aga on tasakaalustav jõud. Tasakaalustav jõud on resultantjõuga suuruselt võrdne, kuid sellega vastassuunaline. Seetõttu on punkt O tasakaalus. Vaatleme veel ühte näidet.

Kuidas hoida tasakaalus paati, millele mõjuvad jõevool ja kaldalt puhuv tuul (joon. 142)? Leiame tuule ja veevoolu poolt tekitatud jõudude $\vec{F_1}$ ja $\vec{F_2}$ resultantjõu, kasutades rööpkülikureeglit. Vektor, mis kujutab rööpküliku diagonaali, võrdubki resultantjõuga $\vec{F}$.

Selleks et paat oleks tasakaalus, peab talle olema rakendatud tasakaalustav jõud $\vec{F_t}$, mis on resultantjõuga suuruselt võrdne ja vastassuunaline. Selleks jõuks võib olla näiteks paati kaldaga ühendava trossi elastsusjõud. Kui näiteks voolav vesi mõjutab



Joon. 141



Joon. 142

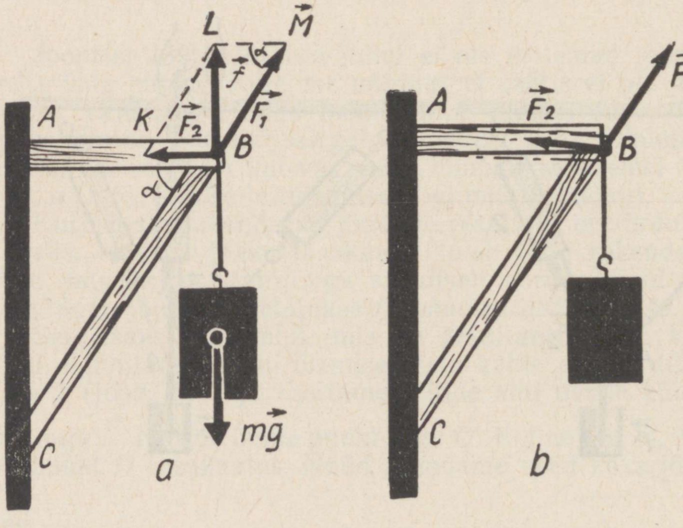
paati jõuga 150 N ja tuule rõhumisjõud on 100 N, võib nende kahe ristuva jõu resultandi arvutada Pythagorase teoreemi põhjal:

$$F=\sqrt{F_1^2+F_2^2},$$

$$F=\sqrt{(100\ \mathrm{N})^2+(150\ \mathrm{N})^2}\approx 180\ \mathrm{N}.$$

Seega võib paati hoida paigal trossi abil, mis talub vähemalt 180-njuutonilist jõudu.

Ülesanne. Koormus massiga 100 kg on riputatud kronsteinile (joon. 143, *a*), mis koosneb risttoest *AB* ja kaldtoest *BC*. Määrata tugedele mõjuvad elastsusjõud, kui $AB=48$ cm ja $AC=64$ cm.



Joon. 143

L a h e n d u s. Kõigepealt teeme kindlaks, millise päritoluga on kronsteini tugedele mõjuvad jõud.

Raskusjõu mõjul hakkab koormus langema vertikaalselt alla. Seejuures tõmbab ta endaga kaasa risttoe B otsa. Selle tulemusena see tugi deformeerub: ta pikeneb (joon. 143, *b*). Kaldtugi aga omakorda lüheneb. Deformeeritud tugedes tekivad elastsusjõud, mis on vastassuunalised deformatsioonidega. Need jõud tulebki määrata. Joonisel 143 kujutab vektor $\vec{F_1}$ elastsusjõudu kokkusurutud kaldtoes ja vektor $\vec{F_2}$ elastsusjõudu väljavenitatud risttoes.

Tugede deformatsioonid suurenevad seni, kuni jõudude $\vec{F_1}$ ja $\vec{F_2}$ resultantjõud tasakaalustab raskusjõu $\vec{mg}$. Sel juhul on kronstein tasakaalus. Jõudude $\vec{F_1}$ ja $\vec{F_2}$ resultantjõud $\vec{f}$ on vektoritele $\vec{F_1}$ ja $\vec{F_2}$ konstrueeritud rööpküliku $BKLM$ diagonaal BL. Kronsteini tasakaalu korral peab jõud $\vec{f}$ olema arvuliselt võrdne, kuid suunalt vastupidine raskusjõule $\vec{mg}$. Seetõttu $BL = mg$.

Jooniselt näeme, et kolmnurk ABC on sarnane kolmnurgaga BLM. Seetõttu võime kirjutada järgmised võrded:

$$\frac{BM}{BL} = \frac{BC}{AC},$$

$$\frac{LM}{BL} = \frac{AB}{AC}.$$

Võttes arvesse, et $BM = F_1$, $LM = BK = F_2$ ja $BL = mg$, saame:

$$\frac{F_1}{mg} = \frac{BC}{AC}, \quad \frac{F_2}{mg} = \frac{AB}{AC}.$$

Kaldtoe BC pikkuse arvutame kolmnurgast ABC:

$$BC = \sqrt{(48 \text{ cm})^2 + (64 \text{ cm})^2} = 80 \text{ cm}.$$

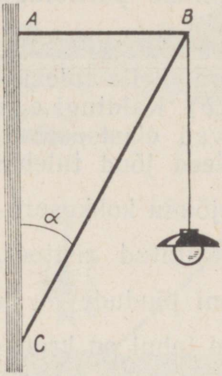
Seega

$$F_1 = mg\,\frac{BC}{AC} \approx 1000 \text{ N} \cdot \frac{80}{64} = 1330 \text{ N},$$

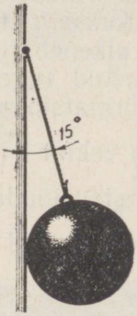
$$F_2 = mg\,\frac{AB}{AC} \approx 1000 \text{ N} \cdot \frac{48}{64} = 750 \text{ N}.$$

Harjutus 32

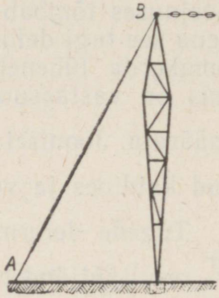
1. Koormust veetakse jääva kiirusega horisontaalsel pinnal kahe trossi abil, millele mõjuvad 500-njuutonilised jõud. Trossidevaheline nurk on 60°. Leidke resultantjõud. Kuidas muutub resultantjõud trossidevahelise nurga muutudes? Vaadelge juhte, kui see nurk on 0°, 90°, 120° ja 180°.
2. Kronsteini külge on riputatud valgusti massiga 2 kg (joon. 144). Määrake kronsteini horisontaaltoes AB ja kaldtoes BC tekkinud elastsusjõud. Nurk ACB on 30°.



Joon. 144



Joon. 145



Joon. 146

3. Kera massiga 5 kg ripub sileda seina külge kinnitatud nööri otsas (joon. 145). Leida nööri pingutav jõud ja kera rõhumisjõud seinale. Niit moodustab seinaga nurga 15°.
4. 20-meetrise horisontaalse trossi keskele kinnitati valgusti massiga 3,4 kg. Selle tulemusena langes valgusti kinnituspunkt 5 cm võrra. Leida trossis tekkinud elastsusjõud.
5. Kaldpinnal asub kast massiga 30 kg. Kaldpinna pikkus on 6 m ja kõrgus 2 m. Kas kast hakkab alla libisema, kui kasti ja kaldpinna vaheline hõõrdetegur on 0,2?
6. Antennimast (joon. 146) on kinnitatud trossi AB abil, mis moodustab mastiga nurga 30°. Jõud, millega antenn mõjutab masti punktis B, on 1000 N. Leida mastile mõjuv survejõud ja trossi pingutav jõud.

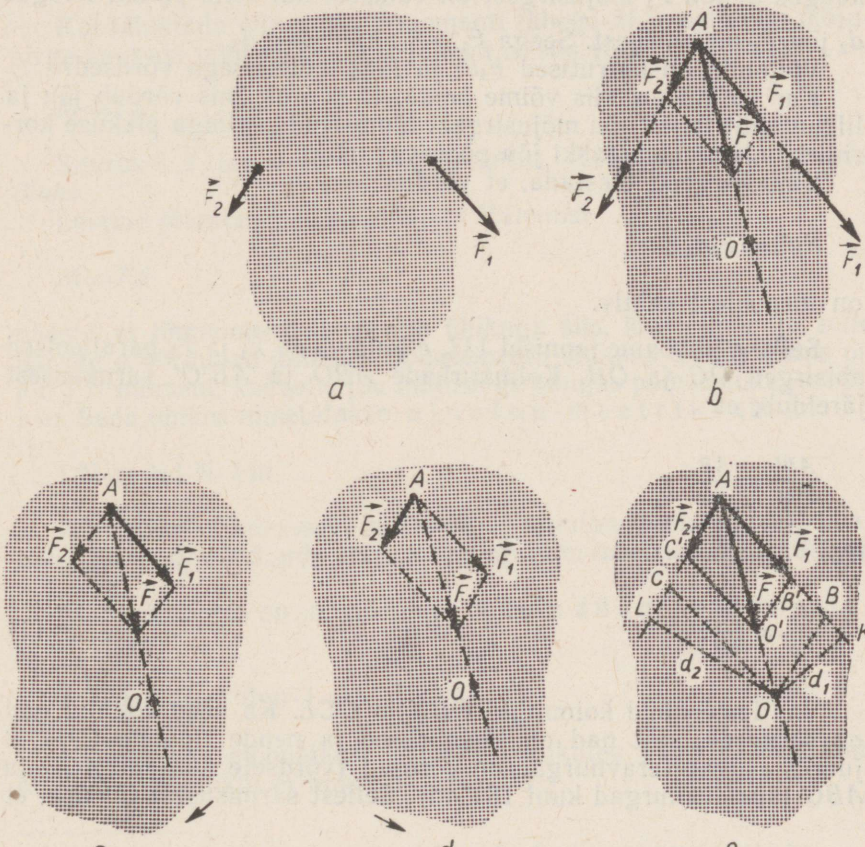
§ 66. LIIKUMATU PÖÖRLEMISTELJEGA KEHA TASAKAAL

Eelmises paragrahvis vaatlesime keha tasakaalu tingimusi pöörlemise puudumisel. Kuidas aga vältida keha pöörlemist, kui sellele mõjuvad jõud? Et sellele küsimusele vastata, vaatleme keha, mis ei saa kulgevalt liikuda, kuid mis võib pöörduda või pöörelda. Kulgliikumise vältimiseks võib keha kinnitada näiteks nii, nagu on kinnitatud ühe naelaga seina külge löödud laud. Selline laud ei saa liikuda kulgevalt. Ta võib ainult ümber naela pöörelda.

Teeme kindlaks, millistel tingimustel ei hakka liikumatul teljel paigalseisev keha jõudude mõjul pöörlema. Kujutleme, et sellise keha eri punktidesse on rakendatud kaks jõudu $\vec{F}_1$ ja $\vec{F}_2$ (joon. 147, *a*). Selleks et leida nimetatud jõudude resultanti, kanname nende rakenduspunktid üle mõjusirgete lõikepunkti A (joon. 147, *b*). Jõududele $\vec{F}_1$ ja $\vec{F}_2$ konstrueeritud rööpküliku diagonaal võrdubki resultantjõuga $\vec{F}$.

Oletame, et liikumatu pöörlemistelg on joonise tasapinnaga risti ja läbib mingit punkti O, mis asub resultantjõu $\vec{F}$ mõjusirgel. Võime näiteks kujutleda, et keha on löödud naelaga liikumatu seina külge. Keha on tasakaalus, sest et jõud $\vec{F}$ on tasakaalustatud liikumatu telje (naela) reaktsioonijõuga (elastsusjõuga).

Oletame nüüd, et üks jõududest, näiteks jõud $\vec{F_2}$, lakkas mõjumast. Seega mõjub nüüd kehale ainult üks jõud $\vec{F_1}$ (joon. 147, c). Jooniselt näeme, et see jõud paneb keha pöörlema ümber telje O kellaosuti liikumise suunas. Kui aga kõrvaldada jõud $\vec{F_1}$, siis hakkab keha jõu $\vec{F_2}$ mõjul pöörlema kellaosuti liikumisele vastassuunas



Joon. 147

(joon. 147, d). Näeme, et mõlemal jõul on pöörav mõju, kusjuures neid mõjusid iseloomustavad erinevad pöörlemissuunad. Kui aga mõlemad jõud mõjuvad koos, siis nende pööravad mõjud kompenseerivad teineteist: koos nad keha pöörlemist esile ei kutsu. Seetõttu tuleb jõudude $\vec{F_1}$ ja $\vec{F_2}$ pööravad mõjud lugeda võrdseteks ja vastassuunalisteks, ehkki need jõud ise on oma suuruselt ja suunalt erinevad.

Püüame leida suuruse, mis iseloomustab jõu pööravat mõju. Esialgu teame ainult, et jõudude $\vec{F_1}$ ja $\vec{F_2}$ jaoks peab selle suuruse arvväärtus olema ühesugune. Mis suurus see on?

Jooniselt 147, e näeme, et jõudude $\vec{F_1}$ ja $\vec{F_2}$ arvväärtused ei ole võrdsed: $F_1 > F_2$. Samalt jooniselt näeme veel, et punkti O (telje) kaugus d_1 jõu $\vec{F_1}$ mõjusirgest on väiksem kui selle punkti kaugus d_2 jõu $\vec{F_2}$ mõjusirgest. Seega $F_1 > F_2$, kuid $d_1 < d_2$.

Võib-olla on korrutised $F_1 d_1$ ja $F_2 d_2$ teineteisega võrdsed?

Kui see nii on, siis võime öelda, et suurus, mis võrdub jõu ja liikumatult teljelt jõu mõjusirgeni tõmmatud ristlõigu pikkuse korrutisega, iseloomustabki jõu pööravat mõju.

Võib kergesti tõestada, et võrdus

$$F_1 d_1 = F_2 d_2$$

on tõepoolest kehtiv.

Selleks tõmbame joonisel 147, e jõududega $\vec{F_1}$ ja $\vec{F_2}$ paralleelsed abisirged OC ja OB. Kolmnurkade ABO ja $AB'O'$ sarnasusest järeldub, et

$$\frac{AB'}{B'O'} = \frac{AB}{BO}$$

ehk

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{OC}{BO}. \tag{1}$$

Vaatleme nüüd kolmnurki OBK ja OCL. Ka need kolmnurgad on sarnased, sest nad on täisnurksed ja nende tippude C ja B juures asuvad teravnurgad on võrdsed (võrdsete nurkade ACO ja ABO täiendusnurgad kuni 180°-ni). Sellest sarnasusest tuleneb, et

$$\frac{OC}{BO} = \frac{d_2}{d_1}. \tag{2}$$

Võrreldes võrdeid (1) ja (2), saame:

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{d_2}{d_1}$$

ehk

$$F_1d_1=F_2d_2.$$

Seega osutus meie oletus õigeks.

Võrdlemisi pika geomeetrilise arutluse[1] tulemusena leidsime suuruse, mis on mõlema jõu jaoks ühesugune ja iseloomustab jõu pööravat mõju. See suurus on jõu ja pöörlemisteljelt jõu mõjusirgeni tõmmatud ristlõigu pikkuse korrutis. Uus suurus kannab veidi ebatavalist nimetust: teda nimetatakse *jõu-* ehk *pöördemomendiks*[2] punkti *O* läbiva telje suhtes.

Kui tähistada mingi jõu $\vec{F}$ momenti tähega *M* ja selle jõu mõjusirge kaugust pöörlemisteljest tähega *d*, siis võime kirjutada:

$$M=Fd.$$

Suurusel *d* on veel eriline nimetus. Teda nimetatakse *jõu õlaks.*

Leiame jõumomendi mõõtühiku. Valemist

$$M=Fd$$

näeme, et jõumoment *M* võrdub ühikuga siis, kui jõud *F* ja selle jõu õlg *d* võrduvad ühikuga. Jõumomendi ühikuks SI-süsteemis on jõu 1 N moment, kui selle jõu mõjusirge kaugus pöörlemisteljest on 1 m. Seda ühikut nimetatakse n j u u t o n - m e e t r i k s (N·m):

$$1\ \mathrm{N\cdot m}=1\ \mathrm{N}\cdot 1\ \mathrm{m}.$$

7. kl. füüsika kursusest on teada, et njuuton-meetrites väljendatakse ka tööd. Tööd, mis võrdub ühe njuuton-meetriga, nimetatakse džauliks.

CGS-süsteemis on jõumomendi ühikuks d ü ü n - s e n t i m e e t e r (dyn·cm):

$$1\ \mathrm{dyn\cdot cm}=1\ \mathrm{dyn}\cdot 1\ \mathrm{cm}.$$

Jõumomenti mõõdetakse samades ühikutes nagu töödki, kuid jõumomendi ühikut ei nimetata džauliks.

---

[1] Staatikat nimetatakse mõnikord ka j õ u d u d e g e o m e e t r i a k s.

[2] Sõna «moment» selles nimetuses tuleneb ladinakeelsest sõnast *movimentum* — liikumapanev võime. Mõistel «ajamoment» ei ole selle sõnaga midagi ühist.

§ 67. MOMENTIDE REEGEL.

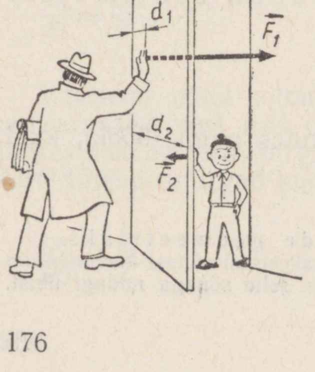
Eelmises paragrahvis öeldu põhjal saab selgeks, miks joonisel 147, *b* kujutatud tingimustel keha on tasakaalus. Kulgevalt keha liikuda ei saa, sest et kahe temale rakendatud jõu $\vec{F_1}$ ja $\vec{F_2}$ resultandi $\vec{F}$ tasakaalustab telje reaktsioonijõud $-\vec{F}$.

Pöörelda ta ei saa aga sellepärast, et nende kahe jõu momendid on teineteisega võrdsed, kuid üks neist võib keha pöörata kellaosuti liikumise suunas, teine aga vastassuunas. Kui lugeda keha eri suundades pööravad jõumomendid erimärgilisteks, siis jõudude $\vec{F_1}$ ja $\vec{F_2}$ momentide algebraline summa on null.

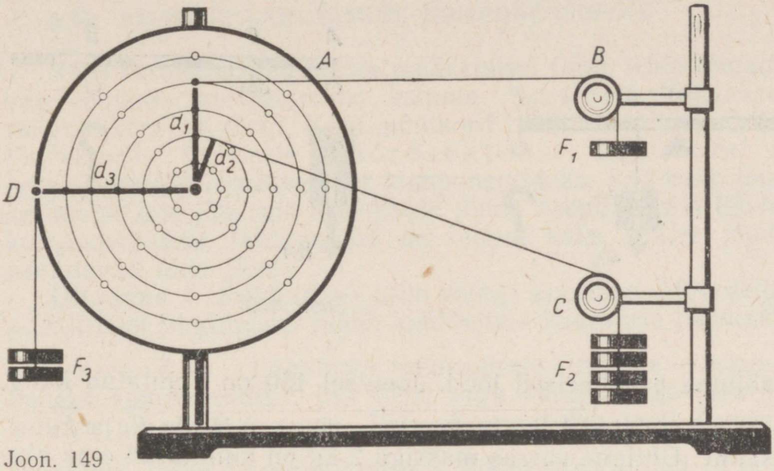
Seega võime öelda: **keha, mis võib pöörelda ümber liikumatu telje, on tasakaalus siis, kui teda kellaosuti liikumise suunas pööravate jõumomentide summa võrdub kellaosuti liikumisele vastassuunas pööravate jõumomentide summaga** (jõudude momendid tuleb võtta muidugi selle liikumatu telje suhtes). See ongi *momentide reegel.*

Jõumoment sõltub kahest suurusest: jõu enda väärtusest ja jõu õlast. Ühe ja sellesama jõumomendi võib tekitada väike jõud, mille õlg on suur, ja suur jõud, mille õlg on väike. Kui proovida näiteks sulgeda ust, lükates seda piida lähedalt, siis seda võib kergesti takistada laps, kes tõukab ust vastupidises suunas, kuid rakendab jõu ukse käepidemele (joon. 148). Selle tulemusena jääb uks paigale.

Momentide reegli õigsuses võib veenduda katsete abil, mis korraldatakse joonisel 149 kujutatud riistaga. Selle põhiliseks osaks on ketas *A*, mis on kinnitatud keskpunkti *O* läbivale teljele. Kettale on joonestatud ringjooned. Iga järgneva ringjoone raadius on eelneva omast 1 cm võrra suurem: esimese ringjoone raadius on 1 cm, teise raadius 2 cm jne. Ringjoonte ja mõnede diameetrite lõikepunktidesse on löödud naelad, mille külge võib siduda niite. Niidid on viidud üle plokkide *B* ja *C* ning nende otste külge on kinnitatud koormused. Sidudes niidid diameetrite otstes asuvate naelte külge



Joon. 148

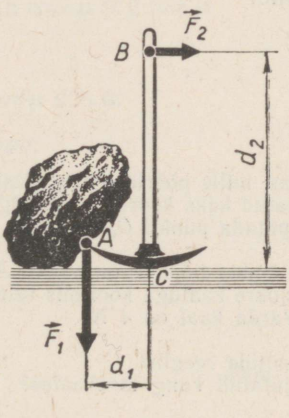


Joon. 149

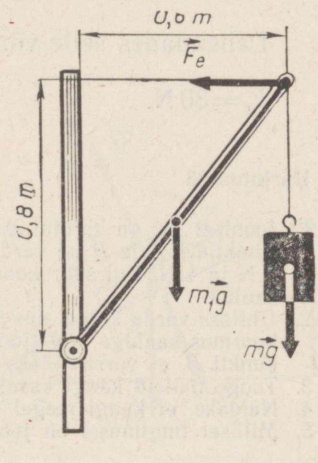
ja riputades nende otsa erinevaid koormusi, võib tekitada erinevaid jõumomente, mille mõju tasakaalustatakse kolmanda, vahetult ketta külge riputatud koormuse raskusjõu momendiga. On kerge veenduda, et ketas on tasakaalus siis, kui kõigi kolme jõumomendi algebraline summa võrdub nulliga.

Jõumoment võrdub koormuse raskusjõu ja ketta keskpunktist niidini tõmmatud ristlõigu pikkuse korrutisega. Selle ristlõigu pikkus sentimeetrites võrdub aga vastava ringjoone järjekorranumbriga.

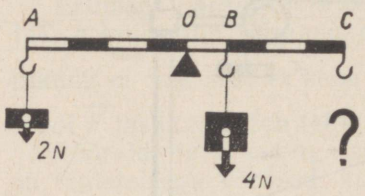
Ei ole raske mõista, et momentide reeglist järeldub tuntud **kangi reegel**: kang on tasakaalus siis, kui temale mõjuvad jõud on pöördvõrdelised õlgade pikkustega. Kangile ei pea tingi-



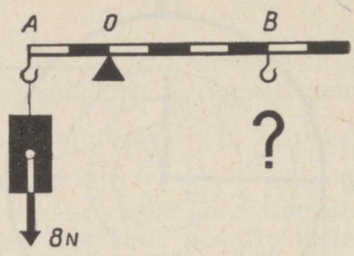
Joon. 150



Joon. 151



Joon. 152



Joon. 153

mata mõjuma paralleelsed jõud. Joonisel 150 on kujutatud kang, millele on rakendatud kaks teineteisega ristuvat jõudu $\vec{F_1}$ ja $\vec{F_2}$.

Ülesanne. Ühtlane varras massiga 2 kg on kinnitatud oma alumise otsaga liigendi külge (joon. 151). Varda teise otsa külge on kinnitatud koormus massiga 3 kg. Varras hoitakse tasakaalus horisontaalse nööri abil, mis on kinnitatud liikumatu vertikaalse toe külge. Kasutades joonisele märgitud arvulisi andmeid, leida nööri pingutav jõud.

Lahendus. Vardale mõjub neli jõudu: varda raskusjõud, mis on rakendatud selle keskpunkti, koormuse raskusjõud, nööri elastsusjõud ja liigendi elastsusjõud. Pöörlemistelg läbib liigendit. Loetletud jõududest on ainult kolmel esimesel selle telje suhtes nullist erinev pöördemoment. Liigendi reaktsioonijõu mõjusirge lõikab pöörlemistelge ja selle moment võrdub nulliga. Kolmest jõumomendist pöörab üks varrast kellaosuti liikumisele vastupidises suunas ja kaks kellaosuti liikumise suunas. Momentide reegli põhjal.

$$30\,\mathrm{N}\cdot 0{,}6\ \mathrm{m}+20\,\mathrm{N}\cdot 0{,}3\,\mathrm{m}-F_e\cdot 0{,}8\,\mathrm{m}=0.$$

Lahendades selle võrrandi, saame:

$$F_e=30\,\mathrm{N}.$$

Harjutus 33

1. Joonisel 152 on kujutatud ühtlane varras, mille pöörlemistelg läbib punkti O. Punktides A ja B on varda külge riputatud kaks koormust kaaluga vastavalt 2 N ja 4 N. Kui suur koormus tuleb riputada punkti C, et varras jääks tasakaalu?
2. Ühtlase varda külge, mis võib pöörelda ümber telje O, on punkti A kinnitatud koormus kaaluga 8 N (joon. 153). Kui suure kaaluga koormus tuleb kinnitada punkti B, et varras jääks tasakaalu? Varda kaal on 4 N.
3. Tooge näiteid kangi kasutamisest.
4. Näidake, et kangi reegel tuleneb momentide reeglist.
5. Millisel tingimusel on joonisel 150 kujutatud kang tasakaalus?

§ 68. JÕUDUDE LAHUTAMINE KOMPONENTIDEKS

Keha tasakaalutingimuste määramisel tuleb leida temale mõjuvate jõudude geomeetriline summa. Tavaliselt liidetakse jõude rööpkülikureegli järgi. Kuid mõnikord tuleb sooritada tehe, mis on jõuvektorite liitmisele p ö ö r d t e h t e k s. Sellist tehet nimetatakse *vektorite lahutamiseks* komponentideks. Kui kahe jõu liitmisel me leiame jõu, mis neid kahte jõudu asendab, siis jõuvektorite komponentideks lahutamisel me leiame kaks sellist jõudu, mis asendavad ühte jõudu.

Ülesanne 1. Kaldpinnal asub mingi koormus. Hõõrdetegur on μ. Millistel tingimustel hoiab hõõrdejõud koormuse tasakaalus?

L a h e n d u s. Lahutame koormusele mõjuva raskusjõu $\overrightarrow{mg}$ kaheks komponendiks: üks neist olgu kaldpinnaga risti ja teine sellega paralleelne (joon. 154). Seega tuleb meil konstrueerida rööpkülik, mille diagonaal on $\overrightarrow{mg}$. Rööpküliku küljed $\overrightarrow{F_1}$ ja $\overrightarrow{F_2}$ ongi jõu $\overrightarrow{mg}$ komponendid. Jooniselt näeme, et kui kaldpind moodustab horisondiga nurga α, siis

$$F_1 = mg \cos \alpha,$$

$$F_2 = mg \sin \alpha.$$

Komponent $\overrightarrow{F_1}$ on jõud, mis surub koormuse vastu kaldpinda. Seega hõõrdejõud avaldub järgmiselt:

$$F_h = \mu F_1 = \mu\, mg \cos \alpha.$$

Jõu $\overrightarrow{F_1}$ tasakaalustab kaldpinna reaktsioonijõud (elastsusjõud) $\overrightarrow{N}$. Kui koormus on tasakaalus, siis jõu $\overrightarrow{F_2}$ tasakaalustab hõõrdejõud. Seega peab olema täidetud tingimus:

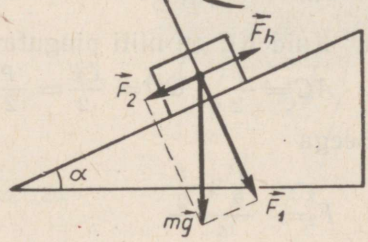
$$mg \sin \alpha = \mu\, mg \cos \alpha$$

ehk

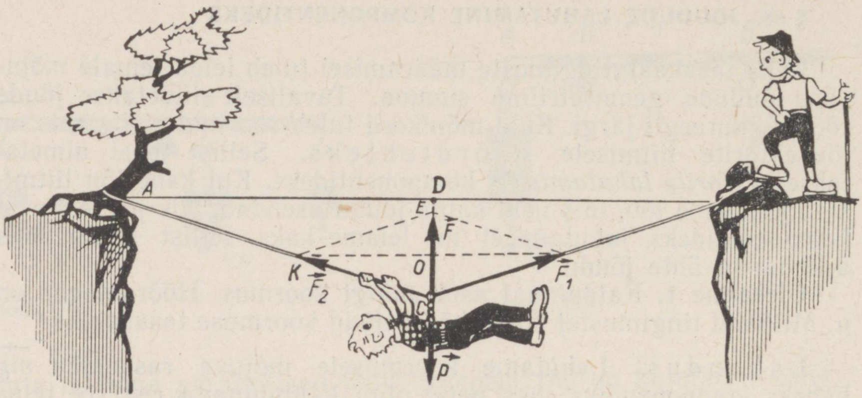
$$\sin \alpha = \mu \cos \alpha.$$

Siit saame:

$$\mu = \tan \alpha.$$



Joon. 154



Joon. 155

Seega koormus on kaldpinnal tasakaalus siis, kui koormuse ja kaldpinna vaheline hõõrdetegur võrdub kaldpinna kaldenurga tangensiga või on sellest suurem.

Ülesanne 2. Alpinist ronib ühelt kaldalt teisele mööda kahe kalda vahele tõmmatud köit (joon. 155). Alpinisti kaal $P=800$ N ja köie pikkus $l=20$ m. Kui alpinist asub köie keskel, on köie keskpunkt 2 m võrra kinnituspunktidest madalamal. Leida köit pingutav jõud.

L a h e n d u s. Alpinisti kaal $\vec{P}$ on rakendatud köiele punktis C. Et alpinist oleks tasakaalus, peab tema kaalu tasakaalustama sellega võrdne, kuid üles suunatud jõud $\vec{F}$. Lahutame selle jõu kaheks komponendiks $\vec{F_1}$ ja $\vec{F_2}$, mille mõjusirged ühtivad köie pooltega. Jooniselt nähtub, et kolmnurgad ADC ja KOC on sarnased (nad on täisnurksed ja nende tippude A ja K juures olevad nurgad on võrdsed). Seetõttu

$$\frac{KC}{CO}=\frac{AC}{CD}$$

ehk

$$KC=\frac{CO\cdot AC}{CD}.$$

Kuid KC on niiti pingutav jõud F_2,

$$AC=\frac{l}{2},\quad CO=\frac{CE}{2}=\frac{P}{2}\text{ ja } CD=s.$$

Seega

$$F_2=\frac{\frac{P}{2}\cdot\frac{l}{2}}{s}$$

ehk

$$F_2 = \frac{Pl}{4s}.$$

Pannes sellesse valemisse arvväärtused, saame:

$$F_2 = \frac{800\ \mathrm{N} \cdot 20\ \mathrm{m}}{4 \cdot 2\ \mathrm{m}} = 2000\ \mathrm{N}.$$

Nagu näeme, on köit pingutav jõud alpinisti kaalust suurem. See on seda suurem, mida väiksem on köie keskpunkti langus *s*, s. o. mida suurem on nurk jõudude $\vec{F}_1$ ja $\vec{F}_2$ vahel. Köit ei ole võimalik nii pingutada, et see oleks täiesti horisontaalne. Valemist (1) näeme, et kui *s* läheneb nullile, siis pinge köies kasvab lõpmatult suureks. Praktiliselt võib see põhjustada muidugi ainult köie katkemist. Seetõttu võivadki postide vahele liiga pinguletõmmatud traadid jäätumisel katkeda isegi võrdlemisi tühise jääkoorma all.

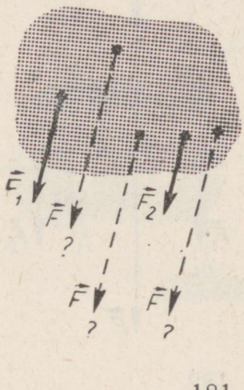
§ 69. PARALLEELSETE JÕUDUDE LIITMINE

Paljudel juhtudel on kahe erinevatesse punktidesse rakendatud jõudude mõjusirged üksteisega paralleelsed. Selliste jõudude hulka kuulub näiteks raskusjõud. Raskusjõud mõjub üheaegselt keha kõikidele punktidele ja on suunatud vertikaalselt alla.

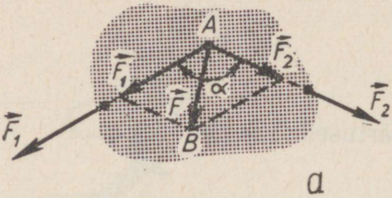
Teame, et keha kõikidele osakestele mõjuvaid raskusjõude võib asendada üheainsa jõuga, sest paralleelseid jõude võib liita. Samuti teame, et nende paralleelsete jõudude resultandil on kindel rakenduspunkt — keha *raskuskese*.

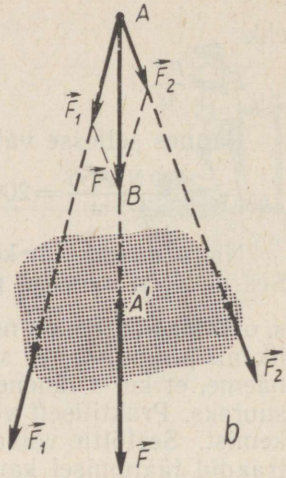
Vaatleme lähemalt, kuidas liituvad kehale mõjuvad paralleelsed jõud ja millised on sel korral keha tasakaalutingimused.

Kõigepealt teeme kindlaks, milline on kahe samasuunalise paralleelse jõu $\vec{F}_1$ ja $\vec{F}_2$ resultandi suund ja arvväärtus (joon. 156). Kui kehale oleks rakendatud kaks mitteparalleelset jõudu $\vec{F}_1$ ja $\vec{F}_2$ (joon. 157, *a*), mis moodustavad teineteisega nurga α, siis resultant $\vec{F}$ võrduks nendele jõududele konstrueeritud rööpküliku diagonaaliga.



Joon. 156





Joon. 157

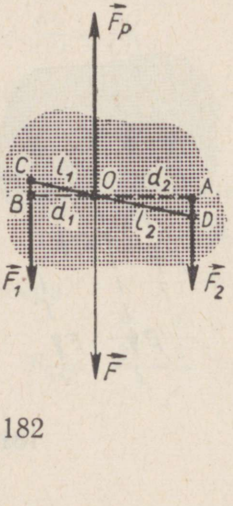
Joonisel 157, *b* on kujutatud sama keha, millele on rakendatud sama arvväärtusega jõud, kuid nendevaheline nurk α on nüüd väiksem.

Võrreldes jooniseid 157, *a* ja 157, *b*, näeme, et rööpküliku diagonaali pikkus on joonisel 157, *b* suurem kui joonisel 157, *a*.

Kui nurka α veelgi vähendada, muutuks diagonaal veelgi suuremaks. On selge, et piirjuhul, kui nurk α saab võrdseks nulliga, s. o. kui jõud $\overrightarrow{F_1}$ ja $\overrightarrow{F_2}$ saavad teineteisega paralleelseks, võrdub resultantjõud nende jõudude aritmeetilise summaga $F_1 + F_2$ ja on nendega paralleelne.

Paralleelsete jõudude rakenduspunkt asub lõpmatuses. Kuid nagu me juba nägime, ei ole oluline jõu rakenduspunkt, vaid sirge, mida mööda jõud mõjub.

Tegime kindlaks, et **kahe samasuunalise paralleelse jõu resultandi arvväärtus võrdub nende jõudude arvväärtuste summaga ja et selle suund ühtib liidetavate jõudude suunaga.** Kuid milline joonisel 156 punktiirjoonega kujutatud jõududest on siis jõudude $\overrightarrow{F_1}$ ja $\overrightarrow{F_2}$ resultant? Sellele küsimusele võib kõige kergemini vastuse leida momentide reegli abil. Valime kahe paralleelse jõu $\overrightarrow{F_1}$ ja $\overrightarrow{F_2}$ resultandi rakenduspunkti nende jõudude rakenduspunkte ühendaval sirglõigul



Joon. 158

CD (joon. 158). Me teame ju, et rakenduspunkti võib jõu mõjusirgel üle kanda ükskõik millisesse punkti. Oletame, et jõudude $\vec{F_1}$ ja $\vec{F_2}$ resultant on rakendatud selle sirglõigu punkti O. Kujutame sellest punktist jõuvektori $\vec{F}$, mis on paralleelne jõududega $\vec{F_1}$ ja $\vec{F_2}$ ning mille arvväärtus võrdub F_1+F_2. Läbigu seda punkti liikumatu telg, mille ümber keha võib pöörelda.

Kui me valisime punkti O õigesti, s. t. kui sellesse punkti rakendatud jõud $\vec{F}$ on tõepoolest jõudude $\vec{F_1}$ ja $\vec{F_2}$ resultant, siis peab keha olema tasakaalus. Jõu $\vec{F}$ tasakaalustab ju liikumatu telje reaktsioonijõud $\vec{F_r}$, s. o. elastsusjõud, millega telg mõjutab keha. Kui liikumatu pöörlemisteljega keha on tasakaalus, siis, nagu me eelmises paragrahvis nägime, peab teda kellaosuti liikumise suunas pöörava jõu moment selle telje suhtes võrduma kellaosuti liikumisele vastassuunas pöörava jõu momendiga. Jooniselt näeme, et jõud $\vec{F_2}$ pöörab keha kellaosuti liikumise suunas ja jõud $\vec{F_1}$ vastassuunas. Jõudude $\vec{F_1}$ ja $\vec{F_2}$ momendid telje O suhtes peavad seega olema võrdsed.

Jõudude $\vec{F_1}$ ja $\vec{F_2}$ momendid on vastavalt F_1d_1 ja F_2d_2 (d_1 on jõu F_1 õlg ja d_2 on jõu F_2 õlg). Seega

$$F_1d_1=F_2d_2$$

ehk

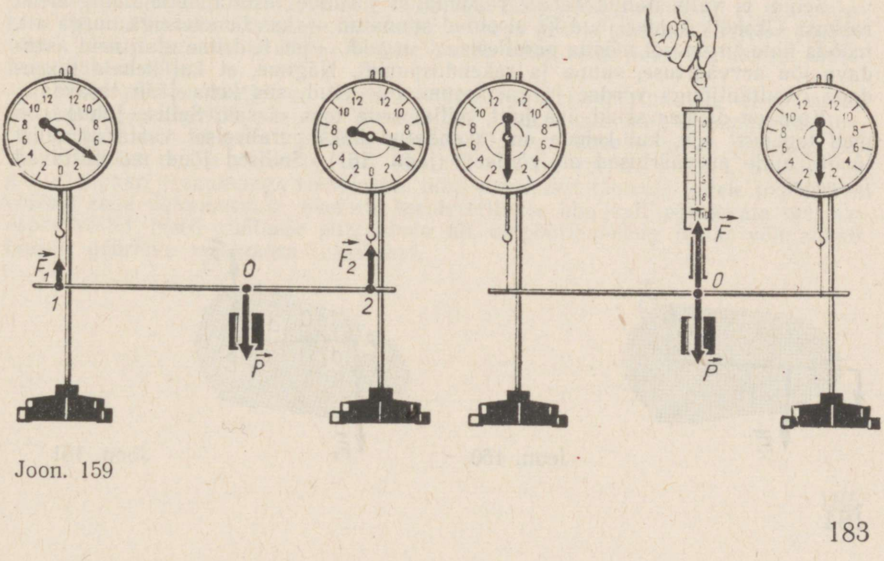
$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{d_2}{d_1}.$$

Kolmnurgad OBC ja OAD on sarnased, sest nad on täisnurksed ja punkti O juures asuvad nurgad on võrdsed kui tippnurgad. Kolmnurkade sarnasuse põhjal võime kirjutada, et

$$\frac{d_2}{d_1}=\frac{l_2}{l_1}.$$

Seega

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{l_2}{l_1}.$$



Joon. 159

Sellest võrdest nähtub, et **kahe paralleelse jõu resultantjõud läbib punkti, mis jagab liidetavate jõudude rakenduspunkte ühendava sirglõigu nende jõududega pöördvõrdelisteks osadeks.**

Selgitame seda järeldust katsete abil.

Kinnitame kahe dünamomeetri varraste külge kapronniidi abil kerge puitjoonlaua (joon. 159). Punkti O, mis asub kuskil punktide *1* ja *2* vahel, kinnitame koormuse, mille kaal on $\vec{P}$. Dünamomeetrite osutid kalduvad erinevate nurkade võrra. Nad näitavad, et niitidele mõjuvad ülessuunatud jõud $\vec{F_1}$ ja $\vec{F_2}$. Nende kahe jõu resultantjõu suuruse määramiseks kinnitame joonlaua külge veel ühe dünamomeetri. Selle kinnituspunkti valime nii, et tema tõstmisel üles kahe ülejäänud dünamomeetri näidud võrduvad nulliga. Osutub, et selliseks punktiks on koormuse kinnituspunkt. Kolmanda dünamomeetri näit võrdub kahe esimese dünamomeetri näitude summaga. Seega jõud $\vec{F}$ asendab jõudude $\vec{F_1}$ ja $\vec{F_2}$ mõju ja on seetõttu nende resultant. Joonlaud jäi tasakaalu sellepärast, et punktile O on rakendatud tasakaalustav jõud $\vec{P}=-\vec{F}$. Katsest nähtub, et

$$\vec{F}=\vec{F_1}+\vec{F_2}$$

ja et resultandi rakenduspunkt jagab punkte *1* ja *2* ühendava sirglõigu liidetavate jõududega pöördvõrdelisteks osadeks.

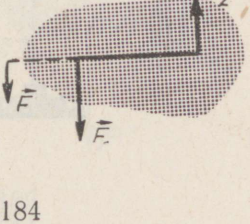
Kui on teada kehale rakendatud jõud ja nende rakenduspunktide vaheline kaugus, võib kergesti leida ka resultantjõu rakenduspunkti. Keha, millele on rakendatud kaks paralleelset jõudu, jääb tasakaalu siis, kui resultandi rakenduspunkti rakendada resultantjõuga võrdne ja vastassuunaline jõud.

Kehale võivad mõjuda ka vastassuunalised paralleelsed jõud $\vec{F_1}$ ja $\vec{F_2}$ (joon. 160). Sel juhul võrdub resultantjõu F arvväärtus liidetavate jõudude arvväärtuste vahega. Resultantjõud on suunatud suurema jõu poole. Resultantjõu rakenduspunkt aga, nagu te ise veenduda võite, ei asu liidetavate jõudude rakenduspunktide vahel, vaid suurema jõurakenduspunkti taga. Resultantjõu rakenduspunkti kaugused liidetavate jõudude mõjusirgetest on ka nüüd pöördvõrdelised nende jõududega.

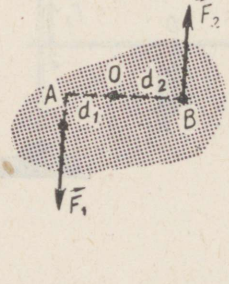
§ 70. JÕUPAAR

Senini ei valmistanud kehale rakendatud jõudude resultandi leidmine meile raskusi. Ükskõik kuidas jõud ka ei olnud suunatud — kas teineteisega nurga all, mööda ühte sirget või mööda paralleelseid sirgeid — me leidsime alati neid asendava jõu arvväärtuse, suuna ja rakenduspunkti. Nägime, et kui kehale rakendada resultantjõuga võrdne ja vastassuunaline jõud, siis keha jääb tasakaalu.

Kuid on olemas siiski üks juht, millal seda teha ei saa. Sellise juhuga on meil tegemist siis, kui kehale on rakendatud kaks paralleelset vastassuunalist jõudu, mille arvväärtused on võrdsed (joon. 161). Sellised jõud moodustavad *jõupaari.*



Joon. 160



Joon. 161

Nende jõudude summa võrdub muidugi nulliga. Kuid kas antud juhul keha on tasakaalus, nagu seda peab olema keha, millele rakendatud jõudude resultant võrdub nulliga? Piisab pilgu heitmisest joonisele, et anda sellele küsimusele eitav vastus: jõupaari mõjul hakkab keha pöörlema ja ei jää tasakaalu. Ei ole võimalik leida rakenduspunkti üheleainsale jõule, mis jõupaari asendaks. Tõepoolest, kus siis peaks asuma nulliga võrduva jõu rakenduspunkt? Kuna jõupaari mõjul keha pöörleb, siis need jõud peavad tekitama mingi pöördemomendi. Kuid millise telje suhtes? Osutub, et kui on tegemist jõupaariga, siis pole meil vaja näidata, millist punkti peab läbima telg, mille suhtes me jõumomendid arvutame: nende kahe jõu momentide summa on ühesugune kõikide telgede suhtes, mis on risti jõupaari tasapinnaga.

Seda võib kergesti tõestada. Võtame joonisel 161 vabalt mingi punkti O ja kujutame läbi selle telje, mis on risti joonise tasapinnaga. Millega võrduvad kummagi jõu momendid selle telje suhtes? Jõu $\overrightarrow{F_1}$ moment $M_1=F_1d_1$ ja jõu $\overrightarrow{F_2}$ moment $M_2=F_2d_2$. Võime kergesti leida ka momentide summa:

$$M=M_1+M_2=F_1d_1+F_2d_2.$$

Võttes arvesse, et $F_1=F_2=F$, saame:

$$M=F(d_1+d_2).$$

Kuna

$$d_1+d_2=d,$$

siis

$$M=Fd.$$

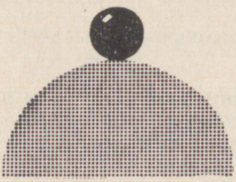
Jõupaari jõudude mõjusirgete vahelist kaugust d nimetatakse jõupaari õlaks. Seega, **jõupaari moment võrdub selle paari ühe jõu ja õla korrutisega.** Kuna jõupaari moment ei sõltu telje asukohast, siis öeldaksegi ainult «jõupaari moment» ja jäetakse märkimata, millise telje suhtes see moment on arvutatud.

Kuidas käitub keha, millel puudub liikumatu pöörlemistelg — nn. vaba keha — kui sellele mõjub jõupaar? See hakkab muidugi pöörlema. Kuid millise telje ümber ta pöörleb? Et sellele küsimusele vastata, tuletame meelde masskeskme mõistet. Nägime, et masskese liigub nii, nagu oleks kõik kehale mõjuvad jõud temale rakendatud. Kui kõikide jõudude summa võrdub nulliga, siis paigalseisva keha masskese ei saa nende jõudude mõjul liikuma hakata. Kui aga kehale mõjub jõupaar, siis jõudude summa võrdubki nulliga. Seega jõupaari mõjul ei saa masskese liikuma hakata. On selge, et masskese peab jääma pöörlemisteljele: pöörlemisel ju telje punktid ei liigu. **Jõupaar paneb vaba keha pöörlema ümber masskeset läbiva telje.**

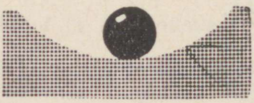
Sellel pöörlemisteljel on tähtis omadus. Kuna kinnitatud telg ei võimalda kehal liikuda kulgevalt, siis telje elastsusjõud (reaktsioonijõud) tasakaalustab jõu, mis püüab keha kulgevalt liikuma panna. Kui aga kehale mõjub jõupaar, siis kulgliikumine ei ole võimalik, sest jõudude summa võrdub nulliga. Seetõttu ei mõju jõupaari tasapinnaga ristiolevale ning masskeset läbivale teljele jõude, mis võiksid seda deformeerida. Seetõttu tsentreeritakse hoolikalt pöörlevate masinaosade võllid. Need püütakse paigaldada nii, et pöörlemistelg läbiks võimalikult täpselt pöörleva masinaosa masskeset.

§ 71. RASKUSJÕU MÕJU ALL OLEVATE KEHADE TASAKAALU PÜSIVUS

Kui keha on tasakaalus, siis temale rakendatud jõudude summa võrdub nulliga. Samuti võrdub nulliga nende jõudude momentide summa pöörlemistelje suhtes (kui selline telg on olemas). Siin tekib aga küsimus, kas selline tasakaal on püsiv. Esimesest pilgust on selge, et kumera aluse tipul asuva kuulikese tasakaal ei ole püsiv (joon. 162): juba väikseimgi kõrvalekaldumine tasakaaluasendist viib selleni, et kuulike veereb alla. Sama kuulikese võib asetada ka nõgusale alusele (joon. 163). Antud juhul ei hakka kuulike nii kergesti kohalt liikuma. Selle asendi võib lugeda püsivaks. Milles siis asi seisneb?



Joon. 162



Joon. 163

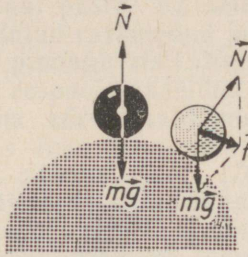
Kuulike on ju mõlemal juhul tasakaalus: raskusjõud $\overrightarrow{mg}$ on võrdne ja vastassuunaline elastsusjõuga $\overrightarrow{N}$, millega alus mõjutab kuulikest (joon. 164 ja 165).

Osutub, et kõik on seletatav väikese kõrvalekaldega, millest meil oli juttu. Kõige väiksemalgi kõrvalekaldumisel, mis juhuslike põrutuste, õhuvoolude ja teiste põhjuste tõttu alati esineb, kaotab keha tasakaalu. Jooniselt 164 näeme, et kui kumeral alusel seisev kuulike nihkus paigalt, siis aluse elastsusjõud $\overrightarrow{N}$ ei tasakaalusta enam raskusjõudu $\overrightarrow{mg}$. Nende kahe jõu resultantjõu $\overrightarrow{f}$ mõjul kaugeneb kuulike oma algasendist veelgi.

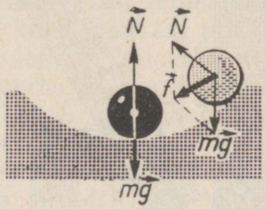
Nõgusal alusel käitub kuulike teisiti (joon. 165). Väikesel kõrvalekaldumisel kaob siin samuti tasakaal. Aluse elastsusjõud ei tasakaalusta ka siin enam raskusjõudu. Kuid nüüd toob resultantjõud $\overrightarrow{f}$ keha algasendisse tagasi. Selles seisnebki keha tasakaalu püsivuse tingimus.

Keha tasakaal on püsiv, kui tema väikesel kõrvalekaldumisel tasakaaluasendist tekib jõud, mis toob keha sellesse asendisse tagasi.

Keha tasakaal on ebapüsiv, kui tema väikesel kõrvalekaldumisel tasakaaluasendist tekib jõud, mis viib keha sellest asendist eemale.



Joon. 164



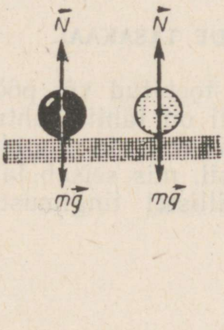
Joon. 165

Püsiv ja ebapüsiv tasakaaluasend erinevad teineteisest veel keha raskuskeskme asukoha poolest. Kui keha on ebapüsivas tasakaaluasendis, siis tema raskuskese on kõrgemal kui tema viibimisel mistahes teises naaberasendis. Seevastu püsivas tasakaaluasendis, näiteks nõgusal alusel, on keha raskuskese madalamal kui kõigis teistes võimalikes asendites. See tasakaalu püsivuse määratlus on tihedalt seotud eelnevaga.

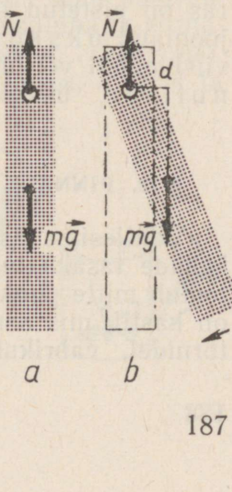
Võib esineda ka niisugune tasakaaluasend, millest väike kõrvalekaldumine ei põhjusta enam keha asendi edasist muutumist. Sellises asendis on näiteks horisontaalsel tasapinnal asuv keha (joon. 166). On selge, et keha asendi muutmisel osutub iga uus asend tasakaaluasendiks; mingisuguseid lisajõude seejuures ei teki. Sellist tasakaalu nimetatakse *ükskõikseks*.

Kui kehal on pöörlemistelg, siis tema tasakaalu püsivus või ebapüsivus on määratud sellega, kas tekkinud jõumoment toob keha tasakaaluasendisse tagasi või viib sellest eemale.

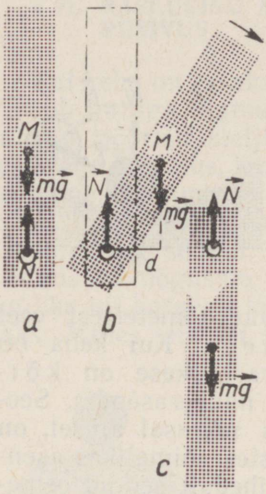
Vaatleme näiteks joonlauda, mille otsas olevat auku läbib liikumatu varras. Joonisel 167, *a* kujutatud asendis on joonlaud tasakaalus, sest varda reaktsioonijõud (elastsusjõud) $\vec{N}$ tasakaalustab raskusjõu $\vec{mg}$, mille mõjusirge läbib raskuskeset. Kui aga kallutada joonlaud vertikaalasendist kõrvale (joon. 167, *b*), siis toe reakt-



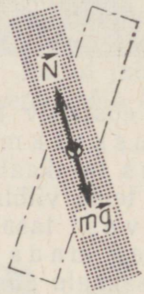
Joon. 166



Joon. 167



Joon. 168



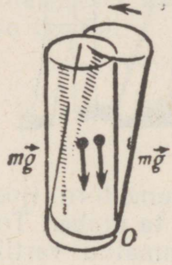
Joon. 169

sioon ei tasakaalusta enam raskusjõudu. Tekib raskusjõu moment pöörlemistelje suhtes *mgd*, mis pöörab keha algasendisse tagasi. Seetõttu on joonisel 167, *a* kujutatud asendis keha tasakaal püsiv. Püüame nüüd asetada sama joonlaua nii, nagu see on näidatud joonisel 168, *a*. Osutub, et seda meil ei õnnestu teha. Ei ole raske mõista, miks joonlaud sellises asendis ei püsi. Jooniselt 168, *a* näeme, et kui joonlaud on vertikaalasendis, siis varda elastsusjõud (reaktsioonijõud) $\vec{N}$ tasakaalustab raskusjõu $\vec{mg}$. Kui aga joonlauda vertikaalasendist kõrvale kallutada (joon. 168, *b*), tekib raskusjõu moment, mis ei pööra enam joonlauda algasendisse tagasi. Selle jõumomendi mõjul pöördub joonlaud hoopis joonisel 168, *c* kujutatud asendisse. Seega joonisel 168, *a* kujutatud asendis on joonlaud ebapüsivas tasakaalus.

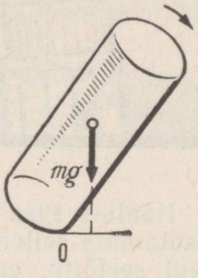
Näeme, et pöörlemistelge omava keha tasakaal on püsiv siis, kui raskuskese asub pöörlemisteljest madalamal. Kui kinnitusvarras on pistetud läbi joonlaua raskuskeskmesse puuritud ava, on joonlaud ükskõikses tasakaalus (joon. 169). Sellise kinnitusviisi puhul võrdub raskusjõu moment pöörlemistelje suhtes alati nulliga, ükskõik millises asendis joonlaud ka ei oleks.

§ 72. PINNALE TOETUVATE KEHADE TASAKAAL

Vaatlesime äsja ühest punktist toetatud või pöörlemisteljega kehade tasakaalu tingimusi. Samuti on tähtis juhtum, mil keha toetub mitte punktile või teljele, vaid mingile pinnale. *Toetuspind* on kastil, mis asub põrandal, klaasil, mis seisab laual, hoonetel, tornidel, vabrikukorstnatel jne. Millistel tingimustel on selliste kehade tasakaal püsiv? Ka sellistele kehadele mõjub raskuskeskmesse rakendatud raskusjõud ja toetuspinnale mõjuv elastsusjõud, mis on selle pinnaga risti. Need jõud tasakaalustavad teineteist. Samuti nagu eespool vaadeldud juhtudelgi, on keha tasakaal püsiv siis, kui keha kõrvalekaldumisel tasakaaluasendist ei teki jõumomenti, mis viiks keha sellest asendist eemale. Horisontaalsel pinnal seisev silinder (joon. 170) on tasakaalus. See tasakaal on püsiv: kui kallutada silindrit tasakaaluasendist veidi kõrvale, siis raskusjõu moment punkti *O* läbiva telje suhtes ei ole enam millegagi tasakaalustatud. See jõumoment pöörab silindrit kellaosuti liikumisele vastupidises suunas ja see tuleb algasendisse tagasi.



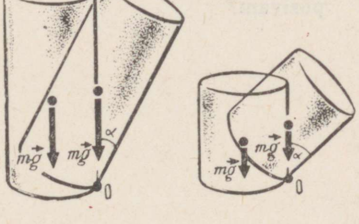
Joon. 170

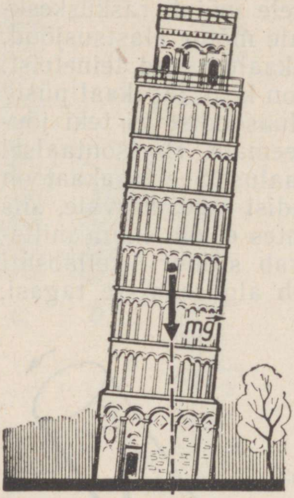


Joon. 171

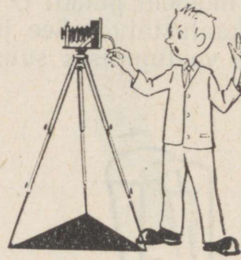
Kui aga kallutada silindrit suurema nurga võrra, nii nagu see on näidatud joonisel 171, siis käitub silinder hoopis teisiti. Raskuskeskmest aluse pinnale tõmmatud ristsirge ei läbi nüüd toetuspinda. Raskusjõu moment punkti *O* läbiva telje suhtes ei too keha enam algasendisse tagasi, vaid kallutab sellest asendist üha kaugemale. Silinder kukub ümber. Selle näite põhjal võime öelda, et **keha pöördub algasendisse tagasi siis, kui raskuskeset läbiv vertikaalsirge läbib toetuspinda.** Mida suurem on suurim kaldenurk, mille puhul keha veel algasendisse tagasi pöördub, seda püsivam on keha tasakaal. Näiteks kahest ühesuguse toetuspinnaga silindrist on püsivama tasakaaluga see, mille raskuskese on madalamal. Seda silindrit võime kallutada suurema nurga α võrra, ilma et ta kukuks ümber (joon. 172).

Joon. 172





Joon. 173



Joon. 174

Itaalias Pisa linnas asub teatavasti viltune torn (joon: 173). Vaatamata sellele, et torn on kaldu, ei kuku ta ümber. Torn püsib vaid seetõttu, et torni raskuskeskmest tõmmatud vertikaalsirge läbib tänapäeval veel toetuspinda.

Toetuspinnaks, millest sõltub keha tasakaal, ei pruugi alati olla pind, millega keha toetub alusele. Näiteks laud toetub põrandale ainult oma jalgadega. Kuid laua toetuspinnaks on sellise ristküliku pind, mille tippudes toetuvad põrandale laua jalad. Joonisel 174 kujutatud statiivi toetuspinnaks on kolmnurk, mille külgedeks on jalgade otsi ühendavad sirglõigud.

Harjutus 34

1. Millise tasakaalu liigiga on tegemist järgmistel juhtudel: a) võimleja on rööbaspuudel kätelseisus; võimleja ripub rõngastel; b) ratas on telje otsas; c) kuulike ripub niidi otsas; d) kuulike asub laual?
2. Kuidas saavutatakse järgmiste esemete juures püsiv tasakaal: a) mänguasjale «jonnipunn», b) laboratooriumistatiivile, c) tornkraanale ja d) laualambile?
3. Kuidas suurendavad oma tasakaalu püsivust poksija võistlusringis ja madrus laevatekil?
4. Veoauto vedas ühesuguse kaaluga koormaid: ühel juhul lehtterast, teisel juhul puuvilla ja kolmandal juhul puid. Millisel juhul oli auto tasakaal kõige püsivam?

§ 73. KÕIGE OLULISEM PEATÜKIS «KEHADE TASAKAAL»

Keha tasakaalutingimusi tuleb teada mitmesuguste ehituste arvutamisel, mis peavad püsima kindlalt paigal.

Keha on tasakaalus, kui on täidetud kaks tingimust:

1) kehale rakendatud jõudude summa võrdub nulliga;

2) kehale rakendatud jõumomentide summa võrdub nulliga.

Jõumoment mingi telje suhtes on suurus, mis iseloomustab jõu võimet pöörata keha ümber selle telje. Jõumoment võrdub jõu ja selle õla korrutisega.

Kõik tasakaaluliigid ei ole praktikas realiseeritavad. Tegelikult võib esineda ainult püsiv ja ükskõikne tasakaal.

Keha tasakaal on püsiv, kui keha väikesel kõrvalekaldumisel tasakaaluasendist tekib jõud või jõumoment, mis toob keha algasendisse tagasi.

JÄÄVUSSEADUSED MEHHAANIKAS

8. peatükk. IMPULSI JÄÄVUSE SEADUS

§ 74. SISSEJUHATUS

Eelmistes peatükkides nägime, kuidas Newtoni seadused võimaldavad lahendada kehade liikumisülesandeid. Võib tunduda, et sellega võiksimegi mehhaanika õppimise lõpetada. Kuid paljudel juhtudel valmistab kehale mõjuvate jõudude määramine suuri raskusi. Teame, et kui kaks keha, näiteks kaks vagunit, põrkavad kokku, siis nad mõjutavad teineteist elastsusjõududega. Kuid nende jõudude suuruse määramine on väga raske, mõnikord isegi päris võimatu, sest et teineteisega kokkupuutuvate vaguniosade deformatsioon on väga keerulise iseloomuga. Isegi kõige lihtsamal juhul — kahe kera põrkamisel — on deformatsioon keerukas ja ei ole selge, mis võtta x väärtuseks Hooke'i seaduse valemis $F = -kx$. Neil juhtudel tuleb mehhaanika ülesannete lahendamisel appi võtta uued suurused ja uued seadused, mis küll tulenevad Newtoni seadustest, kuid ei nõua kehadele rakendatud jõudude ja seega ka kehade kiirenduste määramist.

Selliste suuruste hulka kuuluvad keha impulss ja energia.

Neid suurusi õpimegi tundma järgnevates peatükkides. Impulss ja energia on tähtsad mitte ainult mehhaanikas. Neid mõisteid tuleb kasutada kõikides füüsika osades. Selles seisnebki nende tähtsus.

§ 75. KEHA IMPULSS

Kui kaks keha mõjutavad teineteist, siis nende kiirus muutub ja nad liiguvad vastastikuse mõjumise ajal kiirendustega. Kiirenduste suhe võrdub nende masside pöördsuhtega. Kui teineteist mõjutavate kehade massid on erinevad, siis nende kiirused muutuvad erinevalt.

Kuid on olemas selline suurus, mis mõlemal teineteist mõjutaval kehal muutub ühesuguselt. Mis suurus see on?

Liikugu kaks keha kiirustega $\vec{v}_1$ ja $\vec{v}_2$. Teatud hetkest alates hakkavad nad teineteist mõjutama, kusjuures selle mõju kestus on t. Vastastikuse mõju tulemusena kehade kiirused muutuvad ja omandavad uued väärtused $\vec{v}_1'$ ja $\vec{v}_2'$. Seega liikusid kehad kiirendustega:

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{v}_1' - \vec{v}_1}{t},$$

$$\vec{a}_2 = \frac{\vec{v}_2' - \vec{v}_2}{t}. \qquad (1)$$

Newtoni kolmanda seaduse põhjal:

$$m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2. \qquad (2)$$

Pannes kiirenduste avaldised (1) valemisse (2), saame:

$$m_1 \frac{\vec{v}_1' - \vec{v}_1}{t} = -m_2 \frac{\vec{v}_2' - \vec{v}_2}{t}$$

ehk

$$m_1\vec{v}_1' - m_1\vec{v}_1 = -(m_2\vec{v}_2' - m_2\vec{v}_2). \qquad (3)$$

Selle võrduse vasak pool kujutab endast esimese keha massi ja kiiruse korrutise m u u t u, parem pool aga samasuguse korrutise muutu teise keha jaoks. Need muudud on võrdsete arvväärtustega ja erinevad teineteisest ainult märgi poolest. Miinusmärk näitab, et kui esimese keha massi ja kiiruse korrutis suureneb, siis teisel kehal see väheneb.

Leidsime seega suuruse, mis mõlemal teineteist mõjutaval kehal muutub ü h e s u g u s e l t. See suurus on massi ja kiiruse korrutis $m\vec{v}$.

Keha massi ja kiiruse korrutist nimetatakse keha impulsiks ehk liikumishulgaks.

Impulsi ühikuks SI-süsteemis on 1-kilogrammise massiga keha impulss, kui see keha liigub kiirusega $1\frac{m}{s}$. Impulsi ühikuks on kilogramm-meeter sekundis $\left(\frac{kg \cdot m}{s}\right)$.

Niisiis, kui kaks keha mõjutavad teineteist, siis nende kiirused ja impulsid (liikumishulgad) muutuvad. Kehade kiirused muutuvad erinevalt, impulsid muutuvad aga võrdsete suuruste võrra. Kui näiteks Elevant ja Mops Krõlovi tuntud valmist põrkavad teineteisega kokku, siis nende masside suure erinevuse tõttu muutuvad erinevalt ka nende kiirused. Kuid impulsside muutus on mõlemal kehal ühesugune.

Keha impulss on vektoriaalne suurus. Impulssvektori suund ühtib kiirusvektori suunaga.

Harjutus 35

1. Keha, mille mass on 5 kg, liigub kiirusega $2\frac{m}{s}$. Leida selle keha impulss.
2. 4-tonnise massiga kastmisauto tsisternis on 2 m³ vett. Leida auto impulss,
   1) kui auto liigub kastmiskohta kiirusega $18\frac{km}{h}$;
   2) kui auto liigub pärast kogu vee kasutamist kiirusega $54\frac{km}{h}$.

§ 76. IMPULSI JÄÄVUSE SEADUS

Impulsil on väga huvitav ja tähtis omadus, mis on ainult väga vähestel füüsikalistel suurustel. See on jäävus. Milles see omadus siis seisneb?

Kirjutame eelmises paragrahvis toodud võrduse ümber järgmiselt:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1{}' + m_2\vec{v}_2{}'.$$

Selle võrduse vasak pool kujutab endast kahe keha impulsside summat enne põrget ja parem pool samade kehade impulsside summat pärast põrget. Need summad on teineteisega võrdsed. Ehkki mõlema keha impulss vastastikuse mõju tulemusena muutub, jääb nende kehade koguimpulss — impulsside summa — muutumatuks. Seega kahe teineteist mõjutava keha koguimpulss on jääv.

Kehade impulsside jäävus nende vastastikusel mõjumisel on üks tähtsamaid loodusseadusi. Võib tõestada ja katseliselt näidata, et kui üksteist mõjutavad mitte enam kaks keha, vaid palju kehi, siis nende kehade rühma ehk süsteemi koguimpulss on alati jääv, ükskõik kuidas need kehad üksteist ka ei mõjutaks ja kuidas nende kiirused ka ei muutuks. Oluline on ainult, et seda süsteemi ei mõjutaks teised kehad, mis sellesse süsteemi ei kuulu. Kehade süsteemi, mis ei ole vastastikuses mõjutuses süsteemiväliste kehadega, nimetatakse *suletud süsteemiks*. Kahe keha vastastikuse mõju vaatlemisel me eeldasime samuti, et need kehad mõjutavad ainult teineteist (teised kehad neid ei mõjuta). Impulsi jäävuse seadus kehtib ainult suletud süsteemi kohta.

Suletud süsteemi kuuluvate kehade impulsside summa on nende kehade igasugusel vastastikusel mõjumisel jääv. See ongi *impulsi jäävuse seadus.*

Kuna impulss on vektoriaalne suurus, siis impulsi jäävuse seaduses on juttu muidugi geomeetrilisest ehk vektoriaalsest summast (vektorite liitmise reeglitega tutvusime juba § 5 õppimisel).

Impulsi jäävuse seadust selgitavad järgmised katsed.

1. Asetame rööbasteele kaks vankrikest, mille massid m on võrdsed. Ühe vankrikese ette kinnitame plastiliinikuulikese. Paneme vankrikesed teineteise poole liikuma võrdsete kiirustega v (joon. 175). Pärast kohtumist jäävad mõlemad vankrikesed seisma.

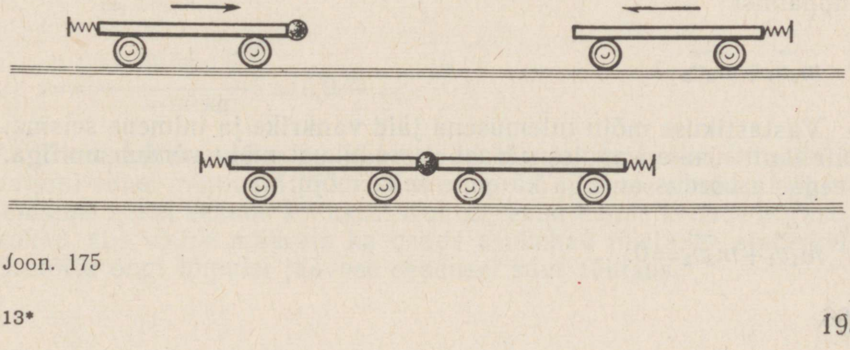
Katse tulemust on kerge selgitada.

Enne kohtumist oli vasakpoolse vankrikese impulss $\overrightarrow{mv}$ ja parempoolse oma $-\overrightarrow{mv}$, sest vankrikesed liikusid vastupidistes suundades. Enne kohtumist oli koguimpulss võrdne nulliga:

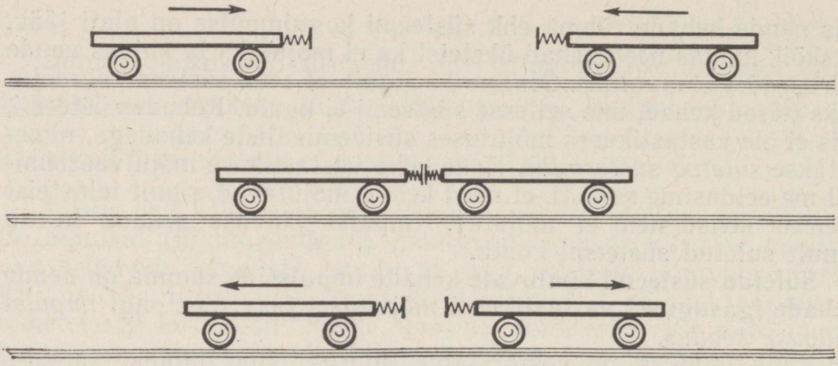
$$\overrightarrow{mv}+(-\overrightarrow{mv})=0.$$

Pärast kokkupõrkamist jäid vankrikesed seisma. Seega ka nüüd võrdub vankrikeste impulsside summa nulliga.

2. Asetame vankrikesed rööbasteele nii, et nende külge kinnitatud vedrud on pööratud teineteise poole, ja kordame katset (joon. 176). Pärast põrget vankrikesed eemalduvad teineteisest. Vastastikuse mõju tulemusena muutub kummagi vankrikese kiiruse suund vastupidiseks. Kiiruste arvväärtused jäävad aga sellisteks,



Joon. 175



Joon. 176

nagu nad olid enne põrget. Kui enne põrget oli vasakpoolse vankrikese impulss $m\vec{v}$ ja parempoolse vankrikese impulss $-m\vec{v}$, siis pärast põrget on vasakpoolse vankrikese impulss $-m\vec{v}$ ja parempoolse oma $m\vec{v}$. Seega vankrikeste impulsside summa on nii enne kui ka pärast põrget null, nagu see impulsi jäävuse seaduse põhjal peabki olema.

Ülesanne 1. Vanker massiga 150 kg liigub rööbasteel kiirusega $3{,}6\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Samal teel jookseb vankrile vastu inimene, kelle mass on 75 kg. Jõudnud vankrini, hüppab ta sellele ja jääb seisma. Pärast seda jääb seisma ka vanker.

Kui suure kiirusega jooksis inimene?

L a h e n d u s. Kuna inimese ja vankri vastastikune mõju Maaga ei muuda liikumist horisontaalsihis, siis võib selles süsteemis rakendada impulsi jäävuse seadust. Seega vankri ja inimese impulsside summa peab olema pärast vastastikust mõjumist samasugune nagu enne mõjumistki. Tähistame vankri ja inimese massi vastavalt m_1 ja m_2 ning nende kiirused enne mõjumist vastavalt $\vec{v}_1$ ja $\vec{v}_2$. Sel juhul on süsteemi koguimpulss enne inimese vankrile hüppamist

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2.$$

Vastastikuse mõju tulemusena jäid vankrike ja inimene seisma. Järelikult nende impulss pärast vastastikust mõju võrdub nulliga. Seega ta võrdus nulliga ka enne seda mõju:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0.$$

Inimene ja vanker liikusid ühel sirgel. Seetõttu võime valida selle sirge koordinaatteljeks ja impulsside vektoriaalse summa asendada algebralise summaga:

$$m_1v_1+m_2v_2=0.$$

Loeme vankrikese liikumise suuna positiivseks. Sel juhul:

$$v_2=-\frac{m_1v_1}{m_2},$$

$$v_2=-\frac{150\text{ kg}}{75\text{ kg}}\cdot 1\frac{\text{m}}{\text{s}}=-2\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Miinusmärk tähendab, et inimese liikumiskiiruse suund on vastupidine vankri kiiruse suunale.

Ülesanne 2. Kiirusega $1{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}$ liikuv raudteevagun, mille mass on 30 t, haakub paigalseisva 20-tonnise massiga vaguniga. Kui suure kiirusega liiguvad vagunid pärast haakumist? (Vagunid asuvad sirgel teelõigul.)

Lahendus. Vastavalt impulsi jäävuse seadusele haakumisel vagunite impulsside summa ei muutu. Tähistame liikuva vaguni massi m_1, paigalseisva vaguni massi m_2, esimese vaguni kiiruse enne haakumist v_1 ja kahe vaguni kiiruse pärast haakumist v. Vagunite koguimpulss enne haakumist on

$$m_1v_1$$

ja pärast haakumist

$$(m_1+m_2)v.$$

Seega

$$m_1v_1=(m_1+m_2)v,$$

millest järgneb, et

$$v=\frac{m_1v_1}{m_1+m_2};$$

$$v=\frac{3\cdot10^4\text{ kg}\cdot1{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}}{5\cdot10^4\text{ kg}}=0{,}9\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Toodud ülesannetes me ei teadnud inimese ja vankri ning kahe vaguni vahel mõjuvaid jõude. Kuid impulsi jäävuse seaduse põhjal leidsime siiski kehade kiirused. Kui on teada nende kehade algasukohad, siis võime määrata ka nende asukohad mistahes ajahetkel. Seetõttu ongi impulsi jäävuse seadusel suur tähtsus.

Harjutus 36

1. Vankril, mille mass on 25 kg ja mis liigub kiirusega $2\frac{m}{s}$, asub poiss. Teatud hetkel hüppab poiss vankrilt maha ja jookseb edasi endises suunas endise kiirusega. Kui palju muutub hüppe tulemusena vankrikese kiirus?
2. Inimene, kelle mass on 70 kg, jookseb kiirusega $7\frac{m}{s}$, jõuab järele vankrile, mille mass on 30 kg ja mis liigub samas suunas kiirusega $2\frac{m}{s}$, ning hüppab vankrile. Kui suure kiirusega liigub pärast seda vanker?
3. Kolm üksteise külge haagitud vagunit liikusid kiirusega $0{,}4\frac{m}{s}$, haakusid paigalseisva vaguniga ja jätkasid liikumist. Määrata vagunite kiirus, kui nende massid on võrdsed.
4. Lõhutav kivi lagunes kolmeks tükiks. Kaks tükki lendasid suundades, mis on teineteisega risti. Esimese tüki mass on 1 kg ja kiirus $12\frac{m}{s}$ ning teise tüki mass 2 kg ja kiirus $8\frac{m}{s}$. Kolmas tükk lendas kiirusega $40\frac{m}{s}$. Näidata graafiliselt kolmanda tüki lennu suund. Kui suur on selle tüki mass?

§ 77. REAKTIIVLIIKUMINE

Impulsi jäävuse seaduse väga huvitavaks ja tähtsaks esinemisning rakendusalaks on *reaktiivliikumine*. Reaktiivliikumiseks nimetatakse liikumist, mille põhjustab kehast teatud kiirusega eemale lendav keha osa.

Reaktiivliikumise näiteks on raketi liikumine. Iga rakett on kahest kehast (kestast ja selle sees asuvast kütusest) koosnev süsteem. Raketi torukujuline kest on ühest otsast suletud, teine ots on aga avatud ja varustatud otsikuga, milles on erilise kujuga ava — düüs.

Raketi väljalennu ajal kütus põleb ning muundub kõrge rõhu ja temperatuuriga gaasiks. Kõrge rõhu tõttu paiskub see gaas suure kiirusega raketi düüsist välja. Raketi kest ise liigub vastupidises suunas (joon. 177).

Enne starti on raketi koguimpulss (kesta ja kütuse impulsside summa) null, sest kogu rakett on Maa suhtes paigal. Gaasi ja kesta vastastikuse mõju tõttu omandab gaas teatud impulsi. Kuna kesta ja kütust võib lugeda suletud süsteemiks, siis koguimpulss peab ka pärast starti nulliga võrduma. Seega vastastikuse mõju tulemusena omandab kest impulsi, mis on suuruselt võrdne ja vastassuunaline gaasi impulsiga. Seetõttu hakkabki liikuma mitte ainult gaas, vaid ka raketi kest. Selles võivad näiteks paikneda teaduslik aparatuur, sidevahendid jne. Rakett võib viia orbiidile ka kosmoselaeva koos kosmonautidega.

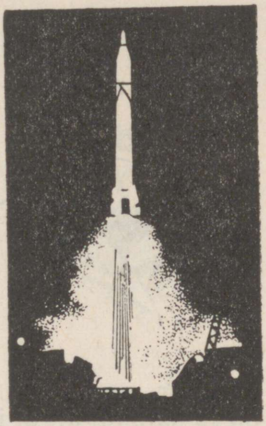
Impulsi jäävuse seaduse abil võib määrata raketi (kesta) kiiruse.

Oletame algul, et kütuse põlemisel tekkinud gaas ei välju raketist aegamööda, vaid paiskub sealt välja hetkeliselt.

Tähistame kütusest tekkinud gaasi massi tähega m_1 ja selle kiiruse düüsist väljumisel tähega v_1. Kesta massi ja kiiruse tähistame vastavalt m_2 ja v_2. Impulsi jäävuse seaduse põhjal peab kesta ja gaasi impulsside summa võrduma nulliga ka pärast raketi väljasaatmist. Seega

$$m_1v_1+m_2v_2=0;$$

$$m_1v_1=-m_2v_2.$$



Joon. 177

Avaldame siit raketi kiiruse:

$$v_2=-\frac{m_1}{m_2}v_1.$$

Sellest valemist näeme, et raketi kesta kiirus on seda suurem, mida suurem on väljapaiskuva gaasi kiirus ning mida suurem on kütuse ja kesta masside suhe. Küllalt suure kiiruse saavutab raketi kest siis, kui kütuse mass on kesta massist tunduvalt suurem. Selleks et raketi kesta kiirus oleks väljapaiskuvate gaaside kiirusest 4 korda suurem, on vaja, et kütuse mass oleks kesta massist sama palju kordi suurem, s. t. et kesta mass moodustaks kogu raketi massist ühe viiendiku. Kuid kest moodustab ju raketi «kasuliku osa».

Oletasime, et kogu gaas paiskub raketist välja hetkeliselt. Tegelikult ei voola gaas raketist välja korraga, ehkki see protsess toimub võrdlemisi kiiresti. Pärast mingi gaasikoguse väljapaiskumist tuleb kestal endaga kaasas vedada veel põlemata ja gaasiks muutumata kütust. Selle tulemusena suureneb tunduvalt antud kiiruse saavutamiseks vajalik kütusekogus. Arvutused näitavad, et gaaside kiirusest 4 korda suurema kiiruse saavutamiseks peab kütuse mass stardi eel ületama raketi kesta massi mitte 4, vaid mitukümmend korda. Võttes ühtlasi arvesse, et Maalt startivale raketile mõjub atmosfääris õhutakistus ja Maa külgetõmbejõud, jõuame järeldusele, et see suhe peab olema veelgi suurem.

Erinevalt kõikidest teistest transpordivahenditest võib rakett liikuda nii, et ta ei ole vastastikuses mõjutuses mingite teiste kehadega peale tema enda kütuse põlemissaaduste. Seetõttu kasutataksegi rakette Maa tehiskaaslaste ja kosmoselaevade väljasaatmiseks ja nende viimiseks ühelt orbiidilt teisele: kosmilises ruumis ei ole ju millelegi toetuda ega millestki tõukuda, nagu seda teevad maapealsed transpordivahendid.

Konstantin Tsiolkovski
(1857—1935)

Suur vene teadlane K. E. Tsiolkovski andis juba käesoleva sajandi algul idee kasutada rakette kosmoselendudeks. Tänapäeval rakendatakse seda suurepärast ideed edukalt. Rakettide abil on kosmosesse saadetud juba mitusada Maa tehiskaaslast ja kosmoselaeva. Nende abil on Kuule viidud kosmoselaboratooriume ja pandud ümber Kuu tiirlema tehiskaaslasi.

Raketid on võimaldanud inimestel viibida kosmoses ja Kuul. Esimene Maa tehiskaaslane saadeti raketi abil välja 4 oktoobril 1957. aastal Nõukogude Liidus. Nõukogude raketid jõudsid esimestena Kuule, lendasid ümber Kuu ja fotografeerisid selle tagakülge ning laskusid esimestena ka Veenusele. Meie maal on kosmilise ruumi uurimisel juhtiv positsioon.

Vajaduse korral võib raketti pidurdada. Seda kosmonaudid teevadki, kui nad on oma lennu lõpetanud ja hakkavad Maale tagasi pöörduma. On selge, et kui düüsist paiskub gaas välja raketi liikumise suunas, siis raketi kiirus väheneb.

§ 78. JÕUD JA IMPULSS

Jõudu, mille me defineerisime valemist

$$\vec{F}=m\vec{a} \tag{1}$$

massi ja kiiruse korrutisena, võib defineerida ka teisiti. Teame, et kiirendus võrdub kiiruse muuduga ühes ajaühikus:

$$\vec{a}=\frac{\vec{v}-\vec{v}_0}{t}. \tag{2}$$

Asetades selle avaldise valemisse (1), saame

$$\vec{F}=m\frac{\vec{v}-\vec{v}_0}{t}, \tag{3}$$

ehk

$$\vec{F}=\frac{m\vec{v}-m\vec{v}_0}{t}.$$

Vahe $m\vec{v}-m\vec{v}_0$ on keha impulsi muut ($m\vec{v}_0$ on ju keha impulss alghetkel, mil keha kiirus on $\vec{v}_0$, ja $m\vec{v}$ on sama keha impulss aja t pärast, kui keha kiirus on $\vec{v}$).

Avaldis

$$\frac{m\vec{v}-m\vec{v}_0}{t}$$

võrdub aga keha impulsi muuduga ajaühikus. Seega võib jõudu defineerida mitte ainult keha massi ja kiirenduse korrutisena. Nüüd näeme, et **jõud on suurus, mis mõõtub keha impulsi muudu ja selle muudu toimumise aja suhtega.**

Kehale mõjuv jõud võrdub selle keha impulsi muuduga ühes ajaühikus.

Valemi (3) võime kirjutada järgmisel kujul:

$$\vec{F}t=m\vec{v}-m\vec{v}_0.$$

Võrduse parem pool võrdub impulsi muuduga aja t vältel. See impulsi muut võrdub jõu $\vec{F}$ ja tema mõjumisaja t korrutisega. Suurusel $\vec{F}t$ on eriline nimetus. Seda nimetatakse *jõuimpulsiks.* Seega, **keha impulsi (liikumishulga) muut võrdub jõuimpulsiga.**

Keha impulsi ühe ja sama muudu võib esile kutsuda suur jõud lühikese ajavahemiku jooksul või väike jõud, mis mõjub pikka aega.

Impulsi jäävuse seadusest tuleneb, et kui kaks keha mõjutavad teineteist vastastikku ja kui ühe keha impulss suureneb, siis teise keha impulss väheneb niisama palju. Seega võime öelda, et kehade vastastikune mõju seisneb impulsi üleandmises ühelt kehalt teisele.

9. peatükk. MEHHAANILINE TÖÖ JA VÕIMSUS

§ 79. SISSEJUHATUS

Eelmises paragrahvis veendusime, kui tähtis on impulsi jäävuse seadus. Enne kui vaadelda veel ühte jäävuse seadust — energia jäävuse seadust — tuleb meil tutvuda füüsikalise suurusega, mida nimetatakse *tööks* ja mis on tihedalt seotud energiaga. Peale selle on sellel füüsikalisel suurusel veel iseseisev tähtsus, sest kogu inimeste tegevus on pidevalt seotud mehhaanilise tööga.

Tööd teevad tööpingid ja masinad tööstuses, transpordis, põllumajanduses ja kodudes. Mehhaanilise tööga me kohtume kõikjal. Mida siis nimetatakse mehhaaniliseks tööks?

§ 80. MEHHAANILINE TÖÖ

Tutvusime tööga juba 7. klassi füüsika kursuses. Kui kehale mõjub jõud $\vec{F}$ ja keha sooritab selle jõu mõjul jõu suunas nihke $\vec{s}$, siis tehakse töö A, mis võrdub jõu ja nihke arvväärtuste korrutisega:

$$A = Fs.$$

Tutvume nüüd lähemalt selle füüsikalise suurusega.

Kõigepealt tuleb märkida, et tööl on huvitav omadus: vaatamata sellele, et jõud $\vec{F}$ ja nihe $\vec{s}$ kuuluvad vektoriaalsete suuruste hulka, on töö skalaarne suurus. Tööle ei saa omistada mingit suunda ruumis.[1]

---

[1] Füüsikas tuleb sageli kaks vektorit teineteisega korrutada. Neil juhtudel tekib küsimus, milline suurus on nende korrutis — kas vektoriaalne või skalaarne suurus? Osutub, et teatud juhtudel on kahe vektori korrutis skalaar. Sellist korrutist nimetatakse vektorite *skalaarkorrutiseks*. Teatud juhtudel aga on see korrutis vektor, mis on korrutatavate vektoritega risti. Niisugust korrutist nimetatakse vektorite *vektorkorrutiseks*. Töö on jõu ja nihkevektori skalaarkorrutis.

Igasugune liikuvale kehale mõjuv jõud ei tee tööd. Näiteks tasasel teel sõitvas autos istuv reisija mõjutab autot oma kaaluga, mis on liikumise suunaga risti. Kuid kaal ei pane autot liikuma ega ei anna sellele kiirendust. Seetõttu ei tee kaal ka tööd.

Järgmisest näitest selgub, millal kehale rakendatud jõud teeb tööd. Oletame, et keha sooritas jõu $\vec{F}$ mõjul nihke $\vec{s}$, mille suund moodustab jõu suunaga nurga α (joon. 178). Tõmbame vektori F lõpp-punktist jõu suunale ristsirge. Lõik MN on jõu projektsioon nihke suunale. Nagu kergesti veenduda võib, on projektsiooni pikkus $F \cos \alpha$. Kui selline projektsioon on olemas, s. o. kui see ei võrdu nulliga, siis öeldakse, et jõud tegi tööd. Töö suurus defineeritaksegi jõu nihkesuunalise projektsiooni ja nihke pikkuse korrutisena:

$$A = Fs \cos \alpha.$$

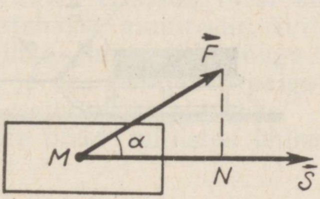
Mehhaaniliseks tööks nimetatakse suurust, mis võrdub jõu arvväärtuse, nihke arvväärtuse ning jõu ja nihke vahelise nurga koosinuse korrutisega.

Kui $\alpha = 0$, siis see tähendab, et vektorite $\vec{F}$ ja $\vec{s}$ suunad ühtivad. Sel juhul on nurga α koosinus 1 ja töö valem omandab kuju

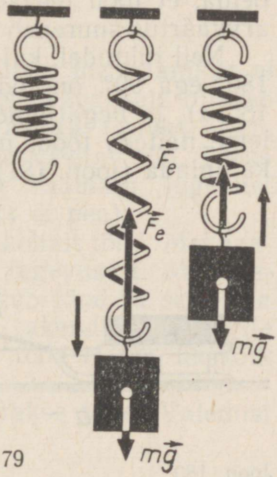
$$A = Fs.$$

Jõud võib olla ka nihkele vastassuunaline. Siis $\alpha = 180°$ ja $\cos \alpha = -1$. Sel juhul on töö negatiivne:

$$A = -Fs.$$



Joon. 178



Joon. 179

Seega võib töö olla positiivne ja negatiivne. Kui jõu ja nihke suunad ühtivad, siis on töö positiivne. Kui aga jõu suund on nihke suunale vastupidine, siis on jõu töö negatiivne.

Kujutleme, et vedru külge kinnitatud keha langeb alla ja vedru deformeerub (joon. 179). Selle tulemusena tekkiv vedru elastsusjõud F_e teeb seejuures negatiivset tööd, sest see jõud on suunatud üles, keha aga liigub alla. Kuid kehale mõjuv raskusjõud $m\vec{g}$ teeb positiivset tööd. Kui keha on jõudnud madalaimasse asendisse ja hakkab liikuma üles, siis jõud vahetavad oma osad: raskusjõud hakkab tegema negatiivset tööd, elastsusjõud aga, mille suund ühtib nüüd liikumise suunaga, positiivset tööd. Seega raskusjõud ja elastsusjõud võivad teha nii positiivset kui ka negatiivset tööd.

Jõudu, mis mõjub liikumisele vastassuunas ja mis seetõttu teeb negatiivset tööd, nimetatakse sageli *takistusjõuks*.

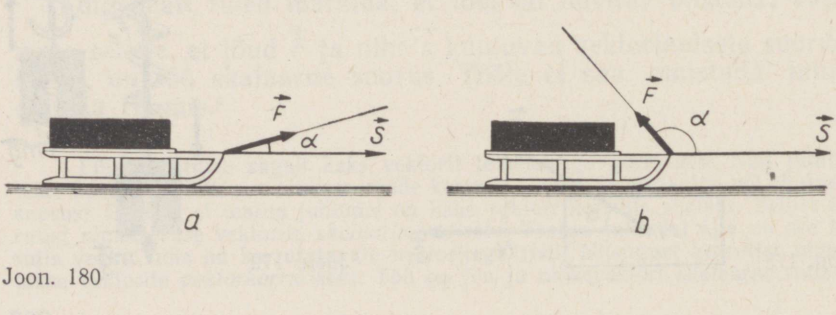
Nurk α võib olla ka täisnurk. Sel juhul on jõud nihkega risti. Nagu näitest autos istuva reisijaga selgus, on sellise jõu töö null. See järeldub valemist

$$A = Fs \cos \alpha.$$

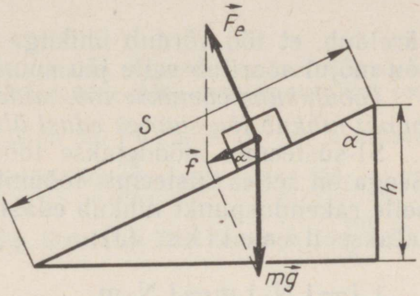
Kui $\alpha = 90°$, siis $\cos \alpha = 0$. Seega on ka töö null. Nihkega risti on näiteks jõud, mis paneb keha liikuma mööda ringjoont. See jõud on teatavasti suunatud ringjoone keskpunkti poole. Selliste jõudude hulka kuuluvad näiteks niidi elastsusjõud, kui niidi otsas tiirutada kivi, gravitatsioonijõud, mille mõjul liiguvad ringorbiitidel Maa tehiskaaslased ja planeedid jne. Niisuguste jõudude töö võrdub alati nulliga.

Sellised jõud annavad kehale kiirenduse, mis on kiirusvektoriga risti ja ei põhjusta kiiruse arvväärtuste muutumist. Võib öelda, et tööd teevad ainult niisugused jõud, mille mõjul kiiruse arvväärtus suureneb (positiivne töö) või väheneb (negatiivne töö).

Neil juhtudel, kui jõu- ja nihkevektori vaheline nurk ei ole null, 180° ega 90°, on töö positiivne siis, kui α on teravnurk (joon. 180, *a*), ja negatiivne siis, kui α on nürinurk (joon. 180, *b*). Vaatleme näiteks tööd, mida teeb raskusjõud keha liikumisel mööda kaldpinda (joon. 181).



Joon. 180



Joon. 181

Oletame, et keha, mille mass on m, läbis kogu kaldpinna pikkuse s. Kaldpinna kõrgus olgu h. Kehale mõjuvad kaks jõudu: raskusjõud $m\vec{g}$, mis on suunatud alla, ja elastsusjõud $\vec{F}_e$, mis mõjub kaldpinnaga risti. Nende jõudude resultant $\vec{f}$ annabki kehale kiirenduse ja paneb ta mööda kaldpinda alla libisema (hõõrdejõu jätame arvestamata).

Raskusjõu töö

$$A = mgs \cos \alpha.$$

Jooniselt nähtub, et

$$\cos \alpha = \frac{h}{s}.$$

Seega

$$A = mgs \frac{h}{s} = mgh.$$

Eespool öeldu põhjal on selge, et töö mõiste mehhaanikas ei ühti alati kujutlusega tööst igapäevases elus. Tavaliselt ollakse arvamisel, et töö on midagi niisugust, mis väsitab. Igaüks ütleb, et suure koormuse käes hoidmine on raske ja väsitav töö. Tööks loetakse ka õppimist ja raskesti mõistetava raamatu lugemist (ehkki huvitava raamatu lugemist keegi tööks ei pea).

Kõik sellised tegevused ei ole füüsika seisukohalt tööd. Mehhaanilist tööd tuleb eristada tööst kui inimese tegevusest. Mehhaanilist tööd tehakse ainult siis, kui kehale mõjub jõud ja see keha sooritab nihke, mis ei ole jõuga risti. Kui rakendame mingile kehale jõu ja see keha jääb paigale, siis me tööd ei tee, ükskõik kuidas me seejuures ka ei väsiks.

Vaatleme nüüd, millistes ühikutes mõõdetakse tööd. Valemist

$$A = Fs$$

järeldub, et töö võrdub ühikuga siis, kui keha ühikuga võrduva jõu mõjul sooritab selle jõu suunas ühiku pikkuse nihke.

Tööühikuks võetakse töö, mida teeb jõuühik, kui selle rakenduspunkt nihkub jõu suunas edasi ühe pikkusühiku võrra.

SI-süsteemis mõõdetakse tööd njuutonites ja nihet meetrites. Seega on selles süsteemis tööühikuks töö, mida teeb jõud 1 N, kui selle rakenduspunkt nihkub edasi 1 m võrra. Seda tööühikut nimetatakse d ž a u l i k s (J):

$$1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N} \cdot 1\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}.$$

CGS-süsteemis on tööühikuks erg. 1 erg on töö, mida teeb jõud 1 dyn, kui selle rakenduspunkt nihkub edasi 1 cm võrra:

$$1\,\mathrm{erg} = 1\,\mathrm{dyn} \cdot 1\,\mathrm{cm} = 1\,\mathrm{dyn} \cdot \mathrm{cm}.$$

Leiame nende kahe tööühiku vahelise seose.

Kuna $1\,\mathrm{N} = 10^5\,\mathrm{dyn}$ ja $1\,\mathrm{m} = 10^2\,\mathrm{cm}$, siis

$$1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N} \cdot 1\,\mathrm{m} = 10^5\,\mathrm{dyn} \cdot 10^2\,\mathrm{cm} = 10^7\,\mathrm{dyn} \cdot \mathrm{cm} = 10^7\,\mathrm{erg}.$$

Džaul on ergist kümme miljonit korda suurem.

Et saada kujutlust džaulist, arvutame töö, mida teeb laps, tõstes mänguasja massiga 200 g (0,2 kg) kõrgusele 50 cm (0,5 m).

Leiame kõigepealt mänguasja kaalu:

$$P = 0{,}2\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 1{,}96\,\mathrm{N}.$$

Mänguasja ühtlasel tõstmisel peab laps rakendama mänguasjale vertikaalselt üles jõudu 1,96 N. Seega teeb ta töö

$$A = 1{,}96\,\mathrm{N} \cdot 0{,}5\,\mathrm{m} \approx 1\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m} = 1\,\mathrm{J}.$$

Arvutame veel töö, mida teeb raskejõustiklane, kui ta tõstab kangi massiga 140 kg kõrgusele 2 m.

Kuna kangi kaal $P = mg = 140\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx 1370\,\mathrm{N}$, siis kangi ühtlasel tõstmisel tuleb sellele rakendada samuti jõud 1370 N, kuid see peab olema suunatud üles. Sportlane teeb tõstmisel töö

$$A \approx 1370\,\mathrm{N} \cdot 2\,\mathrm{m} = 2740\,\mathrm{J}.$$

Nendest näidetest selgub, et džaul ei ole kuigi suur tööühik. Erg aga on väga väike ühik.

Harjutus 37

1. Mööda kaldpinda, mille kõrgus on 3 m, veetakse ühtlaselt üles koormust massiga 40 kg. Kui suur on tehtud töö? (Hõõrdumine jätta arvestamata). Kas see töö sõltub kaldpinna pikkusest?
2. Kraana tõstab betoonploki, mille pikkus on 320 cm, laius 100 cm ja paksus 10 cm, 10 m kõrgusele. Betooni tihedus on $2400 \frac{kg}{m^3}$. Leida tehtud töö.
3. Tellisekonteinerit, mille mass on 750 kg, tõstetakse üles kiirusega $25 \frac{cm}{s}$. Kui palju tööd tehakse 20 sekundiga?
4. Poiss tõstab jõe põhjast 0,4 m sügavuselt kivi veepinnast 0,4 m kõrgusele. Kui palju tööd teeb poiss kivi tõstmisel vees ja õhus? Kivi ruumala on 3 dm³ ja tihedus $2500 \frac{kg}{m^3}$.

§ 81. RASKUSJÕU TÖÖ

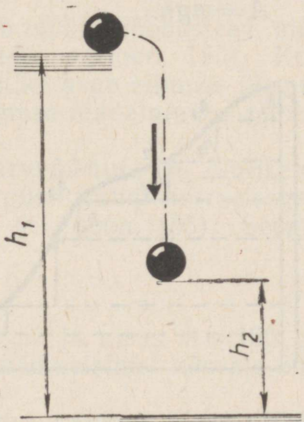
Raskusjõu tööga kohtusime juba eelmises paragrahvis, vaadeldes keha liikumist mööda kaldpinda. Tutvume nüüd selle jõu töö iseärasustega lähemalt.

Meenutame, et vabalt langevale kehale mõjub ainult raskusjõud $m\vec{g}$. Kui keha langeb kõrguselt h_1 kõrgusele h_2 (joon. 182), siis tema kõrgus väheneb $h = h_1 - h_2$ võrra ja raskusjõud teeb tööd

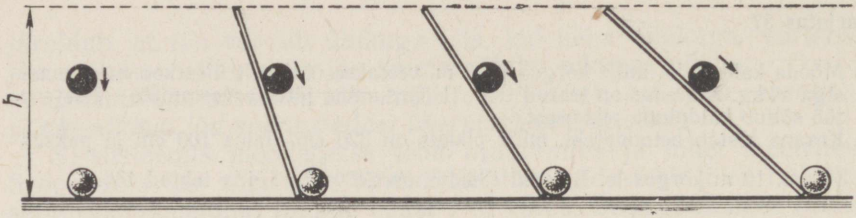
$$A = mg(h_1 - h_2) = mgh.$$

$h_1 - h_2$ on antud juhul keha nihke pikkus.

Nägime, et keha liikumisel kaldpinnal, mil liikumise suund moodustab raskusjõuga mingi nurga, võrdub töö samuti mgh.



Joon. 182



Joon. 183

Selgub, et raskusjõu töö ei sõltu sellest, kas keha liigub vertikaalselt alla või liigub ta mööda kaldpinda ja läbib seejuures pikema tee. Kõrguse ühesugusel vähenemisel on raskusjõu töö alati ühesugune (joon. 183). See kehtib mitte ainult kaldpinna puhul, vaid kõikidel juhtudel.

Oletame näiteks, et keha ei liigu mööda kaldpinda, vaid mingit keerukamat teed mööda (joon. 184).

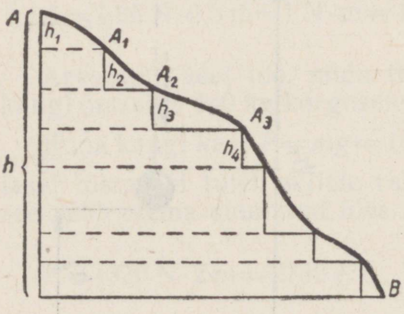
Jaotame selle tee mõtteliselt paljudeks väikesteks osadeks: AA_1, A_1A_2, A_2A_3 jne. Igaühte neist võib vaadelda väikese kaldpinnana. Keha liikumist teel AB võib kujutleda paljude liikumistena mööda üksteisele järgnevaid kaldpindu. Raskusjõu töö igal sellisel kaldpinnal võrdub raskusjõu arvväärtuse mg ja kaldpinna kõrguse korrutisega. Kui kujuteldavate kaldpindade kõrgused on h_1, h_2, h_3 jne., siis raskusjõu tööd nendel kaldpindadel võrduvad mgh_1, mgh_2, mgh_3 jne.

Kogu töö võrdub kõikidel teelõikudel tehtud tööde summaga:

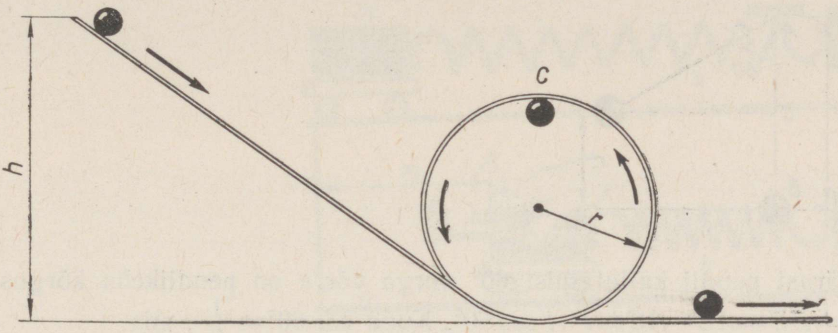
$$A = mgh_1 + mgh_2 + mgh_3 + \ldots = mg(h_1 + h_2 + h_3 + \ldots).$$

Kuid $h_1 + h_2 + h_3 + \ldots = h$. Seega

$$A = mgh.$$



Joon. 184



Joon. 185

Raskusjõu töö ei sõltu keha poolt läbitud tee pikkusest ega kujust; ta võrdub alati raskusjõu ja kõrguse muutuse (alg- ja lõppasukoha kõrguste vahe) korrutisega. Kui keha liigub alla, siis on töö positiivne; keha liikumisel üles on töö negatiivne.

Kuid miks siis tehnikas ja igapäevases elus kasutatakse kaldpinda? Töö koormuse nihutamisel mööda kaldpinda on ju niisama suur kui selle tõstmisel vertikaalsihis.

Kaldpinna kasulikkus on seletatav asjaoluga, et jõud, mis tuleb nihke suunas rakendada koormusele selle ühtlasel tõstmisel mööda kaldpinda, on raskusjõust väiksem. Koormus läbib seejuures küll pikema tee. Pikem tee on «tasu» selle eest, et mööda kaldpinda võib tõsta koormust väiksema jõuga. Me kaotame teepikkuses, kuid võidame jõus. Samal põhjusel ehitatakse elamutes trepid kaldu. Selle tulemusena väheneb trepist ülesminekul lihastejõud. Kuid see-eest tuleb läbida pikem tee. Tuletõrjujatele, kellel tuleb kiirustada, ehitatakse lühikesed püsttrepid.

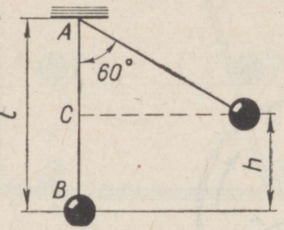
Ülesanne 1. Kuulike massiga m veereb mööda rööbasteed, mis moodustab ringikujulise silmuse raadiusega r (joon. 185). Kui suure töö teeb raskusjõud hetkeni, mil kuulike asub silmuse ülemises punktis C? Alghetkel asub kuulike silmuse madalaimast punktist kõrgusel h.

L a h e n d u s. Töö võrdub raskusjõu arvväärtuse ja kuulikese kõrguse muutuse (alg- ja lõppasukoha kõrguste vahe) korrutisega. Keha algkõrgus on h, lõppkõrgus aga $2r$ (vt. joon. 185). Seega

$$A = mg(h-2r).$$

Ülesanne 2. Pendli pikkus võrdub 30 cm ja mass $m = 100$ g. Leida raskusjõu töö pendli kallutamisel vertikaalsihist kõrvale 60° nurga võrra (joon. 186).

L a h e n d u s. Loeme pendlikeha kõrguse algasendis nulliks.



Joon. 186

Pärast pendli kallutamist 60° nurga võrra on pendlikeha kõrgus $h = BC = AB - AC = l - l \cos 60°$. Kuna $\cos 60° = \frac{1}{2}$, siis

$$h = l - \frac{l}{2} = \frac{l}{2}.$$

Töö avaldub järgmiselt:

$$A = mg(0 - h) = mg\left(0 - \frac{l}{2}\right) = -\frac{mgl}{2}.$$

Pannes sellesse valemisse arvväärtused, saame:

$$A = -\frac{0{,}1\ \text{kg} \cdot 9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}3\ \text{m}}{2} \approx -0{,}15\ \text{J}.$$

§ 82. ELASTSUSJÕU TÖÖ

Viiendas peatükis tegime kindlaks, et elastsusjõud tekib kehade deformeerumisel, et tema arvväärtus on võrdeline deformatsiooni suurusega ja et selle suund on vastupidine deformeeritava keha punktide nihke suunale.

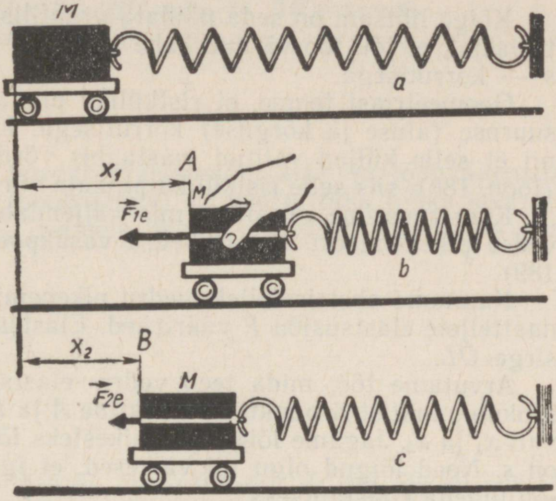
Joonisel 187, *a* on kujutatud deformeerimata vedru. Vedru külge kinnitatud kehale *M* jõud ei mõju. Kui vedru kokku suruda, hakkab ta keha mõjutama elastsusjõuga (joon. 187, *b*). Oletame, et kokkusurumisel nihkus vedru vasakpoolne ots liikumatult kinnitatud parempoolse otsa suhtes x_1 võrra. Vedru elastsusjõud on sel juhul määratud valemiga

$$F_{1e} = -kx_1,$$

kus k on vedru jäikus.

Elastsusjõu mõjul nihkub keha vasakule. See jõud teeb seega teatud töö. Kui suur on see töö?

Oletame, et keha koos vedru vasakpoolse otsaga, mille külge ta on kinnitatud, nihkus asendist *A* asendisse *B* (joon. 187, *c*). Selles



Joon. 187

asendis on vedru pikenemine mitte enam x_1, vaid x_2. Tähendab, keha nihe võrdub $x_2 - x_1$. Elastsusjõu ja selle nihke korrutis võrdubki otsitava tööga. Kuid siin ei tohi unustada, et keha liikumisel vasakule vedru pikenemine kogu aeg muutub ja et koos sellega muutub ka elastsusjõud.

Lõppasendis on vedru pikenemine x_2 ja elastsusjõud

$$F_{2e} = -kx_2.$$

Milline elastsusjõu väärtus tuleb siis töö arvutamiseks nihkega korrutada?

Kui asetada töö valemisse

$$A = F(x_2 - x_1)$$

elastsusjõu väärtus

$$F_{1e} = -kx_1,$$

siis saame tööle liiga suure väärtuse. Kui aga asetada sellesse valemisse

$$F_{2e} = -kx_2,$$

siis saame elastsusjõu töö õigest väärtusest väiksema väärtuse.

Näitame, et elastsusjõu töö õige väärtuse saamiseks tuleb töö valemisse asetada F_{1e} ja F_{2e} aritmeetiline keskmine:

$$F_e = \frac{F_{1e} + F_{2e}}{2}.$$

Kõige lihtsam on seda näidata graafiliselt. See meetod põhineb tõsiasjal, et jõu töö võrdub kahe teguri — jõu F ja nihke pikkuse s — korrutisega.

Geomeetriast teame, et ristküliku pindala võrdub samuti kahe suuruse (aluse ja kõrguse) korrutisega. Kui joonistada ristkülik, nii et selle küljed valitud mastaabis võrduvad vastavalt F ja s (joon. 188), siis selle ristküliku pindala võrdub tööga Fs.

Konstrueerime graafiku, mis väljendab elastsusjõu sõltuvust vedru pikenemisest x, s. o. vedru vasakpoolse otsa nihkest (joon. 189).

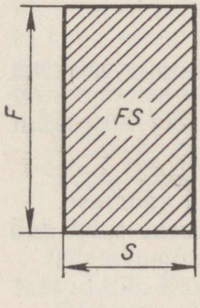
Kanname abstsissteljele vedru pikenemise x väärtused ja ordinaatteljele elastsusjõu F väärtused. Elastsusjõu graafikuks on siis sirge OL.

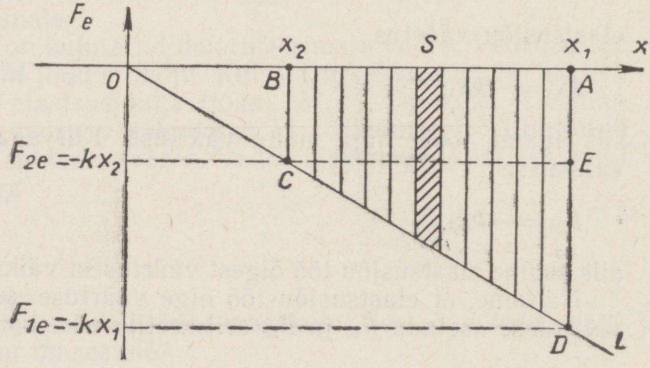
Arvutame töö, mida teeb vedru elastsusjõud, kui vedru ots nihkub punktist A punkti B. Punktide A ja B abstsissid olgu vastavalt x_1 ja x_2. Jagame lõigu AB väikesteks lõikudeks, mille pikkused on s. Need lõigud olgu nii väikesed, et iga lõigu ulatuses võime jõu lugeda konstantseks.

Ordinaatteljega paralleelsed sirglõigud kujutavad elastsusjõu F_e väärtusi väikestel nihkelõikudel. Seetõttu võrdub töö väikesel nihkelõigul viirutatud kujundi pindalaga. See kujund erineb väga vähe ristkülikust.

Elastsusjõu kogutöö lõigul AB võrdub arvuliselt kõikide selliste ribade pindalade summaga, s. o. kujundi $ABCD$ pindalaga. Kujund $ABCD$ on täisnurkne trapets. Selle pindala võrdub aluste AD ja BC poolsumma ja kõrguse AB korrutisega:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD+BC)AB.$$





Joon. 188 Joon. 189

Jooniselt näeme, et $AD = F_{1e}$, $BC = F_{2e}$ ja $AB = x_2 - x_1$. Seega elastsusjõu töö võrdub:

$$A = \frac{F_{1e} + F_{2e}}{2}(x_2 - x_1).$$

Vedru elastsusjõu töö võrdub elastsusjõu alg- ja lõppväärtuste aritmeetilise keskmise (poolsumma) ja vedru otsa nihke korrutisega. Pannes F_{1e} ja F_{2e} asemele nende väärtused $F_{1e} = -kx_1$ ja $F_{2e} = -kx_2$, saame:

$$A = \frac{-kx_1 - kx_2}{2}(x_2 - x_1);$$

$$A = -\frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2).$$

Kuna x_2 on väiksem kui x_1, siis vahe $x_2^2 - x_1^2$ on negatiivne ja töö A positiivne. See on ka täiesti loomulik, sest keha liigub elastsusjõu suunas. Elastsusjõu töö valemi võime kirjutada ka järgmiselt:

$$A = \frac{k}{2}(x_1^2 - x_2^2).$$

Elastsusjõu töö võrdub elastse keha jäikuse ja keha alg- ja lõppdeformatsiooni ruutude vahe poole korrutisega.

Elastsusjõu tööl on teatud sarnasus raskusjõu tööga. Võrreldes nende jõudude töö valemeid

$$A = mg(h_1 - h_2)$$

ja

$$A = \frac{k}{2}(x_1^2 - x_2^2),$$

näeme, et mõlemal juhul sõltub töö keha alg- ja lõppasukohast. Nendes valemites määrab kõrgus h keha asukoha Maa suhtes ja deformatsioon x vedru ühe otsa asukoha teise otsa suhtes. Seega need mõlemad tööd ei sõltu keha poolt läbitud tee pikkusest ega kujust, vaid ainult keha alg- ja lõppasukohast. Selle sarnasuse põhjuseks on asjaolu, et nii gravitatsioonijõud kui ka elastsusjõud sõltuvad keha koordinaatidest.

Ülesanne 1. Vagunid põrkasid haakumisel kokku ja nende puhvrivedrud (neid on kummalgi vagunil kaks) lühenesid 5 cm võrra. Puhvrivedru kokkusurumisel 1 cm võrra tekib elastsusjõud 10 000 N. Kui suure töö teevad puhvrivedrud?

L a h e n d u s. Arvutame kõigepealt ühe vedru poolt tehtud töö. Selleks kasutame valemit

$$A=\frac{k}{2}(x_1^2-x_2^2).$$

Asetame sellesse valemisse suuruste arvväärtused:

$$A=\frac{10^6\,\mathrm{N}}{2\,\mathrm{m}}[0-(0{,}05)^2\,\mathrm{m}^2]=-1250\,\mathrm{J}.$$

Kuna vedrusid on neli, siis kogu töö on $-5000\,\mathrm{J}$. Miinusmärk tähendab, et vedrude elastsusjõud mõjuvad vagunitele nende liikumisele vastassuunas.

Ülesanne 2. Vedru küljes, mille ülemine ots on kinnitatud liikumatult, ripub keha massiga 18 kg. Seejuures on vedru pikkus 10 cm. Kui vedru otsa riputada keha massiga 30 kg, siis on tema pikkus 12 cm. Arvutada töö, mida tuleb teha vedru venitamiseks 10 cm kuni 15 cm.

L a h e n d u s. Vedru venitamise töö arvutame valemist

$$A=\frac{k}{2}(x_2^2-x_1^2).$$

Ühtegi valemis esinevat suurust ei ole ülesandes antud ja kõik need tuleb meil seega leida. Leiame kõigepealt vedru jäikuse. Selleks võtame arvesse, et vedru otsa riputatud keha massi suurenemine 18 kg kuni 30 kg toob endaga kaasa vedru pikenemise 2 cm võrra:

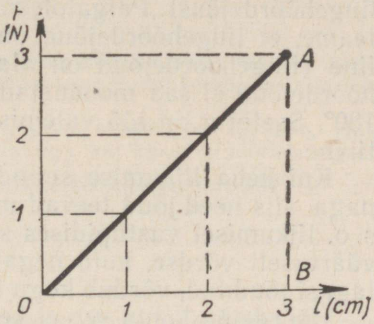
$$k=\frac{(m_2-m_1)g}{x_2-x_1},$$

$$k=\frac{(30\,\mathrm{kg}-18\,\mathrm{kg})\cdot 9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{0{,}02\,\mathrm{m}}=5880\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}.$$

Nüüd leiame algdeformatsiooni x_1, s. o. vedru pikenemise juhul, kui selle otsa on riputatud keha massiga 18 kg. Valemist $F=-kx_1$ saame:

$$x_1=-\frac{F}{k}=-\frac{m_1g}{k},$$

$$x_1=\frac{18\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{5880\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}=0{,}03\,\mathrm{m}=3\,\mathrm{cm}.$$



Joon. 190

Lõppdeformatsioon x_2 on algdeformatsioonist 5 cm võrra suurem ja võrdub seega 8 cm. Arvutame nüüd töö vedru venitamisel 10 sentimeetrilt (pikenemine $x_1=3$ cm) kuni 15 sentimeetrini (pikenemine $x_2=8$ cm):

$$A=\frac{k}{2}(x_2^2-x_1^2);$$

$$A=\frac{5880\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}{2}[(0{,}08)^2\,\mathrm{m}^2-(0{,}03)^2\,\mathrm{m}^2];$$

$$A\approx 16\ \mathrm{J}.$$

Harjutus 38

1. Joonisel 190 on kujutatud graafik, mis kirjeldab laste mängupüstoli vedru kokkusurumiseks vajaliku jõu sõltuvust deformatsiooni suurusest. Arvutage töö, mida tehakse vedru kokkusurumisel 3 cm võrra. Näidake, et see töö võrdub kolmnurga *OAB* pindalaga.
2. Poiss määras suurima jõu, millega ta suudab dünamomeetrit venitada. See oli 400 N. Kui suure töö tegi poiss, kui vedru jäikus $k=10\,000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$?

§ 83. HÕÕRDEJÕU TÖÖ

Teame nüüd, kuidas arvutada raskusjõu ja elastsusjõu tööd. Vaatleme veel kolmanda mehhaanilise jõu — hõõrdejõu — tööd. Maal esineb hõõrdejõud suuremal või väiksemal määral kõikides liikumistes. Seetõttu on selle jõu tööl suur tähtsus.

Teame, et hõõrdejõud erineb raskus- ja elastsusjõust selle poolest, et ta ei sõltu keha koordinaatidest, vaid ainult kokkupuutuvate kehade suhtelisest kiirusest. Siin on juttu muidugi ainult liugehõõrdejõust. Paigalolekuhõõrdejõudu me siin ei vaatle. Samuti teame, et liugehõõrdejõud on liikumisele (kiirusele) vastassuunaline (liugehõõrdejõud on alati takistusjõud). On selge, et liugehõõrdejõud ei saa moodustada liikumise suunaga muud nurka kui 180°. Seetõttu on töö valemis $A=F_h s$ hõõrdejõu F_h väärtus negatiivne.

Kui keha liikumise suund ühtib elastsus- või raskusjõu suunaga, siis need jõud teevad mingi positiivse töö. Kuid «tagasiteel», s. o. liikumisel vastupidises suunas, teevad need jõud sellega arvväärtuselt võrdse, kuid negatiivse töö. Kui keha on algasendisse tagasi jõudnud, võrdub kogu tehtud töö nulliga.

Hõõrdejõu kohta see ei kehti. Selle jõu töö on nii esialgsel teel kui ka tagasiteel negatiivne. Seetõttu ei võrdu hõõrdejõu kogu töö keha algasendisse tagasijõudmisel nulliga.

Ülesanne. Rong massiga 1200 t alustab pidurdamist kiirusel $72\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Kui suure töö teeb hõõrdejõud rongi pidurdamisel kuni täieliku peatumiseni?

L a h e n d u s. Pärast mootorite seiskamist liigub rong ühtlaselt aeglustuvalt, s. o. jääva negatiivse kiirendusega. Selle tulemusena väheneb rongi kiirus $72\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\left(20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$ kuni nullini. Rongi pidurdamisel teeb hõõrdejõud töö

$$A=F_h s.$$

Hõõrdejõu F võime leida Newtoni teisest seadusest:

$$F_h=ma.$$

Rongi kiirenduse a avaldame valemist:

$$v^2-v_0^2=2as.$$

Arvestades, et $v=0$, saame

$$a=-\frac{v_0^2}{2s}.$$

Seega

$$F_h=m\left(-\frac{v_0^2}{2s}\right)=-\frac{mv_0^2}{2s};$$

$$A=-\frac{mv_0^2}{2s}s=-\frac{mv_0^2}{2};$$

$$A=-\frac{1\,200\,000\ \text{kg}\left(20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2}=-24\cdot 10^7\ \text{J}.$$

Harjutus 39

1. Kelk massiga 60 kg sõidab mäest alla ja läbib mäe all horisontaalsel pinnal tee pikkusega 20 m. Leida hõõrdejõu töö sellel teeosal, kui kelgujalaste ja lume vaheline hõõrdetegur on 0,02.
2. Teritatav detail surutakse vastu käiakivi, mille raadius on 200 mm, jõuga 20 N. Kui suure töö teeb käia mootor 2 minutiga, kui käiakivi pöörleb sagedusega 180 $\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{min}}$ ja detaili ning käiakivi vaheline hõõrdetegur on 0,3?

§ 84. VÕIMSUS

Kui meil on tegemist masinate, mootorite ja mehhanismidega, mis teevad tööd, siis on väga tähtis teada, kui kiiresti see töö tehakse. Kui näiteks üks kraana tõstab ühetonnise koormuse teatud kõrgusele 10 minutiga ja teine teeb seda 0,5 minutiga, siis tuleb muidugi eelistada teist kraanat, sest ta teeb sama töö 20 korda kiiremini.

Seetõttu iseloomustab iga masinat, mis teeb tööd, eriline füüsikaline suurus — *võimsus. Võimsus võrdub töö ja selle tegemiseks kulunud aja suhtega.* Kui tähistada võimsus tähega N; siis

$$N=\frac{A}{t}.$$

Sellest valemist näeme, millistes ühikutes mõõdetakse võimsust. SI-süsteemis, kus tööd mõõdetakse džaulides (J) ja aega sekundites (s), on võimsusühikuks 1 $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}$ (džaul sekundis). Seda ühikut nimetatakse vatiks (W):

$$1\,\mathrm{W}=\frac{1\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{s}}=1\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}.$$

Vatt on võrdlemisi väike võimsusühik. Tehnikas kasutatakse sageli vatist 1000 korda suuremat ühikut — kilovatti (kW). Mõnikord kasutatakse ka võimsusühikut, mis võrdub miljoni vatiga. See on megavatt (MW).

$$1\,\mathrm{kW}=10^3\,\mathrm{W}=10^3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}};$$

$$1\,\mathrm{MW}=10^6\,\mathrm{W}=10^6\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}.$$

CGS-süsteemis mõõdetakse tööd ergides ja aega sekundites. Seetõttu on selles süsteemis võimsusühikuks 1 $\frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{s}}$.

Toome mõned näited tänapäeva tehnikas esinevatest võimsustest.

Maailma suurimas hüdroelektrijaamas, mis ehitati Nõukogude Liidus, langeb igas sekundis 100 m kõrguselt tammilt alla 5000 m^3 ehk $5 \cdot 10^6$ kg vett. Jaama võimsus võrdub ilmselt tööga, mida veele mõjuv raskusjõud teeb 1 sekundi jooksul:

$$N = \frac{mgh}{t} = \frac{m}{t} gh.$$

Kuna

$$\frac{m}{t} = 5 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{s}},$$

siis

$$N = 5 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \cdot 9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 100 \text{ m} \approx 5 \cdot 10^9 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 5 \cdot 10^6 \text{ kW}.$$

Kui võimsus N on teada, siis aja t jooksul tehtud töö võime arvutada valemist:

$$A = Nt$$

Siit järeldub, et tööühikuks võib võtta töö, mida tehakse 1 s jooksul võimsusel 1 W. Sellist tööühikut nimetatakse vatt-sekundiks (W·s):

1 W·s = 1 J.

Kuid džaul ehk vatt-sekund on liiga väike mõõtühik. Sagedamini kasutatakse suuremaid ühikuid — kilovatt-tundi (kWh) ja megavatt-tundi (MWh):

1 kWh = 1000 W · 3600 s = $3{,}6 \cdot 10^6$ Ws = $3{,}6 \cdot 10^6$ J.

1 MWh = 1 000 000 W · 3600 s = $3{,}6 \cdot 10^9$ Ws = $3{,}6 \cdot 10^9$ J.

Neid ühikuid kasutatakse peamiselt elektrivoolu töö ühikutena. Kilovatt-tundides mõõdetakse näiteks elektrivoolu tööd igapäevases elus. Kodudes kasutatavad elektrienergia arvestid («voolumõõtjad») loendavadki just kilovatt-tunde.

Kui lennuki-, laeva-, raketi- või automootori töö võrdub takistusjõudude tööga, siis liikumine on ühtlane, s. t. kiirus on jääv. Millest see kiirus sõltub? Järgnevalt näeme, et kiirus sõltub võimsusest.

Valemitest

$$N = \frac{A}{t}, \quad A = Fs$$

järeldub, et

$$N = \frac{Fs}{t}.$$

Suhe $\frac{s}{t}$ on keha liikumise kiirus v.

Seega

$$N = Fv; \quad v = \frac{N}{F}.$$

Sellest valemist näeme, et **jääva jõu korral on kiirus seda suurem, mida suurem on mootori võimsus.**

Seetõttu tuleb kiired rongid ja autod varustada võimsate mootoritega. Kuid enamasti ei ole jõud jääv, vaid suureneb kiiruse kasvamisel.

Viiendas peatükis nägime, et suurtel kiirustel, millega liiguvad laevad ja lennukid, on õhu ja vee takistusjõud võrdeline kiiruse ruuduga:

$$F = \beta_2 v^2.$$

Asetades F väärtuse võimsuse valemisse, saame:

$$N = \beta_2 v^3.$$

Ilmneb, et lennuki- ja laevamootori võimsus ei ole mitte võrdeline kiiruse esimese astmega, vaid selle kuubiga. Kui lennuki kiirust on vaja suurendada näiteks kahekordseks, tuleb tema mootorite võimsust suurendada kaheksa korda. Just sellepärast ongi iga uus saavutus lennukite, laevade ja teiste transpordivahendite kiiruse suurendamisel seotud suurte raskustega.

Valemist $F = \frac{N}{v}$ näeme veel, et kui mootori võimsus N on jääv, siis mootori poolt tekitatav veojõud on väikestel kiirustel suurem kui suurtel kiirustel. Sellepärast lülitabki autojuht mäest üles sõites, kui on vaja suuremat veojõudu, sisse madalama käigu.

Ülesanne 1. Inimene, kelle mass on 70 kg, jookseb 10 m kõrgusest trepist üles 15 sekundiga. Kui suurt keskmist võimsust ta arendab?

L a h e n d u s. Trepist üles minnes teeb inimene töö:

$$A = mgh.$$

Seejuures on tema võimsus

$$N = \frac{mgh}{t}.$$

Pannes sellesse valemisse arvväärtused, saame:

$$N = \frac{70\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 10\,\mathrm{m}}{15\,\mathrm{s}} \approx 460\,\mathrm{W}.$$

Ülesanne 2. Kui suure massiga koormust võib tõsta 12-kW võimsusega kraana kiirusega $90\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}}$?

L a h e n d u s. Avaldame võimsuse valemist

$$N = Fv$$

jõu, millega tõstekraana mõjutab tõstetavat koormust:

$$F = \frac{N}{v}.$$

Koormuse ühtlasel tõstmisel võrdub see jõud mg.

Seega

$$mg = \frac{N}{v}, \quad m = \frac{N}{gv}.$$

Pannes sellesse valemisse suuruste väärtused, saame:

$$m = \frac{1200\ \mathrm{W}}{9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 1{,}5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \approx 800\ \mathrm{kg}.$$

Harjutus 40

1. Kas raskusjõud teeb tööd, kui Maa tehiskaaslane tiirleb ringorbiidil ümber Maa?
2. Nimetage, millised jõud teevad järgmistel juhtudel positiivset ja millised negatiivset tööd:
   a) kraana tõstab betoonplokki ja laseb selle alla,
   b) poiss pumpab jalgpalli õhku,
   c) rakett liigub koos kosmoselaevaga vertikaalselt üles.
3. Millega võrdub kehale mõjuvate kõikide jõudude töö, kui see liigub ühtlaselt?
4. Paadis istuvad sõudjad ei suuda panna paati liikuma vastuvoolu. Kuid paat ei liigu ka pärivoolu. Kas sõudjad teevad mehhaanilist tööd?
5. Kui palju tööd teeb inimene, kelle mass on 75 kg, tõustes mööda treppi esimeselt korruselt viiendale? Iga korruse kõrgus on 3 m.
6. Treipingi mootori võimsus võlli töötlemisel on 3 kW. Võlli treitakse 2 minutit. Kui suure töö teeb treipink?
7. Maagiga täidetud vagonetti, mille mass on 300 kg, tõstetakse mööda kaldteed. Kaldtee pikkus on 20 m ja kõrgus 5 m. Kui palju tööd tehakse vagoneti tõstmisel, kui hõõrdetegur on 0,05?
8. Auto massiga 2000 kg liigub horisontaalsel teel kiirusega $72\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Liikumise takistustegur (takistusjõu ja kaalu suhe) on 0,05. Kui suurt võimsust arendab automootor?
9. Vedrukaalude otsa riputati koormus ja kaalude osuti jäi peatuma kümnendal jaotisel. Kui palju tööd tehti kaalude vedru venitamisel? Vedrukaalude skaala on gradueeritud njuutonites ja jaotustevaheline kaugus on 5 mm.
10. Keha langeb vabalt teatud kõrguselt. Kas raskusjõud teeb üksteisele järgnevates võrdsetes ajavahemikes võrdset tööd?
11. Joast, mille kõrgus on 30 m, langeb alla 300 m^3 vett sekundis. Kui suure võimsusega hüdroelektrijaama võib ehitada sellele joale? Hüdroelektrijaama kasutegur on 75%.

10. peatükk. ENERGIA JÄÄVUSE SEADUS

§ 85. SISSEJUHATUS. KAS JÕU TÖÖ VÕI KEHA TÖÖ?

Eelmises peatükis vaatlesime üksikasjaliselt mehhaanilist tööd ja nägime, et tööd tehakse juhul, kui mingi keha jõu mõjul liigub. Seejuures rääkisime alati, et tööd teeb jõud. Kuid jõud iseloomustab kehadevahelist mõju. Seetõttu võime öelda ka, et tööd ei tee jõud, vaid keha, mis selle jõuga antud keha mõjutab. Küsimus, kas tehtud töö omistada jõule või kehale, ei oma erilist tähtsust. Kuid käesolevas peatükis, kus me vaatleme uut, väga tähtsat kehade liikumise karakteristikut — energiat, on mugavam lugeda, et tööd teeb keha. Mispärast siis?

Asi on nimelt selles, et kui tehakse tööd, siis sellest tööprotsessist osavõtvate kehade liikumisolekus toimuvad teatud muutused. Kaheksandast peatükist saime teada, et kui kehale mõjub jõud, siis selle tulemusena muutub väga tähtis keha liikumise karakteristik — impulss. Nägime, et impulsi muut võrdub jõu ja tema mõjumisaja korrutisega.

Kuid jõu kohta võime öelda, et see ei mõju ainult teatud kindla a j a v a h e m i k u vältel. Jõud mõjub ka teatud t e e p i k k u s e l: keha läbib ju jõu mõjumisaja vältel mingi tee. Seetõttu ei ole impulsi muut ainuke muutus, mis kehaga jõu mõjumise tulemusena toimub. Teiste, liikumist iseloomustavate suuruste muutumisest, mis on tingitud sellest, et tehakse tööd, räägimegi käesolevas peatükis.

§ 86. MIS ON ENERGIA? POTENTSIAALNE ENERGIA

Teame, et tööd tehakse siis, kui keha temale rakendatud jõu mõjul liigub.

Kui aga kehale on rakendatud jõud, siis on kindlasti olemas veel mingi keha, millega antud keha on vastastikuses mõjutuses. Järelikult on võimalik tööd teha ainult sel juhul, kui teineteist mõjutavad vähemalt kaks keha. Näiteks keha langemisel maale tehakse töö:

$$A = mgh_1 - mgh_2. \tag{1}$$

Selle töö teeb raskusjõud $\overrightarrow{mg}$, mille kutsub esile keha ja Maa vastastikune külgetõmme. Selle külgetõmbe mõjul liiguvad teineteise poole nii keha kui ka Maa. Maa nihe tuleb lugeda nulliga võrdseks ainult seetõttu, et taustkehaks võetakse Maa. Antud juhul öeldakse, et Maa teeb langeva kehaga tööd. Tegelikult teevad tööd mõlemad teineteist mõjutavad kehad — Maa ja Maale langev keha.

Samasugune on olukord ka väljavenitatud (või kokkusurutud) vedru elastsusjõu tööga:

$$A = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}. \tag{2}$$

See töö tehakse sellepärast, et vedru erinevad osad mõjutavad vastastikku üksteist. Kui näiteks vedru üks ots on kinnitatud, siis võib öelda, et sellega on vastastikuses mõjutuses kõik vedru ülejäänud osad, sealjuures ka vedru kinnitamata ots. Taustkehaks olgu keha, mille külge vedru on kinnitatud.

Maapinnast teatud kõrgusel asuv keha ei tarvitse tingimata langeda. Vesi võib näiteks hüdroelektrijaama veehoidlas tammi taga püsida. Sel juhul vesi tööd ei tee, ehkki ta on võimeline seda tegema. Samuti ei lühene väljavenitatud vedru, kui mingi teine keha (näiteks seina löödud nael) ei võimalda tal seda teha. Niisugune vedru tööd ei tee, kuid ta võib seda teha. Kui võimaldada veel langeda ja vedrul lüheneda, siis mõlemal juhul tehakse tööd.

7. kl. kursusest on teada, et kui keha võib teha tööd, siis sellise keha kohta öeldakse (isegi sel juhul, kui ta parajasti tööd ei tee), et ta omab energiat. Seega võime öelda, et **maapinnalt ülestõstetud kehad ja deformeeritud elastsed kehad omavad mehhaanilist energiat.**

Väga tähtis on teada, kui suure töö võib teha üksteist mõjutavate kehade süsteem. See töö ei saa muidugi olla lõpmatult suur. Igal üksikjuhul ei saa see ületada teatud suurimat väärtust. Kui suurim võimalik töö on tehtud, siis süsteem ei ole enam võimeline tööd tegema. Näiteks töö, mida võib teha elektrijaama veehoidlasse kogunenud vesi, ei saa olla suurem tööst, mida teeb see vesi tammist alla langemisel. Kui vesi on tammi all, siis selles elektrijaamas ta enam tööd teha ei saa. Suurim töö, mida võib teha väljavenitatud vedru, võrdub tööga, mida ta teeb lühenemisel kuni deformatsiooni kadumiseni. Koos deformatsiooni kadumisega kaotab vedru ka oma võime tööd teha. Suurim töö, mida keha või kehade süsteem antud tingimustel võib teha, võrdubki energiaga.

Keha mehhaanilisеks energiaks nimetatakse suurust, mis võrdub suurima tööga, mida keha antud tingimustel võib teha.

Sõnad «antud tingimustel» selles definitsioonis on vajalikud sellepärast, et ühe ja sama keha või kehade süsteemi energia võib olla erinev, sõltuvalt konkreetsetest tingimustest.

Näiteks hüdroelektrijaama veehoidlasse kogunenud vee energia sõltub vee nivoo kõrgusest tammi all; väljavenitatud vedru energia sõltub sellest, kas see vedru võib lüheneda kuni deformatsiooni täieliku kadumiseni või piiravad mingid kõrvalised kehad tema lühenemist ning ta jääb pärast lühenemist veel veidi deformeerituks.

Vaadeldud kahel juhul on kehadel energiat sellepärast, et nad mõjutavad üksteist ja nendevahelise mõju jõud sõltuvad kehade vastastikusest asendist, s. o. koordinaatidest. Energiat, mida kehad sellise vastastikuse mõju tõttu omavad, nimetatakse *potentsiaalseks energiaks.*

Potentsiaalseks energiaks nimetatakse energiat, mida kehad omavad nendevahelise vastastikuse mõju tõttu.

Kuid igasuguse vastastikuse mõju tulemusena ei ole kehadel potentsiaalset energiat. Potentsiaalset energiat omavad ainult kehad, mis mõjutavad üksteist kehade vastastikusest asendist sõltuvate jõududega. Kui näiteks üks keha mõjutab teist hõõrdejõuga, siis sellistel kehadel ei ole potentsiaalset energiat: keha ei ole võimeline tegema tööd temale mõjuva hõõrdejõu arvel. Selle põhjuseks on asjaolu, et hõõrdejõud ei sõltu koordinaatidest, vaid kiirusest.

Kui üksteist mõjutavad kehad muudavad ruumis oma asendit, ja nad teevad selle tulemusena tööd, siis nende potentsiaalne energia väheneb. Kui on tehtud kogu võimalik töö, siis energia võrdub nulliga. Süsteem võib muidugi teha ka maksimaalsest tööst väiksema töö. Sel juhul on ka tema energia muut väiksem. On selge, et energia muut võrdub keha poolt tehtud tööga. Lihtsamatel juhtudel võib kergesti leida kehade süsteemi potentsiaalse energia väärtuse.

Leiame näiteks Maast ja selle pinna lähedal asuvast kehast koosneva süsteemi potentsiaalse energia. Sel juhul räägitakse lühiduse mõttes «ülestõstetud keha potentsiaalsest energiast».

Määrame keha potentsiaalse energia, kui selle mass on m ja kui see on tõstetud maapinnast kõrgusele h. Selleks tuleb määrata suurim töö, mida keha nendes tingimustes võib teha. Suurim töö tehakse sel juhul, kui keha langeb maapinnale. See töö on määratud valemiga

$$A = mgh.$$

Sellega võrdubki potentsiaalne energia. Kui tähistada potentsiaalne energia tähega П (kreeka suur täht «pii»), siis võime kirjutada

$$\Pi = mgh. \qquad (3)$$

h on siin kõrgus maapinnast või mõnest teisest pinnast, mille kõrgus loetakse kokkuleppeliselt nulliks.

Analoogiliselt võime leida ka deformeeritud elastse keha, näiteks kokkusurutud vedru, potentsiaalse energia valemi.

Leiame suurima töö, mida kokkusurutud vedru võib teha. Suurima töö teeb vedru siis, kui ta pikeneb esialgse, deformeerimata olekule vastava pikkuseni ($x = 0$). Vedru elastsusjõu töö väljendub teatavasti valemiga

$$A = \frac{k}{2}(x_1^2 - x_2^2),$$

kus x_1 ja x_2 on vastavalt alg- ja lõppdeformatsioon. Antud juhul on algdeformatsioon x ja lõppdeformatsioon võrdub nulliga. Seetõttu

$$A = \frac{kx^2}{2}.$$

Sellega võrdubki deformeeritud elastse keha energia. Seega

$$\Pi = \frac{kx^2}{2}. \qquad (4)$$

Mõlemal juhul jõudsime järgmisele tulemusele: **potentsiaalne energia sõltub keha asendist, s. o. tema koordinaatidest.**

Esimesel juhul on keha asend määratud tema kõrgusega h, teisel juhul aga vedru deformatsiooniga x, s. o. vedru vaba otsa kaugusega kinnitatud otsast.

Seetõttu öeldakse, et **keha potentsiaalne energia on energia, mis sõltub selle keha asendist temaga vastastikuses mõjutuses oleva keha suhtes.**

Valemitest (3) ja (4) järeldub, et keha energia muut võrdub tehtud tööga.

Tõepoolest keha langemisel kõrguselt h_1 kõrgusele h_2 väheneb tema potentsiaalne energia väärtuselt

$$\Pi_1 = mgh_1$$

kuni väärtuseni

$$\Pi_2 = mgh_2.$$

Seega Maast ja kehast koosneva süsteemi energia muut on

$$\Pi_2 - \Pi_1 = mgh_2 - mgh_1.$$

Leiame langemisel tehtud töö:

$$A = mg(h_1 - h_2);$$
$$A = -(mgh_2 - mgh_1);$$
$$A = -(\Pi_2 - \Pi_1).$$

Seega tehtud töö võrdub potentsiaalse energia muudu vastandväärtusega (energia muut võetuna vastandmärgiga).

Siit näeme, et keha langemisel, kui raskusjõu töö on positiivne, süsteemi potentsiaalne energia väheneb (kui mingi suuruse muutus on negatiivne, siis see suurus väheneb). Kui keha tõstetakse kõrgemale, siis tema potentsiaalne energia suureneb (kõrgus *h* kasvab), kuid raskusjõud teeb sel juhul negatiivset tööd. Jällegi võrdub energia muut tehtud töö vastandväärtusega.

Võib kergesti veenduda, et kõik see kehtib ka elastselt deformeeritud keha energia kohta.

Seega võime öelda: **kui kehad mõjutavad teineteist gravitatsiooni- või elastsusjõuga, siis nende poolt tehtud töö võrdub potentsiaalse energia muudu vastandväärtusega.**

Harjutus 41

1. Keha massiga 2 kg visati vertikaalselt üles. Kui suure töö tegi raskusjõud, kui keha tõusis 10 m kõrgusele? Kas see töö on positiivne või negatiivne?
2. Vedrukaalude otsa riputati koormus. Kaalude osuti jäi peatuma kolmandale jaotisele. Kaaluvedru on gradueeritud njuutonites ja skaala naaberjaotiste vaheline kaugus on 5 mm. Kui palju suurenes kaaluvedru potentsiaalne energia?

§ 87. KINEETILINE ENERGIA

Nägime, et potentsiaalset energiat on kehadel, millele mõjuvad jõuga teised kehad. Kuid selgub, et energiat võivad omada ka kehad, millele jõud ei mõju või millele mõjuvad jõud on tasakaalus: neil kehadel on energiat, kui nad liiguvad.

Kui keha liigub jääva kiirusega, siis kõikide temale mõjuvate jõudude resultant võrdub nulliga ja seetõttu tööd ei tehta. Kuid selline keha on võimeline tööd tegema. Ta teeb tööd siis, kui ta mõjutab liikumise suunas teatud jõuga mõnda teist keha. Newtoni kolmanda seaduse põhjal mõjub sel juhul ka kehale endale jõud, mis on eelmisega võrdne, kuid liikumisele vastassuunaline. Seetõttu keha kiirus väheneb ja teatud aja pärast jääb keha seisma. Keha täielikuks peatamiseks kulub muidugi teatud aeg, mille jooksul keha jõuab läbida mingi tee. Kogu selle tee liigub keha jõu mõjul ja teeb seega tööd. Niisiis, liikuv keha võib teha tööd, s. t. tal on energiat.

Energiat, mis kehal on tema liikumise tõttu, nimetatakse kineetiliseks energiaks.

Leiame keha kineetilise energia. Selleks tuleb leida suurim töö, mida keha võib teha. Suurima töö teeb keha siis, kui ta liigub täieliku peatumiseni ja kaotab seega täielikult oma võime tööd teha. Keha kineetilise energia arvutamiseks tuleb järelikult leida selle nihe s kuni täieliku peatumiseni ja korrutada see kehale rakendatud jõuga F:

$$A = Fs.$$

Nihke võime kergesti leida valemist

$$s = -\frac{v^2}{2a},$$

ja jõu Newtoni teisest seadusest

$$F = -ma.$$

Asetades s ja F väärtused töö valemisse, saame

$$A = ma \cdot \frac{v^2}{2a} = \frac{mv^2}{2}.$$

See ongi suurim töö, mida kiirusega v liikuv keha võib teha, ning võrdub seega keha kineetilise energiaga K:

$$K = \frac{mv^2}{2}.$$

Liikuva keha kineetiline energia võrdub keha massi ja tema kiiruse ruudu poole korrutisega.

Erinevalt potentsiaalsest energiast, mis sõltub keha asendist, sõltub kineetiline energia tema kiirusest.

Kui kiiruse arvväärtus ei muutu, siis ei muutu ka keha kineetiline energia. Kiiruse s u u n a muutumine ei põhjusta kineetilise energia muutumist. Näiteks ringorbiidil liikuva tehiskaaslase kineetiline energia jääb kogu aeg konstantseks, ehkki tema kiiruse suund kogu aeg muutub.

Vaatleme nüüd, mis juhtub kineetilise energiaga, kui keha teeb tööd.

Liikugu näiteks mingi keha, mille mass on m, kiirusega v_1. Selle keha kineetiline energia on määratud valemiga

$$K_1 = \frac{mv_1^2}{2}.$$

Kui sellele kehale rakendada mingi liikumisele vastassuunaline jõud $\vec{F}$, siis keha kiirus väheneb ja võrdub teatud aja pärast v_2. Keha kineetiline energia väheneb samuti ja omandab väärtuse

$$K_2 = \frac{mv_2^2}{2}.$$

Jõu $\vec{F}$ töö arvutamiseks tuleb teada keha nihet s. Avaldame selle valemist $v_2^2 - v_1^2 = 2as$:

$$s = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a}.$$

Newtoni teise seaduse põhjal:

$$a = \frac{F}{m}.$$

Seega

$$s = \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2F}.$$

Nüüd võime leida jõu F töö:

$$A = Fs = F\,\frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2F};$$

$$A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \tag{1}$$

Selle võrduse parem pool on keha kineetilise energia muut. Kui jõud on rakendatud kehale selle liikumise suunas, siis kineetiline energia suureneb, kuid energia muut on ka sel juhul võrdne tehtud tööga. Me tõestasime seega kineetilise energia kohta väga tähtsa teoreemi: **keha kineetilise energia muut võrdub tehtud tööga.**

See teoreem on õige igasuguste jõudude kohta, mille mõjul keha kiirus ja seega ka kineetiline energia muutub. Me kasutame seda teoreemi sageli.

Valemis (1) ei ole kineetilise energia muudu ees miinusmärki. See tähendab, et kui teha positiivset tööd, siis kineetiline energia suureneb. Nii on see näiteks keha langemisel. Kui töö on negatiivne, siis keha kineetiline energia väheneb. See on väga tähtis erinevus kineetilise ja potentsiaalse energia vahel.

Harjutus 42

1. Kraana tõstab koormust jääva kiirusega üles. Kas koormuse tõstmisel tehakse tööd? Mis toimub koormuse kineetilise ja potentsiaalse energiaga? Mille arvel koormuse potentsiaalne energia muutub?
2. Miks kaugelaskekahuritele tehakse pikad torud?
3. Nool, mille mass on 30 g, lastakse vertikaalselt üles kiirusega $25\,\frac{m}{s}$. Leida noole potentsiaalne ja kineetiline energia, kui lasust on möödunud a) 2 sekundit ja b) 4 sekundit.
4. Keha, mille mass on m, liigub kiirusega v_1. Kui suure töö teeb keha, kui tema kiirus väheneb väärtuseni v_2?
5. Post, mille pikkus on l ja mass m, lamab horisontaalselt maapinnal. Kui palju tööd tehakse selle posti tõstmisel püstasendisse?
6. Kaks keha, millel on võrdsed massid m, langevad ühesuguselt kõrguselt h. Üks neist langeb vaakumis, teine aga õhus. Kas nende kehade kineetiline energia on tee keskpunktis ühesugune?
7. Mäelt, mille kõrgus on 10 m ja nõlva pikkus 50 m, libiseb alla kelk massiga 60 kg. Leidke keskmine hõõrdejõud kelgu libisemisel, kui mäe jalamil on kelgu kiirus $8\,\frac{m}{s}$. Kelgu algkiirus on null.

§ 88. KINEETILISE JA POTENTSIAALSE ENERGIA VASTASTIKUNE MUUNDUMINE. ENERGIA JÄÄVUSE SEADUS

Kui kehad teevad tööd, siis muutub nende kineetiline ja potentsiaalne energia. Kui tehtav töö on positiivne, siis potentsiaalne energia kahaneb ja kineetiline energia kasvab. Kui aga töö on negatiivne, siis potentsiaalne energia kasvab ja kineetiline energia kahaneb.

Kui näiteks keha teatud kõrguselt vabalt langeb, siis tema potentsiaalne energia kahaneb, sest et kõrgus väheneb, ja kineetiline energia kasvab, sest et keha kiirus suureneb. Vaatame, kuidas on need kaks energialiiki omavahel seotud.

Oletame, et keha massiga m langeb kõrguselt h_1 kõrgusele h_2. Keha kiirused nendel kõrgustel olgu vastavalt v_1 ja v_2. Keha liigub kiirendusega g ja läbib tee h_1-h_2, mille kohta kehtib valem

$$h_1-h_2=\frac{v_2^2-v_1^2}{2g}.$$

Korrutades selle võrduse mõlemaid pooli raskusjõuga mg, saame:

$$mgh_1 - mgh_2 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

Kuid

$$mgh_1 - mgh_2 = -(mgh_2 - mgh_1).$$

Järelikult

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = -(mgh_2 - mgh_1).$$

Selles valemis esinev suurus $mgh_2 - mgh_1$ on potentsiaalse energia muut. $\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$ on aga kineetilise energia muut. Valemist on näha, et need muudud on teineteisega arvuliselt võrdsed, kuid erinevad märgi poolest. See tähendab, et kui üks neist suurustest kasvab, siis teine kahaneb. Antud juhul keha langeb ja tema kineetiline energia suureneb. See suurenemine on täpselt võrdne potentsiaalse energia kahanemisega. Seega võime öelda, et potentsiaalne energia muundub kineetiliseks energiaks. Kui viskame keha üles, siis toimub vastupidine nähtus: kineetiline energia väheneb ja muundub potentsiaalseks energiaks; potentsiaalne energia kasvab seejuures täpselt nii palju, kui palju kineetiline energia kahaneb. Eelmisele võrdusele võib anda järgmise kuju:

$$mgh_1 + \frac{mv_1^2}{2} = mgh_2 + \frac{mv_2^2}{2}. \qquad (1)$$

Võrduse vasakul poolel on keha potentsiaalse ja kineetilise energia summa ülemises punktis, paremal poolel aga nende energiate summa alumises punktis. Näeme, et need summad on võrdsed.

Potentsiaalse ja kineetilise energia summat nimetatakse *mehhaaniliseks energiaks.* Kui tähistada mehhaaniline energia tähega E, siis võime kirjutada:

$$E = \Pi + K.$$

Võrduse (1) põhjal võime öelda, et **kui kehale mõjub ainult raskusjõud, siis tema liikumisel mehhaaniline energia ei muutu,** vaid on jääv. Seejuures toimub ainult ühe energialiigi muundumine teiseks. See on *energia jäävuse seadus* kehade jaoks, millele mõjub raskusjõud.

Kui keha on kõrgusel H paigal, siis tema mehhaaniline energia võrdub potentsiaalse energiaga mgH, sest et kineetiline energia on null. Kui keha hakkab langema, siis ta omandab kineetilise energia, mis langedes pidevalt kasvab. Samal ajal potentsiaalne energia kahaneb. Maapinnale jõudmise hetkel on kehal ainult kineetiline energia $\frac{mv^2}{2}$. Ilmselt muundus kogu potentsiaalne energia kineetiliseks. Keha kineetiline energia maapinna lähedal võrdub potentsiaalse energiaga kõrgusel H:

$$\frac{mv^2}{2}=mgH.$$

Trajektoori igas vahepealses punktis koosneb langeva keha energia kahest osast: potentsiaalsest ja kineetilisest energiast, mille summa võrdub potentsiaalse energiaga enne langemise algust ehk kineetilise energiaga langemise lõpul.

Kaheksandas peatükis me juba tutvusime ühe jäävusseadusega — impulsi jäävuse seadusega. See seadus väidab, et igas suletud süsteemis on kõikide kehade impulsside summa jääv. Suletud süsteemiks nimetasime sellist süsteemi, milles kehad mõjutavad ainult üksteist, s. t. nad ei ole vastastikuses mõjutuses «kõrvaliste», süsteemiväliste kehadega. Nüüd näeme, et veel teisel füüsikalisel suurusel on jäävuse omadus. See suurus on energia. Raskusjõu mõjul liikuva keha mehhaaniline energia ei muutu. Rääkides mehhaanilise energia jäävusest, tuleb silmas pidada, et tegemist on suletud kehade süsteemi energia jäävusega. Potentsiaalne energia on teatavasti vastastikuse mõju energia. Ta kuulub kehade süsteemile, näiteks süsteemile, mis koosneb Maast ja sellest teatud kõrgusele tõstetud kehast. Kehale mõjuv raskusjõud tekib ju selle keha ja Maa vastastikuse mõju tõttu. Kuid miks me omistame potentsiaalse energia ainult ülestõstetud kehale?

§ 86 oli juttu, et me vaatleme iga liikumist Maa suhtes, s. o. Maaga seotud taustsüsteemis. Sellises taustsüsteemis on Maa liikumatu (iseenda suhtes seisab ju Maa paigal). Tema kineetiline energia võrdub nulliga ja ei muutu keha liikumisel. Kuna potentsiaalse energia muutumine on seotud kineetilise energia muutumisega, siis Maaga seotud taustsüsteemi kasutamisel peame ka Maa potentsiaalse energia lugema nulliks.

Kui vaataksime kivi langemist mitte Maalt, vaid mingilt teiselt planeedilt, siis näeksime, et mõlemad kehad — Maa ja kivi — liiguvad, ja jõuaksime järeldusele, et mõlema keha kineetiline energia suureneb. Ta suureneb süsteemi «kivi — Maa» potentsiaalse energia vähenemise arvel.

Energia jäävuse seadus, samuti nagu impulsi jäävuse seaduski, kehtib ainult suletud kehade süsteemi kohta ja seda võib sõnastada järgmiselt: **suletud kehade süsteemis, kus mõjuvad ainult gravitatsioonijõud, on süsteemi koguenergia kehade igasugusel liikumisel jääv; süsteemis võib esineda ainult kineetilise ja potentsiaalse energia vastastikune muundumine.**

Ülesanne 1. Keha, mille mass on 250 g, visatakse vertikaalselt üles kiirusega $15 \frac{m}{s}$. Leida 1) keha kineetiline energia viske algul, 2) potentsiaalne energia tee kõrgeimas punktis ja 3) suurim kõrgus maapinnast.

L a h e n d u s. Algul leiame keha kineetilise energia:

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{0{,}25\,\text{kg} \cdot \left(15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2} \approx 28\ \text{J}.$$

Potentsiaalne energia tee kõrgeimas punktis võrdub kineetilise energiaga viske algul:

$$\Pi = K \approx 28\ \text{J}.$$

Kasutades valemit

$$\Pi = mgh,$$

leiame tõusu suurima kõrguse:

$$h = \frac{28\ \text{J}}{0{,}25\,\text{kg} \cdot 9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 11{,}4\ \text{m}.$$

Ülesanne 2. Kõrguselt h visatakse keha horisontaalsuunas algkiirusega u. Kui suur on keha kiirus v maapinnale langemise hetkel?

L a h e n d u s. Viske hetkel on keha koguenergia potentsiaalse energia mgh ja kineetilise energia $\frac{mu^2}{2}$ summa. Maapinnale jõudmisel on kehal ainult kineetiline energia $\frac{mv^2}{2}$, sest et potentsiaalne energia võrdub nulliga. Seega

$$mgh + \frac{mu^2}{2} = \frac{mv^2}{2};$$

$$2gh + u^2 = v^2;$$

$$v = \sqrt{2gh + u^2}.$$

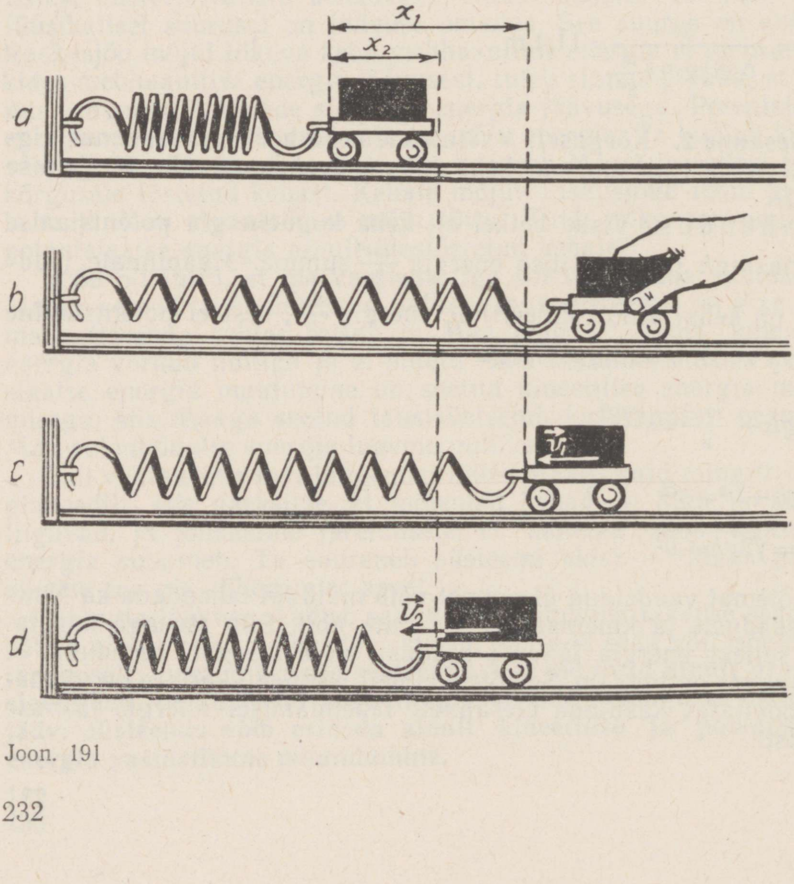
Mõlemat vaadeldud ülesannet võib muidugi lahendada ka Newtoni seaduste ja kinemaatika valemite abil. Siin me aga kasutasime selleks energia jäävuse seadust. Võib kergesti veenduda, et viimane tee on lihtsam. Seetõttu on neil juhtudel, kus see on võimalik, soovitatav kasutada ülesannete lahendamisel energia jäävuse seadust.

§ 89. ENERGIA JÄÄVUSE SEADUS KEHADE JAOKS, MILLELE MÕJUVAD ELASTSUSJÕUD

Potentsiaalse ja kineetilise energia vastastikune muundumine ja mehhaanilise energia jäävus esinevad mitte ainult sel juhul, kui kehale mõjuvad gravitatsioonijõud, vaid ka siis, kui keha liigub elastsusjõudude mõjul.

Et selles veenduda, vaatleme jällegi spiraalvedrut. Joonisel 191, *a* on kujutatud see vedru deformeerimata olekus. Kujutleme, et vedrut venitati (joon. 191, *b*). Kui vedru ots lahti lasti, hakkas keha liikuma kiirendusega. Oletame, et sel ajahetkel, kui vedru pikenemine oli x_1, võrdus keha kiirus v_1 (joon. 191, *c*), ja et teatud aja pärast oli vedru pikenemine x_2 ning keha kiirus v_2 (joon. 191, *d*). Antud juhul läbis keha vedru elastsusjõu mõjul tee x_1-x_2 ja elastsusjõud tegi töö

$$A=-\frac{k}{2}(x_2^2-x_1^2)=-\left(\frac{kx_2^2}{2}-\frac{kx_1^2}{2}\right).$$



Joon. 191

Vaatleme nüüd, kuidas muutus keha kineetiline energia sellel liikumisel. Selleks kasutame teoreemi, mis väidab, et kineetilise energia muut võrdub tehtud tööga. Kui keha kiirus tee x_2-x_1 läbimisel muutus v_1 kuni v_2, siis kineetilise energia muut võrdub

$$\frac{mv_2^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2},$$

kus m on keha mass (vedru massi jätame arvestamata).

Seega

$$\frac{mv_2^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2}=-\left(\frac{kx_2^2}{2}-\frac{kx_1^2}{2}\right).$$

Kuid vahe $\frac{kx_2^2}{2}-\frac{kx_1^2}{2}$ on vedru potentsiaalse energia muut.

Kehade kineetilise energia muut võrdub nende potentsiaalse energia muudu vastandväärtusega. Kui keha kineetiline energia kasvab, siis potentsiaalne energia kahaneb ja vastupidi.

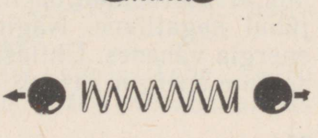
Saadud võrduse võime kirjutada järgmiselt:

$$\frac{mv_2^2}{2}+\frac{kx_2^2}{2}=\frac{mv_1^2}{2}+\frac{kx_1^2}{2}.$$

Näeme, et kehast ja vedrust koosneva süsteemi potentsiaalse ja kineetilise energia summa on jääv. See võrdus väljendab energia jäävuse seadust selle süsteemi jaoks. Seega, **energia jäävuse seadus kehtib mitte ainult kehade kohta, mis mõjutavad üksteist gravitatsioonijõuga, vaid ka nende kehade kohta, mille vahel mõjub elastsusjõud.**

Meenutagem, et need mõlemad jõud sõltuvad kehade vastastikusest asendist (koordinaatidest). Just selliste jõudude jaoks saimegi energia jäävuse seaduse.

Ülesanne. Kahe ühekilogrammise massiga kuuli vahele on asetatud kokkusurutud spiraalvedru, mille pikkus on 5 cm (joon. 192). Kui vedru sirgestub, omandavad mõlemad kuulid elastsusjõu mõjul kiirenduse, eemalduvad vedrust ja jätkavad liikumist hõõrdumiseta. Vedru jäikus on $800\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ ja vedru pikkus kuulide vedrust eraldumise hetkel on 11 cm. Kui suure kiirusega liiguvad kuulid?



Joon. 192

L a h e n d u s. Kokkusurutud vedrul on potentsiaalne energia $\frac{kx^2}{2}$. Selles valemis tuleb vedru pikenemiseks võtta $x = 11$ cm$-$$-5$ cm$=6$ cm. Potentsiaalne energia ongi vedrust ja kahest kuulist koosneva süsteemi koguenergia alghetkel. Pärast kuulide eemaldumist vedrust võrdub süsteemi koguenergia kahe kuuli kineetilise energiaga (vedru massi jätame arvestamata). Kuna süsteemi võib lugeda suletuks, peab koguenergia olema jääv. Seega võime kirjutada

$$\frac{kx^2}{2} = 2\frac{mv^2}{2}.$$

Siit tuleneb, et

$$v = x\sqrt{\frac{k}{2m}}.$$

Pannes sellesse valemisse arvväärtused, saame

$$v = 120\frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

Siin me ei arvestanud vedru enda kineetilist energiat, ehkki tema osad sirgestumisel liiguvad. Selle energia võib jätta arvestamata ainult siis, kui vedru mass on kuulide massist mitu korda väiksem.

§ 90. MEHHAANILINE ENERGIA JA HÕÕRDEJÕUD

Meil jääb veel selgitada, mis toimub keha energiaga siis, kui temale peale gravitatsioonijõu ja elastsusjõu mõjub veel hõõrdejõud.

Oma kogemustest teame, et iga omaette jäetud liikuv keha jääb varem või hiljem seisma ja et selle põhjuseks on hõõrdejõud. Kui auto mootor välja lülitada, siis jääb see lõpuks seisma ka täiesti horisontaalsel teel. Samuti lakkab pärast mootorite seiskamist ka laeva liikumine. Seisma jääb ka väljakul veerev jalgpall. Kõikidel sellistel juhtudel keha ja Maa vastastikuse mõju p o t e n t s i a a l n e e n e r g i a e i m u u t u. V ä h e n e b a i n u l t k i n e e t i l i n e e n e r g i a. Kui kehale mõjub hõõrdejõud, siis järelikult väheneb ka kogu mehhaaniline energia. Selle põhjuseks on asjaolu, et hõõrdejõud on liikumisele vastassuunaline ja et töö on sel juhul negatiivne. Nägime, et negatiivse töö korral kineetiline energia vähenes. Ühtlasi teame, et negatiivse töö tegemisel potentsiaalne energia kasvab, kuid see kehtib ainult raskus- ja elastsusjõu töö kohta. **Hõõrdejõu negatiivne töö ei põhjusta potentsiaalse energia mingisugust muutumist.** Kui elastsus- ja raskusjõu kõrval mõjub veel hõõrdejõud, siis potentsiaalne energia muutub täpselt samuti, nagu ta muutuks hõõrdejõu puudumisel.

Hoopis teine lugu on kineetilise energiaga. Hõõrdejõu mõju tõttu väheneb see alati. Koos kineetilise energiaga väheneb ka koguenergia.

Kui näiteks keha massiga m langeb kõrguselt h, siis hõõrdumise puudumisel on ta maapinnale langemise hetkeks täielikult kaotanud oma potentsiaalse energia mgh, kuid ta on omandanud niisama suure kineetilise energia:

$$\frac{mv^2}{2}=mgh,$$

v on siin keha kiirus maapinna lähedal.

Kui langevale kehale mõjub veel õhu takistusjõud, siis maapinnale jõudmisel on tema kiirus muidugi väiksem. Väiksem on ka tema kineetiline energia. Kuid potentsiaalne energia väheneb niisama palju nagu varemgi, s. o. mgh võrra. Kineetiline energia, mille keha omandas, ei võrdu nüüd enam potentsiaalse energia kahanemisega. Osa energiat läks kaduma — selle arvel tehti tööd õhu takistusjõu ületamiseks. Ehkki me teame, kuhu energia «kadus», oli antud juhul siiski tegemist energia vähenemisega. Jõudsime järeldusele, et kui kehale mõjub hõõrdejõud, siis energia jäävuse seadus ei kehti.

Kuid energia jäävuse seaduse kehtetus on siin siiski ainult näilik. Teame, et hõõrduvad pinnad alati soojenevad — nende temperatuur tõuseb.

8. kl. kursusest on teada, et keha temperatuur on määratud tema molekulide liikumisenergiaga. Hõõrduvate pindade soojenemine on tingitud molekulide energia suurenemisest. Kas see suurenemine ei toimugi keha kineetilise energia «kadumise» arvel? Täpsed mõõtmised on tõepoolest näidanud, et kui liikuva keha kineetiline energia hõõrdejõu mõjul väheneb, siis keha molekulide energia suureneb, kusjuures molekulide energia suurenemine võrdub täpselt keha mehhaanilise energia vähenemisega. Ehkki mehhaaniline energia väheneb, ei kao ta jäljetult — ta muundub ainult molekulide liikumisenergiaks. Seega on energia jäävuse seadus siiski kehtiv.

Ülesanne. Keha, mille mass on 2 kg, liigub kiirusega $v_1=12\frac{\text{m}}{\text{s}}$, põrkab vastu vedrut ja surub selle kokku. Pärast seda vedru sirgestub ja paneb keha liikuma kiirusega $v_2=10\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Kui palju mehhaanilist energiat muundus siseenergiaks?

Lahendus. Vedruga kokkupõrkamisel surus keha vedru kokku ja tema kineetiline energia muundus vedru potentsiaalseks energiaks. Seejärel vedru sirgestus ja tema potentsiaalne energia muundus uuesti kineetiliseks energiaks. Kui hõõrdumine puuduks, oleksid kiirused v_1 ja v_2 ühesugused, sest ainult elastsusjõu mõjul liikuva keha mehhaaniline energia on jääv. Keha kiirus pärast põrget on hõõrdejõu tõttu algkiirusest väiksem.

Seega kineetilise energia vähenemise võime arvutada järgmiselt:

$$\frac{mv_1^2}{2}-\frac{mv_2^2}{2}=\frac{m}{2}(v_1^2-v_2^2)=\frac{2\,\mathrm{kg}}{2}\left[\left(12\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2-\left(10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2\right]=44\ \mathrm{J}.$$

Kogu see «kaduma läinud» energia muundus keha molekulide energiaks.

Harjutus 43

1. Keha massiga 400 g on kinnitatud kokkusurutud vedru külge, mille jäikus on $100\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$. Pärast vedru vabastamist hakkab keha võnkuma amplituudiga 10 cm. Milline on võnkuva keha suurim kiirus?
2. Keha massiga 3 kg visati teatud kõrguselt alla algkiirusega $2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. 10 sekundit pärast liikumise algust oli keha kiirus $50\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Kui palju tööd teeb keha hõõrdejõudude ületamisel?

§ 91. ENERGIA MUUNDUMINE JA MASINATES KASUTAMINE

Juba kaks aastasada kasutab inimkond laialdaselt masinaid, mis käitatakse jõumasinate abil. Jõumasinad saavad oma energia mingilt energiaallikalt.

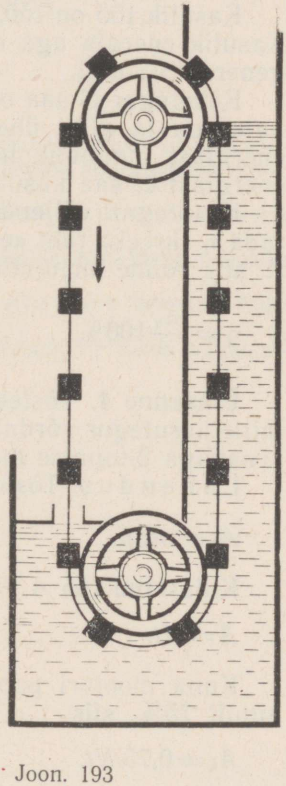
Mehhaanika seisukohalt taandub masinate kasutamine sellele, et nende abil teevad mingid jõud mehhaanilist tööd. Kuid teha tööd — see tähendab kulutada energiat, mis võrdub vähemalt selle tööga. Põhilisteks energialiikideks, mille arvel loendamatud masinad tänapäeval tööd teevad, on kütuse (kivisöe, nafta, gaasi) põlemisel saadav energia, langeva vee energia ja tuumareaktoris vabanev tuumaenergia. Mitte ühtegi nendest energialiikidest ei anta vahetult üle masinatele. Teel töömasinateni muundub energia korduvalt ühest liigist teise. Näiteks kütuse ja hapniku osakeste vastastikuse mõju energia (potentsiaalne energia) muundub algul põlemisel tekkinud gaaside osakeste kineetiliseks energiaks. See energia antakse üle veeauru molekulidele ja nendelt auruturbiinile, mis käitab soojuselektrijaama generaatori. Generaatoris muundub pöörlemise mehhaaniline energia elektrivoolu energiaks. See antakse ülekandeliine mööda edasi elektrimootorile. Elektrimootoris muundub elektrienergia uuesti mehhaaniliseks energiaks, mis antakse edasi mingile masinale, näiteks tööpingile.

Sellise muundumiste ahela läbib energia teel soojuselektrijaama küttekoldest kuni masinani. Siia tuleb veel lisada keerukas energia muundumiste ahel, mille tulemusena tekkis Maal kütus ja mille algpõhjuseks on Päike — meie planeedi eluallikas.

Nimetatud muundumised (me ei loetlenud kaugeltki kõiki) alluvad energia jäävuse seadusele, millest järeldub, et ühelgi muundumisel ei või saada ühte liiki energiat rohkem ku teist liiki energiat kulutati. Ükski jõumasin ei või anda rohkem mehhaanilist energiat, võrreldes tema poolt kulutatud elektri- või soojusenergiaga. Ühegi töömasina poolt tehtud töö ei saa olla suurem selles masinas kulutatud energiast. Otse ümberpöördult: hõõrdejõudude tõttu, mille töö on alati negatiivne, läheb reaalsetes jõumasinates ja generaatorites osa energiat paratamatult kaduma. Ka töömasinate abil saadav kasulik töö on kulutatud energiast alati väiksem.

Kõigest sellest saadi teada alles siis, kui avastati energia jäävuse seadus, s. o. veidi enam kui sada aastat tagasi. Kuni selle ajani püüti paljude sajandite vältel visalt luua masinat, mille poolt tehtud töö oleks kulutatud energiast suurem. Sellist masinat hakati nimetama *igaveseks jõumasinaks* ehk *perpetuum mobileks.* Igavest jõumasinat ei ole kunagi loodud ja seda ei olegi võimalik luua.

Joonisel 193 on kujutatud üks loendamatutest igavese jõumasina projektidest. See koosneb kahest rattast, millest üks asub veega täidetud torni ülemises ja teine alumises osas. Üle rataste on viidud tross, mille külge on teatud vahemaade tagant kinnitatud kerged õõnsad kastid. Jooniselt näeme, et igal ajahetkel on teatud osa kaste üleni vees, ülejäänud osa aga on õhus. Projekti autor väitis, et kastid, mis on joonisel kujutatud paremal, tõusevad Archimedese jõu mõjul üles ja panevad ratta pöörlema. Vees olevad kastid asenduvad uutega ja liikumine on igavene. Pöörlevad rattad võivad käitada elektrigeneraatori ja anda tasuta tööd.


Joon. 193

Tegelikult esinevad projektis muidugi vead ning selline jõumasin ei saa töötada. Kui ühed kastid tõusevad pinnale, siis teised kastid sukelduvad ju vette. Vette sukelduvad kastid peavad liikuma Archimedese jõule vastupidises suunas. Peale selle lähevad nad vette torni alumises osas, kus neile mõjub kogu veesamba rõhk. Vee rõhumisjõud on Archimedese jõust alati suurem.

Taolisi vigu on tehtud kõigis igavese jõumasina projektides. Sellise jõumasina loomine on juba ette määratud ebaõnnestumisele, sest et energia jäävuse seaduse põhjal ei saa tehtud töö olla suurem kulutatud energiast.

Olgu märgitud, et isegi tänapäeval on veel «leidureid», kes ei jäta oma viljatuid katseid luua igavest jõumasinat.

Tehnika ülesandeks ei ole mitte energia jäävuse seadusega vastuolus oleva igavese jõumasina loomine, vaid kadude vähendamine jõu- ja töömasinais.

Iga jõumasinat, generaatorit ja töömasinat iseloomustab teatud suurus, mis näitab, kui efektiivselt muundatakse üks energialiik teiseks või kui täielikult kasutatakse energia ära tööks. Seda suurust nimetatakse *kasuteguriks.*

Jõumasina või generaatori kasuteguriks nimetatakse saadud kasuliku energia ja kulutatud energia suhet.

Töömasina kasuteguriks nimetatakse selle masina poolt tehtud kasuliku töö ja kulutatud töö suhet.

Kasulik töö on töö, mille tegemiseks see masin on ette nähtud. Kasulik energia aga on energia, mida saadakse jõumasina või generaatori abil.

Kasutegur ei saa olla kunagi suurem kui üks. Reaalsetes masinates on ta alati ühest väiksem, sest et osa masinale antavast energiast muundub hõõrdejõu töö tõttu siseenergiaks. Seda osa energiast ei saa kasutada kasuliku töö tegemiseks.

Kasutegur väljendatakse protsentides. Kui kasutegurit tähistada η (kreeka täht «eeta»), kasulikku tööd A_k ja kogu tehtud tööd A, siis võime kirjutada järgmise valemi:

$$\eta = \frac{A_k}{A} 100\%.$$

Ülesanne 1. Tõstekraanal on 10-kilovatise võimsusega mootor, mille kasutegur võrdub 75%. Kui palju aega kulub selleks, et tõsta kraanaga 2-tonnise massiga koormus 50 m kõrgusele?

Lahendus. Tõstekraana teeb kasuliku töö

$$A_k = mgh.$$

Kulutatud töö A väljendub valemiga:

$$A = Nt.$$

Kuna mootori poolt tehtavast tööst läheb kasulikuks tööks ainult 75%, siis

$$A_k = 0{,}75\, Nt.$$

Siit saame

$$t = \frac{A_k}{0{,}75\,N} = \frac{mgh}{0{,}75\,N},$$

$$t = \frac{2000\ \mathrm{kg}\cdot 9{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 50\ \mathrm{m}}{0{,}75\cdot 10\,000\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}} \approx 125\ \mathrm{s}.$$

Ülesanne 2. Auto massiga 2 t liigub mägiteel pärimäge ning läbib teeosa, mille kõrguste vahe on 80 m. Autot pidurdatakse nii, et tema kiirus on jääv. Kui palju energiat eraldub pidurites?

L a h e n d u s. Kui autot ei pidurdataks, siis potentsiaalse energia kahanemine võrduks kineetilise energia kasvuga. Kuna aga auto liigub pidurdamise tõttu jääva kiirusega, siis laskumisel kineetiline energia ei suurene. Seega kogu potentsiaalne energia muundub siseenergiaks:

$$mg(h_1 - h_2) = 2000\ \mathrm{kg}\cdot 9{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 80\ \mathrm{m} \approx 1{,}6\cdot 10^6\ \mathrm{J}.$$

Harjutus 44

1. Kirjeldage üksikasjalikult energia muundumiste ahelat, mis lõpeb soojuse eraldumisega elektrikeeduplaadis, kui elektrienergia saadakse hüdroelektrijaamast. Alustage Päikesest.
2. Keha langes teatud kõrguselt maapinnale. Milleks muundus tema potentsiaalne energia?
3. Sepp tõstis vasara ja lõi sellega alasil asuvale detailile. Kirjeldage seejuures toimuvaid energia muundumisi.
4. Deformeeritud metallvedru asetati happesse, mis selle vedru lahustas. Kuhu «kadus» vedru potentsiaalne energia?
5. Selgitage, kuidas muundub energia tulirelvast tulistamisel? raketi väljalaskmisel?

11. peatükk. JÄÄVUSSEADUSTE RAKENDAMINE

§ 92. KOORMUSED PLOKIL

Vaatleme huvitavat näidet, mille lahendamiseks võib kasutada energia jäävuse seadust.

Üle liikumatu ploki on viidud niit, mille otste küljes ripuvad koormused massiga vastavalt m_1 ja m_2 (joon. 194). Oletame, et m_1 on suurem kui m_2. Kui jätta selline katseseade omaette, siis koormus massiga m_1 hakkab langema ja koormus, mille mass on m_2, tõusma. Meil on tegemist kahe keha üheaegse liikumisega, kusjuures need kehad on teineteisega niidi kaudu elastsusjõududega seotud. Kui ploki mass ja raadius on väikesed, võib jätta ploki liikumise arvestamata. Samuti ei pruugi arvestada niidi liikumist, sest ka niidi mass on väike. Vaatleme, kui suure kiirenduse saab süsteem.

Koormuste liikumisel muutub nende potentsiaalne ja kineetiline energia. Leiame algul potentsiaalse energia muudu. Kui esimene koormus liigub kõrguselt h_1 kõrgusele h_2, siis tema potentsiaalne energia väheneb väärtuselt m_1gh_1 kuni väärtuseni m_1gh_2. Energia muut on seega

$$m_1gh_2 - m_1gh_1.$$

Teise koormuse potentsiaalne energia aga kasvab väärtuselt m_2gh_2 kuni väärtuseni m_2gh_1, s. o. suuruse

$$m_2gh_1 - m_2gh_2 = -\ (m_2gh_2 - m_2gh_1)$$

võrra. Kahest kehast koosneva süsteemi potentsiaalse energia muut on

$$\Pi_2 - \Pi_1 = m_1gh_2 - m_1gh_1 - m_2gh_2 + m_2gh_1;$$

$$\Pi_2 - \Pi_1 = (m_1 - m_2)\, g\, (h_2 - h_1).$$

Sellest valemist näeme, et kahe keha potentsiaalse energia muut võrdub sellise keha energia muuduga, mille mass on m_1-m_2 ja mis langeb samuti kõrguselt h_1 kõrgusele h_2. See on ka täiesti arusaadav. Esimese koormuse energia ju väheneb ja teise koormuse energia suureneb. Järelikult langeb esimene koormus nii, nagu poleks tema mass m_1, vaid m_1-m_2. On selge, et seesama nähtus esineb ka koormuse m_1 tõstmisel — see koormus on nagu kergemaks muutunud. Sellel nähtusel põhineb vastukaalude kasutamine liftides ja teistes tõsteseadmetes.

Leiame nüüd koormuste kineetilise energia muudu.

Oletame, et koormus massiga m_1 liigub kõrgusel h_1 kiirusega v_1 ja kõrgusel h_2 kiirusega v_2. Selle koormuse kineetilise energia muut on

$$\frac{m_1 v_2^2}{2}-\frac{m_1 v_1^2}{2}.$$

Sama aja jooksul muutub aga teise koormuse kineetiline energia suuruse

$$\frac{m_2 v_2^2}{2}-\frac{m_2 v_1^2}{2}$$

võrra.

Kahe koormuse kineetilise energia muut võrdub

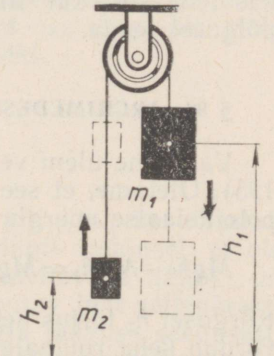
$$\frac{m_1 v_2^2}{2}-\frac{m_1 v_1^2}{2}+\frac{m_2 v_2^2}{2}-\frac{m_2 v_1^2}{2}.$$

Selle avaldise võime kirjutada järgmiselt:

$$\frac{(m_1+m_2)\,v_2^2}{2}-\frac{(m_1+m_2)\,v_1^2}{2}$$

ehk

$$\frac{(m_1+m_2)\,(v_2^2-v_1^2)}{2}.$$



Joon. 194

Näeme, et kahe keha kineetiline energia muutub nii, nagu liiguks **üks** keha, mille mass on nende kehade masside **summa** m_1+m_2. Selle põhjus on järgmine: mõlema keha kineetiline energia kasvab ja nende kehade kineetilise energia muudud on seega positiivsed, olgugi et need kehad liiguvad erinevates suundades.

Vastavalt energia jäävuse seadusele peab potentsiaalse energia kahanemine võrduma kineetilise energia kasvuga. Seega võime kirjutada:

$$(m_1+m_2)\,g\,(h_1-h_2)=\frac{m_1+m_2}{2}(v_2^2-v_1^2).$$

Kasutame nüüd valemit

$$v_2^2-v_1^2=2a\,(h_1-h_2),$$

kus a on mõlema keha ühine kiirendus (mõlemad kehad liiguvad ühesuguse kiirendusega, sest nad on omavahel ühendatud niidiga). Pannes energia muudu valemis $v_2^2-v_1^2$ asemele $2a\,(h_1-h_2)$, saame:

$$(m_1-m_2)\,g\,(h_1-h_2)=\frac{m_1+m_2}{2}2a\,(h_1-h_2);$$

$$(m_1-m_2)\,g=(m_1+m_2)\,a.$$

Seega

$$a=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g.$$

Masside m_1 ja m_2 vahe on nende summast muidugi väiksem. Seetõttu on a väiksem kui g.

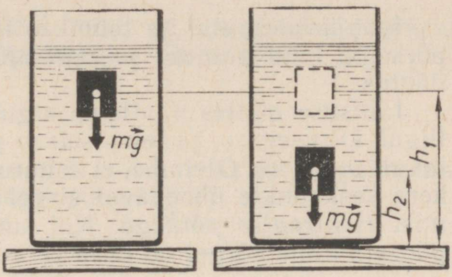
Toodud näitest selgub, et energia jäävuse seadust võib kasutada mehhaanika ülesannete lahendamisel. Seda on eriti otstarbekas teha siis, kui liikuvale kehale mõjuvad jõud ei ole mingil põhjusel teada.

§ 93. ARCHIMEDESE JÕUD

Vaatleme üleni vedelikus olevat keha, mille mass on M (joon. 195). Oletame, et see keha liikus kõrguselt h_1 kõrgusele h_2. Tema potentsiaalse energia muut oli seega

$$Mgh_2-Mgh_1=Mg\,(h_2-h_1).$$

Kõrgusel h_2 tõrjus keha välja seal asunud vedeliku, mille ruumala võrdub keha ruumalaga. Selline vedelikukogus liikus kõrguselt h_2 kõrgusele h_1. Kui selle vedelikukoguse mass on m, siis tõusmisel



Joon. 195

muutub tema potentsiaalne energia

$$mgh_1 - mgh_2 = -mg(h_2 - h_1)$$

võrra. Keha ja väljatõrjutud vedeliku kogu potentsiaalse energia muut võrdub:

$$Mg(h_2 - h_1) - mg(h_2 - h_1) = (Mg - mg)(h_2 - h_1).$$

Võrreldes avaldist

$$(Mg - mg)(h_2 - h_1)$$

avaldisega

$$Mg(h_2 - h_1),$$

võib teha järelduse, et vedelikus asuvale kehale mõjub peale raskusjõu veel ülespoole suunatud jõud *mg*, mis võrdub keha poolt väljatõrjutud vedeliku kaaluga. Seda jõudu nimetatakse teatavasti *Archimedese jõuks*. On selge, et vedelik, milles keha asub, ei saa muuta keha massi ega vaba langemise kiirendust. Kogu asi seisneb siin elastsusjõududes, millega keha ja vedelik teineteist mõjutavad. Need jõud etendavad siin samasugust osa nagu üle ploki viidud niidi ja kehade vahelised elastsusjõudki.

§ 94. KEHADE PÕRGE

Energia jäävuse seadust, nagu eespool juttu oli, kasutatakse mehhaanikaülesannete lahendamisel, kui mingil põhjusel ei ole teada kehale mõjuvaid jõude. Sellise juhu huvitavaks näiteks on kahe keha kokkupõrge. Kehade põrge on huvitav just sellepärast, et tema analüüsimiseks ei piisa ainult energia jäävuse seadusest. Peame kasutama ka impulsi (liikumishulga) jäävuse seadust.

Igapäevases elus ja tehnikas me ei kohtu kuigi sageli kehade põrkega, kuid aatomi- ja tuumafüüsikas on põrge sageli esinev nähtus.

Lihtsuse mõttes vaatleme algul kahe kera põrget, millest üks liigub kiirusega v_1 ja teine seisab paigal. Kerade massid olgu vastavalt m_1 ja m_2. Oletame, et esimese kera keskpunkt liigub mõlema kera keskpunkte ühendaval sirgel (joon. 196). Sel juhul on tegemist *tsentraalse põrkega*. Kui suured on kerade kiirused pärast põrget? Enne põrget on teise kera kineetiline energia null, esimese kera kineetiline energia aga $\frac{m_1 v_1^2}{2}$. Seega on kahe kera kineetiliste energiate summa

$$0+\frac{m_1 v_1^2}{2}=\frac{m_1 v_1^2}{2}.$$

Pärast põrget liigub esimene kera kiirusega u_1. Ka teine kera, mis algul paigal seisis, hakkab liikuma mingi kiirusega u_2. Pärast põrget on kerade kineetiliste energiate summa:

$$\frac{m_1 u_1^2}{2}+\frac{m_2 u_2^2}{2}.$$

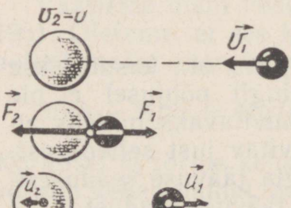
Energia jäävuse seaduse põhjal peab see võrduma kerade energiaga enne põrget:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2}=\frac{m_1 u_1^2}{2}+\frac{m_2 u_2^2}{2};$$

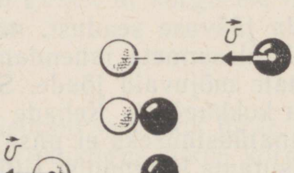
$$m_1 v_1^2=m_1 u_1^2+m_2 u_2^2.$$

Sellest ühest võrrandist me muidugi ei saa leida kahte tundmatut suurust u_1 ja u_2. Nüüd tulebki appi võtta impulsi jäävuse seadus. Enne põrget oli esimese kera impulss $m_1 v_1$ ja teise kera impulss oli null. Mõlema kera koguimpulss on

$$0+m_1 v_1=m_1 v_1.$$



Joon. 196



Joon. 197

Põrke tulemusena kerade impulsid muutusid ja omandasid väärtused m_1u_1 ja m_2u_2. Kahe kera koguimpulss pärast põrget on

$$m_1u_1+m_2u_2.$$

Vastavalt impulsi jäävuse seadusele võrdub kerade koguimpulss enne põrget koguimpulsiga pärast põrget:

$$m_1v_1=m_1u_1+m_2u_2.$$

Saime kaks võrrandit:

$$m_1v_1^2=m_1u_1^2+m_2u_2^2,$$

$$m_1v_1=m_1u_1+m_2u_2.$$

Soovitame selle võrrandisüsteemi iseseisvalt lahendada ja leida kiiruste u_1 ja u_2 väärtused pärast põrget. Osutub, et need on vastavalt

$$u_1=\frac{m_1-m_2}{m_2+m_1}v_1;$$

$$u_2=\frac{2m_1v_1}{m_1+m_2}.$$

Nendest võrdustest näeme, et kui mõlema kera massid on võrdsed ($m_1=m_2$), siis $u_1=0$ ja $u_2=v_1$. Seega esimene kera annab põrkamisel paigalseisvale kerale üle kogu oma kiiruse ja jääb ise seisma (joon. 197).

Niisiis, **kui on teada kahe keha kiirused enne põrget, siis energia ja impulsi jäävuse seaduste põhjal võib leida nende kiirused pärast põrget.**

Kuidas on aga olukord põrke ajal? Vaatleme ajahetke, mil kerade keskpunktid asuvad teineteisele kõige lähemal.

Sel hetkel liiguvad kerad üheskoos teatud kiirusega u. Kui kerade massid on võrdsed, siis nende kogumass on $2m$.

Impulsi jäävuse seaduse põhjal peab kerade koguimpulss enne põrget võrduma nende koguimpulsiga põrke ajal:

$$2mu=mv.$$

Siit järeldub, et

$$u=\frac{v}{2}.$$

Koosliikumise hetkel võrdub kerade ühine liikumiskiirus poolega ühe kera liikumiskiirusest enne põrget. Kineetilise energia kohta võime aga kirjutada:

$$K=\frac{2mu^2}{2}=mu^2=\frac{mv^2}{4}.$$

Enne põrget oli mõlema kera kineetiliste energiate summa

$$\frac{mv^2}{2}.$$

Põrke hetkel vähenes kerade kineetiline energia seega kaks korda. Kuhu siis kadus pool kineetilisest energiast? Kas siin ei ole tegemist energia jäävuse seaduse rikkumisega, nagu see esimesel pilgul võib näida?

Energia jäi muidugi endiseks ka sel ajal, kui kerad liikusid koos. Kuid põrkel mõlemad kerad d e f o r m e e r u s i d ja omandasid elastse deformatsiooni p o t e n t s i a a l s e energia. Just selle potentsiaalse energia suuruse võrra kahaneski kerade kineetiline energia.

Ülesanne 1. Kera, mille mass $m_1=50$ g, liigub kiirusega $v_1=10\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ja põrkab kokku paigalseisva keraga, mille mass $m_2=$ $=110$ g. Kui suurte kiirustega liiguvad kerad pärast põrget? Kerade põrge on tsentraalne.

L a h e n d u s. Teise kera kiiruse võib leida valemist

$$u_2=\frac{2m_1v_1}{m_1+m_2}.$$

Pannes siia m_1, m_2 ja v_1 väärtused, saame:

$$u_2=\frac{2\cdot 0{,}05\ \text{kg}\cdot 10\frac{\text{m}}{\text{s}}}{0{,}05\ \text{kg}+0{,}11\ \text{kg}}=6{,}25\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Esimese kera kiiruse leiame järgmiselt:

$$u_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1,$$

$$u_1=\frac{(0{,}05\ \text{kg}-0{,}11\ \text{kg})\,10\frac{\text{m}}{\text{s}}}{0{,}005\ \text{kg}+0{,}11\ \text{kg}}=-3{,}75\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Miinusmärk näitab, et põrke tõttu muutub mitte ainult selle kera kiiruse suurus, vaid ka suund (kera hakkab liikuma vastupidises suunas).

Ülesanne 2. Kera massiga $m_1=100$ g liigub kiirusega $v_1=12\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ja põrkab kokku paigalseisva keraga, mille mass $m_2=50$ g. Kui suured on kerade kiirused pärast põrget? Põrge on tsentraalne.

Lahendus. Teise kera kiirus pärast põrget on:

$$u_2=\frac{2m_1v_1}{m_1+m_2},$$

$$u_2=\frac{2\cdot 0{,}1\text{ kg}\cdot 12\frac{\text{m}}{\text{s}}}{0{,}05\text{ kg}+0{,}1\text{ kg}}=16\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Esimese kera kiirus pärast põrget võrdub:

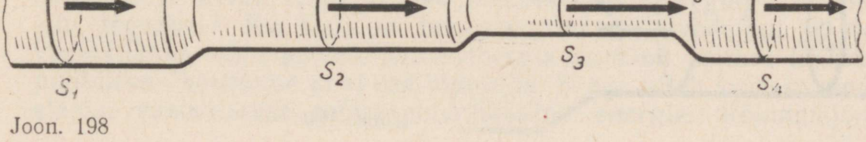
$$u_1=\frac{m_1-m_2}{m_2+m_1}v_1,$$

$$u_1=\frac{(0{,}1\text{ kg}-0{,}05\text{ kg})\,12\frac{\text{m}}{\text{s}}}{0{,}1\text{ kg}+0{,}05\text{ kg}}=4\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Nüüd on kiirustel u_2 ja u_1 ühesugune märk. Seega liiguvad mõlemad kerad pärast põrget ühes ja samas suunas, mis ühtib esimese kera liikumise suunaga enne põrget.

§ 95. VEDELIKE LIIKUMINE TORUDES. BERNOULLI SEADUS

Selles paragrahvis rakendame energia jäävuse seadust torus liikuva vedeliku või gaasi kohta. Tehnikas ja igapäevases elus kohtume sageli vedeliku liikumisega torudes. Mööda torusid juhitakse vesi linna, majadesse ja teistesse vee tarbimiskohtadesse. Masinates voolab torusid mööda määrdeõli, mootorikütus jne. Vedeliku liikumisega torudes kohtume sageli ka looduses, näiteks inimese ja loomade vereringe. Ka vee voolamine jõgedes on teatud määral erijuht vedeliku voolamisest torudes. Jõesängi võib vaadelda erilise toruna, milles voolab vesi.



Joon. 198

Vastavalt Pascali seadusele annab anumas paigal seisev vedelik temale mõjuva välisrõhu muutumatuna edasi kõikides suundades ja kõikidesse ruumipunktidesse. Kui aga vedelik v o o l a b ebaühtlase ristlõikega torus hõõrdumiseta, siis ei ole rõhk kogu toru ulatuses ühesugune. Teeme nüüd kindlaks, miks sõltub rõhk liikuvas vedelikus toru ristlõike pindalast. Kuid algul tutvume voolava vedeliku ühe tähtsa omadusega.

Oletame, et vedelik voolab torus, mille ristlõike pindala on erinevates kohtades erinev (joon. 198).

Kui me valiksime selles torus mõned ristlõiked, mille pindalad on vastavalt S_1, S_2, S_3 ja S_4, ning mõõdaksime vedelikukogused, mis läbivad neid ristlõikeid mingi ajavahemiku t jooksul, siis jõuaksime tulemusele, et need vedelikukogused on võrdsed. See tähendab, et aja t jooksul ristlõiget S_1 läbinud vedelikuhulk läbib sama aja jooksul ka ristlõike S_3, ehkki selle pindala on tunduvalt väiksem. Kui see ei oleks nii ja näiteks ristlõiget S_3 läbiks aja t jooksul vähem vedelikku kui ristlõiget pindalaga S_1, siis peaks vedelikuhulk kuskil suurenema. Kuid vedelik täidab kogu toru ja tema kogunemine torus ei ole võimalik.

Kuidas jõuab siis laia ristlõike läbinud vedelikukogus voolata sama aja jooksul läbi kitsa ristlõike? Toru kitsa osa läbimisel peab vedeliku kiirus olema ilmselt suurem ja nii mitu korda, kui mitu korda on selle ristlõike pindala eelmisest väiksem.

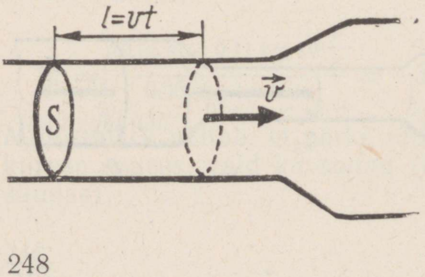
Tõepoolest, vaatleme liikuva vedelikusamba mingit ristlõiget, mis ühtib alghetkel toru mingi ristlõikega (joon. 199). Aja t jooksul nihkub vedelikusamba ristlõige kaugusele l, mis võrdub vt. Toru ristlõiget läbinud vedeliku ruumala võrdub selle ristlõike pindala ja kauguse l korrutisega:

$$V = Sl,$$

$$V = Svt.$$

Ühes ajaühikus läbib toru ristlõiget vedelikukogus, mille ruumala on $\frac{V}{t}$:

$$\frac{V}{t} = Sv.$$



Joon. 199

Daniel Bernoulli
(1700—1782)

Ühes ajaühikus toru ristlõiget läbinud vedeliku ruumala võrdub toru ristlõike pindala ja voolu kiiruse korrutisega.

See ruumala, nagu me äsja veendusime, peab olema toru kõikide ristlõigete jaoks ühesugune. Siit järeldub, et mida väiksem on toru ristlõike pindala, seda suurem on voolu kiirus. Kui toru ühte ristlõiget läbib teatud ajaga mingi kogus vedelikku, siis niisama palju vedelikku läbib selle aja jooksul ka toru iga teist ristlõiget. Seejuures me eeldame, et antud vedelikumassil on kogu aeg üks ja sama ruumala, s. o. et vedelik e i o l e k o k k u s u r u t a v. Me teame, et jõesängi kitsastes kohtades voolab vesi kiiremini kui laiades. Kui tähistada voolu kiirused ristlõigetes S_1, S_2, S_3 ja S_4 vastavalt v_1, v_2, v_3 ja v_4, siis võime kirjutada:

$$S_1v_1 = S_2v_2 = S_3v_3 = S_4v_4.$$

Siit näeme, et vedeliku üleminekul toru laiemast osast kitsamasse ossa voolu kiirus suureneb, s. o. vedelik liigub kiirendusega. Ilmselt mõjub vedelikule jõud. Mis jõud see on?

Selleks jõuks võib olla ainult vedeliku rõhumisjõudude vahe. Rõhk toru laiemas osas peab olema suurem rõhust toru kitsamas osas.

See tuleneb ka energia jäävuse seadusest. Kui toru kitsamas kohas on vedeliku liikumiskiirus suurem, siis on seal suurem ka tema kineetiline energia. Kuna vedelik voolab vastavalt meie eeldusele hõõrdumiseta, siis tema koguenergia peab olema jääv. Kineetiline energia saab aga kasvada ainult potentsiaalse energia kahanemise arvel. Kuid millise potentsiaalse energiaga on meil siin tegemist? Kui toru on horisontaalne, siis vedeliku ja Maa vastastikuse mõju potentsiaalne energia *mgh* on ju toru kõikides punktides ühesugune ja ei saa muutuda. Seega tuleb arvesse ainult elastse vastastikuse mõju potentsiaalne energia. Rõhumisjõud, mille mõjul vedelik voolab, ongi vedeliku kokkusurumisel tekkinud elastsusjõud. Kui me räägime, et vedelik ei ole kokkusurutav, siis peame silmas, et teda ei saa kokku suruda nii palju, et tema ruumala märgatavalt muutuks. Kuid väga väike ruumala vähenemine, mis kutsub esile elastsusjõudude tekkimise, esineb kindlasti. Selle tulemusena tekibki vedeliku rõhk. Järelikult toru kitsamas osas on vedelik vähem kokku surutud — see kompenseeribki kineetilise energia kasvamise. Toru kitsamates kohtades peab vedeliku rõhk olema väiksem kui laiemates kohtades. Selle seaduspärasuse avastas Peterburi akadeemik Daniel Bernoulli. Bernoulli seaduse võime sõnastada järgmiselt:

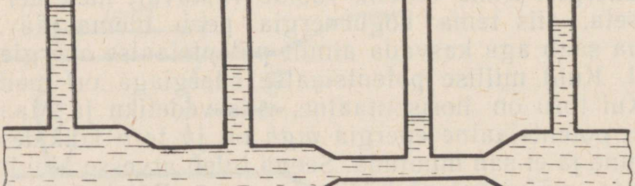
voolava vedeliku rõhk on suurem voolu nendes ristlõigetes, kus vedeliku kiirus on väiksem, ja väiksem nendes ristlõigetes, kus voolu kiirus on suurem.

Kui vedelik «poeb» läbi toru kitsa koha, siis, nii imelik kui see ka on, ei suruta teda seal rohkem, vaid hoopis vähem kokku. Katsed kinnitavad seda täielikult.

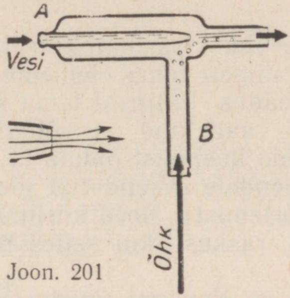
Rõhu jaotust vedeliku voolamisel ebaühtlase ristlõikega torus võib jälgida joonisel 200 kujutatud katseriista abil. Ebaühtlase ristlõikega torust ulatuvad välja vertikaalsed lahtiste otstega torud, mis etendavad manomeetri osa. Toru kitsamates kohtades on vedelikusammaste kõrgused manomeetrites väiksemad kui toru laiemates osades. See tähendab, et nendes kohtades on rõhk väiksem. Mida väiksem on toru ristlõige, seda suurem on voolu kiirus ja seda väiksem on rõhk. Võib valida ka sellise ristlõike, milles rõhk võrdub atmosfäärirõhuga (vedelikusamba kõrgus manomeetris on sel juhul null). Kui valida veelgi väiksem ristlõige, on vedeliku rõhk selles atmosfäärirõhust väiksem.

Niisugust vedelikuvoolu võib kasutada õhu hõrendamiseks. Sel põhimõttel töötab nn. *veejoapump*, mille skeem on kujutatud joonisel 201. Veejuga läbib toru *A*, mis lõpeb kitsa avaga. Vee rõhk selles kohas on atmosfäärirõhust väiksem. Seetõttu imetakse gaas tühjendatavast ruumist mööda toru *B* toru *A* otsa juurde, kust see koos veega eemaldub.

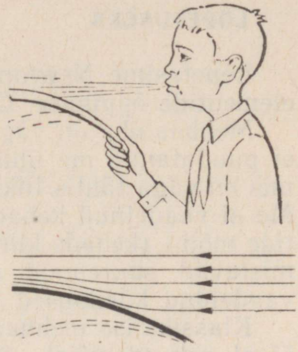
Kõik eelnev kehtib ka torudes liikuva gaasi kohta. Kui gaasi kiirus ei ole väga suur ja gaasi ei suruta niivõrd kokku, et tema



Joon. 200



Joon. 201



Joon. 202

ruumala muutub (hõõrdumist ei arvestata), kehtib Bernoulli seadus ka voolava gaasi kohta. Toru kitsastes osades, kus gaas liigub kiiremini, on tema rõhk väiksem kui laiemates osades. Nendes kohtades võib gaasi rõhk olla ka atmosfäärirõhust madalam. Võib korraldada järgmise lihtsa katse. Kui puhuda paberilehele piki selle pinda, nagu on näidatud joonisel 202, siis tõuseb paber üles. Selle põhjuseks on rõhu vähenemine voolavas õhujoas paberi peal.

Selline nähtus esineb ka lennuki tiiva kohal. Lennuki lendamisel liigub õhuvool mööda tiiva ülemist kumerat pinda. Rõhk tiiva kohal on väiksem kui rõhk tiiva all. Selle tulemusena mõjub tiivale aerodünaamiline *üleslükkejõud.*

§ 96. JÄÄVUSSEADUSTE TÄHTSUSEST

Nägime, et impulsi ja energia jäävuse seadused võimaldavad lahendada mehhaanika ülesandeid, kui mingil põhjusel ei ole teada kehale mõjuvad jõud.

Kuid jäävusseaduste tähtsus ei piirdu sellega. Impulsi ja energia jäävuse seadused on tänapäeva vaadete kohaselt absoluutselt täpsed. Nad kehtivad ka kvantmehhaanikas ja relativistlikus mehhaanikas. Nendel seadustel puuduvad erandid. Kui keegi teatab, et ta on avastanud mingi nähtuse või protsessi, milles jäävusseadused ei kehti, võib julgesti väita, et tegemist on veaga.

Jäävusseadused on teetähiseks iga loodusnähtuse uurimisel. Nad on esmaseks kriteeriumiks iga väite õigsuse kontrollimisel. Jäävusseadusi me kasutame sageli füüsika kursuse kõikides osades.

LÕPETUSEKS

Lõpetasime Newtoni mehhaanika ehk klassikalise mehhaanika elementide õppimise. Õppisime just nimelt tema elemente.

Mehhaanika on väga laialdane teadus. Paljusid tema küsimusi ei puudutanud me üldse. Näiteks ei vaadelnud me võnkliikumist, mis on väga tähtis liikumise liik. Seda küsimust õpime 11. klassis. Me ei vaadelnud kehade liikumist nendele rakendatud jõumomentide mõjul (kehade kiirendusega pöörlemist). Need küsimused valmistavad suuremaid matemaatilisi raskusi kui selles raamatus vaadeldud küsimused.

Klassikalise mehhaanika aluseks on Newtoni seadused. Nende õigel rakendamisel võib põhimõtteliselt lahendada iga mehhaanikaülesande. Kuid ainult põhimõtteliselt. On olemas palju mehhaanikaülesandeid, mida ei ole senini veel lahendatud.

Kui kõik mehhaanikaülesanded oleksid lahendatud, siis polekski mehhaanika enam teadus. Mehhaanika on aga teadus, mis areneb ja lahendab üha uusi ja uusi probleeme.

Üks senini veel lahendamata probleem on vedelike ja gaaside liikumine keeriste olemasolu korral, nn. turbulentse liikumise probleem. Sellega tegeleb spetsiaalne mehhaanika osa, mida nimetatakse hüdrodünaamikaks.

Sellest raamatust omandatud teadmised mehhaanikast on aluseks füüsika teiste osade õppimisel.

VASTUSED

Harjutus 2

3. 5 km; 7 km. **4.** $\approx 28,3$ m; $\approx 8,4$ m; ≈ 38 m; 0.

Harjutus 4

1. a) $20\frac{km}{h}$; b) $100\frac{km}{h}$. **2.** $25\frac{m}{s}$. **3.** 15 km. **4.** $5,7\frac{m}{s}$. **5.** 0,5 m.

Harjutus 5

1 $48\frac{km}{h}$. **2.** $37,5\frac{km}{h}$. **3.** a) $20\frac{km}{h}$; b) $\approx 21\frac{km}{h}$.

Harjutus 6

1. 10 s. **2.** $-2,5\frac{m}{s^2}$.

Harjutus 7

4. 0; $2\frac{m}{s^2}$; $0,5\frac{m}{s^2}$. **5.** a) $1\frac{m}{s^2}$; $0,4\frac{m}{s^2}$; $-0,5\frac{m}{s^2}$; d) 5 s; 2 s. **6.** a) $AO=9\frac{m}{s}$.

$OB=3\frac{m}{s}$; $OC=4,5$ s; b) $1\frac{m}{s^2}$; $1\frac{m}{s^2}$; $-2\frac{m}{s^2}$. **8.** $4\frac{m}{s^2}$; 200 m.

Harjutus 8

1. $\approx 5,5\frac{km}{s}$; $\approx 7,2\frac{km}{s}$; 432 km. **2.** $9\frac{m}{s}$. **3.** $-2,5\frac{m}{s^2}$.

Harjutus 10

1. ≈ 80 m. **2.** ≈ 10 s; $\approx 100\frac{m}{s}$. **3.** 1 s; $9,8\frac{m}{s}$. **4.** $11\frac{m}{s}$. **5.** $\approx 32\frac{m}{s}$; $\approx 37,5$ m.

Harjutus 11

1. ≈ 45 m. **2.** ≈ 80 m; $\approx 40\frac{m}{s}$. **3.** $\approx 3,25$ m; $\approx 8\frac{m}{s}$; $\approx 1,3$ s; $\approx 0,8$ m. **4.** ≈ 2 s.

5. 2 s; 6 s; $20\frac{m}{s}$; $-20\frac{m}{s}$. **7.** $-12\frac{m}{s}$.

Harjutus 12

1. $3{,}14\frac{m}{s}$. **2.** $\approx 18{,}8\ \frac{m}{s}$. **3.** $\approx 0{,}63\frac{m}{s}$; 1 s. **4.** $\approx 6{,}7\frac{km}{s}$. **5.** $\approx 3200\frac{m}{s^2}$. **6.** $2{,}25\frac{m}{s^2}$.

Harjutus 13

1. $\approx 0{,}006\frac{m}{s}$. **2.** $\approx 3{,}5\frac{rad}{s}$; $\approx 8{,}2\frac{rad}{s}$. **3.** $314\frac{rad}{s}$; $\approx 425\frac{m}{s}$; $\approx 133\,000\frac{m}{s^2}$. **4.** ≈ 40.
5. $3{,}3\frac{rad}{s}$.

Harjutus 14

1. $6\frac{m}{s}$. **2.** $1{,}5\frac{m}{s}$. **3.** 0.

Harjutus 15

1. 0,75 kg. **2.** $\frac{m_1}{m_2}=1$.

Harjutus 16

1. $7{,}5\cdot 10^4$ N. **2.** 350 N. **3.** a) 9,8 N. b) $9{,}8\cdot 10^5$ dyn; c) 1 kgf.

Harjutus 17

4. 20 s. **5.** $600\frac{m}{s}$. **6.** $10\frac{m}{s}$; ≈ 6700 N. **7.** 250 N. **8.** ≈ 140 N. **9.** $\approx 3{,}9$ km.

Harjutus 18

2. 98 N. **4.** $0{,}25\frac{m}{s^2}$; $\approx -0{,}17\frac{m}{s^2}$; $\approx 0{,}42\frac{m}{s^2}$.

Harjutus 20

2. $\approx 4{,}6\frac{p}{s}$.

4. 50 N. **5.** 1100 kg. **6.** $\approx 0{,}3\frac{p}{s}$.

Harjutus 23

6. $\approx 0{,}17$ N. **7.** $\approx 20\cdot 10^{19}$ N. **8.** $\approx 0{,}2$ N.

Harjutus 24

1. $\approx 0{,}6\frac{m}{s^2}$. **2.** $\approx 0{,}41$ R. **3.** $\approx 3{,}7\ \frac{m}{s^2}$.

Harjutus 25

3. a) 1010 N; b) 980 N; c) 940 N; d) 0. **4.** ≈ 5600 N.

Harjutus 27

3. 7 m. **4.** $\approx 3{,}8$ m; $\approx 8{,}5$ m.

Harjutus 29

1. ≈ 80 N. **2.** $2\frac{m}{s}$. **3.** 30°. **4.** $\approx 7{,}7\frac{m}{s}$; 0; 280 N. **5.** 5,9 N; 6,9 N. **6.** $1{,}7\frac{m}{s}$ **7.** 76°.

8. $20\frac{m}{s}$. **9.** 50 kN. **10.** 3440 N. **13.** ≈1 h. 20 min. **14.** 2,25 N. **15.** ≈33 N. **16.** $6\frac{m}{s^2}$; ≈10 N ja 40 N; 16 N ja 16 N.

Harjutus 30

3. $10\frac{m}{s}$. **4.** 10 s; 100 m.

Harjutus 32

1. ≈870 N; 1000 N; ≈700 N; 500 N; 0. **2.** ≈11,6 N; ≈23,2 N. **3.** ≈52 N; 13,5 N. **4.** 3,4 kN. **6.** 1730 N; 2000 N.

Harjutus 33

1. 1 N. **2.** 2 N.

Harjutus 35

1. $10\frac{kgm}{s}$. **2.** a) $30\,000\frac{kgm}{s}$; b) $60\,000\frac{kgm}{s}$.

Harjutus 36

2. $5{,}5\frac{m}{s}$. **3.** $0{,}3\frac{m}{s}$. **4.** 0,5 kg.

Harjutus 37

1. ≈1200 J. **2.** ≈77 kJ. **3.** ≈37,5 kJ. **4.** ≈18 J; ≈30 J.

Harjutus 38

1. 0,045 J. **2.** 8 J.

Harjutus 39

1. ≈240 J. **2.** ≈2700 J.

Harjutus 40

5. ≈9 kJ. **6.** 360 kJ. **7.** ≈18 kJ. **8.** ≈20 kW. **9.** ≈0,25 J. **11.** ≈67 500 kW.

Harjutus 41

1. ≈−200 J. **2.** ≈0,02 J.

Harjutus 42

3. a) 9 J; 0,4 J; b) 6 J; 3,4 J. **7.** ≈82 N.

Harjutus 43

1. $\approx 1{,}5\frac{m}{s}$. **2.** ≈12 kJ.

AINEREGISTER

SISUKORD

KINEMAATIKA

1. peatükk. **Üldisi andmeid liikumisest**

2. peatükk. **Mitteühtlane sirgjooneline liikumine**

3. peatükk. **Kõverjooneline liikumine**

DÜNAAMIKA

4. peatükk. **Liikumisseadused**

JÄÄVUSSEADUSED MEHHAANIKAS

Исаак Константинович Кикоин, Абрам Константинович Кикоин. Физика для 9-го класса. Издание 3-е. На эстонском языке. Перевел с русского В. Паю. Художественное оформление Р. Тунгла. Издательство «Валгус». Таллин, Пярнуское шоссе, 10.

Toimetaja E. Randma. Kunstiline toimetaja H. Keigo. Tehniline toimetaja E. Sagris. Korrektor O. Küla. Laduda antud 8. IX 1972. Trükkida antud 22. XII 1972. Kohila paberivabriku trükipaber nr. 2, 60×90/16. Trükipoognaid 16,25. Arvestuspoognaid 13,83. Trükiarv 9000. Tellimuse nr. 5356. Trükikoda «Kommunist», Tallinn, Pikk t. 2. Hind 25 kop.

25 kop