TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL
Geomeetria kateeder

PINNA PEASIHTIDE UURIMINE

Võistlustöö

Töö teostaja: matem.osak. V kursuse üliõpilane Rünno Mullari.

Juhendaja: füüs.-mat. tead.kand. Ülo Lumiste.

Tartu 1960

S i s u k o r d

S i s s e j u h a t u s

A. J.A.Schouten'i ja D.J.Struik'i monograafias [1] tuuakse sisse Riemanni ruumi V_n pinna V_m peasiht kui selline siht pinna puutujatasandil, millele vastav normaalkõveruse vektor omab nullist erineva ekstremaalse pikkuse. Käesolevas töös jõuame pinna peasihi mõisteni pinna V_m lõpmatult lähedastes punktides võetud puutujatasandite omavaheliste asendite uurimise teel, ühtlasi leiame peasihi omaduse, mida võib vaadelda Rodrigues'i valemi üldistusena. Töös saadud tulemused avavad uusi võimalusi pindade liigitamiseks. Piirdume m-mõõtmelise pinna uurimisega n-mõõtmelises eukleidilises ruumis, kuigi paljud saadud tulemustest on kergesti üldistatavad ka Riemanni ruumi juhule.

Töö jaguneb kaheks peatükiks, milledest esimeses (§§ 1-9) uurime m-mõõtmelise pinna punkti teist järku diferentsiaalümbrust, teises (§§ 10 ja 11) aga mõningate eriliiki kahemõõtmeliste pindade olemasolu ja omadusi.

Pinna lõpmatult lähedastele punktidele vastavate puutujatasandite omavahelisi asendeid uuris ka Yong-Chow Wong, kes vaatles kahemõõtmelist pinda neljamõõtmelises eukleidilises ruumis [2] . Osa käesolevas töös saadud tulemusi on Yong-Chow Wongi mõnede tulemuste üldistuseks.

B. Anname mõningaid mõisteid ja tulemusi, mida töö lugemisel on tarvis teada.

Pindade uurimisel kasutame Cartani liikuva repeeri meetodit (vt. [3]). Pinna V_m punktiga M seotakse liikuv repeer $M, \bar{e}_a, \bar{e}_\alpha$ *) nii, et vektorid $\bar{e}_a$ oleksid pinna puutujatasandis R_m, vektorid $\bar{e}_\alpha$ aga normaaltasandis R_{n-m}. Kehtivad repeeri infinitesimaalse nihke valemid

$$d\bar{M} = \omega^a \bar{e}_a \quad ,$$

$$d\bar{e}_i = \omega_i^j \bar{e}_j$$

ja

$$\omega^\alpha = 0 \quad ,$$

kus $\bar{M}$ on punkti M kohavektor, ω^i ja ω_i^j aga lineaarsed diferentsiaalvormid repeeri asendit määravatest parameetritest. Siin ω^i sisaldavad ainult neid parameetreid, mis määravad punkti M asendi. Pind V_m osutub vormide ω^i ja ω_i^j vahelisi seoseid kirjeldava Pfaffi võrrandisüsteemi integraalmuutkonnaks. Need seosed määravad seega pinna omadused.

Võrrandite

$$\omega^\alpha = 0$$

---

*) Kogu töös kasutame indekseid

$a, b, c, d, e, f = 1, \dots, m \quad ; \qquad i, j = 1, \dots, n \quad ;$

$\alpha, \beta = m+1, \dots, n \quad .$

jatkamisel saame

$$\omega_a^\alpha = b_{ab}^\alpha \omega^b ,$$

kus b_{ab}^α on alumiste indeksite suhtes sümmeetrilised kahevalentsed tensorid.

Olgu $\bar{p} = p^a \bar{e}_a$ ühikvektor, siis vektorit

$$p^a p^b b_{ab}^\alpha \bar{e}_\alpha$$

nimetatakse pinna V_m normaalköveruse vektoriks vektori $\bar{p}$ sihis (p) (vt. [1]) . Kui siht (p) muutub, siis vastava normaalköveruse vektori otspunkt kirjeldab $(m - 1)$ -mõõtmelise pinna, mida nimetatakse pinna V_m normaalköveruse indikatrissiks punktis M . Viimane määrab punkti M ümbruse teist järku täpsusega.

Sihte, mille sihivektorite koordinaadid rahuldavad võrrandisüsteemi

$$p^a q^b b_{ab}^\alpha = 0 ,$$

nimetatakse pinna kaassihtideks (vt. [1]) .

Olgu antud kaks tasandit R_m ja R'_m ja kummalgi neist vabalt muutuv siht (p) ja (p') . Kui nende sihtide vaheline nurk α omandab statsionaarse väärtuse, siis nimetatakse nurka α tasandite R_m ja R'_m vaheliseks statsionaarseks nurgaks. Kahe tasandi vahelise statsionaarse nurga haarad osutuvad teineteise ristprojektsioonideks nendele tasanditele. Kahe m-mõõtmelise tasandi vahel on üldjuhul m statsionaarset nurka, mille haarad kummalgi tasandil on omavahel ortogonaalsed (vt. [4]) .

I

1. Suhtelise kõveruse vektor.

Olgu n-mõõtmelises eukleidilises ruumis R_n antud m-mõõtmeline pind V_m ja sellel pinnal kõver $\mathcal{L}$ jooksva punktiga $M'(s)$, kus s on kõvera kaarepikkus punktide $M'(0)$ ja $M'(s)$ vahel. Pinna puutujatasandi punktis $M'(s)$ tähistame $R'_m(s)$.

Seome kõveraga $\mathcal{L}$ liikuva repeeri

$$M'(s)\ ,\ \bar{e}'_a(s)\ ,\ \bar{e}'_\alpha(s)\ ,$$

kus $\bar{e}'_i(s)$ on kõvera kaarepikkuse diferentseeruvad funktsioonid.

Tähistame

$$M'(0)=M\ ,\quad R'_m(0)=R_m \quad \text{ja} \quad \bar{e}'_i(0)=\bar{e}_i\ .$$

Kui lähtuda punktist M , siis piki kõverat $\mathcal{L}$ $s=ds$. Nii kõik argumendi s funktsioonid kui ka diferentsiaalvormid ω_i^j ja ω^a repeeri infinitesimaalse nihke valemitest osutuvad piki kõverat $\mathcal{L}$ argumendi ds funktsioonideks.

Reaksarendustest

$$\bar{e}'_a=\bar{e}_a+d\bar{e}_a+\bar{o}^*_a(ds)\ ,$$

kus vektor $\bar{o}(ds)$ rahuldab tingimust $\lim\limits_{ds\to 0}\left|\frac{\bar{o}(ds)}{ds}\right|=0$, ja repeeri infinitesimaalse nihke valemitest saame

$$\bar{e}'_a=\bar{e}_a+\omega_a^b\bar{e}_b+\omega_a^\beta\bar{e}_\beta+\bar{o}^*_a(ds)\ . \tag{1.1}$$

Moodustame tasandil R'_m vektorid

$$\bar{e}''_a = \bar{e}'_a - \omega_a^b \bar{e}^{\times}_b + \bar{\xi}_a \quad ,$$

kus $\bar{\xi}_a$ valime tasandil R'_m seni vabalt.

Seostest (1.1) saame

$$\bar{e}''_a = \bar{e}_a + \omega_a^\alpha \bar{e}_\alpha + \bar{\xi}_a + \bar{o}_a(ds) \; .$$

Kui ds on küllalt väike, võib alati leida tasandiga R_m ortogonaalsed vektorid $\bar{o}'_a(ds)$ ja tasandil R'_m olevad vektorid $\bar{o}''_a(ds)$, nii et

$$\bar{o}'_a(ds) + \bar{o}''_a(ds) = \bar{o}_a(ds) \; .$$

Olgu nüüd

$$\bar{\xi}_a = - \bar{o}''_a(ds) \; ,$$

siis vektorite

$$\bar{e}''_a = \bar{e}_a + \omega_a^\beta \bar{e}_\beta + \bar{o}'_a(ds)$$

projektsioonid tasandile R_m on $\bar{e}_a$.

Kuna

$$\omega_a^\beta = b_{ab}^\beta \omega^b$$

ja tähistades

$$(1.2) \qquad b_{ab}^\beta \bar{e}_\beta = \bar{b}_{ab} \; ,$$

saame

$$\bar{e}''_a = \bar{e}_a + \bar{b}_{ab} \omega^b + \bar{o}'_a(ds) \; .$$

Projekteerimine säilitab lineaarsed seosed vektorite vahel; järelikult vektor

$$\bar{p} = p^a \bar{e}_a$$

osutub vektori

$$(1.3) \qquad \bar{p}' = p^a \bar{e}''_a = p^a\left[\bar{e}_a + \bar{b}_{ab}\omega^b + \bar{o}_a(ds)\right]$$

ortogonaalseks projektsiooniks tasandile R_m.

Moodustame vektori

$$\bar{R} = \frac{1}{|\bar{p}|}\lim_{ds\to 0}\frac{\bar{p}'-\bar{p}}{ds} = \frac{p^a q^b \bar{b}_{ab}}{\sqrt{p^a p^b g_{ab}}\sqrt{q^a q^b g_{ab}}}.$$

Siin vektor

$$\bar{q} = q^a \bar{e}_a$$

on paralleelne vektoriga $\omega^a \bar{e}_a$.

Vektor $\bar{R}$ ei sõltu vektorite $\bar{p}$ ja $\bar{q}$ pikkustest, vaid ainult nende sihtidest (p) ja (q). Seega

$$\bar{R} = \bar{R}\left[(p),(q)\right].$$

Olgu $\bar{p}$ ja $\bar{q}$ pinna V_m punktist M lähtuvad puutujaühikvektorid ja nihkugu punkt M mööda vektorit $\bar{q}$ puutuvat suvalist pinnakõverat $\mathcal{L}$ ds võrra. Vektori $\bar{R}$ definitsioonist nähtub, et $\bar{R}\left[(p),(q)\right]$ osutub siis vektori $\frac{d\bar{p}}{ds}$ komponendiks pinna normaaltasandis. Tensori b^α_{ab} sümmeetrilisuse tõttu

$$\bar{R}\left[(p),(q)\right] = \bar{R}\left[(q),(p)\right].$$

Oma geomeetrilise tähenduse tõttu vektor $\bar{R}$ ei sõltu repeeri valikust. Nimetame teda pinna V_m suhtelise kõveruse vektoriks sihtides (p) ja (q).

Kui sihid (p) ja (q) ühtuvad, siis suhtelise kõveruse vektor ühtub pinna normaalkõveruse vektoriga samas sihis.

Vektori $\overline{R}$ pikkust

$$R = \frac{1}{|\bar{p}|} \lim_{ds \to 0} \frac{|\bar{p}' - \bar{p}|}{ds} = \lim_{ds \to 0} \frac{\alpha_p}{ds} ,$$

kus $\alpha_p = \widehat{\bar{p}\,\bar{p}'}$ nimetame pinna V_m suhteliseks kõveruseks sihtides (p) ja (q) .

2. Suhtelise kõveruse ellipsoid.

Olgu $\bar{p}$ ja $\bar{q}$ ühikvektorid, siis

$$\overline{R}\,[(p),(q)] = p^a q^b \bar{b}_{ab} .$$

Kui fikseerime sihi (q) ja tähistame

$$q^b \bar{b}_{ab} = \bar{\mu}_a ,$$

siis

$$\overline{R} = p^a \bar{\mu}_a ,$$

kus

$$p^a p^b g_{ab} = 1 .$$

Pole raske näha, et muutuva sihi (p) puhul vektori $\overline{R}$ otspunkt kirjeldab punkti M ümber vektorite $\bar{\mu}_a$ tasandis $(m-1)$-mõõtmelise ellipsoidi, mida nimetame pinna V_m suhtelise kõveruse ellipsoidiks sihis (q) .

Kui repeer on ortonormeeritud, siis

$$\overline{R} = p^a \bar{\mu}_a ,$$

kus

$$\sum_a (p^a)^2 = 1 .$$

Siit järeldub, et ortogonaalsete sihtide (p') ja (p'') korral vektorid $\bar{R}[(p'),(q)]$ ja $\bar{R}[(p''),(q)]$ osutuvad kaasraadiusvektoriteks suhtelise kõveruse ellipsoidile sihis (q).

On õige ka vastupidine: kui $R[(p'),(q)]$ ja $\bar{R}[(p''),(q)]$ on kaasraadiusvektorid suhtelise kõveruse ellipsoidile sihis (q), siis sihid (p') ja (p'') on ortogonaalsed.

Pinna V_m suhtelise kõveruse ellipsoid sihis (q) omab samapalju nullist erineva pikkusega telgi, kuipalju on lineaarselt sõltumatuid vektorite $\bar{\mu}_a = q^b \bar{b}_{ab}$ hulgas.

Selles on kerge veenduda, kui kasutada piirprotsessi üleminekul lineaarselt sõltumatutelt vektoritelt lineaarselt sõltuvatele.

Olgu k maksimaalne lineaarselt sõltumatute arv vektorite $\bar{\mu}_a$ hulgas. Arvu $m-k$ nimetame pinna V_m suhtelise kõveruse dimensioonidefektiks sihis (q).

Pinna V_m suhtelise kõveruse ellipsoidid sihtides (p) ja (q) omavad alati ühise punkti, milleks on vektori $\bar{R}[(p),(q)]$ otspunkt.

3. Peasihid antud puutujasihi suhtes.

Leiame pinna V_m puutujatasandil R_m ortogonaalsete sihtide (p_a) süsteemi, nii et vektorid $\bar{R}[(p_a),(q)]$ osutuksid sihis (q) võetud suhtelise kõveruse ellipsoidi pearaadisuvektoriteks.

Kuna ellipsoidi pearaadiusvektorid on statsionaarse pikkusega, tuleb leida vektorid $\bar{p}_a = p_a^{\,b} \bar{e}_b$, mis annaksid statsionaarsed väärtused funktsioonile

$$R^2 = \frac{(p^a q^b \bar{b}_{ab})^2}{p^a p^b g_{ab} \cdot q^a q^b g_{ab}} \quad .$$

Saame võrrandisüsteemi

$$(3.1) \qquad p^a(\bar{b}_{ac}\bar{b}_{bd} q^c q^d - k g_{ab}) = 0 \ ,$$

kus k leiame võrrandist

$$(3.2) \qquad \mathrm{Det}\,|\bar{b}_{ac}\bar{b}_{bd} q^c q^d - k g_{ab}| = 0 \ .$$

Võime avaldada k ka süsteemi (3.1) suvalisest võrrandist ning asetada ta väärtus ülejäänud võrranditesse. Saame $\frac{1}{2}m(m-1)$ võrrandist koosneva süsteemi

$$(3.3) \qquad p^a p^b q^c q^d \bar{b}_{ac}(g_{eb}\bar{b}_{df} - g_{fb}\bar{b}_{de}) = 0 \ .$$

Siin võime fikseerida kas e või f ja saadud süsteem $m-1$ võrrandist on samaväärne lähtesüsteemiga ja süsteemiga (3.1) .

Kui $m=2$ ja repeer on ortonormeeritud, siis süsteemist (3.2) saame võrrandi

$$(3.4)\qquad \operatorname{tg} 2\theta_a = 2\,\frac{\bar{b}_{12}\bar{b}_{22}\operatorname{tg}^2\varphi + (\bar{b}_{11}\bar{b}_{22}+\bar{b}_{12}^2)\operatorname{tg}\varphi + \bar{b}_{11}\bar{b}_{12}}{(\bar{b}_{12}^2-\bar{b}_{22}^2)\operatorname{tg}^2\varphi + 2\bar{b}_{12}(\bar{b}_{11}-\bar{b}_{22})\operatorname{tg}\varphi + (\bar{b}_{11}^2-\bar{b}_{12}^2)}\quad ,$$

kus φ on vektorite $\bar{e}_1$ ja $\bar{q}$, θ_a — vektorite $\bar{e}_1$ ja $\bar{p}_a$ vaheline nurk.

Juhul n = 4 ,kanoonilises repeeris ja natuke teisel kujul sai selle võrrandi Wong Yong-Chow.

Vektorite $\bar{p}_a$ — süsteemi (3.1) lahendite sihte (p_a) nimetame peasihtideks sihi (q) suhtes.

On ilmne, et kui siht (p_a) osutub peasihiks sihi (q) suhtes, siis suhtelise kõveruse ellipsoidid sihtides (p_a) ja (q) omavad ühise punkti sihis (q) võetud suhtelise kõveruse ellipsoidi tipus.

Tähistame

$$\bar{R}\,[(p_a),(q)] = \bar{Q}_a[(q)] = \bar{Q}_a$$

ja

$$|\bar{Q}_a| = Q_a\ .$$

Definitsiooni kohaselt

$$\bar{Q}_a \perp \bar{Q}_b\ ,$$

kui a≠ b .

Kui

$$Q_1 \geqslant Q_2 \geqslant \cdots \geqslant Q_m\ ,$$

siis nimetame suurust Q_a pinna V_m a-ndaks suhteliseks peakõveruseks sihis (q) ja sihti (p_a) a-ndaks peasihiks sihi (q) suhtes.

Ei ole raske veenduda, et võrrandi (3.2) juured on invariantsed repeeri teisenduste suhtes. Valime ortonormeeritud repeeri nii, et repeerivektorid osutuksid süsteemi (3.1) lahenditeks. Võrrand (3.2) omandab nüüd kuju

$$[(\bar{b}_{1c}q^c)^2-k][(\bar{b}_{2c}q^c)^2-k]\dots[(\bar{b}_{mc}q^c)^2-k]=0.$$

Kui repeerivektorid sobivalt nummerdada, siis

$$\bar{b}_{ac}q^c=|\bar{q}|\,\bar{Q}_a$$

ja järelikult

$$k_a=\bar{q}^2 Q_a^2 \quad .$$

Seega võrdus

$$Q_a=Q_{a+1}=\dots=Q_{a+l-1}$$

on samaväärne võrrandi (3.2) l-kordse lahendi eksisteerimisega. Siin iga vektorite $\bar{p}_a,\dots,\bar{p}_{a+l-1}$ tasandi vektor osutub süsteemi (3.1) lahendiks ja seega iga selle tasandi siht osutub peasihiks sihi (q) suhtes.

Nimetame sel juhul vektorite $\bar{p}_a,\dots,\bar{p}_{a+l-1}$ tasandit l-mõõtmeliseks a-ndaks peasihiks sihi (q) suhtes.

Sama süsteemini (3.1) ja järelikult ka samade sihtideni (p_a) võime jõuda ka teisel viisil.

Leiame puutujatasandil R_m tasandite R_m ja R'_m /tähistused vt. § 1 / vaheliste statsionaarsete nurkade haarade sihid $(\tilde{p}_a)$ ja teostame piirprotsessi $ds\to 0$.

Sihid

$$(p_a)=\lim_{ds\to 0}(\tilde{p}_a)$$

osutuvad peasihtideks sihi (q) -kõvera $\mathcal{L}$ punktis M võetud puutuja sihi suhtes . Selles võib veenduda, kui võtta arvesse, et kahe tasandi vahelise statsionaarse nurga haarad osutuvad teineteise ristprojektsioonideks neile tasandeile, ning lisaks sellele arvestada võrdust (1.3) .

Kui vektor $\bar{R}[(p),(q)]$ osutub nullvektoriks, siis tema ruut on ekstremaalne ja järelikult võrrandi

$$\bar{R}=0$$

ehk

$$p^a q^b \bar{b}_{ab} = 0 \tag{3.5}$$

lahend on ka süsteemi (3.1) lahendiks. Võrrand (3.5) osutub aga pinna V_m kaassihtide leidmise võrrandiks. Järelikult võib mõistet "peasiht antud sihi suhtes" vaadelda mõiste "antud sihi kaassiht" üldistusena.

On ilmne järgmine lause:

siht (q) omab ℓ-mõõtmelise kaassihi siis ja ainult siis, kui pinna V_m suhtelise kõveruse dimensioonidefekt sihis (q) on ℓ ehk - mis on samaväärne - kui null osutub võrrandi (3.2) ℓ-kordseks lahendiks.

4. Pinna peasihid.

Võrrandisüsteemi

$$(4.1)\qquad \overset{a}{p}\overset{b}{p}\overset{c}{p}\overset{d}{p}\,\bar{b}_{ac}\left(g_{eb}\bar{b}_{df}-g_{fb}\bar{b}_{de}\right)=0$$

lahendvektorite $\bar{p}_K$ sihid (p_K) osutuvad peasihtideks nende endi suhtes, see tähendab $\bar{R}\left[(p_K),(p_K)\right]$ on sihis (p_K) võetud suhtelise kõveruse ellipsoidi pearaadiusvektor.

Selliste sihtide leidmiseks, mis osutuvad peasihtideks nende endi suhtes, võime lähtuda ka süsteemist (3.1) millest $(q)\equiv(p)$ korral saame

$$\overset{a}{p}\left(\bar{b}_{ac}\bar{b}_{bd}\overset{c}{p}\overset{d}{p}-k g_{ab}\right)=0\ .$$

Tarvilik ja piisav tingimus selleks, et repeerivektor $\bar{e}_1$ osutuks selle süsteemi lahendiks, on

$$(4.2)\qquad \bar{b}_{11}\left(g_{11}\bar{b}_{1b}-g_{1b}\bar{b}_{11}\right)=0\ .$$

Olgu antud suvaline repeer. Leiame teisenduse

$$\begin{cases}\bar{e}'_1=\overset{a}{p}\bar{e}_a\\ \bar{e}'_A=\bar{e}_A\end{cases},\qquad A=2,3,\dots,m\ ,$$

nii et uues repeeris oleks täidetud tingimus (4.2). Vanas repeeris saame siis

$$(4.3)\qquad \overset{a}{p}\overset{b}{p}\overset{c}{p}\overset{d}{p}\overset{e}{p}\,\bar{b}_{ac}\left(g_{eb}\bar{b}_{df}-g_{fb}\bar{b}_{de}\right)=0\ .$$

Seda võrrandisüsteemi rahuldavad suurused $\overset{a}{p}_K$ määravad samuti sihid, mis on peasihtideks nende endi suhtes. Järelikult süsteemid ~~on~~ (4.3) ja (4.1) on samaväärsed.

Sama süsteemini (4.3) jõuame, kui otsime sihte, milles normaalkõveruse vektor oleks statsionaarse pikkusega.

J.A.Schouten ja D.J.Struik nimetavad sihte,milles normaalkõveruse vektor omandab ekstremaalse nullist erineva pikkuse,pinna peasihtideks [1] . On mõtet laiendada pinna peasihi mõistet kõigile süsteemi (4.3) lahenditele, s.t. sihtidele,mis osutuvad peasihtideks nende endi suhtes. Siis,arvestades suhtelise kõveruse vektori geomeetrilist interpretatsiooni,võime pinna peasihile anda järgmise definitsiooni:

kui pinna punkti nihkel mööda pinda sihis (p) vastav puutujatasand pöördub samas sihis statsionaarse nurga võrra, siis nimetame sihti (p) pinna peasihiks.

Erijuhul $m = 2$ ja $n = 3$ on see definitsioon samaväärne Rodrigues'i valemiga.

Avaneb võimalus peasihtide liigitamiseks.

Nimetame sihti (p) pinna a-ndat liiki peasihiks, kui siht (p) osutub a-ndat liiki peasihiks tema enda suhtes. Pinnal olevat kõverat,mille siht igas punktis on a-ndat liiki peasiht,nimetame pinna a-ndat liiki kõverusjooneks. Kui siht (p) asub ℓ-mõõtmelises a-ndas peasihis tema enda suhtes, siis nimetame sihti (p) a-ndat liiki $(\ell-1)$- parataktiliseks sihiks.

Normaalkõveruse vektori pikkuse statsionaarsus on samaväärne nõudega, et ta oleks oma otspunktis ortogonaalne pinna normaalkõveruse indikatrissiga.Järelikult on pinna peasihte samapalju,kuipalju on pinna punktist võimalik tõmmata indikatrissile ortogonaalseid k iri.

Juhul $m = 2$ on indikatriss ellips /vt. p.6/ ja pole raske näha, et siin võib olla peasihte 2, 3 või 4 olenevalt sellest, kas pinna punkti projektsioon indikatrissi tasandile asub selle ellipsi evoluudist väljaspool, evoluudil või seespool.

5. Teist liiki peasihid antud puutujasihi suhtes.

Pinna V_m suhtelise kõveruse ellipsoid sihis (q) võimaldab siduda sihiga (q) veel ühe süsteemi ortogonaalseid sihte.

Kui sihid (p) ja (q) on ortogonaalsed, siis $\bar{R}[(p),(q)]$ ja $\bar{R}[(q),(q)]$ on sihis (q) võetud suhtelise kõveruse ellipsoidi kaasraadiusvektorid. Sihi (p) muutumisel sihiga (q) ristuvas $(m-1)$-mõõtmelises tasandis vektori $\bar{R}[(p),(q)]$ otspunkt kirjeldab $(m-2)$-mõõtmelise ellipsoidi, mis osutub suhtelise kõveruse ellipsoidi lõikeks tema raadiusvektori $\bar{R}[(q),(q)]$ sihi $(m-1)$-mõõtmelise kaas-diameetertasandiga.

Valime puutujatasandil R_m ortogonaalsete sihtide (p_A)*) süsteemi nii, et vektorid $\bar{R}[(p_A),(q)]$ osutuksid saadud

---

x Selles paragrahvis $A, B = 1, \ldots, m-1$.

$(m-2)$-mõõtmelise ellipsoidi pearaadiusvektoriteks.

Siin analoogselt varem uuritud suhteliste peasihtide leidmisega tuleb leida vektorid $\bar{p}_A = p_A^a \bar{e}_a$, mis annaksid statsionaarsed väärtused funktsioonile

$$R^2 = \frac{(p^a q^b \bar{b}_{ab})^2}{p^a p^b g_{ab} \cdot q^a q^b g_{ab}} ,$$

kuid lisandub tingimus

$$p^a q^b g_{ab} = 0 .$$

Saame võrrandisüsteemi

$$(5.1) \quad \begin{cases} p^a(\bar{b}_{ac}\bar{b}_{bd} q^c q^d - k g_{ab}) = \lambda g_{ab} q^a \\ p^a q^b g_{ab} = 0 \end{cases} ,$$

mis oma geomeetrilise tähenduse tõttu omab alati m - 1 ortogonaalset lahendit.

Süsteemi (5.1) lahend~~us~~vektorite $\bar{p}_A$ sihte (p_A) nimetame teist liiki peasihtideks sihi (q) suhtes.

Tähistame

$$\bar{R}[(p_A),(q)] = \bar{Q}'_A[(q)] = \bar{Q}'_A$$

ja

$$|\bar{Q}'_A| = Q'_A .$$

Definitsiooni kohaselt

$$\bar{Q}'_A \perp \bar{Q}'_B ,$$

kui $A \neq B$.

Olgu

$$Q'_1 \geq Q'_2 \geq \ldots \geq Q'_{m-1} ,$$

siis nimetame suurust Q'_A pinna V_m A-ndaks teist liiki suhteliseks peakõveruseks sihis (q) ja sihti (p_A) A-ndaks teist liiki peasihiks sihi (q) suhtes.

Kui

$$Q'_A = \dots = Q'_{A+\ell-1} \ ,$$

siis järeldub ellipsoidi omadustest, et iga vektorite $\bar{p}_A, \dots \bar{p}_{A+\ell-1}$ tasandi vektor osutub süsteemi (5.1) lahendiks. Nimetame sel juhul vektorite $\bar{p}_A, \dots, \bar{p}_{A+\ell-1}$ tasandit ℓ-mõõtmeliseks A-ndaks teist liiki peasihiks sihi (q) suhtes.

Teist liiki suhteliste peasihtide definitsioonist järeldub, et iga antud puutujasihi (q) puhul võib üldjuhul üheselt leida ortonormeeritud repeeri nii, et vektor $\bar{e}_1$ omaks sihi (q) ja oleksid täidetud tingimused

$$\bar{b}_{1a} \perp \bar{b}_{1b}$$

ja

$$\bar{b}_{1a}^{\,2} \geq \bar{b}_{1,a+1}^{\,2} \ ,$$

kus $a \neq b \neq 1 \neq a$.

Ei ole raske veenduda, et suurused K ja λ süsteemis (5.1) ei sõltu repeeri teisendustest. Leiame nende geomeetrilise tähenduse.

Valime ortonormeeritud repeeri nii, et

$$\bar{q} = q\bar{e}_1$$

ja

$$\bar{p}_A = p_A \bar{e}_{A+1} \ ;$$

siis süsteemist (5.1) leiame, et

$$\lambda_A = \bar{Q}'_A \bar{R}[(q),(q)] \, p_A q$$

ja

$$K_A = \bar{q}^2 Q'^2_A \ .$$

Seega κ_A ja λ_A on normeeritud vektorite $\bar{p}$ ja $\bar{q}$ korral sihis (q) võetud suhtelise kõveruse ellipsoidi lõikamisel normaalkõveruse vektori sihi $(m - 1)$ -mõõtmelise kaasdiameetertasandiga saadud ellipsoidi vastava pearaadiusvektori ruut ja skalaarkorrutis normaalkõveruse vektoriga.

Süsteemini (5.1) ja järelikult ka samade sihtideni (p_A) võime jõuda ka teisel viisil.

Olgu puutujatasanditel R_m ja R_m' olevad tasandid R_{m-1} ja R_{m-1}' ortogonaalsed kõveraga $\mathcal{L}$ /tähistused vt. § 1/. Leiame tasandil R_{m-1} tasandite R_{m-1} ja R_{m-1}' vaheliste statsionaarsete nurkade haarade sihid $(\tilde{p}_A)$ ja teostame piirprotsessi $ds \to 0$.

Sihid

$$(p_A) = \lim_{ds \to 0} (\tilde{p}_A)$$

osutuvad teist liiki peasihtideks sihi (q) — kõvera $\mathcal{L}$ punktis M võetud puutuja sihi suhtes.

Teist liiki peasihid antud sihi suhtes ühtuvad peasihtidega sama sihi suhtes siis ja ainult siis, kui antud siht on pinna peasiht. See järeldub otseselt ellipsoidi omadustest.

6. Normaalkõveruse indikatriss kui mähispind.

Valime pinna V_m puutujatasandil R_m suvalise ortonormeeritud repeeri. Siin vektor $\bar{b}_{aa}$ osutub pinna V_m normaalkõveruse vektoriks vektori $\bar{e}_a$ sihis ja tema otspunkt seega normaalkõveruse indikatrissi punktiks.

Teostame repeeri teisenduse maatriksiga

$$(6.1) \qquad \left(A^a_{a'}\right) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & \dots & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} .$$

Võrdusest (1.2) saame

$$\bar{b}'_{a'b'} = A^a_{a'} A^b_{b'} \bar{b}_{ab} ,$$

millest (6.1) tõttu

$$\bar{b}'_{11} = \sin 2\alpha\, \bar{b}_{12} + \cos 2\alpha \cdot \tfrac{1}{2}\left(\bar{b}_{11} - \bar{b}_{22}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\bar{b}_{11} + \bar{b}_{22}\right) .$$

Muutuva α korral vektori $\bar{b}'_{11}$ otspunkt kirjeldab ellipsi ümber vektori $\frac{1}{2}(\bar{b}_{11} + \bar{b}_{22})$ otspunkti. Nimetame seda ellipsit vektorite $\bar{e}_1$ ja $\bar{e}_2$ tasandi kõverusellipsiks. Selle tasandi ristuvatele sihtidele vastavad ellipsi diametraalselt vastastikused punktid. Juhul $m = 2$ kõverusellips ühtub normaalkõveruse indikatrissiga.

Kerge on näha, et vektor $\frac{1}{2}(\bar{b}_{11} - \bar{b}_{22})$ osutub vektori $\bar{b}_{11}$ otspunkti suunduvaks kõverusellipsi raadiusvektoriks, $\bar{b}_{12}$ aga viimase kaasraadiusvektoriks.

Olgu antud suvaline normaalkõveruse vektor ja suvaline kõveruseellips, mis läbib selle vektori otspunkti. Viimasest tulemusest järeldub, et selle kõveruseellipsi normaalkõveruse vektori otspunkti suunduva raadiusvektori kaasraadiusvektor osutub ka normaalkõveruse vektori kaasraadiusvektoriks vastava suhtelise kõveruse ellipsoidi suhtes. Edasi järeldub, et suhtelise kõveruse ellipsoid ja normaalkõveruse indikatriss omavad ühise puutujatasandi vastava normaalkõveruse vektori otspunktis. Seega suhtelise kõveruse ellipsoidide $(m - 1)$ -parameetriline parv mähib indikatrissi.

Viimasest tulemusest saame geomeetrilise tõestuse pinna peasihtide erinevate definitsioonide samaväärsusele.

Kui pinna peasiht on siht, mis osutub peasihiks tema enda suhtes, siis normaalkõveruse vektor selles sihis on vastava suhtelise kõveruse ellipsoidi pearaadiusvektor, on seega ellipsoidiga ja järelikult ka normaalkõveruse indikatrissiga ortogonaalne, s.t. on statsionaarse pikkusega. Tõestus on õige ka vastupidises suunas.

Olgu repeer ortonormeeritud ja ℓ maksimaalne lineaarselt sõltumatute vektorite arv $\bar{b}_{1A}$ $(A = 2, \ldots, m)$ hulgas, siis eespool saadud tulemuste põhjal normaalkõveruse indikatriss on vektori $\bar{b}_{11}$ otspunktis ℓ -mõõtmeline. Arvu $m-1-l$ nimetame pinna V_m normaalkõveruse dimensioonidefektiks vektori $\bar{e}_1$ sihis.

Olgu pinna V_m suhtelise kõveruse dimensioonidefekt sihis (p) K, normaalkõveruse dimensioonidefekt samas sihis aga S. On kaks võimalust:

1) $K = S$

2) $K = S + 1$.

Teisel juhul pinna normaalkõveruse vektor sihis (p) osutub indikatrissi puutujaks. Tingimus on ka tarvilik.

7. M ä ä r a m a t a p e a s i h t i d e j u h t.

Vaatleme juhtu, kus kõik puutujatasandi sihid on pinna peasihid.

Siin normaalkõveruse vektor kõigis sihtides on indikatrissiga ortogonaalne. Järelikult normaalkõveruse vektori pikkus on konstantne, normaalkõveruse indikatriss asub sfääril ja pinna V_m punkt M asub sirgel, mis läbib selle sfääri tsentrit ja on tema tasandiga ortogonaalne.

Asugu indikatriss sfääril Ω raadiusega $r \neq 0$ *). Siis kõik kõveruseellipsid on ringjooned ja nende raadiused

*) Juhtum $r = 0$ on triviaalne, kuna siin pinna punkt on kas ümaruspunkt või tasandumispunkt.

ei ületa n . Eelmise punkti tulemuste põhjal ka normaalkõveruse vektori kaasraadiusvektorid vastava suhtelise kõveruse ellipsoidi suhtes ei ületa pikkuselt n . Kuna siin normaalkõveruse vektori pikkus ei saa olla väiksem kui n , siis järeldub, et kui punkt M ei asu sfääri Ω tsentris, siis kõik puutujatasandi sihid on pinna esimest liiki peasihid.

Selleks, et peasihtide hulgas leiduks ka esimest liiki parataktilisi sihte, on tarvilik ja piisav, et punkt M asuks sfääri Ω tsentris ja puutujatasandis oleks kahemõõtmeline tasand, mille kõveruselllips oleks sfääri suurring. On ilmne, et siis kõik mainitud kahemõõtmelise tasandi sihid on esimest liiki parataktilised sihid.

Kaks- ja enamparataktiliste sihtide eksisteerimine seab kitsendused teiste sihtide parataktilisusele.

Olgu ühikvektori $\bar{e}_1$ siht esimest liiki $(\ell-1)$-parataktiline, kus $\ell > 2$. Siis võime valida ortonormeeritud repeeri nii, et

$$\bar{b}_{11}^{2} = \bar{b}_{12}^{2} = \ldots = \bar{b}_{1\ell}^{2} \quad .$$

Siit järeldub, et iga vektorite $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_\ell$ tasandi siht on esimest liiki parataktiline.

Kuna punkt M asub sfääri Ω tsentris, vektorite $\bar{e}_1$ ja $\bar{e}_A$ $(A = 2, \ldots, \ell)$ tasandi kõveruselllips on sfääri Ω suurring ja puutujatasandi ortogonaalsetele sihtidele vastavad kõveruselllipsi diametraalselt vastastikused punktid, siis

$$\bar{b}_{11} = -\bar{b}_{22} = \ldots = -\bar{b}_{\ell\ell} .$$

Järelikult vektorite $\bar{e}_A$ ja $\bar{e}_B$ $(A \neq B\ ;\ A, B = 2, \ldots, \ell)$ tasandi kõverusellips on kõdunud punktiks ja

$$\bar{b}_{AB} = 0.$$

Siit pinna V_m suhtelise kõveruse dimensioonidefekt kõigis vektorite $\bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_\ell$ tasandi sihtides ei ole väiksem kui $\ell - 2$ ja selle tasandi sihid ei saa olla enam kui $(m - \ell + 1)$ -parataktilised.

Analüütilised tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et kõik puutujatasandi sihid oleksid pinna peasihid, saame, kui võrrandisüsteemis (4.1) kõik sümmetriseeritud kordajad võrrutame nulliga. Ortonormeeritud repeeri korral saame tingimused

$$\begin{cases} \bar{b}_{aa}\bar{b}_{ab} = 0 \\ \bar{b}_{aa}^2 - \bar{b}_{aa}\bar{b}_{bb} - 2\bar{b}_{ab}^2 = 0 & \qquad (\text{siit } \bar{b}_{aa}^2 = \bar{b}_{bb}^2) \\ \bar{b}_{aa}\bar{b}_{bc} + 2\bar{b}_{ab}\bar{b}_{ac} = 0 \\ \bar{b}_{ab}\bar{b}_{cd} + \bar{b}_{ac}\bar{b}_{bd} + \bar{b}_{bc}\bar{b}_{ad} = 0 \end{cases} ,$$

kus $a \neq b \neq c \neq d \neq a$.

Siin kaks esimest tingimust on samaväärsed geomeetriliste tingimustega, mis on toodud selle punkti alguses.

8. Absoluutselt parataktilised sihid.

Absoluutselt parataktiliseks sihiks nimetame $(m - 1)$-parataktilist sihti. Sel juhul vastav suhtelise kõveruse ellipsoid on sfäär ja peasihid antud sihi suhtes on määramata / kui mitte arvestada m-mõõtmelist peasihti - puutujatasandit/.

Olgu pinnal V_m antud kõver $\mathcal{L}$,mille puutuja omab absoluutselt parataktilise sihi. Valime kõveral $\mathcal{L}$ suvaliselt kaks lõpmata lähedast punkti M ja M' . Absoluutselt parataktilise sihi definitsioonist järeldub, et pinna V_m puutujatasandid punktides M ja M' on omavahel parataktilised, see tähendab kõik statsionaarsed nurgad nende vahel on võrdsed.

Absoluutselt parataktiliste sihtide leidmiseks saame süsteemist (3.1) võrrandisüsteemi

$$(8.1) \qquad p^c p^d \left(g_{aa} \bar{b}_{ec} \bar{b}_{ed} - g_{eb} \bar{b}_{ac} \bar{b}_{ad} \right) = 0 \quad .$$

Selle süsteemi lahenduvuse tingimustele saab juhul $m = 2$ anda lihtsa geomeetrilise tõlgenduse.

Olgu repeer ortonormeeritud ja repeerivektori $\bar{e}_1$ siht parataktiline /juhul $m = 2$ on iga parataktiline siht absoluutselt parataktiline/. Siis süsteemist (8.1) saame

ja
$$\bar{b}_{11}\bar{b}_{12}=0$$
$$\bar{b}_{11}^2-\bar{b}_{12}^2=0 \quad .$$

Pärast lihtsaid arvutusi jõuame tulemusele, et parataktiline siht eksisteerib siis ja ainult siis, kui pinna V_2 punkt M asub kanalpinnal, mille juhtjooneks on kõverusellips. See pind lõikab kõverusellipsi tasandit mööda kahte ringjoont, mille keskpunktid ühtuvad kõverusellipsi keskpunktiga ja raadiusteks on $a+b$ ja $a-b$, kus a ja b on kõverusellipsi pooltelgede pikkused. Kui see kanalpind lõikab iseennast punktis M, siis on puutujatasandil 2 parataktilist sihti. Juhul, kui $a=b$ ja punkt M asub kõverusellipsi keskpunktis, on kõik puutujasihid parataktilised.

Ruumis R_3 esineb ainsa näitena pinna parataktilisest sihist tasanduva pinna asümptootiline siht. See on teatavas mõttes erandjuht, mida tuleb vaadata ühe kahekordse parataktilise sihina.

Vaatleme juhtu, kus kõik pinna V_m puutujasihid on absoluutselt parataktilised.

Olgu repeer ortonormeeritud, siis süsteem (8.1) omandab kuju
$$\begin{cases} p^c p^d\left(\bar{b}_{bc}\bar{b}_{bd}-\bar{b}_{ac}\bar{b}_{ad}\right)=0 \\ p^c p^d\bar{b}_{ac}\bar{b}_{bd}=0 \end{cases} ,$$

kus $a\neq b$.

Siit tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et kõik puutujatasandi sihid oleksid absoluutselt parataktilised, on

$$\begin{cases} \bar{b}_{bc}\bar{b}_{bd} - \bar{b}_{ac}\bar{b}_{ad} = 0 \\ \bar{b}_{ac}\bar{b}_{bd} + \bar{b}_{ad}\bar{b}_{bc} = 0 , \end{cases}$$

kus mitte kõik a, b, c ja d ei ole omavahel võrdsed.

Kui nüüd võtta $c = d = a$ ja seejärel $c = a$ ja $d = b$, siis saame

$$(8.2) \quad \begin{cases} \bar{b}^2_{ab} - \bar{b}^2_{aa} = 0 \\ \bar{b}_{aa}\bar{b}_{ab} = 0 \\ \bar{b}_{aa}\bar{b}_{bb} + \bar{b}^2_{ab} = 0 . \end{cases}$$

Siit

$$\bar{b}_{aa} = -\bar{b}_{bb} ,$$

millest

$$m = 2 .$$

Kui võtta veel arvesse § 6 tulemused, võime tingimustest (8.2) teha järgmise järelduse:

Kui pinna kõik puutujasihid on absoluutselt parataktilised, siis pind on kahemõõtmeline, normaalkõveruse indikatriss on ringjoon ja pinna punkt asub selle ringjoone tsentris.

See järeldub kergesti ka § 7 tulemustest.

9. Pöördvastavusest

Kui võrrandisüsteemis (3. 2)

$$p^a p^b q^c q^d \bar{b}_{ac}(g_{eb}\bar{b}_{df} - g_{fb}\bar{b}_{de}) = 0$$

fikseerida suurused p^a ja lahendada ta suuruste q^a suhtes, leiame kõik sihid (q), mille suhtes antud siht (p) osutub peasihiks.

Erijuhtudel võib vastavus sihtide ja nendega seotud suhteliste peasihtide vahel olla vastastikune kõigi puutujatasandi sihtide puhul. Näiteks $m = 2$ korral saame kaks juhtu:

1/ pinna punkt asub kõverusellipsi keskpunktis /minimaalpunkt/ ja

2/ kõverusellips on ringjoon ja pinna punkt asub sirgel, mis läbib selle ringjoone keskpunkti ja on tema tasandiga ortogonaalne /kõik puutujasihid on pinna peasihid/.

Seda võib tõestada, kui valida suvaline ortogonaalsete sihtide paar repeerivektorite sihtideks ja valemist (3.4) lähtudes leida esiteks tingimus, millal sihid, mis määravad samad peasihid, on ortogonaalsed. Selgub, et siin pinna punkt asub sirgel, mis läbib kõverusellipsi keskpunkti ja on tema tasandiga ortogonaalne. Sellest sirgest tuleb ainult lahutada punktid, kus võivad eksisteerida parataktilised sihid. Nende punktide kaugus kõverusellipsi tasandist on võrdne kõveruselllipsi poole fookusekaugusega.

Kui nüüd arvestada saadud tingimust ja valida repeeri-vektorid nii, et neile vastavate normaalkõveruse vektorite otspunktideks osutuksid kõveruselllipsi sama telje otspunktid, järeldub väide valemist (3.4) kergesti.

Pöördudes tagasi m-mõõtmelise pinna juhu juurde, tähistame sihtide hulga, mille suhtes antud siht (p) osutub peasihiks, tähisega $K(p)$. Kõik puutujatasandi sihid võime jagada kahte klassi sõltuvalt sellest, kas hulk $K(p)$ sisaldab reaalseid sihte või mitte. Näiteks ruumi R_3 tasanduva pinna korral leidub ainult kaks sellist sihti (p), mille puhul hulk $K(p)$ sisaldab reaalseid sihte. Need on pinna peasihid.

Kui sihid (p) ja (p') ei ole ortogonaalsed ja hulgad $K(p)$ ja $K(p')$ sisaldavad sama sihti (q), siis iga hulk $K(p'')$, kus (p'') on suvaline sihtide (p) ja (p') tasandi siht, sisaldab sihti (q). Siin nimelt (p) ja (p') on peasihid sihi (q) suhtes, kuid kuna nad ei ole ortogonaalsed, siis iga nende tasandi siht (p'') on peasiht sihi (q) suhtes.

Võrrandisüsteemist (3.3) on näha, et hulk $K(p)$ ühtub kogu puutujatasandiga siis ja ainult siis, kui

$$(9.1)\qquad p^a p^b\left[\bar{b}_{ac}\left(g_{eb}\bar{b}_{df}-g_{fb}\bar{b}_{de}\right)+\bar{b}_{ad}\left(g_{eb}\bar{b}_{cf}-g_{fb}\bar{b}_{ce}\right)\right]=0 .$$

Selle süsteemi lahendid osutuvad peasihtideks kõigi puutujatasandi sihtide suhtes ja seega ka pinna peasihtideks. Nimetame neid sihte pinna absoluutseteks peasihtideks.

Kui absoluutsete peasihtide arv on lõplik, siis nad kõik on omavahel ortogonaalsed, sest nad osutuvad peasihtideks ühe ja sama /suvalise / puutujasihi suhtes.

Kui kõik puutujasihid on absoluutsed peasihid, siis nad osutuvad ilmselt ka absoluutselt parataktilisteks. Sellist pinnapunkti tüüpi, mis on võimalik ainult kahemõõtmelistel pindadel, on kirjeldatud eelmise paragrahvi lõpus.

Edasi järeldub, et absoluutsed peasihid ei saa täita enam kui kahemõõtmelise tasandi, sest vastasel korral asuks pinnal enam kui kahemõõtmeline geodeetiline alampind, mille kõik puutujasihid on absoluutselt parataktilised.

Olgu repeer ortonormeeritud. Võrrandisüsteemist (9.1) saame, et repeerivektori $\bar{e}_1$ siht osutub pinna absoluutseks peasihiks siis ja ainult siis, kui

$$\bar{b}_{1c}\bar{b}_{bd}+\bar{b}_{1d}\bar{b}_{bc}=0 \quad ,$$

kus $b \neq 1$. Kui siin $m = 2$, siis

$$\bar{b}_{11}\bar{b}_{22}+\bar{b}_{12}^2=0 \quad , \qquad \bar{b}_{11}\bar{b}_{12}=0 \qquad \text{ja} \qquad \bar{b}_{12}\bar{b}_{22}=0 \; .$$

Siit järeldub, et kui pinna V_2 punktis M eksisteerivad absoluutsed peasihid, siis punkt M asub ringjoonel , mis läbib kõverusellipsi fookusi ja on tema tasandiga risti. Absoluutsetele peasihtidele vastavad kõverusellipsi pikema telje otspunktid. See väide järeldub samuti viimasest kolmest võrdusest.

Ruumis R_4 ,kus fookusi läbiva ringjoone asemele tuleb fookuste paar, jõudis samadele tulemustele Yong-Chow Wong [2] . Ruumis R_3 ainsaks näiteks absoluutsest peasihtidest on tasanduva pinna peasihid.

Toome veel ühe Yong-Chow Wong'i poolt juhul $n = 4$ tõestatud teoreemi üldistuse ruumis R_n asetseva kahemõõtmelise pinna juhule.

Olgu (p_1) ja (p_2) ühised peasihid kahemõõtmelise pinna kahe puutujasihi (q_1) ja (q_2) suhtes. Osutub,et sihtidepaarid (p_1), (p_2) ja (q_1), (q_2) omavad punktis M ühise nurgapoolitaja siis ja ainult siis,kui sihid (p_1) ja (p_2) vastavad kõverusellipsi tippudele. Tõepoolest,valime (p_1) ja (p_2) repeerivektorite sihtideks. Valem (3.4) omandab nüüd kuju

$$\bar{b}_{12}\bar{b}_{22}\operatorname{tg}^2\varphi + (\bar{b}_{11}\bar{b}_{22} + \bar{b}_{12}^2)\operatorname{tg}\varphi + \bar{b}_{11}\bar{b}_{12} = 0 .$$

Siit

$$\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\bar{b}_{11}\bar{b}_{12}}{\bar{b}_{12}\bar{b}_{22}} .$$

Eelduse järgi

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2} ,$$

millest

$$\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 = 1$$

ja seega

$$\bar{b}_{12}(\bar{b}_{11} - \bar{b}_{22}) = 0 .$$

Viimasest seosest järeldubki väide.

II

10. Pinnad absoluutsete kõverusjoonte võrguga.

Pinnal asetsevat kõverat, mille siht igas punktis osutub pinna absoluutseks peasihiks selles punktis, nimetame absoluutseks kõverusjooneks.

Käesolevas paragrahvis piirdume kahemõõtmeliste pindade uurimisega. Paragrahvi 9 tulemustest selgub, et kui jätta vaatlusest välja ringjoonindikatrissiga minimaalpinnad, mille kõik puutujasihid on absoluutsed peasihid, siis moodustavad absoluutsed kõverusjooned pinnal ortogonaalse võrgu.

a/ Kõige üldisemad absoluutsete kõverusjoonte võrguga pinnad saame, kui nõuame ainult selle tingimuse täitmist, et pinna punkt asuks kõveruselllipsi fookusi läbival ellipsi tasandiga ortogonaalsel ringjoonel.

Siin osutub otstarbekohaseks valida repeer nii, et kehtiksid võrdused

$$\bar{b}_{11} = \bar{H} + \bar{b} = k\bar{e}_4 ,$$

$$(10.1) \qquad \bar{b}_{22} = \bar{H} - \bar{b} = k\bar{e}_5 \qquad \text{ja}$$

$$\bar{b}_{12} = \bar{a} = a\bar{e}_3 ,$$

kus $\bar{H}$ on pinna keskmise kõveruse vektor ja $\bar{a}$ ja $\bar{b}$

on vastavalt kõveruselllipsi pikem ja lühem pearaadiusvektor. Kõik repeerivektorid on normeeritud ja, väljaarvatud vektorid $\bar{e}_3$, $\bar{e}_4$ ja $\bar{e}_5$, ka omavahel ortogonaalsed.

Peale süsteemi

$$\omega^\alpha = 0$$

jätkamist saame tingimustest (10.1) , et otsitavad pinnad osutuvad Pfaffi süsteemi

$$(10.2) \quad \begin{cases} \omega^\alpha = 0 & \omega_1^3 = k\omega^2 & \omega_2^3 = k\omega^1 \\ \omega_1^\rho = 0 & \omega_1^4 = k\omega^1 & \omega_2^4 = 0 \\ \omega_2^\rho = 0 & \omega_1^5 = 0 & \omega_2^5 = k\omega^2 \end{cases}, \quad \rho = 6, \dots, n,$$

integraalpindadeks. Süsteemi (10.2) kovariantide süsteemi uurimine näitab, et kõige üldisemad absoluutsete kõverusjoonte võrguga pinnad sõltuvad ruumis R_n (n - 4) -st suvalisest kahemuutuja funktsioonist.

Kui nõuame veel,et vektor $\bar{H}$ oleks kõveruselllipsi tasandiga ortogonaalne,siis vastavad pinnad sõltuvad ruumis R_n (n - 5) -st kahemuutuja funktsioonist,kui n > 5 ja kuuest ühemuutuja funktsioonist, kui n = 5 . Nagu järeldub § 8 tulemustest,eksisteerib nendel pindadel veel ortogonaalne parataktiliste joonte võrk,mis on absoluutsete kõverusjoonte võrgu suhtes $\frac{\pi}{4}$ võrra pööratud.

Kui nõuame, et pinna punkt asuks kõveruselllipsi fookuses, osutub otstarbekohaseks valida orotonormeeritud repeer nii,et vektorite $\bar{e}_1$ ja $\bar{e}_2$ sihid ühtuksid absoluutsete peasihtidega,vektorite $\bar{e}_3$ ja $\bar{e}_4$ sihid aga vastavalt kõverusellipsi pikema ja lühema telje sihtidega. Otsitavad pinnad osutuvad Pfaffi süsteemi

$$\begin{cases} \omega^{\alpha} = 0 & \\ \omega_1^3 = k\omega^1 & \omega_1^4 = -l\omega^2 \\ \omega_1^4 = \sqrt{kl}\,\omega^2 & \omega_2^4 = \sqrt{kl}\,\omega^1 \\ \omega_1^{\varrho} = 0 & \omega_2^{\varrho} = 0 \end{cases}, \quad \varrho = 5, \dots, n,$$

integraalpindadeks ja sõltuvad $2 \cdot (n - 2)$ ühemuutuja funktsioonist.

b/ Vaatleme juhtu, kus kõverusellips on kõdunud sirglõiguks. Siin absoluutsed peasihid eksisteerivad siis ja ainult siis, kui pinna punkt asub ringjoonel, mille diameetriks see sirglõik osutub.

Kui valime ortonormeeritud repeeri nii, et

$$\bar{b}_{11} = a\bar{e}_3, \quad \bar{b}_{22} = b\bar{e}_4$$

ja

$$\bar{b}_{12} = 0,$$

siis otsitavad pinnad osutuvad Pfaffi süsteemi

$$(10.3) \qquad \begin{cases} \omega^{\alpha} = 0 & \\ \omega_1^3 = a\omega^1 & \omega_2^3 = 0 \\ \omega_1^4 = 0 & \omega_2^4 = b\omega^2 \\ \omega_1^{\varrho} = 0 & \omega_2^{\varrho} = 0 \end{cases}, \quad \varrho = 5, \dots, n,$$

integraalpindadeks. Selle süsteemi kovariantide süsteemi uurimine näitab, et vastavad pinnad sõltuvad ruumis R_n $(n \geq 4)$ n suvalist ühe muutuja funktsioonist. Valemist

$$D\omega_1^2 = -k\,[\omega^1 \omega^2],$$

kus k on pinna Gaussi kõverus [5], nähtub, et süsteemi (10.3) integraalpinnad omavad konstantse Gaussi kõveruse $k = 0$.

Paragrahvi 8 tulemustest järeldub, et vaadeldavatel pindadel on veel parataktiliste kõverusjoonte võrk kõverate vahelise nurgage

$$\alpha = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b} \tag{10.4}$$

Absoluutsed peasihid poolitavad parataktiliste sihtide vahelised nurgad.

Kui nõuame veel, et

$$da = db = 0 ,$$

kus

$$a \neq 0 \quad \text{ja} \quad b \neq 0 ,$$

siis vastavad pinnad sõltuvad ruumis R_n $(n > 4)$ $2(n - 4)$ kahemuutuja funktsioonist, ruumis R_4 aga kümnest konstandist. Kovariantide süsteemist saame võrdused

$$\omega_1^2 = \omega_3^4 = 0 .$$

Tähistame ruumi R_4 vastavat pinda C. Kehtivad võrdused

$$\begin{cases} d\bar{e}_1 = a\omega^1 \bar{e}_3 \\ d\bar{e}_2 = b\omega^2 \bar{e}_4 \\ d\bar{e}_3 = -a\omega^1 \bar{e}_1 \\ d\bar{e}_4 = -b\omega^2 \bar{e}_2 \end{cases} \tag{10.5}$$

Vaatleme vektorit

$$\bar{Q} = \bar{M} + \frac{1}{a}\bar{e}_3 + \frac{1}{b}\bar{e}_4 ,$$

kus $\bar{M}$ on pinna C punkti M kohavektor.

Võrdustest (10.5) saame

$$d\bar{Q} = 0$$

Seega pind C asub ruumi R_4 hüpersfääril S_3 keskpunkti kohavektoriga $\bar{Q}$ ja raadiusega $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$.

Kuna pind C sõltub ainult konstantidest, siis, arvestades pinnale C vastava Pfaffi süsteemi leidmist, on ta üheselt määratud, kui on antud järgmine kujund: pinna punkt, selles võetud puutujatasand, sirglõik-indikatriss koos oma asendiga normaaltasandil ja puutujatasandi mingile sihile vastav indikatrissi punkt. Sellised kujundid vastavad pinna C igale punktile M ja kõik nad on omavahel kongruentsed. Kui muuta vastavust indikatrissi punktide ja puutujatasandi sihide vahel- teostada pööre puutujatasandil - ,siis antud puutujatasandi sihile vastava indikatrissi punkti kaugus punktist M muutub. Siit järeldub, et ruumis R_4 on kaheparameetriline pöörete rühm, mis pinna C säilitab, ei leidu aga kolmeparameetrilist rühma.

Selleks, et leida pinda C säilitava liikumiste rühma kõik ühemõõtmelised imprimitiivsusesüsteemid, leiame võrdusi (10.5) arvestades vektori $\overline{M}+x^i\overline{e}_i$ ($x^i=$ const $,i=1,\ldots,4$) diferentsiaali avaldises lineaarvormide ω^1 ja ω^2 kordajad. Saame kaks vektorit

$$\overline{r}_1 = (1-ax^3)\,\overline{e}_1 + ax^1\overline{e}_3$$

ja

$$\overline{r}_2 = (1-bx^4)\,\overline{e}_2 + bx^2\overline{e}_4\ .$$

Selleks, et vektori $\overline{M}+x^i\overline{e}_i$ otspunkt oleks ühemõõtmelise imprimitiivsusesüsteemi punkt, on ilmselt tarvilik ja piisav, et vektorid $\overline{r}_1$ ja $\overline{r}_2$ oleksid kollineaarsed. Siit saame, et kõik otsitavad imprimitiivsusesüsteemid kokku moodustavad kaks sfääri S_3 keskpunkti Q läbivat kahemõõtmelist tasandit, millest üks on paralleelne vektoritega $\bar{e}_1$ ja $\bar{e}_3$, teine vektoritega $\bar{e}_2$ ja $\bar{e}_4$. Kui lõikame neid tasandeid punkti Q ümbritsevate hüpersfääridega, saame kõik ühemõõtmelised imprimitiivsusesüsteemid. Nende tasandite lõikamisel sfääriga S_3 saame selle sfääri kaks suurringi K ja ℓ. Ei ole raske näha, et pinna C punkti kaugus nii ringjoonest k kui ringjoonest ℓ on konstantne. Järelikult pind C on sfääril S_3 kui kolmemõõtmelises elliptilises ruumis sirgete K ja ℓ ekvidistantpind, s.o. Cliffordi pind (vt. [4]).

Võrdusest (10.4) nähtub, et parataktiliste sihtide sihivektorid on

$$\bar{e} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\bar{e}_1 \pm \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\bar{e}_2 .$$

Olgu δ diferentseerimise sümbol parataktilises sihis.

Tähistame

$$\delta\bar{e} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\bar{e}_3 \pm \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\bar{e}_4\right)\delta s = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\bar{p}\,\delta s ,$$

Edasi saame

$$\delta\bar{p} = -\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\bar{e}\,\delta s ,$$

millest järeldub, et pinna C parataktilised kõverusjooned osutuvad sfääri S_3 suurringideks. Seega need jooned osutuvad Cliffordi pinna moodustajateks.

Seostest (10.5) on näha, et ka pinna C absoluutsete kõverusjoonte võrk moodustab kaks ringjoonte parve. Neist ühe parve ringjooned on paralleelsed vektorite $\bar{e}_1$ ja $\bar{e}_3$

tasandiga ja omavad ühise raadiuse $\frac{1}{a}$, teise parve ringjooned on aga paralleelsed vektorite $\bar{e}_2$ ja $\bar{e}_4$ tasandiga ja omavad ühise raadiuse $\frac{1}{b}$. Elliptilise ruumi S_3 seisukohalt osutub see võrk Cliffordi pinna tavaliseks kõverusjoonte võrguks.

11. Määramata peasihtidega kahemõõtmelistest pindadest.

Paragrahvi 7 tulemustest järeldub, et selleks, et kahemõõtmelise pinna kõik puutujasihid oleksid peasihid, on tarvilik ja piisav, et normaalkõveruse indikatriss oleks ringjoon ja pinna punkt asuks sirgel, mis läbib selle ringjoone keskpunkti ja on tema tasandiga risti.

Kui orotonormeeritud repeer valida nii, et

$$\bar{b}_{11} = a\bar{e}_3 + b\bar{e}_5 \quad ,$$
$$\bar{b}_{22} = -a\bar{e}_3 + b\bar{e}_5$$

ja

$$\bar{b}_{12} = a\bar{e}_4 \quad ,$$

kus a on indikatrissi raadius ja b on pinnapunkti kaugus indikatrissi tasandist, siis otsitavad pinnad osutuvad Pfaffi süsteemi

$$(11.1) \quad \begin{cases} \omega_1^3 = a\omega^1 & \omega_2^3 = -a\omega^2 & \omega^\alpha = 0 \\ \omega_1^4 = a\omega^2 & \omega_2^4 = a\omega^1 & \omega_1^\rho = 0 \\ \omega_1^5 = b\omega^1 & \omega_2^5 = b\omega^2 & \omega_2^\rho = 0 \end{cases} , \ \rho = 6, \dots, n,$$

integraalpindadeks.

Piirdume juhuga, mil $n = 5$, $b = const \neq 0$ ja $a \neq 0$. Siis süsteemi (11.1) kovariantide süsteemist järeldub veel

$$\omega_3^5 = \omega_4^5 = 0 . \tag{11.2}$$

Vastavad pinnad sõltuvad kahest ühemuutuja funktsioonist. Tähistame vastavat pindade klassi $\{A\}$ ja selle klassi esindajat A.

Vaatleme vektorit

$$\bar{Q} = \bar{M} + \frac{1}{b}\bar{e}_5 ,$$

kus $\bar{M}$ on pinna A punkti M kohavektor. Võrdustest (11.1) ja (11.2) saame

$$d\bar{Q} = 0 .$$

Seega pind A asub neljamõõtmelisel sfääril S_4 keskpunkti kohavektoriga $\bar{Q}$ ja raadiusega $\frac{1}{b}$.

Kui vaadelda pinda A elliptilise ruumi S_4 pinnana, võib näidata, et ta osutub elliptilise ruumi ringjoon-indikatrissiga minimaalpinnaks. Selliseid pindu on uurinud O. Borůvka [6].

Huvitava erijuhu saame, kui eeldame, et ka $a = const$. Siis kovariantide süsteemist järeldub veel

$$2\omega_1^2 - \omega_3^4 = 0 \tag{11.3}$$

ja

$$b = \sqrt{3}\, a . \tag{11.4}$$

Süsteem on täielikult integreeruv ja pind sõltub seega ainult konstantidest. Tähistame pindade klassi $\{A\}$ vastavat alamklassi $\{B\}$ ja selle klassi esindajat B.

Valemist

$$D\omega_1^2 = -k[\omega^1\omega^2]$$

saame pinna B Gaussi kõveruseks

$$k = a^2 = \text{const.}$$

Ü.Lumiste [7] on näidanud, et konstantse raadiusega ringjoon-indikatrissiga minimaalpinnad elliptilises ruumis S_4 kõverusega $3a^2$ (seega pinnad $\{B\}$) on seal ainukesteks konstantse kõverusega minimaalpindadeks. Samuti on ta näidanud, et sellised pinnad on ruumi S_4 teatava kolmeparameetrilise liikumiste rühma /seega ruumi R_5 pöörete rühma / imprimitiivsusesüsteemideks.

Kasutades mõttekäiku, mis on analoogne pinda C säilitava kaheparameetrilise liikumiste rühma olemasolu näitamiseks kasutatud mõttekäiguga, ja arvestades seda, et ruumis R_5 ei leidu konstantse kõverusega ringjoon-indikatrissiga pinda, milles on kerge veenduda, võib näidata, et ruumis R_5 olevatest kahemõõtmelistest konstantse kõverusega pindadest on tasand, sfäär ja pind B ainsad, millede kõik sisegeomeetrilised liikumised osutuvad ka ruumi R_5 liikumisteks.

Samuti, nagu eelmises paragrahvis leidsime kõik pinda C säilitava liikumiste rühma ühemõõtmelised imprimitiivsusesüsteemid, leiame siin kõik pinda C säilitava liikumiste rühma kahemõõtmelised imprimitiivsusesüsteemid. Viimased osutuvad koonuse

$$\begin{cases} x_1 x_2 = x_4\left(\pm\sqrt{x_3^2+x_4^2}+\sqrt{3}\,x_5\right) \\ x_1^2-x_2^2 = 2x_3\left(\pm\sqrt{x_3^2+x_4^2}+\sqrt{3}\,x_5\right) \end{cases}$$

lõigeteks koonuse tippu ümbritsevate sfääridega. Siin repeer on ortonormeeritud, koordinaatide alguspunkt on pinda B sisaldava sfääri keskpunktis, kusjuures $\bar{M} = \frac{\sqrt{3}}{3a}\,\bar{e}_5$ on pinna B mingi punkti kohavektor. Vektorite $\bar{e}_1$ ja $\bar{e}_2$ tasand osutub pinna B puutujatasandiks vektori $\bar{M}$ otspunktis, vektorite $\bar{e}_3$ ja $\bar{e}_4$ tasand aga vastava indikatrissi tasandiks, kusjuures vektor $\bar{e}_3$ on indikatrissi keskpunktist vektori $\bar{e}_1$ sihile vastava normaalkõveruse vektori otspunkti suunduva raadiusvektori sihiline.

On kerge näha, et kõik leitud kahemõõtmelised imprimitiivsusesüsteemid kuuluvad pindade klassi $\{B\}$, samuti seda, et pind B koosneb kahest teda sisaldava sfääri keskpunkti suhtes sümmeetrilisest osast.

Pinna B võranditele võib samas repeeris anda kuju

$$\begin{cases} x_1 x_2 = \frac{1}{3}\,x_4\left(\pm\frac{1}{a}+2\sqrt{3}\,x_5\right) \\ x_1^2-x_2^2 = \frac{2}{3}\,x_3\left(\pm\frac{1}{a}+2\sqrt{3}\,x_5\right) \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2 = \frac{1}{3a^2} \end{cases}.$$

Olgu pinnal B antud geodeetiline joon $\mathcal{L}$ ja olgu repeerivektor $\bar{e}_1$ selle joone puutujaks. Siis nihkumisel piki geodeetilist δs võrra

$$\omega^1(\delta) = \delta s,$$
$$\omega^2(\delta) = \omega_1^2(\delta) = 0.$$

Arvestades veel seoseid (11.1), (11.2), (11.3) ja (11.4) saame ja

$$\delta\bar{e}_1 = 2a\bar{p}\,\delta s$$

$$\delta\bar{p} = -2a\bar{e}_1\delta s \ ,$$

kus

(11.5) $$\bar{p} = \frac{1}{2}\left(\bar{e}_3 + \sqrt{3}\,\bar{e}_5\right) \ .$$

Siit järeldub, et pinna B geodeetilised on ringjooned raadiusega $\frac{1}{2a}$ ja keskpunkti kohavektoriga

(11.6) $$\bar{M}^* = \bar{M} + \frac{1}{2a}\bar{p} \ ,$$

kus $2a\bar{p}$ on geodeetilise sihile vastav pinna normaalkõveruse vektor. Seega võib pinna B kummatki sidusat piirkonda vaadelda ringjoonte üheparameetrilise parvena. Need ringjooned on konstantse raadiusega $\frac{1}{2a}$, läbivad kõik ühte punkti - pinna B punkti M - ja puutuvad selles punktis pinna puutujatasandit. Selle parve ringjoonte keskpunktide geomeetriline koht on ringjoon, mille joonistab vektori $\bar{M}^*$ otspunkt parve parameetri muutudes.

Kui leiame selle parve kahe lähedase ringjoone vahelise pinnatüki pindala diferentsiaali, integreerime seda üle kogu parve ja korrutame kahega, saame pinna B pindala

$$S = \frac{4\pi}{a^2} \ .$$

Huvitav on märkida, et sellise kahemõõtmelise sfääri pindala, mille raadius on võrdne pinna B geodeetiliste ühise raadiusega, on veerand pinna B pindalast, Gaussi kõverus aga neli korda suurem. Pinda B sisaldava neljamõõtmelise sfääri kahemõõtmelise geodeetilise pinna korral on need arvud vastavalt $\frac{1}{3}$ ja 3.

Kuna pinna B kõik geodeetilised osutuvad ringjoonteks, siis asub pinnal B kaheparameetriline parv ringjooni. Nende ringjoonte keskpunktid kujutavad kahemõõtmelise pinna B^*, mis, olles pinnaga B geomeetriliselt seotud, säilub pinda B säilitava liikumiste rühma puhul ja kuulub seega pindade klassi $\{B\}$. Vahetu arvutus näitab, et pinna B^* punkti kaugus pinda B sisaldava sfääri keskpunktist on $\frac{\sqrt{3}}{6a}$. Järelikult on pind B^* iseloomustatud suurusega $a^* = 2a$.

Kerge on veenduda, et kõigi pinna B punkti M läbivate geodeetiliste joonte keskpunktid kujutavad pinnal B^* geodeetilise. Seega ei kehti üksühene vastavus mitte ainult pinna B geodeetiliste ja pinna B^* punktide, vaid ka pinna B^* geodeetiliste ja pinna B punktide vahel.

Võrdustest (11.6), (11.5), (11.4), (11.1), (11.2) ja (11.3) saame

$$d\bar{M}^* = \frac{1}{2}\omega^2\bar{e}_2 + \frac{1}{2a}\omega_1^2\bar{e}_4 .$$

Siit näeme, et vektorite $\bar{e}_2$ ja $\bar{e}_4$ tasand osutub pinna B^* puutujatasandiks pinna B punkti M läbiva ja vektori $\bar{e}_1$ sihis kulgeva geodeetilise keskpunktis. Järelikult pinna B geodeetilise tasand on pinna B^* vastava puutujatasandiga täielikult ortogonaalne. Võib näidata, et ka pinna B^* geodeetilise tasand on pinna B vastava puutujatasandiga täielikult ortogonaalne.

Kirjandus.

I. И. А. Схоутен и Д. Дж. Стройк, Введение в новые методы в дифференциальной геометрии, т.II. М.-Л. 1948.

2. Yong-Chow Wong, A new curvature theory for surfaces in an Euclidean 4-space. Comment. Math. Helv. 26, 152-170 /1952/

3. С.П. Фиников, Метод внешних форм Картана. М.-Л. 1948.

4. Б.А. Розенфельд, Неевклидовы геометрии. М. 1955.

5. В. Бляшке, Введение в дифференциальную геометрию. М.1957.

6. O. Borůvka, Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace á quatre dimensions á courbure constante. C.R. Acad.Paris,187,1928, 334-336.

7. Ю. Г. Лумисте, К теории двухмерных минимальных поверхностей. II Поверхности постоянной кривизны. Рукопись ,1959.