K. Ratassepp

ALGEBRA JA TRIGONOMEETRIA

õpik gümnaasiumi IV klassile

Tartu Eesti Kirjastus

K. RATASSEPP

ALGEBRA
JA
TRIGONOMEETRIA
ÕPIK

GÜMNAASIUMI IV KLASSILE

TARTU EESTI KIRJASTUS

MATEMAATIKA ÕPIKUD GÜMNAASIUMILE.

PEATOIMETAJA: O. SILDE.

A. Vihman: Algebra õpik gümnaasiumi I klassile.
E. Etverk: Geomeetria õpik gümnaasiumi I klassile.
A. Vihman: Algebra õpik gümnaasiumi II klassile.
E. Etverk: Geomeetria õpik gümnaasiumi II klassile.
K. Maasik: Algebra õpik gümnaasiumi III klassile.
K. Ratassepp: Trigonomeetria õpik gümnaasiumi III klassile.
K. Ratassepp: Algebra ja trigonomeetria õpik gümnaasiumi IV klassile.
E. Etverk: Stereomeetria õpik gümnaasiumi IV klassile.
G. Rägo: Matemaatika õpik gümnaasiumi V klassile.
L. Ruumet: Matemaatika täiendusõpik gümnaasiumi reaalharu III ja IV klassile.
L. Ruumet: Matemaatika täiendusõpik gümnaasiumi reaalharu V klassile.
K. Ratassepp: Matemaatilised tabelid.

II muutmata trükk.

Korrektor M. Kindlam.

AfV nr. I/0046. Trükiarv: 2150 eks. Paber: ETK paberivabrik, Tallinn; paberi kaust: 56 × 79 cm. Trükk ja brošeerimine: Trükikäitis „Postimees" Tartus. Ilmunud oktoobris 1943. Hind: Rmk. 1.80.

Sisukord.

Algebra.

Peatükk I.

Logaritm.

§ 1. Arvu kümnendlogaritm.

Mõnede tehete teostamist on võimalik tunduvalt kergendada, kui arvud, millega tehteid tuleb teha, kirjutame ühe ja sama aluse astmetena. Teades näiteks, et

$$32 = 2^5, \qquad 512 = 2^9 \qquad \text{ja} \qquad 16384 = 2^{14},$$

võime korrutise $32 \cdot 512$ arvutada järgmiselt:

$$32 \cdot 512 = 2^5 \cdot 2^9 = 2^{14} = 16384.$$

Arvu kirjutamine astmena kergendab eriti juurimise teostamist. Sel viisil leiame näiteks, et

$$\sqrt[7]{16384} = \sqrt[7]{2^{14}} = 2^2 = 4.$$

Samuti on võimalik kergendada jagamise ja astendamise teostamist.

Et eelkirjeldatud arvutamise kergendamise võte oleks alati rakendatav, peame oskama iga arvu kirjutada ühe ja sama aluse astmena. Valime selleks aluseks meie arvusüsteemi aluse, s. o. arvu 10. Seega peame oskama leida iga arvu a puhul niisugust astendajat x, et

$$10^x = a.$$

Niisugust arvu x nimetatakse arvu a kümnendlogaritmiks ehk logaritmiks alusel 10 ja tähistatakse sümboliga $\log a$; seega

arvu kümnendlogaritm on arv, millega kümmet astendades saame antud arvu.

Selle definitsiooni järgi

$$\log a = x, \quad \text{kui} \quad 10^x = a.$$

Elimineerides kahest viimasest võrdusest arvu x, saame võrduse

$$10^{\log a} = a;$$

elimineerides sealtsamast arvu a, saame võrduse

$$\log 10^x = x.$$

Mõlemad saadud võrdused väljendavad kümnendlogaritmi definitsiooni. Viimast neist on sobiv kasutada mõnede arvude kümnendlogaritmide leidmisel. Nii leiame näiteks, et

$$\log 1000 = \log 10^3 = 3;$$
$$\log 0{,}01 = \log 10^{-2} = -2;$$

$$\log \sqrt[3]{0{,}1} = \log \sqrt[3]{10^{-1}} = \log 10^{-\frac{1}{3}} = -\tfrac{1}{3}.$$

Järgnevatel lehekülgedel tegeleme *ainult kümnendlogaritmidega*, seepärast nimetame neid edaspidi lihtsalt logaritmideks.

Ülesanded.

1. Kujuta järgmised arvud kümne astmetena ja anna nende arvude logaritmid:

1. 100	2. 1000	3. 10000	4. 1000000
10	$\frac{1}{100}$	1	$\frac{1}{10000}$
$0{,}1$	$0{,}001$	$0{,}0001$	$0{,}0000001$
5. $\sqrt{10}$	6. $\sqrt[3]{10}$	7. $\sqrt[5]{10}$	8. $\sqrt[10]{10}$
$\sqrt{10^3}$	$\sqrt[3]{10^2}$	$\sqrt[5]{10^3}$	$\sqrt{10^n}$
$\sqrt{0{,}1}$	$\sqrt[3]{0{,}001}$	$\sqrt[5]{0{,}001}$	$\sqrt[4]{0{,}0001}$

2. Leia järgmiste avaldiste väärtused ja anna nende väärtuste logaritmid:

1. 10^4	2. $10^{\frac{1}{2}}$	3. $10^{-\frac{1}{2}}$
10^6	$10^{\frac{1}{3}}$	$10^{-\frac{1}{3}}$
10^{-2}	$10^{1\frac{1}{2}}$	$10^{-\frac{2}{3}}$
10^{-4}	$10^{\frac{1}{4}}$	$10^{-1\frac{1}{3}}$
10^0	$10^{2\frac{1}{4}}$	$10^{-2\frac{1}{2}}$

3. Kasutades ruut- ja kuupjuurte tabeleid, leia arvud, mille logaritmid on:

1. $\frac{1}{3}$	2. $\frac{2}{3}$	3. $\frac{1}{6}$	4. $\frac{5}{6}$
$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{3}$	$2\frac{2}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$

4. Leia järgmiste avaldiste väärtused:

1. $10^{\log 100}$	2. $10^{-\log 3}$	3. $10^{\log 6} : 10^{\log 2}$
$10^{\log 1}$	$10^{-\log 5}$	$10^{\log 20} : 10^{\log 4}$
$10^{\log 2}$	$10^{-\log 0{,}25}$	$(10^{\log 4})^2$
$10^{\log 0{,}6}$	$10^{\log 3} \cdot 10^{\log 4}$	$(10^{\log 2})^3$
$10^{\log \frac{1}{4}}$	$10^{\log 2} \cdot 10^{\log 5}$	$\sqrt{10^{\log 36}}$

§ 2. Logaritmi omadusi.

Logaritmi omaduste selgitamiseks näitame kõigepealt, et

kui arv *a* asetseb kahe arvu *p* ja *q* vahel, siis tema logaritm asetseb arvude *p* ja *q* logaritmide vahel,

s. o. kui

$$p < a < q,$$

siis ka

$$\log p < \log a < \log q,$$

Kasutades arvude p, a ja q avaldamiseks võrdusi

$$p = 10^{\log p} \qquad a = 10^{\log a} \qquad q = 10^{\log q},$$

saame

$$10^{\log p} < 10^{\log a} < 10^{\log q}.$$

Võttes aksioomina tõde, et ühe ja sama aluse 10 puhul suuremale astmele vastab ka suurem astendaja, saame

$$\log p < \log a < \log q,$$

m. o. t. t.

Eelmisest järeldub, et

arvu kasvamisel kasvab ka tema logaritm,

s. t. kui on tegemist arvudega a_1, a_2, a_3 ... ja seejuures

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n,$$

siis eelneva põhjal

$$\log a_1 < \log a_2 < \log a_3 < \ldots < \log a_n.$$

Andes nüüd võrduses

$$\log 10^x = x$$

suurusele x väärtused

$$0 \qquad 1 \qquad 2 \qquad 3 \quad \ldots$$

leiame, et arvude

$$10^0 \qquad 10^1 \qquad 10^2 \qquad 10^3 \quad \ldots$$

ehk arvude

$$1 \qquad 10 \qquad 100 \qquad 1000 \quad \ldots$$

logaritmid on vastavalt

$$0 \qquad 1 \qquad 2 \qquad 3 \quad \ldots$$

Sellest näeme kõigepealt, et

arvu 1 logaritm on 0.

Et iga arv, mis on suurem kui 1, kas asetseb reas 1, 10, 100 ... või peitub selle rea kahe arvu vahel, siis iga niisuguse arvu logaritm kas asetseb reas 0, 1, 2, ... või peitub selle rea kahe arvu vahel. Sellest järeldame, et

arvust 1 suuremate arvude logaritmid on positiivsed.

Andes samas võrduses suurusele x väärtused

$$0 \quad -1 \quad -2 \quad -3 \quad \ldots$$

leiame, et arvude

$$10^0 \quad 10^{-1} \quad 10^{-2} \quad 10^{-3} \quad \ldots$$

ehk arvude

$$1 \quad 0{,}1 \quad 0{,}01 \quad 0{,}001 \quad \ldots$$

logaritmid on vastavalt

$$0 \quad -1 \quad -2 \quad -3 \quad \ldots$$

Et iga arv, mis on suurem kui 0, kuid väiksem kui 1, kas asetseb reas 1, 0,1, 0,01, ... või peitub selle rea kahe arvu vahel, siis iga niisuguse arvu logaritm kas asetseb reas 0, —1, —2, ... või peitub viimase rea kahe arvu vahel. Sellest järeldame, et

arvust 1 väiksemate positiivsete arvude logaritmid on negatiivsed.

Kokkuvõttes võime öelda, et

positiivse arvu logaritm on kas negatiivne, null või positiivne, vastavalt sellele, kas see positiivne arv on väiksem kui 1, võrdne 1-ga või on suurem kui 1.

Eelnevast selgub ka, et astendaja x igal väärtusel on 10^x positiivne; seega ei leidu niisugust x-väärtust, mille puhul 10^x oleks negatiivne, ja järelikult

negatiivsetel arvudel ei ole logaritme.

Ülesanded.

5. Arvuta järgmiste astmete väärtused:

1.	$(\frac{1}{2})^2$	2.	$0{,}2^{-2}$	3.	$0{,}16^{\frac{1}{2}}$	4.	1^3	5.	3^{-2}
	$(\frac{1}{2})^3$		$0{,}2^{-1}$		$0{,}16^{\frac{1}{4}}$		1^4		3^{-1}
	$(\frac{1}{2})^4$		$0{,}2^0$		$0{,}16^{\frac{3}{4}}$		1^5		3^2

ja järelda, missuguste positiivsete astendatavate puhul on kehtiv lause, et suuremale astmele vastab suurem astendaja.

6. Leia, missugused järgmistest logaritmidest on positiivsed ja missugused on negatiivsed:

$$\log 2, \quad \log \tfrac{1}{3}, \quad \log 0{,}04, \quad \log 600.$$

7. Leia, missuguse kahe järjestikuse täisarvu vahel asetseb igaüks järgmistest logaritmidest:

$$\log 5, \quad \log 20, \quad \log 5300,$$

$$\log 0{,}3, \quad \log 0{,}007, \quad \log \tfrac{1}{16}.$$

§ 3. Logaritmi graafik.

Et kujutada graafiliselt log a muutumist arvu a muutumisel, tuleks anda a-le rida väärtusi, arvutada neile vastavad log a väärtused, kujutada saadud a ja log a väärtuspaarid punktidena ja ühendada need punktid kõvera abil. Etteantud arvu logaritmi arvutamine nõuab aga, nagu näeme järgmises paragrahvis, tunduvat aega ja vaeva. Et kiiremini eesmärgile jõuda, selleks kasutame vastupidist teed: anname ette mitte a väärtused, vaid mõned lihtsad log a väärtused, nagu

$$-1, \quad -\tfrac{1}{2}, \quad -\tfrac{1}{4}, \quad 0, \quad \tfrac{1}{4}, \quad \tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{3}{4}, \quad 1,$$

ja arvutame neile logaritmi väärtustele vastavad a väärtused. Viimaste arvutamine toimub järgmisel viisil:

$$\text{kui } \log a = -1, \text{ siis } a = 10^{-1} = 0{,}1;$$

$$\text{seega } \log 0{,}1 = -1;$$

$$\text{kui } \log a = -\tfrac{1}{2}, \text{ siis } a = 10^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{0{,}1} \approx 0{,}32;$$

$$\text{seega } \log 0{,}32 \approx -\tfrac{1}{2} = -0{,}5;$$

$$\text{kui } \log a = -\tfrac{1}{4}, \text{ siis } a = 10^{-\frac{1}{4}} = \sqrt{\sqrt{0{,}1}} \approx 0{,}56;$$

$$\text{seega } \log 0{,}56 \approx -\tfrac{1}{4} = -0{,}25;$$

. . . .

Niiviisi arvutust jätkates saame koostada järgmise tabeli:

a	0,1	0,32	0,56	1	1,78	3,16	5,62	10
$\log a$	—1	—0,5	—0,25	0	0,25	0,50	0,75	1

Saadud tabeli põhjal joonestame logaritmi graafiku (joonis 1), võttes arvu a kujutamisel ühikuks 10 mm ja $\log a$ kujutamisel ühikuks 100 mm.

Joonestatud graafikust saame leida 0,1 ja 10 vahel asetsevate arvude logaritme. Näiteks on

$$\log 2 \approx 0{,}30 \qquad \log 5 \approx 0{,}70 \qquad \log 9 \approx 0{,}95.$$

Seda graafikut saame kasutada ka vastupidiseks ülesandeks: määrata —1 ja +1 vahel asetsevatele logaritmidele vastavaid arve.
Näiteks leiame, et

$$\text{kui } \log a = 0{,}54, \text{ siis } a \approx 3{,}5.$$

Graafikust leitavad $\log a$ ja a väärtused on l i g i k a u d s e d. Suurema täpsuse saavutamiseks, kui seda võimaldab joonis, tuleb kasutada numbrilisi võtteid.

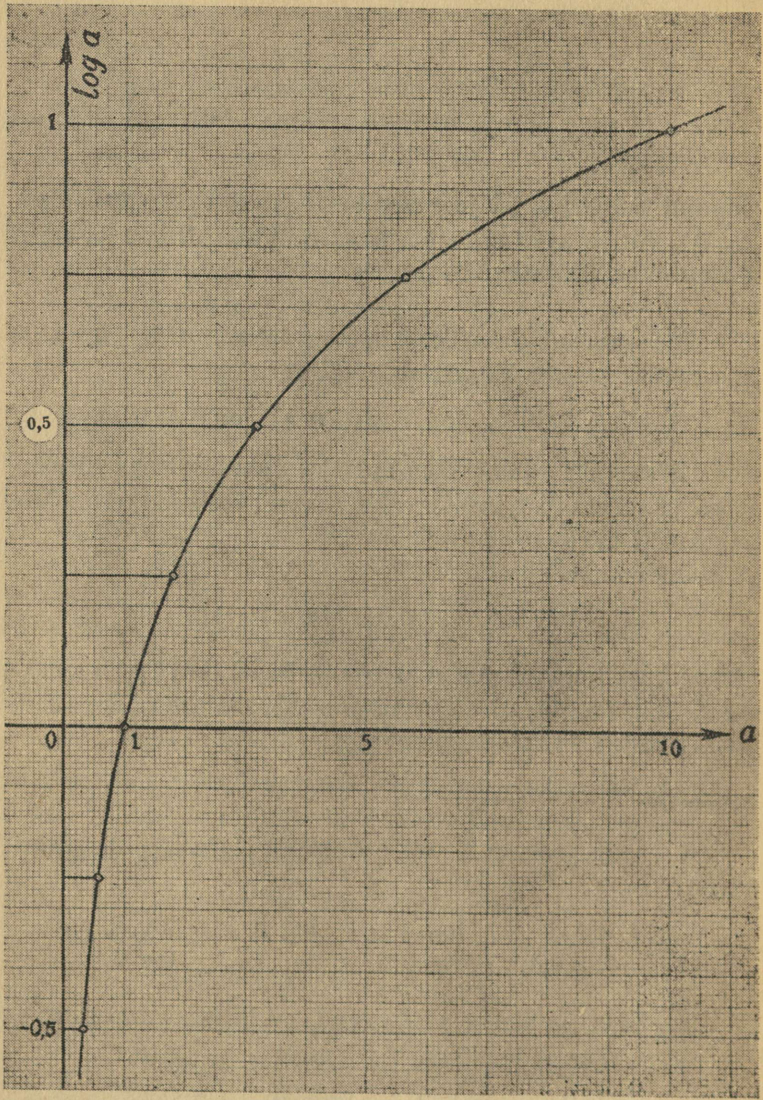
Ülesanded.

8. Leia joonise 1 abil järgmiste logaritmide väärtused:

$\log 3$, $\log 4$, $\log 5$, $\log 8$,
$\log 0{,}4$, $\log 0{,}5$, $\log 0{,}7$, $\log 0{,}8$.

9. Leia joonise 1 abil arvud, mille logaritmid on:

0,14, 0,20, 0,54, 0,85,
—0,10, —0,20, —0,25, —0,40.



Joonis 1.

§ 4. Logaritmi arvutamise näide.

Olgu antud mingi arv, näiteks arv 3. Leiame selle arvu logaritmi arvutamise teel. Tähistame otsitava tähega x. Logaritmi definitsiooni kohaselt arv x peab rahuldama nõuet

$$10^x = 3.$$

Tähistame otsitava logaritmi täisosa tähega α, kümnendikud tähega β, sajandikud tähega γ jne.; siis astendaja x esineb kujul

$$x = \alpha + \frac{\beta}{10} + \frac{\gamma}{100} + \cdots$$

Nõude kohaselt

$$10^{\alpha + \frac{\beta}{10} + \frac{\gamma}{100} + \cdots} = 3.$$

Murdosa kohad α, β, γ, ... määrame üksteise järel proovimise teel. Et 10^0 ehk 1 on väiksem kui 3, seevastu 10^1 ehk 10 on aga juba suurem kui 3, siis α peab olema 0. Et leida arvu β, selleks asendame α leitud väärtusega; saame

$$10^{\frac{\beta}{10} + \frac{\gamma}{100} + \cdots} = 3.$$

Astendame viimase võrduse kummagi poole 10-ga; see annab

$$10^{\beta + \frac{\gamma}{10} + \cdots} = 59049.$$

Et $10^4 = 10000$ on väiksem kui 59049, seevastu $10^5 = 100000$ on aga juba suurem kui 59049, siis β peab olema 4. Samal viisil, nagu praegu leidsime β, leiame edasi γ. Seks asendame β leitud väärtusega ja jagame saadud võrduse kummagi poole arvuga 10^4; saame

$$10^{\frac{\gamma}{10} + \cdots} = 5{,}9049.$$

Kui kumbki võrduse pool astendada 10-ga, siis saame

$$10^{\gamma+\cdots} = 51538629,\ldots$$

kus kohad koma järel on jäetud kirjutamata.

Et 10^7 on väiksem kui $51538629,\ldots$, seevastu 10^8 aga juba suurem sellest arvust, siis $\gamma = 7$.

Seega arvu x esimesed kaks kohta on leitud ja $x = 0{,}47\ldots$, kus punktid asendavad veel tundmatuid kohti.

Asendades x võrduses $10^x = 3$ tema väärtusega, saame

$$10^{0{,}47\cdots} = 3.$$

Seega on

$$\log 3 = 0{,}47\ldots$$

Põhimõtteliselt võiks, sama teed edasi minnes, leida ka arvu x järgnevad kohad. Raskendavaks asjaoluks on vaid see, et tuleb arvutada arvude kümnendaid astmeid. Töö on aga õige lihtne, kui on kasutada arvude kümnendate astmete tabel.

Tekib küsimus, kas kümnendmurd

$$\alpha + \frac{\beta}{10} + \frac{\gamma}{100} + \cdots$$

on ratsionaalne või irratsionaalne arv. Oletame esimest. Kui x on ratsionaalne arv, siis võime teda kirjutada ikka hariliku murruna; omandagu ta peale võimalikku taandamist kuju $\frac{m}{n}$. Siis oleks

$$10^{\frac{m}{n}} = 3.$$

Astendades selle võrduse kummagi poole arvuga n, saame

$$10^m = 3^n.$$

Vasakpoolne arv koosneb vaid tegureist 2 ja 5, parempoolne arv tegureist 3. Niisuguse kahe arvu võrdumine on võimatu. Järelikult ei saa olla murdu $\frac{m}{n}$, mille puhul oleks

$$10^{\frac{m}{n}} = 3.$$

Seega kümnendmurd

$$\alpha + \frac{\beta}{10} + \frac{\gamma}{100} + \cdots$$

ei saa taanduda harilikuks murruks, teiste sõnadega, log 3 on irratsionaalne arv.

Ülesanded.

10. Arvuta log 2 ligikaudne väärtus kolmekohalise murdosaga, teades, et $1{,}024^{10} = 1{,}268$ ja $1{,}268^{10} = 10{,}72$.

§ 5. Logaritmi kirjutusviis.

Täisarvuliste astendajatega 10-ne astmeil on ka täisarvulised logaritmid;

näiteks

$$\log 10000 = \log 10^4 = 4,$$
$$\log 0{,}0001 = \log 10^{-4} = -4.$$

Võib tõestada, et kõigi teiste ratsionaalsete arvude logaritmid on irratsionaalsed. Niisugused logaritmid avalduvad lõpmatute kümnendmurdudena, mis ei taandu harilikeks murdudeks. Nii on

$$\log 3 = 0{,}47712\ \ldots,$$
$$\log 0{,}041 = -1{,}38722\ \ldots$$

Logaritmid antakse ligikaudsetena, tavaliselt kas 4, 5 või 7 kohaga. Enamik tegelikkuse poolt seatud ülesandeid ei vaja lahendamiseks enam kui neljakohalisi logaritme. Me kirjutame neid kujul

$$\log 3 = 0{,}4771,$$
$$\log 0{,}041 = -1{,}3872,$$

pidades meeles, et võrdusmärki siin üldiselt ikka tuleb mõista ligikaudse võrdumise sümbolina.

Logaritm koosneb **täisosast** ja **murdosast**; näiteks on log 473 = 2,6749; siin on logaritmi täisosa 2 ja murdosa 0,6749; edasi log 0,0854 = —1,0685; siin on täisosa —1 ja murdosa —0,0685.

On otstarbekohane logaritme kirjutada nii, et **nende murdosa igal juhul on positiivne.** Kui logaritm on negatiivne, siis liidame selle murdosaga arvu 1 ja et logaritmi väärtus ei muutuks, lahutame tema täisosast samuti arvu 1.

Näide.

$$\begin{aligned}\log 0{,}041 &= -1{,}3872 = -1 + (-0{,}3872) = \\ &= (-1 - 1) + (1 - 0{,}3872) = \\ &= -2 + 0{,}6128.\end{aligned}$$

Lühiduse otstarbel kirjutame tulemuse nii:

$$\log 0{,}041 = \bar{2}{,}6128.$$

Seda kirjutist loeme järgmiselt:

log 0,041 on kaks miinusega, koma kuuskümmend üks kakskümmend kaheksa.

Ülesanded.

11. Teisenda järgmised negatiivsed arvud nii, et nende murdosad oleksid positiivsed:

1.	2.	3.	4.
—0,6	—0,8	—1,2	—1,7
—1,0	—2,65	—3,12	—1,98
—2,046	—3,557	—4,000	—3,0021

12. Teisenda järgmised negatiivsed arvud nii, et nende murdosad oleksid negatiivsed:

1.	2.	3.	4.
$\bar{1},3$	$\bar{1},8$	$\bar{2},4$	$\bar{2},9$
$\bar{2},73$	$\bar{3},82$	$\bar{1},301$	$\bar{1},477$
$\bar{3},000$	$\bar{2},903$	$\bar{3},8062$	$\bar{4},6911$

13. Arvuta järgmised summad:

$\bar{2},1 + 1,7 \qquad \bar{1},5 + 3,2 \qquad \bar{1},2 + \bar{2},5$

$\bar{2},7 + 1,8 \qquad \bar{1},7 + \bar{1},4 \qquad \bar{3},8 + \bar{2},3$

14. Kirjuta järgmised vahed positiivse murdosaga arvudena:

$2,8 - 3,5 \qquad 0,7 - 2,4 \qquad 1,2 - 1,7$

$\bar{2},5 - 0,8 \qquad \bar{2},6 - 1,2 \qquad \bar{3},4 - 1,9$

$5,4 - \bar{1},2 \qquad 0,5 - \bar{1},6 \qquad \bar{2},3 - \bar{1},8$

15. Kirjuta järgmised korrutised positiivse murdosaga arvudena:

$3 \cdot \bar{1},2 \qquad 4 \cdot \bar{1},4 \qquad 2 \cdot \bar{2},9 \qquad 5 \cdot \bar{1},7$

$10 \cdot \bar{1},3 \qquad 10 \cdot \bar{2},4 \qquad 12 \cdot \bar{1},6 \qquad 15 \cdot \bar{1},8$

16. Kirjuta järgmised jagatised positiivse murdosaga arvudena:

$\bar{2},8 : 2 \qquad \bar{4},7 : 2 \qquad \bar{3},48 : 3 \qquad \bar{1},4384 : 2$

$\bar{1},4 : 2 \qquad \bar{3},6 : 2 \qquad \bar{2},53 : 3 \qquad \bar{2},2668 : 3$

$\bar{3},6 : 4 \qquad \bar{1},6 : 5 \qquad \bar{4},24 : 10 \qquad \bar{1},2291 : 9$

§ 6. Logaritmi täisosa määramine.

Arvu logaritmi täisosa määramisel eeldame, et negatiivsed logaritmid on ikka kirjutatud niisugusel kujul, et nende murdosad on p o s i t i i v s e d. Tõestame, et siis on kehtiv järgmine teoreem:

Arvu a korrutamisel arvuga 10^m, kus m on täisarv, jääb arvu logaritmi murdosa endiseks, täisosa aga muutub arvu m absoluutväärtuse võrra suuremaks või väiksemaks, vastavalt sellele, kas m on positiivne või negatiivne.

Tõestuseks korrutame võrduse

$$a = 10^{\log a}$$

kummagi poole arvuga 10^m; saame

$$10^m \cdot a = 10^m \cdot 10^{\log a}$$

ehk

$$10^m \cdot a = 10^{m + \log a}.$$

Logaritmi definitsiooni järgi saame viimasest võrdusest, et

$$\log (10^m \cdot a) = m + \log a;$$

sellest nähtub, et arvu $10^m \cdot a$ logaritm erineb arvu a logaritmist täisarvu m võrra; seetõttu arvu $10^m \cdot a$ ja arvu a logaritmide murdosad on samad.

Teades, et

$$\log 3 = 0{,}4771,$$

võime eespool-tõestatud teoreemi põhjal öelda, et

$\log 30 = 1{,}4771$, $\log 300 = 2{,}4771$, $\log 30000 = 4{,}4771$,
$\log 0{,}3 = \bar{1}{,}4771$, $\log 0{,}03 = \bar{2}{,}4771$, $\log 0{,}0003 = \bar{4}{,}4771$.

Neist näidetest nähtub, et logaritmi täisosa kohta on kehtivad järgmised reeglid:

1. Arvudel, mis on suuremad kui 1, on logaritmi täisosa ühe võrra väiksem selle arvu täisosa numbrite arvust.

2. Kümnendmurdudel, mis on väiksemad kui 1, on logaritmi täisosa negatiivne arv, mille absoluutväärtus võrdub nullide arvuga selle arvu alguses (kaasa arvatud ka ühelisi tähistav 0).

Nende reeglite põhjendamiseks paneme tähele, et kõik ühekohalise täisosaga arvud asetsevad 1 ja 10 vahel; järelikult nende arvude logaritmid asetsevad 0 ja 1 vahel; seega on nende arvude logaritmide täisosa 0. Nii näiteks on log 7,85 = 0,8949.

Seega on ülalantud reegel ühekohalise täisosaga arvude kohta õige. Kuid varemini tõestatud teoreemi abil saame nüüd järeldada, et reegel on kehtiv iga arvu kohta; tõepoolest, iga n-kohalise täisosaga arvu saab sama numbritega kirjutatud ühekohalise täisosaga arvust, kui seda korrutada arvuga 10^{n-1}. Selle korrutamise tagajärjel logaritmi täisosa, mis enne oli 0, saab võrdseks arvuga $n - 1$, mis on kokkukõlas ülalantud reegliga. Näiteks arvu 785 saame arvust 7,85 selle korrutamisel arvuga 10^{3-1} ehk 10^2. Et log 7,85 täisosa on 0, siis log 785 täisosa peab olema 3 — 1 ehk 2.

Korrutades ühekohalise täisosaga arvu teguriga 10^{-n}, saame arvu, mille kirjutis algab n nulliga. Sellel korrutamisel arvu logaritmi täisosa muutub n võrra väiksemaks. Et enne korrutamist arvu logaritmi täisosa oli 0, siis peale korrutamist on see $-n$. Seega on ülalantud reegel õige ka 1-st väiksemate arvude puhul.

Eeltoodust järeldub, et arvude 1 ja 10 vahel asetsevate arvude logaritmide tundmisest piisab, et saada kõigi teiste arvude logaritme. Kui näiteks on teada, et

$$\log 5{,}27 = 0{,}7218,$$

siis saame kohe log 52,7, log 527, log 5270 jne., samuti log 0,527, log 0,0527 jne.

Ülesanded.

17. Kui suured on järgmiste logaritmide täisosad?

1. log 19	2. log 82	3. log 345
log 7	log 5793	log 11
log 765,8	log 1,764	log 4739,48

18. Kui suured on järgmiste logaritmide täisosad?

1. log 0,7	2. log 0,084	3. log 0,00076
log 0,0163	log 0,00357	log 0,9837
log 0,00002	log 0,0101	log 0,00400

§ 7. Logaritmide tabel.

Nagu allpool näeme, omavad logaritmid suurt väärtust arvutusabinõuna. Logaritmide kiireks ja hõlpsaks leidmiseks on koostatud logaritmide tabelid. Et logaritmi täisosa määramine ülaltoodud eeskirja järgi toimub vaevata, siis antakse logaritmide tabeleis ainult logaritmide murdosad. Juuresolevalt näeme väljalõiget neljakohaliste logaritmide tabelist:

Num	Log
...	....
478	6794
479	6803
480	6812
481	6821
482	6830
483	6839
484	6848
...	....

Esimese veeru pealkiri N u m on ladinakeelse sõna *numerus* lühend ja tähendab arvu. Tabeli kasutamist logaritmi leidmiseks antud arvu järgi ja arvu leidmiseks antud logaritmi järgi selgitavad järgmised 4 ülesannet.

Ü l e s a n n e 1. Leia arvu 4,83 logaritm.

L a h e n d u s. Eelmises paragrahvis antud reegli järgi on selle arvu logaritmi täisosa 0; tema murdosa on niisama suur, kui arvu 483 logaritmi murdosa. Et viimane on tabeli järgi 6839, siis

$$\log 4{,}83 = 0{,}6839.$$

Ülesanne 2. Leia arv, mille logaritm on $\overline{2},6830$.

Lahendus. Et antud logaritmi täisosa on —2, siis peab otsitav arv algama kahe nulliga. Neile nullidele järgnevad kohad on määratud logaritmi murdosaga 6830. Nagu tabelist selgub, vastab sellele logaritmi murdosale arv 482. Seega

$$\overline{2},6830 = \log 0{,}0482$$

ja otsitav arv on 0,0482.

Ülesanne 3. Leia arvu 4796 logaritm.

Lahendus. Selle arvu logaritmi täisosa on 3. Tema murdosa, mida tabelis ei leidu, määrame järgmiselt. Arvu 4790 logaritmi murdosa on 6803, arvu 4800 logaritmi murdosa on 6812; seega arvu kasvades 10 võrra kasvab logaritmi murdosa 9 viimase koha ühiku võrra. Lugedes arvu ja logaritmi juurdekasvud võrdelisteks, näeme, et arvu juurdekasvule 6 vastab logaritmi juurdekasv $\frac{6 \cdot 9}{10} = 5{,}4$ ehk ümmarguselt 5 viimase koha ühikut. Seega arvu 4796 logaritmi murdosa on 6808 ja

$$\log 4796 = 3{,}6808.$$

Seda logaritmi leidmise võtet märgime kokkuvõtlikult järgmises skeemis:

$$\begin{array}{r}
\log 4790 = 3{,}6803 \\
6 \qquad\quad 5 \\
\hline
\log 4796 = 3{,}6808
\end{array}$$

Ülesanne 4. Leia arv, mille logaritm on 1,6836.

Lahendus. Murdosale 6830 vastab arvude veerus 482 ehk 4820; murdosa kasvades 9 viimase koha ühiku võrra kasvab arv ise 10 võrra; lugedes logaritmi ja arvu juurdekasvud võrdelisteks, näeme, et murdosa juurdekasvule 6 vastab arvu juurdekasv $\frac{6}{9} \cdot 10$ ehk $\frac{20}{3}$ ehk ümmarguselt 7; seega on otsitava arvu numbrid 4827. Et otsitava arvu logaritmi täisosa on 1, siis arv ise on 48,27. Seda arvu leidmise võtet märgime kokkuvõtlikult järgmises skeemis:

$$\begin{array}{r} 1{,}6830 = \log\ 48{,}20 \\ 6 \qquad\quad\ \ 7 \\ \hline 1{,}6836 = \log\ 48{,}27 \end{array}$$

Ülesanded.

19. Kirjuta järgmiste arvude logaritmid, määrates nende täisosa peast ja võttes nende murdosa tabelist:

1.	2.	3.	4.
19	23	37	65
74	79	86	98
130	280	450	890
274	338	641	973
497	521	763	888

20. Kasutades logaritmide tabelit, leia järgmiste sümbolite väärtused:

1.	2.	3.	4.
log 30	log 300	log 0,3	log 0,03
log 700	log 0,7	log 7000	log 0,007
log 86	log 8,6	log 860	log 0,0086
log 4,83	log 4830	log 0,483	log 0,000483
log 958	log 95800	log 9,58	log 0,00958

21. Leia logaritmide tabeli abil järgmiste arvude logaritmid:

1.	2.	3.	4.
0,87	0,34	0,575	0,982
1,4	5,7	3,79	8,46
60,8	47,3	59,7	78,2
0,05	0,067	0,0145	0,0653
0,0082	0,0195	0,00418	0,000781

22. Leia logaritmide tabeli abil arvud, mille logaritmid on:

1. 0,0719	2. 0,2068	3. 1,2856
2,6902	1,7993	3,9823
$\bar{1},4314$	0,8751	$\bar{2},9685$
3,2989	2,8007	0,5988
$\bar{2},1790$	$\bar{1},2765$	$\bar{1},7050$

23. Kasutades logaritmide tabelit, määra järgmiste arvude logaritmid:

1. $1{,}3 \cdot 10^4$	2. $5{,}8 \cdot 10^6$	3. $9{,}7 \cdot 10^8$
$38{,}7 \cdot 10^{-2}$	$59{,}6 \cdot 10^{-4}$	$7{,}54 \cdot 10^{-6}$
$0{,}084 \cdot 10^{-3}$	$0{,}62 \cdot 10^{-5}$	$0{,}0092 \cdot 10^{-4}$

24. Leia logaritmide tabeli abil järgmiste arvude logaritmid:

1. 2582	2. 3094	3. 6768	4. 8346
35,74	56,65	580,8	7,344
7,833	0,06348	95720	0,6104
0,4560	1,745	0,6389	9,372
0,005962	0,0009834	837,5	748900

25. Leia tabeli abil arvud, mille logaritmid on:

1. 0,9157	2. 1,9482	3. 2,9892
2,7106	0,8290	1,9040
$\bar{1},6174$	$\bar{2},6613$	$\bar{1},6450$
$\bar{3},3394$	$\bar{1},4526$	$\bar{2},0316$
0,8735	$\bar{3},7908$	$\bar{4},6080$

26. Leia tabeli abil järgmiste arvude logaritmid, andmeid kohaselt ümmardades:

1. 6538,76	2. 903764	3. 10,8975
72,7462	5,69728	0,010083
8,56956	1850063	0,00207486
0,0123456	0,0076543	9754682
0,00078935	0,0891347	34678,910

27. Allpool on antud rida logaritme. Leia tabeli abil neile vastavad arvud, andmeid kohaselt ümmardades:

1.	2.	3.
1,17613	0,010574	$\bar{1}$,45667
2,39875	0,377592	$\bar{2}$,700937
3,04967	0,476150	$\bar{4}$,790164
0,48927	1,93456	0,39848
0,03584	3,72184	0,00478

28. Kui suur on

log log 10 log log 2 log log 6310?

29. Leia arv x, teades, et $\log\log x = \bar{2},9210$.

30. Leia arv x, teades, et $\log\log x = \bar{1},6128$.

§ 8. Avaldiste logaritmimine.

Avaldise logaritmi avaldamist avaldises esinevate arvude logaritmide abil nimetatakse avaldise logaritmimiseks.

Logaritmimine toimub järgmise nelja teoreemi alusel.

1. Korrutise logaritm võrdub tegurite logaritmide summaga.

T õ e s t u s. Olgu korrutises kaks tegurit a ja b ja olgu teada ka nende tegurite logaritmid. Logaritmi definitsiooni järgi kirjutame

$$a = 10^{\log a}$$

ja

$$b = 10^{\log b}.$$

Korrutades nende võrduste vasakuid pooli teineteisega ja paremaid pooli teineteisega, leiame, et

$$ab = 10^{\log a} \cdot 10^{\log b} = 10^{\log a + \log b}.$$

Logaritmi definitsiooni põhjal järeldame siit, et

$$\log (ab) = \log a + \log b.$$

Saab tõestada, et väide on õige ka siis, kui tegureid on enam kui kaks. Olgu korrutises kolm tegurit a, b ja c.

Siis eelmise põhjal

$$\log(abc) = \log(ab \cdot c) = \log ab + \log c =$$
$$= \log a + \log b + \log c.$$

2. Jagatise logaritm võrdub jagatava ja jagaja logaritmide vahega.

T õ e s t u s. Olgu jagatav a ja jagaja b. Et

$$a = 10^{\log a}$$

ja

$$b = 10^{\log b},$$

siis

$$\frac{a}{b} = \frac{10^{\log a}}{10^{\log b}} = 10^{\log a - \log b}.$$

Logaritmi definitsiooni põhjal järeldub siit, et

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

J ä r e l d u s. Võttes jagatise logaritmi valemis $a=1$ ja sellele vastavalt $\log a = 0$, leiame

$$\log \frac{1}{b} = -\log b,$$

millest nähtub, et

arvu ja selle pöörde logaritmid erinevad ainult märgilt.

3. Astme logaritm võrdub astendatava logaritmi ja astendaja korrutisega.

T õ e s t u s. Olgu astendatav a ja astendaja n. Astendades võrduse

$$a = 10^{\log a}$$

kummagi poole arvuga n, saame

$$a^n = (10^{\log a})^n$$

ehk

$$a^n = 10^{n \log a}.$$

Logaritmi definitsiooni põhjal järeldub viimasest võrdusest, et

$$\log a^n = n \log a.$$

4. Juure logaritm võrdub juuritava logaritmi ja juurija jagatisega.

T õ e s t u s. Olgu juuritav a ja juurija n. Võttes võrduse

$$a = 10^{\log a}$$

mõlemast poolest n-da juure, saame

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{10^{\log a}}$$

ehk

$$\sqrt[n]{a} = 10^{\frac{\log a}{n}}.$$

Logaritmi definitsiooni põhjal järeldub viimasest võrdusest, et

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{\log a}{n}.$$

Ülesanded.

31. Logaritmi järgmised avaldised:

1.	pq	pqr	$3\,ab$	$2\,\pi r$	$9 \cdot 78\,mn$
2.	$\frac{p}{q}$	$\frac{pq}{r}$	$\frac{ab}{cd}$	$\frac{5\,mn}{abc}$	$\frac{47\,uv}{8\,st}$

32. Logaritmi järgmised avaldised:

1.	a^2	a^4	$(ab)^3$	ab^4	$a^3 : b^2$
2.	$a^2\,b^3$	$2\pi r^2$	$\frac{4}{3}\,\pi r^3$	$\frac{1}{3}\,\pi r^2 h$	$\frac{p^2}{q^3\,r^2}$
3.	$\sqrt{a}$	$\sqrt[3]{a}$	$\sqrt[5]{ab}$	$a\sqrt[3]{b}$	$\sqrt{a^3}$
4.	$\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$	$\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^4}$	$\sqrt[4]{(ab)^5}$	$\sqrt[4]{ab^5}$	$\frac{a}{\sqrt{b}}$

§ 9. Logaritm arvutusvahendina.

Mitmekohaliste arvude korrutiste, jagatiste, astmete ja juurte otsene arvutamine on üldiselt tülikas töö. Seejuures tuleb sageli arvutada hulgaliselt ka niisuguseid kohti, mis tulemuses tuleb kustutada, sest et neil kohtadel ülesande loomu järgi ei ole mõtet.

Olgu näiteks arvutada $0{,}4726^5$. Otsene arvutamine annaks tulemuses 20 kohta koma järel; neist kohtadest säilitaksime vahest kõigest 4 ja kustutaksime kõik 16 ülejäänut.

Väga tunduvat aja ja vaeva kokkuhoidu võimaldab siin logaritmide kasutamine. Seda selgitavad järgmised ülesanded.

Ülesanne 1. Arvuta $0{,}4726^5$.

Lahendus. Tähistame otsitava tähega x; siis

$$x = 0{,}4726^5.$$

Siit

$$\log x = 5 \cdot \log 0{,}4726.$$

Leiame nüüd tabeli abil log 0,4726, korrutame selle 5-ga ja otsime saadusele kui logaritmile vastava arvu x. Töö kujuneb nii:

$$\log 0{,}4726 = \bar{1}{,}6745,$$

$$5 \log 0{,}4726 = \bar{2}{,}3725,$$

seega

$$\log x = \bar{2}{,}3725$$

ja

$$x = 0{,}02358$$

ehk ümmardatult

$$0{,}4726^5 = 0{,}0236.$$

Ülesanne 2. Arvuta jagatis

$$\frac{17{,}85^2 \cdot 9{,}357}{0{,}3814 \cdot 5{,}382^3}.$$

Lahendus. Tähistame otsitava tähega x. Siis

$$\log x = 2 \cdot \log 17{,}85 + \log 9{,}357 -$$
$$- (\log 0{,}3814 + 3 \cdot \log 5{,}382).$$

Arvutamisi võib korraldada järgmise skeemi kohaselt:

$$\begin{array}{llr}
2 \cdot \log 17{,}85 & = 2 \cdot 1{,}2516 = 2{,}5032 & \\
\log 9{,}357 & = \phantom{2 \cdot 1{,}2516 =} 0{,}9711 & \\
\hline
 & & 3{,}4743 \\
\log 0{,}3814 & = \phantom{2 \cdot 1{,}2516 =} \bar{1}{,}5814 & \\
3 \cdot \log 5{,}382 & = 3 \cdot 0{,}7310 = 2{,}1930 & \\
\hline
 & & 1{,}7744 \\
\hline
 & \log x = & 1{,}6999 \\
 & x = 50{,}11. &
\end{array}$$

Ü l e s a n n e 3. Arvuta jagatis

$$\frac{\sqrt{a}\,\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[5]{c}},$$

kui $a = 0{,}07845$, $b = 10{,}68$ ja $c = 3984$.

L a h e n d u s. Tähistame otsitava tähega x. Avaldist logaritmides saame siis, et

$$\log x = \frac{1}{2} \log a + \frac{2}{3} \log b - \frac{1}{5} \log c.$$

Tähtede antud arvulistel väärtustel on seega

$$\log x = \frac{1}{2} \log 0{,}07845 + \frac{2}{3} \log 10{,}68 - \frac{1}{5} \log 3984.$$

Arvutustööd võib korraldada järgmise skeemi kohaselt:

$$\begin{array}{llr}
\frac{1}{2} \log 0{,}07845 & = \frac{1}{2} \cdot \bar{2}{,}8946 = \bar{1}{,}4473 & \\
\frac{2}{3} \log 10{,}68 & = \frac{2}{3} \cdot 1{,}0286 = 0{,}6857 & \\
\hline
 & & 0{,}1330 \\
\frac{1}{5} \log 3984 & = \frac{1}{5} \cdot 3{,}6003 = & 0{,}7201 \\
\hline
 & \log x = & \bar{1}{,}4129 \\
 & x = 0{,}2588. &
\end{array}$$

Ülesanne 4. Arvuta

$$\sqrt[5]{\frac{a^2 x^3}{(a^2+x)^4}},$$

kui $a = 14{,}9$ ja $x = 31{,}5$.

Lahendus. Tähistame otsitava tähega u. Avaldist u logaritmides saame:

$$\log u = \tfrac{1}{5}\,[2 \log a + 3 \log x - 4 \log (a^2 + x)].$$

Asetades tähtede asemele nende väärtused leiame, et

$$\log u = \tfrac{1}{5}\,[2 \log 14{,}9 + 3 \log 31{,}5 - 4 \log (14{,}9^2 + 31{,}5)].$$

Arvutussammud on järgmised:

määrame püstsulgudes seisva avaldise esimese kahe liikme summa;

arvutame ümmargustes sulgudes seisva avaldise;

leiame püstsulgudes seisva avaldise kolmanda liikme;

määrame log u ja selle järgi u väärtuse.

Arvutustööd võib korraldada järgmiselt:

$$\begin{array}{r}
2 \log 14{,}9 = 2 \cdot 1{,}1732 = 2{,}3464 \\
3 \log 31{,}5 = 3 \cdot 1{,}4983 = 4{,}4949 \\
\hline
6{,}8413
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
\log 14{,}9^2 = 2{,}3464 \\
14{,}9^2 = 222 \\
31{,}5 \\
\hline
14{,}9^2 + 31{,}5 = 253{,}5
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
4 \log 253{,}5 = 4 \cdot 2{,}4040 = 9{,}6160 \\
\hline
5 \log u = \overline{3},2253 \\
\log u = \overline{1},4451 \\
u = 0{,}2787.
\end{array}$$

Ülesanded.

33. Arvuta logaritmide abil järgmised korrutised ja kontrolli saadused, logaritme kasutamata:

$2{,}36 \cdot 64{,}4 \qquad 3{,}28 \cdot 6{,}95 \qquad 2{,}64 \cdot 32{,}5$

34. Arvuta logaritmide abil järgmised korrutised:

1. $23{,}6 \cdot 567$
   $15{,}68 \cdot 2{,}968$
   $7462 \cdot 0{,}009517$
   $808{,}2 \cdot 0{,}0008438$
   $0{,}9876 \cdot 0{,}05412$

2. $8{,}34 \cdot 16{,}9 \cdot 671$
   $6{,}125 \cdot 0{,}8032 \cdot 0{,}01879$
   $15{,}09 \cdot 306{,}2 \cdot 0{,}07654$
   $70{,}06 \cdot 0{,}007825 \cdot 652$
   $0{,}0714 \cdot 0{,}6398 \cdot 0{,}0043$

35. Arvuta logaritmide abil järgmised jagatised ja kontrolli saadused, logaritme kasutamata:

$38{,}1 : 5{,}12$ $\quad 2880 : 6{,}81$ $\quad 389 : 604$

36. Arvuta logaritmide abil järgmised jagatised:

1. $\dfrac{802}{44390}$ $\quad \dfrac{19{,}84}{5{,}912}$ $\quad \dfrac{100{,}5}{567{,}8}$

2. $\dfrac{4{,}062}{0{,}5968 \cdot 3{,}92}$ $\quad \dfrac{47{,}08 \cdot 6{,}082}{17{,}86}$ $\quad \dfrac{35{,}84}{3{,}265 \cdot 7{,}602}$

3. $\dfrac{1{,}054 \cdot 36{,}96}{15{,}72 \cdot 4{,}006}$ $\quad \dfrac{16{,}68 \cdot 0{,}9508}{19{,}88 \cdot 0{,}08616}$ $\quad \dfrac{0{,}1058 \cdot 0{,}04052}{0{,}08465 \cdot 0{,}009061}$

37. Arvuta logaritmide abil järgmised astmed ja kontrolli saadused, logaritme kasutamata:

$50{,}4^2$ $\quad 45{,}9^3$ $\quad 3{,}93^3$ $\quad 14{,}8^4$

38. Arvuta logaritmide abil järgmised astmed:

753^3 $\quad 502^4$ $\quad 645^5$ $\quad 22{,}1^{10}$

39. Arvuta logaritmide abil järgmised astmed:

1. $1{,}793^3$
   $29{,}95^4$
   $1{,}057^5$
   $0{,}0789^2$
   $0{,}7364^3$

2. $31 \cdot 19^4$
   $89^2 \cdot 38^3$
   $\left(\dfrac{15}{23}\right)^5$
   $\left(\dfrac{85}{74}\right)^{-2}$
   $\left(\dfrac{113}{355}\right)^3$

3. $(3{,}142 \cdot 2{,}718)^3$
   $\left(\dfrac{54{,}86}{63{,}58}\right)^2$
   $\left(\dfrac{7{,}473}{5{,}086}\right)^5$
   $\left(\dfrac{0{,}9085}{1{,}456}\right)^{-1}$
   $\left(\dfrac{0{,}5947}{0{,}0506}\right)^{-3}$

40. Arvuta logaritmide abil järgmised juured:

$\sqrt{49,7}$ $\quad\sqrt{0,0635}$ $\quad\sqrt{0,935}$ $\quad\sqrt{70,4}$

$\sqrt[3]{756}$ $\quad\sqrt[3]{0,00402}$ $\quad\sqrt[5]{43600}$ $\quad\sqrt[6]{0,171}$

41. Arvuta logaritmide abil järgmised juured:

1. $\sqrt{13}$ 2. $\sqrt[3]{19}$ 3. $\sqrt[5]{187}$

$\sqrt{35}$ $\quad\sqrt[3]{2058}$ $\quad\sqrt[4]{5431}$

$\sqrt{0,7543}$ $\quad\sqrt[3]{0,9048}$ $\quad\sqrt[5]{0,0784}$

$\sqrt{3,845}$ $\quad\sqrt[3]{0,00864}$ $\quad\sqrt[4]{0,3580}$

$\sqrt{\frac{95}{74}}$ $\quad\sqrt[3]{45\frac{3}{7}}$ $\quad\sqrt[5]{\frac{29}{52}}$

42. Arvuta logaritmide abil järgmised juured:

1. $\sqrt{17^3}$ 2. $\sqrt[3]{109^2}$ 3. $\sqrt[4]{75^3}$

$\sqrt[5]{11,28^2}$ $\quad\sqrt[4]{0,917^3}$ $\quad\sqrt[3]{1,234^5}$

$\sqrt[3]{0,872^4}$ $\quad\sqrt{0,0576^3}$ $\quad\sqrt[5]{0,0098^3}$

$\sqrt[4]{\left(\frac{23}{29}\right)^3}$ $\quad\sqrt[3]{\left(\frac{10}{57}\right)^2}$ $\quad\sqrt{\left(\frac{355}{113}\right)^5}$

43. Logaritmi järgmised avaldised:

1. mn^2 2. $\sqrt{ab^2c^3}$ 3. $3m^2 : \sqrt{7n^3}$

$(ax)^3$ $\quad ab^2\sqrt[3]{c^2}$ $\quad\sqrt{a} : \sqrt{b^2}$

$\frac{5a^4}{17h^5}$ $\quad\sqrt{\frac{pq}{s^3}}$ $\quad\sqrt{a\sqrt{b}}$

44. Arvuta logaritmide abil järgmiste avaldiste väärtused:

1. $\dfrac{2{,}68^2 \cdot 19{,}64}{586{,}8}$ 2. $\dfrac{0{,}876 \cdot \sqrt{72}}{8{,}405}$

$\dfrac{4{,}56^3 \cdot 0{,}08824}{36{,}54 \cdot 0{,}6502}$ $\dfrac{1{,}06\sqrt[3]{3{,}867}}{45{,}66\sqrt{0{,}5480}}$

$\dfrac{0{,}964^3 \cdot 0{,}4982}{80{,}26 \cdot 0{,}346^2}$ $\sqrt{0{,}382\sqrt{0{,}6666}}$

45. Logaritmi järgmised avaldised:

1. $(a+x)^3$ 2. $\dfrac{a-b}{m}$ 3. $\sqrt{\dfrac{ax}{a-x}}$

$24a^2(a+x)^5$ p^2+q^2 $\dfrac{ax}{2\sqrt{a^2+x^2}}$

$\dfrac{(a-b+c)^2}{\sqrt{3abc}}$ $\sqrt{l^2-h^2}$ $\sqrt[3]{H(H^2-a^2)}$

$\dfrac{(m-n)^2}{(m+1)^2}$ $\dfrac{1}{a(m+n)^2}$ $\sqrt[5]{m^2(m+x)^3}$

46. Arvuta logaritmide abil järgmiste avaldiste väärtused:

1. $(735{,}4 + 278{,}9) : 51{,}43$ 2. $\sqrt{32{,}5^2 + 49{,}9^2}$

$\pi(66{,}44 - 39{,}87)^2$ $\sqrt{83{,}71^2 - 58{,}17^2}$

$\pi(7{,}69^2 - 3{,}24^2)$ $\sqrt{25{,}43(25{,}43^2 - 6{,}72^2)}$

$(1{,}07^{10} - 1) : (1{,}07 - 1)$ $\sqrt[5]{0{,}984^2(0{,}984 + 1{,}456)^3}$

47. Lahenda logaritmide abil järgmised võrrandid:

1. $3{,}518x = 1$ 2. $x^3 = \dfrac{0{,}9874}{0{,}0301}$

$x^2 = 0{,}9716$ $x^3 = \dfrac{2{,}48 \cdot 792}{\pi}$

$\dfrac{22}{7}x^2 = 10$ $x^5 = 300$

$9x^3 = 84{,}1$ $29x^4 = 17$

$x^2 = \sqrt[3]{42}$ $\sqrt{x} = \sqrt[3]{120}$

48. Olgu $F = \frac{Pv^2}{2gs}$. Arvuta F väärtus, kui $P = 0{,}78$, $v = 3{,}25$, $g = 9{,}81$, $s = 12{,}7$.

49. Olgu $S = \sqrt[3]{36\pi\, V^2}$. Arvuta S väärtus, kui $V = 0{,}4892$.

50. Olgu $V = \sqrt{\frac{S^3}{36\pi}}$. Arvuta V väärtus, kui $S = 21{,}65$.

51. Olgu $C = gh - \sqrt{gh}$. Arvuta C väärtus, kui $g = 9{,}81$ ja $h = 129$.

52. Olgu $s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$. Arvuta s väärtus, kui $a = 37{,}4$, $n = 9$ ja $q = 1{,}28$.

53. Olgu $v^2 = u^2 + 2gs$. Arvuta v väärtus, kui $u = 26{,}4$, $g = 9{,}81$ ja $s = 27{,}35$.

54. Risttahuka põhjaks on ruut küljega 0,4578 m; risttahuka kõrgus on 0,6834 m. Arvuta risttahuka ruumala.

55. Kolmnurga alus on 4,860 meetrit, kolmnurga kõrgus on 0,7692 meetrit. Arvuta kolmnurga pindala.

56. Olgu ringi raadius 25,38 cm. Kui pikk on selle ringjoone kaar, mis vastab kesknurgale 34°28′?

57. Täisnurkse kolmnurga kõrgus jaotab hüpotenuusi osadeks 193,6 mm ja 78,4 mm. Arvuta kolmnurga kõrgus.

58. Ristküliku küljed on 123,5 m ja 376,4 m. Arvuta ristkülikuga pindvõrdse ruudu külg.

59. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 4560 m ja 8407 m. Arvuta kolmnurga hüpotenuus.

60. Risttahuka servad on 143 cm, 206 cm ja 844 cm. Arvuta risttahuka diagonaal.

61. Vaskkuubid servadega 13,84 cm ja 8,63 cm sulatatakse üheks kuubiks. Kui suur on selle kuubi serv?

62. Ringisse joonestatud korrapärase 8-, 12-, ja 10-nurga külje pikkused on raadiuse 1 puhul vastavalt:

$$\sqrt{2-\sqrt{2}} \qquad \sqrt{2-\sqrt{3}} \qquad \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Arvuta nende avaldiste väärtused logaritmide abil.

63. Lahenda logaritmide abil järgmised võrrandid:

1. $5^x = 3125$ 3. $4^x = 4096$ 5. $7^x = 1200$
2. $6^s = 30$ 4. $1{,}03^n = 2{,}5$ 6. $1{,}05^t = 3$

64. Lahenda järgmised võrrandid:

1. $2^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{12}$ 5. $10^x = \sqrt[x]{5}$
2. $2^{2x} = 3^{x+1}$ 6. $x^{\log x} = 100x$
3. $0{,}2^x = 0{,}4$ 7. $\sqrt[4]{x^{\log x}} = 10$
4. $0{,}3^x = 0{,}9$ 8. $5^{\log x} = 2x$

§ 10. Logaritmid kümnest erinevail aluseil.

Varemantud logaritmi definitsiooni järgi nimetatakse arvu logaritmiks alusel 10 sellist arvu, millega kümmet astendades saame antud arvu. Üldistame nüüd logaritmi definitsiooni ja sõnastame ta nõnda:

arvu logaritmiks antud alusel nimetatakse niisugust arvu, millega logaritmi alust astendades saame antud arvu.

Selle definitsiooni järgi on x arvu a logaritm alusel b, kui

$$b^x = a.$$

Arvu a logaritmi alusel b märgitakse sümboliga

$$\log_b a.$$

Vastavalt logaritmi definitsioonile on näiteks

$$\log_2 8 = 3, \text{ sest } 2^3 = 8;$$

$$\log_3 \tfrac{1}{3} = -1, \text{ sest } 3^{-1} = \tfrac{1}{3};$$

$$\log_{0,2} 25 = -2, \text{ sest } 0{,}2^{-2} = 25.$$

Logaritmide aluseks kõlbab iga positiivne arv, välja arvatud arv 1. Viimane ei kõlba logaritmide aluseks, sest kõik arvu 1 astmed on võrdsed. Ka negatiivsed arvud ei kõlba logaritmide alusteks, sest negatiivse arvu mõnel astmel, nagu

$$(-2)^{\frac{1}{2}}, \quad (-10)^{\frac{1}{4}}, \quad (-10)^{-\frac{1}{2}},$$

puudub mõte. Tegeliku arvutamise seisukohalt ei oma logaritmid kümnest erinevail aluseil suuremat tähtsust, sest arvutamisel kasutatakse ikka kümnendlogaritme.

Kui arvude kümnendlogaritmid on teada, saame määrata arvude logaritme ka teistel alustel. Selgitame seda järgmise ülesandega.

Ülesanne. Leia $\log_3 7$, kasutades kümnendlogaritmide tabeleid.

Lahendus. Tähistame otsitava tähega x. Siis

$$x = \log_3 7$$

ehk

$$3^x = 7.$$

Logaritmides viimase võrduse mõlemaid pooli, saame

$$x \log 3 = \log 7,$$

seega

$$x = \frac{\log 7}{\log 3}.$$

Võttes tabelist log 7 ja log 3, saame

$$x = \frac{0{,}8451}{0{,}4771}$$

ehk

$$\log_3 7 = 1{,}771.$$

Ülesanded.

65. Asenda järgmised võrdused teistega, kasutades ühtainsat logaritmi sümbolit:

1. $32 = 2^5$	2. $3 = \sqrt{9}$	3. $6^1 = 6$
$16 = 4^2$	$1 = 12^0$	$216 = 6^3$
$729 = 3^6$	$0{,}25 = 2^{-2}$	$b = \sqrt{a}$
$2048 = 2^{11}$	$8 = 4\sqrt{4}$	$5^{-2} = 0{,}04$

66. Kontrolli järgmiste võrduste kehtivust:

1.	2.	3.
$\log_2 64 = 6$	$0 = \log_a 1$	$\log_{81} 27 = 0{,}75$
$\log_7 49 = 2$	$-1 = \log_5 0{,}2$	$\log_5 0{,}008 = -3$
$\log_4 64 = 3$	$\frac{1}{2} = \log_{100} 10$	$\log_8 \frac{1}{128} = -2\frac{1}{3}$
$\log_3 81 = 4$	$\frac{2}{3} = \log_8 4$	$\log_{0,1} 100 = -2$

67. Anna järgmiste sümbolite väärtused:

1.	2.	3.	4.
$\log_2 8$	$\log_3 9$	$\log_2 \frac{1}{4}$	$\log_4 8$
$\log_2 16$	$\log_3 81$	$\log_3 \frac{1}{81}$	$\log_{25} 125$
$\log_2 64$	$\log_5 5$	$\log_4 2$	$\log_9 \frac{1}{27}$
$\log_2 1024$	$\log_a a^3$	$\log_{27} 3$	$\log_4 \frac{1}{32}$

Peatükk II.

Read.

§ 11. Aritmeetiline rida.

Aritmeetiliseks reaks nimetame niisugust arvude rida, milles iga arvu ja sellele eelneva arvu vahe on muutumatu.

Nii on paarituarvude rida

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots$$

aritmeetiline rida, sest

$$3-1=5-3=7-5=9-7=\ldots;$$

seevastu algarvude rida

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ \ldots$$

ei ole aritmeetiline rida, sest

$$3-2\neq 5-3.$$

Aritmeetilist rida moodustavaid arve nimetame selle rea liikmeiks. Rea liikmeid tähistame sümbolitega

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n.$$

1, 2, 3, ... n on liikmete järjenumbrid; nad näitavad, mitmendal kohal liige reas asetseb. Arve a_1 ja a_n nimetame vastavalt rea esimeseks ja viimaseks liikmeks. Rea liikme ja eelneva liikme vahet nimetame rea vaheks. Rea vahet tähistame tähega d. Rea vahe võib olla positiivne või negatiivne. Aritmeetilist rida nimetatakse kasvavaks, kui rea vahe on positiivne, ja kahanevaks, kui rea vahe on negatiivne.

Ülesanded.

68. Kirjuta 6-liikmeline aritmeetiline rida, mille esimene liige on 2 ja vahe on 5.

69. Kirjuta 12-liikmeline aritmeetiline rida, mille esimene liige on 4 ja teine liige on $4\frac{3}{4}$.

70. Kirjuta 7-liikmeline aritmeetiline rida, mille esimene liige on 10 ja vahe on —3.

71. Aritmeetilise rea 5. liige on 17 ja 6. liige 24. Kui suur on selle rea 7. liige?

72. Aritmeetilise rea 9. liige on 22 ja 11. liige on 28. Kui suur on selle rea 10. liige?

§ 12. Aritmeetilise rea üldliige.

Olgu antud aritmeetiline rida

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots \quad a_n,$$

mille vahe on d. Kohal k seisev rea liige on a_k; selle ees, kohal $k - 1$ seisev liige on a_{k-1}. Aritmeetilise rea definitsiooni järgi

$$a_k - a_{k-1} = d$$

ehk

$$a_k = a_{k-1} + d.$$

See tähendab, et

aritmeetilise rea iga liige, alates teisest, võrdub eelneva liikme ja rea vahe summaga.

Andes järjenumbrile k väärtused 2, 3, 4, ... n, saame

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

jne. Analoogia põhjal kirjutame üldiselt

$$a_k = a_1 + (k - 1)\, d.$$

See valem annab õige tulemuse ka siis, kui $k = 1$; tõepoolest, valemi parem pool omandab siis kuju

$$a_1 + (1 - 1)\, d = a_1 + 0 \cdot d = a_1.$$

Vastavalt k väärtusele on a_k kas esimene, teine, kolmas või mõni muu liige. Seda liiget a_k nimetame seepärast r e a ü l d l i i k m e k s. Et rea üldliikme valemis esinev arv $k - 1$ näitab, mitu liiget seisab reas liikme a_k ees, siis võime selle valemi sõnastada järgmiselt:

aritmeetilise rea liige võrdub summaga, mis saadakse esimese liikme liitmisel rea vahe ja kõigi eelnevate liikmete arvu korrutisega.

Kui üldliikme valemis esinevast neljast suurusest

$$a_1,\ d,\ k,\ a_k$$

3 suurust on teada, siis saame ikka arvutada neljanda. Näitena toome järgmised ülesanded.

Ü l e s a n n e 1. Aritmeetilise rea esimene liige on 15, rea vahe on —4. Kui suur on rea kümnes liige?

L a h e n d u s. Võttes aritmeetilise rea üldliikme valemis k väärtuseks 10 ja asendades a_1 ning d antud väärtustega, saame

$$a_{10} = 15 + (10 - 1) \cdot (-4) = 15 + 9 \cdot (-4) =$$
$$= 15 - 36 = -21.$$

V a s t u s. Rea 10. liige on —21.

Ü l e s a n n e 2. Aritmeetilise rea esimene liige on $-8\frac{1}{2}$; rea vahe on $3\frac{1}{2}$. Mitmes liige on $12\frac{1}{2}$?

L a h e n d u s. Andmeiks on

$$a_1 = -8\tfrac{1}{2},\ d = 3\tfrac{1}{2},\ a_k = 12\tfrac{1}{2};$$

otsitavaks on k. Asetades andmed aritmeetilise rea üldliikme valemisse, saame

$$12\tfrac{1}{2} = -8\tfrac{1}{2} + (k - 1) \cdot 3\tfrac{1}{2};$$

siit leiame, et

$$k = 7.$$

V a s t u s. $12\frac{1}{2}$ on antud rea 7. liige.

73. Avalda iga alljärgneva rea puhul k-ndal kohal seisev liige (rea üldliige) arvu k kaudu.

1. 3, 5, 7, 11, ...
2. 7, 15, 23, 31, 39, ...
3. —100, —95, —90, —85, —80, ...
4. $1, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}, 2, \ldots$
5. $2\frac{1}{3}, 3, 3\frac{2}{3}, 4\frac{1}{3}, 5, \ldots$

74. Aritmeetilise rea 1. liige on 3 ja vahe on 4. Leia selle rea 8. liige.

75. Leia aritmeetilise rea 7. ja 11. liige, kui rea 1. liige on 6 ja vahe on $2\frac{1}{2}$.

76. Leia aritmeetilise rea 10. ja 15. liige, kui rea 1. liige on 14 ja 2. liige on 20.

77. Ametniku kuupalk oli esimesel teenistusaastal 120 marka. Iga aasta suurenes tema kuupalk 2 marga võrra. Kui suur oli ta kuupalk 12. teenistusaastal?

78. Sportlane hüppas kõrgust esimesel treeningukuul keskmiselt 170 cm. Tema keskmine saavutis tõusis igal kuul 5 cm võrra. Mitu sentimeetrit hüppas ta keskmiselt 5. kuul?

79. Ratsanik ratsutas 1. tunnis 20 km ja igas järgnevas tunnis 0,4 km võrra vähem kui eelnevas. Mitu kilomeetrit ratsutas ta 6. tunnis?

80. Galileo Galilei avastas kehade langemise seaduse, mis kõlab järgmiselt: vabalt langev keha kulgeb 1. sekundis 4,9 m ja igas järgnevas sekundis 9,8 m võrra enam kui eelnevas. Mitu meetrit kulgeb vabalt langev keha 3. sekundis? Mitu meetrit kulgeb ta 9. sekundis?

81. Ülesvisatud keha kulgeb õhuta ruumis igas sekundis 9,8 m vähem kui eelnevas sekundis. Mitu meet-

rit kulgeb ülesvisatud keha 8. sekundis, kui ta 1. sekundis kulgeb 100 m?

82. Leia aritmeetilise rea 1. liige, kui 9. liige on 53 ja vahe on 4.

83. Leia aritmeetilise rea 1. liige, kui 15. liige on 68 ja vahe on $-2\frac{1}{2}$.

84. Leia aritmeetilise rea vahe, kui 1. liige on 7 ja 17. liige on 87.

85. Leia aritmeetilise rea vahe, kui 1. liige on 125 ja 25. liige on 65.

86. Aritmeetilise rea 1. liige on 3 ja 31. liige on 48. Leia rea vahe.

87. Paiguta arvude 7 ja 35 vahele 6 niisugust arvu, et tekiks aritmeetiline rida.

88. Sportlane tõukab kuuli esimesel treeningunädalal 15,58 m. Mitme sentimeetri võrra peaks iga järgneva nädala saavutis ületama eelneva nädala oma, et 7. nädalal korraldatavail võistlusil sportlane saaks tõugata kuuli 16 m?

89. Paiguta arvude 100 ja 40 vahele 4 niisugust arvu, et tekiks aritmeetiline rida.

90. Aritmeetilise rea esimene liige on 8 ja vahe on 7. Mitmes liige selles reas on 120?

91. Aritmeetilise rea 1. liige on $-2{,}5$ ja 2. liige on 1. Mitmes liige selles reas on 39,5?

92. Mitu liiget on aritmeetilises reas, mille 1. liige on 6, 2. liige on $10\frac{1}{3}$ ja viimane liige on 136?

93. Mitu 7-ga jaguvat arvu on arvude 28 ja 154 vahel?

94. Trapetsikujulisel peenral on esimeses reas 23 taime, teises 26, kolmandas 29 ja viimases reas 89 taime. Mitu rida taimi on peenral?

95. Mitmendal kohal seisab liige 2,25 aritmeetilises reas 1,05; 1,10; 1,15; . . . ?

96. Kui suur on ühekohaliste loomulikkude arvude [1] hulk? — kahekohaliste loomulikkude arvude hulk? — kolmekohaliste loomulikkude arvude hulk? — neljakohaliste loomulikkude arvude hulk?

97. Raamatul on 500 lehekülge. Kui palju trükinumbreid on tarvis raamatu lehekülgede nummerdamiseks?

98. Mitu aritmeetilise rea 9, 13, . . . liiget on väiksemad kui 100?

99. Mitu aritmeetilise rea 137, 123, . . . liiget on positiivsed?

100. Leia aritmeetilise rea 7. liige, kui selle rea 4. liige on 21 ja 11. liige on —28.

101. Aritmeetilise rea 21. liige on 103 ja 33. liige on 157. Leia selle rea 27. liige.

102. Aritmeetilise rea 1. liige on 7, rea vahe 5 ja liikmete arv 21. Kui suur on rea liige, mis asetseb rea keskel?

103. Olgu aritmeetilise rea liige $a_2 = 17$ ja $a_{101} = -16$. Kui suur on liige a_1?

104. Olgu aritmeetilise rea liige $a_{37} = 4{,}6$ ja $a_{73} = 8{,}2$. Missugused on esimesed 3 rea liiget?

105. Olgu aritmeetilise rea liige $a_{13} = 89$, $a_{57} = 397$ ja $a_n = 502$. Leia arv n.

---

[1] Loomulikkudeks arvudeks nimetatakse positiivseid täisarve 1, 2, 3, . . .

106. Aritmeetilise rea 14. liige on 66, 134. liige on 666 ja viimane liige on 6666. Kui suur on rea 1. liige ja kui palju on reas liikmeid?

107. Täisnurkse kolmnurga külgede mõõtarvudeks on kolm järjestikust aritmeetilise rea liiget, mille vahe on 7. Arvuta kolmnurga külgede mõõtarvud.

108. Näita, et avaldise $3+5x$ väärtused moodustavad aritmeetilise rea, kui x-i asemele asetada järjestikused täisarvud 1, 2, 3, ...

109. Näita, et avaldise $10-\frac{1}{2}x$ väärtused moodustavad aritmeetilise rea, kui x-i asemele asetada järjestikused täisarvud.

110. Näita, et avaldise x^2+4 väärtused ei moodusta aritmeetilist rida, kui x-i asemele asetada järjestikused täisarvud.

111. Näita, et täisarvude rea liikmete ruutude järjestikused vahed moodustavad aritmeetilise rea.

§ 13. Aritmeetilise rea summa.

Aritmeetilise rea summaks nimetame tema liikmete summat.

Summa tähisena kasutame tähte s; seega

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

Selle summa otsene arvutamine on tülikas, kui liikmete arv on suur. Hõlpsamini jõuame eesmärgile aritmeetilise rea summa valemi kasutamisel. Selle valemi tuletamiseks kirjutame otsitava summa üks kord alates esimese liikmega, teine kord alates viimase liikmega:

$$s = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + [a_1 + (n-1)d];$$
$$s = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + [a_n - (n-1)d].$$

Nii kirjutades satuvad kohakuti rea esimene ja viimane liige, teine ja eelviimane liige, kolmas ja eel-eelviimane liige, jne. Nende võrduste teineteisega kohakuti olevate liikmete liitmisel leiame, et

$$2s = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \\ + \ldots + (a_1 + a_n).$$

Siit näeme, et

aritmeetilise rea algusest ja lõpust ühekaugusel asetsevate liikmete summad on võrdsed.

Saadud võrduse parem pool koosneb nii mitmest liidetavast $a_1 + a_n$, kui palju on liikmeid antud aritmeetilises reas; seega

$$2s = (a_1 + a_n) \cdot n,$$

millest

$$s = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Tulemuse võime sõnastada nõnda:

aritmeetilise rea summa võrdub rea esimese ja viimase liikme aritmeetilise keskmise ja liikmete arvu korrutisega.

Tuletatud summa valemi rakendamist selgitame järgmiste ülesannetega.

Ülesanne 1. Arvuta esimese n täisarvu summa.

Lahendus. Et need arvud moodustavad aritmeetilise rea, siis nõutav summa

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1+n}{2} \cdot n = \tfrac{1}{2} n(n+1).$$

Ülesanne 2. Arvuta esimese n paarituarvu summa.

Lahendus. Esimesed n paarituarvu moodustavad aritmeetilise rea 1, 3, 5, ... $2n - 1$; seega nõutav summa

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = \frac{1 + (2n - 1)}{2} \cdot n = \frac{2n}{2} \cdot n = n^2.$$

Ülesanded.

112. Mitu silma on kogusummas täringu 6 tahul?

113. Mitu lööki lööb öö-päeva jooksul seinakell, mis märgib ainult täied tunnid vastava arvu löökidega?

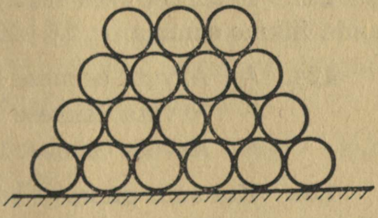
114. Kaevu puurimisel maksis esimese meetri puurimine 5 marka ja iga järgneva meetri puurimine maksis 60 penni enam eelneva meetri puurimisest. Kui palju maksis 21 meetrit sügava kaevu puurimine?

115. Ametniku kuupalk on esimesel teenistusaastal 140 marka. Iga aastaga suureneb ta kuupalk 1,60 marga võrra. Kui suure tasu saab ta 20 teenistusaasta jooksul?

116. Tööline on pandud käivitama ja valvama 12 kudumismasinat. Iga masin koob tunnis 8 m riiet. Tööline käivitab esimese masina kl. 7 ja teised 5-minutiste ajavahemikkude järel. Mitu meetrit riiet on masinad kudunud kella 15-ks?

117. Vabaõhuteatris on vaatlejate istekohad asetatud amfiteatriliselt, ringides ümber ringikujulise näitelava. Esimese istmeteringi raadius on 6 m, teise 7 m, kolmanda 8 m jne. viimaseni, mille raadius on 20 m. Arvates iga vaatleja kohta 0,5-meetrise osa istepingist, arvuta rahvahulk, mis teatri pinkidele ära mahub. Arvutamisel võta ümmarguselt $\pi = 3$.

118. Suurem hulk sama läbimõõduga torusid on laotud virna, nagu näitab joon. 2. Alumises reas on neid 20, järgnevas 19, järgnevas 18 jne. 6-ni. Mitu toru on virnas?



Joonis 2.

119. Tallu viiva tee äärde istutatakse 100 puud, paigutades nad iga 5 m järel. Esimese puu kaugus talu õues asetsevast kaevust on 20 m. Iga puud kastetakse 1 ämbri veega. Kui pika tee käiks ära puid kastev mees, kui ta peaks iga ämbritäie vett võtma kaevust ja kandma puuni, alustades oma teed kaevult ja lõpetades selle sealsamas?

120. Trapetsikujuline katus on kaetud katusekividega. Laiemal küljel asetseb 80 kivi, igas järgnevas reas kaks kivi vähem kui eelnevas. Teades, et kivide ridu on 20, leia katuse katmiseks kulunud kivide arv.

121. On antud aritmeetiline rida 4, 1, —2, ... Leia rea esimese 20 liikme summa.

122. Täida tühjad kohad alljärgnevas tabelis:

Rea number	Esimene liige a_1	Rea vahe d	Liikmete arv n	Viimane liige a_n	Rea summa s_n
1.	11	—3	12		
2.	—16	4	20		
3.	— 7		15	21	
4.	8		21	—32	
5.	19	—11		—25	
6.	—10	6		56	

123. Aritmeetilises reas on 9 liiget, teise ja kaheksanda liikme summa on 15. Kui suur on rea summa?

124. 1. Arvuta esimese 100 loomuliku arvu summa.
2. Arvuta esimese 100 paarisarvu summa.
3. Arvuta esimese 100 paarituarvu summa.

125. Kui suur on kõigi kolmekohaliste loomulikkude arvude summa?

126. Arvuta kõigi 3-ga jaguvate arvude summa vahemikus 100 kuni 200.

127. Arvuta kõigi 5-ga jaguvate arvude summa vahemikus 99 kuni 1001.

128. Aritmeetilise rea vahe on —2; rea viimane liige on —10 ja rea summa on —24. Arvuta rea esimesed 5 liiget.

129. 9-liikmelise aritmeetilise rea summa on 558 ja esimene liige on 52. Leia rea vahe.

130. 10-liikmelise aritmeetilise rea summa on 10 ja rea vahe on —3. Leia rea esimene liige.

131. Kui suured on viisnurga nurgad, kui nad moodustavad aritmeetilise rea, mille vahe on 20°?

132. Kui suured on kuusnurga nurgad, kui nad moodustavad aritmeetilise rea, mille esimene liige on 80°?

133. Jaota 10 mõõtu vilja kümnele isikule nõnda, et iga järgmine saab $\frac{1}{8}$ mõõtu vähem kui eelmine. (Ahmes, umbes 1700 a. e. Kr.)

134. Mitu liiget on aritmeetilises reas, mille esimene liige on 12, vahe 4,2 ja summa 696?

135. Mitu liiget on aritmeetilises reas, mille esimene liige on —20, teine liige —15 ja summa 1000?

136. Saapavabrik võttis tellimise 13 200 saapapaarile. Tellimise õigeaegseks täitmiseks pidi vabrik esimesel nädalal valmistama 100 paari saapaid päevas ja igal järgneval nädalal suurendama oma päevast toodangut 50 paari võrra. Mitme nädalaga oli tellimine täidetud?

137. Mitu meetrit kulgeb vabalt langev keha t sekundi jooksul? (Vt. nr. 80.)

138. Mitme sekundiga kulgeb vabalt langev keha 314 m? (Vt. nr. 80. ja 137.)

139. Hulknurga nurgad moodustavad aritmeetilise rea $70^{\circ}, 90^{\circ}, 110^{\circ}, \ldots$ Mitu nurka on hulknurgal?

140. Kas on võimalik niisugune hulknurk, mille nurgad moodustaksid aritmeetilise rea $45^{\circ}, 55^{\circ}, 65^{\circ}, \ldots$?

141. Mitu paarituarvu 1, 3, 5, ... peab vähemalt võtma, et nende summa ületaks 500?

142. Mitu loomulikku arvu 1, 2, 3, ... peab vähemalt võtma, et nende summa ületaks arvu 1000?

143. Kujuta arv 325 aritmeetilise rea summana, teades, et esimene liige on 1 ja viimane liige on 64.

144. Näita, et esimese $2n + 1$ loomuliku arvu summa on jaguv arvuga $2n + 1$.

145. On antud aritmeetiline rida:

$$(a + x)^2, \quad a^2 + x^2, \quad (a - x)^2, \ldots$$

Leia selle rea n liikme summa.

146. Leia 11 järjestikust loomulikku arvu, mille summa võrdub järgneva 10 järjestikuse loomuliku arvu summaga.

147. Mitu järjestikust loomulikku arvu peab võtma, alates arvust 3, et nende summa võrduks järgneva 5 järjestikuse loomuliku arvu summaga?

148. Aritmeetilise rea esimene liige on $n^2 - n + 1$ ja rea vahe on 2. Näita, et siis n liikme summa on n^3. Kasuta seda tõestuseks, et $1^3 = 1$, $2^3 = 3 + 5$, $3^3 = 7 + 9 + 11$ jne.

§ 14. Geomeetriline rida.

Geomeetriliseks reaks nimetame niisugust arvude rida, milles iga arvu ja sellele eelneva arvu jagatis on muutumatu.

Nii on arvu 2 astmete rida

$$2, \quad 4, \quad 8, \quad 16, \quad 32, \ldots$$

geomeetriline rida, sest

$$\frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \frac{32}{16} = \ldots;$$

seevastu täisarvude ruutude rida

$$1, \ 4, \ 9, \ 16, \ 25, \ldots$$

ei ole geomeetriline rida, sest

$$\frac{4}{1} \neq \frac{9}{4}.$$

Geomeetrilist rida moodustavaid arve nimetame selle r e a l i i k m e i k s. Nagu aritmeetilise rea puhul, nii tähistame ka geomeetrilise rea liikmeid sümbolitega

$$a_1, \ a_2, \ a_3, \ \ldots \ a_n$$

ja nimetame esimest ja viimast neist arvudest vastavalt rea esimeseks ja rea viimaseks liikmeks. Geomeetrilise rea liikme ja eelneva liikme jagatist nimetame selle r e a t e g u r i k s. Rea teguri tähistame tähega q.

Geomeetrilise rea teguri märgi ja absoluutväärtuse järgi saab rida iseloomustada järgnevalt:

1. Kui rea tegur on positiivne ($q > 0$), siis kõik rea liikmed on ühe ja sama märgiga; seda näeme näiteks ridade puhul

$$2, \ 6, \ 18, \ 54, \ 162$$

ja

$$-2, \ -6, \ -18, \ -54, \ -162,$$

kus kummaski $q = 3$.

2. Kui rea tegur on negatiivne ($q < 0$), siis rea liikmete märgid vahelduvad; see juhtum esineb meil näiteks rea puhul

$$2, \ -6, \ 18, \ -54, \ 162,$$

kus $q = -3$.

3. Kui rea teguri absoluutväärtus on suurem kui 1, siis rea liikmete absoluutväärtused kasvavad; seda näeme näiteks ridade puhul

$$4,\ 6,\ 9,\ 13{,}5,\ 20{,}25,\ \text{kus } q = 1{,}5;$$
$$-4,\ -6,\ -9,\ -13{,}5,\ -20{,}25,\ \text{kus } q = 1{,}5;$$
$$4,\ -6,\ 9,\ -13{,}5,\ 20{,}25,\ \text{kus } q = -1{,}5.$$

4. Kui rea teguri absoluutväärtus on väiksem kui 1, siis rea liikmete absoluutväärtused kahanevad; seda näeme näiteks ridade puhul

$$405,\ 135,\ 45,\ 15,\ 5,\ \text{kus } q = \tfrac{1}{3};$$
$$-405,\ -135,\ -45,\ -15,\ -5,\ \text{kus } q = \tfrac{1}{3};$$
$$405,\ -135,\ 45,\ -15,\ 5,\ \text{kus } q = -\tfrac{1}{3}.$$

Ülesanded.

149. Kirjuta 6-liikmeline geomeetriline rida, mille esimene liige on 4 ja tegur on 3.

150. Kirjuta 7-liikmeline geomeetriline rida, mille esimene liige on 32 ja tegur on $\frac{1}{2}$.

151. Geomeetrilise rea esimene liige on 1, rea tegur on $\frac{2}{3}$. Määra rea esimesed 5 liiget.

152. Geomeetrilise rea esimene liige on 7776, rea tegur on $\frac{5}{6}$. Anna rea esimesed 5 liiget.

153. Geomeetrilise rea 1. liige on 16 ja 2. liige on 24. Kui suur on selle rea 3. liige?

154. Geomeetrilise rea 7. liige on 108 ja 8. liige on 36. Kui suur on selle rea 9. liige?

155. Geomeetrilise rea 4. liige on 10 ja 5. liige on 25. Leia rea 3. liige.

156. Geomeetrilise rea 6. liige on 15 ja 7. liige on 21. Leia selle rea 8. liige.

157. Geomeetrilise rea 12. liige on 28 ja 13. liige on 49. Leia selle rea 11. liige.

§ 15. Geomeetrilise rea üldliige.

Olgu antud geomeetriline rida

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad \ldots\quad a_n,$$

mille tegur on q. Kohal k seisev rea liige on a_k; selle ees, kohal $k-1$ seisev liige on a_{k-1}. Geomeetrilise rea definitsiooni järgi on

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = q$$

ehk

$$a_k = a_{k-1} \cdot q.$$

See tähendab, et

geomeetrilise rea iga liige, alates teisest, võrdub eelneva liikme ja rea teguri korrutisega.

Andes arvule k järjest väärtused 2, 3, 4, ... n, saame

$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$$
$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 \cdot q^3$$

jne. Analoogia põhjal kirjutame üldiselt

$$a_k = a_1 \cdot q^{k-1}.$$

See valem annab õige tulemuse ka siis, kui $k = 1$; tõepoolest valemi parem pool omandab siis kuju

$$a_1 \cdot q^{1-1} = a_1 \cdot q^0 = a_1.$$

Vastavalt k väärtusele on liige a_k kas rea esimene, teine, kolmas või mõni muu liige. Seda liiget a_k nimetame seepärast *rea üldliikmeks*. Et rea üldliikme valemis esinev arv $k-1$ näitab, mitu liiget seisab reas liikme a_k ees, siis võime selle valemi sõnastada järgmiselt:

geomeetrilise rea liige võrdub arvuga, mis saadakse rea esimese liikme korrutamisel rea teguri astmega, milles astendajaks on kõigi eelnevate liikmete arv.

Kui üldliikme valemis esinevast neljast suurusest

$$a_1, \quad q, \quad k, \quad a_k$$

3 suurust on teada, siis saame ikka arvutada neljanda. Näitena toome järgmised ülesanded.

Ü l e s a n n e 1. Geomeetrilise rea esimene liige on 1000, rea tegur on $\frac{1}{2}$. Kui suur on rea 11. liige?

Lahendus. Võttes geomeetrilise rea üldliikme valemis $a_1 = 1000$, $q = \frac{1}{2}$ ja $k = 11$, saame

$$a_{11} = 1000 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{11-1} = 1000 \left(\tfrac{1}{2}\right)^{10} =$$

$$= 1000 \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{1000}{1024}$$

ehk, taandades,

$$a_{11} = \frac{125}{128}.$$

Ü l e s a n n e 2. Geomeetrilise rea esimene liige on 5, kaheksas liige $\frac{5}{2187}$. Kui suur on rea tegur?

L a h e n d u s. Andmeiks on

$$a_1 = 5, \quad k = 8, \quad a_k = \frac{5}{2187};$$

otsitavaks on q. Asetades andmed geomeetrilise rea üldliikme valemisse, saame:

$$\frac{5}{2187} = 5 \cdot q^{8-1},$$

seega

$$\frac{1}{2187} = q^7$$

ehk

$$q^7 = \frac{1}{2187}.$$

Logaritmides saame:

$$7 \log q = -\log 2187,$$

millest

$$\log q = -\frac{\log 2187}{7}.$$

Logaritmide tabeli abil leiame:

$$\log 2187 = 3{,}3398,$$

seega

$$\log q = -0{,}4771,$$

ehk

$$\log \frac{1}{q} = 0{,}4771,$$

millest

$$\frac{1}{q} = 3{,}000$$

ja

$$q = \tfrac{1}{3}.$$

Ülesanded.

158. Geomeetrilise rea esimene liige on 15, rea tegur on 2. Kui suur on rea 5. liige?

159. Geomeetrilise rea 1. liige on 6 ja 2. liige on 6,3. Kui suur on rea 10. liige?

160. Geomeetrilise rea esimene liige on 2,6, rea tegur on 1,75. Kui suur on 20. liige?

161. Leia geomeetrilise rea 32, 48, 72, ... kuues liige.

162. Leia geomeetrilise rea $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{18}$, ... kümnes liige.

163. Leia geomeetrilise rea $\sqrt{2}$, 2, $\sqrt{8}$, ... seitsmes liige.

164. On antud arvude rida, mille iga liige moodustab 25% eelnevast liikmest. Näita, et see rida on geomeetriline rida. Kui suur on rea tegur?

165. On antud arvude rida, mille iga liige moodustab 120% eelnevast liikmest. Näita, et need arvud moodustavad geomeetrilise rea. Kui suur on rea tegur?

166. Määra geomeetrilise rea tegur, kui rea iga liige on 1% võrra suurem eelnevast.

167. Määra geomeetrilise rea tegur, kui rea iga liige on 3% võrra väiksem eelnevast.

168. Õhukindlas anumas on 24 g õhku. Õhupumba iga tõmbega imetakse $\frac{3}{8}$ anumas olevast õhust. Mitu grammi õhku on jäänud anumasse 15 tõmbe järel?

169. Õhupumba kupli all on õhk normaalrõhumisel. Pumba iga tõmbega imetakse kupli alt 2% seal olevast õhust. Kui suur on õhurõhumine kupli all 20 tõmbe järel?

170. Puu kõrguse iga-aastane juurdekasv on 80% eelneva aasta juurdekasvust. Mitme sentimeetri võrra kasvab puu 4. aastal, kui ta 1. aastal kasvab 25 cm võrra?

171. Klaasplaat laseb läbi 96% temale langevast valguse hulgast, neelates ülejäänud osa. Kui suure osa temale langevast valguse hulgast laseb läbi kümnest niisugusest plaadist koosnev pakk?

172. Ühekordse klaasiga aken neelab 15% temale langevast valgusest. Mitu protsenti valgusest neelab kahe- ja kolmekordse klaasiga aken?

173. Vaadist, milles on 150 liitrit puhast piiritust, võetakse 10 korda järgemööda 5 liitrit piiritust, täites iga kord tühjaks jäänud ruumi veega. Kui palju puhast piiritust jääb veel vaati?

174. Näita, et geomeetrilise rea mistahes liige on temale eelneva ja temale järgneva liikme keskmine võrdeline ehk geomeetriline keskmine.

175. Määra geomeetrilise rea 10. liige, teades, et 9. liige on 6 ja 11. liige on 54.

176. Määra geomeetrilise rea 23. liige, teades, et 22. liige on $\frac{8}{9}$ ja 24. liige $\frac{32}{81}$.

177. Leia geomeetrilise rea tegur, kui rea 1. liige on $\frac{1}{2}$ ja 5. liige on $\frac{1}{162}$.

178. Klaveri a-keele võnkearv on 435, a′-keele (järgmise kõrgema oktaavi a) võnkearv on 2 korda suurem. Vahepealsete keelte: ais, h, c′, cis′, d′, dis′, e′, f′, fis′, g′ ja gis′ võnkearvud koos keelte a ja a′ võnkearvudega moodustavad geomeetrilise rea. Leia selle rea tegur ja c′-keele võnkearv.

179. Leia geomeetrilise rea tegur, kui rea 1. liige on 20 ja 7. liige on 312 500.

180. 20-st täiesti ühesugusest klaasplaadist koosnev pakk laseb läbi 60% esimesele plaadile langevast valguse hulgast. Kui suure osa temale langevast valguse hulgast laseb läbi üksik plaat?

181. Logaritme kasutamata määra geomeetrilise rea tegur, kui rea 2. liige on 6 ja 11. liige on 118 098.

182. Geomeetrilise rea 5. liige on 9, sama rea 8. liige on 72. Anna rea esimesed kolm liiget.

183. Paiguta arvude 1 ja 2197 vahele kaks niisugust arvu, et tekiks geomeetriline rida.

184. Paiguta arvude $\frac{10}{243}$ ja 21 870 vahele 11 niisugust arvu, et tekiks geomeetriline rida.

185. Paiguta arvude 2 ja 17 vahele 3 niisugust arvu, et tekiks geomeetriline rida.

186. On antud geomeetriline rida 1, 2, 4, . . . Paiguta iga kahe järjestikuse liikme vahele üks arv nõnda, et antud arvud koos vahelepaigutatud arvudega moodustaksid jälle geomeetrilise rea.

187. Geomeetrilise rea esimene liige on 3 ja tegur on 2. Mitmes liige selles reas on 3072?

188. Geomeetrilise rea esimene liige on $\frac{1}{16}$ ja tegur on 4. Mitmes liige selles reas on 4096?

189. Mitmes liige geomeetrilises reas 6, 12, 24, ... on $3 \cdot 2^{16}$?

190. Mitmes liige geomeetrilises reas 625, 250, 100, ... on $2^{10} \cdot 5^{-6}$?

191. Mitu liiget geomeetrilises reas 1000, 500, 250, ... on suuremad kui $12\frac{1}{2}$?

192. Mitu liiget geomeetrilises reas $\frac{10}{3}, \frac{10}{9}, \frac{10}{27}, \ldots$ on suuremad kui 0,0001?

193. Õhurõhumise kohta pealpool maapinda kehtib seadus: 100-meetrisele tõusule vastab õhurõhumise vähenemine 1,2% võrra. Arvuta, kui suur on õhurõhumine 400 m kõrgusel, kui maapinnal valitseb normaalne rõhumine. Arvuta, missuguses kõrguses on õhurõhumine 665 mm, kui maapinnal valitseb 750-millimeetrine rõhumine.

194. Teatava radioaktiivse aine aatomitest laguneb öö-päeva vältel 2,8%. Mitme öö-päeva vältel laguneb pool selle aine aatomitest?

195. Arvud 6, x ja 96 moodustavad antud järjekorras geomeetrilise rea. Määra arv x.

196. Määra arv a, kui arvud $a - 2$, a ja $a + 4$ moodustavad geomeetrilise rea.

197. Määra arvud x ja y, kui arvud 8, x, y ja 27 moodustavad geomeetrilise rea.

198. Geomeetrilise rea kolme järjestikuse liikme lahutamisel kindlast arvust saadakse arvud 9, 6 ja 2. Leia see geomeetriline rida.

199. Missuguse arvu võrra peab suurendama arve 3, 5 ja 8, et saadused moodustaksid geomeetrilise rea?

200. Aritmeetilise rea esimene liige on 2. Rea esimene, neljas ja kümnes liige moodustavad geomeetrilise rea. Leia aritmeetilise rea vahe.

201. On antud kolm avaldist:

$$x+3, \qquad x+7, \qquad 4x-2.$$

Määra tähe x väärtus esiteks nõnda, et antud kolm avaldist moodustaksid aritmeetilise rea, ja teiseks nõnda, et antud kolm avaldist moodustaksid geomeetrilise rea.

202. Näita, et geomeetrilise rea liikmete logaritmid moodustavad aritmeetilise rea.

§ 16. Geomeetrilise rea summa.

Geomeetrilise rea summaks nimetame tema liikmete summat. Summa tähisena kasutame tähte s; seega

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

Selle summa otsene arvutamine on tülikas, kui liikmete arv on suur. Kiiremini jõuame eesmärgile geomeetrilise rea summa valemi kasutamisel. Selle valemi tuletamiseks avaldame liikmed a_2, a_3, ... a_n esimese liikme ja rea teguri kaudu ning korrutame saadud võrduse

$$s = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1}$$

kummagi poole teguriga q:

$$sq = a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1} + a_1q^n.$$

Lahutades teise võrduse pooltest esimese võrduse vastavad pooled, saame:

$$sq - s = -a_1 + 0 + 0 + \ldots + 0 + a_1q^n$$

ehk

$$s(q-1) = a_1q^n - a_1,$$

millest

$$s = \frac{a_1 q^n - a_1}{q-1}$$

ehk

$$s = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Tuletatud summa valemi rakendamist selgitame järgmiste ülesannetega.

Ü l e s a n n e 1. Leia summa

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{10}}.$$

L a h e n d u s. Siin on $a_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$ ja $n = 11$; järelikult nõutav summa

$$s = 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{11} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{2^{11}}}{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{2^{11}}\right) = 2 - \frac{1}{2^{10}} = 2 - \frac{1}{1024} = 1\,\frac{1023}{1024}.$$

M ä r k u s. Geomeetrilise rea summa valemit ei saa rakendada ainult sel juhul, kui $q = 1$. Tõepoolest, sellel q väärtusel valemi parem pool saab kuju $a_1 \cdot \frac{0}{0}$, milles esinev sümbol $\frac{0}{0}$ peaks jagamise definitsiooni järgi tähendama arvu, mis nulliga korrutamisel annab nulli; et iga arvu korrutamisel nulliga saame nulli, siis ei ole sümbolil $\frac{0}{0}$ ühest tähendust ja seega puudub ühene tähendus ka korrutisel $a_1 \cdot \frac{0}{0}$.

Kõnesoleval erijuhul, kus $q = 1$, saame geomeetrilise rea summa arvutada otseselt. Tõepoolest, tehtud eeldusel on kõik geomeetrilise rea liikmed võrdsed esimese liikmega a_1, järelikult

$$s = a_1 + a_1 + a_1 + \ldots + a_1;$$

et liikmeid on n, siis

$$s = na_1.$$

Ülesanded.

203. Leia geomeetrilise rea 3, 6, 12, ... esimese kaheksa liikme summa.

204. Leia geomeetrilise rea esimese 5 liikme summa, kui rida algab arvuga 2 ja rea tegur on 3.

205. Leia geomeetrilise rea $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... esimese kümne liikme summa.

206. Geomeetrilise rea esimene liige on 7, rea tegur on $\frac{3}{2}$. Arvuta rea esimese 12 liikme summa.

207. Kui suur on summa $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{10}$?

208. Hindu kuningas Š i i r a m oli nõnda vaimustatud malemängust, et avaldas nõusoleku maksta mängu leiutajale S i s s a I b n D a h i r'ile autasuna iga summa, mille see peaks küsima. Mängu leiutaja palus endale autasu nisuterades, ja nimelt 1 tera malelaua 1. ruudule, $1 \cdot 2$ tera teisele, $1 \cdot 2 \cdot 2$ kolmandale, $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ neljandale jne. Mitu tera palus endale Sissa Ibn Dahir?

Terade hulgast kujutluse saamiseks olgu antud järgmised andmed: 1 hl sisaldab ligikaudu $1{,}6 \cdot 10^6$ tera ja kaalub ümmarguselt 70 kg; ühe kaubavaguni kandejõud on 15 tonni.

209. Kiireks abiandmiseks suurveehädalistele korraldatakse linnas korjandus: linnapea annetab 1 marga ja palub kaartidega ühtlasi kolme linnanõunikku sama summa annetada ja igaüht neist teha omalt poolt sama ettepanek 3 tuttavale, kes edasi samas suunas toimiksid. Arvates, et kaartide kättetoimetamine nõuab iga kord 1 päev aega ja et ükski kaardi saaja ei keeldu asjale kaasa aitamast, arvuta 10 päeva jooksul kokkutulev rahasumma.

210. Ahelakujuline käevõru koosneb 30 lülist. Kullasepp on nõus ta müüma tingimusel, et esimese lüli eest makstakse 1 penn, teise eest $1 \cdot 5$ penni, järgneva eest $1 \cdot 5 \cdot 5$ penni, järgneva eest $1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ penni jne.

Kui palju tuleks maksma käevõru, kui ta ostetaks sel tingimusel? (Ühest vanast ülesannetekogust.)

211. Kummipall, langenud mingilt kõrguselt põrandale, põrkab tagasi ja tõuseb kõrgusele, mis on $\frac{1}{3}$ langemiskõrgusest. Kui pika tee on kulgenud 3 m kõrguselt langetatud pall, kui ta neljandat korda puudutab põrandat?

212. Puu kõrguse aastane juurdekasv on 85% eelmise aasta juurdekasvust. Kui palju kasvab puu kõrgus 5 aastaga, kui ta esimesel aastal kasvab 30 cm?

213. Leia geomeetrilise rea $\sqrt{2}$, $2\sqrt{8}$, ... esimese 8 liikme summa.

214. Leia geomeetrilise rea $2\sqrt{3}$, 6, ... esimese 6 liikme summa.

215. Leia rea $\sqrt{\frac{2}{3}}$, 1, $\sqrt{\frac{3}{2}}$, ... esimese 10 liikme summa.

216. Leia rea $\sqrt{6}$, $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{6}$, ... esimese $2n$ liikme summa.

217. Leia rea $\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{3}$, 1, ... esimese 6 liikme summa.

218. 7-liikmelise geomeetrilise rea esimene liige on 1 ja viimane 64. Määra rea tegur ja summa.

219. Geomeetrilise rea 4. liige on 6, 12. liige on 1536. Kui suur on selle rea esimese 11 liikme summa?

220. On antud geomeetrilise rea 1. liige a ja 5. liige u. Kui suur on selle rea esimese 5 liikme summa?

221. Lihtsusta avaldis $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5$.

222. Lihtsusta avaldis $ab + a^2b^3 + a^3b^5 + a^4b^7$.

223. Lihtsusta avaldis

$$k + 1 + (k + 1)^2 + (k + 1)^3 + \ldots + (k + 1)^6.$$

224. 6-liikmelise geomeetrilise rea summa on 252, rea tegur on 2. Leia rea 1. liige.

225. 5-liikmelise geomeetrilise rea summa on 1562, rea tegur on 5. Leia rea 1. liige.

226. Leia geomeetrilise rea 1. liige, kui rea tegur on $\frac{1}{2}$ ja 6 liikme summa on $47\frac{1}{4}$.

227. Määra nelinurga nurgad, kui nad moodustavad geomeetrilise rea, mille tegur on 3.

Peatükk III.

Rahandusmatemaatika küsimusi.

§ 17. Liht- ja liitintress.

Võõra kapitali kasutamise korral kapitali kasutaja maksab kapitali omanikule tasu kapitali kasutamise eest. Seda tasu nimetatakse intressiks. Intress arvatakse võrdeliseks kasutatud kapitali suurusega; samuti arvatakse intress võrdeliseks ajaga, mille jooksul kapitali on kasutatud.

Intressi suurus määratakse kindlaks kapitali omaniku ja kapitali kasutaja vahelises kokkuleppes. Tavaliselt nähakse selles kokkuleppes ette, mitu protsenti kapitalist moodustab ühe aasta intress.

Arvu, mis näitab, missuguse osa kapitalist moodustab ühe aasta intress, nimetatakse intressimääraks.

Seega väljendust „kapital on laenatud või hoiustatud intressimääral 7%“ või ka väljendust „kapital kannab 7% intressi“ tuleb mõista nii, et kapitali kasutaja maksab kapitali omanikule selle kapitali üheaastase kasutamise eest intressi 7% kapitali suurusest.

Intressi arvutamisel on üldiselt kombeks lugeda aastat võrdseks mitte 365 või 366 päevaga, vaid 360 päevaga; sel puhul on kuu mitte 31, 30, 28 või 29 päeva, nagu kalendris, vaid ikka 30 päeva. Aasta ümmardamine 360 päevaks hõlbustab tunduvalt intressi arvutamist: ühe kuu intress on ikka täpselt $\frac{1}{12}$ aastaintressist, 20 päeva intress $\frac{1}{18}$ aastaintressist, 10 päeva intress $\frac{1}{36}$ aastaintressist jne.

Intressi tasumine võib toimuda mitmeti; näiteks võib intressi tasuda ette kapitali kogu kasutamisaja eest; võib intressi tasuda kokkulepitud tähtaegadel osade kaupa; võib intressi tasuda kapitali kasutusaja lõpul; võib intressi kindlate ajavahemikkude järel liita kapitaliga, mil puhul kapital järk-järgult suureneb. Esimesel kolmel juhul ütleme, et kapital kannab l i h t i n t r e s s i, viimasel ütleme, et ta kannab l i i t i n t r e s s i. Seega:

kapital kasvab lihtintressil, kui intress arvutatakse kogu kapitali kasvamise kestusel kapitali algväärtuse ehk a l g k a p i t a l i järgi;

kapital kasvab liitintressil, kui intress kindlate ajavahemikkude järel liidetakse kapitaliga ja seega igas niisuguses ajavahemikus intress arvutatakse s e l l e väärtuse järgi, milleni kapital ajavahemiku alguseks on kasvanud.

Kapitali liitintressilisel kasvamisel intressi liitmine kapitaliga toimub tavaliselt iga aasta lõpul.

Kapitali laene ja hoiulseismisi kestusega alla üht aastat nimetatakse harilikult l ü h i a j a l i s t e k s, kapitali laene ja hoiulseismisi kestusega üle ühe aasta — p i k a-a j a l i s t e k s.

Kapitali kasvamine lihtintressil esineb kõigi lühiajaliste laenude ja kapitali lühiajaliste hoiulseismiste puhul; kapitali kasvamine liitintressil esineb tavaliselt pikaajaliste laenude ja kapitali pikaajaliste hoiulseismiste puhul.

§ 18. Kapitali kasvamine lihtintressil.

Ü l e s a n n e 1. Kapital k marka kannab aastas $p\%$ intressi. Kui suureks kasvab see kapital n aasta jooksul?

L a h e n d u s. Kapitalilt saadav aastaintress on $k \cdot \frac{p}{100}$ marka; seega n aasta intress on $k \cdot \frac{n \cdot p}{100}$ marka. Järelikult kapitali suurus n-nda aasta lõpuks on markades

$$k + k \cdot \frac{np}{100};$$

tähistades otsitavat tähega K, saame

$$K = k\left(1 + \frac{np}{100}\right).$$

Ülesanne 2. Kapital k marka kannab aastas $p\%$ intressi. Kui suureks kasvab kapital n päeva jooksul?

Lahendus. Kapitalilt saadav

aastaintress on markades $k \cdot \frac{p}{100}$,

ühe päeva intress „ „ $k \cdot \frac{p}{360 \cdot 100}$,

n päeva intress „ „ $k \cdot \frac{n \cdot p}{360 \cdot 100}$.

Järelikult kapitali suurus n-nda päeva lõpuks on markades

$$k + k \cdot \frac{n \cdot p}{360 \cdot 100}$$

ehk

$$k\left(1 + \frac{np}{36000}\right).$$

Tähistades kapitali lõppväärtuse tähega K, saame ülesande vastuse kujul

$$K = k\left(1 + \frac{np}{36000}\right).$$

Kui ülesannete 1 ja 2 lahendamisel saadud valemeis esinevast neljast suurusest k, p, n ja K on kolm suurust teada, siis neljanda saame ikka leida. Et need suurused esinevad kõnesolevais valemeis esimesel astmel, siis nõuab nende määramine antud suuruste järgi vaid lineaarvõrrandi lahendamist. Näiteina lahendame järgmised 2 ülesannet.

Ülesanne 3. Mitme päeva jooksul kapital k marka, kandes $p\%$ intressi, kasvab summani K marka?

Lahendus. Eelnevast on teada, et

$$K = k\left(1 + \frac{np}{36000}\right)$$

ehk

$$K = k + \frac{knp}{36000};$$

seega

$$K - k = \frac{knp}{36000}$$

ehk

$$knp = 36000\,(K - k)$$

ja siit otsitav päevade arv

$$n = \frac{36000\,(K-k)}{kp}.$$

Ülesanne 4. Missugune kapital, kandes 6% intressi, kasvab 60 päeva jooksul summani 505 marka?

Lahendus. Märgime otsitava kapitali tähega k. Varemini tuletatud valemist

$$K = k\left(1 + \frac{np}{36000}\right)$$

leiame, et

$$k = \frac{K}{1 + \frac{np}{36000}}.$$

Asendades siin sümbolid K, n ja p nende antud väärtustega, saame

$$k = \frac{505}{1 + \frac{60 \cdot 6}{36000}}$$

ehk

$$k = \frac{505}{1 + \frac{1}{100}} = \frac{505 \cdot 100}{101} = 500.$$

Vastus. Otsitav kapital on 500 marka.

Ülesanded.

228. Poisi hoiuarve on 31. detsembril 84,40 marka. Summa seisab puutumata ning hoiukassa maksab $3\frac{1}{2}$% intressi. Kui suur summa seisab aasta pärast poisi nimel?

229. Järgmisis näiteis on antud kapital, intressimäär ja kapitali kasvamise kestus. Arvuta intress.

	Kapital markades	Intressi-määr	Aeg kuudes
1.	860	4 %	8
2.	675	$5\frac{1}{2}$%	6
3.	2370	3,6%	4
4.	840	$2\frac{1}{2}$%	11
5.	4860	4,2%	3

230. Järgmisis näiteis on antud kapital, intressimäär ja kapitali kasvamise kestus. Arvuta intress.

	Kapital markades	Intressi-määr	Aeg päevades
1.	128	$6\frac{2}{5}$%	125
2.	576	$7\frac{1}{2}$%	256
3.	4260	$4\frac{3}{4}$%	200
4.	785	$2\frac{1}{3}$%	40
5.	96,40	3 %	320

231. Järgmisis näiteis on antud hoiuletoodud summa, hoiuletoomise päev ja intressimäär. Arvuta aasta lõpuks kogunenud intress ja hoiusumma suurus järgmise aasta alguses.

	Summa markades	Hoiuletoomise päev	Intressi-määr
1.	240	1. VII	4 %
2.	585	15. X	3 %
3.	2954	10. V	$4\frac{1}{2}$%
4.	3640	6. III	$2\frac{3}{4}$%
5.	7654	20. VIII	$3\frac{1}{3}$%

232. Üliõpilane laenab õppimise lõpuleviimiseks 25. jaanuaril 360 marka $4\frac{1}{2}$%-ga ja tasub võla ühes intressiga järgmise aasta 20. oktoobril. Kui suur on tasumisele tulev summa?

233. Kaupmees laenab 2250 marka $1\frac{1}{2}$ aasta peale 6%-ga. Kui suur summa tuleb tal tähtajal laenuandjale tasuda?

234. Ärimees paigutab 15. jaanuaril panka 420 marka ja lisab 1. juulil sellele juurde 210 marka. Pank maksab hoiusummadelt $3\frac{1}{2}$% intressi. Kui suur summa seisab ärimehel hoiul aasta lõpul?

235. Ärimehel on aasta alguses pangas hoiul 2650 marka. 24. aprillil ta võtab sellest summast 850 marka välja. Pank maksab 4% intressi. Kui suur summa seisab ärimehel hoiul järgmise aasta alguseks?

236. Kui suur on hoiusumma, mis, olles 6 kuud 4%-ga hoiul, kasvas 612 marga suuruseks?

237. Ametnik paneb oma palgast iga kuu 1. päeval panka hoiule 20 marka. Pank maksab 5% intressi. Kui suur on ametniku hoiusumma sama aasta lõpul?

238. Kui suur hoiusumma annab 9,10 marka intressi, olles hoiul 4 kuud $6\frac{1}{2}$%-ga?

239. Hoiusummale, mis oli 4%-ga 25. oktoobrist aasta lõpuni pangas, arvas pank 2,34 marka intressi juurde. Kui suur oli see hoiusumma järgneva aasta alguses?

240. Põllumees tasus 16. septembril 248,40 margaga 16. veebruaril samal aastal tehtud laenu ja selle intressi. Kui suur oli laen, kui intressi võeti 7%?

241. Talunik müüs talu ja paigutas 65% selle müügist saadud rahast 100 päevaks 3%-ga panka hoiule. Hoiuaja lõpul ta sai pangast 4325,75 marka. Kui kallilt müüdi talu?

242. Mitme protsendiga on hoiul 4200 marka, mis aasta vältel kasvab 4452 margaks?

243. Koolikooperatiivi vaba raha 270 marka oli 12. juunist 2. septembrini pangas hoiul ja kasvas selle aja vältel 273,30 margaks. Mitu protsenti maksis pank intressi?

244. Kooperatiivi mahutatud kapital kasvas kahe aasta vältel $1\frac{1}{2}$-kordseks. Mitu protsenti tõi ta keskmiselt aastas tulu?

245. Missuguse aja vältel kasvab 288 marka, olles hoiul $5\frac{1}{2}$%-ga, 291,96 marga suuruseks?

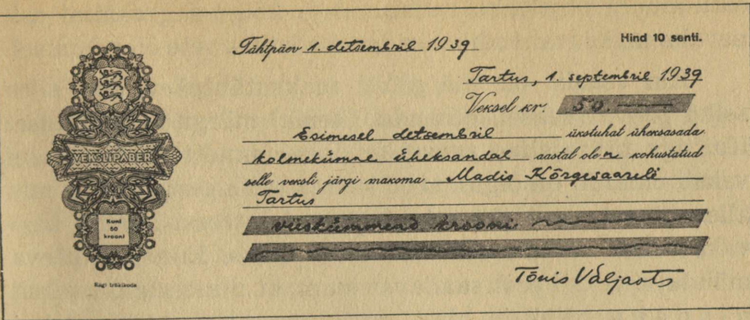
246. Missuguse aja vältel kasvab 900 marka, olles hoiul $6\frac{1}{2}$%-ga, 911,70 marga suuruseks?

247. 22. jaanuaril anti 585 marka $4\frac{1}{2}$%-ga hoiule. Millal tuleb see summa võtta hoiult, et saada 600 marka?

§ 19. Veksel.

Lühiajalised võlakohustused kirjutatakse peaaegu eranditult v e k s l i t e n a. Veksel kirjutatakse tavaliselt vekslipaberile; vekslit võib aga kirjutada ka lihtpaberile, tasudes vekslilt arvestatava riigimaksu tempelmarkidega. Vekslil peab olema märgitud rahasumma, mis tuleb veksli vastu maksta, ja isiku nimi, kes on kohustatud vekslil märgitud summat maksma. Vekslil märgitud summat nimetatakse v e k s l i s u m m a k s ehk v a l u u t a k s.

Vekslil, mida näeme joonisel 3, on märgitud peale veksli summa ka veel t ä h t p ä e v, millal see summa tuleb tasuda, i s i k u n i m i, kellele see summa tuleb tasuda, ja k o h a n i m e t u s, kus toimub selle summa tasumine. Veksel kannab v e k s l i a n d j a allkirja; selle allkirja andmisega on ta kohustunud vekslil märgitud summat tasuma.



VEKSLIPABER

Kuni 50 krooni

Tähtpäev 1. detsembril 1939

Hind 10 senti.

Tartus, 1. septembril 1939

Veksel kr. 50.—

Esimesel detsembril üksituhat üheksasada kolmekümne üheksandal aastal olen kohustatud selle veksli järgi maksma Madis Kõrgesaarele Tartus

viiskümmend krooni.

Tõnis Väljaots

Joonis 3.

Isik, kellele tuleb tasuda veksli summa, võib oma õiguse selle summa saamiseks edasi anda teisele; selleks kirjutab ta oma nime veksli pöördele, saades seega veksli **pealekirjutajaks** ehk **indossandiks**[1]. Samal viisil võib veksli teine omanik oma õiguse veksli summa saamiseks edasi anda kolmandale, kirjutades veksli pöördel oma nime esimese pealekirjutuse alla. Samal viisil võib veksli kolmas omanik oma õiguse veksli summa saamiseks edasi anda neljandale, see viiendale jne.

Kui pealekirjutuse tegemisel ei märgita vastupidist, siis iga pealekirjutaja vastutab selle eest, et veksli summa tasutakse õigeaegselt. Kui veksliandja jätab vekslil märgitud kohustuse täitmata, siis võib ajaliselt viimane veksli omanik nõuda selle kohustuse täitmist veksli eelmise omaniku poolt, see omakorda eelmise omaniku poolt jne. selle isikuni, kes esimesena kohustus vekslil märgitud summat tasuma. Eespool-toodud asjaolu lubab võtta vekslit, mis kannab varanduslikult kindlustatud isiku allkirja või pealekirjutust, peaaegu niisama kindla väärtusena nagu sularahagi. Aegade jooksul on veksel saanud tähtsaks

[1] *In dosso* tähendab itaalia keeles „seljal".

ostu-müügi objektiks rahaturul ja kõige sagedamini esinevaks maksuvahendiks äridevaheliste arvete õiendamisel.

Kui vekslil on märgitud maksutähtpäev, siis alles sellel päeval veksel omandab temal märgitud väärtuse. Kui aga tähtajaline veksel müüakse enne tähtpäeva, siis veksli omanik on õigustatud saama tema eest summa, mis alles tähtpäevani jäänud aja kestel intressi kandes kasvaks veksli valuuta suuruseks summaks. Enne tähtpäeva müüdava veksli eest saadavat summat nimetatakse veksli h i n n a k s. Veksli hind on seega alati väiksem kui valuuta, kuid ta kasvab päev-päevalt.

Veksli müümist ja ostmist enne tähtpäeva nimetatakse veksli d i s k o n t e e r i m i s e k s.

Summat, mille võrra veksli hind on väiksem veksli valuutast, nimetatakse veksli d i s k o n t o k s. Diskonto on seega intress, mis saadaks veksli hinna suuruselt kapitalilt maksutähtpäevani jäänud aja kestel. Diskonto arvutatakse intressimäära alusel, mille suurus määratakse kindlaks veksli müüja ja ostja vahelise kokkuleppega valitsuse poolt lubatud ülemmäära piirides. Seda intressimäära nimetatakse d i s k o n t o m ä ä r a k s.

Diskonteeritagu V-margane veksel n päeva enne tähtpäeva; olgu diskontomäär p % ja veksli hind v marka. Nende suuruste vahel kehtib sama seos, mis kehtib kapitali lõppväärtuse K, päevade arvu n, intressimäära p % ja kapitali algväärtuse k vahel, s. o. valem

$$V = v\left(1+\frac{np}{36000}\right).$$

Seega peaks veksli hinna v arvutamine toimuma siit järelduva valemi

$$v = \frac{V}{1+\frac{np}{36000}}$$

järgi. Et aga see valem sisaldab jagamist avaldisega

$$1+\frac{np}{36000},$$

mille väärtusena harilikult saadakse kolme- või neljakohaline arv, siis on arvutamine selle valemi järgi tülikas.

Seepärast on kaubanduslikus praksises põliseks kombeks arvutada veksli hind järgmisel lihtsustatud viisil:

1) diskonto arvutatakse kui intress veksli valuuta suuruselt kapitalilt tähtpäevani jäänud aja kestel ja

2) veksli valuutast lahutatakse diskonto.

Seega kaubandusliku kombe kohaselt arvutatud veksli hind väljendub valemiga

$$v=V-\frac{Vnp}{36000}.$$

Niiviisi arvutatud veksli hind on alati väiksem varemini saadud valemi järgi arvutatud hinnast, kuid võib tõestada, et see erinevus on küllalt väike.

Näide 1. Arvutame 505-margase veksli hinna, kui veksel diskonteeritakse 60 päeva enne tähtaega diskontomääraga 6%. Selle ülesande täpne lahendus on sama, mis ülesandel 4, lk. 65. Anname siin kaubandusliku kombe kohase arvutuse.

Veksli diskonto on markades

$$\frac{505\cdot 60\cdot 6}{36000}=\frac{505}{100}=5{,}05.$$

Veksli hind on

$$505-5{,}05 \quad \text{ehk} \quad 499{,}95 \text{ marka.}$$

Nii erineb praegusel juhul kaubandusliku kombe kohaselt arvutatud veksli hind täpsest hinnast (vt. üles. 4, lk. 65) ainult 5 penni võrra, mis on 0,01% valuutast.

Näide 2. Veksel *RM*. 640.— tähtajaga 1. XII 38 diskonteeritakse 25. IX 38 diskontomääral $4\frac{1}{2}$%. Missuguse summa eest veksel müüakse?

Tähtpäevani on aega $2 \cdot 30 + 5 + 1$ ehk 66 päeva; seega on veksli diskonto

$$\frac{640 \cdot 9 \cdot 66}{100 \cdot 2 \cdot 360} \text{ ehk } 5{,}28 \text{ marka}$$

ja veksel müüakse hinnaga

$$640 - 5{,}28 \text{ ehk } 634{,}72 \text{ marka.}$$

Ülesanded.

248. Veksel, mille valuuta on 930 marka, diskonteeriti 6%-ga 40 päeva enne tähtpäeva. Arvuta veksli diskonto.

249. Veksel, mille valuuta on 420 marka, diskonteeriti $6\frac{1}{2}$%-ga 1 kuu ja 20 päeva enne tähtpäeva. Arvuta veksli hind.

250. Töösturi 3600-margane veksel diskonteeriti pangas 8%-ga 7 kuud enne tähtaega ja saadeti 3 kuud enne tähtaega teisele pangale edasidiskonteerimiseks $6\frac{1}{2}$%-ga. Kui palju teenis esimene pank sellelt vekslilt?

251. Kui palju maksab pank 450-margasest vekslist tähtpäevaga 27. septembril, kui veksel diskonteeritakse 5%-ga sama aasta 27. mail?

252. 870-margane veksel, tähtpäevaga 26. juulil, diskonteeritakse $7\frac{1}{2}$%-ga 16. märtsil. Arvuta veksli diskonto.

253. Kui suur on 280-margase veksli hind 3. veebruaril, kui veksli tähtpäev on 1. aprillil ja diskontomäär on 8%?

254. Õmbleja ostis õmblusmasina, mille hind oli 160 marka, ja tasus 70 marka rahas, ülejäänud osa aga 90-margase veksliga, mille tähtpäev oli 4 kuu pärast. Mitu

marka sai äri õmblusmasinast, kui äri samal päeval diskonteeris õmbleja veksli $6\frac{1}{2}\%$-ga?

255. Mööbliärist osteti kirjutuslaud ja raamatukapp koguhinnaga 250 marka, tasudes osa rahas ja osa vekslіga. Äri oli nõus vastu võtma 150-margase veksli 3-kuuse tähtajaga, kui ostja veel juurde maksab $7\frac{1}{2}\%$ diskontot. Kui palju tuli ostjal tasuda rahas?

§ 20. Kapitali kasvamine liitintressil.

Ülesanne. Kui suure summani kasvab kapital k marka n aasta jooksul, kui intressimääraks on $p\%$ ja intress liidetakse kapitaliga iga aasta lõpul?

Lahendus. Tähistame kapitali lõppväärtuse markades tähega K. Ühe aasta jooksul kasvab summa k marka intressimääral $p\%$ summani marka

$$k + \frac{kp}{100} = k\left(1 + \frac{p}{100}\right);$$

sellest näeme, et kapitali suurus aasta lõpul saadakse kapitali väärtusest aasta alguses korrutamisel teguriga $1 + \frac{p}{100}$. Tähistame selle teguri lühiduse mõttes tähega q. Öeldu põhjal kasvab k marka

1.	aasta	lõpuks	summani	marka	kq,
2.	„	„	„	„	$kq \cdot q = kq^2$,
3.	„	„	„	„	$kq^2 \cdot q = kq^3$,
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
n.	„	„	„	„	$kq^{n-1} \cdot q = kq^n$.

Asendades q tema väärtusega $1 + \frac{p}{100}$, saame

$$K = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

N ä i d e. Kapital 1000 marka, kasvades intressimääral 5%, muutub 20 aastaga lihtintressi kandes summaks marka

$$1000 \cdot \left(1 + \frac{5 \cdot 20}{100}\right) = 2000.$$

Sama kapital 1000 marka, kasvades intressimääral 5%, muutub 20 aastaga liitintressi kandes summaks marka

$$1000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^{20} = 1000 \cdot 1{,}05^{20} =$$

$$= 1000 \cdot 2{,}654 = 2654.$$

Kui valemis

$$K = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

esinevast neljast suurusest

$$k, \quad p, \quad n, \quad K$$

kolm on teada, siis saame arvutada neljanda. Selle selgitamiseks lahendame järgmised 2 ülesannet.

Ü l e s a n n e 1. Kui suure summa peab isa tütre sündimisel paigutama panka hoiule intressimääral 4%, et tütrele 20-aastaseks saamisel oleks kindlustatud kaasavara 2000 marka?

L a h e n d u s. Rakendades varemini-tuletatud valemit

$$K = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n,$$

saame andmeil

$$K = 2000, \quad p = 4, \quad n = 20,$$

et

$$2000 = k\left(1 + \frac{4}{100}\right)^{20}$$

ehk

$$2000 = k \cdot 1{,}04^{20},$$

millest

$$k = \frac{2000}{1{,}04^{20}} = \frac{2000}{2{,}191} \approx 913.$$

Seega peab paigutama panka summa 913 marka.

Ü l e s a n n e 2. Mitme aasta jooksul kapital kasvab kahekordseks, kui intressimääraks on 3%?

L a h e n d u s. Antud juhul $K = 2k$ ja $p = 3$. Rakendades varemini-tuletatud valemit

$$K = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n,$$

saame

$$2k = k\left(1 + \frac{3}{100}\right)^n,$$

seega

$$2 = 1{,}03^n$$

ja

$$\log 2 = n \cdot \log 1{,}03,$$

millest

$$n = \frac{\log 2}{\log 1{,}03} = \frac{0{,}3010}{0{,}0128} \approx 23{,}5.$$

Seega kapital kahekordistub ümmarguselt 24 aastaga.

Ülesanded.

256. 100-margane kapital antakse aasta alguses panka hoiule. Pank maksab sellelt 10% intressi aastas, mis iga aasta lõpul lisatakse hoiusummale. Arvuta, kui suureks kasvab hoiusumma 1., 2., 3., 4. ja 5. hoiuaasta lõpuks. Arvutused teosta otseselt.

257. Lapsele kingitakse tema 8. sünnipäevaks hoiuraamat 200-margase sissekandega. Raha kannab hoiul seistes liitintressi 3% suuruses. Kui suur summa koguneks hoiuraamatu omaniku 20. sünnipäevaks?

258. Kapital 4000 marka kannab 4% liitintressi. Kui suureks kasvab kapital 15 aasta jooksul?

259. Kui suure kasu toob kapital 5800 marka 14 aasta kestel, kandes 5% liitintressi?

260. Kapital 2800 marka kannab $4\frac{1}{2}$% liitintressi. Kui suur on sellelt kapitalilt 10 aasta jooksul saadav kasu?

261. Missuguse summani oleks kasvanud praeguseks ajaks 1 $ liitintressil, 6%-ga aastas, kui ta oleks pandud kasvama Ameerika avastamisel (a. 1492)?

262. Missugune kapital, kandes $3\frac{1}{2}$% liitintressi, kasvab 20 aasta jooksul summaks 1000 marka?

263. Kui suur kapital, kandes 4% liitintressi, annab 6 aastaga 100 marka kasu?

264. Olgu liitintressi määraks $5\frac{1}{2}$%. Kui palju võiks praegu maksta 1000-margase võlakohustuse eest, mille tähtpäev on 3 aasta pärast?

265. Hoiukassasse on makstud 8 aasta eest summa 172 marka. Vahepeal on see summa kasvanud 226,50 margani. Mitu protsenti liitintressi maksab hoiukassa?

266. Kapital 2500 marka, kandes liitintressi, tõi 12 aasta jooksul 800 marka kasu. Kui kõrge oli intressimäär?

267. Keegi laenab oma tuttavale 25 marka kahe aasta peale liitintressil ja saab tähtajal lisaks laenatud summale veel 24 marka. Mitu protsenti arvestati? (Widmann, 1489.)

268. Missuguse intressimäära puhul kapital kasvab 12 aasta jooksul kahekordseks, kui kasvamine toimub liitintressil?

269. Mitu protsenti liitintressi peab kapital kandma, et ta 28 aasta jooksul kasvaks kolmekordseks?

270. Mitme aasta jooksul kasvab 9000 marka, kandes 5% liitintressi, summaks 10 000 marka?

271. Keegi pärandab oma 7500-margase varanduse Tartu Ülikoolile tingimusega, et see summa lastaks kasvada 10 000 margani ja sealtpeale kapitali aastased intressid tarvitataks andekate üliõpilaste toetamiseks. Millal võib alata toetusraha väljamaksmine, kui arvestada, et raha kannab 8% liitintressi?

272. Tööstuse sissesead maksis uuena 15 000 marka. Tema väärtuse iga-aastasel hindamisel kustutatakse sisseseadu vananemise ja kulumise arvel 8% eelkäivast väärtusest. Kui suurena arvestatakse sisseseadu väärtust 10 aasta pärast?

273. Vabriku sissesead maksis uuena 22 500 marka. Kui kõrgelt tuleb hinnata vabriku sisseseadu 15 aasta pärast, kui iga-aastasel hindamisel kustutatakse sisseseadu kulumise arvel 7% sisseseadu eelmise aasta väärtusest?

274. Puumaja väärtus väheneb iga aastaga 2% võrra eelmise aasta väärtusest. Kui suur on maja väärtus 10 aasta pärast, kui ta praegune väärtus on 15 000 marka?

275. Tööstuse sisseseadu väärtus väheneb iga aastaga 7% võrra. Mitme aastaga on sisseseadu väärtus langenud poolele esialgsest väärtusest?

§ 21. Tähtajalised maksud.

Tähtajaliste maksude all mõistame neid kindlate ajavahemikkude järel tehtavaid sissemakse, mille kaudu toimub kas kapitali kogumine või mõne pikaajalise laenu kustutamine. Nii ühel kui ka teisel juhul eeldame, et sissemaksude tegemine toimub võrdsetes summades aastaste ajavahemikkude järel. Järgnevates ülesannetes vaatleme kapitali kogumist iga aasta a l g u s e s tehtavate sissemaksudega ja laenu kustutamist iga aasta l õ p u l tasutavate aastamaksudega.

Ülesanne 1. Kui suur kapital koguneb n aasta jooksul, kui iga aasta alguses panna panka hoiule a marka, kapital kannab $p\%$ intressi ja intress liidetakse kapitaliga iga aasta lõpul?

Lahendus. Märgime kapitali kasvamisteguri $1+\frac{p}{100}$ lühiduse mõttes tähega q ja kapitali lõppväärtuse tähega A. On selge, et

1. 2. 3. ... $(n-1)$-se ja n-nda aasta

alguses sissemakstud summad kasvavad vastavalt

$n \quad n-1 \quad n-2 \quad \ldots \quad 2 \quad$ ja 1

aastat. Järelikult need sissemaksud kasvavad summadeni

$aq^n \quad aq^{n-1} \quad aq^{n-2} \quad \ldots \quad aq^2 \quad$ ja $\quad aq$

marka, mis liidetult annavad kapitali A:

$$A = aq^n + aq^{n-1} + aq^{n-2} + \ldots + aq^2 + aq$$

ehk

$$A = aq\,(q^{n-1} + q^{n-2} + q^{n-3} + \ldots + q + 1).$$

Sulgudes seisev avaldis on geomeetrilise rea summa, seega

$$A = aq\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Valemi rakendamiseks anname järgmise näite.

Näide. Et kindlustada endale äraelamist alates 61. eluaastast, kirjanik maksab pensionikassasse alates 31. eluaastast iga aasta alguses 100 marka. Pensionikassa arvestab intressi 3% aastas. Arvutame summa, mis pensionikassa võiks maksta kirjanikule tema 60-aastaseks saamisel.

Andmeteks on

$$a = 100, \quad q = 1 + \frac{3}{100} = 1{,}03, \quad n = 30.$$

Otsitav

$$A = 100 \cdot 1{,}03 \cdot \frac{1{,}03^{30} - 1}{1{,}03 - 1} = 103 \cdot \frac{1{,}03^{30} - 1}{0{,}03} .$$

Logaritmidega arvutamisel leiame, et $1{,}03^{30} = 2{,}427$; seega

$$A = 103 \cdot \frac{2{,}427 - 1}{0{,}03} = 103 \cdot \frac{1{,}427}{0{,}03} =$$
$$= 103 \cdot 47{,}57 \approx 4900.$$

Niisiis võiks pensionikassa välja maksta summa 4900 marka.

Ülesanne 2. Laenati k marka intressimääraga $p\%$. Võlgnik soovib laenu tasuda võrdsete aastamaksudega, neist esimese ühe aasta pärast peale laenu tegemist. Kui suur tuleb määrata aastamaks, et laen oleks tasutud n aastaga?

Lahendus. Laen k marka kasvaks n aasta jooksul intressimääral $p\%$ summani marka

$$kq^n,$$

kus $q = 1 + \frac{p}{100}$. Et laen n aasta jooksul kustuks, peab iga aasta lõpul tehtavatest sissemaksudest kasvama summa, mille suurus on samuti kq^n. Kui sissemaksud oleksid tehtud iga aasta alguses, siis oleks neist kogunenud summa marka

$$aq\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Et sissemaksud on tehtud aasta lõpul, siis on iga sissemaks ühe aasta võrra lühema aja hoiul, mistõttu iga sissemaksust kasvav summa ja seepärast ka terve sissemaksudest kogunev summa jääb q korda väiksemaks. Seega koguneb aasta lõpul tehtavatest sissemaksudest summa marka

$$aq\,\frac{q^n - 1}{q - 1} : q = a\,\frac{q^n - 1}{q - 1} .$$

Et viimane summa peab katma laenu ühes intressiga, siis

$$a \frac{q^n - 1}{q - 1} = kq^n,$$

millest otsitav aastamaks

$$a = kq^n \frac{q-1}{q^n - 1}.$$

Näide. Elektrifitseerimise kava teostamiseks sai vald 1500 marka laenu, mis oli lubatud 10 aastaks 2,5%-ga. Arvutame summa, mis vald peab iga aasta lõpul maksma, et laen ettenähtud aja jooksul kustuks.

Näites on antud, et

$$k = 1500, \quad q = 1 + \frac{2,5}{100} = 1,025, \quad n = 10.$$

Otsitav

$$a = 1500 \cdot 1,025^{10} \cdot \frac{1,025 - 1}{1,025^{10} - 1}.$$

Logaritmidega arvutamisel leiame, et $1,025^{10} = 1,28$.

Seega

$$a = 1500 \cdot 1,28 \cdot \frac{0,025}{1,28 - 1} = 15 \cdot 128 \cdot \frac{0,025}{0,28} =$$

$$= 192 \cdot \frac{25}{28} \approx 171,4.$$

Laenu kustutamiseks vajalik aastamaks on 171,4 marka.

Ülesanded.

276. Kui suur summa koguneb 10 aasta jooksul, kui iga aasta alguses maksta panka 200 marka ja pank arvestab 4% liitintressi?

277. Poja sündimisest peale maksab isa iga aasta panka poja õppimisvõimaluste kindlustamiseks 100 marka. Kui suur summa koguneb niiviisi poja 19. sünnipäevaks, kui pank arvestab 4% liitintressi?

278. Suurtehase töölislinnakeses võib tööline omandada majakese väikese aiaga, makstes 20 aasta jooksul iga aasta alguses 50 marka. Kui palju maksab majake töölisele, kui arvata rahalt saadava intressi määraks 6%?

279. Kindlustusselts kohustus ametniku surma korral tema omastele maksma 3000 marka, kui ametnik maksab iga aasta alguses 120 marka preemiat. Kui palju kindlustusselts kaotas selle kindlustusega, kui kindlustatu suri peale 13. aastapreemia maksmist ja kapitali aastane kasvumäär oli $3\frac{1}{2}\%$?

280. Kui suure kapitali saab koguda 10 aasta kestel, kui esimese aasta alguses anda panka hoiule 3400 marka, iga aasta järel lisada 250 marka ja pank maksab 3% liitintressi?

281. Kandku pikaajalised hoiusummad $3\frac{1}{2}\%$ liitintressi. Kui suure summa peab maksma iga aasta alguses panka, et 12 aasta jooksul koguneks kapital 6000 marka?

282. Tööstuse asutamiseks tehakse 50 000-margane laen $3\frac{1}{2}\%$-ga, kohustudes laenu kustutama 8 aasta jooksul võrdsete, aasta lõpul makstavate aastamaksudega. Kui suured on need aastamaksud?

283. Linn saab riigilt veevärgi ehitamiseks 150 000 marka $1\frac{1}{2}$-protsendist laenu. Kui suure summa peab linn tasuma iga aasta lõpul, et laen kustuks 30 aasta jooksul?

284. 15 000-margase laenu võtja kohustub maksma 6% intressi ja kustutama laenu 5 võrdse maksuga 1., 2., 3., 4. ja 5. aasta lõpul peale laenu tegemist. Kui suured on aastamaksud?

285. 5-protsendine laen kustutatakse 12 aasta jooksul, makstes iga aasta lõpul 360 marka. Kui suur on laenatud summa?

286. 10 000-margast laenu tahetakse kustutada võrdsete iga-aastaste maksudega, mis tasutakse 30 aasta jooksul iga aasta lõpul. Kui suur peab olema aastamaks, kui laenult arvestatakse $3\frac{1}{2}\%$ intressi?

287. Vald teeb koolimaja ehitamiseks laenu 10 000 marka, kohustudes seda laenu tasuma 25 aasta jooksul võrdsete aastamaksudega iga aasta lõpul. Laen kannab $4\frac{1}{2}\%$ liitintressi. Kui suur on laenu kustutamiseks ettenähtud aastamaks?

288. 4000 marga suurune 5-protsendine laen kustutatakse võrdsete aastamaksudega, mis tasutakse iga aasta lõpul 500 marga suuruses. Mitme aasta järel on laen kustutatud ja kui suur on viimane maks?

289. Missuguse aja jooksul saab katta 10 000-margase 4-protsendise laenu, kui iga aasta lõpul tasuda 1000 marka? Kui suur on viimane tasutav summa?

290. 60 000 marga suuruse laenu kustutamiseks makstakse iga aasta lõpul 10 000 marka. Mitme aasta pärast on laen kustutatud, kui laenult arvatakse liitintressi 6% suuruses?

291. Mitme aastaga jõuab ametnik koguda kapitali, mille 5-protsendine aastaintress oleks 900 marka, kui ta iga aasta alguses paneb hoiule 240 marka intressimääral 3,5%?

292. Laen 2000 marga suuruses on tehtud $4\frac{1}{2}\%$-ga. Laen tasutakse võrdsete osamaksudega 95 marka iga aasta lõpul. Mitme aastaga on võlg tasutud ja kui suur maks tuleb tasuda viimasel aastal?

293. Kui suure laenu saab kustutada 20 aastaga, makstes iga aasta lõpul 500 marka, kui laenu intressimäär on 4%?

294. Mitu marka peab panema hoiule 3%-ga, et 10 aasta jooksul saaks võtta pangast iga aasta lõpul 600 marka?

Trigonomeetria.

Peatükk IV.

Nurgafunktsioonide logaritmid.

§ 22. Nurgafunktsioonide logaritmide tabelid.

Kui tahetakse logaritmide abil arvutada mingi suuruse väärtust, mille valemis esineb ka nurgafunktsioone, siis tuleb muude suuruste logaritmide kõrval leida selles valemis esinevate nurgafunktsioonide logaritmid. Selleks peaks esmalt leidma nurgafunktsioonide tabelitest nende funktsioonide väärtused ja seejärel logaritmide tabelist nende funktsioonide logaritmide väärtused. Et vältida seda tülikat kahesuguste tabelite kasutamist, selleks on koostatud eritabelid, milles vahenditult on antud nurgafunktsioonide logaritmide väärtused. Nii sisaldavad kõik matemaatiliste tabelite kogud siinuse logaritmide, koosinuse logaritmide, tangensi logaritmide ja kootangensi logaritmide tabeleid. Oma ehituselt sarnanevad need tabelid tavaliselt nurgafunktsioonide tabelitega ning nende abil mingi nurgafunktsiooni logaritmi leidmine ja nurga leidmine mingi nurgafunktsiooni logaritmi järgi toimub samuti kui vastavate nurgafunktsioonide tabelite kasutamine.

Ülesanded.

295. Leia logaritmide tabelite abil järgmiste sümbolite väärtused:

1. $\log \sin 17^\circ 30'$
$\log \sin 38^\circ 13'$
$\log \sin 6^\circ 48'$
$\log \sin 48^\circ 04'$
$\log \sin 67^\circ 41'$

2. $\log \tan 19^\circ 24'$
$\log \tan 40^\circ 08'$
$\log \tan 5^\circ 54'$
$\log \tan 59^\circ 28'$
$\log \tan 84^\circ 55'$

296. Leia logaritmide tabelite abil järgmiste sümbolite väärtused:

1. $\log \cos 19^\circ 23'$
$\log \cos 26^\circ 45'$
$\log \cos 54^\circ 16'$
$\log \cos 72^\circ 05'$
$\log \cos 82^\circ 29'$

2. $\log \cot 24^\circ 52'$
$\log \cot 39^\circ 08'$
$\log \cot 46^\circ 48'$
$\log \cot 5^\circ 45'$
$\log \cot 84^\circ 11'$

297. Leia logaritmide tabelite abil nurgad $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, teades, et

1. $\log \sin \alpha = \bar{1},7720$
$\log \sin \beta = \bar{1},5312$
$\log \sin \gamma = \bar{1},4359$
$\log \sin \delta = \bar{2},9960$
$\log \sin \varepsilon = \bar{2},5672$

2. $\log \tan \lambda = \bar{1},3032$
$\log \tan \mu = \bar{1},4480$
$\log \tan \varphi = \bar{1},8736$
$\log \tan \psi = 0,1425$
$\log \tan \omega = 0,8716$

298. Leia logaritmide tabelite abil nurgad $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, teades, et

1. $\log \cos \alpha = \bar{1},4682$
$\log \cos \beta = \bar{1},7356$
$\log \cos \gamma = \bar{1},8830$
$\log \cos \delta = \bar{1},9404$
$\log \cos \varepsilon = \bar{2},9211$

2. $\log \cot \lambda = 1,5680$
$\log \cot \mu = 0,8446$
$\log \cot \varphi = 0,5430$
$\log \cot \psi = 0,1042$
$\log \cot \omega = \bar{1},6752$

299. Määra nurga φ suurus, teades, et

1. $\sin \varphi = \frac{0,9348}{2,746}$
2. $\tan \varphi = \frac{1000}{2718}$
3. $\cos \varphi = \frac{745}{1000}$
4. $\cot \varphi = \frac{0,8372}{0,2008}$

300. Määra nurk x, teades, et $\cos x = \sqrt{\frac{3}{5}}$.

301. Määra nurk α, teades, et $\cot \alpha = \sqrt[3]{\frac{1{,}782}{0{,}0948}}$.

301. Määra nurk α, teades, et $\cot \alpha = \frac{\sqrt[3]{4{,}27}}{\sqrt{12{,}84}}$.

§ 23. Täisnurkse kolmnurga lahendamine logaritmide abil.

Kui täisnurkse kolmnurga lahendamisel tuleb kasutada kolme- või neljakohalisi andmeid ja nurgafunktsioonide väärtusi, siis on kasulik arvutused teostada logaritmide abil. Logaritmide rakendamist võimaldab asjaolu, et täisnurkse kolmnurga lahendamine toimub peamiselt valemite abil, milles esinevad ainult korrutamise ja jagamise tehe.

Erandi moodustab ainult hüpotenuusi arvutamine antud kaatetite järgi ning kaateti arvutamine antud hüpotenuusi ja teise kaateti järgi, kui selleks kasutatakse Pythagorase teoreemi. Kuid neid ülesandeid on võimalik lahendada ka Pythagorase teoreemi kasutamata — valemite abil, mis võimaldavad logaritmide rakendamist. Järgmistes näidetes on kasutatud selliseid lahendamisvõtteid.

Näide 1. On antud kaatet a ja hüpotenuus c. Leiame kaateti b.

Esmalt leiame nurga α, kasutades valemit

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}.$$

Seejärel valemi

$$b = c \cos \alpha$$

abil leiame kaateti b.

Et kasutatud valemid ei sisalda liitmise ega lahutamise tehet, siis on võimalik arvutusi teostada logaritmide abil.

N ä i d e 2. On antud kaatetid a ja b. Leiame hüpotenuusi c.

Leiame esmalt näiteks nurga α, kasutades valemit

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}.$$

Seejärel leiame valemi

$$c = \frac{a}{\sin \alpha}$$

abil hüpotenuusi c.

N ä i d e 3. Täisnurkse kolmnurga üks kaatet on 28,3 m ja selle vastasnurk on 44,8°. Arvuta teine kaatet ja hüpotenuus.

L a h e n d u s. Tähistame antud kaateti tähega a ja antud nurga tähega α. Otsitavad on siis kaatet b ja hüpotenuus c.

1. Arvutame kaateti b valemi

$$b = a \cot \alpha$$

järgi. Siis

$$b = 28{,}3 \cdot \cot 44{,}8°.$$

Logaritmides selle võrduse, saame

$$\log b = \log 28{,}3 + \log \cot 44{,}8°.$$

Tabelitest leiame, et

$$\log 28{,}3 = 1{,}4518$$

ja

$$\log \cot 44{,}8° = 0{,}0030$$

Seega

$$\log b = 1{,}4548.$$

Logaritmide tabelist leiame, et

$$b = 28{,}5.$$

2. Hüpotenuusi c arvutame valemi

$$c = \frac{a}{\sin \alpha}$$

järgi. Siis

$$c = \frac{28{,}3}{\sin 44{,}8^0}.$$

Logaritmides selle võrduse, saame

$$\log c = \log 28{,}3 - \log \sin 44{,}8°.$$

Tabelist leiame, et

$$\log 28{,}3 = 1{,}4518$$

ja

$$\log \sin 44{,}8° = \bar{1}{,}8480$$

Seega

$$\log c = 1{,}6038.$$

Logaritmide tabelist leiame, et

$$c = 40{,}16.$$

K o n t r o l l. Arvutame nurga β valemi

$$\sin \beta = \frac{b}{c}$$

järgi. Logaritmides selle võrduse, saame

$$\log \sin \beta = \log b - \log c.$$

Kasutades varemini leitud logaritme

$$\log b = 1{,}4548$$

ja

$$\log c = 1{,}6038$$

leiame, et

$$\log \sin \beta = \bar{1}{,}8510.$$

Siinuse logaritmide tabelist leiame, et

$$\beta = 45{,}2°.$$

Liites nurgad α ja β, saame $44{,}8° + 45{,}2°$ ehk $90°$. Seega on ülesande lahendus osutunud õigeks.

V a s t u s. Kolmnurga teine kaatet on 28,5 m ja hüpotenuus on 40,16 m.

Ülesanded.

303. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 19,43 m ja üks teravnurk on 38,4°. Arvuta mõlemad kaatetid.

304. Täisnurkse kolmnurga kaatet on 0,952 m ja selle kaateti vastasnurk on 59°06′. Arvuta teine kaatet ja kolmnurga pindala.

305. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 43,56 m ja 19,08 m. Arvuta kolmnurga teravnurgad ja hüpotenuus.

306. Võrdhaarse kolmnurga haar on 123,7 cm ja kõrgus on 84,2 cm. Arvuta kolmnurga alus.

307. Lahenda järgmised täisnurksed kolmnurgad:

	a	b	c	α	β	S
1.			21,85	62°28′		
2.	4,630			25°32′		
3.		0,634			51°10′	
4.	75,64				33°20′	
5.	0,2136		0,9247			
6.	67,53	42,38				
7.		15,08				120
8.				78°45′		34,52

308. Võrdhaarse kolmnurga alus on 59,48 cm ja haar on 44,53 cm. Kui suur on kolmnurga kõrgus?

309. Võrdhaarse kolmnurga alus on 31,26 m ja kõrgus on 20,75 m. Leia kolmnurga tipunurk.

310. Ringi raadius on 41,7 cm. Kui pikad kõõlud vastavad selles ringis kaartele 37°42′, 51°37′ ja 69°04′.

311. Ringi raadius on 35,8 cm. Kui suured kaared vastavad selles ringis kõõludele, mille pikkused on 12,8 cm, 34,5 cm ja 50,3 cm?

312. Arvuta korrapärase viisnurga pindala, kui viisnurga raadius on 128 mm.

313. Korrapärase kaheksanurga pindala on 23,5 m^2. Kui suur on kaheksanurga raadius?

314. Ringi raadius on 34,8 cm. Kui suur on selle ringi sektori pindala, kui sektori kõõl on 24,6 cm?

315. Ringi sektori kõõl on 124 cm ja pindala on 0,312 m^2. Arvuta ringi raadius.

Peatükk V.

Kaldnurkse kolmnurga lahendamine.

§ 24. Siinuslause.

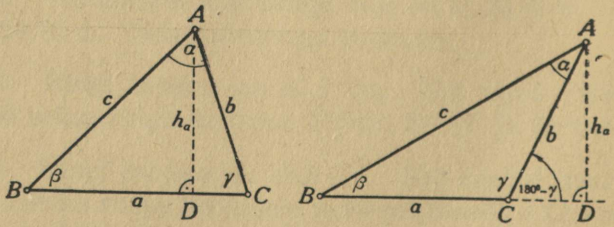
Kaldnurkse kolmnurga elemente saab leida kolmnurka määravaist andmeist, tükeldades kolmnurga kõrgusega kaheks täisnurkseks kolmnurgaks ja arvutades viimaste elemendid. Tunduvalt kiiremini jõuame eesmärgile, kui rakendame seoseid, mis valitsevad kaldnurkse kolmnurga elementide vahel. Üheks niisuguseks seoseks on siinuslause, mille järgi

kolmnurga iga külje ja selle vastasnurga siinuse suhted on võrdsed.

Tähistades kolmnurga külgi ja nurki normaaltähistega (joonis 4), saame siinuslause kirjutada kujul

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$

Tõestame selle teoreemi eraldi teravnurkse ja nürinurkse kolmnurga kohta.



Joonis 4.

Joonestades kõrguse kolmnurga ühest tipust, näiteks tipust A, saame teravnurkse kolmnurga puhul | nürinurkse kolmnurga puhul

$\triangle$-st $ADC : h_a = b \cdot \sin\gamma$; $\quad h_a = b \cdot \sin(180° - \gamma)$;

$\triangle$-st $ABD : h_a = c \cdot \sin\beta$; $\quad h_a = c \cdot \sin\beta$.

Seega

$$b \cdot \sin\gamma = c \cdot \sin\beta; \qquad b \cdot \sin(180° - \gamma) = c \cdot \sin\beta.$$

Et $\sin(180° - \gamma) = \sin\gamma$, siis parempoolses võrduses võime $\sin(180° - \gamma)$ asendada suurusega $\sin\gamma$, mille järel mõlema kolmnurga elementide jaoks saame ühe ja sama võrduse

$$b \cdot \sin\gamma = c \cdot \sin\beta.$$

Jagades saadud võrduse mõlemad pooled korrutisega $\sin\gamma \cdot \sin\beta$, saame võrde

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Kui joonestada kõrgus mõnest teisest tipust, näiteks tipust B, siis saaksime selsamal viisil võrde

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Neist kahest võrdest järeldub, et

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Lause kehtib ka täisnurkse kolmnurga kohta, nagu see järeldub kohe tema teravnurkade siinuste definitsioonist. Kui võrdes

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

vahetada sisemised liikmed, siis saame võrde

$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta.$$

Analoogiliselt saaksime

$$b : c = \sin\beta : \sin\gamma$$

ja

$$a : c = \sin \alpha : \sin \gamma.$$

Neid kolme võrret kirjutatakse koos lühidalt kujul

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$$

Sellel kujul kirjutatud siinuslauset võib sõnastada järgmiselt:

kolmnurga küljed suhtuvad nagu vastasnurkade siinused.

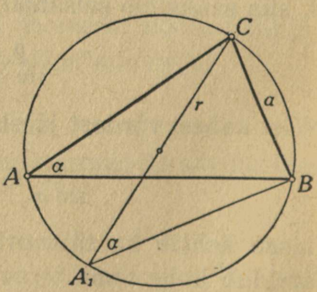
Siinuslause ütleb, et kolmnurgas on külje ja vastasnurga siinuse suhe jääv suurus. Saab tõestada, et sellel jääval suurusel on väga lihtne geomeetriline tähendus, nimelt:

kolmnurga külje ja vastasnurga siinuse suhe võrdub selle kolmnurga ümber joonestatud ringjoone läbimõõduga.

Selle teoreemi tõestamiseks joonestame $\triangle ABC$ ümber ringjoone (joonis 5), mille raadiuse tähistame tähega r; joonestame edasi selle ringjoone sisse uue kolmnurga A_1BC nii, et

1) uuel kolmnurgal on endise kolmnurgaga ühine külg $BC = a$,

2) uue kolmnurga üks külg, näiteks külg A_1C, läbib ringjoone keskpunkti.



Joonis 5.

Niiviisi joonestatud kolmnurk on täisnurkne, sest selle üks nurk on diameetrile toetuv piirdenurk, järelikult täisnurk. Edasi näeme, et

$$\widehat{A}_1 = \widehat{A} = \alpha,$$

sest $\widehat{A}_1$ ja $\widehat{A}$ on ühele ja samale kaarele toetuvad piirdenurgad. Et kolmnurk A_1CB on täisnurkne, siis on

$$a = A_1C \cdot \sin \alpha = 2r \cdot \sin \alpha.$$

Sellest järeldub, et

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2r.$$

Siinuslause järgi on siis ka

$$\frac{b}{\sin \beta} = 2r$$

ja

$$\frac{c}{\sin \gamma} = 2r.$$

Ülesanded.

316. Rakendades siinuslauset näita, et

1. kui kolmnurgas kaks nurka on võrdsed, siis ka nende nurkade vastasküljed on võrdsed;
2. kolmnurgas, mille kõik nurgad on võrdsed, on ka kõik küljed võrdsed.

317. Kolmnurgas on üks nurk 60°, teine 45°. Kui suur on nende nurkade vastaskülgede suhe?

318. Kolmnurga kaks külge suhtuvad nagu 1:2. Suurema külje vastasnurk on 50°. Kui suur on väiksema külje vastasnurk?

319. Kolmnurga nurgad suhtuvad nagu 1:2:3. Kuidas suhtuvad nende nurkade vastasküljed?

320. Kolmnurga nurgad α, β ja γ rahuldavad tingimust

$$\sin^2 \gamma = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta.$$

Näita, et kolmnurk on täisnurkne.

321. Kolmnurgas ABC on joonestatud nurga B poolitaja BE, kus E tähendab nurgapoolitaja ja külje AC ühispunkti. Rakendades siinuslauset tõesta kolmnurga nurgapoolitaja omadus:

$$AE:EC = AB:BC.$$

322. Täisnurkse kolmnurga täisnurga poolitaja jaotab hüpotenuusi osadeks, mis suhtuvad nagu 4:5. Kui suured on täisnurkse kolmnurga teravad nurgad?

§ 25. Siinuslause rakendusi.

Siinuslause

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2r$$

võimaldab

1. leida kolmnurga üht külge, teades teist külge ja kummagi külje vastasnurka; nii on
$$a=\frac{b\sin\alpha}{\sin\beta};$$
2. leida kolmnurga üht nurka, teades teist nurka ja kummagi nurga vastasküIge; nii on
$$\sin\alpha=\frac{a\sin\beta}{b},$$
millest tabelite abil saame nurga α;
3. leida kas kolmnurga külge või selle vastasnurka või ümberjoonestatud ringjoone raadiust, teades kaht siinnimetatud elementi; nii on näiteks
$$r=\frac{a}{2\sin\alpha};$$
4. leida kas ringjoone kõõlu või sellele toetuvat piirdenurka või ringjoone raadiust, teades kaht siinnimetatud elementi; nii on näiteks
$$a=2r\sin\alpha.$$

Ülesanded.

323. Ehita sirkli ja joonlaua abil kolmnurk andmeil: $a=10$ cm, $\alpha=60°$ ja $\beta=45°$. Mõõda külg b ja kontrolli tulemust külje b arvutamise teel.

324. Kolmnurgas on külg $b=32{,}4$ cm, nurk $\beta=$ $=74{,}3°$ ja nurk $\gamma=41{,}8°$. Kui suur on külg c?

325. Kolmnurgas on külg $a = 54$ m, külg $b = 42$ m ja nurk $\alpha = 146°$. Kui suur on nurk β?

326. Kolmnurgas on külg $c = 52{,}8$ m, nurk $\alpha = 48°06'$ ja nurk $\beta = 74°12'$. Kui suur on külg b?

327. Kolmnurga külg on 6,24 m; selle külje lähisnurgad on 26°15′ ja 32°25′. Arvuta kolmnurga teised küljed.

328. Kolmnurga kaks nurka on 65,4° ja 52,3°; kolmnurga kõige väiksem külg on 17,7 cm. Kui pikk on kolmnurga kõige suurem külg?

329. Ringi raadius on 6 cm. Ringis on joonestatud kõõl, mille pikkus on 5 cm. Kui suur on sellele kõõlule toetuv piirdenurk?

330. Ringi kõõlule, mille pikkus on 17 cm, toetub 32°-ne piirdenurk. Kui suur on ringi raadius?

331. Ringisse joonestatud kolmnurga üks külg on 3,75 m; selle külje vastasnurk on 47,2°. Kui suur on ringi raadius?

332. Võrdhaarse kolmnurga haarade pikkus on 7,92 m; selle kolmnurga ümber joonestatud ringi raadius on 4,62 m. Leia kolmnurga nurgad.

§ 26. Koosinuslause.

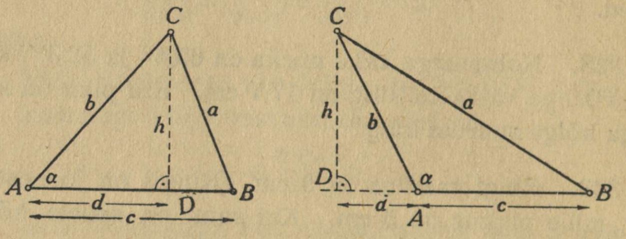
Teise teoreemina, mis võimaldab avaldada seoseid iga kolmnurga elementide vahel, vaatleme koosinuslauset. See ütleb, et

kolmnurga külje ruut on teiste külgede ruutude summast nende külgede ja nende vahelise nurga koosinuse kahekordse korrutise võrra väiksem.

Kirjutades seda teoreemi sümbolites, saame:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha;$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta;$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Tõestame teoreemi eraldi teravnurkse ja nürinurkse kolmnurga kohta (joonis 6).



Joonis 6.

Selleks joonestame tipust C kolmnurga kõrguse h ja tähistame tähega d külje b projektsiooni küljele c või selle pikendusele.

Siis kolmnurgast DBC saame Pythagorase teoreemi põhjal

teravnurkse kolmnurga puhul	nürinurkse kolmnurga puhul
$a^2 = h^2 + (c - d)^2$	$a^2 = h^2 + (c + d)^2$.

Peale sulgude avamist saame vastavalt:

$a^2 = h^2 + c^2 + d^2 - 2cd$ $\qquad$ $a^2 = h^2 + c^2 + d^2 + 2cd$

ehk

$a^2 = h^2 + d^2 + c^2 - 2cd.$ $\qquad$ $a^2 = h^2 + d^2 + c^2 + 2cd.$

Et kolmnurgas ADC on $h^2 + d^2 = b^2$, siis

$a^2 = b^2 + c^2 - 2cd$ $\qquad$ $a^2 = b^2 + c^2 + 2cd.$

Kolmnurgast ADC leiame, et

$d = b \cos \alpha$ $\qquad$ $d = b \cos (180^\circ - \alpha).$

Et $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, siis nürinurkse kolmnurga puhul

$$d = b\,(-\cos\alpha)$$

ehk

$$d = -b\cos\alpha.$$

Asendades eespool-saadud a^2-valemites tähe d tema avaldistega, leiame vastavalt:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot b\cos\alpha$ $\quad\quad$ $a^2 = b^2 + c^2 + 2c \cdot (-b\cos\alpha)$.

Seega nii esimesel kui teisel juhul

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Samal viisil saame koosinuslauset tõestada ka teiste külgede kohta.

Ülesanded.

333. Näita, et koosinuslause on kehtiv ka täisnurkse kolmnurga puhul.

334. Näita, et nürinurkse kolmnurga suurima külje ruut on suurem kui teiste külgede ruutude summa ja väiksem kui teiste külgede summa ruut.

§ 27. Koosinuslause rakendusi.

Koosinuslauset saame rakendada kolmnurga külje arvutamiseks, kui on antud kaks teist külge ja nende vaheline nurk. Kuid seda lauset saame kasutada ka kolmnurga nurkade leidmiseks, kui on antud kolmnurga küljed. Selleks lahendame eespool-toodud valemid $\cos\alpha$, $\cos\beta$ ja $\cos\gamma$ suhtes; nii saame:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc};$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,ac};$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab}.$$

Leides antud külgede järgi $\cos\alpha$, $\cos\beta$ ja $\cos\gamma$, saame tabelitest nurgad α, β ja γ.

Koosinuse põhjal saadud kolmnurga külje ruudu ja nurga koosinuse avaldised ei ole logaritmitavad. Seetõttu on raskendatud logaritmide kasutamine selle lause rakendamisel.

Ülesanded.

335. Ehita sirkli ja joonlaua abil kolmnurk andmeil $a = 3$, $b = 7$, $\gamma = 45°$. Mõõda kolmas külg c ja kontrolli tulemust külje c arvutamise teel.

336. Kolmnurga kaks külge on 30 m ja 14 m; nende külgede vaheline nurk on 60°. Kui pikk on kolmnurga kolmas külg?

337. Kolmnurgas on külg $a = 3$, külg $b = 5$ ja nurk $\gamma = 120°$. Kui pikk on külg c?

338. Kolmnurga kaks külge on 8 m ja 12 m; nende vaheline nurk on 58°25′. Arvuta kolmas külg.

339. Kolmnurga küljed on 6 cm, 7 cm ja 8 cm. Leia kolmnurga suurim nurk.

340. Kolmnurga küljed on 2 m, 5 m ja 6 m. Leia kolmnurga väikseim nurk.

341. Kolmnurgas on külg $a = 56$ mm, külg $b = 38$ mm ja külg $c = 29$ mm. Kui suur on nurk α?

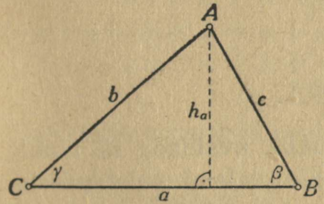
342. Rakendades koosinuslauset näita, et kolmnurgas, millel kõik küljed on võrdsed, on ka kõik nurgad võrdsed.

343. Näita, et kolmnurk, mille küljed suhtuvad nagu 8,4:11,2:14, on täisnurkne kolmnurk.

§ 28. Kolmnurga pindala valemid.

Kolmnurga pindala avaldamiseks külgede ja nurkade kaudu lähtume tuntud valemist

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2}.$$



Joonis 7.

Asendades siin esineva kõrguse h_a tema avaldisega $b \sin \gamma$ (joonis 7), saame pindala jaoks valemi

$$S = \frac{ab \sin \gamma}{2}.$$

Analoogiliselt saame

$$S = \frac{bc \sin \alpha}{2}$$

ja

$$S = \frac{ac \sin \beta}{2}.$$

Seega

kolmnurga pindala võrdub kahe külje ja nende vahelise nurga siinuse poole korrutisega.

Kolmnurga pindala saame avaldada ka ainult ühe külje ja nurkade abil. Selleks avaldame siinuslause põhjal külje b; et

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta},$$

siis

$$b \sin \alpha = a \sin \beta,$$

seega

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}.$$

Asendades selle avaldisega ülaltuletatud valemis külje b, saame

$$S = \frac{a \cdot \dfrac{a \sin \beta}{\sin \alpha} \cdot \sin \gamma}{2}$$

ehk

$$S = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}.$$

Analoogiliselt leiame, et

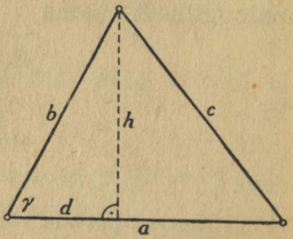
$$S = \frac{b^2 \sin \alpha \sin \gamma}{2 \sin \beta}$$

ja

$$S = \frac{c^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin \gamma}.$$

Kolmnurga pindala on võimalik avaldada ka ainult kolme külje abil. Vastava pindala valemi tuletamiseks avaldame kolmnurga kõrguse tema külgede kaudu ja asendame siis leitud avaldisega kõrguse h pindala valemis

$$S = \frac{1}{2} ah.$$



Joonis 8.

Kui külje b projektsioon küljele a tähistada tähega d, siis Pythagorase teoreemi põhjal (joonis 8)

$$h^2 = b^2 - d^2$$

ehk

$$h^2 = b^2 - (b \cos \gamma)^2$$

ehk

$$h^2 = b^2 (1 - \cos^2 \gamma).$$

Lahutades avaldise $1 - \cos^2 \gamma$ teguriteks, saame

$$h^2 = b^2 (1 + \cos \gamma)(1 - \cos \gamma).$$

Rakendame nüüd koosinuslauset ja avaldame tegurid $1 + \cos \gamma$ ning $1 - \cos \gamma$ kolmnurga külgede abil. Nii saame:

$$1 + \cos \gamma = 1 + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{(a+b)^2-c^2}{2ab} =$$
$$= \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2ab};$$

$$1 - \cos \gamma = 1 - \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2ab} = \frac{c^2-(a-b)^2}{2ab} =$$
$$= \frac{(c+a-b)(c-a+b)}{2ab} = \frac{(a+c-b)(b+c-a)}{2ab}.$$

Tähistame kolmnurga ümbermõõdu sümboliga $2p$; siis

$$a + b + c = 2p,$$

$$a + b - c = a + b + c - 2c = 2p - 2c = 2(p - c),$$
$$a + c - b = a + b + c - 2b = 2p - 2b = 2(p - b),$$
$$b + c - a = a + b + c - 2a = 2p - 2a = 2(p - a).$$

Kasutades viimaseid avaldisi saame:

$$1 + \cos\gamma = \frac{2p \cdot 2(p - c)}{2ab} = \frac{2p(p - c)}{ab}$$

ja

$$1 - \cos\gamma = \frac{2(p - b) \cdot 2(p - a)}{2ab} = \frac{2(p - b)(p - a)}{ab}.$$

Asendades kõrguse ruudu valemis $1 + \cos\gamma$ ja $1 - \cos\gamma$ leitud avaldistega, saame:

$$h^2 = b^2 \cdot \frac{2p(p - c)}{ab} \cdot \frac{2(p - b)(p - a)}{ab}$$

ehk

$$h^2 = \frac{4}{a^2} \cdot p(p - a)(p - b)(p - c)$$

ja seega

$$h = \frac{2}{a}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

Asendades pindala valemis kõrguse h leitud avaldisega, leiame, et

$$S = \frac{1}{2}a \cdot \frac{2}{a}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

ehk

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

Viimast pindala valemit nimetatakse **Heroni pindalavalemiks.**

344. Kolmnurga kaks külge on 5 cm ja 8 cm; nende külgede vaheline nurk on 30°. Kui suur on kolmnurga pindala?

345. Kolmnurga kaks külge on 631,8 m ja 495,8 m; nende vaheline nurk on 134°20′. Kui suur on kolmnurga pindala?

346. Kolmnurga kaks külge on 12 cm ja 10 cm; kolmnurga pindala on 54 cm^2. Leia antud külgede vaheline nurk.

347. Arvuta kolmnurga pindala, kui kolmnurga külg on 15,92 m ning selle lähisnurgad on 59°06′ ja 38°44′.

348. Arvuta kolmnurga pindala, kui kolmnurga külg on 0,678 m ning selle lähisnurgad on 156° ja 14°08′.

349. Kolmnurga küljed on 3 cm, 4 cm ja 6 cm. Arvuta kolmnurga pindala.

350. Arvuta kolmnurga pindala, kui kolmnurga küljed on 4,6 m, 4,6 m ja 5,8 m.

351. Võrdhaarse kolmnurga haar on 24,8 cm ja tipunurk on 98,8°. Arvuta kolmnurga pindala.

352. Võrdkülgse kolmnurga külg on 12 mm. Arvuta kolmnurga pindala.

353. Ringi raadius on 40,4 cm. Ringis on võetud segment, mille kaar on 150°. Arvuta segmendi pindala.

354. Arvuta korrapärase kümmenurga pindala, kui kümmenurga raadius on 0,8 m.

355. Kolmnurga kaks nurka on 45° ja 70°; kolmnurga pindala on 1 m^2. Kui suur on kolmnurga suurim külg?

§ 29. Kolmnurga lahendamine.

Nagu teada, on kolmnurk määratud järgmiste elementidega:

1. üks külg ja kaks nurka;
2. kaks külge ja nende vaheline nurk;
3. kaks külge ja suurema külje vastasnurk;
4. kolm külge.

Kolmnurga saame lahendada, kui on antud üks nimetatud elementide kolmikutest. Lahendamisvõtetega tutvumiseks vaatleme iga nimetatud juhtu eraldi.

Kui kolmnurgast on antud üks külg ja kaks nurka, näiteks a, α ja β, siis ülejäänud elemendid leiame järgmiselt:

1. Kolmas nurk

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta).$$

2. Siinuslause järgi on

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha},$$

seega teine külg

$$b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha}.$$

3. Siinuslause järgi on

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha},$$

seega kolmas külg

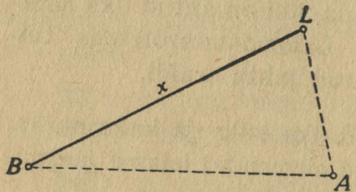
$$c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Kontrollimiseks võib kasutada koosinuslauset.

Ü l e s a n n e. Tuletornid A ja B asetsevad teineteisest 16,5 km kaugusel. Tornist A vaadates on tuletorn B ja merel olev laev L näha suundades, mis teineteisega moodustavad nurga 78°30′. Tornist B vaadates on tuletorn A ja laev L näha suundades, mis teineteisega moodustavad nurga 27°20′. Kui kaugel on laev tuletornist B?

L a h e n d u s. Jooniselt 9 saame:

1. $\widehat{L} = 180° - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 180° - (78°30' + 27°20') =$
$= 180° - 105°50' = 74°10'.$



Joonis 9.

2. $\frac{x}{\sin 78^0\, 30'} = \frac{16,5}{\sin 74^0\, 10'}$,

$x = \frac{16,5 \cdot \sin 78^0\, 30'}{\sin 74^0\, 10'}.$

Logaritmidega arvutades leiame, et

$x = 16,8.$

V a s t u s. Laeva kaugus tuletornist B on 16,8 km.

Kui kolmnurgast on antud kaks külge ja nende vaheline nurk, näiteks a, b ja γ, siis ülejäänud elemendid võime leida ühel järgmisest kolmest viisist.

I. Koosinuslause põhjal:

1. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma,$

millest leiame külje c;

2. $\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,ac},$

millest leiame nurga β;

3. $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc},$

millest leiame nurga α.

II. Koosinuslause ja siinuslause põhjal:

$$1. \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma,$$

millest leiame külje c;

$$2. \quad \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c},$$

seega

$$\sin\beta = \frac{b \sin\gamma}{c},$$

millest leiame β;

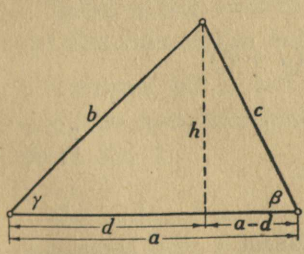
$$3. \quad \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c},$$

seega

$$\sin\alpha = \frac{a \sin\gamma}{c},$$

millest leiame α.

III. Tükeldamise teel täisnurkseteks kolmnurkadeks (joonis 10):



Joonis 10.

$$1. \quad \tan\beta = \frac{h}{a-d} = \frac{b \sin\gamma}{a - b\cos\gamma},$$

millest leiame β;

$$2. \quad \alpha = 180° - (\beta + \gamma);$$

$$3. \quad \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta},$$

seega

$$c = \frac{b \sin\gamma}{\sin\beta}.$$

Ülesanne. Arvuta järve pikkus AB (joonis 11), kui punktist C, mille kaugus punktist A on 570 m ja punktist B 860 m, paistab järv nurgas 79°.

Lahendus. Kasutame ülesande lahendamiseks koosinuslauset. Kui otsitav pikkus meetrites tähistada tähega x, siis

$$x^2 = 570^2 + 860^2 - 2 \cdot 570 \cdot 860 \cdot \cos 79° = 324900 +$$
$$+ 739600 - 980400 \cdot 0{,}191 = 877244,$$

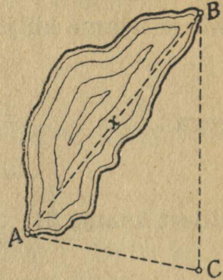
seega

$$x = \sqrt{877244}$$

ehk

$$x = 937.$$

Vastus. Järve pikkus on 937 m.



Joonis 11.

Kui kolmnurgast on antud kaks külge ja suurema külje vastasnurk, siis saab kolmnurga lahendada siinuslause abil. Olgu kolmnurgast antud näiteks a, b ja α, kusjuures $a > b$; siis

$$1. \quad \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a},$$

seega

$$\sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a},$$

millest leiame β.

$$2. \quad \gamma = 180° - (\alpha + \beta).$$

$$3. \quad \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha},$$

seega

$$c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Kontrolliks võib arvutada b võrdusest

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Kui kolmnurgast on antud kaks külge ja väiksema külje vastasnurk, näiteks a, b ja α, kusjuures $a < b$, siis need andmed määravad teatavasti kas ühe või kaks kolmnurka või ei määra ühtki kolmnurka. Eelmise lahenduse 1. punktis saadud võrdusest

$$\sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a}$$

saab järeldada, millal esineb üks või teine eelnimetatud juhtudest. Tõepoolest, arvutame andmete järgi murru

$$\frac{b \sin \alpha}{a}.$$

Võib juhtuda, et siis kas

$$\frac{b \sin \alpha}{a} < 1 \quad \text{või} \quad \frac{b \sin \alpha}{a} = 1 \quad \text{või} \quad \frac{b \sin \alpha}{a} > 1.$$

Sellele vastavalt peaks olema kas

$$\sin \beta < 1 \quad \text{või} \quad \sin \beta = 1 \quad \text{või} \quad \sin \beta > 1.$$

Vaatleme esimest juhtu. Et $\sin \beta < 1$, siis leidub ikka teravnurk β_1, mis sellele siinuse väärtusele vastab. Kuid siis leidub ka nürinurk β_2, millel on sama siinuse väärtus: $\beta_2 = 180° - \beta_1$. Tõepoolest, $\sin (180° - \beta_1) = \sin \beta_1$. Nii β_1 kui ka β_2 võib olla kolmnurga nurgaks, sest β kui suurema külje b vastasnurk võib olla nii terav- kui ka nürinurk. Sel juhul saamegi lahendamisel kaks kolmnurka, ühe nürinurkse ja teise teravnurkse.

Teisel juhul, nimelt, kui $\sin \beta = 1$, saame lahendamisel ühe täisnurkse kolmnurga, sest siis $\beta = 90°$.

Viimasel juhul, kui $\sin \beta > 1$, ei määra a, b ja β ühtki kolmnurka, sest niisugust nurka β ei ole, mille siinus oleks suurem kui 1.

Kui kolmnurgast on antud kolm külge, siis nurkade arvutamine võib toimuda kas koosinuslause põhjal või koosinus- ja siinuslause põhjal.

I. 1. $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; II. 1. $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$;

2. $\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$; 2. $\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$;

3. $\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. 3. $\sin \gamma = \frac{c \sin \alpha}{a}$.

Kontrolliks on sel juhul kohane kasutada võrdust

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Ülesanne. Kui suured nurgad on kolmnurgal, mille külgede pikkused on 7,7 cm, 9,3 cm ja 14,1 cm?

Lahendus. Olgu $a = 7,7$; $b = 9,3$; $c = 14,1$.

1. $$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{9,3^2 + 14,1^2 - 7,7^2}{2 \cdot 9,3 \cdot 14,1} =$$
$$= \frac{86,49 + 198,8 - 59,29}{9,3 \cdot 28,2} = \frac{266}{262,3}.$$

Logaritmidega arvutades leiame, et

$$\alpha = 30°30'.$$

2. $$\sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a} = \frac{9,3 \cdot \sin 30°30'}{7,7}.$$

Logaritmidega arvutades leiame, et

$$\beta_1 = 37°49'$$

ja seega

$$\beta_2 = 142°11'.$$

Et nurk β on suuruselt keskmise külje vastasnurk, mis ei või olla nürinurk, siis nurk β_2 ei saa olla otsitav nurk ja ainsaks vastuseks jääb β_1.

3. $$\sin\gamma = \frac{c \sin\alpha}{a} = \frac{14,1 \cdot \sin 30°30'}{7,7}.$$

Logaritmidega arvutades leiame, et

$$\gamma_1 = 68°20',$$

ja seega

$$\gamma_2 = 111°40'.$$

Et kolmnurga nurkade summa peab olema 180°, siis γ_1 ei tule vastusena arvesse ja sellena tuleb võtta γ_2.

Kontroll.

$$\begin{aligned} \alpha &= \ \ 30°30' \\ \beta &= \ \ 37°49' \\ \gamma &= 111°40' \\ \hline \alpha + \beta + \gamma &= 179°\,59' \approx 180° \end{aligned}$$

Vastus. Kolmnurga nurgad on 30°30′, 37°49′ ja 111°40′.

Märkus. Nurga leidmisel tema siinuse järgi ei tohi unustada tõsiasja, et võrrandil

$$\sin\alpha = k, \qquad \text{kus} \qquad 0 < k < 1,$$

on ikka kaks lahendit, mille summa on 180°; üks neist lahendeist on teravnurk, teine — nürinurk. Vajab erilist kaalumist, missugune leitud lahendeist sobib.

Ülesanded.

356. Lahenda kolmnurgad järgmisil andmeil:

	a	b	c	α	β	γ
1.		72	45		58°18′	
2.	416	635			28°12′	
3.	15,74			31°24′		69°32′
4.		85,76			36°55′	74°18′
5.			144,7	120°16′	42°24′	
6.		56		52°		5°28′

357. Lahenda kolmnurgad järgmisil andmeil:

	a	b	c	α	β	γ
1.	17	8				39°
2.		81,7	39,2	122°06′		
3.	52,84		14,88		24°55′	
4.	8	12	16			
5.	50	41	19			
6.	6,4	8,8	10,2			

358. Tuletornid M ja N asetsevad teineteisest 12,8 km kaugusel. Tuletornist M paistavad merel olev laev ja tuletorn N suundades, mis teineteisega moodustavad nurga 37,8°. Tuletornist N on samal ajal laev ja tuletorn M näha suundades, mis teineteisega moodustavad nurga 104,7°. Leia laeva kaugus tuletornist M.

359. Laev sõidab mööda tuletornidest A ja B, mis jäävad laeva sõidusuunast paremale. Mõõtmisest, mis toimetati enne laeva jõudmist tuletorne ühendavale sirgele, leiti, et tuletornid A ja B olid näha ühel ja samal ajal suundades, mis moodustasid laeva sõidusuunaga nurgad 69,7° ja 30,6°. Kaardi järgi on tuletornide kaugus teineteisest 15,7 km ja laeva sõidusuund moodustab tuletorne ühendava sirgega nurga 42,1°. Arvuta laeva kaugus tuletornist B.

360. Mäerünkast tahetakse läbi raiuda tunnel AB. Ehituskulude eelarvestamiseks on tarvis teada tunneli pikkust. Selle määramiseks valime vaatluspunkti C, millest on näha nii punkt A kui punkt B, ja mõõdame pikkused AC ja BC ning nurga C. Näita, kuidas arvutada pikkust AB.

N ä i d e. $AC = 945$ m, $BC = 1178$ m, $\widehat{C} = 65°45'$. Arvuta AB.

361. Vulkaani kraatri läbimõõdu määramiseks valitakse kraatri serval kaks kohta A ja B, millede vahelist kaugust saab mõõta. Olgu $AB = l$ m. Kohtadest A ja B viseeritakse mõni kolmas punkt C kraatri serval ja mõõdetakse nurgad $CAB = \alpha$ ja $CBA = \beta$. Avalda kraatri läbimõõt.

362. Punktide A ja B vahel asetsev mägi takistab nende vahelise kauguse otsest mõõtmist. Selle kauguse kaudseks määramiseks valiti punkti B läbival sirgel punktid C ja D, üks ühel pool, teine teisel pool B-d, ja nii, et neist oleks näha punkt A. Mõõtmisest saadi: $CB = 200$ m, $DB = 300$ m, $\widehat{ACB} = 58{,}4°$ ja $\widehat{ADB} = 97{,}2°$. Arvuta punktide A ja B vaheline kaugus.

363. Nurk laeva sõidusuuna ja laevalt tuletornile võetud vaatesuuna vahel on α. Kui laev on a meremiili edasi sõitnud, siis on nende suundade vaheline nurk β. Kui kaugelt sõidab laev tuletornist mööda?

364. Rööpküliku küljed on 3,6 ja 4,2 m; üks rööpküliku nurkadest on $50°30'$. Kui pikad on rööpküliku diagonaalid?

365. Trapetsi $ABCD$ alused AB ja CD on vastavalt 15 ja 29 cm. Haarad BC ja AD on vastavalt 11 ja 17 cm. Kui suur on trapetsi nurk D?

366. Künkal asetseb vaatetorn, mille kõrgus on 45,8 m. All orus näeme piirikivi. Viseerides torni tipust leiame kivile raiutud risti alangunurga $35°20'$, viseerides sama punkti torni aluselt leiame risti alangunurga $30°45'$. Kui kõrge on küngas?

367. Ringisse joonestatud nelinurga $ABCD$ küljed on $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm, $CD = 8$ cm ja $DA = 10$ cm. Kui pikk on diagonaal BD?

Peatükk VI.

Trigonomeetria rakendusi stereomeetriliste ülesannete lahendamisel ja ainet kordamiseks.

§ 30. Trigonomeetria rakendusi stereomeetriliste ülesannete lahendamisel.

368. Risttahuka mõõtmed on 3 m, 4 m ja 5 m. Määra nurgad, mis risttahuka diagonaal moodustab risttahuka tahkudega.

369. Risttahuka mõõtmed on 10 m, 12 m ja 8 m. Määra nurgad, mis tekivad risttahuka diagonaalide vahel.

370. Püstprisma põhjaks on ruut küljega a; prisma kõrgus on h. Anna trigonomeetriline valem prisma diagonaalide vahelise nurga arvutamiseks.

371. Kuubi serv on a. Määra nurk kuubi kahe diagonaali vahel.

372. Kui suured nurgad moodustab kuubi diagonaal kuubi tahkudega?

373. Kuubi servast on pandud läbi tasapind, mis kuubi tahuga moodustab nurga α. See tasapind lõikab kuubi kahte ossa. Avalda nende osade ruumalade suhe.

Näide. $\alpha = 35°$. Arvuta nõutav ruumalade suhe.

374. Püstprisma põhjaks on korrapärane kolmnurk, mille külg on a cm. Läbi ühe põhiserva on pandud tasapind, mis põhjaga moodustab nurga α. Prisma ja tasapinna lõige on kolmnurk. Kui suur on selle kolmnurga pindala ja prisma püramiidikujulise osa ruumala?

Näide. $a = 18{,}2$, $\alpha = 26°30'$. Arvuta kolmnurga pindala ja prisma püramiidikujulise osa ruumala.

375. Leia korrapärase püramiidi kõrgus, kui püramiidi külgserva pikkus on 8,7 m ja selle serva kaldenurk on 39°.

376. Tetraeeder on püramiid, mille kõik tahud on ühtivad võrdkülgsed kolmnurgad. Määra tetraeedri kahetahulise nurga suurus.

377. Leia nurk, mille tetraeedri külgserv moodustab põhjaga.

378. Fotoaparaadi jalg koosneb kolmest ühest punktist lähtuvast ühe ja sama pikkusega vardast. Jalg seisab rõhtsal tasapinnal ja iga kaks kõrvuseisvat jala varrast moodustab nurga 48°. Missuguse nurga moodustavad aparaadi jala vardad rõhttasapinnaga?

379. Korrapärase neljatahulise püramiidi ruumala on 86 cm^3; tema külgserv moodustab põhjaga nurga 56°. Leia püramiidi servade pikkused.

380. Prisma põhjaks on korrapärane n-nurk, mille külg on a cm. Prisma kõrgus on h cm. Avalda prisma ruumala.

Näide. $n = 3$, $a = 124$, $h = 52$. Arvuta prisma ruumala.

381. Püramiidi põhjaks on korrapärane n-nurk, mille ümbermõõt on p cm. Püramiidi kõrgus on h cm. Avalda püramiidi ruumala.

Näide. $n = 5$, $p = 63{,}9$, $h = 24{,}8$. Arvuta püramiidi ruumala.

382. Korrapärase püramiidi külgpindala on 250 cm^2; külg- ja põhitahu vaheline nurk on 68°. Kui suur on püramiidi põhja pindala?

383. Kui suur on korrapärase püramiidi põhja ümber joonestatud ringjoone raadius, kui püramiidi külgserv on 15,2 cm ning nurk külgserva ja põhja vahel on 53°10′?

384. Kui suur on korrapärase püramiidi külgserva ja põhja vaheline nurk, kui külgserv on 42 cm ja põhja ümber joonestatud ringjoone raadius on 36 cm?

385. Kui pikk on koonuse moodustaja, kui põhja raadius on 0,78 m ning moodustaja ja põhja vaheline nurk on 47,8°?

386. Ringikujulisest plekitükist, mille raadius on 24 cm, lõigatakse välja sektor kesknurgaga 120°. Ülejääv osa keeratakse kokku lehtriks. Kui suur on lehtri telglõike tipunurk?

387. Koonuse telglõike tipunurk on 2α, koonuse moodustaja on a cm. Avalda koonuse täispindala ja koonuse ruumala.

Näide. $2\alpha = 37°36'$, $a = 42,5$. Arvuta koonuse täispindala ja ruumala.

388. Koonuse põhja ümbermõõt on 64,8 cm, koonuse moodustaja on 38,2 cm. Kui suur on koonuse telglõike tipunurk?

389. Koonuse põhi on S cm^2, koonuse külgpind K cm^2. Anna valem koonuse telglõike tipunurga arvutamiseks.

390. Koonuse moodustaja ja põhja vaheline nurk on ω; koonuse kõrgus on h. Avalda koonuse täispindala ja koonuse ruumala.

391. Koonuse moodustaja ja põhja vaheline nurk on ω; koonuse põhja raadius on r. Avalda koonuse täispindala ja koonuse ruumala.

392. Kera ümber, mille raadius on r, on kujutatud koonus; selle moodustaja ja põhja vaheline nurk on α. Avalda koonuse ruumala.

393. Kolmnurgas ABC on antud külg $BC = a$ ning selle lähisnurgad β ja γ. Kolmnurk pöörleb ümber külje BC. Avalda tekkiva pöördkeha ruumala.

394. Täisnurkses kolmnurgas ABC on antud kaatet a ja teravnurk α. Läbi tipu B on pandud kolmnurga tasapinnas asetsev telg MN risti kaatetiga AB. Kolmnurk pöörleb telje MN ümber, moodustades pöördkeha. Avalda selle keha ruumala.

395. Rööpkülikus $ABCD$ on külg $AB = a$ cm, külg $BC = b$ cm ja nurk nende külgede vahel on α. Rööpkülik pöörleb ümber külje AB. Avalda tekkiva pöördkeha ruumala.

396. Maakera raadius on 6370 km. Arvuta Tallinna paralleeli pikkus, teades, et Tallinna laius on $59°26'$.

§ 31. Ülesandeid peatükkide I—III kordamiseks.

397. Leia järgmiste avaldiste väärtused:

1. $2^{\log_2 6}$	2. $3^{2 \log_3 5}$	3. $10^{\frac{2}{3} \log_{10} 8}$
$3^{-\log_3 7}$	$5^{\frac{1}{2} \log_5 36}$	$10^{-\frac{1}{4} \log_{10} 81}$
$10^{\log_{10} 5}$	$10^{2 \log_{10} 3}$	$10^{-\log_{10} 6}$

398. Leia järgmiste sümbolite väärtused:

1. $\log_2 32$	2. $\log_2 0{,}25$	3. $\log_{10} 0{,}001$
$\log_5 125$	$\log_5 0{,}04$	$\log_{10} \sqrt[3]{0{,}1}$
$\log_3 \frac{1}{9}$	$\log_2 \sqrt[3]{4}$	$\log_{10} \frac{1}{\sqrt[3]{0{,}01}}$
$\log_4 \frac{1}{2}$	$\log_3 \frac{1}{\sqrt{27}}$	$\log_{10} \frac{1}{\sqrt[4]{10}}$

399. Lahenda võrrandid:

1. $\log_x 49 = 2$	2. $\log_x 6 = \frac{1}{2}$	3. $\log_x \sqrt[3]{100} = \frac{2}{3}$
$\log_x \frac{1}{8} = -3$	$\log_x \sqrt{125} = 1{,}5$	$\log_x \sqrt{0{,}001} = 1{,}5$
$\log_3 x = 4$	$\log_{10} x = -2$	$\log_2 x = 7$
$\log_4 x = -2$	$\log_{10} x = \frac{1}{2}$	$\log_{0,2} x = -3$

400. Kirjuta avaldised, mille logaritmid on:

1. $\log m + 2 \log n$

$\log a + \log b - (\log c + \log d)$

$3 \log a + 2 \log b - 4 \log c$

$2 \log x + 2 \log y - 5 \log z - 4 \log u$

2. $2 \log a + 2 \log b$	3. $\frac{1}{3} \log a$
$3 \log (a + b)$	$\frac{m}{n} \log b$
$\log (x + y) - \log (x - y)$	$\frac{1}{2} (\log a + 5 \log b)$
$4 \log u - 4 \log v$	$\frac{1}{3} (2 \log u - 4 \log v)$

401. Lihtsusta avaldised:

1. $\log \sin x - \log \cos x$	2. $10^{\log \sin x}$
$\log \tan x + \log \cot x$	$10^{\frac{1}{2} \log \sin x - \frac{1}{2} \log \cos x}$
$\log \tan x + \log \cos x$	$10^{2 \log \sin x} + 10^{2 \log \cos}$

402. Logaritmi järgmised avaldised:

1. $\frac{1}{m}\sqrt{\frac{ab}{a-b}}$

$\sqrt[3]{\frac{mx^2}{(x-a)^2}}$

$\sqrt[3]{\frac{ax+b^2}{2x\sqrt{a^2+b^2}}}$

2. $\frac{16a\,(a+1)^3}{25\sqrt[3]{a^2-1}}$

$\frac{a^2\sqrt{a\,(bx-c)}}{\sqrt[3]{ax+b}}$

$\frac{1}{m^2\sqrt{a^2-x^2}}$

403. Arvuta logaritmide abil järgmiste avaldiste väärtused:

1. $\sqrt[3]{\frac{1{,}274^2}{\sqrt{0{,}9645}}}$

$\frac{\sqrt[3]{28{,}9}\cdot\sqrt[4]{17{,}5^3}}{\sqrt[5]{6{,}149^2}}$

$\frac{3\sqrt[3]{5\sqrt{6}}}{11\sqrt[5]{4\sqrt{124}}}$

2. $\frac{\sqrt[5]{3}+\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{5}}$

$\sqrt{\frac{52-3\sqrt[4]{10}}{\sqrt{8{,}7}}}$

$\sqrt[5]{\sqrt[4]{0{,}2}-\sqrt[3]{0{,}9}}$

404. Arvuta avaldise $\sqrt{p(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$ väärtus, kui $a=6{,}48$, $b=8{,}62$, $c=9{,}24$ ja $2p=$ $=a+b+c$.

405. Olgu $z^5=\left(\frac{s}{t}\right)^4$. Kui suur on z, kui $s=0{,}48$ ja $t=1{,}51$?

406. Määra valemist $C=e^{-rt}$ tähe C väärtus, kui $e=2{,}718$, $r=6$ ja $t=0{,}7$.

407. Olgu $a=2\sqrt{\frac{f}{\sqrt{3}}}$. Arvuta a väärtus, kui $f=0{,}8457$.

408. Cheops'i püramiidi põhjaks on ruut küljega 233 m; püramiidi kõrgus on 148 m. Käigud ja kambrid moodustavad väga väikese osa püramiidi ruumalast. Kivi erikaal, millest püramiid ehitatud, on 2,75. Mitu tonni kivimassi kulus püramiidi ehitamiseks?

409. Kera läbimõõt on 13,58 cm. Arvuta kera ümbermõõt, pindala ja ruumala.

410. Baromeetritoru seesmine läbimõõt on 0,84 cm. Vaatluse ajal seisis elavhõbe 74,8 cm kõrgusel. Elavhõbeda erikaal on 13,60. Kui palju kaalub elavhõbedasammas?

411. Leia avaldise $\frac{23}{27} \cdot 14{,}4^4$ väärtus.

412. Leia avaldise $\frac{2k(t_2 - t_1)}{\log r_2 - \log r_1}$ väärtus, kui $k = 0{,}86$, $t_1 = 69{,}8$, $t_2 = 85{,}7$, $r_1 = 1{,}15$ ja $r_2 = 1{,}45$.

413. Lahenda võrrand $24{,}9x^5 = 2{,}84$.

414. Leia x-i väärtus, kui $10^x = 6^{20}$.

415. Kui suur peab olema ratta läbimõõt, et ta, tehes n tiiru sekundis, kulgeks n km tunnis?

416. Leia, kumb arvudest 2^{160} ja 3^{100} on suurem.

417. Olgu teada, et $\log \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2} (\log a + \log b)$. Näita, et siis $a^2 + b^2 = 7ab$.

418. Arvuta logaritmide abil avaldis

$$(a^2 - b^2) \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cos \beta},$$

kui $a = 8{,}495$, $b = 4{,}324$, $\alpha = 46°38'$, $\beta = 36°48'$.

419. Lahenda võrrand $ab = \sqrt[x]{c}$.

420. Leia aritmeetilise rea $-4, -1, \ldots$ kümnes liige.

421. Leia aritmeetilise rea $\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \ldots$ sajas liige.

422. Leia rea —48, —45, —42, ... n-es liige.

423. Leia aritmeetilise rea 5. liige, kui rea 1. liige on 1 ja 10. liige on 100.

424. Mitu liiget aritmeetilises reas 9, 14, ... on väiksemad kui 350?

425. Mitmes liige aritmeetilises reas 15, 20, ... on 135?

426. Mitu liiget aritmeetilises reas —66, —59, ... on negatiivsed?

427. Mitmes liige aritmeetilises reas 7, 13, ... on lähim arvule 210?

428. Määra aritmeetiline rida, mille 1. liige on 1 ja 8. liige võrdub esimese 4 liikme summaga.

429. Aritmeetilise rea 5 liikme summa on 20 ja esimese 7 liikme summa on 98. Leia rea esimese 12 liikme summa.

430. Arvuta summa 7 + 11 + 15 ... + 71.

431. Arvuta esimese 60 loomuliku arvu summa.

432. Arvuta esimese 45 paarisarvu summa.

433. Kulgegu ülespaisatud keha esimeses sekundis 81 m; igas järgnevas sekundis ta tõuseb 4,5 m vähem kui eelnevas. Kui kaua kestab keha liikumine ülespoole?

434. Elektriventilaatori propeller teeb 1. sekundil pärast voolu katkestamist 50 tiiru, 2. sekundil $46\frac{2}{3}$ tiiru ja 3. sekundil $43\frac{1}{3}$ tiiru. Kui kaua pärast voolu katkestamist kestab veel propelleri liikumine?

435. Kui suured on täisnurkse kolmnurga teravnurgad, kui kolmnurga küljed moodustavad aritmeetilise rea?

436. Leia arv x, teades, et arvud $2x - 3$, $5x + 7$ ja $x - 11$ moodustavad aritmeetilise rea.

437. Ettevõttel on esimesel tegevusaastal 3200 marka tulusid ja 7500 marka kulusid. Arvestuste järgi peaksid igal järgneval aastal tulud suurenema 900 marga võrra ja kulud suurenema 150 marga võrra. Leia, mitmendal tegevusaastal ettevõte annab esimest korda kasu ja mitmendal aastal ettevõttest saadud kasu katab eelmiste aastate kahjud.

438. Mitu lööki teeb raekoja kell öö-päeva jooksul, kui ta märgib veerandtunni ühe löögiga, pooltunni kahe löögiga, kolmveerandtunni kolme löögiga, täistunni nelja löögiga ja keskööst või keskpäevast möödunud tundide arvu vastava hulga löökidega?

439. Arvuta kõigi vahemikus 102 kuni 300 asetsevate kolmega jagumatute arvude summa.

440. Arvuta kõigi 7-ga jagumatute arvude summa vahemikus 100 kuni 300.

441. Olgu teada, et aritmeetilise rea liige $a_8 = 2a_{13}$. Näita, et siis $a_3 = 3a_{13}$.

442. Aritmeetilise rea üldliige $a_k = 4k + 1$. Määra n esimese liikme summa.

443. On antud aritmeetiline rida üldliikmega $a_k = 27 - 2k$. Mitu liiget rea algusest arvates tuleb võtta, et saada summa 144?

444. Kui suur on aritmeetilise rea

$$a,\ 2a - x,\ 3a - 2x,\ \ldots$$

n esimese liikme summa?

445. On antud aritmeetiline rida:

$$(n-1),\ \frac{n^2+1}{n-1},\ \frac{(n+1)^2}{n-1}\ldots$$

Leia selle rea n esimese liikme summa.

446. Näita, et järjestikuste loomulikkude arvude ruutude vahed moodustavad aritmeetilise rea.

447. Näita, et avaldiste $x^2 - 2x - 1$, $x^2 + 1$ ja $x^2 + 2x - 1$ ruudud moodustavad aritmeetilise rea.

448. Kui suur on n järjestikuse täisarvu summa ja neile eelneva n järjestikuse täisarvu summa vahe?

449. Kui suur on n järjestikuse täisarvu ruutude summa ja neile eelneva n järjestikuse täisarvu ruutude summa vahe?

450. Leia $n + 1$ järjestikust täisarvu, mille summa võrdub n järgneva järjestikuse täisarvu summaga. Missugused on need arvud, kui n on 1, 2, 3, 4, 5?

451. Leia $n + 1$ järjestikust täisarvu, mille ruutude summa võrdub n järgneva järjestikuse täisarvu ruutude summaga. Missugused on need arvud, kui n on 1, 2, 3, 4, 5?

452. Geomeetrilise rea tegur on 3 ja rea 4. liige on 162. Leia rea 1. liige.

453. Leia geomeetrilise rea 1. liige ja tegur, kui rea 6. liige on 144 ja 3. liige 18.

454. Leia geomeetrilise rea 9. liige, kui rea 2. liige on 7 ja 7. liige 224.

455. Geomeetrilise rea 6. liige on mn^6 ja 4. liige on mn^2. Leia rea 1. liige.

456. Leia geomeetrilise rea 8. liige, kui 2. liige on 2 ja 3. liige on 3.

457. Leia 10-liikmelise geomeetrilise rea 1. liige, kui rea tegur on 2 ja rea summa on $2557\frac{1}{2}$.

458. Leia 8-liikmelise geomeetrilise rea summa, kui rea 3. liige on 29,7 ja rea 5. liige on 267,3.

459. Leia rea 2, 3, $4\frac{1}{2}$, ... kümnes liige ja rea kümne liikme summa.

460. Leia rea 2, $3\frac{1}{4}$, $4\frac{1}{2}$, ... kümnes liige ja rea kümne liikme summa.

461. Olgu geomeetrilises reas, mille tegur on q, paarisarv liikmeid. Näita, et paarisarvulistel kohtadel seisvate liikmete summa on q korda suurem paarituarvulistel kohtadel seisvate liikmete summast.

462. Geomeetrilise rea kahe esimese liikme summa on $7\frac{1}{2}$ ning neljanda ja esimese liikme summa on $127\frac{1}{2}$. Leia rea tegur.

463. Geomeetrilise rea esimese kolme liikme summa on $3^3 - \frac{2^6}{3^6}$ ja esimese kuue liikme summa on $3^3 - \frac{2^{12}}{3^{15}}$. Leia rea 1. liige.

464. Leia geomeetrilise rea tegur, kui rea 1. liige on 3 ning 2. ja 3. liikme summa on 60.

465. Leia rea $a, a^2, a^3, a^4, \ldots$ 20 liikme korrutis.

466. Leia rea ab, a^2b^3, a^3b^5, a^4b^7, ... n liikme korrutis.

467. Lihtsusta avaldis $1 + a + a^2 + \ldots + a^{13} + a^{14}$.

468. Lihtsusta avaldis $x^9 + x^8y + x^7y^2 + \ldots + xy^8 + y^9$.

469. Lihtsusta avaldis

$$1 + x + (1 + x)^2 + (1 + x)^3 + \ldots + (1 + x)^{12}.$$

470. Arvuta järgmiste geomeetriliste ridade summad:

$$\sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi + \ldots + \sin^{12} \varphi$$

$$\tan^2 \psi + \sin^2 \psi + \ldots + \sin^2 \psi \cdot \cos^6 \psi .$$

471. Kui suured on täisnurkse kolmnurga teravnurgad, kui kolmnurga küljed moodustavad geomeetrilise rea?

472. Arvuta geomeetrilise rea 2, 3, ... esimese 5 liikme summa.

473. Arvuta summa $\sqrt{3} + 3 + \sqrt{27} + \ldots + 243$.

474. Mitmes liige reas 2, 8, 32, ... on 8^{33}?

475. Leia arv x, kui arvud $x - 4$, x ja $x + 6$ moodustavad geomeetrilise rea.

476. Leia arv x, kui arvud x, $3x$ ja $x + 12$ moodustavad aritmeetilise rea.

477. Geomeetrilise rea igast liikmest lahutatakse temale eelnev liige. Näita, et saadud vahed moodustavad geomeetrilise rea.

478. Leia kuusnurga nurgad, teades, et nad moodustavad geomeetrilise rea, mille tegur on 2.

479. Klaasplaat neelab 5% temale langevast valguse hulgast. Mitmest samasugusest plaadist koosnev pakk neelab 45% esimesele plaadile langevast valguse hulgast?

480. Leia, missuguses kõrguses on õhurõhumine 9% võrra väiksem kui maapinnal, teades, et 100-meetrisele tõusule vastab 1,2-protsendine õhurõhumise vähenemine.

481. Teades, et 100-meetrisele tõusule vastab 1,2-protsendine õhurõhumise vähenemine, näita, et maapinna läheduses 11-meetrisele tõusule vastab 1-millimeetrine õhurõhumise vähenemine.

482. Puu kõrguse aastane juurdekasv on 80% eelmise aasta juurdekasvust. Kui palju kasvab puu 4 aastaga, kui ta esimesel aastal kasvab 24 cm?

483. On antud rida

$$1 + x, \quad 2 + 3x, \quad 4 + 5x, \quad 8 + 7x, \quad 16 + 9x, \ldots$$

Leia rea esimese 20 liikme summa.

484. Moodustagu avaldised

$$\frac{1}{b-a}, \quad \frac{1}{2b} \text{ ja } \frac{1}{b-c}$$

aritmeetilise rea. Näita, et siis arvud a, b ja c moodustavad geomeetrilise rea.

485. Tõesta, et kahe arvu geomeetrilise keskmise logaritm on võrdne arvude logaritmide aritmeetilise keskmisega.

486. Kui suureks kasvab 2800-margane kapital, mis on hoiul $4\frac{1}{2}$%-ga 20. maist sama aasta 1. oktoobrini?

487. Kui suur rahasumma, olles 3 kuud ja 10 päeva hoiul 3%-ga, kasvab hoiuaja lõpuks 726 margaks?

488. Laen, mis oli tehtud 12. märtsil 8%-ga, ja laenult saada olev intress tasuti sama aasta 12. augustil 372 margaga. Kui suur oli laen?

489. Tööstusettevõttesse mahutatud 3500-margane kapital kasvas 30 kuuga 4200 margaks. Mitu protsenti andis ettevõte aastas kasu?

490. Mitme protsendiga hoiul olles annab kapital 8 kuuga 3% intressi?

491. Mitme kuuga kasvab hoiusumma 1,025-kordseks, kui pank maksab 4% intressi aastas?

492. Kui palju maksab 60-margane veksel 5 kuud enne tähtpäeva, kui diskontomäär on 7%?

493. Kui palju maksab pank 320-margasest vekslist tähtpäevaga 15. septembril, kui veksel diskonteeritakse 15. juulil $4\frac{1}{2}$%-ga?

494. Mitu protsenti veksli summast moodustab veksli hind 3 kuud enne tähtpäeva, kui diskontomäär on 8%?

495. Kui suur on diskontomäär, kui 4 kuud enne tähtpäeva veksli hind on 97,5% veksli summast?

496. Kui palju saadi 560-margasest vekslist, mille tähtpäev oli 5. märtsil, kui veksel diskonteeriti 20. jaanuaril 6%-ga?

497. Kui suur kapital, kandes $3\frac{1}{2}$% liitintressi, kasvab 30 aastaga 20 000 margaks?

498. Kui suureks kasvab 3700-margane kapital 8 aastaga, kandes $4\frac{1}{2}$% liitintressi?

499. Mitu protsenti liitintressi peab kandma 120-margane kapital, et ta 6 aastaga kasvaks 750 margaks?

500. Leia, kui palju intressi saab 4 aasta jooksul 3200 margalt,

1. kui kapital kannab 2% liitintressi,
2. „ „ „ 3% „
3. „ „ „ 5% „

Kas kolmandal juhul saadav intress võrdub esimesel ja teisel juhul saadavate intresside summaga?

501. Mitmel protsendil kasvab kapital sajandi jooksul 100-kordseks?

502. Maakonna elanikkude arv kasvab 0,5% võrra aastas. Mitme protsendi võrra kasvab selle maakonna elanikkude arv 25 aasta jooksul?

503. Mitu protsenti lihtintressi peaks aastas maksma kapitalilt, et ta n aastaga kasvaks niisama suureks kui kandes p% liitintressi?

Näide. 1. $n = 10$, $p = 5$. Arvuta nõutav protsent.
2. $n = 20$, $p = 5$. Arvuta nõutav protsent.

504. Kandku kapital p% liitintressi. Mitme aasta pärast on kapital kasvanud m-kordseks?

505. Kui suure kasu saab pank 1, 2, 3, 5, 10 ja 15 aasta kestel, võttes oma võlgnikult 1000 marga pealt 12% lihtintressi ja makstes oma hoiuletoojale sama summa pealt 8% liitintressi?

Kas pank saaks püsivalt töötada, andes laenu lihtintressil ja makstes ise hoiusummadelt liitintressi?

506. Talu metsa puiduhulka hinnati 1937. a. 1800 m^3-le. Kui suur on metsa puiduhulk 1946. a., kui metsa omanik vahepeal oma metsa ei raiu ja puidu aastane juurdekasv on 2%?

507. Linna elanikkude arv kasvab aastas 3,8% võrra. Missugust elanikkude arvu võib oodata 10 aasta pärast, kui praegu linnas elab 62 400 inimest?

508. Väikelinna elanikkude arv on 10 aasta jooksul kasvanud 2148 hingelt 3796 hingele. Kui suur oleks selle linna elanikkude arv 10 aastat hiljem, kui linna elanikkonna kasvamine toimuks edasi niisama kiiresti nagu enneminigi?

509. Maakonna rahvaarv kasvab aastas $p^0/_{00}$ võrra. Mitme aasta järel selle maakonna rahvaarv on suurenenud q% võrra, võrreldes praeguse rahvaarvuga?

N ä i d e. $p = 21$, $q = 50$. Määra nõutud aastate arv.

510. Õhupump tühjendab 100 edasi-tagasi käiguga röntgenitorus oleva õhu kuni ühe viiekümnetuhandendikuni alguses seal olnud õhuhulgast, imedes iga käigu puhul ühe ja sama protsendimäära torus parajasti olevast õhust. Kui suur on see protsendimäär?

511. Järve kalatagavara vähenemise tõttu oleks õiglane vähendada järve rendihinda iga aasta 10% võrra möödunud aasta rendist. Milleni langeks rent 5. aasta lõpuks, kui rendi praegune suurus on 600 marka?

512. Kui suur summa koguneb iga aasta alguses tehtavatest 600-margastest sissemaksudest 11. aasta lõpuks, kui pank maksab $3\frac{1}{2}\%$ intressi?

513. Kui palju peaks iga aasta alguses panema hoiule, et 20 aasta jooksul koguda 10 000-margane kapital, kui pank maksab $4\frac{1}{2}\%$ intressi?

514. Keegi hoiab iga aasta kokku 500 marka ja maksab nad panka. Pank arvestab 4% intressi. Mitme aasta pärast koguneb 8500-margane kapital?

515. Asunik sai hoonete ehitamiseks 1400 marka 2-protsendist laenu 50 aastaks. Kui suur summa tal tuleb iga aasta lõpul tasuda selle laenu kustutamiseks?

516. Töökojas võiks aastas töötasu kokku hoida 2000 marga võrra, kui töökoja varustist täiendada elektrimootoriga, mille hind on 7000 marka. Mootori voolutarvitamise ja järelevalve kulud oleksid 500 marka aastas. Kas tuleb lugeda mootori omandamist ennast tasuvaks, kui arvata tema eluiga 12 aasta peale ja lugeda kapitali kasumääraks 8%.

§ 32. Ülesandeid peatükkide IV ja V kordamiseks.

517. Lahenda täisnurksed kolmnurgad järgmisil andmeil:

1. $c = 1754$ $\beta = 28°04'$ 3. $b = 40,9$ $\alpha = 12°41'$
2. $a = 2,108$ $\alpha = 46°24'$ 4. $c = 533$ $a = 284$

518. Lahenda võrdhaarsed kolmnurgad järgmisil andmeil:

1. $b = 139$ $a = 102$ 3. $b = 5,81$ $\alpha = 87°12'$
2. $a = 1,43$ $\alpha = 32°39'$ 4. $b = 3,47$ $\beta = 61°56'$

519. Lahenda kolmnurgad järgmisil andmeil:

1. $a = 195$ $b = 169$ $\alpha = 67°23'$
2. $a = 841$ $\alpha = 126°52'$ $\gamma = 9°32'$
3. $c = 10{,}4$ $a = 39{,}0$ $\alpha = 112°37'$

520. Lahenda kolmnurgad järgmisil andmeil:

1. $a = 4{,}1$ $b = 1{,}7$ $\gamma = 107°57'$
2. $a = 82{,}1$ $b = 33{,}3$ $c = 57{,}7$

521. Kolmnurgas, mille küljed moodustavad aritmeetilise rea, on üks külg 5 cm ja selle külje vastasnurk on 120°. Leia kolmnurga teised küljed.

522. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on jaotatud kolmeks võrdseks osaks ja hüpotenuusi jaotuspunktid on ühendatud täisnurga tipuga. Kui suurteks osadeks jaotub täisnurk?

523. Kolmnurga küljed on 7 m, 8 m ja 12 m. Kui suurteks osadeks jaotab suurima külje poolitaja selle külje vastasnurga?

524. Kolmnurga nurgad suhtuvad nagu 2:3:4. Kuidas suhtuvad kolmnurga küljed?

525. Kolmnurga küljed suhtuvad nagu 2:3:4. Kuidas suhtuvad kolmnurga nurgad?

526. Ringisse raadiusega $r = 20$ cm on joonestatud kolmnurk, milles $\alpha = 58°$ ja $\beta = 63°$. Arvuta kolmnurga küljed ja pindala.

527. Kolmnurga ümbermõõt on 600 m ning kolmnurga kaks nurka on 29,6° ja 84,9°. Leia kolmnurga küljed.

528. Kolmnurga kahe külje summa on 21,12 m ning nende külgede vastasnurgad on 54,1° ja 71,8°. Leia kolmnurga küljed.

529. Leia kolmnurga pindala, kui kolmnurga kaks külge on 58,2 cm ja 74,4 cm ning nende vaheline nurk on 66,6°.

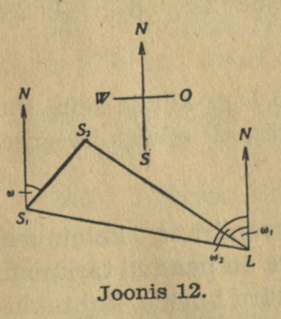
530. Leia kolmnurga nurgad, kui kolmnurga pindala on 278 m^2 ning kolmnurga kaks külge on 13,8 m ja 24,6 m.

531. Kolmnurga pindala on 21,5 cm^2 ning kolmnurga kaks nurka on 32,4° ja 63,8°. Leia kolmnurga küljed.

532. Sirge jõe ühel kaldal võetakse kaks punkti A ja B, millede vaheline kaugus on 41,2 m. Punktidest A ja B viseeritakse vastaskaldal olevale puule P; vaatejooned AP ja BP moodustavad sirgega AB vastavalt nurgad 68°04′ ja 71°13′. Arvuta jõe laius.

533. Nelinurga küljed on 110 m, 84 m, 55 m ja 42 m ning kahe viimase külje vaheline nurk on 70°. Arvuta nelinurga pindala.

534. Matkaja on sattunud temale tundmatule maa-alale. Oma asukohast P ta näeb kolme mäetippu A, B ja C, milledest A ja B paistavad talle ühes ja samas suunas. Kaardi järgi on $AB = 9{,}4$ km, $BC = 6{,}0$ km ja $AC = 11{,}2$ km. Matkaja mõõdab nurga BPC ja leiab selle olevat 12°. Kui kaugel on matkaja mäest C?



Joonis 12.

535. Joonisel 12 tähendavad punktid S_1 ja S_2 kaht sadamat, millest järjest antakse raadiosignaale. Laeval L määratakse raadiopeilingaatori abil signaalide tulekusihid; sel teel leitakse nurgad $S_2LN = \omega_1$ ja $S_1LN = \omega_2$. Teades kord mõõdetud nurka $S_2S_1N = \omega$ ja kahe sadama vahelist kaugust $S_1S_2 = l$ km saab määrata laeva kaugused kummagi sadamani LS_1

ja LS_2 ja seega ka tema asukoha merel. 1) Anna valemid kauguste LS_1 ja LS_2 arvutamiseks. 2) Arvuta LS_1 ja LS_2, kui $\omega_1 = 53{,}4°$, $\omega_2 = 78{,}8°$, $\omega = 24{,}1°$ ja $l = 84{,}6$ meremiili.

536. Punktist A vaadates näeme torni seisvat põhja suunas; ta tipp paistab kõrgusnurgas 17°. Liikudes 70 m võrra ida poole punktisse B, näeme torni nihkununa 40° võrra põhjast lääne poole. Arvuta torni kõrgus.

537. Lennukist paistavad kaks sirge maantee ääres asetsevat naaber-kilomeetriposti suundades, mis moodustavad teineteisega 26°-se nurga ja püstsuunaga 49°-se ja 55°-se nurga. Kui kõrgel on lennuk?

538. Lennuki kõrguse määramiseks on maapinnal valitud kaks vaatluspunkti A_1 ja A_2, mille kaugus teineteisest on 900 m. Kummaski punktis mõõdetakse üheaegselt lennuki kõrgusnurk β ja nurk α, mille moodustab sirgega A_1A_2 lennukile suunatud kiire projektsioon maapinnale. Üks neist nurkadest on lennuki kõrguse määramiseks ülearune, kuid seda saab kasutada mõõtmise tulemuste ja arvutuste kontrollimiseks. Määra otstarbekalt valitud andmete järgi lennuki kõrgus ja kontrolli tulemus ülejäänud andme abil, kui $\beta_1 = 64°22'$, $\beta_2 = 49°28'$, $\alpha_1 = 42°26'$ ja $\alpha_2 = 157°45'$.

539. Põhja—lõuna sihis seisab h m kõrge sein. Kui laia varju heidab sein, kui päike on täpselt edelas kõrgusel $\alpha°$ üle silmapiiri?

540. Prisma põhjaks on korrapärane kolmnurk, mille külg on a. Läbi ühe põhja serva on pandud tasapind, mis põhjaga moodustab nurga α. Määra nurk α, kui tekkinud lõike pindala on $\frac{a^2}{2}$.

541. Kuiv liivahunnik omab koonuse kuju; selle moodustaja kaldenurk rõhttasapinna suhtes on tavaliselt 32°. Kui kõrge hunniku säärast liiva saab kuhjata ümmargusele alusele, mille läbimõõt on 2 m?

542. Korrapärase neljatahulise püramiidi küljeserv on $\frac{65}{66}$ põhjaservast. Leia püramiidi küljeserva ja põhjaserva vaheline nurk, küljeserva ja põhja vaheline nurk ning külgtahu ja põhja vaheline nurk.

543. Trapetsi alused on a ja b, $a > b$. Suurema aluse lähisnurgad on α ja β. Trapets pöörleb suurema aluse ümber. Määra tekkiva pöördkeha ruumala.

544. Täisnurkse kolmnurga pöörlemisel ümber ühe kaateti tekib 3 korda suurema ruumalaga koonus kui pöörlemisel ümber teise kaateti. Kui suur on kolmnurga esimese kaateti vastasnurk?

545. Romb ja temaga pindvõrdne ruut pöörlevad ühe oma külje ümber. Leia pöörlemisel tekkivate kehade pindalade suhe.

546. Kahe võrdsete kõrgustega koonuse telglõike tipunurgad on 15° ja 30°. Mitu korda on teise koonuse ruumala suurem esimese koonuse ruumalast?

547. Koonuse täispindala on 408 cm^2 ja põhja pindala on 200 cm^2. Kui suur on koonuse telglõike tipunurk?

548. Koonuse ruumala on 2,56 m^3; koonuse telglõike tipunurk on 63°12′. Arvuta koonuse põhja pindala.

549. Koonusesse kujutatud kera pindala on võrdne koonuse põhja pindalaga. Kui suur on koonuse telglõike tipunurk?

550. Missugusel geograafilisel laiusel on geograafilise paralleeli raadius $\frac{1}{2}$ maakera raadiusest?

551. Tallinn ja Helsingi asetsevad ligikaudu ühel ja samal meridiaanil [1]. Kui kaugel on Helsingi Tallinnast, kui Tallinna geograafiline laius on 59°26′ ja Helsingi geograafiline laius on 60°10′?

552. Kaplinn ja Nordkap asetsevad ligikaudu ühel ja samal meridiaanil. Kaplinna lõunalaius on 33°56′ ja Nordkapi põhjalaius on 71°10′. Kui kaugel asetsevad need kaks kohta teineteisest?

553. Oletades, et Tallinn ja Stokholm asetsevad ühel ja samal paralleelil [2], mille geograafiline laius on $59°23\frac{1}{2}'$, ja teades, et Tallinna idapikkus on 25°06′ ja Stokholmi idapikkus on 18°04′, leia, kui pikk on Tallinna ja Stokholmi vaheline paralleeli kaar.

554. Kui kiiresti liigub Tallinn maakera pöörlemisel?

---

[1] Helsingi on 9′ lääne pool Tallinna meridiaanist.

[2] Stokholmi geograafiline laius on 59°21′.