



n. ROOS

Diferentsiaal-  
arvutus

TALLINN 1966

28376

TALLINNA POLÜTEHNILINE INSTITUUT

Matemaatika kateeder

H. R o o s

D I F E R E N T S I A A L A R V U T U S

Konspekt kaugüliõpilastele

TALLINN

1966

# S i s u k o r d

## Ü h e m u u t u j a f u n k t s i o o n i d i f e r e n t s i a a l a r v u t u s

	lk.
§ 1. Tuletis ja diferentsiaal	
1. Liikumise kiirus . . . . .	3
9 2. Funktsiooni tuletis ja tema geomeetiline tähendus . . . . .	4
3. Tuletisfunktsioon . . . . .	5
4. Summa, korrutise ja jagatise tuletis . . . . .	9
13 5. Liitfunktsiooni tuletis . . . . .	12
6. Pöördfunktsiooni tuletis . . . . .	13
11 12 7. Elementaarsete põhifunktsioonide tuletised . . . . .	13
8. Ilmutamata funktsioon ja tema tuletis . . . . .	18
14 9. Funktsiooni diferentsiaal . . . . .	21
10. Diferentsiaali geomeetiline tähendus . . . . .	23
11. Summa, korrutise ja jagatise diferentsiaal . . . . .	24
12. Diferentsiaali kuju invariantus . . . . .	25
13. Parameetriselt antud funktsioon ja selle tuletis . . . . .	25
14. Kõrgemat järku tuletised . . . . .	27
15. Kõrgemat järku diferentsiaalid . . . . .	29
§ 2. Tuletise rakendamine funktsiooni uurimisel	
18 19 1. Keskväärtusteoreemid . . . . .	30
2. Funktsiooni kasvamine ja kahanemine . . . . .	35
20 3. Funktsiooni ekstreemum . . . . .	37
21 4. Funktsiooni graafiku kumerus, nõgusus ja käänupunktid . . . . .	45
22 5. Funktsiooni graafiku asümptoodid . . . . .	48
6. Funktsiooni uurimine ja graafiku konstrueerimine	51
§ 3. Tuletise geomeetrilisi rakendusi	
1. Tasapinnalise joone puutuja ja normaal . . . . .	53
2. Tasapinnalise joone kõverus . . . . .	53
3. Ruumijoone puutuja . . . . .	58
§ 4. Tuletise rakendusi ligikaudsetes arvutustes	
1. Taylori polünoom . . . . .	62
2. Taylori valem . . . . .	63
3. Lagrange'i jääkliige . . . . .	64
4. Taylori valemi kasutamine . . . . .	67
5. Võrrandi lahendi lähisväärtuse täpsustamise võtteid . . . . .	68
6. Kõõluvõte . . . . .	69
7. Puutuja- ehk Newtoni võte . . . . .	70
8. Kordsed lahendid . . . . .	71

## ÜHE MUUTUJA FUNKTSIOONI DIFERENTSIAALARVUTUS

## § 1. T u l e t i s j a d i f e r e n t s i a a l

1. Liikumise kiirus

a. Ühtlase liikumise kiirus. Kui mingi keha liigub ühtlase kiirusega ning ajamomentidel  $t_1$  ja  $t_2$  läbitud teepikkused on vastavalt  $s_1$  ja  $s_2$ , siis on keha ajavahemikus  $t_2 - t_1$  läbinud teepikkuse  $s_2 - s_1$ . Jagatist  $\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$  nimetatakse ühtlase liikumise kiiruseks.

b. Mitteühtlase liikumise kiirus. Kui mitteühtlase kiirusega liikuva keha puhul on ajamomentidel  $t_1$  ja  $t_2$  läbitud teepikkused vastavalt  $s_1$  ja  $s_2$ , siis nimetatakse jagatist  $\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$  mitteühtlase liikumise keskmiseks kiiruseks ajavahemikus  $t_1$ -st kuni  $t_2$ -ni. See keskmine kiirus iseloomustab liikumise tõelist kiirust momendil  $t_1$  seda paremini, mida väiksem on ajavahemik momendist  $t_1$  momendini  $t_2$ . Seetõttu nimetatakse mitteühtlase liikumise kiiruseks momendil  $t_1$  piirväärtust

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}.$$

Et liikuva keha poolt läbitud tee pikkus  $s$  on aja  $t$  funktsioon  $s(t)$ , siis  $s_1 = s(t_1)$  ja  $s_2 = s(t_2)$ . Seetõttu liikumise keskmine kiirus ajavahemikus  $t_1$ -st kuni  $t_2$ -ni avaldub

kujul

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

ja liikumise kiirus momendil  $t_1$  kujul

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} .$$

## 2. Funktsiooni tuletis ja tema geometriline tähendus

Üldistame liikumise kiiruse defineerimisel rakendatud mõttekäiku mistahes funktsioonile.

Olgu antud mingi funktsioon  $f(x)$ , mille määramispiirkonnaks on teatud vahemik, kuhu kuuluvad arvud  $x_1$  ja  $x_2$ . Nimetame jagatist

$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$  selle funktsiooni muutumise kesk-

miseks kiiruseks vahemikus  $x_1$ -st kuni  $x_2$ -ni. See keskmine kiirus iseloomustab funktsiooni muutumise kiirust argumenti väärtusel  $x_1$  seda paremini, mida väiksem on vahemik argumenti väärtusest  $x_1$  väärtuseni  $x_2$ . Funktsiooni  $f(x)$  muutumise kiiruseks argumenti väärtusel  $x_1$  ehk funktsiooni tuletiseks kohal  $x_1$  nimetatakse piirväärtust

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} ,$$

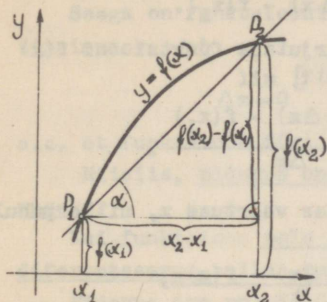
juhul kui see piirväärtus eksisteerib.

Funktsiooni  $f(x)$  tuletist kohal  $x_1$  tähistatakse lühemalt sümboliga  $f'(x_1)$ :

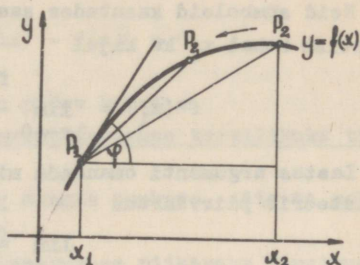
$$f'(x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} .$$

Nagu nähtub jooniselt 1, tähendab funktsiooni  $f(x)$  muutumise keskmine kiirus vahemikus  $x_1$ -st kuni  $x_2$ -ni geometriselt joone  $y = f(x)$  punkte  $P_1(x_1; f(x_1))$  ja  $P_2(x_2; f(x_2))$  läbiva lõikaja tõusu:

$$\tan \alpha = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$



Joon. 1



Joon. 2

Kui  $x_2 \rightarrow x_1$ , siis liigub lõikaja ja kõvera ühine punkt  $P_2$  seda kõverjoont mööda punkti  $P_1$  poole nii, et nendevaheline kaugus saab kuitahes väikeseks. Seejuures pöörduv lõikaja  $P_1P_2$  ümber punkti  $P_1$ , lähenedes teatud piirsirgele, mida nimetatakse joone  $y = f(x)$  puutujaks punktis  $P_1$ . Seega funktsiooni tuletis kohal  $x_1$  võrdub funktsiooni graafiku puutuja tõusuga, kui puutepunkti abstsiss on  $x_1$  (joon. 2):

$$\tan \varphi = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_1).$$

Teades, et joone  $y = f(x)$  punktis  $(x_1; f(x_1))$  joonestatud puutuja tõus on  $f'(x_1)$ , saame koostada puutuja võrrandi

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1).$$

### 3. Tuletisfunktsioon

Argumendi väärtuste vahet  $x_2 - x_1$  nimetatakse, nagu juba teada, argumendi juurdekasvuks ehk muuduks ja tähistatakse sümboliga  $\Delta x$ . Et  $\Delta x = x_2 - x_1$ , siis  $x_2 = x_1 + \Delta x$ , kus  $\Delta x \rightarrow 0$ , kui  $x_2 \rightarrow x_1$ .

Funktsiooni  $y = f(x)$  väärtuste vahet  $f(x_2) - f(x_1) =$   
 $= f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$  nimetatakse teatavasti funktsiooni  
 juurdekasvuks ja tähistatakse sümboliga  $\Delta f(x)$  või  $\Delta y$ :

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1).$$

Neid sümboleid kasutades saab kirjutada funktsiooni  $f(x)$   
 tuletise kohal  $x_1$  ka kujul

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Lastes argumenti omandada mistahes väärtuse  $x$ , mille puhul  
 eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

muutub see piirväärtus argumenti  $x$  funktsiooniks. Seda funktsiooni  
 nimetatakse antud funktsiooni tuletisfunktsiooniks ja  
 tähistatakse sümboliga  $y'$  või  $f'(x)$ . Seega

$$\begin{aligned} y' = f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Kui tuletise sümbolis  $y'$  soovime näidata, et tuletise  
 leidmisel on argumentiks olnud  $x$ , siis märgime tuletist kujul  
 $y'_x$ , mida loeme:  $y$ -i tuletis  $x$ -i järgi.

Niisiis, funktsiooni tuletiseks nimetame funktsiooni juurdekasvu ja argumenti juurdekasvu jagatise piirväärtust argumenti juurdekasvu lähenemisel nullile, juhul kui see piirväärtus on olemas.

Kui funktsioonil  $f(x)$  on olemas tuletis mingil argumenti väärtusel, siis nimetatakse funktsiooni sellel argumenti väärtusel diferentseeruvaks.

Selgitame, mis on selleks tarvilik, et funktsioon oleks antud argumenti väärtusel diferentseeruv.

Funktsiooni tuletis on niisuguse murru piirväärtus, mille nimetaja piirväärtus on null. Sellisel murrul saab piirväärtus olla ainult siis, kui ka lugeja piirväärtus on 0. Tõe-

poolest, kui lugeja piirväärtus on nullist erinev, siis mürd kasvab tõkestamatult, samuti pole murrul piirväärtust, kui see lugejal puudub.

Seega on funktsiooni  $f(x)$  tuletise olemasolu tarvilikuks tingimuseks, et

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x + \Delta x) - f(x)] = 0,$$

s.o. et funktsioon  $f(x)$  oleks pidev kohal  $x$ .

Niisiis, pidevus on diferentseeruvuse tarvilikuks tingimuseks.

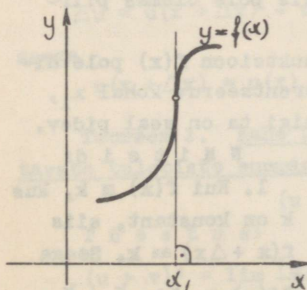
Kui funktsioon pole pidev mingis punktis, siis ta pole ka diferentseeruv selles punktis.

Pidevus aga pole diferentseeruvuse piisavaks tingimuseks, sest kui nii murrul lugeja kui ka nimetaja piirväärtus on 0, siis murrul endal ei pruugi veel piirväärtust olla. Nii on

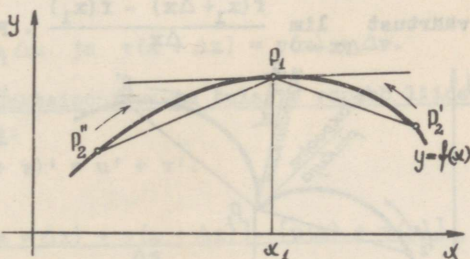
$$\lim_{x \rightarrow 0} 3x = 0 \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow 0} 5x^2 = 0, \quad \text{kuid piirväärtust} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{5x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5x} \quad \text{ei eksisteeri, sest} \quad \frac{3}{5x} \rightarrow \infty, \quad \text{kui} \quad x \rightarrow 0.$$

Kerge on konstrueerida niisuguse funktsiooni graafikut, millel mõnes pidevuskohas tuletist ei ole. Nii on joonisel 3 kujutatud funktsioon pidev kohal  $x_1$ , kuid tal pole tuletist sellel kohal, sest puutuja on seal risti  $x$ -teljega,  $\tan \varphi \rightarrow \infty$ .



Joon. 3



Joon. 4

Kui eksisteerib  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ , siis eksisteerib ka

vasakpoolne piirväärtus  $\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  ja parempoolne piirväärtus

$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ , kusjuures need piirväärtused on võrdsed. Geomeet-

riliselt tähendab see seda, et kui funktsioon  $f(x)$  on diferentseeruv kohal  $x_1$ , siis sellele abstsissile vastavast kõvera punktist tõmmatud lõikaja muutub üheks ja samaks puutujaks teise lõikepunkti lähenemisel esimesele, ükskõik kas teine lõikepunkt asub esimesest paremal ( $P_2'$ ) või vasakul ( $P_2''$ ) (joon. 4).

Joonisel 5 antud funktsiooni graafikule punktist  $P_1[x_1; f(x_1)]$  tõmmatud lõikaja annab aga piirasendis kaks erinevat puutujat vastavalt sellele, kas teine lõikepunkt asub esimesest paremal või vasakul. Selles punktis vasakpoolse puutuja tõus on

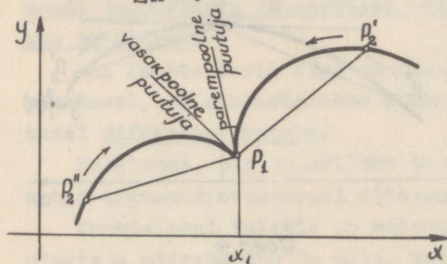
$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

ja parempoolse puutuja tõus on

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Et need piirväärtused pole võrdsed, siis pole olemas piir-

väärtust  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ . Funktsioon  $f(x)$  pole diferentseeruv kohal  $x_1$ , kuigi ta on seal pidev.



Joon. 5

N ä i t e i d:

1. Kui  $f(x) \equiv k$ , kus  $k$  on konstant, siis  $f(x + \Delta x) \equiv k$ . Seega

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k - k}{\Delta x} = 0.$$

Konstandi tuletis on 0.

$$2. \text{ Kui } f(x) = x, \text{ siis } f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Seega

$$x' = 1.$$

$$3. \text{ Kui } f(x) = x^2, \text{ siis}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Seega

$$(x^2)' = 2x.$$

#### 4. Summa, korrutise ja jagatise tuletis

Olgu funktsioonid  $u = u(x)$  ja  $v = v(x)$  diferentseeruvad kohal  $x$ , s.o. olgu olemas piirväärtused:

$$u' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

ja

$$v' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

kus

$$\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x) \quad \text{ja} \quad \Delta v = v(x + \Delta x) - v(x),$$

seega

$$u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta u \quad \text{ja} \quad v(x + \Delta x) = v(x) + \Delta v.$$

Teoreem 1. Kahe funktsiooni summa tuletis võrdub liidetaivate tuletiste summaga:

$$(u + v)' = u' + v'.$$

Tõestus:

$$(u + v)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)] - [u(x) + v(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'.$$

Teoreem on õige mistahes lõpliku arvu liidetavate puhul.

$$\begin{aligned} \text{N ä i d e: } & [x^2 + x + 3]' = (x^2)' + x' + 3' = \\ & = 2x + 1 + 0 = 2x + 1. \end{aligned}$$

Teoreem 2. Kahe funktsiooni korrutise tuletise saamiseks tuleb liita esimese teguri tuletise ja teise teguri korrutis ning esimese teguri ja teise teguri tuletise korrutis:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

T ö e s t u s:

$$\begin{aligned} (uv)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x) + \Delta u}{\Delta x} \frac{v(x) + \Delta v}{\Delta x} - \frac{u(x)v(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x) + \Delta u] [v(x) + \Delta v] - u(x)v(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x) \cdot \Delta u + u(x) \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ v(x) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \right] = \\ &= v(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \\ &= v(x) \cdot u' + u(x) \cdot v' + 0 \cdot v' = u'v + v'u. \end{aligned}$$

N ä i d e:

$$(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + x^2 \cdot x' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2.$$

J ä r e l d u s 1. Kui  $k$  on konstant, siis  $k' = 0$ .

Järelikult

$$(ku)' = ku'.$$

Konstandi ja funktsiooni korrutise tuletis võrdub funktsiooni tuletise ja selle konstandi korrutisega.

N ä i d e:

$$(100x^3)' = 100 (x^3)' = 100 \cdot 3x^2 = 300x^2.$$

J ä r e l d u s 2. Mistahes lõpliku arvuri tegurite puhul on korrutise tuletis summa, milles liidetavaid on niisama palju kui tegureid ning iga liidetav on ühe teguri tuletise ja kõigi ülejäänud tegurite korrutis. Näiteks

$$\begin{aligned}(x^8)' &= (x^3 \cdot x^3 \cdot x^2)' = (x^3)' \cdot x^3 \cdot x^2 + x^3 (x^3)' x^2 + x^3 x^3 (x^2)' = \\ &= 3x^2 x^3 x^2 + x^3 \cdot 3x^2 x^2 + x^3 x^3 \cdot 2x = 8x^7.\end{aligned}$$

Teoreem 3. Murru tuletis võrdub murruga, mille nimetajaks on antud murru nimetaja ruut ja lugejaks antud murru lugeja tuletis korda nimetaja miinus nimetaja tuletis korda lugeja:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

T ö e s t u s:

$$\begin{aligned}\left(\frac{u}{v}\right)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x) + \Delta u}{v(x) + \Delta v} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x)v(x) + v(x) \cdot \Delta u - u(x)v(x) - u(x) \cdot \Delta v}{v(x)v(x) - v(x) \cdot \Delta v} : \Delta x \right] = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x) \frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x) \frac{\Delta v}{\Delta x}}{[v(x)]^2 - v(x) \Delta v}.\end{aligned}$$

Rakendades piirväärtuse leidmise teoreeme, saame:

$$\begin{aligned}\left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{v(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{[v(x)]^2 - v(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v} = \\ &= \frac{v(x) u'(x) - u(x) v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}.\end{aligned}$$

N ä i d e:

$$(x^5)' = \left(\frac{x^8}{x^3}\right)' = \frac{8x^7 \cdot x^3 - x^8 \cdot 3x^2}{(x^3)^2} =$$

$$= \frac{8x^{10} - 3x^{10}}{x^6} = \frac{5x^{10}}{x^6} = 5x^4.$$

### 5. Liitfunktsiooni tuletis

Olgu funktsioonid  $f(u)$  ja  $u = \varphi(x)$  diferentseeruvad, s.t. on olemas piirväärtused  $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} = f'(u)$

ja  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'(x)$ . Et  $\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \Delta u$ , siis  $\varphi(x + \Delta x) = \varphi(x) + \Delta u$  ehk  $\varphi(x + \Delta x) = u + \Delta u$ , kusjuures  $\Delta u \rightarrow 0$ , kui  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Kui saab moodustada liitfunktsiooni  $f[\varphi(x)]$ , siis selle tuletis avaldub kujul:

$$\begin{aligned} [f(\varphi(x))]' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f[\varphi(x + \Delta x)] - f[\varphi(x)]}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(u + \Delta u) - f(u)] \Delta u}{\Delta x \Delta u} \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \\ &= f'(u) \cdot \varphi'(x), \end{aligned}$$

kus pärast diferentseerimist  $u$  tuleb asendada funktsiooniga  $\varphi(x)$ . Tulemuse kirjutame kujul

$$[f(\varphi(x))]' = f'_u(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

Liitfunktsiooni tuletis võrdub välise funktsiooni tuletisega (vahepealse muutuja järgi) korrutatud sisemise funktsiooni tuletisega.

**N ä i d e.** Leida funktsiooni  $(5x^3 + 2x^2 - 7x + 1)^5$  tuletis.

Antud funktsioon on liitfunktsioon, mille väline funktsioon on  $f(u) = u^5$  ja sisemine funktsioon  $u = \varphi(x) = 5x^3 + 2x^2 - 7x + 1$ . Välise funktsiooni tuletis (vahepealse muu-

tuja järgi) on  $f'_u(\varphi(x)) = f'(u) = 5u^4 = 5(5x^3 + 2x^2 - 7x + 1)^4$ . Sisemise funktsiooni tuletis on  $\varphi'(x) = 5 \cdot 3x^2 + 2 \cdot 2x - 7 = 15x^2 + 4x - 7$ . Seega

$$[(5x^3 + 2x^2 - 7x + 1)^5]' = 5(5x^3 + 2x^2 - 7x + 1)^4(15x^2 + 4x - 7).$$

### 6. Pöördfunktsiooni tuletis

Kui funktsioonid  $y = \varphi(x)$  ja  $x = f(y)$  on teineteise pöördfunktsioonid, siis on  $f(\varphi(x)) \equiv x$ . Et  $x' = 1$  ja

$$[f(\varphi(x))]' = f'_y(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x),$$

siis

$$f'_y(\varphi(x)) \varphi'(x) = 1,$$

millest

$$\varphi'(x) = \frac{1}{f'_y(\varphi(x))} \quad \text{ehk} \quad y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

Funktsiooni tuletis on seega avaldatav murruna, mille lugejaks on üks ja nimetajaks on selle funktsiooni pöördfunktsiooni tuletis.

N ä i d e: Funktsiooni  $y = \varphi(x) = x^{\frac{1}{3}}$  pöördfunktsioon on  $x = f(y) = y^3$ . Pöördfunktsiooni tuletis on  $f'(y) = 3y^2 = 3(x^{\frac{1}{3}})^2 = 3x^{\frac{2}{3}}$ . Seega on antud funktsiooni tuletis

$$\varphi'(x) = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}.$$

### 7. Elementaarsete põhifunktsioonide tuletised

$$1. \quad (\sin x)' = \cos x.$$

T ö e s t u s:

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} \sin \frac{x + \Delta x - x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \right]$$

Asendades nüüd  $\frac{\Delta x}{2} = t$ , millest järeldub, et  $t \rightarrow 0$ , kui  $\Delta x \rightarrow 0$ , saame:

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \cos(x + t) \cdot \frac{\sin t}{t} \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \cos(x + t) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \cos(x + 0) \cdot 1 = \cos x. \end{aligned}$$

M ä r k u s. Et  $\cos x = \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right)$ , siis võib saadud valemi kirjutada ka kujul

$$(\sin x)' = \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right).$$

$$\textcircled{2} \quad \underline{(\cos x)' = -\sin x.}$$

T ö e s t u s. Vaatleme antud funktsiooni eespool antud liitfunktsioonina  $\cos x = \sin u$ , kus  $u = x + \frac{\pi}{2}$ . Välise funktsiooni tuletis on  $(\sin u)' = \cos u = \cos \left( x + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin x$ . Sisemise funktsiooni tuletis on  $\left( x + \frac{\pi}{2} \right)' = 1 + 0 = 1$ .

Seega

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

M ä r k u s. Nagu näha, kehtib ka valem  $(\cos x)' = -\sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right)$ .

$$\textcircled{3} \quad \underline{(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.}$$

T ö e s t u s:

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x) \sin x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

M ä r k u s. Nagu näha, kehtib ka seos  $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$ .

$$\textcircled{4} \quad \underline{(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.}$$

T ö e s t u s:

$$\begin{aligned}(\cot x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \\ &= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.\end{aligned}$$

M ä r k u s. Ilmselt kehtib ka valem  $(\cot x)' = -(1 + \cot^2 x)$ .

$$5. \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

T ö e s t u s. Funktsiooni  $y = \arcsin x$  pöördfunktsioon on  $x = \sin y$ , kusjuures  $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ . Et  $(\sin y)' = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - (\sin \arcsin x)^2} = \sqrt{1 - x^2}$  ja

$$\begin{aligned}(\arcsin x)' &= \frac{1}{(\sin y)'} \text{ siis} \\ (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

$$6. \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

T ö e s t u s. Et  $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ , siis  $(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = 0 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

$$7. \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

T ö e s t u s. Funktsiooni  $y = \arctan x$  pöördfunktsioon on  $x = \tan y$ . Seega pöördfunktsiooni tuletis on  $(\tan y)' = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + [\tan(\arctan x)]^2 = 1 + x^2$ .

Järelikult

$$\begin{aligned}(\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2} \\ 8. \quad (\operatorname{arccot} x)' &= -\frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

T ö e s t u s. Et  $\operatorname{arccot} x + \arctan x = \frac{\pi}{2}$ , siis

$$(\operatorname{arccot} x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$9. \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

T ä e s t u s:

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x}.$$

$$\text{Et } \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right), \text{ siis}$$

$$\begin{aligned} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}. \end{aligned}$$

Kui  $\Delta x \rightarrow 0$ , siis  $\frac{x}{\Delta x} \rightarrow \infty$ , seega asendades  $\frac{x}{\Delta x} = t$  ehk

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{t}, \text{ saame:}$$

$$\begin{aligned} (\log_a x)' &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \lim_{t \rightarrow \infty} \log_a \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = \frac{1}{x} \log_a \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = \\ &= \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln e}{\ln a} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a}. \end{aligned}$$

M ä r k u s. Kui  $a = e$ , siis  $\ln a = \ln e = 1$  ning

$$\underline{(\ln x)' = \frac{1}{x}}.$$

10.  $(a^x)' = a^x \ln a$ .

T ä e s t u s. Funktsiooni  $y = a^x$  pöördfunktsioon on  $x = \log_a y$ . Seega pöördfunktsiooni tuletis on

$$\frac{1}{y \ln a} = \frac{1}{a^x \ln a}.$$

Järelikult

$$(a^x)' = \frac{1}{\frac{1}{a^x \ln a}} = a^x \ln a.$$

M ä r k u s. kui  $a = e$ , siis saame:

$$\underline{(e^x)' = e^x}.$$

$$11. \quad \underline{(x^r)' = r x^{r-1}}, \text{ kus } r \text{ on mistahes reaalarv.}$$

Tõestus. Kui  $x > 0$ , siis  $x = e^{\ln x}$  ja  $x^r = e^{r \ln x}$ . Seega kasutades liitfunksiooni diferentseerimise eeskirja, saame:

$$(x^r)' = (e^{r \ln x})' = e^{r \ln x} \cdot r \cdot \frac{1}{x} = x^r \cdot r \cdot \frac{1}{x} = r x^{r-1}.$$

Kui  $x < 0$ , siis  $-x > 0$  ja  $-x = e^{\ln(-x)}$ , millest  $x = -e^{\ln(-x)}$  ning kui  $r$  on niisugune arv, et eksisteerib  $x^r$ ,

$$\text{siis } x^r = [-e^{\ln(-x)}]^r = (-1)^r e^{r \ln(-x)}. \text{ Seega}$$

$$(x^r)' = [(-1)^r e^{r \ln(-x)}]' = (-1)^r (e^{r \ln(-x)})' =$$

$$= (-1)^r e^{r \ln(-x)} r \cdot \frac{1}{-x} \cdot (-1) = x^r \cdot r \cdot \frac{1}{x} = r x^{r-1}.$$

$$12. \quad \underline{(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x}.$$

$$\text{Tõestus: } (\operatorname{sh} x)' = \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})' =$$

$$= \frac{1}{2} [e^x - e^{-x} (-1)] = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x.$$

$$13. \quad \underline{(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x}.$$

$$\text{Tõestus: } (\operatorname{ch} x)' = \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})' =$$

$$= \frac{1}{2} [e^x + e^{-x} (-1)] = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = \operatorname{sh} x.$$

$$14. \quad \underline{(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}.$$

$$\text{Tõestus: } (\operatorname{th} x)' = \left( \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)' = \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} =$$

$$= \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

$$15. \quad \underline{(\operatorname{Arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}}.$$

$$\text{Tõestus: } (\operatorname{Arsh} x)' = [\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})]' =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left( 1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x \right) =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$16. \quad (\text{Arch } x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$\text{T ö e s t u s: } (\text{Arch } x)' = \left[ \ln (x + \sqrt{x^2 - 1}) \right]' =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) = \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{(x + \sqrt{x^2 - 1}) \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$17. \quad (\text{Arth } x)' = \frac{1}{1 - x^2}.$$

$$\text{T ö e s t u s: } (\text{Arth } x)' = \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \right]' =$$

$$= \frac{1}{2} \left( \ln \frac{1+x}{1-x} \right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1(1-x) - (-1)(1+x)}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{1-x^2}.$$

### 8. Ilmutamata funktsioon ja tema tuletis

Kui kaks muutuvat suurust  $x$  ja  $y$  on seotud võrrandiga  $F(x, y) = 0$  ja leidub niisugune funktsioon  $f(x)$ , mis asendatuna  $y$ -i asemele antud võrrandisse muudab selle samasuseks  $F(x, f(x)) \equiv 0$ , siis öeldakse, et võrrand  $F(x, y) = 0$  esitab ilmutamata kujul funktsiooni  $y = f(x)$  ehk võrrandiga  $f(x, y) = 0$  on antud ilmutamata funktsioon  $f(x)$ .

Nii esitab võrrand

$$x^2 + y^3 - 5 = 0$$

ilmutamata kujul funktsiooni  $y = (5 - x^2)^{\frac{1}{3}}$ , sest asendades funktsiooni  $(5 - x^2)^{\frac{1}{3}}$  antud võrrandisse  $y$  asemele, tekib samasus:

$$x^2 + \left[ (5 - x^2)^{\frac{1}{3}} \right]^3 - 5 = x^2 + (5 - x^2) - 5 = \\ = x^2 + 5 - x^2 - 5 \equiv 0.$$

Ilmutamata funktsioon  $f(x)$ , mille esitab võrrand  $f(x,y) = 0$ , leitakse sel teel, et võrrandist  $F(x,y) = 0$  suurus  $y$  avaldatakse  $x$  kaudu (kui see osutub võimalikuks).

Näiteks võrrandist

$$x^2 + y^3 - 5 = 0$$

saame  $y^3 = 5 - x^2$ , millest  $y = (5 - x^2)^{\frac{1}{3}}$ , seega  $f(x) = (5 - x^2)^{\frac{1}{3}}$ .

Juhul kui võrrandile  $F(x,y) = 0$ , mis esitab ilmutamata funktsiooni, ei saa anda kuju  $y = f(x)$ , siis selle võrrandiga esitatud funktsioon ei ole elementaarfunktsioon.

Näiteks võrrandist  $x^3 + x + y^5 + y - 10 = 0$  ei saa avaldada  $y$ -it  $x$ -i kaudu. Küll aga saab sellest arvutada argumendi  $x$  antud väärtustele vastavaid funktsiooni väärtusi. Kui näiteks  $x = 2$ , siis saame  $2^3 + 2 + y^5 + y - 10 = 0$  ehk  $y(y^4 + 1) = 0$ , millest  $y = 0$ , seega  $f(2) = 0$ . Sellest järeldub, et antud võrrand esitab küll üht funktsiooni, kuid see ei ole elementaarfunktsioon.

Mõni võrrand ei esita mingit funktsiooni, näiteks võrrand  $x^2 + y^2 + 1 = 0$ , sest sellest ei saa leida ühelegi  $x$  väärtusele vastavat  $y$  väärtust.

Võrrandiga  $F(x,y) = 0$  antud ilmutamata funktsiooni tuletis leitakse põhimõttel, et funktsioon  $F(x,y)$  on ainult argumendi  $x$  funktsioon, sest  $y = f(x)$ , seega  $F(x,y) \equiv \equiv F[x, f(x)]$ . Et  $F[x, f(x)]$  on iga argumendi väärtuse puhul 0, siis ka  $F'[x, f(x)] = 0$ .

Leiame näiteks võrrandiga  $x^3 + x + y^5 + y - 10 = 0$  antud ilmutamata funktsiooni  $y$  tuletise  $y'$ .

Eelneva põhjal saame:

$$(x^3 + x + y^5 + y - 10)' = 0.$$

Rakendades tuletise leidmise eeskirju ja võttes arvesse, et  $y^5$  on  $x$ -i liitfunktsioon, mille välise funktsiooni tuletis on  $5y^4$  ning sisemise funktsiooni tuletis  $y'$ , seega  $(y^5)'_x = 5y^4 y'$ , saame:

$$3x^2 + 1 + 5y^4 y' + y' = 0,$$

millest  $y'(5y^4 + 1) + 3x^2 + 1 = 0$  ja  $y'(5y^4 + 1) = -(3x^2 + 1)$ , seega

$$y' = -\frac{3x^2 + 1}{5y^4 + 1}.$$

Niisiis saame ilmutamata funktsiooni tuletise avaldada argumendi ja funktsiooni kaudu. Kui argumendi väärtus ja sellele vastav funktsiooni väärtus on teada, saame leida ilmutamata funktsiooni tuletise väärtuse.

Näiteks eespool antud ilmutamata funktsiooni tuletis kohal  $x = 2$  on:

$$y'(2) = -\frac{5 \cdot 2^2 + 1}{5 \cdot 0 + 1} = -13.$$

Teades ilmutamata funktsiooni tuletist, saame leida ka ilmutamata funktsiooni graafiku puutuja võrrandi.

**N ä i d e.** Leida ilmutamata funktsiooni

$$x + \ln x - y^3 + y + 5 = 0$$

graafiku puutuja, kui puutepunkti abstsiss on 1.

Esmalt leiame puutepunkti ordinaadi, asendades antud võrrandis  $x = 1$ ; saame:

$$1 + \ln 1 - y^3 + y + 5 = 0 \text{ ehk } -y^3 + y + 6 = 0.$$

Nagu näha, on saadud võrrandi lahendiks  $y = 2$ , sest  $-2^3 + 2 + 6 = 0$ . Niisiis puutepunkt on  $(1; 2)$ .

Nüüd leiame antud ilmutamata funktsiooni tuletise võrrandist

$$(x + \ln x - y^3 + y + 5)' = 0.$$

Saame:

$$1 + \frac{1}{x} - 3y^2 y' + y' = 0,$$

millest

$$y' = \frac{x + 1}{x(3y^2 - 1)}.$$

Seega puutuja tõus on  $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4-1} = \frac{2}{11}$  ja puutuja on

$$y - 2 = \frac{2}{11}(x - 1)$$

ehk

$$2x - 11y + 20 = 0.$$

### 9. Funktsiooni diferentsiaal

Kui funktsioon  $f(x)$  on diferentseeruv vahemikus  $a \leq x \leq b$ , siis selles vahemikus eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Järelikult

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

kus  $\alpha$  on lõpmatult vähenev suurus, kui  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Siit saame:

$$\Delta f(x) = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \Delta x, \quad (1)$$

kus  $\alpha \Delta x$  on kõrgemat järku lõpmatult vähenev suurus võrreldes  $\Delta x$ -iga, sest

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0.$$

Seega on diferentseeruva funktsiooni juurdekasv argumenti juurdekasvu lähenemisel nullile esitatav kahe liidetava summana, millest esimene liidetav, olles võrdeline argumenti juurdekasvuga, on funktsiooni juurdekasvuga ekvivalentne lõpmatult vähenev suurus, teine liidetav aga kõrgemat järku lõpmatult vähenev suurus argumenti juurdekasvuga võrreldes.

Esimene liidetav  $f'(x) \Delta x$  moodustab seega funktsiooni juurdekasvu peaosaks. Teda nimetatakse funktsiooni diferentsiaaliks ja tähistatakse  $df(x)$  ehk  $dy$  (kui  $y = f(x)$ ).

Niisiis

$$df(x) = f'(x) \Delta x \quad \text{ehk} \quad dy = y' \Delta x.$$

Argumenti juurdekasvu  $\Delta x$  nimetatakse ka argumenti diferentsiaaliks ja tähistatakse  $dx$ ,  $dx = \Delta x$ . Seetõttu kirjutatakse funktsiooni diferentsiaal tavaliselt kujul

$$df(x) = f'(x) dx, \quad \text{või} \quad dy = f'(x) dx. \quad (2)$$

Funktsiooni diferentsiaal on funktsiooni tuletise ja argumendi diferentsiaali korrutis.

Seosest (1) järeldub, et funktsiooni juurdekasv erineb vahe diferentsiaalist (kui  $x$  on küllalt väike):

$$\Delta f(x) \approx df(x)$$

ehk

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \Delta x,$$

millest

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x. \quad (3)$$

Saadud valemit kasutatakse sageli funktsiooni väärtuste ligikaudseks arvutamiseks.

Olgu näiteks vaja leida  $\arctan(-1,04)$  ligikaudne väärtus. Teades, et  $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ , saame nõutud arvu leidmiseks kasutada valemit (3), võttes  $f(x) = \arctan x$ ,  $x = -1$  ja  $x + \Delta x = -1,04$ , millest  $\Delta x = -x - 1,04$  ehk  $\Delta x = -0,04$ .

$$\text{Et } f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \text{ siis}$$

$$\begin{aligned} \arctan(-1,04) &= \arctan(-1) + \frac{1}{1+(-1)^2} \cdot (-0,04) = \\ &= -\frac{3,142}{4} - \frac{0,04}{2} = -\frac{3,222}{4} = -0,805. \end{aligned}$$

**M ä r k u s 1.** Jagades võrduste (2) pooli argumendi diferentsiaaliga  $dx$ , saame funktsiooni tuletise avaldada diferentsiaalide jagatisenä:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x).$$

Need jagatised kui funktsiooni tuletise sümbolid kirjutatakse mõnikord ka kujul

$$\frac{d}{dx} y = \frac{d}{dx} f(x).$$

**M ä r k u s 2.** Liitfunktsiooni  $y = f(\varphi(x))$  ehk  $y = f(u)$ ,  $u = \varphi(x)$  tuletis kirjutatakse diferentsiaalide jagatiste abil kujul

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Kui näiteks  $y = \sin(x^2 + 1)$  ehk  $y = \sin u$ ,  $u = x^2 + 1$ , siis:

$$\frac{dy}{du} = \cos u, \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad \text{ja}$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos u \cdot 2x = 2x \cos(x^2 + 1).$$

M ä r k u s 3. Diferentsiaalide jagatise puhul kehtib võrdus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \quad (1)$$

mis väljendab funktsiooni  $y = f(x)$  ja tema pöördfunktsiooni  $x = \varphi(y)$  tuletiste  $\frac{dy}{dx} = f'(x)$  ja  $\frac{dx}{dy} = \varphi'(y)$  vahelist seost (vt. p.6).

N ä i d e. Kui  $y = x^5$ , siis  $x = y^{\frac{1}{5}} = y^{0,2}$ ,

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 \quad \text{ja} \quad \frac{dx}{dy} = 0,2 y^{-0,8}.$$

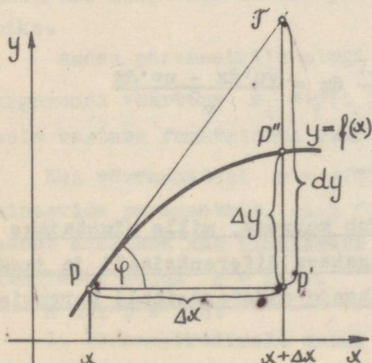
Valemi (1) järgi peab olema

$$5x^4 = \frac{1}{0,2 y^{-0,8}} = 5y^{0,8}.$$

Nii ongi, sest

$$y^{0,8} = (x^5)^{0,8} = x^4.$$

### 10. Diferentsiaali geomeetriline tähendus



Joon. 6

Olgu funktsioon  $f(x)$  diferentseeruv. Selle funktsiooni graafiku (joon.6) puutuja  $PT$  tõus avaldub kujul

$$\tan \varphi = f'(x) = \frac{P'T}{PP'} = \frac{P'T}{\Delta x},$$

millest  $P'T = f'(x) \Delta x = df(x) = dy$ .

Funktsiooni diferentsiaal  $dy$  näitab seega, kui palju erineb puutuja punkti  $T$  ordinaat puutepunkti  $P$  ordinaadist, kui punkti  $T$  abstsiss erineb puutepunkti

abstsissist  $\Delta x$  võrra.

Funktsiooni juurdekasv  $\Delta y = P^M P^N$  näitab aga, kui palju erineb antud kõverjoone punkti  $P^M$  ordinaat puutepunkti  $P$  ordinaadist, kui punkti  $P^M$  abstsiss erineb puutepunkti abstsissist  $\Delta x$  võrra.

### 11. Summa, korrutise ja jagatise diferentsiaal

Kui funktsioonid  $u = u(x)$  ja  $v = v(x)$  on diferentseeruvad mingis vahemikus, siis selles vahemikus  $du = u'dx$  ja  $dv = v'dx$ .

#### 1. Summa diferentsiaal:

$$d(u + v) = (u + v)'dx = (u' + v')dx = u'dx + v'dx$$

ehk

$$d(u + v) = du + dv.$$

Summa diferentsiaal võrdub liidetavate diferentsiaalide summaga.

#### 2. Korrutise diferentsiaal:

$$d(uv) = (uv)'dx = (u'v + uv')dx = uv'dx + vu'dx$$

ehk

$$d(uv) = udv + vdu.$$

Kahe teguri korrutise diferentsiaal võrdub esimese teguri ja teise teguri diferentsiaali korrutise ning teise teguri ja esimese teguri diferentsiaali korrutise summaga.

#### 3. Jagatise diferentsiaal:

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)'dx = \frac{u'v - uv'}{v^2} dx = \frac{vu'dx - uv'dx}{v^2}$$

ehk

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}.$$

Jagatise diferentsiaal võrdub murruga, mille nimetajaks on jagaja ruut, lugejaks aga jagatava diferentsiaali ja jagaja korrutise ning jagatava ja jagaja diferentsiaali korrutise vahe.

## 12. Diferentsiaali kju invariantisus

Kui funktsioon  $y = f(x)$  on diferentseeruv, siis  
 $dy = f'(x) dx$ .

Kui liitfunktsioon  $y = f[\varphi(x)]$  on diferentseeruv, siis  
 $\frac{dy}{dx} = f'_\varphi[\varphi(x)]\varphi'(x)$  ning liitfunktsiooni diferentsiaal  
 $dy = f'_\varphi[\varphi(x)]\varphi'(x) dx$ .

Selle liitfunktsiooni sisemise funktsiooni tähistamisel  
tähega  $u$ ,  $u = \varphi(x)$ , on sisemise funktsiooni diferentsiaal  
 $du = \varphi'(x)dx$ . Järelikult on liitfunktsiooni  $y = f(u)$ ,  
 $u = \varphi(x)$  diferentsiaal avaldatav kujul

$$dy = f'(u) du.$$

Sellest on näha, et funktsiooni diferentsiaali avaldise  
kju ei sõltu sellest, kas  $u$  on argument või argumenti funktsioon.  
Seda omadust nimetatakse diferentsiaali kju invariantisuseks.

## 13. Parameetriliselt antud funktsioon ja selle tuletis

Mõnikord on otstarbekas funktsiooni ja argumenti vaheline  
seos esitada sel teel, et nihästi funktsioon  $y$  kui ka argument  
 $x$  avaldatakse kolmanda muutuva suuruse  $t$  funktsioonina:  
 $x = \varphi(t)$  ja  $y = \psi(t)$ . Suurust  $t$  nimetatakse sel juhul parameetrikaks  
ning funktsiooni parameetriliselt antud funktsiooniks.

Andes parameetrile mingi kindla väärtuse  $t = t_0$ , saame  
argumenti väärtuse  $x_0 = \varphi(t_0)$  ja argumenti sellele väärtusele  
vastava funktsiooni väärtuse  $y_0 = \psi(t_0)$ .

Kui võrranditest  $x = \varphi(t)$  ja  $y = \psi(t)$  on võimalik elimineerida  
parameetrit, saab funktsiooni ja argumenti vahelise seose avaldada  
kas ilmutamata funktsioonina  $F(x,y) = 0$  või ilmutatud kujul  
 $y = f(x)$ .

N ä i t e i d:

1. Parameetriliselt antud funktsiooni

$$x = a \cos t$$

$$y = b \sin t$$

puhul saab parameetrit elimineerida järgmiselt:

$$\frac{x}{a} = \cos t \quad \frac{x^2}{a^2} = \cos^2 t,$$

$$\frac{y}{b} = \sin t \quad \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 t.$$

Seega

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t \quad \text{ehk} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Niisiis on parameetriselt antud funktsioon käesoleval juhul esitatav ilmutamata funktsioonina, mille graafik on ellips pooltelgedega  $a$  ja  $b$ .

2. Funktsiooni  $x = t^3 + 1$ ,  $y = t^4 + t$  puhul saame esimesest võrrandist avaldada parameetri  $t$ :  $t = (x - 1)^{\frac{1}{3}}$ . Et teisele võrrandile saab anda kuju  $y = t(t^3 + 1)$ , siis

$$y = x(x - 1)^{\frac{1}{3}}.$$

3. Funktsiooni  $x = 3t + \cos t$ ,  $y = t^2 + 2e^t$  puhul pole võimalik parameetrit elimineerida.

Kui funktsioonid  $x = \varphi(t)$  ja  $y = \psi(t)$  on diferentseeruvad, siis  $dx = \varphi'(t) dt$  ja  $dy = \psi'(t) dt$ . Et funktsiooni tuletis võrdub funktsiooni diferentsiaali ja argumendi diferentsiaali jagatisega, siis on parameetriselt antud funktsiooni  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  tuletis

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t) dt}{\varphi'(t) dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad \text{ehk} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}},$$

kus  $\dot{x}$  ja  $\dot{y}$  tähendavad funktsioonide  $x = \varphi(t)$  ja  $y = \psi(t)$  tuletisi parameetri  $t$  järgi.

N ä i t e i d:

1. Funktsiooni  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$  tuletis

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b \cos t}{a \sin t} = -\frac{b}{a} \cot t.$$

2. Kui  $x = t^3 + 1$  ja  $y = t^4 + t$ , siis  $\frac{dy}{dx} = \frac{4t^3 + 1}{3t^2}$ .

3. Leida parameetriliselt antud funktsiooni  $x = 3t + \cos t$ ,  $y = t^2 + 2e^t$  graafiku puutuja punktis, kus  $t = 0$ .

Puutepunkti koordinaadid leiame võrrandist  $x = 3 \cdot 0 + \cos 0 = 1$  ja  $y = 0^2 + 2e^0 = 2$ , seega puutepunkt on  $(1; 2)$ .

Et  $\frac{dy}{dx} = \frac{2t + 2e^t}{3 - \sin t}$ , siis on puutuja tõus

$$\frac{2 \cdot 0 + 2 \cdot e^0}{3 - \sin 0} = \frac{2}{3}.$$

Järelikult puutuja võrrand on

$$y - 2 = \frac{2}{3}(x - 1)$$

ehk

$$2x - 3y + 4 = 0$$

#### 14. Kõrgemat järku tuletised

a. Kui funktsioon  $f(x)$  on diferentseeruv, siis tema tuletisfunktsioon  $f'(x)$  võib osutada omakorda diferentseeruvaks. Selle tuletist  $\frac{d}{dx} f'(x)$  nimetatakse antud funktsiooni  $f(x)$  teiseks tuletiseks ehk teist järku tuletiseks ja tähistatakse sümboliga

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) \quad \text{või} \quad f''(x),$$

seega

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = \frac{d}{dx} f'(x) = f''(x).$$

Kui funktsiooni teine tuletis on jällegi diferentseeruv, siis saadakse funktsiooni kolmas ehk kolmandat järku tuletis, mis on teise tuletise esimene tuletis ehk esimese tuletise teine tuletis:

$$\frac{d^3}{dx^3} f(x) = \frac{d}{dx} f''(x) = \frac{d^2}{dx^2} f'(x) = f'''(x).$$

Kui kolmas tuletis on omakorda diferentseeruv, siis saadakse neljas ehk neljandat järku tuletis jne. Üldiselt saadakse pärast  $n$  kordset funktsiooni ja tema tuletiste diferentseer-

rimist antud funktsiooni n-es ehk n-ndat järku tuletis:

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \frac{d}{dx} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x) = f^{(n)}(x).$$

M ä r k u s. Tuletise järku tähistatakse rooma numbritega või suurte arvude korral ka araabia numbritega. Viimasel juhul pannakse aga arv sulgudesse, et teda ei saaks ära segada astendajaga:  $f''(x) = f^{(2)}(x)$  aga  $f^2(x) = f(x) \cdot f(x)$ .

N ä i d e. Leiame  $f(x) = \ln x$  tuletised:  $(\ln x)' = \frac{1}{x} = x^{-1}$ ,  $(\ln x)'' = (-1)x^{-2}$ ,  $(\ln x)''' = (-1) \cdot (-2) x^{-3}$ ,  
 $(\ln x)^{(4)} = (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) x^{-4}$ .

On ilmne, et

$$\begin{aligned} (\ln x)^{(n)} &= (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \dots [-(n-1)] x^{-n} = \\ &= (-1)^{n-1} (n-1)! x^{-n}. \end{aligned}$$

b. Kui funktsioon on antud parameetriliselt võrrandi-paariga  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  (kus  $\varphi(t)$  ja  $\psi(t)$  on n korda diferentseeruvad), siis

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Seega

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dt} \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \\ &= \frac{\psi''(t) \varphi'(t) - \psi'(t) \cdot \varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2} \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = \\ &= \frac{\psi'(t) \psi''(t) - \varphi''(t) \cdot \psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3} = \frac{\ddot{xy} - \ddot{yx}}{x^3}. \end{aligned}$$

Üldiselt

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dt} \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}}.$$

N ä i d e. Leida  $\frac{d^2y}{dx^2}$ , kui

$$x = t^3 - 3t$$

$$y = t^4 - 1.$$

L a h e n d u s :

$$\dot{x} = 3t^2 - 3 = 3(t^2 - 1), \quad \ddot{x} = 6t,$$

$$\dot{y} = 4t^3, \quad \ddot{y} = 12t^2,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{12t^2 \cdot 3(t^2 - 1) - 6t \cdot 4t^3}{27(t^2 - 1)^3} = \frac{4t^2(t^2 - 3)}{9(t^2 - 1)^3}.$$

### 15. Kõrgemat järku diferentsiaalid

Kui funktsioon  $y = f(x)$  on diferentseeruv, siis selle funktsiooni diferentsiaal

$$dy = f'(x) dx$$

on argumendi  $x$  funktsioon. Kui see funktsioon on diferentseeruv, siis on tal ka diferentsiaal, mis on jällegi funktsiooni tuletise ja argumendi diferentsiaali korrutis. Saadud diferentsiaali nimetatakse antud funktsiooni teiseks ehk teist järku diferentsiaaliks ja tähistatakse  $d^2y$ :

$$d^2y = d(dy) = \frac{d}{dx} [f'(x) dx] dx.$$

Et  $dx = \Delta x$ , kui argumendi juurdekasv ei sõltu argumentist  $x$ , siis tuleb tegurit  $dx$  diferentseerimise puhul vaadelda konstandina. Seega

$$\frac{d}{dx} [f'(x) dx] = dx \frac{d}{dx} f'(x) = dx \cdot f''(x) = f''(x) dx.$$

Järelikult

$$d^2y = [f''(x) dx] dx = f''(x) (dx)^2.$$

Argumendi diferentsiaali ruutu  $(dx)^2$  tähistatakse lihtsuse mõttes ka  $dx^2$ . Niisiis

$$d^2y = f''(x) dx^2.$$

Saadud diferentsiaal on omakorda argumendi funktsioon, ning kui see funktsioon on diferentseeruv, siis tal on ka diferentsiaal. Saadud diferentsiaali nimetatakse antud funktsiooni kolmandaks ehk kolmandat järku diferentsiaaliks:

$$d^3y = d(d^2y) = \frac{d}{dx}[f''(x) dx^2] dx =$$

$$= [dx^2 \frac{d}{dx} f''(x)] dx = [f'''(x) dx^2] dx = f'''(x) dx^3.$$

Üldiselt nimetatakse funktsiooni  $n$ -ndaks ehk  $n$ -järku diferentsiaaliks  $(n - 1)$ -järku diferentsiaali esimest diferentsiaali:

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x) dx^n.$$

N ä i d e. Leida funktsiooni  $\ln x$  kolmandat järku diferentsiaali väärtus, kui  $x = 1$  ja  $\Delta x = 0,1$ .

Et  $\frac{d^3}{dx^3} \ln x = (-1)^2 \cdot 2! x^{-3} = \frac{2}{x^3}$ , siis  $d^3 \ln x =$

$$= \frac{2}{x^3} dx^3.$$

Seega  $d^3 \ln x \Big|_{\substack{x=1 \\ \Delta x=0,1}} = \frac{2}{1^3} 0,1^3 = 0,002.$

## § 2. Tuletise rakendamine funktsiooni uurimisel

### 1. Keskväertusteoreemid

a. Rolle'i teoreem. Kui funktsioon  $f(x)$  on pidev kinnises vahemikus  $a \leq x \leq b$ , diferentseeruv lahtises vahemikus  $a < x < b$  ja omab vahemiku otstes võrdseid väärtusi  $f(a) = f(b)$ , siis leidub vähemalt üks niisugune arv  $\xi$ , et  $a < \xi < b$  ja  $f'(\xi) = 0$ .

T ö e s t u s. Et  $f(x)$  on pidev kinnises vahemikus  $a \leq x \leq b$ , siis on tal selles vahemikus vähemalt ühes kohas minimaalne väärtus  $m$  ja maksimaalne väärtus  $M$ .

Nüüd võib olla kaks juhtumit: kas  $m = M$  või  $m \neq M$ .

1. Kui  $m = M$ , siis ei saa funktsioonil  $f(x)$  antud vahemiku üheski punktis olla väiksemat ega suuremat väärtust kui  $m$ . Järelikult  $f(x) \equiv m$  vahemikus  $a \leq x \leq b$ . Seega  $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} m = 0$ . Teoreem on sel juhul tõestatud.

2. Kui  $m \neq M$ , siis vähemalt üks arvudest  $m$  või  $M$  ei võrdu arvuga  $f(a)$ . Olgu näiteks  $M \neq f(a)$ , seega ka  $M \neq f(b)$ .

Tähistame seda argumendi väärtust, mille puhul funktsiooni väärtus on  $M$ , tahega  $\xi$ ,  $f(\xi) = M$ . Siis  $f(\xi) \neq f(a)$  ja  $f(\xi) \neq f(b)$ , järelikult  $\xi \neq a$  ja  $\xi \neq b$  ehk  $a < \xi < b$ .

Et  $f(\xi)$  on funktsiooni maksimaalne väärtus antud vahemikus, siis  $f(\xi + \Delta x) \leq f(\xi)$  ehk  $f(\xi + \Delta x) - f(\xi) \leq 0$  iga  $\Delta x$  väärtuse korral, mis rahuldab võrratust  $a < \xi + \Delta x < b$ . Järelikult

$$\frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \leq 0, \quad \text{kui } \Delta x > 0,$$

ja

$$\frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \geq 0, \quad \text{kui } \Delta x < 0.$$

Seega

$$f'(\xi) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \leq 0, \quad \text{kui } \Delta x > 0,$$

ja

$$f'(\xi) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \geq 0, \quad \text{kui } \Delta x < 0.$$

Järelikult saab kehtida ainult võrdus

$$f'(\xi) = 0.$$

Teoreem on tõestatud.

b. Lagrange'i teoreem. Kui funktsioon  $f(x)$  on pidev kinnises vahemikus  $a \leq x \leq b$  ja diferentseeruv lahtises vahemikus  $a < x < b$ , siis leidub vähemalt üks niisugune arv  $\xi$ , et  $a < \xi < b$  ja

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Tõestus. Moodustame uue funktsiooni  $F(x)$  nii, et

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a).$$

Teine liidetav  $-\frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$ , kui lineaarne funktsioon, on pidev ja diferentseerub kõikjal.

Järelikult on funktsioon  $F(x)$  pidev kinnises vahemikus  $a \leq x \leq b$  ja diferentseeruv lahtises vahemikus  $a < x < b$ .

$$\text{Et } F(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (a - a) = f(a)$$

$$\text{ja } F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (b - a) = f(a), \text{ siis}$$

$$F(a) = F(b).$$

Seega rahuldab funktsioon  $F(x)$  Rolle'i teoreemi eeldusi. Järelikult leidub niisugune arv  $\xi$ , et  $a < \xi < b$  ja  $F'(\xi) = 0$ .

$$\text{Et } F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \text{ siis}$$

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0, \text{ millest } f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Teoreem on tõestatud.

**M ä r k u s 1.** Lagrange'i teoreemi võib avaldada ka kujul

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) (b - a).$$

Et  $\xi$  on  $a$  ja  $b$  vahel olev arv, siis  $\xi = a + \theta(b - a)$ , kus  $0 < \theta < 1$ .

Tõepoolest, on kaks võimalust kas

$$a < \xi < b \text{ või } b < \xi < a.$$

Esimesel juhul on  $b - a > 0$  ja

$$\theta(b - a) > 0, \text{ seega}$$

$$\xi = a + \theta(b - a) \text{ (joon. 7, a).}$$

Teisel juhul on  $b - a < 0$  ja

$$\theta(b - a) < 0, \text{ seega jällegi}$$

$$\xi = a + \theta(b - a) \text{ (joon. 7, b).}$$

Kui tähistada  $b - a = \Delta x$  ja  $a = x$ , siis  $b = x + \Delta x$  ja

$$\xi = x + \theta \Delta x.$$

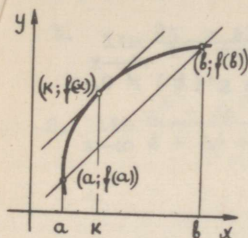
Seega saame Lagrange'i teoreemi kirjutada veel kujul

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x f'(x + \theta \Delta x), \text{ kus } 0 < \theta < 1,$$

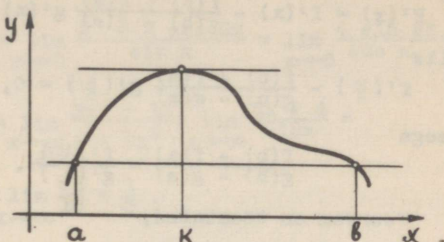
millest

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x \cdot f'(x + \theta \Delta x).$$

**M ä r k u s 2.** Geomeetriliselt tähendab Lagrange'i teoreem seda, et vahemikus  $a < x < b$  leidub joonel  $y = f(x)$  vähemalt üks niisugune punkt  $(\xi; f(\xi))$ , milles joone puutuja on selle joone punkte  $(a; f(a))$  ja  $(b; f(b))$  läbiva lõikajaga paralleelne (joon.8).



Joon. 8



Joon. 9

M ä r k u s 3. Rolle'i teoreem on Lagrange'i teoreemi erijuhtum, kus  $f(a) = f(b)$ . Tõepoolest, kui  $f(a) = f(b)$ , siis  $f(b) - f(a) = 0$ , seega

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{0}{b - a} = 0 \quad (\text{joon. 9}).$$

c. Cauchy' teoreem. Kui funktsioonid  $f(x)$  ja  $g(x)$  on kinnises vahemikus  $a \leq x \leq b$  pidevad ja lahtises vahemikus  $a < x < b$  diferentseeruvad ning kui viimases vahemikus  $g'(x) \neq 0$ , siis leidub vähemalt üks niisugune arv  $\xi$ , et  $a < \xi < b$  ja

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

T õ e s t u s. Moodustame uue funktsiooni

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} [g(x) - g(a)].$$

Pidevate funktsioonide kohta kehtivate teoreemide põhjal on funktsioon  $F(x)$  pidev kinnises vahemikus  $a \leq x \leq b$  ja diferentseeruv lahtises vahemikus  $a < x < b$ .

Et

$$F(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} [g(a) - g(a)] = f(a)$$

ja

$$F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} [g(b) - g(a)] = f(a),$$

siis täidab funktsioon  $F(x)$  Rolle'i teoreemi eeldusi. Seega leidub niisugune arv  $\xi$ , et  $a < \xi < b$  ja  $F'(\xi) = 0$ .

Et 
$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x),$$

siis

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi) = 0, \quad \text{kus } g'(\xi) \neq 0.$$

Seega

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Teoreem on tõestatud.

d. L'Hôpitali reegel.

Kui:

- 1) funktsioonid  $f(x)$  ja  $g(x)$  on diferentseeruvad kohal  $x = a$  ja selle ümbruses,
- 2)  $f(a) = g(a) = 0$  ning
- 3) eksisteerivad piirväärtused  $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$  ja  $\lim_{x \rightarrow a} g'(x) \neq 0$ ,

siis on

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Tõestus.** Eelduse kohaselt on olemas punkti  $a$  niisugune ümbrus, kus funktsioonid  $f(x)$  ja  $g(x)$  rahuldavad Cauchy' teoreemi eeldusi. Järelikult on punkti  $a$  ümbruses, s.o. arvude  $x$  ja  $a$  vahel, niisugune arv  $\xi$ , et

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{sest } f(a) = g(a) = 0.$$

Seega

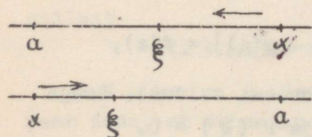
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{\xi \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Viimane võrdus on kehtiv seetõttu, et kui  $x \rightarrow a$ , siis ka  $\xi \rightarrow a$  (joon.10). Tähistades nüüd  $\xi = x$ , saamegi

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

L'Hôpitali reegel kehtib ka juhul, kui  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \rightarrow \infty$  ja

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \rightarrow \infty$  või kui  $x \rightarrow \infty$ ,  $f(x) \rightarrow 0$  ja  $g(x) \rightarrow 0$ , ning siis, kui  $x \rightarrow \infty$ ,  $f(x) \rightarrow \infty$  ja  $g(x) \rightarrow \infty$ .



Joon. 10

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin 2x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos 2x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin 2x}{\cos x} = 0.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2}{4 + 5x + 3x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x}{5 + 9x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x + 4}{18x} = \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$$

## 2. Funktsiooni kasvamine ja kahanemine

Definitsioon. Kui funktsioon  $f(x)$  on määratud piirkonnas  $a \leq x \leq b$  ning iga  $x_1$  ja  $x_2$  väärtuse puhul, mis rahuldavad võrratust  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ , on täidetud tingimus  $f(x_1) < f(x_2)$ , siis nimetatakse funktsiooni  $f(x)$  kasvavaks vahemikus  $a \leq x \leq b$ . Kui aga  $f(x_1) > f(x_2)$ , siis nimetatakse funktsiooni  $f(x)$  kahanevaks selles vahemikus.

Seega funktsioon kasvab siis, kui suuremale argumendi väärtusele vastab suurem funktsiooni väärtus. Funktsioon kahaneb, kui suuremale argumendi väärtusele vastab väiksem funktsiooni väärtus. Järelikult kasvava funktsiooni puhul on vahed  $x_2 - x_1$  ja  $f(x_2) - f(x_1)$  sama märgiga, kahaneva funktsiooni puhul aga vastandmärkidega.

Niisiis funktsioon kasvab, kui  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ ,

funktsioon kahaneb, kui  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$ , ja ümberpöörduvalt.

Kasvava funktsiooni graafikut nimetatakse tõusvaks jooneks (joon.11), kahaneva funktsiooni graafikut langevaks jooneks (joon.12).

Teoreem 1. Kui funktsioon  $f(x)$  on diferentseeruv ja kasvav vahemikus  $a \leq x \leq b$ , siis on funktsiooni tuletis selles vahemikus mittenegatiivne, s.o.  $f'(x) \geq 0$ .

T ö e s t u s. Et  $f(x)$  on kasvav, siis  $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x} > 0$ , seega

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

Teoreem 2. Kui funktsioon  $f(x)$  on diferentseeruv ja kahanev vahemikus  $a \leq x \leq b$ , siis on funktsiooni tuletis selles vahemikus mittepositiivne, s.o.  $f'(x) \leq 0$ .

Tõestus on analoogiline eelmise teoreemi tõestusega.

Teoreem 3. Kui funktsioon  $f(x)$  on pidev vahemikus  $a \leq x \leq b$  ja diferentseeruv vahemikus  $a < x < b$ , kusjuures  $f'(x) > 0$ , siis funktsioon kasvab vahemikus  $a \leq x \leq b$ .

Tõestus. Kui  $x_1$  ja  $x_2$  rahuldavad tingimusi  $a \leq x_1 \leq b$  ja  $a \leq x_2 \leq b$ , siis on Lagrange'i teoreemi põhjal

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi),$$

kus arv  $\xi$  on arvude  $x_1$  ja  $x_2$  vahel, seega  $a < \xi < b$ .

Eelduse järgi on niisiis  $f'(\xi) > 0$ , seega  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ .

Järelikult funktsioon kasvab vahemikus  $a \leq x \leq b$ .

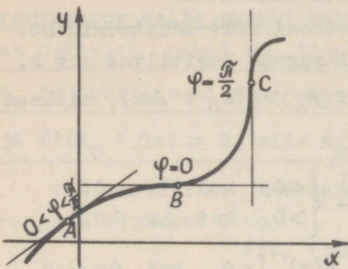
Teoreem 4. Kui funktsioon  $f(x)$  on pidev vahemikus  $a \leq x \leq b$  ja diferentseeruv vahemikus  $a < x < b$ , kusjuures  $f'(x) < 0$ , siis funktsioon kahaneb vahemikus  $a \leq x \leq b$ .

Tõestus on analoogiline eelmise teoreemi tõestusega.

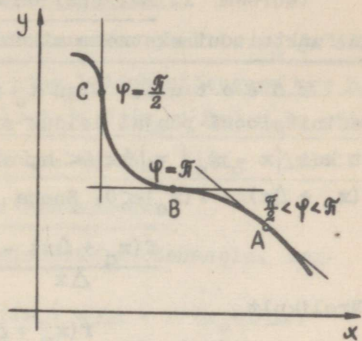
Nendest neljast teoreemist selgub, et juhul kui funktsioon on diferentseeruv ja tema tuletis on nullist erinev, siis funktsioon kas kasvab või kahaneb vastavalt sellele, kas tuletis on positiivne või negatiivne. Kui aga funktsiooni tuletis on võrdne nulliga, siis ei saa öelda, et funktsioon kasvaks, samuti ei või aga ka öelda, et ta kahaneks.

Et funktsiooni tuletise väärtus antud punktis võrdub vastavast punktist funktsiooni graafikule tõmmatud puutuja tõusuga, siis on tõusva joone puutuja tõus mittenegatiivne, s.o. tõusunurk  $\varphi$  on vahemikust  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ , langeva joone puutuja tõus aga on mittepositiivne, s.o. tõusunurk  $\varphi$  on vahemikust  $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$  (joon. 11 ja 12).

Märkus. Kui  $\varphi = 0$  või  $\varphi = \pi$ , siis puutuja on paralleelne x-teljega, sest  $\tan 0 = \tan \pi = 0$ .



Joon. 11



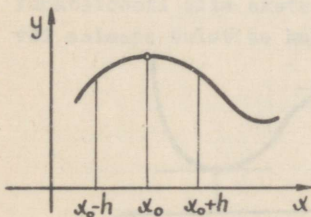
Joon. 12

### 3. Funktsiooni ekstreemum

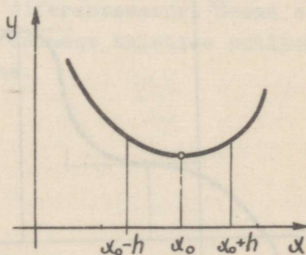
Olgu funktsioon  $f(x)$  määratud kohal  $x_0$  ja selle ümbruses.

Definitsioon. Kui leidub niisugune positiivne arv  $h$ , et iga  $x$  puhul, mis täidab tingimust  $|x - x_0| < h$  ehk  $x_0 - h < x < x_0 + h$  on rahuldatud võrratus  $f(x_0) > f(x)$ , siis nimetatakse argumenti väärtust  $x_0$  funktsiooni  $f(x)$  maksimumikohaks. Kui aga samadel tingimustel on rahuldatud võrratus  $f(x_0) < f(x)$ , siis nimetatakse väärtust  $x_0$  funktsiooni miinimumikohaks (joon.13 ja 14).

Miinumikohta ja maksimumikohta nimetatakse ühise nimega ekstreemumikohtadeks. Arvu  $f(x_0)$  nimetatakse funktsiooni ekstreemumiks.



Joon. 13



Joon. 14

Teoreem 1. Kui  $f(x)$  on diferentseeruv kohal  $x_0$  ja  $x_0$  on funktsiooni ekstreemumikoht, siis  $f'(x_0) = 0$ .

**Tõestus.** Olgu  $x_0$  funktsiooni  $f(x)$  maksimumikoht. Definitsiooni põhjal leidub siis niisugune positiivne arv  $h$ , et kui  $|x - x_0| = |\Delta x| < h$ , siis  $f(x_0) > f(x_0 + \Delta x)$ , millest  $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$ . Seega

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \begin{cases} < 0, & \text{kui } \Delta x > 0. \\ > 0, & \text{kui } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Järelikult

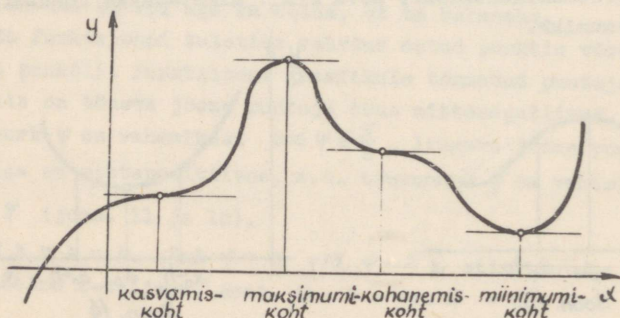
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \begin{cases} \leq 0, & \text{kui } \Delta x > 0 \\ \geq 0, & \text{kui } \Delta x < 0, \end{cases}$$

mistõttu saab kehtida ainult võrdus

$$f'(x_0) = 0.$$

Kui  $x_0$  on funktsiooni miinimumikoht, siis on tõestus analoogiline. Järelikult, kui  $f(x)$  on diferentseeruv kohal  $x_0$ , siis selleks, et  $x_0$  oleks funktsiooni ekstreemumikoht, on tarvilik, et  $f'(x_0) = 0$ . See tingimus pole aga piisav, sest me nägime eespool, et kui funktsiooni tuletis on null, siis võib funktsioon ka kasvada või kahaneda.

Geomeetriliselt tähendab tingimus  $f'(x) = 0$  seda, et funktsiooni graafiku puutuja on punktis  $[x; f(x)]$  paralleelne  $x$ -teljega (joon. 15).



Joon. 15

Ekstreemumi olemasolu piisavad tingimused:

Teoreem 2. Kui funktsioon  $f(x)$  on pidev punktis  $x_0$  ja diferentseeruv selle punkti ümbruses ning leidub niisugune arv  $h$ , et  $0 < \Delta x < h$  puhul on  $f'(x_0 - \Delta x) > 0$  ja  $f'(x_0 + \Delta x) < 0$ , siis  $x_0$  on funktsiooni  $f(x)$  maksimumikoht. Kui aga  $f'(x_0 - \Delta x) < 0$  ja  $f'(x_0 + \Delta x) > 0$ , siis  $x_0$  on miinimumikoht.

**T ö e s t u s.** Tõestame maksimumikoha olemasolu. Lagrange'i teoreemi järgi

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta x \cdot f'(x_0 + \theta \Delta x)$$

ja

$$f(x_0 - \Delta x) - f(x_0) = -\Delta x \cdot f'(x_0 - \theta \Delta x),$$

kus  $0 < \theta < 1$ .

Eelduse järgi on  $\Delta x > 0$ ,  $f'(x_0 - \theta \Delta x) > 0$  ja  $f'(x_0 + \theta \Delta x) < 0$ , seega  $\Delta x \cdot f'(x_0 + \theta \Delta x) < 0$  ja  $-\Delta x \cdot f'(x_0 - \theta \Delta x) < 0$ . Järelikult

$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$  ja  $f(x_0 - \Delta x) - f(x_0) < 0$ , millest

$$f(x_0 + \Delta x) < f(x_0) \quad \text{ja} \quad f(x_0 - \Delta x) < f(x_0).$$

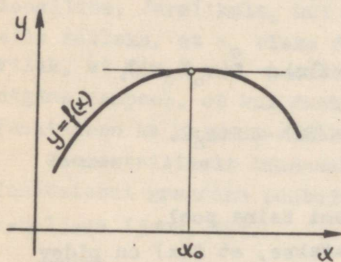
Niisiis  $x_0$  on maksimumikoht.

Analoogiliselt tõestatakse teoreemi teine pool.

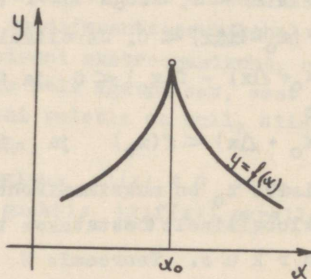
**M ä r k u s.** Teoreemis 2 eeldatakse, et  $f(x)$  on pidev punktis  $x_0$  ja diferentseeruv selle punkti ümbruses, s.o. punktis  $x_0$  ei pruugi funktsioon olla diferentseeruv. Seega saab funktsioonil olla ekstreemum kas esimese tuletise nullkohas või esimese tuletise katkevuskohas.

Funktsiooni käitumist kohal  $x_0$  näitab järgmine tabel:

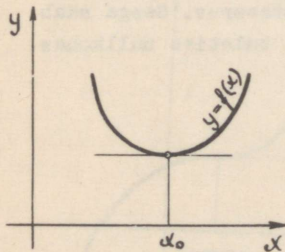
Tuletise $f'(x)$ märk	Tuletise väärtus	Tuletise $f'(x)$ märk	Punkti $x_0$ nimetus	$y = f(x)$ graafik joon.nr.
$x < x_0$	$x = x_0$	$x > x_0$		
+	$f'(x) = 0$ või puudub	-	maksimumi- koht	16 a 16 b
-	$f'(x_0) = 0$ või puudub	+	miinimumi- koht	17 a 17 b
+	$f'(x_0) = 0$ või puudub	+	kasvamis- koht	18 a 18 b
-	$f'(x_0) = 0$ või puudub	-	kahanemis- koht	19 a 19 b



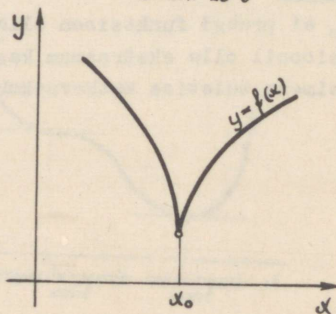
Joon. 16 a



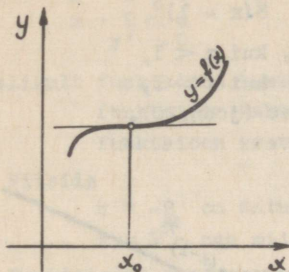
Joon. 16 b



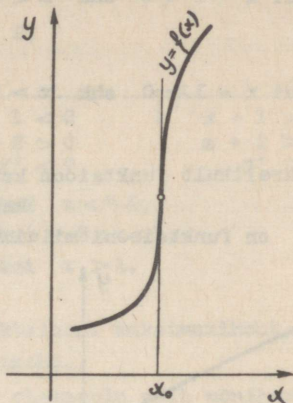
Joon. 17 a



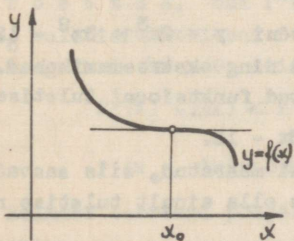
Joon. 17 b



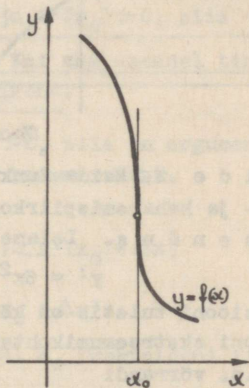
Joon. 18 a



Joon. 18 b



Joon. 19 a



Joon. 19 b

N ä i d e 1. Leida funktsiooni  $f(x) = (x - 1)^{\frac{2}{3}}$  kasvamis- ja kahanemispiirkonnad ning ekstreemumikohad.

L a h e n d u s. Leiame funktsiooni tuletise:

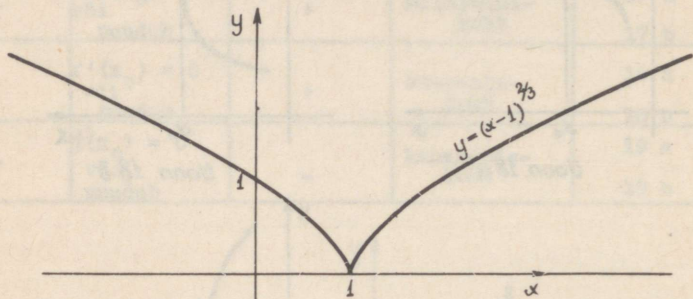
$$f'(x) = \frac{2}{3} (x - 1)^{-\frac{1}{3}} \quad \text{ehk} \quad f'(x) = \frac{2}{3(x - 1)^{\frac{1}{3}}}.$$

Tuletis katkeb, kui  $x = 1$ .

Kui  $x - 1 < 0$  ehk  $x < 1$ , siis  $\frac{2}{3(x-1)^{\frac{2}{3}}} < 0$ ,

kui  $x - 1 > 0$  ehk  $x > 1$ , siis  $\frac{2}{3(x-1)^{\frac{2}{3}}} > 0$ .

Järelikult funktsioon kahaneb, kui  $x < 1$ ,  
" kasvab, kui  $x > 1$ ,  
 $x = 1$  on funktsiooni miinimumikoht (joon.20).



joon. 20

N ä i d e 2. Leida funktsiooni  $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$  kasvamis- ja kahanemispiirkonnad ning ekstreemumikohad.

L a h e n d u s. Leiame antud funktsiooni tuletise:

$$y' = 6x^2 + 6x - 12.$$

Et funktsiooni tuletis on kõikjal määratud, siis saavad funktsiooni ekstreemumikohtadeks olla ainult tuletise nullkohad, s.o. võrrandi

$$6x^2 + 6x - 12 = 0 \text{ ehk } x^2 + x - 2 = 0$$

lahendid

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

ehk

$$x_1 = 1 \quad \text{ja} \quad x_2 = -2.$$

Uurime nüüd tuletise märki vahemikkudes  $x < -2$ ,  $-2 < x < 1$  ja  $x > 1$ .

Selleks lahutame tuletise avaldise teguriteks:

$$y' = 6(x - 1)(x + 2)$$

			x
$x - 1 < 0$	-2	$x - 1 < 0$	1
$x + 2 < 0$		$x + 2 > 0$	$x - 1 > 0$
$y' > 0$		$y' < 0$	$x + 2 > 0$
			$y' > 0$

Järelikult funktsioon kasvab, kui  $x < -2$ ,  
 funktsioon kahaneb, kui  $-2 < x < 1$ ,  
 funktsioon kasvab, kui  $x > 1$ .

Niisiis

$x = -2$  on antud funktsiooni maksimumikoht,  
 $x = 1$  aga miinimumikoht.

Funktsiooni ekstreemumikoha olemasolu võib mõnikord kindlaks teha ka funktsiooni teise tuletise abil.

Teoreem 3. Kui  $f'(x_0) = 0$  ja  $f''(x_0) > 0$ , siis  $x_0$  on funktsiooni  $f(x)$  miinimumikoht. Kui aga samadel tingimustel  $f''(x_0) < 0$ , siis on  $x_0$  maksimumikoht.

**Tõestus.** Kui  $f''(x_0) > 0$ , siis on argumenti väärtus  $x_0$  tuletisfunktsiooni  $f'(x)$  kasvamiskoht.

Seega kui  $\Delta x > 0$ , siis

$$f'(x_0 - \Delta x) < f'(x_0) < f'(x_0 + \Delta x)$$

ehk

$$f'(x_0 - \Delta x) < 0 < f'(x_0 + \Delta x).$$

Belmise teoreemi põhjal ongi  $x_0$  funktsiooni  $f(x)$  miinimumikoht.

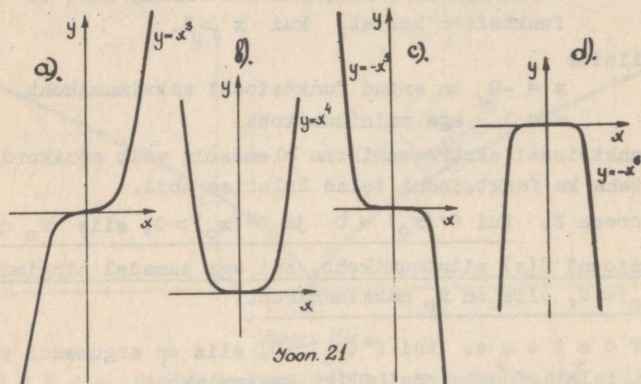
Teine pool teoreemist tõestatakse analoogiliselt.

Funktsiooni käitumist kohal  $x_0$  näitab järgmine tabel.

$f'(x_0)$ väärtus	$f''(x_0)$ märk	Punkti $x_0$ nimetus
0	+	miinimumikoht
0	-	maksimumikoht

M ä r k u s 1. Kui  $f'(x_0) = 0$  ja  $f''(x_0) = 0$ , siis  $x_0$  võib olla kas kasvamis-, kahanemis- või ekstreemumikoht. Näiteks:

1. Kui  $f(x) = x^3$ , siis  $f'(x) = 3x^2$  ja  $f''(x) = 6x$ . Seega  $x_0 = 0$  on esimese ja teise tuletise nullkoht. Funktsioonile on aga  $x_0 = 0$  kasvamiskohaks, sest kui  $x \neq 0$ , siis on esimene tuletis positiivne (joon. 21 a).



2. Kui  $f(x) = x^4$ , siis  $f'(x) = 4x^3$  ja  $f''(x) = 12x^2$ . Seega  $x_0 = 0$  on  $f'(x)$  ja  $f''(x)$  nullkoht. Funktsioonile on aga 0 miinumikoht, sest kui  $x < 0$ , siis  $f'(x) < 0$  ja kui  $x > 0$ , siis  $f'(x) > 0$  (joon. 21 b).

3. Kui  $f(x) = -x^5$ , siis  $f'(x) = -5x^4$  ja  $f''(x) = -20x^3$ . Seega  $f'(0) = 0$  ja  $f''(0) = 0$ . Funktsioonile on aga 0 kahanemiskohaks, sest kui  $x \neq 0$ , siis  $f'(x) < 0$  (joon. 21 c).

4. Kui  $f(x) = -x^6$ , siis  $f'(x) = -6x^5$  ja  $f'' = -30x^4$ . Seega  $f'(0) = 0$  ja  $f''(0) = 0$ . Funktsioonile on aga 0 maksimumikohaks, sest  $f'(x) > 0$ , kui  $x < 0$  ja  $f'(x) < 0$ , kui  $x > 0$  (joon. 21 d).

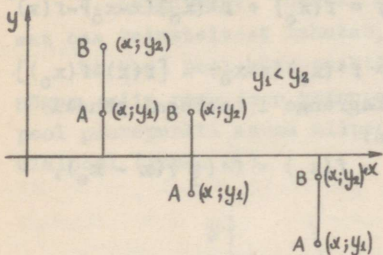
M ä r k u s 2. Kui funktsioon  $f(x)$  on pidev kinnises vahemikus  $a \leq x \leq b$ , siis saab funktsioonil olla kõige suurem ja kõige väiksem väärtus kas ekstreemumikohtades või vahemiku otstes. Seega funktsiooni kõige suurema ja kõige väiksema väärtuse leidmiseks tuleb arvutada funktsiooni väärtused kohal  $a$  ja  $b$  ning tuletise null- ja katkevuskohadel.

N ä i d e. Leida funktsiooni  $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x}$  kõige suurem ja kõige väiksem väärtus vahemikus  $-4 \leq x \leq 1$ .

L a h e n d u s: I. Petersen, H. Roos "Kõrgema matemaatika ülesannete kogu I", § 11, näide IX.

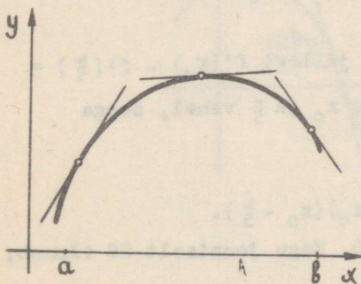
4. Funktsiooni graafiku kumerus, nõgusus ja käämpunktid

a. Joone kumerus ja nõgusus. Kui kahe punkti  $A(x; y_1)$  ja  $B(x; y_2)$  ordinaadid rahuldavad võrratust  $y_1 < y_2$ , siis öeldakse, et punkt A asub allpool punktist B ehk punkt B asub ülalpool punktist A (joon. 22).

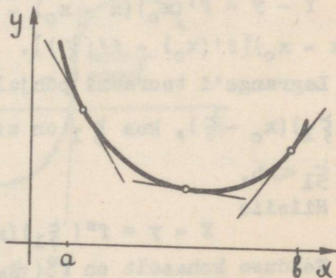


Joon. 22

Definitsioon. Joont  $y = f(x)$  nimetatakse kumeraks piirkonnas  $a \leq x \leq b$ , kui joon asub oma selles piirkonnas tõmmatud puutujaist allpool (joon. 23). Kui aga joon asub ülalpool oma puutujaist, nimetatakse teda nõgusaks (joon. 24).



Joon. 23



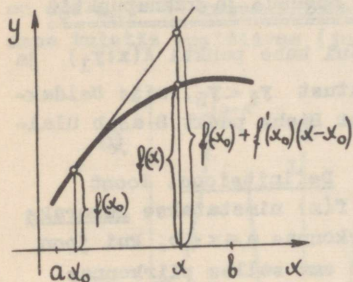
Joon. 24

T e o r e e m 1. Kui vahemikus  $a < x < b$  on funktsiooni  $f(x)$  teine tuletis negatiivne,  $f''(x) < 0$ , siis on joon  $y = f(x)$  selles vahemikus kumer.

T õ e s t u s. Tuleb näidata, et joon  $y = f(x)$  asub vahemikus  $a < x < b$  oma puutujaist allpool, s.o. tuleb näidata, et selles vahemikus joonele  $y = f(x)$  tõmmatud puutuja mingi punkti ordinaat on suurem joone sama abstsissiga punkti ordi-

naadist, kui abstsiss kuulub kõne all olevasse vahemikku (joon. 25).

Olgu puutepunkt  $[x_0; f(x_0)]$ ,  $a < x_0 < b$ . Puutuja võrrand on siis  $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ . Seega puutuja punkti ordinaat on  $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ , joone sama abstsissiga punkti



Joon. 25

ordinaat aga  $f(x)$ . Tähistades  $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = Y$  ja  $f(x) = y$ , arvutame nende ordinaatide vahe  $Y - y$  eeldusel, et  $a < x < b$ :

$$Y - y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) - f(x)$$

ehk

$$Y - y = f'(x_0)(x - x_0) - [f(x) - f(x_0)].$$

Lagrange'i teoreemi põhjal

saame:

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0),$$

kus  $\xi$  on arvude  $x_0$  ja  $x$  vahel.

Järelikult

$$Y - y = f'(x_0)(x - x_0) - f'(\xi)(x - x_0) =$$

$$= (x - x_0)[f'(x_0) - f'(\xi)].$$

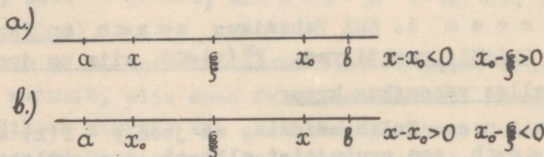
Lagrange'i teoreemi põhjal on jällegi  $f'(x_0) - f'(\xi) = f''(\xi_1)(x_0 - \xi)$ , kus  $\xi_1$  on arvude  $x_0$  ja  $\xi$  vahel, seega

$$a < \xi_1 < b.$$

Niisiis

$$Y - y = f''(\xi_1)(x - x_0)(x_0 - \xi).$$

Eelduse kohaselt on  $f''(\xi_1) < 0$ . Nagu jooniselt 26 ilmneb, on  $(x - x_0)(x_0 - \xi) < 0$ .



Joon. 26

Järelikult  $x - y > 0$ , mida oligi vaja tõestada.

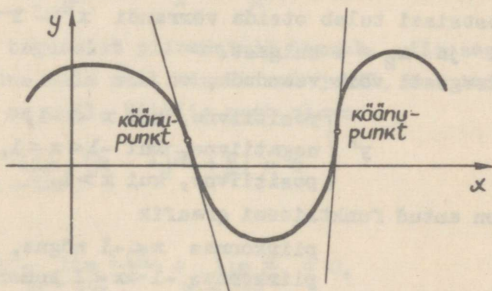
Analoogiliselt on tõestatav

teoreem 2. Kui vahemikus  $a < x < b$  funktsiooni  $f(x)$  teine tuletis on positiivne,  $f''(x) > 0$ , siis on joon  $y = f(x)$  selles vahemikus nõgus.

Kahest viimasest teoreemist järeldub, et seal, kus funktsiooni  $f(x)$  esimene tuletis  $f'(x)$  kahaneb, on funktsiooni graafik kumer, kus aga esimene tuletis kasvab, on graafik nõgus. See nähtub ka jooniselt 23 ja 24, kui uurida, kuidas nendel joonistel puutuja tõus muutub.

b. Käänupunkt. Punkti, mis pideva joone kumerat ja nõgusat osa teineteisest lahutab, nimetatakse käänupunktiks.

Et ühel pool käänupunkti on joon kumer ja teisel pool nõgus, siis peab joon käänupunktist tõmmatud puutujast ühel pool puutepunkti asuma allpool ja teisel pool puutepunkti ülalpool (joon. 27).



Joon. 27

Käänupunkti definitsioonist selgub, et käänupunkti abstsiss peab olema funktsiooni esimese tuletise ekstreemumikoht (esimene tuletis läheb kasvamiselt üle kahanemisele või ümberpöörduks). Et teine tuletis on esimese suhtes sama mis esimene tuletis funktsiooni suhtes, siis on esimese tuletise ekstreemumikoht teise tuletise null- või katkevuskoht. Seetõttu on õige

teoreem 3. Kui funktsioon  $f(x)$  on pidev kohal  $x_0$

ja  $f''(x_0) = 0$  või  $x_0$  on  $f''(x)$  katkevuskohas ning

$f''(x_0 + \Delta x) \cdot f''(x_0 - \Delta x) < 0$ , siis  $x_0$  on joone  $y = f(x)$  käänupunkti abstsiss.

Belnevast on selge, et käänupunkti olemasolu üle võib otsustada ka kolmanda tuletise abil, sest funktsioonil  $f'(x)$  on ekstreemum siis, kui  $f''(x) = 0$  ja  $f'''(x) \neq 0$ .

Seega  $x_0$  on käänupunkti abstsiss, kui  $f''(x_0) = 0$  ja  $f'''(x_0) \neq 0$ .

N ä i d e. Leida joone  $y = \sin^2 x \cos x$  kumerus- ja nõgususpiirkonnad ning käänupunktid.

L a h e n d u s. I. Petersen-H. Roos, "Kõrgema matemaatika ülesannete kogu", § 11, näide X.

N ä i d e. Leida funktsiooni  $y = x^4 - 6x^2$  graafiku käänupunktid ning kumerus- ja nõgususpiirkonnad.

Et  $y' = 4x^3 - 12x$  ja  $y'' = 12x^2 = 12(x^2 - 1)$ , siis käänupunkti abstsissi tuleb otsida võrrandi  $x^2 - 1 = 0$  lahendite  $x_1 = -1$  ja  $x_2 = 1$  hulgast.

Nagu kergesti võib veenduda, on

$$y'' \begin{cases} \text{positiivne, kui } x < -1, \\ \text{negatiivne, kui } -1 < x < 1, \\ \text{positiivne, kui } x > 1. \end{cases}$$

Seega on antud funktsiooni graafik

piirkonnas  $x < -1$  nõgus,  
piirkonnas  $-1 < x < 1$  kumer  
ja piirkonnas  $x > 1$  nõgus.

Järelikult on graafiku käänupunktid  $(-1; -5)$  ja  $(1; -5)$ .

### 5. Funktsiooni graafiku asümptoodid

Kui joone  $y = f(x)$  jooksva punkti  $P[x; f(x)]$  ja koordinaatide alguspunkti vahelise kauguse lõpmatul suurenemisel selle jooksva punkti kaugus ühest kindlast sirgest läheneb nullile, siis seda sirget nimetatakse antud joone  $y = f(x)$  asümptoodiks.

Punkti  $P[x; f(x)]$  ja koordinaatide alguspunkti vaheline

kaugus saab lõpmatult suurendada siis ja ainult siis, kui vähemalt üks punkti  $P$  koordinaatidest lõpmatult suureneb, s.o. kui  $x \rightarrow \infty$  või  $f(x) \rightarrow \infty$  või  $x \rightarrow \infty$  ja  $f(x) \rightarrow \infty$ .

a. Kaldasümptoot ja rõhtasümptoot. Kui joone  $y = f(x)$  jooksva punkti  $[x; f(x)]$  abstsiss  $x \rightarrow \infty$  ja joonel on olemas asümptoot  $y = kx + b$ , siis saab kordajaid  $k$  ja  $b$  leida alljärgnevalt:

Punkti  $[x; f(x)]$  kaugus sirgest  $y = kx + b$  avaldub teatavasti kujul

$$\frac{kx - f(x) + b}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

Järelikult sirge  $y = kx + b$  on joone  $y = f(x)$  asümptoot siis, kui

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [kx - f(x) + b] = 0$$

ehk

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left\{ x \left[ k - \frac{f(x)}{x} + \frac{b}{x} \right] \right\} = 0.$$

Kui üks tegureist piiramatult kasvab, siis saab korrutise piirväärtus olla null ainult sel juhul, kui teise teguri piirväärtus on null. Niisiis peab olema

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ k - \frac{f(x)}{x} + \frac{b}{x} \right] = 0$$

ehk

$$k - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{b}{x} = 0,$$

millest

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Vabaliikme  $b$  leiame nüüd tingimusest

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [kx - f(x) + b] = 0$$

ehk

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [kx - f(x)] + b = 0,$$

millest

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx].$$

Kui  $k \neq 0$ , siis nimetatakse asümptooti  $y = kx + b$  kaldasümptoodiks.

Kui  $k = 0$ , siis asümptooti  $y = 0 \cdot x + b$  ehk  $y = b$  nimetatakse röntasümptoodiks.

Nagu eelnevast selgub, on röntasümptoodi puhul  $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ . Nimetatud piirväärtuse eksisteerimine on tarvilik ja ka piisav röntasümptoodi olemasoluks. Tõesti, kui

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b, \text{ siis } k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

b. Kui  $f(x) \rightarrow \infty$  eeldusel, et  $x \rightarrow a$  või  $x \rightarrow a+0$  või  $x \rightarrow a-0$ , siis sirge  $x = a$  on joone  $y = f(x)$  asümptoot. Seda asümptooti nimetatakse püstasümptoodiks.

N ä i t e i d.

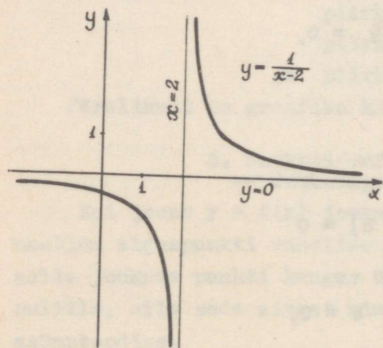
1. Leida joone  $y = \frac{1}{x-2}$  asümptoodid.

L a h e n d u s: Et  $\frac{1}{x-2} \rightarrow \infty$ , kui  $x \rightarrow 2$ , siis antud joonel on olemas püstasümptoot  $x = 2$ .

Et  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x-2} = 0$ , siis on antud joonel ka röntasümptoot  $y = 0$ .

Kaldasümptooti joonel ei ole, sest  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x-2} : x \right) =$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x(x-2)} = 0 \text{ (joon. 28).}$$



joon. 28

2. Leida joone  $y = \frac{x^3+1}{x^2}$

asümptoodid.

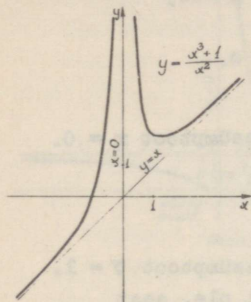
L a h e n d u s. Joonel on olemas püstasümptoot  $x = 0$ , sest

$$\frac{x^3+1}{x^2} \rightarrow \infty, \text{ kui } x \rightarrow 0.$$

Röntasümptooti joonel ei ole, sest  $\frac{x^3+1}{x^2} \rightarrow \infty$ , kui  $x \rightarrow \infty$ .

Küll aga on joonel kaldasümptoot  $y = kx + b$ , sest

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 + 1}{x^2} : x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x^3} \right) = 1$$



joon. 29

ja

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 + 1}{x^2} - 1 \cdot x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1 - x^3}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0. \text{ Niisiis kald-}$$

asümptoot on  $y = x$  (joon.29).

## 6. Funktsiooni uurimine ja graafiku konstrueerimine

Et funktsiooni graafikut joonestada, tuleb kõigepealt kindlaks teha funktsiooni määramispiirkond, katkevuskohad ja positiivsus- ning negatiivsuspiirkonnad. Edasi tuleb uurida, kas funktsiooni graafik on sümmeetriline koordinaattelgede või koordinaatide alguspunkti suhtes ja kas funktsiooni graafikul on asümptoote.

Siis leitakse funktsiooni kasvamis- ja kahanemispiirkonnad ning ekstreemumid, seejärel funktsiooni graafiku kumerus- ja nõgususpiirkonnad ning käänupunktid. Lõpuks arvutatakse mõned sobivalt valitud punktid graafiku joonestamiseks.

**N ä i d e.** Uurida funktsiooni  $y = e^{\frac{1}{x}}$  ja skitseerida tema graafik.

**L a h e n d u s.** Funktsiooni määramispiirkonnaks on kõik arvud, välja arvatud  $x = 0$ . Funktsiooni katkevuskoht on  $x = 0$ .

Funktsioon on kõikjal positiivne. Niisiis funktsiooni graafik asub esimeses ja teises veerandis ning ei saa seetõttu olla sümmeetriline koordinaatide alguspunkti ega  $x$ -telje suhtes.

Et  $e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} \neq e^{\frac{1}{x}}$ , siis  $e^{\frac{1}{x}}$  ei ole paarisfunktsioon, seega

tema graafik pole summeeriline ka y-telje suhtes. Urime nüüd, kas funktsiooni graafikul on asümptooted.

Et  $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ , kui  $x \rightarrow +0$ , ja  $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$ , kui  $x \rightarrow -0$ ,

siis  $\lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{x}} \rightarrow +\infty$  ja  $\lim_{x \rightarrow -0} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = 0$ .

Niisiis on funktsiooni graafikul püstasümptoot  $x = 0$ .

Et  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ , siis  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$ .

Seega on funktsiooni graafikul ka rõhtasümptoot  $y = 1$ . Funktsiooni graafikul kaldasümptooti ei ole, sest

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = 0$ .

Funktsiooni ekstreemumid ja kasvamis- ning kahanemispirkonnad leiame esimese tuletise abil.

Et  $y' = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ , siis  $y' < 0$  kogu määramispirkonnas.

Funktsioon kahaneb kõikjal, ekstreemume ei ole.

Käänpunktide ning kumerus- ja nõgususpirkondade leidmiseks uurime funktsiooni teist tuletist:

$$y'' = \frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4} (2x + 1).$$

Nagu näha, on funktsiooni määramispirkond ühtlasi ka funktsiooni teise tuletise määramispirkonnaks. Niisiis käänpunkti abstsissiks saab olla ainult teise tuletise nullkoht. Selle leiame võrrandist  $2x + 1 = 0$ , millest  $x = -\frac{1}{2}$ .

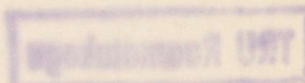
Nüüd uurime teise tuletise märki.

Et  $e^{\frac{1}{x}} > 0$  ja  $x^4 > 0$  ning

$$2x + 1 \begin{cases} > 0, \text{ kui } x > -\frac{1}{2}, \\ < 0, \text{ kui } x < -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

siis

$$y'' \begin{cases} > 0, \text{ kui } x > -\frac{1}{2}, \\ < 0, \text{ kui } x < -\frac{1}{2}. \end{cases}$$



Seega funktsiooni graafik on kumer piirkonnas  $x < -\frac{1}{2}$  ja

nõrgus piirkonnas  $x > \frac{1}{2}$  ( $x \neq 0$ ).

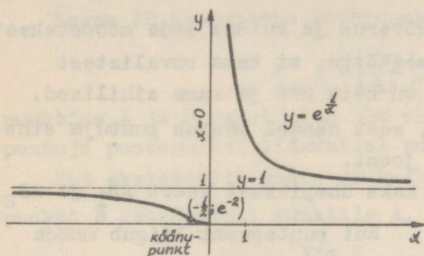
Järelikult  $x = -\frac{1}{2}$  on käänu-

punkti abstsiss ja käänu-

punkt on  $(-\frac{1}{2}; e^{-2})$  ehk

$(-0,5; 0,14)$ . Funktsiooni graafiku joonestamiseks võtame veel punktid  $(1; e)$  ehk

$(1; 2,72)$  ja  $(2; e^{\frac{1}{2}})$  ehk  $(2; 1,65)$ .



Jooni 30

### § 3. Tule t i s e g e o m e e t r i l i s i r a k e n d u s i

#### 1. Tasapinnalise joone puutuja ja normaal

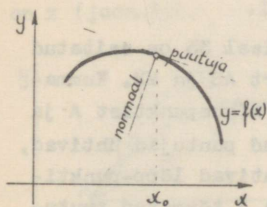
Kui funktsioon  $y = f(x)$  on diferentseeruv vahemikus  $a < x < b$ , siis, nagu juba teada, on selles vahemikus funktsiooni graafikuks pidev joon, mille igast punktist  $[x_0; f(x_0)]$ ,  $a < x_0 < b$ , saab tõmmata ühe puutuja:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Puutepunktist puutujale tõmmatud ristsirget nimetatakse antud joone normaaliks (joon.31.)

Niisiis joonele  $y = f(x)$  punktis  $[x_0; f(x_0)]$  tõmmatud normaal on

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$



Jooni 31

#### 2. Tasapinnalise joone kõverus

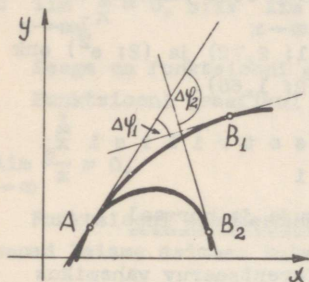
a. Kõveruse mõiste. Sageli kasutatakse joone kuju kirjeldamisel omadusõna "kõver". Nii öeldakse, et sirgjoon "ei ole kõver", ringjoon, ellips, hüperbool ja parabool aga "on kõverad jooned". Samuti öeldakse, et ringjoone "kõverus" on igal pool ühesuurune, hüperboolil ja paraboolil on aga "kõverus"

seada suurem, mida lähemal haripunktile vaadeldav joonetükk asub.

Mis on siis õieti joone kõverus ja kuidas seda mõõdetakse?

Sirgjoon "ei ole kõver" seetõttu, et tema suvalistest punktidest tõmmatud puutujad on kõik ühe ja sama sihilised. Muud jooned on aga "kõverad", sest nendel muutub puutuja siht puutepunkti liikumisel mööda joont.

Joonisel 32 on esitatud kaks ühepikkust kaart  $AB_1$  ja  $AB_2$ .



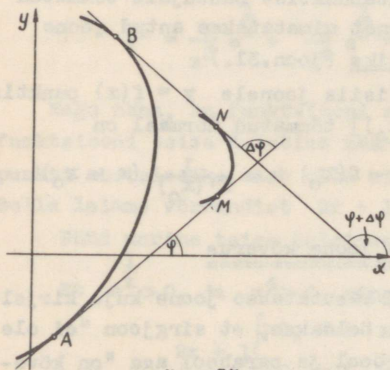
Joon. 32

Kui puutepunkt liigub mööda kaart  $AB_1$  punktist A punkti  $B_1$ , siis puutuja pöörduv nurga  $\Delta\varphi_1$  võrra. Kui aga puutepunkt liigub mööda kaart  $AB_2$  punktist A punkti  $B_2$ , siis puutuja pöörduv nurga  $\Delta\varphi_2$  võrra. Ilmselt on  $\Delta\varphi_2 > \Delta\varphi_1$  ja kaare  $AB_2$  "kõverus" suurem kui kaare  $AB_1$  "kõverus."

Kaare kõverust või täpsemalt

kaare keskmist kõverust loetakse

võrdeliseks nurgaga, mille võrra pöörduv puutuja puutepunkti liikumisel kaare alguspunkti lõpp-punkti.



Joon. 33

Kaare keskmist kõverust loetakse pöördvõrdeliseks kaare

pikkusega.

Kaare AB keskmiseks kõveruseks  $K_{\cup AB}$  nimetatakse arvu

$$K_{\cup AB} = \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right|, \text{ kus } \Delta s \text{ on kaare pikkus}$$

punktide A ja B vahel ning  $\Delta\varphi$  on nurk, mille võrra pöördub puutuja puutepunkti liikumisel punktist A punktini B.

Kui eksisteerib kaare AB keskmise kõveruse piirväärtus punkti B lähenemisel punktile A,

$$\lim_{B \rightarrow A} K_{\cup AB}$$

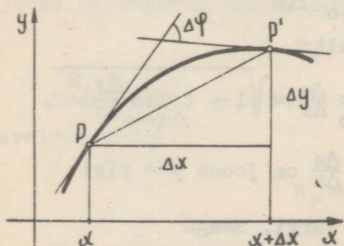
siis nimetatakse seda piirväärtust joone kõveruseks punktis A.

Et kaare AB otspunkti B lähenemisel alguspunktile A kaare pikkus  $\Delta s$  läheneb nullile, siis joone kõverus punktis A on

$$K_A = \lim_{B \rightarrow A} K_{\cup AB} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right|.$$

b. Kõveruse avaldamine joone võrrandi kaudu. Olgu funktsioon  $f(x)$  pidev ja olgu tal kohal  $x$  esimest ja teist järku tuletis.

Leiame joone  $y = f(x)$  kõveruse punktis P, mille abstsiss on  $x$  (joon.34).



Joon. 34

Selleks võtame teise punkti P' abstsissiga  $x + \Delta x$ . Kaare PP' pikkus  $\Delta s$  ning puutepunkti- des P ja P' tõmmatud puutujate vaheline nurk  $\Delta\varphi$  on nüüd  $\Delta x$  funktsioonid.

Kui punkt P' läheneb punktile P, siis  $\Delta s \rightarrow 0$ ,  $\Delta\varphi \rightarrow 0$  ja  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Seega joone kõverus punktis

$$K_P = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \left| \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta\varphi}{\frac{\Delta x}{\Delta s}}}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x}} \right|.$$

Et kõõlu  $PP'$  pikkus avaldub kujul

$$PP' = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \text{ siis}$$

$$\frac{PP'}{\Delta s} \cdot \Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \text{ millest}$$

$$\frac{PP'}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

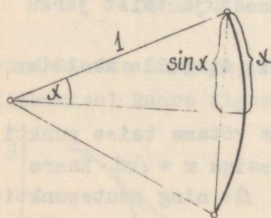
Seega:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{PP'}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

ehk

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{PP'}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Seosest  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  järeldeb, et ringjoone puhul (joon. 35) on kõõlu ( $2 \sin x$ ) ja sellele kõõlule vastava kaare



Joon. 35

( $2x$ ) jagatise piirväärtus kaarepikkuse lähenemisel 0-le võrdne ühega. Sama jääb kehtima ka antud joone puhul:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{PP'}{\Delta s} = 1.$$

Järelikult:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2},$$

kus  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$  ja  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x}$  on joone  $y = f(x)$

kaarepikkuse  $s$  tuletis argumendi  $x$  järgi. Seega

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \left\{1 + [f'(x)]^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Funktides  $P$  ja  $P'$  tõmmatud puutuja tõsusud on vastavalt  $f'(x)$  ja  $f'(x + \Delta x)$ , seega puutujate tõusunurgad  $\arctan f'(x)$  ja  $\arctan f'(x + \Delta x)$ .

Et kahe puutuja vaheline nurk  $\Delta\varphi$  võrdub nende puutujate

tõusunurkade vahega, siis  $\Delta\varphi = \arctan f'(x + \Delta x) - \arctan f'(x)$ .

Seega:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\arctan f'(x + \Delta x) - \arctan f'(x)}{\Delta x} =$$
$$= \frac{d}{dx} \arctan f'(x) = \frac{1}{1+[f'(x)]^2} \cdot f''(x) = \frac{f''(x)}{1+[f'(x)]^2}.$$

Järelikult

$$K_P = \frac{|f''(x)|}{\sqrt[3]{1+[f'(x)]^2}}.$$

N ä i d e. Parabooli  $y = x^2$  puhul on  $y' = 2x$  ja  $y'' = 2$ , seega

$$K_P = \frac{2}{\sqrt[3]{1+(2x)^2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{1+4x^2}}.$$

Parabooli haripunktis A on  $x = 0$  ja kõverus  $K_A = 2$ .

punktis B (1;1) on aga kõverus  $K_B = \frac{2}{\sqrt[3]{1+4}} = 0,1789$  (joon.36).

c. Kõverusraadius. Kõveruse pöördarvu  $\frac{1}{K_F}$  nimetatakse joone kõverusraadiuseks punktis P ja tähistatakse  $R_P$ :

$$R_P = \frac{1}{K_P}.$$

Seega joone  $y = f(x)$  kõverusraadius punktis  $P[x;f(x)]$  avaldub kujul:

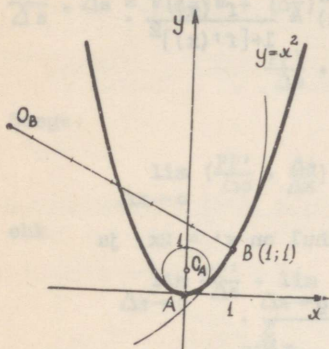
$$R_P = \frac{\sqrt[3]{1+[f'(x)]^2}}{|f''(x)|}.$$

N ä i d e. Parabooli  $y = x^2$  kõverusraadius haripunktis A on  $R_A = \frac{1}{2}$  ja punktis B on  $R_B = \frac{1}{0,1789} = 5,590$ .

d. Kõveruskeskpunkt ja kõverusringjoon. Kui joone punktist P tõmmata joonele normaal sennapoole, kust vaadatuna joon näib nõgusena, ning sellele normaali võtta punkt  $O_P$ , mille kaugus punktist P võrdub kõverusraadiusega  $PO_P = R_P$ , siis

punkti  $O_P$  nimetatakse antud joone punkti  $P$  kõveruskeskpunktiks.

Ringjoont, mille keskpunktiks on punkti  $P$  kõveruskeskpunkt  $O_P$  ja raadiuseks punkti  $P$  kõverusraadius  $R_P$ , nimetatakse antud joone punkti  $P$  kõverusringjooneks.

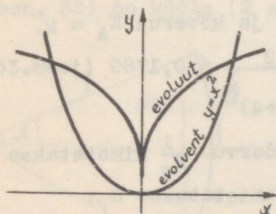


Joon. 36

Joonisel 36 on esitatud parabooli  $y = x^2$  haripunkti  $A$  ja punkti  $B(1;1)$  kõveruskeskpunktid ja kõverusringjooned.

e. Evoluut ja evolvent. Antud joone kõveruskeskpunktidest moodustuvat joont nimetatakse antud joone evoluudiks. Antud joont enast nimetatakse aga evoluudivi suhtes evolvendiks.

Joonisel 37 on esitatud parabool  $y = x^2$  ja tema evoluudivi.



Joon. 37

### 3. Ruumijoone puutuja

a. Skalaarse argumendi vektorfunktsioon. Kui vektori

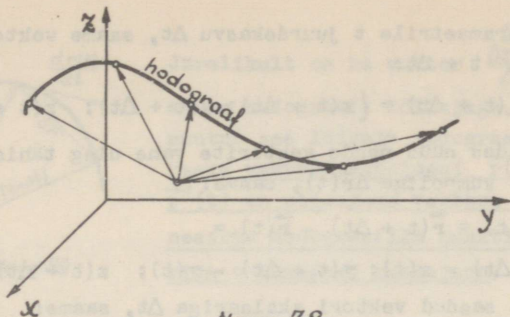
$\vec{r}\{X;Y;Z\}$  koordinaadid  $X$ ,  $Y$  ja  $Z$  on mingi parameetri  $t$  funktsioonid  $X = x(t)$ ,  $Y = y(t)$  ja  $Z = z(t)$ , siis sõltub vektori  $\vec{r}$

pikkus, siht ja suund parameetri  $t$  väärtusest. Vektorit  $\vec{r}$  nimetatakse sel juhul skalaarse argumendi  $t$  vektorfunktsiooniks:

$$\vec{r}(t) = \{x(t); y(t); z(t)\} = x(t)\vec{u}_1 + y(t)\vec{u}_2 + z(t)\vec{u}_3.$$

Kui vektori  $\vec{r}(t)$  alguspunktiks iga  $t$  puhul võtta üks ja sama kindel punkt, siis moodustab selle vektori lõpp-punkt parameetri  $t$  muutumisel ruumis joone, mida nimetatakse antud vektori hodograafiks (joon.38).

Juhul kui vektori  $\vec{r}(t)$  alguspunktiks valida koordinaatide alguspunkt, siis hodograafi suvalise punkti  $(x;y;z)$  kohavektor  $\vec{r} = \{x;y;z\}$  ühtib antud vektoriga  $\vec{r}(t)$ . Seega on sel



Joon 38

korral  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  ehk  $\{x; y; z\} = \{x(t); y(t); z(t)\}$ . Saadud võrrandit nimetatakse hodograafi vektorvõrrandiks. Vektorvõrrandist järeldub, et

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Saadud võrrandeid nimetatakse hodograafi ehk lihtsalt antud ruumijoone parameetrilisteks võrranditeks.

b. Vektorfunktsiooni piirväärtus. Kui eksisteerivad piirväärtused

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0 \quad \text{ja} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = z_0, \quad \text{siis nimetatakse}$$

vektorit  $\vec{r}_0 = \{x_0; y_0; z_0\}$  vektorfunktsiooni  $\vec{r}(t) = \{x(t); y(t); z(t)\}$  piirväärtuseks argumendi  $t$  lähenemisel arvule  $t_0$  ja tähistatakse:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0 \quad \text{ehk} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \{x(t); y(t); z(t)\} = \{ \lim_{t \rightarrow t_0} x(t); \lim_{t \rightarrow t_0} y(t); \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) \} = \{x_0; y_0; z_0\}.$$

c. Vektorfunktsiooni tuletis ja selle geomeetiline tähendus. Olgu funktsioonid  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  diferentseeruvad kohal  $t$ .

Vaatleme vektorfunktsiooni

$$\vec{r}(t) = \{x(t); y(t); z(t)\}.$$

Andes parameetrite t juurdekasvu  $\Delta t$ , saame vektorfunktsiooni kohal  $t + \Delta t$ :

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \{x(t + \Delta t); y(t + \Delta t); z(t + \Delta t)\}.$$

Moodustades nüüd nende vektorite vahe ning tähistades saadud vektori sümbooliga  $\Delta\vec{r}(t)$ , saame:

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r}(t) &= \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = \\ &= \{x(t + \Delta t) - x(t); y(t + \Delta t) - y(t); z(t + \Delta t) - z(t)\}.\end{aligned}$$

Jagades saadud vektori skalaariga  $\Delta t$ , saame:

$$\frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = \left\{ \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}; \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}; \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} \right\}.$$

Eelduse järgi eksisteerivad piirväärtused

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = x'(t), \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = y'(t) \quad \text{ja}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} = z'(t).$$

Järelikult on olemas piirväärtus

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = \{x'(t); y'(t); z'(t)\}.$$

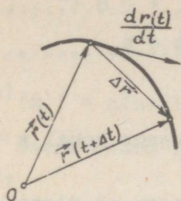
Seda piirväärtust nimetatakse vektorfunktsiooni  $\vec{r}(t)$  tuletiseks ja tähistatakse ka veel  $\frac{d\vec{r}}{dt}$  või  $\vec{r}'(t)$ .

Järelikult

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{r}(t)}{dt} &= \vec{r}'(t) = \frac{d}{dt} \{x(t); y(t); z(t)\} = \\ &= \left\{ \frac{dx(t)}{dt}; \frac{dy(t)}{dt}; \frac{dz(t)}{dt} \right\} = \{x'(t); y'(t); z'(t)\}.\end{aligned}$$

Vektorfunktsiooni tuletis on vektor, mille koordinaadid on antud vektori koordinaatide tuletised.

Jooniselt 39 on näha, et vektorit  $\Delta\vec{r}(t)$  võib vaadelda kui vektorit, mille otspunktid asuvad vektori  $\vec{r}(t)$  hodograafil, s.o.  $\Delta\vec{r}(t)$  on kollineaarne hodograafi ühe lõikajaga.



Joon 39

Järelikult on ka vektor  $\frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t}$  kollineaarne hodograafi lõikajaga. Kui  $\Delta t \rightarrow 0$ , muutub see lõikaja hodograafi puutujaks. Seega vektorfunktsiooni  $\vec{r}(t)$  tuletis  $\vec{r}'(t)$  on niisugune vektor, mis on kollineaarne hodograafile punktis parameetriga  $t$  tõmmatud puutujaga.

N ä i d e:  $\vec{r}(t) = \{ \sin t; \cos t; 2t \},$

$$\vec{r}'(t) = \{ \cos t; -\sin t; 2 \}.$$

d. Ruumijoone puutuja. Olgu ruumijoon antud parameetrilise võrrandikolmikuga  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ , kus funktsioonid  $x(t)$ ,  $y(t)$  ja  $z(t)$  on diferentseeruvad.

Joone punkt parameetri väärtusel  $t_0$  on siis  $[x(t_0); y(t_0); z(t_0)]$  ja selles punktis joonele tõmmatud puutujasihiline vektor on

$$\{ x'(t_0); y'(t_0); z'(t_0) \}.$$

Järelikult sellele joonele punktis parameetri väärtusega  $t_0$  tõmmatud puutuja on

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

N ä i d e. Kirjutada joone

$$x = t^2, \quad y = t^3 - 2; \quad z = 2t^2 - 3t + 1$$

puutuja punktis, kus  $t = 1$ .

Puutepunkt on  $(1; -1; 0)$ . Et  $x' = 2t$ ,  $y' = 3t^2$ ,  $z' = 4t - 3$ , siis puutujasihiline vektor on  $\{2; 3; 1\}$ .

Seega puutuja on

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1}.$$

§ 4. Tuletise rakendusi ligi-  
kaudsetes arvutustes

1. Taylori polünoom  
=====

Olgu funktsioon  $f(x)$   $n+1$  korda diferentseeruv kohal  $x = x_0$  ja selle ümbruses.

Otsime niisugust polünoomi  $T_n(x)$ , mille aste ei ületa arvu  $n$  ja mis avaldub kujul

$T_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \dots + c_n(x-x_0)^n$  ning rahuldab tingimusi

$$T_n(x_0) = f(x_0), T'_n(x_0) = f'(x_0), T''_n(x_0) = f''(x_0), \dots, T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Selleks avaldame polünoomi  $T_n(x)$  tuletised kuni  $n$ -nda järguni:

$$T'_n(x) = c_1 + 2c_2(x-x_0) + 3c_3(x-x_0)^2 + 4c_4(x-x_0)^3 + \dots + nc_n(x-x_0)^{n-1};$$

$$T''_n(x) = 2 \cdot 1c_2 + 3 \cdot 2c_3(x-x_0) + 4 \cdot 3c_4(x-x_0)^2 + \dots + n(n-1)c_n(x-x_0)^{n-2};$$

$$T'''_n(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1c_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2c_4(x-x_0) + \dots + n(n-1)(n-2)c_n(x-x_0)^{n-3};$$

$$T_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2) \dots 2c_n.$$

Võttes nüüd polünoomi ja tema tuletiste väärtused kohal  $x = x_0$ , saame:

$$T_n(x_0) = c_0;$$

$$T'_n(x_0) = c_1;$$

$$T''_n(x_0) = 2 \cdot 1c_2;$$

$$T'''_n(x_0) = 3 \cdot 1 \cdot 1c_3;$$

$$T_n^{(n)}(x_0) = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 c_n.$$

Seega saame polünoomi  $T_n(x)$  kordajate määramiseks võrrandid:

$$c_0 = f(x_0),$$

$$c_1 = f'(x_0),$$

$$2!c_2 = f''(x_0),$$

$$3!c_3 = f'''(x_0),$$

$$n! c_n = f^{(n)}(x_0), \text{ millest}$$

$$c_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, c_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, c_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}, \dots, c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Niisiis on otsitav polünoom:

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Saadud polünoomi nimetatakse funktsiooni  $f(x)$   $n$ -astme Taylori polünoomiks kohal  $x_0$ .

## 2. Taylori valem

Funktsioonil  $f(x)$  ja tema  $n$ -astme Taylori polünoomil on niisiis võrdsed väärtused kohal  $x_0$ , samuti on  $x = x_0$  puhul võrdsed ka nende kõik tuletised kuni  $n$ -nda järguni. Muude  $x$  väärtuste korral võivad aga funktsiooni ja tema Taylori polünoomi väärtused, samuti ka nende tuletiste väärtused, erineda.

Funktsiooni ja tema Taylori polünoomi vahet

$$f(x) - T_n(x)$$

nimetatakse jääkliikmeks ja tähistatakse sümboliga  $R_n(x)$ :

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x).$$

Seega

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

ehk

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \\ + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x).$$

Saadud valemit nimetatakse Taylori valemiks.

Kui Taylori valemis  $x_0 = 0$ , siis

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x).$$

Saadud valemit nimetatakse Maclaurini valemiks.

### 3. Lagrange'i jääkliige

Argumendi  $x$  nende väärtuste puhul, mil  $R_n(x)$  on väike, võib funktsiooni  $f(x)$  praktiliselt asendada oma Taylori polünoomiga, mille väärtuste arvutamine on võrdlemisi lihtne. Seetõttu on tarvis jääkliikme väärtust hinnata, milleks peame aga jääkliikmele andma sobivama kuju.

Selleks kujuks on korrutis, mille üks tegur on  $\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$ , teine tegur võib aga peale konstandi  $x_0$  sõltuda veel argumendi väärtusest  $x$ ; tähistame tema  $Q(x)$ . Järelikult tuleb leida niisugune  $Q(x)$ , et  $R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} Q(x)$ .

$$\text{Niisiis peab } Q(x) \text{ rahuldama võrrandit } f(x) = f(x_0) + \\ + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \\ + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} Q(x)$$

ehk võrrandit

$$f(x) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) - \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n - \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} Q(x) = 0.$$

Asendades saadud võrrandi vasakus poolles konstandi  $x_0$  uue muutujaga  $t$ , saame uue funktsiooni argumentid  $t$ :

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} Q(x).$$

On ilmne, et  $F(x_0) = F(x) = 0$  ning  $F(t)$  on diferentseeruv arvude  $x_0$  ja  $x$  poolt moodustatud kinnises vahemikus. Seetõttu on Rolle'i teoreemi põhjal nimetatud vahemikus niisugune arv  $\xi$ , et  $F'(\xi) = 0$ .

Avaldades funktsiooni  $F(t)$  tuletise, saame:

$$\frac{dF(t)}{dt} = F'(t) = -f'(t) - f''(t)(x-t) + f'''(t)(x-t)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{(x-t)^n}{n!} Q(x),$$

mis pärast lihtsustamist annab

$$F'(t) = - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{(x-t)^n}{n!} Q(x).$$

Kui  $t = \xi$ , siis

$$- \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + \frac{(x-\xi)^n}{n!} Q(x) = 0,$$

millest

$$Q(x) = f^{(n+1)}(\xi), \text{ kus } \xi \text{ on arvude } x \text{ ja}$$

$x_0$  vahel.

Järelikult

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

ehk

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x-x_0)]}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}, \text{ kus } 0 < \theta < 1.$$

Saadud jääkliiget nimetatakse Lagrange'i jääkliikmeks. Taylori valem saab nüüd kuju:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x-x_0)]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \text{ kus } 0 < \theta < 1.$$

N ä i t e i d.

1. Koostada funktsiooni  $e^x$   $n$ -astme Taylori valem kohal  $x_0 = 0$ .

Et  $f(x) = f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = f^{(n+1)}(x) = e^x$  ja  $e^0 = 1$ , siis  $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 1$  ja  $f^{(n+1)}(\xi) = e^\xi$ .

Seega:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

kus

$$R_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}, \text{ milles } \xi \text{ on arvude } x \text{ ja } 0 \text{ vahel.}$$

2. Koostada funktsiooni  $\sin x$  Taylori valem kohal  $x_0 = 0$ .

Saame:

$f(x) = \sin x$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -\sin x = \sin(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2})$	$f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos x = \sin(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2})$	$f'''(0) = -1$
$f^{(4)}(x) = \sin x = \sin(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2})$	$f^{(4)}(0) = 0$
.....	
.....	
$f^{(n)}(x) = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$	$f^{(n)}(0) = \sin(\frac{\pi}{2} n)$
$f^{(n+1)}(x) = \sin[x + (n+1) \cdot \frac{\pi}{2}]$	$f^{(n+1)}(\xi) = \sin[\xi + (n+1) \cdot \frac{\pi}{2}]$

Seega

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \sin \left[ \xi + (2n+2) \frac{\pi}{2} \right].$$

#### 4. Taylori valemi kasutamine

Taylori valemit kasutatakse funktsiooni ligikaudsete väärtuste arvutamiseks.

Kui nimelt funktsiooni  $f(x)$   $(n+1)$ -st järku tuletise absoluutväärtuse  $|f^{(n+1)}(x)|$  maksimaalne väärtus arvude  $x_0$  ja  $x$  poolt moodustatud kinnises vahemikus on  $M$ , s.o.  $|f^{(n+1)}(\xi)| \leq M$ , siis

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-x_0|^{n+1}.$$

Järelikult, kui funktsiooni  $f(x)$  väärtusi asendatakse selle funktsiooni  $n$ -astme Taylori polünoomi väärtustega, siis viga ei ületa arvu  $\frac{M}{(n+1)!} |x-x_0|^{n+1}$ .

Arvutame näiteks  $e^{\frac{1}{2}}$  väärtuse funktsiooni  $e^x$  Taylori valemi abil, võttes  $n = 3$ .

Saame

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + R_3(x);$$

võttes  $x = \frac{1}{2}$ , on

$$e^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!} + R_3\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + R_3\left(\frac{1}{2}\right).$$

Et  $R_3(x) = \frac{e^\xi}{4!} x^4$ , kus  $0 < \xi < \frac{1}{2}$ , siis  $e^\xi < e < 3$  ja

$$R_3\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{3}{4!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{4! \cdot 16} = \frac{1}{128} < 0,008.$$

Võttes seega

$$e^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} \approx 1,646,$$

tehakse viga, mis ei ületa arvu 0,008.

$$1,646 < e^{\frac{1}{2}} < 1,654.$$

(Täpsem väärtus on 1,6487.)

5. Võrrandi lahendi lähisväärtuse täpsustamise võtteid

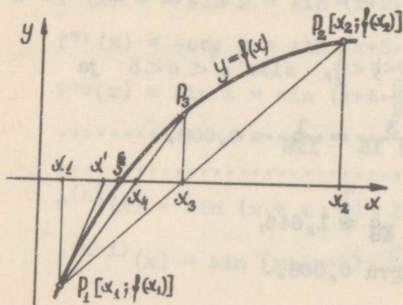
Olgu meil vaja leida võrrandi  $f(x) = 0$  lahend ehk funktsiooni  $f(x)$  nullkoht.

Kui  $f(x)$  on esimese või teise astme polünoom, siis oskame antud võrrandi lahendi avaldada selle polünoomi kordajate kaudu. Muudel juhtudel piirdume aga lahendi lähisväärtuse leidmisega.

Selleks leiame kõigepealt mingil viisil, näiteks proovimise teel, kaks arvu  $x_1$  ja  $x_2$ ,  $x_1 < x_2$  nii, et  $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$ , s.o. et üks arvudest  $f(x_1)$  ja  $f(x_2)$  oleks positiivne ning teine negatiivne. Kui funktsioon  $f(x)$  on pidev vahemikus  $x_1 \leq x \leq x_2$ , siis leidub vähemalt üks arv  $\xi$ , mis rahuldab tingimusi  $x_1 < \xi < x_2$  ja  $f(\xi) = 0$ . Kui funktsioon  $f(x)$  on antud vahemikus monotoonne, siis on olemas üksainus niisugune arv  $\xi$ .

Niisiis, kui  $f(x)$  on vahemikus  $x_1 \leq x \leq x_2$  pidev ja monotoonne, siis on võrrandil  $f(x) = 0$  üks ja ainus lahend  $\xi$ , mis rahuldab tingimusi  $x_1 < \xi < x_2$ .

Geomeetriliselt tähendab see seda, et joonel  $y = f(x)$  ja  $x$ -teljel on üksainus lõikepunkt, mille abstsiss  $\xi$  rahuldab tingimusi  $x_1 < \xi < x_2$  (joon.40).



Joon. 40

Kumbagi arvudest  $x_1$  ja  $x_2$  võib võtta lahendi  $\xi$  lähisväärtuseks. Viga, mis seejuures tehakse, ei ületa arvu  $x_2 - x_1$ .

Kui vea ülemmäär  $x_2 - x_1$  osutub lubamatult suureks, siis võib lihtsa arvutuse teel lahendile  $\xi$  leida uue lähisväärtuse  $x_3$ , mille puhul vea ülemmäär on väiksem endisest. Võt-

teist, mis võimaldavad lahendi ähhisväärtust täpsustada, vaatleme kahte: kõõluvõtet ja puutuja- ehk Newtoni võtet.

## 6. Kõõluvõte

=====

Kõõluvõte põhineb tõsiasjal, et kui pideva joone kõõlu otspunktid asuvad teine teisel pool  $x$ -telge, siis selle kõõlu ja kõõlule vastava kaare lõikepunktid  $x$ -teljega asuvad lähistikku ja seda lähemal, mida lühem on kõõl. Seetõttu võtamegi lahendi  $\xi$  uueks lähisväärtuseks joone  $y = f(x)$  punkte

$P_1[x_1; f(x_1)]$  ja  $P_2[x_2; f(x_2)]$  ühendava kõõlu ning  $x$ -telje lõikepunkti abstsiss  $x_3$  (joon. 40 ja 41).

Et kõõlu  $P_1P_2$  võrrand on

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)},$$

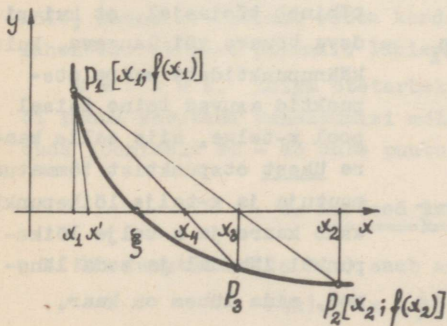
siis selle kõõlu ja  $x$ -telje lõikepunkti abstsiss  $x_3$  rahuldab võrrandit

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)},$$

millest

$$x_3 - x_1 = \frac{f(x_1)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)},$$

kusjuures  $x_1 < x_3 < x_2$ .



joon. 41

Kui  $f(x_3) \cdot f(x_1) < 0$  (joon. 40 ja 41), siis eelneva põhjal on  $x_1 < \xi < x_3$ .

Võttes võrrandi lahendi  $\xi$  lähisväärtuseks arvu  $x_3$ , on viga

$$|x_3 - \xi| < x_3 - x_1 < x_2 - x_1.$$

Kui aga  $f(x_3) \cdot f(x_2) < 0$  (joon. 42 ja 43),

siis  $x_3 < \xi < x_2$ . Võttes nüüd võrrandi lahendi  $\xi$

lähisväärtuseks  $x_3$ , on viga jällegi

$$|x_3 - \xi| < x_2 - x_3 < x_2 - x_1.$$

Võttes nüüd omakorda kõõlu läbi punktide  $P_1$  ja  $P_3[x_3; f(x_3)]$  (joon. 40 ja 41), arvutame selle kõõlu ja  $x$ -telje lõikepunkti abstsissi  $x_4$  analoogiliselt:

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f(x_1) - f(x_3)} (x_1 - x_3)$$

ehk

$$x_4 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_3) - f(x_1)} (x_3 - x_1),$$

kus juures  $x_1 < x_4 < x_3$ .

Kui  $f(x_4) \cdot f(x_1) < 0$  (joon. 40 ja 41), siis  $x_1 < \xi < x_4$  ja, võttes  $x_4$  lahendi  $\xi$  lähisväärtuseks, on viga

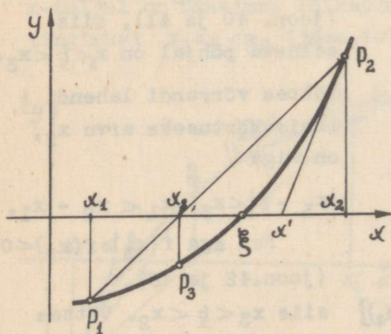
$$|x_4 - \xi| < x_4 - x_1 < x_3 - x_1.$$

Nii saame võtte korduval rakendamisel lahendile  $\xi$  järjest paremaid ja paremaid lähisväärtusi.

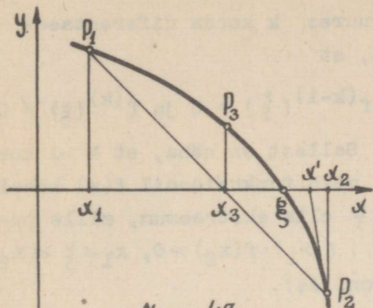
## 7. Puutuja- ehk Newtoni võte

Puutuja- ehk Newtoni võte põhineb tõesiasjal, et kui pideva tõusva või langeva, kuid käänupunktideta kaare otspunktid asuvad teine teisel pool  $x$ -telge, siis selle kaare ühest otspunktist tõmmatud puutuja ja  $x$ -telje lõikepunkt asub kaare ja  $x$ -telje lõikepunkti lähedal ja seda lähemal, mida lühem on kaar.

Seetõttu võetakse nimetatud puutuja ja  $x$ -telje lõike-



Joon. 42



Joon. 43

punkti abstsiss  $x'$  lahendi  
 $\xi$  lähisväärtuseks.

Nagu joonistelt 40, 41, 42 ja 43 selgub, tuleb nõgusa kaare puhul puutepunkt võtta ülalpool  $x$ -telge, kumera kaare puhul aga allpool  $x$ -telge, s.o. kui funktsioon  $f(x)$  on kaks korda diferentseeruv, siis puutepunkti ordinaat ja funktsiooni teine tuletis peavad olema sama märgiga.

Olgu funktsioon  $f(x)$  vahemikus  $x_1 \leq x \leq x_2$  kaks korda diferentseeruv, kusjuures selles vahemikus  $f'(x) \neq 0$  ja  $f''(x) \neq 0$ .

Puutuja joonele  $y = f(x)$  näiteks punktist  $P_1$  (joon. 40 ja 41) on

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1).$$

Seega selle puutuja ja  $x$ -telje lõikepunkti abstsiss  $x'$  rahuldab võrrandit

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x' - x_1),$$

millest

$$x' = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Nagu jooniste 40, 41, 42 ja 43 abil kergesti veenduda võib, saame ka Newtoni võtte korduval rakendamisel võrrandi lahendile järjest paremaid lähisväärtusi.

M ä r k u s. Kõige otstarbekohasem on ühe ja sama võrrandi puhul kasutada vaheldumisi mõlemat võtet. Selles võib veenduda jooniseid 40 - 43 uute puutujate ja kõõludega täiendades.

### 8. Kordsed lahendid

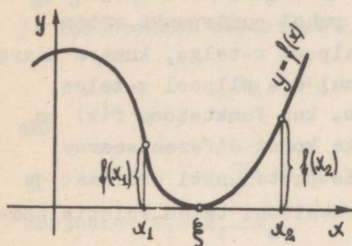
Kui funktsioonile  $f(x)$  saab anda kuju

$$f(x) = (x - \xi)^k f_1(x),$$

kus  $\xi$  on konstant,  $k$  naturaalarv ja  $f_1(\xi) \neq 0$ , siis nimetatakse arvu  $\xi$  võrrandi  $f(x) = 0$   $k$ -kordseks lahendiks.

Kui funktsioon  $f(x)$  on sealjuures  $k$  korda diferentseeruv, siis saab kergesti veenduda, et

$$f'(\xi) = 0, f''(\xi) = 0, \dots, f^{(k-1)}(\xi) = 0 \text{ ja } f^{(k)}(\xi) \neq 0.$$



Joon. 44

Sellest on näha, et  $k > 1$  korral võib funktsioonil  $f(x)$  kohal  $x = \xi$  olla ekstreemum, mille puhul  $f(x_1) \cdot f(x_2) > 0$ ,  $x_1 < \xi < x_2$  (joon. 44).

Niisiis pole sel juhul võrrandi lahendi eespool käsitletud täpsustamisvõtete eeldused rahuldatud.

**M ä r k u s.** Näiteid võrrandi lahendi täpsustamisest nii kõõlu kui ka puutuajavõttele on toodud õpikutes:

N.S. Piskunov, Diferentsiaal- ja integraalarvutus, 1965, lk. 214 näide 1, lk. 216 näide 2.

ТАЛЛИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
Кафедра математики

Х. Роос

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ  
Конспект для студентов-заочников

На эстонском языке

Vastutav toimetaja E. Etverk

Trükkimisele antud 25.X 66. Paber 60x84, 1/16

Trükipg. 4,5. Tingpg. 4,19. Tiraaž 1500  
MB-08237. TPI rotaprint, 1966. Tell. nr. 382

Hind 13 kop.

A-28370

Hind 13 kop.

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00446636 5