NOLI ISTUM DISTURBARE.

(VAL. MAX. VIII. 7.)

Der Druck wird unter den gesetzlichen Bedingungen gestattet.
Riga, am 31. May 1841.
Dr. C. E. Napiersky
Censor.

1841

Geometrie

Fünfter Cursus. Matrik.

V.

Vom Professor Dr. G. Paucker

Mitau, 31. Decbr 1840 / 12. Januar 1841

1

Rechtwinklige Dreiecke zu bilden, deren Seiten rationale Verhältnisse haben.

Man nehme zwei beliebige Zahlen a, b, als Grundzahlen an. Das doppelte Product derselben stellt eine Kathete, der Unterschied der Quadrate die andere Kathete, die Summe der Quadrate die Hypotenuse dar. Denn wenn $2ab = k$, $a^2 - b^2 = l$, $a^2 + b^2 = h$ ist, so ist $4a^2b^2 = k^2$, $a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = l^2$, $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = h^2$, also $k^2 + l^2 = h^2$.

Z. B. die Grundzahlen seyen 5 und 6, so ist $k = 2.5.6 = 60$, $l = 36 - 25 = 11$, $h = 36 + 25 = 61$. Hier ist $60^2 = 3600$, $11^2 = 121$, $61^2 = 3721$. Hierauf ist folgende Tafel berechnet worden:

Grundzahlen	kl. Kath.	gr. Kath.	Hyp.	Grundzahlen	kl. Kath.	gr. Kath.	Hyp.
2, 1	3	4	5	9, 2	36	77	85
3, 2	5	12	13	9, 4	65	72	97
4, 1	8	15	17	9, 8	17	144	145
4, 3	7	24	25	10, 1	20	99	101
5, 2	20	21	29	10, 3	61	91	109
5, 4	9	40	41	10, 7	51	140	149
6, 1	12	35	37	10, 9	19	180	181
6, 5	11	60	61	11, 2	44	117	125
7, 2	28	45	53	11, 4	88	105	137
7, 4	33	56	65	11, 6	85	132	157
7, 6	13	84	85	11, 8	57	176	185
8, 1	16	63	65	11, 10	21	220	221
8, 3	48	55	73	12, 1	24	143	145
8, 5	39	80	89	12, 5	119	120	169
8, 7	15	112	113	12, 7	95	168	193
				12, 11	23	264	265

2.

Dreiecke zu bilden, deren Seiten und Höhen rationale Verhältnisse haben.

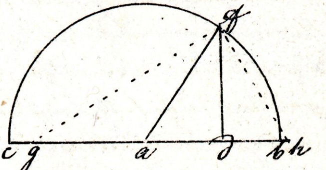
Man bilde nach der vorigen Aufgabe zwei rechtwinkligen Dreiecke deren Seiten rationale Verhältnisse haben, multiplicire in beiden Dreiecken die eine Kathete mit solchen Zahlen, wodurch sie einander gleich werden, und verbinde dann die andern Katheten durch Addiren und Subtrahiren. Z. B. Man nehme aus der vorigen Tafel die beiden ersten Dreiecke 3,4,5 und 5,12,13.

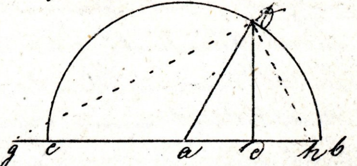
	3, 4, 5, 5, 12, 13,	3, 4, 5 12, 5, 13	4, 3, 5 5, 12, 13	4, 3, 5 12, 5, 13
	15, 20, 25 15, 36, 39	12, 16, 20 12, 5, 13	20, 15, 25 20, 48, 52	12, 9, 15 12, 5, 13
 Seiten Grundlinie	Höhe 15 25, 39 16 oder 56	Höhe 12 20, 13 11 oder 21	Höhe 20 25, 52 33 oder 63	Höhe 12 15, 13 4 oder 14

Wenn die Seiten und eine Höhe rational sind, so sind auch (III. 8) die andern beiden Höhen rational. Das Dreieck dessen Höhe 12, Grundlinie 14, Seiten 13, 15 sind, ist dadurch bemerkenswerth, daß es schon in den ältesten Zeiten von den Indiern, Griechen, Arabern u. s. w. als Beispiel angewandt worden ist (Chasles Geschichte der Geometrie Lpz 1839. 484)

3

Für zwei gerade Linien, welche ein irrationales Verhältniß (II. 50) zu einander haben, deren Quadrate aber ein rationales Verhält nicht ebenen, genäherte Zahlenverhältnisse zu finden, oder die Quadratwurzel geometrisch auszuziehen.





Man nehme alle Linien als durch eine gemeinschaftliche Linieneinheit gemessen, so daß alle Linien als Zahlen oder Verhältnisse vorgestellt werden. Die Zahl, aus welcher die Quadratwurzel ausgezogen werden soll, sey A. Man beschreibe einen Halbkreis, dessen Halbmesser die gesuchte Quadratwurzel sey, also $ab^2 = ac^2 = af^2 = A$. Man nehme als ersten genäherten Werth $ad = B$, so daß B^2 kleiner als A, aber größer als $\frac{1}{4}A$ sey, also $ad > bd$. Man errichte in d auf ab eine senkrechte Linie df bis an den Halbkreis, so ist $df^2 = af^2 - ad^2 = A - B^2 = R$. Da A u. B gegeben sind, so ist auch $df^2 = R$ gegeben. Nimmt man nun auf ac einen Punkt g an, zieht gf, und darauf fk senkrecht, so ist (III.30) $dg \cdot dk = df^2 = R$, also $dk = \frac{R}{dg}$, und $ak = ad + dg = B + \frac{R}{dg}$. Dieser Werth von ak ist ein genäherter Werth der $\sqrt{A}$. Man kann damit anfangen $ag = B$ zu setzen, dann ist $dg = 2B$. Den hierauf gefundenen Werth von ak nimmt man als neuen Werth von ag an, findet hieraus einen folgenden Werth von ak u.s.w. Auf diese Weise nähert man sich der gesuchten $\sqrt{A}$ immer mehr. Denn da $cd \cdot db = df^2$, und $gd \cdot dk = df^2$, so ist $cd \cdot db = gd \cdot dk$, also $\frac{gd}{cd} = \frac{db}{dk}$ also

$\frac{cg}{bd} = \frac{bk}{dk}$, also $\frac{bk}{cg} = \frac{dk}{cd} = \frac{bd}{gd}$. Da aber nach der Voraussetzung $bd < ad$, so ist um so mehr $bd < gd$, also $bk < cg$. Folglich ak näher als ag dem Werth von $ab = \sqrt{A}$. Wenn $ag < \sqrt{A}$, so ist $ak > \sqrt{A}$, und umgekehrt, die gefundenen Quadratwurzeln sind also abwechselnd zu groß und zu klein.

1 Beispiel. Das Verhältniß der Diagonallinie eines Quadrats zur Seite oder $\sqrt{2}$ zu finden (II. 44). Hier ist $A = 2$; man setze $B = 1$, so ist $R = 1$. Setzt man $dg = 2.B = 2$, so ist $ak = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Setzt man $ag = \frac{3}{2}$, so ist $ak = 1\frac{2}{5} = \frac{7}{5}$. Setzt man $ag = \frac{7}{5}$, so ist $ak = 1\frac{5}{12} = \frac{17}{12}$. Setzt man $ag = \frac{17}{12}$ so ist $ak = 1\frac{12}{29} = \frac{41}{29}$ u. s. w. Das Schema ist

$$\sqrt{2} = \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408} \quad (II. 50)$$

Jeder Zähler und Nenner wird also gefunden, indem man den vorhergehenden mit 2 multiplicirt, und den vorvorhergehenden hinzuaddirt. Dieses läßt sich allgemein beweisen. Es sey $ag = \frac{C}{D}$, $ad = B$, so ist $dg = B + \frac{C}{D}$ $= \frac{BD+C}{D}$, $dk = \frac{RD}{BD+C}$, $ak = B + \frac{RD}{BD+C} = \frac{B^2D + RD + BC}{BD+C}$ $= \frac{E}{F}$

Da $A = B^2 + R$, so ist $E = AD + BC$, $F = BD + C$.
Wenn nun $ag = \frac{E}{F}$, und hieraus $ak = \frac{G}{H}$, so ist eben so $G = AF + BE$, $H = BF + E$

also $G = ABD + AC + BE = B(E - BC) + AC + BE$

also $G = 2BE + RC$

$H = BF + E = BF + AD + BC = BF + AD + B(F - BD)$

also $H = 2BF + RD$

2 Beispiel. In einem gleichseitigen Dreieck das Verhältniß der Höhe zur halben Grundlinie,

oder $\sqrt{3}$ zu finden (II. 47). Hier ist $A=3$; man setze $B=1$, so ist $R=2$. Setzt man zuerst $dg=2B=2$, so ist $ak=2=\frac{4}{2}$. Setzt man $ag=\frac{4}{2}$, so ist $ak=\frac{10}{6}$. Setzt man $ag=\frac{10}{6}$ so ist $ak=\frac{28}{16}$ also $\sqrt{3}=\frac{1}{1}, \frac{4}{2}, \frac{10}{6}, \frac{28}{16}, \frac{76}{44}, \frac{208}{120}, \frac{568}{328}, \frac{1552}{896}$ oder $\sqrt{3}=\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{19}{11}, \frac{26}{15}, \frac{71}{41}, \frac{97}{56}$,

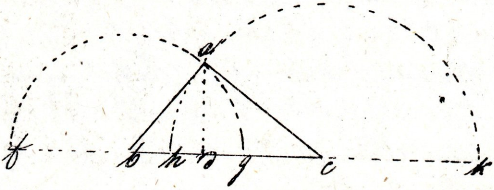
3 Beispiel. Im Quadrat (III. 61) das Verhältniß der halbierenden Diagonallinien zur halben Seite oder $\sqrt{5}$ zu finden. Hier ist $A=5$, $B=2$ $R=1$. Setzt man zuerst $dg=2.B=4$, so ist $ak=\frac{9}{4}$. Setzt man $ag=\frac{9}{4}$, so ist $ak=\frac{38}{17}$, u. s. w. $\sqrt{5}=\frac{2}{1}, \frac{9}{4}, \frac{38}{17}, \frac{161}{72}, \frac{682}{305}, \frac{2889}{1292}$

4.

Aus den Seiten eines Dreiecks einen Ausdruck für den Flächeninhalt desselben zu finden (III. 8)

Erste Auflösung. Das Dreieck sey abc, man beschreibe aus b, c, mit den Halbmessern ba, bc, Halbkreise, welche die verlängerte Grundlinie bc in f, g, und h, k schneiden, so ist, wenn man die Höhe ad fällt (III 56) $ad^2=fd.dg$ und $ad^2=hd.dk$, also $fd.dg=hd.dk$ also $\frac{fd}{dk}=\frac{hd}{dg}$, also $\frac{fd}{fk}=\frac{hd}{hg}$, also $\frac{fd}{hd}=\frac{fk}{hg}$ also $\frac{fd}{fk}=\frac{fk}{fk-hg}$ also

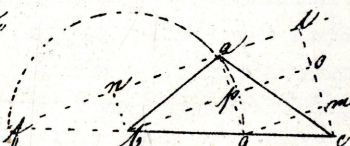
$$fd=\frac{fk.fk}{fk-hg}$$



Da $fd . dg = hd . dk$, so ist auch $\frac{dg}{hd} = \frac{dk}{fd}$, also $\frac{dg}{hg} = \frac{dk}{fk}$, also $\frac{dg}{dk} = \frac{hg}{fk}$, also $\frac{dg}{gk} = \frac{hg}{fk - hg}$ also $dg = \frac{hg . gk}{fk - hg}$. Setzt man nun $ab + bc + ca = 2S$ so ist $fk = ab + bc - ca = 2S - 2ca$, $fk = ab + bc + ca = 2S$ $hg = ab + ca - bc = 2S - 2bc$, $gk = ca + bc - ab = 2S - 2ab$, $fk - hg = 2bc$. Also $fd = 2 . \frac{S(S - ca)}{bc}$, $dg = 2\frac{(S - ab)(S - bc)}{bc}$ Bezeichnet man den Inhalt des Dreiecks durch F, so ist $F = \frac{1}{2} bc . ad$, $ad^2 = fd . dg$, also

$$F = \sqrt{S(S-ab)(S-bc)(S-ca)}$$

Zweite Auflösung. Man beschreibe aus b c mit dem Halbmesser ba einen Halbkreis, welcher die Seite bc in f, g schneidet, so ist $\angle fag = R$. Man ziehe $bo \parallel gm \parallel fa$, $bn \parallel cl \parallel ga$, so ist $\Delta abc = abgo = bcln = bo . ap$. Aber



$\frac{ap}{bp} = \frac{co}{bo}$ also $bo . ap = co . bp$, also $bo^2 . ap^2 = bo . bp . co . ap$ also $\Delta abc = F = \sqrt{bo . bp} . \sqrt{co . ap}$

$fc^2 - ca^2 = fl^2 - al^2$, $ca^2 - cg^2 = cl^2 - cm^2$

Aber (III. 7) $fc^2 - ca^2 = (fc + ca)(fc - ca) = 4S(S - ca)$

$ca^2 - cg^2 = (ca + cg)(ca - cg) = 4(S - ab)(S - bc)$

$fl^2 - al^2 = (fl + al)(fl - al) = 4 bo . bp$

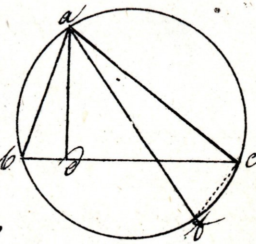
$cl^2 - cm^2 = (cl + cm)(cl - cm) = 4 . co . ap$

also $bo . bp = S(S - ca)$ $co . ap = (S - ab)(S - bc)$

also $F = \sqrt{S(S - ca)} . \sqrt{(S - ab)(S - bc)}$

Beispiel. Es sey $ab = 25$, $bc = 56$, $ca = 39$, so ist $2S = 120$, $S = 60$, $S - ca = 21$, $S - ab = 35$, $S - bc = 4$, $F^2 = 60.21.35.4 = 4^2.7^2.15^2$, also $F = 4.7.15 = 420$

5.

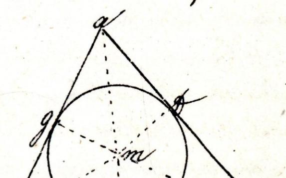


In einem Dreieck ist der Durchmesser des umschriebenen Kreises gleich dem Produkt der drei Seiten, dividirt durch den doppelten Inhalt des Dreiecks.

Da $\angle adb = acf = R$, $\angle abd = afc$, so ist $\Delta\, adb \sim acf$, also $\frac{ad}{ab} = \frac{ac}{af}$, also $af = D = \frac{ab.ca}{ad}$ oder $D = \frac{ab.bc.ca}{bc.ad} = \frac{ab.bc.ca}{2F}$

Beispiel. Es sey $ab = 25$, $bc = 63$, $ca = 52$ so ist $S = 70$, $S - ca = 18$, $S - ab = 45$, $S - bc = 7$ $F^2 = 70.18.45.7 = 7^2.9^2.10^2$, $F = 360$, also $D = \frac{25.63.52}{2.360} = 113\frac{3}{4}$

6.

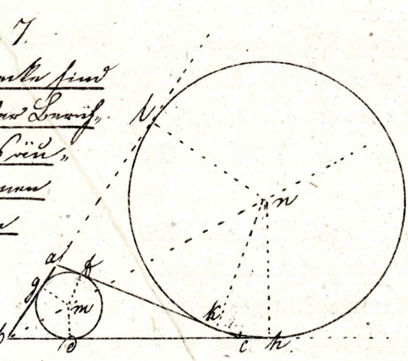


In einem Dreieck ist der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises gleich dem Inhalt des Dreiecks, dividirt durch den halben Umfang desselben.

$\Delta abm = \frac{1}{2} ab.mg = \frac{1}{2} ab.r$, $\Delta bcm = \frac{1}{2} bc.md = \frac{1}{2} bc.r$ $\Delta cam = \frac{1}{2} ca.mf = \frac{1}{2} ca.r$, $\Delta abm + bcm + cam = abc = F$, $\frac{1}{2} ab + \frac{1}{2} bc + \frac{1}{2} ca = S$, also $F = S.r$ oder $r = \frac{F}{S}$

Beispiel. Es sey $ab = 16$, $bc = 60$, $ca = 52$, so ist $S = 64$ $S - ab = 48$, $S - bc = 4$, $S - ca = 12$, also $F^2 = 64.48.48$ $F = 8.48 = 384$, $r = \frac{384}{64} = 6$.

7.



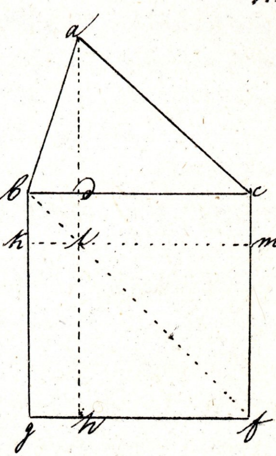
Bei einem Dreiecke sind die Abstände der Berührungspunkte des äußeren eingeschriebenen Kreises gleich dem halben Umfange des Dreiecks, und die Abstände der Berührungspunkte des inneren eingeschriebenen Kreises gleich dem halben Umfange weniger der gegenüberliegenden Seite.

Wenn der äußere eingeschriebene Kreis n, die Seiten bc, ca, ab, in h, k, l, berührt, so ist $al = ak$, $bl = bh$, $ch = ck$, $bl = ab + ak$, $bh = bc + ck$, also $2bl = 2bh = ab + bc + ak + ck = ab + bc + ca = 2S$, also $bl = bh = S$, $ch = ck = bh - bc = S - bc$, $al = ak = bl - ab = S - ab$.

Wenn der innere eingeschriebene Kreis m die Seiten bc, ca, ab, in d, f, g, berührt, so ist $af = ag$, $bg = bd$, $cd = cf$, $ag = ab - bd$, $af = ac - cd$, also $2af = 2ag = ab + ca - bd - cd = ab + ca - bc = ab + bc + ca - 2bc = 2S - 2bc$, also $af = ag = S - bc$. Eben so $bg = bd = S - ca$, $cd = cf = S - ab$.

8

Wenn man von der Spitze eines Dreiecks eine senkrechte Diagonallinie auf die Grundlinie zieht, so ist die Summe der Quadrate der Seiten, welche einen spitzen Winkel einschließen, größer als das Quadrat der gegenüberliegenden Seite und das doppelte Produkt oder Rechteck der Grundlinie mit dem Abschnitt, welcher dem Winkel anliegt.

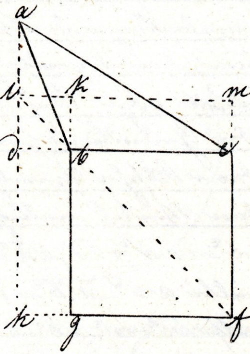


$ac^2 = ad^2 + cd^2$, $ab^2 = ad^2 + bd^2$,
also $ac^2 - ab^2 = cd^2 - bd^2$
also $bc^2 + ca^2 - ab^2 = bc^2 + cd^2 - bd^2$
$= gfmk + cdlm + mlkf =$
$2gfmk = 2 \cdot bc.cd$ und
$bc^2 + ab^2 - ca^2 = bc^2 + bd^2 - cd^2 =$
$bcmk + klhg + bdlk = 2\,bcmk = 2bc.bd$

Beispiel. Es sey $ab = 25$, $bc = 56$, $ca = 39$, so ist $ab^2 = 625$, $bc^2 = 3136$, $ca^2 = 1521$, also $bc^2 + ca^2 - ab^2 = 4032$, $ab^2 + bc^2 - ca^2 = 2240$. also $2bc.cd = 4032$, $2bc.bd = 2240$, hieraus $cd = 36$, $bd = 20$, $cd^2 = 1296$, $bd^2 = 400$ also $ad^2 = 1521 - 1296 = 625 - 400 = 225$ aus beiden folgt $ad = 15$, $F = 420$

9.

Wenn man von der Spitze eines Dreiecks eine senkrechte Diagonallinie auf die verlängerte Grundlinie zieht, so ist die Summe der Quadrate der Seiten, welche einen stumpfen Winkel einschließen, kleiner als das Quadrat der gegenüberliegenden Seite um das doppelte Produkt oder Rechteck der Grundlinie mit dem Abschnitt, welcher dem Winkel anliegt.



$ca^2 = ad^2 + cd^2$, $ab^2 = ad^2 + bd^2$

$ca^2 - ab^2 = cd^2 - bd^2$,

$ca^2 - ab^2 - bc^2 = cd^2 - bd^2 - bc^2$

$= bcmk + bdhg = 2\,bcmk$

$= 2bc \cdot bd$

Beispiel. Es sey $ca = 56$, $ab = 25$, $bc = 39$, also $ca^2 = 3136$, $ab^2 = 625$, $bc^2 = 1521$, also $ca^2 - ab^2 - bc^2 = 3136 - 625 - 1521$. $= 990$, also $2\,bc \cdot bd = 990$ also $bd = 12\frac{9}{13}$, $cd = 51\frac{9}{13}$, $bd^2 = 161\frac{16}{169}$, $cd^2 = 2672\frac{16}{169}$, $ad^2 = 3136 - 2672\frac{16}{169}$ $= 625 - 161\frac{16}{169} = 463\frac{153}{169}$, also $ad = 21\frac{7}{13}$

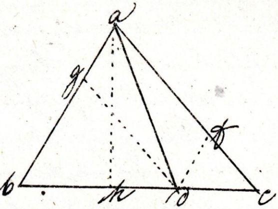
$F = 420$.

Anmerkung. Die Figur dieses Satzes ist der Figur des vorigen Satzes correlativ. Der Punkt d liegt in der vorigen Figur in der Richtung von b nach c, in dieser Figur in der Richtung von c nach b also in der entgegengesetzten Richtung. Man erhält also die Gleichung dieses Satzes, wenn man in der Gleichung des vorigen Satzes bd negativ nimmt. Die Gleichung des vorigen Satzes war $bc^2 + ab^2 - ca^2 = 2bc \cdot bd$. Nimmt man bd negativ, so erhält man $bc^2 + ab^2 - ca^2 = -2bc \cdot bd$, oder die Gleichung dieses Satzes $ca^2 - ab^2 - bc^2 = 2bc \cdot bd$

16.

Wenn die Grundlinie eines Dreiecks beliebig innerhalb getheilt wird, so ist das Quadrat der Transversallinie,

wenn man Paral-
lellinien mit den Sei-
ten, aus dem Thei-
lungspunkt zieht,
gleich der Summe
von den Produkte
jeder Seiten mit
ihrem Abschnitt,
weniger dem Produkt der Abschnitte
der Grundlinien.



Es sey $df \parallel ab$, $dg \parallel ac$, ah senkrecht auf bc, so ist (V. d. 9) in den Dreiecken adb, adc $ad^2 = ab^2 - bd^2 + 2bd.dh$, $ad^2 = ac^2 - cd^2 - 2cd.dh$
Man eliminirt das Produkt in welchem dh vorkommt, indem man die erste Gleichung mit cd, die andere mit bd multiplicirt, und dann addirt:

$$ad^2.cd = ab^2.cd - bd^2.cd + 2\,bd.cd.dh$$
$$ad^2.bd = ac^2.bd - cd^2.bd - 2\,cd.bd.dh$$

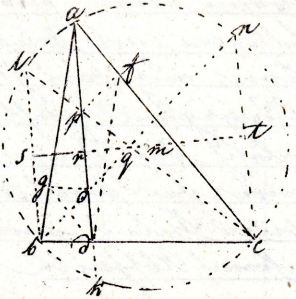
also $ad^2.bc = ab^2.cd + ac^2.bd - bd.cd.bc$

also $ad^2 = ab^2.\frac{cd}{bc} + ac^2.\frac{bd}{bc} - bd.cd$

aber $\frac{cd}{bc} = \frac{ag}{ab}$, $\frac{bd}{bc} = \frac{af}{ac}$,

also $ad^2 = ab.ag + ac.af - bd.cd$

Beispiel. Es sey $ab = 25$, $ac = 39$, $bc = 56$, $bd = 21$, $cd = 35$, so ist $af = ac.\frac{bd}{bc} = \frac{39.21}{56} = 14\frac{5}{8}$
$ag = ab.\frac{cd}{bc} = \frac{25.35}{56} = 15\frac{5}{8}$, $ab.ag = 390\frac{5}{8}$
$ac.af = 570\frac{3}{8}$, $bd.cd = 735$, also $ad^2 = 226$
$ad = 15,0333$.



Anderer Beweis. Man beschreibe um das $\Delta\, abc$ einen Kreis, welcher von der Diagonallinie ad in k geschnitten wird. Man ziehe die Sehnen $bl \parallel cn \parallel ad$, verbinde bn, cl, welche die ad in $o\,p$ schneiden, fälle vom Mittelpunkt m auf diese parallelen Sehnen die Senkrechte $s\,r\,m\,t$, so ist $ar = kr$, $ls = bs$, $nt = ct$. Da (III. 38) $\angle blc = bnc$, $\angle bnc = lbn$, so ist, wenn cl, bn, einander in q schneiden $\angle blq = lbq$, also sind die Dreiecke qbl, qop, qnc, gleichschenklich, also geht $s\,r\,m\,t$ durch q, also $pr = or$.

also $ap = ko = ak - ao = ad + dk - ao$

also $ao + ap - dk = ad$, also

$ad^2 = ad.ao + ad.ap - ad.dk$

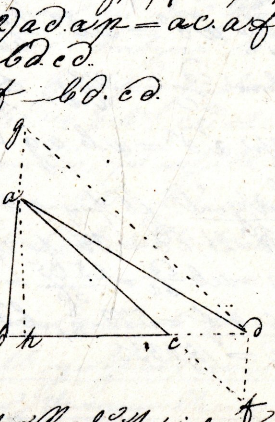
Aber $\angle abn = acn = cad = adg$, also (III. 42) $bdog$ ein Kreisviereck, also (III. 52) $ad.ao = ab.ag$.

Ferner $\angle acl = abl = bak = adf$, also (III. 42) $cdpf$ ein Kreisviereck, also (III. 52) $ad.ap = ac.af$.

Auch ist (III. 54) $ad.dk = bd.cd$.

Also $ad^2 = ab.ag + ac.af - bd.cd$.

11.



Wenn die Grundlinie eines Dreiecks beliebig außerhalb getheilt wird, so ist das Quadrat der Diagonallinie, wenn man aus dem Theilungspunkt Parallelen mit den Seiten zieht, gleich dem Unterschied der Produkte jeder

Seite mit ihrem Abschnitte, mehr dem Produkt der Abschnitte der Grundlinie.

In den Dreiecken adb, adc ist

$$ad^2 = ab^2 - bd^2 + 2bd.dk;\quad ad^2 = ac^2 - cd^2 + 2cd.dk$$

also $ad^2.cd = ab^2.cd - bd^2.cd + 2bd.cd.dk$

$$ad^2.bd = ac^2.bd - cd^2.bd + 2bd.cd.dk$$

also $ad^2.bc = ac^2.bd - ab^2.cd + bd.cd.bc$

also $ad^2 = ac^2.\frac{bd}{bc} - ab^2.\frac{cd}{bc} + bd.cd$

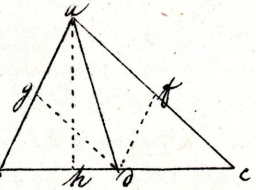
aber $\frac{bd}{bc} = \frac{af}{ac},\ \frac{cd}{bc} = \frac{ag}{ab}$

also $ad^2 = ac.af - ab.ag + bd.cd$

Anmerkung. Die Figur dieses Satzes, ist der Figur des vorigen Satzes correlativ. Der Punkt d liegt in der vorigen Figur in der Richtung von c nach b, in dieser Figur in der entgegengesetzten Richtung von b nach c; der Punkt g in der vorigen von a nach b, in dieser von b nach a. Man erhält also die Gleichung dieses Satzes aus der Gleichung des vorigen, indem man den positiven Abschnitt ag negativ, und den negativen Abschnitt cd positiv nimmt.

Beispiel. Es sey $ab = 25$, $ac = 39$, $bc = 56$, $cd = 35$, $bd = 91$, so ist $af = \frac{ac.bd}{bc} = 63\frac{3}{8}$ $ag = \frac{ab.cd}{bc} = 15\frac{5}{8}$, $ac.af = 2471\frac{5}{8}$ $ab.ag = 390\frac{5}{8}$, $bd.cd = 3185$, $ad^2 = 5266$ $ad = 72,5672$.

12.



<u>Das Quadrat der Diagonallinie, welche die Grundlinie eines Dreiecks in die Hälften theilt, ist gleich der halben Summe der Quadrate der Seiten, weniger dem Quadrat der halben Grundlinie.</u>

Da $bd = \frac{1}{2}bc$, so ist auch $ag = \frac{1}{2}ab$, $af = \frac{1}{2}ac$, also (V. 10) $ad^2 = \frac{1}{2}ab^2 + \frac{1}{2}ac^2 - bd^2$

Oder (V. 8. 9) $ad^2 = ab^2 - bd^2 + 2bd \cdot dh$

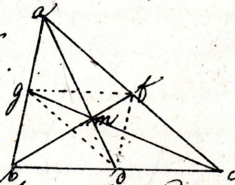
$$ad^2 = ac^2 - cd^2 - 2cd \cdot dh$$

$bd = cd$ also $2ad^2 = ab^2 + ac^2 - 2bd^2$

$$ad^2 = \frac{1}{2}ab^2 + \frac{1}{2}ac^2 - bd^2$$

<u>Beispiel.</u> Es sey $ab = 60$, $bc = 56$, $ac = 52$, also $bd = cd = 28$, so ist $\frac{1}{2}ab^2 = 1800$, $\frac{1}{2}ac^2 = 1352$, $bd^2 = 784$, also $ad^2 = 2368$, $ad = 48,66209$

13.

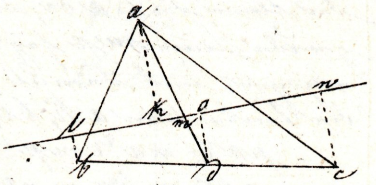


<u>Der Abstand des Schwerpunkts eines Dreiecks von der Ecke ist $\frac{2}{3}$ der Diagonallinie.</u>

Wenn man bc, ca, ab, in d, f, g, halbirt, so ist $df \parallel ab$, $fg \parallel bc$, $gd \parallel ca$. Wenn ad, bf, einander in m schneiden, so ist $\triangle dmf \sim amb$, also $\frac{am}{dm} = \frac{ab}{df}$, $\triangle fdc \sim abc$, also $\frac{ab}{df} = \frac{bc}{cd} = \frac{2}{1}$, also $am = 2dm$, also $am = \frac{2}{3}ad$. Wenn ad, cg, einander in n schneiden, so ist $\triangle dng \sim anc$, also $\frac{an}{dn} = \frac{ac}{dg}$, $\triangle gbd \sim abc$, also $\frac{ac}{dg} = \frac{bc}{bd} = \frac{2}{1}$, also $an = 2dn$, also $an = \frac{2}{3}ad$, also $an = am$, d. h. die Durchschnittspunkte von ad, bf, und ad, cg, fallen zusammen.

Also durchschneiden ad, bf, cg einander in einem Punkt, welcher der Schwerpunkt heißt, und es ist $am = \frac{2}{3}ad$, $bm = \frac{2}{3}bf$, $cm = \frac{2}{3}cg$

14.



Wenn in der Ebene eines Dreiecks durch den Schwerpunkt einen beliebigen gerade Linie gezogen wird und von den Ecken auf dieselbe senkrechte Linien gefällt werden, so ist die Summe der beiden kleineren Ordinaten oder Abscissen gleich der größeren.

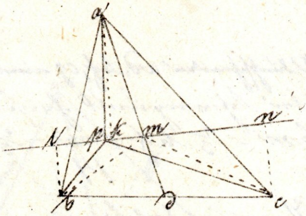
Es sey $bd = cd$, $am = \frac{2}{3}ad$, also m der Schwerpunkt. Man fälle die senkrechten Linien oder Ordinaten ak, bl, cn, do, so ist $lo = on$, also $bl + cn = 2do$, $mn - ml = 2mo$. Aber $am = 2dm$, also $ak = 2do$, $mk = 2mo$, also $bl + cn = ak$ für die Ordinaten, $mn - ml = mk$, oder $ml + mk = mn$, für die Abscissen, in Beziehung auf den Schwerpunkt genommen.

15

In einem Dreieck ist die Summe der Quadrate der Abstände des Schwerpunkts von den Ecken ein Minimum, d. h. kleiner als die Summe der Quadrate der Abstände jedes andern in dieser Ebene befindlichen Punkts von den Ecken.

15.

Ist m der Schwerpunkt, p ein beliebiger Punkt in der Ebene des △ abc; die gerade Linie mp sey gezogen, und darauf die Senkrechten ak, bl, cn, gefällt, so ist (V. 8.9)



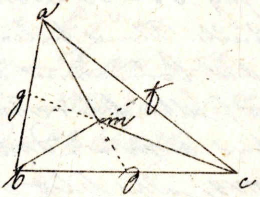
$$pa^2 = ma^2 + mp^2 - 2mp.mk$$
$$pb^2 = mb^2 + mp^2 - 2mp.ml$$
$$pc^2 = mc^2 + mp^2 + 2mp.mn$$

da aber (V. 14) $mk + ml - mn = 0$, so ist

$$pa^2 + pb^2 + pc^2 = ma^2 + mb^2 + mc^2 + 3mp^2$$

16

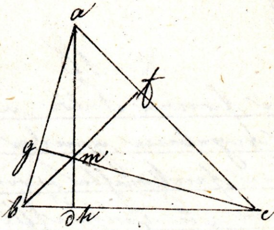
In einem Dreieck ist die Summe der Quadrate der Abstände des Schwerpunkts von den Ecken der dritte Theil von der Summe der Quadrate der Seiten.

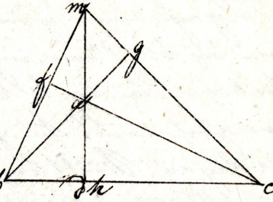


(V. 12) $ad^2 = \frac{1}{2}ab^2 + \frac{1}{2}ca^2 - \frac{1}{4}bc^2$, aber $ma = \frac{2}{3}ad$
also $ma^2 = \frac{2}{9}ab^2 + \frac{2}{9}ca^2 - \frac{1}{9}bc^2$; aus gleichem Grunde ist $mb^2 = \frac{2}{9}ab^2 + \frac{2}{9}bc^2 - \frac{1}{9}ca^2$, $mc^2 = \frac{2}{9}bc^2 + \frac{2}{9}ca^2 - \frac{1}{9}ab^2$
also $ma^2 + mb^2 + mc^2 = \frac{1}{3}ab^2 + \frac{1}{3}bc^2 + \frac{1}{3}ca^2$.

17.

Die von den Ecken eines Dreiecks auf die Gegenseiten senkrecht gezogenen Transversallinien durchschneiden einander in einem Punkt, und die Abschnitte von jeder Ecke an verhalten sich umgekehrt wie die anliegenden Seiten.



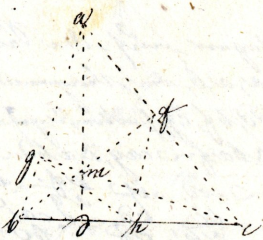


Es seien auf den Seiten bc, ca, ab, die Normallinien ad, bf, cg, senkrecht gefällt, so ist $\Delta\, baf \sim cag$, $\Delta\, abd \sim cbg$, $\Delta\, bcf \sim acd$, also $\frac{af}{ag} = \frac{ab}{ca}$, $\frac{bg}{bd} = \frac{bc}{ab}$, $\frac{cd}{cf} = \frac{ca}{bc}$.

Wenn bf, cg einander in m schneiden, so ist wegen der rechten Winkel f, g, (III. 42) afmg ein Kreisviereck, also $\angle\, gam = gfm$. Wegen der rechten Winkel f, g, ist auch bgfc ein Kreisviereck, also $\angle\, gfb = gcb$. Also ist auch $\angle\, gam = gcb$. Wenn also am die bc in h schneidet, so ist $\angle\, bah = gcb$; aber auch $\angle\, abh = cbg$, also $\angle\, h = g = R$. Also ist ah auch bc senkrecht. Aber auch ad auf bc senkrecht. Also fallen die Linien ah, ad, zusammen, d. h. die senkrechte Linie ad geht durch m.

<u>Zweiter Beweis</u>. Wenn bf, cg, einander in m schneiden, so ist $\frac{mf}{cf} = \frac{mg}{bg} = \frac{af}{bf}$, also $mf = \frac{af \cdot cf}{bf}$. Wenn bf, ad einander in n schneiden, so ist $\frac{nf}{af} = \frac{nd}{bd} = \frac{cf}{bf}$, also $nf = \frac{af \cdot cf}{bf}$, also $nf = mf$, d. h. die Punkte m, n, fallen zusammen, also ad, bf, cg, schneiden einander in m.

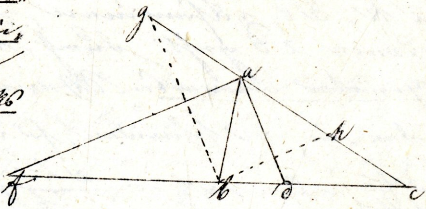
18



Aus einem Punkte auf ei-ne gegebene gerade Linie eine senkrechte gerade Linie zu ziehen (III 37)

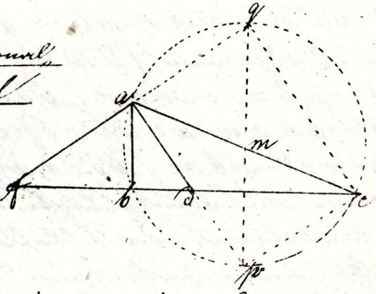
Die gegebene gerade Linie sey bc. Man nehme auf derselben einen beliebigen Punkt k, kb=kc, von beliebiger Länge. Man ziehe aus k gerade Linien kf, kg, von beliebiger Richtung, und mache kf=kg=kb=kc. Man verbinde bg, cg, bf, cf, so sind (III. 35) $\angle bgc = bfc = R$. Verlängert man alsdann bg, cf bis zu ihrem Durchschnitt in a, und verbindet man diesen Punkt mit dem Punkt m in welchem bf, cg einander schneiden, so ist (V. 17) die gerade Linie amd auf bc senkrecht.

19



Die beiden Diagonal-linien, welche den in-neren und äußeren Winkel eines Dreiecks in die Hälfte theilen, schneiden die Grund-linie im Verhältniß der anliegenden Seiten.

Im Dreieck abc, sey der innere Winkel bac durch ad, der äußere Winkel bag durch af in die Hälfte getheilt, so ist $\angle daf = R$. Man ziehe $bg \parallel ad$, $bh \parallel af$, so ist auch $\angle gbh = R$, also (III. 30) $ag = ah = ab$, also $\frac{bd}{cd} = \frac{ag}{ac} = \frac{ab}{ac}$ und $\frac{bf}{cf} = \frac{ah}{ac} = \frac{ab}{ac}$



daß Quadrat der Diagonallinie, welche den Winkel eines Dreiecks in die Hälfte theilt, ist gleich dem Unterschiede zwischen dem Produkt der anliegenden Seiten, und dem Produkt der Abschnitte der Grundlinie.

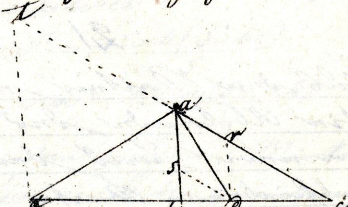
Erster Beweis. Man beschreibe um das $\triangle abc$ einen Kreis, errichte auf bc den senkrechten Durchmesser pq, verbinde ap, aq, so ist $\angle bap = bqp = cqp = cap$, also theilt ap den innern Winkel bac, und aq den äußern Winkel in die Hälfte. Die geraden Linien ap, aq schneiden die Grundlinie in d und f, und es ist $\triangle abd \sim apc$ $\triangle abf \sim aqc$, also
$\frac{ab}{ad} = \frac{ap}{ac}$, $\frac{ab}{af} = \frac{aq}{ac}$, oder $ab.ac = ad.ap = af.aq$. Hieraus folgt:

$ab.ac = ad^2 + ad.dp = ad^2 + bd.dc$

$ab.ac = af.fq - af^2 = bf.fc - af^2$

also $ad^2 = ab.ac - bd.dc$, $af^2 = bf.fc - ab.ac$

Zweiter Beweis.



Ziehe $dr \parallel ft \parallel ab$,
$ds \parallel fu \parallel ac$, so ist $ar = as$, $at = au$, also

$\frac{as}{ac} = \frac{ar}{ac} = \frac{bd}{bc}$

$\frac{ar}{ab} = \frac{as}{ab} = \frac{cd}{bc}$

$\frac{au}{ac} = \frac{at}{ac} = \frac{bf}{bc}$

$\frac{at}{ab} = \frac{au}{ab} = \frac{fc}{bc}$. Hieraus $\frac{as}{ac} + \frac{ar}{ab} = 1$, $\frac{at}{ab} - \frac{au}{ac} = 1$

Also $ab.as+ac.ar=ab.ac$, $ac.at-ab.au=ab.ac$

Nun ist allgemein (V.10.11)

$ad^2=ab.as+ac.ar-bd.cd$

$af^2=ab.au-ac.at+bf.cf$

also $ad^2=ab.ac-bd.cd$, $af^2=bf.cf-ab.ac$

Diese Ausdrücke lassen sich noch weiter so umbilden, daß bloß die Seiten des Dreiecks darin vorkommen. Nämlich:

$bd=\dfrac{bc.ab}{ac+ab}$, $cd=\dfrac{bc.ac}{ac+ab}$, $bf=\dfrac{bc.ab}{ac-ab}$

$cf=\dfrac{bc.ac}{ac-ab}$, also $ad^2=ab.ac-\dfrac{bc^2.ab.ac}{(ab+ac)^2}$

$af^2=\dfrac{bc^2.ab.ac}{(ac-ab)^2}-ab.ac$. Oder wenn

$ab+bc+ca=2S$, so ist (III.7)

$ad^2=\dfrac{4ab.ac.S(S-bc)}{(ac+ab)^2}$, $af^2=\dfrac{4ab.ac(S-ab)(S-ac)}{(ac-ab)^2}$

Beispiel. Es sey (V.6), $ab=16$, $ac=52$, $bc=60$, so ist $S=64$, $S-ab=48$, $S-bc=4$, $S-ac=12$, $ad^2=\dfrac{4.16.52.64.4}{68.68}=184\frac{72}{289}$

$af^2=\dfrac{4.16.52.48.12}{36.36}=1479\frac{1}{9}$

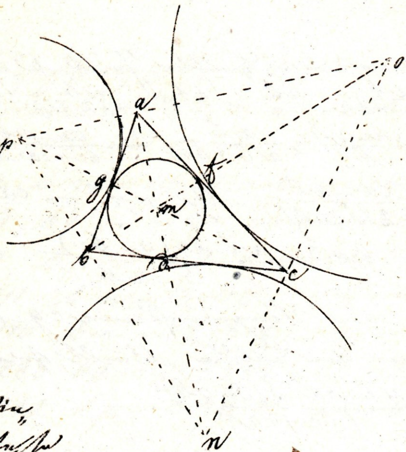
$ad=\frac{64}{17}\sqrt{13}=13,57385$, $af=\frac{32}{3}\sqrt{13}=38,45922$

21.

Aus den Seiten eines Dreiecks die Abstände der Mittelpunkte des innern und des äußern eingeschriebenen Kreises von den Ecken des Dreiecks zu finden.

Wenn man die drei innern Winkel des Dreiecks in die Hälfte theilt, so schneiden die

theilenden Li-
nien einander
in dem Mittel-
punkte m des
innern ein-
geschriebenen
Kreises. Theilt
man einen
innern und
zwei äußern Win-
kel in die Hälften so



schneiden die theilenden Linien einander in den Mittelpunkten n, o, p, der äußern eingeschriebenen Kreise. die diagonallinien an, bo, cp, sind auf den Seiten des Δ nop senkrecht (V. 17)

Wenn die diagonallinie ad den innern Winkel a in die Hälfte theilt, und $ab+bc+ca = 2S$, so ist (V. 20) $ad^2 = \frac{4ab.ca.S(S-bc)}{(ca+ab)^2}$

Wenn in dem Δ abd, die diagonallinie bm den ∠abd in die Hälfte theilt, so ist (V. 19)

$\frac{am}{dm} = \frac{ab}{bd}$, $\frac{am}{ad} = \frac{ab}{ab+bd}$, $\frac{ab}{ca} = \frac{bd}{cd}$, $\frac{ab}{ca+ab} = \frac{bd}{bc}$

$\frac{ab}{bd} = \frac{ca+ab}{bc}$, $\frac{ab}{ab+bd} = \frac{ca+ab}{ab+bc+ca}$

also $\frac{am}{ad} = \frac{ca+ab}{2S}$, also $am^2 = \frac{ca.ab(S-bc)}{S}$

eben so $bm^2 = \frac{ab.bc(S-ac)}{S}$, $cm^2 = \frac{bc.ca(S-ab)}{S}$

Wenn die Linie ap den äußern Winkel a in die Hälfte theilt, und in k die Grundlinie bc schneidet so ist (V. 20) $ak^2 = \frac{4ab.ac(S-ab)(S-ac)}{(ac-ab)^2}$

Wenn in dem Δ abk die diagonallinie bp den

$\angle abk$ in die Hälfte theilt, so ist (V. 19) $\frac{ap}{kp} = \frac{ab}{bk}$

$\frac{ap}{ak} = \frac{ab}{ab+bk}$, $\frac{ak}{ca} = \frac{bk}{ck}$, $\frac{ab}{ca-ab} = \frac{bk}{bc}$

$\frac{ab}{bk} = \frac{ca-ab}{bc}$, $\frac{ab}{ab+bk} = \frac{ca-ab}{bc+ca-ab}$, also

$\frac{ap}{ak} = \frac{ca-ab}{2(s-ab)}$, also $ap^2 = \frac{ca.ab.(s-ca)}{s-ab}$

ebenso $bp^2 = \frac{ab.bc(s-bc)}{s-ab}$

Wenn die [illegible] cg den inneren Winkel c in die Hälfte theilt, so ist (V. 20)

$$cg^2 = \frac{4bc.ca.s(s-ab)}{(bc+ca)^2}$$

Wenn von dem Dreieck cbg die Linie bp den äußeren $\angle b$ in die Hälfte theilt, so ist (V. 19)

$\frac{cp}{gp} = \frac{bc}{bg}$, $\frac{cp}{cg} = \frac{bc}{bc-bg}$, $\frac{bc}{ca} = \frac{bg}{ag}$, $\frac{bc}{bc+ca} = \frac{bg}{ab}$,

$\frac{bc}{bg} = \frac{bc+ca}{ab}$, $\frac{bc}{bc-bg} = \frac{bc+ca}{bc+ca-ab}$, also

$\frac{cp}{cg} = \frac{bc+ca}{2(s-ab)}$, also $cp^2 = \frac{bc.ca.s}{s-ab}$.

Auf gleiche Weise ergiebt sich für den Mittelpunkt o:

$ao^2 = \frac{ca.ab(s-ab)}{s-ca}$, $co^2 = \frac{bc.ca(s-bc)}{s-ca}$, $bo^2 = \frac{ab.bc\,s}{s-ca}$

und für den Mittelpunkt n:

$bn^2 = \frac{ab.bc.(s-ab)}{s-bc}$, $cn^2 = \frac{bc.ca(s-ca)}{s-\cancel{bc}}$, $an^2 = \frac{ca.ab\,s}{s-bc}$

Hieraus ergeben sich auch noch folgende Gleichungen, welche sich leicht aus der Ähnlichkeit der Dreiecke beweisen lassen:

$am.an = ao.ap = ba.ae$

$bm.bo = bn.bp = ab.bc$

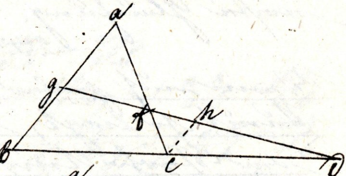
$cm.cp = cn.co = bc.ca$

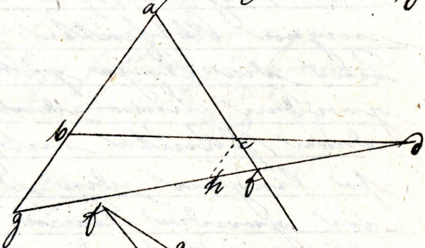
Beispiel. So sey (V. 6) $ab = 16$, $bc = 60$, $ca = 52$, also $s = 64$, $s - ab = 48$, $s - bc = 4$, $s - ca = 12$, so ist

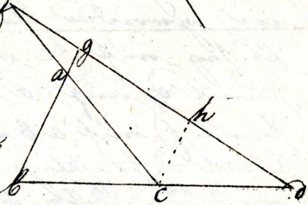
$am^2 = 52$, $bm^2 = 180$, $cm^2 = 2340$
$an^2 = 13312$, $bn^2 = 11520$, $cn^2 = 9360$
$ao^2 = 3328$, $bo^2 = 5120$, $co^2 = 1040$
$ap^2 = 208$, $bp^2 = 80$, $cp^2 = 4160$
$am = 7{,}2111$ $bm = 13{,}4164$ $cm = 48{,}3735$
$an = 115{,}3776$ $bn = 107{,}3312$ $cn = 96{,}7471$
$ao = 57{,}6888$ $bo = 71{,}5542$ $co = 32{,}2490$
$ap = 14{,}4222$ $bp = 8{,}94427$ $cp = 64{,}4980$

22.

Auf den Seiten eines von einer geraden Transversallinie geschnittenen Dreiecks ist das Produkt der Verhältnisse der wechselweisen Abschnitte gleich Eins.







Wenn auf den Seiten bc, ca, ab die Punkte d, f, g in gerader Linie liegen, so ziehe man $ch \parallel ab$, dann ist $\frac{ag}{ch} = \frac{af}{cf}$, $\frac{ch}{bg} = \frac{cd}{bd}$
also $\frac{ag}{bg} = \frac{af}{cf} \cdot \frac{cd}{bd}$ oder $\frac{ag}{bg} \cdot \frac{bd}{cd} \cdot \frac{cf}{af} = 1$

Es liegt immer entweder ein Durchschnittspunkt, oder drei Durchschnittspunkte auf den verlängerten Seiten.

Wenn a f c die Transversallinie des △ g b d ist, so ist $\frac{ga}{ba}\cdot\frac{bc}{dc}\cdot\frac{df}{gf}=1$

Wenn b c d die Transversallinie des △ a g f ist, so ist $\frac{ab}{gb}\cdot\frac{gd}{fd}\cdot\frac{fc}{ac}=1$

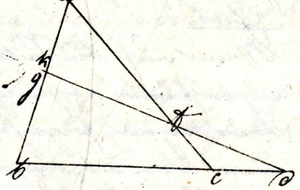
Wenn a g b die Transversallinie des △ c d f ist so ist $\frac{db}{cb}\cdot\frac{ca}{fa}\cdot\frac{fg}{dg}=1$.

Wenn man diese drei Gleichungen mit einander multiplicirt, und die sich aufhebenden Abschnitte wegstreicht, so erhält man wieder die erste Gleichung.

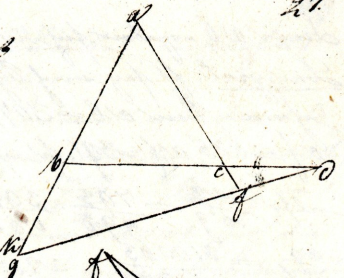
23.

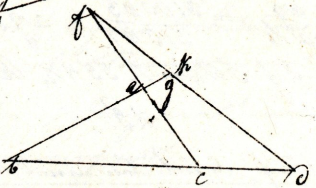
Wenn auf jeder Dreiecksseite ein Punkt so liegt, daß das Produkt der Verhältnisse der wechselnden Abschnitte gleich Eins ist, und die Lage jedes Punktes, der geraden Linie der beiden andern Punkte entsprechend ist, so liegen die drei Punkte in gerader Linie.

Es sey auf bc der Punkt d, auf ca der Punkt f, auf ab der Punkt k so gelegen, daß $\frac{ak}{bk}\cdot\frac{bd}{cd}\cdot\frac{cf}{af}=1$



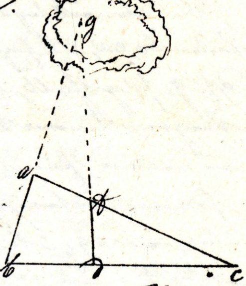
Wenn die gerade Linie df die Seite ab in g schneidet, so ist (V. 22) $\frac{ag}{bg}\cdot\frac{bd}{cd}\cdot\frac{cf}{af}=1$. Also ist $\frac{ak}{bk}=\frac{ag}{bg}$





b wird angenommen, daß k, aber so liegt wie g, d.h. daß k und g entweder beide zwischen a u. b, oder beide auf der verlängerten a b, oder beide auf der verlängerten b a liegen.
Da nun $\frac{ak}{bk} = \frac{ag}{bg}$ so folgt aus dieser Voraussetzung im ersten Falle
$\frac{ak}{ak+bk} = \frac{ag}{ag+bg}$, d.h. $\frac{ak}{ab} = \frac{ag}{ab}$
im zweiten Falle $\frac{ak}{ak-bk} = \frac{ag}{ag-bg}$ d.h. $\frac{ak}{ab} = \frac{ag}{ab}$
im dritten Falle $\frac{ak}{bk-ak} = \frac{ag}{bg-ag}$, d.h. $\frac{ak}{ab} = \frac{ag}{ab}$
also in allen drei Fällen $ak = ag$,
d.h. die Punkte k, g, fallen zusammen,
also d, f, k, in gerader Linie.

24.



__Die Entfernung eines sichtbaren oder nicht erreichbaren Punkts auf dem Felde durch Messung von fünf geraden Linien zu finden.__

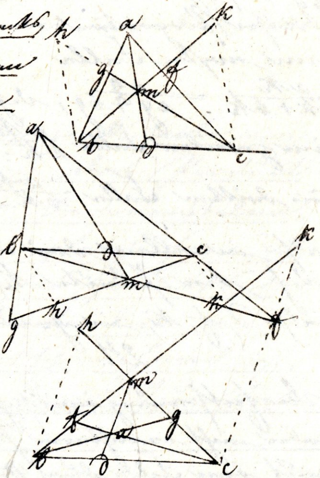
Dieser Punkt sey g. Man stecke zwei gerade Linien ba, df, so ab, daß ihre Verlängerungen in g zusammentreffen. Man nehme den Punkt c in dem Durchschnitt von bd, af, und messe die Linien af, cf, bd, cd, ab. Da (V. 22) $\frac{ag}{bg}\cdot\frac{bd}{cd}\cdot\frac{cf}{af} = 1$, so läßt sich das Verhältniß $\frac{ag}{bg}$ berechnen; hieraus und aus der gemessenen

Linie ab, ergeben sich die Entfernungen ag, bg.

Beispiel. Es sey nach Schritten oder Saschenen gemessen ab = 807, bd = 498, cd = 793, cf = 685, af = 391, so ist $\frac{ag}{bg} \cdot \frac{498}{793} \cdot \frac{685}{391}$, also $\frac{ag}{bg} = \frac{793}{498} \cdot \frac{391}{685} = \frac{310063}{341130}$, also $\frac{ag}{ab} = \frac{310063}{31067}$, $ag = \frac{807 \cdot 310063}{31067} = 8054\tfrac{1}{4}$ d.h. 5 Werst 554¼ Saschenen.

25.

Auf den Seiten eines Dreiecks, welche durch Diagonallinien geschnitten werden, die in einem Punkt der Ebene zusammentreffen, ist das Produkt der Verhältnisse der wechselweisen Abschnitte gleich Eins.



Das Dreieck sey abc, die Seiten bc, ca, ab seyen in d, f, g, so getheilt, daß die Diagonallinien ad, bf, cg, in einem Punkt m zusammentreffen. Man ziehe bk ∥ ad bis an cg, ck ∥ ad bis an bf, so ist $\frac{ag}{bg} = \frac{am}{bk}$, $\frac{bd}{bc} = \frac{md}{ck}$, $\frac{bc}{cd} = \frac{bk}{md}$, $\frac{cf}{af} = \frac{ck}{am}$. Wenn man diese vier Verhältnisse mit einander multiplicirt, so erhält man, da sich alle Glieder rechts aufheben, die Gleichung $\frac{ag}{bg} \cdot \frac{bd}{cd} \cdot \frac{cf}{af} = 1$. Es liegt immer entweder ein Durchschnittspunkt oder alle drei Durchschnittspunkte innerhalb der Seiten des △ abc.

Man erhält aber so, wenn in dem △ bmc sich die Diagonallinien md, cf, bg in a vereinigen $\frac{mf}{bf}\cdot\frac{bd}{cd}\cdot\frac{cg}{mg}=1$.

Wenn in dem Viereck amc sich die Diagonallinien cd, mf, ag in b vereinigen, $\frac{ad}{md}\cdot\frac{mg}{cg}\cdot\frac{cf}{af}=1$. Wenn in dem △ amb sich die Diagonallinien bd, af, mg in c vereinigen,

$\frac{md}{ad}\cdot\frac{ag}{bg}\cdot\frac{bf}{mf}=1$.

Wenn man diese drei Gleichungen mit einander multiplicirt, so erhält man wieder die erste Gleichung.

Wenn man von den 7 Punkten a, b, c, d, f, g, m immer 3, welche ein Dreieck bilden, und 3, welche in gerader Linie liegen, vergleicht, so ist (IV 22) auch:

△ abd und cmg .. $\frac{ag}{bg}\cdot\frac{bc}{dc}\cdot\frac{dm}{am}=1$

△ acd und bmf .. $\frac{cf}{af}\cdot\frac{am}{dm}\cdot\frac{db}{cb}=1$

△ abf und cmg .. $\frac{ag}{bg}\cdot\frac{bm}{fm}\cdot\frac{fc}{ac}=1$

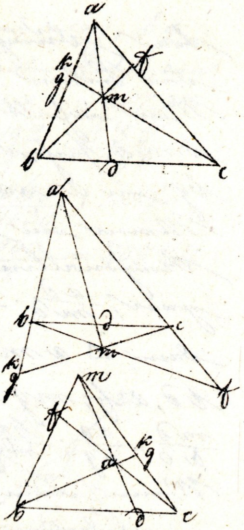
△ cbf und amd .. $\frac{bd}{cd}\cdot\frac{ca}{fa}\cdot\frac{fm}{bm}=1$

△ acg und bmf .. $\frac{ab}{gb}\cdot\frac{gm}{cm}\cdot\frac{cf}{af}=1$

△ bcg und amd .. $\frac{ga}{ba}\cdot\frac{bd}{cd}\cdot\frac{cm}{gm}=1$

Wenn man je zwei dieser Gleichungen mit einander multiplicirt, so erhält man wieder die erste Gleichung.

26.

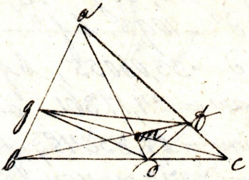


Wenn auf jeder Dreieckseite ein Punkt so liegt, daß das Produkt der Verhältnisse der wechselweisen Abschnitte gleich Eins ist, und die Lage jedes Punkts dem Durchschnitt der Diagonallinien der beiden andern Punkte entspricht; so schneiden die Diagonallinien einander in einem Punkt.

Es sey auf bc der Punkt d, auf ca der Punkt f, auf ab der Punkt k so gelegen, daß $\frac{ak}{bk}\cdot\frac{bd}{cd}\cdot\frac{cf}{af}=1$ sey. Wenn nun die Diagonallinien ad, bf, einander in m schneiden und cm die ab in g schneidet, so ist (V. 25) $\frac{ag}{bg}\cdot\frac{bd}{cd}\cdot\frac{cf}{af}=1$. Also ist $\frac{ak}{bk}=\frac{ag}{bg}$. Es wird angenommen, daß k eben so liegt, wie g, d. h. daß k und g entweder beide zwischen a und b, oder beide auf der verlängerten ab, oder beide auf der verlängerten ba liegen. Da nun $\frac{ak}{bk}=\frac{ag}{bg}$, so folgt aus dieser Proportion im ersten Falle $\frac{ak}{ak+bk}=\frac{ag}{ag+bg}$ d. h. $\frac{ak}{ab}=\frac{ag}{ab}$; im zweiten Falle $\frac{ak}{ak-bk}=\frac{ag}{ag-bg}$, d. h. $\frac{ak}{ab}=\frac{ag}{ab}$; im dritten Falle $\frac{ak}{bk-ak}=\frac{ag}{bg-ag}$, d. h. $\frac{ak}{ab}=\frac{ag}{ab}$ also in allen drei Fällen $ak=ag$, d. h. die

Punkte k, g, fallen zusammen, also treffen die Diagonallinien ad, bf, ck, in einem Punkte zusammen.

27.



Aus den Seiten eines Dreiecks und den auf zwei Seiten gegebenen Abschnitten, die Abschnitte auf der dritten Seite, die Diagonallinien und Transversallinien zu berechnen.

Gegeben seyen ab, bc, ca, auf bc die Abschnitte bd, cd, auf ca die Abschnitte cf, af. Man verbinde ad, bf, welche einander in m schneiden, man ziehe cm, welche die Seite ab in g schneidet, so ergiebt sich (V.25) das Verhältniß $\frac{ag}{bg}$; hieraus und aus ab finden sich die Abschnitte ag, bg. Nun lassen sich (V.10.11.) die Diagonallinien ad, bf, cg, berechnen. Die Gleichungen (V.25) geben die Verhältnisse $\frac{am}{dm}$, $\frac{bm}{fm}$, $\frac{cm}{gm}$, hieraus in Verbindung mit den Diagonallinien ad, bf, cg, die Abschnitte am, dm, bm, fm, cm, gm. Nun berechnet man (V.10.11.) die Transversallinie df als Diagonallinie des △ cad oder bcf; die Transversallinie fg als Diagonallinie des △ abf oder cag; die Transversallinie gd als Diagonallinie des △ abd oder bcg.

Beispiel. Es sey $ab = 46$, $bc = 56$, $ca = 39$, $bd = 24$, $cd = 32$, $cf = 13$, $af = 21$, so ist: $ag = 28$, $bg = 18$, und hieraus

$ad^2 = 1093$, $bf^2 = 2280\frac{3}{13}$, $cg^2 = 2000\frac{1}{23}$

$ad = 33,06055$, $bf = 47,82500$, $cg = 44,72184$

$am = 24,17861$, $dm = 8,88194$

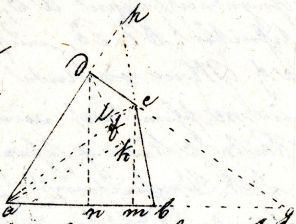
$bm = 27,83845$, $fm = 19,93655$

$cm = 30,70454$, $gm = 14,01729$

$df^2 = 677\frac{11}{13}$, $fg^2 = 1060\frac{237}{299}$, $gd^2 = 274\frac{7}{23}$

$df = 26,03548$, $fg = 32,56981$, $gd = 16,56214$

28.



In einem ebenen Vierecke verhalten sich die Abschnitte der Diagonallinien oder verlängerten Seiten wie der Inhalt der anliegenden Dreiecke.

Das Viereck sey abcd, die Diagonallinien ac, bd, schneiden einander in f, die verlängerten Seiten ab, cd in g, bc, da, in h. Man fälle ak, cl auf bd, und cm, dn, auf ab senkrecht, so ist

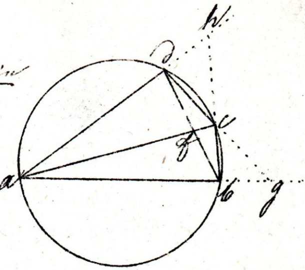
$$\frac{cf}{af} = \frac{cl}{ak} = \frac{\Delta bcd}{\Delta dab}, \quad \frac{cg}{dg} = \frac{cm}{dn} = \frac{\Delta abc}{\Delta dab}$$

eben so $\frac{df}{bf} = \frac{\Delta cda}{\Delta abc}$, $\frac{bg}{ag} = \frac{\Delta bcd}{\Delta cda}$

$$\frac{ch}{bh} = \frac{\Delta cda}{\Delta dab}, \quad \frac{dh}{ah} = \frac{\Delta bcd}{\Delta abc}$$

29.

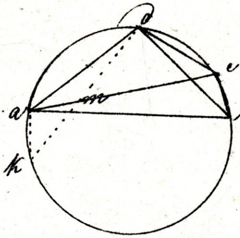
In einem Kreisvierecke verhalten sich die Abschnitte der Diagonallinien oder der



<u>liegenden Seiten wie die Rechtecke der anliegenden Seiten.</u>

Die Diagonallinien ac, bd schneiden einander in f; die verlängerten Seiten ab, cd in g; bc, da, in h. Da $\Delta\, afd \sim bfc$ so ist $\frac{df}{cf} = \frac{da}{bc}$. Da $\Delta\, cfd \sim bfa$, so ist $\frac{af}{df} = \frac{ab}{cd}$. Aus beiden Proportionen folgt: $\frac{af}{cf} = \frac{da.ab}{bc.cd}$. Eben so wird bewiesen, daß $\frac{bf}{df} = \frac{ab.bc}{cd.da}$, $\frac{bg}{dg} = \frac{db.bc}{da.ac}$, $\frac{cg}{dg} = \frac{bc.cd}{bd.da}$, $\frac{ch}{bh} = \frac{ac.cd}{ab.bd}$, $\frac{dh}{ah} = \frac{cd.db}{ca.ab}$. Sind also zwei Abschnitte einander gleich, so sind auch die Rechtecke der anliegenden Seiten einander gleich. Z. B. Wenn $bf = df$, so ist $ab.bc = cd.da$. Wenn $af = cf$, so ist $da.ab = bc.cd$.

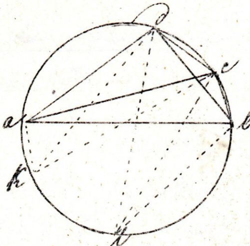
30.



<u>In einem Kreisviereck ist das Rechteck der Diagonallinien gleich der Summe der Rechtecke der Gegenseiten.</u>

Man mache die Sehne $ak = bc$. Wenn ca, dk, einander in m schneiden, so ist (III. 38) $\angle adk = adm = bdc$, $\angle dam = dac = dbc$, $\angle adb = mdc$, $\angle dba = dca = dcm$, also $\Delta\, dam \sim dbc$, $\Delta\, dcm \sim dba$, also $\frac{da}{am} = \frac{bd}{bc}$ oder $bd.am = bc.da$, $\frac{cd}{cm} = \frac{bd}{ab}$ oder $bd.cm = ab.cd$; aus beiden $ac.bd = ab.cd + bc.da$.

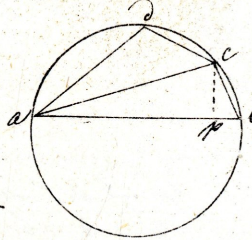
31.



Im einem Kreisviereck verhalten sich die Diagonallinien wie die Summen der Rechtecke der anliegenden Seiten.

Man mache die Bogen $ak = bc$, $bl = da$, so ist auch $ck = ab$, $dl = ab$, $cl = dk$. Aber (V. 30), $ac.dk = ak.cd + da.ck = bc.cd + da.ab$, $bd.cl = dl.bc + cd.bl = ab.bc + cd.da$, also so $\frac{ac}{bd} = \frac{da.ab + bc.cd}{ab.bc + cd.da}$

32.



Der Inhalt eines Kreisvierecks ist gleich der Quadratwurzel aus dem Produkt von vier Seiten, von welchen den halben Umfang weniger jeder Seite gleich sind.

Der Durchmesser des Kreises sey $= D$, so ist (V. 5) $2\Delta acd = \frac{cd.da.ac}{D}$, $2\Delta abc = \frac{ab.bc.ca}{D}$

also $\frac{\Delta abc}{\Delta acd} = \frac{ab.bc}{cd.da}$. Es sey der Inhalt des Kreisvierecks $abcd = F$, so ist $\frac{\Delta abc}{F} = \frac{ab.bc}{ab.bc + cd.da}$, oder $F.ab.bc = \Delta abc\,(ab.bc + cd.da)$

Man fälle cp senkrecht auf ab, so ist

$2abc = ab.cp$, $4(abc)^2 = ab^2.cp^2 = ab^2(bc^2 - bp^2)$

Aber (III. 7) $bc^2 - bp^2 = (bc + bp)(bc - bp)$

also $4(abc)^2 = (ab.bc + ab.bp)(ab.bc - ab.bp)$

Aber (V. 8) $2ab.bp = ab^2 + bc^2 - ca^2$;

also $2ab.bc + 2ab.bp = (ab + bc)^2 - ca^2$

$2ab.bc - 2ab.bp = ca^2 - (ab - bc)^2$

also $16(abc)^2 = ((ab+bc)^2 - ca^2)(ca^2 - (ab-bc)^2)$

Aber (V. 30) $ac . bd = ab . cd + bc . da$

(V. 31) $\dfrac{ac}{bd} = \dfrac{da . ab + bc . cd}{ab . bc + cd . da}$

also $ca^2 = \dfrac{(da . ab + bc . cd)(ab . cd + bc . da)}{ab . bc + cd . da}$

oder $ca^2 (ab . bc + cd . da) = (da . ab + bc . cd)(ab . cd + bc . da)$

$= da^2 . ab . bc + ab^2 . cd . da + bc^2 . cd . da + cd^2 . ab . bc$

$= (cd^2 + da^2) ab . bc + (ab^2 + bc^2) cd . da$

Addirt und subtrahirt man nachher das Produkt $2 ab . bc . cd . da$, so ist also

$ca^2 (ab . bc + cd . da) = (cd - da)^2 ab . bc + (ab + bc)^2 cd . da$

$= (cd + da)^2 ab . bc + (ab - bc)^2 cd . da$

Zieht man beide Theile dieser Gleichung von $(ab+bc)^2 (ab . bc + cd . da)$ ab, so ist

$((ab+bc)^2 - ca^2)(ab . bc + cd . da) = ((ab+bc)^2 - (cd - da)^2) ab . bc$

Zieht man aber von beiden Theilen dieser Gleichung $(ab - bc)^2 (ab . bc + cd . da)$, ab, so ist

$(ca^2 - (ab - bc)^2)(ab . bc + cd . da) = ((cd + da)^2 - (ab - bc)^2) ab . bc$

Multiplicirt man beide Ausdrücke, so ist

$((ab+bc)^2 - ca^2)(ca^2 - (ab - bc)^2)(ab . bc + cd . da)^2 =$

$((ab+bc)^2 - (cd - da)^2) . ((cd + da)^2 - (ab - bc)^2) . ab^2 . bc^2$

oder $16 (abc)^2 (ab . bc + cd . da)^2 =$

$((ab+bc)^2 - (cd - da)^2)((cd + da)^2 - (ab - bc)^2) . ab^2 . bc^2$

also $16 F^2 = ((ab+bc)^2 - (cd - da)^2) . ((cd + da)^2 - (ab - bc)^2)$

Wenn nun S der halbe Umfang des Kreis-
vierecks ist, so ist $2S = ab + bc + cd + da$, also

$$ab + bc + cd - da = 2(S - da)$$
$$ab + bc - (cd - da) = 2(S - cd)$$
$$cd + da + ab - bc = 2(S - bc)$$
$$cd + da - (ab - bc) = 2(S - ab)$$

also $(ab + bc)^2 - (cd - da)^2 = 4(S - cd)(S - da)$

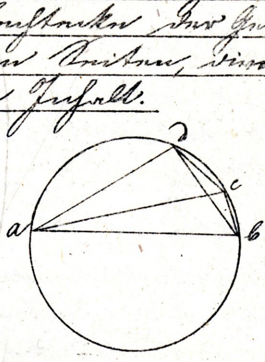
$$(cd + da)^2 - (ab - bc)^2 = 4(S - ab)(S - bc)$$

Also $F^2 = (S - ab)(S - bc)(S - cd)(S - da)$

Beispiel. Es sey $ab = 990$, $bc = 309$, $cd = 423$, $da = 819$, so ist $S = 1270\frac{1}{2}$ also $S - ab = 280\frac{1}{2}$, $S - bc = 961\frac{1}{2}$, $S - cd = 847\frac{1}{2}$, $S - da = 451\frac{1}{2}$, und hieraus $F = 321248$ der Inhalt des Kreisvierecks.

33.

Der Durchmesser eines Kreisvierecks ist gleich dem Product der Quadratwurzeln aus der Summe der Producte der Gegenseiten und anliegenden Seiten, dividirt durch den doppelten Inhalt.



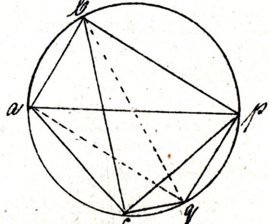
Man setze $ab.cd + bc.da = A^2$, $da.ab + bc.cd = B^2$, $ab.bc + cd.da = C^2$, so ist (V. 30) $ac.bd = A^2$, und (V. 31) $\frac{ac}{bd} = \frac{B^2}{C^2}$, also $ac = \frac{A.B}{C}$, $bd = \frac{A.C}{B}$. Es sey nun der Durchmesser des Kreises $= D$, und der Inhalt des Kreisvierecks $= F$, so ist (V. 5)

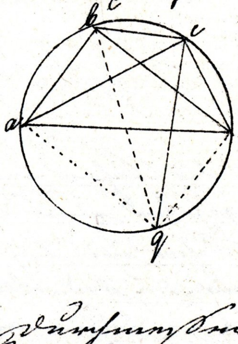
$D.2(abc) = ab.bc.ca$, und (V. 32)
$F.ab.bc = (abc).C^2$, also durch Multipliciren
$D.2F = ac.C^2 = A.B.C$, also $D = \frac{A.B.C}{2F}$

Beispiel. Es sey $ab = 990$, $bc = 309$, $cd = 423$, $da = 819$, so ist $A^2 = 671841$, $B^2 = 941517$, $C^2 = 652347$, also $A = 819,6592$; $B = 970,3177$; $C = 807,6800$; $ac = 984,7090$; $bd = 682,2735$; $F = 321248$; hieraus $D = 999,8084$

34.

Aus den Sehnen und Ergänzungssehnen zweier Bögen, die Sehnen und Ergänzungssehnen der Summe und Differenz der Bögen zu finden.





Wenn die Bögen zweier Sehnen zusammen dem Halbkreis gleich sind, so heißt die eine die Ergänzungssehne der andern. Die Summe der Quadrate der Sehne und Ergänzungssehne ist also dem Quadrat des Durchmessers gleich. Die gegebenen Sehnen seyen ab, ac, ihre Ergänzungssehnen pb, pc, der Durchmesser sey $ap = bq = D$. Für die Summe der Bögen hat man (V. 30) im Viereck $abpc$

$$D.bc = ac.pb + ab.pc$$

im Viereck apqc $D.cq = pc.aq - ac.pq$

$= pc.pb - ac.ab$

Für den Unterschied der Bögen hat man

im Viereck abcp $D.bc = ac.pb - ab.pc$

im Viereck acpq $D.cq = pc.aq + ac.pq$

$= pc.pb + ac.ab.$

<u>Beispiel.</u> Es sey $ab = 309$, $ac = 990$,

$D = 999{,}8084$. Hieraus findet sich

$pb = 950{,}8604$, $pc = 139{,}7027$

$ac.pb = 941352{,}0$ $ab.pc = 43168{,}1$

$pc.pb = 132837{,}7$ $ac.ab = 305910$

Man hat also für die Summe der Bögen

$D.bc = 984520{,}1$ $bc = 984{,}7090$

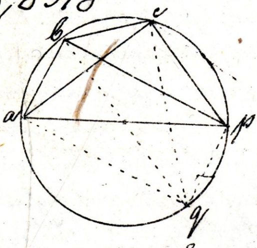
$D.cq = 173072{,}3$ $cq = 173{,}1054$

Und für den Unterschied der Bögen

$D.bc = 898183{,}9$ $bc = 898{,}3560$

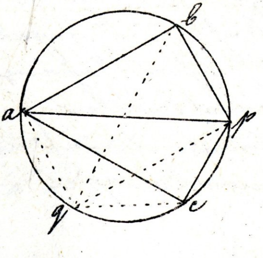
$D.cq = 438747{,}7$ $cq = 438{,}8318$

35.



<u>Aus der Sehne und Ergänzungssehne eines Bogens die Sehne und Ergänzungssehne des doppelten Bogens zu bestimmen.</u>

Der Durchmesser sey $ap = bq = D$, $ab = bc$ die Sehne des einfachen Bogens, $pb = qa = qc$ dessen Ergänzungssehnen,



ac die Sehne des doppelten Bogens, pc dessen Ergänzungssehne. Man hat (V. 30) im Viereck $abcq$

$$D\,ac = bc.aq + ab.qc = 2\,ab.pb$$

Im Viereck $bcpq$, wenn der Bogen ac kleiner als der Quadrant ist

$$D.pc = qc.pb - bc.pq = pb^2 - ab^2$$
$$= D^2 - 2ab^2 = 2pb^2 - D^2$$

Wenn der Bogen ac größer als der Quadrant ist

$$D.pc = bc.pq - qc.pb = ab^2 - pb^2$$
$$= 2ab^2 - D^2 = D^2 - 2pb^2$$

<u>Beispiel.</u> Es sey $D = 1000$, $ab = 327$, so ist $ab^2 = 106929$, $2ab^2 = 213848$, $D^2 - 2ab^2 = 786152$ also $pc = 786,152$

$pb^2 = D^2 - ab^2 = 893071$, $pb = 945,0244$

$2ab.pb = 618045,8$, also $ac = 618,0458$

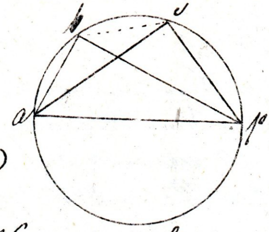
36

<u>Aus der Ergänzungssehne eines Bogens die Sehne und Ergänzungssehne des halben Bogens zu bestimmen.</u>

Es sey $ap = D$ der Durchmesser, $ab = bc$ die Sehne des halben Bogens, pb dessen Ergänzungssehne, ac, pc, die Sehne und Ergänzungssehne des einfachen Bogens, so ist (V. 35) wenn der Bogen ac kleiner als der Halbkreis

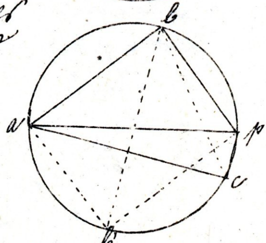
$$D.pc = D^2 - 2ab^2 = 2pb^2 - D^2$$

also $ab^2 = \frac{1}{2}D(D - pc)$, $pb^2 = \frac{1}{2}D(D + pc)$



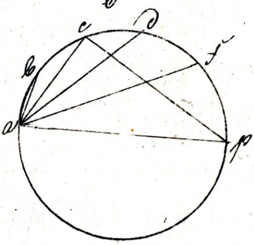
Wenn aber der Bogen apc größer als der Halbkreis.
$D.pc = 2ab^2 - D^2 = D^2 - 2pb^2$
also $ab^2 = \frac{1}{2}D(D+pc)$, $pb^2 = \frac{1}{2}D(D-pc)$

Beispiel. Es sey $D = 1000$, $pc = 900$
so ist, wenn der Bogen ac kleiner als der Halbkreis angenommen wird
$ab^2 = 50000$, $pb^2 = 950000$
$ab = 223,6068$ $pb = 974,6793$



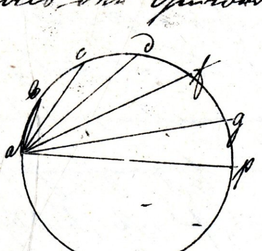
37.

Aus der Sehne des einfachen und zweifachen Bogens, die Sehne des vierfachen Bogens zu bestimmen.



Es sey $ap = D$ der Durchmesser, ab, ac, ad, af, die Sehnen des ein=zwei=drei=vierfachen Bogens, pc die Ergänzungssehne des zweifachen Bogens.
So ist (V. 35) $D.af = 2ac.pc$, $D.pc = D^2 - 2ab^2$ oder $2ab^2 - D^2$, also $D^2.af = 2ac.(D^2 - 2ab^2)$ oder $2ac.(2ab^2 - D^2)$, je nachdem der Bogen ab kleiner oder größer als der Quadrant ist.

38.



Aus den Sehnen des einfachen und zweifachen Bogens, die Sehnen des drei=vier=fünffachen Bogens u. s. w. zu bestimmen.

Nimmt man die Bögen ab, bc, cd, df, fg u. s. w. einander gleich, so giebt (V. 30) das Viereck

$abcd \ldots ad.ab = ac^2 - ab^2 = (ac+ab)(ac-ab)$
$abdf \ldots af.ac = ad^2 - ab^2 = (ad+ab)(ad-ab)$
$abfg \ldots ag.ad = af^2 - ab^2 = (af+ab)(af-ab)$ u.s.w.

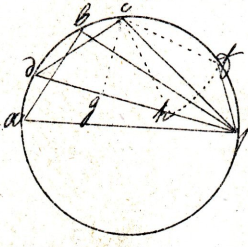
wodurch sich aus den Sehnen ab, ac, der Reihe nach die Sehnen ad, af, ag, u.s.w. finden lassen. Auch wird (IV. 5. 35) $D^2 \cdot \frac{1}{4}ac^2 = ab^2 \cdot pb^2 = ab^2(D^2 - ab^2)$, also $D^2 = \dfrac{ab^2 \cdot ab^2}{ab^2 - \frac{1}{4}ac^2}$

Beispiel. Es sey $ab = 309{,}0170$, $ac = 587{,}7853$, so ist $ab^2 = 95491{,}50$ $ac^2 = 345491{,}50$ $ab^2 - \frac{1}{4}ac^2 = 9118{,}62$ $\sqrt{ab^2 - \frac{1}{4}ac^2} = 95{,}4915$ also $D = 1000$. Ferner $ad.ab = 250000$ also $ad = 809{,}0170$, $af.ac = 559017{,}0$ also $af = 951{,}0565$, $ag.ad = 809017{,}0$ also $ag = 1000$. Also sind in diesem Beispiel ab, ac, ad, af, die Sehnen eines regulären Zehnecks.

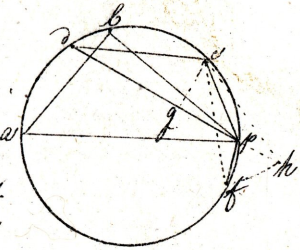
39.

Das Rechteck der Ergänzungssehnen zweier Bögen, ist gleich dem Rechteck, welches der halbe Durchmesser mit der Summe der Ergänzungssehnen der Summe und Differenz der Bögen bildet.

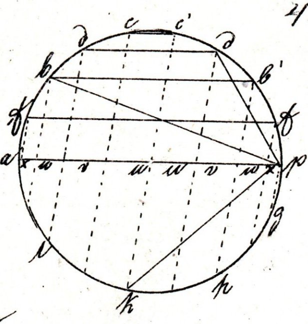
Der Durchmesser sey $ap = D$, die Sehnen der beiden Bögen ab, ac, ihre Ergänzungssehnen pb, pc. Macht man die Bögen cd, cf, dem Bogen ab gleich, so ist der Bogen ad die Differenz der Bögen ab, ac, und der Bogen af die Summe der Bögen ab, ac. Also ist pd die Ergänzungs-



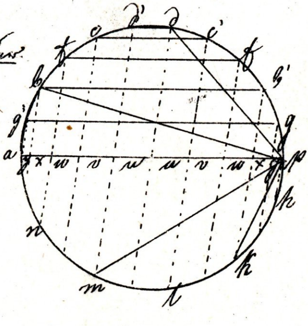
sehnen der Differenz der Bögen ab, ac; und pf die Ergänzungssehne der Summe der Bögen ab, ac. Fällt man cg senkrecht auf pd, so ist $\Delta\, cpg \sim apb$, also $\frac{ap}{pb} = \frac{pc}{pg}$, oder $pb.\, pc = D.\, pg$.



Nimmt man auf der Linie pd den Punkt h so, daß $ch = cf = cd = ab$ ist, so ist $\Delta\, cpf = cph$, also $ph = pf$.
Wenn nun die Summe der Bögen ab, ac, d. h. der Bogen acf kleiner als der Halbkreis ist so ist $pg = \frac{1}{2}(pd + ph) = \frac{1}{2}(pd + pf)$ also $pb.\, pc = \frac{1}{2} D (pd + pf)$.
Wenn aber die Summe der Bögen ab, ac, d. h. der Bogen acf größer als der Halbkreis ist, so ist $pg = \frac{1}{2}(pd - ph) = \frac{1}{2}(pd - pf)$, also $pb.\, pc = \frac{1}{2} D (pd - pf)$.
Beispiel. Es sey $D = 1000$, so sind für die Bögen $ab = 50^\circ$ und $ac = 70^\circ$, die Ergänzungssehnen $pb = 906,3078$ und $pc = 819,1521$, also ihr Product $pb.\, pc = 742403,9$.
Für die Differenz und Summe der Bögen, nämlich $ad = 20^\circ$, und $af = 120^\circ$, sind die Ergänzungssehnen $pd = 984,8078$, $pf = 500$ also ihre halbe Summe $742,4039$, welche mit D multiplicirt, wieder den Werth von $pb.\, pc$ giebt.



<u>In einem regelmäßigen eingeschriebenen Vieleck von ungerader Seitenzahl ist die Summe der Ergänzungssehnen in dem einen Halbkreise weniger der Summe der Ergänzungssehnen in dem andern Halbkreise gleich dem halben Durchmesser.</u>



Die Ergänzungssehnen müssen nach den Punkten von ungerader Stelle gezogen werden, nämlich im Fünfecke, nach dem 1sten u. 3ten Punkt, im Siebeneck nach dem 1sten, 3ten und 5ten Punkt, im Neuneck nach dem 1sten 3ten 5ten, 7ten Punkt u. s. w.

Man ziehe durch irgend eine Ecke a einen Durchmesser ap = D. ferner sey b die 1te, c die 2te, d die 3te Ecke u. s. w. Man ziehe im Halbkreise durch alle Ecken parallele Sehnen bb', cc', dd' u. s. w. mit ap, und durch alle Theilungspunkte des Halbkreises parallele Sehnen, deren Neigungswinkel gegen ap gleich einem rechten Winkel mehr oder weniger ¼ des Centralwinkels des Vielecks sey. Alsdann gehen diese parallelen Sehnen auch durch die Theilungspunkte des andern Halbkreises, und theilen den Durchmesser so, daß die Abschnitte auf beiden Seiten des Mittelpunkts einander gleich sind, nämlich u=u, v=v, w=w, u. s. w.

Man hat nun im Neuneck z. B. $ff' - bb' = w + x$
$dd' - cc' = u + v$. Aber $u + v + w + x = \frac{1}{2} D$,
also $ff' + dd' - cc' - bb' = \frac{1}{2} D$, oder:

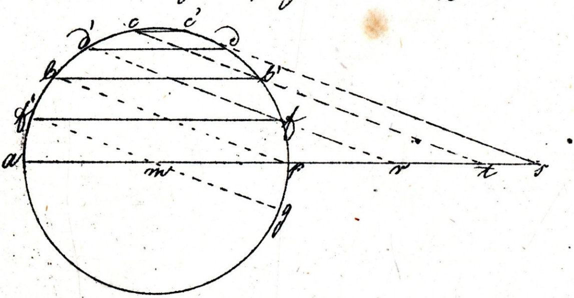
$$pb + pd - pg - pk = \tfrac{1}{2} D$$

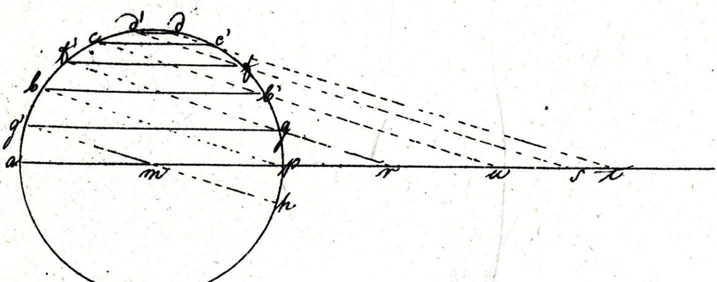
oder $pb + pd - pf - pc = \frac{1}{2} D$

Man hat ferner im Eilfeck $gg' - bb' = x + y$,
$ff' - cc' = v + w$, $dd' = u$. Aber $u + v + w + x + y = \frac{1}{2} D$,
also $gg' + ff' + dd' - cc' - bb' = \frac{1}{2} D$, oder:

$$pb + pd + pg - pk - pm = \tfrac{1}{2} D$$

oder $pb + pd + pg - pf - pc = \frac{1}{2} D$

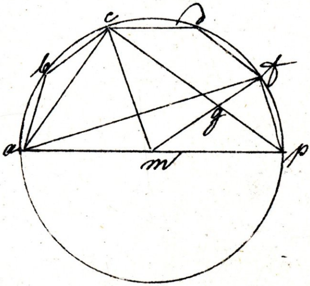




Zweiter Beweis. Man ziehe durch die Ecken des Polygons b, c d, f, g u. s. w. Parallellinien mit dem Durchmesser ap, so theilen diese den Halbkreis in so viel gleiche Theile, als das Polygon Ecken hat. Man ziehe aus p nach der 1sten Ecke b eine Sehne, so werden die Sehnen welche gleichweit abstehende Theilungspunkte verbinden, der pb parallel seyn, und eine derselben wird durch den Mittelpunkt m des Kreises gehen. Man verlängere diese Sehnen bis an den Durchmesser ap. Dann ist beim Neuneck: $mr = ff'$, $rs = dd'$, $st = cc'$ $tp = bb'$, also $\frac{1}{2} D = mr + rs + st - tp = ff' + dd' - cc' - bb' = pb + pd - pf - pc$

Beim Elfeck: $mr = gg'$, $rs = ff'$, $st = dd'$, $tu = cc'$, $up = bb'$, also $\frac{1}{2} D = mr + rs + st - tu - up = gg' + ff' + dd' - cc' - bb' = pb + pd + pg - pf - pc$

41.



Das regelmässige eingeschriebene Zehneck und Fünfeck zu berechnen.

Es sey m der Mittelpunkt, $ap = D$ der Durchmesser, und es sey der Halbkreis in b, c, d, f, in fünf gleiche Theile getheilt, so sind die Sehnen $ab = pf$ die Seite des Zehnecks, ihre Ergänzungssehne $af = pb$ die Diagonallinie des Fünfecks, $ac = pd$ die Seite des Fünfecks, ihre Ergänzungssehne $pc = ad$ die Diagonallinie des Zehnecks. Man hat also (V. 39) $pc \cdot pf = \frac{1}{2} D (pc - pf)$ (V. 40) $pc - pf = \frac{1}{2} D$, also $pc \cdot pf = \frac{1}{4} D^2$. Diese beiden Gleichungen beweist man auch leicht unmittelbar. Wenn mf, pc, einander in g schneiden, so ist $\angle\, pmf = mpg = gpf = mcg = 36°$, die $\angle\, mpf = amc = mfp = mgc = pgf = 72°$, also $\Delta\, mpf = gmc$, $\Delta\, gpf \sim fpm$, $\Delta\, gpm \sim mpc$, also $mg = pg = pf$ die Seite des Zehnecks, $cg = mc = \frac{1}{2}D$, also $pc - pg = pc - pf = \frac{1}{2}D$, und $pc.\,pg = pc.\,pf = mp^2 = \frac{1}{4}D^2$. Diese beiden Gleichungen lassen sich so ausdrücken: „Wenn der Halbmesser mf in g in stetiger Proportion geschnitten wird, so dass $\frac{fg}{mg} = \frac{mg}{mf}$ so ist der grössere Abschnitt mg die Seite des Zehnecks. Wenn der Halbmesser cg in p in stetiger Proportion geschnitten wird, so dass $\frac{pc}{cg} = \frac{cg}{pg}$, so ist der grössere Abschnitt pc die Diagonallinie des Zehnecks, der kleinere Abschnitt pg die Seite des Zehnecks.“

Diese Gleichungen werden auf folgende Art aufgelöset: $pc - pf = \frac{1}{2}D$. Ins Quadrat erhoben (V.9) $pc^2 - 2pc.\,pf + pf^2 = \frac{1}{4}D^2$ $pc.\,pf = \frac{1}{4}D^2$, also $4pc.\,pf = D^2$

beide Gleichungen addirt $pc^2 + 2pc.\,pf + pf^2 = \frac{5}{4}D^2$

also $pc + pf = \frac{1}{2}D.\sqrt{5}$, $pc - pf = \frac{1}{2}D$, also

$pc = \frac{1}{4}D(\sqrt{5}+1)$, $pf = \frac{1}{4}D(\sqrt{5}-1)$

$pc^2 = \frac{1}{16}D^2(6+2\sqrt{5})$, $pf^2 = \frac{1}{16}D^2(6-2\sqrt{5})$

Aber $ac^2 + pc^2 = D^2$, $af^2 + pf^2 = D^2$, also

$ac^2 = \frac{1}{16}D^2(10-2\sqrt{5})$, $pb^2 = af^2 = \frac{1}{16}D^2(10+2\sqrt{5})$.

Diese Ausdrücke lassen sich auch noch anders beweisen: Im Viereck $pcdf$ ist (V 30) $pd.\,cf = pc.\,df + cd.\,pf$

oder $ac^2 = \frac{1}{4}D^2 + pf^2$ und da
$ac^2 + pc^2 = af^2 + pf^2 = D^2$, so ist $af^2 = \frac{1}{4}D^2 + pc^2$
„d.h. das Quadrat der Seite des Fünfecks ist gleich der Summe der Quadrate der Seiten des Sechsecks und Zehnecks; das Quadrat der Diagonallinie des Fünfecks ist gleich der Summe der Quadrate der Seite des Sechsecks und der Diagonallinie des Zehnecks."

Der Bogen ac ist die Hälfte des Bogens af, der Bogen af ist die Hälfte der Ergänzung des Bogens ac zum Umfange, also (V. 36)

$$ac^2 = \frac{1}{2}D(D - pf) = \frac{1}{8}D^2(5 - \sqrt{5})$$

$$af^2 = \frac{1}{2}D(D + pc) = \frac{1}{8}D^2(5 - \sqrt{5})$$

Um die Linien durch die Seite des Zehnecks auszudrücken, ist $pc.\,pf = \frac{1}{4}D^2$, also $\frac{D}{pf} = \frac{4pc}{D} = (\sqrt{5}+1)$, also $D = pf(\sqrt{5}+1)$

Ferner $af^2 + pf^2 = D^2$, also $\frac{af^2}{pf^2} = \frac{D^2}{pf^2} - 1$
$5 + 2\sqrt{5}$, also $af^2 = pf^2(5 + 2\sqrt{5})$

Um die Linien durch die Seite des Fünfecks auszudrücken ist $\frac{ac^2}{D^2} = \frac{5-\sqrt{5}}{8} = \frac{5}{10+2\sqrt{5}}$
also $D^2 = ac^2(2 + \frac{2}{5}\sqrt{5})$, $pc^2 = ac^2(1 + \frac{2}{5}\sqrt{5})$

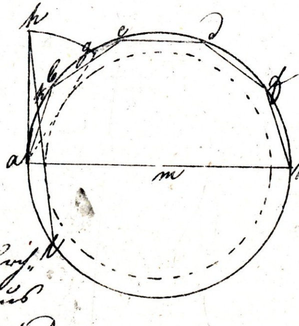
Um die Berechnung in Zahlen zu machen, ist

$$\sqrt{5} = 2{,}2360679774997896964$$

Hieraus folgt nach den obigen Ausdrücken

$pf = D.\ 0,30901699437494$
$ac = D.\ 0,58778525229247$
$pc = D.\ 0,80901699437494$
$af = D.\ 0,95105651629653$
$D = ac.\ 1,70130161670407$
$pc = ac.\ 1,37638192047117$
$D = pf.\ 3,23606797749978$
$af = pf.\ 3,07768353717525$

42.

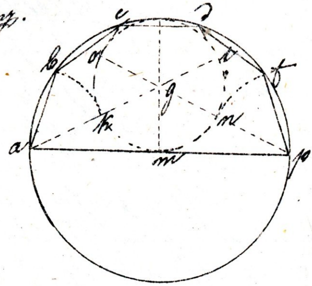


In einen Kreis ein regelmäßiges Fünfeck und Zehneck zu verzeichnen.

Erste Auflösung.

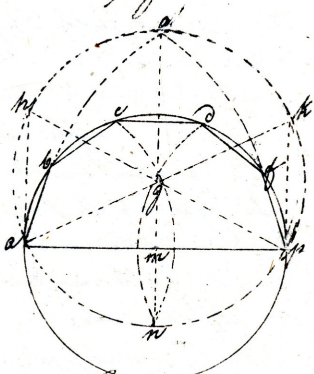
Man ziehe den Durchmesser ap, trage aus a die Sehne $ag = am = \frac{1}{2}D$ in den Umfang, fälle von m auf ag eine Senkrechte, und beschreibe mit dieser zum Halbmesser einen concentrischen Kreis, welcher (III. 30) die ag berührt. Errichte auf ap in a eine Senkrechte $ak = am = \frac{1}{2}D$, ziehe aus k an den concentrischen Kreis (III. 44) eine Berührende kKl, welche den gegebenen Kreis in K, l, schneidet, so ist $Kl = ag = \frac{1}{2}D$, und da ka den gegebenen Kreis in a berührt (III 30) so ist (III. 51) $kl.\,kK = ka^2 = \frac{1}{4}D^2$, und $kl - kK = \frac{1}{2}D$. Da nun (V 41) $pc - pf = \frac{1}{2}D$, $pc.\,pf = \frac{1}{4}D^2$ so ist $kK = ab = pf$ die Seite des Zehnecks, und $kl = pc = ad$ die Diagonallinie des Zehnecks.

Zweite Auflösung.



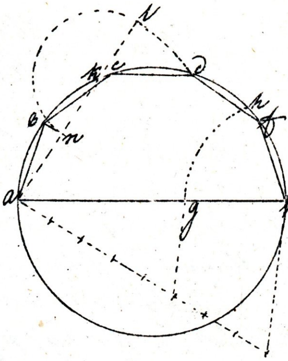
Errichte in dem Mittelpunkt m auf dem Durchmesser ap die Senkrechte $mg = \frac{1}{2} am = \frac{1}{4} D$, beschreibe aus g mit dem Halbmesser gm einen Kreis, welcher die ap in m berührt, ziehe ag, pg, welche ihn in k, l, n, o, schneiden, so ist $al - ak = po - pn = 2mg = \frac{1}{2} D$ und (III.54) $al . ak = po . pn = am^2 = \frac{1}{4} D^2$, also ist $al = po = ad = pc$ die Diagonallinie des Zehnecks, und $ak = pn = ab = pf$ die Seite des Zehnecks.

Dritte Auflösung.



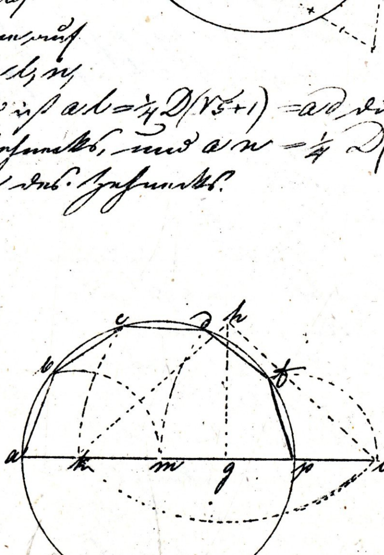
Errichte auf ap die Senkrechten $ah = pk = \frac{1}{2} D$, ziehe ak, ph, welche einander in g schneiden, so daß gm senkrecht auf ap und $= \frac{1}{4} D$, beschreibe aus g mit $ga = gp$ einen Kreis welcher die Senkrechte mg in n, o schneidet, so ist $mo - mn = 2mg = \frac{1}{2} D$, und (III.54) $mo . mn = am . mp = \frac{1}{4} D^2$, also $mo = pc = ad$ die Diagonallinie des Zehnecks, und $mn = ab = pf$ die Seite des Zehnecks. Da $an^2 = am^2 + mn^2 = \frac{1}{4} D^2 + pf^2$, und $ao^2 = am^2 + mo^2 = \frac{1}{4} D^2 + pc^2$, so ist $an = pn = ac = pd$ die Seite des Fünfecks und $ao = po = af = pb$ die Diagonallinie des Fünfecks.

Vierte Auflösung.

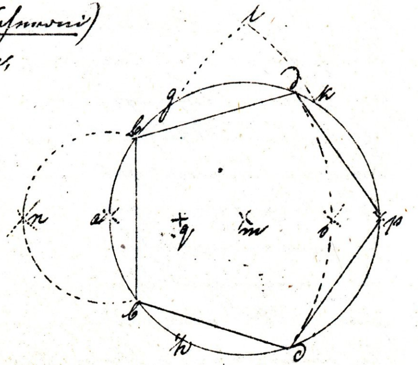


Man theile den Durchmesser ap in g so, daß $pg = \frac{3}{8} D$ sey, mache die Sehne $ph = pg$, theile den Bogen ah in k in die Hälfte, ziehe die Sehne ak, so ist (V. 36) $ak^2 = \frac{1}{2} D (D - ph) = \frac{5}{16} D^2$, also $ak = \frac{1}{4} D . \sqrt{5}$. Man nehme auf der Sehne ak die Punkte l, m, so daß $kl = km = \frac{1}{4} D$, so ist $al = \frac{1}{4} D (\sqrt{5} + 1) = ad$ die Diagonallinie des Zehnecks, und $am = \frac{1}{4} D (\sqrt{5} - 1) = ab$ die Seite des Zehnecks.

Fünfte Auflösung.



Man theile den Halbmesser mp in g in die Hälfte, errichte in g auf ap eine Senkrechte $gh = \frac{1}{2} D$, beschreibe aus h mit dem Halbmesser $ag = \frac{3}{4} D$ einen Kreis, welcher den Durchmesser ap in k, l schneidet, so ist $gk^2 = gl^2 = \frac{9}{16} D^2 - \frac{4}{16} D^2 = \frac{5}{16} D^2$, also $gk = gl = \frac{1}{4} D . \sqrt{5}$. Also $pl = pf = km = kb = ab$ die Seiten des Zehnecks, und $pk = pe = lm = ld$ die Diagonallinien des Zehnecks.



Sechste Auflösung (Mascheroni)

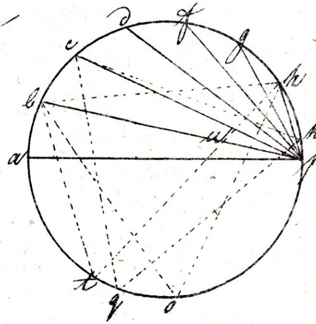
Der Mittelpunkt sey m, ein beliebig gewählter Punkt des Umfangs sey a. Man trage den Halbmesser von a nach g, von g nach k, von k nach p, von a nach h; so liegen a, m, p in gerader Linie. Aus a und p mit dem Halbmesser $ak = pg = D\sqrt{\frac{3}{4}}$ beschreibe man Bögen, welche einander in l schneiden, so ist ml senkrecht auf ap, und $= D\sqrt{\frac{1}{2}}$. Aus g und h beschreibe man Bögen mit dem Halbmesser $ml = D\sqrt{\frac{1}{2}}$, welche einander in n und o schneiden, so liegen diese Punkte in der geraden Linie ap und wenn q die Mitte von gh und no, so ist $qn^2 = gn^2 - gq^2 = D^2 \cdot \frac{1}{2} - D^2 \cdot \frac{3}{16} = D^2 \cdot \frac{5}{16}$, also $qn = qo = \frac{1}{4} D\sqrt{5}$, und da $qa = qm = \frac{1}{4} D$, so ist an die Seite des Zehnecks, ao die Ergänzungslinie des Zehnecks. Man mache also $ab = an$, $ad = ao$, so ist pdbcd ein regelmäßiges Fünfeck. Diese Verzeichnung kann mittelst des Zirkels allein, ohne Lineal, ausgeführt werden.

43.

Das regelmäßige eingeschriebene Fünfzehneck zu berechnen.

Es sey $ap = D$ der Durchmesser, die Sehne ab sey die Seite des Fünfzehnecks, so ist pb die Ergänzungssehne derselben

Bogens als Diagonallinie des Zehnecks gegeben; pk die Ergänzungssehne des sechszehnten Bogens als Seite des Zehnecks gegeben; pg die Ergänzungssehne des fünfzehnten Bogens als Seite des



Sechsecks oder Halbmesser des Kreises gegeben. Zur Berechnung der übrigen Sehnen dient folgender Hülfssatz:

„Wenn aus einem beliebigen Punkte des Umfangs nach den Ecken des eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks Sehnen gezogen werden, so ist die größere derselben gleich der Summe der beiden kleinern." Z. B. die Punkte b, k, o, bilden ein gleichseitiges Dreieck. Es sei p ein beliebiger Punkt des Umfangs, man ziehe bt = pk; wenn pb, kt, einander in u schneiden, so ist $\angle ubt = upk = bok = btu = ukp = \frac{2}{3} R$, also $pu = uk = pk$, $bu = ut = bt$. Auch $\angle uto = kbo = bko = upo = but = \frac{2}{3} R$, also upot ein Parallelogramm, also $po = tu = bu$, also $pb = bu + pu = po + pk$. Daraus ergiebt das gleichseitige Δ bok die Gleichungen:

$$pb - po = pb - pf = pk = \frac{1}{4} D(\sqrt{5}-1)$$

$$ab + ao = ab + af = ak = \frac{1}{4} D \sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

das gleichseitige Δ ckq ergiebt die Gleichungen

$$pq - pc = pk = pd = \frac{1}{4} D(\sqrt{5}+1)$$

$$aq = ak - ac = ad = \frac{1}{4} D \sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

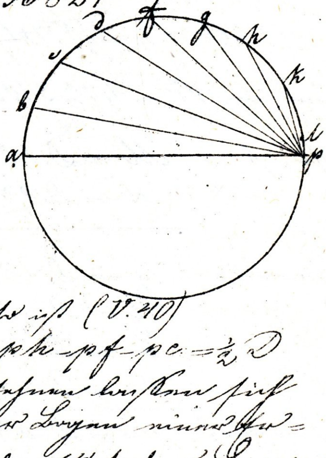
Auch werden gelten (V. 39) die Gleichungen:

$$pb.pf = \tfrac{1}{2}D(pd+pg) = \tfrac{1}{8}D^2(\sqrt{5}+3)$$
$$ab.af = \tfrac{1}{2}D(pd-pg) = \tfrac{1}{8}D^2(\sqrt{5}-1)$$
$$pc.pk = \tfrac{1}{2}D(pg-pk) = \tfrac{1}{8}D^2(3-\sqrt{5})$$
$$ac.ak = \tfrac{1}{2}D(pg+pk) = \tfrac{1}{8}D^2(\sqrt{5}+1)$$

Da hiernach nun je zwei Sehnen das Produkt und die Summe oder Differenz gegeben ist, so lassen sie sich auf dieselbe Art, wie in §. 41 gezeigt worden, finden, und man erhält:

$$pb = D.\ 0,9781476007338\dot{0}$$
$$pf = D.\ 0,6691306063588\dot{5}$$
$$ab = D.\ 0,2079116908172\dot{2}$$
$$af = D.\ 0,7431448254793\dot{1}$$
$$pc = D.\ 0,9135454576426\dot{0}$$
$$pk = D.\ 0,1045284632676\dot{5}$$
$$ac = D.\ 0,4067366430758\dot{0}$$
$$ak = D.\ 0,9945218953682\dot{7}$$

44.



Das eingeschriebene regelmässige Fünfzehneck zu berechnen.

Wenn man durch eine Ecke a den Durchmesser ap = D zieht, und die folgenden Ecken mit b, c, d, f, g, h, k, l, bezeichnet, so ist (§. 40)

$$pb+pd+pg+pk-pl-ph-pf-pc = \tfrac{1}{2}D$$

Aus diesen acht Ergänzungssehnen lassen sich vier Paare bilden, so daß der Bogen einer Ergänzungssehne entweder dem 4fachen Bogen einer andern gleich ist, oder denselben zum ganzen oder doppelten Umfange ergänzt.

Es sey nämlich der Umfang = P, so ist

$af = 4ab$ und $ab + 4af = P$

$al = 4ac$ und $ac + 4al = 2P$

$ag + 4ad = P \quad 4ag - ad = P$

$4ah - ak = P \quad 4ak + ah = 2P$

demnach sind $d, g;\ h, k;\ c, l;\ b, f;$ zusammengehörige Punkte, und es ist:

$$(pd + pg) - (ph - pk) - (pc + pl) + (pb - pf) = \tfrac{1}{2} D$$

Es sey $pd + pg = G$, $ph - pk = H$, $pc + pl = K$, $pb - pf = L$

so ist $G - H - K + L = \tfrac{1}{2} D$

Jede dieser vier Linien besteht aus zwei Ergänzungsstücken, deren Rechtecke (V. 39)

$$pd \cdot pg = \tfrac{1}{2} D \cdot K,\quad ph \cdot pk = \tfrac{1}{2} D \cdot L,\quad G \cdot H = \tfrac{1}{4} D^2$$

$$pc \cdot pl = \tfrac{1}{2} D \cdot H,\quad pb \cdot pf = \tfrac{1}{2} D \cdot G\quad K \cdot L = \tfrac{1}{4} D^2$$

Setzt man $G - H = M$, $K - L = N$, so ist

$M - N = \tfrac{1}{2} D$, und (V. 39) $M \cdot N = D^2$

also $M = \tfrac{1}{4} D(\sqrt{17} + 1)$, $N = \tfrac{1}{4} D(\sqrt{17} - 1)$

und da $\sqrt{17} = 4{,}123105625617660549821409855974$

so ist . . . $M = D \cdot 1{,}28077640640441$

$N = D \cdot 0{,}78077640640441$

hieraus:

$G = D \cdot 1{,}45285177210887$

$H = D \cdot 0{,}17207536570445$

$K = D \cdot 1{,}02474058886765$

$L = D \cdot 0{,}24396418246324$

hieraus:

$pd = D \cdot 0{,}85021713572961$

$pg = D \cdot 0{,}60263463637925$

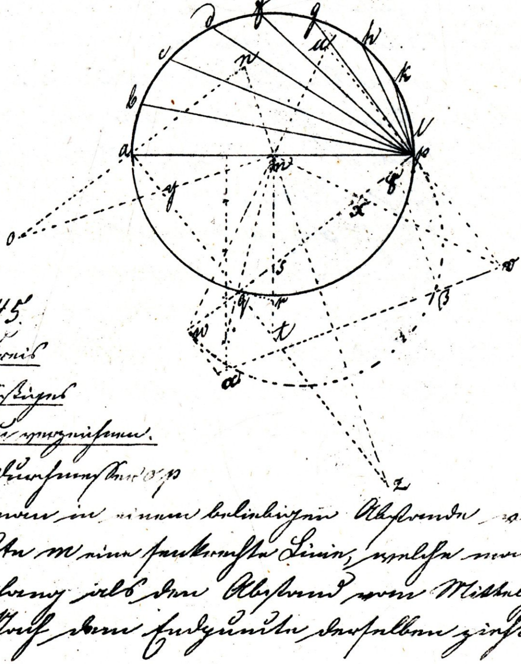
$ph = D \cdot 0{,}44573835577653$

$pk = D \cdot 0{,}27366299007208$

$pe = D.\ 0,93247222940435$
$pl = D.\ 0,09226835946330$
$pb = D.\ 0,98297309968390$
$pf = D.\ 0,73900891722065$

Hieraus (V.36) $ab = D.\ 0,18374951781657$
$ac = D.\ 0,36124166618715$
$ad = D.\ 0,52643216287735$
$af = D.\ 0,67369564364655$
$ag = D.\ 0,79801722728023$
$ah = D.\ 0,89516329135506$
$ak = D.\ 0,96182564317281$
$al = D.\ 0,99573417629503$

Der Umfang des Siebzehnecks ist:
$17\,ab = D.\ 3,12374180288169$



45.

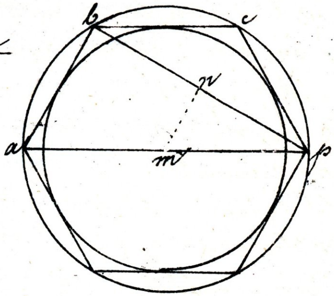
In einem Kreis ein regelmäßiges Siebzehneck zu verzeichnen.

Auf dem Durchmesser o p errichtet man in einem beliebigen Abstande vom Mittelpunkte m eine senkrechte Linie, welche man 4 mal so lang als den Abstand vom Mittelpunkte macht. Nach dem Endpunkte derselben zieht man

man Mittelpunkt eine gerade Linie welche den Kreis in q schneidet. Zu q errichtet man auf mq eine senkrechte Linie, welche die in m auf ap errichtete senkrechte Linie in r schneidet, so ist auch $mq = 4qr$, also $qr = \frac{1}{8} D$. Man zieht pq, aq, welche die mr in s, t, schneiden, so ist $\angle aqp = mqr = sqt = amt = pmt = R$, also sind $\angle aqm = sqr$, $\angle mqp = rqt$; $amsq$, $pmqt$ sind Kreisvierecke, also $\angle maq = qsr$, $\angle mpq = rtq$, also $\Delta\, sqr \sim aqm$, $\Delta\, tqr \sim pqm$, also $sr = rq = rt$; mq berührt den über dem Durchmesser st beschriebenen Halbkreis, also $mt - ms = st = \frac{1}{4} D$, und $mt \cdot ms = mq^2 = \frac{1}{4} D^2$. Also (V. 44) $mt = \frac{1}{2} M$, $ms = \frac{1}{2} N$. Man errichte in p auf pq die senkrechten Linien $pw = pv = \frac{1}{2} D$, ziehe wm, vm, welche die pq in w, x, schneiden, so ist $\Delta\, msx \sim mpw$, $\Delta\, msw \sim mpv$, also $ws = ms = xs$, pm berührt den über dem Durchmesser wx beschriebenen Halbkreis, also $pw - px = wx = 2ms = N$, und $pw \cdot px = pm^2 = \frac{1}{4} D^2$, also (V. 44) $pw = K$, $px = L$. Man errichte in a auf aq die senkrechten Linien $an = ao = \frac{1}{2} D$, ziehe nm, om, welche die aq in y, z, schneiden, so ist $\Delta\, man \sim mty$, $\Delta\, mao \sim mtz$, $yt = mt = tz$, am berührt den über dem Durchmesser yz beschriebenen Halbkreis, also ist $az - ay = yz = 2mt = M$, $az \cdot ay = am^2 = \frac{1}{4} D^2$, also (V. 44) $az = G$, $ay = H$. Man errichte auf pw die Senkrechte $w\alpha = ay = H$, ziehe $v\alpha$, beschreibe über $pw = K$ einen Halbkreis, welcher die $v\alpha$ in β schneidet, errichte in β auf $v\alpha$ eine Senkrechte, welche die pw in γ schneidet, so sind $pv\beta\gamma$, $w\alpha\beta\gamma$, Kreisvierecke, also $\angle pv\gamma = p\beta\gamma = w\beta\alpha = w\gamma\alpha$, also $\Delta\, pv\gamma \sim w\gamma\alpha$, also $\frac{p\gamma}{pv} = \frac{w\alpha}{w\gamma}$, also

$py \cdot yw = pv \cdot wx = \frac{1}{2} D.H.$ und $py + yw = pw = K.$ also (V. 44) $wy = pc$ d. h. gleich der Ergänzungssehne des doppelten Bogens des Ausschnitts, und $py = pl$, d. h. gleich der Ergänzungssehne des einfachen Bogens des Ausschnitts, oder gleich der Seite des 34-Ecks.

46.



An einem regelmäßigen Vieleck aus den Verhältnissen der Durchmesser des umschriebenen und eingeschriebenen Kreises zur Seite, die übrigen Stücke zu bestimmen.

Es sey ab die Seite, ap der Durchmesser des umschriebenen Kreises, pb die Ergänzungssehne. Da das aus dem Mittelpunkt m auf pb gefällte Loth mn die Sehne pb in die Hälfte theilt, und $\angle pba = R$, so ist pb der Durchmesser des eingeschriebenen Kreises. Man setze das Verhältniß des Durchmessers des umschriebenen Kreises zur Seite $\frac{ap}{ab} = D$, das Verhältniß des Durchmessers des eingeschriebenen Kreises zur Seite $\frac{pb}{ab} = E$, die Anzahl der Seiten $= N$, so lassen sich aus diesen drei Zahlen alle übrigen Stücke des Vielecks finden; außerdem kann auch eine der beiden Zahlen D, E, aus der andern gefunden werden.

Es ist nämlich $ap^2 - pb^2 = ab^2$, also $\frac{ap^2}{ab^2} - \frac{pb^2}{ab^2} = 1$, also $D^2 - E^2 = 1$.

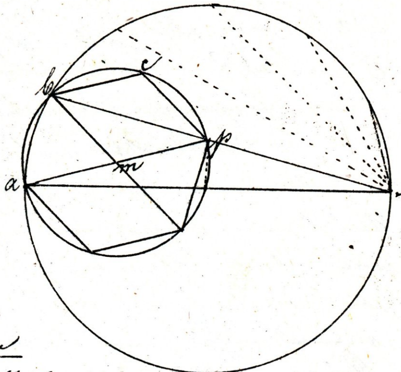
Nimmt man nun die Seite des Vielecks ab als gegeben an, so ist der Umfang des Vielecks $= ab.\,N$, der Durchmesser des umschriebenen Kreises $= ab.\,D$, der Durchmesser des eingeschriebenen Kreises $= ab.\,E$, der Inhalt des Vielecks (III. 7) $= ab^2\,\frac{N.\,E}{4}$.

Nimmt man den Durchmesser des Kreises als gegeben an, so multiplicirt man ihn mit $\frac{1}{D}$ um die Seite, mit $\frac{N}{D}$, um den Umfang des eingeschriebenen Vielecks zu erhalten; mit $\frac{1}{E}$ um die Seite, mit $\frac{N}{E}$ um den Umfang des umschriebenen Vielecks zu erhalten; das Quadrat des Durchmessers multiplicirt man mit $\frac{NE}{4D^2}$ um den Inhalt des eingeschriebenen Vielecks, und mit $\frac{N}{4E}$ um den Inhalt des umschriebenen Vielecks zu erhalten.

Nimmt man den Halbmesser des Kreises als gegeben an, so multiplicirt man ihn mit $\frac{2}{D}$ um die Seite des eingeschriebenen Vielecks, und mit $\frac{2}{E}$ um die Seite des umschriebenen Vielecks zu erhalten; das Quadrat des Halbmessers multiplicirt man mit $\frac{NE}{D^2}$ um den Inhalt des eingeschriebenen Vielecks, und mit $\frac{N}{E}$ um den Inhalt des umschriebenen Vielecks zu erhalten.

„der Umfang des umschriebenen Vielecks verhält sich zum Durchmesser, wie der Inhalt des umschriebenen Vielecks zum Quadrat des Halbmessers."

47.



<u>Aus dem Durchmesser des Kreises und dem Umfange eines regelmäßigen eingeschriebenen und umschriebenen Vielecks, den Umfang des eingeschriebenen und umschriebenen Vielecks von doppelter Seitenzahl zu finden.</u>

Vermöge V. 46. läßt sich diese Aufgabe darauf zurückführen, aus den Werthen von D und C für ein gegebenes regelmäßiges Vieleck, die Werthe von D und C für ein regelmäßiges Vieleck von doppelter Seitenzahl zu finden.

Wenn man in einem Vieleck, dessen Seite ab, Durchmesser des umschriebenen Kreises ap, Ergänzungssehne oder Durchmesser des eingeschriebenen Kreises pb ist, diese letztere nach s verlängert, so daß $ps = ap$ ist, so ist $\angle asb = \frac{1}{2} apb$, also as der Durchmesser des umschriebenen und sb der Durchmesser des eingeschriebenen Kreises eines Vielecks von doppelter Seitenzahl, dritten Seite ab ist. Bei jenem Winkelbruch ist $\frac{ap}{ab} = D$, $\frac{pb}{ab} = E$, bei dem andern ist $\frac{as}{ab} = D'$, $\frac{sb}{ab} = E'$. Aber $sb = sp + pb = ap + pb$, also $\frac{sb}{ab} = \frac{ap}{ab} + \frac{pb}{ab}$, also $E' = D + E$.

Wenn man also bei einem regelmäßigen Winkelbr. die Werthe von D und E addirt, so erhält man den Werth von E für ein Winkelbr. von doppelter Seitenzahl, und hieraus den entsprechenden Werth von D durch die Gleichung $D^2 = E^2 + 1$. Auf diese Art fortfahrend erhält man die Werthe von D und E für ein Winkelbr. von 4facher, 8facher, 16facher u. s. w. Seitenzahl.

Weil es, besonders bei vielstelligen Zahlen, beschwerlich ist, das Quadrat von E zu bilden, und nachher wieder die Quadratwurzel aus E^2+1 zu ziehen, so kann man diese doppelte Rechnung durch gemischte Auflösung einer quadratischen Zahlengleichung umgehen. denn da $D^2 = E^2 + 1$ oder $D^2 - E^2 = 1$ oder $(D-E)(D+E) = 1$ ist, so sey $D = E + x$, dann ist $x(2E + x) = 1$ oder $x^2 + 2Ex = 1$ der schon bekannte Theil von x sey a, der zu findende b, so ist $x = a + b$, $x^2 = a^2 + 2ab + b^2$ also $(2a + 2E)b + b^2 = 1 - 2Ea - a^2 = r$. Um b zu finden, dividirt man also den Rest r mit $2a + 2E$.

Beispiel

Für $N=6$ ist (III 48) $D=2$, $E=\sqrt{3}=1,732050807$ also ist für $N=12$, $E=3,732050807$.

Man nimmt zuerst $a=0,1$

$2E$ 7,464101614
$2a$ 2

```
7,66410161
         6
7,7241016
        2
7,726101
      12
7,72730
      10
7,7274
```

```
2Ea  0,7464101614
a²   1
     2435898386
3 ...2299230484
3²   9
     127667902
1 ...77241016
1²   1
     50416886
6 ...46356610
6²   36
     4056676
5 ...3863651
5²   25
     193000
2 ...154548
4 ...30909
9 ...6955
8    617
```

$x=0,131652498$
E 3,732050807
D 3,863703305
E' 7,595754112

Man kann auch unmittelbar aus einem Werthe von E den Werth des nächstfolgenden E durch genäherte Auflösung einer quadratischen Zahlengleichung finden. Denn da $E'-E=D$ ist, ist $(E'-E)^2=D^2=E+1$, oder $E'^2-2E'E=1$. Setzt man $E'=x$, so ist $x^2-2Ex=1$. Man nimmt also $x=a+b$, $x^2=a^2+2ab+b^2$, so ist $(2a-2E)b+b^2=1+2Ea-a^2=r$. Um also b zu finden, dividirt man den Rest r mit $2a-2E$. Im obigen Beispiel nimmt man zuerst $a=7$.

2a	14	2Ca	52,248711298
2C	7,467101614	a^2	49
	6,53589838		4,248711298
	1,0	5 ..	3267949193
	7,5358983	5^2 ..	25
	18		730762105
	7,715898	9 ..	678230855
	10	9^2	81
	7,72589		44431250
	14	5	38579492
	7,7272	5^2	25
	10		5826758
	7,727	7	5408130
		7^2	49
			418138
		5	386365
		5^2	25
			31771
		4	30909
		1	772
		2	77
			15

$x = C = 7,595754112$

48.

Aus dem Durchmesser und dem Umfange, zu einem eingeschriebenen und umschriebenen regelmäßigen Vielecks den Umfang des eingeschriebenen und umschriebenen Vielecks von halber Seitenzahl zu finden.

Vermöge V. 46 läßt sich diese Aufgabe darauf zurückführen, aus den Werthen von D und C für ein Vieleck diejenigen für ein Vieleck von halber Seitenzahl zu finden. Da $D^2 - C^2 = 1$, und $D + C = C'$, so ist $(D - C)C' = 1$, also $D - C = \frac{1}{C'}$, also $2D = C' + \frac{1}{C'}$ und $2C = C' - \frac{1}{C'}$

Beispiel. Für das Zwölfeck ist (V. 47)

$C'' = 3,732050807$

2 ..	746410161
6 ..	223923048
7 ..	26124356
9 ...	3358845
4 ..	149282
9 ..	33588
1 ...	373
9 ...	336
3	11
	1,000000000

also durch dividiren

$\frac{1}{C'} = 0,267949193$

$C' = 3,732050807$

Summe $4,$

diff. $3,464101614$

$D = 2,$

$E = 1,732050807$

für das Achteck.

49.

Den Umfang des umschriebenen und eingeschriebenen 96=Ecks nach Archi„medes zu berechnen.

Archimedes (287–212 vor Christo) nahm für die Seite des Sechsecks die Zahl 153 zur Einheit an, und berechnete hieraus für die Vielecke von 12, 24, 48, 96 Seiten (V. 47) die Werthe von E und D, wobei er absichtlich die Zah„len etwas kleiner nahm, als sie wirk„lich sein müßten, nämlich:

N	E × 153	D × 153
6	265	306
12	571	$591\frac{1}{8}$
24	$1162\frac{1}{8}$	$1172\frac{1}{8}$
48	$2334\frac{1}{4}$	$2339\frac{1}{4}$
96	$4673\frac{1}{2}$	—

Folglich ist beim 96-eck, die Zahl C etwas größer als $\frac{4673\frac{1}{2}}{153}$. Aber (V. 46) der Umfang des umschriebenen Vielecks ist gleich dem Durchmesser multiplicirt mit der Zahl $\frac{N}{C}$. Also ist das Verhältniß des Umfangs des umschriebenen 96-ecks zum Durchmesser etwas kleiner als die Zahl

$$\frac{96 \times 153}{4673\frac{1}{2}} = 3\tfrac{1}{7}.$$

Die genauere Berechnung giebt $3,1427146 = 3\,\frac{4863}{34075}$

Ferner nahm Archimedes für die Seite des Sechsecks die Zahl 780 zur Einheit an, und berechnete hieraus für D und C Zahlen, welche er etwas größer annahm, als sie wirklich seyn müssen, nämlich:

N	C × 780	D × 780
6	1351	1560
12	2911	$3013\frac{3}{4}$
24	$5924\frac{3}{4}$	$5976\frac{7}{44}$
48	$11900\frac{10}{11}$	$11926\frac{17}{33}$
96	$23827\frac{14}{33}$	$23840\frac{5}{22}$

Folglich ist beim 96-eck, die Zahl D etwas kleiner als $\frac{23840\frac{5}{22}}{780}$. Aber (V. 46) der Umfang des eingeschriebenen Vielecks ist gleich dem Durchmesser multiplicirt mit der Zahl $\frac{N}{D}$. Also ist das Verhältniß des

Umfangs des eingeschriebenen 96-ecks zum durch-
messer etwas grösser als die Zahl $\frac{0\,96 \times 730}{23840\frac{5}{232}} = 3\frac{10}{71}$
die genauere Berechnung giebt
$3{,}14103195 = 3\frac{11}{78} = 3\frac{287}{2035}$

50.

Die regelmässigen Vielecke zu berechnen welche aus den Vielecken von 3, 4, 5, 15 Seiten durch fortgesetzte Halbierung des Centriwinkels entstehen.

Aus dem Dreieck.

Beim Dreieck ist $D = \frac{2}{3}\sqrt{3}$, $E = \frac{1}{3}\sqrt{3}$
Beim Sechseck $D = 2$, $E = \sqrt{3}$
$\sqrt{3} = 1{,}73205080756887729352744$

N		
3	E ...	0,5773502691896257645 09
	D ...	1,1547005383792515290 18
6	E ...	1,7320508075688772935 27
	D ...	2,
12	E ...	3,7320508075688772935 27
	D	3,8637033051562731469 98
24	E ...	7,5957541127251504405 26
	D	7,6612975755403886690 90
48	E ...	15,2570516882655391096 17
	D ...	15,2897882986785116960 56
96	E ...	30,5468399869440508056 74
	D ...	30,5632039090793623883 39
192	E ...	61,1100438960234131940 13
	D ...	61,1182253094266070703 83
384	E ..	122,2282692054500202643 97
	D ..	122,2323598437020076205 67
768	E ..	244,4606290491520278849 64
	D ..	244,4626743597212476285 53

N		
1536	E	488,9233034 0887327 5513517
	D	488,9243260 6308837 0354672
3072	E	977,8476294 7196164 5868190
	D	977,8481407 9893550 4118994
6144	E	1955,6957702 7089714 9987185
	D	1955,6960259 3436736 7974646
12288	E	3911,3917962 0526451 7961831
	D	3911,3919240 3699753 8062704
24576	E	7822,7837202 4226205 6024535
	D	7822,7837841 5812830 4963429
49152	E	15645,5675044 0039036 0987965
	D	15645,5675363 5832345 2818470
98304	E	31291,1350407 5871381 3806436

<u>Aus dem Viereck</u>

Beim Viereck ist $D = \sqrt{2}$, $E = 1$

$\sqrt{2} = 1,4142135\,6237309\,5048801\,6887242$
0969807856967

N		
4	E	1,
	D	1,4142135 6237309 5048801
8	E	2,4142135 6237309 5048801
	D	2,6131259 2975275 3055713
16	E	5,0273394 9212584 8104514
	D	5,1258308 9548301 2357592
32	E	10,1531703 8760886 0462107
	D	10,2022972 3737832 7716212
64	E	20,3554676 2498718 8178319
	D	20,3800162 4709611 3622424
128	E	40,7354838 7208330 1800743
	D	40,7477563 3446286 8075974
256	E	81,4832402 0654616 9876718
	D	81,4893762 0670379 3278682
512	E	162,9726164 1324996 3155401
	D	162,9756843 8445138 5820391
1024	E	325,9483067 9770134 8975793
	D	325,9498347 7969243 7642315

N°		
2048	E	651,8981355 7739378 6618108
	D	651,8989025 0793812 9710713
4096	E	1303,7970381 4533191 6328822
	D	1303,7974216 4054768 7769810
8192	E	2607,5944597 8587960 4098633
	D	2607,5946515 3348043 9807518
16384	E	5215,1891113 1936004 3906151
	D	5215,1892071 9315958 0509191
32768	E	10430,3783185 1251962 4415343
	D	10430,3783664 4941928 2560439
65536	E	20860,7566849 6193890 6975782
	D	20860,7567089 3038872 2278777
131072	E	41721,5133938 9232762 9254560

Aus dem Fünfeck.

Beim Fünfeck ist $D = \sqrt{2 + \frac{2}{5}\sqrt{5}}$ $E = \sqrt{1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}}$

Beim Zehneck ist $D = 1 + \sqrt{5}$ $E = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$

$\sqrt{5} = 2,2360679\,7749978\,9696409\,1736687\,3127623\,5440618$

5	E	- - 1,3763819 2047117 3538207
	D	- - 1,7013016 1670407 9864363
10	E	- - 3,0776835 3717525 3402570
	D	- - - 3,2360679 7749978 9696409
20	E	- - - 6,3137515 1467504 3098979
	D	6,3924532 2149966 1547042
40	E	- - - 12,7062047 3617470 4646021
	D	- - - 12,7454948 4318237 4286193
80	E	- - - 25,4516995 7935707 8932215
	D	- - - 25,4713370 5712845 5907025
160	E	- - - 50,9230366 3648553 4839240
	D	- - - 50,9328544 2895232 0532730
320	E	101,8558910 6543785 5371971
	D	101,8607998 4338598 9054850
460	E	203,7166909 0882384 4426822
	D	203,7191452 8301278 8280843
1280	E	407,4358361 9183663 2707665
	D	407,4370633 7708298 0960859

N		
2560	E	814,87228995689196136685 25
	D	814,87351316131177285775 3
5120	E	1629,77464127302313865 26279
	D	1629,74467195263985892700 29
10240	E	3259,49313225662997579630 8
	D	3259,49328565470996775 62336
20480	E	6518,98641791133994335 8644
	D	6518,98649461037948804 0943
40960	E	13037,97291252171943139 9588
	D	13037,97295087123914734 0648
81920	E	26075,94586339295857874 0236
	D	26075,94588256771842966 0755
163840	E	52151,89174596067700840 0992

Aus dem Fünfzehneck

Beim 15 Eck ist $D = \sqrt{3} + \sqrt{5+2\sqrt{5}}$, $E = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{15} + \frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

Beim 30 Eck ist $D = 2 + \sqrt{5} + \sqrt{15+6\sqrt{5}}$, $E = \frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{15} + \frac{1}{2}\sqrt{50+22\sqrt{5}}$

$\sqrt{15} = 3,872983346207416885179265399781$

$\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 3,804226065180614288465757333517 5285$

N		
15	E	4,70463010947845423358 6
	D	4,80973434474413069609 7
30	E	9,51436445422258492908 3
	D	9,56677223350562613372 2
60	E	19,08113668772821106340 6
	D	19,10732260929739799222 96
120	E	38,18845929702560905570 2
	D	38,20155001411044414130 5
240	E	76,39000931113605319700 8
	D	76,39655438928808721626 5
480	E	152,78656370042414041327 4
	D	152,78983620445361156333 6
960	E	305,57639990487775197661 1
	D	305,57803615251173969191 9
1920	E	611,15443605738949166853 0
	D	611,15525418065889424282 8
3840	E	1222,30969023804838591135 6
	D	1222,31009929961463835681 11

N		
7680	E	2444, 6197895 3766302 4268170
	D	2444, 6199940 6843759 4387831
15360	E	4889, 2397836 0610061 8656001
	D	4889, 2398858 7148683 4203016
30720	E	9778, 4796694 7758745 2859017
	D	9778, 4797206 1028042 6943425
61440	E	19556, 9593900 8786787 9802443
	D	19556, 9594156 5421435 0133509
122880	E	39113, 9188057 4208222 9935952

Anmerkung. Die vorstehenden Zahlen sind bis mit zur 21sten Decimalstelle richtig, da sie auf 24 Decimalstellen berechnet wurden.

51

Das regelmäßige Vieleck im Allgemeinen zu berechnen.

In den vorhergehenden Aufgaben ist gezeigt worden, wie die regelmäßigen Vielecke von 3, 4, 5, 15, 17, Seiten, und diejenigen, welche aus diesen durch fortgesetzte Verdoppelung der Seitenzahl oder Halbirung der Centriwinkel entstehen, durch Auflösung quadratischer Gleichungen berechnet werden können. Hierher gehören auch die Vielecke von 257 und 65537 Seiten, und überhaupt alle diejenigen, deren Seitenzahl eine Primzahl ist, welche um 1 vermindert eine Potenz von 2 giebt, wie der berühmte Gauß (Disquisitiones arithmeticae, Lipsiae 1801. §365) zuerst bewiesen hat. Die Berechnung der Vielecke von 7, 9, 13, 19 Seiten, beruht auf der Auflösung kubischer Gleichungen, und die Berechnung des 11-ecks auf einer Gleichung vom 5ten Grade. Um diese Gleichungen zu finden, wendet man die Sätze V: 39. 40. an. Diese Vielecke können daher nicht durch Elementargeometrie, sondern nur durch Annäherung in den Kreis beschrieben werden. Um ein regelmässiges Vieleck zu berechnen, ist es hinreichend, die Werthe von D und E, d. h. die Verhältnisse der Durchmesser des umschriebenen und eingeschriebenen Kreises zur Seite, zu kennen, weil aus diesen beiden Zahlen alles übrige, welche sich auf das Vieleck beziehen (V. 46) berechnet werden können.

N	E	D
3	0,57735026918962	1,15470053837925
4	1,	1,41421356237309
5	1,37638192047117	1,70130161670407
6	1,73205080756887	2,
7	2,07652139657233	2,30476487096248
8	2,41421356237309	2,61312592975275
9	2,74747741945462	2,92380440016308
10	3,07768353717525	3,23606797749978
11	3,40568723888925	3,54946553288422
12	3,73205080756887	3,86370330515627
13	4,05715948563811	4,17858146886037
14	4,38128626753482	4,49395920743493
15	4,70463010947845	4,80973434474413
16	5,02733949212584	5,12583089548301
17	5,34952750550977	5,442191115175180
18	5,67128181961770	5,75877048314363
19	5,99267145852349	6,07553382097426
20	6,31375151467504	6,39245322149966

Die vorstehenden Zahlen sind bis mit zur 14ten Decimalstelle richtig, da sie bis auf 18

Dezimalstellen berechnet wurden und zwar auf doppelte Art, theils durch Auflösung der Gleichungen, theils durch unendliche Reihen. Aus diesen sind die Zahlen der folgenden Tafel berechnet worden, welche bis mit zur 10ten Dezimalstelle richtig sind.

N	$\frac{1}{4} N E$	$\frac{N}{D}$	$\frac{N}{E}$	$\frac{N E}{D^2}$
3	0,4330127018	2,5980762113	5,1961524226	1,2990381056
4	1,	2,8284271247	4,	2,
5	1,7204774005	2,9389262614	3,6327126400	2,3776412907
6	2,5980762113	3,	3,4641016151	2,5980762113
7	3,6339124440	3,0371861738	3,3710223310	2,7364101886
8	4,8284271247	3,0614674589	3,3137084989	2,8284271247
9	6,1818241937	3,0781812899	3,2757321083	2,8925442436
10	7,6942088429	3,0901699437	3,2491969623	2,9389262614
11	9,3656399069	3,0990581252	3,2298914223	2,9735244960
12	11,1961524227	3,1058285412	3,2153903091	3,
13	13,1857683283	3,1111036357	3,2042122194	3,0207006182
14	15,3345019363	3,1152930753	3,1954086414	3,0371861738
15	17,6423629105	3,1186753622	3,1883484250	3,0505248230
16	20,1093579685	3,1214451522	3,1825978780	3,0614674589
17	22,7354918984	3,1237418028	3,1778507508	3,0705541625
18	25,5207681882	3,1256671980	3,1738856527	3,0781812899
19	28,4651894279	3,1272972153	3,1705392380	3,0846449574
20	31,5687575733	3,1286893008	3,1676888064	3,0901699437

Die erste Columne giebt das Verhältniß des Inhalts zum Quadrat der Seite, die zweite das Verhältniß des Umfangs des eingeschriebenen Vielecks zum Durchmesser, die dritte das Verhältniß des Umfangs des umschriebenen Vielecks zum Durchmesser, so wie auch das Verhältniß des Inhalts des umschriebenen Vielecks zum Quadrat des Halbmessers; und das Verhältniß des Quadrats des halben Umfangs zum

Inhalt des Vielecks. die vierte Columne giebt das Verhältniß des Inhalts des eingeschriebenen Vielecks zum Quadrat des Halbmessers.

Die Zahl der zweiten Columne ist die mittlere Proportionalzahl zwischen den nebenstehenden Zahlen der dritten und vierten Columne. Bei einem Vieleck von gerader Seitenzahl ist die Zahl der vierten Columne gleich derjenigen Zahl welche in der zweiten Columne einem Vieleck von halber Seitenzahl entspricht.

Beispiele.

1, der Umfang eines gleichseitigen Dreiecks sey 220 Fuß, wie groß ist der Inhalt?
der halbe Umfang = 110, das Quadrat davon 12100, dividirt mit der Zahl der 3ten Col. 5,19615 giebt 2328,6 □ Fuß Inhalt.

2, der Umfang eines regelmäßigen 12=ecks sey 220 Fuß, wie groß ist der Inhalt?
das Quadrat des halben Umfangs ist 12100, dividirt mit der Zahl der 3 Col. 3,21539 giebt 3763,1 □ Fuß Inhalt.

3, die Seite eines regelmäßigen 12=ecks sey 16 Fuß, wie groß ist der Inhalt?
das Quadrat der Seite ist 256, multipl. mit der Zahl der 1 Col. 11,19615 giebt 2866,2 □ Fuß Inhalt.

4) der Durchmesser eines Kreises sey 125 Fuß, wie groß ist der Inhalt des eingeschriebenen und umschriebenen 8=ecks?
der Halbmesser 62½, das Quadrat davon 3906,25 multipl. mit den Zahlen der 4ten und 3ten Columne 2,828427, und 3,313708. giebt den Inhalt des eingeschriebenen 11045,5, des umschriebenen 12944,17 □ Fuß.

5. der Inhalt eines regelmässigen 8=ecks sey 12100 □ Fuss, wie gross ist die Seite?

der Inhalt 12100 dividirt mit der Zahl der Columne giebt 2505,99, die Quadratwurzel hieraus giebt die Seite 50,06 Fuss.

6) der Inhalt eines regelmässigen 13=ecks sey 12100 □ Fuss, wie gross ist der Durchmesser des umschriebenen und eingeschriebenen Kreises?

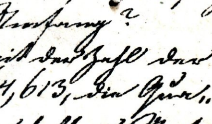
der Inhalt 12100, dividirt mit den Zahlen der 4ten und 3ten Columne 3,020700 und 3,204212.. giebt 4005,69 . und 3776,28. . die Quadratwurzeln hieraus geben die Halbmesser 63,2905, und 61,4514, also die Durchmesser des umschriebenen Kreises 126,58, des eingeschriebenen Kreises 122,90 Fuss.

7) der Inhalt eines regelmässigen 9=ecks sey 325 □ Fuss, wie gross ist der Umfang?

der Inhalt 325 multiplicirt mit der Zahl der 3 Columne 3,2757325 giebt 1064,613, die Quadratwurzel hieraus giebt den halben Umfang 32,628 also der Umfang 65,256 Fuss.

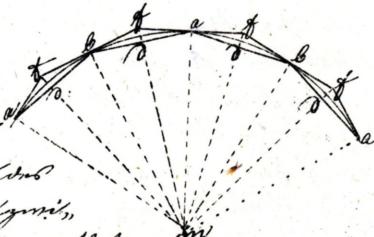
52.

das Verhältniss des Kreisumfangs zum Durchmesser, und des Kreisinhalts zum Quadrat des Halbmessers, ist für alle Kreise die unveränderliche Zahl $\pi = 3,14159265358979$



ein Bogen acb ist grösser als die gerade Linie oder Sehne ab, welche seine Endpunkte verbindet, und kleiner als die Summe der beiden Berührungslinien fa, fb, welche an die Endpunkte in derselben Ebene gezogen werden. der Inhalt des Segments acb ist grösser als der Inhalt des △ acb und kleiner als der

Inhalt des △ afb.



Wenn also in und um ei-
nen Kreis ein regelmäßi-
ges Vieleck beschrieben
wird, so ist jeder Bogen des
Kreises größer als die zwi-
schen seinen Endpunkten enthal-
tene innere Polygonlinie, und kleiner als die
zwischen seinen Endpunkten enthaltene äuße-
re Polygonlinie.

Eben so ist der Inhalt des Kreissektors größer als
der Inhalt des entsprechenden eingeschriebenen
Polygonsektors, und kleiner als der Inhalt des ent-
sprechenden umschriebenen Polygonsektors.

Derselbe Satz gilt auch für den ganzen Kreis.
Der Umfang des Kreises ist größer als der
Umfang des eingeschriebenen Vielecks und
kleiner als der Umfang des umschriebenen
Vielecks. Der Inhalt des Kreises ist größer
als der Inhalt des eingeschriebenen Vielecks
und kleiner als der Inhalt des umschriebenen
Vielecks.

Da $af^2 = ad^2 + df^2$, so nähert sich af desto
mehr der Linie ad, oder $af + fb$ desto mehr der
Sehne ab, je kleiner df ist. Aber $ad^2 = md \cdot df$,
also ist df desto kleiner, je größer md, d. h. je
kleiner der Mittelpunktswinkel amb ist, bei
gleichbleibender Sehne ab. Je größer also die
Anzahl der Theile des ganzen Bogens aa, ist, de-
sto mehr nähert sich die Länge der äußeren Poly-
gonlinie, der Länge der inneren Polygonlinie,
und der Inhalt des äußeren Polygonsektors
dem Inhalt des inneren Polygonsektors. Folglich

ist die Länge des Kreisbogens der gemein-
schaftliche Grenze, welcher sich die äußern
und innern Polygonlinien desto mehr an-
nähern, je größer man die Anzahl
der Theile macht. Eben so ist der Inhalt
des Kreisstücks die gemeinschaftliche Gren-
ze, welcher sich der Inhalt des äußern und
innern Polygonstücks desto mehr annähern,
je größer man die Anzahl der Theile macht.
Derselbe Satz gilt auch für den ganzen
Kreis. Je größer die Anzahl der Seiten des
Vielecks ist, desto mehr nähern sich der Um-
fang des äußern und innern Vielecks dem
Umfange des Kreises; und desto mehr
nähert sich der Inhalt des äußern und
innern Vielecks dem Inhalt des Krei-
ses.
Da $\triangle amf = \frac{1}{2} ma \cdot af = \frac{1}{4} D \cdot af$, so ist der Inhalt
des äußern Polygonstücks gleich dem Produkt
der äußern Polygonlinien mit $\frac{1}{4}$ des Durch-
messers, und verhält sich zum Quadrat des
Halbmessers, wie die äußern Polygonli-
nien zum Durchmesser. Folglich ist auch
der Inhalt des Kreisstücks gleich dem
Produkt des Kreisbogens mit $\frac{1}{4}$ des Durch-
messers, und verhält sich zum Qua-
drat des Halbmessers, wie der Bogen
zum Durchmesser.
Derselbe Satz gilt auch für den gan-
zen Kreis: der Inhalt des Kreises ist gleich
dem Produkt des Kreisumfangs mit $\frac{1}{4}$
des Durchmessers, und verhält sich
zum Quadrat des Halbmessers wie

der Umfang zum Durchmesser.
Um also dieses Kreisverhältniß π für eine bestimmte Anzahl Stellen zu erhalten, nimmt man (V. 50) ein Vieleck, in welchem die Werthe von D und E auf ebenso viel Stellen übereinstimmen. Z. B. beim 96-Eck ist $D = 30,5632..$ und $E = 30,5468..$ die Grenzen sind also
$\frac{N}{D} = 3,14103..$ und $\frac{N}{E} = 3,14271..$

Entsprechend fand auch dem 96-Eck (V. 49) $\frac{N}{D} = 3\frac{10}{71}$ und $\frac{N}{E} = 3\frac{1}{7}$ oder $\frac{1561}{497}$ und $\frac{1562}{497}$. Aus demselben 96-Eck giebt die genauere Berechnung die Grenzen $3\frac{11}{78}$ und $3\frac{1}{7}$ oder $\frac{1715}{546}$ und $\frac{1716}{546}$. Das Vieleck von 98304 Seiten giebt
$E = 31291,1350407$, $D = 31291,1350567$
also $\frac{N}{D} = 3,1415926530$, $\frac{N}{E} = 3,1415926547$
Das Vieleck von 131072 Seiten giebt
$E = 41721,5133938 9$, $D = 41721,5134058 7$
also $\frac{N}{D} = 3,14159265329$, $\frac{N}{E} = 3,14159265419$
Das Vieleck von 163840 Seiten giebt
$E = 52151,8917459606$ $D = 52151,8917555481$
also $\frac{N}{D} = 3,14159265339$, $\frac{N}{E} = 3,14159265397$
Wenn man die Werthe von E und D für eine so große Anzahl Seiten wie in (V. 50) berechnet hat, so ist es leicht, die Tafel noch viel weiter auszudehnen, und dadurch das Kreisverhältniß auf eine größere Anzahl von Decimalstellen zu berechnen. Nämlich es ist der Unterschied von D und E für
$N = 40960$ 0,000038349519715941060
$N = 81920$ ... 0,000019174759850920519

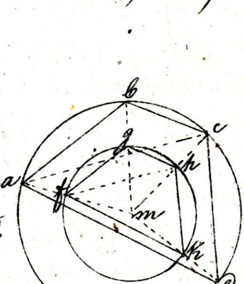
der zweite Unterschied ist bis mit zur 19ten Decimalstelle die Hälfte des vorigen Unterschiedes. Also wird auch die Hälfte des Unterschiedes für $N = 81920$ gleich dem Unterschied für $N = 163840$ seyn. Dadurch wird man für dasselbe N den Werth von D erhalten, durch Addition von D u. E, den Werth von E für $N = 327680$ finden, und so durch fortgesetzte Halbirung der Unterschiede, und durch Addition die Rechnung bis auf ein Vieleck fortführen können, bei welchem D und E, in der 19ten Decimalstelle übereinstimmen, wodurch man das Kreisverhältniß auf mehr als 40 Decimalstellen finden kann.

Durch Quadratwurzeln lassen sich einige ziemlich genaue Annäherungen für die Zahl π finden

z. B. $4\frac{2}{75} + \frac{1}{30}\sqrt{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2} = 3,141592652$

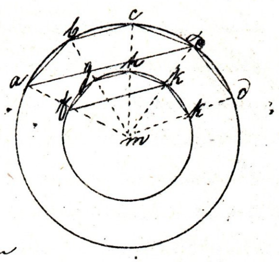
$\sqrt{9,8696} = 3,1415919$. $\sqrt{\frac{10975}{1112}} = 3,141592639$

§ 53.



<u>Alle Kreise sind einander ähnlich.</u>

Man beschreibe in den Umfang des einen Kreises ein beliebiges Vieleck $abcd$; die Halbmesser ma, mb, mc, md, schneiden den concentrischen Kreis in f, g, h, k. Da die $\triangle\, mab$, mfg, gleichschenklig sind und bei m einen gemeinschaftlichen Winkel haben, so ist $\angle mfg = mab$, also $fg \parallel ab$. Eben so $gh \parallel bc$, $hk \parallel cd$, also (II 49) $fh \parallel ac$, $fk \parallel ad$, $gk \parallel bd$ u. s. w. also $fghk \sim abcd$. Ferner ist



der einem Kreis beschriebenen Vieleck entspricht also ein ähnliches und ähnlich liegendes Vieleck im andern Kreise. Beschreibt man also in den Sektor a d m des einen Kreises einen regelmäßigen Polygonsektor a b c d m, so entspricht demselben in dem andern Kreise ein ähnlicher und ähnlich liegender Polygonsektor f g h k m. Die Polygonlinien a b c d, f g h k verhalten sich (II. 71) wie die Halbmesser m a, m f, und die Flächen der Polygonsektoren a b c d m, f g h k m, verhalten sich (III. 67) wie die Quadrate der Halbmesser m a, m f. Da dieses für jede beliebige Anzahl Seiten statt findet, und die Länge der Polygonlinie sich desto mehr der Länge des Kreisbogens, der Inhalt des Polygonsektors sich desto mehr dem Inhalt des Kreissektors annähert (V. 52), je größer die Anzahl der Seiten ist, so müssen sich auch die Längen der Kreisbogen a d, f k, welche gleichen Mittelpunktswinkeln entsprechen, wie die Halbmesser m a, m f, oder wie die Sehnen a d, f k, verhalten. Aus gleichem Grunde müssen sich die Flächen der Kreissektoren a d m, f k m, welche gleichen Mittelpunktswinkeln entsprechen wie die Quadrate der Halbmesser m a, m f, oder wie die Quadrate der Sehnen a d, f k, verhalten. Da sich die ähnlichen Centraldreiecke a d m, f k m, welche gleichen Mittelpunktswinkeln entsprechen, ebenfalls wie die Quadrate der Halbmesser m a, m f, oder der Sehnen a d, f k, verhalten (III. 64) so müssen sich auch die Kreissegmente $abcd$, $fghk$, welche gleichen Mittelpunktswinkeln entsprechen, wie die Quadrate der Halbmesser ma, mf, oder der Sehnen ad, fk, verhalten.

Derselbe Satz muß nun auch für die ganzen Kreise gültig seyn. Demnach verhalten sich die Umfänge der Kreise, wie ihre Halbmesser oder Durchmesser, oder wie ihre, gleichen Mittelpunktswinkeln entsprechenden Sehnen; und die Flächen der Kreise, wie die Quadrate ihrer Halbmesser oder Durchmesser, oder ihrer, gleichen Mittelpunktswinkeln entsprechenden Sehnen.

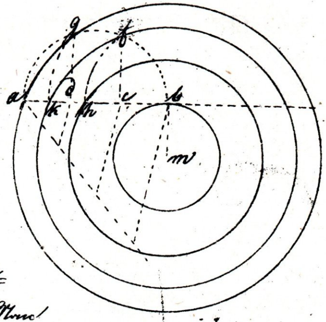
54.

Einen Kreis durch concentrische Kreise in gleiche Theile zu theilen.

Es sey der Kreis in n gleiche Theile zu theilen. Man theile seinen Halbmesser ma in n gleiche Theile in b, c u.s.w. so daß $\frac{mb}{ma} = \frac{1}{n}$, $\frac{mc}{ma} = \frac{2}{n}$ u.s.w. beschreibe über ma einen Halbkreis, errichte auf ma in den Theilungspunkten senkrechte Linien, welche den Halbkreis in d, f, schneiden, so ist (III. 56. 58) $\frac{md^2}{ma^2} = \frac{mb}{ma} = \frac{1}{n}$, $\frac{mf^2}{ma^2} = \frac{mc}{ma} = \frac{2}{n}$ u.s.w.

Nun beschreibe mit den Halbmessern md, mf u.s.w. concentrische Kreise, so ist (V. 53) $\frac{\text{Kreis } md}{\text{Kreis } ma} = \frac{md^2}{ma^2} = \frac{1}{n}$, $\frac{\text{Kreis } mf}{\text{Kreis } ma} = \frac{mf^2}{ma^2} = \frac{2}{n}$ u.s.w.

55.



Einen Kreisring durch concentrische Kreise in gleiche Theile zu theilen.

Die zwischen zwei concentrischen Kreisen, z. B. zwischen den Kreisen ma, mb, enthaltenen Theile heißt ein Kreisring. Man ziehe von einem beliebigen Punkte a des äußeren Kreises an den inneren Kreis die Berührende ab. Soll der Kreisring in n gleiche Theile getheilt werden, so theile man ab in c, d, u. s. w. in n gleiche Theile, errichte in den Theilungspunkten auf ab senkrechte Linien, welche den über ab beschriebenen Halbkreis in f, g, u. s. w. schneiden, mache $bh = bf$, $bk = bg$, u. s. w. beschreibe concentrische Kreise mit den Halbmessern mh, mk u. s. w. so leisten diese das Verlangte. Denn

$$mh^2 - mb^2 = bh^2 = bf^2,\quad mk^2 - mb^2 = bk^2 = bg^2,$$
$$ma^2 - mb^2 = ab^2,$$

also $\dfrac{mh^2 - mb^2}{ma^2 - mb^2} = \dfrac{bf^2}{ab^2} = \dfrac{bc}{ab} = \dfrac{1}{n}$, $\dfrac{mk^2 - mb^2}{ma^2 - mb^2} = \dfrac{bg^2}{ab^2} = \dfrac{bd}{ab} = \dfrac{2}{n}$

Aber (V. 53) $\dfrac{\text{Kreis } ma}{\text{Kreis } mb} = \dfrac{ma^2}{mb^2}$, $\dfrac{\text{Kreis } mh}{\text{Kreis } mb} = \dfrac{mh^2}{mb^2}$,

$\dfrac{\text{Kreis } mk}{\text{Kreis } mb} = \dfrac{mk^2}{mb^2}$, also $\dfrac{K{:}ma - K{:}mb}{K{:}mb} = \dfrac{ma^2 - mb^2}{mb^2}$,

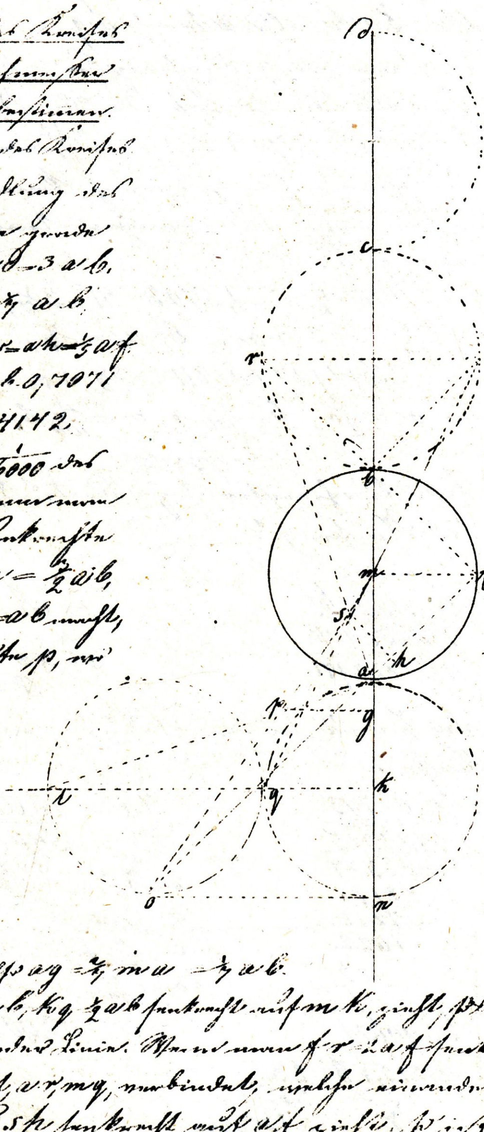
$\dfrac{K{:}mh - K{:}mb}{K{:}mb} = \dfrac{mh^2 - mb^2}{mb^2}$, $\dfrac{K{:}mk - K{:}mb}{K{:}mb} = \dfrac{mk^2 - mb^2}{mb^2}$

also $\dfrac{K{:}mh - K{:}mb}{K{:}ma - K{:}mb} = \dfrac{mh^2 - mb^2}{ma^2 - mb^2} = \dfrac{1}{n}$

$$\frac{K{:}mk - K{:}mb}{K{:}ma - K{:}mb} = \frac{mk^2 - mb^2}{ma^2 - mb^2} = \frac{2}{n} \text{ u. s. w.}$$

56.

Den Umfang des Kreises aus dem Durchmesser oder den Inhalt zu bestimmen.



Zur Rektifikation des Kreises d.h. zur Verwandlung des Umfangs in eine gerade Linie macht man $ad = 3\,ab$, und setzt daran $ag = \frac{1}{7}\,ab$. oder noch genauer $= ak = \frac{1}{5}\,af$ da $af = ab\sqrt{\tfrac{1}{2}} = ab \cdot 0,7071$ also $\frac{1}{5}\,af = ab \cdot 0,14142$. also der Fehler nur $\frac{1}{6000}$ des Durchmessers. Wenn man $ak = \frac{1}{2}\,ab$, die Senkrechte $kl = \frac{3}{2}\,ab$, $mn = \frac{1}{2}\,ab$, die Senkrechte $no = ab$ macht, und aus dem Punkte p, wo al, mo, einander schneiden, die Senkrechte pg zieht, so ist $ag = \frac{1}{7}\,ab$. denn $ag = \frac{1}{3}\,pg$, $mg = \frac{3}{2}\,pg$, also $ma = \frac{7}{6}\,pg = \frac{7}{2}\,ag$, also $ag = \frac{2}{7}\,ma = \frac{1}{7}\,ab$.

Wenn man $mk = ab$, $kq = \frac{1}{2}\,ab$ senkrecht auf mk, zieht, so ist beinahe $aq = af$ in gerader Linie. Wenn man $fr = 2\,af$ senkrecht auf af zieht, ar, mq, verbindet, welche einander in s schneiden, und sh senkrecht auf af zieht, so ist

$ak = \frac{1}{5} af$: denn $ak = \frac{1}{2}\,\delta k$, $gk = 3\delta k$, also $aq = \frac{5}{2}\,\delta k = 5.ak$, also $ak = \frac{1}{5}\,aq$.

Setzt man den Durchmesser $= D$, den Umfang $= P$, den Inhalt $= F$, so ist $P = \pi.\,D$, $F = \frac{1}{4}\pi D^2$, $P^2 = \pi^2 D^2$, also $4\pi F = P^2$, oder $P = \sqrt{4\pi}.\sqrt{F}$

Zum practischen Gebrauch kann man die Zahl π mit mehr oder weniger Annäherung nehmen, z. B.

$\pi = 3,1416$, $\frac{1}{2}\pi = 1,5708$, $\pi = 3\frac{1}{7}$, $\frac{1}{2}\pi = 1\frac{4}{7}$

$\pi = \frac{355}{113} = 3 + a - b$, $a = \frac{1}{7}$, $b = \frac{1}{113}\,a$

$\sqrt{4\pi} = 3,544907701811 = 3\frac{1}{2} + a + b + c + d$

wo $a = \frac{4}{90}$, $b = \frac{1}{100}\,a$, $c = \frac{4}{100}\,b$, $d = \frac{7}{100}\,c$

Beispiele

1. der Durchmesser sey 140 Fuß, wie groß ist der Umfang?

genau:

1 ... 3,14159265
4 ... 12,5663706
$P = 439,822971$

genähert:

$3 \times 140 = 420$
a ... + 20
$b = \frac{1}{113}a$ − 0,177
$P = 439,823$

2. der Inhalt sey 325 □ Fuß, wie groß ist der Umfang?

$\sqrt{F} = 18,02775$
3 .. 5408325
5 .. 901387
4 72111
4 7211
9 1622
07 13
7 1
$P = 63,90670$

$\sqrt{F} = 18,02775$
3 .. 5408325
$\frac{1}{2}$ .. 901387
$a = \frac{4}{90}$ .. 80123
$b = \frac{1}{100}a$ .. 801
$c = \frac{4}{100}b$ .. 32
$d = \frac{7}{100}c$ .. 2
$P = 63,90670$

$F = 81225$, $\sqrt{F} = 285$
3 ... 855
$\frac{1}{2}$ ... 142,5
a ... 12,6666
b ... 1267
c ... 51
d ... 3
$P = 1010,2987$

57.

Den Durchmesser des Kreises aus dem Umfange oder dem Inhalte zu berechnen.

Wenn $U = \pi D$, $F = \frac{1}{4}\pi D^2$, also $D = \frac{1}{\pi} U = \sqrt{\frac{4}{\pi}} \cdot \sqrt{F}$

$\frac{1}{\pi} = 0,3183098861837$, genähert $\frac{1}{\pi} = 0,3183$

oder $\frac{1}{\pi} = \frac{7}{22} + \frac{1}{7812}$ oder $= \frac{1}{3} - a - b - c + d$

wo $a = \frac{1\frac{1}{2}}{100}$, $b = \frac{1}{50000}$, $c = \frac{1}{5} b$, $d = \frac{1}{8} c$

$\sqrt{\frac{4}{\pi}} = 1,12837916709551 = 1\frac{1}{8} + a + b + c$

wo $a = \frac{1}{300}$, $b = \frac{4}{300} a$, $c = \frac{3}{100} b$

Beispiele.

1, der Umfang sey 1200 Fuß, wie groß ist der Durchmesser?

1 ..	31830 9886
2 ..	6366 1977
D =	381,9711863

	1200
7.	8400
2 ..	4200
11 ..	381,8182
7812 ..	1536
D =	381,9718

U =	1200
$\frac{1}{3}$ ..	400
a ..	18
b ..	0,024
c ..	48
d +	6
D =	381,9718

2, der Inhalt sey 81225 □ Fuß, wie groß ist der Durchmesser?

$\sqrt{F}$ =	285
	1128379167
2	2256758334
8	9027033333
5	5641895 8
D =	321,5880625

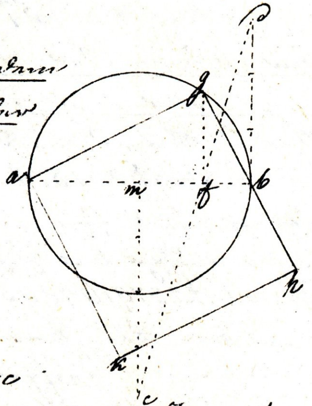
$\sqrt{F}$ =	285
$\frac{1}{8}$ ..	35,625
a ..	95
b ..	1267
c ..	38
D =	321,58805

3, der Inhalt sey 12100 □ Fuß, wie groß ist der Durchmesser?

$\sqrt{F}$ =	110
	1128379
	112838
D =	124,1217

$\sqrt{F}$ =	110
$\frac{1}{8}$ ..	13,75
a ..	3667
b ..	49
c ..	1
D =	124,1217

58.



Den Inhalt eines Kreises aus dem Halbmesser, Durchmesser oder Umfang zu bestimmen.

$F = \pi \cdot r^2 = \frac{1}{4}\pi D^2 = \frac{1}{4\pi} P^2$

Man nimmt π wie V. 56

$\frac{1}{4}\pi = 0{,}785398160$, genähert $=$
$= 0{,}7854$ oder $= \frac{11}{14} - \frac{1}{3164}$
oder $= a + b - c - d$

wo $a = \frac{7}{9}$, $b = \frac{1}{100}a$, $c = \frac{2}{100}b$, $d = \frac{1}{100}c$

$\frac{1}{4\pi} = 0{,}0795774715494$ oder genähert $= \frac{7}{88} + \frac{1}{31233}$
oder $= \frac{1}{12} - \frac{1}{400} - \frac{1}{800} - a - b + c$,
wo $a = \frac{1}{2000001}$, $b = \frac{1}{5}a$, $c = \frac{1}{8}b$

Zur genäherten Quadratur, d. h. Verwandlung des Kreises in ein Quadrat von gleichem Inhalt, mache man mc = 4 Theile, bd = 3 Theile, ab, cd schneiden einander in f, man errichte fg senkrecht auf ab bis an den Kreis, beschreibe über ag ein Quadrat agkh, so ist es nahe dem Kreise gleich, da $ag^2 = af \cdot ab = \frac{11}{14} D^2$

Beispiel

1, Der Halbmesser sey 85 oder der Durchmesser 170 Fuß, wie groß ist der Inhalt?

r^2	= 7225
	314159265
7 ..	21991148555
2 ..	62831853
2 ..	6283185
5 .	1570796
F =	22698,00689

	7225
3 ..	21675
$a\ \frac{1}{7}$ ..	1032,14
$b = \frac{1}{113}a$ ..	9,13
F ..	22698,01

D^2	= 28900
7 ..	202300
8 .	23120
5 .	1445
4 .	1156
F =	22698,06

78539816	1 .. 28900	28900
2 | 157079632	1 .. 28900	7 .. 202300
8 .. 62831853	317900	9 .. 22477,777
9 | 7068583	½ .. 158950	$b = \frac{1}{100}a$ + 224,778
F = 22698,0068	7 .. 22707,14	$c = \frac{2}{100}b$ − 4,495
	3164 .. 9,13	$d = \frac{1}{100}c$ − 4,5
	F = 22698,01	F = 22698,015

2) der Umfang sey 534 Fuß, wie groß ist der Inhalt?

P² = 285156	285156
7957747	$\frac{1}{12}$ .. 23763
2 .. 15915494	$\frac{1}{400}$ .. − 712,89
8 .. 6366198	$\frac{1}{800}$ .. − 356,445
5 .. 397887	$a = \frac{1}{200000}$ .. − 1,425
1 .. 7958	$b = \frac{1}{5}a$ .. − ,285
5 .. 3979	$c = \frac{1}{8}b$ .. + ,35
6 .. 477	F = 22691,990
F = 22691,993	

59.

Die Länge eines Kreisbogens zu berechnen.

Nach III. 22. verhält sich der Bogen zum Quadranten wie der Mittelpunktswinkel zu einem rechten Winkel, oder der Bogen zum Umfang wie der Mittelpunktswinkel zu vier rechten Winkeln. Es sey der Mittelpunktswinkel = m, der Bogen = B, der Umfang = P, der Halbmesser = r, der rechte Winkel = R, so ist

$B = P.\frac{m}{4R}$, oder für m Grade, $B = \frac{\pi}{180}.r.m$

für m Minuten $B = \frac{\pi}{10800}r.m$, für m Sekunden $B = \frac{\pi}{648000}.r.m$.

$\frac{\pi}{180} = 0{,}01745329252$ $\frac{\pi}{10800} = 0{,}000290888208$

$\frac{\pi}{648000} = 0{,}0000048481368$

Beispiele.

1, den Winkel zu finden, dessen Bogen dem Halbmesser gleich ist.

Man setzt $B = r$, woraus $\frac{180}{\pi} = 57°,2957795$

$\frac{10800'}{\pi} = 3437',74677$, $\frac{648000}{\pi} = 206264'',806$

2, für verschiedene regelmäßige Vielecke das Verhältniß des Bogens zur Sehne zu finden. Man wendet hier das Verhältniß des Durchmessers zur Polygonseite in V. 51. an.

Beim Halbkreise ist $B = \frac{1}{2}\pi.D = 1,5708$ der Sehne

Beim Dreieck ist für $m = 120°$, $B = \frac{1}{3}\pi D$, $D = 1,15470$ also $B = 1,209199$ der Sehne.

Beim Quadrat ist für $m = 90°$, $B = \frac{1}{4}\pi D$, $D = 1,41421$ also $B = 1,110720$ der Sehne.

Beim Fünfeck ist für $m = 72°$, $B = \frac{1}{5}\pi D$, $D = 1,70130$ also $B = 1,068959$ der Sehne.

Beim Sechseck ist für $m = 60°$, $B = \frac{1}{6}\pi D$, $D = 2$ also $B = 1,047197$ der Sehne.

3, Wie groß ist die Länge eines Bogens von $87°12'24''$, bei einem Durchmesser von 174 Fuß? der Winkel $m = 5232',4$, $r = 87$

```
    0,0002908882
8 ... 0,0023271056
        2036217
    0,025307273
```

```
        0,025307273
5 .   126530365
2 ...   5061455
3 .....  759218
2 .......  50614
4 .....    10123
B = 132,417775
```

60.

Den Inhalt eines Kreisausschnittes zu berechnen.

Nach V. 52. ist der Inhalt des Sektors gleich dem Produkt des Bogens mit $\frac{1}{4}$ des Durchmessers.

also wenn S der Sektor, B der Bogen, D der Durchmesser, P der Umfang, R der rechte Winkel, m der Mittelpunktswinkel, r der Halbmesser

$$S = \tfrac{1}{4} D \cdot B = D \cdot P \cdot \frac{m}{16R} = \pi r^2 \cdot \frac{m}{4R}$$

also für m Grade $S = \frac{\pi}{360^\circ} r^2 m$

für m Minuten $S = \frac{\pi}{21600} r^2 m$

$\frac{\pi}{360} = 0{,}0087266 4626$, $\frac{\pi}{21600} = 0{,}000145444104$

Beispiel.

Wie groß ist der Inhalt des Sektors für den Halbmesser 87 Fuß, und den Mittelpunktswinkel 87°12'24" = 5232,4'?

$r^2 = 7569$
$m = 5232{,}4$
39604035,6

1	. . .	39604035 6
4	. . .	15841614 2
5	. . .	19802017 8
4	. . .	1584161
4	. . .	158416
4	. . .	15842
1	. . .	396
04	. . .	16

$S = 576017347$ □ Fuß

61.

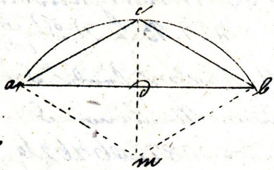
Den Inhalt eines Kreissegments zu berechnen.

Die Sehne schneidet den Kreis in zwei Segmente, wovon das eine kleiner, das andere größer als der Halbkreis ist. Das kleinere Segment wird erhalten, wenn man das Centraldreieck vom Sektor abzieht. Es kann verlangt werden, entweder der absolute Inhalt des Segments in Quadratmaßen, oder das Verhältniß desselben zur Kreisfläche, oder das Verhältniß desselben zu dem

Dreieck, welches mit ihr gleiche Grund-linie und Höhe hat.

Beispiele.

1. Das Segment zu berechnen, welches auf der Seite des gleichseitigen Dreiecks ruht.



Kreisfläche $= \pi r^2$, Sektor $macb = \frac{1}{3}\pi r^2$; $\Delta amb = ad \cdot md = \frac{1}{4} r^2 \sqrt{3} = \Delta acb$

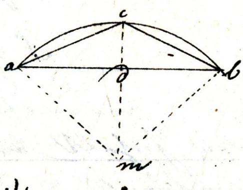
also Segment $acb = \frac{1}{3}\pi r^2 - \frac{1}{4} r^2 \sqrt{3}$

Verhältniß zur Kreisfläche $= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{3}$

Verhältniß zum $\Delta acb = \frac{4}{9}\pi \cdot \sqrt{3} - 1$

$\frac{1}{4}\sqrt{3} =$	0,4330127019	$\sqrt{3} =$	1,7320508075
$\frac{1}{\pi} =$	0,3183098862	$\frac{4}{9}\pi =$	1,3962634016
Prod.	0,1378322239	Prod.	2,4183991522
$\frac{1}{3} =$	0,3333333333		1
Segm. $=$	0,1955011094 des Kreises	$=$	1,4183991523 des Δ

2. Das Segment zu berechnen, welches auf der Seite des Quadrats ruht.



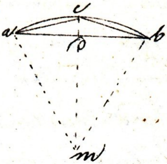
Kreisfläche $= \pi r^2$, Sektor $macb = \frac{1}{4}\pi r^2$, $\Delta amb = \frac{1}{2} r^2$, $ad = r\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \frac{1}{2} r\sqrt{2}$

$cd = r(1 - \sqrt{\tfrac{1}{2}}) = \frac{1}{2} r(2 - \sqrt{2})$ $\Delta acb =$

$r^2 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{2}(2 - \sqrt{2}) = r^2 \cdot \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) = r^2 \cdot \frac{1}{2(\sqrt{2}+1)}$,

Segment $acb = \frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{1}{2} r^2$, Verhältniß zur Kreisfläche $= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi}$, Verh. zum $\Delta acb = \frac{1}{2}\pi(\sqrt{2}+1) - (\sqrt{2}+1)$

$\frac{1}{4} =$	0,25	$\pi =$	3,14159265359
$\frac{1}{2}\frac{1}{\pi} =$	0,1591549431	$\frac{1}{2}\pi - 1 =$	0,57079632679
diff.	0,0908450569	$\sqrt{2}+1 =$	2,41421356237
		Prod.	1,37802423350
	Verhältniß des Segments zur Kreisfläche.		Verhältniß des Segments zum Δacb.



3. Das Segment zu berechnen, welches auf der Seite des eingeschriebenen Sechsecks aufsteht. Kreisfläche $= \pi . r^2$; Sektor $macb = \frac{1}{6}\pi . r^2$ $ad = \frac{1}{2} r$, $md = \frac{1}{2} r . \sqrt{3}$, $\Delta\, amb = \frac{1}{4} r^2 . \sqrt{3}$ $cd = \frac{1}{2} r (2 - \sqrt{3})$, $\Delta\, acb = \frac{1}{4} r^2 (2 - \sqrt{3}) = r^2 . \frac{1}{4(2+\sqrt{3})}$ Segment $acb = \frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{1}{4} r^2 . \sqrt{3}$ Verhältniß zur Kreisfläche $= \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\pi}\sqrt{3}$, Verh. zum $\Delta\, acb = \left(\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}\right)\left(2 + \sqrt{3}\right)$

$\frac{1}{4}\sqrt{3}$ =	0,4330127019
$\frac{1}{\pi}$ =	0,3183098862
Prod.	0,1378322239
$\frac{1}{6}$ ...	0,1666666666
diff. ..	0,028834442

Verhältniß des Segments zur Kreisfläche.

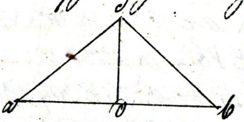
π ...	3,1415926536
2π ...	6,2831853072
$\frac{2}{3}\pi$ ...	2,0943951024
$\sqrt{3}$ ...	1,7320508075
	0,3623442949
$2+\sqrt{3}$	3,7320508075
Prod.	1,3522873180

Verhältniß des Segments zum $\Delta\, acb$.

Anhang.

In der Baukunst, Mechanik u. s. w. kommt öfters der Fall vor, daß die Länge eines Bogens, oder der Inhalt eines Segments aus der Grundlinie und Höhe durch eine gewöhnliche Rechnung gefunden werden soll. Die hierzu erforderlichen Regeln können nur durch Hülfe der höhern Geometrie gefunden werden. Daher gebe ich sie hier, ohne Beweise, zur Belehrung der Anfänger und zu gewöhnlichem Gebrauch.

62.



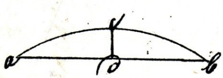
Die Länge der Dachlinie

d. h. die Summe der beiden Seiten ac, cb, des gleichschenkligen Dreiecks. Diese Summe heißt $= B$, $\frac{4cd^2}{ab^2} = E$ der Exponent, und $B = ab + a - b + c - d + f - g$ u. s. w., wo $a = \frac{1}{2}E.ab$, $b = \frac{1}{4}E.a$, $c = \frac{3}{6}E.b$, $d = \frac{5}{8}E.c$, u. s. w. die Zähler der Brüche sind die ungeraden Zahlen, die Nenner um 3 größer.

Beispiel. Die Grundlinie $ab = 120$, die Höhe $cd = 24$, der Exponent $E = \frac{4.24.24}{120.120} = \frac{4}{25}$

ab	$=$	120
a	$+$	9,6
b	$-$	384
c	$+$	31
d	$-$	3
		129,244

63.



Die Länge des Kreisbogens

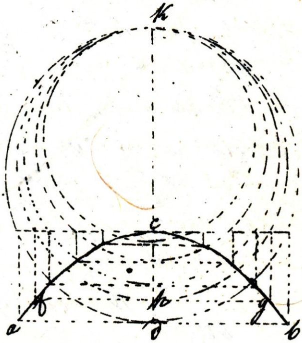
der Bogen $= B$, $\frac{4cd^2}{ab^2} = E$ der Exponent $B = ab + a - b + c - d + f - g$ u. s. w. wo $a = \frac{1}{3}E.ab$ $b = \frac{1}{5}E.a$, $c = \frac{3}{7}E.b$, $d = \frac{5}{9}E.c$ u. s. w. die Zähler und Nenner sind ungerade Zahlen deren Unterschied immer 4 ist.

Beispiel. $ab = 120$, $cd = 24$, $E = \frac{4}{25}$

ab	..	120
a	..+	12,8
b	..−	4096
c	..+	281
d	−−	25
f	−+	2

$B = 132,4162$

64.



Die Länge des parabolischen Bogens.

Hier sind die Quadrate der Parallelsehnen den Abständen vom Scheitel proportioniert. Man weiß $ad^2 = ck.cd$, $fh^2 = ck.ch$ u.s.w. wie $\frac{fg^2}{ab^2} = \frac{ch}{cd}$. der Bogen $acb = B$, $\frac{4cd^2}{ab^2} = E$ der sogenannt, $B = ab + a - b + c - d + f - g$ u.s.w. wo $a = \frac{2}{3}E.ab$, $b = \frac{3}{5}E.a$, $c = \frac{10}{7}E.b$, $d = \frac{35}{18}E.c$, $f = \frac{126}{55}E.d$ die Brüche haben die Form $\frac{4.1.3}{4.5}$, $\frac{4.3.5}{6.7}$, $\frac{4.5.7}{8.9}$, $\frac{4.7.9}{10.11}$, $\frac{4.9.11}{12.13}$ u.s.w.

Beispiel. $ab = 120$, $cd = 24$, $E = \frac{4}{25}$

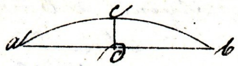
ab	−−−	120
a	+	12,8
b	−	1,230
c	+	281
d	−	87
f	+	32
g	−	13
h	+	5

$B = 131,788$

65.

Die Länge des Bogens der Kettenlinie.

Es ist die Linie in welcher sich Gewölbsteine durch ihre Schwere im Gleichgewicht erhalten,



und welche einen entsprechenden befestigten Ofenstein annimmt.

der Bogen = B, $\frac{4cd^2}{ab^2} = E$ der Exponent, so ist

$B = ab + a - b + c - d + f - g$ u. s. w., wo

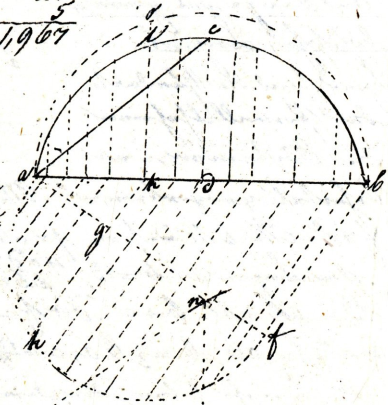
$a = \frac{2}{3} E . ab$, $b = \frac{7}{15} E . a$, $c = \frac{139}{147} E . b$, $d = \frac{2473}{2085} E . c$

Beispiel: $ab = 120$, $cd = 24$, $E = \frac{4}{25}$

ab	. . .	120
a	+	12,8
b	−	955
c	+	144
d	−	27
f	+	5
	B =	131,967

66.

Umfang der Ellipse.

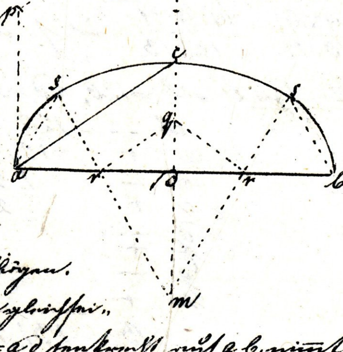


Die große Achse sey ab, die in ihrer Mitte senkrecht errichtete halbe kleine Achse sey cd. Man ziehe in beliebiger Richtung $af = 2cd$ und beschreibe über af einen Halbkreis. Zu einem beliebigen Punkt g errichte man gh senkrecht auf af bis an den Halbkreis, ziehe gk ∥ fb, kl ∥ gh senkrecht auf ab, so ist l ein Punkt der Ellipse. Denn $\frac{ag}{ak} = \frac{af}{ab} = \frac{cd}{ad}$

$\frac{fg}{bk} = \frac{af}{ab} = \frac{cd}{ad}$, also

$\frac{ag . fg}{ak . bk} = \frac{cd^2}{ad^2}$, $ag . fg = gh^2 = kl^2$,

$ak . bk = kd^2$, also $\frac{kl}{kd} = \frac{cd}{ad}$.



Annähernd beschreibt man die Ellipse durch zwei Kreisbögen.

Man beschreibt über ab ein gleichseitiges Δ anb, errichtet $ap = ad$ senkrecht auf ab, nimmt $dq = ad - cd$, zieht qr ∥ np, beschreibt über rr ein gleichseitiges Δ rmr, beschreibt aus r mit dem Halbmesser ra den Kreisbogen as, aus m mit dem Halbmesser $ms = mc$ den Kreisbogen scs.

der Umfang der halben Ellipse acb = B, wird mit Hülfe aus der Sehne ac, des elliptischen Quadranten berechnet.

$B = a - b - c - d - f - g \ldots$ wo $\frac{ab^2 - 4cd^2}{ab^2 + 4cd^2} = E$

$a = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\pi . ac = 2{,}22144\,1469 \; . ac$

$b = \frac{1}{4.4} E^2 . a$, $c = \frac{3.5}{8.8} E^2 . b$, $d = \frac{7.9}{12.12} E^2 . c$, $f = \frac{11.13}{16.16} E^2 . d \ldots$

Beispiel. Es sey $ab = 120$, $cd = 24$, $E = \frac{21}{29}$, $E^2 = \frac{441}{841}$

$ac = \sqrt{4176} = 64{,}6220$, $ac \times 2{,}22144 = 143{,}554$

a ...	143,554
b ...	4,705
c ...	578
d ...	133
f ...	39
g ...	13
h ...	5
B =	138,081

67.

Inhalt der halben Ellipse.

Da (V. 66) $\frac{Kl}{Ko} = \frac{cd}{ad}$, so ist auch das Verhältniß der halben Ellipse acb, zu dem über ab beschriebenen Halbkreise, $= \frac{cd}{ad}$. Aber (V. 58) der Kreis $= \frac{1}{4}\pi . ab . ad$, also die halbe Ellipse $= \frac{1}{4}\pi . ab . cd$

Beispiel. Es sey ab = 120 Fuß, cd = 24 Fuß so ist ab. cd = 2880 ...

$\frac{1}{4}\pi$	= 0,78539816
2	15707 9632
8 ...	6283 1853
8 ...	628 3185

Inhalt F = 2261,9467 □ Fuß

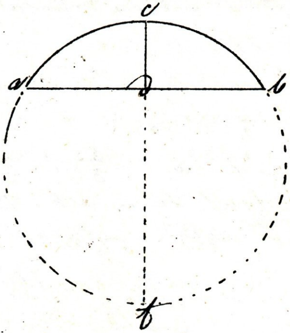
68.

Inhalt des Kreisabschnitts.

Aus der Grundlinie ab und Höhe cd, findet man den Sehne a c des halben Bogens, und hieraus in ziemlicher Annäherung das Segment $F = \frac{4}{10} cd (ab + \frac{4}{3} ac)$

Beispiel. $ab=120,\ cd=24,\ ac=\sqrt{4176}=64,622$

$$\begin{array}{rl} & 120 \\ ac = & 64,622 \\ \frac{1}{3}ac = & 21,541 \\ \hline & 206,163 \\ \frac{4}{10}cd = & 9,6 \\ \hline \text{Inhalt } F = & 1979,161 \end{array}$$



Genauer ist die Annäherung, wenn man den Bogen $acb = B$ (V. 59. 63) berechnet,

$$F=\frac{1}{4}cd(B+ab)+\frac{ab^2}{16cd}(B-ab)$$

Beispiel. $ab=120,\ cd=24,\ B=132,4162$, hieraus

$$\begin{array}{r} 132,4162 \\ 120 \\ \hline 252,4162 \\ 12,4162 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 252,4162 \\ \frac{1}{4}cd \ldots & 6 \\ \hline & 1514,4972 \\ & 465,6075 \\ \hline F = & 1980,1047 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 12,4162 \\ \frac{ab^2}{16cd} & 37,5 \\ \hline & 465,6075 \end{array}$$

Wenn $e=\frac{4cd^2}{ab^2}$, $F=a+b-c+d-f+g-h$. — so ist $a=\frac{2}{3}ab.cd$, $b=\frac{1}{5}e.a$, $c=\frac{1}{7}e.b$, $d=\frac{3}{9}e.c$, $f=\frac{5}{11}e.d$, $g=\frac{7}{13}e.f$, $h=\frac{9}{15}e.g$ u. s. w.

Wenn $e=\frac{4cd^2}{ab^2+4cd^2}$, $F=a+b+c+d+f+g+h$. — so ist $a=\frac{2}{3}ab.cd$, $b=\frac{1}{5}e.a$, $c=\frac{6}{7}e.b$, $d=\frac{8}{9}e.c$, $f=\frac{10}{11}e.d$, $g=\frac{12}{13}e.f$ u. s. w.

Beispiel. $ab=120,\ cd=24$, erstes $e=\frac{4}{25}$, zweites $e=\frac{4}{29}$

Erste Reihe

a	..	1920
b	+	61,44
c	—	1,40434
d	+	7490
f	—	545
g	+	47
h	—	4
F =		1980,10554

Zweite Reihe

a	1920
b	52,96552
c	6,26193
d	76775
f	9627
g	1225
h	158
k	20
l	3
F =	1980,10553

Wenn man durch F. das Verhältniß des Segments acb zur ganzen Kreisfläche acbf bezeichnet und $E = \frac{4cd^2}{ab^2} = \frac{cd}{df}$, so ist

$$F = a + b - c + d - f + g - h \text{ u.s.w.}$$

$$a = \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{E\sqrt{E}}{(E+1)^2}, \quad \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{\pi} = 1{,}697652726..$$

$$b = \tfrac{1}{5} Ea,\ c = \tfrac{1}{7} Eb,\ d = \tfrac{3}{9} Ec,\ f = \tfrac{5}{11} Ed,\ g = \tfrac{7}{13} Ef \text{ u.s.w.}$$

Beispiel: $ab = 120$, $cd = 24$, $E = \frac{4}{25}$, $E + 1 = \frac{29}{25}$

$E\sqrt{E} = \frac{8}{125}$, $\frac{E\sqrt{E}}{(E+1)^2} = \frac{40}{841}$

	1,6976527263
40 ..	67,906109052
841 ..	0,080744481

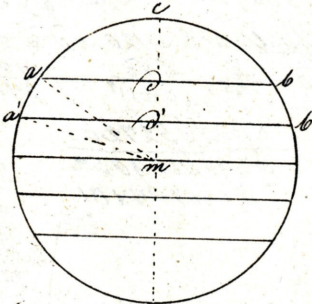
a		0,080744481
b	+	2583823
c	−	59059
d	+	3150
f	−	229
g	+	20
h	−	17
F	=	0,083272169

Nach dem Verhältniß der Höhe zum Halbmesser $\frac{cd}{r} = \frac{2cd}{cf} = k$, habe ich folgende Tafel für das Verhältniß des Segments zur Kreisfläche berechnet:

k	F	k	F	k	F	k	F
0,01	0,000599	0,21	0,055905	0,41	0,147795	0,61	0,258167
2	1692	22	59849	42	152658	62	264039
3	3105	23	63873	43	157866	63	269941
4	4773	24	67972	44	163119	64	275868
5	6660	25	72146	45	168415	65	281820
6	8741	26	76393	46	173752	66	287794
7	0,010999	27	80710	47	179131	67	293793
8	13417	28	85097	48	184549	68	299814
9	15985	29	89545	49	190006	69	305856
0,10	0,018693	0,30	0,094063	0,50	0,195501	0,70	0,311918
0,11	0,021532	0,31	0,098637	0,51	0,201032	0,71	0,318001
12	24496	32	0,103276	52	206600	72	324104
13	27578	33	107973	53	212202	73	330224
14	30772	34	112727	54	217837	74	336363
15	34073	35	117537	55	223507	75	342519
16	37478	36	122402	56	229208	76	348691
17	40981	37	127320	57	234940	77	354878
18	44577	38	132290	58	240703	78	361081
19	48267	39	137309	59	246495	79	367299
0,20	0,052044	0,40	0,142378	0,60	0,252315	0,80	373530

k	F	k	F	k	F	k	F
0,81	0,379774	0,86	0,411165	0,91	0,442781	0,96	0,474542
82	386030	87	417472	92	449125	97	480904
83	392298	88	423789	93	455473	98	487268
84	398577	89	430113	94	461826	99	493634
85	0,404866	0,90	0,436444	0,95	0,468182	1,00	0,500000

Nach dieser Tafel kann man leicht einen Kreis durch parallele Sehnen in gleiche Theile theilen. Bei der Einschaltung wird man zu größerer Genauigkeit auch auf die zweiten Differenzen Rücksicht nehmen.



Beispiel. den Kreis sey in 6 gleiche Theile zu theilen, also $F = \frac{1}{6} = 0,16666$ und $F = \frac{1}{3} = 0,33333$..

44 . 163119 5296
45 . 168415 41
46 . 173752 5337

Hier ist $x = 0,67063$
$1 - x = 0,32937$
dann $x . 5296 = 3552$
$\frac{x(1-x)}{2} . 41 = 5$
3547
163119
166666

also $k = \frac{cd}{mc} = 0,4467063$
$\angle cma = 56^\circ 24',4$

73 .. 330224 6139
74 .. 336363 17
75 .. 342519 6156

Hier ist $x = 0,50678$
$1 - x = 0,49322$
dann $x . 6139 = 3111$
$\frac{x(1-x)}{2} . 17 = 2$
3109
330224
333333

also $k = \frac{cd'}{mc} = 0,7350678$
$\angle cma' = 74^\circ 38',25$

Nach dem Verhältniß der Höhe des Segments zur halben Grundlinie $\frac{cd}{ad} = \frac{2cd}{ab} = V = k$, habe ich folgende Tafel berechnet, welche das Verhältniß F des Segments zum Dreieck von gleicher Grundlinie und Höhe angiebt.

h	F	h	F	h	F	h	F
0,00	1,3333333	0,25	1,3498542	0,50	1,3977975	0,75	1,4730935
1	1,3333599	26	1,3511897	51	1,4003163	76	1,4766043
2	1,3334399	27	1,3525756	52	1,4028787	77	1,4801506
3	1,3335733	28	1,3540117	53	1,4054843	78	1,4837321
4	1,3337599	29	1,3554978	54	1,4081328	79	1,4873484
5	1,3339997	0,30	1,3570336	0,55	1,4108239	0,80	1,4909992
0,06	1,3342928	0,31	1,3586189	0,56	1,4135573	0,81	1,4946843
7	1,3346391	32	1,3602535	57	1,4163326	82	1,4984033
8	1,3350384	33	1,3619372	58	1,4191496	83	1,5021558
9	1,3354908	34	1,3636696	59	1,4220079	84	1,5059416
0,10	1,3359962	0,35	1,3654505	0,60	1,4249072	0,85	1,5097605
0,11	1,3365544	0,36	1,3672796	0,61	1,4278471	0,86	1,5136120
12	1,3371654	37	1,3691567	62	1,4308274	87	1,5174958
13	1,3378291	38	1,3710815	63	1,4338477	88	1,5214117
14	1,3385454	39	1,3730538	64	1,4369077	89	1,5253594
0,15	1,3393142	0,40	1,3750733	0,65	1,4400070	0,90	1,5293385
0,16	1,3401352	0,41	1,3771396	0,66	1,4431454	0,91	1,5333488
17	1,3410084	42	1,3792525	67	1,4463225	92	1,5373900
18	1,3419337	43	1,3814117	68	1,4495379	93	1,5414618
19	1,3429109	44	1,3836169	69	1,4527914	94	1,5455638
0,20	1,3439398	0,45	1,3858678	0,70	1,4560827	95	1,5496959
0,21	1,3450203	0,46	1,3881642	0,71	1,4594113	0,96	1,5538577
22	1,3461521	47	1,3905057	72	1,4627770	97	1,5580489
23	1,3473352	48	1,3928919	73	1,4661795	98	1,5622692
24	1,3485693	49	1,3953226	74	1,4696184	0,99	1,5665185
0,25	1,3498542	0,50	1,3977975	0,75	1,4730935	1,00	1,5707963

Um diese Tafel mit aller Genauigkeit anzuwenden, nimmt man auch auf die zweiten Differenzen Rücksicht.

Beispiele.

1, Die Grundlinie ab = 120, die Höhe cd = 24, wie groß ist das Segment?

Hier ist $\frac{cd}{ad} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5} = 0,4 = k$

die Tafel giebt für $k = 0,40$ 1,3750733

das $\triangle acb = ad.\,cd = 60.24$ 1440

das Produkt giebt das Segment = 1980,1055

2, das Segment zu berechnen, welches auf der Seite des gleichseitigen Dreiecks ruht.

Hier ist $\frac{cd}{ad} = \frac{1}{3}\sqrt{3} = k = 0,5773502269$. Wenn also $ab = 120$ Fuß, so ist $cd = 34,641016$, $\Delta\, acb = 2078,46097$

57 1,4163326
58 1,4191496 28170 413
59 1,4220079 28583

Hier ist $x = 0,7850269$
$1 - x = 0,2649731$
also $x \cdot 28170 = 20705$
$\frac{x(1-x)}{2} \ldots = \quad 40$
20665
1,4163326
F = 1,4183991

1,4183991
$\Delta = 2078,46097$
Inhalt = 2948,087 □ Fuß

3, das Segment zu berechnen, welches auf der Seite des Quadrats steht.

Hier ist $\frac{cd}{ad} = \sqrt{2} - 1 = 0,414213562. = k$. Wenn also $ab = 120$ Fuß, so ist $cd = 24,8528$. $\Delta\, acb = 1491,168824$.

41 1,3771396
42 1,3792525 21129 463
43 1,3814117 21592

1,3780242
$\Delta = 1491,168824$
Inhalt = 2054,866 □ Fuß

also $x \cdot 21129 = 8902$
$\frac{x(1-x)}{2}\, 463 = \quad 56$
8846
1,3771396
F = 1,3780242

4, das Segment zu berechnen, welches auf der Seite des regelmäßigen Sechsecks steht.

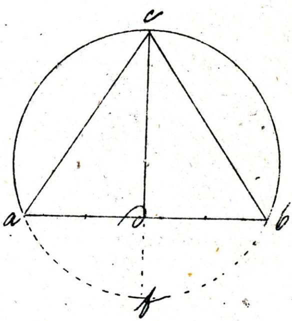
Hier ist $\frac{cd}{ad} = 2 - \sqrt{3} = 0,267949192 .. = k$. Wenn also $ab = 120$ Fuß, so ist $cd = 16,07695$, $\Delta\, acb = 964,61709$

26 .. 1,3511897
27 .. 1,3525756 13859 502
28 .. 1,3540117 14361

Hier ist $x = 0,7949192$
$1 - x = 0,2050808$
also $x \cdot 13859 = 11017$
$\frac{x(1-x)}{2}\, 502 = \quad 41$
10976

1,3511897
10976
F = 1,3522873
$\Delta = 964,61709$
Inhalt = 1304,439 □ Fuß

Durch Hülfe der Tafel kann man auch solche Segmente berechnen, welche größer als der Halbkreis sind.



Beispiel. Es sey $ab = 120$, $cd = 90$ Fuß so ist

$\frac{df}{ad} = \frac{ad}{cd} = \frac{2}{3}$, $df = 40$

$cf = 130$, $cf^2 = 16900$

66 1,4431454

67 1,4463225 31771

68 1,4495379 32154 383

Hier ist $x = \frac{2}{3}$, $1 - x = \frac{1}{3}$

$x . 31771 = 21181$

$\frac{x(1-x)}{2} . 383 = -43$

21138

$$\begin{array}{r} 1,4431454 \\ 21138 \\ \hline 1,4452592 \end{array}$$

$ad . df = 2400$

Seg. $afb = 3468,622$

$\frac{1}{4} \pi cf^2 = 13273,229$

Segm. $acb = 9804,607$ □ Fuß

Die vorstehende Tafel ist in ihrer ersten Hälfte von $h = 0$ bis $h = 0,5$ nach der oben gegebenen Formel für $V6 - h$, berechnet:

$$F = \frac{4}{3} + \frac{4}{3.5} h^2 - \frac{4}{3.5.7} h^4 + \frac{4}{5.7.9} h^6 - \frac{4}{7.9.11} h^8 -$$

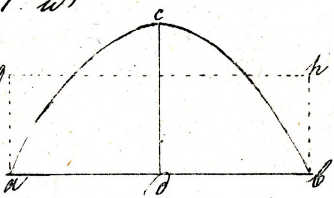
Von $h = 0,5$ bis $h = 0,75$, setzte ich $h = 0,5 + x$ und entwickelte folgende Formel, nach welcher ich die Rechnung führte:

$$\begin{aligned} F = & \ 1,3977975562 5502 \\ & + 0,24969075247783 . x \\ & + 0,21935133608383 . x^2 \\ & - 0,05226329093752 . x^3 \\ & - 0,00823853786999 . x^4 \\ & + 0,01404669644823 . x^5 \\ & - 0,00421806345191 . x^6 \\ & - 0,00244538801708 . x^7 \\ & + 0,00284770841571 . x^8 \\ & - 0,00060046445179 . x^9 \\ & - 0,00088701953795 . x^{10} \\ & + 0,00080494434632 . x^{11} \\ & - 0,00006490486311 . x^{12} \\ & - 0,00036331951106 . x^{13} \end{aligned}$$

Von $k = 0{,}75$ bis $k = 1$, setzte ich $k = 1 - u$, und führte die Rechnung nach der Formel:

$$
\begin{aligned}
F = &\ 1{,}57079632679489 \\
- &\ 0{,}42920367320510 \cdot u \\
+ &\ 0{,}14159265358979 \cdot u^2 \\
+ &\ 0{,}045722231371802 \cdot u^3 \\
+ &\ 0{,}00921772221164 \cdot u^4 \\
- &\ 0{,}00125445426267 \cdot u^5 \\
- &\ 0{,}00236088237160 \cdot u^6 \\
- &\ 0{,}00124441925800 \cdot u^7 \\
- &\ 0{,}00028601730282 \cdot u^8 \\
+ &\ 0{,}00011749809711 \cdot u^9
\end{aligned}
$$

69.



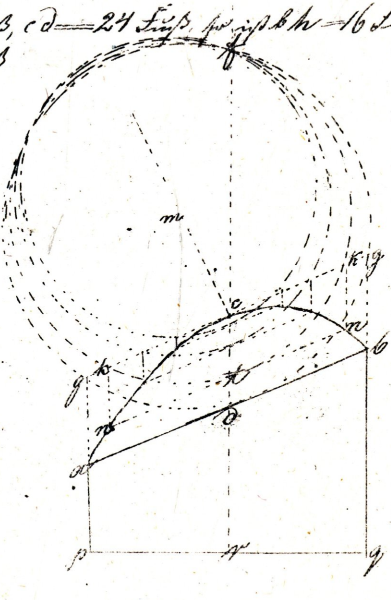
Inhalt des parabolischen Segments.

Der Inhalt des parabolischen Segments, dessen Achse cd die Grundlinie oder Sehne ab senkrecht halbirt, ist genau gleich $\frac{4}{3}$ des △ acb, von gleicher Grundlinie und Höhe, oder $\frac{2}{3}$ des Rechtecks von gleicher Grundlinie und Höhe. Man mache also $bk = ag = \frac{2}{3} cd$, so ist Segment $acb = ab$

Beispiel. Es sey $ab = 120$ Fuß, $cd = 24$ Fuß, so ist $bk = 16$ Fuß, Segm $acb = 16.120 = 1920$ □ Fuß

70

Inhalt eines schiefen parabolischen Segments.



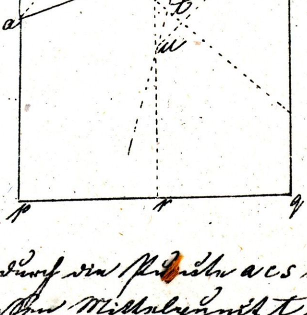
Die schiefe Sehne ab des Bogens acb sey von der Achse cd in d in zwei gleiche Theile da = db getheilt. Man ziehe gcg ∥ adb, mache gc = ad = bd, beschreibe einen Kreis, welcher durch die Punkte gdg geht, dessen Mittelpunkt also in der

Linie cm liegt, welche auf gcg senkrecht ist. Dieser Kreis schneidet den Bogen dc in f. Man beschreibe nun beliebige andere Kreise, welche ihren Mittelpunkt in cm haben und immer durch den Punkt f gehen. Diese Kreise schneiden die Bogen in l, die Linie gcg in k; und zieht $kn \parallel cd$, $ln \parallel ad$, so sind n die Punkte der Parabel, und es ist $ad^2 = cd.cf$, $ln^2 = cl.cf$, also $\frac{ln^2}{ad^2} = \frac{cl}{cd}$, d. h. die Quadrate der von der Bogen halbirten Sehnen, verhalten sich wie die Abschnitte der Bogen (Abscissen). Der Inhalt dieses parabolischen Segments ist genau gleich $\frac{4}{3}$ des $\Delta\, acb$, oder $\frac{2}{3}$ des Parallelogramms $abgg$. Es sey nun pq senkrecht auf der Bogen cdr, so ist das Trapezium $padr = pr(\frac{1}{2}ap + \frac{1}{2}dr)$ Segm. $acd = pr. \frac{2}{3}cd$, Trap. $rdbq = rq(\frac{1}{2}dr + \frac{1}{2}bq)$, Segm. $dcb = rq. \frac{2}{3}cd$, aber $pr = rq = \frac{1}{2}pq$, also

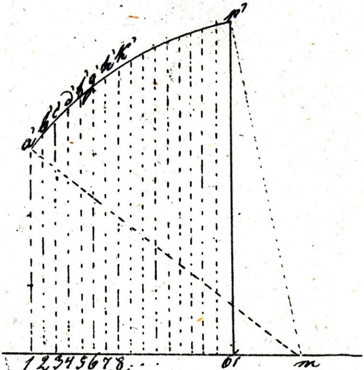
$$pacbq = \frac{1}{2}pq(\frac{1}{2}ap + dr + \frac{4}{3}cd + \frac{1}{2}bq)$$

$$= \frac{1}{2}pq(\frac{1}{2}ap - \frac{1}{3}dr + \frac{4}{3}cr + \frac{1}{2}bq) = pq(\frac{1}{6}ap + \frac{4}{6}cr + \frac{1}{6}bq)$$

Beispiel. Es sey die Grundlinie $pq = 18$ Fuß, die Höhen $ap = 15$, $cr = 18$, $bq = 17$ Fuß, so ist die mittlere Höhe $= \frac{15+72+17}{6} = 17\frac{1}{3}$ Fuß, also der Inhalt $18.17\frac{1}{3} = 312$ □ Fuß. Auf eine praktische Art zeichnet man den Bogen durch zwei Kreisbögen, indem man einen beliebigen Punkt s wählt, durch welchen der Bogen gehen soll, durch die Punkte acs einen Kreisbogen zieht, dessen Mittelpunkt t ist, und durch die Punkte sb einen Bogen beschreibt dessen Mittelpunkt u in der geraden Linie st liegt.



71.



Inhalt eines Trapeziums, dessen Bogen eine beliebige unbekannte Krümmung hat.

Man theilt die Grundlinie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, welche sich durch 2, 3, 4, 5, u. s. w. theilen läßt, z. B. in 60 gleiche Theile. In den Theilungspunkten errichtet man senkrechte Höhen aa', bb', cc' u. s. w. bis an den Bogen a' b' c' d' f g h k ... p und mißt sie aus. Als Beispiel diene folgende Tafel, wo die Grundlinie a p = 600 Zoll, also jeder Theil a b = b c = c d ... = 10 Zoll. Die Tafel giebt die gemessenen Höhen a a' b. No. 1, bb' bei No. 2 u. s. w. in Zollen.

No.		No.		No.		No.		No.		No.	
1	600	11	714	21	800	31	866	41	916	51	954
2	613	12	724	22	807	32	872	42	921	52	957
3	626	13	733	23	814	33	877	43	925	53	960
4	638	14	742	24	821	34	882	44	929	54	963
5	650	15	751	25	828	35	888	45	933	55	966
6	661	16	760	26	835	36	893	46	937	56	968
7	672	17	768	27	842	37	898	47	940	57	971
8	683	18	776	28	848	38	903	48	944	58	973
9	694	19	784	29	854	39	907	49	947	59	975
10	704	20	792	30	860	40	912	50	951	60	978
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	61	980

Erste Art.

Nach (V.70) multiplicirt man den Abschnitt a c mit $\frac{1}{6}$ aa' + $\frac{4}{6}$ bb' + $\frac{1}{6}$ cc', den Abschnitt c f mit $\frac{1}{6}$ cc' + $\frac{4}{6}$ dd' + $\frac{1}{6}$ ff' u. s. w. Da aber a c = c f = f k u. s. w. so ist es kürzer, zu der Summe der 1sten und 61sten Höhe, die 4fache Summe der 2ten, 4ten, 6ten ... und 60ten Höhe, und die 2fache Summe der 3ten, 5ten, 7ten ... 59ten Höhe zu addiren und die ganze Summe mit $\frac{1}{6}$ a c zu multipliciren.

nach dem Schema 1, 4, 1
1, 4, 1
1, 4, 1 . . .

1, 4, 2, 4, 2, 4, 2 . . .

die Summe der 1sten und 61sten	1580
— " — 2ten, 4ten . . 60sten = 25247 mit 4 . .	100988
— " — 3, 5, . . 59ten = 24453 mit 2	48906
	151474
multiplicirt mit $\frac{1}{3}$ ac	$3\frac{1}{3}$
Inhalt □ Zoll . .	$504913\frac{1}{3}$

Zweite Art, nach Newton.

Man bildet Gruppen von vier Höhen, deren Grundlinien ad = dk u. s. w. 3 Theile enthalten, und wendet das Schema 1 + 3 + 3 + 1 = 8 an, also

1, 3, 3, 1
1, 3, 3, 1
1, 3, 3, 1

1, 3, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 2 .

die Summe der 1ten und 61ten	1580
— der 2, 3, 5, 6, 8, 9, . . 59, 60 = 33663 × 3 =	100989
— 4, 7, 10 . . . 58 = 16037 × 2 =	32074
	134643
multiplicirt mit $\frac{1}{8}$ ad	$3\frac{3}{4}$
Inhalt □ Zoll	$504911\frac{1}{2}$

Dritte Art, nach Cotes.

Man nimmt bei je fünf Höhen das Schema 7 + 32 + 12 + 32 + 7 = 90, bei je sechs Höhen 19 + 75 + 50 + 50 + 75 + 19 = 288, bei je sieben Höhen 41 + 216 + 27 + 272 + 27 + 216 + 41 = 840 u. s. w. Wählt man fünf Höhen, so ist das Schema

7, 32, 12, 32, 7,
7, 32, 12, 32, 7 u. s. w.

7, 32, 12, 32, 14, 32, 12, 32, 14 u. s. w.

die Summe der 1ten und 61ten = 1580 × 7	11060
— 2, 4, 6, 8 . . 60 = 25247 × 32 . . .	807904
— 3, 7, 11, 15 . . 59 = 12624 × 12 . . .	151488
— 5, 9, 13, 17, . . 57 = 11829 × 14 .	165606
	1136058
Mult. mit $\frac{1}{90}$ af = .	$\frac{4}{9}$
Inhalt, □ Zoll	$504914\frac{2}{3}$

Vierte Art, nach Gauß.

Man theilt die Grundlinie einer Figur, z. B. af in die Hälfte in c, aber in b und d nicht in gleiche Theile, sondern in ungleiche Theile so daß $cb = cd = \sqrt{\tfrac{3}{5}} \cdot ac = 0{,}7746 \times ac$ sey. Man mißt bloß die drei Höhen in b, c, d, und multiplicirt af mit $\tfrac{5}{18} bb' + \tfrac{8}{18} cc' + \tfrac{5}{18} dd'$. In dem obigen Beispiel ist $af = 40$, $ac = cf = 20$, also $bc = cd = 15\tfrac{1}{2}$; also $bb' = 606$, $cc' = 626$, $dd' = 644$. Man hat also $5bb' + 8cc' + 5dd' = 11258$, dieses mit $\tfrac{1}{18} af = \tfrac{20}{9}$ multiplicirt giebt den Inhalt von $afa'f' = 25018$ □ Zoll.

Wendet man dieses Verfahren auf alle 15 Figuren an, so entsprechen den Punkten b den Abständen $4\tfrac{1}{2}, 44\tfrac{1}{2}, 84\tfrac{1}{2}$ .... bis $564\tfrac{1}{2}$

Punkte c ———— $20, 60, 100,$ 580

Punkte d ———— $35\tfrac{1}{2}, 75\tfrac{1}{2}, 115\tfrac{1}{2}$ ... $595\tfrac{1}{2}$

Summen der $bb' = 12475$, der $dd' = 12769$

beide zusammen 25244×5 .... $= 126220$

Summen der $cc' = 12624 \times 8$ .... $= 100992$

227212

Mult. mit $\tfrac{1}{18} af =$ ...... $2\tfrac{2}{9}$

Inhalt □ Zoll 504915

Probe

Die Zahlen der obigen Tafel berechnete ich so, daß $ma = 800$, $aa' = 600 = ap$, $mp = 200$, und daß die Punkte $a'b'c'$ ... in einem aus dem Mittelpunkt m mit dem Halbmesser $ma' = mp' = 1000$ beschriebenen Kreisbogen liegen. Z. B. $ab = 10$, also $mb = 790$, $mb' = 1000$, also $bb' = \sqrt{375900} = 613$ u. s. w. Zuletzt ist $pp' = \sqrt{960000} = 979{,}7959$, $\angle pmp' = 78^\circ 27{,}7825$, $\angle ama' = 36^\circ 52{,}1938$, also $\angle a'mp' = 41^\circ 35{,}5887$, oder $= 2495{,}5887$. Also (V. 60) $\frac{\pi r^2}{21600} = 145{,}44104$

$\angle m = 2495{,}5887$

Sektor $a'mp' = 362968{,}66$

$\Delta\, ama' = 800 \cdot 300 = +\ 240000$

$\Delta\, pmp' = 100 \cdot 979{,}7959 = -\ 97979{,}59$

gemessener Inhalt $= 504989$

obiger gemessener Inhalt $= 504915$

Fehler $74 = \frac{1}{6824}$