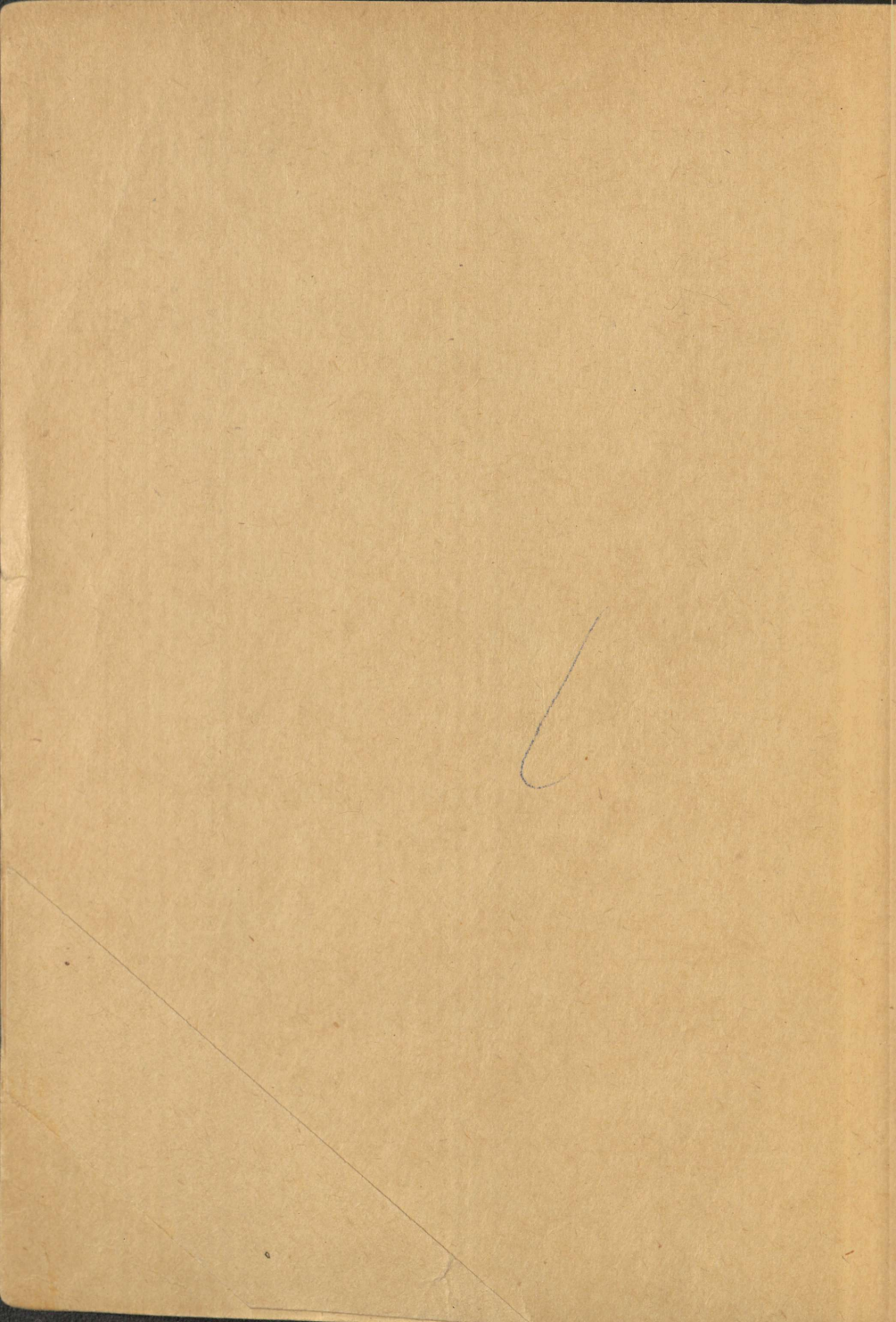


**ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

Г.М. Вайникко

**КОМПАКТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ
ОПЕРАТОРОВ И ПРИБЛИЖЕННОЕ
РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ**

Тарту 1970



1 xii
A-5462 III

Тартуский государственный университет

Г. М. Вайникко

КОМПАКТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ОПЕРАТОРОВ
И ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Тарту 1970

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu

238860

Г.М. Вайникко

КОМПАКТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ОПЕРАТОРОВ
И ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

На русском языке

Тартуский государственный университет
СССР, г.Тарту, ул. Ёликооли, 18

Ответственный редактор Э.Тамме

Ротапринт ТГУ 1970. Сдано в печать 12/1 1970 г. Печ.
листов 12,0 (условных 11,2). Учетн.-издат. листов 8,89.
Тираж 800 экз. Бумага 30x42. 1/4. МВ 00319. Заказ № 8.

Цена 45 коп.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	6
Часть первая. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ	
§1. Основные определения	9
1.1. Аппроксимация пространств	9
1.2. Аппроксимация операторов	11
1.3. Компактная аппроксимация вполне непрерывных операторов	13
§2. Линейное неоднородное уравнение	16
2.1. Вводные замечания	16
2.2. Случай уравнения второго рода	18
2.3. Уравнения, сводящиеся к уравнению второго рода	21
§3. Проблема собственных значений	24
3.1. Компактная аппроксимация проекторов Рисса ...	24
3.2. Сходимость собственных значений и корневых подпространств	29
3.3. Обобщения	35
3.4. Оценки сходимости метода Галеркина	37
§4. Нелинейные уравнения с дифференцируемыми операторами	
4.1. Лемма о разрешимости нелинейных уравнений ...	42
4.2. Теорема сходимости	43
4.3. Обобщения	45

§5. Нелинейные уравнения с вполне непрерывными операторами	
5.1. Вращение вполне непрерывного векторного поля.	48
5.2. Компактная аппроксимация нелинейных вполне непрерывных операторов	50
5.3. Инвариантность вращения при компактной аппроксимации	52
5.4. Теорема сходимости	62
5.5. Обобщения	65
§6. Второй вариант теории (аппроксимация операторами в подпространствах)	67
6.1. Постановка вопроса. Определения	67
6.2. Линейные уравнения	69
6.3. Нелинейные уравнения	72
6.4. Инвариантность вращения	75
6.5. Теорема сходимости для нелинейных уравнений с вполне непрерывными операторами	73
6.6. Спектры аппроксимирующих и аппроксимируемого операторов	81
6.7. Компактная аппроксимация резольвенты	87
6.8. Корневые подпространства аппроксимирующих и аппроксимируемого операторов	90
6.9. Быстрота сходимости	92
6.10. Обобщения	93
§7. Метод Галеркина с возмущениями	96
7.1. Понятие о методе Галеркина с возмущениями. Теорема сходимости	96
7.2. Связь с общей теорией приближенных методов Л.В. Кан-	

торовича	99
7.3. Проблема собственных значений	101
7.4. Нелинейные уравнения	105
Часть вторая. ПРИЛОЖЕНИЯ АБСТРАКТНОЙ ТЕОРИИ	
§8. Метод механических квадратур (случай непрерывных ядер)	
8.1. Сходящийся квадратурный процесс	108
8.2. Линейное интегральное уравнение	111
8.3. Проблема собственных значений	114
8.4. Нелинейное интегральное уравнение	116
§9. Метод механических квадратур (случай разрывных ядер)	
9.1. Постановка вопроса	120
9.2. Сужение мерн	121
9.3. Необходимое и достаточное условие сходимости квадратурного процесса	127
9.4. Сходимость метода механических квадратур	132
9.5. Проблема собственных значений	139
9.6. Нелинейные интегральные уравнения	140
§10. Конечноразностный метод	143
10.1. Аппроксимация производных	143
10.2. Вспомогательные результаты	146
10.3. Линейная краевая задача	156
10.4. Нелинейная краевая задача	160
10.5. Проблема собственных значений	165
10.6. Случай интегро-дифференциальных уравнений ...	171
10.7. Построение разностных схем, удовлетворяющих условию (К)	173
ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ	181
ЛИТЕРАТУРА	187

ПРЕДИСЛОВИЕ

В 1948 г. появилась в печати широко известная работа Л.В.Канторовича [30], оказавшая большое влияние на исследования по приближенным методам анализа. В указанной работе была, в частности, создана общая теория приближенных методов решения линейных операторных уравнений и приведены многочисленные приложения к приближенным методам решения интегральных и дифференциальных уравнений. Ряд дальнейших приложений были даны в последующие годы многими другими авторами. Сама созданная Л.В. Канторовичем общая теория в последующие годы существенно не развивалась. Не изучена была, например, быстрота сходимости рассмотренного класса методов в проблеме собственных значений линейных операторов (вопрос о сходимости рассматривался в [31], [52]). Совсем не затронут был с аналогичной точки зрения случай нелинейных операторных уравнений.

Независимо от общей теории приближенных методов развивалась теория так называемых проекционных методов. Отметим, в первую очередь, работы С.Г.Михлина, Н.И.Польского, М.А.Красносельского. Теория проекционных методов была продвинута значительно дальше, чем общая теория приближенных методов. В частности, М.А. Красносельским [35] была установлена ско-

димость проекционных методов в нелинейных задачах. Ряд исследований по проекционным методам было проведено автором настоящей работы. Отметим здесь лишь работы [5,6], в которых изучена быстрота сходимости проекционных методов в проблеме собственных значений (более подробную библиографию по проекционным методам см. в монографии [36]). Уместно отметить, что проекционные методы (метод Галеркина) в основном укладываются в схему Л.В.Канторовича как некоторый простой частный случай.

В работах [10, 11] нами был проведен синтез двух направлений исследования, о которых говорилось выше. А именно, оказалось, что общая теория приближенных методов Л.В.Канторовича укладывается в схему так называемого возмущенного метода Галеркина (метода Галеркина с возмущениями); для возмущенного метода Галеркина установлены результаты, близкие известным о проекционных методах.

Стремление расширить область приложений абстрактной теории (особенно желание охватить разностные методы) привело нас в последнее время к понятию компактной аппроксимации операторов (см. [12, 14-17]). В первой части настоящей работы (§§1-7) излагаются основы соответствующей абстрактной теории, а вторая часть (§§8-10) посвящена приложениям к дискретизационным методам решения интегральных и дифференциальных уравнений. Развита абстрактная теория охватывает, как некоторый частный случай, и схему возмущенного метода Галеркина.

Отметим, что наши основные усилия направлены на изучение нелинейных уравнений и проблемы собственных значений;

для линейных уравнений нужные результаты получаются сравнительно просто.

Результаты данной работы опубликованы в [9-15, 17, 18]. Результаты о возмущенном методе Галеркина вошли и в монографию [36]. Мы старались довести до минимума число ссылок в основном тексте. Литературные указания см. в конце работы.

Часть первая

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

§1. Основные определения

1.1. Аппроксимация пространств. Операторы, действующие в некотором банаховом пространстве E , будем в дальнейшем аппроксимировать последовательностью операторов, действующих в некоторых других банаховых пространствах E_n ($n=1,2,\dots$). Разумеется, пространства E_n должны быть определенным образом связаны с E . Эту связь мы сейчас и опишем. А именно, мы считаем заданными операторы (связывающие отображения)

$p_n \in \mathcal{L}(E, E_n)$ со*) следующими свойствами:

$$p_n E = E_n \quad (n=1,2,\dots); \quad (1.1)$$

$$\|p_n\| \leq a \quad (n=1,2,\dots; a = \text{const}); \quad (1.2)$$

$$\|x_n\|_{E_n} \geq b \inf_{x \in E, p_n x = x_n} \|x\|_E \quad \text{для } \forall x_n \in E_n \quad (n=1,2,\dots; b = \text{const} > 0) \quad (1.3)$$

Простейшим примером E и E_n ($n=1,2,\dots$), связанных указанным образом, является случай, когда $E_n = E$ ($n=1,2,\dots$), а p_n - тождественное отображение. Более содержательный пример дает случай, когда E_n - замкнутые подпространства E , а p_n - проекторы, проектирующие E на соответствующие E_n ; при этом следует ввести предположение, что нормы проекторов ограничены в совокупности (иначе будет нарушено

*) Через $\mathcal{L}(E, F)$ обозначается пространство линейных непрерывных операторов из E в F (определенных на всем E).

(1.2)). Третий пример: $E_n = E/E^{(n)}$ - естественным образом нормированные факторпространства E по некоторым замкнутым подпространствам $E^{(n)} \subset E$, а p_n - канонические отображения E в соответствующие факторпространства $E/E^{(n)}$ (т.е. $p_n x = x + E^{(n)}$ для каждого $x \in E$); условия (1.1) - (1.3) в этом случае выполнены с $\alpha = \beta = 1$.

Из этих трех примеров основным является третий. А именно, из условий (1.1)-(1.3) вытекает, что E_n изоморфно факторпространству $E/\text{Ker } p_n$: формула

$$\Phi_n \xi_n = x_n + \text{Ker } p_n \quad (p_n x_n = \xi_n)$$

определяет изоморфизм $\Phi_n \in \mathcal{L}(E_n, E/\text{Ker } p_n)$, для которого

$$\|\Phi_n\| \leq \frac{1}{\beta}, \quad \|\Phi_n^{-1}\| \leq \alpha \quad (n=1,2,\dots)$$

(мы считаем, что $E/\text{Ker } p_n$ наделено естественной нормой). При этом $\Phi_n p_n \in \mathcal{L}(E, E/\text{Ker } p_n)$ будет каноническим отображением E в $E/\text{Ker } p_n$.

В силу сказанного с теоретической точки зрения было бы достаточным ограничиться случаем, когда E_n - факторпространства, а p_n - канонические отображения. Однако, в приложениях удобнее пользоваться (формально) более общей теорией, оставляющей свободной природу пространств E_n и связывающих отображений p_n ($n=1,2,\dots$).

В §6 будет рассмотрен второй вариант связи между E и E_n ($n=1,2,\dots$).

*) Через $\text{Ker } p_n$ обозначается ядро оператора p_n :
 $\text{Ker } p_n = \{ \xi_n \in E_n : p_n \xi_n = 0 \}$.

1.2. Аппроксимация операторов. Пусть даны банаховы пространства E, F , последовательности банаховых пространств E_n, F_n ($n=1, 2, \dots$) и связывающие отображения $p_n \in \mathcal{L}(E, E_n)$, $q_n \in \mathcal{L}(F, F_n)$ ($n=1, 2, \dots$). О p_n и q_n будем предполагать, что они удовлетворяют условиям (1.1)-(1.3) и аналогичным условиям для q_n :

$$q_n F = F_n \quad (n=1, 2, \dots); \quad (1.1')$$

$$\|q_n\| \leq a' \quad (n=1, 2, \dots; a' = \text{const}); \quad (1.2')$$

$$\|q_n\|_{F_n} \geq b' \inf_{y \in F, q_n y = \eta_n} \|y\|_F \quad \text{для } \forall \eta_n \in F_n \quad (n=1, 2, \dots; b' = \text{const} > 0). \quad (1.3')$$

Определение 1.1. Последовательность операторов $A_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$ аппроксимирует оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$ по отношению к связывающим отображениям $p_n \in \mathcal{L}(E, E_n)$, $q_n \in \mathcal{L}(F, F_n)$, если

$$\|q_n A x - A_n p_n x\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad \text{для } \forall x \in E. \quad (1.4)$$

Там, где нет опасения возникновения недоразумений, будем просто говорить, что последовательность A_n аппроксимирует A , не указывая, по отношению к каким связывающим отображениям.

Предложение 1.1. Если последовательность $A_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$ аппроксимирует некоторый оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$, то

$$\|A_n\| \leq c = \text{const} \quad (n=1, 2, \dots). \quad (1.5)$$

Действительно, из (1.4) и (1.2') вытекает, что

$$\sup_n \|A_n p_n x\| < \infty \quad \text{для } \forall x \in E.$$

По принципу равномерной ограниченности*) нормы $\|A_n p_n\|$ ограничены в совокупности, и остается заметить, что в силу (1.3)

$$\|A_n\| \leq \frac{1}{\delta} \|A_n p_n\| \quad (n=1, 2, \dots).$$

Предложение 1.2. Если последовательность $A_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$ аппроксимирует $A \in \mathcal{L}(E, F)$, то

$$\|q_n A x_n - A_n p_n x_n\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

для любой (относительно) компактной в E последовательности $\{x_n\}$

Это утверждение легко вытекает из (1.4), (1.5), (1.2) и (1.2').

Определение 1.2. Последовательность операторов $A_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$ устойчиво аппроксимирует оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$ по отношению к связывающим отображениям $p_n \in \mathcal{L}(E, E_n)$, $q_n \in \mathcal{L}(F, F_n)$, если выполнено условие (1.4) и если при достаточно больших n существуют обратные $A_n^{-1} \in \mathcal{L}(F_n, E_n)$, причем

$$\|A_n^{-1}\| \leq c' = \text{const} \quad (n=n_0, n_0+1, \dots). \quad (1.6)$$

Определения 1.1 и 1.2 принадлежат Н.Н. Гудовичу (см. [27], [37]); мы несколько изменили терминологию - это частично связано с тем, что, в отличие от указанных работ, у нас E_n и F_n не обязаны быть факторпространствами E и F , а p_n

*) Здесь используется несколько нестандартный вариант принципа равномерной ограниченности - области значений операторов $A_n p_n$ лежат в различных пространствах F_n . Этот вариант принципа легко вывести из обычного принципа равномерной ограниченности (см. [37], стр. 407) или из теоремы П.П. Забрейко [29].

и q_n - каноническими отображениями.

1.3. Компактная аппроксимация вполне непрерывных операторов. Примем снова предпосылки, высказанные в начале предыдущего пункта. Следующее определение является в данной работе основным.

Определение 1.3. Последовательность операторов $B_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$ компактно аппроксимирует вполне непрерывный оператор $B \in \mathcal{L}(E, F)$ по отношению к связывающим отображениям $p_n \in \mathcal{L}(E, E_n)$, $q_n \in \mathcal{L}(F, F_n)$, если выполнены следующие два условия:

а) $\|q_n Bx - B_n p_n x\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для $\forall x \in E$;

б) для любой последовательности $\xi_n \in E_n$, $\|\xi_n\| \leq 1$ ($n=1, 2, \dots$), существует такие $y_n \in F$, что $q_n y_n = B_n \xi_n$ ($n=1, 2, \dots$) и последовательность $\{y_n\}$ компактна* в F .

Первое из этих условий означает, что последовательность B_n аппроксимирует B в смысле определения 1.1.

Предложение 1.3. Если последовательность $B_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$ компактно аппроксимирует вполне непрерывный оператор $B \in \mathcal{L}(E, F)$, то любая подпоследовательность B_{n_k} тоже компактно аппроксимирует B .

Это утверждение очевидно.

Предложение 1.4. Если последовательности $B_n^{(i)} \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$ компактно аппроксимируют соответственно вполне непрерывные операторы $B^{(i)} \in \mathcal{L}(E, F)$ ($i=1, \dots, m$), то $\sum_{i=1}^m c_i B_n^{(i)}$ компактно аппроксимирует $\sum_{i=1}^m c_i B^{(i)}$ (c_i - скаляр).

* Имеется в виду относительная компактность.

Утверждение очевидно. Его роль в приложениях весьма велика.

Допустим, что, кроме $\{E, E_n, p_n\}$ и $\{F, F_n, q_n\}$ задана еще третья тройка $\{G, G_n, r_n\}$ с аналогичными свойствами, что и предидущие две.

Предложение 1.5. Пусть последовательность $B_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$ аппроксимирует $B \in \mathcal{L}(E, F)$ по отношению $- p_n, q_n$, а последовательность $A_n \in \mathcal{L}(F_n, G_n)$ аппроксимирует $A \in \mathcal{L}(F, G)$ по отношению к q_n, r_n . Тогда последовательность $A_n B_n \in \mathcal{L}(E_n, G_n)$ аппроксимирует $AB \in \mathcal{L}(E, G)$ по отношению к p_n, r_n . Если хотя бы один из операторов A и B вполне непрерывен и аппроксимируется соответствующей последовательностью A_n или B_n компактно, то последовательность $A_n B_n$ компактно аппроксимирует AB .

Действительно, для любого $x \in E$ имеем $r_n ABx - A_n B_n p_n x = (r_n Ay - A_n q_n y) + A_n (q_n Bx - B_n p_n x)$, где $y = Bx \in F$, и выполнение условия а) определения 1.3 для операторов $A_n B_n, AB$ вытекает из выполнения этого условия для A_n, A и B_n, B и предложения 1.1. Допустим, что B вполне непрерывен и компактно аппроксимируется последовательностью B_n . Покажем, что для $A_n B_n$ выполнено условие б) определения 1.3. Пусть $\xi_n \in E_n, \|\xi_n\| \leq 1$ ($n=1, 2, \dots$). Используя б) для B_n , возьмем такие $y_n \in F$, что $q_n y_n = B_n \xi_n$ и $\{y_n\}$ компактна в F . По предложению 1.2 имеем

$$\|r_n A y_n - A_n B_n \xi_n\| = \|r_n A y_n - A_n q_n y_n\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

В силу аналога условия (1.3) для r_n это позволяет выбрать $u_n \in G$ так, что

$$r_n u_n = r_n A y_n - A_n B_n \xi_n \quad (n=1, 2, \dots)$$

и $\|u_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Последовательность $z_n = Ay_n - u_n$ компактна в G ввиду компактности $\{y_n\}$; кроме того,

$$r_n z_n = r_n Ay_n - r_n u_n = A_n B_n \xi_n \quad (n=1,2,\dots),$$

т.е. для $A_n B_n$ выполнено условие б) определения 1.3.

Остается рассмотреть случай, когда вполне непрерывным и компактно аппроксимируемым является A (а не B). В этом случае выполнение условия б) определения 1.3 для $A_n B_n$ проверяется проще: из $\|\xi_n\| \leq 1$ по предложению 1.1 вытекает, что $\|B_n \xi_n\| \leq \|B_n\| \leq \text{const}$ ($n=1,2,\dots$), т.е. последовательность $\eta_n = B_n \xi_n \in F_n$ ограничена по норме. Используя б) для A_n , найдем $z_n \in G$ ($n=1,2,\dots$), такие, что $r_n z_n = A_n \eta_n$ и $\{z_n\}$ компактна в G . Но тогда $r_n z_n = A_n B_n \xi_n$ и $\{z_n\}$ компактна в G , т.е. для $A_n B_n$ выполнено условие б) определения 1.3. Доказательство предложения 1.5 завершено.

§2. Линейное неоднородное уравнение

2.1. Вводные замечания. Пусть даны тройки $\{E, E_n, p_n\}$ и $\{F, F_n, q_n\}$, где E, F, E_n, F_n ($n=1, 2, \dots$) - банаховы пространства, $p_n \in \mathcal{L}(E, E_n)$, $q_n \in \mathcal{L}(F, F_n)$ - связывающие отображения, удовлетворяющие условиям (1.1)-(1.3) и (1.1')-(1.3'). Рассмотрим уравнения

$$Ax = y \quad (2.1)$$

и

$$A_n \xi_n = q_n y, \quad (2.2)$$

где $A \in \mathcal{L}(E, F)$, $A_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$, $y \in F$. Допустим, что A имеет обратный $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$; тогда уравнение (2.1) имеет единственное решение x^* . Нас интересует вопрос о разрешимости уравнений (2.2) и сходимости их решений ξ_n^* к x^* (о сходимости можно говорить в том смысле, что $\|\xi_n^* - p_n x^*\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$). Простейшее достаточное условие для такой сходимости заключается в устойчивой аппроксимации A последовательностью A_n . На самом деле, это условие включает в себя требование обратимости A_n (тем самым и однозначной разрешимости уравнения (2.2)), и из очевидного равенства

$$\xi_n^* - p_n x^* = A_n^{-1} (q_n A x^* - A_n p_n x^*) \quad (2.3)$$

на основании (1.4) и (1.6) получаем, что $\|\xi_n^* - p_n x^*\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Высказанное простейшее условие близко к необходимому: если уравнение (2.2), начиная с некоторого n_0 , имеет единственное решение и $\|\xi_n^* - p_n x^*\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ при любой правой части $y \in F$, то $\|A_n^{-1}\| \leq c = \text{const}$ ($n = n_0, n_0 + 1, \dots$).

Действительно, в силу (1.1') имеем $A_n E_n = F_n$, и ограниченность A_n^{-1} вытекает из теоремы Банаха. Перепишав (2.3) в виде

$$\xi_n^* - p_n x^* = A_n^{-1} q_n y - p_n A^{-1} y \quad (y = Ax^*),$$

получаем, что сходимость $\|\xi_n^* - p_n x^*\| \rightarrow 0$ при любом $y \in F$ равносильна аппроксимации $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ последовательностью $A_n^{-1} \in \mathcal{L}(F_n, E_n)$. Но тогда по предложению 1.1 $\|A_n^{-1}\| \leq c = \text{const}$ ($n \geq n_0$), ч.и т.д.

В приложениях обычно легко доказывается, что для конкретных изучаемых операторов $A_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$, $A \in \mathcal{L}(E, F)$ выполняется условие (1.4), т.е. что последовательность A_n аппроксимирует A . После этого установление обратимости A_n и неравенств (1.6), т.е. установление устойчивости аппроксимации станет уже необходимым и достаточным для сходимости $\|\xi_n^* - p_n x^*\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (при всех $y \in F$). Этот второй шаг, как правило, очень труден; трудности обычно возникают уже при проверке обратимости A_n . Поэтому представляют большой интерес различные практически проверяемые достаточные условия, гарантирующие обратимость A_n и равномерную ограниченность норм обратных операторов. Ниже в такой роли используется понятие компактной аппроксимации.

Приведенные в этом пункте соображения о сходимости приближенных решений широко известны. Для факторметода (т.е. в случае, когда E_n, F_n - факторпространства пространств E и F , а p_n и q_n - канонические отображения) такие соображения были четко проведены Н.Н.Гудовичем (см. [27], [37]).

2.2. Случай уравнения второго рода. Пусть дана тройка $\{E, E_n, p_n\}$, где E, E_n ($n=1, 2, \dots$) – банаховы пространства, а $p_n \in \mathcal{L}(E, E_n)$ – связывающие отображения, удовлетворяющие условиям (1.1)–(1.3). Единичные операторы в E и E_n обозначим через I и I_n .

Лемма 2.1. Пусть последовательность вполне непрерывных операторов $T_n \in \mathcal{L}(E_n, E_n)$ компактно аппроксимирует вполне непрерывный оператор $T \in \mathcal{L}(E, E)$ по отношению к связывающим отображениям $p_n \in \mathcal{L}(E, E_n)$, и пусть уравнение $x = Tx$ имеет лишь нулевое решение. Пусть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n y\| > 0 \quad \text{для } \forall y \in TE, y \neq 0. \quad (2.4)$$

Тогда операторы $I_n - T_n$ обратимы при достаточно больших n , и

$$\|(I_n - T_n)^{-1}\| \leq c = \text{const} \quad (n \geq n_0).$$

Доказательство. Ввиду полной непрерывности T_n достаточно показать, что для

$$\alpha_n \equiv \inf_{\xi_n \in E_n, \|\xi_n\|=1} \|\xi_n - T_n \xi_n\|$$

справедливо соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n > 0$. Рассуждая от противного, допустим, что $\alpha_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Выберем $\xi_n \in E_n$, $\|\xi_n\|=1$, так, что

$$\|\xi_n - T_n \xi_n\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

Воспользуясь условием б) определения 1.3 для T_n , найдем такие $y_n \in E$, что $p_n y_n = T_n \xi_n$ и последовательность

^{*)} Или $\alpha_{n_k} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Ход рассуждений от этого не изменится (см. предложение 1.3). Аналогичные упрощения допускаются и в дальнейшем.

$\{y_n\}$ компактна в E . Соотношение (2.5) дает в силу (1.3) возможность выбрать $u_n \in E$ ($n=1,2,\dots$) так, что $p_n u_n = \xi_n - T_n \xi_n$ и $\|u_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Обозначим $x_n = y_n + u_n$. Последовательность $\{x_n\}$ компактна, и $p_n x_n = \xi_n$ ($n=1,2,\dots$). По предложениям 1.1 и 1.2 при $n \rightarrow \infty$

$$\|p_n T x_n - T_n \xi_n\| = \|p_n T x_n - T_n p_n x_n\| \rightarrow 0, \quad (2.6)$$

$\|p_n T^2 x_n - T_n^2 \xi_n\| \leq \|p_n T(T x_n) - T_n p_n(T x_n)\| + \|T_n\| \|p_n T x_n - T_n \xi_n\| \rightarrow 0$. Ввиду (2.5) имеем

$$\|T_n \xi_n - T_n^2 \xi_n\| \leq \|T_n\| \|\xi_n - T_n \xi_n\| \rightarrow 0.$$

Из последних трех соотношений вытекает, что

$$\|p_n(T x_n - T^2 x_n)\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

откуда, в свою очередь, вытекает, что

$$\|p_{n_k}(T x'_k - T^2 x'_k)\| \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty,$$

где x' - любая предельная точка компактной последовательности $\{x_n\}$, $x' = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$. С помощью (2.4) делаем заключение, что $(I - T)T x' = 0$. Так как уравнение $x = T x$ имеет лишь нулевое решение, то $T x' = 0$, и $T x_{n_k} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Из (2.6) теперь следует, что $\|T_{n_k} \xi_{n_k}\| \rightarrow 0$. Затем из (2.5) получаем, что $\|\xi_{n_k}\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, вопреки условию $\|\xi_n\| = 1$ ($n=1,2,\dots$).

Лемма 2.1 доказана.

Рассмотрим уравнения

$$x = T x + f \quad (2.7)$$

и

$$\xi_n = T_n \xi_n + p_n f. \quad (2.8)$$

Нас интересует вопрос о сходимости решений уравнений (2.8) к решению уравнения (2.7).

Теорема 2.1. Пусть последовательность вполне непрерывных операторов $T_n \in \mathcal{L}(E_n, E_n)$ компактно аппроксимирует вполне непрерывный оператор $T \in \mathcal{L}(E, E)$ по отношению к связывающим отображениям $\rho_n \in \mathcal{L}(E, E_n)$ ($n=1, 2, \dots$). Пусть уравнение (2.7) имеет единственное решение $x^* \in E$. Пусть выполнено условие (2.4).

Тогда уравнение (2.8) имеет при достаточно больших n единственное решение $\xi_n^* \in E_n$, и $\|\xi_n^* - \rho_n x^*\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Справедлива оценка

$$c_1 \|\rho_n T x^* - T_n \rho_n x^*\| \leq \|\xi_n^* - \rho_n x^*\| \leq c_2 \|\rho_n T x^* - T_n \rho_n x^*\|, \quad (2.9)$$

где c_1, c_2 - некоторые положительные постоянные.

Доказательство. Выполнены условия леммы 2.1. Разрешимость и единственность решения ξ_n^* уравнения (2.8) при достаточно больших n вытекает из леммы 2.1. Кроме того, по лемме 2.1 имеем

$$\|(I - T_n)^{-1}\| \leq c_2 = \text{const} \quad (n \geq n_0).$$

Согласно предложению 1.1 имеем также

$$\|I_n - T_n\| \leq \frac{1}{c_1} = \text{const} \quad (n \geq 1).$$

Используя эти два неравенства и равенство

$$(I_n - T_n)(\xi_n^* - \rho_n x^*) = T_n \rho_n x^* - \rho_n T x^*, \quad (2.10)$$

выводим оценку (2.9). Сходимость $\|\xi_n^* - \rho_n x^*\| \rightarrow 0$ вытекает из этой оценки и условия а) определения 1.3.

Теорема 2.1 доказана.

Иногда вместо (2.8) сталкиваемся с уравнением вида

$$\xi_n = T_n \xi_n + \varphi_n, \quad (2.8)$$

где $\varphi_n \in E_n$ (но не обязательно $\varphi_n = \rho_n f$).

Замечание 2.1. Если выполнены условия теоремы 2.1, то

уравнение (2.8') имеет при достаточно больших n единственное решение ξ_n^* . Справедлива оценка

$$c_1 \varepsilon_n \leq \|\xi_n^* - p_n x^*\| \leq c_2 \varepsilon_n,$$

где

$$\varepsilon_n = \|(p_n T x^* - T_n p_n x^*) + (p_n f - \varphi_n)\|.$$

Таким образом, $\|\xi_n^* - p_n x^*\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $\|\varphi_n - p_n f\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство этого утверждения достаточно ясно.

2.3. Уравнение, сводящееся к уравнению второго рода.

Пусть теперь снова даны две тройки $\{E, E_n, p_n\}$ и $\{F, F_n, q_n\}$, для которых выполнены условия (1.1)-(1.3) и (1.1')-(1.3').

Рассмотрим уравнения

$$Ax + Bx = y \tag{2.11}$$

и

$$A_n \xi_n + B_n \xi_n = q_n y, \tag{2.12}$$

где $A, B \in \mathcal{L}(E, F)$, $A_n, B_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$, $y \in F$.

Теорема 2.2. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$ имеет обратный $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$;
- 2) последовательность операторов $A_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$ устойчиво аппроксимирует оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$ по отношению к связывающим отображениям $p_n \in \mathcal{L}(E, E_n)$, $q_n \in \mathcal{L}(F, F_n)$;
- 3) операторы $B \in \mathcal{L}(E, F)$ и $B_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$ ($n=1, 2, \dots$)

вполне непрерывны и последовательность B_n компактно аппроксимирует B по отношению к p_n и q_n ;

4) уравнение (2.11) имеет единственное решение $x^* \in E$;

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n x\| > 0$ для каждого $x \in (A^{-1}B)E$ ($x \neq 0$).

Тогда уравнение (2.12) имеет при достаточно больших n единственное решение $\xi_n^* \in E_n$, и $\|\xi_n^* - p_n x\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Справедлива оценка

$$c_1 \varepsilon_n \leq \|\xi_n^* - p_n x^*\| \leq c_2 \varepsilon_n, \quad (2.13)$$

где c_1, c_2 - некоторые положительные постоянные,

$$\varepsilon_n = \|(q_n A x^* - A_n p_n x^*) + (q_n B x^* - B_n p_n x^*)\|. \quad (2.14)$$

Доказательство. Убедимся, что последовательность вполне непрерывных операторов $T_n = A_n^{-1} B_n \in \mathcal{L}(E_n, E_n)$ компактно аппроксимирует вполне непрерывный оператор $T = A^{-1} B \in \mathcal{L}(E, E)$. В силу условия 3) и предложения 1.5 для этого достаточно показать, что

$$\|p_n A^{-1} y - A_n^{-1} q_n y\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \quad (2.15)$$

для каждого $y \in F$. Имеем

$$p_n A^{-1} y - A_n^{-1} q_n y = A_n^{-1} (A_n p_n x - q_n A x),$$

где $x = A^{-1} y \in E$. Отсюда на основании условия 2) и получаем (2.15).

Однородное уравнение $x + T x = 0$ ($T = A^{-1} B$) имеет по условию 4) лишь нулевое решение. В силу леммы 2.1 операторы

$I_n + T_n$ ($T_n = A_n^{-1} B_n$) обратимы при достаточно больших n и нормы обратных операторов ограничены в совокупности. Это равносильно тому, что при достаточно больших n обратимы операторы $A_n + B_n$ и

$$\|(A_n + B_n)^{-1}\| \leq c_2 = \text{const} \quad (n \geq n_0).$$

По предложению 1.1 имеем также

$$\|A_n + B_n\| \leq \frac{1}{c_1} = \text{const} \quad (n \geq 1).$$

Теперь из равенства

$$(A_n + B_n)(\xi_n^* - p_n x^*) = q_n(Ax^* + Bx^*) - (A_n + B_n)p_n x^*$$

получаем оценку (2.13)-(2.14). Из этой оценки вытекает сходимость $\|\xi_n^* - p_n x^*\| \rightarrow 0$.

Теорема 2.2 доказана.

Подчеркнем, что в теореме 2.2 устойчивой аппроксимации требуется лишь от "главной простой" части A уравнения (2.11).

§3. Проблема собственных значений

3.1. Компактная аппроксимация проекторов Рисса. Пусть E и E_n ($n=1, 2, \dots$) - комплексные банаховы пространства, а $p_n \in \mathcal{L}(E, E_n)$ - связывающие отображения, удовлетворяющие условиям (1.1)-(1.3). Пусть задан вполне непрерывный оператор $T \in \mathcal{L}(E, E)$. Ниже предполагается, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n y\| > 0 \text{ для } \forall y \in TE \ (y \neq 0). \quad (3.1)$$

Через $\sigma(T)$, $\rho(T)$, $R(\lambda; T) = (\lambda I - T)^{-1}$ обозначаем соответственно спектр, резольвентное множество и резольвенту оператора T .

Лемма 3.1. Пусть последовательность вполне непрерывных операторов $T_n \in \mathcal{L}(E_n, E_n)$ компактно аппроксимирует вполне непрерывный оператор $T \in \mathcal{L}(E, E)$ по отношению к связывающим отображениям $p_n \in \mathcal{L}(E, E_n)$. Пусть \mathcal{L} - компакт в комплексной плоскости^{*}, $0 \notin \mathcal{L} \subset \rho(T)$.

Тогда $\mathcal{L} \subset \rho(T_n)$ при достаточно больших n и

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{L}} \|R(\lambda; T_n)\| \leq c = \text{const} \quad (n \geq n_0). \quad (3.2)$$

Доказательство. Рассуждая от противного, допустим, что для некоторых $\lambda_n \in \mathcal{L}$, $\xi_n \in E_n$, $\|\xi_n\| = 1$ ($n=1, 2, \dots$), имеем

$$\|\lambda_n \xi_n - T_n \xi_n\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Так как \mathcal{L} - компакт, то без ограничения общности можно считать, что последовательность λ_n сходится, $\lambda_n \rightarrow \lambda \in \mathcal{L}$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда

^{*} Другими словами, \mathcal{L} - ограниченное замкнутое множество в комплексной плоскости.

$$\|\lambda \xi_n - T_n \xi_n\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \quad (0 \neq \lambda \in \rho(T)),$$

и остается повторить рассуждения, проведенные при доказательстве леммы 2.1 (ср. (2.5)).

Лемма 3.1 доказана.

Известно (см., например, [28]), что спектр $\sigma(T)$ вполне непрерывного оператора T не более чем счетен, не имеет отличных от нуля точек сгущения, и каждая ненулевая точка $\sigma(T)$ является собственным значением, которому соответствует конечномерное корневое подпространство. Приведем некоторые связанные с ним определения. Пусть $\lambda_0 \in \sigma(T)$, $\lambda_0 \neq 0$. Введем подпространства

$$X_0^{(i)} = \{x_0 \in E : (\lambda_0 I - T)^i x_0 = 0\} \quad (i=1, 2, \dots).$$

Очевидно,

$$X_0^{(1)} \subset X_0^{(2)} \subset \dots \subset X_0^{(i)} \subset X_0^{(i+1)} \subset \dots$$

Из полной непрерывности оператора T следует (см. [28]), что все эти подпространства конечномерны и среди них имеется лишь конечное число различных. Пусть натуральное число ℓ таково, что

$$X_0^{(\ell-1)} \neq X_0^{(\ell)}, \quad X_0^{(i)} = X_0^{(\ell)} \quad \text{при } i \geq \ell.$$

Тогда ℓ называется рангом (или индексом) собственного значения $\lambda_0 \in \sigma(T)$, подпространство $X_0 = X_0^{(\ell)}$ — корневым подпространством, а $m = \dim X_0$ — корневой кратностью λ_0 . Пусть δ ($0 < \delta < |\lambda_0|$) достаточно мало, так что в круге $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta$ нет других точек $\sigma(T)$, кроме λ_0 . Известно (см. [28]), что оператор

$$Q_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_0| = \delta} R(\lambda; T) d\lambda \in \mathcal{L}(E, E) \quad (3.3)$$

является проектором (так называемым проектором Рисса), проектирующим E на X_0 . Сопряженный к Q_0 оператор $Q_0^* \in \mathcal{L}(E^*, E^*)$ тоже является проектором Рисса - он проектирует сопряженное к E пространство E^* на корневое подпространство X_0^* оператора T^* , соответствующее собственному значению $\lambda_0 \in \sigma(T^*)$. (Спектры сопряженных операторов T и T^* совпадают.)

Допустим, что окружность $|\lambda - \lambda_0| = \delta$ не пересекается со спектром вполне непрерывного оператора $T_n \in \mathcal{L}(E_n, E_n)$. Тогда можно определить проектор Рисса

$$Q_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_0| = \delta} R(\lambda; T_n) d\lambda \in \mathcal{L}(E_n, E_n) \quad (3.4)$$

- он проектирует E_n на линейную оболочку Ξ_n тех корневых подпространств оператора T_n , которые соответствуют лежащим в круге $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta$ собственным значениям T_n (если круг $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta$ с $\sigma(T_n)$ не пересекается, то $Q_n = 0$). Операторы Q_0 и Q_n вполне непрерывны ввиду конечномерности их областей значений.

Лемма 3.2. Пусть последовательность вполне непрерывных операторов $T_n \in \mathcal{L}(E_n, E_n)$ компактно аппроксимирует вполне непрерывный оператор $T \in \mathcal{L}(E, E)$. Пусть λ_0 ($\lambda_0 \neq 0$) - собственное значение оператора T , единственное в круге $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta$, где $0 < \delta < |\lambda_0|$.

Тогда последовательность операторов (3.4) компактно аппроксимирует оператор (3.3).

Доказательство. Заметим, прежде всего, что окружность $L_\delta = \{\lambda : |\lambda - \lambda_0| = \delta\}$ содержится в $\rho(T)$, и, по лемме 3.1, $L_\delta \subset \rho(T_n)$ при достаточно больших n .

При указанных n действительно можно определять оператор Q_n формулой (3.4).

С помощью равенств

$$R(\lambda; T) = \frac{1}{\lambda} I + \frac{1}{\lambda} R(\lambda; T) T, \quad R(\lambda; T_n) = \frac{1}{\lambda} I_n + \frac{1}{\lambda} R(\lambda; T_n) T_n$$

преобразуем (3.3) и (3.4) к виду

$$Q_0 = ST, \quad Q_n = S_n T_n, \quad (3.5)$$

где

$$S = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_0| = \delta} \frac{1}{\lambda} R(\lambda; T) d\lambda \in \mathcal{L}(E, E),$$

$$S_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_0| = \delta} \frac{1}{\lambda} R(\lambda; T_n) d\lambda \in \mathcal{L}(E_n, E_n).$$

Здесь мы учли, что интеграл от $\varphi(\lambda) = 1/\lambda$ по окружности $|\lambda - \lambda_0| = \delta$ равен нулю. Ниже будет показано, что последовательность S_n аппроксимирует S , и утверждение леммы получим из (3.5) с помощью предложения 1.5.

Итак, остается показать, что последовательность S_n аппроксимирует S : для каждого $y \in E$

$$\|p_n S y - S_n p_n y\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Для выполнения этого соотношения, очевидно, достаточно, чтобы

$$\sup_{\lambda \in \Lambda_\delta} \|p_n R(\lambda; T) y - R(\lambda; T_n) p_n y\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (3.6)$$

Из тождеств Гильберта

$$R(\lambda; T) - R(\lambda'; T) = (\lambda' - \lambda) R(\lambda; T) R(\lambda'; T),$$

$$R(\lambda; T_n) - R(\lambda'; T_n) = (\lambda' - \lambda) R(\lambda; T_n) R(\lambda'; T_n)$$

и равномерной по λ и n ограниченности норм $\|R(\lambda; T)\|$ и $\|R(\lambda; T_n)\|$ на окружности Λ_δ (см. лемму 3.1) вытекает, что функции $p_n R(\lambda; T) y - R(\lambda; T_n) p_n y$ ($n = n_0, n_0 + 1, \dots$) равномерно непрерывны по $\lambda \in \Lambda_\delta$. Поэтому для установ-

ления (3.6) достаточно установить аналогичное соотношение для каждого $\lambda \in \Lambda_{\delta}$ в отдельности, т.е. достаточно показать, что для каждого фиксированного $\lambda \in \Lambda_{\delta}$ и каждого $y \in E$ имеет место соотношение

$$\|p_n R(\lambda; T)y - R(\lambda; T_n)p_n y\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (3.7)$$

Элементы $x^* = R(\lambda; T)y$ и $\xi_n^* = R(\lambda; T_n)p_n y$ являются решениями уравнений

$$\lambda x = Tx + y \quad \text{и} \quad \lambda \xi_n = T_n \xi_n + p_n y.$$

По теореме 2.1 имеет место сходимость $\|\xi_n^* - p_n x^*\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, что и есть соотношение (3.7).

Лемма 3.2 доказана.

Лемма 3.3. Пусть Ξ_n и Ξ_n^* - линейные оболочки корневых подпространств операторов $T_n \in \mathcal{L}(E_n, E_n)$ и $T_n^* \in \mathcal{L}(E_n^*, E_n^*)$, соответствующие собственным значениям из круга $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta$.

Тогда

$$\inf_{\varphi_n \in \Xi_n^*, \|\varphi_n\|=1} \sup_{\xi_n \in \Xi_n, \|\xi_n\|=1} |\varphi_n(\xi_n)| \geq \frac{1}{\|Q_n\|}.$$

Доказательство. Возьмем любое $\varphi_n \in \Xi_n^*$, $\|\varphi_n\|=1$, и такую последовательность $\eta_k \in E_n$, $\|\eta_k\|=1$ ($k=1, 2, \dots$), что

$$1 = \|\varphi_n\| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\varphi_n(\eta_k)|.$$

Поскольку Q_n^* - проектор Рисса, проектирующий E^* на Ξ_n^* , то $\varphi_n = Q_n^* \varphi_n = \varphi_n Q_n$ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\varphi_n(Q_n \eta_k)| = 1.$$

Ввиду конечномерности Ξ_n последовательность $Q_n \eta_k \in \Xi_n$ ($k=1, 2, \dots$) компактна; пусть η' - её предельная точка. Очевидно, $\eta' \in \Xi_n$, $|\varphi_n(\eta')|=1$, $\|\eta'\| \leq \|Q_n\|$. Положив

$\xi_n = \eta' / \|\eta'\|$, имеем $\xi_n \in \Xi_n$, $\|\xi_n\| = 1$ и $|\varphi_n(\xi_n)| \geq 1 / \|Q_n\|$.

Лемма 3.3 доказана.

3.2. Сходимость собственных значений и корневых подпространств. Пусть снова дана тройка $\{E, E_n, p_n\}$, где E и E_n ($n=1, 2, \dots$) - комплексные банаховы пространства, а $p_n \in \mathcal{L}(E, E_n)$ - связывающие отображения со свойствами (1.1)-(1.3).

Теорема 3.1. Пусть последовательность вполне непрерывных операторов $T_n \in \mathcal{L}(E_n, E_n)$ компактно аппроксимирует вполне непрерывный оператор $T \in \mathcal{L}(E, E)$ по отношению к связывающим отображениям $p_n \in \mathcal{L}(E, E_n)$. Пусть выполнено условие (3.1).

Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Для каждого $\lambda_0 \in \sigma(T)$, $\lambda_0 \neq 0$, найдется такая последовательность $\lambda_n \in \sigma(T_n)$, что $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ при $n \rightarrow \infty$.

2) Ненулевые точки сгущения любой последовательности $\lambda_n \in \sigma(T_n)$ ($n=1, 2, \dots$) принадлежат $\sigma(T)$.

3) При $n \rightarrow \infty$ имеет место сходимость

$$\theta_n \equiv \sup_{\xi_n \in \Xi_n, \|\xi_n\|=1} \inf_{x_0 \in X_0} \|\xi_n - p_n x_0\| \rightarrow 0, \quad (3.8)$$

$$\theta'_n \equiv \sup_{x_0 \in X_0, \|x_0\|=1} \inf_{\xi_n \in \Xi_n} \|\xi_n - p_n x_0\| \rightarrow 0, \quad (3.9)$$

где X_0 - корневое подпространство оператора T , соответствующее собственному значению $\lambda_0 \neq 0$, а Ξ_n - линейная оболочка тех корневых подпространств оператора T_n , которые соответствуют близким к λ_0 собственным значениям оператора T_n .

4) Справедливы оценки

$$|\lambda_n - \lambda_0| \leq c \varepsilon_n^{1/l}, \quad \theta_n \leq c \varepsilon_n, \quad \theta'_n \leq c \varepsilon_n, \quad (3.10)$$

где $c = \text{const}$; l - ранг собственного значения $\lambda_0 \in \sigma(T)$, $\lambda_0 \neq 0$; λ_n - любое близкое к λ_0 собственное значение оператора T_n ;

$$\varepsilon_n = \sup_{x_0 \in X_0, \|x_0\|=1} \|p_n T x_0 - T_n p_n x_0\|. \quad (3.11)$$

Доказательство. 1) Пусть $T x_0 = \lambda_0 x_0$, где $\lambda_0 \neq 0$, $\|x_0\|=1$. Используя условие а) определения 1.3, получаем, что

$$\|\lambda_0 p_n x_0 - T_n p_n x_0\| = \|p_n T x_0 - T_n p_n x_0\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$\inf_{\xi_n \in E_n, \|\xi_n\|=1} \|\lambda_0 \xi_n - T_n \xi_n\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (3.12)$$

Возьмем произвольное ε , $\rho < \varepsilon < |\lambda_0|$, так, чтобы в круге $|\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon$ не было других точек $\sigma(T)$, кроме λ_0 . Окружность $|\lambda - \lambda_0| = \varepsilon$ содержится в $\rho(T)$, а, значит, и в $\rho(T_n)$ при достаточно больших n , причем (см. лемму 3.1)

$$\sup_{\lambda: |\lambda - \lambda_0| = \varepsilon} \|R(\lambda; T_n)\| \leq c = \text{const} \quad (n \geq n_0).$$

Если бы оператор T_n не имел в круге $|\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon$ собственных значений, то последняя оценка была бы верной для всех λ из этого круга^{*}, в частности, при $\lambda = \lambda_0$. Это, однако, при достаточно больших n несовместимо с (3.12), следовательно, при достаточно больших n в круге $|\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon$ содержится хотя бы одно собственное значение $\lambda_n \in \sigma(T_n)$.

^{*} Здесь используется принцип максимума для нормы резольвенты. Он вытекает из равенства

$$\|R(\lambda; T)\| = \sup_{x \in E, x^* \in E^*, \|x\| = \|x^*\| = 1} |x^* R(\lambda; T) x|$$

и принципа максимума модуля для аналитических функций

$$\varphi_{x, x^*}(\lambda) = x^* R(\lambda; T) x \quad (x \in E, x^* \in E^*).$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ это и доказывает утверждение 1).

2) Возьмем такое $c = \text{const}$, что $\|T\|, \|T_n\| < c$ ($n=1,2,\dots$), и зафиксируем сколь угодно малое $\varepsilon > 0$. Образует компакт L_ε , получаемый из круга $|\lambda| \leq c$ удалением нуля и собственных значений оператора T вместе с их ε -окрестностями. Тогда $L_\varepsilon \subset \rho(T)$ и, по лемме 3.1, $L_\varepsilon \subset \rho(T_n)$ при достаточно больших n . Следовательно, $\sigma(T_n)$ расположено в выделенных ε -окрестностях нуля и $\sigma(T)$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ это равносильно утверждению 2).

3) По лемме 3.2 и определению 1.3 выполнены следующие два условия:

$$a) \|p_n Q_0 x - Q_n p_n x\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad \text{для } \forall x \in E;$$

б) для любых $\xi_n \in E_n$, $\|\xi_n\| \leq 1$ ($n=1,2,\dots$), существуют такие $x_n \in E$, что $p_n x_n = Q_n \xi_n$ и последовательность $\{x_n\}$ компактна в E .

Возьмем произвольные $\xi_n \in E_n$, $\|\xi_n\| = 1$ ($n=1,2,\dots$), и воспользуемся условием б). Так как $Q_n \xi_n = \xi_n$, то мы получаем такую компактную в E последовательность $\{x_n\}$, что $p_n x_n = \xi_n$. Согласно предложению 1.2

$$\|\xi_n - p_n Q_0 x_n\| = \|Q_n p_n x_n - p_n Q_0 x_n\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Так как $Q_0 x_n \in X_0$, а элементы $\xi_n \in E_n$, $\|\xi_n\| = 1$ ($n=1,2,\dots$), были произвольны, то это доказывает (3.8).

Возьмем теперь произвольное $x_0 \in X_0$. Тогда $x_0 = Q_0 x_0$ и

$$\|p_n x_0 - Q_n p_n x_0\| = \|p_n Q_0 x_0 - Q_n p_n x_0\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Поскольку $Q_n p_n x_0 \in E_n$, а элемент x_0 конечномерного подпространства X_0 был произволен, то это доказывает (3.9).

4) Докажем сперва вспомогательное неравенство

$$\sup_{x_0 \in X_0, \|x_0\|=1} \|(\lambda_0 I_n - T_n)^p p_n x_0\| \leq c \varepsilon_n, \quad (3.13)$$

где ε_n - определенная в (3.11) величина. Действительно, для $x_0 \in X_0$ имеем $(\lambda_0 I - T)^\ell x_0 = 0$, поэтому

$$\begin{aligned} (\lambda_0 I_n - T_n)^\ell p_n x_0 &= (\lambda_0 I_n - T_n)^\ell p_n x_0 - p_n (\lambda_0 I - T)^\ell x_0 = \\ &= \sum_{k=1}^{\ell} (-1)^k \binom{\ell}{k} \lambda_0^{\ell-k} (T_n^k p_n x_0 - p_n T^k x_0). \end{aligned}$$

Индукцией по k легко установить, что

$$T_n^k p_n x_0 - p_n T^k x_0 = \sum_{j=0}^{k-1} T_n^j (T_n p_n - p_n T) T^{k-1-j} x_0.$$

Таким образом,

$$(\lambda_0 I_n - T_n)^\ell p_n x_0 = \sum_{k=1}^{\ell} (-1)^k \binom{\ell}{k} \lambda_0^{\ell-k} \sum_{j=0}^{k-1} T_n^j (T_n p_n - p_n T) T^{k-1-j} x_0,$$

и для вывода (3.13) остается заметить, что $T X_0 \subset X_0$ и что нормы $\|T_n\|$ ($n=1, 2, \dots$) ограничены в совокупности (по предложению 1.1).

Докажем первую из оценок (3.10). Пусть φ_n - нормированный собственный элемент сопряженного к T_n оператора $T_n^* \in \mathcal{L}(E_n^*, E_n^*)$, соответствующий собственному значению λ_n :

$$\lambda_n \varphi_n = T_n^* \varphi_n, \quad \|\varphi_n\| = 1 \quad (n \geq n_0).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \varphi_n (\lambda_0 I_n - T_n) &= \lambda_n \varphi_n - \varphi_n T_n + (\lambda_0 - \lambda_n) \varphi_n = \\ &= \lambda_n \varphi_n - T_n^* \varphi_n + (\lambda_0 - \lambda_n) \varphi_n = (\lambda_0 - \lambda_n) \varphi_n \end{aligned}$$

Повторно используя это равенство, находим

$$\varphi_n (\lambda_0 I_n - T_n)^\ell = (\lambda_0 - \lambda_n)^\ell \varphi_n,$$

и для любого $x_0 \in X_0$ ($\|x_0\| = 1$) имеем

$$(\lambda_0 - \lambda_n)^\ell \varphi_n (p_n x_0) = \varphi_n (\lambda_0 I_n - T_n)^\ell p_n x_0.$$

Отсюда с помощью (3.13) получаем

$$|\lambda_n - \lambda_0|^\ell |\varphi_n (p_n x_0)| \leq c \varepsilon_n,$$

и для вывода первой из оценок (3.10) остается убедиться, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x_0 \in X_0, \|x_0\|=1} |\varphi_n (p_n x_0)| > 0. \quad (3.14)$$

По лемме 3.3 имеем

$$\sup_{\xi_n \in \Xi_n, \|\xi_n\|=1} |\varphi_n(\xi_n)| \geq \frac{1}{\|Q_n\|} \geq c_0 > 0 \quad (n \geq n_0) \quad (3.15)$$

(равномерная ограниченность норм $\|Q_n\|$ вытекает из леммы 3.2). Используя (3.8), (3.1) и конечномерность $X_0 \subset TE$, из (3.15) легко вывести (3.14). Тем самым завершается доказательство первой из оценок (3.10).

Доказательству двух оставшихся оценок предположим вывод вспомогательного неравенства

$$\sup_{x_0 \in X_0, \|x_0\|=1} \|p_n x_0 - Q_n p_n x_0\| \leq c \varepsilon_n, \quad (3.16)$$

где ε_n — определенная в (3.11) величина. Действительно, используя равенство $x_0 = Q_0 x_0$ ($x_0 \in X_0$) и определения (3.3), (3.4) операторов Q_0, Q_n , преобразуем $p_n x_0 - Q_n p_n x_0$:

$$\begin{aligned} p_n x_0 - Q_n p_n x_0 &= p_n Q_0 x_0 - Q_n p_n x_0 = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_0| = \delta} [p_n R(\lambda; T) - R(\lambda; T_n) p_n] x_0 d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_0| = \delta} R(\lambda; T_n) [(\lambda I_n - T_n) p_n - p_n (\lambda I - T)] R(\lambda; T) x_0 d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_0| = \delta} R(\lambda; T_n) [p_n T x_0(\lambda) - T_n p_n x_0(\lambda)] d\lambda, \end{aligned}$$

где $x_0(\lambda) = R(\lambda; T) x_0 \in X_0$. Отсюда и получаем (3.16); нужно заметить, что нормы $\|R(\lambda; T)\|$ и $\|R(\lambda; T_n)\|$ ограничены равномерно по λ ($|\lambda - \lambda_0| = \delta$) и n (см. лемму 3.1).

Третья из оценок (3.10) вытекает из (3.16) непосредственно (ибо $Q_n p_n x_0 \in \Xi_n$). Чтобы из (3.16) вывести и вторую из оценок (3.10), нужно еще убедиться, что уравнения

$$Q_n p_n x_0 = \xi_n,$$

в которых $\xi_n \in \Xi_n$ ($\|\xi_n\| \leq 1$) заданы, а $x_0 \in X_0$ искомым

разрешимы при достаточно больших n , и что для решений $x_{0,n}$ имеем $\|x_{0,n}\| \leq c = \text{const}$ ($n = n_0, n_0+1, \dots$). Ввиду конечномерности X_0 и Ξ_n и равенства $\dim X_0 = \dim \Xi_n$ (вытекающего при достаточно больших n из (3.1), (3.8) и (3.9)), достаточно показать, что

$$\|Q_n p_n x_0\| \geq c_0 \|x_0\| \text{ для } \forall x_0 \in X_0 \text{ (} n = n_0, n_0+1, \dots; c_0 = \text{const} > 0 \text{)} \quad (3.17)$$

Рассуждая от противного, допустим, что $\|Q_n p_n x_0^{(n)}\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для некоторых $x_0^{(n)} \in X_0$, $\|x_0^{(n)}\| = 1$ ($n = 1, 2, \dots$). Последовательность $\{x_0^{(n)}\}$ компактна; чтобы не усложнять записи, будем её считать сходящейся: $x_0^{(n)} \rightarrow x_0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $x_0 \in X_0 \subset TE$, $\|x_0\| = 1$, $\|Q_n p_n x_0\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. В силу леммы 3.2 также

$$\|p_n x_0\| = \|p_n Q_0 x_n\| \leq \|p_n Q_0 x_n - Q_n p_n x_0\| + \|Q_n p_n x_0\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

что противоречит (3.1). Это противоречие доказывает (3.17).

Теорема 3.1 полностью доказана.

Отметим, что оценки (3.10) в общем случае неулучшаемые (даже если $E_n = E$, $p_n = I$ и $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$). В подтверждение приведем

Пример 3.1. Пусть $E = E_n = R^l$, $p_n = I$ ($n = 1, 2, \dots$), а T и T_n заданы $l \times l$ -матрицами

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ (-1)^{\frac{l-1}{n}} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(эти матрицы отличаются друг от друга лишь одним элементом - в последней строке, первом столбце). Оператор T имеет l -кратное собственное значение $\lambda_0 = 1$ ранга l , а T_n - l простых собственных значений

$$\lambda_n^{(i)} = 1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{1/\ell} \gamma_i \quad (i=1, \dots, \ell),$$

где γ_i - ℓ -кратные корни единицы ($|\gamma_i|=1$, $\gamma_i^\ell=1$). Имеем

$$|\lambda_n^{(i)} - \lambda_0| = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/\ell} \quad (i=1, \dots, \ell).$$

С другой стороны, в данном случае величина (3.11)

$$\varepsilon_n = \|T - T_n\| = \frac{1}{n},$$

поэтому

$$|\lambda_n^{(i)} - \lambda_0| = \varepsilon_n^{1/\ell} \quad (i=1, \dots, \ell),$$

и первая из оценок (3.10) неудлучшаемая. Нетрудно посчитать, что и остальные две оценки (3.10) неудлучшаемы.

Аналогичные примеры можно, разумеется, строить и в бесконечномерных пространствах.

Существует, однако, класс операторов, для которых оценку $|\lambda_n - \lambda_0|$ удается уточнить, поэтому оценка снизу $|\lambda_n - \lambda_0| \geq c_1 \varepsilon_n^{1/\ell}$ в общем случае неверна. В п. 3.4 проведем уточнение оценки $|\lambda_n - \lambda_0|$ для метода Галеркина, т.е. для класса операторов $T_n = P_n T$ ($n=1, 2, \dots$), где P_n - проекторы.

3.3. Обобщения. Пусть даны две тройки $\{E, E_n, p_n\}$ и $\{F, F_n, q_n\}$, где E, F, E_n, F_n ($n=1, 2, \dots$) - комплексные банаховы пространства, а p_n и q_n - связывающие отображения, удовлетворяющие условиям (1.1)-(1.3) и (1.1')-(1.3'). Рассмотрим проблему о собственных значениях уравнения

$$Ax = \mu Bx, \quad (3.18)$$

где $A, B \in \mathcal{L}(E, F)$, μ - комплексный параметр, подлежащий определению так, чтобы уравнение (3.18) имело ненулевое решение. Наряду с (3.18) рассмотрим "приближенные" проблемы

$$A_n \xi_n = \mu B_n \xi_n, \quad (3.19)$$

где $A_n, B_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$ ($n=1, 2, \dots$).

Теорема 3.2. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) оператор A имеет обратный $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$;
- 2) последовательность операторов $A_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$ устойчиво аппроксимирует оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$ по отношению к связывающим отображениям $p_n \in \mathcal{L}(E, E_n)$, $q_n \in \mathcal{L}(F, F_n)$;
- 3) операторы $B \in \mathcal{L}(E, F)$ и $B_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$ ($n=1, 2, \dots$) вполне непрерывны и последовательность B_n компактно аппроксимирует B по отношению к $p_n \in \mathcal{L}(E, E_n)$ и $q_n \in \mathcal{L}(F, F_n)$;
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n x\| > 0$ для каждого $x \in (A^{-1}B)E$.

Тогда справедливы следующие утверждения.

I. Каждое собственное значение μ_0 уравнения (3.18) является пределом при $n \rightarrow \infty$ собственных значений μ_n уравнений (3.19) и, наоборот, каждая предельная точка любой последовательности μ_n собственных значений уравнений (3.19) является собственным значением уравнения (3.18).

II. При $n \rightarrow \infty$ имеет место сходимость

$$\theta_n \equiv \sup_{\xi_n \in \Xi_n, \|\xi_n\|=1} \inf_{x_0 \in X_0} \|\xi_n - p_n x_0\| \rightarrow 0, \quad (3.20)$$

$$\theta'_n \equiv \sup_{x_0 \in X_0, \|x_0\|=1} \inf_{\xi_n \in \Xi_n} \|\xi_n - p_n x_0\| \rightarrow 0, \quad (3.21)$$

где X_0 - корневое подпространство оператора $T = A^{-1}B$, соответствующее собственному значению $\lambda_0 = 1/\mu_0 \in \sigma(T)$, а Ξ_n - линейная оболочка тех корневых подпространств оператора

$T_n = A_n^{-1}B_n$, которые соответствуют близким к λ_0 собственным значениям T_n (близким к μ_0 собственным значениям уравнения (3.19)).

III. Справедливы оценки

$$|\mu_n - \mu_0| \leq c \varepsilon_n^{1/\ell}, \quad \theta_n \leq c \varepsilon_n, \quad \theta'_n \leq c \varepsilon_n, \quad (3.22)$$

где $c = \text{const}$; ℓ - ранг собственного значения $\lambda_0 = 1/\mu_0 \in \sigma(T)$;

$$\varepsilon_n = \sup_{x_0 \in X_0, \|x_0\|=1} \|p_n T x_0 - T_n p_n x_0\|, \quad (3.23)$$

$$\varepsilon_n \leq c' \sup_{x_0 \in X_0, \|x_0\|=1} (\|q_n A x_0 - A_n p_n x_0\| + \|q_n B x_0 - B_n p_n x_0\|). \quad (3.24)$$

Доказательство. Из условий 1)-3) вытекает (см. доказательство теоремы 2.2), что последовательность вполне непрерывных операторов $T_n = A_n^{-1} B_n \in \mathcal{L}(E_n, E_n)$ компактно аппроксимирует вполне непрерывный оператор $T = A^{-1} B \in \mathcal{L}(E, E)$ по отношению к $\{p_n\}$. Заметим, что собственные значения λ_0 оператора T связаны с собственными значениями уравнения (3.18) равенством $\lambda_0 = 1/\mu_0$, и аналогичное для T_n и уравнения (3.19). После этих замечаний все утверждения теоремы, кроме неравенства (3.24), непосредственно получаем из теоремы 3.1.

Неравенство (3.24) вытекает из легко проверяемого равенства

$$p_n T x_0 - T_n p_n x_0 = A_n^{-1} [(A_n p_n \tilde{x}_0 - q_n A \tilde{x}_0) + (q_n B x_0 - B_n p_n x_0)],$$

где $\tilde{x}_0 = T x_0$; из $x_0 \in X_0$ вытекает $\tilde{x}_0 \in X_0$.

Теорема 3.2 доказана.

3.4. Оценки сходимости метода Галеркина. В этом пункте изучим близость спектров операторов T и $T_n = P_n T$, где T - линейный вполне непрерывный оператор в комплексном банаховом пространстве E , а P_n ($n=1, 2, \dots$) - проекторы в E , т.е.

$$P_n^2 = P_n \quad (n=1, 2, \dots). \quad (3.25)$$

Будем предполагать, что

$$P_n x \rightarrow x \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad \text{для } \forall x \in E. \quad (3.26)$$

Чтобы свести изучаемый случай к рассмотренному в п. 3.2, положим $E_n = E$, $p_n = I$, $T_n = P_n T$ ($n=1, 2, \dots$). Из (3.26) и полной непрерывности T вытекает, что

$$\|T - P_n T\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (3.27)$$

и, тем более, что последовательность операторов $P_n T \in \mathcal{L}(E, E)$ компактно аппроксимирует T . Таким образом, выполнены условия теоремы 3.1. По теореме 3.1 справедливы оценки

$$|\lambda_n - \lambda_0| \leq c \varepsilon_n^{1/\ell}, \quad \theta(X_n, X_0) \leq c \varepsilon_n, \quad (3.28)$$

где ℓ — ранг собственного значения $\lambda_0 \in \sigma(T)$, $\lambda_0 \neq 0$; λ_n — любое близкое к λ_0 собственное значение оператора $P_n T$ ($\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ при $n \rightarrow \infty$); X_0 — корневое подпространство оператора T , соответствующее λ_0 ; X_n — линейная оболочка корневых подпространств оператора $P_n T$, соответствующих близким к λ_0 собственным значениям;

$$\theta(X_n, X_0) = \max \left\{ \sup_{x_n \in X_n, \|x_n\|=1} \rho(x_n, X_0), \sup_{x_0 \in X_0, \|x_0\|=1} \rho(x_0, X_n) \right\}$$

— раствор подпространств X_n и X_0 ;

$$\varepsilon_n = \sup_{x_0 \in X_0, \|x_0\|=1} \|x_0 - P_n x_0\|. \quad (3.29)$$

(Мы учли, что $T X_0 \subset X_0$ и дали определение ε_n в упрощенном виде.)

Наша цель — уточнить первую из оценок (3.28).

Теорема 3.3. Пусть выполнены условия (3.25) и (3.26).

Тогда справедлива оценка

$$|\lambda_n - \lambda_0| \leq c \sup_{\substack{x_0 \in X_0, x_0^* \in X_0^* \\ \|x_0\| = \|x_0^*\| = 1}} \left[\|x_0 - P_n x_0\| \|x_0^* - P_n^* x_0^*\| \right]^{1/\ell}, \quad (3.30)$$

где λ_0 ($\lambda_0 \neq 0$) — любое собственное значение вполне непрерывного оператора $T \in \mathcal{L}(E, E)$, а ℓ — его ранг; λ_n — любое близкое к λ_0 собственное значение оператора $P_n T$ ($\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ при $n \rightarrow \infty$); X_0 и X_0^* — корневые подпространства T и сопряженного к нему оператора $T^* \in \mathcal{L}(E^*, E^*)$, соответствующие λ_0 .

Доказательство. Пусть $x_n \in E$ ($\|x_n\| = 1$) — собственный элемент оператора $P_n T$, соответствующий λ_n ($n = n_0, n_0 + 1, \dots$). Имеем

$$(\lambda_0 I - P_n T)x_n = (\lambda_0 - \lambda_n)x_n + (\lambda_n x_n - P_n T x_n) = (\lambda_0 - \lambda_n)x_n.$$

Повторно используя это равенство, находим

$$(\lambda_0 I - T)^i x_n = (\lambda_0 - \lambda_n)^i x_n \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Индукцией легко доказывается, что

$$(\lambda_0 I - T)^\ell x_n - (\lambda_0 I - P_n T)^\ell x_n = - \sum_{j=0}^{\ell-1} (\lambda_0 I - T)^j (I - P_n) T (\lambda_0 I - P_n T)^{\ell-1-j} x_n.$$

С помощью двух последних равенств находим

$$(\lambda_0 I - T)^\ell x_n = (\lambda_0 - \lambda_n)^\ell x_n - \sum_{j=0}^{\ell-1} (\lambda_0 - \lambda_n)^{\ell-1-j} (\lambda_0 I - T)^j (I - P_n) T x_n.$$

Применим к обеим частям последнего равенства функционал

$f_0 \in X_0^*$. Поскольку

$$f_0 (\lambda_0 I - T)^\ell = (\lambda_0 I - T^*)^\ell f_0 = 0,$$

то мы приходим к равенству

$$(\lambda_0 - \lambda_n)^\ell f_0(x_n) = \sum_{j=0}^{\ell-1} (\lambda_0 - \lambda_n)^{\ell-1-j} f_0^{(j)} (I - P_n) T x_n, \quad (3.31)$$

где

$$f_0^{(j)} = f_0 (\lambda_0 I - T)^j = (\lambda_0 I - T^*)^j f_0 \in X_0^*.$$

В силу (3.25) имеем $I - P_n = (I - P_n)^2$, и (3.31) переписывается в виде

$$(\lambda_0 - \lambda_n)^\ell f_0(x_n) = \sum_{j=0}^{\ell-1} (\lambda_0 - \lambda_n)^{\ell-1-j} (f_0^{(j)} - P_n^* f_0^{(j)}) (I - P_n) T x_n.$$

Отсюда

$$|\lambda_0 - \lambda_n|^\ell \sup_{f_0 \in X_0^*, \|f_0\|=1} |f_0(x_n)| \leq c \|(I - P_n) T x_n\| \sup_{x_0^* \in X_0^*, \|x_0^*\|=1} \|x_0^* - P_n^* x_0^*\|. \quad (3.32)$$

Оценим $\|(I - P_n) T x_n\|$. Имеем

$$\|(I - P_n) T x_n\| \leq \|T - P_n T\| \|x_n - x_0\| + \|(I - P_n) T x_0\|,$$

где $x_0 \in X_0$ любое; заметив, что $T x_0 \in X_0$, получаем

$$\|(I - P_n) T x_n\| \leq \|T - P_n T\| \rho(x_n, X_0) + c \sup_{x_0 \in X_0, \|x_0\|=1} \|x_0 - P_n x_0\|.$$

В силу второй из оценок (3.28) имеем окончательно

$$\|(I - P_n) T x_n\| \leq c' \sup_{x_0 \in X_0, \|x_0\|=1} \|x_0 - P_n x_0\|. \quad (3.33)$$

Чтобы из (3.32) и (3.33) вывести оценку (3.30), остается еще заметить, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{f_0 \in X_0^*, \|f_0\|=1} |f_0(x_n)| > 0.$$

Это вытекает из сходимости $\theta(X_n, X_0) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и неравенства (ср. с леммой 3.3)

$$\inf_{x_0 \in X_0, \|x_0\|=1} \sup_{f_0 \in X_0^*, \|f_0\|=1} |f_0(x_0)| > 0.$$

Теорема 3.3 доказана.

В случае, когда E - гильбертово пространство, P_n - ортопроекторы, а T самосопряжен (тогда ранг любого его собст-

венного значения $\lambda_0 \neq 0$ равен 1), можно вывести асимптотическое соотношение^{*)}

$$\lambda_0 - \lambda_n = \lambda_0(1 + \delta_n) \|(I - P_n)x_0^{(n)}\|^2,$$

где δ_n — некоторая стремящаяся к нулю числовая последовательность, а $x_0^{(n)} \in X_0$ ($\|x_0^{(n)}\| = 1$) — некоторые специальным образом построенные собственные элементы оператора T . В этом случае оценка (3.30) не может быть улучшена. Повидимому, оценку (3.30) нельзя существенно улучшить и в общем случае.

Оценку (3.30) легко перенести на различные проекционные методы (метод Бубнова-Галеркина, метод Галеркина-Петрова, метод наименьших квадратов) отыскания собственных значений вполне непрерывных операторов в гильбертовых пространствах. Нужные построения проведены в монографии [36] и здесь повторяться не будут; см. также [5, 6].

^{*)} См. [6]; в монографии [36] на стр. 271 этот результат сформулирован в виде упражнения.

§4. Нелинейные уравнения с дифференцируемыми операторами

4.1. Лемма о разрешимости нелинейных уравнений. Нам понадобится следующая

Лемма 4.1. Пусть A - оператор из банахова пространства \mathcal{E} в банахово пространство \mathcal{F} , определенный и дифференцируемый по Фреше на шаре $\|x - x_0\| \leq \delta_0$ пространства \mathcal{E} , где $\delta_0 > 0$, x_0 - некоторая фиксированная точка \mathcal{E} . Пусть существует обратный оператор $[A'(x_0)]^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}, \mathcal{E})$, причем при некотором q ($0 < q < 1$) соблюдаются неравенства

$$\sup_{\|x - x_0\| \leq \delta_0} \|[A'(x_0)]^{-1}[A'(x) - A'(x_0)]\| \leq q, \quad (4.1)$$

$$\alpha \equiv \|[A'(x_0)]^{-1}Ax_0\| \leq \delta_0(1-q). \quad (4.2)$$

Тогда уравнение $Ax = 0$ имеет в шаре $\|x - x_0\| \leq \delta_0$ единственное решение x^* и справедливы оценки

$$\frac{\alpha}{1+q} \leq \|x^* - x_0\| \leq \frac{\alpha}{1-q}. \quad (4.3)$$

Доказательство этого простого утверждения основано на равносильности уравнения $Ax = 0$ с уравнением $x = Bx$, где B - оператор в \mathcal{E} ,

$$Bx = x_0 - [A'(x_0)]^{-1}\{Ax_0 + [Ax - Ax_0 - A'(x_0)(x - x_0)]\}.$$

Условия (4.1) и (4.2) гарантируют применимость принципа сжатых отображений для уравнения $x = Bx$ в шаре $\|x - x_0\| \leq \delta_0$. Подробности доказательства см. в [36], стр. 277.

Замечание 4.1. Неравенства (4.1) и (4.2) выполнены, если

$$\|[A'(x_0)]^{-1}\| \leq \alpha, \quad (4.4)$$

$$\sup_{\|x-x_0\| \leq \delta_0} \|A'(x) - A'(x_0)\| \leq \frac{q}{\alpha}, \quad (4.5)$$

$$\|Ax_0\| \leq \frac{\delta_0(1-q)}{\alpha}. \quad (4.6)$$

4.2. Теорема сходимости. Пусть задана тройка $\{E, E_n, p_n\}$, где E, E_n ($n=1, 2, \dots$) - банаховы пространства, $p_n \in \mathcal{L}(E, E_n)$ - связывающие отображения со свойствами (1.1)-(1.3). Рассмотрим уравнения

$$x = Tx \quad (4.7)$$

и

$$\xi_n = T_n \xi_n, \quad (4.8)$$

где T и T_n - нелинейные операторы в пространствах E и E_n соответственно.

Теорема 4.1. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) уравнение (4.7) имеет решение $x^* \in E$;
- 2) оператор T дифференцируем по Фреше в точке x^* , оператор $T'(x^*) \in \mathcal{L}(E, E)$ вполне непрерывен^{*}, и однородное уравнение $z = T'(x^*)z$ имеет лишь решение $z = 0$;
- 3) операторы T_n ($n=1, 2, \dots$) дифференцируемы по Фреше, каждый в своем шаре $\{\xi_n \in E_n : \|\xi_n - p_n x^*\| \leq \delta\}$, где $\delta > 0$ не зависит от n ; операторы $T'_n(p_n x^*) \in \mathcal{L}(E_n, E_n)$ вполне непрерывны, и

$\|T'_n(\xi_n) - T'_n(p_n x^*)\| \leq \omega(\|\xi_n - p_n x^*\|)$ при $\|\xi_n - p_n x^*\| \leq \delta$ ($n=1, 2, \dots$), где $\omega(\tau)$ - некоторая непрерывная на $[0, \delta]$ функция, $\omega(0) = 0$;

4) $\|p_n T x^* - T_n p_n x^*\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;

5) последовательность линейных вполне непрерывных опе-

^{*} Известно (см. [35]), что $T'(x^*)$ будет вполне непрерывным, если сам T вполне непрерывен.

раторов $T'_n(p_n x^*) \in \mathcal{L}(E_n, E_n)$ компактно аппроксимирует линейный вполне непрерывный оператор $T'(x^*) \in \mathcal{L}(E, E)$;

6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n x\| > 0$ для каждого $x \in T'(x^*)E$ ($x \neq 0$).

Тогда найдутся такие n_0 и $\delta_0 > 0$, что при $n \geq n_0$ уравнение (4.8) имеет единственное решение ξ_n^* в шаре $\|\xi_n - p_n x^*\| \leq \delta_0$. Имеет место сходимость $\|\xi_n^* - p_n x^*\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и справедлива оценка

$$c_1 \|p_n T x^* - T_n p_n x^*\| \leq \|\xi_n^* - p_n x^*\| \leq c_2 \|p_n T x^* - T_n p_n x^*\|, \quad (4.9)$$

где c_1, c_2 - некоторые положительные постоянные.

Доказательство. Из условий 2), 5) и 6) на основании леммы 2.1 следует, что операторы $I_n - T'_n(p_n x^*)$ обратимы при достаточно больших n и нормы обратных ограничены в совокупности:

$$\| [I_n - T'_n(p_n x^*)]^{-1} \| \leq \alpha \quad (n \geq n_0). \quad (4.10)$$

Зафиксируем какое-нибудь q ($0 < q < 1$) и, пользуясь условием 3), найдем такое δ_0 , что

$$\sup_{\xi_n \in E_n, \|\xi_n - p_n x^*\| \leq \delta_0} \|T'_n(\xi_n) - T'_n(p_n x^*)\| \leq \frac{q}{\alpha} \quad (n \geq n_0). \quad (4.11)$$

По условию 4) при достаточно больших n (пусть это тоже будет при $n \geq n_0$) имеем также

$$\|(I_n - T_n)p_n x^*\| = \|p_n T x^* - T_n p_n x^*\| \leq \frac{\delta_0(1-q)}{\alpha} \quad (n \geq n_0). \quad (4.12)$$

Неравенства (4.10), (4.11), (4.12) - это неравенства (4.4), (4.5), (4.6) для оператора $A = I_n - T_n$, действующего в E_n , причем в качестве точки x_0 выступает $p_n x^* \in E_n$. По лемме 4.1 уравнение (4.8) имеет при $n \geq n_0$ в шаре $\|\xi_n - p_n x^*\| \leq \delta_0$ единственное решение ξ_n^* . Оценка (4.3) в данном случае дает

$$\frac{\alpha_n}{1+q} \leq \|\xi_n^* - p_n x^*\| \leq \frac{\alpha_n}{1-q} \quad (n \geq n_0), \quad (4.13)$$

где

$$\alpha_n = \|[I_n - T_n'(p_n x^*)]^{-1}(p_n T x^* - T_n p_n x^*)\|.$$

В силу (4.10) и неравенств $\|T_n'(p_n x^*)\| \leq c = \text{const}$ ($n=1,2,\dots$) из (4.13) вытекает оценка (4.9). Сходимость $\|\xi_n - p_n x^*\| \rightarrow 0$ следует из оценки (4.9) и условия 4) теоремы.

Теорема 4.1 доказана.

Замечание 4.2. Из условия 2) теоремы 4.1 вытекает, что решение x^* уравнения (4.7) изолированное, т.е. в некоторой окрестности точки x^* нет других решений этого уравнения.

4.3. Обобщения. Пусть теперь заданы две тройки $\{E, E_n, p_n\}$ и $\{F, F_n, q_n\}$, где E, F, E_n, F_n - банаховы пространства, а $p_n \in \mathcal{L}(E, E_n)$ и $q_n \in \mathcal{L}(F, F_n)$ - связывающие отображения со свойствами (1.1)-(1.3) и (1.1')-(1.3'). Рассмотрим уравнения

$$Ax + Bx = 0 \quad (4.14)$$

и

$$A_n \xi_n + B_n \xi_n = 0, \quad (4.15)$$

где A и A_n линейные, а B и B_n нелинейные операторы (A и B действуют из E в F , а A_n и B_n - из E_n в F_n).

Теорема 4.2. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$ имеет обратный $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$;
- 2) последовательность операторов $A_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$ устойчиво аппроксимирует оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$;
- 3) уравнение (4.14) имеет решение $x^* \in E$;
- 4) оператор B дифференцируем по Фреше в точке x^* , оператор $B'(x^*) \in \mathcal{L}(E, F)$ вполне непрерывен, и однородное уравнение $Az + B'(x^*)z = 0$ имеет лишь нулевое решение;
- 5) операторы B_n ($n=1,2,\dots$) дифференцируемы по Фреше,

каждый в своем шаре $\|\xi_n - p_n x^*\| \leq \delta$, где $\delta > 0$ не зависит от n ; операторы $B'_n(p_n x^*) \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$ вполне непрерывны, и

$$\|B'_n(\xi_n) - B'_n(p_n x^*)\| \leq \omega(\|\xi_n - p_n x^*\|) \quad (n=1,2,\dots),$$

где $\omega(\tau)$ - непрерывная функция, $\omega(0)=0$;

6) $\|q_n B x^* - B_n p_n x^*\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;

7) последовательность $B'_n(p_n x^*) \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$ компактно аппроксимирует оператор $B'(x^*) \in \mathcal{L}(E, F)$ по отношению к связывающим отображениям $p_n \in \mathcal{L}(E, E_n)$, $q_n \in \mathcal{L}(F, F_n)$;

8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n x\| > 0$ для каждого $x \in [A^{-1}B'(x^*)]E$ ($x \neq 0$).

Тогда найдутся такие n_0 и $\delta_0 > 0$, что при $n \geq n_0$ уравнение (4.15) имеет единственное решение ξ_n^* в шаре $\|\xi_n - p_n x^*\| \leq \delta_0$. Имеет место сходимость $\|\xi_n^* - p_n x^*\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и справедлива оценка

$$c_1 \varepsilon_n \leq \|\xi_n^* - p_n x^*\| \leq c_2 \varepsilon_n, \quad (4.16)$$

где c_1, c_2 - некоторые положительные постоянные, а

$$\varepsilon_n = \|(q_n A x^* - A_n p_n x^*) + (q_n B_n x^* - B_n p_n x^*)\|. \quad (4.17)$$

Доказательство. Уравнения (4.14) и (4.15) равносильны соответственно уравнениям (4.7) и (4.8), в которых

$$T = -A^{-1}B, \quad T_n = -A_n^{-1}B_n.$$

Нетрудно проверить, что для этих операторов выполнены все условия теоремы 4.1. В частности, условие 5) теоремы 4.1 вытекает из условий 2) и 7) доказываемой теоремы (см. доказательство теоремы 2.2). Остановимся лишь на проверке условия 4) теоремы 4.1. Имеем $(A+B)x^* = 0$, $Tx^* = -x^*$, поэтому

$$\begin{aligned} p_n T x^* - T_n p_n x^* &= A_n^{-1}(-A_n p_n x^* - B_n p_n x^*) = \\ &= A_n^{-1}[(q_n A x^* - A_n p_n x^*) + (q_n B x^* - B_n p_n x^*)] \end{aligned}$$

и

$$c' \varepsilon_n \leq \|p_n T x^* - T_n p_n x^*\| \leq c'' \varepsilon_n, \quad (4.18)$$

где ε_n - определенная в (4.17) величина, а

$$c' = \inf_n \frac{1}{\|A_n\|} > 0, \quad c'' = \sup_n \|A_n^{-1}\| < \infty.$$

Из (4.18) и условий 2) и 6) доказываемой теоремы и получаем условие 4) теоремы 4.1.

Теперь все утверждения доказываемой теоремы вытекают из теоремы 4.1. В частности, (4.9) и (4.18) влекут за собой (4.16).

Теорема 4.2 доказана.

§5. Нелинейные уравнения с вполне непрерывными операторами

Результаты
5.1. Вращения вполне непрерывного векторного поля. Пусть

E - вещественное банахово пространство, Ω - непустое открытое ограниченное множество в E , $\dot{\Omega}$ - граница Ω , $\bar{\Omega} = \Omega \cup \dot{\Omega}$ - замыкание Ω . Пусть оператор $A: \bar{\Omega} \rightarrow E$ вполне непрерывен и не имеет неподвижных точек на границе $\dot{\Omega}$. Тогда определено вращение $\gamma(I-A; \dot{\Omega})$ вполне непрерывного векторного поля $x - Ax$ на $\dot{\Omega}$. За определением вращения отсылаемся к монографии М.А.Красносельского [35]. Отметим здесь лишь, что вращение $\gamma(I-A; \dot{\Omega})$ - это некоторая целочисленная топологическая характеристика оператора A на множестве Ω ; для нее справедливы (см. [35]) приводимые ниже утверждения 1°-9°. В дальнейшем эти утверждения будут использованы как аксиомы, не прибегая к содержательному пониманию вращения.

1° Если $\gamma(I-A; \dot{\Omega}) \neq 0$, то A имеет в Ω хотя бы одну неподвижную точку.

2° $\gamma(I-A; \dot{\Omega}) = \gamma(I-A; \dot{\Omega}')$, где $\dot{\Omega}'$ - граница любого такого открытого подмножества $\Omega' \subset \Omega$, что A не имеет неподвижных точек в $\Omega \setminus \Omega'$;

3° $\gamma(I-A; \dot{\Omega}) = \gamma(I-A_1; \dot{\Omega})$, если вполне непрерывные векторные поля $x - Ax$ и $x - A_1x$ гомотопны на $\dot{\Omega}$, т.е. если существует такой вполне непрерывный по совокупности переменных оператор $A(x; t)$ ($x \in \dot{\Omega}$, $0 \leq t \leq 1$), что

$$A(x; 0) = Ax, \quad A(x; 1) = A_1x \quad (x \in \dot{\Omega})$$

и $A(x; t)$ не имеет при $0 \leq t \leq 1$ неподвижных точек на $\bar{\Omega}$.

В частности,

4° $\gamma(I-A; \bar{\Omega}) = \gamma(I-A_0; \bar{\Omega})$, если $\sup_{x \in \bar{\Omega}} \|A_0 x - Ax\| < \inf_{x \in \bar{\Omega}} \|x - Ax\|$.

5° Пусть $A\bar{\Omega} \subset \mathcal{E}_0$, где \mathcal{E}_0 - замкнутое подпространство \mathcal{E} . Тогда $\gamma(I-A; \bar{\Omega}) = \gamma(I-A_0; \bar{\Omega}_0)$, где $A_0: \bar{\Omega}_0 \rightarrow \mathcal{E}_0$ - сужение оператора A , $\Omega_0 = \Omega \cap \mathcal{E}_0$, $\bar{\Omega}_0$ - граница Ω_0 в \mathcal{E}_0 , $\bar{\Omega}_0 = \Omega_0 \cup \dot{\Omega}_0$. (Может случиться, что Ω_0 пусто. В этом случае $\gamma(I-A; \bar{\Omega}) = 0$ и утверждение остается в силе, если по определению положить $\gamma(I-A; \emptyset) = 0$.)

6° $\gamma(I-A; \bar{\Omega}) = \gamma(I-B^{-1}AB; B^{-1}\bar{\Omega})$, где $B \in \mathcal{L}(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ - линейный непрерывный оператор из некоторого другого банахова пространства \mathcal{F} в \mathcal{E} , имеющий обратный $B^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. (Оператор $B^{-1}AB$ действует в \mathcal{F} и определен на замкнутой области $B^{-1}\Omega \subset \mathcal{F}$; границей этой области является $B^{-1}\dot{\Omega}$.)

7° Пусть $x_0 \in \Omega$ - изолированная неподвижная точка оператора A . Обозначим через Γ_δ сферу $\|x - x_0\| = \delta$. Тогда $\gamma(I-A; \Gamma_\delta) = \gamma(I-A; \Gamma_{\delta_0})$ при $0 < \delta < \delta_0$, где δ_0 таков, что шар $\|x - x_0\| \leq \delta_0$ содержится в $\bar{\Omega}$ и в этом шаре нет других неподвижных точек оператора A , кроме x_0 . Это общее значение вращения $\gamma(I-A; \Gamma_\delta)$ называется индексом изолированной неподвижной точки x_0 оператора A (или индексом изолированного решения x_0 уравнения $x = Ax$).

8° Пусть $x_0 \in \Omega$ - неподвижная точка оператора A . Пусть оператор A дифференцируем по Фреше в точке x_0 и линейное однородное уравнение $z = A'(x_0)z$ имеет лишь нулевое решение $z = 0$. Тогда x_0 - изолированная неподвижная точка

ненулевого индекса (её индекс равен 1 или -1).

9° Если Ω выпукло и $A\bar{\Omega} \subset \bar{\Omega}$ (т.е. если выполнены условия принципа Шаудера), то $\gamma(I-A; \bar{\Omega}) = 1$.

Мы привели лишь два простейших утверждения об отличии от нуля вращения (индекса). Расширению запаса таких утверждений (см. [35]) соответствует увеличение содержательности доказываемых ниже теорем сходимости. Отметим также, что понятие вращения в последнее время перенесено на класс так называемых уплотняющих векторных полей (см. [46], [47], [21]).

5.2. Компактная аппроксимация нелинейных вполне непрерывных операторов. Пусть даны тройки $\{E, E_n, p_n\}$ и $\{F, F_n, q_n\}$, где E, F, E_n, F_n ($n=1, 2, \dots$) - банаховы пространства, а $p_n \in \mathcal{L}(E, E_n)$ и $q_n \in \mathcal{L}(F, F_n)$ - связывающие отображения со свойствами (1.1)-(1.3) и (1.1')-(1.3'). Пусть Ω - непустое открытое ограниченное множество в E ; обозначим $\Omega_n = p_n \Omega$. Тогда Ω_n - непустое открытое ограниченное множество в E_n . Через $\bar{\Omega} = \Omega \cup \dot{\Omega}$ и $\bar{\Omega}_n = \Omega_n \cup \dot{\Omega}_n$ обозначим замыкания Ω и Ω_n соответственно в E и E_n . Очевидно, $p_n \bar{\Omega} \subset \bar{\Omega}_n$.

Определение 5.1. Последовательность вполне непрерывных операторов $B_n: \bar{\Omega}_n \rightarrow F_n$ компактно аппроксимирует вполне непрерывный оператор $B: \bar{\Omega} \rightarrow F$ по отношению к связывающим отображениям $p_n \in \mathcal{L}(E, E_n)$ и $q_n \in \mathcal{L}(F, F_n)$, если выполнены следующие два условия:

- $\|q_n B_n x - B_n p_n x\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для $\forall x \in \bar{\Omega}$;
- для любых $\xi_n \in \bar{\Omega}_n$ ($n=1, 2, \dots$) существуют такие $y_n \in F$, что $q_n y_n = B_n \xi_n$ ($n=1, 2, \dots$) и последовательность $\{y_n\}$ компактна в F .

Это определение вполне аналогично определению 1.3 для линейных операторов. Некоторые видоизменения произошли по той причине, что B и B_n определены лишь на $\bar{\Omega}$ и $\bar{\Omega}_n$ соответственно. Заметим также, что в условии б) теперь не следует требовать ограниченности норм $\|\xi_n\|$ - это вытекает из ограниченности множества $\Omega \subset E$ и неравенств (1.2).

Очевидно, предложения 1.3 и 1.4 о компактной аппроксимации линейных операторов переносятся и на нелинейные операторы. Формулировки достаточно ясны, и мы не будем их приводить. С предложением 1.5 обстоит дело сложнее. Пусть, кроме $\{E, E_n, p_n\}$ и $\{F, F_n, q_n\}$ задана ещё одна тройка $\{G, G_n, r_n\}$ с аналогичными свойствами, что и предыдущие две.

Предложение 5.1. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) последовательность вполне непрерывных операторов $B_n: \bar{\Omega}_n \rightarrow F_n$ компактно аппроксимирует вполне непрерывный оператор $B: \bar{\Omega} \rightarrow F$ по отношению к $p_n \in \mathcal{L}(E, E_n)$, $q_n \in \mathcal{L}(F, F_n)$;
- 2) $\|r_n A y - A_n q_n y\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для каждого $y \in F$, где $A: F \rightarrow G$ и $A_n: F_n \rightarrow G_n$ непрерывные операторы;
- 3) если для некоторых $y \in F$, $\eta_n \in F_n$ ($n=1, 2, \dots$) имеет место сходимость $\|\eta_n - q_n y\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то $\|A_n \eta_n - A_n q_n y\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Тогда последовательность вполне непрерывных операторов $A_n B_n: \bar{\Omega}_n \rightarrow G_n$ компактно аппроксимирует вполне непрерывный оператор $AB: \bar{\Omega} \rightarrow G$ по отношению к p_n, r_n .

Действительно, для любого $x \in \bar{\Omega}$ имеем $r_n ABx - A_n B_n p_n x = (r_n Ay - A_n q_n y) + (A_n q_n y - A_n \eta_n)$, (5.1) где $y = Bx \in F$, $\eta_n = B_n p_n x \in F_n$. В силу условия 1)

$$\|\eta_n - q_n y\| = \|B_n p_n x - q_n Bx\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

и из (5.1) на основании условий 2) и 3) получаем

$$\|r_n A B x - A_n B_n r_n x\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

т.е. для AB и $A_n B_n$ выполнено условие а) определения 5.1. Проверка условия б) для $A_n B_n$ проводится по той же схеме, что и в доказательстве предложения 1.5.

В случае, когда операторы $A: F \rightarrow G$ и $A_n: F_n \rightarrow G_n$ линейны, третье условие предложения 5.1 вытекает из второго (см. предложение 1.1).

5.3. Инвариантность вращения при компактной аппроксимации. Пусть дана тройка $\{E, E_n, r_n\}$, где E и E_n ($n=1, 2, \dots$) вещественные банаховы пространства, а $r_n \in \mathcal{L}(E, E_n)$ — связывающие отображения со свойствами (1.1)–(1.3). Пусть $\Omega \subset E$ — непустое открытое ограниченное множество, $\Omega_n = r_n \Omega$.

Следующая лемма играет в дальнейших рассуждениях основную роль.

Лемма 5.1. Пусть выполнены следующие условия:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|r_n x\| \geq \alpha \|x\|$ для каждого $x \in E$ ($\alpha = \text{const} > 0$);

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{\xi_n \in \Omega_n} \|r_n x - \xi_n\| > 0$ для каждого $x \notin \bar{\Omega}$;

3) последовательность вполне непрерывных операторов $T_n: \bar{\Omega}_n \rightarrow E_n$ компактно аппроксимирует вполне непрерывный оператор $T: \bar{\Omega} \rightarrow E$ по отношению к связывающим отображениям $r_n \in \mathcal{L}(E, E_n)$ ($n=1, 2, \dots$);

4) если для некоторых $x \in \bar{\Omega}$ и $\xi_n \in \bar{\Omega}_n$ ($n=1, 2, \dots$) имеет место сходимость $\|\xi_n - r_n x\| \rightarrow 0$, то $\|T_n \xi_n - T r_n x\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;

5) оператор T не имеет неподвижных точек на границе $\dot{\Omega}$.

Тогда при достаточно больших n оператор T_n не имеет неподвижных точек на границе $\dot{\Omega}_n$ и имеет место равенство вращений:

$$\gamma(I_n - T_n; \dot{\Omega}_n) = \gamma(I - T; \dot{\Omega}) \quad (n \geq n_0). \quad (5.2)$$

Доказательство разобьем на семь частей.

I. Введем множество $Y \subset E$, состоящее из тех и только тех элементов $y \in E$, для которых найдутся такие $\xi_n \in \bar{\Omega}_n$ и $y_n \in E$ ($n=1, 2, \dots$), что $p_n y_n = T_n \xi_n$ ($n=1, 2, \dots$) и y является предельной точкой последовательности $\{y_n\}$. Пускажем, что Y компактно в E . Рассмотрим произвольную последовательность $y^{(k)} \in Y$ ($k=1, 2, \dots$). По определению, $y^{(k)}$ является предельной точкой некоторой последовательности $y_n^{(k)}$, такой, что $p_n y_n^{(k)} = T_n \xi_n^{(k)}$, $\xi_n^{(k)} \in \bar{\Omega}_n$. Из двойной последовательности $\{y_n^{(k)}\}$ ($n=1, 2, \dots; k=1, 2, \dots$) выделим (простую) последовательность $z_n = y_n^{(k_n)}$ ($n=1, 2, \dots$) так, что $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(k)}, \dots$ остаются для нее предельными точками. По условию 3) для соответствующих $\xi_n^{(k_n)} \in \bar{\Omega}_n$ ($n=1, 2, \dots$) существуют такие $y'_n \in E$, что $p_n y'_n = T_n \xi_n^{(k_n)}$ ($n=1, 2, \dots$) и последовательность $\{y'_n\}$ компактна в E . По построению имеем $p_n z_n = p_n y'_n = T_n \xi_n^{(k_n)}$, поэтому

$$p_n(z_n - y'_n) = 0 \quad (n=1, 2, \dots). \quad (5.3)$$

Выделим из $\{z_n\}$ такую подпоследовательность $\{z_{n_i}\}$, что $z_{n_i} \rightarrow y^{(k)}$ при $i \rightarrow \infty$. Без ограничения общности можно считать,

что соответствующая подпоследовательность $\{y'_{n_i}\}$ тоже сходится. Пусть $y'_{n_i} \rightarrow y'$ при $i \rightarrow \infty$. Ввиду (5.3) имеем

$$\|p_{n_i}(y^{(k)} - y')\| \leq \|p_{n_i}\| (\|z_{n_i} - y^{(k)}\| + \|y'_{n_i} - y'\|) \rightarrow 0 \quad \text{при } i \rightarrow \infty.$$

Теперь из условия 1) вытекает, что $y' = y^{(k)}$. Мы убедились тем самым, что среди предельных точек компактной последовательности $\{y'_n\}$ встречаются точки $y^{(k)}$ ($k=1, 2, \dots$).

Поэтому и сама последовательность $\{y^{(k)}\}$ компактна. Компактность множества Y доказана.

II. Покажем, что

$$\sup_{\xi_n \in \bar{\Omega}_n} \varphi(T_n \xi_n, p_n Y) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (5.4)$$

где $\varphi(\eta_n, p_n Y)$ означает расстояние от $\eta_n \in E_n$ до множества $p_n Y$. Действительно, допустим, что для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ и некоторых $\xi_n \in \bar{\Omega}_n$ имеем

$$\varphi(T_n \xi_n, p_n Y) \geq \varepsilon_0 \quad (n=1, 2, \dots). \quad (5.5)$$

Пользуясь условием 3), найдем такую компактную в E последовательность $\{y_n\}$, что $p_n y_n = T_n \xi_n$ ($n=1, 2, \dots$); чтобы не усложнять записи, будем саму эту последовательность считать сходящейся: $y_n \rightarrow y \in Y$ при $n \rightarrow \infty$. Имеем

$\|T_n \xi_n - p_n y\| = \|p_n(y_n - y)\| \leq \|p_n\| \|y_n - y\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, что противоречит (5.5). Это противоречие и доказывает (5.4).

III. Докажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{\xi_n \in \bar{\Omega}_n} \|\xi_n - T_n \xi_n\| > 0. \quad (5.6)$$

Действительно, допустим что для некоторых $\xi_n \in \bar{\Omega}_n$ имеем

$$\|\xi_n - T_n \xi_n\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (5.7)$$

В силу (1.3) тогда существуют такие $u_n \in E$, что $p_n u_n = \xi_n - T_n \xi_n$ ($n=1, 2, \dots$) и $\|u_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть $y_n \in E$ ($n=1, 2, \dots$) — такая компактная в E последовательность, что $p_n y_n = T_n \xi_n$ (она существует в силу условия 3)). Обозначим $x_n = y_n + u_n$. Последовательность $\{x_n\}$ компактна и $p_n x_n = \xi_n$ ($n=1, 2, \dots$). Чтобы опять не усложнять записи, будем считать саму последовательность $\{x_n\}$ сходящейся: $x_n \rightarrow x' \in E$ при $n \rightarrow \infty$. Покажем, что $x' \in \bar{\Omega}$. Действительно, из $x' \in \bar{\Omega}$ вытекало бы,

что $x_n \in \Omega$ и $p_n x_n = \xi_n \in \Omega_n$ при больших n , что противоречит условию $\xi_n \in \bar{\Omega}_n$. С другой стороны, из соотношения

$$\|p_n x' - \xi_n\| = \|p_n(x' - x_n)\| \leq \|p_n\| \|x' - x_n\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \quad (5.8)$$

и условия 2) теоремы вытекает, что $x' \in \bar{\Omega}$. Значит, $x' \in \bar{\Omega}$.

Итак, мы имеем элементы $x' \in \bar{\Omega}$ и $\xi_n \in \bar{\Omega}_n$ ($n=1, 2, \dots$), для которых имеет место соотношение (5.8). По условию 4) тогда

$$\|T_n \xi_n - T_n p_n x'\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

По условию 3)

$$\|T_n p_n x' - p_n T x'\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Из (5.7) и последних двух соотношений вытекает, что

$$\|\xi_n - p_n T x'\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

или, принимая во внимание, что $\xi_n = p_n x_n$, $x_n \rightarrow x'$,

$$\|p_n(x' - T x')\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Теперь на основании условия 1) заключаем, что $x' - T x' = 0$, т.е.

T имеет неподвижную точку $x' \in \bar{\Omega}$. Это противоречит условию 5) теоремы и доказывает (5.6).

Из условия 5) и полной непрерывности T вытекает, что

$$\inf_{x \in \bar{\Omega}} \|x - T x\| > 0.$$

Зафиксируем такое достаточно малое $\delta > 0$, что (см. (5.6))

$$\inf_{x \in \bar{\Omega}} \|x - T x\| \geq \frac{\delta}{\alpha}, \quad \inf_{\xi_n \in \bar{\Omega}_n} \|\xi_n - T_n \xi_n\| \geq \delta \quad (n \geq n_0), \quad (5.9)$$

где α - постоянная, фигурирующая в условии 1) леммы.

IV. Пусть $\{y_1, \dots, y_r\}$ - конечная $\frac{\delta}{4\alpha}$ -сеть компактного множества $Y \subset E$ (см. I часть доказательства); здесь α - постоянная из неравенств (1.2), δ - постоянная из неравенств (5.9). Тогда $\{p_n y_1, \dots, p_n y_r\}$ будет $\frac{\delta}{4}$ -сеть множества

$p_n y \subset E_n$. В силу (5.4) при достаточно больших n (пусть это тоже будет при $n \geq n_0$) $\{p_n y_1, \dots, p_n y_r\}$ будет $\frac{\delta}{3}$ -сетью множества $T_n \bar{\Omega}_n \subset E_n$. Введем операторы $\Pi_n: T_n \bar{\Omega}_n \rightarrow E_n$, положив *)

$$\Pi_n \eta_n = \frac{\sum_{i=1}^r \mu_{in}(\eta_n) p_n y_i}{\sum_{i=1}^r \mu_{in}(\eta_n)} \quad (\eta_n \in T_n \bar{\Omega}_n; n = n_0, n_0+1, \dots),$$

где

$$\mu_{in}(\eta_n) = \begin{cases} \frac{\delta}{2} - \|\eta_n - p_n y_i\| & \text{при } \|\eta_n - p_n y_i\| \leq \frac{\delta}{2}, \\ 0 & \text{при } \|\eta_n - p_n y_i\| \geq \frac{\delta}{2}. \end{cases}$$

Оператор Π_n непрерывен; из его определения легко усмотреть, что

$$\sup_{\xi_n \in \bar{\Omega}_n} \|T_n \xi_n - \Pi_n T_n \xi_n\| \leq \frac{\delta}{2} \quad (n \geq n_0), \quad (5.10)$$

$$\Pi_n T_n \bar{\Omega}_n \subset E_n^\circ \quad (n \geq n_0), \quad (5.11)$$

где E_n° - подпространство пространства E_n , натянутое на элементы $p_n y_1, \dots, p_n y_r$.

Обозначим через E° подпространство пространства E , натянутое на элементы y_1, \dots, y_r . Очевидно, $p_n E^\circ \subset E_n^\circ$; обозначим через \tilde{p}_n сужение p_n на E° . Оператор $\tilde{p}_n \in \mathcal{L}(E^\circ, E_n^\circ)$ имеет при достаточно больших n (пусть это снова будет при $n \geq n_0$) обратный $\tilde{p}_n^{-1} \in \mathcal{L}(E_n^\circ, E^\circ)$ и

$$\|\tilde{p}_n^{-1}\| \leq c = \text{const} \quad (n \geq n_0). \quad (5.12)$$

Это легко обосновывается, привлекая условие 1) и принимая

*) Это так называемые шаудеровы операторы проектирования (см. [55], [35]).

во внимание конечномерность пространства E° .

V. Ввиду (5.9) оператор T_n не имеет при $n \geq n_0$ неподвижных точек на границе $\dot{\Omega}_n$, и вращение $\gamma(I_n - T_n; \dot{\Omega}_n)$ определено. Приступим к доказательству равенства (5.2).

Из (5.9) и (5.10) вытекает (см. 4° п. 5.1), что

$$\gamma(I_n - T_n; \dot{\Omega}_n) = \gamma(I_n - \Pi_n T_n; \dot{\Omega}_n). \quad (5.13)$$

На основании (5.11) имеем (см. 5° п. 10.1)

$$\gamma(I_n - \Pi_n T_n; \dot{\Omega}_n) = \gamma(I_n - \Pi_n T_n; \dot{\Omega}_n^\circ), \quad (5.14)$$

где $\Omega_n^\circ = \Omega_n \cap E_n^\circ$, а $\dot{\Omega}_n^\circ$ - граница Ω_n° в E_n° ; в правой части равенства $I_n - \Pi_n T_n$ рассматривается как оператор в E_n° .

Так как $\tilde{p}_n \in \mathcal{L}(E^\circ; E_n^\circ)$ обратим, то (см. 6° п. 5.1)

$$\gamma(I_n - \Pi_n T_n; \dot{\Omega}_n^\circ) = \gamma(I - \tilde{p}_n^{-1} \Pi_n T_n \tilde{p}_n; \tilde{p}_n^{-1} \dot{\Omega}_n^\circ). \quad (5.15)$$

Ниже (в VI части доказательства) будет показано, что при достаточно больших n

$$\gamma(I - \tilde{p}_n^{-1} \Pi_n T_n \tilde{p}_n; \tilde{p}_n^{-1} \dot{\Omega}_n^\circ) = \gamma(I - \tilde{p}_n^{-1} \Pi_n T_n \tilde{p}_n; \dot{\Omega}^\circ), \quad (5.16)$$

где $\Omega^\circ = \Omega \cap E^\circ$, $\dot{\Omega}^\circ$ - граница Ω° в E° .

Используя вновь 5° п. 5.1, получаем

$$\gamma(I - \tilde{p}_n^{-1} \Pi_n T_n \tilde{p}_n; \dot{\Omega}^\circ) = \gamma(I - \tilde{p}_n^{-1} \Pi_n T_n \rho_n; \dot{\Omega}). \quad (5.17)$$

Наконец, ниже (в VII части доказательства) будет показано, что при достаточно больших n

$$\gamma(I - \tilde{p}_n^{-1} \Pi_n T_n \rho_n; \dot{\Omega}) = \gamma(I - T; \dot{\Omega}). \quad (5.18)$$

Из (5.13)-(5.18) и вытекает утверждение (5.2) леммы.

Для завершения доказательства леммы остается установить (5.16) и (5.18).

VI. Докажем (5.16). Заметим, прежде всего, что из $x \in \Omega \cap E^\circ$ вытекает $\tilde{p}_n x \in \Omega_n \cap E_n^\circ$. Другими словами, $\tilde{p}_n \Omega^\circ \subset \Omega_n^\circ$ и

$$\Omega^\circ \subset \tilde{p}_n^{-1} \Omega_n^\circ.$$

В силу 2° п. 5.1 равенство (5.16) будет установлено, если

оператор $\tilde{p}_n^{-1} P_n T_n \tilde{p}_n$ не имеет неподвижных точек в $\tilde{p}_n^{-1} \Omega_n^0 \setminus \Omega^0$.
 Рассуждая от противного, допустим, что для некоторых $x_n \in \tilde{p}_n^{-1} \Omega_n^0 \setminus \Omega^0 \subset E^0$ имеем

$$x_n = \tilde{p}_n^{-1} P_n T_n \tilde{p}_n x_n \quad (n=1,2,\dots). \quad (5.19)$$

Из (1.2), условия 3), (5.10) и (5.12) следует, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена, а ввиду конечномерности E^0 и компактна; будем считать, что она сама сходится:

$$x_n \rightarrow x' \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (5.20)$$

Убедимся, что $x' \in \tilde{\Omega}$. Действительно, из $x_n \in \tilde{p}_n^{-1} \Omega_n^0$ вытекает, что $p_n x_n \in \Omega_n^0 \subset \Omega_n$ и

$$\rho(p_n x', \Omega_n) \leq \|p_n x' - p_n x_n\| \leq \|p_n\| \|x_n - x'\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

и по условию 2) $x' \in \tilde{\Omega}$. С другой стороны, из $x_n \notin \Omega^0$ и $x_n \in E^0$ вытекает, что $x_n \notin \Omega$ ($n=1,2,\dots$), вследствие чего и $x' \notin \Omega$.
 Значит, $x' \in \tilde{\Omega}$.

Применив к обеим частям равенства (5.19) оператор p_n , приходим к равенству

$$\xi_n = P_n T_n \xi_n \quad (n=1,2,\dots),$$

где $\xi_n = p_n x_n \in \Omega_n$. Совместно с (5.10) это дает

$$\|\xi_n - T_n \xi_n\| \leq \frac{\delta}{2} \quad (\xi_n = p_n x_n; n=1,2,\dots). \quad (5.21)$$

Ввиду (5.20) $\|\xi_n - p_n x'\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и по условию 4) леммы

$$\|T_n \xi_n - T_n p_n x'\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (5.22)$$

По условию 3)

$$\|T_n p_n x' - p_n T x'\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (5.23)$$

Из (5.20)-(5.23) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n(x' - T x')\| \leq \frac{\delta}{2}.$$

С помощью условия 1) леммы отсюда заключаем, что

$$\|x' - Tx'\| \leq \frac{\delta}{2\alpha}.$$

Но так как $x' \in \dot{\Omega}$, то это противоречит первому из неравенств (5.9). Полученное противоречие доказывает (5.16).

VII. Докажем (5.18). В силу 3° п. 5.1 достаточно убедиться, что при достаточно больших n векторное поле

$$\Phi_n(x; t) \equiv x - t \tilde{p}_n^{-1} \Pi_n T_n p_n x - (1-t)Tx$$

не обращается в нуль при $0 \leq t \leq 1$, $x \in \dot{\Omega}$. Рассуждая от противного, допустим, что при некоторых t_n ($0 \leq t_n \leq 1$) и $x_n \in \dot{\Omega}$ имеем

$$x_n = t_n \tilde{p}_n^{-1} \Pi_n T_n p_n x_n + (1-t_n)Tx_n \quad (n=1, 2, \dots). \quad (5.24)$$

Отсюда ввиду полной непрерывности оператора T и конечномерности пространства E^0 вытекает, что последовательность $\{x_n\}$ компактна в E . Чтобы не усложнять записи, будем её опять считать сходящейся:

$$x_n \rightarrow x' \in \dot{\Omega} \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (5.25)$$

Из (5.24) находим

$$\|x_n - Tx_n\| \leq \|\tilde{p}_n^{-1} \Pi_n T_n p_n x_n - Tx_n\| \quad (n=1, 2, \dots). \quad (5.26)$$

Из условия 1) и компактности последовательности $v_n = \tilde{p}_n^{-1} \Pi_n T_n p_n x_n - Tx_n$ имеем

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{p}_n^{-1} \Pi_n T_n p_n x_n - Tx_n\| &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|v_n\| \leq \frac{1}{\alpha} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|p_n v_n\| = \\ &= \frac{1}{\alpha} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|\Pi_n T_n p_n x_n - p_n Tx_n\|. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Из (5.25) и условий 3) и 4) леммы вытекает, что

$$\|p_n Tx_n - T_n p_n x_n\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (5.28)$$

Из (5.25)–(5.28) заключаем, что

$$\|x' - Tx'\| \leq \frac{1}{\alpha} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|\Pi_n T_n p_n x_n - T_n p_n x_n\|.$$

Используя затем (5.10), получаем

$$\|x' - Tx'\| \leq \frac{\delta}{2\alpha}.$$

Но так как $x' \in \bar{\Omega}$, то последнее неравенство находится в противоречии с первым из неравенств (5.9). Это доказывает (5.18).

Лемма 5.1 доказана.

На первый взгляд может показаться, что условие 2) леммы 5.1 вытекает из условия 1) и (1.1)-(1.3). Однако, это не так. Приведем соответствующий пример. Этот пример показывает одновременно, что без условия 2) лемма теряет силу.

Пример 5.1. Пусть E - сепарабельное гильбертово пространство с ортонормальным базисом $\{e_k\}_1^\infty$, E_n - подпространство E с базисом $\{e_k\}_1^n$, p_n - соответствующий ортопроектор, Ω - шаровое кольцо $1 < \|x\| < 2$. Тогда $\Omega_n = p_n \Omega$ - это шар $\|\xi_n\| < 2$ (не шаровое кольцо!). Определим операторы $T: \bar{\Omega} \rightarrow E$ и $T_n: \bar{\Omega}_n \rightarrow E_n$, положив

$$Tx = 0 \quad (x \in \bar{\Omega}), \quad T_n \xi_n = 0 \quad (\xi_n \in \bar{\Omega}_n). \quad (5.29)$$

Совершенно очевидно, что все условия леммы 5.1, кроме второго, выполнены, а условие 2) нарушено (для каждого $x \in E$ из шара $\|x\| < 1$). При этом, из 1° и 2° п. 5.1 вытекает, что

$$\chi(I-T; \bar{\Omega}) = 0, \quad \chi(I-T_n; \bar{\Omega}_n) = 1 \quad (n=1, 2, \dots), \quad (5.30)$$

т.е. (5.2) нарушается.

В приведенном примере существенно использована невыпуклость Ω . Укажем второй пример с выпуклым Ω .

Пример 5.2. Пусть $E = m$ - пространство ограниченных числовых последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots)$, $\|x\| = \sup_k |\xi_k|$; $E_n = m_n$ - пространство n -мерных векторов с аналогичной нор-

мой; p_n - оператор, ставящий элементу $x \in E$ в соответствие вектор из его первых n компонент;

$$\Omega = \bigcup_{z \in Z} S(z, \varepsilon),$$

где $S(z, \varepsilon)$ - открытый шар в E с центром в $z \in E$ и радиусом ε ($0 < \varepsilon < 1$), Z - выпуклая оболочка элементов z_k ($k=1, 2, \dots$), у которых первые k компонент равны нулю, а остальные - единице. Очевидно, $\rho(0, Z) = 1$, поэтому $\rho(0, \Omega) = 1 - \varepsilon$ и $0 \notin \bar{\Omega}$. С другой стороны, из $z_{n+1} \in \Omega$ и $p_n z_{n+1} = 0$ вытекает, что $0 \in \Omega_n = p_n \Omega$ ($n=1, 2, \dots$). Операторы $T: \bar{\Omega} \rightarrow E$ и $T_n: \bar{\Omega}_n \rightarrow E_n$ определим снова формулами (5.29). Все условия леммы 5.1, кроме второго, выполнены, а для вращений снова имеют место равенства (5.30), т.е. (5.2) нарушено. Построенное выше множество Ω выпукло.

Замечание 5.1. Пусть условие 1) леммы 5.1 выполнено с постоянной $\alpha = a$ где a - постоянная из неравенств (1.2). Пусть Ω - некоторый открытый шар пространства E . Тогда условие 2) леммы 5.1 выполнено.

• Действительно, пусть $\Omega = \{x \in E: \|x - x_0\| < r\}$, и пусть $x_1 \notin \bar{\Omega}$. Покажем, что тогда для x_1 условие 2) выполнено. Рассуждая от противного, допустим, что для некоторых $\xi_n \in \Omega_n$ ($n=1, 2, \dots$) имеем $\|p_n x_1 - \xi_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Возьмем $x_n \in \Omega$, такие, что $p_n x_n = \xi_n$ ($n=1, 2, \dots$). Имеем

$$\|p_n(x_1 - x_0)\| \leq \|p_n x_1 - \xi_n\| + \|p_n(x_n - x_0)\|$$

и $\|x_n - x_0\| < r$, откуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n(x_1 - x_0)\| \leq ar.$$

С другой стороны, из $x_1 \notin \bar{\Omega}$, т.е. из $\|x_1 - x_0\| > r$ на основании условия 1) получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n(x_1 - x_0)\| > \alpha \tau.$$

Последние два соотношения противоречат условию $\alpha = a$. Доказательство замечания 5.1 закончено.

5.4. Теорема сходимости. Пусть дана тройка $\{E, E_n, p_n\}$, где E и E_n ($n=1, 2, \dots$) - вещественные банаховы пространства, а $p_n \in \mathcal{L}(E, E_n)$ - связывающие отображения со свойствами (1.1)-(1.3). Рассмотрим уравнения

$$x = T x \tag{5.31}$$

и

$$\xi_n = T_n \xi_n, \tag{5.32}$$

где $T: \bar{\Omega} \rightarrow E$ и $T_n: \bar{\Omega}_n \rightarrow E_n$ - нелинейные вполне непрерывные операторы; Ω - непустое открытое ограниченное множество в E ; $\Omega_n = p_n \Omega \subset E_n$; $\bar{\Omega}$ и $\bar{\Omega}_n$ - замыкания Ω и Ω_n .

Теорема 5.1. Пусть выполнены следующие условия:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n x\| \geq \alpha \|x\|$ для каждого $x \in E$ ($\alpha = \text{const} > 0$);

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{\xi_n \in \bar{\Omega}_n} \|p_n x - \xi_n\| > 0$ для каждого $x \notin \bar{\Omega}$;

3) последовательность вполне непрерывных операторов $T_n: \bar{\Omega}_n \rightarrow E_n$ компактно аппроксимирует вполне непрерывный оператор $T: \bar{\Omega} \rightarrow E$ по отношению к связывающим отображениям $p_n \in \mathcal{L}(E, E_n)$ ($n=1, 2, \dots$);

4) если при некотором $x \in \bar{\Omega}$ и $\xi_n \in \bar{\Omega}_n$ ($n=1, 2, \dots$) имеет место сходимость $\|\xi_n - p_n x\| \rightarrow 0$, то $\|T_n \xi_n - T p_n x\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;

5) оператор T не имеет неподвижных точек на границе $\bar{\Omega}$ и вращение $\chi(I - T; \bar{\Omega}) \neq 0$.

Тогда при достаточно больших n множество

$$\Xi_n^* = \{\xi_n^* \in \bar{\Omega}_n : \xi_n^* = T_n \xi_n^*\}$$

решений уравнения (5.32) непусто и

$$\sup_{\xi_n^* \in \Xi_n^*} \inf_{x^* \in X^*} \|\xi_n^* - p_n x^*\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (5.33)$$

где

$$X^* = \{x^* \in \bar{\Omega} : x^* = T x^*\}$$

- множество решений уравнения (5.31) (оно непусто в силу условия 5)).

Доказательство. Выполнены условия леммы 5.1. По лемме 5.1 и условию 5) теоремы при достаточно больших n имеем

$$\mathcal{R}(I_n - T_n; \bar{\Omega}_n) = \mathcal{R}(I - T; \bar{\Omega}) \neq \emptyset,$$

и Ξ_n^* непусто при этих n (см. 1° п. 5.1). Докажем сходимость (5.33). Рассуждая от противного, допустим, что для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ и некоторых $\xi_n^* \in \Xi_n^*$ имеем

$$\rho(\xi_n^*, p_n X^*) \geq \varepsilon_0 \quad (n \geq n_0). \quad (5.34)$$

Пользуясь условием б) определения 5.1, найдем такую компактную в E последовательность $\{x_n\}$, что $p_n x_n = T_n \xi_n^*$ ($n \geq n_0$); так как $\xi_n^* = T_n \xi_n^*$, то $p_n x_n = \xi_n^*$ ($n \geq n_0$). Чтобы не осложнять записи, будем считать, что сама последовательность $\{x_n\}$ сходится,

$$x_n \rightarrow x' \in E \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (5.35)$$

Имеем

$$\rho(p_n x', \bar{\Omega}_n) \leq \|p_n x' - \xi_n^*\| \leq \|p_n\| \|x' - x_n\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

и из условия 2) вытекает, что $x' \in \bar{\Omega}$. Теперь на основании условия 4) заключаем, что

$$\|T_n \xi_n^* - T_n p_n x'\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Далее, по условию а) определения 5.1

$$\|T_n p_n x' - p_n T x'\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Из последних двух соотношений и равенств $p_n x_n = T_n \xi_n^*$ находим, что

$$\|p_n x_n - p_n T x'\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

или, принимая во внимание (5.35),

$$\|p_n (x' - T x')\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

По условию 1) $x' - T x' = 0$, т.е. $x' \in X^*$. Вместе с тем (см. (5.35))

$\rho(\xi_n^*, p_n X^*) \leq \|\xi_n^* - p_n x'\| \leq \|p_n\| \|x_n - x'\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$,
вопреки (5.34). Это противоречие и доказывает сходимость (5.33).

Теорема 5.1 доказана.

Важным следствием из теоремы 5.1 является

Теорема 5.2. Пусть выполнены условия 1) - 4) теоремы 5.1, а условие 5) выполнено в следующей усиленной форме:

5') уравнение (5.31) имеет решение $x^* \in \Omega$ ненулевого индекса, единственное в $\bar{\Omega}$.

Тогда уравнение (5.32) имеет при достаточно больших n хотя бы одно решение $\xi_n^* \in \Omega_n$, и для каждой последовательности решений $\xi_n^* \in \bar{\Omega}_n$ имеет место сходимость

$$\|\xi_n^* - p_n x^*\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

Утверждение о единственности решения уравнения (5.32) в условиях теоремы 5.2 было бы неверным. При сделанных предположениях не удастся также оценить погрешность $\|\xi_n^* - p_n x^*\|$. Единственность приближения ξ_n^* и двухсторонняя оценка сходимости нами установлены в п. 4.2 при более жестких ограничениях о гладкости операторов T и T_n .

5.5. Обобщения. Пусть даны тройки $\{E, E_n, p_n\}$ и $\{F, F_n, q_n\}$, где E, F, E_n, F_n ($n=1, 2, \dots$) – вещественные банаховы пространства, $p_n \in \mathcal{L}(E, E_n)$, $q_n \in \mathcal{L}(F, F_n)$ – связывающие отображения со свойствами (1.1)–(1.3) и (1.1')–(1.3'). Пусть Ω – непустое открытое ограниченное множество в E , а $\Omega_n = p_n \Omega \subset E_n$ ($n=1, 2, \dots$). Рассмотрим уравнения

$$Ax + Bx = 0 \quad (5.36)$$

и

$$A_n \xi_n + B_n \xi_n = 0, \quad (5.37)$$

где $A: E \rightarrow F$, $B: \bar{\Omega} \rightarrow F$, $A_n: E_n \rightarrow F_n$, $B_n: \Omega_n \rightarrow F_n$ – нелинейные операторы.

Теорема 5.3. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n x\| \geq \alpha \|x\|$ для каждого $x \in E$ ($\alpha = \text{const} > 0$);
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{\xi_n \in \Omega_n} \|p_n x - \xi_n\| > 0$ для каждого $x \notin \bar{\Omega}$;
- 3) оператор $A: E \rightarrow F$ непрерывен и имеет непрерывный обратный $A^{-1}: F \rightarrow E$ (определенный на всем F);
- 4) операторы $A_n: E_n \rightarrow F_n$ ($n=1, 2, \dots$) непрерывны и имеют непрерывные обратные $A_n^{-1}: F_n \rightarrow E_n$;
- 5) $\|p_n A^{-1} y - A_n^{-1} q_n y\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для каждого $y \in F$;
- 6) если при некоторых $y \in F$ и $\eta_n \in F_n$ ($n=1, 2, \dots$) имеет место сходимость $\|\eta_n - q_n y\| \rightarrow 0$, то $\|A_n^{-1} \eta_n - A_n^{-1} q_n y\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;
- 7) операторы $B: \bar{\Omega} \rightarrow F$ и $B_n: \bar{\Omega}_n \rightarrow F_n$ ($n=1, 2, \dots$) вполне непрерывны, и последовательность операторов B_n компактно аппроксимирует B по отношению к p_n, q_n ($n=1, 2, \dots$);
- 8) если при некоторых $x \in \bar{\Omega}$ и $\xi_n \in \bar{\Omega}_n$ ($n=1, 2, \dots$) имеет место сходимость $\|\xi_n - p_n x\| \rightarrow 0$, то $\|B_n \xi_n - B p_n x\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;
- 9) уравнение (5.36) имеет решение $x^* \in \Omega$, единственное в $\bar{\Omega}$, и индекс неподвижной точки x^* оператора

$-A^{-1}B: \bar{\Omega} \rightarrow E$ отличен от нуля.

Тогда уравнение (5.37) имеет при достаточно больших n хотя бы одно решение $\xi_n^* \in \Omega_n$, и $\|\xi_n^* - p_n x^*\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для каждой последовательности решений $\xi_n^* \in \bar{\Omega}_n$.

Доказательство. В силу условий 3) и 4) уравнения (5.36) и (5.37) равносильны уравнениям (5.31) и (5.32), в которых

$$T = -A^{-1}B: \bar{\Omega} \rightarrow E, \quad T_n = -A_n^{-1}B_n: \bar{\Omega}_n \rightarrow E_n.$$

Нетрудно проверить, что для этих операторов выполнены условия теоремы 5.2 (теоремы 5.1). В частности, условие 3) теоремы 5.1 получаем на основании предложения 5.1 из условий 5)-7) доказываемой теоремы, а условие 4) теоремы 5.1 - из условий 6) и 8) доказываемой теоремы и условия а) определения 5.1 компактной аппроксимации. Утверждения доказываемой теоремы следуют из теоремы 5.2.

Теорема 5.3 доказана.

Замечание 5.2. Условия 4)-6) теоремы 5.3 выполнены, если $A \in \mathcal{L}(E, F)$, $A_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$ ($n=1, 2, \dots$) и последовательность A_n устойчиво аппроксимирует A .

§6. Второй вариант теории (аппроксимация операторами в подпространствах)

6.1. Постановка вопроса. Определения. До сих пор пространство E связывалось с аппроксимируемыми пространствами E_n заданием отображений $\rho_n \in \mathcal{L}(E, E_n)$ ($n=1,2,\dots$). Из условий (1.1)–(1.3), наложенных на эти связывающие отображения, вытекало, что пространства E_n были изоморфны некоторым факторпространствам пространства E . В этом параграфе предполагаем, наоборот, что заданы связывающие отображения, действующие из E_n в E (а не из E в E_n , как до сих пор); в силу налагаемых на них условий пространства E_n будут изоморфны некоторым подпространствам E .

Итак, пусть E, F, E_n, F_n ($n=1,2,\dots$) – банаховы пространства. Пусть заданы операторы (связывающие отображения) $\Phi_n \in \mathcal{L}(E_n, E)$, $\Psi_n \in \mathcal{L}(F_n, F)$ со следующими свойствами:

$$\|\Phi_n\| \leq a \quad (n=1,2,\dots; a = \text{const}), \quad (6.1)$$

$$\|\Phi_n \xi_n\| \geq b \|\xi_n\| \quad \text{для } \forall \xi_n \in E_n \quad (n=1,2,\dots; b = \text{const} > 0), \quad (6.2)$$

$$\|\Psi_n\| \leq a' \quad (n=1,2,\dots; a' = \text{const}), \quad (6.3)$$

$$\|\Psi_n \eta_n\| \geq b' \|\eta_n\| \quad \text{для } \forall \eta_n \in F_n \quad (n=1,2,\dots; b' = \text{const} > 0). \quad (6.4)$$

Определение 6.1. Последовательность операторов $A_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$ компактно аппроксимирует оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$ по отношению к связывающим отображениям $\Phi_n \in \mathcal{L}(E_n, E)$, $\Psi_n \in \mathcal{L}(F_n, F)$, если выполнены следующие два условия:

^{*}Заметим, что, в отличие от определения 1.3, теперь от аппроксимируемого оператора A не требуется полной непрерывности.

а) $\|\Psi_n A_n \xi_n - A \Phi_n \xi_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для любой такой последовательности $\xi_n \in E_n$ ($n=1, 2, \dots$), что $\{\Phi_n \xi_n\}$ компактна в E ;

б) последовательность $\{\Psi_n A_n \xi_n - A \Phi_n \xi_n\}$ компактна в F для любой такой последовательности $\xi_n \in E_n$, что $\|\xi_n\| \leq 1$ ($n=1, 2, \dots$).

Приводимые ниже предложения очевидным образом вытекают из определения.

Предложение 6.1. Если последовательность $A_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$ компактно аппроксимирует некоторый оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$, то $\|A_n\| \leq c = \text{const}$ ($n=1, 2, \dots$).

Предложение 6.2. Если последовательность $A_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$ компактно аппроксимирует $A \in \mathcal{L}(E, F)$, то любая подпоследовательность A_{n_k} тоже компактно аппроксимирует A .

Предложение 6.3. Если последовательности $A_n^{(i)} \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$ компактно аппроксимируют соответственно $A^{(i)} \in \mathcal{L}(E, F)$ ($i=1, \dots, m$), то последовательность $\sum_{i=1}^m c_i A_n^{(i)}$ компактно аппроксимирует $\sum_{i=1}^m c_i A^{(i)}$ (c_i - скаляры).

Предложение 6.4. Если последовательность $A_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$ компактно аппроксимирует $A \in \mathcal{L}(E, F)$ по отношению к Φ_n, Ψ_n ($n=1, 2, \dots$), а последовательность $B_n \in \mathcal{L}(F_n, E_n)$ компактно аппроксимирует $B \in \mathcal{L}(F, E)$ по отношению к Ψ_n, Φ_n ($n=1, 2, \dots$), то последовательность $B_n A_n \in \mathcal{L}(E_n, E_n)$ компактно аппроксимирует $BA \in \mathcal{L}(E, E)$ по отношению к Φ_n ($n=1, 2, \dots$).

Из (6.1)-(6.4) вытекает, что Φ_n осуществляет изоморфизм между E_n и замкнутым подпространством $E_n^\circ = \Phi_n E_n$ пространства E , и аналогичное для Ψ_n . При этом, если последовательность $A_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$ компактно аппроксимирует

$A \in \mathcal{L}(E, F)$ по отношению к $\Phi_n \in \mathcal{L}(E_n, E)$, $\Psi_n \in \mathcal{L}(F_n, F)$ ($n=1, 2, \dots$), то последовательность $\Psi_n A_n \Phi_n^{-1} \in \mathcal{L}(\Phi_n E_n, \Psi_n F_n)$ компактно аппроксимирует $A \in \mathcal{L}(E, F)$ по отношению к операторам вложения $\Phi_n E_n$ в E и $\Psi_n F_n$ в F . Поэтому вполне достаточно было бы ограничиться рассмотрением случая, когда E_n и F_n - подпространства E и F соответственно, а Φ_n и Ψ_n - соответствующие операторы вложения. Однако, в приложениях удобнее пользоваться (формально) более общей теорией, оставляющей свободной природу пространств E_n и F_n .

6.2. Линейные уравнения. Рассмотрим уравнения

$$Ax = y \quad (6.5)$$

и

$$A_n \xi_n = \eta_n, \quad (6.6)$$

где $A \in \mathcal{L}(E, F)$, $y \in F$, $A_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$, $\eta_n \in F_n$ ($n=1, 2, \dots$).

Теорема 6.1. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) $\|\Psi_n \eta_n - y\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;
- 2) последовательность $A_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$ компактно аппроксимирует $A \in \mathcal{L}(E, F)$ по отношению к $\Phi_n \in \mathcal{L}(E_n, E)$, $\Psi_n \in \mathcal{L}(F_n, F)$ ($n=1, 2, \dots$);
- 3) A имеет обратный $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$;
- 4) операторы A_n таковы, что из

$$\alpha_n \equiv \inf_{\xi_n \in E_n, \|\xi_n\|=1} \|A_n \xi_n\| > 0 \quad (6.7)$$

вытекает существование обратного $A_n^{-1} \in \mathcal{L}(F_n, E_n)$.

Тогда уравнение (6.6) имеет при достаточно больших n единственное решение $\xi_n^* \in E_n$, и $\|\Phi_n \xi_n^* - x^*\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, где x^* - решение уравнения (6.5).

Доказательство. Убедимся, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n > 0, \quad (6.8)$$

где α_n — определенная в (6.7) величина. Рассуждая от противного, допустим, что для некоторой последовательности $\xi_n \in E_n, \|\xi_n\|=1$, имеем $\|A_n \xi_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, или, что то же самое,

$$A \Phi_n \xi_n + (\Psi_n A_n \xi_n - A \Phi_n \xi_n) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (6.9)$$

По условию б) определения 6.1 последовательность $\{\Psi_n A_n \xi_n - A \Phi_n \xi_n\}$ компактна в F . Значит, последовательность $\{A \Phi_n \xi_n\}$ тоже компактна в F , а $\{\Phi_n \xi_n\}$ — в E . Используя условие а), находим из (6.9), что $A \Phi_n \xi_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Это противоречит условию 3) и доказывает (6.8).

Из (6.8) и условия 4) вытекает, что при достаточно больших n существуют обратные $A_n^{-1} \in \mathcal{L}(F_n, E_n)$, причем

$$\|A_n^{-1}\| \leq c = \text{const} \quad (n \geq n_0). \quad (6.10)$$

Следовательно, решения $\xi_n^* = A_n^{-1} \eta_n$ ($n \geq n_0$) уравнений (6.6) ограничены в совокупности по норме. Перепишем равенство

$A_n \xi_n^* = \eta_n$ в виде

$$A \Phi_n \xi_n^* + (\Psi_n A_n \xi_n^* - A \Phi_n \xi_n^*) = \Psi_n \eta_n.$$

Последовательности $\{\Psi_n \eta_n\}$ и $\{\Psi_n A_n \xi_n^* - A \Phi_n \xi_n^*\}$ компактны, первая по условию 1), вторая — по условию б) определения 6.1. Значит, $\{A \Phi_n \xi_n^*\}$ компактна в F , а $\{\Phi_n \xi_n^*\}$ — в E . Используя условие а) определения 6.1, получаем

$$A \Phi_n \xi_n^* - \Psi_n \eta_n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

или, ввиду условия 1);

$$A \Phi_n \xi_n^* \rightarrow y \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Применением A^{-1} находим, что $\Phi_n \xi_n^* \rightarrow A^{-1} y = x^*$ при $n \rightarrow \infty$

Теорема 6.1 доказана.

Следствие 6.1. Если выполнены условия 2)-4) теоремы 6.1, то последовательность операторов $A_n^{-1} \in \mathcal{L}(F_n, E_n)$ компактно аппроксимирует $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ по отношению к $\Psi_n \in \mathcal{L}(F_n, F)$ и $\Phi_n \in \mathcal{L}(E_n, E)$.

Действительно, для любых $\eta_n \in F_n$ имеем $\Phi_n A_n^{-1} \eta_n - A^{-1} \Psi_n \eta_n = A^{-1} (A \Phi_n - \Psi_n A_n) \xi_n$ ($n = n_0, n_0+1, \dots$), где $\xi_n = A_n^{-1} \eta_n \in E_n$. Если $\|\eta_n\| \leq 1$ ($n \geq n_0$), то $\|\xi_n\| \leq c$ ($n \geq n_0$) в силу (6.10); если же последовательность $\{\Psi_n \eta_n\}$ компактна в F , то последовательность $\Phi_n \xi_n$ компактна в E (это обосновывается с помощью теоремы 6.1). Поэтому условия а) и б) определения 6.1 для A_n^{-1} и A^{-1} вытекают из тех же условий для A_n и A .

Замечание 6.1. Пусть выполнены условия теоремы 6.1. Тогда при любых $P_n \in \mathcal{L}(E, E_n)$, $Q_n \in \mathcal{L}(F, F_n)$ справедлива оценка

$$c_1 \varepsilon_n \leq \|\xi_n^* - P_n x^*\| \leq c_2 \varepsilon_n, \quad (6.11)$$

где c_1, c_2 - некоторые положительные постоянные, а

$$\varepsilon_n = \| (Q_n A x^* - A_n P_n x^*) + (\eta_n - Q_n y) \|. \quad (6.12)$$

Действительно, оценка (6.11)-(6.12) вытекает из равенства

$$A_n (\xi_n^* - P_n x^*) = (\eta_n - Q_n y) + (Q_n A x^* - A_n P_n x^*)$$

и равномерной ограниченности норм $\|A_n\|$ и $\|A_n^{-1}\|$ (см. (6.10) и предложение 6.1).

Замечание 6.2. Условие 4) теоремы 6.1 выполнено, если пространства E_n и F_n конечномерны, $\dim E_n = \dim F_n$ ($n = 1, 2, \dots$).

В общем случае 4) не вытекает из остальных условий теоремы 6.1, даже если $E = F$, $E_n = F_n$ ($n=1, 2, \dots$). Приведем соответствующий пример.

Пример 6.1. Пусть $E = F$ - сепарабельное гильбертово пространство с ортонормальным базисом $\{e_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$; $E_n = F_n$ - подпространство с базисом $\{e_k\}_{k=-n}^{\infty}$; $\Phi_n = \Psi_n$ - оператор вложения E_n в E ; $A \in \mathcal{L}(E, E)$ таков, что

$$A e_k = e_{k+1} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$A_n x = Ax$ для $x \in E_n$ (определение A_n корректно, так как $A E_n \subset E_n$);

$$y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|k|+1} e_k, \quad \eta_n = \sum_{k=-n}^{\infty} \frac{1}{|k|+1} e_k.$$

Нетрудно видеть, что условия 1)-3) теоремы 6.1 выполнены, но уравнение (6.6) не имеет решения ни при каком $n=1, 2, \dots$.

Изучение спектров аппроксимирующих и аппроксимируемого операторов дает в п. 6.6 возможность указать некоторые дальнейшие случаи, когда условие 4) теоремы 6.1 вытекает из остальных условий теоремы.

6.3. Нелинейные уравнения. Рассмотрим уравнения

$$A x = 0 \tag{6.13}$$

и

$$A_n \xi_n = 0, \tag{6.14}$$

где A - нелинейный оператор из E в F , а A_n ($n=1, 2, \dots$) - нелинейные операторы из E_n в F_n .

Теорема 6.2. Пусть выполнены следующие условия:

1) уравнение (6.13) имеет решение x^* и $\rho(x^*, \Phi_n E_n) \rightarrow 0$

^{*)} $\rho(x^*, \Phi_n E_n) = \inf_{\xi_n \in E_n} \|x^* - \Phi_n \xi_n\|$ - расстояние от x^* до множества $\Phi_n E_n \subset E$.

при $n \rightarrow \infty$;

2) оператор A дифференцируем по Фреше в точке x^* , и оператор $A'(x^*) \in \mathcal{L}(E, F)$ имеет обратный $[A'(x^*)]^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$;

3) операторы A_n ($n=1, 2, \dots$) дифференцируемы по Фреше, каждый на своем множестве $\Omega_n = \{\xi_n \in E_n : \|\Phi_n \xi_n - x^*\| \leq \delta\}$, причем для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие n_ε и δ_ε ($0 < \delta_\varepsilon \leq \delta$), что

$$\|A'_n(\xi_n^{(1)}) - A'_n(\xi_n^{(2)})\| \leq \varepsilon$$

при $n \geq n_\varepsilon$, $\|\Phi_n \xi_n^{(i)} - x^*\| \leq \delta_\varepsilon$ ($i=1, 2$);

4) если $\Phi_n \xi_n \rightarrow x^*$, то $\Psi_n A_n \xi_n \rightarrow A x^* = 0$ при $n \rightarrow \infty$;

5) если $\Phi_n \xi_n \rightarrow x^*$ при $n \rightarrow \infty$, то последовательность $A'_n(\xi_n) \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$ компактно аппроксимирует оператор $A'(x^*) \in \mathcal{L}(E, F)$ по отношению к $\Phi_n \in \mathcal{L}(E_n, E)$, $\Psi_n \in \mathcal{L}(F_n, F)$;

6) операторы $A'_n(\xi_n)$ таковы, что из $\inf_{\xi_n \in E_n, \|\xi_n\|=1} \|A'_n(\xi_n)\xi_n\| > 0$

вытекает существование обратного $[A'_n(\xi_n)]^{-1} \in \mathcal{L}(F_n, E_n)$.

Тогда существуют такие n_0 и $\delta_0 > 0$, что при $n \geq n_0$ уравнение (6.14) имеет единственное решение ξ_n^* , такое, что $\|\Phi_n \xi_n^* - x^*\| \leq \delta_0$. Имеет место сходимость $\|\Phi_n \xi_n^* - x^*\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство опирается на лемму 4.1.

Используя 1), выберем такую последовательность $\xi_n^0 \in E_n$, что $\|\Phi_n \xi_n^0 - x^*\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Аналогично, как при доказательстве теоремы 6.1, заключаем из условий 2), 5) и 6), что при достаточно больших n существуют обратные $[A'_n(\xi_n^0)]^{-1} \in \mathcal{L}(F_n, E_n)$ и

$$\|[A'_n(\xi_n^0)]^{-1}\| \leq x = \text{const} \quad (n \geq n_0). \quad (6.15)$$

Зафиксируем q ($0 < q < 1$). Согласно условию 3) найдутся такие n_0 и $\delta_0 > 0$, что при $n \geq n_0$

$$\sup_{\xi_n \in E_n, \|\xi_n - \xi_n^0\| \leq \delta_0} \|A'_n(\xi_n) - A'_n(\xi_n^0)\| \leq \frac{q}{\alpha}. \quad (6.16)$$

По условию 4) при достаточно больших n имеем

$$\|A_n \xi_n^0\| \leq \frac{\delta_0(1-q)}{\alpha}. \quad (6.17)$$

Пусть n_0 достаточно велико, так, что при $n \geq n_0$ одновременно соблюдаются неравенства (6.15), (6.16) и (6.17) - неравенства (4.4), (4.5) и (4.6) для оператора A_n ($E = E_n$, $f = F_n$; в качестве α_0 выступает $\xi_n^0 \in E_n$). По лемме 4.1 уравнение (6.14) имеет при $n \geq n_0$ в шаре $\|\xi_n - \xi_n^0\| \leq \delta_0$ единственное решение ξ_n^* и справедлива оценка

$$c_1 \|A_n \xi_n^0\| \leq \|\xi_n^* - \xi_n^0\| \leq c_2 \|A_n \xi_n^0\|, \quad (6.18)$$

где постоянные

$$c_1 = \frac{1}{\alpha'(1+q)}, \quad c_2 = \frac{\alpha}{1-q} \quad (\alpha' = \sup_n \|A'_n(\xi_n^0)\| < \infty)$$

положительны и не зависят от n . По условию 4) $\|A_n \xi_n^0\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и из (6.18) и соотношения $\|\Phi_n \xi_n^0 - x^*\| \rightarrow 0$ вытекает сходимость $\|\Phi_n \xi_n^* - x^*\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Уменьшением δ_0 и увеличением n_0 можно добиться, чтобы при $n \geq n_0$ решение ξ_n^* удовлетворяло условию $\|\Phi_n \xi_n^* - x^*\| \leq \delta_0$ и было бы единственным среди таковых.

Теорема 6.2 доказана.

Замечание 6.3. Если выполнены условия теоремы 6.3, то справедлива оценка

$$c_1 \|A_n P_n x^*\| \leq \|\xi_n^* - P_n x^*\| \leq c_2 \|A_n P_n x^*\|, \quad (6.19)$$

где $P_n: E \rightarrow E_n$ - любые такие операторы, что $\Phi_n P_n x^* \rightarrow x^*$ при $n \rightarrow \infty$.

Действительно, в (6.18) достаточно положить $\xi_n^0 = P_n x^*$.

6.4. Инвариантность вращения. Пусть E и E_n ($n=1,2,\dots$) - вещественные банаховы пространства, $\Phi_n \in \mathcal{L}(E_n, E)$ - связывающие отображения со свойствами (6.1), (6.2). Пусть Ω - непустое открытое ограниченное множество в E . Обозначим

$$\Omega_n = \{\xi_n \in E_n : \Phi_n \xi_n \in \Omega\}.$$

Тогда Ω_n - открытое ограниченное множество в E_n ; мы будем предполагать, что Ω_n непусто (по крайней мере, при достаточно больших n). Через $\dot{\Omega}$ и $\dot{\Omega}_n$ обозначаем границы множеств Ω и Ω_n , через $\bar{\Omega} = \Omega \cup \dot{\Omega}$ и $\bar{\Omega}_n = \Omega_n \cup \dot{\Omega}_n$ - замыкания. Следующее определение копирует определение 6.1 для нелинейных вполне непрерывных операторов.

Определение 6.2. Последовательность вполне непрерывных операторов $T_n: \bar{\Omega}_n \rightarrow E_n$ компактно аппроксимирует вполне непрерывный оператор $T: \bar{\Omega} \rightarrow E$ по отношению к связывающим отображениям $\Phi_n \in \mathcal{L}(E_n, E)$ ($n=1,2,\dots$), если выполнены следующие два условия:

а) $\|\Phi_n T_n \xi_n - T \Phi_n \xi_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для любой такой последовательности $\xi_n \in \bar{\Omega}_n$ ($n=1,2,\dots$), что $\{\Phi_n \xi_n\}$ компактна в E ;

б) последовательность $\{\Phi_n T_n \xi_n\}$ компактна в E для любой последовательности $\xi_n \in \bar{\Omega}_n$ ($n=1,2,\dots$).

Лемма 6.1. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) последовательность вполне непрерывных операторов $T_n: \bar{\Omega}_n \rightarrow E_n$ компактно аппроксимирует вполне непрерывный оператор $T: \bar{\Omega} \rightarrow E$ по отношению к $\Phi_n \in \mathcal{L}(E_n, E)$ ($n=1,2,\dots$);
- 2) $\rho(y, \Phi_n E_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для каждого $y \in T \bar{\Omega} \subset E$;
- 3) оператор T не имеет неподвижных точек на границе $\dot{\Omega}$.

Тогда оператор T_n при достаточно больших n не имеет неподвижных точек на границе $\dot{\Omega}_n$, и имеет место равенство вращений:

$$\gamma(I_n - T_n; \dot{\Omega}_n) = \gamma(I - T; \dot{\Omega}) \quad (n \geq n_0). \quad (6.20)$$

Доказательство. Ввиду полной непрерывности T из условия 3) вытекает, что

$$\delta \equiv \inf_{x \in \dot{\Omega}} \|x - Tx\| > 0. \quad (6.21)$$

Рассмотрим $\frac{\delta}{4}$ -сеть $\{y_\infty^{(1)}, \dots, y_\infty^{(r)}\}$ компактного множества $T\dot{\Omega}$. Пользуясь условием 2), представим элементы этой сети в виде пределов

$$y_\infty^{(i)} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n^{(i)} \quad (y_n^{(i)} \in \Phi_n E_n).$$

При достаточно больших n (пусть это будет при $n \geq n_0$) каждое из множеств $\{y_n^{(1)}, \dots, y_n^{(r)}\}$ является $\frac{\delta}{3}$ -сетью для Y - замыкания множества $T\dot{\Omega}$. Введем шаудеровы операторы проектирования $\Pi_n: Y \rightarrow E$ ($n = n_0, n_0+1, \dots, \infty$), положив

$$\Pi_n y = \frac{\sum_{i=1}^r \mu_n^{(i)}(y) y_n^{(i)}}{\sum_{i=1}^r \mu_n^{(i)}(y)} \quad (y \in Y),$$

где

$$\mu_n^{(i)}(y) = \begin{cases} \frac{\delta}{2} - \|y - y_n^{(i)}\| & \text{при } \|y - y_n^{(i)}\| \leq \frac{\delta}{2}, \\ 0 & \text{при } \|y - y_n^{(i)}\| \geq \frac{\delta}{2}. \end{cases}$$

Операторы $\Pi_n: Y \rightarrow E$ ($n = n_0, n_0+1, \dots, \infty$) непрерывны,

$$\sup_{x \in \dot{\Omega}} \|\Pi_n T x - T x\| \leq \frac{\delta}{2} \quad (n = n_0, n_0+1, \dots, \infty), \quad (6.22)$$

$$\Pi_n T \bar{\Omega} \subset \Phi_n E_n \quad (n = n_0, n_0 + 1, \dots), \quad (6.23)$$

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} \|\Pi_n T x - \Pi_\infty T x\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (6.24)$$

Действительно, (6.22) и (6.23) очевидны по построению, а для доказательства (6.24) достаточно заметить, что Y компактно и что сходимость $y_n \rightarrow y$ ($y_n, y \in Y$) влечет за собой сходимость $\Pi_n y_n \rightarrow \Pi_\infty y$ при $n \rightarrow \infty$.

Из (6.21) и (6.22) вытекает, что $\Pi_n T$ не имеет неподвижных точек на $\dot{\Omega}$ и (см. 4° п. 5.1)

$$\gamma(I - T; \dot{\Omega}) = \gamma(I - \Pi_n T; \dot{\Omega}) \quad (n \geq n_0). \quad (6.25)$$

Из (6.23) вытекает (см. 5° п. 5.1), что

$$\gamma(I - \Pi_n T; \dot{\Omega}) = \gamma(I - \Pi_n T; \Phi_n \dot{\Omega}_n) \quad (6.26)$$

(в правой части равенства $I - \Pi_n T$ рассматривается как оператор в подпространстве $\Phi_n E_n \subset E$; границей множества $\Omega \cap \Phi_n E_n$ является $\Phi_n \dot{\Omega}_n$). В силу 6° п. 5.1

$$\gamma(I - \Pi_n T; \Phi_n \dot{\Omega}_n) = \gamma(I_n - \Phi_n^{-1} \Pi_n T \Phi_n; \dot{\Omega}_n) \quad (6.27)$$

(оператор Φ_n^{-1} определен на $\Phi_n E_n$). Ниже будет показано, что при достаточно больших n оператор T_n не имеет неподвижных точек на $\dot{\Omega}_n$ и

$$\gamma(I_n - \Phi_n^{-1} \Pi_n T \Phi_n; \dot{\Omega}_n) = \gamma(I_n - T_n; \dot{\Omega}_n). \quad (6.28)$$

Из (6.25)–(6.28) и вытекает (6.20).

Итак, остается показать, что при достаточно больших n оператор T_n не имеет неподвижных точек на $\dot{\Omega}_n$ и справедливо (6.28). В силу 3° п. 5.1 для этого достаточно убедиться, что векторное поле

$$\xi_n - t \Phi_n^{-1} \Pi_n T \Phi_n \xi_n - (1-t) T_n \xi_n$$

не обращается в нуль при $0 \leq t \leq 1$, $\xi_n \in \dot{\Omega}_n$. Рассуждая от

противного, допустим, что для некоторых t'_n, ξ'_n ($0 \leq t'_n \leq 1, \xi'_n \in \hat{\Omega}_n$) имеем

$$\xi'_n = t'_n \Phi_n^{-1} \Pi_n T \Phi_n \xi'_n + (1-t'_n) T_n \xi'_n \quad (n=1,2,\dots).$$

Из полной непрерывности T , соотношения (6.24) и условия б) определения 6.2 вытекает, что последовательность

$$\Phi_n \xi'_n = t'_n \Pi_n T \Phi_n \xi'_n + (1-t'_n) \Phi_n T_n \xi'_n \quad (n=1,2,\dots) \quad (6.29)$$

компактна в E ; чтобы не усложнять запись будем ее саму, а также и числовую последовательность t'_n считать сходящимися:

$$t'_n \rightarrow t', \Phi_n \xi'_n \rightarrow x' \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (6.30)$$

Перейдем в (6.29) к пределу при $n \rightarrow \infty$. Ввиду (6.24), (6.30) и условия а) определения 6.2 получим

$$x' = t' \Pi_\infty T x' + (1-t') T x'.$$

Отсюда с помощью (6.22) находим

$$\|x' - T x'\| \leq t' \|T x' - \Pi_\infty T x'\| \leq \frac{\delta}{2}.$$

Но так как $x' \in \hat{\Omega}$, то последнее равенство противоречит (6.21). Следовательно, при достаточно больших n имеет место (6.28).

Лемма 6.1 доказана.

Любопытно, что инвариантность вращения при компактной аппроксимации мы здесь установили для областей Ω произвольной формы; в п. 5.3 удалось инвариантность установить лишь при определенных условиях на область Ω (нарушение которых вызывало нарушение инвариантности). Это объясняется, повидимому, тем, что здесь и в §5 мы строили $\Omega_n \subset E_n$ по $\Omega \subset E$ двумя совершенно различными способами, наиболее естественными при использовании соответствующих связывающих отобра-

жений. Образно выражаясь, можно сказать, что в §5 Ω_n - это "тень" Ω при "проектировании" из E в E_n . В настоящем параграфе Ω_n - это (с точностью до изоморфизма) сечение Ω с подпространством E . Ясно, что сечения Ω лучше "следят" за структурой Ω , чем "тени" Ω (например, в "тени" никак не отражаются "дырки" внутри Ω).

6.5. Теорема сходимости для нелинейных уравнений с вполне непрерывными операторами. Рассмотрим уравнения

$$x = Tx \quad (6.31)$$

и

$$\xi_n = T_n \xi_n, \quad (6.32)$$

где $T: \bar{\Omega} \rightarrow E$ и $T_n: \bar{\Omega}_n \rightarrow E_n$ вполне непрерывные операторы. Здесь приняты условия и обозначения, введенные в начале предыдущего пункта.

Теорема 6.3. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) последовательность вполне непрерывных операторов $T_n: \bar{\Omega}_n \rightarrow E_n$ компактно аппроксимирует вполне непрерывный оператор $T: \bar{\Omega} \rightarrow E$ по отношению к $\Phi_n \in \mathcal{L}(E_n, E)$ ($n=1, 2, \dots$);
- 2) $\varphi(y, \Phi_n E_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для каждого $y \in T\bar{\Omega}$;
- 3) оператор T не имеет неподвижных точек на границе $\dot{\bar{\Omega}}$

и

$$\delta(1-T; \bar{\Omega}) \neq 0.$$

Тогда при достаточно больших n множество

$$\Xi_n^* = \{ \xi_n^* \in \bar{\Omega}_n : \xi_n^* = T_n \xi_n^* \}$$

решений уравнения (6.32) непусто, и имеет место сходимость

^{*)} Напомним, что $\varphi(y, \Phi_n E_n) = \inf_{\xi_n \in E_n} \|y - \Phi_n \xi_n\|$ - расстояния от y до $\Phi_n E_n \subset E$.

$$\sup_{\xi_n^* \in \Xi_n^*} \rho(\Phi_n \xi_n^*, X^*) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (6.33)$$

где

$$X^* = \{x^* \in \bar{\Omega} : x^* = Tx^*\}$$

- множество решений уравнения (6.31) (оно непусто в силу условия 3)).

Доказательство. По лемме 6.1 и условию 3) при достаточно больших n имеем

$$\gamma(I_n - T_n; \dot{\Omega}_n) = \gamma(I - T; \dot{\Omega}) \neq 0,$$

и Ξ_n^* непусто при этих n (см. 1° п. 5.1). Докажем (6.33).

Рассуждая от противного, допустим, что для некоторых $\xi_n^* \in \Xi_n^*$ и некоторого $\varepsilon_0 > 0$ имеем

$$\rho(\Phi_n \xi_n^*, X^*) \geq \varepsilon_0. \quad (6.34)$$

при сколь угодно больших n . По условию б) определения 6.2 последовательность $\Phi_n \xi_n^* = \Phi_n T_n \xi_n^*$ компактна в E ; как обычно, сделаем упрощающее записи допущение о её сходимости:

$$\Phi_n \xi_n^* \rightarrow x' \in \bar{\Omega} \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (6.35)$$

Тогда по условию а) определения 6.2

$$\Phi_n T_n \xi_n^* \rightarrow Tx' \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Из двух последних соотношений и равенства $\xi_n^* = T_n \xi_n^*$ вытекает, что $x' = Tx'$, т.е. $x' \in X^*$. Стало быть, (6.35) противоречит (6.34).

Теорема 6.3 доказана.

Следствием из теоремы 6.3 является

Теорема 6.4. Пусть выполнены условия 1) и 2) теоремы 6.3, а условие 3) выполняется в следующей усиленной форме: 3') уравнение (6.31) имеет изолированное решение $x^* \in \Omega$.

ненулевого индекса, и решение x^* единственно в $\bar{\Omega}$.

Тогда при достаточно больших n уравнение (6.32) имеет в Ω_n хотя бы одно решение ξ_n^* , и $\|\Phi_n \xi_n^* - x^*\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для каждой последовательности решений $\xi_n^* \in \bar{\Omega}_n$.

Теоремы 6.3 и 6.4 без труда допускают перенос на уравнения вида $Ax + Bx = 0$ и $A_n \xi_n + B_n \xi_n = 0$, где A и B действуют из E в F , а A_n и B_n - из E_n в F_n (ср. с п. 5.5). Мы не будем останавливаться на соответствующих формулировках.

6.6. Спектры аппроксимирующих и аппроксимируемого операторов. Будем теперь считать, что банаховы пространства E и E_n ($n=1,2,\dots$) комплексные. Пусть по-прежнему заданы связывающие отображения $\Phi_n \in \mathcal{L}(E_n, E)$, удовлетворяющие условиям (1.1) - (1.2). Мы намерены изучить близость спектров операторов $T \in \mathcal{L}(E, E)$ и $T_n \in \mathcal{L}(E_n, E_n)$, не вводя условия о полной непрерывности этих операторов. Ниже $\rho(T)$, $\sigma(T)$, $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$, $\sigma_n(T)$ означают соответственно резольвентное множество, спектр, точечный спектр, непрерывный спектр, остаточный спектр оператора T .

Лемма 6.2. Пусть последовательность операторов $T_n \in \mathcal{L}(E_n, E_n)$ компактно аппроксимирует оператор $T \in \mathcal{L}(E, E)$ по отношению к $\Phi_n \in \mathcal{L}(E_n, E)$ ($n=1,2,\dots$). Пусть Λ - такой компакт в комплексной плоскости, что

$$\inf_{x \in E, \|x\|=1} \|\lambda x - Tx\| > 0 \text{ для } \forall \lambda \in \Lambda. \quad (6.36)$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{\lambda \in \Lambda, \xi_n \in E_n, \|\xi_n\|=1} \|\lambda \xi_n - T_n \xi_n\| > 0. \quad (6.37)$$

Доказательство. Рассуждая от противного, допустим, что для некоторых $\lambda_n \in \mathcal{L}$, $\xi_n \in E_n$ ($\|\xi_n\|=1$) имеет место соотношение

$$\|\lambda_n \xi_n - T_n \xi_n\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (6.38)$$

Так как \mathcal{L} — компакт, можно без ограничения общности считать последовательность $\{\lambda_n\}$ сходящейся: $\lambda_n \rightarrow \lambda \in \mathcal{L}$ при $n \rightarrow \infty$.

Из (6.38) получаем

$$(\lambda \Phi_n \xi_n - T \Phi_n \xi_n) + (T \Phi_n \xi_n - \Phi_n T_n \xi_n) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (6.39)$$

Последовательность $\{T \Phi_n \xi_n - \Phi_n T_n \xi_n\}$ компактна в E по условию б) определения 6.1; из (6.39) вытекает компактность $\{\lambda \Phi_n \xi_n - T \Phi_n \xi_n\}$. Используя (6.36), заключаем отсюда, что и последовательность $\{\Phi_n \xi_n\}$ компактна в E . Но тогда по условию а) определения 6.1

$$\|T \Phi_n \xi_n - \Phi_n T_n \xi_n\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty;$$

из (6.39) вытекает, что

$$\|\lambda \Phi_n \xi_n - T \Phi_n \xi_n\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Поскольку $\|\Phi_n \xi_n\| \geq \delta > 0$ ($n=1, 2, \dots$), то последнее соотношение противоречит условию (6.36).

Лемма 6.2 доказана.

Теорема 6.5. Если последовательность операторов $T_n \in \mathcal{L}(E_n, E_n)$ компактно аппроксимирует оператор $T \in \mathcal{L}(E, E)$ по отношению к $\Phi_n \in \mathcal{L}(E_n, E)$ ($n=1, 2, \dots$), то^{*)}

$$\lambda \in \sup_{\rho} (T_n) \cup \sigma_c(T_n) \quad \rho(\lambda, \sigma(T)) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (6.40)$$

Доказательство. Пусть $c = \text{const}$ достаточно велико, так что $\|T\|, \|T_n\| < c$ ($n=1, 2, \dots$). Возьмем сколь

^{*)} Здесь $\rho(\lambda, \sigma(T))$ означает расстояние от λ до $\sigma(T)$.

угодно малое $\varepsilon > 0$ и образуем компакт Λ_ε , получаемый из круга $|\lambda| \leq c$ удалением $\sigma(T)$ вместе с его ε -окрестностью. По лемме 6.2 найдется такое n_ε , что при $n \geq n_\varepsilon$

$$\lambda \in \Lambda_\varepsilon, \xi_n \in E_n, \|\xi_n\|=1 \quad \|\lambda \xi_n - T_n \xi_n\| > 0.$$

Из этого неравенства следует, что Λ_ε не содержит при $n \geq n_\varepsilon$ точек $\sigma_p(T_n)$ и $\sigma_c(T_n)$, т.е. $\sigma_p(T_n) \cup \sigma_c(T_n)$ расположено в выделенной ε -окрестности множества $\sigma(T)$.

Теорема 6.5 доказана.

Отметим, что сходимость $\rho(\lambda_n, \sigma(T)) \rightarrow 0$ не распространяется, вообще говоря, на точки $\lambda_n \in \sigma_c(T_n)$. Например, для операторов A и A_n , определенных в примере 6.1 (см. п. 6.2), имеем

$$\begin{aligned} \sigma(A) &= \sigma_c(A) = \{\lambda : |\lambda| = 1\}, \\ \sigma_p(A_n) &= \emptyset, \quad \sigma_c(A_n) = \{\lambda : |\lambda| = 1\}, \quad \sigma_n(A_n) = \{\lambda : |\lambda| < 1\}. \end{aligned}$$

Из этого примера видно, что точки $\rho(T)$ могут, вообще говоря, при компактной аппроксимации быть точками $\sigma_n(T_n)$ при сколь угодно больших n (но не точками $\sigma_p(T_n)$ и $\sigma_c(T_n)$ - в силу теоремы 6.5).

Теорема 6.6. Пусть последовательность операторов $T_n \in \mathcal{L}(E_n, E_n)$ компактно аппроксимирует оператор $T \in \mathcal{L}(E, E)$ по отношению к $\Phi_n \in \mathcal{L}(E_n, E)$ ($n = 1, 2, \dots$).

Тогда для любого связного компакта $\Lambda \subset \rho(T)$ справедливы следующие утверждения:

- 1) при достаточно больших n либо $\Lambda \subset \rho(T_n)$, либо $\Lambda \subset \sigma_n(T_n)$;
- 2) если Λ допускает связное продолжение до компакта Λ'

$\subset \rho(T)$, имеющего точку λ' с $|\lambda'| > \|T\|$, то $\Lambda \subset \rho(T_n)$ при достаточно больших n .

Доказательство. В силу леммы 6.2 найдется такое n_0 и такое $\alpha = \text{const} > 0$, что при $n \geq n_0$.

$$\lambda \in \Lambda, \exists \xi_n \in E_n, \|\xi_n\| = 1, \|\lambda \xi_n - T_n \xi_n\| \geq \alpha. \quad (6.41)$$

Отсюда следует, что при $n \geq n_0$ каждая точка $\lambda \in \Lambda$ принадлежит $\rho(T_n)$ или $\sigma_r(T_n)$. В Λ не может быть точек обеих указанных множеств, ибо тогда в Λ нашлись бы точки $\lambda' \in \rho(T_n)$ и $\lambda'' \in \sigma_r(T_n)$, сколь угодно близкие друг к другу, вследствие чего резольвента $R(\lambda; T_n)$ могла бы принимать в Λ сколь угодно большие по норме значения,*)

$$\|R(\lambda'; T_n)\| \geq \frac{1}{|\lambda' - \lambda''|},$$

что несовместимо с (6.41). Утверждение 1) доказано.

Для доказательства 2) продолжим Λ' , в свою очередь, до связанного компакта $\Lambda'' \subset \rho(T)$, имеющего точку $\lambda'' \in \Lambda''$ с $|\lambda''| > n_p \|T_n\|$. Тогда включение $\Lambda'' \subset \sigma_r(T_n)$ невозможно, и в силу утверждения 1) $\Lambda \subset \Lambda'' \subset \rho(T_n)$ при достаточно больших n .

Теорема 6.6 доказана.

Следствие 6.2. Пусть выполнены условия теоремы 6.6. Если заданную точку $\lambda \in \rho(T)$ можно соединить с некоторой точкой $\lambda' (|\lambda'| > \|T\|)$ ломанной, полностью лежащей в $\rho(T)$, то $\lambda \in \rho(T_n)$ при достаточно больших n .

При $\lambda = 0$ отсюда получаем признак о том, когда из условий 2) и 3) теоремы 6.1 вытекает условие 4) той же теоремы.

*) Известно (см., напр., [28]), что $\|R(\lambda; T)\| \geq 1/\rho(\lambda, \sigma(T))$.

Напомним (см., например, [28]), что спектральным множеством оператора $T \in \mathcal{L}(E, E)$ называется любое такое подмножество спектра $\sigma(T)$, которое можно окружить достаточно малой окрестностью, не пересекающейся с оставшейся частью $\sigma(T)$. В частности, каждая изолированная точка $\sigma(T)$ составляет (одноточечное) спектральное множество.

Теорема 6.7. Пусть последовательность операторов $T_n \in \mathcal{L}(E_n, E_n)$ компактно аппроксимирует оператор $T \in \mathcal{L}(E, E)$ по отношению к $\Phi_n \in \mathcal{L}(E_n, E)$ ($n=1, 2, \dots$). Пусть

$$\rho(Tx, \Phi_n E_n) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ для } \forall x \in E. \quad (6.42)$$

Тогда для каждого спектрального множества Σ , $\Sigma \neq \{0\}$, оператора T найдется такая последовательность $\lambda_n \in \sigma(T_n)$ ($n=1, 2, \dots$), что $\rho(\lambda_n, \Sigma) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пусть λ' - граничная точка Σ , $\lambda' \neq 0$. Убедимся, что

$$\inf_{y \in TE, \|y\|=1} \|\lambda'y - Ty\| = 0. \quad (6.43)$$

Действительно, пусть $\lambda' = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n$, $\lambda_n \in \rho(T)$. Если бы

$$\alpha \equiv \inf_{x \in E, \|x\|=1} \|\lambda'x - Tx\| > 0,$$

то при достаточно больших n было бы

$$\inf_{x \in E, \|x\|=1} \|\lambda_n x - Tx\| \geq \frac{\alpha}{2} > 0$$

и $\|R(\lambda_n; T)\| \leq 2/\alpha$, что несовместимо с соотношением $\lambda_n \rightarrow \lambda' \in \sigma(T)$. Значит, $\alpha = 0$ и найдутся такие $x_k \in E$, $\|x_k\|=1$, что

$$\|\lambda'x_k - Tx_k\| \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Тогда $\|Tx_k\| \rightarrow |\lambda'| \neq 0$ при $k \rightarrow \infty$. Для $y_k = Tx_k / \|Tx_k\|$ имеем $y_k \in TE$ и

$$\|\lambda' y_k - T y_k\| \leq \frac{\|T\|}{\|Tx_k\|} \|\lambda' x_k - T x_k\| \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

что и доказывает (6.43).

Из (6.43) заключаем, что

$$\inf_{\xi_n \in E_n, \|\xi_n\|=1} \|\lambda' \xi_n - T_n \xi_n\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (6.44)$$

Действительно, задав сколь угодно малое $\delta > 0$, возьмем такое $y \in TE$, $\|y\|=1$, что

$$\|\lambda' y - T y\| \leq \delta.$$

По условию (6.42) можем y представить в виде предела $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n \xi_n$, $\xi_n \in E_n$. Тогда $T y = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n T_n \xi_n$ по условию а) определения 6.1, поэтому при достаточно больших n

$$\|\lambda' \Phi_n \xi_n - \Phi_n T_n \xi_n\| \leq 2\delta, \quad \|\Phi_n \xi_n\| \geq \frac{1}{2}$$

и (см. (6.1) и (6.2))

$$\|\lambda' \xi_n - T_n \xi_n\| \leq \frac{2\delta}{\alpha}, \quad \|\xi_n\| \geq \frac{1}{2\alpha}.$$

Ввиду произвольности $\delta > 0$ это и устанавливает (6.44).

Зададим сколь угодно малое $\varepsilon > 0$. Обозначим через Σ_ε ε -окрестность спектрального множества $\Sigma \subset \sigma(T)$, через $\bar{\Sigma}_\varepsilon$ и Γ_ε - замыкание и границу Σ_ε ; будем считать $\varepsilon > 0$ настолько малым, что $\bar{\Sigma}_\varepsilon$ не пересекается с $\sigma(T) \setminus \Sigma$. Тогда на компакте Γ_ε нет точек $\sigma(T)$, и по лемме 6.2 найдутся такие $\beta > 0$ и n_0 , что

$$\inf_{\lambda \in \Gamma_\varepsilon, \xi_n \in E_n, \|\xi_n\|=1} \|\lambda \xi_n - T_n \xi_n\| \geq \beta \quad \text{при } n \geq n_0. \quad (6.45)$$

Покажем, что $\bar{\Sigma}_\varepsilon \cap \sigma(T_n)$ непусто при $n \geq n_0$. Действитель-

но, в противном случае имеем

$$\bar{\Sigma}_\varepsilon \subset \rho(T_n), \quad \sup_{\lambda \in \bar{\Sigma}_\varepsilon} \|R(\lambda; T_n)\| \leq \frac{1}{\beta}.$$

По принципу максимума нормы резольвенты последнее неравенство распространяется и внутрь $\bar{\Sigma}_\varepsilon$, т.е.

$$\sup_{\lambda \in \bar{\Sigma}_\varepsilon} \|R(\lambda; T)\| \leq \frac{1}{\beta}$$

при сколь угодно больших n . Это, однако, противоречит (6.44), ибо $\lambda' \in \Sigma \subset \Sigma_\varepsilon$. Итак, при $n \geq n_0$ множество $\bar{\Sigma}_\varepsilon \cap \sigma(T_n)$ непусто. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ это равносильно утверждению теоремы.

Теорема 6.7 доказана.

Отметим, что в условиях теоремы 6.7 не обязательно каждая точка $\lambda \in \sigma(T)$ является пределом при $n \rightarrow \infty$ точек из $\sigma(T_n)$. Приведем соответствующий

Пример 6.2. Пусть E - сепарабельное гильбертово пространство с ортонормальным базисом $\{e_k\}_1^\infty$; E_n - подпространство с базисом $\{e_k\}_1^n$; $\Phi_n \in \mathcal{L}(E_n, E)$ - оператор вложения E_n в E ; $T \in \mathcal{L}(E, E)$ таков, что

$$T e_1 = 0, \quad T e_k = e_{k-1} \quad (k=2, 3, \dots);$$

$T_n x = T x$ для $x \in E_n$. Условия теоремы 6.7 выполнены.

Имеем

$$\sigma(T_n) = \{0\} \quad (n=1, 2, \dots), \quad \sigma(T) = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$$

(причем $\sigma_p(T) = \{\lambda : |\lambda| < 1\}$, $\sigma_c(T) = \{\lambda : |\lambda| = 1\}$, $\sigma_n(T) = \emptyset$).

6.7. Компактная аппроксимация резольвенты. Пусть $\Lambda \subset \rho(T)$ - компакт в комплексной плоскости. Тогда резольвента $R(\lambda; T)$ порождает линейный непрерывный оператор из пространства E

в пространство $C_E(\Lambda)$ непрерывных на Λ функций $z(\lambda)$ со значениями в E ; норма в $C_E(\Lambda)$ дается формулой

$$\|z(\lambda)\|_{C_E(\Lambda)} = \max_{\lambda \in \Lambda} \|z(\lambda)\|_E.$$

Обозначим этот оператор через $R_\Lambda(T)$. Таким образом,

$$R_\Lambda(T) \in \mathcal{L}(E, C_E(\Lambda)), \quad R_\Lambda(T)x = R(\lambda; T)x \quad \text{для } \forall x \in E. \quad (6.46)$$

Аналогично, $R(\lambda; T_n)$ порождает оператор

$$R_\Lambda(T_n) \in \mathcal{L}(E_n, C_{E_n}(\Lambda)), \quad R_\Lambda(T_n)\xi_n = R(\lambda; T_n)\xi_n \quad \text{для } \forall \xi_n \in E_n \quad (6.47)$$

(в предположении, что $\Lambda \subset \rho(T_n)$). Оператор $\Phi_n \in \mathcal{L}(E_n, E)$

порождает оператор $\Phi_{n,\Lambda} \in \mathcal{L}(C_{E_n}(\Lambda), C_E(\Lambda))$,

$$\Phi_{n,\Lambda} \zeta_n(\lambda) = \Phi_n \zeta_n(\lambda) \quad \text{для } \forall \zeta_n(\lambda) \in C_{E_n}(\Lambda). \quad (6.48)$$

Очевидно, операторы $\Phi_{n,\Lambda}$ ($n=1, 2, \dots$) удовлетворяют аналогам условий (6.1) и (6.2) с теми же постоянными a и b , что и Φ_n .

Лемма 6.3. Пусть последовательность операторов $T_n \in \mathcal{L}(E_n, E_n)$ компактно аппроксимирует оператор $T \in \mathcal{L}(E, E)$ по отношению к $\Phi_n \in \mathcal{L}(E_n, E)$ ($n=1, 2, \dots$). Пусть $\Lambda \subset \rho(T)$ -компакт, имеющий при достаточно больших n с $\sigma_n(T_n)$ пустое пересечение.

Тогда $\Lambda \subset \rho(T_n)$ при достаточно больших n и последовательность операторов $R_\Lambda(T_n) \in \mathcal{L}(E_n, C_{E_n}(\Lambda))$ компактно аппроксимирует оператор $R_\Lambda(T) \in \mathcal{L}(E, C_E(\Lambda))$ по отношению к связывающим отображениям $\Phi_n \in \mathcal{L}(E_n, E)$ и $\Phi_{n,\Lambda} \in \mathcal{L}(C_{E_n}(\Lambda), C_E(\Lambda))$ ($n=1, 2, \dots$).

Доказательство. Включение $\Lambda \subset \rho(T_n)$ вытекает из леммы 6.2; по той же лемме

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \|R(\lambda; T_n)\| \leq c = \text{const} \quad (n=n_0, n_0+1, \dots). \quad (6.19)$$

Пусть заданы $\xi_n \in E_n$ ($n = n_0, n_0+1, \dots$). Обозначим

$$y_n(\lambda) = \Phi_{n, \mathcal{L}} R_{\mathcal{L}}(T_n) \xi_n - R_{\mathcal{L}}(T) \Phi_n \xi_n \quad (n = n_0, n_0+1, \dots).$$

Следует показать, что выполнены следующие два условия:

а) $\|y_n(\lambda)\|_{C_{\mathcal{L}}(E)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, если $\{\Phi_n \xi_n\}$ компактна в E ;

б) $\{y_n(\lambda)\}$ компактна в $C_E(\mathcal{L})$, если $\|\xi_n\| \leq 1$ ($n \geq n_0$).

Ввиду (6.46) - (6.48) имеем

$$y_n(\lambda) = \Phi_n R(\lambda; T_n) \xi_n - R(\lambda; T) \Phi_n \xi_n \quad (n = n_0, n_0+1, \dots);$$

используя (6.49) и тождества Гильберта для резольвент $R(\lambda; T)$ и $R(\lambda; T_n)$, заключаем, что функции $y_n(\lambda)$ ($n = n_0, n_0+1, \dots$) равномерно ограничены по норме и равномерно непрерывны по $\lambda \in \mathcal{L}$ (о $\xi_n \in E_n$ предполагается лишь, что $\|\xi_n\| \leq c' = \text{const}$). Поэтому для доказательства а) и б) достаточно установить аналогичные условия для каждого $\lambda \in \mathcal{L}$ в отдельности. Итак, остается показать, что для произвольного фиксированного $\lambda \in \mathcal{L}$ выполнены следующие условия:

а') $\|y_n(\lambda)\|_E \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, если $\{\Phi_n \xi_n\}$ компактна в E ;

б') $\{y_n(\lambda)\}$ компактна в E , если $\|\xi_n\| \leq 1$ ($n \geq n_0$).

По следствию 6.1 последовательность $R(\lambda; T_n) \in \mathcal{L}(E_n, E_n)$ компактно аппроксимирует*) $R(\lambda; T) \in \mathcal{L}(E, E)$ по отношению к $\Phi_n \in \mathcal{L}(E_n, E)$ ($n = 1, 2, \dots$). Отсюда по определению 6.1 немедленно вытекает а') и б').

Лемма 6.3 доказана.

*) Очевидно, последовательность единичных операторов $I_n \in \mathcal{L}(E_n, E_n)$ компактно аппроксимирует единичный оператор $I \in \mathcal{L}(E, E)$, и из условия леммы вытекает, что последовательность $A_n = \lambda I_n - T_n \in \mathcal{L}(E_n, E_n)$ компактно аппроксимирует $A = \lambda I - T \in \mathcal{L}(E, E)$ по отношению к $\Phi_n \in \mathcal{L}(E_n, E)$ ($n = 1, 2, \dots$).

6.8. Корневые подпространства аппроксимирующих и аппроксимируемого операторов. Теперь мы в состоянии доказать следующий результат.

Теорема 6.8. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) последовательность операторов $T_n \in \mathcal{L}(E_n, E_n)$ компактно аппроксимирует оператор $T \in \mathcal{L}(E, E)$ по отношению к связывающим отображениям $\Phi_n \in \mathcal{L}(E_n, E)$ ($n=1, 2, \dots$);
- 2) $\rho(Tx, \Phi_n E_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для каждого $x \in E$;
- 3) оператор T имеет собственное значение $\lambda_0 \neq 0$, и λ_0 - единственная точка $\sigma(T)$ в некотором достаточно малом круге $|\lambda - \lambda_0| < \delta$;
- 4) собственному значению λ_0 соответствует конечномерное корневое подпространство X_0 оператора T (и кратность λ_0 исчерпывается этим корневым подпространством^{*)};
- 5) при достаточно больших n хотя бы одна точка окружности $|\lambda - \lambda_0| = \delta$ не принадлежит $\sigma_n(T_n)$.

Тогда при достаточно больших n пересечение $\sigma(T_n)$ с кругом $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ непусто, содержит лишь конечное число точек, и каждая из этих точек является собственным значением оператора T_n конечной корневой кратности. При $n \rightarrow \infty$ имеет место сходимость

$$\theta_n \equiv \sup_{\xi_n \in \Xi_n, \|\xi_n\|=1} \rho(\Phi_n \xi_n, X_0) \rightarrow 0, \quad (6.50)$$

$$\theta'_n \equiv \sup_{x_0 \in X_0, \|x_0\|=1} \rho(x_0, \Phi_n \Xi_n) \rightarrow 0, \quad (6.51)$$

^{*)} Т.е. проектор Рисса $Q_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_0| = \delta} R(\lambda; T) d\lambda$ проектирует в X_0 .

где Ξ_n - линейная оболочка корневых подпространств оператора T_n , соответствующих попавшим в круг $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta$ собственным значениям.

Доказательство. Окружность $\Lambda = \{\lambda: |\lambda - \lambda_0| = \delta\}$ содержится в $\rho(T)$. По теореме 6.6 и условию 5) имеем при достаточно больших n также $\Lambda \subset \rho(T_n)$. Введем проекторы Рисса

$$Q_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_0| = \delta} R(\lambda; T) d\lambda,$$

$$Q_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_0| = \delta} R(\lambda; T_n) d\lambda.$$

Первый из них проектирует E на X_0 , второй - E_n на инвариантное относительно T_n подпространство $\Xi_n = Q_n E_n$, которое соответствует спектральному множеству

$$\Sigma_n = \{\lambda: \lambda \in \sigma(T_n), |\lambda - \lambda_0| < \delta\};$$

в силу теоремы 6.7 Σ_n непусто при достаточно больших n .

Ниже будет показано, что для X_0 и Ξ_n справедливы соотношения (6.50) и (6.51); из них следует, что $\dim \Xi_n = \dim X_0 < \infty$ при достаточно больших n , и, следовательно, Σ_n состоит из конечного числа собственных значений конечной корневой кратности, а Ξ_n - линейная оболочка соответствующих корневых подпространств оператора T_n . (В формулировке теоремы Ξ_n именно так и определялось.)

С помощью леммы 6.3 заключаем, что последовательность операторов $Q_n \in \mathcal{L}(E_n, E_n)$ компактно аппроксимирует $Q_0 \in \mathcal{L}(E, E)$ по отношению к $\Phi_n \in \mathcal{L}(E_n, E)$ ($n=1, 2, \dots$). Ввиду полной непрерывности оператора Q_0 получаем из определения 6.1,

что выполнены следующие два условия:

- а) $\|\Phi_n Q_n \xi_n - Q_0 \Phi_n \xi_n\| \rightarrow 0$, если $\{\Phi_n \xi_n\}$ компактна в E ;
 б) последовательность $\{\Phi_n Q_n \xi_n\}$ компактна в E для любых $\xi_n \in E_n$, $\|\xi_n\| \leq 1$ ($n=1, 2, \dots$).

Докажем (6.50). Возьмем произвольные $\xi_n \in \Xi_n$, $\|\xi_n\| = 1$ ($n=1, 2, \dots$). Имеем $\xi_n = Q_n \xi_n$, и по условию б) последовательность $\Phi_n \xi_n = \Phi_n Q_n \xi_n$ ($n=1, 2, \dots$) компактна; из условия а) получаем затем, что $\|\Phi_n \xi_n - Q_0 \Phi_n \xi_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Так как $Q_0 \Phi_n \xi_n \in X_0$, то этим (6.50) и доказано.

Докажем (6.51). Возьмем произвольный $x_0 \in X_0$. Нетрудно видеть, что тогда $x_0 \in TE$, и по условию 2) x_0 представим в виде $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n \xi_n$, $\xi_n \in E_n$. Из а) вытекает, что $\|x_0 - \Phi_n Q_n \xi_n\| = \|Q_0 x_0 - \Phi_n Q_n \xi_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Поскольку $Q_n \xi_n \in \Xi_n$, то $\rho(x_0, \Phi_n \Xi_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Ввиду конечномерности X_0 и произвольности $x_0 \in X_0$ этим (6.51) доказано.

Теорема 6.8 доказана.

Отметим, что в силу теоремы 6.7 собственные значения $\lambda_n \in \sigma(T_n)$, попавшие в круг $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta$, стремятся к λ_0 при $n \rightarrow \infty$.

6.9. Быстрота сходимости. При изучении быстроты сходимости будем считать заданной последовательность некоторых линейных операторов P_n из E в E_n ($n=1, 2, \dots$).

Теорема 6.9. Если выполнены условия теоремы 6.8, то справедливы оценки

$$|\lambda_n - \lambda_0| \leq c \varepsilon_n^{1/l}, \quad (6.52)$$

$$\sup_{\xi_n \in \Xi_n, \|\xi_n\|=1} \rho(\xi_n, P_n X_0) \leq c \varepsilon_n, \quad (6.53)$$

$$\sup_{x_0 \in X_0, \|x_0\|=1} \rho(P_n x_0, \Xi_n) \leq c \varepsilon_n, \quad (6.54)$$

где $c = \text{const}$; $\lambda_n \in \sigma(T_n)$ ($|\lambda_n - \lambda_0| \leq \delta$); l - ранг собственного значения $\lambda_0 \in \sigma(T)$; обозначения Ξ_n и X_0 имеют тот же смысл, что и в теореме 6.8;

$$\varepsilon_n = \sup_{x_0 \in X_0, \|x_0\|=1} \|P_n T x_0 - T_n P_n x_0\|, \quad (6.55)$$

P_n ($n=1, 2, \dots$) - любые также линейные операторы^{*)} из E в E_n , что $\Phi_n P_n x_0 \rightarrow x_0$ при $n \rightarrow \infty$ для каждого $x_0 \in X_0$.

Доказательство опускается, так как оно почти дословно повторяет выкладки, проведенные в §3 при доказательстве оценок (3.10) (вместо ρ_n следует пользоваться операторами P_n).

6.10. Обобщения. Пусть E, F, E_n, F_n - комплексные банаховы пространства, $\Phi_n \in \mathcal{L}(E_n, E)$, $\Psi_n \in \mathcal{L}(F_n, F)$ - связывающие отображения со свойствами (6.1)-(6.4). Рассмотрим уравнения

$$A x = \mu B x \quad (6.56)$$

и

$$A_n \xi_n = \mu B_n \xi_n, \quad (6.57)$$

где $A, B \in \mathcal{L}(E, F)$, $A_n, B_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$ ($n=1, 2, \dots$).

Теорема 6.10. Пусть выполнены следующие условия:

1) последовательности операторов $A_n, B_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$ компактно аппроксимируют соответственно операторы $A, B \in \mathcal{L}(E, F)$ по отношению к связывающим отображениям $\Phi_n \in \mathcal{L}(E_n, E)$ и $\Psi_n \in \mathcal{L}(F_n, F)$ ($n=1, 2, \dots$);

^{*)} Достаточно, чтобы P_n был определен лишь на X_0 .

- 2) оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$ имеет обратный $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$;
- 3) операторы $A_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$ таковы, что из $\inf_{\xi_n \in E_n, \|\xi_n\|=1} \|A_n \xi_n\| > 0$

вытекает существование обратного $A_n^{-1} \in \mathcal{L}(F_n, E_n)$;

4) операторы $B \in \mathcal{L}(E, F)$ и $B_n \in \mathcal{L}(E_n, F_n)$ ($n=1, 2, \dots$) вполне непрерывны;

5) $\varphi(x, \Phi_n E_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для каждого $x \in (A^{-1}B)E$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

I. Каждое собственное значение μ_0 уравнения (6.56) является пределом при $n \rightarrow \infty$ собственных значений уравнений (6.57) и, наоборот, каждая предельная точка любой последовательности μ_n собственных значений уравнений (6.57) является собственным значением уравнения (6.56).

II. При $n \rightarrow \infty$ имеет место сходимость

$$\sup_{\xi_n \in \Xi_n, \|\xi_n\|=1} \rho(\Phi_n \xi_n, X_0) \rightarrow 0, \quad \sup_{x_0 \in X_0, \|x_0\|=1} \rho(x_0, \Phi_n \Xi_n) \rightarrow 0,$$

где X_0 - корневое подпространство оператора $T = A^{-1}B$, соответствующее собственному значению $\lambda_0 = 1/\mu_0 \in \sigma(T)$, а Ξ_n - линейная оболочка тех корневых подпространств оператора $T_n = A_n^{-1}B_n$, которые соответствуют близким к λ_0 собственным значениям T_n (близким к μ_n собственным значениям уравнения (6.57)).

III. Справедливы оценки

$$|\mu_n - \mu_0| \leq c \varepsilon_n^{\ell}, \quad (6.58)$$

$$\sup_{\xi_n \in \Xi_n, \|\xi_n\|=1} \rho(\xi_n, P_n X_0) \leq c \varepsilon_n, \quad (6.59)$$

$$\sup_{x_0 \in X_0, \|x_0\|=1} \rho(P_n x_0, \Xi_n) \leq c \varepsilon_n, \quad (6.60)$$

где ℓ - ранг собственного значения $\lambda_0 = 1/\mu_0 \in \sigma(T)$,

$$\varepsilon_n = \sup_{x_0 \in X_0, \|x_0\|=1} \|P_n T x_0 - T_n P_n x_0\|, \quad (6.61)$$

$$\varepsilon_n \in c' \sup_{x_0 \in X_0, \|x_0\|=1} (\|Q_n A x_0 - A_n P_n x_0\| + \|Q_n B x_0 - B_n P_n x_0\|), \quad (6.62)$$

$c, c' = \text{const}$, а P_n и Q_n — любые такие линейные операторы соответственно из E в E_n и из F в F_n , что $Q_n P_n x_0 \rightarrow x_0$ при $n \rightarrow \infty$ для каждого $x_0 \in X_0$.

Доказательство. По следствию 6.1 из условий 1), 2) и 3) вытекает, что при достаточно больших n обратные $A_n^{-1} \in \mathcal{L}(F_n, E_n)$ существуют и последовательность A_n^{-1} компактно аппроксимирует $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$. По предложению 6.4 последовательность операторов $T_n = A_n^{-1} B_n \in \mathcal{L}(E_n, E_n)$ компактно аппроксимирует оператор $T = A^{-1} B \in \mathcal{L}(E, F)$; операторы T_n и T вполне непрерывны. Теперь все утверждения доказываемой теоремы вытекают из теорем 6.5, 6.7, 6.8 и 6.9; лишь для установления (6.62) следует провести дополнительные рассуждения, аналогичные проведенным при доказательстве теоремы 3.2.

Теорема 6.10 доказана.

Отметим, что предположение о полной непрерывности операторов B и B_n было сделано лишь с целью упрощения формулировок.

§7. Метод Галеркина с возмущениями ^{*)}

7.1. Понятие о методе Галеркина с возмущениями. Теорема сходимости. Пусть E - банахово пространство, $E_n \subset E$ ($n=1,2,\dots$) - замкнутые подпространства. Допустим, что при каждом n задан линейный проектор P_n (не обязательно ограниченный), проектирующий из E в соответствующее подпространство E_n :

$$P_n x \in E_n \text{ для } \forall x \in \mathcal{D}(P_n) \subset E,$$

$$P_n x_n = x_n \text{ для } \forall x_n \in E_n \subset \mathcal{D}(P_n)$$

(через $\mathcal{D}(P_n)$ обозначена область определения оператора P_n).

Рассмотрим уравнения

$$x = Tx + f \tag{7.1}$$

и

$$x_n = T_n x_n + P_n f, \tag{7.2}$$

где $T \in \mathcal{L}(E, E)$, $T_n \in \mathcal{L}(E_n, E_n)$, $f \in \mathcal{D}(P_n)$ ($n=1,2,\dots$); предполагается также, что $T \in \mathcal{D}(P_n)$ и ^{**)} что $P_n T$ - ограниченный в E оператор. Тогда ограниченным будет и действующее в E_n сужение оператора $P_n T$ на подпространство E_n ; для этого сужения сохраним обозначение $P_n T$. В дальнейшем

^{*)} Результаты этого параграфа нашли отражение в монографии [36]. Многие вопросы освещены в [36] значительно подробнее, чем здесь. Основная цель этого параграфа - показать, как метод Галеркина с возмущениями укладывается в схему, изложенную в предыдущем параграфе.

^{***)} Тогда и решение уравнения (7.1) принадлежит $\mathcal{D}(P_n)$. Отметим, что необходимость использовать неограниченные проекторы естественным образом возникает, например, при изучении метода коллокации (см. [7], [8], [36]).

предполагается, что

$$\|T_n - P_n T\|_{E_n \rightarrow E_n} \rightarrow 0, \quad \|T - P_n T\|_{E \rightarrow E} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (7.3)$$

Рассмотрим наряду с (7.1) и (7.2) ещё третье уравнение

$$x = P_n T x + P_n f. \quad (7.4)$$

Это уравнение принято называть уравнением Галеркина, а приближенный метод решения уравнения (7.1), основывающийся на переходе от (7.1) к уравнению (7.4) — методом Галеркина. Ввиду первого из соотношений (7.3) можно (7.2) переписать в виде

$$x_n = P_n T x_n + S_n x_n + P_n f, \quad (7.5)$$

где

$$S_n = T_n - P_n T \in \mathcal{L}(E_n, E_n), \quad \|S_n\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, уравнение (7.2) отличается от уравнения Галеркина лишь малым возмущающим оператором $S_n \in \mathcal{L}(E_n, E_n)$, и приближенные методы решения уравнения (7.1), основывающиеся на переходе от (7.1) к уравнению (7.2), естественно объединить под названием метода Галеркина с возмущениями.

Предложение 7.1. Если выполнены условия (7.3), то последовательность операторов $T_n \in \mathcal{L}(E_n, E_n)$ компактно аппроксимирует оператор $T \in \mathcal{L}(E, E)$ по отношению к операторам вложения E_n в E (см. определение 6.1).

Действительно, для любых $x_n \in E_n$, $\|x_n\| \leq c = \text{const}$ ($n=1, 2, \dots$) имеем

$$\|T_n x_n - T x_n\| \leq (\|T_n - P_n T\| + \|T - P_n T\|) \|x_n\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

и условия определения 6.1 выполнены.

Предложение 7.2. Если $\lambda \in \rho(T)$ и

$$q_n \equiv \|R(\lambda; T)\| (\|T - P_n T\| + \|T_n - P_n T\|) < 1, \quad (7.6)$$

то $\lambda \in \rho(T_n)$ и

$$\|R(\lambda; T_n)\| \leq \frac{\|R(\lambda; T)\|}{1 - q_n}. \quad (7.7)$$

Доказательство этого простого утверждения см. в [36], стр. 234.

Теорема 7.1. Пусть оператор $I - T$ имеет обратный $(I - T)^{-1} \in \mathcal{L}(E, E)$, и пусть выполнены условия (7.3).

Тогда уравнение (7.2) имеет при достаточно больших n единственное решение x_n^* и справедлива оценка

$$c_1 \|P_n T x^* - T_n P_n x^*\| \leq \|x_n^* - P_n x^*\| \leq c_2 \|P_n T x^* - T_n P_n x^*\|, \quad (7.8)$$

где x^* - решение уравнения (7.1), а c_1 и c_2 - некоторые положительные постоянные. Если $P_n f \rightarrow f$, то $x_n^* \rightarrow x^*$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. В силу предложений 7.1 и 7.2 для $A = I - T$ и $A_n = I_n - T_n$ выполнены условия 2)-4) теоремы 6.1, из которых следует обратимость A_n и оценка (7.8). Если $P_n f \rightarrow f$, то выполнено и первое условие теоремы 6.1, и $x_n^* \rightarrow x^*$ при $n \rightarrow \infty$ по указанной теореме.

Теорема 7.1 доказана.

Нетрудно построить и непосредственное доказательство теоремы (см. [36]).

Замечание 7.1. Из (7.8) вытекает оценка

$$\|x_n^* - x^*\| \leq c \|x^* - P_n x^*\| + \|P_n x^*\| \|T_n - P_n T\|_{E_n \rightarrow E_n}. \quad (7.9)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \|x_n^* - x^*\| &\leq \|x_n^* - P_n x^*\| + \|x^* - P_n x^*\| \leq \\ &\leq c_2 \|P_n T x^* - T_n P_n x^*\| + \|x^* - P_n x^*\| \leq \\ &\leq (c_2 \|P_n T\| + 1) \|x^* - P_n x^*\| + \|T_n - P_n T\| \|P_n x^*\|. \end{aligned}$$

Отметим, что в теореме 7.1 не играет существенной роли то обстоятельство, что P_n - проектор. Достаточно, чтобы P_n был линейным оператором из E в E_n .

7.2. Связь с общей теорией приближенных методов Л.В.Канторовича. Из теоремы 7.1 легко получить известную теорему Л.В.Канторовича о сходимости приближенных методов. Рассмотрим снова уравнения

$$x = Tx + f \quad (7.10)$$

и

$$x_n = T_n x_n + P_n f. \quad (7.11)$$

Проекторы P_n ($P_n^2 = P_n$, $P_n E = E_n$) будем считать ограниченными. Пространства E и $E_n \subset E$ и операторы $T \in \mathcal{L}(E, E)$ и $T_n \in \mathcal{L}(E_n, E_n)$ связываются следующими условиями (см. [31]).

I. Для каждого $x_n \in E_n$

$$\|P_n T x_n - T_n x_n\| \leq \xi_n \|x_n\|.$$

II. Для всякого $x \in E$ найдется такой $y_n \in E_n$, что

$$\|Tx - y_n\| \leq \eta_n \|x\|.$$

III. Существует элемент $f_n \in E_n$ такой, что

$$\|f - f_n\| \leq \zeta_n \|f\|.$$

В отличие от предыдущих условий, ζ_n здесь, вообще говоря зависит от f .

Теорема 7.2. Пусть $I - T$ имеет обратный $(I - T)^{-1} \in \mathcal{L}(E, E)$, и пусть выполнены условия I, II и III, причем

$$\xi_n \rightarrow 0, \quad \|P_n\| \eta_n \rightarrow 0, \quad \|P_n\| \zeta_n \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (7.12)$$

Тогда уравнение (7.11) имеет при достаточно больших n единственное решение x_n^* и последовательность $\{x_n^*\}$ по норме стремится к решению x^* уравнения (7.10). Справедливы

Оценки

$$\|x_n^* - x^*\| \leq c (\xi_n + \|P_n\| \eta_n + \|P_n\| \zeta_n), \quad (7.13)$$

$$\|x_n^* - x^*\| \leq c [\xi_n + \|P_n\| \rho(x^*, E_n)]. \quad (7.14)$$

Доказательство. Для $x \in E$, $x_n \in E_n$ имеем $x_n = P_n x_n$ и

$$\|x - P_n x\| \leq \|x - x_n\| + \|P_n(x_n - x)\| \leq (1 + \|P_n\|) \|x - x_n\|.$$

Ввиду произвольности $x_n \in E_n$ получаем

$$\|x - P_n x\| \leq (1 + \|P_n\|) \rho(x, E_n) \leq 2 \|P_n\| \rho(x, E_n). \quad (7.15)$$

Условие I означает, что

$$\|T_n - P_n T\|_{E_n \rightarrow E_n} \leq \xi_n, \quad (7.16)$$

а из II и III на основании (7.15) получаем

$$\|T - P_n T\|_{E \rightarrow E} \leq 2 \|P_n\| \eta_n, \quad (7.17)$$

$$\|\beta - P_n \beta\| \leq 2 \|P_n\| \|\beta\| \zeta_n. \quad (7.18)$$

Из этих неравенств и соотношений (7.12) заключаем, что выполнены условия (7.3) и что $P_n f \rightarrow f$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, выполнены условия теоремы 7.1. Однозначная разрешимость уравнений (7.11) при достаточно больших n и сходимость $x_n^* \rightarrow x^*$ вытекают из теоремы 7.1 непосредственно.

Оценка (7.13) вытекает из (7.9) и неравенства

$$\|x^* - P_n x^*\| \leq \|T - P_n T\| \|x^*\| + \|\beta - P_n \beta\| \leq 2 \|P_n\| (\|x^*\| \eta_n + \|\beta\| \zeta_n). \quad (7.19)$$

Оценка (7.14) вытекает из (7.9) и (7.15).

Теорема 7.2 доказана.

Теорема 7.2 была установлена Л.В.Канторовичем (см. [30], [31]) при следующем дополнительном ограничении: из разрешимости уравнения (7.11) при любой правой части следует единственность решения. Пространство E в этих работах не предполагается полным (E - линейное нормированное пространство,

E_n - его полное подпространство). Однако, если условия I-III выполнены для некоторого неполного нормированного пространства E и оператора T в нем, то эти условия остаются в силе и для пополнения \bar{E} пространства E и замыкания \bar{T} оператора T в \bar{E} . Поэтому предположение о полноте E не является ограничивающим.

7.3. Проблема собственных значений. Примем снова условия, введенные в начале п. 7.1; пространство E будем теперь считать комплексным. Согласно предложению 7.1, из условий (7.3) вытекает, что последовательность операторов $T_n \in \mathcal{L}(E_n, E_n)$ компактно аппроксимирует оператор $T \in \mathcal{L}(E, E)$ по отношению к операторам вложения E_n в E . Это позволяет сразу переформулировать теоремы 6.5-6.9 на метод Галеркина с возмущениями. Некоторые из этих теорем допускают усиление. Усилением теоремы 6.6 является

Теорема 7.3. Пусть выполнены условия (7.3), и пусть $\Lambda \subset \varphi(T)$ - связный компакт.

Тогда $\Lambda \subset \varphi(T_n)$ при достаточно больших n .

Доказательство. Если $0 \in \varphi(T)$, то из (7.3) следует, что $P_n = I$, $E_n = E$ при достаточно больших n и $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. В этом случае утверждение теоремы очевидно.

Пусть $0 \notin \varphi(T)$. Тогда $0 \notin \Lambda$. Возьмем какое-нибудь $\lambda \in \Lambda$. По предложению 7.2 $\lambda \in \varphi(T_n)$ при достаточно больших n , и при этих n включение $\Lambda \subset \varphi(T_n)$ вытекает из теоремы 6.6.

Теорема 7.3 доказана.

Следующий результат усиливает теорему 6.5.

Теорема 7.4. Пусть выполнены условия (7.3). Тогда

$$\sup_{\lambda \in \sigma(T_n)} \rho(\lambda, \sigma(T)) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (7.20)$$

Доказательство. Рассуждая от противного, допустим, что для некоторых $\lambda_n \in \sigma(T_n)$ и некоторого $\varepsilon_0 > 0$ имеем

$$\rho(\lambda_n, \sigma(T)) \geq \varepsilon_0. \quad (7.21)$$

при сколь угодно больших n . Так как $|\lambda_n| \leq \|T_n\| \leq \text{const}$ ($n=1, 2, \dots$), то некоторая подпоследовательность последовательности $\{\lambda_n\}$ сходится; чтобы не усложнять записи, будем считать, что сама последовательность $\{\lambda_n\}$ сходится: $\lambda_n \rightarrow \lambda'$ при $n \rightarrow \infty$. Из-за (7.21) невозможно $\lambda' \in \sigma(T)$. Значит, $\lambda' \in \rho(T)$, и ввиду открытости резольвентного множества найдется такой связанный компакт $\Lambda \subset \rho(T)$, для которого λ' является внутренней точкой. При достаточно больших n имеем $\lambda_n \in \Lambda$. По теореме 7.3 $\Lambda \subset \rho(T_n)$ и, в частности, $\lambda_n \in \rho(T_n)$ при достаточно больших n , вопреки первоначальному выбору λ_n .

Теорема 7.4 доказана.

Теорема 7.5. Пусть оператор $T \in \mathcal{L}(E, E)$ имеет собственное значение $\lambda_0 \neq 0$, которому соответствует конечномерное корневое подпространство X_0 (причем кратность λ_0 исчерпывается этим корневым подпространством), и пусть в круге $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta$ нет других точек $\sigma(T)$, кроме λ_0 . Пусть выполнены условия (7.3).

Тогда справедливы следующие утверждения.

1) При достаточно больших n пересечение $\sigma(T_n)$ с кру-

гому $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta$ непусто, содержит лишь конечное число точек, и каждая из них является собственным значением оператора T_n конечной корневой кратности; $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ при $n \rightarrow \infty$ ($\lambda_n \in \mathcal{S}(T_n)$, $|\lambda_n - \lambda_0| \leq \delta$).

2) При $n \rightarrow \infty$ имеет место сходимось

$$\theta_n \equiv \sup_{x_n \in X_n, \|x_n\|=1} \rho(x_n, X_0) \rightarrow 0, \quad (7.22)$$

$$\theta'_n \equiv \sup_{x_0 \in X_0, \|x_0\|=1} \rho(x_0, X_n) \rightarrow 0, \quad (7.23)$$

где X_n - линейная оболочка корневых подпространств оператора T_n , соответствующих попавшим в круг $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta$ собственным значениям.

3) Справедливы оценки

$$|\lambda_n - \lambda_0| \leq c \varepsilon_n^{1/\ell}, \quad (7.24)$$

$$\sup_{x_n \in X_n, \|x_n\|=1} \rho(x_n, P_n x_0) \leq c \varepsilon_n, \quad (7.25)$$

$$\sup_{x_0 \in X_0, \|x_0\|=1} \rho(P_n x_0, X_n) \leq c \varepsilon_n, \quad (7.26)$$

где $c = \text{const}$, ℓ - ранг собственного значения $\lambda_0 \in \mathcal{S}(T)$,

$$\varepsilon_n = \sup_{x_0 \in X_0, \|x_0\|=1} \|P_n T x_0 - T_n P_n x_0\|. \quad (7.27)$$

Доказательство. Эта теорема вытекает из теорем 6.8 и 6.9. Проверка условий теоремы 6.8 не вызывает труда. В частности, из теоремы 7.3 следует выполнение условия 5) теоремы 6.8, а условие 2) теоремы 6.8 вытекает из (7.3): для каждого $x \in E$ имеем

$$\rho(Tx, E_n) \leq \|Tx - P_n Tx\| \leq \|T - P_n T\| \|x\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Ввиду вложения $X_0 \subset TE$ отсюда же получаем, что $P_n x_0 \rightarrow x_0$ при $n \rightarrow \infty$ для каждого $x_0 \in X_0$. Остается воспользоваться теоремами 6.8 и 6.9.

Теорема 7.5 доказана.

Замечание 7.2. Из оценок (7.24)–(7.27) вытекают оценки

$$|\lambda_n - \lambda_0| \leq c \delta_n^{1/\ell}, \quad \theta_n \leq c \delta_n, \quad \theta'_n \leq c \delta_n, \quad (7.28)$$

где $c = \text{const}$, θ_n и θ'_n – определенные в (7.22) и (7.23) величины,

$$\delta_n = \|T_n - P_n T\|_{E_n \rightarrow E_n} + \sup_{x_0 \in X_0, \|x_0\|=1} \|x_0 - P_n x_0\|. \quad (7.29)$$

Это утверждение доказывается с помощью рассуждений, аналогичных доказательству замечания 7.1. Менее очевидным является

Замечание 7.3. Пусть выполнены условия теоремы 7.5.

Пусть $X_0^* \subset \mathcal{D}(P_n^*)$, где P_n^* – сопряженный к P_n оператор, X_0^* – корневое подпространство сопряженного к T оператора T^* . Тогда справедлива оценка

$$|\lambda_n - \lambda_0| \leq c \left\{ \|T_n - P_n T\|_{E_n \rightarrow E_n} + \sup_{\substack{x_0 \in X_0, x_0^* \in X_0^* \\ \|x_0\| = \|x_0^*\| = 1}} \|x_0 - P_n x_0\| \|x_0^* - P_n^* x_0^*\| \right\}^{1/\ell}. \quad (7.30)$$

За доказательством отсылаемся к работам [11], [36] (в монографии [36] доказательство приведено лишь при $\ell=1$; в [11] имеется полное доказательство).

В случае, когда выполнены условия Л.В. Канторовича (условия I и II из п. 7.2), оценки (7.28)–(7.30) допускают различные конкретизации. По этому поводу см. [36], стр. 264.

7.4. Нелинейные уравнения. Пусть E - вещественное банахово пространство, E_n ($n=1,2,\dots$) - его замкнутые подпространства, $\Omega \subset E$ - открытое ограниченное множество, $\dot{\Omega}$ - его граница, $\bar{\Omega}$ - замыкание, $\Omega_n = \Omega \cap E_n$, $\dot{\Omega}_n$ - граница Ω_n в E_n , $\bar{\Omega}_n$ - замыкание. Рассмотрим уравнения

$$x = Tx \quad (7.31)$$

и

$$x_n = T_n x_n, \quad (7.32)$$

где $T: \bar{\Omega} \rightarrow E$ и $T_n: \bar{\Omega}_n \rightarrow E_n$ ($n=1,2,\dots$) - нелинейные операторы. Допустим, что при каждом n задан проектор P_n (не обязательно ограниченный), проектирующий из E на соответствующее E_n ; предполагается, что $T \bar{\Omega} \subset \mathcal{D}(P_n)$ ($n=1,2,\dots$).

Теорема 7.6. Пусть операторы $T: \bar{\Omega} \rightarrow E$ и $T_n: \bar{\Omega}_n \rightarrow E_n$ ($n=1,2,\dots$) вполне непрерывны, и пусть

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} \|Tx - P_n Tx\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (7.33)$$

$$\sup_{x_n \in \bar{\Omega}_n} \|T_n x_n - P_n T x_n\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (7.34)$$

Пусть уравнение (7.31) имеет решение $x^* \in \Omega$ ненулевого индекса, и это решение единственное в $\bar{\Omega}$.

Тогда уравнение (7.32) имеет при достаточно больших n хотя бы одно решение $x_n^* \in \Omega_n$, и $x_n^* \rightarrow x^*$ при $n \rightarrow \infty$ для любых решений $x_n^* \in \bar{\Omega}_n$.

Доказательство. Из (7.33) и (7.34) вытекает, что

$$\sup_{x_n \in \bar{\Omega}_n} \|T_n x_n - T x_n\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (7.35)$$

Отсюда заключаем, что последовательность операторов $T_n: \bar{\Omega}_n \rightarrow E_n$

компактно аппроксимирует оператор $T: \bar{\Omega} \rightarrow E$ по отношению к операторам вложения E_n в E (см. определение 6.2). Из (7.33) следует также, что $\varphi(y, E_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для каждого $y \in T\bar{\Omega}$. Таким образом, выполнены условия теоремы 6.4, из которой немедленно вытекает утверждения доказываемой теоремы.

Теорема 7.6 доказана.

Теорема 7.7. Пусть операторы T и $P_n T$ дифференцируемы* по Фреше в Ω , а T_n - в Ω_n . Пусть уравнение (7.31) имеет решение $x^* \in \Omega$, причем линейный оператор $[I - T'(x^*)]$ имеет обратный $[I - T'(x^*)]^{-1} \in \mathcal{L}(E, E)$. Пусть при $n \rightarrow \infty$ имеют место соотношения

$$\|x^* - P_n x^*\| \rightarrow 0, \quad (7.36)$$

$$\|P_n T P_n x^* - T x^*\| \rightarrow 0, \quad \|P_n T'(P_n x^*) - T'(x^*)\| \rightarrow 0, \quad (7.37)$$

$$\|P_n T P_n x^* - T_n P_n x^*\| \rightarrow 0, \quad \|P_n T'(P_n x^*) - T_n'(P_n x^*)\| \rightarrow 0. \quad (7.38)$$

Пусть, наконец, для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие n_ε и $\delta_\varepsilon > 0$, что

$$\|T_n'(x_n) - T_n'(P_n x^*)\| \leq \varepsilon \text{ при } n \geq n_\varepsilon, \quad \|x_n - P_n x^*\| \leq \delta_\varepsilon \quad (x_n \in E_n) \quad (7.39)$$

Тогда найдутся такие n_0 и $\delta_0 > 0$, что при $n \geq n_0$ уравнение (7.32) имеет в шаре $\|x - x^*\| \leq \delta_0$ единственное решение x_n^* . Справедливы оценки

$$c_1 \|P_n T x^* - T_n P_n x^*\| \leq \|x_n^* - P_n x^*\| \leq c_2 \|P_n T x^* - T_n P_n x^*\|, \quad (7.40)$$

$$\|x_n^* - x^*\| \leq \|x^* - P_n x^*\| + \|x_n^* - P_n x^*\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (7.41)$$

*Предполагается, что $T'(x) \in \mathcal{D}(P_n)$ и $(P_n T)'(x) = P_n T'(x)$. Если проектор P_n ограничен, то дифференцируемость $P_n T$ вытекает из дифференцируемости T . Отметим также, что в теореме 7.7 не предполагается полной непрерывности T и T_n .

где c_1, c_2 - некоторые положительные постоянные.

Доказательство опирается на лемму 4.1, которая применяется для $A = I_n - T_n$ (в качестве χ_0 следует брать $P_n \chi^*$). Мы дважды уже проводили подобные рассуждения (при доказательстве теорем 4.1 и 6.2), и на этот раз не будем вдаваться в детали. Подробное доказательство можно найти в [36], стр. 279.

Часть вторая
ПРИЛОЖЕНИЯ АБСТРАКТНОЙ ТЕОРИИ

§8. Метод механических квадратур (случай непрерывных ядер)

8.1. Сходящийся квадратурный процесс. Пусть D - некоторый метрический компакт (компактное метрическое пространство). Через

$$S(t_0, r) = \{t \in D: \rho(t, t_0) < r\}$$

будем обозначать открытый шар с центром в точке $t_0 \in D$ и радиусом r .

Пусть на некоторой σ -алгебре \mathcal{A} подмножеств D задана мера ν (счетно-аддитивная функция множества), обладающая следующими свойствами:

1° мера ν регулярна (т.е. открытые и замкнутые подмножества D принадлежат \mathcal{A} , и для каждого $A \in \mathcal{A}$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся замкнутое множество $F \subset A$ и открытое множество $G \supset A$, такие, что $|\nu|(G \setminus F) < \varepsilon$);

2° $|\nu|(D) < \infty$;

3° $|\nu|(S(t_0, r)) > 0$ при любых $t_0 \in D, r > 0$.

Здесь $|\nu|$ - полная вариация меры ν (см. [28]). Из 1° и 2° вытекает, что каждая непрерывная на D функция ν -интегрируема.

Рассмотрим какой-нибудь квадратурный процесс

$$\int_D z(s) d\nu(s) = \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} z(s_{jn}) + \varphi_n(z) \quad (n=1,2,\dots). \quad (8.1)$$

Здесь $\alpha_{1n}, \dots, \alpha_{nn}$ - некоторые вещественные числа (коэффициенты квадратурной формулы), s_{1n}, \dots, s_{nn} - некоторые попарно различные точки D (узлы квадратурной формулы), $\varphi_n(z)$ - дополнительный член квадратурной формулы. Если $\varphi_n(z) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для каждой непрерывной на D функции $z(s)$, то говорят, что квадратурный процесс (8.1) сходится.

Введем банахово пространство $C(D)$ непрерывных на D функций; норма в $C(D)$ дается формулой

$$\|z\|_{C(D)} = \max_{t \in D} |z(t)|. \quad (8.2)$$

Заметим, что

$$f(z) = \int_D z(s) d\nu(s), \quad f_n(z) = \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} z(s_{jn})$$

и $\varphi_n(z) = f(z) - f_n(z)$ являются линейными непрерывными функционалами над $C(D)$; сходимость квадратурного процесса (8.1) означает, что $f_n \rightarrow f$, $\varphi_n \rightarrow 0$ поточечно (сильно). По теореме Урсона (см. [28]) найдется такая непрерывная на D функция $z(s)$, что $|z(s)| \leq 1$ в D и $z(s_{jn}) = \text{sign } \alpha_{jn}$ ($j=1, \dots, n$). Отсюда вытекает, что

$$\|f_n\| = \sum_{j=1}^n |\alpha_{jn}|. \quad (8.3)$$

Предложение 8.1. Если квадратурный процесс (8.1) сходится, то

$$\sum_{j=1}^n |\alpha_{jn}| \leq c = \text{const} \quad (n=1, 2, \dots), \quad (8.4)$$

$$\sup_{s \in D} \rho(s, G_n) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \text{ где } G_n = \{\alpha_{jn}\}_{j=1}^n, \quad (8.5)$$

$$\sup_{z \in \mathcal{M}} |\varphi_n(z)| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (8.6)$$

где \mathcal{M} - произвольное компактное множество в $C(D)$.

Действительно, (8.4) хорошо известно (оно вытекает из (8.3) и теоремы Банаха-Штейнхауса), (8.5) достаточно очевидно ввиду 3°, а (8.6) вытекает из следующего замечания: поточечная сходимость линейных непрерывных операторов равномерна на каждом компактном подмножестве.

Условию 1° - 3° удовлетворяет, например, мера Лебега на замкнутой ограниченной области $D \subset R^m$. Этот пример является для нас основным, но он, конечно, не единственный. Вторым интересным примером: D - расширенная вещественная прямая с расстоянием $\rho(t, s) = \left| \frac{t}{1+|t|} - \frac{s}{1+|s|} \right|$, \mathcal{A} - система борелевых множеств на ней, $\nu(A) = \int_A g(t) dt$ ($A \in \mathcal{A}$), где $g(t)$ - произвольная суммируемая (по Лебегу) функция на $(-\infty, \infty)$, такая, что $g(t) = 0$ лишь на множестве нулевой меры Лебега.

В заключение пункта отметим, что во всех рассуждениях параграфа можно о мере ν предполагать несколько меньше, чем требовалось выше. Во-первых, достаточно, чтобы \mathcal{A} была лишь алгеброй (не σ -алгеброй), а ν - конечно-аддитивной функцией множества на ней. Во-вторых, вместо 1° достаточно ввести следующее условие: $S(t_0, r) \in \mathcal{A}$ при любых $t_0 \in D, r > 0$. Однако, из этих ослабленных условия и условия 2° все-равно вытекает, что ν допускает единственное счетно-аддитивное

регулярное расширение на σ -алгебру, порожденную алгеброй \mathcal{A} . Поэтому имеется смысл наложить ограничения на ν сразу в такой форме, как это делалось в начале пункта.

8.2. Линейное интегральное уравнение. Рассмотрим линейное интегральное уравнение (уравнение Фредгольма)

$$x(t) = \int_D \mathcal{X}(t, s)x(s) d\nu(s) + f(t). \quad (8.7)$$

Заменяя интеграл его приближенным значением по квадратурной формуле (8.1) (в которой отбрасываем дополнительный член), будем разскивать $\xi_{in} \approx x(s_{in})$ ($i=1, \dots, n$) из системы линейных уравнений

$$\xi_{in} = \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} \mathcal{X}(s_{in}, s_{jn}) \xi_{jn} + f(s_{in}) \quad (i=1, \dots, n). \quad (8.8)$$

Теорема 8.1. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) мера ν удовлетворяет условиям 1° - 3° п. 8.1;
- 2) квадратурный процесс (8.1) сходится;
- 3) функции $f(t)$ и $\mathcal{X}(t, s)$ непрерывны соответственно на D и $D \times D$;
- 4) уравнение (8.7) имеет единственное решение $x^*(t)$.

Тогда система уравнений (8.8) имеет при достаточно больших n единственное решение $(\xi_{1n}^*, \dots, \xi_{nn}^*)$, и

$$\max_{1 \leq i \leq n} |\xi_{in}^* - x^*(s_{in})| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (8.9)$$

с оценкой

$$c_1 \varepsilon_n \leq \max_{1 \leq i \leq n} |\xi_{in}^* - x^*(s_{in})| \leq c_2 \varepsilon_n, \quad (8.10)$$

где c_1, c_2 - некоторые положительные постоянные,

$$\varepsilon_n = \max_{1 \leq i \leq n} |\varphi_n(z_{in})|, \quad z_{in}(s) = \mathcal{K}(s_{in}, s) x^*(s), \quad (8.11)$$

$\varphi_n(z)$ - дополнительный член квадратурной формулы (8.1).

Доказательство построим, опираясь на теорему 2.1. Уравнение (8.7) рассмотрим как операторное уравнение $x = Tx + f$ в пространстве $E = C(D)$. Из непрерывности ядра $\mathcal{K}(t, s)$ вытекает полная непрерывность в $C(D)$ интегрального оператора T , определенного формулой

$$(Tx)(t) = \int_D \mathcal{K}(t, s) x(s) dv(s). \quad (8.12)$$

Систему уравнений (8.8) рассмотрим как операторное уравнение $\xi_n = T_n \xi_n + p_n f$ в пространстве $E_n = m_n$. Элементами пространства m_n являются n -мерные векторы

$$\xi_n = (\xi_{1n}, \dots, \xi_{nn}); \quad \|\xi_n\| = \max_{1 \leq i \leq n} |\xi_{in}|. \quad (8.13)$$

Связывающие отображения $p_n \in \mathcal{L}(C(D), m_n)$ ($n=1, 2, \dots$) зададим формулой

$$p_n x = (x(s_{1n}), \dots, x(s_{nn})) \quad (x \in C(D)); \quad (8.14)$$

условия (1.1)-(1.3) для них выполнены с постоянными^{*)} $a = b = 1$.

Оператор $T_n: m_n \rightarrow m_n$ переводит $\xi_n = (\xi_{1n}, \dots, \xi_{nn})$ в

$$T_n \xi_n = \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{jn} \mathcal{K}(s_{1n}, s_{jn}) \xi_{jn}, \dots, \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} \mathcal{K}(s_{nn}, s_{jn}) \xi_{jn} \right). \quad (8.15)$$

Покажем, что последовательность операторов $T_n \in \mathcal{L}(m_n, m_n)$ компактно аппроксимирует оператор $T \in \mathcal{L}(C(D), C(D))$ по отношению к связывающим отображениям $p_n \in \mathcal{L}(C(D), m_n)$. Действительно, для любого $x \in C(D)$ имеем

^{*)} При проверке условия (1.3) используется теорема Урсона.

$$\begin{aligned} & \|p_n T x - T_n p_n x\| = \\ & = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \int_D \mathcal{K}(s_{in}, s) x(s) dv(s) - \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} \mathcal{K}(s_{in}, s_{jn}) x(s_{jn}) \right| = \\ & = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \varphi_n(\mathcal{K}(s_{in}, s) x(s)) \right| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (8.16)$$

в силу (8.6) и компактности семейства $\{z_t(s) = \mathcal{K}(t, s)x(s)\}_{t \in D}$ в $C(D)$. Таким образом, условие а) определения 1.3 компактной аппроксимации выполнено. Проведем проверку условия б). Пусть $\xi_n = (\xi_{1n}, \dots, \xi_{nn}) \in m_n$, $\|\xi_n\| \leq 1$ ($n=1, 2, \dots$). Используя (8.4) и равномерную непрерывность и ограниченность функции $\mathcal{K}(t, s)$ на $D \times D$, с помощью теоремы Арцела легко убедиться, что последовательность

$$y_n(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} \mathcal{K}(t, s_{jn}) \xi_{jn} \quad (n=1, 2, \dots)$$

компактна в $C(D)$. Очевидно, $p_n y_n = T_n \xi_n$ ($n=1, 2, \dots$). Таким образом, выполнено и условие б) определения 1.3, и последовательность T_n компактно аппроксимирует T .

Из (8.5) и определения норм в $C(D)$ и m_n (см. (8.2) и (8.13)) вытекает, что

$$\|p_n x\|_{m_n} \rightarrow \|x\|_{C(D)} \quad \text{при } n \rightarrow \infty \text{ для } \forall x \in C(D). \quad (8.17)$$

Мы показали, что все условия теоремы 2.1 выполнены. По теореме 2.1 уравнение $\xi_n = T_n \xi_n + p_n f$ имеет при достаточно больших n единственное решение $\xi_n^* = (\xi_{1n}^*, \dots, \xi_{nn}^*)$, и $\|\xi_n^* - p_n x^*\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Другими словами, система уравнений (8.8) имеет единственное решение $(\xi_{1n}^*, \dots, \xi_{nn}^*)$, и имеет место сходимость (8.9). Ввиду (8.16) оценка (2.9) теоремы 2.1 принимает вид (8.10)–(8.11).

Теорема 8.1 доказана.

По дискретному приближению $(\xi_{1n}^*, \dots, \xi_{nn}^*)$ к решению $x^*(t)$ уравнение (8.7) можно различными способами строить приближение-функцию $x_n(t)$. Удобно, например, положить

$$x_n^*(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} \mathcal{K}(t, s_{jn}) \xi_{jn}^* + f(t).$$

Замечание 8.1. Если выполнены условия теоремы 8.1, то

$$\max_{t \in D} |x_n^*(t) - x^*(t)| \leq c \max_{t \in D} |\varphi_n(z_t)| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

где $z_t(s) = \mathcal{K}(t, s)x^*(s)$.

Это утверждение вытекает из легко устанавливаемого равенства

$$x_n^*(t) - x^*(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} \mathcal{K}(t, s_{jn}) [\xi_{jn}^* - x^*(s_{jn})] - \varphi_n(z_t),$$

неравенства (8.4), ограниченности $\mathcal{K}(t, s)$, оценки (8.10) и компактности множества $\{z_t\}_{t \in D}$ в $C(D)$.

8.3. Проблема собственных значений. Рассмотрим интегральный оператор (8.12) и матрицу, соответствующую оператору (8.15). Обозначим их через K и K_n :

$$(Kx)(t) = \int_D \mathcal{K}(t, s)x(s)dv(s), \quad (8.18)$$

$$K_n = \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \mathcal{K}(s_{1n}, s_{1n}) & \alpha_{2n} \mathcal{K}(s_{1n}, s_{2n}) & \dots & \alpha_{nn} \mathcal{K}(s_{1n}, s_{nn}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{1n} \mathcal{K}(s_{nn}, s_{1n}) & \alpha_{2n} \mathcal{K}(s_{nn}, s_{2n}) & \dots & \alpha_{nn} \mathcal{K}(s_{nn}, s_{nn}) \end{pmatrix}. \quad (8.19)$$

Из проведенных в предыдущем пункте рассуждений и теоремы 3.1

вытекает следующий результат.*)

Теорема 8.2. Пусть мера ν удовлетворяет условиям 1° - 3° п. 8.1, и пусть квадратурный процесс (8.1) сходится. Пусть ядро $\mathcal{K}(t, s)$ непрерывно на $D \times D$.

Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Каждое собственное значение $\lambda_0 \neq 0$ интегрального оператора K является пределом при $n \rightarrow \infty$ собственных значений матриц K_n , и, наоборот, любая ненулевая предельная точка любой последовательности $\lambda_n \in \sigma(K_n)$ является собственным значением оператора K .

2) При $n \rightarrow \infty$ имеет место сходимость

$$\theta_n \equiv \sup_{\xi_n \in \Xi_n, \|\xi_n\|=1} \inf_{x_0 \in X_0} \max_{1 \leq i \leq n} |\xi_{in} - x_0(s_{in})| \rightarrow 0,$$

$$\theta'_n \equiv \sup_{x_0 \in X_0, \|x_0\|=1} \inf_{\xi_n \in \Xi_n} \max_{1 \leq i \leq n} |\xi_{in} - x_0(s_{in})| \rightarrow 0,$$

где X_0 - корневое подпространство оператора K , соответствующее собственному значению $\lambda_0 \neq 0$, а Ξ_n - линейная оболочка корневых подпространств матрицы K_n , соответствующих близким к λ_0 собственным значениям K_n .

3) Справедливы оценки

$$|\lambda_n - \lambda_0| \leq c \varepsilon_n^{1/\ell}, \quad \theta_n \leq c \varepsilon_n, \quad \theta'_n \leq c \varepsilon_n,$$

где $c = \text{const}$, ℓ - ранг собственного значения $\lambda_0 \in \sigma(K)$, $\lambda_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n$, $\lambda_n \in \sigma(K_n)$,

$$\varepsilon_n = \sup_{x_0 \in X_0, \|x_0\|=1} \max_{1 \leq i \leq n} |\varphi_n(\mathcal{K}(s_{in}, s)x_0(s))|,$$

$\varphi_n(z(s))$ - дополнительный член квадратурной формулы (8.1).

*) В теореме 3.1 пространства E и E_n предполагались комплексными. Соответственно используем здесь комплексные расширения пространств $C(D)$ и m_n .

8.4. Нелинейное интегральное уравнение. Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение (уравнение Урсона)

$$x(t) = \int_D \mathcal{K}(t, s, x(s)) dv(s) \quad (8.20)$$

и соответствующую систему уравнений

$$\xi_{in} = \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} \mathcal{K}(s_{in}, s_{jn}, \xi_{jn}) \quad (i=1, \dots, n), \quad (8.21)$$

получаем из (8.20) с помощью квадратурной формулы (8.1).

Теорема 8.3. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) мера ν удовлетворяет условиям 1° - 3° п. 8.1;
- 2) квадратурный процесс (8.1) сходится;
- 3) уравнение (8.20) имеет решение $x^*(t)$;
- 4) функция $\mathcal{K}(t, s, x)$ непрерывна по совокупности переменных в замкнутой области $t, s \in D, |x - x^*(s)| \leq \delta_0$ ($\delta_0 = \text{const} > 0$);
- 5) решение $x^*(t)$ уравнения (8.20) единственно в шаре $\|x(t) - x^*(t)\|_{C(D)} \leq \delta_0$ и имеет ненулевой индекс.

Тогда система уравнений (8.21) имеет при достаточно больших n хотя бы одно решение $(\xi_{1n}^*, \dots, \xi_{nn}^*)$, для которого

$$\max_{1 \leq i \leq n} |\xi_{in}^* - x^*(s_{in})| \leq \delta_0, \quad (8.22)$$

и

$$\max_{1 \leq i \leq n} |\xi_{in}^* - x^*(s_{in})| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (8.23)$$

для любого решения, удовлетворяющего неравенству (8.22).

Доказательство опирается на теорему 5.2. Уравнение (8.20) рассмотрим как операторное уравнение $x = \bar{T}x$ в пространстве $E = C(D)$. В силу условия 4) оператор $\bar{T}: \bar{\Omega} \rightarrow C(D)$ вполне непрерывен, где $\bar{\Omega}$ - шар $\|x - x^*\| < \delta$ пространства $C(D)$, а $\bar{\Omega}$ - шар $\|x - x^*\| \leq \delta_0$. По условию 5) уравнение

$x = Tx$ имеет решение $x^* \in \Omega$ ненулевого индекса, и это решение единственно в $\bar{\Omega}$.

Систему уравнений (8.21) рассмотрим как операторное уравнение $\xi_n = T_n \xi_n$ в пространстве $E_n = m_n$. В силу условия 4) оператор T_n определен и вполне непрерывен на шаре $\bar{\Omega}_n$, где

$$\Omega_n = \rho_n \Omega = \{ \xi_n \in m_n : \| \xi_n - \rho_n x^* \| < \delta_0 \},$$

а $\bar{\Omega}_n$ - соответствующий замкнутый шар в m_n . Последовательность вполне непрерывных операторов $T_n: \bar{\Omega}_n \rightarrow m_n$ компактно аппроксимирует вполне непрерывный оператор $T: \bar{\Omega} \rightarrow C(D)$ по отношению к связывающим отображениям $\rho_n \in \mathcal{L}(C(D), m_n)$, определенным в (8.14). Действительно, для любого $x \in \bar{\Omega}$ имеем

$$\| \rho_n T x - T_n \rho_n x \| = \max_{1 \leq i \leq n} | \varphi_n(\mathcal{X}(s_{in}, x(s))) | \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \quad (8.24)$$

(ср. (8.16); здесь используются вполне аналогичные соображения). Если $\xi_n = (\xi_{1n}, \dots, \xi_{nn}) \in \bar{\Omega}_n$ ($n=1, 2, \dots$), то последовательность

$$y_n(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} \mathcal{X}(t, s_{jn}, \xi_{jn}) \quad (n=1, 2, \dots)$$

компактна в $C(D)$ и $\rho_n y_n = T_n \xi_n$ ($n=1, 2, \dots$). Таким образом, для $T_n: \bar{\Omega}_n \rightarrow m_n$ и $T: \bar{\Omega} \rightarrow C(D)$ выполнены оба условия определения 5.1 компактной аппроксимации.

Если при некоторых $x \in \bar{\Omega}$ и $\xi_n \in \bar{\Omega}_n$ имеем $\| \xi_n - \rho_n x \| \rightarrow 0$, то $\| T_n \xi_n - T_n \rho_n x \| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. В этом легко убедиться, используя условие 4).

Имеет место (8.17). Из (8.17) следует (см. замечание 5.1), что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{\xi_n \in \bar{\Omega}_n} \| \rho_n x - \xi_n \| > 0 \text{ для } \forall x \notin \bar{\Omega}.$$

Мы проверили, что для уравнений $x = Tx$ и $\xi_n = T_n \xi_n$ выполнены все условия теоремы 5.2. Утверждения доказываемой теоремы непосредственно вытекают из теоремы 5.2.

Теорема 8.3 доказана.

Теорема 8.4. Пусть выполнены условия 1)–3) теоремы 8.3, а условия 4) и 5) выполнены в следующей усиленной форме:

4') функция $\mathcal{X}(t, s, x)$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную по x в области $t, s \in D$, $|x - x^*(s)| \leq \delta_0$;

5') решение $x^*(t)$ уравнения (8.20) единственно в шаре $\|x(t) - x^*(t)\|_{C(D)} \leq \delta_0$, и линейное однородное уравнение

$$z'(t) = \int_D \mathcal{X}(t, s) z(s) dv(s) \quad \left(\mathcal{X}(t, s) = \frac{\partial \mathcal{X}(t, s, x^*(s))}{\partial x} \right) \quad (8.25)$$

имеет лишь нулевое решение $z(t) \equiv 0$.

Тогда система уравнений (8.21) имеет при достаточно больших n единственное решение $(\xi_{1n}^*, \dots, \xi_{nn}^*)$, удовлетворяющее неравенству (8.22). Имеет место сходимость (8.23) с оценкой

$$c_1 \varepsilon_n \leq \max_{1 \leq i \leq n} |\xi_{in}^* - x^*(s_{in})| \leq c_2 \varepsilon_n, \quad (8.26)$$

где

$$\varepsilon_n = \max_{1 \leq i \leq n} |\varphi_n(\mathcal{X}(s_{in}, s, x^*(s)))|, \quad (8.27)$$

$\varphi_n(z(s))$ – дополнительный член квадратурной формулы (8.1).

Доказательство. Существование решения $(\xi_{1n}^*, \dots, \xi_{nn}^*)$ и сходимость (8.23) вытекает из предыдущей теоремы. Единственность решения $(\xi_{1n}^*, \dots, \xi_{nn}^*)$ в достаточно малом шаре $\|\xi_n - p_n x^*\| \leq \delta$ (а ввиду сходимости (8.23) и в шаре (8.22)) и оценка (8.26) – (8.27) доказываются, опираясь на теорему 4.1.

В силу условия 4') операторы $T: \bar{\Omega} \rightarrow C(D)$ и $T_n: \bar{\Omega}_n \rightarrow m_n$ дифференцируемы по Фреше,

$$T'(x)z = \int_D \frac{\partial \mathcal{K}(t, s, x(s))}{\partial x} z(s) dv(s) \quad (x \in \bar{\Omega}, z \in C(D)),$$

$$T'_n(\xi_n)\zeta_n = \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} \frac{\partial \mathcal{K}(s_{jn}, s_{jn}, \xi_{jn})}{\partial x} \zeta_{jn} \right\}_{i=1}^n \quad (\xi_n \in \bar{\Omega}_n, \zeta_n \in m_n).$$

По условию 5') уравнение $z = T'(x^*)z$ имеет лишь нулевое решение $z = 0$. Рассуждениями, аналогичными проведенным в п. 8.2, доказываем, что последовательность операторов $T'_n(p_n x^*) \in \mathcal{L}(m_n, m_n)$ компактно аппроксимирует оператор $T'(x^*) \in \mathcal{L}(C(D), C(D))$. Из (8.4) и условия 4') вытекает, что

$$\|T'_n(\xi_n) - T'_n(p_n x^*)\| \leq c' \omega(\|\xi_n - p_n x^*\|) \quad (n=1, 2, \dots),$$

где c' - некоторая постоянная, а

$$\omega(\tau) = \sup_{t, s \in D, |x - x^*(s)| \leq \tau} \left| \frac{\partial \mathcal{K}(t, s, x)}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{K}(t, s, x^*(s))}{\partial x} \right|$$

- непрерывная на $[0, \delta_0]$ функция, $\omega(0) = 0$. Принимая еще во внимание (8.17) и (8.24), замечаем, что выполнены все условия теоремы 4.1 для уравнений $x = Tx$ и $\xi_n = T_n \xi_n$ (для интегрального уравнения (8.20) и системы уравнений (8.21)). Единственность решения $\xi_n^* = (\xi_{1n}^*, \dots, \xi_{nn}^*)$ системы (8.21) вытекает из теоремы 4.1 непосредственно; ввиду (8.24) оценка (4.9) теоремы 4.1 принимает вид (8.26)-(8.27).

Теорема 8.4 доказана.

Замечание 8.2. Если выполнены условия теоремы 8.4, то последовательность функций (ср. с замечанием 8.1)

$$x_n^*(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} \mathcal{K}(t, s_{jn}, \xi_{jn}^*) \quad (n = n_0, n_0+1, \dots)$$

стремится к $x^*(t)$ с оценкой

$$\max_{t \in D} |x_n^*(t) - x^*(t)| \leq c \max_{t \in D} |\varphi_n(\mathcal{K}(t, s, x^*(s)))|.$$

§9. Метод механических квадратур (случай разрывных ядер)

9.1. Постановка вопроса. По сравнению с предыдущим параграфом, мы теперь усилили ограничения на меру ν , но зато ослабили требования на ядро $\mathcal{K}(t, s)$ и свободный член $f(t)$ уравнения

$$x(t) = \int_D \mathcal{K}(t, s) x(s) d\nu(s) + f(t).$$

Интуитивно ясно, что для сходимости метода механических квадратур функции $f(t)$ и $\mathcal{K}(t, s)$ не могут быть слишком разрывными. Например, если ν — мера Лебега на ограниченной замкнутой области $D \subset R^m$, то изменением $f(t)$ на множестве нулевой меры можно добиться, что $f(t)$ будет равна нулю во всех узлах квадратурной формулы (8.1) при всех $n=1, 2, \dots$, и квадратуры (8.1) будут для $f(t)$ расходиться. Очевидно, и метод механических квадратур тогда расходится, т.е. $f(t)$ слишком разрывна, а класс ограниченных интегрируемых по Лебегу функций слишком широк при исследовании метода механических квадратур. С другой стороны, хорошо известно, что из сходимости квадратурной формулы с положительными коэффициентами для непрерывных функций вытекает ее сходимость и для ограниченных функций, интегрируемых в смысле Римана. Поэтому естественно попытаться доказать сходимость метода механических квадратур в рамках интегрируемости по Риману. Переход от интеграла Лебега к интегралу Римана можно трактовать как сужение меры Лебега на некоторую специальную

алгебру множеств. В п. 9.2 проводится нужное сужение для абстрактной меры ν на компакте D

В настоящем параграфе проводим ещё следующее обобщение: $x(t)$ и $f(t)$ будем рассматривать как функции со значениями в некотором (произвольном) банаховом пространстве X , а $\mathcal{K}(t, s)$ - как функцию со значениями в пространстве $\mathcal{L}(X, X)$. Результаты для обычных скалярных интегральных уравнений получаем, полагая $X = R^1$. При $X = R^m$ получаем аналогичные результаты для системы интегральных уравнений.

В п. 9.3 исследуется сходимость квадратурных процессов для функций $z(s): D \rightarrow X$. Результаты этого пункта являются для нас вспомогательными, однако, они могут представлять, как нам кажется, и некоторый самостоятельный интерес.

9.2. Сужение меры. Пусть D - метрический компакт. Для открытого и замкнутого шаров введем обозначения

$$S(t_0, \tau) = \{t \in D: \varphi(t, t_0) < \tau\}, \quad \bar{S}(t_0, \tau) = \{t \in D: \varphi(t, t_0) \leq \tau\}.$$

Пусть на некоторой σ -алгебре \mathcal{O} подмножеств D задана мера (счетно-аддитивная функция множества) ν со следующими свойствами:

1° мера ν регулярна;

2° мера ν положительна и конечна (т.е. $\nu(A) \geq 0$ для каждого $A \in \mathcal{O}$ и $\nu(D) < \infty$);

3° $\nu(S(t_0, \tau)) = \nu(\bar{S}(t_0, \tau)) > 0$ при любых $t_0 \in D, \tau > 0$.

По сравнению с условиями п. 8.1, здесь усилены условия 2° и 3° - новыми являются требования о положительности ν и равенство $\nu(S(t_0, \tau)) = \nu(\bar{S}(t_0, \tau))$. Из последнего равенства вытекает, в частности, что каждое одноточечное множество имеет

нулевую меру.

Условиям 1°-3° удовлетворяет, например, мера Лебега на замкнутой ограниченной области $D \subset R^m$. Если $g(t) \geq 0$ в $(-\infty, \infty)$, то условиям 1°-3° удовлетворяет и мера на расширенной вещественной прямой, рассмотренная в п. 8.1.

В дальнейшем важную роль играют те множества $A \in \mathcal{O}$, для которых

$$v(A^\circ) = v(A) = v(\bar{A}), \quad (9.1)$$

где A° и \bar{A} - соответственно внутренность и замыкание A . Совокупность всех множеств $A \in \mathcal{O}$ со свойством (9.1) обозначим через \mathcal{O}_0 . Покажем, что \mathcal{O}_0 - алгебра множеств. Действительно, $\phi \in \mathcal{O}_0$, $D \in \mathcal{O}_0$. Если $A \in \mathcal{O}_0$, то из (9.1) и равенств

$$(D \setminus A)^\circ = D \setminus \bar{A}, \quad \overline{D \setminus A} = D \setminus A^\circ$$

находим

$$v(\overline{D \setminus A}) - v((D \setminus A)^\circ) = [v(D) - v(A^\circ)] - [v(D) - v(\bar{A})] = 0,$$

т.е. $D \setminus A \in \mathcal{O}_0$. Если $A, B \in \mathcal{O}_0$, то с помощью соотношений

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \quad (A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ, \\ (\bar{A} \cup \bar{B}) \setminus (A^\circ \cup B^\circ) \subset (\bar{A} \setminus A^\circ) \cup (\bar{B} \setminus B^\circ)$$

находим

$$v(\overline{A \cup B}) - v((A \cup B)^\circ) \leq v((\bar{A} \cup \bar{B}) \setminus (A^\circ \cup B^\circ)) = 0,$$

т.е. $A \cup B \in \mathcal{O}_0$. Таким образом, \mathcal{O}_0 - алгебра^{*}. Из условия 3° вытекает, что

^{*} Вообще говоря, \mathcal{O}_0 не является σ -алгеброй. Например, если ν - мера Лебега на $D = [0, 1]$, то множество рациональных точек $[0, 1]$ не принадлежит \mathcal{O}_0 , являясь одновременно счетным объединением (одноточечных) подмножеств из \mathcal{O}_0 .

$$S(t_0, \tau) \in \mathcal{A}_0, \bar{S}(t_0, \tau) \in \mathcal{A}_0 \text{ при } \forall t_0 \in D, \tau \geq 0. \quad (9.2)$$

Сужение меры ν на алгебру \mathcal{A}_0 обозначим через ν_0 .

Определение 9.1. Разбиение компакта D на попарно непесекающиеся подмножества $D_j \in \mathcal{A}_0$ ($j=1, \dots, n$; $D = \bigcup_{j=1}^n D_j$) назовем ν_0 -разбиением. Последовательность ν_0 -разбиений $D = \bigcup_{j=1}^n D_{jn}$ ($n=1, 2, \dots$) назовем правильной, если при $n \rightarrow \infty$ диаметры подмножеств D_{jn} стремятся к нулю:

$$\delta_n \equiv \max_{1 \leq j \leq n} \sup_{s_1, s_2 \in D_{jn}} \rho(s_1, s_2) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (9.3)$$

Существование ν_0 -разбиений компакта D на подмножества сколь угодно малых диаметров вытекает из (9.2): достаточно взять покрытие компакта D открытыми шарами радиуса ε , извлечь из него конечное покрытие $D = \bigcup_{j=1}^m S(x_j, \varepsilon)$ и положить затем $D_{jn} = S(x_j, \varepsilon) \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} S(x_k, \varepsilon)$ ($j=1, \dots, m$).

Пусть X - банахово пространство. Известно (см. [28]), что ограниченная функция $z(\cdot): D \rightarrow X$ является ν_0 -интегрируемой тогда и только тогда, когда существует последовательность ν_0 -простых функций $z_n(\cdot)$, сходящаяся по мере ν_0 к $z(\cdot)$ (т.е. когда $z(\cdot)$ является ν_0 -измеримой). Этот критерий будет нам удобно переформулировать следующим образом.

Лемма 9.1. Ограниченная функция $z(\cdot): D \rightarrow X$ является ν_0 -интегрируемой тогда и только тогда, когда для какой-нибудь (для каждой) правильной последовательности ν_0 -разбиений $D = \bigcup_{j=1}^n D_{jn}$ ($n=1, 2, \dots$) выполнено условие

$$\sum_{j=1}^n \omega(z, D_{jn}) \nu(D_{jn}) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (9.4)$$

где

$$\omega(z, D_{jn}) = \sup_{\gamma_1, \gamma_2 \in D_{jn}} \|z(\gamma_1) - z(\gamma_2)\|_X$$

- колебание функции $z(\gamma)$ на D_{jn} .

Доказательство. Пусть для какой-нибудь последовательности ν_0 -разбиений $D = \bigcup_{j=1}^n D_{jn}$ ($n=1, 2, \dots$) выполнено (9.4). Выберем как-то $\gamma_{jn} \in D_{jn}$ ($j=1, \dots, n$) и определим ν_0 -простую функцию $z_n(\gamma)$, положив $z_n(\gamma) = z(\gamma_{jn})$ при $\gamma \in D_{jn}$. Из (9.4) вытекает, что последовательность $z_n(\gamma)$ сходится по мере ν_0 к $z(\gamma)$, что и доказывает ν_0 -интегрируемость (ограниченной) функции $z(\gamma)$.

Пусть теперь, наоборот, дано, что $z(\gamma)$ ограничена и ν_0 -интегрируема. Тогда существует последовательность ν_0 -простых функций $z_n(\gamma)$, сходящаяся по мере ν_0 к $z(\gamma)$. Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется достаточно большое n , так, что

$\|z_n(\gamma) - z(\gamma)\| \leq \varepsilon$ на множестве $D' \in \mathcal{A}_c$ меры $\nu(D') \geq \nu(D) - \varepsilon$.

Пусть $D_{jn} \in \mathcal{A}_c$ ($j=1, \dots, n$) - множества, на которых $z_n(\gamma)$

принимает постоянные значения. Обозначим $D'_{cn} = D \setminus D'$, $D'_{jn} = D_{jn} \cap D'$ ($j=1, \dots, n$). Для ν_0 -разбиения $D = \bigcup_{j=0}^n D'_{jn}$ имеем

$$\sum_{j=0}^n \omega(z; D'_{jn}) \nu(D'_{jn}) \leq 2c \nu(D'_{cn}) + \sum_{j=1}^n 2\varepsilon \nu(D'_{jn}) \leq 2[c + \nu(D)]\varepsilon,$$

где $c = \sup_{\gamma \in D} \|z(\gamma)\|$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ это доказывает существование такой последовательности ν_0 -разбиений, для которой имеет место (9.4). Отсюда вытекает, что (9.4) соблюдается для каждой правильной последовательности ν_0 -разбиений (доказательство более общего утверждения приводится ниже в лемме 9.2).

Лемма 9.1 доказана.

В случае, когда ν - мера Лебега на замкнутой ограниченной области $D \subset R^m$, условие (9.4) означает (см. [53]), что функция $z(\lambda)$ интегрируема по Риману.

Из леммы 9.1 вытекает, в частности, что непрерывные на D функции ν_0 -интегрируемы.

Лемма 9.1 дает повод ввести следующее

Определение 9.2. Равномерно ограниченную систему $\mathcal{M} = \{z(\lambda)\}$ ν_0 -интегрируемых функций назовем равномерно ν_0 -интегрируемой, если для какой-нибудь (для каждой) правильной последовательности ν_0 -разбиений $D = \bigcup_{j=1}^n D_{j_n}$ сходимость (9.4) происходит равномерно относительно $z \in \mathcal{M}$:

$$\sup_{z \in \mathcal{M}} \sum_{j=1}^n \omega(z; D_{j_n}) \nu(D_{j_n}) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (9.5)$$

Корректность этого определения вытекает из следующей леммы.

Лемма 9.2. Пусть $\mathcal{M} = \{z(\lambda)\}$ - равномерно ограниченная система ν_0 -интегрируемых функций $z(\lambda): D \rightarrow X$. Тогда из сходимости (9.5) для какой-нибудь последовательности ν_0 -разбиений вытекает сходимость (9.5) для каждой правильной последовательности ν_0 -разбиений.

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$. По условию, существует ν_0 -разбиение $D = \bigcup_{\kappa=1}^m A_{\kappa}$, для которого

$$\sup_{z \in \mathcal{M}} \sum_{\kappa=1}^m \omega(z; A_{\kappa}) \nu(A_{\kappa}) < \varepsilon^2. \quad (9.6)$$

Тогда

$$\sup_{z \in \mathcal{M}} \sum_{\omega(z; A_{\kappa}) > \varepsilon} \nu(A_{\kappa}) \leq \varepsilon \quad (9.7)$$

(сумма берется по тем k из $k=1, \dots, m$, при которых $\omega(z, A_k) > \varepsilon$).

По условию 1° для A_k° (для внутренности A_k) существует такое замкнутое множество $F_k \in \mathcal{A}$, что

$$F_k \subset A_k^\circ, \quad v(A_k \setminus F_k) \leq \frac{\varepsilon}{m} \quad (k=1, \dots, m). \quad (9.8)$$

Расстояние δ_k между замкнутыми непересекающимися множествами F_k и $D \setminus A_k^\circ$ компакта D положительно. Обозначим через δ наименьшее из δ_k ($k=1, \dots, m$). Если какое-нибудь множество A диаметра $< \delta$ имеет непустое пересечение с F_k , то $A \subset A_k$.

Введем для каждого $z \in \mathcal{D}$ множество

$$B_z = \left[\bigcup_{\omega(z, A_k) > \varepsilon} A_k \right] \cup \left[\bigcup_{k=1}^m (A_k \setminus F_k) \right].$$

Из (9.7) и (9.8) вытекает, что

$$v(B_z) \leq 2\varepsilon \quad \text{для } \forall z \in \mathcal{D}. \quad (9.9)$$

Рассмотрим теперь произвольное v_ε -разбиение компакта D на подмножества D_1, \dots, D_n , диаметры которых меньше δ . Если $D_j \subset B_z$, то $\omega(z, D_j) \leq 2\varepsilon$, где

$$c = \sup_{z \in \mathcal{D}} \sup_{s \in D} \|z(s)\| < \infty.$$

Если же $D_j \not\subset B_z$, то D_j имеет непустое пересечение с одним из тех F_k , для которых $\omega(z, A_k) \leq \varepsilon$, и тогда $D_j \subset A_k$,

$$\omega(z, D_j) \leq \omega(z, A_k) \leq \varepsilon. \quad (9.10)$$

В итоге получаем для любого $z \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \omega(z, D_j) v(D_j) &= \sum_{D_j \subset B_z} \omega(z, D_j) v(D_j) + \sum_{D_j \not\subset B_z} \omega(z, D_j) v(D_j) \leq \\ &\leq 2c v(B_z) + \varepsilon v(D) \leq [4c + v(D)] \varepsilon. \end{aligned}$$

Итак, величина

$$\sum_{j=1}^n \omega(z, D_j) v(D_j)$$

будет сколь угодно малой, если только диаметры множеств D_1, \dots, D_n достаточно малы. Отсюда вытекает, что сходимость (9.5) имеет место для любой правильной последовательности v_n -разбиений.

Лемма 9.2 доказана.

Нам понадобится ещё следующее утверждение.

Лемма 9.3. Пусть $A \in \mathcal{O}_0$, $v(A) > 0$, и пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ — положительные числа, $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = v(A)$.

Тогда A можно разбить на попарно непересекающиеся подмножества $A_i \in \mathcal{O}_0$ ($i=1, \dots, k$) так, что $v(A_i) = \alpha_i$ ($i=1, \dots, k$).

Доказательство. Зафиксируем $t \in D$. Функция

$$\varphi(r) = v(S(t, r)) \quad (r \geq 0)$$

не убывает; с помощью 1° — 3° легко убедиться в её непрерывности. Для $A \in \mathcal{C}_t$ введем функцию

$$\varphi_A(r) = v(S(t, r) \cap A) \quad (r \geq 0).$$

Эта функция тоже не убывает, а из неравенства

$$\varphi_A(r_2) - \varphi_A(r_1) \leq \varphi(r_2) - \varphi(r_1) \quad (r_1 < r_2)$$

вытекает её непрерывность. Очевидно, $\varphi_A(0) = 0$, $\varphi_A(R) = v(A)$, если R достаточно велико. Следовательно, $\varphi_A(r)$ принимает все значения между 0 и $v(A)$.

Возьмем r_1 так, что $\varphi_A(r_1) = \alpha_1$, и положим $A_1 = S(t, r_1) \cap A$. Тогда $A_1 \in \mathcal{C}_t$ и $v(A_1) = \varphi_A(r_1) = \alpha_1$. Рассуждая таким же образом, отщепим от $A \setminus A_1 \in \mathcal{C}_t$ часть $A_2 \in \mathcal{C}_t$, $v(A_2) = \alpha_2$ и т.д.

Лемма 9.3 доказана.

9.3. Необходимое и достаточное условие сходимости квадратурного процесса. Сохраним условия и обозначения, введенные в предыдущем пункте. Рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_D z(s) d\nu(s) = \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} z(s_{jn}) + \varphi_n(z) \quad (\alpha_{jn} > 0, j=1, \dots, n). \quad (9.11)$$

Нас интересует вопрос о сходимости квадратурного процесса (9.11) для непрерывных функций $z(s): D \rightarrow X$.

Лемма 9.4. Для того, чтобы $\|\varphi_n(z)\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для каждой непрерывной функции $z(s): D \rightarrow X$, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая правильная последовательность ν_0 -разбиений $D = \bigcup_{j=1}^n D_{jn}$ ($n=1, 2, \dots$), что

$$s_{jn} \in D_{jn} \quad (j=1, \dots, n; n=1, 2, \dots) \quad (9.12)$$

и

$$\sum_{j=1}^n |\alpha_{jn} - \nu(D_{jn})| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (9.13)$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $D = \bigcup_{j=1}^n D_{jn}$ ($n=1, 2, \dots$) - правильная последовательность ν_0 -разбиений со свойствами (9.12) и (9.13). Поскольку множества D_{1n}, \dots, D_{nn} попарно не пересекаются, то, как легко видеть,

$$\varphi_n(z) = \sum_{j=1}^n \int_{D_{jn}} [z(s) - z(s_{jn})] d\nu(s) - \sum_{j=1}^n [\alpha_{jn} - \nu(D_{jn})] z(s_{jn}).$$

Ввиду (9.12) отсюда находим

$$\|\varphi_n(z)\| \leq \sum_{j=1}^n \omega(z; D_{jn}) \nu(D_{jn}) + \sup_{s \in D} \|z(s)\| \sum_{j=1}^n |\alpha_{jn} - \nu(D_{jn})|, \quad (9.14)$$

и сходимость $\|\varphi_n(z)\| \rightarrow 0$ вытекает из (9.13), ν_0 -интегрируемости непрерывной функции $z(s): D \rightarrow X$ и критерия (9.4) ν_0 -интегрируемости ограниченных функций.

Необходимость. Пусть $\|\varphi_n(z)\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для каждой непрерывной функции $z(s): D \rightarrow X$. Тогда $\varphi_n(\zeta) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и для каждой непрерывной скалярной функции

$\zeta(s): D \rightarrow R^1$. Чтобы в этом убедиться, достаточно воспользо-
ваться сходимостью $\|\varphi_n(z)\| \rightarrow 0$ для функций вида $z(s) = \zeta(s)z_0$,
где $z_0 \in X$ фиксировано, $z_0 \neq 0$.

Для произвольного $A \in \mathcal{O}_0$ обозначим

$$\alpha_{jn}(A) = \begin{cases} \alpha_{jn} & \text{при } s_{jn} \in A \\ 0 & \text{при } s_{jn} \notin A \end{cases} \quad (j=1, \dots, n)$$

и покажем, что

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{jn}(A) \rightarrow v(A) \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (A \in \mathcal{O}_0). \quad (9.15)$$

Действительно, зададим сколь угодно малое $\delta > 0$. Пользуясь
условием 1° п. 9.2, найдем такие замкнутое множество $F \in \mathcal{O}$
и открытое множество $G \in \mathcal{O}$, что

$$F \subset A^\circ, \quad \bar{A} \subset G \quad (9.16)$$

и

$$v(A \setminus F) < \delta, \quad v(G \setminus A) < \delta. \quad (9.17)$$

Замкнутые множества F и $D \setminus A^\circ$ не пересекаются, и по тео-
реме Урысона (см. [28]) найдется такая непрерывная на D
скалярная функция $\zeta(s)$, что $0 \leq \zeta(s) \leq 1$ при каждом $s \in D$,
 $\zeta(s) = 1$ при $s \in F$ и $\zeta(s) = 0$ при $s \in D \setminus A^\circ$. Для указанной
функции $\zeta(s)$ имеем (см. (9.16) и (9.17))

$$\int_D \zeta(s) dv(s) \geq v(F) = v(A) - v(A \setminus F) > v(A) - \delta,$$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{jn} \zeta(s_{jn}) \leq \sum_{j=1}^n \alpha_{jn}(A),$$

и ввиду сходимости $\sum_{j=1}^n \alpha_{jn} \zeta(s_{jn}) \rightarrow \int_D \zeta(s) dv(s)$ получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \alpha_{jn}(A) \geq v(A) - \delta. \quad (9.18)$$

Замкнутые множества \bar{A} и $D \setminus G$ тоже не пересекаются. Для

непрерывной функции $\zeta(s)$, $0 \leq \zeta(s) \leq 1$, равной 1 при $s \in \bar{A}$ и 0 при $s \in D \setminus G^\circ$, имеем (см. (9.16) и (9.17))

$$\int_D \zeta(s) d\nu(s) \leq \nu(G) = \nu(A) + \nu(G \setminus A) < \nu(A) + \delta,$$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{jn} \zeta(s_{jn}) \geq \sum_{j=1}^n \alpha_{jn}(A),$$

и из условия сходимости квадратур на этот раз получим

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \alpha_{jn}(A) \leq \nu(A) + \delta. \quad (9.19)$$

Ввиду произвольности $\delta > 0$ из (9.18) и (9.19) вытекает доказываемое соотношение (9.15).

Зададим сколь угодно малое $\varepsilon > 0$ и рассмотрим ν_ε -разбиение $D = \bigcup_{i=1}^m A^{(i)}$ компакта D на подмножества $A^{(i)} \in \mathcal{A}_\varepsilon$

($i=1, \dots, m$) диаметров $\leq \varepsilon$; ради удобства выкладок будем считать, что $\nu(A^{(i)}) > 0$ при каждом $i=1, \dots, m$. В силу (9.15) найдется такое N , что при $n \geq N$ имеем $\sum_{j=1}^n \alpha_{jn}(A^{(i)}) > 0$ и

$$\left| \sum_{j=1}^n \alpha_{jn}(A^{(i)}) - \nu(A^{(i)}) \right| \leq \frac{\varepsilon}{m} \quad (i=1, \dots, m). \quad (9.20)$$

Пользуясь леммой 9.3, разобьем каждое $A^{(i)}$ на попарно непересекающиеся подмножества $A_{jn}^{(i)} \in \mathcal{A}_\varepsilon$ ($j=1, \dots, n$) так, что

$$\nu(A_{jn}^{(i)}) = \frac{\alpha_{jn}(A^{(i)})}{\sum_{k=1}^n \alpha_{kn}(A^{(i)})} \nu(A^{(i)}) \text{ при } \alpha_{jn}(A^{(i)}) > 0 \quad (9.21)$$

и $A_{jn}^{(i)} = \emptyset$ при $\alpha_{jn}(A^{(i)}) = 0$. Проведем затем в каждом $A^{(i)}$ "перетасовку" точек s_{jn} ($j=1, \dots, n$), попавших в $A^{(i)}$ (т.е. тех точек из s_{jn} , для которых $\alpha_{jn}(A^{(i)}) > 0$), перенося каждое из этих точек в соответствующее $A_{jn}^{(i)}$. Так как каждое одноточечное множество ν_ε -измеримо и мера его равна 0, то

после "перетасовки" имеем по-прежнему $A_{jn}^{(i)} \in \mathcal{A}_0$ и (9.21).

Пусть D_{1n}, \dots, D_{nn} - те из множеств $A_{jn}^{(i)}$ ($j=1, \dots, n$; $i=1, \dots, m$), которые непусты. Очевидно, они составляют ν_0 -разбиение компакта D , причем выполнено условие (9.12). Далее, по построению диаметры подмножеств D_{1n}, \dots, D_{nn} не превышают ε :

$$\delta_n \leq \varepsilon \text{ при } n \geq N.$$

Наконец, с помощью (9.20) и (9.21) легко выводится, что

$$\sum_{j=1}^n |\alpha_{jn} - \nu(D_{jn})| = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |\alpha_{jn}(A^{(i)}) - \nu(A_{jn}^{(i)})| \leq \varepsilon \text{ при } n \geq N.$$

Последние два неравенства и произвольность $\varepsilon > 0$ позволяют строить ν_0 -разбиения $D = \bigcup_{j=1}^n D_{jn}$ ($n=1, 2, \dots$) так, что, кроме (9.12), выполнены и условия (9.3) и (9.13).

Лемма 9.4 доказана.

Следствие 9.1. Если $\|\varphi_n(z)\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для каждой непрерывной функции $z(\lambda): D \rightarrow X$, то $\|\varphi_n(z)\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и для каждой ограниченной ν_0 -интегрируемой функции $z(\lambda)$ *, причем эта сходимость равномерна на каждом равномерно ограниченном и равномерно ν_0 -интегрируемом семействе функций $\mathcal{M} = \{z(\lambda)\}$:

$$\sup_{z \in \mathcal{M}} \|\varphi_n(z)\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (9.22)$$

Действительно, в силу леммы 9.4 существует правильная последовательность ν_0 -разбиений $D = \bigcup_{j=1}^n D_{jn}$ со свойствами (9.12) и (9.13). Значит, для $\|\varphi_n(z)\|$ справедлива оценка (9.14), из которой немедленно вытекает высказанные утверждения.

* Это утверждение можно рассматривать как обобщение теоремы Стеклова-Фейера (см. [49], стр. 355).

Следствие 9.2. Сходимость $\|\varphi_n(z)\| \rightarrow 0$ имеет место для каждой ограниченной ν_c -интегрируемой функции $z(\gamma): D \rightarrow X$ тогда и только тогда, когда $\varphi_n(\zeta) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для каждой непрерывной неотрицательной функции $\zeta(\gamma): D \rightarrow R^1$.

Действительно, при доказательстве леммы 9.4 уже отмечалось, что из сходимости $\|\varphi_n(z)\| \rightarrow 0$ для всех непрерывных (и, тем более, для всех ограниченных ν_c -интегрируемых) функций $z(\gamma): D \rightarrow X$ вытекает сходимость $\varphi_n(\zeta) \rightarrow 0$ для непрерывных неотрицательных скалярных функций $\zeta(\gamma): D \rightarrow R^1$. Из доказательства леммы 9.4 видно также, что сходимость $\varphi_n(\zeta) \rightarrow 0$ для всех непрерывных неотрицательных скалярных функций $\zeta(\gamma)$ влечет за собой существование правильной последовательности ν_c -разбиений со свойствами (9.12) и (9.13), и сходимость $\|\varphi_n(z)\| \rightarrow 0$ вытекает из (9.14).

Отметим, что предположение о положительности меры ν и коэффициентов α_{j_n} квадратурной формулы весьма существенно — без этого предположения следствия 9.1 и 9.2, а также лемма 9.4, теряют силу.

9.4. Сходимость метода механических квадратур. Рассмотрим линейное интегральное уравнение

$$x(t) = \int_D \mathcal{K}(t, s) x(s) d\nu(s) + f(t), \quad (9.23)$$

в котором ядро $\mathcal{K}(t, s): D \times D \rightarrow \mathcal{L}(X, X)$ и свободный член

$f(t): D \rightarrow X$ удовлетворяют следующим условиям:

$$4^\circ M = \sup_{t, s \in D} \|\mathcal{K}(t, s)\|_{X \times X} < \infty;$$

5^o семейство функций $\{\alpha_t(s) = \mathcal{K}(t, s): D \rightarrow \mathcal{L}(X, X)\}_{t \in D}$ равномерно ν_c -интегрируемо (см. определение 9.2);

6° ядро $\mathcal{K}(t, s)$ интегрально непрерывно по t : для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$\int_D \|\mathcal{K}(t_1, s) - \mathcal{K}(t_2, s)\|_{X \rightarrow X} dv(s) < \varepsilon$$

при $t_1, t_2 \in D$, $\rho(t_1, t_2) < \delta$;

7° при любых (фиксированных) $t, s \in D$ оператор $\mathcal{K}(t, s)$ вполне непрерывен в пространстве X ;

8° функция $f(t): D \rightarrow X$ ограничена и v_s -интегрируема (см. лемму 9.1).

Заметим, что для выполнения условий 4° - 6° и 8° достаточна (но отнюдь не необходима) непрерывность функций $\mathcal{K}(t, s)$ и $f(t)$ соответственно на $D \times D$ и D ;

Приближенные значения $\xi_{in} \approx x(s_{in})$ ($\xi_{in} \in X$; $i=1, \dots, n$) решения интегрального уравнения (9.23) будем разыскивать из системы линейных уравнений

$$\xi_{in} = \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} \mathcal{K}(s_{in}, s_{jn}) \xi_{jn} + f(s_{in}) \quad (i=1, \dots, n). \quad (9.24)$$

Эта система получена из (9.23), используя квадратурную формулу (9.11); коэффициенты α_{jn} квадратурной формулы (9.11) положительны.

Теорема 9.1. Пусть выполнены условия 1° - 8°, сформулированные в п. 9.2 и 9.4, и пусть однородное интегральное уравнение

$$y(t) = \int_D \mathcal{K}(t, s) y(s) dv(s) \quad (9.25)$$

имеет в классе непрерывных функций $y(t): D \rightarrow X$ лишь нулевое решение. Пусть квадратурный процесс (9.11) сходится, т.е.

$\psi_n(\xi) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для каждой непрерывной на D скалярной

функции ^{*} $\zeta(\lambda)$.

Тогда интегральное уравнение (9.23) имеет в классе ν_0 -интегрируемых ограниченных функций $x(t): D \rightarrow X$ единственное решение $x^*(t)$, а система (9.24) имеет при достаточно больших n единственное решение $(\zeta_{1n}^*, \dots, \zeta_{nn}^*)$. Имеет место сходимость

$$\max_{1 \leq i \leq n} \|\zeta_{in}^* - x^*(\lambda_{in})\|_X \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \quad (9.26)$$

с оценкой

$$c_1 \varepsilon_n \leq \max_{1 \leq i \leq n} \|\zeta_{in}^* - x^*(\lambda_{in})\|_X \leq c_2 \varepsilon_n, \quad (9.27)$$

где c_1, c_2 - некоторые положительные постоянные,

$$\varepsilon_n = \max_{1 \leq i \leq n} \|\varphi_n(z_{in})\|_X, \quad z_{in}(\lambda) = \mathcal{K}(\lambda_{in}, \lambda) x^*(\lambda). \quad (9.28)$$

Доказательство построим, опираясь на теорему 2.1.

Интегральное уравнение (9.23) рассмотрим как операторное уравнение (2.7) в банаховом пространстве $E = L_X^\infty = L_X^\infty(D)$ ограниченных ν_0 -интегрируемых функций $x(t): D \rightarrow X$,

$$\|x\|_{L_X^\infty} = \sup_{t \in D} \|x(t)\|_X. \quad (9.29)$$

Введем также пространство $C_X(D)$ непрерывных на D функций $x(t): D \rightarrow X$ с той же нормой (оно является замкнутым подпространством пространства $L_X^\infty(D)$). Покажем, что интегральный оператор

$$(Tx)(t) = \int_D \mathcal{K}(t, \lambda) x(\lambda) d\nu(\lambda) \quad (9.30)$$

вполне непрерывен как оператор из $L_X^\infty(D)$ в $C_X(D)$, и, тем

^{*} В силу следствия 9.2 это равносильно тому, что $\|\varphi_n(z)\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для каждой непрерывной функции $z(\lambda): D \rightarrow X$.

более, как оператор в $L_X^\infty(D)$. Нужно установить, что система функций

$$\{z(t): z(t) = \int_D \mathcal{K}(t, \nu) x(\nu) d\nu(\nu), x(\nu) \in L_X^\infty, \|x\| \leq 1\}$$

равномерно ограничена и равностепенно непрерывна и что при каждом фиксированном $t_0 \in D$ множество $\{z(t_0)\}$ компактно в X . Равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность немедленно вытекают из условий 4° и 6°. Убедимся в компактности множества $\{z(t_0)\}$. Зададим $\varepsilon > 0$. Ввиду ν_0 -интегрируемости $\mathcal{K}(t_0, \nu)$ по ν найдется такое ν_0 -разбиение D на подмножества D_1, \dots, D_m , что

$$\sum_{j=1}^m \omega(\mathcal{K}(t_0, \nu), D_j) \nu(D_j) < \varepsilon.$$

Выбрав как-то $\nu_j \in D_j$ ($j=1, \dots, m$), имеем

$$\begin{aligned} \left\| z(t_0) - \sum_{j=1}^m \mathcal{K}(t_0, \nu_j) \int_{D_j} x(\nu) d\nu(\nu) \right\|_X &\leq \sum_{j=1}^m \int_{D_j} \|\mathcal{K}(t_0, \nu) - \mathcal{K}(t_0, \nu_j)\| d\nu(\nu) \\ &\leq \sum_{j=1}^m \omega(\mathcal{K}(t_0, \nu), D_j) \nu(D_j) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Это неравенство справедливо для всех $z(t)$ из рассматриваемого семейства $\{z(t)\}$. Аппроксимирующее семейство

$$\left\{ \sum_{j=1}^m \mathcal{K}(t_0, \nu_j) \int_{D_j} x(\nu) d\nu(\nu): x(\nu) \in L_X^\infty, \|x\| \leq 1 \right\}$$

компактно в X в силу условия 7° и неравенств

$$\left\| \int_{D_j} x(\nu) d\nu(\nu) \right\|_X \leq \|x\| \nu(D_j) \leq \nu(D_j) \quad (j=1, \dots, m).$$

Мы показали, что семейство $\{z(t)\}$ аппроксимируется с любой ε -точностью компактными семействами, поэтому $\{z(t)\}$ и само компактно.

Итак, оператор $T \in \mathcal{L}(L_X^\infty, L_X)$ вполне непрерывен. Отсюда

и из условия, наложенного на однородное уравнение (9.25), вытекает существование ограниченного обратного $(I-T)^{-1} \in \mathcal{L}(L_X^\infty, L_X^\infty)$, и уравнение (9.23) имеет единственное решение $x^* = (I-T)^{-1} f \in L_X^\infty(D)$.

Систему уравнений (9.24) рассмотрим как операторное уравнение (2.8) в пространстве $E_n = X^n$. Элементами банахова пространства X^n являются векторы $\xi_n = (\xi_{1n}, \dots, \xi_{nn})$ с компонентами $\xi_{in} \in X$ ($i=1, \dots, n$); норму в X^n определим равенством

$$\|\xi_n\| = \max_{1 \leq i \leq n} \|\xi_{in}\|_X. \quad (9.31)$$

Связывающие отображения $\rho_n \in \mathcal{L}(L_X^\infty, X^n)$ ($n=1, 2, \dots$) зададим формулой

$$\rho_n x = (x(\gamma_{1n}), \dots, x(\gamma_{nn})) \quad (x \in L_X^\infty), \quad (9.32)$$

где $\gamma_{1n}, \dots, \gamma_{nn}$ — узлы квадратурной формулы (9.11). Убедимся, что для ρ_n ($n=1, 2, \dots$) выполнены условия (1.1)–(1.3). Действительно, (1.2) очевидно (оно выполняется с постоянной $\alpha=1$), и мы остановимся на проверке условий (1.1) и (1.3). Пусть $\xi_n = (\xi_{1n}, \dots, \xi_{nn})$ — любой элемент X^n . Определим функцию $x_n(s)$, равную ξ_{jn} при $s=\gamma_{jn}$ ($j=1, \dots, n$) и нулю (нулевому элементу X) в остальных точках $s \in D$. Очевидно, $x_n(s)$ является v_n -интегрируемой^{*}, $\rho_n x_n = \xi_n$ и $\|x_n\| = \|\xi_n\|$. Значит, выполнены условия (1.1) и (1.3) (последнее из них выполняется с постоянной $\beta=1$).

Из сходимости квадратурного процесса (9.11) и условия 3°

^{*} Нетрудно построить и непрерывную функцию $x_n(s): D \rightarrow X$, такую, что $\rho_n x_n = \xi_n$ и $\|x_n\| = \|\xi_n\|$.

п. 9.2 вытекает, что узлы s_{1n}, \dots, s_{nn} располагаются в D "предельно плотно" (т.е. справедливо соотношение (8.5)). Отсюда и из определения норм в $C_X(D)$ и X^n заключаем, что $\|p_n x\| \rightarrow \|x\|$ при $n \rightarrow \infty$ для каждого $x \in C_X(D)$. По доказанному выше, $TL_X^\infty \subset C_X^\infty$. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n y\| = \|y\| \text{ для } \forall y \in TL_X^\infty, \quad (9.33)$$

и выполнено условие (2.4) теоремы 2.1.

Оператор $T_n \in \mathcal{L}(X^n, X^n)$, соответствующий системе (9.24), переводит $\xi_n = (\xi_{1n}, \dots, \xi_{nn}) \in X^n$ в $\eta_n = T_n \xi_n \in X^n$, компонентами которого являются

$$\eta_{in} = \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} \mathcal{K}(s_{in}, s_{jn}) \xi_{jn} \quad (i=1, \dots, n). \quad (9.34)$$

Из условия 7° вытекает, что оператор $T_n \in \mathcal{L}(X^n, X^n)$ вполне непрерывен.

Для применения теоремы 2.1 остается еще показать, что последовательность $T_n \in \mathcal{L}(X^n, X^n)$ компактно аппроксимирует $T \in \mathcal{L}(L_X^\infty, L_X^\infty)$. Для любого $x \in L_X^\infty$ имеем (ср. (8.16))

$$\|p_n T x - T_n p_n x\| = \max_{1 \leq i \leq n} \|\varphi_n(\mathcal{K}(s_{in}, s) x(s))\|_X. \quad (9.35)$$

Из условий 4° и 5° вытекает, что семейство функций

$$\mathfrak{M}_x = \{\mathcal{K}(t, s) x(s)\}_{t \in D}$$

равномерно ограничено и равномерно v_n -интегрируемо. По следствию 9.1

$$\sup_{t \in D} \|\varphi_n(\mathcal{K}(t, s) x(s))\|_X \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

и из (9.35) получаем, что $\|p_n T x - T_n p_n x\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, для T_n и T выполнено условие а) определения 1.3 компактной аппроксимации. Покажем, что выполнено и условие

б). Пусть заданы $\xi_n = (\xi_{1n}, \dots, \xi_{nn}) \in X^n$, $\|\xi_n\| \leq 1$ ($n=1, 2, \dots$). Пользуясь леммой 9.4, построим такую правильную последовательность ν_0 -разбиений $D = \bigcup_{j=1}^n D_{jn}$, что имеет место (9.12) и (9.13). Построим затем при каждом $n=1, 2, \dots$ (ν_0 -простую) функцию $x_n(s): D \rightarrow X$, положив $x_n(s) = \xi_{jn}$ при $s \in D_{jn}$. Тогда, учитывая (9.12), находим

$$\begin{aligned} \|p_n T x_n - T_n \xi_n\| &= \max_{1 \leq i \leq n} \left\| \int_D \mathcal{K}(s_{in}, s) x_n(s) dv(s) - \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} \mathcal{K}(s_{in}, s_{jn}) \xi_{jn} \right\| = \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \left\| \sum_{j=1}^n \left[\int_{D_{jn}} \mathcal{K}(s_{in}, s) dv(s) - \alpha_{jn} \mathcal{K}(s_{in}, s_{jn}) \right] \xi_{jn} \right\| = \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \left\| \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{D_{jn}} [\mathcal{K}(s_{in}, s) - \mathcal{K}(s_{in}, s_{jn})] dv(s) - [\alpha_{jn} - \nu(D_{jn})] \mathcal{K}(s_{in}, s_{jn}) \right\} \xi_{jn} \right\| \leq \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \omega(\mathcal{K}(s_{in}, s); D_{jn}) \nu(D_{jn}) + M \sum_{j=1}^n |\alpha_{jn} - \nu(D_{jn})|, \quad (9.36) \end{aligned}$$

где $\omega(\mathcal{K}(t, s); D_{jn})$ - колебание $\mathcal{K}(t, s)$ (как функции от s) в D_{jn} , а M - постоянная из условия 4°. По условиям 4° и 5°

$$\sup_{t \in D} \sum_{j=1}^n \omega(\mathcal{K}(t, s); D_{jn}) \nu(D_{jn}) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

(см. определение 9.2). Принимая во внимание также (9.13), получаем из (9.36), что

$$\|p_n T x_n - T_n \xi_n\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Это позволяет выбрать $u_n \in L_X^\infty$ ($n=1, 2, \dots$) так, что $p_n u_n = p_n T x_n - T_n \xi_n$ и $\|u_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Обозначим $y_n = T x_n - u_n$ ($n=1, 2, \dots$). Тогда $p_n y_n = T_n \xi_n$ ($n=1, 2, \dots$) и последовательность $\{y_n\}$ компактна в L_X^∞ в силу полной непрерывности $T \in \mathcal{L}(L_X^\infty, L_X^\infty)$ и неравенств $\|x_n\| = \|\xi_n\| \leq 1$ ($n=1, 2, \dots$). В итоге, для любых $\xi_n \in X^n$, $\|\xi_n\| \leq 1$ ($n=1, 2, \dots$), построена такая

компактная в L_X^∞ последовательность $\{y_n\}$, что $p_n y_n = T_n \xi_n$ ($n=1, 2, \dots$), т.е. выполнено условие б) определения 1.3, и последовательность операторов T_n компактно аппроксимирует T .

Мы убедились, что все условия теоремы 2.1 выполнены. По теореме 2.1 система (9.24) имеет при достаточно больших n единственное решение $\xi_n^* = (\xi_{1n}^*, \dots, \xi_{nn}^*)$, и $\|\xi_n^* - p_n x^*\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. имеет место сходимость (9.26). Ввиду (9.35) оценка (2.9) из теоремы 2.1 запишется в виде (9.27)-(9.28).

Теорема 9.1 доказана.

Условие 6° можно заменить любым другим условием, гарантирующим полную непрерывность оператора $T \in \mathcal{L}(L_X^\infty, L_X^\infty)$ и выполнение соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n y\| > 0 \text{ для } \forall y \in TL_X^\infty (y \neq 0).$$

9.5. Проблема собственных значений. Пусть выполнены условия 1° - 7° п. 9.2 и 9.4, и пусть используемый квадратурный процесс (9.11) сходится. Из доказательства теоремы 9.1 нам известно, что тогда последовательность вполне непрерывных операторов $T_n \in \mathcal{L}(X^n, X^n)$, задаваемых матрицами (8.19), компактно аппроксимирует интегральный оператор

$$(Kx)(t) = \int_D \mathcal{K}(t, s)x(s)dv(s)$$

(выше этот оператор обозначался буквой T); кроме того,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n y\| = \|y\| \text{ для } \forall y \in C_X(D).$$

^{*)} Выше доказано, что K вполне непрерывен как оператор из $L_X^\infty(D)$ в $C_X(D)$. Тем более, K вполне непрерывен как оператор из $C_X(D)$ в $C_X(D)$, и при изучении проблемы собственных значений можно положить $E = C_X(D)$. В доказательстве теоремы 9.1 был выбор $E = L_X^\infty(D)$ продиктован разрывностью свободного члена $f \in L_X^\infty(D)$.

Это позволяет сразу применить теорему 3.1, и мы приходим к результату, вполне аналогичному утверждениям 1) - 3) теоремы 8.2. Различия в формулировках столь незначительны, что мы не будем их снова приводить. Отметим лишь, что вместо $|\xi_{in} - x_0(s_{in})|$ и $|\varphi_n(z)|$ в определениях $\theta_n, \theta'_n, \epsilon_n$ следует теперь взять $\|\xi_{in} - x_0(s_{in})\|_X$ и $\|\varphi_n(z)\|_X$.

9.6. Нелинейные интегральные уравнения. Рассмотрим интегральное уравнение (уравнение Гаммерштейна)

$$x(t) = \int_D \mathcal{K}(t, s) g(s, x(s)) d\nu(s), \quad (9.37)$$

в котором ядро $\mathcal{K}(t, s)$ удовлетворяет условиям 4° - 7° п.

9.4, а $g(s, x)$ - непрерывная функция из $D \times X$ в X . Приближенные значения $\xi_{in} \approx x(s_{in})$ разыскиваем из системы

$$\xi_{in} = \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} \mathcal{K}(s_{in}, s_{jn}) g(s_{jn}, \xi_{jn}) \quad (i=1, \dots, n), \quad (9.38)$$

где $\alpha_{in} > 0$ и s_{in} - коэффициенты и узлы квадратурной формулы (9.11). Следующие две теоремы доказываются по той же схеме, что и теоремы*) 8.3 и 8.4.

Теорема 9.2. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) мера ν удовлетворяет условиям 1° - 3° п. 9.2;
- 2) квадратурный процесс (9.11) сходится;
- 3) ядро $\mathcal{K}(t, s)$ удовлетворяет условиям 4° - 7° п. 9.4;
- 4) уравнение (9.37) имеет решение $x^*(t) \in C_X(D)$;

*) Нужная подготовительная работа проведена при доказательстве теоремы 9.1. В качестве основного пространства E , в котором рассматривается уравнение (9.37), удобно брать $C_X(D)$. Напомним, что $C_X(D)$ состоит из непрерывных на D функций $z(t)$ со значениями в X ; $\|z\| = \max_{t \in D} \|z(t)\|_X$.

5) функция $g(\lambda, x)$ ограничена и равномерно непрерывна (по норме) по совокупности переменных на множестве

$$\lambda \in D, \|x - x^*(\lambda)\|_X \leq \delta_0 \quad (\delta_0 = \text{const} > 0); \quad (9.39)$$

6) решение $x^*(t)$ уравнения (9.37) единственно в шаре $\|x(t) - x^*(t)\|_{C_X(D)} \leq \delta_0$ и имеет ненулевой индекс.

Тогда система уравнений (9.38) имеет при достаточно больших n хотя бы одно решение $(\xi_{1n}^*, \dots, \xi_{nn}^*)$, удовлетворяющее неравенствам

$$\max_{1 \leq i \leq n} \|\xi_{in}^* - x^*(\lambda_{in})\|_X \leq \delta_0, \quad (9.40)$$

и

$$\max_{1 \leq i \leq n} \|\xi_{in}^* - x^*(\lambda_{in})\|_X \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty \quad (9.41)$$

для любого решения, удовлетворяющего неравенству (9.40).

Теорема 9.3. Пусть выполнены условия 1)–4) теоремы 9.2, а условия 5) и 6) выполнены в следующем усиленном виде:

5') функция $g(\lambda, x)$ дифференцируема по Фреше по переменной x , и функции $g(\lambda, x)$ и $\partial g(\lambda, x) / \partial x$ ограничены и равномерно непрерывны (по норме) по совокупности переменных на множестве (9.39);

6') решение $x^*(t)$ уравнения (9.37) единственно в шаре $\|x(t) - x^*(t)\|_{C_X(D)} \leq \delta_0$, и линейное однородное уравнение

$$\dot{z}(t) = \int_D X(t, \lambda) \frac{\partial g(\lambda, x^*(\lambda))}{\partial x} z(\lambda) d\nu(\lambda)$$

имеет лишь нулевое решение.

Тогда система уравнений (9.38) имеет при достаточно больших n единственное решение $(\xi_{1n}^*, \dots, \xi_{nn}^*)$, удовлетворяющее неравенству (9.40). Имеет место сходимость (9.41) с оценкой

$$c_1 \varepsilon_n \leq \max_{1 \leq i \leq n} \| \xi_{in}^* - x^*(s_{in}) \|_X \leq c_2 \varepsilon_n, \quad (9.42)$$

где

$$\varepsilon_n = \max_{1 \leq i \leq n} \| \varphi_n(\mathcal{K}(s_{in}, s)) g(s, x^*(s)) \|_X, \quad (9.43)$$

$\varphi_n(z)$ - дополнительный член квадратурной формулы (9.11).

§10. Конечноразностный метод

10.1 Аппроксимация производных. Мы собираемся изучить сходимость конечноразностного метода для обыкновенных дифференциальных уравнений порядка m , заданных на отрезке $[0, 1]$. В этом пункте опишем, как будем аппроксимировать операторы дифференцирования $D^k = d^k/(dt)^k$ ($k=0, 1, \dots, m$).

Обозначим $h = 1/n$, где n — натуральное число. Пусть неотрицательные целые числа m_1 и m_2 таковы, что $m_1 + m_2 = m$. Введем пространства U_h и X_h векторов (сеточных функций) вида

$$u_h = (u_{-m_1, h}, u_{-m_1+1, h}, \dots, u_{n+m_2, h}) \in U_h, \quad (10.1)$$

$$x_h = (\xi_{0, h}, \xi_{1, h}, \dots, \xi_{n, h}) \in X_h \quad (10.2)$$

(второй индекс h у компонент u_h и x_h будем обычно опускать). Очевидно, $\dim U_h = \dim X_h + m$. Для заданных функций $u(t)$ и $x(t)$ обозначим

$$\Pi_h u = (u(-m_1, h), u(-m_1, h+h), \dots, u(1+m_2, h)) \in U_h, \quad (10.3)$$

$$\Pi_h x = (x(0), x(h), \dots, x(1)) \in X_h. \quad (10.4)$$

Опишем нормы в U_h и X_h . Положим

$$\|x_h\|_{X_h} = \max_{0 \leq i \leq n} |[x_h]_i|, \quad (10.5)$$

где $[x_h]_i$ — компонента вектора x_h с индексом i (т.е.

$[x_h]_i = \xi_{i, h}$). Для определения нормы в U_h введем вспомогательные векторные пространства $U_h^{(k)}$ ($k=0, 1, \dots, m$) векторов

вида

$$u_h^{(k)} = (u_{-m_1, h}, u_{-m_1+1, h}, \dots, u_{n+m_2-k, h}) \in U_h^{(k)} \quad (10.6)$$

(по сравнению с (10.1) отсутствуют последние k компонент).
 В частности, $U_h^{(0)} = U_h$, а $U_h^{(m)}$ изоморфно X_h . Пусть $\bar{D}_h: U_h^{(k)} \rightarrow U_h^{(k+1)}$ - простейший разностный аналог оператора дифференцирования, переводящий $u_h^{(k)} \in U_h^{(k)}$ (см. (10.6)) в вектор $\bar{D}_h u_h^{(k)} \in U_h^{(k+1)}$ с компонентами

$$[\bar{D}_h u_h^{(k)}]_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \quad (i = -m_1, -m_1+1, \dots, n+m_2-k-1). \quad (10.7)$$

Под $\bar{D}_h^k: U_h \rightarrow U_h^{(k)}$ понимается оператор k -кратного применения \bar{D}_h к векторам $u_h \in U_h = U_h^{(0)}$ (первое применение переводит u_h в $U_h^{(1)}$, второе - в $U_h^{(2)}$ и т.д.); \bar{D}_h^0 - тождественный оператор. Норму в U_h определим формулой

$$\|u_h\|_{U_h} = \max_{0 \leq k \leq m} \max_{-m_1 \leq i \leq n+m_2-k} |[\bar{D}_h^k u_h]_i|. \quad (10.8)$$

Словесно говоря, норма вектора $u_h \in U_h$ - это наибольшая из абсолютных величин всех простейших разностных производных от u_h порядка $\leq m$.

Операторы дифференцирования $D^k = d^k/(dt)^k$ ($k=0, 1, \dots, m$) будем аппроксимировать линейными разностными операторами

$$D_h^{(k)} \in \mathcal{L}(U_h, X_h) \quad (k=0, 1, \dots, m).$$

Опишем построение $D_h^{(k)}$. В основу возьмем какое-нибудь разностное выражение

$$u^{(k)}(t) \approx h^{-k} \sum_{j=-r_k}^{s_k} b_j^{(k)} u(t+jh), \quad (10.9)$$

такое, что

$$h^{-k} \sum_{j=-r_k}^{s_k} b_j^{(k)} u(t+jh) \rightarrow u^{(k)}(t) \quad \text{при } h \rightarrow 0 \quad \text{для } \forall u \in C^{(k)}, \quad (10.10)$$

где $C^{(k)}$ - множество k раз непрерывно дифференцируемых функ-

ций. Положим

$$[D_h^{(\kappa)} u_h]_i = h^{-\kappa} \sum_{j=-r_\kappa}^{s_\kappa} \theta_j^{(\kappa)} u_{i+j} \quad (10.11)$$

для тех i из $i=0, 1, \dots, n$, в случае которых в (10.11) привлекаются лишь дозволённые компоненты $u_{-m_1}, u_{-m_1+1}, \dots, u_{n+m_2}$ вектора (10.1). Для формул (10.9) высокого порядка точности (тогда $r_\kappa + s_\kappa$ велико) может оказаться, что (10.11) неприменимо вблизи граничных точек $t=0$ и $t=1$ (т.е. при i , близких 0 или n). Тогда вблизи этих точек используем какие-нибудь другие (более "односторонние") формулы численного дифференцирования, не захватывающие значений $u(t)$ вне дозволённой сетки; от этих формул, конечно, требуем сходимости, аналогичной (10.10).

В дальнейшем предполагаем, не оговаривая этого особо, что операторы $D_h^{(\kappa)} \in \mathcal{L}(U_h, X_h)$ ($\kappa=0, 1, \dots, m$) построены указанным выше способом. Существенную роль играет в дальнейшем следующее

Условие (K). Разностная задача Коши

$$D_h^{(m)} u_h = x_h \quad (x_h \in X_h), \quad (10.12)$$

$$[u_h]_i = 0 \quad (i = -m_1, -m_1+1, \dots, -m_1+m-1) \quad (10.13)$$

имеет при достаточно малых h решение $u_h \in U_h$, это решение единственно и

$$\|u_h\|_{U_h} \leq c \|x_h\|_{X_h}, \quad (10.14)$$

где c - некоторая постоянная, не зависящая от h и $x_h \in X_h$ (определения норм в U_h и X_h даны в (10.8) и (10.5)).

Обсуждение условия (K) отложим до п. 10.7, в котором будет построен широкий класс разностных схем, удовлетворяю-

щих этому условию. Отметим пока лишь, что для выполнения (K) существен, в частности, правильный выбор m_1 и m_2 .

Следующий довольно длинный п. 10.2 посвящен различным вспомогательным результатам, используемым при доказательстве теорем сходимости. Формулировки теорем сходимости понятны и без ознакомления с п. 10.2.

10.2. Вспомогательные результаты. Известно (см. [38]), что из (10.10) вытекает представимость функции

$$\chi_K(z) = \sum_{j=-r_K}^{\Delta_K} \beta_j^{(K)} z^j$$

в виде^{*}

$$\chi_K(z) = (z-1)^K \Psi_K(z),$$

где

$$\Psi_K(z) = \sum_{j=-r_K}^{\Delta_K - K} \beta_j^{(K)} z^j$$

- такая функция, что $\Psi_K(1) = 1$, т.е.

$$\sum_{j=-r_K}^{\Delta_K - K} \beta_j^{(K)} = 1. \quad (10.15)$$

Отсюда легко усмотреть, что определенные в (10.11) величины

$[D_h^{(K)} u_h]_i$ представимы в виде

$$[D_h^K u_h]_i = \sum_{j=-r_K}^{\Delta_K - K} \beta_j^{(K)} [\bar{D}_h^K u_h]_{i+j}, \quad (10.16)$$

где $\bar{D}_h^K : \mathcal{U}_h \rightarrow \mathcal{U}_h^{(K)}$ - определенные в п. 10.1 операторы,

$$[\bar{D}_h^K u_h]_e = h^{-K} \sum_{j=0}^K (-1)^j \binom{K}{j} u_{e+j}.$$

^{*} Такое представление $\chi_K(z)$ необходимо и достаточно для сходимости (10.10).

Равенства (10.15)-(10.16) означают, что $[D_h^{(k)} u_h]_i$ является алгебраическим средним от $[\bar{D}_h^k u_h]_{i+j}$ ($j=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Аналогичное представление для $[D_h^{(k)} u_h]_i$ можно написать для "особых" узлов вблизи граничных точек, в которых используются отличные от (10.9) разностные выражения.

Из (10.16) заключаем, что для каждой k раз непрерывно дифференцируемой (в некоторой окрестности отрезка $[0, 1]$) функции $u(t)$ справедливо соотношение

$$\|D_h^{(k)} \Pi_h u - \pi_h D^k u\|_{X_h} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0 \quad (0 \leq k \leq m). \quad (10.17)$$

Для доказательства следует заметить, что для \bar{D}_h^k аналог соотношения (10.17) имеет место.

Далее, из (10.16) вытекает, что

$$\max_i |[D_h^{(k)} u_h]_i| \leq c \max_i |[\bar{D}_h^k u_h]_i| \quad (k=0, 1, \dots, m), \quad (10.18)$$

$$\max_i \frac{1}{h} |[D_h^{(k)} u_h]_{i+1} - [D_h^{(k)} u_h]_i| \leq c \max_i |[\bar{D}_h^{k+1} u_h]_i| \quad (k=0, 1, \dots, m-1), \quad (10.19)$$

где c - некоторая постоянная, не зависящая от h и $u_h \in U_h$; максимумы в (10.18), (10.19) берутся по всем компонентам соответствующих векторов. Не совсем очевидным является лишь неравенство (10.19) - в случае, когда $[D_h^{(k)} u_h]_i$ и $[D_h^{(k)} u_h]_{i+1}$ выражаются разными формулами типа (10.16), т.е. вблизи граничных точек $t=0$ и $t=1$. В этом случае доказательство существенно использует равенства типа (10.15): разность $[D_h^{(k)} u_h]_{i+1} - [D_h^{(k)} u_h]_i$ запишется в виде линейной комбинации от $[\bar{D}_h^k u_h]_{i+j}$ ($j=0, \pm 1, \dots$), в которой сумма коэффициентов равна нулю, а значит и в виде линейной комбинации от $[\bar{D}_h^k u_h]_{i+j+1} - [\bar{D}_h^k u_h]_{i+j}$ ($j=0, \pm 1, \dots$). Остальное ясно.

Перейдем к другому кругу вопросов. Рассмотрим краевые операторы (функционалы)

$$\varphi_i(u) \equiv \sum_{\kappa=0}^{m-1} \{ \alpha_{i\kappa} u^{(\kappa)}(0) + \beta_{i\kappa} u^{(\kappa)}(1) \} \quad (i=1, \dots, m) \quad (10.20)$$

и соответствующие разностные краевые операторы (функционалы)

$$\varphi_{i,h}(u_h) = \sum_{\kappa=0}^{m-1} \{ \alpha_{i\kappa} [D_h^{(\kappa)} u_h]_0 + \beta_{i\kappa} [D_h^{(\kappa)} u_h]_h \} \quad (i=1, \dots, m). \quad (10.21)$$

О краевых операторах (10.20) предполагаем, что они линейно независимы. Из (10.17) вытекает, что

$$|\varphi_{i,h}(\Pi_h u) - \varphi_i(u)| \leq c \sum_{\kappa=0}^{m-1} \|D_h^{(\kappa)} \Pi_h u - \pi_h D^\kappa u\|_{X_h} \rightarrow 0 \quad (10.22)$$

при $h \rightarrow 0$ для каждой $m-1$ раз непрерывно дифференцируемой функции $u(t)$.

Зафиксируем такую $\tau = \text{const}$, что задача

$$u^{(m)} + \tau u = 0, \quad \varphi_i(u) = 0 \quad (i=1, \dots, m) \quad (10.23)$$

имеет лишь нулевое решение (наиболее удобный случай, когда $\tau = 0$ удовлетворяет этому условию). Ниже докажем леммы 10.1-10.3, предполагая выполненным некоторое условие (G) - аналог условия (K) для краевых задач. Затем, в леммах 10.4-10.5 доказываемся, что условие (G) равносильно условию (K).

Итак, пусть выполнено следующее

Условие (G). При достаточно малых h задача

$$D_h^{(m)} u_h + \tau D_h^{(0)} u_h = x_h, \quad (10.24)$$

$$\varphi_{i,h}(u_h) = 0 \quad (i=1, \dots, m) \quad (10.25)$$

имеет единственное решение $u_h \in \mathcal{U}_h$ при любом $x_h \in X_h$ и

$$\|u_h\|_{\mathcal{U}_h} \leq c \|x_h\|_{X_h}, \quad (10.26)$$

где c - некоторая постоянная, не зависящая от h .

По условию (G), при достаточно малых h существует обратный $G_h \in \mathcal{L}(X_h, U_h^0)$ к сужению оператора $D_h^{(m)} + \tau D_h^{(0)}$ на подпространство $U_h^0 \subset U_h$ тех векторов $u_h \in U_h$, которые удовлетворяют крайним условиям (10.25). Неравенство (10.26) означает, что

$$\|G_h\|_{X_h \rightarrow U_h} \leq c. \quad (10.27)$$

Отсюда и из (10.18) вытекает, что^{*)}

$$\|D_h^{(k)} G_h\|_{X_h \rightarrow X_h} \leq c \quad (k=0, 1, \dots, m). \quad (10.28)$$

Лемма 10.1. Пусть функция $v(t)$ и векторы $v_h \in U_h$ таковы, что

$$v^{(m)} + \tau v = 0, \quad \varphi_i(v) = \gamma_i \quad (i=1, \dots, m), \quad (10.29)$$

$$D_h^{(m)} v_h + \tau D_h^{(0)} v_h = 0, \quad \varphi_{i,h}(v_h) = \gamma_i \quad (i=1, \dots, m). \quad (10.30)$$

Тогда

$$\|D_h^{(k)} v_h - \pi_h D^k v\| \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0 \quad (k=0, 1, \dots, m). \quad (10.31)$$

Доказательство. Пусть $v_j(t), \dots, v_m(t)$ - фундаментальная система решений уравнения $v^{(m)} + \tau v = 0$.

Векторы

$$v_{j,h} = \Pi_h v_j - G_h (D_h^{(m)} + \tau D_h^{(0)}) \Pi_h v_j \quad (j=1, \dots, m) \quad (10.32)$$

удовлетворяют уравнению $D_h^{(m)} v_h + \tau D_h^{(0)} v_h = 0$. Покажем, что

они линейно независимы. Действительно, $\varphi_{i,h}(G_h x_h) = 0$ при любом $x_h \in X_h$, и в силу (10.22)

$$\varphi_{i,h}(v_{j,h}) = \varphi_{i,h}(\Pi_h v_j) \rightarrow \varphi_i(v_j) \quad \text{при } h \rightarrow 0 \quad (i,j=1, \dots, m). \quad (10.33)$$

Матрица $\{\varphi_i(v_j)\}_{i,j=1}^m$ неособая (в противном случае, как легко

^{*)} Постоянные, не зависящие от h , обозначаем одной буквой c . Значения c в разных неравенствах могут быть разными.

видеть, τ было бы собственным значением задачи (10.23)). Ввиду (10.33) матрица $\{\varphi_{jh}(v_{jh})\}_{i,j=1}^m$ будет при достаточно малых h тоже неособой, и векторы v_{jh} ($j=1, \dots, m$) линейно независимы при этих h . С другой стороны, из существования обратного $G_h \in \mathcal{L}(X_h, U_h^v)$ и равенства $\dim U_h = \dim X_h + m$ вытекает, что уравнение $(D_h^{(m)} + \tau D_h^{(0)})v_h = 0$ имеет не более m линейно независимых решений. Значит, векторы (10.32) составляют при достаточно малых h фундаментальную систему решений уравнения $(D_h^{(m)} + \tau D_h^{(0)})v_h = 0$.

Представив решения задач (10.29) и (10.30) в виде

$$v(t) = \sum_{j=1}^m \alpha_j v_j(t), \quad v_h = \sum_{j=1}^m \alpha_{jh} v_{jh}, \quad (10.34)$$

имеем для определения коэффициентов α_j и α_{jh} системы

$$\sum_{j=1}^m \varphi_i(v_j) \alpha_j = \gamma_i, \quad \sum_{j=1}^m \varphi_{ih}(v_{jh}) \alpha_{jh} = \gamma_i \quad (i=1, \dots, m).$$

Из (10.33) вытекает, что

$$\alpha_{jh} \rightarrow \alpha_j \quad \text{при } h \rightarrow 0 \quad (j=1, \dots, m). \quad (10.35)$$

Ввиду (10.34) и (10.32) имеем

$$\begin{aligned} D_h^{(k)} v_h - \pi_h D^k v &= \sum_{j=1}^m \alpha_{jh} [D_h^{(k)} \pi_h v_j - \pi_h D^k v_j] - \\ &- \sum_{j=1}^m \alpha_{jh} D_h^{(k)} G_h [(D_h^{(m)} + \tau D_h^{(0)}) \pi_h v_j - \pi_h (D^m v_j + \tau v_j)] + \\ &+ \sum_{j=1}^m (\alpha_{jh} - \alpha_j) \pi_h D^k v_j, \end{aligned}$$

откуда на основании (10.17), (10.28) и (10.35) получаем (10.31).

Лемма 10.1 доказана.

Лемма 10.2. Для решений $u_*(t)$ и $\tilde{u}_h \in \mathcal{U}_h$ задач

$$u^{(m)} + \tau u = x(t), \quad \varphi_i(u) = \gamma_i \quad (i=1, \dots, m), \quad (10.36)$$

$$D_h^{(m)} u_h + \tau D_h^{(o)} u_h = \pi_h x, \quad \varphi_{ih}(u_h) = \gamma_i \quad (i=1, \dots, m) \quad (10.37)$$

справедлива оценка

$$\max_{0 \leq k \leq m} \|D_h^{(k)} \tilde{u}_h - \pi_h D^k u_*\| \leq c \max_{0 \leq k \leq m} \|D_h^{(k)} \pi_h u_* - \pi_h D^k u_*\|. \quad (10.38)$$

Доказательство. Имеем $\tilde{u}_h = G_h \pi_h x + v_h$,

где $v_h \in \mathcal{U}_h$ - решение задачи (10.30). Принимая во внима-

ние, что $\pi_h x = \pi_h (u_*^{(m)} + \tau u_*)$, находим

$$\begin{aligned} D_h^{(k)} \tilde{u}_h - \pi_h D^k u_* &= D_h^{(k)} G_h [\pi_h (D^m u_* + \tau u_*) - (D_h^{(m)} + \tau D_h^{(o)}) \pi_h u_*] - \\ &\quad - D_h^{(k)} [\pi_h u_* - G_h (D_h^{(m)} + \tau D_h^{(o)}) \pi_h u_* - v_h] + \\ &\quad + [D_h^{(k)} \pi_h u_* - \pi_h D^k u_*]. \end{aligned} \quad (10.39)$$

Первая и третья квадратная скобки оцениваются величиной

$$\max_{0 \leq j \leq m} \|D_h^{(j)} \pi_h u_* - \pi_h D^j u_*\|.$$

Ввиду (10.28) и (10.22) для доказательства леммы достаточно

установить, что

$$\|D_h^{(k)} w_h\| \leq c \max_{1 \leq i \leq m} |\varphi_{ih}(\pi_h u_*) - \varphi_i(u_*)| \quad (10.40)$$

для $w_h = \pi_h u_* - G_h (D_h^{(m)} + \tau D_h^{(o)}) \pi_h u_* - v_h$. Имеем

$$\begin{aligned} (D_h^{(m)} + \tau D_h^{(o)}) w_h &= 0, \quad \varphi_{ih}(w_h) = \varphi_{ih}(\pi_h u_*) - \varphi_{ih}(v_h) = \\ &= \varphi_{ih}(\pi_h u_*) - \varphi_i(u_*) \quad (i=1, \dots, m). \end{aligned}$$

Следовательно, w_h представим в виде (см. (10.32))

$$w_h = \sum_{j=1}^m \beta_{jh} v_{jh}, \quad (10.41)$$

причем коэффициенты β_{jh} определяются из системы

$$\sum_{j=1}^m \varphi_{ih}(v_{jh}) \beta_{jh} = \varphi_{ih}(\Pi_h u_*) - \varphi_i(u_*) \quad (i=1, \dots, m).$$

Отсюда ввиду (10.33) находим

$$\max_{1 \leq j \leq m} |\beta_{jh}| \leq c \max_{1 \leq i \leq m} |\varphi_{ih}(\Pi_h u_*) - \varphi_i(u_*)|,$$

затем из (10.41) - оценку (10.40).

Лемма 10.2 доказана.

Обозначим через $G(t, s)$ функцию Грина дифференциального выражения $u^{(m)} + ru$ при краевых условиях $\varphi_i(u) = 0$ ($i=1, \dots, m$). Введем интегральные операторы

$$(G^{(k)} x)(t) = \int_0^1 \frac{\partial^k G(t, s)}{\partial t^k} x(s) ds \quad (k=0, 1, \dots, m-1; G^{(0)} = G). \quad (10.42)$$

Они вполне непрерывны в пространстве $C = C[0, 1]$ непрерывных на $[0, 1]$ функций $x(t)$ ($\|x\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$).

Лемма 10.3. При $0 \leq k \leq m-1$ последовательность*^{*)} операторов $D_h^{(k)} G_h \in \mathcal{L}(X_h, X_h)$ компактно аппроксимирует оператор $G^{(k)} \in \mathcal{L}(C, C)$ по отношению к связывающим отображениям $\pi_h \in \mathcal{L}(C, X_h)$, определенным в (10.4).

Доказательство. Возьмем любое $x \in C[0, 1]$. Обозначив $u = Gx$, имеем $D^k u = G^{(k)} x$ ($0 \leq k \leq m-1$), $u^{(m)} + ru = x$ и

^{)} Напомним, что $h = 1/n$. Когда говорим о какой-нибудь последовательности $\{z_h\}$, то имеем в виду, что n принимает последовательно значения $1, 2, 3, \dots$ (или n_0, n_0+1, \dots , если z_h определено лишь для достаточно малых h).

$$\begin{aligned} & \|\pi_h G^{(k)} x - D_h^{(k)} G_h \pi_h x\| = \|\pi_h D^k u - D_h^{(k)} G_h \pi_h (D^m u + \tau u)\| \leq \\ & \leq \|\pi_h D^k u - D_h^{(k)} \pi_h u\| + \|D_h^{(k)} [\pi_h u - G_h (D_h^{(m)} + \tau D_h^{(0)}) \pi_h u]\| + \\ & + \|D_h^{(k)} G_h\| \|(D_h^{(m)} + \tau D_h^{(0)}) \pi_h u - \pi_h (D^m u + \tau u)\|. \end{aligned}$$

Для второго слагаемого в правой части неравенства справедлива оценка (ср. (10.40) и см. (10.22))

$$\begin{aligned} & \|D_h^{(k)} [\pi_h u - G_h (D_h^{(m)} + \tau D_h^{(0)}) \pi_h u]\| \leq c \max_{1 \leq i \leq m} |\varphi_{ih}(\pi_h u)| = \\ & = c \max_{1 \leq i \leq m} |\varphi_{ih}(\pi_h u) - \varphi_{ih}(u)| \leq c' \max_{0 \leq k \leq m} \|\pi_h D_h^{(k)} u - D^k \pi_h u\|; \end{aligned}$$

ввиду (10.28) для первого и третьего слагаемых справедлива такая же оценка, и

$$\|\pi_h G^{(k)} x - D_h^{(k)} G_h \pi_h x\| \leq c \max_{0 \leq k \leq m} \|\pi_h D^k(Gx) - D^k \pi_h(Gx)\| \rightarrow 0 \quad (10.43)$$

при $h \rightarrow 0$ (при $n \rightarrow \infty$). Таким образом, для $D_h^{(k)} G_h \in \mathcal{L}(X_h, X_h)$, $G^{(k)} \in \mathcal{L}(C, C)$ и связывающих отображений $\pi_h \in \mathcal{L}(C, X_h)$ выполнено условие а) определения 1.3 компактной аппроксимации.

Покажем, что выполнено условие б). Пусть задана последовательность

$$x_h = (\xi_{0h}, \xi_{1h}, \dots, \xi_{nh}) \in X_h, \quad \|x_h\| \leq 1 \quad (n=1, 2, \dots). \quad (10.44)$$

Построим по $D_h^{(k)} G_h x_h \in X_h$ ломанную $y_n(t) \in C[0, 1]$, линейную на каждом отрезке $[ih, (i+1)h]$ ($i=0, 1, \dots, n-1$) и принимающую при $t=ih$ значение $[D_h^{(k)} G_h x_h]_i$ ($i=0, 1, \dots, n$). Тогда $\pi_h y_n = D_h^{(k)} G_h x_h$ ($n=1, 2, \dots$) по построению. Ввиду (10.44) и (10.28) функции $y_n(t)$ ($n=1, 2, \dots$) равномерно ограничены; из (10.19) и (10.27) замечаем, что они удовлетворяют условию Липшица с некоторой постоянной, не зависящей от n . С помощью теоремы Арцела заключаем, что последовательность

$\{y_n(t)\}$ компактна в $C[0,1]$. Тем самым показано, что условие б) определения 1.3 выполнено.

Лемма 10.3 доказана.

Лемма 10.4. Если условие (G) выполнено при каком-нибудь значении параметра τ , то оно выполнено при любом τ , не являющемся собственным значением задачи (10.23).

Доказательство. Пусть условие (G) выполнено при $\tau = \tau_1$, а τ_2 не является собственным значением задачи (10.23). Покажем, что (G) выполнено и при $\tau = \tau_2$. Вместо G и G_h будем временно использовать обозначения $G(\tau)$, $G_h(\tau)$, указывая, какому значению параметра τ они соответствуют; через I_h обозначим единичный оператор в X_h . Для любого $u_h \in U_h^0$ (т.е. любого $u_h \in U_h$, удовлетворяющего краевым условиям (10.25)) имеем

$$(D_h^{(m)} + \tau_2 D_h^{(0)})u_h = [I_h + (\tau_2 - \tau_1)D_h^{(0)}G_h(\tau_1)](D_h^{(m)} + \tau_1 D_h^{(0)})u_h. \quad (10.45)$$

Оператор $[I_h + (\tau_2 - \tau_1)D_h^{(0)}G_h(\tau_1)]$ обратим в пространстве $C[0,1]$, ибо в противном случае, как легко видеть, τ_2 было бы собственным значением задачи (10.23). Из лемм 10.3 и 2.1 вытекает, что при достаточно малых h операторы $I_h + (\tau_2 - \tau_1)D_h^{(0)}G_h(\tau_1)$ обратимы в X_h и нормы обратных ограничены равномерно по h :

$$\| [I_h + (\tau_2 - \tau_1)D_h^{(0)}G_h(\tau_1)]^{-1} \| \leq c \quad (h \leq h_0). \quad (10.46)$$

Вместе с тем сужение оператора $D_h^{(m)} + \tau_2 D_h^{(0)}$ на U_h^0 имеет обратный

$$G_h(\tau_2) = G_h(\tau_1) [I_h + (\tau_2 - \tau_1)D_h^{(0)}G_h(\tau_1)]^{-1} \quad (h \leq h_0)$$

и

$$\| G_h(\tau_2) \|_{X_h \rightarrow U_h^0} \leq c \| G_h(\tau_1) \|_{X_h \rightarrow U_h^0} \leq c' \quad (h \leq h_0), \quad (10.47)$$

т.е. условие (G) при $\tau = \tau_h$ выполнено.

Лемма 10.4 доказана.

Лемма 10.5. Если выполнено условие (K), то условие (G) выполнено при любом $\tau = \text{const}$, отличном от собственных значений задачи (10.23).

Доказательство. Пусть выполнено условие (K), т.е. оператор $D_h^{(m)}$ имеет при начальных условиях (10.13) обратный $K_h \in \mathcal{L}(X_h, U_h)$ и $\|K_h\| \leq c$. Никакое $\tau = \text{const}$ не является собственным для задачи

$$u^{(m)} + \tau u = 0, \quad u(0) = u'(0) = \dots = u^{(m-1)}(0) = 0,$$

и аналогично лемме 10.4 доказываем, что обратный $K_h(\tau)$ к $D_h^{(m)} + \tau D_h^{(0)}$ при начальных данных (10.13) существует при достаточно малых h , причем (ср. (10.47))

$$\|K_h(\tau)\|_{X_h \rightarrow U_h} \leq c \quad (h \leq h_0). \quad (10.48)$$

Пусть τ не является собственным значением задачи (10.23). Решение задачи (10.24)-(10.25) будем разыскивать в виде

$$u_h = K_h(\tau)x_h - v_h. \quad (10.49)$$

Это равносильно нахождению v_h из условий

$$(D_h^{(m)} + \tau D_h^{(0)})v_h = 0, \quad \varphi_{ih}(v_h) = \varphi_{ih}(K_h(\tau)x_h) \quad (i=1, \dots, m). \quad (10.50)$$

Пусть $v_1(t), \dots, v_m(t)$ - фундаментальная система решений уравнения $v^{(m)} + \tau v = 0$. При достаточно малых h векторы (ср. (10.32))

$$w_{jh} = \Pi_h v_j - K_h(\tau)(D_h^{(m)} + \tau D_h^{(0)})\Pi_h v_j \quad (j=1, \dots, m) \quad (10.51)$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения

$$(D_h^{(m)} + \tau D_h^{(0)})v_h = 0. \quad \text{Условия (10.50) запишутся в виде}$$

$$v_h = \sum_{j=1}^m \alpha_{jh} w_{jh}, \quad (10.52)$$

$$\sum_{j=1}^m \varphi_{ih}(w_{jh}) \alpha_{jh} = \varphi_{ih}(K_h(\tau)x_h) \quad (i=1, \dots, m). \quad (10.53)$$

Поскольку

$$\|(D_h^{(m)} + \tau D_h^{(0)})\Pi_h v_j\| = \|(D_h^{(m)} + \tau D_h^{(0)})\Pi_h v_j - \Pi_h(v_j^{(m)} + \tau v_j)\| \rightarrow 0 \quad (10.54)$$

по условию (10.17), то из (10.51) и (10.48) следует, что

$$\varphi_{ih}(w_{jh}) \rightarrow \varphi_i(v_j) \quad \text{при } h \rightarrow 0 \quad (i, j=1, \dots, m).$$

Из неособенности матрицы $\{\varphi_i(v_j)\}_{i,j=1}^m$ вытекает, что система (10.53) имеет при достаточно малых h единственное решение и (см. (10.48))

$$\max_{1 \leq j \leq m} |\alpha_{jh}| \leq c' \max_{1 \leq i \leq m} |\varphi_{ih}(K_h(\tau)x_h)| \leq c \|x_h\|. \quad (10.55)$$

Итак, задача (10.24)–(10.25) имеет при достаточно малых h единственное решение u_h ; из (10.49), (10.48), (10.52), (10.51), (10.54) и (10.55) вытекает, что $\|u_h\|_{X_h} \leq c \|x_h\|_{X_h}$, где c не зависит от h и свободного члена $x_h \in X_h$ уравнения (10.24). Таким образом, выполнено условие (G).

Лемма 10.5 доказана.

Лемма 10.5 допускает обращение: если при каком-нибудь τ выполнено условие (G), то выполнено и условие (K). Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство леммы 10.5.

10.3. Линейная краевая задача. Рассмотрим краевую задачу

$$\left. \begin{aligned} u^{(m)} + \sum_{k=0}^{m-1} a_k(t) u^{(k)} &= b(t) \quad (0 \leq t \leq 1), \\ \varphi_i(u) \equiv \sum_{k=0}^{m-1} \{ \alpha_{ik} u^{(k)}(0) + \beta_{ik} u^{(k)}(1) \} &= \gamma_i \quad (i=1, \dots, m). \end{aligned} \right\} (10.56)$$

Аппроксимируя производные указанным в п. 10.1 образом, составим соответствующую разностную краевую задачу

$$\left. \begin{aligned}
 D_h^{(m)} u_h + \sum_{k=0}^{m-1} a_{kh} D_h^{(k)} u_h &= \pi_h v, \\
 \varphi_{ih}(u_h) \equiv \sum_{k=0}^{m-1} \{ \alpha_{ik} [D_h^{(k)} u_h]_0 + \beta_{ik} [D_h^{(k)} u_h]_n \} &= \gamma_i \\
 (i = 1, \dots, m; u_h \in \mathcal{U}_h). &
 \end{aligned} \right\} (10.57)$$

Здесь a_{kh} - разностный аналог коэффициента $a_k(t)$.

$a_{kh} x_h = (a_k(0)\xi_0, a_k(h)\xi_1, \dots, a_k(1)\xi_n)$ для $x_h = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) \in X_h$.

Можно трактовать a_{kh} и как оператор покомпонентного умножения векторов $x_h \in X_h$ на вектор $\pi_h a_k$ (аналогично тому как в уравнении (10.56) можно коэффициенты $a_k(t)$ трактовать как операторы умножения на функции $a_k(t)$). Очевидно, для каждой функции $x(t)$

$$a_{kh} \pi_h x = \pi_h [a_k(t)x].$$

Чтобы предотвратить недоразумения, приведем и компонентную запись первого из условий (10.57):

$$[D_h^{(m)} u_h]_i + \sum_{k=0}^{m-1} a_k(ih) [D_h^{(k)} u_h]_i = b(ih) \quad (i=0, 1, \dots, n).$$

Теорема 10.1. Пусть функции $v(t)$ и $a_k(t)$ ($k=0, 1, \dots, m-1$) непрерывны на $[0, 1]$, и пусть задача (10.56) имеет единственное решение $u_*(t)$. Пусть выполнено условие (K) из п. 10.1.

Тогда разностная задача (10.57) имеет при достаточно малых h единственное решение $u_h^* \in \mathcal{U}_h$. Имеет место сходимость

$$\|D_h^{(k)} u_h^* - \pi_h D^k u_*\|_{X_h} \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0 \quad (k=0, 1, \dots, m) \quad (10.58)$$

и справедлива оценка *)

$$\max_{0 \leq k \leq m} \|D_h^{(k)} u_h^* - \pi_h D^k u_*\|_{X_h} \leq c \max_{0 \leq k \leq m} \|D_h^{(k)} \Pi_h u_* - \pi_h D^k u_*\|_{X_h}. \quad (10.59)$$

Доказательство построим, опираясь на теорему 2.1. С этой целью сведем задачи (10.56) и (10.57) к уравнениям второго рода.

Пусть $\tau = \text{const}$ не является собственным значением задачи $u^{(m)} + \tau u = 0$, $\varphi_i(u) = 0$ ($i=1, \dots, m$). Проведем в задаче (10.56) замену $u^{(m)} + \tau u = x$. Тогда

$$u^{(k)} = G^{(k)} x + v^{(k)} \quad (k=0, 1, \dots, m-1),$$

где $G^{(k)}$ — определенные в (10.42) операторы, а $v(t)$ — решение задачи (10.29). Задача (10.56) сведется к уравнению

$$x = Tx + f, \quad (10.60)$$

в котором

$$Tx = - \sum_{k=0}^{m-1} a_k(t) G^{(k)} x + \tau G x, \quad (10.61)$$

$$f(t) = b(t) - \sum_{k=0}^{m-1} a_k(t) v^{(k)} + \tau v.$$

Уравнение (10.60) будем рассматривать в пространстве $C = C[0, 1]$; оно имеет единственное решение $x^*(t)$, связанное решением $u_*(t)$ задачи (10.56) равенствами $x^* = u_*^{(m)} + \tau u_*$ и

$$u_* = G x^* + v. \quad (10.62)$$

Оператор $T \in \mathcal{L}(C, C)$ вполне непрерывен ввиду полной непрерывности операторов $G^{(k)} \in \mathcal{L}(C, C)$ ($k=0, 1, \dots, m-1$).

В задаче (10.57) проведем аналогичную замену $(D_h^{(m)} + \tau D_h^{(0)}) u_h = x_h$. Тогда

) Считаем, что $u_(t)$ продолжена с сохранением гладкости в некоторую окрестность отрезка $[0, 1]$.

$$D_h^{(\kappa)} u_h = D_h^{(\kappa)} G_h x_h + D_h^{(\kappa)} v_h \quad (\kappa = 0, 1, \dots, m-1),$$

где v_h - решение задачи (10.30), а G_h - оператор, определенный в п. 10.2 на основании условия (G); согласно лемме 10.5 выполнение (G) вытекает из (K). Задача (10.57) сведется к уравнению

$$x_h = T_h x_h + f_h, \quad (10.63)$$

в котором

$$T_h x_h = - \sum_{\kappa=0}^{m-1} a_{\kappa h} D_h^{(\kappa)} G_h x_h + r G_h x_h, \quad (10.64)$$

$$f_h = \pi_h b - \sum_{\kappa=0}^{m-1} a_{\kappa h} D_h^{(\kappa)} v_h + r D_h^{(0)} v_h. \quad (10.65)$$

Уравнение (10.63) будем рассматривать в пространстве X_h .

Оно имеет решение $x_h^* \in X_h$ тогда и только тогда, когда задача (10.57) имеет решение $u_h^* \in U_h$, и эти решения связаны равенствами $(D_h^{(m)} + r D_h^{(0)}) u_h^* = x_h^*$ и

$$u_h^* = G_h x_h^* + v_h. \quad (10.66)$$

Из выражений f и f_h замечаем (см. лемму 10.1), что

$\|f_h - \pi_h f\| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Используя лемму 10.3 и предложение

1.4, заключаем, что последовательность операторов $T_h \in \mathcal{L}(X_h, X_h)$

компактно аппроксимирует оператор $T \in \mathcal{L}(C, C)$ по отношению к

связывающим операторам $\pi_h \in \mathcal{L}(C, X_h)$. По теореме 2.1 (см.

также замечание 2.1 к нему) уравнение (10.63) имеет при доста-

точно малых h единственное решение x_h^* , $\|x_h^* - \pi_h x^*\| \rightarrow 0$

при $h \rightarrow 0$ и справедлива оценка

$$\|x_h^* - \pi_h x^*\| \leq c \|\pi_h (T x^* + f) - (T_h \pi_h x^* + f_h)\|.$$

Используя определения T , T_h , f , f_h , а также (10.62), нахо-

дим

$$\|\pi_h(Tx^* + f) - (T_h \pi_h x^* + f_h)\| \leq \max_{0 \leq k \leq m-1} \|\pi_h D^k u_* - D_h^{(k)} \tilde{u}_h\|,$$

где $\tilde{u}_h = G_h \pi_h x^* + v_h$ - решение задачи (10.37) при $x = x^*$; решение u_* задачи (10.56) удовлетворяет (10.36) при том же $x = x^*$. По лемме 10.2

$$\|\pi_h D^k u_* - D_h^{(k)} \tilde{u}_h\| \leq c \max_{0 \leq k \leq m} \|D_h^{(k)} \pi_h u_* - \pi_h D^k u_*\|. \quad (10.67)$$

Из трех последних неравенств заключаем, что

$$\|x_h^* - \pi_h x^*\| \leq c \max_{0 \leq k \leq m} \|D_h^{(k)} \pi_h u_* - \pi_h D^k u_*\|. \quad (10.68)$$

Из существования единственного решения x_h^* уравнения (10.63) вытекает, что задача (10.57) имеет единственное решение $u_h^* \in \mathcal{U}_h$. Ввиду (10.66) имеем

$$\begin{aligned} \|D_h^{(k)} u_h^* - \pi_h D^k u_*\| &\leq \|D_h^{(k)} (u_h^* - \tilde{u}_h)\| + \|D_h^{(k)} \tilde{u}_h - \pi_h D^k u_*\| \leq \\ &\leq \|D_h^{(k)} G_h\| \|x_h^* - \pi_h x^*\| + \|D_h^{(k)} \tilde{u}_h - \pi_h D^k u_*\|, \end{aligned}$$

и из (10.67), (10.68) и (10.28) вытекает оценка (10.59). Сходимость (10.58) вытекает из оценки (10.59) и (10.17).

Теорема 10.1 доказана.

10.4. Нелинейная краевая задача. Рассмотрим нелинейную краевую задачу

$$\left. \begin{aligned} u^{(m)} &= f(t, u, u', \dots, u^{(m-1)}) \quad (0 \leq t \leq 1), \\ \varphi_i(u) &= \gamma_i \quad (i=1, \dots, m) \end{aligned} \right\} \quad (10.69)$$

и соответствующую ей разностную задачу

$$\left. \begin{aligned} D_h^{(m)} u_h &= f_h(t_h, D_h^{(0)} u_h, D_h^{(1)} u_h, \dots, D_h^{(m-1)} u_h), \\ \varphi_{i,h}(u_h) &= \gamma_i \quad (i=1, \dots, m) \end{aligned} \right\} \quad (10.70)$$

(определение φ_i и $\varphi_{i,h}$ см. в (10.56) и (10.57)). Здесь $t_h = (0, h, 2h, \dots, nh)$, а f_h - дискретный аналог функции f . В компонентной записи первое из условий (10.70) имеет вид

$$[D_h^{(m)} u_h]_i = f(ih, [D_h^{(0)} u_h]_i, \dots, [D_h^{(m-1)} u_h]_i) \quad (i=0, 1, \dots, n).$$

Тем самым дано достаточно четкое определение f_h :

$$[f_h(t_h, y_h, \dots)]_i = f(ih, [y_h]_i, \dots) \quad (i=0, 1, \dots, n).$$

Теорема 10.2. Пусть выполнено условие (К) из п. 10.1.

Пусть задача (10.69) имеет решение $u_*(t)$, и пусть функция $f(t, u_0, u_1, \dots, u_{m-1})$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные по u_0, u_1, \dots, u_{m-1} при

$$0 \leq t \leq 1, |u_k - u_*^{(k)}(t)| \leq \delta \quad (k=0, 1, \dots, m-1; \delta = \text{const} > 0) \quad (10.71)$$

Пусть, наконец, линеаризованная задача

$$v^{(m)} = \sum_{k=0}^{m-1} a_k(t; u_*) v^{(k)}, \quad \varphi_i(v) = 0 \quad (i=1, \dots, m), \quad (10.72)$$

где

$$a_k(t; u_*) = \frac{\partial f(t, u_*(t), \dots, u_*^{(m-1)}(t))}{\partial u_k} \quad (k=0, 1, \dots, m-1), \quad (10.73)$$

имеет лишь нулевое решение $v(t) \equiv 0$.

Тогда найдутся такие $h_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$, что при $h \leq h_0$ разностная задача (10.70) имеет единственное решение $u_h^* \in \mathcal{U}_h$, удовлетворяющее неравенствам

$$\|D_h^{(k)} u_h^* - \pi_h D^k u_*\|_{X_h} \leq \delta_0 \quad (k=0, 1, \dots, m). \quad (10.74)$$

Имеет место сходимость

$$\|D_h^{(k)} u_h^* - \pi_h D^k u_*\|_{X_h} \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0 \quad (k=0, 1, \dots, m) \quad (10.75)$$

и справедлива оценка

$$\max_{0 \leq k \leq m} \|D_h^{(k)} u_h^* - \pi_h D^k u_*\|_{X_h} \leq c \max_{0 \leq k \leq m} \|D_h^{(k)} \Pi_h u_* - \pi_h D^k u_*\|_{X_h} \quad (10.76)$$

Доказательство опирается на теорему 4.1.

Пусть γ не является собственным значением задачи $u^{(m)} + \gamma u = 0$, $\varphi_i(u) = 0$ ($i=1, \dots, m$). Замена $u^{(m)} + \gamma u = \chi$ сводит квазую задачу (10.69) к уравнению

$$x = Tx \quad (10.77)$$

в пространстве $C[0,1]$; здесь

$$Tx = f(t, Gx+v, \dots, G^{(m-1)}x+v^{(m-1)}) + \tau Gx + \tau v, \quad (10.78)$$

$v(t)$ - решение задачи (10.29), $G^{(k)}$ - оператор, определенный в (10.42). Уравнение (10.77) имеет решение x^* , связанное с решением u_* задачи (10.69) равенством

$$u_* = Gx^* + v. \quad (10.79)$$

Оператор T дифференцируем по Фреше, и

$$T'(x^*)z = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k(t; u_*) G^{(k)}z + \tau Gz$$

(см. (10.73)); из условия, наложенного на задачу (10.72), вытекает, что уравнение $z = T'(x^*)z$ имеет лишь нулевое решение. Итак, для уравнения (10.77) выполнены условия 1) и 2) теоремы 4.1.

Заменой $(D_h^{(m)} + \tau D_h^{(0)})u_h = x_h$ сведем разностную задачу (10.70) к уравнению

$$x_h = T_h x_h \quad (10.80)$$

в пространстве X_h ; здесь

$$T_h x_h = f_h(t_h, D_h^{(0)}(G_h x_h + v_h), \dots, D_h^{(m-1)}(G_h x_h + v_h)) + \tau D_h^{(0)}(G_h x_h + v_h), \quad (10.81)$$

v_h - решение задачи (10.30). Задача (10.70) имеет решение $u_h^* \in U_h$ тогда и только тогда, когда уравнение (10.80) имеет решение x_h^* , и эти решения связаны равенством

$$u_h^* = G_h x_h^* + v_h. \quad (10.82)$$

Из дифференцируемости f в области (10.71) и из неравенств (10.28) вытекает, что операторы T_h дифференцируемы по Фреше

в некотором шаре $\|x_h - \pi_h x^*\| \leq \delta$, где δ положительно и не зависит от h . При этом

$$T'_h(x_h)z_h = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{kh}(x_h) D_h^{(k)} G_h z_h + \tau D_h^{(0)} G_h z_h,$$

где $\alpha_{kh}(x_h)$ - оператор покомпонентного умножения на вектор с компонентами

$$[\alpha_{kh}(x_h)]_i = \frac{\partial f(ih, [D_h^{(0)}(G_h x_h + v_h)]_i, \dots, [D_h^{(m-1)}(G_h x_h + v_h)]_i)}{\partial u_k} \\ (i=0, 1, \dots, n)$$

(для обозначения этого вектора мы использовали тот же символ, что и для оператора умножения на него). Из непрерывности функций $\partial f / \partial u_k$ вытекает существование такой непрерывной функции $\omega(\tau)$, $\omega(0) = 0$, что при всех h

$$\|T'_h(x_h) - T'_h(\pi_h x^*)\| \leq \omega(\|x_h - \pi_h x^*\|).$$

Используя лемму 10.3, легко убедиться, что последовательность операторов $T'_h(\pi_h x^*) \in \mathcal{L}(X_h, X_h)$ компактно аппроксимирует оператор $T'(x^*) \in \mathcal{L}(C, C)$ по отношению к связывающим отображениям $\pi_h \in \mathcal{L}(C, X_h)$. Итак, выполнены условия 3) и 5) теоремы 4.1; условие 6) очевидно, и остается установить ещё условие 4): $\|\pi_h T x^* - T_h \pi_h x^*\| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Имеем

$$\pi_h T x^* - T_h \pi_h x^* = \pi_h f(t, u_*, \dots, u_*^{(m-1)}) - f_h(t_h, D_h^{(0)} \tilde{u}_h, \dots, D_h^{(m-1)} \tilde{u}_h) + \\ + \tau (\pi_h u_* - D_h^{(0)} \tilde{u}_h),$$

где $u_* = G x_* + v$ и $\tilde{u}_h = G_h \pi_h x^* + v_h$. Отсюда ввиду дифференцируемости f и леммы 10.2 находим

$$\|\pi_h T x^* - T_h \pi_h x^*\| \leq c \max_{0 \leq k \leq m-1} \|D_h^{(k)} \tilde{u}_h - \pi_h D^k u_*\| \leq \\ \leq \max_{0 \leq k \leq m} \|D_h^{(k)} \pi_h u_* - \pi_h D^k u_*\| \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0. \quad (10.83)$$

Мы показали, что все условия теоремы 4.1 выполнены. По теореме 4.1 найдутся такие h_0 и $\delta_0 > 0$, что при $h \leq h_0$ уравнение (10.80) имеет в шаре $\|x_h - \pi_h x^*\| \leq \delta_0$ единственное решение x_h^* , и

$$\|x_h^* - \pi_h x^*\| \leq c \|\pi_h T x^* - T_h \pi_h x^*\|. \quad (10.84)$$

Нетрудно видеть, что это равносильно утверждениям доказываемой теоремы. В частности, оценка (10.76) выводится из (10.83) и (10.84) точно таким же способом, как в конце доказательства теоремы 10.1.

Теорема 10.2 доказана.

Ослабим теперь условия теоремы 10.2 о гладкости β .

Теорема 10.3. Пусть выполнено условие (K). Пусть задача (10.69) имеет решение $u_*(t)$, и пусть функция $f(t, u_0, u_1, \dots, u_{m-1})$ непрерывна в области (10.71). Пусть неподвижная точка $x^* = u_*^{(m)} + \tau u_*$ (вполне непрерывного в $C[0, 1]$) оператора (10.78) изолирована и имеет ненулевой индекс.

Тогда найдутся такие $h_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$, что при $h \leq h_0$ равносильная задача (10.70) имеет хотя бы одно решение u_h^* , удовлетворяющее неравенствам (10.74), и для всех таких решений имеет место сходимостъ (10.75).

Доказательство опирается на теорему 5.2 и равносильность задач (10.69) и (10.70) соответственно уравнениям (10.77) и (10.80). Операторы T и T_h определены и вполне непрерывны на некоторых достаточно малых шарах $\bar{\Omega}$ ($\|x - x^*\|_C \leq \delta$) и $\bar{\Omega}_h$ ($\|x_h - \pi_h x^*\|_{X_h} \leq \delta$), уменьшением δ можно добиться, чтобы x^* было единственным решением уравнения (10.77) в $\bar{\Omega}$. С помощью леммы 10.3 легко доказать,

что последовательность операторов $T_h: \bar{\Omega}_h \rightarrow X_h$ компактно аппроксимирует оператор $T: \bar{\Omega} \rightarrow C[0,1]$. Не представляет труда проверить и остальных условий теоремы 5.2, и из неё получаем результат, равносильный утверждению доказываемой теоремы.

Теорема 10.8 доказана.

10.5. Проблема собственных значений. В этом пункте мы докажем сходимость разностного метода при отыскании собственных значений и корневых подпространств задачи

$$\left. \begin{aligned} u^{(m)} + \sum_{k=0}^{m-1} a_k(t) u^{(k)} &= \mu \sum_{k=0}^{m-1} b_k(t) u^{(k)} \quad (0 \leq t \leq 1), \\ \varphi_i(u) &= 0 \quad (i=1, \dots, m). \end{aligned} \right\} (10.85)$$

На протяжении всего пункта предполагается, что коэффициенты $a_k(t)$ и $b_k(t)$ непрерывны и что $\mu=0$ не является собственным значением задачи (10.85). Множество собственных значений задачи (10.85) не более чем счетно и не имеет в комплексной плоскости (конечных) точек сгущения.

Пусть μ_0 - собственное значение задачи (10.85). Обозначим

$$\mathcal{U}_0^{(j)} = \{u_0 \in \mathcal{D}(L): (I - \mu_0 L^{-1}M)u_0 = 0\} \quad (j=1, 2, \dots),$$

где

$$Lu = u^{(m)} + \sum_{k=0}^{m-1} a_k(t) u^{(k)}, \quad Mu = \sum_{k=0}^{m-1} b_k(t) u^{(k)},$$

причем область определения $\mathcal{D}(L)$ оператора L состоит из m раз непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих краевым условиям $\varphi_i(u) = 0$ ($i=1, \dots, m$), а $\mathcal{D}(M) \supset \mathcal{D}(L)$. Тогда

$\mathcal{U}_0^{(1)} \subset \mathcal{U}_0^{(2)} \subset \dots \subset \mathcal{U}_0^{(j)} \subset \dots$, причем среди этих подпространств

встречается лишь конечное число различных. Пусть $\mathcal{U}_0^{(l-1)} \neq \mathcal{U}_0^{(l)}$ и $\mathcal{U}_0^{(l)} = \mathcal{U}_0^{(j)}$ при $j > l$. Тогда говорят, что собственное значение μ_0 имеет ранг l , а $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_0^{(l)}$ называют корневым подпространством задачи (10.85).

В качестве приближенных собственных значений задачи (10.85) примем собственные значения разностной задачи

$$\left. \begin{aligned} D_h^{(m)} u_h + \sum_{k=0}^{m-1} a_{kh} D_h^{(k)} u_h &= \mu \sum_{k=0}^{m-1} b_{kh} D_h^{(k)} u_h, \\ \varphi_{ih}(u_h) &= 0 \quad (i=1, \dots, m) \end{aligned} \right\} (10.86)$$

(определение a_{kh} см. в начале п. 10.3; совершенно аналогично определяем b_{kh}). Разностное приближение корневого подпространства \mathcal{U}_0 задачи (10.85) строится следующим образом. Пусть \mathcal{U}_0 соответствует собственному значению μ_0 , и пусть $\delta > 0$ таково, что в круге $|\mu - \mu_0| \leq \delta$ нет других собственных значений задачи (10.85), кроме μ_0 . Для любого собственного значения μ_h задачи (10.86), попавшего в круг $|\mu - \mu_0| \leq \delta$, введем множества

$$\mathcal{U}_h^{(j)}(\mu_h) = \{ u_h \in \mathcal{U}_h^0 : (I_h - \mu_h L_h^{-1} M_h)^j u_h = 0 \} \quad (j=1, 2, \dots),$$

где L_h и M_h - разностные аналоги операторов L и M ,

$$L_h u_h = D_h^{(m)} u_h + \sum_{k=0}^{m-1} a_{kh} D_h^{(k)} u_h, \quad M_h u_h = \sum_{k=0}^{m-1} b_{kh} D_h^{(k)} u_h,$$

причем областью определения оператора L_h является \mathcal{U}_h^0 - подпространство пространства \mathcal{U}_h , состоящее из удовлетворяющих краевым условиям $\varphi_{ih}(u_h) = 0$ ($i=1, \dots, m$) векторов $u_h \in \mathcal{U}_h$. Обратимость оператора L_h вытекает из обратимости L (см. теорему 10.1). Под разностным приближением \mathcal{U}_h корневого

подпространства \mathcal{U}_0 . Задачи (10.85) будем понимать линейную оболочку всех тех подпространств $\mathcal{U}_h(\mu_h)$, для которых $|\mu_h - \mu_0| \leq \delta$.

Теорема 10.4. Пусть выполнено условие (K) из п. 10.1. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Каждое собственное значение μ_0 задачи (10.85) является пределом при $h \rightarrow 0$ собственных значений μ_h задач (10.86) и, наоборот, собственные значения задач (10.86) могут при $h \rightarrow 0$ сгущаться только к собственным значениям задачи (10.85).

2) Если задача (10.85) имеет собственное значение μ_0 , а \mathcal{U}_0 и \mathcal{U}_h - соответствующие ему корневое подпространство и его равностное приближение, то при $h \rightarrow 0$ имеет место сходимость

$$v_h \equiv \sup_{u_h \in \mathcal{U}_h, \|u_h\|_{C_h} = 1} \inf_{u_0 \in \mathcal{U}_0} \max_{0 \leq k \leq m} \|D_h^{(k)} u_h - \pi_h D^k u_0\|_{X_h} \rightarrow 0, \quad (10.87)$$

$$v'_h \equiv \sup_{u_0 \in \mathcal{U}_0, \|u_0\|_C = 1} \inf_{u_h \in \mathcal{U}_h} \max_{0 \leq k \leq m} \|D_h^{(k)} u_h - \pi_h D^k u_0\|_{X_h} \rightarrow 0; \quad (10.88)$$

здесь используются нормы $\|u_0\|_C = \max_{0 \leq t \leq 1} |u_0(t)|$, $\|u_h\|_{C_h} = \max_{-m_1 \leq i \leq n+m_2} |u_i|$.

3) Справедливы оценки

$$|\mu_h - \mu_0| \leq c e_h^{1/\ell}, \quad v_h \leq c e_h, \quad v'_h \leq c e_h, \quad (10.89)$$

где $c = \text{const}$, ℓ - ранг собственного значения μ_0 задачи (10.85),

$$e_h = \sup_{u_0 \in \mathcal{U}_0, \|u_0\|_C = 1} \max_{0 \leq k \leq m} \|D_h^{(k)} \pi_h u_0 - \pi_h D^k u_0\|_{X_h}. \quad (10.90)$$

Доказательство построим, опираясь на тео-

рему 3.2. Пусть τ не является собственным значением задачи $u^{(m)} + \tau u = 0$, $\varphi_i(u) = 0$ ($i=1, \dots, m$). Заменой $u^{(m)} + \tau u = x$ сведем задачу (10.85) к уравнению

$$Ax = \mu Bx, \quad (10.91)$$

где $A, B \in \mathcal{L}(C, C)$,

$$Ax = x + \sum_{k=0}^{m-1} a_k(t) G^{(k)} x - \tau Gx, \quad Bx = \sum_{k=0}^{m-1} b_k(t) G^{(k)} x.$$

Аналогичная замена $(D_h^{(m)} + \tau D_h^{(0)}) u_h = x_h$ сводит разностную задачу (10.86) к уравнению

$$A_h x_h = \mu B_h x_h, \quad (10.92)$$

где $A_h, B_h \in \mathcal{L}(X_h, X_h)$,

$$A_h x_h = x_h + \sum_{k=0}^{m-1} a_{kh} D_h^{(k)} G_h x_h - \tau D_h^{(0)} G_h x_h, \quad B_h x_h = \sum_{k=0}^{m-1} b_{kh} D_h^{(k)} G_h x_h.$$

Для применения теоремы 3.2 положим $E = F = C[0, 1]$, $E_n = F_n = X_h$, $p_n = q_n = \pi_h$ ($n=1, 2, \dots$; $h=1/n$). Проведем проверку условий теоремы 3.2. С помощью леммы 10.3 заключаем, что последовательность операторов $B_h \in \mathcal{L}(X_h, X_h)$ компактно аппроксимирует вполне непрерывный оператор $B \in \mathcal{L}(C, C)$ по отношению к связывающим отображениям $\pi_h \in \mathcal{L}(C, X_h)$. Далее, A имеет обратный $A^{-1} \in \mathcal{L}(C, C)$, ибо в противном случае $\mu = 0$ было бы собственным значением задачи (10.85), вопреки предположению, сделанному в начале пункта. Наконец, имеем $A = [-T, A_h = I_h - T_h$ (см. (10.61) и (10.64)), и, как уже отмечалось при доказательстве теоремы 10.1, последовательность $T_h \in \mathcal{L}(X_h, X_h)$ компактно аппроксимирует оператор $T \in \mathcal{L}(C, C)$. На основании леммы 2.1 заключаем отсюда, что последовательность операторов A_h устойчиво аппроксимирует оператор A . Таким образом,

все условия теоремы 3.2 для уравнений (10.91) и (10.92) выполнены.

Утверждение 1) теперь следует из теоремы 3.2 непосредственно. Для доказательства 2) и 3) нужно заметить, что корневое подпространство \mathcal{U}_0 задачи (10.85) и его разностное приближение \mathcal{U}_h выражаются в виде

$$\mathcal{U}_0 = G \mathcal{X}_0, \quad \mathcal{U}_h = G_h \mathcal{X}_h, \quad (10.93)$$

где \mathcal{X}_0 - корневое подпространство уравнения (10.91), соответствующее μ_0 (корневое подпространство оператора $A^{-1}B$ соответствующее $\lambda_0 = 1/\mu_0$), а \mathcal{X}_h - линейная оболочка корневых подпространств уравнения (10.92), соответствующих близким к μ_0 собственным значениям. Непосредственное применение теоремы 3.2 дает сходимость

$$\theta_h \equiv \sup_{x_h \in \mathcal{X}_h, \|x_h\|=1} \inf_{x_0 \in \mathcal{X}_0} \|x_h - \pi_h x_0\| \rightarrow 0, \quad (10.94)$$

$$\theta'_h \equiv \sup_{x_0 \in \mathcal{X}_0, \|x_0\|=1} \inf_{x_h \in \mathcal{X}_h} \|x_h - \pi_h x_0\| \rightarrow 0 \quad (10.95)$$

и оценки

$$|\mu_h - \mu_0| \leq c \varepsilon_h^{1/l}, \quad \theta_h \leq c \varepsilon_h, \quad \theta'_h \leq c \varepsilon_h, \quad (10.96)$$

где

$$\varepsilon_h = \sup_{x_0 \in \mathcal{X}_0, \|x_0\|=1} (\|\pi_h A x_0 - A_h \pi_h x_0\| + \|\pi_h B x_0 - B_h \pi_h x_0\|).$$

Используя (10.93) и неравенство (10.43), находим, что

$$\varepsilon_h \leq c e_h, \quad (10.97)$$

где e_h - определенная в (10.90) величина. Для $u_h \in \mathcal{U}_h, u_0 \in \mathcal{U}_0$ возьмем такие $x_h \in \mathcal{X}_h, x_0 \in \mathcal{X}_0$, что (см. (10.93)) $u_h = G_h x_h$,

$u_0 = G x_0$. Тогда

$$\begin{aligned} \|D_h^{(k)} u_h - \pi_h D^k u_0\| &= \|D_h^{(k)} G_h x_h - \pi_h G^{(k)} x_0\| \leq \\ &\leq \|D_h^{(k)} G_h\| \|x_h - \pi_h x_0\| + \|D_h^{(k)} G_h \pi_h x_0 - \pi_h G^{(k)} x_0\| \quad (0 \leq k \leq m-1). \end{aligned}$$

При $k = m$ имеем $D_h^{(m)} u_h - \pi_h D^m u_0 = (x_h - \pi_h x_0) - \tau(D_h^{(0)} u_h - \pi_h u_0)$, и из последних неравенств с помощью (10.28) и (10.43) заключаем, что

$$v_h \leq c(\theta_h + e_h), \quad v_h' \leq c(\theta_h' + e_h'), \quad (10.98)$$

где $v_h, v_h', \theta_h, \theta_h'$ — определенные в (10.87), (10.88), (10.94), (10.95) величины. При этом следует иметь в виду, что оператор $D^m + \tau I$ ограничен на конечномерном подпространстве $\mathcal{U}_0 \subset C[0,1]$ из своей области определения:

$$\sup_{u_0 \in \mathcal{U}_0, \|u_0\|_C = 1} \|u_0^{(m)} + \tau u_0\|_C < \infty.$$

Аналогичное неравенство для $D_h^{(m)} + \tau D_h^{(0)}$ выполняется равномерно по h :

$$\sup_h \sup_{u_h \in \mathcal{U}_h, \|u_h\|_{C_h} = 1} \|D_h^{(m)} u_h + \tau D_h^{(0)} u_h\|_{X_h} < \infty \quad (10.99)$$

(доказательство приведем чуть позже). Последние два неравенства позволили в определениях v_h и v_h' использовать нормы $\|u_0\|_C$ и $\|u_h\|_{C_h}$.

Из (10.96)–(10.98) вытекают оценки (10.89)–(10.90), а из этих оценок и (10.17) — сходимость (10.87) и (10.88).

Итак, остается установить неравенство (10.99). Допустим, что оно нарушено. Тогда существуют такие $x_h \in X_h, \|x_h\| = 1$ ($n = 1, 2, \dots; h = 1/n$), что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|G_h x_h\|_{C_h} = 0$, а вместе с тем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|D_h^{(0)} G_h x_h\|_{X_h} = 0.$$

Ввиду (10.94) существуют такие $x_0^h \in X_0$, что $\|x_h - \pi_h x_0^h\| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow \infty$. Тогда

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|D_h^{(0)} G_h \pi_h x_0^h\| = 0.$$

Далее, ввиду компактности последовательности $\{x_0^h\} \subset X_0$ в $C[0,1]$, получаем из леммы 10.3, что

$$\|D_h^{(0)} G_h \pi_h x_0^h - \pi_h G x_0^h\| \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Значит,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\pi_h G x_0^h\| = 0,$$

и для некоторой предельной точки x_0 последовательности $\{x_0^h\}$ имеем $G x_0 = 0$; очевидно, $\|x_0\|_C = 1$. Это противоречит определению G как интегрального оператора, ядро которого — функция Грина. Следовательно, (10.99) имеет место.

Теорема 10.4 доказана.

10.6. Случай интегро-дифференциальных уравнений. Все доказанные в этом параграфе теоремы о сходимости разностного метода допускают перенос на интегро-дифференциальные уравнения, в которых производные аппроксимируются указанным в п. 10.1 способом, а интегралы аппроксимируются какой-нибудь квадратурной формулой. Мы ограничимся переформулировкой теоремы 10.2 на нелинейную интегро-дифференциальную задачу

$$\left. \begin{aligned} u^{(m)} &= f(t, u, u', \dots, u^{(m-1)}, \int_0^1 \mathcal{X}(t, s, u(s), \dots, u^{(m)}(s)) ds), \\ \varphi_i(u) &= \gamma_i \quad (i=1, \dots, m). \end{aligned} \right\} (10.100)$$

Составим соответствующую дискретную задачу (дадим её в

компонентной записи)

$$\left. \begin{aligned} [D_h^{(m)} u_h]_i &= f\left(ih, [D_h^{(0)} u_h]_i, [D_h^{(1)} u_h]_i, \dots \right. \\ &\left. \dots, [D_h^{(m-1)} u_h]_i, \sum_{j=0}^n \alpha_{jn} \mathcal{K}(ih, jh, [D_h^{(0)} u_h]_j, \dots, [D_h^{(m)} u_h]_j) \right) \\ &\quad \left(i=0, 1, \dots, n; h = \frac{1}{n} \right), \\ \varphi_{ik}(u_h) &= \gamma_i \quad (i=1, \dots, m; u_h \in \mathcal{U}_h). \end{aligned} \right\} (10.101)$$

Мы использовали здесь квадратурную формулу

$$\int_0^1 z(s) ds = \sum_{j=0}^n \alpha_{jn} z(jh) + \Psi_n(z). \quad (10.102)$$

Теорема 10.5. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) соблюдается условие (К) из п. 10.1;
- 2) квадратурный процесс (10.102) сходится, т.е. $\Psi_n(z) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для каждой непрерывной на $[0, 1]$ функции $z(s)$;
- 3) задача (10.100) имеет решение $u_*(t)$;
- 4) функция $\mathcal{K}(t, s, u_0, \dots, u_m)$ непрерывна и имеет непрерывные производные по u_0, \dots, u_m при $0 \leq t, s \leq 1, |u_k - u_*^{(k)}(s)| \leq \delta$ ($k=0, 1, \dots, m; \delta = \text{const} > 0$);
- 5) функция $f(t, u_0, \dots, u_{m-1}, v)$ непрерывна и имеет непрерывные производные по u_0, \dots, u_{m-1}, v при $0 \leq t \leq 1, |u_k - u_*^{(k)}(t)| \leq \delta, |v - v_*(t)| \leq \delta$ ($k=0, 1, \dots, m-1$),

где

$$v_*(t) = \int_0^1 \mathcal{K}(t, s, u_*(s), \dots, u_*^{(m)}(s)) ds;$$

6) линейризованная задача

$$u^{(m)} = \sum_{k=0}^{m-1} a_k(t) u^{(k)} + \sum_{k=0}^m \int_0^1 \mathcal{K}_k(t, s) u^{(k)}(s) ds,$$

$$\varphi_i(u) = 0 \quad (i=1, \dots, m),$$

где

$$a_k(t) = \frac{\partial f(t, u_*(t), \dots, u_*^{(m-1)}(t), v_*(t))}{\partial u_k},$$

$$\mathcal{K}_k(t, s) = \frac{\partial f(t, u_*(t), \dots, u_*^{(m-1)}(t), v_*(t))}{\partial v} \frac{\partial \mathcal{K}(t, s, u_*(s), \dots, u_*^{(m)}(s))}{\partial u_k},$$

имеет лишь нулевое решение $u(t) \equiv 0$.

Тогда найдутся такие n_0 и $\delta_0 > 0$, что при $n \geq n_0$ (при $h \leq h_0 = \frac{1}{n_0}$) дискретная задача (10.101) имеет единственное решение $u_h^* \in \mathcal{U}_h$, удовлетворяющее неравенствам

$$\|D_h^{(k)} u_h^* - \pi_h D^k u_*\|_{X_h} \leq \delta_0 \quad (k=0, 1, \dots, m).$$

При $n \rightarrow \infty$ (при $h \rightarrow 0$) имеет место сходимость

$$\|D_h^{(k)} u_h^* - \pi_h D^k u_*\|_{X_h} \rightarrow 0 \quad (k=0, 1, \dots, m).$$

Справедливы оценки

$$\|D_h^{(k)} u_h^* - \pi_h D^k u_*\|_{X_h} \leq C(\varepsilon_h + \delta_n) \quad (k=0, 1, \dots, m),$$

где

$$\varepsilon_h = \max_{0 \leq k \leq m} \|D_h^{(k)} \pi_h u_* - \pi_h D^k u_*\|_{X_h},$$

$$\delta_n = \max_{0 \leq i \leq n} |\psi_n(z_{in})|, \quad z_{in}(s) = \mathcal{K}(ih, s, u_*(s), \dots, u_*^{(m)}(s)),$$

$\psi_n(z)$ - дополнительный член квадратурной формулы (10.102).

Доказательство строится по той же схеме, что и доказательство теоремы 10.2. При этом привлекаются некоторые результаты из §8, а также предложение 1.5.

10.7. Построение разностных схем, удовлетворяющих условию (K). Во всех теоремах сходимости, доказанных в п. 10.3-10.5, предполагалось выполненным условие (K). Само это условие связано лишь с оператором $D_h^{(m)}$ - аппроксимацией

старшей производной уравнения, и не связано с производными более низких порядков. Поэтому достаточно пересмотреть лишь построение $D_h^{(m)}$.

Напомним, что при построении оператора $D_h^{(m)} \in \mathcal{L}(U_h, X_h)$ мы брали в основу любое такое разностное выражение

$$u^{(m)}(t) \approx h^{-m} \sum_{j=-r}^s b_j u(t+jh), \quad (10.103)$$

что

$$h^{-m} \sum_{j=-r}^s b_j u(t+jh) \rightarrow u^{(m)}(t) \text{ при } h \rightarrow 0 \text{ для } \forall u \in C^{(m)} \quad (10.104)$$

(индекс m при b_j , r и s теперь опускаем). Из (10.104) следует, что функция

$$\chi(z) = \sum_{j=-r}^s b_j z^j \quad (z - \text{комплексная переменная})$$

представима в виде ^{*}

$$\chi(z) = z^{-r} (z^{-1})^m Q(z),$$

где $Q(z)$ - такой многочлен, что $Q(1) = 1$ (он называется определяющим многочленом разностного выражения (10.103)).

Ниже мы считаем выполненным следующее условие: ни один из корней $Q(z)$ не лежит на единичной окружности. Обозначим через ρ и σ суммы кратностей корней $Q(z)$, лежащих соответственно внутри и вне круга $|z| < 1$. Очевидно, степень $Q(z)$ равна $r+s-m$, так что $\rho + \sigma = r+s-m$, или

$$\rho + \sigma + m = r + s.$$

Второе условие, накладываемое на разностное выражение (10.103) заключается в следующем:

^{*} См. [38]; см. также начало п. 10.2.

$$\rho \leq \tau, \quad \sigma \leq \nu.$$

Положим

$$m_1 = \tau - \rho, \quad m_2 = \nu - \sigma \quad (m_1 + m_2 = m),$$

и эти числа возьмем в основу при построении сетки (см. (10.1)).

Разностное выражение (10.103) используем во всех узлах, где это допускается используемой сеткой, т.е. при $i = \rho, \rho+1, \dots, n-\delta$. Вблизи $t=0$ и $t=1$ используем какие-нибудь другие разностные выражения, для которых выполнен аналог соотношения (10.104). Таким образом, оператор $D_h^{(m)} \in \mathcal{L}(U_h, X_h)$ определяется формулой

$$[D_h^{(m)} u_h]_i = \begin{cases} h^{-m} \sum_{j=-m_1}^{\mu_i} a_{ij} u_j & \text{при } i=0, 1, \dots, \rho-1 \quad (a_{i, -m_1} \neq 0 \neq a_{i, \mu_i}), \\ h^{-m} \sum_{j=-\tau}^{\nu} b_{ij} u_{i+j} & \text{при } i=\rho, \rho+1, \dots, n-\delta, \\ h^{-m} \sum_{j=n-\nu}^{n+m_2} c_{ij} u_j & \text{при } i=n-\delta+1, \dots, n \quad (c_{i, n-\nu} \neq 0 \neq c_{i, n+m_2}). \end{cases}$$

Определяющие многочлены разностных выражений, используемых в первых ρ узлах и последних δ узлах, обозначим через $\mathcal{P}_1(z), \dots, \mathcal{P}_\rho(z)$ и $\mathcal{R}_1(z), \dots, \mathcal{R}_\delta(z)$.

Оказывается, что для построенного оператора $D_h^{(m)}$ условие (K) выполнено, если "крайние" $\rho + \delta$ разностных выражений определенным образом согласованы с "основным" разностным выражением (10.103). Условие согласованности выражается в виде отличия от нуля двух определителей порядка ρ и δ , элементы которых строятся по значениям многочленов $\mathcal{P}_i(z)$ и $\mathcal{R}_i(z)$ и их производных на корнях многочлена $Q(z)$. В

случае, когда все корни $Q(z)$ простые, эти определители записываются достаточно просто, и рассмотрением этого случая мы в дальнейшем и ограничимся.

Теорема 10.6. Пусть корни z_1, \dots, z_p ($|z_i| < 1$) и z_1^*, \dots, z_δ^* ($|z_i^*| > 1$) определяющего многочлена $Q(z)$ простые, и пусть

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} P_1(z_1) & P_2(z_1) & \dots & P_\rho(z_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_1(z_\rho) & P_2(z_\rho) & \dots & P_\rho(z_\rho) \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} R_1^*\left(\frac{1}{z_1^*}\right) & R_2^*\left(\frac{1}{z_1^*}\right) & \dots & R_\delta^*\left(\frac{1}{z_1^*}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_1^*\left(\frac{1}{z_\delta^*}\right) & R_2^*\left(\frac{1}{z_\delta^*}\right) & \dots & R_\delta^*\left(\frac{1}{z_\delta^*}\right) \end{vmatrix} \neq 0,$$

где $R_i^*(z) = R_i\left(\frac{1}{z}\right) z^{m_2 + \nu_i - m}$ ($i = 1, \dots, \delta$; $m_2 + \nu_i - m$ - степень многочлена $R_i(z)$).

Тогда для построенного оператора $D_h^{(m)}$ условие (K) выполнено.

Доказательство. Введем обозначения для коэффициентов многочленов $P_i(z)$, $Q(z)$, $R_i(z)$:

$$P_i(z) = \alpha_{i0} + \alpha_{i1}z + \dots + \alpha_{m_1 + \mu_i - m} z^{m_1 + \mu_i - m} \quad (i = 1, \dots, \rho),$$

$$Q(z) = \beta_{-p} + \beta_{-p+1}z + \dots + \beta_\delta z^{\rho + \delta},$$

$$R_i(z) = \gamma_{i, -m_2 - \nu_i + m} + \gamma_{i, -m_2 - \nu_i + m + 1}z + \dots + \gamma_{i0} z^{m_2 + \nu_i - m} \quad (i = 1, \dots, \delta).$$

Для любого $u_h \in U_h$ имеем (ср. 10.16)

$$D_h^{(m)} u_h = \Phi_h \bar{D}_h^m u_h, \quad (10.105)$$

где $\bar{D}_h^m \in \mathcal{L}(U_h, U_h^{(m)})$ - определенный в п. 10.1 простейший

Итак, остается исследовать обратимость матриц A_n . Обозначим через B_n квадратную матрицу, получаемую из A_n отбрасыванием первых ρ и последних σ строк и столбцов; B_n можно рассматривать, как квадратное сечение матрицы B системы Винера-Хопфа.

$$\beta_{-\rho} \xi_{i-\rho} + \dots + \beta_0 \xi_i + \dots + \beta_\sigma \xi_{i+\sigma} = \eta_i \quad (i=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Из результатов [25, 26] о методе редукции для таких систем воспользуемся следующими. Ввиду того, что $Q(z)$ не имеет корней на единичной окружности, B непрерывно обратим в пространстве m_∞ ограниченных числовых последовательностей $(\dots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \dots)$; ввиду того, что $Q(z)$ имеет ρ корней внутри, а σ корней вне единичного круга, при достаточно больших n обратимы и m_n -нормы обратных ограничены в совокупности у тех и только тех n^2 -сечений B , у которых на главной диагонали стоит β_0 . Следовательно, B_n обратим при достаточно больших n и

$$\|B_n^{-1}\| \leq c = \text{const}. \quad (10.107)$$

Покажем, что при достаточно больших n обратимы и A_n , причем

$$\|A_n^{-1}\| \leq c' = \text{const}.$$

Рассуждая от противного, допустим, что $\|A_n \xi_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для некоторых $\xi_n = (\xi_{0n}, \xi_{1n}, \dots, \xi_{nn}) \in m_{n+1}$, $\|\xi_n\| = 1$. В силу (10.107) существуют такие $\eta_n \in m_{n+1}$, что $\|\eta_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $\xi_n + \eta_n$ принадлежит подпространству векторов $\zeta_n \in m_{n+1}$ со следующим свойством: у $A_n \zeta_n$ все компоненты равны нулю, кроме, быть может, первых ρ и последних σ . Базис указанного подпространства составляется векторами

$$\zeta_n^{(i)} = (1, z_i, z_i^2, \dots, z_i^n) \quad (i=1, \dots, \rho),$$

$$\bar{\zeta}_n^{(i)} = (1/(z_i^*)^n, 1/(z_i^*)^{n-1}, \dots, 1) \quad (i=1, \dots, \rho).$$

Представив $\xi_n + \eta_n$ по этому базису и заметив, что $\|\xi_n + \eta_n\| \rightarrow 1$, $\|A_n(\xi_n + \eta_n)\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, после несложных рассуждений приходим к противоречию с условиями $\Delta_0 \neq 0$, $\Delta_1 \neq 0$ теоремы.

Теорема 10.6 доказана.

Рассмотрим в качестве примера случай $m=2$, $m_1=m_2=1$.

Оператор

$$[D_h^{(2)} u_h]_i = h^{-2}(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) \quad (i=0, 1, \dots, n).$$

аппроксимирует u'' со вторым порядком точности, и условие (K) для него выполнено. В этом примере $Q(z) \equiv 1$, $\rho = \sigma = 0$.

Оператор

$$[D_h^{(2)} u_h]_i = \begin{cases} \frac{10u_{-1} - 15u_0 - 4u_1 + 14u_2 - 6u_3 + u_4}{12h^2} & \text{при } i=0, \\ \frac{-u_{i-2} + 16u_{i-1} - 30u_i + 16u_{i+1} - u_{i+2}}{12h^2} & \text{при } i=1, \dots, n-1, \\ \frac{u_{n-4} - 6u_{n-3} + 14u_{n-2} - 4u_{n-1} - 15u_n + 10u_{n+1}}{12h^2} & \text{при } i=n \end{cases}$$

аппроксимирует u'' с четвертым порядком точности. При этом

$$Q(z) = \frac{1}{12}(-1 + 14z - z^2),$$

$$\rho = \sigma = 1, \quad z_1 = 7 - \sqrt{48} = 1/2z_1^*,$$

$$\mathcal{P}_1(z) = \frac{1}{12}(10 + 5z - 4z^2 + z^3) = \mathcal{R}_1^*(z),$$

$$\Delta_0 = \Delta_1 = \mathcal{P}_1(z_1) \neq 0,$$

и, следовательно, условие (K) выполнено.

Нетрудно построить также оператор $D_h^{(2)}$, который аппроксимирует u'' с шестым порядком точности и для которого выполнено условие (К). При аппроксимациях более высоких порядков точности возникают алгебраические трудности, связанные с нахождением корней $Q(z)$ и проверкой неравенств $\Delta_0 \neq 0, \Delta_1 \neq 0$.

ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

Результаты первой части (§§ 1-7) настоящей работы опубликованы в статьях [9-12, 14, 17] автора; результаты §7 отражены также в монографии [36]. В частности, понятие компактной аппроксимации операторов операторами в факторпространствах введено в [12], а операторами в подпространствах - в [14]; в [17] принята более общая точка зрения, не требующая, чтобы аппроксимирующие пространства были факторпространствами (или подпространствами) исходных. Сравнивая два основных определения компактной аппроксимации - определения 1.3 и 6.1, замечаем, что в первой из них требуется полной непрерывности рассматриваемых операторов, а во второй нет. Были сделаны различные попытки (см. [16], [17]) видоизменить определение 1.3 так, чтобы оно охватывало и случай не обязательно вполне непрерывных операторов при аппроксимации в факторпространствах (и, конечно, чтобы осталась в силе содержательная теория). Повидимому, полученные результаты нельзя считать законченными, и в настоящую работу мы их не включили.

Результаты §§ 1-7 весьма незначительно соприкасаются с исследованиями других авторов. В п. 1.2 и 2.1 уже говорилось о работе Н.Н.Гудовича [27], а в п. 7.2 было показано, что в схему метода Галеркина с возмущениями включается, в

частности, общая теория приближенных методов, разработанная Л.В.Канторовичем [30, 31]. Следует отметить ещё работы М.А. Красносельского, от которого исходит идея использовать понятие вращения вполне непрерывных векторных полей при доказательстве сходимости приближенных методов (он доказал таким способом сходимость метода Галеркина для нелинейных уравнений).

Что касается второй части (§§ 8-10) настоящей работы, то рассмотренным в ней вопросам, наоборот, посвящено так много работ различных авторов, что мы должны делать тщательный выбор и цитировать только работы, наиболее близкие к нашей.

Результаты §§ 8,9 о методе механических квадратур опубликованы в статьях [10, 12, 13, 17, 18] автора (см. также [20]); частично эти результаты отражены и в монографии [36]. Из работ других авторов отметим, в первую очередь, работы Л.В.Канторовича [30, 31], А.Н.Балуева [1], Н.М.Коробова [34], И.П.Мысовских [45]; литературу по более ранним работам можно найти в [32]. Остановимся на каждом из цитированных выше работ. Л.В.Канторович [30, 31] провел изучение сходимости метода механических квадратур для уравнения

$$x(t) = \int_0^1 \mathcal{K}(t,s)x(s)ds + f(t)$$

с непрерывным и периодическим (периода 1) по t и s ядром $\mathcal{K}(t,s)$, беря в основу квадратурную формулу средних прямоугольников. Использование каких-либо других квадратурных формул требует в схеме рассуждений Л.В.Канторовича преодоления немалых технических трудностей. А.Н.Балуев [1] уста-

новил сходимость метода для уравнения

$$x(t) = \int_0^1 \mathcal{K}(t, s, x(s)) ds$$

в случае использования квадратурной формулы Гаусса; от ядра требуется двухкратной дифференцируемости. Н.М.Коробов [34] доказал сходимость метода в случае использования некоторых специальных квадратурных (кубатурных) формул, полученных на основании некоторых соображений теории чисел. Сходимость метода механических квадратур в случае произвольной сходящейся квадратурной формулы одновременно, независимо и разными путями установлена автором в [10] и И.П.Мысовских в [45]. Сформулируем более четко результат И.П.Мысовских [45]. Он доказал сходимость метода механических квадратур (кубатур) для линейного уравнения

$$x(t) = \int_D \mathcal{K}(t, s) x(s) ds + f(t)$$

(D - ограниченная замкнутая область в R^m) в случае произвольной сходящейся квадратурной (кубатурной) формулы. В работе автора [10] близкий результат был получен для уравнений, не обязательно линейных; здесь же была установлена двухсторонняя оценка сходимости. В работе [13] рассмотрен случай не обязательно непрерывных ядер, а в [12, 17, 18] рассмотрен случай интегральных уравнений на произвольном компакте (изложение в §§ 8, 9 следует этим работам). Отметим ещё работы Бракхаге [3], Виландта [24], Келлера [33], И.П.Мысовских [40-44], посвященные априорному и апостериорному анализу погрешности метода механических квадратур; см. также [32].

Результаты § 10 (за исключением п. 10.6) опубликованы в статье [15] автора. Из исключительно богатой литературы по разностным методам отметим, в первую очередь, работу С.Г. Крейна и Л.Н.Шаблицкой [38], по постановке вопроса наиболее близкую к нашей. В [38] изучен некоторый класс разностных методов для задачи Коши, а в [54] - тот же класс для двухточечных краевых задач обыкновенного дифференциального уравнения. При построении разностных схем в указанных работах проводится "размножение" начальных данных. Такой способ удобен и естествен в случае задачи Коши, однако, для краевых задач представляется менее естественным. Любопытно, что в [38], [54] требуется, чтобы все корни определяющего многочлена разностного выражения старшей производной лежали в замкнутом единичном круге (авторы показывают, что это условие и необходимо для сходимости рассматриваемых разностных схем). Это требование, повидимому, связано с "размножением" начальных данных на одном лишь конце отрезка интегрирования; если часть дополнительных условий строить на другом конце, то, повидимому, соответствующее число корней определяющего многочлена может (и должно) быть вне единичного круга (ср. п. 10.7).

Сходимость разностного метода в проблеме собственных значений изучался в работах [51], [22], [33] и др. В работе А.Н.Тихонова и А.А.Самарского [51] исследована разностная задача Штурма-Лиувилля. Из большого цикла работ А.Н.Тихонова и А.А.Самарского отметим попутно работы [50], [48]; в них имеется и обширная библиография. В работе Ю.Н.Валицкого [22]

доказана сходимость простейшей разностной схемы первого порядка точности в проблеме собственных значений для уравнения произвольного порядка. В работе Келлера [33] введена оценка погрешности разностных приближений собственных значений самосопряженных краевых задач.

При исследовании сходимости разностного метода для нелинейных краевых задач обычно используется принцип сжатых отображений. Для уравнений второго порядка такое доказательство проведено в книге И.С.Березина и Н.П.Жидкова [2]. Более точный результат получен в работе Ласота [39]; к этому же кругу относится ряд работ Т.С.Вашакмадзе (см. [23]).

Результат п. 10.6 о сходимости квадратурно-разностного метода для интегро-дифференциальных уравнений пока в журнальной литературе не опубликован. В диссертации [16] имеет-ся ряд дальнейших результатов такого типа. Из аналогичных работ других авторов отметим статью Б.М.Будака и Е.Н.Соловьевой [4] - в ней рассмотрено уравнение второго порядка; нелинейность допускается лишь в интегральном члене.

Отметим, что в целях наглядности изложения мы ввели в §10 некоторые упрощения, по сравнению с работой [15]. Во-первых, мы уменьшили число параметров, от которых зависят используемые сетки. Во-вторых, вместо двухточечных краевых условий в [15] рассмотрены условия вида

$$\varphi_i(u) \equiv \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^1 u^{(k)}(s) d\mu_{ik}(s) = \delta_i \quad (i=1, \dots, m),$$

где $\mu_{ik}(s)$ - заданные функции ограниченной вариации (интегралы понимаются в смысле Стильтьеса); в случае кусочно-

постоянных $\mu_{ik}(s)$. Отсюда получаем двухточечные или много-
 точечные краевые условия. Краевые операторы $\varphi_i: C^{(m)} \rightarrow R^1$ ап-
 проксимируются в [15] операторами $\varphi_{i,h}: U_h \rightarrow R^1$ (см. обо-
 значения п. 10.1). Вводя предположение, что $\varphi_{i,h}(\Pi_h u) \rightarrow \varphi_i(u)$
 при $h \rightarrow 0$ для каждой m раз непрерывно дифференцируемой
 функции, установлены теоремы сходимости, вполне аналогичны
 доказанным в § 10 настоящей работы (лишь в оценки сходи-
 мости дополнительно входит член, характеризующий точность
 аппроксимации краевых условий на решении рассматриваемой
 задачи). Доказывая теоремы сходимости, мы в настоящей рабо-
 те использовали результаты §§ 1-5; в [15] использованы ре-
 зультаты, которые здесь приведены в § 6. Это позволило в
 [15] изучить сходимость разностного метода и для нелинейных
 уравнений, заданных в форме

$$F(t, u, u', \dots, u^{(m)}) = 0$$

(т.е. для уравнений, не разрешенных относительно старшей
 производной).

В заключение отметим, что возможные приложения абстракт-
 ной теории §§ 1-6 не ограничиваются результатами §§ 8-10 о
 методах механических квадратур и конечных разностей. В [19]
 используются результаты §§ 1-3 при исследовании сходимости
 метода коллокации для многомерных интегральных уравнений в
 области произвольной формы. Однако, наиболее широкое поле
 дальнейших приложений — это, как нам кажется, все-таки раз-
 ностные методы решения обыкновенных дифференциальных урав-
 нений и уравнений в частных производных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балуев А.Н. О приближенном решении нелинейных интегральных уравнений. Уч. зап. ЛГУ, 1958, вып. 33, 28-31.
2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, т. 1-2. М., 1959.
3. Бракхаге (Brakhage Н.) Zur Fehlerabschätzung für die numerische Eigenwertbestimmung bei Integralgleichungen. Numer. Math., 1961, 3, № 3, 174-177.
4. Будак Б.М., Соловьева Е.Н. Разностный метод решения краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения. Сб. работ Вычисл. центра Моск. ун-та, 1967, 6, 34-54.
5. Вайникко Г.М. Асимптотические оценки погрешности проекционных методов в проблеме собственных значений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, 4, №3, 405-425.
6. Вайникко Г.М. Оценки погрешности метода Бубнова-Галеркина в проблеме собственных значений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, 5, №4, 587-607.
7. Вайникко Г.М. О сходимости и устойчивости метода коллокации. Диффер. уравнения, 1965, 1, №2, 244-254.
8. Вайникко Г.М. О сходимости метода коллокации для нелинейных дифференциальных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, 6, №1, 35-42.

9. Вайникко Г.М. Возмущенные проекционные методы и общая теория приближенных методов. Тезисы доклада на Международном конгрессе математиков в Москве в 1966 г., секция 14.
10. Вайникко Г.М. Возмущенный метод Галеркина и общая теория приближенных методов для нелинейных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, 7, №4, 723-751.
11. Вайникко Г.М. О скорости сходимости приближенных методов в проблеме собственных значений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, 7, №5, 977-987.
12. Вайникко Г.М. Компактная аппроксимация линейных вполне непрерывных операторов операторами в факторпространствах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1968, 220, 190-204.
13. Вайникко Г.М. О связи между методами механических квадратур и конечных разностей. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1969, 9, №2, 259-270.
14. Вайникко Г.М. Принцип компактной аппроксимации в теории приближенных методов. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1969, 9, №4, 739-761.
15. Вайникко Г.М. О разностном методе для обыкновенных дифференциальных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1969, 9, №5, 1057-1074.
16. Вайникко Г.М. Об аппроксимации линейных и нелинейных операторов и приближенном решении операторных уравнений. Докторск. диссерт., Воронеж, 1969.
17. Вайникко Г.М. Компактная аппроксимация операторов и приближенное решение операторных уравнений. Докл. АН СССР, 1969, 189, №2.

18. Вайникко Г.М. О сходимости метода механических квадратур для интегральных уравнений с разрывными ядрами. Сиб. мат. ж., 1970 (в печати).
19. Вайникко Г.М. О сходимости метода коллокации для многомерных интегральных уравнений. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1970 (в печати).
20. Вайникко Г.М., Дементьева А.М. О скорости сходимости метода механических квадратур в проблеме собственных значений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1968, 8, №5, 1105-1110.
21. Вайникко Г.М., Садовский В.Н. О вращении уплотняющих векторных полей. Сб. "Проблемы математического анализа сложных систем", вып. 2, Воронежск. ун-т, 1968, 84-88.
22. Валицкий Ю.Н. О применении метода конечных разностей к исследованию спектра обыкновенного дифференциального оператора. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1969, 9, №1, 108-121.
23. Вашакмадзе Т.С. О численном решении граничных задач. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, 4, №4, 623-637.
24. Виландт (Wielandt Н.). Error bounds for eigenvalues of symmetric integral equations. Proc. Symposium in appl. math., VI, Numerical analysis. New York-Toronto-London, 1956, 261-282.
25. Гохберг И.Ц., Фельдман И.А. О приближенном решении некоторых классов линейных уравнений. Докл. АН СССР, 1965, 160, №4, 750-753.
26. Гохберг И.Ц., Фельдман И.А. Проекционные методы решения уравнений Винера-Хопфа. Кишинев, 1967.

27. Гудович Н.Н. Об абстрактной схеме разностного метода. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, 6, №5, 916-920.
28. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М., 1962.
29. Забрейко П.П. Об одной теореме для полуаддитивных функционалов. Функц. анализ и его прилож., 1969, 3, №1, 86-88.
30. Канторович Л.В. Функциональный анализ и прикладная математика. Успехи матем. наук, 1948, 3, №6, 89-187.
31. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., 1959.
32. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.-Л., 1962.
33. Келлер (Keller Н.В.). On the accuracy of finite difference approximations to the eigenvalues of differential and integral operators. Numer. Math., 1965, 7, №5, 412-419.
34. Коробов Н.М. Теоретикочисловые методы в приближенном анализе. М., 1963.
35. Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., 1956.
36. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рунтцкий Я.Б., Стеценко В.Я. Приближенное решение операторных уравнений. М., 1969.
37. Крейн О.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1967.

38. Крейн С.Г., Шаблицкая Л.Н. Об устойчивости разностных схем для задачи Коши. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, 6, №4, 648-664.
39. Ласота (Lasota A.). A discrete boundary value problem. Ann. polon. math., 1968, 20, №2, 183-190.
40. Мысовских И.П. Оценка ошибки численного решения линейного интегрального уравнения. Докл. АН СССР, 1961, 140, №4, 763-765.
41. Мысовских И.П. Об оценке ошибки, возникающей при решении интегрального уравнения способом механических квадратур. Вестн. ЛГУ, №19, сер. матем., механ. и астрон., вып. 4, 1956, 66-72.
42. Мысовских И.П. Об оценке ошибки приближенных методов отыскания собственных значений эрмита ядра. Матем. сб. 1959, 48, №2, 137-148.
43. Мысовских И.П. О методе механических квадратур для решения интегральных уравнений. Вестн. ЛГУ, №7, сер. матем., механ. и астрон., вып. 2, 1962, 78-88.
44. Мысовских И.П. О точности вычисления характеристических чисел интегрального уравнения методом механических квадратур. Сб. "Методы вычислений", вып. 3, Ленингр. ун-т, 1966, 13-21.
45. Мысовских И.П. О сходимости метода механических кубатур для решения интегральных уравнений. Сб. "Методы вычислений", вып. 4, Ленингр. ун-т, 1967, 63-72.
46. Садовский Б.Н. Об одном принципе неподвижной точки. Функц. анализ и его прилож., 1967, 1, №2, 74-76.

47. Садовский Б.Н. О мерах некомпактности и уплотняющих операторах. Сб. "Проблемы математического анализа сложных систем", вып. 2, Воронежск. ун-т, 1968, 89-119.
48. Самарский А.А. Классы устойчивых схем. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, 7, №5, 1096-1133.
49. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М., 1962.
50. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Об однородных разностных схемах. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, №1, 5-63.
51. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Разностная задача Штурма-Лиувилля. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, №5, 784-805.
52. Троицкая Е.А. О собственных числах и собственных векторах вполне непрерывных операторов. Изв. вузов, Матем., 1961, №3 (22), 148-156.
53. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. т.2. М., 1959.
54. Шаблицкая Л.Н. Применение разностных методов к решению линейных краевых задач. Тр. семинара по функц. анализу, №9, Воронеж, 1967, 178-183.
55. Шаудер (Schauder J.). Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen. *Studia Math.*, 1930, 2, 171-180.

Цена 45 коп.

XII

1A-5462

238860

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00238163 2