

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

ELEMENTAAR- MATEMAATIKA

III

TARTU 1969

198

2/75107

A-28896 II

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL
Matemaatika õpetamise metoodika kateeder

E. Mitt, O. Prinitš ja
K. Velsker

ELEMENTAARMATEMAATIKA

III

Eesti NSV keskkooliõpilaste matemaatika-
olümpiaadide ülesanded

Tartu 1969

Õppevahend TRÜ Matemaatika-
teaduskonna ja Füüsika-Keemia-
teaduskonna pedagoogiliste osa-
kondade üliõpilastele.

2

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu

75107

ÜLESANDED.

Aritmeetika ja algebra.

1. Õpilased laenutasid jõesadamast paadi, sõudsid veidi aega vastuvoolu ja asusid siis sõitma päri voolu. Kümme minutit pärast suuna muutmist jõudsid nad paadisadamast 1 km kaugusel järele parvele, mis ujus sadamast mööda just nende väljumise ajal. Leida voolu kiirus.
(I, h)*
2. Metsatöölistel lõpeb töö teatud kindlal kellaajal ja täpselt selleks ajaks tuleb neile järele auto, mis viib nad koju. Ühel päeval lõppes aga töö varem ja töölised hakkasid jalgsi koju minema. Teel tuli neile auto vastu ja viis nad sihtkohta, kuhu töölised jõudsid seekord 1 tund varem kui tavaliselt. Teades, et auto ja jalakäijate kiiruste suhe on 10, leida, mitu tundi varem lõppes töö sel päeval.
(49/50)**
3. Moskvast Vladivostokki ja vastassuunas sõidavad rongid iga päev, kattes selle vahemaa 20 ööpäevaga. Mitut Moskva-Vladivostoki rongi kohtab teel Vladivostokist Moskvasse sõitev rong?
(49/50)

* Esimene arv sulgudes näitab olümpiaadi järjekorranumbrit, teine vastava olümpiaadi vooru numbrit. Täht h tähendab harjutusülesannet.

** 49/50 - õppeaasta, mil toimus nn. eelolümpiaad. I olümpiaad toimus 1954.a., II 1955.a. jne.

4. Tõestada, et kolme järjestikuse täisarvu kuupide summa jagub kolmega. (II, 2.)
5. Murru lugejaks on kahe paaritu arvu ruutude vahe, nime-
tajaks samade arvude ruutude summa. Näidata, et seda
murdu saab alati taandada 2-ga, kuid ei saa taandada
4-ga. (VII, 1.)
6. Tõestada, et viie järjestikuse täisarvu ruutude summa
jagub 5-ga, kuid ei jagu 25-ga. (VIII, 1.)
7. Tõestada, et iga täisarvu n korral $n(n^2 + 5)$ jagub 6-ga.
(III, 2.; XI, 1.)
8. Tõestada, et iga täisarvu n korral $n^5 - 5n^3 + 4n$ jagub
120-ga. (IV, 2.; XI, 2.)
9. Avaldis $a + b + c$, kus a, b, c on täisarvud, jagub
6-ga. Näidata, et siis ka $a^3 + b^3 + c^3$ jagub 6-ga.
(XIII, 1.)
10. Tõestada, et murd $\frac{14n + 3}{21n + 4}$ ei ole taanduv ühegi täisarvu-
lise n väärtuse korral. (XII, 2.)
11. Tõestada, et summa $\left\{ \left[(7^7)^7 \right]^7 \right\}^7 + \left[(7^7)^7 \right]^7$ jagub 10-ga.
(I, h.)
12. Leida väikseim arv, mis 2-ga jagades annab jäägi 1,
3-ga jagades jäägi 2 jne., 9-ga jagades jäägi 8.
(VII, 1.)
13. Arvutada summa

$$\frac{6}{5 \cdot 7} + \frac{6}{7 \cdot 9} + \frac{6}{9 \cdot 11} + \frac{6}{11 \cdot 13} + \frac{6}{13 \cdot 15} + \frac{6}{15 \cdot 17} +$$

$$+ \frac{6}{17 \cdot 19} + \frac{6}{19 \cdot 21}.$$
 (VI, 3.)
14. Kirjutada 1000 000 viie nelja abil. (VII, 2.)
15. Asendada tähed numbritega ja näidata, et kehtib summa

+ S E N D
 M O R E
M O N E Y .

Märkus. Erinevatele tähtedele vastavad erinevad numbrid. (VI, 1.)

16. Asendada tähed numbritega ja näidata, et kehtib summa

f o r t y
+ t e n
 t e n

s i x t y .

(IV, h. ja VI, 2.)

17. Kirjutades järjestikused täisarvud 1, 2, 3, ... üksteise kõrvale, saame neist moodustada numbrita jada 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 0, 1, 1, 1, 2, 1, 3, ... Missugune number seisab selles jadas miljonendal kohal?

(49/50; XI, 1.)

18. Mitme nulliga lõpeb kõikide 1-st kuni 100-ni (viimane kaasa arvatud) võetud täisarvude korrutis? (II, 2.)

19. Leida viga järgmises mõttekäigus:

$$\begin{aligned} a &= b \\ ab &= b^2 \\ ab - a^2 &= b^2 - a^2 \\ a(b - a) &= (b - a)(b + a) \\ a &= b + a \\ a &= 2a \\ 1 &= 2. \end{aligned}$$

(V, 1.)

20. Leida viga järgmises mõttekäigus:

$$\begin{aligned} 16 - 36 &= 25 - 45 \\ 16 - 36 + \frac{81}{4} &= 25 - 45 + \frac{81}{4} \\ \left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 &= \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2 \\ 4 - \frac{9}{2} &= 5 - \frac{9}{2} \\ 4 &= 5. \end{aligned}$$

(I, h.)

21. Jagada $a^{128} - b^{128}$ avaldisega
 $(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})(a^{32}+b^{32})(a^{64}+b^{64})$.
 (II, 3.)
22. Lahutada tegureiks hulkliige
 $a^8 + a^4b^4 + b^8$,
 kus a ja b on reaalarvud. (49/50.)
23. Lahutada tegureiks
 $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$. (XIII, 2.)
24. Tõestada, et
 $n^2 + (n^2 + 1) + (n^2 + 2) + \dots + (n^2 + n) =$
 $= (n^2 + n + 1) + (n^2 + n + 2) + \dots + (n^2 + 2n)$.
 (X, 1.)
25. Tõestada, et $a(a + 1)(a + 2)(a + 3) + 1$ on täisruut.
 (IV, 1.)
26. Tõestada, et $a = b = c$, kui $a^2 + b^2 + c^2 = ac + ab + bc$,
 kus a, b, c on reaalarvud. (IX, 1.)
27. Tõestada, et hulkliige
 $a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2)$
 jagub korrutisega $(b - c)(c - a)(a - b)$. (IX, 2.)
28. Leida $a^4 + b^4 + c^4$, kui $a + b + c = 0$ ja $a^2 + b^2 + c^2 = a$.
 (VI, 2.)
29. Koostada ruutvõrrand, mille lahenditeks on võrrandi
 $ax^2 + bx + c = 0$ lahendite pöördväärtused vastupidiste
 märkidega. (I, 1.)
30. Millistel p ja q väärtustel on võrrandi $x^2 + px + q = 0$
 lahenditeks arvud p ja q ? (IV, 1.)
31. Võrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendid on x_1 ja x_2 . Avaldada
 võrrandit lahendamata võrrandi kordajate kaudu järgmised
 avaldised:

$$a) \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2},$$

$$b) x_1^4 + x_1^2 x_2^2 + x_2^4. \quad (\text{VIII, 1.})$$

32. Lahendada võrrand

$$x(x+2)(x+3)(x+5) = 8. \quad (\text{VIII, 1.})$$

33. Lahendada võrrand

$$(x-1)(x+2)(x-3)(x+4) = 144. \quad (\text{VI, 1.})$$

34. Lahendada võrrand

$$(8x+7)^2(4x+3)(x+1) = 4,5. \quad (\text{XII, 2.})$$

35. Lahendada võrrand

$$(3x+2)^4 + (2x-4)^4 = (2x+3)^4 + (4x-2)^4. \quad (\text{XII, 3.})$$

36. Lahendada võrrand

$$x^8 + 5x^7 - 20x^5 - x^4 + 20x^3 - 5x + 1 = 0. \quad (49/50)$$

37. Lahendada võrrand

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}. \quad (\text{VI, 1.})$$

38. Lahendada võrrand

$$\sqrt{x+3} - 4\sqrt{x-1} + \sqrt{x+8} - 6\sqrt{x-1} = 1. \quad (\text{I, h.})$$

39. Lahendada võrrand

$$\sqrt{a - \sqrt{a+x}} = x. \quad (\text{XIII, 3.})$$

40. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^2 y + 2xy^2 + y^3 = 2. \end{cases} \quad (\text{X, 1.})$$

41. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} (x+y+1)^2 + (x+y)^2 = 25 \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases} \quad (\text{IX, 1.})$$

42. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} (x + y)(x^2 - y^2) = 9 \\ (x - y)(x^2 + y^2) = 5. \end{cases} \quad (\text{VIII, 3.})$$

43. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} 2x^2y^2 - 4y^2 - xy + 2 = 0 \\ 3x^2y^2 - 8y^2 + 3xy - 2 = 0. \end{cases} \quad (\text{VIII, 1.})$$

44. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} \frac{x+y}{xy} + \frac{xy}{x+y} = \frac{a^2+1}{a} \\ \frac{x-y}{xy} + \frac{xy}{x-y} = \frac{b^2+1}{b}. \end{cases} \quad (\text{I, h.})$$

45. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{7}{\sqrt{xy}} + 1 \\ x\sqrt{xy} + y\sqrt{xy} = 78, \text{ kus } x > 0, y > 0. \end{cases} \quad (\text{XII, 1.})$$

46. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \\ xy + xz + yz = 27. \end{cases} \quad (\text{VIII, 2.})$$

47. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3. \end{cases} \quad (\text{IX, 3.})$$

48. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x + y = 5z \\ x^2 + y^2 = 13z \\ x^3 + y^3 = 35z. \end{cases} \quad (\text{IX, 2.})$$

49. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x + y + z + u = 8 \\ x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 20 \\ xy + xu + zy + zu = 16 \\ xyzu = 9. \end{cases} \quad (\text{VI, 3.})$$

50. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ (x+y)(y+z) + (y+z)(z+x) + (z+x)(x+y) = 1 \\ x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) = -6. \end{cases} \quad (\text{XIII, 1.})$$

51. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy - z^2 = 1. \end{cases} \quad (\text{XIII, 1.})$$

52. Millise a väärtuse korral on süsteemil

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x + y + z = a \end{cases}$$

üks reaalne lahend? Leida see. (XIII, 2.)

53. Ihtuoloog tahtis määrata tiigis elunevate püügiks kõlblike kalade arvu. Selleks heitis ta tiiki sobiva tihedusega võrgu ja sai selle väljatõmbamisel 30 kala. Ta märgistas need ja laskis tiiki tagasi. Järgmisel päeval püüdis ta samal viisil 40 kala, nende hulgas 2 märgistatud. Nende andmete järgi määras ta ligikaudselt kalade arvu tiigis. Kui suur see oli? (XIII, 1.)

54. Turist, kellel oli vaja rongile jõuda, arutles, et käies tunnis 3 km, jõuaks ta jaama 20 minutit pärast rongi väljumist. Et mitte rongile hilineda, kiis ta igas tunnis 0,5 km rohkem ning jõudis jaama 40 minutit enne rongi väljumist. Kui palju maad oli jaama ja kui palju aega oli turisti käsutuses? (I, 2.)

55. Kell 12.00 kattuvad kella osutid. Mitme minuti pärast nad jälle kattuvad? (X, 1.)

56. Kell, mis käib ette, on teatud ajamomendil 2 minutit taga õigest ajast. Kui see kell oleks samal ajamomendil

- 3 minutit taga ja käiks ööpäevas $\frac{1}{2}$ minutit rohkem ette kui praegu, siis näitaks ta õiget aega ööpäev varem. Mitu minutit käib see kell ööpäevas ette? (XII, 1.)
57. Antikvariaat alandas raamatu esialgset hinda 10 % võrra ja sai ostuhinnaga võrreldes siiski 8 % kasumit. Mitu % kasumit oli esialgu planeeritud? (III, 2.)
58. Punktidest A ja C saadeti samaaegselt välja käskjalad, kes pidid viima teate punkti B. Punktist C väljuv käskjalg tahtis jõuda punkti B samaaegselt teise käskjalaga ja seepärast pidi ta iga kilomeetri läbima $1\frac{1}{4}$ minuti võrra kiiremini kui teine. Punkt C asub seejuures punktist B 20 km kaugemal kui punkt A. Käskjalad liikusid ühtlase kiirusega ja jõudsid punkti B 5 tunni pärast. Leida punktide A ja C kaugus punktist B. (V, 2.)
59. Teatud arv töölisi oleks koos töötades lõpetanud kraavi kaevamise 24 tunniga. Nad asusid aga tööle üksikhaaval võrdsete ajavahemike järel, töötades siis koos kuni töö lõpetamiseni. Mitu tundi kaevas kraavi esimesena tööle asunud tööline, kui ta töötas 5 korda kauem kui viimasena tööle asunud tööline? (XIII, 2.)
60. Jalakäija läheb paralleelselt trammiteega. Iga 12 minuti järel möödub temast tramm ja iga 4 minuti järel tuleb talle tramm vastu. Eeldades, et nii jalakäija kui ka trammid liiguvad ühtlaselt, leida mitmeminutilise intervalliga väljuvad trammid liini otspunktidest, kui kõik trammid liiguvad sama kiirusega. (VII, 1.)
61. Jõe vool punktide A ja B vahel on nii aeglane, et see paadi liikumise kiirust praktiliselt ei mõjosta. Punktide B ja C vahel on aga vool tunduvalt kiirem. Aerutaja sõuab punktist A punkti C 3 tunniga ja tagasi (vastuvoolu) punkti A $3\frac{1}{2}$ tunniga. Kui voolu kiirus oleks A ja C vahel kogu ulatuses niisugune, nagu ta tegelikult B ja C vahel on, siis kuluks punktist A punkti C sõudmiseks $2\frac{3}{4}$ tundi. Kui palju aega kuluks sel juhul punktist C

62. Ruumala A on pool ruumalade B ja C summast ning ruumala B on kolmandik ruumalade A ja C summast. Kui suure osa ruumalade A ja B summast moodustab ruumala C?
(XIII, 3.)
63. Tööpingi A tootlikkus moodustab $m\%$ tööpinkide B ja C tootlikkuste summast, aga tööpingi B tootlikkus moodustab $n\%$ A ja C tootlikkuste summast. Mitu protsenti moodustab tööpingi C tootlikkus tööpinkide A ja B tootlikkuste summast?
(VIII, 1.)
64. Sadamast A väljusid voolu suunas samaaegselt mootorpaat ja parv. Mootorpaat sõitis päri voolu 96 km, pöördus siis ümber ning jõudis tagasi sadamasse A 14 tunni pärast. Leida voolu ja mootorpaadi kiirused seisvas vees, kui on teada, et mootorpaat kohtas tagasiteel parve 24 km kaugusel sadamast A.
(XI, 1.)
65. Kaks masinat alustavad tunneli kaevamist üks ühest, teine teisest tunneli otsast. Nad peavad tunneli valmis kaevama 60 päevaga. On teada, et kui esimene masin on teinud 30% ja teine $26\frac{2}{3}\%$ temale ettenähtud tööst, siis on kaevatud 60 meetrit tunnelit. Samuti on teada, et kui esimene masin läbib $\frac{2}{3}$ teisele masinale kaevamiseks ettenähtud tunneli pikkusest ja teine masin $\frac{3}{10}$ esimesele masinale kaevamiseks ettenähtud tunneli pikkusest, siis on esimesel masinal kulunud selleks 6 päeva rohkem aega kui teisel masinal. Mitu meetrit tunnelit kaevab kumbki masin päevas?
(III, 1.)
66. Kahe metallraha väärtuste suhe on $\frac{1}{3}$. Mitu niisugust väiksema väärtusega ja mitu suurema väärtusega metallraha on vaja, et saada rahasumma, mis on võrdne nende kahe metallraha väärtuste korrutisega, kui on teada, et vajaminevate metallrahade koguarv jagub kolmege?
(IV, 1.)

67. Läänest itta kulgev sirgjooneline maantee läbib asulaid A ja B, kusjuures B asub A-st 9 km ida pool. Asulast A väljub idasuunas auto, sõites ühtlase kiirusega $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Samaaegselt väljub asulast B samuti idasuunas mootorrattur, liikudes konstantse kiirendusega $32 \frac{\text{km}}{\text{h}^2}$. Leida auto ja mootorratta vaheline suurim kaugus kahe esimese tunni jooksul. (IX, 1.)

68. Kas kahe tundmatuga võrrandil

$$m^2 + 1958 = n^2$$
on täisarvulisi lahendeid? (IV, h.)

69. Leida võrrandi

$$xyz + 7xy + 3xz + yz + 21x + 7y + 3z = 7000$$
naturaalarvulised lahendid. (49/50)

70. Näidata, et

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$
(VI, 1.)

71. Tõestada, et

$$\frac{\sqrt{a(b-1)}}{\sqrt{b-a-1}} + \frac{\sqrt{b(a-1)}}{\sqrt{a-b-1}} < \left[\sqrt{a} + \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \right]^2,$$
kui $a > 1$ ja $b > 1$. (V, 3.)

72. Milliste a väärtuste korral on võrratus

$$-3 < \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2$$
rahuldatud x iga väärtuse korral? (XIII, 1.)

73. Tõestada, et $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{20}$, kui $2x + 4y = 1$. (XI, 1.)

74. Kas leidub niisugune täisarv a , mis rahuldab tingimust

$$\frac{4}{13} < \frac{a}{20} < \frac{5}{13} ?$$
(IV, h.)

75. Paat sõidab 10 km pärivoolu ja seejärel 6 km vastuvoolu. Voolu kiirus on $1 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Millises vahemikus võib olla paadi enda kiirus, et sõit ei kehtaks alla 3 ega üle 4 tunni? (X, 1.)

76. Leida kaks kolmekohalist arvu, mille summa jaguks arvuga 504 ja jagatis arvuga 6. (VI, 1.)

77. Vabaneda juurtest murru nimetajas

$$\frac{1}{2 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}. \quad (\text{XIII, 1.})$$

78. Vabaneda juurtest murru nimetajas

$$\frac{1}{a + \sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}} + \dots + \sqrt[n]{a^3} + \sqrt[n]{a^2} + \sqrt[n]{a}}. \quad (\text{V, 1.})$$

79. Kas kolm arvu võivad samaaegselt moodustada aritmeetilise ja geomeetrilise progressiooni? (IX, 1.)

80. Arvutada $\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{\dots}$. (XII, 2.)

81. Kolm arvu moodustavad geomeetrilise progressiooni. Kui teisele arvule liita 8, muutub see geomeetriline progressioon aritmeetiliseks progressiooniks. Suurendades seejärel veel kolmandat arvu 64 võrra, saame aritmeetilisest progressioonist jälle geomeetrilise progressiooni. Leida need arvud. (X, 3.)

82. Aritmeetilise ja geomeetrilise progressiooni esimesed ja teised liikmed on vastavalt võrdsed positiivsed reaalarvud. Näidata, et nende progressioonide järgmised vastavad liikmed ei ole võrdsed. (XIII, 1.)

83. Kolme arvu summa on 93 ja nad moodustavad geomeetrilise progressiooni; ühtlasi on need arvud ühe ja sama aritmeetilise progressiooni esimeseks, teiseks ja seitsmendaks liikmeks. Leida need arvud. (V, 1.)

84. Tõestada, et $\frac{a_m}{a_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$, kui $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$, kus a_m ja a_n

ning S_m ja S_n on vastavalt aritmeetilise progressiooni üldliikmed ja summad. (XI, 2.)

85. Näidata, et

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}},$$

kui arvud a_1, a_2, \dots, a_n moodustavad aritmeetilise progressiooni. (VII, 1.)

86. Leida summa

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + \dots + \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)^2. \quad (\text{XII, 1.})$$

87. Arvud a^2, b^2 ja c^2 moodustavad aritmeetilise progressiooni. Tõestada, et sel juhul ka arvud $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ moodustavad aritmeetilise progressiooni.

(XI, 1.)

88. Leida arvutada esimese kolmekümne liikme summa, kui jada liikmeteks on positiivsed arvud, mis jagamisel 5-ga annavad jäägi 1.

(VI, 1.)

89. Arvutada summa

$$\frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 7} + \frac{3}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{3}{94 \cdot 97} + \frac{3}{97 \cdot 100}. \quad (\text{IV, h.})$$

90. Leida summa $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1}}$, kui arvud $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, a_{n+1}$ moodustavad aritmeetilise progressiooni. (IV, h.)

91. Tõestada, et

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n+1} n^2 = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}. \quad (\text{IV, h.})$$

92. Näidata, et $\log_a^b = e^2$,
(ac) kui $\log_a N, \log_b N$ ja $\log_c N$ moodustavad aritmeetilise progressiooni. (VII, 3.)

93. Kas on võimalik, et $\sin x = \log \sin x$? (IV, 1.)

94. Leida summa

$$\frac{3}{7} \left[1 + 4^{\log_2 5} \right]^{\log_{26} 7} + \left[5^{\log_{25} 9} + 3^{\log_9 16} \right]^2 \log_7 5. \quad (\text{VI, 1.})$$

95. Lihtsustada avaldis

$$b^{\frac{\log_a (\log_a b)}{\log_a b}} \quad . \quad (IV, h.)$$

96. Arvutada avaldise $\log 5 \cdot \log 20 + \log^2 2$ väärtus lo-
garitmide tabelleid kasutamata. (IV, h.)

97. Leida $\log 48$, kui $\log_3 5 = a$ ja $\log_5 8 = b$. (X, 3.)

98. Leida $\log_6 16$, kui $\log_{12} 2 = a$. (XIII, 1.)

99. Geomeetrilise progressiooni esimene liige on a ja
tegur q ning n esimese liikme korrutis on c . Leida
 $\log_c b$, kui $\log_a b = A$ ja $\log_q b = B$. (X, 2.)

100. Tõestada, et $a^2 + b^2 + c^2$, kui
 $\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{c-b} a \cdot \log_{c+b} a$. (IV, h.)

101. Tõestada samasus

$$\frac{\log_b x}{\log_{ab} x} - \log_b a = 5^{\log \cos 2\pi}. \quad (I, h.)$$

102. Lahendada võrrand

$$\log_x (5x^2) \cdot \log_5^2 x = 1. \quad (VII, 1.)$$

103. Lahendada võrrand

$$\log_x 2x = \log_{2x} x. \quad (49/50)$$

104. Lahendada võrrand

$$\log_{\frac{1}{3}} 3x + \log_{\frac{1}{9}} 9x = \log_{\sqrt[3]{3}} \frac{x}{3} + \log_{\sqrt[9]{9}} \frac{x}{9}. \quad (49/50)$$

105. Lahendada võrrand

$$(1 + \log_c a) \cdot \log_a x \cdot \log_b c = \log_b x \cdot \log_c x \cdot \log_a c. \quad (X, 1.)$$

106. Lahendada võrrand

$$3 \log_{a^2 x} x + \frac{1}{2} \log_{\frac{x}{\sqrt{a}}} x = 2. \quad (VII, 2.)$$

107. Lahendada võrrand

$$2 \log_x a + 3 \log_{a^2 x} a + \frac{\log_x a}{\log_x ax} = 0. \quad (XI, 1.)$$

108. Lahendada võrrand

$$\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2. \quad (\text{III, 2.})$$

109. Lahendada võrrand

$$9^x - 6^x = 2 \cdot 4^x. \quad (\text{IV, h.})$$

110. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} 2x^2 = y^2 + z^2 \\ xyz = 64, \end{cases}$$

teades, et $\log_y x$, $\log_z y$ ja $\log_x z$ moodustavad geomeetrilise progressiooni. (XIII, 3.)

111. Leida a ja b väärtused, nii et hulkliige

$$x^4 + (a+b)x^3 + (a-b)x^2 + (a^2+2b-1)x + a+b+4$$

jaguks avaldisega $(x-1)^2$. (IX, 1.)

112. Määrata A ja B nii, et hulkliige $Ax^{15} + Bx^{14} + 1$ jaguks avaldisega $(x-1)^2$. (IV, h.)

113. Tõestada, et

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (C_{n+1}^2)^2. \quad (\text{IV, h.})$$

114. Tõestada, et avaldis $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ on täisarv, mis jagub arvuga $n+1$. (I, h. ja X, 3.)

115. Lihtsustada avaldis

$$\frac{(1+2i)(3-1) - \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^4},$$

$$\text{kui } i^2 = -1.$$

(49/50)

Trigonomeetria.

116. Tõestada, et

$$\tan 20^\circ \cdot \tan 40^\circ \cdot \tan 80^\circ = \sqrt{3}. \quad (\text{IX, 1.; XI, 1.})$$

117. Tõestada, et

$$\tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \sqrt{3} \tan 20^\circ \tan 40^\circ = \sqrt{3}. \quad (\text{VI, 1.})$$

118. Tõestada, et

$$\cos^2 x + \frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} + \cos^2(x + \alpha) - 2 \cos x \cdot \cos \alpha \cdot \cos(x + \alpha) = \tan^2 \frac{\alpha}{2} (1 + 4 \cos^4 \frac{\alpha}{2}).$$

(V, 2.)

119. Tõestada, et

$$\tan 3\alpha - \tan 2\alpha - \tan \alpha = \tan \alpha \cdot \tan 2\alpha \cdot \tan 3\alpha.$$

(IX, 2.)

120. Tõestada, et

$$\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z - 2 \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z = 1,$$

kui $x + y + z = 180^\circ$. (VII, 2.)

121. Tõestada, et

$$\cot x \cdot \cot y + \cot x \cdot \cot z + \cot y \cdot \cot z = 1,$$

kui $x + y + z = \pi$ ja kui ükski nurkadest ei võrdu nulliga. (VIII, 2.)

122. Teisendada logaritmitavaks

$$\cos 11A + 3 \cos 9A + 3 \cos 7A + \cos 5A. \quad (\text{XIII}, 2.)$$

123. Tõestada, et $\sin(A + 2B) = \sin A$, kui $\cot(A+B) = 0$. (XII, 1.)

124. Tõestada, et igas kolmnurgas kehtib seos

$$\tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\beta}{2} \cdot \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{b}{p},$$

kus b on kolmnurga külge ja $2p$ on ümbermõõt. (XII, 3.)

125. Kolmnurga küljed a , b ja c moodustavad aritmeetilise progressiooni. Näidata, et siis ka $\cot \frac{\alpha}{2}$, $\cot \frac{\beta}{2}$ ja $\cot \frac{\gamma}{2}$ moodustavad aritmeetilise progressiooni. (XIII, 3.)

126. Tõestada, et $\cot \frac{x}{2} \geq 1 + \cot x$, kui $0^\circ < x < 90^\circ$. (IV, h.)

127. Näidata, et

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \mu \geq \frac{3}{4},$$

kui α , β ja μ on kolmnurga sisenurgad. (XII, 1.)

128. Arvutada tabelleid kasutamata $\sin 18^\circ 45'$.

(49/50; XI, 1.)

129. Arvutada tabelleid kasutamata

$$\sin^2 43^\circ + \sin^2 17^\circ + \sin 43^\circ \cdot \sin 17^\circ. \quad (\text{VII, 1.})$$

130. Arvutada tabelleid kasutamata

$$\cos 6^\circ \cdot \cos 66^\circ \cdot \cos 42^\circ \cdot \cos 78^\circ, \\ \text{kui } \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}. \quad (\text{VII, 3.})$$

131. Arvutada $\sin^2 2x$, kui

$$\frac{1}{\tan^2 x} + \frac{1}{\cot^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 7. \quad (\text{IV, h.})$$

132. Olgu nelja teravnurga α , β , γ ja δ kootangensid vastavalt 3, 5, 7 ja 8. Näidata, et nende teravnurkade summa on 45° .
(49/50)

133. Lahendada võrrand

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x. \quad (\text{VI, 3.})$$

134. Lahendada võrrand

$$\cos 2x + \cos 6x - \cos 8x = 1. \quad (\text{II, h.})$$

135. Lahendada võrrand

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1. \quad (\text{X, 3.})$$

136. Lahendada võrrand

$$2 \sin^3 x + 9 \cos^2 x + 5 \frac{\sin 2x}{\cos x} - 12 = 0. \quad (\text{II, 1.})$$

137. Lahendada võrrand

$$\sin^3 x \cos 3x + \sin 3x \cos^3 x = 0,375. \quad (\text{VI, 2.})$$

138. Lahendada võrrand

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x. \quad (\text{IX, 1.})$$

139. Lahendada võrrand

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x. \quad (\text{IX, 3})$$

140. Lahendada võrrand

$$32 \cos^6 x - \cos 6x = 1. \quad (\text{XIII, 1.})$$

141. Lahendada võrrand

$$\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{32}. \quad (\text{X, 1.})$$

142. Lahendada võrrand

$$\tan x + \tan 2x + \tan 3x = 0. \quad (49/50)$$

143. Lahendada võrrand

$$\frac{(1-\tan 8)(1-\tan x^2 \cdot \tan 2x) + (1+\tan 8)(\tan x^2 + \tan 2x)}{(1+\tan 8)(1-\tan x^2 \cdot \tan 2x) - (1-\tan 8)(\tan x^2 + \tan 2x)} = 1. \quad (\text{VI, 1.})$$

144. Lahendada võrrand

$$2^{1-n} \cdot n \cdot \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2^n}} \cdot \log_a x = \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2^2} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2^n}. \quad (\text{I, h.})$$

145. Lahendada võrrand

$$\sin^6 x + \cos^6 x = a$$

ning leida parameetri a need väärtused, mille korral on võrrandil reaalsed lahendid. (XI, 2.)

146. Lahendada võrrand

$$(a - 1) \cos x + (a + 1) \sin x = 2a. \quad (\text{I, h.})$$

147. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} 4^2 \sin^2 x + 2 \cos^2 y - 1 = 1 \\ 2 \sin x + 3 = \frac{16}{2 \cos y} \end{cases} \quad (\text{III, 1.})$$

148. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{3}{4} \\ x + y = \frac{5}{12} \pi \end{cases} \quad (\text{V, 3.})$$

149. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \\ \cos x \cos y = \frac{1}{4} \end{cases} \quad (\text{II, 2.})$$

Geomeetria.

151. Avaldada täisnurkse kolmnurga täisnurga poolitaja pikkus kaatetite kaudu. (IV, h.)
152. Ümber ruudu, mille külg on a , on joonestatud ringjoon ja ühte tekkinud segmentidest on konstrueeritud ruut. Leida selle ruudu külg. (IX, 1.)
153. Punktid D , E ja F asetsevad lõigu AB keskristsirgel. Nende kaugused lõigust AB on vastavalt $\frac{AB}{2}$, AB ja $\frac{3AB}{2}$. Leida

$$\angle ADB + \angle AEB + \angle AFB.$$
 (XIII, 3.)
154. Ringjoon on nii joonestatud, et tema kõõluks on võrdhaarse kolmnurga alus a ning puutujateks selle kolmnurga haarad. Avaldada ringi raadius r kolmnurga aluse a ja kõrguse h kaudu. (IV, h.)
155. Punktide A ja B vaheline kaugus on a . Leida punkti C kaugus sirgest AB , kui $\angle CBA = 45^\circ$ ja $\angle BAC = 120^\circ$. (I, 2.)
156. Leida täisnurkse kolmnurga nurgad, kui ümberringjoone ja siseringjoone raadiuste suhe on $5 : 2$. (X, 2.)
157. On antud kolmnurga kaks külge a ja b . Leida kolmas külg, kui antud külgedele tõmmatud mediaanid on omavahel risti. (I, h.)
158. Avaldada kolmnurga nurga A poolitaja kolmnurga külgedega a , b ja c kaudu. (X, 3.)
159. Läbi kolmnurga ABC sisepiirkonna mingi punkti on tõmmatud kolm sirget paralleelselt kolmnurga külgedega. Need sirged jaotavad kolmnurga kuueks osaks, millest kolm on kolmnurgad pindaladega S_1 , S_2 ja S_3 . Leida kolmnurga ABC pindala. (XII, 2.)

160. Korrapärases kolmnurgas ABC vabalt võetud punktist P on tõmmatud ristlõigud PD, PE ja PF vastavalt külgedele BC, AC ja AB. Arvutada

$$\frac{PD + PE + PF}{BD + CE + AF} \cdot \quad (\text{XII, 1.})$$

161. Ring, ruut ja võrdkülgne kolmnurk on võrdse pindalaga. Leida nende kujundite perimeetrite suhe.

(VII, 1.)

162. On antud ruut, mille külje pikkus on a. Selle ruudu sisse on joonestatud uus ruut, mille tipud asuvad esimese ruudu külgede keskpunktides. Teise ruudu sisse on joonestatud samal viisil kolmas ruut, kolmanda sisse neljas jne. Leida nende ruutude pindalade summa, eeldades, et see protsess on lõpmatult jätkatav.

(IV, h.)

163. Rombi ABCD nürinurga tipust B on tõmmatud ristlõigud BE ja BF vastavalt külgedele AD ja DC. Leida rombi pindala, kui $BE = a$ ja $EF = b$.

(IV, 3.)

164. Leida võrdhaarse trapetsi pindala, kui trapetsi kõrgus on h ning haar on nähtav ümberringjoone keskpunktist nurga α all.

(XI, 1.)

165. Trapets alustega a ja b ning kõrgusega h on jaotatud alustega paralleelsete lõikude abil kolmeks pindvõrdseks osaks. Leida nende lõikude pikkused ja tekkinud osade kõrgused.

(IV, 2.)

166. Ringi raadiussele OA kui diameetrile on ehitatud poolringjoon, mis lõikab raadiust OB punktis C. Leida kaarte AC ja AB pikkuste suhe, kui nurk AOB on väiksem täisnurgast.

(I, h.)

167. Leida kesknurk, millele vastava segmendi kõõl on võrdne segmendi sisse joonestatud suurima ringjoone pikkusega.

(XII, 1.)

168. Ringjoonest a cm kaugusel asetsevast punktist ringjoonele tõmmatud puutuja pikkus on 2a. Leida selle ring-

joone sisse joonestatud korrapärase kolmnurga pindala. (XIII, 1.)

169. Konstrueerida lõik

$$x = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b \cdot c}{b + c}\right)^2}. \quad (X, 1.)$$

170. On antud nurk ja selles punkt P. Tõmmata läbi punkti P sirge s nii, et tema lõik nurga haarade vahel poolitaks antud punktis. (IV, h.)

171. Kolmnurga kaks külge on a ja b. Leida kolmas külg, kui on teada, et see võrdub temale tõmmatud mediaaniga. Konstrueerida see kolmnurk antud lõikude a ja b abil. (IV, 2.)

172. Konstrueerida täisnurkne kolmnurk, kui on antud hüpotenuus c ja hüpotenuusile tõmmatud kõrgus h. Avaldada antud suuruste kaudu kaatetite pikkused ja selgitada, millise h ja c suhte korral on ülesanne lahenduv. (IX, 1.)

173. Kolmnurga küljed on a, b ja c. Avaldada nende kaudu selle kolmnurgaga pindvõrdse ruudu külg x. Konstrueerida:

- 1) antud kolmnurk (a, b ja c kaudu);
- 2) ruudu külg x (saadud avaldise põhjal);
- 3) otsitav ruut (külje x abil). (VII, 3.)

174. Konstrueerida kolmnurk, kui on antud a, c - b ja μ . (VIII, 2.)

175. Konstrueerida kolmnurk, kui on antud a, c - b ja β . (VIII, 1.)

176. Konstrueerida kolmnurk, kui on antud tema kaks nurka ja ümbermõõt. (VIII, 3.)

177. Konstrueerida kolmnurk, kui on antud tema kaks külge ja on teada, et kolmandale küljele tõmmatud mediaan võrdub antud külgede geomeetrilise keskmisega. (VII, 1.)

178. On antud trapets alustega a ja b . Konstrueerida alustega paralleelne lõik c , mis jaotab antud trapetsi kaheks pindvõrdseks trapetsiks. Selgitada ülesande lahendamise ühesust. (V, 3.)
179. On antud kaks ringi. Konstrueerida kolmas ring, mille pindala on võrdne kahe antud ringi pindalade vahega. (VII, 1.)
180. On antud kolmnurk ja ristkülik. Konstrueerida ristkülik, mille pindala võrdub antud kolmnurga pindalaga ja übermõõt antud ristküliku übermõõduga. Millistel tingimustel on see ülesanne lahenduv? (VI, 1.)
181. On antud kaks lõikuvat sirget s_1 ja s_2 . Konstrueerida ringjoon, mis läbib sirgel s_1 vabalt valitud punkte A ja B ning lõikab sirgest s_2 etteantud pikkusega lõigu. (V, 2.)
182. Konstrueerida etteantud raadiusega ringjoon, mis puudutab antud sirget ja antud ringjoont. (IX, 1.)
183. On antud kolm punkti, mis ei asetse ühel sirgel. Konstrueerida kolm paarikaupa puutuvat ringjoont, mille keskpunktideks on antud punktid. (XII, 1.)
184. Tasapinnal on antud sirge s ning sellest ühel ja samal pool punktid A ja B . Konstrueerida ringjoon, mis läbib antud punkte ja millele sirge s on puutujaks. Millisel juhul on ülesandel üks, millisel juhul kaks lahendit? (IV, 1.)
185. Näidata, et
- $$\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{b+c} a \cdot \log_{c-b} a,$$
- kui a ja b on täisnurkse kolmnurga kaatetid ja c sama kolmnurga hüpotenuus. (XII, 1.)
186. Tõestada, et täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile tõmmatud kõrguse ruudu pöördväärtus on võrdne kaatetite ruutude pöördväärtuste summaga. (IV, h.)

187. Tõestada, et täisnurkses kolmnurgas on kaatetite summa võrdne sise- ja ümberringjoone diameetrite summaga. (IX, 2.)
188. Täisnurkse kolmnurga ABC täisnurga tipust C tõmmatakse kõrgus CK ja nurga ACK poolitaja; lõigaku viimane hüpotenuusi punktis E. Kaateti AC keskpunkt olgu D. Sirgete DE ja CK lõikepunkt olgu F. Tõestada, et $BF \parallel CE$. (IX, 3.)
189. Näidata, et kolmnurga nurk $\mu = 45^\circ$, kui kolmnurga pindala $S = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}$. (XIII, 1.)
190. Tõestada, et igas kolmnurgas ei ole ümberringjoone raadius väiksem siseringjoone raadiuse kahekordsest. (IX, 1.)
191. Tõestada, et kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkti kaugus küljest BC on 2 korda väiksem kui kõrguste lõikepunkti kaugus tipust A. (XIII, 2.)
192. Punkt M on kolmnurga ABC külje BC keskpunkt. Nurga AMB poolitaja lõikab külge AB punktis E ja nurga AMC poolitaja külge AC punktis D. Tõestada, et kolmnurk AED ja kolmnurk ABC on sarnased. (III, 1.)
193. Tõestada, et kolmnurk on võrdhaarne, kui tema kaks nurgapoolitajat on võrdsed. (X, 3.)
194. Tõestada, et kolmnurgas ABC $l_a^2 = bc - b'c'$, kus l_a on nurga α poolitaja, b' ja c' lõigud, milleks nurgapoolitaja l_a jaotab külje a. (VI, 1.; XIII, 1.)
195. Rööpkülikus ABCD on punktid K, L, M ja N vastavalt külgede AB, BC, CD ja AD keskpunktideks. Lõigud AL, EM, CN ja DK moodustavad lõikumisel nelinurga. Tõestada, et see nelinurk on rööpkülik ja leida tema pindala, teades, et rööpküliku ABCD pindala on Q. (II, 2.; X, 1.)

196. Tõestada, et rööpküliku sisenurkade poolitajad moodustavad lõikudes ristküliku, mille diagonaalid on võrdsed rööpküliku kahe lähiskülje vahega. (I, 1.)
197. Rööpküliku ABCD tipp C on ühendatud sirglõikude abil külgede AB ja AD keskpunktidega. Näidata, et need sirglõigud jaotavad diagonaali BD kolmeks võrdseks osaks. (XI, 2.)
198. Rööpküliku ABCD külg AD on jaotatud n võrdseks osaks. Esimene jaotuspunkt P ja tipp B on ühendatud sirgega, mis lõikab diagonaali AC punktis Q. Tõestada, et
- $$AQ = \frac{1}{n+1} AC. \quad (\text{I, h.})$$
199. Tõestada, et kumeras nelinurgas moodustavad külgede keskpunkte ühendavad lõigud rööpküliku. (VII, 2.)
200. Olgu kumera nelinurga ABCD külgede AB ja CD keskpunktideks vastavalt punktid E ja F. Lõigud AF ja DE lõikuvad punktis G ning lõigud EF ja CE punktis H. Näidata, et kolmnurkade AGD ja BHC pindalade summa on võrdne nelinurga EHFG pindalaga. (VIII, 1.)
201. On antud rööpkülik ABCD. Küljega AB paralleelne sirge lõikab külgi BC ja AD ning diagonaali AC vastavalt punktides K, M ja L. Tõestada, et kolmnurgad ABK ja ALD on pindvõrdsed. (XII, 3.)
202. Tõestada, et trapetsi diagonaalide ruutude summa on võrdne trapetsi haarade ruutude ja aluste kahekordse korrutise summaga. (VIII, 3.)
203. Trapetsi alusnurkade summa on $\frac{\pi}{2}$. Tõestada, et selle trapetsi aluste keskpunkte ühendav lõik on võrdne aluste poolvahega. (XI, 1.)
204. Tõestada, et võrdsete diagonaalidega trapets on võrdhaarne. (IX, 1.)
205. Ringjoonele, mille diameeter on AB, on tõmmatud puutu- ja sellel ringjoonel vabalt võetud punktist C. Punk-

tist A on tõmmatud puutujale ristlõik AD ning kõõl AC. Näidata, et lõik AC poolitab nurga DAB. (49/50)

206. Tõestada, et ringjoon, mis läbib korrapärase viisnurga kaht kõrvuti asetsevat tippu ja tema ümberringjoone keskpunkti, läbib ka selle viisnurga samadest tipudest väljuvate diagonaalide lõikepunkte. (VIII, 1.)
207. Kahel korrapärasel kolmnurksel püramiidil on ühine kõrgus h. Kummagi püramiidi tipp asub teise püramiidi aluse keskpunktis. Püramiidide külgservad lõikuvad. Nurk külgserva ja kõrguse vahel on ühes püramiidis α teises β . Määrata püramiidide ühise osa ruumala. (XII, 1.)
208. Korrapärase tetraaedri põhja tipud ja kõrguse keskpunkt on ühendatud sirgetega. Näidata, et need kolm sirget on üksteisega risti. (IV, 2.)
209. Rööptahuka tahkudeks on võrdsed rombid, mille külje pikkus on a ja teravnurk α . Avaldada selle rööptahuka ruumala, kui rööptahukal leidub kaks kolmetahulist nurka, mille kõik tasanurgad on teravnurgad. (IV, h.)
210. Põrandale on asetatud kolm kera võrdsete raadiustega r, nii et nad puudutavad üksteist. Nendele toetub neljas kera, mille madalaim punkt on põrandast $\frac{3}{2}r$ kõrgusel. Kui suur on neljanda kera raadius? (49/50)

XIV matemaatikaolümpiaad.

Lõppvooru ülesanded.

1. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = a \\ \frac{xz}{x+z} = b \\ \frac{yz}{y+z} = c, \text{ kus } abc \neq 0. \end{cases}$$

2. Näidata, et $\log a + \log_a 10 \geq 2$, kui $a > 1$.

3. Kerakujulise ballooni seinad paksusega a on valmistatud materjalist tihedusega b . Balloon on täidetud vedelikuga, mille tihedus on c . Milline peab olema ballooni sisemine raadius r , et ballooni asetamisel vedelikku tihedusega d oleks balloon hõljuvas asendis (ükskõikses tasakaalus)? Millist tingimust peavad rahuldama suurused b , c ja d , et ülesandel oleks mõte?

4. Lahendada võrrand $(\sqrt{2 - \sqrt{3}})^x + (\sqrt{2 + \sqrt{3}})^x = 4$.

5. Tõestada, et $\tan(A + B) = 2 \tan A$, kui

$$3 \sin B = \sin(2A + B).$$

VASTUSED. LAHENDUSI.

1. Et vool kannab ühtlaselt edasi nii parve kui ka paati, siis kulub paadil sõiduks sadamast pöördekohani sama palju aega kui sõiduks pöördekohast ujuva parveni. Järelikult sõitis paat kohtamiseni 20 minutit ja et selle ajaga läbis parv 1 kilomeetri, siis on voolu kiirus $\frac{1000}{20} = 50 \left(\frac{m}{min.}\right)$.
2. Autol oleks kulunud $\frac{1}{2}$ tundi selle tee läbimiseks, mille töölised käisid jalgsi. Et jalakäijate kiirus on 10 korda väiksem auto kiirusest, siis kulub nendel selle tee läbimiseks 10 korda rohkem aega kui autol, s.o. 5 tundi. Järelikult lõppes töö sel päeval 5 tundi varem.
3. 41.
5. Olgu vaadeldav murd

$$\frac{(2n - 1)^2 - (2n_1 - 1)^2}{(2n - 1)^2 + (2n_1 - 1)^2},$$

mida teisendades saame

$$\frac{4(n^2 - n - n_1^2 + n_1)}{2(2n^2 - 2n + 2n_1^2 - 2n_1 + 1)}.$$

Pärast taandamist 2-ga jääb murru lugejasse paarisarv $2(n^2 - n - n_1^2 + n_1)$, nimetajasse aga paarituurv $2n^2 - 2n + 2n_1^2 - 2n_1 + 1$. Seega pole esialgse murru teistkordne 2-ga taandamine võimalik. Järelikult saab vaadeldavat murdu taandada 2-ga, kuid ei saa taandada 4-ga.

6. Olgu viis järjestikust täisarvu $n - 2, n - 1, n, n + 1, n + 2$, kus n on mistahes täisarv. Nende ruutude summa

$(n - 2)^2 + (n - 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2$
 teiseneb avaldiseks $5n^2 + 10$. Seega tuleb meil näidata, et $5n^2 + 10$ jagub 5-ga, kuid ei jagu 25-ga. Kuna 5-ga jaguvus on ilmne, siis jääb näidata, et $5n^2 + 10$ ei jagu 25-ga ehk $n^2 + 2$ ei jagu 5-ga. Et ühegi täisarvu ruut ei lõpe numbriga 3 ega numbriga 8, siis $n^2 + 2$ ei jagu 5-ga.

7. I. Kasutame tähistust $n(n^2 + 5) = N$. Vaatleme arvu n suhtes järgnevaid võimalusi:

- 1) kui $n = 6k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), siis $N = 6k(36k^2 + 5)$;
- 2) kui $n = 6k + 1$, siis $N = 6(6k + 1)(6k^2 + 2k + 1)$;
- 3) kui $n = 6k + 2$, siis $N = 6(3k + 1)(12k^2 + 8k + 3)$;
- 4) kui $n = 6k + 3$, siis $N = 6(2k + 1)(18k^2 + 18k + 7)$;
- 5) kui $n = 6k + 4$, siis $N = 6(3k + 2)(12k^2 + 16k + 7)$;
- 6) kui $n = 6k + 5$, siis $N = 6(6k + 5)(6k^2 + 10k + 5)$.

Siit ilmneb, et kõigil vaadeldud juhtudel jagub N 6-ga. Et nende juhtudega on hõlmatud arvu n 6-ga jaguvuse kõik võimalused, siis ongi väide tõestatud.

II. Et $n(n^2 + 5) = n[(n - 1)(n + 1) + 6] = (n - 1)n(n + 1) + 6n$, milles liidetavad $(n - 1)n(n + 1)$ ja $6n$ jaguvad 6-ga, siis jagub avaldis $n(n^2 + 5)$ samuti 6-ga.

8. Avaldis $n^5 - 5n^3 + 4n$ on esitatav viie järjestikuse täisarvu korrutisena

$$(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2).$$

Viie järjestikuse täisarvu hulgas leidub aga vähemalt üks arv, mis jagub 2-ga, üks arv, mis jagub 3-ga, üks arv, mis jagub 4-ga ja üks arv, mis jagub 5-ga, siis viie järjestikuse täisarvu korrutis jagub korrutisega

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5, \text{ s.o. } 120\text{-ga.}$$

9. Et $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) + 3abc$, kus esimene liidetav jagub 6-ga, siis jääb tõestada, et $3abc$ jagub 6-ga ehk abc jagub 2-ga. Et $a + b + c$ jagub 6-ga, siis on ta paarisarv. Seega on arvud a , b ja

c kas kõik paarisarvud või ainult üks nendest on paarisarv. Mõlemal juhul jagub korrutis abc 2-ga.

10. Antud murru lugeja ja nimetaja ühistegurid on ka avaldise

$$p(14n + 3) + q(21n + 4)$$

tegureiks kordajate p ja q mistahes väärtustel. Olgu $p = 3$ ja $q = -2$, siis

$$3(14n + 3) - 2(21n + 4) = 1,$$

millest järeldub, et ühistegureiks saavad olla ainult arvud ± 1 . Seega ei ole antud murd taandatav.

11. Kirjutame ülesandes antud summa kujul $7^{7^4} + 7^{7^3}$ ehk $7^{7^3}(7^{6 \cdot 7^3} + 1)$. Arv $6 \cdot 7^3 = 2058$ jagub 2-ga, kuid ei jagu 4-ga. Järelikult $7^{6 \cdot 7^3}$ lõpeb 9-ga. (Kõik arvu 7 astmed, kus astendajaks on 4-ga mittejaguv paarisarv, lõpevad 9-ga). Seega lõpeb arv $7^{6 \cdot 7^3} + 1$ nulliga ning kogu avaldis jagub 10-ga.

12. Väikseim arv, mis jagub arvudega 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, on nende arvude väikseim ühiskordne 2520. Et otsitava arvu jagamisel 2-ga, 3-ga, ..., 9-ga tekib jääk, mis on ühe võrra väiksem jagajast, siis on otsitav arv $2520 - 1$, s.o. 2519.

13. $\frac{16}{35}$.

14. $(4 + \sqrt{4} + 4)^{4 + \sqrt{4}}$.

15. $\begin{array}{r} 9567 \\ + 1085 \\ \hline 10652 \end{array}$ Märkus. Vaadeldud tüüpi ülesannete lahendamist vt. ajakirjast "Noorus", 1963 nr. 5, lk. 49-51 või "Mittestatsionaarne matemaatikakool" nr. 6 (1966).

16. $\begin{array}{r} 29786 \\ + 850 \\ \hline 30636 \\ + 850 \\ \hline 31486 \end{array}$ Märkus. Vt. ülesande 15 lahenduse juures toodud märkust.

17. Ühekohalisi arve on	9,	nendes numbreid kokku	9,
kahekohalisi " "	90,	" " "	180,
kolmekohalisi " "	900,	" " "	2700,
neljakohalisi " "	9000,	" " "	36000,
viiekohalisi " "	90000,	" " "	450000,
kuuekohalisi " "	900000,	" " "	5400000.

Võttes jada elementideks kõigi järjestikuste täisarvude numbrid kuni kuuekohaliste arvudeni, neist esimene - 100 000 kaasa arvatud, saame $488889 + 6 = 488895$ liiget (numbrit). Kuni miljonenda liikmeni jääb puudu 511105 liiget (numbrit), mis moodustavad $511105 : 6 = 85184$ (jääk 1) kuuekohalist arvu. Seega on viimane kuuekohaline arv, mille kõik numbrid tuleb võtta jada elementideks, $100000 + 185184$. Et jagamisel oli jääk 1, siis tuleb järgnevast arvust (185185) võtta vaid esimene number, mis on 1.

Järelikult seisab jadas miljonendal kohal number 1.

18. Juhis. Ülesande lahendamisel pidada silmas, et nulle korrutise lõppu annavad kas arvud 10, 20, ..., 100 ise või arvude 5, 15, ..., 95 korrutatised paarisarvudega.
19. Viga tekkis võrduse $a(b - a) = (b - a)(b + a)$ jagamisel vahega $(b - a)$, sest viimane on null.
20. Viga tekkis juurimisel, kus võrduse paremast poolest võeti aritmeetiline juur, vasakust poolest aga algebraline juur.

Märkus. Aritmeetilise ja algebralise juure kohta vt.

В.Л. Гончаров. Начальная алгебра. Москва, 1960, lk. 309-310.

21. Korrutades jagajat kaksliikmega $a - b$ teiseneb ta kujule $a^{128} - b^{128}$, millest järeldub, et otsitav jagatis on $a - b$.
22. $(a^2 + b^2 - \sqrt{3} ab)(a^2 + b^2 + \sqrt{3} ab)(a^2 + b^2 - ab)(a^2 + b^2 + ab)$.
 Juhis. Ülesande lahendamisel kasutada polünoomide teisendamist täisruuduks ja ruutude vahe valemit.

23. Teisendame antud avaldist järgmiselt:

$$\begin{aligned}(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 &= [(a + b + c)^3 - a^3] - (b^3 + c^3) = \\ &= (b + c) [(a + b + c)^2 + a(a + b + c) + a^2 - b^2 + bc - c^2] = \\ &= (b + c)(3a^2 + 3ab + 3bc + 3ac) = 3(b+c) [(a+b)a + c(a+b)] = \\ &= 3(a + b)(b + c)(a + c).\end{aligned}$$

24. Juhis. Kasutada võrduse mõlema poole teisendamiseks aritmeetilise progressiooni summa valemit või kirjutada võrduse vasaku poole esimene liige n^2 summamana $n + n + \dots + n$, kus liidetavaid on n .

25. Teisendame antud avaldist järgmiselt:

$$\begin{aligned}a(a + 1)(a + 2)(a + 3) + 1 &= a^4 + 6a^3 + 11a^2 + 6a + 1 = \\ &= (a^2 + 3a)^2 + 2(a^2 + 3a) + 1 = (a^2 + 3a + 1)^2.\end{aligned}$$

26. Antud võrdust kahega korrutades ja sobivalt rühmitades saame $(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 = 0$. Et ruutude summa saab olla null vaid siis, kui liidetavad ise on nullid, siis järelikult $a = b = c$.

27. Juhis. Ülesandes esitatud väite tõestamiseks on tarvis näidata, et antud hulkliiget saab kirjutada korrutisena, milles esinevad tegurid $(b - c)$, $(c - a)$ ja $(a - b)$. Selleks on kaks võimalust: 1) avada esialgses hulkliikmes sulud ja rühmitada liikmed nii, et algul saaks sulgude ette tuua näiteks kakslükme $(b - c)$, siis $(c - a)$ ja lõpuks $(a - b)$; 2) jagada antud hulkliige hulkliikmega $(b - c)(c - a)(a - b)$. Kui jagamine toimub jäägita, on ülesandes toodud väide tõestatud, kui aga mitte, osutub ülesandes esitatud väide valeks.

28. Tõstes võrduse $a + b + c = 0$ ruutu, saame

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = 0$$

ja et $a^2 + b^2 + c^2 = a$, siis

$$a = -2(ab + ac + bc).$$

Sellest võrdusest saame

$$a^2 = 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2abc(a + b + c))$$

ehk

$$\frac{a^2}{4} = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2.$$

Tõstes võrduse $a^2 + b^2 + c^2 = a$ ruutu, saame otsitava avaldise

$$a^4 + b^4 + c^4 = a^2 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2),$$

kust eelmise võrduse põhjal

$$a^4 + b^4 + c^4 = \frac{a^2}{2}.$$

29. $cx^2 - bx - a = 0$. Juhis. Kasutada Vieta valemeid.

$$30. \begin{cases} p = 1 & \text{või} & \begin{cases} q = 0 \\ p = 0. \end{cases} \\ q = -2 \end{cases}$$

31. Et $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ning $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, siis

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1 \cdot x_2)^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}$$

ja

$$\begin{aligned} x_1^4 + x_1^2x_2^2 + x_2^4 &= (x_1^2 + x_2^2)^2 - (x_1 \cdot x_2)^2 = \\ &= \left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \right]^2 - (x_1 \cdot x_2)^2 = \frac{(b^2 - 2ac)^2 - a^2c^2}{a^4}. \end{aligned}$$

32. Teisendame antud võrrandi tegurite rühmitamise teel kujule

$$(x^2 + 5x)(x^2 + 5x + 6) = 8.$$

Tehes nüüd asenduse

$$x^2 + 5x + 3 = y,$$

saame võrrandi

$$(y - 3)(y + 3) = 8,$$

millest

$$y_{1,2} = \pm\sqrt{17}.$$

Seega

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -2,5 \pm \sqrt{3,25 + \sqrt{17}}, \\ x_{3,4} &= -2,5 \pm \sqrt{3,25 - \sqrt{17}}. \end{aligned}$$

33. $x_1 = 4$; $x_2 = -5$. Juhis. Vt. ülesande 32 lahendust. Sobiv asendus on $x^2 + x - 2 = y$.

34. $x_1 = -0,5$; $x_2 = -1,25$. Juhis. Korrutada võrrandi mõlemad pooli arvuga 16 ja kirjutada võrrand kujul

$$(8x + 7)^2(8x + 8)(8x + 6) = 72.$$

Seejärel teha asendus

$$8x + 7 = y.$$

(Vt. ülesande 32 lahendust.)

35. Kirjutame võrrandi kujul

$$(3x + 2)^4 - (2x + 3)^4 = (4x - 2)^4 - (2x - 4)^4.$$

Kasutades ruutude vahe valemit teisendame võrrandi mõlemad pooled korrutiseks

$$5(x-1)(x+1)(13x^2+24x+13) = 12(x-1)(x+1)(20x^2-32x+20).$$

Siit

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1$$

ning

$$25x^2 - 72x - 25 = 0,$$

millest

$$x_{3,4} = 1,44 \pm \sqrt{3,0736}.$$

36. Jagades antud võrrandi avaldisega x^4 ($x = 0$ ei ole lahendiks) ning rühmitades liikmed sobivalt, saame võrrandi

$$(x^4 + \frac{1}{4}) + 5(x^3 - \frac{1}{x^3}) - 20(x - \frac{1}{x}) - 1 = 0. \quad (1)$$

Tähistades $x - \frac{1}{x} = y$ ja leides y^2 , y^3 ning y^4 , saame viimastest seosed $x^3 - \frac{1}{x^3} = y^3 + 3y$ ja $x^4 + \frac{1}{4} =$

$= y^4 + 4y^2 + 2$, mis lubavad võrrandi (1) kirjutada kujul

$$y^4 + 5y^3 + 4y^2 - 5y + 1 = 0. \quad (2)$$

Võrrandit (2) teisendame analoogiliselt esialgsega: jagame teda avaldisega y^2 ($y \neq 0$), rühmitame, teeme asenduse $y - \frac{1}{y} = z$, mille tulemusena saame võrrandi

$$z^2 + 5z + 6 = 0. \quad (3)$$

Leidnud, et $z_1 = -2$ ja $z_2 = -3$, arvutame asendusvalemi-

te $x - \frac{1}{x} = y$ ja $y - \frac{1}{y} = z$ abil esialgse võrrandi lahendid. Need on

$$x_{1,2} = \frac{-(1-\sqrt{2}) \pm \sqrt{7-2\sqrt{2}}}{2}; \quad x_{3,4} = \frac{-(1+\sqrt{2}) \pm \sqrt{7+2\sqrt{2}}}{2};$$

$$x_{5,6} = \frac{-(3-\sqrt{13}) \pm \sqrt{38-6\sqrt{13}}}{4}; \quad x_{7,8} = \frac{-(3+\sqrt{13}) \pm \sqrt{38+6\sqrt{13}}}{4}.$$

Märkus. Vaadeldud võrrand kuulub nn. pöördivõrrandite hulka, mille kohta vt.:

- 1) H. Espenberg. Pöördivõrrandid. - Matemaatika metoodiliste artiklite kogumik II, 1964;
- 2) G. Kangro. Kõrgem algebra, 1962, lk. 295-299;
- 3) С.И. Новосёлов. Специальный курс элементарной алгебры, 1958, стр. 329-331.

37. Tõstes võrrandi mõlemad pooled kuupi ning lihtsustades, saame võrrandi

$$\sqrt[3]{x(2x-3)} \left[\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} \right] = 3(x-1).$$

Et nurksulgudes olev avaldis on esialgse võrrandi vasak pool, siis $\sqrt[3]{12(x-1)(2x-3)} = 3(x-1)$, millest

$$(x-1)(x-3)^2 = 0$$

ja siit $x_1 = 1$ ja $x_2 = 3$.

38. Esitame kaks lahendusviisi:

I. Jättes ühe juuravaldise vasakule, tõstame võrrandi ruutu ja koondame. Samal viisil vabaneme järelejäänud keerulisemast juuravaldisest. Koondamisel saame identseuse $0 = 0$. Sellest järeldub, et võrrandit rahuldavad kõik need x väärtused, mille korral võrrandis esinevad juured on aritmeetilised, s.t. juurealused avaldised on mittenegatiivsed:

$$x - 1 \geq 0; \quad x + 3 - 4\sqrt{x-1} \geq 0; \quad x + 8 - 6\sqrt{x-1} \geq 0.$$

Et kahe mittenegatiivse arvu summa peab võrduma ühega (vt. võrrandit), lisanduvad eelnevatele tingimustele veel kaks võrratust

$$0 \leq \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} \leq 1 \quad \text{ja} \quad 0 \leq \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} \leq 1.$$

Viimaste võrratuste lahendamisel ilmneb, et need eelnevatele tingimustele uusi juurde ei anna.

Esimesest kolmest võrratusest saame:

$$x > 1; \quad 2 \leq x \leq 10; \quad 5 \leq x \leq 17.$$

Järelikult on võrrandi lahenditeks kõik need x väärtused, mille korral on rahuldatud võrratus $5 \leq x \leq 10$.

II. Esialgse võrrandi saab kirjutada kujul

$$\sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2} = 1$$

ehk, arvestades ainult aritmeetilisi juuri,

$$|\sqrt{x-1}-2| + |\sqrt{x-1}-3| = 1.$$

Võrrandi edasisel lahendamisel tuleb vaadelda nelja juhtu:

- 1) $x-1-2 \geq 0$ ja $x-1-3 \geq 0$, s.t. $x \geq 5$ ja $x \geq 10$, millest $x \geq 10$. Sel juhul saab võrrand kujul $\sqrt{x-1}-2 + \sqrt{x-1}-3 = 1$, kust $x = 10$.
- 2) $\sqrt{x-1}-2 \geq 0$ ja $\sqrt{x-1}-3 \leq 0$, s.t. $x \geq 5$ ja $x \leq 10$, millest $5 \leq x \leq 10$.

Võrrand $\sqrt{x-1}-2 - \sqrt{x-1} + 3 = 1$ on samasus. Järelikult on lahendeiks kõik x väärtused, mis rahuldavad võrratust $5 \leq x \leq 10$.

- 3) $\sqrt{x-1}-2 \leq 0$ ja $\sqrt{x-1}-3 \geq 0$, s.t. $x \leq 5$ ja $x \geq 10$.

Jõudsime vastuolule, seega võrrandil $-\sqrt{x-1} + 2 + \sqrt{x-1} - 3 = 1$ lahendeid ei ole.

- 4) $\sqrt{x-1}-2 \leq 0$ ja $\sqrt{x-1}-3 \leq 0$, s.t. $x \leq 5$, $x \leq 10$, millest $x \leq 5$.

Võrrandi $-\sqrt{x-1} + 2 - \sqrt{x-1} + 3 = 1$ lahendiks on $x = 5$.

Seega on esialgse võrrandi lahendeiks x väärtused, mis rahuldavad võrratust $5 \leq x \leq 10$.

39. Vabanesdes juurtest, saame võrrandi

$$x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - a = 0,$$

mida vaatleme ruutvõrrandina a suhtes:

$$a^2 - (2x^2 + 1)a + x^4 - x = 0.$$

Selle võrrandi lahendid on:

$$a_1 = x^2 + x + 1 \quad \text{ja} \quad a_2 = x^2 - x.$$

Vaadeldes viimati saadud seoseid suuruse x suhtes ruutvõrranditena, saame antud võrrandi lahendeiks:

$$x_{1,2} = 0,5 \pm \sqrt{a + 0,25},$$

$$x_{3,4} = -0,5 \pm \sqrt{a - 0,25}.$$

40. Süsteem on teisendatav kujule

$$\begin{cases} 2(x+y)(x^2 - xy + y^2) = 2 \\ y(x+y)^2 = 2. \end{cases}$$

Lahutades siin esimesest võrrandist teise ja arvestades, et $x + y \neq 0$, saame $2x^2 - 3xy + y^2 = 0$ ehk $(y - 2x)(y - x) = 0$. Viimasest $y = 2x$ või $y = x$.

Esimesel juhul $x_1 = \frac{1}{3}\sqrt[3]{3}$ ja $y_1 = \frac{2}{3}\sqrt[3]{3}$, teisel juhul aga $x_2 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$ ja $y_2 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$.

$$41. \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -2\frac{3}{8} \\ y_2 = -1\frac{5}{8}. \end{cases}$$

Juhis. Antud süsteemi esimeses võrrandis teha asendus $x + y = z$.

42. Jagades süsteemi esimese võrrandi teisega ($x - y \neq 0$), saame võrrandi

$$\frac{9}{(x+y)^2} = \frac{5}{x^2 + y^2}.$$

Vaadeldes viimast ruutvõrrandina x suhtes, leiame, et $x_1 = 2y$ ja $x_2 = \frac{y}{2}$. Antud süsteemi lahendiks on

$$\begin{cases} x_1 = 2 & \text{ning} \\ y_1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -2. \end{cases}$$

43. Lahutades kahekordsest esimesest võrrandist teise võrrandi, saame xy suhtes ruutvõrrandi

$$(xy)^2 - 5xy + 6 = 0,$$

mille lahenditeks on $(xy)_1 = 2$ ja $(xy)_2 = 3$. Asenda-
des saadud tulemused esialgsetesse võrranditesse,
leiame võrrandisüsteemi lahendid:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ y_1 = \sqrt{2}, \end{cases} \begin{cases} x_2 = -\sqrt{2} \\ y_2 = -\sqrt{2}, \end{cases} \begin{cases} x_3 = \frac{6\sqrt{17}}{17} \\ y_3 = \frac{\sqrt{17}}{17}, \end{cases} \begin{cases} x_4 = -\frac{6\sqrt{17}}{17} \\ y_4 = -\frac{\sqrt{17}}{17}. \end{cases}$$

44. Tähistades $\frac{x+y}{xy} = u$ ja $\frac{x-y}{xy} = v$ saame võrrandisüs-
teemi

$$\begin{cases} u + \frac{1}{u} = \frac{a^2 + 1}{a} \\ v + \frac{1}{v} = \frac{b^2 + 1}{b}. \end{cases}$$

Siit $u_1 = a$, $u_2 = \frac{1}{a}$, $v_1 = b$, $v_2 = \frac{1}{b}$. Lahendame nüüd
võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \frac{x+y}{xy} = u \\ \frac{x-y}{xy} = v \end{cases}$$

x ja y suhtes:

$$x = \frac{2}{u-v}, \quad y = \frac{2}{u+v}.$$

Et u ja v võivad omandada teineteisest sõltumatult va-
rem leitud väärtusi, siis

1) kui $\begin{cases} u = a \\ v = b, \end{cases}$ siis $\begin{cases} x_1 = \frac{2}{a-b} \\ y_1 = \frac{2}{a+b} \end{cases}$ tingimusel, et
 $|a| \neq |b|$,

2) kui $\begin{cases} u = \frac{1}{a} \\ v = \frac{1}{b}, \end{cases}$ siis $\begin{cases} x_2 = \frac{2ab}{b-a} \\ y_2 = \frac{2ab}{a+b} \end{cases}$ tingimusel, et
 $|a| \neq |b|$,

3) kui $\begin{cases} u = a, \\ v = \frac{1}{b}, \end{cases}$ siis $\begin{cases} x_3 = \frac{2b}{ab-1} \\ y_3 = \frac{2b}{ab+1} \end{cases}$ tingimusel,
et $|ab| \neq 1$,

$$4) \text{ kui } \begin{cases} u = \frac{1}{a} \\ v = b, \end{cases} \text{ siis } \begin{cases} x_4 = \frac{2a}{1-ab} \\ y_4 = \frac{2a}{1+ab} \end{cases} \text{ tingimusel, et } |ab| \neq 1.$$

45. Teisendades antud süsteemi kujule

$$\begin{cases} (x + y) - \sqrt{xy} = 7 \\ \sqrt{xy}(x + y) = 78 \end{cases}$$

ja tähistades $x + y = t$ ning $\sqrt{xy} = v$, saame võrrandi-süsteemi

$$\begin{cases} t - v = 7 \\ v \cdot t = 78, \end{cases}$$

mille lahendid on $t = 13, v = 6$ ($t = -6, v = -13$ ei sobi, sest $x + y > 0$). Seega

$$\begin{cases} x_1 = 9 \\ y_1 = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = 9. \end{cases}$$

46. Anname teisele võrrandile kuju

$$\frac{xy + xz + yz}{xyz} = 1$$

ehk

$$xy + xz + yz = xyz.$$

Et antud süsteemis on $xy + xz + yz = 27$, siis järeldub siit, et

$$xyz = 27, \text{ millest } yz = \frac{27}{x}.$$

Teisendades kolmanda võrrandi kujule $x(y + z) + yz = 27$ ning asendades siin $y + z = 9 - x$ ja $yz = \frac{27}{x}$, saame kuupvõrrandi

$$x^3 - 9x^2 + 27x + 27 = 0$$

ehk

$$(x - 3)^3 = 0,$$

millest $x = 3$. Nüüd leiame, et $y = 3$ ning $z = 3$.

47. Kirjutame esimese võrrandi kujul $x + y = a - z$ ja tõs-tame selle mõlemad pooled ruutu ning kuupi. Tulemusena saame kaks uut võrrandit, mis on esitatavad kujul

$$(x^2 + y^2) + 2xy = a^2 - 2az + z^2,$$

$$(x^3 + y^3 + z^3) + 3xy(x + y) = a^3 - 3a^2z + 3az^2.$$

Neis võrrandis teeme vastavad asendused süsteemi esimesest, teisest ja kolmandast võrrandist ning pärast koondamist saame

$$xy = z(z - a),$$

$$xy(a - z) = az^2 - a^2z.$$

Elimineerides xy , jõuame võrrandini $z^2(z - a) = 0$, millest $z_1 = a$, $z_2 = 0$. Leides vastavad x ja y väärtused, saame esialgse süsteemi lahendeiks:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \\ z_1 = a, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = a \\ z_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = a \\ y_3 = 0 \\ z_3 = 0. \end{cases}$$

48.
$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \\ z_1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 3 \\ z_2 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 3 \\ y_3 = 2 \\ z_3 = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = \frac{7 + \sqrt{42}}{5} \\ y_4 = \frac{7 - \sqrt{42}}{5} \\ z_4 = \frac{14}{25}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_5 = \frac{7 - \sqrt{42}}{5} \\ y_5 = \frac{7 + \sqrt{42}}{5} \\ z_5 = \frac{14}{25}. \end{cases}$$

Juhis. Tõsta esimene võrrand ruutu ning kuupi. Edasi toimida nii nagu ülesande 47 lahendamisel.

49. Tõstes esimese võrrandi ruutu, saame

$$(x^2 + y^2 + z^2 + u^2) + 2(xy + xu + zy + zu) + 2xz + 2yu = 64.$$

Arvestades siin teist ning kolmandat võrrandit, jõuame võrrandini

$$xz + yu = 6.$$

Moodustame nüüd süsteemi

$$\begin{cases} (xz) + (yu) = 6 \\ (xz) \cdot (yu) = 9, \end{cases}$$

mille lahenditeks on

$$xz = 3 \text{ ja } yu = 3 \text{ ehk } z = \frac{3}{x}, \quad u = \frac{3}{y}.$$

Esialgse võrrandisüsteemi teine võrrand on nüüd esitatav kujul

$$x^2 + y^2 + \frac{9}{x^2} + \frac{9}{y^2} = 20 \quad \text{ehk} \quad (x^2 + y^2) + 9 \cdot \frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2} = 20$$

ja kolmas võrrand kujul

$$xy + \frac{3x}{y} + \frac{3y}{x} + \frac{9}{xy} = 16 \quad \text{ehk} \quad xy + 3 \cdot \frac{x^2 + y^2}{xy} + \frac{9}{xy} = 16.$$

Esimesest saadud võrrandist avaldame $x^2 + y^2$ ja asetame teise. Pärast lihtsustamist saab teine võrrand kuju

$$(xy)^4 - 16(xy)^3 + 78(xy)^2 - 144(xy) + 81 = 0.$$

Kasutades Horneri skeemi (vt. ülesande 111 märkust lahenduse juures) leiame

$$(xy)_1 = 1,$$

$$(xy)_2 = 9,$$

$$(xy)_{3,4} = 3.$$

Saadud võrduste ja võrrandite $x + y + z + u = 8$,

$xz = 3$ ja $yu = 3$ abil leiame antud süsteemi lahendid:

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 3 \\ z_1 = 1 \\ u_1 = 1, \end{cases} \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 3 \\ z_2 = 3 \\ u_2 = 1, \end{cases} \begin{cases} x_3 = 3 \\ y_3 = 1 \\ z_3 = 1 \\ u_3 = 3, \end{cases} \begin{cases} x_4 = 1 \\ y_4 = 1 \\ z_4 = 3 \\ u_4 = 3. \end{cases}$$

50. Pärast sulgude avamist ja teisendamist saab teise võrrandi kirjutada kujul

$$(x + y + z)^2 + xy + xz + yz = 1$$

ehk, arvestades süsteemi esimest võrrandit,

$$xy + xz + yz = -3. \quad (1)$$

Kirjutades süsteemi kolmanda võrrandi kujul

$$x(xy + xz) + y(yz + yx) + z(zx + zy) = -6$$

ning arvestades võrdust (1), saame

$$x(3 + yz) + y(3 + xz) + z(3 + xy) = 6$$

ehk

$$x + y + z + xyz = 2,$$

millest

$$xyz = 0.$$

Siit kas $x = 0$, $y = 0$ või $z = 0$ ning antud süsteemi lahendid on:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 3 \\ z_1 = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = -1 \\ z_2 = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -1 \\ y_3 = 3 \\ z_3 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = 3 \\ y_4 = -1 \\ z_4 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_5 = -1 \\ y_5 = 0 \\ z_5 = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_6 = 3 \\ y_6 = 0 \\ z_6 = -1. \end{cases}$$

51. Avaldades esimesest võrrandist otsitava x ning asendades selle teise võrrandisse, saame

$$y^2 - 2y + 1 + z^2 = 0 \quad \text{ehk} \quad (y - 1)^2 + z^2 = 0.$$

Et positiivsete suuruste summa oleks null, siis peavad need suurused ise nulliga võrduma. Seega $y = 1$ ja $z = 0$.

Esialgse võrrandisüsteemi lahendiks on

$$x = 1, \quad y = 1, \quad z = 0.$$

52. Avaldades esimesest võrrandist z ja asendades saadud avaldise teise võrrandisse, saame

$$x^2 + x + y^2 + y = a$$

ehk

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = a + \frac{1}{2}.$$

Et arvude ruutude summa on mittenegatiivne, siis $a + \frac{1}{2} \geq 0$. Kui $a + \frac{1}{2} > 0$, siis on võrrandil rohkem kui üks lahend. Järelikult peab $a + \frac{1}{2} = 0$ ehk $a = -\frac{1}{2}$. Siis $x = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{2}$.

53. Tähistame kalade ligikaudse arvu tiigis tähega x .

Siis

$$\frac{30}{x} = \frac{2}{40},$$

millest $x = 600$.

54. Kui turist käiks 3 km tunnis, siis kuluks tal x km läbimiseks $\frac{x}{3}$ tundi. Et ta käis 3,5 km tunnis, siis kulus tal aega $\frac{x}{3,5}$ tundi. Seega

$$\frac{x}{3,5} + 1 = \frac{x}{3},$$

millest $x = 21$.

Turisti käsutuses oli 6 tundi 40 minutit.

55. Suur osuti liigub 12 korda kiiremini kui väike. Järelikult, kui suur osuti on läbinud x minutit, on väike osuti läbinud $\frac{x}{12}$ minutit. Et osutid x minuti möödudes uuesti kattuksid, peab $x - 60 = \frac{x}{12}$. Siit $x = 65\frac{5}{11}$ minutit.

56. Et kell käib ööpäevas x minutit ette, siis näitab ta õiget aega $\frac{2}{x}$ ööpäeva järel. Kui aga kell käiks ööpäevas ette $(x + \frac{1}{2})$ minutit, siis näitaks ta õiget aega $\frac{3}{x + \frac{1}{2}}$ ööpäeva järel. Ülesande tingimuste kohaselt

$$\frac{2}{x} - \frac{3}{x + \frac{1}{2}} = 1,$$

millest $x = \frac{1}{2}$ minutit.

57. Olgu raamatu ostuhind 1 ja planeeritud kasum $x\%$, siis on raamatu müügihind $1 + \frac{x}{100}$. Pärast hinna alandamist 10% võrra on raamatu hind $(1 + \frac{x}{100}) - (1 + \frac{x}{100}) \cdot \frac{10}{100}$. Et kasumit saadi siiski 8%, siis

$$(1 + \frac{x}{100}) - (1 + \frac{x}{100}) \cdot 0,1 - 1 = \frac{8}{100}.$$

Siit leiame, et planeeritud kasum oli 20%.

58. Tähistame punktide A ja B vahelise kauguse kilomeetrites tähega x , siis on B ja C vaheline kaugus $x + 20$ km ning ülesande lahendi saame võrrandist

$$\frac{300}{x} = \frac{300}{x + 20} + \frac{5}{4},$$

kust $x = 60$. Seega on punktide A ja B vaheline kaugus 60 km ning C ja B vaheline kaugus 80 km.

59. Olgu kraavi kaevamas n töölisi. Kui viimasena tööle asunu töötab x tundi, siis esimesena tööle asunu $5x$ tundi. Et tööajad moodustavad aritmeetilise progressiooni, on kogu töötundide arv $\frac{x + 5x}{2} \cdot n$. Siis

$$\frac{x + 5x}{2} \cdot n = 24 \cdot n,$$

millest

$$x = 8.$$

Seega töötas esimesena tööle asunud tööline 40 tundi.

60. Väljugu trammid liini otspunktidest iga x minuti järel. Seega jõuab järgmine tramm kohta, kus esimene tramm möödub jalakäijast, x minuti pärast. Tee, mille jalakäija käib 12-minutiga, läbib tramm 12 - x minutiga ja tee, mille jalakäija käib 1 minutiga, läbib tramm $\frac{12 - x}{12}$ minutiga.

Jalakäija kohtab vastutulevat trammi 4 minutit pärast eelnevat. Tee, mille jalakäija käib 4 minutiga, läbib tramm $x - 4$ minutiga ja tee, mille jalakäija käib 1 minutiga, läbib tramm $\frac{x - 4}{4}$ minutiga. Järelikult

$$\frac{12 - x}{12} = \frac{x - 4}{4}, \text{ millest } x = 6.$$

61. Olgu paadi kiirus seisvas vees v_1 ja voolu kiirus punktide B ja C vahel v_2 , kaugus punktide A ja B vahel x km ning kaugus punktide A ja C vahel y km, siis saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \frac{x}{v_1} + \frac{y - x}{v_1 + v_2} = 3 \\ \frac{x}{v_1} + \frac{y - x}{v_1 - v_2} = 3\frac{1}{2} \\ \frac{y}{v_1 + v_2} = 2\frac{3}{4} \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} xv_2 + yv_1 = 3v_1(v_1 + v_2) \\ -2xv_2 + 2yv_1 = 7v_1(v_1 - v_2) \\ 4y = 11(v_1 + v_2) \end{cases}.$$

Et $v_1 \neq 0$, siis saame kahest esimesest võrrandist, et $4y = 13v_1 - v_2$. Lahutades sellest võrrandist kolmanda võrrandi, jõuame seoseni $v_1 = 6v_2$. Kolmandast

võrrandist leiame nüüd, et $v_2 = \frac{4}{77}$ y. Järelikult

$$v_1 = \frac{24}{74}y \text{ ja } v_1 - v_2 = \frac{20}{77}y \text{ ning otsitav aeg } t = \frac{y}{v_1 - v_2} = \frac{77}{20} \text{ tundi} = 3 \text{ tundi } 51 \text{ minutit.}$$

62. Ülesande tingimuste kohaselt

$$A = \frac{B + C}{2} \text{ ja } B = \frac{A + C}{3}.$$

Asendades esimeses võrduses B vastava avaldisega teisest võrdusest ning teises võrduses A vastava avaldisega esimesest võrdusest, saame seosed

$$4C = 5A \text{ ja } 3C = 5B.$$

Liites need võrdused leiame, et

$$C = \frac{5}{7}(A + B).$$

63. Tähistades tööpingi A tootlikkuse tähega x, B tootlikkuse tähega y, C tootlikkuse tähega z ning otsitava protsendimäära tähega p, saame võrdused:

$$\frac{x}{y + z} = \frac{m}{100}, \quad \frac{y}{x + z} = \frac{n}{100}, \quad \frac{z}{x + y} = \frac{p}{100}$$

ehk

$$\frac{y}{x} + \frac{z}{x} = \frac{100}{m}, \quad \frac{x}{y} + \frac{z}{y} = \frac{100}{n}, \quad \frac{x}{z} + \frac{y}{z} = \frac{100}{p}.$$

Tähistades $\frac{z}{x} = v$ ning $\frac{x}{y} = u$, saame esimesest kahest võrrandist

$$\begin{cases} \frac{1}{u} + v = \frac{100}{m} \\ u + uv = \frac{100}{n} \end{cases},$$

mille lahenditeks on

$$u = \frac{m(100 + n)}{n(100 + m)} \text{ ja } v = \frac{10000 - mn}{m(100 + n)}.$$

Et

$$\frac{x}{z} = \frac{1}{v} \text{ ja } \frac{y}{z} = \frac{1}{u \cdot v},$$

siis on võrrand $\frac{x}{z} + \frac{y}{z} = \frac{100}{p}$ esitatav kujul

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{u \cdot v} = \frac{100}{p}.$$

Asendades siin v ja u eespool leitud väärtustega, saame

$$\frac{100(m+n) + 2mn}{10000 - mn} = \frac{100}{p},$$

millest

$$p = \frac{10000 - mn}{100(m+n) + 2mn} \cdot 100.$$

64. Olgu mootorpaadi kiirus seisvas vees $x \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ja voolu kiirus $y \frac{\text{km}}{\text{h}}$, siis saame vastavalt ülesande tingimustele koostada võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \frac{96}{x+y} + \frac{96}{x-y} = 14 \\ \frac{96}{x+y} + \frac{72}{x-y} = \frac{24}{y} \end{cases}$$

Teise võrrandi saab esitada kujul $x = 7y$. Võrrandisüsteemi lahenditeks on $x = 14 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ja $y = 2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

65. Läbigu esimene masin päevas x meetrit ja teine masin y meetrit tunnelit, siis 60 päevaga läbib esimene masin $60x$ meetrit ja teine masin $60y$ meetrit. Ülesande tingimuste põhjal saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 0,3 \cdot 60x + \frac{8}{300} \cdot 60y = 60 \\ \frac{2}{3} \cdot 60y : x - 6 = 0,3 \cdot 60x : y \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} 9x + 8y - 30 = 0 \\ 20\frac{y}{x} - 9\frac{x}{y} - 3 = 0. \end{cases}$$

Tehes teises võrrandis asenduse $\frac{y}{x} = t$, saame ruutvõrrandi t suhtes, mille lahendid on

$$t_1 = \frac{3}{4} \quad \text{ja} \quad t_2 = -\frac{3}{5}.$$

Vastuseks saame, et esimene masin läbib päevas 2 meetrit tunnelit ja teine masin 1,5 m.

66. Kui metallrahadest võtta 1- ja 3-kopikaline, siis on vaja kolm ühekopikalist, kui aga võtta viie- ja viieteistkümnekopikaline, siis esimesi tuleb võtta kas 6 või 15 ja teisi vastavalt 3 või 0.

67. Hetkel t asub auto punktist A. 40t km kaugusel, mootorratas $16t^2 + 9$ km kaugusel. Nende omavaheline kaugus on $s(t) = |16t^2 - 40t + 9|$.

Et parabooli $y = 16t^2 - 40t + 9$ haripunktiks on $(\frac{5}{4}; 16)$, siis on maksimaalne kaugus antud tingimustel 16 km, mis saavutatakse 1 tund 15 minutit pärast liikumise algust.

68. Täisarvulisi lahendeid ei ole.

69. Avaldame võrrandist tundmatu y ja saadud murru lugejale lisame nii $+ 21$ kui ka -21 . Siis saame $y = \frac{7021}{xz + z + 7x + 7} - 3$.

Et y oleks naturaalarv (nagu on nõutud ülesandes), peab murd $\frac{7021}{xz + z + 7x + 7} = t_1$ olema naturaalarv. Siit

$x = \frac{7021}{zt_1 + 7t_1} - 1$. Et ka x peab olema naturaalarv, siis peab murd $\frac{7021}{zt_1 + 7t_1} = t_2$ olema samuti naturaalarv. Avaldame viimasest võrdusest tundmatu z :

$z = \frac{7021}{t_1 t_2} - 7$, kust saame, et ka murd $\frac{7021}{t_1 t_2} = t_3$ peab olema naturaalarv. Seega $7021 = t_1 t_2 t_3$.

Et $7021 = 7 \cdot 17 \cdot 59$ ja $x = t_2 - 1$, $y = t_1 - 3$, $z = t_3 - 7$, siis

$$t_1 = 7; 7; 59; 17,$$

$$t_2 = 17; 59; 7; 7,$$

$$t_3 = 59; 17; 17; 59$$

ning võrrandi lahendid on:

$$\begin{cases} x_1 = 16 \\ y_1 = 4 \\ z_1 = 52, \end{cases} \begin{cases} x_2 = 58 \\ y_2 = 4 \\ z_2 = 10, \end{cases} \begin{cases} x_3 = 6 \\ y_3 = 56 \\ z_3 = 10, \end{cases} \begin{cases} x_4 = 6 \\ y_4 = 14 \\ z_4 = 52. \end{cases}$$

Märkus. Vaadeldud võrrand kuulub nn. Diofantose võrrandite hulka, mille lahendamist vt. J. I. Perelmann. Huvitav algebra, IV ptk.

70. On ilmne, et

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

71. Teisendame võrratuse vasakut poolt järgmiselt:

$$\frac{\sqrt{a(b-1)}}{\sqrt{b}-\frac{1}{a}} + \frac{\sqrt{b(a-1)}}{\sqrt{a}-\frac{1}{b}} < \frac{\sqrt{a}(\sqrt{b}-1)(\sqrt{b}+1)}{\sqrt{b}-1} + \frac{\sqrt{b}(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}-1} =$$

$$= 2\sqrt{ab} + \sqrt{a} + \sqrt{b} < 2\sqrt{ab} + a + b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = \left[\sqrt{a} + \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \right]^2.$$

72. Antud võrratuse lahendamine taandub võrratusestee-
le

$$\left\{ \begin{array}{l} -3 < \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} \\ \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2. \end{array} \right.$$

Et tundmatu x mistahes väärtuse korral $x^2 - x + 1 > 0$,
siis on võrratusestee kujule

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x^2 + x(a-3) + 1 > 0 \\ x^2 - x(a+2) + 4 > 0. \end{array} \right.$$

Ruutkolmlige on positiivne x iga väärtuse korral,
kui vastava ruutvõrrandi diskriminant on negatiivne.
Seega peavad kehtima võrratused

$$\left\{ \begin{array}{l} (a-3)^2 - 16 < 0 \\ (a+2)^2 - 16 < 0, \end{array} \right.$$

millest $-1 < a < 2$.

73. Et $x = \frac{1-4y}{2}$, siis

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1-4y}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1-8y+2y^2}{4} = \frac{(10y-2)^2 + 1}{20} \geq \frac{1}{20}.$$

74. Tingimusest $\frac{4}{13} < \frac{x}{20} < \frac{5}{13}$ saame $6\frac{2}{13} < x < 7\frac{9}{13}$ ja et a
peab olema täisarv, siis $a = 7$ ning otsitav murd on $\frac{7}{20}$.

75. Tähistades paadi enese kiiruse tähega x , saame koosta-
da võrratuse

$$3 < \frac{10}{x+1} + \frac{6}{x-1} < 4 \quad \text{ehk} \quad 3 < \frac{16x-4}{x^2-1} < 4,$$

mille lahendid on:

$$0 < x < \frac{8 - \sqrt{61}}{3} \quad \text{või} \quad 4 < x < \frac{8 + \sqrt{61}}{3}.$$

Ülesande tingimustele vastab ainult teine piirkond.

Märkus. Kõrgema astme võrratuste ja võrratusesüsteemide ratsionaalseid lahendusvõtteid vt. С.И. Новосёлов. Специальный курс элементарной алгебры. Москва, 1958, § 91, lk. 360-366.

76. Olgu otsitavad arvud x ja y , siis $x + y < 2000$ ning $\frac{x}{y} < 10$. Et $x + y$ peab jaguma arvuga 504 ja $\frac{x}{y}$ jaguma arvuga 6, siis on $x + y$ kas 504, 1008 või 1512 ja $\frac{x}{y} = 6$. Leitud võimaluste uurimisel selgub, et otsitavad arvud on 864 ja 144.

77. $\frac{2 - \sqrt[3]{4}}{2}$. Juhis. Vt. ülesande 78 lahendust.

78. Selleks, et vabaneda juurtest murru nimetajas, tuleb leida nimetaja kaastegur, s.o. avaldis, millega nimetajat korrutades saame ratsionaalse avaldise.

Kaasteguri leidmisel lähtume valemist

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1).$$

Sellele vastavalt

$$a - 1 = (\sqrt[n]{a} - 1)(\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}} + \dots + \sqrt[n]{a} + 1).$$

Kirjutades nimetaja kujul $\sqrt[n]{a}(\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}} + \dots + \sqrt[n]{a} + 1)$, näeme, et antud murdu tuleb laiendada avaldisega $\sqrt[n]{a^{n-1}}(\sqrt[n]{a} - 1)$. Pärast lihtsustamist saame vastuseks

$$\frac{a - \sqrt[n]{a^{n-1}}}{a(a - 1)}.$$

79. Kolm võrdset arvu moodustavad samaaegselt nii aritmeetilise kui ka geomeetrilise progressiooni. Selles veendumiseks kasutada seoseid

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} \quad \text{ja} \quad a_2^2 = a_1 \cdot a_3.$$

80. Juhis. Kirjutada antud avaldis murruliste astendajate abil.

81. Olgu otsitavateks arvudeks x, y, z , siis

$$\begin{cases} xz = y^2 \\ x + z = 2(y + 8) \\ x(z + 64) = (y + 8)^2, \end{cases}$$

mille lahendamisel leiamegi otsitavad arvud 4; 12; 36 või $\frac{4}{9}$; $-\frac{20}{9}$; $\frac{100}{9}$.

82. Olgu antud aritmeetiline progressioon $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots$ ja geomeetriline progressioon b_1, b_1q, b_1q^2, \dots , kus ülesande tingimuste põhjal

$$a_1 = b_1$$

ja

$$a_1 + d = a_1q.$$

Viimasest võrdusest saame

$$q = \frac{a_1 + d}{a_1} = 1 + \frac{d}{a_1}$$

ja Newtoni binoomvalemit kasutades

$$q^n = \left(1 + \frac{d}{a_1}\right)^n = 1 + \frac{nd}{a_1} + \dots + \left(\frac{d}{a_1}\right)^n.$$

Kui $n > 2$, siis

$$q^n > 1 + n \cdot \frac{d}{a_1} = \frac{a_1 + nd}{a_1}.$$

Et $a_1 > 0$, siis

$$a_1q^n > a_1 + nd$$

ehk

$$b_{n+1} > a_{n+1}.$$

83. Ülesande tingimuste kohaselt saame võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} x + y + z = 93 \\ y^2 = xz \\ z = x + 6(y - x), \end{cases}$$

mille lahenditeks on

$$\begin{cases} x_1 = 31 \\ y_1 = 31 \\ z_1 = 31, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 15 \\ z_2 = 75. \end{cases}$$

84. Ülesande tingimuse kohaselt

$$\frac{[2a_1 + (m-1)d]m}{[2a_1 + (n-1)d]n} = \frac{m^2}{n^2}$$

ehk

$$(2a_1 - d)(m - n) = 0,$$

millest

$$a_1 = \frac{d}{2}.$$

Järelikult

$$\frac{a_m}{a_n} = \frac{a_1 + (m-1)d}{a_1 + (n-1)d} = \frac{\frac{d}{2} + (m-1)d}{\frac{d}{2} + (n-1)d} = \frac{2m-1}{2n-1}.$$

85. Et

$$a_1 - a_2 = a_2 - a_3 = \dots = a_{n-1} - a_n = -d,$$

siis

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \\ & = \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}{a_1 - a_2} + \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3}}{a_2 - a_3} + \dots + \frac{\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{a_n}}{a_{n-1} - a_n} = \\ & = \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_n}}{-d}. \end{aligned}$$

Korrutades saadud murru lugejat ja nimetajat avaldisega $\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}$ ning arvestades, et $a_n - a_1 = d(n-1)$, saamegi pärast lihtsustamist avaldise

$$\frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}.$$

86. $\frac{x^{4n+2} - 1}{(x^2 - 1)x^{2n}} + 2n - 1$. Juhis. Teisendada antud summa

sulgude avamise teel kujule

$$x^{-2n} + x^{-2n+2} + \dots + x^{-2} + 1 + x^2 + \dots + x^{2n} + 2n - 1$$

ja kasutada geomeetrilise progressiooni summa valemit.

87. Tuleb tõestada, et kui $c^2 - b^2 = b^2 - a^2$, siis

$$\frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+a} = \frac{1}{c+a} - \frac{1}{b+c}$$

ehk

$$\frac{c-b}{(a+b)(c+a)} = \frac{b-a}{(c+a)(b+c)}.$$

Avaldades tingimusest $c^2 - b^2 = b^2 - a^2$ avaldise $c - b$ ning asendades viimase võrduse vasakusse poolede, saamegi pärast taandamist

$$\frac{b-a}{(c+a)(b+c)}.$$

88. Juhis. Kõik paaritud arvud, mis jagamisel arvuga 5 annavad jäägiks 1, on saadavad üldkujust $10k + 1$, kus $k \gg 0$ on täisarv. Seega moodustavad nad aritmeetilise progressiooni, mille esimene liige on 1 ning vahe on 10. Leida tuleb S_{30} .

89. Leiame osasummad:

$$S_1 = \frac{3}{4},$$

$$S_2 = \frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 7} = \frac{6}{7},$$

$$S_3 = \frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 7} + \frac{3}{7 \cdot 10} = \frac{6}{7} + \frac{3}{70} = \frac{9}{10}.$$

Analoogia põhjal leiame, et n esimese liikme summa $S_n = \frac{3n}{3n+1}$. Viimase valemi õigsus tuleb tõestada matemaatilise induktsiooni meetodil. Kui on tõestatud, et valem $S_n = \frac{3n}{3n+1}$ on õige, siis arvutame nõutud summa S , milles on $(100 - 1) : 3 = 33$ liiget. Seega $S = S_{33} = \frac{99}{100}$.

Märkus. Matemaatilise induktsiooni meetodit vt.:

- 1) Matemaatika meetodiliste artiklite kogumik I. Tallinn, 1963.
- 2) Делман И.Я. Метод математической индукции. Ленинград, 1957.
- 3) Колосов А.А. Книга для внеклассного чтения по математике в старших классах. Москва, 1963, VIII ртк.лк.180.
- 4) Сомирский И.С. Метод математической индукции. 1961.

(Sarjast "Популярные лекции по математике".)

90. Vaadeldava ülesande lahendamine on analoogiline ülesande 89 lahendamisega (ülesanne 89 on käesoleva ülesande erijuht).

Leiame

$$S_1 = \frac{1}{a_1 a_2},$$

$$S_2 = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} = \frac{a_3 + a_1}{a_1 a_2 a_3} = \frac{2}{a_1 a_3},$$

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} = \frac{2}{a_1 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} = \\ &= \frac{2a_4 + a_1}{a_1 a_3 a_4} = \frac{3}{a_1 a_4}. \end{aligned}$$

Analoogia põhjal n esimese liikme summa $S_n = \frac{n}{a_1 a_{n+1}}$.

Kuna käesolevas summas on parajasti n liiget, siis

$$S = S_n = \frac{n}{a_1 a_{n+1}}.$$

Leitud valemi $S_n = \frac{n}{a_1 \cdot a_{n+1}}$ kehtivus tõestatakse matemaatilise induktsiooni meetodil (vt. ülesanne 89).

91. Juhis. Tõestuseks kasutada matemaatilise induktsiooni meetodit (vt. ülesanne 89).

92. Arvud $\log_a N$, $\log_b N$ ja $\log_c N$ moodustavad aritmeetilise progressiooni. Järelikult

$$\log_b N = \frac{\log_a N + \log_c N}{2}.$$

Minnes üle alusele a , saame võrduse

$$\frac{\log_a N}{\log_a b} = \frac{1}{2} \left(\log_a N + \frac{\log_a N}{\log_a c} \right),$$

millest (eeldades, et $N \neq 1$)

$$\log_a b = \frac{2 \log_a c}{\log_a c + 1}.$$

Teisendades nüüd võrduse paremal poolel logaritmid alusele ac , saame

$$\log_a b = \frac{2 \log_{ac} c}{\log_{ac} c + \log_{ac} a} = \frac{2 \log_{ac} c}{\log_{ac} (ac)} =$$

$$= 2 \log_{ac} c = \log_{ac} c^2.$$

Seega $\log_a b = \log_{ac} c^2$, millest logaritmi definit-
siooni põhjal $(ac)^{\log_a b} = c^2$.

93. $\log \sin x$ ei ole määratud, kui $-1 < \sin x \leq 0$, järel-
kult peab kehtima võrratus $0 < \sin x < 1$. Sel juhul
aga $\log \sin x < 0$. Järelikult võrdus $\sin x = \log \sin x$
ei saa kehtida.

94. 28. Juhis. Lihtsustamisel kasutada valemeid $a^{\log_a b} = b$
ja $\log_a a^b = b$. Viimase seose õigsuses võib
veenduda, kui võrduse vasakul poolel üle minna alu-
sele a .

$$95. \frac{\log_a(\log_a b)}{b^{\log_a b}} = \left[b^{\frac{1}{\log_a b}} \right]^{\log_a(\log_a b)} =$$

$$= \left[b^{\log_b a} \right]^{\log_a(\log_a b)} = a^{\log_a(\log_a b)} = \log_a b.$$

$$96. \log 5 \cdot \log 20 + \log^2 2 = \log 5 \cdot \log(2^2 \cdot 5) +$$

$$+ \log^2 2 = \log^2 5 + \log 2 \cdot \log 5 + \log^2 2 =$$

$$= (\log 5 + \log 2)^2 = 1.$$

97. Et $\log 48 = \log(3 \cdot 16) = \log 3 + 4 \log 2$, siis tuleb
 $\log 3$ ja $\log 2$ avaldada a ja b kaudu. Seda teeme kasu-
tades võrdusi

$$\frac{\log 5}{\log 3} = a, \quad \frac{3 \log 2}{\log 5} = b \quad \text{ja} \quad \log 2 = 1 - \log 5,$$

kust saame

$$\log 3 = \frac{3}{a(b+3)} \quad \text{ja} \quad \log 2 = \frac{6}{b+3}.$$

Seega

$$\log 48 = \frac{3 + 4ab}{a(b+3)}.$$

98. $\frac{4a}{1-a}$. Juhis. Teisendada logaritmid alusele 2.

99. Ülesande tingimuste põhjal kehtib võrdus

$$a \cdot (aq) \cdot (aq^2) \cdot \dots \cdot (aq^{n-1}) = c \quad \text{ehk}$$
$$a^n q^{1+2+\dots+(n-1)} = c.$$

Leides q astendaja kui aritmeetilise progressiooni summa, saame

$$c = a^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Seda tulemust kasutades võime kirjutada

$$\log_c b = \frac{1}{\log_b c} = \frac{1}{n \log_b a + \frac{n(n-1)}{2} \log_b q} =$$
$$= \frac{2}{\frac{2n}{\log_a b} + \frac{n(n-1)}{\log_q b}} = \frac{2 AB}{2n B + n(n-1)}.$$

100. Juhis. Teisendada logaritmid alusele a .

101. Juhis. Võrduse parem pool on võrdne 1-ga. Teisendada võrduse vasakul poolel olevad logaritmid alusele a .

102. Kasutades võrdusi $\log_x (5x^2) = \log_x 5 + 2$ ja $\log_x 5 = \frac{1}{\log_5 x}$, saame kirjutada võrrandi

$$\left(\frac{1}{\log_5 x} + 2\right) \cdot \log_5^2 x = 1$$

ehk

$$2 \log_5^2 x + \log_5 x - 1 = 0.$$

Viimase lahendid on $\log_5 x = \frac{1}{2}$ ja $\log_5 x = -1$, kust $x_1 = \sqrt{5}$ ja $x_2 = \frac{1}{5}$.

103. $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Juhis. Teisendada logaritmid alusele x .

104. Teisendades logaritmid alusele kolm, saame võrrandi

$$-\log_3 3x + \frac{\log_3 9x}{-2} = \frac{\log_3 \frac{x}{2}}{\frac{1}{3}} + \frac{\log_3 \frac{x}{9}}{\frac{2}{9}},$$

millest $\log_3 x = \frac{10}{9}$ ja $x = 3 \cdot \sqrt[9]{3}$.

105. Teisendades logaritmid alusele a ning lihtsustades, saame võrrandi

$$\log_a x (\log_a x - \log_a c - 1) = 0,$$

millest

Siit $\log_a x = 0$ ja $\log_a \frac{x}{c} = 1.$

$$x_1 = 1 \text{ ja } x_2 = ac.$$

106. $x_1 = a$, $x_2 = \sqrt[3]{a}$. Juhis. Teisendada logaritmid alusele x.

107. Teisendades logaritmid alusele a, saame võrrandi

$$\frac{2}{\log_a x} + \frac{3}{2 + \log_a x} + \frac{1}{\log_a x + 1} = 0,$$

mis pärast lihtsustamist teisendub kujule

$$6 \log_a^2 x + 11 \log_a x + 4 = 0.$$

Siit

$$\log_a x_1 = -\frac{1}{2} \text{ ja } \log_a x_2 = -\frac{4}{3},$$

millest

$$x_1 = \frac{\sqrt{a}}{a} \text{ ja } x_2 = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{a^2}.$$

108. Teisendades logaritmid alusele 2, saame

$$\frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2 2x} = \frac{1}{\log_2 4x}.$$

Siit

$$\log_2 x \cdot \log_2 2x = \log_2 4x$$

ehk

$$\log_2^2 x = 2,$$

millest

$$x_1 = 2^{\sqrt{2}} \text{ ja } x_2 = 2^{-\sqrt{2}}.$$

109. I. Kui võrrandi kõik liikmed kanda vasakule poole ja rühmitamise võtet kasutades tegureiks lahutada, saame võrrandi

$$(3^x - 2 \cdot 2^x)(3^x + 2^x) = 0$$

ehk $3^x - 2 \cdot 2^x = 0$, sest $3^x + 2^x \neq 0$ ja

$$x = \frac{\log 2}{\log 1,5}.$$

II. Tähistame $3^x = u$ ja $2^x = v$, siis saab võrrand kuju

$$u^2 - uv - 2v^2 = 0,$$

millest $u_1 = 2v$ ja $u_2 = -v$. Tagasi asendades saame I lahenduskäigus esinenud võrrandid.

110. Vastavalt ülesande tingimusele peab kehtima võrdus

$$\frac{\log_z y}{\log_y x} = \frac{\log_x z}{\log_z y}.$$

Teisendades kõik logaritmid alusele z , saame võrrandi

$$\log_z^3 y = 1,$$

kust

$$y = z.$$

Nüüd taandub esialgne võrrandisüsteem kujule

$$\begin{cases} x^2 = y^2 \\ xy^2 = 64, \end{cases}$$

millest

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 4 \\ z_1 = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = -4 \\ z_2 = -4. \end{cases}$$

111. Selleks, et antud polünoom jaguks avaldisega $(x - 1)^2$, peab ta jagamisel binoomiga $x - 1$ andma jäägi null ja saadud jagatis peab samuti jagamisel avaldisega $x - 1$ andma jäägi null. Seega

$$\begin{cases} a^2 + 3a + 3b + 4 = 0 \\ a^2 + 5a + 3b + 3 = 0, \end{cases}$$

millest $a = \frac{1}{2}$ ja $b = -\frac{23}{12}$.

Märkus. Lähtepolünoomi jagamiseks binoomiga $(x - 1)^2$ on sobiv kasutada Horneri skeemi. Vt. Matemaatika meetodiliste artiklite kogumik I. Tallinn, 1963 või Новосёлов С.И. Специальный курс элементарной алгебры.

Москва, 1958, lk. 71.

112. $A = 14$, $B = -15$. Juhis. Lahendus on analoogiline ülesande 111 lahendusega.

113. Tõestame matemaatilise induktsiooni meetodiga. Veen-
dume, et antud seos kehtib, kui $n = 1$ ja $n = 2$:

$$1^3 = 1 = (C_2^2)^2;$$

$$1^3 + 2^3 = 9 = (C_3^2)^2.$$

Eeldame nüüd, et seos kehtib $n = k$ korral, s.t.

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = (C_{k+1}^2)^2$$

ja näitame, et samasugune seos kehtib ka $n = k + 1$ korral, s.t.

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k + 1)^3 = (C_{k+2}^2)^2.$$

Et ülesandes antud seos kehtib $n = 1$ ja $n = 2$ korral, siis järelikult kehtib seos ka $n = 3$ korral ($k = 2$ ja $k + 1 = 3$). Võrduse kehtivusest $n = 3$ korral järgneb aga võrduse kehtivus $3 + 1 = 4$ korral jne. Seega kehtib ülesandes antud seos mistahes naturaalarvu n korral.

Märkus. Matemaatilise induktsiooni kohta vt. üles-
ande 89 lahendust.

114. Et $\frac{2(n)!}{(n!)^2} = C_{2n}^n$, mis on täisarv, ja

$$C_{2n}^n = C_{2n}^{n-1} \cdot \frac{n+1}{n}$$

jagub $(n + 1)$ -ga, siis ka $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ jagub $(n + 1)$ -ga.

115. $-4(1 + i)$.

116. Tähistame samasuse vasaku poole tähega A ja esitame ta kujul

$$A = \frac{\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ}{\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ}.$$

Murru lugejat teisendame järgmiselt:

$$\begin{aligned} \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ &= \frac{1}{2}(\cos 20^\circ - \cos 60^\circ) \cdot \sin 80^\circ = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 100^\circ + \sin 60^\circ}{2} - \frac{1}{2} \sin 80^\circ \right) = \frac{\sqrt{3}}{8}. \end{aligned}$$

Murru nimetaja lihtsustamiseks korrutame ja jagame teda avaldisega $2 \sin 20^\circ$. Seejärel kasutame kahekordse murga siinuse valemit ning lõpuks taandamisvormeid. Nimetaja väärtuseks saame $\frac{1}{8}$. Seega $A = \sqrt{3}$.

117. Teisendame samasuse vasakut poolt järgmiselt:

$$\begin{aligned}
 & (\tan 20^\circ + \tan 40^\circ) + \sqrt{3} \tan 20^\circ \tan 40^\circ = \\
 & = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 20^\circ \cos 40^\circ} + \sqrt{3} \frac{\sin 20^\circ \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ \cos 40^\circ} = \\
 & = \frac{\sqrt{3} (1 + \sin 70^\circ - \sin 30^\circ)}{2 \cos 20^\circ \cos 40^\circ} = \frac{\sqrt{3} (\frac{1}{2} + \sin 70^\circ)}{2 \cos 20^\circ \cos 40^\circ} = \\
 & = \sqrt{3} \frac{2 \sin 50^\circ \cos 20^\circ}{2 \cos 20^\circ \cos 40^\circ} = \sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

118. Teisendame samasuse vasakut poolt järgmiselt:

$$\begin{aligned}
 & \cos^2 x + \frac{2 \sin \alpha [1 - \cos \alpha]}{2 \sin \alpha [1 + \cos \alpha]} + \cos (\alpha + x) \cdot \\
 & \cdot [(\cos x \cos \alpha - \sin x \sin \alpha) - 2 \cos x \cdot \cos \alpha] = \\
 & = \cos^2 x + \tan^2 \frac{\alpha}{2} - (\cos x \cos \alpha - \sin x \sin \alpha) \cdot \\
 & \cdot (\cos x \cos \alpha + \sin x \sin \alpha) = \tan^2 \frac{\alpha}{2} + \\
 & + (\cos^2 x - \cos^2 x \cos^2 \alpha) + \sin^2 x \sin^2 \alpha = \\
 & = \tan^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 x \cdot \sin^2 \alpha + \sin^2 x \sin^2 \alpha = \\
 & = \tan^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \alpha = \tan^2 \frac{\alpha}{2} \left[1 + \frac{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right] = \\
 & = \tan^2 \frac{\alpha}{2} \left[1 + 4 \cos^4 \frac{\alpha}{2} \right].
 \end{aligned}$$

119. Teisendame samasuse vasakut poolt järgmiselt:

$$\begin{aligned}
 & \tan 3\alpha - \tan 2\alpha - \tan \alpha = \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} - \\
 & - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} - \frac{\sin 2\alpha \cdot \cos \alpha + \cos 2\alpha \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha} = \\
 & = \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} - \frac{\sin 3\alpha}{\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha} = \\
 & = \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} \left[1 - \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha} \right] = \\
 & = \tan 3\alpha \cdot \frac{\cos \alpha \cos 2\alpha - \cos (\alpha + 2\alpha)}{\cos \alpha \cos 2\alpha} = \\
 & = \tan 3\alpha \cdot \frac{\sin \alpha \sin 2\alpha}{\cos \alpha \cos 2\alpha} = \tan 3\alpha \cdot \tan 2\alpha \cdot \tan \alpha.
 \end{aligned}$$

120. Teisendame antud võrduse vasaku poole viimast liiget järgmiselt:

$$\begin{aligned}
 -2 \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z &= -2 \left[\frac{1}{2} \cos(x - y) + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{2} \cos(x + y) \right] \cdot \cos z = \left[\cos(x - y) \cdot \cos z + \right. \\
 &+ \left. \cos(x + y) \cdot \cos z \right] = -\frac{1}{2} \left[\cos(x - y - z) + \right. \\
 &+ \left. \cos(x - y + z) + \cos(x + y - z) + \cos(x + y + z) \right].
 \end{aligned}$$

Et $x + y + z = 180^\circ = \pi$, siis

$$\begin{aligned}
 \cos(x - y - z) &= \cos(y + z - x) = \\
 &= \cos(x + y + z - 2x) = \cos(\pi - 2x) = -\cos 2x, \\
 \cos(x - y + z) &= \cos(x + y + z - 2y) = -\cos 2y, \\
 \cos(x + y + z) &= \cos \pi = -1, \\
 \cos(x + y - z) &= \cos(x + y + z - 2z) = -\cos 2z.
 \end{aligned}$$

$$\text{Kuna } \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x,$$

$$\cos 2y = 1 - 2 \sin^2 y,$$

$$\cos 2z = 1 - 2 \sin^2 z,$$

siis pärast lihtsustamist

$$-2 \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z = 1 - \sin^2 x - \sin^2 y - \sin^2 z.$$

Seega

$$\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z - (1 - \sin^2 x - \sin^2 y - \sin^2 z) = 1.$$

121. Juhis. Antud avaldises asendada kootangensid siinuste ja koosinuste kaudu ning siis viia võrduse vasak pool ühisele nimetajale. Edaspidises tõestuskäigus kasutada trigonomeetriliste funktsioonide liitmisvalemeid ning ülesande tingimusi.

$$122. 8 \cos 8\alpha \cdot \cos^3 \alpha.$$

123. Kui $\cot(A + B) = 0$, siis ka $\cos(A + B) = 0$ ehk $\cos A \cos B = \sin A \sin B$. Kasutades viimast võrdust ja liitmise valemeid võime kirjutada:

$$\begin{aligned}
 \sin(A + 2B) &= \sin A \cos^2 B - \sin A \sin^2 B + \\
 &+ 2 \cos A \sin B \cos B = \sin A \cos^2 B - \sin A \sin^2 B + \\
 &+ 2 \sin A \cdot \sin^2 B = \sin A.
 \end{aligned}$$

124. Juhis. Kasutada valemit

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

mille kehtivuse tõestamiseks koosinusteoreemi abil tuleb $\sin \frac{\alpha}{2}$ ja $\cos \frac{\alpha}{2}$ avaldada kolmnurga külgede kaudu.

125. Tuleb näidata, et kehtib võrdus

$$\cot \frac{\beta}{2} - \cot \frac{\alpha}{2} = \cot \frac{\gamma}{2} - \cot \frac{\beta}{2},$$

kui

$$b - a = c - b.$$

Kasutades võrdust $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{p-a}$, kus r on kolmnurga siseringjoone raadius, p - kolmnurga pool ümbermõõtu, võime kirjutada, et

$$\cot \frac{\alpha}{2} = \frac{p-a}{r}, \quad \cot \frac{\beta}{2} = \frac{p-b}{r}, \quad \cot \frac{\gamma}{2} = \frac{p-c}{r}.$$

Seega tuleb kontrollida võrduse

$$\frac{p-b}{r} - \frac{p-a}{r} = \frac{p-c}{r} - \frac{p-b}{r}$$

ehk

$$a - b = b - c$$

õigsust. Et viimane võrdus on õige, võib sellest lähtudes korrata mõttekäiku vastupidises suunas ning näidata, et

$$\cot \frac{\beta}{2} - \cot \frac{\alpha}{2} = \cot \frac{\gamma}{2} - \cot \frac{\beta}{2}.$$

126. $\cot \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x} + \cot x \gg 1 + \cot x.$

127. Teisendame võrratuse vasakut poolt järgmiselt

$$\begin{aligned} & \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \\ & = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 + \cos 2\beta}{2} + \cos^2 \gamma = \\ & = 1 + \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + \cos^2 \gamma = \\ & = 1 - \cos \gamma [\cos(\alpha - \beta) - \cos \gamma] = \\ & = 1 - \cos \gamma [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] = \\ & = 1 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma. \end{aligned}$$

Kui üks nurkadest on täis- või nürinurk, siis $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq 0$ ja tõestatav võrratus kehtib.

Juhul, kui kõik nurgad on teravnurgad, s.t. $\cos \alpha > 0$, $\cos \beta > 0$ ja $\cos \gamma > 0$, siis kasutame antud võrratuse tõestamiseks järgmist võrratust:

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3},$$

kus a , b ja c on positiivsed arvud.

Viimase võrratuse tõestamiseks tähistame $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$. Seega on tarvis näidata, et kehtib võrratus

$$xyz \leq \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}$$

ehk

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \geq 0.$$

Et $x+y+z \geq 0$, siis

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \geq 0$$

ehk

$$\frac{1}{2}(x-y)^2 + \frac{1}{2}(y-z)^2 + \frac{1}{2}(z-x)^2 \geq 0.$$

On ilmne, et võrratus kehtib mistahes x , y ja z korral, välja arvatud juhul, kui $x = y = z$; siis kehtib võrdus. Korrates mõttekäiku vastupidises järjekorras, saamegi näidata, et

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

Järelikult kehtib siis ka võrratus

$$\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq \left(\frac{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{3} \right)^3,$$

kusjuures $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$ omab suurima väärtuse, kui $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{2}$. Siis $2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq \frac{1}{4}$, millest järeldub, et

$$1 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \geq \frac{3}{4}$$

ehk

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \geq \frac{3}{4}.$$

128. $\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}}$. Juhis. Tähistada $18^\circ 45' = \frac{A}{4}$ ja ka-

utada valemeid $\sin \frac{A}{4} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{A}{2}}{2}}$, $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$

ja $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$. Suuruse $\sin A$ väärtuse leidmiseks, kui $A = 75^\circ$, kasutada teisendust $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ)$.

129. Teisendame antud avaldist järgmiselt:

$$\begin{aligned} & (\sin 43^\circ + \sin 17^\circ)^2 - \sin 43^\circ \sin 17^\circ = \\ & = 4 \sin^2 30^\circ \cdot \cos^2 13^\circ - \frac{1}{2}(\cos 26^\circ - \cos 60^\circ) = \\ & = \cos^2 13^\circ - \frac{1}{2} \cos 26^\circ + \frac{1}{4} = \\ & = \frac{1 + \cos 26^\circ}{2} - \frac{1}{2} \cos 26^\circ + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

130. Teisendame antud avaldises esimese ja teise ning kolmanda ja neljanda teguri korrutised summaks. Pärast teisendamist saame

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\cos 60^\circ + \cos 72^\circ) \cdot \frac{1}{2}(\cos 36^\circ + \cos 120^\circ) = \\ & = \frac{1}{4}(\frac{1}{2} + \cos 72^\circ) \cdot (\cos 36^\circ - \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \cos 36^\circ & = \cos^2 18^\circ - \sin^2 18^\circ = 1 - 2 \sin^2 18^\circ = \\ & = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

ja

$$\cos 72^\circ = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4},$$

siis on otsitava avaldise väärtus

$$\frac{1}{4}(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5} - 1}{4})(\frac{1 + \sqrt{5}}{4} - \frac{1}{2}) = \frac{1}{16}.$$

131. Teisendades tingimust

$$\frac{1}{\tan^2 x} + \frac{1}{\cot^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 7,$$

saame võrduse

$$\sin^2 x - \sin^4 x = \frac{2}{9}.$$

Et

$$\sin^2 2x = 4 \sin^2 x - 4 \sin^4 x,$$

siis antud tlesande korral

$$\sin^2 2x = \frac{8}{9}.$$

132. Juhis. Tlesande tingimuste kohaselt $\cot \alpha = 3$,
 $\cot \beta = 5$, $\cot \gamma = 7$ ja $\cot \delta = 8$. Tuleb näidata,
et $\cot (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 1$. Selleks kasutada vale-
mit $\cot (\alpha + \beta) = \frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta - 1}{\cot \alpha + \cot \beta}$.

133. Teisendades nii võrrandi vasakul poolel kui ka pare-
mal poolel esimese ja kolmanda liikme summa korruti-
seks, saame võrrandi

$$2 \sin 2x \cos x + \sin 2x = 2 \cos^2 x + \cos x$$

ja siit

$$\sin 2x (2 \cos x + 1) = \cos x (2 \cos x + 1)$$

ehk

$$(2 \cos x + 1)(2 \sin x - 1) \cos x = 0.$$

Lahendid on:

$$x_1 = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi = (3k \pm 1) \frac{2\pi}{3},$$

$$x_2 = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi = (2k + 1) \frac{\pi}{2},$$

$$x_3 = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + k\pi = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi.$$

134. Teisendame antud võrrandi kujule

$$2 \cos 4x \cos 2x - (2 \cos^2 4x - 1) = 1,$$

mida teisendades saame

$$\cos 4x (\cos 2x - \cos 4x) = 0$$

ehk

$$\cos 4x (-2 \cos^2 2x + \cos 2x + 1) = 0.$$

Võrrandi lahendid on:

$$x_1 = (2k + 1) \frac{\pi}{8},$$

$$x_2 = k\pi,$$

$$x_3 = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{2k + 1}{2} \pi.$$

135. Teisendame võrrandi kujule

$$\cos^2 2x + (\cos^2 3x - \sin^2 x) = 0.$$

Siit

$$\cos^2 2x + (\cos 3x - \sin x)(\cos 3x + \sin x) = 0,$$

millest

$$\cos^2 2x + [\cos 3x - \cos(90^\circ - x)] \cdot [\cos 3x + \cos(90^\circ - x)] = 0$$

ehk

$$\cos^2 2x - 4 \sin(x+45^\circ) \sin(2x-45^\circ) \cos(x+45^\circ) \cos(2x-45^\circ) = 0.$$

Kasutades nüüd kahekordse nurga siinuse valemit, saame võrrandi

$$\cos^2 2x - \sin(2x + 90^\circ) \sin(4x - 90^\circ) = 0,$$

millest

$$\cos^2 2x + \cos 2x \cdot \cos 4x = 0$$

ehk

$$\cos 2x \cdot \cos 3x \cdot \cos x = 0.$$

Viimase võrrandi lahendid on:

$$x_1 = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

$$x_2 = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{2k}{3}\pi,$$

$$x_3 = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Et aga x_3 väärtused esinevad x_2 väärtuste hulgas, siis jäävad esialgse võrrandi lahenditeks

$$x_1 = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi = (2k+1)\frac{\pi}{4},$$

ja

$$x_2 = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} = (2k+1)\frac{\pi}{6}.$$

136. Antud võrrand on teisendatav kuupvõrrandiks $\sin x$ suhtes

$$2 \sin^3 x - 9 \sin^2 x + 10 \sin x - 3 = 0$$

ehk, asendades $\sin^3 x = z$, võrrandiks

$$2z^3 - 9z^2 + 10z - 3 = 0.$$

Rühmitamise võtet kasutades on selle võrrandi vasak pool lahutatav tegureiks:

$$2z^3 - 2z^2 - 7z^2 + 7z + 3z - 3 = 0$$

$$2z^2(z - 1) - 7z(z - 1) + 3(z - 1) = 0$$

$$(z - 1)(2z^2 - 7z + 3) = 0.$$

Siit $z_1 = 1$, $z_2 = 3$ ja $z_3 = \frac{1}{2}$.

Ülesandest nähtub, et $\cos x \neq 0$, s.t. aga et $\sin x \neq 1$; samuti ei kehti võrdus $\sin x = 3$. Seega sobib antud võrrandi lahendiks ainult z_3 , s.t. et

$$\sin x = \frac{1}{2},$$

kust

$$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + k\pi.$$

137. Kirjutame võrrandi kujul

$$(1 - \cos^2 x) \sin x \cdot \cos 3x + \sin 3x \cdot \cos x (1 - \sin^2 x) = 0,375,$$

millest pärast sulgude avamist ja rühmitamist saame

$$(\sin x \cdot \cos 3x + \sin 3x \cdot \cos x) -$$

$$- \sin x \cdot \cos x (\cos 3x \cdot \cos x + \sin 3x \cdot \sin x) = 0,375.$$

Siit

$$\sin 4x - \frac{1}{2} \sin 2x \cdot \cos 2x = 0,375 \text{ ehk } \sin 4x = \frac{1}{2},$$

millest

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{24} + k \frac{\pi}{4}.$$

Märkus. Ülesannet võib lahendada ka kasutades valemid

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

ja

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

138. Lahutades võrrandi vasaku poole tegureiks, saame

$$(\sin x + \cos x) \left(1 - \frac{1}{2} \sin 2x\right) = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$$

ehk

$$\left(1 - \frac{1}{2} \sin 2x\right) (\sin x + \cos x - 1) = 0.$$

Et

$$1 - \frac{1}{2} \sin 2x \neq 0,$$

siis peab

$$\sin x + \cos x - 1 = 0$$

ehk

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{4},$$

millest

$$x = n\pi + \frac{\pi}{4} [(-1)^n - 1].$$

Kui $n = 2k$, siis $x = 2k\pi$:

kui $n = 2k + 1$, siis $x = (4k + 1) \frac{\pi}{2}$.

139. Kirjutame võrrandi kujul

$$\begin{aligned} & (\sin^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) - \\ & - 2 \sin^2 x \cos^2 x = \cos^2 2x - \sin^2 2x, \end{aligned}$$

millest

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 2x$$

ehk

$$1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = 1 - 2 \sin^2 2x.$$

Viimasest

$$\sin^2 2x = 0 \text{ ning } x = k \cdot \frac{\pi}{2}.$$

140. Arvestades, et

$$\begin{aligned} \cos^6 x = (\cos^2 x)^3 &= \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(1 + 3 \cos 2x + \\ &+ 3 \cos^2 2x + \cos^3 2x) \end{aligned}$$

ja

$$\cos 6x = 4 \cos^3 2x - 3 \cos 2x,$$

saame antud võrrandi teisendada kujule

$$4 \cos^2 2x + 5 \cos 2x + 1 = 0.$$

Siit $\cos 2x = -1$ ja $\cos 2x = -\frac{1}{4}$ ning seega

$$x_1 = \frac{\pi}{2}(2k + 1) \text{ ja } x_2 = \pm \frac{1}{2}(\pi - \arccos \frac{1}{4}) + k\pi.$$

141. Antud võrrand on teisendatav kujule

$$(\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2 \sin^4 x \cos^4 x = \frac{17}{32}$$

ehk

$$\begin{aligned} & [(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x]^2 - \\ & - 2 \sin^4 x \cos^4 x = \frac{17}{32}. \end{aligned}$$

Kasutades kahekordse nurga siinuse valemit saame võrrandi

$$\left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x\right)^2 - \frac{1}{8} \sin^4 2x = \frac{17}{32}$$

ehk

$$\left(\sin^2 2x\right)^2 + 8 \sin^2 2x + \frac{15}{4} = 0,$$

millest leiame, et $\sin 2x = 7,5$ ja $\sin 2x = 0,5$. Neist esimesel ei ole lahendit, teisel aga

$$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{2}.$$

142. $x_1 = k \frac{\pi}{3},$

$$x_2 = \arctan \frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi,$$

$$x_3 = \arctan \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + k\pi.$$

Juhis. Võrrandi lahendamiseks on kaks põhilist teed.

I. Jäetakse funktsioon samaks ja minnakse üle ühekordsele nurgale. Se juhul saadakse $\tan x$ suhtes algebraline võrrand, mis taandub võrrandiks $\tan x = 0$ ja biruutvõrrandiks $\tan x$ suhtes. Osa lahendeist

$x = k\pi$, $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ ja $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ laseb end kokku võtta kujul $x_1 = k \frac{\pi}{3}$.

II. Minnakse üle siinustele ja koosinustele; kirjutatakse esimene ning teine liidetav ühisele murrujoonele. Lugejasse saadav avaldis on parajasti $\sin 3x$, mis tuuakse nüüd võrrandi vasakul pool sulgude ette. Peale veelkordset liitmist minnakse üle ühekordsele nurgale. Võrrandi edasine lahendamine ei valmista raskusi. Lõpuks tuleb kontrollida, kas leitud x väärtused rahuldavad esialgset võrrandit.

143. Vabanenud murrust, teisendame võrrandi

$$\left[(1 + \tan 8) - (1 - \tan 8) \right] \left[(1 - \tan x^2 \tan 2x) \right] - \left[(1 - \tan 8) + (1 + \tan 8) \right] \left[\tan x^2 + \tan 2x \right] = 0,$$

millest

$$\tan 8 (1 - \tan x^2 \tan 2x) = \tan x^2 + \tan 2x.$$

Siit

$$\tan 8 = \frac{\tan x^2 + \tan 2x}{1 - \tan x^2 \cdot \tan 2x}$$

ehk

$$\tan 8 = \tan (x^2 + 2x).$$

Viimasest

$$x^2 + 2x - 8 = k\pi = 0$$

ja

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{9 + k\pi}.$$

144. $x_1 = k\pi$, kui $x \neq 2^n \cdot m\pi$, kus m on täisarv,

$x_2 = \frac{4}{a^{2n}}$, kui $x \neq 2^n \cdot m\pi$, kus m on täisarv.

Juhis. Võrrandi paremat poolt tuleb korrutada ja jagada avaldisega $2^n \sin \frac{x}{2^n}$. Seejärel, rakendades murru lugejas n korda järjest valemit $2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin 2\alpha$, saab võrrandi parem pool kujul

$$\frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}.$$

Olles leidnud x väärtused, tuleb kontrollida, kas tingimused $x > 0$ ja $\sin \frac{x}{2^n} \neq 0$ on täidetud.

145. Et $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3$, siis on võrrand esitatav kujul

$$\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = a,$$

mida teisendades saame

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = a$$

ehk

$$3 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - a.$$

Siit

$$3 \sin^2 2x = 4 - 4a,$$

millest

$$\sin 2x = \pm \frac{2}{3} \sqrt{3} - 3a.$$

Viimasest

$$x_1 = \frac{(-1)^k}{2} \arcsin \left(\frac{2}{3} \sqrt{3 - 3a} \right) + k \frac{\pi}{2},$$

$$x_2 = \frac{(-1)^k}{2} \arcsin \left(-\frac{2}{3} \sqrt{3 - 3a} \right) + k \frac{\pi}{2}.$$

Parameetri a jaoks saame tingimused:

$$\begin{cases} 3 - 3a < \frac{3}{2}, \\ 3 - 3a \geq 0, \end{cases}$$

millest

$$\frac{1}{4} < a \leq 1.$$

146. Pärast asendust $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ on võrrand teisendatav kujule

$$2(a^2 + 1)\sin^2 x - 4a(a + 1)\sin x + 3a^2 + 2a - 1 = 0,$$

millest

$$\sin x = \frac{2a(a + 1) \pm \sqrt{2(1 - a)^3(a + 1)}}{2(a^2 + 1)}.$$

Selleks, et antud võrrandil oleks lahend, peab

$$(1 - a)^3(a + 1) \geq 0$$

ja

$$-1 \leq \frac{2a(a + 1) \pm \sqrt{2(1 - a)^3(a + 1)}}{2(a^2 + 1)} \leq +1.$$

Siit leiame, et $-1 \leq a \leq 1$.

Võrrandi lahendeiks on järelikult

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{2a(a + 1) \pm (1 - a) \sqrt{2(1 - a^2)}}{2(a^2 + 1)} + k\pi, \text{ kus } -1 \leq a \leq 1.$$

147. Esimesest võrrandist saame tingimuse $2 \sin^2 x + 2 \cos^2 y - 1 = 0$ ja teisest $\sin x + \cos y + 3 = 4$. Saadud võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2 \sin^2 x + 2 \cos^2 y - 1 = 0 \\ \sin x + \cos y - 1 = 0 \end{cases}$$

lahendame $\sin x$ ja $\cos x$ suhtes; saame

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos y = \frac{1}{2} . \end{cases}$$

Siit

$$\begin{cases} x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi, \\ y = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi. \end{cases}$$

148. Rakendades asendusvõtet saame esimeses võrrandis vabaneda tundmatust x :

$$\sin^2 \left(\frac{5\pi}{12} - y \right) + \sin^2 y = \frac{3}{4} .$$

Siit

$$\left[\sin \frac{5\pi}{12} \cos y - \cos \frac{5\pi}{12} \sin y \right]^2 + \sin^2 y = \frac{3}{4} .$$

Et

$$\sin^2 \frac{5\pi}{12} = \frac{1 - \cos \frac{5\pi}{6}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

ja

$$\cos^2 \frac{5\pi}{12} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} ,$$

siis on viimane võrrand esitatav kujul

$$\frac{2 + \sqrt{3}}{4} \cos^2 y - \frac{1}{2} \sin y \cos y + \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \sin^2 y + \sin^2 y = \frac{3}{4} .$$

Edasi teisendades saame võrrandi

$$\frac{\sqrt{3}}{4} (\cos^2 y - \sin^2 y) - \frac{1}{4} \sin 2y + \frac{1 - \cos 2y}{2} = \frac{1}{4}$$

ehk

$$(\sqrt{3} - 2) \cos 2y - \sin 2y + 1 = 0 .$$

Kasutades valemit $\sin 2y = \sqrt{1 - \cos^2 2y}$, saame võrrandi $\cos 2y$ suhtes .

$$\left[(4 - 2\sqrt{3}) \cos 2y + \sqrt{3} - 2 \right] \cos 2y = 0 ,$$

millest

$$\cos 2y = 0 \quad \text{ja} \quad \cos 2y = \frac{1}{2} .$$

Seega

$$y_1 = \frac{2k + 1}{4} \pi, \quad y_2 = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi .$$

Vastavad x väärtused on

$$x_1 = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} k, \quad x_2 = \frac{(5 \mp 2)\pi}{12} - k\pi .$$

$$149. \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + \sqrt{2}k\pi \\ y = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

Juhis. Võrrandite teisendamisel kasutada valemit

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

150. Et

$$\tan (\arctan 2 + \arctan 3) =$$

$$= \frac{\tan (\arctan 2) + \tan (\arctan 3)}{1 - \tan (\arctan 2) \tan (\arctan 3)} = \frac{2 + 3}{1 - 6} = -1,$$

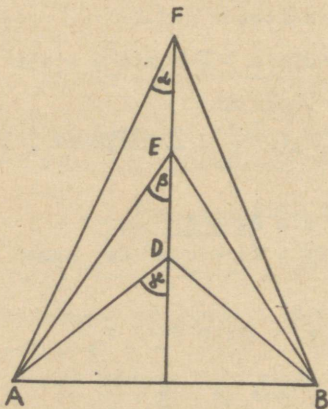
siis

$$\arctan 2 + \arctan 3 = \frac{\pi}{4} (4k - 1).$$

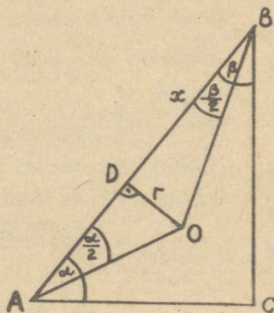
151. $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$. Juhis. Kasutada siinuslauset ja nurgapoolitaja omadust.

152. $\frac{a}{b}$.

153. Otsitavaks summaks on $2(\alpha + \beta + \gamma)$ (joon. 1). Ülesande tingimuste kohaselt



Joon. 1.



Joon. 2.

$$\tan \gamma = 1, \quad \tan \beta = \frac{1}{2}, \quad \tan \alpha = \frac{1}{3},$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = 1,$$

millest järeldub, et $\alpha + \beta = 45^\circ$ ja et $\gamma = 45^\circ$,
siis $2(\alpha + \beta + \gamma) = 180^\circ$.

$$154. \frac{a\sqrt{a^2 + 4h^2}}{4h}.$$

$$155. \frac{(3 + \sqrt{3})a}{2}.$$

156. Kui tähistada lõigu DB pikkus tähega x , siis $AD = 2R - x$ (joon. 2). Kolmnurgast ADO $\cot \frac{\alpha}{2} = \frac{2R - x}{r}$

ja kolmnurgast ODB $\cot \frac{\beta}{2} = \frac{x}{r}$. Lisades siia seosed $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ ja $\frac{R}{r} = \frac{5}{2}$, saame kokku neli võrrandit

viie tundmatuga. Asendades kahest viimasest

$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ja $2R = 5r$ eelmistesse võrranditesse, saame $\cot \frac{\alpha}{2} = 5 - \frac{x}{r}$, $\cot(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}) = \frac{x}{r}$. Elimineerides $\frac{x}{r}$, saame võrrandi

$$\cot^2 \frac{\alpha}{2} - 5 \cot \frac{\alpha}{2} + 6 = 0,$$

millest

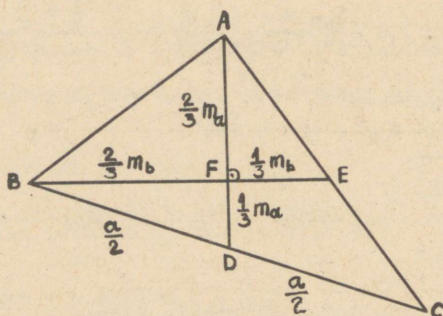
$$\alpha_1 = 2 \operatorname{arccot} 2, \quad \alpha_2 = 2 \operatorname{arccot} 3$$

ning otsitavad nurgad on $53^\circ 07'$ ja $36^\circ 53'$.

157. Tähistades $AD = m_a$ ja $BE = m_b$, saame täisnurksetest kolmnurkadest AHF, AFE ja BDF võrdused (joon. 3):

$$\begin{cases} \frac{4}{9} m_a^2 + \frac{4}{9} m_b^2 = c^2, \\ \frac{4}{9} m_a^2 + \frac{1}{9} m_b^2 = \frac{b^2}{4}, \\ \frac{4}{9} m_b^2 + \frac{1}{9} m_a^2 = \frac{a^2}{4}, \end{cases}$$

kus tundmatuteks on m_a , m_b ja c . Selle võrrandisüsteemi lahendamisel saame



Joon. 3.

$$c = \frac{\sqrt{5}}{5} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Märkus. Ülesande lahendamine muutub veelgi lihtsamaks, kui kasutada valemeid, mis lubavad mediaanide pikkuste ruute arvutada külgede pikkuste kaudu. Nimetatud valemid on toodud raamatus D.I. Perepjoelkin. Elementargeomeetria kursus I. Tallinn, 1951, § 71, lk. 214.

158. Nurgapoolitaja omaduse põhjal on $\frac{b'}{c'} = \frac{b}{c}$ ning konstruktsiooni põhjal $b' + c' = a$ (joon. 4). Nendest võrdustest saame, et

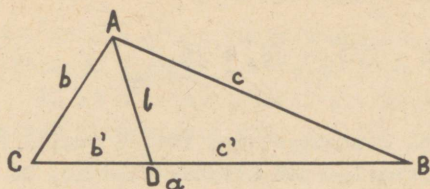
$$b' = \frac{ab}{b+c} \quad \text{ja} \quad c' = \frac{ac}{b+c}.$$

Rakendame kolmnurkades CAD ja DAB koosinuslauset

$$b'^2 = b^2 + l^2 - 2bl \cos \frac{A}{2},$$

$$c'^2 = c^2 + l^2 - 2cl \cos \frac{A}{2}.$$

Avaldades nendest võrdustest $\cos \frac{A}{2}$ ja võrdsustades saadud avaldised, saame



Joon. 4.

$$\frac{b^2 + l^2 - b'^2}{2bl} = \frac{c^2 + l^2 - c'^2}{2cl},$$

millest

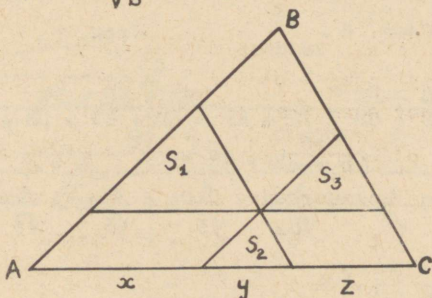
$$l = \sqrt{\frac{bc^2 - bc'^2 + cb'^2 - cb^2}{c - b}}$$

ehk, arvestades b' ja c' avaldisi,

$$l = \sqrt{bc - \left(\frac{a^2 bc}{b+c}\right)^2} = \frac{1}{b+c} \sqrt{bc(b+c+a)(b+c-a)}.$$

159. Et (joon. 5)

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \frac{x}{x+y+z}, \quad \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{y}{x+y+z}, \quad \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{z}{x+y+z},$$



Joon. 5.

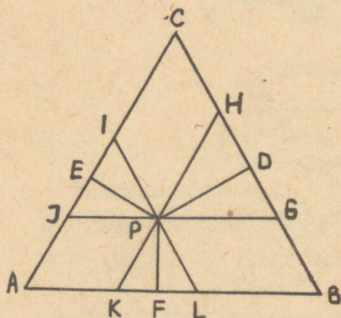
kus S on antud kolmnurga pindala, siis, liites need võrdused, saame

$$\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}$$

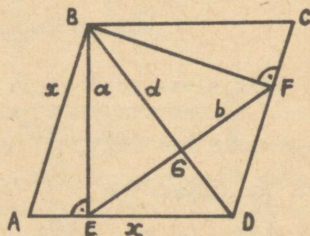
ehk

$$S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2.$$

160. Tõmbame läbi kolmnurga sees võetud punkti P kolmnurga külgedega paralleelsed sirged: $HK \parallel AC$, $GJ \parallel AB$ ja $IL \parallel BC$ (joon. 6). Siis



Joon. 6.



Joon. 7.

$$\begin{aligned} \frac{PF + PD + PE}{AP + AD + CE} &= \frac{PF + PD + PE}{JP + KF + LP + GD + PH + IE} = \\ &= \frac{PF + PD + PE}{\frac{2PE}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}PF + \frac{2}{\sqrt{3}}PF + \frac{1}{\sqrt{3}}PD + \frac{2}{\sqrt{3}}PD + \frac{1}{\sqrt{3}}PE} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

161. $\sqrt{\pi} : \sqrt[4]{27}$.

162. Ülesandes kirjeldatud viisil tekkinud ruutude pindalad a^2 ; $\frac{a^2}{2}$; $\frac{a^2}{4}$; $\frac{a^2}{8}$; ... moodustavad lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni, kus $a_1 = a^2$,

$q = \frac{1}{2}$. Vaadeldavate ruutude pindalade summa on $2a^2$.

163. Olgu rombi külg x . Pole raske veenduda, et $EF = BE = a$ ja $EF \perp BD$ ning $EG = GF = \frac{b}{2}$ (joon. 7). Kolmnurk ABE $AE = \sqrt{x^2 - a^2}$. Järelikult $ED = x - \sqrt{x^2 - a^2}$. Täisnurksest kolmnurgast BDE

$$\frac{d \cdot EG}{2} = \frac{ED \cdot a}{2},$$

millest

$$d = \frac{2a(x - \sqrt{x^2 - a^2})}{b}.$$

Teiselt poolt

$$d = \sqrt{a^2 + ED^2} = \sqrt{2x^2 - 2x\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Seega

$$b\sqrt{2x^2 - 2x\sqrt{x^2 - a^2}} = 2a(x - \sqrt{x^2 - a^2}),$$

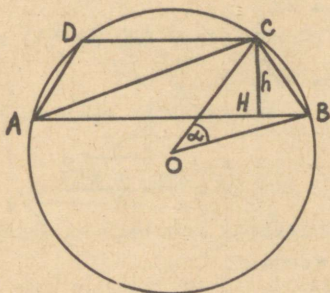
millest

$$x = \frac{2a^3}{b\sqrt{4a^2 - b^2}}.$$

Rombi pindala

$$S = x \cdot a = \frac{2a^4}{b\sqrt{4a^2 - b^2}}.$$

164.



Joon. 8.

Et $\angle CAB = \frac{\alpha}{2}$ (joon. 8), siis

$$AH = h \cdot \cot \frac{\alpha}{2}.$$

Trapetsi keskliik on võrdne lõiguga AH ja järelikult trapetsi pindala

$$S = h^2 \cot \frac{\alpha}{2}.$$

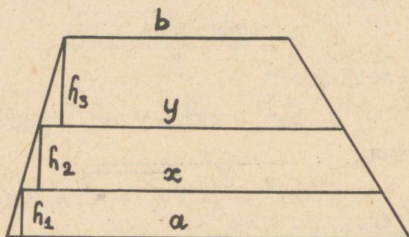
165. Trapetsi pindala valemi põhjal saame seosed (joon.9)

$$(a + y)(h_1 + h_2) = (a + x)h_1 + (x + y)h_2, \quad (1)$$

$$(b + x)(h_2 + h_3) = (x + y)h_2 + (y + b)h_3, \quad (2)$$

$$(b + y)h_3 = (x + y)h_2, \quad (3)$$

$$(a + x)h_1 = (x + y)h_2. \quad (4)$$



Joon. 9 .

Teisendame võrrandi (1) kujule

$$(x - y)h_1 = (a - x)h_2.$$

Süsteemist, mis koosneb sellest võrrandist ja võrrandist (4), saame

$$a^2 + y^2 = 2x^2 \quad (5)$$

ning analoogiliselt võrranditest (2) ja (3) saame

$$b^2 + x^2 = 2y^2. \quad (6)$$

Võrranditest (5) ja (6) moodustatud süsteemist leiame, et

$$x = \frac{\sqrt{3b^2 + 6a^2}}{3} \quad \text{ja} \quad y = \frac{\sqrt{3a^2 + 6b^2}}{3}.$$

Kõrguste h_1 ja h_2 leidmiseks kasutame ülesande tingimusele tuginevaid võrdusi:

$$(a + b)h = 3(a + x)h_1; \quad (a + b)h = 3(x + y)h_2;$$

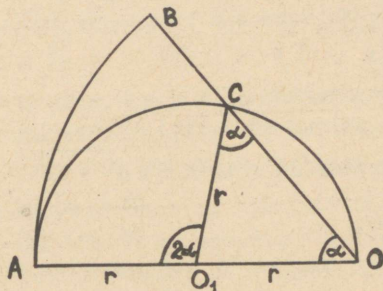
$$(a + b)h = 3(y + b)h_3.$$

Kasutades ka leitud x ja y avaldisi, saame

$$h_1 = \frac{h(3a - \sqrt{3b^2 + 6a^2})}{3(a-b)}; \quad h_2 = \frac{h(\sqrt{3b^2 + 6a^2} - \sqrt{3a^2 + 6b^2})}{3(a-b)};$$

$$h_3 = \frac{h(\sqrt{3a^2 + 6b^2} - 3b)}{3(a-b)}.$$

166.



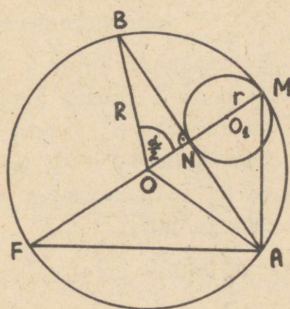
Joon. 10.

Olgu raadiusele $AO = 2r$ kui diameetrile ehitatud poolringjootud poolringjootud poolringjootud keskpunkt O_1 (joon. 10). Punktide O_1 ja C ühendamisel tekib võrdhaarne kolmnurk O_1OC , milles $\angle O_1OC =$

$$= \angle O_1CO = \alpha. \text{ Järelikult } \angle AO_1C = 2\alpha.$$

Kaare pikkuse valemi abil leiamegi vastavate kaarte pikkuste suhte, mis on 1 : 1.

167. Täisnurkses kolmnurgas AFM on



Joon. 11.

$$AN^2 = NF \cdot MN \quad (1)$$

(joon. 11). Ülesande tingimuste kohaselt on $AN = \pi r$ ja $MN = 2r$, järelikult

$$R = \frac{\pi r}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

ning

$$NF = 2R - 2r =$$

$$= 2r \left(\frac{\pi}{\sin \frac{\alpha}{2}} - 1 \right).$$

Asetades saadud tulemused võrdusesse (1), leiame, et

Saadud võrdustest leiame, et $c = \sqrt{\frac{2}{5}(a^2 + b^2)}$. Selleks, et konstrueerida kolmnurka, konstrueerime külje c ja seejärel a , b ning c kaudu otsitava kolmnurga ABC . Külje c konstrueerimisel konstrueerime esmalt lõigu $k = \sqrt{a^2 + b^2}$ ja seejärel lõigu

$$c = \sqrt{\frac{2}{5}k^2} = \sqrt{\frac{2k}{5}} \cdot k = \sqrt{l \cdot k}, \text{ kus } l = \frac{2k}{5}.$$

Märkus. Külje c avaldamisel on sobiv kasutada Stuarti teoreemi. Vt. D.I. Perepjolkin, Elementaar-geomeetria kursus I. Tallinn, 1951, lk. 213.

172. Konstruksioon on lihtsalt teostatav, kui tugineda lausele, et diameetrile (selleks võtame käesoleval juhul c) toetuv piirdenurk on täisnurk.

Tähistame kaatetid tähtedega a ja b . Tuntud seostest $a^2 + b^2 = c^2$ ja $ab = hc$ leiame, et

$$a = \frac{1}{2} (\sqrt{c^2 + 2hc} + \sqrt{c^2 - 2hc}),$$

$$b = \frac{1}{2} (\sqrt{c^2 + 2hc} - \sqrt{c^2 - 2hc}).$$

Ülesanne on lahenduv, kui $h \leq \frac{c}{2}$.

173. Tähistades otsitava ruudu külje tähega x on ülesande tingimuste kohaselt $x^2 = S_A$ ehk $x^2 =$

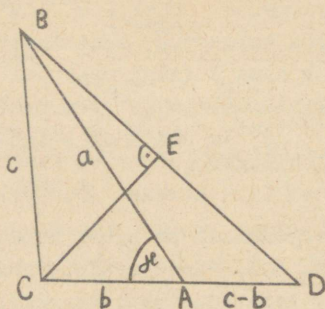
$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Tähistades nüüd $p-a = k$, $p-b = m$, $p-c = n$, siis

$$x = \sqrt{\sqrt{p \cdot k \cdot m \cdot n}} = \sqrt{p \cdot k} \sqrt{m \cdot n}.$$

Tähistades siin $\sqrt{p \cdot k} = r$ ja $\sqrt{m \cdot n} = t$, saame $x = \sqrt{r \cdot t}$.

Selleks, et konstrueerida lõik x , tuleb konstrueerida lõigud p , k , m ja n . Viimaste abil konstrueerida lõigud r ja t kui vastavad geomeetrilised keskmised. Lõpuks konstrueerida lõikude r ja t järgi lõik x .

174.

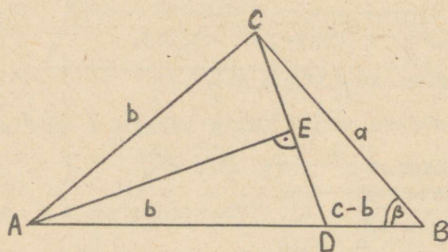


Joon. 14.

pu tähega C, siis $BC = AC + AD$, s.t. et kolmnurk BCD on võrdhaarne. Punkt, kus külje BD keskristsirge lõikab sirget AD, ongi otsitava kolmnurga tipp C.

Konstrueerime nurga γ ja kanname selle ühele haarale alates nurga tipust A lõigu a, mille otspunkti tähistame tähega B (joon. 14). Nurga γ teise haara pikendusele konstrueerime lõigu $AD = c - b$. Ühendades punktid B ja D, saame kolmnurga ABD. Kui tähistame otsitava kolmnurga kolmanda ti-

175.



Joon. 15.

dusega määrab punkti A asukoha. Ühendades punktid A ja C, saamegi nõutud kolmnurga.

Antud lõikude a ja $c - b$ ning nurga β abil konstrueerime kolmnurga BDC (joon. 15). Seejärel konstrueerime lõigu CD keskristsirge, mis lõikumisel külje DB pikendusega määrab punkti A asukoha.

176. Olgu antud nurgad α ja β ning übermõõt u . Konstrueerime kolmnurga nurkadega α ja β . Saadud kolmnurk on sarnane otsitava kolmnurgaga. Et sarnaste hulknurkade übermõõdud suhtuvad nagu vastavad küljed, siis $\frac{u_1}{u} = \frac{c_1}{c}$ (u_1 ja c_1 on konstrueeritud kolm-

nurga ümbermõõt ja külge). Kolmnurga külje c konstrueerime kui neljanda võrdelise lõikudele c_1 , u_1 ja u . Otsitava kolmnurga konstrueerime nurkade α ja β ning külje c järgi.

177. Konstruksiooni viime läbi kahes osas: 1. Leiame mediaani kui antud lõikude geomeetrilise keskmise. 2. Konstrueerime rõõpküliku kahe külje ning külgedevahelise diagonaali abil.

178. Avaldame otsitava lõigu c trapetsi aluste a ja b kaudu. Trapetsite, milleks lõik c jaotab trapetsi alustega a ja b , kõrgused tähistame sümboolitega h_1 ja h_2 . Nüüd

$$\frac{a+c}{2} \cdot h_1 = \frac{c+b}{2} \cdot h_2$$

ja

$$\frac{a+b}{2}(h_1 + h_2) = \frac{a+c}{2} h_1 + \frac{c+b}{2} h_2.$$

Siit

$$c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Selleks, et konstrueerida lõiku c , konstrueerime esmalt lõigu $k = \sqrt{a^2 + b^2}$. Edasi konstrueerime lõigu c kui k ja $\frac{k}{2}$ geomeetrilise keskmise ($c = \sqrt{k \cdot \frac{k}{2}}$).

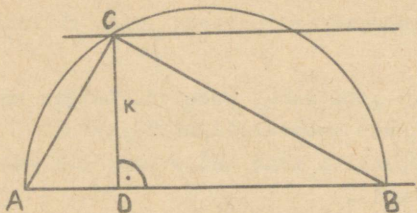
179. Kogu konstruktsioon taandub otsitava ringi raadiuse x konstrueerimisele antud ringide raadiuste r ja R järgi.

Kuna pindalade vahel kehtib seos $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi x^2$, siis $x = \sqrt{R^2 - r^2}$, mis annabki võtte raadiuse x konstrueerimiseks.

180. Olgu kolmnurga alus a ning kõrgus h ja ristküliku küljed b ning c . Tähistame otsitava ristküliku küljed sümboolitega x_1 ja x_2 .

Vastavalt ülesande tingimustele $x_1 \cdot x_2 = \frac{a}{2} \cdot h$ ja $x_1 + x_2 = b + c$. Kui konstrueerida esmalt lõigud

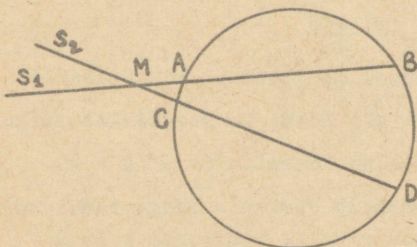
$k = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot h}$ ja $s = b + c$, siis võib lõikude x_1 ja x_2



Joon. 16.

leks konstrueerime lõigule s kui diameetrile ($AB = s$) täisnurkse kolmnurga (ABC) kõrgusega k ($CD = k$). Otsitavateks lõikudeks x_1 ja x_2 on lõigud AD ning DB . Konstruksiooni õigsuses pole raske veenduda.

181. Vaatleme eraldi kahte juhtu.



Joon. 17.

1. Punktid A ja B asuvad samal pool sirgete lõikepunkti M (joon. 17). Ülesanne on lahendatud, kui on teada kas punkti C või D asukoht. Tähistame $MD = x$, $MA = a$, $MB = b$, $CD = c$.

Viimased kolm lõiku

on teada, otsitavaks on x . Rakendades teoreemi ringjoone lõikajatest, saame $ab = x(x - c)$ ehk $x^2 - cx - ab = 0$. Konstrueerime esmalt lõigu $a \cdot b = h^2$, seejärel võrrandi $x^2 - cx - h^2 = 0$ lahendid

$x = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + h^2}$. Selleks leiame kõigepealt lõigu

$k = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + h^2}$ ja seejärel lõigud $x_{1,2} = \frac{c}{2} \pm k$. Siis

on ühtlasi teada otsitavast ringjoonest kolm punkti (A, B ja D) ning kogu ülesanne ongi lahendatud.

2. Punktid A ja B asuvad teine teisel pool sirgete lõikepunkti M. Kasutame samu tähistusi mis eelneval juhul. Rakendades teoreemi lõikuvatest kõõludest, jõuame võrrandini $x^2 - cx + ab = 0$. Lõigu x konstrueerimine toimub põhimõtteliselt samal viisil kui eelneval juhul.

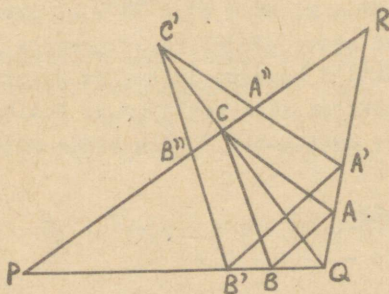
Märkus. Võrrandite lahendite konstrueerimise kohta vt. D. I. Perepõlkin. Elementaargeomeetria kursus I. Tallinn, 1951, § 76, lk. 228-232.

182. On antud ringjoon keskpunktiga O_1 ja raadiusega r_1 ning sirge s. Tähistame otsitava ringjoone raadiuse tähega R.

Vastavalt ülesande tingimustele peab otsitava ringjoone keskpunkt asuma võrdsel kaugusel nii ringjoonest keskpunktiga O_1 kui ka sirgest s. Seega on ülesanne lahendatav geomeetriliste kohtade meetodil. Selleks joonestame sirgele s kaugusel R paralleelsed sirged s_1 ja s_2 ning ringjooned keskpunktiga O_1 ning raadiustega $r_1 + R$ ja $r_1 - R$ (kui $r_1 > R$).

Saadud ringjoonte ja sirgete lõikepunktid on otsitavate ringjoonte keskpunktid, sest nad asuvad ringjoonest keskpunktiga O_1 ja sirgest s võrdsel kaugusel.

183.



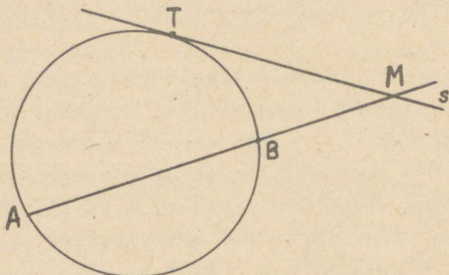
Olgu P, Q ja R antud punktid (joon. 18). Valime kolmnurga PQR ühel küljel (RQ) suvalise punkti A' ja konstrueerime punkti B' nii, et $QB' = QA'$, punkti B'' nii, et

Joon. 18.

$PB'' = PB'$, ja punkti A'' nii, et $RA'' = RA'$. Sirgete $B'B''$ ja $A'A''$ lõikepunkti tähistame tähega C' . Teostame kolmnurga $A'B'C'$ sarnasusteisenduse tipu Q suhtes nii, et C' teisend C tuleks kolmnurga PQR küljele PR . Saadud kolmnurga ABC tipud on otsitavate ringjoonte puutepunktideks.

184. Vaatleme eraldi kahte juhtu:

1. Sirge AB on paralleelne sirgega s . Vaadeldaval juhul on ülesande lahendamine lihtne, sest otsitava ringjoone keskpunkt peab asuma ühelt poolt võrdsel kaugusel sirgetest s ja AB ning teiselt poolt lõigu AB keskristsirgel. Lahendeid on üks.



Joon. 19.

2. Sirge AB lõikub sirgega s punktis M (joon. 19). Ülesande lahendamiseks tuleb leida puutepunkti T asukoht. Tähistades $MT = x$, $AM = a$ ja $EM = b$, saame $a \cdot b = x^2$. Saadud seose põhjal konstrueerime lõigu x . Sellega on punkti T asukoht leitud ja otsitavaks ringjooneks on ringjoon läbi punktide A , B ning T . Lahendeid on kaks, sest punkt T võib asuda mõlemal pool punkti M .

185. Et $a^2 = c^2 - b^2$ ehk

$$a^2 = (c - b)(c + b), \quad (1)$$

siis

$$2 \log_{b+c} a = 1 + \log_{b+c} (c - b), \quad (2)$$

$$2 \log_{c-b} a = 1 + \log_{c-b} (b + c). \quad (3)$$

Kasutades seoseid (1) - (3) teisendame korrutist

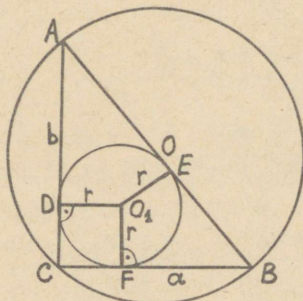
$4 \log_{b+c} a \cdot \log_{c-b} a$ järgmiselt:

$$\begin{aligned} 4 \log_{b+c} a \cdot \log_{c-b} a &= 1 + \\ + \log_{b+c} (c-b) \log_{c-b} (b+c) + \log_{b+c} (c-b) + \\ + \log_{c-b} (b+c) &= 1 + 1 + \log_{b+c} (c-b) + \\ + \log_{c-b} (b+c) &= 2 \log_{b+c} \frac{a^2}{b+c} + \log_{c-b} \frac{a^2}{c-b} = \\ &= 2 \log_{b+c} a + 2 \log_{c-b} a. \end{aligned}$$

Seega

$$2 \log_{b+c} a \cdot \log_{c-b} a = \log_{b+c} a + \log_{c-b} a.$$

187.



Et $CD = CF = r$ (joon.20)

ja $AE = AD = b - r$ ning

$EB = EF = a - r$, siis

$AB = AE + EB =$

$= b - r + a - r$. Et

aga $AB = 2R$, siis

$2R = a + b - 2r$ ehk

$a + b = 2r + 2R$.

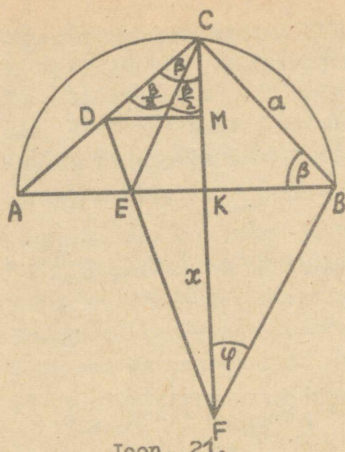
Joon. 20.

188. Ülesanne on lahendatud, kui tõestame, et $\varphi = \frac{\beta}{2}$ (joon. 21). Kolmnurgast KBF $\tan \varphi = \frac{BK}{KF}$ ja kolmnurgast CKB $BK = a \cos \beta$. Et leida $KF = x$, joonestame $DM \parallel EK$. Kolmnurkade FEK ning FDM sarnasuse põhjal

$$\frac{MD}{EK} = \frac{MK + x}{x} \quad \text{ehk} \quad \frac{MD - EK}{EK} = \frac{MK}{x}.$$

Siit

$$x = \frac{EK \cdot MK}{DM - KE}. \quad (1)$$



Joon. 21.

3) Kolmnurgas CRE

$$\angle BCE = \angle CEB = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$$

ja järelikult $BC = BE = a$.

$$4) EK = BE - BK = a - a \cos \beta = 2a \sin^2 \frac{\beta}{2}.$$

Asendades seoses (1) lõigud EK, MK, DM ja KE leitud avaldistega, saame

$$x = \frac{2a \sin^2 \frac{\beta}{2} \cdot \frac{a}{2} \sin \beta}{\frac{a \sin^2 \beta}{2 \cos \beta} - 2a \sin^2 \frac{\beta}{2}} = \frac{a \sin \beta \cos \beta}{2 \sin^2 \frac{\beta}{2}}.$$

$$\text{Leiame nüüd } \tan \varphi = \frac{BK}{KF} = \frac{a \cos \beta \cdot 2a \sin^2 \frac{\beta}{2}}{a \sin \beta \cos \beta} =$$

$$= \tan \frac{\beta}{2}. \text{ Et } \varphi \text{ ja } \frac{\beta}{2} \text{ on mõlemad teravnurgad, siis}$$

$$\varphi = \frac{\beta}{2}.$$

Märkus. Esitatud lahendus on Viljandi C.R. Jakobsoni nim. Keskkooli õpetajalt B. Henrichsonilt.

189. Kasutades koosinusteoreemi saame antud pindala avaldise teisendada kujule

$$S = \frac{ab \cdot \cos X}{2}.$$

Et aga kolmnurga pindala avaldub valemiga

Leiame järgnevalt lõigud EK, MK, DM.

1) $MK = \frac{1}{2} CK$, sest $AD = DC$ ja $DM \parallel AB$. Kolmnurgast KCB võime kirjutada, et $KC = a \sin \beta$ ja seega $MK = CM = \frac{a}{2} \sin \beta$.

2) Kolmnurgast CDM leiame, et $DM = CM \cdot \tan \beta$

ja 1) põhjal $DM =$

$$= \frac{a}{2} \sin \beta \tan \beta =$$

$$= \frac{a \sin^2 \beta}{2 \cos \beta}.$$

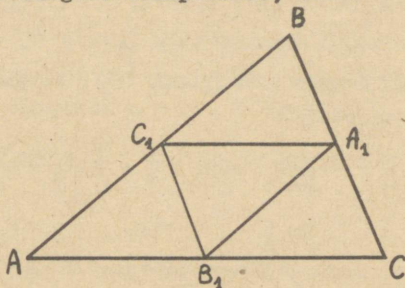
$$S = \frac{ab \sin \delta^c}{2},$$

siis antud juhul peab

$$\cos \delta^c = \sin \delta^c,$$

millest järeldub, et $\delta^c = 45^\circ$.

190. Vaatleme $\triangle ABC$ (joon. 22). Olgu tema ümberringjoone raadius R ja siseringjoone raadius r . Ühendades kolmnurga ABC külgede keskpunktid, saame $\triangle A_1B_1C_1$, mis



Joon. 22.

on kolmnurgaga ABC sarnane. Et kolmnurga $A_1B_1C_1$ ümberringjoon raadiusega R_1 on kas kolmnurga ABC siseringjooneks või asub osalt väljaspool seda kolmnurka, siis

$$R_1 \geq r.$$

Et kolmnurga ABC ümberringjoone raadius

$$R = 2R_1,$$

siis

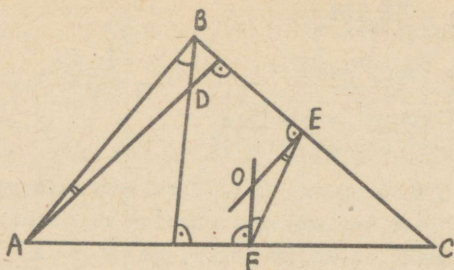
$$R \geq 2r.$$

191. Olgu D kõrguste lõikepunkt ja O ümberringjoone keskpunkt (joon. 23). Tuleb tõestada, et $OE = \frac{1}{2} AD$.

Et $\triangle ABD \sim \triangle OFE$, siis

$$\frac{OE}{AD} = \frac{OF}{AB} = \frac{1}{2},$$

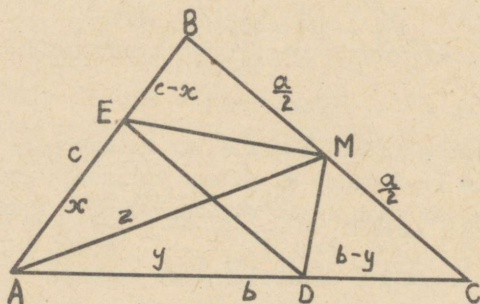
millest $OE = \frac{1}{2} AD$.



Joon. 23.

192. Vaatleme kolmnurka ABM (joon. 24). Nurgapoolitaja (EM) omaduse põhjal

$$\frac{x}{z} = \frac{c-x}{\frac{a}{2}} \quad \text{ehk} \quad \frac{x}{z} = \frac{2(c-x)}{a}.$$



Joon. 24.

Samal viisil saame kolmnurgast AMC võrduse $\frac{y}{z} = \frac{2(b-y)}{a}$. Jagades viimaste võrduste vastavad pooled omavahel, saame võrde

$$\frac{x}{y} = \frac{c-x}{b-y},$$

millest järeldub, et $ED \parallel BC$. Seega $\triangle AED \sim \triangle ABC$.

193. Kolmnurga nurgapoolitaja pikkuse jaoks saime ülesandes 158 avaldise

$$l = \frac{1}{b+c} \sqrt{bc(b+c-a)(b+c+a)}.$$

Seega

$$l_a = \frac{1}{b+c} \sqrt{bc(b+c-a)(b+c+a)},$$

$$l_b = \frac{1}{a+c} \sqrt{ac(a+c-b)(a+c+b)}.$$

Eelduse põhjal $l_a = l_b$. Lihtsustades ja kasutades tähistust $a + b + c = 2p$, saame

$$(a-b) [4p(p-b)(p-a) + ab(p-a) + (p-b)a^2 + pb^2] = 0.$$

Et $p > b$ ja $p > a$, siis on nurksulgudes olev avaldis igal juhul positiivne (s.t. $\neq 0$). Järelikult peab kehtima tingimus $a - b = 0$ ehk $a = b$.

194. Kolmnurkadest ABD ja ADC leiame, et

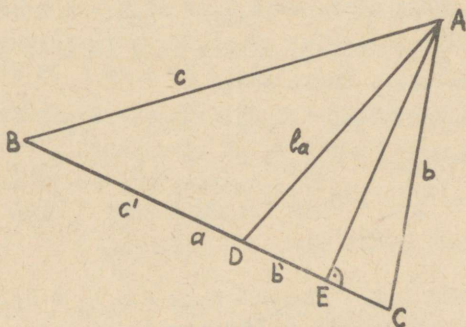
$$c^2 = l_a^2 + c'^2 + 2c' \cdot DE,$$

$$b^2 = l_a^2 + b'^2 - 2b' \cdot DE$$

(joon. 25). Elimineerides DE, saame võrduse

$$b'c^2 + c'b^2 = l_a^2(b' + c') + c'b'(c' + b').$$

Tehes siin asenduse



Joon. 25.

$$c' = \frac{b'c}{b} \quad \text{ja} \quad b' = \frac{c'b}{c}$$

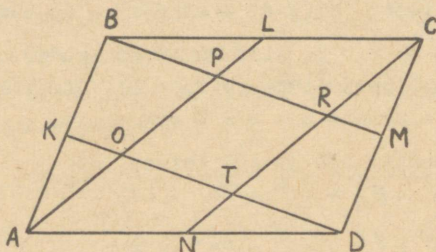
ning teisendades saadud võrdust, saame tulemuseks

$$bc(c' + b') = \ell_a^2 (b' + c') + b'c'(b' + c')$$

ehk

$$\ell_a^2 = bc - b'c'.$$

195. Tõestame esmalt, et nelinurk OPRT on rööpkülik (joon. 26). EMDK on rööpkülik, sest BK = DM ja BK \parallel DM. Järelikult EM \parallel KD. Analoogiliselt saab



Joon. 26.

näidata, et AL \parallel NC. Üeldust järgnebki, et nelinurk OPRT on rööpkülik. Leiame pindala S_{OPRT} .

Pole raske näha, et $S_{ABL} = S_{CDN} = \frac{1}{4} Q$ ja $S_{BCM} = S_{AKD} = \frac{1}{4} Q$. Selleks piisab vaid lõikude LN ja KM joonestamisest. Ühelt poolt

$$\begin{aligned} S_{OPRT} &= Q - (S_{ABL} + S_{BCM} + S_{CDN} + S_{AKD}) + S_{BLP} + \\ &+ S_{CMR} + S_{DNT} + S_{AKO} = Q - 4 \cdot \frac{1}{4} Q + S_{BLP} + S_{CMR} + \\ &+ S_{DNT} + S_{AKO} = S_{BLP} + S_{CMR} + S_{DNT} + S_{AKO}. \quad (1) \end{aligned}$$

Teiselt poolt aga

$$S_{OPRT} = Q - (S_{BCR} + S_{CDT} + S_{AOD} + S_{ABP}). \quad (2)$$

Kolmnurkade CDT ja CMR sarnasusest ning suhtest

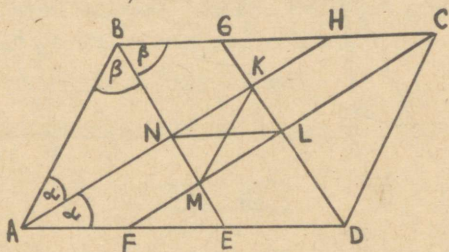
$$\frac{CM}{CD} = \frac{1}{2} \text{ järeldub, et } \frac{S_{CMR}}{S_{CDT}} = \frac{1}{4} \text{ ehk } S_{CDT} = 4 S_{CMR}.$$

Analoogiliselt saab näidata, et $S_{BCR} = 4 S_{BLP}$,

$S_{AOD} = 4 S_{DNT}$ ja $S_{ABP} = 4 S_{AKO}$. Asendades leitud tulemused võrdusesse (2) ning arvestades võrdust (1), saame

$$S_{OPRT} = Q - 4 S_{OPRT} \text{ ehk } S_{OPRT} = \frac{1}{5} Q.$$

196. $\angle A + \angle B = 2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, millest $\alpha + \beta = 90^\circ$.



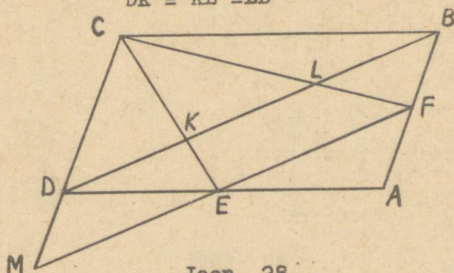
Joon. 27.

Järelikult $\angle KNM = \angle ANB = 90^\circ$ (joon. 27). Seega on rööpkülik NKLM (BE \parallel GD ja AH \parallel FC) ristkülik. Jääb veel tõestada, et ristküliku NKLM diagonaalid NL ja KM võrduvad rööpküliku kahe lähiskülje vahega.

Et AE = AB, siis ED = AD - AB ja et nelinurk ENLD on rööpkülik (NE \parallel LD ja NE = LD), siis ED = NL. Järelikult KM = NL = AD - AB.

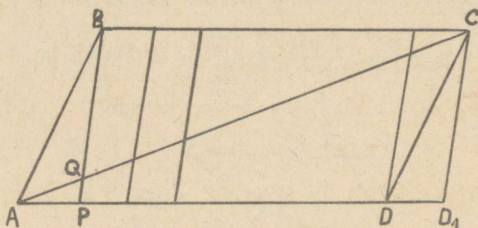
197. Kuna kolmnurgad DEM ja AFE on võrdsed, siis ME = EF (joon. 28). Järelikult ka DK = KL. Analoogiliselt saab näidata, et KL = LB. Seega

$$DK = KL = LB$$



Joon. 28

198. Pikendame rööpküliku külge AD lõigu $\frac{1}{n}$ AD võrra (joon. 29). Saadud lõik AD_1 on jaotatud $n + 1$ võrdseks osaks.

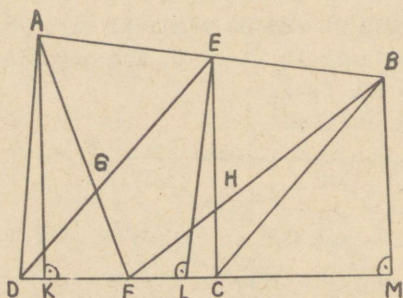


Joon. 29.

Joonestades lõigu AD_1 igast jaotuspunktist (D_1 kaasa arvatud) paralleelsed lõigud lõiguga PB , jaotub nurga CAD_1 haar AC $n + 1$ võrdseks osaks. Üks neist osadest on AQ . Järelikult $AQ = \frac{1}{n + 1} AC$.

199. Juhis. Tõestuseks joonestada nelinurga diagonaalid ning vaadelda kolmnurki, mille kesklõikudeks on nelinurga külgede keskpunkte ühendavad lõigud.

200. Veendume esmalt, et kehtib võrdus



Joon. 30.

$$S_{DEC} = S_{DAF} + S_{FBC}$$

(joon. 30). Jooniselt näeme, et

$$S_{DAF} = \frac{DF \cdot AK}{2} \text{ ja}$$

$$S_{FBC} = \frac{FC \cdot BM}{2},$$

Järelikult

$$\begin{aligned} S_{DAF} + S_{FBC} &= \\ &= \frac{DF}{2} (AK + BM). \end{aligned}$$

Trapetsis AKMB on EL keskõiguks, mistõttu $AK + BM = 2 EL$. Seega

$$S_{DAF} + S_{FBC} = DF \cdot EL.$$

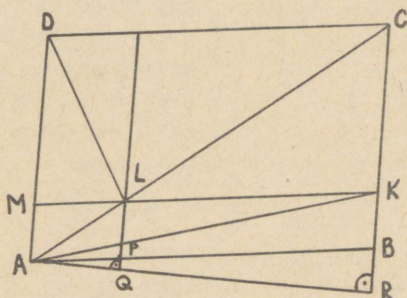
Et aga $DF = \frac{DC}{2}$, siis

$$S_{DEC} = S_{DAF} + S_{FBC}.$$

Lahutades nüüd viimase võrduse mõlemast poolest kolmnurkade DGF ja FHC pindalad, saamegi

$$S_{EHFG} = S_{AGD} + S_{BHC}.$$

201. Rõõpkülilikud ABCD ja APIM on sarnased, seega



$$\frac{AD}{AM} = \frac{AB}{AP}$$

(joon. 31). Et

$$\frac{AB}{AP} = \frac{AR}{AQ}, \text{ siis ka}$$

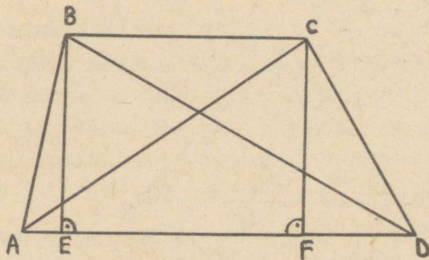
$$\frac{AD}{HK} = \frac{AR}{AQ}, \text{ millest}$$

$$\frac{AD \cdot AQ}{2} = \frac{HK \cdot AR}{2}.$$

Joon. 31.

202. Tuleb tõestada, et

$$BD^2 + AC^2 = AB^2 + CD^2 + 2BC \cdot AD$$



Joon. 32.

(joon. 32). Kehtivad seosed

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AD \cdot AE$$

ja

$$AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2AD \cdot FD.$$

Liites need võrdused ning arvestades, et

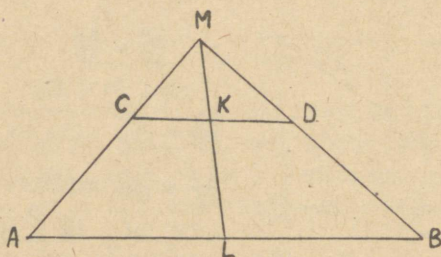
$$AD - AE - FD = BC,$$

saamegi soovitud tulemuse

$$BD^2 + AC^2 = AB^2 + CD^2 + BC \cdot 2AD.$$

203. Olgu trapetsi aluste keskpunktid K ja L. Pikendades

haarasid, saame kolmnurga AMB. Et trapetsi alusnurkade summa on $\frac{\pi}{2}$, siis on nurk M täisnurk (joon. 33). Seega



$$MK = \frac{CD}{2}$$

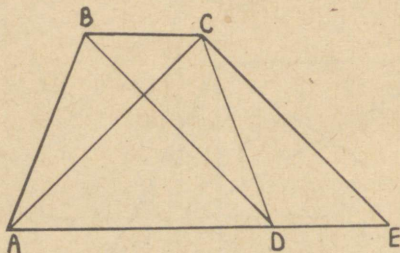
ja et

$$\frac{CK}{AL} = \frac{MK}{MK + KL},$$

Joon. 33.

siis leiamegi, et $KL = AL - CK$.

204. Tõestuseks tõmbame trapetsi tipust C lõigu paralleelselt diagonaaliga BD kuni lõikumiseni aluse AD pikend-

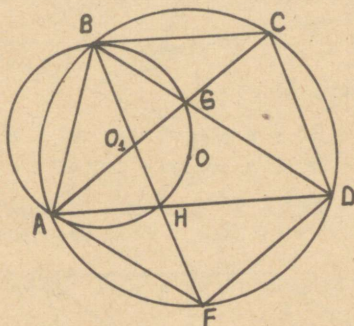


Joon. 34.

dusega punktis E (joon. 34). Kolmnurk ACE on võrdhaarne, seetõttu $\angle CAE = \angle CEA$. Et $\angle CEA = \angle BDA$, siis on kolmnurgad ACD ja ABD kongruentsed ning järelikult $AB = CD$.

205. Juhis. Tõmmata lõik OC. Väite õigsus järgneb kolmnurgast AOC, kus $\angle ACO = \angle DAC$.

206. Kui punkte O, A ja B läbib ringjoon läbib ka punkte G ja H, siis peavad kõõlule AB toetuvad piirdenurgad,



Joon. 35.

mille tipud on punktides G, O ja H, võrdsed olema (joon. 35). Näitame seda. Selleks arvutame:

$$\angle AOB = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ;$$

$$\angle ABC = \frac{5-2}{5} \cdot 180^\circ = 108^\circ;$$

$$\angle ABG = \frac{108^\circ}{3} \cdot 2 = 72^\circ;$$

$$\angle BAG = \frac{108^\circ}{3} = 36^\circ;$$

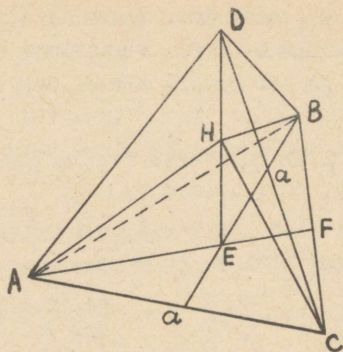
$$\angle AGB = 180^\circ - 72^\circ - 36^\circ = 72^\circ.$$

Seega $\angle AOB = \angle AGB = \angle AHB$.

$$207. v = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot h \cdot \frac{3 \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)}.$$

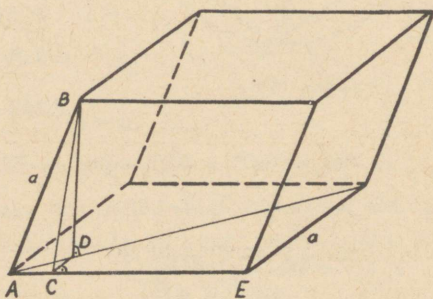
208. Juhis. Avaldada AH, HC ja HB, mis on omavahel võrdsed, külje a kaudu (joon. 36). Ülesande; toodud väite tõestamiseks näidata, et kolmnurgad AHC, CHB ja BHA on täisnurksed. Selleks kontrollida nimetatud kolmnurkades Pütagorase teoreemi kehtivust.

209. Et $v = S_p \cdot BD$ ja $S_p = a^2 \sin \alpha$, siis jääb ainsaks otsitavaks kõrgus BD (joon. 37). Selle leidmiseks tõmmame $BC \perp AE$; ka $DC \perp AE$. Edasi



Joon. 36.

kolmnurgast ABC $BC = a \sin \alpha$ ja $AC = a \cos \alpha$,
 kolmnurgast ADC $DC = a \cos \alpha \cdot \tan \frac{\alpha}{2}$
 ja kolmnurgast BDC $BD^2 = a^2 \sin^2 \alpha - a^2 \cos^2 \alpha \tan^2 \frac{\alpha}{2}$.



Joon. 37.

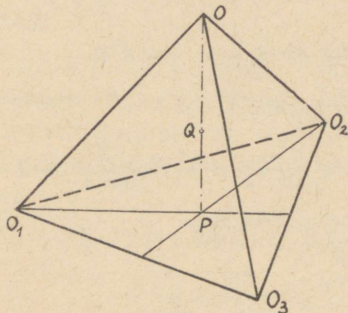
Pärast teisendamist

$$BD = \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sin \frac{3\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}$$

ning

$$V = 2 a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\sin \frac{3\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

210. Tähistame neljanda kera raadiuse tähega x . Suuruste x ja r vahelise seose leidmiseks vaatleme korrapärasest püramiidi $O_1O_2O_3O$, kus O_1 , O_2 ja O_3 on pörandal asuvate kerade keskpunktid ja O on neljanda kera keskpunkt (joon. 38).



Joon. 38.

Püramiidi põhiservad on $2r$ ja külgservad $x + r$. Neljanda kera madalaim punkt $Q(OQ=x)$ asub püramiidi kõrguse OP peal põhjast $O_1O_2O_3$ $\frac{1}{2}r$ kõrgusel. Seega

$$OP = x + \frac{1}{2}r.$$

Kolmnurgas O_1OP $O_1P = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$ ning $(r+x)^2 =$
 $= \left(\frac{2r\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}r\right)^2$ ja siit $x = \frac{7}{12}r$.

XIV matemaatikaolümpiaadi lõppvooru
ülesannete lahendused.

1. Et eelduse põhjal $a \cdot b \cdot c \neq 0$, siis ka $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ ning antud võrrandisüsteemi saab esitada kujul

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{b} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{c} \end{cases}.$$

Siit leiame, et

$$\begin{cases} x = \frac{2abc}{ac + bc - ab}, & \text{kus } ac + bc - ab \neq 0 \\ y = \frac{2abc}{ab + bc - ac}, & \text{kus } ab + bc - ac \neq 0 \\ z = \frac{2abc}{ac + ab - bc}, & \text{kus } ab + ac - bc \neq 0. \end{cases}$$

2. Et $\log_a 10 = \frac{\log 10}{\log a} = \frac{1}{\log a}$, siis

$$\begin{aligned} \log a + \log_a 10 &= \log a + \frac{1}{\log a} = \frac{(\log a)^2 + 1}{\log a} = \\ &= \frac{(\log a)^2 - 2 \log a + 1 + 2 \log a}{\log a} = \\ &= \frac{(\log a - 1)^2 + 2 \log a}{\log a}. \end{aligned}$$

Kui $a > 1$, siis $\log a > 0$ ja seega on viimase murru lugeja ja nimetaja positiivsed suurused. Nüüd võime aga kirjutada, et

$$\frac{(\log a - 1)^2 + 2 \log a}{\log a} \gg \frac{2 \log a}{\log a} = 2.$$

Seega $\log a + \log_a 10 \gg 2$.

3. Ülesande tingimuste kohaselt

$$\frac{4}{3}\pi r^3 c + \left[\frac{4}{3}(r+a)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 \right] b = \frac{4}{3}\pi (r+a)^3 d$$

ehk

$$cr^3 + [(r+a)^3 - r^3]b = (r+a)^3 d.$$

Suurust r on siit sobiv avaldada järgmiselt:

$$(r+a)^3(b-d) = r^3(b-c),$$

millest

$$\left(\frac{r+a}{r}\right)^3 = \frac{b-c}{b-d}$$

ning

$$r = \frac{a}{\sqrt[3]{\frac{b-c}{b-d}} - 1}.$$

Et ülesandel oleks mõtte, peab olema

$$\sqrt[3]{\frac{b-c}{b-d}} - 1 > 0,$$

millest

$$b < d < c \quad \text{või} \quad c < d < b.$$

Esimesest võrdusest näeme, et ülesande tingimused on täidetud ka siis, kui $b = c = d$. Sel juhul võib ballooni raadius r (samuti ka seina paksus a) olla kuitahes suur.

4. Et $\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} = 1$, siis on sobiv teha asendus

$$\sqrt{2 - \sqrt{3}} = a.$$

Sel korral $\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{1}{a}$ ning võrrand saab kuju

$$a^x + \frac{1}{a^x} = 4,$$

millest

$$a^x = 2 + \sqrt{3} \quad \text{ehk} \quad a^x = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

ja

$$a^x = 2 - \sqrt{3} \quad \text{ehk} \quad a^x = \sqrt{a}.$$

Seega on võrrandi lahendeiks

$$x_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{ja} \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

5. Ülesandes antud tingimust võib kirjutada kujul

$$3 \sin B = \sin 2A \cdot \cos B + \cos 2A \cdot \sin B$$

ehk

$$3 \tan B = \sin 2A + \cos 2A \cdot \tan B,$$

millest

$$\tan B = \frac{\sin 2A}{3 - \cos 2A}.$$

Esitame tõestatava võrduse vasaku poole kujul

$$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B}$$

ja asendame siin $\tan B$ leitud avaldisega, saame

$$\frac{\tan A + \frac{\sin 2A}{3 - \cos^2 A}}{1 - \tan A \cdot \frac{\sin 2A}{3 - \cos^2 A}},$$

mis pärast teisendamisi taandubki kujule $2 \tan A$.

SISUKORD

Ülesanded

Aritmeetika ja algebra	3
Trigonomeetria	16
Geomeetria	20
XIV matemaatikaolümpiaad	26
Vastused. Lahendusi	28

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

III

На эстонском языке

Составители Э.Митт, О.Принитс и К.Вельскер

Тартуский государственный университет

СССР, г. Тарту, ул. Бликколи, 18

Vastutav toimetaja J. Reimand

Korrektor E. Oja

=====

TRÜ rotaprint 1969. Paljundamisele antud 31. XII 1968.

Trükiplaanid 6,5. Tingtrükiplaanid 6,0. Arvestus-
plaanid 5,6. Trükiarv 500. Paber 30 x 42. 1/4.

MB 09623. Tell. nr. 803.

Hind 15 kop.

Hind 15 kop.

A-
28896
75 107

TÜ RAAMATUKOGU

1 0300 00449162 9