TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

SISSEJUHATUS MATEMAATILISSE STATISTIKASSE

1989

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

SISSEJUHATUS MATEMAATILISSE STATISTIKASSE

Metoodiline juhend rakendusmatemaatika eriala üliõpilastele

Koostanud A.-M. Parring

TARTU 1989

Kinnitatud matemaatikateaduskonna nõukogus 10.veebruaril 1989.a.

SISUKORD

Sissejuhatus 3
Sagedamini kasutatud diskreetsed tõenäosusjaotused 5
Sagedamini kasutatud pidevad tõenäosusjaotused 5
§1. Matemaatilise statistika põhimõisteid 6
§2. Statistik 14
§3. Üldkogumi parameetrite hindamine 23
§4. Hinnangu omadusi 33
§5. Hinnangu mõjusus 40
§6. Hinnangu piisavus 43
§7. Efektiivne hinnang 48
§8. Eksponentsiaalne jaotuste pere 63
§9. Võimalusi optimaalse hinnangu määramiseks 66
§10. Parameetri intervallhinnang 68
§11. Asümptootiline usaldusintervall Bernoulli jaotuse parameetrile 75
§12. Statistiliste hüpoteeside kontrollimise ülesanne ... 81
§13. Kriteeriumi võimsusfunktsioon 88
§14. ÜV kriteeriumi konstrueerimine lihthüpoteeside paari korral 96
§15. Normaaljaotuse parameetrite hindamine. Statistikute jaotused 103
§16. F-jaotus ja T-jaotus 109
§17. Usaldusintervallid normaaljaotuse parameetritele .. 112
§18. Hüpoteeside kontrollimine normaaljaotuse parameetrite kohta 116
§19. Kahe üldkogumi võrdlemine 127
§20. Kooskõlakriteerium 138
Register 146
Kasutatud tähistused 147
Tabel 1: standardse normaaljaotuse jaotusfunktsiooni $\Phi(z)$ väärtused 148
Tabel 2: χ^2-jaotuse kvantiilid $h_{\alpha;n}$ 149
Tabel 3: T-jaotuse täiendkvantiilid $\bar{t}_{\alpha;n}$ 150
Tabel 4: F-jaotuse kvantiilid $f_{\alpha;n}$ 152
Tabel 5: Fisheri φ-teisendus 158
Kirjandus 160

Sissejuhatus

Matemaatiline statistika on iseseisev rakenduslik matemaatiline distsipliin. Ta baseerub tóenäosusteoorias väljatöötatud móistetel ja meetoditel, kuid lahendab teistsuguseid ülesandeid kui tóenäosusteooria. Tóenäosusteoorias töötatakse välja mudel juhusliku katse kirjeldamiseks ja selle póhjal arvutatakse mitmesuguste sündmuste tóenäosusi (s.t. prognoositakse sündmuse toimumise suhtelist sagedust katse paljukordsel kordamisel). Matemaatilises statistikas lähtutakse katse paljukordsel sooritamisel saadud tulemustest ja püütakse nende póhjal teha järeldusi katse kirjeldamiseks sobiva tóenäosusliku mudeli kohta.

Matemaatilises statistikas tehtavate järelduste omapäraks on asjaolu, et need järeldused vóivad osutuda ekslikeks. Töötab ju matemaatiline statistika niisugustel eeldustel, kus kóik teised matemaatilised distsipliinid lakkavad töötamast - informatsioon ülesande óigeks lahendamiseks on ebapiisav. Matemaatilises statistikas töötatakse välja kriteeriumid ja reeglid teatud móttes optimaalsete järelduste tegemiseks niisuguses olukorras. Tehtavatele järeldustele lisatakse sageli ka arvuline hinnang nende usaldatavuse kohta.

Käesolev metoodiline juhend tutvustab matemaatilise statistika aluseid: vótame kasutusele klassikalise mudeli statistilise andmestiku kirjeldamiseks, ópime tundma matemaatilise statistika póhilist töövahendit ja vaatame kolme tüüpilist matemaatilise statistika ülesannet - parameetrite hindamist, usaldusintervallide konstrueerimist ja hüpoteeside kontrollimist.

Tuleb märkida, et matemaatilise statistika areng kulgeb kahel tasandil: ühel tasandil toimub mudeli väljaarendamine, selle keerukamaks, üldisemaks ja järelikult ka abstraktsemaks muutmine, üha uute tóenäosusteooria vahendite kasutusele vótmine. Teisel tasandil aga toimub matemaatilise statistika praktilise külje arendamine: tema kasutuspiirkonna välja selgitamine ja avardamine, mudelite töökindluse uurimine, töö konkreetsete rakendustega. Loomulikult on need tasandid tegelikus elus omavahel tugevasti seotud. Matemaatilise statistika õpetamisel on aga võimalik valida vaid üks neist tasanditest, teise olemasolu praktiliselt ignoreerides.

Arvestades tegeliku töö kogemust ja rakendusmatemaatikute matemaatilise statistika kursuse mahtu on käesolevas õppevahendis püütud leida mingi vahepealne tasand: põhialuste esitamisel kasutada suhteliselt lihtsaid töövahendeid ja klassikalist mudelit, põhiülesandeid aga lahendada ka praktilistes situatsioonides. Võimalik, et niisugune kompromiss lubab rakendusmatemaatikul vajaduse korral end suhteliselt lihtsalt ühele või teisele matemaatilise statistika tasandile sisse töötada.

Järgnev õppevahend on jagatud teatud mõttes terviklikeks paragrahvideks. Igale neist järgnevad ülesanded, mis õpetavad kasutama selles paragrahvis esitatud mõisteid ja töövõtteid. Peaaegu iga paragrahvi lõpus on mõned küsimused tõenäosusteooriast, millele vastamata on võimatu mõista selle paragrahvi matemaatilist sisu. Viimasena tuuakse ära lühikokkuvõte - kuhu oleme jõudnud ja mis on meie eesmärgiks järgnevas paragrahvis.

Autor on tänulik kolleegidele Ene Tiidule, Malle Karolinile ja Tõnu Tiitsule käsikirja läbilugemisel tehtud sisuliste märkuste eest ning Lyvia Jõesaarele käsikirja tehnilise vormistamise eest.

Sagedamini kasutatud diskreetsed tõenäosusjaotused

Nimetus ja lühitähis	Parameeter	Tõenäosusfunktsioon	Keskväärtus	Dispersioon
Bernoulli $B(1,\theta)$	$\theta; 0<\theta<1$	$\theta^x(1-\theta)^{1-x}$, $x=0,1$	θ	$\theta(1-\theta)$
Binoomjaotus $B(m,\theta)$	$\theta; 0<\theta<1$	$C_m^x\theta^x(1-\theta)^{m-x}$ $x=0,1,\dots,m$	$m\theta$	$m\theta(1-\theta)$
Geomeetriline $G(\theta)$	$\theta; 0<\theta<1$	$\theta(1-\theta)^x$ $x=0,1,\dots$	$(1-\theta)/\theta$	$(1-\theta)/\theta^2$
Poissoni $P(\lambda)$	$\lambda, 0<\lambda$	$e^{-\lambda}\lambda^x/x!$ $x=0,1,\dots$	λ	λ

Sagedamini kasutatud pidevad tõenäosusjaotused

Nimetus ja lühitähis	Parameeter	Tihedusfunktsioon	Keskväärtus	Dispersioon
Normaaljaotus $N(\mu,\sigma)$	$\mu,\sigma; -\infty<\mu<\infty$ $0<\sigma$	$1/(\sqrt{2\pi}\sigma)e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $-\infty<x<\infty$	μ	σ^2
Cauchy $C(\theta)$	$\theta; -\infty<\theta<\infty$	$1/[\pi(1+(x-\theta)^2]$ $-\infty<x<\infty$	∞	∞
Eksponentjaotus $E(\lambda)$	$\lambda; 0<\lambda$	$\lambda e^{-\lambda x}$, $x\geq 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
Ühtlane $U(\theta_1,\theta_2)$	θ_1, θ_2 $\theta_1<\theta_2$ $-\infty<\theta_1,\theta_2<\infty$	$1/(\theta_2-\theta_1)$ $\theta_1\leq x\leq\theta_2$	$(\theta_2+\theta_1)/2$	$(\theta_2-\theta_1)^2/12$

§1. Matemaatilise statistika põhimõisteid

Igaüks, kes asub tegelema matemaatilise statistikaga, puutub kindlasti kokku kahe mõistega - kohtab termineid valim ja üldkogum. Püüame esmalt avada nende mõistete sisu, seejärel tutvume aga matemaatilise mudeliga, mida kasutatakse nende objektide kirjeldamiseks.

Valimiks nimetatakse konkreetseid uurija käsutuses olevaid mõõtmistulemusi. Tavaliselt on niisugused mõõtmistulemused esitatavad arvudena, uurimisobjektil mõõdetavat näitajat nimetatakse matemaatilises statistikas traditsiooniliselt tunnuseks.

Üldkogumiks nimetatakse uuritava tunnuse väärtuste hulka objektide või indiviidide kogumis, mille kohta valimi põhjal soovitakse järeldusi teha.

Toome mõningaid näiteid valimi ja üldkogumi kohta.

Näide 1.1. Oletame, et soovitakse hinnata teatavas ettevõttes toodetavate aparaatide töökindlust, seda iseloomustavaks näitajaks võetakse aparaadi tõrgeteta töötamise aeg. Valitakse 10 selle ettevõtte poolt toodetud aparaati ja registreeritakse neil vaadeldava tunnuse väärtus.

Valimi moodustavad andmed läbikontrollitud aparaatide kohta, üldkogumi - andmed kõigi selle ettevõtte poolt toodetud ja toodetavate aparaatide kohta. *

Näide 1.2. USA-s, kus presidendi kohale kandideerib reeglina mitu isikut, korraldatakse enne valimisi küsitlusi, mille eesmärgiks on hinnata presidendikandidaadi šansse valitud saada. Küsitletakse teatud arvu hääleõiguslikke kodanikke, registreeritakse nende arvamus - kas küsitletu kavatseb hääletada teatava presidendikandidaadi poolt või mitte. Valimi moodustavad siin küsitletutelt saadud vastused, üldkogumi - kõigi hääleõiguslike kodanike arvamused. *

Näide 1.3. Soovitakse uurida punkrikaalus ja aidakaalus registreeritud teravilja saagikuse vahekorda. Selleks registreeritakse 20 majandi andmed. Valimi moodustavad registreeritud saakide paarid, üldkogumi - kõikide ENSV majandite andmed vaadeldaval ajavahemikul. *

Nagu näeme, võib üldkogum olla lõplik või lõpmatu, sisaldada ainult tegelikkuses eksisteerivaid andmeid või lisaks neile ka potentsiaalselt võimalikke andmeid. Ühine on aga kõikidele üldkogumitele see, et uuritavate tunnuste väärtused pole kõikidel objektidel ühesugused, uuritavale tunnusele on üldkogumis omane muutlikkus. Püüdes valimisse juhuslikult üldkogumi ühe või teise objekti, registreerime tunnuse erinevaid väärtusi. Juhuslikult valitud objektide mõõtmisel saadud tulemuste jada iseloomustavate seaduspärasuste kirjeldamiseks võetakse matemaatilises statistikas kasutusele teatav tõenäosuslik mudel - uuritavat tunnust käsitletakse kui juhuslikku suurust. Selline mudel võimaldab eralduda tunnuse väärtuse kujunemise konkreetsest mehhanismist, üldkogumi konkreetsest olemusest ja käsitleda kõiki üldkogumeid ühe skeemi järgi: "musta kastina", mis vastuseks uurija igale küsimusele genereerib ühe konkreetse juhusliku suuruse väärtuse (või konkreetsete juhuslike suuruste väärtused). Kui tegemist on ühe tunnusega, kirjeldab selliselt abstraheeritud üldkogumit täielikult teatav tõenäosusjaotus. Üldkogumi konkreetset olemust arvestades on sageli võimalik selle tõenäosusjaotuse tüüp kindlaks määrata. Kui tegemist on mitme tunnuse üheaegse uurimisega, võib üldkogumi kirjeldamiseks kasutada aga mitmemõõtmelist tõenäosusjaotust või mingit uuritavate tunnuste ühist käitumist kirjeldavat seost. Matemaatilise aparatuuri rakendamiseks tuleb uurijat huvitav probleem sõnastada kasutusele võetud mudeli abil.

Vaatame tõenäosuslikke mudeleid, mida sobiks kasutusele võtta eelnevate näidete puhul.

Näide 1.4. Vaatame näites 1.1 toodud probleemi. Objektiivsete andmete saamiseks tuleks mõõdetavad aparaadid valida täiesti juhuslikult (näiteks teataval hetkel laos olemas olevate aparaatide hulgast). Vaatlustulemusi võime siis vaadata kui teatava juhusliku suuruse katses saadud väärtusi. Selle juhusliku suuruse - uuritava tunnuse - täpsemaks kirjeldamiseks tuleb määrata tema tõenäosusjaotus. Lähtudes ülesande sisust võiks selleks valida eksponentjaotuste perre kuuluva tõenäosusjaotuse. Tuletatakse ju see tõenäosusjaotuse tüüp tõrgeteta töötamise aja kirjeldamiseks kahel üsna loomulikul eeldusel:

1) tõrke tekkimise tõenäosus ajavahemikul x+y tingimusel, et

ajavahemikul y tõrget ei tekkinud, on võrdne tõrke tekkimise tõenäosusega ajavahemikul x (järelmõju puudumise nõue)

$$P(X > x+y \mid X > y) = P(X > x);$$

2) tõrke tekkimise tõenäosus lühikese ajavahemiku jooksul on võrdeline selle ajavahemiku pikkusega.

Kui eksponentjaotus tõepoolest sobib (oma kursuses vaatame ka meetodeid valitud mudeli sobivuse kontrollimiseks), võime oma üldkogumi jaoks valitud mudeli kirjutada välja kuni teatava konstandi täpsuseni. Selle probleemi korral võime öelda, et uuritava tunnuse tõenäosusjaotuse tihedusfunktsioon on määratud eeskirjaga

$$f(x,\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Konstanti λ, millest tihedusfunktsioon sõltub, nimetatakse mudeli parameetriks. Matemaatilise statistika probleemide korral on mudeli parameetri väärtus tundmatu, ainsaks allikaks tema kohta informatsiooni saamisel on valim.

Kui meid antud näites huvitab aparaatide tõrgeteta töötamise aeg, võib selle kirjeldamiseks kasutada näiteks uuritava tunnuse keskväärtust $EX = 1/\lambda$, või tõenäosust, et aparaadi tõrgeteta töötamise aeg ületab teatava kriitilise väärtuse c, $P(X > c)=e^{-\lambda c}$.

Paneme tähele, et lisaks jaotuse parameetrile võib praktiliselt huvi pakkuda ka parameetri teatav funktsioon. Seda teadmist läheb meil edaspidi vaja. *

Näide 1.5. Vaatame näites 1.2 toodud probleemi. Ka siin tuleb objektiivsete vastuste saamiseks küsitletavad valida täiesti juhuslikult (kuidas seda praktiliselt teostada, on küllalt tõsine probleem, kuid kahjuks ei mahu niisuguste probleemide käsitlemine meie kursuse raamidesse). Uuritavat tunnust - kas küsitletav hääletab teatava presidendikandidaadi poolt või mitte - võime käsitleda kaheväärtuselisena: olgu tema väärtuseks 1, kui vastus on "ja" ning 0, kui vastus on "ei". Vastava juhusliku suuruse tõenäosusjaotus on määratud tabeliga

x_i	0	1
p_i	$1-\theta$	θ

Sellist tõenäosusjaotust nimetatakse Bernoulli jaotuseks.

Näeme, et lähtudes probleemi sisust, saime üldkogumi mudeli - üldkogumi kirjeldamiseks sobiva tõenäosusjaotuse - esitada tundmatu parameetri täpsuseni. Selle mudeli parameeter θ näitab nende valijate osa kõikide hääleõiguslike kodanike hulgas, kes on valmis teatava presidendikandidaadi poolt hääletama. Parameetri θ arvulise väärtuse teadmine annab täpse ettekujutuse presidendikandidaadi šanssidest. ✳

Edaspidises kasutame diskreetse(tabeli abil esitatud) tõenäosusjaotuse mugavamaks esitamiseks tõenäosusfunktsiooni $p(x, \theta)$, mis on määratud eeskirjaga

$$p(x, \theta) = P_\theta(X = x).$$

Bernoulli jaotuse tõenäosusfunktsioon omab kuju

$$p(x, \theta) = \begin{cases} \theta^x(1 - \theta)^{1-x}, & x = 0,1, \\ 0 & , \text{mujal} . \end{cases}$$

Lepime kokku edaspidi tundmatu parameetri üldtähisena kasutada sümbolit θ. Konkreetsete jaotuste korral, kus traditsiooniliselt kasutatakse parameetri tähistamiseks mingit muud tähte (näiteks λ eksponentjaotuse korral, μ - normaaljaotuse korral), jälgime traditsioonilist tähistust.

Toome veel eraldi välja mõlemas näites esitatud nõude valimi moodustamise kohta.

Üldkogumit iseloomustab objektiivselt ainult juhuslikult moodustatud valim.

Valimi juhuslikkuse nõudega aga seostub omaette probleem - tehes üldkogumist erinevaid valimeid, saame oma käsutusse erinevad andmestikud. Teooria ülesehitamiseks peab meil olema mudel, mis võimaldaks valimi juhuslikkust kirjeldada üldkogumi kirjeldamiseks kasutusele võetud mudeli abil. Ühe võimaliku mudeli valimi juhuslikkuse kirjeldamiseks saame, kui iga vaatlustulemust - valimi elementi - vaatame juhusliku suurusena. Valimile, milles on n vaatlust, vastab siis n-komponendiline juhuslik vektor $\vec{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Teeme selle juhusliku vektori kohta kaks täiendavat eeldust:

2

1) juhusliku vektori komponendid X_i ja X_j ($i \neq j$) on sõltumatud;

2) kõik komponendid on ühesuguse tõenäosusjaotusega - sama tõenäosusjaotusega, mis kirjeldab üldkogumit. (1.1)

Niisugust juhuslikku vektorit nimetame <u>teoreetiliseks</u> <u>valimiks</u>.

Nende eelduste intuitiivseks aluseks on loomulikud eeldused "hästi korraldatud mõõtmiste" kohta: eelnev mõõtmistulemus ei tohi mõjustada talle järgnevat mõõtmistulemust, mõõtmise käigus ei tohi mõõdetava tunnuse iseloom muutuda.

Täpsustame veel uurija käsutuses oleva valimi ja teoreetilise valimi vahekorda. Teoreetiline valim on mudel, mis võimaldab meil arvestada valimi juhuslikkust. Uurija käsutuses olev <u>konkreetne</u> <u>valim</u> on teoreetilise valimi - juhusliku vektori - konkreetne väärtus, realisatsioon, mis saadi ühel konkreetsel katsel. Edaspidi tähistame teoreetilist valimit suurte tähtedega ($\vec{X}$, $\vec{Y}$ jne.), konkreetset valimit aga väikeste tähtedega ($\vec{x}$, $\vec{y}$ jne.).

Teoreetilise valimi määratlusest järeldub, et tema tõenäosusjaotus on üldkogumi tõenäosusjaotuse poolt üheselt määratud. Tõepoolest, olgu üldkogumi tõenäosusjaotus pidev, tihedusfunktsioon olgu määratud eeskirjaga $f(x, \theta)$. Eelduse 2 tõttu on iga teoreetilise valimi komponendi jaotus tihedusega $f(x_i, \theta)$, eelduse 1 tõttu aga omab teoreetilise valimi tihedusfunktsioon kuju

$$f(\vec{x}, \theta) = f(x_1, \theta)f(x_2, \theta) \dots f(x_n, \theta).$$

Kui meil on tegemist näiteks eksponentjaotusega üldkogumiga, on teoreetilise valimi tihedusfunktsioon määratud eeskirjaga

$$f(\vec{x}, \theta) = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i} .$$

Kui üldkogumi tõenäosusjaotus on diskreetne, on see esitatav tõenäosusfunktsiooniga $p(x, \theta)$. Valimi tõenäosusfunktsioon omab tehtud eelduste tõttu kuju

$$p(\vec{x}, \theta) = p(x_1, \theta)p(x_2, \theta) \dots p(x_n, \theta).$$

Kui meil on tegemist näiteks Bernoulli jaotusega üldkogumiga, on teoreetilise valimi tõenäosusfunktsioon määratud eeskirjaga

$$p(\vec{x}, \theta) = \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

Märgime, et kirjeldatud eeldusi täitev teoreetiline valim on kõige lihtsam matemaatilises statistikas kasutatav valimi juhuslikkust kirjeldav mudel. Leidub ka selliseid praktilisi ülesandeid, mille korral osutub otstarbekaks kasutada teistsuguseid eeldusi täitvaid teoreetilisi valimeid.

Näide 1.6. Vaatame näites 1.3. kirjeldatud probleemi. Objektiivsete andmete saamiseks tuleb valimisse kuuluvad majandid valida täiesti juhuslikult. Selle probleemi korral vaadatakse üldkogumil kahte erinevat tunnust: punkrikaalus registreeritud keskmine saagikus - olgu see tunnus X ja aidakaalus registreeritud keskmine saagikus - olgu see tunnus Y. Uurijat huvitab eelkõige seos nende kahe saagikuse näitaja vahel. Kui meil õnnestuks seda seost täpsemalt kirjeldada, saaks seda kasutada edaspidi näiteks aidakaalus saagikuse prognoosimiseks punkrikaalus saagikuse põhjal.

Tuginedes loogilistele kaalutlustele, võib oodata, et otsitav seos on lineaarne, s.t. esitatav kujul

$$Y = \theta_0 + \theta_1 X + \varepsilon, \qquad (1.2)$$

kus kordaja θ_0 iseloomustab vabariigi keskmisele saagikusele vastavat kuivatuskadu, kordaja θ_1 aga selle muutust keskmisest saagikusest erineva saagikuse korral. Kindlasti pole niisugune seos funktsionaalne - erinevates majandites valitsevad tingimused võivad põhjustada juhuslikke kõrvalekaldeid kordajatega θ_0 ja θ_1 kirjeldatud üldtendentsist. Niisuguseid juhuslikke kõrvalekaldeid esitab võrrandis (1.2) juhuslik liidetav ε.

Meie üldkogumi kirjeldavaks mudeliks võibki antud juhul valida seose (1.2). Seose praktiliseks kasutamiseks tuleb hinnata selle kordajaid θ_0 ja θ_1. Nagu hiljem näeme, võib neid kordajaid hinnata, tegemata mingisuguseid täiendavaid eeldusi üldkogumi tõenäosusjaotuse kohta. *

Analüüsime veel, millist teoreetilist valimit sobiks kasutada eelnevas näites vaadatud probleemi kirjeldamiseks. Valemi (1.2) kasutamisel eeldame, et saagikus punkrikaalus on meile teada. Juhusliku valimi moodustavad seega tunnuse Y väärtused. Seades selle valimi elementidele vastavusse juhuslikud suurused; saame juhusliku vektori $\vec{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$. Selle juhusliku vektori kohta teeme eeldused:

1) juhusliku vektori komponendid Y_i ja Y_j $(i \neq j)$ on sõltumatud; (1.3)

2) iga komponendi keskväärtus on esitatav kujul

$$EY_i = \theta_0 + \theta_1 x_i,$$

kus x_i on teadaolev konstant.

Nagu näeme, on siin teine eeldus valimi kohta üldisem. Me ei nõua enam, et valimi elemendid oleksid ühesuguse tõenäosusjaotusega (see ei oleks antud probleemi korral otstarbekas), vaid eeldame ainult kõikide valimi elementide keskväärtuste ühesugust struktuuri.

Milliseid eeldusi teoreetilise valimi kohta tuleb teha, oleneb konkreetsest probleemist. Meie tegeleme oma kursuses põhiliselt ühe tunnuse analüüsimisega ning kasutame teoreetilise valimi jaoks klassikalisi eeldusi (1.1).

Tuleks aga rõhutada, et oletus üldkogumi jaotuse tüübi teadaolemisest ja eeldused (1.1) on tegelikkuse idealiseering. Niisugustes "ideaalsetes" tingimustes on suhteliselt lihtne töötada. Küllap seetõttu toimus matemaatilise statistika kui iseseisva matemaatilise distsipliini formeerumine just nimelt sellistel eeldustel. Matemaatilise statistika rakendusvaldkonna laienedes tuli aga järjest selgemini ilmsiks vastuolu "ideaalsete" eelduste ja katsetulemuste reaalse iseloomu vahel. Selle vastuolu ületamisel on tekkinud kaks uut kiiresti arenevat matemaatilise statistika valdkonda: jaotusvaba statistika ja robustne statistika. Nende valdkondadega tutvumine aga ei mahu meie kursuse raamidesse.

ÜLESANDED

1. Oletame, et üldkogumis võib uuritava tunnuse tõenäosusjaotuseks valida Poissoni jaotuse, mille tõenäosusfunktsioon on määratud eeskirjaga

$$p(x, \lambda) = \begin{cases} e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^x}{x!} & , x = 0, 1, \ldots \\ 0 & , \text{mujal} \end{cases}.$$

(Poissoni jaotus sobib "harva esinevate" sündmuste arvu kirjeldamiseks teatavas ajavahemikus. Näiteks õnnetusjuhtumite arvu kirjeldamiseks teatavas liiklussõlmes teatava ajavahemiku jooksul, tunni jooksul teenindussüsteemi saabunud tellimuste arvu kirjeldamiseks jne.). Leida sellest üldkogumist pärineva teoreetilise valimi tõenäosusfunktsioon.

2. Binoomjaotusega juhuslik suurus võib omandada täisarvulisi väärtusi 0, 1, ..., m, väärtuse k omandamise tõenäosus on $C_m^k \theta^k (1-\theta)^{m-k}$. Kirjutada välja selle jaotuse tõenäosusfunktsioon. Milline sisuline tähendus on selle jaotuse parameetril?

3. Oletame, et üldkogumi mudeliks võib valida binoomjaotuse parameetritega m ja θ, $B(m, \theta)$. Kirjutada välja n-elemendilise valimi tõenäosusfunktsioon.

4. Oletame, et üldkogumi mudeliks võib valida normaaljaotuse $N(\mu, \sigma)$, mille tihedusfunktsioon on määratud eeskirjaga

$$f(x; \mu, \theta) = (1/(\sigma\sqrt{2\pi}))\exp\left[-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)\right].$$

$-\infty < x < \infty$. (Niisugune jaotus sobib sageli mitmesuguste võimekuse näitajate kirjeldamiseks, samuti elusorganismide mõõtmete - pikkus, kaal jms. kirjeldamiseks. Üldjuhul niisuguste näitajate kirjeldamiseks, mis oma käitumiselt on "normaalsed" - omandavad sageli väärtusi teatava keskmise taseme läheduses, keskmisest tasemest tunduvalt suuremaid või väiksemaid väärtusi esineb harva, kuid ühesuguse tõenäosusega.)

Leida n-elemendilise valimi tihedusfunktsioon.

5. Seade koosneb 500 üksteisest sõltumatult töötavast elemendist. Seadet jälgitakse ajavahemiku T jooksul ja määratakse kindlaks töötamast lakanud elementide arv. Millisest üldkogumist see valim pärineb? Millise tõenäosusjaotuse võiks valida uuritava tunnuse (ajavahemiku T jooksul töötamast lakanud elementide arv) kirjeldamiseks?

Kordamisküsimusi tõenäosusteooriast

1. Selgitage, mille poolest erineb pidev juhuslik suurus diskreetsest.
2. Kuidas esitatakse pideva juhusliku suuruse tõenäosusjaotust?
3. Kuidas esitatakse diskreetse juhusliku suuruse tõenäosusjaotust?
4. Olgu X juhuslik suurus, c - konstant. Kuidas leida tõenäosust $P(X > c)$?

5. Olgu X normaaljaotusega juhuslik suurus, $X \sim N(\mu, \sigma)$. Milline on parameetrite μ ja σ sisuline tähendus?
6. Olgu $X \sim N(0,1)$ ja $Y \sim N(0,4)$. Leida tõenäosused $P(-1 < X < 1)$ ja $P(-1 < Y < 1)$.
7. Kuidas esitatakse juhusliku vektori tõenäosusjaotust?
8. Defineerida juhuslike suuruste sõltumatus.

KUS ME OLEME? Võtsime kasutusele mudelid üldkogumi ja valimi juhuslikkuse kirjeldamiseks. Üldkogumit käsitleme piltlikult "musta kastina", mis igale uurija küsimusele teatab vastuseks juhusliku suuruse ühe konkreetse väärtuse. **Niisugune "must kast" on täielikult kirjeldatud vastava juhusliku suuruse tõenäosusjaotusega. Üldkogumi mudeliks on tõenäosusjaotus.**

Valimi juhuslikkuse kirjeldamiseks võtame kasutusele teoreetilise valimi - juhusliku vektori $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, mille

1) kõik komponendid on sõltumatud;
2) kõik komponendid on ühesuguse tõenäosusjaotusega - sama tõenäosusjaotusega, mis kirjeldab üldkogumit.

KUHU LÄHEME? Tutvuma matemaatilise statistika põhilise töövahendiga - statistikuga.

§2. Statistik

Juhusliku valimi moodustamisel on meie põhieesmärgiks informatsiooni hankimine üldkogumi kirjeldamiseks kasutusele võetud tõenäosusliku mudeli parameetrite kohta. Sageli on kasulik seda informatsiooni esitada mitte kõikide valimi elementide abil (valim võib olla ju väga mahukas!), vaid teatavate valimi põhjal arvutatavate suuruste abil. Niisuguste suuruste tõenäosusliku käitumise uurimiseks vaatame neid esitatuna teoreetilise valimi elementide abil, s.o. teoreetilise valimi funktsioonina.

Teoreetilise valimi funktsiooni nimetame statistikuks. Loomulikult piirdume ainult mõõtuvate funktsioonidega, seega on statistik juhuslik suurus. Statistiku üldtähisena kasutame edaspidises tähte T; rõhutamaks tema sõltuvust teoreetilisest valimist, kirjutame selle tähe järele sulgudesse argumendina ka teoreetilise valimi tähise : $T(\vec{X})$. Sagedamini kasutatavate statistikute jaoks on olemas eritähised.

Iga konkreetse valimi korral omandab statistik konkreetse arvulise väärtuse. Statistiku konkreetse arvulise väärtuse tähistamiseks kasutame sümboleid t või $T(\tilde{x})$ või eritähist. Statistiku konkreetne väärtus on juhusliku katse tulemusena määratud juhusliku suuruse konkreetne väärtus.

Tutvume mõne sagedamini kasutatava statistikuga.

Definitsioon 2.1. Valimi keskväärtuseks (valimkeskmiseks) nimetame statistikut, mis on määratud eeskirjaga

$$\overline{X} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} X_i \quad .$$

Tõestame kaks valimi keskväärtuse (juhusliku suuruse!) edaspidiseks kasulikku omadust.

Lemma 2.2. Kui üldkogumil on olemas lõplik keskväärtus μ ja lõplik dispersioon σ^2, siis statistiku $\overline{X}$ keskväärtus on samuti μ, dispersioon aga σ^2/n.

Tõestus. Tähistame üldkogumis uuritava tunnuse sümboliga X. Vastavalt eeldusele on üldkogumi mudeliks selline tõenäosusjaotus, mille korral $EX = \mu$ ja $DX = \sigma^2$. Arvutame statistiku $\overline{X}$ keskväärtuse. Kuna keskväärtuse operaator on lineaarne, siis

$$E\overline{X} = E((1/n)\sum_{i=1}^{n} X_i) = (1/n)\sum_{i=1}^{n} EX_i \ .$$

Kuna aga kõik teoreetilise valimi elemendid olid ühesuguse tõenäosusjaotusega - samasugusega, nagu üldkogumis uuritav tunnus - siis ka kõikide teoreetilise valimi elementide keskväärtuseks on arv μ. Järelikult,

$$E\overline{X} = \mu.$$

Arvutame statistiku $\overline{X}$ dispersiooni. Teoreetilise valimi elementide sõltumatuse tõttu võime kirjutada

$$D\overline{X} = D((1/n)\sum_{i=1}^{n} X_i) = (1/n^2)\sum_{i=1}^{n} DX_i \ .$$

Kuna aga kõikide valimi elementide dispersioonid on võrdsed ja võrduvad üldkogumis uuritava tunnuse dispersiooniga σ^2, siis

$$D\overline{X} = \sigma^2/n.$$

Lemma on tõestatud.

Kui meie käsutuses on konkreetne valim, saame leida valimi keskväärtuse arvulise väärtuse. Traditsiooniliselt tähistatakse seda väärtust sümboliga $\bar{x}$.

Lemma esitab meile seaduspärasused, mis avalduvad paljude valimite tegemisel ja nende jaoks valimi keskväärtuse arvutamisel. Selgitame seda väidet näitega.

Näide 2.3. Olgu meil tegemist üldkogumiga, kus uuritav tunnus on eksponentjaotusega, $X \sim E(\lambda)$. Kuna sel juhul $EX=1/\lambda$ ja $DX=1/\lambda^2$, siis sellest üldkogumist pärineva valimi korral võib valimi keskväärtuse $\bar{X}$ kohta järeldada, et $E\bar{X}=1/\lambda$ ja $D\bar{X}=1/(n\lambda^2)$. Vaatlusaluse statistiku keskväärtus ja dispersioon sõltuvad üldkogumi parameetrist λ. Kui näiteks üldkogumi parameeter λ omab väärtust 1, siis valimi keskväärtuse keskväärtuseks on samuti 1 - tehes palju erinevaid valimeid sellest üldkogumist ja arvutades iga valimi keskväärtuse saame arvude perekonna, mille keskmiseks tasemeks on 1. Kui näiteks üldkogumi parameeter λ omab väärtust 5, siis valimi keskväärtuse keskväärtuseks on 0,2 - tehes palju erinevaid valimeid sellest üldkogumist ja arvutades iga valimi keskväärtuse, saame arvude perekonna, mille keskmiseks tasemeks on nüüd 0,2.

Üldkogumi parameetrist sõltub ka statistiku hajuvus oma keskmise taseme suhtes. Oletame, et otsustame üldkogumist teha 10-elemendilisi valimeid. Kui üldkogumi parameeter λ omab väärtust 1, siis on valimi keskväärtuse dispersioon (tema keskväärtuse suhtes arvutatud hälbe ruudu keskväärtus) 0,1. Kui üldkogumi parameeter λ omab väärtust 5, siis on vaatlusaluse statistiku dispersioon 0,004. Näeme, et viimasel juhul on statistiku väärtuste hajuvus statistiku keskväärtuse suhtes tunduvalt väiksem.

Nagu näeme lemmas toodud valemist, sõltub vaatlusaluse statistiku - valimi keskväärtuse - dispersioon valimi mahust. Mida suuremaid valimeid me võime teha, seda stabiilsemalt käitub valimi keskväärtus, s.t. seda väiksem on tema katses saadavate väärtuste hajuvus tõelise keskväärtuse suhtes. Nii on näiteks 100 elemendilise valimi korral ja parameetri väärtustel 1 ja 5 statistiku dispersioon vastavalt 0,01 ja 0,0004. *

Vaatame veel valimi keskväärtuse väärtuse arvutamist konkreetse valimi korral.

Näide 2.4. Vaatame näites 1.1 kirjeldatud probleemi - uuritakse teatavas ettevõttes toodetud aparaatide tõrgeteta töötamise aega. Kümne kontrollitud aparaadi korral saadi järgmised tulemused (tundides):

9,32 0,14 3,86 9,19 0,71 5,96 2,03 6,07 6,33 8,15

Arvutame selle valimi keskväärtuse

$$\bar{x} = 51{,}76/10 = 5{,}18 \text{ tundi.} \quad *$$

Teiseks väga sageli kasutatavaks statistikuks on valimi dispersioon.

Definitsioon 2.5. Valimi dispersiooniks nimetatakse statistikut, mis on määratud eeskirjaga

$$S^2 = (1/(n-1)) \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2.$$

Tõestame ühe valimi dispersiooni omaduse.

Lemma 2.6. Kui üldkogumil on olemas lõplik dispersioon σ^2, siis statistiku S^2 keskväärtuseks on σ^2.

Tõestus. Vastavalt eeldusele kirjeldab üldkogumit selline tõenäosusjaotus, mille korral $DX = \sigma^2$. Arvutame statistiku S^2 keskväärtuse. Dispersiooni olemasolust järeldub ka keskväärtuse olemasolu. Tähistame üldkogumi keskväärtuse sümboliga μ. Valimi dispersiooni võime esitada kujul:

$$S^2 = (1/(n-1)) \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu + \mu - \bar{X})^2 = (1/(n-1)) \Big[\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 -$$

$$-2n(\bar{X} - \mu)^2 + n(\bar{X} - \mu)^2 \Big] = (1/(n-1)) \Big[\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2 \Big].$$

Arvestades keskväärtuse lineaarsust saame nüüd

$$ES^2 = (1/(n-1)) \Big[\sum_{i=1}^{n} E(X_i - \mu)^2 - nE(\bar{X} - \mu)^2 \Big].$$

Kuna $E(X_i - \mu)^2 = DX_i$ ja $E(\bar{X} - \mu)^2 = D\bar{X}$, saame lemma 2.2 tulemusi ja teoreetilise valimi kohta tehtud eeldusi arvestades

$$ES^2 = (1/(n-1)) \big[n\sigma^2 - \sigma^2 \big] = \sigma^2.$$

Lemma on tõestatud.

Kui meie käsutuses on konkreetne valim, saame leida valimi dispersiooni arvulise väärtuse. Traditsiooniliselt tähistatakse seda väärtust sümboliga s^2.

Ka siin esitab lemma seaduspärasuse, mis iseloomustab statistiku käitumist paljude valimite moodustamisel antud üldkogumist. Vaatame näidet.

Näide 2.7. Olgu meil jälle tegemist üldkogumiga, kus uuritav tunnus on eksponentjaotusega , $X \sim E(\lambda)$. Vastavalt lemmale on siis $ES^2=1/\lambda^2$. Seega, kui näiteks üldkogumi parameetri λ väärtuseks on 1, siis valimi dispersiooni keskväärtuseks on samuti 1 - tehes palju erinevaid valimeid sellest üldkogumist ja arvutades iga valimi dispersiooni, saame arvude perekonna, mille keskmiseks tasemeks on 1. Kui näiteks üldkogumi parameetri λ väärtuseks on 5, siis valimi dispersiooni keskväärtuseks on 0,04 - tehes palju erinevaid valimeid sellest üldkogumist ja arvutades iga valimi korral valimi dispersiooni väärtuse, saame arvude perekonna, mille keskmiseks tasemeks on 0,04. *

Paneme tähele veel ühte valimi dispersiooni omapära - teda mõõdetakse tunnuse mõõtmisel kasutatud mõõtühiku ruuduga. Näiteks, kui tunnuse väärtust mõõdetakse tundides, siis vastava valimi dispersiooni väärtust ruuttundides. Niisugusest halvast mõõtühikust pääsemiseks kasutatakse valimi dispersiooni kõrval enamasti ka ruutjuurt sellest, s.t. statistikut

$$S = \sqrt{S^2}.$$

Ruutjuurt valimi dispersioonist nimetatakse valimi standardhälbeks.

Näide 2.8. Vaatame näites 2.4 esitatud valimit. Arvutame valimi dispersiooni väärtuse

$$s^2 = 101,78/9 \simeq 11,3 \text{ tundi}^2.$$

Leiame valimi standardhälbe väärtuse

$$s = \sqrt{11,3} \simeq 3,36 \text{ tundi}.$$ *

Peame meeles, et statistik tohib sõltuda ainult teoreetilise valimi elementidest ja teadaolevatest konstantidest. Seega näiteks juhuslik suurus X/θ , kus θ on üldkogumi tundmatu parameeter, pole statistik!

Defineerime veel ühe väga lihtsasti leitavate ja järgnevates paragrahvides sageli kasutatavate statistikute perekonna. Olgu meie käsutuses konkreetne valim $\bar{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Järjestame valimi.

$$x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant x_{(n)} .$$

Niisugust järjestatud valimit nimetatakse <u>variatsioonreaks.</u> Tehes erinevaid katseid saame erinevad valimid, ka variatsioonrea elemendid omandavad erinevad väärtused. Modelleerimaks variatsioonrea juhuslikkust võtame kasutusele uue juhusliku vektori, mille komponendid (tähistame need sümboliga $X_{(i)}$) on järjestatud

$$X_{(1)} \leqslant X_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant X_{(n)}.$$

Variatsioonrea mudeli komponente nimetatakse <u>järkstatistikuteks;</u> i-s komponent $X_{(i)}$ on i-s järkstatistik.

Erinevalt teoreetilise valimi komponentidest pole järkstatistikud enam sõltumatud.

Järkstatistiku marginaaljaotus on üheselt määratud üldkogumi jaotusega.

<u>Teoreem 2.9.</u> Olgu üldkogumis uuritava tunnuse tõenäosusjaotus esitatud jaotusfunktsiooniga $F(x, \theta)$. Siis i-nda järkstatistiku jaotusfunktsioon on määratud eeskirjaga

$$F_{(i)}(x,\theta) = \sum_{k=i}^{n} C_n^k \left[F(x, \theta)\right]^k \left[1 - F(x, \theta)\right]^{n-k}. \qquad (2.1)$$

$i=1,2, \ldots, n.$

<u>Tõestus.</u> Väite tõestamiseks peame leidma eeskirja i-nda järkstatistiku jaotusfunktsiooni $F_{(i)}(x,\theta)$ arvutamiseks. Vastavalt jaotusfunktsiooni definitsioonile:

$$F_{(i)}(x,\theta) = P(X_{(i)} < x).$$

Sündmus $(X_{(i)} < x)$ võib aga toimuda n-i+1 erineval viisil:

1) valimi i elementi on väiksemad kui x, n-i elementi aga suuremad kui x;
2) valimi i+1 elementi on väiksemad kui x, n-(i+1) elementi aga suuremad kui x;

....

n-i+1) valimi n elementi on väiksemad kui x.

Tähistame selles loetelus esinevad sündmused sümboliga A_k, kus k on x väiksemate elementide arv (k=i, i+1, ..., n). Meid huvitav sündmus $(X_{(i)} < x)$ on loetletud sündmuste summa

$$(X_{(i)} < x) = \bigcup_{k=i}^{n} A_k .$$

Kuna liidetavad on üksteist välistavad sündmused, siis

$$P(X_{(i)} < x) = \sum_{k=i}^{n} P(A_k) .$$

Sündmuse A_k tõenäosuse välja kirjutamiseks kasutame järgmist arutlust: $P(A_k)$ on sündmuse tõenäosus, et n sõltumatul katsel saame k juhusliku suuruse väärtust, mis on väiksemad kui x ja n-k väärtust, mis ei ole väiksemad kui x. Kui nimetada x-st väiksema väärtuse saamist "eduks", siis vastava sündmus seisneb k "eduka" katse esinemises n sõltumatus katsest koosnevas seerias. "Edu" tõenäosus on teoreetilise valimi kohta tehtud eelduste (1.1) tõttu $P(X_i < x) = F(x,\theta)$. Kasutades binoomjaotuse valemit saame

$$P(A_k) = C_n^k [F(x, \theta)]^k [1-F(x, \theta)]^{n-k} .$$

Seega

$$F_{(i)}(x,\theta) = \sum_{k=i}^{n} C_n^k [F(x, \theta)]^k [1-F(x, \theta)]^{n-k} .$$

Teoreem on tõestatud.

Kui üldkogumi mudeliks on valitud pidev tõenäosusjaotus, saab leida ka kõikide järkstatistikute tihedusfunktsioonid. Tõepoolest, kuna tihedusfunktsioon leitakse jaotusfunktsiooni diferentseerides, siis

$$f_{(i)}(x,\theta) = (d/dx)F_{(i)}(x,\theta) = \\ = iC_n^i [F(x,\theta)]^{i-1} [1-F(x,\theta)]^{n-i} f(x,\theta) , \quad (2.2)$$

kus $f(x, \theta)$ on üldkogumi kirjeldamiseks kasutatava pideva tõenäosusjaotuse tihedusfunktsioon (vt. [1] lk. 260).

Näide 2.10. Oletame, et üldkogumi mudeliks on valitud lõigul 0 kuni θ määratud ühtlane jaotus, lühidalt $X \sim U(0,\theta)$. Kasutades teoreemis saadud tulemust leiame maksimaalse järkstatistiku jaotusfunktsiooni ja tihedusfunktsiooni.

Ühtlase jaotuse jaotusfunktsioon on teatavasti määratud eeskirjaga

$$F(x, \theta) = \begin{cases} 0 , & x < 0 \\ x/\theta , & 0 \leq x \leq \theta \\ 1 , & \theta < x . \end{cases}$$

Kasutades valemit (2.1) saame välja kirjutada n-da järkstatistiku $X_{(n)}$ jaotusfunktsiooni

$$F_{(n)}(x,\theta) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ (x/\theta)^n, & 0 \leq x \leq \theta \\ 1 & , \theta < x \end{cases}$$

Valemi (2.2) kasutamisel arvestame, et ühtlase jaotuse tihedusfunktsioon on määratud eeskirjaga

$$f(x, \theta) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \text{ või } \theta < x \\ 1/\theta , & 0 \leq x \leq \theta \end{cases}$$

Seetõttu saame n-nda järkstatistiku $X_{(n)}$ tihedusfunktsiooni kujul

$$f_{(n)}(x,\theta) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \text{ või } \theta < x \\ nx^{n-1}/\theta^n & , 0 \leq x \leq \theta \end{cases}$$ *

Kui meie käsutuses on konkreetne valim, saame välja kirjutada sellele valimile vastava variatsioonrea ja järkstatistikute väärtused arvuliselt leida.

Näide 2.8. Vaatame näites 2.3 toodud valimit, milles on registreeritud aparaatide tõrgeteta töötamise ajad. Moodustame sellele valimile vastava variatsioonrea

0,14 0,71 2,03 3,86 5,96 6,07 6,33 8,15 9,19 9,32

Näeme, et selle konkreetse valimi korral maksimaalne järkstatistik $x_{(10)} = 9,32$, minimaalne järkstatistik $x_{(1)}=0,5$ jne. *

ÜLESANDED

1. Olgu üldkogumi mudeliks geomeetriline jaotus $G(\theta)$. Avaldada statistiku $\bar{X}$ keskväärtus ja dispersioon parameetri θ kaudu.
2. Olgu üldkogumi mudeliks Poissoni jaotus $P(\lambda)$. Avaldada statistiku $\bar{X}$ keskväärtus ja dispersioon parameetri λ kaudu. Avaldada statistiku S^2 keskväärtus parameetri λ kaudu.
3. Olgu üldkogumi mudeliks normaaljaotus $N(\mu, \sigma)$. Kas on võimalik leida niisugust statistikut, mille keskväärtuseks oleks μ? Kas on võimalik leida sellist statistikut, mille keskväärtus oleks σ^2?
4. Olgu üldkogumi mudeliks ühtlane jaotus $U(0, \theta)$. Avaldada statistiku $\bar{X}$ keskväärtus ja dispersioon parameetri θ kaudu. Avaldada statistiku S^2 keskväärtus parameetri θ kaudu.
5. Olgu üldkogum eksponentjaotusega $E(\lambda)$. Kirjutada välja n-elemendilise valimi maksimaalse järkstatistiku

$X_{(n)}$ tihedusfunktsioon.

6. Olgu üldkogum Bernoulli jaotusega $B(1, \theta)$. Kirjutada välja n-elemendilise valimi maksimaalse järkstatistiku $X_{(n)}$ jaotusfunktsioon.
7. Tõestada valemi (2.2) kehtivus.
8. Tõestada võrdus $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2 - n(\bar{x}-a)^2$, kus a on vabalt valitud konstant.
9. Tõestada, et valimi dispersiooni väärtus ei muutu, kui valimi igast elemendist lahutada teatav konstant.
10. Kui 36-elemendilise valimi korral on statistiku $\bar{X}$ standardhälve 2; kui palju tuleb teha mõõtmisi, et statistiku $\bar{X}$ standardhälve oleks 1,2?
11. Kalade kasvutingimuste hindamiseks teatavas kalakasvatuse tiigis püüti välja 10 kala ja kaaluti nad ära. Saadi järgmised tulemused:
 1,81 1,23 2,18 1,71 0,80 1,36 1,26 1,43 1,73 1,83.
 Leida selle valimi keskväärtus, dispersioon ja variatsioonrida. Dispersiooni arvutamise lihtsustamiseks kasutada ülesandes 8 tõestatud võrdust.
 Milline tõenäosusjaotus sobiks antud juhul uuritava tunnuse kirjeldamiseks?
12. Seoses ühe teenindussüsteemi töö uurimisega registreeriti 12 juhuslikult valitud tunni jooksul teenindussüsteemi saabunud tellimuste arv. Saadud tulemused olid järgmised:
 1 3 1 3 0 1 2 1 2 3 1 2 .
 Leida selle valimi variatsioonrida, keskväärtus ja dispersioon. Dispersiooni arvutamise lihtsustamiseks kasutada ülesandes 8 tõestatud võrdust.
 Milline tõenäosusjaotus sobiks antud juhul uuritava tunnuse kirjeldamiseks?

Kordamisküsimusi tõenäosusteooriast

1) Defineerige juhusliku suuruse keskväärtus.
2) Millised on juhusliku suuruse keskväärtuse omadused?
3) Defineerige juhusliku suuruse dispersioon.
4) Millised on juhusliku suuruse dispersiooni omadused?
5) Kuidas on määratud juhusliku suuruse jaotusfunktsioon?
6) Avaldada jaotusfunktsioon tihedusfunktsiooni kaudu.

7. Kirjutage välja normaaljaotuse N(0,1) ja eksponentjaotuse E(1) jaotusfunktsioon.
8. Defineerige binoomjaotus.
9. Olgu $X \sim B(4, 1/2)$. Arvutage sündmuste $(X=k),(k=0,1,2,3,4)$ tõenäosused.

KUS ME OLEME? Tutvusime matemaatilise statistika põhilise töövahendiga - s t a t i s t i k u g a. Statistik on juhuslik suurus, mis määratakse teoreetilise valimi elementide ja teadaolevatest konstantide (mõõtuva) funktsioonina. Statistiku tõenäosusjaotuse määrab üheselt teoreetilise valimi tõenäosusjaotus (selle aga määras üheselt üldkogumi tõenäosusjaotus). Statistiku tõenäosusjaotus kirjeldab seaduspärasusi, mis ilmnevad selle statistiku paljukordsel kasutamisel.

Teostanud katsed, saame oma käsutusse konkreetse valimi. Selle valimi põhjal võime arvutada statistiku konkreetse väärtuse - juhusliku suuruse katses realiseerunud väärtuse.

KUHU LÄHEME? Sõnastame parameetrite hindamise ülesande. Tutvume võtetega, mida kasutatakse parameetrile hinnangu määramisel.

§3. Üldkogumi parameetrite hindamine.

Statistilistes otsustustes - järeldustes üldkogumi kohta - omavad üldkogumi parameetrid võtmepositsiooni. Paljudes praktilistes ülesannetes on tõenäosusjaotuste pere, mis sobib üldkogumi kirjeldamiseks, kindlaks määratav, kuid pole teada, milliseid parameetri väärtusi kasutada. Kuidas nüüd talitada?

Ainsaks vahendiks informatsiooni saamiseks üldkogumi kohta on valim. Järelikult tuleb ka parameetri arvuline väärtus määrata valimi põhjal. Kuidas seda teha?

Matemaatiline statistika pakub siin välja äärmiselt lihtsa skeemi: valime ühe statistiku, teeme valimi meid huvitavast üldkogumist, arvutame valitud statistiku väärtuse selle valimi korral ja deklareerime nii saadud arvu t u n d m a t u p a r a m e e t r i v ä ä r t u s e k s. Kuidas seda teha ja kas pole niisugune võte pisut sulitembu moodi?

Küsimusele, kuidas statistikut valida, ei saa anda ühest vastust. Selleks on lubatud mitmed erinevad võtted. Kahe kõige sagedamini kasutatava heuristilise võttega tutvume käesolevas paragrahvis. Mitmes järgnevas paragrahvis aga analüüsime statistikute kasulikke omadusi.

Kahtlaseks muudab selle skeemi aga asjaolu, et statistiku väärtus konkreetse valimi korral on ju juhusliku suuruse katses realiseerunud väärtus. Tehes uue katse, saaksime teise väärtuse, tehes veel ühe katse, saaksime hoopis kolmanda väärtuse jne. Milleks siis üldse katseid teha ja arvutada? Võib-olla võtta see arv lihtsalt laest?

Kui mõtleme pisut järele näites 2.3 toodud arutluste üle, siis on kerge niisugune mõte kõrvale jätta. Statistiku käitumist juhivad üldkogumis valitsevad seaduspärasused. Piltlikult võime öelda, et valimi keskväärtus on üldkogumi keskväärtuse "lõa otsas" - ta ei saa üldkogumi keskväärtusest väga tugevasti erineda. Lisaks on selle "lõa" pikkust vähemalt põhimõtteliselt võimalik reguleerida - mida arvukama valimi moodustame, seda lühemaks muutub "lõõg". Laest võetud arvul niisugune seos üldkogumiga puudub.

Nii et katsetada ja arvutada kahtlemata tuleb. Sellele vaatamata erineb valimi põhjal saadud väärtus peaaegu kindlasti parameetri tõelisest väärtusest. See kajastub ka terminoloogias ja tähistustes. Valimi põhjal määratud väärtust nimetatakse <u>üldkogumi parameetri hinnanguks.</u> Kui üldkogumi parameetri tähisena kasutame sümbolit θ, siis valimi põhjal määratud hinnangut tähistame sümboliga $\hat{\theta}$ või $\tilde{\theta}$ (samuti lisame katuse ka kõikide eritähistuste korral).

Loomulikult on selge, et kui üldkogumi tõenäosusjaotus sõltub mitmest tundmatust parameetrist, saame nende hindamiseks kasutada sama skeemi - valime iga parameetri jaoks statistiku ja parameetri hinnanguks võtame s e l l e statistiku väärtuse meie käsutuses oleva valimi korral.

Järgnevas tutvume kahe võttega tundmatu parameetri (või tundmatute parameetrite) hinnangu leidmiseks.

A. <u>Suurima tõepära meetod</u>

Suurima tõepära meetod (STP meetod) on kõige sagedamini rakendatav meetod tundmatute parameetrite hindamiseks. See meetod on kasutusele võetud inglise statistiku R.Fisheri poolt, esmakordselt on meetodit kirjeldatud 1922.a. ilmunud töös. Meetodi aluseks on suurima tóepära printsiip. Sónastame selle.

<u>Suurima tóepära printsiip</u>. Tundmatu parameetri (tundmatute parameetrite) hinnanguks tuleb valida selline väärtus (sellised väärtused), mille korral meie käsutuses oleva konkreetse valimi saamise tóenäosus on maksimaalne.

STP printsiibi realiseerimiseks vajame funktsiooni, mis kirjeldaks konkreetse valimi $\vec{x}$ saamise tóenäosust erinevate parameetri väärtuste korral. Vótame sellise funktsiooni kasutusele.

Me teame, kuidas leida valimi tihedusfunktsiooni $f(\vec{x},\theta)$ vói tóenäosusfunktsiooni $p(\vec{x},\theta)$. Nende funktsioonide kasutamisel eeldatakse, et parameeter θ on fikseeritud, argumendi $\vec{x}$ väärtus aga muutuv. Vahetame argumentide rollid: argumenti $\vec{x}$ vaatame fikseerituna, parameetrit θ aga muutuvana. Niisuguste argumentidega funktsioon osutub edaspidises väga kasulikuks töövahendiks. Teda nimetatakse <u>valimi tóepärafunktsiooniks.</u> Valimi tóepärafunktsiooni tähistame sümboliga $L(\vec{x},\theta)$,

$$L(\vec{x},\theta) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta), & \text{kui tunnus on pidev,} \\ \prod_{i=1}^{n} p(x_i,\theta), & \text{kui tunnus on diskreetne.} \end{cases}$$

<u>Näide 3.1.</u>(a) Olgu uuritav tunnus kirjeldatav eksponentjaotusega, $X \sim E(\lambda)$. Üldkogumi tihedusfunktsioon on siis määratud eeskirjaga

$$f(x,\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{kui } x \geq 0, \\ 0, & \text{kui } x < 0. \end{cases}$$

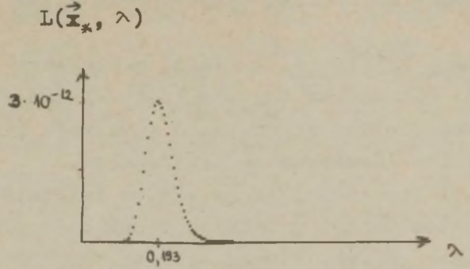
Valimi tóepärafunktsioon aga määratakse eeskirjaga

$$L(\vec{x},\lambda) = \begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda n\bar{x}}, & \text{kui } \min x_i \geq 0, \\ 0, & \text{kui } \min x_i < 0. \end{cases}$$

Kui meie käsutuses on näites 2.3 toodud valim eksponentjaotusega üldkogumist, omandab valimi tóepärafunktsioon (piirkonnas, kus ta erineb nullist) kuju

$$L(\vec{x},\lambda) = \lambda^{10} e^{-51,8\lambda}.$$

Selle funktsiooni käitumist illustreerib järgnev graafik($\lambda>0$)



(b) Olgu uuritav tunnus kirjeldatud Bernoulli jaotusega, $X \sim B(1, \theta)$. Üldkogumi tóenäosusfunktsioon on siis määratud eeskirjaga

$$p(x, \theta) = \begin{cases} \theta^x(1-\theta)^{1-x} & \text{, kui } x=0 \text{ vói } x=1, \\ 0 & \text{, mujal} \end{cases}$$

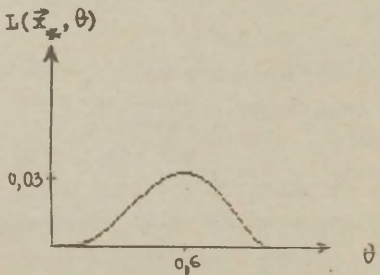
Valimi tóepärafunktsioon erineb nullist ainult selliste valimite korral, mille elementideks on ühed vói nullid. Kui valimi tóepärafunktsioon erineb nullist, on ta määratud eeskirjaga

$$L(\vec{x}, \theta) = \theta^{\sum_{i=1}^{k} x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{k} x_i}$$

Kui meie käsutuses on näiteks valim 1, 1, 0, 1, 0, omandab valimi tóepärafunktsioon (piirkonnas, kus ta erineb nullist) kuju

$$L(\vec{x}_*, \theta) = \theta^3(1-\theta)^2.$$

Selle funktsiooni käitumist illustreerib järgnev graafik ($0 < \theta < 1$)



*

Kui meil on tegemist diskreetse tunnusega, näitab tóepärafunktsioon otseselt argumendina kasutatud konkreetse valimi saamise tõenäosust valitud parameetri väärtuse korral. Pideva tunnuse korral on iga üksikväärtuse saamise tõenäosus null. Kehtib aga ligikaudne võrdus

$$P(x_0 - \Delta x \leqslant X \leqslant x_0 + \Delta x) \approx 2f(x_0)\,\Delta x\,,$$

antud väärtusele lähedase väärtuse saamise tõenäosus on võrdeline tihedusfunktsiooni väärtusega punktis x_0. Seetõttu võime öelda, et ka pideva tunnuse korral kirjeldab tõepärafunktsioon antud valimile kuitahes lähedase valimi saamise tõenäosust valitud parameetri väärtuse korral.

Parameetri väärtus, mille korral tõepärafunktsioon saavutab maksimumi, on kõige paremini kooskõlas konkreetse katsega - selle parameetri väärtuse korral on just niisuguse valimi saamise tõenäosus suurim. Tuginedes STP printsiibile antakse STP hinnangule järgmine definitsioon.

Definitsioon 3.2. Parameetri θ (parameetrite vektori $\vec{\theta}$) suurima tõepära hinnanguks nimetatakse arvu $\hat{\theta}$ (arve $\hat{\vec{\theta}}$), mille korral valimi tõepärafunktsiooni väärtus on maksimaalne,

$$L(\vec{x}, \hat{\theta}) \geqslant L(\vec{x}, \theta), \quad \forall \theta \in \Theta$$

Sümboliga Θ on siin tähistatud parameetri võimalike väärtuste piirkond.

Kui tõepärafunktsioon on diferentseeruv parameetri järgi, saame maksimumi leidmiseks kasutada juba keskkoolist tuttavat tehnikat. Tõepärafunktsiooni tuletis (või tuletised kõikide parameetrite järgi) tuleb võrdsustada nulliga, leida saadud võrrandi (või võrrandisüsteemi) lahend ning kontrollida, kas see lahend määrab maksimumi. Tehnilise töö lihtsustamiseks on aga sageli kasulikum üle minna logaritmilisele tõepärafunktsioonile. Logaritmiline tõepärafunktsioon määratakse eeskirjaga

$$l(\vec{x}, \theta) = \ln L(\vec{x}, \theta).$$

Need kaks funktsiooni - valimi tõepärafunktsioon ja valimi logaritmiline tõepärafunktsioon - saavutavad maksimumi ühe ja sama argumendi korral.

Näide 3.3. (a) Leiame eksponentjaotuse parameetri λ STP hinnangu. Kirjutame esmalt välja logaritmilise tõepärafunktsiooni. Arvestades näites 3.1. (a) saadud tulemust saame

$$l(\vec{x}, \lambda) = n\ln\lambda - \lambda n\bar{x} .$$

Kirjutame välja logaritmilise tõepärafunktsiooni tuletise

$$(\partial/\partial\lambda)l(\vec{x}, \lambda) = n/\lambda - n\bar{x}$$

ja seejärel tõepäravõrrandi, mille saame, kui võrdsustame logaritmilise tõepärafunktsiooni tuletise nulliga

$$n/\lambda - n\bar{x} = 0.$$

Avaldame saadud võrrandist parameetri

$$\lambda = 1/\bar{x} .$$

Logaritmilise tõepärafunktsiooni teine tuletis on sellise valiku korral negatiivne, oleme leidnud maksimumi. Saime eeskirja parameetri λ STP hinnangu $\hat{\lambda}$ leidmiseks. Parameetri arvulise väärtuse saame, kui sellesse eeskirja asendame meie käsutuses oleva valimi elemendid. Näiteks, kasutades näites 2.3 toodud konkreetset valimit, saame

$$\hat{\lambda} = 1/5{,}18 \approx 0{,}19 .$$

(b) Leiame Bernoulli jaotuse parameetri θ STP hinnangu. Kirjutame esmalt välja logaritmilise tõepärafunktsiooni. Arvestades näites 3.1. (b) saadud tulemust saame

$$l(\vec{x}, \theta) = \ln\theta \sum_{i=1}^{n} x_i + \ln(1-\theta)(n - \sum_{i=1}^{n} x_i)$$

Arvutame logaritmilise tõepärafunktsiooni tuletise

$$(\partial/\partial\theta)l(\vec{x}, \theta) = \sum_{i=1}^{n} x_i/\theta - (n - \sum_{i=1}^{n} x_i)/(1-\theta)$$

ja kirjutame välja tõepäravõrrandi

$$\sum_{i=1}^{n} x_i/\theta - (n - \sum_{i=1}^{n} x_i)/(1-\theta) = 0 .$$

Avaldame saadud võrrandist parameetri

$$\theta = \bar{x} .$$

Logaritmilise tõepärafunktsiooni teine tuletis on sellise θ valiku korral negatiivne, oleme leidnud maksimumi.
Saime eeskirja, kuidas kasutada valimi elemente parameetri θ STP hinnangu $\hat{\theta}$ leidmiseks. Parameetri arvulise väärtuse saame, kui sellesse eeskirja asendame meie käsutuses oleva valimi elemendid. Näiteks, kasutades näites 3.1 (b) toodud valimit, saame

$$\hat{\theta} = 3/5 = 0{,}6 .$$

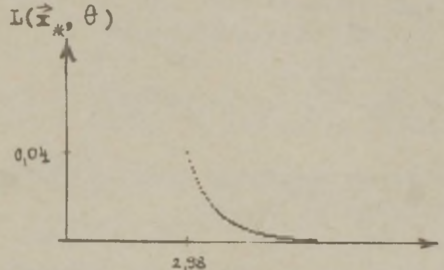
(c) Leiame ühtlase jaotuse $U(0, \theta)$ parameetri STP hinnangu.
Jaotuse tihedusfunktsioon omab kuju

$$f(x,\theta) = \begin{cases} 1/\theta, & \text{kui } 0 \le x \le \theta \\ 0, & \text{mujal} \end{cases}$$

Kirjutame välja valimi tõepärafunktsiooni

$$L(\vec{x}, \theta) = \begin{cases} 1/\theta^{n}, & \text{kui } \min x_i \geq 0 \text{ ja } \max x_i \leq \theta \\ 0, & \text{mujal} \end{cases}$$

Paneme tähele, et erinevalt eelmistest näidetest ei ole see funktsioon parameetri θ suhtes pidev. Kui parameeter θ saab väiksemaks valimi maksimaalsest elemendist, muutub see funktsioon hüppeliselt nulliks. Illustratsiooniks visandame valimi tõepärafunktsiooni graafiku. (Olgu meie käsutuses 5-elemendiline valim, mille maksimaalne element on 2, 98.)



Näeme, et maksimum saavutatakse, kui $\theta = \max x_i = x_{(n)}$. Arvestades meie konkreetse valimi maksimaalse elemendi väärtust, saame STP hinnangu arvuliseks väärtuseks

$$\hat{\theta} = 2{,}98\,.$$ *

B. Momentide meetod

Momentide meetod on teine sageli rakendatav meetod tundmatute parameetrite hindamiseks. Momentide meetod on kasutusele võetud inglise statistiku K.Pearsoni poolt, seda meetodit on esmakordselt kirjeldatud 1884 .a. ilmunud töös. Meetodi aluseks on teatava arvu teoreetiliste momentide võrdsustamine vastavate valimi momentidega. Kuna jaotuse teoreetilised momendid avalduvad jaotuse parameetrite kaudu, saame nii võrrandisüsteemi jaotuse parameetrite määramiseks. Võetakse kasutusele sama palju momente, kui palju on hinnatavaid parameetreid. Saadud võrrandisüsteem lahendatakse tundmatute parameetrite suhtes, tulemusena saame parameetrite hinnangud.

Tõenäosusjaotuse k-ndaks teoreetiliseks momendiks nimetatakse arvu, mis on määratud eeskirjaga

$$\mu_k = EX^k,$$

valimi k-ndaks momendiks nimetatakse arvu, mis on määratud võrdusega

$$m_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k/n .$$

Kui uuritava tunnuse jaotus sõltub s tundmatust parameetrist $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$, siis avalduvad tõenäosusjaotuse teoreetilised momendid nende parameetrite kaudu

$$\mu_k = \varphi_k(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) .$$

Nüüd on kasutusele võetud kõik tähistused, mis on vajalikud momentide meetodil määratud hinnangu defineerimisel.

<u>Definitsioon 3.4</u>. Parameetrite $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ hinnanguks momentide meetodil nimetatakse arve $\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \ldots, \tilde{\theta}_s$, mille korral

$$m_k = \varphi_k(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \ldots, \tilde{\theta}_s),$$

$k=1, 2, \ldots, s$.

Edaspidises kasutame momentide meetodil määratud hinnangu kohta lühitähistust MM hinnang.

Vaatame näiteid MM hinnangute leidmise kohta.

<u>Näide 3.5</u>.(a) Olgu $X \sim E(\lambda)$. Leiame parameetri λ MM hinnangu. Kirjutame välja seose eksponentsiaaljaotuse keskväärtuse (esimese teoreetilise momendi) ja jaotuse parameetri λ vahel

$$\mu_1 = 1/\lambda .$$

Võrdsustades tunnuse keskväärtuse valimi keskväärtusega, saame parameetri λ hindamiseks eeskirja

$$\tilde{\lambda} = 1/\bar{x} .$$

Näeme, et selle jaotuse korral STP hinnang ja MM hinnang langevad ühte.

(b) Olgu uuritav tunnus ühtlase jaotusega, $X \sim U(0, \theta)$. Leiame parameetri θ MM hinnangu. Kirjutame välja seose tunnuse keskväärtuse ja tundmatu parameetri vahel. Selleks arvutame ühtlase jaotuse keskväärtuse

$$\mu_1 = EX = \int_0^{\theta} x/\theta \, dx = \theta/2 .$$

Asendades teoreetilise momendi vastava valimi momendiga saame võrrandi

$$m_1 = \theta/2,$$

kust saame parameetri MM hinnanguks

$$\tilde{\theta} = 2\bar{x}\ .$$

Näeme, et ühtlase jaotuse korral on STP ja MM hinnangud erinevad.

Olgu meie käsutuses näiteks järgmine 5-elemendiline valim

1,37 0,33 2,80 2,98 0,12

Siis $\bar{x}$=1,52 ja $\tilde{\theta}$ = 3,04. *

ÜLESANDED

1. Olgu tegemist järgnevate tihedusfunktsioonidega tõenäosusjaotustega

(a) $f(x, \theta) = \theta x^{\theta-1}$, kui $0 < x < 1$; $\theta > 0$;

(b) $f(x, \theta) = \theta a x^{a-1} \exp(-\theta x^a)$, kui $x > 0$; $\theta > 0$, $a > 0$ (a on teadaolev konstant);

(c) $f(x, \theta) = \theta a^{\theta}/x^{\theta+1}$, kui $x > a$; $\theta > 0$, $a > 0$ (a on teadaolev konstant).

Leida parameetri θ STP hinnang.

2. Olgu $X \sim G(\theta)$. Leida parameetri θ STP hinnang ja MM hinnang.
3. Olgu $X \sim N(\mu, 1)$. Leida parameetri μ STP hinnang.
4. Olgu $X \sim B(m, \theta)$. Leida parameetri θ STP hinnang.
5. Olgu uuritav tunnus Cauchy jaotusega, $X \sim C(\theta)$. Leida parameetri θ STP hinnang kahe elemendilise valimi korral.
6. Olgu uuritav tunnus X pideva jaotusega, mille tihedusfunktsioon on määratud eeskirjaga

$$f(x, \theta) = \exp(\theta - x), \text{ kui } x > \theta, \quad (\theta > 0).$$

Leida parameetri θ STP hinnang.

7. Olgu $X \sim P(\lambda)$. Leida STP hinnang parameetrile λ. Veenduda, et parameetri funktsiooni $1/\lambda$ STP hinnanguks on $1/\hat{\lambda}$, kus $\hat{\lambda}$ on parameetri λ STP hinnang.
8. Olgu $g(\theta)$ mingi ühene parameetri funktsioon. Tõestada, et selle funktsiooni STP hinnang avaldub kujul $g(\hat{\theta})$, kus $\hat{\theta}$ on parameetri θ STP hinnang.
9. Olgu $X \sim B(1, \theta)$. Leida parameetri θ MM hinnang.

10. Olgu $X \sim B(m, \theta)$. Leida parameetri θ MM hinnang.

11. Olgu uuritav tunnus ühtlase jaotusega lõigul $[-\theta, \theta]$, $X \sim U(-\theta, \theta)$. Leida parameetri θ STP ja MM hinnangud.

12. Olgu uuritav tunnus ühtlase jaotusega lõigul $[\theta_1, \theta_2]$, $X \sim U(\theta_1, \theta_2)$. Leida parameetrite θ_1 ja θ_2 MM hinnangud.

13. Sportlennuki uue mudeli katsetamise käigus määrati 15 korral mudeli maksimaalne kiirus. Saadi järgmised tulemused (km/h)

422,2 418,7 425,6 420,3 425,8 423,1 431,5 428,8
438,3 434,0 411,3 417,5 413,5 441,3 420,0

Leida hinnang maksimaalse kiiruse keskväärtusele, oletades, et maksimaalne kiirus allub normaaljaotusele.

14. Vaatame tehnoloogilist protsessi, kus ühte ja sama operatsiooni korratakse iga päev palju kordi, kusjuures selle operatsiooni käigus võib tekkida isesüttimine. Isesüttimiste arvu registreerimisel kalendripäevade kaupa saadi järgmised tulemused

0 0 1 0 0 2 0 3 0 0 0 1 3 0 1 4 0 0 2.

Valida uuritava tunnuse kirjeldamiseks sobiv diskreetne jaotus (või sobivad diskreetsed jaotused). Seda jaotust kasutades hinnata väärtuse null omandamise tõenäosust.

Kordamisküsimusi tõenäosusteooriast

1) Olgu juhuslik suurus X pideva jaotusega. Arvutada tõenäosus $P(X=2)$.

2) Olgu juhuslik suurus X pidev tihedusfunktsiooniga $f(x)$. Arvutada $P(a < X < b)$. Visandada tihedusfunktsiooni graafik ja viirutada sellele tõenäosusele vastav pindala.

3) Olgu juhuslik suurus X binoomjaotusega, $X \sim B(2, \theta)$. Milline on selle juhusliku suuruse kõige suurema tõenäosusega omandatav väärtus kui $\theta = 0,2$; 0,5; 0,8?

4) Arvutada eksponentjaotusega $E(\lambda)$ juhusliku suuruse keskväärtus ja dispersioon.

5) Esitada valemid k-nda momendi μ_k arvutamiseks nii pideva kui ka diskreetse juhusliku suuruse korral.

KUS ME OLEME? Püstitasime üldkogumi tundmatute parameetrite hindamise ülesande. Hinnangu määramiseks tuleb valida statistik, mille väärtus konkreetse valimi korral loetakse parameetri hinnanguks, sama moodi tuleb talitada ka mitme tundmatu parameetri hindamisel. Andsime kaks heuristilist võtet hinnangut määrava statistiku valimiseks. Peale kirjeldatud võtete on olemas veel teisi, mida me praegu ei käsitle; statistiku võib valida ka mingite intuitiivsete kaalutluste alusel, Miks teisi võtteid vaja on?

Meie poolt kirjeldatud võtted hinnangu määramiseks on rakendatavad üsna rangel eeldusel - me olime küllalt targad ja kavalad ära arvamaks üldkogumiks oleva "musta kasti" olemuse - teda kirjeldava tõenäosusjaotuse tüübi. Kui me seda ei ole, pole need võtted rakendatavad.

KUHU LÄHEME? Selles paragrahvis kirjeldatud võtteid konkreetsete jaotuste korral rakendades nägime, et ühe ja sama parameetri hindamiseks võib kasutada erinevaid statistikuid. Kohe tekib küsimus - võib-olla on üks neist statistikutest "parem" teine "halvem"? Selleks, et saada mingisugust alust niisuguseks võrdlemiseks, asume tundma õppima statistikute selliseid omadusi, mis hindamisel osutuvad kasulikeks.

§4. Hinnangu omadusi.

Korrakem kahte põhitõde. Valimi põhjal määratud tundmatu parameetri hinnang erineb peaaegu kindlasti tundmatu parameetri tõelisest väärtusest, ükskõik millist statistikut me parameetri hindamiseks ka ei kasutaks. Seaduspärasusi, mis ilmnevad teatava statistiku paljukordsel kasutamisel, kirjeldab seda hinnangut määrava statistiku tõenäosusjaotus.

Need kaks tõde määravad ka meie edasi liikumise tee. Pole mõtet kõrvutada kahe statistiku poolt määratud hinnanguid - olulises on nad samaväärsed. Statistikute tõenäosusjaotused võivad aga olla oluliselt erinevad, oluliselt võivad erineda seaduspärasused, mis ilmnevad statistikute paljukordsel kasutamisel. Ainult need seaduspärasused saavad olla aluseks statistikute võrdlemisel.

Järgnevalt tutvume mõningate hinnangut määravate statistikute kasulike omadustega. (Paneme tähele, et pealkirja sõnastus on "argooline" - tegelikult käsitleme hinnangut määravate statistikute omadusi.)

A. Hinnangu nihketus.

Esimese niisuguse omaduse võib intuitiivselt esitada nõudena, et hinnang peab olema "keskmiselt" õige - paljukordsel hindamisel peab hinnangu keskmine tase ühtima parameetri õige väärtusega. Kui see nõue ei ole täidetud, toimub süstemaatiline parameetri üle- või alahindamine. Hinnangu "keskmise õigsuse" saab sõnastada järgmise nõudena hinnangut määrava statistiku kohta.

Definitsioon 4.1. Statistik $T(\vec{X})$ määrab parameetrile nihketa hinnangu, kui selle statistiku keskväärtuseks on hinnatav parameeter, s.t.

$$ET(\vec{X}) = \theta .$$

Tuginedes lemmadele 2.2 ja 2.5 võime öelda, et valimi keskväärtus määrab üldkogumi keskväärtusele alati nihketa hinnangu, valimi dispersioon määrab üldkogumi dispersioonile alati nihketa hinnangu.

Vaatame järgnevas näites, kuidas kontrollida hinnangu nihketust.

Näide 4.2. Olgu üldkogumi kirjeldamiseks sobiv ühtlane jaotus, $X \sim U(0, \theta)$.

(a) Kontrollime, kas STP hinnang on nihketa. Selleks võtame vaatluse alla statistiku $X_{(n)}$ ja arvutame tema keskväärtuse. Statistiku $X_{(n)}$ tihedusfunktsioon on välja kirjutatud näites 2.8. Leiame

$$EX_{(n)} = \int_0^\theta nx^n/\theta^n dx = (n/\theta^n)x^{n+1}/(n+1) \Big|_0^\theta = n\theta/(n+1).$$

Näeme, et STP hinnang on nihkega. Sellest nihkest on aga lihtne vabaneda. Võtame kasutusele uue statistiku

$$T'(\vec{X}) = (n+1)/n\ X_{(n)} .$$

See statistik määrab parameetrile θ nihketa hinnangu. Tõepoolest

$$ET'(\vec{X}) = E\left[(n+1)/n\ X_{(n)}\right] = \left[(n+1)/n\right]\cdot\left[n/(n+1)\right]\theta = \theta.$$

(b) Kontrollime, kas MM hinnang on nihketa. Kuna ühtlase jaotusega juhusliku suuruse keskväärtuseks on $\theta/2$, siis statistiku $T(\vec{X}) = 2\bar{X}$ keskväärtus

$$ET(X) = E(2\bar{X}) = 2\theta/2 = \theta.$$

Näeme, et momentide meetodil määratud hinnang on nihketa. ✳

Kui statistiku nihe sõltub valimi mahust n, on seda nihet lihtne kõrvaldada. Konstrueerime ühtlase jaotuse parameetrile veel ühe nihketa hinnangu.

Näide 4.3. Vaatame jälle üldkogumit, mille kirjeldamiseks sobib ühtlane jaotus $U(0, \theta)$. Esitame julge idee - konstrueerida parameetrile θ hinnang minimaalse vaatlustulemuse, s.t. järkstatistiku $X_{(1)}$ abil.

Milles peitub selle idee julgus? Meenutame, et ühtlase jaotuse parameeter θ määrab selle lõigu ülemise otspunkti, millel niisuguse jaotusega tunnus võib väärtusi omandada. Seega tahame minimaalse vaatlustulemuse abil määrata hinnangut maksimaalsele võimalikule vaatlustulemuse väärtusele. Ega see eriti mõistlik ju ei ole.

Püüame oma ideed siiski realiseerida. Selleks arvutame esmalt järkstatistiku $X_{(1)}$ keskväärtuse. Keskväärtuse leidmiseks vajame selle statistiku tihedusfunktsiooni. Kirjutame selle välja, kasutades valemit (2.2):

$$f_{X_{(1)}}(x,\theta) = \begin{cases} n(1-x/\theta)^{n-1}/\theta, & \text{kui } 0 \leqslant x \leqslant \theta \\ 0, & \text{mujal} \end{cases}$$

ja arvutame statistiku $X_{(1)}$ keskväärtuse

$$EX_{(1)} = n/\theta \int_0^\theta x(1-x/\theta)^{n-1}dx = \int_0^\theta (1-x/\theta)^n dx = \theta/(n+1).$$

Nüüd aga on lihtne saada soovitavat nihketa hinnangut. Tõepoolest, moodustame uue statistiku

$$T''(\vec{X}) = (n+1)X_{(1)},$$

arvutame tema keskväärtuse

$$ET''(\vec{X}) = (n+1)EX_{(1)} = \theta$$

ja konstanteerime - statistik $T''(\vec{X})$ määrab parameetrile θ nihketa hinnangu. ✳

Arutleme pisut näites saadud tulemuste üle. Paistab, et nihketus on suhteliselt nõrk statistiku omadus, ühe ja sama parameetri jaoks saame leida terve rea nihketa hinnangut määravaid statistikuid. Kas aga iga nihketa hinnang on "hea" hinnang? Püüame seda analüüsida järgmise näite abil.

Näide 4.4. Ühtlane jaotus leiab väga sageli kasutamist juhuslike arvude genereerimisel arvutil; see on jaotus, mis on aluseks paljude tõenäosusjaotuste modelleerimisel. Programmiga, mis genereerib ühtlase jaotusega $U(0, \theta)$ arve (jaotuse parameetri tõeline väärtus oli programmi kasutajale tundmatu), genereeriti kolm valimit. Esimene valim oli viie elemendiline

(a) 1,37 0,33 2,80 2,98 0,12;

teine valim 10 elemendiline

(b) 2,71 1,28 2,24 1,26 1,22 0,94 1,29 0,50 2,33 2,30;

ja kolmas valim 20 elemendiline

(c) 0,31 1,92 1,35 0,06 0,23 0,53 2,88 1,99 1,64 0,84
1,34 0,94 1,08 0,21 1,36 1,81 2,51 0,29 1,76 1,11

Toome alljärgneva tabelis ära kõigi kolme meile teada oleva nihketa hinnangut määrava statistiku väärtused nende kolme valimi korral

Valim \ Statistik	$T(\vec{X})$	$T'(\vec{X})$	$T''(\vec{X})$
(a)	3,04	3,58	0,72
(b)	3,21	2,98	5,50
(c)	2,42	3,02	1,26

(Loomulikult kontrollib iga endast lugupidav lugeja need arvutused üle!)

Kolm valimit on kahtlemata liiga väike arv valimeid, et teha järeldusi statistikute käitumise seaduspärasuste kohta. Ühte-teist võime aga siiski juba näha. Esimesena torkab silma, et statistik $T''(\vec{X})$ määrab kahel juhul kolmest hinnangu, mis on vastuoluline - valimis esineb elemente, mis on määratud hinnangust suuremad. Kolmas selle statistiku poolt määratud hinnang on aga tunduvalt suurem kõige suuremast vaatlustulemusest. Need asjaolud peaksid tekitama tugeva kahtluse, selle statistiku kasutatavuse suhtes. Ka statistik $T(\vec{X})$ määrab ühel juhul vastuolulise hinnangu ja seda just kõige suurema valimi korral. Statistiku $T'(\vec{X})$ kohta pole aga midagi silmatorkavalt "halba" öelda. ✱

Näide peaks süvendama usku, et on olemas "head" ja "halvad" nihketa hinnangut määravad statistikud. Määrame kindlaks kriteeriumi, mille põhjal neid eristada.

B. Hinnangu efektiivsus.

Mille põhjal nihketa hinnanguid omavahel võrrelda? Lähtume jällegi väga loomulikust nõudest - parem on see hinnang, mis on täpsem, mille keskmine kõrvalekalle parameetri tõelisest väärtusest on väiksem. Keskmist kõrvalekallet iseloomustab dispersioon. Järelikult parem on niisugune nihketa hinnangut määrav statistik, mille dispersioon on väiksem.

Järgnevas definitsioonis anname terminoloogia, mida kasutatakse nihketa hinnangute võrdlemisel.

Definitsioon 4.5. Määraku statistikud $T(\vec{X})$ ja $T_*(\vec{X})$ nihketa hinnangud parameetrile θ. Me ütleme, et statistik $T_*(\vec{X})$ on efektiivsem statistikust $T(\vec{X})$, kui $DT_*(\vec{X}) \leq DT(\vec{X})$, $\forall \theta \in \Theta$.

Suhet $e(T, T_*) = DT_*(\vec{X})/DT(\vec{X})$ nimetatakse statistiku $T(\vec{X})$ suhteliseks efektiivsuseks statistiku $T_*(\vec{X})$ suhtes.

Näide 4.6. Leiame näidetes 4.2 ja 4.3 toodud statistikute suhtelise efektiivsuse. Selle arvutamiseks vajame nende statistikute dispersioone, avaldatuna jaotuse parameetri kaudu. Leiame esmalt minimaalse ja maksimaalse järkstatistiku dispersioonid. Dispersiooni arvutamisel kasutame valemit $DZ = EZ^2 - (EZ)^2$. Maksimaalse järkstatistiku korral saame

$$EX_{(n)}^2 = n/\theta^n \int_0^\theta x^{n+1}dx = n/(n+2)\,\theta^n\, x^{n+2}\Big|_0^\theta = n\theta^2/(n+2)$$

ja siit

$$DX_{(n)} = n\,\theta^2/(n+2) - n^2\theta^2/(n+1)^2 = n\theta^2/\left[(n+2)(n+1)^2\right].$$

Statistiku $T'(\vec{X})$ dispersiooni arvutamisel kasutame dispersiooni omadusi

$$DT'(\vec{X}) = (n+1)^2/n^2\, DX_{(n)} = \theta^2/\left[n(n+2)\right].$$

Minimaalse järkstatistiku korral saame

$$EX_{(1)}^2 = n/\theta \int_0^\theta x^2(1-x/\theta)^{n-1}dx ,$$

kust kaks korda ositi intergreerides jõuame tulemuseni

$$EX_{(1)}^2 = 2\,\theta^2/\left[(n+1)^2(n+2)\right]$$

ja siit

$$DX_{(1)} = n\,\theta^2/\left[(n+1)^2(n+2)\right].$$

Statistiku $T''(\vec{X})$ dispersiooni väärtuseks aga saame

$$DT''(\vec{X}) = (n+1)^2 DX_{(1)} = n\,\theta^2/(n+2).$$

Nüüd saamegi välja arvutada efektiivsuskordaja $e(T'', T')$

$$e(T'', T') = 1/n^2.$$

Näeme, et ebamõistlikult moodustatud statistik $T''(\vec{X})$ on tõepoolest äärmiselt ebaökonoomne - tema suhteline efektiivsus statistiku $T'(\vec{X})$ suhtes kahaneb valimi mahu kasvades. Sealjuures on kahanemiskiirus väga suur - efektiivsus on pöördvõrdeline valimi mahu ruuduga!

Paneme tähele, et ühest suurema valimi mahu korral on statistiku $T'(\vec{X})$ dispersioon väiksem statistiku $T''(\vec{X})$ dispersioonist, ükskõik milline oleks parameetri θ väärtus. Seetõttu pole põhjust statistiku $T''(\vec{X})$ kasutamiseks; niisuguse omadusega statistikut nimetatakse <u>mittelubatavaks</u>.

Leiame veel statistikute $T(\vec{X})$ ja $T'(\vec{X})$ suhtelise efektiivsuse. Arvestades lemmat 2.2 ja seda, et ühtlase jaotusega juhusliku suuruse dispersioon on $\theta^2/12$, saame

$$DT(\vec{X}) = 4\,\theta^2/12n = \theta^2/3n,$$

kust

$$e(T, T') = [\theta^2/n(n+2)] : [\theta^2/3n] = 3/(n+2).$$

Näeme, et statistik $T'(\vec{X})$ on ka statistikust $T(\vec{X})$ efektiivsem, kusjuures efektiivsuskordaja kahaneb valimi mahu kasvades. ✱

Efektiivsuskordaja võimaldab küll omavahel võrrelda kahte erinevat statistikut ning leida neist efektiivsem. Kuidas teha aga kindlaks, kas sellest efektiivsemast statistikust pole veelgi efektiivsemat statistikut? Kas on olemas niisugune statistik, mis on kõikidest nihketa hinnangut määravatest statistikutest efektiivsem? Vastuse neile küsimustele anname seitsmendas paragrahvis.

ÜLESANDED

1. Olgu $T'(\vec{X})$ ja $T''(\vec{X})$ nihketa hinnangut määravad statistikud. Moodustame uue statistiku $T(\vec{X}) = aT'(\vec{X}) + bT''(\vec{X})$. Millist tingimust peavad rahuldama kordajad a ja b, et statistik $T(\vec{X})$ määraks samuti nihketa hinnangu?
2. Kui statistik $T(\vec{X})$ määrab nihketa hinnangu parameetrile

θ, kas siis statistik $T^2(\vec{X})$ määrab nihketa hinnangu parameetrile θ^2?

3. Olgu üldkogumi tõenäosusjaotuseks ühtlane jaotus $U(0,\sqrt{\theta})$. Leida nihketa hinnang parameetrile θ. Näpunäide: leida ühtlase jaotusega juhusliku suuruse ruudu keskväärtus.
4. Olgu meil kahe elemendiline juhuslik valim eksponentsiaaljaotusega üldkogumist, $X \sim E(\lambda)$. Kontrollida, kas statistik $T(\vec{X}) = 4\sqrt{X_1 X_2}/\pi$ määrab parameetrile λ nihketa hinnangu.
5. Olgu üldkogum Bernoulli jaotusega $B(1, \theta)$. Avaldada valimi keskväärtuse keskväärtus ja dispersioon parameetri θ kaudu.
6. Uuriti teatava TV programmi vaadatavust ühes linnas. Viidi läbi kaks küsitlust: esimene kord 100 küsitletust 35 vaatas seda programmi järjekindlalt, teine kord 350 küsitletust 100 vaatas seda programmi järjekindlalt. Leida mõlema valimi korral nihketa hinnang linnaelanike osale, kes vaatab seda televisiooniprogrammi järjekindlalt.
7. Kasutades ülesandes 1 saadud tulemust leida vähemalt kaks statistikut, mis võimaldaksid kahe sõltumatu valimi korral määratud nihketa hinnangud ühendada uueks nihketa hinnanguks. Leida mõlema statistiku väärtused eelmises ülesandes toodud andmete korral.
8. Määrata, kumb eelmises ülesandes konstrueeritud statistikutest on efektiivsem. Millised tuleb valida kordajad, et uue statistiku dispersioon oleks minimaalne?

Kordamisküsimusi tõenäosusteooriast.

1) Kasutades keskväärtuse omadusi tõestada valem $DX=EX^2-(EX)^2$.
2) Kirjutada välja lõigul $(0, \theta)$ määratud ühtlase jaotuse tihedusfunktsioon ja jaotusfunktsioon. Kas need kinnitavad näites 4.3 esitatud parameetri θ sisulist tõlgendust?

KUS ME OLEME? Õppisime tundma suhteliselt sageli esinevat hinnangu omadust - hinnangu nihketust. Etteantud nihketa hinnangutest on parem see, mille hajuvus (vastava statistiku dispersioon) on kõige väiksem.

KUHU LÄHEME? Põhimõtteliselt on praegusel hetkel meie ees kaks teed - me võiksime asuda uurima seda, kuidas leida kõikvõimalike nihketa hinnangute seast kõige parem või võiksime jätkata tutvumist hindamisel kasulike statistikute omadustega. Meie valime teise tee. Esimesele teele hüppame tagasi mõned paragrahvid hiljem. Võib-olla õigustab niisugust valikut asjaolu, et nihketus ei ole tingimata vajalik "hea" statistiku omadus.

§5. Hinnangu mõjusus

Hinnangu mõjusus on statistiku asümptootiline omadus. Niisugusest omadusest rääkimiseks peame vaatama erineva mahuga valimite korral määratud statistikute jada. Olgu see $T_1(\vec{X})$, $T_2(\vec{X})$, ..., $T_n(\vec{X})$, ...; statistik $T_i(\vec{X})$ on arvutatud i-elemendilise valimi korral. Kuna statistiku arvutuseeskiri sõltub valimi mahust, siis sõltub ka tema tõenäosusjaotus valimi mahust. Asümptootilisteks nimetatakse statistikute tõenäosusjaotuste jadade piiromadusi, mis ilmnevad valimi mahu piiramatul kasvamisel.

Mõjusus on asümptootiline omadus, mis seisneb selles, et valimi mahu piiramatul kasvamisel hinnang asub hinnatavale parameetrile kuitahes lähedal kuitahes ühele lähedase tõenäosusega. Anname sellele omadusele järgmise täpse definitsiooni.

Definitsioon 5.1. Statistik $T_n(\vec{X})$ määrab parameetrile θ mõjusa hinnangu, kui iga ε ja δ korral ($\varepsilon, \delta > 0$) leidub valimi maht n ($n=n(\varepsilon, \delta)$), mille korral kehtib võrratus

$$P(|T_n(\vec{X}) - \theta| < \varepsilon) \geqslant 1 - \delta.$$

Vaatame näidet niisuguse omaduse olemasolu kohta.

Näide 5.2. Olgu meil tegemist ühtlase jaotusega tunnusega, $X \sim U(0, \theta)$. Parameetri θ hindamiseks võisime kasutada maksimaalset vaatlustulemust $X_{(n)}$. Veendume, et see statistik määrab parameetrile θ mõjusa hinnangu.

Statistiku $X_{(n)}$ tihedusfunktsioon oli määratud n-elemendilise valimi korral eeskirjaga

$$f_n(x, \theta) = \begin{cases} nx^{n-1}/\theta^n, & \text{kui } 0 \leqslant x \leqslant \theta \\ 0 & \text{, mujal} \end{cases}.$$

Ühtlase jaotuse korral on sündmused $|X_{(n)} - \theta| < \varepsilon$ ja $\theta - X_{(n)} < \varepsilon$ võrdsed. Seetõttu

$$P(|X_{(n)} - \theta| < \varepsilon) = \int_{\theta-\varepsilon}^{\theta} nx^{n-1}/\theta^n dx = 1/\theta^n x^n |_{\theta-\varepsilon}^{\theta} = 1-(\theta-\varepsilon)^n/\theta^n$$

Kuna $\theta > 0$, siis $(\theta - \varepsilon)/\theta < 1$; valides astendaja n küllalt suure, kehtib võrratus $(\theta-\varepsilon)^n/\theta^n \leq \delta$.

Näeme, et definitsioonis esitatud tingimus on täidetud.

Vaatame veel, kas ka minimaalne vaatlustulemus määrab ühtlase jaotuse parameetrile θ mõjusa hinnangu. Kasutades näites 3.2 leitud minimaalse statistiku tihedusfunktsiooni leiame sündmuse $|X_{(1)} - \theta| < \varepsilon$ tõenäosuse. Kuna ka siin kehtib sündmuste võrdsus $(|X_{(1)} - \theta| < \varepsilon) = (\theta - X_{(1)} < \varepsilon)$, siis $P(|X_{(1)} - \theta| < \varepsilon) = \int_{\theta-\varepsilon}^{\theta} n(1-x/\theta)^{n-1}/\theta \, dx = (1-(\theta-\varepsilon)/\theta)^n$.

Kuna $1-(\theta-\varepsilon)/\theta < 1$, saame valimi mahtu suurendades selle tõenäosuse muuta kuitahes väikeseks. Valimi minimaalne element ei määra parameetrile θ mõjusat hinnangut. *

Mõjususe kontrollimine otseselt definitsiooni põhjal on aga üldiselt ebamugav. Selleks peaks alati teadma statistiku tihedusfunktsiooni (või tõenäosusfunktsiooni), mille leidmine pole aga sageli kaugeltki mitte lihtne ülesanne. Anname järgnevas teoreemis mugavama tingimuse mõjususe kontrollimiseks.

Teoreem 5.3. Statistik $T_n(\vec{X})$ määrab parameetrile θ mõjusa hinnangu siis, kui

$$\lim_{n\to\infty} ET_n(\vec{X}) = \theta,$$

$$\lim_{n\to\infty} DT_n(\vec{X}) = 0.$$

Tõestus. Teoreemi tõestamisel lähtume Tšebõšovi võrratusest

$$P(|T_n(\vec{X}) - ET_n(\vec{X})| < \varepsilon) \geqslant 1 - DT_n(\vec{X})/\varepsilon^2.$$

Arvestades absoluutväärtuse omadusi võime kirjutada

$$|T_n(\vec{X}) - \theta| \leq |T_n(\vec{X}) - ET_n(\vec{X})| + |\theta - ET_n(\vec{X})|.$$

Sellest võrratusest aga järeldub, et kui sündmus $|T_n(\vec{X}) - ET_n(\vec{X})| < \varepsilon/2$ toimub, järeldub sellest sündmus $|T_n(\vec{X}) - \theta| < \varepsilon/2 + |\theta - ET_n(\vec{X})|$. Niisugusest järeldussuhtest sündmuste vahel aga tuleneb, et esimese sündmuse tõenäosus ei saa olla suurem teise sündmuse tõenäosusest

$$P(|T_n(\vec{X}) - ET_n(\vec{X})| < \varepsilon/2) \leq P(|T_n(\vec{X}) - \theta| < \varepsilon/2 + |\theta - ET_n(\vec{X})|).$$

Valides nüüd n küllalt suure ($n > n(\varepsilon)$) saame $|\theta - ET_n(\vec{X})| < \varepsilon/2$. Vasakpoolne tóenäosus on aga Tšebõšovi vórratuse póhjal tókestatud, seetóttu vóime kirjutada (eeldades, et $n > n(\varepsilon)$)

$$P(|T_n(\vec{X}) - \theta| < \varepsilon) \geqslant 1 - DT_n(\vec{X})/(\varepsilon^2/4) .$$

Kuna eelduse kohaselt n suurendamisega vóime statistiku dispersiooni $DT_n(\vec{X})$ muuta kuitahes väikeseks, saame lahutatava teha väiksemaks etteantud suurusest δ, kui vaid valime $n > n(\delta)$. Valides $n = \max(n(\delta), n(\varepsilon))$, näeme, et statistik $T_n(\vec{X})$ määrab parameetrile θ definitsiooni kohaselt mójusa hinnangu.

Teoreem on tóestatud.

Vaatame näiteid teoreemis toodud tingimuste kasutamise kohta.

<u>Näide 5.4.</u> Veendume, et iga tunnuse korral, millel on lóplik dispersioon, määrab valimi keskväärtuse tunnuse keskväärtusele mójusa hinnangu.

Tähistame tunnuse tegeliku keskväärtuse sümboliga μ, tegeliku dispersiooni aga sümboliga σ^2. Vastavalt lemma 2.2 tulemustele siis $E\bar{X} = \mu$ ja $D\bar{X} = \sigma^2/n$. Siit aga järeldub, et $\lim_{n\to\infty} E\bar{X} = \mu$ ja $\lim_{n} D\bar{X} = 0$. Teoreemis toodud tingimused on täidetud, valimi keskväärtuse poolt määratud hinnang on mójus.*

Mótiskleme veel statistiku nihketuse ja mójususe vahekorral üle. Need omadused ei ole seotud, nagu nägime näites 5.2. Mójus hinnang ei pea ühegi lópliku valimi mahu korral olema nihketa, kuid valimi mahu kasvades peab statistiku keskväärtus lähenema piiramatult parameetri tóelisele väärtusele. Teiselt poolt on aga vóimalik, et nihketa hinnang pole mójus. Niisugune on näiteks statistik $T''(\vec{X})$ näitest 4.5.

ÜLESANDED

1. Olgu uuritav tunnus X kirjeldatud Bernoulli jaotusega $B(1, \theta)$. Olgu (vastupidi tavalistele statistika vóimalustele) teada, et $\theta = 1/2$. Kas valimi keskväärtus $\bar{X}$ määrab parameetrile mójusa hinnangu?

   Arvutada sündmuse $(0{,}4 \leqslant \bar{X} \leqslant 0{,}6)$ tóenäosus, valides valimi mahuks 10, 50 ja 100. Kui suur peaks olema valimi maht, et $P(0{,}49 \leqslant \bar{X} \leqslant 0{,}51) \geqslant 0{,}9$?

2. Olgu $X \sim U(0, \theta)$. Kas valimi keskväärtuse $\bar{X}$ abil saab konstrueerida parameetrile θ mõjusa hinnangu?
3. Leida Poissoni jaotuse parameetrile λ mõjus hinnang.
4. Öeldakse, et statistik $T_n(\vec{X})$ määrab parameetrile θ ruut-mõjusa hinnangu, kui $\lim\limits_{n\to\infty} E(T_n(X) - \theta)^2 = 0$. Näidata, et ruut-mõjususest järeldub mõjusus tavalises mõttes. Näpunäide: tõestada võrdus $E(T_n(\vec{X}) - \theta)^2 = DT_n(\vec{X}) + (\theta - ET_n(X))^2$.

Kordamisküsimusi tõenäosusteooriast

1) Sõnastada Tšebõšovi võrratusega esitatud seaduspärasuse sisuline tähendus.
2) Kas Tšebõšovi võrratus kehtib kõikide juhuslike suuruste korral?
3) Defineerige järeldussuhe sündmuste vahel.
4) Tõestada tõenäosuse monotoonsuse omadus: kui $A \subset B$, siis $P(A) \leq P(B)$.
5) Defineerida juhusliku suuruse koondumine tõenäosuse järgi. Milline on mõjususe vahekord tõenäosuse järgi koondumisega?

KUS ME OLEME? Tutvusime teise hindamisel kasuliku statistiku omadusega – mõjususega. Iga "head" hinnangut määrav statistik peab kahtlemata olema mõjus. Kui see nõue on täidetud, väheneb valimi mahu kasvades statistiku hajuvus tõelise parameetri väärtuse suhtes. Kui see nõue pole täidetud, ei anna valimi mahu suurendamine mitte mingisugust garantiid täpsema hinnangu saamiseks.

KUHU LÄHEME? Tutvume veel kolmanda hindamisel kasuliku statistiku omadusega – hinnangu piisavusega.

§6. Hinnangu piisavus.

Piisavuse defineerimisel on aluseks väga loomulik nõue: "hea" statistik peab parameetri hindamiseks kasutama ära kogu valimis sisalduva informatsiooni. Niisuguse nõude saab esitada teatava tingimusena valimi tõenäosusjaotuse kohta.

Definitsioon 6.1. Statistikut $T(\vec{X})$ nimetatakse piisavaks parameetri θ jaoks, kui valimi tinglik jaotus tingimusel, et statistiku väärtus on fikseeritud, ei sõltu parameetrist θ.

Meenutame, kuidas määratakse juhusliku suuruse tinglik jaotus. Kui meil on tegemist diskreetsete juhuslike suuruste paariga, määravad tingliku jaotuse tinglikud tõenäosused

$$P(X=x|Y=y) = P(X=x,Y=y)/P(Y=y) .$$

Pidevate juhuslike suuruste paari korral aga määrab tingliku jaotuse tihedusfunktsiooni järgmine tihedusfunktsioonide suhe

$$f(x|y) = f(x,y)/f_Y(y) ,$$

kus lugejas on juhuslike suuruste ühine tihedusfunktsioon, nimetajas aga tingimuses esineva juhusliku suuruse marginaaltihedusfunktsioon.

Vaatame paari näidet piisavuse kontrollimise kohta definitsiooni põhjal.

Näide 6.2. (a) Olgu $X \sim B(1, \theta)$. Veendume, et vaatlustulemuste summa on piisav statistik parameetri θ hindamiseks. Tähistame $T(\vec{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Paneme esmalt tähele, et

$$P(\vec{X}=\vec{x},\ T(\vec{X})=t) = \begin{cases} 0, \text{ kui } \sum_{i=1}^{n} x_i \neq t \\ P(\vec{X}=\vec{x}), \text{ kui } \sum_{i=1}^{n} x_i = t \end{cases} ;$$

statistiku $T(\vec{X})$ jaotuseks on aga binoomjaotus $B(n, \theta)$ – on ju selle statistiku väärtuseks ühtede arv n-katselises sõltumatute katsetega seerias, kus ühe saamise tõenäosuseks on θ.

Järelikult, kui valimi tinglikku jaotust määrav tinglik tõenäosus erineb nullist, esitub ta kujul

$$P(\vec{X}=\vec{x}\,|\,T(\vec{X})=t) = P(\vec{X}=\vec{x},T(\vec{X})=t)/P(T(\vec{X})=t) =$$

$$= \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}/C_n^t\, \theta^t(1-\theta)^{n-t} = 1/C_n^t .$$

Saadud tõenäosusjaotus ei sõltu parameetrist θ, järelikult mõõtmistulemuste summa $T(\vec{X})$ on piisav statistik.

Saadud tulemus peaks ka intuitiivselt olema hästi vastu võetav – kasutades Bernoulli jaotuse korral valimi asemel valimi elementide summat, kaotame teadmise, millises järjekorras nullid ja ühed valimis esinesid. Niisugune teadmine ei tohiks olla kuidagi kasulik parameetri θ hindamisel.

(b) Olgu $X \sim E(\lambda)$. Veendume, et esimene vaatlustulemus ei ole piisav statistik parameetri λ hindamisel. Tõepoolest,

$$f(x|t) = f(\vec{x}, \lambda)/f_{X_1}(x_1, \lambda) = \lambda^n e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i}/(\lambda e^{-\lambda x_1}) =$$

$$= \lambda^{n-1} e^{-\lambda \sum_{i=2}^{n} x_i}$$

Saadud tinglik jaotus jääb sõltuma parameetrist λ. Esimene vaatlustulemus ei ole piisavaks statistikuks selle parameetri hindamisel. Tulemus on intuitiivselt oodatav. *

Piisavuse kindlaks tegemine otse definitsioonist lähtudes on ebamugav, praktilise vahendi selleks annab järgmine Neymani ja Fisheri poolt tõestatud tulemus.

<u>Teoreem 6.3.</u> (Faktoriseerimise kriteerium) Statistik $T(\vec{X})$ on parameetri θ hindamiseks piisav parajasti siis, kui valimi tõenäosusfunktsioon või tihedusfunktsioon on esitatav korrutisena

$$g(T(\vec{x}),\theta)h(\vec{x}) ,$$

kus esimene tegur sõltub valimist ainult läbi statistiku $T(\vec{X})$ väärtuse ja sõltub parameetrist θ, teine tegur võib sõltuda valimist ükskõik millisel viisil, kuid ei sõltu parameetrist θ.

<u>Tõestus</u>. See teoreem kehtib nii pidevate kui ka diskreetsete tõenäosusjaotuste korral. Tehnilise töö vähendamiseks tõestame meie aga teoreemi kehtivuse ainult diskreetsete tõenäosusjaotuste jaoks. Tõestus pideva tõenäosusjaotuse korral on esitatud monograafias [10] (lk. 28 - 29).

(a) Tarvilikkus. Olgu $T(\vec{X})$ piisav statistik. Paneme tähele, et

$$P(\vec{X}=\vec{x},T(\vec{X})=t) = \begin{cases} 0, \text{ kui } T(\vec{x})\neq t \\ P(\vec{X}=\vec{x}), \text{ kui } T(\vec{x})=t \end{cases} .$$

Seetõttu valimi tinglikku jaotust määravad tinglikud tõenäosused, mis tehtud eelduse kohaselt ei sõltu parameetrist θ, on esitatavad jagatisena

$$P(\vec{X}=\vec{x}|T(\vec{X})=t) = P(\vec{X}=\vec{x})/P(T(\vec{X})=t) ,$$

kust

$$P(\vec{X}=\vec{x}) = P(T(\vec{X})=t)P(\vec{X}=\vec{x}|T(\vec{X})=t) .$$

Esitasimegi valimi tõenäosusfunktsiooni korrutisena, kus esimene tegur võib küll sõltuda parameetrist θ, kuid valimist saab ta sõltuda ainult läbi statistiku $T(\vec{X})$ väärtuse, teine tegur aga ei sõltu parameetrist θ.

(b) Piisavus. Olgu faktoriseerimise nõue täidetud. Siis valimi tõenäosusfunktsioon on esitatav kujul

$$p(\vec{x}, \theta) = g(T(\vec{x}), \theta)h(\vec{x}) .$$

Kirjutame nüüd välja valimi tinglikku tõenäosusjaotust määravad tinglikud tõenäosused

$$P(\vec{X}=\vec{x}\,|\,T(\vec{X})=t) = P(\vec{X}=\vec{x})/P(T(\vec{X})=t) =$$

$$= g(t, \theta)h(\vec{x})/ \sum_{\vec{x},T(\vec{x})=t} g(t, \theta)h(\vec{x}) = h(\vec{x})/ \sum_{\vec{x},T(\vec{x})=t} h(\vec{x}) .$$

Näeme, et need tinglikud tõenäosused ei sõltu parameetrist θ. Faktoriseerimise kriteeriumi täidetusest järeldus statistiku piisavus.

Teoreem on tõestatud.

Vaatame mõningaid näiteid faktoriseerimise kriteeriumi rakendamise kohta.

<u>Näide 6.4.</u> (a) Olgu $X \sim P(\lambda)$. Leiame piisava statistiku parameetri λ jaoks. Kirjutame välja valimi tõenäosusfunktsiooni

$$p(\vec{x},\lambda) = e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}/\prod_{i=1}^{n} x_i! = (e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i})(1/\prod_{i=1}^{n} x_i!) .$$

Saadud esitusest näeme, et piisavaks statistikuks on siin mõõtmistulemuste summa $\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Paneme tähele, et piisav statistik ei ole üheselt määratud. Tõenäosusfunktsiooni määrava korrutise esimese teguri võime ju kirjutada ka kujul

$$g(T(\vec{x}), \lambda) = e^{-n\lambda}\lambda^{n\bar{x}} ,$$

sellest esitusest aga tuleneb, et piisavaks statistikuks on ka valimi keskväärtus $\bar{X}$.

Piisava statistiku iga üks-ühene funktsioon on piisav statistik.

(b) Olgu $X \sim U(0, \theta)$. Kirjutame välja valimi tihedusfunktsiooni

$$f(x, \theta) = \begin{cases} 1/\theta^{n}, & \text{kui } 0 \leq x_{(n)} \leq \theta \\ 0, & \text{mujal} \end{cases}$$

Võttes kasutusele lõigu indikaatorfunktsiooni

$$1_{a,b}(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < a \text{ või } x > b \\ 1, & \text{kui } a \leq x \leq b \end{cases}$$

võime valimi tihedusfunktsiooni esitada kujul

$$f(\bar{x}, \theta) = (1/\theta^n)1_{[0,\theta]}(x_{(n)}) .$$

Näeme, et piisavaks statistikuks parameetri θ hindamisel on maksimaalne mõõtmistulemus.

Minimaalne mõõtmistulemus ei ole piisavaks statistikuks parameetri θ hindamisel. Meenutame veel näite 4.4 tulemusi. Kasutades statistikut, mis ei ole piisav, kaotame me ära osa valimis sisalduvat informatsiooni; saame hinnangu, mis kõiki valimi elemente arvestades ei saa olla parameetri väärtuseks. *

Piisava statistiku saab kasutada ära optimaalse nihketa hinnangu otsimisel. Vastava teooriaga on võimalik tutvuda õpikus [9], lk. 57 - 64.

Mitte iga tõenäosusjaotuse korral pole võimalik leida piisavat statistikut. Toome selle kohta näite.

Näide 6.5. Olgu uuritav tunnus Cauchy jaotusega, $X \sim C(\theta)$. Cauchy jaotus on pidev tõenäosusjaotus, mille tihedusfunktsioon omab kuju

$$f(x, \theta) = 1/(\pi(1+(x-\theta)^2)) , -\infty < x < \infty .$$

Kirjutame välja valimi tihedusfunktsiooni

$$f(x, \theta) = 1/(\pi^n \prod_{i=1}^{n} (1+(x_i-\theta)^2) .$$

Seda funktsiooni ei ole võimalik esitada faktoriseerimise kriteeriumis nõutava kahe teguri korrutisena. *

Piisava statistiku mõiste on lihtsalt üldistatav ka parameetrite vektori hindamise juhule. Vastavate näidetega on võimalik tutvuda õpikus [9], lk. 54 - 57.

ÜLESANDED

1. Olgu $X \sim G(\theta)$. Leida parameetri θ jaoks piisav statistik.
2. Olgu $X \sim N(\mu, 1)$. Leida parameetri μ jaoks piisav statistik.
3. Olgu uuritava tunnuse jaotuseks pidev jaotus, mille tihedusfunktsioon on määratud eeskirjaga

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \theta/(1+x)^{\theta+1} & , \text{kui } 0 \le x \\ 0 & , \text{mujal} \end{cases}$$

   Leida piisav statistik parameetri θ hindamiseks.
4. Olgu uuritav tunnus Laplace'i jaotusega, $X \sim L(\lambda)$, mille

tihedusfunktsioon on määratud eeskirjaga

$$f(x, \theta) = e^{-|x-\theta|/2}, \quad -\infty < x < \infty$$

Leida parameetri θ jaoks piisav statistik.

5. Olgu $X \sim N(0, \theta)$. Leida parameetri θ jaoks piisav statistik.
6. Olgu $X \sim B(m, \theta)$. Leida parameetri θ jaoks piisav statistik.

Kordamisküsimusi tõenäosusteooriast

1) Defineerige sündmuse A tinglik tõenäosus tingimusel, et sündmus B toimub.
2) Olgu $\vec{Z} = (Z_1, Z_2)$ juhuslik vektor, mille komponendid Z_1 ja Z_2 on Bernoulli jaotusega sõltumatud juhuslikud suurused, $Z_i \sim B(1, 0{,}5)$. Kirjutada välja selle juhusliku vektori võimalikud väärtused ja nende väärtuste omandamise tõenäosused. Esitame tingimuse $Z_1+Z_2=1$. Arvutada vektori $\vec{Z}$ võimalike väärtuste tinglikud tõenäosused niisuguse tingimuse korral.
3) Olgu Z diskreetne juhuslik suurus. Avaldada tõenäosus $P(a < Z < b)$ tõenäosusfunktsiooni abil.

KUS ME OLEME? Tutvusime statistiku kolmanda kasuliku omadusega - piisavusega. Iga "head" hinnangut määrav statistik peab kahtlemata olema piisav. Kui see nõue on täidetud annab statistik parameetri kohta sama palju informatsiooni kui kogu valim. Kui see nõue pole täidetud, toob selle statistiku kasutamine kaasa osa valimis sisalduva informatsiooni kõrvale jätmise.

KUHU LÄHEME? Oleme tutvunud kõikide olulisemate statistiku omadustega, mida hindamisel peab silmas pidama. Pöördume nüüd tagasi nihketa hinnangute juurde. Vaatame, kas ja kuidas on võimalik leida niisugust nihketa hinnangut määravat statistikut, mille dispersioon oleks minimaalne.

§7. Efektiivne hinnang.

Neljanda paragrahvi lõpul esitasime küsimuse, kuidas leida "kõige efektiivsem" nihketa hinnangut määrav statistik. "Kõige efektiivsem" selles mõttes, et ei leiduks teist nihketa hinnangut määravat statistikut, mille dispersioon oleks sama suur või veelgi väiksem. Käesolevas paragrahvis anname vastuse sellele küsimusele.

Juhime veel tähelepanu sellele, et käesolev paragrahv on esimene, kus me asume lahendama teatud probleemi, siiani tegelesime peamiselt mõistete kasutusele võtmise ja teatavate omaduste kirjeldamisega. Seetõttu on käesolev paragrahv ka üks pikemaid ja tema läbi töötamine nõuab tõsist tööd.

Meie probleemi lahendamiseks - otsustamiseks, kas statistik on "kõige efektiivsem" - on kasutusel üsna lihtne strateegia. Nimelt on võimalik teatud eelduse täidetuse korral üldkogumi tõenäosusjaotuse kohta leida a l u m i n e t õ k e nihketa statistiku dispersioonile. Statistikust, mille dispersioon võrdub selle alumise tõkkega, ei saa leida enam efektiivsemat statistikut. Kui lahendame veel niisuguse statistiku ühesuse küsimuse, oleme oma probleemi lahendanud.

Selleks, et määrata alumist tõket nihketa statistiku dispersioonile, tuleb kasutusele võtta mõned uued mõisted. Alustame valimi informatsioonist.

A. Valimi informatsioon

Võtame kasutusele üldkogumi tõenäosusjaotust iseloomustava näitaja - valimi informatsiooni e. Fisheri informatsiooni. See näitaja kirjeldab informatsioonihulka, mis sisaldub valimis tundmatu parameetri θ kohta.

Kolmandas paragrahvis võtsime kasutusele valimi tõepärafunktsiooni $L(\vec{x}, \theta)$ ja logaritmilise tõepärafunktsiooni $l(\vec{x}, \theta)$. Eeldame järgnevas, et logaritmiline tõepärafunktsioon on parameetri θ järgi **diferentseeruv**, s.t. eksisteerib tuletis $(\partial/\partial\theta)l(\vec{x}, \theta)$. Kui logaritmilise tõepärafunktsiooni tuletis on välja arvutatud, võime saadud avaldises konkreetse valimi $\vec{x}$ asemele kirjutada teoreetilise valimi $\vec{X}$. Tulemusena saame teoreetilise valimi (ja parameetri θ !) funktsiooni, uue juhusliku suuruse (mitte statistiku!), mille konkreetne moodustamis-eeskiri oleneb sellest konkreetsest tõenäosusjaotusest, mis on valitud üldkogumi mudeliks. Nimetame selle juhusliku suuruse valimi talletiseks ja tähistame sümboliga $U(\vec{X}, \theta)$,

$$U(\vec{X}, \theta) = (\partial/\partial\theta)\, l(\vec{X}, \theta).$$

Definitsioon 7.1. Valimi talletise dispersiooni nimetatakse valimi informatsiooniks $I_n(\theta)$,

$$I_n(\theta) = DU(\vec{X}, \theta).$$

Vaatame näiteid valimi informatsiooni välja kirjutamise kohta.

Näide 7.2. (a) Olgu $X \sim E(\lambda)$. Siis $L(\vec{x},\lambda) = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}$ ja logaritmiline tõepärafunktsioon on määratud eeskirjaga

$$l(\vec{x}, \lambda) = n\ln\lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Leiame logaritmilise tõepärafunktsiooni tuletise λ järgi

$$(\partial/\partial\lambda)\, l(\vec{x}, \lambda) = n/\lambda - \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Valimi talletis on määratud eeskirjaga

$$U(\vec{X}, \lambda) = n/\lambda - \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Arvutame valimi informatsiooni $I_n(\lambda)$

$$I_n(\lambda) = DU(\vec{X}, \lambda) = D(n/\lambda - \sum_{i=1}^{n} X_i).$$

Arvestades dispersiooni omadusi ja teoreetilise valimi kohta tehtud eeldusi (1.1) saame

$$I_n(\lambda) = n/\lambda^2.$$

(b) Olgu $X \sim B(1, \theta)$. Siis valimi tõepärafunktsioon omab kuju

$$L(\vec{x}, \theta) = \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

logaritmiline tõepärafunktsioon aga kuju

$$l(\vec{x}, \theta) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln\theta + (n - \sum_{i=1}^{n} x_i)\ln(1-\theta).$$

Leiame logaritmilise tõepärafunktsiooni tuletise

$$(\partial/\partial\theta)\, l(\vec{x}, \theta) = (\sum_{i=1}^{n} x_i - n\theta)/[\theta(1-\theta)].$$

Kirjutame välja valimi talletise

$$U(\vec{X}, \theta) = (\sum_{i=1}^{n} X_i - n\theta)/[\theta(1-\theta)]$$

ja leiame valimi informatsiooni

$$I_n(\theta) = DU(\vec{X}, \theta) = D\{(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\theta)/[\theta(1-\theta)]\}.$$

Arvestades dispersiooni omadusi ja teoreetilise valimi kohta tehtud eeldusi, saame

$$I_n(\theta) = n/[\theta(1-\theta)]. \qquad *$$

Juhime veel tähelepanu võrdusele, mis tuleneb logaritmilise tõepärafunktsiooni definitsioonist ja mille teadmine meile edaspidises korduvalt kasulikuks osutub

$$(\partial/\partial\theta)l(\vec{x}, \theta) = [(\partial/\partial\theta)L(\vec{x}, \theta)]/L(\vec{x}, \theta). \qquad (7.1)$$

Püüame nüüd selgitada, millised olid kaalutlused mõiste "valimi informatsioon" kasutusele võtmisel. Vaatamata näilisele keerukusele on see mõiste hästi loomulik. Aluseks on siin asjaolu, et juhusliku suuruse väärtus x annab seda rohkem informatsiooni parameetri kohta, mida kiiremini muutub tõepärafunktsioon selles punktis x. Vastavat muutumiskiirust aga iseloomustab suhe $[(\partial/\partial\theta) L(x, \theta)]/L(x, \theta)$. Kuid meile on ju teada, et niisugune suhe on võrdne logaritmilise tõepärafunktsiooni tuletisega $(\partial/\partial\theta)l(x,\theta)$. Kuna oluline on muutuse absoluutväärtus, siis tõenäosusjaotuse iseloomustamiseks leitakse selle suhte ruudu keskväärtus. Veidi hiljem me tõestame ka, et enamuse praktikas kasutatavate tõenäosusjaotuste korral on logaritmilise tõepärafunktsiooni tuletise keskväärtus null.

Tähelepanelikul lugejal võib seda selgitust lugedes tekkida kaks küsimust. - Esiteks: valimist rääkides oleme siiani harjunud mõttega, et sinna kuulub palju vaatlusi, selgituses opereeritakse aga ainult ühe juhusliku suuruse väärtusega. Teiseks - milliste jaotuste korral on siis valimi talletise keskväärtus null?

Esimesele küsimusele on üsna lihtne vastata. Valimi elementide arvu kohta pole kunagi tehtud mingeid kitsendusi. Seetõttu võime rääkida rahulikult 100-elemendilisest valimist, 2-elemendilisest valimist ja ka 1-elemendilisest "valimist" ehk üksikvaatlusest. Järgneva käsitluse lihtsustamiseks on aga siinkohal kasulik võtta kasutusele teatav erilist üksikvaatlust puudutav terminoloogia.

Tähistame üksikvaatluse tõepärafunktsiooni sümboliga $L(x_i, \theta)$,

$$L(x_i, \theta) = \begin{cases} f(x_i, \theta), & \text{kui tunnus on pidev} \\ p(x_i, \theta), & \text{kui tunnus on diskreetne} \end{cases}.$$

Valimi tõepärafunktsioon avaldub siis korrutisena

$$L(\vec{x}, \theta) = \prod_{i=1}^{n} L(x_i, \theta),$$

logaritmiline tõepärafunktsioon aga summana

$$l(\vec{x}, \theta) = \sum_{i=1}^{n} l(x_i, \theta),$$

kus üksikvaatluse logaritmiline tõepärafunktsioon on

$$l(x_i, \theta) = \ln L(x_i, \theta).$$

Tähistame üksikvaatluse talletise sümboliga $U(X_i, \theta)$,

$$U(X_i, \theta) = (\partial/\partial\theta)\, l(X_i, \theta)$$

ja üksikvaatluse informatsiooni sümboliga $I(\theta)$,

$$I(\theta) = DU(X_i, \theta).$$

Valimi talletis on esitatav nüüd üksikvaatluste talletiste summana

$$U(\vec{X}, \theta) = \sum_{i=1}^{n} U(X_i, \theta)$$

ja valimi informatsioon

$$I_n(\theta) = nI(\theta). \quad \text{(Miks?)}$$

Niisugusele terminoloogiale toetudes on võimalik pisut lihtsustada valimi informatsiooni leidmist. Illustreerime seda näitega.

Näide 7.3. Olgu $X \sim P(\lambda)$. Kirjutame välja üksikvaatluse tõepärafunktsiooni

$$L(x_i, \lambda) = p(x_i, \lambda) = e^{-\lambda}\lambda^{x_i}/\, x_i!\ ,$$

üksikvaatluse logaritmilise tõepärafunktsiooni

$$l(x_i, \lambda) = -\lambda + x_i \ln\lambda - \ln(x_i!)$$

ja üksikvaatluse talletise

$$U(X_i, \lambda) = -1 + X_i/\lambda .$$

Arvutame üksikvaatluse informatsiooni

$$I(\lambda) = DU(X_i, \lambda) = D(-1 + X_i/\lambda) = 1/\lambda$$

ja leiame valimi informatsiooni $I_n(\lambda)$

$$I_n(\lambda) = nI(\lambda) = n/\lambda . \quad *$$

Teisele küsimusele vastamiseks võtame kasutusele regulaarse tõenäosusjaotuse mõiste.

B. Regulaarne tõenäosusjaotus.

Valimi informatsiooni saab kasutada nihketa hinnangut määrava statistiku dispersiooni alumise tõkke leidmiseks ainult siis, kui üldkogumi tõenäosusjaotus on regulaarne. Defineerime selle tõenäosusjaotuse omaduse.

Definitsioon 7.4. Regulaarseks nimetatakse sellist tõenäosusjaotust, mille tihedusfunktsiooni (või tõenäosusfunktsiooni) diferentseerimine parameetri θ järgi ja integreerimine (või summeerimine) argumendi x järgi on vahetatavad operatsioonid, s.t.

$$(\partial/\partial\theta)\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\theta)dx = \int_{-\infty}^{\infty}(\partial/\partial\theta)f(x,\theta)dx$$

(või

$$(\partial/\partial\theta)\sum_x p(x,\theta) = \sum_x(\partial/\partial\theta)p(x,\theta) .$$

Definitsioonis nimetatud operatsioonide vahetatavuseks on tarvilik, et piirkond, kus jaotuse tihedusfunktsioon (tõenäosusfunktsioon) erineb nullist, ei tohi sõltuda parameetrist θ.

Näide 7.5. (a) Veendume, et Poissoni jaotus $P(\lambda)$ on regulaarne. Kuna

$$\sum_{x=0}^{\infty} p(x,\lambda) = 1,$$

siis

$$(\partial/\partial\lambda)\sum_{x=0}^{\infty} p(x,\lambda) = 0 .$$

Vastupidises järjekorras aga

$$(\partial/\partial\lambda)\, p(x,\lambda) = -e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} + e^{-\lambda}\frac{x\lambda^{x-1}}{x!}$$

kust x järgi summeerides saame

$$\sum_{x=0}^{\infty}(\partial/\partial\lambda)p(x,\lambda) = -e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\lambda^x/x! + e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}\lambda^{x-1}/(x-1)! = 0 .$$

Regulaarsuse tingimus on täidetud, Poissoni jaotus on regulaarne.

(b) Veendume, et ühtlane jaotus $U(0,\theta)$ ei ole regulaarne. Ühtlase jaotuse tihedusfunktsioon on määratud eeskirjaga

$$f(x,\theta) = \begin{cases} 1/\theta & , \text{ kui } 0 \le x \le \theta \\ 0 & , \text{ mujal} \end{cases} .$$

Kuna

$$\int_0^\theta f(x, \theta)dx = 1,$$

siis

$$(\partial/\partial\theta)\int_0^\theta f(x, \theta)dx = 0 .$$

Vastupidises järjekorras aga

$$(\partial/\partial\theta)f(x, \theta) = -1/\theta^2 ,$$

kust x järgi integreerides saame

$$\int_0^\theta (\partial/\partial\theta)f(x, \theta)\, dx = -\int_0^\theta 1/\theta^2 dx = -1/\theta .$$

Näeme,et erinevas järjekorras integreerides ja diferentseerides saame erinevad tulemused. Ühtlane jaotus ei ole regulaarne. *

Lihtne on märgata, et üldkogumi tóenäosusjaotuse regulaarsusest järeldub ka valimi tóenäosusjaotuse regulaarsus.

Tóestame nüüd móned talletise omadused, mis kehtivad regulaarsete tóenäosusjaotuste korral. Tehnilise töö lihtsustamiseks kasutame üksikvaatluse talletist.

<u>Teoreem 7.6.</u> Olgu juhusliku suuruse X tóenäosusjaotus regulaarne. Siis (a) $EU(X, \theta) = 0$;

(b) $DU(X, \theta) = EU^2(X, \theta)$;

(c) $I(\theta) = -E((\partial^2/\partial\theta^2)l(X,\theta))$.

<u>Tóestus.</u> Tóestuse läbiviimisel eeldame, et tóenäosusjaotus on pidev. Diskreetsel juhul on tóestuskäik analoogiline, ainult integreerimine tuleb kóikjal asendada summeerimisega.

(a) Arvutame juhusliku suuruse $U(X, \theta)$ keskväärtuse. Vastavalt juhusliku suuruse funktsiooni keskväärtuse leidmise eeskirjale

$$EU(X, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x, \theta)f(x, \theta)dx = \int_S U(x, \theta)f(x, \theta)dx,$$

kus sümboliga S on tähistatud piirkond, milles vastav tihedusfunktsioon erineb nullist. Nüüd aga vóime kirjutada

$$EU(X, \theta) = \int_S [(\partial/\partial\theta)f(x, \theta)/f(x, \theta)]f(x, \theta)dx = \int_S (\partial/\partial\theta)f(x,\theta)dx =$$

$$= (\partial/\partial\theta)\int_S f(x, \theta)dx = (\partial/\partial\theta)1 = 0.$$

Omadus (a) on tóestatud.

(b) Vastavalt dispersiooni arvutamise eeskirjale

$$DU(X, \theta) = EU^2(X, \theta) - [EU(X, \theta)]^2 = EU^2(X, \theta).$$

Omadus (b) on tóestatud.

(c) Nagu omaduse (a) tõestamisel veendusime, kehtib regulaarse tõenäosusjaotuse korral võrdus

$$\int_S (\partial/\partial\theta) l(x, \theta)\, f(x, \theta)dx = 0.$$

Diferentseerime seda võrdust uuesti parameetri θ järgi. Saame

$$\int_S (\partial^2/\partial\theta^2) l(x, \theta)\, f(x, \theta)dx + \int_S [(\partial/\partial\theta) l(x, \theta)]\,[(\partial/\partial\theta) f(x, \theta)]\,dx = 0$$

Kuna piirkonnas S erineb tihedusfunktsioon nullist, võime viimase integrali aluse avaldise korrutada ja jagada teguriga $f(x, \theta)$. Siis saame võrduse

$$E\left((\partial^2/\partial\theta^2) l(x, \theta)\right) = -E\left((\partial/\partial\theta) l(X, \theta)\right)^2$$

ehk

$$I(\theta) = -E\left((\partial^2/\partial\theta^2) l(X, \theta)\right).$$

Omadus (c) on tõestatud.

Lihtne on näidata, et need kolm omadust kehtivad ka valimi talletise $U(X, \theta)$ jaoks.

Kolmas omadus võimaldab mõnevõrra lihtsustada valimi informatsiooni arvutamisel tehtavat tehnilist tööd. Vaatame näidet selle omaduse kasutamise kohta.

Näide 7.7. Olgu meil tegemist üldkogumiga, mille kirjeldamiseks sobib normaaljaotus keskväärtusega 0 ja dispersiooniga θ, $X \sim N(0, \sqrt{\theta})$. Leiame valimi informatsiooni parameetri θ suhtes. Kasutatava normaaljaotuse tihedusfunktsioon on määratud eeskirjaga $f(x, \theta) = (1/\sqrt{2\pi\theta})e^{-x^2/2\theta}$, $-\infty < x < \infty$. (Veenduge, et tegemist on regulaarse tõenäosusjaotusega!).

Arvutame üksikvaatluse logaritmilise tõepärafunktsiooni

$$l(x, \theta) = -(1/2)\ln\theta - (1/2)\ln(2\pi) - x^2/(2\theta)$$

leiame selle esimese tuletise

$$(\partial/\partial\theta)\, l(x, \theta) = -1/(2\theta) + x^2/2\theta^2$$

ja teise tuletise

$$(\partial^2/\partial\theta^2)\, l(x, \theta) = 1/(2\theta^2) - x^2/\theta^3.$$

Kirjutame nüüd välja üksikvaatluse informatsiooni

$$I(\theta) = -E(1/(2\theta^2) - X^2/\theta^3) = 1/(2\theta^2).$$

Valimi informatsiooni väärtuseks aga saame

$$I_n(\theta) = n/(2\theta^2). \quad *$$

Nüüd on meil käes kõik tehnilised "instrumendid" põhitulemuse tõestamiseks.

C. Efektiivne hinnang.

Tõestame esmalt abistava lemma.

Lemma 7.8. Olgu üldkogumi tõenäosusjaotus regulaarne ja olgu $T(X)$ suvaline statistik, mille keskväärtus on lõplik. Siis

$$E(U(\vec{X}, \theta)T(\vec{X})) = (\partial/\partial\theta)\, ET(\vec{X}).$$

Tõestus. Vaatame esmalt pidevat jaotust. Kasutades juhusliku vektori funktsiooni keskväärtuse arvutamise eeskirja, võime kirjutada

$$ET(\vec{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} T(\vec{x}) f(\vec{x}, \theta)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Integreerimisel võime piirduda piirkonnaga S, milles valimi tihedusfunktsioon erineb nullist. Leiame statistiku $T(\vec{X})$ keskväärtuse tuletise parameetri θ järgi

$$(\partial/\partial\theta)\, ET(\vec{X}) = (\partial/\partial\theta) \int_S \cdots \int T(\vec{x}) f(\vec{x}, \theta)\, dx_1 \ldots dx_n .$$

Jaotuse regulaarsuse tõttu võime integreerimise ja diferentseerimise operatsioonid vahetada

$$(\partial/\partial\theta)\, ET(\vec{X}) = \int_S \cdots \int T(\vec{x}) ((\partial/\partial\theta) f(\vec{x}, \theta))\, dx_1 \ldots dx_n =$$
$$= \int_S \cdots \int T(\vec{x}) [((\partial/\partial\theta) f(\vec{x}, \theta))/f(\vec{x}, \theta)] f(\vec{x}, \theta)\, dx_1 \ldots dx_n =$$
$$= \int_S \cdots \int T(\vec{x}) U(\vec{x}, \theta) f(\vec{x}, \theta)\, dx_1 \ldots dx_n =$$
$$= E(U(\vec{X}, \theta) T(\vec{X})) .$$

Diskreetse jaotuse korral on tõestuskäik analoogiline, ainult integreerimine tuleb asendada summeerimisega.

Lemma on tõestatud.

Enne põhitulemuse sõnastamist tasub veel arutleda järgmise probleemi üle. Tõenäosusjaotuse parametriseerimine ei ole ühene. Kui meil jaotuse parameetriks on valitud θ, võime alati üle minna uuele parameetrile θ^*, kasutades mingit pööratavat funktsiooni g, $\theta^* = g(\theta)$. Näiteks oleme normaaljaotuse parameetrina kasutanud nii jaotuse dispersiooni kui ka standardhälvet, eksponentsiaaljaotuse parameetriks võib valida nii suuruse λ kui ka suuruse $1/\lambda$ jne. Üldjuhul sõltub parametriseeringu valik probleemi sisust, mida üldkogumi kohta tahame lahendada. Niisugust vabadust arvestades on mõistlik sõnastada põhitulemus suvalisele parameetri funktsioonile nihketa hinnangut määrava statistiku kohta.

Teoreem 7.9. (Informatsioonivõrratus) Olgu üldkogumi tõenäosusjaotus regulaarne ja määraku statistik $T(\vec{X})$ nihketa hinnangu parameetri funktsioonile $g(\theta)$. Siis

$$DT(\vec{X}) \geq [g'(\theta)]^2/I_n(\theta) .$$

Tõestus. Võtame vaatluse alla valimi talletise $U(\vec{X}, \theta)$ ja statistiku $T(\vec{X})$ vahelise korrelatsioonikordaja $r(U(\vec{X}, \theta), T(\vec{X}))$. Vastavalt korrelatsioonikordaja määramiseeskirjale

$$r^2(U(X, \theta), T(\vec{X})) = [cov(U(\vec{X},\theta), T(\vec{X}))]^2/(DU(\vec{X},\theta)DT(\vec{X})).$$

Kirjutame valemis kasutatavad suurused välja

$$D(U(\vec{X}, \theta)) = I_n(\theta)$$

ja

$$cov(U(\vec{X}, \theta), T(\vec{X})) = E(U(\vec{X},\theta)T(\vec{X})) - EU(\vec{X},\theta)ET(\vec{X}) =$$

$$= E(U(\vec{X},\theta)T(\vec{X})) = (\partial/\partial\theta)\,ET(\vec{X}) = g'(\theta).$$

Viimase tulemuse saamisel abistas meid teoreemile eelnev lemma ja eeldus, et $ET(\vec{X}) = g(\theta)$. Lõppkokkuvõttes saime

$$r^2(U(\vec{X},\theta), T(\vec{X})) = [g'(\theta)]^2/(I_n(\theta)DT(\vec{X})).$$

Kasutame ära korrelatsioonikordaja omaduse $r^2(Y,Z) \leq 1$. Järelikult

$$[g'(\theta)]^2/(I_n(\theta)DT(\vec{X})) \leq 1$$

ja

$$DT(\vec{X}) \geq [g'(\theta)]^2/I_n(\theta) .$$

Teoreem on tõestatud.

Kui $g(\theta) = \theta$, omandab informatsioonivõrratus kuju

$$DT(X) \geq 1/I_n(\theta) ;$$

niisugust võrratust nimetatakse Cramer-Rao võrratuseks.

Nihketa statistikule, mille dispersioon saavutab teoreemis näidatud alumise raja, on antud erinimetus.

Definitsioon 7.10. Nihketa statistikut, mille dispersioon saavutab informatsioonivõrratuses näidatud alumise raja, nimetatakse efektiivseks, selle statistiku poolt määratud hinnangut aga nimetatakse efektiivseks hinnanguks.

Näide 7.11. (a) Olgu $X \sim E(\lambda)$. Arvestades lemmas 2.? saadud tulemust võime öelda, et $EX = 1/\lambda$ ja $DX = 1/(n\lambda^2)$. Informatsioonivõrratuse põhjal võime välja kirjutada alumise

8

raja parameetri funktsioonile $1/\lambda$ nihketa hinnangut määrava statistiku dispersiooni jaoks. Näites 7.2(a) saadud tulemust arvestades

$$[g'(\theta)]^2/I_n(\theta) = (1/\lambda^2)^2/(n/\lambda^2) = 1/(n\lambda^2) .$$

Näeme, et $\bar{X}$ on $1/\lambda$ hindamiseks efektiivne statistik.

(b) Olgu $X \sim B(1,\theta)$. Arvestades lemmas 2.2 saadud tulemust võime öelda, et $E\bar{X} = \theta$ ja $D\bar{X} = \theta(1-\theta)/n$. Cramer-Rao võrratuse põhjal võime välja kirjutada alumise raja parameetrile θ nihketa hinnangut määrava statistiku dispersiooni jaoks. Kasutades näites 7.2(b) saadud tulemust

$$1/I_n(\theta) = \theta(1-\theta)/n,$$

näeme, et $\bar{X}$ on parameetri θ hindamiseks efektiivne statistik.

(c) Olgu meil tegemist normaaljaotusega $N(0,\sqrt{\theta})$. Veendume, et valimi dispersioon S^2 ei määra parameetrile θ efektiivset hinnangut. Kirjutame välja statistiku S^2 dispersiooni

$$DS^2 = 2\theta^2/(n-1) ;$$

(selle tulemuse tõestame hiljem, praegu võtame dispersiooni väärtuse lihtsalt teadmiseks). Näites 7.7 arvutasime valimi informatsiooni niisuguse normaaljaotuse korral, $I_n(\theta) = n/2\theta^2$. Kehtib võrratus

$$DS^2 > 1/I_n(\theta) ,$$

valimi dispersioon ei määra parameetrile θ efektiivset hinnangut.

Uudishimutseme veel veidi. Kui efektiivne statistik $T_*(\vec{X})$ parameetri θ jaoks oleks olemas, oleks tema dispersioon $2\theta^2/n$ ja efektiivsuskordaja valimi dispersiooniga omaks väärtust

$$e(T_*, S^2) = (n-1)/n .$$

Näeme, et see efektiivsuskordaja käitub hoopis teisiti, kui näites 4.6 arvutatud efektiivsuskordaja. Valimi mahu kasvades läheneb efektiivsuskordaja ühele, suurte valimite korral on erinevus ühest väga väike, statistik S^2 on "peaaegu sama hea" kui efektiivne statistik. ✱

Tundub, et informatsioonivõrratus annab võimaluse efektiivse statistiku ära tundmiseks, kuid ei paku mingeid pidepunkte niisuguse statistiku konstrueerimiseks. Näitame selle paragrahvi viimases alapunktis, et nii see siiski ei ole. Enne aga veel mõned informatsioonivõrratusega seotud üldise iseloomuga märkused.

Informatsioonivõrratus kehtib ainult regulaarsete jaotuste korral. Huvitav, mis võiks toimuda siis, kui tegemist on mitteregulaarse jaotusega? Selle kohta on meil tegelikult väike näide juba olemas. Teame, et ühtlane jaotus $U(0, \theta)$ pole regulaarne. Parameetrile θ aga konstrueerisime näites 4.6 niisuguse nihketa statistiku, mille dispersioon oli pöördvõrdeline valimi mahu ruuduga. Regulaarsete jaotuste korral see ei õnnestuks, efektiivse statistiku dispersioon peab regulaarsete jaotuste korral olema pöördvõrdeline valimi mahuga n. Näeme, et jaotuse mitteregulaarsus annab võimaluse väga täpsete hinnangute konstrueerimiseks. Loomulikult ei realiseeru see võimalus iga mitteregulaarse jaotuse korral.

Kasulik on veel tähele panna, et mitte iga parameetri jaoks pole efektiivset statistikut olemas. Võimalusi nihketa hinnangut määrava statistiku dispersiooni alumise tõkke täpsustamiseks on vaadatud õpikus [9] lk. 50 . Samas on esitatud ka efektiivsuse mõiste üldistus mitme tundmatu parameetri juhule.

D. Efektiivse statistiku leidmine

Tarviliku ja piisava tingimuse efektiivse hinnangu olemasoluks regulaarse jaotuse korral annab järgmine teoreem.

Teoreem 7.12. Olgu üldkogumi tõenäosusjaotus regulaarne. Nihketa statistik määrab parameetri funktsioonile $g(\theta)$ efektiivse hinnangu parajasti siis, kui valimi talletis on esitatav kujul

$$U(\vec{X}, \theta) = A(\theta)(T(\vec{X}) - g(\theta)) .$$

Tõestus. Tuginedes informatsioonivõrratuse tõestusele võime öelda, et statistik $T(\vec{X})$ saab olla efektiivne parajasti siis, kui $r^2(U(\vec{X}, \theta), T(\vec{X})) = 1$. Korrelatsioonikordaja omadustest aga järeldub, et niisugune võrdus kehtib parajasti siis, kui valimi talletise $U(\vec{X}, \theta)$ ja statistiku $T(\vec{X})$ vahel on lineaarne seos, s.t. (peaaegu kindlasti) kehtib võrdus

$$U(\vec{X}, \theta) = A(\theta)T(\vec{X}) + B(\theta).$$

Kuna aga $EU(\vec{X}, \theta) = 0$ (eeldasime, et kasutatav tõenäosusjaotus on regulaarne!), siis

$$A(\theta)ET(\vec{X}) = -B(\theta) .$$

Kuna statistik on nihketa, saame

$$B(\theta) = -g(\theta)A(\theta),$$

asendades aga selle tulemuse lineaarsesse seosesse, saame

$$U(\vec{X}, \theta) = A(\theta)(T(\vec{X}) - g(\theta)).$$

Teoreem on tõestatud.

Teoreemist järeldub ka, et kui efektiivne statistik eksisteerib, on ta ühene.

Vaatame näidet saadud tulemuse kasutamise kohta.

Näide 7.13. Kasutame näites 7.11 punktis (b) vaadatud normaaljaotust $N(0, \sqrt{\theta})$. Näites 7.7 tehtud arvutusi kasutades kirjutame välja juhusliku suuruse $U(\vec{X}, \theta)$

$$U(\vec{X},\theta) = -n/2\theta + \sum_{i=1}^{n} x_i^2/2\theta^2 = n/(2\theta^2)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2/n - \theta\right).$$

Näeme, et efektiivse hinnangu parameetrile θ määrab statistik $T(\vec{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2/n$. ✳

Teoreemis saadud tulemus näitab, et iga jaotuse korral on efektiivne hinnang olemas ainult ühele parameetri funktsioonile. Vaatame sellekohast näidet.

Näide 7.14. Olgu meil tegemist eksponentjaotusega $E(\lambda)$. Leiame, millisele parameetri λ funktsioonile on võimalik määrata efektiivne hinnang. Näites 7.2 (a) kirjutasime välja juhusliku suuruse $U(\vec{X}, \lambda)$

$$U(\vec{X}, \lambda) = n/\lambda - \sum_{i=1}^{n} x_i ,$$

ehk, andes sellele esitusele teoreemi 7.12 rakendamiseks vajaliku struktuuri,

$$U(\vec{X}, \lambda) = -n\left(\sum_{i=1}^{n} X_i/n - 1/\lambda\right).$$

Näeme, et efektiivne hinnang on määratav ainult parameetri funktsioonile $1/\lambda$. Parameetri λ jaoks ei ole võimalik leida statistikut, mille dispersioon saavutaks Cramer-Rao võrratuses näidatud alumise raja. ✳

Eelpool märkisime, et iga "hea" statistik peaks olema ka mõjus ja piisav, nihketus ei garanteeri aga nende omaduste olemasolu. Veendume, et efektiivne statistik on alati nii mõjus kui ka piisav.

Mõjususe kontrollimiseks kasutame teoreemis 5.3 saadud tulemust. Olgu $T_*(\vec{X})$ efektiivne statistik. Siis $ET_*(\vec{X})=g(\theta)$ ja järelikult ka $\lim\limits_{n\to\infty} ET_*(\vec{X}) = g(\theta)$. Efektiivsuse tõttu $DT_*(\vec{X}) = [g'(\theta)]^2/nI(\theta)$, järelikult $\lim\limits_{n\to\infty} DT_*(\vec{X})=0$. Efektiivne statistik on alati mõjus.

Piisavuse kontrollimiseks kasutame teoreemis 6.3 saadud tulemust. Kui $T_*(\vec{X})$ on efektiivne statistik, siis valimi talletis on esitatav kujul

$$U(\vec{X}, \theta) = A(\theta)(T_*(\vec{X}) - g(\theta)) \,. \qquad (7.2)$$

(vt. teoreem 7.12). Kuna aga valimi talletise definitsiooni tõttu kehtib võrdus

$$U(\vec{x}, \theta) = (\partial/\partial\theta)\, l(\vec{x}, \theta) \,,$$

siis järeldub sellest, et logaritmiline tõepärafunktsioon peab olema esitatav kujul

$$l(\vec{x}, \theta) = \tau(T_*(\vec{x}), \theta) + u(\vec{x})$$

kus funktsioon τ on selline funktsioon, mille tuletiseks on $A(\theta)(T_*(\vec{X})-g(\theta))$, $u(\vec{x})$ aga suvaline ainult valimist sõltuv funktsioon. Sellest esitusest **järeldub** tõepärafunktsiooni esitus korrutisena

$$L(\vec{x}, \theta) = \varkappa(T_*(\vec{X}), g(\theta))h(\vec{x}) \,.$$

Efektiivne statistik on alati piisav.

ÜLESANDED

1. Leida valimi informatsioon normaaljaotuse $N(\mu,1)$ jaoks. Kontrollida, kas see jaotus on regulaarne.
2. Näidata, et eksponentjaotus $E(\lambda)$ on regulaarne.
3. Leida valimi informatsioon binoomjaotuse $B(m, \theta)$ jaoks. Näidata, et see jaotus on regulaarne. Kas parameetri θ hindamiseks on olemas efektiivne statistik? Kui on, siis milline on selle statistiku dispersioon?
4. Tõestada, et normaaljaotuse $N(\mu,1)$ parameetrile μ määrab valimi keskväärtus $\bar{X}$ efektiivse hinnangu.
5. Millisele parameetri funktsioonile on Bernoulli jaotuse $B(1, \theta)$ korral olemas efektiivne statistik? Milline on selle statistiku dispersioon?
6. Olgu meil tegu üldkogumiga, mille kirjeldamiseks sobib Poissoni jaotus $P(\lambda)$. Kas väärtuse null omandamise tõenäosusele $P(X=0) = e^{-\lambda}$ saab määrata nihketa hinnangu?

Milline on selle hinnangu dispersioon?

7. Tõestada, et normaaljaotuse $N(0, \theta)$ korral ei leidu parameetri θ jaoks efektiivset hinnangut.
8. Tõestada teoreemi 4.6 kehtivus juhusliku suuruse $U(\vec{X}, \theta)$ korral.
9. Kontrollida, kas Cauchy jaotus $C(\theta)$ on regulaarne? Millisele parameetri funktsioonile eksisteerib efektiivne hinnang selle jaotuse korral?
10. Olgu üldkogumi tihedusfunktsioon määratud eeskirjaga $f(x, \theta) = \sqrt{\theta}\, x^{\sqrt{\theta}-1}$, kui $0 \leq x \leq 1$. Millisele parameetri funktsioonile on võimalik leida efektiivne hinnang?
11. Tuginedes teoreemi 7.12 tulemusele esitada
    (a) valimi informatsioon kordaja $A(\theta)$ kaudu;
    (b) efektiivse statistiku dispersioon kordaja $A(\theta)$ kaudu.
12. Olgu $X \sim N(0, \sqrt{\theta})$. Kasutades eelmises ülesandes saadud tulemust, leida parameetrile θ efektiivset hinnangut määrava statistiku dispersioon ja valimi informatsioon parameetri θ suhtes.
13. Olgu $X \sim G(\theta)$. Leida, millisele parameetri funktsioonile määratakse efektiivne hinnang. Kirjutada välja vastava statistiku dispersioon ja valimi informatsioon parameetri θ suhtes.

Kordamisküsimusi tõenäosusteooriast

1) Millised on tihedusfunktsiooni omadused?
2) Millega võrdub diskreetse juhusliku suuruse võimalike väärtuste tõenäosuste summa?
3) Olgu X ja Y lõpliku dispersiooniga sõltumatud juhuslikud suurused. Olgu juhuslik suurus Z määratud eeskirjaga $Z=aX+bY$. Leida juhusliku suuruse Z dispersioon.
4) Defineerida kovariatsioon.
5) Defineerida korrelatsioonikordaja. Loetleda tema omadused.

KUS ME OLEME? Defineerisime nihketa hinnangute hulgas efektiivse hinnangu. Efektiivne hinnang on olemas ainult regulaarsete tõenäosusjaotuste korral. Efektiivne hinnang on olemas alati vaid ühe ainsa parameetri funktsiooni jaoks, ta on üheselt määratud, mõjus ja piisav. Küsimust, kuidas otsida parimat nihketa hinnangut niisuguse parameetri funktsiooni jaoks, millele efektiivset hinnangut ei eksisteeri, me vaatluse alla ei võtnud.

KUHU LÄHEME? Tutvuma ühe tõenäosusjaotuste perega, millel on olemas terve rida kasulikke omadusi.

§8 Eksponentsiaalne jaotuste pere

Selles paragrahvis tutvume tõenäosusjaotuste perekonnaga, millel ühe parameetri funktsiooni jaoks eksisteerib efektiivne hinnang. See pere ühendab endas nii pidevaid kui ka diskreetseid tõenäosusjaotusi, vajalik on vaid kas tihedusfunktsiooni või tõenäosusfunktsiooni esitus teataval standardsel kujul.

Definitsioon 8.1. Eksponentsiaalsesse tõenäosusjaotuste perre kuuluvad regulaarsed tõenäosusjaotused, mille tihedusfunktsioon või tõenäosusfunktsioon on esitatav kujul

$$\exp[A(\theta)B(x) + C(\theta) + D(x)]. \tag{8.1}$$

Näide 8.2. (a) Olgu $X \sim N(0, \theta)$. Näitame, et see tõenäosusjaotus kuulub eksponentsiaalsesse perre. Tema tihedusfunktsioon on teatavasti määratud eeskirjaga

$$f(x,\theta) = (1/(\theta\sqrt{2\pi}))e^{-x^2/2\theta^2}.$$

Arvestades samasust $z = e^{\ln z}$, võime kirjutada

$$f(x,\theta) = \exp[-x^2/2\theta^2 - \ln(\theta\sqrt{2\pi})].$$

Näeme, et standardne esitus on saavutatud:

$$A(\theta) = -1/2\theta^2,$$

$$B(x) = x^2,$$

$$C(\theta) = -\ln(\theta\sqrt{2\pi}),$$

$$D(x) = 0.$$

Kuna tegemist on regulaarse jaotusega, siis on eksponentsiaalsesse perre kuulumine tõestatud.

(b) Olgu X geomeetrilise jaotusega, $X \sim G(\theta)$. Näitame, et see tõenäosusjaotus kuulub eksponentsiaalsesse perre. Selle jaotuse tõenäosusfunktsioon on määratud eeskirjaga

$$p(x,\theta) = \begin{cases} \theta(1-\theta)^x, & x=0,1,\ldots \\ 0, & \text{mujal} \end{cases}$$

Tõenäosusfunktsiooni võime ümber kirjutada kujul

$$p(x,\theta) = \exp[(\ln(1-\theta))x + \ln\theta].$$

Näeme, et standardne esitus on saavutatud:

$$A(\theta) = \ln(1-\theta),$$
$$B(x) = x,$$
$$C(\theta) = \ln\theta,$$
$$D(x) = 0.$$

Kuna tegemist on regulaarse jaotusega, siis on eksponentsiaalsesse perre kuulumine tőestatud.

(c) Olgu $X \sim U(0, \theta)$. See tőenäosusjaotus pole regulaarne, ta ei saa kuuluda eksponentsiaalsesse perre. *

Kui tőenäosusjaotus kuulub eksponentsiaalsesse perre, on parameetri θ hindamiseks olemas piisav statistik. Tőepoolest, esitusest (8.1) järeldub valimi tihedusfunktsiooni vői tőenäosusfunktsiooni esitus

$$\exp\left[A(\theta)\sum_{i=1}^{n} B(x_i) + nC(\theta) + \sum_{i=1}^{n} D(x_i)\right]. \qquad (8.2)$$

Faktoriseerimise kriteeriumi pőhjal on parameetri θ jaoks piisavaks statistik $T(\vec{X}) = \sum_{i=1}^{n} B(X_i)$.

Ajalooliselt oligi piisava statistiku olemasolu nőue tingimuseks, mis viis eksponentsiaalse tőenäosusjaotuste pere määramisele.

<u>Näide 8.3.</u> **Kirjutame näites 8.2 vaadatud tőenäosusjaotuste jaoks välja piisavad statistikud**

(a) Olgu $X \sim N(0, \theta)$. Siis

$$T(\vec{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 .$$

(b) Olgu $X \quad G(\theta)$. Siis

$$T(\vec{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i . \qquad *$$

Näitame veel, et paragrahvi algul nimetatud omadus kehtib - kui tőenäosusjaotus kuulub eksponentsiaalsesse perre, on parameetri mingi funktsiooni hindamiseks olemas efektiivne statistik. Tőepoolest, eksponentsiaalsesse perre kuulumisest järeldub valimi tőepärafunktsiooni esitus (8.2). Logaritmilise tőepärafunktsiooni jaoks saame siit avaldise

$$l(\vec{x}, \theta) = A(\theta)\sum_{i=1}^{n} B(x_i) + nC(\theta) + \sum_{i=1}^{n} D(x_i),$$

mille diferentseerimine annab meile

$$(\partial/\partial\theta)\, l(\vec{x}, \theta) = (\partial/\partial\theta)\, A(\theta)\sum_{i=1}^{n} B(x_i) + n(\partial/\partial\theta)\, C(\theta),$$

kust valimi talletise $U(\vec{X}, \theta)$ jaoks saame esituse

$$U(\vec{X},\theta) = nA'(\theta)\left[\sum_{i=1}^{n} B(X_i)/n + C'(\theta)/A'(\theta)\right].$$

Toetudes teoreemile 7.12 näeme, et efektiivne hinnang määratakse parameetri funktsioonile $g(\theta) = -C'(\theta)/A'(\theta)$, efektiivseks statistikuks on seejuures $\sum_{i=1}^{n} B(X_i)/n$, valimiinformatsioon $I_n(\theta) = n|A'(\theta)g'(\theta)|$ (vt. ülesandes 7.11. saadud tulemust).

Näide 8.4. Vaatame näites 8.2 (b) uuritud tőenäosusjaotust. Kuna

$$A'(\theta) = -1/(1-\theta),$$
$$C'(\theta) = 1/\theta,$$

määratakse efektiivne hinnang parameetri funktsioonile $(1-\theta)/\theta$, efektiivseks statistikuks on valimi keskväärtus $\bar{X}$. Valimi informatsioon

$$I_n(\theta) = n/[(1-\theta)\theta^2]$$

ja efektiivse hinnangu dispersioon

$$D\bar{X} = (1-\theta)/n\theta^2 \quad . \qquad *$$

Eksponentsiaalne pere on defineeritav ka siis, kui meil on tegemist tőenäosusjaotustega, mis sőltuvad mitmest tundmatust parameetrist. Vastava käsitlusega vőib tutvuda őpikus [6], lk. 82 - 84.

ÜLESANDED

1. Olgu tegemist järgnevate tihedusfunktsioonidega tőenäosusjaotustega
   (a) $f(x,\theta) = \theta x^{\theta-1}$, kui $0 < x < 1$ ($\theta > 0$),
   (b) $f(x,\theta) = \theta a x^{a-1}\exp(-\theta x^a)$, kui $x > 0$ ($\theta>0$, $a>0$, a on teada olev konstant),
   (c) $f(x,\theta) = \theta a^\theta / x^{(\theta+1)}$, kui $x > a$ ($\theta>0$, $a>0$, a on teada olev konstant).

   Näidata, et need jaotused kuuluvad eksponentsiaalsesse perre. Kirjutada välja funktsioonid A, B, C ja D ning piisav statistik parameetri θ jaoks. Millisele parameetri funktsioonile määratakse efektiivne hinnang? Milline on efektiivne statistik?
2. Olgu $X \sim G(\theta)$. Tőestada, et

(a) statistiku $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ jaotus kuulub samuti eksponentsiaalsesse perre nagu lähtejaotus;

(b) tõestada, et selle statistiku jaotuseks on negatiivne binoomjaotus

$$P(T(X)=t) = C_{n+t-1}^{t}(1-\theta)^t\theta^n.$$

3. Olgu $X \sim N(\mu, 1)$. Näidata, et see jaotus kuulub eksponentsiaalsesse perre.

4. Olgu $X \sim B(m,\theta)$. Näidata, et see jaotus kuulub eksponentsiaalsesse perre.

KUS ME OLEME? **Defineerisime** eksponentsiaalse tõenäosusjaotuste pere ühe tundmatu parameetri korral. Näitasime ära parameetri funktsiooni, mille jaoks on olemas efektiivne hinnang.

Oleme võtnud läbi sissejuhatuse parameetrite hindamise teooriasse - tutvunud põgusalt selles teoorias kasutatavate mõistetega ja hinnangu leidmiseks kasutatavate skeemidega. Loomulikult suurem osa sellest teooriast meie lühikäsitlusse ei mahtunud.

KUHU LÄHEME? Püüame anda veel väga lühida ülevaate vahenditest ja lähenemisviisidest "parima" hinnangu määramisel.

§9. Võimalusi optimaalse hinnangu määramiseks.

Eespool tutvusime ühe võimaliku skeemiga optimaalse hinnangu määratlemiseks ja leidmiseks - vaatasime, kuidas defineerida ja leida optimaalset hinnangut nihketa hinnangute hulgas. Niisugune lähenemisviis kannatab mõningate puuduste all - vaatame ainult teatavat kitsendust rahuldavat hinnangute hulka ja ka selles hulgas pole alati olemas definitsiooni mõttes optimaalset hinnangut. Püüame, arvestades mõningaid olulisi momente eelpool kirjeldatud lähenemisviisis, tutvuda üldisema skeemiga optimaalse hinnangu määramiseks.

Oluliseks parima hinnangu välja selgitamisel oli niisuguse karakteristiku kasutusele võtmine, mis võimaldaks **erinevaid** hinnanguid omavahel võrrelda. Nihketa hinnangute hulgas sobis selleks statistiku dispersioon. Üldjuhul toimitakse aga järgmiselt. Määratakse juhuslik suurus - statistiku ja tundmatu parameetri funktsioon - mida nimetatakse <u>kaofunktsiooniks</u> $L(T(\vec{X}),\theta)$. Statistiku karakteristikuks võetakse selle juhusliku suuruse keskväärtus – <u>riskifunktsioon</u> $R(T,\theta) = EL(T(\vec{X}),\theta)$. Optimaalseks statistikuks defineeritakse teatud mõttes "parima" riskifunktsiooniga statistik.

Andes nüüd kaofunktsioonile ja "parimale" konkreetse matemaatilise sisu, saame püstitada erinevaid optimaalse hinnangu leidmise ülesandeid.

Vaatame näidet niisugusest lähenemisviisist. Üheks kõige sagedamini kasutatavaks kaofunktsiooniks on statistiku ja parameetri tõelise väärtuse vahe ruut

$$L(T(\vec{X}),\theta) = (T(\vec{X}) - \theta)^2.$$

Sellele kaofunktsioonile vastavaks riskifunktsiooniks on funktsioon

$$R(T,\theta) = EL(T(\vec{X}),\theta) = DT(\vec{X}) + (ET(\vec{X}) - \theta)^2 ,$$

n.n. statistiku keskmine ruutviga. "Parimaks" on loomulik lugeda niisugust statistikut $T_*(\vec{X})$, mille keskmine ruutviga on minimaalne, s.t.

$$R(T_*, \theta) = \min_T R(T, \theta) .$$

Selle tingimuse põhjal määratud parimat hinnangut nimetatakse vähimruut-hinnanguks. Vähimruut-hinnang võib olla nihkega, kusjuures nihe on määratud eeskirjaga $ET(\vec{X}) - \theta$.

Vaatame lihtsat näidet niisuguse lähenemisviisi kohta.

<u>Näide 9.1.</u> Olgu üldkogum normaaljaotusega, $X \sim N(\mu, \sigma)$. Vaatame statistikuid, mis on esitatavad kujul $T_c(X) = cS^2$, kus c on vabalt valitud positiivne konstant, S^2 aga valimi dispersioon. See statistikute perekond sobib parameetri σ^2 hindamiseks. Arvutame statistiku $T_c(\vec{X})$ riskifunktsiooni. Kuna tehtud eeldustel $DS^2 = 2\sigma^4/(n-1)$ ja $ET_c(\vec{X}) = c\sigma^2$, siis

$$R(T_c,\sigma) = DT_c(X) + (ET_c(X) - \sigma^2)^2 = 2c^2\sigma^4/(n-1) + \sigma^4(c-1)^2.$$

Minimiseerides saadud avaldise c järgi saame vähimruut-statistiku $T_c(X) = (n-1)S^2/(n+1)$. Selle statistiku nihe on $-2\sigma^2/(n+1)$. ✱

Probleemi lahendamise kergus on seletatav siin sellega, et meil oli vaatluse all äärmiselt kitsas tõenäosusjaotuste klass. Kasulik on aga pöörata tähelepanu sellele, et kasutusele võetud riskifunktsioon võimaldab omavahel võrrelda nihkega ja nihketa statistikuid. Selle riskifunktsiooni korral võib nihutatud, kuid väikese dispersiooniga statistik olla eelistatud nihketa, kuid suurema dispersiooniga statistiku ees.

Sama riskifunktsiooni - statistiku keskmist ruutviga - võib "parima" statistiku määramisel kasutada ka teisiti: lugeda optimaalseks niisugust statistikut $T_*(\vec{X})$, mille korral riskifunktsiooni maksimaalne väärtus parameetri θ järgi on minimaalne,

$$R(T_*, \theta) = \min_T \max R(T, \theta) .$$

Niisuguse kriteeriumi põhjal leitud hinnangut nimetatakse m i n i m a k s h i n n a n g u k s.

Kuna riskifunktsiooni maksimum parameetri θ järgi võib osutuda lõpmatuks, siis minimaks hinnangu leidmiseks on otstarbekas kaofunktsiooni kasutada pisut teistsugusel kujul, nimelt

$$L_*(T(\vec{X}), \theta) = c(\theta)L(T(\vec{X}), \theta) ,$$

kus $c(\theta)$ on sobivalt valitud parameetri funktsioon.

Kokkuvõtteks. Optimaalse hinnangu leidmise ülesanne pole üheselt määratav. On võimalikud mitmed erinevad lähenemisviisid,mis baseeruvad erinevalt määratud riski "optimiseerimisel" erinevas mõttes.

KUS ME OLEME? Tutvusime mõistetega, mida kasutatakse "parima" hinnangu leidmise ülesande esitamisel. Võtame teadmiseks,et ei ole olemas ühte igas mõttes ja alati kõige paremat hinnangut.

KUHU LÄHEME? Asume tutvuma teise statistika põhiülesandega - usaldusintervalli konstrueerimisega.

§10. Parameetri intervallhinnang.

Kõikidel punkthinnangutel - ükskõik kui palju häid omadusi ka poleks teda määraval statistikul - on üks ühine nõrkus: hinnanguks valitud arv erineb peaaegu kindlasti parameetri tõelisest väärtusest, selle erinevuse võimalikust ulatusest ei anna punkthinnang aga mitte mingit ettekujutust. Teame näiteks, et Poissoni jaotuse parameetrile määrab parima hinnangu valimi keskväärtus $\bar{x}$, olgu näiteks $\bar{x} = 3,8$. Kas aga nüüd on tõenäoline, et tõeline λ väärtus asub selle hinnangu lähedal, näiteks lõigul $[3,7;\ 3,9]$ või võib $|\hat{\lambda} - \lambda|$ olla hoopis suurem, selle kohta punkthinnang informatsiooni ei anna.

Hinnangu täpsuse kirjeldamiseks võetakse kasutusele usaldusintervall. Moodustada lõpliku pikkusega juhuslik intervall, mis sisaldaks kindlasti parameetri tõelist väärtust, pole võimalik. Seetõttu piirdutakse usaldusintervalli defineerimisel nõudega, et parameetri tõeline väärtus peab sisalduma selles etteantud (ühele lähedase) tõenäosusega. Anname usaldusintervalli definitsiooni.

Definitsioon 10.1. Statistikud $\underline{T}(\vec{X})$ ja $\overline{T}(\vec{X})$ $(\underline{T}(\vec{X}) < \overline{T}(\vec{X}))$ määravad parameetrile θ usaldusintervalli usaldusnivooga $1-\alpha$, kui iga parameetri väärtuse korral kehtib

$$P(\underline{T}(\vec{X}) \leq \theta \leq \overline{T}(\vec{X})) \geq 1-\alpha.$$

Statistikute poolt määratud väärtusi nimetatakse usalduspiirideks (alumiseks ja ülemiseks).

Peale katse sooritamist omandavad usalduspiirid konkreetsed arvulised väärtused $\underline{T}(\vec{x})$ ja $\overline{T}(\vec{x})$, parameetri tõeline väärtus võib selles konkreetses intervallis sisalduda või mitte. Usaldusintervalli konstruktsioon tagab üksnes seda, et niisuguse intervalli paljukordsel kasutamisel keskmiselt $(1-\alpha)100\%$ intervalle sisaldab parameetri tõelist väärtust. Seega usaldusnivoo iseloomustab riski - $(1-\alpha)100$ juhul $\alpha 100$ juhu vastu asub parameetri tõeline väärtus meie poolt määratud usaldusintervallis.

Nagu kõik eelpool vaadatud statistikute omadused, ei kirjelda usaldusintervall mitte konkreetset katses saadud hinnangut, vaid seaduspärasust, mis ilmneb seda hinnangut määrava statistiku korduval kasutamisel.

Usaldusintervalli leidmisel on mõistlik ära kasutada sama statistik, mille abil määratakse parameetrile θ arvuline hinnang. Vaatame sellekohast näidet.

Näide 10.2. Olgu meil tegemist üldkogumiga, mida kirjeldab ühtlane jaotus, $X \sim U(0, \theta)$. Seame oma eesmärgiks leida statistikute paar, mis definitsiooni kohaselt määraks usaldusintervalli parameetrile θ. Nagu eelnevast teame, määrab parameetrile θ hinnangu statistik $X_{(n)}$. Selle statistiku tõenäosusjaotus on leitud näites 2.8. See tõenäosus-

20 z.10

jaotus sõltub küll parameetrist θ, kuid nagu kohe näeme, ei osutu see asjaolu usaldusintervalli leidmisel segavaks.

Arvestades üldist tulemust - kui juhuslike suuruste Y ja Z vahel kehtib seos $Y = aZ$, siis juhusliku suuruse Y tihedusfunktsioon avaldub juhusliku suuruse Z tihedusfunktsiooni kaudu valemiga

$$f_Y(y) = f_Z(y/a)/a,$$

saame hõlpsasti välja kirjutada statistiku $X_{(n)}$ ja parameetri θ abil määratud uue juhusliku suuruse, mille jaotus ei sõltu enam tundmatutest parameetritest. Tõepoolest, kui $Z=X_{(n)}/\theta$, siis

$$f_Z(z) = \begin{cases} nz^{n-1}, & 0 \leq z \leq 1 \\ 0, & \text{mujal} \end{cases}$$

Valime usaldusnivoo väärtuse; olgu meie ülesandes $1-\alpha = 0,9$. Leiame konstandid a ja b nii, et meie poolt moodustatud juhuslik suurus $X_{(n)}/\theta$ asuks nende konstantide vahel tõenäosusega 0,9

$$P(a \leq X_{(n)}/\theta \leq b) = 0,9.$$

Kui niisugused konstandid on leitud, on usaldusintervalli saamine juba väga lihtne: sulgudes oleva võrratuse võime teisendada samaväärsele kujule $X_{(n)}/b \leq \theta \leq X_{(n)}/a$. Mõlemad võrratused kehtivad üheaegselt. Järelikult

$$P(X_{(n)}/b \leq \theta \leq X_{(n)}/a) = 0,9$$

ja olemegi saanud definitsiooni kohase usaldusintervalli. Selge on, et selliseid konstante saab valida väga mitmel viisil, meie kasutame nende määramiseks tingimusi $P(X_{(n)}/\theta < a) = 0,05$ ja $P(X_{(n)}/\theta > b) = 0,05$. Kuna

$$P(X_{(n)}/\theta < a) = \int_0^a nz^{n-1}dz = a^n,$$

siis

$$a = \sqrt[n]{0,05}.$$

Analoogiliselt

$$P(X_{(n)}/\theta > b) = \int_b^1 nz^{n-1}dz = 1 - b^n,$$

kust

$$b = \sqrt[n]{0,95}.$$

Kui meie käsutuses on konkreetne valim, saame leida usaldusintervalli arvulise väärtuse. Kasutades näites 4.4 toodud

10-elemendilist valimit, kus $x_{(10)} = 2,71$ ja parameetri nihketa hinnanguks on 2,98, saame usaldusintervalli $[2,72; 3,66]$.

Analüüsime veel kord selle tulemuse sisulist tähendust. Vastavalt valitud usaldusnivoole asub parameetri tõeline väärtus 2,72 ja 3,66 vahel riskiga 9 juhtu 1 juhu vastu. Kuna me selle riski ise valisime, peab ta meile olema vastuvõetav ja alati, kui tahame kirjeldada parameetri täpsust, kasutame saadud tulemust: parameeter asub intervallis $[2,72; 3,66]$.

Illustreerimaks selle otsuse ja tegelikkuse vahekorra teist külge tuletame meelde näite 4.4 sisulise tähenduse - kasutatud valimid genereeriti arvutil teatava programmi abil. Erinevalt meie valimi tavapärasest genereerijast - "mustast kastist", mille "looja" on teadmata - on programmil olemas autor, kellega on võimalik kontakteeruda ja välja selgitada parameetri θ tõeline väärtus. Antud juhul $\theta = 3$. Selle katse korral on parameetri tõelise väärtuse ja hinnangu vaheline erinevus 3-2,98=0,02. Usaldusintervall ei iseloomusta konkreetse katse täpsust, ta annab vaid ettevõetud riskiga tõkke erinevuse suurusele. *

Näites kasutatud strateegia on rakendatav väga paljude praktiliste ülesannete korral. Esitame ta veel kord.

1. Moodustame parameetri hindamiseks kasutatava statistiku ja parameetri funktsiooni $g(T(\vec{X}), \theta)$ - uue juhusliku suuruse - mille jaotus ei sõltu tundmatust parameetrist.
2. Leiame vastavalt valitud usaldusnivoole $1-\alpha$ konstandid $q_{\alpha/2}$ ja $\bar{q}_{\alpha/2}$, et kehtib võrdus

$$P(q_{\alpha/2} \leq g(T(\vec{X}), \theta) \leq \bar{q}_{\alpha/2}) \geq 1-\alpha.$$

(Kui tegemist on pideva jaotusega, saame konstandid valida selliselt, et kehtiks täpne võrdus, diskreetse jaotuse korral aga pole see alati võimalik.)

3. Teisendame sulgudes oleva võrratuse sellisele kujule, et keskele jääks üksnes tundmatu parameeter θ

$$P(\underline{T}(\vec{X}) \leq \theta \leq \bar{T}(\vec{X})) \geq 1-\cancel{\theta.}\ \alpha$$

Definitsiooni kohaselt määravad võrratuse vasakule ja paremale tekkinud statistikud parameetrile θ usaldusintervalli, mis vastab usaldusnivoole $1-\alpha$.

Selle strateegia kasutamise teeb mugavaks niisuguste – antud tõenäosusjaotust iseloomustavate – konstantide perekonna olemasolu, mida saab kasutada teisel sammul vajaliku konstantse intervalli väljakirjutamiseks. Toome ära vastavad definitsioonid.

Definitsioon 10.3. Juhusliku suuruse Z α-kvantiiliks nimetatakse niisugust arvu q_α, mille korral kehtib võrdus

$$P(Z < q_\alpha) = \alpha.$$

Definitsioon 10.4. Juhusliku suuruse Z α-täiendkvantiiliks $\bar{q}_\alpha$ nimetatakse niisugust arvu, mille korral kehtib võrdus

$$P(Z > \bar{q}_\alpha) = \alpha.$$

Ilmselgelt annavad $\alpha/2$ -kvantiil ja $\alpha/2$-täiendkvantiil konstantse intervalli, milles antud jaotusega juhuslik suurus sisaldub tõenäosusega $1-\alpha$.

Statistikas kasutatavate kvantiilide (või täiendkvantiilide) väärtused esitatakse tabelites. Kuna kvantiil ja täiendkvantiil on pideva tõenäosusjaotuse korral alati üksteise kaudu avaldatavad

$$q_\alpha = \bar{q}_{1-\alpha}, \tag{10.1}$$

sümmeetrilise jaotuse korral aga

$$q_\alpha = -\bar{q}_\alpha, \tag{10.2}$$

siis saab kvantiilide ja täiendkvantiilide väärtused esitada ühes ja samas tabelis.

Juhime veel tähelepanu asjaolule, et diskreetsel tõenäosusjaotusel ei leidu iga α korral definitsiooniga 10.3 määratud α-kvantiili. Seetõttu pole ka võimalik leida niisugust usaldusintervalli, mille korral parameetri "tabamise" tõenäosus v õ r d u k s usaldusnivooga. Sellises situatsioonis on loomulik kasutada statistikuid, mille korral $P(\underline{T}(X) \leq \theta \leq \bar{T}(\vec{X}))$ oleks suurem usaldusnivoost $1-\alpha$, kuid sellele nii lähedane kui võimalik. Sellele vaatamata on selge, et definitsioon ei seo usaldusnivood ja usaldusintervalli üheselt: usaldusintervall, mis vastab usaldusnivoole $1-\alpha$, vastab ka igale usaldusnivoole $1-\alpha'$, kus $1-\alpha' > 1-\alpha$. Niisuguse ebamäärasuse kõrvaldamiseks võetakse kasutusele usalduskordaja mõiste. Usalduskordajaks nimetatakse antud usaldusintervallile vastavat maksimaalset usaldusnivood.

Põhimõtteliselt võib usaldusnivoo valida vabalt. Kuid, peamiselt kvantiilide tabelite mahu vähendamiseks, on kasutusel kolm traditsioonilist väärtust usaldusnivoo jaoks. Need on

$$\boxed{0{,}9 \qquad 0{,}95 \qquad 0{,}99}\,.$$

Vaatame veel lõpuks ühte näidet, mis demonstreerib, kuidas on seotud usaldusintervalli ulatus ja usaldusnivoo.

<u>Näide 10.5</u>. Olgu uuritav tunnus ühtlase jaotusega $X \sim U(0, \theta)$. Kasutades näites 4.4 toodud 10-elemendilist valimit, kus $x_{(10)} = 2{,}71$ ja $\hat{\theta} = 2{,}98$, leiame usaldusnivoole 0,95 ja 0,99 vastavad usaldusintervallid. Vastavalt näites 10.2 saadud valemitele saame usaldusintervalli leidmisel vajalikud konstandid a ja b esitada kujul

$$a = \sqrt[n]{\alpha/2}\,; \qquad b = \sqrt[n]{1-\alpha/2}\,,$$

kust saame tulemused:

usaldusnivoole 0,95 vastab usaldusintervall $[2{,}72;\ 3{,}92]$

usaldusnivoole 0,99 vastab usaldusintervall $[2{,}71;\ 4{,}60]$.

Näeme ja peame meeles: usaldusnivoo suurenedes kasvab usaldusintervalli laius. *

ÜLESANDED

1. Kasutades normaaljaotuse omadusi tõestada, et normaaljaotusega üldkogumist pärineva valimi keskväärtus $\bar{X}$ on normaaljaotusega.
2. Olgu $X \sim N(\theta, a)$, kus a on teadaolev konstant. Leida usaldusnivoole $1-\alpha$ vastav usaldusintervall parameetrile θ.
3. Olgu mahlaautomaadi poolt väljastatava mahlaportsjoni kaal normaaljaotusega juhuslik suurus, kusjuures tema standardhälve on 10g. Leida o,9-usaldusnivooga usaldusintervall mahlaportsjoni keskmisele kaalule, kui 36 kontrollitud mahlaportsjoni keskmine kaal oli 195g.

   Leida samadel andmetel usaldusnivoodele 0,8 ja 0,99 vastavad usaldusintervallid.
4. Ekspert-normeerija soovib kindlaks määrata keskmise aja, mis kulub teatava detaili valmistamiseks. Võib oletada, et detaili valmistamiseks kuluv aeg on normaaljaotusega juhuslik suurus, mille standardhälve on 40 sek. Kui palju

mõõtmisi tuleb teha, et määratud 0,95-usaldusnivooga usaldusintervalli laius poleks suurem kui 15 sek.

5. Hommikusel tipptunnil, kui elamisrajooni ja tööstusrajooni ühendaval liinil on palju busse, võib lõpp-peatusesse saabuvate busside vahelist intervalli vaadata kui ühtlase jaotusega juhuslikku suurust, $X \sim U(0, \theta)$. Mitte trügida armastav reisija, kes jäi maha 5 bussist, registreeris järgmised saabumiste vahelised intervallid: 1,5 3,5 2,8 3,0 0,1 (minutites). Leida vabalt valitud usaldusnivooga usaldusintervall busside vahelise intervalli maksimaalväärtusele.

Kordamisküsimusi tõenäosusteooriast.

1) Olgu X pidev juhuslik suurus, mis võib omandada väärtusi intervallis $(-\infty, \infty)$. Kas leidub lõplik intervall, milles see juhuslik suurus asub tõenäosusega 0,9? 0,99? 1?
2) Defineerida kahe juhusliku sündmuse võrdsus.
3) Kasutades kvantiili ja täiendkvantiili definitsiooni tõestada võrdused (10.1) ja (10.2).
4) Kehtigu juhuslike suuruste Y ja Z vahel seos $Y=1/Z$. Milline seos kehtib nende juhuslike suuruste kvantiilide ja täiendkvantiilide vahel?

KUS ME OLEME? Võtsime kasutusele vahendi tundmatu parameetri hinnangu täpsuse kirjeldamiseks - selleks on usaldusintervall. Piltlikult võiks usaldusintervalli võrrelda püünisega, mille me "valimi abil" viskame arvteljele, et "tabada" tundmatu parameetri tõelist väärtust. Siin aga analoogia lõpebki - me ei saa kunagi teada, kas meie "püünis" tabas või mitte. Usaldusnivoo valikuga on aga võimalik reguleerida "püünise" töökindlust - tabamise sagedust "püünise" paljukordsel kasutamisel. Uut konstruktsiooni seob eelnevaga ühine põhiline töövahend - usaldusintervalli konstrueerimisel võime kasutada kõiki neid statistikuid, mida kasutame tundmatu parameetri hindamiseks.

Tähelepanelik lugeja märkas kindlasti, et meie poolt välja pakutud skeem usaldusintervalli konstrueerimiseks pole alati rakendatav - selleks, et esitada võrratus meile vajalikul kujul, peab $g(T(\vec{X}), \theta)$ sõltuma parameetrist θ monotoonselt. Niisuguse omadusega juhusliku suuruse olemasolu pole üldjuhul garanteeritud. Samuti ei pea alati leiduma niisugust juhuslikku suurust $g(T(\vec{X}), \theta)$, mille jaotuse kvantiilid on tabuleeritud.

KUHU LÄHEME? Õpime konstrueerima ligikaudset usaldusintervalli Bernoulli jaotuse parameetrile. See on praktikas sageli esinev ülesanne, mida võiks sõnastada ka järgmiselt - usaldusintervalli konstrueerimine teatava omadusega objektide osale (protsendile) üldkogumis.

Ligikaudset usaldusintervalli aga konstrueerime selle pärast, et see on lihtsam täpse usaldusintervalli konstrueerimisest - saame kasutada lõppenud paragrahvis kirjeldatud skeemi.

§11. Asümptootiline usaldusintervall Bernoulli jaotuse parameetrile.

A. Asümptootiline normaalsus

Nagu eelmises paragrahvis nägime, on usaldusintervalli määramisel vajalik teada kasutatava statistiku tõenäosusjaotust. Selle leidmine võib aga osutuda üsna keerukaks ülesandeks. Samuti võib juhtuda, et statistiku tõenäosusjaotuse iseloom ei luba kasutada üleal kirjeldatud strateegiat usaldusintervalli leidmiseks.

Paljudel juhtudel lubab selliseid raskusi vältida statistiku asümptootilise tõenäosusjaotuse kasutamine. Vaatame kasvavatele valimi mahtudele vastavat statistikute jada $T_1(\vec{X}), T_2(\vec{X}), \ldots, T_n(\vec{X}), \ldots$. Statistiku <u>asümptootiliseks jaotuseks</u> nimetatakse tõenäosusjaotust, mis on selle jada elementide tõenäosusjaotuste piirväärtuseks valimi mahu piiramatul kasvamisel.

Küllalt sageli on statistikute asümptootiliseks jaotuseks normaaljaotus. Teoreetilised tingimused, millede täidetuse korral juhuslike suuruste jada piirjaotuseks on normaaljaotus annavad tõenäosusteooria kursuses vaadatud piirteoreemid.

Kui statistik $T_n(\vec{X})$ on asümptootiliselt normaalne, leiduvad konstandid μ_n ja σ_n, et statistiku $(T_n(X)-\mu_n)/\sigma_n$ asümptootiliseks jaotuseks on standardne normaaljaotus. Niisuguseid konstante nimetame statistiku asümptootilisteks parameetriteks. Küllalt suure valimi mahu korral võib statistiku $T_n(\vec{X})$ ligikaudseks jaotuseks lugeda normaaljaotuse $N(\mu_n, \delta_n)$.

Asümptootiliselt normaalseks statistikuks on näiteks valimi keskväärtus $\bar{X}_n$. Kui vaid üldkogumil on olemas lõplik dispersioon δ^2, on valimi keskväärtuse ligikaudseks jaotuseks $N(\mu, \delta/\sqrt{n})$ (sümboliga μ tähistame üldkogumi keskväärtust). Nii võib Poissoni jaotuse $P(\lambda)$ korral $\bar{X}$ ligikaudseks jaotuseks lugeda normaaljaotuse $N(\lambda, \sqrt{\lambda/n})$, Bernoulli jaotuse $B(1, \theta)$ korral aga normaaljaotuse $N(\theta, \sqrt{\theta(1-\theta)/n})$.

Küllalt üldistel tingimustel on ka asümptootilise normaaljaotusega statistikust teatava funktsiooni abil moodustatud statistik asümptootiliselt normaalne. Sõnastame selle tulemuse järgmise teoreemina.

Teoreem 11.1. Olgu statistik $T(\vec{X})$ parameetri θ hindamisel mõjus ja asümptootiliselt normaalne parameetritega μ_n ja δ_n. Olgu g diferentseeruv funktsioon. Siis statistik $g(T(\vec{X}))$ on parameetri funktsiooni $g(\theta)$ hindamisel mõjus ja asümptootiliselt normaalne parameetritega $g(\mu_n)$ ja $|g'(\theta)|\delta_n$.

Tõestus. Teoreemi tõestuse võib leida õpikust [1] lk. 295.

Täiendavat materjali asümptootiliselt normaalsete statistikute kohta võib leida õpikust [9] lk. 21-26.

Teeme veel ühe kokkuleppe sümbolite kasutamise osas. Usalduspiiri väljakirjutamisel peab meil olema selge, millise jaotuse kvantiili peame kasutama. Valemite lugemise lihtsustamiseks võtame erinevate tõenäosusjaotuste kvantiilide tähistamiseks kasutusele erinevad tähed. Standardse normaaljaotuse kvantiili tähistame edaspidises alati sümboliga z_α.

B. Näiteid usaldusintervallide leidmise kohta

Vaatame üldkogumit, mida kirjeldab Bernoulli jaotus. Seame eesmärgiks leida usaldusintervall jaotuse parameetrile θ. Selle leidmisel lähtume asjaolust, et valimi keskväärtus on asümptootiliselt normaalne, suurte valimite korral võime niisugusest üldkogumist pärineva valimi keskväärtuse jaotuseks lugeda normaaljaotuse $N(\theta, \sqrt{\theta(1-\theta)/n})$. Usaldusintervalli leidmiseks rakendame eelmises paragrahvis kirjeldatud strateegiat.

1. Moodustame parameetri θ hindamiseks kasutatava statistiku $\bar{X}$ ja parameetri θ funktsiooni $(\bar{X}-\theta)/\sqrt{\theta(1-\theta)/n}$.

Suure valimi korral võib selle funktsiooni ligikaudseks jaotuseks lugeda standardse normaaljaotuse N(0,1).

2. Kasutades standardse normaaljaotuse tabelit leiame konstandid $\underline{z}_{\alpha/2}$ ja $\bar{z}_{\alpha/2}$ nii, et kehtib võrdus

$$P(\underline{z}_{\alpha/2} \leq (\bar{X} - \theta)/\sqrt{\theta(1-\theta)/n} \leq \bar{z}_{\alpha/2}) = 1-\alpha.$$

3. Teisendame sulgudes oleva võrratuse sellisele kujule, et keskele jääks tundmatu parameeter θ. Praegu kulub selleks küllalt palju tööd.

Paneme esmalt tähele, et normaaljaotuse sümmeetrilisuse tõttu $\underline{z}_{\alpha/2} = -\bar{z}_{\alpha/2}$. Seega on sulgudes olev võrratus samaväärne võrratusega

$$|\bar{X} - \theta|/\sqrt{\theta(1-\theta)/n} \leq z ,$$

kus kasutatava positiivse konstandi tähistame lühiduse mõttes lihtsalt sümboliga z. Viimase võrratuse võime kirjutada ümber kujul

$$(\bar{X} - \theta)^2 \leq z^2(\theta(1-\theta)/n) .$$

Avades sulud ja järjestades võrratuse liikmed ümber θ astmete järgi, saame

$$\theta^2(1+z^2/n) - \theta(2\bar{X} + z^2/n) + \bar{X}^2 \leq 0 .$$

Vasakul pool olev avaldis saab olla negatiivne vaid siis, kui parameetri θ väärtused asuvad ruutvõrrandi $\theta^2(1+z^2/n) - \theta(2\bar{X} + z^2/n) + \bar{X}^2 = 0$ lahendite vahel. Selle ruutvõrrandi lahendid aga on määratud eeskirjadega

$$\underline{T}(\vec{X}) = (\bar{X}+z^2/2n - (z/\sqrt{n})\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})+z^2/4n})/(1+z^2/n),$$

$$\bar{T}(\vec{X}) = (\bar{X}+ z^2/2n+(z/\sqrt{n})\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})+z^2/4n})/(1+z^2/n).$$

Seega

$$P(\underline{T}(\vec{X}) \leq \theta \leq \bar{T}(\vec{X})) = 1 - \alpha.$$

Usalduspiire määravad statistikud on leitud.

Kui valimi maht on küllalt suur, võib usalduspiiride avaldises ära jätta liikmed, mille nimetajas on n (väga jäme praktiline reegel: kui valimi maht on 100 läheduses, võib kasutada lihtsustatud usalduspiire). Seega saame usalduspiiride lihtsustatud eeskirjad:

$$\underline{T}(\vec{X}) = \bar{X} - \bar{z}_{\alpha/2}\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})/n},$$

$$\bar{T}(\vec{X}) = \bar{X} + \bar{z}_{\alpha/2}\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})/n} .$$

Vaatame arvulist näidet tuletatud valemite rakendamise kohta.

Näide 11.2. Uuriti teatava TV programmi vaadatavust ühes linnas. Viidi läbi küsitlus, 350 küsitletust 100 vaatas seda programmi järjekindlalt. Leiame usaldusintervalli vaatajate protsendile, kes selles linnas vaatavad nimetatud programmi järjekindlalt.

Lepime kokku lugeda uuritava tunnuse väärtuseks 1, kui vastaja vaatab programmi järjekindlalt, ja 0, kui vastaja seda ei tee. Uuritava tunnuse kirjeldamiseks sobib siis Bernoulli jaotus, kusjuures selle jaotuse parameeter θ näitab linnaelanike osa, kes vaatab programmi järjekindlalt. Seega on kõik eeldused eelpool toodud valemite rakendamiseks täidetud. Kuna vaatluste arv on üle 100, kasutame lihtsustatud valemeid.

Valime usaldusnivoo väärtuseks 0,95. Leiame normaaljaotuse tabelist konstandi $\bar{z}_{0,025} = 1,96$. Arvutame usalduspiirid

$$\underline{T}(\vec{x})=0,29-1,96\sqrt{0,29\cdot 0,71/350}=0,29-0,05=0,24$$

$$\overline{T}(\vec{x})=0,29+1,96\sqrt{0,29\cdot 0,71/350}=0,29+0,05=0,34$$

Saame usaldusintervalli [0,24; 0,34]. Usaldusintervalli võime esitada ka protsentides - selleks tuleb usalduspiirid korrutada sajaga. Saame usaldusintervalli [24%; 34%].

Kasutades valimi põhjal määratud hinnangut 29% võime loota, (riskiga 95 :5) et tehtud viga pole suurem kui 5%. *

Vaatame veel võimalust teoreemi 11.1 rakendamiseks. Praktika ja teoreetilised uurimused on näidatud, et asümptootilise statistiku funktsioon võib mõnikord olla paremini lähendatav normaaljaotusega, kui argumendiks olev statistik. Paremini selles mõttes, et normaaljaotus on kasutatav juba küllalt väikeste valimi mahtude korral.

Bernoulli jaotuse korral on otstarbekas kasutada keskväärtuse funktsiooni, mis on määratud eeskirjaga

$$Z = 2\arcsin\sqrt{\bar{X}}.$$

Selle statistiku ligikaudseks jaotuseks on vastavalt teoreemile 11.1 normaaljaotus parameetritega $2\arcsin\sqrt{\theta}$ ja $1/\sqrt{n}$. Kui keskväärtuse $\bar{X}$ tõenäosusjaotuse lähendamine normaaljaotusega on otstarbekas valimi mahtude korral, mis on 50 lähedases, siis Z asümptootilise jaotuse kasutamine on otstar-

... valimi mahtude korral, mis on 20 läheduses.

Rakendame usaldusintervalli välja kirjutamiseks oma tavalist strateegiat.

1. Moodustame juhusliku suuruse $(2\arcsin\sqrt{\bar{X}} - 2\arcsin\sqrt{\theta})\sqrt{n}$. Selle juhusliku suuruse ligikaudseks jaotuseks võib lugeda standardse normaaljaotuse N(0,1).

2. Kasutades normaaljaotuse tabelit leiame normaaljaotuse kvantiili $\bar{z}_{\alpha/2}$, nii et kehtib võrdus

$$P(-\bar{z}_{\alpha/2} \leq (2\arcsin\sqrt{\bar{X}} - 2\arcsin\sqrt{\theta})\sqrt{n} \leq \bar{z}_{\alpha/2}) = 1 - \alpha.$$

3. Teisendame sulgudes oleva võrratuse sellisele kujule, et keskele jääks tundmatu parameeter θ. Praegu on seda kasulik teha kahes etapis. Jätame esmalt keskele parameetri funktsiooni

$$2\arcsin\sqrt{\bar{X}} - \bar{z}_{\alpha/2}/\sqrt{n} \leq 2\arcsin\sqrt{\theta} \leq 2\arcsin\sqrt{\bar{X}} + \bar{z}_{\alpha/2}/\sqrt{n}.$$

Tähistame võrratuse äärtele jäänud statistikud

$$\varphi_1 = 2\arcsin\sqrt{\bar{X}} - \bar{z}_{\alpha/2}/\sqrt{n}$$

$$\varphi_2 = 2\arcsin\sqrt{\bar{X}} + \bar{z}_{\alpha/2}/\sqrt{n} .$$

Kuna arcsin on monotoonne teisendus, millel on olemas pöördteisendus, võime võrratuse kõikidele liikmetele rakendada vastavat pöördteisendust. Võrratus jääb kehtima

$$(\sin \varphi_1/2)^2 \leq \theta \leq (\sin \varphi_2/2)^2 .$$

Seega

$$P((\sin\varphi_1/2)^2 \leq \theta \leq (\sin\varphi_2/2)^2) = 1 - \alpha.$$

Definitsiooni kohaselt määravad võrratuse äärtele jäänud statistikud usaldusintervalli, mis vastab usaldusnivoole $1-\alpha$.

<u>Näide 11.3.</u> Soovitakse hinnata noorloomade osakaalu teatavas mereloomade populatsioonis. Väljapüütud 16 loomast osutusid 5 noorloomadeks. Leida 0,9 usaldusnivooga usaldusintervall noorloomade osakaalule selles populatsioonis.

Kasutame usaldusintervalli määramiseks viimasena toodud valemeid. Leiame esmalt parameetri θ hinnangu $\hat{\theta} = \bar{x} = 5/16 = 0{,}31$.

Leiame tabelist normaaljaotuse kvantiili $\bar{z}_{0,05}=1{,}64$. Arvutame statistikud φ_1 ja φ_2

$$\varphi_1 = 1,19 - 1,64/4 = 0,78$$
$$\varphi_2 = 1,19 + 1,64/4 = 1,60 .$$

Leiame parameetrile usalduspiirid

$$\underline{T}(\vec{x}) = 0,14 \cdot$$
$$\overline{T}(\vec{x}) = 0,51 \cdot$$

Saime usaldusintervalli $[0,14;\ 0,51]$, ehk protsentides $[14\%;\ 51\%]$. *

Arvutuste lihtsustamiseks on koostatud teisenduse $Z = 2\arcsin\sqrt{X}$ tabelid.

ÜLESANDED

1. Olgu $X \sim P(\lambda)$. Leida parameetri λ usalduspiire määravad statistikud, kasutades valimi keskväärtuse asümptootilist normaalsust. Näpunäide: kasutada keskväärtuse funktsiooni $\sqrt{\overline{X}}$.
2. Seoses ühe teenindussüsteemi töö uurimisega registreeriti 100 juhuslikult valitud tunni jooksul teenindussüsteemi saabunud tellimuste arv. Saadud valimi keskväärtus $\bar{x} = 7,5$. Valida usaldusnivoo. Kasutades eelmises ülesandes tuletatud valemeid kirjutada välja sellele usaldusnivoole vastav usaldusintervall tegelikule tunnis saabuvate tellimuste arvu keskväärtusele.
3. Teatavate toodete partii kvaliteedi hindamiseks kontrolliti 100 juhuslikult valitud toodet sellest partiist, 8 kontrollitud toodet osutusid praagiks. Leida usaldusintervall praagi protsendile selles partiis, kasutades usaldusnivoosid 0,95 ja 0,99.
4. Vaatluse all olid teatavat sorti ploomiistikud. Pärast külma talve hukkus 25 istikust 8. Leida usaldusintervall selle sordi istikute protsendile, mis pärast niisugust talve säilitavad eluvõime.

Kordamisküsimusi tõenäosusteooriast

1) Defineerida jaotuse järgi koondumine.
2) Sõnastada tsentraalne piirteoreem.
3) Kuidas seda teoreemi sõnastada statistika terminites?
4) Kas saab hinnata lõpliku n korral piirjaotusest erinevuse suurust?

KUS ME OLEME? Harjutamas usaldusintervalli konstrueerimist.

KUHU LÄHEME? Edasi tuleks kuidagi määratleda usaldusintervalli optimaalsuse kriteerium ja püstitada probleem optimaalse usaldusintervalli konstrueerimisest. Need küsimused aga ei leia käesolevas õppevahendis käsitlemist. Lühidalt võib nendega tutvuda õpikus [9], lk. 81-95.

Meie võtame käsile kolmanda põhilise statistika ülesande: statistiliste hüpoteeside kontrollimise.

§12. Statistiliste hüpoteeside kontrollimise ülesanne

Siiani vaatasime statistilisi otsustusi, mis esitatakse arvuliselt - ühe arvuna või teatava arvulise intervallina. Paljudes praktilistes ülesannetes aga ei pea järeldus olema arvuline, vaid tuleb otsustada, kas teatav väide üldkogumi kohta on vastuolus katsetulemustega või mitte.

Väiteid, mis puudutavad üldkogumi tõenäosusjaotust, nimetatakse statistiliseks hüpoteesiks. Kontrollimiseks esitatakse statistilised hüpoteesid alati üksteist välistavate väidete paarina, millest üks peab osutuma tõeseks.

Toome mõningaid näiteid.

Näide 12.1. (a) Olgu vaatluse all teatavate aparaatide tõrgedeta töötamise aeg; võime oletada, et see on kirjeldatav eksponentjaotusega, $X \sim E(\lambda)$. Aparaatide tootmise tehnoloogia tagab tavaliselt keskmisele tõrgeteta töötamise ajale ($EX = 1/\lambda$) teatava kriitilise piiri c, millest allapoole see näitaja ei tohiks langeda. Küsimuse, kas aparaatide tootmisel pole rikutud tehnoloogiat, võib esitada nõudena kontrollida statistilisi hüpoteese keskmise tõrgedeta töötamise aja kohta

$$1/\lambda \geqslant c$$

$$1/\lambda < c .$$

Esitatud hüpoteesid on üksteist välistavad, üks neist peab kindlasti osutuma tõeseks.

(b) Soovitakse kontrollida, kas teatav münt on "korrapärane", s.t. kas "kulli" või "kirja" pealelangemise tõenäosus on võrdne. Mündiviske tulemust võime vaadata Bernoulli jaotusega juhusliku suurusena (lugedes näiteks "kulli" peale langemise väärtuse 1 saamiseks), $X \sim B(1, \theta)$. Mündi "korrapärasuse" kontrollimine tähendab statistiliste hüpoteeside

$$\theta = 1/2$$

$\theta \neq 1/2$

kontrollimist. *

Näidete põhjal võib tekkida mulje, et mõlemat hüpoteesi poleks mõtet välja kirjutadagi - on ju tegemist ühe väite ja tema eitusega. Nii see üldjuhul siiski pole - lähtudes probleemi sisust võib parameetri võimalike väärtuste hulk olla piiratud. Esitatud hüpoteesideks on teatav väide ja selle eitus p a r a m e e t r i v õ i m a l i k e v ä ä r t u s t e hulgas. Viimane ei pruugi kaugeltki ühte langeda esitatud väite loogilise eitusega.

Formaalselt võime olukorda kirjeldada järgmiselt. Tähistame üldkogumi parameetri võimalike väärtuste hulga sümboliga Θ. Jagame (sisulistest kaalutlustest lähtudes) selle hulga kaheks osahulgaks Θ_0 ja Θ_1 nii, et

$$\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$$

$$\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset .$$

Esitame statistiliste hüpoteeside kontrollimise ülesande väidete paarina $\theta \in \Theta_0$ ja $\theta \in \Theta_1$.

Kontrollimiseks esitatud statistilistele hüpoteesidele on antud erinimetused. Ühte neist nimetatakse null-hüpoteesiks (H_0). Null-hüpotees on väide "nullilise erinevuse" - efekti puudumise, standardiga kokkulangevuse - kohta. Teist väidet nimetatakse sisukaks hüpoteesiks (H_1). Sisukas hüpotees on väide efekti olemasolu või standardist erinevuse kohta. Sisukas hüpotees on väide, mida uurija saab tõestada.

Näide 12.2. (a) Vaatame eelmises näites punktis (a) kirjeldatud hüpoteese. Loomulik on oodata, et aparaadi keskmine tõrgeteta töötamise aeg ei ole väiksem kriitilisest väärtusest, seda tulemust võib lugeda "standardile vastavaks" tulemuseks. Kui keskmine tõrgeteta töötamise aeg ei ületa kriitilist piiri võib olla tegemist näiteks ettenähtud tehnoloogia rikkumise "efektiga". Niisugusele arutelule toetudes tuleb valida H_0: $1/\lambda \geq c$ ja H_1: $1/\lambda < c$.

(b) Vaatame eelmises näites punktis (b) kirjeldatud hüpoteese. Mündi "korrapärasus" - see on vastamine teatavale standardile, mündi "ebakorrapärasus" - see on erinemine standardist. Seetõttu tuleb valida H_0: $\theta = 1/2$ ja H_1: $\theta \neq 1/2$. *

Näidetes toodud hüpoteesid olid esitatud üldkogumi parameetrite kohta. Niisuguseid statistilisi hüpoteese nimetatakse <u>parameetrilisteks hüpoteesideks</u>. Hüpoteesi võib esitada ka üldkogumi tõenäosusjaotuse tüübi või üldiseloomu kohta, näiteks: uuritav tunnus on normaaljaotusega. Niisugust väidet nimetatakse <u>mitteparameetriliseks</u> <u>hüpoteesiks</u>.

Kui statistiline hüpotees määrab üldkogumi tõenäosusjaotuse üheselt, nimetatakse teda <u>lihthüpoteesiks</u>, vastasel juhul on tegemist <u>liithüpoteesiga</u>. Liithüpoteesi, mis määrab kahest osast koosneva parameetri väärtuste piirkonna, nimetatakse <u>kahepoolseks</u> hüpoteesiks. Liithüpoteesi, mis määrab ühest osast koosneva parameetri väärtuste piirkonna, nimetatakse <u>ühepoolseks</u> hüpoteesiks.

Otsus kontrollitavate statistiliste hüpoteeside kohta langetatakse valimi põhjal. Otsuse langetamise loogika on järgmine: kui valim esitab "kaalukad tõendid" sisuka hüpoteesi kehtimiseks, siis võetakse vastu sisukas hüpotees, kui valim ei esita "kaalukaid tõendeid" sisuka hüpoteesi kehtimiseks, võetakse vastu null-hüpotees. Otsuse langetamiseks valitakse välja teatav statistik. Kui tegemist on parameetrilise hüpoteesiga, on loomulik kasutada statistikut $T(\vec{X})$, mille abil parameetrit hinnatakse.

Otsuse langetamise reegel on formaalselt järgmine. Eraldame statistiku $T(\vec{X})$ võimalike väärtuste piirkonnast sellise alampiirkonna, millesse statistiku väärtus null-hüpoteesi kehtivuse korral võib langeda "harva". Kui meie käsutuses oleva valimi korral statistiku väärtus langeb sellesse piirkonda, kummutame null-hüpoteesi, vastasel juhul aga võtame null-hüpoteesi vastu. Niisuguse otsuse loogiline alus on hästi läbi nähtav: statistik käitus nii, nagu ta null-hüpoteesi kehtivuse korral ei peaks käituma, järelikult ei kirjelda null-hüpotees statistiku käitumise seaduspärasusi, null-hüpotees ei ole vastuvõetav. Piirkonda, milles null-hüpotees kummutatakse, nimetatakse <u>kriitiliseks piirkonnaks</u>.

Tähistame sümboliga α mingi vabalt valitud nulli lähedase tõenäosuse ("harva" sündmuse tõenäosuse), sümboliga K_α aga sellele tõenäosusele vastava kriitilise piirkonna, $P(T(\vec{X}) \in K_\alpha \mid H_0 \text{ kehtib}) \leq \alpha$. Kui $T(\vec{x}) \in K_\alpha$, kummutame null-hüpoteesi, kui aga $T(\bar{x}) \notin K_\alpha$, võtame null-hüpoteesi vastu.

Niisugune reegel formaliseerib täielikult otsuse langetamise protsessi. Vaatame näidet sellise otsustusreegli esitamise kohta.

<u>Näide 12.3.</u> Vaatame näites 12.2(b) kirjeldatud ülesannet. Üldkogumis uuritav tunnus $X \sim B(1, \theta)$, jaotuse parameetri kohta on esitatud hüpoteesid

H_0: $\theta = 1/2$

H_1: $\theta \neq 1/2$.

Intuitiivselt on selge, et null-hüpotees tuleb kummutada siis, kui valimi põhjal määratud hinnang parameetrile θ erineb väga tugevasti null-hüpoteesis näidatud väärtusest 1/2. Hinnangu parameetrile θ määrab antud juhul valimi keskväärtus $\bar{X}$. Kui katsete arv on suur, võib selle statistiku ligikaudseks jaotuseks lugeda normaaljaotuse, $\bar{X} \sim N(\theta, \sqrt{\theta(1-\theta)/n})$.

Oletame, et mündi kontrollimiseks võime sooritada 100 viset. Null-hüpoteesi kehtivuse korral on siis kasutatava normaaljaotuse parameetrid arvuliselt määratud $\bar{X} \sim N(0,5;$ $0,05)$. $> \sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})/100}$

Valime "harva" sündmuse tõenäosuse $\alpha = 0,1$. Intuitsioonile toginedes moodustame kaheosalise kriitiliseks piirkonna (statistiku $\bar{X}$ võimalike väärtuste piirkond on vahemik $(0; 1)$

$$K_\alpha = (0; a] \cup [b; 1) .$$

Konstandid a ja b valime sellised, et

$$P(\bar{X} \in K_\alpha \mid \bar{X} \sim N(0,5;\ 0,05)) = 0,1 .$$

On selge, et esitatud tingimus ei määra konstante a ja b üheselt. Nende valikul tugineme uuesti intuitsioonile - kui meil pole põhjust oodata teatavat kindlasuunalist hälvet "ebakorrapärase" mündi korral, valime kriitilise piirkonna "osade" tõenäosused ühesugused, s.t.

$$P(\bar{X} \leq a \mid \bar{X} \sim N(0,5;\ 0,05)) = P(\bar{X} \geq b \mid \bar{X} \sim N(0,5;\ 0,05)) = 0,05.$$

Kasutades normaaljaotuse tabelit, saame nüüd konstandid leida

$$a = 0,418; \quad b = 0,582.$$

Meie poolt valitud kriitiline piirkond omandab kuju

$$K_\alpha = (0;\ 0,418] \cup [0,582;\ 1).$$

Seega tuletasime järgmise reegli otsuse langetamiseks: kui valimi põhjal määratud parameetri hinnang on väiksem kui 0,418("kull" langes peale vähem kui 42 viskel) või suurem kui 0,582 ("kull" langes peale rohkem kui 58 viskel) kummutame null-hüpoteesi - otsustame, et münt on võltsitud; vastasel juhul jääme null-hüpoteesi juurde - otsustame, et münt pole võltsitud.

Jääb veel üle sooritada katse ja langetada otsus. Oletame näiteks, et sooritatud 100 viskest langes mündipool peale 42 korral. Parameetri hinnang $\hat{\theta} = \bar{x} = 0,42$, $\bar{X} \notin K_{\alpha}$. Jääme null-hüpoteesi juurde. Meie valim ei andnud "kaalukaid tõendeid" selle kohta, et münt oleks võltsitud. *

Märgime veel, et otsuse langetamine statistilise hüpoteesi kohta on mõnevõrra erinev otsuse langetamisest tavalise matemaatilise väite kohta. Matemaatilist väidet saab kas tõestada või kontranäitega kummutada. Mõlemal juhul on tehtud järeldus väljaspool igasugust kahtlust. Statistiliste hüpoteeside kohta langetatud otsus aga pole tingimata õige: tehes arvutused õigesti ja kasutades õiget otsuse langetamise eeskirja, võib otsus ise olla siiski ekslik.

Vaatame öeldu illustreerimiseks järgnevat näidet.

Matemaatilise väite kontrollimine.

Väide. Funktsioon $f(x)=2x^2-2x+1$ omandab minimaalse väärtuse $x = 2$ korral.

Analüüs. Arvutame funktsiooni väärtuse $x=2$ korral, $f(2)=5$.

Arvutame funktsiooni väärtuse $x=0$ korral, $f(0)=1$.

Järeldus. Esitatud väide on vale.

Tehtud järeldus on õige.

Statistilise hüpoteesi kontrollimine.

Väide. Uurija käes olev münt on võltsitud.

Analüüs. Viskame münti 100 korda. Loeme "kulli" pealelangemiste arvu. Olgu see 40.

Järeldus. Kasutame eelmises näites tuletatud otsuse langetamise reeglit. Otsustame: münt on võltsitud.

Tehtud järeldus võib olla vale. Ka siis, kui münt pole võltsitud - "kulli" peale langemise tõenäosus on 0,5 - on niisugune tulemus võimalik. Tõsi küll, korrapärase mündi korral on niisuguse (või veel halvema) tulemuse saamise tõenäosus väga väike, kuid pole garantiid, et meie katsel ei toimunud just see väikese tõenäosusega sündmus. "Paremini" otsustada pole aga võimalik meie käsutuses oleva piiratud informatsiooni tõttu.

Esitatud formaalne otsustusreegel võib aga tekitada veel teist laadi arusaamatust. Miks arvestatakse ainult statistiku käitumist null-hüpoteesi korral?

Võtme selle mõistmiseks saame, kui uurime täpsemalt, millised on võimalikud eksimused hüpoteeside kohta otsuse langetamisel.

Võimalik on teha kaks erineva iseloomuga viga. Esitame selle väite selgituseks väikese tabeli, mis illustreerib langetatud otsuse ja tegelikkuse võimalikku vahekorda

Tegelikkus / Otsus	kehtib H_0	kehtib H_1
kehtib H_0	õige	II viga
kehtib H_1	I viga	õige

Esimene viga seisneb sisuka hüpoteesi ekslikus vastuvõtmises. Seda viga nimetatakse <u>esimest liiki veaks</u>. Teine viga seisneb null-hüpoteesi ekslikus vastuvõtmises. Seda viga nimetatakse <u>teist liiki veaks.</u>

Need vead ei ole ühesuguste tagajärgedega. Enamuses praktilistes ülesannetes on esimest liiki vea tagajärjed raskemad. Seetõttu suhtutakse ka neisse "ebasümmeetriliselt" - otsuse langetamise reegel valitakse selline, et raskema vea - esimest liiki vea - tegemise tõenäosus oleks tõkestatud

$$P(T(\vec{X}) \in K_\alpha \mid H_0 \text{ kehtib}) \leq \alpha .$$

Nii jõutigi välja eelpool kirjeldatud formaalse otsustusreeglini.

Edaspidises nimetame statistiku ja kriitilise piirkonna fikseerimisega määratud otsustusreeglit <u>kriteeriumiks.</u> Tõket esimest liiki vea tegemise tõenäosusele nimetatakse kriteeriumi <u>olulisuse nivooks</u>. Põhimõttelist kitsendusi olulisuse nivoo valikuks pole, kuid - põhiliselt kvantiilide tabelite mahu vähendamiseks - on kasutusel kolm traditsioonilist väärtust olulisuse nivoo jaoks. Need on

$\boxed{0{,}1 \quad 0{,}05 \quad 0{,}01}$.

Vaatame veel kord ülal toodud tabelit. Jätame meelde , et see, millist viga võime teha, sõltub vastu võetud otsusest. Kui võtame vastu null-hüpoteesi H_0, on võimalik teha ainult II liiki (kergemat!) viga. Kui võtame vastu sisuka hüpoteesi H_1 on võimalik teha ainult I liiki (raskemat!) viga. See asjaolu ongi kujundanud otsustusreegli loogilise aluse, mida eespool kirjeldasime: null-hüpoteesi suhtutakse konservatiivselt, selle kummutamiseks ja sisuka hüpoteesi vastu võtmiseks on vaja "kaalukaid" tõendeid.

ÜLESANDED

1. Vaatame näidet 12.3. Kirjeldada esimest ja teist liiki vea konkreetset sisulist tähendust.
2. Vaatame näites 12.3 toodud kriitilist piirkonda. Oletame, et tegelikult $\theta = 0{,}4$. Kui suur on siis teist liiki vea tegemise tõenäosus? Kui parameetri θ väärtus oleks tegelikult 0,2, kui suur oleks siis teist liiki vea tegemise tõenäosus?
3. Olgu q_α normaaljaotuse $N(\mu, \sigma)$ α-kvantiil, z_α aga normaaljaotuse $N(0, 1)$ α-kvantiil, Tõestada, et kehtib võrdus $q_\alpha = \mu + \sigma z_\alpha$.
4. Esitada näites 12.3 toodud kriitiline piirkond standardse normaaljaotuse kvantiilide abil. Kirjutada välja samasuguse struktuuriga kriitiline piirkond, mis vastaks olulisuse nivoole 0,05. Olulisuse nivoole 0,01.
5. Vaatame eelmises ülesandes leitud kahte uut kriitilist piirkonda. Leida nende mõlemi jaoks teist liiki vea tegemise tõenäosus parameetri väärtustel 0,4 ja 0,2. Milline on selles konkreetses ülesandes esimest ja teist liiki vea tõenäosuse vahekord? Kuidas see muutub?
6. Gripiepideemia ajal haigestus 20% linna elanikkonnast. Oletatavasti vähendab regulaarne C-vitamiini tarvitamine grippi haigestumise ohtu. Olgu võimalik kasutada 500 regulaarse C-vitamiini tarvitaja andmeid. Esitada püstitatud oletus statistiliste hüpoteeside paarina ja tuletada eeskiri nende hüpoteeside kontrollimiseks.

Kordamisküsimusi tõenäosusteooriast.

1. Olgu juhuslik suurus $Y \sim N(\mu, \sigma)$. Kirjutada välja seos selle juhusliku suuruse jaotusfunktsiooni ja standardse normaaljaotuse jaotusfunktsiooni vahel.
2. Olgu juhuslik suurus $Y \sim N(2,2)$. Leida tõenäosus $P(Y < 1)$.
3. Olgu juhuslik suurus $Y \sim N(1;\ 0{,}5)$. Leida tõenäosus $P(0 \leqslant Y \leqslant 1)$.

KUS ME OLEME? Tutvusime kolmanda statistika põhiülesandega - statistiliste hüpoteeside kontrollimise ülesandega ja selle lahendamise skeemiga. Meie poolt kirjeldatud otsustusreegel on võetud kasutusele Neymani ja Pearsoni poolt käesoleva sajandi algul, nendelt pärineb ka selle otsustusreegli optimiseerimise teooria. Kuigi kõige populaarsem, pole niisugune lähenemisviis hüpoteeside kontrollimisele ainuvõimalik.

KUHU LÄHEME? Tutvuma karakteristikuga, mis on aluseks erinevate kriteeriumide võrdlemisel ja optimaalse kriteeriumi defineerimisel.

§13. Kriteeriumi võimsusfunktsioon.

Teoreetiliste küsimuste lahendamiseks on meil kasulik omada kriteeriumi mugavamat esitust. Selleks sobib kriitilise piirkonna indikaator-funktsioon - juhuslik suurus, mis on määratud eeskirjaga

$$\varphi(\vec{X}) = \begin{cases} 1, & \text{kui } T(\vec{X}) \in K_\alpha \\ 0, & \text{kui } T(\vec{X}) \notin K_\alpha \end{cases}.$$

Nüüd on mugav erinevaid kriteeriume nimetada: $\varphi(\vec{X})$, $\varphi'(\vec{X})$, $\varphi_*(\vec{X})$ jne.

Vaatame, kuidas kirjeldada kriteeriumi efektiivsust. Loomulik on selles toetuda seaduspärasusele, mis ilmneb kriteeriumi paljukordsel kasutamisel - õige otsuse vastuvõtmise sagedusele. Õige otsuse vastu võtmise sagedust hindab õige otsuse vastu võtmise tõenäosus. Siin aga tekivad raskused - see, mis on antud ülesande korral "õigeks otsuseks", sõltub parameetri tõelisest väärtusest. Nii ei olegi kriteeriumi efektiivsust võimalik kirjeldada ühe arvu abil, vaid selleks tuleb kasutusele võtta funktsioon. Anname selle funktsiooni määratluse järgnevas definitsioonis.

Definitsioon 13.1. Kriteeriumi $\varphi(\vec{X})$ võimsusfunktsiooniks $\pi_\varphi(\theta)$ nimetatakse funktsiooni, mis on määratud tõenäosusega vastu võtta sisukas hüpotees argumendiks oleva parameetri väärtuse korral

$$\pi_\varphi(\theta) = P_\theta(\varphi(\vec{X})=1) .$$

Olgu kriteerium $\varphi(\vec{X})$ hüpoteeside H_0: $\theta \in \Theta_0$ ja H_1: $\theta \in \Theta_1$ kontrollimiseks. Analüüsime, milline on võimsusfunktsiooni sisuline tähendus ja ootuspärane käitumine parameetri väärtuste piirkondades Θ_0 ja Θ_1.

Kuulugu võimsusfunktsiooni argument θ piirkonda Θ_0. Siis on õigeks otsustuseks null-hüpotees H_0 ja võimsusfunktsioon näitab I liiki vea tegemise tõenäosust. Ootuspärane on, et võimsusfunktsiooni väärtus selles piirkonnas on lähedane nullile, ei ületa olulisuse nivood .

Kuulugu võimsusfunktsiooni argument piirkonda Θ_1. Siis on õigeks otsustuseks sisukas hüpotees H_1 ja võimsusfunktsioon näitab õige otsuse vastu võtmise tõenäosust. Ootuspärane on, et võimsusfunktsiooni väärtus selles piirkonnas oleks lähedane ühele.

Teist liiki vea teeme, kui parameetri tõelise väärtuse kuuludes piirkonda Θ_1 võtame vastu null-hüpoteesi. Teist liiki vea tegemise tõenäosuse (tähistame selle sümboliga $\beta(\theta)$) määrab vahe

$$\beta(\theta) = 1 - \pi_\varphi(\theta) .$$

Vaatame näidet võimsusfunktsiooni välja kirjutamise kohta.

Näide 13.2. Võtame vaatluse alla näites 12.3 esitatud kriteeriumi. Uuritava tunnuse jaotuseks oli Bernoulli jaotus, parameetri võimalike väärtuste hulgaks Θ on vahemik $(0;1)$, kontrollitakse hüpoteese $H_0: \theta = 0{,}5$ ja $H_1: \theta \neq 0{,}5$. Kuna meil oli tegemist suure valimiga (n=100), võis kriteeriumis kasutatava statistiku $\bar{X}$ tõenäosusjaotuseks lugeda normaaljaotuse $N(\theta, \sqrt{\theta(1-\theta)/n})$. Avaldame selle kriteeriumi võimsusfunktsiooni normaaljaotuse jaotusfunktsiooni kaudu.

$$\pi_\varphi(\theta) = P_\theta((\bar{X} \leq 0{,}418) \cup (\bar{X} \geq 0{,}582)) = P_\theta(\bar{X} \leq 0{,}418) + P_\theta(\bar{X} \geq 0{,}582) =$$
$$= F_{\bar{X}}(0{,}418; \theta) + 1 - F_{\bar{X}}(0{,}582; \theta) .$$

Minnes üle standardse normaaljaotuse jaotusfunktsioonile saame selle kriteeriumi võimsusfunktsiooni jaoks avaldise

$$\pi_\varphi(\theta)=1+\Phi(10(0{,}418-\theta)/\sqrt{\theta(1-\theta)})-\Phi(10(0{,}582-\theta)/\sqrt{\theta(1-\theta)})\ .$$

Kui $\theta\in\Theta_0$, s.t. $\theta=0{,}5$, on võimsusfunktsiooni väärtus

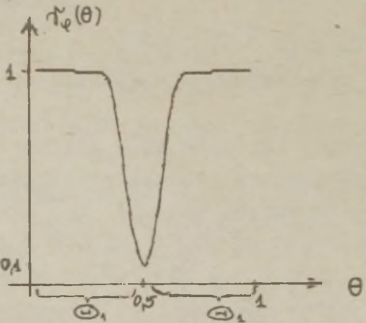
$$\pi_\varphi(0{,}5)=1+\Phi(-1{,}64)-\Phi(1{,}64)=0{,}1,$$

selle väärtuse määrasime kindlaks juba võimsusfunktsiooni konstrueerides.

Visandamaks võimsusfunktsiooni graafikut leiame veel mõned võimsusfunktsiooni väärtused. Koondame nad järgmisse tabelisse

θ	0,55	0,60	0,65	0,70
$\pi_\varphi(\theta)$	0,2651	0,6414	0,9236	0,9949

Loomulikult kontrollib endast lugupidav lugeja need arvutused üle. Arvestades standardse normaaljaotuse jaotusfunktsiooni omadusi on ilmne, et vaatlusaluse kriteeriumi võimsusfunktsioon on sümmeetriline väärtuse 0,5 suhtes, s.t. $\pi_\varphi(0{,}5+\delta)=\pi_\varphi(0{,}5-\delta)$. Visandame võimsusfunktsiooni graafiku.



Analüüsime veel saadud tulemust. Null-hüpoteesiga määratud punktis vastab võimsusfunktsiooni käitumine täielikult eelpool esitatud ootusele. Sisuka hüpoteesiga määratud piirkonnas aga niisugust head kooskõla ootuse ja tegelikkuse vahel ei ole: piirkondade raja läheduses on võimsusfunktsiooni väärtused üsna nulli lähedased. Tõsi, kaugenedes piirkondade rajajoonest kasvavad võimsusfunktsiooni väärtused üsna kiiresti.

Arvutame veel II liiki vea tegemise tõenäosuse mõnede parameetri väärtuste korral piirkonnast Θ_1. Kasutades tabelis toodud väärtusi saame

θ	0,55	0,60	0,65	0,70
$\beta(\theta)$	0,7349	0,3586	0,0764	0,0051

Näeme, et teist liiki vea tegemise tõenäosus võib parameetri mõningate väärtuste korral olla üsna suur. Võimsusfunktsiooni pidevuse tõttu on tõkkeks teist liiki vea tegemise tõenäosusele väärtus $1-\alpha$, s.t.

$$\beta(\theta) \leqslant 1 - \alpha .$$

Seega on olemas niisuguseid parameetri väärtusi, mille korral meie kriteerium käitub üsna halvasti, Lohutuseks on küll asjaolu, et 0,5-st tugevasti erinevate parameetri väärtuste korral on vale otsustuste langetamise tõenäosus üsna väike. *

Võimsusfunktsiooni väärtust $\Upsilon_\varphi(\theta)$, $\theta \in \Theta_1$, nimetatakse kriteeriumi <u>võimsuseks</u> parameetri väärtusel θ.

Näitest võiks jätta meelde kaks tähelepanekut. Esiteks - võimsusfunktsioon annab kriteeriumi kirjelduse k õ i k - v õ i m a l i k e parameetri väärtuste korral, esitades seaduspärasuse, mis ilmneb selle kriteeriumi p a l j u - k o r d s e l kasutamisel. Teiseks - tõkked esimest ja teist liiki vea tegemise tõenäosusele on omavahel seotud. Kui me vähendame esimest liiki vea tegemise tõenäosust, suureneb teatavate parameetri väärtuste korral tõenäosus teha teist liiki viga.

Viimase tähelepaneku kinnistamiseks vaatame veel ühte näidet.

<u>Näide 13.3.</u> Vaatame üldkogumit, mis on Bernoulli jaotusega, $X \sim B(1, \theta)$. Vajagu kontrollimist hüpoteeside paar H_0: $\theta \leqslant 0,4$ ja H_1: $\theta > 0,4$. Olgu otsuse langetamiseks jällegi võimalik teha 100 katset. Esitame kolm erinevat kriteeriumi, mis kõik kasutavad ühte ja sama statistikut - valimi keskväärtust $\bar{X}$ - kuid erinevaid kriitilisi piirkondi. Need on

$$\varphi_1(\vec{X}) = \begin{cases} 1, & \text{kui } \sqrt{n}(\bar{X} - 0,4)/\sqrt{0,24} > 1,64 \\ 0, & \text{kui } \sqrt{n}(\bar{X} - 0,4)/\sqrt{0,24} \leq 1,64 \end{cases}$$

$$\varphi_2(X) = \begin{cases} 1, & \text{kui } \sqrt{n}(\bar{X} - 0,4)/\sqrt{0,24} > 2,33 \\ 0, & \text{kui } \sqrt{n}(\bar{X} - 0,4)/\sqrt{0,24} \leq 2,33 \end{cases}$$

$$\varphi_3(X) = \begin{cases} 1, & \text{kui } \sqrt{n}(\bar{X} - 0,4)/\sqrt{0,24} > 3,1 \\ 0, & \text{kui } \sqrt{n}(\bar{X} - 0,4)/\sqrt{0,24} \leq 3,1 \end{cases}$$

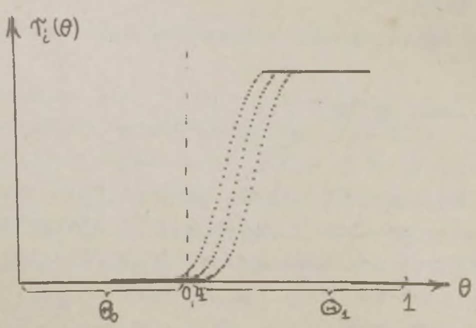
Kuna statistiku $\bar{X}$ jaotuseks võime lugeda normaaljaotuse $N(\theta;\sqrt{\theta(1-\theta)/n})$, saame nende kriteeriumide võimsusfunktsioonid avaldada normaaljaotuse jaotusfunktsiooni kaudu. Tähistame kriteeriumi $\varphi_i(\vec{X})$ kriitilise piirkonna raja sümboliga a_i, võimsusfunktsiooni aga sümboliga $\Upsilon_i(\theta)$. Siis

$$\begin{aligned} \Upsilon_i(\theta) &= P_\theta(\varphi_i(\vec{X})=1) = P_\theta(\sqrt{n}(\bar{X}-0,4)/\sqrt{0,24} > a_i) = \\ &= P_\theta(\bar{X} > 0,4+\sqrt{0,24}a_i/\sqrt{n}) = 1-F_{\bar{X}}(0,4+\sqrt{0,24}a_i/\sqrt{n}) = \\ &= 1-\Phi([0,4+\sqrt{0,24}a_i/\sqrt{n}-\theta]/\sqrt{\theta(1-\theta)/n}). \end{aligned}$$

Visandamaks võimsusfunktsioonide graafikuid, leiame mõned võimsusfunktsioonide väärtused. Koondame nad järgnevasse tabelisse.

θ	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65
$\Upsilon_1(\theta)$	0,0032	0,0505	0,2709	0,6664	0,9192	0,9927	0,9998
$\Upsilon_2(\theta)$	0,0003	0,0100	0,0985	0,3897	0,7642	0,9599	0,9978
$\Upsilon_3(\theta)$	0,0000	0,0010	0,0202	0,1492	0,5160	0,8365	0,9798

Joonistame võimsusfunktsioonide graafikud.



Mõtestame lahti joonisel kujutatud võimsusfunktsioonide vahekorra.

Piirkonnaks Θ_0 on praegu intervall $(0;\ 0{,}4]$. Selles piirkonnas esitab võimsusfunktsioon tõenäosust teha esimest liiki viga. Esimest liiki vea tegemise tõenäosus on iga parameetri väärtuse korral erinev. Kuna aga võimsusfunktsioon on monotoonselt kasvav, on esimest liiki vea tegemise tõenäosus tõkestatud võimsusfunktsiooni väärtusega piirkonna Θ_0 rajal, s.t.

$$\pi_1(\theta) \leq \pi_1(0{,}4), \qquad \theta \in \Theta_0 .$$

Seega on igal vaatlusalusel kriteeriumil erinev olulisuse nivoo, mille väärtus on esitatud eelneva tabeli teises veerus.

Piirkonnaks Θ_1 on praegu intervall $(0{,}4;\ 1)$. Selles piirkonnas esitab võimsusfunktsioon tõenäosust langetada antud parameetri väärtuse korral õige otsus. Joonisel on hästi näha, kuidas olulisuse nivoo vähendamine toob kaasa kriteeriumi võimsuse vähenemise piirkonna Θ_1 rajapunkti läheduses. *

Toome lõpetuseks veel kord välja tõkked esimest ja teist liiki vea tegemise tõenäosustele.

Kui hüpoteeside H_0: $\theta \in \Theta_0$ ja H_1: $\theta \in \Theta_1$ kontrollimisel kriteeriumi $\varphi(\vec{X})$ esimest liiki vea tegemise tõenäosus on tõkestatud suurusega α, s.t.

$$\pi_\varphi(\theta) \leq \alpha, \qquad \theta \in \Theta_0 ,$$

siis selle kriteeriumi teist liiki vea tegemise tõenäosus on tõkestatud suurusega $1-\alpha$, s. t.

$$\beta(\theta) \leq 1-\alpha, \qquad \theta \in \Theta_1 .$$

On võimalik, et mõnedes situatsioonides saab tõket teist liiki vea tegemise tõenäosusele täpsustada. Kui aga see ei ole võimalik, toob vigade erinev tõenäosus endaga kaasa ka erineva suhtumise langetatud otsusesse.

Kui võetakse vastu sisukas hüpotees, on võimalik, et tehti esimest liiki viga. Selle vea tegemise tõenäosus on range kontrolli all, kriteeriumi olulisuse nivoo määratakse kriteeriumi konstruktsiooniga. Seetõttu loetakse vastu võetud sisukas hüpotees tõestatuks.

Kui võetakse vastu null-hüpotees, on võimalik, et tehti teist liiki viga. Teist liiki vea tegemise tõenäosus aga võib mõningate parameetri väärtuste korral olla küllalt suur. Seetõttu ei loeta vastu võetud null-hüpoteesi tõestatuks. Jääb alles võimalus, et suurendades mõõtmiste arvu, s.t. kogudes rohkem informatsiooni, saame null-hüpoteesi kummutada.

Võib näida, et kui esimest liiki vea tegemise tõenäosuse jaoks on tõke valitud, siis teist liiki vea tegemise tõenäosust ei saa enam reguleerida. Tegelikult see nii ei ole, teist liiki vea tegemise tõenäosust on võimalik reguleerida:

(a) katsete arvu muutmisega;

(b) kriteeriumi määramisel kasutatud statistiku valikuga.

Vaatame esmalt näidet, milles katsete arvu reguleerimisega muudame kriteeriumi võimsust. Seejärel aga defineerime ühtlaselt võimsama - parimat statistikut kasutava kriteeriumi.

Näide 13.4. Vaatame eelmises näites esitatud kriteeriumi $\varphi_1(\vec{X})$. Olgu meil võimalik suurendada katsete arvu n. Leiame, mitu katset tuleks teha, kui nõuame, et kriteeriumi võimsus punktis $\theta = 0,5$ ei oleks väiksem 0,9.

Katsete arvu määramisel lähtume esitatud tingimusest

$$\Upsilon_1(0,5) = 1 - \Phi(\sqrt{n}(-0,1+1,64\sqrt{0,24/n})/0,5) \geqslant 0,9$$

kust

$$\Phi(\sqrt{n}(-0,1+1,64\sqrt{0,24/n})/0,5) \leqslant 0,1$$

Kuna jaotusfunktsioon on monotoonselt kasvav, saame argumendi jaoks võrratuse

$$\sqrt{n}(-0,1 + 1,64\sqrt{0,24/n})/0,5) \leqslant -2,33$$

kust katsete arvu jaoks tuleneb võrratus

$$n \geqslant 387 \quad . \qquad *$$

Kriteeriumi, mis kasutab optimaalset statistikut nimetatakse ühtlaselt võimsaimaks (ÜV) kriteeriumiks. Anname ÜV kriteeriumi täpse definitsiooni. Olgu $\mathcal{K}(\alpha, \Theta_0)$ kriteeriumide hulk, mis on kasutatavad antud hüpoteesipaari $H_0: \theta \in \Theta_0$; $H_1: \theta \in \Theta_1$ kontrollimiseks olulisuse nivool α.

Definitsioon 13.5. Kriteeriumi $\varphi_*(\vec{X})$ nimetatakse ühtlaselt võimsaimaks (ÜV) kriteeriumiks olulisuse nivool α, kui iga kriteeriumi $\varphi(\vec{X}) \in \mathcal{K}(\alpha, \Theta_0)$ ja iga parameetri väärtuse $\theta \in \Theta_1$ korral kehtib võrratus

$$\pi_{\varphi_*}(\theta) \geqslant \pi_{\varphi}(\theta).$$

Järgnevas paragrahvis vaatamegi võimalusi ühtlaselt võimsaima kriteeriumi konstrueerimiseks.

ÜLESANDED

1. Olgu $X \sim B(1, \theta)$. Vajagu kontrollimist hüpoteeside paar H_0: $\theta \leqslant 0,2$; H_1: $\theta > 0,2$. Hüpoteeside kontrollimiseks kasutatakse statistikut $\bar{X}$. Valida kriitilise piirkonna struktuur. Kirjutada välja vastav kriteerium.
2. Olgu eelmises ülesandes kirjeldatud probleemi korral võimalik sooritada 5 katset. Kirjutada välja kriteeriumi võimsusfunktsioon. Näpunäide: kasutada asjaolu, et $\sum_{i=1}^{5} X_i \sim B(5, \theta)$.
3. Valida eelmistes ülesannete tulemusi kasutades selline kriteeriumi konkreetne kuju, mis oleks kasutatav olulisuse nivool 0,1. Leida ülemised tõkked esimest ja teist liiki vigade tegemise tõenäosusele.
4. Olgu $X \sim U(0, \theta)$. Vajagu kontrollimist hüpoteeside paar H_0: $\theta \leqslant 1$; H_1: $\theta > 1$. Hüpoteeside kontrollimiseks kasutatakse statistikut $2\bar{X}$. Valida kriitilise piirkonna struktuur. Kirjutada välja vastav kriteerium.
5. Olgu eelmises ülesandes kirjeldatud probleemi korral võimalik sooritada 10 katset. Siis statistiku $2\bar{X}$ ligikaudseks jaotuseks võib lugeda normaaljaotuse $N(\theta, \theta/\sqrt{30})$. Kirjutada välja kriteeriumi võimsusfunktsioon. Valida selline kriteeriumi konkreetne kuju, mis oleks kasutatav olulisuse nivool 0,1.

Kordamisküsimusi tõenäosusteooriast

1. Millised omadused on juhusliku suuruse jaotusfunktsioonil?
2. Olgu juhuslik suurus Z sümmeetriline. Milline seos tuleneb sellest omadusest jaotusfunktsiooni väärtuste F(x) ja F(-x) vahel?

KUS ME OLEME? Tutvusime kriteeriumi võimsusfunktsiooniga -

karakteristikuga, mis kirjeldab kriteeriumi käitumist kõikvõimalike parameetri väärtuste korral. Õppisime lugema ja kasutama võimsusfunktsiooni abil esitatud informatsiooni.

Peab aga juhtima tähelepanu asjaolule, et võimsusfunktsiooni välja kirjutamine pole alati sugugi mitte lihtne ülesanne. Selleks tuleb teada kriteeriumis kasutatava statistiku tõenäosusjaotust igasuguse parameetri väärtuse korral. See aga võib osutuda tehniliselt väga keerukaks.

Kriteeriumi konstrueerimisel võib kasutada mitmesuguseid statistikuid, sobiva statistiku valikuga võib suurendada kriteeriumi võimsust. Parimat statistikut kasutavale kriteeriumile andsime erinimetuse - see on ühtlaselt võimsaim kriteerium.

KUHU LÄHEME? Hakkame tundma õppima võimalusi parima kriteeriumi konstrueerimiseks. Me peame selgeks tegema, millist statistikut tuleb kasutada ja kuidas valida kriitiline piirkond.

§14. ÜV kriteeriumi konstrueerimine lihthüpoteeside paari korral.

Etteruttavalt peab märkima, et ühtlaselt võimsaima kriteeriumi leidmine pole mitte alati võimalik. On aga olemas üks eriline situatsioon, milles ÜV kriteerium alati eksisteerib. Nimelt siis, kui kontrollimiseks on esitatud lihthüpoteeside paar $H_0: \theta = \theta_0$; $H_1: \theta = \theta_1$. Praktikas esineb selline olukord harva - peab ju siis olema parameetri kohta nii palju informatsiooni, et oskame välja eraldada ainult kaks võimalikku parameetri väärtust. Saadav tulemus on aga teoreetiliseks aluseks ÜV kriteeriumi konstrueerimisel ka keerukamate, praktilist huvi pakkuvate hüpoteeside korral.

Olgu siis uuritava tunnuse tõenäosusjaotuse parameetri kohta esitatud lihthüpoteeside paar $H_0: \theta = \theta_0$; $H_1: \theta = \theta_1$. Olgu $L(\vec{x}, \theta)$ valimi tõepärafunktsioon. Moodustame tõepärafunktsioonide suhte

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \theta_0, \theta_1) = L(\vec{x}, \theta_1)/L(\vec{x}, \theta_0) .$$

Lugedes selles suhtes argumendi juhuslikuks, saame välja kirjutada <u>tõepärasuhte</u> <u>statistiku</u>

$$\mathcal{T}(\vec{x},\ \theta_0,\ \theta_1) = \mathcal{L}(\vec{x},\ \theta_0,\ \theta_1)\ .$$

Näitame, et tõepärasuhte statistiku abil saamegi moodustada ÜV kriteeriumi. Enne aga vaatame veel mõnda näidet tõepärasuhte statistiku välja kirjutamise kohta.

Näide 14.1. (a) Olgu uuritav tunnus Bernoulli jaotusega, $X \sim B(1,\ \theta)$. Olgu jaotuse parameetri kohta esitatud lihthüpoteeside paar $H_0:\ \theta = \theta_0;\ \ H_1:\ \theta = \theta_1$. Kirjutame välja tõepärasuhte statistiku.

Tehtud eeldusel omab valimi tõepärafunktsioon kuju

$$L(\vec{x},\theta) = \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}\ ,$$

tõepärafunktsioonide suhe aga on määratud eeskirjaga

$$\mathcal{L}(\vec{x},\ \theta_0,\ \theta_1) = \left[\theta_1^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta_1)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}\right] \Big/ \left[\theta_0^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta_0)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}\right] =$$

$$= \left[\theta_1(1-\theta_0)/(\theta_0(1-\theta_1))\right]^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \left[(1-\theta_1)/(1-\theta_0)\right]^n\ .$$

Tõepärasuhte statistik on määratud eeskirjaga

$$\mathcal{T}(\vec{x},\theta_0,\theta_1) = \left[\theta_1(1-\theta_0)/(\theta_0(1-\theta_1))\right]^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \left[(1-\theta_1)/(1-\theta_0)\right]^n.$$

(b) Olgu uuritav tunnus eksponentjaotusega, $X \sim E(\lambda)$. Olgu jaotuse parameetri kohta esitatud lihthüpoteeside paar $H_0:\lambda = \lambda_0;\ \ H_1:\lambda = \lambda_1$. Kirjutame välja tõepärasuhte statistiku.

Tehtud eeldustel omab valimi tõepärafunktsioon kuju

$$L(\vec{x},\lambda) = \lambda^n \exp(-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i),$$

tõepärafunktsioonide suhe aga on määratud eeskirjaga

$$\mathcal{L}(\vec{x},\ \lambda_0,\ \lambda_1) = \lambda_1^n \exp(-\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} x_i)/[\lambda_0^n \exp(-\lambda_0 \sum_{i=1}^{n} x_i)] =$$

$$= (\lambda_1/\lambda_0)^n \exp[(\lambda_0-\lambda_1) \sum_{i=1}^{n} x_i].$$

Tõepärasuhte statistik on määratud eeskirjaga

$$\mathcal{T}(\vec{x},\lambda_0,\lambda_1) = (\lambda_1/\lambda_0)^n \exp[(\lambda_0-\lambda_1) \sum_{i=1}^{n} x_i]. \qquad *$$

Diskreetse tóenäosusjaotuse korral on tóepärasuhtel ilus sisuline tähendus: ta on valimi $\vec{x}$ saamise tóenäosuste suhe parameetri väärtuste θ_1 ja θ_0 korral. Sellest sisulisest tähendusest tuleneb ka, kuidas kasutada tóepärasuhte statistikut hüpoteeside kontrollimiseks - kui $\mathcal{T}(\vec{X})$ on küllalt suur, s.t. $\mathcal{T}(\vec{X}) > c$, vótame vastu sisuka hüpoteesi H_1.

Tóestame nüüd teoreemi, milles näitame, et tóepärasuhte statistiku abil saame konstrueerida ühtlaselt vóimsaima kriteeriumi lihthüpoteeside kontrollimiseks. Tehnilise töö lihtsustamiseks eeldame tóestuse käigus, et tegemist on pideva tóenäosusjaotusega tunnusega, millel on olemas tihedusfunktsioon $f(x, \theta)$. Sel eeldusel on $\psi(c) = P(\mathcal{T}(\vec{X}) > c)$ pidev monotoonselt kahanev funktsioon ja saame alati leida sellise väärtuse c_*, et $\psi(c_*) = \alpha$, kus α on meie poolt valitud olulisuse nivoo.

Teoreem 14.2. Olgu üldkogum pideva tóenäosusjaotusega tihedusfunktsiooniga $f(x, \theta)$, vajagu kontrollimist lihthüpoteeside paar H_0: $\theta = \theta_0$; H_1: $\theta = \theta_1$. Olgu $\varphi_*(\vec{X})$ tóepärasuhte statistiku abil määratud kriteerium

$$\varphi_*(\vec{X}) = \begin{cases} 1, \text{ kui } & \mathcal{T}(\vec{X}) > c \\ 0, \text{ kui } & \mathcal{T}(\vec{X}) \leqslant c \end{cases},$$

mille olulisuse nivoo on α, $\Upsilon_{\varphi_*}(\theta_0) = \alpha$.

Kriteerium $\varphi_*(\vec{X})$ on ÜV kriteerium selle hüpoteesipaari kontrollimiseks.

Tóestus. Olgu $\varphi(\vec{X})$ mingi kriteerium antud hüpoteesipaari kontrollimiseks olulisuse nivooga α, $\Upsilon_\varphi(\theta_0) = \alpha$. Näitame, et $\Upsilon_{\varphi_*}(\theta_1) > \Upsilon_\varphi(\theta_1)$. Kuna piirkond Θ_1 koosneb antud juhul ühest punktist, on sellega tóestatud, et $\varphi_*(\vec{X})$ on ühtlaselt vóimsaim.

Kuna meil ei ole teada, millist statistikut kriteerium $\varphi(\vec{X})$ kasutab, vótame kóikvóimalike n-elemendiliste valimite hulgal kasutusele järgmised tähistused. Tähistame sümboliga S_1 selliste valimite hulga, mille korral kriteerium $\varphi(\vec{X})$ omandab väärtuse 1

$$S_1 = \{ \vec{x} : \varphi(\vec{x}) = 1 \},$$

sümboliga $\bar{S}_1$ aga selliste valimite hulga, mille korral kriteerium $\varphi(\vec{X})$ omandab väärtuse 0,

$$\overline{S}_1 = \{\vec{x} : \varphi(\vec{x}) = 0\}.$$

Analoogilised tähistused seome ka kriteeriumiga $\varphi_*(\vec{X})$

$$S_1^* = \{\vec{x} : \varphi_*(\vec{x}) = 1\},$$
$$\overline{S}_1^* = \{\vec{x} : \varphi_*(\vec{x}) = 0\}.$$

Kriteeriumide $\varphi(\vec{X})$ ja $\varphi_*(\vec{X})$ võimsusfunktsioonid saame välja kirjutada integralide abil valimi tihedusfunktsioonist

$$\Upsilon_\varphi(\theta_1) = P_{\theta_1}(\varphi(\vec{X})=1) = P_{\theta_1}(\vec{X}\in S_1) = \int\limits_{S_1}\cdots\int f(\vec{x},\theta_1)dx_1\ldots dx_n =$$

$$= \int\limits_{S_1 S_1^*}\cdots\int f(\vec{x},\theta_1)dx_1\ldots dx_n + \int\limits_{S_1 \overline{S}_1^*}\cdots\int f(\vec{x},\theta_1)dx_1\ldots dx_n$$

ja sama moodi

$$\Upsilon_{\varphi_*}(\theta_1) = \int\limits_{S_1 S_1^*}\cdots\int f(\vec{x},\theta_1)dx_1\ldots dx_n + \int\limits_{\overline{S}_1 S_1^*}\cdots\int f(\vec{x},\theta_1)dx_1\ldots dx_n.$$

Võrreldes saadud avaldisi, näeme, et kehtib võrdus

$$\Upsilon_\varphi(\theta_1) = \Upsilon_{\varphi_*}(\theta_1) - \int\limits_{\overline{S}_1 S_1^*}\cdots\int f(\vec{x},\theta_1)dx_1\ldots dx_n +$$
$$+ \int\limits_{S_1 \overline{S}_1^*}\cdots\int f(x,\theta_1)dx\ldots dx_n .$$

Näitame, et avaldis, mille kriteeriumi $\varphi_*(\vec{X})$ võimsusfunktsioonist $\Upsilon_{\varphi_*}(\theta_1)$ peame lahutama, saamaks kriteeriumi $\varphi(\vec{X})$ võimsusfunktsiooni $\Upsilon_\varphi(\theta_1)$, on positiivne. Tõepoolest, piirkonnas S_1^* kehtib tema konstruktsiooni tõttu võrratus $\mathcal{T}(\vec{x}) > c$, ehk arvestades tõepärasuhte statistiku määramiseeskirja, $f(x,\theta_1) > cf(x,\theta_0)$. Seetõttu

$$\int\limits_{\overline{S}_1 S_1^*}\cdots\int f(\vec{x},\theta_1)dx_1\ldots dx_n > c\int\limits_{\overline{S}_1 S_1^*}\cdots\int f(\vec{x},\theta_0)dx_1\ldots dx_n.$$

Piirkonnas $\overline{S}_1^*$ aga kehtib tema konstruktsiooni tõttu võrratus $\mathcal{T}(\vec{x}) \leq c$, mis tähendab, et iga $\vec{x}\in\overline{S}_1^*$ korral

$f(\vec{x},\theta_1) \leq cf(\vec{x},\theta_0)$.

Seetõttu

$$\int\limits_{S_1 \overline{S}_1^*}\cdots\int f(x,\theta_1)dx_1\ldots dx_n \leq c\int\limits_{S_1 \overline{S}_1^*}\cdots\int f(\vec{x},\theta_0)dx_1\ldots dx_n .$$

Kokkuvõttes oleme saanud võrratuse

$$\int\limits_{\overline{S}_1 S_1^*}\cdots\int f(\vec{x},\theta_1)dx_1\ldots dx_n - \int\limits_{S_1 \overline{S}_1^*}\cdots\int f(\vec{x},\theta_1)dx_1\ldots dx_n >$$
$$> c\Big(\int\limits_{\overline{S}_1 S_1^*}\cdots\int f(x,\theta_0)dx_1\ldots dx_n - \int\limits_{S_1 \overline{S}_1^*}\cdots\int f(x,\theta_0)dx_1\ldots dx_n\Big).$$

Kuna kriteeriumide olulisuse nivood olid võrdsed,

$$\Upsilon_{\varphi_*}(\theta_0) = \Upsilon_\varphi(\theta_0) = \alpha ,$$

siis peab kehtima võrdus

$$\int\limits_{\bar{S}_1 S_1^*} \cdots \int f(\vec{x}, \theta_0)dx_1 \ldots dx_n = \int\limits_{S_1 \bar{S}_1^*} \cdots \int f(\vec{x}, \theta_0)dx_1 \ldots dx_n.$$

Meid huvitav avaldis on tõepoolest positiivne. Seega

$$\mathcal{T}_{\varphi_*}(\theta_1) > \mathcal{T}_{\varphi}(\theta_1) .$$

Teoreem on tõestatud.

Teoreemi tõestuse, mis kehtib ka diskreetsel juhul, võib leida õpikust [1] lk. 303-310.

Näide 14.3. Vaatame näidet ühtlaselt võimsama kriteeriumi välja kirjutamise kohta. Olgu meil tegemist diskreetse tunnusega, mille jaotuseks on Bernoulli jaotus $X \sim B(1,\theta)$. Olgu jaotuse parameetri θ kohta teatavatel sisulistel kaalutlustel esitatud lihthüpoteeside paar $H_0: \theta = 0,2$; $H_1: \theta = 0,8$. Tuginedes teoreemis saadud tulemusele kirjutame välja ÜV kriteeriumi selle hüpoteesipaari kontrollimiseks. Ühtlasi kirjeldame ka raskust, mis ei luba eelpool toodud tõestuskäiku rakendada diskreetsel juhul.

Vastavalt teoreemis saadud tulemusele on ÜV kriteerium esitatud kujul

$$\varphi_*(\vec{X}) = \begin{cases} 1, \text{ kui } & \mathcal{T}(\vec{X}) > c, \\ 0, \text{ kui } & \mathcal{T}(\vec{X}) \leq c \end{cases},$$

kusjuures tõepärasuhte statistik Bernoulli jaotusega üldkogumi jaoks on leitud näites 14.1. Tähelepanelikult vaadates märkame, et tõepärasuhte statistik on statistiku $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ monotoonselt kasvav funktsioon. Seetõttu on võimalik valida konstant c' nii, et sündmused $(\mathcal{T}(\vec{X}) > c)$ ja $(S > c')$ oleksid võrdsed. See aga tähendab, et ühtlaselt võimsama kriteeriumi võime esitada kujul

$$\varphi_*(\vec{X}) = \begin{cases} 1, \text{ kui } S > c' \\ 0, \text{ kui } S \leq c' \end{cases}.$$

Mõlemad kujud on samaväärsed - iga etteantud valimi $\vec{x}$ korral peame vastu võtma ühe ja sama otsuse.

Valime olulisuse nivoo, olgu see 0,05. Konstandi c' arvuliseks määramiseks saame nüüd tingimuse

$$\mathcal{T}_{\varphi_*}(\theta_0) = P_{\theta_0}(\varphi_*(\vec{X})=1) = P_{0,2}(S > c') = 0,05 .$$

Kuna mõõtmistulemuste summa on meie poolt kasutatava üldkogumi jaotuse korral binoomjaotusega, $S \sim B(n, \theta)$ saame

$$\sum_{i=c'+1}^{n} C_n^i \theta_o^i (1-\theta_o)^{n-i} = 0,05 .$$

Olgu meil otsuse langetamiseks võimalik teha 10 katset, n=10. Konstandi c' määramise tingimus omandab siis kuju

$$\sum_{i=c'+1}^{10} C_{10}^i \, 0,2^i 0,8^{10-i} = 0,05$$

Arvutades (või leides vastavast tabelist) paremal pool asuva summa mitmesuguste c' väärtuste korral saame:

kui c' = 3, siis $\quad \pi_{\varphi_*}(0,2) = 0,1209 > 0,05$

kui c' = 4, siis $\quad \pi_{\varphi_*}(0,2) = 0,0328 < 0,05$.

Pole võimalik konstrueerida sellist ÜV kriteeriumit, mille olulisuse nivoo oleks 0,05. Niisugune raskus tekib ainult diskreetsel juhul, kui tõepärasuhte statistik osutub samuti diskreetseks juhuslikuks suuruseks. Teoreetilises plaanis kasutatakse sellisest raskusest üle saamiseks kriteeriumi randomiseerimist, praktikas aga ei teki erilist probleemi - kasutame kriteeriumi, mille esimest liiki viga on mõnevõrra väiksem etteantud tõkkest 0,05. Seega

$$\varphi_*(\vec{X}) = \begin{cases} 1, \text{ kui } S > 4 \\ 0, \text{ kui } S \leq 4 \end{cases} .$$

Arvutame veel kriteeriumi võimsuse

$$\pi_{\varphi_*}(0,8) = P_{0,8}(S > 4) = \sum_{i=5}^{10} C_{10}^i \, 0,8^i 0,2^{10-i} = 0,9672 .$$

Seega antud kriteeriumi korral on teist liiki vea tegemise tõenäosus 0,0328.

Meie poolt konstrueeritud kriteerium on parim. Pole võimalik leida sellist statistikut, mille kasutamisel teist liiki vea tegemise tõenäosus muutuks väiksemaks. *

ÜV kriteerium on alati leitav lihthüpoteeside paari korral. Teatud tingimuste täidetuse korral saab tema olemasolu näidata ka ühepoolsete hüpoteeside kontrollimisel (vt. [1] lk. 314-319). Kahepoolsete hüpoteeside korral aga pole üldjuhul ÜV kriteeriumi olemasolu võimalik tõestada (vt. [1] lk. 319-321).

Kui ÜV kriteerium eksisteerib, on ta määratud tõepärasuhte statistiku abil (või lihtsama statistiku abil, millest tõepärasuhte statistik sõltub monotoonselt). See asjaolu on saanud aluseks ka üldisema kriteeriumide tuletamise võtte väljatöötamisel – üldistatud tõepärasuhte statistiku kasutamisel. Kirjeldame veel lühidalt seda võtet.

Vajagu kontrollimist hüpoteeside paar H_0: $\theta \in \Theta_0$; H_1: $\theta \in \Theta_1$. Moodustame üldistatud tõepärasuhte

$$\Lambda(\vec{x}) = \max_{\theta \in \Theta} L(\vec{x}, \theta) / \max_{\theta \in \Theta_0} L(\vec{x}, \theta) \quad ,$$

lugedes saadud avaldises argumendiks juhusliku valimi, saame <u>üldistatud</u> <u>tõepärasuhte</u> <u>statistiku</u>

$$T(\vec{X}) = \Lambda(\vec{X}) \; .$$

Arvestades tõepärasuhte sisulist tähendust jõuame loomuliku kriteeriumini

$$\varphi(\vec{X}) = \begin{cases} 1, \text{ kui } & T(\vec{X}) > c \\ 0, \text{ kui } & T(\vec{X}) \leq c \end{cases} .$$

Nimetatud kriteerium osutub igasuguses olukorras mõistlikuks. Kui aga eksisteerib ÜV kriteerium, jõuame välja selle kriteeriumi kasutamisele.

ÜLESANDED

1. Olgu $X \sim E(\lambda)$. Vajagu kontrollimist lihthüpoteeside paar H_0: $\lambda = 1$; H_1: $\lambda = 2$. Kirjutada välja ÜV kriteerium.
2. Olgu võimalik eelmises ülesandes toodud hüpoteeside kontrollimiseks teha 100 katset. Nii suure valimi korral võib valimi keskväärtuse jaotuseks lugeda normaaljaotuse, $\bar{X} \sim N(1/\lambda\,,\ 1/\lambda\sqrt{n})$. Leida ÜV kriteeriumit määrava konstandi arvuline väärtus. Kasutada olulisuse nivood 0,1. Arvutada saadud kriteeriumi võimsus.
3. Olgu $X \sim E(\lambda)$. Vajagu kontrollimist lihthüpoteeside paar H_0: $\lambda = 1$; H_1: $\lambda = 1{,}5$. Kirjutada välja olulisuse nivoole 0,1 vastav ÜV kriteerium. Arvutada selle kriteeriumi võimsus, (n=100)

   Kirjutada välja olulisuse nivoole 0,01 vastav kriteerium. Arvutada selle kriteeriumi võimsus.
4. Olgu $X \sim P(\lambda)$. Vajagu kontrollimist lihthüpoteeside paar H_0: $\lambda = 1$; H_1: $\lambda = 2$. Kirjutada välja ÜV kriteeriumid olulisuse nivool 0,1; 0,05; 0,01. (Otsuse langetamiseks on

võimalik teha 12 katset). Näpunäide: kasutada Poissoni jaotuse omadust - kui liidetavad Y ja Z on sõltumatud ja $Y, Z \sim P(\lambda)$, siis $Y+Z \sim P(2\lambda)$.

5. Kasutades ülesandes 2.12 toodud valimit kontrollida eelmises ülesandes püstitatud hüpoteese. Langetada otsus. Millise vea võib langetatud otsuse korral teha? Milline on tõke selle vea tegemise tõenäosusele?

KUS ME OLEME? Tutvusime teooriaga ühtlaselt võimsama kriteeriumi konstrueerimiseks väga lihtsas situatsioonis, kus kontrollimist vajab lihthüpoteeside paar. Selle konstruktsiooni üldistamise võimalustega praktilist huvi pakkuvate hüpoteeside jaoks saab tutvuda õpiku [1] abil. Esitasime veel ka töökindlama konstruktsiooni kriteeriumi tuletamiseks, mis on rakendatav juba paljude praktilist huvi pakkuvate ülesannete korral. Selle konstruktsiooni kasutamise näidetega tutvume paragrahvis 18.

KUHU LÄHEME? Oleme tundma õppinud statistika põhimõisteid ja põhilisi ülesandeid. Järgnevad paragrahvid on teatud mõttes kordamisparagrahvid: võtame vaatluse alla praktikas väga sageli esineva normaaljaotusega üldkogumi ja leiame parameetrite hinnangud, parameetrite usaldusintervallid ning kriteeriumid hüpoteeside kontrollimiseks parameetrite kohta.

§15. Normaaljaotuse parameetrite hindamine. Statistikute jaotused.

Normaaljaotus on statistikas kõige sagedamini kasutatavaks tõenäosuslikuks mudeliks. Praktilistes ülesannetes võib sageli kokku puutuda tunnustega, mille käitumise kirjeldamiseks sobib normaaljaotus. Järgnevates paragrahvides vaatame, kuidas rakendada selle mudeli korral üldiseid metoodilisi võtteid, millega eelnevates paragrahvides tutvusime.

A. Parameetrite punkthinnangute leidmine

Olgu meil tegemist normaaljaotusega $N(\mu, \sigma)$. Selle normaaljaotuse tihedusfunktsioon on määratud eeskirjaga

$$f(x, \mu, \sigma) = (1/(\sigma\sqrt{2\pi}))\exp(-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)) .$$

Normaaljaotuse tihedusfunktsioon sõltub kahest parameetrist μ ja σ.

Leiame nende parameetrite STP hinnangud. Selleks kirjutame esmalt välja valimi tõepärafunktsiooni

$$L(\vec{x}, \mu, \sigma) = (1/(\sigma\sqrt{2\pi})^n \exp\left[- \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2/2\sigma^2\right],$$

siis logaritmilise tõepärafunktsiooni

$$l(\vec{x}, \mu, \sigma) = -n\ln\sigma - n\ln\sqrt{2\pi} - \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2/2\sigma^2.$$

Arvutame logaritmilise tõepärafunktsiooni osatuletised parameetrite μ ja σ järgi

$$(\partial/\partial\mu)\ l(\vec{x}, \mu, \sigma) = - \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)/\sigma^2$$

$$(\partial/\partial\sigma)\ l(\vec{x}, \mu, \sigma) = -n/\sigma + \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2/\sigma^3$$

ning võrdsustame saadud osatuletised nulliga. Saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0 \\ n\sigma^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = 0 \end{cases},$$

mille lahend $\hat{\mu} = \bar{x}$ ja $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2/n$ määrab parameetrite STP hinnangud.

Nagu STP hinnangute üldistest omadustest teada (vt. [9], lk. 65-77), määratakse need hinnangud piisavate statistikute abil. STP hinnangud on mõjusad. Tunnuse keskväärtusele μ määratud hinnang on nihketa ja iga parameetri σ väärtuse korral efektiivne. Parameetrile σ^2 määratud hinnang aga pole nihketa. Toetudes lemmas 2.5 saadud tulemusele, saame nihketa hinnangu määrata valimi dispersiooni abil. Seega kasutame normaaljaotuse korral hinnangut

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2/(n-1) = s^2 .$$

Kui normaaljaotuse parameeter μ on tundmatu, ei saa parameetrile σ^2 määrata efektiivset hinnangut. Normaaljaotuse standardhälbe σ STP hinnang on määratud eeskirjaga $\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2}$.

B. Hinnangut määravate statistikute jaotused.

Nagu eelpool nägime, on usaldusintervallide konstrueerimisel ja kriteeriumide leidmisel vajalik teada hinnangut määravate statistikute jaotusi.

Valimi keskväärtuse tõenäosusjaotuse leidmine osutub üpris lihtsaks ülesandeks. Tuletame meelde normaaljaotuse lineaarsuse omaduse: kui juhuslikud suurused Y ja Z on sõltumatud ja normaaljaotusega, $Y \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ ja $Z \sim N(\mu_2, \sigma_2)$, siis ka nende juhuslike suuruste summa on normaaljaotusega $Y+Z \sim N(\mu_1+\mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$. Sellest omadusest tuleneb järgmine lemma.

Lemma 15.1. Olgu $X \sim N(\mu, \sigma)$, siis $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$.

Selleks, et leida valimi dispersiooniga seotavat tóenäosusjaotust normaaljaotusega üldkogumi korral, peame defineerima ühe uue tóenäosusjaotuse.

Definitsioon 15.2. Juhuslik suurus Y on χ^2-jaotusega, kui tema tihedusfunktsioon on määratud eeskirjaga

$$f_Y(y) = \begin{cases} y^{n/2-1}e^{-y/2}/(2^{n/2}\,\Gamma(n/2)), & \text{kui } y \geq 0 \\ 0, & \text{kui } y < 0. \end{cases}$$

Tihedusfunktsiooni definitsioonis esinev konstant $\Gamma(n/2)$ on Γ-funktsiooni abil määratud arv. Γ-funktsioon on defineeritud vórdusega

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt, \quad z > 0.$$

Definitsioonist järeldub, et $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$, $\Gamma(1)=1$. Kui argumendiks on täisarv, siis $\Gamma(n+1)=n!$. Antud tihedusfunktsioonis esinevat Γ-funktsiooni väärtust on vóimalik leida, arvestades seost $\Gamma(z)=(z-1)\Gamma(z-1)$.

Defineeritud jaotus sóltub ühest parameetrist, mis vóib omada ainult täisarvulisi väärtusi. Edaspidises kasutame lühitähistust $Y \sim \chi^2(n)$. Vastava juhusliku suuruse keskväärtus $EY=n$ ja dispersioon $DY=2n$.

χ^2-jaotus on seotud normaaljaotusega. Veendume, et kui juhuslik suurus $Z \sim N(0,1)$, siis juhuslik suurus $Z^2 \sim \chi^2(1)$.

Tuletame esmalt meelde tóenäosusteooria kursusest teada oleva valemi, mis vóimaldab meil määrata juhusliku suuruse ruudu tihedusfunktsiooni ruutu vóetud juhusliku suuruse tihedusfunktsiooni abil:

$$f_Y(y) = \begin{cases} (f_Z(\sqrt{y})+f_Z(-\sqrt{y}))/(2\sqrt{y}), & \text{kui } y \geq 0 \\ 0, & \text{kui } y < 0 \end{cases}.$$

Arvestades, et eelduse kohaselt $f_Z(z) = e^{-z^2/2}/\sqrt{2\pi}$, saame

$$f_Y(y) = e^{-y/2}/(\sqrt{y\,2\pi}) = y^{-1/2}e^{-y/2}/(\sqrt{2}\,\Gamma(1/2)).$$

χ^2-jaotuse definitsiooni kohaselt ongi $Y \sim \chi^2(1)$.

Lemma 15.3. Kui $Y \sim \chi^2(m)$ ja $W \sim \chi^2(n)$ ning Y ja W on sõltumatud, siis

$$Y + W \sim \chi^2(m+n).$$

Tõestus. Tõestuses kasutame ära juhusliku suuruse karakteristliku funktsiooni. Juhusliku suuruse Y karakteristlik funktsioon on määratud eeskirjaga $\psi_Y(t)=Ee^{itY}$ (i on imaginaarühik, $i = \sqrt{-1}$). Kui $Y \sim \chi^2(m)$, siis $\psi_Y(t)=1/(1-2it)m/2$. Kahe sõltumatu juhusliku suuruse summa karakteristlik funktsioon aga võrdub liidetavate karakteristlike funktsioonide korrutisega. Seetõttu

$$\psi_{Y+W}(t)= \psi_Y(t)\ \psi_W(t)=1/(1-2it)^{(m+n)/2}.$$

Kuna karakteristlik funktsioon määrab tõenäosusjaotuse üheselt, siis tulenebki siit, et $Y+W \sim \chi^2(m+n)$.

Lemma on tõestatud.

Lemmast tuleneb järgmine järeldus.

Järeldus 15.4. Kui juhuslikud suurused $Z_1, \ldots, Z_n$ on sõltumatud ja standardse normaaljaotusega N(0,1), siis juhuslik suurus $W=\sum_{i=1}^{n} Z_i^2$ on χ^2-jaotusega parameetriga n.

Toodud järeldus täpsustabki seose normaaljaotuse ja χ^2-jaotuse vahel.

Tõestame nüüd teoreemi, milles seome normaaljaotusega üldkogumi korral valimi dispersiooni S^2 jaotuse χ^2-jaotusega.

Teoreem 15.5. Olgu $X \sim N(\mu, \sigma)$. Siis juhuslik suurus

$$(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1) \quad .$$

Tõestus. Vaatame lähemalt teoreemi väites esitatud juhuslikku suurust $(n-1)S^2/\sigma^2$. Arvestades valimi dispersiooni määramiseeskirja võime kirjutada

$$(n-1)S^2/\sigma^2= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2/\sigma^2= \sum_{i=1}^{n}((X_i-\mu)/\sigma)^2- n((\bar{X}-\mu)/\sigma)^2$$

ehk

$$\sum_{i=1}^{n}((X_i-\mu)/\sigma)^2=(n-1)S^2/\sigma^2+[(\bar{X}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})]^2 .$$

On võimalik tõestada, et normaaljaotusega üldkogumi korral valimi keskväärtus ja dispersioon on sõltumatud juhuslikud suurused. Teisendame pisut lemma 15.3. tõestamisel kasutatud karakteristliku funktsiooni omadust. Kui sõltumatute liidetavate korral $\psi_{Y+W}(t)=\psi_Y(t)\psi_W(t)$, siis avaldub ju ka ühe liidetava karakteristlik funktsioon summa ja teise liidetava karakteristliku funktsiooni kaudu: $\psi_Y(t)=\psi_{Y+W}(t)/\psi_W(t)$.

Ülal saadud avaldises on aga vasakul pool võrdusmärki asuv summa järelduse 15.4 põhjal χ^2-jaotusega parameetriga n, viimane liidetav aga paremal pool võrdusmärki on lemmat 16.1 arvestades χ^2-jaotusega parameetriga 1. Kasutades seost karakteristlike funktsioonide vahel saame

$$\psi_{(n-1)S^2/\sigma^2}(t) = 1/(1-2it)^{n-1}.$$

See on aga $\chi^2(n-1)$ -jaotuse karakteristlik funktsioon. Sellest võrdusest järeldubki teoreemi väide.

Teoreem on tõestatud.

χ^2-jaotuse praktiliseks kasutamiseks on koostatud tema kvantiilide tabelid.

ÜLESANDED

1. On teada, et ühe värviteleviisori poolt tekitatud radiatsioon pole tervisele kahjulik. On aga ruume, kus pidevalt on sisse lülitatud mitu värviteleviisorit. Sooviti uurida, milline on sel juhul radiatsiooni tase. Vaatluse all oli 10 ruumi, igas neist oli pidevalt sisselülitatud 5 värviteleviisorit. Radiatsiooni taset mõõdeti erinevates ruumi piirkondades, järgnevalt on toodud mõõtmistulemuste keskväärtused iga ruumi jaoks (mõõtmisühikuks oli milliröntgenit tunnis)

   0,37 0,48 0,60 0,15 0,50
   0,80 0,50 0,36 0,16 0,89

   (a) arvutada mõõtmistulemuste keskväärtus ja standardhälve;
   (b) millist normaaljaotust kasutada mõõdetava tunnuse kirjeldamiseks?
   (c) tervist mittekahjustavaks keskmiseks tasemeks loetakse 0,5 mr/t. Hinnata tõenäosust, et radiatsiooni tase ületab lubatud piiri.

2. Automaat valmistab silindrikujulisi metall-detaile. Kontrollitud detailide läbimõõdud olid järgmised

   1,01 0,97 1,03 1,04 0,99 0,98 0,99 1,01 1,03 .

Leida hinnang detaili läbimõõdu keskväärtusele ja standardhälbele. Hinnata tõenäosust, et detaili läbimõõt on suurem ühest?

3. Olgu uuritav tunnus normaaljaotusega, $X \sim N(2,4)$. Kui suur peab olema valim, et kehtiks $P(1,9 \leq \bar{X} \leq 2,1) \geq 0,99$?
4. Vaatluse all on kaks üldkogumit, milles mõõdetakse ühte ja sama tunnust. Esimeses üldkogumis on uuritav tunnus $X \sim N(2,4)$, teises on aga uuritav tunnus $Y \sim N(1,1)$. Mõlemist üldkogumist tehakse 16-elemendiline valim. Leida $P(\bar{X} > \bar{Y})$.
5. Olgu $X \sim N(\mu, \sigma)$. Leida statistiku S^2 dispersioon.
6. Tõestada statistiku S^2 mõjusus parameetri σ^2 hindamisel.
7. Olgu juhuslik suurus $Y \sim \chi^2(n)$. Kui parameetri väärtus on küllalt suur võib juhusliku suuruse $(Y-n)/\sqrt{2n}$ ligikaudseks jaotuseks lugeda standardse normaaljaotuse $N(0,1)$. Seda asjaolu arvestades leida valem, mis võimaldaks χ^2-jaotuse kvantiili h_α avaldada normaaljaotuse kvantiili z_α kaudu. Kontrollida tabeli abil niisuguse valemi täpsust mitmesuguste parameetri väärtuste korral.

Kordamisküsimusi tõenäosusteooriast

1. Olgu Z pidev juhuslik suurus tihedusfunktsiooniga $f(z)$ ja $g(z)$ mingi pöördfunktsiooni omav pidev funktsioon. Defineerime uue juhusliku suuruse $Y=g(Z)$. Avaldada juhusliku suuruse Y tihedusfunktsioon argumendiks oleva juhusliku suuruse tihedusfunktsiooni kaudu.
2. Olgu Z pidev juhuslik suurus tihedusfunktsiooniga $f(z)$. Defineerime uue juhusliku suuruse $Y=a+bZ$. Avaldada juhusliku suuruse Y tihedusfunktsioon argumendiks oleva juhusliku suuruse tihedusfunktsiooni kaudu.
3. Loetleda juhusliku suuruse karakteristliku funktsiooni omadused. Lähtudes karakteristliku funktsiooni definitsioonist arvutada $\chi^2(1)$-jaotuse karakteristlik funktsioon.

KUS ME OLEME? Leidsime statistikud normaaljaotuse parameetrite hindamiseks. Kuna järgnevate põhiülesannete lahendamiseks on vaja teada nende statistikute tõenäosusjaotusi, siis selgitasime need välja. Meie poolt leitud valimi keskväärtuse jaotus ei ole aga praktikas enamasti kasutatav - see jääb sõltuma üldkogumi standardhälbest σ. Praktikas kasutatava jaotuseni jõudmiseks peame tutvuma kahe uue tõenäosusjaotusega.

KUHU LÄHEME? Tuletame kaks uut tõenäosusjaotust - F-jaotuse ja T-jaotuse. Neist T-jaotust asume kasutama järgmises paragrahvis, F-jaotust läheb meil vaja hiljem, siis kui asume võrdlema kahe erineva normaaljaotusega üldkogumi parameetreid.

Sisuliselt kuulub järgmine paragrahv tõenäosusteooriasse. Tema esitamist õigustab ainult F- ja T-jaotuse erakordselt suur tähtsus matemaatilise statistika praktiliste probleemide lahendamisel.

§16. F-jaotus ja T-jaotus.

Defineerime kaks tõenäosusjaotust, mis on vajalikud otsustuste tegemisel normaaljaotusega üldkogumi kohta.

Defineerime esmalt jaotuse, mis inglise statistiku Fisheri järgi kannab nimetust F-jaotus.

Definitsioon 16.1. Olgu juhuslikud suurused U ja V sõltumatud ning $U \sim \chi^2(m)$, $V \sim \chi^2(n)$. Moodustame juhusliku suuruse F,

$$F = (U/m)/(V/n) .$$

Juhusliku suuruse F jaotust nimetatakse F-jaotuseks parameetritega m ja n.

F-jaotuse tähistamiseks kasutame edaspidises lühitähist F(m,n). See jaotus sõltub kahest parameetrist, mis võivad omandada ainult täisarvulisi väärtusi.

F-jaotuse definitsioonist tuleneb ka eeskiri selle jaotuse tihedusfunktsiooni määramiseks. Tõestame selle järgnevas teoreemis.

Teoreem 16.2. F-jaotuse, mille parameetrid on m ja n, tihedusfunktsioon on määratud eeskirjaga

$$f_F(z) = \frac{\Gamma((m+n)/2)(m/n)^{m/2} z^{m/2-1}}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)(1+mz/n)^{(n+m)/2}}$$

Tõestus. Olgu juhuslikud suurused U ja V kasutatud suhte F moodustamisel. Kirjutame esmalt välja suhte U/V jaotusfunktsiooni. Arvestades juhuslike suuruste U ja V sõltumatust

$$F_{U/V}(z)=P(U/V<z)=P(U<zV)=\int\limits_{U<zV} f_{UV}(u,v)\,dudv=$$
$$=\int_0^{\infty}\int_0^{zV}(f_U(u)du)f_V(v)dv=\int_0^{\infty}F_U(zv)f_V(v)dv.$$

Meid huvitava tihedusfunktsiooni leidmiseks peame leidma saadud avaldise tuletise z järgi

$$f_{U/V}(z) = \int_0^{\infty} vf_U(zv)f_V(v)dv \quad .$$

Kirjutame nüüd intergaali all olevate tihedusfunktsioonide asemele vastavad χ^2-jaotuse tihedusfunktsioonid (olgu $c=m/2;\ d=n/2$)

$$f_{U/V}(z)=\int_0^{\infty} v(1/(2^c\Gamma(c))(zv)^{c-1}e^{-zv/2}(1/(2^d\Gamma(d))v^{d-1}e^{-v/2}dv=$$
$$=z^{c-1}/(2^{c+d}\,\Gamma(c)\,\Gamma(d))\int_0^{\infty} v^{c+d-1}e^{-v(z+1)/2}dv\ .$$

Näitame, et allesjäänud intergaali saame avaldada Γ-funktsiooni kaudu. Tõepoolest, meenutame, et Γ-funktsioon on defineeritud eeskirjaga

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt \qquad (x>0).$$

Teeme muutujavahetuse $v(z+1)/2=w$. Saame

$$\int_0^{\infty} v^{c+d-1}e^{-v(z+1)/2}dv=2^{c+d}/(z+1)^{c+d}\int_0^{\infty} w^{c+d-1}e^{-w}dw =$$
$$=(2^{c+d}/(z+1)^{c+d})\,\Gamma(c+d)\quad .$$

Arvestades nüüd tulemust: kui $Y=aX$, siis $f_Y(y)=f_X(x/a)/a$, saame suhte $(U/m)/(V/n)$ tihedusfunktsiooni

$$f_F(z) = \frac{\Gamma((m+n)/2)(m/n)^{m/2}z^{m/2-1}}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)(1+mz/n)^{(n+m)/2}} \quad .$$

Teoreem on tõestatud.

Defineerime nüüd jaotuse, mis on võetud kasutusele inglise statistiku Gosset' poolt ja kannab nimetust T-jaotus (Studenti jaotus).

Definitsioon 16.3. Olgu $Z\sim N(0,1)$, $U^2\sim\chi^2(n)$ ja juhuslikud suurused Z ja U olgu sõltumatud. Siis suhte

$$T = Z/\sqrt{U^2/n}$$

jaotust nimetatakse T-jaotuseks parameetriga n.

Edaspidises kasutame lühitähistust $T\sim T(n)$.

Veendume, et see jaotus on sümmeetriline. Olgu $T\sim T(n)$. Siis $-T=-Z/\sqrt{U^2/n}$ ja T-jaotuse definitsiooni kohaselt

$\Rightarrow T \sim T(n)$.

Eeskirja T-jaotuse tihedusfunktsiooni määramiseks anname järgnevas teoreemis.

Teoreem 16.4. Kui $T \sim T(n)$, siis tema tihedusfunktsioon on määratud eeskirjaga

$$f_T(t) = \Gamma((n+1)/2)/(\Gamma(n/2)\sqrt{n\pi}(1+t^2/n)^{(n+1)/2}) \quad .$$

Tõestus. Vastavalt T-jaotuse definitsioonile peab juhuslik suurus T olema esitatav suhtena

$$T = Z/\sqrt{U^2/n}$$

ehk tema ruut esitatav suhtena

$$T^2 = Z^2/(U^2/n) \; .$$

Kuna aga juhuslikud suurused Z ja U on sõltumatud ning χ^2-jaotuse omaduste põhjal $Z^2 \sim \chi^2(1)$, siis $T^2 \sim F(1,n)$. Järelikult võime välja kirjutada juhusliku suuruse T^2 tihedusfunktsiooni

$$f_{T^2}(t) = (\Gamma((n+1)/2\cdot t^{-1/2})/(\Gamma(n/2)\Gamma(1/2)\sqrt{n}(1+t/n)^{(n+1)/2}).$$

Kirjutame nüüd välja T-jaotusega juhusliku suuruse jaotusfunktsiooni. Olgu esmalt jaotusfunktsiooni argument positiivne

$$F_T(t) = P(T < t) = P(T < 0)+P(0 \leq T < t) =$$
$$=1/2+(1/2)P(-t < T < t)=1/2+(1/2)P(T^2 < t^2)=1/2+(1/2)F_{T^2}(t^2) \; .$$

Meile vajaliku tihedusfunktsiooni leiame jaotusfunktsiooni diferentseerides

$$f_T(t) = (1/2)2t\cdot f_{T^2}(t^2) =$$
$$=\Gamma((n+1)/2)/(\Gamma(n/2)\sqrt{n\pi})(1+t^2/n)^{(n+1)/2}).$$

Kuna T-jaotus on sümmeetriline, avaldub tihedusfunktsioon samal viisil ka negatiivse argumendi korral.

Teoreem on tõestatud.

Lihtne on veenduda, et T-jaotuse parameetri n väärtuste suurenedes läheneb tema tihedusfunktsioon standardse normaaljaotuse tihedusfunktsioonile. Kui $n \geq 100$, võib neid jaotusi lugeda praktiliselt ühte langevateks.

T-jaotuse tihedusfunktsiooni teadmine võimaldab arvuliselt leida selle jaotuse kvantiilid. T-jaotuse kvantiilide praktiliseks kasutamiseks on koostatud vastavad kvantiilide tabelid.

Järgnevas teoreemis esitame juhusliku suuruse, mille jaotust on vaja usalduspiiride määramisel normaaljaotusega üldkogumi keskväärtusele, samuti hüpoteeside kontrollimisel selle parameetri kohta.

Teoreem 16.5. Olgu üldkogumit kirjeldavaks jaotuseks normaaljaotus, $X \sim N(\mu, \sigma)$. Siis valimi keskväärtuse $\bar{X}$ ja valimi dispersiooni S^2 abil moodustatud juhuslik suurus $\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/S$ on T-jaotusega parameetriga n-1.

Tõestus. Vastavalt eelpool saadud tulemusele $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$ ja $(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$. On võimalik tõestada, et need statistikud on sõltumatud. Järelikult $(\bar{X}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0,1)$. Moodustame suhte

$$\frac{(\bar{X}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})}{S/\sigma},$$

mis T-jaotuse definitsiooni kohaselt on T-jaotusega parameetriga n-1. Pärast ühesuguste liikmete taandamist saame

$$\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/S \sim T(n-1) .$$

Teoreem on tõestatud.

ÜLESANDED

1. Kirjutada välja seos T-jaotuse kvantiili ja täiendkvantiili vahel, mis tuleneb selle jaotuse sümmeetrilisusest.
2. Leida tabelist T(6) jaotuse 0,05; 0,025 ja 0,01 kvantiil ja täiendkvantiil.
3. Leida seos F(m,n)-jaotuse kvantiili ja F(n,m)-jaotuse täiendkvantiili vahel.
4. Leida tabelist F(8,4) jaotuse 0,05 ja 0,01 kvantiil ja täiendkvantiil.

KUS ME OLEME? Tegime väikese kõrvalepõike tõenäosusteooriasse, et tutvuda igakülgselt kahe edaspidises vajaliku tõenäosusjaotusega.

KUHU LÄHEME? Asume konstrueerima usaldusintervalle normaaljaotuse parameetritele.

§17. Usaldusintervallid normaaljaotuse parameetritele.

A. Konstrueerime usaldusintervalli normaaljaotuse keskväärtuse jaoks. Selleks kasutame oma tavalist strateegiat.

Meil on teada, et juhuslik suurus $n(\bar{X}-\mu)/S \sim T(n-1)$. Kasutades T-jaotuse $\alpha/2$-kvantiili ja $\alpha/2$-täiendkvantiili,[*] kirjutame välja konstantse intervalli, mis sisaldab seda juhuslikku suurust meie poolt valitud usaldusnivooga $1-\alpha$:

$$P(t_{\alpha/2;n-1} \leq \sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/S \leq \bar{t}_{\alpha/2;n-1}) = 1-\alpha.$$

Teisendame sulgudesse jäänud võrratust nii, et keskele jääks ainult tundmatu parameeter (T-jaotuse sümmeetrilisuse tõttu $t_{\alpha/2;n} = -\bar{t}_{\alpha/2;n}$)

$$P(\bar{X}-\bar{t}_{\alpha/2;n-1}S/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X}+\bar{t}_{\alpha/2;n-1}S/\sqrt{n}) = 1-\alpha.$$

Usaldusintervalli definitsiooni kohaselt määravad äärtele jäänud statistikud parameetrile μ usaldusintervalli usaldusnivooga $1-\alpha$. Kui meie käsutuses on konkreetne valim - valimi keskväärtus ja dispersioon omandavad siis konkreetsed arvulised väärtused - saame usalduspiirid arvuliselt välja kirjutada.

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\mu} &= \bar{x}-\bar{t}_{\alpha/2;n-1}s/\sqrt{n} \\ \bar{\mu} &= \bar{x}+\bar{t}_{\alpha/2;n-1}s/\sqrt{n} \end{aligned}}$$

<u>Näide 17.1.</u> Nahkhiir saadab lendava putuka püüdmiseks välja helisignaale ja kuulab nende kajasid. Kuni putukat pole välja peilitud, on signaalide vaheline intervall 50-100 millisekundit. Kui putukas on välja peilitud, väheneb signaalide vaheline intervall 10 millisekundile. Soovitakse leida hinnang keskmisele kaugusele, millal nahkhiir putuka välja peilib ja usaldusintervall sellele hinnangule (usaldusnivoo 0,95).

Üsna keeruka katseseadmega kinnises ruumis saadi järgmised tulemused putuka ja nahkhiire vahelise kauguse kohta hetkel, millal nahkhiire helisignaalid muutusid sagedasteks:
62, 52, 68, 23, 34, 45, 27, 42, 83, 56, 40 .

Oletame, et mõõdetav tunnus X allub normaaljaotusele $X \sim N(\mu, \sigma)$.

Leiame esitatud valimi põhjal hinnangu normaaljaotuse

---

*) Lepime kokku edaspidises tähistada T(n)-jaotuse α-kvantiili sümboliga $t_{\alpha;n}$.

keskväärtusele

$$\bar{x} = 48{,}4\ \mathrm{m}\ .$$

Usaldusintervalli välja kirjutamiseks arvutame valimi dispersiooni ja standardhälbe

$$s^2 = 327{,}05; \quad s = 18{,}1\mathrm{m}\ .$$

Leiame tabelist meile vajaliku T-jaotuse kvantiili $\bar{t}_{0,025;10} = 2{,}23$. Arvutame pool usaldusintervalli laiusest

$$\bar{t}_{0,025;10}s/\sqrt{11} = 2{,}23 \cdot 18{,}1/\sqrt{11} = 12{,}8$$

ning leiame usalduspiirid

$$\underline{\mu} = 48{,}4 - 12{,}8 = 35{,}6$$

$$\bar{\mu} = 48{,}4 + 12{,}8 = 61{,}2\ .$$

Lõppkokkuvõttes saame usaldusintervalli $[35{,}6;\ 61{,}2]$. *

B. Konstrueerime usaldusintervalli normaaljaotuse standardhälbele. Kasutame jällegi oma tavalist strateegiat.

Meil on teada, et juhuslik suurus $(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$. Kasutades χ^2-jaotuse $\alpha/2$-kvantiili ja $\alpha/2$-täiendkvantiili,*) kirjutame välja konstantse intervalli, mis sisaldab juhuslikku suurust meie poolt valitud usaldusnivooga $1-\alpha$

$$P(h_{\alpha/2;n-1} \leqslant (n-1)S^2/\sigma^2 \leqslant \bar{h}_{\alpha/2;n-1}) = 1-\alpha.$$

Teisendame sulgudesse jäänud võrratust nii, et keskele jääks ainult tundmatu parameeter σ^2

$$P((n-1)S^2/\bar{h}_{\alpha/2;n-1} \leqslant \sigma^2 \leqslant (n-1)S^2/h_{\alpha/2;n-1}) = 1-\alpha.$$

Usaldusintervalli definitsiooni kohaselt määravad äärtele jäänud statistikud parameetrile σ^2 usaldusintervalli usaldusnivooga $1-\alpha$. Selleks, et saada usaldusintervalli parameetrile σ, leiame võrratuse kõikidest liikmetest ruutjuured

$$P(\sqrt{n-1}\,S/\sqrt{\bar{h}_{\alpha/2;n-1}} \leqslant \sigma \leqslant \sqrt{n-1}\,S/\sqrt{h_{\alpha/2;n-1}}) = 1-\alpha.$$

Kui meie käsutuses on konkreetne valim - valimi dispersioon omandab siis konkreetse arvulise väärtuse - saame usalduspiirid arvuliselt välja kirjutada

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{\sigma} &= \sqrt{n-1}\,s/\sqrt{\bar{h}_{\alpha/2;n-1}}\\ \bar{\sigma} &= \sqrt{n-1}\,s/\sqrt{h_{\alpha/2;n-1}}\end{aligned}}$$

*) Lepime kokku edaspidises tähistada $\chi^2(n)$-jaotuse α-kvantiili sümboliga $h_{\alpha;n}$.

Näide 18.2. Orgaanilise aine vanuse määramiseks kasutatakse radioaktiivse süsiniku meetodit (töödeldud proovi radioaktiivsust võrreldakse teadaoleva vanusega standardiga). Võib eeldada, et saadud vanuse hinnang on normaaljaotusega: tema väärtuse määrab summa õige vanus + mõõtmisviga; mõõtmisvea tüüpiliseks jaotuseks on aga normaaljaotus $N(0, \sigma)$, mille standardhälbe määrab mõõtmise täpsus. Meetodi täpsuse uurimiseks määrati leitud skeleti vanus 10 erineva proovi abil.

Saadi järgmised tulemused (sajandites)

24,9 25,2 24,3 26,8 25,3 26,9 28,7 24,1 27,3 28,0 .

Kuna kõikide proovida tegelik vanus on ühesugune, võime eeldada, et uuritav tunnus on normaalajaotusega $N(\mu, \sigma)$. Meetodi täpsust iseloomustab parameeter σ. Selle parameetri hinnangu määrab valimi standardhälve. Arvutame

$$\bar{x} = 26{,}17 \text{saj.}; \quad s^2 = 2{,}52 ; \quad s = 1{,}59 \text{saj.}$$

Saadud hinnangu täpsuse iseloomustamiseks leiame usaldus-piirid. Valime usaldusnivooks 0,95. Leiame tabelist meile vajalikud χ^2- jaotuse kvantiilid:

$$h_{0,025;19} = 2{,}70 \qquad \bar{h}_{0,025;19} = 19{,}02$$

ning arvutame standardhälbe usalduspiirid

$$\underline{\sigma} = \sqrt{9} \cdot 1{,}59/\sqrt{19{,}02} = 1{,}09$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{9} \cdot 1{,}59/\sqrt{2{,}70} = 2{,}90 .$$

Seega oleme saanud usaldusintervalli $[1{,}09; 2{,}90]$. *

ÜLESANDED

1. 50 arstipunktis käinud naisüliõpilase keskmine pikkus oli 168,5cm standardhälbega 2,7cm. Leida 0,98-usaldusintervall naisüliõpilase tegelikule keskmisele pikkusele selles ülikoolis.
2. 100 autoomaniku küsitlemisel selgus, et nende keskmine aastane läbisõit oli 14500 km standardhälbega 2400km. Leida usaldusintervall usaldusnivooga 0,9 tegelikule läbisõidule.
3. Leida näite 2.11 andmeid kasutades usaldusintervall üldkogumi keskväärtusele ja standardhälbele. Kasutada usaldusnivoosid 0,9; 0,95 ja 0,99.
4. Leida näite 15.2 andmeid kasutades usaldusintervall üldkogumi keskväärtusele ja standardhälbele. Kasutada usal-

dusnivood 0,95.

5. Olgu vaatluse all teatava tehase poolt toodetud elektripirnide eluiga. Oletame, et see tunnus on normaaljaotusega standardhälbega 40t. 30 kontrollitud elektripirni eluiga oli 780t. Leida 0,9-usaldusnivooga usaldusintervall tegelikule elektripirni keskmisele elueale. Näpunäide: kasutada ülesandes 10.2 tuletatud valemit.

6. Olgu $X \sim N(0, \sigma)$. Konstrueerida usaldusintervall üldkogumi dispersioonile σ^2. Näpunäide: kasutada statistikut $T(\vec{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2/n$.

KUS ME OLEME? Treenisime normaaljaotuse parameetrite usaldusintervallide leidmist.

KUHU LÄHEME? Tuletame kriteeriumid normaaljaotuse parameetrite kohta esitatud hüpoteeside kontrollimiseks.

§18. Hüpoteeside kontrollimine normaaljaotuse parameetrite kohta.

A. Vaatame esmalt hüpoteese, mis on esitatud normaaljaotusega üldkogumi keskväärtuse kohta. Praktilistes ülesannetes leiavad kasutamist kolm erinevat hüpoteeside paari

$$H_0: \mu = \mu_0 \qquad H_0': \mu \geq \mu_0 \qquad H_0'': \mu \leq \mu_0$$
$$H_1: \mu \neq \mu_0 \qquad H_1': \mu < \mu_0 \qquad H_1'': \mu > \mu_0$$

Kuna siin ei ole tegemist lihthüpoteesidega, kasutame kriteeriumi saamiseks üldistatud tõepärasuhte (ÜTPS) statistikut. Võtame vaatluse alla esimese hüpoteeside paari. Tõestame järgneva teoreemi.

Teoreem 18.1. Olgu üldkogumit kirjeldavaks jaotuseks normaaljaotus, $X \sim N(\mu, \sigma)$. Vajagu kontrollimist hüpoteeside paar $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu \neq \mu_0$. Kriteerium

$$\varphi(\vec{X}) = \begin{cases} 1, & \text{kui } \sqrt{n}|\bar{X} - \mu_0|/S > t_{\alpha/2;n-1} \\ 0, & \text{kui } \sqrt{n}|\bar{X} - \mu_0|/S \leq t_{\alpha/2;n-1} \end{cases}$$

on ÜTPS kriteeriumiks olulisuse nivool α.

Tõestus. Normaaljaotusel on kaks parameetrit, tähistame vastava parameetrite vektori sümboliga $\vec{\theta}$, $\vec{\theta} = (\mu, \sigma)$. Nullhüpoteesis näidatud piirkond Θ_0 koosneb väärustest

$$\Theta_0 = \{(\mu, \sigma) : \mu = \mu_0, \ \sigma > 0\},$$

parameetrite võimalike väärtuste piirkond Θ aga koosneb väärtustest

$$\Theta = \{(\mu, \sigma) : -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0\}.$$

Meenutame, et üldistatud tóepärasuhte statistik on määratud eeskirjaga

$$\Lambda(\vec{x}) = \max_{\theta\in\Theta_0} L(\vec{x}, \mu, \sigma)/\max_{\theta\in\Theta} L(\vec{x}, \mu, \sigma) .$$

Normaaljaotuse eeldusel on valimi tóepärafunktsioon määratud eeskirjaga

$$L(\vec{x}, \mu, \sigma) = (1/(\sqrt{2\pi}\,\sigma)^n)\exp\{-\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2/2\sigma^2\} .$$

Tóepärafunktsioon saavutab maksimumi, kui parameetrite väärtusteks valida suurima tóepära hinnangud, $\hat{\mu} = \bar{x}$ ja $\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2/n$. Maksimumi väärtus

$$\max_{\theta\in\Theta} L(\vec{x}, \mu, \sigma) = L(\vec{x}; \bar{x}, \hat{\sigma}^2) = (1/(\sqrt{2\pi}\,\hat{\sigma})^n)\, e^{-n/2} .$$

Piirkonnas Θ_0 saavutab tóepärafunktsioon maksimumi, kui parameetri μ väärtuseks on μ_0, parameetri σ^2 väärtuseks aga tema STP hinnang eeldusel, et parameetri μ väärtuseks on μ_0.

Leiame STP hinnangu piirkonnas Θ_0

$$\hat{\hat{\sigma}}^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_0)^2/n$$

ning

$$\max_{\theta\in\Theta_0} L(\vec{x}, \mu_0, \sigma) = L(\vec{x}, \mu_0, \hat{\hat{\sigma}}^2) = (1/(\sqrt{2\pi}\,\hat{\hat{\sigma}})^n)\, e^{-n/2}.$$

ÜTPS statistiku saamiseks arvutame nüüd suhte

$$\Lambda(\vec{x}) = L(\vec{x}, \bar{x}, \hat{\sigma}^2)/L(\vec{x}, \mu_0, \hat{\hat{\sigma}}^2) = \hat{\hat{\sigma}}^n/\hat{\sigma}^n =$$

$$= \{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_0)^2/\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2\}^{n/2} .$$

Paneme tähele, et lugejas esineva summa vóime jaotada kaheks liidetavaks

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_0)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu_0)^2 .$$

Seega saame ÜTPS statistiku esitada kujul

$$\Lambda(\vec{X}) = (1 + n(\bar{X} - \mu_0)^2/(n\,\hat{\sigma}^2))^{n/2}.$$

Tähistame statistiku $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/S$ sümboliga $T_0(\vec{X})$. Siis

$$\Lambda(\vec{x}) = (1 + T_0^2(\vec{X})/(n-1))^{n/2} .$$

Näeme, et ÜTPS statistik on statistiku $T_0^2(\vec{X})$ monotoonselt kasvav funktsioon. Järelikult võime valida konstandid c ja c' nii, et kehtiks sündmuste võrdsus

$$(\Lambda(\vec{X}) > c) = (|T_0(\vec{X})| > c').$$

Seega saame ÜTPS kriteeriumi esitada kujul

$$\varphi(\vec{X}) = \begin{cases} 1, \text{ kui } & \sqrt{n}|\bar{X}-\mu_0|/S > c' \\ 0, \text{ kui } & \sqrt{n}|\bar{X}-\mu_0|/S \leq c' \end{cases}.$$

Kui null-hüpotees kehtib, on statistiku $T_0(\vec{X})$ jaotuseks T-jaotus parameetriga n-1. Seega, kui valime konstandiks c' arvu $t_{\alpha/2;n-1}$, siis

$$P_{\mu_0}(\varphi(\vec{X}) = 1) = P_{\mu_0}(|T_0(\vec{X})| > t_{\alpha/2;n-1}) =$$
$$= P_{\mu_0}(T_0(\vec{X}) > t_{\alpha/2;n-1}) + P_{\mu_0}(T_0(\vec{X}) < -t_{\alpha/2;n-1}) =$$
$$= \alpha/2 + \alpha/2 = \alpha.$$

Kriteeriumi olulisuse nivoo on tõepoolest α.

Teoreem on tõestatud.

Analoogiliselt saame tuletada ÜTPS kriteeriumi ka kahe teise eelpool toodud hüpoteesipaari jaoks. Kirjutame need kriteeriumid tõestuseta välja.

Hüpoteesipaari H_0': $\mu \leq \mu_0$ ja H_1': $\mu > \mu_0$ korral omab ÜTPS kriteerium, mille olulisuse nivooks on α, kuju

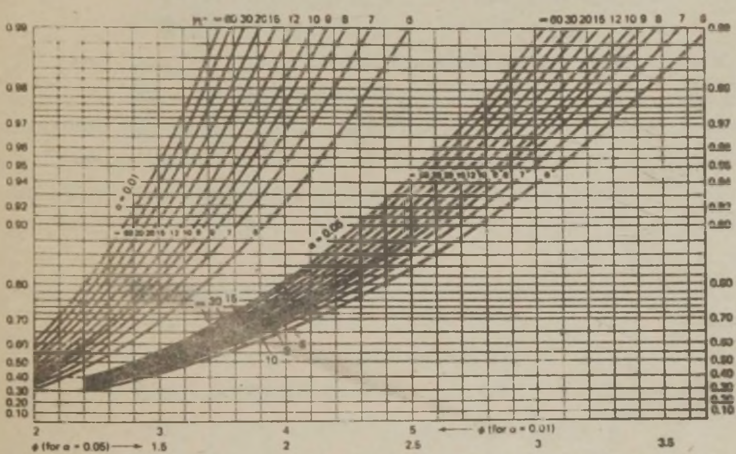
$$\varphi'(\vec{X}) = \begin{cases} 1, \text{ kui } & \sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)/S > t_{\alpha;n-1} \\ 0, \text{ kui } & \sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)/S \leq t_{\alpha;n-1} \end{cases}.$$

Hüpoteesipaari H_0'': $\mu \geq \mu_0$ ja H_1'': $\mu < \mu_0$ korral omab ÜTPS kriteerium, mille olulisuse nivooks on α, kuju

$$\varphi''(\vec{X}) = \begin{cases} 1, \text{ kui } & \sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)/S < -t_{\alpha;n-1} \\ 0, \text{ kui } & \sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)/S \geq -t_{\alpha;n-1} \end{cases}.$$

Millist hüpoteesipaari konkreetses olukorras kasutada, sõltub loomulikult ülesande sisust. Ühe orienteeriva näpunäite võib siiski anda: "primmidega" tähistatud ühepoolsete hüpoteeside esitamine nõuab täiendavat informatsiooni parameetri käitumise kohta - peab olema teada, et võimalik on ainult kindlasuunaline kõrvalekalle konstandiga μ_0 määratud "standardist". Kui niisugune informatsioon puudub, tuleb kasutada kahepoolset hüpoteesi.

Edasi tuleks uurida ka esitatud kriteeriumide võimsust. Võtame jällegi täpsema vaatluse alla kriteeriumi $\varphi(\bar{X})$. Kriteeriumi võimsusfunktsiooni väljakirjutamiseks tuleb leida statistiku $\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)/S$ tõenäosusjaotus. Kui see on leitud, siis saame võimsusfunktsiooni avaldada vastava statistiku jaotusfunktsiooni kaudu nii, nagu tegime seda näites 13.2. Statistiku $\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)/S$ tõenäosusjaotuseks on parameetri väärtuse μ korral on mittetsentraalne T-jaotus parameetritega n-1 ja $\sqrt{n}(\mu_0-\mu)/\sigma$. Selle jaotuse tihedusfunktsiooni võib leida õpikust [5] lk. 303, tihedusfunktsiooni teadmine teeb jaotuse praktilise kasutamise võimalikuks, kuid arvutuslikult on see väga keerukas. Tabelid oleksid aga väga mahukad, kuna iga valimi mahu n jaoks tuleks koostada omaette tabel. Praktiliselt võimaldab kriteeriumi võimsust hinnata järgnev diagramm, mis esitab mõningate valimi mahtude korral võimsusfunktsiooni väärtuse. Võimsusfunktsiooni argumenti mõõdetakse standardhälbe ühikutes, argumendiks on $\phi=\sqrt{\frac{n}{2}}(\mu-\mu_0)/\sigma$.



Kriteemiumi $\varphi(\vec{X})$ võimsusfunktsioon $\Upsilon_\varphi(\phi;n)$

Olgu näiteks $\alpha = 0,05$, $n=10$, $\mu_0=0,5$ ja soovime leida kriteeriumi $\varphi(\vec{X})$ võimsust, kui parameetri tõeline väärtus erineb μ_0-st 0,75 standardhälbe võrra. Läheme üle diagrammil kasutatud võimsusfunktsiooni argumendile $\phi = \sqrt{5}\,0,75 = 1,67$. Leiame diagrammi alumisel äärel vastava väärtuse. Liigume nüüd üles kuni lõikumiseni $n=10$ ja $\alpha=0,05$ vastava kõverani. Lõikepunkti ordinaat annabki meid huvitava võimsuse $\pi_\varphi(1,67;10)=0,55$.

Mittetsentraalse T-jaotuse sümmeetrilisuse tõttu on vaadatav võimsusfunktsioon sümmeetriline.

Praktikas kasutatakse kriteeriumi võimsusfunktsiooni aga enamasti valimi mahu määramiseks, mis garanteeriks etteantud punktis nõutava võimsuse. Nõuame näiteks, et kui parameetri tõeline väärtus erineb μ_0-st 0,5 standardhälbe ühiku võrra, ei tohi kriteeriumi võimsus olla väiksem kui 0,8. (olulisuse nivoo $\alpha = 0,05$). Määrame valimi mahu, mille korral see nõue on täidetud. Kuna $(\mu - \mu_0)/\sigma = 0,5$, siis

$n=20$ $\quad \phi = 1,58 \quad \pi_\varphi(1,58;20)= 0,57$

$n=30$ $\quad \phi = 1,94 \quad \pi_\varphi(1,94;30)= 0,75$

$n=40$ $\quad \phi = 2,24 \quad \pi_\varphi(2,24;40)= 0,87$

Sobiv valimi maht asub 30 ja 40 vahel.

Näide 18.2. Olgu tegemist automaadiga, mis täidab kuivaine pakendeid. Pakendi normantiivne kaal on 0,5kg. Automaadi täpsuse kontrollimiseks kaaluti üle 12 täidetud pakendit. Selle valimi keskväärtus $\bar{x} = 0,484$, standardhälve $s=0,05$kg. Kas võib lugeda tõestatuks, et pakendi tegelik keskmine kaal erineb normatiivist?

Vastavalt ülesande sisule vajab kontrollimist hüpoteeside paar

$H_0: \mu = 0,5$ Kasutame olulisuse nivood $\alpha = 0,05$.

$H_1: \mu \neq 0,5$. Leiame otsuse langetamiseks vajaliku kriitilise väärtuse $t_{0,025;11} = 2,2$.

Arvutame statistiku väärtuse meie valimi korral

$$T_0(\vec{x}) = \sqrt{n}(\bar{x}-0,5)/s = \sqrt{12}(0,484 - 0,5)/0,05 \approx -1,10 .$$

Näeme, et $|-1,10| < 2,2$ - statistiku absoluutväärtus on väiksem kriitilisest väärtusest. Peame jääma null-hüpoteesi juurde - selle valimi põhjal pole põhjust otsustada, et automaat töötab ebakorrektselt.

Tutvume veel ühe võimalusega statistiku väärtuse "kaalukuse" analüüsimiseks. Leiame suurima T-jaotuse kvantiili, mille kasutamise korral tuleks vastu võtta sisukas hüpotees. Kasutades T-jaotuse kvantiilide tabelit, saame sealt väärtuse $t_{0,15;11}=1{,}088$. Seega saaksime olulisuse nivool 0,3 sisuka hüpoteesi tõestada. Üldreeglina on niisugune risk sisuka hüpoteesi vastuvõtmisel liiga suur.

Meie poolt leitud minimaalset olulisuse nivood, mille korral saaks veel sisuka hüpoteesi tõestada, nimetatakse olulisustõenäosuseks. Enamuses statistilise andmetöötluse süsteemides leitakse koos statistiku väärtusega ka selle vastav olulisustõenäosus.

Kuna võtsime vastu null-hüpoteesi, siis on võimalik teha ainult teist liiki viga. Hindame ka selle vea tõenäosust erinevate parameetri väärtuste korral.

Olgu meil teada, et kontrollitava pakkimisautomaadi normatiivne standardhälve on 0,03kg. Vaatame, milline on tõenäosus avastada pakendi tegeliku keskmise kaalu hälbimist ettenähtud normatiivist 20g võrra. Selleks arvutame

$$\phi = \sqrt{6}(0{,}520-0{,}5)/0{,}03 = 1{,}63 \ ,$$

ja loeme diagrammilt võimsusfunktsiooni väärtuse

$$\tau_\varphi(1{,}63;12) = 0{,}54 \ .$$

Seega on tõenäosus, et niisugune hälve avastamata jäi 0,46.

Arvutame veel tõenäosuse avastada pakendi tegeliku keskmise kaalu 30g hälbimine ettenähtud normist

$$\phi = \sqrt{6}(0{,}530-0{,}5)/0{,}03 = 2{,}45$$

$$\tau_\varphi(2{,}45;\ 12) = 0{,}88 \ .$$

Seega on tõenäosus, et niisugune hälve avastamata jääb 0,12.

Selgitame veel, kui palju tuleks kaaluda pakendeid, et 20 grammise hälbe avastamise tõenäosus poleks väiksem kui 0,8. Selleks arvutame

$$n=16 \qquad \phi = 1{,}89 \qquad \tau_\varphi(1{,}89;16) = 0{,}74$$

$$n=20 \qquad \phi = 2{,}11 \qquad \tau_\varphi(2{,}11;20) = 0{,}87 \ .$$

Näeme, et 20 katsest piisaks. *

Tähelepanelik lugeja on kindlasti märganud sarnasust parameetri μ usalduspiire määravate valemite ja kahepoolsele hüpoteesile vastavas kriteeriumis $\varphi(\vec{X})$ otsust määrava tingimuse vahel. Tõepoolest, me peame jääma null-hüpoteesi juurde, kui

$$\sqrt{n}|\bar{X} - \mu_0|/S \leq \bar{t}_{\alpha/2;n-1} \; .$$

Selle tingimuse võime aga kirjutada ümber kujul

$$\bar{X} - \bar{t}_{\alpha/2;n-1}S/\sqrt{n} \leq \mu_0 \leq \bar{X} + t_{\alpha/2;n-1}S/\sqrt{n} .$$

Saadud esitusest näeme, et null-hüpotees võetakse vastu siis, kui väärtus μ_0 asub valimi põhjal leitud usaldusintervallis. Ehk teisiti sõnastades - arvutades oma valimi põhjal $1-\alpha$-usaldusintervalli, saame kätte kõik "standardsed" väärtused, millest parameetri μ erinevust me oma valimi põhjal olulisuse nivool α tõestada ei saa.

Selline seos kehtib ka üldjuhul - kui $[\underline{T}(\vec{X}), \bar{T}(\vec{X})]$ on $1-\alpha$-usaldusintervall parameetrile θ, siis hüpoteeside H_0: $\theta = \theta_0$ ja H_1: $\theta \neq \theta_0$ kontrollimisel kriteerium

$$\varphi(\vec{X}) = \begin{cases} 1, \text{ kui } \theta_0 < \underline{T}(\vec{X}) \text{ või } \theta_0 > \bar{T}(\vec{X}) \\ 0, \text{ kui } \underline{T}(\vec{X}) \leq \theta_0 \leq \bar{T}(\vec{X}) \end{cases}$$

omab olulisuse nivood α.

<u>Näide 18.3.</u> Leiame veel näites 18.2 toodud andmeid kasutades meie käsutuses oleva valimi põhjal 0,95-usaldus intervalli parameetrile μ. Kuna $\bar{t}_{0,025;11}=2,2$, siis saame $[0,452;\ 0,516]$. Kooskõlas näites 18.2 vastu võetud otsusega sisaldab usaldusintervall normväärtust 0,5. ✳

B. Vaatame nüüd hüpoteese, mis on esitatud normaaljaotusega üldkogumi dispersiooni kohta. Praktilistes ülesannetes leiavad kõige sagedamini kasutamist järgmised kolm hüpoteeside paari

$$H_0:\ \sigma^2 = \sigma_0^2 \qquad H_0':\ \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \qquad H_0'':\ \sigma^2 \geq \sigma_0^2$$

$$H_1:\ \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \qquad H_1':\ \sigma^2 > \sigma_0^2 \qquad H_1'':\ \sigma^2 < \sigma_0^2$$

Võtame jällegi vaatluse alla esimese hüpoteeside paari. Järgneva teoreemiga anname ÜTPS kriteeriumi konstruktsiooni.

<u>Teoreem 18.3.</u> Olgu üldkogumit kirjeldavaks jaotuseks normaaljaotus, $X \sim N(\mu, \sigma)$. Vajagu kontrollimist hüpoteeside paar H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$; H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$. Kriteerium

$$\varphi(\vec{X}) = \begin{cases} 1, \text{ kui } (n-1)S^2/\sigma_0^2 > \bar{h}_{\alpha/2;n-1} \text{ või } (n-1)S^2/\sigma_0^2 < h_{\alpha/2;n-1} \\ 0, \text{ kui } h_{\alpha/2;n-1} \leq (n-1)S^2/\sigma_0^2 \leq \bar{h}_{\alpha/2;n-1} \end{cases}$$

on ÜTPS kriteeriumiks olulisuse nivool α.

Tõestus. Paneme tähele, et null-hüpoteesis näidatud parameetri võimalike väärtuste piirkond koosneb väärtustest

$$\Theta_0 = \{(\mu, \sigma): -\infty < \mu < \infty, \ \sigma = \sigma_0\},$$

parameetri kõikvõimalike väärtuste piirkond aga väärtustest

$$\Theta = \{(\mu, \sigma): -\infty < \mu < \infty, \ \sigma > 0\}.$$

Normaaljaotuse korral omab valimi tõepärafunktsioon kuju

$$L(\vec{x}, \mu, \sigma) = (1/(\sqrt{2\pi}\sigma)^n)\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2/2\sigma^2\right\}.$$

Etteantud valimi $\vec{x}$ korral omandab tõepärafunktsioon maksimaalse väärtuse, kui parameetrite väärtustena kasutame STP hinnanguid. Seega

$$\max_{\theta\in\Theta} L(\vec{x}; \mu, \sigma) = (1/(\sqrt{2\pi}\hat{\sigma})^n) e^{-n/2},$$

kus $\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2/n$.

Piirkonnas Θ_0 saavutab tõepärafunktsioon maksimumi, kui parameetri σ väärtuseks on σ_0, parameetri μ väärtuseks aga sellel eeldusel arvutatud STP hinnang. Siit

$$\max_{\theta\in\Theta_0} L(\vec{x}; \mu, \sigma_0) = 1/(\sqrt{2\pi}\sigma_0)^n\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2/2\sigma_0^2\right\}.$$

ÜTPS statistiku saamiseks arvutame nüüd suhte

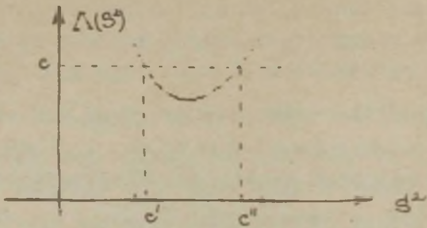
$$\Lambda(\vec{x}) = \max_{\theta\in\Theta} L(\vec{x}; \mu, \sigma)/\max_{\theta\in\Theta_0} L(\vec{x}; \mu, \sigma) =$$

$$= e^{-n/2}(\sigma_0/\hat{\sigma})^n \exp(n\hat{\sigma}^2/2\sigma_0^2).$$

Kirjutades suhte argumendiks juhusliku valimi saame

$$\Lambda(\vec{X}) = (n^n e^{-n/2})\left[\sigma_0^2/((n-1)S^2)\right]^{n/2}\exp\left[(n-1)S^2/\sigma_0^2\right].$$

Ilmselt oleks meil sündmus $(\Lambda(\vec{X}) > c)$ kasulik esitada statistiku $(n-1)S^2/\sigma_0^2$ kaudu, kuna selle tõenäosusjaotus H_0 kehtivuse korral on meile teada. Sõltuvus nende statistikute vahel pole aga monotoonne: kui statistiku S^2 väärtused kasvavad, siis esimene temast sõltuv tegur kahaneb, teine aga kasvab. Niisuguste vastandlike tendentside tulemusena S^2 muutmisel alates nullist $\Lambda(\vec{X})$ algul kahaneb, siis aga hakkab uuesti kasvama. Fikseeritud σ_0 ja n korral esitab seda sõltuvust graafik (kasutatakse väärtusi n=5 ja σ_0=3)



Vaadates graafikut on aga selge, et iga c korral on võimalik leida sellised konstandid c' ja c'', et kehtib võrdus

$$(\Lambda(\vec{X})>c)=((n-1)S^2/\sigma_0^2<c')\cup((n-1)S^2/\sigma_0^2>c'').$$

Järelikult saame ÜTPS kriteeriumi esitada kujul

$$\varphi(\vec{X})=\begin{cases}1, \text{ kui } (n-1)S^2/\sigma_0^2<c' \text{ või } (n-1)S^2/\sigma_0^2>c''\\ 0, \text{ kui } c'\leq(n-1)S^2/\sigma_0^2\leq c''\end{cases}.$$

Kui null-hüpotees kehtib, on statistiku $(n-1)S^2/\sigma_0^2$ jaotuseks χ^2-jaotus parameetriga n-1. Seega, kui valime konstandiks c' arvu $h_{\alpha/2;n-1}$, konstandiks c'' aga arvu $\bar{h}_{\alpha/2;n-1}$, siis

$$\pi_\varphi(\sigma_0)=P_{\sigma_0}(\varphi(\vec{X})=1)=P_{\sigma_0}((n-1)S^2/\sigma_0^2<h_{\alpha/2;n-1})+$$
$$+P_{\sigma_0}((n-1)S^2/\sigma_0^2>\bar{h}_{\alpha/2;n-1})=\alpha/2+\alpha/2=\alpha.$$

Kriteeriumi olulisuse nivoo on tõepoolest α.

Teoreem on tõestatud.

Analoogiliselt saame tuletada ka ÜTPS kriteeriumi ka kahe teise eelpool toodud hüpoteesipaari jaoks. Kirjutame need kriteeriumid tõestuseta välja.

Hüpoteesipaari H_0': $\sigma\leq\sigma_0$ ja H_1': $\sigma>\sigma_0$ korral omab ÜTPS kriteerium, mille olulisuse nivoo on α, kuju

$$\varphi'(\vec{X})=\begin{cases}1, \text{ kui } (n-1)S^2/\sigma_0^2>\bar{h}_{\alpha;n-1}\\ 0, \text{ kui } (n-1)S^2/\sigma_0^2\leq\bar{h}_{\alpha;n-1}\end{cases}.$$

Hüpoteesipaar H_0'': $\sigma\geq\sigma_0$ ja H_1'': $\sigma<\sigma_0$ korral omab ÜTPS kriteerium, mille olulisuse nivoo on α, kuju

$$\varphi''(\vec{X})=\begin{cases}1, \text{ kui } (n-1)S^2/\sigma_0^2<h_{\alpha;n-1}\\ 0, \text{ kui } (n-1)S^2/\sigma_0^2\geq h_{\alpha;n-1}\end{cases}.$$

<u>Näide 18.4.</u> Vaatame uuesti näites 18.2 kirjeldatud pak-

kimisautomaati. Olgu pakendi normatiivne standardhälve 0,03kg. Kas meie käsutuses oleva valimi põhjal võib tõestada, et pakendi standardhälve on suurem lubatud normatiivist?

Automaadi kasutamise käigus võib tema doseerimistäpsus ainult väheneda. Seetõttu võime meid huvitava väite esitada ühepoolse hüpoteesina. Valime kontrollimiseks hüpoteeside paari $H_0: \sigma \leq 0,03$ Kasutame olulisuse nivood $\alpha=0,05$.

$H_1: \sigma > 0,03$ Leiame otsuse langetamiseks vajaliku kriitilise väärtuse $\chi_{0,05;11} = 19,675$.

Arvutame otsust määrava statistiku väärtuse

$$(n-1)s^2/\sigma_0^2 = 11\ 0,0025/0,0009 = 30,56 .$$

Näeme, et $30,56 > 19,675$ - statistiku väärtus on suurem kriitilisest väärtusest. Peame vastu võtma sisuka hüpoteesi - pakendi tegelik standardhälve on suurem ettenähtud normatiivist.

Kuna vastu võetud sisuka hüpoteesi loeme tõestatuks, siis tuleks kontrollitud automaati asuda reguleerima, et saavutada pakendi standardhälbe vastavus ettenähtud normatiivile.

Analüüsime veel saadud statistiku väärtuse "kaalukust" eelmises näites kirjeldatud viisil. Leiame suurima χ^2-jaotuse täiendkvantiili, mille korral tuleks vastu võtta sisukas hüpotees. Kasutades χ^2-jaotuse kvantiilide tabelit õpikust [4] saame $\chi_{0,0016;11} =29,51$. Sisuka hüpoteesi juurde peaksime jääma ka siis, kui oleksime valinud olulisuse nivoo 0,0016. Tõend, mis meie valim esitab sisuka hüpoteesi kehtivuse kohta, on tõepoolest väga kaalukas. ✳

ÜLESANDED

1. Teoreetilisest analüüsist lähtudes ei tohi seadme jahutussüsteemi läbiva vee keskmine temperatuur tõusta rohkem kui 5°. Selle tingimuse täidetuse kontrollimiseks sooritati töötaval seadmel 8 mõõtmist, registreeriti järgmised temperatuuri tõusud

   4,3 6,4 5,7 4,9 6,5 5,9 6,4 5,1 .

   (a) kas tulemused on vastuolus teoreetilise analüüsi põhjal tehtud järeldusega ($\alpha = 0,05$)?

   (b) määrata usalduspiirid tegelikule keskmisele temperatuuri tõusule jahutussüsteemis ($1-\alpha = 0,95$) .

2. Uuritakse, kas teatav aine põhjustab hüperaktiivsust. Katsealusteks on 55 rotti, kellele veenisiseselt süstitakse seda ainet. Ajavahemikul 15-25 minutit pärast süstimist testitakse roti aktiivsust (seda tehakse teatava skaala alusel, igale reaktsioonile vastab teatav hindepall). Katsealuste keskmine hindepall on 14,9, standardhälbega 2,1. Kas need andmed lubavad tõestada oletust, et tegelik keskmine hindepall on suurem kui 14?

3. Kvaliteedi kontrolli insener peab jälgima dosaatori tööd. Dosaator täidab pakendeid, mille normkaal peab olema 15g. Dosaatori normatiivne standardhälve on 0,8g. Millised hüpoteesid tuleb esitada? Kui palju tuleb teha kontrollmõõtmisi,et kriteeriumi kasutamisel, mille olulisuse nivoo on 0,01 oleks 0,5g erinevuse avastamise tõenäosus mitte väiksem kui 0,6?

4. Olgu $X \sim N(\mu, a)$, kus a on teadaolev konstant. Vajagu kontrollimist hüpoteeside paar $H_0: \mu = \mu_0$ ja $H_1: \mu \neq \mu_0$. Leida ÜTPS kriteerium.

5. Toodetakse ainet, mille sulamistemperatuur peab olema 1000°. Tooraine omaduste muutlikkuse tõttu võib tegelik sulamistemperatuur mõnevõrra muutuda. Oletame, et uuritav tunnus - tegelik sulamistemperatuur - $X \sim N(\mu, 20^\circ)$. Kirjutada välja kriteerium otsuse langetamiseks olulisuse nivool 0,05, kui on võimalik teha 10 katset tegeliku sulamistemperatuuri määramiseks antud partiis. Milline on tõenäosus avastada tegeliku sulamistemperatuuri 30° langust?

6. Plastikplaati valmistavat masinat kontrollitakse perioodiliselt, määramaks toodetava plaadi läbimõõtu. Kui plaadi läbimõõdu standardhälve ületab 1,5mm, pole toodang enam kvaliteetne. 10 kontroll-mõõtmise tulemused on järgmised
226 228 226 225 232 228 227 229 225 230
(a) kas standardhälve ületab lubatud nivoo ($\alpha = 0,05$)?
(b) millised eeldused tehakse otsuse langetamisel üldkogumi kohta?

7. Selgitamaks leiukoha tööstusliku kasutamise võimalusi analüüsitakse 25 kiviproovi sellest leiukohast. Iga proovi jaoks määratakse mineraalisisalduse protsent. Saadakse

tulemused $\bar{x}$ = 10,2% ja s = 3,1%. Leiukoha tööstuslik kasutamine on efektiivne, kui keskmine mineraalisisaldus ei ole väiksem kui 8%, mineraalisisalduse standardhälve aga ei ületa 4%. Millised otsustused saab teha analüüsitud proovide põhjal?

KUS ME OLEME? Õppisime tundma sagedamini kasutatavaid kriteeriume normaaljaotusega üldkogumi korral. Nende kriteeriumide tuletamine on ühtlasi ka varem lubatud näide üldistatud tõepärasuhte kriteeriumi praktilise rakendamise kohta.

Loetleme veel ülevaatlikult hüpoteeside kontrollimise etapid.

1) Esitada kontrollitavad hüpoteesid, täpsustada eeldused üldkogumi kohta.
2) Valida otsuse langetamiseks kasutatav statistik, selgitada tema tõenäosusjaotus, määrata etteantud olulisuse nivoole vastav kriitiline piirkond.
3) Leida võimsusfunktsioon, selle abil määrata selline valimi maht, mis suruks vajalikus piirkonnas teist liiki vea tegemise sobivatesse piiridesse.
4) Sooritada katse, määrata statistiku väärtus. Kui see kuulub kriitilisse piirkonda, võtta vastu sisukas hüpotees, vastasel juhul jääda null-hüpoteesi juurde. Analüüsida statistiku väärtuse "kaalukust" olulisustõenäosuse põhjal.

Otsuse langetamiseks vajaliku statistiku valikuks võib kasutada mitmesuguseid võtteid, ka tugineda lihtsalt intuitsioonile. Elegantse matemaatilise aluse parima statistiku valikuks annab aga Neyman-Pearsoni poolt välja töötatud ÜV kriteeriumi teooria ja sellele toetuv ÜTPS kriteerium.

KUHU LÄHEME? Jätkame praktikas suurt tähtsust omavate kriteeriumide tundma õppimist. Vaatame üle kriteeriumid, mis on vajalikud kahe üldkogumi võrdlemiseks.

§19. Kahe üldkogumi võrdlemine

Peaaegu igas inimtegevuse valdkonnas on edasiliikumise aluseks uue tehnoloogia kasutusele võtmine või olemasoleva tehnoloogia täiustamine. Uue lähenemisviisi eelistele aga annavad lõpliku kinnituse tema praktilisel kasutamisel saadud tulemused. Seega kahe erineva tehnoloogia võrdlemiseks tuleb korraldada katse, koguda andmeid ja tulemuste póhjal langetada lóplikud otsused. Niisugune vórdlev katse on meie mudeli raamides esitatav kahe üldkogumi vórdlemise probleemina. Tóepoolest, on ju vórdlemise aluseks teatav tunnus, mille väärtusi me katset sooritades móódame. Üldjuhul vóib oletada, et erinevate tehnoloogiate korral on selle tunnuse väärtuste kujunemise tingimused erinevad ja seetóttu erinevad ka tóenäosusjaotused, mis tunnuse käitumist kirjeldavad. Seega saame katse tulemusena enda käsutusse kaks valimit, mis pärinevad erineva tóenäosusjaotusega üldkogumitest. Järeldus, mida tahame teha, on esitatav järeldusena vórreldavate üldkogumite tóenäosusjaotuste kohta.

Käesolevas paragrahvis eeldame, et vórreldavad üldkogumid on ühte tüüpi tóenäosusjaotusega - normaaljaotusega vói Bernoulli jaotusega - seega üldkogumite vórdlemine taandub vastavate parameetrite vórdlemiseks. Eeldame, et valimid, mida me kasutame, on sóltumatud.

A. Normaaljaotusega üldkogumite keskväärtuste vórdlemine väikeste valimite korral.

Olgu vaatluse all kaks normaaljaotusega üldkogumit. Tähistame uuritava tunnuse erinevates üldkogumites sümbolitega X_1 ja X_2. Vaatlusaluste üldkogumite kohta eeldame, et nende keskväärtused vóivad olla erinevad, standardhälbed aga on vórdsed, $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma)$ ja $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma)$. Need eeldused on tähtsad ainult väikeste valimite korral. Suurte valimite korral (orienteeruvalt, kui $n_i > 30$, $i=1,2$) pole niisuguste eelduste järele vajadust.

Tähistame ka erinevatest üldkogumitest pärinevate valimite mahud ja nende póhjal arvutatud statistikud vastavate indeksitega. Seega esimesest üldkogumist pärineb valim mahuga n_1, keskväärtusega $\bar{X}_1$ ja dispersiooniga S_1^2, teisest üldkogumist pärineb valim mahuga n_2, keskväärtusega $\bar{X}_2$ ja dispersiooniga S_2^2.

Nii keskväärtuste vahe usaldusintervalli kui ka keskväärtuste vórdlemise kriteeriumid saame leida, tuginedes järgmisele teoreemile.

<u>Teoreem 19.1.</u> Olgu $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma)$ ja $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma)$ ning olgu neile üldkogumitele vastavad teoreetilised valimid (ma-

huga n_1 ja n_2) sõltumatud. Siis juhuslik suurus

$$[(\bar X_1-\bar X_2)-(\mu_1-\mu_2)]/(S\sqrt{1/n_1+1/n_2}) \sim T(n_1+n_2-2) ,$$

kus S^2 on mõlema valimi ühine dispersioon

$$S^2 = [(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2]/(n_1+n_2-2) .$$

<u>Tõestus.</u> Lähtume T-jaotuse definitsioonist. Vastavalt normaaljaotuse omadustele on keskväärtuste vahe samuti normaaljaotusega, $\bar X_1-\bar X_2 \sim N(\mu_1-\mu_2, \sigma\sqrt{1/n_1+1/n_2})$, Järelikult

$$(\bar X_1-\bar X_2-\mu_1+\mu_2)/(\sigma\sqrt{1/n_1+1/n_2}) \sim N(0,1) . \qquad (19.1)$$

Vastavalt statistiku S^2 määramiseeskirjale

$$(n_1+n_2-2)S^2/\sigma^2 = (n_1-1)S_1^2/\sigma^2 + (n_2-1)S_2^2/\sigma^2 ,$$

teoreemide 15.3 ja 15.5 põhjal aga tuleneb sellest esitusest et

$$(n_1+n_2-2)\, S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n_1+n_2-2) . \qquad (19.2)$$

Kuna normaaljaotuse korral on valimi keskväärtus ja valimi dispersioon sõltumatud juhuslikud suurused, on ka juhuslikud suurused (19.1) ja (19.2) sõltumatud. Moodustame suhte, mille jaotuseks on definitsiooni kohaselt $T(n_1+n_2-2)$-jaotus

$$\sqrt{n_1+n_2-2}\;\frac{(\bar X_1-\bar X_2-\mu_1+\mu_2)/(\sigma\sqrt{1/n_1+1/n_2})}{\sqrt{n_1+n_2-2}\; S/\sigma} = \frac{\bar X_1-\bar X_2-\mu_1+\mu_2}{S\sqrt{1/n_1+1/n_2}}$$

Teoreem on tõestatud.

Rakendades oma tuttavat skeemi, saame üldkogumite keskväärtuste vahe jaoks usaldusnivoole $1-\alpha$ vastavad usalduspiirid.

$$\underline{\mu_1-\mu_2} = \bar x_1-\bar x_2 - (\bar t_{\alpha/2;n_1+n_2-2})\, s\sqrt{1/n_1 + 1/n_2} ,$$

$$\overline{\mu_1-\mu_2} = \bar x_1-\bar x_2 + (\bar t_{\alpha/2;n_1+n_2-2})\, s\sqrt{1/n_1 + 1/n_2} .$$

Analoogiliselt eelnevaga saame tuletada ka kriteeriumid hüpoteeside kontrollimiseks üldkogumite keskväärtuste vahekorra kohta.

Sagedamini kasutatavad hüpoteesid on järgmised

$H_0: \mu_1=\mu_2$	$H_0': \mu_1 \leq \mu_2$	$H_0'': \mu_1 \geq \mu_2$
$H_1: \mu_1\neq\mu_2$	$H_1': \mu_1 > \mu_2$	$H_1'': \mu_1 < \mu_2$

Tähistame otsuse langetamiseks kasutatava statistiku sümboliga T,

$$T = (\bar{X}_1-\bar{X}_2)/(S\sqrt{1/n_1+1/n_2}) \ .$$

Kriteeriumid otsuse langetamiseks olulisuse nivool α omavad kuju

$$\varphi(\vec{X})=\begin{cases}1, & \text{kui } |T|>\bar{t}_{\alpha/2;n_1+n_2-2}\\ 0, & \text{kui } |T|\leq \bar{t}_{\alpha/2;n_1+n_2-2}\end{cases} \qquad \varphi'(\vec{X})=\begin{cases}1, & \text{kui } T>\bar{t}_{\alpha;n_1+n_2-2}\\ 0, & \text{kui } T\leq \bar{t}_{\alpha;n_1+n_2-2}\end{cases}$$

$$\varphi''(\vec{X})=\begin{cases}1, & \text{kui } T<-\bar{t}_{\alpha;n_1+n_2-2}\\ 0, & \text{kui } T>-\bar{t}_{\alpha;n_1+n_2-2}\end{cases} \ .$$

Kriteeriumi $\varphi(\vec{X})$ võimsuse uurimiseks võib kasutada eelmises paragrahvis toodud diagrammi. Võimsusfunktsiooni argument tuleb esitada kujul

$$\phi = \sqrt{\frac{n_1+n_2}{2n_1n_2}}\ \frac{\mu_1-\mu_2}{\sigma} \ .$$

Vaatame näidet kahe üldkogumi võrdlemise kohta.

Näide 19.2. Soovitakse uurida kasvuhormooni mõju nuumikute juurdekasvule. Katse korraldamiseks on võimalik kasutada 25 nuumikut. Need jagatakse kahte rühma: 13 nuumikust moodustatakse katserühm, kelle toidule vastavat hormooni lisatakse, 12 nuumikust aga moodustatakse kontrollrühm, kelle toidule hormooni ei lisata. Teatava ajavahemiku möödudes registreeritakse mõlemas rühmas keskmised päevased juurdekasvud

Katserühm 440 440 560 460 470 380 580 530 490 450 460 510 460

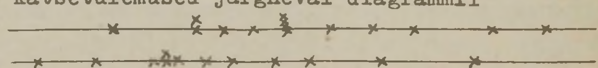
Kontrollrühm 350 470 450 310 400 390 420 380 550 510 390 490

Leiame uuritava tunnuse keskväärtuste vahe usaldusintervalli ja analüüsime, kas katsetulemused on kaalukaks tõendiks kasvuhormooni kasulikust mõjust. Valime $1-\alpha=0,95$.

Esitame katsetulemused järgneval diagrammil

Katserühm

Kontrollrühm



Võrreldes silma järgi katsetulemuste hajuvust valimites, võime eelduse üldkogumite standardhälvete võrdsuse kohta lugeda vastuvõetavaks. Arvutame meile vajalikud statistikud

$n_1=13$ $\bar{x}_1=479,23$ $s_1^2=2941.02$ $s_1=54,23$

$n_2=12$ $\bar{x}_2=425,83$ $s_2^2=4881,06$ $s_2=69,86$.

Leiame mõlema valimi põhjal ühiselt arvutatud dispersiooni hinnangu

$$s^2 = 3868,87 , \quad s = 62,20 .$$

Tabelist saame meile vajaliku T-jaotuse täiendkvantiili $\bar{t}_{0,025;23}= 2,069$. Arvutame välja usalduspiirid

$$\underline{\mu_1-\mu_2} = 1,88 \qquad \overline{\mu_1-\mu_2} = 104,92$$

Näeme, et keskmise juurdekasvu erinevus võib kõikuda üsna suurtes piirides. Usaldusintervall ei sisalda aga nulli – seega võib lugeda kasvuhormooni positiivse mõju tõestatuks.

Vaatame ka hüpoteeside kontrollimist. Kuna kasvuhormoon ei avalda keskmisele juurdekasvule negatiivset mõju, tuleks siin esitada ühepoolsed hüpoteesid

$H_0: \mu_1 \leq \mu_2$
$H_1: \mu_1 > \mu_2$.

Valime olulisuse nivooks 0,05 ja leiame otsuse langetamiseks vajaliku kriitilise väärtuse $\bar{t}_{0,05;23} =1,714$. Arvutame statistiku väärtuse t = = 2,14. Kuna 2,14 > 1,714, võtame vastu sisuka hüpoteesi – loeme kasvuhormooni kasuliku mõju tõestatuks. Analüüsime veel olulisustõenäosust. Kuna $\bar{t}_{0,01;23}=2,5$, siis olulisuse nivool 0,01 me sisukat hüpoteesi enam tõestada ei saaks.

Vastuvõetav risk esimest liiki vea tegemiseks tuleks siin valida sisulistest kaalutlustest lähtudes, arvestades näiteks kasvuhormooni hinda ja loodetavat kasu keskmise juurdekasvu suurenemisest.

Juhime veel tähelepanu ühepoolse hüpoteesi kasulikkusele. Kui me oleks esitanud kahepoolse hüpoteesi, oleks kriitiliseks väärtuseks tulnud valida väärtus, mida kasutasime usaldusintervalli leidmisel, s.t. 2,069. Näeme, et ühepoolse sisuka hüpoteesi saame tõestada väiksema statistiku väärtuse korral. Piltlikult öeldes – täiendav informatsioon võimaldab anda statistiku väärtusele "suurema kaalu". *

Üldkogumite keskväärtuste võrdlemist erinevate dispersioonide korral on kirjeldatud õpikus [1] lk. 349-350.

B. Üldkogumite dispersioonide võrdlemine

Olgu vaatluse all kaks erineva dispersiooniga normaaljaotusega üldkogumit, $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ ja $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$.

Nii dispersioonide suhte usaldusintervalli kui ka dispersioonide võrdlemise kriteeriumid saame leida, tuginedes järgmisele teoreemile.

<u>Teoreem 19.3.</u> Olgu $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ ja $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$ ning olgu neist üldkogumitest pärinevad teoreetilised valimid mahuga n_1 ja n_2 sõltumatud. Siis juhuslik suurus

$$(S_1^2/\sigma_1^2)/(S_2^2/\sigma_2^2) \sim F(n_1-1,\ n_2-1)\ .$$

<u>Tõestus.</u> Meenutame, et vaatlusaluste üldkogumite normaaljaotuse tõttu $(n_i-1)S_i^2/\sigma_i^2 \sim \chi^2(n_i-1)$-jaotusega $(i=1,2)$. Teoreemi väide tuleneb nüüd F-jaotuse definitsioonist 16.1.

Teoreem on tõestatud.

Arvestades seost F-jaotuse kvantiili ja täiendkvantiili vahel ($f_{\alpha;m,n}=1/\bar{f}_{\alpha;n,m}$) saame dispersioonide suhtele järgmise usaldusintervalli

$$\underline{\sigma_1^2/\sigma_2^2} = s_1^2/(s_2^2\bar{f}_{\alpha/2;n_1-1,n_2-1})$$

$$\overline{\sigma_1^2/\sigma_2^2} = s_1^2\bar{f}_{\alpha/2;n_2-1,n_1-1}/s_2^2\ .$$

Sagedamini kontrollitavate hüpoteeside

$H_0: \sigma_1 = \sigma_2$ $\qquad H_0^1: \sigma_1 \leq \sigma_2$

$H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2$ $\qquad H_1^1: \sigma_1 > \sigma_2$

kohta otsuse langetamiseks aga kasutame järgmisi kriteeriume

$$\varphi(\vec{X})=\begin{cases}1, & \text{kui } S_1^2/S_2^2<1/\bar{f}_{\alpha/2;n_2-1,n_1-1} \text{ või } S_1^2/S_2^2>\bar{f}_{\alpha/2;n_1-1,n_2-1}\\ 0, & \text{kui } 1/\bar{f}_{\alpha/2;n_2-1,n_1-1} \leq S_1^2/S_2^2 \leq \bar{f}_{\alpha/2;n_1-1,n_2-1}\end{cases},$$

$$\varphi'(\vec{X})=\begin{cases}1, & \text{kui } S_1^2/S_2^2 > \bar{f}_{\alpha;n_1-1,n_2-1}\\ 0, & \text{kui } S_1^2/S_2^2 \leq \bar{f}_{\alpha;n_1-1,n_2-1}\end{cases}.$$

Kuna valimid võime alati nummerdada nii, et $S_1^2 > S_2^2$, pole teisesuunalist ühepoolset hüpoteesi üldse mõtet vaadata.

<u>Näide 19.4.</u> Kontrollime näites 19.2 toodud andmete põhjal oletust üldkogumite dispersioonide võrdsuse kohta. Kuna täiendavat informatsiooni pole, esitame kahepoolse sisuka hüpoteesi.

$H_0: \sigma_1 = \sigma_2$ Valime olulisuse nivooks 0,05 ja leiame tabelist meile vajalikud F-jaotuse kvantiilid
$H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2$. $F_{0,025;\,12,11} = 3,43$ ja $F_{0,025;11,12} = 3,32$.

Arvutame statistiku väärtuse $s_1^2/s_2^2 = 0,78$. Kuna $0,30 \leq 0,78 \leq 3,43$, jääme null-hüpoteesi juurde: oletust üldkogumite dispersioonide võrdsuse kohta pole põhjust tagasi lükata.

Kirjutame välja ka 0,05-usaldusintervalli dispersioonide suhtele

$$\underline{\sigma_1^2/\sigma_2^2} = 0,23 \qquad \overline{\sigma_1^2/\sigma_2^2} = 2,58 \,. \quad *$$

C. Keskväärtuste võrdlemine suurte valimite korral.

Tuletame meelde, et valimi keskväärtuse asümptootiliseks jaotuseks on normaaljaotus, sõltumata sellest, millise jaotusega on üldkogum. Seega suurte valimite korral võime üldkogumi jaotusest olenemata lugeda valimi keskväärtuse ligikaudseks jaotuseks normaaljaotuse, $\bar{X}_i \sim N(\mu_i, \sigma_i/\sqrt{n_i})$ $(i=1,2)$, kus μ_i on vaatlusaluse üldkogumi keskväärtus, σ_i aga standardhälve. Siit tuleneb, et

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \mu_1 + \mu_2)/\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2} \sim N(0,1) \,.$$

Kuna valimi maht on suur, on standardne normaaljaotus ka niisuguse juhusliku suuruse ligikaudseks jaotuseks, kus tõelised standardhälbe väärtused on asendatud valimi põhjal arvutatud hinnangutega,

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \mu_1 + \mu_2)/\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2} \sim N(0,1) \,.$$

Siit saame usalduspiiride arvutamiseks valemid

$$\underline{\mu_1 - \mu_2} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \bar{z}_{\alpha/2}\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}$$

$$\overline{\mu_1 - \mu_2} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + \bar{z}_{\alpha/2}\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2} \,.$$

Hüpoteeside

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta_0 \qquad H_0': \mu_1 - \mu_2 \leq \delta_0$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0 \qquad H_1': \mu_1 - \mu_2 > \delta_0$$

kontrollimiseks aga kriteeriumid

$$\varphi(\vec{X}) = \begin{cases} 1, & \text{kui } |Z| > \bar{z}_{\alpha/2} \\ 0, & \text{kui } |Z| \leq \bar{z}_{\alpha/2} \end{cases} \qquad \varphi'(\vec{X}) = \begin{cases} 1, & \text{kui } Z > \bar{z}_{\alpha/2} \\ 0, & \text{kui } Z \leq \bar{z}_{\alpha/2} \,, \end{cases}$$

kus sümboliga Z on tähistatud otsuse langetamiseks vajalik statistik, $Z=(\bar{X}_1-\bar{X}_2-\mu_1+\mu_2-\delta_0)/\sqrt{s_1^2/n_1+s_2^2/n_2}$.

Rakendame saadud tulemusi Bernoulli jaotusega üldkogumite võrdlemiseks. Olgu $X_1\sim B(1,\theta_1)$ ja $X_2\sim B(1,\theta_2)$. Kuna valimi elementide väärtuseks võib olla ainult 0 või 1, saame

$$\bar{x}_i=\hat{\theta}_i=m_i/n_i\ ,$$

kus m_i on ühtede arv i-ndas valimis, ja

$$s_i^2=\hat{\theta}_i(1-\hat{\theta}_i)\ ,\ (i=1,2).$$

Usalduspiiride arvutamise valemid omandavad kuju

$$\underline{\theta_1-\theta_2}=\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2-\bar{z}_{\alpha/2}\sqrt{\hat{\theta}_1(1-\hat{\theta}_1)/n_1+\hat{\theta}_2(1-\hat{\theta}_2)/n_2}$$

$$\overline{\theta_1-\theta_2}=\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2+\bar{z}_{\alpha/2}\sqrt{\hat{\theta}_1(1-\hat{\theta}_1)/n_1+\hat{\theta}_2(1-\hat{\theta}_2)/n_2}\ ,$$

Vaatame hüpoteeside kontrollimist juhul, kui $\delta_0=0$. Siis arvutatakse parameetrile ühine hinnang mõlema valimi põhjal

$$\hat{\theta}=(m_1+m_2/(n_1+n_2)$$

ja otsuse langetamiseks vajaliku statistiku määrab eeskiri

$$Z=(\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2)/\sqrt{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})(1/n_1+1/n_2)}\ .$$

Näide 19.5. Soovitakse võrrelda kaht erinevat metoodikat võõrkeele õpetamiseks. Katses on võimalik kasutada 250 üliõpilast. Katsealused jagatakse kahte rühma - ühes 100, teises 150 üliõpilast, rühmi õpetatakse erinevate metoodikate alusel. Õppeaja lõppedes viiakse mõlemas rühmas läbi ühesugune kontrolltest ja registreeritakse testi sooritanud üliõpilaste arv. Kui õpetamismetoodikad on erineva efektiivsusega, peab testi läbinud üliõpilaste osakaal erinevates rühmades olema erinev.

Katsetulemused esitame järgmise tabeliga

Metoodika / Tulemus	I	II
Sooritas	63	107
Ei sooritanud	37	43
Kokku	100	150

Uuritava tunnuse võime loomulikul viisil kodeerida kaheväärtuseliseks - lugeda tunnuse väärtuseks 1, kui üliõpilane sai läbi ning 0 vastupidisel juhul. Erinev õpetamismetoodika võib tagada suurema hulga üliõpilaste positiivsed teadmised, seega $X_i \sim B(1, \theta_i)$, i=1,2. Õppemetoodikate võrdlemine on esitatav järgmise hüpoteeside kontrollimise ülesandena

$H_0: \theta_1 = \theta_2$
$H_1: \theta_1 \neq \theta_2$.

Valime olulisuse nivoo, olgu $\alpha=0,05$ ja otsime tabelist otsuse langetamiseks vajaliku kriitilise väärtuse $\bar{z}_{0,025} = 1,96$. Arvutame otsuse langetamiseks vajaliku statistiku väärtuse. Leiame esmalt parameetri ühise hinnangu mõlema valimi põhjal

$$\hat{\theta} = (63+107)/(100+150) = 170/250 = 0,68$$

ja siis parameetri hinnangud mõlema valimi põhjal eraldi

$$\hat{\theta}_1 = 63/100 = 0,63 \qquad \hat{\theta}_2 = 107/150 = 0,71$$

ning lõpuks statistiku Z

$$z = (0,63-0,71)/\sqrt{0,68\cdot 0,32\cdot (1/100+1/150)} = -1,33$$

Kuna $|-1,33| < 1,96$, peame jääma null-hüpoteesi juurde: selle katse põhjal pole võimalik tõestada metoodikate erinevat efektiivsust.

Leiame veel olulisustõenäosuse. Kuna $\bar{z}_{0,047}=1,32$, saaksime sisuka hüpoteesi tõestada olulisuse nivool 0,094. Lõplik otsus riski vastuvõetava suuruse kohta sõltub kulutuste võrdlemisest erinevate õpetamismetoodikate rakendamiseks.

Leiame veel usaldusintervalli parameetrite vahele. Kasutame usaldusnivood 0,95. Kuna

$$\sqrt{0,63\cdot 0,37/100+0,71\; 0,29/150} = 0,061 \text{ ,}$$

siis

$$\underline{\theta_1 - \theta_2} = -0,20 \qquad \overline{\theta_1 - \theta_2} = 0,04 \text{ .}$$

Avaldades usaldusintervalli protsentides saame

$$[-20\%;\ 4\%] \text{ .}$$

*

D. Randomiseerimine

Peatume veel eraldi ühel võrdleva katse organiseerimisega seotud probleemil. Nimelt võib katses kasutavate objektide või indiviidide rühmadesse jaotamine olla otsustava tähtsusega lõppjäreldusele. Näiteks võib õpetamismetoodikate võrdlemisel uue meetodi katsetamise rühma valida "ärksamad" üliõpilased, jättes "tuimemad" kontrollrühma. Sel juhul ei osutu katse enam kahe õpetamismetoodika võrdlemiseks.

Kui valimi objektide või indiviidide valik on täielikult kontrollitav, on võimalik kasutusele võtta ettevaatusabinõud "tendentslike" rühmade vältimiseks. Põhivõtteks on siin erapooletu objektide valik, randomiseerimine rühmade moodustamisel. Kuna katsetaja valik on potentsiaalselt erapoolik, on randomiseerimise aluseks juhuslik valik.

Oletame, et valimite moodustamiseks on võimalik kasutada n objekti, millest n_1 peab sattuma katserühma, $n_2 (n_2 = n - n_1)$ aga kontrollrühma. Kui on alust oletada, et "töötlus" ei muuda uuritava tunnuse hajuvust, on soovitav valida rühmade arvukused enam-vähem ühesugused. Teame, et esimese rühma moodustamiseks on $C_n^{n_1}$ erinevat võimalust. Randomiseerimine nõuab, et igale niisugusele rühma koosseisule oleks tagatud võrdne tõenäosus realiseeruda. Selle tagamiseks võib katses kasutatavad objektid varustada numbritega 1, 2, ..., n. Objektide numbrid võib kirjutada paberilehtedele, panna kõik sedelid urni, segada, valida välja n_1 numbrit ja vastavad objektid võtta esimesse rühma. Samaväärse juhusliku valiku mehhanismi saame realiseerida ka juhuslike arvude tabeli abil.

Randomiseerimine tagab mittekontrollitavate faktorite mõjust tuleneva nihke puudumise, katsematerjali mittehomogeensusest tulenev tegur võib ühesuguse tõenäosusega mõjustada mõlema rühma objekte. See mõju võib põhjustada küll andmete suurema hajutatuse, kuid mitte süstemaatilist nihet.

ÜLESANDED

1. Soovitakse võrrelda kahte erinevat programmi kvalifitseeritud tööliste ettevalmistamiseks. Katsealustena saab kasutada 20 isikut. Nad jaotatakse juhuslikult kahte rühma, kumbki rühm õpetatakse välja erineva programmi alusel. Õppeaja lõppedes viiakse mõlemas rühmas läbi ühesugused kiiruskatsed. Saadud tulemused olid järgmised:

I rühm	15	20	11	23	16	21	18	16	27	24
II rühm	31	13	19	23	17	28	26	23	25	24

(a) kas programmid annavad oluliselt erineva ettevalmistuse?

(b) millised eeldused tehakse erinevuse kontrollimisel?

(c) kas eeldus dispersioonide võrdsuse kohta pole vastuolus vaatlustulemustega?

(d) leida 0,95-usaldusnivooga usaldusintervall üldkogumite keskväärtuste vahele.

2. Soovitakse uurida, kuidas mõjub hambaravis kasutatud valuvaigisti doos meestele ja naistele. Vaatluse all on 15 mees ja 16 naispatsienti. Mõõdetakse tuimestuse tekkimiseks kulunud aeg (minutites). Tulemused olid järgmised:

	$\bar{x}$	s
mehed	4,8	0,8
naised	4,4	0,9

(a) kas üldkogumite dispersioonid on võrdsed?

(b) kas tuimestuse tekkimiseks kuluva aja keskväärtus on meestel ja naistel erinev?

(c) leida usaldusintervall keskväärtuste vahele.

3. Uuritakse abiellumisvanust kahes erinevas etnilises rühmituses. Kummastki rühmitusest saab kasutada 100 mehe andmeid. Need on järgmised:

rühmitus	$\bar{x}$	s
A	18,5	5,8
B	20,7	6,3

(a) kas keskmine abiellumisvanus on erinevates rühmitustes erinev?

(b) millised eeldused tuleb teha oletuse kontrollimiseks?

(c) leida usaldusintervall keskväärtuste vahele.

4. Uuritakse omaduse A esinemise sagedust kahes erinevas üldkogumis. Vaatluse all on 100 objekti kummastki üldkogumist. Saadud tulemused

	I	II
omadusega A	62	29
omaduseta A	38	71

(a) kas üldkogumid on erinevad?

(b) leida usaldusintervall parameetrite vahele.

5. Soovitakse uurida teatava töötluse mõju seemnete idanemisvõimele. Selleks valitakse kaks 250 seemnest koosnevat partiid, ühe partiiga tehakse läbi töötlus, teine jääb kontrollpartiiks. Seejärel kuumutatakse mõlemat partiid teatud

temperatuurini ning pannakse seemned idanema. Töödeldud seemnetest ei idanenud 10%, töötlemata seemnetest aga 25%.
(a) kas töötluse positiivse mõju võib lugeda tõestatuks?
(b) leida usaldusintervall idanevusprotsendi vahele töödeldud ja töötlemata seemnete korral.

KUS ME OLEME? Õppisime tundma tehnilisi võtteid kahe üldkogumi võrdlemiseks.
KUHU LÄHEME? Asume viimase paragrahvi kallale. Vaatame, kuidas kontrollida üldkogumi jaotuse tüübi kohta tehtavat eeldust.

§20. Kooskõlakriteerium

Kogu senises käsitluses eeldasime, et uuritava tunnuse tõenäosusjaotuse kuju on teada, tundmatud on ainult tema parameetrid. Praktilistes ülesannetes pole aga kaugeltki alati võimalik välja selgitada, milline tõenäosusjaotus tunnuse käitumist kirjeldab, võib vaid oletada teatud tõenäosusjaotuse sobivust. Valitud tõenäosusjaotuse ja tegelike katsetulemuste kooskõla kontrollimine on seega statistilise andmestiku analüüsimisel loomulikuks etapiks. Oletuse teatud tõenäosusjaotuse sobivuse kohta saab esitada statistiliste hüpoteeside paarina:
$H_0: X \sim F_0(\theta)$ Null-hüpotees väidab, et tunnuse kirjeldami-
$H_1: X \not\sim F_0(\theta)$. seks sobib mingi konkreetne tõenöosusjaotus $F_0(\theta)$, sisukas hüpotees aga väidab, et see tõenäosusjaotus ei sobi tunnuse kirjeldamiseks. Vastupidist sisu pole hüpoteesidele võimalik anda – t õ e s t a d a teatud tõenäosusjaotuse sobivust pole matemaatilise statistika vahendite abil võimalik, saab aga tõestada, et teatav tõenäosusjaotus e i s o b i tunnuse kirjeldamiseks.

Kuna sisukas hüpotees jääb enamasti täpsemalt formuleerimata – lubatud on kõik tõenäosusjaotused peale tõenäosusjaotuse $F_0(\theta)$ – siis võimsusfunktsiooni leidmine on tülikas ja optimaalse (ÜV) kriteeriumi konstrueerimine esitatud hüpoteeside kontrollimiseks pole võimalik. Praktikas on kasutusel mitmed erinevad kriteeriumid. Vastavate kriteeriumide ühiseks nimetuseks on kooskõlakriteerium.

Kooskõlakriteerium kasutab otsuse langetamiseks niisugust statistikut, mis mõõdab erinevust valimi elementide tegeliku käitumise ja tõenäosusjaotuse $F_o(\theta)$ jaoks ootuspärase käitumise vahel. Statistiku tõenäosusjaotus peab null-hüpoteesi kehtivuse korral olema täpselt määratud. Praktikas kasutatavate statistikute korral ei sõltu vastav tõenäosusjaotus kontrollitavast tõenäosusjaotusest $F_o(\theta)$. Meie tutvume ainult ühega kooskõlakriteeriumidest - kriteeriumiga, mida nimetatakse <u>χ^2-kriteeriumiks</u> (sageli ka Pearsoni χ^2-kriteeriumiks tema kasutusele võtja inglise statistiku K.Pearsoni järgi). See kriteerium on kasutatav ainult suurte valimite korral.

Põhimõtteline skeem selle kriteeriumi tuletamiseks on järgmine. Esimese sammuna jagatakse tunnuse võimalike väärtuste hulk enam-vähem suvaliselt valitud klassideks (olgu need $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$). Seejärel tehakse iga klassi jaoks kindlaks sinna kuuluvate valimi elementide arv (olgu see $m_1, m_2, \ldots, m_k$). Siis arvutatakse iga klassi jaoks tõenäosus vaatlustulemuse sellesse klassi sattumiseks tõenäosusjaotuse $F_o(\theta)$ korral (olgu see $p_1^o, p_2^o, \ldots, p_k^o$). Seda tõenäosust ja valimi mahtu teades saab iga klassi jaoks arvutada "ootuspärase" elementide arvu $n_i = np_i^o$. Arvestades nüüd tõenäosusteooria põhitõde - suure katsete arvu korral ei saa sündmuse tõenäosus ja selle sündmuse suhteline sagedus väga palju erineda - ei tohi mudeli $F_o(\theta)$ sobivuse korral arvude n_i ja m_i erinevus olla väga suur. Asume konstrueerima statistikut, mis mõõdaks seda erinevust ja rahuldaks eelpool loetletud nõudeid. Võimaluse konkreetse tõenäosusjaotuse $F_o(\theta)$ kuju ignoreerimiseks annab polünomiaaljaotuse kasutusele võtmine.

Olgu katsel k võimalikku tulemust, mille tõenäosused on $p_1, \ldots, p_k$ ($\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$). Korratagu seda katset n korda, kordused on sõltumatud. Moodustame juhusliku vektori $\vec{M} = (M_1, M_2, \ldots, M_k)$, mille i-nda komponendi väärtuseks on i-nda katsetulemuse esinemise arv. Vektori $\vec{M}$ jaotust nimetatakse <u>polünomiaaljaotuseks</u>, tema tõenäosusfunktsioon on määratud eeskirjaga (vt. [6], lk. 75).

$$P(\vec{M}=\vec{m}) = (n!/(m_1! \ldots m_k!))\, p_1^{m_1} \ldots p_k^{m_k},$$

$m_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$. Selle vektori konstruktsiooni arvestades

18*

on ilmne, et iga komponent on binoomjaotusega, $M_i \sim B(n, p_i)$.

On selge, et igasuguse tõenäosusjaotuse $F_0(\theta)$ korral võime klasside sageduste ühisjaotuseks lugeda polünomiaaljaotuse, hüpoteesid aga sõnastada väidetena selle polünomiaaljaotuse parameetrite kohta:

H_0: $p_i=p_i^0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$

H_1: $\exists i$, et $p_i \neq p_i^0$.

Meile vajaliku statistiku määrab järgnev teoreem.

Teoreem 20.1. Olgu tunnuse X võimalikud väärtused jagatud klassidesse $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ ja kehtigu tõenäosusjaotuse $F_0(\theta)$ korral võrdus $P(X \in \Delta_i) = p_i^0$. Hüpoteeside H_0: $p_i=p_i^0$, $(i= 1,2, \ldots, k)$; H_1: $\exists i$, et $p_i \neq p_i^0$ kontrollimisel on asümptootiliseks $(n \to \infty)$ ÜTPS statistikuks statistik

$$H^2 = \sum_{i=1}^{k} \left[(m_i - np_i^0)^2/(np_i^0) \right] .$$

Tõestus. Tõestuses kasutame valimi asemel klasside sageduste vektorit $\vec{M}$. Valimi tõepärafunktsiooniks on siis selle vektori tõepärafunktsioon

$$L(\vec{m},\vec{p}) = n! \prod_{i=1}^{k} (p_i^{m_i}/m_i!) .$$

Kirjutame välja ÜTP suhte

$$\Lambda(\vec{m}) = \max_{\vec{p}\in\Theta} L(\vec{m},\vec{p})/\max_{\vec{p}\in\Theta_0} L(\vec{m},\vec{p}) ,$$

kus parameetri võimalike väärtuste piirkond Θ on määratud eeskirjaga

$$\Theta = \left\{ \vec{p},\ 0 \leq p_i \leq 1 \text{ ja } \sum_{i=1}^{k} p_i = 1 \right\},$$

null-hüpoteesis määratud piirkond Θ_0 sisaldab aga ainult ühte parameetrite vektori võimalikku väärtust $\vec{p}_0=(p_1^0, p_2^0, \ldots, p_k^0)$, $\Theta_0 = \{\vec{p}_0\}$. Seega

$$\max_{\vec{p}\in\Theta_0} L(\vec{m}, \vec{p}) = L(\vec{m},\vec{p}_0).$$

Lugejas oleva maksimumi leiame tavalisel viisil - see realiseerub parameetrite vektori $\vec{p}$ väärtuse korral, mis on STP hinnanguks. Läheme üle logaritmilisele tõepärafunktsioonile

$$l(\vec{m},\vec{p}) = \ln n! + \sum_{i=1}^{k} m_i \ln p_i - \sum_{i=1}^{k} \ln m_i! .$$

Sõltumatuid argumente on praegu k-1, kuna $p_k=1-p_1-\ldots-p_{k-1}$. Asendame p_k, leiame osatuletised ja võrdsustame need nulliga.

Saame tõepäravõrrandite süsteemi

$$(\partial/\partial p_i)l(\vec{m},\vec{p}) = m_i/p_i - m_k/p_k = 0,$$

$i=1,\ldots, k-1$. Selle süsteemi lahendid avaldame p_k kaudu

$$p_i = m_i p_k/m_k,$$

$i=1,\ldots, k-1$. Kuna aga $\sum_{i=1}^{k} p_i=1$, siis saame, et $p_k=m_k/n$ ja

$$\hat{p}_i = m_i/n,$$

$i=1,\ldots, k$. Oleme leidnud parameetrite vektori STP hinnangu.

Tõepärafunktsiooni väärtuseks on parameetrite vektori niisuguse valiku korral

$$L(\vec{m},\vec{p}) = n! \prod_{i=1}^{k}\left[m_i^{m_i}/(n^{m_i} m_i!)\right],$$

kust saame ÜTP suhte väärtuse

$$\Lambda(\vec{m}) = \prod_{i=1}^{k} (m_i/(np_i^o))^{m} \quad .$$

Näitame nüüd, et valimi mahu piiramatul kasvamisel ($n \to \infty$) on ÜTPS statistik statistiku H^2 monotoonselt kasvav funktsioon.

Kirjutame esmalt välja ÜTPS statistiku logaritmi

$$\ln \Lambda(\vec{m}) = \sum_{i=1}^{k}[m_i \ln(m_i/(np_i^o))] =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} [(m_i-np_i^o+np_i^o)\ln(1+(m_i-np_i^o)/(np_i^o))] .$$

Kasutades logaritmi reaksarendust,

$$\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - \ldots ,$$

saame ÜTPS statistiku logaritmi esitada kujul

$$\ln \Lambda(\vec{m}) = \sum_{i=1}^{k}[(m_i-np_i^o+np_i^o)((m_i-np_i^o)/(np_i^o -$$

$$-(m_i-np_i^o)^2/(2(np_i^o)^2) + (m_i-np_i^o)^3/(3(np_i^o)^3) - \ldots)] .$$

Liikmeid sobivalt ümber rühmitades jõuame lõpuks avaldiseni

$$\ln \Lambda(\vec{m})=(1/2) \sum_{i=1}^{k}[(m_i-np_i^o)^2/(np_i^o)]- (1/6) \sum_{i=1}^{k}[(m_i-np_i^o)^3/(np_i^o)^2]-\ldots$$

Kuna aga $EM_i=np_i^o$ ja $DM_i=np_i^o(1-p_i^o)$, siis on vahe $m_i-np_i^o$ sama suurusjärku nagu $\sqrt{np_i^o(1-p_i^o)}$ ja kõik tegurid peale esimese selles avaldises lähenevad nullile kiiremini kui $1/\sqrt{n}$. Järelikult võime nende olemasolu suurte valimi mahtude korral ignoreerida. Siis aga on ÜTPS statistik statistiku H^2 monotoonselt kasvav funktsioon.

Teoreem on tõestatud.

Statistiku H^2 täpne jaotus H_0 kehtivuse korral on praktiliseks kasutamiseks ebamugav. Saab aga tõestada, et valimi mahu piiramatul kasvamisel on vastavaks asümptootiliseks jaotuseks χ^2-jaotus parameetriga k-1. (vt. [9], lk. 109-110). Saab näidata, et χ^2-jaotus on küllalt heaks lähendiks juba siis, kui $n \geqslant 50$ ja $m_i \geqslant 5$ $(i=1,2, \ldots,k)$. Tuginedes sellele asjaolule saame välja kirjutada kriteeriumi, mis on rakendatav olulisuse nivool α,

$$\varphi(\vec{X}) = \begin{cases} 1, & \text{kui } H^2 > \bar{h}_{\alpha;k-1} \\ 0, & \text{kui } H^2 \leq \bar{h}_{\alpha;k-1} \end{cases} .$$

Vastavat kriteeriumi nimetataksegi χ^2-kriteeriumiks.

Vaatame näidet χ^2-kriteeriumi praktilise kasutamise kohta.

Näide 20.2. Olgu meil arvutil realiseeritud algoritm, mis peab genereerima ühtlase jaotusega U(0,1) juhuslikke arve. Kontrollimaks programmi töö kvaliteeti genereeriti arvutil 200 juhuslikust arvust koosnev valim. Jagame uuritava tunnuse võimalike väärtuste hulga (lõigu [0,1]) viieks klassiks $\Delta_i = [(i-1)/5,\ i/5)$. Esitame valimis registreeritud sagedused

[0 - 0,2)	[0,2 - 0,4)	[0,4 - 0,6)	[0,6 - 0,8)	[0,8 - 1
35	48	41	37	39

Kontrollime hüpoteese

H_0: $X \sim U(0,1)$ Arvestades, et ühtlase jaotuse U(0,1) korral on intervallidesse $[(i-1)/5, i/5)$ $(i=1, \ldots, 5)$ sattumise tõenäosus 0,2, võime hüpoteesid esitada ka kujul
H_1: $X \not\sim U(0,1)$.

H_0: $\forall i$ korral $p_i=0,2$ Valime olulisuse nivoo, olgu $\alpha = 0,05$.
H_1: $\exists_i$, et $p_i^0 \neq 0,2$. Kuna meie valim on küllalt suur $(n > 50)$ ja kõikides klassides on küllalt palju vaatlusi $(m_i \geqslant 5,\ i=1,2, \ldots, 5)$ võime otsuse langetamiseks kasutada χ^2-kriteeriumi. Leiame tabelist meile vajaliku väärtuse $\bar{h}_{0,05;4} = 9,49$. Arvutame statistiku H^2 väärtuse. Selle leidmisel on kasulik vahetulemused koondada spetsiaalsesse abitabelisse

p_i^o	np_i^o	$m_i-np_i^o$	$(m_i-np_i^o)^2$	$(m_i-np_i^o)^2/(np_i^o)$
0,2	40	-5	25	0,625
0,2	40	8	64	1,6
0,2	40	1	1	0,025
0,2	40	-3	9	0,225
0,2	40	-1	1	0,025

Liites kokku viimases veerus olevad arvud, saame $H^2 = 2,5$. Kuna statistiku väärtus ei ületa kriitilist väärtust ($2,5 < 9,49$), jääme null-hüpoteesi juurde. Katsetulemused ei ole vastuolus oletusega, et genereeritud arvud on ühtlase jaotusega U(0,1). *

Toodud näide on teatud mõttes ebatüüpiline. Mitte eriti sageli pole võimalik sisulistest kaalutlustest lähtudes määrata kindlaks kontrollitava tõenäosusjaotuse parameetrite arvulisi väärtusi. Kui need on tundmatud, tuleb kasutada valimi põhjal määratud parameetrite hinnanguid. Sel juhul muutub aga kasutatava χ^2-jaotuse parameeter - iga valimi põhjal arvutatud hinnang vähendab selle parameetri väärtust ühe võrra. (vt. [9], lk. 114 - 117). Kui me oleme valimi põhjal hinnanud r parameetrit, tuleb kasutada $\chi^2(k-r-1)$-jaotust.

<u>Näide 20.3.</u> Uuritakse teatava teenindussüsteemi tööd. Oletatakse, et ajaühikus saabunud tellimuste arv on Poissoni jaotusega, kuid selle jaotuse parameeter ei ole teada. Poissoni jaotuse sobivuse kontrollimiseks on 60 juhuslikult valitud ajaühiku jooksul registreeritud saabunud tellimuste arv. Saadakse järgmised tulemused

0	1	2	3	4	5	6	7
12	18	9	8	5	4	2	2

Esitame hüpoteesid

$H_0: X \sim P(\lambda)$ Valime olulisuse nivoo, olgu $\alpha = 0,01$. Vaa-
$H_1: X \not\sim P(\lambda)$ tame veel kord tähelepanelikult üle katsetulemused. Meie valim on küllalt suur ($n > 50$), kuid esineb väärtuste klasse, mille sagedus on väiksem viiest. Selle vältimiseks ühendame kolm viimast väärtuste klassi - loeme ühte klassi kuuluvateks kõik väärtused, mis pole väiksemad viiest. Saame uue sagedustabeli

0	1	2	3	4	5
12	18	9	8	5	8

Valimi põhjal tuleb meil hinnata parameetrit λ. Otsuse langetamiseks vajaliku väärtuse leiame tabelist, $\bar{h}_{0,01;4} = 13,28$.

Arvutame parameetri hinnangu. Nagu varasemast teame, tuleb hinnanguks valida valimi keskväärtus,

$$\hat{\lambda} = \bar{x} = 2,1 .$$

Kuna Poissoni jaotuse korral $P(X=k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$, saame arvutada kõikide klasside tõenäosused jaotuse P(2,1) korral. Koondame vajalikud arvutused jällegi abitabelisse

p_i^o	np_i^o	$m_i - np_i^o$	$(m_i - np_i^o)^2$	$(m_i - np_i^o)^2/(np_i^o)$
0,122	7,32	4,68	21,9024	2,9921
0,257	15,42	2,58	6,66	0,43
0,270	16,20	7,2	51,84	3,20
0,189	11,34	3,34	11,15	0,98
0,099	5,94	0,94	0,88	0,15
0,063	3,75	4,22	17,81	4,75

Liites kokku viimases veerus olevad arvud, saame $H^2 = 12,07$. Kuna statistiku väärtus ei ületa kriitilist väärtust ($12,07 < 13,28$), jääme null-hüpoteesi juurde.

Hindame veel statistiku väärtusele vastavat olulisustõenäosust. Kuna $\bar{h}_{0,025;4} = 11,14$, siis peaksime me olulisuse nivool 0,025 vastu võtma sisuka hüpoteesi - tunnistama Poissoni jaotuse kasutamise sobimatuks. Seega pole andmete kooskõla mudeliks valitud jaotusega eriti hea, küllalt väikesel olulisuse nivool saaksime null-hüpoteesi kummutada.

Analüüsides abitabelit näeme, et kõige suuremad lahknevused mudeli poolt ennustatud väärtustest on viimases väärtusklassis. s.t. andmestikus ilmneb tendents suurte väärtuste sagedasemaks esinemiseks, kui see oleks loomulik Poissoni jaotuse korral. Kuna niisugune tendents võib teenindussüsteemi töös osutuda oluliseks, oleks siin nähtavasti kõige õigem koguda täiendavaid vaatlusandmeid - suurema valimi korral tulevad üldkogumis valitsevad seaduspärasused selgemalt esile. *

ÜLESANDED

1. Uuriti täisarvuliste väärtustega tunnust, mille jaotuseks

võiks olla binoomjaotus. Järgnevas tabelis on toodud 900 vaatluse tulemused

0	1	2	3	4
15	151	118	226	490

Kontrollida binoomjaotuse sobivust.

2. Uuriti teatava sulami tugevuskordajat. Erinevaid toodangupartiisid uurides saadi tulemused

57-60	60-64	64-68	68-72	72-76	76-80	80-84	84-88
4	13	23	45	60	33	15	3

Kas selle tunnuse kirjeldamiseks sobib normaaljaotus?

KUS ME OLEME? Oleme läbi vaadanud sissejuhatava kursuse matemaatilisse statistikasse.

19

Register

asümptootiline jaotus - 75
Cramer-Rao vórratus - 57
efektiivne statistik - 17
- hinnang - 57
efektiivsus, suhteline - 37
eksponentsiaalne pere - 63
esimest liiki viga - 86
F-jaotus - 106
faktoriseerimise kriteerium - 45
hinnang - 24
hüpotees, kahepoolne - 83
-, mitteparameetriline - 83
-, parameetriline - 83
-, sisukas - 82
-, statistiline - 81
-, ühepoolne - 83
informatsioonivórratus - 57
karakteristlik funktsioon - 106
kaofunktsioon - 66
konkreetne valim - 10
kriitiline piirkond - 83
kriteerium - 86, 88
-,ühtlaselt vóimsaim - 94
kvantiil - 72
lihthüpotees - 83
liithüpotees - 83
logaritmiline tóepärafunktsioon - 27
momentide meetod - 29
- meetodi hinnang - 30
mójusus - 40
nihketus - 34
null-hüpotees - 82
olulisuse nivoo - 36
olulisustóenäosus - 129
parameeter - 8
piisavus - 43
randomiseerimine - 105
regulaarne jaotus - 53
riskifunktsioon - 67
statistik - 14
suurima tóepära meetod - 25
- - printsiip - 25
- - hinnang - 27
T-jaotus - 110
teist liiki viga - 86
teoreetiline valim 10
tunnus - 10
tóenäosusfunktsioon - 9
tóepärasuhe - 96
tóepärasuhte statistik - 96
usaldusintervall - 69
usalduskordaja - 72
usaldusnivoo - 69
usalduspiir - 69
valim - 6
valimi dispersioon - 17
- informatsioon - 50
- keskväärtus - 15
- standardhälve - 28
- talletis - 49
- tóepärafunktsioon - 25
variatsioonrida - 19
vóimsus - 91
vóimsusfunktsioon - 88
üldkogum - 6
üldistatud tóepärasuhe - 102
- - statistik - 102
χ^2- jaotus - 105

Kasutatud tähistused

θ	- tundmatu parameetri üldtähis
$\hat{\theta}$, $\tilde{\theta}$	- parameetri hinnangud
$f(x, \theta)$	- tihedusfunktsioon
$p(x, \theta)$	- tóenäosusfunktsioon
$F(x, \theta)$	- jaotusfunktsioon
$\vec{X}$ ja $\vec{x}$	- teoreetiline valim ja tema arvväärtus
$T(\vec{X})$	- statistiku üldtähis
$T(\vec{x}), t$	- statistiku arvväärtuse üldtähis
$\bar{X}$ ja $\bar{x}$	- valimi keskväärtus ja tema arvväärtus
S^2 ja s^2	- valimi dispersioon ja tema arvväärtus
S ja s	- valimi standardhälve ja tema arvväärtus
$X_{(i)}$ ja $x_{(i)}$	- i-s järkstatistik ja tema arvväärtus
$L(\vec{x}, \theta)$	- valimi tóepärafunktsioon
$l(\vec{x}, \theta)$	- logaritmiline tóepärafunktsioon
$e(T, T_*)$	- suhteline efektiivsus
$U(\vec{X}, \theta)$	- valimi talletis
$I_n(\theta)$	- valimi informatsioon
$I(\theta)$	- üksikvaatluse informatsioon
$\underline{T}(\vec{X})$, $\overline{T}(\vec{X})$	- usalduspiire määravad statistikud
$\underline{\theta}$, $\overline{\theta}$	- usalduspiiride arvväärtused
$\bar{z}_\alpha$, z_α	- standardse normaaljaotuse α-täiendkvantiil ja α-kvantiil
H_0	- null-hüpotees
H_1	- sisukas hüpotees
K_α	- kriitiline piirkond
$\varphi(\vec{X})$	- kriteeriumi üldtähis
$\pi_\varphi(\theta)$	- vóimsusfunktsioon
$\beta(\theta)$	- teist liiki vea tóenäosus
$\mathcal{L}(\vec{x}, \theta_0, \theta_1)$	- tóepärasuhe
$\mathcal{T}(\vec{X})$	- tóepärasuhte statistik
$\Lambda(\vec{X})$	- üldistatud tóepärasuhte statistik
$\bar{t}_{\alpha;n}$ ja $t_{\alpha;n}$	- $T(n)$-jaotuse α-täiendkvantiil ja α-kvantiil
$\bar{h}_{\alpha;n}$ ja $h_{\alpha,n}$	- $\chi^2(n)$-jaotuse α-täiendkvantiil ja α-kvantiil
$\bar{f}_{\alpha;m,n}$ ja $f_{\alpha;m,n}$	- $F(m,n)$-jaotuse α-täiendkvantiil ja α-kvantiil

Kirjandus

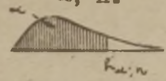
1. Tiit E., Parring A., Möls T. Tóenäosusteooria ja matemaatiline statistika. Tallinn, 1977
2. Hartung J. Statistik. München; Wien; Oldenbourg, 1987
3. Bhattacharyya G.K., Johnson R.A. Statistical concepts and methods. New York etc.: Wiley, 1977
4. Kruopis J. Matematinẽ statistika. Vilnius, 1977
5. Larsen R.J., Marx M.L. An introduction to mathematical statistics and its applications. Englewood Cliffs (N. I.). Prentice Hall, 1981
6. Бикел П., Доксам К. Математическая статистика. Москва, 1983
7. Браунли К.А. Статистическая теория и методология в науке и технике. Москва, 1977
8. Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. Москва, 1980
9. Ивченко Т.И., Медведев Ю.М. Математическая статистика. Москва, 1984
10. Леман Э. Проверка статистических гипотез. Москва, 1964

Tabel 1: standardse normaaljaotuse jaotusfunktsiooni $\Phi(z)$ väärtused.

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
−3.	0.0013	0.0010	0.0007	0.0005	0.0003	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000
−2.9	0.0019	0.0018	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0126	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0238	0.0233
−1.8	0.0359	0.0352	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0300	0.0294
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0570	0.0559
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0722	0.0708	0.0694	0.0681
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2297	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9430	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9648	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9700	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9762	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.	0.9987	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000
z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Märkus: Tabeli rea ette on kirjutatud funktsiooni $\Phi(z)$ argumendi täisosa ja esimene koht pärast koma, veeru kohale aga teine koht pärast koma. Näiteks $\Phi(-2,17)=0,0150$. Tabeli esimese ja viimase rea jaoks tähendab veeru peale kirjutatud number kümnendkohta. Näiteks $\Phi(3,2)=0,9993$. Standardse normaaljaotuse kvantiil leitakse võrduse $\Phi(z_\alpha) = \alpha$ põhjal. Tabel pärineb õpikust [5] lk. A2 – A3.

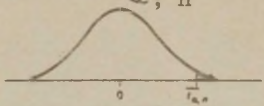
Tabel 2: χ^2-jaotuse α-kvantiilid $h_{\alpha;n}$.



n \ α	0,995	0,990	0,975	0,950	0,900	0,750	0,500	0,250	0,100	0,050	0,025	0,010	0,005
1	7,879	6,635	5,024	3,841	2,706	1,323	0,455	0,102	$^{-2}$1,58	$^{-3}$3,93	$^{-4}$9,82	$^{-4}$1,57	$^{-5}$3,93
2	10,60	9,210	7,378	5,991	4,605	2,773	1,386	0,575	0,211	0,103	$^{-2}$5,06	$^{-2}$2,01	$^{-2}$1,00
3	12,84	11,34	9,348	7,815	6,251	4,108	2,366	1,213	0,584	0,352	0,216	0,115	$^{-2}$7,17
4	14,86	13,28	11,14	9,488	7,779	5,385	3,357	1,923	1,064	0,711	0,484	0,297	0,207
5	16,75	15,09	12,83	11,07	9,236	6,626	4,351	2,675	1,610	1,145	0,831	0,554	0,412
6	18,55	16,81	14,45	12,59	10,64	7,841	5,348	3,455	2,204	1,635	1,237	0,872	0,676
7	20,28	18,48	16,01	14,07	12,02	9,037	6,346	4,255	2,833	2,167	1,690	1,239	0,989
8	21,96	20,09	17,53	15,51	13,36	10,22	7,344	5,071	3,490	2,733	2,180	1,647	1,344
9	23,59	21,67	19,02	16,92	14,68	11,39	8,343	5,899	4,168	3,325	2,700	2,088	1,735
10	25,19	23,21	20,48	18,31	15,99	12,55	9,342	6,737	4,865	3,940	3,247	2,558	2,156
11	26,76	24,73	21,92	19,68	17,28	13,70	10,34	7,584	5,578	4,575	3,816	3,053	2,603
12	28,30	26,22	23,34	21,03	18,55	14,85	11,34	8,438	6,304	5,226	4,404	3,571	3,074
13	29,82	27,69	24,74	22,36	19,81	15,98	12,34	9,299	7,042	5,892	5,009	4,107	3,565
14	31,32	29,14	26,12	23,68	21,06	17,12	13,34	10,17	7,790	6,571	5,629	4,660	4,075
15	32,80	30,58	27,49	25,00	22,31	18,25	14,34	11,04	8,547	7,261	6,262	5,229	4,601
16	34,27	32,00	28,85	26,30	23,54	19,37	15,34	11,91	9,312	7,962	6,908	5,812	5,142
17	35,72	33,41	30,19	27,59	24,77	20,49	16,34	12,79	10,09	8,672	7,564	6,408	5,697
18	37,16	34,81	31,53	28,87	25,99	21,60	17,34	13,68	10,86	9,390	8,231	7,015	6,265
19	38,58	36,19	32,85	30,14	27,20	22,72	18,34	14,56	11,65	10,12	8,907	7,633	6,844
20	40,00	37,57	34,17	31,41	28,41	23,83	19,34	15,45	12,44	10,85	9,591	8,260	7,434
21	41,40	38,93	35,48	32,67	29,62	24,93	20,34	16,34	13,24	11,59	10,28	8,897	8,034
22	42,80	40,29	36,78	33,92	30,81	26,04	21,34	17,24	14,04	12,34	10,98	9,542	8,643
23	44,18	41,64	38,08	35,17	32,01	27,14	22,34	18,14	14,85	13,09	11,69	10,20	9,260
24	45,56	42,98	39,36	36,42	33,20	28,24	23,34	19,04	15,66	13,85	12,40	10,86	9,886
25	46,93	44,31	40,65	37,65	34,38	29,34	24,34	19,94	16,47	14,61	13,12	11,52	10,52
26	48,29	45,64	41,92	38,89	35,56	30,43	25,34	20,84	17,29	15,38	13,84	12,20	11,16
27	49,64	46,96	43,19	40,11	36,74	31,53	26,34	21,75	18,11	16,15	14,57	12,88	11,81
28	50,99	48,28	44,46	41,34	37,92	32,62	27,34	22,66	19,94	16,93	15,31	13,56	12,46
29	52,34	49,59	45,72	42,56	39,09	33,71	28,34	23,57	19,77	17,71	16,05	14,26	13,12
30	53,67	50,89	46,98	43,77	40,26	34,80	29,34	24,48	20,60	18,49	16,79	14,95	13,79
40	66,77	63,69	59,34	55,76	51,81	45,62	39,34	33,66	29,05	26,51	24,43	22,16	20,71
50	79,49	76,15	71,42	67,50	63,17	56,33	49,33	42,94	37,69	34,76	32,36	29,71	27,99
60	91,95	88,38	83,30	79,08	74,40	66,98	59,33	52,29	46,46	43,19	40,48	37,48	35,53
70	104,2	100,4	95,02	90,53	85,53	77,58	69,33	61,70	55,33	51,74	48,76	45,44	43,28
80	116,3	112,3	106,6	101,9	96,58	88,13	79,33	71,14	64,28	60,39	57,15	53,54	51,17
90	128,3	124,1	118,1	113,1	107,6	98,65	89,33	80,62	73,29	69,13	65,65	61,75	59,20
100	140,2	135,8	129,6	124,3	118,5	109,1	99,33	90,13	82,36	77,93	74,22	70,06	67,33
150	198,4	193,2	185,8	179,6	172,6	161,3	149,3	138,0	128,3	122,7	118,0	112,7	109,1
200	255,3	249,4	241,1	234,0	226,0	213,1	199,3	186,2	174,8	168,3	162,7	156,4	152,2
250	311,3	304,9	295,7	287,9	279,1	264,7	249,3	234,6	221,8	214,4	208,1	200,9	196,2
300	366,8	359,9	349,9	341,4	331,8	316,1	299,3	283,1	269,1	260,9	253,9	246,0	240,7
400	476,6	468,7	457,3	447,6	436,6	418,7	399,3	380,6	364,2	354,6	346,5	337,2	330,9
600	693,0	683,5	669,8	658,1	644,8	623,0	599,3	576,3	556,1	544,2	534,0	522,4	514,5
800	906,8	896,0	880,3	866,9	851,7	826,6	799,3	772,7	749,2	735,4	723,5	709,9	700,7
1000	1119.	1107.	1090.	1075.	1058.	1030.	999,3	969,5	943,1	927,6	914,3	898,9	888,6

Märkus: χ^2-jaotuse α-täiendkvantiil määratakse võrdusega $\bar{h}_{\alpha;n}=h_{1-\alpha;n}$. Näiteks $h_{0,05;6}=1,63$ ja $\bar{h}_{0,05;6}=h_{0,95;6}=$ $=12,59$. Tabel pärineb käsiraamatust [2], lk. 893.

Tabel 3: T-jaotuse α-täiendkvantiilid $\bar{t}_{\alpha;n}$

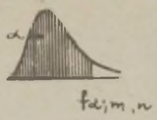


$n \backslash \alpha$	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	1.376	1.963	3.078	6.3128	12.706	31.821	63.657
2	1.061	1.386	1.886	2.9200	4.3027	6.965	9.9248
3	0.978	1.250	1.638	2.3534	3.1825	4.541	5.8409
4	0.941	1.190	1.533	2.1318	2.7764	3.747	4.6041
5	0.920	1.156	1.476	2.0150	2.5706	3.365	4.0321
6	0.906	1.134	1.440	1.9432	2.4469	3.143	3.7074
7	0.896	1.119	1.415	1.8946	2.3646	2.998	3.4995
8	0.889	1.108	1.397	1.8595	2.3060	2.896	3.3554
9	0.883	1.100	1.383	1.8331	2.2622	2.821	3.2498
10	0.879	1.093	1.372	1.8125	2.2281	2.764	3.1693
11	0.876	1.088	1.363	1.7959	2.2010	2.718	3.1058
12	0.873	1.083	1.356	1.7823	2.1788	2.681	3.0545
13	0.870	1.079	1.350	1.7709	2.1604	2.650	3.0123
14	0.868	1.076	1.345	1.7613	2.1448	2.624	2.9768
15	0.866	1.074	1.341	1.7530	2.1315	2.602	2.9467
16	0.865	1.071	1.337	1.7459	2.1199	2.583	2.9208
17	0.863	1.069	1.333	1.7396	2.1098	2.567	2.8982
18	0.862	1.067	1.330	1.7341	2.1009	2.552	2.8784
19	0.861	1.066	1.328	1.7291	2.0930	2.539	2.8609
20	0.860	1.064	1.325	1.7247	2.0860	2.528	2.8453
21	0.859	1.063	1.323	1.7207	2.0796	2.518	2.8314
22	0.858	1.061	1.321	1.7171	2.0739	2.508	2.8188
23	0.858	1.060	1.319	1.7139	2.0687	2.500	2.8073
24	0.857	1.059	1.318	1.7109	2.0639	2.492	2.7969
25	0.856	1.058	1.316	1.7081	2.0595	2.485	2.7874
26	0.856	1.058	1.315	1.7056	2.0555	2.479	2.7787
27	0.855	1.057	1.314	1.7033	2.0518	2.473	2.7707
28	0.855	1.056	1.313	1.7011	2.0484	2.467	2.7633
29	0.854	1.055	1.311	1.6991	2.0452	2.462	2.7564
30	0.854	1.055	1.310	1.6973	2.0423	2.457	2.7500
31	0.8535	1.0541	1.3095	1.6955	2.0395	2.453	2.7441
32	0.8531	1.0536	1.3086	1.6939	2.0370	2.449	2.7385
33	0.8527	1.0531	1.3078	1.6924	2.0345	2.445	2.7333
34	0.8524	1.0526	1.3070	1.6909	2.0321	2.441	2.7284
35	0.8521	1.0521	1.3062	1.6896	2.0301	2.438	2.7239
36	0.8518	1.0516	1.3055	1.6883	2.0281	2.434	2.7195
37	0.8515	1.0512	1.3049	1.6871	2.0262	2.431	2.7155
38	0.8512	1.0508	1.3042	1.6860	2.0244	2.428	2.7116
39	0.8510	1.0504	1.3037	1.6849	2.0227	2.426	2.7079
40	0.8507	1.0501	1.3031	1.6839	2.0211	2.423	2.7045
41	0.8505	1.0498	1.3026	1.6829	2.0196	2.421	2.7012
42	0.8503	1.0494	1.3020	1.6820	2.0181	2.418	2.6981
43	0.8501	1.0491	1.3016	1.6811	2.0167	2.416	2.6952
44	0.8499	1.0488	1.3011	1.6802	2.0154	2.414	2.6923
45	0.8497	1.0485	1.3007	1.6794	2.0141	2.412	2.6896
46	0.8495	1.0483	1.3002	1.6787	2.0129	2.410	2.6870
47	0.8494	1.0480	1.2998	1.6779	2.0118	2.408	2.6846
48	0.8492	1.0478	1.2994	1.6772	2.0106	2.406	2.6822
49	0.8490	1.0476	1.2991	1.6766	2.0096	2.405	2.6800
50	0.8489	1.0473	1.2987	1.6759	2.0086	2.403	2.6778
51	0.8448	1.0471	1.2984	1.6753	2.0077	2.402	2.6758
52	0.8486	1.0469	1.2981	1.6747	2.0067	2.400	2.6738
53	0.8485	1.0467	1.2978	1.6742	2.0058	2.399	2.6719
54	0.8484	1.0465	1.2975	1.6736	2.0049	2.397	2.6700
55	0.8483	1.0463	1.2972	1.6731	2.0041	2.396	2.6683
56	0.8481	1.0461	1.2969	1.6725	2.0033	2.395	2.6666
57	0.8480	1.0460	1.2967	1.6721	2.0025	2.393	2.6650
58	0.8479	1.0458	1.2964	1.6716	2.0017	2.392	2.6633
59	0.8478	1.0457	1.2962	1.6712	2.0010	2.391	2.6618
60	0.8477	1.0455	1.2959	1.6707	2.0003	2.390	2.6603
61	0.8476	1.0454	1.2957	1.6703	1.9997	2.389	2.6590
62	0.8475	1.0452	1.2954	1.6698	1.9990	2.388	2.6576
63	0.8474	1.0451	1.2952	1.6694	1.9984	2.387	2.6563
64	0.8473	1.0449	1.2950	1.6690	1.9977	2.386	2.6549
65	0.8472	1.0448	1.2948	1.6687	1.9972	2.385	2.6537
66	0.8471	1.0447	1.2945	1.6683	1.9966	2.384	2.6525
67	0.8471	1.0446	1.2944	1.6680	1.9961	2.383	2.6513
68	0.8470	1.0444	1.2942	1.6676	1.9955	2.382	2.6501
69	0.8469	1.0441	1.2940	1.6673	1.9950	2.381	2.6491

df	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
70	0.8468	1.0442	1.2938	1.6669	1.9945	2.381	2.6480
71	0.8468	1.0441	1.2936	1.6666	1.9940	2.380	2.6470
72	0.8467	1.0440	1.2934	1.6663	1.9935	2.379	2.6459
73	0.8466	1.0439	1.2933	1.6660	1.9931	2.378	2.6450
74	0.8465	1.0438	1.2931	1.6657	1.9926	2.378	2.6640
75	0.8465	1.0437	1.2930	1.6655	1.9922	2.377	2.6431
76	0.8464	1.0436	1.2928	1.6652	1.9917	2.376	2.6421
77	0.8464	1.0435	1.2927	1.6649	1.9913	2.376	2.6413
78	0.8463	1.0434	1.2925	1.6646	1.9909	2.375	2.6406
79	0.8463	1.0433	1.2924	1.6644	1.9905	2.374	2.6396
80	0.8462	1.0432	1.2922	1.6641	1.9901	2.374	2.6388
81	0.8461	1.0431	1.2921	1.6639	1.9897	2.373	2.6380
82	0.8460	1.0430	1.2920	1.6637	1.9893	2.372	2.6372
83	0.8460	1.0430	1.2919	1.6635	1.9890	2.372	2.6365
84	0.8459	1.0429	1.2917	1.6632	1.9886	2.371	2.6357
85	0.8459	1.0428	1.2916	1.6630	1.9883	2.371	2.6350
86	0.8458	1.0427	1.2915	1.6628	1.9880	2.370	2.6343
87	0.8458	1.0427	1.2914	1.6626	1.9877	2.370	2.6336
88	0.8457	1.0426	1.2913	1.6624	1.9873	2.369	2.6329
89	0.8457	1.0426	1.2912	1.6622	1.9870	2.369	2.6323
90	0.8457	1.0425	1.2910	1.6620	1.9867	2.368	2.6316
91	0.8457	1.0424	1.2909	1.6618	1.9864	2.368	2.6310
92	0.8456	1.0423	1.2908	1.6616	1.9861	2.367	2.6303
93	0.8456	1.0423	1.2907	1.6614	1.9859	2.367	2.6298
94	0.8455	1.0422	1.2906	1.6612	1.9856	2.366	2.6292
95	0.8455	1.0422	1.2905	1.6611	1.9853	2.366	2.6286
96	0.8454	1.0421	1.2904	1.6609	1.9850	2.366	2.6280
97	0.8454	1.0421	1.2904	1.6608	1.9848	2.365	2.6275
98	0.8453	1.0420	1.2903	1.6606	1.9845	2.365	2.6270
99	0.8453	1.0419	1.2902	1.6604	1.9843	2.364	2.6265
100	0.8452	1.0418	1.2901	1.6602	1.9840	2.364	2.6260
∞	0.84	1.04	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

Märkus: T-jaotuse α-kvantiil määratakse võrdusega $t_{\alpha;n} = -\bar{t}_{\alpha;n}$. **Näiteks** $\bar{t}_{0,01;16}=2,583$ ja $t_{0,01;16}=-2,583$. Tabel on võetud õpikust [5] lk. A4-A6.

Tabel 4: F-jaotuse α-kvantiilid $f_{\alpha;m,n}$



n	α \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0.990	4052.	4999.	5403.	5625.	5764.	5859.	5928.	5981.	6022.	6056.	6083.
	0.975	647,8	799,5	864,2	899,6	921,8	937,1	948,2	956,7	963,3	968,6	973,0
	0.950	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,0
	0.900	39,86	49,50	53,59	55,83	57,24	58,20	58,91	59,44	59,86	60,20	60,47
2	0.990	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40	99,41
	0.975	38,51	39,00	39,17	39,25	39,30	39,33	39,36	39,37	39,39	39,40	39,41
	0.950	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,40
	0.900	8,526	9,000	9,162	9,243	9,293	9,326	9,349	9,367	9,381	9,392	9,401
3	0.990	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35	27,23	27,13
	0.975	17,44	16,04	15,44	15,10	14,88	14,73	14,62	14,54	14,47	14,42	14,37
	0.950	10,13	9,552	9,277	9,117	9,013	8,941	8,887	8,845	8,812	8,786	8,763
	0.900	5,538	5,462	5,391	5,343	5,309	5,285	5,266	5,252	5,240	5,230	5,222
4	0.990	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,45
	0.975	12,22	10,65	9,979	9,605	9,364	9,197	9,074	8,980	8,905	8,844	8,793
	0.950	7,709	6,944	6,591	6,388	6,256	6,163	6,094	6,041	5,999	5,964	5,936
	0.900	4,545	4,325	4,191	4,107	4,051	4,010	3,979	3,955	3,936	3,920	3,907
5	0.990	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,962
	0.975	10,01	8,434	7,764	7,388	7,146	6,978	6,853	6,757	6,681	6,619	6,568
	0.950	6,608	5,786	5,409	5,192	5,050	4,950	4,876	4,818	4,772	4,735	4,704
	0.900	4,060	3,780	3,619	3,520	3,453	3,405	3,368	3,339	3,316	3,297	3,282
6	0.990	13,75	10,92	9,780	9,148	8,746	8,466	8,260	8,102	7,976	7,874	7,789
	0.975	8,813	7,260	6,599	6,227	5,988	5,820	5,695	5,600	5,523	5,461	5,409
	0.950	5,987	5,143	4,757	4,534	4,387	4,284	4,207	4,147	4,099	4,060	4,027
	0.900	3,776	3,463	3,289	3,181	3,108	3,055	3,015	2,983	2,958	2,937	2,919
7	0.990	12,25	9,547	8,451	7,847	7,460	7,191	6,993	6,840	6,719	6,620	6,538
	0.975	8,073	6,542	5,890	5,523	5,285	5,119	4,995	4,899	4,823	4,761	4,709
	0.950	5,591	4,737	4,347	4,120	3,972	3,866	3,787	3,726	3,677	3,637	3,603
	0.900	3,589	3,257	3,074	2,961	2,883	2,827	2,785	2,752	2,725	2,703	2,684
8	0.990	11,26	8,649	7,591	7,006	6,632	6,371	6,178	6,029	5,911	5,814	5,734
	0.975	7,571	6,059	5,416	5,053	4,817	4,652	4,529	4,433	4,357	4,295	4,243
	0.950	5,318	4,459	4,066	3,838	3,687	3,581	3,500	3,438	3,388	3,347	3,313
	0.900	3,458	3,113	2,924	2,806	2,726	2,668	2,624	2,589	2,561	2,538	2,518
9	0.990	10,56	8,022	6,992	6,422	2,057	5,802	5,613	5,467	5,351	5,257	5,177
	0.975	7,209	5,715	5,078	4,718	4,484	4,320	4,197	4,102	4,026	3,964	3,912
	0.950	5,117	4,256	3,863	3,633	3,482	3,374	3,293	3,230	3,179	3,137	3,102
	0.900	3,360	3,006	2,813	2,693	2,611	2,551	2,505	2,469	2,440	2,416	2,396
10	0.990	10,04	7,559	6,552	5,994	5,636	5,386	5,200	5,057	4,942	4,849	4,771
	0.975	6,937	5,456	4,826	4,468	4,236	4,072	3,950	3,855	3,779	3,717	3,665
	0.950	4,965	4,103	3,708	3,478	3,326	3,217	3,135	3,072	3,020	2,978	2,943
	0.900	3,285	2,924	2,728	2,605	2,522	2,461	2,414	2,377	2,347	2,323	2,302

n	α \ m	12	13	14	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	0,990	6106,	6126,	6143,	6157,	6209,	6235,	6261,	6287,	6313,	6339,	6366,
	0,975	976,7	979,8	982,5	984,9	993,1	997,2	1001,	1006,	1010,	1014,	1018,
	0,950	243,9	244,7	245,4	245,9	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3	254,3
	0,900	60,71	60,90	61,07	61,22	61,74	62,00	62,26	62,53	62,79	63,06	63,33
2	0,990	99,42	99,42	99,43	99,43	99,45	99,46	99,47	99,47	99,48	99,49	99,50
	0,975	39,41	39,42	39,43	39,43	39,45	39,46	39,46	39,47	39,48	39,49	39,50
	0,950	19,41	19,42	19,42	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50
	0,900	9,408	9,415	9,420	9,425	9,441	9,450	9,458	9,466	9,475	9,483	9,491
3	0,990	27,05	26,98	26,92	26,87	26,69	26,60	26,50	26,41	26,32	26,22	26,13
	0,975	14,34	14,30	14,28	14,25	14,17	14,12	14,08	14,04	13,99	13,95	13,90
	0,950	8,745	8,729	8,715	8,703	8,660	8,639	8,617	8,594	8,572	8,549	8,526
	0,900	5,216	5,210	5,205	5,200	5,184	5,176	5,168	5,160	5,151	5,143	5,134
4	0,990	14,37	14,31	14,25	14,20	14,02	13,93	13,84	13,75	13,65	13,56	13,46
	0,975	8,751	8,715	8,684	8,657	8,560	8,511	8,461	8,411	8,360	8,309	8,257
	0,950	5,912	5,891	5,873	5,858	5,803	5,774	5,746	5,717	5,688	5,658	5,628
	0,900	3,896	3,885	3,877	3,869	3,844	3,831	3,817	3,804	3,790	3,775	3,761
5	0,990	9,888	9,824	9,770	9,722	9,553	9,466	9,379	9,291	9,202	9,112	9,020
	0,975	6,525	6,487	6,455	6,428	6,329	6,278	6,227	6,175	6,123	6,069	6,015
	0,950	4,678	4,655	4,636	4,619	4,558	4,527	4,496	4,464	4,431	4,398	4,365
	0,900	3,268	3,257	3,247	3,238	3,207	3,191	3,174	3,157	3,140	3,123	3,105
6	0,990	7,718	7,657	7,605	7,559	7,396	7,313	7,229	7,143	7,057	6,969	6,880
	0,975	5,366	5,329	5,297	5,269	5,168	5,117	5,065	5,012	4,959	4,904	4,849
	0,950	4,000	3,976	3,956	3,938	3,874	3,841	3,808	3,774	3,740	3,705	3,669
	0,900	2,905	2,892	2,881	2,871	2,836	2,818	2,800	2,781	2,762	2,742	2,722
7	0,990	6,469	6,410	6,359	6,314	6,155	6,074	5,992	5,908	5,824	5,737	5,650
	0,975	4,666	4,628	4,596	4,568	4,467	4,415	4,362	4,309	4,254	4,199	4,142
	0,950	3,575	3,550	3,529	3,511	3,445	3,410	3,376	3,340	3,304	3,267	3,230
	0,900	2,668	2,654	2,643	2,632	2,595	2,575	2,555	2,535	2,514	2,493	2,471
8	0,990	5,667	5,609	5,558	5,515	5,359	5,279	5,198	5,116	5,032	4,946	4,859
	0,975	4,200	4,162	4,129	4,101	3,999	3,947	3,894	3,840	3,784	3,728	3,670
	0,950	3,284	3,259	3,237	3,218	3,150	3,115	3,079	3,043	3,005	2,967	2,928
	0,900	2,502	2,488	2,475	2,464	2,425	2,404	2,383	2,361	2,339	2,316	2,293
9	0,990	5,111	5,054	5,005	4,962	4,808	4,729	4,649	4,567	4,483	4,398	4,311
	0,975	3,868	3,830	3,798	3,769	3,667	3,614	3,560	3,505	3,449	3,392	3,333
	0,950	3,073	3,047	3,025	3,006	2,936	2,900	2,864	2,826	2,787	2,748	2,707
	0,900	2,379	2,364	2,351	2,340	2,298	2,277	2,255	2,232	2,208	2,184	2,159
10	0,990	4,706	4,649	4,600	4,558	4,405	4,327	4,247	4,165	4,082	3,996	3,909
	0,975	3,621	3,583	3,550	3,522	3,419	3,365	3,311	3,255	3,198	3,140	3,080
	0,950	2,913	2,887	2,864	2,845	2,774	2,737	2,700	2,661	2,621	2,580	2,538
	0,900	2,284	2,269	2,255	2,244	2,201	2,178	2,155	2,132	2,107	2,082	2,055

n	α \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
11	0.990	9.646	7.206	6.217	5.668	5.316	5.069	4.886	4.744	4.632	4.539	4.462
	0.975	6.724	5.256	4.630	4.275	4.044	3.881	3.759	3.664	3.588	3.526	3.473
	0.950	4.844	3.982	3.587	3.357	3.204	3.095	3.012	2.948	2.896	2.854	2.818
	0.900	3.225	2.860	2.660	2.536	2.451	2.389	2.342	2.304	2.273	2.248	2.227
12	0.990	9.330	6.927	5.953	5.412	5.064	4.821	4.640	4.499	4.388	4.296	4.219
	0.975	6.554	5.096	4.474	4.121	3.891	3.728	3.607	3.512	3.436	3.374	3.321
	0.950	4.747	3.885	3.490	3.259	3.106	2.996	2.913	2.849	2.796	2.753	2.717
	0.900	3.177	2.807	2.605	2.480	2.394	2.331	2.283	2.245	2.214	2.188	2.166
13	0.990	9.074	6.701	5.739	5.205	4.862	4.620	4.441	4.302	4.191	4.100	4.024
	0.975	6.414	4.965	4.347	3.996	3.767	3.604	3.483	3.388	3.312	3.250	3.197
	0.950	4.667	3.806	3.411	3.179	3.025	2.915	2.832	2.767	2.714	2.671	2.634
	0.900	3.136	2.763	2.560	2.434	2.347	2.283	2.234	2.195	2.164	2.138	2.115
14	0.990	8.862	6.515	5.564	5.035	4.695	4.456	4.278	4.140	4.030	3.939	3.863
	0.975	6.298	4.857	4.242	3.892	3.663	3.501	3.380	3.285	3.209	3.147	3.094
	0.950	4.600	3.739	3.344	3.112	2.958	2.848	2.764	2.699	2.646	2.602	2.565
	0.900	3.102	2.726	2.522	2.395	2.307	2.243	2.193	2.154	2.122	2.095	2.073
15	0.990	8.683	6.359	5.417	4.893	4.556	4.318	4.142	4.004	3.895	3.805	3.730
	0.975	6.199	4.765	4.153	3.804	3.576	3.415	3.293	3.199	3.123	3.060	3.007
	0.950	4.543	3.682	3.287	3.056	2.901	2.790	2.707	2.641	2.588	2.544	2.506
	0.900	3.073	2.695	2.490	2.361	2.273	2.208	2.158	2.119	2.086	2.059	2.036
16	0.990	8.531	6.226	5.292	4.773	4.437	4.202	4.026	3.890	3.780	3.691	3.616
	0.975	6.115	4.687	4.077	3.729	3.502	3.341	3.219	3.125	3.049	2.986	2.933
	0.950	4.494	3.634	3.239	3.007	2.852	2.741	2.657	2.591	2.538	2.494	2.456
	0.900	3.048	2.668	2.462	2.333	2.244	2.178	2.128	2.088	2.055	2.028	2.005
17	0.990	8.400	6.112	5.185	4.669	4.336	4.101	3.927	3.791	3.682	3.593	3.518
	0.975	6.042	4.619	4.011	3.665	3.438	3.277	3.156	3.061	2.985	2.922	2.869
	0.950	4.451	3.592	3.197	2.965	2.810	2.699	2.614	2.548	2.494	2.450	2.412
	0.900	3.026	2.645	2.437	2.308	2.218	2.152	2.102	2.061	2.028	2.001	1.977
18	0.990	8.285	6.013	5.092	4.579	4.248	4.015	3.841	3.705	3.597	3.508	3.433
	0.975	5.978	4.560	3.954	3.608	3.382	3.221	3.100	3.005	2.929	2.866	2.813
	0.950	4.414	3.555	3.160	2.928	2.773	2.661	2.577	2.510	2.456	2.412	2.374
	0.900	3.007	2.624	2.416	2.286	2.196	2.130	2.079	2.038	2.005	1.977	1.953
19	0.990	8.185	5.926	5.010	4.500	4.171	3.939	3.765	3.631	3.523	3.434	3.359
	0.975	5.922	4.508	3.903	3.559	3.333	3.172	3.051	2.956	2.880	2.817	2.764
	0.950	4.381	3.522	3.127	2.895	2.740	2.628	2.544	2.477	2.423	2.378	2.340
	0.900	2.990	2.606	2.397	2.266	2.176	2.109	2.058	2.017	1.984	1.956	1.932
20	0.990	8.096	5.849	4.938	4.431	4.103	3.871	3.699	3.564	3.457	3.368	3.293
	0.975	5.871	4.461	3.859	3.515	3.289	3.128	3.007	2.913	2.837	2.774	2.720
	0.950	4.351	3.493	3.098	2.866	2.711	2.599	2.514	2.447	2.393	2.348	2.310
	0.900	2.975	2.589	2.380	2.249	2.158	2.091	2.040	1.999	1.965	1.937	1.913

n	α \ n_1	12	13	14	15	20	24	30	40	60	120	∞
11	0,990	4,397	4,341	4,293	4,251	4,099	4,021	3,941	3,860	3,776	3,690	3,602
	0,975	3,430	3,391	3,358	3,330	3,226	3,173	3,118	3,061	3,004	2,944	2,883
	0,950	2,788	2,761	2,738	2,719	2,646	2,609	2,570	2,531	2,490	2,448	2,404
	0,900	2,209	2,193	2,179	2,167	2,123	2,100	2,076	2,052	2,026	2,000	1,972
12	0,990	4,155	4,099	4,051	4,010	3,858	3,780	3,701	3,619	3,535	3,449	3,361
	0,975	3,277	3,239	3,206	3,177	3,073	3,019	2,963	2,906	2,848	2,787	2,725
	0,950	2,687	2,660	2,637	2,617	2,544	2,505	2,466	2,426	2,384	2,341	2,296
	0,900	2,147	2,131	2,117	2,105	2,060	2,036	2,011	1,986	1,960	1,932	1,904
13	0,990	3,960	3,905	3,857	3,815	3,665	3,587	3,507	3,425	3,341	3,255	3,165
	0,975	3,153	3,115	3,081	3,053	2,948	2,893	2,837	2,780	2,720	2,659	2,595
	0,950	2,604	2,577	2,553	2,533	2,459	2,420	2,380	2,339	2,297	2,252	2,206
	0,900	2,097	2,080	2,066	2,053	2,007	1,983	1,958	1,931	1,904	1,876	1,846
14	0,990	3,800	3,745	3,697	3,656	3,505	3,427	3,348	3,266	3,181	3,094	3,004
	0,975	3,050	3,011	2,978	2,949	2,844	2,789	2,732	2,674	2,614	2,552	2,487
	0,950	2,534	2,507	2,483	2,463	2,388	2,349	2,308	2,266	2,223	2,178	2,131
	0,900	2,054	2,037	2,022	2,010	1,962	1,938	1,912	1,885	1,857	1,828	1,797
15	0,990	3,666	3,611	3,563	3,522	3,372	3,294	3,214	3,132	3,047	2,959	2,868
	0,975	2,963	2,924	2,891	2,862	2,756	2,701	2,644	2,585	2,524	2,461	2,395
	0,950	2,475	2,448	2,424	2,403	2,328	2,288	2,247	2,204	2,160	2,114	2,066
	0,900	2,017	2,000	1,985	1,972	1,924	1,899	1,873	1,845	1,817	1,787	1,755
16	0,990	3,553	3,497	3,450	3,409	3,259	3,181	3,101	3,018	2,933	2,845	2,753
	0,975	2,889	2,850	2,817	2,788	2,681	2,625	2,568	2,509	2,447	2,383	2,316
	0,950	2,425	2,397	2,373	2,352	2,276	2,235	2,194	2,151	2,106	2,059	2,010
	0,900	1,985	1,968	1,953	1,940	1,891	1,866	1,839	1,811	1,782	1,751	1,718
17	0,990	3,455	3,400	3,353	3,312	3,162	3,084	3,003	2,920	2,835	2,746	2,653
	0,975	2,825	2,786	2,752	2,723	2,616	2,560	2,502	2,442	2,380	2,315	2,247
	0,950	2,381	2,353	2,329	2,308	2,230	2,190	2,148	2,104	2,058	2,011	1,960
	0,900	1,958	1,940	1,925	1,912	1,862	1,836	1,809	1,781	1,751	1,719	1,686
18	0,990	3,371	3,316	3,268	3,227	3,077	2,999	2,919	2,835	2,749	2,660	2,566
	0,975	2,769	2,730	2,696	2,667	2,559	2,503	2,444	2,384	2,321	2,256	2,187
	0,950	2,342	2,314	2,290	2,269	2,191	2,150	2,107	2,063	2,017	1,968	1,917
	0,900	1,933	1,915	1,900	1,887	1,837	1,810	1,783	1,754	1,723	1,691	1,657
19	0,990	3,297	3,241	3,194	3,153	3,003	2,925	2,844	2,761	2,674	2,584	2,489
	0,975	2,720	2,680	2,646	2,617	2,509	2,452	2,394	2,333	2,270	2,203	2,133
	0,950	2,308	2,280	2,255	2,234	2,155	2,114	2,071	2,026	1,980	1,930	1,878
	0,900	1,912	1,894	1,878	1,865	1,814	1,787	1,759	1,730	1,699	1,666	1,631
20	0,990	3,231	3,176	3,129	3,088	2,938	2,859	2,778	2,695	2,608	2,517	2,421
	0,975	2,676	2,636	2,602	2,573	2,464	2,408	2,349	2,287	2,223	2,156	2,085
	0,950	2,278	2,249	2,225	2,203	2,124	2,082	2,039	1,994	1,946	1,896	1,843
	0,900	1,892	1,874	1,859	1,845	1,794	1,767	1,738	1,708	1,677	1,643	1,607

n	α \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
22	0,990	7,945	5,719	4,817	4,313	3,988	3,758	3,587	3,453	3,346	3,258	3,183
	0,975	5,786	4,383	3,783	3,440	3,215	3,055	2,934	2,839	2,763	2,700	2,646
	0,950	4,301	3,443	3,049	2,817	2,661	2,549	2,464	2,397	2,342	2,297	2,258
	0,900	2,949	2,561	2,3[illegible]1	2,219	2,128	2,060	2,008	1,967	1,933	1,904	1,880
24	0,990	7,823	5,614	4,718	4,218	3,895	3,667	3,496	3,363	3,256	3,168	3,094
	0,975	5,717	4,319	3,721	3,379	3,155	2,995	2,874	2,779	2,703	2,640	2,586
	0,950	4,260	3,403	3,009	2,776	2,621	2,508	2,423	2,355	2,300	2,255	2,216
	0,900	2,927	2,538	2,327	2,195	2,103	2,035	1,983	1,941	1,906	1,877	1,853
26	0,990	7,721	5,526	4,637	4,140	3,818	3,591	3,421	3,288	3,182	3,094	3,020
	0,975	5,659	4,265	3,670	3,329	3,105	2,945	2,824	2,729	2,653	2,590	2,536
	0,950	4,225	3,369	2,975	2,743	2,587	2,474	2,388	2,321	2,265	2,220	2,181
	0,900	2,909	2,519	2,307	2,174	2,082	2,014	1,961	1,919	1,884	1,855	1,830
28	0,990	7,636	5,453	4,568	4,074	3,754	3,528	3,358	3,226	3,120	3,032	2,958
	0,975	5,610	4,221	3,626	3,286	3,063	2,903	2,782	2,687	2,611	2,547	2,493
	0,950	4,196	3,340	2,947	2,714	2,558	2,445	2,359	2,291	2,236	2,190	2,151
	0,900	2,894	2,503	2,291	2,157	2,064	1,996	1,943	1,900	1,865	1,836	1,811
30	0,990	7,562	5,390	4,510	4,018	3,699	3,473	3,304	3,173	3,067	2,979	2,905
	0,975	5,568	4,182	3,589	3,250	3,026	2,867	2,746	2,651	2,575	2,511	2,457
	0,950	4,171	3,316	2,922	2,690	2,534	2,421	2,334	2,266	2,211	2,165	2,125
	0,900	2,881	2,489	2,276	2,142	2,049	1,980	1,927	1,884	1,849	1,819	1,794
40	0,990	7,314	5,179	4,313	3,828	3,514	3,291	3,124	2,993	2,888	2,801	2,727
	0,975	5,424	4,051	3,463	3,126	2,904	2,744	2,624	2,529	2,452	2,388	2,334
	0,950	4,085	3,232	2,839	2,606	2,449	2,336	2,249	2,180	2,124	2,077	2,037
	0,900	2,835	2,440	2,226	2,091	1,997	1,927	1,873	1,829	1,793	1,763	1,737
60	0,990	7,077	4,977	4,126	3,649	3,339	3,119	2,953	2,823	2,718	2,632	2,558
	0,975	5,286	3,925	3,343	3,008	2,786	2,627	2,507	2,412	2,334	2,270	2,215
	0,950	4,001	3,150	2,758	2,525	2,368	2,254	2,167	2,097	2,040	1,993	1,952
	0,900	2,791	2,393	2,177	2,041	1,946	1,875	1,819	1,775	1,738	1,707	1,680
80	0,990	6,964	4,882	4,036	3,564	3,256	3,037	2,872	2,743	2,639	2,552	2,478
	0,975	5,219	3,865	3,285	2,951	2,730	2,571	2,451	2,356	2,278	2,214	2,158
	0,950	3,961	3,111	2,719	2,486	2,329	2,214	2,127	2,057	1,999	1,952	1,910
	0,900	2,770	2,370	2,154	2,017	1,921	1,849	1,793	1,748	1,711	1,680	1,652
120	0,990	6,851	4,787	3,949	3,480	3,174	2,956	2,792	2,663	2,559	2,472	2,398
	0,975	5,152	3,805	3,227	2,894	2,674	2,515	2,395	2,299	2,222	2,157	2,101
	0,950	3,920	3,072	2,680	2,447	2,290	2,175	2,087	2,016	1,959	1,910	1,869
	0,900	2,748	2,347	2,130	1,992	1,896	1,824	1,767	1,722	1,684	1,652	1,625
∞	0,990	6,635	4,605	3,782	3,319	3,017	2,802	2,639	2,511	2,407	2,321	2,247
	0,975	5,024	3,689	3,116	2,786	2,567	2,408	2,288	2,192	2,114	2,048	1,992
	0,950	3,841	2,996	2,605	2,372	2,214	2,099	2,010	1,938	1,880	1,831	1,788
	0,900	2,706	2,303	2,084	1,945	1,847	1,774	1,717	1,670	1,632	1,599	1,570

n	α \ m	12	13	14	15	20	24	30	40	60	120	∞
22	0,990	3,121	3,066	3.019	2,978	2,827	2,749	2.667	2,583	2,495	2.403	2,305
	0,975	2,602	2,562	2,528	2,498	2,389	2,332	2,272	2,210	2,145	2,076	2,003
	0,950	2,226	2,197	2,172	2,151	2,071	2,028	1,984	1,938	1,889	1,838	1,783
	0,900	1,859	1,841	1,825	1,811	1,759	1,731	1,702	1,671	1,639	1,604	1,567
24	0,990	3,032	2,977	2,930	2,889	2,738	2,659	2,577	2,492	2,403	2,310	2,211
	0,975	2,541	2,501	2,467	2,437	2,327	2,269	2,209	2,146	2,080	2,010	1,935
	0,950	2,183	2,154	2,129	2,108	2,027	1,984	1,939	1,892	1,842	1,790	1,733
	0,900	1,832	1,813	1,797	1,783	1,730	1,702	1,672	1,641	1,607	1,571	1,533
26	0,990	2,958	2,903	2,856	2,815	2,664	2,585	2,503	2,417	2,327	2,233	2,131
	0,975	2,491	2,451	2,417	2,387	2,276	2,217	2,157	2,093	2,026	1,954	1,878
	0,950	2,148	2,119	2,093	2,072	1,990	1,946	1,901	1,853	1,803	1,749	1,691
	0,900	1,809	1,790	1,774	1,760	1,706	1,677	1,647	1,615	1,581	1,544	1,504
28	0,990	2,896	2,841	2,794	2,753	2,602	2,522	2,440	2,353	2,263	2,167	2,064
	0,975	2,448	2,408	2,374	2,344	2,232	2,174	2,112	2,048	1,980	1,907	1,829
	0,950	2,118	2,088	2,063	2,041	1,959	1,915	1,869	1,820	1,769	1,714	1,654
	0,900	1,790	1,770	1,754	1,740	1,685	1,656	1,625	1,592	1,558	1,520	1,478
30	0,990	2,843	2,788	2,741	2,700	2,549	2,469	2,386	2,299	2,208	2,111	2,006
	0,975	2,412	2,372	2,337	2,307	2,195	2,136	2,074	2,009	1,940	1,866	1,787
	0,950	2,092	2,062	2,037	2,015	1,932	1,887	1,841	1,792	1,740	1,684	1,622
	0,900	1,773	1,753	1,737	1,722	1,667	1,638	1,606	1,573	1,538	1,499	1,456
40	0,990	2,665	2,610	2,563	2,522	2,369	2,288	2,203	2,114	2,019	1,917	1,805
	0,975	2,288	2,247	2,212	2,182	2,068	2,007	1,943	1,875	1,803	1,724	1,637
	0,950	2,003	1,973	1,947	1,924	1,839	1,793	1,744	1,693	1,637	1,577	1,509
	0,900	1,715	1,695	1,677	1,662	1,605	1,574	1,541	1,506	1,467	1,425	1,377
60	0,990	2,496	2,441	2,393	2,352	2,198	2,115	2,028	1,936	1,836	1,726	1,601
	0,975	2,169	2,128	2,092	2,061	1,944	1,882	1,815	1,744	1,667	1,581	1,482
	0,950	1,917	1,886	1,860	1,836	1,748	1,700	1,649	1,594	1,534	1,467	1,389
	0,900	1,657	1,637	1,619	1,603	1,543	1,511	1,476	1,437	1,395	1,348	1,291
80	0,990	2,416	2,361	2,313	2,272	2,116	2,033	1,944	1,849	1,746	1,630	1,491
	0,975	2,112	2,070	2,034	2,003	1,885	1,821	1,753	1,679	1,598	1,507	1,396
	0,950	1,876	1,844	1,817	1,793	1,703	1,654	1,602	1,545	1,482	1,410	1,322
	0,900	1,629	1,608	1,590	1,574	1,513	1,479	1,443	1,403	1,358	1,306	1,242
120	0,990	2,336	2,281	2,233	2,192	2,035	1,950	1,860	1,763	1,656	1,533	1,381
	0,975	2,055	2,013	1,976	1,945	1,825	1,760	1,690	1,614	1,530	1,433	1,310
	0,950	1,834	1,802	1,774	1,750	1,659	1,608	1,554	1,495	1,429	1,352	1,254
	0,900	1,601	1,580	1,561	1,545	1,482	1,447	1,409	1,368	1,320	1,265	1,193
∞	0,990	2,185	2,129	2,080	2,039	1,878	1,791	1,696	1,592	1,473	1,325	1,000
	0,975	1,945	1,902	1,865	1,833	1,708	1,640	1,566	1,484	1,388	1,268	1,000
	0,950	1,752	1,719	1,691	1,666	1,571	1,517	1,459	1,394	1,318	1,221	1,000
	0,900	1,546	1,523	1,504	1,487	1,421	1,383	1,342	1,295	1,240	1,169	1,000

Märkus: F-jaotuse α-täiendkvantiil määratakse vórdusega $\bar{f}_{\alpha;m,n} = f_{1-\alpha;m,n}$. Näiteks $f_{0,95;\,12,22} = 2,226$ ja $\bar{f}_{0,05;\,12,22} = f_{0,95;\,12;22} = 2,226$. Kui $\alpha \leqslant 0,1$ leitakse F-jaotuse α-kvantiil vordusest $f_{\alpha;m,n} = 1/f_{1-\alpha;n,m}$.

Tabel pärineb käsiraamatust [2], lk. 895 - 900.

Tabel 5: Fisheri φ-teisendus

[illegible]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,000	0,020	0,028	0,035	0,040	0,045	0,049	0,053	0,057	0,060
0,1	0,063	0,066	0,069	0,072	0,075	0,077	0,080	0,082	0,085	0,087
0,2	0,089	0,092	0,094	0,096	0,098	0,100	0,102	0,104	0,106	0,108
0,3	0,110	0,111	0,113	0,115	0,117	0,118	0,120	0,122	0,123	0,125
0,4	0,127	0,128	0,130	0,131	0,133	0,134	0,136	0,137	0,139	0,140
0,5	0,142	0,143	0,144	0,146	0,147	1,148	0,150	0,151	0,153	0,154
0,6	0,155	0,156	0,158	0,159	0,160	0,161	0,163	0,164	0,164	0,166
0,7	0,168	0,169	0,170	0,171	0,172	0,173	0,175	0,176	0,177	0,178
0,8	0,179	1,180	0,182	0,183	0,184	0,185	0,186	0,187	0,188	0,189
0,9	0,190	0,191	0,192	0,193	0,194	0,195	0,196	0,197	0,198	0,199
1	0,200	0,210	0,220	0,229	0,237	0,246	0,254	0,262	0,269	0,277
2	0,284	0,291	0,298	0,304	0,311	0,318	0,324	0,330	0,336	0,342
3	0,348	0,354	0,360	0,363	0,371	0,376	0,382	0,387	0,392	0,398
4	0,403	0,408	0,413	0,418	0,422	0,426	0,432	0,437	0,442	0,448
5	0,451	0,456	0,460	0,465	0,469	0,473	0,478	0,482	0,486	0,491
6	0,495	0,499	0,503	0,507	0,512	0,515	0,520	0,524	0,528	0,532
7	0,536	0,539	0,543	0,546	0,551	0,555	0,559	0,562	0,566	0,570
8	0,574	0,577	0,581	0,584	0,588	0,592	0,595	0,599	0,602	0,606
9	0,609	0,613	0,616	0,620	0,623	0,627	0,630	0,633	0,637	0,640
10	0,644	0,647	0,650	0,653	0,657	0,660	0,663	0,666	0,670	0,673
11	0,676	0,679	0,682	0,686	0,689	0,692	0,695	0,698	0,701	0,704
12	0,707	0,711	0,714	0,717	0,720	0,723	0,726	0,729	0,732	0,735
13	0,738	0,741	0,744	0,747	0,750	0,752	0,755	0,758	0,761	0,764
14	0,767	0,770	0,773	0,776	0,778	0,781	0,784	0,787	0,790	0,793
15	0,796	0,798	0,801	0,804	0,807	0,809	0,812	0,815	0,818	0,820
16	0,823	0,826	0,828	0,831	0,834	0,837	0,839	0,842	0,845	0,847
17	0,850	0,853	0,855	0,858	0,861	0,863	0,866	0,868	0,871	0,874
18	0,876	0,879	0,881	0,884	0,887	0,889	0,892	0,894	0,897	0,900
19	0,902	0,905	0,907	0,910	0,912	0,915	0,917	0,920	0,922	0,925
20	0,927	0,930	0,932	0,935	0,937	0,940	0,941	0,945	0,947	0,950
21	0,952	0,955	0,957	0,959	0,962	0,964	0,967	0,969	0,972	0,974
22	0,976	0,979	0,981	0,984	0,986	0,988	0,991	0,993	0,996	0,998
23	1,000	1,003	1,005	1,007	1,010	1,012	1,015	1,017	1,019	1,022
24	1,024	1,026	1,029	1,031	1,033	1,036	1,038	1,040	1,043	1,045
25	1,047	1,050	1,052	1,054	1,056	1,059	1,061	1,063	1,066	1,068
26	1,070	1,072	1,075	1,077	1,079	1,082	1,084	1,086	1,088	1,091
27	1,093	1,085	1,097	1,100	1,102	1,104	1,106	1,109	1,111	1,113
28	1,116	1,117	1,120	1,122	1,124	1,126	1,129	1,131	1,133	1,135
29	1,137	1,140	1,142	1,144	1,146	1,148	1,151	1,153	1,155	1,157
30	1,159	1,161	1,164	1,166	1,168	1,170	1,172	1,174	1,177	1,179
31	1,182	1,183	1,185	1,187	1,190	1,192	1,194	1,196	1,198	1,200
32	1,203	1,206	1,207	1,209	1,211	1,213	1,215	1,217	1,220	1,222
33	1,224	1,226	1,228	1,230	1,232	1,234	1,237	1,239	1,241	1,243
34	1,245	1,247	1,249	1,251	1,254	1,256	1,258	1,260	1,262	1,264
35	1,266	1,268	1,270	1,272	1,274	1,277	1,279	1,281	1,283	1,285
36	1,287	1,289	1,291	1,293	1,295	1,297	1,299	1,302	1,304	1,306
37	1,308	1,310	1,312	1,314	1,316	1,318	1,320	1,322	1,324	1,326
38	1,328	1,330	1,333	1,335	1,337	1,339	1,341	1,343	1,345	1,347
39	1,349	1,351	1,353	1,355	1,357	1,359	1,361	1,363	1,365	1,367
40	1,369	1,371	1,374	1,376	1,378	1,380	1,382	1,384	1,386	1,388
41	1,390	1,392	1,394	1,396	1,398	1,400	1,402	1,404	1,406	1,408
42	1,410	1,412	1,414	1,416	1,418	1,420	1,422	1,424	1,426	1,429
43	1,430	1,432	1,434	1,436	1,438	1,440	1,442	1,444	1,446	1,448
44	1,451	1,453	1,455	1,457	1,459	1,461	1,463	1,465	1,467	1,469
45	1,471	1,473	1,475	1,477	1,479	1,481	1,483	1,485	1,487	1,489
46	1,491	1,493	1,495	1,497	1,499	1,501	1,503	1,505	1,507	1,509
47	1,511	1,513	1,515	1,517	1,519	1,521	1,523	1,525	1,527	1,529
48	1,531	1,533	1,535	1,537	1,539	1,541	1,543	1,545	1,547	1,549
49	1,551	1,553	1,555	1,557	1,559	1,561	1,563	1,565	1,567	1,569
50	1,571	1,573	1,575	1,577	1,579	1,581	1,583	1,585	1,587	1,589
51	1,591	1,593	1,595	1,597	1,599	1,601	1,603	1,705	1,607	1,609
52	1,611	1,613	1,615	1,617	1,619	1,621	1,623	1,726	1,627	1,629
53	1,631	1,633	1,635	1,637	1,639	1,641	1,643	1,645	1,647	1,649
54	1,651	1,653	1,655	1,657	1,659	1,661	1,663	1,665	1,667	1,669
55	1,671	1,673	1,675	1,677	1,679	1,681	1,683	1,685	1,687	1,689
56	1,691	1,693	1,795	1,697	1,699	1,701	1,703	1,705	1,707	1,709
57	1,711	1,713	1,715	1,717	1,719	1,721	1,723	1,725	1,727	1,729
58	1,731	1,734	1,736	1,738	1,740	1,742	1,744	1,746	1,748	1,750
59	1,752	1,754	1,756	1,758	1,760	1,762	1,764	1,766	1,768	1,770
60	1,772	1,774	1,776	1,778	1,780	1,782	1,784	1,786	1,789	1,791
61	1,793	1,795	1,797	1,799	1,801	1,803	1,806	1,807	1,809	1,811
62	1,813	1,815	1,817	1,819	1,821	1,823	1,826	1,828	1,830	1,832
63	1,834	1,836	1,838	1,840	1,842	1,844	1,846	1,848	1,850	1,853
64	1,855	1,857	1,859	1,861	1,863	1,865	1,867	1,869	1,871	1,873
65	1,875	1,878	1,880	1,882	1,884	1,886	1,888	1,890	1,892	1,894
66	1,897	1,899	1,901	1,903	1,905	1,907	1,909	1,911	1,913	1,916
67	1,918	1,920	1,922	1,924	1,926	1,928	1,930	1,933	1,935	1,937
68	1,939	1,941	1,943	1,946	1,948	1,950	1,952	1,954	1,956	1,958
69	1,961	1,963	1,965	1,967	1,959	1,971	1,974	1,976	1,978	1,980
70	1,982	1,984	1,987	1,989	1,991	1,993	1,995	1,998	2,000	2,002
71	2,004	2,006	2,009	2,011	2,013	2,015	2,018	2,020	2,022	2,024
72	2,026	2,029	2,031	2,033	2,035	2,038	2,040	2,042	2,044	2,047
73	2,049	2,051	2,053	2,056	2,057	2,060	2,062	2,065	2,067	2,069
74	2,071	0,074	2,076	2,078	2,081	2,083	2,085	2,087	2,090	2,092
75	2,094	2,097	2,099	2,101	2,104	2,106	2,108	2,111	2,113	2,115
76	2,118	2,120	2,122	2,125	2,127	2,129	2,132	2,134	2,136	2,139
77	2,141	2,144	2,146	2,148	2,151	2,153	2,156	2,158	2,160	2,163
78	2,165	2,168	2,170	2,172	2,175	2,177	2,180	2,182	2,185	2,187
79	2,190	2,192	2,194	2,197	2,199	2,202	2,204	2,207	2,209	2,212
80	2,214	2,217	2,219	2,222	2,224	2,227	2,229	2,231	2,234	2,237
81	2,240	2,242	2,245	2,247	2,250	2,252	2,255	2,258	2,260	2,263
82	2,265	2,268	2,271	2,273	2,276	2,278	2,281	2,284	2,286	2,289
83	2,292	2,294	2,297	2,300	2,302	2,306	2,308	2,310	2,313	2,316
84	2,319	2,321	2,324	2,327	2,330	2,332	2,335	2,338	2,341	2,343
85	2,346	2,349	2,352	2,355	2,357	2,360	2,363	2,366	2,369	2,372
86	2,375	2,377	2,380	2,383	2,386	2,389	2,392	2,395	2,398	2,402
87	2,404	2,407	2,410	2,413	2,416	2,419	2,422	2,425	2,428	2,431
88	2,434	2,437	2,440	2,443	2,447	2,550	2,453	2,456	2,459	2,462
89	2,465	2,469	2,472	2,475	2,478	2,482	2,485	2,488	2,491	2,495
90	2,498	2,501	2,505	2,508	2,512	2,515	2,518	2,522	2,525	2,529
91	2,532	2,536	2,539	2,543	2,546	2,450	2,554	2,557	2,561	2,564
92	2,568	2,572	2,575	2,579	2,583	2,587	2,591	2,594	2,598	2,602
93	2,606	2,610	2,614	2,618	2,622	2,626	2,630	2,634	2,638	2,642
94	2,647	2,651	2,666	2,660	2,664	2,668	2,673	2,677	2,681	2,686
95	2,691	2,695	2,700	2,705	2,709	2,714	2,719	2,724	2,729	2,734
96	2,739	2,744	2,749	2,754	2,760	2,765	2,771	2,776	2,782	2,788

%	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
97	2,793	2,799	2,805	2,811	2,818	2,824	2,830	2,837	2,844	2,851
98	2,858	2,865	2,872	2,880	2,888	2,896	2,904	2,913	2,922	2,931
99,0	2,941	2,942	2,943	2,944	2,945	2,946	2,948	2,949	2,950	2,951
99,1	2,952	2,953	2,954	2,955	2,956	2,957	2,958	2,959	2,960	2,961
99,2	2,963	2,964	2,965	2,966	2,967	2,968	2,959	2,971	2,972	2,973
99,3	2,974	2,975	2,976	2,978	2,979	2,980	2,981	2,983	2,984	2,985
99,4	2,987	2,988	2,989	2,990	2,992	2,993	2,995	2,996	2,997	2,999
99,5	3,000	3,002	3,003	3,004	3,006	3,007	3,009	3,010	3,012	3,013
99,6	3,015	3,017	3,018	3,020	3,022	3,023	4,025	3,027	3,028	3,030
99,7	3,032	3,034	3,036	3,038	3,040	3,041	3,044	3,046	3,048	3,050
99,8	3,052	3,004	3,057	3,059	3,062	3,064	3,067	3,069	3,072	3,075
99,9	3,078	3,082	3,085	3,089	3,093	3,097	3,101	3,107	3,113	3,122
100	3,142									

Märkus: funktsiooni $\varphi(p) = 2\arcsin\sqrt{p}$ argumendi väärtused on esitatud protsentides. Näiteks, kui $\hat{p}=0,315$, siis $\varphi(\hat{p}) = \varphi(31,5) = 1,192$.

Tabel pärineb T.Kollo koostatud käsiraamatust "Põhilisi statistikatabeleid", Tartu 1986. (lk. 20-21).

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКУЮ СТАТИСТИКУ.
Методическое пособие для студентов отделения прикладной математики.
Составитель Анне-Май П а р р и н г.
На эстонском языке.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Юликооли, 18.
Vastutav toimetaja E. Tiit.
Paljundamisele antud 16.02.1989.
Formaat 60x84/16.
Rotaatoripaber.
Masinakiri. Rotaprint.
Tingtrükipoognaid 9,3.
Arvestuspoognaid 8,95. Trükipoognaid 10,0.
Trükiarv 400.
Tell. nr. 139.
Hind 30 kop.
TRÜ trükikoda. ENSV, 202400 Tartu, Tiigi t. 78.

30 kop.