Dpl. ad A-5707 № 91. 692
Estcas lens. nördl., leere

Die

Elemente der Geometrie

von

Heinrich Westberg.

33938

Zweite verbesserte Auflage.

A. 763

Mitau,
Gedruckt bei J. F. Steffenhagen und Sohn.
1855.

Der Druck wird gestattet,

unter der Bedingung, daß nach Vollendung desselben die gesetzlich bestimmte Anzahl von Exemplaren dem Rigaschen Censur-Comite vorgestellt werde.

Riga den 16. Juni 1855.

Dr. J. G. Krohl, Censor.

Est. A
Tartu Ülikooli
Raamatukogu
25670

Vorrede zur ersten Auflage.

Das tief gefühlte Bedürfniß, ein dem mathematischen Cursus der niedern Lehranstalten dieser Provinzen genau sich anschließendes Handbuch der Geometrie zu besitzen, gab mir Veranlassung zur Herausgabe dieses Lehrbuches, in welches deßhalb nur diejenigen Sätze aufgenommen sind, die zu einer deutlichen Einsicht in den systematischen Zusammenhang und zu einer klaren Uebersicht des Ganzen führen.

Die Auswahl der Sätze ist von mir so getroffen, daß sie bei der ungleichen Befähigung der Schüler in zahlreichen Classen von jedem derselben unumgänglich gewußt werden muß, und von jedem unbedingt gefordert werden kann. Hiedurch sowohl, als auch durch Befolgung eines einfachen und natürlichen Entwickelungsganges, ohne dabei der wissenschaftlichen Strenge und Gründlichkeit etwas zu vergeben, glaube ich mit diesem Lehrbuche dem Anfänger nicht nur das Studium der Geometrie erleichtert, sondern auch dazu beigetragen zu haben, das Interesse desselben für die Wissenschaft zu erhöhen.

Da die geometrischen Aufgaben für das System selbst einen untergeordneten Werth haben und nicht einen wesentlichen Theil desselben ausmachen, so habe ich dieselben jedesmal am Ende eines Abschnitts den Lehrsätzen folgen lassen.

Um diesem Werke, welches eigentlich nur für Kreisschulen der Ostseeprovinzen bestimmt ist, auch in höhere Lehranstalten Eingang zu verschaffen, habe ich bei den Lehrsätzen von der Kreisberechnung und von den Körpern mit krummer Oberfläche doppelte Beweise geführt, einen directen und einen indirecten. Der directe Beweis ist zwar kürzer und ungleich faßlicher, als der indirecte, aber ihm mangelt die mathematische Strenge, welche bei der indirecten Beweisführung nichts zu

wünschen übrig läßt. Diese sowohl, als die Beweise für den Fall der Incommensurabilität der Größen können in den Kreisschulen übergangen, oder letztere nur durch die Annahme eines unendlich kleinen gemeinschaftlichen Maßes geführt werden.

Dieses Lehrbuch enthält in der Planimetrie in sechs Abschnitten 63 Lehrsätze und 58 Aufgaben, in der Stereometrie in zwei Abschnitten 46 Lehrsätze und 27 Aufgaben, welche Sätze auf die beiden Classen einer Kreisschule verhältnißmäßig vertheilt, meiner vieljährigen Erfahrung nach, in einem vollen Jahre, bei zwei Stunden wöchentlich, bequem absolvirt werden können.

Die mit einem * bezeichneten Lehrsätze können, als nicht sehr wesentliche Sätze, so wie auch viele Aufgaben in der Planimetrie und Stereometrie nach Belieben weggelassen werden, wodurch der Lehrer um so mehr im Stande sein wird, den Lehrcursus in einem Jahre zu vollenden.

Bei der Abfassung dieses Werkes habe ich die Lehrbücher der Elementargeometrie von Legendre, Lacroix, Kries u. m. a., wie auch ein nach dem Vortrage des Herrn Professor Dr. Senff in Dorpat bearbeitetes Heft benutzt.

Möge dieses Buch Lehrern und Schülern eine nicht unwillkommene Erscheinung sein, und letztern das Studium der Elementargeometrie möglichst erleichtern und sie zum weitern Forschen in den mathematischen Wissenschaften ermuntern; dann ist mein sehnlichster Wunsch erfüllt und meine nicht geringe Mühe bei der Bearbeitung desselben reichlich belohnt.

Mitau im August 1849.

Der Verfasser.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Bei Besorgung vorliegender zweiter Auflage ist mein Bestreben nicht nur auf eine bessere Darstellung und zweckmäßige Vermehrung des Inhalts, sondern auch auf die äußere Ausstattung des Werkes durch Druck, Papier und dadurch, daß die Figuren jetzt in den Text gebracht worden sind, — gerichtet gewesen. Mit Dank habe ich die von sachkundigen Männern in schriftlichen Recensionen und mündlichen Mittheilungen über dieses Werk gemachten Ausstellungen und mir gegebenen Winke benutzt, das Ganze aufs sorgfältigste geprüft und namentlich die Beweisführung über die incommensurablen Größen sehr vereinfacht. Die in der ersten Auflage gegebene Beweisart über die irrationalen Verhältnisse, so wie die indirecte Beweisführung bei dem Kreise und den krummflächigen Körpern sind in dieser Auflage weggelassen, weil ich sie ausschließlich für Kreisschüler ausgearbeitet habe, die im Allgemeinen noch nicht die Verstandesreife erlangt haben, diese Beweisarten gehörig aufzufassen und zu ihrem Eigenthume zu machen.

Mitau im Mai 1855.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichniß.

Erster Theil.

Planimetrie.

Erklärungen		§ 1 — § 70
Allgemeine Grundsätze		§ 71
Forderungssätze		§ 72
Allgemeine mathematische Zeichen		§ 73
Erster Abschnitt.	Von den Winkeln und Parallelen	§ 74 — § 81
Zweiter Abschnitt.	Von der Congruenz der Figuren und von der Größe ihrer Seiten und Winkel	§ 82 — § 97
	Aufgaben zu diesen beiden Abschnitten	§ 98
Dritter Abschnitt.	Von der Gleichheit der Flächen geradliniger Figuren	§ 99 — § 105
	Aufgaben zu diesem Abschnitte	§ 106
Vierter Abschnitt.	Von dem Verhältnisse gerader Linien zu einander und von der Aehnlichkeit der Figuren	§ 107 — § 116
	Aufgaben zu diesem Abschnitte	§ 117
Fünfter Abschnitt.	Von dem Verhältnisse und der Flächenberechnung geradliniger Figuren	§ 118 — § 121
	Aufgaben zu diesem Abschnitte	§ 122
Sechster Abschnitt.	Vom Kreise und zwar	
	A) Von den besonderen Eigenschaften des Kreises und von der Größe und dem Verhältnisse der geraden Linien, der Bogen und Winkel desselben	§ 123 — § 139
	B) Von dem Verhältnisse der Kreisflächen und von der Berechnung derselben	§ 140 — § 141
	Aufgaben zu diesem Abschnitte	§ 142

Zweiter Theil.

Stereometrie.

Erklärungen . . . . . § 143 — § 168

Erster Abschnitt. Von der Lage gerader Linien und der Ebenen gegen einander . . . . . § 169 — § 190

Von den dreiwinkligen Raumecken . . . . § 191 — § 193

Aufgaben zu diesem Abschnitte . . . . . § 194

Zweiter Abschnitt. Von den Körpern und ihrer Inhaltsberechnung:

a) Von den Prismen, namentlich der Parallelepipeden . . . . . § 195 — § 203

b) Von den Pyramiden . . . . . § 204 — § 207

c) Vom Cylinder . . . . . § 208 — § 209

d) Vom Kegel . . . . . § 210 — § 212

e) Von der Kugel . . . . . § 213 — § 214

Aufgaben zu diesem Abschnitte . . . . . § 215

Zusammenstellung der wichtigsten Formeln . . . . . § 216

Erklärungen.*)

§ 1. Die Geometrie oder Meßkunst ist die Lehre von den räumlichen Größen (Raumgrößen) und ihren gegenseitigen Beziehungen, d. h. die Geometrie betrachtet und berechnet nur den Raum, den eine Größe einnimmt.

§ 2. Größe heißt Alles, was getheilt werden kann.

§ 3. Es gibt zweierlei Größen: geometrische und arithmetische.

§ 4. Eine geometrische oder stetige Größe ist eine solche Größe, deren Theile in ununterbrochener Verbindung unter einander stehen. Bei diesen Größen kommt es nur auf den Raum, den sie einnehmen und auf ihre Gestalt, an.

§ 5. Eine arithmetische oder getrennte Größe ist eine solche Größe, bei der es nur auf die Menge der Einheiten ankommt, woraus die Größe besteht, ohne auf ihren Raum und ihre Gestalt zu sehen. Solche arithmetische Größen sind die Zahlen. Die Wissenschaft der Zahlen heißt Arithmetik.

§ 6. Eine Raumgröße durch eine andere Raumgröße derselben Art messen, heißt: untersuchen, wie oft die eine Raumgröße, oder ein gewisser Theil derselben, in der andern enthalten ist. Die erstere Raumgröße wird alsdann das Maß oder die Einheit der letztern genannt.

§ 7. Wenn eine Raumgröße in jeder von zwei andern Raumgrößen derselben Art bestimmte Mal ohne Rest enthalten ist, so nennt man die erste das gemeinschaftliche Maß der beiden andern, und die beiden Zahlen, welche man auf diese Weise erhält, zeigen das Verhältniß der beiden andern Raumgrößen zu einander an.

§ 8. Bei allen Messungen von Linien werden in jedem Lande gewisse Linien von ganz bestimmter und unveränderlicher Länge als allgemeines Grundmaß, d. h. als solche Linien angenommen, mit welchen alle zu messenden geraden Linien, in Bezug auf ihre Größe, zu vergleichen sind. Ein solches Grundmaß für gerade Linien ist in den meisten Ländern das Fußmaß, in Rußland die Arschin. Ein Längenfuß (′) enthält 12 Zoll (″), ein Zoll 12 Linien (‴) und eine Linie 12 Skrupeln (ᴵⱽ).

§ 9. Die geometrischen Größen zerfallen in Körper, Flächen und Linien.

§ 10. Ein Körper ist eine solche geometrische oder räumliche Größe, die drei Ausdehnungen hat, und zwar in die Länge, Breite und Höhe. Statt Höhe kann man auch Dicke oder Tiefe nehmen.

§ 11. Wo eine geometrische Größe aufhört, da ist ihre Grenze.

---

*) Eine Erklärung gibt uns von den Gegenständen einer Wissenschaft deutliche und völlig bestimmte Begriffe. Sie darf aber weder zu viel, noch zu wenig Merkmale angeben, d. h. es müssen in derselben bloß die wesentlichen Merkmale angegeben werden, durch welche man ein Ding von allen übrigen Dingen ähnlicher Art unterscheiden kann. Man unterscheidet Entstehungs- und Sacherklärungen. Erstere zeigen, wie ein Ding entstehen kann; letztere geben die wesentlichen Merkmale des zu Erklärenden an.

§ 12. Die Grenzen eines Körpers heißen Flächen. Die Fläche hat zwei Ausdehnungen, nämlich in die Länge und Breite.

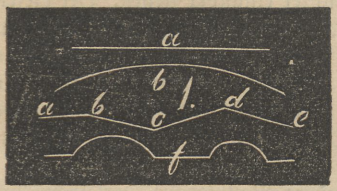
§ 13. Die Grenzen von Flächen heißen Linien. Die Linie hat nur Eine Ausdehnung, nämlich bloß in die Länge.

§ 14. Die Grenzen einer Linie heißen Punkte. Der Punkt hat keine Ausdehnung und ist demnach auch keine Größe. Er bezeichnet nur eine Stelle im Raume, ohne selbst ein Theil des Raumes zu sein.

Mathematischer und physischer Punkt. — Mathematische und physische Linien.

Die physischen Körper, Flächen, Linien und Punkte sind für uns nur Bilder der mathematischen Körper, Flächen, Linien und Punkte.

§ 15. Eine gerade Linie ist eine solche Linie, deren Theile nach einer und derselben Richtung hin liegen, wie a (Figur 1.); jede andere Linie, die weder gerade, noch aus geraden Linien zusammengesetzt ist, heißt krumm, wie b (Fig. 1.). Eine Linie, welche aus mehreren Geraden in verschiedenen Richtungen zusammengesetzt ist, nennt man eine gebrochene Linie, wie abcde (Fig. 1.), und eine Linie, die aus geraden und krummen Linien zusammengesetzt ist, heißt eine gemischte Linie, wie f (Fig. 1.).



§ 16. Jede Linie wird mit zwei Buchstaben bezeichnet, die man an die Endpunkte derselben setzt.

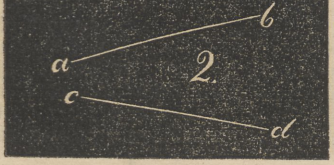
§ 17. Eine Ebene oder ebene Fläche ist jede Fläche, worauf gerade Linien in allen Richtungen gelegt, ganz in die Fläche fallen, so weit sie auch nach beiden Seiten hin verlängert werden mögen. Jede Fläche, die weder eben, noch aus Ebenen zusammengesetzt ist, heißt krumm.

§ 18. Ein ebener Winkel ist die verschiedene Richtung zweier aus einem Punkte ausgehenden Linien. Die beiden Linien, die den Winkel bilden, heißen die Schenkel, und der Punkt, von dem sie ausgehen, heißt die Spitze oder der Scheitel des Winkels.

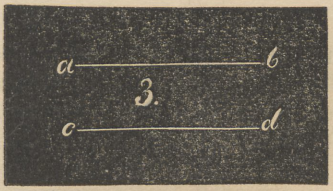
§ 19. Die Größe eines Winkels hängt nicht von der Länge der Schenkel, sondern nur von der Abweichung ihrer Richtungen ab.

§ 20. Zwei Winkel sind einander gleich, wenn, Scheitel auf Scheitel gelegt, ihre Schenkel ihrer Lage nach zusammenfallen. Das Zeichen eines Winkels ist $\angle$.

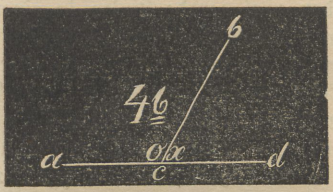
§ 21. Ein Winkel wird entweder mit drei Buchstaben bezeichnet, von denen der Buchstabe, der am Scheitel steht, bei der Benennung des Winkels stets in der Mitte stehen muß; oder mit einem Buchstaben, den man in den Winkel oder an den Scheitel desselben schreibt.



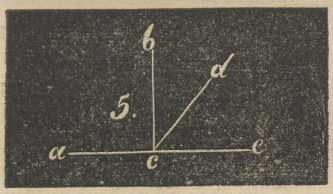
§ 22. Haben zwei gerade Linien ab und cd (Fig. 2.) in einer Ebene eine neigende Lage zu einander, so sagt man, daß dieselben auf der Seite, wo sie sich zu einander hinneigen, convergiren, und auf der andern Seite, wo sie sich von einander abneigen, divergiren.



§ 23. Parallel nennt man gerade Linien, die in Einer Ebene liegen, und auf keiner der beiden Seiten zusammentreffen, so weit man sie auch verlängern mag, wie ab und cd (Fig. 3.).



§ 24. Nebenwinkel (von einander) sind zwei solche Winkel, die einen gemeinschaftlichen Scheitelpunkt und Schenkel haben und deren beide andere Schenkel in einer geraden Linie liegen, wie ∠ o und x (Fig. 4. b).



§ 25. Sind die Nebenwinkel einander gleich, so heißen sie rechte Winkel, wie acb und bce (Fig. 5.); sind sie aber ungleich, so nennt man sie schiefe Winkel, wie acd und dce, und die Linien, welche schiefe Winkel bilden, werden schiefe Linien genannt.

§ 26. Ein rechter Winkel ist ein solcher Winkel, der seinem Nebenwinkel gleich ist. — Von den Schenkeln eines rechten Winkels heißt jeder ein Perpendikel auf dem andern, oder eine auf der andern senkrechte Linie.

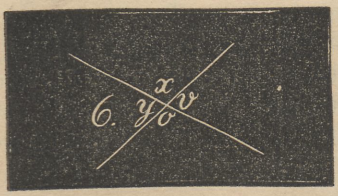
§ 27. Der rechte Winkel wird mit R bezeichnet. Derselbe ist (wie wir später in der Anmerkung zu § 74 sehen werden) eine unveränderliche Größe und wird daher als Maß für alle schiefen Winkel angenommen.

§ 28. Ein schiefer Winkel, der kleiner als ein rechter Winkel ist, heißt spitz, und einer der größer als ein rechter ist, stumpf. Ein Winkel, dessen beide Schenkel eine gerade Linie bilden, heißt ein gestreckter Winkel.

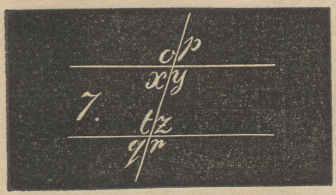
§ 29. Damit der rechte Winkel ein genaues Maß für alle schiefen Winkel abgebe, so theilt man ihn in 90 gleiche Theile, welche Grade heißen, jeden Grad in 60 Minuten, jede Minute in 60 Secunden und jede Sekunde in 60 Tertien.

§ 30. Man bezeichnet die Grade, Minuten, Secunden und Tertien durch nachfolgende Zeichen, welche man zur Rechten über die letzte Ziffer der zu bezeichnenden Zahl setzt, z. B.

R = 90° (ein rechter Winkel ist gleich 90 Graden).
1° = 60′ (ein Grad ist gleich 60 Minuten).
1′ = 60″ (eine Minute ist gleich 60 Secunden).
1″ = 60‴ (eine Secunde gleich 60 Tertien).



§ 31. Wenn zwei gerade Linien sich durchschneiden, so heißen die einander gegenüberstehenden Winkel, Vertikal- oder Scheitelwinkel, wie x und o; y und v (Fig. 6.).



§ 32. Werden zwei gerade Linien in einer Ebene von einer dritten durchschnitten, so nennt man die außerhalb der geschnittenen Linien liegenden Winkel äußere, und die innerhalb der geschnittenen Linien liegenden Winkel, innere Winkel. So sind (Fig. 7.) die 4 Winkel o, p, q, r die äußern, und x, y, t, z die innern Winkel.

§ 33. Werden zwei gerade Linien in einer Ebene von einer dritten durchschnitten, so heißen

1) je zwei innere oder äußere, auf verschiedenen Seiten der schneidenden Linie liegende Winkel, ohne Nebenwinkel zu sein, Wechselwinkel. So sind z. B. x und z, y und t innere; dagegen p und q, o und r äußere Wechselwinkel; (Fig. 7.)
2) ein äußerer und ein innerer auf derselben Seite der schneidenden Linie liegender Winkel, ohne Nebenwinkel zu sein, correspondirende Winkel, als o und t; p und z; q und x; r und y (Fig. 7.), und
3) zwei innere auf derselben Seite der schneidenden Linie liegende Winkel heißen innere Gegenwinkel; z. B. x und t; y und z.

§ 34. Eine Figur ist eine an allen Seiten von Linien eingeschlossene Fläche. Eine Figur heißt geradlinig, wenn sie von geraden Linien, und krummlinig, wenn sie von krummen Linien eingeschlossen ist. Die Linien, welche eine geradlinige Figur begrenzen, nennt man ihre Seiten, und die Punkte, wo die Seiten zusammenstoßen, ihre Ecken.

§ 35. Eine von geraden Linien begrenzte Figur heißt Polygon oder Vieleck. Das Polygon wird nach der Anzahl seiner Seiten oder Winkel benannt. Ein Polygon von drei Seiten ist das einfachste von allen und heißt Dreieck, das vierseitige heißt Viereck, das fünfseitige — Fünfeck, das sechsseitige — Sechseck, u. s. w.

§ 36. Ein Dreieck wird mit drei Buchstaben bezeichnet, die an die Winkelspitzen desselben gesetzt werden. Das Zeichen des Dreiecks ist △.

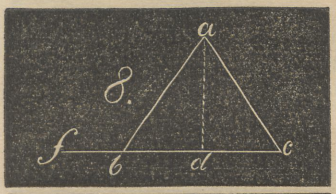
§ 37. An einem Dreiecke bemerkt man sechs Stücke, nämlich drei Seiten und drei Winkel. Die Seiten und Winkel eines Dreiecks können unter sich gleich, oder ungleich sein; daher unterscheidet man sechs verschiedene Dreiecke und zwar

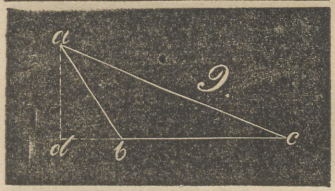
1) Gleichseitige, in welchen die drei Seiten einander gleich sind;
2) Gleichschenklige, in welchen zwei Seiten einander gleich sind;
3) Ungleichseitige, in welchen die drei Seiten ungleich sind;
4) Rechtwinklige, in welchen ein rechter und zwei spitze Winkel sind;

5) Stumpfwinklige, in welchen ein stumpfer und zwei spitze Winkel sind; und

6) Spitzwinklige, in welchen die drei Winkel spitz sind.

§ 38. In einem rechtwinkligen Dreiecke heißen die beiden Seiten, die den rechten Winkel einschließen, Catheten; die Seite aber, die dem rechten Winkel gegenüber steht, Hypotenuse.





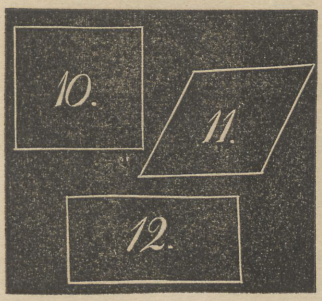
§ 39. Die Höhe eines Dreiecks ist das Perpendikel aus einer Scheitelspitze des Dreiecks auf die gegenüberstehende Seite, welche sodann Grundlinie oder Basis heißt. So ist ad die Höhe, und bc die Grundlinie des Dreiecks abc (Fig. 8.). Liegt in einem Dreiecke ein stumpfer Winkel an der Grundlinie, so fällt die Höhenlinie außerhalb des Dreiecks auf die verlängerte Grundlinie, wie ad in (Fig. 9.).

Anmerk. Die Grundlinie eines Dreiecks ist diejenige seiner Seiten, auf welcher die Figur gleichsam ruht; die Wahl derselben ist gleichgiltig.

§ 40. Verlängert man eine beliebige Seite eines Dreiecks, so heißt der dadurch entstehende Winkel, der Außenwinkel des Dreiecks, wie abf (Fig. 8.). Diejenigen innern Winkel des Dreiecks, die nicht mit dem Außenwinkel Nebenwinkel bilden, heißen innere, dem Außenwinkel gegenüberstehende Winkel, wie ∠a und c (Fig. 8.).

§ 41. Ein Parallelogramm ist ein vierseitiges Polygon, in welchem je zwei einander gegenüberstehende Seiten parallel sind. Das Zeichen für ein Parallelogramm ist: ▭.

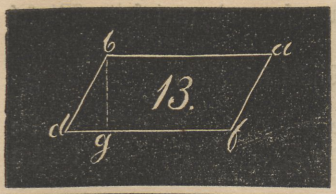
§ 42. Es gibt sechs verschiedene vierseitige Polygone, und zwar: das Quadrat, der Rhombus oder die Raute, das Rechteck, Rhomboid, Trapez und Trapezoid.



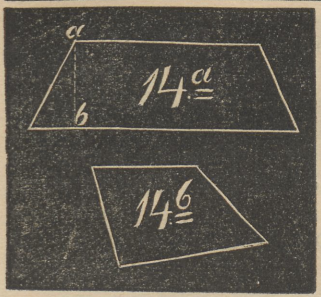
1) Ein Quadrat ist ein Parallelogramm, welches gleichseitig und rechtwinklig ist (Fig. 10.). Das Zeichen für ein Quadrat ist: □.

2) Ein Rhombus oder eine Raute ist ein Parallelogramm, welches gleichseitig, aber schiefwinklig ist (Fig. 11.).

3) Ein Rechteck oder Oblongum ist ein Parallelogramm, welches rechtwinklig, aber ungleichseitig ist (Fig. 12.).



4) Ein Rhomboid ist ein Parallelogramm, welches ungleichseitig und schiefwinklig ist (Fig. 13.).

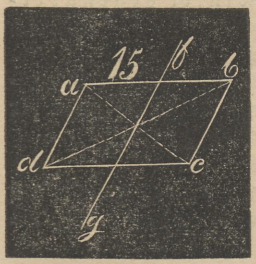


5) Ein Trapez ist ein vierseitiges Polygon, welches nur zwei parallele Seiten hat (Fig. 14^a), und

6) Ein Trapezoid ist jedes vierseitige Polygon, welches gar keine parallelen Seiten hat (Fig. 14^b).

§ 43. Die Höhe eines Parallelogramms ist das Perpendikel aus einem Punkte einer Seite auf die gegenüberstehende Seite desselben, welche letztere sodann Grundlinie oder Basis des Parallelogramms heißt. So ist (Fig. 13.) bg die Höhe, und df die Grundlinie des Parallelogramms abdf. Die Höhe eines Trapezes ist das Perpendikel von einer seiner Parallelseiten auf die andere, wie ab in Fig. 14^a.

§ 44. Der Umfang einer geradlinigen Figur heißt Perimeter derselben.



§ 45. Eine gerade Linie, welche zwei beliebige Winkelspitzen eines Polygons mit einander verbindet, ohne mit einer Seite desselben zusammenzufallen, heißt Diagonale, wie db und ac (Fig. 15.); wenn sie aber die Figur durchschneidet, Transversallinie, wie fg.

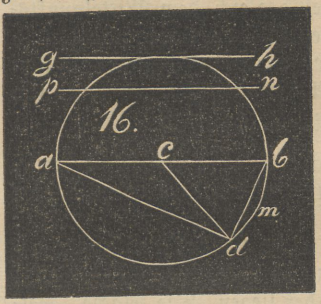
§ 46. Sind in einer geradlinigen Figur Seiten und Winkel gleich, so heißt sie regelmäßig oder regulär; sind aber die Seiten und Winkel ungleich, so heißt sie unregelmäßig oder irregulär. Von den dreiseitigen Figuren ist nur das gleichseitige Dreieck, und von den vierseitigen, das Quadrat, regelmäßig.

§ 47. Ein von den Scheiteln eines regulären Polygons gleichweit entfernter Punkt, heißt Mittelpunkt desselben. Die am Mittelpunkte eines regulären Polygons gebildeten Winkel werden Centriwinkel, dagegen die Winkel, die zwei Seiten eines Polygons bilden, Polygonwinkel genannt.

§ 48. Figuren sind gleich groß, wenn sie einen gleich großen Flächenraum einnehmen. Figuren sind ähnlich, wenn in ihnen die einzelnen

Winkel der Reihe nach gleich und die dieselben einschließenden Seiten proportionirt sind. Figuren sind deckend oder congruent, wenn in ihnen die Seiten und Winkel der Reihe nach einzeln gleich sind.

Anmerk. Haben zwei Polygone von gleicher Seitenzahl der Reihe nach gleiche Winkel, so nennt man diejenigen Seiten beider Polygone, welche gegen die gleichen Winkel gleiche Lage haben, gleichliegend oder homolog.



§ 49. (Fig. 16.) Ein Kreis entsteht, wenn eine gerade Linie in einer Ebene um ihren einen festen Endpunkt so lange stetig herumbewegt wird, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage tritt. Daher ist ein Kreis eine ebene Figur, deren Grenzpunkte von einem Punkte innerhalb der Figur gleich weit entfernt sind. Man nennt diesen Punkt Mittelpunkt oder Centrum.

§ 50. Die Umgrenzung einer Kreisfläche heißt Kreislinie oder Peripherie, und ein Theil derselben, Bogen, wie bmd (Fig. 16.).

§ 51. Eine gerade Linie vom Mittelpunkt bis zur Peripherie heißt Radius oder Halbmesser. Aus der Entstehungsart des Kreises folgt, daß alle Radien eines Kreises gleich sind. Hier sind ac, cb, cd Radien eines Kreises (Fig. 16.).

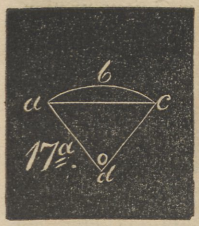
§ 52. Eine gerade Linie zwischen zwei Punkten der Peripherie, heißt Sehne oder Chorde, wie da (Fig. 16.). Geht die Sehne durch den Mittelpunkt des Kreises, so heißt sie Durchmesser oder Diameter, wie ab. Dieser besteht aus zwei Radien; daher sind auch alle Durchmesser eines Kreises einander gleich. Jede Gerade, die den Kreis schneidet, wie pn, heißt Sekante.

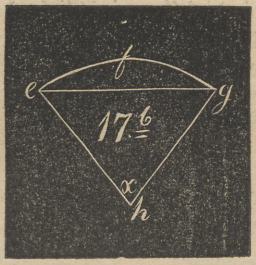
§ 53. Eine gerade Linie, die mit der Kreislinie nur einen einzigen Punkt gemein hat, und auch verlängert, dieselbe nicht scheidet, heißt Berührungslinie oder Tangente, wie gh (Fig. 16.), und den Punkt, welchen die Berührungslinie mit der Kreislinie gemein hat, nennt man Berührungspunkt. Auch krumme Linien berühren einander, wenn sie, ohne einander zu schneiden, Einen Punkt gemein haben.

§ 54. Ein Mittelpunkts- oder Centriwinkel ist ein solcher Winkel, der von zwei Radien eines Kreises gebildet wird und dessen Scheitel im Mittelpunkte des Kreises liegt, wie ∠acd (Fig. 16). Ein Peripheriewinkel ist ein solcher Winkel, der von zwei Sehnen eines Kreises gebildet wird und dessen Scheitel in der Peripherie des Kreises liegt, wie ∠abd und ∠bad (Fig. 16.).

§ 55. Derjenige Theil der Kreisfläche, der von einer Sehne und dem zugehörigen Bogen eingeschlossen ist, heißt Segment oder Abschnitt, wie bdm (Fig. 16.), und der Theil der Kreisfläche, der von zwei Radien und dem zugehörigen Bogen eingeschlossen ist, wird Sector oder Ausschnitt genannt, wie cdmb.

§ 56. Der Theil der Kreisfläche, der von einem Durchmesser und dem zugehörigen Bogen eingeschlossen ist, heißt Halbkreis.





§ 57. Kreisbogen, Kreisausschnitte und Abschnitte sind ähnlich, wenn sie gleichen Mittelpunktswinkel haben. Ist z. B. in Fig. 17. a. u. b. der Mittelpunktswinkel o gleich dem Mittelpunktswinkel x; so ist Bogen abc ähnlich Bogen efg, Ausschnitt abcd ähnlich Ausschnitt efgh, Abschnitt abc ähnlich Abschnitt efg.

§ 58. Concentrische Kreise sind solche Kreise, die aus Einem Mittelpunkte mit verschiedenen Radien beschrieben worden sind (Fig. 18.). Excentrische Kreise sind dagegen solche Kreise, die keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, und entweder ganz oder zum Theil in einander liegen. Die Fläche, welche zwei concentrische Kreise einschließen, heißt Ring. Die gerade Linie, welche die Mittelpunkte zweier gegebenen Kreise mit einander verbindet, heißt ihre Centrallinie.

§ 59. Jeder Punkt liegt innerhalb eines Kreises, wenn sein Abstand vom Mittelpunkt kleiner, als des Kreises Radius ist; ein Punkt liegt außerhalb eines Kreises, wenn sein Abstand vom Mittelpunkte größer, als des Kreises Radius ist.

§ 60. Eine geradlinige Figur ist um den Kreis, und ein Kreis ist in die Figur beschrieben, wenn alle ihre Seiten Tangenten des Kreises sind (Fig. 19.). Eine geradlinige Figur ist in den Kreis, und der Kreis ist um die Figur beschrieben, wenn alle ihre Winkelspitzen in des Kreises Umfang liegen (Fig. 20.).

§ 61. Die Darstellung einer krummen Linie durch eine gerade, nennt man Rectification der krummen Linie.

§ 62. Die einzelnen kleinen Abschnitte, in welchen die Lehren der Geometrie vorgetragen werden, pflegt man überhaupt Sätze zu nennen.

§ 63. Ein Grundsatz oder Axiom ist ein Satz, der eine Behauptung enthält, deren Richtigkeit sogleich eingesehen wird, und daher keines Beweises bedarf.

§ 64. Ein Lehrsatz oder Theorem ist ein Satz, der unter gewissen gegebenen Bedingungen (Voraussetzungen) eine Behauptung enthält, deren Richtigkeit aber bewiesen werden muß. Einen Lehrsatz umkehren heißt, die Voraussetzung zur Behauptung, und die Behauptung zur Voraussetzung machen.

§ 65. Eine Aufgabe oder Problem ist ein Satz, der unter gewissen gegebenen Bedingungen etwas zu bewerkstelligen verlangt, und dessen Richtigkeit bewiesen werden muß.

§ 66. Es besteht die Aufgabe aus dem Gegebenen und dem Gesuchten. Die Angabe des Verfahrens, aus dem Gegebenen das Gesuchte zu finden, heißt die Auflösung. Dagegen nennt man Construction die wirkliche Ausführung des in der Auflösung angegebenen Verfahrens mittelst Zirkels und Lineals.

§ 67. Ein Forderungssatz oder Postulat ist ein Satz, der etwas zu bewerkstelligen verlangt, ohne daß man zeigt, auf welche Weise es geschehen soll.

§ 68. Ein Zusatz ist ein Satz, der in einem andern Satze enthalten ist, oder daraus gefolgert werden kann.

§ 69. Der Beweis ist die Nachweisung, daß die Behauptung oder die Construction eines Satzes richtig sei.

§ 70. Der apagogische oder indirecte Beweis geht von dem Gegentheile der Behauptung aus, und führt zu einem Widerspruch mit dem Angenommenen, oder mit andern bereits erkannten Wahrheiten. Dagegen geht der directe Beweis von der Voraussetzung aus, und weiset nach, daß die Behauptung richtig sei.

§ 71. Allgemeine Grundsätze.

1) Zwei Größen, die einer dritten gleich sind, sind unter einander gleich.
2) Das Ganze ist größer, als ein Theil desselben, und alle Theile zusammen genommen sind so groß, als das Ganze.
3) Zwei gerade Linien durchschneiden sich nur in Einem Punkte, und haben sie zwei Punkte gemein, so fallen sie ganz zusammen und bilden Eine Linie.
4) Gleiches zu Gleichem addirt, von Gleichem subtrahirt, mit Gleichem multiplicirt, durch Gleiches dividirt, gibt Gleiches.
5) Durch einen Punkt ist nur Eine Parallele mit einer geraden Linie in derselben Ebene denkbar.

§ 72. Forderungssätze oder Postulate gibt es drei, und in denselben wird verlangt, daß man verstehe:

1) von jedem Punkte nach jedem andern Punkte eine gerade Linie zu ziehen;
2) jede begrenzte gerade Linie stetig zu verlängern, und
3) aus jedem Punkte, als Mittelpunkte, mit jeder beliebigen geraden Linie einen Kreis zu beschreiben.

Anmerk. Die Grund- und Forderungssätze sind die eigentliche Grundlage der Geometrie, und daher als deren erste oder höchste Wahrheiten zu betrachten.

§ 73. Allgemeine mathematische Zeichen.

1) A = B (die Größe A ist gleich groß der Größe B).
2) A ∽ B (die Größe A ist ähnlich der Größe B).
3) A > B (die Größe A ist größer, als die Größe B).
4) A < B (die Größe A ist kleiner, als die Größe B).
5) A ≡ B (die Größe A ist deckend oder congruent der Größe B).
6) A + B (zu der Größe A ist die Größe B addirt).

7) A — B (von der Größe A ist die Größe B subtrahirt).
8) A × B, od. A . B (die Größe A ist mit der Größe B multiplicirt).
9) A : B, od. $\frac{A}{B}$ (die Größe A ist durch die Größe B dividirt).
10) A : B (das Verhältniß der Größe A zu der Größe B).
11) A ∥ B (die Größe A ist parallel der Größe B).
12) A ⧺ B (die Größe A ist gleich und parallel der Größe B).
13) A ⊥ B (die Größe A steht senkrecht auf der Größe B).
14) A^2 (bezeichnet das Quadrat von der Größe A).
15) A^3 (bezeichnet den Cubus von der Größe A).
16) $\sqrt{A}$ oder $\sqrt[2]{A}$ (bezeichnet die Quadratwurzel aus der Größe A).
17) $\sqrt[3]{A}$ (bezeichnet die Cubikwurzel aus der Größe A).

Anmerk. Was das Quadrat und der Cubus einer Linie, und was die Quadrat- und Cubikwurzel aus einer geometrischen Größe bedeutet, wird an seinem Orte erklärt werden.

Die Geometrie zerfällt in zwei Haupttheile, nämlich

1) in Planimetrie, d. i. in die Lehre von geometrischen Größen, die ganz in einer und derselben Ebene liegen, und

2) in Stereometrie, d. i. in die Lehre von geometrischen Größen, die nicht auf eine einzige Ebene eingeschränkt sind.

Der Theil der ebenen Geometrie, welcher lediglich die Betrachtung der geraden Linie und der Kreislinie zum Gegenstande hat, heißt Elementar- oder niedere Geometrie; da hingegen die höhere Geometrie die Eigenschaften aller übrigen krummen Linien untersucht.

I. Planimetrie.

Erster Abschnitt.

Von den Winkeln und Parallellinien.

§ 74. Lehrsatz.

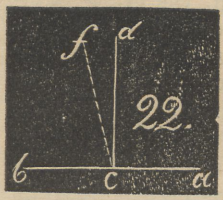
1) Alle gestreckten Winkel sind einander gleich und betragen 2 Rechte, und 2) Alle rechten Winkel sind einander gleich.

Beweis zu Satz 1. Da jede Gerade, wenn man in derselben einen beliebigen Punkt als gemeinschaftlichen Scheitelpunkt annimmt, als ein gestreckter Winkel betrachtet werden kann, alle Geraden sich aber decken, wenn sie gehörig auf einander gelegt werden; so müssen auch alle gestreckten Winkel einander gleich sein. Verlängert man den einen Schenkel eines rechten Winkels, so ist nach § 26. sein Nebenwinkel auch ein Rechter, mithin enthält der gestreckte Winkel 2 Rechte.

Beweis zu Satz 2. Da nach § 26. der rechte Winkel ein solcher Winkel ist, der seinem Nebenwinkel gleich ist, so ist der rechte Winkel die Hälfte

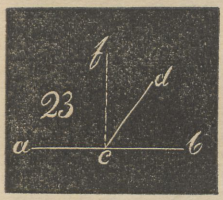
eines gestreckten Winkels, und da alle gestreckten Winkel einander gleich sind, so müssen auch deren Hälften, d. h. die rechten Winkel einander gleich sein.

Anmerk. Da alle rechten Winkel einander gleich sind, so ist der rechte Winkel eine unveränderliche Größe und daher ein schickliches Maß für alle schiefen Winkel, wie wir dieses bereits in § 27. angedeutet haben.



Zusatz. (Fig. 22.) Aus einem Punkte c der Geraden ab kann nur ein einziges Perpendikel auf dieselbe errichtet werden; denn es seien, wenn es möglich wäre, cf und cd zwei Perpendikel aus c; so wäre dann ∠fcb = R, und ∠dcb = R; folglich ∠fcb = ∠dcb; was nicht möglich ist (§ 71. 2.); demnach kann nur ein einziges Perpendikel aus Einem Punkte einer Geraden auf dieselbe errichtet werden.

§ 75. Lehrsatz.



Die Summe beider Nebenwinkel ist gleich zwei Rechten (Fig. 23.).

Beweis: Es seien ∠acd und dcb die beiden Nebenwinkel. Der gestreckte Winkel acb = ∠acd + dcb; aber derselbe gestreckte Winkel acb = 2 R (§ 74.);

folglich ∠acd + dcb = 2 R.

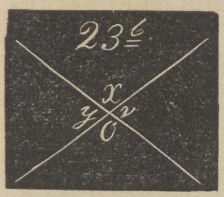
Zusatz 1. Alle Winkel, die über einer Geraden um einen gemeinschaftlichen Scheitelpunkt liegen, betragen 2 R, weil man sie als Theile von zwei Nebenwinkeln betrachten kann.

Zusatz 2. Alle Winkel, die um einen Punkt liegen, sind = 4 R.

Zusatz 3. Sind zwei Winkel gleich, so sind auch ihre Nebenwinkel gleich.

Zusatz 4. Ist der eine der beiden Nebenwinkel ein spitzer, so ist der andere ein stumpfer.

§ 76. Lehrsatz.



Scheitelwinkel sind einander gleich. (Fig. 23 b.)

Beweis: ∠o + y = 2 R (§ 75.)
∠x + y = 2 R (§ 75.)

folglich ∠o + y = ∠x + y. Davon ziehe man ab
∠y = ∠y

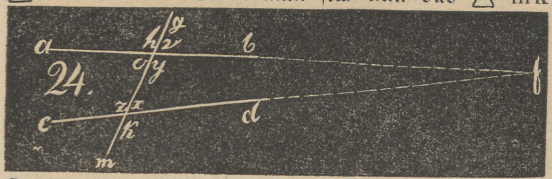
mithin ∠o = ∠x.

§ 77. Lehrsatz.

Wenn zwei Gerade in einer Ebene mit einer dritten sie schneidenden Geraden 1) gleiche Wechselwinkel, oder 2) gleiche correspondirende Winkel bilden, oder 3) die Summe der innern Gegenwinkel zwei Rechte beträgt; so sind die beiden Geraden einander parallel. (Fig. 24.)

Beweis zu Satz 1. Es sei gegeben: ∠o = x, und ∠y = z.

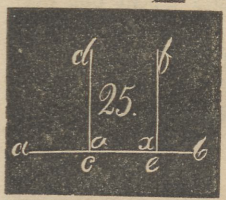
Gesetzt, die Linien ab und cd seien nicht parallel, so werden sie sich, gehörig verlängert, auf der einen Seite, etwa in f schneiden, und in diesem Falle das △ hfk bilden. Denkt man sich nun das △ hfk auf die andere Seite der schneidenden Linie hk so gelegt, daß der ∠x genau auf ∠o, und ∠y auf z fällt; so wird die Gerade kf mit ha, und hf mit ke zusammenfallen.



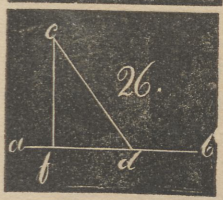
Demnach werden die Geraden kc und ha, gehörig verlängert, durch den Punkt gehen, wohin der Scheitelpunkt f des Dreiecks hfk jenseits der schneidenden Linie hk fiel. Es würden also die Geraden ab und cd in zwei Punkten sich schneiden, mithin nach § 71. Grundsatz 3. zusammenfallen, was der Voraussetzung widerspricht; folglich müssen die Geraden ab und cd einander parallel sein.

Beweis zu Satz 2. Da ∠v = x gegeben ist, und
∠v = o ist (§ 76.)
so ist ∠x = o; folglich nach Beweis 1. ab ∥ cd.

Beweis zu Satz 3.
Es ist ∠y + x = 2R gegeben;
∠o + y = 2R (§ 75.)
folglich ∠y + x = ∠o + y. Davon ziehe man ab
∠y = ∠y
so ist ∠ x = ∠o; folglich nach Beweis 1. ab ∥ cd.



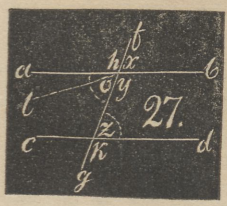
Zusatz 1. (Fig. 25.) Zwei Gerade cd, ef, die auf einer dritten ab in derselben Ebene senkrecht stehen, sind parallel; denn es sind ihre innern Gegenwinkel o + x = 2 R, folglich cd ∥ ef nach Satz 3.



Zusatz 2. (Fig. 26.) Aus Einem Punkte c außerhalb einer Geraden ab kann auf dieselbe nur ein einziges Perpendikel cf herabgelassen werden; denn wären zwei Perpendikel cf und cd aus dem Punkt c auf die Gerade ab möglich, so müßten sie nach Satz 3. einander parallel sein, was nicht möglich ist, da cf und cd sich im Punkte c schneiden. Folglich können aus dem Punkte c nicht zwei, sondern nur ein Perpendikel auf die Gerade ab gefällt werden.

§ 78. Lehrsatz.

Wenn zwei Gerade parallel sind, so bilden sie mit jeder sie schneidenden Linie 1) gleiche Wechselwinkel; 2) gleiche correspondirende Winkel, und 3) innere Winkel, deren Summe zwei Rechte beträgt. (Fig. 27.)

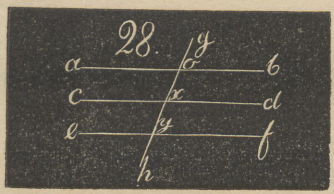


Beweis zu Satz 1. Es sei ab∥cd. Wäre ∠ahk > z, so mache man ∠lhk = ∠z; folglich ist dann nach § 77. Satz 1. lh ∥ cd, mithin kann nach § 71. 5. ab

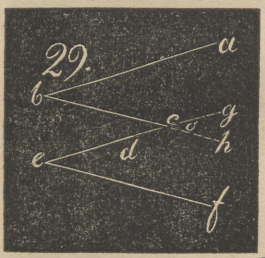
nicht ‖ cd sein, was gegen die Voraussetzung ist; also kann ∠ ahk nicht größer z sein. Eben so beweiset man auch, daß ∠ ahk nicht kleiner, als ∠ z sein kann; folglich muß ∠ ahk = ∠ z sein.

Beweis zu Satz 2. Da nun ∠ ahk = z bewiesen, und
∠ ahk = x (§ 76.) ist; so ist auch
∠ z = ∠ x.

Beweis zu Satz 3. Es ist ∠ ahk + y = 2 R. (§ 75.) Nach Beweis 1. ist
∠ ahk = z
folglich z + y = 2 R.

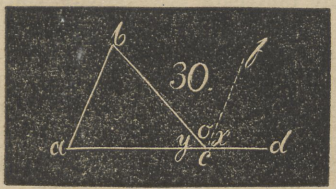


Zusatz 1. (Fig. 28.) Wenn zwei Gerade ab und ef einer dritten cd parallel sind, so sind sie unter einander parallel; denn zieht man willkührlich gh; so ist
∠ o = ∠ x (da ab ‖ cd), und
∠ y = ∠ x (da ef ‖ cd);
folglich ∠ o = ∠ y; mithin ab ‖ ef (§ 77. Satz 2.).



Zusatz 2. (Fig. 29.) Zwei in einer Ebene liegende Winkel sind gleich, wenn ihre Schenkel parallel und ihre Oeffnungen nach einerlei Seite liegen; denn verlängert man die Schenkel ed und bc bis sie sich schneiden; so ist nach § 77. Satz 2.
∠ o = ∠ b (da ab ‖ eg), und
∠ o = ∠ e (da bh ‖ ef)
folglich ∠ b = ∠ e.

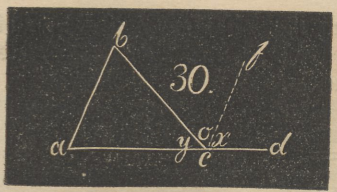
§ 79. Lehrsatz.



An einem Dreiecke ist der Außenwinkel so groß, als die Summe der beiden innern Gegenwinkel. (Fig. 30.)

Beweis: Man denke sich aus c die Gerade cf ‖ ab gezogen, so ist
∠ o = b als Wechselwinkel,
∠ x = a als correspondirende Winkel;
folglich ∠ o + x = ∠ b + a, oder ∠ bcd = ∠ b + a.

Zusatz. Der Außenwinkel an einem Dreieck ist größer, als jeder seiner innern Gegenwinkel.



§ 80. Lehrsatz.

In einem Dreieck beträgt die Summe aller Winkel zwei Rechte. (Fig. 30.)

Beweis:

Außenwinkel bcd $= \angle a + b$ (§ 79.)
Dazu addire man $\angle y = \angle y$
folglich $\angle bcd + y = \angle a + b + y$; aber
$\angle bcd + y = 2\,R$ (§ 75.)
mithin $\angle a + b + y = 2\,R$.

Zusatz 1. Wenn ein Dreieck einen rechten oder einen stumpfen Winkel enthält, so muß jeder der beiden andern Winkel des Dreiecks kleiner, als ein Rechter, also spitz sein.

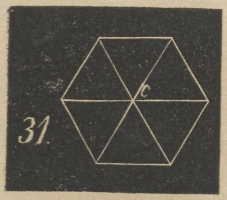
Zusatz 2. In einem rechtwinkligen Dreieck betragen die beiden spitzen Winkel zusammen einen Rechten.

Zusatz 3. In einem Dreieck kann nicht mehr, als ein rechter, und nicht mehr als ein stumpfer Winkel enthalten sein.

Zusatz 4. Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel einzeln einander gleich sind, so ist der dritte Winkel des einen Dreiecks gleich dem dritten Winkel des andern Dreiecks.

Zusatz 5. In jedem Viereck betragen die vier Winkel zusammen 4 R, weil dasselbe durch eine Diagonale in zwei Dreiecke getheilt wird und jedes △ 2 R enthält.

§ 81. Lehrsatz.



In jedem Vieleck betragen alle innern Umfangswinkel so vielmal zwei rechte Winkel, als das Vieleck Seiten hat, weniger vier Rechte. (Fig. 31.)

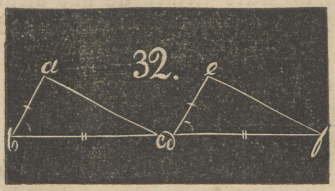
Beweis: Man wähle innerhalb des Vielecks einen beliebigen Punkt c, und ziehe von demselben gerade Linien nach den Winkelspitzen des Vielecks; so entstehen so viele Dreiecke, als das Vieleck Seiten hat. Hat das Vieleck n Seiten, so kann dasselbe auf diese Weise auch in n Dreiecke zerlegt werden. Jedes dieser Dreiecke enthält 2 R, mithin enthalten n Dreiecke $n \times 2\,R = 2\,n\,R$. Hievon zieht man alle Winkel um c, welche 4 R betragen, ab; so bleiben für alle Umfangswinkel des Vielecks $2\,n\,R - 4\,R$ übrig.

Zusatz. Ist das Vieleck regelmäßig, so beträgt ein Winkel desselben $\frac{2\,n\,R - 4\,R}{n} = 2\,R - \frac{4\,R}{n} = 180° - \frac{360°}{n}$ d. h. man ziehe von 180° den so vielsten Theil von 360° ab, als das Vieleck Seiten hat.

Zweiter Abschnitt.

Von der Congruenz der Figuren und von der Größe ihrer Seiten und Winkel.

§ 82. Lehrsatz.

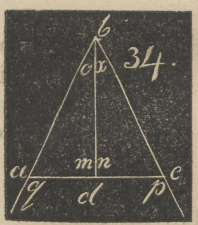


Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel einzeln gleich sind, so decken die Dreiecke einander. (Fig. 32.)

Beweis: Es sei ab = de, bc = df, und ∠b = ∠d gegeben. Man denke sich das △abc so auf das △def gelegt, daß der Punkt b auf d, und die Seite bc auf df fallen; so muß auch der Punkt c auf f fallen, weil bc = df gegeben ist. Da ∠b = ∠d gegeben ist, so muß auch die Seite ba auf de, und der Punkt a auf e fallen, weil ba = de gegeben ist; folglich muß die Seite ac auf ef fallen, weil nach § 71. 3. zwei Gerade zusammenfallen, sobald sie zwei Punkte gemein haben. Demnach deckt △abc das △def, mithin ist auch ∠a = e, und ∠c = f. (§ 20.)

Anmerk. Es ist hier wichtig zu bemerken, daß bei der Deckung der Dreiecke stets die Seiten auf einander fallen, welche gleichen Winkeln gegenüberliegen, und die Winkel einander gleich sind, die gleichen Seiten gegenüberstehen.

§ 83. Lehrsatz.



In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie gleich. (Fig. 34.)

Beweis: Es sei ab = bc gegeben. Man denke sich den Winkel b halbirt, so daß

∠o = x sei. Es ist gegeben

ab = bc, und

bd = bd

folglich △abd ≅ △bcd (§ 82.)

mithin ∠a = c. (§ 82.)

Zusatz 1. Verlängert man ba und bc, so sind die Winkel q und p unter der Grundlinie ac auch einander gleich. (§ 75. Zusatz 3.)

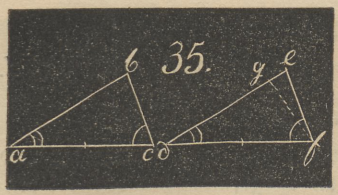
Zusatz 2. Die Linie bd, welche den ∠abc an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks halbirt, halbirt zugleich die Grundlinie ac und steht senkrecht auf derselben.

Zusatz 3. Eine Linie aus der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks zur Mitte der Grundlinie gezogen, halbirt den Winkel an der Spitze und steht senkrecht auf der Grundlinie. (§ 80. Zusatz 4.)

Zusatz 4. In einem gleichseitigen Dreieck sind die Winkel einander gleich, weil dasselbe zweimal als ein gleichschenkliges betrachtet werden kann.

§ 84. Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken eine Seite und die beiden anliegenden Winkel einzeln gleich sind, so decken die Dreiecke einander. (Fig. 35.)



Beweis: Könnte hier bewiesen werden, daß unter obigen Bedingungen ab = de sei, so würde dieser Satz auf den Lehrsatz in § 82. zurückgeführt und △ abc ≅ △ def sein.

Gesetzt nun, ab wäre kleiner de und gleich dg. Zieht man die Gerade gf, so würde nach § 82. △ abc ≅ △ dgf, und demnach

∠ dfg = ∠ c sein.

Es war gegeben ∠ dfe = ∠ c;

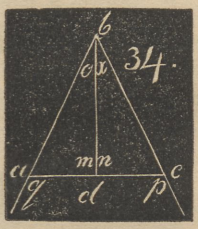
folglich ∠ dfg = ∠ dfe,

was unmöglich ist (§ 71. 2.); mithin kann ab nicht kleiner de sein. Eben so zeigt man auch, daß ab nicht größer de sein kann; folglich muß dann ab=de, und somit △ abc ≅ △ def, und ∠ b = ∠ e sein. (§ 82.)

Zusatz 1. Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel und eine Gegenseite gleich sind, so decken die Dreiecke einander, weil nach § 80. Zusatz 4. dann auch der dritte Winkel des einen Dreiecks gleich ist dem dritten Winkel des andern Dreiecks; folglich ist dieser Satz auf § 84. zurückgeführt, und die Dreiecke sind congruent.

Zusatz 2. Wenn in zwei rechtwinkligen Dreiecken außer der Hypotenuse noch ein Winkel gleich ist, so decken sie einander. Hier gilt dasselbe, was bereits im Zusatz 1. gesagt worden ist.

§ 85. Lehrsatz.



Wenn in einem Dreieck die Winkel an der Grundlinie gleich sind, so ist das Dreieck ein gleichschenkliges. (Fig. 34.)

Beweis: Es sei im Dreiecke abc der Winkel a = c gegeben. Man denke sich den ∠ b halbirt, so daß

∠ o = x sei. Da

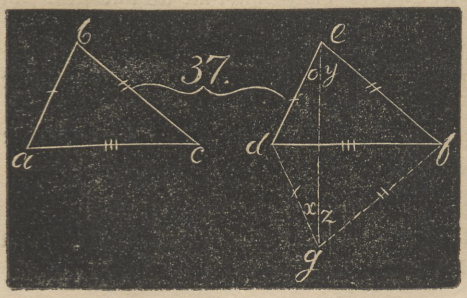
∠ a = c gegeben ist; so ist von selbst

∠ m = n. (§ 80. Zusatz 4.) Ferner ist

bd = bd

folglich △ abd ≅ △ bcd (§ 84.)

mithin ab = bc.



Zusatz. Sind in einem Dreieck die drei Winkel einander gleich, so ist das Dreieck ein gleichseitiges.

§ 86. Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken die drei Seiten einzeln gleich sind, so decken die Dreiecke einander. (Fig. 37.)

Beweis: Es sei ab = de; bc = ef, und ac = df gegeben. Man

lege das △ abc so auf das △ def, daß ac genau auf df zu liegen komme, und bringe den Punkt b in die Ebene des △ def auf die entgegengesetzte Seite von df, so daß der Punkt b in g falle. Man ziehe eg; so ist nach § 83.

$\angle o = \angle x$, weil de = dg gegeben ist, und
$\angle y = \angle z$, weil ef = fg gegeben ist;

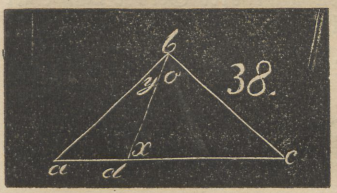
folglich $\angle o + y = \angle x + z$, oder

$\angle e = \angle g = \angle b$

folglich △ abc ≅ △ def. (§ 82.)

Anmerk. Werden die Dreiecke mit ihrer größten Seite an einander gelegt, so fällt — wie hier — die Hülfslinie eg innerhalb derselben. Sonst kann die Hülfslinie auch in die Seiten, oder außerhalb derselben fallen. Die Beweise für diese beiden Fälle lassen sich leicht aus Obigem ableiten.

§ 87. Lehrsatz.



In einem Dreieck liegt 1) der größern Seite auch der größere Winkel gegenüber, und 2) steht dem größern Winkel die größere Seite gegenüber. (Fig. 38.)

Beweis zu Satz 1. Es sei ac > bc gegeben. Zu beweisen ist, daß $\angle b > a$ sei. Man mache cd = cb und ziehe bd; so ist

$\angle o = x$. (§ 83.) Es ist
$\angle x > a$ (§ 79. Zusatz.)

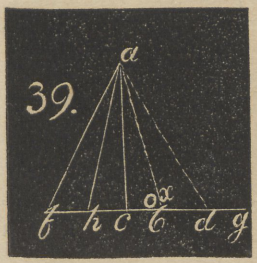
folglich $\angle o > a$, und daher $\angle o + y$, oder Winkel b noch > a.

Demnach liegt in einem Dreieck der größern Seite auch der größere Winkel gegenüber.

Beweis zu Satz 2. Es sei $\angle b > a$ gegeben. Zu beweisen ist, daß ac > bc sei. Wäre ac = bc, so ist $\angle b = a$ (§ 83.), was gegen die Voraussetzung ist; wäre ac < bc, so ist $\angle b < a$ (nach Satz 1.), was ebenfalls der Voraussetzung widerspricht; folglich muß ac > bc sein; demnach liegt in einem Dreieck dem größern Winkel auch die größere Seite gegenüber.

Zusatz. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist die größte unter den drei Seiten desselben, weil sie dem größten Winkel gegenüberliegt.

§ 88. Lehrsatz.



Von allen geraden Linien, die von Einem Punkte nach einer Geraden gezogen werden, ist die Senkrechte die kürzeste, und je weiter dieselben von der Senkrechten entfernt sind, desto größer sind sie. (Fig. 39.)

Beweis: Es sei ac ⊥ fg gegeben, und ab, ad seien zwei schiefe Linien auf fg. Es ist $\angle acb = R$, folglich $\angle acb > o$, und demnach ac < ab. (§ 87.) Da $\angle o$ spitz ist, so ist $\angle x$ stumpf (nach § 75.

Zusatz 4.); folglich ab < ad (§ 87.); demnach ist die Senkrechte ac die kürzeste Linie vom Punkte a nach der Geraden fg.

Anmerk. Die kürzeste Linie von einem Punkte zu einer andern Linie heißt die Entfernung des Punktes von dieser Linie.

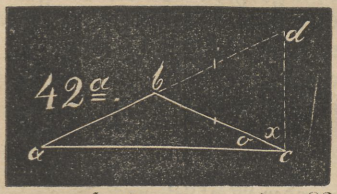
Zusatz 1. Die senkrechte Linie mißt die Entfernung eines Punktes von einer Geraden, weil sie die kürzeste unter allen von demselben Punkte auf eine Gerade gezogenen Linien ist.

Zusatz 2. Auf beiden Seiten des Perpendikels ac sind diejenigen Linien, von a nach fg gezogen, einander gleich, die gleich weit vom Perpendikel entfernt sind. Denn ist hc = bc, so ist auch ah = ab. (Fig. 39.)

Zusatz 3. Nach einer und derselben Seite des Perpendikels ac können von a nicht zwei Gerade gezogen werden, die einander gleich sind; denn sonst gäbe es an der nämlichen Seite der Senkrechten zwei gleich lange schiefe Linien; was unmöglich ist nach § 88.

Zusatz. 4. Von einem Punkte a können nicht drei Gerade nach einer Geraden fg gezogen werden, die einander gleich sind.

§ 89. Lehrsatz.



In einem Dreieck ist die Summe zweier Seiten größer, als die dritte Seite. (Fig. 42 a.)

Beweis: Man verlängere die Seite ab des Dreiecks abc, mache bd = bc und ziehe dc;

so ist ∠ x = d (§ 83.), mithin

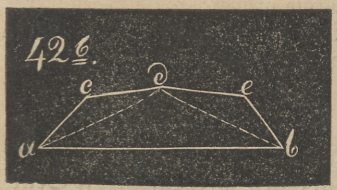
∠ x + o > d

folglich ad > ac (§ 87.). Da ad = ab + bc ist, so ist

ab + bc > ac; was zu beweisen war.

Anmerk. Hieraus geht hervor, daß, wenn aus drei Geraden ein Dreieck construirt werden soll, nothwendig die Summe von je zwei derselben größer als die dritte sein muß.

§ 90. Lehrsatz.



Die gerade Linie zwischen zwei gegebenen Punkten ist kürzer, als jede gebrochene Linie, die von einem Endpunkte zum andern führt. (Fig. 42 b.)

Es sei ab die gerade, und acdeb die gebrochene Linie zwischen den beiden Punkten a u. b. Zieht man die Hülfslinien ad und db; so ist

ad < ac + cd (§ 89.),

db < de + eb

folglich ad + db < ac + cd + de + eb. Es ist

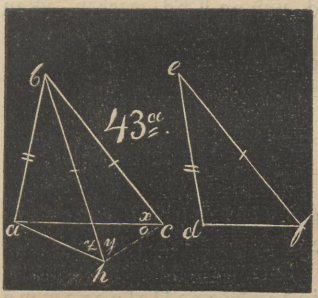
ab < ad + db

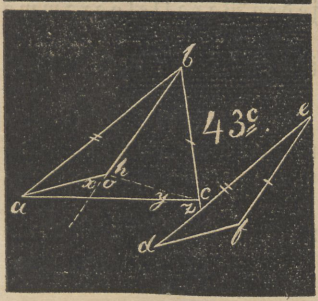
folglich um so mehr ab < acdeb. Es ist also die gerade Linie zwischen zwei Punkten die kürzeste Entfernung derselben von einander.

Zusatz 1. Nimmt man, statt der gebrochenen Linie acdeb, eine krumme Linie; so ist leicht zu beweisen, daß auch die krumme Linie größer, als die gerade Linie ist, die zwischen denselben Endpunkten mit jener liegt. Denn man kann in der krummen Linie immer beliebig viele Punkte annehmen und dieselben durch gerade Linien verbinden, wodurch man eine gebrochene Linie erhält, welche nach obigem Lehrsatze größer als die gerade ab ist. Je näher man die Punkte in der zwischen a und b befindlichen krummen Linie an einander annimmt, desto näher wird der krummen Linie die gebrochene Linie kommen, und, da man die in Rede stehenden Punkte beliebig nahe an einander annehmen kann, so wird man die gebrochene Linie offenbar der krummen Linie beliebig nahe bringen können; woraus ganz unzweideutig folgt: daß, wenn zwischen denselben Endpunkten eine gerade und eine beliebige krumme Linie gezogen sind, die letztere jederzeit größer als die erstere ist. Auf ähnliche Weise zeigt man auch, daß jede gebrochene Linie, welche eine krumme Linie nach einerlei Seite hin umschließt, länger ist, als die umschlossene krumme Linie.

Zusatz 2. Beschreibt man um und in einen Kreis Polygone, so ist die Seite eines eingeschriebenen Polygons kleiner, und die Seite des umschriebenen Polygons größer, als der zu ihnen gehörige Bogen.

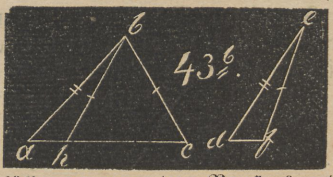
§ 91. Lehrsatz.





Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten einander gleich sind, der von denselben eingeschlossene Winkel in dem einen Dreieck größer ist, als in dem andern; so liegt dem größern Winkel die größere Seite gegenüber. (Fig. 43 a., Fig. 43 b., Fig. 43 c.)

Beweis: Es sei ab = de, bc = ef, und ∠ abc > e, gegeben. Man denke sich das △ def so auch △ abc gelegt, daß de genau auf ab fällt; so kann der Punkt f entweder außerhalb des △ abc (Fig. 43 a.), oder in die Seite (Fig. 43 b.), oder innerhalb des △ abc (Fig. 43 c.) in h fallen.



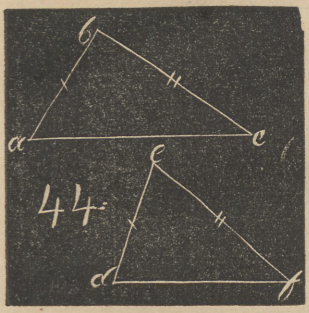
I. (Fig. 43 a.) Man ziehe hc, so ist ∠ y = o + x (da hb = bc), mithin ∠ y > o, und daher ∠ y + z noch größer o; demnach ac > ah oder df (§ 87.); was zu beweisen war.

II. (Fig. 43 b.) Fällt der Punkt f in ac, so ist offenbar ac > ah oder df.

III. (Fig. 43 c.) Man ziehe hc und verlängere bh und bc. Da bh = bc gegeben ist, so ist △ hcb gleichschenklig; folglich nach § 83. Zus. 1.

$\angle o = \angle y + z$, mithin $\angle o > y$, also $\angle x + o$ noch größer y; folglich ac > ah oder df (§ 87.); was zu beweisen war.

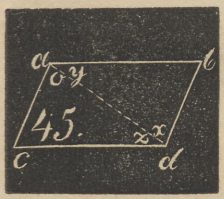
§ 92. Lehrsatz.



Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten einzeln gleich sind, die dritte Seite aber ungleich ist; so hat die größere Seite auch den größern Gegenwinkel. (Fig. 44.)

Beweis: Es sei ab = de; bc = ef, und ac > df gegeben. Wäre $\angle b$ nicht größer $\angle e$, so sei $\angle b = \angle e$; dann müßten die beiden Dreiecke sich decken (§ 82.) und ac = df sein; was der Voraussetzung widerspricht. Wäre $\angle b$ kleiner $\angle e$; so müßte ac < df sein (§ 91.); was gegen die Voraussetzung ist; folglich muß $\angle b > e$ sein.

§ 93. Lehrsatz.



Parallelen zwischen Parallelen sind einander gleich, oder: in einem Parallelogramm sind die gegenüberstehenden Seiten gleich. (Fig. 45.)

Beweis: Es sei ab ∥ cd, und ac ∥ bd gegeben. Man ziehe die Diagonale ad, so ist

$\angle o = x$, weil ac ∥ bd, und
$\angle z = y$, weil ab ∥ cd;
ad = ad

folglich $\triangle$ abd ≅ $\triangle$ acd

mithin ab = cd, und ac = bd.

Zusatz 1. In einem Parallelogramm sind auch die gegenüberliegenden Winkel gleich, und die Diagonale theilt dasselbe in zwei congruente Dreiecke.

Zusatz 2. Die Diagonalen eines jeden Parallelogramms halbiren sich gegenseitig.

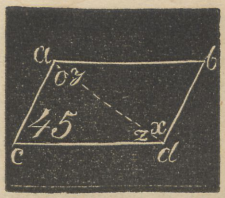
Zusatz 3. Zwei Perpendikel zwischen Parallelen sind gleich.

Zusatz 4. Durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel ist ein Parallelogramm vollständig bestimmt. Daher sind zwei Parallelogramme congruent, wenn in ihnen zwei Seiten und der von denselben eingeschlossene Winkelgleich sind.

Zusatz 5. Hat ein Parallelogramm einen rechten Winkel, so sind immer alle vier Winkel rechte Winkel.

§ 94. Lehrsatz.

Sind in einer vierseitigen Figur die gegenüberstehenden Seiten gleich, so ist die Figur ein Parallelogramm. (Fig. 45.)



Beweis: Es sei ab = cd, und ac = bd gegeben. Man ziehe die Diagonale ad; so sind die Dreiecke abd und acd deckend, weil in beiden die drei Seiten gleich sind; folglich ∠ x = o, und ∠ y = z, mithin ab ∥ cd, und ac ∥ bd (§ 77.), und Figur abdc ein Parallelogramm. (§ 41.)

§ 95. Lehrsatz.

Werden zwei gleiche und parallele Linien durch Gerade zu einer vierseitigen Figur verbunden, so ist diese ein Parallelogramm. (Fig. 45.)

Beweis: Es sei ab ∥ cd gegeben.

Da ab ∥ cd, so ist ∠ y = z (§ 78.).

Auch ist ab = cd gegeben, und

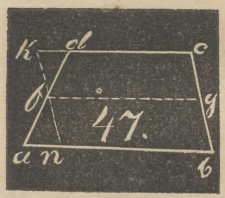
ad = ad

folglich △ abd ≅ △ acd, mithin ac = bd, und demnach Figur abdc ein Parallelogramm. (§ 94.)

Zusatz 1. Werden die Endpunkte zweier gleichen Linien, welche auf einer dritten senkrecht stehen, durch eine Gerade verbunden; so ist die dadurch entstandene Figur ein Parallelogramm und somit die Bindelinie der Grundlinie parallel.

Zusatz 2. Dreiecke und Parallelogramme von gleicher Höhe liegen zwischen einerlei Parallelen. (Zusatz 1.)

§ 96. Lehrsatz.



Wenn aus der Mitte einer der nicht parallelen Seiten eines Trapezes eine Linie parallel den beiden Parallelseiten desselben gezogen wird, so ist diese Linie (mittlere Transversallinie genannt) gleich der halben Summe der beiden Parallelseiten. (Fig. 47.)

Beweis: Es sei fg die aus der Mitte f der Seite ad mit ab parallel gezogene mittlere Transversallinie. Man ziehe aus f die kn ∥ cb und verlängere cd bis k; so ist

af = fd gemacht,

∠ afn = ∠ kfd, als Scheitelwinkel,

∠ a = d, als Wechselwinkel,

folglich △ afn ≅ △ kfd; also

an = dk.

Es ist fg = nb als Seiten eines Parallelogramms. Eben so ist

fg = kc

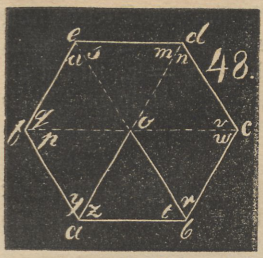
mithin 2 fg = nb + kc, und demnach

$$fg = \frac{nb + kc}{2}.$$

Es ist aber nb = ab — an, und kc = cd + dk; folglich

$$fg = \frac{ab - an + cd + dk}{2} = \frac{ab + cd}{2};$$ (da an = dk sich gegen einander aufheben)

§ 97. Lehrsatz.



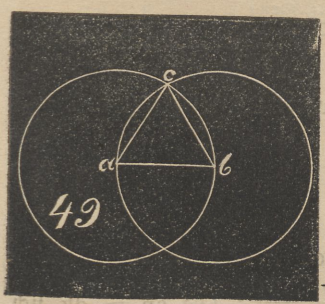
Jedes reguläre Polygon kann in so viel kongruente Dreiecke zerlegt werden, als das Polygon Seiten hat. (Fig. 48.)

Beweis: Es sei abcdef ein regelmäßiges Polygon. Man halbire zwei anliegende Winkel a und b; ziehe aus dem Punkte o, wo jene Halbirungslinien sich schneiden, die Linien co, do, eo und fo: so ist $\angle z = \angle y = \angle t = \angle r$ als die Hälften der ganzen einander gleichen Winkel a und b; folglich ao = bo (§ 85.). Es ist $\triangle$ abo $\cong$ $\triangle$ boc (§ 82); folglich co = ao = bo, mithin $\angle w = z$. Da nun $\angle z$ die Hälfte von $\angle a$, und $a = \angle c$ ist; so ist auch $\angle w$ die Hälfte vom $\angle c$, mithin $\angle v = \angle w$, und demnach $\triangle$ doc $\cong$ $\triangle$ cob (§ 82.); folglich do = bo = ao = co. Eben so beweiset man auch, daß eo und fo = do = bo = ao = co sind. Folglich sind die Dreiecke, in welche das ganze Polygon zerlegt ist, einander congruent. (§ 86.)

Zusatz 1. Durch Halbirung zweier Winkel eines regelmäßigen Polygons findet man demnach auch den Mittelpunkt desselben, da ao = bo = co = do = eo = fo ist. Demnach muß ein Kreis, der mit einer dieser gleichen Linien beschrieben wird, zugleich auch durch die Endpunkte der übrigen gehen; worauf das Verfahren beruht: um ein gegebenes regelmäßiges Polygon einen Kreis zu beschreiben.

Zusatz 2. Fällt man vom Mittelpunkte o Perpendikel auf die Seiten des Polygons, so ist leicht zu beweisen, daß diese Perpendikel einander gleich sind. Beschreibt man mit einem derselben einen Kreis, so wird dieser dann auch durch die Endpunkte der übrigen gehen; worauf das Verfahren beruht: in ein regelmäßiges Polygon einen Kreis zu beschreiben.

§ 98. Aufgaben zu den Abschnitten 1. und 2.



1) Mit einer gegebenen geraden Linie ab ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben. (Figur 49.)

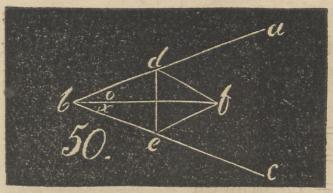
Man beschreibe mit ab aus den Punkten a und b zwei Kreise, und aus c, als ihrem Durchschnittspunkte, ziehe man ca und cb; so ist $\triangle$ abc gleichseitig.

Beweis:

Es ist ac = ab als Radien des einen Kreises,
und cb = ab als Radien des andern Kreises;

folglich ac = cb = ab, also $\triangle$ abc gleichseitig.

2) Einen gegebenen Winkel abc zu halbiren. (Fig. 50.)



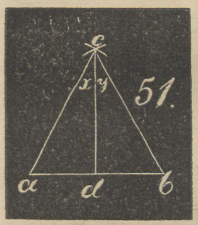
Man nehme be beliebig und mache bd = be, ziehe de und beschreibe mit derselben das gleichseitige △ def; ziehe dann bf: so halbirt bf den Winkel abc.

Beweis:

bd = be gemacht,
df = ef als Seiten eines gleichseitigen Dreiecks,
und bf = bf

folglich △ bdf ≅ △ bef; also ∠ o = x, und daher ∠ abc durch bf halbirt.

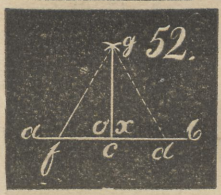
3) Eine gegebene gerade Linie ab zu halbiren. (Figur 51.)



Man beschreibe mit ab das gleichseitige △ abc, halbire ∠ c; so ist durch cd die ab in d halbirt.

Beweis: ac = bc gemacht, cd = cd, und ∠ x = y gemacht; folglich △ bcd ≅ △ acd, mithin bd = ad; also ab in d halbirt.

Anmerk. Die Linie cd, die ab halbirt, steht zugleich senkrecht auf ab.



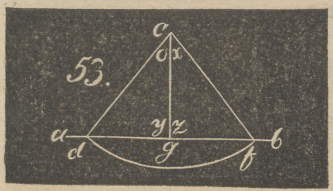
4) Aus einem Punkte c einer geraden Linie ab ein Perpendikel über derselben zu errichten. (Fig. 52.)

Man nehme cd beliebig, mache cf = cd und beschreibe mit df das gleichseitige Dreieck fgd, ziehe gc; so ist gc das verlangte Perpendikel aus c über ab.

Beweis: cd = cf gemacht,
cg = cg, und
fg = dg gemacht

folglich △ cdg ≅ △ cfg, und daher

∠ o = x; mithin cg ⊥ ab. (§ 26.)



5) Auf eine gerade Linie ab aus einem außerhalb derselben gegebenen Punkte c ein Perpendikel zu fällen. (Fig. 53.)

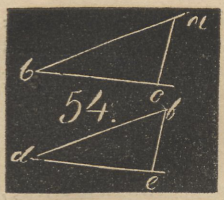
Aus c, als Mittelpunkt, beschreibe man einen Kreis, welcher die gegebene Linie ab in d und f schneidet. Hierauf halbire man ∠ dcf; so ist cg ⊥ ab.

Beweis: Es ist cd = cf als Radien eines Kreises,
cg = cg, und
∠ o = x gemacht;

folglich △ cdg ≅ △ cfg,

mithin ∠ y = z; also
cg ⊥ ab. (§ 26.)

6) Einen Winkel zu machen, der einem gegebenen Winkel b gleich sei. (Fig. 54.)



Man ziehe ac beliebig, mache de = bc, beschreibe aus d mit ba und aus e mit ca zwei Kreisbogen und ziehe aus deren Durchschnittspunkte f die df und ef; so ist ∠ d = ∠ b.

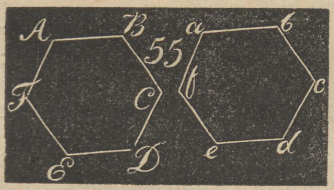
Beweis: Es ist de = bc
df = ba, und
ef = ca gemacht

folglich △ fde ≅ △ abc (§ 86.);

also ∠ d = b.

Anmerk. 1. Ein mechanisches Hülfsmittel zur Uebertragung der Winkel bietet uns der sogenannte Transporteur dar.

Anmerk. 2. Ein Dreieck zu construiren, das einem gegebenen Dreieck gleich sei, wird auf gleiche Weise gemacht und bewiesen.

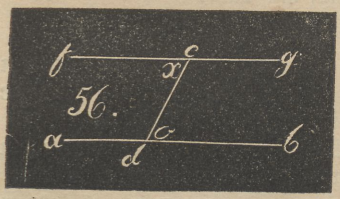


7) Ein Polygon zu verzeichnen, das einem gegebenen Polygon abcdef congruent sei. (Fig. 55.)

Man mache AB = ab, trage an B einen Winkel = b, mache BC = bc, trage an C einen Winkel = c u. s. w.; so ist Polygon ABCDEF = Polygon abcdef.

Beweis: Da auf diese Weise die Seiten und Winkel des verzeichneten Polygons ABCDEF den Seiten und Winkeln des gegebenen Polygons abcdef, und zwar in gleicher Ordnung und Lage gegen einander, gleich gemacht worden sind; so müssen beide einander gleich sein. (§ 48.)

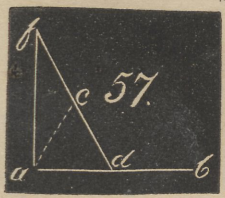
Anmerk. Man kann auch das gegebene Vieleck durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen und diese in derselben Ordnung und Lage gegen einander, in welcher sie in dem Vieleck enthalten sind, verzeichnen; dann erhält man gleichfalls ein Polygon, das dem gegebenen congruent ist.



8) Aus einem Punkte c eine gerade Linie einer andern geraden Linie ab parallel zu ziehen. (Fig. 56.)

Man ziehe aus dem gegebenen Punkte c die beliebige cd, mache ∠ x = o (als Wechselwinkel); so ist fg ∥ ab. (§ 77. 1.)

Anmerk. Um Parallellinien zu ziehen, hat man verschiedene Hülfsmittel, als: das Parallel-Lineal, das Anschlag-Lineal in Verbindung mit einem Reißbrett und das rechtwinklige Dreieck nebst einem guten Lineal.

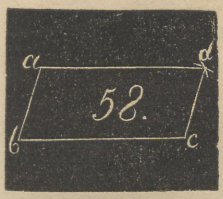


9) Am Endpunkte a einer Geraden ab eine Senkrechte zu errichten, ohne die gegebene Gerade ab zu verlängern. (Fig. 57.)

Man nehme von a aus das beliebige Stück ad und beschreibe damit das gleichseitige △ acd, verlängere dc, mache cf = dc und ziehe fa; so ist fa ⊥ ab.

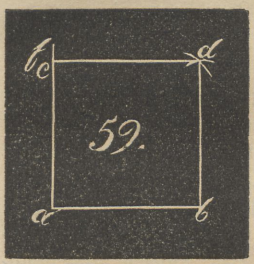
Beweis: Im gleichseitigen △ acd beträgt jeder Winkel 60°, folglich ist ∠ acf = 120° (als Nebenwinkel von ∠ acd = 60°); demnach bleiben für ∠ f + ∠ fac = 60° (§ 80.). Da △ fca gleichschenklig ist,

so ist ∠ f = ∠ fac = 30°; also ∠ fac + ∠ cad = 90°; mithin fa ⊥ ab.



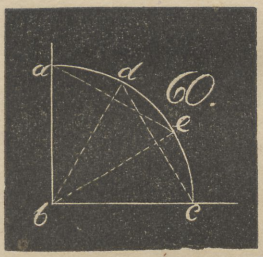
10) Aus den begrenzten Schenkeln eines Winkels abc ein Parallelogramm zu verzeichnen. (Fig. 58.)

Man beschreibe mit der einen gegebenen Seite ab, von c aus, und mit der andern gegebenen Seite bc des ∠ abc, von a aus, zwei Kreisbogen, und wo diese sich in d schneiden, ziehe man ad und cd; so ist abcd ein Parallelogramm nach § 94.



11) Ueber eine gegebene gerade Linie ab ein Quadrat zu verzeichnen. (Fig. 59.)

Man errichte nach Aufgabe 9 im Punkte a der gegebenen Linie ab, ein Perpendikel af, mache ac = ab, beschreibe aus den Endpunkten c und b mit ab zwei Kreisbogen und ziehe aus deren Durchschnittspunkt d die dc und db; so ist abdc das verlangte Quadrat über ab; denn nach § 94. ist abdc ein Parallelogramm, dessen vier Seiten gleich gemacht sind. Es war ∠ a = R gemacht, also sind auch nach § 93. Zusatz 5. ∠ b, c und d = R, und demnach Figur abdc ein Quadrat.



12. Einen rechten Winkel abc in drei gleiche Theile zu theilen. (Fig. 60.)

Man beschreibe aus dem Scheitelpunkte b des gegebenen rechten Winkels einen Bogen ac und schneide diesen mit dem Radius bc aus c in d, und aus a in e. Zieht man aus b die Geraden bd und be, so sind bd und be die Theilungslinien; denn △ abe und dbc sind gleichseitig, mithin beträgt jeder Winkel derselben 60°; demnach ist ∠ abd = ∠ abc − ∠ dbc, oder = 90° − 60° = 30°. Eben so ist ∠ ebc = ∠ abc − ∠ abe, oder = 90° − 60° = 30°. Folglich ist auch ∠ dbe = 30°. Also ist der rechte Winkel abc in drei gleiche Theile getheilt.

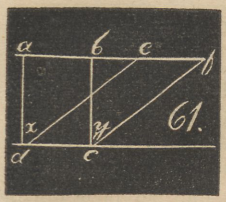
Anmerk. Einen schiefen Winkel in drei gleiche Theile zu theilen, ist den Geometern bis hiezu nicht gelungen.

Dritter Abschnitt.

Von der Gleichheit der Flächen geradliniger Figuren.

§ 99. Lehrsatz.

Parallelogramme über einerlei Grundlinie und zwischen denselben Parallelen sind einander gleich. (Fig. 61.)



Beweis: Es seien abcd und efcd zwei Parallelogramme auf einerlei Grundlinie dc.

Es ist ad = bc (§ 93.);
de = cf (§ 93.), und
$\angle$ x = $\angle$ y (§ 78. Zusatz 2.)

folglich $\triangle$ ade $\cong$ $\triangle$ bcf.

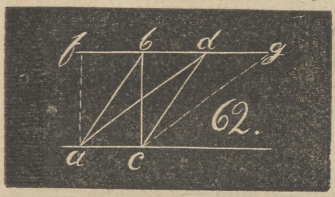
Es ist Figur adcf = Figur adcf. Davon ziehe ab
$\triangle$ ade = $\triangle$ bcf, so bleibt,

$\square$ cdef = $\square$ abcd.

Die beiden Parallelogramme können eine solche Lage gegen einander haben, daß der Punkt e auf b, oder zwischen die Punkte b und a fällt. In beiden Fällen ist der Beweis dem obigen ganz gleich.

Zusatz. Denkt man sich das Parallelogramm cdef von dem andern abcd hinweggerückt, ohne in seinen Winkeln verschoben zu werden; so behält es mit dem andern Parallelogramm abcd immer gleiche Grundlinie und gleiche Höhe; und umgekehrt: wenn zwei Parallelogramme gleiche Grundlinien haben und zwischen denselben Parallelen liegen, so kann das eine Parallelogramm, bei unverrückten Winkeln, zwischen den Parallelen so lange fortgeschoben werden, bis seine Grundlinie mit der des andern Parallelogramms zusammenfällt. Daher sind auch Parallelogramme von gleichen Grundlinien und zwischen denselben Parallelen (oder von gleicher Höhe) einander gleich.

§ 100. Lehrsatz.



Dreiecke über einerlei Grundlinie und zwischen denselben Parallelen sind einander gleich. (Fig. 62.)

Beweis: Es seien abc und adc die beiden Dreiecke auf einerlei Grundlinie ac und zwischen denselben Parallelen. Man ziehe aus a die af $\parallel$ bc und aus c die cg $\parallel$ ad; so werden die Dreiecke abc und adc zu Parallelogrammen ergänzt, die einander nach § 99. gleich sind; folglich sind auch die Hälften dieser beiden Parallelogramme, d. i. $\triangle$ abc und $\triangle$ adc einander gleich.

Zusatz. Auf gleiche Weise, wie in § 99. Zusatz, wird bewiesen, daß Dreiecke von gleichen Grundlinien und zwischen denselben Parallelen einander gleich sind.

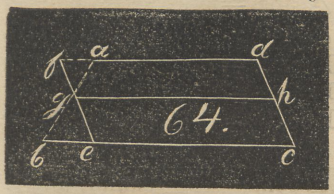
§ 101. Lehrsatz.

Ein Dreieck ist halb so groß, als ein Parallelogramm, das mit ihm auf einerlei oder auf gleicher Grundlinie und zwischen denselben Parallelen liegt.

Beweis: Es sei (Fig. 62.) $\triangle$ abc das gegebene Dreieck und acgd das gegebene Parallelogramm. Zu beweisen ist, daß $\triangle$ abc = $\frac{1}{2}$ $\square$ acgd sei.

Ergänzt man △ abc zu □ acbf; so ist
□ acbf = □ acgd (§ 99.); also auch
½ □ acbf = ½ □ acgd. Es ist aber
△ abc = ½ □ acbf (§ 93. Zusatz 1.); mithin
ist auch △ abc = ½ □ acgd.

§ 102. Lehrsatz.

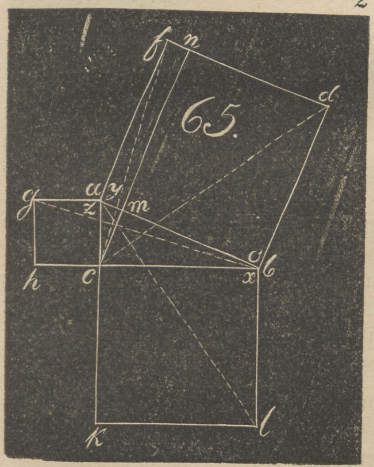


Ein Trapez ist an Flächeninhalt gleich einem Parallelogramm, dessen Grundlinie gleich der mittlern Transversallinie oder der halben Summe der beiden Parallelseiten, und dessen Höhe gleich der Höhe des Trapezes ist. (Fig. 64.)

Beweis: Man ziehe aus dem Punkt g, der Mitte von ab, die ef ∥ cd, und gh ∥ ad; so sind gech und fghd Parallelogramme, mithin fd = gh = ec. (§ 93.)

Es ist △ bge ≅ △ gfa. (§ 84.) Dazu addire
Figur agecd = Figur agecd; so ist

Trapez abcd = Parallelogramm fecd, dessen Grundlinie ec = der mittlern Transversale gh = $\frac{ad + bc}{2}$ ist (nach § 96.).



§ 103. Lehrsatz.

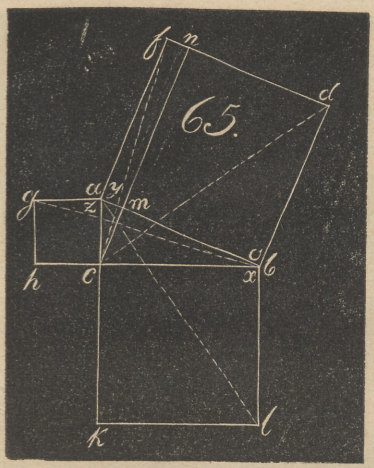
In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate der beiden Katheten. (Fig. 65.)

Beweis: Es sei abdf das Quadrat der Hypotenuse ab, bckl das Quadrat der einen, und achg das Quadrat der andern Kathete des rechtwinkligen Dreiecks acb. Man ziehe aus dem Scheitelpunkte c des rechten Winkels die Gerade cn ∥ af; ferner ziehe cd und al; so ist

cb = bl
bd = ab } als Seiten des Quadrats.
∠ abc + o = ∠ abc + x, weil ∠ o = x (als Rechte)

folglich △ bcd ≅ △ abl. (§ 82.) Es ist
△ bcd = ½ □ bmnd, (§ 101.)
△ abl = ½ □ bckl (§ 101.).

folglich ½ □ bmnd = ½ □ bckl; mithin auch
I. □ bmnd = □ bckl.



Man ziehe ferner cf und gb, so ist

ab = af } als Seiten des
ag = ac } Quadrats.
∠ cab + z = ∠ cab + y, weil
∠ z = y (als Rechte)

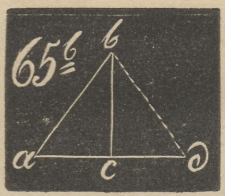
folglich △ abg ≙ △ acf. Nun ist
△ abg = ½ □ achg, und
△ acf = ½ ▭ afmn (§ 101.);

folglich ½ □ achg = ½ ▭ afnm, mithin
auch II. □ achg = ▭ afnm. Es war
oben I. □ bckl = ▭ bmnd. Addire
II. und I. so ist

□ achg + □ bckl = ▭ afnm + ▭ bmnd = □ afdb.

Zusatz. Das Quadrat der einen Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Unterschiede der Quadrate der Hypotenuse und der andern Kathete; denn es war □ achg + □ bckl = □ afdb. Davon ziehe ab
□ achg = □ achg;
so ist □ bckl = □ afdb − □ achg.

§ 104. Lehrsatz.



Wenn in einem Dreieck das Quadrat der größten Seite gleich ist der Summe der Quadrate der beiden kleinern Seiten, so ist das Dreieck rechtwinklig. (Figur 65 b.)

Beweis. Gegeben ist $ab^2 = bc^2 + ca^2$. Zu beweisen ist, daß △ abc sodann rechtwinklig sei.

Durch c errichte man auf bc das Perpendikel cd = ac und ziehe bd; so ist im rechtwinkligen △ bcd nach § 103.
$bd^2 = bc^2 + cd^2$. Gegeben war oben
$ab^2 = bc^2 + ca^2$. Und da cd = ca gemacht war,
so ist auch $cd^2 = ca^2$; folgl. $bd^2 = ab^2$; mithin auch
bd = ab. Es war
cd = ac gegeben, und
bc = bc

folglich △ bcd ≙ △ abc

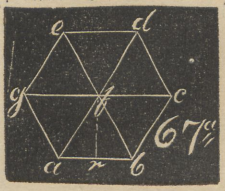
folglich ∠ acb = ∠ bcd = R; mithin △ abc rechtwinklig.

Anmerk. Werden 3 gerade Linien, die sich verhalten wie die Zahlen 3 : 4 : 5 zu einem Dreieck zusammengestellt; so ist dieses ein rechtwinkliges Dreieck; denn es ist $3^2 + 4^2 = 5^2$, oder $9 + 16 = 25$; mithin das Dreieck nach obigem Lehrsatze rechtwinklig.

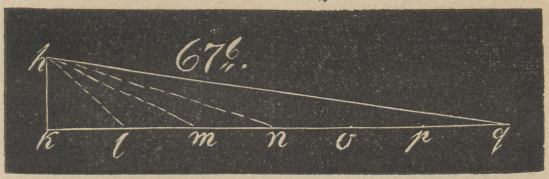
Auf dieses Verfahren gründet sich das Schnurwinkelmaß, vermittelst dessen man auf dem Felde Perpendikel errichtet.

§ 105. Lehrsatz.

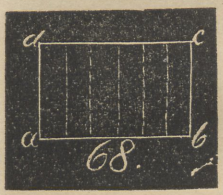
Ein regelmäßiges Polygon ist an Flächeninhalt einem Dreieck gleich, dessen Grundlinie dem Umfange des Polygons und dessen Höhe der Senkrechten aus dem Mittelpunkte des Polygons auf eine seiner Seiten gleich ist. (Fig. 67 a und b.)



Beweis: Es sei abcdeg das gegebene Polygon und f sein Mittelpunkt. Man ziehe aus f nach den Winkelspitzen des Polygons gerade Linien; so sind die dadurch entstehenden Dreiecke nach § 97. einander deckend, mithin ihre Höhen gleich. Man mache (Fig. 67. b) kq = der Summe der Polygonseiten und die Senkrechte hk = der Höhe fr eines Dreiecks des Polygons und ziehe hq; so ist △ hkq = Polygon abcdeg, weil △△ hkl, hlm, hmn u. s. w. den △△ fab, fbc, fcd, u. s. w. des Polygons gleich sind. (§ 100.)



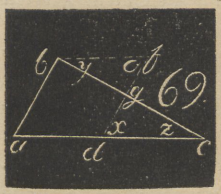
§ 106. Aufgaben.



1) Ein Parallelogramm in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen. (Fig. 68.)

Man theile die Grundlinie ab in die verlangte Anzahl gleicher Theile und ziehe durch die Theilungspunkte Parallelen mit den Seiten des Parallelogramms, so ist die verlangte Theilung geschehen; denn man erhält hier lauter Parallelogramme von gleichen Grundlinien und gleicher Höhe, die nach § 99. einander gleich sind.

Zusatz. Auch ein Dreieck wird in gleiche Theile getheilt, wenn man seine Grundlinie in gleiche Theile theilt und aus diesen Theilungspunkten nach der gegenüberliegenden Spitze gerade Linien zieht. (§ 100.)



2) Ein Parallelogramm zu verzeichnen, das einem gegebenen △ abc gleich sei. (Fig. 69.)

Man halbire die Grundlinie ac des Dreiecks abc in d, ziehe aus d die Linie df ∥ ab, und aus b die bf ∥ ac; so ist △ abc = □ abfd.

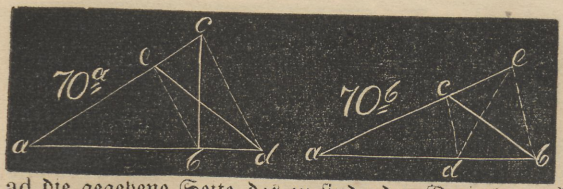
Beweis: △ bfg ≙ △ cdg, weil ∠x = o, und ∠z = y als Wechselwinkel, und Seite ad = dc = bf. (§ 93.)

Dazu addire abgd = abgd;

so ist □ abfd = △ abc.

Zusatz 1. Ein Dreieck ist einem Parallelogramm gleich, das entweder eine gleiche Höhe, aber nur eine halb so große Grundlinie, oder eine gleiche Grundlinie, aber nur eine halb so große Höhe hat, als das Dreieck.

Zusatz 2. Aus Zusatz 1. ergibt sich, wie ein Dreieck zu verfertigen ist, das einem gegebenen Parallelogramm gleich sei.



3) Ein Dreieck in ein anderes von einer gegebenen Seite zu verwandeln. (Fig. 70. a u. b)

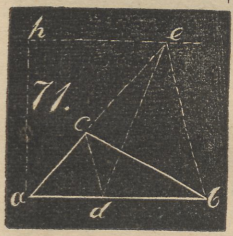
Es sei acb das zu verwandelnde Dreieck, und ad die gegebene Seite des zu findenden Dreiecks. Man ziehe (in Fig. 70 a.) dc und durch b die be ‖ dc (wobei in der Figur 70 b. die Seite ac verlängert werden muß); darauf ziehe man de, so ist aed das verlangte Dreieck.

Beweis: Es ist △ ebc = △ ebd. (§ 100.) Dazu addire
in Fig. 70. a △ abe = △ abe

so ist △ acb = △ aed.

In Fig. 70. b ist △ cde = △ cdb. (§ 100.) Dazu addire
△ acd = △ acd;

so ist △ aed = △ acb.



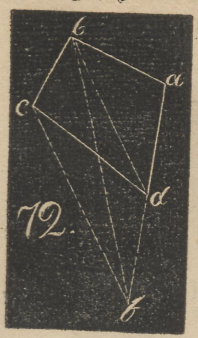
Zusatz 1. (Fig. 71.) Soll ein gegebenes Dreieck acb in ein anderes von verlangter Höhe ha verwandelt werden, so ziehe man durch den Punkt h eine Parallele he mit der Grundlinie ab des Dreiecks und verlängere hierauf eine Seite ac desselben, bis sie die Parallele in e trifft. Alsdann ziehe be, und aus c die cd ‖ eb; vereinige jetzt den Punkt e mit d durch ed; so ist

△ cde = △ cdb. (§ 100.) Dazu addire
△ acd = △ acd; so ist

△ aed = △ acb.

Zusatz 2. Um ein Dreieck zu verzeichnen, das mehreren Dreiecken von verschiedenen Höhen an Inhalt gleich sei, hat man letztere nach Zusatz 1. in Dreiecke von gleicher Höhe zu verwandeln und sie dann zu Einem Dreieck zusammenzusetzen.

Zusatz 3. Dasselbe Verfahren in Zusatz 1. und 2. gilt auch von Parallelogrammen, indem man sie durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt, diese nach Zusatz 1. in Dreiecke von verlangter Höhe verwandelt und dieselben sodann wieder zu Parallelogrammen ergänzt, welche man hierauf zu einem einzigen Parallelogramm zusammenstellt.



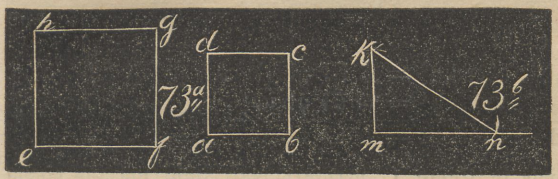
4) Eine jede beliebige geradlinige Figur in ein Dreieck zu verwandeln, das mit jener gleichen Flächeninhalt hat. (Fig. 72.)

Es sei abcd die gegebene geradlinige Figur. Man ziehe die Diagonale bd und aus c die cf ‖ bd, verlängere ad bis diese die cf in f schneidet und ziehe dann bf; so ist △ abf = abcd; denn es ist △ bdf = △ bdc. (§ 100.)

Dazu addire △ bad = △ bad

so ist △ abf = abcd.

Enthält die gegebene Figur mehr als vier Seiten, so verwandele man sie nach obigem Verfahren in eine Figur, die eine Seite weniger hat; die auf diese Weise erhaltene Figur verwandele man wieder in eine Figur, die eine Seite weniger hat, als die vorherige. Dieses Verfahren setze man so lange fort, bis die letzte Figur ein Dreieck geworden ist. Dieses Dreieck kann nach Aufgabe 2. in ein Parallelogramm verwandelt werden. Aus diesem Verfahren geht hervor, daß jede geradlinige Figur von beliebiger Seitenzahl in ein Parallelogramm von gleichem Flächeninhalte mit jener verwandelt werden kann.



5) Zwei gegebene Quadrate in ein Quadrat von gleichem Flächeninhalt zu verwandeln. (Fig. 73. a. u. b.) Die beiden gegebenen Quadrate seien abcd und efgh. — Man construire einen rechten Winkel kmn (Fig. 73. b.), mache km = ab, und mn = ef, ziehe kn; so ist kn^2 = □ abcd + □ efgh; denn es ist $kn^2 = km^2 + mn^2$. (§ 103.) Es ist aber

km^2 = □ abcd, und mn^2 = □ efgh;

folglich kn^2 = □ abcd + □ efgh.

Eben so verfährt man, wenn 3, 4, 5, u. s. w. Quadrate in Ein Quadrat von gleichem Flächeninhalt verwandelt werden sollen.

6) Ein Quadrat zu verzeichnen, daß dem Unterschiede von zwei gegebenen Quadraten gleich sei. (Fig. 73. a. u. b.)

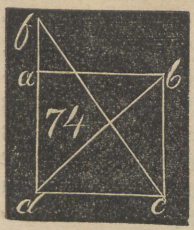
Es sei efgh das größere und abcd das kleinere Quadrat. — Man verzeichne sich einen rechten Winkel kmn (Fig. 73. b.), trage auf dessen eine Kathete die ab = km auf, schlage dann mit kn = ef von k aus einen Kreisbogen, der die andere Kathede in n schneidet; so ist □ efgh — □ abcd = mn^2; denn es ist

$nk^2 = mk^2 + mn^2$. Davon ziehe ab

$mk^2 = mk^2$

so ist $nk^2 - mk^2 = mn^2$. Es ist aber nk^2 = □ efgh, und mk^2 = □ abcd;

folglich □ efgh — □ abcd = mn^2.

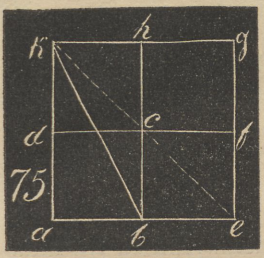


7) Ein Quadrat zu verzeichnen, das doppelt so groß, als ein gegebenes Quadrat abcd sei. (Fig. 74.)

Man ziehe im □ abcd die Diagonale bd, so ist nach § 103. $bd^2 = dc^2 + cb^2 = 2bc^2$, oder das Quadrat von bd = 2 □ abcd.

Zusatz 1. Um ein dreimal größeres Quadrat zu machen, als □ abcd, trage man die Diagonale db auf die verlängerte Kathete da auf, so daß df = db ist und ziehe fc; so ist $fc^2 = fd^2 + dc^2$; aber $fd^2 = db^2 = 2$ □ abcd; folglich fc^2 = 2 □ abcd + dc^2 = 3 □ abcd.

Zusatz 2. Um ein Quadrat zu verzeichnen, das 4, 9, 16, 25mal größer sei, als das gegebene Quadrat abcd, nehme man eine Seite desselben, 2, 3, 4, 5mal länger als sie an sich ist, und beschreibe mit ihnen Quadrate; so ist das Verlangte geschehen, denn 2^2 ist $= 4$; $3^2 = 9$; $4^2 = 16$, und $5^2 = 25$.



Zusatz 3. (Fig. 75.) Soll ein fünfmal so großes Quadrat gemacht werden, als □ abcd, so verdoppele man die eine Seite dieses Quadrats, so daß ak $= 2$ ad ist, und ziehe kb; so ist $kb^2 = 5$ □ abcd; denn es ist

$kb^2 = ka^2 + ab^2$; aber $ka^2 = 4$ □ abcd (nach Zusatz 2.)
und $ab^2 =$ □ abcd

folglich $kb^2 = 4$ □ abcd + □ abcd $= 5$ □ abcd.

Auf gleiche Weise, wie in Zusatz 1. verfährt man auch, um aus einem fünfmal so großen Quadrate als das gegebene, ein sechsmal so großes, und aus diesem wieder ein siebenmal so großes Quadrat zu construiren, als das gegebene Quadrat.

Anmerk. Ein allgemeineres Verfahren über die beliebige Vervielfältigung eines gegebenen Quadrats ist in § 142. Aufgabe 2. Anmerkung angegeben.

Vierter Abschnitt.

Von dem Verhältnisse gerader Linien zu einander und von der Aehnlichkeit der Figuren.

§ 107. a.

Es wird in diesem Abschnitte die Lehre von den Proportionen vorausgesetzt, und alle Sätze, die in derselben von abstracten Zahlen erwiesen worden, werden hier auf Linien und Figuren angewandt, insofern diese sich in Zahlen ausdrücken lassen, oder als in Zahlen ausgedrückt gedacht werden können. Dieß geschieht aber dadurch, daß man sich z. B. gegebene Linien durch eine von ihnen oder durch eine andere, als Maß oder Einheit angenommene Größe gemessen denkt. Die Linien stellen dann gewisse Zahlen von Linieneinheiten vor, und da die Linieneinheit für alle verglichenen Linien dieselbe war, so ist das Verhältniß zwischen den Linien ein Verhältniß von Zahlen. Dieses Verhältniß zwischen zwei Linien heißt *rational*, wenn beide ein gemeinschaftliches Maß haben oder commensurabel sind, und kann in diesem Falle immer durch ganze Zahlen ausgedrückt werden. Linien nennt man *incommensurabel*, wenn ein solches gemeinsame Maß, ungeachtet einer noch so weit fortgesetzten Theilung der Linien, nicht gefunden werden kann. Das Verhältniß solcher Linien heißt dann *irrational* und kann weder durch eine ganze, noch gebrochene

Zahl vollständig, sondern nur *näherungsweise* angegeben werden. So stehen z. B. die Seite und die Diagonallinie eines Quadrats zu einander in dem irrationalen Verhältnisse von $1 : \sqrt{2}$. Es lassen sich jedoch immer ganze Zahlen finden, deren Verhältniß dem irrationalen Verhältnisse der beiden genannten Linien mehr und mehr entspricht, als: $1 : 1$; $2 : 3$; $5 : 7$; $12 : 17$; $29 : 41$; $70 : 99$; $169 : 239$; $408 : 577$ u. s. w. Es können demnach gleichartige Größen, die in Bezug auf ein *gewisses Maß* incommensurabel sind, commensurabel sein, wenn sie mit einem kleinern Maße gemessen werden; auf jeden Fall wird das Verhältniß der incommensurablen Größen desto mehr dem Verhältnisse der commensurablen Größen genähert, *mit einem je kleinern Theile des ursprünglichen Maßes man sie mißt.*

Um das Verhältniß zweier geraden Linien cd und ef zu einander zu finden, trage man die kleinere Linie auf die größere, so oft es angeht, den Rest der größern wieder auf die kleinere Linie; das übrig gebliebene Stück der kleinern wieder auf den frühern Rest der größern Linie und so fort, bis ein Rest in den frühern Rest vollständig aufgeht. Die Linie nun, die in den letzten Rest vollständig aufgeht, heißt das *gemeinschaftliche* Maß oder die Einheit der beiden gegebenen Linien cd und ef. Mißt man nun die Linien cd und ef durch dieses gemeinschaftliche Maß, so erhält man zwei Zahlen, wodurch das Verhältniß der Linie cd zu der Linie ef ausgedrückt werden kann.

Es sei z. B. das Maß ab in cd 3 mal, in ef 7 mal enthalten; so ist $cd = 3\,ab$, und $ef = 7\,ab$, und da sich verhält

$cd : ef = cd : ef$, so ist auch

$cd : ef = 3\,ab : 7\,ab$, oder

$cd : ef = 3 : 7$.

Wenn das Maß von cd nicht zugleich auch das Maß von ef, und $ef = 7\,ab + x$ wäre; so würde das Verhältniß dieser beiden Linien sein

$cd : ef = 3 : 7 +$ einer Größe, welche kleiner, als das gemeinschaftliche Maß ab ist.

Da wir aber oben gesehen haben, daß jedes irrationale Zahlenverhältniß einem rationalen so nahe gebracht werden kann, als man nur immer will; so kann das irrationale Verhältniß ohne einen bedeutenden Fehler für ein rationales angenommen und diesem gleich gesetzt werden.

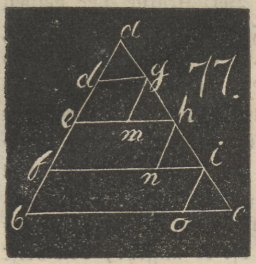
Das Produkt der Linien a und b, welches man auch *das Rechteck aus diesen Linien* zu nennen pflegt, — ist nichts anderes, als eine gewisse Zahl von Linien-Einheiten, die in a enthalten sind, multiplicirt mit einer andern in b enthaltenen Zahl von gleichen Linien-Einheiten. Die Einheit zu dem Produkte zweier Linien a und b ist das Quadrat der Linien-Einheit.

Anmerk. Ueberhaupt müssen die Verhältnisse von Linien, Flächen und Körpern — jede in ihrer Art — stets als Zahlengrößen betrachtet werden.

§ 107 b. Hülfslehrsatz.

Theilt man den einen Schenkel eines Winkels in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, und zieht aus diesen Theilungspunkten gerade

Linien parallel mit einander; so theilen diese Parallelen den andern Schenkel des Winkels auch in eben so viel, unter sich gleiche Theile. (Fig. 77.)



Beweis: Es sei der eine Schenkel ab des gegebenen Winkels bac in vier gleiche Theile getheilt, und aus diesen Theilungspunkten dg, eh, fi ‖ bc gezogen. — Man ziehe ferner gm ‖ de, hn ‖ ef und io ‖ fb; so ist

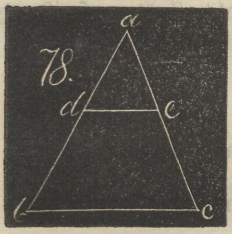
ad = de gemacht
gm = de (§ 93.);

folglich ad = gm,
∠ d = ∠ e = ∠ m (§ 78. 2.)
∠ dag = ∠ mgh (§ 78. 2.)

folglich △ adg ≅ △ gmh, mithin die Linie ag = gh.

Eben so beweiset man auch, daß △ gmh ≅ △ hni, und gh = hi,
und daß △ hni ≅ △ ioc, und hi = ic ist;
folglich ist ag = gh = hi = ic, mithin ac in vier unter sich gleiche Theile getheilt.

§ 108. Lehrsatz.



Werden zwei Seiten eines Dreiecks von einer Geraden mit der Grundlinie parallel geschnitten, so stehen sowohl die obern, als auch die untern Abschnitte in demselben Verhältnisse, wie die ganzen Seiten. (Fig. 78.)

Beweis: Es sei de ‖ bc. — Man nehme zuerst an, daß die Linien ad und ab commensurabel seien, d. h. daß sie sich durch ein gemeinschaftliches Maß messen lassen, und dieses Maß in ad 7mal, und in ab 16mal enthalten sei. Zieht man aus den Theilungspunkten Linien parallel der de oder bc; so wird nach § 107 b. ae auch in 7, und ac in 16 unter sich gleiche Theile getheilt;

folglich verhält sich ad : ab = 7 : 16, und
ae : ac = 7 : 16;

folglich ad : ab = ae : ac oder ad : ae = ab : ac.
Eben so db : ab = 9 : 16, und
ec : ac = 9 : 16

folglich db : ab = ec : ac, oder db : ec = ab : ac.
Und ad : db = 7 : 9
ae : ec = 7 : 9

folglich ad : db = ae : ec, oder ad : ae = db : ec.

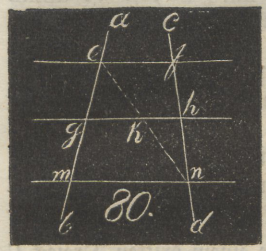
Wären die beiden Linien ad und ab incommensurabel, d. h. wäre das Maß von ad nicht auch das Maß von ab; so kann — wie es in § 107 a gezeigt worden — das irrationale Verhältniß dem rationalen Verhältnisse so nahe, als man will, gebracht werden; mithin kann das irrationale Verhältniß

von ad und ab ohne einen bedeutenden Fehler für ein rationales angenommen werden, und es wird sich auch in diesem Falle verhalten

ad : ab = 7 : 16, und eben so

ae : ac = 7 : 16

folglich ad : ab = ae : ac, oder ad : ae = ab : ac.



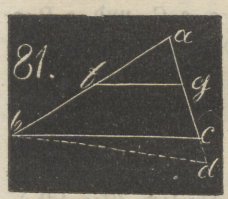
Zusatz. (Fig. 80.) Zwei gerade Linien ab und cd werden von drei Parallelen ef, gh, mn in proportionirte Stücke geschnitten; denn zieht man en, so verhält sich

eg : gm = ek : kn, und

fh : hn = ek : kn

folglich eg : gm = fh : hn.

§ 109. Lehrsatz.



Wenn eine Gerade zwei Seiten eines Dreiecks proportionirt schneidet, so ist sie der dritten Seite desselben parallel. (Fig. 81.)

Beweis:

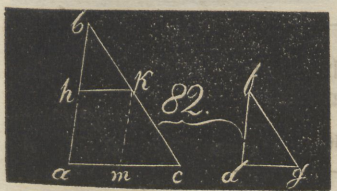
Es sei af : ab = ag : ac gegeben. Gesetzt, bc sei nicht ‖ fg; so mag bd ‖ fg sein. Dann ist nach § 108.

af : ab = ag : ad. Es war gegeben

af : ab = ag : ac

mithin ad = ac, was unmöglich ist; folglich kann nicht bd, und eben so auch keine andere durch b gezogene Linie mit fg parallel sein; mithin ist bc ‖ fg.

§ 110. Lehrsatz.



Wenn in zwei Dreiecken die Winkel des einen, denen des andern gleich sind; so sind die Seiten, die gleiche Winkel einschließen, proportionirt, folglich die Dreiecke ähnlich. (Fig. 82.)

Beweis: Es sei in den Dreiecken abc und dfg gegeben: ∠b = f, ∠a = d, und ∠c = g. Man mache

bh = fd, bk = fg und ziehe hk; so ist

△ bhk ≅ △ fdg (§ 82.)

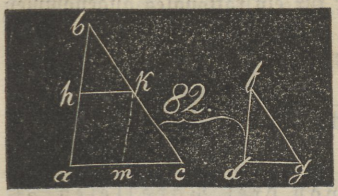
folglich hk = dg, ∠k = g, und ∠h = d. Es war gegeben

∠c = g, und ∠a = d;

folglich ∠k = c und ∠h = a;

folglich hk ‖ ac (nach § 77. 2); mithin

bh : ba = bk : bc (§ 108.).



Man setze für bh die fd, und für bk die fg; so ist

I. fd : ba = fg : bc; also sind die Seiten, welche die gleichen Winkel b und f einschließen, proportionirt.

Man ziehe ferner km ‖ ab, so ist ahkm ein Parallelogramm, und nach § 108. verhält sich

bk : bc = am : ac. Es ist aber bk = fg, und am = hk = dg; folglich II. fg : bc = dg : ac; also sind die Seiten um die gleichen Winkel c und g proportionirt.

Aus der Vergleichung der beiden Proportionen in I. und II. folgt

III. dg : ac = fd : ba; mithin sind die Seiten um die gleichen Winkel a und d proportionirt.

Zusatz. Zwei Dreiecke A und B, welche beide einem dritten Dreieck C ähnlich sind, sind einander selbst ähnlich; denn da △A ∽ △C, und △B ∽ △C ist; so ist △A mit △C, und △B mit △C gleichwinklig (§ 48); folglich sind auch △A und △B gleichwinklig, mithin △A ∽ △B (§ 110.).

§ 111. Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken die gleichliegenden Seiten proportionirt sind, so sind die Dreiecke gleichwinklig, folglich ähnlich. (Fig. 82.)

Beweis: Es sei fd : ba = fg : bc = dg : ac gegeben. Man mache bh = fd, u. bk = fg; so ist

bh : ba = bk : bc

folglich hk ‖ ac (§ 109.)

also I. ∠h = a, u. ∠k = c; daher auch nach § 110.
bh : hk = ba : ac. Es war oben gegeben
fd : dg = ba : ac

folglich bh : hk = fd : dg. Und da
bh = fd gemacht ist, so ist auch
hk = dg. Ferner ist
bh = fd, bk = fg } gemacht.

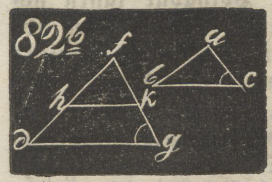
folglich △ bhk ≅ △ fdg

mithin II. ∠d = h = a, ∠g = k = c } I.

folglich △ abc ∽ △ fdg (§ 48 a.).

Anmerk. Aus §§ 110. und 111. geht hervor, 1) daß in ähnlichen Dreiecken die gleichliegenden Seiten den gleichen Winkeln gegenüberliegen, und 2) daß bei Dreiecken die Gleichheit der Winkel eine Folge aus dem gleichen Verhältnisse der Seiten ist, und umgekehrt; so daß eine dieser Bedingungen für die Aehnlichkeit der Dreiecke hinreicht. Bei Figuren von mehr als drei Seiten ist dieß aber nicht der Fall. (§ 48.)

§ 112. Lehrsatz.



Wenn in zwei Dreiecken ein Winkel gleich und die diesen Winkel einschließenden Seiten proportionirt sind; so sind die Dreiecke ähnlich. (Fig. 82 b.)

Beweis. Es sei in den Dreiecken abc und dfg der $\angle a = \angle f$, und $ac : ab = fg : fd$ gegeben.

Man mache $fh = ab$, und $fk = ac$, und da $\angle a = f$ gegeben ist, so ist $\triangle abc \cong \triangle fhk$ (§ 82.);

folglich I. $\angle h = b$, und $\angle k = c$. Es war gegeben

$ac : ab = fg : fd$, und da $fk = ac$ und $fh = ab$ gemacht sind; so ist $fk : fh = fg : fd$

folglich $hk \parallel dg$ (§ 109.)

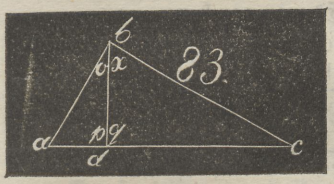
also II. $\angle d = h = b$, und auch

$\angle g = k = c$ nach I.; mithin $\triangle abc \sim \triangle dfg$. (§ 110.)

Anmerk. Es sind auch zwei Dreiecke ähnlich, wenn die Seiten des einen Dreiecks parallel den Seiten des andern Dreiecks sind, weil dann (nach § 78. Zus. 2.) die Winkel einander gleich und demnach auch die Dreiecke ähnlich sind. (§ 110.)

§ 113. Lehrsatz.

Wenn man aus dem Scheitel des rechten Winkels eines rechtwinkligen Dreiecks auf die Hypotenuse ein Perpendikel herabläßt, so sind



1) **die dadurch entstehenden einzelnen Dreiecke unter einander und dem ganzen Dreieck ähnlich,**

2) **jede Kathete ist die mittlere Proportionallinie zwischen der ganzen Hypotenuse und dem anliegenden Stücke derselben, und**

3) **das Perpendikel ist die mittlere Proportionallinie zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse.** (Fig. 83.)

Beweis zu Satz 1. Es sei gegeben $\triangle abc$ rechtwinklig, und $bd \perp ac$. Hier ist

$\triangle abd \sim \triangle abc$, weil $\angle a = a$; $\angle p = \angle abc = R$, mithin von selbst $\angle o = c$. (§ 80. Zusatz 4.) Ferner ist

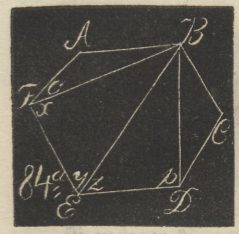
$\triangle bcd \sim \triangle abc$, weil $\angle c = c$; $\angle q = \angle abc = R$, mithin $\angle x = a$. (§ 80. Zusatz 4.) Eben so ist

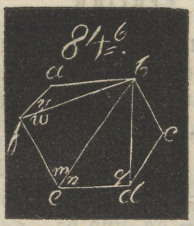
$\triangle abd \sim \triangle bcd$, weil bereits bewiesen $\angle o = c$; $\angle a = x$, u. $\angle p = q$,

Beweis zu Satz 2. Da $\triangle abd \sim \triangle abc$, so verhält sich nach § 110. $ad : ab = ab : ac$. Und da $\triangle bcd \sim \triangle abc$, so ist $dc : cb = cb : ca$.

Beweis zu Satz 3. Da $\triangle abd \sim \triangle bcd$, so verhält sich nach § 110. $ad : db = db : dc$.

§ 114. Lehrsatz.





Aehnliche Polygone lassen sich immer durch ähnlich liegende Diagonalen in ähnliche Dreiecke zerlegen, und umgekehrt: zwei Polygone, die aus einer gleichen Anzahl ähnlicher und gleichliegender Dreiecke zusammengesetzt sind, sind ähnlich. (Fig. 84. a. u. b.)

Beweis zu Satz 1. Es sei Polygon ABCDEF ähnlich Polygon abcdef.

Da $\angle A = \angle a$, und $AF : AB = af : ab$ gegeben ist; so ist

$\triangle ABF \sim \triangle abf$ (§ 112.)

folglich $\angle o = v$.

Da nun $\angle F = f$ gegeben war;

so ist $\angle F - o = \angle f - v$, oder

$\angle x = w$.

Ferner ist gegeben $AF : FE = af : fe$; u. da $\triangle ABF \sim \triangle abf$ ist;

so ist $AF : FB = af : fb$;

folglich $FE : FB = fe : fb$. Und da

$\angle x = w$ war; so ist

$\triangle FEB \sim \triangle feb$ (§ 112.); mithin

$\angle y = m$. Es war

$\angle E = e$

folglich $\angle E - y = \angle e - m$, oder

$\angle z = n$. Es war gegeben

$FE : ED = fe : ed$; u. da $\triangle FEB \sim \triangle feb$ war,

so ist $FE : EB = fe : eb$;

folglich $ED : EB = ed : eb$; und da

$\angle z = \angle n$ war;

so ist $\triangle BED \sim \triangle bed$. Eben so ist auch

$\triangle BCD \sim \triangle bcd$. (§ 112.)

Beweis zu Satz 2. Gegeben sind: $\triangle ABF \sim \triangle abf$,

$\triangle BEF \sim \triangle bef$,

$\triangle BDE \sim \triangle bde$, und

$\triangle BCD \sim \triangle bcd$

folglich $\angle A = a$, $\angle o = v$, $\angle x = w$, $\angle y = m$, $\angle z = n$ nach § 48 a. u. s. w.

folglich $\angle o + x = \angle v + w$, oder

$\angle F = f$. Eben so ist

$\angle y + z = \angle m + n$, oder

$\angle E = e$.

Eben so beweiset man auch, daß $\angle D = d$ und $\angle B = b$ ist. Demnach sind die beiden Polygone gleichwinklig.

Es sind aber auch deren gleichliegende Seiten proportionirt; denn es ist, da $\triangle ABF \sim \triangle abf$,

1) $BA : ba = AF : af.$

Ferner $AF : af = FB : fb.$ Wegen Aehnlichkeit der $\triangle\triangle BEF$ und bef ist

$EF : ef = FB : fb.$

folgl. 2) $AF : af = EF : ef.$ Da $\triangle BEF \sim \triangle bef$, so ist

$EF : ef = EB : eb.$ Da $\triangle BDE \sim \triangle bde$, so ist

$ED : ed = EB : eb;$

folgl. 3) $EF : ef = ED : ed.$ Da $\triangle BDE \sim \triangle bde$, so ist

$ED : ed = DB : db.$ Da $\triangle BCD \sim \triangle bcd$, so ist

$DC : dc = DB : db.$

folgl. 4) $ED : ed = DC : dc.$ Da $\triangle BCD \sim \triangle bcd$; so ist

auch 5) $DC : dc = CB : cb.$

Aus obigen fünf Proportionen ergibt sich, daß sich verhält

$BA : ba = AF : af = FE : fe = ED : ed = DC : dc = CB : cb.$

Demnach sind die beiden Polygone ähnlich, da in denselben die gleichliegenden Winkel gleich und die sie einschließenden Seiten proportionirt sind.

§ 115. Lehrsatz.

Es sind 1) regelmäßige Polygone von gleicher Seitenzahl ähnlich, und 2) verhalten sich in ähnlichen Polygonen die Umfänge wie zwei gleichliegende Seiten oder Diagonalen. (Fig. 84. a. und b.)

Beweis zu Satz 1. Es seien ABCDEF und abcdef zwei regelmäßige Polygone von gleicher Seitenzahl.

Da in jedem der beiden Polygone die Seiten unter sich gleich sind, so verhält sich

$AB : BC : CD : DE : EF : FA = ab : bc : cd : de : ef : fa.$

Nach § 81. Zusatz 1. beträgt ein Polygonwinkel $\frac{2nR - 4R}{n}$, und da in beiden Polygonen die Seitenzahl gleich ist; so sind auch in beiden die Winkel gleich. Es waren zugleich in beiden Polygonen die Seiten proportionirt; folglich Polygon ABCDEF $\sim$ Polygon abcdef. (§ 48 a.)

Beweis zu Satz 2. Da die beiden Polygone ähnlich gegeben sind, so verhält sich

$AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = EF : ef = FA : fa.$

Es möge hier die Verhältnißzahl zwischen zwei gleichnamigen Seiten der beiden ähnlichen Polygone durch n ausgedrückt werden; so wird sein

$AB = n \cdot ab$, folglich $\frac{AB}{ab} = n$

$BC = n \cdot bc$, folglich $\frac{BC}{bc} = n$

$CD = n \cdot cd$ u. s. w.

$DE = n \cdot de$

$EF = n \cdot ef$

$FA = n \cdot fa$

folgl. $AB + BC + CD + DE + EF + FA = n.\ (ab + bc + cd + de + ef + fa)$;

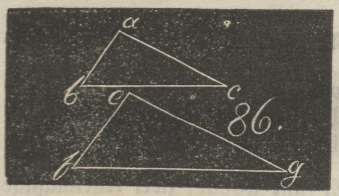
oder Umfang von ABCDEF $= n \cdot$ Umfang von abcdef,

oder $\frac{\text{Umfang ABCDEF}}{\text{Umfang abcdef}} = n = \frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd}$ u. s. w.

Folglich Umfang von ABCDEF : Umfang von abcdef $= AB : ab = BC : bc = CD : cd$ u. s. w.

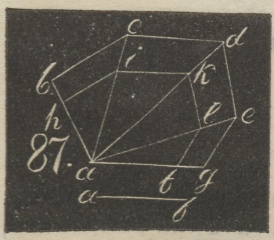
Da $\triangle$ ABF $\sim$ $\triangle$ abf (§ 114.) ist, so verhält sich AB : ab = BF : bf; folglich auch Umfang von ABCDEF : Umfang von abcdef = BF : bf, d. h. wie zwei gleichliegende Diagonalen.

§ 117. Aufgaben.



1) Ueber eine gerade Linie fg ein Dreieck zu verzeichnen, das einem gegebenen Dreieck abc ähnlich sei. (Fig. 86.)

Man setze $\angle$ b an f der Geraden fg, und $\angle$ c an g derselben Gerade; so ist $\triangle$ feg $\sim$ $\triangle$ abc. (§ 110.)

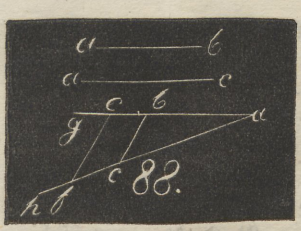


2) Ueber eine gerade Linie af ein Polygon zu verzeichnen, das einem gegebenen Polygon abcdeg ähnlich sei. (Fig. 87.)

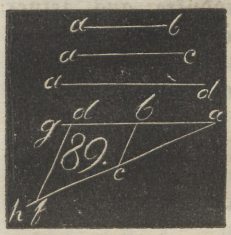
Man ziehe im Polygon abcdeg von einer Ecke aus Diagonalen, und trage af auf ag, ziehe dann aus f die fl $\parallel$ ge, aus l die lk $\parallel$ ed, aus k die ki $\parallel$ dc und aus i die ih $\parallel$ cb; so ist Polygon ahiklf ähnlich Polygon abcdeg, weil nach § 78. in beiden die homologen Winkel gleich, und demnach die gleichliegenden Seiten proportionirt sind. (§ 110.)

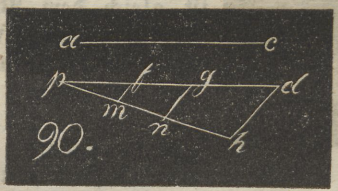
Sollte af größer ag sein, so verlängere man ag, ae, ad, ac, ab, und verfahre, wie oben gelehrt.

3) 1. Zu zwei gegebenen Linien ab und ac die dritte Proportionallinie (Fig. 88.), **und 2. zu drei gegebenen Linien ab, ac, ad die vierte Proportionallinie zu finden.** (Fig. 89.)



1. (Fig. 88.) Man trage auf den einen Schenkel ag eines beliebigen Winkels gah die gegebene Linie ab, und dann auf dessen beide Schenkel ag und ah die Linie ac auf; ziehe bc und aus dem obern c die cf ∥ bc; so ist af die gesuchte dritte Proportionallinie; denn △ abc ∽ △ acf, und demnach ab : ac = ac : af. (§ 108.)





2. (Fig. 89.) Man trage vom Punkte a aus die ab auf ag, die ac auf ah, und darauf wieder ad auf ag; ziehe bc, und aus d die df ∥ bc; so ist af die gesuchte vierte Proportionallinie; denn nach § 108. ist △ abc ∽ △ adf, mithin ab : ac = ad : af.

4) Eine gegebene gerade Linie ac in denselben Verhältnissen zu theilen, als eine andere gegebene gerade Linie pd. (Fig. 90.)

Man setze an den Punkt p der pd die ac = ph unter einem beliebigen Winkel an; ziehe dh, und aus g und f die gn und fm ∥ dh; so ist ph in m und n in denselben Verhältnissen getheilt, als pd in f und g. (§ 108. Zusatz.)

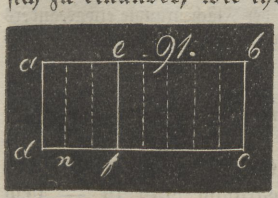
Wären die Theile pf, fg, gd einander gleich, so wären auch pm, mn, nh einander gleich. Dieses Verfahren lehrt, wie eine gegebene gerade Linie in eine verlangte Anzahl gleicher Theile zu theilen sei.

Fünfter Abschnitt.

Von dem Verhältnisse und der Flächenberechnung geradliniger Figuren.

§ 118. Lehrsatz.

Die Flächeninhalte zweier Rechtecke von gleicher Höhe verhalten sich zu einander, wie ihre Grundlinien. (Fig. 91.)



Beweis: Es seien abcd und aefd die beiden Rechtecke von gleicher Höhe.

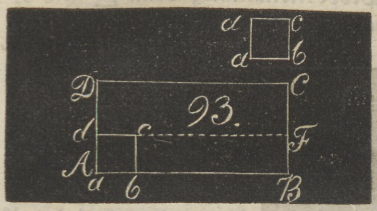
Sind die Grundlinien dc und df dieser Rechtecke commensurabel, so mögen sie das gemeinschaftliche Maß dn haben. Es sei dn in dc achtmal, und in df dreimal enthalten. Zieht man aus den Theilungspunkten der Grundlinie dc Parallelen mit da oder cb; so entstehen nach § 99. so viele, unter sich gleiche Parallelogramme, als die Grundlinie dc Theile enthält; folglich verhält sich □ abcd : □ aefd = 8 : 3, und

Grundlinie cd : fd = 8 : 3

folglich □ abcd : □ aefd = cd : fd.

Wären die Grundlinien dc und df der beiden Rechtecke incommensurabel, d. h. wäre das Maß von dc nicht auch das Maß von df, so wird in diesem Falle der Beweis eben so geführt, wie in § 107 a. über die incommensurablen Größen.

§ 119 a. Lehrsatz.



Der Flächeninhalt eines Rechteckes ist gleich dem Produkte aus seiner Grundlinie und Höhe, d. h. ein Rechteck, dessen Höhe m Maßeinheiten und dessen Grundlinie n Maßeinheiten enthält, wird n × m Quadratmaßeinheiten enthalten, (wo n und m ganze, gebrochene, rationale und irrationale Zahlen sein können.) (Fig. 93.)

Beweis: Es sei ABCD das zu berechnende Rechteck, und abcd das Quadrat der Maßlängeneinheit ab.

Man trage das Quadrat abcd der Maßlängeneinheit ab in das Rechteck ABCD, und verlängere cd bis F; so verhält sich nach § 118.

Rechteck ABFd : Quadrat abcd = AB : ab = n . ab : ab = n : 1,

und Rechteck ABCD : Rechteck ABFd = AD : ad = m . ad : ad = m : 1.

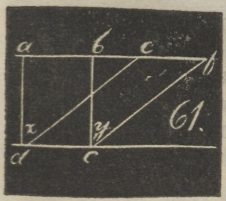
folglich Rechteck ABCD : Quadrat abcd = ... n . m : 1;

also Rechteck ABCD = n . m . □ abcd = n . m Quadrate der als Maß angenommenen Längeneinheit ab, oder kürzer = n . m, wenn man dieses Produkt auf das □ abcd als Maßflächeneinheit bezieht.

Anmerk. 1. Es sind hier n und m Zahlenausdrücke der Grundlinie und Höhe des gegebenen Rechtecks in Bezug auf ab (die Einheit des Längenmaßes) als Einheit. Das Produkt (n . m) der beiden Zahlenausdrücke der Grundlinie und Höhe gibt den Zahlenausdruck des Flächeninhalts des gegebenen Rechtecks in Bezug auf das Quadrat der Maßlängeneinheit als Flächeneinheit.

Anmerk. 2. Es ist hier nöthig zu bemerken, daß wir unter dem Produkte zweier Linien für die Folge stets einen Ausdruck verstehen, wie er im obigen Lehrsatze gegeben ist. (Siehe auch § 107 a.)

Anmerk. 3. Obgleich die Flächeneinheit beliebig sein kann, so nimmt man am liebsten das Quadrat als Flächeneinheit an, und zwar dasjenige Quadrat, dessen Seite als Maßlängeneinheit der Grundlinie und Höhe der zu berechnenden Figur angenommen ist. Nimmt man als Maß eine beliebige Flächeneinheit an, so würde die Berechnung der Flächenräume etwas anders und weniger einfach ausfallen, als wenn man das Quadrat der Maßlängeneinheit als Flächeneinheit annimmt.



Zusatz 1. (Fig. 61.) Der Flächeninhalt jedes schiefwinkligen Parallelogramms cdef ist gleich dem Produkt aus seiner Grundlinie und Höhe; denn Parallelogramm cdef ist = dem Rechteck abcd. (§ 99.) Dieses hat zum Maß cd × ad; also ist auch cd × ad, d. i. das Produkt aus der Grundlinie und Höhe, der Flächeninhalt des schiefwinkligen Parallelogramms cdef, immer aber in Bezug auf das Quadrat der Maßlängeneinheit, als Flächeneinheit.

Zusatz 2. Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkte aus seiner Grundlinie und Höhe. (§ 101.)

Zusatz 3. Der Flächeninhalt eines Trapezes ist nach § 102. gleich der halben Summe der beiden Parallelseiten, multiplicirt mit dessen Höhe, in Bezug auf das Quadrat der Maßlängeneinheit, als Flächeneinheit.

Zusatz 4. Parallelogramme und Dreiecke von gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen, und umgekehrt: Parallelogramme und Dreiecke von gleichen Höhen, wie ihre Grundlinien. Es mögen g, g' die beziehlichen Grundlinien, und h, h' die entsprechenden Höhen zweier Parallelogramme p, p' sein; so ist nach § 119 a.

$\square p : \square p' = g . h : g' . h'$. Ist $g = g'$, so ist

1) $\square p : \square p' = h : h'$ (wie ihre Höhen). Ist $h = h'$, so ist

2) $\square p : \square p' = g : g'$ (wie ihre Grundlinien).

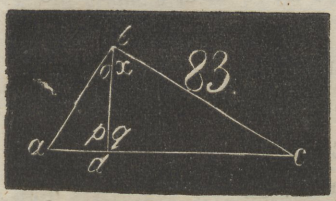
Für Dreiecke gilt dasselbe nach Zusatz 2.

Zusatz 5. Der Flächeninhalt eines Quadrats ist gleich der zweiten Potenz seiner Seite, in so fern diese durch eine Zahl ausgedrückt wird. Daher ist wohl zu merken, daß ein Quadrat, dessen Seite 2, 3, 4 Längenfuß enthält, 4, 9, 16 Quadratfuß Fläche in sich faßt.

Zusatz 6. Auch Polygone können nach dem allgemeinen Maße des Quadrats der als Maß angenommenen Längeneinheit gemessen werden, indem man sie in Dreiecke zerlegt, deren Flächeninhalt man mißt.

Zusatz 7. Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Polygons ist gleich der Hälfte des Produkts seines Umfangs mit dem Radius des eingeschriebenen Kreises, in Bezug auf das Quadrat der Maßlängeneinheit.

§ 119 b. Lehrsatz.



Die Quadrate der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks verhalten sich zu einander, wie die anliegenden Abschnitte der Hypotenuse. (Fig. 83.)

Beweis: Es sei bd die Senkrechte aus dem Scheitel des rechtwinkligen Dreiecks abc auf dessen Hypotenuse; folglich sind nach § 113,

1. die Dreiecke abd und bcd $\sim \triangle$ abc. Demnach verhält sich

$$ad : ab = ab : ac, \text{ und } dc : bc = bc : ac$$

folglich ist 1) $ad = \frac{ab^2}{ac}$, und 2) $dc = \frac{bc^2}{ac}$, mithin verhält sich

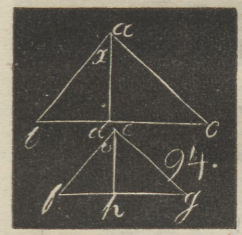
$$ad : dc = \frac{ab^2}{ac} : \frac{bc^2}{ac} = ab^2 : bc^2.$$

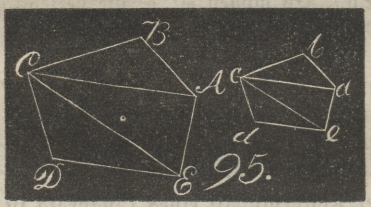
Zusatz. Addirt man die beiden obigen Gleichungen in 1) und 2); so ist $ad + dc = \frac{ab^2}{ac} + \frac{bc^2}{ac}$; oder, da $ad + dc = ac$ ist,

$ac = \frac{ab^2}{ac} + \frac{bc^2}{ac}$. Beide Theile mit ac multiplicirt, gibt $ac^2 = ab^2 + bc^2$.

Dieß ist der auf analytischem Wege gefundene „pythagoräische Lehrsatz" in § 103.

§ 120. Lehrsatz.





Aehnliche Dreiecke und Polygone verhalten sich ihrem Flächeninhalte nach, wie die Quadrate ihrer gleichliegenden Seiten. (Fig. 94. u. 95.)

Beweis: I. Es sei (Fig. 94.) $\triangle$ abc $\sim$ $\triangle$ efg, und Polygon ABCDE $\sim$ Polygon abcde gegeben. (Fig. 95.)

In den Dreiecken abc und efg fälle man aus den Scheiteln a und e die Senkrechten ad und eh; so ist $\triangle$ abd $\sim$ $\triangle$ efh (weil $\angle$ b = f gegeben, und $\angle$ d = h als Rechte, mithin $\angle$ x = o); folglich

ab : ef = ad : eh } man multiplicire die über einander stehenden
und ab : ef = bc : fg } Glieder,

so ist $ab^2 : ef^2 = ad \cdot bc : eh \cdot fg$. Nach § 119a. Zusatz 2.

ist $\triangle abc : \triangle efg = \frac{ad \cdot bc}{2} : \frac{eh \cdot fg}{2} = ad \cdot bc : eh \cdot fg.$

folglich $\triangle abc : \triangle efg = ab^2 : ef^2$, od. auch $= bc^2 : fg^2 = ac^2 : eg^2$.

II. (Figur 95.) Da ähnliche Polygone durch Diagonalen in ähnliche Dreiecke zerlegt werden können (§ 114); so ist nach Bew. 1.

$\triangle ABC : \triangle abc = BC^2 : bc^2$. Eben so

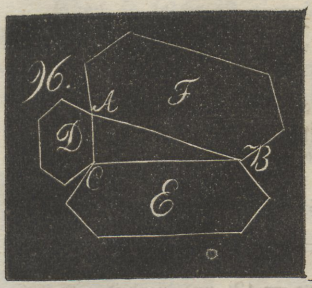
$\triangle ACE : \triangle ace = CA^2 : ca^2 = BC^2 : bc^2$; und

$\triangle CDE : \triangle cde = CE^2 : ce^2 = CA^2 : ca^2 = BC^2 : bc^2$;

$(\triangle ABC + \triangle ACE + \triangle CDE) : (\triangle abc + \triangle ace + \triangle cde) = BC^2 : bc^2$,
oder Polygon ABCDE : Polygon abcde $= BC^2 : bc^2$ u. s. w.

§ 121. Lehrsatz.

Werden auf den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks drei einander ähnliche Figuren verzeichnet, so ist die Figur über der Hypotenuse gleich der Summe der beiden andern Figuren. (Fig. 96.)



Beweis: Es seien ACB ein rechtwinkliges Dreieck und die drei Figuren D, E, F einander ähnlich. Demnach verhält sich nach § 120.

$D : E = AC^2 : CB^2$, mithin

$(D+E) : E = (AC^2+CB^2) : CB^2$.

Ferner $E : F = CB^2 : AB^2$ (§ 120.)

folglich $(D+E) : F = (AC^2+CB^2) : AB^2$. Da nach §103. $AC^2+CB^2 = AB^2$ ist, so ist

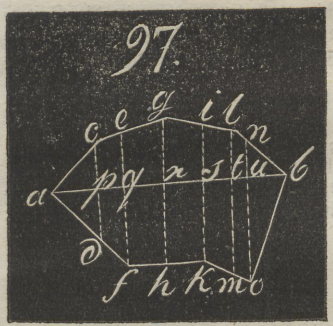
$(D+E) : F = AB^2 : AB^2$;

folglich $D + E = F$.

Anmerk. Dieser Satz ist eine merkwürdige Erweiterung des pythagoräischen Lehrsatzes. Mittelst desselben kann man leicht die folgende Aufgabe auflösen.

Wenn zwei einander ähnliche Figuren gegeben sind, eine der Summe oder Differenz dieser beiden Figuren gleiche und ihnen ähnliche Figur zu verzeichnen. Dasselbe gilt auch von Kreisen. (Siehe § 142. Aufgaben 36. und 37., so wie Anmerk. in Aufgabe 14.)

§ 122. Aufgaben.



1) Den Flächeninhalt jeder geradlinigen Figur zu berechnen. (Fig. 97.)

Es sei agbof die zu berechnende Figur. Man ziehe die beliebige Linie ab, und lasse auf dieselbe aus allen Ecken der Figur Senkrechte herab, wodurch die Figur in zwei Dreiecke und in eine bestimmte Anzahl Trapeze zerlegt wird. Man berechnet nun nach § 119 a., Zusatz 2. und 3. die einzelnen Dreiecke und Trapeze, und addirt hierauf dieselben zusammen; so erhält man den Flächeninhalt der ganzen Figur agbof, welchen wir mit F bezeichnen wollen.

Es ist demnach $F = \frac{1}{2}$ cd . ap $+ \frac{1}{2}$ (cd + ef) . pq $+ \frac{1}{2}$ (ef + gh) . qr $+ \frac{1}{2}$ (gh + ik) . rs $+ \frac{1}{2}$ (ik + lm) . st $+ \frac{1}{2}$ (lm + no) . tu $+ \frac{1}{2}$ no . ub.

Anmerk. Man kann aber auch den Flächeninhalt jeder geradlinigen Figur finden, wenn man dieselbe durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt, deren Flächeninhalte einzeln berechnet und sie in eine Summe bringt.

2) Den Flächeninhalt einer Figur, deren Umfang eine Linie von beliebiger Krümmung ist, annähernd zu berechnen.

Man lege durch die gegebene Figur eine gerade Linie hindurch, theile dieselbe in eine gewisse (möglichst große) Anzahl gleicher Theile, und errichte in den Theilungspunkten Perpendikel, die wir, der Reihe nach mit p, p', p'', p''' u. s. w. bezeichnen wollen. Durch dieses Verfahren wird die ganze Figur gewöhnlich in zwei Dreiecke und in eine gewisse Anzahl Trapeze von gleicher Höhe (h) zerlegt. Nennt man den Flächeninhalt der Figur F, so ist

$F = \frac{1}{2} p \cdot h + \frac{1}{2} (p + p') \cdot h + \frac{1}{2} (p' + p'') \cdot h + \frac{1}{2} (p'' + p''') \cdot h$
$+ \frac{1}{2} (p''' + p'''') \cdot h + \ldots$, oder
$F = (p + p' + p'' + p''' + p'''' + \ldots) \cdot h$.

Hierbei ist zu bemerken, daß man F offenbar desto genauer erhält, in je mehr gleiche Theile die durch die Figur gelegte Linie zerlegt ist.

3) Der Flächeninhalt eines Dreiecks sei $= 5\square' 80\square''$, und dessen Höhe $= 3' 4''$; was beträgt seine Grundlinie? (Antwort: $3' 4''$.)

4) Die Seite eines gleichseitigen Dreiecks sei $= 2' 8''$; wie groß ist dessen Flächeninhalt? (Antwort: $3\square' 11\square'' 56\square'''$.)

5) Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks sei $= 80\square' 80\square''$; wie groß ist dessen Seitenlinie? (Antwort: $13' 7'' 8'''$.)

6) In einem rechtwinkligen Dreieck sei die Hypotenuse $= 12'$, und die beiden Katheten verhalten sich zu einander wie 4:3; wie groß sind letztere? (Antwort: $9{,}6'$ und $7{,}2'$.)

7) Aus den drei gegebenen Seiten a, b, c eines Dreiecks den Flächeninhalt desselben zu finden, wenn $a = 6'$, $b = 7'$ und $c = 9'$ gegeben ist? (Antwort: $20\square' 140'' 78{,}3\square'''$.)

8) Wie groß ist die Grundlinie und die Höhe eines Rechtecks, dessen Flächeninhalt $= 1050\square'$ ist, und dessen Grundlinie zur Höhe sich verhält, wie 7 : 3? (Antwort: Grundlinie $= 49{,}497\ldots$ Fuß, und Höhe $= 21{,}213\ldots$ Fuß.)

9) Aus der Summe ($= 13'$) und aus dem Unterschiede ($= 3'$) der Grundlinie und Höhe eines Rechtecks den Flächeninhalt desselben zu finden. (Antwort: $40\square'$.)

10) Aus der Länge der Diagonale ($= 5'$) und der Höhe ($= 3'$) eines Rechtecks den Flächeninhalt desselben zu finden. (Antwort: $12\square'$.)

11) Von drei Quadraten hat das erste die Seitenlinie $= 6' 8''$, das zweite die Seitenlinie $8' 5''$, und das dritte die Seitenlinie $10' 3''$. Wie groß muß die Seitenlinie eines vierten Quadrats sein, welches so groß ist als der Flächeninhalt der drei gegebenen Quadrate zusammengenommen? (Antwort: $14' 10'' 1{,}5'''$.)

12) Den Flächeninhalt eines Trapezes zu berechnen, dessen obere Parallelseite $3' 5''$, die untere Parallelseite $4' 7''$, und die Höhe $2' 4''$ beträgt. (Antwort: $9\square' 48\square''$.)

13) Der Flächeninhalt eines Trapezes sei $= 42\square'$; von dessen beiden Parallelseiten sei die eine $= 15'$, und die andere $= 13'$; was ist die Höhe dieses Trapezes? (Antwort: $3'$.)

14) Der Flächeninhalt eines Trapezes betrage $48\square'$, der Unterschied seiner beiden Parallelseiten sei $= 18'$ und die Höhe desselben $= 4'$; wie lang ist jede der Parallelseiten? (Antw.: die eine $21'$, die andere $3'$.)

Sechster Abschnitt.

Vom Kreise.

A. Von den besondern Eigenschaften des Kreises und von der Größe und dem Verhältnisse der geraden Linien, der Bogen und Winkel desselben.

§ 123. Lehrsatz.

Kreise, die mit gleichen Halbmessern beschrieben sind, sind einander gleich, und umgekehrt: gleiche Kreise haben gleiche Halbmesser.

Beweis: Denkt man sich die beiden Kreise mit ihren Mittelpunkten auf einander gelegt, so müssen bei der Annahme, daß beide einander nicht vollkommen decken, Punkte des einen oder des andern Kreises nicht gleich weit vom Mittelpunkt abstehen, also ihre Halbmesser ungleich sein, was der Erklärung vom Kreise widerstreitet. Folglich müssen Kreise, die mit gleichen Halbmessern beschrieben sind, einander gleich sein.

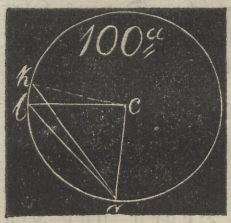
Eben so leicht ist einzusehen, daß von zwei Kreisen, die mit ungleichen Halbmessern beschrieben sind, derjenige immer der größere ist, welcher den größern Halbmesser hat, woraus wieder ganz einfach folgt, daß gleiche Kreise jederzeit gleiche Halbmesser haben müssen.

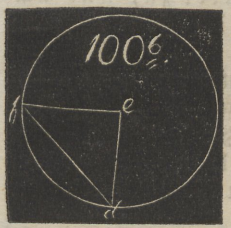
*§ 124. Lehrsatz.

Eine gerade Linie kann die Peripherie eines Kreises in nicht mehr als zwei Punkten schneiden. (Fig. 99.)

Beweis: Gesetzt, die gerade Linie schnitte die Peripherie in drei Punkten a, b, c, so würden diese vom Mittelpunkte des Kreises gleich weit entfernt sein; mithin würde es drei gleich lange gerade Linien aus Einem Punkte nach einer Geraden geben, was nach §88. Zus. 4. unmöglich ist. Folglich kann eine gerade Linie die Peripherie in nicht mehr als zwei Punkten schneiden.

*§ 125a. Lehrsatz.





Zu gleichen Mittelpunktswinkeln in gleichen Kreisen (also auch in demselben Kreise) gehören gleiche Sehnen, gleiche Bogen, gleiche Ausschnitte und gleiche Abschnitte. (Fig. 100a. und b.)

Bew.: Es sei Mittelpunktswinkel acb = ∠def gegeben. Denkt man sich die beiden gleichen Kreise so auf einander gelegt, daß ihre Mittelpunkte c und e zusammenfallen; dann müssen offenbar die beiden ganzen Kreise, da sie gleiche Radien haben, sich decken. (§ 123.) Denkt man sich nun den obern Kreis so um den gemeinschaftlichen Mittelpunkt gedreht, daß ca auf ed fällt; so wird, weil ca = ed gegeben war, auch der Punkt a auf d, und, weil ∠ acb = ∠ def gegeben war, cb auf ef und der Punkt b auf f fallen. Daraus folgt offenbar, daß die den gleichen Mittelpunktswinkeln acb und def entsprechenden Sehnen und Bogen, und folglich auch die entsprechenden Sectoren und Segmente sich decken, also einander gleich sind.

§ 125b. Lehrsatz.

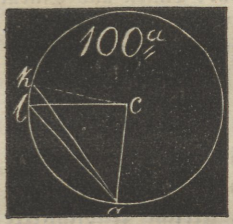
In gleichen Kreisen (also auch in demselben Kreise) gehören zu gleichen Bogen gleiche Mittelpunktswinkel, gleiche Sehnen, gleiche Ausschnitte und gleiche Abschnitte. (Fig. 100a. und b.)

Beweis: Es sei Bogen ab = Bogen df gegeben. Denkt man sich die beiden gleichen Kreise wieder mit ihren Mittelpunkten auf einander gelegt, so werden offenbar die ganzen Kreise sich decken. (§ 123.) Dreht man nun den obern Kreis so lange um den gemeinschaftlichen Mittelpunkt, bis der Punkt

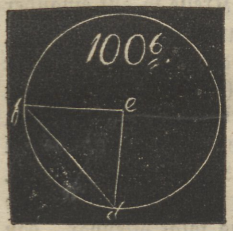
a auf den Punkt d fällt; so wird, weil die Bogen ab und df nach der Voraussetzung einander gleich sind, auch der Punkt b auf den Punkt f fallen, und es müssen also, weil auch die Mittelpunkte auf einander fielen, nach § 71. 3., sowohl die Radien ca, ed als auch die Radien cb, ef sich decken, folglich die Winkel acb und def am Mittelpunkte einander gleich sein. Daraus folgt nun nach § 125 a. unmittelbar die Gleichheit der Sehnen, Ausschnitte und Abschnitte.

§ 125c. Lehrsatz.

In gleichen Kreisen (also auch in demselben Kreise) gehören zu gleichen Sehnen gleiche Mittelpunktswinkel, gleiche Bogen, gleiche Ausschnitte und gleiche Abschnitte. (Fig. 100a. und b.)



Beweis: Es sei Sehne ab = Sehne df gegeben. Da die beiden Kreise einander gleich sind, so sind nach § 123. auch ihre Radien ac = de, und cb = ef. Nach der Voraussetzung war Sehne ab = Sehne df; folglich △ abc ≅ △ def (§ 86.); also sind die Mittelpunktswinkel acb und def einander gleich. Daraus folgt wiederum nach § 125a. unmittelbar die Gleichheit der Bogen, der Ausschnitte und der Abschnitte.



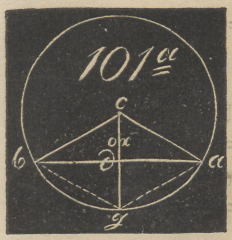
Zusatz 1. Jeder Durchmesser theilt die Kreislinie und die Kreisfläche in zwei gleiche Theile.

Zusatz 2. Der größern Sehne eines Kreises gehört ein größerer Bogen und ein größerer Mittelpunktswinkel zu, und umgekehrt (Fig. 100a.); denn ist die Sehne ak > ab, so ist auch offenbar ∠ ack > acb, (§ 92.) mithin muß der Punkt k weiter vom Punkte a entfernt liegen, als der Punkt b; folglich ist Bogen ak > Bogen ab. Der umgekehrte Satz beruht auf § 91.

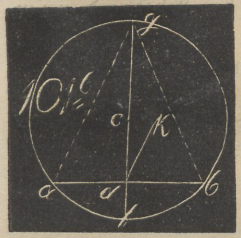
Zusatz 3. Der Durchmesser ist unter allen Sehnen des Kreises die größte, weil er dem größten Bogen in einem und demselben Halbkreise zugehört.

§ 126. Lehrsatz.

1) Die durch den Mittelpunkt eines Kreises auf die Sehne herabgelassene Senkrechte halbirt die Sehne und den Bogen derselben. 2) Die Linie, die den Mittelpunkt des Kreises mit der Mitte einer Sehne verbindet, steht senkrecht auf dieser Sehne, und 3) Jede aus der Mitte einer Sehne errichtete Senkrechte geht durch den Mittelpunkt des Kreises und halbirt den Bogen oberhalb und unterhalb der Sehne. (Fig. 101. a. und b.)



Beweis zu Satz 1. (Fig. 101 a.) Es sei aus dem Mittelpunkte c des Kreises die cg ⊥ ab. Zieht man ca und cb, so ist △ acd ≅ △ bcd; folglich ad = db, mithin die Sehne ab durch die Senkrechte cg halbirt. Zieht man ferner ag und bg, so ist △ adg ≅ △ bdg; (§ 82.) folglich Sehne ag = Sehne bg, mithin auch Bog. ag = Bog. bg. (§ 125 c.)



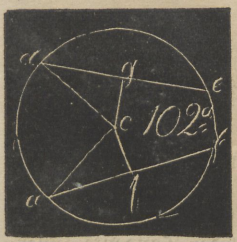
Beweis zu Satz 2. Es sei die Sehne ab in d halbirt. Zieht man ac und cb, so ist △ acd ≅ △ bcd (§ 86.); folglich ∠ o = x, mithin cd ⊥ ab.

Beweis zu Satz 3. Es sei (Fig. 101 b.) d die Mitte der Sehne ab, und fg ⊥ in d auf ab. Ginge die Senkrechte fg nicht durch den Mittelpunkt des Kreises; so möge der Mittelpunkt in k liegen. Zieht man nun kd, so ist kd ⊥ ab nach Satz 2. Es war aber auch fg in d ⊥ ab; folglich ist kd und fg ⊥ ab im Punkte d, was nicht möglich ist nach § 74. Zusatz; folglich muß die Senkrechte fg durch den Mittelpunkt des Kreises gehen. Zieht man ag und bg, so sind diese einander gleich (§ 82.); folglich Bogen ag = Bogen bg. (§ 125 c.) Eben so ist auch Bogen af = Bogen bf.

Zusatz 1. Zwei Perpendikel, durch die Mitte zweier nicht parallelen Sehnen gezogen, treffen im Mittelpunkte des Kreises zusammen. Dieser Satz gibt das Verfahren an, wie der Mittelpunkt eines Kreises gefunden werden kann.

Zusatz. 2. Zwei Sehnen, die nicht durch den Mittelpunkt des Kreises gehen, können einander nicht gegenseitig halbiren, weil nach § 126. 2. in diesem Falle eine Gerade aus dem Mittelpunkte des Kreises nach dem Durchschnittspunkte der Sehnen gezogen, auf beiden zugleich senkrecht stehen müßte, was nicht möglich ist.

*§ 127. Lehrsatz.



Gleiche Sehnen eines Kreises haben gleichen Abstand vom Mittelpunkt, und umgekehrt: Sehnen, die gleichen Abstand vom Mittelpunkt haben, sind gleich. (Fig. 102 a.)

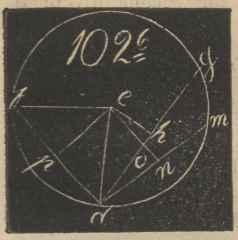
Beweis zu Satz 1. Es sei Sehne ab = de. Man fälle aus dem Mittelpunkte c des Kreises die Perpendikel cf und cg auf die Sehnen herab, und ziehe ca und cd. Denkt man sich noch ce und cb gezogen, so ist △ abc ≅ △ dce (§ 86.); folglich ∠ a = d, mithin △ acf ≅ △ deg (§ 82.); also cf = cg.

Beweis zu Satz 2. Es sei die Senkrechte cf = der Senkrechten cg; so ist $ac^2 = af^2 + cf^2$ (§ 103.), und

$cd^2 = dg^2 + gc^2$. Da ac = cd ist, so ist auch $ac^2 = cd^2$,

folglich $af^2 + cf^2 = dg^2 + gc^2$. Da cf = gc gegeben war, so ist auch $cf^2 = gc^2$; also

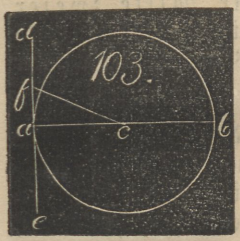
$af^2 = dg^2$, mithin auch af = dg, folglich 2 af = 2 dg, od. ab = de. (§ 126, 1.)



Zusatz. Je größer die Sehne eines Kreises ist, desto kleiner ist ihr Abstand vom Mittelpunkt und umgekehrt; denn es sei (Fig. 102b.) Sehne dg > df. Man mache dm = df; ferner eh ⊥ dg, ep ⊥ df, und en ⊥ dm, so ist en = ep (§ 127.). Es ist eo > eh (§ 87. Zusatz.) und daher en oder ep noch größer eh; was zu beweisen war.

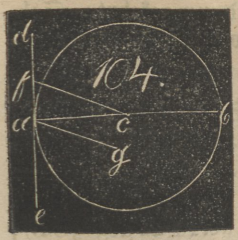
§ 128. Lehrsatz.

Ein am Endpunkte des Radius eines Kreises errichtetes Perpendikel ist eine Tangente an diesem Kreise, d. h. es berührt den Kreis nur in Einem Punkte. (Fig. 103.)



Beweis: Es sei ac der Radius des Kreises und ed durch a ⊥ ac gezogen. Es ist der Punkt a der Peripherie und der Linie de gemein, jeder andere Punkt dieser Linie aber fällt außerhalb des Kreises; denn zieht man aus c die beliebige Linie cf; so ist △ acf rechtwinklig, folglich cf > als der Radius ca, mithin liegt der Punkt f außerhalb des Kreises. (§ 59.) Eben so zeigt man, daß alle andern Punkte der Geraden ed, a ausgenommen, außerhalb des Kreises liegen; folglich ist de eine Tangente am Kreise. (§ 53.)

§ 129. Lehrsatz.



Ein Halbmesser oder Durchmesser steht im Berührungspunkte der Tangente senkrecht auf dieser. (Fig. 104.)

Beweis: Stände Radius ca nicht senkrecht auf der Tangente ed im Berührungspunkte a, so sei cf ⊥ ed, alsdann ist im △ acf der ∠ f = R; folglich ac > cf; was nicht möglich ist, da der Punkt f der Tangente außerhalb des Kreises liegt, mithin cf > ac ist; folglich muß der Radius ca ⊥ ed im Berührungspunkte a sein.

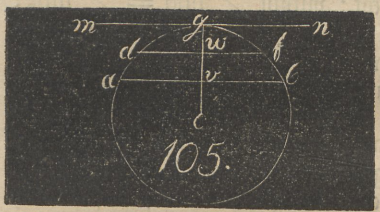
§ 130. Lehrsatz.

Ein Perpendikel, aus dem Berührungspunkte einer Tangente auf dieselbe errichtet, geht durch den Mittelpunkt des Kreises. (Fig. 104.)

Beweis: Gesetzt, das Perpendikel ab aus dem Berührungspunkt a der Tangente de gehe nicht durch den Mittelpunkt des Kreises, so liege dessen Mittelpunkt in g. Zieht man ga, so ist nach § 129. $\angle$ gae = R; es war aber $\angle$ bae = R gemacht; folglich müßte $\angle$ gae = bae sein, was nicht möglich ist; demnach muß das Perpendikel ab aus dem Berührungspunkte a der Tangente de durch den Mittelpunkt des Kreises gehen.

Zusatz. An einem Punkte eines Kreises kann nur Eine Tangente gezogen werden.

Anmerk. Um durch einen Punkt der Kreislinie eine Tangente zu legen, ziehe man nach diesem Punkte einen Halbmesser und errichte an dessen Endpunkte eine Senkrechte auf denselben.



§ 131. Lehrsatz.

Bogen, die in einem Kreise zwischen zwei parallelen Sehnen, oder zwischen einer Tangente und einer ihr parallelen Sehne liegen, sind einander gleich. (Fig. 105.)

Beweis: Es sei Sehne ab || df. Man ziehe den Radius cg senkrecht auf ab und setze am Ende der cg die Tangente mn; so ist nach § 77. 3. auch mn || ab || df; mithin

Bogen ag = Bogen bg (§ 126. 1.). Eben so ist aus demselben Grunde Bogen dg = Bogen fg.

folglich Bogen ag — Bogen dg = Bogen bg — Bogen fg, oder

Bogen ad = Bogen bf.

§ 132. Lehrsatz.

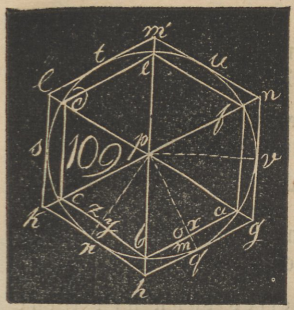
Die Seite eines regelmäßigen Sechsecks im Kreise ist dem Radius desselben gleich. (Fig. 107.)

Beweis: Es sei ab die Seite eines regelmäßigen Sechsecks im Kreise, so ist der Centriwinkel $agb = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$, mithin $\angle x + y = 120^\circ$, und da $\angle x = y$, so ist $\angle x = 60^\circ$, und $\angle y = 60^\circ$; demnach $\triangle$ agb gleichseitig und ab = ag. Es kann also der Radius eines Kreises 6 mal als Sehne in den Kreis getragen werden.

§ 133. Lehrsatz.

In und um einen Kreis kann ein regelmäßiges Polygon beschrieben werden. (Fig. 109.)

TÜ Raamatukogu



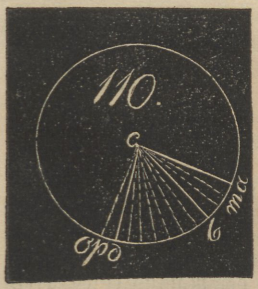
Beweis zu Satz 1. Man theile den Kreisumfang in so viel gleiche Theile, als das Polygon Seiten haben soll, hier in 6 gleiche Theile, und verbinde deren Theilungspunkte durch gerade Linien; so ist abcdef ein regelmäßiges sechsseitiges Polygon; denn die Bogen ab, bc, cd u. s. w. sind gleich, folglich auch ihre Sehnen ab, bc, cd u. s. w. Es werden die Dreiecke apb, bpc, cpd u. s. w. sich decken, und die Winkel abc, bcd cde, u. s. w. einander gleich sein; mithin ist abcdef ein regelmäßiges Polygon im Kreise.

Beweis zu Satz 2. Halbirt man die Bogen ab, bc, cd u. s. w. in den Punkten q, r, s u. s. w., und zieht an diesen Punkten die Tangenten gh, hk, kl u. s. w.; so ist ghklm'n ein regelmäßiges Polygon um den Kreis; denn

es ist Bogen bq = Bogen qg gemacht; mithin $\angle$ bpq = $\angle$ mpg; folglich nach § 82. $\triangle$ bpm $\cong$ $\triangle$ mpa, also $\angle$ x = o = R. Eben so zeigt man, daß $\angle$ y = z = R ist, u. s. w.

Da nach § 129. ein Halbmesser im Berührungspunkte der Tangente senkrecht auf dieser steht, so sind die Winkel bei q, r, s u. s. w. rechte; folglich sind die Seiten des äußern Polygons parallel denen des innern Polygons (§ 77. 2.); mithin die Winkel in beiden Polygonen einander gleich (§ 78. Zus. 2.). Da nun die Winkel des innern Polygons einander gleich waren, so sind auch die Winkel des äußern Polygons einander gleich. Es sind aber auch die Seiten des äußern Polygons einander gleich; denn $\triangle$ hpg $\cong$ $\triangle$ hpk $\cong$ $\triangle$ kpl u. s. w. (§ 84.); mithin gh = hk = kl u. s. w. Demnach ist das auf diese Weise um den Umkreis beschriebene Polygon ein regelmäßiges und zugleich dem eingeschriebenen ähnlich. (§ 48. und § 115.)

§ 134. Lehrsatz.



In einem Kreise oder in gleichen Kreisen verhalten sich die Mittelpunktswinkel wie ihre Bogen. (Fig. 110.)

Beweis: Es seien ab und bd die beiden Bogen, und $\angle$ acb und bcd ihre Mittelpunktswinkel.

Es sei $\angle$ acm, welcher zum gemeinschaftlichen Maße diene, viermal im Winkel acb und siebenmal im Winkel bcd enthalten. Da die Theile der beiden gegebenen Mittelpunktswinkel acb und bcd einander gleich sind; so werden auch nach § 125 a. die Theile der zu ihnen gehörigen Bogen einander gleich sein; folglich ist der Bogen ab das vierfache und der Bogen bd das siebenfache des Bogens am.

Demnach verhält sich $\angle$ acb : $\angle$ bcd = 4 : 7, und
Bogen ab : Bog. bd = 4 : 7;

folglich $\angle$ acb : $\angle$ bcd = Bog. ab : Bog. bd.

Hätten die Mittelpunktswinkel acb und bcd kein gemeinschaftliches Maß, d. h. wäre das Maß vom Winkel acb nicht auch das Maß vom ∠ bcd; so führt man in diesem Falle den Beweis auf gleiche Weise wie in § 107 a. und 108. über die incommensurablen Größen.

Zusatz 1. Da das Verhältniß der Bogen ab und bd dem Verhältnisse der Mittelpunktswinkel acb und bcd gleich ist; so folgt daraus, daß diese Bogen die natürlichen Maße der Mittelpunktswinkel sind, d. h. ein jeder Mittelpunktswinkel enthält einen andern, als Einheit angenommenen willkürlichen Winkel so oft, als der Bogen des als Einheit angenommenen Mittelpunktswinkels in dem Bogen des ganzen Mittelpunktswinkels enthalten ist. — Demnach ist man berechtigt, eine dieser Größen zum Maße der andern anzunehmen. Wir werden fortan den Bogen ab zum Maße des Mittelpunktswinkels acb gebrauchen.

Anmerk. Man unterscheide Bogen- und Winkelgrade. Die erstern sind in verschiedenen Kreisen verschieden, während die letztern immer gleich sind.

Zusatz 2. Was oben von der Vergleichung der Winkel mit ihren Bogen gesagt worden ist, findet auch in der Vergleichung der Ausschnitte mit ihren Bogen statt; denn die Ausschnitte in gleichen Kreisen, oder in demselben Kreise sind gleich, wenn es die Mittelpunktswinkel sind (§ 125 a.), und sie verhalten sich stets wie diese Winkel.

§ 135. Lehrsatz.

1) Ein jeder Peripheriewinkel hat zu seinem Maße die Hälfte des zwischen seinen Schenkeln befindlichen Bogens. Eben so hat 2) der aus einer Tangente und einer Sehne gebildete Winkel die Hälfte desjenigen Bogens zum Maß, der die Sehne nach der Seite des bezeichneten Winkels bespannt. (Fig. 111 a., b., c., d.)

Beweis zu Satz 1. Es finden hier drei Fälle statt, je nachdem der Mittelpunkt f des Kreises in dem einen Schenkel, zwischen, oder außerhalb beider Schenkel des Peripheriewinkels abc liegt.

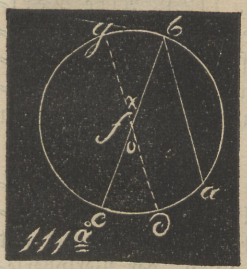


Fig. 111 a.

Erster Fall: (Fig. 111a.) Es liege der Mittelpunkt f in dem einen Schenkel bc des Peripheriewinkels abc.

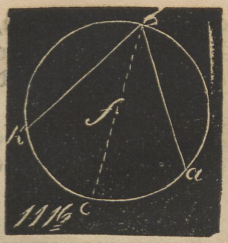
Man ziehe durch f die Gerade dg ∥ ab; so ist Bogen ad = Bog. bg (§ 131.), u. da ∠ o = x, so ist Bogen dc = Bog. bg (§ 125 b.)

folgl. Bogen ad = Bog. dc = ½ Bogen ac.

Es ist dg ∥ ab und daher ∠ o = Peripheriewinkel abc. (§ 78. 2.)

Nach § 134. Zus. 1. ist Bogen dc das Maß des Mittelpunktswinkels o; folglich ist auch Bogen dc oder ½ Bogen ac das Maß des Peripheriewinkels abc.

Zweiter Fall: (Fig. 111 b.) Es liege der Mittelpunkt f

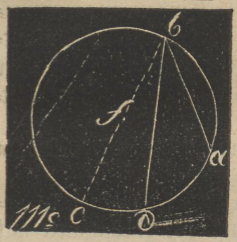


zwischen den beiden Schenkeln ab und bk des Peripheriewinkels abk.

Man ziehe durch den Mittelpunkt f die Linie bc, so ist nach dem ersten Fall

½ Bogen ac das Maß von ∠abc, u. eben so
½ Bogen ck das Maß von ∠cbk

folgl. ist ½ Bogen ac + ½ Bogen ck, oder ½ Bogen ak das Maß von den Winkeln abc + cbk oder dem Winkel abk.

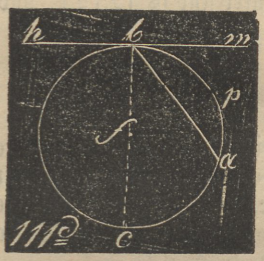


Dritter Fall: (Fig. 111 c.) Es liege der Mittelpunkt f außerhalb der beiden Schenkel ab und bd des Peripheriewinkels abd.

Man ziehe durch f die Linie bc, so ist nach dem ersten Falle

½ Bogen ac das Maß des ∠abc, und
½ Bogen dc das Maß des ∠dbc;

folglich ½ Bogen ac — ½ Bogen dc das Maß vom ∠abc — ∠dbc, oder ½ Bogen ad das Maß vom ∠abd.



Beweis zu Satz 2. (Fig. 111 d.) Man ziehe durch den Berührungspunkt b der Tangente mh und durch den Mittelpunkt f die Gerade bc; so ist nach § 129.

∠mbc = R, und dieser hat zum Maß den Bogen eines Rechten od. ½ Bog. bpc, (da der ganze Bogen bpc 2 Rechte in sich faßt).

Es hat ∠abc zum Maß ½ Bogen ac;

folglich hat ∠mbc — ∠abc zum Maß ½ Bogen bpc — ½ Bog. ac = ½ (Bogen bpc — Bogen ac), oder ∠mba hat zum Maß ½ Bogen bpa; was zu beweisen war.

Zusatz 1. (Fig. 112.) Alle Peripheriewinkel e, f, g, die auf einerlei Bogen ab stehen, sind einander gleich; denn sie haben alle den halben Bogen ab, auf dem sie stehen, zum Maß.

Zusatz 2. (Fig. 112.) Der Mittelpunktswinkel acb ist doppelt so groß, als ein Peripheriewinkel, wenn beide auf einerlei Bogen ab stehen; denn es hat der Mittelpunktswinkel acb den ganzen Bogen ab zum Maß, der Peripheriewinkel e oder f oder g, den halben Bogen ab zu seinem Maß; folglich ist ∠acb = 2 ∠e = 2 ∠f = 2 ∠g, mithin ∠e = f = g.

Zusatz 3. (Fig. 113.) Der Peripheriewinkel abf, der auf dem Durchmesser af steht, ist ein Rechter; denn er hat zu seinem

Maß den halben Umkreis = 2 R; folglich hat ∠ abf zum Maß Einen Rechten.

Zusatz 4. (Fig. 114.) Die gegenüberstehenden Winkel einer vierseitigen Figur im Kreise betragen zwei Rechte; denn es hat ∠ c zum Maß ½ Bogen bda,
und ∠ d zum Maß ½ Bogen bca;

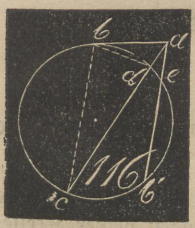
folgl. haben ∠ c + d zum Maß ½ Bogen bda + ½ Bogen bca = ½ Umkreis = 2 R.

Zusatz 5. (Fig. 115.) Der spitze Winkel bcd, den eine Sehne mit einer Tangente am Berührungspunkte macht, ist dem Peripheriewinkel a gleich, dessen Schenkel auf dem kleinern Bogen bgc stehen; der stumpfe Winkel bcf hingegen ist dem Peripheriewinkel bgc gleich, dessen Schenkel auf dem größern Bogen cab stehen; denn es hat
∠ a zum Maß ½ Bogen bc, und
∠ bcd zum Maß ½ Bogen bc (§ 135. 2.);

folglich ∠ bcd = ∠ a. Eben so ist ∠ bcf = ∠ bgc.

§ 136. Lehrsatz.

Wenn von einem Punkte außerhalb eines Kreises zwei gerade Linien nach dem Kreise gehen, von welchen die eine den Kreis berührt und die andere in dem hohlen Bogen desselben endigt; so ist die Tangente die mittlere Proportionallinie zwischen der ganzen Linie und ihrem äußern Abschnitte. (Fig. 116.)



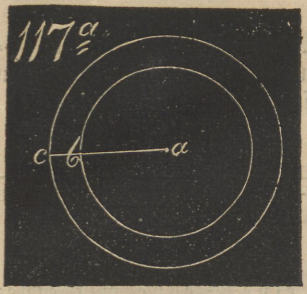
Beweis: Es sei ab die Tangente und ac die Secante aus dem gegebenen Punkte a außerhalb des Kreises. Zu beweisen ist, daß ac : ab = ab : ad.

Man ziehe bc und bd, so ist △ abc ∽ △ abd, weil ∠ a = a, ∠ abd = ∠ c (§ 135. Zus. 5.); folglich ac : ab = ab : ad (§ 110.), oder das Rechteck aus ac und ad ist gleich dem Quadrate über ab.

Zusatz. Wenn zwei von a ausgehende Secanten ac und ab′ sich im hohlen Bogen des Kreises endigen, so verhalten sie sich umgekehrt, wie ihre äußern Abschnitte; denn man ziehe eine Tangente ab, so ist
ab′ : ab = ab : ae, und daher ab . ab = ab′ . ae; ferner
ac : ab = ab : ad, und daher ab . ab = ac . ad; mithin
ab′ . ae = ac . ad,

folglich a b′ : ac = ad : ae, oder das Rechteck aus ab′ und ae = Rechteck aus ac und ad.

§ 137. Lehrsatz.



Die Peripherien zweier Kreise verhalten sich wie ihre Radien oder Durchmesser. (Fig. 117a.)

Beweis: Man bezeichne die Peripherien der mit ab und ac beschriebenen Kreise durch p, P, deren Radien durch r, R, und deren Durchmesser durch d, D.

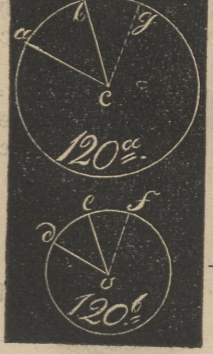
Theilt man die Peripherien beider Kreise in gleich viele, unendlich kleine und gleiche Theile*), und betrachtet man diese Bogen als gerade Linien; so können beide Kreise als ähnliche Polygone von unendlich kleinen Seiten angesehen werden (§ 115. 1.). Da nun die Umfänge ähnlicher Polygone sich nach § 115. 2. verhalten, wie zwei gleichliegende Seiten; so ist

$$p : P = ab : ac \text{ oder } = r : R = d : D. \text{ Folglich } \frac{p}{d} = \frac{P}{D}.$$

Hieraus ergibt sich die überaus merkwürdige und wichtige Wahrheit, daß in allen Kreisen das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie ein und dasselbe ist, oder, wie man auch zu sagen pflegt, daß dieses Verhältniß ein beständiges Verhältniß ist. Diese für alle Kreise gleiche Verhältnißzahl wird π (pi) oder auch die Ludolph'sche Zahl genannt. Es ist also jedesmal $\frac{p}{d} = \pi$; folglich $p = d \cdot \pi = 2r \cdot \pi$. Das Verhältniß der Peripherie zu ihrem Durchmesser, oder die Zahl π kann man nur näherungsweise angeben. Archimedes († 210 v. Chr.) fand, daß diese Verhältnißzahl zwischen $3^{10}/_{70}$ und $3^{10}/_{71}$ liege. Demnach ist $^{22}/_{7}$ eine Zahl, die der Verhältnißzahl π sich schon sehr nähert. Adrian Metius fand für π den viel genauern Werth $^{355}/_{113}$. Andere fanden für π die Zahl $3{,}_{14159265\ldots}$

Wie π gefunden wird, soll in dem § 139. gezeigt werden.

§ 138. Lehrsatz.



Aehnliche Bogen zweier Kreise verhalten sich wie ihre Radien. (Fig. 120a. und b.)

Beweis: Es heißen P, p die Peripherien, R, r die Radien, und ab, de die ähnlichen Bogen beider Kreise. Man errichte $gc \perp ca$, und $fo \perp od$, so ist $\angle gca = \angle fod = R$. Da die Bogen ab und de ähnlich gegeben sind, so sind nach § 57. die Winkel acb und doe einander gleich. Es verhält sich nach § 134

*) Unendlich kleine Größe nennt man eine wirkliche Größe, die aber kleiner ist, als jede noch so kleine gegebene Größe. Aus solchen bestehend kann man die Bestandtheile der Peripherie betrachten.

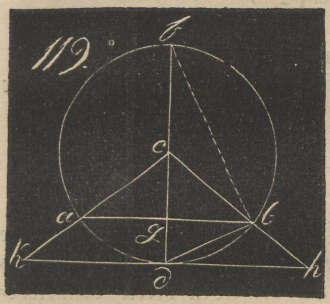
Bog. ab : Bog. ag = ∠acb : ∠acg, und
Bog. de : Bog. df = ∠doe : ∠dof. Da

∠acg = dof = R ist, so ist Bog. ab : Bog. de = Bog. ag : Bog. df. Und
P : p = ¼ P : ¼ p. Da

Bog. ag = ¼P, u. df = ¼p; folgl. P : p = Bog. ab : Bog. de.
Nach § 137. P : p = R : r:

folglich Bog. ab : Bog. de = R : r.

§ 139. Aufgabe.



Aus der gegebenen Seite eines in den Kreis eingeschriebenen regelmäßigen Polygons; 1) die Seite eines in denselben Kreis eingeschriebenen regelmäßigen Polygons von der doppelten Seitenzahl, und 2) die Seite eines um denselben Kreis beschriebenen regelmäßigen Polygons von gleicher Seitenzahl mit dem innern Polygon zu finden. (Fig. 119.)

Auflösung und Beweis zu Satz 1. Es sei ab die Seite irgend eines in den Kreis eingeschriebenen regelmäßigen Polygons. Fällt man nun aus dem Mittelpunkt c die Senkrechte cg auf ab, so wird durch dieselbe die Sehne ab und der Bogen adb halbirt (§ 126.); also ist die Sehne bd die Seite des in denselben Kreis eingeschriebenen regelmäßigen Polygons von doppelt so großer Seitenzahl, als ab. Zieht man nun cb und fb, so ist △ bdf rechtwinklig (§ 135. Zusatz 3.); folglich verhält sich nach § 113. 2.

dg : db = db : df

folglich $db^2 = df \cdot dg$, oder

I. $db = \sqrt{2r \cdot dg}$. (wo r. der Radius ist.)

Es ist aber $dg = r - cg$, und

$cg = \sqrt{bc^2 - gb^2} = \sqrt{r^2 - gb^2}$ (§ 103.);

folglich $dg = r - \sqrt{r^2 - gb^2}$. Diesen Werth in I. gesetzt, gibt $db = \sqrt{2r \cdot (r - \sqrt{r^2 - gb^2})}$.

Setzt man für r = 1, für ab = m, und demnach für $gb = \frac{m}{2}$; so ist

II. $db = \sqrt{2\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{m}{2}\right)^2}\right)} = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{m}{2}\right)^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - m^2}}$.

Diese Formel lehrt, wie man aus der Seite ab des in einen Kreis eingeschriebenen Polygons die Seite des gleichfalls in denselben eingeschriebenen Polygons von doppelter Seitenzahl findet.

Construction und Beweis zu Satz 2. Zieht man an dem Punkte d die Linie kh ‖ ab und verlängert die Radien ca und cb bis sie die

Tangente kh schneiden; so ist kh die Seite eines um den Kreis beschriebenen regelmäßigen Polygons von gleicher Seitenzahl mit dem innern Polygon. (§ 133. 2.)

Da kh ∥ ab ist, so ist △ bcg ∽ △ hcd; folglich verhält sich

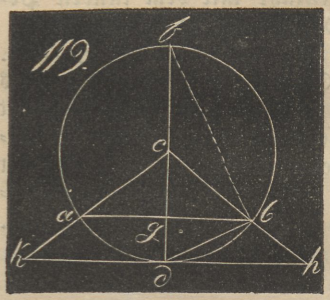
$$cg : gb = cd : dh, \text{ oder, da } cg = \sqrt{r^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2},$$

$$\sqrt{r^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2} : \frac{m}{2} = r : dh$$

$$\text{folglich } dh = \frac{m \cdot r}{2\sqrt{r^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2}}; \text{ mithin}$$

$$2\,dh \text{ oder } kh = \frac{m \cdot r}{\sqrt{r^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2}}.$$ Setzt man auch hier

$$\text{für } r = 1; \text{ so ist III. } kh = \frac{m}{\sqrt{1 - \left(\frac{m}{2}\right)^2}} = \frac{2m}{\sqrt{4 - m^2}}.$$



Diese Formel lehrt, wie man aus der Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Polygons die Seite des um denselben Kreis beschriebenen regelmäßigen Polygons von gleicher Seitenzahl findet.

Durch die Formel II. und III. ist uns ein Mittel geboten, das genährte Verhältniß des Durchmessers eines Kreises zu seiner Peripherie, oder die früher erwähnte Verhältnißzahl π zu finden. Dieß geschieht auf folgende Weise.

Beschreibt man in und um einen Kreis zwei regelmäßige Polygone von gleicher Seitenzahl, so ist der Umfang des innern Polygons kleiner, und der Umfang des äußern Polygons größer, als die Peripherie des Kreises (§ 90. Zusatz.). Die Grenzen dieser beiden Polygone dürfen daher nur enger zusammengezogen werden, wodurch sich sodann auch die Umfänge beider Polygone mehr und mehr nähern, und ihr Unterschied so klein werden kann, als man nur immer will.

Dieser Zweck wird erreicht, wenn man die Seitenzahl des innern und äußern Polygons verdoppelt, wodurch der Umfang des innern Polygons größer, und der des äußern Polygons kleiner wird, als der Umfang jedes einfachen derselben; mithin nähern sich die Umfänge beider Polygone schon bei der ersten Verdoppelung ihrer Seitenzahl um ein Bedeutendes. Setzt man nun auf diese Weise die Verdoppelung der Seitenzahl beider Polygone fort, so nähern sich dann ihre Umfänge nicht nur einander immer mehr und mehr, sondern auch der Peripherie des zwischen ihnen liegenden Kreises und fallen endlich, bei gehörig fortgesetzter Verdoppelung ihrer Seiten, so gut wie zusammen.

Um nun die Zahlenwerthe für die einzelnen Seiten der innern und äußern Polygone zu finden, wenn der Radius des Kreises = 1 angenommen wird, nehme man an, daß ab (Fig. 119.) die Seite eines regelmäßigen innern Sechsecks sei; dann ist (nach § 132.) ab = r = 1; folglich ist

nach Formel II. die Seite des innern 6 Ecks = $1_{,000000}$, also der Umfang des innern 6 Ecks = $6 \times 1_{,000000}$ = ...

Nach Formel III. ist die Seite des äußern 6 Ecks = $\frac{2}{\sqrt{4-1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1_{,154702}$; also der Umfang des äußern 6 Ecks = $6 \times 1_{,154702}$ = ...

Nach Formel II. ist die Seite des innern 12 Ecks = $\sqrt{\left(2-\sqrt{4-1^2}\right)} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ = $0_{,517638}\ldots$; also der Umfang des innern 12 Ecks $12 \times 0_{,517638}\ldots$ = ...

Nach Formel III. ist die Seite des äußern 12 Ecks = $\frac{2 \times 0_{,517638}}{\sqrt{(4-(0_{,517638})^2)}} = 0_{,535898}\ldots$; also der Umfang des äußern 12 Ecks = $12 \times 0_{,535898}\ldots$ = ...

Fährt man auf diese Weise fort, den für die Seite eines innern und äußern regelmäßigen Polygons von gleicher Seitenzahl gefundenen Zahlenwerth in die Formel II. und III., anstatt m zu setzen, so erhält man

	Umfang des innern Polygons.	Umfang des äußern Polygons.
	$6_{,000000}$	
	. . . . .	$6_{,928212}\ldots$
	$6_{,211657}\ldots$	
	. . . . .	$6_{,430780}\ldots$
den Umfang eines 24 Ecks =	$6_{,265257}\ldots$	$6_{,319320}\ldots$
den Umfang eines 48 Ecks =	$6_{,278700}\ldots$	$6_{,292172}\ldots$
den Umfang eines 96 Ecks =	$6_{,282064}\ldots$	$6_{,285429}\ldots$
u. s. w. u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.
Und endlich den Umfang eines 12288 Ecks =	$6_{,2831852}\ldots$	$6_{,2831854}\ldots$

Aus dieser Darstellung ersieht man, daß die Umfänge der ein- und umschriebenen Polygone von gleicher Seitenzahl sich einander immer mehr und mehr nähern. Die Umfänge der beiden Polygone von 12288 Seiten unterscheiden sich nur in der 7ten Decimalstelle, und da der Umfang des Kreises zwischen beiden in der Mitte liegt, so wird dessen Länge sein = $6_{,2831853}\ldots$, wenn der Radius des Kreises = 1 ist. Das Verhältniß des Radius zu der Peripherie eines Kreises ist also = $1 : 6_{,2831853}\ldots$, oder das Verhältniß des Durchmessers zu der Peripherie eines Kreises = $2 : 6_{,2831853} = 1 : 3_{,14159265}\ldots$

B. Von dem Verhältnisse der Kreisflächen und von der Berechnung derselben.

§ 140. Lehrsatz.

Die Flächen zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Radien.

Beweis: Es seien R, r die Radien, und K, k die Flächen beider Kreise. Betrachtet man nach § 137. die beiden Kreise als ähnliche Polygone von unendlich kleinen Seiten, und da ähnliche Polygone sich nach § 120., ihrem Flächeninhalte nach, wie die Quadrate zweier gleichliegenden Seiten, also auch wie die Quadrate der Radien beider Kreise, verhalten; so wird sein

$$K : k = R^2 : r^2, \text{ was zu beweisen war.}$$

Zusatz. Eben so kann man ähnliche Sectoren zweier Kreise als ähnliche Polygone betrachten; demnach verhalten sich nach § 120. die Flächen ähnlicher Sectoren auch wie die Quadrate der Radien, und somit auch (nach § 140.) wie die Flächen der ganzen Kreise.

§ 141. Lehrsatz.

Der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich der Hälfte des Produkts seines Umfanges in den Halbmesser desselben.

Beweis: Betrachtet man den Kreis als ein regelmäßiges Polygon von unendlich kleinen Seiten und zieht aus dem Mittelpunkt desselben nach den Endpunkten dieser Seiten Radien; so wird der Flächeninhalt des Kreises ebenfalls in unendlich viele, einander deckende Dreiecke von gleicher Höhe zerlegt, deren Summe dem Flächeninhalte des Polygons, mithin auch dem Flächeninhalte des Kreises gleich ist.

Da die Radien des Kreises die Schenkel dieser unendlich vielen gleichschenkligen Dreiecke bilden, und jene Schenkel so nahe an einander stehend gedacht werden können, daß die Höhen der Dreiecke mit den Radien so gut wie zusammenfallen; so kann man ohne merklichen Fehler die Höhen aller dieser Dreiecke gleich dem Radius (r) und deren Grundlinien zusammen gleich der Peripherie (p) des Kreises annehmen. Bezeichnet man die unendlich kleinen Grundlinien dieser Dreiecke, der Reihe nach, mit g, g', g'', g''' u. s. w., so ist die Summe der Flächeninhalte aller jener Dreiecke, mithin auch der Flächeninhalt des Kreises

$$= \frac{r}{2} \cdot g + \frac{r}{2} \cdot g' + \frac{r}{2} \cdot g'' + \frac{r}{2} \cdot g''' \text{ 2c. 2c.}$$

$$= \frac{r}{2} (g + g' + g'' + g''' + \text{2c. 2c.})$$

$$= \frac{r}{2} \cdot p, \text{ oder } = \tfrac{1}{2} p \cdot r; \text{ was zu beweisen war.}$$

Nach § 137. ist $p = 2r \cdot \pi$; folglich

der Flächeninhalt des Kreises $= \frac{r}{2} \times 2r \cdot \pi = r^2 \cdot \pi$, d. h. der Flächeninhalt eines Kreises ist = dem Quadrate seines Radius, multiplicirt mit der Verhältnißzahl $\pi = 3{,}1415926 \ldots$

Zusatz 1. Eben so ist der Flächeninhalt eines Kreissectors gleich dem halben Produkte des zu ihm gehörigen Bogens in den Radius desselben Kreises, also = ½ Sectorbogen × r (Radius); denn theilt man den Bogen des Sectors in sehr kleine Theile und zieht aus dem Mittelpunkt des Kreises nach den Theilungspunkten gerade Linien, so wird die Sectorfläche in lauter Dreiecke von gleicher Höhe (= r) zerlegt, deren Summe den Flächeninhalt des Sectors ausmacht. Nennt man die Grundlinien dieser sehr kleinen gleichschenkligen Dreiecke entsprechend mit g, g′, g″, g‴ 2c. 2c.; so ist die Summe der Flächeninhalte aller dieser Dreiecke, mithin auch der Flächeninhalt

$$\text{des Sectors} = \frac{r}{2} \cdot g + \frac{r}{2} \cdot g' + \frac{r}{2} \cdot g'' + \frac{r}{2} \cdot g''' + \text{2c. 2c.}$$

$$= \frac{r}{2}(g + g' + g'' + g''' + \text{2c. 2c.})$$

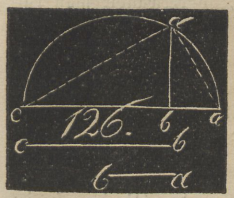
$$= \frac{r}{2} \times \text{Sectorbogen, oder} = \tfrac{1}{2}\,\text{Sectorbogen} \times r.$$

Zusatz 2. Um den Flächeninhalt eines Kreissegments zu finden, ziehe man von dem Flächeninhalte seines Sectors den Inhalt des zu diesem Sector gehörigen Dreiecks ab.

Zusatz 3. Um den Flächeninhalt desjenigen Theils eines Kreises zu finden, der zwischen 2 Sehnen liegt, ziehe man den Flächeninhalt des kleinern Segments vom Flächeninhalte des größern Segments ab.

Zusatz 4. Um den Flächeninhalt eines Ringes, d. h. des von zwei concentrischen Kreisen eingeschlossenen Raumes zu berechnen, ziehe man den Flächeninhalt des kleinern Kreises von dem des größern Kreises ab. Heißen R und r die Radien dieser Kreise, so ist der Flächeninhalt des Ringes = $R^2 \cdot \pi - r^2 \cdot \pi = (R^2 - r^2) \cdot \pi$.

Anmerk. Den Flächeninhalt eines Kreises in ein Quadrat verwandeln, nennt man die Quadratur des Kreises.



§ 142. Aufgaben zum 6. Abschnitt.

1) Die mittlere Proportionallinie zwischen zwei gegebenen Linien ab und bc zu finden. (Fig. 126.)

Man setze ab und bc in gerader Linie an einander und schlage über deren Summe ac einen Halbkreis, errichte in b die Senkrechte bd; so ist bd die gesuchte mittlere Proportionale.

Beweis: Man ziehe ad und cd, so ist ∠adc = R (§ 135. Zus. 3.), und da db ⊥ ac ist, so ist △abd ∽ △bcd; folglich ab : bd = bd : bc. (§ 113. 3.)

Anmerk. Auf diesem Satze beruht das Verfahren, die in § 106. enthaltene Aufgabe 7. (nebst 3 Zusätzen) allgemeiner und kürzer, als dort geschehen, zu lösen, wie es sogleich in der folgenden Aufgabe (Nr. 2.) gezeigt werden soll.

2) Es soll ein Quadrat construirt werden, das 2, 3, 4, 5 2c. Mal größer sei, als ein gegebenes Quadrat P.

Man suche nach Aufgabe 1 zwischen der Seite des gegebenen Quadrats und ihrer 2, 3, 4, 5, u. s. w. fachen Länge die mittlere Proportionale und

beschreibe mit derselben ein Quadrat; so wird dieses respective 2, 3, 4, 5 u. s. w. Mal größer sein, als das gegebene Quadrat P.

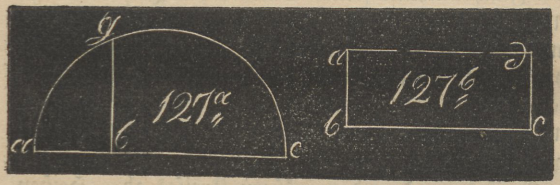
Beweis. Wäre a die Seite des Quadrats P, und das gesuchte Quadrat (x) soll n mal größer sein, als das gegebene Quadrat; so suche man nach Aufgabe 1. zwischen a und $n \times a$ die mittlere Proportionale. Diese sei b, und das mit der Linie b verzeichnete Quadrat (x) wird sodann n mal größer sein, als das gegebene Quadrat P; denn es verhält sich hier

$$a : b = b : n \times a; \text{ folglich}$$
$$a : n \times a = a^2 : b^2.\text{*) Aber}$$
$$\square P : \square x = a^2 : b^2 \text{ (§ 120.)}$$

$$\square P : \square x = a : n \times a = 1 : n$$

folglich $\square x = n \times \square P$.

Dasselbe Verfahren wird auch angewandt, wenn ein Quadrat beschrieben werden soll, das $\frac{3}{5}$ so groß sei, als ein gegebenes Quadrat P, indem man in diesem Falle die Seite des gegebenen Quadrates P in 5 gleiche Theile theilt, und zwischen diesen 5 und 3 Theilen derselben die mittlere Proportionale sucht und über diese ein Quadrat beschreibt, welches sodann $\frac{3}{5}$ des gegebenen Quadrats P sein wird. — Der Beweis dieses Satzes ist dem obigen ganz gleich.



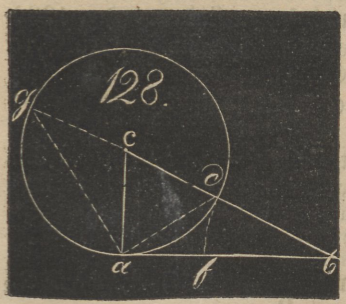
3) Ein gegebenes Rechteck abcd in ein Quadrat von gleichem Flächeninhalt zu verwandeln. (Fig. 127 a. b.)

Man suche nach Aufgabe 1. zwischen ab und bc d. i. zwischen der Höhe und Grundlinie des Rechtecks die mittlere Proportionallinie bg; so ist nach § 113. 3.

$ab : bg = bg : bc$; folglich $ab \times bc = bg^2$; also

ist das Quadrat über bg = Parallelogramm abcd (§ 107 a.).

Anmerk. 1. Ist das gegebene Parallelogramm schiefwinklig, so verwandle man dasselbe in ein Rechteck von gleicher Höhe und Grundlinie mit jenem, und verfahre dann, wie oben gelehrt.



Anmerk. 2. Da nach Anmerkung in § 106. Aufgabe 4. jede beliebige geradlinige Figur in ein Parallelogramm verwandelt werden kann, so kann auch eine jede geradlinige Figur in ein Quadrat von gleichem Flächeninhalt verwandelt werden.

4) Eine gegebene gerade Linie ab in stetiger Proportion zu theilen, d. h. so zu theilen, daß sich die ganze Linie ab zu ihrem größern Theile bf verhalte, wie dieser zum kleinern Theile af derselben. (Fig. 128.)

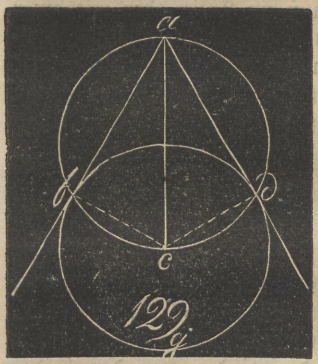
*) Nach dem Lehrsatze der Proportionen: In einer stetigen geometrischen Proportion verhält sich das erste Glied zum vierten Gliede, wie das Quadrat des ersten zum Quadrat des zweiten Gliedes.

Man errichte in a der gegebenen Linie ab die Senkrechte ac = ½ ab; beschreibe aus c mit ac einen Kreis, ziehe cb und mache bf = bd, so ist ab : bf = bf : fa.

Beweis. Man verlängere bc bis g und ziehe ga und ad; so ist ∠ dab = ∠ g (§ 135. Zus. 5.), und ∠ b = ∠ b; folglich △ abd ∽ △ abg, und demnach verhält sich nach § 136.

gb : ab = ab : bd, woraus folgt, daß
gb — ab : ab = ab — bd : bd, oder, da ab = gd,
bd : ab = af : bd, oder, die Glieder der Verhältnisse verwechselt,
ab : bd = bd : af, oder, da bd = bf ist,
ab : bf = bf : af; was zu beweisen war.

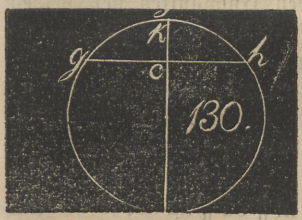
Anmerk. Dieser Satz heißt der „goldene oder göttliche Schnitt" der Alten (sectio aurea seu divina).



5) Von einem außerhalb eines Kreises gegebenen Punkte a an diesen Kreis eine Tangente zu legen. (Fig. 129.)

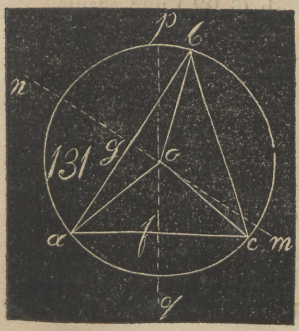
Man verbinde den Punkt a mit dem Mittelpunkt c des Kreises; beschreibe mit ½ ac einen Kreis, und wo dieser den gegebenen Kreis in d schneidet, ziehe man ad; so ist ad die verlangte Tangente an dem gegebenen Kreise. Denn zieht man cd, so ist im kleinern Kreise ∠ adc ein Peripheriewinkel auf dessen Durchmesser ac, mithin ∠ adc ein Rechter; folglich ad ⊥ dc; also ad eine Tangente am Kreise fgd. (§ 128.)

Eben so ist auf der andern Seite des Kreises die af eine Tangente an demselben und af = ad. (§ 103.)



6) Einen gegebenen Kreisbogen gkh zu halbiren. (Fig. 130.)

Man ziehe die Sehne gh, halbire sie und setze in ihrer Mitte c die Senkrechte hk; so theilt diese den Bogen gkh in zwei gleiche Theile nach § 126. 3.

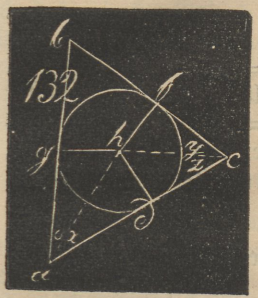


7) Um ein Dreieck abc einen Kreis zu beschreiben. (Fig. 131.)

Man halbire zwei Seiten ab und ac des gegebenen Dreiecks und setze in deren Mitte g und f die Senkrechten mn und pq, und ziehe aus ihrem Durchschnittspunkte o die Linien oa, ob, oc; so ist △ afo ≅ △ cfo (da af = fc gemacht, ∠ afo = ∠ cfo = R); mithin ao = co. Eben so ist △ ago ≅ △ bgo, mithin

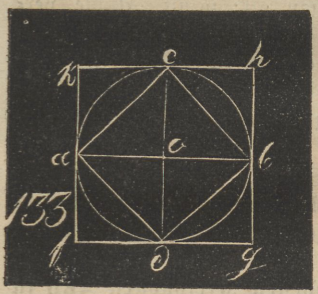
ao = ob = co. Beschreibt man mit ao einen Kreis, so muß derselbe auch durch die Punkte c und b gehen.

Anmerk. Die Aufgabe: durch 3 Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, einen Kreis zu legen — wird auf gleiche Weise gelöset, wenn man die 3 Punkte durch Gerade zu einem Dreiecke verbindet.



8) In ein gegebenes Dreieck abc einen Kreis zu beschreiben. (Fig. 132.)

Man halbire zwei Winkel a und c durch ah und ch, und aus deren Durchschnittspunkt h fälle man auf die 3 Seiten des Dreiecks die Senkrechten hd, hg, hf; so werden diese Linien einander gleich sein; denn △ agh ≅ △ adh (§ 84. Zus. 2.), mithin hd = hg. Eben so ist △ cdh ≅ cfh (§ 84. Zus. 2.); folglich hd = hf = hg. Demnach muß ein Kreis, der mit einer dieser Linien beschrieben wird, auch durch die Endpunkte der beiden andern gehen, und da die Winkel bei d, g und f Rechte sind, so sind die 3 Seiten des Dreiecks senkrecht an den Endpunkten der Radien, folglich Tangenten am Kreise (§ 128.), und demnach der Kreis dfg in das gegebene Dreieck abc eingeschrieben.



9) In und um einen Kreis ein Quadrat zu beschreiben. (Fig. 133.)

Man ziehe zwei auf einander senkrechte Durchmesser ab, cd, und verbinde deren Endpunkte durch die Geraden ad, db, bc, ca; so erhält man das eingeschriebene Quadrat acbd. Errichtet man an den Endpunkten der beiden Durchmesser Senkrechte, so ergibt sich das umschriebene Quadrat fghk.

Beweis zu Satz 1. Da die Winkel um o Rechte sind, so sind die Sehnen ac, cb, bd, da einander gleich (§ 125a.); ferner sind die Winkel bei a, b, c, d Rechte (§ 135. Zus. 3.); folglich acbd ein Quadrat.

Beweis zu Satz 2. Da kh ∥ ab ∥ fg, und kf ∥ cd ∥ hg ist; so ist fghk ein Parallelogramm (§ 93.); folglich kh = fg = ab (§ 93.) und ebenso

kf = hg = cd = ab

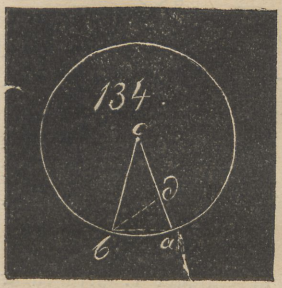
folglich kh = fg = kf = hg, und da die Winkel fab und kcd Rechte sind, so sind die Winkel bei k, f, g, h auch Rechte, mithin fghk ein Quadrat um den Kreis.

Zusatz 1. Um ein regelmäßiges 8 Eck in einen Kreis zu beschreiben, halbire man die Mittelpunktswinkel des Quadrats im Kreise und verbinde die Theilungspunkte der Peripherie durch Gerade. Auf gleiche Weise verfährt man, um aus einem 8 Eck, ein 16 Eck u. s. w. zu construiren.

Zusatz 2. Wenn man einen Kreis in und um ein Quadrat beschreiben will, so ziehe man in dem Quadrate die beiden Diagonalen, die sich gegenseitig

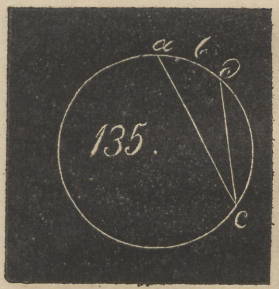
halbiren (§ 93. Zus. 2.). Es ist sodann deren Durchschnittspunkt o der Mittelpunkt der in und um das Quadrat zu beschreibenden Kreise.

10) Ein regelmäßiges Zehneck in einen Kreis zu beschreiben. (Figur 134.)



Man theile den Radius ac des gegebenen Kreises nach Aufgabe 4. in stetige Proportion, so ist dessen größerer Theil dc die Seite des verlangten Zehnecks im Kreise.

Beweis: Es sei ab die Seite und acb der Mittelpunktswinkel eines regelmäßigen Zehnecks im Kreise; dann ist $\angle$ acb = 36°; folglich $\angle$ a = 72°, und $\angle$ b = 72°. Halbire $\angle$ b, so ist $\angle$ cbd = 36°, und $\angle$ abd = 36°, und demnach db = dc. Im $\triangle$ abd war $\angle$ a = 72°, $\angle$ abd = 36°; folglich $\angle$ bda = 72°; also ab = db = dc. Es sind $\triangle$ abd und $\triangle$ abc gleichwinklig und daher ähnlich (§ 110.); woraus folgt, daß ad : ab = ab : ac, und da ab = dc bewiesen ist; so ist ad : dc = dc : ac. Es ist also jedesmal die Seite ab eines regelmäßigen Zehnecks = dc, d. i. = dem größern Theile des durch die sectio divina in stetige Proportion getheilten Radius des gegebenen Kreises.



Zusatz. Um ein regelmäßiges Fünfeck in einen Kreis zu beschreiben, hat man nur zwei Punkte eines regelmäßigen Zehnecks im Kreise einen um den andern durch Gerade zu verbinden.

11) Ein regelmäßiges 15 Eck in einen Kreis zu beschreiben. (Fig. 135.)

Es sei ac die Seite eines gleichseitigen Dreiecks, und dc die Seite eines regelmäßigen Fünfecks im Kreise; so ist

Bogen adc = $\frac{1}{3}$ der Peripherie, und
Bogen dc = $\frac{1}{5}$ der Peripherie des Kreises; folglich
Bog. adc — Bogen dc = $(\frac{1}{3} - \frac{1}{5})$ der Peripherie, oder
Bogen ad = $\frac{2}{15}$; folglich $\frac{1}{2}$ Bogen ad oder Bogen ab, als die Hälfte vom Bogen ad = $\frac{1}{15}$ der Peripherie des gegebenen Kreises.

12) Den Radius eines Kreises zu finden, dessen Flächeninhalt n mal so groß sei, als der eines gegebenen Kreises, dessen Radius r ist.

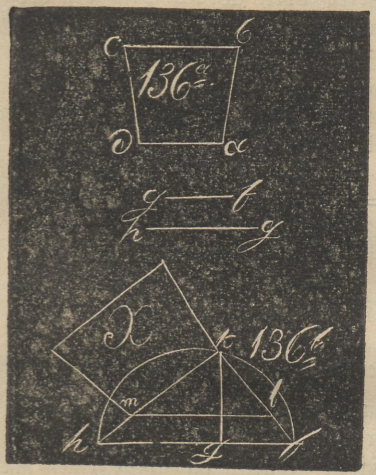
Es sei der gesuchte Radius = x, dann ist der Flächeninhalt des neuen Kreises = $x^2 . \pi$. (§ 141.) Da der Flächeninhalt des neuen Kreises n mal so groß sein soll, als der des gegebenen Kreises, dessen Inhalt = $r^2 . \pi$ ist; so muß $x^2 . \pi = n \times r^2 . \pi$ sein. Dividirt man beide Theile durch π, und zieht dann die Quadratwurzel aus beiden Theilen; so erhält man $x = r \times \sqrt{n}$.

13) Die Länge eines Bogens ab von n Graden zu finden, wenn der Halbmesser des Kreises, von dem der gegebene Bogen ein Theil ist, = r ist.

Nach § 134. verhält sich

$360^\circ : n^\circ =$ ganze Peripherie : x (die gesuchte Länge des Bogens)

folglich $x = \frac{n^\circ \times \text{ganze Peripherie}}{360^\circ} = \frac{n^\circ \times 2r \cdot \pi}{360^\circ} = \frac{n^\circ \times r \cdot \pi}{180^\circ}$.



14) Eine Figur zu beschreiben, die einer gegebenen Figur abcd ähnlich sei und sich zu derselben verhalte, wie zwei gegebene Linien fg und gh, oder wie zwei gegebene Zahlen m und n. (Fig. 136. a. und b.)

Man suche nach Aufgabe 1. zwischen fg und gh, oder zwischen zwei Linien, die sich verhalten, wie die Zahlen m : n, die mittlere Proportionallinie gk, ziehe ferner kf, kh; mache kl = ad, und ziehe lm ‖ fh; so ist km die gleichliegende Seite, worauf man nach § 117. 2. eine Figur X zu construiren hat, die der gegebenen abcd ähnlich ist.

Beweis: Da lm ‖ fh, so ist △ klm ∽ △ kfh; folglich

$kf : kh = kl : km$, und daher auch

$kf^2 : kh^2 = kl^2 : km^2$. Nach § 119 b. verhält sich

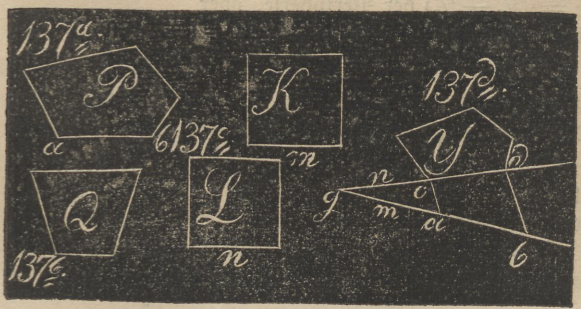
$kf^2 : kh^2 = fg : gh$

folglich $kl^2 : km^2 = fg : gh$. Es verhält sich nach § 120.

$kl^2 : km^2 =$ Figur abcd : Figur X

folglich Figur abcd : Figur X = fg : gh, oder auch = m : n.

Wäre kf kleiner ad, so verlängere man kf, und trage ad auf dieselbe, und ziehe dann aus deren Endpunkte eine Parallele mit fh, und verfahre sodann, wie oben gelehrt.



Anmerk. Was in § 106., Aufgaben 5, 6, 7. Zusatz 1—3., von der Summirung, Subtrahirung, Vervielfältigung und Theilung der Quadrate gelehrt ist, läßt sich völlig auf Kreise anwenden, wenn man statt der Seiten der Quadrate die Halbmesser der gegebenen Kreise setzt.

15) Eine Figur zu zeichnen, welche der

Figur P ähnlich und so groß sei, als die Figur Q. (Fig. 137. a. b. c. d.)

Man verwandle die Figur P (nach § 142. Aufgabe 3. Zusatz 2.) in ein Quadrat K, dessen Seite m sei; eben so verwandle man auch die Figur Q in ein Quadrat L, dessen Seite n sei, und suche sodann (Fig. 137 d.) zu m, n und der Seite ab der Figur P die vierte Proportionallinie cd (nach § 117. Aufgabe 3.). Nun beschreibe man über cd eine Figur Y, die der Figur P ähnlich ist; so ist Y = Q und ähnlich P.

Beweis: $P : Y = ab^2 : cd^2$. Nach der Construction ist
$m : n = ab : cd$, und daher
$m^2 : n^2 = ab^2 : cd^2$

folglich $P : Y = m^2 : n^2$. Es waren $m^2 = P$, und $n^2 = Q$,
mithin $P : Y = P : Q$;

folglich $Y = Q$; auch war Y ähnlich P gemacht; also Y gleich Q und ähnlich P.

16) Aus dem gegebenen Radius r eines Kreises a) die Peripherie und b) den Flächeninhalt des Kreises zu finden. (Siehe § 137. und § 141.)

17) Aus der gegebenen Peripherie eines Kreises a) den Radius, und b) den Flächeninhalt des Kreises zu berechnen. (S. § 137. und § 141.)

18) Aus dem gegebenen Flächeninhalte des Kreises a) den Radius und b) die Peripherie des Kreises zu finden. (S. § 137. und § 141.)

19) Den Flächeninhalt eines regelmäßigen Polygons von n Seiten zu finden, wenn eine Seite desselben = s, und der Radius des um dasselbe beschriebenen Kreises = r gegeben ist. (S. § 105.)

20) Aus der Sehne eines Kreises und ihrem Abstande vom Mittelpunkte den Halbmesser des Kreises zu finden.

21) Aus dem Radius r und dem Mittelpunktswinkel von n° den Flächeninhalt des zu diesem Winkel gehörigen Sectors zu finden.

22) Aus der Größe eines Kreisbogens durch geometrische Construction den Radius des zu diesem Bogen gehörigen Kreises zu finden.

23) Den Mittelpunkt eines Kreises durch geometrische Construction zu finden. (Siehe § 126. 3.)

24) Ueber eine gegebene gerade Linie, als Hypotenuse, ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren.

25) Der Radius eines Kreises sei 9″. Es soll die Länge der Seitenlinien eines eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks gefunden werden. Wie groß ist dieselbe? (Antw. 15″ 7‴.)

26) Die Seite eines gleichseitigen Dreiecks sei = 6′ 8″; wie groß ist alsdann der Halbmesser des umschriebenen Kreises? (Antw. 3′ 10″ $2\frac{1}{4}$‴.)

27) Die Grade eines Kreisbogens seien 85° 32′, und der Durchmesser des ihm zugehörigen Kreises sei = 3′ 5″; wie viel beträgt die Länge des Bogens? (Antw. 2′ 6″ $7\frac{1}{5}$‴.)

28) Der Umfang eines Kreises sei = 24′; wie viel beträgt der Flächeninhalt eines um diesen Kreis beschriebenen Quadrats? (Antw. 58□′ 59□″.)

29) In einem Kreise, dessen Durchmesser = 12′ ist, soll ein Rechteck beschrieben werden, bei dem sich die Höhe zur Grundlinie, wie 3 : 7 verhalten soll; welche Längen werden diese beiden Linien erhalten? (Antw. Grundlinie = 11′ 0″ 4‴ und Höhe = 4′ 8″ $8\frac{1}{10}$‴.)

30) Der Durchmesser eines Kreises sei = 18″; in denselben soll ein Rechteck beschrieben werden, dessen Flächeninhalt die Hälfte der Kreisfläche ist. Welche Länge muß der Höhe gegeben werden, wenn die Grundlinie des Rechtecks $16{,}_{1045}$″ ist? (Antw. Höhe = $7{,}_{8566}$″...)

31) Der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes soll aus dem Halbmesser = 5′ 8″ und aus dem Gradmaße seines Bogens = 104° 16′ gefunden werden. Was beträgt besagter Flächeninhalt? (Antw. 29□′ 31□″ $54\frac{1}{2}$□‴.)

32) Die Anzahl Grade des Bogens eines Kreissegments sei = 128°, die Chorde = 12′ 6″ und die Höhe des Segments = 4′ 2″; wie groß ist der Flächeninhalt des Segments? (Antw. 34□′ 134□″.)

33) Die Seite eines Quadrats sei = 2′ 8″. Dasselbe soll in einen Kreis von gleichem Flächeninhalte verwandelt werden; wie groß wird dessen Durchmesser sein? (Antwort: 3′ 0″ $1\frac{1}{3}$‴.)

34) Die Halbmesser zweier concentrischen Kreise seien 20″ und 9″; wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, dessen Flächeninhalt gleich dem Flächeninhalt des zwischen jenen beiden Kreisen befindlichen Ringes ist? (Antw. 1′ 5″ 10‴.)

35) Eine kreisförmige Scheibe von $2\frac{1}{2}$′ Radius soll mit Blech beschlagen werden. Wie viel solcher Blechtafeln sind dazu erforderlich, wenn deren Länge = $\frac{5}{4}$′, die Breite = $\frac{3}{4}$′, betragen? (Antw. Etwa 21 Tafeln.)

36) Wie groß muß der Radius eines Kreises sein, welcher der Summe zweier Kreise von 3′ und 4′ Radius, oder von $\frac{2}{3}$′ und $\frac{3}{5}$′ gleich ist? (Antw. 1.) 5′; 2.) $0{,}_{8969}$′...)

37) Wie groß muß der Radius eines Kreises sein, welcher der Differenz zweier Kreise von 5″ und 3″ Radius gleich ist? (Antw. 4″.)

38) Wie groß muß der Radius eines Kreises sein, welcher der Summe von vier Kreisen gleich ist, deren Radien 1′, 2′, 3′, 4′ betragen? (Antw. $5{,}_{4772}$′...)

39) Wie groß ist der Radius eines Rades, welches zur Zurücklegung eines Weges von 28260′ sich 3000 mal umdrehen muß? (Antw. Radius = $1\frac{1}{2}$′.)

40) Wie groß ist der Umfang eines kreisrunden Tisches, dessen Fläche 201 Quadratzoll beträgt? (Antw. $50\frac{1}{4}$″.)

41) Wie viel Umdrehungen macht ein Wagenrad, dessen Durchmesser 4′ beträgt auf einem Wege von 50240 Fuß? (Antw. 4000 Umdrehungen.)

II. Stereometrie.

Erklärungen.

§ 143. Die Stereometrie ist, im engern Sinne des Wortes, die Lehre von den Körpern, d. h. von dem Raume, den ein Körper einnimmt.

§ 144. Es gibt Körper, die nur von Ebenen, oder von Ebenen und krummen Flächen, oder nur von einer einzigen krummen Fläche begrenzt werden.

§ 145. Durchschneidet eine Linie eine Ebene, so ist der kleinste Winkel, den diese Linie mit allen durch ihren Durchschnittspunkt in der Ebene gezogenen Geraden bildet, der Neigungswinkel dieser Linie gegen die Ebene.

Der Punkt, wo eine gerade Linie eine Ebene trifft, heißt der Fußpunkt dieser Linie.

§ 146. Die kürzeste Linie von einem Punkte nach einer Ebene heißt die Entfernung dieses Punktes von der Ebene.

§ 147. Eine Gerade steht senkrecht auf einer Ebene, wenn sie mit allen durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogenen Geraden rechte Winkel bildet.

§ 148. Die verschiedene Richtung zweier sich schneidenden Ebenen nennt man den Flächenwinkel dieser beiden Ebenen. Die Schenkel dieses Flächenwinkels sind also Ebenen, und der Scheitel desselben ist die Durchschnittslinie dieser Ebenen. Die Größe des Flächenwinkels wird durch einen ebenen Winkel bestimmt, dessen Schenkel in einerlei Punkt auf der Durch-

schnittslinie beider Ebenen in jeder derselben senkrecht stehen. Dieser ebene Winkel heißt der Neigungswinkel beider Ebenen und ist überall gleich groß, in welchem Punkte der Durchschnittslinie beider Ebenen er auch construirt werde. (Siehe § 188. Zusatz.)

§ 149. Eine Ebene steht auf einer andern Ebene senkrecht, wenn ihre Flächenwinkel oder deren Neigungswinkel auf beiden Seiten einander gleich sind.

§ 150. Eine Gerade ist einer Ebene parallel, wenn sie verlängert, die Ebene nie trifft; eben so nennt man zwei Ebenen parallel, wenn sie, noch so weit ausgedehnt, niemals zusammentreffen.

§ 151. Wenn drei oder mehrere ebene Flächen sich in einem Punkte schneiden, so entsteht ein Körperwinkel oder eine Raumecke.

§ 152. Ein von allen Seiten durch Ebenen begrenzter Raum heißt Polyëder (Vielflächner). Die einschließenden Ebenen heißen seine Flächen, die Linien, in welchen sie zusammenstoßen, seine Kanten, und die Punkte, in welchen mehrere Kanten zusammenlaufen, seine Ecken.

§ 153. Die Polyëder theilt man in regelmäßige (reguläre) und unregelmäßige (irreguläre) ein. Regelmäßig heißt ein Polyëder, wenn es von regelmäßigen, congruenten, ebenen Figuren begrenzt wird und dessen Raumecken sämmtlich gleich sind.

§ 154. Die Ebene, worauf ein Körper ruht, heißt seine Grundfläche, die übrigen Ebenen, die ihn von allen Seiten begränzen, seine Seitenflächen. Die an der Grundfläche eines Polyëders liegenden Kanten heißen Grundkanten, und die an den Seitenflächen liegenden, Seitenkanten.

§ 155. Es gibt überhaupt nur fünf regelmäßige Körper*), und zwar:

1) Das Tetraëder (Vierflächner), welches ein von vier gleichseitigen, congruenten Dreiecken begrenzter Körper ist. Das Tetraëder ist das einfachste aller Polyëder.
2) Das Octaëder (Achtflächner) ist ein aus 8 gleichseitigen, congruenten Dreiecken gebildeter Körper.
3) Das Ikosaëder (Zwanzigflächner) ist ein von 20 gleichseitigen, congruenten Dreiecken begrenzter Körper.
4) Das Dodekaëder (Zwölfflächner) ist ein aus 12 regelmäßigen, congruenten fünfseitigen Polygonen zusammengesetzter Körper, und
5) das Hexaëder (Sechsflächner), auch Cubus oder Würfel genannt, ist ein von 6 congruenten Quadraten eingeschlossener Körper.

§ 156. Unter den übrigen Körpern unterscheiden wir folgende fünf Hauptkörper:

I. Die Pyramide (Spitzsäule) ist ein Körper, dessen Grundfläche jede geradlinige ebene Figur ist und dessen Seitenflächen Dreiecke sind, die alle durch einen außerhalb der Grundfläche befindlichen festen Punkt gehen. Der Punkt außerhalb der Grundfläche heißt die Spitze, und die senkrechte Linie aus der Spitze auf die Grundfläche oder deren Verlängerung, die Höhe der

*) Hierüber siehe § 192. Anmerkung.

Pyramide. Eine Senkrechte aus der Spitze einer Pyramide auf eine Kante ihrer Grundfläche heißt die Seitenhöhe der Pyramide.

§ 157. Eine Pyramide heißt regelmäßig, gerade oder senkrecht, wenn ihre Grundfläche eine regelmäßige Figur ist und das Perpendikel aus ihrer Spitze auf die Ebene der Grundfläche den Mittelpunkt derselben trifft. Dieses Perpendikel heißt alsdann die Axe der Pyramide.

§ 158. Zwei dreieckige Pyramiden sind ähnlich, wenn ihre Seiten- und Grundflächen einzeln ähnlich sind, ähnlich liegen und ihre Seitenkanten gegen die Grundfläche gleiche Neigungswinkel bilden.

§ 159. Nach der Anzahl der Seiten der Grundfläche wird eine Pyramide benannt. Hat die Grundfläche drei Seiten, so heißt sie eine dreiseitige; hat die Grundfläche vier Seiten, eine vierseitige Pyramide u. s. w.

II. Das Prisma ist ein Körper, dessen beide Grundflächen congruente und parallele ebene Figuren und dessen Seitenflächen Parallelogramme sind. Die senkrechte Entfernung der beiden Grundflächen von einander heißt seine Höhe. Stehen die Seitenflächen eines Prismas senkrecht auf der Grundfläche, so heißt es ein gerades, im entgegengesetzten Falle, ein schiefes Prisma. Das Prisma wird nach der Anzahl der Seiten seiner Grundfläche benannt.

Ein Prisma, dessen beide Grundflächen congruente und parallele Parallelogramme sind, heißt Parallelepipedon. Sind die Seiten- und Grundflächen eines Parallelepipedons Rechtecke, so ist es ein rechtwinkliges, rechteckiges oder gerades. Bestehen die Grund- und Seitenflächen eines Parallelepipedons aus gleichen Quadraten, so heißt es ein Hexaëder, Cubus oder Würfel. Sind die Begrenzungsflächen lauter Rhomben, so heißt das Parallelepipedon ein Rhomboëder.

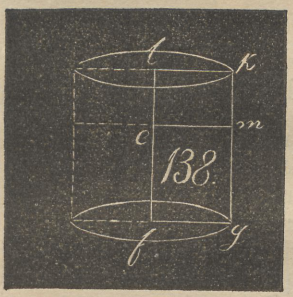
III. Der Kegel (conus) ist ein Körper, dessen Grundfläche ein Kreis und dessen Seitenfläche eine krumme Fläche ist, die durch einen außerhalb der Grundfläche befindlichen festen Punkt geht. Der Kreis heißt die Grundfläche, und der feste Punkt, die Spitze des Kegels. Die Verbindungslinie von der Mitte der Grundfläche bis zur Spitze heißt die Axe, und die senkrechte Entfernung der Spitze von der Grundfläche, die Höhe des Kegels. Wenn die Axe auf der Grundfläche senkrecht steht, so heißt der Kegel ein gerader, im entgegengesetzten Fall, ein schiefer. Die krumme Fläche, welche den Kegel einschließt, heißt Kegelfläche oder Mantel des Kegels. Die Entfernung der Spitze von einem Punkte der Peripherie der Grundfläche heißt die Seitenhöhe des Kegels.

Der gerade Kegel entsteht, wenn ein rechtwinkliges Dreieck um eine seiner Katheten so lange herumgedreht wird, bis es wieder in seine ursprüngliche Lage tritt. Es beschreibt dann jeder Punkt der Hypotenuse dieses Dreiecks einen Kreis; folglich muß jede Durchschnittsebene, die parallel der Grundfläche eines geraden Kegels durch denselben gelegt wird, eine Kreisfläche sein, und jeder ebene Schnitt, in welchem die Axe liegt, ein gleichschenkliges Dreieck bilden.

Wenn man von einem Kegel durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene den obern Theil abschneidet, so heißt der übrigbleibende Körper ein abgestumpfter Kegel, der obere Theil bis zur Spitze, Ergänzungs-Kegel.

Zwei Kegel sind ähnlich, wenn ihre Axen sich wie die Durchmesser ihrer Grundflächen verhalten, und die Neigungswinkel der Axe gegen ihre Grundflächen gleich sind.

IV. Der Cylinder oder die Walze ist ein Körper, dessen beide Grundflächen gleiche und parallele Kreise sind, und dessen Seitenfläche eine krumme Fläche ist, welche Mantel heißt. Die gerade Linie, welche die Mittelpunkte beider Kreise verbindet, heißt die Axe, und die senkrechte Entfernung der obern Kreisebene von der untern, die Höhe des Cylinders. Wenn die Axe auf der Grundfläche senkrecht steht, so heißt der Cylinder ein gerader, im entgegengesetzten Falle, ein schiefer.



Ein gerader Cylinder entsteht, wenn man ein Rechteck um eine seiner Seiten so lange herumdreht, bis es wieder in seine ursprüngliche Lage tritt. In diesem Falle beschreiben alle Perpendikel, wie em (Fig. 138.) auf die Umdrehungsseite lf des Rechteckes lkgf, Kreise, die einander gleich sind. Daher wird jeder Schnitt des geraden Cylinders senkrecht auf die Axe ein Kreis, jeder Schnitt, in welchem die Axe liegt, ein Rechteck sein.

Zwei Cylinder sind ähnlich, wenn ihre Axen sich wie die Durchmesser ihrer Grundflächen verhalten, und die Neigungswinkel der Axen gegen ihre Grundflächen gleich sind.

V. Die Kugel (sphaera) ist ein runder Körper, an welchem alle Punkte der Oberfläche von einem innern Punkte, welcher Mittelpunkt der Kugel heißt, gleich weit entfernt sind. Die Kugel entsteht, wenn man einen Halbkreis um seinen Durchmesser so lange herumbewegt, bis er wieder in seine ursprüngliche Lage tritt; dann wird jeder Punkt in dem Bogen des Halbkreises bei seiner Umdrehung einen Kreis beschreiben; demnach muß jeder ebene Schnitt durch die Kugel ein Kreis sein.

Der Mittelpunkt des Kreises wird auch der Mittelpunkt der Kugel genannt. Die von der Peripherie des Kreises erzeugte krumme Fläche heißt die Kugelfläche, die Entfernung des Mittelpunkts von einem Punkte der Kugelfläche — welche Entfernung überall gleich ist — der Radius der Kugel, und die aus zwei Radien zusammengesetzte Gerade, der Durchmesser der Kugel. Wird eine Ebene durch eine Kugel gelegt, so heißt die Durchschnittslinie auf der Oberfläche der Kugel, Kugelkreis, und geht die Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel, ein größter Kreis. Die Durchschnittslinien paralleler Ebenen auf der Oberfläche einer Kugel nennt man Parallelkreise, und den Durchmesser, der durch ihre Mittelpunkte geht, ihre Axe, und die Endpunkte dieser Axe, ihre Pole. Ueberhaupt heißen Pole eines größten Kreises die Endpunkte des in der Mitte dieses

Kreises senkrechten Durchmessers. Jeder größte Kreis, welcher durch die Pole der Parallelkreise geht, heißt Meridian oder Mittagslinie. Den größten durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Parallelkreis nennt man Aequator.

§ 160. Derjenige Theil der Kugeloberfläche, der zwischen zwei Parallelkreisen liegt, heißt Kugelzone oder Gürtel, und das zwischen zwei Parallelkreisen liegende Stück der Kugel selbst wird Kugelschicht genannt. Der Raum, den die Bogen dreier größten Kreise auf der Kugeloberfläche einschließen, heißt ein Kugel- oder sphärisches Dreieck.

§ 161. Derjenige körperliche Raum der Kugel, der durch eine beliebig durch die Kugel gelegte Ebene von derselben abgeschnitten wird, heißt Kugelabschnitt oder Kugelsegment, und die krumme Oberfläche desselben, Kugelhaube (calotte). Das im Mittelpunkte des Abschnittkreises errichtete und bis zur Oberfläche der Kugel verlängerte Perpendikel wird die Höhe des Kugelabschnitts genannt.

§ 162. Der körperliche Raum der Kugel, der durch einen um die Peripherie des Abschnittkreises bewegten Radius der Kugel von dieser ausgeschnitten wird, heißt Kugelausschnitt oder Kugelsector. Dieser hat zu seiner Grundfläche die Kugelhaube.

§ 163. Man nennt Körper congruent, wenn sie so in einander gelegt werden können, daß alle ihre Seitenflächen zusammenfallen.

§ 164. Symmetrisch gleich oder bloß symmetrisch heißen zwei Körper, die zwar in allen Stücken übereinstimmen, aber niemals zusammenfallen können, in welche Lage man sie auch bringen mag, weil die einzelnen Stücke bei dem einen Körper in entgegengesetzter Ordnung auf einander folgen, als bei dem andern. So ist z. B. jedes Spiegelbild eines Körpers diesem symmetrisch gleich. Eben so sind ein Paar Handschuhe symmetrisch gleiche Körper.

§ 165. Gleich heißen zwei Körper, die, auch bei verschiedener Form, einen gleich großen Raum einschließen.

§ 166. Aehnlich heißen Polyëder, an welchen alle Flächenwinkel entsprechend gleich und die gleichliegenden Seitenflächen ähnlich sind.

§ 167. Die Stereometrie zerfällt in zwei Theile:

Der erste Theil enthält die Lehre von der Lage gerader Linien und der Ebenen gegen einander, und von den Ecken.

Der zweite Theil umfaßt die Lehre von den Körpern und ihrer Inhaltsberechnung (volumen).

Erster Theil.

Von der Lage der Linien und der Ebenen gegen einander, und von den Ecken.

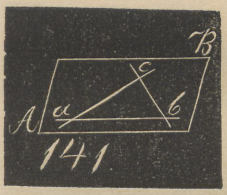
§ 169. **Lehrsatz.**

Wenn ein Theil einer geraden Linie in einer Ebene liegt, so liegt die ganze Linie in dieser Ebene.

Beweis: Da nach § 17. eine Ebene eine solche Fläche ist, worauf gerade Linien in allen Richtungen gelegt, ganz in die Fläche fallen, so muß auch jede Gerade, wenn ein Theil derselben in die Ebene fällt, auch ganz in diese Ebene fallen, weil im entgegengesetzten Falle die Gerade keine Gerade wäre; was gegen die Voraussetzung ist.

Hieraus folgt wieder unmittelbar 1) daß eine gerade Linie, sobald zwei ihrer Punkte in einer Ebene liegen, ganz in dieselbe Ebene fallen muß (§ 71. Grundsatz 4.), und 2) daß, wenn eine Ebene zum Theil mit einer andern Ebene zusammenfällt, beide Ebenen ganz zusammenfallen müssen.

§ 170. Lehrsatz.



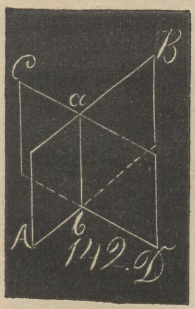
Durch drei, nicht in gerader Linie liegende Punkte kann nur Eine Ebene gelegt werden. (Fig. 141.)

Beweis: Es seien a, b, c die drei gegebenen Punkte. Gesetzt, man könnte durch a, b, c noch eine zweite Ebene legen, ohne daß diese mit der ersten zusammenfiele. Man lege durch die drei Punkte a, b, c, welche in beiden Ebenen zugleich liegen, drei gerade Linien; sodann würden diese zugleich in beiden Ebenen liegen (§ 169. 1.); folglich müssen diese Ebenen ganz zusammenfallen. (§ 169. 2.)

Zusatz 1. Hieraus folgt, daß eine Ebene durch drei, nicht in einer geraden Linie liegenden Punkte im Raume vollkommen bestimmt ist.

Zusatz 2. Ein geradliniger Winkel, Scheitelwinkel, Nebenwinkel, ein Dreieck, Parallellinien nach dem Begriffe derselben, so wie jedes Parallelogramm liegen immer in Einer Ebene.

§ 171. Lehrsatz.

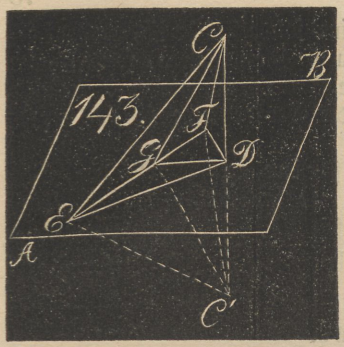


Die Durchschnittslinie zweier Ebenen ist eine Gerade. (Fig. 142.)

Beweis: Die in ab sich durchschneidenden Ebenen seien AB und CD. Wäre die Durchschnittslinie ab beider Ebenen nicht eine Gerade, so nehme man in derselben drei, nicht in gerader Linie liegende Punkte an, welche also in beiden Ebenen zugleich liegen. Demnach müßten nach § 170. beide Ebenen AB und CD zusammenfallen, was gegen die Voraussetzung ist; folglich kann die Durchschnittslinie ab keine andere, als eine Gerade sein.

§ 172. Lehrsatz.

Eine Gerade, die auf dem Durchschnittspunkte zweier in einer Ebene liegenden Geraden senkrecht steht, ist senkrecht auf der ganzen Ebene. (Fig. 143.)



Beweis: Es sei CD in der Ebene AB senkrecht auf DF und DE. Zu beweisen ist, daß bei dieser Voraussetzung, die CD auch auf jeder in der Ebene AB durch den Fußpunkt D der Senkrechten CD gezogenen Geraden, also auch auf GD, senkrecht stehe.

Man verbinde zwei beliebige Punkte E und F der ED und FD; verlängere CD unterhalb der Ebene AB bis C'; mache DC' = DC, und ziehe CF, C'F, CG, C'G, CE, C'E.

Da CD ⊥ DF gegeben war, so ist ∠ CDF = R, folglich auch

∠ C'DF = R. Da auch
CD = C'D gemacht ist, und
DF = DF

so ist △ CDF ≅ △ C'DF und CF = C'F. Aus demselben Grunde ist △ CDE ≅ △ C'DE und CE = C'E und da
FE = FE

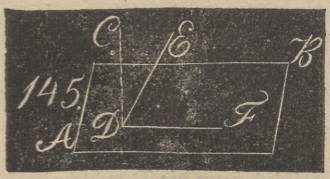
so ist △ CEF ≅ △ C'EF, und daher
∠ CEF = ∠ C'EF. Und
CE = C'E bewiesen.
GE = GE

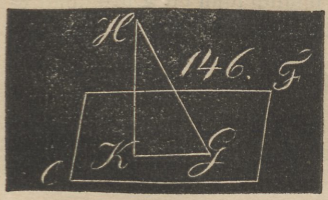
folglich △ CEG ≅ △ C'EG, mithin
CG = C'G. Es ist
CD = C'D gemacht, und
DG = DG

folglich △ CDG ≅ △ C'DG

mithin ∠ CDG = ∠ C'DG = R (§ 25.),

also steht CD ⊥ DG, demnach steht CD auf jeder in der Ebene durch den Fußpunkt D beliebig gezogenen Linie senkrecht; folglich ist CD senkrecht auf der Ebene AB. (§ 147.)





§ 174 Lehrsatz.

1) Durch einen Punkt einer Ebene kann man nur Eine Senkrechte auf derselben errichten, und 2) aus einem Punkte außerhalb einer Ebene läßt sich auf dieselbe nur Eine Senkrechte fällen. (Figur 145. und 146.)

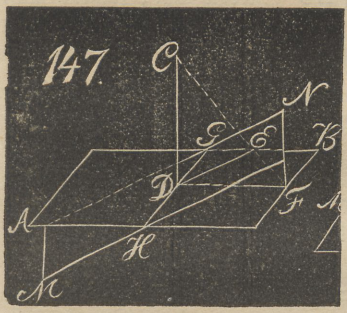
Beweis zu Satz I. (Fig. 145.) Es sei auf der Ebene AB die DC ein Perpendikel im Punkte D. Gesetzt, aus D könnte noch ein zweites Perpendikel DE auf der Ebene AB errichtet werden; so lege man durch CDE eine Ebene, welche die untere Ebene in DF

schneiden wird; dann ist ∠ CDF = R, und ∠ EDF = R (§ 147.); mithin ∠ CDF = EDF; was unmöglich ist; folglich kann in der Ebene AB aus dem Punkte D nur Eine Senkrechte auf derselben errichtet werden.

Beweis zu Satz II. (Fig. 146.) Es sei H der gegebene Punkt außerhalb der Ebene CF. Gesetzt, man könnte aus H noch eine zweite Senkrechte HG auf die Ebene CF herablassen; so ziehe man KG, dann ist ∠ HKG = R, und auch ∠ HGK = R, folglich KH ∥ GH (§ 77. 3.); was unmöglich ist, da beide Senkrechte durch den Punkt H gehen; demnach kann aus einem Punkte außerhalb einer Ebene nur Ein Perpendikel auf dieselbe herabgelassen werden.

Zusatz. Die senkrechte Linie von einem Punkte außerhalb einer Ebene auf dieselbe ist die kürzeste Entfernung dieses Punktes von der Ebene. (§ 88.)

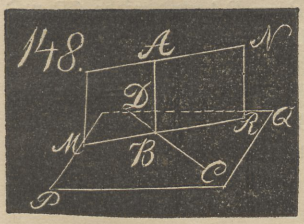
§ 175. Lehrsatz.



Durch einen Punkt einer Geraden kann nur Eine Ebene senkrecht auf dieselbe gelegt werden. (Fig. 147.)

Beweis: Es sei die Ebene AB senkrecht auf der Geraden CD im Punkte D. Gesetzt, es könnte in D auf CD noch eine zweite Ebene MN senkrecht gelegt werden, so wird diese die erstere Ebene in GH schneiden. Man lege durch CD eine Ebene, welche die beiden andern Ebenen in den Geraden DE und DF schneiden wird. Sodann ist ∠ CDE = R (§ 147.) und auch ∠ CDF = R, mithin ∠ CDE = ∠ CDF, was unmöglich ist; folglich kann durch einen Punkt einer Geraden nur Eine Ebene senkrecht auf dieselbe gelegt werden.

§ 176. Lehrsatz.

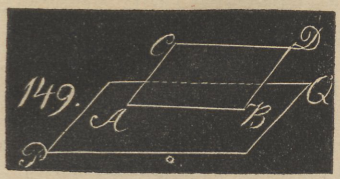


Steht eine Gerade senkrecht auf einer Ebene, so steht jede Ebene, die durch dieses Perpendikel gelegt wird, auch senkrecht auf derselben Ebene. (Fig. 148.)

Beweis: Es sei die Gerade AB ⊥ auf der Ebene PQ. Zu beweisen ist, daß die durch AB gelegte Ebene MN auch senkrecht auf der Ebene PQ sei. — Die durch die Senkrechte AB gelegte Ebene MN wird die Ebene PQ in der Geraden MR schneiden. Errichtet man in der Ebene PQ aus dem Fußpunkt B des Perpendikels AB auf die Durchschnittslinie MR die Senkrechte BC, und verlängert diese nach D hin; so sind die rechten Winkel ABC und ABD (§ 148.) zugleich die Neigungswinkel beider Ebenen, und da diese Winkel zugleich die Flächenwinkel beider Ebenen bestimmen (§ 148.); so sind auch die Flächenwinkel einander gleich; folglich wird die Ebene MN senkrecht auf der Ebene PQ stehen. (§ 149.)

*§ 177. Lehrsatz.

Eine gerade Linie ist einer Ebene parallel, wenn sie einer in dieser Ebene liegenden geraden Linie parallel ist. (Fig. 149.)

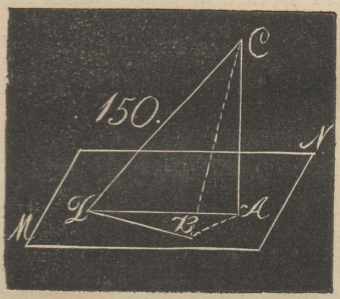


Beweis: Es liege die Gerade CD außerhalb der Ebene PQ und sei der Geraden AB in derselben Ebene parallel. Es soll nun CD ∥ Ebene PQ sein.

Da CD ∥ AB gegeben ist, so liegen diese beiden Parallelen in einerlei Ebene (§ 23.); demnach wird die durch CD und AB gelegte Ebene die Ebene PQ in AB schneiden. Würde nun CD die Ebene PQ irgendwo schneiden, so könnte es nur in der Geraden AB geschehen; was unmöglich ist, da CD ∥ AB gegeben war; folglich muß CD ∥ der Ebene PQ sein.

*§ 178. Lehrsatz.

Steht eine gerade Linie schief auf einer Ebene, und man fällt aus irgend einem Punkte derselben eine Senkrechte auf diese Ebene und verbindet durch eine Gerade den Fußpunkt der schiefen Linie mit dem Fußpunkte der senkrechten; so ist der Winkel, den die schiefe Linie mit dieser Bindungslinie bildet, der kleinste von allen Winkeln, die sie mit irgend welchen Geraden aus ihrem Fußpunkte in der Ebene bildet. (Fig. 150.)



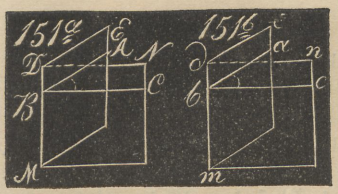
Beweis: Es sei CD schief, und CA eine Senkrechte aus einem beliebigen Punkte der CD auf der Ebene MN. Es sei ferner DA die Verbindungslinie der Fußpunkte der CD und CA. Zieht man aus dem Fußpunkte D die beliebige DB, so ist zu beweisen, daß ∠ CDA < CDB sei.

Man mache DB = DA und ziehe CB und AB, so ist ∠ CAB = R (§ 147.); folglich CB > CA. In den beiden Dreiecken CDB und CDA ist CD = CD, DB = DA (gemacht) und CB > CA bewiesen; folglich nach § 92. ∠ CDA < CDB; was zu beweisen war.

Dieser kleinste Winkel heißt der Neigungswinkel der schiefen Linie gegen die Ebene. (Siehe § 145.)

§ 179. Lehrsatz.

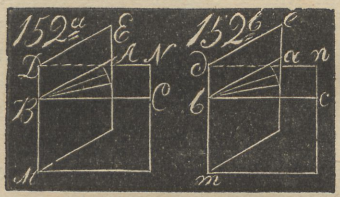
Wenn von vier Ebenen zwei und zwei sich durchschneiden, und die ebenen Winkel, welche zwei Senkrechte aus einem Punkte auf der Kante in beiden Ebenen bilden, gleich sind; so fallen die entsprechenden Ebenen zusammen, sobald man ihre Kanten auf einander und eine ihrer Ebenen auf die ihr entsprechende des andern Flächenwinkels legt. (Fig. 151 a. und b.)



Beweis: Es sei der ebene Winkel abc = ∠ ABC. Zu beweisen ist, daß die entsprechenden Ebenen zusammenfallen.

Man lege die Ebene mn auf die Ebene MN, so daß der Punkt b auf B, und bm auf BM fallen, so wird auch bc auf BC fallen, weil ∠ mbc = MBC ist (als Rechte nach der Voraussetzung). Da nun mb ⊥ ba und bc, und MB ⊥ BA und BC gegeben sind; so steht mb ⊥ Ebene durch abc, und eben so MB ⊥ Ebene ABC. Da nun die Punkte b und B, so wie die Kanten bm und BM zusammenfielen, so müssen auch die Ebenen abc und ABC zusammenfallen, weil sonst durch einen Punkt einer Geraden zwei Ebenen senkrecht auf dieselbe gelegt werden könnten; was nach § 175. unmöglich ist.

Es war ∠ abc = ∠ ABC gegeben, folglich muß ab auf AB, mithin die Ebene me mit der Ebene ME zusammenfallen (§ 170. Zusatz 2.), was zu beweisen war.



Zusatz 1. Hieraus folgt, daß zwei Flächenwinkel sich zu einander verhalten, wie die ebenen Winkel, welche die aus einem Punkte auf ihren Kanten in beiden Ebenen gezogenen Senkrechten bilden; denn theilt man die beiden ebenen Winkel abc und ABC (Fig. 152. a. und b.), wenn sie commensurabel sind, durch ein gleiches Maß, und zwar den ∠ abc in m, und den ∠ ABC in n gleiche Theile; so verhält sich nach § 134.

∠ abc : ∠ ABC = m : n.

Legt man durch jene Theilungslinien und die Kanten der Flächenwinkel Ebenen, so werden diese den Flächenwinkel an md in m, und den Flächenwinkel an MD in n gleiche Theile theilen nach § 179.; folglich verhält sich

Flächenwinkel an md : Flächenwinkel an MD = m : n.

Demnach verhält sich

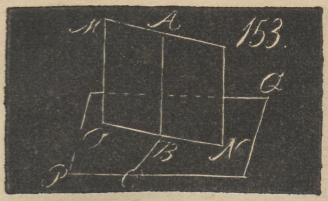
Flächenwinkel an md : Flächenwinkel an MD = ebener ∠ abc : eb. ∠ ABC.

Wären die beiden ebenen Winkel abc und ABC incommensurabel, so führt man den Beweis auf gleiche Weise wie in § 107 a.

Zusatz 2. Da der ebene Winkel, den zwei Senkrechte aus einerlei Punkt auf der Kante zweier sich schneidenden Ebenen bilden, das Maß ihres Flächenwinkels ist; so kann man diesen ebenen Winkel, seinem Zahlenwerthe nach, dem Flächenwinkel gleich betrachten und eins für das andere setzen, wie es auch später immer geschehen wird.

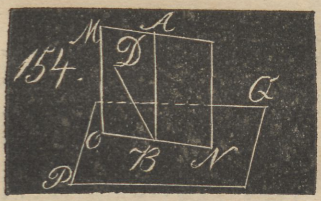
§ 180. Lehrsatz.

Wenn zwei Ebenen senkrecht auf einander stehen, und man zieht in der einen Ebene eine Senkrechte auf die Durchschnittslinie derselben; so ist diese ein Perpendikel auf der andern Ebene. (Fig. 153.)



Beweis: Es sei Ebene MN ⊥ auf der Ebene PQ, und die AB ⊥ ON in der Ebene MN. Es soll bewiesen werden, daß AB auch ⊥ auf der Ebene PQ sei. — Errichtet man in der Ebene PQ im Punkte B die CB ⊥ auf ON; so ist der ∠ ABC nach § 179. Zusatz 2. das Maß des Flächenwinkels beider Ebenen. Da nun diese Ebenen auf einander senkrecht stehen, so sind ihre Flächenwinkel nach § 149. auf beiden Seiten einander gleich; folglich muß ∠ ABC als Maß des Flächenwinkels = R, mithin AB ⊥ BC sein. Es ist also AB zugleich auf beiden in der Ebene PQ gezogenen Geraden ON und BC senkrecht; folglich ist AB auch auf dieser Ebene senkrecht. (§ 172.)

§ 181. Lehrsatz.

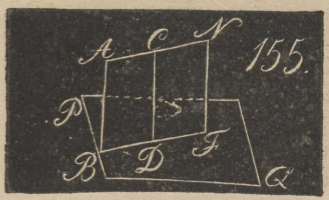


Wenn man aus der Durchschnittslinie zweier auf einander senkrecht stehenden Ebenen ein Perpendikel auf der einen derselben errichtet, so liegt dieses Perpendikel zugleich ganz in der andern Ebene. (Fig. 154.)

Beweis: Es sei Ebene MN ⊥ Ebene PQ, und die Gerade AB ⊥ Ebene PQ über der Durchschnittslinie ON. Zu beweisen ist, daß auch AB in der Ebene MN liege.

Gesetzt, die Senkrechte AB fällt nicht in die Ebene MN, so errichte man aus B in der Ebene MN das Perpendikel BD auf ON; dann steht nach § 180. BD ⊥ Ebene PQ; demnach gäbe es aus Einem Punkte B zwei Senkrechte auf der Ebene PQ, was nach § 174. 1. nicht möglich ist; folglich muß AB ganz in die Ebene MN fallen.

§ 182. Lehrsatz.



Wenn von zwei parallelen Linien die eine senkrecht auf einer Ebene steht, so ist auch die andere auf derselben Ebene senkrecht. (Fig. 155.)

Beweis: Es sei AB ∥ CD, und AB ⊥ Ebene PQ. Behauptet wird, daß CD ⊥ Ebene PQ sei.

Da AB ∥ CD ist, so müssen beide in einerlei Ebene BN liegen, und diese muß senkrecht auf der Ebene PQ stehen, weil sie durch die Senkrechte AB geht. (§ 176.) Es ist AB ∥ CD, mithin ∠ ABD + CDB = 2 R (§ 78. 3.), und da ∠ ABD = R (§ 147.), so ist auch ∠ CDB = R; folglich CD ⊥ DB in der senkrechten Ebene BN; demnach ist nach § 180. CD auch senkrecht auf der Ebene PQ.

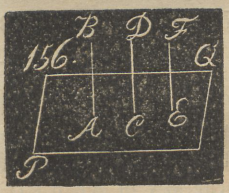
§ 183. Lehrsatz.

Zwei Perpendikel auf einer Ebene sind einander parallel. (Fig. 155.)

Beweis: Es seien AB und CD ⊥ Ebene PQ. Zu beweisen ist, daß AB ∥ CD sei.

Man ziehe die BD, und lege durch sie und die Senkrechte AB die Ebene FA, so steht letztere senkrecht auf der untern Ebene PQ. (§ 176.) Da CD über der Durchschnittslinie BD auf der Ebene PQ senkrecht steht; so muß die Senkrechte CD auch in der Ebene MN liegen. (§ 181.) Da nun die Geraden AB und CD senkrecht auf der Ebene PQ stehen und in der Ebene FA liegen; so ist ∠ ABD = R, und ∠ CDB = R (§ 147.); folglich ∠ ABD + ∠ CDB = 2 R, mithin AB ∥ CD. (§ 77. 3.)

§ 184. Lehrsatz.

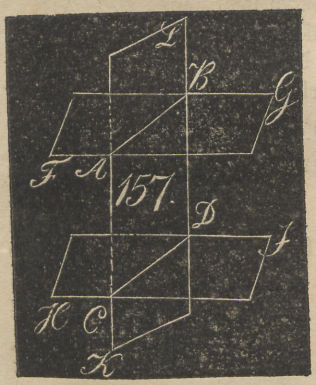


Zwei Linien, die einer dritten parallel sind, wenn sie auch nicht in einerlei Ebene liegen, sind einander parallel. (Fig. 156.)

Beweis: Es sei AB ∥ CD, und EF ∥ CD. Zu beweisen ist, daß auch AB ∥ EF sei.

Man lege auf CD eine Ebene PQ senkrecht, und da AB ∥ CD ist, so ist auch AB ⊥ Ebene PQ (§ 182.), und da EF ∥ CD, so ist EF ⊥ Ebene PQ; folglich AB ∥ EF. (§ 183.)

§ 185. Lehrsatz.



Wenn zwei Ebenen parallel sind und von einer dritten Ebene geschnitten werden, so sind ihre Durchschnittslinien auch parallel. (Fig. 157.)

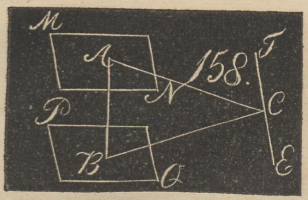
Beweis: Es sei Ebene HJ ∥ Ebene FG, und KL sei die Ebene, welche jene in AB und CD durchschneiden. Behauptet wird, daß AB ∥ CD sei.

Es liegen AB und CD in einerlei Ebene KL, aber auch zugleich in den Ebenen FG und HJ. Würden sich die Linien AB und CD irgendwo schneiden, so müßten sich auch die beiden Ebenen FG und HJ, in welchen AB und CD liegen, durchschneiden, was nicht möglich ist, da Ebene FG ∥ Ebene HJ gegeben ist; folglich muß AB ∥ CD sein.

Zusatz. Parallele Linien AC und BD zwischen parallelen Ebenen FG und HJ sind gleich lang. (§ 93.)

*§ 186. Lehrsatz.

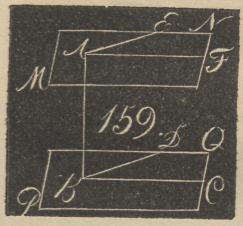
Zwei Ebenen, die auf einer Linie senkrecht stehen, sind einander parallel. (Fig. 158.)



Beweis: Es seien die Ebenen MN und PQ senkrecht auf der Geraden AB. Zu beweisen ist, daß Ebene MN ∥ Ebene PQ sei.

Wäre Ebene MN nicht parallel der Ebene PQ, so werden sie sich, gehörig erweitert, in einer Geraden EF schneiden. Zieht man in den erweiterten Ebenen MN und PQ die Geraden AC und BC, so entsteht das △ ABC, in welchem ∠ A = R, und ∠ B = R (§ 147.), was nicht möglich ist; folglich muß Ebene MN ∥ Ebene PQ sein.

*§ 187. Lehrsatz.



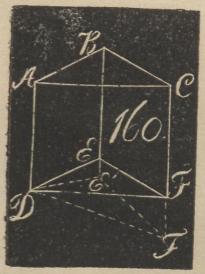
Wenn eine gerade Linie auf einer von zwei parallelen Ebenen senkrecht steht, so ist sie auch auf der zweiten Ebene senkrecht. (Fig. 159.)

Beweis: Es sei Ebene MN ∥ Ebene PQ und AB ⊥ Ebene PQ. Zu beweisen ist, daß auch AB ⊥ Ebene MN stehe.

Zieht man aus B in der Ebene PQ die beliebigen Geraden BD und BC, so steht AB auf denselben senkrecht (§ 147.); mithin ist ∠ ABD = R, und ∠ ABC = R. Legt man durch ABD und ABC Ebenen, so werden diese die Ebene MN in AE ∥ BD, und in AF ∥ BC schneiden (§ 185.); folglich ∠ ABD + ∠ BAE = 2 R, und da ∠ ABD = R ist, so ist auch ∠ BAE = R; folglich AB ⊥ BE. Eben so ist ∠ ABC + ∠ BAF = 2 R, und da ∠ ABC = R ist, so ist auch ∠ BAF = R; folglich AB ⊥ AF; demnach steht nach §172. AB ⊥ Ebene durch AF und AE, d. i. auf der Ebene MN; was zu beweisen war.

Zusatz. Durch einen Punkt einer Linie, die auf einer Ebene senkrecht steht, kann nur Eine Ebene mit der ersten parallel gelegt werden.

§ 188. Lehrsatz.



1) Zwei Winkel mit parallelen Schenkeln, wenn sie auch nicht in einerlei Ebene liegen, sind gleich, und 2) die Ebenen, die man durch die parallelen Schenkel dieser beiden ebenen Winkel legt, sind einander parallel. (Fig. 160.)

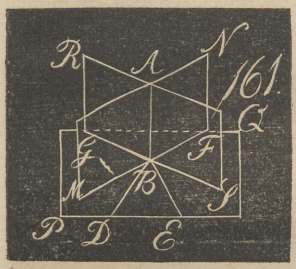
Es seien von den Winkeln BAC und EDF die Schenkel AB ∥ DE, und AC ∥ DF. Zu beweisen ist 1) daß ∠ BAC = ∠ EDF, und 2) daß Ebene BAC ∥ Ebene EDF seien.

Beweis zu Satz 1. Man mache DE = AB, und DF = AC; ziehe BC, EF, AD, BE und CF; so ist ABED ein Parallelogramm, weil AB # DE ist (§ 95.); folglich AD # BE. Eben so ist ACFD ein Parallelogramm, weil AC # DF ist; folglich AD # CF, mithin BE # CF (§ 184.); folglich nach § 95. BC = EF. Es war AB = DE, und AC = DF gemacht; folglich △ ABC ≅ △ DEF; also auch ∠ BAC = ∠ EDF.

Beweis zu Satz II. Wäre Ebene DEF nicht ∥ Ebene ABC, so sei es Ebene DE'F'. Sodann müßte DE' ∥ AB, und DF' ∥ AC sein (§ 185). Es war DE ∥ AB, und DF ∥ AC gegeben; folglich wäre DE' ∥ DE, und DF' ∥ DF (§ 78. Zus. 1.), was nicht möglich ist; folglich kann nur die Ebene DEF ∥ Ebene ABC sein.

Zusatz. Alle ebenen Winkel, deren Schenkel aus einerlei Punkte auf der Durchschnittslinie zweier Ebenen in jeder dieser Ebenen senkrecht stehen, sind einander gleich, da ihre Schenkel in jeder der beiden Ebenen parallel sind (Siehe § 148.).

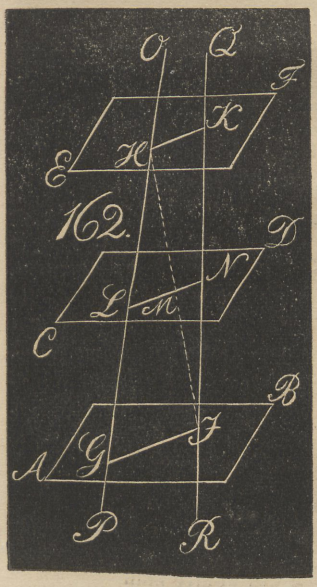
§ 189. Lehrsatz.



Wenn zwei Ebenen, die sich gegenseitig schneiden, auf einer dritten Ebene senkrecht stehen, so steht auch ihre Durchschnittslinie auf derselben Ebene senkrecht. (Fig. 161.)

Beweis: Es seien die Ebenen MN und RS auf der Ebene PQ senkrecht. Zu beweisen ist, daß auch deren Durchschnittslinie AB ⊥ Ebene PQ stehe.

Man errichte in der Ebene PQ die BD ⊥ GS, und EB ⊥ MF. Da Ebene MN ⊥ Ebene PQ, und EB ⊥ MF stehen, so ist EB ⊥ Ebene MN (§ 180.); folglich auch ⊥ BA (§ 147.). Eben so ist Ebene RS ⊥ Ebene PQ, und DB ⊥ GS, also ist (nach § 180.) die DB ⊥ Ebene RS; folglich auch ⊥ BA (§ 147.). Es ist also BA ⊥ EB und auch ⊥ DB; folglich ist auch BA ⊥ Ebene PQ (§ 172.).



§ 190. Lehrsatz.

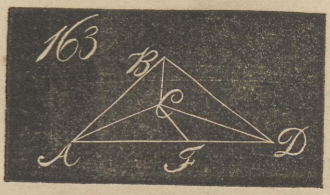
Zwei gerade Linien werden durch drei parallele Ebenen proportionirt geschnitten. (Figur 162.)

Beweis: Es seien die Ebenen EF, CD und AB einander parallel, und dieselben schneiden die beiden Geraden OP und QR in den Punkten H, L, G und K, N, J. Zu beweisen ist, daß HL : LG = KN : NJ.

Man ziehe HJ und lege durch HG und HJ eine Ebene, welche die parallelen Ebenen CD und AB in den parallelen Linien LM und GJ schneidet (§ 185.); folglich verhält sich nach § 108. HL : LG = HM : HJ. Legt man ferner durch HJ und KJ eine andere Ebene, so wird diese die beiden parallelen Ebenen EF und CD in den parallelen Linien HK und MN schneiden (§ 185.); folglich verhält sich KN : NJ = HM : MJ. Aus dem Vergleich beider Proportionen ergibt sich HL : LG = KN : NJ.

§ 191. Lehrsatz.

In einer dreiwinkligen Raumecke ist die Summe zweier ebenen Winkel stets größer, als der dritte Winkel. (Fig. 163.)



Beweis: Es sei C der Scheitel der Raumecke, welche von den drei ebenen Winkeln ACB, BCD und ACD gebildet wird. Zu beweisen ist, daß je zwei dieser Winkel größer als der dritte Winkel seien.

Sind die drei ebenen Winkel einander gleich, so ist es klar, daß zwei derselben zusammen größer sind, als der dritte. Ist $\angle$ ACD aber der größte unter ihnen, so mache man $\angle$ ACF = $\angle$ ACB, und CF = CB, ziehe AF und AB; so ist $\triangle$ ACF $\cong$ $\triangle$ ACB (§ 82.); folglich AF = AB. Man verlängere AF bis sie die CD in D trifft; ziehe BD, so ist im $\triangle$ ABD die AB + BD > AD oder > AF + FD; und da AB = AF bewiesen war, so ist BD > FD. Es ist

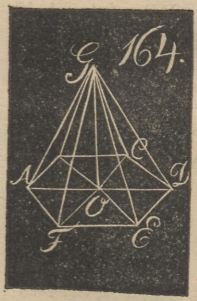
BC = CF gemacht, und
CD = CD

$\angle$ BCD > DCF (§ 92.). Dazu addire man
$\angle$ ACB = $\angle$ ACF

$\angle$ ACB + BCD > $\angle$ ACF + DCF oder $\angle$ ACD.

Anmerk. An einer dreiwinkligen Raumecke kommen sechs Stücke in Betracht, nämlich drei ebene Winkel und drei Flächenwinkel.

§ 192. Lehrsatz.



Die Summe aller ebenen Winkel in einer Raumecke (mit ausspringenden Kanten) ist kleiner, als vier Rechte. (Fig. 164.)

Beweis: Es sei G eine n winklige Raumecke. Zu beweisen ist, daß alle ebenen Winkel, welche die Raumecke bei G bilden, weniger als vier Rechte betragen.

Legt man durch die Kanten der Raumecke G eine Ebene ABCDEF, so entstehen so viel Dreiecke, als die Raumecke ebene Winkel enthält, also n Dreiecke. Benennt man alle ebenen Winkel bei G mit S, und alle Winkel an den Grundlinien der Seitendreiecke mit P; so ist

S + P = 2 n R (da ein Dreieck 2 R enthält).
Nach § 191 ist P > 2 n R − 4 R (alle Winkel in der Grundfläche)

S + 2 n R − 4 R < 2 n R. Dazu addire man
+ 4 R = + 4 R

S + 2 n R < 2 n R + 4 R. Davon subtrahire
2 n R = 2 n R

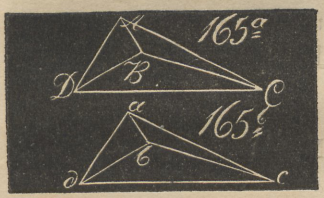
S < 4 R.

Anmerk. 1. Aus diesem Lehrsatze geht hervor, daß es nur 5 reguläre Körper geben kann; denn bei dem Tetraëder vereinigen sich zu einer Raumecke 3, bei dem Oktaëder 4, bei dem Ikosaëder 5 reguläre Dreiecke. Sollten noch andere Körper von gleichseitigen Dreiecken begrenzt werden, so müßten in jeder Raumecke 6 oder mehr ebene Winkel (deren jeder 60° ist) zusammenstoßen, würden also 360° oder mehr betragen, gegen § 192. Eben so können nicht 4 oder mehrere Quadrate eine Körperecke bilden, daher nur der Cubus möglich. Der Winkel im regelmäßigen Fünfecke beträgt 108°, also 4 derselben 432°, weßhalb nur das Dodekaëder möglich ist. Da ein Winkel im regelmäßigen sechsseitigen Polygone 120° beträgt, 3 dieser Winkel wenigstens zu einer Raumecke gehören; so ist es nicht möglich, aus 3 dieser Winkel eine Raumecke zu construiren; eben so wenig aus 3 Winkeln eines regulären Siebenecks u. s. w.

Anmerk. 2. Man lasse die Schüler zur Uebung die Netze der fünf regelmäßigen Körper zeichnen, und durch Zusammenkleben derselben die Körper selbst verfertigen.

§ 193. Lehrsatz.

Wenn in zwei dreiwinkligen Raumecken alle drei ebenen Winkel der einen Raumecke, der Reihe nach, denen der andern Raumecke gleich sind, so sind jedesmal auch die gleichliegenden Flächenwinkel einander gleich, d. h. die beiden dreiwinkligen Raumecken sind congruent. (Fig. 165 a. und b.)



Beweis. Es sei gegeben ∠ adb = ADB, ∠ adc = ADC und ∠ bdc = BDC. Zu beweisen ist, daß die 3 entsprechenden Flächenwinkel in beiden Raumecken gleich seien.

Man mache ad = AD, errichte aus A auf AD in der Ebene ADB die Senkrechte AB, und aus A auf AD in der Ebene ADC die Senkrechte AC. Eben so errichte man aus a zwei Senkrechte ab und ac auf ad in den Ebenen adb und adc, ziehe BC und bc; so ist nach § 179. Zus. 2. ∠ BAC das Maß des Flächenwinkels der Ebenen ADB und ADC, und ∠ bac das Maß des Flächenwinkels der Ebenen adb und adc, welche beide ebenen Winkel einander gleich sind; denn es ist

△ ADB ≅ △ adb (2 Winkel und eine anliegende Seite)

AB = ab, und DB = db. Eben so ist

△ ADC ≅ △ adc (2 Winkel und eine anliegende Seite)

AC = ac, und DC = dc. Auch ist

△ BDC ≅ △ bdc (2 Seiten und der eingeschlossene Winkel)

BC = bc. Hieraus folgt, daß

△ ABC ≅ △ abc (alle 3 Seiten gleich);

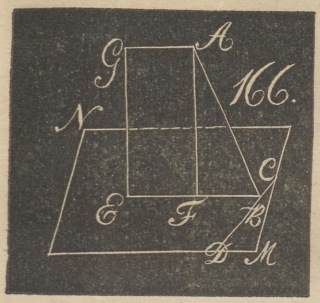
∠ BAC = ∠ bac; folglich sind dann auch nach § 179. die Flächenwinkel an AD und ad einander gleich. Durch ähnliche Construction beweiset man, daß auch die beiden andern Flächenwinkel in den beiden dreiwinkligen Raumecken einander gleich sind.

Anmerk. Wenn auch die eben betrachteten Raumecken unter obiger Bedingung einander gleich sind, so folgt nicht daraus, daß die Raumecken unbedingt congruent sind; denn die ebenen Winkel können auch in umgekehrter Reihenfolge liegen, und in diesem Fall ist es

nicht immer möglich, ihnen eine solche Lage zu geben, daß sie ganz zusammenfallen. Zwei solche Raumecken, die in allen Stücken übereinstimmen, aber doch nicht zusammenfallen, werden symmetrisch gleich, oder auch nur symmetrisch genannt (Siehe § 164.)

§ 194. Aufgabe 1.

Aus einem Punkte A außerhalb einer Ebene MN eine Senkrechte auf dieselbe zu fällen. (Fig. 166.)



Man ziehe in der Ebene MN eine beliebige Gerade DC, lege durch sie und den Punkt A eine Ebene, und ziehe in dieser aus A auf DC die Senkrechte AB; so ist CB ⊥ BA. Errichtet man im Punkte B auf DC in der Ebene MN die Senkrechte BE, so ist CB auch senkrecht auf BE; folglich CB ⊥ auf der Ebene durch A, B, E (§ 172.); mithin ist auch die Ebene MN, welche durch die Senkrechte CB geht, senkrecht auf der Ebene ABE (§ 176.) und umgekehrt die Ebene ABE ⊥ Ebene MN.

Jetzt fälle man in der Ebene ABE aus dem gegebenen Punkte A auf BE die Senkrechte AF; so ist diese auch senkrecht auf der Ebene MN. (§ 180.)

Aufgabe 2.

Aus einem Punkte E einer Ebene MN eine Senkrechte auf dieselbe zu errichten. (Fig. 166.)

Man fälle nach Aufgabe 1. von einem beliebigen Punkte A außerhalb der Ebene MN auf diese eine Senkrechte AF; lege durch sie und den gegebenen Punkt E eine Ebene FG; ziehe in dieser aus dem gegebenen Punkte E eine Parallele EG zu dem Perpendikel FA; so ist die Parallele EG auch senkrecht auf der Ebene MN nach § 182.

Zweiter Theil.

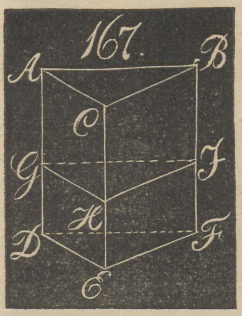
Von den Körpern und ihrer Inhaltsberechnung.

1) Von den Prismen.

§ 195. Lehrsatz.

Wenn man durch ein Prisma eine Ebene mit der Grundfläche parallel legt, so ist die Durchschnittsfläche der Grundfläche congruent. (Fig. 167.)

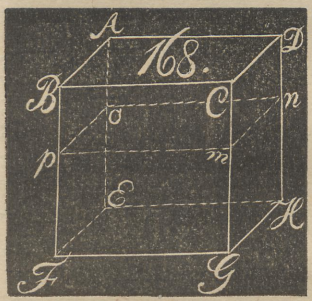
Beweis: Es sei die Ebene GHJ ∥ Ebene DEF. Hieraus folgt nach § 185., daß die Durchschnittslinie GH ∥ DE, HJ ∥ EF, und GJ ∥ DF ist.



Es ist auch DG ∥ HE, HE ∥ FJ, und DG ∥ FJ; folglich sind die Figuren DEHG, EFJH und DFJG Parallelogramme (§ 41.); mithin GH = DE, HJ = EF, und GJ = DF; folglich △ GHJ ≅ △ DEF, was zu beweisen war.

§ 196. Lehrsatz.

In einem Parallelepipedum sind 1) die gegenüberstehenden Seitenflächen gleich und parallel, 2) die gegenüberliegenden Raumecken symmetrisch, und 3) die gegenüberstehenden Flächenwinkel gleich. (Fig. 168.)



Beweis zu Satz 1. Es sei AG ein Parallelepipedum. Nach der Erklärung dieses Körpers sind die Grundflächen ABCD und EFGH congruente Parallelogramme und ihre Seiten parallel. Es ist demnach AD ∥ BC, und im Parallelogramme ABFE, AE ∥ BF, mithin nach § 188. ∠ DAE = ∠ CBF und die Ebene DAEH ∥ Ebene CBFG (§ 188. II.); folglich ist auch Parallelogramm DAEH ≅ Parallelogramm CBFG. (§ 93. Zus. 4.)

Eben so beweiset man auch, daß die gegenüberstehenden Parallelogramme ABFE und DCGH congruent und parallel sind.

Beweis zu Satz 2. Man vergleiche die körperliche Ecke A mit der ihr gegenüberliegenden G. Der ∠ EFB = ∠ EAB = ∠ HGC, ∠ DAE = ∠ DHE = ∠ CGF, und ∠ DAB = ∠ DCB = ∠ HGF (§ 93. Zus. 1. und § 188.); folglich sind die drei ebenen Winkel, welche die körperliche Ecke A begrenzen, denen, die G einschließen, gleich, ihrer Lage nach aber verschieden; also sind die körperlichen Ecken A und G symmetrisch gleich. (§ 193. Anmerkung.)

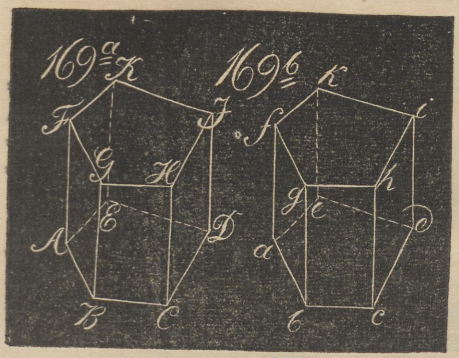
Ist das Parallelepipedum ein gerades, so sind die gegenüberliegenden körperlichen Ecken nicht bloß symmetrisch gleich, sondern auch congruent.

Beweis zu Satz 3. Legt man auf die Kante GC des Parallelepipedums die Ebene mnop senkrecht; so ist Gm ⊥ mn und mp, und ∠ nmp das Maß des Flächenwinkels an CG (§ 179. Zus. 2.). Da EA ∥ Gm ist, so ist auch EA ⊥ on und op (§ 182.), und ∠ pon das Maß des Flächenwinkels an EA. Es ist mn ∥ op, und pm ∥ on (§ 185.); folglich ∠ nmp = ∠ pon. Diese beiden gleichen Winkel sind das Maß der Flächenwinkel an GC und EA; also sind auch diese einander gleich.

Eben so beweiset man auch, daß die übrigen, einander gegenüberstehenden Flächenwinkel gleich sind.

§ 197. Lehrsatz.

Zwei Prismen sind deckend, wenn in beiden ein Körperwinkel von drei congruenten und ähnlich liegenden ebenen Figuren begrenzt wird. (Fig. 169 a. und b.)

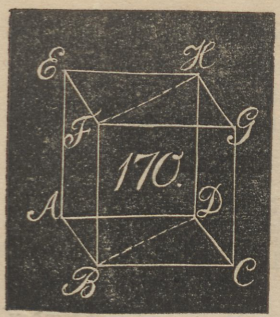


Beweis: Es sei Grundfläche ABCDE = abcde, Parallelogramm ABGF = abgf, und BCHG = bchg. Zu beweisen ist, das Prisma AJ = Prisma ai sei.

Man lege die Grundflächen ABCDE und abcde in einander, so werden sie, ihrer Gleichheit wegen, ganz zusammenfallen. Es ist ∠ ABC = ∠ abc, ∠ ABG = ∠ abg, und ∠ GBC = ∠ gbc und liegen ähnlich; folglich sind die Körperwinkel B und b gleich (§ 193.); mithin fällt die Kante BG auf bg, und Parallelogramm BH auf bh, und BF auf bf. Da Parallelogramm ABGF = abgf gegeben ist, so fällt GF auf gf. Es ist gegeben Parallelogramm BCHG = bchg, folglich fällt GH auf gh, und HC auf hc. Es fiel CD auf cd, und HC auf hc, mithin decken sich nach § 93. Zus. 4. die Parallelogramme CDJH und cdih; folglich fällt HJ auf hi, und DJ auf di. Es fiel ED auf ed, und DJ auf di; folglich decken sich die Parallelogramme EDJK und edik, und JK fällt auf ik, und Ek auf ek. Da AE auf ae, EK auf ek, und AF auf af fallen, so ist Parallelogramm AEKF = aekf, mithin fällt FK auf fk. Demnach fällt die obere Grundfläche FGHJK ganz in die Fläche fghik, und die beiden Körper fallen ganz in einander und sind congruent.

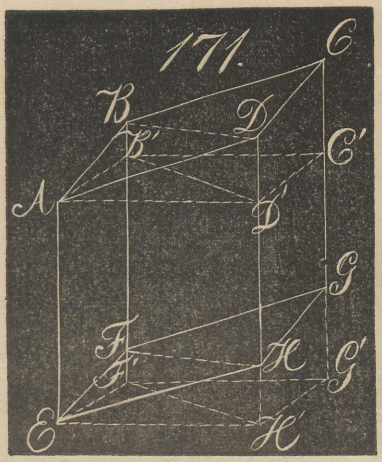
Zusatz. Zwei senkrechte Prismen mit congruenten Grundflächen und von gleicher Höhe sind congruent.

§ 198. Lehrsatz.



Eine Diagonalebene theilt ein Parallelepipedum in zwei gleiche dreiseitige Prismen. (Fig. 170 und 171.)

Beweis: 1) Wenn das Parallelepipedum gerade ist, wie Fig. 170. zeigt, so wird dasselbe durch die Diagonalebene BFHD nicht nur in zwei gleiche, sondern auch in zwei congruente Prismen getheilt; denn es sind in diesen nach § 196. alle Kanten, Kantenwinkel und Flächenwinkel entsprechend gleich und folgen in derselben Ordnung auf einander, wie bei dem einen, so bei dem andern; folglich müssen beide Prismen ganz zusammenfallen (§ 193. und § 197.)



2) Wenn das Parallelepipedum schief ist (Fig. 171.), so wird die Gleichheit seiner beiden Prismen dadurch erwiesen, daß man ein gleich großes gerades Parallelepipedum construirt, und zeigt, daß die beiden dreiseitigen Prismen des geraden, (welche nach Satz 1. einander gleich sind,) einzeln den beiden dreiseitigen Prismen des schiefen Parallelepipedums gleich sind. Um dieß zu beweisen, legt man durch A und E zwei Ebenen senkrecht auf die Kante AE, so entsteht durch die Verlängerung der vier Seitenflächen des gegebenen Parallelepipedums das gerade Parallelepipedum AB'C'D'EF'G'H', welches nach Satz 1. in zwei gleiche Theile durch die verlängerte Diagonalebene B'D'H'F' getheilt ist. Nun zeigt man sehr leicht, daß die beiden vierseitigen Pyramiden ABDD'B' und EFHH'F' (deren Spitzen A und E, und deren Grundflächen BDD'B' und FHH'F' sind) nach § 193. und 163. congruent sind; mithin ist

Pyramide ABDD'B' ≙ Pyr. EFHH'F'. Dazu addire
Körper AB'D'EFH = AB'D'EFH

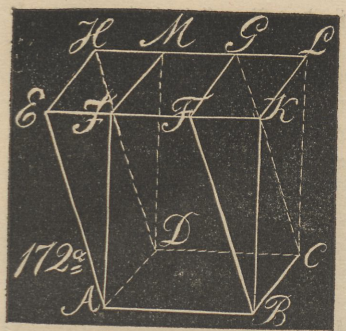
so ist schiefes Prisma ABDEFH = geradem Prisma AB'D'EF'H'

Eben so zeigt man auch, daß die beiden andern Theile des schiefen und geraden Parallelepipedums einander gleich sind; folglich sind die beiden dreiseitigen Prismen des schiefen Parallelepipedums einander an Körperinhalt gleich, da die beiden Prismen des geraden Parallelepipedums einander nach Satz 1. gleich waren. Folglich theilt eine Diagonalebene auch ein schiefes Parallelepipedum in zwei, dem Körperinhalte nach, gleiche Prismen.

Zusatz. Da die beiden dreiseitigen Prismen des schiefen Parallelepipedums in allen Stücken übereinstimmen, sich aber nicht in eine solche Lage bringen lassen, daß sie zusammenfallen; so sind sie nur symmetrisch gleich.

§ 199. Lehrsatz.

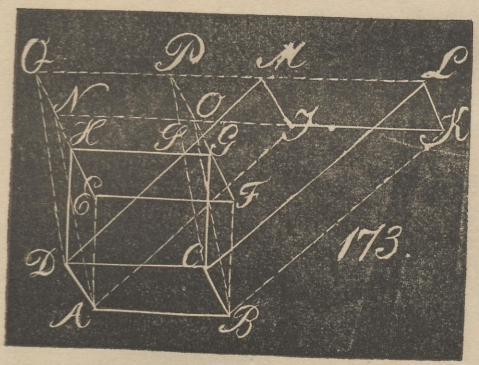
Wenn zwei Parallelepipeda auf einerlei Grundfläche stehen, ihre obern Grundflächen aber zwischen den nämlichen Parallelen, also in einer und derselben Ebene liegen, so haben sie gleichen körperlichen Inhalt. (Fig. 172 a.)



Beweis: Es seien ABCDEFGH und ABCDJKLM die beiden Parallelepipeda auf einerlei Grundfläche ABCD und zwischen den nämlichen Parallelen EK und HL, mithin zwischen denselben parallelen Ebenen AC und EL. Hier sind die dreiseitigen Prismen AEJDHM und BFKCGL einander gleich; denn es sind die Dreiecke AEJ und BFK, welche ihnen zu Grundflächen dienen, wegen der Parallelen AE und BF, AJ und BK, einander gleich, und aus demselben Grunde sind auch die Winkel EAJ und FBK einander gleich (§ 188.). Eben so sind die Parallelogramme AEHD und BFGC, AJMD und BKLC einander gleich (§ 196.); mithin ist nach § 193. der Körperwinkel J = dem Körperwinkel K, und demnach (nach § 197.) Prisma AEJDHM = Prisma BFKCGL. Zieht man nun vom Körper ABCDEHLK einerseits das Prisma AEJDHM, und andererseits das Prisma BFKCGL ab, so werden die übrigbleibenden Parallelepipeda ABCDJKLM und ABCDEFGH, oder AL und AG einander gleich sein.

§ 200a. Lehrsatz.

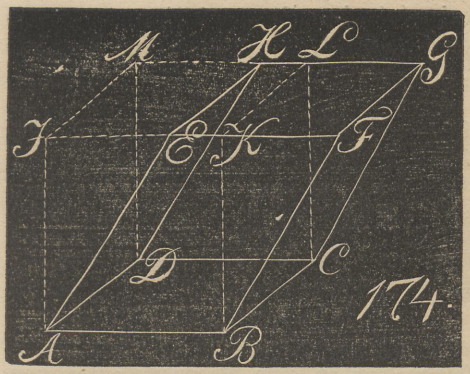
Zwei Parallelepipeda von gleicher Grundfläche und Höhe sind von gleichem körperlichen Inhalte. (Fig. 173.)



Beweis: Es seien AG und AL die gegebenen Parallelepipeda von gleicher Höhe auf der gemeinschaftlichen Grundfläche ABCD. Verlängert man LM, KJ, FG, EH bis sie sich schneiden; so wird die obere Grundfläche NP eines dritten Parallelepipedums AP gebildet, welches letztere (nach § 199.) sowohl dem Pppd. AG, als dem Pppd. AL gleich ist; folglich ist auch Pppd. AL = Pppd AG. (§ 71. 1.)

§ 200b. Lehrsatz.

Jedes schiefwinklige Parallelepipedum kann in ein rechtwinkliges Parallelepipedum von gleichem körperlichen Inhalte verwandelt werden, welches mit ihm gleiche Höhe und gleich große Grundfläche hat. (Fig. 174.)



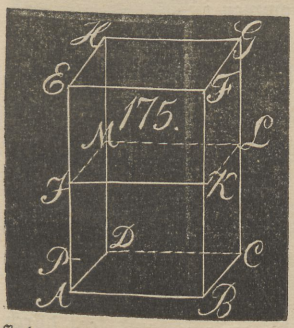
Beweis: Um den allgemeinsten Fall zu haben, sei das gegebene Parallelepipedum AG (Fig. 174.) nach allen drei Richtungen schief, d. h. es sei nach rechts und nach hinten geneigt, und die Grundfläche AC sei kein Rechteck. Zuerst wollen wir es nach rechts und links gerade machen. Man verlängere deßhalb FE und GH, und lege durch BC und AD zwei Ebenen senkrecht auf die Grundfläche AC; so ist das neue Parallelepipedum AL = AG (§ 199.). Auf dieselbe Weise kann man nun das neue Pppd. AL nach vorn und hinten gerade, und zuletzt die Grundfläche AC rechtwinklig machen. Folglich kann man jedes schiefe Parallelepipedum in ein rechtwinkliges von gleichem Inhalte verwandeln, welches mit ihm gleiche Höhe und gleich große Grundfläche hat.

Zusatz 1. Zwei dreiseitige Prismen auf einerlei Grundfläche und von gleicher Höhe sind einander gleich; denn ergänzt man sie zu Parallelepipeden, so sind diese einander gleich, weil sie gleiche Grundfläche und Höhe haben; mithin sind dann auch ihre Hälften, d. i. die beiden Prismen einander gleich. (§ 198).

Zusatz 2. Auch vielseitige Prismen von gleicher Grundfläche und Höhe sind gleich, weil dieselben sich durch Diagonalebenen in dreiseitige Prismen zerlegen lassen, von denen die entsprechenden nach Zusatz 1. gleich sind.

§ 201. Lehrsatz.

Zwei rechtwinklige Parallelepipeda auf einerlei Grundfläche verhalten sich, ihrem körperlichen Inhalte nach, wie ihre Höhen. (Fig. 175.)



Beweis: Es seien AL und AG die beiden rechtwinkligen Parallelepipeda auf einerlei Grundfläche ABCD. Zu beweisen ist, daß Parallelepipedum AL: Parallelepipedum AG = AJ: AE.

Da beide Körper rechtwinklig sind, so fallen sie zusammen, und der eine ist nur höher als der andere.

1) Sind ihre Höhen commensurabel, so sei AP das gemeinschaftliche Maß derselben, und AJ = m . AP, und AE = n . AP. Legt man durch die erhaltenen Theilungspunkte der Kanten mit der Grundfläche ABCD Parallelebenen, so entstehen Parallelepipeda, die alle einander gleich sind (§ 200 a.). Ihrer werden m in AL, und n in AG sein. Es werden sich demnach verhalten Parallelepipedum AL : Pppd. AG = m : n; aber auch

AJ : AE = m : n

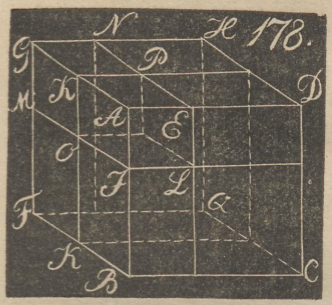
Pppd. AL : Pppd. AG = AJ : AE.

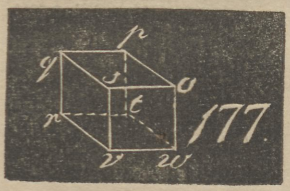
2) Sind die Höhen incommensurabel, so mißt man selbige mit einem so kleinen Maße, daß die Reste einmal eben so gut wie ganz verschwinden, und führt den Beweis auf dieselbe Art, wie in Satz 1. (Siehe § 107 a.)

Zusatz. Rechtwinklige Parallelepipeda von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen. Betrachtet man hier zwei gleichliegende Seitenflächen beider Parallelepipeda als Grundflächen, so ist dieser Zusatz auf den Hauptsatz zurückgeführt.

§ 202. Lehrsatz.

Der körperliche Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedums ist gleich dem Produkt aus seinen drei in eine Raumecke zusammenlaufenden Kanten, in Cubikmaß derjenigen Längeneinheit ausgedrückt, mit welcher jene 3 Kanten des Parallelepipedums gemessen und durch Zahlen ausgedrückt sind. (Fig. 177. und 178.)





Beweis: Es sei (Fig. 178.) Parallelepipedum BH rechtwinklig. Zu beweisen ist, daß das Produkt seiner drei, denselben Körperwinkel einschließenden Kanten AB, BC, BF, wenn sie mit einerlei Maß gemessen und in Zahlen dargestellt werden, (in Bezug auf den Cubus der Maßeinheit,) gleich dem körperlichen Inhalte des Parallelepipedums BH sei.

Es sei vp (Fig. 177.) ein Cubus, dessen Seite vw als Maß der drei, einen körperlichen Winkel des Parallelepipedums BH einschließenden Kanten angenommen ist.

Man trage auf AB eine Maßeinheit AJ = vw, und lege durch J eine Ebene || AH; so verhält sich nach § 201.

I. Pppd. BH: Pppd. JH = AB : AJ = AB : 1 (Grundfläche AH).

Trägt man auf AD eine Maßeinheit AE = vw, und legt durch E eine Ebene || BG; so verhält sich nach § 201.

II. Pppd. JH : Pppd. JN = AD : AE = AD : 1 (Grundfläche JG).

Trägt man ferner auf AG eine Maßeinheit AK = vw, und legt durch K eine Ebene || AC; so verhält sich nach § 201.

III. Pppd. JN : Pppd. JP = AG : AK = AG : 1 (Grundfläche AL).

Multiplicirt man in diesen drei Proportionen die unter einander stehenden Glieder, und läßt die gleichnamigen hinweg; so erhält man die Proportion

Pppd. BH : Pppd. JP = AB . AD . AG : AJ . AE . AK = AB . AD . AG : 1; also Pppd. BH = AB . AD . AG × Pppd. JP.

Da aber Pppd. JP = Cubus vp, dessen Seite vw als Maßeinheit angenommen war; so ist

Pppd. BH = AB . AD . AG × Cubus von vw (als Maßlängeneinheit) als Körpereinheit; wobei vorausgesetzt wird, daß AB, AD, AG Zahlenausdrücke sind.

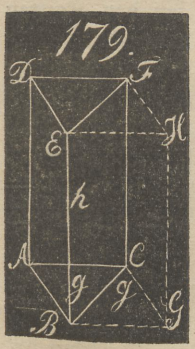
Anmerk. Es muß hier bemerkt werden, daß wir unter dem Produkte dreier Linien für die Folge stets einen Ausdruck verstehen, wie er im obigen Lehrsatze gegeben ist.

Zusatz 1. Da AD × AG die Grundfläche, und AB die Höhe des rechtwinkligen Parallelepipedums BH ist; so ist der Inhalt desselben auch gleich dem Produkte seiner Grundfläche und Höhe, in Cubikmaß der Maßlängeneinheit vw ausgedrückt.

Zusatz 2. Der Inhalt eines jeden Parallelepipedums ist gleich dem Produkte aus seiner Grundfläche und Höhe, immer in Bezug auf den Cubus von vw (als Maßlängenheit). Denn jedes schiefwinklige Parallelepipedum kann nach § 200 b. in ein ihm gleiches rechtwinkliges verwandelt werden, dessen Inhalt dem Produkte seiner Grundfläche und Höhe gleich ist; folglich ist auch der Inhalt eines schiefwinkligen Parallelepipedums gleich dem Produkte aus seiner Grundfläche und Höhe, immer aber in Cubikmaß der Maßlängeneinheit vw ausgedrückt.

§ 203 a. Lehrsatz.

Der körperliche Inhalt eines dreiseitigen Prisma's ist gleich dem Produkte aus seiner Grundfläche und Höhe. (Fig. 179.)



Beweis. Es sei des Prisma's Grundfläche ABC = g
die Höhe desselben = h.
Behauptet wird, daß Prisma ABCDEF = g . h sei.

Man verlängere die obere und untere Grundfläche des dreiseitigen Prisma's, ziehe BG ∥ AC, und CG ∥ AB; so entsteht das Parallelogramm ABGC. Errichtet man auf CG eine Ebene ∥ dem Parallelogramm ABED, und auf BG eine Ebene ∥ dem Parallelogramm ACFD, so entsteht ein Parallelepipedum GD, dessen Höhe = h des dreiseitigen Prisma's, und dessen Grundfläche = 2 g des Prisma's ist. Es ist nach § 202. Zusatz der Inhalt des Parallelepipedums GD = 2 g . h. Nun ist aber Pppd. GD durch die Diagonalebenen BCFE nach § 198. in zwei einander gleiche Prisma getheilt; folglich ist Prisma ABCDEF = ½ Pppd. GD = g . h Cubus der als Maßeinheit angenommenen Länge vw (§ 202. Fig. 177.).

§ 203 b. Lehrsatz.

Der körperliche Inhalt eines n seitigen Prisma's ist gleich dem Produkt aus seiner Grundfläche und Höhe.

Beweis: Die Grundfläche G des n seitigen Prisma's läßt sich in (n — 2) Dreiecke theilen; diesen Dreiecken entsprechend wird auch das Prisma durch Diagonalflächen in (n — 2) dreiseitige Prismen getheilt, die alle eine und dieselbe Höhe (h) haben. Benennt man die einzelnen Dreiecke, worein die Grundfläche G des n seitigen Prisma's getheilt ist, mit g', g'', g''' u. s. w.; so ist der körperliche Inhalt aller jener (n — 2) dreiseitigen Prismen $= g \cdot h + g' \cdot h + g'' \cdot h + u. s. w. = (g + g' + g'' + \text{ꝛc. ꝛc.}) \cdot h = G \cdot h$. Cubus der Maßlängeneinheit.

Zusatz 1. Prismen von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen, und von gleicher Grundfläche, wie ihre Höhen. Nennt man die beiden Prismen P, p, ihre entsprechenden Grundflächen G, g, und ihre Höhen H, h; so ist $P = G \cdot H$, und $p = g \cdot h$; folglich verhält sich $P : p = G \cdot H : g \cdot h$.

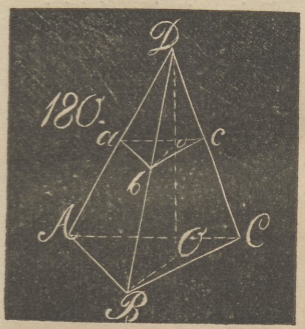
Ist $H = h$, so ist $P : p = G : g$.

Ist $G = g$, so ist $P : p = H : h$.

Zusatz 2. Die Seitenoberfläche eines rechtwinkligen Parallelepipedums und Prisma's ist gleich dem Produkte aus dem Umfange seiner Grundfläche und Höhe, in Bezug auf das Quadrat der Maßlängeneinheit.

2) Von den Pyramiden.

§ 204a. Lehrsatz.



Wird eine Pyramide durch eine Ebene parallel mit der Grundfläche geschnitten, so sind 1) die Durchschnittslinien den Kanten an der Grundfläche und den Höhen proportional, und 2) ist die Durchschnittsfläche der Grundfläche ähnlich. (Fig. 180.)

Beweis: Es sei Ebene abc ∥ ABC, und die Höhe DO ⊥ ABC, mithin ⊥ abc (§ 187.). Zu beweisen ist, daß 1) $ab : AB = bc : BC = ac : AC = Do : DO$, und 2) △ abc ∽ △ ABC.

I. In o und O schneidet die Senkrechte DO die beiden einander parallelen Ebenen abc und ABC. Zieht man bo und BO, so sind diese Linien parallel (§ 185.). Eben so ist ab ∥ AB, bc ∥ BC, und ac ∥ AC; folglich verhält sich

$ab : AB = Db : DB$ und
$bc : BC = Db : DB$

$ab : AB = bc : BC$. Eben so verhält sich
$ac : AC = Dc : DC$ und
$bc : BC = Dc : DC$

$ac : AC = bc : BC$. Demnach sind die Durchschnittslinien den Kanten an der Grundfläche proportionirt. Ferner verhält sich

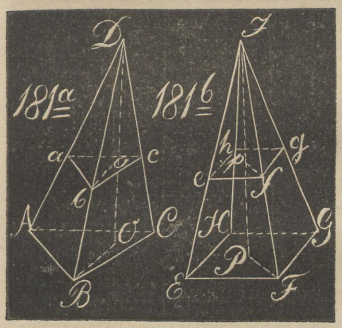
Db : DB = Do : DO, und
Db : DB = ab : AB

ab : AB = Do : DO, und da oben war
ab : AB = bc : BC

so ist bc : BC = Do : DO. Also verhalten sich die Durchschnittslinien zu den Kanten an der Grundfläche, wie die entsprechenden Höhen in beiden Pyramiden.

II. Da in den beiden Grundflächen ABC und abc die gleichliegenden Seiten nach I. proportionirt sind; so ist △ abc ∽ △ ABC (§ 111.). Bei Pyramiden von mehr als 3 Seiten wird der Beweis auf gleiche Weise geführt.

§ 204b. Lehrsatz.



Werden zwei Pyramiden von gleicher Höhe und Grundfläche gleich weit von der Grundfläche und mit ihr parallel durch Ebenen geschnitten; so sind die entsprechenden Durchschnittsflächen in beiden Pyramiden einander gleich. (Fig. 181 a. und b.)

Beweis: Es sei in den Pyramiden ABCD und EFGHJ die Höhe DO = JP, und oO = pP; eben so die Grundfläche ABC = EFGH. Zu beweisen ist, daß Ebene abc = Ebene efgh sei.

Da Ebene abc ‖ Ebene ABC, so ist nach § 204a. II.
△ abc ∽ △ ABC;

folglich 1) △ **abc** : △ **ABC** = $bc^2 : BC^2 = Db^2 : DB^2 =$ **$Do^2 : DO^2$**. (§ 120.)
Es ist ferner Ebene efgh ‖ Ebene EFGH; mithin
Figur efgh ∽ Figur EFGH (§ 204a. II.);

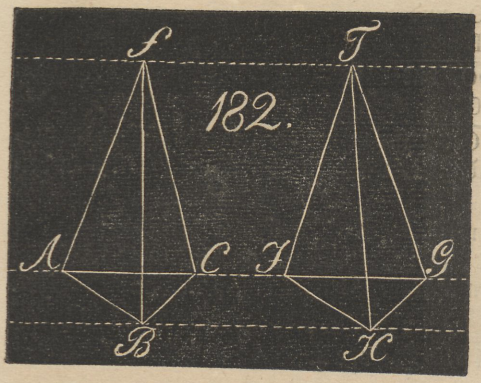
folglich 2) **efgh : EFGH** = $fg^2 : FG^2 = Jf^2 : JF^2 = Jp^2 : JP^2 =$ **$Do^2 : DO^2$**;
(da Jp = Do, und JP = DO gegeben waren.)

Also (nach 1. und 2.) △ abc : △ ABC = efgh : EFGH.
Es war △ ABC = Figur EFGH gegeben;
mithin △ abc = Figur efgh.

§ 205. Lehrsatz.

Zwei dreiseitige Pyramiden von gleicher Grundfläche und von gleicher Höhe sind an körperlichem Inhalt gleich. (Fig. 182.)

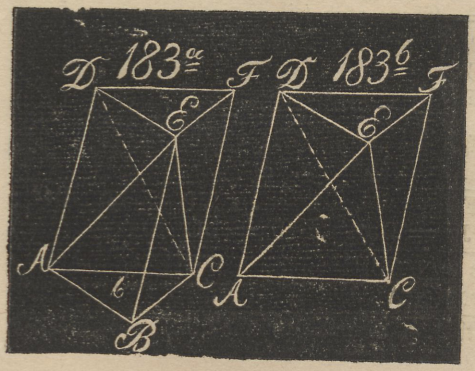
Beweis: Es sei Grundfläche ABC der einen Pyramide ABCS = Grundfläche GHJ der andern Pyramide GHJT, und beide Pyramiden haben gleiche Höhe. Zu beweisen ist, daß Pyramide ABCS = Pyramide GHJT sei.



Theilt man die gleichen Höhen der beiden Pyramiden ABCS und GHJT in eine gleiche Anzahl gleicher Theile, und legt durch diese Theilungspunkte Parallelebenen mit ihren Grundflächen; so sind nach § 204 b. die entsprechenden Durchschnittsflächen in beiden Pyramiden gleich. Denkt man sich nun die mit der Grundfläche parallel durchgelegten Ebenen unendlich nah an einander, so werden die entsprechenden abgestumpften Pyramidchen in den beiden Pyramiden ABCS und GHJT als Prismen von gleicher Grundfläche und Höhe anzusehen, mithin einander gleich sein. (§ 200 b. Zusatz.) Folglich wird die Summe aller abgestumpften Pyramidchen der einen Pyramide ABCS gleich der Summe aller abgestumpften Pyramidchen der andern Pyramide GHJT, also Pyramide ABCS = Pyramide GHJT sein.

§ 206 a. Lehrsatz.

Der körperliche Inhalt einer dreiseitigen Pyramide ist gleich dem dritten Theile des Produkts aus ihrer Grundfläche und Höhe. (Fig. 183 a. und b.)



Beweis: Es sei ABCE (Fig. 183 a.) eine dreiseitige Pyramide, deren Grundfläche ABC = b, und Höhe = h sei. Zu beweisen ist, daß Pyramideninhalt ABCE = $\frac{1}{3}$ b. h sei, in Bezug auf den Cubus der Maßlängeneinheit, als Körpereinheit.

Man braucht hier nur zu zeigen, daß eine dreiseitige Pyramide immer der dritte Theil eines Prisma's von gleicher Grundfläche und Höhe ist. Man ziehe deßhalb aus A und C der dreiseitigen Pyramide ABCE die Linien AD und CF ‖ BE; lege durch E die Ebene DEF ‖ ABC, so entsteht dadurch das Prisma ABCDEF = Pyramide ABCE + vierseitigen Pyramide ACFDE (wo E die Spitze, und ACFD die Grundfläche derselben ist). Legt man nun (in Figur 183 b.) durch DEC eine Ebene, so wird dadurch die vierseitige Pyramide ACFDE in zwei dreiseitige Pyramiden CDFE und DACE (wo E die Spitze, und △ CDF = △ ACD die Grundflächen derselben sind) zerlegt. Daher ist das ganze Prisma ABCDEF =

Pyramiden ABCE + CDFE + DACE. Die drei Pyramiden sind nach § 205. einander gleich, weil je zwei von ihnen gleiche Höhe und gleiche Grundflächen haben. Folglich ist jede einzelne Pyramide, = ⅓ Prisma ABCDEF; also Pyramide ABCE = ⅓ Prisma ABCDEF = ⅓ b . h (§ 203 a.).

§ 206 b. Lehrsatz.

Der körperliche Inhalt einer jeden Pyramide ist gleich dem dritten Theile des Produkts aus ihrer Grundfläche und Höhe.

Beweis. Ist die Pyramide mehr als dreiseitig, so kann sie durch Ebenen, die durch ihre Spitze und durch die Diagonalen in ihrer Grundfläche gelegt werden, in so viel dreiseitige Pyramiden getheilt werden, als die Grundfläche sich in Dreiecke theilen läßt. Ist die Grundfläche eine fünfseitige Figur, so kann sie in drei Dreiecke, und die ganze Pyramide in drei dreiseitige Pyramiden zerlegt werden. Es werde der Flächeninhalt eines jeden der Dreiecke in der Grundfläche F der fünfseitigen Pyramide respective durch f, f', f'', und ihre gemeinschaftliche Höhe durch h ausgedrückt; so ist der körperliche Inhalt

der ersten dreiseitigen Pyramide $= \frac{f \cdot h}{3}$

„ zweiten „ „ $= \frac{f' \cdot h}{3}$

„ dritten „ „ $= \frac{f'' \cdot h}{3}$

folglich die drei Pyramiden zusammen, oder die fünfseitige Pyramide $= (f + f' + f'') \cdot \frac{h}{3} = \frac{F \cdot h}{3}$ in Bezug auf den Cubus der Maßlängeneinheit als Körpereinheit.

Zusatz 1. Mit Hülfe dieses Satzes läßt sich der körperliche Inhalt eines jeden Polyëders berechnen; denn jeder Körper, der von Ebenen begrenzt wird, ist leicht in Pyramiden zu theilen, wenn man einen Punkt in seinem Innern annimmt, welcher die Spitze aller dieser Pyramiden ist. Die Seitenflächen dieses Körpers sind dann die Grundflächen der Pyramiden. Oder man legt die theilenden Ebenen durch die Spitze eines und desselben Körperwinkels; dadurch entstehen so viel einzelne Pyramiden als das Polyëder Seitenebenen hat, diejenigen ausgenommen, welche den Körperwinkel bilden, von welchem die theilenden Ebenen ausgehen.

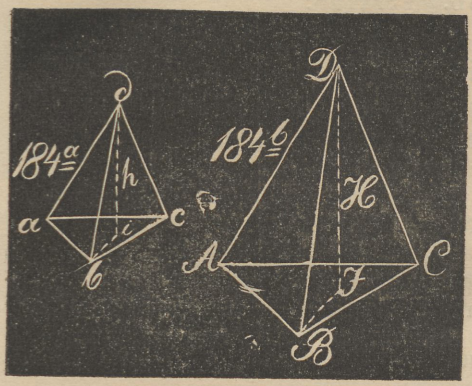
Zusatz 2. Zwei Pyramiden von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen, und von gleicher Grundfläche, wie ihre Höhen. Denn bezeichnet man mit P, p zwei Pyramiden, mit H, h und G, g ihre entsprechenden Höhen und Grundflächen; so ist P = ⅓ H . G, und p = ⅓ h . g; folglich P : p = ⅓ H . G : ⅓ h . g.

Ist nun H = h, so ist P : p = G : g.

Ist aber G = g, so ist P : p = H : h.

Zusatz 3. Die Oberfläche einer regelmäßigen oder senkrechten Pyramide findet man, wenn man den Perimeter der Grundfläche derselben mit ihrer halben Seitenhöhe multiplicirt (§ 157.), in Bezug auf das Quadrat der Maßeinheit.

§ 207a. Lehrsatz.



Die Oberflächen ähnlicher Pyramiden verhalten sich wie die Quadrate, und die körperlichen Inhalte derselben wie die Cuben ihrer gleichliegenden Kanten oder Höhen. (Fig. 184 a. und b.)

Beweis: Es seien abcd und ABCD zwei ähnliche Pyramiden.

I. Da diese Pyramiden ähnlich sind, so sind nach § 158. die gleichliegenden Seitenflächen ähnliche Dreiecke und ihre Grundflächen ähnliche Figuren; folglich verhält sich

$\triangle$ abd : $\triangle$ ABD = $bd^2 : BD^2$
$\triangle$ bcd : $\triangle$ BCD = $bd^2 : BD^2$
$\triangle$ acd : $\triangle$ ACD = $ad^2 : AD^2 = bd^2 : BD^2$
$\triangle$ abc : $\triangle$ ABC = $ab^2 : AB^2 = bd^2 : BD^2$

$(\triangle abd + \triangle bcd + \triangle acd + \triangle abc) : (\triangle ABD + \triangle BCD + \triangle ACD + \triangle ABC) = bd^2 : BD^2$

oder Oberfläche der Pyr. abcd : Oberfläche der Pyr. ABCD = $bd^2 : BD^2$, und daher auch = $ad^2 : AD^2 = cd^2 : CD^2$ ꝛc. ꝛc.

Da Pyramide abcd $\backsim$ Pyramide ABCD gegeben ist, so haben ihre Kanten gegen die Grundflächen gleiche Neigung (§ 158.); also ist der Neigungswinkel dbi = DBJ. Es sind die Winkel bei i und J als Rechte einander gleich, mithin $\triangle$ bdi $\backsim$ $\triangle$ BDJ; folglich
$bd^2 : BD^2 = di^2 : DJ^2 = h^2 : H^2$. Demnach Oberfläche der Pyramide abcd : Oberfläche der Pyramide ABCD = $h^2 : H^2$, was zu beweisen war.

II. Es war $\triangle$ abc : $\triangle$ ABC = $ab^2 : AB^2 = bd^2 : BD^2 = h^2 : H^2$
$\frac{1}{3}$ h : $\frac{1}{3}$ H = ... h : H

folglich $\frac{1}{3}$ h . $\triangle$ abc : $\frac{1}{3}$ H . $\triangle$ ABC = ... $h^3 : H^3$

Da die beiden Glieder des ersten Verhältnisses nach § 206a. den Körperinhalt der beiden Pyramiden geben, so verhält sich

Pyramide abcd : Pyramide ABCD = $h^3 : H^3$.

Eben so beweiset man auch, daß sich verhält

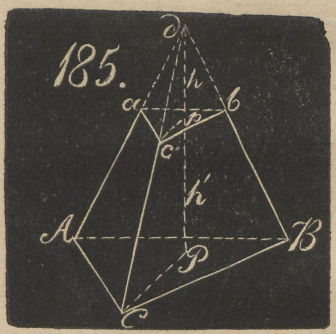
Pyr. abcd : Pyr. ABCD = $db^3 : DB^3 = ab^3 : AB^3 = bc^3 : BC^3$.

Sind es irgend zwei andere Polyëder, so kann man sich dieselben in eine gleiche Anzahl ähnlicher und übereinstimmig liegender Pyramiden zerlegt vor-

stellen. Demnach werden auch die Oberflächen zweier ähnlichen Polyëder, von welcher Gestalt sie auch sein mögen, sich zu einander verhalten, wie die Quadrate, und ihre körperlichen Inhalte, wie die Cuben zweier homolog liegenden Kanten, oder Diagonalen oder Höhen.*)

§ 207 b. Lehrsatz.

1) Der körperliche Inhalt einer jeden parallel mit der Grundfläche abgestumpften Pyramide, deren zwei gleichliegende Seitenkanten der untern und obern Grundfläche, AC und ac sind, ist gleich $\left(\frac{AC \cdot \triangle ABC - ac \cdot \triangle abc}{AC - ac}\right) \times \frac{h'}{3}$, **wo** $\triangle ABC$ **die untere, und** $\triangle abc$ **die obere Grundfläche der abgestumpften Pyramide bezeichnen; und 2) die Seitenfläche einer parallel mit der Grundfläche abgestumpften senkrechten Pyramide ist gleich der halben Summe aller obern und untern Parallelkanten derselben, multiplicirt mit der Entfernung der letztern von einander.** (Fig. 185.)



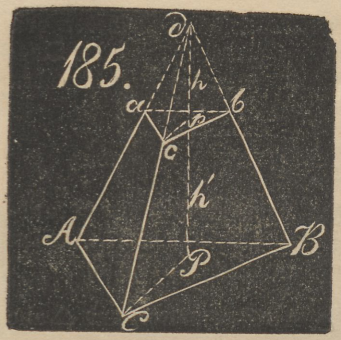
Beweis zu Satz 1. Um den Körperinhalt einer, parallel mit der Grundfläche, abgestumpften Pyramide zu finden, suche man zuerst die Höhen der vollständigen ganzen, und der obern kleinern Pyramide. Aus den so gefundenen Höhen berechne man nach § 206 b. den Inhalt der größern und der kleinern Pyramide, und subtrahire dann die letztere von der erstern. Es sei z. B. abc ABC die mit der Grundfläche parallel abgestumpfte Pyramide, deren Höhe $pP = h'$ sei. Man vervollständige die abgestumpfte Pyramide, so ist $dp = h$ die Höhe des kleinern, und $dP = H$ die Höhe der größern Pyramide. Es verhält sich dann $AC : ac = Cd : cd = H : h$; woraus folgt, daß

$$(AC - ac) : AC = (H - h) : H, \text{ und}$$
$$(AC - ac) : ac = (H - h) : h; \text{ folglich}$$

$$H = \frac{AC \cdot (H - h)}{AC - ac}, \text{ und } h = \frac{ac \cdot (H - h)}{AC - ac}. \text{ Da } H - h = h' \text{ ist,}$$

$$\text{so ist } H = \frac{AC \cdot h'}{AC - ac}, \text{ und } h = \frac{ac \cdot h'}{AC - ac}.$$

*) Die Würfel sind offenbar ähnliche Polyëder; deßhalb verhalten sie sich zu einander, wie die dritten Potenzen der Zahlen, wodurch ihre Seitenlinien ausgedrückt werden. Daher der Name Cubus in der Arithmetik. Es geht zugleich aus Obigem hervor, daß von den Einheiten des Cubik- oder Körpermaßes (welche man nach der Länge ihrer Seite, Cubikfuß, Cubikzoll u. s. w. nennt) jede höhere $12 \times 12 \times 12 = 1728$ nächst niedere enthält, was auch schon aus § 202. folgt. Unter Cubatur oder Cubirung der Körper versteht man ihre Verwandlung in Würfel von gleichem körperlichen Inhalte.



Nach § 206 a. ist Inhalt der Pyramide

$$ABCd = \tfrac{1}{3} H \,.\, \triangle ABC = \frac{AC \,.\, h' \,.\, \triangle ABC}{3\,(AC - ac)}.$$

Und Inhalt der Pyramide abcd

$$= \tfrac{1}{3} h \,.\, \triangle abd = \frac{ac \,.\, h' \,.\, \triangle abc}{3\,(AC - ac)};$$

folglich abgestumpfte Pyramide abcABC = Pyramide ABCd — Pyramide

$$abcd = \frac{AC \,.\, h' \,.\, \triangle ABC}{3\,(AC - ac)} - \frac{ac \,.\, h' \,.\, \triangle abc}{3\,(AC - ac)}, \text{ oder}$$

$$= \frac{(AC \,.\, \triangle ABC - ac \,.\, \triangle abc)}{(AC - ac)} \times \frac{h'}{3}, \text{ immer in Bezug}$$

auf den Cubus der Maßlängeneinheit als Körpereinheit.

Beweis zu Satz 2. Die Seitenfläche einer parallel mit der Grundfläche abgestumpften senkrechten Pyramide besteht aus so viel Trapezen, als die Grundfläche Seiten hat. Eines Trapezes Inhalt ist nach § 102. gleich dem Produkt aus der halben Summe der parallelen Seiten mit der Höhe desselben; folglich erhält man den Flächeninhalt aller Trapeze, welche die Oberfläche der abgestumpften senkrechten Pyramide begrenzen, wenn man die halbe Summe aller obern und untern Parallelseiten einer solchen Pyramide mit der Höhe eines dieser Trapeze multiplicirt. Alles aber in Bezug auf das Quadrat der Maßeinheit.

3) Vom Cylinder.

§ 208. Lehrsatz.

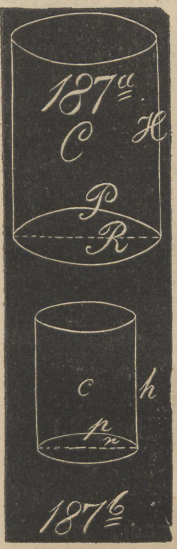
Der Körperinhalt eines geraden Cylinders ist gleich dem Produkt aus seiner Grundfläche und Höhe, und der Flächeninhalt seines Mantels gleich dem Produkt aus der Peripherie der Grundfläche und der Höhe. (Fig. 187 a.)

Beweis: Es sei des Cylinders Höhe = h, die Grundfläche = g, und die Peripherie der Grundfläche = p. Zu beweisen ist, daß Körperinhalt des Cylinders = g . h, und Flächeninhalt des Mantels desselben = p . h sei.

Betrachtet man den Cylinder als ein Prisma von so kleinen Seitenflächen, daß diese ganz in die Oberfläche des Cylinders fallen, so wird der Körperinhalt eines Cylinders gleich dem Körperinhalt eines Prisma's, und demnach auch (nach § 203 b.) der Körperinhalt eines Cylinders = g . h, so wie (nach § 203 b. Zusatz 2.) der Flächeninhalt seines Mantels = p . h sein. Da (nach § 141.) $g = r^2 \,.\, \pi$ ist (wo r den Radius der Grundfläche des Cylinders bezeichnet), so ist der Körperinhalt des Cylinders $= r^2 \,.\, \pi \,.\, h$; und da nach § 137 $p = d \,.\, \pi = 2\,r \,.\, \pi$ ist, so ist der Flächeninhalt des Mantels eines senkrechten Cylinders =

$2r \cdot \pi \cdot h$ (wo d den Durchmesser, und r den Radius der Grundfläche des Cylinders bezeichnet).

Anmerk. Der im obigen Satze, so wie in allen folgenden Sätzen vorkommende Zahlenausdruck, wodurch der Inhalt eines Körpers bezeichnet wird, muß immer auf den Cubus der Maßlängeneinheit, als Körpereinheit, bezogen werden.



Zusatz. Zwei Cylinder C, c von gleicher Höhe verhalten sich, wie ihre Grundflächen, und von gleicher Grundfläche, wie ihre Höhen. Nennt man H, h, und G, g die entsprechenden Höhen und Grundflächen der beiden Cylinder C, c; so ist $C = G \cdot H$, und $c = g \cdot h$; folglich $C : c = G \cdot H : g \cdot h$. Ist $H = h$, so ist 1) $C : c = G : g$. Ist aber $G = g$, so ist 2) $C : c = H : h$.

§ 209. Lehrsatz.

Aehnliche Cylinder verhalten sich 1) ihrer Oberfläche nach, wie die Quadrate, und 2) ihrem körperlichen Inhalte nach, wie die Cuben der Radien ihrer Grundflächen oder ihrer Höhen. (Fig. 187 a. und b.)

Beweis zu Satz 1. Nennt man P, p die Peripherien, und R, r die Radien der Grundflächen beider Cylinder C, c, und ihre Höhen H, h; so verhält sich nach § 137.

$P : p = R : r = H : h$ (§ 156. IV.). Und
$H : h = R : r = H : h$

$P \cdot H : p \cdot h = R^2 : r^2 = H^2 : h^2$.

Es ist $P \cdot H$ = Mantel des Cylinders C (§ 208.), und eben so $p \cdot h$ = Mantel des Cylinders c; folglich

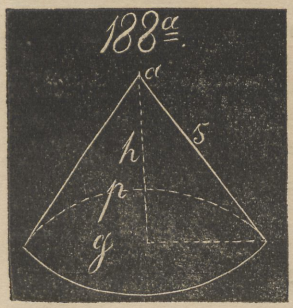
Mantel vom Cylinder C : Mantel vom Cylinder $c = R^2 : r^2 = H^2 : h^2$.

Beweis zu Satz 2. Nennt man die Grundflächen beider Cylinder G, g; so verhält sich $G : g = R^2 : r^2 = H^2 : h^2$, (§ 140.) und
$H : h = R : r = H : h$ (§ 156. IV.)

$G \cdot H : g \cdot h = R^3 : r^3 = H^3 : h^3$

Es ist nach § 208. $G \cdot H$ = Inhalt des Cylinders C, und
$g \cdot h$ = Inhalt des Cylinders c,

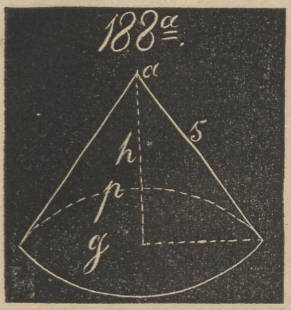
Inhalt vom Cylinder C : Cylinder $c = R^3 : r^3 = H^3 : h^3$.



4) Vom Kegel.

§ 210a. Lehrsatz.

1) Der körperliche Inhalt eines Kegels überhaupt ist gleich dem dritten Theile des Produkts aus seiner Grundfläche und Höhe, und 2) der Flächeninhalt des Mantels eines geraden Kegels ist gleich der Hälfte des Produkts aus der Peripherie der Grundfläche und seiner Seitenhöhe. (Fig. 188.)



Beweis zu Satz 1. Es sei die Höhe des Kegels = h (Fig. 188 a.), die Seitenhöhe = s, die Grundfläche = g, und die Peripherie der Grundfläche = p. Zu beweisen ist, daß Körperinhalt des Kegels = $\frac{1}{3}$ g . h, und die Oberfläche eines geraden Kegels = $\frac{1}{2}$ p . s sei.

Betrachtet man den Kegel als eine Pyramide von unzählig vielen Seiten, so wäre nach § 206 b. der Inhalt des Kegels = $\frac{1}{3}$ g . h, und die Oberfläche des Mantels eines geraden Kegels = $\frac{1}{2}$ p . s (§ 206 b. Zusatz 3.). Nach § 141. ist $g = r^2 . \pi$, also ist Inhalt des Kegels = $\frac{1}{3}$ r^2 . π . h, (wo r den Radius der Grundfläche des Kegels bezeichnet). Und da nach § 137. $p = 2\,r . \pi$ ist, so ist der Flächeninhalt des Mantels eines geraden Kegels = $\frac{1}{2}$ s . p = $\frac{1}{2}$ s . (2 r . π) = s . r . π (wo s die Seitenhöhe des geraden Kegels bedeutet).

Zusatz 1. Der Inhalt eines Kegels ist der dritte Theil des Körperinhalts eines Cylinders von derselben Grundfläche und Höhe. (§ 206 b.)

Zusatz 2. Kegel von gleicher Grundfläche verhalten sich wie ihre Höhen, und von gleicher Höhe, wie ihre Grundflächen. (§ 206 b. Zusatz 2.)

§ 210 b. Lehrsatz.

Aehnliche Kegel verhalten sich, ihrer Oberfläche nach, wie die Quadrate, und ihrem Körperinhalte nach, wie die Cuben der Radien ihrer Grundflächen oder ihrer Höhen.

Beweis: Nennt man R, r die Radien der Grundflächen G, g; ihre entsprechenden Seitenhöhen S, s und die Peripherien ihrer Grundflächen P, p; so verhält sich bei geraden ähnlichen Kegeln

I. $P : p = R : r = H : h = S : s$; mithin auch

$\frac{1}{2}S : \frac{1}{2}s = R : r = H : h = S : s$;

folglich $\frac{1}{2}S . P : \frac{1}{2}s . p = R^2 : r^2 = H^2 : h^2 = S^2 : s^2$.

Da nach § 210 a. $\frac{1}{2}$ S . P = der Mantelfläche des einen, und

$\frac{1}{2}$ s . p = der Mantelfläche des andern geraden Kegels ist;

so verhalten sich allgemein die Mantelflächen ähnlicher gerader Kegel, wie

$R^2 : r^2 = H^2 : h^2 = S^2 : s^2$.

II. Bei ähnlichen Kegeln (seien sie gerade oder schief) verhält sich immer

$G : g = R^2 : r^2 = H^2 : h^2 = S^2 : s^2$ mithin auch

$\frac{1}{3}H : \frac{1}{3}h = R : r = H : h = S : s$;

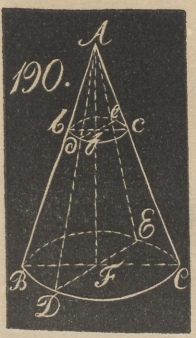
folglich $\frac{1}{3}H . G : \frac{1}{3}h . g = R^3 : r^3 = H^3 : h^3 = S^3 : s^3$.

Nach § 210 a. ist $\frac{1}{3}$ H . G = Inhalt eines Kegels K, und

$\frac{1}{3}$ h . g = Inhalt eines Kegels k; folglich verhält sich Kegel K : Kegel k = $R^3 : r^3 = H^3 : h^3 = S^3 : s^3$.

§ 211. Lehrsatz.

Wird ein Kegel (sei er gerade oder schief) durch eine Ebene parallel mit dessen Grundfläche durchschnitten, so ist die Durchschnittsfläche ein Kreis. (Fig. 190.)



Beweis: Es sei ABDC der gegebene Kegel, und Ebene becd || Grundfläche BECD.

Legt man durch die Axe des Kegels mehrere Ebenen, z. B. die beiden Ebenen ABC und ADE; so wird bc || BC, und de || DE sein (§ 185.); folglich

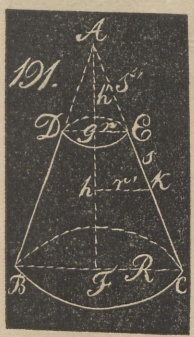
Af : AF = fb : FB und	Af : AF = fe : FE und
Af : AF = fc : FC	Af : AF = fd : FD
fb : FB = fc : FC und	fe : FE = fd : FD, und
da FB = FC, so ist	da FE = FD, so ist
1) fb = fc.	2) fe = fd.

Ferner Af : AF = fe : FE, und
Af : AF = fc : FC

fe : FE = fc : FC, und da
FE = FC, so ist auch
3) fe = fc. Demnach ist

fe = fc = fd = fb; also sind die Punkte e, c, d, b vom Punkte f gleich weit entfernt. Eben so beweiset man auch, daß alle übrigen Punkte in der krummen Linie becd von f gleich weit abstehen; folglich ist becd ein Kreis. (§ 49.)

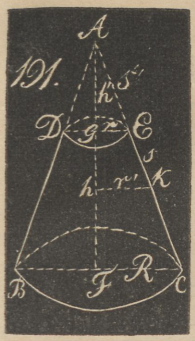
§ 212. Lehrsatz.



1) Der körperliche Inhalt eines parallel mit der Grundfläche abgestumpften geraden Kegels, dessen Radien der untern und obern Grundfläche R und r sind, ist gleich $\frac{1}{3}$ h . π . (R² + R . r + r²) und 2) der Flächeninhalt der krummen Oberfläche desselben ist gleich s . π . (R + r), wo h die Höhe und s die Seitenhöhe des abgestumpften Kegels bezeichnen. (Fig. 191.)

Beweis zu Satz 1. Es sei BCDE der abgestumpfte gerade Kegel, und Kreisfläche DE || Kreisfläche BC. Man lege durch die Axe FG des abgekürzten Kegels eine Ebene, so wird diese den Kegel in den Geraden CE und BD, und die beiden parallelen Grundflächen in DE || BC schneiden. Man verlängere die Seitenlinien BD und CE, und die Axe FG des abgestumpften Kegels, bis sie sich in A schneiden. Die Verlängerung AG der Höhe sei = h', AF = H, und FG = h (Höhe des abgestumpften Kegels); alsdann verhält sich, da △ AGE ∽ △ AFC ist,

AF : AG = FC : GE, oder
H : h' = R : r; hieraus folgt,



1) $(H - h') : H = (R - r) : R$, und
2) $(H - h') : h' = (R - r) : r$. Aus beiden Proportionen folgt

$$1)\ H = \frac{(H - h') \cdot R}{R - r} = \frac{h \cdot R}{R - r}, \text{ und}$$

$$2)\ h' = \frac{(H - h') \cdot r}{R - r} = \frac{h \cdot r}{R - r}.$$

Nach § 210 a. ist Inhalt des Kegels

$$ABC = R^2 \cdot \pi \cdot \frac{H}{3}$$

$$= R^2 \cdot \pi \cdot \frac{(h \cdot R)}{3(R - r)} = \frac{R^3 \cdot \pi \cdot h}{3(R - r)},$$

und Inhalt des Kegels $ADE = r^2 \cdot \pi \frac{h'}{3} = \frac{r^2 \cdot \pi (h \cdot r)}{3(R - r)} = \frac{r^3 \cdot \pi \cdot h}{3(R - r)}$;

folglich Inhalt des abgestumpften geraden Kegels

$$BCDE = \frac{R^3 \cdot \pi \cdot h}{3(R - r)} - \frac{r^3 \cdot \pi \cdot h}{3(R - r)} = \frac{(R^3 - r^3) \cdot \pi \cdot h}{3(R - r)}$$

$$= (R^2 + R \cdot r + r^2) \frac{\cdot \pi \cdot h}{3}; \text{ was zu beweisen war.}$$

Beweis zu Satz 2. Die Seitenhöhe AC sei $= S$; $AE = s'$ und EC oder $(S - s') = s$; so ist

$AC : AE = R : r$, oder
$S : s' = R : r$, und daraus folgt

1) $(S - s') : S = (R - r) : R$, und
2) $(S - s') : s' = (R - r) : r$. Aus beiden Proportionen folgt

$$1)\ S = \frac{(S - s') \cdot R}{R - r} = \frac{s \cdot R}{R - r}, \text{ und } 2)\ s' = \frac{(S - s') \cdot r}{R - r} = \frac{s \cdot r}{R - r}.$$

Es ist nach § 210 a. die Oberfl. des groß. Kegels $ABC = R \cdot \pi \cdot S = \frac{R \cdot \pi \cdot (s \cdot R)}{R - r}$

$$= \frac{R^2 \cdot \pi \cdot s}{R - r};$$

und die Oberfläche des kleinen Kegels $ADE = r \cdot \pi \cdot s' = \frac{r \cdot \pi \cdot (s \cdot r)}{R - r}$

$$= \frac{r^2 \cdot \pi \cdot s}{R - r};$$

folglich die Oberfläche des abgestumpften geraden Kegels

$$BCDE = \frac{R^2 \cdot \pi \cdot s}{R - r} - \frac{r^2 \cdot \pi \cdot s}{R - r} - \frac{(R^2 - r^2) \cdot \pi \cdot s}{R - r} = (R + r) \cdot \pi \cdot s.$$

Zusatz 1. Zieht man im Trapez FGEC durch den Halbirungspunkt h der Seite FG die hk oder $r' \parallel FC$, so ist (nach § 96.) $\frac{r + R}{2} = r'$, und da-

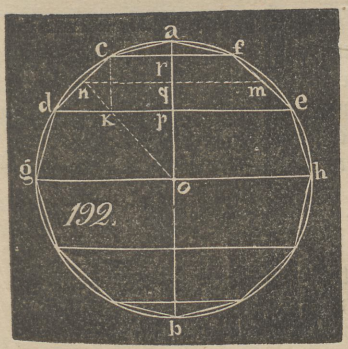
her $r + R = 2r'$. Demnach verwandelt sich der obige Ausdruck $(r + R) \cdot \pi \cdot s$ in folgenden: $2r' \cdot \pi \cdot s$ d. h. die Oberfläche des abgestumpften geraden Kegels BCED ist = seiner Seitenhöhe (s) multiplicirt mit der Peripherie eines Kreises $(2r' \cdot \pi)$ mitten zwischen den Grundflächen des abgestumpften Kegels.

Zusatz 2. Ist $r = o$, so gehen die beiden Formeln des abgestumpften Kegels über in die Formeln für den Inhalt und die Oberfläche eines vollständigen Kegels (§ 210 a.). Ist $R = r$, so gehen sie in die Formeln für den Inhalt und die Oberfläche des Cylinders über. (§ 208.)

5) Von der Kugel.

§ 213. Lehrsatz.

1) Die Oberfläche einer Kugel ist gleich viermal dem Flächeninhalte des größten Kugelkreises $(4R^2 \cdot \pi)$, und 2) der körperliche Inhalt der Kugel ist gleich dem Produkte des dritten Theils des Radius mit der Oberfläche der Kugel $(\frac{1}{3} R \times 4R^2 \cdot \pi = \frac{4}{3} R^3 \cdot \pi)$. (Fig. 192.)



Beweis zu Satz 1. Es sei R der Radius der Kugel. Man beschreibe einen Kreis und in diesen ein Polygon von gerader Seitenzahl, und drehe ersteren um den Durchmesser ab, so beschreibt der Kreis eine Kugel, das Polygon aber abgestumpfte Kegel und an beiden Polen ganze Kegel. Halbirt man cd in n, und zieht nm ‖ de, so ist nach § 212. Zusatz 1. die Oberfläche des abgestumpften Kegels cdef = dc × Umkreis nq. Fällt man aus c die ck senkrecht auf de, und zieht no; so ist in den rechtwinkligen Dreiecken cdk und onq der Winkel onq + qnc = R (§ 126. 2.), und ∠ cdk + dck = R; mithin

∠ onq + qnc = ∠ cdk + dck, und da nm ‖ de, so ist nach § 78. 2.

∠ qnc = ∠ cdk,

also ∠ onq = ∠ dck;

folglich △ cdk ∽ △ onq, und daher verhält sich

dc : ck (oder rp) = on : nq = Umkreis on : Umkreis nq. (§ 137.)

Folglich dc × Umkreis nq = rp . Umkreis on. Es war oben

dc × Umkreis nq = Oberfläche des abgestumpften Kegels cdef;

folglich Oberfläche des abgestumpften Kegels cdef = rp . Umkreis on, d. h. = der Höhe des abgestumpften Kegels, multiplicirt mit dem Umkreise des mit on beschriebenen Kreises.

Je kleiner nun die Seite cd des in den Kreis beschriebenen Polygons wird, desto größer wird die Senkrechte on (§ 127. Zusatz.), und wird die Seite cd

so klein gedacht, daß sie mit ihrem Bogen zusammenfällt; so wird auch on mit dem Radius r des Kreises zusammenfallen, und on = r sein; mithin wird die Oberfläche eines abgestumpften Kegels (cdef) = Umfange des größten Kreises ($2r.\pi$), multiplicirt mit der Höhe (pr) des abgestumpften Kegels sein.

Auf gleiche Weise werden auch die Oberflächen der übrigen abgestumpften Kegel berechnet. Demnach ist auch

1) Oberfläche des abgestumpften Kegels dghe = $2r\pi \times$ po,
2) " " " " cdef = $2r\pi \times$ pr,
3) " " ganzen " acf = $2r\pi \times$ ra*)

folglich die Oberfl. des halben Polyëders, mithin

auch der halben Kugel = $2r.\pi.(po + pr + ra)$
$= 2r.\pi \times r = 2r^2.\pi$;

und demnach die Oberfl. des ganzen Polyëders, mithin auch der

ganzen Kugel = $4r^2.\pi$.

Zusatz 1. Die Oberfläche eines Kugelsegments caf mit krummer Oberfläche (Kugelhaube) ist aus obigem Grunde = Oberfläche des Kegels caf = $2r.\pi \times$ ra d. h. gleich dem Umkreise des größten Kugelkreises, multiplicirt mit seiner Höhe, und die Oberfläche der Kugelzone cdef = der Oberfläche des abgestumpften Kegels cdef = $2r.\pi \times$ pr, d. h. gleich dem Umkreise des größten Kugelkreises, multiplicirt mit der Höhe der Zone.

Zusatz 2. Die Oberflächen zweier Kugelsegmente oder zweier Kugelzonen einer und derselben Kugel verhalten sich, wie ihre Höhen, und jedes Segment oder jede Zone verhält sich zur Kugelfläche, wie ihre Höhen zum Durchmesser der Kugel.

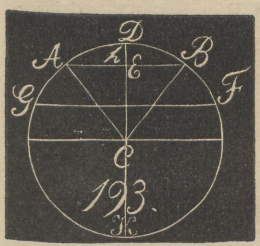
Zusatz 3. Aus der Formel ($4r^2.\pi = 2r\pi.2r$) für die Oberfläche einer Kugel folgt einfach:

1) daß eine Kugelfläche gleich einem Rechtecke ist, welches die Länge der Peripherie ($2r.\pi$) zu seiner Grundlinie und den Durchmesser ($2r$) eines größten Kugelkreises zu seiner Höhe hat.
2) Eine Kugelfläche ist das Vierfache des Flächeninhalts ihres größten Kreises.
3) Eine Kugelfläche ist gleich dem Mantel des um die Kugel beschriebenen Cylinders, d. h. desjenigen Cylinders, welcher den Kugeldurchmesser zur Höhe und auch zum Durchmesser der Grundfläche hat.
4) Wenn man um eine Kugel einen Cylinder beschreibt, und beide durch zwei der Grundfläche des Cylinders parallele Ebenen schneidet, so ist die entstandene Kugelzone gleich der entstandenen Cylinderzone.

---

*) Man kann den vollständigen Kegel acf sich aus abgestumpften Kegeln zusammengesetzt denken. Die Oberfläche eines jeden derselben ist nach Obigem = dem Umkreise des größten Kreises, multiplicirt mit seiner Höhe; folglich wird die Oberfläche aller dieser abgestumpften Kegel, oder des vollständigen Kegels gleich sein dem Umkreise des größten Kugelkreises, multiplicirt mit der Summe aller Höhen (ra) der abgestumpften Kegel, oder mit der Höhe des vollständigen Kegels.

Beweis zu Satz 2. Denkt man sich um die Kugel ein Polyëder von so kleinen Seitenflächen beschrieben, daß diese mit der Oberfläche der Kugel zusammenfallen, und zieht man von den Ecken des Polyëders gerade Linien nach dem Mittelpunkt der Kugel; so entstehen lauter kleine Pyramidchen, welche die Seitenflächen des Polyëders zu Grundflächen und den Radius der Kugel zur Höhe haben. Benennt man die Seitenflächen des Polyëders entsprechend mit g, g', g'', g''' u. s. w.; so würde nach § 206 b. der körperliche Inhalt des Polyëders, mithin auch der Kugel $= \frac{1}{3} r.g + \frac{1}{3} r.g' + \frac{1}{3} r.g'' + \frac{1}{3} r.g''' + \ldots = \frac{1}{3} r.(g + g' + g'' + g''' + \ldots) = \frac{1}{3} r \times$ Oberfläche des Polyëders oder der Kugel $(= 4r^2 . \pi)$, also $= \frac{1}{3} r \times 4r^2 . \pi = \frac{4}{3} r^3 . \pi$ sein.



Zusatz 1. (Fig. 193.) Um den körperlichen Inhalt des Kugelsectors CADB zu finden, denke man sich um die Oberfläche der Kugelhaube ADB einen Theil eines Polyëders von so kleinen Ebenen beschrieben, daß diese mit der Kugelfläche zusammenfallen. Zieht man aus den Scheiteln dieses Polyëders gerade Linien nach dem Mittelpunkt der Kugel, so entstehen kleine Pyramiden, welche alle den Radius der Kugel zu ihrer Höhe und die Summe aller Ebenen des Polyëders oder die Oberfläche der Kugelhaube ADB zu ihren Grundflächen haben. Da Kugelhaube ADB nach § 213. Zusatz 1. $= 2r . \pi . h$ ist (wo $h =$ DE die Höhe des Kugelsegments); so ist nach § 206 b. der Körperinhalt des Kugelsectors CADB $= 2r . \pi . h . \frac{r}{3} = \frac{2}{3} r^2 . \pi . h$ oder $= r^2 \pi \times \frac{2}{3} h$, d. i. = dem Flächeninhalt des größten Kugelkreises $(r^2 . \pi)$, multiplicirt mit $\frac{2}{3}$ der Höhe des Kugelsegments.

Zusatz 2. Den körperlichen Inhalt eines Kugelsegments ADB (Fig. 193.) findet man, wenn man von dem Kugelsector CADB den Kegel ABC abzieht, also $= \frac{2}{3} \pi . r^2 . h - \frac{1}{3} \pi . AE^2 . EC$. Dieser Ausdruck verwandelt sich durch einige Rechnung in folgenden bequemern:

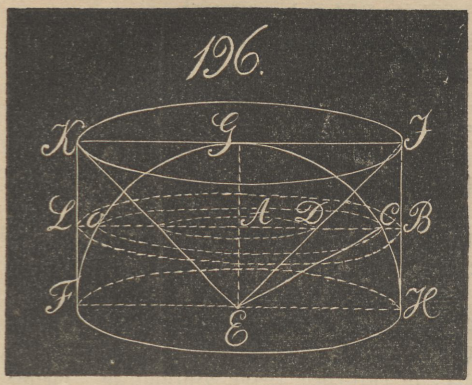
$$\pi . h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right) *)$$

Zusatz 3. Den körperlichen Inhalt der Kugelschicht ABFG findet man, wenn man vom Inhalte des Kugelsegments GDF den Inhalt des Kugelsegments ADB abzieht.

*) Es war in Zusatz 2. der Körperinhalt des Kugelsegments ADB $= \frac{2}{3} \pi . r^2 . h - \frac{1}{3} \pi . AE^2 . CE$. Es ist aber nach § 113. Satz 3. $AE^2 = DE . EK = h(2r - h) = 2r . h - h^2$, und $CE = r - h$; folglich Inhalt des Kugelsegments ADB $= \frac{2}{3} \pi . r^2 . h - \frac{1}{3} \pi (2r . h - h^2)(r - h)$, oder $= \frac{1}{3} h^2 . \pi (3r - h) = h^2 . \pi \left(r - \frac{h}{3} \right)$, wie oben.

Der Archimedische Beweis für die Kugelberechnung.

Es verdient der Archimedische Beweis für die Kugelberechnung wegen seiner Kürze, Klarheit und Eleganz hier noch angeführt zu werden. Er wird auf folgende einfache Weise geführt. (Fig. 196.)



1) Man beschreibe um eine Halbkugel FGH einen Cylinder FKJH und einen umgekehrten Kegel KJE, welche beide zur Grundfläche den größten Kreis und zur Höhe den Radius r der Kugel haben. Wird nun eine Ebene LB parallel der Grundfläche irgendwo durch jene drei Körper gelegt, so daß sie den Kegel, die Kugel und den Cylinder in den Kreisen, die mit den Radien AD, AC und AB beschrieben worden, schneidet, und man den Radius EC zieht; so ist

I. $EC^2 = AE^2 + AC^2$ (§ 103.).

Da AD ‖ GJ ist, so verhält sich EG : GJ = AE : AD, und da

EG = EH = GJ ist, so ist AE = AD, mithin

$AE^2 = AD^2$

Es ist auch EC = EH = AB, mithin $EC^2 = AB^2$

Setzt man nun in die obige Gleichung (I.) für EC^2 die Größe AB^2, und für AE^2 die Größe AD^2; so ist

II. $AB^2 = AD^2 + AC^2$. Alles mit π multiplicirt, gibt

$AB^2 . \pi = AD^2 . \pi + AC^2 . \pi$, d. h. der Flächeninhalt des Cylinderkreises ist gleich der Summe der Flächen des Kegels und der Kugel.

Denkt man sich diese drei Kreise so über einander gesetzt, daß die Entfernung zwischen ihnen unendlich klein ist, und werden die Schichten als Cylinder betrachtet; so wird — da diese drei Cylinder gleiche Höhe haben —

1 Cylinderscht = 1 Kegelschicht + 1 Kugelschicht,

und eben so 2 Cylinderschten = 2 Kugelschichten + 2 Kegelschichten;

ferner 3 " = 3 " + 3 "

mithin n " = n " + n " sein;

folglich der ganze Cylinder = dem ganzen Kegel + der Halbkugel.

Also ist Halbkugel = Cylinder weniger Kegel.

Aber Kegel = $\frac{1}{3}$ Cylinder. (§ 210 a.)

Folglich Halbkugel = Cylinder — $\frac{1}{3}$ Cylinder = $\frac{2}{3}$ Cylinder

$= \frac{2}{3} (r^2 . \pi . r) = \frac{2}{3} r^3 \pi$; demnach ist der körperliche Inhalt der ganzen Kugel $= 2 . \frac{2}{3} r^3 . \pi = \frac{4}{3} r^3 . \pi$.

2) Denkt man sich um die Kugel ein Polyëder von unendlich vielen Seitenflächen beschrieben und von den Ecken des Polyëders gerade Linien nach dem Mittelpunkte der Kugel gezogen, so entstehen lauter kleine Pyramidchen, welche

die Seitenflächen des Polyëders zu Grundflächen und den Radius r der Kugel zur Höhe haben. Nennt man die Seitenflächen des Polyëders (die mit der Kugelfläche, ihrer Kleinheit wegen, zusammenfallen) f, f', f'', f''' u. s. w.; so würde der Inhalt des Polyëders, mithin auch der Inhalt der Kugel

$= \frac{1}{3} f \cdot r + \frac{1}{3} f' \cdot r + \frac{1}{3} f'' \cdot r + \frac{1}{3} f''' \cdot r +$ u. s. w.

$= \frac{1}{3} r (f + f' + f'' + f''' + \ldots\ldots) = \frac{1}{3} r$ mal der Oberfläche der Kugel sein.

Inhalt der Kugel war oben $= \frac{4}{3} r^3 \cdot \pi$

Und „ „ „ auch $= \frac{1}{3} r \times$ Oberfläche der Kugel;

folglich $\frac{1}{3} r \times$ Oberfl. d. Kugel $= \frac{4}{3} r^3 \cdot \pi$

mithin Oberfläche der Kugel $= \frac{4}{3} r^3 \cdot \pi : \frac{1}{3} r = 4 r^2 \cdot \pi$.

Im ersten Beweise (§ 213.) ist die Oberfläche der Kugel durch Flächen abgestumpfter Kegel und durch ihre Höhen; im vorliegenden Beweise aber aus dem körperlichen Inhalte der Kugel gefunden worden.

§ 214. Lehrsatz.

Kugeln von verschiedenen Radien verhalten sich, ihrer Oberfläche nach, wie die Quadrate, und ihrem körperlichen Inhalte nach, wie die Cuben ihrer Radien.

Beweis I. Es seien R, r die Radien zweier Kugeln K, k.

Die Oberfläche von $K = 4 R^2 \cdot \pi$ (§ 213.), und

„ „ „ $k = 4 r^2 \cdot \pi$; folglich

Oberfläche v. K : Oberfläche von $k = 4 R^2 \cdot \pi : 4 r^2 \cdot \pi = R^2 : r^2$.

II. Inhalt von $K = \frac{4}{3} R^3 \cdot \pi$, und

„ „ $k = \frac{4}{3} r^3 \cdot \pi$; folglich

Inhalt von K : Inhalt von $k = \frac{4}{3} R^3 \cdot \pi : \frac{4}{3} r^3 \cdot \pi = R^3 : r^3$.

Zusatz 1. Ein Cylinder, eine Halbkugel und ein Kegel verhalten sich bei gleicher Höhe (r) und bei gleichen Grundflächen ($r^2 \cdot \pi$) wie die Zahlen 3 : 2 : 1; denn

Körperinhalt des Cylinders ist $= r^2 \cdot \pi \times r = r^3 \cdot \pi = \frac{3}{3} r^3 \cdot \pi$.

„ der Halbkugel . . . . . $= \frac{2}{3} r^3 \cdot \pi$.

„ des Kegels $= r^2 \cdot \pi \times \frac{r}{3} = \frac{1}{3} r^3 \cdot \pi$;

folglich verhält sich

Cylinder : Halbkugel : Kegel $= \frac{3}{3} r^3 \cdot \pi : \frac{2}{3} r^3 \cdot \pi : \frac{1}{3} r^3 \cdot \pi$

$= 3 : 2 : 1$.

Es ist also Halbkugel + Kegel = Cylinder, und Cylinder — Kegel = Halbkugel, wenn diese drei Körper gleiche Höhe und Grundfläche haben.

Zusatz 2. Die körperlichen Inhalte zweier Kugelsectoren S und s einer und derselben Kugel verhalten sich, wie die Höhen H und h der zugehörigen Kugelsegmente; denn es ist nach § 213. Satz II. Zusatz 1. Sector $S = \frac{2}{3} r^2 \cdot \pi \cdot H$, und Sector $s = \frac{2}{3} r^2 \cdot \pi \cdot h$; folglich $S : s = \frac{2}{3} r^2 \cdot \pi \cdot H : \frac{2}{3} r^2 \cdot \pi \cdot h = H : h$.

Anmerk. Ganz unregelmäßige Körper mißt man (mechanisch) aus, 1) wenn man sie mit einem regulären Körper z. B. mit einem Parallelepipedum, oder auch mit einem

Cylinder umschließt, und den übrigen Raum mit Wasser, oder Sand oder einer Getreideart ausfüllt, wo sich dann leicht aus dem Raume, den das Parallelepipedum oder Cylinder einnimmt, der Raum des unregelmäßigen Körpers finden läßt; 2) vermittelst des specifischen Gewichts derselben. Denn wäre n Cubikfuß der Inhalt, s das specifische Gewicht eines Körpers und 70 ℔ das Gewicht eines Cubikfußes destillirtes Wasser von 0°; so ist das absolute Gewicht

p desselben $= 70 . n . s$ ℔; also $n = \frac{p}{70 . s}$ Cub. Fuß.

§ 215. Aufgaben.*)

1) Wie viel Ziegelsteine sind zur Aufführung einer Mauer erforderlich, wenn sie 40 Fuß lang, 10 Fuß hoch und $1\frac{1}{2}$ Fuß dick werden soll, wenn 8 Ziegelsteine mit dem dazu erforderlichen Mörtel einen Raum von 1 Cubikfuß einnehmen? Antw. 4800 Ziegelsteine.

2) Wie breit muß ein Kasten in parallelepipedischer Form sein, der 5 Fuß hoch, 15 Fuß lang, und 64 Lof Getreide einnehmen soll, wenn 1 Lofmaß ein Cubus ist, dessen innere Seite $\frac{5}{4}$ Fuß beträgt? Antw. 1 Fuß 8 Zoll.

3) Wie groß muß die Seite eines Würfels sein, dessen Inhalt 1728 Cubikfuß beträgt? Antw. 12 Fuß.

4) Wie tief, lang und breit muß ein Keller in parallelepipedischer Form ausgegraben werden, wenn darin 960 Lof Kartoffeln raumen und dessen Breite, Tiefe und Länge sich zu einander verhalten sollen, wie 3 : 5 : 8 und ein Lofmaß ein Cubus ist, dessen innere Seite $\frac{5}{4}$ Fuß beträgt? Antw. $7\frac{1}{2}$ Fuß Breite, $12\frac{1}{2}$ Fuß Tiefe und 20 Fuß Länge.

5) Es soll ein viereckiger Kasten, dessen Länge 8′, Breite 5′ und Höhe 4′ beträgt, mit Blech beschlagen werden; wie viel Blechtafeln sind dazu erforderlich, wenn jede 15 Zoll lang und 8 Zoll breit ist? Antw. $220\frac{4}{5}$ Blechtafeln.

6) Was beträgt a) die Oberfläche und b) der körperliche Inhalt eines Tetraëders, dessen Seite 8 Zoll ist? Antw. a) 110 □″ $122{,}_{57}$ □‴; b) $60{,}_{329}$ Cubikzoll (wobei der Radius des um die Seitenfläche beschriebenen Kreises $= 4{,}_{619}\ldots$ Zoll ist).

7) Den körperlichen Inhalt einer abgestumpften senkrechten vierseitigen Pyramide, deren beide Grundflächen Quadrate sind, zu berechnen, wenn die gleichliegenden Kanten der obern und untern Grundfläche 7′ und 9′, und die Höhe 5′ ist? (vid. §207. Zus. 2.) Antw. $321\frac{2}{3}$ Cubikf.

8) Die Kante eines Octaëders sei 8 Zoll; wie groß ist der Halbmesser einer an Inhalt gleich großen Kugel? Antw. $3{,}_{06541}\ldots$ Zoll.

9) Was ist a) der Inhalt der Seitenflächen und b) der cubische Inhalt einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide, wenn deren Seitenkante 5 Fuß und die Kante der Grundfläche $2\frac{1}{2}$ beträgt? Antw. a) $24{,}_{206}$ □ Fuß, b) $9{,}_{744}$ Cubikfuß.

10) Die Seite eines Würfels zu finden, dessen körperlicher Inhalt dem Inhalt einer Kugel gleich sei, deren Radius 20,8 Zoll beträgt? Antw. $33{,}_{5294}\ldots$ Zoll.

11) Wie groß muß der Radius einer Kugel sein, deren Oberfläche gleich der Oberfläche eines Würfels sei, dessen Seitenkante 20 Zoll beträgt? Antw. $13{,}_{81975}$ Zoll.

12) Wie groß ist a) die krumme Oberfläche und b) der cubische Inhalt eines Cylinders, dessen Höhe $= 25$ Zoll und Durchmesser der Grundfläche $= 10$ Zoll ist? Antw. a) $785{,}_4$ □ Zoll, b) $1963{,}_5$ Cubikzoll $= 1$ Cubikfuß $235{,}_5$ Cubikzoll.

13) Wie groß ist der Durchmesser der Grundfläche eines Cylinders von $1570\frac{4}{5}$ Cubikzoll Inhalt, wenn dessen Höhe doppelt so groß, als sein Durchmesser ist? Antw. Durchmesser $= 10$ Zoll.

14) Einen Cylinder, dessen Radius der Grundfläche $= 6$″ und dessen Höhe $= 18$″ Zoll ist, in eine Kugel zu verwandeln. Wie groß wird der Radius dieser Kugel sein? Antw. $7{,}_{862}$ Zoll.

15) Wie hoch muß ein Kegel gemacht werden, dessen Radius der Grundfläche $= 8$″ ist, wenn der Kegel gleichen Inhalt mit einer Kugel haben soll, deren Radius 10 Zoll beträgt? Antw. $62\frac{1}{2}$ Zoll hoch.

16) Wie groß wird a) die Seite eines Würfels sein, dessen Oberfläche dem Mantel eines geraden Kegels gleich ist, der 30″ Höhe hat, und dessen Radius der Grundfläche 5″ beträgt,

---

*) Bei allen diesen Aufgaben ist $\pi = 3{,}_{1416}$ angenommen.

und b) wie groß wird die Seite eines Würfels sein, wenn dessen cubischer Inhalt gleich dem Inhalte desselben Kegels gleich sein soll? Antw. a) $8{,}_{923}\ldots$ Zoll, b) $9{,}_{22635}\ldots$ Zoll.

17) Eine Kugel zu machen, die an Inhalt n mal größer sei, als der Inhalt einer andern Kugel, deren Radius $= r$ ist. Wie groß ist der Radius der ersten Kugel? Antw. $r.\sqrt[3]{n}$.

18) Eine Kugel zu machen, deren Oberfläche n mal größer sei, als die Oberfläche einer andern Kugel, deren Radius $= r$ ist. Wie groß ist der Radius der ersten Kugel? Antw. $r.\sqrt[2]{n}$

19) Was beträgt a) die Oberfläche und b) der cubische Inhalt eines Kugelsegments, dessen Höhe $= 10''$ und der Radius der zugehörigen Kugel $= 15''$ ist? (vid. § 213. II. Zus. 2.) Antw. a) $942{,}_{48}$ □ Zoll, b) $3665{,}_{2}$ Cubikzoll.

20) Den cubischen Inhalt eines Kugelsectors zu berechnen, dessen zugehörigen Kugelsegments Höhe $10''$ und der Radius der zugehörigen Kugel $15''$ beträgt? (vid. § 213. II. Zus. 1.) Antw. $4712{,}_{4}$ Cubikzoll.

21) Wie schwer ist eine hohle bleierne Röhre, deren äußerer Halbmesser $= 10''$ und innerer Halbmesser $= 6''$, und deren Länge $= 60''$ ist, wenn 1 Cubikfuß Blei 780 ℔ wiegt? Antw. $5445{,}_{44}$ ℔.

22) Wie schwer ist ein runder Balken von Tannenholz, 30 Fuß lang, am dickern Ende 18 Zoll und am dünnern Ende 12 Zoll im Halbmesser, wenn 1 Cubikfuß Tannenholz $38\frac{1}{2}$ ℔ wiegt? Antw. $5745{,}_{2}$ ℔.

23) Wie viel Fuß Draht von $\frac{3}{8}$ Linien im Halbmesser wird man aus $\frac{1}{8}$ Cubikfuß Stahl erhalten? Antw. 5867 Fuß.

24) Wie viel Kugeln von $\frac{2}{3}$ Zoll Durchmesser können aus 40 ℔ Blei gegossen werden, wenn das Gewicht eines Cubikfußes Blei zu 780 ℔ angenommen wird? Antw. 571 Kugeln.

25) Der Mantel eines geraden Kegels betrage 120 □ Fuß, der Winkel des Sectors $190° 40'$; wie groß ist der cubische Inhalt des Kegels?

Antw. Die Seitenhöhe des Kegels $= 8{,}_{4945}$ Fuß;
der Radius der Grundfläche $= 4{,}_{4989}$ Fuß;
die Höhe des Kegels . . $= 7{,}_{205}$ Fuß,
und daher der cub. Inh. desselben $= 152{,}_{71}$ Cubikfuß.

26) Wie schwer ist eine massive eiserne Kugel, deren Radius 5 Zoll beträgt, wenn das spec. Gewicht des Eisens $= 7{,}_{2}$ ist, und 1 Cubikfuß Wasser 70 ℔ wiegt. Antw. $152{,}_{7}$ ℔.

27) Eine 20 Fuß lange Röhre hat 6 Cubikfuß körperlichen Inhalt und $1\frac{1}{4}$ Zoll Wandstärke; wie groß ist der innere Durchmesser derselben? Antw. $4{,}_{875}$ Zoll.

28) Wie groß ist die Oberfläche einer Kugel, in der eine $5'$ lange Sehne vom Mittelpunkt $3'$ entfernt ist? Antw. $191{,}_{6376}$ □′.

29) Das Gewicht eines eisernen Würfels beträgt 13608 ℔; wie lang ist seine Seite? Antw. 3 Fuß.

30) Eine Platte aus Kupfer ist $6'$ lang, $1\frac{1}{2}'$ breit, und 2 Zoll dick; wie viel Pfund wiegt dieselbe, wenn das spec. Gewicht des Kupfers $= 8{,}_{788}$ ist? (Antw. $922{,}_{74}$ ℔.

31) Wie groß muß der Radius einer eisernen Kugel werden, wenn sie 600 ℔ wiegen soll? Antw. $7{,}_{884}$ Zoll.

32) Ein Graben ist $1500'$ lang, $3'$ tief, oben $4'$, auf der Sohle $2\frac{1}{2}'$ breit; wie viel betragen die Auswerfungskosten, wenn jeder Cubikfuß mit $1\frac{1}{2}$ Kop. S. bezahlt wurde? Antw. 219 Rbl. $37\frac{1}{2}$ Kp. S.

33) Wenn eine Chaussee von $42000'$ Länge und $24'$ Breite $1\frac{1}{2}$ Zoll hoch mit Grand überschüttet werden soll; wie viel Cubikfaden sind dazu erforderlich, wenn 1 Faden $= 7'$ beträgt? Antw. $367\frac{1}{3}$ Cubikfaden.

34) Wie viel wiegt das Wasser in einem Hohlcylinder, welcher $8'$ hoch ist, und dessen innerer Umfang $20'$ beträgt? Antw. 17822 ℔.

35) Der Umfang einer Hohlkugel beträgt $8\frac{1}{2}'$, die Dicke der Wand 1 Zoll; wie groß ist ihre Höhlung? Antw. 8 Cub.′ 976 Cub.″

36) Wie groß ist 1) die Oberfläche, und 2) der cubische Inhalt eines Baumstammes, der unten $100\frac{1}{2}''$, oben $33\frac{1}{2}''$ Umfang hat, und 30 Fuß lang ist? Antw. Oberfläche $= 167\frac{1}{2}$ □′; Inhalt $= 80\frac{1}{2}$ Cubikfuß.

37) Wie groß ist die Fläche der vier Wände, der Decke und des Fußbodens eines Zimmers von 20′ Länge, 15′ Breite und 10′ Höhe? Antw. 1300 □′.

38) Wie viel wiegt ein Granitblock von 400 Cubikfuß Körperinhalt, wenn sein spec. Gewicht = $3_{,45}$ beträgt? Antw. 96600 ℔.

39) Der Umfang einer hohlen Kugel beträgt $3_{,1416}$ Fuß, die Dicke der Wand 1 Zoll; wie groß ist der Raum ihrer Höhlung? Antw. $523_{,6}$ Cubikzoll.

40) In einer 10 Zoll weiten Röhre steht über dem Kolben um die $1\frac{1}{2}$ Zoll starke Kolbenstange 6 Fuß hoch Wasser; wie schwer ist diese Wassermenge? Antw. $223_{,92}$ ℔.

41) Eine 10 Fuß lange, und 16 Zoll im Durchmesser haltende Walze von Eichenholz ist mit 6 eisernen Ringen von 2″ Breite und $\frac{1}{2}$″ Stärke beschlagen. Welches ist das Gewicht der beschlagenen Walze? (Das spec. Gewicht des Eichenholzes = $1_{,17}$; des Eisens = $7_{,2}$.) Antw. $1231\frac{1}{2}$ ℔.

42) Wie stark ist ein eiserner Ring, welcher 60 ℔ wiegt, 3 Zoll breit, und im Lichten 3 Fuß weit ist? Antw. $7_{,276}\ldots$ Zoll stark.

43) Wie lang muß ein eiserner Cylinder werden, wenn er 5 Zoll stark werden, und 150 ℔ wiegen soll? Antw. 26′ $1_{,3}$″.

44) Was ist der körperliche Inhalt eines geraden Kegels, dessen Seitenhöhe 9′, und dessen Umfang der Grundfläche 18′ beträgt? Antw. $73_{/359}\ldots$ Cubikfuß.

§ 216. Zusammenstellung der wichtigsten Formeln.

Bezeichnungsart: h = Höhe; g = Grundlinie; R = rechter Winkel; s = Seitenhöhe einer Pyramide oder eines Kegels; n = Anzahl der Seiten oder Winkel eines regelmäßigen Polygons; F und f = Grundflächen eines Körpers; R und r = Radien der Kreise; U und u = Umfänge der Polygone.

Parallelogramm . . . . . $= g \cdot h$ (§ 119 a.)

Quadrat . . . . . $= a^2$ (a = Seite; § 119 a. Zus. 5.)

Dreieck . . . . . $= \frac{g \cdot h}{2}$ (§ 119 a. Zus. 2.)

Trapez . . . . . $= \left(\frac{T + t}{2}\right) \cdot h$ (T und t sind die Parallelseiten; § 102.)

Winkel eines regelm. Polygons $= \frac{2nR - 4R}{n}$ (§ 81.)

Centriwinkel desselben . . . $= \frac{4R}{n}$ (§ 75, Zus. 2.)

Kreisumfang . . . . . $= 2r \cdot \pi = d \cdot \pi$ (§ 137.).

Kreisinhalt . . . . . $= r^2 \cdot \pi$ (§ 141.).

Seitenoberfläche eines Prisma $= U \cdot h$ (§ 203 b., Zus. 2.).

Inhalt eines Prisma . . . $= F \cdot h$ (§ 203 b.)

Oberfläche eines Cubus . . $= 6a^2$

Inhalt desselben . . . . . $= a^3$ } a = Seitenkante (§ 202.).

Manteloberfläche eines geraden Cylinders . . . . $= 2r \cdot \pi \cdot h$ (§ 208.).

Inhalt eines Cylinders überhaupt . . . . . $= r^2 \cdot \pi \cdot h$ (§ 208.).

Seitenoberfläche einer geraden Pyramide . . . . . $= U \cdot \frac{s}{2}$ (§ 206 b. Zus. 3.).

Inhalt einer Pyramide überhaupt . . . . . $= F \cdot \frac{h}{3}$ (§ 206 b.).

Seitenoberfläche einer mit der Grundfläche parallel abgestumpften geraden Pyramyde . . . . . $= (U + u) \cdot \frac{h}{2}$ (§ 207 b.)

Inhalt einer solchen Pyramide $= \left(\frac{A \cdot F - a \cdot f}{A - a}\right) \cdot \frac{h}{3}$ (wo A u. a zwei homologe Seitenkanten bezeichnen; § 207 b.).

Manteloberfläche eines geraden Kegels . . . . . $= r \cdot \pi \cdot s$ (§ 210 a.).

Inhalt eines Kegels überhaupt $= r^2 \cdot \pi \cdot \frac{h}{3}$ (§ 210 a.).

Manteloberfläche eines parallel mit der Grundfläche abgestumpften Kegels . . $= (R + r)\, \pi \cdot s$ (§ 212.).
oder $= 2\, r' \cdot \pi \cdot s$ (r' = mittlere Transversallinie zwischen R u. r). § 212.

Inhalt eines solchen Kegels . . $= (R^2 + r^2 + R \cdot r) \cdot \pi \cdot \frac{h}{3}$. § 212.

Oberfläche einer Kugel . . $= 4\, r^2 \cdot \pi$ (§ 213.).

Inhalt einer Kugel . . . . $= \frac{4}{3}\, r^3 \cdot \pi = \frac{d^3 \cdot \pi}{6}$ (§ 213.).

Oberfläche e. Kugelsegments $= 2\, r \cdot \pi \cdot h$ (§ 213. Zus. 1.).

Inhalt desselben . . . . . $= \pi \cdot h \left(\frac{r - h}{3}\right)$ § 213, II. Zus. 2.

Inhalt eines Kugelsectors . $= \frac{2}{3}\, r^2 \cdot \pi \cdot h$ (h = Höhe des Segments). § 213, II. Zus. 1.