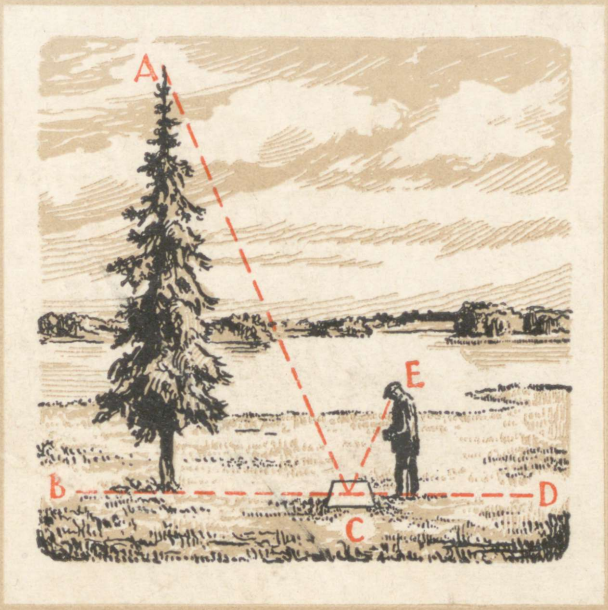
A-19545 V



J. I. PERELMAN

HUVITAV GEOMEETRIA

A-19545 V

J. I. PERELMAN

HUVITAV GEOMEETRIA

Tartu Riiklik Ülikooli Raamatukogu

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1953

Originaali tiitel:
Я. И. Перельман
ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
Издание восьмое
Государственное Издательство Технико-теоретической литературы
Москва 1951 Ленинград

Tõlkinud Heino Tiidus

Venekeelse originaali on toimetanud ja täiendanud B. A. Kordemski.

2
Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu
20243

LUGEJALE

Populaarteadusliku kirjanduse toimetus palub hinnangud ja arvamused teose kohta, samuti teoses kasutatud terminoloogia kohta, saata aadressil:

Tallinn, Pärnu mnt. 10
Eesti Riikliku Kirjastuse
populaarteadusliku kirjanduse toimetus

TOIMETAJA EESSÕNA VENEKEELSELE SEITSMENDALE TRÜKILE

«Huvitav geomeetria» on kirjutatud nii matemaatikasõpradele kui ka nendele lugejatele, kellele millegipärast on jäänud varjatuks mitmed matemaatika huvitavad küljed.

Veelgi rohkem on see raamat määratud nendele lugejatele, kes on geomeetriat õppinud (või õpivad) ainult koolipingis ja seepärast ei ole harjunud tähele panema meid ümbritsevas asjade ja nähtuste maailmas tuntud geomeetrilisi seoseid, ei ole harjunud kasutama omandatud geomeetrilisi teadmisi tegelikkuses — keerukamatel juhtudel, nagu rännakul, laagri- või rindeolukorras.

Äratada lugejas huvi geomeetria vastu ehk, kasutades autori sõnu, «sisendada ja kasvatada soovi ning tahtmist tema õppimiseks — see on käesoleva raamatu otsene ülesanne».

Sel eesmärgil viib autor geomeetria «koolitoa seinte vahelt vabasse loodusesse, metsa, põllule, jõe äärde, teele, et lahtise taeva all tegelda geomeetriaga sundimatult, õpikuta ja tabeliteta . . .», pöörab lugeja tähelepanu lehekülgedele L. N. Tolstoi ja A. P. Tšehhovi, Jules Verne'i ja Mark Twain'i teostes, leiab teemasid geomeetrilisteks ülesanneteks N. V. Gogoli ja A. S. Puškini loomingus ja lõpuks pakub lugejale «kirju valiku ülesandeid, mis on huvitavad oma sisult ja ootamatud lahendustelt».

«Huvitava geomeetria» seitsmes trükk ilmub autori vahetu osavõtuta, sest J. I. Perelman suri 1942. a. Leningradis.

Raamatu uus väljaanne sisaldab peaaegu kõik artiklid eelmisest väljaandest, uute illustratsioonidega, redigeerituna ja täiendatuna faktide ja andmetega

meie nõukogude tegelikkusest, samuti hulga (umbes 30) täiendavaid artikleid.

Ma juhindusin soovist suurendada J. I. Perelmani raamatu «kasutegurit», teha teda veelgi tõhusamaks ja huvitavamaks, nii et ta tõmbaks uusi lugejaid kaasa matemaatikasõprade ridadesse.

Kuidas see on õnnestunud, loodan lugejatelt teada saada järgmisel aadressil: Москва, 64, ул. Чернышевского, 31, кв. 53, Б. А. Кордемскому.

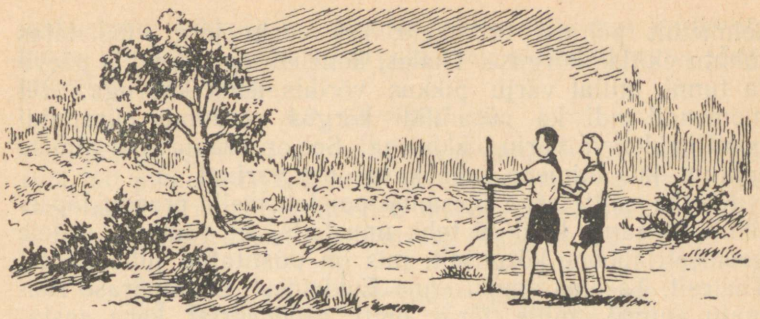
B. Kordemski

ESIMENE OSA

GEOMEETRIA VABAS ÕHUS

Loodus kõneleb matemaatika keeles: selle keele tähtedeks on ringid, kolmnurgad ja muud matemaatilised kujundid.

Galilei



ESIMENE PEATÜKK

GEOMEETRIA METSAS

Varju pikkuse järgi

Veel praegugi on mul meeles imestus, millega ma esimest korda vaatasin hallipäisele metsavahile, kes määratu suure männi juures seistes mõõtis väikese taskumõõduriistaga selle kõrgust. Kui ta sihtis oma ruudukujulise tahvlikesega puu latva, ootasin, et vanamees hakkab kohe mõõdulindiga latva ronima. Selle asemel pani ta mõõduriista tasku tagasi ja teatas, et mõõtmine on lõpetatud. Mina aga arvasin, et ei ole veel alanudki...

Ma olin siis väga noor ja niisugune mõõtmisviis, kus inimene määrab kindlaks puu kõrguse teda maha raiumata või tema latva ronimata, paistis mulle mingi väikese ime taolisena. Alles hiljem, kui mind pühendati geomeetria algteadmistesse, mõistsin ma, kui lihtsalt teostatakse sedalaadi imesid. On palju mitmesuguseid viise selliste mõõtmiste läbiviimiseks täiesti lihtsate riistade abil ja isegi igasuguste seadisteta.

Kõige lihtsam ja kõige vanem viis on kahtlematult see, millega kreeka mõttetark Thales kuus sajandit enne meie ajaarvamist määras Egiptuses kindlaks püramiidi kõrguse. Ta kasutas selleks püramiidi varju. Preestrid ja vaarao, olles kogunenud kõrgeima püramiidi jalamile, vaatasid

kohmetult põhjast tulnukale, kes varju järgi mõistatas tohutu ehitise kõrguse. Thales, kõneleb legend, valis päeva ja tunni, millal varju pikkus võrdus tema kasvuga; sel momendil pidi ka püramiidi kõrgus võrduma püramiidi poolt heidetava varju pikkusega[1]. See on arvatavasti ainuke juhtum, kus inimene saab kasu oma varjust...

Kreeka mõttetarga ülesanne paistab meile praegu lapselikult lihtsana, kuid ei tohi unustada, et vaatame sellele geomeetriahoone kõrguselt, mis on püstitatud juba pärast Thalesit. Ta elas ammu enne Eukleidest, suurepärase raamatu autorit, mille järgi õpiti geomeetriat kahe aastatuhande jooksul pärast tema surma. Selles raamatus sisalduvad tõed, mis praegu on tuntud igale kooliõpilasele, polnud Thalesi ajal veel avastatud. Et aga kasutada varju püramiidi kõrguse määramise ülesande lahendamiseks, oli vaja tunda juba mõningaid kolmnurga geomeetrilisi omadusi, nimelt kaht järgmist (millest esimese avastas Thales ise):

1) et võrdhaarse kolmnurga aluse lähisnurgad on võrdsed, ja vastupidi, et kolmnurgas võrdsete nurkade vastas asuvad küljed on omavahel võrdsed,

2) et igasuguse (või vähemalt täisnurkse) kolmnurga sisenurkade summa võrdub kahe täisnurgaga.

Ainult nende teadmistega varustatuna võis Thales täie õigusega järeldada, et juhul, kui tema vari on võrdne tema enda pikkusega, langevad päikesekiired tasasele maapinnale nurga all, mis moodustab poole täisnurgast, ja järelikult peavad püramiidi tipp, tema aluse keskpunkt ja püramiidi varju lõpp-punkt moodustama võrdhaarse kolmnurga.

Näib, nagu oleks niisugusel lihtsal viisil, kasutades selget päikesepaistelist päeva, väga mugav mõõta üksikuid puid, mille vari ei lange ühte naaberpuude varjuga. Kuid meie laiuskraadidel ei ole nii kerge selleks sobivat momenti leida kui Egiptuses: meil asetseb Päike madalal horisondi kohal ja varjud on võrdsed esemetega, mis neid heidavad, ainult suvekuudel keskpäeva ajal. Seepärast ei ole Thalesi meetod esitatud kujul alati kasutatav.

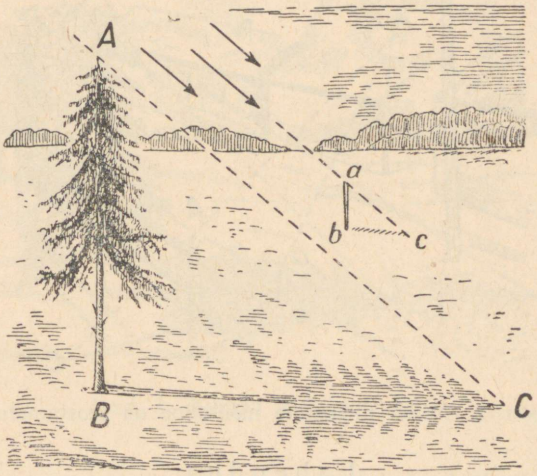
Kuid pole siiski raske muuta seda meetodit nii, et päikesepaistelisel päeval võiks kasutada igasugust varju, hooli-

[1] Loomulikult tuli varju pikkust arvestada püramiidi ruudukujulise aluse keskpunktist: aluse laiust võis Thales mõõta vahetult.

mata tema pikkusest. Mõõtes peale selle kas enda või mõne lati varju pikkuse, arvutatakse otsitav kõrgus järgmisest suhtest (joon. 1):

$$AB : ab = BC : bc,$$

s. t. puu kõrgus on nii mitu korda suurem teie pikkusest (või lati pikkusest), kui mitu korda puu vari on pikem teie (või lati) varjust. See tuleneb muidugi kolmnurkade *ABC* ja *abc* geomeetrilisest sarnasusest (kahe nurga järgi).

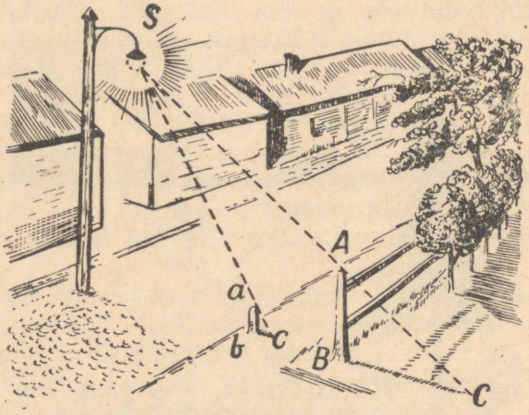


Joon. 1. Puu kõrguse mõõtmine varju järgi.

Mõned lugejatest ehk ütlevad, et selline elementaarne võte ei vaja üldse geomeetrilist põhjendust: kas tõesti ei ole ka ilma geomeetriata selge, et puu on nii mitu korda kõrgem, kui mitu korda tema vari on pikem? Kuid asi pole siiski nii lihtne, nagu näib. Kui proovite kasutada seda juhist nende varjude juures, mida tekitab tänavalaterna või lambi valgus, siis leiate, et ta ei ole kehtiv. Joonisel 2 näete, et aiapost *AB* on ligikaudu kolm korda kõrgem kui jalgteepost *ab,* kuid aiaposti vari on jalgteeposti varjust kaheksa korda pikem (*BC* : *bc*). Selgitada, mispärast ühel juhul on ülaltoodud juhis kasutatav, teisel aga mitte, ei ole ilma geomeetriata võimalik.

Ülesanne

Vaatleme lähemalt, milles on siin erinevus. Asi seisab selles, et päikesekiired on omavahel paralleelsed, laternakiired aga mitteparalleelsed. Viimane on ilmselt selge, kuid mispärast me võime päikesekiiri lugeda paralleelseteks, kuigi nad seal, kust nad väljuvad, tingimata lõikuvad?

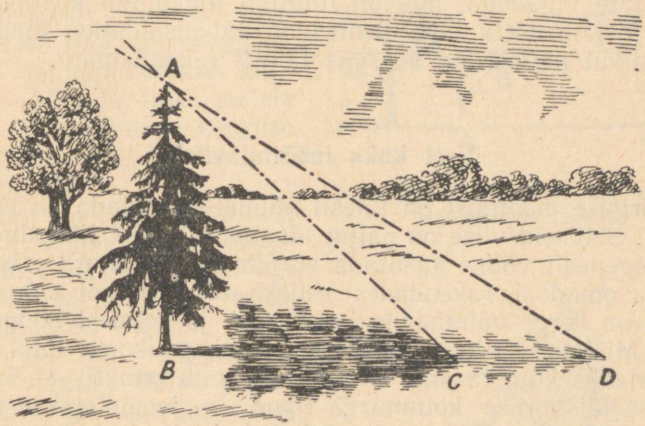


Joon. 2. Millal niisugune mõõtmine on teostamatu.

Lahendus

Päikesekiiri, mis langevad Maale, võime sellepärast paralleelseteks lugeda, et nurk nende vahel on äärmiselt väike, praktiliselt määramatu. Te veendute selles lihtsa geomeetrilise arvutuse abil. Kujutlege kaht mingisugusest Päikese punktist lähtunud kiirt, mis langevad Maale, ütleme, kilomeetri kaugusel teineteisest. Tähendab, kui me asetaksime sirkli ühe haru sellesse punkti Päikesel ja teisega tõmbaksime ringjoone raadiusega, mis võrdub Maa kaugusega Päikesest (s. t. raadiusega 150 000 000 km), siis tekiks meie kahe kiire-raadiuse vahel ühe kilomeetri pikkune kaar. Selle hiiglasliku ringjoone kogupikkus oleks $2\pi \cdot 150\,000\,000$ km $= 940\,000\,000$ km. Üks kraad on muidugi 360 korda väiksem, s. o. ligikaudu 2 600 000 km; üks kaareminut on 60 korda kraadist väiksem, s. o. 43 000 km; üks kaaresekund on veel 60 korda väiksem, s. o. 720 km.

Kuid meie kaare pikkus on ainult 1 km, tähendab, ta vastab $\frac{1}{720}$-sekundisele nurgale. Nii väike nurk ei ole mõõdetav isegi kõige täpsemate astronoomiliste mõõteriistadega — järelikult võime praktikas lugeda Maale langevaid päikesekiiri paralleelseteks sirgeteks[1].



Joon. 3. Kuidas tekib poolvari.

Kui me ei tunneks neid geomeetrilisi kaalutlusi, siis me ei oleks saanud vaadeldud kõrguse määramise viisi põhjendada.

Proovides kasutada varjude meetodit praktikas, veendute siiski kohe tema ebakindluses. Varjud ei ole nii kindlapiirilised, et nende pikkuse mõõtmist oleks võimalik teostada täiesti täpselt. Iga päikesevalguse poolt tekitatud vari omab ebaselgelt piiritletud heledama poolvarju, mis muudab varju piirid ebamääraseks. See tuleb sellest, et Päike ei ole punktikujuline, vaid suur helendav keha, mis saadab kiiri välja paljudest punktidest. Joonisel 3 on näidatud,

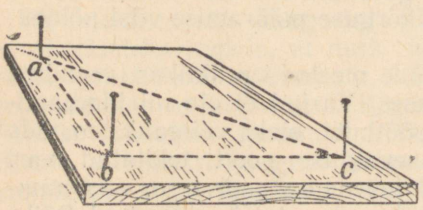
[1] Olukord on teine, kui kiired, lähtudes mingist punktist Päikesel, on suunatud Maa diameetri otspunktidesse. Sel juhul on nurk nende vahel küllaldaselt suur mõõtmiseks (ligi 17″) ja selle nurga määramine oli astronoomidele üheks abinõuks Maa kauguse kindlaksmääramisel Päikesest.

mispärast selle tagajärjel puu varjul *BC* on veel täiendav poolvari *CD,* mis järk-järgult kaob. Poolvarju äärmiste piiride vaheline nurk *CAD* võrdub selle nurgaga, mille all näeme alati Päikese ketast, s. o. poole kraadiga. Viga, mis tekib sellest, et kumbagi varju ei ole võimalik täiesti täpselt mõõta, võib isegi Päikese küllaldase kõrguse puhul ulatuda 5 ja enam protsendini. See viga liitub teiste paratamatute vigadega, mis on tingitud maapinna ebatasasusest jm., mistõttu lõpptulemus on väheusaldatav. Mägisel maastikul näiteks on see viis täiesti rakendamatu.

Veel kaks mõõtmisviisi

Kõrguse mõõtmist on täiesti võimalik teostada ka varju abita. Selliseid viise on palju; alustame kahest lihtsaimast.

Kõigepealt võime kasutada võrdhaarse täisnurkse kolmnurga omadusi, rakendades selleks õige lihtsat vahendit, mida on kerge valmistada lauakesest ja kolmest nööpnõelast. Mistahes kujuga lauakesel, isegi puukoore tükil, kui tal on üks külg tasane, märgitakse kolm punkti — võrdhaarse täisnurkse kolmnurga tipud — ja pistetakse nendesse nööpnõelad (joon. 4). Juhul, kui teil ei ole käepärast joonestuskolmnurka täisnurga konstrueerimiseks, ja kui puudub ka sirkel võrdsete külgede mõõtmiseks, siis murdke mistahes tükk paberit kahekorra kokku ja veel kord pooleks risti esimese murdekohaga, nii et selle mõlemad pooled langeksid kokku, ja saategi täisnurga. Sama paberitükk täidab võrdsete kauguste mõõtmisel ka sirkli ülesannet.

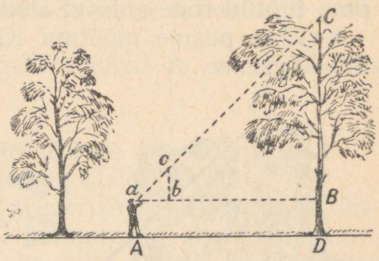


Joon. 4. Nööpnõeltest mõõduriist kõrguste mõõtmiseks.

Nagu näete, on seda vahendit võimalik valmistada ka laagriolukorras.

Tema kasutamine ei ole keerukam tema valmistamisest. Eemaldudes mõõdetavast puust, hoidke mõõduriista nii, et üks kolmnurga kaatetitest asetseks püstloodis, mille saavutamiseks võite kasutada ülemise nööpnõela külge seotud

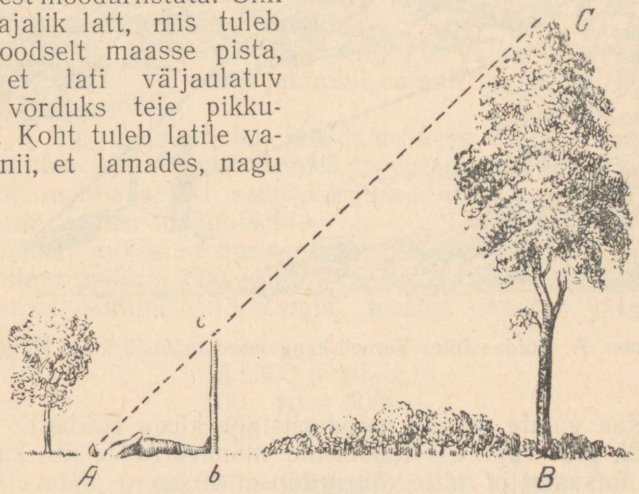
raskusega varustatud niiti. Lähenedes puule või temast kaugenedes leiate alati sellise koha A (joon. 5), kust nööpnõelte a ja c suunas vaadates näete, et nad katavad puuladva C: see tähendab, et hüpotenuusi ac pikendus läbib punkti C. Siis ilmselt kaugus aB võrdub kõrgusega CB, sest nurk a on 45°.



Joon. 5. Nööpnõeltest mõõduriista kasutamise skeem.

Järelikult, mõõtes kauguse aB (või tasasel maastikul temaga võrdse kauguse AD) ja liites sellele BD, s. t. silmade kõrguse maapinnast aA, saategi puu kõrguse DC.

Teist viisi kasutades tulete toime isegi nööpnõeltest mõõduriistata. Siin on vajalik latt, mis tuleb püstloodselt maasse pista, nii et lati väljaulatuv osa võrduks teie pikkusega. Koht tuleb latile valida nii, et lamades, nagu

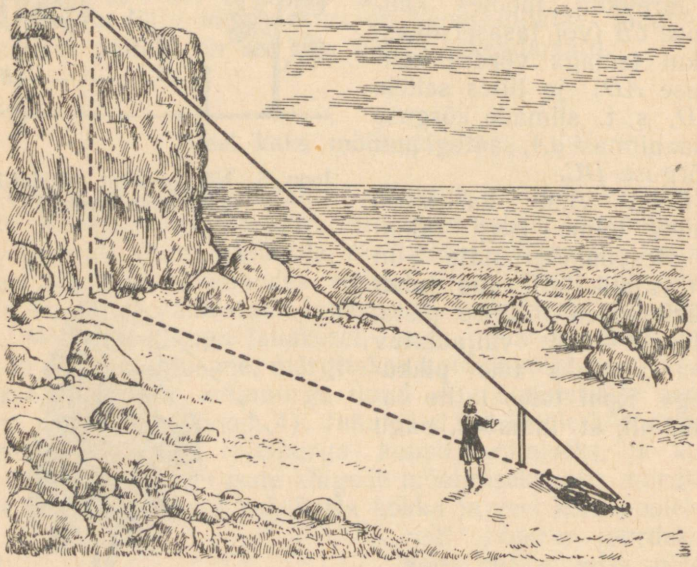


Joon. 6. Veel üks kõrguse määramise viis.

näidatud joonisel 6, paistaks teile puulatv ühel sirgjoonel lati ülemise otsaga. Et kolmnurk Abc on võrdhaarne ja täisnurkne, siis nurk $A = 45°$ ning järelikult kaugus AB võrdub puu kõrgusega BC.

Järgmist, samuti väga lihtsat kõrgete esemete mõõtmisviisi on piltlikult kirjeldanud Jules Verne (l.: žül vern) oma tuntud romaanis «Saladuslik saar»:

««Täna peame mõõtma Kauge Vaate väljaku kõrguse,» ütles insener.



Joon. 7. Kuidas Jules Verne'i kangelased mõõtsid kalju kõrgust.

«Kas vajate selleks mõõduriista?» küsis Herbert.

«Ei, pole vaja. Me tegutseme mõnevõrra teisiti, kasutades lihtsamat ja mitte vähem täpset viisi.»

Nooruk, püüdes võimalikult rohkem õppida, järgnes insenerile, kes laskus graniitseinalt alla rannale.

Võttes umbes 12 jala pikkuse sirge lati, mõõtis insener selle võimalikult täpselt, võrreldes teda oma pikkusega, mis oli talle hästi teada. Herbert kandis talle inseneri poolt antud loodi: lihtsat nööri otsa seotud kivi.

Umbes 500 jala kaugusel püstloodsest graniitseinast tor-

kas insener lati kahe jala sügavuselt liiva, seadis ta loe abil vertikaalseks ja kinnitas tugevasti.

Siis eemaldus ta latist sellisele kaugusele, et ta liival lamades nägi lati otsa ja kõrgendiku serva samal sirgel asetsevat (joon. 7). Selle punkti märkis ta hoolikalt vaiakesega.

«Tunned sa geomeetria algeid?» küsis ta maast tõustes Herbertilt.

«Jah.»

«Kas mäletad sarnaste kolmnurkade omadusi?»

«Nende vastavad küljed on proportsionaalsed.»

«Õige. Niisiis: praegu konstrueerisin kaks sarnast täisnurkset kolmnurka. Väiksemal kolmnurgal on üheks kaatetiks püstloodne latt, teiseks kaugus vaiast lati alumise otsani, hüpotenuusiks aga minu vaatesuund. Teisel kolmnurgal on kaatetiteks püstloodne sein, mille kõrgust me tahame määrata, ja kaugus vaiast seina jalamini, hüpotenuusiks aga minu vaatesuund, mis langeb ühte esimese kolmnurga hüpotenuusi suunaga.

«Mõistan!» hüüatas nooruk. «Kaugus vaiast latini suhtub kaugusesse vaiast seina jalamini samuti, nagu lati kõrgus seina kõrgusesse.»

«Jah. Ja järelikult, kui mõõdame kaks esimest kaugust, siis võime lati kõrgust teades arvutada võrde neljanda, tundmatu liikme, s. t. seina kõrguse. Nii tuleme toime selle kõrguse vahetu mõõtmiseta.»

Mõõdeti mõlemad horisontaalsed kaugused: väiksem oli 15 jalga, suurem 500 jalga.

Pärast mõõtmise lõpetamist teostas insener järgmise arvutuse:

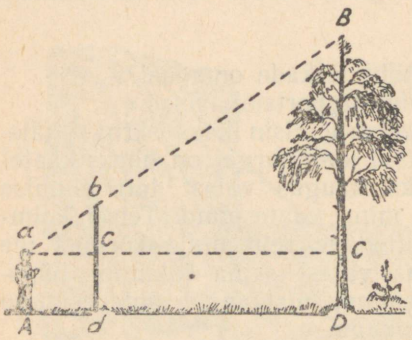
$$15 : 500 = 10 : x,$$
$$500 \cdot 10 = 5000,$$
$$5000 : 15 = 333{,}3.$$

Tähendab, graniitseina kõrgus oli 333 jalga.»

Kuidas toimis seersant

Mõningad äsjakirjeldatud mõõtmisviisidest on ebamugavad, sest nad nõuavad maaslamamist. Endastmõistetavalt on seda ebamugavust võimalik vältida.

Suure Isamaasõja ajal kujunes ükskord ühel rinnetest järgmine olukord. Leitnant Ivanjuki allüksusele anti käsk ehitada sild üle mägijõe. Vastaskaldal asusid fašistid. Silla ehituskoha luureks määras leitnant luuregrupi, eesotsas vanemseersant Popoviga... Lähimas metsamassiivis mõõtsid nad sobivate puude jämeduse ja kõrguse ning määrasid puude arvu, mida võis ehitusel tarvitada.



Joon. 8. Puu kõrguse mõõtmine lati abil.

Puude kõrgused määrati vaia (lati) abil nii, nagu näidatud joonisel 8. See viis on järgmine. Varustunud oma kasvust pikema latiga, torgake see teatavas kauguses mõõdetavast puust püstloodselt maasse (joon. 8). Eemalduge latist sirge *Dd* pikendust mööda kohani *A*, kust puulatva vaadates näete seda ühel joonel lati ülemise otsaga *b*. Seejärel, muutmata pea asendit, vaadake horisontaalse sirge *aC* suunas, märkides latil ja tüvel silmade kõrgusel punktid *c* ja *C*. Paluge abilist teha nendele kohtadele märgid ja vaatlus ongi lõpetatud. Jääb ainult leida kolmnurkade *abc* ja *aBC* sarnasuse põhjal *BC* võrdest

$$BC : bc = aC : ac,$$

millest

$$BC = bc \frac{aC}{ac}.$$

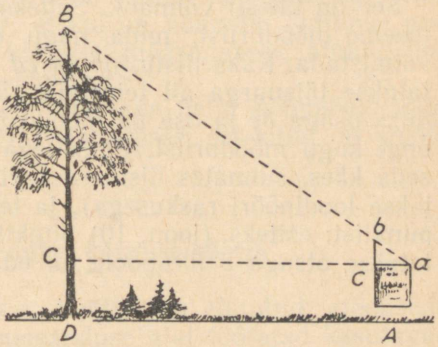
Kaugused *bc*, *aC* ja *ac* on kergesti vahetult mõõdetavad. Selleks, et leida puu kõrgust, tuleb saadud suurusele *BC* liita pikkus *CD* (see mõõdetakse samuti vahetult).

Puude arvu määramiseks käskis vanemseersant sõduritel mõõta metsamassiivi pindala. Pärast seda luges ta puud 50 · 50 ruutmeetrisel maa-alal ja teostas vastava korrutamise.

Kõigi luurajate poolt kogutud andmete põhjal määras allüksuse komandör kindlaks, kus ja missugune sild tuleb ehitada. Sild ehitati tähtaegselt, lahinguülesanne oli edukalt täidetud.[1]

Märkmiku abil

Kui kõrgust pole võimalik otseselt mõõta, võite selle ligikaudseks määramiseks kasutada ka taskumärkmikku, mis on varustatud tupes või silmuses asetseva pliiatsiga. Märkmiku ja pliiatsi abil võite ruumis konstrueerida need kaks sarnast kolmnurka, mille abil leitakse otsitav kõrgus. Märkmikku tuleb hoida silmade ees nii, nagu on näidatud lihtsustatud joonisel 9. Ta peab asetsema püstloodses tasapinnas, pliiats aga tõmmatakse üle märkmiku ülemise serva nii palju välja, et vaadates punktist *a*, paistab puulatv *B* olevat kaetud pliiatsi otsaga *b*. Siis, vastavalt kolmnurkade *abc* ja *aBC* sarnasusele, määratakse kõrgus *BC* võrdest



Joon. 9. Kõrguse mõõtmine märkmiku abil.

$$BC : bc = aC : ac.$$

Kaugused *bc*, *ac* ja *aC* mõõdetakse vahetult. Saadud suurusele *BC* tuleb liita veel pikkus *CD*, s. t. silmade kõrgus maast (tasasel maastikul).

Et märkmiku laius *ac* on muutumatu, siis, seistes alati ühel ja samal kaugusel mõõdetavast puust (näit. 10 m), muutub koos puu kõrgusega ainult pliiatsi väljatõmmatud osa pikkus *bc*. Seetõttu võite varem arvutada,

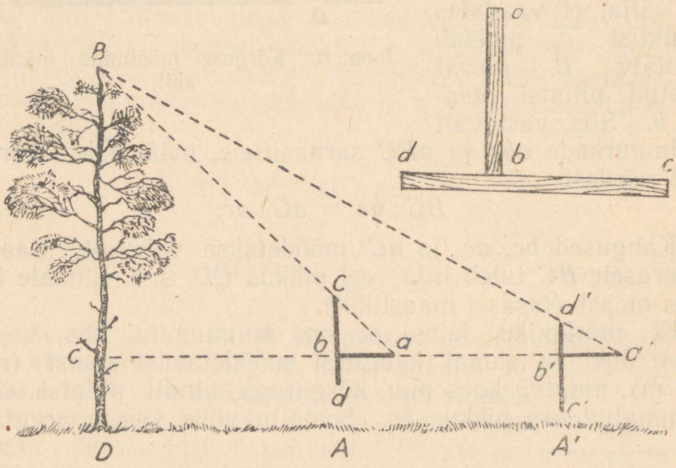
[1] Siin ja edaspidi toodud episoode Suurest Isamaasõjast on kirjeldanud A. Demidov artiklis «Разведка реки», ajakiri «Военные знания» nr. 8, 1949.

missugune kõrgus vastab ühele või teisele väljatõmmatud osa pikkusele, ja märkida need arvud pliiatsile. Teie märkmik muutub seega lihtsustatud kõrgusemõõtjaks, sest te võite tema abil määrata kõrguse otsekohe, arvutusi teostamata.

Puule lähenemata

Juhtub, et millegipärast on tülikas vahetult mõõdetava puuni pääseda. Kas võib ka sel juhul määrata tema kõrgust?

See on täiesti võimalik. Selleks on välja mõeldud teravmeelne mõõduriist, mida nagu eelnevaidki on kerge ise valmistada. Kaks liistu, *ab* ja *cd* (joon. 10, üleval), kinnitatakse täisnurga all teineteise külge, nii et liist *ab* võrduks osaga *bc* ja osa *bd* moodustaks poole liistust *ab*. See ongi kogu mõõduriist. Et sellega kõrgust mõõta, hoitakse seda käes, suunates liistu *cd* vertikaalselt (selleks kasutatakse loodinööri raskusega), ja teostatakse vaatlusi kahest punktist: esiteks (joon. 10) punktist *A*, kus mõõduriist asetatakse otsaga *c* ülespoole, ja edasi punktist *A'*, kus teda



Joon. 10. Lihtsaima, kahest liistust koosneva kõrgusemõõtja kasutamine.

hoitakse otsaga d ülespoole. Punkt A valitakse nii, et vaadates otsa a juurest, paistaks puulatv B ühel joonel otsaga c. Punkt A' aga valitakse nii, et punktist a' vaadates langeks puuladvaga B ühte punkt d'. Nende punktide A ja A' [1] leidmises peitubki kogu mõõtmine, sest otsitav osa BC puu kõrgusest BD võrdub kaugusega AA'. See võrdsus tuleneb, nagu on kerge taibata, sellest, et $aC = BC$, kuna aga $a'C = 2BC$, tähendab,

$$a'C - aC = BC.$$

Te näete, et me seda lihtsat mõõduriista kasutades mõõdame puu kõrguse, minemata puule lähemale kui tema kõrgus. On arusaadav, et kui on võimalik minna puu juurde, siis piisab puu kõrguse määramiseks ainult ühe punkti — A või A' — leidmisest.

Kahe liistu asemel võib kasutada nelja nööpnõela, paigutades need vastaval viisil lauakesse; sel kujul on «mõõduriist» veelgi lihtsam.

Metsaametnike kõrgusemõõtja

Nüüd on aeg selgitada, kuidas on ehitatud «tõelised» kõrgusemõõtjad, mida metsanduse alal töötajad kasutavad oma tegeliku töö juures. Kirjeldan üht nendest kõrgusemõõtjatest, teda mõnevõrra muutes, nii et oleks kerge teda ise valmistada. Tema ehituse põhimõte on näha joonisel 11. Papist või puust nelinurka $abcd$ hoitakse selliselt käes, et vaadates serva ab suunas, näeksime samal sirgel puulatva B. Punkti b on kinnitatud niit raskusega q. Märgitakse ära punkt n, kus niit lõikub joonega dc. Kolmnurgad bBC ja bnc on sarnased, sest mõlemad on täisnurksed ja omavad võrdseid teravnurki bBC ja bnc (vastavalt paralleelsete haaradega). Tähendab, oleme õigustatud kirjutama võrde

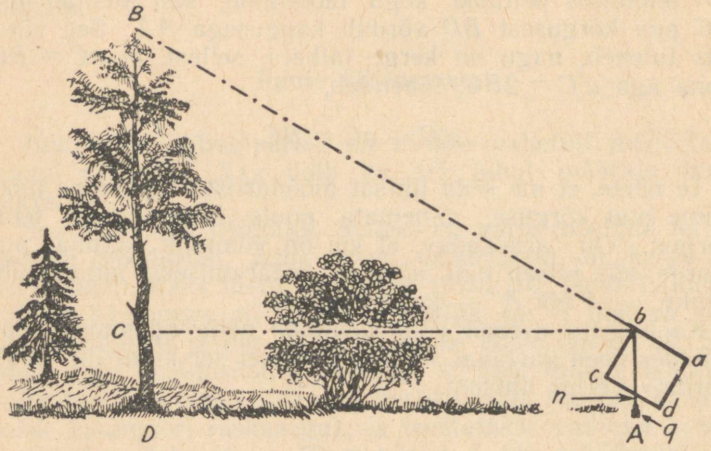
$$BC : nc = bC : bc,$$

millest

$$BC = bC\frac{nc}{bc}.$$

[1] Need punktid peavad tingimata asuma puutüvega ühel sirgel.

Et *bC*, *nc* ja *bc* võib mõõta vahetult, leiame kergesti puu kõrguse, liites kõrgusele *BC* tüve alumise osa pikkuse *DC* (mõõduriista kõrguse maapinnast).



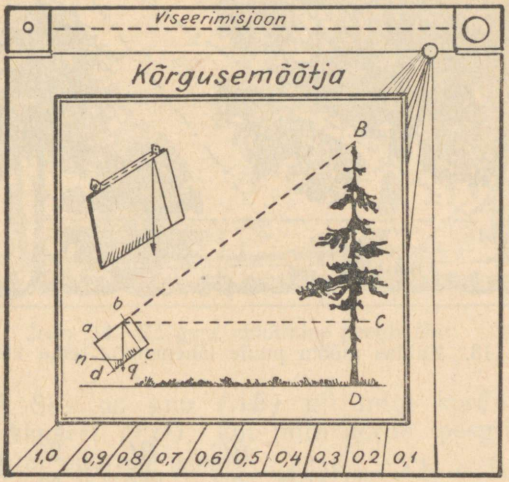
Joon. 11. Metsaametnike kõrgusemõõtja kasutamise skeem.

Jääb lisada mõned üksikasjad. Kui lauakese serv *bc* teha näiteks täpselt 10 cm pikkune ja servale *dc* kanda jaotused sentimeetrites, siis avaldub suhe $\frac{nc}{bc}$ alati kümnendmurruna, näidates otseselt, kui suure osa kaugusest *bC* moodustab puu kõrgus *BC*. Olgu näiteks niit 7-nda jaotuskriipsu juures (s. o. $nc = 7$ cm); see tähendab, et puu kõrgus vaatleja silmade tasapinnast on 0,7 vaatleja kaugusest tüvest.

Teine parandus puudutab vaatlusviisi: et oleks lihtsam vaadata piki serva *ab*, võib papp-nelinurga ülemistes nurkades kõrvale pöörata kaks väikest nelinurka, tehes nendesse augukesed: silma juurde väiksema ja teise, suurema, puuladva poole (joon. 12).

Kõige täiuslikum sedaliiki mõõduriist on kujutatud peaaegu loomulikus suuruses joonisel 12. Sel kujul on teda kerge valmistada ja selleks ei ole vaja palju aega ega erilist oskust. Võttes taskus vähe ruumi, võimaldab ta eks-

kursiooni ajal kiiresti määrata ettejuhtuvate esemete — puude, postide, ehitiste jms. — kõrgusi. (See abinõu kuulub nende instrumentide hulka, mis on selle raamatu autori poolt välja töötatud kogumikus «Geomeetria vabas looduses».)



Joon. 12. Metsaametnike kõrgusemõõtja.

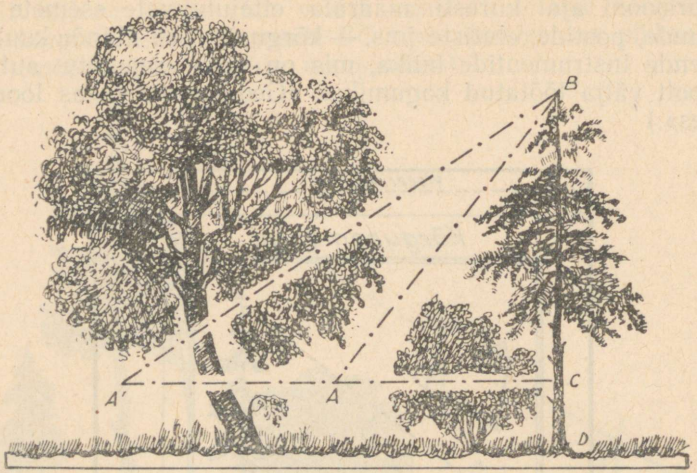
Ülesanne

Kas saab äsjakirjeldatud kõrgusemõõtjaga mõõta puid, mille juurde vahetult ei pääse? Kui see on võimalik, kuidas siis sel juhtumil toimida?

Lahendus

Mõõduriist tuleb suunata puulatva B kahest punktist — punktidest A ja A' (joon. 13). Oletame, et punktis A tegime kindlaks, et $BC = 0{,}9\ AC$, ja punktis A', et $BC = 0{,}4\ A'C$. Siis on meil teada, et

$$AC = \frac{BC}{0{,}9}; \qquad A'C = \frac{BC}{0{,}4},$$



Joon. 13. Kuidas mõõta puule lähenemata tema kõrgus.

millest

$$AA' = A'C - AC = \frac{BC}{0{,}4} - \frac{BC}{0{,}9} = \frac{25}{18}\ BC.$$

Seega

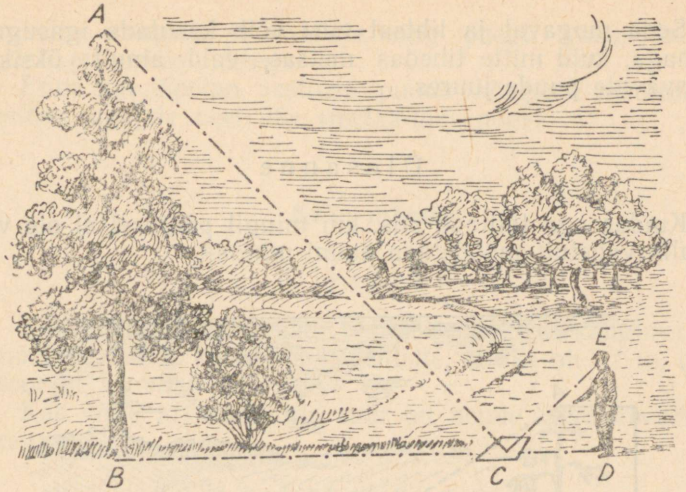
$$AA' = \frac{25}{18}\ BC \quad \text{ehk} \quad BC = \frac{18}{25}\ A'A = 0{,}72\ A'A.$$

Niisiis: mõõtes mõlema vaatluskoha vahelise kauguse $A'A$ ja võttes selle suurusest teatava osa, leiame otsitava ligipääsematu ja kättesaamatu kõrguse.

Peegli abil

Ülesanne

Esitame veel ühe omapärase puu kõrguse määramise viisi — peegli abil. Tasasel maastikul asetatakse teatud kaugusele mõõdetavast puust (joon. 14) punkti C horisontaalselt väike peegel ja eemaldutakse temast puule vastassuunas punkti D, kus vaatleja püsti seistes näeb peeglis



Joon. 14. Kõrguse mõõtmine peegli abil.

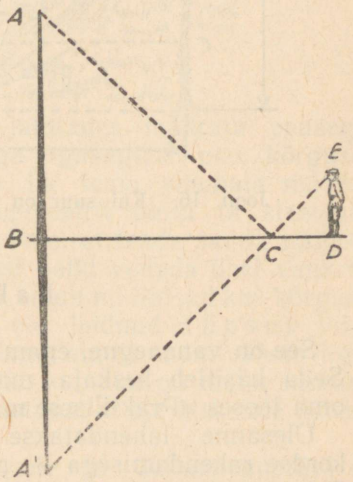
puulatva A. Siis on puu (AB) nii mitu korda kõrgem vaatleja pikkusest (ED), kui mitu korda peegli kaugus puust (BC) on suurem peegli ja vaatleja vahelisest kaugusest (CD). Mispärast see nii on?

L a h e n d u s

Meetod põhineb valguse peegeldumise seadusel. Latv A (joon. 15) peegeldub punktis A' nii, et $AB = A'B$. Kolmnurkade BCA' ja CED sarnasusest järeldub, et

$$A'B : ED = BC : CD.$$

Et põhjendada ülesandes esitatud vastastikuseid suhteid, tuleb selles proportsioonis ainult pikkus $A'B$ asendada temaga võrdse pikkusega AB.

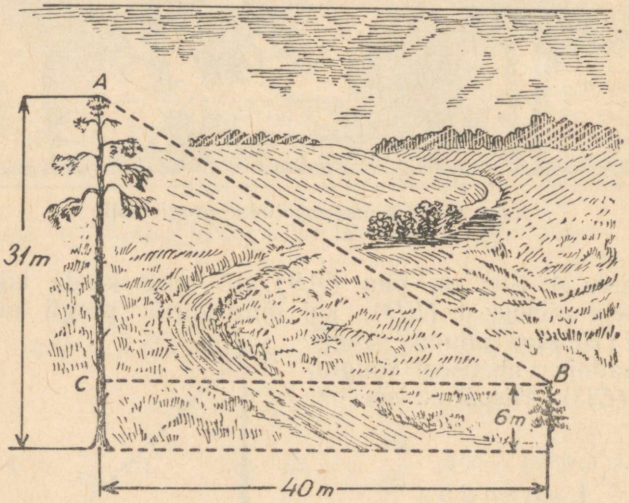


Joon. 15. Geomeetriline konstruktsioon, mis selgitab kõrguse mõõtmist peegli abil.

Seda mugavat ja lihtsat viisi võib kasutada igasuguse ilmaga, kuid mitte tihedas metsas, vaid ainult üksikult kasvavate puude juures.

Ülesanne

Kuidas aga talitada siis, kui mingil põhjusel ei ole võimalik vahetult mõõdetava puuni minna?



Joon. 16. Kui suur on männilatvade-vaheline kaugus?

Lahendus

See on vanaaegne, enam kui 500 aasta vanune ülesanne. Seda käsitleb keskaja matemaatik Antonio de Cremona oma teoses «Praktilisest maamõõtmisest» (aastal 1400).

Ülesanne lahendatakse ülalkirjeldatud meetodi kahekordse rakendamisega — peegli asetamisega kahte punkti. Tehes vastava konstruktsiooni, on kerge kolmnurkade sarnasuse põhjal järeldada, et otsitav puu kõrgus saadakse vaatleja silmade kõrguse korrutamisel peegli asendite

vahelise kauguse ja vaatleja ning peegli vaheliste kauguste erinevuse suhtega.

Enne kui lõpetan vestluse puude kõrguste mõõtmisest, esitan lugejale veel ühe «metsa-ülesande».

Kaks mändi

Ülesanne

Kaks mändi kasvavad teineteisest 40 m kaugusel. Te mõõtsite nende kõrgused ja leidsite, et üks oli 31 m, teine, noorem, ainult 6 m kõrge.

Kas võite arvutada, kui suur on nende latvade vaheline kaugus?

Lahendus

Otsitav männilatvade-vaheline kaugus (joon. 16) on Pythagorase teoreemi järgi

$$\sqrt{40^2 + 25^2} = 47 \text{ (m)}.$$

Puutüve kuju

Nüüd juba võite te metsas jalutades määrata peaaegu poole tosina erineva meetodiga igasuguse puu kõrguse. Teid aga tõenäoliselt huvitab ka tema ruumala määramine — arvutamine, mitu kuupmeetrit puitu ta sisaldab, ja ühtlasi ka tema kaalumine, et teada saada näiteks seda, kas on võimalik niisugust palki vedada ühel vankril. Need mõlemad ülesanded pole enam nii lihtsad kui kõrguse määramine; spetsialistid ei ole leidnud täpset viisi nende lahendamiseks ja lepivad ainult enam-vähem ligikaudse hindamisega. Isegi siis, kui puu on maha raiutud ja lebab teie ees okstest puhastatuna, ei ole ülesande lahendamine kaugeltki lihtne.

Asi on selles, et ka täiesti sile ja ühtlane puutüvi ei kujuta endast ei silindrit ega täiskoonust, ei tüvikoonust ega ka mingisugust muud geomeetrilist keha, mille ruumala me oskaksime valemite järgi arvutada. Tüvi loomulikult

ei ole silinder — ta läheb ülevalt peenemaks (omab «kokkujooksu», nagu räägivad metsanduse alal töötajad), kuid ta ei ole ka koonus, sest tema «moodustaja» ei ole sirgjoon, vaid kõverjoon, ja seejuures mitte ringjoone kaar, vaid mingisugune teine kõver, kumerusega puu telje suunas.[1]

Sellepärast on enam või vähem täpne puutüve ruumala arvutamine teostatav ainult integraalarvutuse abil. Mõnelegi lugejale näib võib-olla imelikuna, et lihtsa palgi mõõtmiseks tuleb tarvitada kõrgema matemaatika abi. Paljud mõtlevad, et kõrgem matemaatika tegeleb ainult mingisuguste eriliste objektidega ja et igapäevases elus on rakendatav ainult elementaarne matemaatika. See on täiesti vale: võib küllaltki täpselt arvutada tähe või planeedi ruumala, kasutades elementaarset geomeetriat, samal ajal kui pika palgi või õllevaadi ruumala täpne arvutamine ei ole võimalik analüütilise geomeetriata ja integraalarvutuseta.

Kuid meie raamat ei eelda lugejal kõrgema matemaatika tundmist; seetõttu tuleb siin rahulduda ainult tüve ligikaudse ruumala arvutamisega. Lähtume sellest, et tüve ruumala on enam või vähem lähedane kas tüvikoonuse ruumalale või — ladvaga tüve puhul — täiskoonuse ruumalale või lõpuks — lühikeste palkide puhul — silindri ruumalale. Kõigi nende kolme keha ruumala on kerge arvutada. Kas ei saaks arvutuste ühtlustamiseks leida niisugust ruumala valemit, mis kehtiks üheaegselt kõigi loetletud kehade puhul? Siis arvutaksime tüve ligikaudse ruumala, huvitumata sellest, kas ta sarnaneb rohkem silindriga või täis- või tüvikoonusega.

Universaalne valem

Niisugune valem on olemas; veelgi enam: ta sobib mitte ainult silindrile ning täis- ja tüvikoonusele, vaid ka igasugusele prismale, täis- ja tüvipüramiidile, ja isegi kerale.

[1] Kõige lähemal on see kõver nn. «poolkuubilisele paraboolile» ($y^3 = ax^2$); keha, mis saadakse selle parabooli pöörlemisel, nimetatakse «neiloiidiks» (vana-aja matemaatiku Neili nime järgi, kes leidis selle kõvera kaare pikkuse määramise viisi). Metsas kasvava puu tüvi läheneb oma kujult neiloiidile. Neiloiidi ruumala arvutamist teostatakse kõrgema matemaatika võtetega.

Siin on see suurepärane valem, mis on matemaatikas tuntud Simpsoni valemi nime all:

$$v = \frac{h}{6}(b_1 + 4b_2 + b_3)$$

kus
h on keha kõrgus,
b_1 on alumise põhja pindala,
b_2 on keskmise ristlõike pindala,[1]
b_3 on ülemise põhja pindala.

Ülesanne

Näidata, et äsjatoodud valemi abil võib arvutada järgneva seitsme geomeetrilise keha: prisma, täispüramiidi, tüvipüramiidi, silindri, täiskoonuse, tüvikoonuse ja kera ruumala.

Lahendus

Selle valemi kehtivuses on kerge veenduda, rakendades teda loetletud kehadele. Prisma ja silindri puhul saame (joon. 17, *a*):

$$v = \frac{h}{6}(b_1 + 4b_1 + b_1) = b_1 h;$$

püramiidi ja koonuse puhul (joon. 17, *b*):

$$v = \frac{h}{6}\left(b_1 + 4\,\frac{b_1}{4} + 0\right) = \frac{b_1 h}{3};$$

tüvikoonuse puhul (joon. 17, *c*):

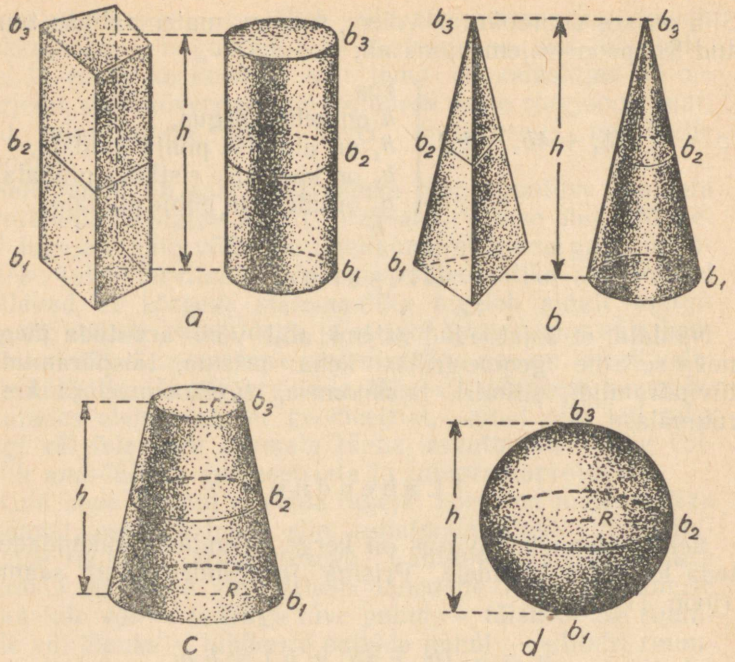
$$v = \frac{h}{6}\left[\pi R^2 + 4\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 + \pi r^2\right] = \frac{h}{6}(\pi R^2 + \pi R^2 +$$

$$+ 2\pi Rr + \pi r^2 + \pi r^2) = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2);$$

tüvipüramiidi puhul toimub tõestus analoogselt; lõpuks, kera puhul (joon. 17, *d*):

$$v = \frac{2R}{6}(0 + 4\pi R^2 + 0) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

[1] S. o. keha ristlõike pind tema kõrguse keskkohalt.



Joon. 17. Geomeetrilised kehad, millede ruumalasid võib arvutada ühtainsat valemit kasutades.

Ülesanne

Märgime veel üht meie universaalse valemi huvitavat omadust: ta sobib ka tasapinnaliste kujundite:

parallelogrammi,
trapetsi ja
kolmnurga

pindalade arvutamiseks, kui h-ga tähistame nagu varemgi kujundi kõrguse,

b_1-ga aluse,
b_2-ga kesklõigu ja
b_3-ga ülemise serva pikkuse.
Kuidas selles veenduda?

Kasutades valemit, saame parallelogrammi (ruut, ristkülik) puhul (joon. 18, *a*):

$$S = \frac{h}{6}(b_1 + 4b_1 + b_1) = b_1 h;$$

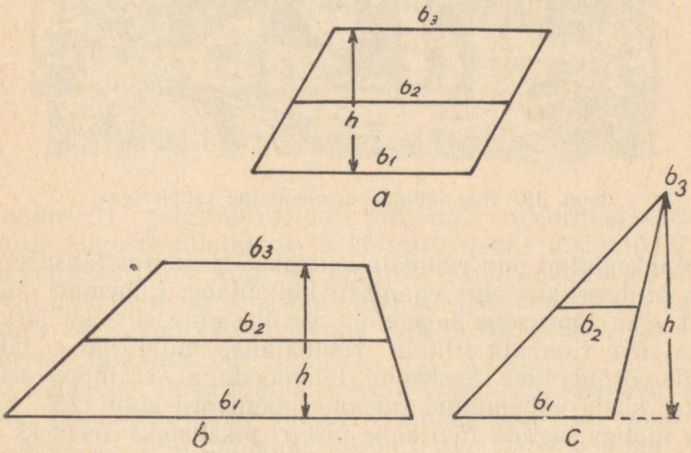
trapetsi puhul (joon. 18, *b*):

$$S = \frac{h}{6}\left(b_1 + 4\frac{b_1 + b_3}{2} + b_3\right) = \frac{h}{2}(b_1 + b_3);$$

kolmnurga puhul (joon. 18, *c*):

$$S = \frac{h}{6}\left(b_1 + 4\frac{b_1}{2} + 0\right) = \frac{b_1 h}{2}.$$

Te näete, et meie valemit võib täie õigusega nimetada universaalseks.



Joon. 18. Universaalne valem sobib ka nende kujundite pindalade arvutamiseks.

Kasvava puu ruumala ja kaal

Teie käsutuses on niisiis valem, mille abil võite ligikaudselt arvutada *maharaiutud* puutüve ruumala, hoolimata sellest, missuguse geomeetrilise kehaga ta sarnaneb: silind-

riga, täiskoonusega või tüvikoonusega. Selleks on vaja teostada neli mõõtmist — mõõta tüve pikkus ja kolm läbimõõtu: alumine, ülemine ja keskmine. Alumise ja ülemise läbimõõdu mõõtmine on väga lihtne; keskmise läbimõõdu vahetu kindlaksmääramine on ilma spetsiaalse seadiseta (metsanduse alal töötajate «supler», joon. 19 ja 20[1]) küllaltki ebamugav. Sellest raskusest võib aga üle saada, kui mõõta nööriga tüve ümbermõõt ja jagada see läbimõõdu saamiseks $3^1/_7$-ga.



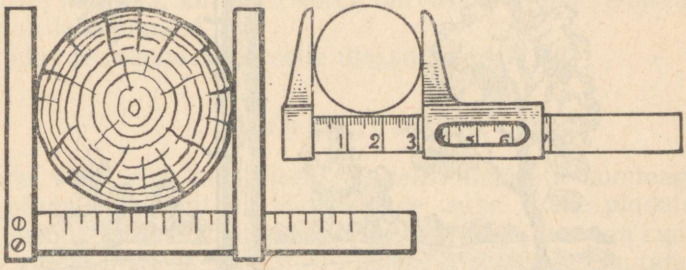
Joon. 19. Puu läbimõõdu mõõtmine «supleriga».

Maharaiutud puu ruumala saadakse seejuures täpsusega, mis on tegelikus elus enamasti küllaldane. Lühemalt, kuid väiksema täpsusega lahendub see ülesanne siis, kui arvutada tüve ruumala silindri ruumalana, mille aluse läbimõõt võrdub tüve keskkoha läbimõõduga: seejuures saadakse siiski vähendatud tulemus, mõnikord kuni 12%. Kui aga mõttes jagada tüvi kahe meetri pikkusteks osadeks ja määrata iga niisuguse peaaegu silindrilise osa ruumala, siis, liites need, et saada kogu tüve ruumala, saame palju parema tulemuse: tekib kõrvalekaldumine vähenemise suunas mitte üle 2—3%.

Kuid kõik see on täiesti rakendamatu kasvava puu korral: kui te ei kavatse ronida puu otsa, siis on teile mõõt-

[1] Samal põhimõttel on ehitatud üldtuntud abinõu ümmarguste esemete läbimõõdu määramiseks — varbsirkel (joon. 20, paremal).

miseks kättesaadav ainult tema alumise osa läbimõõt. Sel juhul tuleb ruumala määramisel rahulduda ainult väga ligikaudse hinnanguga, lohutudes sellega, et ka elukutselised metsanduse alal töötajad toimivad harilikult samal viisil. Nad kasutavad selleks niinimetatud «vormiarvude» tabelit, s. t. arvude tabelit, mis näitavad, kui suure osa moodustab mõõdetava puu ruumala silindri ruumalast, mille kõrgus ja läbimõõt võrduvad puu kõrguse ja läbimõõduga, mis on mõõdetud täiskasvanud inimese rinna, s. t. 130 sm kõrguselt (sellel kõrgusel on teda kõige mugavam mõõta).



Joon. 20. «Supler» (vasakul) ja varbsirkel (paremal).

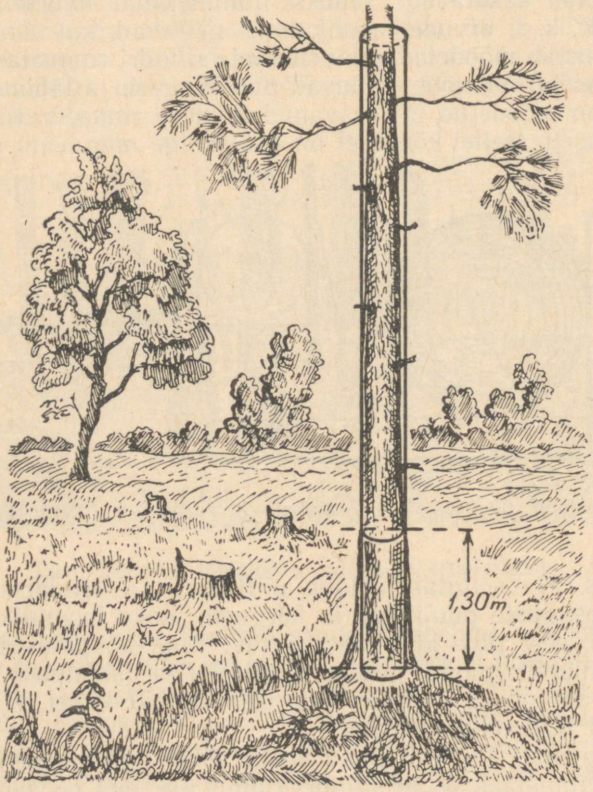
Joonis 21 selgitab öeldut piltlikult. «Vormiarvud» on mitmesuguste puuliikide ja kõrguste jaoks loomulikult erinevad, sest tüve kuju on muutuv. Kuid kõikumised ei ole eriti suured: männi- ja kuusetüvedel (tihedas metsas kasvanud) asetsevad «vormiarvud» 0,45 ja 0,51 vahel, s. o. võrduvad ligikaudu poolega.

Tähendab, ilma suurema veata võib võtta kasvava okaspuu ruumalaks poole silindri ruumalast, mis on sama kõrgusega, ja mille läbimõõt võrdub puu läbimõõduga rinna kõrguselt.

Endastmõistetavalt on see ainult umbkaudne hindamine, kuid ta ei kaldu siiski palju kõrvale tõelistest tulemustest: kuni 2% suurenemise ja kuni 10% vähenemise suunas[1].

[1] Tuleb meeles pidada, et «vormiarvud» kehtivad ainult metsas kasvanud, s. o. kõrgete ja peente (siledate, sõlmenditeta) puude kohta; üksikult seisvate oksarikaste puude jaoks ei saa niisugust üldist ruumala arvutamise juhendit anda.

Siit on vaid üks samm selleni, et määrata ka kasvava puu k a a l. Selleks on küllaldane teada, et 1 kuupmeeter toorest männi- või kuusepuitu kaalub umbes 600—700 kg.



Joon. 21. Mis on «vormiarv».

Olgu näiteks teie poolt kindlaks määratud kuuse kõrgus 28 m, kuna tüve ümbermõõt rinna kõrguselt võrdub 120 cm-ga. Siis on vastava ringi pindala 1100 cm^2 ehk 0,11 m^2, kuna tüve ruumala on $\frac{1}{2} \cdot 0{,}11 \cdot 28 = 1{,}5$ (m^3). Võttes toore kuusepuidu 1 m^3 kaaluks keskmiselt 650 kg, leiame, et 1,5 m^3 seda kaalub umbes üks tonn (1000 kg).

Lehtede geomeetria

Ülesanne

Hõbepapli varjus on tema tüvest kasvanud võsu. Murdke sellelt leht ja te märkate, kui suur ta on emapuu lehtedega võrreldes, eriti nendega, mis kasvasid heledas päikesepaistes. Varjus olevad lehed, püüdes päikesekiiri, asendavad valguse puudujäägi oma pinna mõõdetega. Üksikasjaliselt seda küsimust arutada on botaaniku ülesanne. Kuid ka geomeetria-tundja võib siin ütelda oma sõna: ta võib nimelt kindlaks määrata, kui mitu korda on võsu lehe pind suurem emapuu lehe pinnast.

Kuidas te lahendaksite selle ülesande?

Lahendus

Seda võib teha kahel teel. Esiteks: määrata kummagi lehe pindala üksikult ja leida nende suhe. Lehe pindala võib mõõta, kattes ta läbipaistva ruutvõrguga, kus iga ruuduke vastab näiteks 4 mm²-le (selleks otstarbeks kasutatavat läbipaistvat ruudulist paberit nimetatakse *paletiks*). Kuigi see on täiesti õige viis, on ta siiski liiga vaevanõudev[1].

Lühem viis rajaneb sellele, et mõlemad suuruselt erinevad lehed on siiski sarnase või peaaegu sarnase kujuga, teiste sõnadega — nad on geomeetriliselt sarnased kujundid. Sarnaste kujundite pindalad, nagu teame, suhtuvad nagu nende lineaarsete mõõdete ruudud. Tähendab, määrates, mitu korda üks leht on pikem või laiem teisest, saame selle arvu lihtsa ruututõstmisega teada nende pindalade suhte. Olgu võsu lehe pikkuseks 15 cm, puuoksa lehel ainult 4 cm; lineaarsete mõõdete suhe on $\frac{15}{4}$; tähendab, pindalalt on üks leht teisest suurem $\frac{225}{16}$, s. t. 14 korda. Ümardades (sest täielikku täpsust siin olla ei saa) võime õigusega ütelda, et võsu leht on puu lehest suurem umbes 15 korda.

[1] Sellel meetodil on siiski ka oma eelis: tema abil võime võrrelda *erinevate vormidega* lehtede pindu, mida ei saa teha allpool-kirjeldataval meetodil.

Veel üks näide.

Ülesanne

Varjus kasvanud võilille lehe pikkus on 31 cm. Teisel, päikesepaistel kasvanud eksemplaril on lehelaba pikkus ainult 3,3 cm. Mitu korda umbkaudu on esimese lehe pindala suurem teise pindalast?

Lahendus

Talitame vastavalt eelmisele ülesandele. Pindalade suhe on

$$\frac{31^2}{3{,}3^2} = \frac{960}{10{,}9} = 87;$$

tähendab, pindala poolest on üks leht teisest suurem umbes 90 korda.



Joon. 22. Määrake nende lehtede pindalade suhe.



Joon. 23. Määrake nende lehtede pindalade suhe.

Pole raske valida metsas hulk sarnaste kujudega, kuid erinevate suurustega lehepaare ja niiviisi saada huvitavat materjali geomeetrilisteks ülesanneteks sarnaste kujundite pindalade suhete kohta. Harjumatule silmale paistab seejuures alati imelik, et võrdlemisi väike erinevus lehtede pikkuses ja laiuses tekitab suure erinevuse nende pindalades. Kui näiteks kahest geomeetrilise kuju poolest sarnasest

lehest üks on teisest pikem 20% võrra, siis nende pindalade suhe on

$$1{,}2^2 \approx 1{,}4,$$

s. t. erinevus on 40%. Kui aga pikkus erineb 40% võrra, siis ületab üks leht pindala poolest teise

$$1{,}4^2 \approx 2,$$

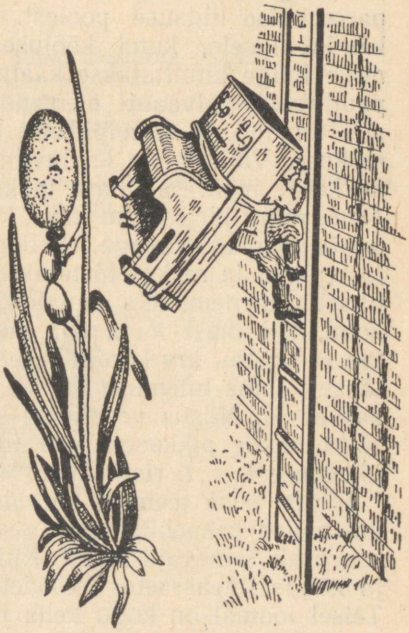
s. t. peaaegu kahekordselt.

Ülesanne

Soovitame lugejal määrata joonistel 22 ja 23 kujutatud lehtede pindalade suhted.

Kuuejalgsed vägilased

Sipelgad on imetaolised olendid! Kärmesti mööda kõrt üles ronides, oma tühise kasvu kohta raske kandamiga suus (joon. 24), annab sipelgas vaatlevale inimesele peadmurdva ülesande: kust võtab putukas sellise jõu, et nähtava pingutuseta kanda kümme korda endast raskemat koormat? Sest inimene näiteks ei suudaks ronida mööda redelit, seljas pianiino (joon. 24), ometi on koorma ja keha raskuste suhe sipelgal umbkaudu sama. Ilmneb, et sipelgas on suhteliselt tugevam kui inimene!



Joon. 24. Kuuejalgne vägilane.

Kas see on nii?

Siin ei tule toime geomeetriata. Jälgime, mida räägib spetsialist (prof. A. F. Brandt) esmalt lihaste jõust ja siis meid huvitavast putuka ja inimese jõudude vahekorra küsimusest:

«Elav lihas sarnaneb elastse nööriga, kuid tema lühenemine ei põhine elastsusel, vaid teistel põhjustel ja toimub normaalselt närvide erutuse tagajärjel, füsioloogilisel katsel aga elektrivoolu juhtimisel vastavasse närvi või vahetult lihasesse endasse.

Vastavaid katseid on väga kerge teostada äsjasurmatud konnalt väljalõigatud lihastega, sest külmavereliste loomade lihased säilitavad väljaspool organismi isegi hariliku temperatuuri juures väga kaua oma elu-omadusi. Katse teostamine on väga lihtne. Lõigatakse välja peamine tagumise jala sirutuslihas — säärelihas — koos tüki reieluuga, kust lihas algab, ja koos kõõlusega. See lihas osutub kõige sobivamaks nii oma suuruse kui ka kuju ja prepareerimise lihtsuse poolest. Lihas kinnitatakse luutüki kaudu alusele, kuna kõõlusest pistetakse läbi haagike, mille külge kinnitatakse kaaluviht. Kui nüüd seda lihast puudutada galvaani elemendiga ühendatud juhtmetega, siis tõmbub ta silmapilkselt kokku, lüheneb ja kergitab raskuse. Väiksemate kaaluvihtide järkjärgulise lisamisega on kerge määrata lihase maksimaalset tõstevõimet. Ühendame nüüd järjestikku kaks, kolm, neli ühesugust lihast ja ärritame neid korraga. Sellega ei saavuta me suuremat tõstejõudu ja raskus tõstetakse ainult kõrgemale, vastavalt lihaste lühenemiste summale. Seevastu, kui kinnitame kaks, kolm, neli lihast k i m p u, siis seda süsteemi ärritades tõstab ta vastav arv kordi suurema raskuse. Ilmselt saaksime täpselt sama tulemuse ka siis, kui lihased omavahel kokku kasvaksid. Niisiis veendume selles, et lihaste tõstejõud ei sõltu nende pikkusest ega üldisest massist, vaid ainult jämedusest, s. t. ristlõikest.

Pärast seda teemast kõrvalekaldumist asume võrdlema ühetaolise kehaehitusega, geomeetriliselt sarnaseid, kuid suuruselt erinevaid loomi. Kujutleme kaht looma: esialgset ja kõigis lineaarsetes mõõdetes kaks korda suurendatut. Teisel loomal on kogu keha ja seega ka iga tema elundi ruumala ja kaal 8 korda suuremad; vastavad pindmõõted, sealhulgas ka lihaste ristlõiked, on siiski ainult 4 korda

suuremad. Selgub, et looma kasvades pikkuselt kahekordseks ja kaalult kaheksakordseks, kasvab tema lihaste jõud ainult neli korda, s. o. loom muutub suhteliselt kaks korda nõrgemaks. Vastavalt sellele osutuks loom, kes on kolm korda pikem (ristlõigetelt 9 korda ja kaalult 27 korda suurem), suhteliselt kolm korda nõrgemaks, see aga, kes on neli korda pikem — neli korda nõrgemaks jne.

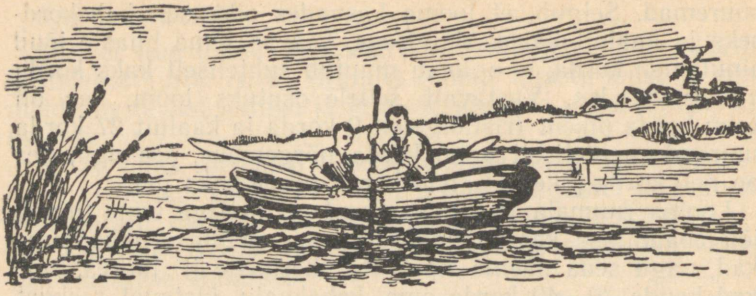
Looma ruumala ja kaalu ning koos sellega tema lihaste jõu ebaühtlase kasvu seadusega on seletatav, miks putukad, nagu seda näeme sipelgate, herilaste jt. juures, võivad kanda 30—40 korda oma kehakaalu ületavat raskust, kuna inimene on normaalselt võimeline kandma — jättes välja võimlejad ja pakikandjad — ainult umbes $^{9}/_{10}$ oma kaalust, hobune aga, kellele vaatame kui suurepärasele elavale töömasinale, veelgi vähem, nimelt kõigest umbes $^{7}/_{10}$ oma kaalust»[1].

Pärast neid selgitusi vaatame teise pilguga selle sipelgavägilase kangelastegudele, kellest I. A. Krõlov naeruvääristavalt kirjutas:

Üks sipelgas kord olnud erakordse jõuga,
mis kuulmatu ju iidseist aegadest:
ta tõstnud (nagu räägib ta histoorik tõega)
nii ühe hooga paari nisuterakest.

[1] Täpsemalt selle kohta vt. J. I. Perelmani «Huvitav mehaanika», X ptk. «Mehaanika elusloodusest». (Tallinn, 1950).





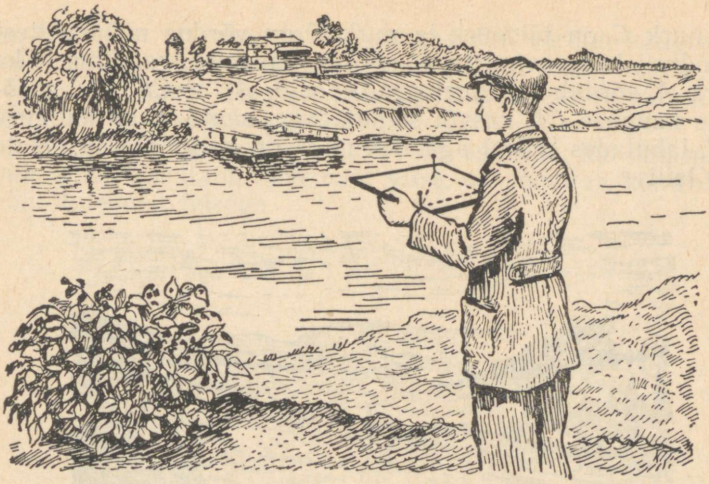
TEINE PEATÜKK

GEOMEETRIA JÕE ÄÄRES

Mõõta jõe laius

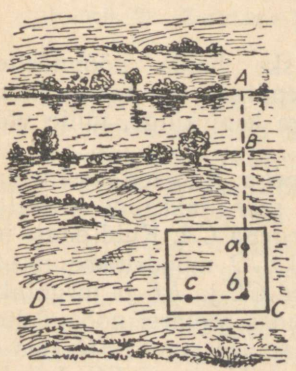
Mõõta jõge ületamata tema laius on geomeetria-tundjale sama lihtne kui määrata puu kõrgus tema latva ronimata. Ligipääsematut kaugust mõõdetakse samade võtetega, millega mõõtsime ligipääsematut kõrgust. Mõlemal juhul asendatakse otsitava kauguse mõõtmine mingi teise kauguse kindlaksmääramisega, mida on kerge otseselt mõõta. Selle ülesande paljudest lahendusviisidest vaatleme mõningaid lihtsamaid.

1) Esimese viisi puhul on vajalik meile juba tuttav «mõõduriist» kolme nööpnõelaga võrdhaarse täisnurkse kolmnurga tippudes (joon. 25). Olgu vaja jõge ületamata kindlaks määrata tema laius AB (joon. 26), seistes kaldal, kus asetseb punkt B. Seistes mingis punktis C, hoidke nööpnõeltest mõõduriist selliselt silmade ees, et ühe silmaga kahe nööpnõela suunas vaadates näeksite, et mõlemad nõelad katavad punktid B ja A. On arusaadav, et kui see teil õnnestub, siis asute just sirglõigu AB pikendusel. Nüüd vaadake mõõduriista lauakest liigutamata kahe teise nööpnõela suunas (risti eelmise suunaga) ja märkige ära mingi punkt D, mis asetseb nende nööpnõeltega ühel sirgel, s. t. sirgel, mis on risti sirgega AC.

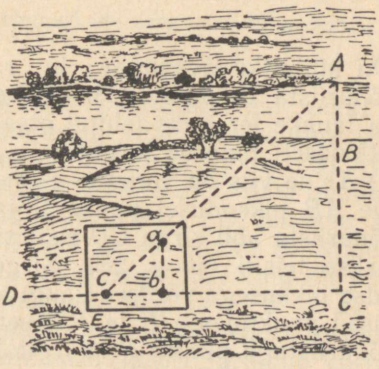


Joon. 25. Jõe laiuse mõõtmine nööpnõeltest mõõduriistaga.

Pärast seda torgake punkti *C* tähis ja minge oma instrumendiga piki sirget *CD,* kuni leiate sellel punkti *E* (joon. 27), millest vaadates üheaegselt nööpnõel *b* katab lati punktis *C* ja nööpnõel *a* katab punkti *A*. See tähendab, et te leidsite kaldal kolmanda tipu kolmnurgale *ACE,* mil-

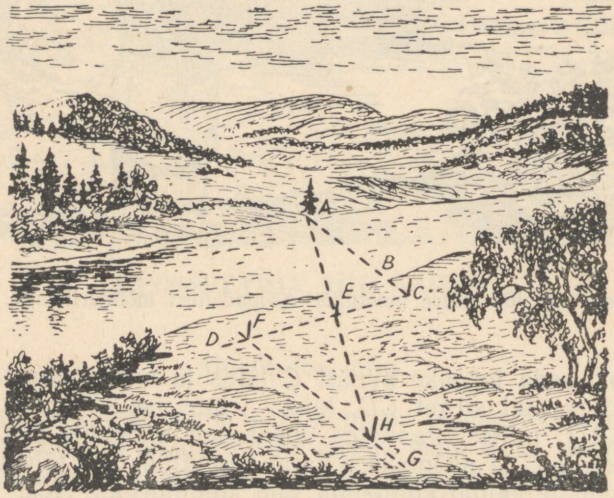


Joon. 26. Nööpnõeltest mõõduriista esimene asend.



Joon. 27. Nööpnõeltest mõõduriista teine asend.

lel nurk C on täisnurk ja nurk E on võrdne nööpnõeltest mõõduriista teravnurgaga, s. o. ½ täisnurgaga. Ilmselt ka nurk A võrdub ½ täisnurgaga, s. o. $AC = CE$. Kui mõõdate kauguse CE kasvõi sammudega, saate teada kauguse AC, lahutades sellest aga BC, mida on kerge mõõta, leiate jõe laiuse.



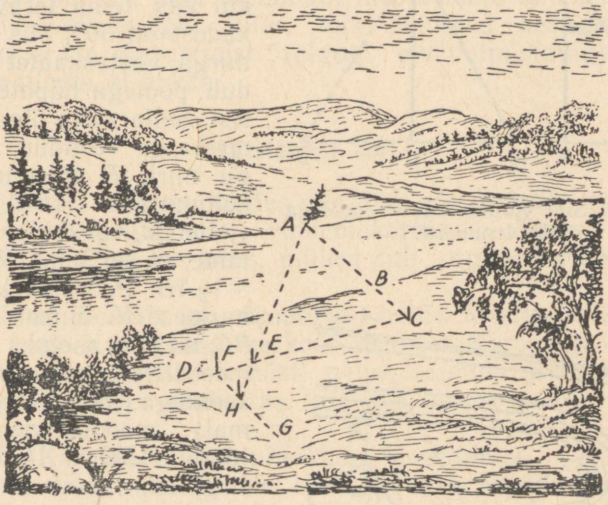
Joon. 28. Kasutame kolmnurkade ühtivuse tunnuseid.

On küllaltki ebamugav ja raske hoida nööpnõeltest mõõduriista liikumatult käes; seepärast on parem kinnitada lauake teravaks tehtud otsaga kepi külge, mille võite püstloodselt maasse torgata.

2) Teine viis on sarnane esimesega. Siin leitakse samuti sirge AB pikendusel punkt C ja märgitakse nööpnõeltest mõõduriista abil sirge CD risti sirgega CA. Kuid edasi toimitakse teisiti (joon. 28). Sirgel CD mõõdetakse meelevaldse pikkusega võrdsed kaugused CE ja EF ja torgatakse tähised punktidesse E ja F. Asetudes seejärel nööpnõeltest mõõduriistaga punkti F, märgitakse ära suund FG, mis on risti suunaga FC. Nüüd, minnes piki sirget FG, leitakse sellel punkt H, millest tähis E näib katvat punkti A. See tähendab, et punktid H, E ja A asuvad ühel sirgel.

Ülesanne on lahendatud: kaugus FH võrdub kaugusega AC, millest tuleb ainult lahutada BC, et teada saada otsitavat jõe laiust (lugeja muidugi taipab ise, miks kaugus FH võrdub kaugusega AC).

See viis nõuab rohkem ruumi kui esimene; kui aga maastik lubab kasutada mõlemaid viise, on soovitav kontrollida üht tulemust teisega.



Joon. 29. Kasutame kolmnurkade sarnasuse tunnuseid.

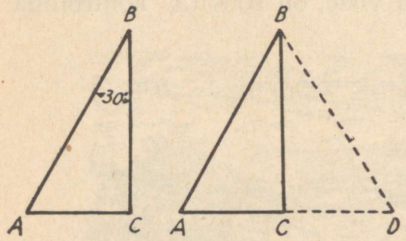
3) Äsjakirjeldatud viisi võib modifitseerida: mõõta sirgel CF mitte võrdsed kaugused, vaid üks kaugus teatud arv kordi teisest väiksemana. Näiteks (joon. 29) võetakse FE neli korda väiksem kui EC, kuna edasi toimitakse endiselt: sirgel FG, mis on risti sirgega FC, leitakse punkt H, millest vaadates tähis E näib katvat punkti A. Nüüd aga kaugus FH enam ei võrdu kaugusega AC, vaid on temast neli korda väiksem: kolmnurgad ACE ja EFH ei ole siin ühtivad, vaid sarnased (mittevõrdsete külgede lähisnurgad on võrdsed). Kolmnurkade sarnasusest järeldub võrre

$$AC : FH = CE : EF = 4 : 1.$$

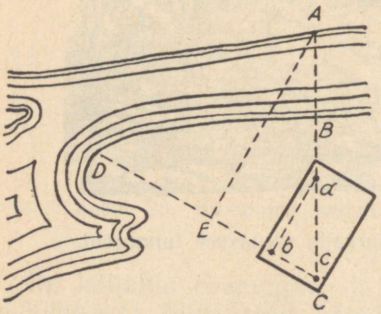
Tähendab, mõõtes FH ja korrutades tulemust 4-ga,

saame kauguse AC; lahutades sellest BC, saame otsitava jõe laiuse.

See viis, nagu näeme, nõuab vähem ruumi ja on seepärast kasutamiseks sobivam kui eelmised.



Joon. 30. Siin võrdub kaatet poolega hüpotenuusist.



Joon. 31. 30°-se nurgaga täisnurkse kolmnurga kasutamise skeem.

4) Neljas viis põhineb järgmisel täisnurkse kolmnurga omadusel: kui üks tema teravnurkadest on 30°, siis selle nurga vastaskaatet võrdub poolega hüpotenuusist. Selle väite õigsuses on kerge veenduda. Olgu nurk B täisnurkses kolmnurgas ABC 30° (joon. 30, vasakul); tõestame, et sel juhul $AC = \frac{1}{2}AB$. Pöörame kolmnurka ABC ümber külje BC, nii et ta asetuks sümmeetriliselt oma esialgse asendiga (joon. 30, paremal), moodustades kujundi ABD; ACD on sirgjoon, sest mõlemad nurgad punkti C juures on täisnurgad. Kolmnurgas ABD nurk $A = 60°$; nurk ABD, mis on moodustatud kahest 30°-sest nurgast, on samuti 60°. Tähendab, $AD = BD$ kui küljed, mis asuvad võrdsete nurkade vastas. Kuid $AC = \frac{1}{2}AD$; järelikult $AC = \frac{1}{2}AB$.

Soovides kasutada seda kolmnurga omadust, peame paigutama nööpnõelad lauakesele nii, et nad moodustaksid täisnurkse kolmnurga, milles kaatet oleks kaks korda väiksem hüpotenuusist. Selle mõõduriistaga asetume punkti C (joon. 31) nii, et suund AC langeks ühte nööpnõeltest kolmnurga hüpotenuusiga. Vaadates piki selle kolmnurga lühemat kaatetit, märgitakse suund CD ja lei-

takse sellel punkt *E* nii, et suund *EA* oleks risti suunaga *CD* (see saavutatakse sama nööpnõeltest mõõduriista abil). On kerge taibata, et kaugus *CE*, s. o. kaatet 30°-se nurga vastas, võrdub poolega kaugusest *AC*. Tähendab, mõõtes *CE*, korrutades saadud kauguse kahega ja lahutades tulemusest *BC*, leiame jõe laiuse *AB*.

Esitasime siin neli kergesti läbiviidavat võtet, mille abil on alati võimalik jõge ületamata mõõta tema laiust täiesti küllaldase täpsusega. Viise, mis nõuavad keerukamate mõõduriistade kasutamist (olgugi omavalmistatud), me siin vaatlema ei hakka.

Mütsisirmi abil

Järgnevast selgub, kuidas see viis oli vajalik vanemseersant Kuprijanovile rindeolukorras [1]. Tema jaole anti käsk mõõta jõe laius, millest tuli organiseerida ülepääs ...

Jõudnud jõeäärsesse võsastikku, heitis Kuprijanovi jagu pikali, kuna Kuprijanov ise koos reamees Karpoviga liikus jõele lähemale, kust oli hästi näha fašistide poolt hõivatud kallas. Selles olukorras tuli jõe laiust mõõta silma järgi.

«Noh, Karpov, kui palju?» küsis Kuprijanov.

«Minu arvates mitte üle 100—110 m,» vastas Karpov. Kuprijanov oli oma luurajaga nõus, kuid otsustas kontrolliks jõe laiust mõõta «mütsisirmi abil».

See viis on järgmine. Tuleb seista näoga jõe poole ja tõmmata müts silmadele, nii et mütsisirmi alumine äär langeks täpselt ühte vastaskalda joonega (joon. 32). Mütsisirmi võib asendada käelabaga või märkmikuga, mis on servaga tihedalt vastu otsaesist surutud. Pärast seda tuleb pea asendit muutmata pöörduda paremale, vasakule või isegi tagasi (sinnapoole, kus on tasasem pind, mis on sobivam kauguse mõõtmiseks) ja märkida kõige kaugem punkt, mis paistab mütsisirmi (käelaba, märkmiku) alt.

Kaugus selle punktini ongi umbkaudselt võrdne jõe laiusega.

Seda viisi kasutaski Kuprijanov. Ta tõusis põõsastikus

[1] Vt. märget lk. 17.

kiiresti püsti, asetas märkmiku vastu laupa, pöördus siis sama kiiresti ringi ja viseeris kaugeima nähtava punkti. Pärast seda roomas ta koos Karpoviga selle punktini, mõõtes kauguse nööriga. Tulemuseks oli 105 m.

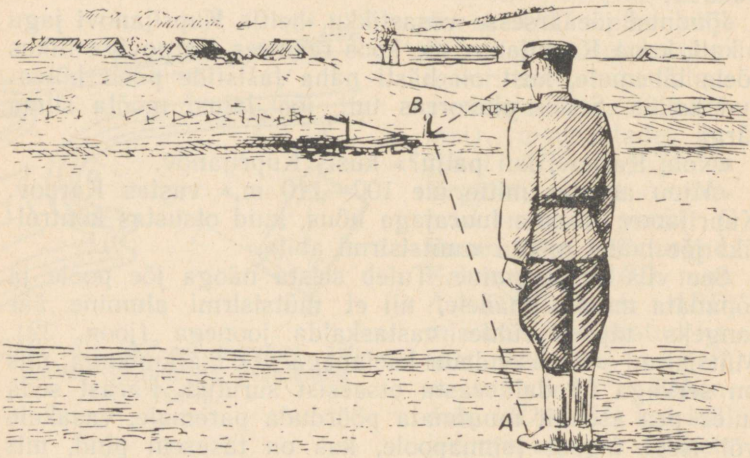
Kuprijanov kandis saadud andmed juhtkonnale ette.

Ülesanne

Anda geomeetriline selgitus «mütsisirmi-meetodile».

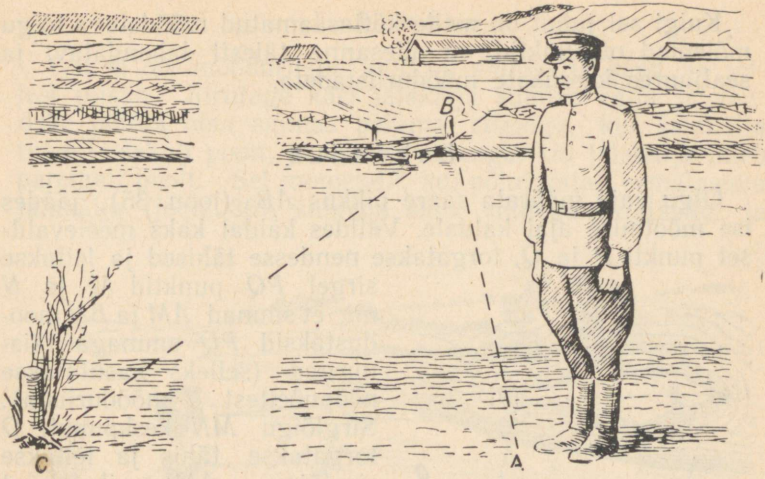
Lahendus

Vaatekiir, puutudes mütsisirmi (käelaba, märkmiku) alumist äärt, on esialgselt suunatud vastaskalda joonele



Joon. 32. Mütsisirmi alt tuleb ära märkida punkt vastaskaldal.

(joon. 32). Kui inimene pöördub, siis vaatekiir nagu sirkliharu joonestab ringjoone ja $AC = AB$ kui sama ringi raadiused (joon. 33).

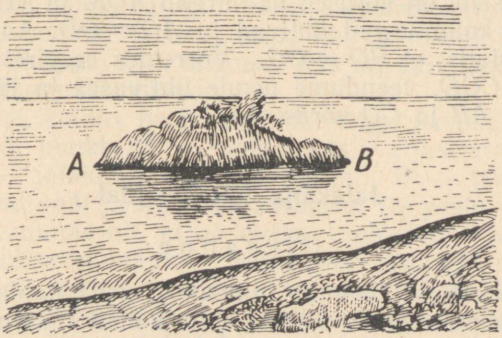


Joon. 33. Samal viisil ära märkida punkt omapoolsel kaldal.

Saare pikkus

Ülesanne

Nüüd seisab meil ees keerukam ülesanne. Seistes jõe või järve ääres, te näete saart (joon. 34), mille pikkust tahate mõõta kaldalt lahkumata. Kas saab seda mõõtmist teostada?

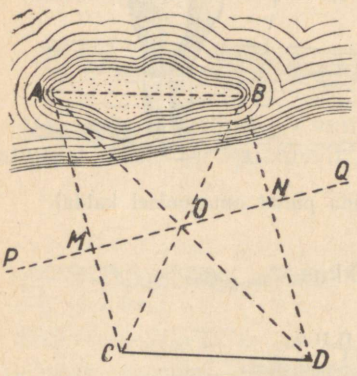


Joon. 34. Kuidas määrata saare pikkus?

Kuigi sel juhul on meile kättesaamatud mõõdetava lõigu mõlemad otspunktid, on ülesanne täiesti lahendatav, ja sealjuures keerukate mõõduriistadeta.

Lahendus

Olgu vaja määrata saare pikkus AB (joon. 35), jäädes ise mõõtmise ajal kaldale. Valides kaldal kaks meelevaldset punkti P ja Q, torgatakse nendesse tähised ja leitakse sirgel PQ punktid M ja N nii, et suunad AM ja BN moodustaksid PQ suunaga täisnurgad (selleks kasutatakse nööpnõeltest mõõduriista). Sirglõigu MN keskpunkti O torgatakse tähis ja leitakse sirglõigu AM pikendusel punkt C, millest vaadates tähis O näib katvat punkti B. Täpselt samuti leitakse BN pikendusel punkt D, millest vaadates tähis O näib katvat saare tipu A. Kaugus CD ongi otsitav saare pikkus.



Joon. 35. Kasutame täisnurksete kolmnurkade ühtivuse tunnuseid.

Seda tõestada pole raske. Vaadelge täisnurkseid kolmnurki AMO ja OND: neil on võrdsed kaatetid MO ja NO ja peale selle on võrdsed ka nurgad AOM ja NOD — järelikult on kolmnurgad ühtivad ja $AO = OD$. Analoogiliselt võib tõestada, et $BO = OC$. Võrreldes seejärel kolmnurki ABO ja COD, veendume nende ühtivuses ja järelikult ka kauguste AB ja CD võrdsuses.

Jalakäija teisel kaldal

Ülesanne

Piki jõekallast sammub inimene. Teiselt kaldalt eraldate selgesti tema samme. Kas te võite kohalt liikumata kasvõi ligikaudseltki kindlaks määrata tema kauguse endast? Mingeid abinõusid teil käepärast ei ole.

Teil ei ole mõõduriista, kuid on silmad ja käed, ja sellest piisab. Sirutage käsi jalakäija suunas välja ja vaadake pöidla otsa suunas parema silmaga, kui jalakäija tuleb vasakult poolt, ja vasaku silmaga, kui jalakäija tuleb paremalt poolt. Sel momendil, kui pöial katab eemalasuva jalakäija (joon. 36), sulgege silm, millega vaatasite, ja



Joon. 36. Kuidas määrata vastaskaldal liikuva jalakäija kaugus?

avage teine: jalakäija näib teile tagasinihutatuna. Loendage, mitu sammu ta teeb, enne kui ta uuesti jõuab teie pöidlani. Nii saate kõik andmed, mis on vajalikud kauguse umbkaudseks määramiseks.

Selgitame, kuidas neid kasutada. Olgu joonisel 36 *a* ja *b* teie silmad, punkt *M* — pöidla ots väljasirutatud käel, punkt *A* — jalakäija esimene asend, *B* — teine asend. Kolmnurgad *abM* ja *ABM* on sarnased (te peate pöörduma jalakäija suunas nii, et *ab* oleks umbkaudu paralleelne tema liikumise suunaga). Tähendab, $BM : bM = AB : ab$; see on võrre, milles tundmatu on ainult liige *BM*, kõiki ülejäänuid aga võib vahetult kindlaks määrata. Tõepoolest, *bM* on teie väljasirutatud käe pikkus, *ab* on kaugus teie silmaterade vahel, *AB* aga on mõõdetav jalakäija sammu-

dega (sammu keskmiseks pikkuseks võib võtta ¾ meetrit). Järelikult, otsitav kaugus teist kuni jõe vastaskaldal oleva jalakäijani on

$$MB = AB \cdot \frac{bM}{ab}.$$

Kui näiteks teie silmaterade vaheline kaugus *(ab)* on *6 cm,* kaugus väljasirutatud käe sõrmedest silmadeni *(bM) 60 cm,* ja kui jalakäija tegi punktist *A* punkti *B* liikudes 14 sammu, siis tema kaugus teist $MB = 14 \cdot \frac{60}{6} = 140$ sammu ehk 105 m.

On küllaldane ära mõõta oma silmaterade vaheline kaugus ja kaugus silmadest väljasirutatud käe sõrmedeni, et meeles pidades nende suhet $\frac{bM}{ab}$ kiiresti määrata juurdepääsematute esemete kaugusi. Siis tuleb ainult *AB* korrutada selle suhtega. Suuremal osal inimestest võrdub $\frac{bM}{ab}$ keskmiselt 10-ga, väikeste kõrvalekaldumistega. Raskus seisab ainult selles, kuidas määrata kaugust *AB*. Käesoleval juhul kasutasime kaugel liikuva inimese samme, kuid küsimuse lahendamiseks võib kasutada ka teisi andmeid. Kui te näiteks mõõdate kaugust eemaloleva kaubarongini, siis võib kaugust *AB* hinnata kaubavaguni pikkuse järgi, mis on harilikult teada (puhvrite vahe 7,6 m). Kui määratakse kaugust majani, siis *AB* hindamisel võrreldakse teda akna laiusega, telliskivi pikkusega jm.

Sama võtet võib kasutada ka eemalasuva eseme mõõdete määramiseks, kui tema kaugus vaatlejast on teada. Selleks võib kasutada ka teisi «kaugusemõõtjaid», mida me kohe kirjeldame.

Lihtsaimad kaugusemõõtjad

Esimeses peatükis kirjeldati kõige lihtsamat mõõduriista juurdepääsematute kõrguste määramiseks — kõrgusemõõtjat. Nüüd kirjeldame lihtsaimat seadeldist juurdepääsematute kauguste mõõtmiseks — «kaugusemõõtjat». Lihtsaima kaugusemõõtja võib valmistada harilikust tuletikust. Selleks on vaja ainult tema ühele küljele kanda jaotused milli-

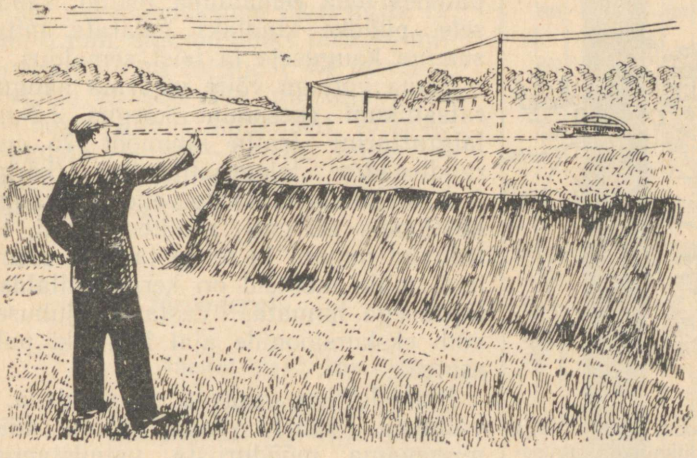
meetrites, selguse mõttes vaheldumisi mustad ja valged (joon. 37).

Seda primitiivset «kaugusemõõtjat» saab eemaloleva eseme kauguse määramiseks kasutada ainult sel juhul, kui eseme mõõted on teada (joon. 38); muide, ka iga teist



Joon. 37. Tuletikk-kaugusemõõtja.

täiuslikuma ehitusega kaugusemõõtjat saab kasutada ainult samal tingimusel. Oletame, et te näete eemal inimest ja teete endale ülesandeks määrata kaugus temani. Siin võib



Joon. 38. Tuletiku-kaugusemõõtja kasutamine ligipääsematu kauguse määramiseks.

teid aidata tuletikk-kaugusemõõtja. Hoides teda väljasirutatud käes ja vaadates ühe silmaga, viite tema ülemise otsa niisugusesse asendisse, et see langeks kokku kauguses oleva inimkuju ülemise osaga. Pärast seda liigutage pöidlaküünt aeglaselt tikku mööda üles punktini, kus ta langeb ühte inimkuju alusega. Nüüd jääb teil ainult tikku silmale lähendades kindlaks teha, missuguse jaotuskriipsu

juures küüs peatus, ja siis on teil olemas kõik andmed ülesande lahendamiseks.

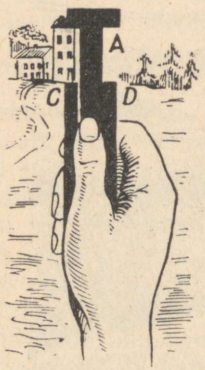
On kerge veenduda järgmise võrde õigsuses:

$$\frac{\text{otsitav kaugus}}{\text{kaugus silmast tikuni}} = \frac{\text{inimese keskmine kasv}}{\text{tikul mõõdetud pikkus}}$$

Siit on otsitavat kaugust kerge arvutada. Kui näiteks kaugus tikuni on 60 cm, inimese pikkus 1,7 m ja tikul mõõdetud pikkus 12 mm, siis määratav kaugus on

$$60 \cdot \frac{1700}{12} \text{ (cm)} = 8500 \text{ cm} = 85 \text{ m}.$$

Et omandada mõningaid kogemusi selle kaugusemõõtja käsitsemiseks, mõõtke mõne oma seltsimehe pikkus ja, paludes teda eemalduda teatud kaugusele, püüdke kindlaks määrata, mitme sammu kaugusele ta teist eemaldus.



Joon. 39. Väljalükatav kaugusemõõtja tegevuses.

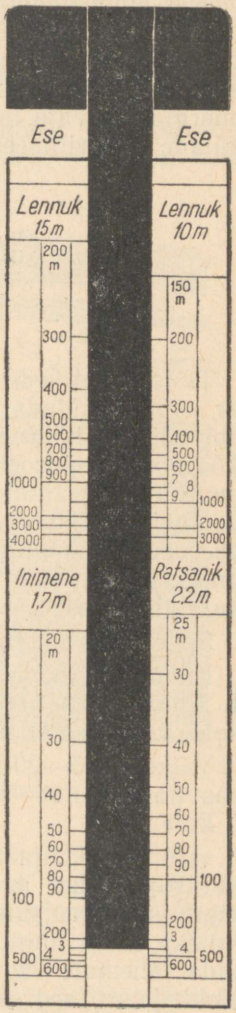
Sama võttega võite määrata kauguse ratsanikuni (keskmine kõrgus 2,2 m), jalgratturini (ratta läbimõõt 75 cm), raudteeäärse telegraafipostini (kõrgus 8 m, naaberisolaatorite-vaheline kaugus püstloodis 90 cm), raudteerongini, telliskivist majani ja teiste taoliste esemeteni, mille mõõteid on kerge küllaldase täpsusega hinnata. Vastavaid juhuseid võib ekskursioonide ajal küllaltki palju esineda.

Nendele, kes oskavad meisterdada, ei valmista suurt vaeva sama tüüpi mugavama mõõduriista valmistamine, mis on ette nähtud kauguse hindamiseks eemalasuva inimkuju suuruse järgi.

Selle ehitus selgub joonistelt 39 ja 40. Vaadeldav ese mahutatakse parajasti vahesse *A*, mis tekib mõõduriista liikuva osa tõstmisel. Selle vahe suurus määratakse kergesti jaotuste järgi lauakese osadel *C* ja *D*. Et vabaneda vajadusest arvutuste tegemiseks, võib ribale *C* otseselt kanda jaotustele vastavad kaugused, kui vaadeldav ese on inimkuju (mõõduriist hoitakse silmast väljasirutatud käe kaugusel). Parempoolsele ribale *D* võib märkida arvutatud

kaugused juhuks, kui vaadeldakse ratsanikku (2,2 m). Telegraafiposti (kõrgus 8 m), lennuki (tiibade ulatus 15 m) ja teiste taoliste esemete jaoks võib kasutada ribade *C* ja *D* vabu ülemisi osi. Sel juhul näeb seadis välja niisugune, nagu on toodud joonisel 40.

Täpsus pole niisugusel kauguse hindamisel muidugi mitte suur. See nimelt ongi ainult h i n d a m i n e, mitte aga mõõtmine. Varemvaadeldud näites, kus kaugust inimkujuni hinnati 85 m-le, annaks 1-millimeetrine viga tikul mõõdetud pikkuses tulemuses ebatäpsuse 7 m ($^1/_{12}$ 85-st). Kui aga inimene seisaks neli korda kaugemal ja kui me mõõdaksime tikul mitte 12, vaid 3 mm, siis muudaks juba ½-millimeetrine viga tulemust 57 m võrra. Seetõttu on see võte inimkuju puhul usaldatav ainult suhteliselt väikestel kaugustel — 100—200 m. Suuremate kauguste hindamisel tuleb valida ka suuremad esemed.



Joon. 40. Väljalükatava kaugusemõõtja ehitus.

Jõe energia

Kas tunned maad, kus rikkusi
on küllalt,
kus hõbedaselt läikimas on jõed,
kus stepituul vaid viljas hällib
hellalt,
kus kirsisalus maju aina näed.

A. K. Tolstoi

Jõge, mille pikkus ei ole üle 100 km, loetakse väikeseks. Kas te teate, kui palju on niisuguseid jõgesid NSV Liidus? Väga palju — 43 000!

Kui need jõed paigutada ühele joonele, saaksime 1 300 000 km pikkuse lindi. Niisuguse lindiga võib maa-

TRÜ Raamatukogu

kera ekvaatori 30 korda ümbritseda (ekvaatori pikkus on ligikaudu 40 000 km).

Nendes jõgedes ei voola palju vett, kuid nad kannavad eneses ammendamatuid energiavarusid. Eriteadlased oletavad, et kui liita kõigis meie Kodumaal voolavates väikestes jõgedes peituvad varjatud võimalused, saaksime aukartustäratava arvu — 34 miljonit kilovatti! Seda tasuta energiat on vaja laialdaselt kasutada jõgede ääres asuvate külade elektrifitseerimiseks.

«Kuigi jõgi veel voogusid ajab,
ent kui plaanis on märgitud tamm,
siis ka kivise müüriga voogude samm
kinni peetakse igaveseks ajaks.»

S. Stšipatšov

Te teate, et seda teostatakse hüdroelektrijaamade abil, ja te võite avaldada palju initsiatiivi ning osutada reaalset abi väikese hüdroelektrijaama ehituse ettevalmistamisel. Tõepoolest, hüdroelektrijaamade ehitajaid huvitab kõik, mis puutub jõe režiimi: tema laius ja voolukiirus («veekulu»), voolusängi ristlõike pindala («elav lõige») ja kui suurt veesurvet võimaldavad kaldad. Kõike seda on täiesti võimalik mõõta kõigile kättesaadavate vahenditega ja see kujutab endast võrdlemisi lihtsat geomeetrilist ülesannet.

Selle ülesande lahendamise juurde me praegu asumegi.

Enne aga toome eriteadlastelt, inseneridelt V. Jarošilt ja I. Fjodorovalt praktilise näpunäite, mis puudutab sobiva koha valikut jõel tulevase paisu ehitamiseks.

Väikese, 15—20-kilovatise võimsusega hüdroelektrijaama soovitavad nad ehitada «asulast mitte kaugemale kui 5 km».

«Hüdroelektrijaama pais tuleb ehitada mitte lähemale kui 10—15 km ja mitte kaugemale kui 20—40 km jõe algusest, kuna suurem vahemaa teeb paisu ehitamise kallimaks, mida tingib suur vee juurdevool. Kui aga pais asetada lähemale kui 10—15 km jõe algusest, siis hüdroelektrijaam, seoses vee vähese juurdevooluga ja väikese survega, ei suuda kindlustada vajalikku võimsust. Valitud jõeosas ei tohi olla liiga palju suuri sügavikke, mis samuti suurendavad paisu hinda, nõudes rasket vundamenti.»

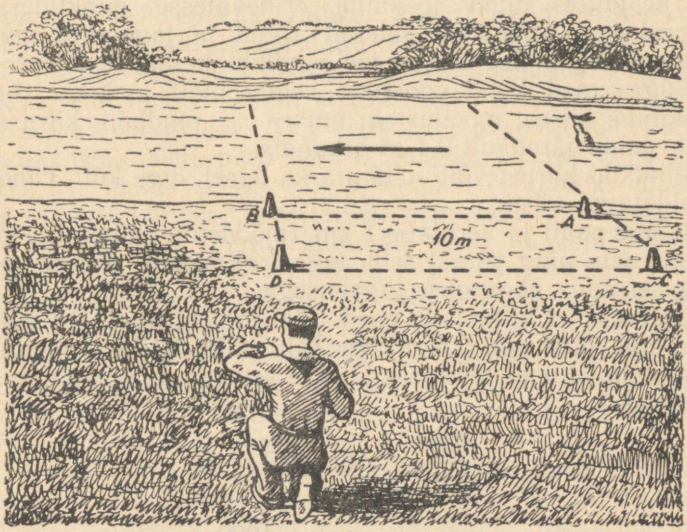
Voolukiirus

Mägivõsa ja aasade vahel
voolab jõekese helendav vööt.

A. Fet

Aga kui palju vett sellisest jõekesest öö-päevas läbi voolab?

Seda pole raske arvutada, kui enne mõõta vee voolukiirus jões. Mõõtmist teostavad kaks inimest. Ühel on käes



Joon. 41. Jõe voolukiiruse mõõtmine.

kell, teisel mingisugune hästi nähtav ujuk, näiteks pooltühi korgitud pudel lipukesega. Valitakse sirgjooneline jõeosa ja püstitatakse piki kallast kaks tähist — *A* ja *B* — kaugusega teineteisest näiteks 10 m (joon. 41).

Sirgega *AB* risti olevates suundades püstitatakse veel kaks tähist — *C* ja *D*. Üks mõõtmisest osavõtjatest asetub kellaga tähise *D* taha. Teine läheb ujukiga vastuvoolu tähisest *A* veidi ülespoole, viskab ujuki vette ja jääb ise

tähise C taha. Mõlemad jälgivad veepinda piki suundi CA ja DB. Sel momendil, kui ujuk läbib lõigu CA pikenduse, annab esimene vaatleja käega märku. Selle signaali järgi märgib teine vaatleja aja ja teeb seda veel kord siis, kui ujuk läbib suuna DB.

Oletame, et ajavahemik oli 20 sekundit.

Siis vee voolukiirus jões on

$$\frac{10}{20} = 0{,}5 \text{ m sekundis.}$$

Harilikult korratakse mõõtmist kümmekond korda, visates seejuures ujuki jõepinna erinevatesse punktidesse[1]. Pärast seda liidetakse saadud arvud ja jagatakse mõõtmiste arvuga. See annab jõe pindkihi keskmise kiiruse.

Sügavamad kihid voolavad aeglasemalt ja kogu voolu keskmine kiirus moodustab umbes $^4/_5$ pindkihi kiirusest, meie juhul järelikult 0,4 m sekundis.

Pindkihi kiirust võib määrata ka teisel, õige küll, vähemusaldataval viisil.

Istuge paati ja aerutage 1 km (mõõdetud kallast mööda) vastuvoolu ning pärast seda tagasi allavoolu, püüdes kogu aeg aerutada ühesuguse tugevusega.

Oletame, et te läbisite need 1000 m vastuvoolu 18 minutiga, allavoolu aga 6 minutiga. Tähistades otsitava voolukiiruse x-ga ja oma liikumise kiiruse seisvas vees y-ga, saate võrrandid

$$\frac{1000}{y-x} = 18; \quad \frac{1000}{y+x} = 6,$$

millest

$$y + x = \frac{1000}{6}$$

$$y - x = \frac{1000}{18}$$

$$2x = 110$$

$$x = 55.$$

Vee voolukiirus pinnal on 55 m minutis, ja järelikult keskmine kiirus on ligikaudu $^5/_6$ meetrit sekundis.

[1] Selle asemel et ühte ujukit visata 10 korda, võib korraga visata 10 ujukit üksteisest teatavatele kaugustele.

Kui palju vett voolab jões

Te võite alati, kas nii või teisiti, määrata kiiruse, millega vesi jões voolab. Raskem on ettevalmistava töö teine osa, mis on vajalik voolava vee hulga arvutamiseks — vee ristlõike pindala määramine. Et leida selle pindala suurus — see, mida nimetatakse jõe «elavaks lõikeks», — tuleb valmistada selle lõike joonis. See töö teostatakse järgmiselt.

Esimene viis

Samal kohal, kus te mõõtsite jõe laiuse, lööge mõlemasse kaldasse otse veepiirile vaiake. Pärast seda istuge koos seltsimehega paati ja aerutage ühe vaiakese juurest teiseni, püüdes kogu aeg liikuda vaiakesi ühendavat sirgjoont mööda. Harjumatu sõudja ei tule selle ülesandega toime, eriti kiire vooluga jõel. Teie seltsimees peab olema vilunud sõudja; peale selle peab teda aitama ka kolmas tööst osavõtja, kes kaldal seistes jälgib, et paat ei kalduks määratud suunast kõrvale, ja vajalikul momendil annab aerutajale signaalidega märku, kummale poole on vaja pöörata. Esimesel jõe ületamisel tuleb teil ainult loendada, mitu aerulööki ületamine nõudis, et seega teada saada, mitu lööki viib paati edasi 5 või 10 meetrit. Pärast seda sooritage teine ülesõit, varustudes seekord küllaldaselt pika latiga, millele on kantud jaotused, ja iga 5—10 m tagant (mõõdetavad aerulöökide arvuga) pistke latt püstloodselt põhja, märkides jõe sügavuse sel kohal.

Sel meetodil võib mõõta elavat lõiget ainult väikeses jões; laia, veerikka jõe jaoks on vajalikud keerukamad võtted; see töö teostatakse eriteadlaste poolt. Asjaarmastajal tuleb valida ülesanne, mis vastab tema tagasihoidlikele mõõtevahenditele.

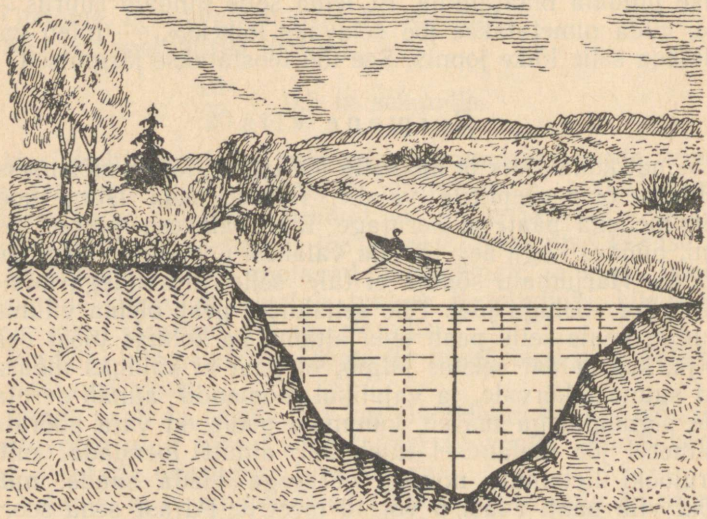
Teine viis

Kitsas, madalas jões pole vaja isegi paati.

Vaiakeste vahele tõmbate risti vooluga nööri, millele on iga meetri tagant tehtud märgid või sõlmed, ja pistes lati iga sõlme kohal põhja, mõõdate jõesängi sügavuse.

Kui kõik mõõtmised on lõpetatud, kannate kõigepealt millimeeterpaberile või koolivihust tõmmatud ruudulisele lehele jõe ristlõike profiili. Te saate umbes sellise kujundi,

nagu on toodud joonisel 42. Selle kujundi pindala määramine on väga lihtne, sest ta jaguneb reaks trapetsiteks (milledest teil on teada mõlemad alused ja kõrgus) ja kaheks ääre-kolmnurgaks tuntud aluste ja kõrgustega.



Joon. 42. Jõe «elav lõige».

Kui joonise mastaap on 1:100, siis saame tulemuse kohe ruutmeetrites.

Nüüd on teie käsutuses kõik vajalikud andmed läbivoolava veehulga arvutamiseks. On ilmne, et igas sekundis läbi jõe elava lõike voolava vee ruumala võrdub prisma ruumalaga, mille aluseks on jõe ristlõige ja kõrguseks keskmine voolukiirus sekundis. Kui näiteks vee keskmine kiirus jõekeses on 0,4 m sekundis ja elava lõike pindala, oletame, on 3,5 m^2, siis voolab igas sekundis läbi selle ristlõike vett

$$3{,}5 \cdot 0{,}4 = 1{,}4 \ (m^3)$$

ehk samapalju tonne[1]. See moodustab tunnis

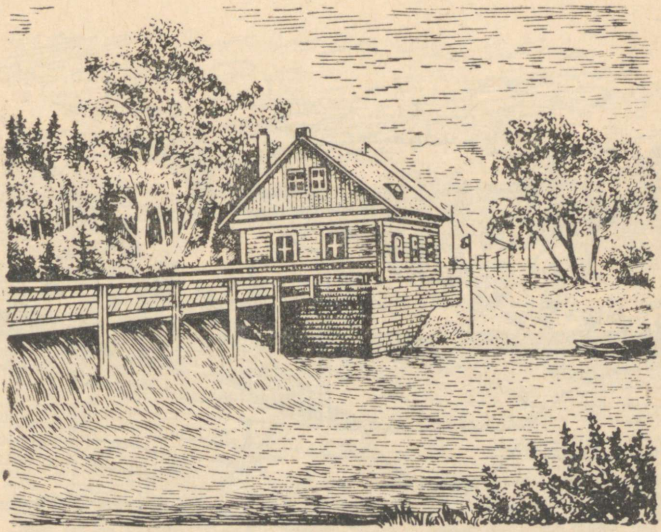
$$1{,}4 \cdot 3600 = 5040 \ (m^3),$$

[1] 1 m^3 magedat vett kaalub 1 t (1000 kg).

ööpäevas aga

$$5040 \cdot 24 = 120\,960 \text{ (m}^3\text{)},$$

seega üle saja tuhande kuupmeetri. Seejuures on jõgi elava lõikega 3,5 m² ainult väike jõeke: ta võib olla näiteks laiusega 3,5 meetrit ja sügavusega 1 m ja temast võib jalgsi



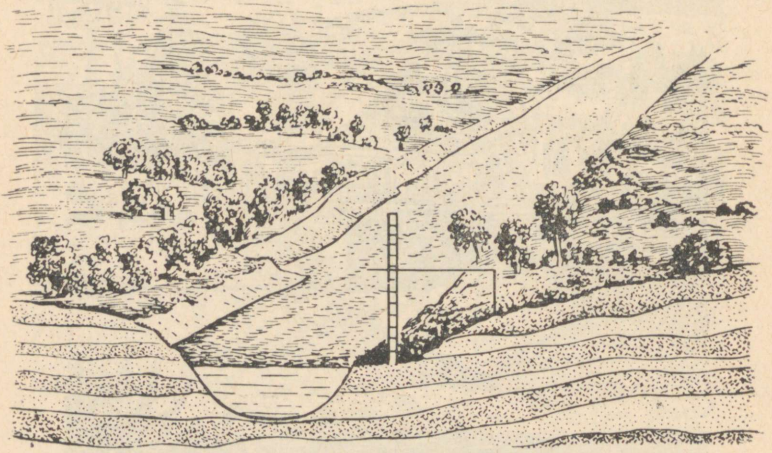
Joon. 43. Burmakinski põllumajandusliku artelli 80 kW võimsusega hüdroelektrijaam, mis annab energiat 7 kolhoosile.

läbi minna, kuid temas peitub energia, mis on võimeline muutuma kõikvõimsaks elektriks. Kui palju vett voolab aga läbi säärasest jõest nagu Neeva, mille elavast lõikest voolab igas sekundis läbi 3300 m³ vett! See on Neeva «keskmine veekulu» Leningradi juures. Dnepri «keskmine veekulu» Kiievi juures on 700 m³.

Noortel uurijatel ja tulevastel hüdroelektrijaamade ehitajatel on tingimata vajalik määrata ka seda, kui suurt veesurvet võimaldavad kaldad, s. t. kui suure veelanguse saab paisu abil tekitada (joon. 43). Selleks lüüakse 5—10 m kaugusele kummastki kaldast vai, nagu harilikult joonele, mis on risti jõe vooluga. Liikudes seejärel seda joont

mööda, asetatakse väikesed vaiakesed kallaste iseloomulikele murdekohtadele (joon. 44). Lati abil, millele on kantud jaotused, mõõdetakse vaiakeste kõrguste vahed ja kaugused nende vahel. Vastavalt mõõtmistulemustele joonestatakse kallaste profiil, sarnaselt jõesängi profiili konstrueerimisega.

Kallaste profiili järgi võib hinnata lubatava surve suurust.



Joon. 44. Kallaste profiili mõõtmine.

Oletame, et veepinda on paisu abil võimalik tõsta 2,5 m. Sel juhul võite umbkaudu määrata teie tulevase hüdroelektrijaama poolt saavutatava võimsuse.

Selleks soovitavad energeetikud korrutada 1,4 («veekulu» sekundis) 2,5-ga (veepinna kõrgus) ja 6-ga (koefitsient, mis muutub sõltuvalt energiakaost masinates). Tulemuse saame kilovattides:

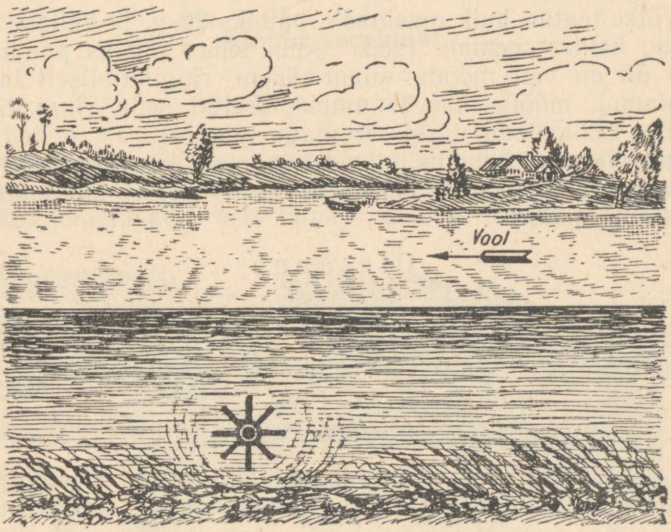
$$1{,}4 \cdot 2{,}5 \cdot 6 = 21 \text{ (kilovatti)}.$$

Et vee tasapind jões ja järelikult ka läbivoolava vee hulk aasta jooksul muutub, siis on arvestusteks vaja teada seda läbivoolava veehulga suurust, mis on jõele iseloomustav suurema osa jooksul aastast.

Vesiratas

Ülesanne

Tiibratas asetatakse selliselt jõe põhja lähedale, et ta võib kergesti pöörelda. Missuguses suunas hakkab ta pöörlema, kui vool on suunatud paremalt vasakule (joon. 45)?



Joon. 45. Missuguses suunas hakkab ratas pöörlema?

Lahendus

Ratas hakkab pöörlema vastu kellaosuti liikumissuunda. Vee sügavamate kihtide voolukiirus on väiksem kui nende kihtide kiirus, mis asuvad ülalpool; järelikult surve ülemistele tiibadele on suurem kui alumistele.

Vikerkaarevärviline kile

Jõel, millesse lastakse tehase vett, võib sissevoolu-kanali läheduses tihti tähele panna ilusat värvilist helki. Õli (näiteks masinaõli), voolates jõkke koos tehase veega, jääb

kergemana pinnale ja voolab erakordselt õhukese kihina laiali. Kas võib mõõta või umbkaudugi hinnata selle kile paksust?

Ülesanne näib keerukana, kuid seda lahendada ei olegi eriti raske. Te kindlasti taipate, et me ei hakka tegelema sellise lootusetu asjaga nagu kile paksuse vahetu mõõtmine. Me mõõdame selle kaudsel teel — lühidalt öeldes, arvutame.

Võtke teatud hulk masinaõli, näiteks 20 g, ja kallake see vette, kaldast eemale (seda võib teha näiteks paadist). Kui õli on vett mööda enam-vähem ringikujuliselt laiali voolanud, mõõtke kasvõi umbkaudseltki selle ringi läbimõõt. Läbimõõdu järgi arvutage pindala. Ja et teil on teada võetud õli ruumala (seda on kaalu järgi kerge arvutada), siis tuleneb siit juba iseenesest otsitav kile paksus. Vaatleme näidet.

Ülesanne

Üks gramm petrooleumi katab veepinnal laiali voolates ringi läbimõõduga 30 cm[1]. Kui paks on petrooleumikile veepinnal? Kuupsentimeeter petrooleumi kaalub 0,8 g.

Lahendus

Leiame kile ruumala, mis loomulikult võrdub võetud petrooleumi ruumalaga. Kui üks kuupsentimeeter petrooleumi kaalub 0,8 g, siis 1 g-le vastab $\frac{1}{0{,}8}$ cm³ = 1,25 cm³ ehk 1250 mm³. Ringi pindala, mille diameeter on 30 cm ehk 300 mm, on 70 000 mm². Otsitav kile paksus võrdub kile ruumala ja pindala jagatisega:

$$\frac{1250}{70\,000}\ \text{mm} = 0{,}018\ \text{mm},$$

s. t. vähem kui viiekümnendik millimeetrit. Niisuguse paksuse otsene mõõtmine on harilike vahenditega loomulikult võimatu.

Õli- ja seebikiled voolavad laiali veelgi õhemate kihtidena, saavutades 0,0001 mm ja veelgi väiksema paksuse.

---

[1] Veemahutite katmisel malaariasääse vastsete hävitamiseks kulub harilikult 400 kg naftat 1 ha kohta.

«Ükskord,» jutustab inglise füüsik Boys oma raamatus «Seebimullid», «tegin ma tiigil järgmise katse. Veepinnale kallasin lusikatäie oliivõli. Kohe kujunes suur laik läbimõõduga 20—30 meetrit. Et laik oli lusikast nii pikkuselt kui ka laiuselt tuhat korda suurem, siis pidi õlikihi paksus veepinnal moodustama umbes miljondiku õlikihi paksusest lusikal, s. o. umbes 0,000002 millimeetrit».

Ringid veepinnal

Ülesanne

Te kindlasti olete sageli uudishimulikult vaadelnud ringe, mida tekitab vaiksesse vette visatud kivi (joon. 46). Ja kahtlemata pole teile kunagi raskusi teinud selle õpet-



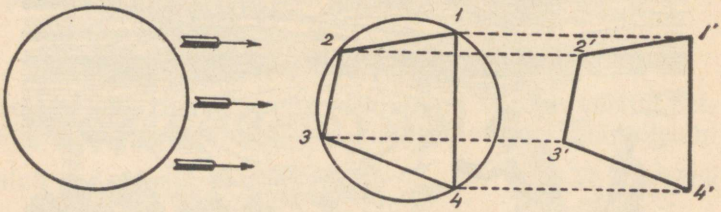
Joon. 46. Ringid veepinnal.

liku loodusnähtuse seletamine: lainetus levib algpunktist igas suunas ühesuguse kiirusega; seepärast peavad kõik lainetusest osa võtvad punktid asetsema igal momendil lainetuse tekkimise kohast ühesugustel kaugustel, s. o. ringjoonel.

Kuidas on aga olukord voolavas vees? Kas peavad ka kiirevoolulisse jõkke visatud kivi poolt tekitatud lained olema ringikujulised või omavad nad väljavenitatud kuju? Esimesel hetkel võib näida, et voolavas vees peavad ringikujulised lained muutuma voolu suunas väljavenitatuiks: lainetus kandub allavoolu kiiremini kui vastuvoolu ja külgsuundades. Võiks arvata, et seetõttu veepinna lainetavad osad peavad asetsema mõningal määral väljavenitatud kinnisel kõverjoonel, igal juhul aga mitte ringjoonel. Tegelikult see siiski ei ole nii. Visates kivi kõige kiirevoolulisemasse jõkke, võite veenduda, et lained tekivad täpselt ringikujulistena — täiesti samasugustena nagu seisvas vees. Mispärast?

Lahendus

Arutleme järgmiselt. Kui vesi ei voolaks, oleksid lained ringikujulised. Missuguse muudatuse tekitab siis voolamine? Ta kannab ringlaine iga punkti nooltega näidatud



Joon. 47. Vee voolamine ei muuda lainete kuju.

suunas (joon. 47, vasakul), kusjuures kõik punktid kanduvad edasi paralleelseid sirgeid mööda võrdsete kiirustega, s. o. võrdsetele kaugustele. «Paralleel-lüke» aga ei muuda kujundi vormi. Tõepoolest: niisuguse edasikandumise tulemusena satub punkt *1* (joon. 47, paremal) punkti *1'*, punkt *2* punkti *2'* jne.; nelinurk *1234* asendub temaga võrdse nelinurgaga *1'2'3'4'*, mida on kerge näha kujunenud parallelogrammidest *122'1'*, *233'2'*, *344'3'* jne. Võttes ringjoonel mitte neli, vaid rohkem punkte, saaksime samal viisil võrdsed hulknurgad; võttes lõpuks lõpmatu hulga punkte,

s. o. ringjoone, saaksime pärast paralleel-lüket võrdsed ringid.

Seepärast ei muuda vee edasiliikumine lainete kuju — nad jäävad ka voolavas vees ringideks. Erinevus on ainult selles, et järvepinnal ringid ei liigu edasi (kui mitte arvestada seda, et nad eemalduvad oma liikumatust keskpunktist), kuna aga jõepinnal liiguvad ringid koos oma keskpunktiga vastavalt voolukiirusele.

Fantastiline šrapnell

Ülesanne

Vaatleme nüüd ülesannet, mis nagu ei puutuks siia, kuid mis tegelikult, nagu näeme, kuulub vahetult vaadeldava teema juurde.

Kujutlege kõrgel õhus lendavat šrapnelli. Hakates langema, ta lõhkeb ja killud lendavad igas suunas laiali. Paisatagu nad kõik plahvatuse poolt laiali võrdse jõuga ja liikugu nad kohtamata õhutakistust. Tekib küsimus: kuidas asetsevad killud üks sekund pärast plahvatust, eeldusel, et nad selle ajaga ei ole veel maani jõudnud?

Lahendus

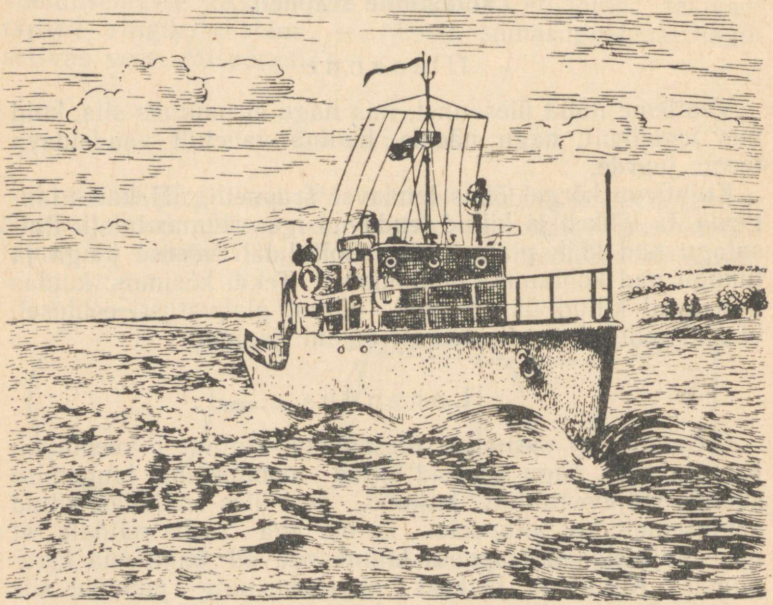
Ülesanne on sarnane ülesandega ringidest veepinnal. Ka siin näib, nagu peaksid killud moodustama langemise suunas väljavenitatud kujundi, sest üles lendavad killud aeglasemalt kui allapoole. Ei ole aga raske näidata, et meie kujuteldava šrapnelli killud peavad paiknema kerapinnal. Kujutlege hetkeks, et raskustung puudub; siis endastmõistetavalt lendaksid kõik killud sekundi jooksul plahvatuskohast täpselt võrdsetele kaugustele, s. o. paikneksid kerapinnal. Nüüd rakendame tegevusse raskustungi. Tema mõjul peavad killud langema; kuna aga teame, et kõik kehad langevad võrdse kiirusega[1], siis peavad ka killud sekundi jooksul langema võrdselt ja seejuures paralleelseid sirgeid mööda. See paralleel-lüke aga ei muuda kujundi vormi — kera jääb keraks.

[1] Erinevused on tingitud õhutakistusest, mille aga oma ülesandest kõrvaldasime.

Seega peavad fantastilise šrapnelli killud moodustama kera, mis otsekui paisudes langeb alla vabalt langeva keha kiirusega.

Kiillaine

Pöördume tagasi jõe juurde. Vaadelge sillal seistes jälge, mille jätab kiiresti liikuv laev. Te näete, et laeva vöörist läheb nurga all laiali kaks laineharja (joon. 48).



Joon. 48. Kiillaine.

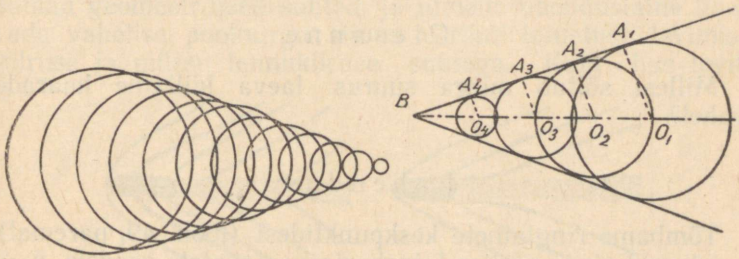
Kuidas nad tekivad? Ja mispärast on nurk nende vahel seda teravam, mida kiiremini laev liigub?

Et selgitada nende laineharjade tekkimise põhjust, pöördume veel korraks tagasi eemalekanduvate ringide juurde, mis tekivad veepinnal vette visatud kivist.

Visates teatud ajavahemikkude tagant kivikesi üksteise järel vette, võib veepinnal näha mitmesuguste suurustega

ringe; mida hiljem on kivi visatud, seda väiksem on tema poolt tekitatud ring. Kui seejuures visata kivikesi piki sirgjoont, siis sarnaneb kujunenud ringide kogum laeva vööri juures tekkivate lainetega. Mida väiksemad on kivikesed ja mida tihedamini neid visatakse, seda märgatavam on sarnasus. Asetades vette kepi ja tõmmates seda mööda veepinda, te nagu asendaksite kivikeste katkendliku kukkumise pidevaga ja siis näete just niisugust lainet, nagu tekib laeva vööri juures.

Sellele näitlikule pildile jääb ainult vähe lisada, et teha teda täiesti arusaadavaks. Vett lõigates tekitab laeva vöör



Joon. 49. Kuidas tekib kiillaine.

igal silmapilgul samasuguse ringlaine nagu visatud kivigi. Ring laieneb igasse külge, kuid selle aja jooksul jõuab laev edasi liikuda ja tekitada teise ringlaine, millele otsekohe järgneb kolmas jne. Kivikeste puhul esinev katkendlik ringide tekkimine asendub nende vahetpidamatu tekkimisega ja see annabki pildi, mis on toodud joonisel 49. Naaberlainete harjad, puutudes kokku, hävitavad üksteist: täielikust ringjoonest säilivad puutumatuna ainult need kaks väikest osa, mis asetsevad tema välimistel külgedel. Need välimised osad tekitavad ühinedes kaks pidevat laineharja, mille asend vastab kõigi ringlainete väliskülgede puutujate asendile (joon. 49, paremal).

Niisugune on nende laineharjade päritolu, mida on näha laeva ja üldiselt veepinnal küllaldase kiirusega liikuva mistahes keha taga.

Sellest järeldub otseselt, et see nähtus on võimalik ainult siis, kui keha liigub lainetest k i i r e m i n i. Kui tõmbate kepiga aeglaselt mööda vett, ei näe te laineharju: ring-

lained asetsevad üksteise sees ja üldist puutujat ei ole nendele võimalik tõmmata.

Laialiminevaid laineharju võib tähele panna ka sel juhul, kui keha seisab paigal ja vesi voolab temast mööda. Kui jõe vool on küllaldaselt kiire, siis kujunevad sellised lained sillatugesid uhavas vees. Lainete kuju on siin isegi selgem kui näiteks laeva poolt tekitatud lainetel, sest nende kuju ei ole moonutatud laevakruvi töötamise tagajärjel.

Selgitanud asja geomeetrilise külje, proovime lahendada järgmist ülesannet.

Ülesanne

Millest sõltub nurga suurus laeva kiillaine haarade vahel?

Lahendus

Tõmbame ringlainete keskpunktidest (joon. 49, paremal) raadiused sirgjoonelise laineharja vastavatele osadele, s. o. ühise puutuja puutepunktidesse. On kerge mõista, et O_1B on tee, mille läbib teatud aja jooksul laeva vöör, kuna O_1A_1 on kaugus, millele levib samal ajal lainetus. Suhe $\frac{O_1A_1}{O_1B}$ on nurga O_1BA_1 siinus ja samal ajal on see ka lainetuse ja laeva kiiruste suhe. Tähendab, kiillaine haarade vaheline nurk B on kaks korda suurem nurgast, mille siinus võrdub ringlainete levimise kiiruse ja laeva kiiruse suhtega.

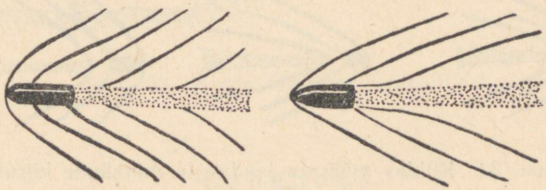
Ringlainete levimise kiirus vees on enam-vähem ühesugune kõikide laevade puhul; seetõttu sõltub kiillaine haarade vaheline nurk peamiselt laeva kiirusest: poole nurga siinus on harilikult võrdeline selle kiirusega. Ja vastupidi: nurga suuruse järgi võib otsustada selle üle, mitu korda on laeva kiirus suurem lainete kiirusest. Kui näiteks kiillaine haarade vaheline nurk on 30°, nagu suuremal osal kauba- ja reisilaevadel merel, siis tema poole siinus (sin 15°) on 0,26; see tähendab, et laeva kiirus on ringlainete levimise kiirusest suurem $\frac{1}{0{,}26}$, s. o. umbes neli korda.

Suurtükimürskude kiirus

Ülesanne

Lained, mida tekitab õhus lendav kuul või suurtükimürsk, sarnanevad äsjavaadeldutega.

Lendavat mürsku on võimalik fotografeerida; joonistel 50 ja 51 on kujutatud kaks erinevate kiirustega liikuvat mürsku. Mõlemal joonisel on selgesti näha meid huvitav «tihenduslaine» (nagu teda sel puhul nimetatakse). See tekib samuti nagu laeva kiillaine. Siin on kasutatavad ka samad geomeetrilised suhted, ja nimelt: tihenduslaine haarade vahelise poolnurga siinus võrdub lainetuse levimiskiiruse ja mürsu lennukiiruse suhtega. Kuid õhus levib



Joon. 50—51. Õhus lendava mürsu poolt tekitatud tihenduslaine.

lainetus kiirusega, mis on lähedane heli kiirusele, s. o. 330 m sekundis. Seepärast saame lendava mürsu ülesvõttelt kergesti ligikaudselt määrata selle mürsu kiirust. Kuidas teha seda siintoodud kahe kujutuse puhul?

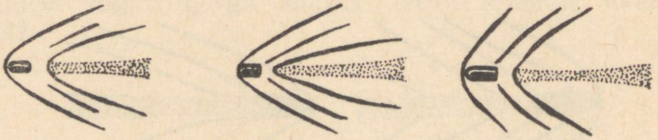
Lahendus

Mõõdame joonistel 50 ja 51 tihenduslaine haarade vahelise nurga. Esimesel juhul on see umbes 80°, teisel umbes 55°; pool nurka on seega vastavalt 40° ja 27½°. Sin 40° = 0,64, sin 27½° = 0,46. Järelikult õhulaine leviskiirus, s. o. 330 m/sek., moodustab esimesel juhul 0,64 mürsu lennukiirusest, teisel juhul — 0,46. Siit esimese mürsu kiirus on $\frac{330}{0,64} = 520$ m sekundis, teise kiirus $\frac{330}{0,46} = 720$ m sekundis.

Te näete, et küllaltki lihtsad geomeetrilised kaalutlused, toetatuna teataval määral füüsika poolt, aitasid meil lahendada ülesande, mis näis esimesel pilgul õige keerukana: lendava mürsu foto järgi määrata tema kiirus pildistamise momendil. (See arvutus on siiski ainult ligikaudselt õige, sest siin ei võeta arvesse mõningaid teisejärgulisi tegureid.)

Ülesanne

Nende jaoks, kes soovivad kuulide kiiruste arvutamisi iseseisvalt teostada, on siin toodud kolme erinevate kiirustega lendava mürsu kujutused (joon. 52).



Joon. 52. Kuidas määrata lendavate mürskude kiirust?

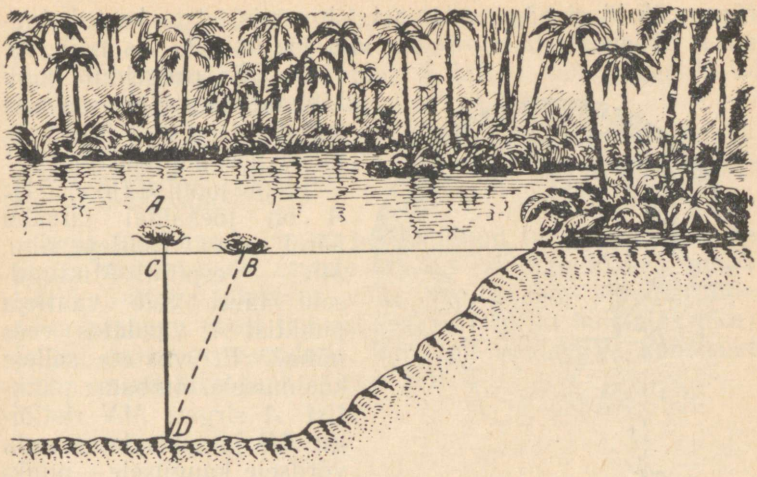
Tiigi sügavus

Ringid veepinnal viisid meid ajutiselt suurtükiväe valdkonda. Pöördume uuesti tagasi vee juurde ja vaatleme hindu ülesannet lootoslillest.

Vanadel hindudel oli kombeks ülesandeid ja reegleid anda värssides. Siin on üks niisugustest ülesannetest:

Ülesanne

Vaikse järve kohal,
pool jalga veepinnast kõrgemal
kasvas lootosõis.
Ta kasvas üksikuna. Ja tuuleiil
teda vastu veepinda lõi.
Ja kalur leidis õie veelt
kaks jalga kaugemal kui enne.
Nüüd küsin teilt:
Kui sügav on siin järv?



Joon. 53. Hindu ülesanne lootoslillest.

Lahendus

Tähistame tiigi sügavuse CD x-ga (joon. 53). Siis, vastavalt Pythagorase teoreemile, saame:

$$BD^2 - x^2 = BC^2,$$

s. o.

$$x^2 = (x + \tfrac{1}{2})^2 - 2^2,$$

millest

$$x^2 = x^2 + x + \tfrac{1}{4} - 4, \quad x = 3\tfrac{3}{4}.$$

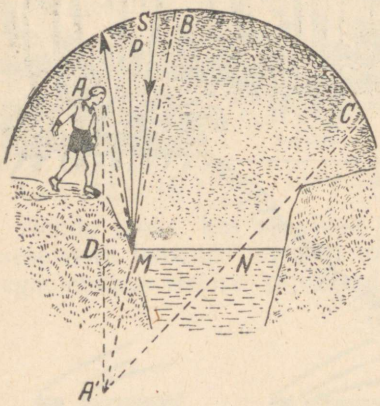
Otsitav sügavus on $3\frac{3}{4}$ jalga.

Jõekalda lähedal või madalas tiigis võite leida veetaimi, mis annavad teile taolisteks ülesanneteks reaalset materjali: määrata igasuguste abinõudeta, isegi käsi märjaks tegemata, vee sügavus antud kohas.

Tähistaevas jões

Jõgi annab geomeetriast huvitatule ülesandeid ka öisel ajal. Meenutage Gogoli kirjeldust Dneprist: «Tähed kiirgavad ja paistavad maailma kohal ja kõik see peegeldub tervikuna Dnepris. Kõiki neid hoiab Dnepr oma tumedas

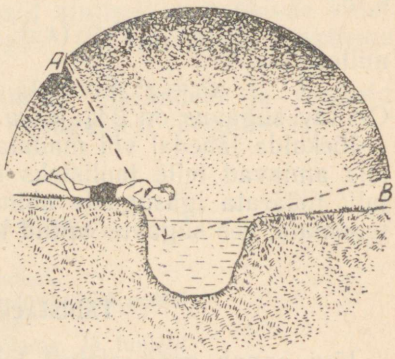
rüpes: ükski ei põgene temast, olgu siis, et ta kustub taevas.» Tõepoolest: kui seista laia jõe kaldal, siis näib, et veepeeglis peegeldub kogu tähistaevas. Kas see aga tegelikult on nii? Kas kõik tähed peegelduvad jões?



Joon. 54. Missugust osa tähistaevast on jõe veepeeglis võimalik näha.

Teeme joonise (joon. 54): *A* on jõekaldal järsaku äärel seisva vaatleja silm, *MN* — veepind. Missuguseid tähti võib vaatleja punktist *A* vaadates vees näha? Et vastata sellele küsimusele, tõmbame punktist *A* sirgele *MN* ristlõigu *AD* ja pikendame seda võrdsele kaugusele — punktini *A'*. Kui vaatleja silm asetseks punktis *A'*, näeks ta ainult seda osa tähistaevast, mis jääb nurga *BA'C* haarade vahele. Samasugune on ka tõelise vaatleja vaateväli, kes seisab punktis *A*. Tähed, mis asetsevad väljaspool seda nurka, ei paista vaatlejale; nende peegeldunud kiired lähevad tema silmadest mööda.

Kuidas selles veenduda? Kuidas tõestada, et näiteks täht *S*, mis asetseb väljaspool nurka *BA'C*, ei ole meie vaatlejale jõe veepeeglis nähtav? Järgime tema kiirt, mis langeb kalda lähedale punkti *M*; füüsikaseaduste põhjal peegeldub ta ristlõigu *MP* suhtes nurga all, mis võrdub langemisnurgaga *SMP* ja mis järelikult on väiksem nurgast *PMA* (seda on kerge tõestada kolmnurkade *ADM* ja *A'DM*



Joon. 55. Kitsas, madalate kallastega jõekeses võib näha rohkem tähti.

ühtivusele tuginedes); tähendab, peegeldunud kiir peab punktist *A* mööda minema. Seda enam lähevad vaatleja silmast mööda need tähe *S* kiired, mis peegelduvad punktist *M* kaugemal asetsevatest punktidest.

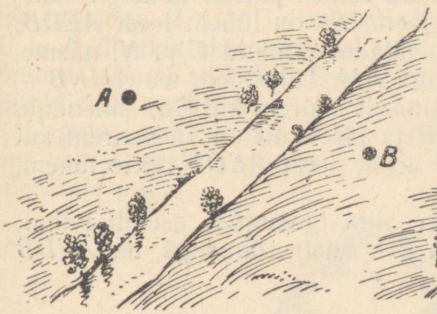
Seega sisaldab Gogoli kirjeldus liialduse: Dnepris ei peegeldu kaugeltki mitte kõik tähed, vaid igal juhul vähem kui pool tähistaevast.

Seda huvitavam on, et peegeldunud taevaosa suurus ei tõesta sugugi seda, et teie ees on lai jõgi. Kitsas, madalate kallastega jõekeses võite vee kohale kummardudes näha peaaegu poolt taevast (s. o. rohkem kui laias jões). Selles on kerge veenduda, kui teha vaatevälja konstruktsioon antud juhu jaoks (joon. 55).

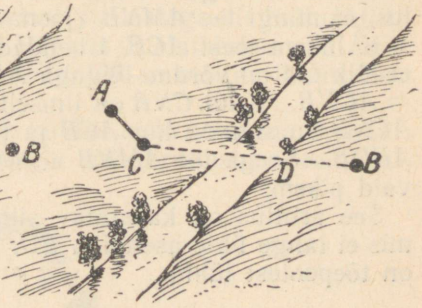
Tee üle jõe

Ülesanne

Punktide *A* ja *B* vahel voolab enam-vähem paralleelsete kallastega jõgi (või kanal) (joon. 56). Üle jõe on vaja ehitada sild risti kallastega. Kuhu tuleb valida koht silla jaoks, et tee punktist *A* punkti *B* oleks kõige lühem?



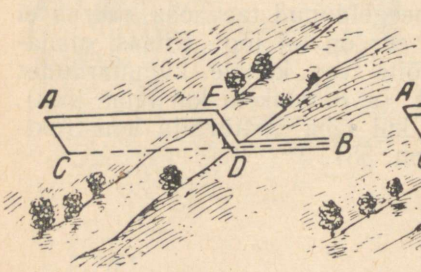
Joon. 56. Kuhu ehitada jõekallastega risti olev sild, et tee punktist *A* punkti *B* oleks lühim?



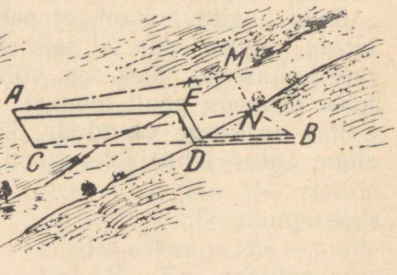
Joon. 57. Koht silla ehitamiseks on valitud.

Lahendus

Tõmmates läbi punkti *A* (joon. 57) jõe suunaga ristuva sirge ja kandes talle punktist *A* lõigu *AC*, mis võrdub jõe laiusega, ühendame punktid *C* ja *B*. Punktis *D* tulebki ehitada sild, et tee punktist *A* punkti *B* oleks lühim.



Joon. 58. Sild on ehitatud.



Joon. 59. Tee *AEDB* on tõepoolest lühim.

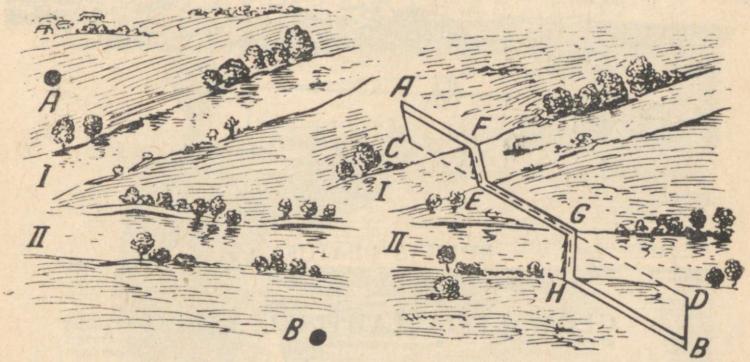
Tõepoolest: ehitades silla *DE* (joon. 58) ja ühendades punkti *E* punktiga *A*, saame tee *AEDB*, milles osa *AE* on paralleelne lõiguga *CD*. (*AEDC* on parallelogramm, sest tema vastasküljed *AC* ja *ED* on võrdsed ja paralleelsed.) Seetõttu on tee *AEDB* pikkuselt võrdne teega *ACB*. Kerge on näidata, et iga teine tee on sellest pikem. Esinegu kahtlus, et mingi tee *AMNB* (joon. 59) on lühem teest *AEDB*, s. o. lühem teest *ACB*. Ühendades punktid *C* ja *N*, näeme, et lõik *CN* on võrdne lõiguga *AM*. Tähendab, tee *AMNB* = = *ACNB*. Kuid *CNB* on ilmselt suurem kui *CB;* tähendab, *ACNB* on suurem kui *ACB* ja järelikult on ka suurem kui *AEDB*. Seega tee *AMNB* ei ole teest *AEDB* mitte lühem, vaid pikem.

See arutlus on kasutatav silla igasuguse asendi puhul, mis ei lange ühte asendiga *ED;* teiste sõnadega, tee *AEDB* on tõepoolest lühim.

Ehitada kaks silda

Ülesanne

Võib esineda keerukam juhtum, ja nimelt siis, kui on vaja leida lühim tee üle jõe punktist *A* punkti *B*, kusjuures jõgi tuleb ületada kaks korda kallaste suhtes täisnurga all (joon. 60). Kuhu tulevad siis sillad ehitada?



Joon. 60. Kaks silda on ehitatud.

Lahendus

Punktist *A* (joon. 60, paremal) tuleb tõmmata jõe I osa laiusega võrdne sirglõik *AC*, mis on risti jõe kallastega. Punktist *B* aga tuleb tõmmata sirglõik *BD*, mis võrdub jõe laiusega II osas ja on samuti kallastega risti. Punktid *C* ja *D* ühendatakse sirgega. Punktis *E* ehitatakse sild *EF*, punktis *G* aga sild *GH*. Tee *AFEGHB* on otsitav lühim tee punktist *A* punkti *B*.

Lugeja kindlasti taipab ise, kuidas seda tõestada, kui ta sel korral arutleb samuti, nagu me arutlesime eelmise ülesande puhul.





KOLMAS PEATÜKK

GEOMEETRIA LAHTISEL VÄLJAL

Kuu nähtavad mõõted

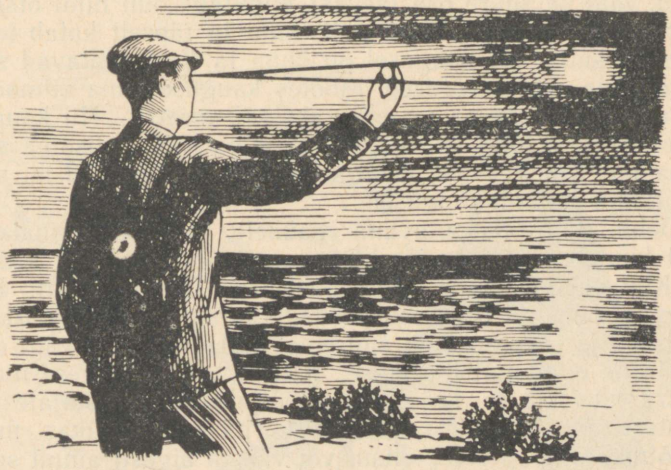
Kui suurena paistab teile taevas täiskuu? Sellele küsimusele saadakse erinevatelt inimestelt väga mitmesuguseid vastuseid.

Kuu on «taldriku», «õuna», «inimnäo» jms. suurune — hinnangud on äärmiselt segased ja ebamäärased, tõendades ainult seda, et vastajad ei mõista küsimuse sisu.

Õige vastuse sellele näiliselt nii igapäevasele küsimusele võib anda ainult see, kellele on selge, mida nimelt tuleb mõista eseme «nähtava» ehk «näiva» suuruse all. Vähe on neid, kes teavad, et jutt on siin teatud n u r g a suurusest, nimelt selle nurga suurusest, mis tekib kahe sirgjoone tõmbamisel eseme äärmistest punktidest meie silmani; seda nurka nimetatakse «vaatenurgaks» ehk «eseme nurksuuruseks» (joon. 61). Ja kui Kuu näivat suurust võrreldakse taldriku, õuna jms. mõõdetega, siis nendel vastustel kas pole üldse mõtet, või peavad need tähendama seda, et Kuu paistab taevas sama vaatenurga all nagu taldrik või õun. Kuid sellest väitest üksi veel ei piisa, sest taldrikut või õuna näeme olenevalt nende kaugusest erine-

vate nurkade all: lähedalt — suuremate, kaugelt — väiksemate nurkade all. Et küsimus oleks kindlalt piiritletud, on vaja näidata, missuguselt kauguselt taldrikut või õuna vaadeldakse.

Võrrelda kaugete esemete mõõteid teiste esemete suurustega, mille kaugused ei ole antud, on täiesti harilik kirjanduslik võte, mida on kasutanud ka suured kirjanikud. See



Joon. 61. Mis on vaatenurk.

avaldab teatavat mõju oma läheduse tõttu suurema osa inimeste psühholoogiale, kuid selget pilti see ei anna. Toome näite Shakespeare'i «Kuningas Lear'ist»; siin kirjeldatakse (Edgari poolt) vaadet kõrgelt merekaldalt:

.....Hirmus
ja pööritav siit alla vaadata!
Kui poolel teel on lennul hakk ja vares,
nad näivad põrnikaina; poolel veerel
mees ripub heinakorje õudsel tööl,
mull' näib, ta pole suurem oma peast.
Nood kalurid, kes kõnnivad all rannas,
on nagu hiired ja too ankrus laev
on kahanenud paadiks ja paat poiuks,
mis silmale liig väike...

Need võrdlused annaksid kaugustest täpse ettekujutuse, kui oleks näidatud ka võrdlusesemete (põrnikas, inimese pea, hiired, paadid . . .) kaugus. Samuti nagu Kuu suuruse võrdlemisel taldriku või õuntega, on ka siin vajalik näidata, kui kaugel silmast peavad need igapäevased esemed asetsema.

See kaugus on palju suurem, kui harilikult mõeldakse. Hoides õuna väljasirutatud käes, katate temaga mitte ainult Kuu, vaid ka suure osa taevast. Riputage õun niidi otsa ja eemalduge temast järk-järgult, kuni ta täpselt katab terve täiskuu ketta: sel kaugusel on õuna ja Kuu nähtavad suurused teie suhtes võrdsed. Mõõtes kauguse oma silmadest õunani, veendute, et see on umbes 10 meetrit. Nii kaugele tuleb asetada õun, et ta tõepoolest paistaks niisama suurena kui Kuu taevas! Taldrik tuleks aga viia 30 m, s. o. poolesaja sammu kaugusele.

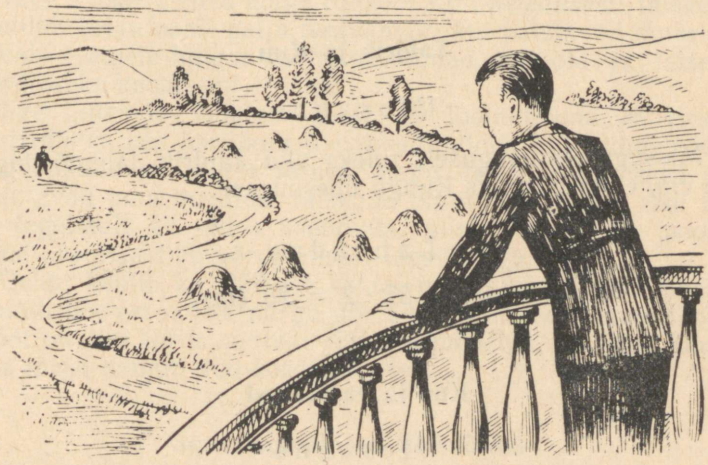
Öeldu näib ebausutavana igaühele, kes seda esmakordselt kuuleb; muuseas järeldub see vaidlematult ka sellest, et Kuu paistab meile ainult poolekraadise nurga all. Igapäevases elus ei tule meil peaaegu kunagi hinnata nurkade suurusi, ja seepärast on suuremal osal inimestest väga ebamäärane ettekujutus väikese, näit. 1°, 2° või 5°-se nurga suurusest (ma ei räägi maamõõtjatest, joonestajatest ja teistest spetsialistidest, kes on harjunud praktikas nurki mõõtma). Me hindame enam või vähem õigesti ainult suuri nurki, eriti siis, kui taipame neid võrrelda meile tuntud nurkadega kellaosutite vahel; kõigile on kindlasti tuntud 90°, 60°, 30°, 120° ja 150°-ne nurk, mida me oleme harjunud nägema kella numbrilaual (kell 3, kell 2, kell 1, kell 4, kell 5), nii et isegi numbreid eraldamata määrame aja osutitevahelise nurga suuruse järgi. Kuid väikesi ja kaugeid esemeid näeme harilikult palju väiksema nurga all ja seetõttu ei oska üldse isegi ligikaudselt nende vaatenurki hinnata.

Vaatenurk

Soovides tuua piltlikku näidet ühekraadise nurga kohta, arvutame, kui kaugele peab meist minema keskmist kasvu (1,7 m) inimene, et ta paistaks meile selle nurga all. Tõlkides ülesande geomeetria keelde, ütleme, et meil tuleb leida ringi raadius, mille ühekraadine kaar on 1,7 m pik-

kune (olles täpsed — mitte kaar, vaid kõõl, kuid väikeste nurkade puhul on kaare ja kõõlu pikkuste vahe tühine). Arutleme järgmiselt: kui 1-kraadine kaar on 1,7 m, siis kogu ringjoon, mis sisaldab 360°, on $1{,}7 \cdot 360$ (m) = 610 m pikkune, raadius aga on 2π korda väiksem ringjoone pikkusest; kui võtta π väärtuseks ligikaudu $\frac{22}{7}$, siis on raadius

$$610 : \frac{44}{7}\text{(m)} \approx 98 \text{ m}.$$



Joon. 62. Inimkuju paistab saja meetri kauguselt 1°-se nurga all.

Seega paistab inimene meile 1°-se nurga all siis, kui ta on meist umbes 100 m kaugusel (joon. 62). Kui ta läheb kaks korda kaugemale — 200 m kaugusele, siis paistab ta poolekraadise nurga all; kui ta läheneb 50 m kaugusele, siis on vaatenurk 2° jne.

Samuti pole raske arvutada, et 1 m pikkune kepp peab meile paistma ühekraadise nurga all $360 : \frac{44}{7} \approx 57$ meetri kauguselt. Sama nurga all paistab meile 1 cm 57 cm kauguselt, 1 km 57 km kauguselt jne. — üldiselt iga ese, mille läbimõõt on 57 korda väiksem kui tema kaugus. Kui peame selle arvu — 57 — meeles, siis võime kiiresti ja lihtsalt

teostada kõiki arvutusi, mis on seotud esemete nurksuurustega. Kui näiteks tahame kindlaks määrata, kui kaugele tuleb viia 9 cm-se läbimõõduga õun, et ta paistaks 1°-se nurga all, siis on küllaldane korrutada $9 \cdot 57$ — saame 510 cm ehk umbes 5 m; kahekordselt kauguselt paistab ta meile kaks korda väiksema — poolekraadise — nurga all, s. o. niisama suurena kui Kuu.

Samal viisil võime mistahes eseme jaoks arvutada kauguse, millelt ta paistaks Kuu kettaga ühesuurune.

Taldrik ja Kuu

Ülesanne

Missugusele kaugusele tuleks viia taldrik läbimõõduga 25 cm, et ta paistaks Kuuga ühesuurune.

Lahendus

$$0{,}25 \cdot 57 \cdot 2 = 28 \text{ (m)}.$$

Kuu ja vaskrahad

Ülesanne

Tehke sama arvutus viiekopikase (läbimõõt 25 mm) ja kolmekopikase (läbimõõt 22 mm) mündi jaoks.

Lahendus

$$0{,}025 \cdot 57 \cdot 2 = 2{,}9 \text{ (m)},$$
$$0{,}022 \cdot 57 \cdot 2 = 2{,}5 \text{ (m)}.$$

Kui teile tundub ebausutavana, et Kuu paistab silmale mitte suuremana kui kahekopikane münt nelja sammu kauguselt või harilik pliiats 80 cm kauguselt, siis hoidke pliiats väljasirutatud käes täiskuu ketta vastas: ta katab Kuu ülejäägiga. Ja, kui imelik see ka ei oleks, kõige sobivamaks eseme ks Kuuga võrdlemisel näivate mõõdete suhtes ei ole-

taldrik ega õun, isegi mitte kirss, vaid hernetera või veel parem — tuletiku pea! Võrdlemine taldriku või õunaga eeldab nende eemaldamist erakordselt kaugele: õuna oma käes või taldrikut lõunalaual näeme kümme-kakskümmend korda kuukettast suuremana. Ja ainult tuletiku pead, mida vaatleme 25 cm kauguselt silmast («normaalse nägemise kaugus»), näeme tõepoolest poolekraadise nurga all, s. o. nagu Kuudki.

See, et kuuketas enamiku inimeste silmis petlikult 10—20 korda kasvab, on üks huvitavamaid silmapetteid. Tuleb arvata, et see oleneb kõige rohkem Kuu *heledusest*: täiskuu eraldub taevafoonil palju teravamalt, kui paistavad ümbritsevate esemete hulgas taldrikud, õunad, mündid ja teised võrdluseks kasutatud esemed[1].

See illusioon tundub meile nii loomulikuna, et isegi kunstnikud, kes harilikult paistavad silma õige silmamõõduga, alistuvad sellele samuti nagu teisedki inimesed ja kujutavad oma maalidel täiskuud palju suuremana kui ta on tegelikult. Et selles veenduda, piisab kunstniku poolt maalitud maastiku võrdlemisest ülesvõttega.

Öeldu kehtib ka Päikese kohta, mida me näeme Maalt samuti poolekraadise nurga all; kuigi Päikese tõeline läbimõõt on 400 korda suurem Kuu läbimõõdust, on tema kaugus meist samuti 400 korda suurem.

Sensatsioonilised ülesvõtted

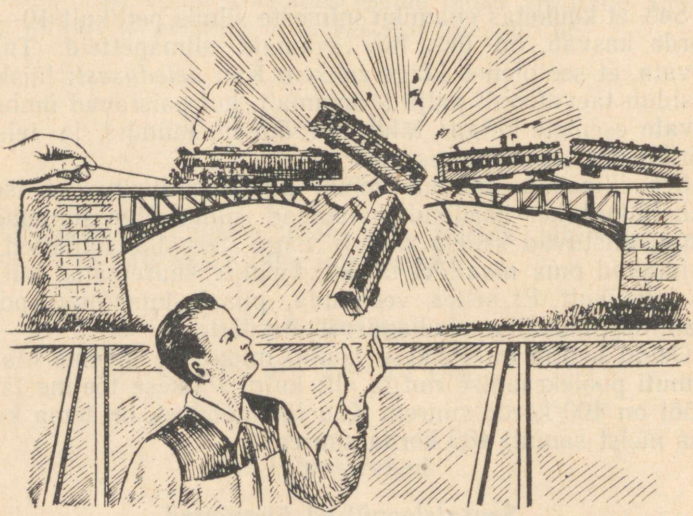
Selleks, et selgitada tähtsat vaatenurga mõistet, kaldume veidi kõrvale meie otsesest teemast — geomeetriast lahtisel väljal — ja toome mõned näited fotograafia valdkonnast.

Kinoekraanil olete kindlasti näinud selliseid katastroofe, nagu rongide kokkupõrge või uskumatuid stseene, kus auto sõidab mööda merepõhja.

Meenutage filmi «Kapten Granti lapsed». Missuguse tugeva mulje — kas pole tõsi? — jättis teile laeva hukkumise stseen tormi ajal või vaatepilt, kus krokodillid piiravad sohu sattunud poisikest. Keegi muidugi ei mõtle, et need stseenid on filmitud vahetult looduses. Kuid missugusel viisil on nad saadud?

[1] Samal põhjusel paistab põleva elektrilambi hõõgniit meile palju jämedamana kui kustunud lambis, s o. jahtunud olekus.

Saladus laheneb lisatud illustratsioonide abil. Joonisel 63 näete mängurongi «katastroofi» mänguraudteel; joonisel 64 — mänguautot, mida tõmmatakse akvaariumi taga niidist. See ongi see «loodus», milles tehti ülesvõtted kinolindile. Mispärast siis tekib meil neid ülesvõtteid ekraanil nähes illusioon, nagu oleks meie ees tõeline rong ja auto? Siin aga, illustratsioonidel, märkame kohe nende miniatuurseid



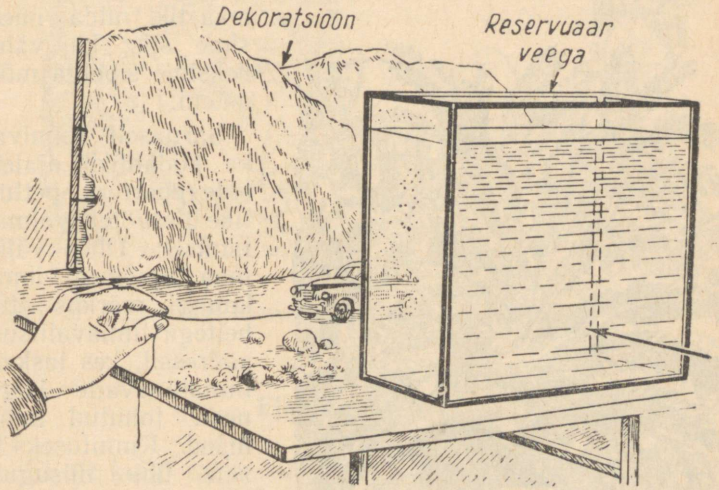
Joon. 63. Raudtee-katastroofi tekitamine kinoülesvõtte jaoks.

mõõteid, isegi siis, kui me ei saa nende suurust võrrelda teiste esemete suurustega. Põhjus on lihtne: ülesvõtted ekraani jaoks on mängurongist ja -autost tehtud väga lähedalt; seetõttu paistavad nad vaatajale umbes sama vaatenurga all, mille all me harilikult näeme tõelisi vaguneid ja autosid. Selles ongi kogu illusiooni saladus.

Esitame veel ühe stseeni filmist «Ruslan ja Ludmilla» (joon. 65). Tohutu suur pea ja väike Ruslan hobusel. Pea on asetatud filmiaparaadi lähedusse maketile, Ruslan hobusel aga küllaldasele kaugusele. Selles ongi kogu illusiooni saladus.

Joon. 66 kujutab teist illusiooni, mis on rajatud samale põhimõttele. Te näete kummalist maastikku, mis meenutab

kaugete geoloogiliste ajastute loodust: imelikud, tohutute veetilkadega kaetud gigantse samblaga sarnanevad puud, esiplaanil aga hiiglaslik elukas, kes siiski sarnaneb kahjutu rõskuseputukaga. Vaatamata oma ebaharilikkusele on joo-



Joon. 64. Automatk mere põhjas.



Joon. 65. Stseen filmist «Ruslan ja Ludmilla».

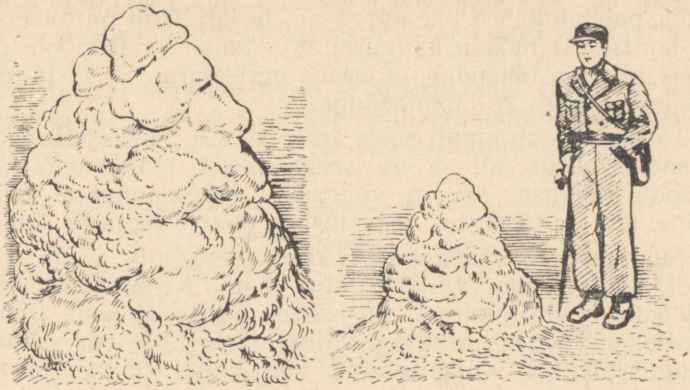
nis tehtud loodusest: see pole midagi muud kui väike osa metsaalusest pinnast, mis on ainult joonistatud ebahariliku vaatenurga all. Me ei näe samblavarsi, veetilku, rõskuseputukaid jms. kunagi nii suure vaatenurga all, ja seetõttu näibki joonis meile võõrana ja tundmatuna. Meie ees on maastik, mida näeksime siis, kui väheneksime sipelga mõõdeteni.



Joon. 66. Mõistatuslik maastik, mis on võetud loodusest.

Sarnaselt toimivad ka kodanlike ajalehtede reporterid petturlike ülesvõtete valmistamisel. Ühes välismaa ajalehes ilmus kunagi märkus etteheitega linnavalitsuse aadressil, kes laskvat linnatänavaile koguneda tohutud lumemäed. Kinnituseks lisati ühe niisuguse lumemäe ülesvõte, mis jätab aukartustäratava mulje (joon. 67, vasakul). Kontrollimisel selgus, et ülesvõte oli tehtud «naljahamba»-fotograafi poolt väikesest lumekuhilast õige lähedalt, s.o. ebaharilikult suure vaatenurga all (joon. 67, paremal).

Teine kord avaldas sama ajaleht ülesvõtte laiast lõhest linnalähedases kaljus; ajalehe sõnade järgi oli see sissekäiguks avarasse maa-alusesse koopasse, kuhu jäi teadmatult kadunuks grupp ettevaatamatuid turiste, kes julgesid uurimise eesmärgil koopasse tungida. Eksinute päästmiseks varustatud vabatahtlikesalk avastas, et ülesvõte oli tehtud vaevaltmärgatavast praost jäätunud seinas, praost, mille laius oli üks sentimeeter!



Joon. 67. Lumemägi ülesvõttel (vasakul) ja tegelikkuses (paremal).

Elav nurgamõõtja

Ei ole kuigi raske ise lihtsa ehitusega nurgamõõtjat valmistada, eriti sel juhul, kui kasutada malli. Kuid jalutuskäigul linnast välja ei ole ka omavalmistatud nurgamõõtja alati käepärast. Nendel juhtudel võib kasutada «elava nurgamõõtja» abi, mis on meil alati käepärast. Selleks on meie oma sõrmed. Et neid vaatenurkade ligikaudseks määramiseks kasutada, tuleb ainult enne teostada mõned mõõtmised ja arvutused.

Kõigepealt tuleb kindlaks määrata, kui suure vaatenurga all me näeme nimetissõrme küünt väljasirutatud käel. Küüne harilik laius on 1 cm, tema kaugus silmast aga selles asendis umbes 60 cm; seetõttu näeme teda umbes 1°-se nurga all (tegelikult veidi vähem, sest 1°-ne nurk tekiks 57 cm kauguselt). Alaealistel on küüs väiksem, kuid ka käsi on lühem, nii et vaatenurk on nendel umbes sama — 1°. Lugeja teeb hästi, kui ta raamatu andmeile toetumata teostab ise selle mõõtmise ja arvutuse, et veenduda, kas tulemus ei lähe vast liialt lahku 1°-st; kui kõrvalekaldumine on suur, tuleb katsetada teise sõrmega.

Seda teades on teil võimalik määrata väikesi vaatenurki sõna tõsises mõttes paljaste kätega. Iga kaugelasuv ese, mille parajasti katab teie väljasirutatud käe nimetissõrme

küüs, paistab teile 1°-se nurga all, ja järelikult on teist oma 57-kordse läbimõõdu kaugusel. Kui küüs katab poole esemest, siis see tähendab, et eseme nurksuurus on 2° ja tema kaugus võrdub 28 läbimõõduga.

Täiskuu katab ainult poole küünest, s. t. ta paistab poolekraadise nurga all ja on seega meist 114-ne oma läbimõõdu kaugusel; see on väärtuslik astronoomiline mõõtmine, mis on teostatud sõna tõsises mõttes paljaste kätega!

Suuremate nurkade puhul kasutage pöidla ülemist liigest, hoides teda väljasirutatud käel k õ v e r d a t u n a. Täiskasvanud inimesel on selle liigese pikkus (pange tähele: p i k k u s, mitte aga laius) umbes 3½ cm ja tema kaugus silmast väljasirutatud käe puhul umbes 55 cm. Kerge on arvutada, et selles asendis peab tema nurksuurus olema 4°. See annab vahendi 4°-ste (ja seega ka 8°-ste) vaatenurkade määramiseks.

Siia tuleb lisada veel kaks sõrmedega mõõdetavat nurka — nurgad, mille all paistavad väljasirutatud käel järgmised kaugused: 1) võimalikult laiali asetatud keskmise ja nimetissõrme otste vahe; 2) pöidla ja nimetissõrme vahe, mis samuti on asetatud võimalikult laiali. Ei ole raske arvutada, et esimene nurk on umbes 7—8°, teine 15—16°.

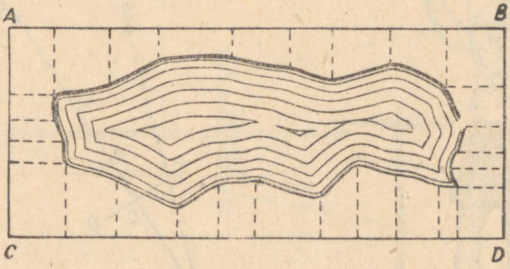
Võib esineda palju juhtumeid, kus seda elavat nurgamõõtjat saab lahtisel maastikul jalutades kasutada. Paistku näiteks kaugelt kaubavagun, kusjuures teie väljasirutatud käe pool pöidlaliigest katab vaguni, s. o. ta paistab umbes 2°-se nurga all. Et kaubavaguni pikkus on teada (umbes 6 m), siis leiate kergesti vaguni kauguse: $6 \cdot 28 \approx 170$ (m) või mingi sellele lähedane suurus. Loomulikult on mõõtmine jämedalt umbkaudne, kuid siiski usaldatavam kui põhjendamatu hinnang silma järgi.

Ühtlasi näitame ka võtte maastikule täisnurkade kandmiseks, kasutades seejuures ainult omaenda keha.

Kui teil on vaja tõmmata teatavast punktist ristjoon antud suunale, siis, seistes selles punktis näoga antud suunas, sirutage käsi pead pööramata vabalt selles suunas, kuhu kavatsete tõmmata ristjoone. Pärast seda tõstke väljasirutatud käe põial üles, pöörake pea tema suunas ja pange tähele, missuguse eseme — kivi, põõsa vms. — põial katab, kui teda vaadelda vastava silmaga (s. o. paremaga, kui on välja sirutatud parem käsi, vasakuga — kui vasak käsi).

Teil jääb siis ainult märkida maapinnale sirgjoon kohast, kus te seisite, märgitud esemeni — see ongi otsitav ristjoon.

Paistab, et see võte nagu ei annaks häid tulemusi, kuid pärast lühiajalist harjutamist õpite hindama seda «elavat ekkerit»[1] mitte vähem kui tõelist, ristikujulist.



Joon. 68. Järve plaanistamine.

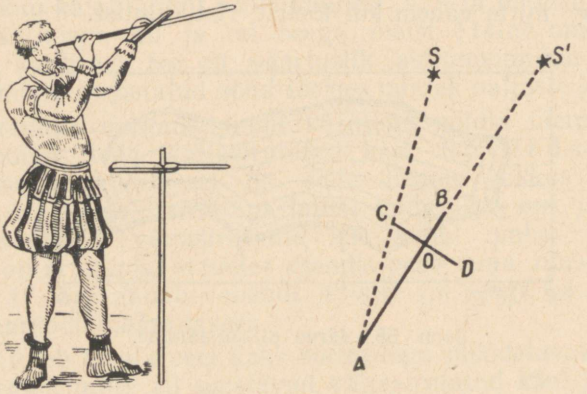
Edasi, kasutades «elavat nurgamõõtjat», võite ilma igasuguste seadisteta mõõta ka tähtede nurkkõrgusi horisondist, tähtede kaugusi üksteisest kraadides, meteoori hõõguva teekonna nähtavaid mõõteid jms. Lõpuks, osates ilma mõõteriistadeta kanda maastikule täisnurki, võite plaanistada väikese maa-ala sel viisil, nagu on näidatud joonisel 68. Näiteks järve plaanistamisel mõõdetakse ristküliku *ABDC* küljegede pikkused, samuti ka ristlõikude pikkused, mis on tõmmatud kaldal märgitud punktidest ristküliku küljegedele, ja nende ristlõikude vahelised kaugused. Ühe sõnaga: Robinsoni olukorras võib oskus kasutada oma käsi nurkade mõõtmiseks (ja jalgu kauguste mõõtmiseks) osutuda tarvilikuks mitmesugusteks erinevateks vajadusteks.

Jakobi kepp

Soovides omada täpsemat nurgamõõtjat kui praegu meie poolt kirjeldatud looduslik «elav nurgamõõtja», võite endale valmistada lihtsa ja mugava seadise, mis omal ajal teeninidas meie esivanemaid. Seda seadist, mida leiutaja nime

[1] Ekkeriks nimetatakse maamõõduriista täisnurksete suundade maastikule kandmiseks.

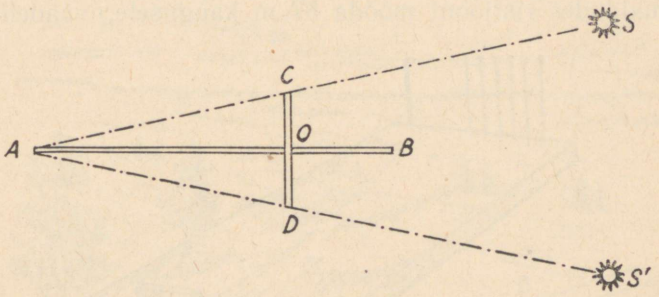
järgi nimetatakse «Jakobi kepiks», kasutasid meresõitjad laialdaselt 18-nda sajandini (joon. 69), millal ta järkjärgult välja tõrjuti veelgi mugavamate ja täpsemate nurgamõõtjate poolt (sekstandid).



Joon. 69. Jakobi kepp ja selle kasutamise skeem.

Ta koosneb 70—100 cm pikkusest kepist (joonlauast) *AB*, mida mööda saab libistada temaga risti olevat liistu *CD*; libiseva liistu mõlemad osad *CO* ja *OD* on omavahel võrdsed. Kui te soovite selle seadise abil määrata tähtede *S* ja *S'* vahelise nurkkauguse (joon. 69), siis asetate silma juurde kepi otsa *A* (kuhu on vaatluse hõlbustamiseks kinnitatud plaadike, millest on auk läbi puuritud) ja suunate kepi nii, et täht *S'* oleks nähtav kepi otsa *B* juures; siis liigutate ristliistu *CD* piki keppi nii kaua, kuni täht *S* on nähtav otsa *C* kohal (joon. 69). Nüüd jääb mõõta ainult kaugus *AO*, et, teades pikkust *CO*, arvutada nurga *SAS'* suurus. Need, kes tunnevad trigonomeetriat, taipavad, et otsitava nurga tangens võrdub suhtega $\frac{CO}{AO}$; meie «väli-trigonomeetria», mis on toodud viiendas peatükis, on samuti küllaldane selle arvutuse teostamiseks; te arvutate Pythagorase teoreemi järgi pikkuse *AC* ja leiate seejärel nurga, mille siinus on $\frac{CO}{AC}$.

Lõpuks võite otsitava nurga ka graafiliselt leida: konstrueerides paberil kolmnurga ACO meelevaldses mastaabis ja mõõtes malliga nurga A; kui aga malli ei ole käepärast, siis ka selleta — meetodil, mida on kirjeldatud meie «välitrigonomeetrias» (vt. viies peatükk).



Joon. 70. Tähtedevahelise nurkkauguse määramine Jakobi kepi abil.

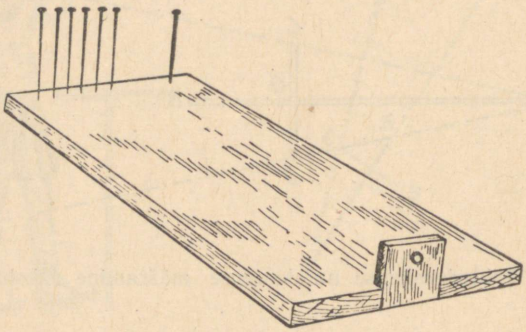
Milleks on siis vajalik ristliistu teine pool? Selleks juhuks, kui mõõdetav nurk on liialt suur, nii et seda ei õnnestu mõõta äsjakirjeldatud viisil. Siis ei suunata tähele S' mitte kepp AB, vaid sirge AD, liigutades ristliistu selliselt, et tema ots C kataks samaaegselt tähe S (joon. 70). Nurga SAS' suuruse leidmine arvutuse teel või graafiliselt ei valmista muidugi raskusi.

Et igakordse mõõtmise juures ei tuleks teha arvutusi või konstruktsioone, võib neid teha varem, mõõteriista valmistamise ajal, ja märkida tulemused kepile AB; siis, suunates seadise tähtedele, loete ainult tulemuse, mis on märgitud punkt O juures — see ongi mõõdetava nurga suurus.

Rehakujuline nurgamõõtja

Veelgi lihtsam on valmistada teist seadist nurksuuruste mõõtmiseks — n. n. «rehakujulist nurgamõõtjat», mis oma välimuselt tõepoolest sarnaneb rehaga (joon. 71). Tema peamiseks osaks on mistahes kujuga lauake, mille ühele servale on kinnitatud auguga plaadike; selle ava asetab vaatleja silma juurde. Lauakese vastasäärele torgatakse rida peeni nööpnõelu (nagu neid kasutatakse putukate kol-

lektsioonides), kusjuures iga kahe nööpnõela vaheline kaugus on $^1/_{57}$ nende kaugusest läbipuuritud plaadikeseni.[1] Me teame juba, et sel puhul paistab iga vahe meile ühekraadise nurga all. Nööpnõelu võib asetada ka järgmisel, täpsemat tulemust andval viisil: seinale tõmmatakse meetri kaugusele teineteisest kaks paralleelset joont ja, eemaldudes ristjoont mööda 57 m kaugusele, vaadeldakse



Joon. 71. Rehakujuline nurgamõõtja.

neid jooni läbi plaadikese ava ning torgatakse nööpnõelad lauakesse sel viisil, et iga kõrvuti olevate nööpnõelte paar kataks seinal olevad jooned.

Kui nööpnõelad on kohale asetatud, võib mõningad neist ära võtta, et saada 2°, 3° ja 5°-seid nurki. Selle nurgamõõtja kasutamine on muidugi lugejale arusaadav ilma selgituseta. Kasutades seda nurgamõõtjat, võib vaatenurki mõõta küllaltki suure täpsusega — kuni $^1/_4$°.

Suurtükiväelase nurk

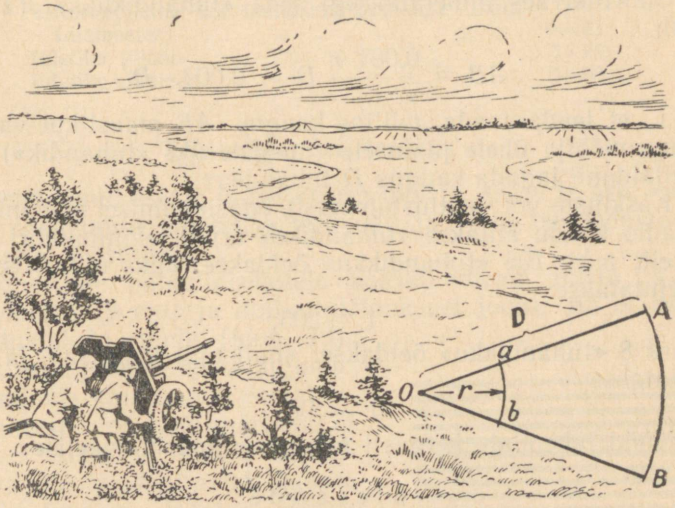
Suurtükiväelane ei tulista «pimesi».

Teades märgi kõrgust, määrab ta selle nurksuuruse ja arvutab kauguse märgini; teisel juhul määrab ta, missuguse nurga all tuleb kahurit pöörata tule ülekandmiseks ühelt märgilt teisele.

[1] Nööpnõelte asemel võib kasutada raami, millele on tõmmatud niidid.

Niisuguseid ülesandeid lahendab ta kiiresti ka peast. Kuidas?

Vaadake joonist 72. AB on ringjoone kaar raadiusega $OA = D$; ab on ringjoone kaar raadiusega $Oa = r$.



Joon. 72. Suurtükiväelase nurgamõõtja skeem.

Sektorite AOB ja aOb sarnasusest järeldub, et

$$\frac{AB}{D} = \frac{ab}{r}$$

ehk

$$AB = \frac{ab}{r} D.$$

Suhe $\frac{ab}{r}$ iseloomustab vaatenurga AOB suurust; teades seda suhet, on kerge arvutada AB tuntud D puhul või D tuntud AB puhul.

Suurtükiväelased lihtsustavad arvutust sellega, et jaotavad ringjoone mitte 360 osaks nagu harilikult, vaid 6000 võrdseks kaareks; sel juhul moodustab iga jaotuse pikkus umbes $\frac{1}{1000}$ ringi raadiusest.

Tõepoolest, olgu näiteks kaare ab pikkus nurgamõõtja ringil O (joon. 72) üks jaotusühik; siis on kogu ringjoone pikkus $2\pi r \approx 6r$, ja kaare pikkus $ab = \frac{6r}{6000} = \frac{1}{1000} r$.

Suurtükiväes nimetataksegi seda «tuhandikuks». Tähendab,

$$AB = \frac{0{,}001\ r}{r} D = 0{,}001 \cdot D,$$

s. t., et teada saada, milline kaugus AB maastikul vastab nurgamõõtja ühele jaotusele (nurgale üks «tuhandik»), on küllaldane jagada kaugus D tuhandega.

Käskluste või vaatlustulemuste edasiandmisel telefoni või raadio kaudu antakse «tuhandike» arv telefoninumbri taoliselt: nurk 105 «tuhandikku» öeldakse: «üks null viis» ja kirjutatakse:

1 — 05;

nurk 8 «tuhandikku» öeldakse: «null null kaheksa» ja kirjutatakse:

0 — 08.

Nüüd lahendate kergesti niisuguse suurtükiväelise

ülesande

Tank on tankitõrjesuurtüki juurest nähtav nurga all 0—05 (kõrguse järgi). Määrata kaugus tankini, lugedes tema kõrguseks 2 m.

Lahendus

5 nurgamõõtja jaotust = 2 m,

1 nurgamõõtja jaotus = $\frac{2\text{ m}}{5} = 0{,}4$ m.

Et üks nurgamõõtja jaotus vastab ühele tuhandikule kaugusest, siis kogu kaugus on järelikult tuhat korda suurem, s. o.

$$D = 0{,}4 \cdot 1000 = 400\ (\text{m}).$$

Kui komandöril või luurajal ei ole käepärast nurgamõõtmise vahendeid, siis kasutab ta peopesa, sõrmi või mistahes käepärastolevaid vahendeid, nagu sellest on jutustatud meie raamatus (vt. «Elav nurgamõõtja»). Ainult nende «väärtust» peab suurtükiväelane tundma mitte kraadides, vaid «tuhandikkudes».

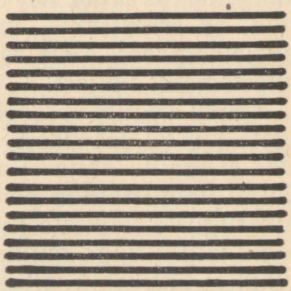
Toome mõningate esemete umbkaudse «väärtuse» «tuhandikkudes»:

käelaba	1—20
keskmine, nimetis- ja nimeta sõrm	0—30
ümmargune pliiats (jämedus)	0—12
kolmekopikane või kahekümnekopikane münt (diameeter)	0—40
tuletiku pikkus	0—75
tuletiku jämedus	0—03

Teie nägemise teravus

Omandanud eseme nurksuuruse mõiste, saate te aru, kuidas mõõdetakse nägemise teravust, ja võite ise sedalaadi mõõtmisi teostada.

Joonestage paberilehekesele kakskümmend musta tuletikupikkust (5 cm) ja millimeetripaksust joont, nii et nad moodustaksid ruudu (joon. 73). Olles selle joonise hästivalgustatud seinale kinnitanud, eemalduge temast seni, kuni märkate, et jooned enam ei paista eraldiseisvatena, vaid liituvad ühiseks halliks fooniks. Mõõtke vastav kaugus ja arvutage — te teate juba kuidas — vaatenurk, mille all te enam ei eralda ühemillimeetrise paksusega triipe. Kui see nurk on 1′ (üks minut), siis on teie nägemise teravus normaalne; kui kolm minutit, siis moodustab teravus ⅓ normaalsest jne.



Joon. 73. Nägemise teravuse mõõtmiseks.

Ülesanne

Joonisel 73 toodud jooned näivad liituvat 2 m kauguselt. Kas nägemise teravus on normaalne?

Lahendus

Me teame, et 57 mm kauguselt on 1 mm laiune triip näha 1°-se nurga all, s. o. 60′. Järelikult 2000 mm kauguselt on ta näha nurga x all, mis määratakse võrdest

$$x : 60 = 57 : 2000,$$
$$x = 1{,}7'.$$

Nägemise teravus on alla normaalse ja moodustab sellest

$$1 : 1{,}7 = \text{umbes } 0{,}6.$$

Piir-minut

Me rääkisime praegu, et triibud, mida vaadeldakse väiksema vaatenurga all kui üks minut, ei paista normaalsele silmale enam eraldiseisvatena. See kehtib igasuguste esemete puhul: missugune ka ei oleks vaadeldava objekti kontuur, normaalne silm ei eralda seda, kui ese paistab väiksema nurga all kui 1′. Iga ese muutub seejuures vaevueraldatavaks punktiks, «mis silmale liig väike» (Shakespeare), mõõdeteta ja kujuta tolmukübemeks. Niisugune on normaalse inimsilma omadus: üks nurga-minut on tema teravuse keskmiseks piiriks. Millest see on tingitud, on eriküsimus, mis kuulub füüsikasse ja nägemise füsioloogiasse. Meie räägime siin ainult selle nähtuse geomeetrilisest küljest.

Öeldu kehtib võrdsel määral nii suurte, kuid väga kaugete kui ka lähedaste, kuid väga väikeste esemete kohta. Me ei eralda palja silmaga õhus hõljuvate tolmukübemete kuju: valgustatuna päikesekiirte poolt, paistavad nad meile ühesuguste väikeste punktikestena, kuigi nad tegelikult on oma kujult väga mitmesugused. Putuka kehas ei eralda me väikesi üksikasju jällegi seepärast, et näeme neid väiksema nurga all kui 1′. Samal põhjusel ei näe me ilma teleskoobita Kuu, planeetide ja teiste taevakehade pinna detaile.

Kui loomuliku nägemise piir oleks kaugemal, näiks maailm meile täiesti teistsugusena. Inimene, kelle nägemise teravuse piir poleks mitte 1′, vaid näiteks ½′, näeks ümbritsevat maailma sügavamale ja kaugemale kui meie. Väga piltlikult on niisuguse terava nägemise eeliseid kirjeldanud Tšehhov oma jutustuses «Stepp»:

«Nägemine oli tal (Vasjal) hämmastavalt terav. Ta nägi nii hästi, et mustjaspruun viljatu stepp oli tema jaoks alati täis elu ja sisu. Tal tarvitses vaid vaadata kaugusse, et näha rebast, jänest, trappi või mingisugust muud inimestest eemale hoiduvat looma. Lihtne on näha jooksvat jänest või lendavat trappi — neid on näinud igaüks, kes on liiku-

nud stepis, — kuid igaühel ei ole võimalust näha metsloomi nende koduses elus, kui nad ei jookse, ei varja end ja ei vaata kohutatult kõrvale. Aga Vasja nägi mängivaid rebaseid, end käpakestega pesevaid jäneseid, tiibu väljasirutavaid trappe, oma nokki teritavaid stepihanesid. Niisuguse nägemisteravuse tõttu oli Vasjal peale maailma, mida nägid kõik, veel teine, oma isiklik, kellelegi kättesaamatu ja tõenäoliselt väga kaunis maailm, sest kui ta vaatles ja vaimustus, oli raske teda mitte kadestada.»

Imelik on mõelda, et selle hämmastava muudatuse tekitamiseks on küllaldane ainult alandada nägemisteravuse piir 1′-st ½′-ni või selle lähedale...

Mikroskoopide ja teleskoopide imepärane toime rajaneb samale põhimõttele. Nende riistade ülesandeks on vaadeldavast esemest lähtuvate kiirte teed sel viisil muuta, et nad satuksid silma järsult laiali mineva kimbukesena; seetõttu paistab objekt suurema vaatenurga all. Kui räägitakse, et mikroskoop või teleskoop suurendab 100 korda, siis tähendab see, et me nende abil näeme esemeid 100 korda suurema nurga all kui palja silmaga. Ja siis muutuvad üksikasjad, mis paljale silmale on varjatud nägemisteravuse piiri taha, meie nägemisele kättesaadavaks. Täiskuud näeme 30′-se nurga all; et aga Kuu läbimõõt on 3500 km, siis muutub iga osa Kuu pinnast, mille läbimõõt on $\frac{3500}{30}$, s. o. ligikaudu 120 km, paljale silmale vaevueraldatavaks punktiks. Teleskoobis, mis suurendab 100 korda, jäävad eraldamatuks juba palju väiksemad alad — läbimõõduga $\frac{120}{100}$ km = 1,2 km, teleskoobis 1000-kordse suurendusega aga 120 m läbimõõduga alad. Siit muuseas järeldub, et kui Kuul oleksid sellised ehitused nagu meie suurtehased ning ookeanilaevad, siis võiksime neid tänapäeva teleskoopides näha[1].

Piir-minuti reeglil on suur tähtsus ka meie harilikel, iga-

[1] Ainult tingimusel, et Maa atmosfäär oleks täiesti läbipaistev ja homogeenne. Tegelikult ei ole õhk ühtlane ega täielikult läbipaistev; seetõttu muutub suurte suurenduste puhul pilt uduseks ja moondub. See paneb piiri eriti tugevate suurenduste kasutamisele ja sunnib astronoome viima observatooriume kõrgetele mäetippudele läbipaistvasse õhku.

päevastel vaatlustel. Vastavalt sellele meie nägemise iseärasusele muutuvad iga meist 3400 või rohkem korda oma läbimõõdust kaugemal oleva (s. o. 57 · 60) eseme kontuurid meile eraldamatuks ja sulavad kokku punktiks. Seepärast, kui keegi teile kinnitab, et ta palja silmaga tundis ära inimese näo veerandi kilomeetri kauguselt, ärge uskuge teda, sest tal peab sel juhul olema fenomenaalne nägemine. On ju inimese silmade vaheline kaugus ainult 3 cm; tähendab, mõlemad silmad liituvad üheks punktiks juba 3·3400 cm, s. o. 100 m kaugusel. Suurtükiväelased kasutavad seda silmamõõdulisel kauguse hindamisel. Nende reeglite järgi on juhul, kui inimese silmad paistavad eemalt kahe eraldiseisva punktina, kaugus temani mitte üle 100 sammu, (s. o. 60—70 m). Meie saime suurema kauguse — 100 m; see näitab, et sõjaväelased arvestavad mõnevõrra vähendatud nägemisteravust (30% võrra).

Ülesanne

Kas normaalse nägemisega inimene võib eraldada ratsanikku 10 km kauguselt, kasutades kolm korda suurendavat binoklit?

Lahendus

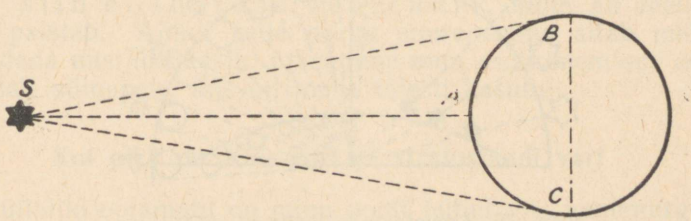
Ratsaniku kõrgus on 2,2 m. Tema kontuurid muutuvad harilikule silmale punktiks 2,2·3400 (m) = 7 km kaugusel; binoklis aga, mis suurendab kolm korda — 21 km kaugusel. Seega on 10 km kauguselt teda võimalik niisuguse binokliga eraldada (juhul, kui õhk on küllaldaselt läbipaistev).

Kuu ja tähed horisondil

Ka kõige tähelepanematum vaatleja teab, et horisondi lähedal olev täiskuu paistab tunduvalt suuremana kui kõrgel taevas asetsev. Erinevus on niivõrd suur, et raske on seda mitte märgata. Sama on maksev ka Päikese kohta: on teada, kui suur näib Päike tõusul ja loojangul, võrreldes tema mõõdetega kõrgel taevavõlvil, näiteks siis, kui ta paistab läbi pilve (silmadele on kahjulik vaadata heledasse Päikesesse!).

Tähtede puhul ilmneb see iseärasus selles, et horisondile lähenedes näib kaugus nende vahel suurenevat. Kes on talvel näinud ilusat tähtkuju Orioni (või suvel Luike) kõrgel taevas ja madalal horisondi kohal, seda hämmastas kindlasti tähtkuju mõõdete suur erinevus mõlemas asendis.

Kõik see on seda mõistatuslikum, et vaadeldes taevakehi tõusul või loojangul, ei asetse nad meile mitte lähemal, vaid vastupidi — meist kaugemal (Maa raadiuse võrra), nagu on kerge mõista jooniselt 74: seniidis olevana näeme taevakeha punktist *A*, horisondil olevana punktist *B* või *C*. Mispärast siis Kuu, Päike ja tähtkujud horisondi lähedal suurenevad?



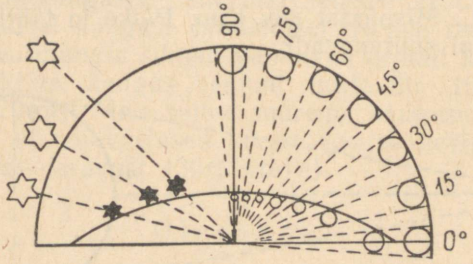
Joon. 74. Miks Päike on horisondil asetsedes vaatlejast kaugemal kui seniidis olles.

«Sellepärast, et see pole õige,» võiks vastata. See on silmapete. Rehakujulise või mõne muu nurgamõõtja abil on kerge veenduda, et kuuketas paistab mõlemal juhul ühe ja sama ½°-se vaatenurga all[1]. Kasutades sama mõõduriista või «Jakobi keppi», võib veenduda, et ka tähtedevahelised nurkkaugused ei muutu, kus ka tähtkuju ei asuks: seniidis või horisondil. Tähendab, suurenemine on optiline pettus, millele alluvad eranditult kõik inimesed.

Millega seletada nii tugevat ja üldist silmapetet? Vaieldamatut vastust sellele küsimusele, niipalju kui meil on teada, ei ole teadus veel andnud, ehkki ta püüab seda lahendada juba 2000 aasta jooksul, alates Ptolemaiose ajast. See illusioon on seoses nähtusega, et taevalaotus ei paista meile mitte poolkerana sõna geomeetrilises mõttes,

[1] Mõõtmised, mis on läbi viidud täpsemate instrumentidega, näitavad, et Kuu nähtav diameeter on horisondi lähedal isegi väiksem, sest refraktsiooni tagajärjel on Kuu ketas mõnevõrra lapik.

vaid kera segmendina, mille kõrgus on 2—3 korda väiksem aluse raadiusest. Põhjus on selles, et pea ja silmade hariliku asendi puhul hinnatakse kaugusi horisontaalses ja sellele lähedastes suundades suurematena kui vertikaalsuunas: horisontaalsuunas vaatleme eset «otsepilguga», igas teises suunas aga kas ülestõstetud või allalastud silmadega. Kui Kuud vaadelda selili lamades, siis ta, vastupidi, paistab suuremana seniidis asudes ja väiksemana, kui ta asub madalal horisondi kohal.[1] Psühholoogide ja füsio-



Joon. 75. Taevalaotuse lapikuse mõju taevakehade näivatele mõõdetele.

loogide ülesandeks on selgitada, m i s p ä r a s t eseme näivad mõõted olenevad meie silmade vaatesuunast.

Mis puutub aga taevalaotuse näiva lapikuse mõjusse tähtede suurustele tema mitmesugustes osades, siis saab see täiesti selgeks joonisel 75 kujutatud skeemilt. Kuuketas on taevalaotusel alati nähtav poolekraadise nurga all, vaatamata sellele, kas Kuu on horisondil (kõrgus 0°) või seniidis (90°). Kuid meie silmale ei paista kuuketas alati ühel ja samal kaugusel olevat: seniidis oleva Kuu toob silm meile palju lähemale kui horisondil asetseva ja seetõttu kujutleme tema suurust erinevana — ühe ja sama nurga haarade vahele mahub tipu lähedale väiksem ring

[1] Eelmistes «Huvitava geomeetria» väljaannetes seletas J. I. Perelman Kuu näivat suurenemist horisondil sellega, et me näeme teda horisondil k õ r v u t i teiste kaugete esemetega, kuna aga tühjas taevalaotuses näeme teda üksi. Kuid samasugust illusiooni võime tähele panna ka täiesti tühjal horisondil mere kohal, nii et kirjeldatud efekti niisugust selgitust tuleb lugeda ebarahuldavaks. *(Originaali toimetaja märkus.)*

kui tipust kaugemale. Sama joonise vasakul poolel on näidatud, kuidas sel põhjusel tähtedevahelised kaugused nende lähenedes horisondile nagu veniksid suuremaks: võrdsed nurkkaugused nende vahel paistavad siis mittevõrdseina.

Sellel nähtusel on ka teine õpetlik külg. Kui te imetlesite Kuu tohutut ketast horisondi lähedal, kas te siis panite temal tähele kasvõi ühtegi uut joont, mida teil ei ole võimalik olnud tähele panna kõrgelseisva Kuu kettal? Ei. Aga teie ees oli ju ometi suurendatud ketas, miks siis ei olnud näha uusi üksikasju? Seetõttu, et siin ei ole tegemist niisuguse suurendusega, mille annab näiteks binokkel: siin ei suurene vaatenurk, mille all meile ese paistab. Ainult selle nurga suurenemine aitab meil eraldada uusi üksikasju; igasugune muu «suurenemine» on lihtsalt silmapete, mis on meile täiesti kasutu[1].

Kui pikk on Kuu vari ja stratostaadi vari

Küllaltki ootamatu on minu poolt leitud viis vaatenurga kasutamiseks ülesannete puhul, mis käsitlevad mitmesuguste kehade poolt ruumi heidetavate varjude pikkuste arvutamist. Kuu näiteks heidab maailmaruumi koonusekujulise varju, mis saadab teda kõikjal.

Kui kaugele ulatub see vari?

Et seda arvutada, ei ole vaja tugineda kolmnurkade sarnasusele ega koostada võrret, mis sisaldaks Kuu ja Päikese läbimõõte ning Kuu ja Päikese vahelist kaugust. Arvutuse võib teostada palju lihtsamalt. Kujutlege, et teie silm asetseb punktis, kus lõpeb Kuu varju koonus, s. o. selle koonuse tipus, ja te vaatlete sealt Kuud. Mida te näete? Kuu musta ketast, mis katab Päikese. Vaatenurk, mille all paistab meile Kuu (või Päikese) ketas, on teada: see on pool kraadi. Kuid me teame juba, et ese, mis paistab poolekraadise nurga all, on vaatlejast $2 \cdot 57 = 114$ korda oma läbimõõdust kaugemal. Tähendab, Kuu varju koonuse tipp asub Kuust 114 tema läbimõõdu kaugusel. Siit leiame, et Kuu varju pikkus on

$$3500 \cdot 114 \approx 400\,000 \text{ (km)}.$$

[1] Täpsemalt vt. sama autori raamatust «Huvitav füüsika» (Tartu, 1949), 2. raamat, IX peatükk.

Ta on suurem kui Maa kaugus Kuust; seetõttu võivadki tekkida täielikud päikesevarjutused (maakera pinna kohtades, kuhu see vari langeb).

Ei ole raske arvutada ka Maa varju pikkust ruumis: see on nii mitu korda pikem Kuu varjust, kui mitu korda Maa läbimõõt on suurem Kuu läbimõõdust, s. o. umbes neli korda.

Sama võtte abil on võimalik ka väiksemate esemete ruumiliste varjude pikkuste arvutamine. Leiame näiteks, kui kaugele ruumi ulatub stratostaadi «COAX-I» varju koonus, kui tema kest on kerakujuline. Et stratostaadi kera läbimõõt on 36 m, siis on tema varju pikkus (nurk varju koonuse tipus on sama — pool kraadi)

$$36 \cdot 114 \approx 4100 \text{ (m)}$$

ehk umbes 4 km.

Kõigil vaadeldud juhtudel oli juttu loomulikult t ä i s v a r j u, mitte aga poolvarju pikkusest.

Kas pilved on maapinnast kõrgel?

Meenutage, kuidas teid hämmastas pikk silmusekujuline valge teeke, kui te seda esimest korda nägite kõrgel selges sinitaevas. Nüüd te muidugi juba teate, et see pilveriba on lennuki omapärane «autogramm», mis on jäetud tema poolt õhuruumi oma sealviibimise «mälestuseks».

Jahtunud, niiskes ja tolmurikkas õhus kujuneb kergesti udu.

Lennuk paiskab õhus liikudes vahetpidamatult välja väikesi osakesi — mootori töö produkte, ja need osakesed on punktideks, mille ümber tihenevad veeaurud; nii tekib pilv.

Kui määrata selle pilve kõrgus enne tema hajumist, siis võib umbkaudu otsustada ka selle üle, kui kõrgele tõusis meie vapper lendur oma lennukil.

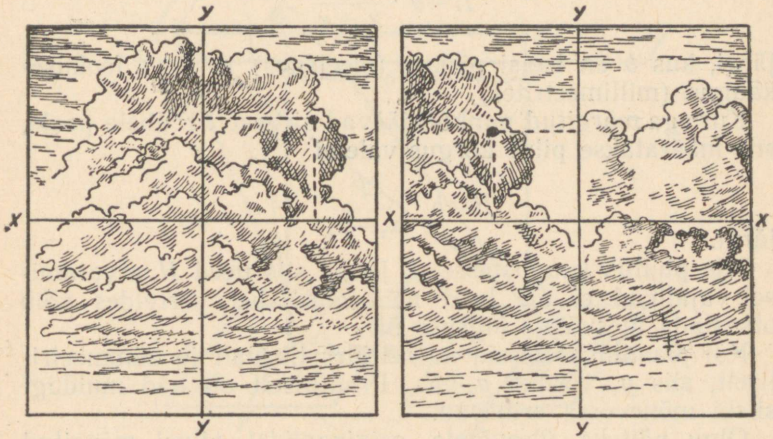
Ülesanne

Kuidas määrata pilve kõrgus maapinnast, kui ta ei ole isegi veel meie pea kohal?

Suurte kõrguste määramisel tuleb appi võtta harilik fotoaparaat — küllaltki keerukas, kuid meie ajal noorsoo poolt armastatud ja küllaldaselt levinud riist.

Käesoleval juhul läheb vaja kaht fotoaparaati ühesuguste fookusekaugustega. (Fookusekaugus on harilikult märgitud aparaadi objektiivi äärisel.)

Mõlemad fotoaparaadid asetatakse kõrguse suhtes enamvähem võrdsetele alustele.



Joon. 76. Pilve kujutis kahel ülesvõttel.

Maastikul võivad nendeks alusteks olla kolmjalad, linnas katuseharjad. Alustevaheline kaugus peab olema selline, et üks vaatleja võiks teist näha vahetult või binokliga.

See kaugus (baas) mõõdetakse või määratakse kindlaks antud koha kaardi või plaani järgi. Fotoaparaadid asetatakse nii, et nende optilised teljed oleksid paralleelsed. Nad võib suunata näiteks seniiti.

Kui fotografeeritav objekt ilmub fotoaparaadi objektiivi vaateväljale, annab üks vaatlejatest teisele signaali, näiteks rätiku lehvitamisega, ja selle signaali järgi teostavad mõlemad vaatlejad üheaegselt ülesvõtte.

Fotodele, mis mõõdete poolest peavad olema täpselt võrdsed fotoplaatidega, tõmmatakse sirged *YY* ja *XX*, mis

ühendavad ülesvõtete vastastikuste servade keskpunkte (joon. 76).

Pärast seda märgitakse kummalgi ülesvõttel üks ja sama pilvepunkt ja leitakse tema kaugus (millimeetrites) sirgetest *YY* ja *XX*. Need kaugused tähistatakse vastavalt tähtedega x_1 ja y_1 ühel ülesvõttel ning tähtedega x_2 ja y_2 teisel ülesvõttel.

Kui märgitud punktid satuvad ülesvõtteil kahele poole sirget *YY* (nagu joonisel 76), siis leitakse pilve kõrgus *H* valemi

$$H=b \cdot \frac{F}{x_1+x_2}$$

järgi, kus *b* on baasi pikkus (meetrites) ja *F* — fookusekaugus (millimeetrites).

Kui aga märgitud punktid jäävad sirgest *YY* ühele poole, siis määratakse pilve kõrgus valemi

$$H=b \cdot \frac{F}{x_1-x_2}$$

järgi.

Mis puutub kaugustesse y_1 ja y_2, siis need *H* arvutamisel vajalikud ei ole, kuid neid omavahel võrreldes võib otsustada ülesvõtete õigsuse üle.

Kui plaadid asetsesid kassettides tihedalt ja sümmeetriliselt, siis y_1 võrdub y_2-ga. Praktiliselt on nad muidugi siiski mõnevõrra erinevad.

Olgu näiteks ülesvõtete *originaalidel* pilvel märgitud punkti kaugused sirgetest *YY* ja *XX* järgmised:

$$x_1=32 \text{ mm}, \; y_1=29 \text{ mm},$$
$$x_2=23 \text{ mm}, \; y_2=25 \text{ mm}.$$

Objektiivide fookusekaugus $F=135$ mm ja kaugus fotoaparaatide vahel[1] (baas) $b = 937$ m.

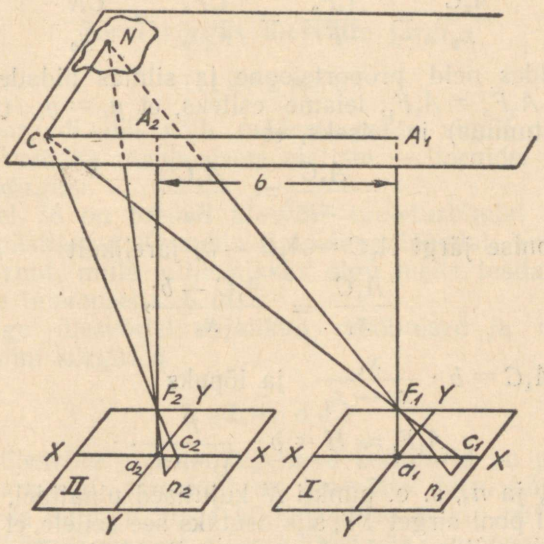
Ülesvõtted näitavad, et pilve kõrguse määramiseks tuleb kasutada valemit

$$H = b \cdot \frac{F}{x_1+x_2};$$

[1] Vastavalt raamatus «Н. Ф. Платонов — Приложение математического анализа к решению практических задач» kirjeldatud katsele. Artiklis «Высота облаков» näitab autor valemi tuletamist *H* arvutamiseks, kirjeldab teisi võimalikke aparaatide asetusi pilve fotografeerimiseks ja annab rea praktilisi nõuandeid.

$H = 937\ (\text{m}) \cdot \frac{135}{32 + 23} \approx 2300$ m, s. o. fotografeeritud pilv asetses maapinnast umbes 2,3 km kõrgusel.

Need, kes soovivad analüüsida pilve kõrguse määramise valemi tuletamist, võivad selleks kasutada joonisel 77 kujutatud skeemi.



Joon. 77. Pilvepunkti kujutamise skeem kahe seniiti suunatud fotoaparaadi plaatidel.

Joonisel 77 toodud skeemi tuleb kujutleda ruumis (ruumilist kujutlust arendab geomeetria see osa, mida nimetatakse stereomeetriaks).

Kujundid I ja II esitavad fotoplaate; F_1 ja F_2 on fotoaparaatide objektiivide optilised tsentrid; N — vaadeldav pilvepunkt; n_1 ja n_2 — punkti N kujutised fotoplaatidel; a_1A_1 ja a_2A_2 — kummagi fotoplaadi keskpunktist pilve tasapinnani tõmmatud ristlõigud; $A_1A_2 = a_1a_2 = b$ — baasi pikkus.

Kui liikuda optilisest tsentrist F_1 üles punkti A_1, edasi punktist A_1 piki baasi punkti C, mis on täisnurga A_1CN tipuks, ja lõpuks punktist C punkti N, siis vastavad lõikudele F_1A_1, A_1C ja CN fotoaparaadis lõigud $F_1a_1 = F$

(fookusekaugus), $a_1c_1 = x_1$ ja $c_1n_1 = y_1$. Analoogiline on konstruktsioon ka teise fotoaparaadi jaoks. Kolmnurkade sarnasusest järelduvad võrded

$$\frac{A_1C}{x_1} = \frac{A_1F_1}{F} = \frac{CF_1}{F_1c_1} = \frac{CN}{y_1}$$

ja

$$\frac{A_2C}{x_2} = \frac{A_2F_2}{F} = \frac{CF_2}{F_2c_2} = \frac{CN}{y_2}.$$

Võrreldes neid proportsioone ja silmas pidades ilmset võrdust $A_2F_2 = A_1F_1$, leiame esiteks, et $y_1 = y_2$ (ülesvõtte õigsuse tunnus) ja teiseks, et

$$\frac{A_1C}{x_1} = \frac{A_2C}{x_2}.$$

Kuid joonise järgi $A_2C = A_1C - b$, järelikult

$$\frac{A_1C}{x_1} = \frac{A_1C - b}{x_2},$$

millest $A_1C = b \cdot \frac{x_1}{x_1 - x_2}$ ja lõpuks

$$A_1F_1 \approx H = b \cdot \frac{F}{x_1 - x_2}.$$

Kui n_1 ja n_2, s. o. punkti N kujutised plaatidel, asetseksid kahel pool sirget YY, siis osutaks see sellele, et punkt C asetseb punktide A_1 ja A_2 vahel; siis $A_2C = b - A_1C_1$ ja otsitav kõrgus

$$H = b \cdot \frac{F}{x_1 + x_2}.$$

Need valemid kehtivad ainult sel juhul, kui fotoaparaatide optilised teljed on suunatud seniiti. Kui pilv on seniidist kaugel ja ei satu aparaatide vaatevälja, siis võite aparaatidele anda ka teise asendi (säilitades optiliste telgede paralleelsuse), näiteks suunata nad horisontaalselt ja seejuures risti või piki baasi.

Aparaatide iga asendi jaoks on vaja varem konstrueerida vastav joonis ja tuletada valemid pilve kõrguse määramiseks.

Äkki, «nagu selgest taevast», ilmusid taevasse heledad, märgatavalt sulgjad kõrgelasetsevad pilved. Määrake

nende kõrgus teatud ajavahemike tagant kaks-kolm korda. Kui osutub, et pilved on madalamale laskunud, siis on see ilma halvenemise tundemärk: mõne tunni pärast võib oodata vihma.

Fotografeerige lendav aerostaat või stratostaat ja määrake selle kõrgus.

Torni kõrgus ülesvõtte järgi

Ülesanne

Fotoaparaadi abil võib määrata mitte ainult pilve või lennuki, vaid ka maapealsete ehitiste — tornide, mastide jms. — kõrgusi.

Joonisel 78 on toodud ülesvõte tuuleturbiinist ЦВЭИ, mis on püstitatud Krimmis Balaklava lähedal. Torni aluseks on ruut, mille külje pikkus olgu meile teada vahetu mõõtmise tulemusena: 6 m.

Teostage ülesvõttel vajalikud mõõtmised ja määrake tuuleturbiini kõrgus h.

Lahendus

Torni ülesvõte ja tema tegelikud kontuurid on geomeetriliselt sarnased. Järelikult on ülesvõttel torni kõrgus nii mitu korda suurem aluse külje pikkusest, kui mitu korda on torni kõrgus suurem aluse küljest või diagonaalist tegelikkuses.

Ülesvõtte mõõtmise tulemused: aluse kõige vähem moonutatud diagonaali pikkus on 23 mm, kogu seadme kõrgus 71 mm.

Et torni ruudukujulise aluse külje pikkus on 6 m, siis aluse diagonaal on $\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}=8{,}48\ldots$ (m).

Järelikult

$$\frac{71}{23} = \frac{h}{8{,}48},$$

millest

$$h = \frac{71 \cdot 8{,}48}{23} \approx 26 \text{ (m)}.$$

Loomulikult ei kõlba igasugune ülesvõte, vaid ainult niisugune, millel proportsioonid ei ole moonutatud, nagu seda esineb vilumatutel fotograafidel.

Iseseisvaks harjutamiseks

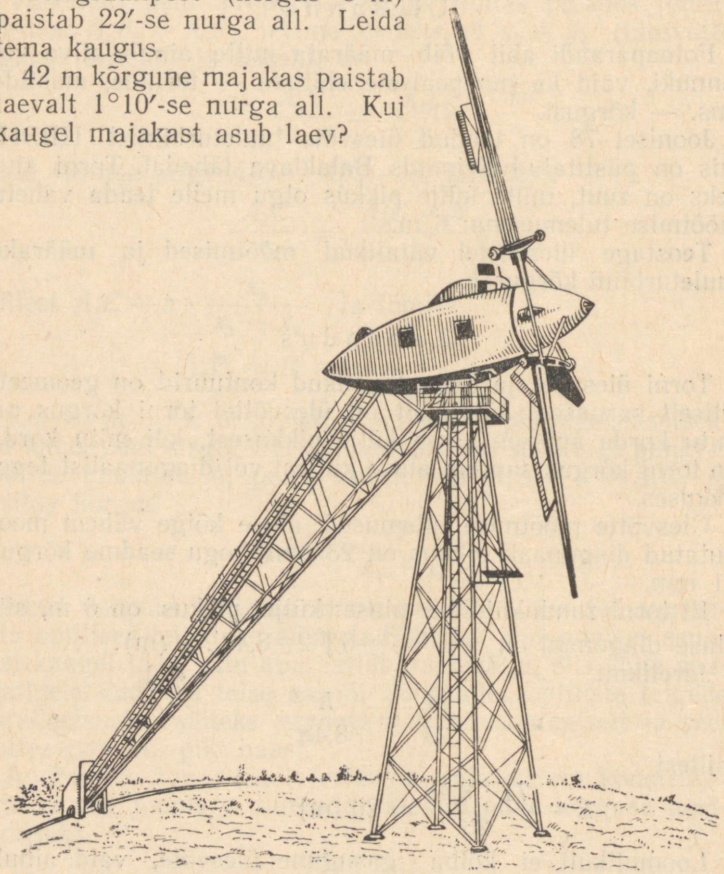
Kasutagu lugeja nüüd sellest peatükist ammutatud teadmisi rea järgnevate mitmekesiste ülesannete lahendamiseks:

Keskmise kasvuga (1,7 m) inimene paistab eemalt 12′-se nurga all. Leida tema kaugus.

Ratsanik hobusel (2,2 m kõrge) paistab eemalt 9′-se nurga all. Leida tema kaugus.

Telegraafipost (kõrgus 8 m) paistab 22′-se nurga all. Leida tema kaugus.

42 m kõrgune majakas paistab laevalt 1°10′-se nurga all. Kui kaugel majakast asub laev?



Joon. 78. Tuuleturbiin ЦВЭИ Krimmis.

Maakera paistab Kuult 1°54′-se nurga all. Määrata Maa ja Kuu vaheline kaugus.

2 km kauguselt paistab ehitis 12′-se nurga all. Leida ehitise kõrgus.

Kuu paistab Maalt 30′-se nurga all. Teades, et Kuu kaugus on 380 000 km, määrata tema läbimõõt.

Kui suured peavad olema tähed klassitahvlil, et õpilased pinkides istudes näeksid neid sama selgelt kui tähti oma raamatutes (25 cm kaugusel silmadest)? Tahvli kauguseks pinkidest võtta 5 m.

Mikroskoop suurendab 50 korda. Kas võib temas vaadelda inimese vereliblesid, mille läbimõõt on 0,007 mm?

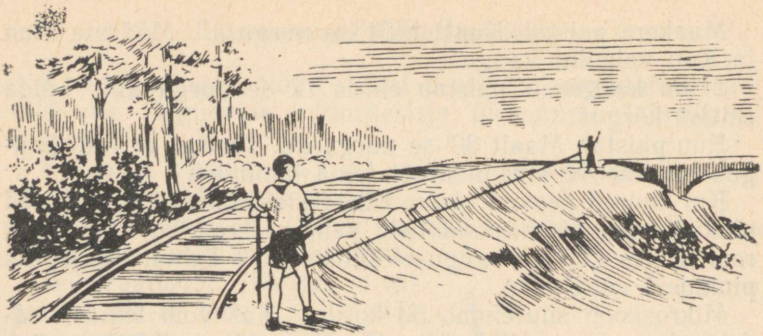
Kui Kuul elaksid meie kasvu inimesed, kui suur peaks siis olema teleskoobi suurendusvõime, et eraldada neid Maalt?

Mitu «tuhandikku» on üks kraad?

Mitu kraadi on üks «tuhandik»?

Lennuk, mis lendab risti meie vaatlussuunaga, läbib 10 sekundi jooksul kauguse, mis paistab nurga all 300 «tuhandikku». Määrata lennuki kiirus, kui tema kaugus on 2000 m.





NELJAS PEATÜKK

GEOMEETRIA TEEDEL

Sammudega mõõtmise oskus

Kui te jalutuskäigul linnast välja satute raudteetammile või maanteele, siis võite teostada rea huvitavaid geomeetrilisi harjutusi.

Kõigepealt kasutage maanteed selleks, et mõõta oma sammu pikkust ja käigu kiirust. See annab teile võimaluse sammudega kaugusi mõõta — oskus, mis pärast lühiajalist harjutamist omandatakse küllaltki kergesti. Siin on peamine — õppida samme tegema alati ühesuguse pikkusega, s. o. omandada kindel «mõõtmiskõnnak».

Suurematel maanteedel on iga 100 m järel asetatud valge kivi; läbides sellise 100-meetrise vahemaa oma harilike «mõõtmissammudega» ja lugedes sammude arvu, leiate kergesti oma sammu keskmise pikkuse. Niisuguseid mõõtmisi tuleb korrata igal aastal, näiteks igal kevadel, sest sammu pikkus, eriti noortel inimestel, ei jää muutumatuks.

Juhime tähelepanu huvitavale suhtele, mis on kindlaks tehtud korduvate mõõtmistega: täiskasvanud inimese sammu keskmine pikkus võrdub umbes poolega tema keha pikkusest silmade kõrguseni. Kui näiteks inimese silmade

kõrgus on 1 m 40 cm, siis on tema sammu pikkus umbes 70 cm. Võimaluse korral on huvitav seda reeglit kontrollida.

Peale oma sammu pikkuse on kasulik teada ka oma käigu k i i r u s t — tunnis läbitavate kilomeetrite arvu. Mõnikord kasutatakse selleks järgmist reeglit: me läbime tunnis nii mitu kilomeetrit, kui mitu sammu teeme 3 sekundi jooksul; näiteks kui me 3 sekundi jooksul teeme 4 sammu, siis läbime tunnis 4 km. Kuid see reegel on kasutatav ainult sammu teatud pikkuse juures. Ei ole raske määrata, missuguse juures nimelt: tähistades sammu pikkuse meetrites x-ga ja sammude arvu kolme sekundi jooksul n-ga, saame võrrandi

$$\frac{3600}{3} \cdot nx = n \cdot 1000,$$

millest $1200x = 1000$ ja $x = {}^5/_6$ m, s. o. umbes 80—85 cm. See on võrdlemisi pikk samm; niisuguste sammudega astub pikakasvuline inimene. Kui teie samm erineb 80—85 cm-st, siis tuleb teil oma käigu kiiruse mõõtmine läbi viia teisel viisil, määrates kella järgi, kui kiiresti läbite vahemaa kahe teetulba vahel.

Silmamõõt

Kasulik ja mugav on osata kaugusi mõõta mitte ainult mõõdulindi ja sammudega, vaid hinnata neid ka silma järgi, mõõtmist teostamata. See oskus saavutatakse ainult harjutamise teel. Minu kooliaastail, kus ma grupi seltsimeestega võtsin osa suvistest ekskursioonidest linnast välja, olid meil niisugused harjutused tavalised. Nad kujunesid omamoodi spordiks, mis oli meie enda poolt välja mõeldud — silmamõõdu täpsuse võistluseks. Maanteele jõudes määrasime kindlaks mingisuguse teeäärse puu või mõne muu kaugema eseme, ja võistlus algas.

«Mitu sammu on puuni?» küsis üks mängust osavõtjaist. Ülejäänud nimetasid oletatava sammude arvu ja pärast seda lugesid kõik koos samme, et määrata, kelle hinnang oli lähim tegelikkusele — see oligi võitja. Siis tuli tema järjekord määrata ese silmamõõduliseks kauguse hindamiseks.

Kes määras kauguse teistest täpsemini, sai ühe punkti. Pärast 10-ndat korda loeti punktid kokku: see, kes sai kõige suurema arvu punkte, loeti võistluse võitjaks.

Mäletan, et esimestel kordadel me hindasime kaugusi suure veaga. Kuid väga ruttu — palju rutem, kui võis oodata — omandasime kauguste silmamõõdulise määramise oskuse nii hästi, et eksisime vaid õige vähe. Ainult olukorra järsul muutumisel, näiteks lagedalt väljalt hõredasse metsa või põõsastikuga kaetud maa-alale üleminekul, tagasipöördumisel tolmustele, kitsastele linnatänavatele ja samuti öösel Kuu petlikul valgusel tegime suuri vigu. Hiljem siiski õppisime kohanema igasugustes olukordades, mõttes neid silmamõõdulisel hindamisel arvestades. Lõpuks saavutas meie grupp kauguste silmamõõdulisel hindamisel niisuguse täiuslikkuse, et tuli sellest spordist täiesti loobuda: kõik mõistatasid ühevõrra hästi ja võistlus kaotas huvitavuse. Selle-eest omandasime aga küllaltki hea silmamõõdu, mis osutas meile suuri teeneid meie rännakutel linnast välja.

On huvitav, et silmamõõt näib mitte sõltuvat nägemise teravusest. Meie grupi hulgas oli lühinägelik poiss, kes mitte ainult ei jäänud teistest silmamõõdu täpsuses maha, vaid mõnikord isegi tuli võistlusest välja võitjana. Seevastu ühel täiesti normaalse nägemisega poisil ei õnnestunud kuidagi omandada oskust silmamõõduliseks kauguste määramiseks. Hiljem panin sedasama tähele ka puude kõrguse silmamõõdulisel määramisel: harjutades seda üliõpilastega — mitte enam mängimiseks, vaid tulevase elukutse vajadusteks, — märkasin ma, et lühinägelikud omandasid selle oskuse mitte sugugi halvemini teistest. See on nagu lohutuseks lühinägelikele: omamata nägemise teravust, on nad siiski võimelised arendama täiesti rahuldavat silmamõõtu.

Kauguste silmamõõdulise hindamise harjutusi võib teha igal aastaajal ja igasuguses olukorras. Minnes mööda linnatänavat, võite esitada endale silmamõõdulisi ülesandeid, püüdes oletada, mitu sammu on lähima laternani, ühe või teise teeäärse esemeni. Halva ilmaga inimtühjadel tänavatel liikudes leiate niiviisi märkamatult ajaviidet.

Kauguste silmamõõdulisele määramisele pööravad suurt tähelepanu sõjaväelased: hea silmamõõt on vajalik luurajale, laskurile, suurtükiväelasele. Huvitav on tutvuda nende

tunnusmärkidega, mida nad kasutavad silmamõõduliste hinnangute praktikas. Esitame siin mõningaid märkmeid suurtükiasjanduse õpikust:

«Silma järgi määratakse kaugust kas harjumuse abil eraldada nähtavate esemete erinevaid kaugusi vaatlejast vastavalt nende nähtavuse selgusele või hinnatakse kaugust mingi silmale harjunud 100—200-sammulise vahemaaga, mis paistab seda väiksem, mida kaugemal ta vaatlejast asetseb.

Kauguse määramisel nähtavate esemete selguse astme järgi tuleb silmas pidada, et valgustatud või ereda värvi poolest maastikust eralduvad, samuti veepinnal asetsevad esemed tunduvad lähematena; lähematena näivad ka esemed, mis asetsevad teistest kõrgemal, esemete grupid võrreldes üksikute esemetega ja üldse suuremad esemed.

Võib juhinduda järgmistest tunnustest: 50 sammu kauguseni võib selgesti eraldada inimeste silmi ja suud; 100 sammuni paistavad silmad punktidena; 200 sammu kauguselt võib veel eraldada nööpe ja muid vormiriietuse tunnuseid; 300 sammu kauguselt on näha nägu; 400 sammu kauguselt eraldame jalgade liikumist; 500 sammu kauguselt on näha mundri värv.»

Seejuures teeb terav silm vea kuni 10% määratavast kaugusest kas ühele või teisele poole.

Muuseas, on ka juhtumeid, kus silmamõõdu vead on palju tunduvamad. Esiteks kauguste määramisel tasasel, täiesti ühevärvilisel pinnal — jõe- või järvepinnal, lagedal liivasel tasandikul, tihedal viljapõllul. Siin paistavad kaugused alati tõelistest väiksematena; neid silma järgi hinnates eksime kaks või rohkemgi korda. Teiseks eksime kergesti, määrates kaugust niisuguse esemeni, mille alus on varjatud raudteetammiga, künkaga, ehitisega, üldse mingisuguse kõrgendikuga. Neil juhtudel arvame tahtmatult, et ese asetseb mitte kõrgendiku t a g a, vaid k õ r g e n d i k u l e n d a l, ja järelikult teeme jällegi vea määratava kauguse vähendamise suunas (joon. 79 ja 80).

Niisugustel juhtudel on kardetav toetuda silmamõõdule ja tuleb kasutada teisi kauguse määramise viise, millest meil oli juba juttu ja millest veel räägime.



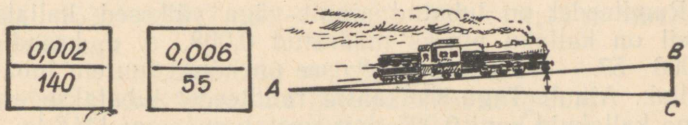
Joon. 79. Künka taga asetsev puu paistab lähedasena.



Joon. 80. Jõuame künkale, kuid puuni on veel niisama palju maad.

Piki raudteetammi näete peale versta- (täpsemalt kilomeetri-) postide veel teisi madalaid poste paljudele arusaamatute pealkirjadega kallaku all nende külge kinnitatud lauakestel, nagu on kujutatud joonisel 81.

Need on «kallakumärgid». Esimese lauakese ülemine arv 0,002 näiteks tähendab, et tee kallak on siin 0,002 (kummale poole, seda näitab lauakese asend): tee tõuseb või langeb 2 mm iga tuhande millimeetri kohta.



Joon. 81. «Kallakumärgid».

Alumine arv 140 näitab, et kallak on niisugune 140 m kauguseni, kuhu on asetatud teine märk kallaku uue suurusega. (Kui teed ei olnud veel ümber korraldatud meetrimõõdustiku alusel, siis niisugune lauake tähendas, et 140 sülla ulatuses tee iga süld tõuseb või langeb 0,002 sülla võrra.) Teine lauake pealkirjaga $\frac{0{,}006}{55}$ näitab, et lähima 55 m ulatuses tee tõuseb või langeb iga meetri kohta 6 mm.

Teades kallakumärkide mõtet, võite kergesti arvutada tee kahe nende märkidega tähistatud naaberpunkti kõrguste vahe. Esimesel juhul näiteks on kõrguste vahe $0{,}002 \cdot 140 = 0{,}28$ (m); teisel juhul $0{,}006 \cdot 55 = 0{,}33$ (m).

Raudteeasjanduses, nagu näete, ei määrata tee kallaku suurust kraadides. Neid kallakutähiseid on aga kerge kraadidesse üle viia. Kui AB (joon. 81) on tee suund ja BC punktide A ja B kõrguste vahe, siis AB kallak horisontaali AC suhtes on postil märgitud suhtega $\frac{BC}{AB}$. Et nurk A on väga väike, siis võib AB ja AC lugeda ringjoone raa-

diusteks, mille kaar on BC.[1] Kui suhe $BC : AB$ on teada, siis ei ole raske arvutada nurka A. Näiteks kallaku puhul, mis on tähistatud 0,002-ga, arutleme järgmiselt: kaarele, mille pikkus on $\frac{1}{57}$ raadiuse pikkusest, vastab nurk 1° (vt. lk. 83); kui suur nurk vastab siis kaarele, mis moodustab 0,002 raadiuse pikkusest? Tema suuruse x leiame võrdest

$$x : 1° = 0{,}002 : \frac{1}{57}, \text{ millest } x = 0{,}002 \cdot 57 = 0{,}11°,$$

s. o. umbes 7′.

Raudteedel on lubatud ainult väga väikesed kallakud. Meil on kallaku piiriks määratud 0,008, s. o. kraadides $0{,}008 \cdot 57$ — vähem kui ½°: see on kõige suurem lubatav kallak. Ainult Taga-Kaukaasia raudteedel lubatakse erandina kallakuid kuni 0,025, mis vastab peaaegu 1½°-le.

Nii väikesi kallakuid me üldse ei märka. Jalakäija hakkab tajuma pinnase kallakut oma jalgade all alles siis, kui see ületab 1/24: sellele vastab kraadimõõdus 57/24, s. o. 2½°.

Minnes mõne kilomeetri piki raudteed ja seejuures kallakumärke üles kirjutades, võite arvutada, kui palju te kokkuvõttes tõusite või laskusite, s. o. kui suur on alg- ja lõpp-punkti kõrguste vahe.

Ülesanne

Te alustasite jalutuskäiku piki raudteetammi tulba juurest, millele oli märgitud tõus $\frac{0{,}004}{153}$ ja kohtasite teel järgmisi tähiseid:

---

[1] Mõnele lugejale näib võib-olla lubamatuna lugeda kaldjoon AB võrdseks ristlõiguga AC. Seepärast on õpetlik veenduda selles, kui vähe erinevad AC ja AB, kui BC moodustab näiteks 0,01 AB pikkusest. Pythagorase teoreemi järgi saame:

$$AC^2 = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{AB}{100}\right)^2} = \sqrt{0{,}9999AB^2} = 0{,}99995AB.$$

Pikkuste vahe on kõigest 0,00005. Ligikaudsete arvutuste juures võib selle vea loomulikult tähele panemata jätta.

horisontaalne	tõus	tõus	horisontaalne	langus
0,000	0,0017	0,0032	0,000	0,004
60	84	121	45	210

Jalutuskäigu lõpetasite järgmise kallakutähise juures. Kui pika tee te läbisite ja kui suur on esimese ja viimase tähise kõrguste vahe?

Lahendus

Kokku on läbi käidud

$$153 + 60 + 84 + 121 + 45 + 210 = 673 \text{ (m)}.$$

Te tõusite

$$0{,}004 \cdot 153 + 0{,}0017 \cdot 84 + 0{,}0032 \cdot 121 = 1{,}15 \text{ m võrra,}$$

laskusite aga

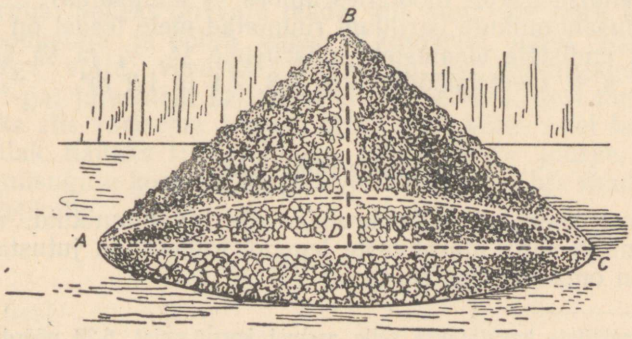
$$0{,}004 \cdot 210 = 0{,}84 \text{ m võrra,}$$

tähendab, kokkuvõttes olite lähtepunktist kõrgemal

$$1{,}15 \text{ m} - 0{,}84 \text{ m} = 0{,}31 \text{ m} = 31 \text{ cm võrra.}$$

Kruusahunnikud

Maantee ääres asetsevad kruusahunnikud kujutavad endast samuti objekti, mis väärib käsitlust meie «vabaõhugeomeetrias». Esitage küsimus, kui suur on teie ees oleva kruusahunniku ruumala, ja te püstitate geomeetrilise ülesande, mis on küllaltki keerukas inimesele, kes on harjunud matemaatilisi raskusi ületama ainult paberil või klassitahvlil.



Joon. 82. Kruusahunniku ülesande juurde.

Tuleb arvutada koonuse ruumala, kusjuures koonuse kõrgus ja tema põhja raadius ei ole vahetuks mõõtmiseks kättesaadavad. Kuid miski ei takista nende suuruste määramist kaudsel teel. Mõõtes mõõdulindi või nööriga kruusahunniku põhja ümbermõõdu ja jagades selle 6,28-ga[1], leiate raadiuse pikkuse.

Keerukam on lugu kõrgusega: tuleb mõõta (joon. 82) koonuse moodustaja *AB* pikkus või, nagu seda teevad teekümnikud, mõlemad moodustajad *ABC* korraga (visates mõõdulindi üle hunniku tipu). Pärast seda, teades põhja raadiust, arvutatakse Pythagorase teoreemi järgi kõrgus *BD*. Vaatleme näidet.

Ülesanne

Koonusekujulise kruusahunniku põhja ümbermõõt on 12,1 m ja kahe moodustaja pikkus kokku 4,6 m. Kui suur on kruusahunniku ruumala?

Lahendus

Kruusahunniku põhja raadius on

$12{,}1 \cdot 0{,}159$ (selle asemel, et $12{,}1 : 6{,}28$) $= 1{,}9$ (m).

Kõrgus on

$$\sqrt{2{,}3^2 - 1{,}9^2} = 1{,}2 \text{ (m)},$$

millest hunniku ruumala on

$$\tfrac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}9^2 \cdot 1{,}2 = 4{,}5 \text{ (m}^3\text{)}$$

(ehk endisaegsetes mõõtudes umbes ½ kuupsülda).

Kruusahunnikute harilikud ruumalad meie teedel on vastavalt endistele teealastele määrustele ½, ¼ ja ⅛ kuupsülda, s. o. meetrimõõdustikus 4,8, 2,4 ja 1,2 m³.

«Võimas-uhke kink»

Nähes koonusekujulisi kruusa- või liivahunnikuid, meenub mulle vana idarahvaste legend, millest on jutustanud Puškin oma «Ihnsas rüütlis»:

[1] Praktikas kasutatakse selle asemel korrutamist 6,28 pöördväärtusega 0,159 raadiuse määramisel ja korrutamist 0,318-ga läbimõõdu määramisel.

Kord lugesin ma,
et sõjamehi käskis nende tsaar:
Las igaüks neist peotäis mulda kannab!
Ja kerkis võimas-uhke kink,
kust tsaar võis lõbu tundes kõrgelt ringi vaadata,
nii kaugusi kui laiu välju jälgida,
nii merd, kus laevad liuglemas on veel.

See on üks neist vähestest legendidest, milles näiva tõepärasuse juures ei ole teragi tõtt. Geomeetrilise arvutusega võib näidata, et kui mõni muistne isevalitseja oleks kavatsenud sedalaadi ideed teostada, oleks ta julguse kaotanud mannetust tulemusest: tema ette oleks kerkinud niivõrd armetu kuhjake mulda, et mingi fantaasia ei oleks võimeline seda üles puhuma legendaarseks «võimas-uhkeks kinguks».

Teeme ligikaudse arvutuse. Mitu sõjameest võis olla muistsel tsaaril? Vanasti ei olnud armeed nii suurearvulised kui meie päevil. 100 000-meheline sõjavägi oli oma suuruse poolest juba väga aukartustäratav. Jääme selle arvu juurde, s. o. oletame, et küngas moodustati 100 000 peotäiest. Võtke suurim peotäis mulda, mida suudate haarata, ja pange klaasi: ühe peotäiega te klaasi ei täida. Oletame, et muistse sõjamehe peotäis oli mahu poolest $^1/_5$ liitrit (kuupdetsimeetrit). Siit saame künka ruumalaks

$$^1/_5 \cdot 100\,000 = 20\,000 \text{ (dm}^3\text{)} = 20 \text{ (m}^3\text{)}.$$

Tähendab, küngas kujutas endast koonust ruumalaga mitte üle 20 m^3. Juba see tagasihoidlik ruumala valmistab pettumuse. Kuid jatkame arvutust, et määrata selle künka kõrgus. Selleks on vaja teada, kui suur on nurk koonuse moodustaja ja põhja vahel. Käesoleval juhul võib selle nurga võtta võrdseks loomuliku kallakunurgaga, s. o. 45°-ga: järsemaid kallakuid ei saa eeldada, sest muld hakkaks siis varisema (õigem oleks isegi võtta veel lamedam kallak, näiteks 1:1,5). Jäädes 45°-se nurga juurde, teame, et niisuguse koonuse kõrgus võrdub tema põhja raadiusega; järelikult

$$20 = \frac{\pi x^3}{3},$$

millest

$$x = \sqrt[3]{\frac{60}{\pi}} = 2{,}4 \text{ (m)}.$$

Peab omama suurt kujutlusvõimet, et 2,4 m kõrgust (1½ inimese kõrgust) mullakuhikut nimetada «võimasuhkeks kinguks». Kui teha arvutus kallaku 1 : 1½ jaoks, siis saaksime veelgi tagasihoidlikuma tulemuse.

Attilal oli kõige suurearvulisem sõjavägi, mida tundis muistne maailm. Ajaloolased hindavad selle suurust 700 000 inimesele. Kui kõik need sõjamehed oleksid künka ehitamisest osa võtnud, oleks kujunenud kõrgem kuhik, kui meie arvutasime, kuid mitte väga kõrge: et tema ruumala oleks 7 korda suurem meie kuhiku omast, siis tema kõrgus ületaks meie kuhiku kõrguse kõigest $\sqrt[3]{7}$, s. o. 1,9 korda ja oleks $2{,}4 \cdot 1{,}9 = 4{,}6$ (m). On kaheldav, kas taoliste mõõdetega küngas oleks suutnud rahuldada Attila auahnust.

Niisugustelt väikestelt kõrgendikelt on loomulikult kerge «nii kaugusi kui laiu välju jälgida», kuid merd oleks olnud võimalik näha ainult siis, kui lugu oleks juhtunud ranna lähedal.

Sellest, kui kaugele võib näha ühelt või teiselt kõrguselt, jutustame kuuendas peatükis.

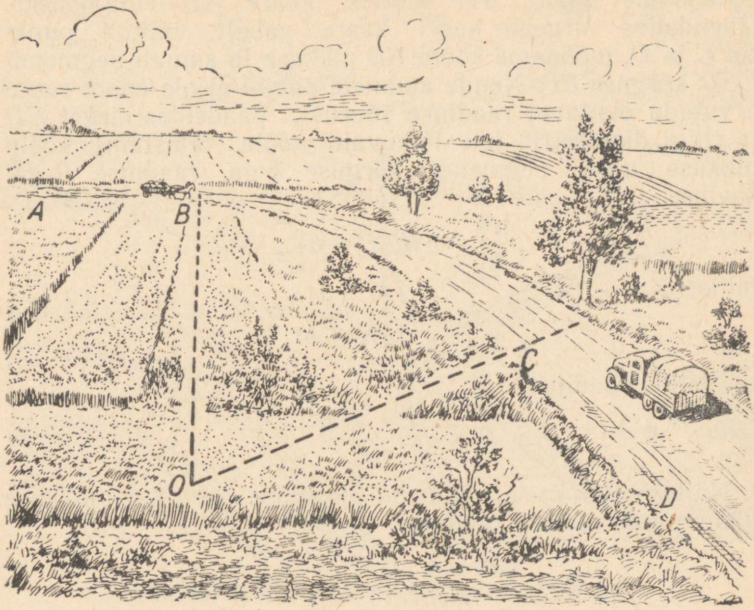
Kurvil

Maantee ega raudtee ei tee käänakut kunagi järsult, vaid nad muudavad suunda alati sujuvalt, ilma nurkadeta, kaarena. Harilikult on see kaar osa ringjoonest ja ta asetseb nii, et tee sirgjoonelised osad on tema puutujateks. Näiteks joonisel 83 on tee sirgjoonelised osad *AB* ja *CD* ühendatud kaarega *BC* nii, et *AB* ja *CD* puutuvad (geomeetriliselt) seda kaart punktides *B* ja *C*, s. o. *AB* on risti raadiusega *OB* ja *CD* risti raadiusega *OC*. Seda tehakse muidugi selleks, et üleminek sirgelt teeosalt kõverale ja vastupidi oleks sujuv.

Kurvi raadius võetakse harilikult väga suur — raudteel mitte vähem kui 600 m; kõige harilikum raudteemagistraali kurvide raadius on 1000 ja isegi 2000 m.

Kurvi raadius

Kui te seisate ühe niisuguse kurvi lähedal, kas te võite siis määrata tema raadiuse suuruse? See ei ole nii kerge kui paberile joonestatud kaare raadiuse leidmine. Joonisel

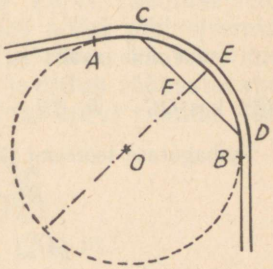


Joon. 83. Maantee kurv.

on asi lihtne: te tõmbate kaarele kaks vabalt valitud kõõlu ja nende kõõlude keskpunktidest tõmbate ristjooned; nende ristjoonte lõikumiskoht, nagu teada, on kaare keskpunkt; keskpunkti kaugus kaare mistahes punktist ongi otsitav raadiuse suurus.

Kuid maastikul oleks niisuguste konstruktsioonide teostamine muidugi väga ebamugav, sest kurvi keskpunkt on 1—2 km kaugusel teest ja tihti juurdepääsematus kohas. Konstruktsiooni võiks teostada plaanil, kuid kurvi plaanistamine pole samuti kerge töö.

Kõik need raskused kõrvalduvad, kui raadiust mitte konstrueerida, vaid arvutada. Selleks võib kasutada järgmist võtet.



Joon. 84. Kurvi raadiuse arvutamiseks.

Täiendame (joon. 84) mõttes kaare AB ringjooneks. Ühendades sirgega kurvi kaare vabalt valitud punktid C ja D, mõõdame kõõlu CD pikkuse ja samuti segmendi CED kõrguse EF. Nende andmete põhjal ei ole enam raske arvutada otsitavat raadiuse suurust. Vaadeldes sirget CD ja ringi diameetrit kui lõikuvaid kõõle, tähistame kõõlu pikkuse a-ga, segmendi kõrguse h-ga, raadiuse R-ga; saame:

$$\frac{a^2}{4} = h\ (2R - h),$$

millest

$$\frac{a^2}{4} = 2Rh - h^2$$

ja otsitav raadius[1]

$$R = \frac{a^2 + 4h^2}{8h}.$$

Näiteks 0,5 m-se segmendi kõrguse ja 48 m pikkuse kõõlu puhul otsitav raadius

$$R = \frac{48^2 + 4 \cdot 0{,}5^2}{8 \cdot 0{,}5} = 580\ (\text{m}).$$

Seda arvutust võib lihtsustada, kui lugeda $2R - h$ võrdseks $2R$-ga — see vabadus on lubatav, sest h on R-ga võrreldes väga väike (R on sadade, h aga ainult mõne meetri pikkune). Siis saadakse arvutamiseks väga sobiv ligikaudne valem:

$$R = \frac{a^2}{8h}.$$

---

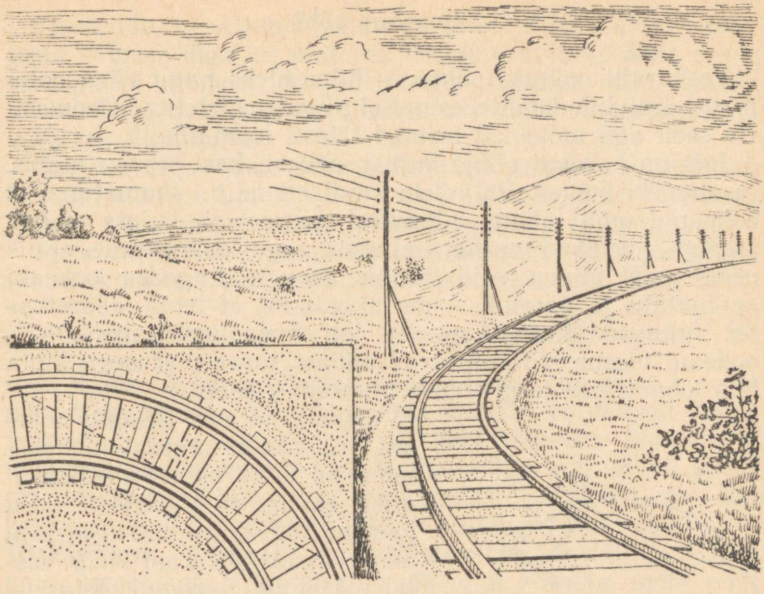
[1] Sama võib saada ka teisel teel — täisnurksest kolmnurgast COF, kus $OC = R$, $CF = \frac{a}{2}$, $OF = R - h$.

Pythagorase teoreemi järgi

$$R^2 = (R - h)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

$$R^2 = R^2 - 2Rh + h^2 + \frac{a^2}{4},$$

$$R = \frac{a^2 + 4h^2}{8h}.$$



Joon. 85. Raudtee kurvi raadiuse arvutamiseks.

Kasutades seda valemit äsjavaadeldud juhul, saaksime sama suuruse:

$$R = 580 \text{ m}.$$

Leides kurvi raadiuse suuruse ja teades peale selle, et kurvi keskpunkt asetseb kõõlu keskpunktist tõmmatud ristjoonel, võite ligikaudu määrata ka koha, kus see keskpunkt peab asetsema.

Kui teele on asetatud rööpad, siis kurvi raadiuse leidmine lihtsustub. Tõepoolest, tõmmates nööri piki sisemise rööpa puutujat, saame kõõlu välimise rööpa kaarele, kusjuures segmendi kõrgus h (joon. 85) võrdub rööbastevahelise kaugusega — 1,52 m. Sel juhul on kurvi raadius (kui a on kõõlu pikkus) ligikaudu

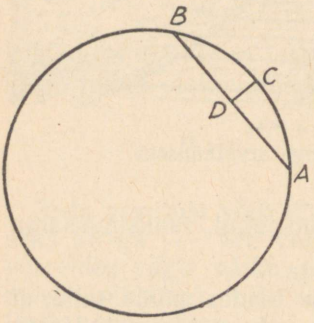
$$R = \frac{a^2}{8 \cdot 1{,}52} = \frac{a^2}{12{,}2}.$$

Kui a = 120 m, on kurvi raadius 1200 m.[1]

[1] Praktikas on see viis ebamugav, sest suur kurvi raadius nõuab väga pikka nööri kõõlu jaoks.

Teekurvilt ookeani põhja — hüpe oleks nagu väga ootamatu, igal juhul mitte esimesel pilgul mõistetav. Geomeetria seob aga mõlemad teemad täiesti loomulikult.

Jutt on ookeani põhja kujust, sellest, kas see on nõgus, tasane või kumer. Paljudele kindlasti näib uskumatuna, et ookeanid oma tohutu sügavuse juures ei kujuta endast sugugi süvendeid maakera pinnas; nagu kohe näeme, ei ole nende põhi nõgus, vaid hoopis kumer. Lugedes ookeani «põhjatuks ja ääretuks», me unustame, et tema «ääretus» on mitusada korda suurem kui tema «põhjatus», s. t. ookeani veemassid kujutavad endast suure ulatusega kihti, mis loomulikult järgib meie planeedi kumerust.



Joon. 86. Kas ookeani põhi on lame?

Võtame näiteks Atlandi ookeani. Ekvaatori lähedal moodustab tema laius umbes ühe kuuendiku ekvaatori pikkusest. Kui joonisel 86 kujutatud ringjoon on ekvaator, siis kaar ACB vastab Atlandi ookeani laiusele. Kui ookeani põhi oleks lame, siis tema sügavus võrduks segmendi ACB kõrgusega CD. Teades, et kaar $AB = {}^1/_6$ ringjoonest, ja et kõõl AB on järelikult ringjoone sisse joonestatud korrapärase kuusnurga külg (mis, nagu teada, võrdub ringi raadiusega R), võime arvutada CD varemtuletatud valemist kurvide jaoks:

$$R = \frac{a^2}{8h}\text{, millest } h = \frac{a^2}{8R}.$$

Teades, et $a = R$, saame antud juhu jaoks:

$$h = \frac{R}{8}.$$

Kui $R = 6400$ km, saame:

$$h = 800 \text{ km}.$$

Tähendab, et Atlandi ookeani põhi oleks lame, peaks tema suurim sügavus ulatuma 800 km-ni. Tegelikult ei ole see aga 10 kilomeetritki. Siit otsene järeldus: selle ookeani põhja üldkuju on kumer, olles ainult veidi lamedam tema veepinna kumerusest.

See kehtib ka teiste ookeanide puhul: nende põhi kujutab endast väiksema kumerusega kohti maakera pinnal, tema üldist kerakujulisust peaaegu rikkumata.

Meie valem kurvi raadiuse arvutamiseks näitab, et mida ulatuslikum on veebassein, seda kumeram on tema põhi. Vaadeldes valemit $h = \frac{a^2}{8R}$, näeme kohe, et ookeani või mere laiuse a suurenemisel peaks tema sügavus h — et põhi oleks lame — kasvama väga kiiresti, võrdeliselt laiuse a ruuduga. Tegelikult ei kasva aga sügavus üleminekul väikestelt veebasseinidelt ulatuslikumatele sugugi nii kiires progressioonis. Ookean on igast merest laiem, ütleme, 100 korda, kuid sügavam ei ole ta sugugi 100 · 100, s. o. 10 000 korda. Seetõttu on suhteliselt väikesed basseinid palju lamedama põhjaga kui ookeanid. Musta mere põhi Krimmi ja Väike-Aasia vahel ei ole kumer nagu ookeanidel, mitte ka lame, vaid isegi mõnevõrra nõgus. Selle mere veepind kujutab endast ligikaudu 2°-st kaart (täpsemalt $\frac{1}{170}$ Maa ümbermõõdust). Musta mere sügavus on küllaltki ühtlane ja on 2,2 km. Võrreldes käesoleval juhul kaart kõõluga, leiame, et lameda põhja korral peaks mere suurimaks sügavuseks olema

$$h = \frac{40\,000^2}{170^2 \cdot 8R} = 1{,}1 \text{ (km)}.$$

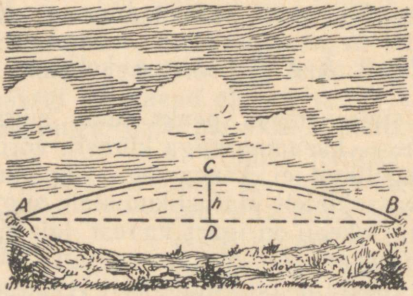
Tähendab, tegelikult asetseb Musta mere põhi rohkem kui kilomeeter (2,2—1,1) allpool kujuteldavat tasapinda, mis läbib tema vastaskallaste äärmisi punkte, s. o. ta kujutab endast nõgu, mitte aga kumerust.

Kas on olemas veemägesid?

Varemtuletatud valem kurvi raadiuse arvutamiseks aitab meid sellele küsimusele vastata.

Eelmine ülesanne valmistas meid juba vastuseks ette. Veemäed on olemas mitte selle sõna füüsikalises, vaid geo-

meetrilises mõttes. Mitte ainult iga meri, vaid isegi iga järv kujutab endast teatud määral veemäge. Kui te seisate järve kaldal, eraldab teid vastaskaldast veekumerus, mille kõrgus on seda suurem, mida laiem on järv. Selle kõrguse võime arvutada: valemist $R = \frac{a^2}{8h}$ saame segmendi kõrguse $h = \frac{a^2}{8R}$; a on siin kallastevaheline kaugus otsejoones,



Joon. 87. «Veemägi».

mille võime võrdseks lugeda järve laiusega (loeme kõõlu võrdseks kaarega). Kui see laius on, ütleme, 100 km, siis «veemäe» kõrgus

$$h = \frac{10\,000}{8 \cdot 6400} = \text{umbes } 200 \text{ m.}$$

Aukartustäratava kõrgusega veemägi!

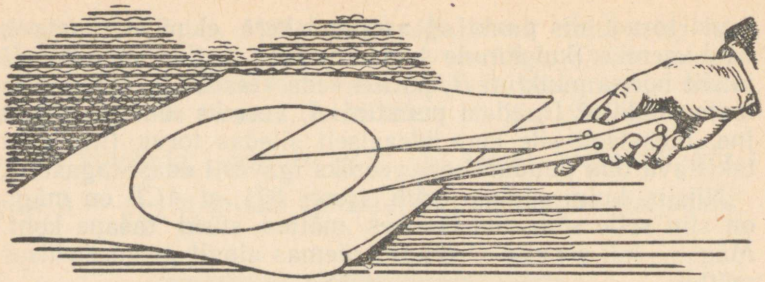
Isegi keskmise suurusega, umbes 10 km laiusel järvel on kaldaid ühendava sirgjoonega võrreldes kumerus 2 m, s. o. üle inimese kasvu.

Kuid kas oleks õige nimetada neid veekumerusi «mägedeks»? Füüsikalises mõttes mitte: nad ei tõuse horisontaalpinnast kõrgemale, tähendab, on tasandikud. Ekslik oleks mõtelda, et sirge AB (joon. 87) on horisontaaljoon, mille kohal asetseb kaar ACB. Horisontaaljoon ei ole siin AB, vaid ACB, mis langeb ühte rahuliku vee vaba pinnaga. Sirge ADB moodustab horisondiga võrreldes kallaku: ta laskub kaldsuunas maapinna alla kuni oma sügavaima punktini D ja tõuseb seejärel uuesti ülespoole, väljudes maa (või vee) alt punktis B. Kui piki sirget AB oleks ase-

tatud torud, siis punkti *A* asetatud kera ei püsiks paigal, vaid veereks (kui torude seinad oleksid siledad) punktini *D* ja siit hooga punktini *B*; pärast seda veereks ta siin peatumata punktini *D*, edasi punktini *A*, veereks uuesti tagasi jne. Ideaalselt sile kera ideaalselt siledas torus (liikumist takistava õhu puudumisel) veereks igavesti edasi-tagasi ...

Niisiis, kuigi silmale näib (joon. 87), et *ACB* on mägi, on siin selle sõna füüsikalises mõttes siiski tasane koht. Mägi — kui soovite — on siin olemas ainult geomeetrilises mõttes.





VIIES PEATÜKK

VÄLITRIGONOMEETRIA VALEMITE JA TABELITETA

Siinuse arvutamine

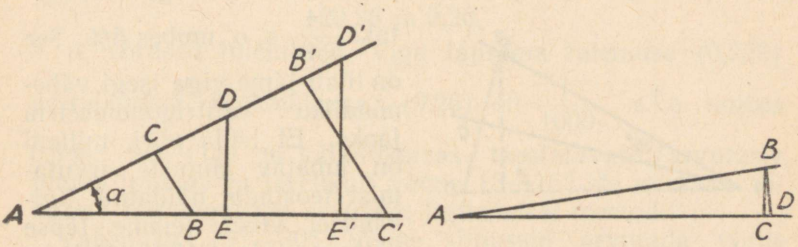
Selles peatükis näidatakse, kuidas saab arvutada kolmnurga külgi kuni 2%-se täpsusega ja nurki kuni 1°-se täpsusega, kasutades ainuüksi siinuse mõistet ning jättes kõrvale tabelid ja valemid. Niisugust lihtsustatud trigonomeetriat võib tarvis minna jalutuskäigul linnast välja, kui tabelit ei ole käepärast ja kui valemid on pooleldi unustatud. Robinson oleks oma saarel niisugust trigonomeetriat edukalt kasutada saanud.

Kujutlege niisiis, et te ei ole veel trigonomeetria-kursust läbi võtnud või olete selle täielikult unustanud — olukord, mida mõnel lugejatest tõenäoliselt pole raske kujutleda. Alustame tema tundmaõppimist algusest peale. Mis on teravnurga siinus? See on selle teravnurga vastaskaateti suhe hüpotenuusisse täisnurkses kolmnurgas, mis eraldatakse sellest nurgast ühele tema haarale tõmmatud ristsirgega. Näiteks nurga a siinus (joon. 88) on $\frac{BC}{AB}$ või $\frac{ED}{AD}$, $\frac{D'E'}{AD'}$, $\frac{B'C'}{AC'}$. Kerge on näha, et moodustunud kolmnurkade sarnasuse tõttu on kõik need suhted omavahel võrdsed.

Millega siis võrduvad mitmesuguste nurkade siinused 1°—90°-ni? Kuidas seda teada saada, ilma et oleks käe-

pärast tabelit? Väga lihtsalt: tuleb ise koostada siinuste tabel. Seda teemegi kohe.

Alustame nende nurkadega, mille siinused on meile teada geomeetriast. Siia kuulub kõigepealt 90°-ne nurk, mille siinus on ilmselt võrdne 1-ga. Edasi 45°-ne nurk, mille siinust on kerge arvutada Pythagorase teoreemi abil; see võrdub $\frac{\sqrt{2}}{2}$, s. o. 0,707. Edasi on meil teada siinus 30°:



Joon. 88. Mis on teravnurga siinus?

et 30°-se nurga vastas asetsev kaatet võrdub poolega hüpotenuusist, siis siinus 30° = ½.

Seega teame kolme nurga siinuseid (ehk, nagu tavaliselt tähistatakse — sin):

$$\sin 30° = 0{,}5;$$
$$\sin 45° = 0{,}707;$$
$$\sin 90° = 1.$$

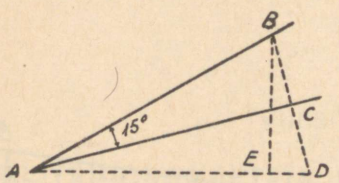
Sellest on loomulikult vähe; tarvis on teada ka kõigi vahepealsete nurkade siinuseid, vähemalt iga kraadi tagant. Väga väikeste nurkade puhul võib siinuse arvutamisel võtta kaateti ja hüpotenuusi suhte asemel suurema veata kaare ja raadiuse suhte: jooniselt 88 (paremal) on näha, et suhe $\frac{BC}{AB}$ erineb vähe suhtest $\frac{BD}{AB}$. Viimast on aga kerge arvutada. Näiteks 1°-se nurga kaar $BD = \frac{2\pi R}{360}$ ja järelikult sin 1° võib lugeda võrdseks

$$\frac{2\pi R}{360\,R} = \frac{\pi}{180} = 0{,}0175.$$

Samal viisil leiame, et

$$\sin 2^\circ = 0{,}0349,$$
$$\sin 3^\circ = 0{,}0524,$$
$$\sin 4^\circ = 0{,}0698,$$
$$\sin 5^\circ = 0{,}0873.$$

Tuleb aga veenduda selles, kui kaugele võib seda tabelit suuremat viga tegemata jätkata. Kui me arvutaksime sel viisil sin 30°, siis saaksime 0,500 asemel 0,524: erinevus tekiks juba teises kohas koma järel ja viga moodustaks $\frac{24}{500}$, s. o. umbes 5%. See on liialt jäme viga isegi vähenõudliku välitrigonomeetria jaoks. Et leida piiri, milleni on lubatav siinuste arvutamist teostada näidatud ligikaudsel viisil, leiame täpse võttega sin 15°. Selleks kasutame järgmist mitte eriti keerukat konstruktsiooni



Joon. 89. Kuidas arvutada sin 15°?

(joon. 89). Olgu sin 15° $= \frac{BC}{AB}$. Pikendame kaatetit BC tema enda pikkuse võrra punktini D ning ühendame punktid A ja D; saame kaks ühtivat kolmnurka: ADC ja ABC, ja 30°-se nurga BAD. Tõmbame kaatetile AD ristlõigu BE; tekib 30°-se teravnurgaga täisnurkne kolmnurk BAE; siis $BE = \frac{AB}{2}$. Edasi leiame kolmnurgast ABE Pythagorase teoreemi järgi:

$$AE^2 = AB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \tfrac{3}{4}\, AB^2;$$

$$AE = \frac{AB}{2}\sqrt{3} = 0{,}866\, AB.$$

Tähendab, $ED = AD - AE = AB - 0{,}866\, AB = 0{,}134\, AB$. Nüüd arvutame BD kolmnurgast BED:

$$BD^2 = BE^2 + ED^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + (0{,}134\, AB)^2 = 0{,}268\, AB^2;$$

$$BD = \sqrt{0{,}268\, AB^2} = 0{,}518\, AB.$$

Pool pikkusest BD, s. o. BC, on 0,259 AB ja järelikult

$$\sin 15^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{0{,}259\,AB}{AB} = 0{,}259.$$

See on sin 15° väärtus tabeli järgi, kui piirduda kolme kohaga. Ligikaudne väärtus aga, mille leiaksime endisel viisil, oleks 0,262. Võrreldes tulemusi

0,259 ja 0,262,

näeme, et piirdudes kahe kohaga koma järel, saame

0,26 ja 0,26,

s. o. võrdsed tulemused. Viga täpsema tulemuse (0,259) asendamisel ligikaudsega (0,26) on $\frac{1}{1000}$, s. o. umbes 0,4%. See viga on väliolukorras teostatavate arvutuste juures lubatav ja järelikult võime 1°—15°-ste nurkade siinuseid täie õigusega arvutada ligikaudsel meetodil.

Vahemikus 15°—30° võime siinuseid arvutada võrde abil. Arutleme järgmiselt. Sin 30° ja sin 15° vahe on 0,50 — 0,26 = 0,24. Tähendab, võime arvata, et nurga suurenemisel vastab igale kraadile siinuse suurenemine $^1/_{15}$ võrra sellest vahest, s. o. $\frac{0{,}24}{15} = 0{,}016$ võrra. Rangelt võttes ei ole see muidugi nii, kuid kõrvalekaldumine sellest reeglist avaldub alles kolmandas kohas koma järel, mille me aga nagunii ära jätame. Seega, liites sin 15° väärtusele korduvalt 0,016, saame vastavalt siinused 16°, 17°, 18° jne.:

$$\sin 16^\circ = 0{,}26 + 0{,}016 = 0{,}28;$$
$$\sin 17^\circ = 0{,}26 + 0{,}032 = 0{,}29;$$
$$\sin 18^\circ = 0{,}26 + 0{,}048 = 0{,}31;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sin 25^\circ = 0{,}26 + 0{,}16 = 0{,}42 \text{ jne.}$$

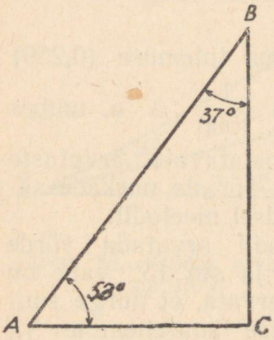
Kõigi nende siinuste kaks esimest kümnendkohta on õiged; see on täpsus, mis on meie eesmärkideks küllaldane: nad erinevad tegelikest siinustest vähem kui poole viimase koha ühiku võrra.

Samal viisil teostatakse siinuste arvutamist 30° ja 45° vahel. Sin 45° — sin 30° = 0,707 — 0,5 = 0,207. Jagades selle 15-ga, saame 0,014. Selle suuruse liidame korduvalt sin 30° väärtusele; saame:

$$\sin 31° = 0{,}5 + 0{,}014 = 0{,}51;$$
$$\sin 32° = 0{,}5 + 0{,}028 = 0{,}53;$$
. . . . . .
$$\sin 40° = 0{,}5 + 0{,}14 = 0{,}64 \text{ jne.}$$

Jääb leida veel 45°-st suuremate teravnurkade siinused. Siin aitab meid Pythagorase teoreem. Soovigem näiteks leida sin 53°, s. o. (joon. 90) suhte $\frac{BC}{AB}$. Et nurk $B = 37°$, siis tema siinuse võime arvutada varemtoodud meetodil:

$$0{,}5 + 7 \cdot 0{,}014 = 0{,}6.$$



Joon. 90. 45°-st suurema nurga siinuse leidmine.

Teisest küljest teame, et $\sin B = \frac{AC}{AB}$. Seega $\frac{AC}{AB} = 0{,}6$, millest $AC = 0{,}6 \cdot AB$. Teades AC suurust, on kerge arvutada BC.

See lõik on $\sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{AB^2 - (0{,}6\,AB)^2} = AB\sqrt{1 - 0{,}36} = 0{,}8\,AB$.

Arvutamine ei ole üldiselt raske; tuleb ainult osata ruutjuuri leida.

Ruutjuure leidmine

Algebraõpikutes toodud ruutjuure leidmise meetod unustatakse kergesti. Kuid võib toime tulla ka selleta. Minu geomeetriaõpikutes on toodud vanaaegne lihtsustatud viis ruutjuurte leidmiseks jagamismeetodil. Toon siin teise vanaaegse viisi, mis on samuti lihtsam kui algebraõpikutes vaadeldav meetod.

Olgu vaja leida $\sqrt{13}$. Ta asetseb 3 ja 4 vahel, järelikult on ta 3 murdosaga, mille tähistame x-ga.

Seega

$$\sqrt{13} = 3 + x, \qquad \text{millest } 13 = 9 + 6x + x^2.$$

Murru x ruut on väike murd, mille esimeses lähenduses võime tähele panemata jätta; siis saame:

$13 = 9 + 6x$, millest $6x = 4$ ja $x = \frac{2}{3} = 0{,}67$.

Tähendab, $\sqrt{13}$ on ligikaudu 3,67. Kui tahame määrata ruutjuure väärtust täpsemalt, kirjutame võrrandi $\sqrt{13} = 3\frac{2}{3} + y$, kus y on väike positiivne või negatiivne murd. Siit $13 = \frac{121}{9} + \frac{22}{3}y + y^2$. Jättes y^2 ära, leiame, et y on ligikaudu $-\frac{2}{33} = -0{,}06$. Järelikult teises lähenduses $\sqrt{13} = 3{,}67 - 0{,}06 = 3{,}61$. Kolmanda lähenduse saame sama võttega jne.

Hariliku, algebraõpikutes toodud meetodiga leitud $\sqrt{13}$ täpsusega 0,01 on samuti 3,61.

Leida siinuse järgi nurk

Niisiis on meil võimalus leida mistahes nurga siinus 0° kuni 90°-ni kahe kohaga koma järel. Vajadus valmis tabeli järele langeb ära; ligikaudseteks arvutusteks võime selle soovi korral alati ise koostada.

Kuid trigonomeetriliste ülesannete lahendamiseks tuleb tunda ka vastupidist tehet — antud siinuse järgi nurga leidmist. See ei ole samuti keerukas. Olgu vaja leida nurk, mille siinus on 0,38. Et antud siinus on väiksem kui 0,5, siis on otsitav nurk väiksem kui 30°. Kuid ta on suurem kui 15°, sest sin 15°, nagu teame, on 0,26. Et leida seda 15° ja 30° vahel asetsevat nurka, talitame nii, nagu on selgitatud leheküljel 127:

$$0{,}38 - 0{,}26 = 0{,}12,$$
$$\frac{0{,}12}{0{,}016} = 7{,}5°,$$
$$15° + 7{,}5° = 22{,}5°.$$

Seega on otsitav nurk ligikaudu 22,5°.

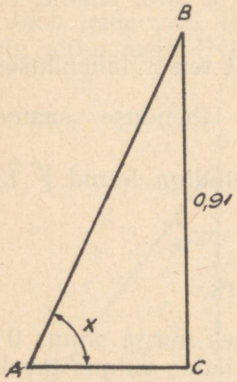
Teine näide: leida nurk, mille siinus on 0,62.

$$0{,}62 - 0{,}50 = 0{,}12,$$
$$\frac{0{,}12}{0{,}014} = 8{,}6°,$$
$$30° + 8{,}6° = 38{,}6°.$$

Otsitav nurk on ligikaudu 38,6°.

Lõpuks kolmas näide: leida nurk, mille siinus on 0,91. Et antud siinus asetseb 0,71 ja 1 vahel, siis otsitav

nurk asetseb vahemikus 45° kuni 90°. Joonisel 91 on BC nurga A siinus, kui $BA = 1$. Teades BC väärtust, on kerge leida nurga B siinus:



Joon. 91. Teravnurga suuruse leidmine tema siinuse järgi.

$$AC^2 = 1 - BC^2 = 1 - 0{,}91^2 =$$

$$= 1 - 0{,}83 = 0{,}17,$$

$$AC = \sqrt{0{,}17} = 0{,}42.$$

Leiame nüüd nurga B suuruse, mille siinus on 0,42; pärast seda on kerge leida nurk A, mis on $90° - B$. Et 0,42 asetseb 0,26 ja 0,5 vahel, siis nurk B asetseb 15° ja 30° vahel. Ta määratakse järgmiselt:

$$0{,}42 - 0{,}26 = 0{,}16,$$

$$\frac{0{,}16}{0{,}016} = 10°,$$

$$B = 15° + 10° = 25°.$$

Tähendab, nurk $A = 90° - B = 90° - 25° = 65°$.

Me oleme nüüd küllaldaselt varustatud selleks, et ligikaudselt lahendada trigonomeetrilisi ülesandeid, sest oskame leida siinuseid nurkade ja nurki siinuste järgi täpsusega, mis on väliolukorras küllaldane.

Kuid kas piisab ainult siinusest? Kas meil ei ole tarvis ülejäänud trigonomeetrilisi funktsioone — koosinust, tangensit jne.? Selgitame kohe rea näidetega, et meie lihtsustatud trigonomeetrias võib täielikult toime tulla ainuüksi siinusega.

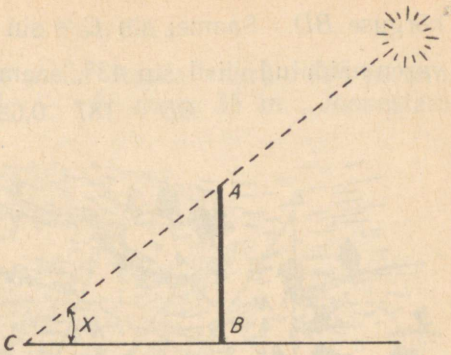
Päikese kõrgus

Ülesanne

4,2 m kõrguse püstloodse lati AB vari BC (joon. 92) on 6,5 m pikkune. Kui suur on sel momendil Päikese kõrgus horisondist, s. o. kui suur on nurk C?

Lahendus

Kerge on näha, et nurga C siinus on $\frac{AB}{AC}$. Kuid $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4{,}2^2 + 6{,}5^2} = 7{,}74$. Seepärast on otsitav siinus $\frac{4{,}2}{7{,}74} = 0{,}55$. Varemnäidatud viisil leiame vastava nurga: 33°. Päikese kõrgus, täpsusega kuni ½°, on 33°.



Joon. 92. Määrata Päikese kõrgus horisondist.

Saare kaugus

Ülesanne

Kõndides kompassiga (bussooliga) jõe ääres, märkasite te jões saarekest A (joon. 93) ja soovite määrata tema kauguse kaldal olevast punktist B. Selleks määrate kompassi järgi nurga ABN suuruse, mille moodustab põhjalõuna suund (NS) sirgega BA. Siis mõõdate sirglõigu BC pikkuse ning määrate tema ja NS vahelise nurga NBC. Lõpuks teete sama punktis C sirge AC jaoks. Oletame, et te saite järgmised andmed:

suund AB kaldub suunast NS ida poole 52°,
„ BC „ „ NS „ „ 110°,
„ CA „ „ NS lääne „ 27°.

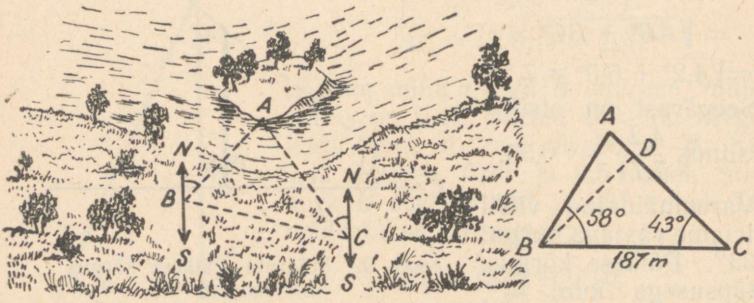
BC pikkus on 187 m.
Kuidas arvutada nende andmete järgi kaugus BA?

Lahendus

Kolmnurgas ABC on meile teada külg BC. Nurk $ABC = 110° - 52° = 58°$; nurk $ACB = 180° - 110° - 27° = 43°$. Joonestame selles kolmnurgas (joon. 93, paremal)

kõrguse BD. Saame: $\sin C = \sin 43° = \frac{BD}{187}$. Arvutades varemnäidatud viisil $\sin 43°$, saame 0,68. Tähendab,

$$BD = 187 \cdot 0{,}68 = 127.$$



Joon. 93. Kuidas arvutada saare kaugus?

Nüüd on meile kolmnurgas ABD teada kaatet BD; nurk $A = 180° - (58° + 43°) = 79°$ ja nurk $ABD = 90° - 79° = 11°$. Siinus 11° võime arvutada: see on 0,19. Järelikult $\frac{AD}{AB} = 0{,}19$. Teiselt poolt: Pythagorase teoreemi järgi

$$AB^2 = BD^2 + AD^2.$$

Paigutades AD asemele $0{,}19\,AB$ ja BD asemele 127, saame:

$$AB^2 = 127^2 + (0{,}19\,AB)^2,$$

millest $AB \approx 128$.

Otsitav saare kaugus on seega umbes 128 m.

Arvan, et lugejale ei tee raskusi arvutada vajaduse korral ka külg AC.

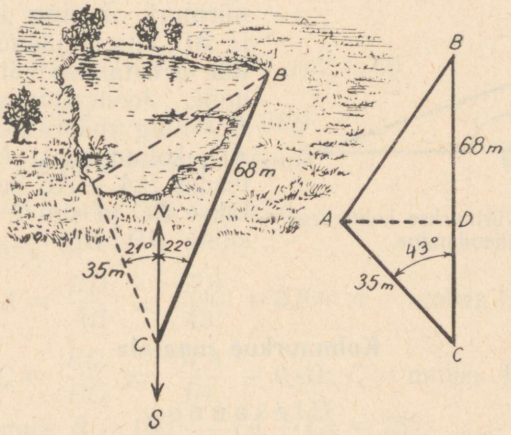
Järve laius

Ülesanne

Järve laiuse AB määramiseks (joon. 94) te leidsite kompassi järgi, et sirge AC kaldub 21° läände, sirge BC aga 22° ida poole. Kaugus $BC = 68$ m, $AC = 35$ m. Arvutada nende andmete järgi järve laius.

Lahendus

Kolmnurgas ABC on meile teada nurk 43° ja tema lähiskülgede pikkused — 68 m ja 35 m. Joonestame



Joon. 94. Järve laiuse arvutamine.

(joon. 94, paremal) kõrguse AD; siis saame: $\sin 43° = \frac{AD}{AC}$. Arvutame sellest sõltumatult $\sin 43°$ ja saame selle väärtuseks 0,68. Tähendab, $\frac{AD}{AC} = 0{,}68$; $AD = 0{,}68 \cdot 35 = 24$. Edasi arvutame CD:

$$CD^2 = AC^2 - AD^2 = 35^2 - 24^2 = 649; \quad CD = 25{,}5;$$
$$BD = BC - CD = 68 - 25{,}5 = 42{,}5.$$

Nüüd saame kolmnurgast ABD:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 = 24^2 + 42{,}5^2 = 2380;$$
$$AB \approx 49.$$

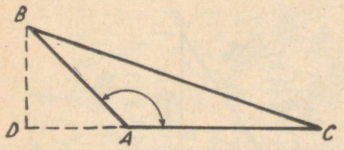
Seega on otsitav järve laius umbes 49 m.

Kui kolmnurgas ABC tuleb arvutada ka ülejäänud kaks nurka, siis, olles leidnud, et $AB = 49$, toimime edasi järgmiselt:

$$\sin B = \frac{AD}{AB} = \frac{24}{49} = 0{,}49, \text{ millest } B = 29°.$$

Kolmanda nurga C leiame, lahutades 180°-st 29°- ja 43°-ste nurkade summa; see nurk võrdub 108°-ga.

Võib juhtuda, et vaadeldaval juhul (antud kaks külge ja nendevaheline nurk) teadaolev nurk ei ole terav-, vaid nürinurk. Kui näiteks kolmnurgas ABC (joon. 95) on teada nürinurk A ning küljed AB ja AC, siis ülejäänud elementide arvutamise käik on järgmine. Joonestatakse kõrgus BD ning määratakse BD ja AD kolmnurgast BDA; siis, teades $DA + AC$ suurust, leitakse BC ja sin C, arvutades suhte $BD : BC$.



Joon. 95. Nürinurkse kolmnurga lahendamine.

Kolmnurkne maa-ala

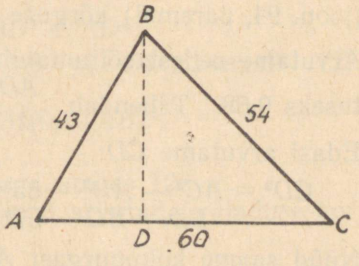
Ülesanne

Ekskursioonil mõõtsime sammudega kolmnurkse maa-ala külgede pikkused ja leidsime, et need on vastavalt 43, 60 ja 54 sammu. Kui suured on selle kolmnurga nurgad?

Lahendus

See on kõige keerukam kolmnurga lahendamise juhtum: kolme külje järgi. Kuid ka sellega võib toime tulla, kasutamata teisi funktsioone peale siinuse.

Joonestades (joon. 96) kõige pikemale küljele AC vastava kõrguse BD, saame:



Joon. 96. Leida selle kolmnurga nurkade suurused 1) arvutamise teel, 2) malli abil.

$$BD^2 = 43^2 - AD^2, \qquad BD^2 = 54^2 - DC^2,$$

millest

$$43^2 - AD^2 = 54^2 - DC^2,$$

$$DC^2 - AD^2 = 54^2 - 43^2 = 1070.$$

Kuid

$$DC^2 - AD^2 = (DC + AD)(DC - AD) = 60(DC - AD).$$

Järelikult

$$60(DC - AD) = 1070 \text{ ja } DC - AD = 17{,}8.$$

Võrranditest

$$DC - AD = 17{,}8 \text{ ja } DC + AD = 60$$

saame:

$$2DC = 77{,}8, \text{ s. o. } DC = 38{,}9.$$

Nüüd on kerge arvutada kõrgus:

$$BD = \sqrt{54^2 - 38{,}9^2} = 37{,}4,$$

millest leiame, et

$$\sin A = \frac{BD}{AB} = \frac{37{,}4}{43} = 0{,}87; \; A = \text{umbes } 60°,$$

$$\sin C = \frac{BD}{BC} = \frac{37{,}4}{54} = 0{,}69; \; C = \text{umbes } 44°.$$

Kolmas nurk $B = 180° - (A + C) = 76°$.

Kui me antud juhul oleksime arvutanud tabelite abil, kõigi «tõelise» trigonomeetria reeglite kohaselt, siis oleksime saanud kraadides ja minutites väljendatud nurgad. Kuid need minutid ei oleks nagunii õiged, sest külgede mõõtmisel sammudega tegime vea mitte alla 2—3%. Tähendab, et ennast mitte petta, tuleks saadud nurkade «täpsed» suurused ümardada vähemalt täiskraadideks. Siis aga saaksime sama tulemuse, milleni jõudsime lihtsustatud võtteid kasutades. Meie «välitrigonomeetria» kasulikkus on siin eriti ilmne.

Antud nurga suuruse määramine igasuguste mõõtmisteta

Nurkade mõõtmiseks maastikul on meile vajalik vähemalt kompass, kuigi mõnikord piisab ka ainult sõrmedest või tikutoosist. Võib aga tekkida vajadus ka paberile, plaanile või kaardile kantud nurkade mõõtmiseks.

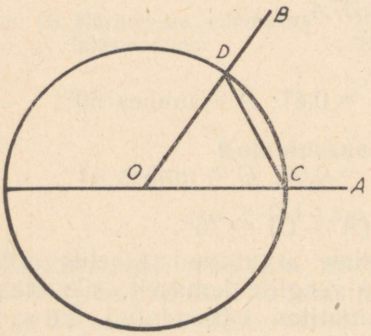
Arusaadav, et kui on käepärast mall, siis lahendatakse küsimus lihtsalt. Kui aga malli ei ole, näiteks väliolukorras? Geomeetria-tundja ei tohi segadusse sattuda ka sel juhul. Kuidas te lahendaksite järgmise ülesande:

Ülesanne

Joonisel 97 kujutatud nurk AOB on väiksem kui 180°. Määrata tema suurus mõõtmisteta.

Lahendus

Külje BO meelevaldsest punktist võiks tõmmata ristjoone küljele AO, saadud täisnurkses kolmnurgas mõõta kaatetite ja hüpotenuusi pikkused, leida nurga siinuse ja seejärel nurga enda suuruse (vt. lk. 129). See lahendusviis ei vastaks aga rangele kokkuleppele — mitte midagi mõõta!



Joon. 97. Kuidas määrata nurga AOB suurus ainult sirklit kasutades?

Kasutame lahendusviisi, mille esitas 1946. a. Z. Rupeika Kaunasest.

Tipust O kui keskpunktist tõmbame sirkli abil vabalt valitud raadiusega täisringi. Tema lõikumiskohad nurga haaradega — punktid C ja D — ühendame sirglõiguga.

Nüüd kanname punktist C lähtudes ringjoonele sirkliga kõõlu CD pikkuse ühes ja samas suunas nii mitu korda, et sirkli teravik satuks uuesti lähtepunkti C.

Kõõlu ülekandmisel peame lugema, mitu korda teeme täisringi ja mitu korda kõõlu üle kanname.

Oletame, et tegime täisringi n korda ja samal ajal kandsime kõõlu CD üle S korda. Siis otsitav nurk on:

$$\angle AOB = \frac{360° \cdot n}{S}.$$

Tõepoolest: olgu antud nurk $x°$; kandes ringjoonele S korda kõõlu CD, me nagu suurendaksime $x°$-st nurka S

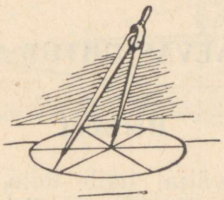
korda; et aga seejuures ringjoon läbiti n korda, siis see nurk on $360° \cdot n$, s. o. $x° \cdot S = 360° \cdot n$; siit

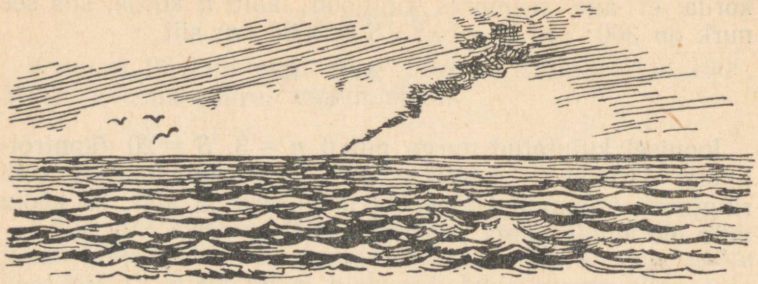
$$x° = \frac{360° \cdot n}{S}.$$

Joonisel kujutatud nurga puhul $n = 3$, $S = 20$ (kontrollige!); järelikult $\angle AOB = 54°$. Sirkli puudumisel võib ringjoone tõmmata nööpnõela ja pabeririba abil; ka kõõlu võib üle kanda sama pabeririba abil.

Ülesanne

Määrake näidatud viisil kolmnurga nurgad joonisel 96.





KUUES PEATÜKK

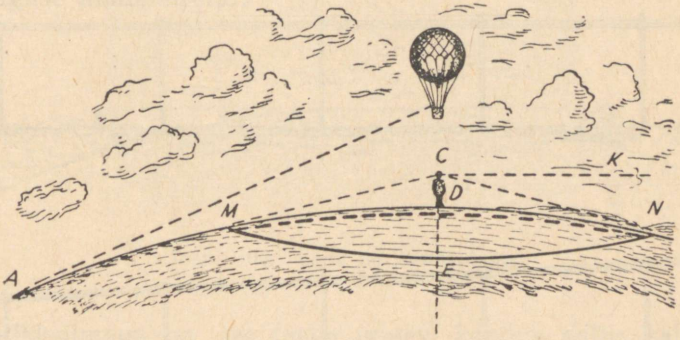
KUS TAEVAS ÜHTUB MAAGA

Horisont

Stepis või tasasel väljal näib teile, nagu asuksite oma silmale kättesaadavat maapinda piirava ringjoone keskpunktis. See on horisont. Horisont on tabamatu: kui talle läheneda, eemaldub ta teist. Kuid olles tabamatu, eksisteerib ta siiski reaalselt; see ei ole silmapete ega miraaž. Igale vaatluspunktile vastab temast vaadeldava maapinna teatud piir ja selle piiri kaugust ei ole raske arvutada. Et selgitada horisondiga seotud geomeetrilisi suhteid, vaatleme joonist 98, mis kujutab osa maakerast. Vaatleja silm asetseb punktis *C*, mille kõrgus maapinnast on *CD*. Kui kaugele ümberringi näeb see vaatleja tasasel maastikul? Ilmselt ainult punktideni *M* ja *N*, kus vaatekiir puutub maapinda: nendest kaugemal on maapind allpool silmapiiri. Need punktid *M* ja *N* (ka teised ringjoonel *MEN* asetsevad punktid) kujutavad endast maapinna nähtava osa piiri, s. o. moodustavad horisondi. Vaatlejale paistab, et siin taevas toetub maale, sest nendes punktides ta näeb üheaegselt nii taevast kui ka maapealseid esemeid.

Teile võib-olla näib, et joonis 98 ei anna tegelikkusest õiget pilti, sest tegelikult asetseb horisont alati silmade kõrgusel, kuna aga joonisel on ring ilmselt vaatlejast allpool. Tõepoolest, meile näib alati, et horisont asetseb meie

silmadega ühel kõrgusel, ja et meie tõustes ta isegi tõuseb koos meiega. Kuid see on silmapete: tõeliselt on horisont alati silmadest madalamal, nagu on näidatud joonisel 98. Kuid nurgad, mida tekitavad sirged *CN* ja *CM* punkti *C* läbiva maakera raadiuse pikendusega risti oleva sirgega *CK* (seda nurka nimetatakse «horisondi alanguks»), on väga väikesed ja neid pole mõõduriistadeta võimalik määrata.

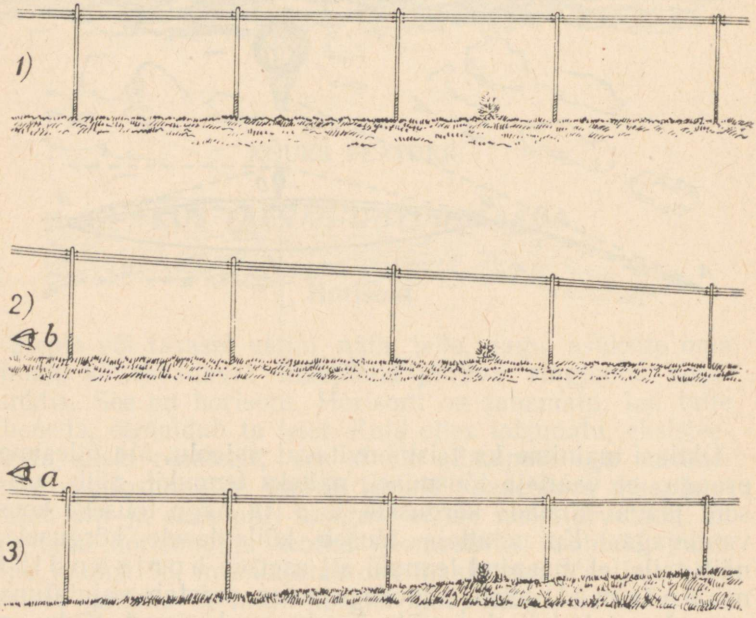


Joon. 98. Horisont.

Ühtlasi mainime ka teist huvitavat asjaolu. Me ütlesime praegu, et vaatleja tõusmisel, näiteks lennukil, näib horisont jäävat silmade kõrgusele, s. o. ta nagu tõuseks koos vaatlejaga. Kui vaatleja tõuseb küllaldasele kõrgusele, näib talle, et maapind lennuki all asetseb h o r i s o n d i s t m a d a l a m a l, teiste sõnadega: maa paistab vajutatuna nagu kausi kujuliseks, mille ääreks on horisont. Seda on väga hästi kirjeldanud ja selgitanud Edgar Poe (l.: pou) oma fantastilises jutustuses «Hans Pfahl'i seiklused».

«Kõige enam,» jutustab selle teose kangelane-aeronaut, «hämmastas mind see asjaolu, et maakera pind paistis n õ g u s a n a. Ma ootasin, et näen teda tõusmisel tingimata kumerana. Järele mõteldes aga leidsin sellele nähtusele seletuse. Minu õhupallist maani tõmmatud püstloodne joon kujutaks kaatetit täisnurkses kolmnurgas, mille aluseks oleks lõik ristjoone aluspunktist horisondini, hüpotenuusiks aga lõik horisondilt minu õhupallini. Kuid minu kõrgus oli vaateväljaga võrreldes tühine; teiste sõnadega:

kujuteldava täisnurkse kolmnurga alus ja hüpotenuus olid püstloodse kaatetiga võrreldes nii suured, et neid võis lugeda peaaegu paralleelseiks. Seetõttu iga punkt aeronaudi all näib alati asetsevat madalamal kui horisont. Nii tekibki nõgususe mulje. See peab kestma seni, kuni kõrgus muutub niivõrd tunduvaks, et kolmnurga alus ja hüpotenuus lakkavad näimast paralleelsetena.»

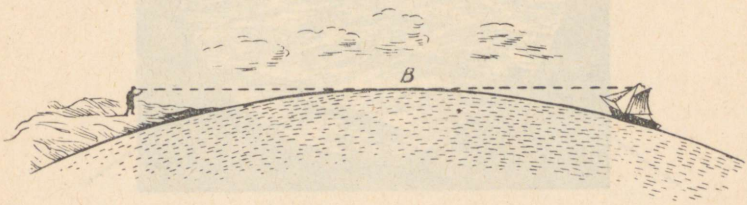


Joon. 99. Mida näeb silm telegraafipostide rida vaadeldes.

Täienduseks sellele selgitusele lisame järgmise näite. Kujutlege sirget telegraafipostide rida (joon. 99). Maapinna kõrgusel — punktis *b* — asetsevale silmale paistab rida niisugusena, nagu on kujutatud joonisel 99 nr. 2. Kuid posti kõrgusel — punktis *a* — asetseva silma jaoks võtab rida kuju 3, s. o. maapind näib horisondi suunas nagu tõusvat.

Laev horisondil

Kui vaatleme mere või suure järve kaldalt horisondi tagant ilmuvat laeva, siis paistab meile, et me ei näe laeva mitte selles punktis (joon. 100), kus ta on tegelikult, vaid palju lähemal, punktis *B*, kus meie vaatejoon puutub mere kumerust. Palja silmaga vaatlemisel on raske lahti saada muljest, et laev asetseb punktis *B*, mitte aga horisondi taga (võrdle neljandas peatükis käsitletud künka mõjuga kauguse hindamisele).

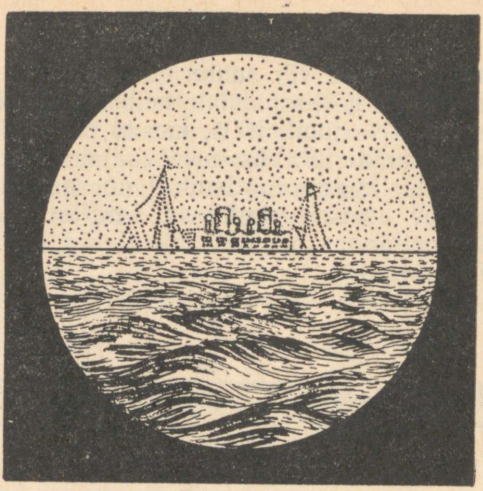


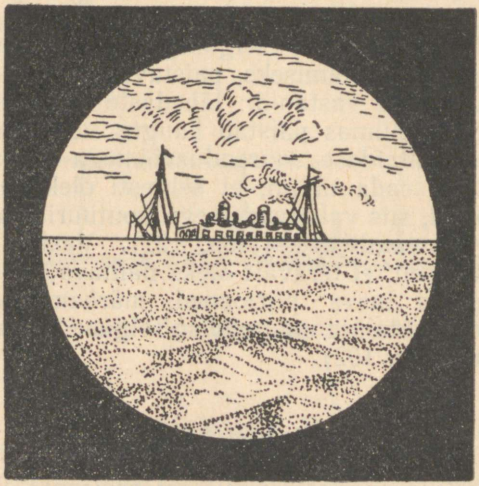
Joon. 100. Laev horisondi taga.

Pikksilmaga on see laeva erinev kaugus palju selgemini tajutav. Pikksilm ei näita meile lähedasi ja kaugeid esemeid mitte ühesuguse selgusega: pikksilmas, mis on seatud kaugusse vaatamiseks, paistavad lähedased esemed laialivalguvaina ja vastupidi: lähedaste esemete vaatlemiseks seatud pikksilmas paistab kaugus udusena. Seetõttu, kui suunata küllaldase suurendusvõimega pikksilm merel horisondile ja seada ta nii, et selgesti oleks nähtav veepind horisondil, siis valguvad laeva kontuurid laiali, reetes suurt kaugust vaatlejast (joon. 101). Vastupidi: seades pikksilma selliselt, et teravalt oleks nähtavad pooleldi horisondiga kaetud laeva piirjooned, märkame, et veepind horisondil on kaotanud oma endise selguse ja paistab nagu udus olevat (joon. 102).

Horisondi kaugus

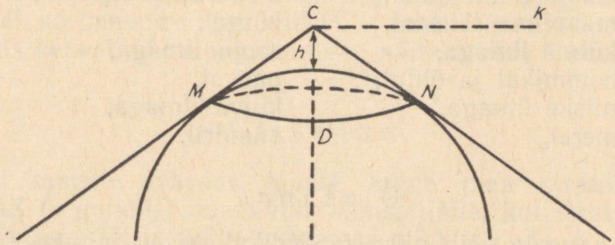
Kui kaugel siis asetseb vaatlejast horisont? Teiste sõnadega: kui suur on selle ringi raadius, mille keskpunktis tunneme end tasasel maastikul asetsevat? Kuidas arvutada horisondi kaugus, teades vaatleja kõrgust maapinnast?





Joon. 101—102. Laev horisondi taga, pikk-silmaga vaadatuna.

Ülesanne on samaväärne puutuja lõigu CN pikkuse arvutamisega (joon. 103), mis on tõmmatud vaatleja silmadest maapinnani. Puutuja ruut, nagu teame geomeetriast, võrdub lõikaja osa h ja kogu lõikaja pikkuse, s. o. $h + 2R$ korrutisega, kus R on maakera raadius. Et vaatleja silmade kõrgus maapinnast on maakera läbimõõduga ($2R$) võrreldes väga väike, moodustades näiteks lennuki kõige



Joon. 103. Horisondi kauguse ülesande juurde.

suurema kõrguse puhul umbes 0,001 maakera läbimõõdust, siis võib $2R + h$ väärtuseks võtta $2R$ ja seega valem lihtsustub:

$$CN^2 = h \cdot 2R.$$

Tähendab, horisondi kaugust võib arvutada väga lihtsa valemi järgi:

$$\text{horisondi kaugus} = \sqrt{2Rh},$$

kus R on maakera raadius (umbes 6400 km[1]) ja h — vaatleja silmade kõrgus maapinnast.

Et $\sqrt{6400} = 80$, siis võib valemile anda järgmise kuju:

$$\text{horisondi kaugus} = 80\sqrt{2h} = 113\sqrt{h},$$

kus h peab tingimata olema väljendatud kilomeetrites.

See arvutus on puht-geomeetriline, lihtsustatud. Kui tahame seda täpsustada, arvesse võttes füüsikalisi tegureid, mis mõjutavad horisondi kaugust, siis peame arvestama nn. «atmosfäärset refraktsiooni». Refraktsioon, s. o. val-

[1] Täpsemalt 6371 km.

guskiirte murdumine (kõrvalekaldumine) atmosfääris, suurendab horisondi kaugust umbes $^1/_{15}$ võrra (6%) arvutatud kaugusest. See arv — 6% — on ainult keskmine. Horisondi kauguse teatav suurenemine või vähenemine sõltub paljudest tingimustest, ja nimelt ta

suureneb:	väheneb:
kõrge rõhu puhul,	madala rõhu puhul,
maapinna lähedal,	kõrgel,
külma ilmaga,	sooja ilmaga,
hommikul ja õhtul,	päeval,
niiske ilmaga,	kuiva ilmaga,
merel,	mandril.

Ülesanne

Kui kaugele võib näha tasandikul seisev inimene?

Lahendus

Võttes täiskasvanud inimese silmade kõrguseks maapinnast 1,6 m ehk 0,0016 km, saame:

$$\text{horisondi kaugus} = 113\sqrt{0{,}0016} = 4{,}52 \text{ (km)}.$$

Maa õhukiht, nagu eespool öeldud, kõverdab kiirte teed, mille tagajärjel horisont kaugeneb keskmiselt 6% võrra valemi järgi saadud kaugusest. Et seda parandust arvesse võtta, tuleb 4,52 km korrutada 1,06-ga; saame:

$$4{,}52 \cdot 1{,}06 \approx 4{,}8 \text{ (km)}.$$

Seega keskmist kasvu inimene näeb tasasel maastikul mitte kaugemale kui 4,8 km. Tema poolt vaadeldava ringi läbimõõt on kõigest 9,6 km ja selle pindala on 72 km². See on palju vähem, kui harilikult mõtlevad inimesed, kes kirjeldavad silmaga haaratavaid laiu stepiavarusi.

Ülesanne

Kui kaugele näeb merel paadis istuv inimene?

Lahendus

Kui võtame paadis istuva inimese silmade kõrguseks veepinnast 1 m ehk 0,001 km, siis on horisondi kaugus

$$113\sqrt{0{,}001} = 3{,}58 \text{ (km)}$$

või, arvestades atmosfääri keskmist refraktsiooni, umbes 3,8 km. Esemetest, mis asetsevad kaugemal, on nähtavad ainult ülemised osad; nende alused on horisondiga varjatud.

Madalama silmade asendi korral horisont läheneb: poolemeetrise kõrguse juures näiteks 2½ km-ni. Vastupidi: vaatlemisel kõrgematest punktidest (masti tipust) horisondi kaugus kasvab; 4 m puhul on see näiteks kuni 7 km.

Ülesanne

Kui kaugele avardus igasse külge maa stratostaadi «COAX-I» gondlist vaatlevaile õhusõitjaile, kui stratostaat asetses oma tõusu kõige kõrgemas punktis?

Lahendus

Et õhupall asetses 22 km kõrgusel, siis horisondi kaugus oli

$$113\sqrt{22} = 530 \text{ (km)},$$

refraktsiooni arvestades — 580 km.

Ülesanne

Kui kõrgele peaks tõusma lendur, et näha 50 km kaugusele?

Lahendus

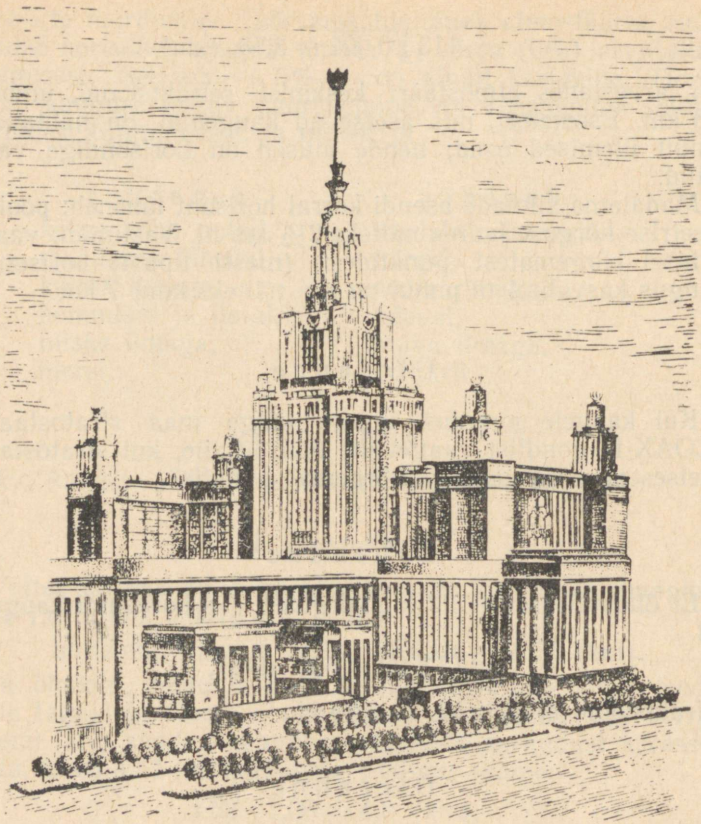
Horisondi kauguse valemist saame antud juhtumil võrrandi

$$50 = \sqrt{2Rh}\ ,$$

millest

$$h = \frac{50^2}{2R} = \frac{2500}{12\,800} = 0{,}2 \text{ (km)}.$$

Tähendab, küllaldane on tõusta ainult 200 m kõrgusele. Et arvestada parandust, vähendame 50 km 6% võrra —



Joon. 104. Moskva Ülikool (joonis hoone projekti järgi).

saame 47 km; edasi, $h = \frac{47^2}{2R} = \frac{2200}{12\,800} = 0{,}17$ (km), s. o. 170 m (200 asemel).

Moskvas ehitatakse Lenini mägede kõige kõrgemasse tippu kahekümne kuue korruselist ülikoolihoonet (joon. 104) — maailma suurimat õppe- ja teaduslikku keskust.

Ta kerkib Moskva jõe pinnast 200 m kõrgusele.

Järelikult ülikooli ülemiste korruste akendest avaneb vaade kuni 50 km kaugusele.

Gogoli torn

Ülesanne

Huvitav on teada, mis kasvab kiiremini: tõusu kõrgus või horisondi kaugus? Paljud mõtlevad, et vaatleja tõusmisel horisont kaugeneb erakordselt kiiresti. Nii muuseas mõtles ka Gogol, kirjutades artiklis «Meie aja arhitektuurist» järgmist:

«Suured, kolossaalsed tornid on linnas vajalikud ... Meil piirdutakse harilikult kõrgusega, mis võimaldab vaadelda ainult üht linna, kuna aga pealinnas on vajalik näha vähemalt pooleteistsaja versta[1] kaugusele igasse külge, ja selleks on võib-olla vaja üks või kaks lisakorrust — ja kõik muutub. Vaatevälja suurus kasvab vastavalt kõrgusele erakordse progressiivsusega.»

Kas see on tegelikult nii?

Lahendus

On küllaldane vaadelda valemit

$$\text{horisondi kaugus} = \sqrt{2Rh},$$

et korrapealt oleks selge väite ebaõigsus, nagu kasvaks «horisondi ulatus» vaatleja kõrgusega väga kiiresti. Vastupidi, horisondi kaugus kasvab aeglasemalt kui tõusu kõrgus: ta on võrdeline ruutjuurega kõrgusest. Kui vaatleja kõrgus suureneb 100 korda, kaugeneb horisont ainult 10 korda; kui kõrgus suureneb 1000 korda, kaugeneb horisont ainult 31 korda. Seetõttu on ekslik väita, et «üks või kaks lisakorrust — ja kõik muutub». Kui kaheksakorruselisele majale ehitada juurde veel kaks korrust, kasvab horisondi kaugus $\sqrt{{}^{10}/_{8}}$, s. o. 1,1 korda — kõigest 10%. Niisugune lisand on vähemärgatav.

Mis puutub aga ideesse tornide ehitamisest, millelt oleks võimalik näha «vähemalt poolteistsaja versta kaugusele», s. o. 160 km kaugusele, siis see on täiesti teostamatu. Gogol loomulikult ei võinud kujutleda, et need tornid peaksid olema tohutu kõrgusega.

Tõepoolest, võrrandist

$$160 = \sqrt{2Rh}$$

[1] 1 verst on 1,0668 km; 150 versta — 160 km. *Toim.*

saame:

$$h = \frac{160^2}{2R} = \frac{25\,600}{12\,800} = 2 \text{ (km)}.$$

See on suure mäe kõrgus. Seni meie kodumaa pealinna projekteeritud majadest kõige kõrgem — 32-korruseline administratiivhoone, mille kullatud kuppel peab tõusma 280 m kõrgusele hoone alusest — on seitse korda madalam Gogoli poolt projekteeritud tornidest.

Puškini küngas

Samasuguse vea teeb ka Puškin, rääkides «Ihnsas rüütlis» kaugest horisondist, mis avanes «võimas-uhke kingu» tipust:

> «Kust tsaar võis lõbu tundes kõrgelt ringi vaadata,
> nii kaugusi kui laiu välju jälgida,
> nii merd, kus laevad liuglemas on veel.»

Me nägime juba, kui tagasihoidlik oli selle «võimas-uhke kingu» kõrgus: isegi Attila väed ei oleks sel viisil suutnud püstitada küngast kõrgusega üle 4½ m. Nüüd võime selle arvutuse lõpetada, määrates, kui palju see küngas laiendaks tema tipul seisva vaatleja vaatevälja.

Vaatleja silm asetseks sel juhtumil maapinnast $4\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}$, s. o. 6 m kõrgusel ja järelikult horisondi kaugus oleks $\sqrt{2 \cdot 6400 \cdot 0{,}006} = 8{,}8$ (km). See on ainult 4 km rohkem, kui võib näha tasandikul seistes.

Kus raudteerööpad ühtuvad

Ülesanne

Te olete muidugi mitmel korral märganud, kuidas raudteerööpad kauguses koonduvad. Kuid kas teil on olnud juhust näha seda punkti, kus mõlemad rööpad lõpuks teineteisega kokku puutuvad? Kas seda punkti on üldse võimalik näha? Teil on nüüd selle ülesande lahendamiseks küllaldaselt teadmisi.

Lahendus

Meenutagem, et iga ese muutub normaalsele silmale punktiks siis, kui ta paistab 1′-se nurga all, s. o. kui ta asetseb 3400 oma läbimõõdu kaugusel. Raudtee laius on

1,52 m. Tähendab, rööbaste vahe peab punktiks kokku sulama kaugusel $1{,}52 \cdot 3400 = 5{,}2$ (km). Seega, kui suudaksime jälgida rööpaid 5,2 km kaugusele, näeksime, kuidas nad mõlemad ühinevad ühes punktis. Kuid tasasel maastikul asetseb horisont lähemal kui 5,2 km — kõigest 4,4 km kaugusel. Järelikult normaalse nägemisega inimene, seistes tasasel kohal, ei saa näha rööbaste kokkupuutepunkti. Ta võib näha seda ainult ühel järgmistest tingimustest:

1) kui tema nägemise teravus on väiksem, nii et esemed muutuvad temale punktiks suurema vaatenurga juures kui 1′;

2) kui raudtee ei ole horisontaalne;

3) kui vaatleja silm asetseb maapinnast kõrgemal kui

$$\frac{5{,}2^2}{2R} = \frac{27}{12\,800} = 0{,}0021 \text{ (km)},$$

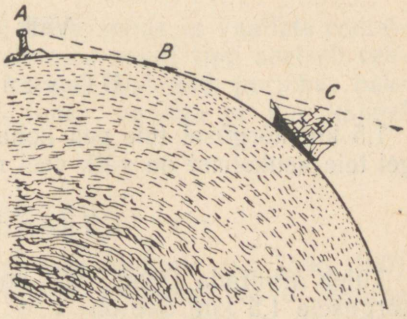
s. o. 210 cm.

Ülesandeid majakast

Ülesanne

Kaldal seisab majakas, mille tipp on 40 m kõrgusel veepinnast.

Kui kaugelt hakkab majakas laevale paistma, kui madrus-vaatleja asetseb laeva mastikorvis 10 m kõrgusel veepinnast?



Joon. 105. Majaka-ülesannete juurde.

Lahendus

Jooniselt 105 on näha, et ülesanne on samaväärne kahest osast AB ja BC koosneva sirglõigu AC pikkuse arvutamisega.

AB on horisondi kaugus majakast, mille kõrgus on 40 m, BC — horisondi kaugus 10 m kõrgusel olevast vaatlejast. Järelikult otsitav kaugus on

$$113\sqrt{0{,}04} + 113\sqrt{0{,}01} = 113\,(0{,}2 + 0{,}1) = 34 \text{ (km)}.$$

Ülesanne

Kui suurt osa sellest majakast näeb sama vaatleja 30 km kauguselt?

Lahendus

Jooniselt 105 selgub ülesande lahendamise käik: kõigepealt tuleb arvutada kaugus BC ja seejärel lahutada saadud tulemus kogupikkusest AC, s. o. 30 km-st, et teada saada kaugust AB. Teades kaugust AB, arvutame kõrguse, mille juures horisondi kaugus on AB. Teostame kõik need arvutused:

$$BC = 113\sqrt{0{,}01} = 11{,}3;$$

$$30 - 11{,}3 = 18{,}7;$$

$$\text{kõrgus} = \frac{18{,}7^2}{2R} = \frac{350}{12\,800} = 0{,}027 \text{ (km)}.$$

Tähendab, 30 km kauguselt on majaka kõrgusest kaetud 27 m ja nähtaval on ainult 13 m.

Välk

Ülesanne

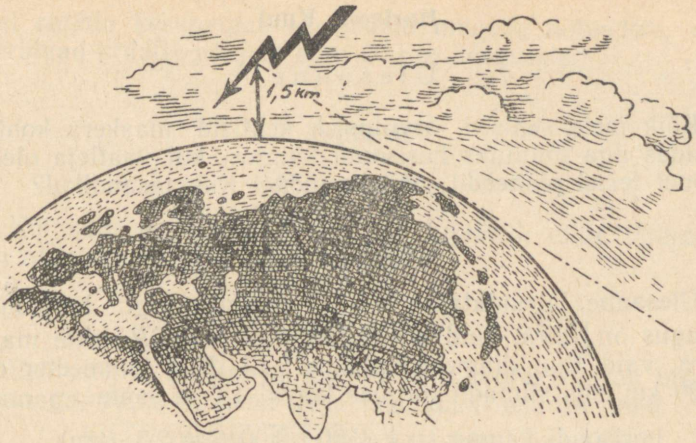
1,5 km kõrgusel teie pea kohal sähvatas välk. Kui kaugel teie asukohast on välk veel nähtav?

Lahendus

Tuleb arvutada (joon. 106) horisondi kaugus, mis vastab kõrgusele 1,5 km. See on

$$113\sqrt{1{,}5} = 138 \text{ (km)}.$$

Tähendab, kui maastik on tasane, siis on välk nähtav inimesele, kelle silmad on maapinna kõrgusel, 138 km kaugusele (6%-se paranduse arvestamisega 146 km kaugusele). Punktides, mis asetsevad 146 km kaugusel, on ta nähtav otse horisondil; et aga hääl niisuguse kauguseni ei kandu, siis paistab ta seal nagu põuavälk — välk ilma müristamiseta.



Joon. 106. Välgu-ülesande juurde.

Purjekas

Ülesanne

Te seisate järvekaldal või mererannas ja vaatlete eemalduvat purjekat. Te teate, et tema masti tipp asetseb veepinnast 6 m kõrgusel. Kui kaugel teist näib purjekas hakkavat vette (s. o. horisondi taha) vajuma ja kui kaugel kaob ta täiesti?

Lahendus

Purjekas hakkab horisondi taha kaduma (vt. joon. 100) punktis B — horisondi kaugusel keskmist kasvu inimese jaoks, s. o. 4,4 km kaugusel. Täielikult kaob ta horisondi taha punktis, mille kaugus punktist B on

$$113\sqrt{0{,}006} = 8{,}7 \text{ (km)}.$$

Tähendab, purjekas kaob horisondi taha kaldast

$$4{,}4 + 8{,}7 = 13{,}1 \text{ km kaugusel.}$$

Horisont Kuul

Ülesanne

Kõik meie senised arvutused kehtisid maakera kohta. Kuidas aga muutuks horisondi kaugus, kui vaatleja oleks mõnel teisel planeedil, näiteks mõnel Kuu tasandiku!?

Lahendus

Ülesanne lahendatakse sama valemi järgi: horisondi kaugus on $\sqrt{2Rh}$, kuid antud juhtumil pole $2R$ mitte maakera, vaid Kuu diameetri pikkus. Et Kuu diameeter on 3500 km, siis silmade kõrguse korral 1,5 m saame:

$$\text{horisondi kaugus} = \sqrt{3500 \cdot 0{,}0015} = 2{,}3 \text{ (km)}.$$

Kuu tasandikul näeksime kõigest 2⅓ km kaugusele.

Kuu kraatris

Ülesanne

Vaadeldes Kuud kasvõi nõrgagi pikksilmaga, näeme temal palju nn. rõngasmägesid — moodustisi, mille sarnaseid Maal ei ole. Ühe suurema rõngasmäe — «Kopernikuse kraatri» — välimine läbimõõt on 124 km, sisemine 90 km. Ringvalli kõrgeimad punktid asetsevad seesmise nõo põhjast 1500 m kõrgusel. Kuid kas te kraatri keskpunktis olles näeksite sealt ringvalli?

Lahendus

Et sellele küsimusele vastata, tuleb leida valli harjale, s. o. kõrgusele 1,5 km vastav horisondi kaugus. See on Kuul $\sqrt{3500 \cdot 1{,}5} = 23$ (km). Lisades sellele horisondi kauguse keskmise kasvuga inimese jaoks, saame kauguse, millel ringvall jääb vaatlejale horisondi taha varjatuks:

$$23 + 2{,}3 = \text{umbes } 25 \text{ (km)}.$$

Et aga keskpunkti kaugus äärtest on 45 km, siis keskpunktist seda valli pole võimalik näha — ehk ainult siis,

kui ronida keskpaigas asetsevate mägede nõlvadele, mis kerkivad kraatri põhjast kuni 600 m kõrgusele.[1]

Jupiteril

Ülesanne

Kui suur on horisondi kaugus Jupiteril, mille läbimõõt on Maa omast 11 korda suurem?

Lahendus

Eeldusel, et Jupiter on kaetud kõva koorega ja on tasase pinnaga, võiks inimene tema tasandikul asudes näha

$$\sqrt{11 \cdot 12\,800 \cdot 0{,}0016} = 14{,}4 \text{ km}$$ kaugusele.

Iseseisvaks harjutamiseks

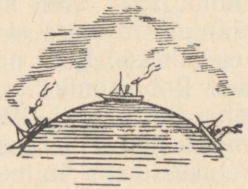
Arvutada horisondi kaugus allveelaeva periskoobi jaoks, mis on vaiksest merepinnast 30 cm kõrgusel.

Kui kõrgele peab lendur tõusma Laadoga järve kohal, et korraga näha teineteisest 210 km kaugusel olevaid kaldaid?

Kui kõrgele peab lendur tõusma Leningradi ja Moskva vahel, et korraga näha mõlemaid linnu? Leningrad—Moskva vahemaa on 640 km.

---

[1] Vt. artiklit «Лунные пейзажи» sama autori raamatu «Занимательная астрономия» II peatükis.





SEITSMES PEATÜKK

ROBINSONIDE GEOMEETRIA

(Lehekülgi Jules Verne'ilt)

Tähistaeva geomeetria

Seal põhjatus, täis tähti see,
ei nende arvu kindlaks tee.
Lomonossov

Oli aeg, kus selle raamatu autor valmistus mitte just igapäevaseks tulevikuks: laevahuku läbi teinud inimese karjääriks. Lühidalt öeldes: kavatsesin hakata Robinsoniks. Kui see oleks teostunud, siis oleks käesolev raamat võinud olla huvitavam kui nüüd, kuid võib ka olla, et ta oleks üldse kirjutamata jäänud. Minust ei saanud Robinsoni, mida ma praegu ka ei kahetse. Kuid nooruses ma uskusin kindlalt oma kutsumust Robinsoniks saada ja valmistusin selleks täiesti tõsiselt. Sest isegi kõige keskpärasemal Robinsonil peab olema teadmisi ja kogemusi, mis ei ole kohustuslikud teiste elukutsetega inimestele.

Mida tuleb kõigepealt teha õnnetuse tagajärjel asustamata saarele paisatud inimesel? Loomulikult määrata oma tahtmatu eluaseme geograafiline asend — tema geograafiline pikkus ja laius. Kahjuks räägitakse sellest suuremas osas vanades ja uutes Robinsoni-lugudes liiga lühidalt.

«Robinson Crusoe» täielikus algupärases väljaandes leiate selle kohta ainult ühe rea ja sellegi sulgudes:

«Nendel laiustel, kus asub minu saar (s. o. minu arvutuste järgi 9°22′ ekvaatorist põhja pool) ...»

See kahetsusväärne lakoonilisus viis mind meeleheitele, kui ma kogusin vajalikke andmeid oma kujuteldava tuleviku jaoks. Ma olin juba valmis ära ütlema asustamata saare ainsa elaniku karjäärist, kui see saladus mulle avanes Jules Verne'i «Saladuslikus saares».

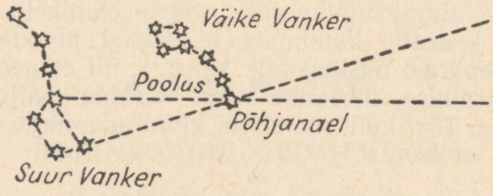
Ma ei valmista oma lugejaid ette Robinsonideks, kuid loen siiski vajalikuks peatuda siin geograafilise laiuse määramise lihtsamatel viisidel. See oskus võib osutuda vajalikuks mitte ainult tundmatute saarte elanikele. Meil on veel palju kaardile kandmata asustatud punkte (ja kas alati on käepärast üksikasjalik kaart?), nii et geograafilise laiuse määramise ülesanne võib kerkida paljude minu lugejate ette. Tõsi küll, me ei või kinnitada, nagu omal ajal Lermontov, et isegi:

«Eks Tambovit me sõjakaardil
ei märgita ka alati»,

kuid paljusid alevikke ja kolhoose ei ole veel meie päevilgi märgitud üldistel kaartidel. Ei tarvitse laskuda seiklustesse merel, et sattuda Robinsoni ossa, kes esimesena määras oma eluaseme geograafilise asendi.

Põhiliselt on asi küllaltki lihtne. Vaadeldes selgel ööl tähistaevast, märkate, et tähed joonestavad taevalaotusel aeglaselt kaldringe, nagu pöörleks kogu taevalaotus sujuvalt kalduasetatud nähtamatu telje ümber. Tegelikult muidugi pöörlete teie ise koos Maaga, tehes ringe tema telje ümber vastupidises suunas. Meie põhjapoolkera tähistaeva ainus punkt, mis jääb paigale, on see, kuhu suundub maakera telje kujuteldav pikendus. See «maailma põhjapoolus» asetseb Väikese Vankri aisa viimase heleda tähe — s. o. Põhjanaela — läheduses. Leides selle tähe meie põhjataevas, leiame seega ühtlasi maailma põhjapooluse asukoha. Seda aga ei ole raske teha, kui leida alguses kõigile tuntud tähtkuju Suur Vanker: tõmmake sirgjoon läbi tema kahe esimese tähe, nagu on näidatud joonisel 107, ja pikendades seda ligikaudu tähtkuju pikkuse võrra satutegi Põhjanaelale.

See on üks nendest taevasfääri punktidest, mis on meile vajalikud geograafilise laiuse määramisel. Teine — niinimetatud seniit — on punkt, mis asetseb taevas püstloodselt meie pea kohal. Teiste sõnadega: seniit on punkt taevas, kuhu suundub Maa selle raadiuse mõtteline pikendus, mis läbib teie asukohta. Teie seniidi ja Põhjanaela vaheline kaugus kraadides taeva kaart mööda on ühtlasi ka teie kauguseks kraadides maakera poolusest. Kui teie seniit on Põhjanaelast eemal 30°, siis te olete maakera poolusest 30° kaugusel ja järelikult olete ekvaatorist eemal 60°; teisiti väljendudes: te asute 60-ndal paralleelil.



Joon. 107. Põhjanaela leidmine.

Järelikult, et leida mistahes koha geograafiline laius, tuleb mõõta kraadides (ja selle osades) Põhjanaela «seniitkaugus»; pärast seda tuleb ainult lahutada see suurus 90°-st ja laius ongi määratud. Praktiliselt võib toimida ka teisiti. Et kaar horisondi ja seniidi vahel on 90°, siis lahutades sellest Põhjanaela seniitkauguse, ei saa me jäägina midagi muud kui kaare pikkuse Põhjanaelast horisondini; teisiti väljendudes: saame Põhjanaela «kõrguse» horisondist. Seepärast võrdub mingi koha geograafiline laius Põhjanaela kõrgusega horisondist sellel kohal.

Nüüd on teil selge, mida tuleb teha laiuse määramiseks. Olles ära oodanud selge öö, leiate taevas Põhjanaela ning mõõdate tema nurkkõrguse horisondist; tulemus annab otseselt teie asukoha otsitava geograafilise laiuse. Kui tahate olla täpne, siis peate võtma arvesse, et Põhjanael ei lange täpselt ühte maailmapoolusega, vaid kaldub temast $1\frac{1}{4}°$ võrra kõrvale. Seetõttu ei jää Põhjanael täiesti liikumatuks: ta joonestab liikumatu taevapooluse ümber väikese ringi, asetsedes sellest $1\frac{1}{4}°$ võrra kõrgemal, mada-

lamal, paremal või vasakul. Määrates Põhjanaela kõrguse tema kõige kõrgemas ja kõige madalamas asendis (astronoom ütleks: tema ülemise ja alumise «kulminatsiooni» momentidel), võtate mõlema mõõtmise keskmise. See ongi pooluse tõeline kõrgus ja järelikult koha geograafiline laius.

Kui aga on nii, siis ei ole vaja valida tingimata Põhjanaela: võib peatuda mistahes mitteloojuva tähe juures ja mõõtes tema kõrguse horisondist mõlemas äärmises asendis, võtta nende mõõtmiste keskmine. Tulemusena saadakse pooluse kõrgus horisondist, s. o. koha geograafiline laius. Kuid seejuures tuleb osata tabada valitud tähe kõige kõrgemat ja kõige madalamat asendit, mis teeb asja keerukamaks; ka ei õnnestu seda alati vaadelda ühe öö jooksul. Seepärast on esimestel ligikaudsetel mõõtmistel siiski parem töötada Põhjanaelaga, jättes tähele panemata tema väikese kõrvalekaldumise poolusest.

Seni me kujutlesime end asuvat põhjapoolkeral. Kuidas te toimiksite lõunapoolkerale sattudes? Täpselt samuti, ainult selle vahega, et siin tuleb määrata mitte maailma põhja-, vaid lõunapooluse kõrgus. Selle pooluse lähedal ei ole kahjuks meie Põhjanaela sarnast heledat tähte. Kuulus Lõunarist kiirgab küllaltki kaugel lõunapoolusest ja kui me soovime kasutada selle tähtkuju tähti laiuse määramiseks, siis tuleb võtta kahe mõõtmise — tähe kõige kõrgema ja kõige madalama asendi — keskmine.

Jules Verne'i romaani kangelased kasutasid oma «saladusliku saare» geograafilise laiuse määramisel just seda lõunataeva ilusat tähtkuju.

On õpetlik lugeda seda kohta romaanis, kus kirjeldatakse kogu toimingut. Ühtlasi tutvume ka sellega, kuidas uued Robinsonid oma ülesandega toime tulid, kuigi neil polnud nurgamõõtmise vahendeid.

«Saladusliku saare» geograafiline laius

«Oli kell 8 õhtul. Kuu polnud veel tõusnud, kuid horisont hõbetus juba õrnade kahvatute varjunditega, mida võis nimetada Kuu koiduks. Seniidis helkisid lõunapoolkera tähtkujud, nende hulgas Lõunarist. Insener Smith vaatles mõni aeg seda tähtkuju.

«Herbert,» ütles ta pärast mõningat järelemõtlemist, «täna on meil 15. aprill?»

«Jah,» vastas nooruk.

«Kui ma ei eksi, on homme üks nendest neljast päevast aastas, kus tõeline aeg võrdub keskmise ajaga: homme läbib Päike meridiaani meie kella järgi täpselt keskpäeval.[1] Kui ilm on selge, õnnestub mul ligikaudu määrata saare geograafiline pikkus.»

«Instrumentideta?»

«Jah. Õhtu on selge ja seepärast ma püüan täna määrata meie saare geograafilise laiuse, mõõtes Lõunaristi tähtede kõrguse, s. o. lõunapooluse kõrguse horisondist. Homme keskpäeval määran siis ka saare pikkuse.»

Kui inseneril oleks olnud sekstant — mõõduriist, mis võimaldab täpselt mõõta esemete nurkkaugusi valguskiirte peegelduinise abil, — ei oleks ülesanne tekitanud mingeid raskusi. Määrates sel õhtul pooluse kõrguse, järgmisel päeval aga momendi, millal Päike läbib meridiaani, oleks ta saanud saare geograafilised koordinaadid: laiuse ja pikkuse. Kuid sekstanti ei olnud ja seda tuli millegagi asendada.

Insener astus koopasse. Lõkketule valgusel lõikas ta kaks täisnurkset liistu ja ühendas need sirklikujuliselt, nii et selle sirkli harusid võis kokku suruda ja laiali tõmmata. Šarniiriks[2] kasutas ta lõkke juurest hagude hulgast leitud tugevat akaatsiaokast.

Kui instrument oli valmis, pöördus insener rannale tagasi. Tal oli tingimata vaja mõõta pooluse kõrgus selgesti eralduvast horisondist, s. o. merepinnast. Oma vaatlusteks suundus ta Kauge Vaate väljakule — sealjuures tuli arvesse võtta ka väljaku kõrgus merepinnast. Viimast mõõtmist võis teostada järgmisel päeval elementaarse geomeetria võtetega.

Horisont, altpoolt valgustatuna Kuu esimestest kiirtest, eraldus selgesti, võimaldades vaatluseks kõiki mugavusi. Lõunarist helendas taevas ümberpööratuna: tema aluseks

[1] Meie kellad ei käi täpselt kooskõlas päikesekellaga: «tõelise päikeseaja» ja selle «keskmise aja» vahel, mida näitab täpne kell, on erinevus, mis võrdub nulliga ainult neljal päeval aastas: umbes 16. aprillil, 14. juunil, 1. septembril ja 24. detsembril (vt. Я. И. Перельман «Занимательная астрономия»).

[2] Šarniir — liigend, hing. *Toim.*

olev täht a l f a asetseb (maailma) lõunapoolusele kõige lähemal.

See tähtkuju ei ole nii lähedal lõunapoolusele kui Põhjanael põhjapoolusele. Täht a l f a on poolusest 27° kaugusel; insener teadis seda ja kavatses kasutada seda kaugust oma arvutustes. Ta ootas momenti, millal täht läbib meridiaani: see kergendas operatsiooni teostamist.

Smith suunas oma puust sirkli ühe haru horisontaalselt, teise Lõunaristi a l f a l e; kujunenud nurk andis tähe nurkkõrguse horisondist. Et seda nurka kindlalt säilitada, kinnitas ta akaatsiaokaste abil mõlemale liistule põiki kolmanda, nii et nurk säilitas muutumatu kuju.

Jäi veel ainult määrata saadud nurga suurus, taandades vaatlusandmed mere tasapinnale, s. o. arvestades horisondi alangut, milleks oli vaja mõõta kalju kõrgus.[1] Nurga suurus annab Lõunaristi a l f a kõrguse ja järelikult ka pooluse kõrguse horisondist, s. o. saare geograafilise laiuse, sest maakera iga punkti geograafiline laius võrdub pooluse kõrgusega horisondist selles punktis. Need arvutused kavatseti teostada homme.»

Kuidas teostati kalju kõrguse mõõtmine, teavad lugejad juba käesoleva raamatu esimeses peatükis toodud katkendist. Jättes selle koha romaanist vahele, jälgime inseneri edaspidist tööd:

«Insener võttis sirkli, mille ta eelmisel õhtul oli valmistanud ja mille abil ta määras nurkkauguse Lõunaristi a l f a ja horisondi vahel. Ta mõõtis hoolikalt selle nurga suuruse 360-ks osaks jaotatud ringi abil ja leidis, et see on 10°. Liites 10°-le need 27°, mille võrra mainitud täht asetseb poolusest eemal, ja võttes arvesse kalju kõrguse, millelt teostati mõõtmine, sai insener pooluse kõrguseks horisondist 37°. Siit järeldas Smith, et Lincolni saar asetseb 37° lõunalaiusel või — võttes arvesse mõõtmise ebatäiuslikkust — 35-nda ja 40-nda paralleeli vahel.

[1] Et insener teostas mõõtmise mitte mere tasapinnal, vaid kõrgel kaljul, siis vaatleja silmast horisondini tõmmatud sirgjoon ei langenud täpselt kokku Maa raadiusega risti oleva sirgega, vaid moodustas sellega teatava nurga. Kuid see nurk on nii väike, et antud juhtumil oleks võinud selle julgesti tähele panemata jätta (100 m-se kõrguse juures moodustab ta vaevalt kolmandiku kraadist); seepärast ei olnud Smith'il, õigemini Jules Verne'il, vajadust teha selle parandusega arvutust keerukamaks (*J. P.*).

Jäi ainult veel teada saada saare geograafiline pikkus. Insener lootis selle määrata veel samal päeval, kui Päike keskpäeval läbib saare meridiaani.»

Geograafilise pikkuse määramine

«Kuidas aga määrab insener Päikese läbimineku momendi saare meridiaanist, omamata selleks mingit instrumenti? See küsimus huvitas Herbertit väga.

Insener korraldas kõik, mis oli talle vajalik astronoomiliseks vaatluseks. Ta valis liivasel kaldal täiesti puhta, mõõna poolt tasandatud koha. Sel kohal liiva sisse torgatud kuuejalane latt oli risti selle väljaku tasapinnaga.

Nüüd mõistis Herbert, kuidas insener kavatses tegutseda momendi määramiseks, millal Päike läbib saare meridiaani ehk, teisiti väljendudes, kohaliku keskpäeva määramiseks. Ta tahtis seda määrata lati poolt liivale heidetava varju jälgimisega. See viis polnud muidugi kuigi täpne, kuid instrumentide puudumisel andis see küllaltki rahuldava tulemuse.

Moment, millal lati vari muutub kõige lühemaks, on keskpäev. On küllaldane tähelepanelikult jälgida varju tipu liikumist, et märgata momenti, kus vari, lakates lühenemast, hakkab uuesti pikenema. Sel juhtumil vari nagu täidaks kellaosuti osa numbrilaual.

Kui inseneri arvestuse järgi saabus aeg vaatluse teostamiseks, laskus ta põlvili ja hakkas liivasse väikesi vaiakesi torgates märkima lati poolt heidetud varju järk-järgulist lühenemist.

Ajakirjanik (üks inseneri saatjaist) hoidis käes oma kronomeetrit, valmistudes märkima momenti, millal vari on kõige lühem. Et insener teostas vaatlust 16. aprillil, s. o. ühel neist päevadest, kus tõeline keskpäev ühtub keskmisega, siis ajakirjaniku poolt tema kronomeetri järgi märgitud moment määrati Washingtoni meridiaani aja järgi (rändurite lähtekoht).

Päike liikus aeglaselt, vari lühenes järk-järgult. Märgates lõpuks, et ta hakkas pikenema, küsis insener:

«Mis kell on?»

«Viis ja üks minut,» vastas ajakirjanik.

Vaatlus oli lõpetatud. Jäi ainult teostada lihtne arvutus.

Vaatlus tegi kindlaks, et Washingtoni meridiaani ja Lincolni saare meridiaani vahel on ajaline erinevus peaaegu

täpselt 5 tundi. See tähendab, et kui saarel on keskpäev, siis Washingtonis on juba kell 5 õhtul. Päike läbib oma näilisel ööpäevasel liikumisel ümber maakera 1° 4 minutiga, tunnis aga 15°. Ja 15° korrutatud 5-ga (tundide arv) annab 75°. Washington asetseb Greenwichi meridiaanist, mis on võetud nii ameeriklaste kui ka inglaste poolt algmeridiaaniks, 77°3′11″ lääne pool. Tähendab, saar asetseb ligikaudu 152° läänepikkusel.

Arvestades vaatluste ebatäpsust, võis väita, et saar asetseb lõunalaiuse 35-nda ja 40-nda paralleeli vahel ning Greenwichist lääne pool 150-nda ja 155-nda meridiaani vahel.»

Märgime lõpuks, et geograafilise pikkuse määramise viise on mitmeid ja küllaltki erinevaid; Jules Verne'i kangelaste poolt kasutatud viis on ainult üks nendest (tuntud «kronomeetrite transporteerimise meetodi» nime all). Samuti on olemas ka teisi geograafilise laiuse määramise viise, palju täpsemaid kui siinkirjeldatu (mis näiteks meresõiduks on kõlbmatu).

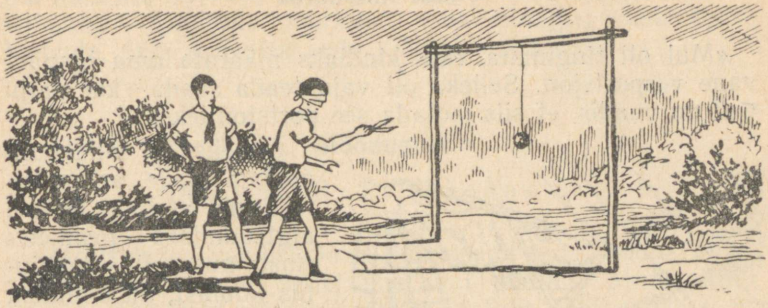


TEINE OSA

TÕTT JA NALJA GEOMEETRIAS

Matemaatika aine on niivõrd tõsine, et on kasulik mitte lasta mööda minna juhuseid tema pisut huvitavamaks tegemiseks.

Pascal



KAHEKSAS PEATÜKK

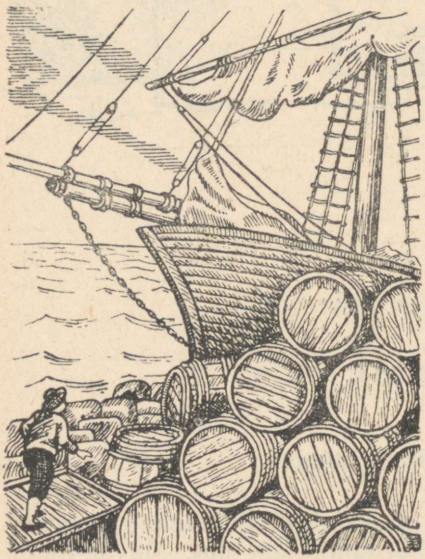
GEOMEETRIA PIMESI

Laevaruumi põhjas

Merede ja väljade vabast õhust siirdume vanaaegse laeva kitsasse ja pimedasse kiiluruumi, kus ühe Mayne-Reidi (l.: mein riid) romaani noor kangelane lahendas edukalt geomeetrilise ülesande niisuguses olukorras, milles arvatavasti ühelgi minu lugejaist ei ole tulnud tegelda matemaatikaga. Romaanis «Poiss-meremees» (ehk «Laevaruumi põhjas») jutustab Mayne-Reid noorest seiklusteotsijast (joon. 108), kes, omamata võimalust reisi eest maksmiseks, ronis salaja tundmatu laeva kiiluruumi ja osutus ootamatult sinna suletuks kogu merereisi ajaks. Tuhnides oma vangikongi täitva pagasi hulgas, sattus ta kuivikutekastile ja veetünnile. Arukas poiss mõistis, et selle piiratud toiduja joogitagavaraga tuleb olla võimalikult kokkuhoidlik ja otsustas seetõttu jagada selle päevaportsjoniteks.

Kuivikuid üle lugeda ei olnud raske; kuidas aga määrata veeportsjoneid, teadmata üldise veetagavara suurust? See oli ülesanne, mis seisis Mayne-Reidi noore kangelase ees. Vaatame, kuidas ta sellega toime tuli.

«Mul oli tingimata vaja kindlaks määrata oma igapäevane veeportsjon. Selleks oli vaja teada saada, kui palju vett on vaadis, et siis jaotada see portsjoniteks.



Joon. 108. Noor seiklusteotsija Mayne-Reidi romaanist.

Õnneks oli külakooliõpetaja meile aritmeetikatunnis andnud mõned algteadmised geomeetriast: mul oli ettekujutus kuubist, püramiidist, silindrist, kerast; samuti teadsin, et vaati võib vaadelda kui kaht oma suuremate põhjadega kokku pandud tüvikoonust.

Et määrata vaadi ruumala, oli tarvis teada tema kõrgust (või õigemini: poolt tema kõrgusest), peale selle ühe põhja ümbermõõtu ja keskmise ristlõike ümbermõõtu, s. o. vaadi kõige laiema osa ümbermõõtu. Teades neid kolme suurust, oleksin ma võinud täpselt määrata, mitu kuupühikut sisaldab vaat.

Mul jäi üle ainult mõõta need suurused — kuid just selles peituski kogu raskus.

Kuidas teostada seda mõõtmist?

Vaadi kõrgust ei olnud raske teada saada: ta seisis minu ees; mis puutus aga ümbermõõtudesse, siis need olid mulle kättesaamatud. Ma olin kasvult liiga väike, et küündida vaadi ülemise ääreni; peale selle segasid vaadi kõrval seisvad kastid.

Oli veel üks takistus: mul polnud ei mõõdupuud ega nööri, mida oleks võinud mõõtmiseks kasutada; kuidas sain

ma määrata suurusi, kui mul ei olnud mingisugust mõõduvahendit? Kuid ma otsustasin oma plaanist siiski mitte loobuda, enne kui olen seda kõigiti kaalunud.»

Mõõdupulk

(Mayne-Reidi ülesanne)

«Mõtiskledes vaadist, kindla otsusega teda mõõta, avastasin ma ootamatult selle, mis mul puudus. Mind aitaks varras, mis oleks nii pikk, et ta ulatuks läbi vaadi tema kõige laiemas kohas. Kui ma pistaksin varda vaati kuni vastasseinani, saaksin teada vaadi läbimõõdu. Jääks vaid korrutada varda pikkus kolmega, et saada vaadi ümbermõõt. See pole küll päris täpne, kuid täiesti küllaldane igapäevaseks mõõtmiseks. Ja et avaus, mille ma varem tegin vaati, oli vaadi kõige laiemas osas, siis, pistes temasse varda, saaksin vajaliku diameetri.

Kuid kust leida niisugune varras? See ei olnud raske. Otsustasin selleks kasutada kuivikukasti lauda ja asusingi kohe tööle. Tõsi, laua pikkus oli kõigest 60 cm, vaat aga oli rohkem kui kaks korda laiem. Kuid see ei võinud olla takistuseks — tuli ainult valmistada kolm kepikest ja need kokku siduda, et saada küllaldase pikkusega varras.

Lõigates lauda piki kiudu, valmistasin kolm ümmargust ja hästi siledat kepikest. Millega neid siduda? Ma kasutasin oma saabaste paelu, mille pikkus oli peaaegu terve meeter. Sidudes kepikesed kokku, sain ma varda küllaldase pikkusega — umbes poolteist meetrit.

Ma oleksin asunud mõõtma, kuid sattusin uuele takistusele. Varrast oli võimatu vaati pista: ruum oli liiga kitsas. Varrast ei saanud ka painutada — ta oleks arvatavasti murdunud.

Peagi leidsin, kuidas oma mõõduvarras vaati pista: ma jaotasin ta osadeks, pistsin esimese osa vaati ja alles siis sidusin väljaulatuva otsa külge teise osa; seejärel, sisse lükanud teise osa, sidusin kolmanda.

Ma suunasin varda nii, et ta puudutas vastasseina just avause vastas ja tegin talle märgi vaadi välispinna kohal. Lahutades vaadi seina paksuse, sain ma arvutusteks vajaliku suuruse.

Varda tõmbasin välja samuti, nagu ta sisse pistsin, püüdes hoolikalt märkida neid kohti, kus üksikud osad olid kokku seotud, et pärast anda vardale sama pikkus, mis tal oli vaadis. Väike viga võis lõpptulemuses anda tunduva kõrvalekaldumise.

Seega oli mul tüvikoonuse põhja läbimõõt olemas. Nüüd oli vaja leida vaadi põhja läbimõõt, mis oli tüvikoonuse ülemiseks põhjaks. Ma asetasin varda vaadile, sirutades ta kuni vastasääreni, ja märkisin vardal läbimõõdu suuruse. Selleks ei kulunud üle minuti.

Jäi ainult mõõta vaadi kõrgus. Oleks vaja, ütleksite teie, asetada latt püstloodselt vaadi kõrvale ja märkida temal kõrgus. Kuid minu ruum oli täiesti pime ja asetades latt püstloodi, ei võinud ma näha, kuhu ulatus vaadi ülemine äär. Ma sain tegutseda ainult käsikaudu: tuli kätega kobada vaadi põhja ja vastavat kohta latil. Peale selle võis latt vaadi kõrval painduda ja ma oleksin saanud ebaõige kõrguse.

Hästi järele mõeldes leidsin ma, kuidas seda takistust ületada. Ma ühendasin ainult kaks kepikest, kolmanda aga asetasin vaadi ülemisele põhjale, nii et ta ulatus 30—40 cm üle ääre; seejärel asetasin pika varda selliselt, et ta moodustas vaadi põhjal asetseva vardaga täisnurga ja järelikult oli paralleelne vaadi kõrgusega. Tehes vardale märgi vaadi väljaulatuvaima osa kohal, s. o. keskel, ja lahutades sellest vaadi põhja paksuse, sain ma poole vaadi kõrgusest ehk — mis on seesama — ühe tüvikoonuse kõrguse.

Nüüd olid mul ülesande lahendamiseks kõik vajalikud andmed olemas.»

Mida oligi vaja teostada

«Väljendada vaadi ruumala kuupühikutes ja seejärel ümber arvutada gallonitesse[1], kujutas endast lihtsat aritmeetilist arvutust, millega oli kerge toime tulla. Tõsi küll, arvutusteks puudusid mul kirjutusvahendid, kuid need oleksid niikuinii kasutud olnud, sest ma olin täiesti pimedas. Mul oli tihti tulnud teostada peast nelja aritmeetilist tehet sule ja paberita. Nüüd tuli opereerida mitte väga suurte arvudega ja ülesanne ei viinud mind sugugi segadusse.

[1] Gallon on mahumõõt. Inglise gallon sisaldab 277 kuuptolli (umbes 4¼ l). Gallonis on 4 quarti, quardis 2 pinti.

Kuid ma sattusin uuele raskusele. Mul olid kolmed andmed: tüvikoonuse kõrgus ja tema mõlemate põhjade läbimõõdud; kuid missugused olid nende suuruste arvulised väärtused? Enne arvutamist oli vaja väljendada need suurused arvudes.

Esialgu see takistus paistis ületamatuna: et mul ei ole jalga, meetrit ega mingisugust muud mõõdupuud, tuleb loobuda ülesande lahendamisest.

Kuid mulle meenus, et ma mõõtsin sadamas oma pikkuse, mis oli täpselt neli jalga. Kuidas see teadmine võis mulle praegu kasulik olla? Väga lihtsalt: ma võisin märkida vardal neli jalga ja selle arvutuste aluseks võtta.

Et märkida oma pikkust vardale, heitsin ma põrandale ja asetasin endale varda sel viisil, et üks tema ots puudutas minu jalgu, teine aga asetses laubal. Ma hoidsin varrast ühe käega, kuna vaba käega tegin temale oma pealae kõrgusele märgi.

Edasi — jälle raskused. 4 jala pikkune varras on mõõtmiseks kasutu, kui temale ei ole märgitud väiksemaid jaotusi — tolle. Näib, nagu poleks raske jaotada 4 jalga 48-ks osaks (tollideks) ja kanda need jaotused joonlauale. Teoorias on see tõepoolest väga lihtne, kuid praktikas, ja veel niisuguses pimeduses, milles mina viibisin, ei olnud see nii kerge ega lihtne.

Kuidas leida 4 jala pikkuse varda keskpunkt? Kuidas jaotada kumbki varda pool veel kord pooleks ja seejärel iga jalg 12-ks täpselt üksteisega võrdseks tolliks?

Ma alustasin sellest, et valmistasin kepikese pikkusega pisut üle 2 jala. Võrreldes teda pulgaga, millel oli märgitud 4 jalga, veendusin, et kepikese kahekordne pikkus oli veidi suurem kui 4 jalga. Lühendades kepikest ja seda operatsiooni mitu korda korrates, saavutasin ma viiendal korral selle, et kepikese kahekordne pikkus oli täpselt 4 jalga.

See võttis palju aega. Kuid aega oli mul küllalt: ma olin isegi rahul, et oli teda millegagi täita.

Muuseas, ma taipasin lühendada edaspidist tööd, asendades kepikese nööriga, mida oli lihtne kahekorra kokku panna. Selleks sobisid hästi minu saapapaelad. Ühendades need kindla sõlmega, alustasin ma tööd ja peagi võisin lõigata täpselt 1 jala pikkuse osa. Seni tuli nööri kahekorra kokku panna — see oli lihtne. Edasi tuli ta aga kokku panna kolmekordselt, mis oli juba raskem. Kuid ma tulin

sellega toime, ja peagi oli mul käes kolm neljatollist tükki. Jäi üle need kahekorra kokku panna ja veel kord kahekorra, et saada 1 tolli pikkune osa.

Nüüd oli mul see, mis mul enne puudus, et märkida pulgale jaotusi tollides; asetades sellele täpselt minu mõõdurihma tükikesi, tegin ma 48 tolle tähistavat sisselõiget. Nii sain tollidesse jaotatud mõõdupuu, mille abil oli võimalik mõõta minu poolt saadud pikkusi. Alles nüüd võisin lõpule viia selle minule nii tähtsa ülesande lahendamise.

Ma alustasin selle arvutusega otsekohe. Mõõtes mõlemad läbimõõdud, võtsin ma nende keskmise suuruse ja leidsin seejärel sellele keskmisele läbimõõdule vastava pindala. Nii sain ma põhja suuruse silindri jaoks, mille ruumala oli võrdne sama kõrgusega kaksik-tüvikoonuse ruumalaga. Korrutades tulemuse vaadi kõrgusega, leidsin ma otsitava ruumala.

Jagades saadud kuuptollide arvu 69-ga (kuuptollide arv ühes quardis[1]), sain teada, mitu quarti sisaldas minu vaat. Ta mahutas üle saja galloni, täpsemalt — 108.»

Arvutuse kontroll

Geomeetriat tundev lugeja märkab kahtlematult, et Mayne-Reidi noore kangelase poolt kasutatud tüvikoonuse ruumala arvutamise viis ei ole täiesti täpne. Kui (joon. 109) tähistame väiksemate põhjade raadiuse r-ga, suurema põhja raadiuse R-ga ja vaadi kõrguse, s. o. kummagi tüvikoonuse kahekordse kõrguse, h-ga, siis avaldub poisi poolt saadud ruumala valemina

$$\pi \left(\frac{R+r}{2}\right)^2 h = \frac{\pi h}{4}(R^2 + r^2 + 2Rr).$$

Seevastu geomeetriareeglite kohaselt tegutsedes, s. o. kasutades tüvikoonuse ruumala valemit, saaksime otsitava ruumala jaoks avaldise

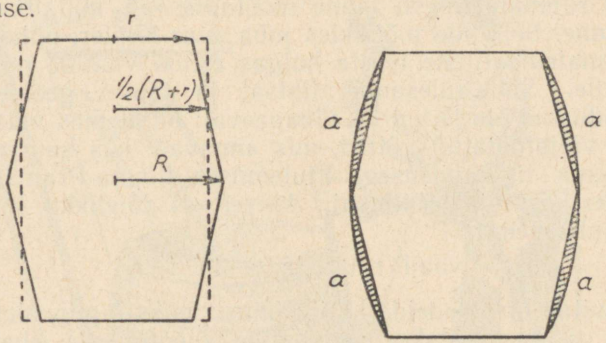
$$\frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr).$$

[1] Vt. märkust lk. 168.

Mõlemad avaldised ei ole võrdsed ja on kerge veenduda, et teine on esimesest suurem

$$\frac{\pi h}{12}(R-r)^2 \text{ võrra.}$$

Algebra-tundjad taipavad, et $\frac{\pi h}{12}(R-r)^2$ on positiivne suurus, s. o. Mayne-Reidi poisi meetod andis vähendatud tulemuse.



Joon. 109. Nooruki arvutuse kontrollimine.

Huvitav on määrata, kui suur see vähenemine umbkaudu on. Vaadid ehitatakse harilikult nii, et nende kõige laiema koha läbimõõt ületab põhja läbimõõdu $^1/_5$ võrra, s. o. $R-r=\frac{R}{5}$. Eeldades, et Mayne-Reidi romaanis vaat oli just niisuguse kujuga, võime leida erinevuse tüvikoonuste arvutatud ja tõeliste ruumalade suuruste vahel:

$$\frac{\pi h}{12}(R-r)^2 = \frac{\pi h}{12}\left(\frac{R}{5}\right)^2 = \frac{\pi h R^2}{300},$$

s. o. umbes $\frac{hR^2}{100}$ (kui π väärtuseks võtta 3). Viga võrdub, nagu näeme, silindri ruumalaga, mille põhja raadiuseks on vaadi kõige suurema risłõike raadius, kõrguseks aga üks kolmesajandik vaadi kõrgusest.

Antud juhtumil oleks aga soovitav tulemuse väike suurenemine, sest vaadi ruumala on kindlasti suurem kahe

tema sisse joonestatud tüvikoonuse ruumalast. See selgub jooniselt 109 (paremal), kust on näha, et vaadi mõõtmisel kirjeldatud viisil jäetakse kõrvale see osa tema ruumalast, mis on tähistatud tähtedega *a, a, a, a.*

Mayne-Reidi noor matemaatik ei mõtelnud seda valemit vaadi ruumala arvutamiseks ise välja; see on ära toodud mõnedes geomeetria algkursustes kui sobiv võte vaatide ruumalade ligikaudseks määramiseks. Tuleb märkida, et vaadi ruumala täiesti täpne mõõtmine on küllaltki raske ülesanne. Selle üle mõtiskles juba suur Kepler, pühendades oma matemaatiliste teoste hulgas eritöö vaatide mõõtmise kunstile. Selle ülesande lihtsat ja täpset geomeetrilist lahendust ei ole leitud ka tänapäeval: on olemas vaid praktikas väljatöötatud võtted, mis annavad kas suurema või väiksema ligikaudsusega tulemuse. Lõuna-Prantsusmaal näiteks kasutatakse lihtsat, katseliselt täielikku kinnitust leidnud valemit:

$$\text{vaadi ruumala} = 3{,}2\ hRr.$$

Huvitav on vaadelda ka küsimust: miks õigupoolest vaatidele üldse antakse niisugune mõõtmiseks ebamugav kuju — väljapoole kumerate külgedega silinder? Kas ei oleks lihtsam valmistada vaate täpselt silindrikujulistena? Selliseid silindrikujulisi vaate küll tehakse, kuid mitte puidust, vaid metallist (näiteks petrooleumi jaoks). Seega on meie ees

ülesanne:

Mispärast valmistatakse puuvaadid kumerate külgedega? Milles seisab niisuguse kuju eelis?

Lahendus

Paremus seisab selles, et pannes vaadile vitsad, võib neid asetada pinguli ja tihedalt väga lihtsa võttega: surudes neid vaadi laia osa suunas. Siis surub vits vaadilauad küllaldase jõuga kokku, kindlustades vaadile vajaliku tugevuse.

Samal põhjusel antakse ka puuämbritele, toobritele, kappadele jne. harilikult mitte silindri, vaid tüvikoonuse kuju: siin saavutatakse nõu pingutamine samuti vitsadega, nende lihtsa surumisega laiema osa suunas (joon. 110).

Siin on ühtlasi sobiv koht tutvustada lugejat Johann Kepleri poolt sel teemal avaldatud mõtetega. Planeetide liikumise teise ja kolmanda seaduse avastamise vahelisel perioodil pööras suur matemaatik tähelepanu vaatide kuju küsimusele ja kirjutas sel teemal isegi terve matemaatilise teose. Tema «Vaatide stereomeetria» algab nii:



Joon. 110. Vaadilaudade tihe kokkupressimine saavutatakse vitsade surumisega vaadi laiema osa suunas.

«Veinivaatidele on vastavalt materjali, ehitamise ja tarvitamise nõuetele välja kujunenud ümmargune, koonuse ja silindriga sarnanev vorm. Kaua metallnõudes hoitud vedelik rikneb nõu roostetamise tagajärjel; klaas- ja savinõud

on liiga väikeste mõõdetega ja ebakindlad; kivinõud ei leia tarvitamist oma raskuse tõttu — tähendab, jääb üle veini hoida puuvaatides. Ühest tüvest aga ei saa valmistada küllaldase suurusega ja küllaldasel arvul anumaid, ja kuigi see oleks võimalik, siis nad praguneksid. Seepärast tuleb vaate valmistada paljudest üksteisega ühendatud puulauakestest. Vedeliku väljavoolamist pragudest üksikute osade vahel ei ole võimalik ära hoida mingisuguse materjali abil ega mingil muul viisil, peale nende kokkusurumise vitsade abil...

Kui oleks võimalik puulauakestest kokku lüüa kera, siis oleksid kõige soovitatavamad kerakujulised anumad. Et aga vitsadega ei ole võimalik laudu kerakujuliselt kokku muljuda, siis astubki kera asemele silinder. Kuid see silinder ei või olla päris korrapärane, sest siis muutuksid lõdvenenud vitsad kohe kasutuks ja neid poleks võimalik pingutada, kui vaat ei omaks koonilist kuju, kitsenedes mõnevõrra mõlema põhja suunas. See kuju on sobiv nii veeretamiseks kui ka vankril vedamiseks ja koosnedes kahest teineteisega sarnasest ühist põhja omavast poolest, on ta ilusa välimusega.»[1]

Mark Twaini öine rännak

Mayne-Reidi poisikese poolt tema kurvas olukorras ülesnäidatud leidlikkus tekitab imetlust. Täielikus pimeduses, milles ta oli, ei oleks suurem osa inimesi osanud isegi väikseimal määral õigesti orienteeruda, rääkimata juba mingisuguste mõõtmiste ja arvutuste teostamisest. Mayne-Reidi jutustusega on õpetlik kõrvutada koomilist lugu sihitust rännakust pimedas võõrastemaja-toas — seiklus, mis nagu oleks juhtunud Mayne-Reidi tuntud kaasmaalasega, humorist Mark Twainiga. Selles jutustuses on tabavalt esile toodud, kui raske on luua endale pimeduses õiget ette-

[1] Ei tule arvata, et Kepleri teos vaatide mõõtmisest on ainult matemaatiliseks ajaviiteks, geeniuse puhketundide vahelduseks. Ei, see on tõsine töö, milles esmakordselt tuuakse geomeetriasse lõpmatult väikesed suurused ja integraalarvutuse alused. Veinivaat ja tema ruumala mõõtmise majanduslik ülesanne viisid Kepleri sügavatele ja viljakatele matemaatilistele mõtisklustele. (Vene keeles ilmus see teos 1935. a.)

kujutust esemete asetusest isegi harilikus toas, kui sisustus on võõras. Toome alljärgnevalt lühendatud kujul selle naljaka episoodi Mark Twaini «Rännakutest välismaal».

«Ma ärkasin ja tundsin janu. Mul tuli pähe suurepärane mõte: riietuda, väljuda aeda ja karastada end purskkaevu all.

Ma tõusin tasakesi ja hakkasin otsima oma asju. Leidsin ühe soki. Kus võis olla teine, seda ei osanud ma kujutleda. Ettevaatlikult põrandale laskudes hakkasin kobama ümberringi, kuid tagajärjetult. Otsisin kaugemalt, kobades ja kohmitsedes. Liikusin ikka edasi ja edasi, aga sokki ei leidnud ja põrkasin ainult vastu mööblit. Kui magama heitsin, oli ümberringi palju vähem mööblit, nüüd aga oli tuba seda täis, eriti toole, mida näis olevat kõikjal. Kas ei kolinud siia vahepeal veel paar perekonda? Pimedas ma ühtki nendest toolidest ei näinud, see-eest aga põrkasin peaga vahetpidamatult nende vastu.

Lõpuks otsustasin, et võin elada ka ilma ühe sokita. Tõustes suundusin ma ukse poole, nagu oletasin — kuid ootamatult nägin oma ähmast kujutust peeglis.

Oli selge, et olen eksinud ega oma vähimatki ettekujutust sellest, kus asun. Kui toas oleks olnud ainult üks peegel, oleks see aidanud mind orienteeruda, kuid neid oli kaks; see aga oli niisama hea kui tuhat.

Ma tahtsin jõuda ukseni seina mööda. Alustasin uuesti oma katseid — ja ajasin maha pildi. See ei olnud suur, kuid tekitas müra nagu terve panoraam. Harris (toanaaber, kes magas teises voodis) ei liigutanud, kuid ma tundsin, et kui tegutsen edasi samas vaimus, siis tingimata äratan ta. Otsustasin proovida teist teed: otsin uuesti üles ümmarguse laua — olin tema juures juba mitu korda — ja selle juurest püüan jõuda oma voodini; kui leian voodi, leian ka karavini veega ja siis vähemalt võin kustutada oma väljakannatamatu janu. Kõige parem oli roomata neljakäpukil; seda meetodit ma olin juba katsetanud ja seepärast usaldasin seda kõige rohkem.

Mul õnnestus lõpuks jõuda lauani — tajuda teda oma peaga — võrdlemisi väikese müraga. Siis tõusin uuesti, hoides tasakaalu ettesirutatud käte ja laialiaetud sõrmedega. Leidsin tooli. Siis seina. Teise tooli. Siis diivani. Oma

jalutuskepi. Veel ühe diivani. See hämmastas mind, sest teadsin hästi, et toas oli ainult üks diivan. Jällegi sattusin lauale ja sain uue hoobi. Seejärel põrkasin uuele toolide reale.

Alles siis tuli mulle pähe see, millele oleksin pidanud tulema juba ammu: laud oli ümmargune ja järelikult ei võinud olla lähtepunktiks minu rännakutele. Hea õnne peale suundusin toolide ja diivani vahele, kuid sattusin täiesti tundmatule alale, ajades teel kaminalt maha küünlajala. Peale küünlajala ajasin maha veel lambi ja pärast lampi lendas klirinaga põrandale karavin.

«Ahaa,» mõtlesin ma, «lõpuks leidsin su, tuvike!»

«Vargad! Röövitakse!» karjus Harris.

Müra ja karjumine äratas terve maja. Ilmusid küünalde ja laternatega peremees, külalised, teenija.

Ma vaatasin ringi. Selgus, et ma seisin Harrise voodi ees. Ainult üks diivan asetses seina ääres; ainult üks tool seisis selliselt, et temale võis komistada — ma keerlesin tema ümber nagu planeet ja põrkasin temaga kokku nagu komeet tervelt poole öö jooksul.

Kontrollinud oma sammumõõtjat, veendusin, et käisin öö jooksul ära 47 miili.»

Viimane kinnitus ületab igasuguse mõõdu: mõne tunni jooksul ei saa jalgsi ära käia 47 miili, kuid loo ülejäänud üksikasjad on küllaltki tõepärased ja iseloomustavad tabavalt neid koomilisi raskusi, millega harilikult kokku puututakse, rännates süsteemitult, hea õnne peale, pimeduses mööda tundmatut tuba. Seda enam peame hindama Mayne-Reidi noore kangelase hämmastavat metoodilisust ja meelekindlust, kes peale orienteerumise täielikus pimeduses lahendas ka neis tingimustes mitte sugugi kerge matemaatilise ülesande.

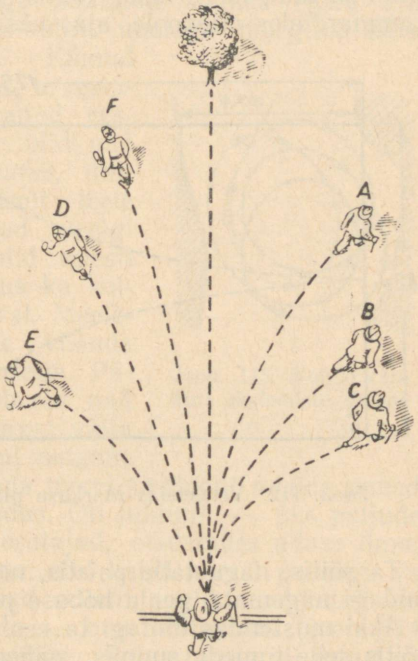
Mõistatuslik ringlemine

Twaini ringlemise puhul pimedas toas on huvitav märkida üht mõistatuslikku nähtust, mida võib tähele panna kinniste silmadega liikuvate inimeste juures: nad ei saa liikuda otsesuunas, vaid kalduvad tingimata kõrvale, tehes kaare, kuid kujutledes seejuures, et liiguvad otse edasi (joon. 111).

Samuti on ammu märgatud, et ka rändurid, liikudes kompassita kõrbes, stepis, tuisuga või uduse ilmaga — üldiselt kõigil juhtumeil, kus ei ole võimalust orienteeruda — kalduvad sirgest teest kõrvale ja ekslevad mööda ringjoont, pöördudes mitmeid kordi tagasi ühele ja samale kohale. Jalakäija poolt tehtava ringi raadius on seejuures umbes 60—100 m; mida kiirem on käik, seda väiksem on ringi raadius, s. o. seda tihedamalt tehakse ringe.

On teostatud isegi spetsiaalseid katseid inimeste sirgelt teelt kõrvalekaldumise tundmaõppimiseks. Nendest katsetest jutustab Nõukogude Liidu Kangelane I. Spirin:

«Aerodroomi tasasele murule rivistati 100 tulevast lendurit. Kõigil neil seoti silmad ja kästi neid minna otse edasi. Inimesed läksid... Esialgu läksid nad otse; siis hakkasid ühed kalduma paremale, teised vasakule, hakkasid pidevalt ringe tegema, pöördudes tagasi oma endistele jälgedele.»



Joon. 111. Käimine kinniste silmadega.

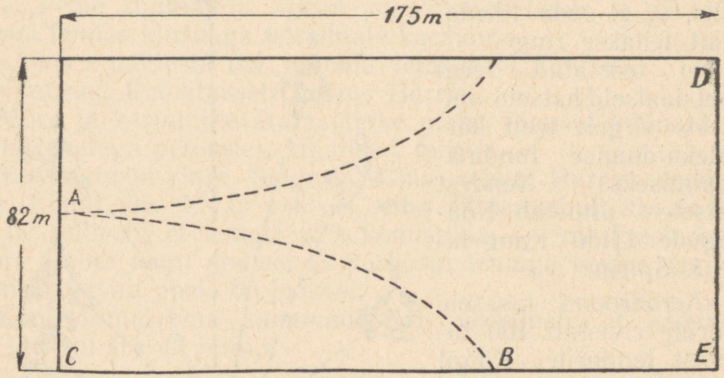
Tuntud on ka Veneetsias Markuse platsil tehtud analoogiline katse. Inimestel seoti silmad, nad paigutati katedraali vastas asetsevale väljakuäärele ning neil kästi minna katedraali suunas. Ehkki käia tuli ainult 175 m, ei jõudnud siiski ükski katsealustest katedraali fassaadini (82 m lai), vaid kõik kaldusid kõrvale, tehes kaare ja sattudes ühele külgkolonnaadidest (joon. 112).

Kes on lugenud Jules Verne'i romaani «Kapten Hatterasi seiklused», see arvatavasti mäletab episoodi sellest, kuidas rändurid sattusid mõõtmatus lumekõrbes kellegi jälgedele.

«Need on meie jäljed, mu sõbrad!» hüüatas doktor. «Me eksisime udus ja sattusime oma jälgedele . . .»

Niisuguse ringjoont mööda ekslemise klassikalise kirjelduse on andnud L. N. Tolstoi oma «Peremehes ja sulases»:

«Vassili Andreitš ajas hobust sinna, kus ta mingipärast arvas olevat metsa ja vahimajakese. Lumi pimestas tal silmi ja tuul, nagu näis, tahtis teda peatada, kuid tema, kummardudes ettepoole, ajas väsimatult hobust.



Joon. 112. Veneetsias Markuse platsil tehtud katse skeem.

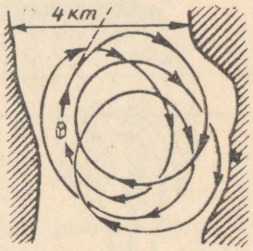
Ta sõitis, nagu talle paistis, minutit viis, kogu aeg otse, midagi nägemata, peale hobuse pea ja valge lagendiku.

Äkki mustendas midagi ta ees. Süda lõi rõõmsalt, ja ta sõitis selle tumeda suunas, nähes selles juba külamajade seinu. Kuid mustana paistis põllupeenral kasvav kõrge paju . . . Mingipärast pani selle halastamatu tuule poolt vaevatud paju välimus Vassili Andreitši võpatama, ja ta hakkas kiirustades hobust ajama, märkamata seda, et paju juurde sõites ta muutis täielikult eelmise suuna.

Jällegi mustendas midagi ta ees. Jällegi oli see pajudega kaetud põllupeenar. Jällegi kõikus sama meeleheitlikult kuiv stepihein. Selle juures oli tuulest kinniaetud hobusejälg. Vassili Andreitš peatus, kummardus, vaatles lähemalt: see oli kergelt kinnituisanud jälg ja ei võinud olla kellegi teise kui tema enda hobuse oma. Ta ilmselt ringles, ja seda väikesel maa-alal.»

Norra füsioloog Guldberg, kes pühendas ringlemisele spetsiaalse uurimuse (1896. a.), kogus rea hoolikalt kontrollitud andmeid sedalaadi tõestisündinud juhtumeist. Toome kaks näidet.

Kolm rändurit lahkusid tuisusel ööl valvemajakesest, et piki 4 km laiust orgu jõuda oma koju, mis asetses juuresoleval joonisel punktiiriga näidatud suunas (joon. 113). Teel kaldusid nad märkamatult noolega märgitud kõverjoont mööda paremale. Käinud teatud maa, oletasid nad, arvestades aega, et on saavutanud eesmärgi — tegelikult aga olid nad sama valvemajakese juures, millest lahkusid. Teiskordselt teele suundudes kaldusid nad veelgi rohkem kõrvale ja tulid uuesti lähtepunkti. Sama kordus ka kolmandal ja neljandal korral. Meeleheites võtsid nad ette viienda katse, kuid sama tulemusega. Pärast viiendat ringi loobusid nad edaspidistest katsetest orust välja pääseda ja jäid hommikut ootama.



Joon. 113. Kolme rändurі ekslemiste skeem.

Veel raskem on aerutada merel sirgjoont mööda pimedal tähitul ööl või tihedas udus. Oli juhtum — üks paljudest selletaolistest, — kus aerutajad, otsustades uduse ilmaga ületada 4 km laiuse väina, olid kahel korral peaaegu vastasrannal, kuid ei jõudnud selleni, tegid teadmatult kaks ringi ja maandusid lõpuks ... oma lähtekohal (joon. 114).

Sama juhtub ka loomadega. Polaarrändurid jutustavad ringidest, mida teevad lumelagendikel saani ette rakendatud loomad. Koerad, keda lastakse ujuda seotud silmadega, teevad vees samuti ringe. Ringjoont mööda lendavad ka pimestatud linnud. Tagaaetav metsloom, kes hirmu tõttu on kaotanud orienteerumisvõime, ei põgene mitte sirgjoont, vaid spiraali mööda.

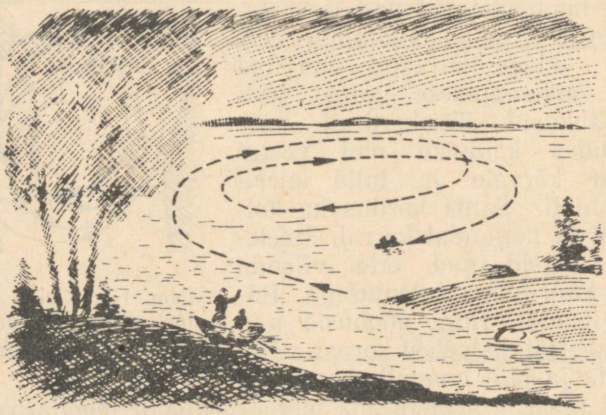
Zooloogid on kindlaks teinud, et konnapojad, krabid, meduusid, isegi mikroskoopilised amööbid veetilgas — kõik liiguvad ringjoont mööda.

Millega seletada seda inimese ja looma mõistatuslikku kiindumust ringisse ja pimeduses otsesuuna hoidmise võimatust?

Küsimus kaotab meie silmis otsekohe teda ümbritseva näilise saladuslikkuse, kui me tema asetame õigesti.

Küsime mitte seda, mispärast loomad liiguvad ringi mööda, vaid seda, mis on neile vajalik sirgjooneliseks liikumiseks.

Tuletage meelde, kuidas liigub üleskeeratav mänguvanker. Mõnikord juhtub, et vankrike ei veere mitte sirget mööda, vaid pöördub kõrvale.



Joon. 114. Kuidas aerutajad püüdsid uduse ilmaga väina ületada.

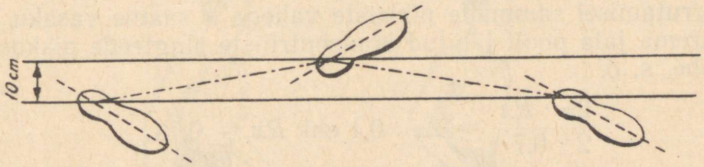
Selles kaart mööda liikumises ei näe keegi midagi mõistatuslikku; igaüks taipab, millest see oleneb: ilmselt parempoolsed rattad ei ole võrdsed vasakpoolsetega.

On arusaadav, et ka elav olevus võib ainult sel juhtumil liikuda silmade abita täpselt sirgjoont mööda, kui tema parema ja vasaku külje lihased töötavad täiesti ühesuguselt. Kuid selles seisabki asi, et inimese ja looma keha ei ole täielikult sümmeetriline. Suuremal osal inimestel ja loomadel on keha parema külje lihased vasakpoolsetega võrreldes erinevalt arenenud.

On loomulik, et jalakäija, tõstes kogu aeg paremat jalga natuke kaugemale kui vasakut, ei saa hoida sirgjoont; kui silmad ei aita tal teed õgvendada, siis kaldub ta mööda pääsematult vasakule. Täpselt samuti kaldub ka aerutaja,

kui tal puudub udu tõttu võimalus orienteeruda, paratamatult vasakule, kui ta parem käsi töötab tugevamini kui vasak. See on geomeetriline paratamatus.

Kujutlege näiteks, et vasaku jalaga teeb inimene 1 mm võrra pikema sammu kui paremaga. Tehes vaheldumisi kummagi jalaga tuhat sammu, käib inimene siis vasaku jalaga 1000 mm, s. o. terve meetri võrra pikema tee kui paremaga. Sirgetel paralleelsetel teedel on see võimatu, kuid on täiesti võimalik kontsentrilistel ringidel.



Joon. 115. Parema ja vasaku jala jälgede jooned käimisel.

Me võime isegi ülalkirjeldatud lumises orus ringlemise skeemi kasutades arvutada, kui palju nendel rändurite vasak jalg tegi pikema sammu kui parem (et tee kaldus paremale, siis on selge, et nimelt vasak jalg tegi pikema sammu). Parema ja vasaku jala jälgede joonte vahe (joon. 115) on käimisel umbes 10 cm, s. o. 0,1 m. Kui inimene teeb ühe täisringi, käib tema parem jalg tee $2\pi R$, vasak aga $2\pi\ (R + 0{,}1)$, kus R on ringi raadius meetrites. Vahe $2\pi(R + 0{,}1) - 2\pi R = 2\pi \cdot 0{,}1$, s. o. 0,62 m ehk 620 mm, tekkis vasakpoolsete ja parempoolsete sammude pikkuste erinevusest, mida korrati nii mitu korda, kui palju tehti samme. Jooniselt 113 võib järeldada, et meie rändurid tegid umbes 3,5 km läbimõõduga, s. o. umbes 10 000 m pikkusega ringe. Sammu keskmise pikkuse juures 0,7 m tehti sellel teekonnal $\frac{10\,000}{0{,}7} = 14\,000$ sammu, nendest 7000 parema ja niisama palju vasaku jalaga. Seega teame, et 7000 «vasakpoolset» sammu ületavad 7000 «parempoolset» sammu 620 mm võrra. Järelikult on üks vasakpoolne samm parempoolsest pikem $\frac{620}{7000}$ mm võrra ehk vähem kui 0,1 mm.

Sellest tühisest erinevusest sammudes piisab, et tekitada niisugust hämmastavat tulemust!

Eksleja poolt tehtava ringi raadius sõltub «parema» ja «vasaku» sammu pikkuste erinevusest. Seda sõltuvust ei ole raske kindlaks määrata. Ühe ringi jooksul tehtud sammude arv on 0,7-meetrise sammupikkuse puhul $\frac{2\pi R}{0{,}7}$, kus R on ringi raadius meetrites; nendest on «vasakuid» samme $\frac{2\pi R}{2 \cdot 0{,}7}$ ja niisama palju ka «paremaid». Selle arvu korrutamisel sammude pikkuste vahega x saame vasaku ja parema jala poolt läbitud kontsentriliste ringteede pikkuste vahe, s. o.

$$\frac{2\pi \cdot Rx}{2 \cdot 0{,}7} = 2\pi \cdot 0{,}1 \text{ ehk } Rx = 0{,}14,$$

kus R ja x on antud meetrites.

Selle lihtsa valemi järgi on kerge arvutada ringi raadiust, kui on teada sammude erinevus, ja vastupidi. Näiteks Veneetsias Markuse platsil tehtud katse puhul võime määrata osavõtjate poolt tehtud ringide kõige suurema raadiuse. Tõepoolest: et ükski neist ei jõudnud hoone fassaadini DE (joon. 112), siis segmendi kõrguse $AC = 41$ m ja kõõlu BC pikkuse järgi, mis ei ületa 175 m, võib arvutada kaare AB maksimaalse raadiuse. See määratakse võrdusest

$$2R = \frac{BC^2}{AC} = \frac{175^2}{41} = 750 \text{ m},$$

millest maksimaalne raadius R on umbes 370 m.

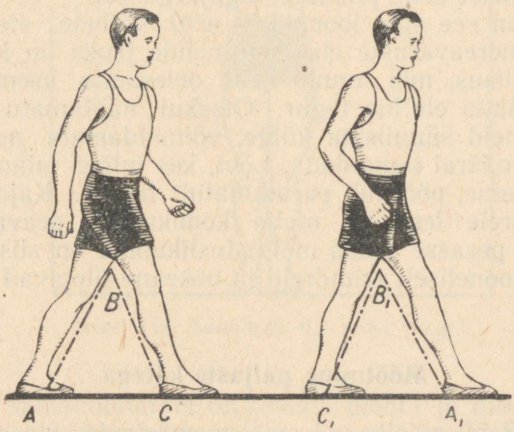
Seda teades määrame varemsaadud valemist $Rx = 0{,}14$ sammude erinevuse kõige väiksema suuruse:

$$370x = 0{,}14, \text{ millest } x = 0{,}4 \text{ mm}.$$

Seega katsest osavõtjail oli parempoolsete ja vasakpoolsete sammude erinevus vähemalt 0,4 mm.

Mõnikord võib lugeda ja kuulda, et ringlemine pimesi käimisel sõltuvat parema ja vasaku jala pikkuste erinevusest: et suuremal osal inimestest on vasak jalg paremast pikem, siis peavad inimesed käimisel paratamatult kalduma otsesuunast paremale. Niisugune seletus on geomeetriliselt ekslik. Tähtis on sammude, mitte aga jalgade erinev pik-

kus. Jooniselt 116 selgub, et ka jalgade erinevate pikkuste korral võib ikkagi teha täpselt ühepikkusi samme, kui käimisel mõlemat jalga ette asetada ühesuguse nurga all, s. o. sammuda nii, et $\angle B_1 = \angle B$. Et seejuures alati $A_1B_1 = AB$ ja $B_1C_1 = BC$, siis $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$ ja järelikult $AC = C_1A_1$. Vastupidi: täpselt ühepikkuste jalgade korral võivad sammude pikkused olla erinevad, kui üht jalga asetatakse käimisel kaugemale kui teist.



Joon. 116. Kui sammude nurgad on võrdsed, siis on sammud täpselt ühepikkused.

Samal põhjusel peab paadimees, kes aerutab parema käega tugevamini kui vasakuga, paadi paratamatult viima ringjoonelisse liikumisse, kaldudes seejuures vasakule. Parema või vasaku jalaga erinevaid samme tegevad loomad, nagu ka parema või vasaku tiivaga erineva tugevusega lööke tegevad linnud, peavad samuti alati liikuma ringjoont mööda, kui puuduvad võimalused otsesuuna kontrollimiseks nägemise abil. Siin piisab samuti õige väikesest vahest jalgade, käte või tiibade tugevuses.

Küsimuse sellisel käsitlusel kaotavad varemtoodud faktid oma saladuslikkuse ja muutuvad täiesti loomulikeks. Vastupidi: oleks imelik, kui inimesed ja loomad võiksid otsesuunda hoida seda silmadega kontrollimata, sest selle

vajalikuks tingimuseks on keha range geomeetriline sümmeetria, mis aga elavas looduses on absoluutselt võimatu. Väikseimgi kõrvalekaldumine täiuslikust matemaatilisest sümmeetriast peab endaga paratamatu järeldusena kaasa tooma liikumise kaart mööda. Ime pole mitte see, mida me siinkohal imestame, vaid see, mida olime valmis loomulikuks pidama.

Võimetus otsesuunda pidada ei kujuta inimesele olulist takistust: kompass, teed ja kaardid päästavad teda enamikul juhtumeist selle puuduse tagajärgedest.

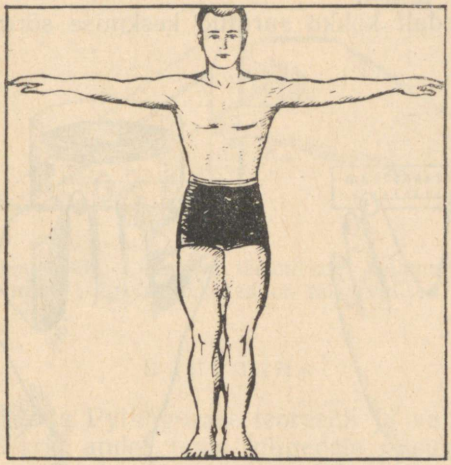
Teisiti on see aga loomadel, eriti kõrbete, steppide ja ääretute mereavaruste elanikel: nende jaoks on keha ebasümmeetrilisus, mis sunnib neid otsesuuna asemel ringe tegema, tähtis eluline tegur. Otsekui nähtamatu ahelaga seob see neid sünnikoha külge, võimaldamata neil sellest tunduval määral eemalduda. Lõvi, kes julges minna kaugemale kõrbesse, pöördub paratamatult tagasi. Kajakad, jättes avamerele lennates maha kodukaljud, peavad tagasi pöörduma pesasse (seda mõistatuslikumad on siis rändlindude sirgjooneliselt mandreid ja ookeane ületavad lennud).

Mõõtmine paljaste kätega

Mayne-Reidi poisike sai oma geomeetrilise ülesande edukalt lahendada ainult seetõttu, et ta mõni aeg enne reisi mõõtis oma pikkuse ja pidas kindlalt meeles mõõtmise tulemuse. Hea oleks igaühel meist sisse seada niisugune «elav meeter», et vajaduse korral seda mõõtmisteks kasutada. Kasulik on samuti meeles pidada, et suuremal osal inimestest on väljasirutatud käte ulatus võrdne tema keha pikkusega (joon. 117). See on reegel, mille avastas geniaalne kunstnik ja teadlane Leonardo da Vinci: see võimaldab kasutada meie «elavaid meetreid» mugavamalt, kui seda tegi Mayne-Reidi poiss. Täiskasvanud inimese keskmine pikkus on umbes 1,7 m ehk 170 cm; seda on kerge meeles pidada. Kuid ei tule toetuda keskmisele suurusele: igaüks peab ise mõõtma oma pikkuse ja käte ulatuse.

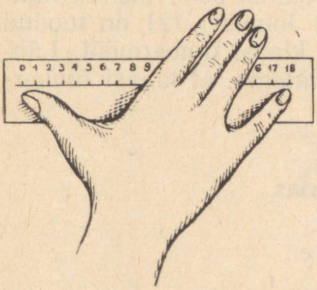
Väiksemate kauguste mõõtmiseks tuleb meeles pidada oma «vaksa» pikkus, s. o. laiali sirutatud pöidla ja väikese sõrme otste vaheline kaugus (joon. 118). Täiskasvanud

mehel on see umbes 18 cm[1], noorematel inimestel aga väiksem ja suureneb aeglaselt aastatega (kuni 25-nda eluaastani).

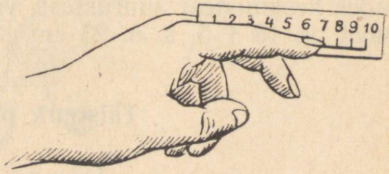


Joon. 117. Leonardo da Vinci reegel.

Edasi, samal otstarbel on kasulik mõõta ja meeles pidada oma nimetissõrme pikkus, teostades mõõtmist kaks korda: üks kord keskmise sõrme ja teine kord pöidla poolt



Joon. 118. «Vaksa» pikkuse mõõtmine.



Joon. 119. Nimetissõrme pikkuse mõõtmine.

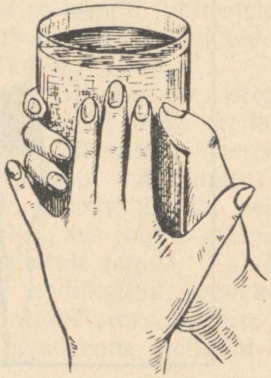
[1] 18 cm $\approx$ ¼ arssinat. Sellest tuleneb ka vaksa venekeelne nimetus «четверть» («neljandik»). *Toim.*

(joon. 119). Täpselt samuti peate teadma keskmise sõrme ja nimetissõrme otste vahelist suurimat kaugust — täiskasvanul umbes 10 cm (joon. 120). Lõpuks tuleb teada ka oma sõrmede laiust.

Kolme tihedalt kokku surutud keskmise sõrme laius on umbes 5 cm.



Joon. 120. Sõrmeotste-vahelise kauguse mõõtmine.



Joon. 121. Klaasi ümbermõõdu mõõtmine «paljaste kätega».

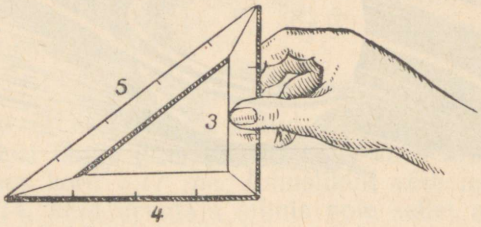
Varustatuna kõigi nende andmetega, võite täiesti rahuldavalt teostada mitmesuguseid mõõtmisi sõna tõsises mõttes paljaste kätega, isegi pimedas. Joonisel 121 on toodud näide: siin mõõdetakse sõrmedega klaasi ümbermõõt. Lähtudes keskmistest suurustest, võib ütelda, et klaasi ümbermõõt on 18 + 5, s. o. 23 cm.

Täisnurk pimedas

Ülesanne

Pöördudes veel kord tagasi Mayne-Reidi matemaatiku juurde, esitame endale ülesande: kuidas oleks ta pidanud talitama, et saada usaldataval viisil täisnurk? «Asetasin pika varda selliselt, et ta moodustas vaadi põhjal asetseva vardaga täisnurga», loeme romaanist. Tehes seda

pimedas, ainult kompamismeelele toetudes, võime eksida küllaltki suurelt. Kuid poisil oli tema olukorras täisnurga konstrueerimiseks palju kindlam võte. Missugune?

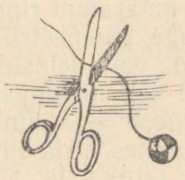


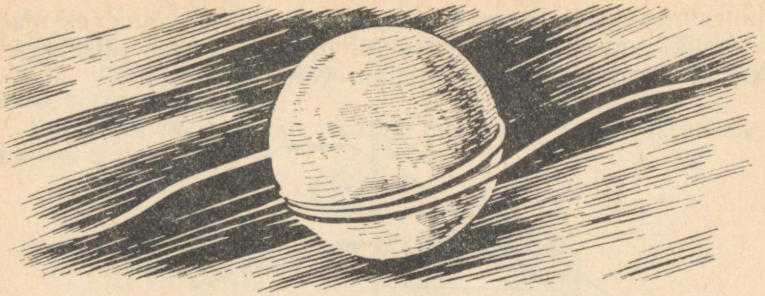
Joon. 122. Lihtsaim täisnurkne kolmnurk, mille külgede pikkused on täisarvulised.

Lahendus

Tuleb kasutada Pythagorase teoreemi ja valmistada liistudest kolmnurk, andes tema külgedele niisugused pikkused, et kolmnurk tuleks täisnurkne. Kõige lihtsam on võtta selleks liistud pikkusega 3, 4 ja 5 mistahes vabalt valitud mõõduühikut (joon. 122).

See on vana egiptlaste võte, mida kasutati püramiididemaal mitmeid tuhandeid aastaid tagasi. Muuseas, ka meie päevil kasutatakse ehitustöödel tihti sama võtet.





ÜHEKSAS PEATÜKK

VANA JA UUT RINGIST

Egiptlaste ja roomlaste praktiline geomeetria

Iga koolipoiss arvutab praegu ringjoone pikkuse diameetri järgi palju täpsemalt kui kõige targem vanaaegse püramiididemaa teadusejünger või kõige osavam arhitekt suures Roomas. Vanad egiptlased arvasid, et ringjoon on oma diameetrist pikem 3,16 korda, roomlased aga, et 3,12 korda, kusjuures õige suhe on 3,14159... Egiptuse ja rooma matemaatikud ei määranud ringjoone pikkuse ja diameetri suhet mitte range geomeetrilise arvutusega nagu hilisemad matemaatikud, vaid leidsid selle katselisel teel. Kuid mispärast tekkisid neil niisugused vead? Kas ei võinud nad mingi ümmarguse asja ümber tõmmata niiti ja seejärel niiti sirgu tõmmates seda lihtsalt ära mõõta?

Kahtlematult nad nii talitasidki, kuid ei tule arvata, et see viis peab tingimata andma hea tulemuse. Kujutlege näiteks ümmarguse põhjaga vaasi, mille diameeter on 100 mm. Tema põhja ümbermõõt peab siis olema 314 mm. Tegelikkuses aga saate niidiga mõõtes vaevalt selle pikkuse: kerge on eksida ühe millimeetri võrra ja siis saate π väärtuseks 3,13 või 3,15. Kui võtate veel arvesse, et ka vaasi diameetrit ei saa mõõta päris täpselt, et ka siin

on 1-millimeetrine viga täiesti tõenäoline, siis veendute, et π väärtuse jaoks saadakse küllaltki laialdased piirid

$$\frac{313}{101} \text{ ja } \frac{315}{99} \text{ vahel,}$$

s. o. kümnendmurdudena

3,09 ja 3,18 vahel.

Te näete, et määrates π antud viisil, võime saada tulemuse, mis ei lange ühte 3,14-ga: üks kord 3,1, teine kord 3,12, kolmas kord 3,17 jne. Juhuslikult võib nende hulgas olla ka 3,14, kuid arvutaja silmis pole sellel arvul suuremat kaalu kui teistelgi.

See katseline viis ei saa kuidagi anda mingil määral vastuvõetavat π väärtust. Seoses sellega muutub arusaadavamaks, mispärast muistne maailm ei tundnud õiget ringi ümbermõõdu ja diameetri suhet, ning läks tarvis Archimedese geniaalsust, et leida π jaoks väärtus $3^1/_7$ — leida see mõõtmisteta, ainuüksi arutluste teel.

«Seda ma tean ja mäletan hästi»

Vana-araabia matemaatiku Muhamed-ben-Musa «Algebras» loeme ringjoone pikkuse arvutamise kohta järgnevaid ridu:

«Parim viis on korrutada diameeter $3^1/_7$-ga. See on kõige kiirem ja kõige kergem viis. Ainult jumal teab paremat.»

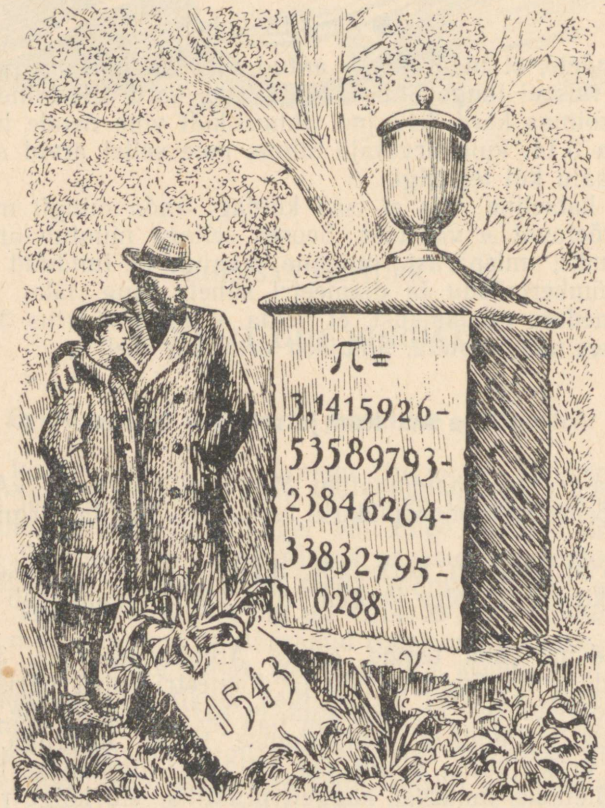
Nüüd me juba teame, et ka Archimedese arv $3^1/_7$ ei väljenda ringi ümbermõõdu ja diameetri suhet päris täpselt. Teoreetiliselt on tõestatud, et seda suhet ei ole üldse võimalik väljendada mingisuguse täpse murruga. Me võime ta kirjutada ainult ühe või teise ligikaudse täpsusega, ületades muuseas kaugelt praktilise elu kõige rangematele nõuetele vastava täpsuse. XVI sajandi Leydeni matemaatikul Ludolfil jätkus kannatust arvutada π kolmekümne viie kümnendkohaga ja oma testamendis käskis ta selle π väärtuse lõigata oma hauakivisse[1] (joon. 123).

[1] Tol ajal seda π väärtust veel ei kasutatud: selle võttis tarvitusele alles XVIII sajandi keskel tuntud vene akadeemik, matemaatik Leonhard Pavlovitš Euler.

Siin ta on:

3,14159265358979323846264338327950288 . . .

Keegi Schenks avaldas 1873. a. π väärtuse, milles koma järel oli 707 kümnendkohta! Taolistel pikkadel arvudel, mis



Joon. 123. Matemaatiline hauakiri.

ligikaudu väljendavad π väärtust, pole ei praktilist ega teoreetilist väärtust. Ainult tegevusetusest ja ülespuhutud rekordite tagaajamisest võis meie ajal tekkida soov «ületada» Schenksi: 1946—1947. a. Fergusson (Manchesteri

ülikoolis) ja temast sõltumatult Wrench (Washingtonis) arvutasid π jaoks 808 kümnendkohta ja olid uhked sellele, et leidsid Schenksi arvutuses vea alates 528-st kohast.

Kui me näiteks sooviksime arvutada maakera ekvaatori pikkust täpsusega kuni 1 cm, oletades, et teame tema diameetri pikkust täpselt, siis oleks selleks küllaldane võtta π väärtuses 9 kohta koma järel. Võttes kaks korda rohkem kohti (18), võiksime arvutada ümbermõõdu pikkuse, mille raadius oleks Maa kaugus Päikesest, veaga mitte üle 0,0001 mm (100 korda väiksem juuksekarva jämedusest!).

Erakordselt selgesti näitas isegi esimese 100 kümnendkoha absoluutset kasutust π väärtuses meie kaasmaalane, matemaatik Grave. Ta arvutas, et kui kujutleda kera, mille raadius võrduks Maa kaugusega Siiriusest, s. o. kilomeetrite arvuga, mis on 132 kümne nulliga: $132 \cdot 10^{10}$, täita see kera mikroobidega, oletades seejuures, et igas kera kuupmillimeetris on 1 biljon 10^{10} mikroobi, seejärel kõik need mikroobid asetada sirgjoonele, nii et iga kõrvutioleva mikroobi vahe uuesti võrduks Maa kaugusega Siiriusest, siis, võttes selle fantastilise lõigu ringi diameetriks, võiksime arvutada tekkiva gigantse ringjoone pikkuse mikroskoopilise täpsusega — kuni $\frac{1}{1000000}$ mm, võttes π väärtuses 100 kohta koma järel. Sel puhul märgib prantsuse astronoom Arago õigesti, et «täpsuse mõttes ei võidaks me midagi, kui ringi ümbermõõdu ja diameetri pikkuste vahel valitseks suhe, mis väljenduks täiesti täpse arvuga».

Harilikeks arvutusteks on küllaldane võtta π väärtuses kaks kohta koma järel (3,14), täpsemateks — neli kohta (3,1416: viimaseks numbriks võtame 5 asemel 6 seepärast, et järgnev number on suurem kui 5).

Lühikesed salmid või tabavad fraasid jäävad kauemaks meelde kui arvud; seepärast mõeldakse π väärtuse meeldejätmiseks välja erilisi salme või lauseid. Sellelaadilistes matemaatilise poeesia teostes valitakse sõnad nii, et tähtede arv igas sõnas võrduks π vastava numbriga.

Inglise keeles on tuntud 13-sõnaline luuletus, mis järelikult annab π väärtuses 12 kohta koma järel; saksa kee-

les — 24-sõnaline, prantsuse keeles aga 30-sõnaline[1] (on olemas ka 126-sõnaline!).

Nad on huvitavad, kuid liiga suured, raskekaalulised. Ühe Moskva oblasti keskkooli matemaatikaõpetaja J. J. Terskovi õpilaste keskel on populaarne järgmine tema poolt välja mõeldud stroof:

«Это я знаю и помню прекрасно»[2].
3 1 4 1 5 9

Üks tema õpilastest aga — Esja Tšerikover — koostas meie õpilastele omase leidlikkusega teravmeelse, kergelt iroonilise jätku:

«Пи многие знаки мне лишни, напрасны»[3].
... 2 6 5 3 5 8

Kokku tuleb järgmine kaherealine 12-sõnaline salm:

«Это я знаю и помню прекрасно,
Пи многие знаки мне лишни, напрасны.»

Selle raamatu autor, julgemata mõtelda luuletamisele, esitab omakorda lihtsa ja täiesti küllaldase proosalause:

«Что я знаю о кругах?»[4]

— küsimus, mis sisaldab endas peidetult ka vastuse: 3,1416.

---

[1] Siin on need luuletused:

a) inglise keeles:
See I have a rhyme assisting
My feeble brain, its tasks ofttimes resisting.

b) saksa keeles:
Wie o dies π
Macht ernstlich, so vielen viele Müh'!
Lernt immerhin, Jünglinge, leichte Verselein,
Wie so zum Beispiel dies dürfte zu merken sein.

c) prantsuse keeles:
Que j'aime à faire apprendre un
nombre utile aux sages!
Immortel Archimède, sublime ingènieur,
Qui de ton jugement peut sonder la valeur?
Pour moi ton problème eut de pareils avantages.

[2] Tõlkes: «Seda ma tean ja mäletan hästi.»
[3] Tõlkes: «Paljud pii numbrid on mulle liigsed ja kasutud.»
[4] Tõlkes: «Mida tean ma ringidest?»

Jack Londoni viga

Järgmine katkend Jack Londoni romaanist «Suure maja väike perenaine» annab materjali geomeetriliseks arvutuseks:

«Põllu keskel kerkis sügavalt maasse kaevatud terasest latt. Lati tipust ulatus põllu ääreni traktori külge kinnitatud tross. Mehaanikud surusid kangile ja mootor hakkas tööle.

Masin liikus ise edasi, tehes ringi lati ümber, mis oli selle ringi keskpunktiks.

«Et masinat lõplikult täiustada,» ütles Graham, «tuleb teil muuta ring, mille ta teeb, ruuduks.»

«Jah, kui põld on ruudukujuline, siis läheb praeguse süsteemi juures kaduma väga palju maad.»

Graham teostas mõningad arvutused ja märkis seejärel: «Kaduma läheb umbes kolm aakrit iga kümne kohta.»

«Mitte vähem.»»

Soovitame lugejatel seda arvutust kontrollida.

Lahendus

Arvutus on vale: kaduma läheb vähem kui 0,3 kogu maast. Olgu näiteks ruudu külje pikkus a. Selle ruudu pindala on a^2. Ruudu sisse joonestatud ringi diameeter on samuti a ja selle ringi pindala $\frac{\pi a^2}{4}$. Ruudukujulise maa-ala puhul kaduma minev osa on:

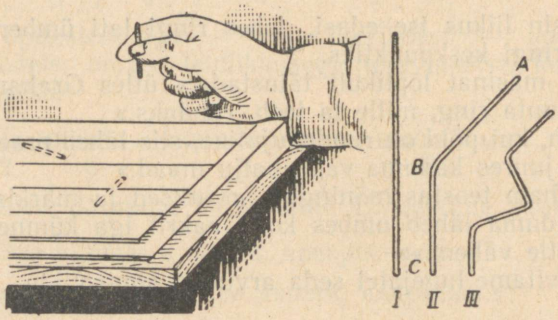
$$a^2 - \frac{\pi a^2}{4} = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) a^2 = 0{,}22a^2.$$

Näeme, et ruudukujulisel põllul ülestöötamata jääv osa ei moodusta mitte 30%, nagu oletasid ameerika romaanikirjaniku kangelased, vaid ainult umbes 22%.

Nõela langetamine

Kõige originaalsem ja üllatavam viis π väärtuse ligikaudseks arvutamiseks on järgmine. Muretsetakse lühike (paari sentimeetri pikkune) õmblusnõel — soovitav äramurtud teravikuga, et nõel oleks ühtlase jämedusega —

ja tõmmatakse paberilehele rida paralleelseid kitsaid, üksteisest nõela kahekordse pikkuse kaugusel asetsevaid jooni. Seejärel lastakse nõel meelevaldselt kõrguselt paberile kukkuda ja märgitakse, kas nõel lõikab üht joontest või mitte (joon. 124, vasakul). Et nõel ei põrkaks tagasi, asetatakse paberilehe alla kuivatuspaberit või kalevit. Nõela langetamist korratakse palju kordi, näiteks sada või



Joon. 124. Buffoni katse nõela langetamisega.

veelgi parem — tuhat korda, iga kord märkides, kas lõikumine esines[1]. Kui pärast jagada nõela langetamiste üldarv nende juhtude arvuga, kus esines lõikumine, siis peab tulemuseks olema π väärtus, muidugi enam või vähem ligikaudne.

Selgitame, millest see on tingitud. Olgu kõige tõenäolisemaks lõikumiste arvuks K ja meie nõela pikkus olgu 20 mm. Lõikumise korral võib lõikepunkt muidugi asetseda ükskõik missugusel nendest millimeetritest ja mitte ükski nendest, s. o. mitte ükski nõela osa, ei oma selles suhtes teistega võrreldes mingisugust eelist. Seetõttu iga üksiku millimeetri lõikumiste tõenäosus on $\frac{K}{20}$. 3 mm pikkuse nõelaosa jaoks on see $\frac{3K}{20}$, 11 mm pikkuse osa jaoks —

[1] Lõikumiseks tuleb lugeda ka seda juhtu, kus nõel puudutab joont ainult otsaga.

$\frac{11K}{20}$ jne. Teisiti öeldes: lõikumiste tõenäosus on võrdeline nõela pikkusega.

See võrdelisus säilib ka sel juhul, kui nõel on painutatud. Olgu nõel painutatud niiviisi, nagu on toodud kujundil II (joon. 124, paremal), kusjuures osa $AB = 11$ mm, $BC = 9$ mm. Osa AB jaoks on lõikumiste tõenäosus $\frac{11K}{20}$, BC jaoks aga $\frac{9K}{20}$ ja kogu nõela jaoks $\frac{11K}{20} + \frac{9K}{20}$, s. o. endiselt K. Me võiksime nõela painutada ka keerulisemal kujul (joon. 124, kujund III) — lõikumiste arv seetõttu ei muutuks. (Pange tähele, et painutatud nõela korral on võimalik joonte lõikamine nõela kahe või rohkema osa poolt korraga; seda tuleb muidugi lugeda 2-ks, 3-ks jne. lõikumiseks, sest lõikumiste loendamisel läheb esimene ühe nõelaosa arvele, teine — teise osa arvele jne.)

Kujutlegem nüüd, et langetame nõela, mis on painutatud ringi kujuliselt, mille diameeter võrdub joonte kaugusega üksteisest (see diameeter on kaks korda pikem kui meie nõel). See rõngas peab igal langetamisel kahes kohas lõikuma mingisuguse joonega (või korraga puutuma kokku kahe joonega, nii et igal juhul saame kaks kokkupuutepunkti). Kui üldine langetamiste arv on N, siis lõikumiste arv on $2N$. Meie sirge nõel on sellest rõngast nii mitu korda lühem, kui mitu korda pool diameetrit on lühem ringjoonest, s. o. 2π korda. Kuid me juba tegime kindlaks, et lõikumiste tõenäosus on võrdeline nõela pikkusega. Seetõttu meie nõela lõikumiste tõenäosus (K) peab olema $2N$-st 2π korda väiksem, s. o. $\frac{N}{\pi}$. Siit

$$\pi = \frac{\text{langetamiste arv}}{\text{lõikumiste arv}}.$$

Mida suuremat langetamiste arvu vaadeldakse, seda täpsemalt saadakse π väärtus. Šveitsi astronoom R. Wolf jälgis möödunud sajandi keskel nõela 5000 langetamist joonelisele paberile ja sai π väärtuseks 3,159... See väärtus pole muuseas nii täpne kui Archimedese arv.

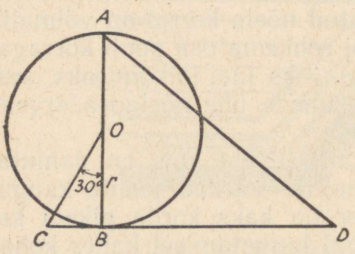
Nagu näete, leitakse siin ringjoone pikkuse suhe diameetrisse katselisel teel, kusjuures — mis on kõige huvi-

tavam — ei joonestata ei ringjoont ega diameetrit, s. o. tullakse toime sirklita. Inimene, kellel pole mingisugust ettekujutust geomeetriast ja isegi ringist, võib sel viisil ikkagi määrata π väärtuse, kui ta kannatlikult teostab väga palju nõela langetamisi.

Ringjoone sirgestamine

Ülesanne

Paljudeks praktilisteks eesmärkideks on küllaldane võtta π väärtuseks $3^1/_7$ ja sirgestada ringjoon, kandes tema diameetri $3^1/_7$ korda mingisugusele sirgele (lõigu jaotamist seitsmeks võrdseks osaks võib teostada, nagu teada, täiesti täpselt). Ringjoone sirgestamiseks on olemas ka teisi ligikaudseid meetodeid, mida tarvitatakse praktikas tisleri-, plekksepa- jne. töödel. Me ei hakka neid siin vaatlema, vaid toome ainult ühe küllalt lihtsa sirgestamisviisi, mis annab erakordselt suure täpsusega tulemuse.



Joon. 125. Ligikaudne geomeetriline võte ringjoone sirgestamiseks.

Kui on vaja sirgestada ringjoon O raadiusega r (joon. 125), siis joonestatakse selle ringjoone diameeter AB ja läbi punkti B selle diameetriga risti olev sirge CD. Keskpunktist O tõmmatakse diameetrile AB 30°-se nurga all sirge OC. Seejärel kantakse sirgele CD punktist C alates antud ringjoone kolm raadiust ja ühendatakse saadud punkt D punktiga A: lõigu AD pikkus võrdub ringjoone poole pikkusega. Kui lõiku AD pikendada kaks korda, siis saadakse ligikaudselt sirgestatud ringjoon O. Viga on väiksem kui $0{,}0002r$.

Millel põhineb see konstruktsioon?

Lahendus

Pythagorase teoreemi järgi

$$CB^2 + OB^2 = OC^2.$$

Tähistades raadiuse OB r-ga ja pidades silmas, et $CB = \frac{OC}{2}$ (kui kaatet, mis asetseb 30°-se nurga vastas), saame:

$$CB^2 + r^2 = 4CB^2,$$

millest

$$CB = \frac{r\sqrt{3}}{3}.$$

Edasi, kolmnurgas ABD

$$BD = CD - CB = 3r - \frac{r\sqrt{3}}{3}.$$

$$AD = \sqrt{BD^2 + 4r^2} = \sqrt{\left(3r - \frac{r\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 4r^2} =$$

$$\sqrt{9r^2 - 2r^2\sqrt{3} + \frac{r^2}{3} + 4r^2} = 3{,}14153r.$$

Võrreldes seda tulemust sellega, mis saadakse, kui võtta π suure täpsusega ($\pi = 3{,}141593$), näeme, et vahe on kõigest $0{,}00006r$. Kui me sel viisil sirgestaksime ringjoone raadiusega 1 m, oleks viga poole ringjoone kohta ainult 0,00006 m, terve ringjoone kohta aga 0,00012 m ehk 0,12 mm (umbes kolmekordne juuksekarva läbimõõt).

Ringi kvadratuur

Ei või olla, et lugeja poleks kunagi kuulnud «ringi kvadratuurist» — sellest kuulsaimast geomeetriaülesandest, mille kallal juurdlesid matemaatikud juba 20 sajandit tagasi. Ma olen isegi veendunud, et lugejate hulgas leidub ka neid, kes ise on püüdnud seda ülesannet lahendada. Veel rohkem on aga kindlasti lugejaid, kes ei taipa, milles õieti peitub selle klassikalise lahendamatu ülesande lahendamise raskus. Paljudel, kes on harjunud teiste eeskujul kordama, et ülesanne ringi kvadratuurist on lahendamatu, ei ole selget arusaamist selle ülesande sisust ja tema lahendamise raskustest.

Matemaatikas on palju ülesandeid, mis on ringi kvadratuuri ülesandest palju huvitavamad nii teoreetiliselt kui ka praktiliselt, kuid ükski nendest ei ole omandanud nii

suurt populaarsust kui see ammu kõnekäänuks muutunud probleem. Kahe aastatuhande kestel on selle kallal töötanud väljapaistvad elukutselised matemaatikud ja loendamatu hulk asjaarmastajaid.

«Leida ringi kvadratuur» tähendab joonestada ruut, mille pindala võrdub täpselt antud ringi pindalaga. See ülesanne tekib praktikas väga tihti, kuid just praktiliselt on ta lahendatav mistahes täpsusega. Muistne kuulus ülesanne aga nõuab, et joonis oleks tehtud täiesti täpselt ainult kaht liiki joonestusvõtetega: 1) antud punkti ümber antud raadiusega ringjoone tõmbamisega; 2) sirgjoone tõmbamisega läbi kahe antud punkti.

Lühidalt: tuleb teha joonis, kasutades ainult kaht joonestusabinõu — sirklit ja joonlauda.

Mittematemaatikute laiades ringkondades on levinud veendumus, et ülesande kogu raskus on tingitud sellest, et ringjoone pikkuse suhet diameetrisse (kuulsat arvu π) ei saa väljendada lõpliku väärtusena. See on õige ainult niivõrd, kuivõrd ülesande lahendus sõltub sellest arvu π erilisest omadusest. Tõepoolest: r i s t k ü l i k u kujundamine võrdse pindalaga ruuduks on kergesti ja täpselt lahendatav ülesanne. Ringi kvadratuuri probleem aga taandub antud ringiga pindvõrdse ristküliku konstrueerimisele sirkli ja joonlaua abil. Ringi pindala valemist $S = \pi r^2$ ehk (mis on seesama) $S = \pi r \cdot r$ on selge, et ringi pindala võrdub sellise ristküliku pindalaga, mille üks külg on r ja teine külg π korda pikem. Tähendab, kogu probleem seisab lõigu joonestamises, mis oleks antud lõigust π korda pikem. Nagu teada, ei võrdu π täpselt $3^1/_7$-ga, samuti mitte 3,14-ga ega isegi 3,14159-ga. Seda arvu väljendav numbrite rida on lõpmatu.

See arvu π iseärasus, tema irratsionaalsus[1], tehti kindlaks juba XVIII sajandi matemaatikute Lambert'i ja Legendre'i (l.: lõžandr) poolt. Kuid ka π irratsionaalsuse tundmine ei vähendanud matemaatikute-«kvadratuurijate» jõupingutusi. Nad mõistsid, et ainult π irratsionaalsus ei tee veel ülesannet lootusetuks. On olemas irratsionaalseid arve, mida geomeetria oskab «ehitada» täiesti täpselt. Olgu näiteks vaja joonestada lõik, mis oleks antud lõigust $\sqrt{2}$

[1] Irratsionaalse arvu iseärasus seisab selles, et teda ei saa avaldada mingisuguse täpse murruga.

korda pikem. $\sqrt{2}$ on nagu π-gi irratsionaalne arv. Sellest hoolimata pole midagi lihtsamat kui joonestada otsitav lõik: meenutagem, et $a\sqrt{2}$ on ringisse, mille raadius on a, joonestatud ruudu külg.

Iga koolipoiss tuleb samuti kergesti toime lõigu $a\sqrt{3}$ konstrueerimisega (ringi sisse joonestatud võrdkülgse kolmnurga külg). Ei tekita erilisi raskusi isegi niisuguse välimuselt keeruka irratsionaalse avaldise konstrueerimine, nagu

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}},$$

sest see on samaväärne korrapärase 64-nurga konstrueerimisega.

Nagu näeme, ei tee irratsionaalne tegur avaldises alati võimatuks selle avaldise konstrueerimist sirkli ja joonlaua abil. Ringi kvadratuuri lahendamatus ei seisa sugugi mitte selles, et arv π on irratsionaalne, vaid selle arvu teises iseärasuses. Arv π ei ole nimelt algebraline, s. o. teda ei ole võimalik saada mingisuguse ratsionaalsete koefitsientidega võrrandi lahendamise tulemusena. Niisuguseid arve nimetatakse «transtsendentseteks».

XVI sajandi matemaatik Viète tõestas, et

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}} \text{ jne.}$$

See avaldis π jaoks lahendaks ringi kvadratuuri ülesande, kui temas leiduvate tehete arv oleks lõplik (siis võiks toodud avaldist geomeetriliselt konstrueerida). Et aga ruutjuure võtmiste arv selles avaldises on lõpmatu, siis ei aita Viète avaldis küsimust lahendada.

Seega on ringi kvadratuuri ülesande lahendamatus tingitud arvu π transtsendentsusest, s. o. sellest, et teda ei ole võimalik saada ratsionaalsete koefitsientidega võrrandi lahendamise tulemusena. Arvu π selle iseärasuse tõestas täpselt saksa matemaatik Lindemann 1889. a. Sisuliselt tulebki nimetatud õpetlast lugeda ainsaks inimeseks, kes lahendas ringi kvadratuuri probleemi, vaatamata sellele, et lahendus on eitav — ta kinnitab, et otsitav konstruktsioon on geomeetriliselt teostamatu. Seega 1889. a. lõpetati matemaatikute sajandeid kestnud jõupingutused selles suu-

nas, kuid kahjuks ei lõpe arvukate, ülesannet mitte küllaldaselt tundvate asjaarmastajate viljatud katsed.

Nii on asi teoorias. Mis puutub praktikasse, siis siin ei ole üldse vajalik selle kuulsa ülesande täpne lahendus. Paljude veendumus, et ringi kvadratuuri probleemi lahendamine on praktilises elus tohutu tähtsusega, on sügav eksitus. Igapäevase elu vajadusteks on küllaldane tunda selle ülesande lahendamise ligikaudseid võtteid.

Praktiliselt muutusid ringi kvadratuuri otsingud tarbetuks sellest ajast alates, kui leiti esimesed 7—8 usaldatavat kohta arvus π. Praktilise elu vajadusteks on täiesti küllaldane teada, et $\pi = 3{,}1415926$. Mingisuguse pikkuse mõõtmine ei või anda tulemust, milles oleks rohkem kui seitse kohta koma järel. Seepärast on kasutu võtta π-s rohkem kui kaheksa kohta: arvutuse täpsus sellest ei parane[1]. Kui raadius on antud seitsme kohaga koma järel, siis ringjoone pikkus ei sisalda samuti üle seitsme usaldatava koha, isegi kui π võtta saja kohaga koma järel. See, et vana-aja matemaatikud raiskasid tohutu töö π võimalikult täpsema väärtuse saamiseks, ei oma mingisugust praktilist tähtsust. Samuti on tühine selle töö teaduslik väärtus. See on lihtsalt püsivuse proov. Kui teil on tahtmist ja küllaldaselt vaba aega, võite leida π jaoks kasvõi 1000 numbrit, kasutades näiteks järgmist Leibniz'i poolt leitud lõpmatut rida[2]:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - {}^1/_3 + {}^1/_5 - {}^1/_7 + {}^1/_9 \ldots \text{ jne.}$$

Kuid see on aritmeetiline harjutus, mida kellelegi ei ole vaja ja mis sugugi ei vii edasi kuulsa geomeetrilise ülesande lahendamist.

Varemnimetatud prantsuse astronoom Arago kirjutas sel puhul järgmist:

«Ringi kvadratuuri otsijad jätkavad tegelemist ülesande lahendamisega, mille positiivse lahenduse võimatus on nüüd tõestatud, ja mis, kui seda olekski võimalik teostada, ei omaks mingisugust praktilist väärtust. Ei tasu sellel tee-

[1] Vt. Я. И. Перельман «Занимательная арифметика».

[2] See arvutus nõuab väga palju kannatust, sest näiteks kuuekohalise π saamiseks oleks vaja võtta toodud reas mitte rohkem ega vähem kui 2 000 000 liiget.

mal pikalt rääkida: mõistuselt haiged, püüdes ringi kvadratuuri avastada, ei allu mingitele argumentidele. See vaimuhaigus eksisteerib juba muistsetest aegadest.»

Ja lõpetab irooniliselt:

«Kõigi maade akadeemiad märkasid kvadratuuri otsijate vastu võideldes, et see haigus tugevneb harilikult kevadel.»

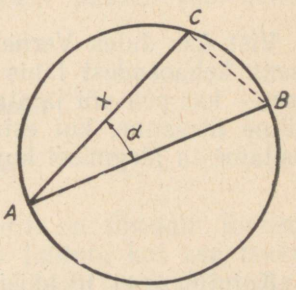
Bingi kolmnurk

Vaatleme üht ringi kvadratuuri ülesande ligikaudset lahendust, mis on väga sobiv praktilise elu vajadusteks.

Võte seisab selles, et arvutatakse (joon. 126) nurk α, mille all ringi diameetrile AB tuleb tõmmata kõõl $AC = x$, mis on otsitava ruudu küljeks. Et leida selle nurga suurus, tuleb kasutada trigonomeetriat:

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{x}{2r},$$

kus r on ringi raadius.



Joon. 126. Vene inseneri Bingi meetod (1836. a.).

Tähendab, otsitava ruudu külg $x = 2r \cos \alpha$, tema pindala aga $4r^2 \cos^2 \alpha$. Teisest küljest: ruudu pindala võrdub antud ringi pindalaga πr^2.

Järelikult

$$4r^2 \cos^2 \alpha = \pi r^2,$$

millest

$$\cos^2 \alpha = \frac{\pi}{4}; \quad \cos \alpha = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} = 0{,}886.$$

Tabelist leiame:

$$\alpha = 27°36'.$$

Niisiis: joonestades antud ringis kõõlu nurga all 27°36′ diameetriga, saame otseselt ruudu külje, mille pindala võrdub antud ringi pindalaga. Praktiliselt tehakse nii, et valmistatakse joonestuskolmnurk[1], mille üks teravnurkadest

[1] Ettepanek selle lihtsa viisi kasutamiseks tehti 1836. a. vene inseneri Bingi poolt; mainitud joonestuskolmnurka nimetatakse leiutaja nime järgi «Bingi kolmnurgaks».

on 27°36′ (teine — 62°24′). Kui on olemas selline kolmnurk, siis võib kohe leida iga antud ringi jaoks temaga pindvõrdse ruudu.

Nendele, kes soovivad niisugust joonestuskolmnurka valmistada, on kasulikud järgmised näpunäited.

Et nurga 27°36′ tangens on 0,523 ehk $\frac{23}{44}$, siis kolmnurga kaatetid suhtuvad nagu 23 : 44. Seega valmistades kolmnurga, mille üks kaatet on näit. 22 cm ja teine 11,5 cm, saame selle, mida nõutakse. On iseenesest mõistetav, et seda kolmnurka võib kasutada ka hariliku joonestuskolmnurgana.

Pea või jalad?

Vist üks Jules Verne'i kangelastest arvutas, missugune tema kehaosadest läbis rännakul ümber maailma pikema tee — kas pea või jalatallad. See on väga õpetlik geomeetriline ülesanne, kui esitada küsimus vastaval viisil. Meie esitame ta järgmisel kujul.

Ülesanne

Kujutlege, et te käisite piki ekvaatorit ümber maakera. Kui palju läbis teie pealagi seejuures pikema tee kui teie jalatallad?

Lahendus

Jalad läbisid tee $2\pi R$, kus R on maakera raadius. Pealagi läbis samal ajal $2\pi(R+1{,}7)$, kus 1,7 m on inimese pikkus. Läbitud pikkuste vahe on $2\pi(R+1{,}7) - 2\pi R = 2\pi \cdot 1{,}7 = 10{,}7$ (m). Seega pea läbis 10,7 m võrra pikema tee kui jalad.

On huvitav, et lõppvastusesse ei kuulu maakera raadiuse suurus. Seetõttu saame sama tulemuse nii Maa, Jupiteri kui ka kõige väiksema planeedi puhul. Üldiselt ei olene kontsentriliste ringjoonte pikkuste vahe nende raadiustest, vaid ainult nende omavahelisest kaugusest. Ühe sentimeetri lisamine maa orbiidi raadiusele suurendaks orbiidi pikkust täpselt niisama palju, kui palju pikeneks viiekopikase mündi ümbermõõt sama pikkusühiku lisamisel tema raadiusele.

Sellel geomeetrilisel paradoksil [1] põhineb järgmine huvitav ülesanne, mis esineb paljudes geomeetriliste meelelahutuste kogumikes.

Kui tõmmata ekvaatorit mööda ümber maakera traat ja seejärel lisada traadi pikkusele 1 m, kas pääseb siis hiir traadi ja maa vahelt läbi?

Harilikult vastatakse, et vahe on väiksem juuksekarva jämedusest: mida tähendab üks meeter võrreldes 40 miljoni meetrise maakera ekvaatoriga! Tegelikult on aga vahemaa suurus

$$\frac{100}{2\pi}\ \text{cm} \approx 16\ \text{cm}.$$

Mitte ainult hiir, vaid ka suur kass pääseb läbi selle vahe.

Traat piki ekvaatorit

Ülesanne

Nüüd kujutlege, et piki ekvaatorit on tihedalt ümber maakera tõmmatud terastraat. Mis juhtub, kui see traat jahtub 1° võrra? Jahtumise tagajärjel peab traat lühenema. Kui ta seejuures ei katkeks ega veniks, kui sügavale lõikuks ta siis pinnasesse?

Lahendus

Paistaks nagu, et see temperatuuri tühine alanemine — kõigest 1° võrra — ei või põhjustada tunduvat traadi tungimist maasse. Arvutused aga annavad teise tulemuse.

Jahtudes 1° võrra, lüheneb terastraat ühe sajatuhandiku võrra oma pikkusest. 40 miljoni meetri (maakera ekvaatori pikkus) pikkune traat peab lühenema, nagu on kerge arvutada, 400 m võrra. Selle traadist ringjoone raadius aga ei lühene 400 m võrra, vaid palju vähem. Et teada saada, kui palju väheneb raadius, tuleb 400 m jagada 6,28-ga, s. o. 2π-ga. Saame umbes 64 m. Seega traat, jahtudes

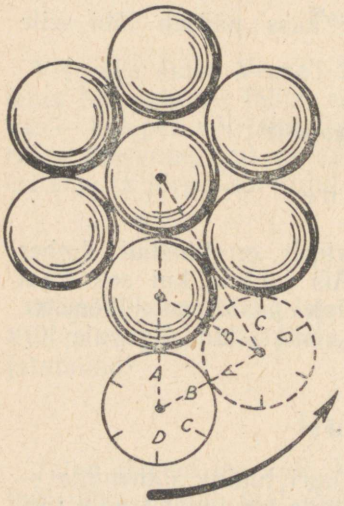
[1] Paradoksiks nimetatakse tõde, mis näib ebatõenäolisena, vastandina sofismile — ebaõigele väitele, mis näib tõelisena.

ainult 1° võrra, peaks antud tingimustel lõikuma maasse mitte mõne millimeetri võrra, nagu võiks näida, vaid rohkem kui 60 m!

Faktid ja arvutused

Ülesanne

Teie ees on kaheksa võrdset ringi (joon. 127). Seitse viirutatut on liikumatud, kaheksas (valge) aga veereb libisemiseta ümber nende. Mitu pööret ta teeb, tehes ühe täistiiru ümber liikumatute ringide?



Joon. 127. Mitu pööret teeb valge ring ümber viirutatud ringide liikudes?

Te loomulikult võite selle kohe praktiliselt selgitada: asetage lauale kaheksa ühesuguse väärtusega münti, näiteks kaheksa kahekümnekopikalist, paigutage nad nii nagu joonisel, ja seitset münti vastu lauda surudes veeretage kaheksandat nende ümber. Pöörete arvu määramiseks jälgige näiteks mündil olevate numbrite asendit. Iga kord, kui number võtab esialgse asendi, on münt teinud ümber oma keskpunkti ühe pöörde.

Tehke see katse mitte kujutluses, vaid tegelikkuses ja te veendute, et münt teeb kokku neli pööret.

Proovime nüüd saada sama vastuse arutluste ja arvutuste abil.

Selgitame näiteks, kui suure kaare igast liikumatust ringist läbib liikuv ring. Selleks kujutleme liikuva ringi ümberpaigutumist «künkalt» *A* lähimasse kahe liikumatu ringi vahelisse «nõkku» (joonisel 127 tähistatud punktiiriga).

Joonise järgi ei ole raske määrata, et kaar *AB*, mida mööda ring veeres, sisaldab 60°. Iga liikumatut ringi ümb-

ritseval ringjoonel on niisuguseid kaari kaks; kokku moodustavad nad 120°-se kaare ehk ⅓ ringjoonest.

Läbides ⅓ liikumatust ringjoonest, teeb pöörlev ring järelikult ⅓ pööret. Liikumatuid ringe on kokku kuus; selgub, et pöörlev ring teeb ainult $\frac{1}{3} \cdot 6 = 2$ pööret.

Tekib erinevus vaatluse tulemustest! Kuid «faktid on kangekaelsed asjad». Kui vaatlus ei kinnita arvutust, siis see tähendab, et arvutuses on viga.

Leidke viga toodud arutluses.

Lahendus

Asi on selles, et kui ring libisemiseta veereb sirgjoonelisel lõigul, mille pikkus on ⅓ veereva ringi ümbermõõdust, siis teeb ta tõepoolest ⅓ pööret oma keskpunkti ümber. See väide osutub aga ebaõigeks, tegelikkusele mittevastavaks, kui ring veereb mingisuguse kõverjoone kaart mööda. Vaadeldavas ülesandes ei tee veerev ring, veeredes kaart mööda, mis moodustab ⅓ tema ümbermõõdu pikkusest, mitte ⅓ pööret, vaid ⅔ pööret ja järelikult, läbides kuus sellist kaart, teeb

$$6 \cdot \tfrac{2}{3} = 4 \text{ pööret!}$$

Selles võite piltlikult veenduda.

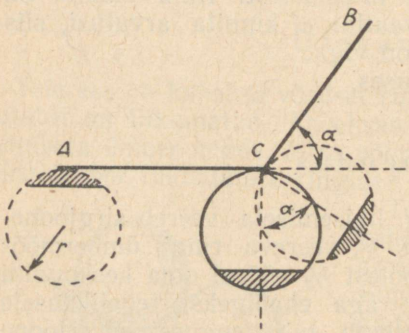
Joonisel 127 kujutab punktiir veereva ringi asendit pärast seda, kui ta veeres liikumatu ringi kaart AB ($=60°$) mööda, s. o. kaart mööda, mis moodustab $^1/_6$ ringjoone pikkusest. Ringi uues asendis ei asetse kõige kõrgem koht teda ümbritseval ringjoonel mitte punktis A, vaid punktis C, mis, nagu on kerge näha, vastab ringjoone punktide pöördele 120° võrra, s. o. ⅓-le täispöördest. 120°-sele «teele» vastab ⅔ veereva ringi täispöördest.

Niisiis, kui ring veereb kõverat (või murdjoonelist) teed mööda, teeb ta teistsuguse arvu pöördeid, kui sama pikkusega sirgjoonelisel teel veeredes.

Peatume veel veidi selle hämmastava fakti geomeetrilisel küljel, seda enam, et harilikult selle kohta antav seletus ei ole alati veenev.

Veeregu ring raadiusega r mööda sirget. Ta teeb ühe

täispöörde lõigul AB, mille pikkus võrdub veereva ringi ümbermõõdu pikkusega ($2\pi r$). Murrame lõigu AB tema keskpunktis C (joon. 128), pöörates osa CB esialgsest asendist nurga α võrra kõrvale.



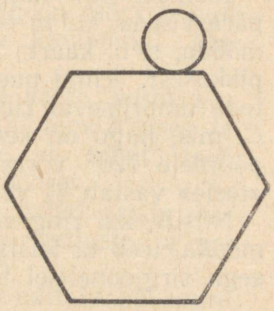
Joon. 128. Kuidas tekib täiendav pööre ringi veeremisel murdjoont mööda.

Nüüd jõuab ring pool pööret tehes tipuni C, ja selleks, et võtta asend, mille juures ta puutub punktis C lõiku CB, pöördub ta koos oma keskpunktiga nurga võrra, mis võrdub nurgaga α (need nurgad on võrdsed, sest nende haarad on vastastikku risti).

Selle pöördumise kestel veereb ring lõigul edasi liikumata. See tekitabki siin täiendava pöörde, võrreldes veeremisega sirget mööda.

Täiendav pööre moodustab niisuguse osa täispöördest, missuguse osa moodustab nurk α nurgast 2π, s. o. $\frac{\alpha}{2\pi}$. Piki lõiku CB teeb ring samuti pool pööret, nii et kokku teeb ta piki murdjoont ACB liikudes $1 + \frac{\alpha}{2\pi}$ pööret.

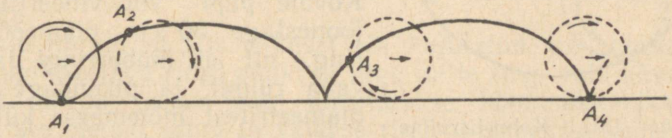
Nüüd ei ole raske kujutleda, mitu pööret peab ring tegema, veeredes korrapärase kuusnurga väliskülgi mööda (joon. 129). Ilmselt nii mitu, kui mitu pööret ta teeks sirgel, mille pikkus võrdub kuusnurga perimeetriga (s. o. külgede pikkuste summaga), pluss pöörete arv, mis võrdub kuusnurga välisnurkade summaga, mis on jagatud 2π-ga.



Joon. 129. Mitu lisapööret teeb ring, kui ta veereb mööda hulknurga väliskülgi, mitte aga tema sirgestatud perimeetrit mööda?

Et igasuguse hulknurga välisnurkade summa on konstantne ja võrdub $4d$ ehk 2π-ga, siis $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

Seega, liikudes ümber kuusnurga ja samuti ümber mistahes hulknurga, teeb ring alati ühe pöörde rohkem kui liikudes sirgjoonelist lõiku mööda, mille pikkus võrdub hulknurga perimeetriga.



Joon. 130. Tsükloid — libisemiseta mööda sirgjoont veereva ketta ringjoonel asetseva punkti A trajektoor.

Külgede arvu lõpmatul kahekordistamisel läheneb korrapärane hulknurk ringjoonele; tähendab, kõik toodud kaalutlused jäävad kehtima ka ringjoone puhul. Kui näiteks vastavalt esialgsele ülesandele üks ring veeres temaga võrdse ringi 120°-st kaart mööda, siis väide, et liikuv ring teeb seejuures mitte $\frac{1}{3}$, vaid $\frac{2}{3}$ pööret, omandab täieliku geomeetrilise selguse.

Tütarlaps köiel

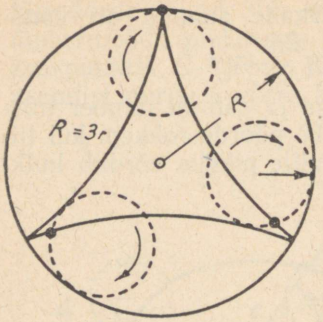
Kui ring veereb mingisugust joont mööda, mis asetseb temaga ühes tasapinnas, siis ka ringi iga punkt asetub ümber selles tasapinnas, s. o. nagu öeldakse, tal on oma trajektoor.

Jälgige mööda sirget või ringjoont veereva ringi mistahes punkti trajektoori, ja te näete kõige mitmekesisemaid kõveraid[1].

Mõningad neist on kujutatud joonistel 130 ja 131.

Tekib küsimus: kas võib teist ringi ümbritseva ringjoone «sisemisel küljel» veereva ringi punkt (joon. 131) liikuda

[1] Väga palju kasulikku ja huvitavat ning samuti ka näiteid selle küsimuse kohta leiab lugeja huvitavas raamatus Г. Н. Берман — «Циклоида», Гостехиздат, 1948.

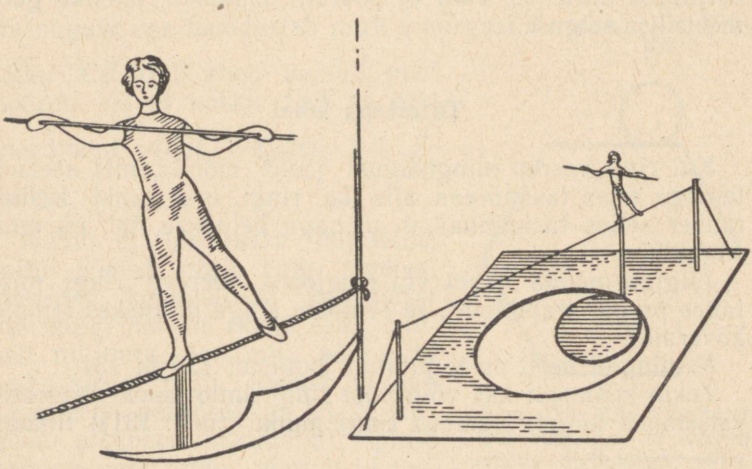


Joon. 131. Kolmeharuline hüpotsükloid — suure ringjoone sees veereva ketta ringjoone punkti trajektoor, kusjuures $R = 3r$.

mitte kõverat, vaid sirgjoont mööda? Esimesel pilgul näib, et see on võimatu.

Kuid just niisugust konstruktsiooni nägin ma oma silmaga. See oli mänguasi — «tütarlaps köiel» (joon. 132). Te võite selle kergesti ise valmistada. Kõvale papi- või vineeritükile joonestage 30 cm diameetriga ring, nii et ümberringi jääks vaba ruumi, ja pikendage üht diameetritest mõlemasse külge.

Diameetri pikendustele torgake nõelad, mille silmadest on läbi tõmmatud niit; tõmmake niit horisontaalseks ja kinnitage tema mõlemad otsad papi (vineeri) külge. Joonestatud ring lõigake välja ja kujunenud avasse mahutage teine papist (või vineerist) ring, mille läbimõõt on 15 cm. Väikese ringi ääre sisse pistke samuti



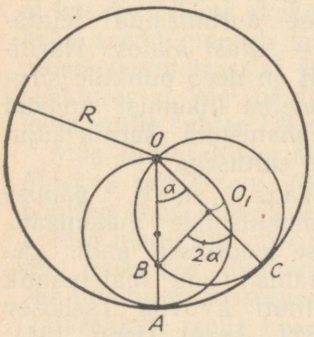
Joon. 132. «Tütarlaps köiel». Veereval ringil on sirgjooneliselt liikuvaid punkte.

nõel, nagu on kujutatud joonisel 132, lõigake paksust paberist tütarlapse-akrobaadi kuju ja kinnitage laki abil tema jalg nõela külge.

Proovige nüüd veeretada väikest ringi, surudes teda ava ääre vastu; nõela ots ja koos temaga ka tütarlapse-kuju libiseb edasi-tagasi piki pingutatud niiti.

Seda võib seletada ainult sellega, et veereva ringi punkt, kuhu on kinnitatud nõel, liigub täpselt ava diameetrit mööda.

Kuid mispärast siis joonisel 131 kujutatud analoogilisel juhtumil veereva ringi punkt ei liigu mitte sirg- vaid kõverjoont mööda (seda joont nimetatakse hüpotsükloidiks)? Kõik see oleneb suure ja väikese ringi diameetrite suhtest.



Joon. 133. Geomeetriline selgitus mänguasjale «tütarlaps kõiel».

Ülesanne

Tõestage, et kui suure ringi sees veereb tema ümbermõõtu mööda temast kaks korda väiksema diameetriga ring, siis sellisel liikumisel väikese ringjoone mistahes punkt liigub sirget mööda, mis on suure ringi diameetriks.

Lahendus

Kui ringi O_1 diameeter on kaks korda väiksem ringi O diameetrist (joon. 133), siis ringi O_1 liikumise igal momendil üks tema punktidest asetseb ringi O keskpunktis.

Jälgime punkti A liikumist.

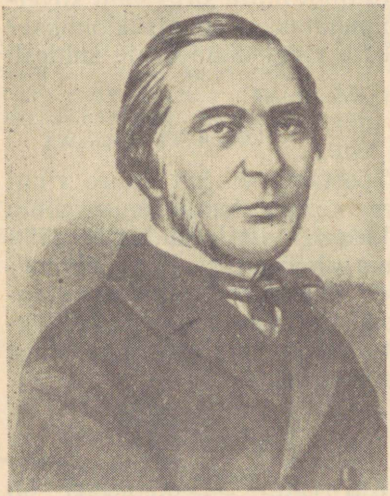
Veeregu väike ring mööda kaart AC.

Kus asetseb punkt A ringi O_1 uue asendi korral?

On ilmne, et ta peab asetsema ringjoone O_1 niisuguses punktis B, et kaared AC ja BC oleksid pikkuselt võrdsed (ring veereb libisemiseta). Olgu $OA = R$ ja $\angle AOC = \alpha$. Siis $AC = R \cdot \alpha$; järelikult ka $BC = R \cdot \alpha$; et aga

$O_1C = \frac{R}{2}$, siis $\angle BO_1C = \frac{R \cdot \alpha}{\frac{R}{2}} = 2\alpha$; siit $\angle BOC$ kui piirdenurk on $\frac{2\alpha}{2} = \alpha$, s. o. punkt B jäi sirgele OA.

Kirjeldatud mänguasi kujutab endast primitiivset mehhanismi ringliikumise sirgjooneliseks muutmiseks.



Joon. 134. Pafnuti Lvovitš Tšebõšev (1821—1894).

Niisuguste mehhanismide (neid nimetatakse inversoriteks) konstrueerimine huvitab tehnikuid-mehaanikuid juba Uraali mehaaniku I. I. Polzunovi — esimese aurumasina leiutaja — ajast alates. Harilikult on need punktile sirgjoonelist liikumist andvad mehhanismid šarniirikujulise ehitusega.

Väga suure panuse mehhanismide matemaatilisse teooriasse andis geniaalne vene matemaatik Pafnuti Lvovitš Tšebõšev (1821—1894) (joon. 134). Ta ei olnud mitte ainult matemaatik, vaid ka väljapaistev mehaanik. Ta ehitas «sammuva» masina mudeli (seda säilitatakse ka praegu NSV Liidu Teaduste Akadeemias), iseliikuva tugitooli mehhanismi, tolle aja kohta parima arvutusmehhanismi — aritmomeetri jne.

Teekond üle pooluse

Te kindlasti mäletate Nõukogude Liidu Kangelase M. M. Gromovi ja tema sõprade kuulsat lendu Moskvast üle põhjapooluse San Jacintosse (l.: san džasinto), kusjuu-

res 62 t. ja 17. min. kestusega lennul saavutati M. M. Gromovi poolt maailmarekordid vahemaandumiseta lennus mööda sirget (10 200 km) ja mööda murdjoont (11 500 km).

Mis te arvate, kas pöörles kangelaste lennuk üle pooluse lennates koos Maaga ümber Maa telje? Seda küsimust võib tihti kuulda, kuid mitte alati ei anta sellele õiget vastust. Iga lennuk, sealhulgas ka üle pooluse lendav, peab tingimata kaasa tegema maakera pöörlemise. Põhjus on selles, et kuigi lennuk on eraldatud maakera koorest, jääb ta siiski seotuks atmosfääriga ja tõmmatakse selle poolt kaasa pöörlevasse liikumisse ümber meie planeedi telje.

Niisiis, teostades lendu üle pooluse Moskvast Ameerikasse, pöörles lennuk samal ajal koos Maaga ümber Maa telje. Missugune oli siis selle lennu trass?

Et sellele küsimusele õigesti vastata, tuleb silmas pidada, et kui me ütleme «keha liigub», siis see tähendab, et antud keha asend muutub mingisuguse teise keha suhtes. Küsimusel lennu trassist ja üldse liikumisest ei ole mõtet, kui seejuures ei ole näidatud (või vähemalt mõista antud) keha, mille suhtes liikumine toimub.

Maa suhtes liikus M. M. Gromovi lennuk peaaegu piki Moskva meridiaani. Moskva meridiaan, nagu iga teinegi, pöörleb koos Maaga ümber Maa telje; pöörles ka lennuk, hoides lennu ajal meridiaani suunda, kuid maapealse vaatleja jaoks see liikumine trassi kujule mõju ei avalda, sest see toimub mingisuguse teise keha, mitte Maa suhtes.

Järelikult meile kui tugevasti Maaga seotuile on selle kangelasliku lennu trass suure ringi kaar, kui eeldada, et lennuk liikus täpselt mööda meridiaani ja asetses seejuures ühel ja samal kaugusel Maa keskpunktist.

Nüüd esitame küsimuse nii: lennuk liigub Maa suhtes ja me teame, et ta pöörleb koos Maaga ümber Maa telje, s. o. lennuk ja Maa liiguvad mingisuguse kolmanda keha suhtes; missugusena paistab lennu trass selle kolmanda kehaga seotud vaatlejale?

Lihtsustame veidi seda ebaharilikku ülesannet. Kujutleme meie planeedi pooluse ümbrust lameda kettana, mis asetseb maakera teljega risti olevas tasapinnas. Olgu see kujutletav tasapind selleks «kehaks», mille suhtes ketas ümber Maa telje pöörleb ja veeregu ühtlaselt piki ketta üht diameetrit üleskeeratav vankrike, mis kujutab piki meridiaani üle pooluse lendavat lennukit.

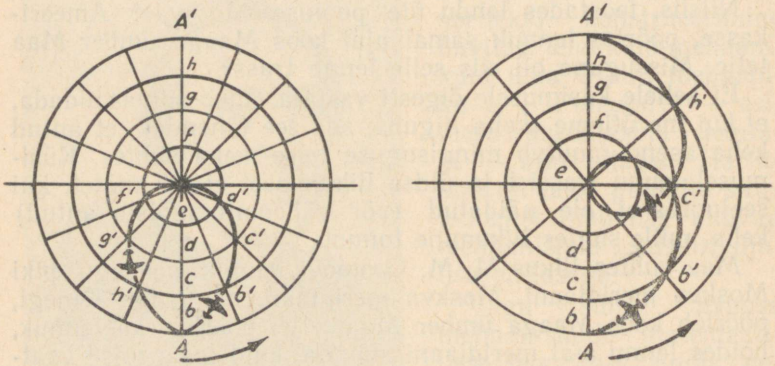
Missuguse joone kujutab meie tasapinnal vankrikese (täpsemalt öeldes: vankrikese mistahes punkti, näiteks tema raskuskeskme) teekond?

Aeg, millega vankrike võib liikuda ühest diameetri otsast teise, oleneb tema kiirusest.

Vaatleme kolme juhtumit:

1) vankrike läbib oma tee 12 tunniga,
2) ta läbib selle tee 24 tunniga ja
3) ta läbib sama tee 48 tunniga.

Ketas teeb kõigil juhtudel täispöörde 24 tunni jooksul.



Joon. 135—136. Kõverad, mida joonestab liikumatule tasapinnale kahest liikumisest osa võttev punkt.

E s i m e n e j u h t u m (joon. 135). Vankrike ületab ketta piki tema diameetrit 12 tunniga. Ketas teeb selle aja jooksul poole pööret, s. o. pöördub 180° võrra ning punktid *A* ja *A'* vahetavad kohad. Joonisel 135 on diameeter jaotatud kaheksaks võrdseks osaks, millest igaühe vankrike läbib 12 : 8 = 1,5 tunniga. Vaatleme, kus asetseb vankrike 1,5 tunni möödumisel liikumise algusest. Kui ketas ei pöörleks, jõuaks punktist *A* väljunud vankrike 1,5 tunni pärast punkti *b*. Kuid ketas pöörleb ja pöördub 1,5 tunni jooksul 180° : 8 = 22,5° võrra. Seejuures ketta punkt *b* siirdub punkti *b'*. Kettal seisev ja koos temaga pöörlev vaatleja ei märkaks seda pöörlemist ja näeks ainult, et vankrike siirdus punktist *A* punkti *b*. Kuid vaatleja, kes asetseb väljas-

pool ketast ja ei võta osa tema pöörlemisest, näeks teisiti: temale näiks vankrike liikuvat kõverjoont mööda punktist *A* punkti *b′*. Veel 1,5 tunni möödudes näeks väljaspool ketast seisev vaatleja vankrikest punktis *c′*. Järgmise 1,5 tunni jooksul liiguks vankrike kaart *c′d′* mööda ning veel 1,5 tunni möödudes jõuaks keskpunkti *e*.

Jätkates vankrikese liikumise jälgimist, näeks väljaspool ketast asetsev vaatleja midagi täiesti ootamatut: vankrike joonestaks kõverjoone *ef′g′h′A* ja liikumine, nii imelik kui see ka ei ole, ei lõpeks mitte diameetri teises otspunktis, vaid lähtepunktis.

Selle ootamatuse lahendus on väga lihtne: vankrikese kuuetunnise liikumise jooksul diameetri teist poolt mööda jõuab see raadius pöörduda koos kettaga 180° võrra ja võtta diameetri esimese poole asendi. Vankrike pöörleb koos kettaga ka sel momendil, kui ta ületab ketta tsentri. Täielikult vankrike ketta keskpunkti arusaadavalt ei mahu; ketta keskpunktiga ühtub ainult üks tema punkt ja vastaval momendil pöördub ta koos kettaga ümber selle punkti. Sama peab toimuma ka lennukiga sel momendil, kui ta lendab üle pooluse. Seega vankrikese teekond ketta diameetrit mööda selle ühest otsast teise näib eri vaatlejatele erinevana. Sellele, kes seisab kettal ja pöörleb koos temaga, näib see teekond sirgjoonelisena. Liikumatu vaatleja aga, kes ei võta osa ketta pöörlemisest, näeb vankrikest liikuvat kõverat mööda, mis on kujutatud joonisel 135 ja mis meenutab tilga kontuure.

Samasugust kõverat näeks igaüks teist ka vaadeldes, oletame, maakera keskpunktist lennuki lendu kujuteldava tasapinna suhtes, mis on risti maakera teljega, sellel fantastilisel tingimusel, et Maa oleks läbipaistev, et teie ega tasapind ei võtaks osa Maa pöörlemisest, ja kui vaadeldava lennuki lend üle pooluse kestaks 12 tundi.

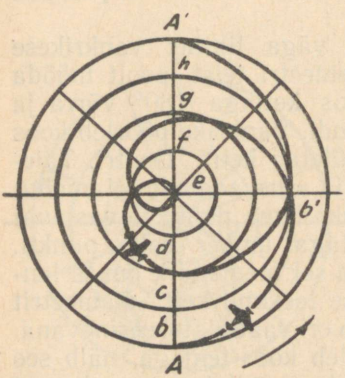
Siin on meil huvitav näide kahe liikumise liitmise kohta. Tegelikkuses ei kestnud poolusest ülelend Moskvast sama paralleeli diametraalselt vastupidisesse punkti 12 tundi, mistõttu peatume nüüd veel ühe sama laadi ettevalmistava ülesande lahendamisel.

T e i n e j u h t u m (joon. 136). Vankrike läbib ketta diameetri pikkuse 24 tunniga. Selle aja jooksul teeb ketas täispöörde, ja siis on vankrikese teekonnal ketta suhtes liikumatu vaatleja jaoks joonisel 136 toodud kõvera kuju.

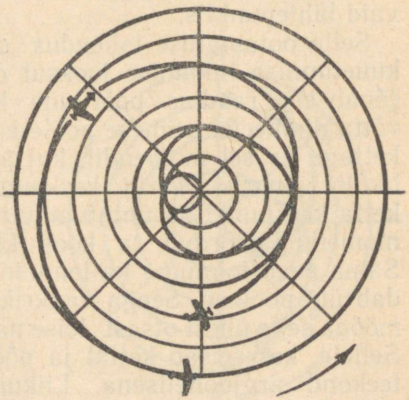
Kolmas juhtum (joon. 137). Ketas sooritab täispöörde endiselt 24 tunniga, kuid vankrike rändab diameetri ühest otsast teise 48 tunniga.

Sel korral läbib vankrike $^1/_8$ diameetrit $48 : 8 = 6$ tunni jooksul.

Selle kuue tunni jooksul jõuab ketas pöörduda veerandi täispöördest — 90° võrra. Seetõttu kuue tunni möödudes liikumise algusest jõuab vankrike diameetrit mööda (joon. 137) punkti *b*, mille aga ketta pöörlemine kannab



Joon. 137. Veel üks kõver, mis on saadud liikumiste liitmise tulemusena.



Joon. 138. Moskva—San Jacinto lennu trass, nagu see paistaks vaatlejale, kes ei võta osa ei lennust ega Maa pöörlemisest.

punkti *b'*. Veel 6 tunni möödudes jõuab vankrike punkti *g* jne. 48 tunni jooksul läbib vankrike kogu diameetri pikkuse, kusjuures ketas teeb kaks täispööret. Nende liikumiste liitmise tulemus paistab liikumatule vaatlejale kummalise kõverana, mis on kujutatud joonisel 137 jämeda joonega.

Äsjavaadeldud juhtum lähendab meid pooluse ületamise tõelistele tingimustele. Lennuks Moskvast pooluseni kulutas M. M. Gromov ligikaudu 24 tundi; seetõttu näeks Maa keskpunktis asetsev vaatleja seda trassiosa joonena, mis peaaegu ühtuks joonisel 137 toodud kõvera esimese poolega. Mis puutub M. M. Gromovi lennu teise ossa, siis kes-

tis see umbes poolteist korda kauem ja lisaks sellele on ka kaugus poolusest San Jacintoni poolteist korda suurem Moskva ja põhjapooluse vahelisest kaugusest. Seetõttu teekonna teise poole trass paistaks liikumatule vaatlejale samakujulisena nagu teekonna esimest osa kujutav joon, kuid poolteist korda pikemana.

Missugune kõver saadakse lõppkokkuvõttes, see on näidatud joonisel 138.

Paljusid ehk viib segadusse asjaolu, et lennu alg- ja lõpp-punkt on sellel joonisel näidatud nii lähedastena.

Ei tohi aga tähele panemata jätta, et joonis ei näita Moskva ja San Jacinto üheaegset asendit, vaid need asendid on eraldatud 2½-ööpäevase vahemaaga.

Niisuguse kujuga siis oleks M. M. Gromovi lennu trass üle pooluse, kui oleks võimalik jälgida lendu näiteks maakera keskpunktist. Kas meil on õigus nimetada seda keerukat spiraali t õ e l i s e k s lennuteekonnaks üle pooluse vastandina kaartidel kujutatud s u h t e l i s e l e teekonnale? Ei, see liikumine on samuti suhteline: ta on võetud mingisuguse keha suhtes, mis ei võta osa Maa pöörlemisest ümber telje, täpselt samuti, nagu harilik lennuteekonna kujutus on võetud pöörleva Maa p i n n a suhtes.

Kui me saaksime jälgida sama lendu Kuult või Päikeselt[1], paistaks lennu trass meile veelgi teistsugusemal kujul.

Kuu ei tee kaasa Maa öö-päevast pöörlemist, kuid ta teeb täistiiru ümber meie planeedi kuu ajaga. 62 lennutunni jooksul Moskvast San Jacintosse jõuaks Kuu teha ümber Maa 30°-se kaare, ja see ei saaks jääda mõjumata lennu trajektoorile, mis paistaks kuupealsele vaatlejale. Päikese suhtes vaadeldava lennu trassi kujule mõjuks veel ka kolmas liikumine — Maa tiirlemine ümber Päikese.

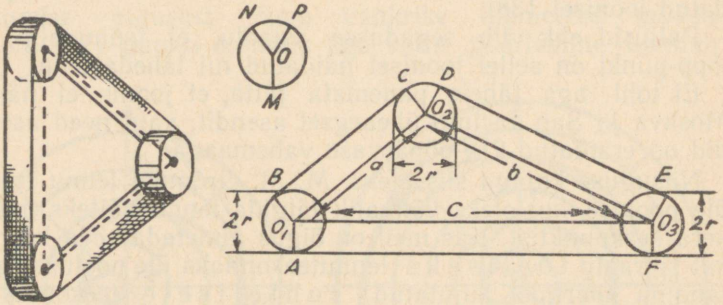
«Üksiku keha liikumist ei eksisteeri, on olemas ainult suhteline liikumine,» ütles F. Engels «Looduse dialektikas». Äsjavaadeldud ülesanne veenab meid selles kõige piltlikumalt.

Ülekanderihma pikkus

Kui tööstuskooli õpilased lõpetasid oma töö, andis meister soovijaile «hüvastijätuks» lahendada niisuguse

[1] S. o. Kuu või Päikesega seotud koordinaatide süsteemi suhtes.

«Ühele meie töökoja uutest seadistest,» ütles meister, «tuleb õmmelda ülekanderihm — mitte kahele rihmarattale, nagu see kõige sagedamini esineb, vaid korraga kolmele,» ja meister näitas õpilastele ülekande skeemi (joon. 139).



Joon. 139. Ülekande skeem. Kuidas määrata ülekanderihma pikkus, kasutades ainult antud mõõteid?

«Kõik kolm rihmaratast,» jätkas ta, «on ühesuguste mõõdetega. Nende diameetrid ja kaugused nende telgede vahel on antud skeemil.

Kuidas määrata neid mõõteid teades kiiresti ülekanderihma pikkus, teostamata täiendavaid mõõtmisi?»

Õpilased jäid mõttesse. Keegi nendest ütles kohe: «Minu arvates on kogu raskus siin selles, et joonisel ei ole näidatud kaarte *AB, CD* ja *EF* mõõteid, mille kaudu rihm iga ratast haarab. Iga niisuguse kaare pikkuse määramiseks on vaja teada vastavat kesknurka ja mulle näib, et me ei tule toime mallita.»

«Nurki, millest sa räägid,» vastas meister, «võib arvutada ka joonisel näidatud mõõdete järgi trigonomeetriliste valemite ja tabelite abil, kuid see on pikk ja keerukas tee. Ka malli ei ole siin tarvis, sest ei ole vaja teada iga meid huvitava kaare pikkust eraldi, vaid on küllaldane teada . . .»

«Nende summat,» hüüdsid vahele mõned noortest, taibates, milles asi on.

«Noh, nüüd minge koju ja tooge mulle homme oma lahendused.»

Ärgu rutaku lugeja teada saama, missuguse lahenduse tõid meistrile tema õpilased.

Pärast kõike meistri poolt öeldut ei ole raske seda ülesannet ka iseseisvalt lahendada.

Lahendus

Tõepoolest, ülekanderihma pikkus määratakse väga lihtsalt: rihmarataste telgede vaheliste kauguste summale tuleb lisada ühe rihmaratta ümbermõõdu pikkus. Kui rihma pikkus on l, siis

$$l = a + b + c + 2\pi r.$$

Seda, et rihmaga kokkupuutuvate kaarte pikkuste summa moodustab ühe rihmaratta ümbermõõdu, taipasid peaaegu kõik, kes lahendasid ülesande, kuid mitte kõigil ei õnnestunud seda tõestada.

Meistrile esitatud küllaldaselt põhjendatud lahendustest hindas ta kõige lühemaks järgmise.

Olgu BC, DE ja FA ringjoonte puutujad (joon. 139). Tõmbame puutepunktidesse raadiused. Et rihmarattad on võrdsete raadiustega, siis on kujundid O_1BCO_2, O_2DEO_3 ja O_1O_3FA ristkülikud ja järelikult $BC + DE + FA = a + b + c$. Jääb veel näidata, et kaarte pikkuste summa $AB + CD + EF$ moodustab ratta ümbermõõdu täispikkuse.

Selleks konstrueerime ringi O raadiusega r (joon. 139, üleval). Tõmbame $OM \| O_1A$, $ON \| O_1B$ ja $OP \| O_2D$; siis $\angle MON = \angle AO_1B$, $\angle NOP = \angle CO_2D$ ja $\angle POM = \angle EO_3F$ kui paralleelsete haaradega nurgad.

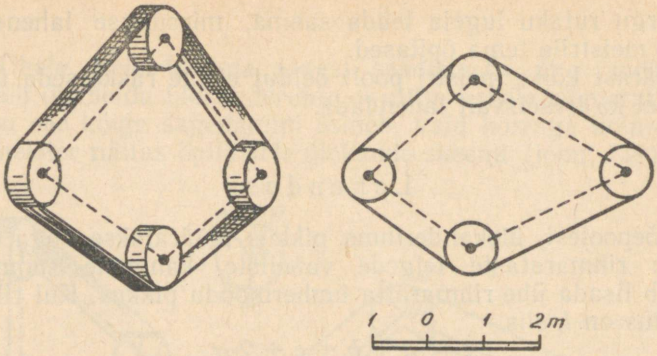
Siit järeldub, et $AB + CD + EF = MN + NP + PM = 2\pi r$.

Seega rihma pikkus $l = a + b + c + 2\pi r$.

Samal viisil võib näidata, et mitte ainult kolme, vaid ka mistahes arvu võrdsete suurustega rihmarataste puhul võrdub ülekanderihma pikkus rataste telgede vaheliste kauguste summaga pluss ühe ratta ümbermõõt.

Ülesanne

Joonisel 140 on kujutatud neljal võrdsel rullil asetseva transportööri skeem (on olemas ka vahepealsed rullid, kuid skeemil on nad ära jäetud, sest nad ei mõjuta ülesande



Joon. 140. Võtke jooniselt vajalikud mõõdud ja arvutage transportööri-lindi pikkus.

lahendamise käiku). Kasutades joonisel näidatud mõõtkava, võtke jooniselt vajalikud mõõdud ja arvutage transportöörilindi pikkus.

Ülesanne taibukast varesest

Meie koolide emakeelelugemikes on lõbus jutustus «taibukast varesest». See muistend jutustab varesest, kes janu kannatades leidis kannu veega. Vett oli kannus vähe ja nokaga selleni ei ulatunud, kuid vares taipas, kuidas hädas abi leida: ta viskas kannu kivikesi. Selle kavaluse tulemusena tõusis vesi kannu ääreni ja vares sai juua.

Me ei lasku arutlustesse selle üle, kas võis vares avaldada niisugust taibukust. Juhtum huvitab meid geomeetrilisest küljest. Ta annab põhjuse vaadelda järgmist

ülesannet

Kas oleks varesel õnnestunud juua, kui kann oleks olnud pooleni täidetud?

Lahendus

Arutlus näitab, et varese poolt kasutatud viis ei vii sihile vee igasuguse algkõrguse juures kannus.

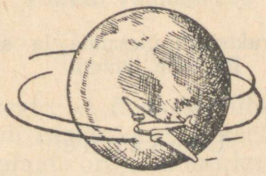
Lihtsuse mõttes oletame, et kann on täisnurkse prisma kujuline ja et kivikesed on ühesuurused kerakesed. On

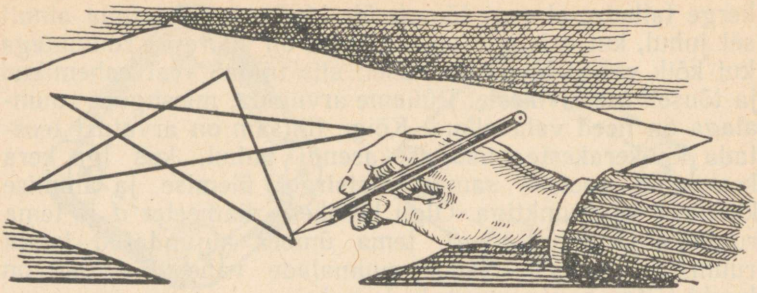
kerge taibata, et vesi tõuseb üle kivikeste tasapinna ainult sel juhul, kui esialgne veetagavara on suurema ruumalaga kui kõik vahed kivikeste vahel: siis täidab vesi vahemikud ja tõuseb üle kivikeste. Püüame arvutada, missuguse ruumalaga on need vahemikud. Kõige lihtsam on arvutust teostada kivikerakeste niisuguse asendi puhul, kus iga kera keskpunkt asetseb samal püstsirgel ülemise ja alumise kerakese keskpunktiga. Olgu kerakese diameeter d ja tema ruumala järelikult $^1/_6\pi d^3$, tema ümber kujundatud kuubi ruumala aga d^3. Nende ruumalade vahe $d^3 - {}^1/_6\pi d^3$ on kuubi täitmata osa ruumala ja suhe

$$\frac{d^3 - {}^1/_6\pi d^3}{d^3} = 0{,}48$$

näitab, et iga kuubi täitmata osa moodustab 0,48 tema ruumalast. Samasuguse osa, s. o. natuke vähem kui poole, moodustab kõigi tühimike ruumalade summa kannu ruumalast. Asi muutub ainult vähe, kui kannul ei ole prisma kuju ja kui kivikesed ei ole kerakujulised. Kõigil juhtudel võib kinnitada, et kui esialgselt oli vett kannus vähem kui pool tema ruumalast, siis ei oleks varesel õnnestunud kivikeste sisseviskamisega tõsta veepinda kannu ääreni.

Oleks vares olnud tugevam, nii et ta oleks jõudnud kivid kannus tihedalt kokku raputada, oleks tal õnnestunud tõsta veepinda rohkem kui kaks korda kõrgemale esialgsest tasapinnast. Kuid see ei olnud talle jõukohane, ja võttes kivikeste paiknemise mittetihedana, ei kaldu me kõrvale reaalsetest tingimustest. Peale selle on kannu keskosa harilikult kumer, mis peab samuti vähendama vee tõusukõrgust ja mis kinnitab meie järelduse õigsust: kui vesi oleks olnud allpool kannu poolt kõrgust, ei oleks varesel õnnestunud janu kustutada.



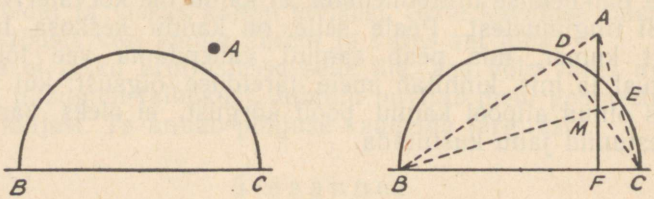


KÜMNES PEATÜKK

GEOMEETRIA MÕÕTMISTE JA ARVUTUSTETA

Konstrueerimine sirklita

Geomeetriliste konstruktsiooni-ülesannete lahendamisel kasutatakse harilikult joonlauda ja sirklit. Kohe siiski näeme, et mõnikord õnnestub sirkiita toime tulla ka niisugustel juhtudel, kus tema kasutamine esimesel pilgul näib täiesti mõõdapääsematuna.



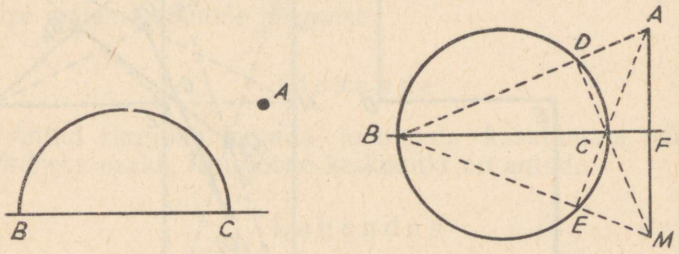
Joon. 141. Konstruktsiooni-ülesanne ja selle lahendus. Esimene juhtum.

Ülesanne

Väljaspool antud poolringi asetsevast punktist *A* (joon. 141, vasakul) tõmmata sirklit kasutamata poolringi diameetrile ristjoon. Poolringi keskpunkt ei ole antud.

Lahendus

Kasutame siin seda kolmnurga omadust, et kõik tema kõrgused lõikuvad ühes punktis. Ühendame punkti A punktidega B ja C; saame punktid D ja E (joon. 141, paremal). Sirged BE ja CD on ilmselt kolmnurga ABC kõrgused. Kolmas kõrgus — otsitav ristlõik diameetrile BC — peab läbima kahe teise kõrguse lõikepunkti, s. o. punkti M. Tõmmates joonlaua abil sirge läbi punktide A ja M, täidame ülesande nõude sirklit kasutamata. Kui punkt A paikneb



Joon. 142. Sama ülesanne. Teine juhtum.

nii, et otsitav ristlõik satub diameetri pikendusele (joon. 142), siis on ülesanne lahendatav ainult sel tingimusel, kui on antud mitte poolring, vaid täisring. Joonis 142 näitab, et lahendus ei erine sellest, millega me juba tuttavad oleme; ainult kolmnurga ABC kõrgused ei lõiku siin mitte tema sees, vaid väljaspool kolmnurka.

Plaadi raskuskese

Ülesanne

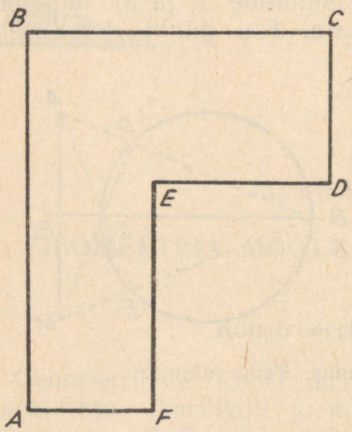
Tõenäoliselt te teate, et õhukese ühtlase ristküliku- või rombikujulise plaadi raskuskese asetseb tema diagonaalide lõikepunktis; kui plaat on kolmnurkne, siis mediaanide[1]

[1] Mediaan — küljepoolitaja; lõik, mis ühendab kolmnurga tippu vastaskülje keskpunktiga. *Toim.*

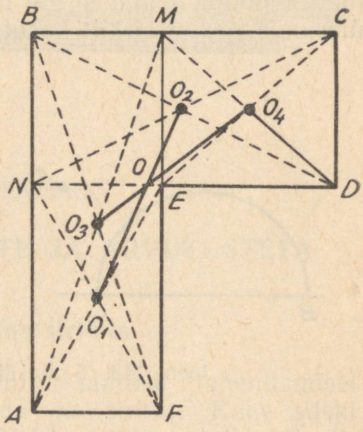
lõikepunktis ja ümmarguse plaadi puhul selle ringi keskpunktis.

Püüdke nüüd mõista, kuidas leida konstrueerimise teel kahest meelevaldsest, üheks kujundiks ühendatud ristkülikust koosneva plaadikese raskuskese (joon. 143).

Lepime kokku kasutada seejuures ainult joonlauda ja mitte midagi mõõta ega arvutada.



Joon. 143. Leida ainult joonlauda kasutades selle plaadi raskuskese.



Joon. 144. Plaadi raskuskese on leitud.

Lahendus

Pikendame külge DE tema lõikumiseni küljega AB punktis N ja külge FE lõikumiseni küljega BC punktis M (joon. 144). Antud kujundit vaatleme esialgu koosnevana ristkülikutest $ANEF$ ja $NBCD$. Kummagi ristküliku raskuskese asetseb nende diagonaalide lõikepunktides O_1 ja O_2. Kogu kujundi raskuskese asetseb järelikult sirgel O_1O_2. Nüüd vaatleme sama kujundit koosnevana ristkülikutest $ABMF$ ja $EMCD$, millede raskuskeskmed asetsevad nende diagonaalide lõikepunktides O_3 ja O_4. Kogu kujundi raskuskese asetseb sirgel O_3O_4. Tähendab, ta asetseb sirgete O_1O_2 ja O_3O_4 lõikepunktis O. Kogu see konstruktsioon teostatakse tõepoolest ainult joonlaua abil.

Napoleoni ülesanne

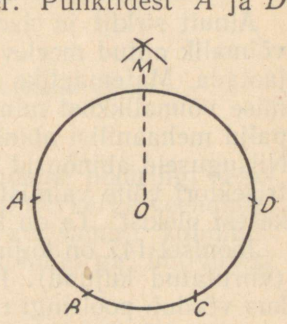
Seni tegelesime konstruktsioonidega, mis olid teostatavad ainult joonlaua abil, kasutamata sirklit (tingimusel, et üks ringjoon oleks joonisel varem antud). Vaatleme nüüd mõningaid ülesandeid, milles on seatud vastupidine tingimus: keelatakse kasutada joonlauda ja kõik konstruktsioonid tuleb teostada ainult sirkliga. Üks taolistest ülesannetest huvitas Napoleon I-st (kes, nagu teada, oli huvitatud matemaatikast). Lugenud läbi itaalia teadlase Mascheroni raamatu niisuguste konstruktsioonide kohta, esitas ta prantsuse matemaatikutele järgmise

ülesande

Antud ringjoon jaotada joonlauda kasutamata neljaks võrdseks osaks. Ringjoone keskpunkt on antud.

Lahendus

Olgu vaja jaotada neljaks osaks ringjoon O (joon. 145). Meelevaldsest punktist A kanname ringjoonele kolm korda ringi raadiuse pikkuse: saame punktid B, C ja D. On kerge näha, et pikkus AC — kõõl kaarele, mis moodustab $\frac{1}{3}$ ringjoonest — on ringi sisse joonestatud võrdkülgse kolmnurga külg ja võrdub järelikult $r\sqrt{3}$-ga, kus r on ringi raadius. AD on ilmselt ringi diameeter. Punktidest A ja D tõmbame raadiusega AC kaared, mis lõikuvad punktis M. Näitame, et kaugus MO võrdub meie ringjoone sisse joonestatud ruudu küljega. Kolmnurgas AMO kaatet $MO = \sqrt{AM^2 - AO^2} = \sqrt{3r^2 - r^2} = r\sqrt{2}$, s. o. võrdub ringi sisse joonestatud ruudu küljega. Nüüd jääb ainult kaatetiga MO võrdse sirkli haardega kanda ringjoonele järjekorras neli punkti, et saada sissejoonestatud ruudu tippe, mis ilmselt jaotavad ringjoone neljaks võrdseks osaks.

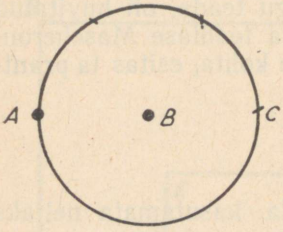


Joon. 145. Ainult sirklit kasutades jaotada ringjoon neljaks võrdseks osaks.

Ülesanne

Toome veel teise samalaadse, kuid kergema ülesande. Joonlauata suurendada kaugust antud punktide *A* ja *B* vahel viis korda (joon. 146); üldiselt antud arv korda.

Lahendus



Joon. 146. Kuidas suurendada punktide *A* ja *B* vahelist kaugust *n* korda (*n* — täisarv), kasutades seejuures ainult sirklit?

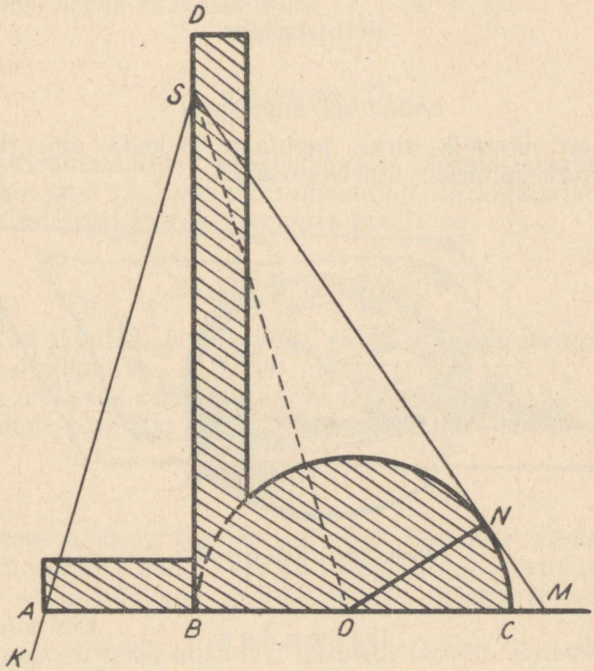
Punktist *B* tõmbame ringjoone raadiusega *AB* (joon. 146). Sellele ringjoonele kanname punktist *A* alates kolm korda pikkuse *AB*: saame punkti *C*, mis ilmselt on diametraalselt vastupidine punktile *A*. Kaugus *AC* kujutab endast kahekordset kaugust *AB*. Tõmmates punktist *C* ringjoone raadiusega *BC*, võime samal viisil leida punkti, mis on diametraalselt vastupidine punktile *B* ja mis järelikult asetseb punktist *A* kolmekordse *AB* kaugusel jne.

Lihtsaim trisektor

Ainult sirklit ja jaotusteta joonlauda kasutades ei ole võimalik antud meelevaldset nurka kolmeks võrdseks osaks jaotada. Matemaatika aga ei eita sugugi niisuguse jaotamise võimalikkust mingite teiste vahenditega. On leiutatud palju mehaanilisi abinõusid antud eesmärgi saavutamiseks. Niisuguseid abinõusid nimetatakse trisektoriteks. Lihtsaima trisektori võite valmistada paksust paberist, papist või õhukesest plekist. Ta on teile käepäraseks joonestusabinõuks.

Joonisel 147 on kujutatud trisektor loomulikus suuruses (viirutatud kujund). Poolringiga ühendatud riba *AB* pikkus võrdub poolringi raadiusega. Riba *BD* külg moodustab sirgega *AC* täisnurga; ta on poolringi puutujaks punktis *B*; selle riba pikkus on meelevaldne. Sama joonis näitab trisektori kasutamist. Olgu näiteks vaja jaotada kolmeks võrdseks osaks nurk *KSM* (joon. 147).

Trisektor paigutatakse nii, et nurga tipp S asetseks sirgel BD, üks nurga haaradest läbiks punkti A ja teine haar oleks poolringi puutujaks.[1] Pärast seda tõmmatakse sirged SB ja SO ning antud nurga jaotamine kolmeks võrdseks



Joon. 147. Trisektor ja tema kasutamise skeem.

osaks ongi lõpetatud. Tõestuseks ühendame poolringi keskpunkti O ja puutepunkti N sirglõiguga. On kerge veenduda, et kolmnurgad ASB ja SBO on ühtivad, samuti kolmnurgad SBO ja OSN. Nende kolme kolmnurga ühtivusest

[1] Trisektori niisuguse paigutamise võimalus on ühe antud nurka kolmeks võrdseks osaks jaotavate kiirte punktide lihtsa omaduse tulemuseks: kui mistahes punktist O kiirel SO tõmmata lõigud $ON \perp SM$ ja $OA \perp SB$ (joon. 147), siis $AB = OB = ON$. Lugeja võib seda kergesti ise tõestada.

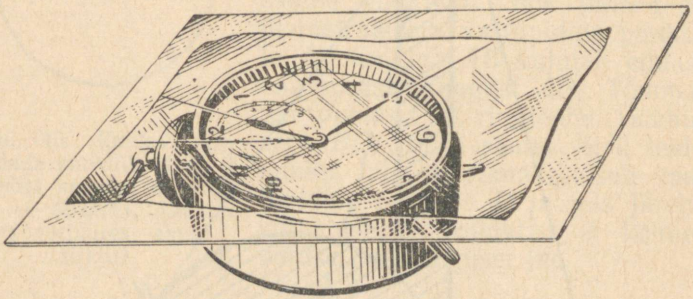
järeldub, et nurgad *ASB, BSO* ja *OSN* on omavahel võrdsed, mida oligi vaja tõestada.

Niisugune nurga kolmeks jaotamise viis ei ole puhtalt geomeetriline; seda võib nimetada mehaaniliseks.

Kell-trisektor

Ülesanne

Kas on võimalik sirkli, joonlaua ja kella abil jaotada antud nurk kolmeks võrdseks osaks?



Joon. 148. Kell-trisektor.

Lahendus

On võimalik. Kandke antud nurk läbipaistvale paberile ja sel momendil, kui mõlemad kellaosutid ühte langevad, asetage joonis numbrilauale, nii et nurga tipp langeks ühte osutite pöörlemise keskpunktiga ja üks nurga haar läheks piki osuteid (joon. 148).

Sel momendil, kui kella minutiosuti langeb oma liikumisel ühte antud nurga teise haara suunaga (võite ka ise osutit keerata), tõmmake nurga tipust joon tunniosuti suunas. Tekib nurk, mis võrdub tunniosuti pöördumisnurgaga. Nüüd kahekordistage see nurk sirkli ja joonlaua abil ning kahekordistatud nurk kahekordistage veelkordselt (nurga kahekordistamine on geomeetriast teada). Sel viisil saadud nurk moodustab $\frac{1}{3}$ antud nurgast.

Tõepoolest: iga kord, kui minutiosuti moodustab mingi nurga α, liigub tunniosuti selle aja jooksul edasi 12 korda väiksema nurga $\frac{\alpha}{12}$ võrra ja pärast selle nurga suurendamist neli korda saadakse nurk $\frac{\alpha}{12} \cdot 4 = \frac{\alpha}{3}$.

Ringjoone jaotamine

Raadioamatööridel, konstruktoritel, mitmesuguste mudelite ehitajatel ja üldse asjaarmastajatel-meisterdajatel tuleb mõnikord pead murda niisuguse praktilise

ülesande

juures:

Antud plaadist lõigata välja antud külgede arvuga korrapärane hulknurk.

See ülesanne on samaväärne järgmisega:

Jaotada ringjoon n võrdseks osaks, kus n on täisarv.

Jätame esialgu kõrvale esitatud ülesande silmnähtava lahenduse malli abil — see on ikkagi ainult lahendus «silma järgi» — ja mõtleme geomeetrilisele lahendusele sirkli ja joonlaua abil.

Kõigepealt tekib küsimus: mitmeks täpselt võrdseks osaks saab teoreetiliselt ringjoont sirkli ja joonlaua abil jaotada? See küsimus on matemaatikute poolt täielikult lahendatud: mitte igasuguseks arvuks osadeks.[1]

Saab jaotada 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, ..., 257, ... osaks.

Ei saa jaotada 7, 9, 11, 13, 14, ... osaks.

Halb on ka see, et puudub ühtne konstruktsiooni-võte; 15 osaks jaotamise võte näiteks ei ole niisugune kui 12 osaks jaotamise võte jne., kõiki viise aga ei jõua meeleski pidada.

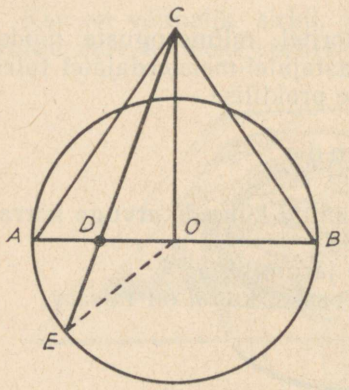
Praktikas on vajalik geomeetriline võte — olgugi ligi-

[1] Üksikasju vt. geomeetriaõpikust.

kaudne, kuid küllaldaselt lihtne ja üldine — ringjoone jaotamiseks mistahes hulgaks võrdseteks kaarteks.

Geomeetriaõpikuis ei pöörata sellele küsimusele kahjuks veel mingisugust tähelepanu, mistõttu toome siin ühe huvitava ligikaudse geomeetrilise võtte esitatud ülesande lahendamiseks.

Olgu näiteks vaja jaotada antud ringjoon (joon. 149) üheksaks võrdseks osaks. Konstrueerime ringi mingile diameetrile AB võrdkülgse kolmnurga ACB ja jaotame diameetri AB punktiga D kahte ossa vastavalt suhtele $AD : AB = 2 : 9$ (üldjuhul $AD : AB = 2 : n$).



Joon. 149. Ligikaudne geomeetriline võte ringjoone n võrdseks osaks jaotamiseks.

Ühendame punktid C ja D omavahel sirglõiguga ja pikendame seda lõikumiseni ringjoonega punktis E. Siis moodustab kaar AE umbes $^1/_9$ ringjoonest (üldjuhul $\overset{\smile}{AE} = \frac{360°}{n}$) ehk kõõl AE on ringi sisse joonestatud korrapärase üheksanurga (n-nurga) küljeks.

Suhteline viga on seejuures umbes 0,8%.

Kui avaldada sõltuvus antud konstruktsioonil tekkiva kesknurga AOE suuruse ja jaotuste arvu n vahel, siis saame järgmise täpse valemi:

$$\tan \overset{\wedge}{AOE} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 16n - 32} - n}{n - 4},$$

mida võib suurte n väärtuste korral asendada ligikaudse valemiga

$$\tan \overset{\wedge}{AOE} \approx 4\sqrt{3} \cdot (n^{-1} - 2n^{-2}).$$

Teisest küljest: ringjoone täpsel jaotamisel n võrdseks osaks peab kesknurk olema $\frac{360°}{n}$. Võrreldes nurka $\frac{360°}{n}$

nurgaga AOE, saame vea suuruse, mille teeme, lugedes kaare AE ringjoone $\frac{1}{n}$ osaks.

Saadakse järgmine tabel mõnede n väärtuste jaoks:

n	3	4	5	6	7	8	10	20	60
$\frac{360^\circ}{n}$	120°	90°	72°	60°	51° 26′	45°	36°	18°	6°
$\widehat{AOE}$	120°	90°	71° 57′	60°	51° 31′	45° 11′	36° 21′	18° 38′	6° 26′
Viga %-des	0	0	0,07	0	0,17	0,41	0,97	3,5	7,2

Nagu tabelist näha, saab näidatud viisil ringjoont ligikaudu 5, 7, 8 või 10 osaks jaotada väikese suhtelise veaga — 0,07 kuni 1%; suuremal osal praktilistel töödel on seesugune viga täiesti lubatav. Jaotuste arvu n suurenemisel langeb selle viisi täpsus märgatavalt, s. o. suhteline viga kasvab, kuid, nagu näitavad uurimised, ei ületa ta mistahes n korral 10%.

Löögi suund (ülesanne piljardikuulist)

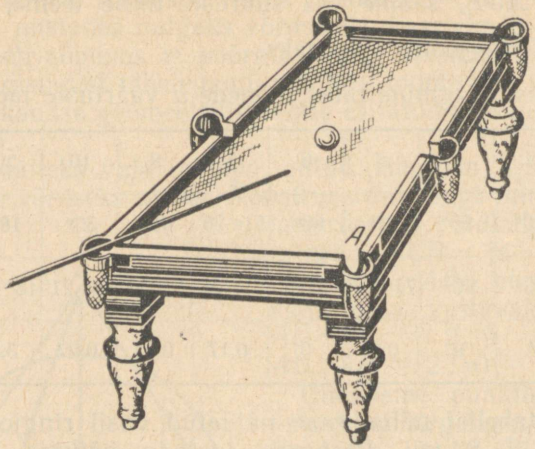
Suunata piljardikuul auku mitte otselöögiga, vaid sundida teda põrkuma ühest, kahest või isegi kolmest äärise punktist — see tähendab esmajoones lahendada peast geomeetriline konstruktsiooni-ülesanne.

Tähtis on «silma järgi» õigesti leida esimene põrkekoht äärisel; kuuli edaspidine teekond heal laual määratakse peegeldumisseadusega («langemisnurk võrdub peegeldumisnurgaga»).

Missugused geomeetrilised kaalutlused võivad meil aidata leida õiget löögisuunda, nii et kuul, mis asetseb näiteks piljardilaua keskel, satuks pärast kolme põrget auku A (joon. 150)?

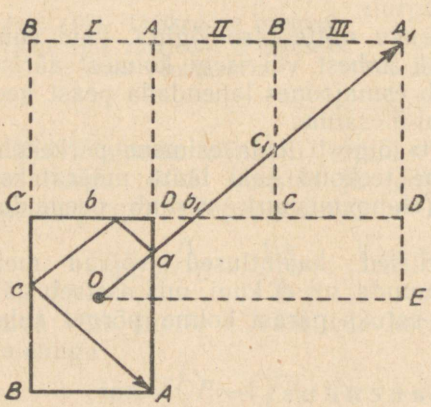
Lahendus

Teil tuleb kujutleda, et piljardilauale on piki tema lühemat külge lisatud veel kolm samasugust lauda ja sihtida kolmanda kujuteldava laua kõige kaugema augu suunas.



Joon. 150. Geomeetria-ülesanne piljardilaual.

Joonis 151 aitab seda väidet selgitada. Olgu *OabcA* kuuli teekond. Kui pöörata «laud» *ABCD* ümber *CD* 180°, siis võtab ta asendi I; kui teda seejärel pöörata ka ümber *AD* ja veel kord ümber *BC*, võtab ta asendi III. Selle tulemusena asetseb auk *A* tähega A_1 märgitud punktis.



Joon. 151. Kujutlege, et piljardilauale on lisatud veel kolm samasugust lauda ja sihtige kõige kaugema augu suunas.

Lähtudes kolmnurkade silmnähtavast ühtivusest, tõestate kergesti, et $ab_1 = ab$, $b_1c_1 = bc$ ja $c_1A_1 = cA$, s. o., et sirge OA_1 pikkus võrdub murdjoone *OabcA* pikkusega.

Järelikult kujuteldavasse punkti A_1 sihtides sunnite kuuli veerema murdjoont

$OabcA$ mööda ja ta satub auku A. Arutleme veel järgmist küsimust: missugustel tingimustel on täisnurkse kolmnurga A_1EO küljed OE ja A_1E võrdsed?

On kerge kindlaks teha, et $OE = \frac{5}{2} AB$ ja $A_1E = \frac{3}{2} BC$.

Kui $OE = A_1E$, siis $\frac{5}{2} AB = \frac{3}{2} BC$ ehk $AB = \frac{3}{5} BC$.

Niisiis, kui piljardilaua lühike külg moodustab $^3/_5$ pikast küljest, siis $OE = EA_1$; sel juhul võib piljardilaua keskel asetsevat kuuli lüüa äärisele 45° all.

«Tark» kuul

Lihtsad geomeetrilised konstruktsioonid aitasid meil äsja lahendada ülesande piljardikuulist, nüüd aga lahendagu sama piljardikuul ise ühe huvitava vanaaegse ülesande.

Kas see on siis võimalik? — kuul ei saa ju mõtelda. Õige küll, kuid juhtudel, kui on vaja teostada mõningaid arvutusi, kusjuures on teada, missuguseid operatsioone antud arvudega tuleb läbi viia ja missuguses järjekorras seda on vaja teha, võib niisuguse arvutuse usaldada masinale, mis teostab selle kiiresti ja veatult.

Selleks on välja mõeldud palju mehhanisme, alates lihtsast aritmomeetrist kuni keeruliste elektriliste masinateni.

Puhketundidel pakuvad sageli meelelahutust ülesanded sellest, kuidas antud mahtuvusega täidetud nõust kahe samuti tuntud mahtuvustega tühja nõu abil ära kallata mingisugune osa vett.

Esitame siin ühe paljudest sedalaadi ülesannetest.

Valada 12-ämbrise vaadi sisu pooleks kahe tühja vaadi abil, millede suurused on üheksa ja viis ämbrit.

Selle ülesande lahendamiseks ei tule teil endastmõistetavalt eksperimenteerida tõeliste vaatidega. Kõik vajalikud «ümbervalamised» võib teostada paberil kasvõi niisuguse skeemi järgi:

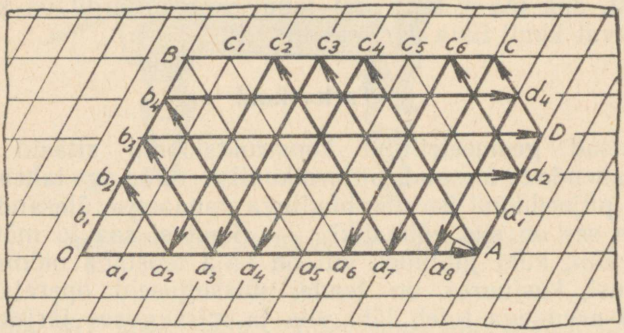
9-ämbrine	0	7	7	2	2	0	9	6	6
5-ämbrine	5	5	0	5	0	2	2	5	0
12-ämbrine	7	0	5	5	10	10	1	1	6

Igas veerus on märgitud järjekordse ümbervalamise tulemus.

Esimeses: täideti viieämbrine vaat, üheksaämbrine on tühi (0), 12-ämbrisesse jäi seitse ämbrit.

Teises: 12-ämbrisest vaadist valati seitse ämbrit ümber üheksaämbrisesse vaati jne.

Skeemis on kokku üheksa veergu: tähendab, ülesande lahendamiseks läheb vaja üheksa ümbervalamist.



Joon. 152. «Targa» kuuli «mehhanism».

Proovige leida selle ülesande omapoolne lahendus, mis kehtestaks ümbervalamiste mingi teise järjekorra.

Pärast rida proove ja katsetusi see teil kahtlematult õnnestub, sest esitatud ümbervalamiste skeem ei ole ainuke võimalik; ümbervalamiste teise järjekorra juures tuleb teil neid aga rohkem teha kui üheksa.

Seoses sellega on huvitav selgitada järgmist:

1) kas ei oleks võimalik kehtestada mingisugust kindlat ümbervalamiste järjekorda, millele võiks toetuda kõigil juhtudel, olenemata antud nõude suurustest;

2) kas võib kahe tühja nõu abil kolmandast nõust ära valada mistahes veehulga, s. o. näiteks 12-ämbrisest vaadist 9- ja 5-ämbriste vaatide abil ära valada üks ämber või kaks, kolm, neli jne. kuni 11 ämbrit.

Kõigile nendele küsimustele vastab «tark» kuul, kui me ehitame tema jaoks erilise konstruktsiooniga «piljardilaua».

Joonestage paberilehele kaldruudustik, nii et kõik kaldruudud oleksid 60°-ste teravnurkadega võrdsed rombid ja joonestage ruudustikule kujund $OBCDA$ nagu joonisel 152.

See ongi «piljardilaud». Kui suunata piljardikuul piki külge OA, siis, põrkudes küljest AD täpselt kooskõlas füüsikaseadusega, mille järgi «langemisnurk võrdub peegeldumisnurgaga» ($\angle OAM = \angle MAc_4$), veereb kuul väikeste rombide tippe ühendavat sirget Ac_4 mööda, põrkub küljest BC punktis c_4 ja veereb piki sirget c_4a_4, seejärel piki sirgeid a_4b_4, b_4d_4, d_4a_3 jne.

Ülesande tingimuste kohaselt on meil kolm vaati: üheksa-, viie- ja 12-ämbrine. Vastavalt sellele konstrueerime kujundi nii, et külg OA sisaldaks üheksa ruutu, OB — viis ruutu, AD — kolm ruutu ($12 - 9 = 3$), BC — seitse ruutu[1] ($12 - 5 = 7$).

Näeme, et iga punkt kujundi külgedel on eraldatud külgedest OB ja OA teatud arvu ruutudega. Näiteks punktist c_4 on küljeni OB neli ruutu ja küljeni OA viis ruutu, punktist a_4 — neli ruutu küljeni OB ja 0 ruutu küljeni OA (sest ta ise asetseb küljel OA), punktist d_4 — kaheksa ruutu küljeni OB ja neli ruutu küljeni OA jne.

Seega iga punkt kujundi külgedel, kust põrkub piljardikuul, määrab kaks arvu.

Lepime kokku, et esimene nendest, s. o. antud punkti küljest OB eraldavate ruutude arv, tähistab üheksaämbrises vaadis sisalduvat veehulka ämbrites, kuna teine, s. o. sama punkti küljest OA eraldavate ruutude arv määrab veehulga ämbrites viieämbrises vaadis. Ülejäänud osa veest on ilmselt 12-ämbrises vaadis.

Nüüd on tehtud kõik ettevalmistused ülesande lahendamiseks piljardikuuli abil.

Pange ta uuesti liikuma piki külge OA ja, dešifreerides iga põrkepunkti näidatud viisil, jälgige tema liikumist kas-või punktini a_6 (joon. 152).

Esimene põrkepunkt: A (9; 0); tähendab, esimene ümbervalamine peab andma vee järgmise jaotuse:

---

[1] Täidetud vaat on alati kõige suurem kolmest. Olgu tühjade vaatide mahud a ja b, täidetud vaadi maht aga c. Kui $c \geqslant a + b$, siis tuleb «piljardilaud» konstrueerida parallelogrammi kujulisena ruutude külgedega a ja b.

9-ämbr.	9	
5-ämbr.	0	
12-ämbr.	3	

See on teostatav.

Teine põrkepunkt: c_4 (4; 5); tähendab, kuul soovitab teist ümbervalamist teostada järgmisel viisil:

9-ämbr.	9	4	
5-ämbr.	0	5	
12-ämbr.	3	3	

See on samuti teostatav.

Kolmas põrkepunkt: a_4 (4; 0); kolmandal ümbervalamisel annab kuul nõu valada viis ämbrit vett tagasi 12-ämbrisesse vaati:

9-ämbr.	9	4	4	
5-ämbr.	0	5	0	
12-ämbr.	3	3	8	

Neljas punkt: b_4 (0; 4); neljanda ümbervalamise tulemus:

9-ämbr.	9	4	4	0		
5-ämbr.	0	5	0	4		
12-ämbr.	3	3	8	8		

Viies punkt: d_4 (8; 4); kuulike nõuab kaheksa ämbri vee ümbervalamist tühja üheksaämbrisesse vaati:

9-ämbr.	9	4	4	0	8		
5-ämbr.	0	5	0	4	4		
12-ämbr.	3	3	8	8	0		

Jätkake kuulikese jälgimist ja te saate järgneva tabeli:

9-ämbr.	9	4	4	0	8	8	3	3	0	9	7	7	2	2	0	9	6	6
5-ämbr.	0	5	0	4	4	0	5	0	3	3	5	0	5	0	2	2	5	0
12-ämbr.	3	3	8	8	0	4	4	9	9	0	0	5	5	10	10	1	1	6

Seega on pärast rida ümbervalamisi eesmärk saavutatud: kahes vaadis on kummaski kuus ämbrit vett. Kuul lahendas ülesande!

Kuid kuul ei osutunud just väga targaks.

Ta lahendas ülesande 18 käiguga, meil aga õnnestus see lahendada üheksa käiguga (vt. esimest tabelit).

Kuul võib siiski ümbervalamiste arvu ka vähendada. Tõugake ta esialgu liikuma piki külge *OB*, peatage ta punktis *B*, seejärel tõugake uuesti liikuma piki külge *BC* ja edasi laske tal liikuda nagu kokku lepitud — vastavalt seadusele «langemisnurk võrdub peegeldumisnurgaga»; sel juhul saadakse lühike ümbervalamiste rida.

Kui te lasete kuulil jätkata liikumist ka pärast punkti a_6, siis pole raske kontrollida, et vaadeldaval juhul läbib ta kõik kujundi külgedel märgitud punktid (üldiselt kõik rombide tipud) ja alles pärast seda pöördub tagasi lähtepunkti *O*. See tähendab, et 12-ämbrisest vaadist võib üheksaämbrisesse vaati valada mistahes täisarvu ämbreid vett ühest üheksani, viieämbrisesse aga ühest viieni.

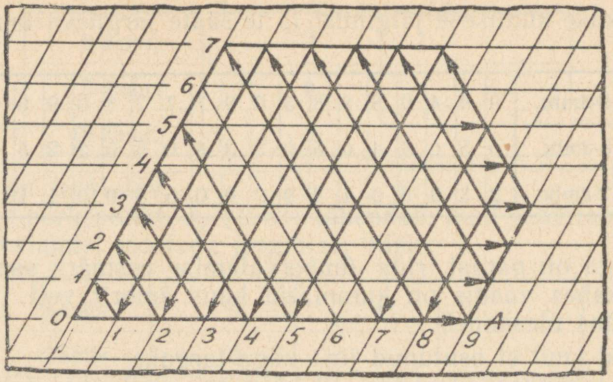
Sedalaadi ülesandel võib aga nõutav lahendus ka puududa.

Kuidas kuul selle avastab?

Väga lihtsalt: sel juhul pöördub ta lähtepunkti *O* tagasi teel vajalikku punkti läbimata.

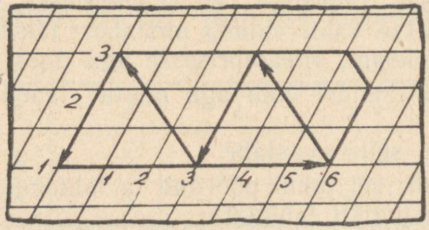
Joonisel 153 on kujutatud ülesande lahendamise mehhanism üheksa-, seitsme- ja 12-ämbriste vaatide jaoks:

9-ämbr.	9	2	2	0	9	4	4	0	8	8	1	1	0	9	3	3	0	9	5	5	0	7	7	0
7-ämbr.	0	7	0	2	2	7	0	4	4	0	7	0	1	1	7	0	3	3	7	0	5	5	0	7
12-ämbr.	3	3	10	10	1	1	8	8	0	4	4	11	11	2	2	9	9	0	0	7	7	0	5	5



Joon. 153. «Mehhanism» näitab, et 12-ämbrise vaadi sisu ei saa pooleks valada 9- ja 7-ämbriste vaatide abil.

«Mehhanism» näitab, et täidetud 12-ämbrisest vaadist saab üheksa- ja seitsmeämbrise vaadi abil ära valada mistahes arvu ämbreid, välja arvatud pool tema mahust, s. o. kuus ämbrit.



Joon. 154. Veel ühe ümbervalamisülesande lahendamise «mehhanism».

Joonisel 154 on kujutatud ülesande lahendamise mehhanism kolme-, kuue- ja kaheksaämbriste vaatide jaoks. Siin teeb kuulike neli põrget ja pöördub tagasi algpunkti *O*.

Vastav tabel

6-ämbr.	6	3	3	0
3-ämbr.	0	3	0	3
8-ämbr.	2	2	5	5

näitab, et sel juhul ei ole kaheksaämbrisest vaadist võimalik ära valada nelja ega üht ämbrit.

Seega osutub meie «targa» kuuliga «piljard» tõepoolest huvitavaks ja omapäraseks arvutusmasinaks, mis ei lahenda ümbervalamise ülesandeid sugugi halvasti.

Ühe tõmbega

Ülesanne

Joonestage joonisel 155 kujutatud viis kujundit paberilehele ja proovige igaüht neist joonestada ühe tõmbega, s. o. pliiatsit paberilt tõstmata ja iga joont ainult üks kord tõmmates.

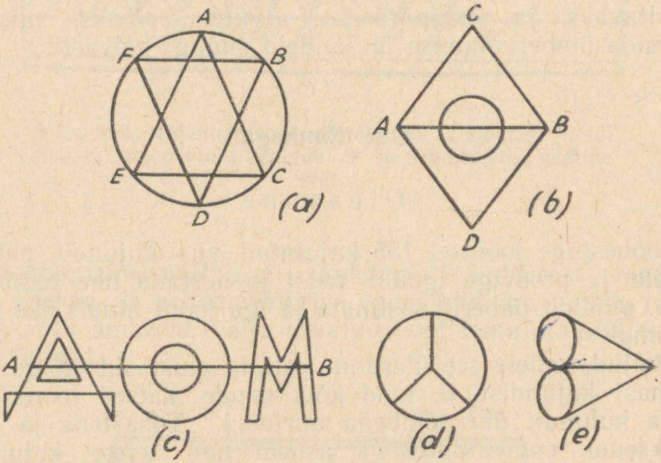
Paljud, kellele see ülesanne esitati, alustasid kõige lihtsamast kujundist *d*, kuid kõik nende katsed joonestada seda kujundit ühe tõmbega nurjusid. Tusastena ja juba väiksema enesekindlusega asusid nad teiste kujundite juurde ja oma imestuseks ning rahulduseks tulid eriti suurte raskusteta toime esimese kahe ja isegi keeruka kolmanda kujundiga, mis kujutab läbikriipsutatud sõna «дом»[1]. Viiendat kujundit (*e*) ja samuti neljandat (*d*) ei õnnestunud aga kellelgi joonestada ühe pliiatsitõmbega.

Mispärast siis ühtede kujundite puhul õnnestub püstitatud ülesande lahendamine, teiste puhul aga mitte? Võibolla ainult seepärast, et mõnel juhul ei piisa meil leidlikkust, või on siis ülesanne ise mõningate kujundite puhul üldse lahendamatu? Kas ei saaks sel juhul leida mingisugust tunnust, mille järgi võiks juba ette otsustada, kas me saame antud kujundit ühe tõmbega joonestada või mitte?

[1] дом — maja, kodu. *Tõlk.*

Lahendus

Nimetame iga joonte lõikumiskohta antud kujundil s õ l m e k s. Sellejuures nimetame teda paarissõlmeks, kui temas lõikub paarisarv jooni, ja paarituks, kui temas lõikuvate joonte arv on paaritu. Kujundil *a* on kõik sõlmed paarisarvulised; kujundil *b* on kaks sõlme paaritud (punktid *A* ja *B*), kujundil *c* on paarituteks sõlmedeks sõna «дом» läbiva sirglõigu otsad; kujunditel *d* ja *e* on kummalgi neli paaritut sõlme.



Joon. 155. Proovige iga kujundit joonestada ühe tõmbega, läbides iga joont ainult üks kord.

Vaatleme alul kujundit, millel kõik sõlmed on paarisarvulised, näiteks kujundit *a*. Alustame oma teekonda mistahes punktist *S*. Läbides näiteks sõlme *A*, kasutame ära kaks joont: sõlme *A* tuleva ja sellest väljuva. Et igal paarissõlmel on niisama palju väljapääse kui juurdepääse, siis jääb sõlmelt sõlmele liikumisel iga kord vastavalt kaks vaba joont vähemaks ja järelikult on põhimõtteliselt täiesti võimalik kõiki sõlmi läbides jõuda tagasi lähtepunkti *S*.

Kuid oletame, et jõudsime lähtepunkti tagasi ja väljapääsu temast enam ei ole, kujundil jäi aga läbimata üks

joon, mis algab mingist sõlmest *B*, milles me juba olime. Tähendab, tuleb teha oma marsruudis parandus: sõlmeni *B* jõudes tuleb läbida kõigepealt vahelejäänud jooned ja sõlme *B* tagasi jõudes minna edasi endist teed mööda.

Olgu me otsustanud läbida kujundi *a* järgnevalt: esiteks piki kolmnurga *ACE* külgi ja seejärel, jõudes tagasi punkti *A*, piki ringjoont *ABCDEFA* (joon. 155). Et seejuures jääb läbimata kolmnurk *BDF*, siis enne kui lahkume näiteks sõlmest *B* mööda kaart *BC*, tuleb meil läbida kolmnurk *BDF*.

Niisiis: kui antud kujundil on kõik sõlmed paarisarvulised, võib teda alati joonestada ühe tõmbega, lähtudes tema mistahes punktist, kusjuures sel juhul kujundi läbimine peab lõppema samas punktis, kust alustasime.

Nüüd vaatleme kujundit, millel on kaks paaritut sõlme. Kujundil *b* näiteks on paarituteks sõlmedeks *A* ja *B*. Teda võib samuti läbida ühe tõmbega.

Alustame paaritust sõlmest nr. 1 ja läbime mingi joone paaritu sõlmeni nr. 2, näiteks sõlmest *A* sõlmeni *B* piki joont *ACB* kujundis *b* (joon. 155).

Läbides selle joone, kõrvaldame sellega igast paaritust sõlmest ühe joone, nagu poleks seda joont kujundis olnudki. Mõlemad paaritud sõlmed muutuvad pärast seda paarissõlmedeks. Et rohkem paarituid sõlmi kujundis ei olnud, saame nüüd kujundi ainult paarissõlmedega; näiteks kujundis *b* jääb pärast joone *ACB* läbimist järele kolmnurk ringjoonega.

Nagu oli näidatud, võib seda kujundit läbida ühe joonega ja järelikult võib ühe joonega läbida ka kogu antud kujundit.

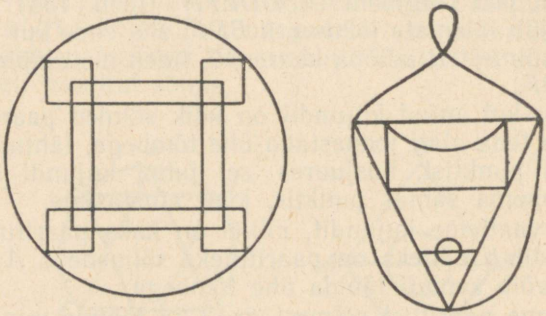
Täiendav märkus: alustades ringkäiku paaritust sõlmest nr. 1, tuleb paaritusse sõlme nr. 2 viiv tee valida nii, et ei tekiks antud kujundist isoleeritud kujundit.[1] Näiteks joon. 155 kujundi *b* joonestamisel oleks vale rutata paaritust sõlmest *A* piki sirget *AB* paaritusse sõlme *B*, sest seejuures jääks ringjoon ülejäänud kujundist isoleerituks ja seega jääks ta ka läbimata.

Niisiis: kui kujund sisaldab kaht paaritut sõlme, peab õige joonestamine algama ühes nendest ja lõppema teises.

[1] Huvi tundev ja ettevalmistatud lugeja leiab sellesse küsimusse puutuvaid detaile ja üksikasju topoloogiaõpikuis.

Tähendab, joone otsad on eraldatud.

Siit omakorda järeldub, et kui kujundil on neli paaritut sõlme, siis teda ei saa joonestada ühe tõmbega, vaid kahega, mis ei vasta aga enam meie ülesande tingimustele. Niisugused on näiteks kujundid *d* ja *e* joonisel 155.



Joon. 156. Joonestage need kujundid ühe tõmbega.

Nagu näete, võib õigesti arutlema õppides palju ette näha ja sellega vabaneda jõu ja aja asjatust kulutamisest. Muuseas, õigesti arutlema õpetab ka geomeetria.

Teid, lugeja, võib-olla väsitasid mõnevõrra siintoodud arutlused, kuid teie vaeva tasub eelis, mille annab teadmine mitteteadmisega võrreldes.

Te võite alati ette määrata, kas antud kujundi joonestamise ülesanne on lahendatav ja teate, missugusest sõlmest tuleb alata.

Veelgi enam: teil on nüüd kerge oma sõprade jaoks kui palju tahes sedalaadi keerukaid kujundeid välja mõtelda.

Joonestage lõpuks veel paar kujundit, mis on toodud joonisel 156.

Kaliningradi seitse silda

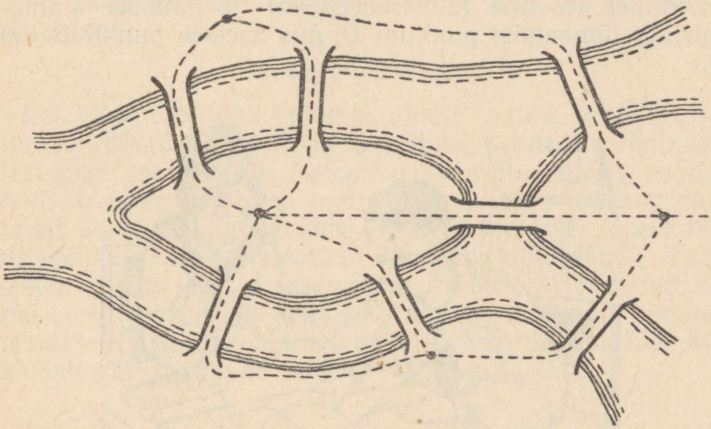
Kakssada aastat tagasi oli Kaliningradis[1] seitse Pregeli jõe kaldaid ühendavat silda (joon. 157).

1736. a. huvitus tolle aja suurim matemaatik L. P. Euler

[1] Sel ajal kandis ta Königsbergi nime.

(ta oli siis umbes 30-aastane) niisugusest ülesandest: kas võib linnas jalutades ületada kõiki neid seitset silda, kuid igaüht ainult üks kord?

On kerge mõista, et see ülesanne sarnaneb äsjavaadeldud ülesandega kujundite joonestamisest.



Joon. 157. Võimatu on ületada kõiki seitset silda, igaüht neist ainult üks kord ületades.

Kujutame võimalike teede skeemi (joon. 157, punktiir). Saame nelja paaritu sõlmega kujundi eelmisest ülesandest (joon. 155, kujund *e*). Ühe tõmbega, nagu nüüd teame, ei saa seda joonestada, järelikult on võimatu ületada kõiki seitset silda, ületades igaüht ainult üks kord. Euler tookord seda tõestaski.

Geomeetriline nali

Pärast seda, kui teie ja teie sõbrad saite teada kujundite ühe tõmbega joonestamise saladuse, teatage oma sõpradele, et te siiski kavatsete joonestada kujundi nelja paaritu sõlmega, näiteks ringi kahe diameetriga (joon. 158), pliiatsit paberilt tõstmata ja üht joont kaks korda tõmbamata.

Te teate väga hästi, et see on võimatu, kuid võite jääda oma sensatsioonilisele avaldusele kindlaks. Õpetan teile kohe väikese kavaluse.

Alustage ringi joonestamist punktist *A* (joon. 158). Niipea kui olete tõmmanud veerandi ringjoonest — kaare *AB*, pange punkti *B* juurde teine paberileht (või murdke kokku leht, millel teostate konstrueerimist) ja jätkake alumise poolringi tõmbamist punktini *D*, mis asetseb punkti *B* vastas.



Joon. 158. Geomeetriline nali.

Nüüd kõrvaldage lisatud paberitükk (või siluge oma leht). Teie paberilehe esiküljele jääb ainult kaar *AB*, kuid pliiats asetseb punktis *D* (ehkki te teda paberilt ei tõstnud!).

Kujundit edasi joonestada ei ole raske: esialgu tõmmake kaar *DA*, seejärel diameeter *AC*, kaar *CD*, diameeter *DB* ja lõpuks kaar *BC*. Punktist *D* võib valida ka teise marsruudi; leidke see.

Kuju kontrollimine

Ülesanne

Soovides kontrollida, kas lõigatud riidetükk on ruudukujuline, veendub õmbleja, et piki diagonaali kokkumurdmisel riidetüki servad langevad ühte. Kas see kontroll on küllaldane?

Lahendus

Sel viisil veendub õmbleja ainult selles, et kõik nelinurkse riidetüki küljed on omavahel võrdsed. Nelinurkadest pole see omadus iseloomustav mitte ainult ruudule, vaid ka igale rombile, romb aga kujutab endast ruutu ainult sel juhul, kui ta nurgad on täisnurgad. Järelikult ei ole õmbleja poolt kasutatud kontroll küllaldane. Tuleks kasvõi silma järgi veenduda veel selles, et riidetüki nurgad on täisnurgad. Selleks võib näiteks tüki tema keskjoont mööda veel kord kokku murda ja vaadata, kas ühe külje lähisnurgad langevad ühte.

Mäng

Mänguks on tarvis täisnurkset paberilehte ja mingisuguseid ühetaolisi ja sümmeetrilisi kujundeid, näiteks dominokive, ühesuguse väärtusega münte, tikutoose jne. Kujundite arv peab olema küllaldane selleks, et katta nendega kogu paberileht. Mängitakse kahekesi. Mängijad asetavad kujundeid vaheldumisi mistahes asendisse ja mistahes vabale kohale paberilehel senikaua, kuni neid ei ole enam kuhugi asetada.

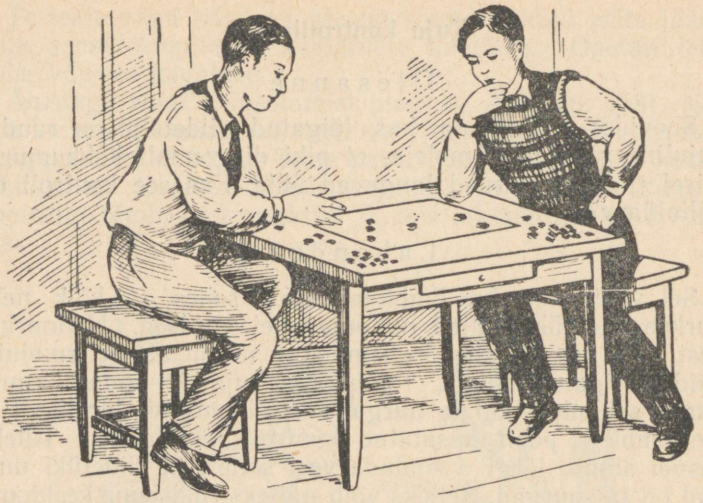
Paberile asetatud kujundeid ei ole lubatud liigutada. Võitjaks loetakse see, kes asetab viimase kujundi.

Ülesanne

Leida mänguviis, mille juures mängu alustanu tingimata võidab.

Lahendus

Mängijal, kes alustab mängu, tuleb esimese käiguga katta lehe keskosa, asetades kujundi nii, et selle sümmeetriakese langeks võimalikult ühte paberilehe keskpunktiga,



Joon. 159. Geomeetriline mäng. Võidab see, kes asetab viimase kujundi.

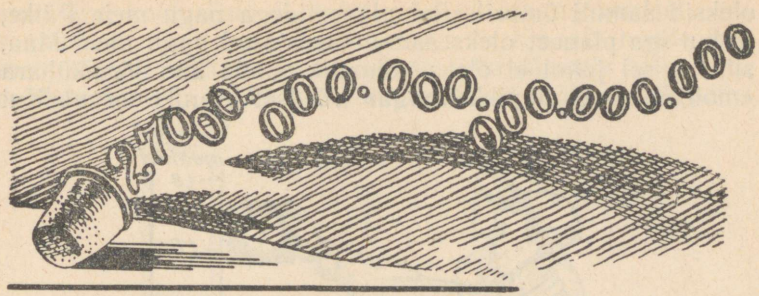
ja edaspidi asetada oma kujund alati sümmeetriliselt vastase kujundiga (joon. 159).

Seda reeglit järgides leiab mängu alustaja paberilehel alati koha oma kujundile ja võidab vältimatult.

Näidatud mänguviisi geomeetriline olemus on järgmine: ristkülikul on olemas sümmeetriakese, s. o. punkt, milles kõik teda läbivad sirglõigud jagunevad pooleks ja jaotavad kujundi kaheks võrdseks osaks. Seetõttu vastab ristküliku igale punktile või pinnale samal ristkülikul asetsev sümmeetriline punkt või pind, kusjuures ainult ristküliku keskpunktile ei vasta temaga sümmeetrilist punkti.

Siit järeldub, et kui esimene mängija katab keskpunkti, siis missugust kohta vastane oma kujundile ristküliku-kujulisel paberilehel ka ei valiks, leidub kindlasti vaba koht, mis on sümmeetriline vastase poolt asetatud kujundi asukohaga.

Et iga kord tuleb oma kujundile kohta otsida teisel mängijal, siis lõpuks ei jää paberil kohta just tema kujundile ja mängu võidab esimene mängija.



ÜHETEISTKÜMNES PEATÜKK

SUUR JA VÄIKE GEOMEETRIAS

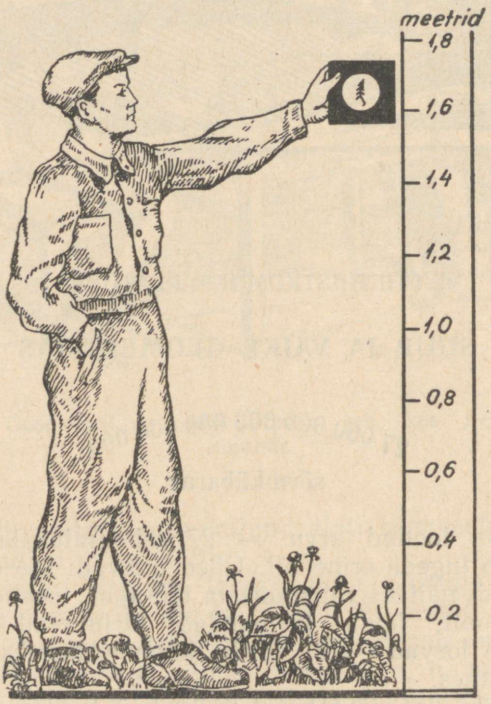
$27\,000\,000\,000\,000\,000\,000$ sõrmkübaras

Pealkirjas toodud arvu — 27 kaheksateistkümne nulliga — võib lugeda erinevalt. Ühed ütlevad: see on 27 triljonit; teised, näiteks rahandusala töötajad, loevad seda kui 27 kvintiljonit, kuna kolmandad kirjutavad lühemalt: $27 \cdot 10^{18}$ ja loevad — 27 korda kümme kaheksateistkümnendas astmes.

Mida võib siis nii tohutul hulgal ühte sõrmkübarasse mahtuda?

Jutt on meid ümbritseva õhu osakestest. Nagu kõik ained maailmas, koosneb ka õhk molekulidest. Füüsikud tegid kindlaks, et meid ümbritseva õhu igas kuupsentimeetris (s. o. umbkaudu sõrmkübaras) on 0° temperatuuri juures 27 triljonit molekuli. See on arv-hiiglane. Ka kõige elavamale kujutlusvõimele ei ole jõukohane seda kuigi piltlikult kujutleda. Tõepoolest, millega võiks niisugust hulka võrrelda? Inimeste arvuga maailmas? Inimesi on maakeral «ainult» kaks tuhat miljonit ($2 \cdot 10^9$), s. o. 13 000 miljonit korda vähem kui molekule sõrmkübaras. Kui kõik tugevaima teleskoobiga vaadeldavad tähed maailmaruumis

oleksid samuti ümbritsetud planeetidega nagu meie Päike, ja kui iga planeet oleks samuti asustatud nagu meie Maa, siis ka sel juhul ei oleks võimalik saada ühe sõrmkübara «molekulaarse elanikkonnaga» võrdset elanike arvu! Kui



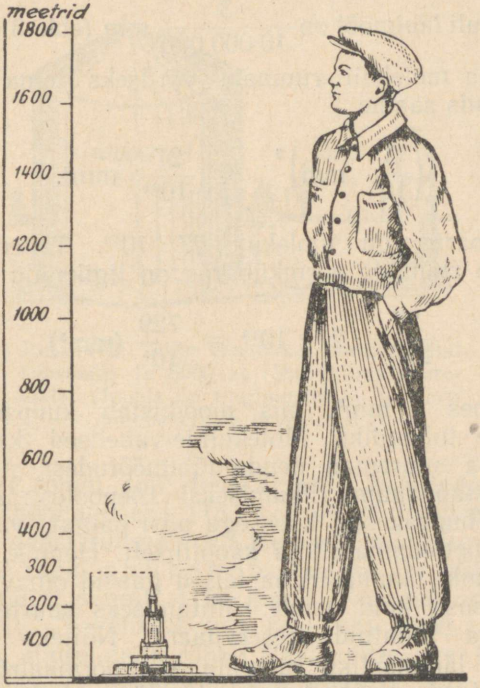
Joon. 160. Noormees vaatleb 1000 korda suurendatud tüüfusepisikut.

te katsuksite seda nähtamatut elanikkonda loendada, siis, loendades vahetpidamatult näiteks sada molekuli minutis, tuleks teil neid loendada mitte vähem kui 500 000 miljonit aastat.

Iga kord ei omata selget kujutlust ka tagasihoidlikumatest arvudest.

Mida ütleb teile näiteks see, kui teile räägitakse 1000 korda suurendavast mikroskoobist? Ei ole ju tuhat kuigi

suur arv, kuid siiski ei kujutle paljud tuhandekordset suurendust nii nagu vaja. Tihti ei oska me hinnata nende esemete tõelisi mõõteid, mida näeme mikroskoobis selle suurenduse juures. 1000 korda suurendatud tüüfusepisik pais-



Joon. 161. 1000 korda suurendatud noormees.

tab meile sääse suurusena, keda vaadeldakse normaalse nägemise kauguselt (s. o. 25 cm) (joon. 160).

Kui suur on see pisik aga tegelikult? Kujutlege, et koos pisiku suurenemisega suureneksite ka teie ise 1000 korda. See tähendab, et teie pikkus oleks 1700 m! Teie pea asetseks ülalpool pilvi, kusjuures iga uus Moskvas ehitatav kõrghoone ulatuks teile allapoole põlvi (joon. 161). Kui mitu korda teie olete väiksem sellest kujuteldavast hiiglasest, nii mitu korda on pisik väiksem tillukesest sääsekesest.

Võiks arvata, et kas pole 27 triljonil õhumolekulil sõrmkübaras liiga kitsas? Sugugi mitte! Hapniku või lämmastiku molekuli läbimõõt on $\frac{3}{10\,000\,000}$ mm (ehk $3 \cdot 10^{-7}$ mm). Kui lugeda molekuli ruumala võrdseks tema läbimõõdu kuubiga, siis saame

$$\left(\frac{3}{10^7}\ \text{mm}\right)^3 = \frac{27}{10^{21}}\ \text{mm}^3.$$

Sõrmkübaras on molekule $27 \cdot 10^{18}$. Tähendab, kõigi molekulide ruumala sõrmkübaras on ligikaudu

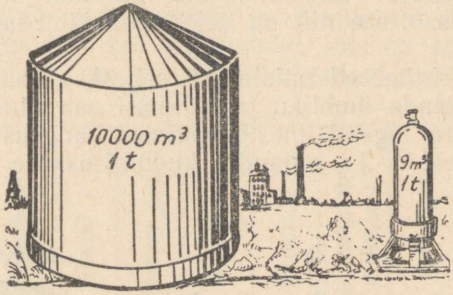
$$\frac{27}{10^{21}} \cdot 27 \cdot 10^{18} = \frac{729}{10^3}\ (\text{mm}^3),$$

s. o. umbes 1 mm³, mis moodustab kuupsentimeetrist ainult ühe tuhandiku. Molekulide-vahelised kaugused on mitu korda suuremad nende läbimõõtudest, nii et molekulidel piisab ruumi liikumiseks! Tõepoolest: nagu teate, ei asetse õhuosakesed koos ega püsi paigal, vaid liiguvad ruumis vahetpidamatult ja kaootiliselt. Hapnik, süsihappegaas, vesinik, lämmastik ja teised gaasid omavad tööstuslikku tähtsust, kuid nende säilitamiseks suurtes kogustes oleks vaja tohutuid reservuaare. Näiteks ühe tonni (1000 kg) lämmastiku ruumala on normaalrõhu juures 800 m³, s. t. ainult ühe tonni puhta lämmastiku hoidmiseks oleks vaja anumat mõõdetega 20 m · 20 m · 20 m. Ühe tonni puhta vesiniku hoidmiseks oleks aga vaja tsisterni mahuga 10 000 m³.

Kas ei saa gaasi molekule sundida üksteisele lähenema? Insenerid teevadki seda — sunnivad neid rõhu abil tihedamalt paigutuma. Kuid seda ei ole kerge teha. Ärge unustage, et sama jõuga, millega rõhutakse gaasi, rõhub gaas anuma seinu. Selleks on vaja väga tugevaid ja keemiliselt gaasikindlaid seinu.

Kodumaa tööstuse poolt terasesulamitest valmistatav uusim keemiatööstuse aparatuur on võimeline vastu pidama tohutule survele, kõrgetele temperatuuridele ja gaaside kahjulikule keemilisele toimele.

Meie insenerid suruvad tänapäeval vesinikku kokku 1163 korda, nii et üks tonn vesinikku, mille ruumala normaalrõhu juures on 10 000 m³, mahub võrdlemisi väikesesse, umbes 9 m³ ruumalaga ballooni (joon. 162).



Joon. 162. Tonn vesinikku normaalrõhul (vasakul) ja 5000 at rõhu juures (paremal). (Joonis on tingimuslik — proportsioone ei ole arvestatud.)

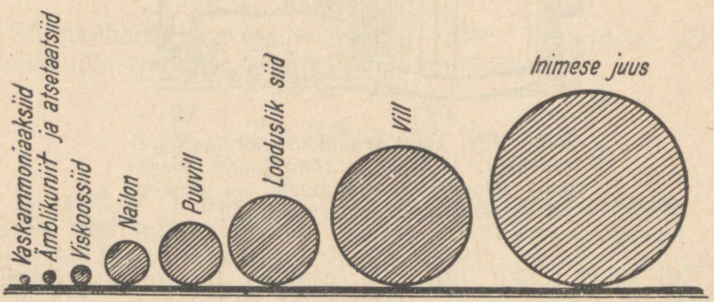
Kui suurt rõhku tuli teie arvates tarvitada vesiniku ruumala vähendamiseks 1163 korda? Tuletades füüsikast meelde, et gaasi ruumala v ä h e n e b nii mitu korda, kui mitu korda rõhk s u u r e n e b, vastate te: rõhku vesinikule suurendati samuti 1163 korda. Kas see on tegelikult nii? Ei ole. Tegelikult tuli kasutada 5000-atmosfäärist rõhku, s. o. suurendada rõhku 5000, mitte aga 1163 korda. Asi on selles, et gaasi ruumala muutub pöördvõrdeliselt rõhuga ainult väikeste rõhkude puhul. Väga kõrgete rõhkude juures kaotab see seaduspärasus kehtivuse. Näiteks, kui meie keemiatehastes surutakse 1 t lämmastikku kokku tuhande-atmosfäärise rõhuga, siis väheneb tema ruumala 1,7 m³-ni 800 m³ vastu normaalrõhu juures. Edasisel rõhu suurendamisel 5000 atmosfäärini, s. o. viis korda, väheneb lämmastiku ruumala ainult 1,1 m³-ni.

Peenem ämblikuniidist, kuid tugevam terasest

Niidi, traadi ja isegi ämblikuniidi ristlõige, nii väike kui ta ka oleks, on alati teatava geomeetrilise kujuga, kõige sagedamini ringikujuline. Seejuures on ämblikuniidi rist-

lõike diameeter (või, nagu ütleme, tema jämedus) umbes 5 mikronit ($\frac{5}{1000}$ mm). Kas on midagi peenemat ämblikuniidist? Kes on kõige osavam «peenketraja»? Ämblik või, võib-olla, siidiuss? Ei. Loodusliku siidniidi diameeter on 18 mikronit, s. o. see niit on 3½ korda jämedam ämblikuniidist.

Ammu on inimesed unistanud sellest, et oma meisterlikkusega ületada ämbliku ja siidiussi saavutusi. On tuntud vanaaegne legend imestusväärsest kangrust, kreeklannast Arachnest [1]. Ta omandas kudumisoskuse nii täiusli-



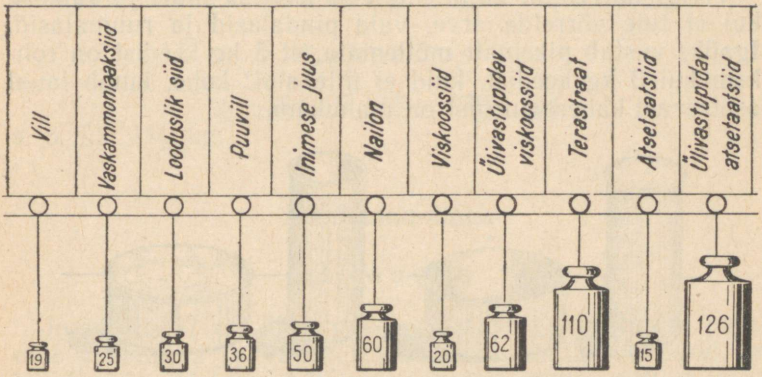
Joon. 163. Kiudude võrdlev jämedus.

kult, et tema kangad olid õhukesed nagu ämblikuvõrk, läbipaistvad nagu klaas ja kerged nagu õhk. Temaga ei saanud võistelda isegi Ateena — tarkusejumalanna ja käsitööliste kaitsja.

See legend, nagu paljud teisedki muistsed legendid ja fantaasia, on saanud tänapäeval reaalsuseks. Tänapäeva Arachneks, kõige osavamaks «peenketrajaks», osutusid insenerid-keemikud, kes lõid harilikust puidust ebaharilikult peene ja hämmastava tugevusega kunstliku kiu. Siidniidid, mis saadakse näiteks tööstuslikul vaskammoniaakmenetlusel, on 2½ korda peenemad ämblikuniidist, tugevuselt aga peaaegu ei jää maha looduslikust siidist. Looduslik siid kannatab 1 mm² ristlõike kohta koormust kuni 30 kg, vaskammoniaaksiid aga kuni 25 kg sama ristlõike kohta.

[1] Arachne — kreeka keeles ämblik. *Tõlk.*

Huvitav on vaskammoniaaksiidi valmistamisviis. Puit muudetakse tselluloosiks ja tselluloos lahustatakse vase ammoniakaalses lahuses. Lahus juhitakse läbi peente avauste jugadena vette, vesi peseb lahusti maha ja pärast seda keritakse tekkinud niidid vastavatele seadistele. Vaskammoniaaksiidi niidi jämedus on 2 mikronit. Ühe mikroni võrra on jämedam nn. atsetaatsiid, mis on samuti kunstsiid. Hämmastav on see, et mõningad atsetaatsiidi sordid



Joon. 164. Kiudude piiriline tugevus (kilogrammides ristlõike 1 ruutmillimeetri kohta).

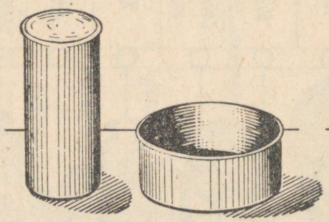
on tugevamad terastraadist! Kui terastraat kannatab koormust 110 kg ristlõike ühe ruutmillimeetri kohta, siis atsetaatsiidi niit kannatab 126 kg 1 mm² kohta.

Teile kõigile hästi tuntud viskoossiidi niidi jämedus on umbes 4 mikronit ja kõige suurem tugevus 20 kuni 62 kg 1 mm² ristlõike kohta. Joonisel 163 on toodud ämblikuniidi, inimese juukse, mitmesuguste kunstkiudude ja samuti villa ning puuvilla kiudude võrdlevad jämedused, joonisel 164 aga nende tugevused kilogrammides 1 mm² ristlõike kohta. Kunstlikud ja sünteetilised kiudained on tänapäeva suurimaid tehnilisi leiutisi ja nad on tohutu majandusliku tähtsusega. Insener Bujanov jutustab: «Puuvill kasvab aeglaselt ja tema hulk oleneb kliimast ning saagist. Loodusliku siidi tootjal — siidiussil — on väga piiratud võimalused. Kogu oma elu jooksul koob ta kookonit, milles on ainult 0,5 g siidniiti...

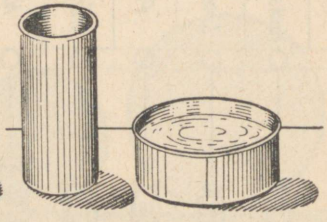
Kunstsiidi hulk, mis saadakse 1 m^3 puidu keemilisel töötlemisel, asendab 320 000 siidiussi kookoneid või 30 lamba aastast villatoodangut või puuvilla keskmist saaki ½ ha-lt. See kiuhulk on küllaldane selleks, et valmistada neli tuhat paari naiste sukki või 1500 m siidikangast.»

Kaks purki

Veelgi halvemini kujutleme geomeetrias suurt ja väikest, kui ei tule võrrelda arve, vaid pindalasid ja ruumalasid. Igaüks vastab pikemalt mõtlemata, et 5 kg keedist on rohkem kui 3 kg keedist, kuid ei ütle alati kohe, kumb laual asetsevast kahest purgist on mahukam.



Joon. 165. Kumb purk on mahukam?



Joon. 166. Kõrge purgi sisu laia purki valamise tulemus.

Ülesanne

Kumb kahest purgist on mahukam (joon. 165) — parempoolne, lai, või kolm korda kõrgem, kuid kaks korda kitsam vasakpoolne?

Lahendus

Paljudele on tõenäoliselt ootamatu, et antud juhul kõrge purk mahutab vähem kui lai. Selles on muuseas kerge veenduda arvutuse abil. Laia purgi põhjapindala on $2 \cdot 2$, s. o. neli korda suurem kui kitsal purgil; tema kõrgus on aga ainult kolm korda väiksem. Tähendab, laia purgi ruumala on kitsa omast $^4/_3$ korda suurem. Kui kõrge purgi sisu valada laia purki, siis täidab see ainult $^3/_4$ viimase ruumalast (joon. 166).

Hiiglaslik pabeross

Ülesanne

Tubakatrusti vitriinis on välja pandud tohutu pabeross, mis on 15 korda pikem ja 15 korda jämedam harilikust. Kui normaalsete mõõdetega paberossi täitmiseks on vaja pool grammi tubakat, kui palju tubakat oleks siis vaja, et täita hiiglaslik pabeross vitriinis?

Lahendus

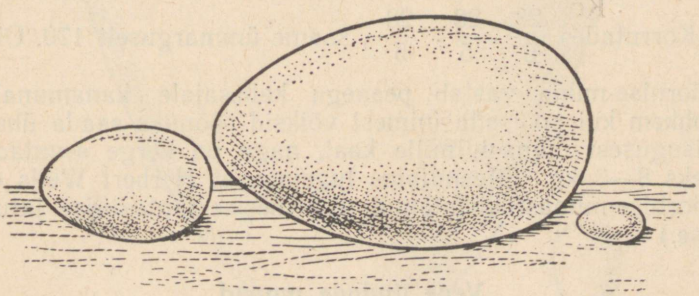
$$\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15 = 1700 \text{ (g)},$$

s. o. üle 1½ kg.

Jaanalinnu-muna

Ülesanne

Joonisel 167 on ühesuguses mastaabis kujutatud paremal kanamuna ja vasakul jaanalinnu-muna. (Keskel on kujutatud väljasurnud linnu epiornise[1] muna, millest tuleb juttu järgmises ülesandes.) Vaadake joonisele ja ütelge, mitu korda on jaanalinnu-muna suurem kanamunast? Esimesel pilgul paistab, et erinevus ei või olla väga suur.



Joon. 167. Jaanalinnu-, epiornise- ja kanamuna võrdlevad mõõted.

[1] Epiornis ehk madagaskari jaanalind (Aepyornis) — kuni 5 m kõrgune jaanalindu meenutav väljasurnud lind. Epiornise luid ja mune on leitud Madagaskaril, kus epiornised arvatavasti välja surid alles 17. sajandil. *Tõlk.*

Seda hämmastavam on tulemus, mis saadakse õige geomeetrilise arvutuse tulemusena.

Lahendus

Vahetu mõõtmisega joonisel veendume, et jaanalinnumuna on kanamunast pikem 2½ korda. Järelikult jaanalinnu-muna ruumala on kanamuna ruumalast suurem

$$2\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2} = \frac{125}{8} \text{ korda,}$$

s. o. umbes 15 korda.

Ühest niisugusest munast jätkuks hommikueineks viieliikmelisele perekonnale, arvestades, et igaüks rahuldub munaroaga kolmest munast.

Epiornise-muna

Ülesanne

Kunagi elasid Madagaskaril määratu suured jaanalinnud — epiornised, munedes 28 cm pikkusi mune (joon. 167, keskmine kujund). Kanamuna pikkus on 5 cm. Mitmele kanamunale vastab ruumalaliselt madagaskari jaanalinnu üks muna?

Lahendus

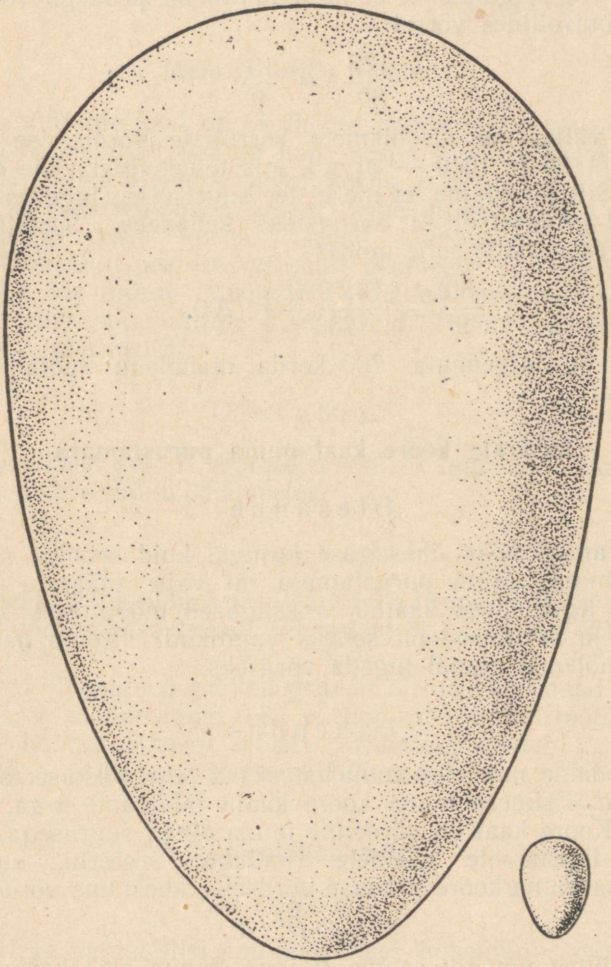
Korrutades $\frac{28}{5} \cdot \frac{28}{5} \cdot \frac{28}{5}$, saame ümmarguselt 170. Üks epiornise-muna vastab peaaegu kahesajale kanamunale! Rohkem kui poolsada inimest võiksid söönuks saada ühest niisugusest munast, mille kaal, nagu on kerge arvutada, oleks 8—9 kg. (Meenutame lugejale, et Herbert Wells on epiornise-munast kirjutanud teravmeelse fantastilise jutustuse.)

Vene lindude munad

Ülesanne

Kõige teravamat kontrasti mõõdetes näeme aga siis, kui vaatleme meie kodumaa loodust ja võrdleme punanokkluige ning kõige miniatuursema vene linnu, kollasepealise

«põialpoisi» mune. Joonisel 168 on kujutatud nende munade kontuurid loomulikus suuruses. Missugune on nende ruumalade suhe?



Joonis 168. Luigemuna ja «põialpoisi»-muna (loomulikus suuruses). Mitu korda on üks teisest ruumala poolest suurem?

Lahendus

Mõõtes mõlema muna pikkused, saame 125 mm ja 13 mm. Mõõtes samuti nende laiused, saame 80 mm ja 9 mm. On kerge näha, et need arvud on peaaegu võrdelised; kontrollides võrret

$$\frac{125}{80} = \frac{13}{9}$$

tema välis- ja siseliikmete korrutiste võrdlemise teel, saame 1125 ja 1040 — arvud, mis teineteisest vähe erinevad. Siit järeldame, et me ei tee suurt viga, lugedes need munad geomeetriliselt sarnasteks kehadeks. Seetõttu on nende ruumalade suhe umbes

$$\frac{80^3}{9^3} = \frac{512\,000}{750} = 700.$$

Seega on luigemuna 700 korda mahukam «põialpoisi»-munast!

Määrata koore kaal muna purustamata

Ülesanne

On antud kaks ühesuguse kujuga, kuid erineva suurusega muna. Mune purustamata on vaja määrata nende koorte ligikaudsed kaalud. Missugused mõõtmised, kaalumised ja arvutused on selleks vajalikud? Koore paksuse võib mõlemal munal lugeda võrdseks.

Lahendus

Mõõdame mõlemal munal suurema telje pikkuse: saame D ja d. Esimese muna koore kaalu tähistame x-ga, teise y-ga. Koore kaal on võrdeline muna pinna suurusega, s. o. tema lineaarsete mõõdete ruuduga. Seetõttu, lugedes mõlema muna koore paksuse võrdseks, koostame võrde

$$x : y = D^2 : d^2.$$

Kaalume munad: saame P ja p. Muna sisu kaalu võib lugeda võrdeliseks muna ruumalaga, s. o. tema lineaarsete mõõdete kuubiga:

$$(P - x) : (p - y) = D^3 : d^3.$$

Saame süsteemi kahest võrrandist kahe tundmatuga; lahendades selle, leiame:

$$x = \frac{p \cdot D^3 - P \cdot d^3}{d^2(D-d)}; \qquad y = \frac{p \cdot D^3 - P \cdot d^3}{D^2(D-d)}.$$

Meie müntide mõõted

Meie müntide kaal on võrdeline nende väärtusega, s. o. kahekopikane münt kaalub kaks korda rohkem kopikasest mündist, kolmekopikane kolm korda rohkem jne. Sama kehtib ka vahetushõbeda kohta: kahekümnekopikane münt on näiteks kaks korda raskem kümnekopikasest. Et mündid on kuju poolest harilikult geomeetriliselt sarnased, siis võib ühe mündi diameetrit teades arvutada teiste, temaga sarnaste müntide diameetreid. Toome näiteid niisugustest arvutustest.

Ülesanne

Viiekopikase mündi diameeter on 25 mm. Kui suur on kolmekopikase mündi diameeter?

Lahendus

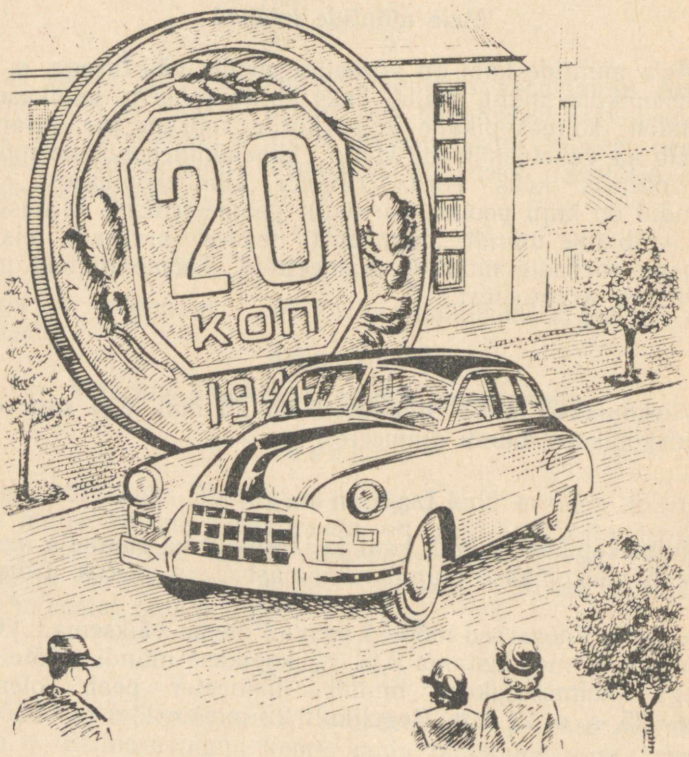
Kolmekopikase mündi kaal ja järelikult ka ruumala moodustab viiekopikase mündi ruumalast $^3/_5$, s. o. 0,6. Tähendab, tema lineaarsed mõõted peavad olema väiksemad $\sqrt[3]{0{,}6}$ korda, s. o. moodustama 0,84 viiekopikase mündi mõõteist. Seega kolmekopikase mündi diameeter peab olema 0,84 · 25, s. o. 21 mm (tegelikult 22 mm).

Miljonirublane münt

Ülesanne

Kujutlege fantastilist miljonirublast hõbemünti, mis on samasuguse kujuga nagu kahekümnekopikanegi münt, kuid kaalult vastavalt suurem. Kui suur umbes oleks selle mündi diameeter? Kui asetada see serviti auto kõrvale, mitu korda oleks ta siis autost kõrgem?

Mündi mõõted ei olekski nii tohutud, nagu võiks arvata. Tema diameeter oleks ainult umbes 3,8 m ja ulatuks natuke kõrgemale esimesest majakorrusest. Tõepoolest: kui tema ruumala on kahekümnekopikase mündi ruumalast suurem



Joon. 169. Kui palju on väärt see hiiglaslik 20-kopikane münt?

5 000 000 korda, siis tema diameeter (samuti ka paksus) on suurem $\sqrt[3]{5\,000\,000}$, s. o. kõigest 172 korda.

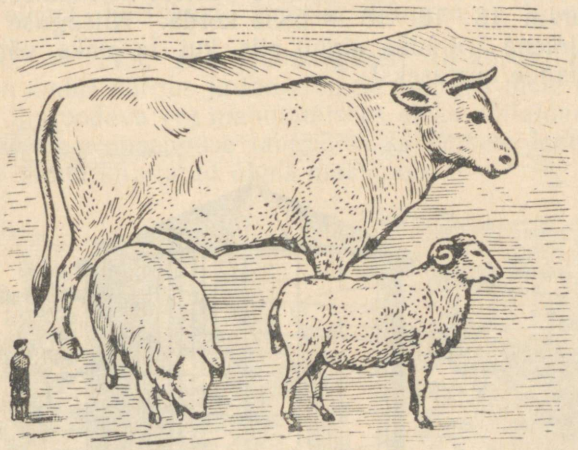
Korrutades 22 mm 172-ga, saame ligikaudu 3,8 m — suurus, mis on ootamatult tagasihoidlik niisuguse väärtusega mündi jaoks.

Ülesanne

Leidke, missuguse väärtusega mündile vastab kahekümnekopikane münt, mis on suurendatud neljakorruselise maja mõõdeteni (kõrguse suhtes) (joon. 169).

Näitlikud illustratsioonid

Lugeja, kes on eelmistest näidetest omandanud kogemusi geomeetriliselt sarnaste kehade ruumalade võrdlemiseks nende lineaarsete mõõdete järgi, ei lase end enam seda-



Joon. 170. Kui palju liha sööb inimene elu kestel (leida viga joonisel!).

laadi küsimustega segadusse viia. Ta märkab seetõttu kergesti vigu mõningates näitlikes illustratsioonides, mis tihti ilmuvad illustreeritud ajakirjades.

Ülesanne

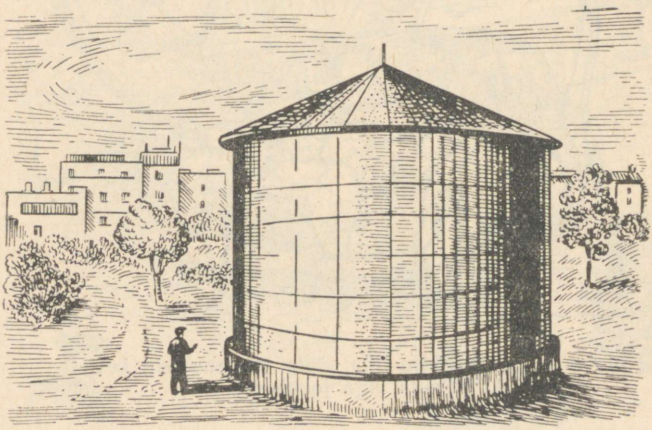
Toome niisuguste illustratsioonide kohta näite. Kui inimene sööb päevas keskmiselt 400 g liha, siis 60 eluaasta jooksul see moodustab umbes 9 t. Et aga härja kaal on

umbes ½ t, siis võib inimene oma elu lõpul kinnitada, et ta on ära söönud 18 härga.

Juuresoleval joonisel 170, mis on võetud ühest inglise ajakirjast, on kujutatud hiiglaslik härg kõrvuti inimesega, kes on selle härja oma elu jooksul ära söönud. Kas joonis on õige? Missugune oleks õige mastaap?

Lahendus

Joonis ei ole õige. Siinkujutatud härg on normaalsest 18 korda kõrgem ja loomulikult niisama palju kordi pikem ja paksem. Järelikult on ta ruumala poolest normaalsest härjast suurem $18 \cdot 18 \cdot 18 = 5832$ korda. Niisuguse härja võiks inimene ära süüa ainult siis, kui ta elaks vähemalt kahe tuhande aastaseks!



Joon. 171. Kui palju vett joob inimene elu kestel (missuguse vea tegi kunstnik?).

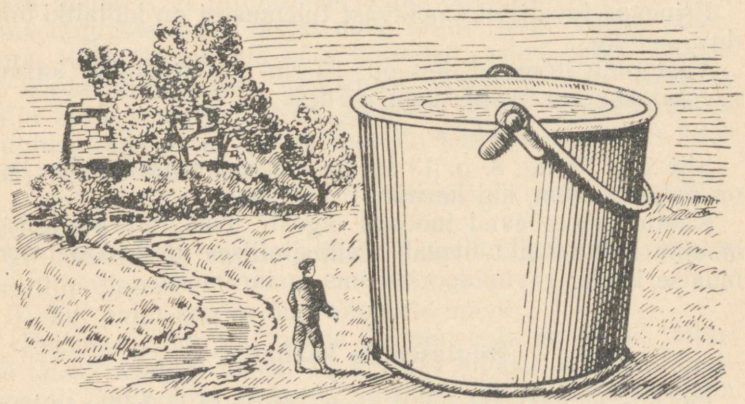
Õigesti kujutatud härg peab olema harilikust kõrgem, pikem ja paksem ainult $\sqrt[3]{18}$, s. o. 2,6 korda; joonisel ei paistaks see nii mõjukana, et seda võiks kasutada rabava illustratsioonina inimese poolt ärasöödava lihahulga kujutamisel.

Ülesanne

Joonisel 171 on toodud teine samalaadiline illustratsioon. Inimene tarvitab päevas 1½ l (7—8 klaasi) mitmesuguseid vedelikke. 70-aastase eluea puhul moodustab see umbes 40 000 l. Et ämbris on 12 l, siis tuli kunstnikul kujutada mingi ämbrist 3300 korda suurem anum. Ta arvas, et tegi seda joonisel 171. Kas tal on õigus?

Lahendus

Joonisel on tsisterni mõõted tugevasti liialdatud. Anum peab olema harilikust ämbrist kõrgem ja laiem ainult $\sqrt[3]{3300} = 14{,}9$, s. o. ümmarguselt 15 korda. Kui normaalse ämbri kõrgus ja laius on 30 cm, siis meie poolt elu kestel ärajoodava vee mahutamiseks oleks küllaldane 4,5 m kõrgune ja samasuguse läbimõõduga ämber. Joonisel 172 on see anum kujutatud õiges mastaabis.



Joon. 172. Sama (vt. joon. 171) õiges kujutuses.

Vaadeldud näidetest muide selgub, et statistiliste andmete kujutamine ruumiliste kehadena ei ole küllaldaselt piltlik ja ei avalda seda muljet, mida harilikult oodatakse. Joondiagrammid on selles suhtes kahtlematult paremad.

Meie normaalne kaal

Kui oletada, et kõikide inimeste kehad on geomeetriliselt sarnased (see on õige ainult keskmiselt), siis võib inimeste kaalu arvutada nende kasvu järgi (inimese keskmine pikkus on 1,75 m, keskmine kaal aga 65 kg). Taolise arvutuse juures saadavad tulemused võivad paljudele näida ootamatuina.

Oletame, et te olete 10 cm alla keskmist kasvu. Missugune on teie normaalne kehakaal?

Igapäevases elus lahendatakse see ülesanne sageli nii: lahutatakse normaalsest kaalust protsent, mille moodustab 10 cm normaalsest kasvust. Antud juhul näiteks vähendatakse 65 kg 10/175 võrra ja saadud kaal — 62 kg — loetakse normaalseks.

See on ebaõige arvutus.

Õige kaal saadakse võrdest

$$65 : x = 1{,}75^3 : 1{,}65^3,$$

millest

$$x = \text{umbes } 54 \text{ kg}.$$

Erinevus tavaliselt saadavast tulemusest on küllaltki tunduv — 8 kg.

Vastupidi: inimesel, kes on 10 cm üle keskmise kasvu, arvutatakse normaalne kaal võrdest

$$65 : x = 1{,}75^3 : 1{,}85^3.$$

Siit $x = 78$ kg, s. o. 13 kg keskmisest rohkem. See lisa on palju suurem, kui harilikult mõeldakse.

Kahtlemata peavad taolised õigesti teostatud arvutused omama küllaldast tähtsust meditsiinilises praktikas: normaalse kaalu, ravimidooside jms. määramisel.

Hiiglased ja kääbused

Missugune peab sel juhul olema hiiglase ja kääbuse kaalude suhe? Ma olen kindel, et paljudele näib ebatõenäolisena, et hiiglane võib olla 50 korda kääbusest raskem. Selle tulemuse annab siiski õige geomeetriline arvutus.

Üheks kõige pikemaks hiiglaseks, kelle olemasolu on täielikult tõestatud, oli 278 cm pikkune austerlane Winkelmeier; teine, elsaslane Krau, oli 275 cm pikkune; kolmas, inglane O'Brick, kellest jutustati, et ta süütas piipu tänava-

laternailt, oli 268 cm pikkune. Kõik nad ületasid inimese normaalse kasvu terve meetri võrra. Vastupidi: täiskasvanud kääbused on umbes 75 cm pikkused, s. o. normaalsest pikkusest meetri võrra lühemad. Missugune on siis hiiglase ja kääbuse ruumala ja kaalu suhe?

See on

$$275^3 : 75^3 \text{ ehk } 11^3 : 3^3 = 49.$$

Tähendab, hiiglane võrdub kaalult peaaegu poolesaja kääbusega.

Kui uskuda teateid 38 cm pikkusest araabia kääbusest Agibist, siis muutub see suhe veelgi hämmastavamaks: kõige pikem hiiglane on sellest kääbusest seitse korda pikem ja järelikult 343 korda raskem. Usutavamad on Buffoni andmed, kes mõõtis 43 cm pikkuse kääbuse: see kääbus on 260 korda hiiglasest kergem.

Gulliveri geomeetria

«Gulliveri reiside»[1] autor vältis suure ettevaatlikkusega geomeetrilistes suhetes eksimise hädaohtu. Lugeja kahtlemata mäletab, et lilliputlaste maal vastas meie jalale toll, kuna hiiglaste maal vastas meie tollile jalg. Teiste sõnadega: lilliputlastel olid kõik inimesed, asjad, kogu loodus 12 korda normaalsest väiksemad, hiiglastel aga niisama palju kordi suuremad. Need esimesel pilgul lihtsad suhted muutusid aga palju keerukamateks, kui tuli lahendada kasvõi järgmisi küsimusi:

1) mitu korda sõi Gulliver lõunasöögil rohkem kui lilliputlane?

2) mitu korda vajas Gulliver kalevit ülikonnaks rohkem kui lilliputlane?

3) kui palju kaalus õun hiiglaste maal?

«Reiside» autor tuli nende ülesannetega enamikul juhtudel täiesti edukalt toime. Ta arvutas õigesti, et kui lilliputlane oli Gulliverist 12 korda väiksem, siis ta keha ruumala oli väiksem $12 \cdot 12 \cdot 12$, s. o. 1728 korda; järelikult vajas Gulliver 1728 korda rohkem toitu kui lilliputlane. Me loeme «Reisidest» järgmist Gulliveri lõunasöögi kirjeldust:

«Mul oli kolmsada kokka, kes tegid mulle süüa väikestes mugavates, minu maja lähedale ehitatud barakkides. Nad

[1] E. k. Tallinn, 1951. *Toim.*

elasid seal oma perekonnaga ja valmistasid mulle kaks rooga igaks söögiajaks. Kakskümmend kelnerit tõstsin ma oma käega üles lauale, üle saja teenindas mind põrandal, mõned neist koormatud lihavaagnatega, mõned õlale hiiva-



Joon. 173. Rätsepad-lilliputlased võtavad Gulliveril mõõtu.

tud veiniankrute ja igasuguste muude jookidega. Seda kõike tõmbasid laual asuvad kelnerid minu soovil üles väga leidliku seadeldise abil . . .»

Õigesti arvutas Swift ka riidehulga Gulliveri ülikonna jaoks. Tema keha pindala oli lilliputlase omast suurem $12 \cdot 12 = 144$ korda; niisama palju kordi oli tal vaja roh-

kem riiet, rätsepaid jms. Kõike seda arvestas Swift, jutustades Gulliveri nimel, et tema juurde «oli komandeeritud 300 lilliputlast-rätsepat (joon. 173) ülesandega õmmelda täielik kohaliku lõikega ülikond». (Rutuline töö nõudis kahekordset rätsepate arvu.)

Taoliste arvutuste teostamise vajadus tekkis Swiftil peaaegu igal leheküljel ja üldiselt teostas ta need õigesti. Kui Puškinil «Jevgeni Oneginis», nagu poeet ise kinnitab, «aeg on arvestatud kalendri järgi», siis Swifti «Reisides» on kõik mõõdud kooskõlastatud geomeetriareeglite järgi. Ainult harva pole kinni peetud vajalikust mastaabist, eriti hiiglaste maa kirjeldamisel. Siin võib mõnikord kohata vigu.

«Mäletan, et kord,» jutustab Gulliver, «järgnes meile aeda õukonna kääbus... Õel kelm tabas paraja juhuse, kui ma just ühe puu all kõndisin, ja raputas seda minu pea kohal, mistõttu tosin õunu, kõik peaaegu bristoli vaadi suurused, mu kõrvadest mööda potsudes maha kukkusid. Üks õun kukkus mulle selga, kuna ma just juhtusin kummarduma, ja paiskas mu silmili.»

Gulliver tõusis pärast seda lööki õnnelikult jalule, kuid on kerge arvutada, et sellise õuna langemisest saadud hoop oleks tegelikult pidanud olema purustav: langes ju õun, mis oli 1728 korda raskem meie õunast, s. o. kaaluga umbes 80 kg, 12-kordselt kõrguselt. Selle löögi energia pidi ületama hariliku õuna langemise energia 20 000 korda ja võis võrreldav olla ainult suurtükimürsu energiaga...

Kõige suurema vea tegi Swift hiiglaste lihasejõu arvutamisel. Me nägime juba esimeses peatükis, et suurte loomade tugevus ei ole proportsionaalne nende mõõdetega. Kui rakendada neid kaalutlusi Swifti hiiglaste juures, siis selgub, et kuigi nende lihasejõud oli 144 korda suurem Gulliveri omast, oli nende kehakaal suurem 1728 korda. Ja kui Gulliver oli võimeline kandma mitte ainult oma keha raskust, vaid veel umbes niisama suurt koormat, siis hiiglased ei oleks olnud võimelised kandma isegi oma tohutu keha raskust. Nad oleks pidanud lamama liikumatult paigal, jõuetuina tegema mingisuguseid märgatavaid liigutusi. Nende võimsus, mida Swift nii piltlikult kirjeldab, võis tekkida ainult ebaõige arvutuse tulemusena.[1]

[1] Täpsemalt vt. selle kohta J. I. Perelman «Huvitav mehaanika» (Tallinn, 1950, lk. 165 jj.).

«Seepärast, et nad on õhust kergemad,» on harilik vastus, mis näib paljudele niivõrd vastuvaidlematuna, et ei jää mingisugust põhjust kahtlemiseks. Kuid see seletus on oma veenva lihtsuse juures täiesti ekslik. Tolmukübemed ei ole õhust mitte kergemad, vaid nad on temast sada, isegi tuhat korda raskemad.

Mis on «tolmukübemed»? Mitmesuguste raskete kehade väga väikesed osakesed: klaasi- või kivikillukesed, söe, puidu, metallide, riidekiudude ja muu taolise osakesed. Kas siis kõik need ained on õhust kergemad? Vaadates erikaalude tabelit, veendute, et igaüks nendest on kas veest mitu korda raskem või temast kõigest 2—3 korda kergem. Vesi on aga õhust raskem 800 korda; järelikult on tolmukübemed temast mitusada kui mitte isegi tuhat korda raskemad. Nüüd on ilmne kogu selle lalalt levinud vaate põhjendamatus tolmukübemete õhus hõljumise kohta.

Missugune on siis tõeline põhjus? Kõigepealt tuleb märkida, et me harilikult ei kujutle õigesti nähtust ennast, vaadeldes teda kui hõljumist. Õhus (või vedelikus) hõljuvad ainult niisugused kehad, mille kaal ei ületa nende poolt väljatõrjutud õhu (või vedeliku) kaalu. Tolmukübemed aga ületavad selle kaalu mitu korda. Seetõttu ei saa nad õhus hõljuda. Nad ei hõljugi, vaid liuglevad, s. o. langevad aegamisi, pidurdatuna oma langemisel õhutakistuse poolt. Langev tolmukübe peab endale õhuosakeste vahel teed tegema, neid laiali tõugates või endaga kaasa tõmmates. Nii esimesel kui ka teisel juhul kulutatakse langemisel energiat. Energiakulutus on seda tunduvam, mida suurem on keha pindala (täpsemalt — ristlõike pindala) tema kaaluga võrreldes. Suurte, massiivsete kehade langemisel me ei märka õhutakistuse aeglustavat mõju, sest nende kehade kaal ületab tunduvalt vastutöötava jõu.

Vaatame nüüd, mis juhtub keha vähenemisel. Geomeetria aitab meid selles selgusele jõuda. Ei ole raske kujutleda, et keha ruumala vähenemisel tema kaal väheneb palju rohkem kui ristlõike pindala: kaalu vähenemine on võrdeline lineaarsete mõõdete vähenemise kolmanda astmega, kuna õhutakistus nõrgeneb võrdeliselt pinnaga, s. o. lineaarsete mõõdete vähenemise teise astmega.

Missugust tähtsust see omab käesoleval juhul, selgub järgmisest näitest. Võtame kroketikuuli läbimõõduga 10 cm ja samast materjalist väikese kuulikese läbimõõduga 1 mm. Nende lineaarsete mõõdete suhe on 100, sest 10 cm on ühest millimeetrist suurem 100 korda. Väiksem kuulike on suurest kuulist 100^3, s. o. miljon korda kergem; õhutakistus tema liikumisel on aga väiksem ainult 100^2, s. o. kümme tuhat korda. On selge, et väike kuulike peab langema suurest aeglasemalt. Lühidalt öeldes: põhjuseks, miks tolmukübemed püsivad õhus, on nende «purjetamisvõime», mis on tingitud väikestest mõõdetest, mitte sugugi aga see, et nad oleksid õhust kergemad. Veetilgake raadiusega 0,001 mm langeb õhus ühtlase kiirusega 0,1 mm sekundis; piisab tühisest, meile tabamatust õhuliikumisest, et sellist aeglast langemist takistada.

Seepärast sadestub toas, kus palju käiakse, vähem tolmu kui inimtühjas ruumis, ja päeval omakorda vähem kui öösel, kuigi võiks arvata, et peaks toimuma vastupidine; tolmu kogunemist segavad õhus tekkivad pöörisvoolud, mida vähekäidavate ruumide liikumatus õhus harilikult peaaegu ei esine.

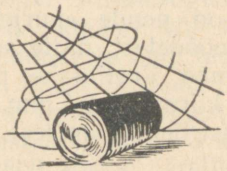
Kui 1 cm kõrgune kivist kuubike purustada kuubilisteks tolmukübemeteks kõrgustega 0,0001 mm, siis sama kivimassi üldine pindala suureneb 10 000 korda ja niisama palju kordi kasvab tema liikumisel õhutakistus. Tolmukübemed omavad sageli just niisuguseid mõõteid ja on arusaadav, et tugevasti kasvanud õhutakistus muudab täielikult langemise pildi.

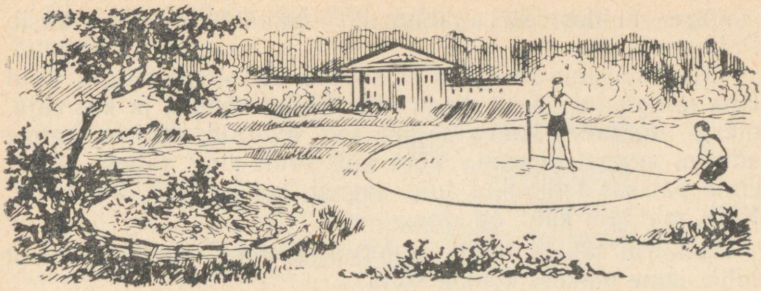
Samal põhjusel hõljuvad õhus ka pilved. Ammu on kõrvale heidetud vananenud vaade, nagu koosneksid pilved veeauruga täidetud veemullikestest. Pilved on tohutu hulga erakordselt väikeste, kuid tervenisti veest koosnevate tilgakeste kuhjum. Need tilgakesed, kuigi nad on õhust 800 korda raskemad, peaaegu ei langegi; nad laskuvad vaevalt märgatava kiirusega. Tilgakeste tugevasti aeglustatud langemine on nagu tolmukübemetegi puhul seletatav nende kaaluga võrreldes tohutu pinnaga.

Seepärast on ka kõige nõrgem tõusev õhuvool võimeline mitte ainult katkestama pilvede äärmiselt aeglast langemist, hoides neid ühesugusel kõrgusel, vaid ka neid üles tõstma.

Peamine põhjus, mis tingib kõiki neid nähtusi, on õhk: tühjas ruumis langeksid nii tolmukübemed kui ka pilved (kui nad saaksid seal eksisteerida) niisama kiirelt kui rasked kividki.

Olgu lisatud, et inimese aeglane langemine langevarjuga (umbes 5 m/sek.) kuulub samasuguste nähtuste valdkonda.





KAHETEISTKÜMNES PEATÜKK

GEOMEETRILINE ÖKONOOMIA

Kuidas Pahhom maad ostis

(Leo Tolstoi ülesanne)

Seda peatükki, mille ebaharilik pealkiri muutub lugejale arusaadavaks edaspidi, alustame katkendiga L. N. Tolstoi üldtuntud jutustusest «Kui palju on inimesele maad tarvis?».

«Aga missugune on hind?» küsib Pahhom.

«Hind on meil üks: 1000 rubla päeva eest.»

Pahhom ei saanud aru.

«Mis mõõt see niisugune on — päev? Mitu tiinu[1] see on?»

«Seda me ei oska arvestada,» ütleb. «Me müüme päeva viisi: palju päevas läbi käid, see on ka sinu, kuid hind on 1000 rubla.»

Pahhom imestus.

«Aga päevas jõuab palju maad läbi käia,» ütleb.

Vanem naeris.

«Kõik on sinu,» ütleb, «kuid ainult üks tingimus: kui sa samal päeval ei tule tagasi samale kohale, kust alustasid, oled oma raha kaotanud.»

---

[1] Tiin — lühend sõnast tessatin (endine vene pinnamõõt — 1,0925 ha). *Toim.*

«Aga kuidas siis tähistada läbikäidud tee?» küsib Pahhom.

«Meie seisame seal, kus sa soovid; me oleme paigal, kuid sina mine edasi, tee ring ja võta kaasa kõblas, ja kus vaja, märgi, nurkades kaeva augud, lao mättaid; hiljem käime adraga august auguni. Võta kui suur ring tahes, ainult enne päikese loojankut tule tagasi kohta, kust alustasid. Kõik, mis läbi käid, on sinu.»

Baškiirid läksid laiali. Lubasid homme koidikul kokku tulla, enne päikest kohale sõita.

Jõudsid steppi koidikul. Vanem läks Pahhomi juurde, näitas käega.

«Siin,» ütleb, «on kõik meie, mida silmaga näed. Vali kust tahad.»

Vanem võttis rebasenahast mütsi, asetas maha.

«Siin,» ütleb, «on märk. Siit mine, siia tule. Kõik, mis läbi käid, on sinu.»

Vaevu paistis päikese serv, kui Pahhom heitis kõpla selga ja läks steppi.

Eemaldus versta, peatus, kaevas augu. Läks edasi. Läks kaugemale, kaevas veel ühe augu.

Käis versta viis. Heitis pilgu päikesele — aeg oli juba hommikune. «Üks künnivälp[1] on läbi,» mõtles Pahhom. «Päevas on neid neli, vara veel kõrvale pöörata. Lähen veel versta viis, siis pöördun vasakule.» Läks veel otsesuunas. «Noh,» mõtleb, «selles suunas aitab küllalt; tuleb kõrvale pöörata.» Peatus, kaevas suurema augu ja pöördus järsult vasakule.

Läks ka selles suunas tükk aega, tegi teise nurga. Pahhom heitis pilgu künkale: palavuse tõttu oli muutunud sombuseks ja vaevu paistsid läbi tiheda udu inimesed künkal. «Noh,» mõtleb, «pikad küljed võtsin, see tuleb võtta lühem.» Läks kolmanda külje suunas. Vaatas päikesele — see läheneb juba keskpäevale, kuid kolmandat külge mööda on käidud ainult kaks versta. Ja lähtekohani on 15 versta. «Ei,» mõtleb, «ehkki maalapp tuleb kõverik, tuleb siiski otsesuunas minna.»

[1] Maatükk, mis on küntud ühe hobusega hobuse vahepealse söötmiseta; aeg, mille kestel hobune vahepealse söötmiseta võib töötada. *Tõlk.*

Kaevas Pahhom kiiresti augu ja pöördus otse künka suunas.



Joon. 174. «Jookseb Pahhom viimse jõuga, kuna päike juba laskub silmapiirile.»

Läheb Pahhom juba raskelt otse künka suunas. Tahaks puhata, kuid ei tohi — ei jõua enne loojangut kohale. Kuid päike on juba silmapiiri lähedal.

Nii sammub Pahhom; tal on raske, aga ikkagi lisab ja lisab sammu. Läks, läks — kuid ikka veel kaugel; jooksis kiiresti... Jookseb Pahhom, püksid ja särk kleepuvad higist kehale, suu kuivab. Rind lõõtsub kui sepalõõts ja süda taob vasarana.

Jookseb Pahhom viimse jõuga, kuna päike juba laskub silmapiirile. Just hakkab loojuma (joon. 174).

Päike on madalal, kuid ka lähtekoht ei ole enam kaugel. Näeb rebasenahkset mütsi ja maas istuvat vanemat.

Pahhom vaatas päikest, see oli juba jõudnud silmapiirile, hakkas loojenema. Pahhom pingutas kõigest jõust, õhku ahmides jooksis künkale. Näeb — müts. Jalad nõtkusid ja kukkudes haaras ta ettesirutatud kätega mütsist.

«Ah, tubli!» hüüatas vanem, «palju maad omandasid.»

Jooksis juurde sulane, tahtis teda üles tõsta, kuid suust jooksis tal veri, ja ta lamas seal surnuna . . .»

Leo Tolstoi ülesanne

Jätame kõrvale selle loo masendava lõpplahenduse ja peatume tema geomeetrilisel küljel. Kas võib selles jutustuses toodud andmete põhjal määrata, mitu tiinu maad Pahhom umbkaudu omandas? Ülesanne, mis esimesel pilgul paistab lahendamatuna, lahendatakse siiski päris lihtsalt.

Lahendus

Jutustust veel kord tähelepanelikult läbi lugedes ja temast kõiki geomeetrilisi andmeid välja võttes ei ole raske veenduda, et saadud andmetest piisab täielikult püstitatud küsimusele põhjaliku vastuse saamiseks. Võib isegi joonestada Pahhomi poolt läbikäidud tee plaani.

Kõigepealt selgub jutustusest, et Pahhom jooksis mööda nelinurga külgi. Selle nelinurga esimese külje kohta loeme: *«Käis viis versta . . . Lähen veel versta viis, siis pöördun vasakule . . .»*

Tähendab, nelinurga esimese külje pikkus oli umbes 10 versta.

Teise külje kohta, mis moodustas esimesega täisnurga, jutustuses arvulisi andmeid ei ole antud.

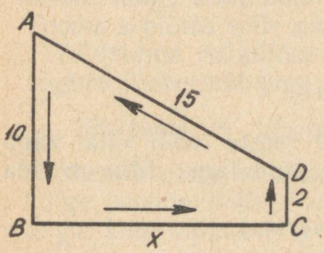
Kolmanda, ilmselt teisega ristuva külje pikkuse kohta on selgelt öeldud: *«Kolmandat külge mööda on käidud ainult kaks versta.»*

Vahetult on antud ka neljanda külje pikkus: *«Lähtekohani on 15 versta.»*[1]

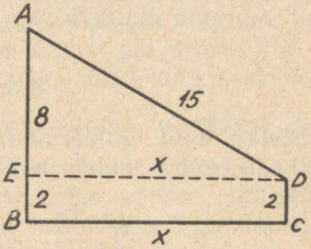
[1] Siin on arusaamatu, kuidas võis Pahhom nii suurelt kauguselt eraldada inimesi künkal.

Nende andmete järgi võime visandada Pahhomi poolt läbikäidud tee plaani (joon. 175). Saadud nelinurgas $ABCD$ külg $AB = 10$ versta; $CD = 2$ versta; $AD = 15$ versta; nurgad B ja C on täisnurgad. Tundmatu külje BC pikkust x on kerge arvutada, kui tõmmata punktist D küljele AB ristjoon DE (joon. 176). Siis on täisnurkses kolmnurgas AED teada kaatet $AE = 8$ versta ja hüpotenuus $AD = 15$ versta. Tundmatu kaatet $ED = \sqrt{15^2 - 8^2} = 12{,}7$ versta.

Seega teine külg oli umbes 13 versta pikkune. On ilmne, et Pahhom eksis, lugedes teise külje esimesest lühemaks.



Joon. 175. Pahhomi marsruut.



Joon. 176. Marsruudi täpsustamine.

Nagu näete, võib küllaltki täpselt joonestada Pahhomi poolt läbikäidud tee plaani. Kahtlematult pidas L. N. Tolstoi oma jutustuse kirjutamisel silmas plaani, mis on toodud joonisel 175.

Nüüd on kerge arvutada ka ristkülikust $EBCD$ ja täisnurksest kolmnurgast AED koosneva trapetsi $ABCD$ pindala. See on

$$2 \cdot 13 + \tfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot 13 = 78 \text{ (ruutversta)}.$$

Arvutamine trapetsi valemi järgi annaks muidugi samasuguse tulemuse:

$$\frac{AB + CD}{2} \cdot BC = \frac{10 + 2}{2} \cdot 13 = 78 \text{ (ruutversta)}.$$

Saime teada, et Pahhom käis ümber laialdase maa-ala, mille pindala oli 78 ruutversta ehk umbes 8000 tiinu. Tiin läks talle maksma 12½ kopikat.

Trapets või ristkülik

Ülesanne

Oma elu saatuslikul päeval läbis Pahhom 10 + 13 + 2 + + 15 = 40 versta, liikudes seejuures mööda trapetsi külgi. Tema esialgseks kavatsuseks oli minna mööda ristküliku külgi; trapets kujunes tal juhuslikult, ebaõige arvestuse tulemusena. On huvitav kindlaks määrata, kas ta sai selle tõttu kasu või kahju, et ta maatükk ei olnud mitte ristküliku-, vaid trapetsikujuline. Kummal juhul oleks ta saanud suurema maatüki?

Lahendus

Ristkülikuid ümbermõõduga 40 versta võib olla väga palju ja igaüks neist on isesuguse pindalaga. Siin on rida näiteid:

$14 \cdot 6 = 84$ (ruutversta)
$13 \cdot 7 = 91$ „
$12 \cdot 8 = 96$ „
$11 \cdot 9 = 99$ „

Me näeme, et kõigil nendel kujunditel on ühe ja sama 40-verstase ümbermõõdu juures suurem pindala kui meie trapetsil. Kuid on võimalikud ka niisugused 40-verstase ümbermõõduga ristkülikud, mille pindala on väiksem kui trapetsil:

$18 \cdot 2 = 36$ (ruutversta)
$19 \cdot 1 = 19$ „
$19\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 9\frac{3}{4}$ „

Järelikult ei saa ülesande küsimusele anda kindlat vastust. Ühe ja sama ümbermõõdu juures on ristkülikuid suurema pindalaga kui trapets, kuid on ka väiksemaid. See-eest võib aga anda täiesti kindla vastuse küsimusele: missugune antud ümbermõõduga ristkülikutest on kõige suurema pindalaga? Võrreldes meie ristkülikuid, märkame, et mida väiksem on külgede pikkuste erinevus, seda suurem on ristküliku pindala. On loomulik järeldada, et kui seda erinevust üldse ei ole, s. o. kui ristkülik muutub ruuduks, siis kujundi pindala on kõige suurem. See on siis $10 \cdot 10 = 100$ (ruutversta). On kerge näha, et see ruut

tõepoolest pindalalt ületab mistahes temaga võrdse ümbermõõduga ristküliku. Pahhomil oleks tulnud minna mööda ruudu külgi, et saada kõige suurema pindalaga maatükki — 22 ruutversta võrra suuremat, kui ta jõudis haarata.

Ruudu tähelepanuväärne omadus

Ruudu tähelepanuväärne omadus — piirata oma külgedega kõigi teiste sama ümbermõõduga ristkülikutega võrreldes kõige suuremat pindala — on paljudele teadmata. Toome seetõttu selle asjaolu range tõestuse.

Tähistame ristküliku ümbermõõdu P-ga. Kui võtta niisuguse ümbermõõduga ruut, siis iga tema külg peab olema $\frac{P}{4}$. Tõestame, et lühendades üht ruudu külgedest mingi suuruse b võrra ja samavõrra suurendades selle külje lähiskülge, saame ristküliku selle ruuduga võrdse ümbermõõduga, kuid väiksema pindalaga. Teiste sõnadega: tõestame, et ruudu pindala $\left(\frac{P}{4}\right)^2$ on suurem ristküliku pindalast

$$\left(\frac{P}{4} - b\right)\left(\frac{P}{4} + b\right), \text{ s. o.}$$

$$\left(\frac{P}{4}\right)^2 > \left(\frac{P}{4} - b\right)\left(\frac{P}{4} + b\right).$$

Et selle võrratuse parem pool on $\left(\frac{P}{4}\right)^2 - b^2$, siis kogu avaldis omandab kuju

$$0 > -b^2 \text{ ehk } b^2 > 0.$$

Viimane võrratus on aga ilmselt alati kehtiv: igasuguse positiivse või negatiivse suuruse ruut on suurem kui 0. Järelikult on õige ka esialgne võrratus, mis meid selleni viis.

Seega on ruudul kõigist sama ümbermõõduga ristkülikutest kõige suurem pindala.

Siit, muide, järeldub ka see, et kõigist võrdsete pindaladega ristkülikutest on ruudul kõige väiksem ümbermõõt. Selles võib veenduda järgmise arutlusega. Oletame, et see ei ole õige ja et on olemas ristkülik A, mille ümbermõõt ruuduga B võrdse pindala juures on väiksem kui sellel ruu-

dul. Joonestades siis ruudu *C* samasuguse ümbermõõduga kui ristkülikul *A*, saame ruudu, mille pindala on suurem kui ristkülikul *A* ja järelikult ka suurem kui ruudul *B*. Mis me siis saime? Et ruut *C* on väiksema ümbermõõduga kui ruut *B*, kuid pindala poolest on suurem. See on ilmselt võimatu: kui juba ruudu *C* külg on väiksem kui ruudu *B* külg, siis ka tema pindala peab olema väiksem. Tähendab, ei saa eeldada ristküliku A olemasolu, mis sama pindala juures oleks väiksema ümbermõõduga kui ruut *B*. Teiste sõnadega: kõigist ühesuguste pindaladega ristkülikutest on ruudul kõige väiksem ümbermõõt.

Selle ruudu omaduse tundmine oleks Pahhomil aidanud õigesti arvestada oma jõudu ja saada kõige suurema pindalaga ristkülikukujulist maatükki. Teades, et ta võib päevas ilma pingutuseta läbi käia, ütleme, 36 versta, oleks ta läinud piki 9-verstase küljepikkusega ruudu külgi ja oleks õhtuks omandanud 81-ruutverstase maa-ala — 3 ruutversta võrra rohkem, kui ta saavutas surmaga lõppenud jõupingutusega. Ja vastupidi: kui ta kohe alguses oleks piirdunud mingisuguse kindla ristkülikukujulise maatükiga, näiteks 36 ruutverstaga, siis oleks ta võinud saavutada selle tulemuse kõige väiksema jõukulutusega, minnes piki 6-verstase küljepikkusega ruudu külgi.

Teistsuguste kujudega maatükid

Võib-olla oleks aga Pahhomil veelgi kasulikum olnud endale välja mõõta mitte ristkülikukujulist maatükki, vaid mingi muu kujulist — nelinurkset, kolmnurkset, viisnurkset jne.?

Seda küsimust võib vaadelda rangelt matemaatiliselt, kuid kartes väsitada meie vabatahtlikku lugejat, ei hakka me siin sellesse vaatlusse süvenema, vaid tutvustame lugejat ainult tulemustega.

Võib tõestada, esiteks, et *kõigist võrdsete ümbermõõtudega nelinurkadest* on ruut kõige suurema pindalaga. Seepärast, soovides omandada nelinurkset maa-ala, ei võinud Pahhom mingisuguse kavalusega saada rohkem kui 100 ruutversta (arvestades, et tema maksimaalne päevateekond oli 40 versta).

Teiseks — võib tõestada, et ruudu pindala on suurem kui mistahes sama ümbermõõduga kolmnurga pindala. Sama

ümbermõõduga võrdkülgse kolmnurga külg on $\frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$ versta pikkune, kuna tema pindala (valemi järgi $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, kus S on pindala, a aga on külje pikkus) on

$$\frac{1}{4}\left(\frac{40}{3}\right)^2\sqrt{3} = 77 \text{ (ruutversta)},$$

s. o. isegi väiksem kui trapetsil, mille läbis Pahhom. Edasi (lk. 283) tõestatakse, et kõigist võrdsete ümbermõõtudega kolmnurkadest on kõige suurema pindalaga *võrdkülgne* kolmnurk. Tähendab, kui isegi see kõige suurem kolmnurk on ruudu pindalast väiksema pindalaga, siis ka kõik ülejäänud sama ümbermõõduga kolmnurgad on pindalalt väiksemad kui ruut.

Kui aga võrdleme ruudu pindala sama ümbermõõduga viisnurga, kuusnurga jne. pindaladega, siis kaob siin ruudu eelis: korrapärane viisnurk on suurema pindalaga, korrapärane kuusnurk veelgi suuremaga jne. Selles on kerge veenduda korrapärase kuusnurga puhul. 40-verstase ümbermõõdu juures on tema külg $\frac{40}{6}$; pindala (valemi järgi $S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$) on $\frac{3}{2}\left(\frac{40}{6}\right)^2\sqrt{3} = 115$ (ruutversta).

Kui Pahhom oleks valinud oma maatüki kujuks korrapärase kuusnurga, oleks ta sama jõupingutuse juures saanud 115—78, s. o. 37 ruutversta võrra suurema pindala kui tegelikult ja 15 ruutversta võrra suurema, kui oleks andnud ruudukujuline maatükk (selleks oleks tal muidugi tulnud teele asuda nurgamõõtjaga).

Ülesanne

Kuuest tuletikust moodustada kõige suurema pindalaga kujund.

Lahendus

Kuuest tuletikust võib moodustada küllaltki mitmekesiseid kujundeid: võrdkülgse kolmnurga, ristküliku, hulga parallelogramme, terve rea korrapäratuid viisnurki, rea

korrapäratuid kuusnurki ja lõpuks korrapärase kuusnurga. Geomeetria-tundja teab nende kujundite pindalasid võrdlemata juba ette, missugune kujund on suurima pindalaga: nimelt korrapärane kuusnurk.

Suurima pindalaga kujundid

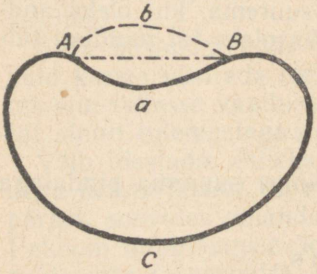
Võib rangelt geomeetriliselt tõestada, et mida rohkem külgi on korrapärasel hulknurgal, seda suurem on sama ümbermõõdu puhul tema pindala. Kõige suurema pindalaga antud ümbermõõdu juures on ring. Kui Pahhom oleks jooksnud mööda ringi, oleks ta sama 40 versta läbimisel saanud pindala

$$\pi\left(\frac{40}{2\pi}\right)^2 = 127 \text{ (ruutversta)}.$$

Antud ümbermõõdu juures ei ole ükski teine kujund suurema pindalaga, olenemata sellest, kas ta on sirgjooneline või kõverjooneline.

Lubame enesele veidi peatuda sellel ringi hämmastaval omadusel, et ta on suurema pindalaga kui mistahes teine sama ümbermõõduga kujund. Võib-olla huvitab mõningaid lugejaid, kuidas seda tõestatakse. Toome allpool selle ringi omaduse tõestuse — tõsi küll, mitte täiesti range, — mille esitas matemaatik Jakob Steiner. See on kaunis pikk, kuid need, kellele see paistab väsitavana, võivad ta vahele jätta, ilma et nad seega kahjustaksid edaspidisest arusaamist.

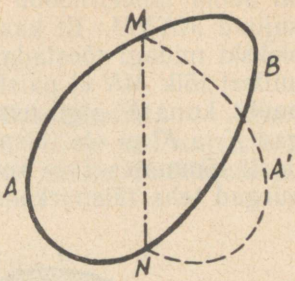
Tuleb tõestada, et antud ümbermõõdu juures on suurima pindalaga kujundiks ring. Kõigepealt teeme kindlaks, et otsitav kujund peab olema kumer, s. t., et iga tema kõõl peab täielikult asetsema seespool kujundit. Olgu meil kujund $AaBC$ (joon. 177), mis omab väliskõõlu AB. Asendame kaare a temaga sümmeetrilise kaarega b. Selle muudatuse tagajärjel kujundi ABC ümbermõõt ei muutu, pindala aga ilmselt suureneb. Tähendab, $AaBC$ sarnased kujundid ei või olla nendeks kujunditeks, mis sama üm-



Joon. 177. Teeme kindlaks, et suurima pindalaga kujund peab olema kumer.

bermõõdu juures on suurima pindalaga.

Seega otsitav kujund on k u m e r. Edasi võime juba ette kindlaks määrata veel ühe selle kujundi omaduse: iga kõõl, mis poolitab tema ümbermõõdu, poolitab ka tema pindala. Olgu *AMBN* (joon. 178) otsitav kujund ja poolitagu kõõl *MN* tema ümbermõõdu. Tõestame, et pindala *AMN* võrdub pindalaga *MBN*. Tõepoolest: kui üks nendest osadest oleks pindalalt teisest suurem, näiteks *AMN* > *MBN*, siis pöörates kujundit *AMN* ümber kõõlu *MN*, saaksime kujundi *AMA'N*, mille pindala oleks esialgse kujundi *AMBN* pindalast suurem, ümbermõõt aga temaga võrdne. Tähendab, kujund *AMBN*, mille ümbermõõtu poolitav kõõl jaotab pindala mittevõrdseteks osadeks, ei saa olla otsitav kujund (s. o. ei või olla antud ümbermõõdu juures suurima pindalaga).



Joon. 178. Kui kõõl jaotab pooleks suurima pindalaga kumera kujundi ümbermõõdu, siis poolitab ta ka selle kujundi pindala.

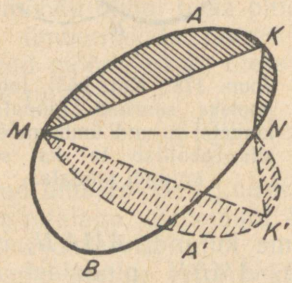
Enne kui edasi minna, tõestame veel järgmise abiteoreemi: kõigist kolmnurkadest, millel on antud kaks külge, on kõige suurema pindalaga see, millel need küljed moodustavad täisnurga. Et seda tõestada, tuletame meelde kolmnurga pindala *S* trigonomeetrilise avaldise külgede *a* ning *b* ja nende külgede vahelise nurga *C* kaudu:

$$S = \tfrac{1}{2}ab \sin C.$$

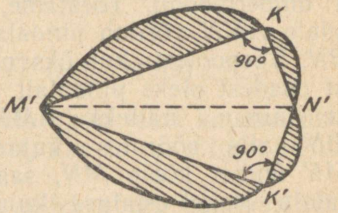
See avaldis on (antud külgede puhul) ilmselt suurim siis, kui sin *C* on kõige suurema väärtusega, s. o. üks. Kuid nurk, mille siinus on 1, on täisnurk, mida oligi vaja tõestada.

Nüüd võime asuda peamise ülesande juurde — selle tõestamisele, et kõigist kujunditest ümbermõõduga *p* on ring suurima pindalaga. Et selles veenduda, oletame, et eksisteerib mitteringikujuline kumer kujund *MANB* (joon. 179), millel on see omadus. Tõmbame temas ümbermõõtu poolitava kõõlu *MN;* nagu teame, poolitab ta ka kujundi pindala. Pöörame poolt *MKN* ümber joone *MN*, nii et ta asetuks sümmeetriliselt (*MK'N*). Paneme tähele, et kujund *MNK'M*

on sama ümbermõõdu ja sama pindalaga kui esialgne kujund $MKNM$. Et kaar MKN ei ole poolring (muidu ei olekski midagi tõestada), siis peab temal leiduma punkte, millest lõik MN ei paista täisnurga all. Olgu K niisugune punkt, kuna K' olgu temaga sümmeetriline punkt, s. o. nurgad K ja K' ei ole täisnurgad. Külgi MK, KN, MK' ja NK' laiali tõmmates (või kokku surudes) võime nendevahelised nurgad teha täisnurkadeks ja saame siis ühtivad täis-



Joon. 179. Oletame, et on olemas suurima pindalaga mitteringikujuline kumer kujund.



Joon. 180. Teeme kindlaks, et kõigist antud ümbermõõduga kujunditest on ringil suurim pindala.

nurkses kolmnurgad. Asetame need kolmnurgad hüpotenuusidega vastamisi nagu joonisel 180 ja vastavates kohtades liidame nendele viirutatud segmendid. Saame kujundi $M'KN'K'$, millel on sama ümbermõõt kui esialgselgi, kuid ilmselt suurem pindala (seetõttu, et täisnurkses kolmnurgad $M'KN'$ ja $M'K'N'$ on suurema pindalaga kui mittetäisnurkses kolmnurgad MKN ja $MK'N$). Tähendab, ükski mitteringikujuline kujund ei või antud ümbermõõdu juures olla suurima pindalaga. Ainult ringi puhul ei saaks me näidatud viisil konstrueerida kujundit, millel sama ümbermõõdu juures oleks suurem pindala.

Sellise arutlusega võibki tõestada, et ring on kujund, millel antud ümbermõõdu juures on suurim pindala.

On kerge tõestada ka järgmise väite õigsust: kõigist võrdsete pindaladega kujunditest on ring väikseima ümbermõõduga. Selleks tuleb rakendada ringile sama arutlust, mida me varem kasutasime ruudu puhul (vt. lk. 275).

Naelad

Ülesanne

Missugust naela on raskeim välja tõmmata — ümmargust, nelinurkset või kolmnurkset, — kui nad on sisse löödud võrdsetele sügavustele ja kui nende ristlõigete pindalad on võrdsed?

Lahendus

Lähtume sellest, et tugevamini on sees see nael, mille kokkupuutepind ümbritseva materjaliga on suurem. Missugusel meie naeltest siis on suurim külgpind? Me teame juba, et võrdsete pindalade juures ruudu ümbermõõt on väiksem kolmnurga ümbermõõdust, ringi ümbermõõt aga väiksem ruudu omast. Kui võtta ruudu külg ühikuks, siis annab arvutus nende kolme suuruse väärtusteks: 4,53; 4; 3,55. Järelikult peab teistest tugevamini sees olema kolmnurkne nael.

Niisuguseid naelu siiski ei valmistata, vähemalt müügil neid ei ole. Põhjus peitub arvatavasti selles, et need naelad painduvad ja murduvad kergemini.

Suurima ruumalaga keha

Sama omadus, mis ringil, on ka keral: ta on pinna antud suuruse juures suurima ruumalaga. Ja vastupidi, kõigist ühesuguste ruumaladega kehadest on kõige väiksema pinnaga kera. Nendel omadustel ei puudu tähtsus ka praktilises elus. Kerakujulisel samovaril on väiksem pind kui sama mahtuvusega silindrilisel või mistahes teisekujulisel samovaril, ja et keha kaotab soojust ainult pinna kaudu, siis jahtub kerakujuline samovar aeglasemalt kui mistahes teine sama mahtuvusega samovar. Vastupidi: kraadiklaasi reservuaar kuumeneb ja jahtub kiiremini (s. o. omandab ümbritsevate esemete temperatuuri), kui talle ei ole antud mitte kera, vaid silindri kuju.

Samal põhjusel peab maakera, mis koosneb kõvast koorest ja tuumast, ruumala poolest vähenema, s. o. kokku tõmbuma, tihenema, kõigi põhjuste tõttu, mis muudavad

tema pinna kuju: tema sisu peab tihenema iga kord, kui tema välispinnal toimuvad mingisugused muudatused, mis muudavad tema kerakujulisust. On võimalik, et see geomeetriline fakt on seoses maavärinatega ja üldse tektooniliste[1] nähtustega, kuid seda peavad otsustama juba geoloogid.

Võrdsete tegurite korrutis

Sedalaadi ülesannetes, millega me praegu tegelesime, vaadeldakse küsimust just nagu ökonoomilisest küljest: kuidas saavutada antud jõukulutuse juures (näit. 40-verstase teekonna läbimisel) kõige kasulikum tulemus (haarata kõige suurem maatükk)? Siit ka raamatu käesoleva osa pealkiri: «Geomeetriline ökonoomia». Kuid see on populariseerija meelevaldsus; matemaatikas kannavad need küsimused teist nimetust: «maksimumi- ja miinimumi-ülesanded». Nad võivad olla väga mitmekesised nii sisu kui ka raskuse poolest. Paljud neist on lahendatavad ainult kõrgema matemaatika võtete abil, kuid palju on ka niisuguseid, mille lahendamiseks on küllaldased kõige elementaarsemad teadmised. Alljärgnevalt vaatleme rida ülesandeid geomeetria valdkonnast, mida lahendame üht võrdsete tegurite korrutise huvitavat omadust kasutades.

Kahe teguri puhul on see omadus meile juba tuntud. Me teame, et ruudu pindala on suurem kui mistahes sama ümbermõõduga ristküliku pindala. Kui see geomeetriline tõsiasi tõlkida aritmeetika keelde, siis tähendab see järgmist: kui nõutakse arvu jaotamist kahte ossa, nii et nende osade korrutis oleks suurim, siis tuleb arv jaotada pooleks. Näiteks kõigist korrutistest

$13 \cdot 17$, $16 \cdot 14$, $12 \cdot 18$, $11 \cdot 19$, $10 \cdot 20$, $15 \cdot 15$ jne.,

kus tegurite summa võrdub 30-ga, on suurim $15 \cdot 15$, isegi siis, kui võrrelda ka murdarvude korrutisi ($14\frac{1}{2} \cdot 15\frac{1}{2}$ jne.).

See kehtib ka kolme teguri korrutise puhul, millede summa on jääv: nende korrutis on kõige suurem, kui tegurid on omavahel võrdsed. See tuleneb otseselt ülalöeldust. Olgu kolme teguri x, y, z summa võrdne a-ga:

$$x + y + z = a.$$

[1] Tektoonika — õpetus maakera ehitusest ja selle muutustest. *Tõlk.*

Oletame, et x ja y ei ole omavahel võrdsed. Kui asendame kummagi neist nende poolsummaga $\frac{x+y}{2}$, siis tegurite summa ei muutu:

$$\frac{x+y}{2} + \frac{x+y}{2} + z = x + y + z = a.$$

Et aga vastavalt eeltoodule

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right) > xy,$$

siis kolme teguri korrutis

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right) z$$

on suurem korrutisest xyz:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right) z > xyz.$$

Üldiselt: kui kolme teguri xyz hulgas on kasvõi kaks omavahel mittevõrdset, siis võib alati leida arve, mis üldsummat muutmata annavad suurema korrutise kui xyz. Ja ainult siis, kui kõik kolm tegurit on omavahel võrdsed, ei saa niisugust asendamist teostada. Järelikult $x + y + z = a$ korral korrutis xyz on suurim siis, kui

$$x = y = z.$$

Kasutame selle võrdsete tegurite omaduse tundmist mõningate huvitavate ülesannete lahendamiseks.

Suurima pindalaga kolmnurk

Ülesanne

Missugune kuju tuleb anda kolmnurgale, et ta antud külgede summa korral oleks suurima pindalaga?

Me märkisime juba varem (lk. 277), et see omadus on võrdkülgsel kolmnurgal. Kuidas seda aga tõestada?

Lahendus

Külgedega a, b, c ja ümbermõõduga $a + b + c = 2p$ kolmnurga pindala S avaldub, nagu on teada geomeetriast,

järgmiselt:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

millest

$$\frac{S^2}{p} = (p-a)(p-b)(p-c).$$

Kolmnurga pindala S on suurim siis, kui tema ruut (S^2) või avaldis $\frac{S^2}{p}$ on suurima väärtusega, kus p on pool ümbermõõtu ja, vastavalt kokkuleppele, jääv suurus. Et võrduse mõlemad pooled omandavad suurima väärtuse üheaegselt, siis taandub küsimus sellele, missugustel tingimustel muutub suurimaks korrutis

$$(p-a)\ (p-b)\ (p-c).$$

Pannes tähele, et nende kolme teguri summa on jääv suurus:

$$p-a+p-b+p-c = 3p-(a+b+c) = 3p-2p = p,$$

järeldame, et nende korrutis saavutab suurima väärtuse siis, kui tegurid muutuvad võrdseteks, s. o. kui kehtib võrdus

$$p-a = p-b = p-c,$$

millest

$$a = b = c.$$

Seega on kolmnurk antud ümbermõõdu puhul suurima pindalaga siis, kui tema küljed on omavahel võrdsed.

Kõige raskem pruss

Ülesanne

Silindrikujulisest palgist on vaja välja saagida suurima kaaluga pruss. Kuidas seda teha?

Lahendus

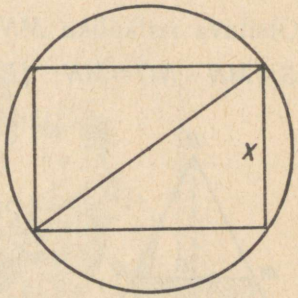
Ülesanne on ilmselt samaväärne ringi sisse suurima pindalaga ristküliku joonestamisega. Ehkki pärast ülalöeldut lugeja juba on ette valmistatud mõtteks, et niisuguseks ristkülikuks on ruut, on siiski huvitav seda väidet rangelt tõestada.

Tähistame otsitava ristküliku ühe külje x-ga (joon. 181); teine külg on siis $\sqrt{4R^2 - x^2}$, kus R on palgi ristlõike raadius. Ristküliku pindala $S = x\sqrt{4R^2 - x^2}$, millest

$$S^2 = x^2(4R^2 - x^2).$$

Et tegurite x^2 ja $4R^2 - x^2$ summa on jääv suurus $(x^2 + 4R^2 - x^2 = 4R^2)$, siis nende korrutis S^2 on suurim, kui $x^2 = 4R^2 - x^2$, s. o. kui $x = R\sqrt{2}$. Siis on ka S, s. o. otsitava ristküliku pindala, suurima väärtusega.

Seega on suurima pindalaga ristküliku üks külg $R\sqrt{2}$, s. o. sissejoonestatud ruudu külg. Pruss on suurima ruumalaga siis, kui tema ristlõige on silindrilise palgi ristlõike sisse joonestatud ruut.



Joon. 181. Raskeima prussi ülesande juurde.

Kolmnurksest papitükist

Ülesanne

Antud on kolmnurkne papitükk. Sellest tuleb välja lõigata kolmnurga aluse ja kõrgusega paralleelsete külgedega suurima pindalaga ristkülik.

Lahendus

Olgu ABC antud kolmnurk (joon. 182), $MNOP$ aga see ristkülik, mille peame saama pärast lõikamist. Kolmnurkade ABC ja MBN sarnasusest saame:

$$\frac{BD}{BE} = \frac{AC}{NM},$$

millest

$$NM = \frac{BE \cdot AC}{BD}.$$

Tähistades otsitava ristküliku ühe külje MN tähega y, tema kauguse kolmnurga tipust BE tähega x, antud kolmnurga aluse AC tähega a ja tema kõrguse BD tähega h, kirjutame varemsaadud avaldise järgmiselt:

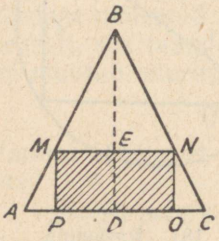
$$y = \frac{ax}{h}.$$

Otsitava ristküliku $MNOP$ pindala S on:

$$S = MN \cdot NO = MN \cdot (BD - BE) = (h - x)y = (h - x)\frac{ax}{h};$$

järelikult

$$\frac{Sh}{a} = (h - x)x.$$



Joon. 182. Joonestada kolmnurga sisse suurima pindalaga ristkülik.

Pindala S on suurim siis, kui on suurim korrutis $\frac{Sh}{a}$ ja järelikult ka siis, kui tegurite $(h - x)$ ja x korrutis saavutab suurima väärtuse. Kuid summa $h - x + x = h$ on jääv suurus. Tähendab, nende korrutis on maksimaalne, kui

$$h - x = x,$$

millest

$$x = \frac{h}{2}.$$

Saime teada, et otsitava ristküliku külg MN läbib kolmnurga kõrguse keskpunkti ja järelikult ühendab ka tema külgede keskpunkte. Tähendab, ristküliku selle külje pikkus on $\frac{a}{2}$, teise külje pikkus aga $\frac{h}{2}$.

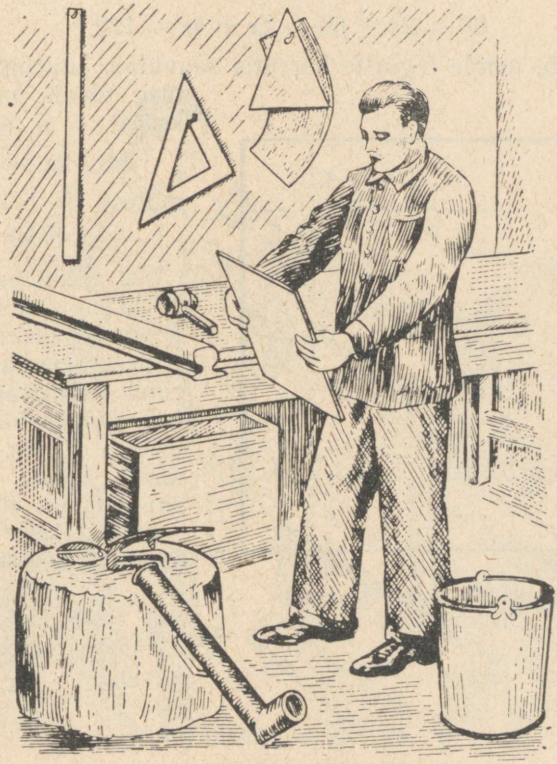
Plekksepa kimbatus

Plekksepalt telliti ruudukujulisest plekitükist 60 cm laiune ruudukujulise põhjaga kaaneta karp, kusjuures esitati tingimus, et karp oleks suurima võimaliku ruumalaga. Plekksepp mõõtis kaua, missuguse laiusega tuleks selleks karbi ääred murda, kuid ei suutnud leida kindlat lahendust (joon. 183). Võib-olla õnnestub lugejal teda kimbatusest päästa?

Lahendus

Olgu äramurtavate äärte laius x (joon. 184). Karbi ruudukujulise põhja laius on siis $60 - 2x$; karbi ruumala avaldub korrutisena

$$v = (60 - 2x)(60 - 2x)x.$$



Joon. 183. Plekksepa kimbatus.

Missuguse x väärtuse puhul on see korrutis suurim? Kui kolme teguri summa oleks jääv, siis oleks korrutis suurim tegurite omavahelise võrdsuse korral. Kuid siin tegurite summa

$$60 - 2x + 60 - 2x + x = 120 - 3x$$

ei ole jääv suurus, sest ta muutub x muutumisega. Ei ole siiski raske saavutada seda, et nende kolme teguri summa oleks jääv: selleks on küllaldane korrutada võrduse mõlemaid pooli 4-ga. Saame:

$$4v = (60 - 2x)(60 - 2x)4x.$$

Nende tegurite summa on jääv suurus:

$$60 - 2x + 60 - 2x + 4x = 120.$$

Tähendab, nende tegurite korrutis saavutab suurima väärtuse nende võrdsuse korral, s. o. siis, kui

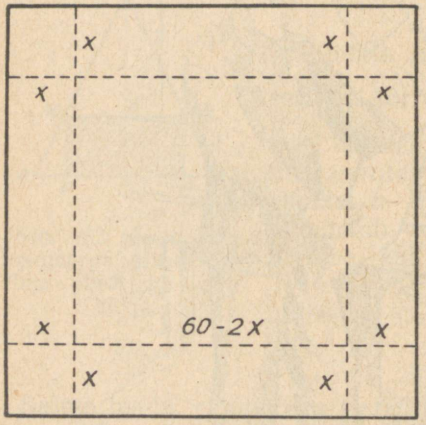
$$60 - 2x = 4x,$$

millest

$$x = 10.$$

Sel juhul saavutab $4v$ ja koos sellega ka v oma maksimumi.

Seega on karp suurima ruumalaga siis, kui plekitahvlil murda ära 10 cm laiused ääred. See suurim ruumala on $40 \cdot 40 \cdot 10 = 16\,000$ (cm³). Murdes sentimeetri vähem või rohkem, saame mõlemal juhul väiksema ruumalaga karbi.



Joon. 184. Plekksepa ülesande lahendamine.

Tõepoolest:

$$9 \cdot 42 \cdot 42 = 15\,900 \text{ (cm}^3\text{)},$$
$$11 \cdot 38 \cdot 38 = 15\,900 \text{ (cm}^3\text{)};$$

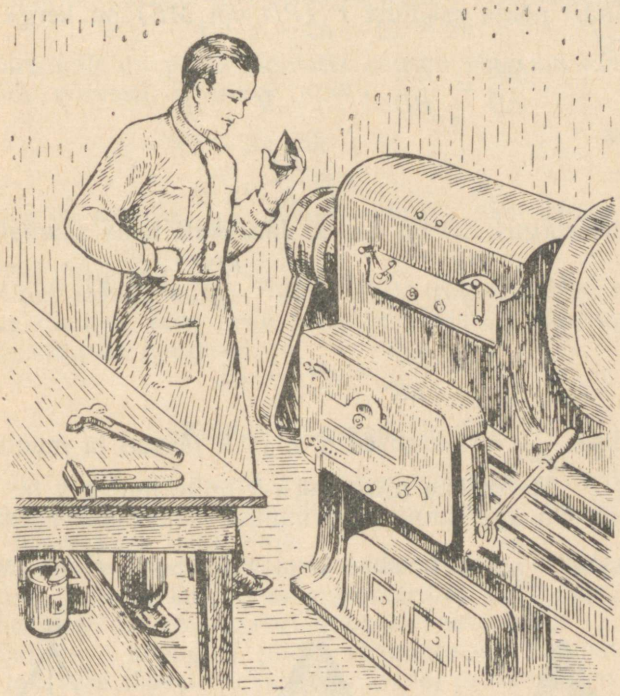
tulemus on mõlemal juhul väiksem kui 16 000 cm³.[1]

[1] Lahendades ülesande üldkujul, leiame, et ruudukujulisel tahvlil laiusega a tuleb suurima ruumalaga karbi saamiseks ära murda ääred laiusega $x = \frac{1}{6}a$, sest korrutis $(a-2x)(a-2x)x$ või $(a-2x)(a-2x)4x$ on suurim, kui $a-2x=4x$.

Treiali kimbatus

Ülesanne

Treialile anti koonus ja tehti talle ülesandeks treida sellest silinder, nii et mahatreitud materjali hulk oleks võimalikult väike (joon. 185). Treial hakkas mõtlema otsitava



Joon. 185. Treiali kimbatus.

silindri kuju üle: kas teha see kõrge, kuid kitsas (joon. 186) või vastupidi — lai, aga see-eest madal (joon. 187). Kaua ei suutnud ta otsustada, missuguse kuju puhul tuleb silinder suurima ruumalaga, s. o. treitakse maha kõige vähem materjali. Kuidas peab ta talitama?

Lahendus

Ülesanne nõuab tähelepanelikku geomeetrilist vaatlust. Olgu ABC (joon. 188) koonuse ristlõige, BD tema kõrgus, mille tähistame h-ga; põhja raadiuse $AD = DC$ tähistame R-ga. Silindril, mille võib treida koonusest, on ristlõige $MNOP$. Leiame, missugusel kaugusel $BE = x$ koonuse tipust peab asetsema silindri ülemine põhi, et silindri ruumala oleks suurim.

Silindri põhja raadiust r (PD või ME) on kerge leida võrdest

$$\frac{ME}{AD} = \frac{BE}{BD}, \text{ s. o. } \frac{r}{R} = \frac{x}{h},$$

millest

$$r = \frac{Rx}{h}.$$

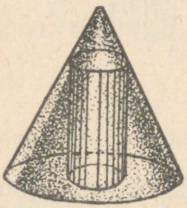
Silindri kõrgus ED on $h - x$. Järelikult tema ruumala

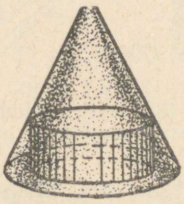
$$v = \pi \left(\frac{Rx}{h}\right)^2 (h - x) = \pi \frac{R^2x^2}{h^2} (h - x),$$

millest

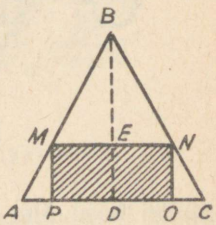
$$\frac{vh^2}{\pi R^2} = x^2(h - x).$$

Avaldises $\frac{vh^2}{\pi R^2}$ on suurused h, π ja R jäävad ja muutuv on ainult v. Me otsime niisugust x-i, mille juures v on kõige suurem. On aga ilmne, et v muutub suurimaks üheaegselt suurusega $\frac{vh^2}{\pi R^2}$, s. o. suurusega $x^2(h - x)$. Millal siis on





Joon. 186—187. Koonusest võib välja treida kõrge ja kitsa või madala ja laia silindri. Kummal juhul läheb vähem materjali kaduma?



Joon. 188. Koonuse ja silindri telglõige.

viimane avaldis suurima väärtusega? Meil on siin kolm muutuvat tegurit: x, x ja $(h - x)$. Kui nende summa oleks jääv, oleks korrutis suurim tegurite omavahelise võrdsuse korral. Selle summa jäävust on kerge saavutada, kui viimase võrduse mõlemaid pooli korrutada 2-ga. Siis saame:

$$\frac{2vh^2}{\pi R^2} = x^2(2h - 2x).$$

Nüüd on parema poole kolmel teguril jääv summa:

$$x + x + 2h - 2x = 2h.$$

Järelikult on nende korrutis suurim siis, kui kõik tegurid on võrdsed, s. o. kui

$$x = 2h - 2x \text{ ehk } x = \frac{2h}{3}.$$

Siis on avaldis $\frac{2vh^2}{\pi R^2}$ samuti suurima väärtusega ja koos sellega ka silindri ruumala v.

Nüüd teame, kuidas tuleb välja treida otsitav silinder: tema ülemine põhi peab asetsema koonuse tipust $\frac{2}{3}$ koonuse kõrguse kaugusel.

Kuidas pikendada lauda?

Ühe või teise eseme valmistamisel töökojas või kodus juhtub mõnikord, et käepärast oleva materjali mõõted ei ole niisugused, nagu vaja.

Siis tuleb püüda materjali mõõteid tema vastava töötlemisega muuta, kusjuures geomeetrilise ja konstruktorliku taibu ning arvestusega võib palju saavutada.

Kujutlege niisugust juhtu: raamaturiiuli valmistamiseks on teil vaja täpsete mõõdetega lauda, ja nimelt 1m pikkust ning 20 cm laiust. Teil on aga lühem ja laiem laud, näiteks 75 cm pikkune ja 30 cm laiune (joon. 189, vasakul).

Kuidas toimida?

Võib muidugi saagida piki lauda 10 cm laiuse riba (punktiir), jaotada selle kolmeks võrdseks osaks, igaüks pikkusega 25 cm, ja kahega nendest pikendada lauda (joon. 189, all).

Selle ülesande niisugune lahendus ei oleks ökonoomne operatsioonide arvu tõttu (kolm korda saagida ja kolm



Joon. 189.
Kuidas pikendada lauda kolme saagimise ja ühe liimimise abil?

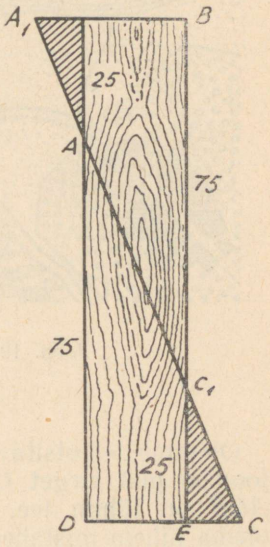
korda liimida) ja ei vastaks tugevuse nõudeile (vastupidavus oleks sel kohal väiksem, kus liistud on lauaga kokku liimitud).

Ülesanne

Leidke antud laua pikendamise viis kolme saagimise ja ainult ühe liimimise abil.

Lahendus

Tuleb laud $ABCD$ piki diagonaali AC läbi saagida (joon. 190) ja ühe poolega (näit. $\triangle ABC$) teha piki seda diagonaali paralleel-lüke kaugusele, mis vastab pikkuse puuduvale osale C_1E, s. o. 25 cm; mõlema poole kogupikkus on siis 1 m. Nüüd tuleb need pooled piki AC_1 kokku liimida ja ülejäägid (viirutatud kolmnurgad) maha saagida. Saadakse nõutud mõõdetega laud.



Joon. 190. Laua pikendamise ülesande lahendus.

Tõepoolest, kolmnurkade ADC ja C_1EC sarnasusest saame:

$$AD : DC = C_1E : EC,$$

millest

$$EC = \frac{DC}{AD} \cdot C_1E \text{ ehk}$$

$$EC = \frac{30}{75} \cdot 25 = 10 \text{ (cm)};$$

$$DE = DC - EC =$$

$$= 30 \text{ cm} - 10 \text{ cm} = 20 \text{ cm}.$$

Lühim tee

Lõpuks vaatleme üht «maksimumi- ja miinimumi-ülesannet», mis on lahendatav väga lihtsa geomeetrilise konstruktsiooniga.

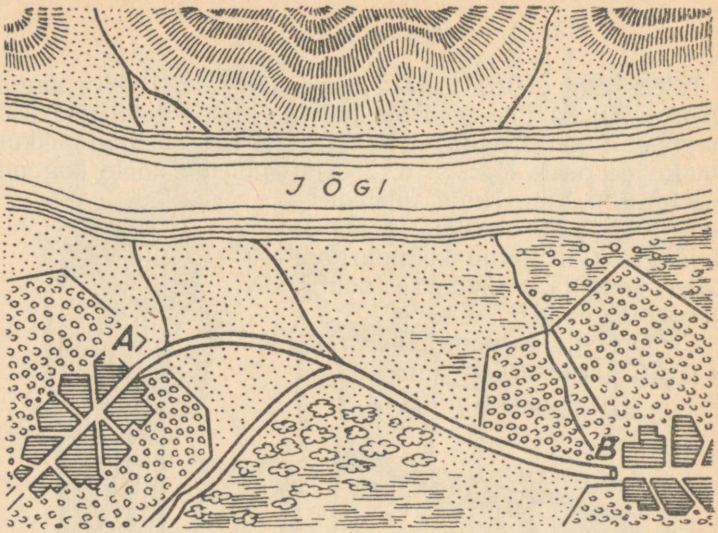
Ülesanne

Jõekaldale tuleb ehitada veetorn, millest vesi juhitakse piki torusid asulatesse A ja B (joon. 191).

Missugusesse punkti tuleb see veetorn ehitada, et torude üldpikkus tornist mõlemasse asulasse oleks kõige lühem?

Lahendus

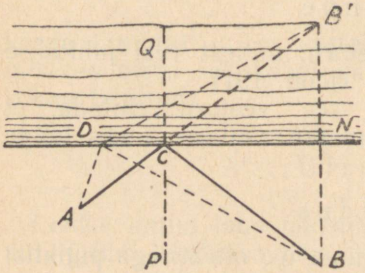
Ülesanne on samaväärne lühima tee otsimisega punktist A kaldani ja sealt punktini B.



Joon. 191. Veetorni-ülesande juurde.

Oletame, et otsitav tee on ACB (joon. 192). Murrame joonise piki sirget CN kahekorra. Saame punkti B'. Kui ACB on lühim tee, siis, et $CB' = CB$, peab tee ACB' olema lühem mistahes teisest teest (näiteks ADB'). Tähendab, lühima tee leidmiseks tuleb leida ainult sirge AB' ja kaldajoone lõikepunkt C. Ühendades C ja B, leiame A ja B vahelise lühima tee mõlemad osad.

Tõmmates punktis C ristjoone sirgele CN, on kerge näha, et lühima tee mõlema osa ja selle ristjoone vahelised nurgad ACP ja BCP on omavahel võrdsed ($\angle ACP = \angle B'CQ = \angle BCP$).



Joon. 192. Lühima tee valimise ülesande geomeetriline lahendus.

Niisugune, nagu teada, on valguskiire kulgemise seaduspärasus peegeldumisel: langemisnurk võrdub peegeldumisnurgaga. Siit järeldub, et peegeldumisel valib valguskiir l ü h i m a tee — järeldus, mis oli teada juba kaks tuhat aastat tagasi vana-aja füüsikule ja geomeetriateadlasele Heronile Aleksandriast.



SISUKORD

Toimetaja eessõna venekeelsele seitsmendale trükile 3

Esimene osa

GEOMEETRIA VABAS ÕHUS

Esimene peatükk. **Geomeetria metsas** 7
Varju pikkuse järgi 7
Veel kaks mõõtmisviisi 12
Jules Verne'i meetodi järgi 14
Kuidas toimis seersant 15
Märkmiku abil 17
Puule lähenemata 18
Metsaametnike kõrgusemõõtja 19
Peegli abil 22
Kaks mändi 25
Puutüve kuju 25
Universaalne valem 26
Kasvava puu ruumala ja kaal 29
Lehtede geomeetria 33
Kuuejalgsed vägilased 35

Teine peatükk. **Geomeetria jõe ääres** 38
Mõõta jõe laius 38
Mütsisirmi abil 43
Saare pikkus 45
Jalakäija teisel kaldal 46
Lihtsaimad kaugusemõõtjad 48
Jõe energia 51
Voolukiirus 53
Kui palju vett voolab jões 55
Vesiratas 59
Vikerkaarevärviline kile 59
Ringid veepinnal 61
Fantastiline šrapnell 63
Kiillaine 64
Suurtükimürskude kiirus 67
Tiigi sügavus 68
Tähistaevas jões 69
Tee üle jõe 71
Ehitada kaks silda 73

Kolmas peatükk. **Geomeetria lahtisel väljal** 74
Kuu nähtavad mõõted 74
Vaatenurk 76
Taldrik ja Kuu 78
Kuu ja vaskrahad 78
Sensatsioonilised ülesvõtted 79
Elav nurgamõõtja 83
Jakobi kepp 85
Rehakujuline nurgamõõtja 87
Suurtükiväelase nurk 88
Teie nägemise teravus 91
Piir-minut 92
Kuu ja tähed horisondil 94
Kui pikk on Kuu vari ja stratostaadi vari 97
Kas pilved on maapinnast kõrgel? 98
Torni kõrgus ülesvõtte järgi 103
Iseseisvaks harjutamiseks 104

Neljas peatükk. **Geomeetria teedel** 106
Sammudega mõõtmise oskus 106
Silmamõõt 107
Kallakud 111
Kruusahunnikud 113
«Võimas-uhke kink» 114
Kurvil 116
Kurvi raadius 116
Ookeani põhi 120
Kas on olemas veemägesid? 121

Viies peatükk. **Välitrigonomeetria valemite ja tabeliteta** 124
Siinuse arvutamine 124
Ruutjuure leidmine 128
Leida siinuse järgi nurk 129
Päikese kõrgus 130
Saare kaugus 131
Järve laius 132
Kolmnurkne maa-ala 134
Antud nurga suuruse määramine igasuguste mõõtmisteta . 135

Kuues peatükk. **Kus taevas ühtub maaga** 138
Horisont 138
Laev horisondil 141
Horisondi kaugus 141
Gogoli torn 147
Puškini küngas 148
Kus raudteeröópad ühtuvad 148
Ülesandeid majakast 149
Välk 150
Purjekas 151
Horisont Kuul 152
Kuu kraatris 152
Jupiteril 153
Iseseisvaks harjutamiseks 153

Seitsmes peatükk. **Robinsonide geomeetria** (Lehekülgi Jules Verne'ilt) 154
Tähistaeva geomeetria 154
«Saladusliku saare» geograafiline laius 157
Geograafilise pikkuse määramine 160

Teine osa

TOTT JA NALJA GEOMEETRIAS

Kaheksas peatükk. **Geomeetria pimesi** 165
Laevaruumi põhjas 165
Vaadi mõõtmine 166
Mõõdupulk (Mayne-Reidi ülesanne) 167
Mida oligi vaja teostada 168
Arvutuse kontroll 170
Mark Twaini õine rännak 174
Mõistatuslik ringlemine 176
Mõõtmine paljaste kätega 184
Täisnurk pimedas 186

Üheksas peatükk. **Vana ja uut ringist** 188
Egiptlaste ja roomlaste praktiline geomeetria 188
«Seda ma tean ja mäletan hästi» 189
Jack Londoni viga 193
Nõela langetamine 193
Ringjoone sirgestamine 196
Ringi kvadratuur 197
Bingi kolmnurk 201
Pea või jalad? 202
Traat piki ekvaatorit 203
Faktid ja arvutused 204
Tütarlaps köiel 207
Teekond üle pooluse 210
Ülekanderihma pikkus 215
Ülesanne taibukast varesest 218

Kümnes peatükk. **Geomeetria mõõtmiste ja arvutusteta** . . . 220
Konstrueerimine sirklita 220
Plaadi raskuskese 221
Napoleoni ülesanne 223
Lihtsaim trisektor 224
Kell-trisektor 226
Ringjoone jaotamine 227
Löögi suund (ülesanne piljardikuulist) 229
«Tark» kuul 231
Ühe tõmbega 237
Kaliningradi seitse silda 240
Geomeetriline nali 241
Kuju kontrollimine 243
Mäng 243

Üheteistkümnes peatükk. **Suur ja väike geomeetrias** 245
27 000 000 000 000 000 000 sõrmkübaras 245
Rõhk ja ruumala 248
Peenem ämblikuniidist, kuid tugevam terasest 249
Kaks purki 252
Hiiglaslik pabeross 253
Jaanalinnu-muna 253
Epiornise-muna 254
Vene lindude munad 254
Määrata koore kaal muna purustamata 256
Meie müntide mõõted 257
Miljonirublane münt 257
Näitlikud illustratsioonid 259
Meie normaalne kaal 262
Hiiglased ja kääbused 262
Gulliveri geomeetria 263
Mispärast tolm ja pilved hõljuvad õhus 266

Kaheteistkümnes peatükk. **Geomeetriline ökonoomia** 269
Kuidas Pahhom maad ostis (Leo Tolstoi ülesanne) . . . 269
Trapets või ristkülik 274
Ruudu tähelepanuväärne omadus 275
Teistsuguste kujudega maatükid 276
Suurima pindalaga kujundid 278
Naelad 281
Suurima ruumalaga keha 281
Võrdsete tegurite korrutis 282
Suurima pindalaga kolmnurk 283
Kõige raskem pruss 284
Kolmnurksest papitükist 285
Plekksepa kimbatus 286
Treiali kimbatus 289
Kuidas pikendada lauda? 291
Lühim tee 293

Toimetaja R. Toming.
Kaanejoonise valmistanud
M. Laarman.
Tehniline toimetaja
M. Aardma.
Korrektorid A. Sepp ja
H. Sinilaid.

Ladumisele antud 19. XI 1952.
Trükkimisele antud 19. I 1953.
Trükiarv 5000. Paber 54:84, 1/16.
Trükipoognaid 18,75. Formaadile 60×92 kohaldatud trükipoognaid 15,38. Arvutuspoognaid 14,39. MB-00015. Trükikoda „Kommunist", Tallinn, Pikk tänav 2.Tellimise nr. 7010.

На эстонском языке.

Hind rbl. 5.35

Rbl. 5.35

