Tartu Ülikool

Loodus- ja täppisteaduste valdkond

Matemaatika ja statistika instituut

Marie Tempel

Kvadratuurvalemi jääkliikme esitus integraalsel kujul

Matemaatika

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: PhD Evely Kirsiaed

Tartu 2023

KVADRATUURVALEMI JÄÄKLIIKME ESITUS INTEGRAALSEL KUJUL

Bakalaureusetöö

Marie Tempel

Lühikokkuvõte

Selles töös esitame kvadratuurvalemi jääkliikme integraalsel kujul ning anname sellele tulemusele detailse tõestuse. Töös võrdleme L. L. Schumakeri monograafia põhjal saadud interpolatsioonivalemi jääkliiget H. Brunneri monograafias esitatud jääkliikmega ning näitame, et need esitused on ekvivalentsed. Lõpetuseks toome näited, kuidas põhiteoreemi rakendamisel saab esitada kvadratuurvalemite jääkliikmed klassikalisel kujul, mis sisaldab integreeritava funktsiooni mingit kõrget järku tuletist teadmata punktis.

CERCS teaduseriala: P170 Arvutiteadus, arvutusmeetodid, süsteemid, juhtimine (automaatjuhtimisteooria)

Märksõnad: B-splain, diferentssuhted, interpoleerimine, kvadratuurvalemi jääkliige

REMAINDER TERM OF QUADRATURE FORMULA IN INTEGRAL FORM

Bachelor thesis

Marie Tempel

Abstract

In this bachelor thesis we present the reminder term of quadrature formula in integral form to which we will give a detailed proof. We will compare reminders of interpolation formulas constructed by using L.L. Schumaker's monograph and presented in H. Brunner's monograph. We will show that those two reminder term presentations are equivalent. In the end we will show some examples how to use the main theorem of this thesis and get classical reminder terms of quadrature formula, which include some higher derivative at some unknown point.

CERCS research specialisation: P170 Computer science, numerical analysis, systems, control

Key Words: *B*-spline, divided difference, interpolation, remainder term of quadrature formula

Sisukord

Sissejuhatus

Kvadratuurvalemeid kasutatakse määratud integraali leidmisel, kui täpseid meetodeid kasutada ei ole võimalik või mingi põhjusel oleks see ebaotstarbekas. Kõige klassikalisemad kvadratuurvalemid on interpolatsioonitüüpi valemid, mis saadakse interpolatsioonipolünoomide integreerimisel ühtlasel võrgul. Interpolatsioonitüüpi valemite korral on kvadratuurvalemi jääkliikmeks interpolatsioonivalemi jääkliikme integraal. Enamasti esitatakse kvadratuurvalemi jääkliige kujul, mis sisaldab integreeritava funktsiooni mingit kõrget järku tuletist teadmata punktis. Käesoleva bakalaureusetöö eesmärk on esitada tõestus H. Brunneri monograafias toodud kvadratuurvalemi jääkliikme esitusele integraalsel kujul, mis ei sisalda tundmatut konstanti, erinevalt tavapärasest käsitlusest. Lisaks on eesmärk uurida, kas H. Brunneri ja L. L.Šchumakeri monograafiate põhjal saadud interpolatsioonivalemi jääkliikmete esitused integraalsel kujul on ekvivalentsed.

Esimeses peatüki põhiülesandeks on tõestada teoreem, mis annab diferentssuhte esituse integraalsel kujul, kasutades selleks B-splaine. Antud teoreemi tõestamiseks on esitatud Taylori valem jääkliikmega integraalsel kujul ning mõned diferentssuhtega seotud tulemused. Teises peatükis on L. L. Schumakeri monograafia ja numbriliste meetodite konspekti põhjal tuletatud interpolatsioonipolünoomi jääkliige integraalsel kujul ning näidatud, et see on samaväärne H. Brunneri monograafias esitatud interpolatsioonipolünoomi jääkliikmega, mis sisaldab Peano tuuma. Kolmandas peatükis on toodud H. Brunneri monograafiast kvadratuurvalemi jääkliige ning sellele on esitatud tõestus. Neljandas peatükis on näited, kuidas numbriliste meetodite konspektis toodud kvadratuurvalemite jääkliikmeid siinses töös esitatud tulemuste põhjal tuletada.

1 Taylori valem ja diferentssuhte esitus integraalsel kujul

Enamasti esitatakse Taylori valemi jääkliige Lagrange'i kujul. Meie vaatame Taylori valemit kujul, kus jääkliige on esitatud integraalina. Sel moel vabaneme Lagrange'i jääkliikmes esinevast tundmatust konstandist.

Teoreem 1 (Taylori valem)**.** *Kui funktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on $n+1$ korda pidevalt diferentseeruv punkti $a \in \mathbb{R}$ ümbruses, siis iga x korral sellest ümbrusest kehtib*

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n+1}(x), \tag{1}$$

kus jääkliige esitub kujul

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Tõestus. Tõestame valemi (1) kasutades matemaatilist induktsiooni. Baasi tõestamiseks kasutame Newtoni-Leibnizi valemit

$$\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a),$$

millest saame valemi (1) juhul $n = 0$:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt.$$

Kasutades ositi integreerimise valemit

$$\int_a^x u\,dv = uv\Big|_a^x - \int_a^x v\,du,$$

kus $u = f'(t)$ ja $dv = (x-t)^0 dt$, saame $du = f''(t)dt$, $v = -(x-t)$ ja

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)dt.$$

Oleme näidanud, et valem (1) kehtib juhul $n = 1$. Eeldame, et kehtib

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt$$

ja näitame, et siis kehtib

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n}dt.$$

Kasutades ositi integreerimist, kus $u = f^{(n)}(t)$ ja $dv = (x-t)^{n-1}dt$, siis $du = f^{(n+1)}(t)dt$ ja $v = -\frac{1}{n}(x-t)^n$ ning saame

$$\begin{aligned} f(x) =& f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \\ &+ \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{f^{(n)}(a)}{n}(x-a)^n + \frac{1}{n}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt\right) \end{aligned}$$

ehk

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n}dt,$$

mida oligi tarvis tõestada. □

Märkus 1. Teoreemis 1 eeldasime, et $f \in C^{n+1}[I]$. Teoreemi väide jääb kehtima, kui $f \in L_1^{n+1}[I]$, st. $f^{(n)}$ on absoluutselt pidev lõigus I ning $f^{(n+1)}$ on Lebesgue'i mõttes integreeruv, st. $f^{(n+1)} \in L_1[I]$. Ruumi $L_1^{n+1}[I]$ nimetatakse Sobolevi ruumiks (vt. [2], lk. 19). Kehtib $C^{n+1}[I] \subseteq L_1^{n+1}[I]$.

Definitsioon 1. Olgu antud paarikaupa erinevad argumendi väärtused

$t_0, t_1, \ldots, t_r$. Funktsiooni f nullindat järku diferentssuhe defineeritakse võrdusega

$$[t_i]f = f(t_i).$$

Esimest järku diferentssuhe defineeritakse

$$[t_i, t_j]f = \frac{f(t_j) - f(t_i)}{t_j - t_i}.$$

Üldiselt defineeritakse r-järku diferentssuhe valemiga

$$[t_0, t_1, \ldots, t_r]f = \frac{[t_1, \ldots, t_r]f - [t_0, \ldots, t_{r-1}]f}{t_r - t_0}.$$

Definitsioon 2. Olgu antud reaalarvud $\ldots < t_{-1} < t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$, mida nimetame splaini sõlmedeks. Fikseerime arvu $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 1$. B-splainideks järguga m nimetatakse funktsioone

$$Q_i^m(x) = (-1)^m [t_i, \ldots, t_{i+m}](x - t)_+^{m-1}, \qquad i \in \mathbb{Z},$$

kus

$$(x - t)_+^0 = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \geq t, \\ 0, & \text{kui } x < t, \end{cases}$$

ja $m > 1$ korral

$$(x - t)_+^{m-1} = \begin{cases} (x - t)^{m-1}, & \text{kui } x \geq t, \\ 0, & \text{kui } x < t. \end{cases}$$

Näide 1. Juhul $m = 1$ saame definitsiooni põhjal

$$Q_i^1(x) = -[t_i, t_{i+1}](x - t)_+^0 = -\frac{(x - t_{i+1})_+^0 - (x - t_i)_+^0}{t_{i+1} - t_i} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{t_{i+1} - t_i}, & t_i \leq x < t_{i+1}, \\ 0, & \text{mujal}. \end{cases}$$

Esimest järku splain on tükiti konstantne funktsioon.

Alternatiivselt saame B-splainid defineerida järgmise rekursiivse seose abil.

Definitsioon 3. Olgu antud reaalarvud $\ldots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \ldots$. Defineerime m-järku B-splainid Q_i^m, $i \in \mathbb{Z}$, võrdusega

$$Q_i^m(x) = \frac{(x - t_i)Q_i^{m-1}(x) + (t_{i+m} - x)Q_{i+1}^{m-1}(x)}{t_{i+m} - t_i}, \; m \geq 2,$$

kus

$$Q_i^1(x) = \begin{cases} \frac{1}{t_{i+1}-t_i}, & t_i \leq x < t_{i+1}, \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Näide 2. Teist järku splain Q_i^2 esitub kujul

$$Q_i^2 = \begin{cases} \frac{x-t_i}{(t_{i+2}-t_i)(t_{i+1}-t_i)}, & t_i \leq x < t_{i+1}, \\ \frac{t_{i+2}-x}{(t_{i+2}-t_i)(t_{i+2}-t_{i+1})}, & t_{i+1} \leq x < t_{i+2}, \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Teist järku splain on lineaarsplain ehk tükiti lineaarpolünoom.

Käesoleva peatüki põhitulemuse tõestamiseks vajame me järgnevaid abitulemusi.

Lause 1. *Olgu P_{m-1} ülimalt $m-1$-astme polünoom. Siis*

$$[t_0, \ldots, t_m]P_{m-1}(t) = 0,$$

st. m-järku diferentssuhte ülimalt $m-1$ astme polünoomist on 0.

Tõestus. Olgu $a = \min\{t_0, \ldots, t_m\}$ ja $b = \max\{t_0, \ldots, t_m\}$. Numbriliste meetodite konspektis (vt.[3], lk 55, Teoreem 17) on tõestatud, et diferentssuhe esitub kujul

$$[t_0, \ldots, t_m]P_{m-1} = \frac{P_{m-1}^{(m)}(\xi)}{m!}, \; \xi \in (a, b).$$

On ilmne, et m-järku tuletis ülimalt $m-1$ astme polünoomist on null, ning seega kehtib

$$[t_0, \ldots, t_m]P_{m-1} = 0. \qquad \square$$

Lause 2. *Olgu* $t_i, \ldots, t_{i+m}$ *paarikaupa erinevad sõlmed ja* $1 \le k \le m-1$, $k \in \mathbb{Z}$. *Siis*

$$(-1)^{k+1}[t_i, \ldots, t_{i+m}](x-t)_+^k = [t_i, \ldots, t_{i+m}](t-x)_+^k \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tõestus. Näitame esmalt, et $k \ge 1$ korral kehtib võrdus

$$(t-x)^k = (t-x)_+^k - (-1)^{k+1}(x-t)_+^k. \tag{2}$$

Olgu t fikseeritud ja k paarisarv. Siis $x \ge t$ korral

$$(t-x)_+^k = 0$$

ja

$$-(-1)^{k+1}(x-t)_+^k = (x-t)^k = (t-x)^k.$$

Kui $x < t$, siis

$$(t-x)_+^k = (t-x)^k$$

ja

$$(x-t)_+^k = 0.$$

Seega paarisarvulise k korral võrdus (2) kehtib. Analoogiliselt, olgu k paaritu. Siis $x \ge t$ korral

$$(t-x)_+^k = 0$$

ja

$$-(-1)^{k+1}(x-t)_+^k = -(x-t)_+^k = -(x-t)^k = (t-x)^k.$$

Kui $x < t$, siis

$$(t-x)_+^k = (t-x)^k$$

ja

$$(x-t)_+^k = 0.$$

Seega paarituarvulise k korral samuti võrdus (2) kehtib. Leiame võrduse (2) mõlemast poolest m-järku diferentssuhte, saame

$$[t_i, \dots, t_{i+m}](t-x)^k = [t_i, \dots, t_{i+m}](t-x)_+^k - (-1)^{k+1}[t_i, \dots, t_{i+m}](x-t)_+^k.$$

Kuna lause 1 põhjal m-järku diferentssuhe ülimalt $m-1$ astme polünoomist on 0, siis viimase võrduse vasak pool on 0 ning lause on tõestatud. □

Märkus 2. Kui $k = 0$, siis lause 2 väide kehtib peaaegu kõikjal, välja arvatud $x = \{t_i, \dots, t_{i+1}\}$ korral.

Numbriliste meetodite kursuses (vt. [3], lk. 50, Lause 15) on tõestatud järgmine tulemus diferentssuhte esituse kohta.

Lause 3. *Kehtib võrdus*

$$[t_0, \dots, t_m]f = \sum_{i=0}^{m} \frac{f(t_i)}{(t_i - t_0)\dots(t_i - t_{i-1})(t_i - t_{i+1})\dots(t_i - t_m)} = \sum_{i=0}^{m} \frac{f(t_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{m}(t_i - t_j)}.$$

Käesoleva peatüki põhitulemusena tõestame teoreemi diferentssuhte esituse kohta integraalsel kujul (vt. [4], lk 128).

Teoreem 2. *Olgu antud sõlmed $t_i < \dots < t_{i+m}$, fikseerime k, $0 \leq k \leq m-1$. Siis m-järku diferentssuhe on esitatav valemiga*

$$[t_i, \dots, t_{i+m}]f = \int_{t_i}^{t_{i+m}} \frac{(-1)^k D_+^k Q_i^m(x) f^{(m-k)}(x)dx}{(m-1)!}$$

iga $f \in L_1^{m-k}[t_i, t_{i+m}]$ korral. (Siin D_+^k tähistab parempoolse tuletisoperaatori k-kordset rakendamist.)

Tõestus. Olgu $f \in L_1^{m-k}[t_i, t_{i+m}]$. Taylori valemi 1 põhjal

$$\begin{aligned} f(t) = &\sum_{n=0}^{m-k-1} \frac{f^{(n)}(t_{i+m})(t-t_{i+m})^n}{n!} + \\ &+ \frac{1}{(m-k-1)!}\int_{t_i}^{t} f^{(m-k)}(x)(t-x)^{m-k-1}dx = \\ = &\sum_{n=0}^{m-k-1} \frac{(-1)^n f^{(n)}(t_{i+m})(t_{i+m}-t)^n}{n!} + \\ &+ \frac{1}{(m-k-1)!}\int_{t_i}^{t_{i+m}} (t-x)_+^{m-k-1} f^{(m-k)}(x)dx. \end{aligned}$$

Leiame mõlemast poolest m-järku diferentssuhte, arvestades seejuures, et m-järku diferentssuhe ülimalt $m-1$-astme polünoomist on lause 1 põhjal 0, saame

$$[t_i, \ldots, t_{i+m}]f = \frac{1}{(m-k-1)!}\int_{t_i}^{t_{i+m}} [t_i, \ldots, t_{i+m}](t-x)_+^{m-k-1} f^{(m-k)}(x)dx.$$

Lause 2 põhjal

$$\begin{aligned} &[t_i, \ldots, t_{i+m}]f = \\ &= \frac{1}{(m-k-1)!}\int_{t_i}^{t_{i+m}} (-1)^{m-k}[t_i, \ldots, t_{i+m}](x-t)_+^{m-k-1} f^{(m-k)}(x)dx. \end{aligned}$$

Arvestades B-splaini definitsiooni $Q_i^m(x) = (-1)^m[t_i, \ldots, t_{i+m}](x-t)_+^{m-1}$ ja võrdust $(x-t)_+^{m-k-1} = \frac{(m-k-1)!}{(m-1)!}D_+^k(x-t)_+^{m-1}$, saame, et

$$\begin{aligned} &[t_i, \ldots, t_{i+m}]f = \\ &= \int_{t_i}^{t_{i+m}} \frac{(-1)^{m-k}}{(m-k-1)!}[t_i, \ldots, t_{i+m}]\frac{(m-k-1)!}{(m-1)!}D_+^k(x-t)_+^{m-1} f^{(m-k)}(x)dx = \\ &= \int_{t_i}^{t_{i+m}} \frac{(-1)^k}{(m-1)!}D_+^k(-1)^m[t_i, \ldots, t_{i+m}](x-t)_+^{m-1} f^{(m-k)}(x)dx = \\ &= \int_{t_i}^{t_{i+m}} \frac{(-1)^k D_+^k Q_i^m(x) f^{(m-k)}(x)dx}{(m-1)!}. \end{aligned}$$

Teoreem on tõestatud. □

2 Interpolatsioonivalemi jääkliige

Interpolatsiooniülesande korral on antud paarikaupa erinevad sõlmed t_i, $i = 0, \dots, n$, ja väärtused f_i, $i = 0, \dots, n$, otsitakse funktsiooni f nii et $f(t_i) = f_i$, $i = 0, \dots, n$. Üheks tingimusi rahuldavaks funktsiooniks on Lagrange'i interpolatsioonipolünoom

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x),$$

kus

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - t_j}{t_i - t_j}, \qquad i = 0, \dots, n,$$

on Lagrange'i fundamentaalpolünoomid.

Oletame nüüd, et väärtused f_i pärinevad mingi funktsiooni f graafikult, st. $f_i = f(t_i)$, $i = 0, \dots, n$. Siis saame rääkida interpoleerimisel tekkivast veast ehk interpolatsioonivalemi jääkliikmest

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x). \tag{3}$$

Numbriliste meetodite konspektis (vt.[3], lk. 54) on tõestatud, et interpolatsioonivalemi jääkliikme saab esitada kujul

$$R_n(x) = [x, t_0, \dots, t_n]f \cdot \prod_{j=0}^{n} (x - t_j).$$

Kasutades teoreemi 2 saame diferentssuhte esitada integraalsel kujul ning seega ka interpolatsioonivalemi jääkliikme.

Teoreem 3. *Olgu $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. Siis $f \in L_1^{n+1-k}[a,b]$ korral saab interpolatsioonivalemi jääkliikme (3) esitada kujul*

$$R_n(x) = (x - t_0) \dots (x - t_n) \int_a^b \frac{(-1)^k D_+^k Q_0^{n+1}(s) f^{(n+1-k)}(s)}{n!} ds, \tag{4}$$

kus $0 \leq k \leq n$ *ning* Q_0^{n+1} *on* $n+1$*-järku* B*-splain sõlmedega* $x, t_0, \ldots, t_n$.

H. Brunneri monograafias (vt. [1], lk. 43) on esitatud sarnane tulemus, kus interpolatsioonivalemi jääkliige on esitatud integraalsel kujul.

Teoreem 4. *Olgu* $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ *interpolatsioonivalemi sõlmed ning* $f \in C^d[a, b]$, $1 \leq d \leq n+1$. *Interpolatsioonivalemi jääkliige* (3) *on esitatav kujul*

$$R_n(x) = \int_a^b K_d(x, s) f^{(d)}(s) ds, \; x \in [a, b], \tag{5}$$

kus

$$K_d(x, s) = \frac{1}{(d-1)!} \left((x-s)_+^{d-1} - \sum_{i=0}^{n} l_i(x)(t_i - s)_+^{d-1} \right).$$

Tõestus. Näitame, et esitused (4) ja (5) on samaväärsed. Võime eeldada, et $x \notin \{t_0, \ldots, t_n\}$, sest vastasel korral mõlemas esituses $R_n(x) = 0$. Tõepoolest, esituse (5) korral $K_d(t_j, s) = \frac{1}{(d-1)!} \left((t_j - s)_+^{d-1} - (t_j - s)_+^{d-1} \right) = 0$. Esituses (4) on Q_0^{n+1} n-astme B-splain sõlmedega $x, t_0, \ldots, t_n$, sealjuures leidub j, $1 \leq j \leq n$, nii, et $t_{j-1} < x < t_j$. Olgu k, $0 \leq k \leq n$, fikseeritud ning tähistame $d = n+1-k$, siis saame võrduse (4) esitada kujul

$$R_n(x) = (x - t_0) \ldots (x - t_n) \int_a^b \frac{(-1)^{n+1-d} D_+^{n+1-d} Q_0^{n+1}(s) f^{(d)}(s)}{n!} ds \tag{6}$$

Definitsiooni 2 järgi $Q_0^{n+1}(s) = (-1)^{n+1}[x, t_0, \ldots, t_n](s-t)_+^n$. Rakendades sellele parempoolse tuletise võtmise operaatorit $n+1-d$ korda, saame

$$\begin{aligned} D_+^{n+1-d} Q_0^{n+1}(s) &= (-1)^{n+1}[x, t_0, \ldots, t_n] D_+^{n+1-d}(s-t)_+^n = \\ &= (-1)^{n+1} n(n-1) \ldots (n-(n-d))[x, t_0, \ldots, t_n](s-t)_+^{d-1}. \end{aligned}$$

Asendades selle võrdusse (6) ning kasutades lauset 2, saame

$$
\begin{aligned}
R_n(x) &= (x-t_0)\dots(x-t_n)\cdot \\
&\cdot \int_a^b \frac{(-1)^{n+1-d}(-1)^{n+1}\frac{n!}{(d-1)!}[x,t_0,\dots,t_n](s-t)_+^{d-1}f^{(d)}(s)}{n!}ds = \\
&= \prod_{i=0}^{n}(x-t_i)\int_a^b \frac{(-1)^{-d}(-1)^{d}[x,t_0,\dots,t_n](t-s)_+^{d-1}f^{(d)}(s)}{(d-1)!}ds = \\
&= \prod_{i=0}^{n}(x-t_i)\int_a^b \frac{[x,t_0,\dots,t_n](t-s)_+^{d-1}f^{(d)}(s)}{(d-1)!}ds.
\end{aligned}
$$

Lause 3 põhjal saab diferentssuhte esitada kujul

$$
[x,t_0,\dots,t_n](t-s)_+^{d-1} = \frac{(x-s)_+^{d-1}}{\prod\limits_{j=0}^{n}(x-t_j)} + \sum_{i=0}^{n}\frac{(t_i-s)_+^{d-1}}{(t_i-x)\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(t_i-t_j)}.
$$

Viimast võrdust kasutades saame

$$
\begin{aligned}
R_n(x) &= \frac{1}{(d-1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-t_i)\cdot \\
&\cdot \int_a^b \left(\frac{(x-s)_+^{d-1}}{\prod\limits_{j=0}^{n}(x-t_j)} + \sum_{i=0}^{n}\frac{(t_i-s)_+^{d-1}}{(t_i-x)\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(t_i-t_j)}\right) f^{(d)}(s)ds = \\
&= \frac{1}{(d-1)!}\int_a^b \left((x-s)_+^{d-1} - \sum_{i=0}^{n}\frac{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x-t_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(t_i-t_j)}(t_i-s)_+^{d-1}\right) f^{(d)}(s)ds = \\
&= \frac{1}{(d-1)!}\int_a^b \left((x-s)_+^{d-1} - \sum_{i=0}^{n} l_i(x)(t_i-s)_+^{d-1}\right) f^{(d)}(s)ds.
\end{aligned}
$$

Teoreem on tõestatud. □

3 Kvadratuurvalemi jääkliige

Kvadratuurvalemite abil leitakse määratud integraali $\int_a^b f(x)dx$ väärtus juhul, kui ei õnnestu leida algfunktsiooni elementaarfunktsioonide seast või kui on teada vaid lõplik hulk funktsiooni f väärtuseid. Kvadratuurvalemi üldkuju on

$$\int_a^b f(x) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(t_i) + R_n(f), \tag{7}$$

kus fikseeritud on kvadratuurvalemi kordajad A_i, $i \in 0, 1, \ldots, n$, ja kvadratuurvalemi sõlmed $t_i \in [a, b]$, $i \in 0, 1, \ldots, n$.

Kõige lihtsamad kvadratuurvalemid tekivad interpoleerimise abil, kus funktsioon f asendatakse interpolatsioonipolünoomiga $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$.

Kvadratuurvalemi saab, kui integreerida antud interpolatsioonipolünoomi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b P_n(x)dx + \int_a^b R_n(x)dx.$$

Kasutades Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi, saame kvadratuurvalemi kordajad leida seosest

$$\sum_{i=0}^{n} A_i f(t_i) = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(t_i) l_i(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \left(\int_a^b l_i(x)dx \right) f(t_i).$$

Kuna see kehtib iga funktsiooni f korral, siis

$$A_i = \int_a^b l_i(x)dx.$$

Interpolatsioonitüüpi kvadratuurvalemi jääkliige avaldub aga interpolatsioonivalemi jääkliikme kaudu kujul

$$R_n(f) = \int_a^b R_n(x)dx. \tag{8}$$

Kvadratuurvalemi täpsus $p \geq 1$ tähendab, et kõigi ülimalt p-astme polünoomide korral on valem täpne.

Käesoleva bakalaureusetöö põhieesmärgiks on tõestada järgmine teoreem (vt [1], lk 45).

Teoreem 5. *Olgu kvadratuurvalem (7) täpsusega p ning $f \in C^d[a,b]$, $1 \leq d \leq p+1$. Kvadratuurvalemi jääkliige (8) esitub kujul*

$$R_n(f) = \int_a^b K_d(s) f^{(d)}(s) ds,$$

kus

$$K_d(s) = \frac{1}{(d-1)!} \left(\int_a^b (x-s)_+^{d-1} dx - \sum_{i=0}^n A_i (t_i - s)_+^{d-1} \right).$$

Tõestus. Teoreemi 4 põhjal, saame

$$\begin{aligned}
&\int_a^b R_n(x) dx = \\
&= \int_a^b \int_a^b \frac{1}{(d-1)!} \left((x-s)_+^{d-1} - \sum_{i=0}^n l_i(x)(t_i - s)_+^{d-1} \right) f^{(d)}(s) ds dx = \\
&= \int_a^b \frac{1}{(d-1)!} \int_a^b \left((x-s)_+^{d-1} - \sum_{i=0}^n l_i(x)(t_i - s)_+^{d-1} \right) dx f^{(d)}(s) ds = \\
&= \int_a^b \frac{1}{(d-1)!} \left(\int_a^b (x-s)_+^{d-1} dx - \sum_{i=0}^n \int_a^b l_i(x) dx (t_i - s)_+^{d-1} \right) f^{(d)}(s) ds = \\
&= \int_a^b K_d(s) f^{(d)}(s) ds,
\end{aligned}$$

kus

$$K_d(s) = \frac{1}{(d-1)!} \left(\int_a^b (x-s)_+^{d-1} dx - \sum_{i=0}^n A_i (t_i - s)_+^{d-1} \right).$$

Teoreem on tõestatud. $\square$

4 Näited

Vaatleme järgnevas konkreetseid, Numbriliste meetodite kursuses käsitletud kvadratuurvalemeid.

4.1 Trapetsvalem

Trapetsvalem esitub kujul (vt. [3], lk. 77)

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\frac{f(a)-f(b)}{2} - \frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi),\ \xi \in (a,b).$$

Siin $A_0 = A_1 = \frac{b-a}{2}$, $t_0 = a, t_1 = b$, valem on täpne lineaarpolünoomide korral, seega $p = 1$. Teoreemi 5 põhjal saame valida kas $d = 1$ või $d = 2$. Olgu $d = 2$ ning $f \in C^2[a,b]$, siis jääkliige esitub kujul

$$R_1(f) = \int_a^b K_2(s)f''(s)ds,$$

kus

$$\begin{aligned} K_2(s) &= \int_a^b (x-s)_+ dx - \frac{b-a}{2}\left((a-s)_+ + (b-s)_+\right) = \\ &= \int_s^b (x-s)dx - \frac{b-a}{2}(b-s) = \\ &= \left.\frac{(x-s)^2}{2}\right|_s^b - \frac{(b-a)(b-s)}{2} = \\ &= \frac{(b-s)(a-s)}{2}. \end{aligned}$$

Kuna $\frac{(b-s)(a-s)}{2} \leq 0$ iga $s \in [a,b]$ korral, siis $K_2(s)$ ei muuda märki piirkonnas $[a,b]$ ja saame kasutada inetgraalarvutuse keskväärtusteoreemi, mille kohaselt

$$R_1(f) = f''(\xi)\int_a^b \frac{(b-s)(a-s)}{2}ds = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi).$$

Valides teoreemis 5 $d = 1$, saame jääkliikme esitada kujul

$$R_1(f) = \int_a^b K_1(s) f'(s) ds,$$

kus

$$K_1(s) = \int_a^b (x-s)_+^0 dx - \frac{b-a}{2}\left((a-s)_+^0 + (b-s)_+^0\right) = \int_s^b dx - \frac{b-a}{2} = \frac{a+b-2s}{2}.$$

Kuna $K_1(s)$ muudab märki piirkonnas $s \in [a, b]$, siis me keskväärtusteoreemi kasutada ei saa, kuid jääkliikme integraalsel kujul saame välja kirjutada, kusjuures piisavalt sileda f korral on viimased esitused samaväärsed

$$R_1(d) = \int_a^b \left(\frac{a+b}{2} - s\right) f'(s) ds = \int_a^b \frac{(b-s)(a-s)}{2} f''(s) ds.$$

4.2 Simpsoni valem

Simpsoni valem esitub kujul (vt. [3], lk. 79)

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) - \frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi), \ \xi \in (a, b),$$

ning on teada, et see on täpne kuuppolünoomide korral, st. $p = 3$. Siin $t_0 = a$, $t_1 = \frac{a+b}{2}$, $t_2 = b$ ja $A_0 = A_2 = \frac{b-a}{6}$, $A_1 = 4\frac{b-a}{6}$. Teoreemi 5 põhjal, olgu $d = 4$ ja $f \in C^4[a, b]$, saame

$$R_2(f) = \int_a^b K_4(s) f^{(4)}(s) ds,$$

kus

$$K_4(s) = \frac{1}{3!}\left(\int_a^b (x-s)_+^3 dx - \frac{b-a}{6}\left((a-s)_+^3 + 4\left(\frac{a+b}{2}-s\right)_+^3 + (b-s)_+^3\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{6}\int_s^b (x-s)^3 dx - \frac{b-a}{36}\left(4\left(\frac{a+b}{2}-s\right)_+^3 + (b-s)^3\right) =$$
$$= \frac{(b-s)^4}{24} - \frac{b-a}{36}\left(4\left(\frac{a+b}{2}-s\right)_+^3 + (b-s)^3\right).$$

Kui $s \in [\frac{a+b}{2}, b]$, siis

$$K_4(s) = \frac{(b-s)^4}{24} - \frac{(b-a)(b-s)^3}{36} =$$
$$= (b-s)^3\frac{3(b-s)-2(b-a)}{72} =$$
$$= \frac{(b-s)^3(2a+b-3s)}{72} \leq 0.$$

Kui $s \in [a, \frac{a+b}{2})$, siis

$$K_4(s) = \frac{(b-s)^4}{24} - \frac{b-a}{36}\left(4\left(\frac{a+b}{2}-s\right)^3 + (b-s)^3\right) =$$
$$= \frac{(a-s)^3(a+2b-3s)}{72} \leq 0.$$

Kuna $K_4(s) \leq 0$ iga $s \in [a,b]$ korral, siis K_4 ei muuda märki piirkonnas $[a,b]$ ja saame kasutada inetgraalarvutuse keskväärtusteoreemi, mille kohaselt

$$R_2(f) = f^{(4)}(\xi)\int_a^b \left(\frac{(b-s)^4}{24} - \frac{b-a}{36}\left(4\left(\frac{a+b}{2}-s\right)_+^3 + (b-s)^3\right)\right) ds =$$
$$= f^{(4)}(\xi)\left(\frac{(b-a)^5}{120} - \frac{b-a}{9}\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(\frac{a+b}{2}-s\right)^3 ds - \frac{(b-a)^5}{144}\right) =$$
$$= f^{(4)}(\xi)\left(\frac{(b-a)^5}{720} - \frac{b-a}{36}\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^4\right) =$$
$$= -\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\xi) = -\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi).$$

Kokkuvõte

Töös toodi tõestus interpolatsioonitüüpi kvadratuurvalemi jääkliikme esitusele integraalsel kujul ilma tundmatu konstandita. Selleks on esmalt tõestatud L. L. Schumakeri raamatus esitatud diferentssuhte esitus (Teoreem 2)

$$[t_i, \ldots, t_{i+m}]f = \int_{t_i}^{t_{i+m}} \frac{(-1)^k D_+^k Q_i^m(x) f^{(m-k)}(x)dx}{(m-1)!}, \quad 0 \leq k \leq m-1.$$

Saadud diferentssuhte esituse põhjal on interpolatsioonipolünoomi jääkliige esitatud kujul (Teoreem 3)

$$R_n(x) = (x-t_0)\ldots(x-t_n) \int_a^b \frac{(-1)^k D_+^k Q_0^{n+1}(s) f^{(n+1-k)}(s)}{n!} ds$$

ja on näidatud, et see on ekvivalentne Brunneri monograafias toodud valemiga

$$R_n(x) = \int_a^b K_d(x,s) f^{(d)}(s)ds, \; x \in [a,b],$$

kus

$$K_d(x,s) = \frac{1}{(d-1)!}\left((x-s)_+^{d-1} - \sum_{i=0}^{n} l_i(x)(t_i-s)_+^{d-1}\right), \quad 1 \leq d \leq n+1.$$

Interpolatsioonitüüpi kvadratuurvalemi jääkliige esitub kujul (Teoreem 5)

$$R_n(f) = \int_a^b K_d(s) f^{(d)}(s)ds,$$

kus

$$K_d(s) = \frac{1}{(d-1)!}\left(\int_a^b (x-s)_+^{d-1}dx - \sum_{i=0}^{n} A_i(t_i-s)_+^{d-1}\right).$$

Töö lõpetuseks on toodud ka mõned näited, kuidas põhiteoreemi rakendamisel saab tuletada kvadratuurvalemi jääkliikmeid klassikalisel kujul.

Viited

[1] Brunner, H. (2004). *Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Differential Equations*. 1st edition. Cambridge University Press.

[2] Oja, E. & Oja, P. (1991). *Funktsionaalanalüüs*. Tartu Ülikool.

[3] Oja, P. (2017). *Numbriliste meetodite konspekt*. URL: https://courses.ms.ut.ee/2023/numbr/spring/uploads/Main/NM2017est.pdf (vaadatud 09.05.2023)

[4] Schumaker, L. L. (1993). *Spline Functions. Basic Theory*. Krieger Publishing Company.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Marie Tempel,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose "Kvadratuurvalemi jääkliikme esitus integraalsel kujul", mille juhendaja on Evely Kirsiaed, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 4.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaaloman-di ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Marie Tempel

09.05.2023