TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL
Teoreetilise mehaanika kateeder

KOSMOSEAPARAADI ORBIIDI KORRIGEERIMISE ÜLESANDE LAHENDAMINE PONTRJAGINI MAKSIMUMPRINTSIIBIL

Diplomitöö

Töö teostaja: Vooglaid, Maie
rakendusmatemaatika
V kursus

Juhendaja: dots. kt. I.Vainikko

Lugupidamisega juhendajale
Maie Vooglaid
21. juuni 1973

Tartu, 1973

SISSEJUHATUS

Sõjajärgsetel aastatel on üldise progressi ja tehniliste teaduste arengu taustal juhtimise teooria eriti silma paistnud oma uute ideede ning meetoditega. Juhtimise teooria areng on tihedalt seotud elektronarvutite ilmumisega, tänu millele omas mõtet keeruliste algoritmide koostamine juhtimise ülesannete lahendamiseks.

Alguses tegeldi juhtimise stabiilsuse küsimustega, kuid see ei võimaldanud eraldada välja ühest lahendit. Optimeerimisülesandeid, mis kerkisid üles juhtimise teoorias, ei õnnestunud viia üle klassikaliste variatsioonülesannete lahendamisele. Nad nõudsid täiesti uut aparatuuri. Tähtis koht juhtimisteooria arengus on L.S. Pontrjagini poolt formuleeritud maksimumprintsiibil, mis võimaldas optimaalse juhtimise ülesande viia mingile spetsiaalsele rajaülesandele harilike diferentsiaalvõrrandite jaoks.

Käesolevas töös ongi vaadeldud optimaalse juhtimise ülesande lahendamist Pontrjagini maksimumprintsiibi abil, kusjuures ülesanne on lahendatud numbriliselt Newtoni meetodiga.

Kaks esimest paragrahvi on referatiivsed. Esimeses neist tutvustatakse maksimumprintsiipi üldjuhul [1] , teises paragrahvis on esitatud maksimumprintsiibile üles ehitatud ligikaudsetest meetoditest üks enamkasutatavaid - Newtoni meetod [2] .

Kolmandas paragrahvis on formuleeritud ülesanne kosmoseaparaadi juhtimisest ringikujulisele orbiidile, on esitatud lahendamise algoritm ning programm algoritmilises keeles M A L G O L.

§1. Pontrjagini maksimumprintsiip

Vaatleme objekti liikumist, mida iseloomustab diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_m),\ i=1, 2, \ldots, n$$

ehk esitatuna vektorkujul

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{u}). \qquad (1.1)$$

Vektorit $\vec{x}(t) \in E^n$ nimetatakse faasimuutujaks - ta määrab igal ajamomendil t süsteemi (1.1) asukoha. Vektorit $\vec{u}(t) \in E^m$ nimetatakse juhtimiseks. Üldiselt võib eeldada, et $\vec{u}(t) \in U$, kus hulk $U \subset E^m$ on teatud kinnine hulk, mis ei sõltu vektorist $\vec{x}$ ja ajast t.

Öeldakse, et juhtimine $\vec{u}(t)$ on lubatav, kui ta rahuldab järgmisi tingimusi:

a) $\vec{u}(t)$ on määratud ja tükati pidev mingil lõigul $t_0 \leq t \leq t_1$,

b) $u(t) \in U$ iga t korral lõigust $[t_0, t_1]$.

Vastavalt tingimusele a) võib juhtimine $\vec{u}(t)$ omada lõigul $[t_0, t_1]$ lõpliku arvu katkevuspunkte, kusjuures katkevus - punktides peab ta olema vasakult pidev. Lisaks eeldame, et punktides t_0 ja t_1 on juhtimine $\vec{u}(t)$ pidev. Funktsioonide

$$f_i(\vec{x}, \vec{u}),\ \frac{\partial f_i(\vec{x}, \vec{u})}{\partial x_j},\ i,\ j = 1,2, \ldots, n$$

kohta eeldame, et nad on määratud ja pidevad hulgal $E^n \times U$.

Olgu faasiruumis E^n antud kaks punkti $\vec{x}_0$ ja $\vec{x}_1$, mis määravad selle süsteemi alg- ja lõppasendi. Vaatleme mingit protsessi $(\vec{u}(t), \vec{x}(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, mis viib objekti punktist $\vec{x}_0$ punkti $\vec{x}_1$, see tähendab, et $\vec{x}(t)$ on süsteemi (1.1) selline lahend, mis vastab lubatavale juhtimisele $\vec{u} = \vec{u}(t)$ ning rahuldab alg- ja lõpptingimusi

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0, \quad \vec{x}(t_1) = \vec{x}_1. \qquad (1.2)$$

Liikumise optimaalsuse kriteeriumiks olgu funktsionaal

$$J(\vec{x}, \vec{u}) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(\vec{x}(t), \vec{u}(t))dt. \qquad (1.3)$$

Öeldakse, et lubatav protsess $(\vec{u}(t), \vec{x}(t))$ on optimaalne ning tähistatakse $(\vec{u}^*(t), \vec{x}^*(t))$, kui ta minimeerib funktsionaali (1.3).

Optimaalsuse tarviliku tingimuse formuleerimiseks toome sisse funktsiooni H, mis sõltub muutujatest $x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_m$ ning teatud abimuutujatest $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n$. Viimaseid nimetatakse impulssideks. Tähistades $(\psi_1, \ldots, \psi_n) = \vec{\psi}$, $(\psi_0, \vec{\psi}) = \tilde{\psi}$ ning $(f_0, \vec{f}) = \tilde{f}$ defineerime funktsiooni H järgmiselt:

$$H(\tilde{\psi}, \vec{x}, \vec{u}) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f_i(\vec{x}, \vec{u}). \qquad (1.4)$$

Funktsiooni H kaudu saame impulsside jaoks järgmise diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H(\tilde{\psi}, \vec{x}, \vec{u})}{\partial x_i}, \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

$$(1.5)$$

Süsteemi (1.5) nimetatakse kaassüsteemiks.

<u>Teoreem</u>: Olgu $\vec{u}(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, lubatav juhtimine, mis viib faasiruumi punkti asendist $\vec{x}_0$ asendisse $\vec{x}_1$, $\vec{x}(t)$ aga olgu temale vastav trajektoor. Protsessi $(\vec{u}(t), \vec{x}(t))$ optimaalsuseks funktsionaali (1.3) miinimumi mõttes on tarvilik, et eksisteeriks mittepositiivne konstant ψ_0 ning süsteemi (1.5) selline lahend $\vec{\psi}(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, et vektorfunktsioon $\tilde{\psi} = (\psi_0, \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$ oleks nullist erinev ning igal ajamomendil t, $t_0 \leq t \leq t_1$, oleks täidetud maksimumprintsiip (1.6).

$$\max_{\vec{u} \in U} H(\tilde{\psi}(t), \vec{x}^*(t), \vec{u}) = H(\tilde{\psi}(t), \vec{x}^*(t), \vec{u}^*(t)) \equiv 0 \quad (1.6)$$

Teoreemi tõestus on antud [1] lk. 252.

2. <u>Newtoni meetod</u>

1. Optimaalse protsessi leidmise ülesande taandamine trantsendentsete funktsioonide nullkohtade leidmisele

Praktikas esinevad objekti liikumist kirjeldavad diferentsiaalvõrrandid on tihti küllalt keerulise ehitusega ning nende vahetu integreerimine on seotud kas suurte raskustega või ei ole üldse teostatav, seepärast kasutatakse optimaalse juhtimise ülesannete lahendamiseks numbrilisi meetodeid. Lahendusmeetodite koostamise idee rajaneb rajaülesannete üleviimises Cauchy' ülesannete lahendamisele.

Olgu meil tarvis leida juhtimine $\vec{u}(t)$, mis viib süsteemi (1.1) aja $T - t_0$ jooksul fikseeritud punktist $\vec{x}_0$ teise fikseeritud punkti $\vec{x}_T$ tingimusel, et funktsionaal (1.3), kus $t_1 = T$, saavutab miinimumi. See ülesanne on samaväärne funktsioonide $x_1, \ldots, x_n$, $\psi_1, \ldots, \psi_n$ leidmise ülesandega, kus vektorid $\vec{x}$ ja $\vec{\psi}$ rahuldavad võrrandeid

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m), \tag{2.1}$$

$$\dot{\psi}_i = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j(x,u)}{\partial x_i} \psi_j + \frac{\partial f_0}{\partial x_i} = \varphi_i(\vec{x}, \vec{u}, \vec{\psi}),$$

kus $\psi_0 = -1$ ning juhtimine $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, \vec{\psi}, t)$ leitakse igal ajamomendil hamiltoniaani maksimumtingimustest.

Süsteemi (2.1) lahend peab rahuldama $2n$ tingimust

$$x_i(t_0) = x_{0i}, \quad x_i(T) = x_{Ti}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.2}$$

Selleks, et koostada süsteemi (2.1) integraalkõverat, me peame mingil meetodil andma ette n arvu $\psi_i(t_0) = \alpha_i$. Konstrueerides väärtuste x_{01} ja α_i abil süsteemi (2.1) trajektoori, me saame ajamomendil $t = T$ teatud koordinaatide väärtused $x_i(T)$, mis üldjuhul ei ühti väärtustega x_{Ti}.

Toome sisse nihke kujul $\chi^i = x_i(T) - x_{Ti}$. On ilmne, et suurused χ^i on impulsside algväärtuste funktsioonid, see tähendab, et $\chi^i = \chi^i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$,

$$i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.3}$$

Selleks, et lahendada püstitatud optimaalse protsessi leidmise ülesannet, me peame leidma arvud $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ selliselt, et $\chi^i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Funktsioonide χ^i nullkohtade leidmiseks on mitmeid meetodeid. Siin vaatleme üht enamkasutatavat - Newtoni meetodit.

2°. Newtoni meetod.

Olgu meil mingi impulsside alglähend $\{\alpha_{oj}\}$, j = 1,...,n. Sellele arvusüsteemile vastavad suurused $\chi_{oi} = \chi_{oi}(\alpha_{o1}, \dots \alpha_{on})$, i = 1, ..., n. Oletame, et järgmine lähend omab kuju j = 1, ..., n. Lugeda suurused δ_{1j} väikesteks võtame

$$\chi_1^i \equiv \chi^i(\alpha_{o1} + \delta_{11}, \alpha_{o2} + \delta_{12}, \dots, \alpha_{on} + \delta_{1n}) =$$

$$= \chi_o^i + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \chi^i}{\partial \alpha_j}\right)_{\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_o} \cdot \delta_{1j}. \qquad (2.4)$$

Valime nüüd δ_{1j} selliselt, et nende võrduste paremad pooled muutuksid nullideks. See annab meile n lineaarset võrrandit suuruste δ_{11}, δ_{12}, ..., δ_{1n} suhtes. Tähistame δ_{1j} kordajate maatriksi A (α_o), kusjuures (k + 1)-le sammule vastava maatriksi A (α_k) tähistame A_k, kusjuures

$$A_k = \left\| \left(\frac{\partial \chi^i}{\partial \alpha_j}\right) \right\|_{\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_k}, \qquad i,j = 1, 2, \dots, n$$

Võrrandi vektori $\delta_1 = (\delta_{11}, \dots, \delta_{1n})$ leidmiseks võime siis esitada kujul

$$A_o \delta_1 = - \chi_o \qquad (2.5)$$

Uueks lähendiks võtame $\alpha_1 = \alpha_o + \delta_1$. ning kordame protsessi. Üldine iteratsiooniskeem oleks järgmine:

$$A_{k-1} \delta_k = -\chi_{k-1}, \quad \alpha_k = \alpha_{k-1} + \delta_k \quad . \qquad (2.6)$$

Igal iteratsioonisammul tuleb numbriliselt leida maatriks A, mis nõuab (n + 1) süsteemi (2.1) Cauchy ülesande lahendamist. Maatriksi A leidmiseks võib näiteks suurused $\frac{\partial \chi^i}{\partial \alpha_j}$ asendada diferentssuhetega [4]. Tähistame ühikvektorid E_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, järgmiselt:

$E_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $E_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots,$
$E_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$. Küllaltki väikese sammu $\Delta\alpha$ korral

$$\frac{\partial X^i}{\partial \alpha_m} \approx \frac{X^i(\alpha + \Delta\alpha E_m) - X^i(\alpha)}{\Delta\alpha}, \qquad m = 1, 2, \ldots, n.$$

Seega võime maatriksi A_k arvutamisel asendada suurused $\frac{\partial X^i(\alpha_k)}{\partial \alpha_m}$ suhetega

$$\frac{X^i(\alpha_k + \Delta\alpha_k E_m) - X^i(\alpha_k)}{\Delta\alpha_k} \tag{2.7}$$

kus $\alpha_k = (\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \ldots, \alpha_{nk})$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Kui alglähend α_0 on valitud küllalt juure $\tilde{\alpha}$ lähedal, siis Newtoni meetod koondub väga kiiresti, vastasel juhul ta hajub. Koonduvuse kiirendamiseks võima kasutada Newtoni meetodi modifikatsiooni, mille idee on järgmine. Anname ette α_0 ning leiame δ_1 võrrandist (2.5). Anname suurusele $\alpha_1^* = (\alpha_{11}^*, \ldots, \alpha_{1n}^*)$ väärtuseks $\alpha_1^* = \alpha_0 + \delta_1$ ning arvutame $X_1^* = X(\alpha_0 + \delta_1)$. Kui osutub, et $|X_1^*| > |X_0|$, siis võtame $\alpha_1^* = \alpha_0 + \frac{1}{2}\delta_1$ ja arvutame uuesti $X_1^* = X(\alpha_1^*)$. Kui ikka veel $|X_1^*| > |X_0^*|$, siis võtame $\alpha_1^* = \alpha_0 + \frac{1}{4}\delta_1$. Protsessi kordame nii kaua, kui $|X_1^*| \leq |X_0|$. Seejärel võtame uueks alglähendiks $\alpha_1 = \alpha_1^*$ ning teeme järgmise iteratsiooni (2.6) sammu. Taoliselt toimime igal iteratsioonisammul.

Vaatamata toodud modifikatsioonile ei pea Newtoni meetod koonduma, kui alglähend ei ole küllalt hea. Alglähendi etteandmine on aga raskendatud, kuna on vaja anda alglähendid impulssidele, millel üldjuhul ei ole head dünaamilist interpretatsiooni.

2. Kosmoseaparaadi viimine ringikujulisele orbiidile

1° Ülesande seade.

Tiirelgu kosmoseaparaat Maa lähedasel orbiidil. Tuleb leida juhtimised, mis viiksid ta ringikujulisele orbiidile ühe täispöörde jooksul.

Vaatame kosmoseaparaadi liikumist kui masspunkti liikumist tsentraalse jõu väljas. Punkti liikumise võrrand näeks siis vektorkujul välja järgmine

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} + \vec{u}, \qquad (3.1)$$

kus r on punkti raadiusvektor, μ - gravitatsioonikonstant, $\vec{u}$ - juhtimisvektor, $\vec{r}$ - raadiusvektori absoluutväärtus.

Esitame võrrandi (3.1) polaarkoordinaatides [4]. Kiirusvektor avaldub kujul

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\varphi = v_r \cdot \vec{r}^{\,\circ} + v_\varphi \cdot \vec{\varphi}^{\circ} \qquad (3.2)$$

kus $\vec{r}^{\,\circ}$ ja $\vec{\varphi}^{\circ}$ on vastavalt raadiuse- ning transversaalsuunalised ühikvektorid,

$$v_r = \frac{dr}{dt} \quad \text{ja} \quad v_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt}. \qquad (3.3)$$

Kiirendusvektoriks $\vec{w} = \vec{w}_r + \vec{w}_\varphi = w_r \cdot \vec{r}^{\,\circ} + w_\varphi \cdot \vec{\varphi}^{\circ}$, (3.4)
kus

$$w_r = \frac{d^2r}{dt^2} + r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2. \qquad (3.5)$$

$$w_\varphi = r\frac{d^2\varphi}{dt} + 2\frac{drd\varphi}{dt\,dt}. \qquad (3.6)$$

Tähistades suurustega u_1 ja u_2 vastavalt juhtimise radiaal- -ning transversaalsuunalised komponendid, leiame vektori (3.1) radiaalsuunalise komponendi

$$-\frac{\mu}{r^3}r + u^1 = \frac{d^2r}{dt^2} + r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

ning arvestades seoseid (3.3) saame

$$\frac{dv_r}{dt} = -\frac{\mu}{r^2} + \frac{v_\varphi^2}{r}. \qquad (3.7)$$

Arvestades seost (3.6), saame võrrandist (3.1), et

$$u_2 = r\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt}. \qquad (3.8)$$

Leiame transversaalsuunalise kiiruse tuletise aja järgi

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Asendades leitud suuruse võrdusse (3.8) ning arvestades seoseid (3.3) saame

$$\frac{dv_\varphi}{dt} = -\frac{v_r v_\varphi}{r} + u_2. \qquad (3.9)$$

Saame ülesande:

leida juhtimised u_1 ja u_2, mis lühima aja vältel viivad masspunkti, mille liikumist kirjeldavad võrrandid (3.7),(3.9) ja (3.3), asendist

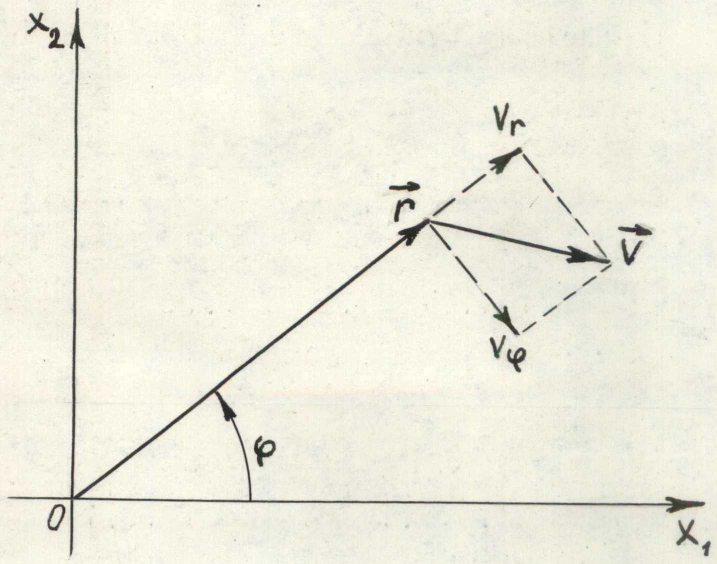
$$\varphi = 0,\ r = r_o,\ v_r = v_{r\,o},\ v_\varphi = v_{\varphi o}. \tag{3.10}$$

asendisse

$$\varphi = 2\pi,\ r = r_o,\ v_r = 0,\ v_\varphi = \sqrt{\mu / r_o}\,. \tag{3.11}$$

Toodud ülesandes polaarnurk φ (joon. 1.) muutub alati monotoonselt. See on seletatav sellega, et kiiruse transversaalsuunaline komponent v_φ on niivõrd suur (on I kosmilise kiiruse järguga), et raske on ette kujutada mõistlikku manöövrit, mille korral ta oleks sunnitud muutma märki. Seega on loomulik valida suurus sõltumatuks muutujaks, mille korral suurus T – manöövri koguaeg avaldub kujul

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{r}{v_\varphi}\, d\varphi\,. \tag{3.12}$$



Joonis 1.

Et ülesannet oleks lihtsam numbriliselt lahendada, selleks võtame uuteks muutujateks suurused

$$w = \frac{1}{r}, \quad \vec{h} = \vec{v} \times \vec{r}, \tag{3.13}$$

kus vektor $\vec{h}$ on kahekordne sektorkiirus. Arvestades seost(3.2) ning et $\vec{r}^\circ \times \vec{r}^\circ = \vec{0}$, võime vektori $\vec{h}$ avaldada kujul

$$\vec{h} = r^2 \frac{d\varphi}{dt} \vec{\varphi}^\circ \times \vec{r}^\circ.$$

Kuna ühikvektorid $\vec{\varphi}^\circ$ ja $\vec{r}^\circ$ on ortogonaalsed, siis sektorikiiruse suuruse jaoks saame valemi

$$h = \frac{1}{w^2} \frac{d\varphi}{dt}, \tag{3.14}$$

mis võimaldab meil funktsionaalile (3.12) anda uue kuju

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{w^2 h}. \tag{3.15}$$

Koostame võrrandid, mida peavad rahuldama suurused w ja h. Võrrandi (3.7) saame seose (3.14) abil esitada kujul

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = w^3 h^2 - \mu w^2 + u_1. \tag{3.16}$$

Sooritame järgmised teisendused:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} w^2 h = w^2 h \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{w}\right) = -h \frac{dw}{d\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = -\frac{d}{d\varphi}\left(h \frac{dw}{d}\right) w^2 h = -w^2 h \left(\frac{dh}{d\varphi} \frac{dw}{d\varphi} + h \frac{d^2 w}{d\varphi^2}\right).$$

Kasutades neid abitulemusi seoses (3.16) ning jagades võrduse mõlemaid pooli suurusega ($- w^2h^2$), saame võrrandi

$$\frac{1}{h}\frac{dh}{d\varphi}\frac{dw}{d\varphi} + \frac{d^2w}{d\varphi^2} + w = \frac{\mu}{h^2} - \frac{u_1}{w^2h^2} . \qquad (3.17)$$

Kuna $v_\varphi = wh$ ning $v_r = - h\frac{dw}{d\varphi}$, siis võrrandi (3.9) võime esitada kujul

$$\frac{d}{dt}(wh) = w^2h^2\frac{dw}{d\varphi} + u_2 .$$

Et kehtib ka võrdus

$$\frac{d}{dt}(wh) = \frac{dw}{dt}h + w\cdot\frac{dh}{dt} = \left(h\frac{dw}{d\varphi} + w\frac{dh}{d\varphi}\right)w^2h ,$$

siis

$$w^2h^2\frac{dw}{d\varphi} + u_2 = \left(h\frac{dw}{d} + w\frac{dh}{d}\right)w^2h,$$

millest saame

$$\frac{dh}{dt} = \frac{u_2}{w^3h} . \qquad (3.18)$$

Viimast kasutame suuruse $\frac{dh}{d\varphi}$ elimineerimiseks võrrandist (3.17), mille tulemusena saame

$$\frac{d^2w}{d\varphi^2} + w = \frac{\mu}{h^2} - \frac{u_1}{w^2h^2} - \frac{dw}{d\varphi}\frac{u_2}{w^3h^2} . \qquad (3.19)$$

Seega oleme jõudnud funktsionaali (3.15) miinimumi määramisele diferentsiaalseoste (3.18) ja (3.19) korral. Viimane neist on teist järku diferentsiaalvõrrand. Et viia ülesannet kujule (1.1) teeme järjekordse muutujavahetuse võttes

$$x_1 = h,$$
$$x_2 = w,$$
$$x_3 = \frac{dw}{d\varphi}.$$

Tulemusena jõuame järgmisele ülesandele. Leida juhtimised u_1 ja u_2, mis viivad süsteemi võrranditega

$$\dot{x}_1 = \frac{u_2}{x_1 x_2^3},$$

$$\dot{x}_2 = x_3,$$

$$\dot{x}_3 = \frac{\mu}{x_1^2} - x_2 - \frac{u_1}{x_1^2 x_2^2} - \frac{x_3 u_2}{x_1^2 x_2^3} \tag{3.20}$$

punktist

$$x_1(0) = r_0 v_{\varphi 0}, \quad x_2(0) = \frac{1}{r_0}, \quad x_3(0) = -\frac{1}{r_0}\frac{v_{r0}}{v_{\varphi 0}} \tag{3.21}$$

punkti

$$x_1(2\pi) = \sqrt{r_0 \mu}, \quad x_2(2\pi) = \frac{1}{r_0}, \quad x_3(2\pi) = 0, \tag{3.22}$$

kusjuures funktsionaal

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{x_1 x_2^2} \tag{3.23}$$

peab saavutama miinimumi.

2° Maksimumprintsiibi rakendamine ülesande lahendamisel

Ülesande (3.20)-(3.23) põhjal kirjutame välja hamiltoniaani

$$H = -\frac{1}{x_1 x_2^2} + \psi_1 \frac{u_2}{x_1 x_2^3} + \psi_2 x_3 + \psi_3\left(\frac{\mu}{x_1^2} - x_2 - \frac{u_1}{x_1^2 x_2^2} - \frac{x_3 u_2}{x_1^2 x_2^3}\right), \tag{3.24}$$

kus $\psi_0 = -1$.

Seose (1.5) põhjal omab kaassüsteem kuju

$$\dot{\psi}_1 = \frac{-1}{x_1^2 x_2^2} + \psi_1 \frac{u_2}{x_1^2 x_2^3} + 2\psi_3\left(\frac{k}{x_1^3} - \frac{u_1}{x_1^3 x_2^2} - \frac{x_3 u_2}{x_1^3 x_2^3}\right),$$

$$\dot{\psi}_2 = -\frac{2}{x_1 x_2^3} + 3\psi_1 \frac{u_2}{x_1 x_2^4} + \psi_3\left(1 - \frac{2u_1}{x_1^2 x_2^3} - \frac{3x_3 u_2}{x_1^2 x_2^4}\right), \tag{3.25}$$

$$\dot{\psi}_3 = -\psi_2 + \psi_3 \frac{u_2}{x_1^2 x_2^3}.$$

Senini ei ole me juhtimistele esitanud mitte mingisuguseid kitsendusi. Et aga kosmoseaparaadi võimsus on piiratud, ta on konstruktsiooniga ette antud, siis peavad juhtimised olema kitsendatud. Olgu kitsendused antud võrdusega

$$u_1^2 + u_2^2 = 1 \tag{3.26}$$

Elimineerime hamiltoniaanist juhtimise u_1 asendusega

$$u_1 = \sqrt{1 - u_2^2}:$$

$$H = -\frac{1}{x_1 x_2^2} + \psi_1 \frac{u_2}{x_1 x_2^3} + \psi_2 x_3 + \psi_3\left(\frac{k}{x_1^2} - x_2 - \frac{\sqrt{1-u_2^2}}{x_1^2 x_2^2} - \frac{x_3 u_2}{x_1^2 x_2^3}\right).$$

Eeldame, et funktsiooni H maksimum saavutatakse juhtimispiirkonna sisepunktis. Sel juhul on maksimumtingimus samaväärne tingimusega

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0. \tag{3.27}$$

Seega ülesande (3.20) - (3.23) korral peab olema rahuldatud võrdus

$$\frac{\psi_1}{x_1 x_2^3} + \frac{\psi_3 u_2}{x_1^2 x_2^2 \sqrt{1-u_2^2}} - \psi_3 \frac{x_3}{x_1^2 x_2^3} = 0$$, millest

$$u_2 = \frac{x_3\psi_3 - x_1\psi_1}{\sqrt{x_2^2\psi_3^2 + (x_3\psi_3 - x_1\psi_1)^2}} . \tag{3.28}$$

Seos (3.27) karanteerib meile funktsiooni H ekstreerumpunkti olemasolu, kuid ta võib osutuda ka miinimumpunktiks. Selleks, et oleks tegemist maksimumpunktiga, peab olema rahuldatud tingimus

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} < 0,$$

mis antud ülesande korral on järgmine:

$$\frac{\psi_3}{x_1^2 x_2^2 (1-u_2^2)\sqrt{1-u_2^2}} < 0.$$

Et suurused x_1^2, x_2^2 on alati positiivsed ning $1 - u_2^2$ alati mittenegatiivne, siis saadud võrratus on samaväärne tingimusega

$$\frac{\psi_3}{\sqrt{1-u_2^2}} < 0, \tag{3.29}$$

mis ütleb, et muutuja ψ_3 ning juhtimine u_1 peavad olema vastasmärgilised. On ilmne, et diferentsiaalvõrrandid (3.20), (3.25) on liialt keerulised, et neid saaks analüütiliselt lahendada. Lahendamiseks tuleb kasutada ligikaudseid meetodeid. Kuna arvutuste maht on küllalt suur, siis lahendamine on mõeldamatu ilma elektronarvutita.

Anname impulssidele ette mingid algväärtused $\psi_i(0) = \alpha_i$, $i = 1, 2, 3.$ (3.30)

Need tuleb valida selliselt, et oleksid rahuldatud kitsendused (3.26) ning tingimus (3.29). Edasi tuleb mingil numbrilisel meetodil integreerida süsteemid (3.20), (3.25), kusjuures peavad olema rahuldatud algtingimused (3.21) ja (3.30). Antud juhul on numbrilise integreerimise meetodiks valitud Euleri meetod [5], mille põhjal süsteemide (3.20), (3.25) integreerimisskeem näeb välja järgmine:

$$x_{i+11} = x_{i1} + hf_1(\vec{x}_i, \vec{u}_i),$$

$$x_{i+12} = x_{i2} + hf_2(\vec{x}_i, \vec{u}_i),$$

$$x_{i+13} = x_{i3} + hf_3(\vec{x}_i, \vec{u}_i),$$

$$\psi_{i+11} = \psi_{i1} + h\varphi_1(\vec{x}_i, \vec{u}_i, \vec{\psi}_i),$$

$$\psi_{i+12} = \psi_{i2} + h\varphi_2(\vec{x}_i, \vec{u}_i, \vec{\psi}_i),$$

$$\psi_{i+13} = \psi_{i3} + h\varphi_3(\vec{x}_i, \vec{u}_i, \vec{\psi}_i),$$

kus $i = 0, 1, \ldots, N-1$, $h = \frac{2\pi}{N}$ ning $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3})$, $\vec{u}_i = (u_{i1}, u_{i2})$, $\vec{\psi}_i = (\psi_{i1}, \psi_{i2}, \psi_{i3})$.

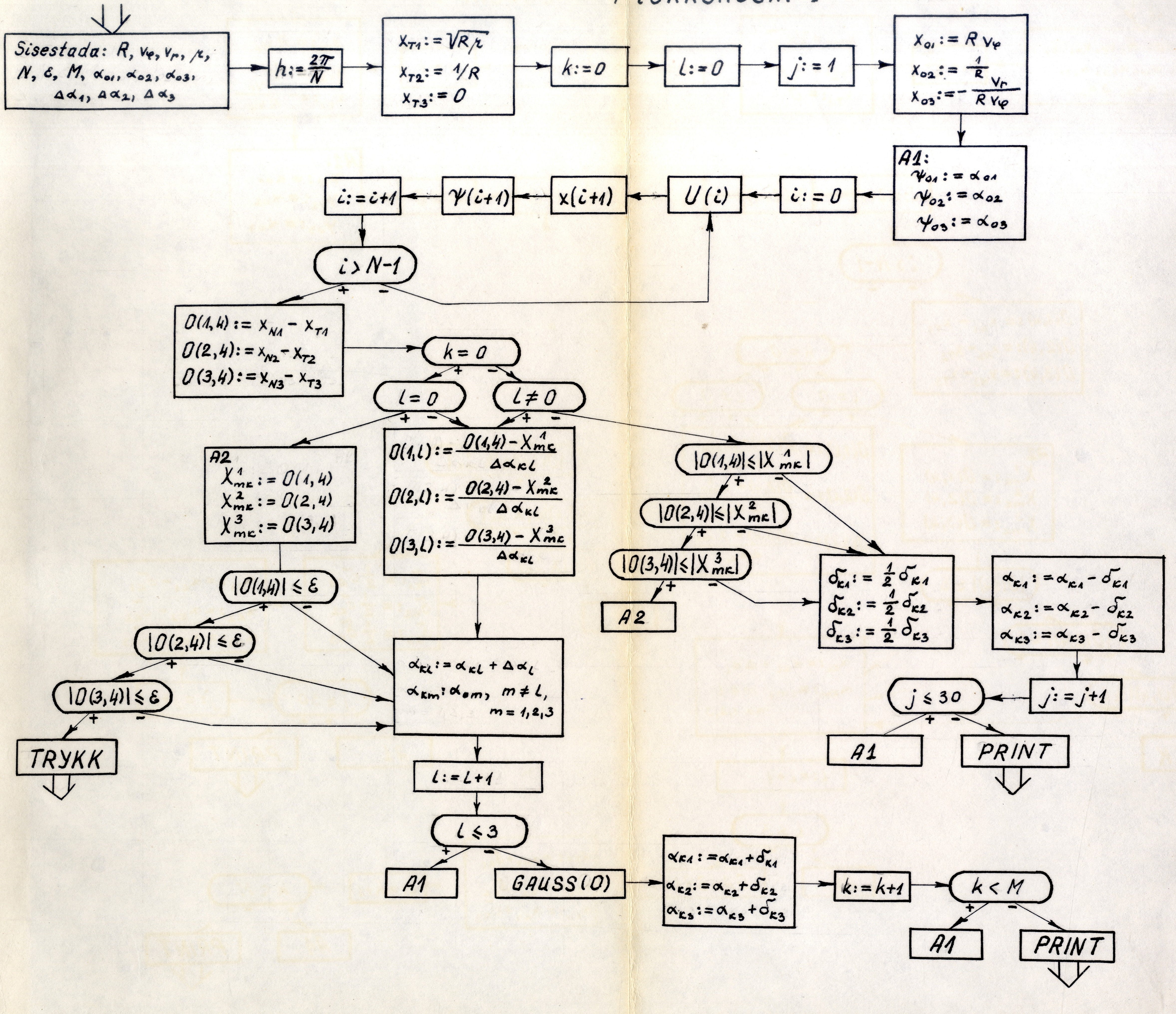
Juhtimised arvutatakse järgmise iteratsiooniskeemi alusel

$$u_{i2} = \frac{\psi_{i3} x_{i3} - \psi_{i1} x_{i1}}{\sqrt{x_{i2}^2 \psi_{i2}^2 + (x_{i3}\psi_{i3} - x_{i1}\psi_{i1})^2}},$$

$$u_{i1} = \begin{cases} -\sqrt{1 - u_{i2}^2}, & \text{kui } \psi_{i3} > 0, \\ \sqrt{1 - u_2^2}, & \text{kui } \psi_{i3} \leq 0. \end{cases}$$

Edasine arvutus toimub kõik teises paragrahvis antud Newtoni meetodi kohaselt. Üksikasjaliselt on läbiviidavad arvutused esitatud plokkskeemis 1 ja 2. Plokkskeemi alusel on koostatud programm algoritmilises keeles M A L G O L, kusjuures identifikaatorid on valitud selliselt, et nad suuremalt jaolt ühtivad plokkskeemis antud tähistusega. Algsuurused, mis sisestatakse, on tähistatud järgmiselt: R-r_0, VE-v_{φ_0}, EPS-ε, ALFA1-α_{01}, ALFA2-α_{02}, ALFA3-α_{03}, DELTA(L)= $\Delta\alpha_\ell$, (L,l = 1, 2, 3). Algoritmis esinevad suurused δ_{k1}, δ_{k2}, δ_{k3}, mis on võrrandsüsteemi (2.6) lahendid, salvestatakse kordajate maatriksi O (võrrandis (2.6) maatriks A) esimesse ritta ning on vastavalt O(1,1), O(1,2), O(1,3).

Plokkskeem 1



Plokkskeem 2

U(i):

$$u_{i2} := \frac{x_{i3}\psi_{i3} - x_{i1}\psi_{i1}}{\sqrt{x_{i2}^2\psi_{i3}^2 + (x_{i3}\psi_{i3} - x_{i1}\psi_{i1})^2}}$$

$$\psi_{i3} > 0$$

$$u_{i1} := -\sqrt{1-u_{i2}^2} \qquad u_{i1} := \sqrt{1-u_{i2}^2}$$

X(i+1):

$$x_{i+1\,1} := x_{i1} + h\frac{u_{i1}}{x_{i1}x_{i2}^3}$$

$$x_{i+1\,2} := x_{i2} + hx_{i3}$$

$$x_{i+1\,3} := x_{i3} + h\left(\frac{\varkappa}{x_{i1}^2} - x_{i2} - \frac{u_{i1}}{x_{i1}^2x_{i2}^2} - \frac{x_{i3}u_{i2}}{x_{i1}^2x_{i2}^3}\right)$$

ψ(i+1):

$$\psi_{i+1\,1} := \psi_{i1} + h\left[\frac{-1}{x_{i1}^2x_{i2}^2} + \frac{\psi_{i1}u_{i2}}{x_{i1}^2x_{i2}^3} + 2\psi_{i3}\left(\frac{\varkappa}{x_{i1}^3} - \frac{u_{i1}}{x_{i1}^3x_{i2}^2} - \frac{x_{i3}u_{i2}}{x_{i1}^3x_{i2}^2}\right)\right]$$

$$\psi_{i+1\,2} := \psi_{i2} + h\left[\frac{-2}{x_{i1}x_{i2}^3} + 3\frac{\psi_{i1}u_{i2}}{x_{i1}x_{i2}^4} + \psi_{i3}\left(1 - \frac{2u_{i1}}{x_{i1}^2x_{i2}^3} - \frac{3x_{i3}u_{i2}}{x_{i1}^2x_{i2}^4}\right)\right]$$

$$\psi_{i+1\,3} := \psi_{i3} + h\left(-\psi_{i2} + \psi_{i3}\frac{u_{i2}}{x_{i1}^2x_{i2}^3}\right)$$

PRINT: Trükitakse
ALGLAEHEND EI OLE SOBIV

TRYKK: Trükitakse välja massiivid
x(0:N; 1:3) ja u(0:N-1, 1:2)

GAUSS(O): Standardprogramm võrrandsüsteemi $O(i,l)\delta_l = -O(i,4)$ lahendamiseks

ERIJUHT

Kosmoseaparaatide kohta standardselt esitatavad andmed on apogee - suurim kaugus Maa pinnalt, perigee - vähim kaugus Maa pinnalt ning tiirlemisperiood. Nagu eespoolt näha, ei saa me sellisel kujul esitatud andmeid kasutada ülesannete lahendamisel toodud algoritmiga. Seega tuleb meil vaadelda, kuidas nimetatud andmed on seotud radiaal-, transversaalsuunaliste kiirustega ning kohavektori pikkusega. Selleks kasutame järgmisi tuntud seoseid [6] .

Olgu Maa raadius R, perigee - h_p, apogee - h_a, siis kohavektori pikkused Maa tsentrist lähimas ja kaugemas punktis on järgmised.

$$r_p = h_p + R,$$
$$r_a = h_a + R. \tag{3.31}$$

Nende suuruste kohta kehtivad ka seosed

$$r_p = a(1 - e),$$
$$r_a = a(1 + e), \tag{3.32}$$

kus a on ellipsikujulise trajektoori pikem pooltelg ning e - ekstsentrilisus. Siit saame, et kehtib võrdus

$$\frac{r_p}{1-e} = \frac{r_a}{1+e},$$

millest leiame ekstsentrilisuse

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} .$$

Arvestades seost (3.32), leiame pikema pooltelje

$$a = \frac{r_p}{1-e} .$$

Ekstsentrilisuse definitsiooni põhjal $e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$

leiame ellipsi lühema pooltelje b

$$b = \sqrt{a^2 (1 - e^2)} .$$

Sektorikiiruse $\dot{\sigma}$ kohta kehtib seos $\dot{\sigma} = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{fM}{a}}$.

Meid huvitab suurus $h = 2\dot{\sigma}$. Et $fM = \mu$, siis

$$h = b\sqrt{\frac{\mu}{a}} .$$

Kasutades suuruse h definitsiooni $h = rv_\varphi$, saame suvalises trajektoori punktis leida kosmoseaparaadi transversaalsuunalise kiiruse $v_\varphi = \frac{h}{r}$, sest oli eeldatud, et algul kosmoseaparaadile ei mõju ühtegi jõudu peale gravitatsioonijõu ning sel juhul suurus h on konstantne.

Punktides $r = r_p$ ja $r = r_a$ radiaalsuunaline kiirus $v_r = 0$, järelikult kiirus $v = v_\varphi$. Seega, kui on ülesandeks viia kosmoseaparaat vähimale või suurimale ringile, siis on meil vajalikud algandmed v_φ , v_r ja r käes.

Suvalise raadiusega ringile viimine on aga komplitseeritud, kuna eespool toodud andmetest ei piisa joonkiiruse määramiseks trajektoori suvalises punktis.

Eeldame, et punktis $r = \frac{a + b}{2}$ on joonkiirusel keskmine väärtus, s.t.

$$v_k = \frac{(a + b)}{T}, \text{ kus}$$

(a + b) on ellipsijoone pikkus ning T - tiirlemisperiood, siis

$$v_r = \sqrt{v_k^2 - v_\varphi^2} ,$$

kus $v_\varphi = \frac{2h}{a + b}$. Sellisel juhul saaksime viia kosmoseaparaadi ringile raadiusega $r = \frac{a + b}{2}$.

5° Kontroll.

Programmi õigsuse kontrolliks on lahendatud kaks ülesannet. Algandmed on valitud selliselt, et ühel juhul on tulemus positiivne (trükitakse välja trajektoori ning juhtimiste väärtused punktides), teisel juhul negatiivne (trükitakse välja "Alglähend ei ole sobiv").

Lahendatud ülesanded on toodud lisas 2.

РЕЗЮМЕ

Целью данной работы является применение принципа максимума Л.С. Понтрягина при решении задачи округления орбиты космического аппарата за один поворот.

В первом параграфе дан общий принцип максимума. Во втором параграфе рассмотрен метод Нютона и её модификация. В третьем, в основном параграфе, сформулирована задача и дан алгоритм решения. Задача решается на ЭВМ "Минск-32" на алгоритмическом языке М А Л Г О Л.

KIRJANDUS

I. Болтянский В.Г., Математические методы оптимального управления. Москва, 1969.

2. Моисеев Н.Н., Численные методы в теории оптимальных систем. Москва, 1971.

3. L.Võhandu, E.Tamme, L.Luht, Arvutusmeetodid. I. Tallinn, 1971.

4. Бухгольц Н.Н., Основной курс теоритической механики. I. Москва, 1965.

5. E.Tamme, Arvutusmeetodid V. Tartu, 1967.

6. Ü.Lepik, L.Roots, Teoreetiline mehaanika. Tallinn, 1971.

SISUKORD

lk.

Sissejuhatus 1
1. Pontrjagini maksimumprintsiip 3
2. Newtoni meetod 5
1. Optimaalse protsessi leidmise ülesande taandamine transtendentsete funktsioonide nullkohtade leidmine 5
2. Newtoni meetod 7
3. Kosmoseaparaadi viimine ringikujulisele orbiidile 9
1. Ülesande seade 9
2. Maksimumprintsiibi rakendamine ülesande lahendamisel 14
3. Plokkskeem 19
4. Erijuht 21
5. Kontroll 23
Rezümee 24
Kirjandus 25
Lisa 1. Programm
Lisa 2. Lahendus

LISA 1

```
MALGOL-72          PROGRAM 03
5ПМ       +000000000000
5ПМ       +000000000003

 COMMENT' RAKETI VIIMINE RINGIKUJULISELE ORBIIDILE  ;
ALGUS: READ1'(NR);
FOR'HP:=1 STEP'1 UNTIL'NR DO'BEGIN'
READ1'(R,VE,VR,MYY,N,EPS,M,ALFA1,ALFA2,ALFA3);
ARRAY'X.(0:N,1:3).,U.(0:N-1,1:2).,O.(1:3,1:4).,DELTA.(1:3).;
READAR'(DELTA.);
H:=2*PI'/N;XT1:=SQRT'(MYY/R)*R;
XT2:=1/R;PRINT1'(R,VE,VR,MYY,N,EPS,XT1,XT2);
FOR'K:=0 STEP'1 UNTIL'M DO'BEGIN'
FOR'L:=0 STEP'1 UNTIL'3 DO'BEGIN'
FOR'J:=1 STEP'1 UNTIL'30 DO'BEGIN'
X.(0,1).:=R*VE;X.(0,2).:=1/R;X.(0,3).:=(-1)*VR/X.(0,1).;
PSI1:=ALFA1;PSI2:=ALFA2;PSI3:=ALFA3;
FOR'I:=0 STEP'1 UNTIL'(N-1) DO'BEGIN'
U.(I,2).:=(X.(I,3).*PSI3-X.(I,1).*PSI1)/SQRT'(X.(I,2).*X.(I,2).*
PSI3*PSI3+(X.(I,3).*PSI3-X.(I,1).*
PSI1)**2);
U.(I,1).:=SQRT'(1-U.(I,2).*U.(I,2).);
IF'PSI3:)0 THEN'U.(I,1).:=(-1)*U.(I,1).;
X.(I+1,1).:=X.(I,1).+H*U.(I,2)./X.(I,1)./X.(I,2)./X.(I,2)./X.(I,2).;
X.(I+1,2).:=X.(I,2).+H*X.(I,3).;
X.(I+1,3).:=X.(I,3).+H*(MYY/X.(I,1)./X.(I,1).-X.(I,2).-
U.(I,1)./X.(I,1)./X.(I,1)./
X.(I,2)./X.(I,2).-X.(I,3).*U.(I,2)./
X.(I,1)./X.(I,1)./X.(I,2)./X.(I,2)./X.(I,2).);
PSI4:=PSI1;PSI1:=PSI1+H*(PSI1*U.(I,2)./
X.(I,1)./X.(I,1)./X.(I,2)./X.(I,2)./X.(I,2).-
1/X.(I,1)./X.(I,1)./X.(I,2)./X.(I,2).+2*
PSI3*(MYY/X.(I,1)./X.(I,1)./X.(I,1).-U.(I,1)./
X.(I,1)./X.(I,1)./X.(I,1)./X.(I,2)./X.(I,2).-
X.(I,3).*U.(I,2)./X.(I,1)./X.(I,1)./X.(I,1)./
X.(I,2)./X.(I,2)./X.(I,2).));
PSI5:=PSI2;PSI2:=PSI2+H*(3*PSI4*
U.(I,2)./X.(I,2).**4/X.(I,1).-2/
X.(I,1)./X.(I,2)./X.(I,2)./X.(I,2).+
PSI3*(1-2*U.(I,1)./X.(I,1)./X.(I,1)./X.(I,2)./X.(I,2)./X.(I,2).-3*
X.(I,3).*U.(I,2)./X.(I,1)./X.(I,1)./X.(I,2).**4));LISA: ;
PSI3:=PSI3+H*(PSI3*U.(I,2)./X.(I,1)./X.(I,1)./X.(I,2)./
X.(I,2)./X.(I,2).-PSI5);END';

O.(1,4).:=X.(N,1).-XT1;
O.(2,4).:=X.(N,2).-XT2;
O.(3,4).:=X.(N,3).;
IF'K=0 THEN'GOTO'EDASI;
IF'L=/0 THEN'GOTO'EDASI;
IF'ABS'(O.(1,4).):)ABS'(XMK1) THEN'GOTO'PAR;
IF'ABS'(O.(2,4).):)ABS'(XMK2) THEN'GOTO'PAR;
IF'ABS'(O.(3,4).)(=ABS'(XMK3) THEN'GOTO'EDASI;
PAR:IF'J=30 THEN'GOTO'PRINT;
O.(1,1).:=O.(1,1)./2;
O.(1,2).:=O.(1,2)./2;
O.(1,3).:=O.(1,3)./2;
ALFA1:=ALFA1-O.(1,1).;ALFA2:=ALFA2-O.(1,2).;
ALFA3:=ALFA3-O.(1,3).;END';EDASI:
IF'L=0 THEN'BEGIN'XMK1:=O.(1,4).;
XMK2:=O.(2,4).;XMK3:=O.(3,4).;END';
IF'ABS'(O.(1,4).):)EPS THEN'GOTO'AERA;
IF'ABS'(O.(2,4).):)EPS THEN'GOTO'AERA;
IF'ABS'(O.(3,4).)(=EPS THEN'GOTO'TRYKK;
AERA: IF'K=M THEN'GOTO'PRINT;
IF'L=/0 THEN'BEGIN'O.(1,L).:=(O.(1,4).-XMK1)/
```

```
DELTA.(L).;O.(2,L).:=(O.(2,4).-XMK2)/DELTA.(L).;
O.(3,L).:=(O.(3,4).-XMK3)/DELTA.(L).;
IF'L=1 THEN'GOTO'YKS;IF'L=/2 THEN'
GOTO'KAKS;ALFA3:=ALFA3+DELTA.(3).;
ALFA2:=ALFA2-DELTA.(2).;GOTO'KAKS;
YKS: ALFA2:=ALFA2+DELTA.(2).;
ALFA1:=ALFA1-DELTA.(1).;GOTO'KAKS;
END';ALFA1:=ALFA1+DELTA.(1).;
KAKS: END';
FOR'I:=1 STEP'1 UNTIL'3 DO'
O.(I,4).:=(-1)×O.(I,4).;
GAUSS'(O.);
ALFA1:=ALFA1+O.(1,1).;ALFA2:=ALFA2+
O.(1,2).;ALFA3:=ALFA3+O.(1,3).-DELTA.(3).;
END';
PRINT: ADDRES'(FIX'22);TEXT10'('
ALGLAEHEND EI OLE SOBIV');
OUTPUT'(1);GOTO'KOLM;
TRYKK: OUTPUT'(2);ADDRES'(FIX'20);TEXT10'('SAMM');ADDRES'(FIX'35);
TEXT10'('X 1                X 2                X 3');ADDRESS'(FIX'75);
TEXT10'('U 1                U 2');OUTPUT'(2);
FOR'I:=0 STEP'1 UNTIL'N DO'BEGIN'
ADDRES'(FIX'18);TEXTR1'(4,0,I);ADDRES'(FIX'23);TEXT10'(')');
FOR'L:=1 STEP'1 UNTIL'3 DO'BEGIN'
ADDRESS'(FIX'(L×11+21));TEXTR1'(2,4,X.(I,L).);END';
IF'I=N THEN'GOTO'KOLM;
ADDRES'(FIX'72);TEXTR1'(2,4,U.(I,1).);ADDRES'(FIX'83);
TEXTR1'(2,4,U.(I,2).);OUTPUT'(1);END';
KOLM: OUTPUT'(1);END';
STOP';START'ALGUS;FINISH';

COMMENT' RAKETI VIIMINE RINGIKUJULISELE ORBIIDILE  ;
MEMORY PLAN
    VARIABLES              2543  PSI1              3076  4161             1112  1270  PRINT1
  2520  NR                 2544  PSI2              4622  4636             1420  1556  GAUSS
  2521  HP                 2545  PSI3              4754  5073             1557  1562  ADDRES
  2522  R                  2546  I                 5006  5026             1575  2116  TEXT10
  2523  VE                 2553  PSI4                LABELS               2117  2143  OUTPUT
  2524  VR                 2554  PSI5              2663  ALGUS            2144  2506  TEXTR1
  2525  MYY                2555  XMK1              4113  LISA                FUNCTIONS
  2526  N                  2556  XMK2              4300  PAR              1061 - 1111  SQRT
  2527  EPS                2557  XMK3              4367  EDASI            1563 - 1574  FIX
  2530  M                    TABLE OF ARRAYS       4455  AERA             1271 - 1417  ××
  2531  ALFA1              2642  X                 4571  YKS                 OPERATING VARIABLES
  2532  ALFA2              2643  U                 4607  KAKS             2574 - 2602
  2533  ALFA3              2644  O                 4666  PRINT               CONSTANTS
  2535  H                  2645  DELTA             4703  TRYKK            2603 - 2641
  2536  XT1                  SUBROUTINES           5074  KOLM                PROGRAM
  2537  XT2                2677  5076                PROCEDURES           2652 - 5100
  2540  K                  2777  4665              0510  0633  READ1         START 0105
  2541  L                  3011  4607              0634  0747  ARRAY
  2542  J                  3023  4366              0750  1060  READAR
```

a) БПМ +3101000+01 (r_0)
БПМ +7789999+01 ($V_{\varphi 0}$)
БПМ + 0 (V_{r0})
БПМ +1876099+03 (μ)
БПМ + 32 (N)
БПМ +2000000+00 (ε)
БПМ +2412008+02 (XT1)
БПМ +3224766+00 (XT2)
БПМ

SAMM	X 1	X 2	X 3	U 1	U 2
0)	24.1568	0.3225	-0	-0.0070	1.0000
1)	24.3992	0.3225	-0.0002	-0.0331	0.9995
2)	24.6390	0.3224	-0.0015	-0.0649	0.9979
3)	24.8762	0.3221	-0.0039	-0.1022	0.9948
4)	25.1111	0.3214	-0.0073	-0.1452	0.9894
5)	25.3441	0.3199	-0.0115	-0.1941	0.9810
6)	25.5762	0.3177	-0.0163	-0.2494	0.9684
7)	25.8080	0.3145	-0.0214	-0.3121	0.9500
8)	26.0404	0.3103	-0.0268	-0.3836	0.9235
9)	26.2735	0.3050	-0.0320	-0.4658	0.8849
10)	26.5065	0.2988	-0.0368	-0.5613	0.8276
11)	26.7364	0.2915	-0.0409	-0.6726	0.7400
12)	26.9557	0.2835	-0.0441	-0.7991	0.6012
13)	27.1479	0.2748	-0.0461	-0.9260	0.3776
14)	27.2795	0.2658	-0.0466	-0.9992	0.0399
15)	27.2948	0.2566	-0.0455	-0.9311	-0.3647
16)	27.1395	0.2477	-0.0430	-0.7186	-0.6954
17)	26.8084	0.2392	-0.0390	-0.4627	-0.8865
18)	26.3343	0.2316	-0.0332	-0.2266	-0.9740
19)	25.7495	0.2251	-0.0251	-0.0166	-0.9999
20)	25.0807	0.2201	-0.0143	0.1818	-0.9833
21)	24.3589	0.2173	-0.0005	0.3874	-0.9219
22)	23.6348	0.2172	0.0161	0.6154	-0.7882
23)	22.9957	0.2204	0.0353	0.8488	-0.5287
24)	22.5739	0.2273	0.0558	0.9915	-0.1300
25)	22.4776	0.2383	0.0763	0.9626	0.2709
26)	22.6526	0.2533	0.0953	0.8378	0.5460
27)	22.9440	0.2720	0.1111	0.7062	0.7080
28)	23.2452	0.2938	0.1227	0.5922	0.8058
29)	23.5136	0.3179	0.1293	0.4930	0.8701
30)	23.7399	0.3432	0.1305	0.4019	0.9157
31)	23.9271	0.3689	0.1262	0.3141	0.9494
32)	24.0824	0.3936	0.1165		

Algandmed: $R=3$, $\mu=187{,}61$, $h_\pi=0{,}1007$, $h_a=0{,}3194$ („Interkosmos-8").

a) $\alpha_{01}=0$, $\alpha_{02}=-0{,}7$, $\alpha_{03}=-0{,}3$.

b) $\alpha_{01}=0$, $\alpha_{02}=-1{,}8$, $\alpha_{03}=1$

```
    БПМ      +3100700+01
в)  БПМ      +7789999+01    (Vφo)      3100700+01  (ro)
    БПМ      +          0   (Vro)
    БПМ      +1876139+03    (μ)
    БПМ      +         32   (N)
    БПМ      +2000000+00    (ε)
    БПМ      +2411917+02    (XT1)
    БПМ      +3225078+00    (XT2)
    БПМ

                      ALGLAEHEND EI OLE SOBIV
```