

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED  
УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ  
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

ALUSTATUD 1893. a.

VIHİK № 62 ВЫПУСК

ОСНОВАНЫ в 1893 г.

МАТЕМААТИКА-LOODUSTEADUSKONNA TÖID  
ТРУДЫ ЕСТЕСТВЕННО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТА



TARTU 1958

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED  
УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ  
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА  
VIHK 62 ВЫПУСК

---

**МАТЕМАТИКА-LOODUSTEADUSKONNA TÖID**  
**ТРУДЫ ЕСТЕСТВЕННО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО**  
**ФАКУЛЬТЕТА**

TARTU 1958

Redaktsioonikolleegium:

H. Keres (vastutav toimetaja), G. Kangro, N. Rägo.

A. Pravdin, E. Uuspõld (sekretärid).

Редакционная коллегия:

X. Керес (ответственный редактор), Г. Кангро, Н. Ряго.

А. Правдин, Э. Усупыльд (секретари).

# УМНОЖЕНИЕ СУММИРУЕМЫХ ДВОЙНЫХ РЯДОВ

И. Г. Куль

Кафедра математического анализа

## Введение

Исследованием условий сходимости или суммируемости ряда-произведения, полученного в результате умножения кратных рядов, занимались многие математики, в том числе Флорэнс М. Мэарс [14], Л. Чезари [4, 5], И. М. Шеффер [22], Х. И. Гамильтон [10], Л. Шметтерер [20, 21] и советский математик В. Г. Челидзе [30]. В работах указанных авторов доказываются около 20 теорем об умножении кратных (в том числе особенно двойных) рядов, где ряд-произведение составлялось, главным образом, по правилу Коши.<sup>1</sup> Однако следует отметить, что в этих работах рассматривалось почти исключительно умножение сходящихся рядов.<sup>2</sup> Суммируемость (методами Рисса, Абеля и арифметических средних) ряда-произведения изучалась в немногих случаях. При доказательстве вышеупомянутых теорем об умножении рядов пользовались методами математического анализа и теории функций, которые существенно зависели от рассматриваемых методов суммирования. Лишь в статье Гамильтона [10] использован более общий метод линейных преобразований для изучения умножения сходящихся кратных рядов. Однако результаты, полученные при помощи метода линейных преобразований, непосредственно трудно применимы, если рассматриваемые методы суммирования имеют сколько-нибудь сложную форму. От этих недостатков свободен т. н. метод билинейных преобразований.

Целью настоящей работы является разработка метода билинейных преобразований и применение его к исследованию проблемы умножения суммируемых двойных рядов.<sup>3</sup> По этому методу проблема умножения рядов сводится к билинейному преобразованию классов последовательностей, которое должно удовлетворить определенным условиям. Из этих условий получаем данные, нужные для суммируемости ряда-произведения.

---

<sup>1</sup> Исключениями являются работы Мэарс [14] и Шметтерера [21], где применялись соответственно правила умножения Дирихле и Лорана.

<sup>2</sup> Об умножении суммируемых двойных рядов известна только одна теорема Мэарс ([14], стр. 708, теорема XV).

<sup>3</sup> Методом билинейных преобразований пользовались П. А. Фроли [7] и А. Алексевич [1] для исследования умножения простых рядов.

Соответственно избранному в настоящей работе методу в первой главе изучаем полилинейные операторы. В этой главе обобщаем теорему Хана-Банаха-Штейнгауза, которая является основной для вывода условий линейных и билинейных преобразований классов двойных последовательностей.

Во второй главе изучаются методы суммирования Вороного-Нерлунда, Чезаро и взвешенных средних Рисса для двойных рядов, главным образом включение этих методов. Оказывается, что используя включение рассматриваемых в данной проблеме методов суммирования, можно упростить систему условий для суммируемости ряда-произведения.

Третья глава посвящена изучению условий суммируемости ряда-произведения, где ряды-сомножители суммируемы при помощи методов Вороного-Нерлунда, Чезаро или взвешенных средних Рисса. Ряд-произведение составляется (кроме последнего параграфа) по правилу Коши. В последнем параграфе дается анализ правил умножения для двойных рядов. Полученные в этом случае теоремы можно рассматривать как обобщения результатов Алексевича [1].

## 1. Полилинейные операторы

### § 1. Основные понятия и формулы

Оператор  $z = f(x_1, \dots, x_k)$ , значения которого  $z$  принадлежат банахову пространству  $Z$  и аргументы  $x_i$  соответственно банаховым пространствам  $X_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ), называется полилинейным (или  $k$ -линейным), если для любых  $x_i, x_i', x_i'' \in X_i$  выполнены следующие условия:<sup>4</sup>

1° оператор  $k$ -аддитивен, т. е. аддитивен относительно каждого переменного:

$$f(x_1, \dots, x_i' + x_i'', \dots, x_k) = f(x_1, \dots, x_i', \dots, x_k) + f(x_1, \dots, x_i'', \dots, x_k);$$

2° оператор  $k$ -однороден, т. е. однороден относительно каждого переменного:

$$f(x_1, \dots, \lambda x_i, \dots, x_k) = \lambda f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_k),$$

где  $\lambda$  — произвольное комплексное число.

Из 1° (или 2°) следует, что

$$f(x_1, \dots, \Theta_i, \dots, x_k) = \Theta,$$

где  $\Theta_i$  — нулевой элемент  $X_i$ , и  $\Theta$  — нулевой элемент  $Z$ .

Полилинейный оператор  $f(x_1, \dots, x_k)$  называется непрерывным в точке  $(x_1^\circ, \dots, x_k^\circ)$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что из неравенства  $\|x_i - x_i^\circ\| < \delta$  следует неравенство

$$\|f(x_1, \dots, x_k) - f(x_1^\circ, \dots, x_k^\circ)\| < \varepsilon.$$

<sup>4</sup> В дальнейшем условии « $i = 1, \dots, k$ » приписывать не будем.

Полилинейный оператор называется непрерывным во всем пространстве  $X_1 \times \dots \times X_k$  (или просто непрерывным), если он непрерывен в каждой точке пространства  $X_1 \times \dots \times X_k$ .<sup>5</sup>

Полилинейный оператор  $f(x_1, \dots, x_k)$  называется ограниченным, если существует такая постоянная  $M$ , то имеет место неравенство

$$\|f(x_1, \dots, x_k)\| \leq M \|x_1\| \dots \|x_k\| \quad (1)$$

для любого  $x_i \in X_i$ .

Нормой  $\|f\|$  полилинейного оператора  $f(x_1, \dots, x_k)$  называется нижняя грань чисел  $M$ , удовлетворяющих соотношению (1). Норму полилинейного оператора можно вычислить по формуле

$$\|f\| = \sup_{\|x_i\|=1} \|f(x_1, \dots, x_k)\|. \quad (2)$$

Доказательство формулы (2) аналогично доказательству соответственной формулы в случае оператора одного переменного.<sup>6</sup>

Справедлива следующая

**Теорема I.** Для непрерывности полилинейного оператора необходима и достаточна его ограниченность.<sup>7</sup>

Доказательство необходимости аналогично доказательству в случае оператора одной переменной.<sup>8</sup>

Для доказательства достаточности пользуемся неравенством

$$\begin{aligned} & \|f(x_1, \dots, x_k) - f(x_1^0, \dots, x_k^0)\| \leq \\ & \leq \|f(x_1 - x_1^0, x_2, \dots, x_k)\| + \|f(x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3, \dots, x_k)\| + \\ & \quad + \dots + \|f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k - x_k^0)\| \end{aligned}$$

и применяем формулу (1).

Можно доказать, что из непрерывности полилинейного оператора в одной точке пространства  $X_1 \times \dots \times X_k$  следует его непрерывность.

## § 2. Двойные последовательности полилинейных операторов

Определяем следующие классы двойных последовательностей  $x = \{\xi_{mn}\}$ , где  $\xi_{mn}$  ( $m, n = 0, 1, \dots$ ) принадлежат некоторому банахову пространству  $X$ :  $\mathfrak{c}$  — класс сходящихся последовательностей (предел  $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \xi_{mn}$  существует);  $\mathfrak{ms}$  — класс ограниченно сходящихся последовательностей ( $x \in \mathfrak{c}$  и  $\|\xi_{mn}\| = O(1)$ );  $\mathfrak{r}$  — класс регулярно сходящихся последовательностей ( $x \in \mathfrak{c}$ , пределы  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{mn}$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) и  $\lim_{m \rightarrow \infty} \xi_{mn}$  ( $m = 0, 1, \dots$ ) существуют);

$\mathfrak{c}$  — класс сходящихся последовательностей (предел  $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \xi_{mn}$  существует);  $\mathfrak{ms}$  — класс ограниченно сходящихся последовательностей ( $x \in \mathfrak{c}$  и  $\|\xi_{mn}\| = O(1)$ );  $\mathfrak{r}$  — класс регулярно сходящихся последовательностей ( $x \in \mathfrak{c}$ , пределы  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{mn}$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) и  $\lim_{m \rightarrow \infty} \xi_{mn}$  ( $m = 0, 1, \dots$ ) существуют);

<sup>5</sup> Так обозначаем топологическое произведение пространств  $X_1, \dots, X_k$ .

<sup>6</sup> Колмогоров, Фомин [26], стр. 120.

<sup>7</sup> Бурбаки [3], стр. 47.

<sup>8</sup> Люстерник, Соболев [27], стр. 136.

$\mathbf{I}$  — класс абсолютно сходящихся последовательностей ( $\sum \|\xi_{mn}\| < \infty$ );  $\mathbf{c}_\lambda$  — класс стесненно сходящихся последовательностей (соотношение  $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \xi_{mn} = U(x)$  имеет место, если

$$\frac{1}{\lambda} \leq \frac{m}{n} \leq \lambda \text{ при любом фиксированном } \lambda \geq 1)^9$$

Пусть заданы функции  $\varphi(m) \geq \varrho_1 > 0$ ,  $\psi(n) \geq \varrho_2 > 0$  и  $\chi(m, n) \geq \varrho_3 > 0$ , которые неограниченно возрастают при  $m \rightarrow \infty$  или  $n \rightarrow \infty$ . Введем следующие классы двойных последовательностей:

$\mathbf{c}_{\varphi\psi}^z$  ( $x \in \mathbf{c}$ ,  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\xi_{mn}}{\varphi(m)} = \theta$  ( $n = 0, 1, \dots$ ),  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_{mn}}{\psi(n)} = \theta$  ( $m = 0, 1, \dots$ ));  $\mathbf{c}_{\varphi\psi}^c$  ( $x \in \mathbf{c}$ , существуют пределы  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\xi_{mn}}{\varphi(m)}$  ( $n = 0, 1, \dots$ )

и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_{mn}}{\psi(n)}$  ( $m = 0, 1, \dots$ )) и  $\mathbf{c}_{\varphi\psi}^m$  ( $x \in \mathbf{c}$ ,  $\sup_m \frac{\|\xi_{mn}\|}{\varphi(m)} < \infty$  ( $n = 0, 1, \dots$ )

и  $\sup_n \frac{\|\xi_{mn}\|}{\psi(n)} < \infty$  ( $m = 0, 1, \dots$ )).

Кроме того, пусть  $\mathbf{c}_\chi^z$ ,  $\mathbf{c}_\chi^c$  и  $\mathbf{c}_\chi^m$  классы двойных последовательностей, отличающиеся соответственно от классов  $\mathbf{c}_{\varphi\psi}^z$ ,  $\mathbf{c}_{\varphi\psi}^c$  и  $\mathbf{c}_{\varphi\psi}^m$  только тем, что в них  $\varphi(m)$  и  $\psi(n)$  заменены функцией  $\chi(m, n)$ <sup>10</sup>

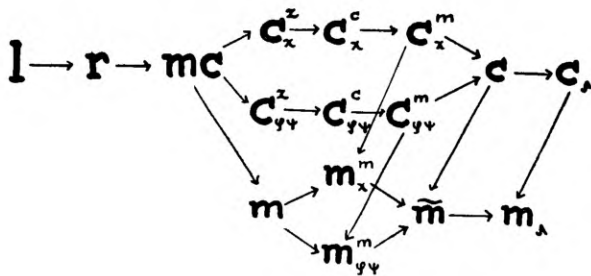
Вышеприведенные классы назовем классами сходимости.

Наконец, определяем следующие классы двойных последовательностей (т. н. классы ограниченности):  $\mathbf{m}$  — класс ограниченных последовательностей ( $\|\xi_{mn}\| = O(1)$ ,  $m, n = 0, 1, \dots$ );  $\tilde{\mathbf{m}}$  — класс ультимативно ограниченных последовательностей ( $\|\xi_{mn}\| = O(1)$ , если  $m, n \geq N(x)$ );  $\mathbf{m}_\lambda$  — класс стесненно ограниченных последовательностей ( $\|\xi_{mn}\| = O(1)$ , если  $\frac{1}{\lambda} \leq \frac{m}{n} \leq \lambda$ , при любом фиксированном  $\lambda \geq 1$ );  $\mathbf{m}_{\varphi\psi}^m$  ( $x \in \tilde{\mathbf{m}}$ ,  $\sup_m \frac{\|\xi_{mn}\|}{\varphi(m)} < \infty$  ( $n = 0, 1, \dots$ ),  $\sup_n \frac{\|\xi_{mn}\|}{\psi(n)} < \infty$  ( $m = 0, 1, \dots$ ));  $\mathbf{m}_\chi^m$  ( $x \in \tilde{\mathbf{m}}$ ,  $\sup_m \frac{\|\xi_{mn}\|}{\chi(m, n)} < \infty$  ( $n = 0, 1, \dots$ ),  $\sup_n \frac{\|\xi_{mn}\|}{\chi(m, n)} < \infty$  ( $m = 0, 1, \dots$ )).

<sup>9</sup> Если индексы и пределы суммирования не указаны, то суммирование происходит по всем целочисленным значениям индексов от 0 до  $\infty$ .

<sup>10</sup> Классы  $\mathbf{c}_{\varphi\psi}^z$ ,  $\mathbf{c}_{\varphi\psi}^c$ ,  $\mathbf{c}_{\varphi\psi}^m$ ,  $\mathbf{c}_\chi^z$ ,  $\mathbf{c}_\chi^c$  и  $\mathbf{c}_\chi^m$  назовем классами Челидзе;  $\mathbf{c}_{\varphi\psi}^z$  и  $\mathbf{c}_{\varphi\psi}^m$  впервые рассмотрены в работе Челидзе [29].

Соотношения между вышеуказанными классами представим следующей схемой



где, например,  $l \rightarrow r$  означает  $l \subset r$ .

Скажем, что двойная последовательность полилинейных операторов

$$\{z_{mn}\} = \{f_{mn}(x_1, \dots, x_k)\} \quad (3)$$

сходится во всем пространстве  $X_1 \times \dots \times X_k$  в смысле  $\alpha$  (где  $\alpha$  означает один из классов сходимости), если для любой  $x_i \in X_i$  двойная последовательность  $\{z_{mn}\}$  принадлежит классу  $\alpha$ .

Скажем, что двойная последовательность (3) сходится во всем пространстве  $X_1 \times \dots \times X_k$  в смысле  $\alpha$  к полилинейному оператору  $f(x_1, \dots, x_k)$ , если для любой  $x_i \in X_i$  имеют место соотношения  $\{z_{mn}\} \in \alpha$  и

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} f_{mn}(x_1, \dots, x_k) = f(x_1, \dots, x_k)$$

(где в случае  $\alpha = c_\lambda$  стремление  $m$  и  $n$  к бесконечности ограничивается неравенством  $\frac{1}{\lambda} \leq \frac{m}{n} \leq \lambda$  при любом фиксированном  $\lambda \geq 1$ )

Скажем, что двойная последовательность (3) ограничена во всем пространстве  $X_1 \times \dots \times X_k$  в смысле  $\beta$  (где  $\beta$  означает один из классов ограниченности), если для любой  $x_i \in X_i$  имеет место соотношение  $\{z_{mn}\} \in \beta$ .

Легко видно, что взаимоотношения между понятиями сходимости в смысле  $\alpha$  и ограниченности в смысле  $\beta$  двойной последовательности (3) во всем пространстве  $X_1 \times \dots \times X_k$  можно охарактеризовать при помощи приведенной схемы.

Имеет место следующая

**Теорема II.** Для того, чтобы двойная последовательность непрерывных полилинейных операторов (3) была ограниченной во всем пространстве  $X_1 \times \dots \times X_k$  в смысле  $\beta$  (где  $\beta$  означает один из классов ограниченности), необходимо и достаточно, чтобы

$$\{\|f_{mn}\|\} \in \beta. \quad (4)$$

Доказательство. Достаточность условия (4) вытекает из соотношения

$$\|z_{mn}\| = \|f_{mn}(x_1, \dots, x_k)\| \leq \|f_{mn}\| \|x_1\| \dots \|x_k\|.$$

Для доказательства необходимости условия (4) предполагаем сначала, что множество норм

$$\|f_{mn}(x_1, \dots, x_k)\|, \quad m, n \in \Gamma, \quad (5)$$

значений операторов (где  $\Gamma$  означает совокупность индексов вида  $m, n = 0, 1, \dots$ , или  $m, n \geq N$ , или  $\frac{1}{\lambda} \leq \frac{m}{n} \leq \lambda$ ) не ограничено ни на каком произведении  $\bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_k$  замкнутых сфер, где  $\bar{S}_i \subset X_i$ . Поэтому найдутся оператор  $f_{m_1 n_1}$  ( $m_1, n_1 \in \Gamma$ ) и точка  $x_i^1 \in \bar{S}_i$  такие, что

$$\|f_{m_1 n_1}(x_1^1, \dots, x_k^1)\| > 1. \quad (6)$$

В силу непрерывности оператора  $f_{m_1 n_1}$  неравенство (6) выполняется на некотором произведении  $\bar{S}_1^1 \times \dots \times \bar{S}_k^1$  замкнутых сфер, где  $\bar{S}_i^1(x_i^1, r_i^1) \subset \bar{S}_i$ . На  $\bar{S}_1^1 \times \dots \times \bar{S}_k^1$  множество (5) опять не ограничено. Поэтому найдутся оператор  $f_{m_2 n_2}$  ( $m_2, n_2 \in \Gamma$ ) и точка  $x_i^2 \in \bar{S}_i^1$  такие, что

$$\|f_{m_2 n_2}(x_1^2, \dots, x_k^2)\| > 2.$$

Таким образом, получаем последовательность замкнутых вложенных сфер  $\{\bar{S}_i^p\}_p$ , где можем предполагать  $\lim_{p \rightarrow \infty} r_i^p = 0$ . Тогда существует точка  $\bar{x}_i \in \bar{S}_i^p$  ( $p = 1, 2, \dots$ ), в которой

$$\|f_{m_p n_p}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k)\| > p \quad (m_p, n_p \in \Gamma). \quad (7)$$

При этом можем предполагать, что в случае  $\Gamma = \{m, n \geq N\}$  и  $\Gamma = \left\{ \frac{1}{\lambda} \leq \frac{m}{n} \leq \lambda \right\}$  индексы  $m_p$  и  $n_p$  вместе с  $p$  стремятся к бесконечности. Действительно, если, например, индексы  $m_p$  нельзя выбирать стремящимися к бесконечности, то  $m_p \leq M$  ( $p = 1, 2, \dots$ ). Но взяв тогда в первом случае  $N' > M$ , можем утверждать ограниченность множества (5) на некотором произведении замкнутых сфер. Во втором случае из неравенств  $m_p \leq M$  ( $p = 1, 2, \dots$ ) вытекает, что по меньшей мере один из операторов  $f_{m_p n_p}$  ( $p = 1, 2, \dots$ ) не является непрерывным.

Учитывая всё сказанное, видим, что неравенство (7) противоречит предположению об ограниченности последовательности (3)

полилинейных операторов во всем пространстве  $X_1 \times \dots \times X_k$  в смысле  $\beta$ .

Предположим теперь, что множество (5) ограничено на некотором произведении  $\bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_k$  замкнутых сфер, т. е.

$$\|f_{mn}(x_1', \dots, x_k')\| \leq K, \quad m, n \in \Gamma,$$

если  $x_i' \in \bar{S}_i(x_i^0, r_i)$ . Для произвольного  $x_i \in X_i$  элемент  $x_i'$  принадлежит сфере  $\bar{S}_i(x_i^0, r_i)$ , где

$$x_i' = \alpha_i + x_i^0, \quad \alpha_i = \frac{r_i}{\|x_i\|} x_i.$$

Далее получаем

$$f_{mn}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \sum_{x_i''} f_{mn}(x_1'' \dots x_k''), \quad (8)$$

где  $x_i''$  суть  $x_i'$  или  $-x_i^0$ . В сумме правой части равенства (8)  $2^k$  слагаемых. Все слагаемые ограничены:

$$\|f_{mn}(x_1'' \dots x_k'')\| \leq K, \quad m, n \in \Gamma,$$

ибо  $x_i', x_i^0 \in \bar{S}_i(x_i^0, r_i)$ . Следовательно,

$$\|f_{mn}(\alpha_1 \dots \alpha_k)\| \leq M' \quad m, n \in \Gamma,$$

и

$$\|f_{mn}(x_1, \dots, x_k)\| \leq \frac{M'}{r_1 \dots r_k} \|x_1\| \dots \|x_k\| \leq M \|x_1\| \dots \|x_k\|,$$

$$m, n \in \Gamma$$

Учитывая определение нормы, полилинейного оператора, получаем, что  $\|f_{mn}\| \leq M$ , если  $m, n \in \Gamma$

Отмечаем, что в случае ограниченности в смысле  $m_\lambda$  величины  $K, M'$  и  $M$  могут зависеть от  $\lambda$ ; в случае ограниченности в смысле  $m_{\varphi\psi}^m$  или  $m_\lambda^m$  нужно повторить приведенные рассуждения, кроме того, для простых последовательностей полилинейных операторов

$$\left\{ \frac{f_{mn}(x_1, \dots, x_k)}{\varphi(m)} \right\}_m, \quad \left\{ \frac{f_{mn}(x_1, \dots, x_k)}{\psi(n)} \right\}_n,$$

или соответственно

$$\left\{ \frac{f_{mn}(x_1, \dots, x_k)}{\chi(m, n)} \right\}_m, \quad \left\{ \frac{f_{mn}(x_1, \dots, x_k)}{\chi(m, n)} \right\}_n$$

Этим теорема II полностью доказана.

Основным для вывода условий линейных и билинейных преобразований классов двойных последовательностей является следующее обобщение теоремы Хана-Банаха-Штейнгауза: <sup>11</sup>

Теорема III. Для того, чтобы двойная последовательность (3) непрерывных полилинейных операторов сходилась во всем пространстве  $X_1 \times \dots \times X_k$  в смысле  $\alpha$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$1^\circ \quad \{ \|f_{mn}\| \} \in \begin{cases} m, & \text{если } \alpha = r, mc; \\ m_\lambda^m, & \text{если } \alpha = c_\lambda^z, c_\lambda^c, c_\lambda^m; \\ m_{\varphi\psi}^m, & \text{если } \alpha = c_{\varphi\psi}^z, c_{\varphi\psi}^c, c_{\varphi\psi}^m; \\ \tilde{m}, & \text{если } \alpha = c; \\ m_\lambda, & \text{если } \alpha = c_\lambda; \end{cases}$$

2° сходимость последовательности (3) в смысле  $\alpha$  имело место на множестве  $R_1 \times \dots \times R_k$ , где  $R_i$  — основное множество пространства  $X_i$ .

Доказательство. Необходимость условия 1° вытекает из схемы (на стр. 7) и теоремы II, необходимость условия 2° очевидна.

Достаточность. Пусть  $x_i$  — любой элемент пространства  $X_i$  и  $x_i^0$  — линейная комбинация элементов основного множества пространства  $X_i$ . Последнюю можно составить так, чтобы  $\|x_i - x_i^0\| < \delta$ , где  $\delta$  — произвольное фиксированное положительное число.

Применяем неравенство:

$$\begin{aligned} & \|f_{mn}(x_1, \dots, x_k) - f_{m'n'}(x_1, \dots, x_k)\| \leq \\ & \leq \|f_{mn}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k - x_k^0)\| + \\ & + \|f_{mn}(x_1, \dots, x_{k-2}, x_{k-1} - x_{k-1}^0, x_k^0)\| + \\ & + \dots + \|f_{mn}(x_1^0, \dots, x_k^0) - f_{m'n'}(x_1^0, \dots, x_k^0)\| + \\ & + \|f_{m'n'}(x_1; \dots, x_{k-1}, x_k^0 - x_k)\|. \end{aligned}$$

На основе условия 1° найдется число  $M > 0$  такое, что

- 1)  $\|f_{mn}\| \leq M$ , если  $m, n = 0, 1, \dots$ ;  $\alpha = r, mc$ ;
- 2)  $\|f_{mn}\| \leq M$ , если  $m, n \geq N$ ;  $\alpha = c, c_\lambda^z, c_\lambda^c, c_\lambda^m, c_{\varphi\psi}^z, c_{\varphi\psi}^c, c_{\varphi\psi}^m$ ;
- 3)  $\|f_{mn}\| \leq M$ , если  $\frac{1}{\lambda} \leq \frac{m}{n} \leq \lambda$  (здесь  $M$  может зависеть от  $\lambda$ ),  $\alpha = c_\lambda$

<sup>11</sup> Хан [8], стр. 9, теорема III; Банах [2], стр. 79, теорема 3.

Обозначим  $\max_i (\|x_i\|, \|x_i^0\|) = h$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} & \|f_{mn}(x_1, \dots, x_k) - f_{m'n'}(x_1, \dots, x_k)\| \leq \\ & \leq \|f_{mn}(x_1^0, \dots, x_k^0) - f_{m'n'}(x_1^0, \dots, x_k^0)\| + 2kMh^{k-1}\delta, \end{aligned}$$

если индексы  $m, n$  и  $m', n'$  удовлетворяют, соответственно смыслу сходимости, условиям 1), 2) и 3) в приведенном перечислении.

На основе 2° если индексы  $m, n, m', n'$ , кроме того, достаточно большие, то

$$\|f_{mn}(x_1^0, \dots, x_k^0) - f_{m'n'}(x_1^0, \dots, x_k^0)\| < \frac{\varepsilon}{2k+1},$$

где  $\varepsilon$  — как угодно малое положительное число. Если

$$\delta < \frac{\varepsilon}{(2k+1)Mh^{k-1}}$$

то

$$\|f_{mn}(x_1, \dots, x_k) - f_{m'n'}(x_1, \dots, x_k)\| < \varepsilon.$$

В случае сходимости в смысле  $\gamma$  нужно доказать еще существование пределов

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_{mn}(x_1, \dots, x_k) \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_{mn}(x_1, \dots, x_k)$$

для любой точки  $x_i \in X_i$ .

В случае сходимости в смысле  $c_\gamma^c$  или  $c_{\varphi\psi}^c$  нужно доказать существование пределов

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{f_{mn}(x_1, \dots, x_k)}{\gamma(m, n)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{mn}(x_1, \dots, x_k)}{\gamma(m, n)} \quad (9)$$

или соответственно

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{f_{mn}(x_1, \dots, x_k)}{\varphi(m)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{mn}(x_1, \dots, x_k)}{\psi(n)} \quad (10)$$

для любой точки  $x_i \in X_i$ . Все это можно показать аналогично только что приведенному рассуждению.

В случае сходимости в смысле  $c_\gamma^z$  или  $c_{\varphi\psi}^z$  нужно доказать равенство пределов (9) или соответственно (10) нулевому элементу  $\Theta$ . Это следует из неравенства типа

$$\begin{aligned} & \|f_{mn}(x_1, \dots, x_k)\| \leq \|f_{mn}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k - x_k^0)\| + \\ & + \|f_{mn}(x_1, \dots, x_{k-2}, x_{k-1} - x_{k-1}^0, x_k^0)\| + \dots + \\ & + \|f_{mn}(x_1^0, \dots, x_k^0)\| \leq \|f_{mn}(x_1^0, \dots, x_k^0)\| + Mkh^{k-1}\delta. \end{aligned}$$

Этим можно считать теорему III доказанной.

Имеет место следующая

**Теорема IV** Если двойная последовательность (3) непрерывных полилинейных операторов сходится во всем пространстве  $X_1 \times \dots \times X_k$  в некотором смысле  $\alpha$ , то предельный оператор  $f(x_1, \dots, x_k)$  является непрерывным полилинейным оператором во всем пространстве  $X_1 \times \dots \times X_k$ .

Доказательство теоремы IV аналогично доказательству соответственной теоремы для простой последовательности операторов.<sup>12</sup>

Проследив теперь доказательство теоремы III, легко убедиться, что верна следующая

**Теорема V** Для того, чтобы двойная последовательность (3) непрерывных полилинейных операторов сходилась во всем пространстве  $X_1 \times \dots \times X_k$  в смысле  $\alpha$  к непрерывному полилинейному оператору  $f(x_1, \dots, x_k)$ , необходимо и достаточно, чтобы

1° выполнялось условие 1° теоремы III;

2° сходимостью последовательности (3) в смысле  $\alpha$  к непрерывному полилинейному оператору  $f(x_1, \dots, x_k)$  имела место на множестве  $R_1 \times \dots \times R_k$ , где  $R_i$  — основное множество пространства  $X_i$ .

### § 3. Линейные преобразования классов двойных последовательностей

Начиная с этого параграфа мы рассматриваем классы двойных последовательностей комплексных чисел, сохраняя при этом прежние их обозначения.

Пусть заданы любые два класса  $\alpha$  и  $\beta$  двойных последовательностей. Возникает вопрос: какие условия необходимы и достаточны для матрицы  $A = (a_{mnkl})$  ( $m, n, k, l = 0, 1, \dots$ ), элементы которой — комплексные числа, чтобы при любом  $x = \{\xi_{kl}\} \in \alpha$  было  $x' = \{\xi'_{mn}\} \in \beta$ , где

$$\xi'_{mn} = \sum_{k,l} a_{mnkl} \xi_{kl} \quad (m, n = 0, 1, \dots) \quad (11)$$

Эти условия, для краткости, назовем точными условиями для линейного преобразования  $\alpha \rightarrow \beta$ .

При этом разумеется, что двойной ряд (11) при любых  $x \in \alpha$  и  $m, n = 0, 1, \dots$  сходится (т. е. преобразованная последовательность  $\{\xi'_{mn}\}$  существует). Так как последовательности  $x \in \alpha$  при любых фиксированных  $m$  и  $n$  должно соответствовать комплексное число  $\xi'_{mn}$ , то линейное преобразование (11) можно рассматривать как двойную последовательность функционалов

$$f_{mn}(x) = \sum_{k,l} a_{mnkl} \xi_{kl} \quad (m, n = 0, 1, \dots), \quad (12)$$

<sup>12</sup> Хан [8], стр. 8, теорема II.

где функционалы (12) определены в классе  $\alpha$ . Очевидно, для того, чтобы при любом  $x \in \alpha$  было  $x' \in \beta$ , необходимо и достаточно, чтобы последовательность функционалов (12) при любом  $x \in \alpha$  принадлежала классу  $\beta$ . Требуемые точные условия для линейных преобразований  $\alpha \rightarrow \beta$  (исключением является случай  $\alpha \neq 1, \beta = 1$ ) можно получить при помощи теорем II и III.

В дальнейшем рассматриваем только те линейные преобразования классов сходимости, которыми позднее воспользуемся в рассмотрении умножения рядов. Отметим, что линейные преобразования классов  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{r}$  изучены в работе Гамильтона [9] и в его совместной работе с Хиллом [11] (в последней работе при помощи методов функционального анализа). Результаты для этих классов мы приводим здесь в целях полноты изложения. Преобразования класса абсолютно сходящихся двойных последовательностей рассмотрены в работе Мэарс [19] (при помощи классических методов), но в форме (36).<sup>13</sup> Отметим, что преобразование  $1 \rightarrow 1$  для простых рядов рассмотрено методами функционального анализа в работах Сунучи [23] и Кноппа-Лоренца [12].

Преобразования  $\mathbf{c}_{\varphi\psi}^z \rightarrow \mathbf{c}_\lambda$  и  $\mathbf{c}_{\varphi\psi}^m \rightarrow \mathbf{c}_\lambda$  изучены в работе Челидзе [29] при помощи классических методов.<sup>14</sup>

### 1. Определения нормы в классах двойных последовательностей

В классах  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{l}$  определяем норму элемента  $x = \{\xi_{mn}\}$  соответственно

$$\text{в } \mathbf{m} \text{ и } \mathbf{r}: \quad \|x\| = \sup_{m,n} |\xi_{mn}|, \quad (13)$$

$$\text{в } \mathbf{l}: \quad \|x\| = \sum |\xi_{mn}|. \quad (14)$$

В случае преобразования классов Челидзе мы должны рассматривать подклассы  $\mathbf{c}_{\varphi\psi}^z(\tau)$ ,  $\mathbf{c}_{\varphi\psi}^c(\tau)$ ,  $\mathbf{c}_{\varphi\psi}^m(\tau)$ ,  $\mathbf{c}_\lambda^z(\tau)$ ,  $\mathbf{c}_\lambda^c(\tau)$ ,  $\mathbf{c}_\lambda^m(\tau)$  (которые сокращенно обозначаем  $\mathbf{c}_{\varphi\psi}^\delta(\tau)$  и  $\mathbf{c}_\lambda^\delta(\tau)$ , причем здесь и в дальнейшем  $\delta$  означает  $z$ ,  $c$  или  $m$ ), определяя их следующим образом:

<sup>13</sup> В [19] Мэарс называет последовательность  $\{U_{mn}\}$  абсолютно сходящейся, если  $\sum |U_{m,n} - U_{m-1,n} - U_{m,n-1} + U_{m-1,n-1}| < \infty$ .

<sup>14</sup> В определении класса  $\mathbf{c}_\lambda$  у Челидзе [29]  $\lambda$  фиксирован.

$$x \in \mathbf{c}_{\varphi\psi}^{\delta}(\tau), \text{ если } x \in \mathbf{c}_{\varphi\psi}^{\delta} \text{ и имеет место соотношение}$$

$$\sup_{m, n \geq \tau+1} |\xi_{mn}| < \infty; \quad (15)$$

$$x \in \mathbf{c}_{\chi}^{\delta}(\tau), \text{ если } x \in \mathbf{c}_{\chi}^{\delta} \text{ и имеет место соотношение (15).}$$

Очевидно, что имеют место равенства  $\bigcup_{\tau} \mathbf{c}_{\varphi\psi}^{\delta}(\tau) = \mathbf{c}_{\varphi\psi}^{\delta}$  и  $\bigcup_{\tau} \mathbf{c}_{\chi}^{\delta}(\tau) = \mathbf{c}_{\chi}^{\delta}$ . Норму в классах  $\mathbf{c}_{\varphi\psi}^{\delta}(\tau)$  и  $\mathbf{c}_{\chi}^{\delta}(\tau)$  определяем теперь следующими формулами

$$\text{в } \mathbf{c}_{\varphi\psi}^{\delta}(\tau): \|x\| = \max \left( \max_{m, n \leq \tau} \frac{|\xi_{mn}|}{\varphi(m)\psi(n)}, \sup_{\substack{m \geq \tau+1 \\ n \leq \tau}} \frac{|\xi_{mn}|}{\varphi(m)}, \sup_{\substack{m \leq \tau \\ n \geq \tau+1}} \frac{|\xi_{mn}|}{\psi(n)}, \sup_{m, n \geq \tau+1} |\xi_{mn}| \right), \quad (16)$$

$$\text{в } \mathbf{c}_{\chi}^{\delta}(\tau): \|x\| = \max \left( \sup_{m, n \geq \tau} \frac{|\xi_{mn}|}{\chi(m, n)}, \sup_{m, n \geq \tau+1} |\xi_{mn}| \right). \quad (17)$$

Нетрудно убедиться, что классы  $m, r, l, \mathbf{c}_{\varphi\psi}^{\chi}(\tau)$  и  $\mathbf{c}_{\chi}^{\delta}(\tau)$  с нормами соответственно (13), (13), (14), (16) и (17) превращаются в банаховы пространства.

## 2. Основные множества в пространствах двойных последовательностей

Определяем следующие двойные последовательности:

$$e_{kl} (k, l = 0, 1, \dots), e_{kl} = \{\xi_{\mu\nu}^{kl}\}, \text{ где } \xi_{\mu\nu}^{kl} = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu = k \text{ и } \nu = l, \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$e_k (k = 0, 1, \dots) \quad e_k = \{\xi_{\mu\nu}^{k\nu}\};$$

$$e^l (l = 0, 1, \dots), e^l = \{\xi_{\mu\nu}^{\mu l}\};$$

$$e, e = \{\xi_{\mu\nu}^{\mu\nu}\};$$

$$\bar{e}_k (k = 0, 1, \dots), \bar{e}_k = \{\bar{\xi}_{\mu\nu}^k\}, \text{ где } \bar{\xi}_{\mu\nu}^k = 0, \text{ если } \mu \neq k \text{ и } \{\bar{\xi}_{k\nu}^k\} \text{ — любая последовательность из чисел 1 и 0.}$$

$$\bar{e}^l (l = 0, 1, \dots), \bar{e}^l = \{\bar{\xi}_{\mu\nu}^l\}, \text{ где } \bar{\xi}_{\mu\nu}^l = 0, \text{ если } \nu \neq l \text{ и } \{\bar{\xi}_{\mu l}^l\} \text{ — любая последовательность из чисел 1 и 0.}$$

Основные множества изучаемых пространств следующие (индексы  $k$  и  $l$  имеют все неотрицательные целочисленные значения, если не указано противное)

$$\Gamma — e_{kl}, e_k, e^l, e;$$

$$\Gamma^c — \bar{e}_k, \bar{e}^l, e;$$

$$I — e_{kl};$$

$$c_{\varphi\psi}^z(\tau) \text{ и } c_{\chi}^z(\tau) — e_{kl}, \bar{e}_k (k = \tau + 1, \dots), \bar{e}^l (l = \tau + 1, \dots), e;$$

$$c_{\varphi\psi}^c(\tau) — e_{kl}, \bar{e}_k (k = \tau + 1, \dots), \bar{e}^l (l = \tau + 1, \dots), e_{k\psi}(\nu) = \\ = \{\xi_{\mu\nu}^k \psi(\nu)\} (k = 0, 1, \dots, \tau), \\ e^l \varphi(\mu) = \{\xi_{\mu\nu}^l \varphi(\mu)\} (l = 0, 1, \dots, \tau), e;$$

$$c_{\varphi\psi}^m(\tau) — \bar{e}_k (k = \tau + 1, \dots), \bar{e}^l (l = \tau + 1, \dots), \\ \bar{e}_{k\psi}(\nu) = \{\bar{\xi}_{\mu\nu}^k \psi(\nu)\} (k = 0, 1, \dots, \tau), \\ \bar{e}^l \varphi(\mu) = \{\bar{\xi}_{\mu\nu}^l \varphi(\mu)\} (l = 0, 1, \dots, \tau), e;$$

$$c_{\chi}^c(\tau) — e_{kl}, \bar{e}_k (k = \tau + 1, \dots), \bar{e}^l (l = \tau + 1, \dots), \\ e_{k\chi}(k, \nu) = \{\xi_{\mu\nu}^k \chi(k, \nu)\} (k = 0, 1, \dots, \tau), \\ e^l \chi(\mu, l) = \{\xi_{\mu\nu}^l \chi(\mu, l)\} (l = 0, 1, \dots, \tau), e;$$

$$c_{\chi}^m(\tau) — \bar{e}_k (k = \tau + 1, \dots), \bar{e}^l (l = \tau + 1, \dots) \\ \bar{e}_{k\chi}(k, \nu) = \{\bar{\xi}_{\mu\nu}^k \chi(k, \nu)\} (k = 0, 1, \dots, \tau), \\ \bar{e}^l \chi(\mu, l) = \{\bar{\xi}_{\mu\nu}^l \chi(\mu, l)\} (l = 0, 1, \dots, \tau), e.$$

### 3. Точные условия для существования преобразованной последовательности

Точные условия для существования  $\{\xi'_{mn}\}$  в случае преобразований пространств двойных последовательностей — следующие:

$$\text{для } \Gamma^c \text{ и } \Gamma — \sum_{k,l} |a_{mnkl}| < \infty (m, n = 0, 1, \dots), \quad a_1$$

$$\text{для } I — \sup_{k,l} |a_{mnkl}| < \infty (m, n = 0, 1, \dots),$$

$$\text{для } c_{\varphi\psi}^{\delta}(\tau) — a_1 \text{ и}$$

$$\sum_k \varphi(k) |a_{mnkl}| < \infty (m, n = 0, 1, \dots; l = 0, 1, \dots, \tau), \quad a_1(\tau)$$

$$\sum_l \psi(l) |a_{mnkl}| < \infty (m, n = 0, 1, \dots; k = 0, 1, \dots, \tau);$$

для  $c_{\chi}^{\delta}(\tau) - a_1$  и

$$\sum_k \chi(k, l) |a_{mnkl}| < \infty \quad (m, n = 0, 1, \dots; l = 0, 1, \dots, \tau) \quad a_5(\tau)$$

$$\sum_l \chi(k, l) |a_{mnkl}| < \infty \quad (m, n = 0, 1, \dots; k = 0, 1, \dots, \tau)$$

#### 4. Норма функционалов

Норма функционалов (12) выражается следующими формулами:

$$\text{в } m\text{с или } \Gamma - \|f_{mn}\| = \sum_{k,l} |a_{mnkl}| \quad (m, n = 0, 1, \dots), \quad (18)$$

$$\text{в } I - \|f_{mn}\| = \sup_{k,l} |a_{mnkl}| \quad (m, n = 0, 1, \dots), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \text{в } c_{\varphi\psi}^{\delta}(\tau) - \|f_{mn}\| &= \sum_{k,l=0}^{\tau} \varphi(k) \psi(l) |a_{mnkl}| + \sum_{k,l=\tau+1}^{\infty, \tau} \varphi(k) |a_{mnkl}| + \\ &+ \sum_{k,l=0, \tau+1}^{\tau, \infty} \psi(l) |a_{mnkl}| + \sum_{k,l=\tau+1}^{\infty} |a_{mnkl}| \quad (m, n = 0, 1, \dots), \quad (20) \end{aligned}$$

$$\text{в } c_{\chi}^{\delta}(\tau) - \|f_{mn}\| = \sum_{k,l > \tau} \chi(k, l) |a_{mnkl}| + \sum_{k,l=\tau+1}^{\infty} |a_{mnkl}| \quad (m, n = 0, 1, \dots). \quad (21)$$

Сравнивая пункты 3 и 4, видим, что существование  $\{\xi'_{mn}\}$  во всем пространстве  $m\text{с}$ ,  $\Gamma$ ,  $I$ ,  $c_{\varphi\psi}^{\delta}(\tau)$  или  $c_{\chi}^{\delta}(\tau)$  и непрерывность функционалов в тех же пространствах — эквивалентные понятия.

#### 5. Условия для $x' \in m_{\lambda}$

Легко можно получить из формул (18), (19), (20) и (21) точные условия для  $x' \in m_{\lambda}$ . Например, в случае преобразования пространств  $c_{\varphi\psi}^{\delta}(\tau)$  получаем следующие точные условия:

$$\begin{aligned} \sum_{k,l} |a_{mnkl}| &\leq M(\lambda) \quad (m, n)_{\lambda}, & \bar{c}_1 \\ \sum_k \varphi(k) |a_{mnkl}| &\leq M_l(\lambda) \quad ((m, n)_{\lambda}, l = 0, 1, \dots, \tau), & c_4(\tau) \\ \sum_l \psi(l) |a_{mnkl}| &\leq M'_k(\lambda) \quad ((m, n)_{\lambda}, k = 0, 1, \dots, \tau); \end{aligned}$$

а в случае преобразования пространств  $c_{\lambda}^{\delta}(\tau)$  получаем следующие точные условия:  $\bar{c}_1$  и

$$\sum_k \chi(k, l) |a_{mnkl}| \leq M''(\lambda) \quad ((m, n)_{\lambda}, l = 0, 1, \dots, \tau), \quad c_5(\tau)$$

$$\sum_l \chi(k, l) |a_{mnkl}| \leq M_k'''(\lambda) \quad ((m, n)_{\lambda}, k = 0, 1, \dots, \tau);$$

где символом  $(m, n)_{\lambda}$  обозначаем значения индексов  $m$  и  $n$  в пределах  $\frac{1}{\lambda} \leq \frac{m}{n} \leq \lambda$  при любом фиксированном  $\lambda \geq 1$ .<sup>15</sup>

## 6. Об элементах $\bar{e}_k$ и $\bar{e}^l$ основного множества

Требую сходимость, например, в смысле  $c$ , на основном множестве пространства  $mc$ , получаем для последовательности  $\bar{e}_k$  следующее условие:

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} f_{mn}(\bar{e}_k) = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{l \in G} a_{mnkl} = L_k(G), \quad (22)$$

где  $G$  — произвольное подмножество множества неотрицательных целых чисел, упорядоченных по их величинам. Так как условие (22) трудно применять, то целесообразно преобразовать его в более удобную форму. Именно, учитывая

$$\sum_l |a_{mnkl}| \leq M_k, \text{ если } m, n \geq N,$$

условие (22) эквивалентно следующему:

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_l |a_{mnkl} - a_{kl}| = 0 \quad (k = 0, 1, \dots), \quad d_4(I_1)$$

где  $a_{kl} = \lim_{m, n \rightarrow \infty} a_{mnkl}$  ( $k, l = 0, 1, \dots$ )<sup>16</sup>

Можно показать, что  $d_4$  (II) влечет равенство

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{l \in G} a_{mnkl} = \sum_{l \in G} a_{kl} \quad (23)$$

при любом множестве  $G$  неотрицательных целых чисел.

<sup>15</sup> Условия  $a_1$ ,  $a_4(\tau)$  и  $a_5(\tau)$  вытекают из условий соответственно  $c_1$ ,  $c_4(\tau)$  и  $c_5(\tau)$ ; если же класс  $c_{\lambda}$  понимать как в [29], то условия  $a_1$ ,  $a_4(\tau)$  и  $a_5(\tau)$  самостоятельны.

<sup>16</sup> Хилл и Гамильтон [11], стр. 156—157. См. также Харди [28], стр. 66—69, и Хан [8], стр. 13—16.

Аналогичным образом можно поступить и в случае сходимости в смыслах  $m\epsilon$ ,  $\gamma$  и  $c_\lambda$

## 7 Пример

Найдем точные условия для линейного преобразования  $c_\lambda^z \rightarrow c_\lambda$ . Для этого найдем прежде точные условия для преобразования  $c_\lambda^z(\tau) \rightarrow c_\lambda$ . Для существования  $\{\xi'_{mn}\}$  и ограниченности в смысле  $m_\lambda$  точные условия суть  $c_1$  и  $c_5(\tau)$ . Из сходимости в смысле  $c$  на основном множестве пространства  $c_\lambda^z(\tau)$  получаем (учитывая пункт 6) условия:

$$\lim_{(m,n)_\lambda \rightarrow \infty} \sum_{k,l} a_{mnlk} = a; \quad \bar{d}_3$$

$$\lim_{(m,n)_\lambda \rightarrow \infty} \sum_k |a_{mnlk} - \lim_{(m,n)_\lambda \rightarrow \infty} a_{mnlk}| = 0 \quad (l = \tau + 1, \quad )$$

и

$$\bar{d}_4(\tau)$$

$$\lim_{(m,n)_\lambda \rightarrow \infty} \sum_k |a_{mnlk} - \lim_{(m,n)_\lambda \rightarrow \infty} a_{mnlk}| = 0 \quad (k = \tau + 1, \quad ).$$

Так как  $c_\lambda^z = \bigcup_\tau c_\lambda^z(\tau)$ , то точные условия для  $c_\lambda^z \rightarrow c_\lambda$  получаем из условий  $c_1$ ,  $\bar{d}_3$ ,  $c_5(\tau)$  и  $\bar{d}_4(\tau)$ , где последние два должны выполняться при любом  $\tau$ .

## 8. Обозначения условий для линейных преобразований

$$a_1 \quad \sum_{k,l} |a_{mnlk}| < \infty \quad (m, n = 0, 1, \quad );$$

$$a_2 \quad a_{mnlk} = 0, \text{ если } k > C_{mnl} \quad (m, n, l = 0, 1, \quad ), \\ a_{mnlk} = 0, \text{ если } l > C'_{mnk} \quad (m, n, k = 0, 1, \quad );$$

$$a_3 \quad \sup_{k,l} |a_{mnlk}| < \infty \quad (m, n = 0, 1, \quad );$$

$$a_4 \quad \sum_k \varphi(k) |a_{mnlk}| < \infty \quad (m, n, l = 0, 1, \quad ),$$

$$\sum_l \psi(l) |a_{mnlk}| < \infty \quad (m, n, k = 0, 1, \quad );$$

$$a_5 \sum_k \chi(k,l) |a_{mnl}| < \infty \quad (m, n, l = 0, 1, \dots),$$

$$\sum_l \chi(k,l) |a_{mnl}| < \infty \quad (m, n, k = 0, 1, \dots);$$

$$b_1 \sum_{k,l} |a_{mnl}| \leq M \quad (m, n \geq N);$$

$$b_2 \quad a_{mnl} = 0, \text{ если } m, n, k > C_l \quad (l = 0, 1, \dots),$$

$$a_{mnl} = 0, \text{ если } m, n, l > C_k' \quad (k = 0, 1, \dots);$$

$$b_3 \sup_{k,l} |a_{mnl}| \leq M \quad (m, n \geq N);$$

$$c_1 \sum_{k,l} |a_{mnl}| \leq M \quad (m, n = 0, 1, \dots);$$

$$c_2 \quad a_{mnl} = 0, \text{ если } k > C_l \quad (m, n, l = 0, 1, \dots),$$

$$a_{mnl} = 0, \text{ если } l > C_k' \quad (m, n, k = 0, 1, \dots);$$

$$c_3 \sup_{k,l} |a_{mnl}| \leq M \quad (m, n = 0, 1, \dots);$$

$$c_4 \sum_k \varphi(k) |a_{mnl}| \leq M_l(\lambda) \quad ((m,n)_\lambda, l = 0, 1, \dots),$$

$$\sum_l \psi(l) |a_{mnl}| \leq M_k^l(\lambda) \quad ((m,n)_\lambda, k = 0, 1, \dots);$$

$$c_5 \sum_k \chi(k,l) |a_{mnl}| \leq M_l^{II}(\lambda) \quad ((m,n)_\lambda, l = 0, 1, \dots),$$

$$\sum_l \chi(k,l) |a_{mnl}| \leq M_k^{III}(\lambda) \quad ((m,n)_\lambda, k = 0, 1, \dots);$$

$$d_1 \quad \lim_{m,n \rightarrow \infty} a_{mnl} = a_{kl} \quad (k, l = 0, 1, \dots);$$

$$d_2 \quad \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_k a_{mnl} = a_l \quad (l = 0, 1, \dots),$$

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_l a_{mnl} = a'_k \quad (k = 0, 1, \dots);$$

$$d_3 \quad \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{k,l} a_{mnl} = a;$$

$$\begin{aligned}
d_4 \quad & \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_k |a_{mnkl} - \lim_{m,n \rightarrow \infty} a_{mnkl}| = 0 \quad (l = 0, 1, \dots), \\
& \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_l |a_{mnkl} - \lim_{m,n \rightarrow \infty} a_{mnkl}| = 0 \quad (k = 0, 1, \dots); \\
f_1 \quad & \lim_{m \rightarrow \infty} a_{mnkl} = a_{nkl} \quad (n, k, l = 0, 1, \dots), \\
& \lim_{n \rightarrow \infty} a_{mnkl} = a^I_{mkl} \quad (m, k, l = 0, 1, \dots); \\
f_2 \quad & \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_k a_{mnkl} = a^I_{nl} \quad (n, l = 0, 1, \dots), \\
& \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_l a_{mnkl} = a^{II}_{nk} \quad (n, k = 0, 1, \dots), \\
& \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k a_{mnkl} = a^{III}_{ml} \quad (m, l = 0, 1, \dots), \\
& \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_l a_{mnkl} = a^{IV}_{mk} \quad (m, k = 0, 1, \dots); \\
f_3 \quad & \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k,l} a_{mnkl} = a^II_n \quad (n = 0, 1, \dots), \\
& \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k,l} a_{mnkl} = a^III_m \quad (m = 0, 1, \dots); \\
f_4 \quad & \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_k |a_{mnkl} - \lim_{m \rightarrow \infty} a_{mnkl}| = 0 \quad (n, l = 0, 1, \dots), \\
& \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_l |a_{mnkl} - \lim_{m \rightarrow \infty} a_{mnkl}| = 0 \quad (n, k = 0, 1, \dots), \\
& \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k |a_{mnkl} - \lim_{n \rightarrow \infty} a_{mnkl}| = 0 \quad (m, l = 0, 1, \dots), \\
& \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_l |a_{mnkl} - \lim_{n \rightarrow \infty} a_{mnkl}| = 0 \quad (m, k = 0, 1, \dots); \\
g \quad & \sum_{m,n} |a_{mnkl}| \leq M \quad (k, l = 0, 1, \dots);
\end{aligned}$$

$$h_1 \lim_{(m,n)_{\lambda} \rightarrow \infty} \sum_k \varphi(k) a_{mnkl} = a_l^{II} \quad (l = 0, 1, \dots),$$

$$\lim_{(m,n)_{\lambda} \rightarrow \infty} \sum_l \psi(l) a_{mnkl} = a_k^{III} \quad (k = 0, 1, \dots);$$

∪

$$h_2 \lim_{(m,n)_{\lambda} \rightarrow \infty} \sum_k \chi(k,l) a_{mnkl} = a_l^{IV} \quad (l = 0, 1, \dots),$$

$$\lim_{(m,n)_{\lambda} \rightarrow \infty} \sum_l \chi(k,l) a_{mnkl} = a_k^V \quad (k = 0, 1, \dots);$$

$$h_3 \lim_{(m,n)_{\lambda} \rightarrow \infty} \sum_k \varphi(k) |a_{mnkl} - \lim_{(m,n)_{\lambda} \rightarrow \infty} a_{mnkl}| = 0 \quad (l = 0, 1, \dots),$$

$$\lim_{(m,n)_{\lambda} \rightarrow \infty} \sum_l \psi(l) |a_{mnkl} - \lim_{(m,n)_{\lambda} \rightarrow \infty} a_{mnkl}| = 0 \quad (k = 0, 1, \dots);$$

$$h_4 \lim_{(m,n)_{\lambda} \rightarrow \infty} \sum_k \chi(k,l) |a_{mnkl} - \lim_{(m,n)_{\lambda} \rightarrow \infty} a_{mnkl}| = 0 \quad (l = 0, 1, \dots),$$

$$\lim_{(m,n)_{\lambda} \rightarrow \infty} \sum_l \chi(k,l) |a_{mnkl} - \lim_{(m,n)_{\lambda} \rightarrow \infty} a_{mnkl}| = 0 \quad (k = 0, 1, \dots).$$

### 9. Перечень точных условий для линейных преобразований, применяемых в данной работе <sup>17</sup>

- 1)  $c \rightarrow c$  :  $a_1, a_2, b_1, b_2, d_3, d_4$ ;
- 2)  $c \rightarrow mc$  :  $c_1, c_2, d_3, d_4$ ;
- 3)  $c \rightarrow r$  :  $c_1, c_2, d_3, d_4, f_3, f_4$ ;
- 4)  $mc \rightarrow c$  :  $a_1, b_1, d_3, d_4$ ;
- 5)  $mc \rightarrow mc$  :  $c_1, d_3, d_4$ ;
- 6)  $mc \rightarrow r$  :  $c_1, d_3, d_4, f_3, f_4$ ;
- 7)  $r \rightarrow c$  :  $a_1, b_1, d_1, d_2, d_3$ ;
- 8)  $r \rightarrow mc$  :  $c_1, d_1, d_2, d_3$ ;
- 9)  $r \rightarrow r$  :  $c_1, d_1, d_2, d_3, f_1, f_2, f_3$ ;
- 10)  $l \rightarrow c$  :  $a_3, b_3, d_1$ ;
- 11)  $l \rightarrow mc$  :  $c_3, d_1$ ;
- 12)  $l \rightarrow r$  :  $c_3, d_1, f_1$ ;
- 13)  $l \rightarrow l$  :  $g$ ;

<sup>17</sup> Точные условия для преобразований 1) — 9) приведены в работах [9] и [11]. Вывод точного условия для  $l \rightarrow l$  аналогичен выводу в случае простых рядов.

- 14)  $mc \rightarrow c_\lambda$  :  $a_1, \bar{c}_1, \bar{d}_3, \bar{d}_4$  ;  
 15)  $r \rightarrow c_\lambda$  :  $a_1, \bar{c}_1, \bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3$  ;  
 16)  $l \rightarrow c_\lambda$  :  $a_3, \bar{c}_3, \bar{d}_1$  ;  
 17)  $c_{\varphi\psi}^z \rightarrow c_\lambda$  :  $a_1, a_4, \bar{c}_1, c_4, \bar{d}_3, \bar{d}_4$  ;  
 18)  $c_{\varphi\psi}^c \rightarrow c_\lambda$  :  $a_1, a_4, \bar{c}_1, c_4, \bar{d}_3, \bar{d}_4, h_1$  ;  
 19)  $c_{\varphi\psi}^m \rightarrow c_\lambda$  :  $a_1, a_4, \bar{c}_1, c_4, \bar{d}_3, h_3$  ;  
 20)  $c_\chi^z \rightarrow c_\lambda$  :  $a_1, a_5, \bar{c}_1, c_5, \bar{d}_3, \bar{d}_4$  ;  
 21)  $c_\chi^c \rightarrow c_\lambda$  :  $a_1, a_5, \bar{c}_1, c_5, \bar{d}_3, \bar{d}_4, h_2$  ;  
 22)  $c_\chi^m \rightarrow c_\lambda$  :  $a_1, a_5, \bar{c}_1, c_5, \bar{d}_3, h_4$  ;

где буквы, отмеченные черточкой, означают, что данное условие должно выполняться, если  $\frac{1}{\lambda} \leq \frac{m}{n} \leq \lambda$  при любом фиксированном  $\lambda \geq 1$ ; притом пределы не должны зависеть от  $\lambda$ , но величины  $M$  могут зависеть от  $\lambda$ .

Отметим, что условия  $a_1, a_4$  и  $a_5$  вытекают из условий соответственно  $\bar{c}_1, c_4$  и  $c_5$ . Если же класс  $c_\lambda$  определить как в работе [29], то условия  $a_1, a_4$  и  $a_5$  самостоятельны.

Отметим, наконец, что точные условия для преобразований  $c_{\varphi\psi}^\delta \rightarrow c_\lambda$  можно выводить из точных условий для  $c_\chi^\delta \rightarrow c_\lambda$  если взять в последнем случае  $\chi(k, l) = \varphi(k) \psi(l)$ .

## 10. Формулы для вычисления предела преобразованной последовательности

На основе теоремы V можем получить формулы для вычисления предела  $U' = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \xi'_{mn}$  преобразованной последовательности  $\{\xi'_{mn}\}$ .

При преобразовании пространств  $mc, c_{\varphi\psi}^\delta(\tau), c_\chi^\delta(\tau)$  и классов  $c, c_{\varphi\psi}^\delta, c_\chi^\delta$  получаем соотношение

$$U' = aU + \sum_{k, l} a_{kl} (\xi_{kl} - U), \quad (24)$$

где  $U = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \xi_{mn}$ .

При преобразовании пространства  $\Gamma$  получаем соотношение

$$U' = aU + \sum_{k,l} a_{kl} (\xi_{kl} - U_k' - U_l + U) + \sum_k a_k' (U_k' - U) + \sum_l a_l (U_l - U), \quad (25)$$

где  $U_l = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{kl}$  ( $l = 0, 1, \dots$ ) и  $U_k' = \lim_{l \rightarrow \infty} \xi_{kl}$  ( $k = 0, 1, \dots$ ).

При преобразовании пространства  $I$  получаем соотношение

$$U' = \sum_{k,l} a_{kl} \xi_{kl}. \quad (26)$$

Для доказательства соотношений (24), (25) и (26) нужно показать их справедливость на основном множестве соответствующих пространств. При доказательстве формулы (24) учитываем соотношение типа (23). В случае класса с нужно поступить иначе (см. напр. Гамильтон [9] стр. 49).

Чтобы имело место соотношение

$$U' = U, \quad (27)$$

в случае формулы (24) необходимы и достаточны условия

$$a = 1, a_{kl} = 0 \quad (k, l = 0, 1, \dots);$$

в случае формулы (25) необходимы и достаточны условия

$$a = 1, a_{kl} = 0 \quad (k, l = 0, 1, \dots), \\ a_l = 0 \quad (l = 0, 1, \dots), a_k' = 0 \quad (k = 0, 1, \dots);$$

а в случае формулы (26), где  $U = \sum \xi_{kl}$ , необходимы и достаточны условия

$$a_{kl} = 1 \quad (k, l = 0, 1, \dots).$$

Достаточность этих условий очевидна, необходимость же проверяется непосредственно.

#### § 4. Билинейные преобразования классов двойных последовательностей

Пусть заданы любые классы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  двойных последовательностей. Условия, при которых матрица

$$A = (a_{mnklst}) \quad (m, n, k, l, s, t = 0, 1, \dots)$$

преобразует любые последовательности  $x = \{\xi_{mn}\} \in \alpha$  и  $y = \{\eta_{mn}\} \in \beta$  в последовательность  $z = \{\zeta_{mn}\} \in \gamma$ , где

$$f_{mn}(x, y) = \zeta_{mn} = \sum_{k,l,s,t} a_{mnklst} \xi_{kl} \eta_{st} \quad (m, n = 0, 1, \dots), \quad (28)$$

назовем условиями для билинейного преобразования  $\alpha \times \beta \rightarrow \gamma$ .

Норма функционалов (28) в пространствах  $m \times 1$  и  $r \times 1$  выражается формулой

$$\|f_{mn}\| = \sup_{s,t} \sum_{k,l} |a_{mnklst}| \quad (m, n = 0, 1, \dots), \quad (29)$$

а в пространстве  $1 \times 1$  формулой

$$\|f_{mn}\| = \sup_{k,l,s,t} |a_{mnklst}| \quad (m, n = 0, 1, \dots)$$

В пространствах  $m \times m$ ,  $m \times r$ ,  $r \times r$ , а также в пространствах  $\mathbf{c}_{\varphi_1 \psi_1}^\delta(\tau) \times \mathbf{c}_{\varphi_2 \psi_2}^\delta(\tau)$ , и  $\mathbf{c}_{\chi_1}^\delta(\tau) \times \mathbf{c}_{\chi_2}^\delta(\tau)$  можем найти лишь верхнюю границу нормы функционалов (28), которая будет соответственно

$$\|f_{mn}\| \leq \sum_{k,l,s,t} |a_{mnklst}| \quad (m, n = 0, 1, \dots). \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \|f_{mn}\| \leq & \left( \sum_{k,l=0}^{\tau} \varphi_1(k) \psi_1(l) + \sum_{k,l=\tau+0,1}^{\infty, \tau} \varphi_1(k) + \sum_{k,l=0, \tau+1}^{\tau, \infty} \psi_1(l) + \sum_{k,l=\tau+1}^{\infty} \right) \\ & \left( \sum_{s,t=0}^{\tau} \varphi_2(s) \psi_2(t) + \sum_{s,t=\tau+1,0}^{\infty, \tau} \varphi_2(s) + \sum_{s,t=0, \tau+1}^{\tau, \infty} \psi_2(t) + \sum_{s,t=\tau+1}^{\infty} \right) |a_{mnklst}| \\ & (m, n = 0, 1, \dots), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \|f_{mn}\| \leq & \left( \sum_{k,l \succ \tau}^{\infty} \chi_1(k,l) + \sum_{k,l=\tau+1}^{\infty} \right) \left( \sum_{s,t \succ \tau}^{\infty} \chi_2(s,t) + \sum_{s,t=\tau+1}^{\infty} \right) |a_{mnklst}| \\ & (m, n = 0, 1, \dots). \end{aligned} \quad (32)$$

Приведем доказательство формулы (29). Обозначим

$$\sup_{s,t} \sum_{k,l} |a_{mnklst}| = M_{mn}.$$

Взяв последовательности  $x = \{\xi_{mn}\} \in m \times c$  и  $y = \{\eta_{mn}\} \in l$ , получаем

$$\begin{aligned} |f_{mn}(x, y)| & \leq \sum_{s,t} \left( \sum_{k,l} |a_{mnklst} \xi_{kl}| \right) |\eta_{st}| \leq \\ & \leq \|x\| \sum_{s,t} \left( \sum_{k,l} |a_{mnklst}| \right) |\eta_{st}| \leq M_{mn} \|x\| \|y\|, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\|f_{mn}\| \leq \sup_{s,t} \sum_{k,l} |a_{mnklst}|.$$

С другой стороны, из соотношения

$$f_{mn}(x, e_{st}) = \sum_{k,l} a_{mnlst} \xi_{kl}$$

следует, что

$$\|f_{mn}\| \geq \sup_{\|x\|=1} \left| \sum_{k,l} a_{mnlst} \xi_{kl} \right| = \sum_{k,l} |a_{mnlst}| \quad (s, t = 1, 0, \dots).$$

Что касается соотношений (30), (31) и (32), то в некоторых случаях можно знак неравенства отбросить. Например, в случае, если

$$a_{mnlst} = \begin{cases} \tilde{a}_{mnl}, & \text{если } s = m - k \text{ и} \\ & t = n - l, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (33)$$

Тогда, например, в случае (30)

$$\sum_{k,l,s,t} a_{mnlst} \xi_{kl} \eta_{st} = \sum_{k,l=0}^{m,n} \tilde{a}_{mnl} \xi_{kl} \eta_{m-k, n-l},$$

и при  $\eta_{st} = 1$  ( $s, t = 0, 1, \dots$ ),  $\xi_{kl}^* = \operatorname{sgn} \tilde{a}_{mnl}$  получаем

$$f_{mn}(x^*, e) = \sum_{k,l=0}^{m,n} |a_{mnl}| = \sum_{k,l,s,t} |a_{mnlst}| \quad (x^* = \{\xi_{kl}^*\})$$

В дальнейшем (кроме последнего параграфа III главы) рассматриваем треугольные билинейные преобразования, т. е. преобразования, элементы матрицы которых удовлетворяют условию

$$a_{mnlst} = 0,$$

если выполняется хотя бы одно из неравенств:  $k > m$ ,  $s > m$ ,  $l > n$  или  $t > n$ .

Вывод условий для билинейных преобразований аналогичен выводу условий для линейных преобразований. Отдельные условия билинейных преобразований обозначим аналогичным образом как для линейных преобразований. Так, например, условие  $d_{31}$

означает:  $\lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{k,l} a_{mnlst} = a_{st}$  ( $s, t = 0, 1, \dots$ ), что можно понимать

как соединение условий  $d_3$  и  $d_1$ , где  $d_3$  применено к индексам  $m, n, k$  и  $l$ , а  $d_1$  применено к индексам  $m, n, s$  и  $t$ .

Условия для билинейных преобразований рассматриваемых нами классов двойных последовательностей следующие:

- 1)  $m \times 1 \rightarrow m$  :  $c_{13}, d_{31}, d_{41}$ ;
- 2)  $r \times 1 \rightarrow m$  :  $c_{13}, d_{11}, d_{21}, d_{31}$ ;
- 3)  $1 \times 1 \rightarrow m$  :  $c_{33}, d_{11}$ ;

- 4)  $mc \times l \rightarrow r$  :  $c_{13}, d_{31}, d_{41}, f_{31}, f_{41}$  ;
- 5)  $r \times l \rightarrow r$  :  $c_{13}, d_{11}, d_{21}, d_{31}, f_{11}, f_{21}, f_{31}$  ;
- 6)  $l \times l \rightarrow r$  :  $c_{33}, d_{11}, f_{11}$  ;
- 7)  $l \times l \rightarrow l$  :  $gg$ ; <sup>18</sup>
- 8)  $mc \times mc \rightarrow mc$  :  $c_{11}, d_{33}, d_{34}, d_{43}, d_{44}$  ;
- 9)  $mc \times r \rightarrow mc$  :  $c_{11}, d_{31}, d_{32}, d_{33}, d_{41}, d_{42}, d_{43}$  ;
- 10)  $r \times r \rightarrow mc$  :  $c_{11}, d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{21}, d_{22}, d_{23}, d_{31}, d_{32}, d_{33}$  ;
- 11)  $mc \times mc \rightarrow r$  :  $c_{11}, d_{33}, d_{34}, d_{43}, d_{44}, f_{33}, f_{34}, f_{43}, f_{44}$  ;
- 12)  $mc \times r \rightarrow r$  :  $c_{11}, d_{31}, d_{32}, d_{33}, d_{41}, d_{42}, d_{43}, f_{31}, f_{32}, f_{33}, f_{41}, f_{42}, f_{43}$  ;
- 13)  $r \times r \rightarrow r$  :  $c_{11}, d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{21}, d_{22}, d_{23}, d_{31}, d_{32}, d_{33}, f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{31}, f_{32}, f_{33}$  ;
- 14)  $c_{\varphi\psi}^z \times c_{\varphi\psi}^z \rightarrow c_\lambda$  :  $\bar{c}_{11}, \bar{c}_{14}, \bar{c}_{41}, c_{44}, \bar{d}_{33}, \bar{d}_{34}, \bar{d}_{43}, \bar{d}_{44}$  ;
- 15)  $c_{\varphi\psi}^c \times c_{\varphi\psi}^c \rightarrow c_\lambda$  :  $\bar{c}_{11}, \bar{c}_{14}, \bar{c}_{41}, c_{44}, \bar{d}_{33}, \bar{d}_{34}, \bar{d}_{43}, \bar{d}_{44}, \bar{d}_3 h_1, \bar{d}_4 h_1, h_1 \bar{d}_3, h_1 \bar{d}_4, h_{11}$  ;
- 16)  $c_{\varphi\psi}^m \times c_{\varphi\psi}^m \rightarrow c_\lambda$  :  $\bar{c}_{11}, \bar{c}_{14}, \bar{c}_{41}, c_{44}, \bar{d}_{33}, \bar{d}_3 h_3, h_3 \bar{d}_3, h_{33}$  ;
- 17)  $c_\lambda^z \times c_\lambda^z \rightarrow c_\lambda$  :  $\bar{c}_{11}, \bar{c}_{15}, \bar{c}_{51}, c_{55}, \bar{d}_{33}, \bar{d}_{34}, \bar{d}_{43}, \bar{d}_{44}$  ;
- 18)  $c_\lambda^c \times c_\lambda^c \rightarrow c_\lambda$  :  $\bar{c}_{11}, \bar{c}_{15}, \bar{c}_{51}, c_{55}, \bar{d}_{33}, \bar{d}_{34}, \bar{d}_{43}, \bar{d}_{44}, \bar{d}_3 h_2, \bar{d}_4 h_2, h_2 \bar{d}_3, h_2 \bar{d}_4, h_{22}$  ;
- 19)  $c_\lambda^m \times c_\lambda^m \rightarrow c_\lambda$  :  $\bar{c}_{11}, \bar{c}_{15}, \bar{c}_{51}, c_{55}, \bar{d}_{33}, \bar{d}_3 h_4, h_4 \bar{d}_3, h_{44}$  ;
- 20)  $c_{\varphi\psi}^z \times mc \rightarrow c_\lambda$  :  $\bar{c}_{11}, \bar{c}_{41}, \bar{d}_{33}, \bar{d}_{34}, \bar{d}_{43}, \bar{d}_{44}$  ;
- 21)  $c_{\varphi\psi}^c \times mc \rightarrow c_\lambda$  :  $\bar{c}_{11}, \bar{c}_{41}, \bar{d}_{33}, \bar{d}_{34}, \bar{d}_{43}, \bar{d}_{44}, h_1 \bar{d}_3, h_1 \bar{d}_4$  ;
- 22)  $c_{\varphi\psi}^m \times mc \rightarrow c_\lambda$  :  $\bar{c}_{11}, \bar{c}_{41}, \bar{d}_{33}, \bar{d}_{34}, h_3 \bar{d}_3, h_3 \bar{d}_4$  ;
- 23)  $c_\lambda^z \times mc \rightarrow c_\lambda$  :  $\bar{c}_{11}, \bar{c}_{51}, \bar{d}_{33}, \bar{d}_{34}, \bar{d}_{43}, \bar{d}_{44}$  ;
- 24)  $c_\lambda^c \times mc \rightarrow c_\lambda$  :  $\bar{c}_{11}, \bar{c}_{15}, \bar{d}_{33}, \bar{d}_{34}, \bar{d}_{43}, \bar{d}_{44}, h_2 \bar{d}_3, h_2 \bar{d}_4$  ;
- 25)  $c_\lambda^m \times mc \rightarrow c_\lambda$  :  $\bar{c}_{11}, \bar{c}_{51}, \bar{d}_{33}, \bar{d}_{34}, h_4 \bar{d}_3, h_4 \bar{d}_4$  ;

Условия для билинейных преобразований 1)–7) точные, для остальных преобразований 8)–25) достаточные. Именно, остается открытым вопрос о необходимости условий  $c_{11}, \bar{c}_{11}, d_{44}, \bar{d}_{44}, f_{44}, \bar{c}_{14}, \bar{c}_{41}, \bar{c}_{15}, \bar{c}_{51}, c_{44}, c_{55}, h_3 \bar{d}_4, h_4 \bar{d}_4, h_{33}$  и  $h_{44}$  в каждом отдельном случае.

Можно показать, что в частном случае, если матрица билинейного преобразования выражается в виде (33), приведенные условия для преобразований 8)–25) являются точными.

<sup>18</sup> Вывод точного условия для  $l \times l \rightarrow l$  аналогичен выводу точного условия для  $l \rightarrow l$  в случае простых рядов (Кноп, Лоренц [12], теорема 1).

Для вычисления предела  $\lim_{m,n \rightarrow \infty} \zeta_{mn} = W$  преобразованной после-

довательности  $\{\zeta_{mn}\}$  можем применять те же формулы (24), (25) и (26), как в случае линейного преобразования, только с тем различием, что величины  $a$ ,  $a_{kl}$ ,  $a_l$  и  $a_k'$  нужно понимать иначе, а именно

$$a_\mu = \begin{cases} V \left( \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{v,s,t} a_{mnklst} \right) + \sum_{s,t} \left( \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_v a_{mnklst} \right) (\eta_{st} - V), \\ \text{если } \beta = \mathbf{c}, \mathbf{mc}, \mathbf{c}_{\varphi\psi}^\delta \text{ или } \mathbf{c}_{\chi}^\delta; \\ V \left( \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{v,s,t} a_{mnklst} \right) + \\ + \sum_{s,t} \left( \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_v a_{mnklst} \right) (\eta_{st} - V_s' - V_t + V) + \\ + \sum_s \left( \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{v,t} a_{mnklst} \right) (V_s' - V) + \\ + \sum_t \left( \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{v,s} a_{mnklst} \right) (V_t - V), \text{ если } \beta = \mathbf{r}; \\ \sum_{s,t} \left( \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_v a_{mnklst} \right) \eta_{st}, \text{ если } \beta = \mathbf{l}; \end{cases} \quad (34)$$

где  $V = \lim_{s,t \rightarrow \infty} \eta_{st}$ ,  $V_t = \lim_{s \rightarrow \infty} \eta_{st}$  ( $t = 0, 1, \dots$ ) и  $V_s' = \lim_{t \rightarrow \infty} \eta_{st}$  ( $s = 0, 1, \dots$ );  $\mu$  и  $\nu$  означают непересекающиеся множества с элементами  $k, l$ , такие, что  $\mu \cup \nu = \{k, l\}$ . Например, если  $\mu = \{k\}$ , тогда  $\nu = \{l\}$ ; если  $\mu = \{k, l\}$ , тогда  $\nu$  — пустое множество.

Чтобы имело место соотношение

$$W = UV, \quad (35)$$

в случае  $\alpha = \mathbf{c}, \mathbf{mc}, \mathbf{c}_{\varphi\psi}^\delta, \mathbf{c}_{\chi}^\delta$  необходимо и достаточно выполнение равенств

$$a = V, a_{kl} = 0 \quad (k, l = 0, 1, \dots),$$

в случае  $\alpha = \mathbf{r}$  нужно дополнительно требовать

$$a_l = 0 \quad (l = 0, 1, \dots), a_k' = 0 \quad (k = 0, 1, \dots),$$

в случае  $\alpha = \mathbf{l}$  необходимо и достаточно

$$a_{kl} = V \quad (k, l = 0, 1, \dots)$$

## II. О методах суммирования двойных рядов

### § 1. Основные понятия и формулы

Скажем, что ряд  $\sum u_{kl}$  суммируем методом  $A = (a_{mnl})$  в смысле  $\alpha$  (коротко  $A_\alpha$ -суммируем) к сумме  $U'$ , если преобразованная методом  $A$  последовательность  $\{U'_{mn}\}$

$$\begin{cases} \text{принадлежит классу } \alpha \ (\alpha \neq I), \\ \sum |\bar{A}_{mn} U'_{mn}| < \infty \ (\alpha = I), \end{cases}$$

и

$$\lim_{\substack{m, n \rightarrow \infty \\ ((m, n)_\lambda \rightarrow \infty)}} U'_{mn} = U',$$

где

$$U'_{mn} = \sum_{k, l} a_{mnl} U_{kl} \ (m, n = 0, 1, \dots).^{19} \quad (36)$$

Если  $A = (a_{mnl})$  является единичной матрицей  $E$ , то говорим, что ряд  $\sum u_{kl}$  сходится в смысле  $\alpha$  или  $E_\alpha$ -суммируем.

Скажем, что метод  $A$  включает метод  $B$  в смысле  $(\alpha, \beta)$ , если каждый  $B_\beta$ -суммируемый ряд  $\sum u_{kl}$  является также  $A_\alpha$ -суммируемым; обозначим это

$$B_\beta \subseteq A_\alpha \text{ или } B \subseteq A \ (\beta, \alpha).$$

Если при включении  $B_\beta \subseteq A_\alpha$  имеет место равенство сумм

$$A \left\{ \sum u_{kl} \right\} = B \left\{ \sum u_{kl} \right\},$$

то говорим, что метод  $A$  включает метод  $B$  в смысле  $(\alpha, \beta)$  и методы совместны в этом смысле. Включение с совместностью в смысле  $(\alpha, \beta)$  обозначим

$$B_\beta \bar{\subseteq} A_\alpha \text{ или } B \bar{\subseteq} A \ (\beta, \alpha).$$

В дальнейшем рассматриваем только треугольные методы суммирования, т. е. такие, при которых

$$a_{mnl} = 0, \text{ если } k > m \text{ или } l > n.$$

<sup>19</sup> Здесь и в дальнейшем, для любых чисел  $u_{kl}$  ( $k, l = 0, 1, \dots$ ) определяем  $U_{mn} = \sum_{k, l=0}^{m, n} u_{kl}$  ( $m, n = 0, 1, \dots$ ). Разность  $\bar{A}_{mn} a_{mn}$  определяется равенством  $\bar{A}_{mn} a_{mn} = \bar{A}_m \bar{A}_n a_{mn}$ , где  $\bar{A}_m a_m = a_m - a_{m-1}$

Обратным методом  $A^{-1}$  (определенный матрицей  $(a'_{mnlk})$ ) для метода  $A$  назовем метод, преобразующий последовательность  $\{U'_{kl}\}$  в последовательность  $\{U_{mn}\}$ , т. е.

$$U_{mn} = \sum_{k,l} a_{mnlk} U_{kl} \quad (m, n = 0, 1, \dots) \quad (37)$$

Как известно, для треугольного метода  $A$  существует обратный  $A^{-1}$  тогда и только тогда, если  $a_{mnmn} \neq 0$  ( $m, n = 0, 1, \dots$ ). Отметим, что при треугольных методах матрица обратного метода  $A^{-1}$  является обратной матрицей метода  $A$ .

Для треугольных методов имеет место следующая

**Теорема VI.** Для того, чтобы имело место соотношение

$$B_{\beta} \subseteq A_{\alpha},$$

необходимо и достаточно, чтобы матрица  $AB^{-1}$  удовлетворяла условиям для преобразования  $\beta \rightarrow \alpha$ . Для совместности методов  $A$  и  $B$  в смысле  $(\alpha, \beta)$ , необходимо и достаточно, кроме того

$$AB^{-1} \left\{ \sum u_{kl} \right\} = \sum u_{kl}$$

## § 2. Метод Вороного-Нерлунда $(WN; a_{kl})$

Рассматривая метод Вороного-Нерлунда для двойных рядов в форме (36), определяем элементы его матрицы следующим образом:

$$a_{mnlk} = \begin{cases} \frac{a_{m-k, n-l}}{A_{mn}} & \text{если } k \leq m \text{ и } l \leq n, \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

где  $\{a_{kl}\}$  произвольная последовательность, такая что  $A_{mn} = \sum_{k,l=0}^{m,n} a_{kl} \neq 0$  ( $m, n = 0, 1, \dots$ ). Для существования обратного

метода  $(WN; a_{kl})^{-1}$  необходимо и достаточно, чтобы  $a_{00} \neq 0$ . Это условие выполнено, ибо  $a_{00} = A_{00} \neq 0$ .

При умножении рядов рассматриваем также методы  $(WN; b_{kl})$ ,  $(WN; c_{kl})$  и  $(WN; d_{kl})$ , где  $\{a_{kl}\}$  и  $\{b_{kl}\}$  произвольны,

$$c_{mn} = \sum_{k,l=0}^{m,n} a_{m-k, n-l} b_{kl} \text{ и } d_{mn} = C_{mn} \quad (m, n = 0, 1, \dots)$$

При рассмотрении умножения рядов существенно выяснить, при каких условиях методы  $(WN; c_{kl})$  и  $(WN; d_{kl})$  выключают методы  $(WN; a_{kl})$  и  $(WN; b_{kl})$  в смысле  $(\alpha, \beta)$ . Обозначив мат-

рицы названных методов соответственно буквами  $C$ ,  $D$ ,  $A$  и  $B$ , вычисляем элементы матриц  $\bar{Q} = CA^{-1}$ ,  $\bar{R} = CB^{-1}$ ,  $Q = DA^{-1}$  и  $R = DB^{-1}$  которые в форме (36) имеют следующий вид:

$$\bar{q}_{mnkl} = \begin{cases} \frac{A_{kl} b_{m-k, n-l}}{C_{mn}}, & \text{если } k \leq m \text{ и } l \leq n, \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$\bar{r}_{mnkl} = \begin{cases} \frac{a_{m-k, n-l} B_{kl}}{C_{mn}}, & \text{если } k \leq m \text{ и } l \leq n, \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$q_{mnkl} = \begin{cases} \frac{A_{kl} B_{m-k, n-l}}{D_{mn}}, & \text{если } k \leq m \text{ и } l \leq n, \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$r_{mnkl} = \begin{cases} \frac{A_{m-k, n-l} B_{kl}}{D_{mn}}, & \text{если } k \leq m \text{ и } l \leq n, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для включения рассматриваемых методов Вороного-Нерлунда в смысле  $(\alpha, \beta)$ , необходимо и достаточно, чтобы матрицы  $\bar{Q}$ ,  $\bar{R}$ ,  $Q$  и  $R$  удовлетворяли условиям для линейного преобразования  $\beta \rightarrow \alpha$ .

Найдем, например, необходимые и достаточные условия для  $(WN; a_{kl})_{mc} \subseteq (WN; c_{kl})_{mc}$ . Матрица  $(\bar{q}_{mnkl})$  должна, по теореме VI, удовлетворить условиям  $c_1$ ,  $d_3$  и  $d_4$ . Из  $c_1$  получаем

$$1^\circ \sum_{k, l=0}^{m, n} |A_{kl} b_{m-k, n-l}| \leq M |C_{mn}| \quad (m, n = 0, 1, \dots).$$

Условие  $d_3$  всегда выполнено, ибо  $\sum_{k, l=0}^{m, n} q_{mnkl} = 1$ . Из  $d_4$  получаем

$$2^\circ \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \left| A_{kl} \left\| \frac{b_{m-k, n-l}}{C_{mn}} - p_{kl} \right\| \right| = 0 \quad (l = 0, 1, \dots),$$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^n \left| A_{kl} \left\| \frac{b_{m-k, n-l}}{C_{mn}} - p_{kl} \right\| \right| = 0 \quad (k = 0, 1, \dots),$$

где  $p_{kl} = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{b_{m-k, n-l}}{C_{mn}} \quad (k, l = 0, 1, \dots)$ .

Для  $(WN; a_{kl})_{mc} \subseteq (WN; c_{kl})_{mc}$  необходимо и достаточно, кроме  $1^\circ$  и  $2^\circ$ , чтобы  $p_{kl} = 0 \quad (k, l = 0, 1, \dots)$ .

§ 3. Метод Чезаро  $(C; a, b)$

Метод Чезаро для двойных рядов определяется в форме (36) следующим образом:

$$a_{mnl} = \begin{cases} \frac{\binom{m-k+a-1}{m-k} \binom{n-l+b-1}{n-l}}{\binom{m+a}{m} \binom{n+b}{n}}, & \text{если } k \leq m \text{ и } l \leq n, \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

где  $a, b > -1$ .

Отметим, что при  $a = b = 1$  получаем метод арифметических средних, а при  $a = b = 0$  — метод сходимости  $E$ .

Обратный метод  $(C; a, b)^{-1}$  в форме (37) выражается матрицей с элементами:

$$a_{mnl} = \begin{cases} \binom{k+a}{k} \binom{m-k-a-1}{m-k} \binom{l+b}{l} \binom{n-l-b-1}{n-l}, & \text{если } k \leq m \\ & \text{и } l \leq n, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для исследования включения методов Чезаро  $(C; a, b)$  и  $(C; c, d)$  нужно найти матрицу  $P = (C; a, b) (C; c, d)^{-1}$ . Элементы матрицы  $P$  следующие:

$$p_{mnl} = \begin{cases} \frac{\binom{k+c}{k} \binom{m-k+a-c-1}{m-k} \binom{l+d}{l} \binom{n-l+b-d-1}{n-l}}{\binom{m+a}{m} \binom{n+b}{n}}, & \text{если } k \leq m \\ & \text{и } l \leq n, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что если порядки методов удовлетворяют условиям  $a, b, c, d > -1$ ,  $a \geq c$ ,  $b \geq d$ , то включение

$$(C; c, d) \subseteq (C; a, b) \quad (38)$$

имеет место в смыслах  $(m, c)$ ,  $(r, r)$ ,  $(1, 1)$  и  $(m, c_\lambda)$ , но не в смыслах  $(c, c)$  и  $(m, r)$ .

Определяем функции

$$\begin{aligned} \varphi(k) &= \begin{cases} k, & \text{если } k \neq 0, \\ 1, & \text{если } k = 0; \end{cases} \\ \psi(l) &= \begin{cases} l, & \text{если } l \neq 0, \\ 1, & \text{если } l = 0; \end{cases} \\ \chi(k, l) &= \begin{cases} k+l, & \text{если } k+l \neq 0, \\ 1, & \text{если } k+l = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (39)$$

Теперь можем исследовать включение методов Чезари в смыслах  $(c_{\varphi\psi}^\delta, c_\lambda)$  и  $(c_\chi^\delta, c_\lambda)$  ( $\delta = z, c, m$ ). Оказывается, что при

$a, b, c, d \geq 0, a \geq c, b \geq d$  имеет место соотношение (38) в смыслах  $(c_{\varphi\psi}^{\delta}, c_{\lambda})$  и  $(c_{\chi}^{\delta}, c_{\lambda})$  ( $\delta = z, c, m$ ).

Нетрудно также проверить, что во всех рассмотренных здесь случаях методы Чезаро совместны.

Наконец отметим, что метод Вороного-Нерлунда ( $WN; p_{kl}$ ), где

$$p_{kl} = \binom{k+a-1}{k} \binom{l+b-1}{l} \quad (k, l = 0, 1, \dots)$$

является методом Чезаро ( $C; a, b$ ).

#### § 4. Метод взвешенных средних Рисса ( $R; a_{kl}$ ).

Рассматривая метод взвешенных средних Рисса для двойных рядов в форме (36), определяем элементы матрицы следующим образом:

$$a_{mnkl} = \begin{cases} \frac{a_{kl}}{A_{mn}}, & \text{если } k \leq m \text{ и } l \leq n, \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

где  $\{a_{kl}\}$  произвольная последовательность, такая, что  $A_{mn} = \sum_{k,l=0}^{m,n} a_{kl} \neq 0$  ( $m, n = 0, 1, \dots$ ).

Элементы матрицы обратного метода, в форме (37), следующие:

$$a_{mnkl} = \begin{cases} (-1)^{m+n-k-l} \frac{A_{kl}}{a_{mn}}, & \text{если } k = m \text{ или } k = m-1 \text{ и} \\ & l = n \text{ или } l = n-1, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Элементы матрицы  $P = (p_{mnkl}) = C(R; a_{kl})^{-1}$  следующие:

$$p_{mnkl} = A_{kl} \Delta_{kl} \frac{c_{mnkl}}{a_{kl}},$$

где  $C = (c_{mnkl})$  произвольная треугольная матрица.<sup>20</sup>

Найдем, например, необходимые и достаточные условия для  $(R; a_{kl})_r \subseteq C_c$ . Матрица  $(p_{mnkl})$  должна, по теореме VI, удовлетворять условиям  $b_1, d_1, d_2$  и  $d_3$ . Из  $b_1$  получаем

$$1^\circ \sum_{k,l=0}^{m,n} \left| A_{kl} \Delta_{kl} \frac{c_{mnkl}}{a_{kl}} \right| \leq M \quad (m, n \geq N)$$

<sup>20</sup> Разность  $\Delta_{kl} a_{kl}$  определяется равенством  $\Delta_{kl} a_{kl} = \Delta_k \Delta_l a_{kl}$ , где  $\Delta_k a_k = a_k - a_{k+1}$ .

Из  $d_1$  получаем

$$2^\circ \lim_{m, n \rightarrow \infty} \Delta_{kl} \frac{c_{mnkl}}{a_{kl}} = p_{kl} \quad (k, l = 0, 1, \dots).$$

Из  $d_2$  получаем

$$3^\circ \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m A_{kl} \Delta_{kl} \frac{c_{mnkl}}{a_{kl}} = p_l \quad (l = 0, 1, \dots),$$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^n A_{kl} \Delta_{kl} \frac{c_{mnkl}}{a_{kl}} p_{k'} \quad (k = 0, 1, \dots)$$

Из  $d_3$  получаем

$$4^\circ \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{k, l=0}^{m, n} A_{kl} \Delta_{kl} \frac{c_{mnkl}}{a_{kl}} = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{k, l=0}^{m, n} \frac{c_{mnkl}}{a_{kl}} \vec{\Delta}_{kl} A_{kl} =$$

$$= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{k, l=0}^{m, n} c_{mnkl} = c.$$

Для  $(R; a_{kl})_r \in C_c$  необходимо и достаточно, кроме  $1^\circ-4^\circ$  чтобы  $p_{kl} = 0$  ( $k, l = 0, 1, \dots$ ),  $p_l = 0$  ( $l = 0, 1, \dots$ ),  $p_{k'} = 0$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) и  $c = 1$ .

### III. Умножение двойных рядов

#### § 1. Умножение рядов по правилу Коши. Рассмотрение умножения при помощи метода билинейных преобразований

В настоящей работе (кроме § 5 настоящей главы) рассматриваем умножение двойных рядов по правилу Коши, по которому ряд-произведение  $\sum w_{mn}$  двух рядов  $\sum u_{kl}$  и  $\sum v_{kl}$  определяется формулой

$$w_{mn} = \sum_{k, l=0}^{m, n} u_{m-k, n-l} v_{kl} \quad (m, n = 0, 1, \dots) \quad (40)$$

Исходя из формулы (40), получаем следующее выражение для частичных сумм ряда-произведения:

$$W_{mn} = \sum_{k, l=0}^{m, n} U_{m-k, n-l} v_{kl} \quad (m, n = 0, 1, \dots). \quad (41)$$

При помощи билинейного преобразования (41) можем изучать проблемы умножения сходящихся рядов. Рассматривая соотношение (41) как линейное преобразование, легко вывести отсюда

теоремы Шеффера [22] и Гамильтона [10] в случае двойных рядов.

При умножении суммируемых рядов, предполагая, что ряд-произведение  $\sum \omega_{mn}$   $C_\gamma$ -суммируем, получаем

$$W'_{mn} = \sum_{i,j=0}^{m,n} \sum_{p,q=0}^{i,j} c_{mnij} U_{i-p,j-q} v_{pq} \quad (m, n = 0, 1, \dots), \quad (42)$$

где  $\{W'_{mn}\} \in \gamma$ .

Предполагая  $A_\alpha$ -суммируемость ряда  $\sum u_{kl}$ ,  $B_\beta$ -суммируемость ряда  $\sum v_{kl}$ , и применяя обратные методы  $A^{-1}$  (в виде преобразования последовательности в последовательность) и  $B^{-1}$  (в виде преобразования последовательности в ряд), получаем

$$U_{ij} = \sum_{k,l=0}^{i,j} a_{ijkl} U'_{kl} \quad (i, j = 0, 1, \dots) \quad (43)$$

и

$$v_{pq} = \sum_{s,t=0}^{p,q} \hat{b}'_{pqst} V'_{st} \quad (p, q = 0, 1, \dots),$$

где  $\{U'_{kl}\} \in \alpha$  и  $\{V'_{st}\} \in \beta$ .

Применяя формулы (43), находим

$$W'_{mn} = \sum_{k,l,s,t=0}^{m,n,m,n} h'_{mnlkst} U'_{kl} V'_{st} \quad (m, n = 0, 1, \dots), \quad (44)$$

где

$$h'_{mnlkst} = \begin{cases} \sum_{p,q=s,t}^{m-k,n-l} \left( \sum_{i,j=p+k,q+l}^{m,n} c_{mnij} a_{i-p,j-q,kl} \right) \hat{b}'_{pqst} & \text{если } k+s \leq m \\ & \text{и } l+t \leq n, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (45)$$

При изучении умножения рядов применяем еще следующие билинейные преобразования:

$$W'_{mn} = \sum_{k,l,s,t=0}^{m,n,m,n} h^2_{mnlkst} U'_{kl} v'_{st} \quad (m, n = 0, 1, \dots), \quad (46)$$

и

$$\omega'_{mn} = \sum_{k,l,s,t=0}^{m,n,m,n} h^3_{mnlkst} u'_{kl} v'_{st} \quad (m, n = 0, 1, \dots). \quad (47)$$

Элементы матриц билинейных преобразований (46) и (47) можно получить из формулы (45), если заменить: а) в случае (46)  $\dot{b}'_{pqst}$  на  $\beta'_{pqst}$ , т. е. на соответствующий элемент матрицы преобразования ряда в ряд; б) в случае (47), кроме замены а) еще  $c_{mnkl}$  и  $a'_{mnkl}$  соответственно на  $\gamma_{mnkl}$  и  $a'_{mnkl}$ , т. е. на соответствующие элементы матриц преобразований ряда в ряд.

При умножении рядов главной нашей целью является решить следующую проблему: при каких условиях ряд произведение  $\Sigma \omega_{mn}$  является  $C_\gamma$  суммируемым, если ряд  $\Sigma u_{ki} A_\alpha$  суммируем и ряд  $\Sigma v_{ki} B_\beta$  суммируем.

Ясно, что при условиях, наложенных на рядах  $\Sigma u_{ki}$  и  $\Sigma v_{ki}$ ,  $C_\gamma$ -суммируемость ряда-произведения равносильно тому, чтобы матрица  $(h^i_{mnklst})$  ( $i = 1, 2$  или  $3$ ) удовлетворяла условиям билинейного преобразования  $\alpha \times \beta \rightarrow \gamma$ .

При умножении рядов полезно воспользоваться обстоятельством: если ряды  $\Sigma u_{ki}$ ,  $\Sigma v_{ki}$  и  $\Sigma \omega_{mn}$  соответственно  $A_\alpha$ -,  $B_\beta$ -, и  $C_\gamma$ -суммируемы, то при  $A_\alpha$ -суммируемости последовательности  $e$  должно выполняться соотношение  $B_\beta \subseteq C_\gamma$ , а при  $B_\beta$ -суммируемости последовательности  $e$  — соотношение  $A_\alpha \subseteq C_\gamma$ . Это можно заключить из формулы (41).

Для вычисления суммы ряда-произведения применяем формулы (24), (25), (26) и (34). На основе этих формул можем дать необходимые и достаточные условия для выполнения соотношения

$$C\{\Sigma \omega_{mn}\} = A\{\Sigma u_{ki}\} B\{\Sigma v_{ki}\}. \quad (48)$$

## § 2. Умножение рядов, суммируемых методом Вороного-Нерлунда<sup>21</sup>

Предполагая, что ряд  $\Sigma u_{mn} (WN; a_{mn})_\alpha$ -суммируем, ряд  $\Sigma v_{mn} (WN; b_{mn})_\beta$ -суммируем, и ряд-произведение  $\Sigma_{mn} (WN; h_{mn})_\gamma$ -суммируем, получаем при  $h_{mn} = d_{mn}$  ( $m, n = 0, 1, \dots$ )

$$h^i_{mnklst} = \begin{cases} q_{mnkl}, & \text{если } s = m - k \text{ и } t = n - l \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \quad (49)$$

<sup>21</sup> В этом параграфе обобщаются некоторые теоремы Мэарс ([15], теоремы 1, 2 и 3) на двойные ряды. Укажем еще на ее другие работы [16], [17] и [18], где также изучалось умножение простых рядов, суммируемых методом Вороного-Нерлунда, и на работу Кангро [25], где рассматривалось умножение абстрактных рядов.

а в случае  $h_{mn} = c_{mn}$  ( $m, n = 0, 1, \dots$ )

$$h_{mnlst}^1 = \begin{cases} (-1)^{m-k-s+n-l-t} \frac{A_{kl} B_{st}}{C_{mn}}, & \text{если } s = m - k, s = m - k - 1 \\ & \text{и } t = n - l, t = n - l - 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \quad (50)$$

$$h_{mnlst}^2 = \begin{cases} \bar{q}_{mnlst}, & \text{если } s \leq m - k - 1 \text{ и } t \leq n - l - 1, \\ \frac{A_{kl} \Delta_k B_{m-k, n-l}}{C_{mn}}, & \text{если } s \leq m - k - 1 \text{ и } t = n - l, \\ \frac{A_{kl} \Delta_l B_{m-k, n-l}}{C_{mn}}, & \text{если } s = m - k \text{ и } t \leq n - l - 1, \\ \frac{A_{kl} B_{m-k, n-l}}{C_{mn}}, & \text{если } s = m - k \text{ и } t = n - l, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (51)$$

1. Рассмотрим, например, при каких условиях ряд-произведение  $\sum \omega_{mn}$  является  $(WN; d_{mn})_{mc}$ -суммируемым при любых  $\sum u_{mn}$ ,  $(WN; a_{mn})_{mc}$ -суммируемом, и  $\sum v_{mn}$ ,  $(WN; b_{mn})_{mc}$ -суммируемом. Матрица (49) должна тогда удовлетворить условиям  $c_{11}$ ,  $d_{33}$ ,  $d_{34}$ ,  $d_{43}$  и  $d_{44}$ . С другой стороны, учитывая включение  $(WN; a_{mn})_{mc} \subseteq (WN; d_{mn})_{mc}$  и  $(WN; b_{mn})_{mc} \subseteq (WN; d_{mn})_{mc}$ , матрицы  $Q$  и  $R$  должны удовлетворить условиям  $c_1$ ,  $d_3$  и  $d_4$

Условие  $c_{11}$  требует  $\sum_{k,l=0}^{m,n} |q_{mnlk}| \leq M$  ( $m, n = 0, 1, \dots$ ) и выполнено, так как  $Q$  удовлетворяет условию  $c_1$ ; условие  $d_{33}$  требует

$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{k,l=0}^{m,n} q_{mnlk} = q$  и выполнено, так как  $Q$  удовлетворяет условию  $d_3$ ; условие  $d_{34}$  требует

$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m |r_{mnlk} - r_{kl}| = 0$  ( $l = 0, 1, \dots$ )

и  $\lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^n |r_{mnlk} - r_{kl}| = 0$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) и выполнено, так как  $R$

удовлетворяет условию  $d_4$ ; аналогично найдем, что условие  $d_{43}$  выполнено, так как  $Q$  удовлетворяет условию  $d_4$ ; условие  $d_{44}$  требует  $\lim_{m,n \rightarrow \infty} q_{mn, m-k, l} = 0$  ( $k, l = 0, 1, \dots$ ) и  $\lim_{m,n \rightarrow \infty} q_{mnl, n-l} = 0$

( $k, l = 0, 1, \dots$ ) и выполнено, так как  $Q$  удовлетворяет условию  $d_4$ , ибо из  $d_4$  следуют  $\lim_{m,n \rightarrow \infty} (q_{mn, m-k, l} - q_{m-k, l}) = 0$  ( $k, l =$

$= 0, 1, \dots$ ),  $\lim_{m, n \rightarrow \infty} (q_{mnk, n-l} - q_{k, n-l}) = 0$  ( $k, l = 0, 1, \dots$ ), а в силу  $\lim_{m \rightarrow \infty} q_{m-k, l} = 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_{k, n-l} = 0$  ( $k, l = 0, 1, \dots$ ) также условия  $d_{44}$ .

Следовательно, условия  $(WN; a_{mn})_{mc} \subseteq (WN; d_{mn})_{mc}$  и  $(WN; b_{mn})_{mc} \subseteq (WN; d_{mn})_{mc}$  необходимы и достаточны для  $(WN; d_{mn})_{mc}$  суммируемости ряда-произведения при данных предположениях. Отметим, что здесь матрица (49) имеет форму (33). и условия  $c_{11}$ ,  $d_{33}$ ,  $d_{34}$ ,  $d_{43}$  и  $d_{44}$  необходимы и достаточны для преобразования  $mc \times mc \rightarrow mc$ .

Рассуждая аналогичным образом и в других случаях, получаем следующую теорему:

**Теорема 1.** Ряд-произведение  $\sum \omega_{mn}$   $(WN; d_{mn})_{\gamma}$ -суммируем при любых  $\sum u_{mn}$   $(WN; a_{mn})_{\alpha}$ -суммируемом, и  $\sum v_{mn}$   $(WN; b_{mn})_{\beta}$ -суммируемом, в точности тогда, если

$$1^{\circ} (WN; a_{mn})_{\alpha} \subseteq (WN; d_{mn})_{\gamma},$$

$$2^{\circ} (WN; b_{mn})_{\beta} \subseteq (WN; d_{mn})_{\gamma},$$

притом, в случае  $\alpha = \beta = \gamma$ , нужно требовать дополнительно существование пределов

$$3^{\circ} \lim_{m, n \rightarrow \infty} q_{mnk, n-l} \text{ и } \lim_{m, n \rightarrow \infty} q_{mn, m-k, l} \quad (k, l = 0, 1, \dots)^{22}$$

Чтобы имело место соотношение (48), необходима и достаточна совместность методов в условиях  $1^{\circ}$  и  $2^{\circ}$  а в случае  $\alpha = \beta = \gamma$  нужно дополнительно требовать равенство нулю пределов в условии  $3^{\circ}$

2. Для формулировки последующих теорем нам нужны следующие условия:

$$\sum_{l=0}^{n-t-1} |A_{m-s, l} \Delta_l B_{s, n-l}| + \sum_{k=0}^{m-s-1} |A_{k, n-t} \Delta_k B_{m-k, t}| + |A_{m-s, n-t} B_{st}| \leq M |C_{mn}| \quad (m, n \geq N, s, t = 0, 1, \dots); \quad (52)$$

$$\sum_{l=0}^{n-t-1} |A_{m-s, l} \Delta_l B_{s, n-l}| + \sum_{k=0}^{m-s-1} |A_{k, n-t} \Delta_k B_{m-k, t}| + |A_{m-s, n-t} B_{st}| \leq M |C_{mn}| \quad (m, n, s, t = 0, 1, \dots); \quad (53)$$

<sup>22</sup> Теорема 1 является обобщением теоремы Мэарс ([15], теорема 2) для простых рядов. Здесь и в дальнейшем  $u$  означает суммируемость в смысле  $c$ ,  $mc$  или  $\gamma$ :  $\alpha$  и  $\beta$  — в смысле  $mc$  или  $\gamma$ .

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^{m-s-1} \bar{q}_{m n k l} + \frac{A_{m-s, l} A_l B_{s, n-l}}{C_{mn}} \right) = h_{ls} \quad (l, s = 0, 1, \dots), \quad (54)$$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \left( \sum_{l=0}^{n-t-1} \bar{q}_{m n k l} + \frac{A_{k, n-t} A_k B_{m-k, t}}{C_{mn}} \right) = h_{kt} \quad (k, t = 0, 1, \dots);$$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{A_{m-s, l} A_l B_{s, n-l}}{C_{mn}} = 0 \quad (l, s = 0, 1, \dots), \quad (55)$$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{A_{k, n-t} A_k B_{m-k, t}}{C_{mn}} = 0 \quad (k, t = 0, 1, \dots);$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^{m-s-1} \bar{q}_{m n k l} + \frac{A_{m-s, l} A_l B_{s, n-l}}{C_{mn}} \right) = h_{nls} \quad (n, l, s = 0, 1, \dots),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{l=0}^{n-t-1} \bar{q}_{m n k l} + \frac{A_{k, n-t} A_k B_{m-k, t}}{C_{mn}} \right) = h_{mkt} \quad (m, k, t = 0, 1, \dots), \quad (56)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^{m-s-1} \frac{A_{kl} A_k B_{m-k, n-l}}{C_{mn}} + \frac{A_{m-s, l} B_{s, n-l}}{C_{mn}} \right) = h''_{nls} \quad (n, l, s = 0, 1, \dots),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{l=0}^{n-t-1} \frac{A_{kl} A_l B_{m-k, n-l}}{C_{mn}} + \frac{A_{k, n-t} B_{m-k, t}}{C_{mn}} \right) = h'''_{mkt} \quad (m, k, t = 0, 1, \dots);$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{A_{m-k, n-l}}{C_{mn}} = 0 \quad (k, l = 0, 1, \dots), \quad (57)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{m-k, n-l}}{C_{mn}} = 0 \quad (k, l = 0, 1, \dots).$$

Теорема 2. Ряд-произведение  $\sum \omega_{mn}$   $(WN; c_{mn})_{\zeta}$ -суммируем при любых  $\sum u_{mn}$ ,  $(WN; a_{mn})_{mc}$ -суммируемом, и  $\sum v_{mn}$ ,  $(WN; b_{mn})_1$ -суммируемом, в точности тогда, если

$$1^{\circ} (WN; a_{mn})_{mc} \subseteq (WN; c_{mn})_{\zeta},$$

$$2^{\circ} (WN; b_{mn})_1 \subseteq (WN; c_{mn})_{\zeta},$$

3<sup>o</sup> выполнены условия (55), и, кроме того, при  $\zeta = c$  — (52), а при  $\zeta = mc$  — (53).<sup>23</sup>

<sup>23</sup> Теоремы 2—4 являются обобщениями теоремы 1 Мэарс [14]. Здесь и в дальнейшем  $\zeta$  означает суммируемость в смысле  $c$  или  $mc$ .

**Теорема 3.** Ряд-произведение  $\Sigma \omega_{mn} (WN; c_{mn})_{\zeta}$ -суммируем при любых  $\Sigma u_{mn}, (WN; a_{mn})_{\tau}$ -суммируемом, и  $\Sigma v_{mn}, (WN; b_{mn})_1$ -суммируемом, в точности тогда, если

$$1^{\circ} (WN; a_{mn})_{\tau} \subseteq (WN; c_{mn})_{\zeta},$$

$$2^{\circ} (WN; b_{mn})_1 \subseteq (WN; c_{mn})_{\zeta},$$

3<sup>o</sup> выполнены условия (54), и, кроме того, при  $\zeta = c$  — (52), а при  $\zeta = mc$  — (53).

**Теорема 4.** Ряд-произведение  $\Sigma \omega_{mn} (WN; c_{mn})_{\tau}$ -суммируем при любых  $\Sigma u_{mn}, (WN; a_{mn})_{\alpha}$ -суммируемом, и  $\Sigma v_{mn}, (WN; b_{mn})_1$ -суммируемом, в точности тогда, если

$$1^{\circ} (WN; a_{mn})_{\alpha} \subseteq (WN; c_{mn})_{\tau},$$

$$2^{\circ} (WN; b_{mn})_1 \subseteq (WN; c_{mn})_{\tau},$$

3<sup>o</sup> выполнены условия (53), и, кроме того, при  $\alpha = mc$  — (55) и (57), а при  $\alpha = \tau$  — (54) и (56).

В частном случае, если  $(WN; b_{mn})$  является методом сходимости  $E$ , получаем следующую теорему:

**Теорема 5.** Ряд-произведение  $\Sigma \omega_{mn} (WN; a_{mn})_{\gamma}$ -суммируем при любых  $\Sigma u_{mn}, (WN; a_{mn})_{\alpha}$ -суммируемом, и  $\Sigma v_{mn}$ , абсолютно сходящемся, в точности тогда, если

$$1 \quad a \subseteq \gamma,$$

$$2^{\circ} E_1 \subseteq (WN; a_{mn})_{\gamma}.$$

Далее, если  $(WN; a_{mn})$  является методом сходимости, получаем следующую теорему:

**Теорема 6.** Ряд-произведение  $\Sigma \omega_{mn} (WN; b_{mn})_{\gamma}$ -суммируем при любых  $\Sigma u_{mn}$ , сходящемся в смысле  $\alpha$ , и  $\Sigma v_{mn}, (WN; b_{mn})_1$ -суммируемом, в точности тогда, если

$$E_{\alpha} \subseteq (WN; b_{mn})_{\gamma}.$$

Чтобы имело место равенство (48) в случае теорем 2—6, необходимо и достаточно выполнение соотношений

$$1^{\circ} (WN; a_{mn})_{\alpha} \overline{\subseteq} (WN; c_{mn})_{\gamma},$$

$$2^{\circ} (WN; b_{mn})_1 \overline{\subseteq} (WN; c_{mn})_{\gamma}.$$

3<sup>o</sup> в условии (54) (в тех теоремах, где оно встречается)

$$h_{ls} = 0 \quad (l, s = 0, 1, \dots) \quad \text{и} \quad h'_{kt} = 0 \quad (k, t = 0, 1, \dots)$$

3. Если требуем  $(WN; c_{mn})_{\gamma}$ -суммируемость ряда-произведения  $\Sigma \omega_{mn}$ , при неабсолютной суммируемости рядов  $\Sigma u_{mn}$  и  $\Sigma v_{mn}$  соответственно методами  $(WN; a_{mn})$  и  $(WN; b_{mn})$ , то оказывается, что условия  $b_{11}$  и  $c_{11}$  выполнены лишь в исключитель-

ных случаях. Умножение рядов рассматриваем в таком случае в предположении, что

$$\left| \sum_{k,l=0}^{m,n} b_{m-k,n-l} v_{kl} \right| \leq M |b_{mn}| \quad (m, n = 0, 1, \dots), \quad (58)$$

которое гарантирует ультимативную ограниченность (соотв. ограниченность) последовательности  $\{W'_{mn}\}$ , если  $\bar{Q}$  удовлетворяет условию  $b_1$  (соотв.  $c_1$ ).

Применяя условия  $d_{11} - f_{44}$  к матрице (50) и учитывая включение  $(WN; a_{mn})_\alpha \subseteq (WN; c_{mn})_\gamma$  и  $(WN; b_{mn})_\beta \subseteq (WN; c_{mn})_\gamma$ . получаем теоремы 7—10.<sup>24</sup> Отметим, при этом, что второе соотношение включения в общем случае не является здесь необходимым.

В теоремах 7—10 фигурируют следующие условия:

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{(A_k A_{m-k,l})(A_l B_{k,n-l})}{C_{mn}} = h_{kl}$$

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{(A_l A_{k,n-l})(A_k B_{m-k,l})}{C_{mn}} = h'_{kl} \quad (k, l = 0, 1, \dots); \quad (59)$$

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{A_{k,n-l-\eta} A_k B_{m-k,l}}{C_{mn}} = 0 \quad (k, l = 0, 1, \dots; \quad (60)$$

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{A_{m-k-\varepsilon, l} A_l B_{k,n-l}}{C_{mn}} = 0 \quad \varepsilon, \eta = 0, 1);$$

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{A_{k,n-l-\eta} B_{m-k-\varepsilon, l}}{C_{mn}} = 0 \quad (k, l = 0, 1, \dots; \quad (61)$$

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{A_{m-k-\varepsilon, l} B_{k,n-l-\eta}}{C_{mn}} = 0 \quad \varepsilon, \eta = 0, 1);$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{A_k A_{m-k,l}}{C_{mn}} = h_{nkl} \quad (n, k, l = 0, 1, \dots). \quad (62)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_l A_{k,n-l}}{C_{mn}} = h^I_{mkl} \quad (m, k, l = 0, 1, \dots);$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{A_k B_{m-k,l}}{C_{mn}} = h^{II}_{nkl} \quad (n, k, l = 0, 1, \dots), \quad (63)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_l B_{k,n-l}}{C_{mn}} = h^{III}_{mkl} \quad (m, k, l = 0, 1, \dots);$$

<sup>24</sup> Теоремы 7—10 являются обобщениями теоремы 3 Мэарс [14].

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{C_{mn}} \sum_{k=0}^m A_{kl} \Delta_k B_{m-k,t} = h_{nlt}^{IV}, \quad \text{если } t = n - l - \eta$$

$$(n, l = 0, 1, \dots, \eta = 0, 1), \quad (64)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{C_{mn}} \sum_{l=0}^n A_{kl} \Delta_l B_{s,n-l} = h_{mks}^V, \quad \text{если } s = m - k - \varepsilon$$

$$(m, k = 0, 1, \dots, \varepsilon = 0, 1).$$

**Теорема 7** Ряд-произведение  $\Sigma \omega_{mn} (WN; c_{mn})_{\zeta}$ -суммируем при любых  $\Sigma u_{mn} (WN; a_{mn})_{mc}$ -суммируемом, и  $\Sigma v_{mn}, (WN; b_{mn})_{mc}$ -суммируемом и удовлетворяющем ограничению (58), если

$$1^{\circ} (WN; a_{mn})_{mc} \subseteq (WN; c_{mn})_{\zeta},$$

$$2^{\circ} (WN; b_{mn})_{mc} \subseteq (WN; c_{mn})_{\zeta},$$

3<sup>o</sup> выполняется условие (61).

**Теорема 8.** Ряд-произведение  $\Sigma \omega_{mn} (WN; c_{mn})_{\zeta}$ -суммируем при любых  $\Sigma u_{mn}, (WN; a_{mn})_{mc}$ -суммируемом, и  $\Sigma v_{mn}, (WN; b_{mn})_{\Gamma}$ -суммируемом и удовлетворяющем ограничению (58), если

$$1^{\circ} (WN; a_{mn})_{mc} \subseteq (WN; c_{mn})_{\zeta},$$

$$2^{\circ} (WN; b_{mn})_{\Gamma} \subseteq (WN; c_{mn})_{\zeta},$$

3<sup>o</sup> выполняется условие (60).

**Теорема 9.** Ряд-произведение  $\Sigma \omega_{mn} (WN; c_{mn})_{\zeta}$ -суммируем при любых  $\Sigma u_{mn}, (WN; a_{mn})_{\Gamma}$ -суммируемом, и  $\Sigma v_{mn}, (WN; b_{mn})_{\Gamma}$ -суммируемом и удовлетворяющем ограничению (58), если

$$1^{\circ} (WN; a_{mn})_{\Gamma} \subseteq (WN; c_{mn})_{\zeta},$$

$$2^{\circ} (WN; b_{mn})_{\Gamma} \subseteq (WN; c_{mn})_{\zeta},$$

3<sup>o</sup> выполняется условие (59)

**Теорема 10.** Ряд-произведение  $\Sigma \omega_{mn} (WN; c_{mn})_{\Gamma}$ -суммируем при любых  $\Sigma u_{mn}, (WN; a_{mn})_{\Gamma}$ -суммируемом, и  $\Sigma v_{mn}, (WN; b_{mn})_{\Gamma}$ -суммируемом и удовлетворяющем ограничению (58), если

$$1^{\circ} (WN; a_{mn})_{\Gamma} \subseteq (WN; c_{mn})_{\Gamma},$$

$$2^{\circ} (WN; b_{mn})_{\Gamma} \subseteq (WN; c_{mn})_{\Gamma},$$

3<sup>o</sup> выполняются условия (59), (62), (63) и (64).

Чтобы имело место соотношение (48) в случае теорем 7—10, необходима и достаточна совместность методов в условиях 1<sup>o</sup> и 2<sup>o</sup>, и кроме того, если  $\alpha = \beta = \Gamma$  нужно дополнительно требовать равенство нулю пределов в условии (59).

4. Далее рассматриваем умножение рядов в случае, когда ряды-сомножители суммируемы соответственно  $(WN; a_{mn})_{\kappa_1}$  и  $(WN; b_{mn})_{\kappa_2}$ , где  $\kappa_1 = \mathbf{c}_{\varphi_1 \psi_1}^\delta$  или  $\mathbf{c}_{\chi_1}^\delta$ ,  $\kappa_2 = \mathbf{c}_{\varphi_2 \psi_2}^\delta$  или  $\mathbf{c}_{\chi_2}^\delta$  ( $\delta = \mathbf{z}, \mathbf{c}, \mathbf{m}$ ); относительно ряда-произведения  $\sum \omega_{mn}$  требуем  $(WN; d_{mn})$ -суммируемость в смысле  $\mathbf{c}_\lambda$

В теоремах 11—14 фигурируют следующие условия:

$$\begin{aligned} \varphi_1(m-k) \varphi_2(n-l) |q_{mn, m-k, l}| &\leq M_{kl}(\lambda), & (k, l = 0, 1, \dots), \\ \varphi_1(n-l) \varphi_2(m-k) |q_{mn, n-l}| &\leq M^I_{kl}(\lambda), & (m, n)_\lambda; \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \chi_1(m-k, l) \chi_2(k, n-l) |q_{mn, m-k, l}| &\leq M^{II}_{kl}(\lambda), & (k, l = 0, 1, \dots), \\ \chi_1(k, n-l) \chi_2(m-k, l) |q_{mn, n-l}| &\leq M^{III}_{kl}(\lambda), & (m, n)_\lambda; \end{aligned} \quad (65')$$

$$\lim_{(m, n)_\lambda \rightarrow \infty} \varphi_1(m-k) q_{mn, m-k, l} = 0,$$

$$\lim_{(m, n)_\lambda \rightarrow \infty} \varphi_1(n-l) q_{mn, n-l} = 0, \quad (k, l = 0, 1, \dots); \quad (66)$$

$$\lim_{(m, n)_\lambda \rightarrow \infty} \chi_1(m-k, l) q_{mn, m-k, l} = 0,$$

$$\lim_{(m, n)_\lambda \rightarrow \infty} \chi_1(k, n-l) q_{mn, n-l} = 0, \quad (k, l = 0, 1, \dots); \quad (66')$$

$$\lim_{(m, n)_\lambda \rightarrow \infty} \varphi_2(m-k) q_{mn, n-l} = 0,$$

$$\lim_{(m, n)_\lambda \rightarrow \infty} \varphi_2(n-l) q_{mn, m-k, l} = 0, \quad (k, l = 0, 1, \dots); \quad (67)$$

$$\lim_{(m, n)_\lambda \rightarrow \infty} \chi_2(m-k, l) q_{mn, n-l} = 0,$$

$$\lim_{(m, n)_\lambda \rightarrow \infty} \chi_2(k, n-l) q_{mn, m-k, l} = 0, \quad (k, l = 0, 1, \dots); \quad (67')$$

$$\lim_{(m, n)_\lambda \rightarrow \infty} \varphi_1(n-l) \varphi_2(m-k) q_{mn, n-l} = h_{kl},$$

$$\lim_{(m, n)_\lambda \rightarrow \infty} \varphi_1(m-k) \varphi_2(n-l) q_{mn, m-k, l} = h^I_{kl}, \quad (k, l = 0, 1, \dots); \quad (68)$$

$$\lim_{(m, n)_\lambda \rightarrow \infty} \chi_1(k, n-l) \chi_2(m-k, l) q_{mn, n-l} = h^{II}_{kl}, \quad (68')$$

$$\lim_{(m, n)_\lambda \rightarrow \infty} \chi_1(m-k, l) \chi_2(k, n-l) q_{mn, m-k, l} = h^{III}_{kl}, \quad (k, l = 0, 1, \dots);$$

$$\lim_{(m,n)\lambda \rightarrow \infty} \psi_1(n-l) \varphi_2(m-k) q_{mnk,n-l} = 0, \quad (69)$$

$$\lim_{(m,n)\lambda \rightarrow \infty} \varphi_1(m-k) \psi_2(n-l) q_{mn,m-k,l} = 0, \quad (k, l = 0, 1, \dots);$$

$$\lim_{(m,n)\lambda \rightarrow \infty} \chi_1(k, n-l) \chi_2(m-k, l) q_{mnk,n-l} = 0, \quad (69')$$

$$\lim_{(m,n)\lambda \rightarrow \infty} \chi_1(m-k, l) \chi_2(k, n-l) q_{mn,m-k,l} = 0, \quad (k, l = 0, 1, \dots)$$

**Теорема 11.** Ряд-произведение  $\sum \omega_{mn}$   $(WN; d_{mn})$ -суммируем в смысле  $c_\lambda$  при любых  $\sum u_{mn}$ ,  $(WN; a_{mn})$ -суммируемом в смысле  $c_{\varphi_1 \psi_1}^z$  (соотв.  $c_{\chi_1}^z$ ), и  $\sum v_{mn}$ ,  $(WN; b_{mn})$ -суммируемом в смысле  $c_{\varphi_2 \psi_2}^z$  (соотв.  $c_{\chi_2}^z$ ), в точности тогда, если

$$1^\circ (WN; a_{mn}) \subseteq (WN; d_{mn}) \text{ в смысле } (c_{\varphi_1 \psi_1}^z, c_\lambda) \text{ (соотв. } (c_{\chi_1}^z, c_\lambda)),$$

$$2^\circ (WN; b_{mn}) \subseteq (WN; d_{mn}) \text{ в смысле } (c_{\varphi_2 \psi_2}^z, c_\lambda) \text{ (соотв. } (c_{\chi_2}^z, c_\lambda)),$$

3° выполняется условие (65) (соотв. (65')).

**Теорема 12.** Ряд-произведение  $\sum \omega_{mn}$   $(WN; d_{mn})$ -суммируем в смысле  $c_\lambda$  при любых  $\sum u_{mn}$ ,  $(WN; a_{mn})$ -суммируемом в смысле  $c_{\varphi_1 \psi_1}^c$  (соотв.  $c_{\chi_1}^c$ ), и  $\sum v_{mn}$ ,  $(WN; b_{mn})$ -суммируемом в смысле  $c_{\varphi_2 \psi_2}^c$  (соотв.  $c_{\chi_2}^c$ ), в точности тогда, если

$$1^\circ (WN; a_{mn}) \subseteq (WN; d_{mn}) \text{ в смысле } (c_{\varphi_1 \psi_1}^c, c_\lambda) \text{ (соотв. } (c_{\chi_1}^c, c_\lambda)),$$

$$2^\circ (WN; b_{mn}) \subseteq (WN; d_{mn}) \text{ в смысле } (c_{\varphi_2 \psi_2}^c, c_\lambda) \text{ (соотв. } (c_{\chi_2}^c, c_\lambda)),$$

3° выполняются условия (66), (67) и (68) (соотв. (66'), (67') и (68')).

**Теорема 13.** Ряд-произведение  $\sum \omega_{mn}$   $(WN; d_{mn})$ -суммируем в смысле  $c_\lambda$  при любых  $\sum u_{mn}$ ,  $(WN; a_{mn})$ -суммируемом в

смысле  $c_{\varphi_1 \psi_1}^m$  (соотв.  $c_{\lambda_1}^m$ ), и  $\sum v_{mn}$ ,  $(WN; b_{mn})$ -суммируемом в смысле  $c_{\varphi_2 \psi_2}^m$  (соотв.  $c_{\lambda_2}^m$ ), в точности тогда, если

$$1^\circ (WN; a_{mn}) \subseteq (WN; d_{mn}) \text{ в смысле } (c_{\varphi_1 \psi_1}^m, c_\lambda) \text{ (соотв. } (c_{\lambda_1}^m, c_\lambda)),$$

$$2^\circ (WN; b_{mn}) \subseteq (WN; d_{mn}) \text{ в смысле } (c_{\varphi_2 \psi_2}^m, c_\lambda) \text{ соотв. } (c_{\lambda_2}^m, c_\lambda),$$

3° выполняется условие (69) (соотв. (69')).

**Теорема 14.** Ряд-произведение  $\sum w_{mn}$   $(WN; d_{mn})$ -суммируем в смысле  $c_\lambda$  при любых  $\sum u_{mn}$ ,  $(WN; a_{mn})_{\kappa_1}$ -суммируемом ( $\kappa = c_{\varphi_1 \psi_1}^\delta, c_{\lambda_1}^\delta, \delta = z, c, m$ ), и  $\sum v_{mn}$ ,  $(WN; b_{mn})_{mc}$ -суммируемом, в точности тогда, если

$$1^\circ (WN; a_{mn}) \subseteq (WN; d_{mn}) \text{ в смысле } (\kappa_1, c_\lambda),$$

$$2^\circ (WN; b_{mn}) \subseteq (WN; d_{mn}) \text{ в смысле } (mc, c_\lambda),$$

причем в случае  $\kappa_1 = c_{\varphi_1 \psi_1}^e$  и  $\kappa_1 = c_{\lambda_1}^e$  нужно дополнительно требовать выполнение условия (66) (соотв. (66')).

Чтобы имело место соотношение (48) в случае теорем 11—14, необходима и достаточна совместность методов в условиях 1° и 2°

### § 3. Умножение рядов, суммируемых методом Чезаро

Из результатов, полученных при умножении рядов, суммируемых методом Вороного-Нерлунда, можем вывести в частном случае и соответствующие теоремы для метода Чезаро.

Пусть ряды-сомножители  $\sum u_{mn}$  и  $\sum v_{mn}$  суммируемы соответственно  $(C, a, b)$  и  $(C; c, d)$ . Тогда в случае  $h_{kl} = c_{kl}$  ( $k, l = 0, 1, \dots$ ) получаем  $H = (C; a + c, b + d)$ , а в случае  $h_{kl} = d_{kl}$  ( $k, l = 0, 1, \dots$ ) получаем  $H = (C, a + c + 1, b + d + 1)$ .

Выяснив, при каких значениях параметров  $a, b, c$  и  $d$  выполнены условия включения методов (1° и 2°) и дополнительные условия, фигурирующие в теоремах для метода Вороного-Нерлунда, получаем следующие теоремы:

Теорема 15. Если ряд  $\sum u_{mn} (C; a, b)_\alpha$ -суммируем и ряд  $\sum v_{mn} (C; c, d)_\alpha$ -суммируем, то ряд-произведение  $\sum w_{mn}$  является  $(C; a + c + 1, b + d + 1)_\alpha$ -суммируемым, где  $a, b, c, d > -1$ .

Теорема 16. Если ряд  $\sum u_{mn} (C; a, b)_g$ -суммируем и ряд  $\sum v_{mn} (C; c, d)_r$ -суммируем, то ряд-произведение  $\sum w_{mn}$  является  $(C; a + c, b + d)_g$ -суммируемым, где  $a, b, c, d \geq 0$  и  $\vartheta$  означает суммируемость в смысле  $mc, r$  или  $l$ .

Теорема 17. Если ряд  $\sum u_{mn} (C; a, b)_\alpha$ -суммируем и ряд  $\sum v_{mn} (C; c, d)_\alpha$ -суммируем и  $(C; c - 1, d - 1)$ -ограничен, то ряд-произведение  $\sum w_{mn}$  является  $(C; a + c, b + d)_\alpha$ -суммируемым, где  $a, b \geq 0$  и  $c, d > 0$ .<sup>25</sup>

Теорема 18. Если ряд  $\sum u_{mn} (C, a, b)$ -суммируем в смысле  $\mathbf{c}_{\varphi\psi}^c$  (соотв.  $\mathbf{c}_\chi^c$ ) и ряд  $\sum v_{mn} (C; c, d)$ -суммируем в смысле  $\mathbf{c}_{\varphi\psi}^c$  (соотв.  $\mathbf{c}_\chi^c$ ), то ряд-произведение  $\sum w_{mn}$  является  $(C; a + c + 1, b + d + 1)$ -суммируемым в смысле  $\mathbf{c}_\lambda$  где  $a, b, c, d \geq 0$  и функции  $\varphi(m), \psi(n)$  и  $\chi(m, n)$  определены формулами (39)<sup>26</sup>

Теорема 19. Если ряд  $\sum u_{mn} (C; a, b)$ -суммируем в смысле  $\mathbf{c}_{\varphi\psi}^m$  (соотв.  $\mathbf{c}_\chi^m$ ) и ряд  $\sum v_{mn} (C; c, d)$ -суммируем в смысле  $\mathbf{c}_{\varphi\psi}^m$  (соотв.  $\mathbf{c}_\chi^m$ ), то ряд-произведение  $\sum w_{mn}$  является  $(C; a + c + 1, b + d + 1)$ -суммируемым в смысле  $\mathbf{c}_\lambda$ , где  $a, b, c, d > 0$  и функции  $\varphi(m), \psi(n)$  и  $\chi(m, n)$  определены формулами (39)

<sup>25</sup> Теоремы 15, 16 и 17 являются обобщениями известных теорем Чезаро (Харди [28], теорема 164), Фекете-Когбетлианца ([6], теоремы 1° и 2°; [13], теоремы IV и V) и Белинфанта ([16], введение) для умножения простых рядов. Случай  $1 \times 1 \rightarrow 1$  в теореме 16 получен непосредственно, учитывая факторизуемость матрицы билинейного преобразования  $(h_{mnkls} = h'_{mks} h''_{nit}; m, n, k, l, s, t = 0, 1, \dots)$  и теорему V Когбетлианца [13] или теорему III Мэарс [16]. Теорема III Чезари [4, 5] вытекает из теоремы 16 как частный случай.

<sup>26</sup> Из этой теоремы можно вывести теорему I Чезари [4, 5] и теорему 6 Челидзе [30].

**Теорема 20.** Если ряд  $\sum u_{mn} (C; a, b)$  -суммируем в смысле  $\mathfrak{C}_{\varphi\psi}^m$  (соотв.  $\mathfrak{C}_\lambda^m$ ) и ряд  $\sum v_{mn} (C; c, d)_{mc}$  -суммируем, то ряд-произведение  $\sum w_{mn}$  является  $(C; a + c + 1, b + d + 1)$  -суммируемым в смысле  $\mathfrak{C}_\lambda$ , где  $a, b > 0$  и  $c, d > -1$  и функции  $\varphi(m)$ ,  $\psi(n)$  и  $\chi(m, n)$  определены формулами (39).

Отметим, что в случае теорем 15—20 имеет место соотношение (48).

#### § 4. Умножение рядов, суммируемых методом взвешенных средних Рисса

В настоящем параграфе рассматриваем умножение рядов, где один ряд-сомножитель  $\sum u_{mn}$  суммируем методом Рисса  $(R; a_{mn})$ , другой ряд-сомножитель  $\sum v_{mn}$  сходится (абсолютно, ограниченно или регулярно), ряд-произведение  $\sum w_{mn}$  пусть будет суммируемым треугольным методом  $C = (c_{mnkl})$ <sup>27</sup>

Элементы матриц билинейных преобразований (44) и (46) следующие:

$$h_{mnklst}^1 = A_{kl} \Delta_{kl} \frac{\Delta_{st} c_{mn, k+s, l+t}}{a_{kl}}, \quad (70)$$

$$h_{mnklst}^2 = A_{kl} \Delta_{kl} \frac{c_{mn, k+s, l+t}}{a_{kl}} \quad (71)$$

Рассмотрим сначала случаи, соответствующие билинейному преобразованию (71). Приведем перечень нужных условий:

$$\sum_{k, l=0}^{m-s, n-t} \left| A_{kl} \Delta_{kl} \frac{c_{mn, k+s, l+t}}{a_{kl}} \right| \leq M \quad (m, n \geq N; s, t = 0, 1, \dots); \quad (72)$$

$$\sum_{k, l=0}^{m-s, n-t} \left| A_{kl} \Delta_{kl} \frac{c_{mn, k+s, l+t}}{a_{kl}} \right| \leq M(m, n, s, t = 0, 1, \dots); \quad (73)$$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m-s} A_{kl} \Delta_{kl} \frac{c_{mn, k+s, l+t}}{a_{kl}} = h_{lst} \quad (l, s, t = 0, 1, \dots). \quad (74)$$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{n-t} A_{kl} \Delta_{kl} \frac{c_{mn, k+s, l+t}}{a_{kl}} = h'_{kst} \quad (k, s, t = 0, 1, \dots);$$

<sup>27</sup> Некоторые теоремы умножения простых рядов, суммируемых методом взвешенных средних Рисса, даны в работе Кангро [24] (теоремы 21, 22 и 23, стр. 183—186).

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m-s} \left| A_{kl} \Delta_{kl} \frac{c_{mn, k+s, l+t}}{a_{kl}} - h_{klst} \right| = 0 \quad (l, s, t = 0, 1, \dots).$$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{n-t} \left| A_{kl} \Delta_{kl} \frac{c_{mn, k+s, l+t}}{a_{kl}} - h_{klst} \right| = 0 \quad (k, s, t = 0, 1, \dots),$$

где

$$h_{klst} = \lim_{m, n \rightarrow \infty} A_{kl} \Delta_{kl} \frac{c_{mn, k+s, l+t}}{a_{kl}} \quad (k, l, s, t = 0, 1, \dots); \quad (75)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m-s} A_{kl} \Delta_{kl} \frac{c_{mn, k+s, l+t}}{a_{kl}} = h_{nlst} \quad (n, l, s, t = 0, 1, \dots),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{n-t} A_{kl} \Delta_{kl} \frac{c_{mn, k+s, l+t}}{a_{kl}} = h''_{mkst} \quad (m, k, s, t = 0, 1, \dots); \quad (76)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m-s} \left| A_{kl} \Delta_{kl} \frac{c_{mn, k+s, l+t}}{a_{kl}} - h_{nklst} \right| = 0 \quad (n, l, s, t = 0, 1, \dots),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{n-t} \left| A_{kl} \Delta_{kl} \frac{c_{mn, k+s, l+t}}{a_{kl}} - h'_{mklst} \right| = 0 \quad (m, k, s, t = 0, 1, \dots),$$

где

$$h_{nklst} = \lim_{m \rightarrow \infty} A_{kl} \Delta_{kl} \frac{c_{mn, k+s, l+t}}{a_{kl}} \quad (n, k, l, s, t = 0, 1, \dots).$$

$$h'_{mklst} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{kl} \Delta_{kl} \frac{c_{mn, k+s, l+t}}{a_{kl}} \quad (m, k, l, s, t = 0, 1, \dots). \quad (77)$$

**Теорема 21.** Ряд-произведение  $\Sigma \omega_{mn} C_{\zeta}$ -суммируем при любых  $\Sigma u_{mn}$ ,  $(R; a_{mn})_{mc}$ -суммируемом, и  $\Sigma v_{mn}$ , абсолютно сходящемся, в точности тогда, если

$$1^{\circ} (R; a_{mn})_{mc} \subseteq C_{\zeta}, E_1 \subseteq C_{\zeta},$$

2<sup>o</sup> выполняются условия (72) и (75) — в случае  $\zeta = c$ ; (73) и (75) — в случае  $\zeta = mc$ .

**Теорема 22.** Ряд-произведение  $\Sigma \omega_{mn} C_{\zeta}$ -суммируем при любых  $\Sigma u_{mn}$ ,  $(R; a_{mn})_r$ -суммируемом, и  $\Sigma v_{mn}$ , абсолютно сходящемся, в точности тогда, если

$$1^{\circ} (R; a_{mn})_r \subseteq C_{\zeta}, E_1 \subseteq C_{\zeta},$$

2<sup>o</sup> выполняются условия (72) и (74) — в случае  $\zeta = c$ ; (73) и (74) — в случае  $\zeta = mc$ .

Теорема 23. Ряд-произведение  $\Sigma \omega_{mn}$   $C_r$ -суммируем при любых  $\Sigma u_{mn}$ ,  $(R; a_{mn})_{mc}$ -суммируемом, и  $\Sigma v_{mn}$ , абсолютно сходящемся, в точности, тогда если

$$1^\circ (R; a_{mn})_{mc} \subseteq C_r, E_1 \subseteq C_r.$$

2° выполняются условия (73), (75) и (77).

Теорема 24. Ряд-произведение  $\Sigma \omega_{mn}$   $C_r$ -суммируем при любых  $\Sigma u_{mn}$   $(R; a_{mn})_r$ -суммируемом, и  $\Sigma v_{mn}$ , абсолютно сходящемся, в точности тогда, если

$$1^\circ (R; a_{mn})_r \subseteq C_r, E_1 \subseteq C_r,$$

2° выполняются условия (73), (74) и (76).

Приведем перечень условий в случае билинейного преобразования (70):

$$\sum_{k, l, s, t=0}^{m, n, m, n} \left| A_{kl} \Delta_{kl} \frac{\Delta_{st}^{c_{mn, k+s, l+t}}}{a_{kl}} \right| \leq M (m, n \geq N); \quad (78)$$

$$\sum_{k, l, s, t=0}^{m, n, m, n} \left| A_{kl} \Delta_{kl} \frac{\Delta_{st}^{c_{mn, k+s, l+t}}}{a_{kl}} \right| \leq M (m, n = 0, 1, \dots); \quad (79)$$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m-s} A_{kl} \Delta_{kl} \frac{\Delta_{st}^{c_{mn, k+s, l+t}}}{a_{kl}} = h_{lst} (l, s, t = 0, 1, \dots),$$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{n-t} A_{kl} \Delta_{kl} \frac{\Delta_{st}^{c_{mn, k+s, l+t}}}{a_{kl}} = h_{kst} (k, s, t = 0, 1, \dots); \quad (80)$$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m-s} \left| A_{kl} \Delta_{kl} \frac{\Delta_{st}^{c_{mn, k+s, l+t}}}{a_{kl}} - q_{kfst} \right| = 0 (l, s, t = 0, 1, \dots),$$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{n-t} \left| A_{kl} \Delta_{kl} \frac{\Delta_{st}^{c_{mn, k+s, l+t}}}{a_{kl}} - q_{kfst} \right| = 0 (k, s, t = 0, 1, \dots),$$

где

$$q_{kfst} = \lim_{m, n \rightarrow \infty} A_{kl} \Delta_{kl} \frac{\Delta_{st}^{c_{mn, k+s, l+t}}}{a_{kl}} (k, l, s, t = 0, 1, \dots); \quad (81)$$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \left| A_{kl} \Delta_{kl} \frac{\Delta_t^{c_{mnk, l+t}}}{a_{kl}} - q_{kfst} \right| = 0 (l, t = 0, 1, \dots),$$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m-s} \left| A_{kl} \Delta_{kl} \frac{\Delta_s^{c_{mn, k+s, l}}}{a_{kl}} - q_{kfst} \right| = 0 (l, s = 0, 1, \dots),$$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{n-t} \left| A_{kl} \Delta_{kl} \frac{\Delta_t^c mnk, l+t}{a_{kl}} - q_{klt} \right| = 0 \quad (k, t = 0, 1, \dots),$$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^n \left| A_{kl} \Delta_{kl} \frac{\Delta_s^c mn, k+s, l}{a_{kl}} - q_{kls} \right| = 0 \quad (k, s = 0, 1, \dots), \quad (82)$$

где

$$q_{klt} = \lim_{m, n \rightarrow \infty} A_{kl} \Delta_{kl} \frac{\Delta_t^c mnk, l+t}{a_{kl}} \quad (k, l, t = 0, 1, \dots),$$

$$q_{kls} = \lim_{m, n \rightarrow \infty} A_{kl} \Delta_{kl} \frac{\Delta_s^c mn, k+s, l}{a_{kl}} \quad (k, l, s = 0, 1, \dots);$$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m A_{kl} \Delta_{kl} \frac{\Delta_t^c mnk, l+t}{a_{kl}} = h_{lt} \quad (l, t = 0, 1, \dots),$$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m-s} A_{kl} \Delta_{kl} \frac{\Delta_s^c mn, k+s, l}{a_{kl}} = h_{ls} \quad (l, s = 0, 1, \dots),$$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{n-t} A_{kl} \Delta_{kl} \frac{\Delta_t^c mnk, l+t}{a_{kl}} = h''_{kt} \quad (k, t = 0, 1, \dots),$$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^n A_{kl} \Delta_{kl} \frac{\Delta_s^c mn, k+s, l}{a_{kl}} = h'''_{ks} \quad (k, s = 0, 1, \dots); \quad (83)$$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^n \sum_{t=0}^{n-l} \left| A_{kl} \Delta_{kl} \frac{\Delta_{st}^c mn, k+s, l+t}{a_{kl}} - q_{klst} \right| = 0 \quad (k, s = 0, 1, \dots),$$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{n-t} \sum_{s=0}^{m-k} \left| A_{kl} \Delta_{kl} \frac{\Delta_{st}^c mn, k+s, l+t}{a_{kl}} - q_{klst} \right| = 0 \quad (k, t = 0, 1, \dots),$$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m-s} \sum_{t=0}^{n-l} \left| A_{kl} \Delta_{kl} \frac{\Delta_{st}^c mn, k+s, l+t}{a_{kl}} - q_{klst} \right| = 0 \quad (l, s = 0, 1, \dots),$$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \sum_{s=0}^{m-k} \left| A_{kl} \Delta_{kl} \frac{\Delta_{st}^c mn, k+s, l+t}{a_{kl}} - q_{klst} \right| = 0 \quad (l, t = 0, 1, \dots); \quad (84)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m-s} A_{kl} \Delta_{kl} \frac{A_{st} c_{mn, k+s, l+t}}{a_{kl}} = h_{nlst} \quad (n, l, s, t = 0, 1, \dots).$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{n-t} A_{kl} \Delta_{kl} \frac{A_{st} c_{mn, k+s, l+t}}{a_{kl}} = h_{mkst} \quad (m, k, s, t = 0, 1, \dots); \quad (85)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m-s} \left| A_{kl} \Delta_{kl} \frac{A_{st} c_{mn, k+s, l+t}}{a_{kl}} - q_{nklst} \right| = 0 \quad (n, l, s, t = 0, 1, \dots),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{n-t} \left| A_{kl} \Delta_{kl} \frac{A_{st} c_{mn, k+s, l+t}}{a_{kl}} - q_{mklst} \right| = 0 \quad (m, k, s, t = 0, 1, \dots), \quad (86)$$

где

$$q_{nklst} = \lim_{m \rightarrow \infty} A_{kl} \Delta_{kl} \frac{A_{st} c_{mn, k+s, l+t}}{a_{kl}} \quad (n, k, l, s, t = 0, 1, \dots),$$

$$q_{mklst} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{kl} \Delta_{kl} \frac{A_{st} c_{mn, k+s, l+t}}{a_{kl}} \quad (m, k, l, s, t = 0, 1, \dots);$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \left| A_{kl} \Delta_{kl} \frac{A_t c_{mnk, l+t}}{a_{kl}} - q_{nklt} \right| = 0 \quad (n, l, t = 0, 1, \dots),$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m-s} \left| A_{kl} \Delta_{kl} \frac{A_s c_{mn, k+s, l}}{a_{kl}} - q''_{nkls} \right| = 0 \quad (n, l, s = 0, 1, \dots),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{n-t} \left| A_{kl} \Delta_{kl} \frac{A_t c_{mnk, l+t}}{a_{kl}} - q'''_{mklt} \right| = 0 \quad (m, k, t = 0, 1, \dots),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^n \left| A_{kl} \Delta_{kl} \frac{A_s c_{mn, k+s, l}}{a_{kl}} - q^{IV}_{mkl s} \right| = 0 \quad (m, k, s = 0, 1, \dots),$$

где

$$q'_{nklt} = \lim_{m \rightarrow \infty} A_{kl} \Delta_{kl} \frac{A_t c_{mnk, l+t}}{a_{kl}} \quad (n, k, l, t = 0, 1, \dots),$$

$$q''_{nkls} = \lim_{m \rightarrow \infty} A_{kl} \Delta_{kl} \frac{A_s c_{mn, k+s, l}}{a_{kl}} \quad (n, k, l, s = 0, 1, \dots),$$

$$q'''_{mklt} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{kl} \Delta_{kl} \frac{A_t c_{mnk, l+t}}{a_{kl}} \quad (m, k, l, t = 0, 1, \dots),$$

$$q^{IV}_{mkl s} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{kl} \Delta_{kl} \frac{A_s c_{mn, k+s, l}}{a_{kl}} \quad (m, k, l, s = 0, 1, \dots); \quad (87)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m A_{kl} \Delta_{kl} \frac{A_t c_{mnk, l+t}}{a_{kl}} = h_{nlt} \quad (n, l, t = 0, 1, \dots),$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m-s} A_{kl} \Delta_{kl} \frac{A_s c_{mn, k+s, l}}{a_{kl}} = h_{nls} \quad (n, l, s = 0, 1, \dots),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{n-t} A_{kl} \Delta_{kl} \frac{A_t c_{mnk, l+t}}{a_{kl}} = h''_{mkt} \quad (m, k, t = 0, 1, \dots),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^n A_{kl} \Delta_{kl} \frac{A_s c_{mn, k+s, l}}{a_{kl}} = h'''_{mks} \quad (m, k, s = 0, 1, \dots); \quad (88)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \sum_{s=0}^{m-k} \left| A_{kl} \Delta_{kl} \frac{A_{st} c_{mn, k+s, l+t}}{a_{kl}} - q_{nklst} \right| = 0 \quad (n, l, t = 0, 1, \dots);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^n \sum_{t=0}^{n-l} \left| A_{kl} \Delta_{kl} \frac{A_{st} c_{mn, k+s, l+t}}{a_{kl}} - q'_{mklst} \right| = 0 \quad (m, k, s = 0, 1, \dots), \quad (89)$$

Теоремы получаем следующие:

• Теорема 25. Ряд-произведение  $\Sigma \omega_{mn} C_{\zeta}$ -суммируем при любых  $\Sigma u_{mn}$  ( $R; a_{mn}$ ) $_{mc}$ -суммируемом, и  $\Sigma v_{mn}$ , ограниченно сходящемся, если

$$1^{\circ} (R; a_{mn})_{mc} \subseteq C_{\zeta}, E_{mc} \subseteq C_{\zeta},$$

2<sup>o</sup> выполняются условия (78) и (84) — в случае  $\zeta = c$ ; (79) и (84) — в случае  $\zeta = mc$ .

Теорема 26. Ряд-произведение  $\Sigma \omega_{nm} C_{\zeta}$ -суммируем при любых  $\Sigma u_{nm}$ , ( $R; a_{mn}$ ) $_{mc}$ -суммируемом, и  $\Sigma v_{mn}$ , регулярно сходящемся, если

$$1^{\circ} (R; a_{mn})_{mc} \subseteq C_{\zeta}, E_r \subseteq C_{\zeta},$$

2<sup>o</sup> выполняются условия (78), (81) и (82) — в случае  $\zeta = c$ ; (79), (81) и (82) — в случае  $\zeta = mc$ .

Теорема 27. Ряд-произведение  $\Sigma \omega_{mn} C_{\zeta}$ -суммируем при любых  $\Sigma u_{mn}$ , ( $R; a_{mn}$ ) $_r$ -суммируемом, и  $\Sigma v_{mn}$ , регулярно сходящемся, если

$$1^{\circ} (R; a_{mn})_r \subseteq C_{\zeta}, E_r \subseteq C_{\zeta},$$

2<sup>o</sup> выполняются условия (78), (80) и (83) — в случае  $\zeta = c$ ; (79), (80) и (83) — в случае  $\zeta = mc$ .

**Теорема 28.** Ряд-произведение  $\Sigma \omega_{mn} C_r$  -суммируем при любых  $\Sigma u_{mn}$ ,  $(R; a_{mn})_{mc}$  -суммируемом, и  $\Sigma v_{mn}$ , ограниченно сходящемся, если

$$1^\circ (R; a_{mn})_{mc} \subseteq C_r, E_{mc} \subseteq C_r,$$

2° выполняются условия (79), (84) и (89).

**Теорема 29.** Ряд-произведение  $\Sigma \omega_{mn} C_r$  -суммируем при любых  $\Sigma u_{mn}$ ,  $(R; a_{mn})_{mc}$  -суммируемом, и  $\Sigma v_{mn}$  регулярно сходящемся, если

$$1^\circ (R; a_{mn})_{mc} \subseteq C_r, E_r \subseteq C_r,$$

2° выполняются условия (79), (81), (82), (86) и (87).

**Теорема 30.** Ряд-произведение  $\Sigma \omega_{mn} C_r$  -суммируем при любых  $\Sigma u_{mn}$ ,  $(R; a_{mn})_r$  -суммируемом, и  $\Sigma v_{mn}$ , регулярно сходящемся, если

$$1^\circ (R; a_{mn})_r \subseteq C_r, E_r \subseteq C_r,$$

2° выполняются условия (79), (80), (83), (85) и (88).

Для выполнения соотношения (48) в случае теорем 21—30 необходима и достаточна совместность методов, приведенных в пункте 1°, и кроме того, в случае теорем 22 и 24 равенство нулю пределов в условии (74), а в случае теорем 27 и 30 — равенство нулю пределов в условиях (80) и (83)

## § 5. Свойства правил умножения

В настоящем параграфе покажем, что метод билинейных преобразований применим также к исследованию свойств правил умножения двойных рядов.

Правило умножения можем представить при помощи т. н. матрицы  $\Omega = (\omega_{mnlst})$  правила умножения, определяя частичную сумму ряда-произведения формулой

$$W_{mn} = \sum_{k,l,s,t} \omega_{mnlst} u_{kl} v_{st} \quad (m, n = 0, 1, \dots)$$

Здесь мы рассматриваем такие правила умножения, где при фиксированных  $k, l, s, t$  найдутся числа  $M$  и  $N$ , такие что

$$\omega_{mnlst} = \begin{cases} 1, & \text{если } m \geq M \text{ и } n \geq N. \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

и, кроме того

$$\omega_{mnlst} = 0, \tag{90}$$

если выполняется хотя бы одно из неравенств:  $k > M_{mn}$ ,  $l > N_{mn}$ ,  $s > M'_{mn}$ ,  $t > N'_{mn}$ . Такое определение правил умножения соответствует правилу группировки в двойной ряд членов  $u_{kl}v_{st}$  полученных при почленном перемножении рядов  $\Sigma u_{kl}$  и  $\Sigma v_{st}$

Например, правило умножения Коши определяется так

$$\omega_{mnlst} = \begin{cases} 1, & \text{если } k + s \leq m \text{ и } l + t \leq n, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Скажем, что правило умножения  $\Omega$  совершенно в смысле  $\alpha$ , если из сходимости рядов-сомножителей в смысле  $\alpha$  следует сходимость ряда-произведения в смысле  $\alpha$ , и имеет место соотношение (35)

Скажем, что правило умножения  $\Omega$  обладает свойством  $MU$  в смысле  $\alpha$ , если при любых  $\sum u_{mn}$  и  $\sum v_{mn}$ , сходящихся соответственно в смыслах  $\alpha (\alpha \neq 1)$  и  $1$ , ряд-произведение  $\sum \omega_{mn}$  сходится в смысле  $\alpha$ , и имеет место соотношение (35)

Аналогично свойству  $MU$  определяется свойство  $MV$  в смысле  $\alpha$ , которое отличается от  $MU$  лишь тем, что в нем места рядов  $\sum u_{mn}$  и  $\sum v_{mn}$  обменены.

Если свойства  $MU$  и  $MV$  выполнены одновременно в смысле  $\alpha$ , то скажем, что имеет место свойство Мертенса в смысле  $\alpha$ .

Применяя условия билинейных преобразований, получаем следующие теоремы:<sup>28</sup>

**Теорема 31.** Для того, чтобы правило умножения  $\Omega$  обладало свойством Мертенса в смысле  $mc$ , необходимо и достаточно выполнение условий:

$$1^\circ \sum_{k,l} |\Delta_{kl} \omega_{mnlst}| \leq M \quad (m, n, s, t = 0, 1, \dots), \quad (91)$$

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_k |\Delta_{kl} \omega_{mnlst}| = 0 \quad (l, s, t = 0, 1, \dots),$$

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_t |\Delta_{kl} \omega_{mnlst}| = 0 \quad (k, s, t = 0, 1, \dots), \quad (92)$$

(для свойства  $MU$  в смысле  $mc$ );

$$2^\circ \sum_{s,t} |\Delta_{st} \omega_{mnlst}| \leq M' \quad (m, n, k, l = 0, 1, \dots), \quad (91')$$

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_s |\Delta_{st} \omega_{mnlst}| = 0 \quad (k, l, t = 0, 1, \dots),$$

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_t |\Delta_{st} \omega_{mnlst}| = 0 \quad (k, l, s = 0, 1, \dots), \quad (92')$$

(для свойства  $MV$  в смысле  $mc$ ).

<sup>28</sup> Условия для билинейных преобразований, полученные в первой главе, действительны не только в случае треугольных матриц, но и в случае матриц, удовлетворяющих условию (90).

**Теорема 32.** Для того, чтобы правило умножения  $\Omega$  обладало свойством Мертенса в смысле  $\mathbf{r}$ , необходимо и достаточно выполнение условий (91) (для свойства  $MU$  в смысле  $\mathbf{r}$ ) и (91') (для свойства  $MV$  в смысле  $\mathbf{r}$ ).

Отметим, что в случае правила умножения Коши условия (91), (91'), (92) и (92') выполнены.

**Теорема 33.** Для того, чтобы правило умножения  $\Omega$  было совершенно в смысле  $\mathbf{mc}$ , необходимо и достаточно выполнение условий:

1° ряд-произведение должен иметь ограниченные частичные суммы при любых  $\sum u_{mn}$  и  $\sum v_{mn}$  ограниченно сходящихся,

$$2^\circ \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_k |\Delta_{kl} \omega_{mnkloo}| = 0 \quad (l = 0, 1, \dots),$$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_l |\Delta_{kl} \omega_{mnkloo}| = 0 \quad (k = 0, 1, \dots).$$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_s |\Delta_{st} \omega_{mnoost}| = 0 \quad (t = 0, 1, \dots)$$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_t |\Delta_{st} \omega_{mnoost}| = 0 \quad (s = 0, 1, \dots);$$

$$3^\circ \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_l \sum_t |\Delta_{kl} \Delta_{st} \omega_{mnklst}| = 0 \quad (k, s = 0, 1, \dots),$$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_l \sum_s |\Delta_{kl} \Delta_{st} \omega_{mnklst}| = 0 \quad (k, t = 0, 1, \dots),$$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_k \sum_t |\Delta_{kl} \Delta_{st} \omega_{mnklst}| = 0 \quad (l, s = 0, 1, \dots),$$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_k \sum_s |\Delta_{kl} \Delta_{st} \omega_{mnklst}| = 0 \quad (l, t = 0, 1, \dots)$$

**Теорема 34.** Для того, чтобы правило умножения  $\Omega$  было совершенно в смысле  $\mathbf{r}$ , необходимо и достаточно выполнение условия:

ряд-произведение должен иметь ограниченные частичные суммы при любых  $\sum u_{mn}$  и  $\sum v_{mn}$ , регулярно сходящихся.

### Литература

1. Alexiewicz, A., On multiplication of infinite series, *Studia Math.*, **10**, (1948), 104—112.
2. Banach, S., *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa (1932).
3. Bourbaki, N., *Topologie générale III*, Paris (1948).

4. Cesari, L., Sulla moltiplicazione delle serie doppie, Atti Accad. Naz. Lincei, **1**, (1946), 289—292.
5. Cesari, L., Sulla moltiplicazione delle serie doppie, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (Sci. Fis. e Mat.), **2**, **12**, 1943 (1947), 189—204.
6. Fekete, M., A széttartó végtelen sorok elméletéhez, Matematikai és Termész. Ertesítő, **29**, (1911), 719—726.
7. Fraleigh, P. A., Regular bilinear transformations of sequences, Amer. J. Math., **53**, (1931), 796—709.
8. Hahn, H., Über Folgen linearer Operationen, Monatsh. Math. und Phys., **32**, (1922), 3—88.
9. Hamilton, H. J., Transformations of multiple sequences; Duke Math. J., **2** (1936), 29—60.
10. Hamilton, H. J., Mertens' theorem and sequence transformations, Bull. Amer. Math. Soc., **53**, (1947), 784—786.
11. Hill, J. D., Hamilton, H. J., Operation theory and multiple sequence transformations, Duke Math. J., **8**, (1941), 154—162.
12. Knopp, K., Lorentz, G. G., Beiträge zur absoluten Limitierung, Arch. Math., **2**, (1949—50), 10—16.
13. Kogbetliantz, M. E., Sur les séries absolument sommables par la méthode des moyennes arithmétiques, Bull. des Sci. math., **2**, **49**, (1925), 234—256.
14. Mears, F. M., Riesz summability for double series, Trans. Amer. Math. Soc., **30**, (1928), 686—709.
15. Mears, F. M., Some multiplication theorems for the Nörlund mean, Bull. Amer. Math. Soc., **41**, (1935), 875—880.
16. Mears, F. M., Absolute regularity and the Nörlund mean, Ann. Math., **2**, **38**, (1937), 594—601.
17. Mears, F. M., The inverse Nörlund mean, Ann. Math., **2**, **44**, (1943), 401—410.
18. Mears, F. M., Nörlund summability of Cauchy products, Ann. Math., **2**, **46**, (1945), 563—566.
19. Mears, F. M., Transformations of double sequences, Amer. J. Math., **70**, (1948), 804—832.
20. Schmetterer, L., Beitrag zur Multiplikation unendlicher Reihen, Monatsh. f. Math., **54**, (1950), 313—329.
21. Schmetterer, L., Bemerkungen zur Multiplikation unendlicher Reihen, Math. Z., **54**, (1951), 102—114.
22. Sheffer, I. M., Note on multiply-infinite series, Bull. Amer. Math. Soc., **52**, (1946), 1036—1041.
23. Sunouchi, G., Notes on Fourier analysis (XVIII): Absolute summability of series with constant terms, Tôhoku Math. J., **2**, **1**, (1949), 57—65.
24. Кангро, Г., О суммировании бесконечных рядов при помощи матричных методов, Уч. зап. Тартуского гос. ун-та, **37**, (1955), 150—190.
25. Кангро, Г., О матричных преобразованиях последовательностей в банаховых пространствах, Изв. Акад. наук Эстонской ССР, сер. техн. и физ.-мат. наук, **2**, (1956), 108—128.
26. Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, Москва (1954).
27. Люстерник, Л. А., Соболев, В. И., Элементы функционального анализа, Москва—Ленинград (1951).
28. Харди, Г., Расходящиеся ряды, Москва (1951).
29. Челидзе, В. Г., О преобразовании двойных последовательностей, Труды Тбилисского Матем. ин-та им. Размадзе, **17**, (1949), 61—94.
30. Челидзе, В. Г., Об умножении двойных рядов и двойных интегралов, Труды Тбилисского Матем. ин-та им. Размадзе, **19**, (1953), 135—151.

# KAHEKORDSETE SUMMEERUVATE RIDADE KORRUTAMINE

## I. Küll

### Resümee

Operaatorit

$$z = f(x_1, \dots, x_k) \quad (1)$$

nimetame polülineaarseks, kui see on aditiivne ja homogeenne iga muutuja suhtes. Operaatori (1) väärtused  $z$  ja muutujad  $x_i$  kuulugu seejuures vastavalt Banachi ruumi  $Z$  ja  $X_i$  ( $i=1, \dots, k$ ).

I peatükis vaatleme polülineaarsete operaatorite kahekordseid jadasid

$$\{f_{mn}(x_1, \dots, x_k)\}_{mn}. \quad (2)$$

Töös defineeritakse kahekordsete jadade klassid

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}, \mathbf{mc}, \mathbf{r}, \mathbf{l}, \mathbf{c}_\lambda, \mathbf{c}_{\varphi\lambda}^z, \mathbf{c}_{\varphi\psi}^c, \mathbf{c}_{\varphi\psi}^m, \\ & \mathbf{c}_\lambda^z, \mathbf{c}_\lambda^c, \mathbf{c}_\lambda^m, \mathbf{m}, \tilde{\mathbf{m}}, \mathbf{m}_{\varphi\psi}^m, \mathbf{m}_\lambda^m \end{aligned} \quad (3)$$

ja antakse tingimused jada (2) kuulumiseks mingisse klassi (3) iga fikseeritud  $x_i \in X_i$  ( $i=1, \dots, k$ ) puhul (teoreemid II ja III). Teoreemi III alusel tuletatakse ka tarvilikud ja piisavad tingimused järgmisteks lineaarteisendusteks:  $\mathbf{l} \rightarrow \mathbf{c}, \mathbf{l} \rightarrow \mathbf{mc}, \mathbf{l} \rightarrow \mathbf{r}, \mathbf{l} \rightarrow \mathbf{l}, \mathbf{mc} \rightarrow \mathbf{c}_\lambda, \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{c}_\lambda, \mathbf{l} \rightarrow \mathbf{c}_\lambda, \mathbf{c}_{\varphi\psi}^c \rightarrow \mathbf{c}_\lambda, \mathbf{c}_\lambda^z \rightarrow \mathbf{c}_\lambda, \mathbf{c}_\lambda^c \rightarrow \mathbf{c}_\lambda, \mathbf{c}_\lambda^m \rightarrow \mathbf{c}_\lambda$ .

Sama teoreemi alusel tuletatakse ka bilineaarteisenduste  $\mathbf{mc} \times \mathbf{l} \rightarrow \mathbf{mc}, \mathbf{r} \times \mathbf{l} \rightarrow \mathbf{mc}, \mathbf{l} \times \mathbf{l} \rightarrow \mathbf{mc}, \mathbf{mc} \times \mathbf{l} \rightarrow \mathbf{r}, \mathbf{r} \times \mathbf{l} \rightarrow \mathbf{r}, \mathbf{l} \times \mathbf{l} \rightarrow \mathbf{r}, \mathbf{l} \times \mathbf{l} \rightarrow \mathbf{l}$ .

tarvilikud ja piisavad tingimused, kuna bilineaarteisenduste

$$\begin{aligned} & \mathbf{mc} \times \mathbf{mc} \rightarrow \mathbf{mc}, \mathbf{mc} \times \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{mc}, \mathbf{r} \times \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{mc}, \mathbf{mc} \times \mathbf{mc} \rightarrow \mathbf{r}, \\ & \mathbf{mc} \times \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}, \mathbf{r} \times \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}, \mathbf{c}_{\varphi\psi}^z \times \mathbf{c}_{\varphi\psi}^z \rightarrow \mathbf{c}_\lambda, \mathbf{c}_{\varphi\psi}^c \times \mathbf{c}_{\varphi\psi}^c \rightarrow \mathbf{c}_\lambda, \\ & \mathbf{c}_{\varphi\psi}^m \times \mathbf{c}_{\varphi\psi}^m \rightarrow \mathbf{c}_\lambda, \mathbf{c}_\lambda^z \times \mathbf{c}_\lambda^z \rightarrow \mathbf{c}_\lambda, \mathbf{c}_\lambda^c \times \mathbf{c}_\lambda^c \rightarrow \mathbf{c}_\lambda, \mathbf{c}_\lambda^m \times \mathbf{c}_\lambda^m \rightarrow \mathbf{c}_\lambda, \\ & \mathbf{c}_{\varphi\psi}^z \times \mathbf{mc} \rightarrow \mathbf{c}_\lambda, \mathbf{c}_{\varphi\psi}^c \times \mathbf{mc} \rightarrow \mathbf{c}_\lambda, \mathbf{c}_{\varphi\psi}^m \times \mathbf{mc} \rightarrow \mathbf{c}_\lambda, \mathbf{c}_\lambda^z \times \mathbf{mc} \rightarrow \mathbf{c}_\lambda, \\ & \mathbf{c}_\lambda^c \times \mathbf{mc} \rightarrow \mathbf{c}_\lambda, \mathbf{c}_\lambda^m \times \mathbf{mc} \rightarrow \mathbf{c}_\lambda \end{aligned}$$

jaoks saame piisavad tingimused, mis erijuhul (valem (33) käesolevas töös) osutuvad aga samuti tarvilikeks.

Teoreemi V alusel saame leida ka seosed teisendatud jada ja teisendatavate jadade piirväärtuste vahel.

II peatükis defineeritakse kahekordse rea  $A_\alpha$ -summeeruvus ( $\alpha$  tähistab mingit koonduvate jadade klassi loetelust (3), millesse peab kuuluma menetluse  $A$  abil teisendatud jada) ja uuritakse seejärel summeerimismenetluste sisalduvust ning kooskõla mõttes ( $\alpha, \beta$ ) Voronoi-Nörlundi ( $WN; \alpha_{kl}$ ), Cesàro ( $C; a, b$ ) ja Riesz'i kaalutatud keskmiste menetluste ( $R; \alpha_{kl}$ ) korral.

III peatükis vaadeldakse järgmist probleemi: kui rida  $\sum u_{kl}$  on  $A_\alpha$ -summeeruv summaks  $U'$  ja rida  $\sum v_{kl}$  on  $B_\beta$ -summeeruv summaks  $V'$ , siis millistel tingimustel on nende ridade Cauchy-korrutisrida  $\sum w_{kl}$   $C_\gamma$ -summeeruv summaks  $W'$  ning millistel tingimustel kehtib seos

$$W' = U' V'$$

Püstitatud probleem lahendatakse selliselt, et ridade korrutamist vaadeldakse bilineaarteisendusena. Bilineaarteisenduse  $\alpha \times \beta \rightarrow \gamma$  tingimustest saamegi tingimused korrutisrea  $C_\gamma$ -summeeruvuseks. Arvestades summeerimismenetluste  $A_\alpha$ ,  $C_\gamma$  ja  $B_\beta$ ,  $C_\gamma$  sisalduvust kui tarvilikku tingimust, osutub võimalikuks lihtsustada tingimuste kompleksi korrutisrea  $C_\gamma$ -summeeruvuseks.

Töös on tõestatud 30 teoreemi Voronoi-Nörlundi, Cesàro ja Riesz'i menetlusega summeeruvate kahekordsete ridade korrutamise kohta. Tõestatud teoreemid üldistavad ühekordsete ridade vallas tuntud Cesàro ([28], teoreem 164), Fekete-Kogbetliantz'i ([6], teoreemid 1° ja 2°; [13], teoreemid IV ja V). Belinfante'i ([16], sissejuhatus) ja Florence M. Mears'i ([15], teoreemid 1, 2 ja 3) tulemusi. Käesolevas töös esitatud teoreemidest saame tuletada ka juba olemasolevaid teoreeme kahekordsete ridade korrutamise kohta (Cesari [4, 5], teoreemid I ja III; Sheffer [22], teoreem 1; Tšelidze [30], teoreem 6).

Viimases paragrahvis uuritakse kahekordsete ridade korrutisdefiniitsioonide omadusi ja tõestatakse 4 teoreemi, mida võib vaadelda kui Alexiewicz'i [1] teoreemi 1 üldistusi.

# MULTIPLICATION OF DOUBLE SUMMABLE SERIES

I. Kull

Summary

An operator

$$z = f(x_1, \dots, x_k) \quad (1)$$

is named polylinear if it is additive and homogeneous with respect to each argument. The values  $z$ , and the arguments  $x_i$  of the operator (1) belong to Banach spaces  $Z$  and  $X_i (i=1, \dots, k)$  respectively.

In Chapter I are considered double sequences

$$\{f_{nm}(x_1, \dots, x_k)\}_{m,n}. \quad (2)$$

of polylinear operators.

In the present paper we define classes of double sequences

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}, \mathbf{mc}, \mathbf{r}, \mathbf{l}, \mathbf{c}_\lambda, \mathbf{c}_{\varphi\psi}^z, \mathbf{c}_{\varphi\psi}^c, \mathbf{c}_{\varphi\psi}^m, \\ & \mathbf{c}_\lambda^z, \mathbf{c}_\lambda^c, \mathbf{c}_\lambda^m, \mathbf{m}, \tilde{\mathbf{m}}, \mathbf{m}_{\varphi\psi}^m, \mathbf{m}_\lambda^m \end{aligned} \quad (3)$$

and give the conditions that sequence (2) belongs to any class of (3) for each fixed  $x_i \in X_i (i=1, \dots, k)$  (theorems II and III). On the basis of theorem III we get the necessary and sufficient conditions for the following linear transformations:  $\mathbf{l} \rightarrow \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{l} \rightarrow \mathbf{mc}$ ,  $\mathbf{l} \rightarrow \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{l} \rightarrow \mathbf{l}$ ,  $\mathbf{mc} \rightarrow \mathbf{c}_\lambda$ ,  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{c}_\lambda$ ,  $\mathbf{l} \rightarrow \mathbf{c}_\lambda$ ,  $\mathbf{c}_{\varphi\psi}^c \rightarrow \mathbf{c}_\lambda$ ,  $\mathbf{c}_\lambda^z \rightarrow \mathbf{c}_\lambda$ ,  $\mathbf{c}_\lambda^c \rightarrow \mathbf{c}_\lambda$ ,  $\mathbf{c}_\lambda^m \rightarrow \mathbf{c}_\lambda$ .

On the basis of the same theorem we also get the necessary and sufficient conditions for the bilinear transformations  $\mathbf{mc} \times \mathbf{l} \rightarrow \mathbf{mc}$ ,  $\mathbf{r} \times \mathbf{l} \rightarrow \mathbf{mc}$ ,  $\mathbf{l} \times \mathbf{l} \rightarrow \mathbf{mc}$ ,  $\mathbf{mc} \times \mathbf{l} \rightarrow \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r} \times \mathbf{l} \rightarrow \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{l} \times \mathbf{l} \rightarrow \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{l} \times \mathbf{l} \rightarrow \mathbf{l}$ ; whereas for the bilinear transformations  $\mathbf{mc} \times \mathbf{mc} \rightarrow \mathbf{mc}$ ,  $\mathbf{mc} \times \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{mc}$ ,  $\mathbf{r} \times \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{mc}$ ,  $\mathbf{mc} \times \mathbf{mc} \rightarrow \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{mc} \times \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r} \times \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{c}_{\varphi\psi}^z \times \mathbf{c}_{\varphi\psi}^z \rightarrow \mathbf{c}_\lambda$ ,  $\mathbf{c}_{\varphi\psi}^c \times \mathbf{c}_{\varphi\psi}^c \rightarrow \mathbf{c}_\lambda$ ,  $\mathbf{c}_{\varphi\psi}^m \times \mathbf{c}_{\varphi\psi}^m \rightarrow \mathbf{c}_\lambda$ ,  $\mathbf{c}_\lambda^z \times \mathbf{c}_\lambda^z \rightarrow \mathbf{c}_\lambda$ ,  $\mathbf{c}_\lambda^c \times \mathbf{c}_\lambda^c \rightarrow \mathbf{c}_\lambda$ ,  $\mathbf{c}_\lambda^m \times \mathbf{c}_\lambda^m \rightarrow \mathbf{c}_\lambda$ ,  $\mathbf{c}_{\varphi\psi}^z \times \mathbf{mc} \rightarrow \mathbf{c}_\lambda$ ,  $\mathbf{c}_{\varphi\psi}^c \times \mathbf{mc} \rightarrow \mathbf{c}_\lambda$ ,  $\mathbf{c}_{\varphi\psi}^m \times \mathbf{mc} \rightarrow \mathbf{c}_\lambda$ ,  $\mathbf{c}_\lambda^z \times \mathbf{mc} \rightarrow \mathbf{c}_\lambda$ ,  $\mathbf{c}_\lambda^c \times \mathbf{mc} \rightarrow \mathbf{c}_\lambda$ ,  $\mathbf{c}_\lambda^m \times \mathbf{mc} \rightarrow \mathbf{c}_\lambda$ .

we get the sufficient conditions, which in the special case (formula (33) in the present paper) have also proved necessary.

On the basis of theorem V we get the formulas binding the limits of transformed and transformable sequences.

In Chapter II we define  $A_\alpha$ -summability of a double series ( $\alpha$  denotes any class of convergent double sequences in the enumeration (3), where must belong the sequence transformed by the method  $A$ ) and thereafter study the inclusion and consistency of the methods of summability of Voronoy-Nörlund ( $WN; a_{kl}$ ), Cesàro ( $C; a, b$ ), and Riesz ( $R; a_{kl}$ )

In Chapter III we consider the following problem: if the series  $\sum u_{kl}$  is  $A_\alpha$ -summable to the sum  $U'$ , and the series  $\sum v_k$  is  $B_\beta$ -summable to the sum  $V'$ , then in what conditions the Cauchy-product  $\sum w_{kl}$  of these two series is  $C_\gamma$ -summable to the sum  $W'$  and in what conditions holds the formula

$$W' = U' V'$$

This problem is solved in such a manner that the multiplication of the two series is regarded as a bilinear transformation. From the conditions of the bilinear transformation  $\alpha \times \beta \rightarrow \gamma$  we get the conditions for  $C_\gamma$ -summability of the product-series. Taking into account the inclusion of the methods  $A_\alpha, C_\gamma$ , and  $B_\beta, C_\gamma$ , as a necessary condition, it is possible to simplify the set of conditions for  $C_\gamma$ -summability of the product-series.

In the present paper 30 theorems are proved for the multiplication of the double series summable by the methods of Voronoy-Nörlund, Cesàro and Riesz. The theorems mentioned here generalise the known theorems of Cesàro ([28], theorem 164), Fekete-Kogbetliantz ([6], theorems 1° and 2°; [13], theorems IV and V) Belinfante ([16], introduction) and Florence M. Mears ([15], theorems 1, 2, and 3) for the ordinary series. From the theorems which have been proved in the present paper one can deduce earlier theorems on the multiplication of double series (Cesari [4, 5], theorems I and III; Sheffer [22], theorem 1; Čelidze [30], theorem 6).

In the last paragraph the author studies the qualities of the definitions of the multiplication of double series. We prove here 4 theorems, which generalise theorem 1 of Alexiewicz [1].

# ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ ДЛЯ ДВОЙНЫХ РЯДОВ

Э. Г. Реймерс

Кафедра геометрии

## Введение

В работах [4], [5], [6] Юркат и Пейеримхофф создали теорию теорем о среднем значении для обычных числовых рядов и дали ее многие применения. В настоящей статье теория теорем о среднем значении обобщается на двойные ряды (§ 4). Одновременно обобщается (при помощи понятия отрезка последовательности) понятие совершенности методов суммирования (§ 2) и понятие сходимости по отрезкам (§ 3), что позволяет более общо исследовать свойства методов суммирования, удовлетворяющих теоремам о среднем значении (§ 5). Полученные результаты применяются для изучения включений методов суммирования (§ 6).

## 1. Обозначения и основные понятия

Мы будем рассматривать следующие классы двойных последовательностей<sup>1</sup>  $x = \{x_{\mu\nu}\}$ :  $b$  — класс ограниченных последовательностей (если  $|x_{\mu\nu}| < M$ ),  $c$  — класс сходящихся последовательностей (существует  $\lim_{\mu\nu \rightarrow \infty} x_{\mu\nu} = \xi$ ),  $bc$  — класс ограниченно сходящихся последовательностей ( $x \in c$  и  $x \in b$ ),  $rc$  — класс регулярно сходящихся последовательностей ( $x \in c$  и существуют  $\lim_{\mu \rightarrow \infty} x_{\mu\nu} = x^\nu$  и  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} x_{\mu\nu} = x_\mu$ )<sup>2</sup>,  $a$  — класс абсолютно сходящихся

<sup>1</sup> Если пределы изменения индексов не указаны, то они имеют все целочисленные значения от 0 до  $\infty$

<sup>2</sup> В дальнейшем всегда будем в случае последовательности  $\{y_{\mu\nu}\} \in r$  применять обозначения  $y_\mu = \lim_{\nu \rightarrow \infty} y_{\mu\nu}$  и  $y^\nu = \lim_{\mu \rightarrow \infty} y_{\mu\nu}$ .

последовательностей<sup>3</sup> ( $\sum |\bar{\Delta}_{\mu\nu} x_{\mu\nu}| < \infty$ ) и классы к нулю сходящихся последовательностей  $b\bar{c}n$  ( $x \in b\bar{c}$  и  $\xi = 0$ ),  $ren$  ( $x \in r\bar{c}$  и  $\xi = 0$ ),  $rn$  ( $x \in r\bar{c}$  и  $\xi = x^\nu = x_\mu = 0$ ),  $an$  ( $x \in a$  и  $\xi = 0$ ) и  $arn$  ( $x \in a$  и  $x \in rn$ )

В дальнейшем для удобства будем буквой  $\alpha$  обозначать один из классов  $b\bar{c}$ ,  $b\bar{c}n$ ,  $r\bar{c}$ ,  $r\bar{c}n$ ,  $rn$ ,  $a$ ,  $an$  и  $arn$ ; буквой  $\beta$  один из классов  $b\bar{c}$ ,  $b\bar{c}n$ ,  $r\bar{c}$ ,  $r\bar{c}n$  и  $rn$ ; буквой  $\gamma$  один из классов  $a$ ,  $an$  и  $arn$ ; буквой  $r$  один из классов  $r\bar{c}$ ,  $r\bar{c}n$  и  $rn$ .

Определим понятие суммируемости ряда

$$\sum u_{kl} \quad (1.1)$$

Пусть  $x = \{x_{\mu\nu}\} = \left\{ \sum_{kl=0}^{\mu\nu} u_{kl} \right\}$ . Мы скажем, что ряд (1.1)  $\alpha$ -суммируем треугольным методом  $A = (a_{mn\mu\nu})$  к сумме  $A(x)$ , если последовательность  $\{A_{mn}(x)\} \in \alpha$ , где

$$A_{mn}(x) = \sum_{\mu\nu=0}^{mn} a_{mn\mu\nu} x_{\mu\nu},$$

и если  $\lim_{mn \rightarrow \infty} A_{mn}(x) = A(x)$ . Множество всех последовательностей

$\alpha$ -суммируемых методом  $A$  обозначим через  $\alpha A$ .  $\alpha A$  называем полем суммирования метода  $A$ . Ряд (1.1) называем  $A$ -ограниченным, если  $\{A_{mn}(x)\} \in b$ . Множество  $A$ -ограниченных последовательностей обозначим через  $bA$ . Метод  $A$  будем называть реверсивным относительно класса  $\alpha$ , если для любого  $\{A_{mn}(x)\} \in \alpha$  соответствует одна и только одна  $x \in \alpha A$ . Нормальный метод всегда реверсивен.

Пусть  $A$  нормальный метод суммирования. В классах  $\beta A$  для последовательности  $x$  определим норму

$$\|x\| = \sup_{\mu\nu=0,1,\dots} |A_{\mu\nu}(x)| \quad (1.2)$$

и в классах  $\gamma A$

$$\|x\| = \sum |\bar{\Delta}_{\mu\nu} A_{\mu\nu}(x)|. \quad (1.3)$$

При таком нормировании эти классы превращаются в  $BK$ -пространства.<sup>4</sup> Если  $A$  единичный метод суммирования, то отсюда

<sup>3</sup> Здесь и в дальнейшем  $\sum$  означает  $\sum_{\mu\nu=0}^{\infty}$ ,  $\bar{\Delta}_\nu x_\nu = x_\nu - x_{\nu-1}$  и  $\bar{\Delta}_{\mu\nu} x_{\mu\nu} = \bar{\Delta}_\nu (\bar{\Delta}_\mu x_{\mu\nu}) = \bar{\Delta}_\mu (\bar{\Delta}_\nu x_{\mu\nu})$ .

<sup>4</sup> Т. е. в пространствах Банаха, где имеет место сходимость по координатам.

следует как частный случай, что классы  $\beta$  и  $\gamma$  являются ВК-пространствами.

В пространствах  $\alpha A$  мы будем рассматривать следующие специальные последовательности:  $e_{\mu\nu}$  — последовательность, элементы которой нули за исключением элемента с индексами  $\mu, \nu$ , который равен 1;  $e_\mu$  — последовательность, где только  $\mu$ -ная строка отлична от нуля и состоит из чисел 1;  $e^\nu$  — последовательность, где только  $\nu$ -ный столбец отличен от нуля и состоит из чисел 1;  $\bar{e}_\mu$  — последовательность, элементы которой равны нулю за исключением  $\mu$ -ной строки, где 0 и 1 находятся в произвольном расположении;  $\bar{e}^\nu$  — последовательность, элементы которой равны нулю за исключением  $\nu$ -ного столбца, где 0 и 1 находятся в произвольном расположении;  $e$  — последовательность, элементы которой равны 1.

Мы скажем, что множество  $G$  лежит плотно в  $\alpha A$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  и  $x \in \alpha A$  найдется такой элемент  $g \in G$ , что  $\|x - g\| < \varepsilon$ . Множество  $E \subset \alpha A$  называется основным множеством пространства  $\alpha A$ , если линейные комбинации всех элементов из  $E$  лежат плотно в  $\alpha A$ .

В пространствах  $\alpha$  основные множества составляют следующие последовательности (случаи 1)–5) доказали Хилл и Хамильтон в [3]): 1) в  $bc$ :  $e_{\mu\nu}$ ,  $\bar{e}_\mu$ ,  $\bar{e}^\nu$  и  $e$ ; 2) в  $bcp$ :  $e_{\mu\nu}$ ,  $\bar{e}_\mu$  и  $\bar{e}^\nu$ ; 3) в  $rc$ :  $e_{\mu\nu}$ ,  $e_\mu$ ,  $e^\nu$  и  $e$ ; 4) в  $rcp$ :  $e_{\mu\nu}$ ,  $e_\mu$  и  $e^\nu$ ; 5) в  $rn$ :  $e_{\mu\nu}$ ; 6) в  $a$ :  $e_{\mu\nu}$ ,  $e_\mu$ ,  $e^\nu$  и  $e$ ; 7) в  $ap$ :  $e_{\mu\nu}$ ,  $e_\mu$  и  $e^\nu$ ; 8) в  $arn$ :  $e_{\mu\nu}$ .

Пусть  $f_{mn}(x)$  — линейные непрерывные функционалы с нормами  $\|f_{mn}\|$ . Тогда имеет место следующее обобщение известной теоремы Банаха.<sup>5</sup>

**Лемма 1.** 1. Для того, чтобы последовательность  $\{f_{mn}(x)\}$  сходилась всюду в пространстве  $\alpha A$  к заданному линейному непрерывному функционалу  $f(x)$ , необходимо и достаточно, чтобы

1° последовательность  $\{\|f_{mn}\|\}$  была ограничена;

2° сходимости имела место на основном множестве пространства  $\alpha A$ .

Из сходимости последовательности функционалов  $A_{mn}(x)$  на основных множествах пространств  $\alpha$  получаем следующие условия:

$$(a) \lim_{mn \rightarrow \infty} a_{mn\mu\nu} = 0;$$

$$(b) \lim_{m \rightarrow \infty} a_{m\mu\nu} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{mn\mu\nu} = 0;$$

<sup>5</sup> См. теорему III в статье И. Кулля в настоящем выпуске, где дано дальнейшее обобщение этой теоремы.

$$(c) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\mu=0}^m a_{m\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \text{если } \nu = n, \\ 0, & \text{если } \nu < n, \end{cases} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^n a_{m\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu = m, \\ 0, & \text{если } \mu < m; \end{cases} \end{array} \right.$$

$$(d) \lim_{mn \rightarrow \infty} \sum_{\mu=0}^m a_{m\mu\nu} = 0, \quad \lim_{mn \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^n a_{m\mu\nu} = 0,$$

$$(e) \lim_{mn \rightarrow \infty} \sum_{\mu\nu=0}^{mn} a_{m\mu\nu} = 1,$$

$$(f) \lim_{mn \rightarrow \infty} \sum_{\mu=0}^m |a_{m\mu\nu}| = 0, \quad \lim_{mn \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^n |a_{m\mu\nu}| = 0$$

Ниже нужны будут также условия

$$(g) \sum_{mn=0}^{\infty} |\bar{\Delta}_{mn} a_{m\mu\nu}| < \infty,$$

$$(h) \sum_{mn=0}^{\infty} \left| \bar{\Delta}_{mn} \sum_{\mu\nu=0}^{kl} a_{m\mu\nu} \right| < M,$$

$$(i) \sum_{\mu\nu=0}^{mn} |a_{m\mu\nu}| < M$$

В пространствах  $\alpha A$  будем рассматривать линейные непрерывные функционалы следующего вида:

$$1) bcA: \quad fx = \alpha A(x) + \sum a_{\mu\nu} A_{\mu\nu}(x), \quad \text{где } \sum |a_{\mu\nu}| < \infty$$

$$\text{и } \|f\| = |\alpha| + \sum |a_{\mu\nu}|;$$

$$2) bcnA: \quad \text{то же самое, что в } bcA, \text{ где } \alpha = 0;$$

$$3) rcA: \quad {}^6 \quad fx = \alpha A(x) + \sum a_{\mu} A_{\mu}(x) + \sum a^{\nu} A^{\nu}(x) + \sum a_{\mu\nu} A_{\mu\nu}(x)$$

$$\text{и } \|f\| = |\alpha| + \sum |a_{\mu}| + \sum |a^{\nu}| + \sum |a_{\mu\nu}|;$$

<sup>6</sup> См. [2], стр. 328 и 329.

4)  $rcnA$ : то же самое, что в  $rcA$ , где  $\alpha = 0$ ;

5)  $rnA$ : то же самое, что в  $bcnA$ ;

6)  $\gamma A$ :  $fx = \sum \alpha_{\mu\nu} \bar{\Delta}_{\mu\nu} A_{\mu\nu}(x)$ , где  $|\alpha_{\mu\nu}| < M$

$$\text{и } \|f\| = \sup_{\mu\nu=0,1,\dots} |\alpha_{\mu\nu}|$$

В пространствах  $rA$  и  $\gamma A$  любой линейный непрерывный функционал представляется в таком виде. В пространствах  $bcA$  и  $bcnA$  любой линейный непрерывный функционал не представляется соответственно в виде 1) и 2).

## 2. Совершенные методы суммирования

Понятие совершенности метода суммирования определяем при помощи отрезков последовательности. Отрезок  $g_\alpha = \{g_{\mu\nu}^\alpha\}$  в пространстве  $\alpha A$  мы определяем как линейную комбинацию элементов основного множества пространства  $\alpha$ . Например, в  $rcA$  имеем

$$g_{rc} = ge + \sum_{\mu=0}^{k_0} g_{\mu} e_{\mu} + \sum_{\nu=0}^{l_0} g^{\nu} e^{\nu} + \sum_{\mu\nu=0}^{k_0 l_0} g_{\mu\nu} e_{\mu\nu}$$

где  $g$ ,  $g_{\mu}$ ,  $g^{\nu}$  и  $g_{\mu\nu}$  произвольные числа: в  $aA$   $g_a = g_{rc}$ , в  $rcnA$   $g_{rcn} = g_{rc}$ , где  $g = 0$ , и т. д. При пользовании отрезками нужно знать, при каких условиях  $g_\alpha \in \alpha A$ . Если  $A$  удовлетворяет условиям

1° $(b), (c), (e), (f)$ ,	то $g_{bc} \in bcA$ ;
2° $(b), (c), (f)$ ,	то $g_{bcn} \in bcnA$ ;
3° $(a), (b), (c), (d), (e)$ .	то $g_{rc} \in rcA$ ;
4° $(a), (b), (c), (d)$ ,	то $g_{rcn} \in rcnA$ ;
5° $(a), (b)$ ,	то $g_{rn} \in rnA$ ;
6° $(a), (b), (c), (d), (e), (h)$ ,	то $g_a \in aA$ ;
7° $(a), (b), (c), (d), (h)$ ,	то $g_{an} \in anA$ ;
8° $(a), (b), (g)$	то $g_{arn} \in arnA$ .

В дальнейшем для удобства  $g_\alpha \in \alpha A$  будет означать, что соответствующие условия, указанные на левой стороне, выполняются. Например,  $g_{rn} \in rnA$  означает, что  $A$  удовлетворяет условиям (a) и (b). Если нужно указать, что в отрезке  $g_\alpha$  линейная комбинация оканчивается при индексах  $k_0$ ,  $l_0$ , мы пишем  $g_\alpha^{k_0 l_0}$ .

Определение 2. 1. Мы называем нормальный метод  $A$   $\alpha$ -совершенным, если  $g_\alpha \in \alpha A$ , и если для любого  $x \in \alpha A$  и любого  $\varepsilon > 0$  можно найти такой отрезок  $g$ , что

$$\|x - g\| < \varepsilon. \quad (2.1)$$

Если выполняется (2.1), то отрезки  $g_\alpha$  лежат плотно в  $\alpha A$ . Пусть  $E$  основное множество пространства  $\alpha$ . Отрезок  $g_\alpha$  является линейной комбинацией элементов из  $E$ , поэтому имеет место

Лемма 2.1. Нормальный метод  $A$ , если  $g_\alpha \in \alpha A$ , тогда и только тогда  $\alpha$ -совершенный, когда множество  $E$  является основным множеством пространства  $\alpha A$ .

Лемма 2.2. Нормальный метод  $A$ , если  $g_\alpha \in \alpha A$ , тогда и только тогда  $\alpha$ -совершенный, когда для любого в  $\alpha A$  линейного непрерывного функционала  $f$ , удовлетворяющего условию  $fx_0 = 0$  при всех  $x_0 \in E$ , заключается  $fx = 0$  при всех  $x \in \alpha A$ .

Лемма 2.2 следует непосредственно из леммы 2.1 (см. Ба-нах [1], стр. 58, теорема 7).

### 3. Сходимость по отрезкам в поле суммирования

Определим понятие отрезка  $x_{\alpha}^{kl}$  для последовательности  $x \in \alpha A$  следующим образом:

$$1^\circ \text{ если } x \in bcA, \text{ то } x_{bc}^{kl} = A(x) e + y + z + \\ + \sum_{\mu\nu=0}^{kl} (x_{\mu\nu} - y_{\mu\nu} - z_{\mu\nu} - A(x)) e_{\mu\nu},$$

причем

$$y = \{y_{\mu\nu}\} = \sum_{\mu\nu=0}^{k, n(k)} (A_{\mu\nu}(x) - A(x)) (\bar{e}^k)_{\nu},$$

$$z = \{z_{\mu\nu}\} = \sum_{\mu\nu=0}^{m(l), l} (A_{\mu\nu}(x) - A(x)) (\bar{e}^l)_{\mu},$$

где  $(\bar{e}^k)_{\nu}$  и  $(\bar{e}^l)_{\mu}$  последовательности соответственно типа  $\bar{e}_\mu$  и  $\bar{e}^\nu$ , в которых расположение чисел 0 и 1 зависит от индексов  $k, \nu$  и  $l, \mu$ , соответственно, и оно такое, что каждый член последовательностей  $y$  и  $z$  состоит только из одного элемента  $A_{\mu\nu}(x) - A(x)$ ;

$$2^\circ \text{ если } x \in bcnA, \text{ то } x_{bcn}^{kl} = x_{bc}^{kl}, \text{ где } A(x) = 0;$$

$$3^\circ \text{ если } x \in rcA, \text{ то } x_{rc}^{kl} = A(x)e + \sum_{\mu=0}^k (A_\mu(x) - A(x))e_\mu + \\ + \sum_{\nu=0}^l (A^\nu(x) - A(x))e^\nu + \sum_{\mu\nu=0}^{kl} (x_{\mu\nu} - A_\mu(x) - A^\nu(x) + A(x))e_{\mu\nu};$$

4° если  $x \in rcnA$ , то  $x_{rcn}^{kl} = x_{rc}^{kl}$ , где  $A(x) = 0$ ;

5° если  $x \in rnA$ , то  $x_{rn}^{kl} = x_{rc}^{kl}$ , где  $A(x) = A_\mu(x) = A^\nu(x) = 0$ ;

6° если  $x \in aA$ , то  $x_a^{kl} = x_{rc}^{kl}$ ;

7° если  $x \in anA$ , то  $x_{an}^{kl} = x_{rcn}^{kl}$ ;

8° если  $x \in arnA$ , то  $x_{arn}^{kl} = x_{rn}^{kl}$

По определению отрезок  $x_\alpha^{kl}$  для  $x$  является частным случаем общего отрезка  $g_\alpha$  в  $aA$ , поэтому  $x_\alpha^{kl} \in aA$  будет означать, что метод  $A$  удовлетворяет тем же условиям, что и при  $g_\alpha \in aA$ .

Мы скажем, что в пространстве  $aA$  имеет место сходимость по отрезкам (сокращенно СО), если для всех  $x \in aA$   $\lim_{kl \rightarrow \infty} x_\alpha^{kl} = x$  по норме,<sup>7</sup> и слабая сходимость по отрезкам (ССО), если при любом линейном непрерывном функционале  $f$ , определенном в  $aA$ , выполняется равенство  $\lim_{kl \rightarrow \infty} f x_\alpha^{kl} = f x$  для всех  $x \in aA$ .<sup>7</sup> Поскольку

в  $bcA$  и  $bcnA$  общий вид линейного непрерывного функционала не известен, то ниже в этих пространствах определение ССО будем понимать только относительно класса функционалов, определенных выше для этих пространств.

Следует отметить, что из СО всегда заключается ССО, поскольку  $|f x - f x_\alpha^{kl}| \leq \|f\| \|x - x_\alpha^{kl}\|$ . В пространствах  $a$  всегда имеет место СО, а отсюда и ССО, так как при любом  $\varepsilon > 0$   $\|x - x_\alpha^{kl}\| < \varepsilon$ , если только  $k, l$  достаточно большие.

**Теорема 3.1.** Пусть метод  $A$  нормален. Если  $x_\alpha^{kl} \in aA$  и в  $aA$  имеет место ССО, то метод  $A$   $\alpha$ -совершенный.

<sup>7</sup> В случае пространства  $bcA$  и  $bcnA$  предполагается еще, что существуют последовательности  $(\bar{\varepsilon}_\mu)_\nu$  и  $(\bar{\varepsilon}^\nu)_\mu$  приводящие к указанному равенству.

**Доказательство.** Если функционал  $f$  такой, что  $fx_0 = 0$  для всех  $x_0 \in E$ , то также  $\overset{kl}{f}x_\alpha = 0$  и  $\overset{kl}{f}x = \lim_{kl \rightarrow \infty} \overset{kl}{f}x_\alpha = 0$ , и утверждение следует из леммы 2.2. Из-за того, что мы ограничили понятие ССО в пространствах  $bcA$  и  $bcnA$ , следует отметить, что классы функционалов, определенных выше для этих пространств, содержат все функционалы, используемые в лемме 2.2. Это легко установить из факта, что в пространстве  $bc$  и  $bcn$  всегда имеет место СО, позволяющее получить некоторое выражение для любого линейного непрерывного функционала соответственно в  $bc$  и  $bcn$ .

**Теорема 3.2.** Если  $A$  нормальный метод и  $x_\beta \in \beta A$ , то в  $\beta A$  имеет место ССО тогда и только тогда, когда

$$\|\overset{kl}{x}_\beta\| \leq K(x), \quad (3.1)$$

где  $K(x)$  величина, зависящая от  $x$ , и норма определяется по формуле (1.2).

**Доказательство.** Сравнивая виды линейных непрерывных функционалов в пространствах  $\beta A$  и  $\beta$ , видим, что нужно показать, что  $\{A_{mn}^{\overset{kl}{x}_\beta}\}$  при  $k, l \rightarrow \infty$  слабо сходится к  $\{A_{mn}(x)\}$  в пространстве  $\beta$ .

Введем следующие условия для последовательности  $x_{kl} = \{x_{mn}^{\overset{kl}{x}_\beta}\}$ .

$$\sup_{mn=0,1,\dots} |x_{mn}^{\overset{kl}{x}_\beta}| \leq K; \quad (3.2)$$

$$\lim_{kl \rightarrow \infty} x_{mn}^{\overset{kl}{x}_\beta} = x_{mn}; \quad (3.3)$$

$$\lim_{kl \rightarrow \infty} (\lim_{m \rightarrow \infty} x_{mn}^{\overset{kl}{x}_\beta}) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_{mn}, \quad \lim_{kl \rightarrow \infty} (\lim_{n \rightarrow \infty} x_{mn}^{\overset{kl}{x}_\beta}) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{mn}; \quad (3.4)$$

$$\lim_{kl \rightarrow \infty} (\lim_{mn \rightarrow \infty} x_{mn}^{\overset{kl}{x}_\beta}) = \lim_{mn \rightarrow \infty} x_{mn}. \quad (3.5)$$

Аналогично, как при обычных последовательностях, можно получить следующие необходимые и достаточные условия для слабой сходимости  $x_{kl} = \{x_{mn}^{\overset{kl}{x}_\beta}\}$  к  $x = \{x_{mn}\}$  в

1°  $bc$ : (3.2), (3.3), (3.5);

2°  $bcn$ : (3.2), (3.3);

3°  $rc$ : (3.2), (3.3), (3.4), (3.5);

4°  $rcn$ : (3.2), (3.3), (3.4);

5°  $rn$ : (3.2), (3.3).

Для ССО в  $\beta A$  (3.2) дает необходимое и достаточное условие, так как остальные всегда выполнены. Например, в случае  $rcA$  выполнение условий (3.3), (3.4), (3.5) следует из разложения

$$\begin{aligned}
 A_{mn}(x_{rc}) &= \sum_{\mu\nu=0}^{kl} a_{m\nu\mu\nu} (x_{\mu\nu} - A_{\mu}(x) - A^{\nu}(x) + A(x)) + \\
 &+ \sum_{\mu\nu=0}^{kn} a_{m\nu\mu\nu} (A_{\mu}(x) - A(x)) + \sum_{\mu\nu=0}^{ml} a_{m\nu\mu\nu} (A^{\nu}(x) - A(x)) + \\
 &+ \sum_{\mu\nu=0}^{mn} a_{m\nu\mu\nu} A(x).
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Примечание 3.2. В теореме 3.2 вместо условия (3.1) можно взять условие

$$|A_{mn}(x_{\beta}^{kl})| \leq K \|x\|. \tag{3.7}$$

Это следует из того, что в  $\beta A$  имеет место сходимость по координатам, поэтому в  $\beta A$   $x_{\mu\nu}$  и  $A_{\mu\nu}(x)$ , а отсюда и  $A_{mn}(x_{\beta}^{kl})$  в  $\beta A$  являются линейными непрерывными функционалами. Учитывая (3.1), мы получаем (3.7)

Теорема 3.3. Если в  $\beta A$  имеет место ССО, то также СО. Доказательство. Согласно теореме 3.1  $A$   $\beta$ -совершенный метод. Тогда для любого  $x \in \beta A$  существует такой отрезок  $g_{\beta}^{k_0 l_0}$ , что  $\|x - g_{\beta}\| < \varepsilon / (K + 1)$ , где константа  $K$  из условия (3.7). Ввиду (3.7)  $\|x_{\beta}^{kl}\| \leq K \|x\|$  и при  $k = k_0, l = l_0$  имеем  $\|x - x_{\beta}^{kl}\| \leq \|x - g_{\beta}\| + \|x_{\beta}^{kl} - g_{\beta}\| \leq (K + 1) \|x - g_{\beta}\| < \varepsilon$ . Следовательно,  $x_{\beta}^{kl} \rightarrow x$  по норме. Если  $\beta = bc$ , то в  $x_{\beta}^{kl}$  последовательности  $(\bar{e}_{\mu})^k$  и  $(\bar{e}^{\nu})^l$  берем те же, что и в  $g_{\beta}$ . Аналогично при  $\beta = bcn$ .

Примечание 3.3. Из теоремы 3.3 видно, что если в  $\beta A$  имеет место ССО, то отрезки  $x_{\beta}^{kl}$  лежат плотно в  $\beta A$ , и в определении  $\beta$ -совершенности метода  $A$  можно взять  $g_{\beta}^{kl} = x_{\beta}^{kl}$  при  $k \geq k_0$  и  $l \geq l_0$

Теорема 3.4. Если  $A$  нормальный метод  ${}^{kl}x_\gamma \in \gamma A$ , то в  $\gamma A$  имеет место СО тогда и только тогда, когда

$$\lim_{kl \rightarrow \infty} \left( \sum_{mn=0}^{\infty} - \sum_{mn=0}^{kl} \right) |\bar{\Delta}_{mn} A_{mn}{}^{kl}(x_\gamma)| = 0. \quad (3.8)$$

Доказательство заключается из  $\lim_{kl \rightarrow \infty} \|x_\gamma - x\| = 0$  (где норма определяется по формуле (1.3)), и равенства  $x_\gamma = (x_\gamma - x) + x$ .

#### 4. Теоремы о среднем значении для двойных рядов

Определим для треугольного метода  $A = (a_{mn\mu\nu})$  следующие оценки (где  $x = \{x_{\mu\nu}\}$  произвольная последовательность и  $K = \text{const.}$ ):

$$\left| \sum_{\mu\nu=0}^{kl} a_{mn\mu\nu} x_{\mu\nu} \right| \leq K |A_{k'l'}(x)| \quad (0 \leq k' \leq k \leq m, 0 \leq l' \leq l \leq n); \quad (4.1)$$

$$\left( \sum_{mn=0}^{\infty} - \sum_{mn=0}^{kl} \right) |\bar{\Delta}_{mn} \sum_{\mu\nu=0}^{kl} a_{mn\mu\nu} x_{\mu\nu}| \leq K |A_{k'l'}(x)| \quad \begin{matrix} 0 \leq k' \leq k, \\ 0 \leq l' \leq l; \end{matrix} \quad (4.2)$$

$$\sum_{\mu\nu=0}^{mn} |a_{mn\mu\nu} x_{\mu\nu}| \leq K \sum_{\mu\nu=0}^{mn} |\bar{\Delta}_{\mu\nu} A_{\mu\nu}(x)|, \quad (4.3)$$

В случае оценок (4.1) и (4.2) полагаем, что существуют такие числа  $k'$  и  $l'$ , что соответствующее неравенство выполняется. Найдем достаточные условия для того, чтобы метод  $A$  удовлетворял оценкам (4.1), (4.2) или (4.3).

Лемма 4.1. Если треугольный метод  $A = (a_{mn\mu\nu})$  удовлетворяет условиям.<sup>8</sup>

$$1^\circ a_{k\mu\nu} \neq 0, 0 \leq \frac{a_{mn\mu\nu}}{a_{k\mu\nu}} \leq K \quad (0 \leq \mu \leq k \leq m, 0 \leq \nu \leq l \leq n),$$

$$2^\circ \Delta_{\mu\nu} \frac{a_{mn\mu\nu}}{a_{k\mu\nu}} \geq 0, \Delta_{\mu} \frac{a_{mn\mu l}}{a_{k\mu l}} \geq 0, \Delta_{\nu} \frac{a_{mnk\nu}}{a_{k\mu\nu}} \geq 0 \quad \begin{matrix} 0 \leq \mu < k \leq m, \\ 0 \leq \nu < l \leq n, \end{matrix}$$

то выполняется оценка (4.1)

<sup>8</sup> Символы разности имеют следующее значение:

$$\Delta_{\mu} a_{\mu} = a_{\mu} - a_{\mu+1}, \Delta_{\mu\nu} a_{\mu\nu} = \Delta_{\mu}(\Delta_{\nu} a_{\mu\nu}) = \Delta_{\nu}(\Delta_{\mu} a_{\mu\nu}).$$

Лемма доказывается аналогично, как при обычных последовательностях.<sup>9</sup>

Лемма 4.2. Если треугольный метод  $A = (a_{mn\mu\nu})$  удовлетворяет оценке (4.1) и условию<sup>10</sup>

$$\left( \sum_{mn=0}^{\infty} - \sum_{mn=0}^{kl} \right) \sum_{\mu\nu=0}^{kl} \left| \bar{\Delta}_{mn} \Delta_{\mu\nu} \frac{a_{mn\mu\nu}}{a_{kl\mu\nu}} \right| \leq M,$$

то выполняется оценка (4.2)

Лемма доказывается при помощи преобразования Абеля-

Харди, беря  $a_{mn\mu\nu} = \frac{a_{mn\mu\nu}}{a_{kl\mu\nu}} a_{kl\mu\nu}$ .

Лемма 4.3. Если треугольный метод  $A = (a_{mn\mu\nu})$  удовлетворяет условиям

$$1^\circ \Delta_{mn} |a_{mn\mu\nu}| = - |\Delta_{mn} a_{mn\mu\nu}|,$$

$$2^\circ \Delta_m |a_{mn\mu\nu}| = |\Delta_m a_{mn\mu\nu}|,$$

$$3^\circ \Delta_n |a_{mn\mu\nu}| = |\Delta_n a_{mn\mu\nu}|,$$

то выполняется оценка (4.3) с  $K \geq 1$ .

Доказательство. Мы можем написать

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_{kl} \sum_{\mu\nu=0}^{kl} |a_{kl\mu\nu} x_{\mu\nu}| &= |a_{klkl} x_{kl}| + \sum_{\mu\nu=0}^{k-1, l-1} \Delta_{kl} |a_{k-1, l-1, \mu\nu} x_{\mu\nu}| - \\ &- \sum_{\mu=0}^{k-1} \Delta_k |a_{k-1, l\mu} x_{\mu l}| - \sum_{\nu=0}^{l-1} \Delta_l |a_{k, l-1, k\nu} x_{k\nu}| = |a_{klkl} x_{kl}| - \\ &- \sum_{\mu\nu=0}^{k-1, l-1} |-\Delta_{kl} a_{k-1, l-1, \mu\nu} x_{\mu\nu}| - \sum_{\mu=0}^{k-1} |\Delta_k a_{k-1, l\mu} x_{\mu l}| - \\ &- \sum_{\nu=0}^{l-1} |\Delta_l a_{k, l-1, k\nu} x_{k\nu}| \leq |\bar{\Delta}_{kl} A_{kl}(x)|. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\sum_{kl=0}^{mn} |a_{mnkl} x_{kl}| = \sum_{kl=0}^{mn} \bar{\Delta}_{kl} \sum_{\mu\nu=0}^{kl} |a_{kl\mu\nu} x_{\mu\nu}| \leq \sum_{kl=0}^{mn} |\bar{\Delta}_{kl} A_{kl}(x)|.$$

<sup>9</sup> См. [7], Теорема 5.

<sup>10</sup> В последней предполагается, что  $\frac{a_{mn\mu\nu}}{a_{kl\mu\nu}} = 0$ , если выполняется хотя

бы одно из неравенств  $\mu > k$  и  $\nu > l$ .

Леммы 4.1, 4.2 и 4.3 мы называем теоремами о среднем значении (сокращенно ТСЗ). Обычно такое же название присваивается и оценкам (4.1), (4.2) и (4.3).

Для факторизирующих треугольных методов  $A$ , т. е. для таких методов  $A = (a_{mn\mu\nu})$ , при которых  $a_{mn\mu\nu} = a'_{m\mu} a''_{n\nu}$ , условия лемм 4.1, 4.2 и 4.3 упрощаются. Мы имеем в этом случае следующее.

Если  $A$  удовлетворяет условиям

$$a'_{k\mu} \neq 0, 0 \leq \frac{a'_{m\mu}}{a'_{k\mu}} \leq M, \Delta_{\mu} \frac{a'_{m\mu}}{a'_{k\mu}} \geq 0 \quad (0 \leq \mu \leq k \leq m, \frac{a'_{m\ k+1}}{a'_{k\ k+1}} = 0)$$

$$a''_{l\nu} \neq 0, 0 \leq \frac{a''_{n\nu}}{a''_{l\nu}} \leq M, \Delta_{\nu} \frac{a''_{n\nu}}{a''_{l\nu}} \geq 0 \quad (0 \leq \nu \leq l \leq n, \frac{a''_{n\ l+1}}{a''_{l\ l+1}} = 0)$$

то выполняется оценка (4.1)

Если  $A$  удовлетворяет оценке (4.1) и условиям

$$\sum_{m=k+1}^{\infty} \sum_{\mu=0}^k \left| \bar{\Delta}_m \Delta_{\mu} \frac{a'_{m\mu}}{a'_{k\mu}} \right| \leq N, \quad \sum_{n=l+1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^l \left| \bar{\Delta}_n \Delta_{\nu} \frac{a''_{n\nu}}{a''_{l\nu}} \right| \leq N,$$

где  $\frac{a'_{m\ k+1}}{a'_{k\ k+1}} = 0, \frac{a''_{n\ l+1}}{a''_{l\ l+1}} = 0$ , то  $A$  удовлетворяет оценке (4.2).

Если  $A$  удовлетворяет условиям

$$\Delta_m |a'_{m\mu}| = |\Delta_m a'_{m\mu}|, \quad \Delta_n |a''_{n\nu}| = |\Delta_n a''_{n\nu}|,$$

то выполняется оценка (4.3) с  $K \geq 1$ .

Для оценок (4.1), (4.2) и (4.3) можно получить также необходимые условия. Пусть  $x = e_{\mu\nu}$ , тогда из (4.1) получаем

$$|a_{mn\mu\nu}| \leq K |a_{k\mu\nu}| \quad (0 \leq \mu \leq k \leq m, 0 \leq \nu \leq l \leq n), \quad (4.4)$$

и из (4.2)

$$\left( \sum_{mn=0}^{\infty} - \sum_{mn=0}^{kl} \right) |\bar{\Delta}_{mn} a_{mn\mu\nu}| \leq K |a_{k\mu\nu}| \quad (0 \leq \mu \leq k, 0 \leq \nu \leq l) \quad (4.5)$$

При  $x = e$  из (4.3) получаем

$$\sum_{\mu\nu=0}^{mn} |a_{mn\mu\nu}| \leq K \sum_{\mu\nu=0}^{mn} |\bar{\Delta}_{\mu\nu} A_{\mu\nu}(e)|. \quad (4.6)$$

Поскольку мы требуем выполнения оценок (4.1), (4.2) и (4.3) при любых последовательностях  $x$ , то условия (4.4), (4.5) и (4.6) необходимы соответственно для оценок (4.1), (4.2) и (4.3)

## 5. Свойства методов суммирования, удовлетворяющих ТСЗ

Методы суммирования, удовлетворяющие теоремам о среднем значении, обладают рядом интересных свойств. Ниже мы излагаем наиболее важные из них.

**Теорема 5.1.** Пусть  $A$  нормальный метод, удовлетворяет условию (i)<sup>11</sup> и  $x_{\beta} \in \beta A$ . В пространстве  $\beta A$  имеет место ССО тогда и только тогда, когда  $A$  удовлетворяет оценке (4.1).

**Доказательство.** Нужно показать, что условие (3.1) и оценка (4.1) эквивалентны. Пользуясь разложениями вида (3.6)

видно, что из (4.1) следует (3.1). С другой стороны  $\sum_{\mu\nu=0}^{kl} a_{m\mu\nu} x_{\mu\nu}$  линейный непрерывный функционал в  $\beta A$ , поэтому

$$\left| \sum_{\mu\nu=0}^{kl} a_{m\mu\nu} x_{\mu\nu} \right| \leq K_{mnkl} \sup_{\mu\nu=0,1,\dots} |A_{\mu\nu}(x)|. \quad (5.1)$$

Изменим те элементы  $x_{\mu\nu}$ , которые не содержатся в левой части (5.1) так, чтобы было  $A_{\mu\nu}(x) = 0$ , если  $\mu > k$  или  $\nu > l$  или оба. Тогда для этой последовательности  $x \in \beta A$  условие (3.1) будет

иметь вид  $\sup_{mn=0,1,\dots} \left| \sum_{\mu\nu=0}^{kl} a_{m\mu\nu} x_{\mu\nu} \right| \leq K(x)$  и, учитывая (5.1), получаем оценку (4.1).

**Примечание 5.1.** Сравнивая теоремы 3.1 и 5.1, видим, что если  $A$  удовлетворяет оценке (4.1), условию (i) и  $x_{\beta} \in \beta A$ , то  $A$   $\beta$ -совершенный метод суммирования.<sup>11</sup>

**Теорема 5.2.** Если нормальный метод  $A$  удовлетворяет оценке (4.1), условию (i)<sup>11</sup> и  $x_r \in rA$ , то для любого  $x \in rA$  имеем<sup>12</sup>

$$1^\circ \lim_{mn \rightarrow \infty} A_{mn}(x_r) = A(x) \quad \text{равн. отн. } k, l;$$

$$2^\circ \lim_{m \rightarrow \infty} A_{mn}(x_r) = \begin{cases} A^n(x) & \text{равн. отн. } k, \text{ если } n \leq l; \\ A(x) & \text{равн. отн. } k, \text{ если } n > l; \end{cases}$$

$$3^\circ \lim_{n \rightarrow \infty} A_{mn}(x_r) = \begin{cases} A_m(x) & \text{равн. отн. } l, \text{ если } m \leq k; \\ A(x) & \text{равн. отн. } l, \text{ если } m > k. \end{cases}$$

**Доказательство.** Из примечания 5.1 следует, что  $A$   $r$ -совершенный метод, следовательно, для любого  $x \in rA$  можно

<sup>11</sup> В случае  $rnA$  условие (i) можно опустить.

<sup>12</sup> Сокращение «равн. отн.» читать как «равномерно относительно».

найти такой отрезок  $g_r \in rA$ , что  $\|x - g_r\| < \varepsilon/K$ , где  $K$  взята из формулы (3.7). Рассматривая  $g_r$  как обычную двойную последовательность в  $rA$ , составим отрезок  $g_r$ , тогда из (3.7) следует, что

$$|A_{mn}(x_r) - A_{mn}(g_r)| \leq K \|x - g_r\| < \varepsilon. \quad (5.2)$$

Так как  $\{A_{mn}(g_r)\} \in r$ , и сходимость этой последовательности (из-за того что  $g_r$  отрезок) равномерная при  $m, n \rightarrow \infty$  относительно  $k, l$ , при  $m \rightarrow \infty$  относительно  $k$  и при  $n \rightarrow \infty$  относительно  $l$ , то то же самое ввиду условия (5.2) выполняется и для  $\{A_{mn}(x_r)\}$  ко lo. Согласно примечанию 3.3 можно взять  $g_r = x_r$ . Пользуясь разложениями вида (3.6) и условием (5.2), легко доказать и равенство пределов  $1^\circ - 3^\circ$

**Теорема 5.3.** Если нормальный метод  $A$  удовлетворяет оценке (4.2) и условиям (a), (b), (g), то для любого  $x \in rnA$  имеем

$$\lim_{kl \rightarrow \infty} \left( \sum_{mn=0}^{\infty} - \sum_{mn=0}^{kl} \right) \left| \bar{\Delta}_{mn} \sum_{\mu\nu=0}^{kl} a_{mn\mu\nu} x_{\mu\nu} \right| = 0.$$

**Доказательство.** Из равенства

$$\sum_{\mu\nu=0}^{kl} a_{rs\mu\nu} x_{\mu\nu} = \left( \sum_{mn=0}^{\infty} - \sum_{mn=0}^{rs} \right) \bar{\Delta}_{mn} \sum_{\mu\nu=0}^{kl} a_{mn\mu\nu} x_{\mu\nu}$$

следует, что  $A$  удовлетворяет также оценке (4.1). Пусть  $x \in rnA$ . Согласно примечанию 5.1  $A$   $rn$ -совершенный метод. Поэтому существует такой отрезок  $g_{rn} \in rnA$ , что

$$\left( \sum_{mn=0}^{\infty} - \sum_{mn=0}^{kl} \right) \left| \bar{\Delta}_{mn} \sum_{\mu\nu=0}^{kl} a_{mn\mu\nu} (x_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}^{rn}) \right| \leq K \|x - g_{rn}\| < \varepsilon$$

Разделив левую часть неравенства на две части, видим, что член с  $g_{rn}$  при  $k, l \rightarrow \infty$  стремится к нулю, что и доказывает теорему.

**Примечание 5.3.** Сравнивая теоремы 5.3 и 3.4 видим, что если  $A$  удовлетворяет оценке (4.2) и условиям (a), (b), (g), то в  $arnA$  имеет место СО и по теореме 3.1 метод  $A$  тогда  $arn$ -совершенный.

Теорема 5.4. Если метод  $A$   $arn$ -совершенный и удовлетворяет оценке (4.3), то при любом  $x \in arnA$  имеем

$$\left. \begin{array}{l} 1^\circ \lim_{mn \rightarrow \infty} \\ 2^\circ \lim_{m \rightarrow \infty} \\ 3^\circ \lim_{n \rightarrow \infty} \end{array} \right\} \sum_{\substack{mn \\ \mu\nu=0}} |a_{m\mu n\nu} x_{\mu\nu}| = 0.$$

Доказательство. Существует такой отрезок  $g_{arn} \in arnA$ , что  $\|x - g_{arn}\| < \varepsilon$ . Можем написать

$$\sum_{\mu\nu=0}^{mn} |a_{m\mu n\nu} x_{\mu\nu}| \leq \sum_{\mu\nu=0}^{mn} |a_{m\mu n\nu} (x_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}^{arn})| + \sum_{\mu\nu=0}^{mn} |a_{m\mu n\nu} g_{\mu\nu}^{arn}|.$$

В правой части из-за оценки (4.3) первый член меньше, чем  $K\varepsilon$ , а второй из-за условий (a), (b) стремится к нулю при  $m, n \rightarrow \infty$ ,  $m \rightarrow \infty$  или  $n \rightarrow \infty$ , что и доказывает теорему.

## 6. Теоремы о включении

При помощи теорем о среднем значении, т. е. (4.1), (4.2), (4.3) можно получить достаточные условия для включения методов суммирования. Мы скажем, что  $\bar{B}$  включает метод  $A$  в смысле  $\alpha$ -суммируемости, если  $\alpha B \supseteq \alpha A$ . Аналогично определяется включение при разных полях суммирования.

Ниже мы применяем следующие условия:

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{\mu\nu=0}^{m-1, n-1} \left| \Delta_{\mu\nu} \frac{b_{m\mu n\nu}}{a_{m\mu n\nu}} \right| \leq M, \quad \sum_{\mu=0}^{m-1} \left| \Delta_{\mu} \frac{b_{m\mu n n}}{a_{m\mu n n}} \right| \leq M, \\ \sum_{\nu=0}^{n-1} \left| \Delta_{\nu} \frac{b_{m m n \nu}}{a_{m m n \nu}} \right| \leq M, \quad \left| \frac{b_{m m m n}}{a_{m m m n}} \right| \leq M \quad (a_{m\mu n\nu} \neq 0); \end{array} \right\} \quad (6.1)$$

$$\left| \frac{b_{m\mu n\nu}}{a_{m\mu n\nu}} \right| \leq M \quad (a_{m\mu n\nu} \neq 0, \mu \leq m, \nu \leq n). \quad (6.2)$$

Теорема 6.1. Если для нормального метода  $A$ , удовлетворяющего оценке (4.1) и условию (i),<sup>11</sup> и треугольного  $B$  выполняется условие (6.1), то

$$1^\circ bB \supseteq bA,$$

$$2^\circ \text{ при } g_\beta \in \beta A \text{ и } g_\beta \in \beta B \text{ также } \beta B \supseteq \beta A.$$

Доказательство. Пусть  $x \in bA$ . Мы можем написать

$$B_{mn}(x) = \sum_{\mu\nu=0}^{mn} \frac{b_{mn\mu\nu}}{a_{mn\mu\nu}} a_{mn\mu\nu} x_{\mu\nu}.$$

Применяя преобразование Абеля-Харди в правой части равенства, получаем из-за условия (6.1), что  $|B_{mn}(x)| \leq 4M \max_{0 < \mu, \nu < m, n} \left| \sum_{ij=0}^{\mu\nu} a_{mnij} x_{ij} \right|$

Поскольку  $A$  удовлетворяет оценке (4.1), то  $|B_{mn}(x)| \leq \leq K \max_{\mu\nu < m, n} |A_{\mu\nu}(x)|$ , откуда получаем  $|B_{mn}(x)| \leq K \|x\|_A$ . Если  $x \in bA$ , то также  $x \in bB$ , что доказывает 1° Докажем 2° Согласно примечанию 5.1  $A$   $\beta$ -совершенный метод, то для каждого  $x \in \beta A$  существует такой отрезок  $g_\beta \in \beta A$ , что  $|B_{mn}(x) - B_{mn}(g_\beta)| \leq \leq K \|x - g_\beta\|_A < \varepsilon$ . По предположению  $g_\beta \in \beta B$ , тогда также  $x \in \beta B$ .

Введем следующие равенства:

$$\lim_{mn \rightarrow \infty} B_{mn}(x) = A(x) \quad (6.3)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} B_{mn}(x) = A^n(x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B_{mn}(x) = A_m(x). \quad (6.4)$$

Теорема 6.2. Пусть для нормального метода  $A$ , удовлетворяющего оценке (4.1) и условию (i),<sup>11</sup> и треугольного  $B$  выполняется условие (6.1). Если  $A$  и  $B$  удовлетворяют еще условиям

- 1° (b), (c), (e), (f), то  $bcB \supseteq bcA$  и (6.3)
- 2° (b), (c), (f), то  $bcbB \supseteq bcbA$ ;
- 3° (a), (b), (c), (d), (e), то  $rcB \supseteq rcA$  и (6.3), (6.4);
- 4° (a), (b), (c), (d), то  $rcnB \supseteq rcnA$  и (6.4);
- 5° (a), (b), то  $gnB \supseteq gnA$ .

Доказательство. Выполнение включения следует из теоремы 6.1. Докажем справедливость равенств (6.3) и (6.4). В предыдущей теореме мы доказали, что  $|B_{mn}(x)| \leq K \|x\|$  для любого  $x \in \beta A$ , значит в  $\beta A$  последовательность линейных непрерывных функционалов  $\{B_{mn}(x)\}$  ограничена. Поэтому ввиду леммы 1.1 нужно показать, что (6.3) и (6.4) выполняются на основном множестве пространства  $\beta A$ . Из-за примечания 5.1 и леммы 2.1 основным множеством в  $\beta A$  является основное множество пространства  $\beta$ . Легко проверить, что на основном множестве пространства  $\beta$  равенства (6.3) и (6.4) выполняются.

Теорема 6.3. Пусть нормальный метод  $A$  удовлетворяет оценкам (4.2) и (4.3). Пусть  $B$  — треугольный метод, удовлетворяющий условию (6.2). Если еще выполняются условия

- 1°  $(a), (b), (c), (d), (e), (h)$  для  $A$  и  $(c), (d), (e)$  для  $B$ ,  
 то  $rbB \supseteq aA$  и (6.3) (6.4);
- 2°  $(a), (b), (c), (d), (h)$  для  $A$  и  $(c), (d)$ , для  $B$ ,  
 то  $rcnB \supseteq anA$  и (6.4);
- 3°  $(a), (b), (g)$  для  $A$ , то  $rnB \supseteq arnA$ .

Доказательство. Мы можем написать при произвольном  $x$ , что

$$|B_{mn}(x)| \leq \sum_{\mu\nu=0}^{mn} \left| \frac{b_{m\mu n\nu}}{a_{m\mu n\nu}} \right| |a_{m\mu n\nu} x_{\mu\nu}| \leq M \sum_{\mu\nu=0}^{mn} |a_{m\mu n\nu} x_{\mu\nu}|$$

Согласно примечанию 5.3  $A$   $arn$ -совершенный метод. Если  $x \in arnA$ , то доказательство случая 3° следует из теоремы 5.4.

Пусть  $x' = \sum A_{\mu}(x) e_{\mu} + \sum A_{\nu}(x) e_{\nu}$ . Если  $x \in anA$ , то  $(x - x') \in arnA$  и случай 2° сводится к уже доказанному случаю 3°. Аналогично поступаем в случае 1°. Из-за (4.3),  $(h)$ , и (6.2)  $A$  и  $B$  удовлетворяют  $(i)$ .

### Заключение

Применение полученных результатов при конкретных методах суммирования не представляет затруднений, если известно, при каких условиях эти методы удовлетворяют ТСЗ. Поэтому мы ограничимся здесь только указанием таких условий. Метод средних Рисса  $A$ , определенный последовательностью  $\{a_{\mu\nu}\}$  (причем

$$a_{m\mu n\nu} = a_{\mu\nu}' \sum_{\mu\nu=0}^{n,n} a_{\mu\nu},^{13} \text{ если } \mu \leq m \text{ и } \nu \leq n \text{ и } a_{m\mu n\nu} = 0 \text{ при остальных}$$

индексах) удовлетворяет оценкам (4.1), (4.2) и (4.3) тогда и только тогда, когда выполняются соответственно условия (4.4), (4.5) и (4.6). Метод Чезаро  $C(\alpha, \beta)$  удовлетворяет оценкам (4.1), (4.2) и (4.3), когда  $0 \leq \alpha \leq 1$  и  $0 \leq \beta \leq 1$ . Метод Вороного—Нерлунда удовлетворяет оценкам при очень узких условиях, которые получаются из лемм 4.1, 4.2 и 4.3.

<sup>13</sup> Здесь  $\sum_{\mu\nu=0}^{mn} a_{\mu\nu} = A_{mn} \neq 0$ . Если также  $a_{\mu\nu} \neq 0$ , то  $A$  нормален.

## Литература

1. Banach, S., Théorie des opérations linéaires, Warszawa (1932).
2. Hill, J. D., On perfect summability of double sequences, Bull. Amer. Math. Soc., **46**, (1940), 327—331
3. Hill, J. D. and Hamilton, H. J., Operation theory and multiply sequence transformations, Duke Math. J., **8**, (1941), 154—162.
4. Jurkat, W. und Peyerimhoff, A., Mittelwertsätze bei Matrix- und Integraltransformationen. Math. Z., **55**, (1951), 92—108.
5. Jurkat, W. und Peyerimhoff, A., Mittelwertsätze und Vergleichsätze für Matrixtransformationen, Math. Z. **56**, (1952), 152—178.
6. Peyerimhoff, A., Untersuchungen über absolute Summierbarkeit, Math. Z., **57**, (1953), 265—290.
7. Кангро, Г., О множителях суммируемости для двойных рядов, Уч. зап. Тартуского гос. ун-та, **46**, (1957), 3—42.

## KESKVÄÄRTUSTEOREEMID KAHEKORDSETE RIDADE JAOKS

E. Reimers

R e s ü m e e

Töodes [4], [5], [6] rajasid Jurkat ja Peyerimhoff keskväärtusteoreemide teooria harilike ridade jaoks ja andsid tema mitmesuguseid rakendusi. Käesolevas artiklis laiendatakse keskväärtusteoreemide teooria kahekordsetele ridadele.

Tähistame tähega  $\alpha$  ühte kahekordsete koonduvate jadade klassidest  $bc$ ,  $bcn$ ,  $rc$ ,  $rcn$ ,  $rn$ ,  $a$ ,  $an$  ja  $arn$ , mis on defineeritud paragrahvis 1, ning sümboliga  $\alpha A$  nende jadade hulka, mille  $A$ -teisendid ( $A$  on neljadimensionaalne maatriks) kuuluvad klassi  $\alpha$ . Klasse  $\alpha$  ja  $\alpha A$  (kui  $A$  on normaalne) võib vaadelda kui  $BK$ -ruume. Paragrahvis 2 defineerime lõike  $ga$  ruumis  $\alpha A$  kui ruumi  $\alpha$  põhihulga elementide lineaarse kombinatsiooni. Konkretiseerides lineaarse kom-

binatsiooni kordajad, defineeritakse paragrahvis 3 lõige  $\chi^{\alpha}$  jadale  $\chi \epsilon \alpha A$ . Selline lõike definitsoon lubab üldistada summeerimismenetluse perfektsuse ja jada lõikekoonduvuse mõistet. Paragrahvis 3 antaksegi tarvilikud ja piisavad tingimused lõikekoonduvuseks ruumis  $\alpha A$  (teoreemid 3.2 ja 3.4).

Paragrahvis 4 anname 3 keskväärtusteoreemi kahekordsete ridade jaoks (hinnangud (4.1), (4.2) ja (4.3)) ja tingimused nende kehtivuseks (lemmad 4.1, 4.2 ja 4.3)

Paragrahvis 5 uurime keskväärtusteoreeme rahuldavate menetluste omadusi. Näidatakse, et sellised menetlused on perfektsed ja nende summeerimisväljas leiab aset lõikekoonduvus.

Paragrahvis 6 rakendame keskväärtusteoreeme summeerimismenetluste sisalduvuse uurimisel.

## MEAN VALUE THEOREMS FOR DOUBLE SERIES

E. Reimers

### Summary

In papers [4], [5], [6], Jurkat and Peyerimhoff have created the theory of the mean value theorems for the simple series and given various applications of it. In the present article, the theory of the mean value theorems has been extended to the double series.

Let us denote by letter  $\alpha$  one of the classes of the convergent double series  $bc, bcn, rc, rcn, rn, a, an, arn$  defined in paragraph 1, and by symbol  $\alpha A$  the set of these sequences the  $A$ -transformations of which belong to the class  $\alpha$  ( $A$  is four-dimensional matrix). The classes  $\alpha$  and  $\alpha A$  (if  $A$  is normal) may be considered as  $BK$ -spaces. In paragraph 2, we define the section  $g\alpha$  in the space  $\alpha A$  as a linear combination of the elements of the fundamental set of the space  $\alpha$ . By concretizing the coefficients in the linear com-

bination, the section  $\chi\alpha$  for the sequence  $\chi \in \alpha A$  has been defined in paragraph 3. Such a definition of the section allows to generalize the concept of the perfect summability method and the section-convergence of the sequence. In paragraph 3, the necessary and sufficient conditions will be given for the section-convergence in the space  $\alpha A$  (theorems 3.2 and 3.4).

In paragraph 4, three mean value theorems have been given for double series (estimations (4.1), (4.2) and (4.3)) as well as the conditions for their validity (lemmas 4 1, 4 2 and 4 3)

In paragraph 5, we investigate the properties of the methods satisfying the mean value theorems. It is shown that those methods are perfect, and in their summability field the section-convergence takes place.

In paragraph 6, we use the mean value theorems for the investigation of the inclusion of the summability methods.

## О СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ

Ю. Я. Каазик

Кафедра геометрии

### § 1. Введение

В настоящей статье рассматриваются некоторые вопросы приближенного решения нелинейного операторного уравнения

$$P(x) = 0, \quad (1)$$

где  $y = P(x)$  оператор из банахова пространства  $\mathfrak{X}$  в нормированное пространство  $\mathfrak{Y}$ .

Известны многие итерационные методы приближенного решения уравнения (1), в которых некоторое начальное приближение  $x_0$  точного решения  $x^*$  предполагается известным, и последующие приближения  $x_1, x_2, \dots$  даются рекуррентными формулами вида

$$\Delta x_{n+1} = x_{n+1} - x_n = G_n \Gamma_n P(x_n) \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (2)$$

где  $\Gamma_n = [P'(x_n)]^{-1}$ , а  $G_n$  некоторый линейный оператор, составленный из операторов  $E, \Gamma_n P''(x_n), \dots, \Gamma_n P^{(k)}(x_n)$  ( $E$  — единичный оператор в пространстве  $\mathfrak{X}$ ,  $k$  — фиксированное натуральное число) и элемента  $\Gamma_n P(x_n)$

Так, например, при

$$G_n = -E$$

получается метод Ньютона, впервые рассмотренный Л. В. Канторовичем в [4]. При

$$G_n = -(E - R_n)^{-1},$$

где  $R_n = \frac{1}{2} \Gamma_n P''(x_n) \Gamma_n P(x_n)$ , получается т. н. метод касательных гипербол [5], при

$$G_n = -(E + R_n)$$

метод касательных парабол [6], при

$$G_n = -(E - 2R_n)^{-1}(E - R_n)$$

метод, рассмотренный в [9], и при

$$G_n = -\left\{ E - \frac{1}{2} \Gamma_n P''(x_n) (E - R_n)^{-1} \Gamma_n P(x_n) + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} \Gamma_n P'''(x_n) (E - R_n)^{-1} [\Gamma_n P(x_n)]^2 \right\}^{-1}$$

метод, рассмотренный в [7].

Исследовано также несколько итерационных методов вида

$$\Delta x_k = x_k - x_0 = V_k \Gamma_0 P(x_0) \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (3)$$

где  $V_k$  линейный оператор, составленный из операторов  $E$ ,  $\Gamma_0 P''(x_0)$ ,  $\Gamma_0 P^{(k)}(x_0)$  и элемента  $\Gamma_0 P(x_0)$ . Так, в [1] рассмотрен метод, при котором

$$V_k = -\left[ E + \sum_{j=2}^k \frac{1}{j!} \Gamma_0 P^{(j)}(x_0) \Delta x_{k-j+1} \quad \Delta x_{k-1} \right]^{-1}$$

и в [8] методы, при которых

$$V_k = -\left[ E + \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} \Gamma_0 P^{(j)}(x_0) \Delta x_{k-1}^j \right]^{-1}$$

и

$$V_k \Gamma_0 P(x_0) = -\Gamma_0 P(x_0) - \sum_{j=2}^k \frac{1}{j!} \Gamma_0 P^{(j)}(x_0) \Delta x_{k-1}^j$$

В настоящей статье излагается общая схема исследования итерационных методов типа (2) и (3) в случае аналитического оператора  $P$ . Идея такого исследования дана автором в [2].

## § 2. Основная теорема

Если оператор  $P$  аналитичен на множестве, которое содержит все элементы последовательности  $\{x_n\}$ , и существуют обратные операторы  $\Gamma_n$ , то можно ввести обозначения

$$\| \Gamma_n P(x_n) \| \leq \eta_n, \quad \left\| \frac{1}{j!} \Gamma_n P^{(j)}(x_n) \right\| \leq A_n H_n^{j-1} \\ (n = 0, 1, \dots; \quad j = 2, 3, \dots)$$

В [2] доказывается, что если оператор  $G_n$  имеет такой вид, что выполнены условия:

а) оценку

$$\| G_n \| \leq \delta_n = \delta(\eta_n, A_n, H_n)$$

можно найти в таком виде, что

$$\delta_{n+1} \leq \delta_n; \quad (4)$$

б) можно найти оценку

$$\left\| \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} \Gamma_n P^{(j)}(x_n) \Delta x_{n+1}^j \right\| \leq p_n h_n^k \eta_n. \quad (5)$$

где

$$h_n = H_n \delta_n \eta_n,$$

так, что выполняется неравенство

$$a_{n+1} l_{n+1}^k \leq a_n l_n^{k(k+1)}, \quad (6)$$

где

$$a_n = (1 - q_n) (1 - h_n)^3$$

$$q_n = A_n \frac{h_n (2 - h_n)}{(1 - h_n)^2}$$

$$l_n^k = \frac{p_n (1 - h_n) + A_n \delta_n}{(1 - q_n)^2 (1 - h_n)^4} h_n^k,$$

то имеет место следующая

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия:

1° существует обратный оператор  $\Gamma_0$ ;

2° оператор  $P$  аналитичен в сфере

$$\|x - x_0\| \leq \frac{\delta_0 \eta_0}{1 - a_0 l_0^{k(k+1)}}; \quad (7)$$

3° величины  $\eta_0$ ,  $A_0$  и  $H_0$  удовлетворяют неравенствам

$$h_0 < 1 - \sqrt{\frac{A_0}{1 + A_0}}, \quad (8)$$

$$l_0^k \leq 1.$$

Тогда уравнение (1) имеет в сфере (7) решение  $x^*$ , к которому сходится полученная из (2) последовательность  $\{x_n\}$  со скоростью

$$\|x^* - x_n\| \leq \frac{a_0^n l_0^{(k+1)^n - 1} \delta_0 \eta_0}{1 - a_0 l_0^{k(k+1)}}. \quad (9)$$

Из этой теоремы легко получаются теоремы сходимости конкретных итерационных методов. Для этого нужно лишь в каждом случае проверить, удовлетворяет ли соответствующий оператор  $G_n$  условиям а) и б) Примеры такой проверки приведем ниже, остановившись прежде всего на другом применении теоремы 1.

### § 3. Построение итерационных методов

Приведенную теорему можно применить для построения новых итерационных методов порядка  $k + 1$  (т. е. методов, сходящихся со скоростью (9)) Для этого нужно оператор итерирования  $G_n$  выбрать удовлетворяющим условиям а) и б)

В условиях а) и б) непосредственно на строение оператора  $G_n$  налагается лишь требование, что норму (5) можно оценить величиной порядка  $h_n^k \eta_n$  Поэтому естественно выбрать новые операторы итерирования удовлетворяющие этому требованию, и тогда лишь проверить, выполнены ли остальные требования условий а) и б)

Для практического проведения такого выбора целесообразно уточнить введенные обозначения. Именно, пишем итерационные методы вместо (2) в виде

$$\Delta_k x_{n+1} = \sum_{i=1}^k U_i \Gamma_n P(x_n), \quad (10)$$

где  $U_i$  линейные операторы, составленные из операторов  $E$ ,  $\Gamma_n P''(x_n)$ ,  $\Gamma_n P^{(i)}(x_n)$  и элемента  $\Gamma_n P(x_n)$ , нормы которых можно оценить величинами порядка  $h_n^{i-2} H_n \delta_n$

Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} \Gamma_n P^{(j)}(x_n) \Delta_k x_{n+1}^j = \Gamma_n P(x_n) + \Delta_k x_{n+1} + \\ & + \sum_{j=2}^k \frac{1}{j!} \Gamma_n P^{(j)}(x_n) \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_k = j} \frac{j!}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} (U_1 \Gamma_n P(x_n))^{\alpha_1} \dots (U_k \Gamma_n(x_n))^{\alpha_k}. \end{aligned} \quad (11)$$

Отсюда видно, что для получения оценки нормы суммы (5) в требуемом виде достаточно, чтобы выражение  $\Gamma_n P(x_n) + \Delta_k x_{n+1}$ :

1° содержало с обратным знаком те члены из суммы (11), в которых

$$\sum_{i=1}^k (i-1)\alpha_i < k - j + 1,$$

2° не содержало больше членов, норма которых не оценивается величиной порядка  $h_n^k$ .

Тем самым мы получили способ конструирования итерационных методов типа (10) с порядком сходимости  $k + 1$ . Для этого нужно лишь выбрать  $\Gamma_n P(x_n) + \Delta_k x_{n+1}$  в требуемом виде.

При  $k = 1$  имеется только один такой выбор:

$$\Gamma_n P(x_n) + \Delta_1 x_{n+1} = 0,$$

откуда

$$\Delta_1 x_{n+1} = -\Gamma_n P(x_n).$$

Таким образом, метод Ньютона является единственным итерационным методом второго порядка, который можно построить указанным путем. Поэтому естественно предположить, что независимо от значения  $k$  или произведенного выбора, имеем

$$U_1 = -E.$$

В последующих примерах нужно учесть, что  $x_n$  всегда означает приближение, полученное из формулы (10) при фиксированном значении  $k$ .

Пример 1. Если выбрать

$$\Gamma_n P(x_n) + \Delta_k x_{n+1} = - \sum_{j=2}^k \frac{1}{j!} \Gamma_n P^{(j)}(x_n) \Delta_{k-j+1} x_{n+1} \quad \Delta_k x_{n+1}, \quad (12)$$

где

$$\Delta_{k-l} x_{n+1} = \sum_{i=1}^{k-l} U_i \Gamma_n P(x_n),$$

то получается метод

$$\Delta_k x_{n+1} = - \left[ E + \sum_{j=2}^k \frac{1}{j!} \Gamma_n P^{(j)}(x_n) \Delta_{k-j+1} x_{n+1} \quad \Delta_{k-1} x_{n+1} \right]^{-1} \Gamma_n P(x_n), \quad (13)$$

где элементы  $\Delta_{k-1} x_{n+1}$ ,  $\Delta_2 x_{n+1}$  последовательно выражаются той же формулой (13), а  $\Delta_1 x_{n+1} = -\Gamma_n P(x_n)$ . При  $k = 2$  из (13) получается метод, рассмотренный в [5], и при  $k = 3$  метод, рассмотренный в [7].

Пример 2. Выбор

$$\Gamma_n P(x_n) + \Delta_k x_{n+1} = - \sum_{j=2}^k \frac{1}{j!} \Gamma_n P^{(j)}(x_n) \Delta_{k-1} x_{n+1}^j$$

дает метод

$$\Delta_k x_{n+1} = -\Gamma_n P(x_n) - \sum_{j=2}^k \frac{1}{j!} \Gamma_n P^{(j)}(x_n) \Delta_{k-1} x_{n+1}^j. \quad (14)$$

При  $k = 2$  отсюда получается метод, рассмотренный в [6].

Пример 3. Если выбрать

$$\Gamma_n P(x_n) + \Delta_k x_{n+1} = - \sum_{j=2}^k \frac{1}{j!} \Gamma_n P^{(j)}(x_n) \Delta_{k-1} x_{n+1}^{j-1} \Delta_k x_{n+1},$$

то получим метод

$$\Delta_k x_{n+1} = - \left[ E + \sum_{j=2}^k \frac{1}{j!} \Gamma_n P^{(j)}(x_n) \Delta_{k-1} x_{n+1}^{j-1} \right]^{-1} \Gamma_n P(x_n), \quad (15)$$

который при  $k = 2$  также дает метод, рассмотренный в [5].

Пример 4. Выбор

$$\begin{aligned} & \Gamma_n P(x_n) + \Delta_k x_{n+1} = \\ & = - \sum_{j=2}^k \frac{1}{j!} \Gamma_n P^{(j)}(x_n) \Delta_{k-1} x_{n+1}^{j-1} [j \Delta_k x_{n+1} - (j-1) \Delta_{k-1} x_{n+1}] \end{aligned}$$

дает метод

$$\begin{aligned} \Delta_k x_{n+1} = - \left[ E + \sum_{j=2}^k \frac{1}{(j-1)!} \Gamma_n P^{(j)}(x_n) \Delta_{k-1} x_{n+1}^{j-1} \right]^{-1} \left[ \Gamma_n P(x_n) - \right. \\ \left. - \sum_{j=2}^k \frac{j-1}{j!} \Gamma_n P^{(j)}(x_n) \Delta_{k-1} x_{n+1}^j \right], \quad (16) \end{aligned}$$

содержащий, при  $k = 2$ , метод, рассмотренный в [9].

Пример 5. Если при  $k = 2$  выбрать

$$\begin{aligned} \Gamma_n P(x_n) + \Delta_2 x_{n+1} = - \frac{1}{2} \Gamma_n P''(x_n) [(\Gamma_n P(x_n))^2 + \\ + a \Gamma_n P''(x_n) U_2 \Gamma_n P(x_n)], \end{aligned}$$

где  $a$  вещественное число, то получается класс итерационных методов

$$\Delta_2 x_{n+1} = - (E + a R_n)^{-1} [E + (a + 1) R_n] \Gamma_n P(x_n) \quad (17)$$

Формулу (17) можно назвать общим видом простых итерационных методов со второй производной. При  $a = -1$ ,  $a = 0$  и  $a = -2$  из нее получаются методы, рассмотренные соответственно в [5], [6] и [9].

Ограничимся этими примерами, хотя нетрудно увидеть, что подобное построение итерационных методов может быть неограниченно продолжено.

Полную проверку выполнения условий а) и б) проведем, в качестве примера, только в случае метода (13). Для других построенных методов ограничимся приведением результатов.

#### § 4. Сходимость метода (13)

а) Введем обозначения

$$\begin{aligned} \|\Delta_m x_{n+1}\| &\leq \delta_{mn} \eta_n, \\ \|\Delta_m x_{n+1} - \Delta_{m-1} x_{n+1}\| &\leq \varepsilon_{m-1, n} \eta_n \end{aligned}$$

и выберем

$$\delta_{mn} = \delta_{m-1, n} + \varepsilon_{m-1, n}.$$

Используя выбор (12), получим

$$\begin{aligned} &\Delta_m x_{n+1} - \Delta_{m-1} x_{n+1} = \\ &= - \left[ E + \sum_{j=2}^m \frac{1}{j!} \Gamma_n P^{(j)}(x_n) \Delta_{m-j+1} x_{n+1} \quad \Delta_{m-1} x_{n+1} \right]^{-1} \\ &\quad \cdot \left[ \frac{1}{m!} \Gamma_n P^{(m)}(x_n) \Delta_1 x_{n+1} \quad \Delta_{m-2} x_{n+1} \Delta_{m-1} x_{n+1}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=2}^{m-1} \frac{1}{j!} \Gamma_n P^{(j)}(x_n) \Delta_{m-j+1} x_{n+1} \quad \Delta_{m-1} x_{n+1} (\Delta_{m-1} x_{n+1} - \Delta_{m-j} x_{n+1}) \right], \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} &\|\Delta_m x_{n+1} - \Delta_{m-1} x_{n+1}\| \leq \\ &\leq \frac{A_n H_n^{m-1} \delta_{1n} \cdots \delta_{m-2, n} \delta_{m-1, n}^2 \eta_n^m}{1 - A_n \sum_{j=2}^m H_n^{j-1} \delta_{m-j+1, n} \cdots \delta_{m-1, n} \eta_n^{j-1}} + \\ &+ \frac{A_n \sum_{j=2}^{m-1} H_n^{j-1} \delta_{m-j+1, n} \cdots \delta_{m-1, n} (\varepsilon_{m-2, n} + \cdots + \varepsilon_{m-j, n}) \eta_n^j}{1 - A_n \sum_{j=2}^m H_n^{j-1} \delta_{m-j+1, n} \cdots \delta_{m-1, n} \eta_n^{j-1}} = \\ &= \frac{A_n \sum_{j=2}^m H_n^{j-1} \delta_{m-j+1, n} \cdots \delta_{m-1, n} \eta_n^j - A_n \sum_{j=2}^{m-1} H_n^{j-1} \delta_{m-j, n} \cdots \delta_{m-1, n} \eta_n^j}{1 - A_n \sum_{j=2}^m H_n^{j-1} \delta_{m-j+1, n} \cdots \delta_{m-1, n} \eta_n^{j-1}} = \\ &= \varepsilon_{m-1, n} \eta_n. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \delta_{mn} &= \delta_{m-1, n} + \varepsilon_{m-1, n} = \\ &= \frac{1 - A_n \sum_{j=2}^{m-1} H_n^{j-1} \delta_{m-j, n} \cdots \delta_{m-2, n} \eta_n^{j-1}}{1 - A_n \sum_{j=2}^m H_n^{j-1} \delta_{m-j+1, n} \cdots \delta_{m-1, n} \eta_n^{j-1}} \delta_{m-1, n}. \end{aligned}$$

Повторное применение этого равенства дает (учитывая, что  $\delta_{1n} = 1$ )

$$\delta_{kn} = \frac{1}{1 - A_n \sum_{j=2}^k H_n^{j-1} \delta_{k-j+1,n} \cdots \delta_{k-1,n} \eta_n^{j-1}}.$$

Пределом возрастающей последовательности  $\{\delta_{kn}\}_k$  является наименьший положительный корень  $\delta_n$  уравнения

$$\delta = 1 + A_n \delta \sum_{j=2}^{\infty} (H_n \delta \eta_n)^{j-1}$$

Если выполнено условие

$$H_n \eta_n + 2 \sqrt{A_n H_n \eta_n} \leq 1, \quad (18)$$

то

$$\delta_n = \frac{1 + H_n \eta_n - \sqrt{(1 - H_n \eta_n)^2 - 4 A_n H_n \eta_n}}{2 H_n \eta_n (1 + A_n)}.$$

Так как  $\delta_{kn} \leq \delta_n$  и вычисление величины  $\delta_n$  значительно проще, чем величины  $\delta_{kn}$ , то норму поправки  $\Delta_k \chi_{n+1}$  будем в дальнейшем оценивать величиной  $\delta_n$ .

Если в условии (18) отбросить знак равенства, т. е. если требовать, чтобы было

$$H_n \eta_n + 2 \sqrt{A_n H_n \eta_n} < 1, \quad (19)$$

то из этого неравенства (при  $n = 0$ ) легко вытекает выполнение неравенства (8).

Нам нужно еще доказать, что справедливости неравенства (19) можно требовать лишь при  $n = 0$ . Для этого покажем, что если неравенство (19) выполнено при каком-нибудь индексе  $n$ , то оно выполнено и при индексе  $n + 1$ . Действительно, учитывая данные в [2] равенства

$$A_{n+1} = \frac{A_n}{(1 - q_n)(1 - h_n)^2}$$

$$H_{n+1} = \frac{H_n}{1 - h_n}$$

$$\eta_{n+1} = a_n l_n^k \eta_n,$$

получим

$$H_{n+1} \eta_{n+1} + 2 \sqrt{A_{n+1} H_{n+1} \eta_{n+1}} = H_n \eta_n (1 - q_n) (1 - h_n)^2 l_n^k + \\ + 2 \sqrt{A_n H_n \eta_n l_n^k} \leq H_n \eta_n + 2 \sqrt{A_n H_n \eta_n} < 1.$$

Наконец, докажем еще неравенство (4)

При  $\delta = 0$  левая часть уравнения

$$\delta = 1 + A_{n+1}\delta \sum_{j=2}^{\infty} (H_{n+1}\delta\eta_{n+1})^{j-1} \quad (20)$$

меньше правой части. Но при  $\delta = \delta_n$

$$\begin{aligned} & 1 + A_{n+1}\delta_n \sum_{j=2}^{\infty} (H_{n+1}\delta_n\eta_{n+1})^{j-1} = \\ & = 1 + \frac{A_n\delta_n}{(1-q_n)(1-h_n)^2} \sum_{j=2}^{\infty} \left( \frac{H_n\delta_n\eta_n a_n l_n^k}{1-h_n} \right)^{j-1} = \\ & = 1 + A_n\delta_n l_n^k h_n \sum_{j=2}^{\infty} \left( \frac{h_n a_n l_n^k}{1-h_n} \right)^{j-2} \leq 1 + A_n\delta_n h_n \sum_{j=2}^{\infty} h_n^{j-2} = \delta_n, \end{aligned}$$

т. е. левая часть уравнения (20) не меньше правой. Следовательно наименьший положительный корень  $\delta_{n+1}$  уравнения (20) не больше, чем  $\delta_n$ .

б) Используя еще раз выбор (12), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} \Gamma_n P^{(j)}(x_n) \Delta_k x_{n+1}^j = \\ & = \sum_{j=2}^k \frac{1}{j!} \Gamma_n P^{(j)}(x_n) \sum_{j=1}^{j-1} \Delta_k x_{n+1}^{j-1-i} (\Delta_k x_{n+1} - \Delta_{k-i} x_{n+1}) \Delta_{k-i+1} x_{n+1} \dots \Delta_k x_{n+1}, \end{aligned}$$

откуда

$$\left\| \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} \Gamma_n P^{(j)}(x_n) \Delta_k x_{n+1}^j \right\| \leq A_n \sum_{j=2}^k h_n^{j-1} \sum_{i=1}^{j-1} (\varepsilon_{k-i,n} + \dots + \varepsilon_{k-1,n}) \eta_n.$$

Найдем теперь оценки величин  $\varepsilon_{m-1,n}$

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{m-1,n} = \\ & = \frac{A_n H_n^{m-1} \delta_{1n} \dots \delta_{m-1,n} \eta_n^{m-1} + A_n \sum_{j=2}^{m-1} H_n^{j-1} \delta_{m-j+1,n} \dots \delta_{m-1,n} \sum_{i=m-j}^{m-2} \varepsilon_{in} \eta_n^{j-1}}{1 - A_n \sum_{j=2}^m H_n^{j-1} \delta_{m-j+1,n} \dots \delta_{m-1,n} \eta_n^{j-1}} \leq \\ & \leq A_n \delta_n^2 h_n^{m-1} + A_n \delta_n \sum_{j=2}^{m-1} h_n^{j-1} \sum_{i=m-j}^{m-2} \varepsilon_{in} = A_n \delta_n^2 h_n^{m-1} + \\ & + A_n \delta_n \sum_{i=1}^{m-2} \varepsilon_{in} \sum_{j=m-i}^{m-1} h_n^{j-1} \leq A_n \delta_n^2 h_n^{m-1} + \frac{A_n \delta_n}{1-h_n} \sum_{i=1}^{m-2} \varepsilon_{in} h_n^{m-i-1} \end{aligned}$$

Повторное применение этого неравенства (учитывая, что  $\varepsilon_{1n} \leq A_n \delta_n^2 h_n$ ) дает

$$\varepsilon_{m-1,n} \leq A_n \delta_n^2 h_n^{m-1} f_n^{m-2},$$

где

$$f_n = 1 + \frac{A_n \delta_n}{1 - h_n}$$

Так как  $h_n f_n < 1$ , то

$$\varepsilon_{k-i,n} + \dots + \varepsilon_{k-1,n} \leq A_n \delta_n^2 h_n \sum_{l=k-i}^{k-1} (h_n f_n)^{l-1} \leq \frac{A_n \delta_n^2 h_n^{k-i} f_n^{k-i-1}}{1 - h_n f_n}$$

и

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} \Gamma_n P^{(j)}(x_n) \Delta_k x_{n+1}^j \right\| &\leq \frac{A_n^2 \delta_n^2 \eta_n}{1 - h_n f_n} \sum_{j=2}^k h_n^{j-1} \sum_{i=1}^{j-1} h_n^{k-i} f_n^{k-i-1} \leq \\ &\leq \frac{A_n^2 \delta_n^2 h_n^k \eta_n}{(1 - h_n f_n)^2} \sum_{i=0}^{k-2} f_n^i. \end{aligned}$$

Следовательно

$$p_n = \frac{A_n^2 \delta_n^2}{(1 - h_n f_n)^2} \sum_{i=0}^{k-2} f_n^i$$

и

$$\begin{aligned} l_n^k &= \frac{A_n^2 \delta_n^2 (1 - h_n) \sum_{i=0}^{k-2} f_n^i + A_n \delta_n (1 - h_n f_n)^2}{(1 - q_n)^2 (1 - h_n)^4 (1 - h_n f_n)^2} h_n^k = \\ &= A_n \delta_n h_n \frac{(1 - h_n)^2 (h_n^{k-1} f_n^{k-1} - h_n^{k-1}) - (1 - h_n f_n)^2 h_n^{k-1}}{(1 - q_n)^2 (1 - h_n)^4 (1 - h_n f_n)^2}. \end{aligned}$$

Так как

$$q_{n+1} \leq q_n$$

$$h_{n+1} \leq l_n^k (1 - q_n) (1 - h_n)^2 h_n \leq h_n$$

$$f_{n+1} \leq \frac{f_n}{(1 - q_n) (1 - h_n)^2}$$

$$h_{n+1} f_{n+1} \leq h_n f_n l_n^k \leq h_n f_n,$$

то

$$\begin{aligned}
 a_{n+1}l_{n+1}^n &= A_{n+1}\delta_{n+1}h_{n+1} \frac{(1-h_{n+1})^2(h_{n+1}^{k-1}f_{n+1}^{k-1}-h_{n+1}^{k-1})}{(1-q_{n+1})(1-h_{n+1})(1-h_{n+1}f_{n+1})^2} - \\
 &- A_{n+1}\delta_{n+1}h_{n+1} \frac{(1-h_{n+1}f_{n+1})^2 h_{n+1}^{k-1}}{(1-q_{n+1})(1-h_{n+1})(1-h_{n+1}f_{n+1})^2} \leq \\
 &\leq A_n\delta_n h_n l_n^k \frac{(1-h_n)^2(h_n^{k-1}f_n^{k-1}-h_n^{k-1})l_n^{k(k-1)} - (1-h_n f_n)^2 h_n^{k-1} l_n^{k(k-1)}}{(1-q_n)(1-h_n)(1-h_n f_n)^2} = \\
 &= a_n l_n^{k(k+1)}
 \end{aligned}$$

Таким образом неравенство (6) доказано, и имеет место

**Т е о р е м а 2.** Пусть выполнены условия:

- 1° существует обратный оператор  $\Gamma_0$ , причем  $\|\Gamma_0 P(x_0)\| \leq \eta_0$ ;
- 2° оператор  $P$  аналитичен в сфере (7), причем

$$\left\| \frac{1}{j!} \Gamma_0 P^{(j)}(x_0) \right\| \leq A_0 H_0^{j-1} \quad (j = 2, 3, \dots);$$

- 3° величины  $\eta_0$ ,  $A_0$  и  $H_0$  удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned}
 H_0 \eta_0 + 2 \sqrt{A_0 H_0 \eta_0} &< 1 \\
 l_0^k = A_0 \delta_0 h_0 \frac{(1-h_0)^2(h_0^{k-1}f_0^{k-1}-h_0^{k-1}) - (1-h_0 f_0)^2 h_0^{k-1}}{(1-q_0)^2(1-h_0)^4(1-h_0 f_0)^2} &\leq 1,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \delta_0 &= \frac{1 + H_0 \eta_0 - \sqrt{(1 - H_0 \eta_0)^2 - 4 A_0 H_0 \eta_0}}{2 H_0 \eta_0 (1 + A_0)} \quad (21) \\
 h &= H_0 \delta_0 \eta_0 \\
 f_0 &= 1 + \frac{A_0 \delta_0}{1 - h_0}
 \end{aligned}$$

Тогда уравнение (1) имеет в сфере (7) решение  $x^*$  к которому сходится полученная из (13) последовательность  $\{x_n\}$  со скоростью (9).

## § 5. Сходимость других построенных в § 3 методов

Проверка выполненности условий а) и б) в случае методов (14) и (15) протекает почти так же, как это показано в предыдущем параграфе. Поэтому приведем только результаты.

**Т е о р е м а 3.** Пусть выполнены условия:

- 1° существует обратный оператор  $\Gamma_0$ , причем  $\|\Gamma_0 P(x_0)\| \leq \eta_0$ ;

2° оператор  $P$  аналитичен в сфере (7), причем

$$\left\| \frac{1}{j!} \Gamma_0 P^{(j)}(x_0) \right\| \leq A_0 H_0^{j-1} \quad (j = 2, 3, \dots);$$

3° величины  $\eta_0$ ,  $A_0$  и  $H_0$  удовлетворяют неравенствам

$$H_0 \eta_0 + 2 \sqrt{A_0 H_0 \eta_0} < 1$$

$$l_0^k = A_0 \delta_0 h_0 \frac{(1-h_0) q_0^k - (1-q_0) h_0^k}{(1-q_0)^2 (1-h_0)^4 (q_0-h_0)} \leq 1,$$

где  $\delta_0$  определено равенством (21)

Тогда уравнение (1) имеет в сфере (7) решение  $x^*$ , к которому сходится полученная из (14) последовательность  $\{x_n\}$  со скоростью (9)

**Т е о р е м а 4.** Пусть выполнены условия:

1° существует обратный оператор  $\Gamma_0$ , причем  $\|\Gamma_0 P(x_0)\| \leq \eta_0$ ,

2° оператор  $P$  аналитичен в сфере (7), причем

$$\left\| \frac{1}{j!} \Gamma_0 P^{(j)}(x_0) \right\| \leq A_0 H_0^{j-1} \quad (j = 2, 3, \dots);$$

3° величины  $\eta_0$ ,  $A_0$  и  $H_0$  удовлетворяют неравенствам

$$H_0 \eta_0 + 2 \sqrt{A_0 H_0 \eta_0} < 1$$

$$l_0^k = A_0 \delta_0 h_0 \frac{(1-h_0) g_0^k h_0^k - (1-g_0 h_0) h_0^k}{(1-q_0)^2 (1-h_0)^4 (g_0 h_0 - h_0)} \leq 1,$$

где  $\delta_0$  определено равенством (21) и

$$g_0 = \frac{A_0 \delta_0}{(1-h_0)^2}.$$

Тогда уравнение (1) имеет в сфере (7) решение  $x^*$ , к которому сходится полученная из (15) последовательность  $\{x_n\}$  со скоростью (9).

Из-за технических трудностей теорему сходимости метода (16) для любого  $k$  доказать не удалось.

Проверка выполненности условий а) и б) в случае методов (17) особой трудности не представляет (хотя она протекает несколько иначе, чем в предыдущих случаях). Поэтому ограничимся и здесь приведением результата (который улучшает соответствующую теорему в статье [3]).

**Т е о р е м а 5.** Пусть выполнены условия:

1° существует обратный оператор  $\Gamma_0$ , причем  $\|\Gamma_0 P(x_0)\| \leq \eta_0$ ;

2° оператор  $P$  аналитичен в сфере

$$\|x - x_0\| \leq \frac{\delta_0 \eta_0}{1 - a_0^6}, \quad (22)$$

причем

$$\left\| \frac{1}{j!} \Gamma_0 P^{(j)}(x_0) \right\| \leq A_0 H_0^{j-1} \quad (j = 2, 3, \dots);$$

3° величины  $\eta_0$ ,  $A_0$  и  $H_0$  удовлетворяют неравенствам

$$h_0 < 1 - \sqrt{\frac{A}{1+A_0}}$$

$$|\alpha| A_0 H_0 \eta_0 < 1,$$

$$l_0^2 = h_0^2 \frac{A_0^2 [ |2 + \alpha| - (|2\alpha + \alpha^2| - 1) A_0 H_0 \eta_0 ]}{\delta_0^2 (1 - q_0)^2 (1 - h_0)^3 (1 - |\alpha| A_0 H_0 \eta_0)^2} +$$

$$+ \frac{A_0 \delta_0 h_0^2}{(1 - q_0)^2 (1 - h_0)^4} \leq 1,$$

где

$$\delta_0 = \frac{1 - (|\alpha| - 1) A_0 H_0 \eta_0}{1 - |\alpha| A_0 H_0 \eta_0}.$$

Тогда уравнение (1) имеет в сфере (22) решение  $x^*$ , к которому сходится полученная из (17) последовательность  $\{x_n\}$  со скоростью

$$\|x^* - x_n\| \leq \frac{a_0^n l_0^{3^n - 1} \delta_0 \eta_0}{1 - a_0 l_0^6}$$

Несмотря на то, что теорема 5 доказана для целого класса итерационных методов, полученные из нее условия и оценки сходимости конкретных методов не хуже, чем условия и оценки в ранее известных теоремах для тех же методов.

## § 6. Методы с изменяющимся оператором итерирования

Если в методах типа (3) положить

$$V_1 = -E$$

(т. е. если первую поправку найти методом Ньютона), то для их построения можно использовать методы типа (10)

В методах (10) индекс  $k$  считается фиксированным и итерирование проводится по индексу  $n$ . Фиксируем теперь индекс  $n$  (взяв  $n = 0$ ) и проводим итерирование по индексу  $k$ . Если вместо  $\Delta_k x_1$  писать  $\Delta x_k$ , то (10) принимает (при  $n = 0$ ) вид

$$\Delta x_k = \sum_{i=1}^k U_i \Gamma_0 P(x_0), \quad (23)$$

т. е. можно положить

$$V_k = \sum_{i=1}^k U_i.$$

Таким образом каждый класс методов типа (10) дает один метод типа (3). Так, например, из (13) получается метод

$$\Delta x_k = - \left[ E + \sum_{j=2}^k \frac{1}{j!} \Gamma_0 P^{(j)}(x_0) \Delta x_{k-j+1} \quad \Delta x_{k-1} \right]^{-1} \Gamma_0 P(x_0), \quad (24)$$

рассмотренный в [1]. Из (14) и (15) получаются методы, рассмотренные в [8].

Если метод (23) построен вышеуказанным путем, и теорема сходимости соответствующего метода типа (10) доказана, то из нее легко получается теорема сходимости метода (23). Действительно, взяв в (9)  $n = 1$ , получим

$$\|x^* - x_k\| \leq \frac{a_0 l_0^k \delta_0 \eta_0}{1 - a_0 l_0^k (k+1)} \quad (25)$$

Следовательно, полученная из (23) последовательность  $\{x_k\}$  сходится к решению  $x^*$  уравнения (1) со скоростью (25), если при каждом  $k$  выполнены условия теоремы 1 и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} l_0^k = 0.$$

В случае теорем 2, 3 и 4 последнее условие выполняется, и теоремы сходимости соответствующих методов с изменяющимся оператором итерирования можно сразу выписать. Например, из теоремы 2 получается

**Теорема 6.** Пусть выполнены условия:

1° существует обратный оператор  $\Gamma_0$ , причем  $\|\Gamma_0 P(x_0)\| \leq \eta_0$ ;

2° оператор  $P$  аналитичен в сфере

$$\|x - x_0\| \leq \frac{\delta_0 \eta_0}{1 - a_0}, \quad (26)$$

причем  $\left\| \frac{1}{j!} \Gamma_0 P^{(j)}(x_0) \right\| \leq A_0 H_0^{j-1}$  ( $j = 2, 3, \dots$ );

3° величины  $\eta_0$ ,  $A_0$  и  $H_0$  удовлетворяют неравенствам

$$H_0 \eta_0 + 2 \sqrt{A_0 H_0 \eta_0} < 1$$

$$\max_k \left\{ A_0 \delta_0 h_0 \frac{(1 - h_0)^2 (h_0^{k-1} f_0^{k-1} - h_0^{k-1}) + (1 - h_0 f_0)^2 h_0^{k-1}}{(1 - q_0)^2 (1 - h_0)^4 (1 - h_0 f_0)^2} \right\} \leq 1,$$

где  $\delta_0$  и  $f_0$  определены в теореме 2.

Тогда уравнение (1) имеет в сфере (26) решение  $x^*$ , к которому сходится полученная из (24) последовательность  $\{x_k\}$  со скоростью (25).

## § 7. Непосредственное доказательство сходимости метода (24)

В статье [1] дано непосредственное доказательство сходимости метода (24). В заключение покажем, как данное в § 4 доказательство теоремы 2 может быть применено к непосредственному доказательству сходимости метода (24)

**Теорема 7.** Пусть выполнены условия <sup>1</sup>:

1° существует обратный оператор  $\Gamma_0$ , причем  $\|\Gamma_0 P(x_0)\| \leq \eta_0$ ;

2° оператор  $P$  аналитичен в сфере

$$\|x - x_0\| \leq \delta_0 \eta_0, \quad (27)$$

причем  $\left\| \frac{1}{j!} \Gamma_0 P^{(j)}(x_0) \right\| \leq A_0 H_0^{j-1}$  ( $j = 2, 3, \dots$ );

3° величины  $\eta_0$ ,  $A_0$  и  $H_0$  удовлетворяют неравенству

$$H_0 \eta_0 + 2\sqrt{A_0 H_0 \eta_0} < 1.$$

Тогда уравнение (1) имеет в сфере (27) решение  $x^*$  к которому сходится полученная из (24) последовательность  $\{x_k\}$  со скоростью

$$\|x^* - x_k\| \leq \frac{A_0 \delta_0 \eta_0 h_0^k f_0^{k-1}}{1 - h_0 f_0}, \quad (28)$$

где  $\delta_0$ ,  $h_0$  и  $f_0$  определены в теореме 2.

**Доказательство.** Если опять ввести обозначения

$$\|\Delta x_k - \Delta x_{k-1}\| \leq \varepsilon_{k-1,0} \eta_0$$

$$\|\Delta x_k\| \leq \delta_{k0} \eta_0 = \delta_{k-1,0} \eta_0 + \varepsilon_{k-1,0} \eta_0,$$

то совершенно так же, как в § 4, получим, что

$$\delta_{k0} = \frac{1}{1 - A_0 \sum_{j=0}^k H_0^{j-1} \delta_{k-j+1,0} \dots \delta_{k-1,0} \eta_0^{j-1}} \leq \delta_0$$

и

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k-1,0} = & \frac{A_0 H_0^{k-1} \delta_{10} \dots \delta_{k-1,0}^2 \eta_0^{k-1}}{1 - A_0 \sum_{j=2}^k H_0^{j-1} \delta_{k-j+1,0} \dots \delta_{k-1,0} \eta_0^{j-1}} + \\ & + \frac{A_0 \sum_{j=2}^{k-1} H_0^{j-1} \delta_{k-j+1,0} \dots \delta_{k-1,0} \eta_0^{j-1} (\varepsilon_{k-2,0} + \dots + \varepsilon_{k-j,0})}{1 - A_0 \sum_{j=2}^k H_0^{j-1} \delta_{k-j+1,0} \dots \delta_{k-1,0} \eta_0^{j-1}} \end{aligned}$$

<sup>1</sup> В этом (и в предыдущем) параграфе индекс 0 при всех числах и операторе  $\Gamma_0$  необязателен. Индекс не пропущен в целях сохранения аналогии с первыми параграфами.

Если учесть, что  $\delta_{10} = 1$ , то из последнего равенства получим

$$\varepsilon_{k-1,0} \leq A_0 \delta_0 h_0^{k-1} + \frac{A_0 \delta_0}{1-h_0} \sum_{i=1}^{k-2} \varepsilon_{i0} h_0^{k-i-1}$$

Так как непосредственно нетрудно найти, что  $\varepsilon_{10} \leq A_0 \delta_0 h_0$ , то повторное применение последнего неравенства дает

$$\varepsilon_{k0} \leq A_0 \delta_0 h_0^k f_0^{k-1}$$

(в § 4 мы дали для  $\varepsilon_{k0}$  несколько более грубую оценку в целях простоты выражения для  $l_0^k$ ).

Теперь

$$\begin{aligned} \|x_{k+i} - x_k\| &\leq \|x_{k+i} - x_{k+i-1}\| + \dots + \|x_{k+1} - x_k\| \leq \\ &\leq \varepsilon_{k+i+1,0} \eta_0 + \dots + \varepsilon_{k0} \eta_0 \leq A_0 \delta_0 h_0 \eta_0 [(h_0 f_0)^{k+i-2} + \dots + (h_0 f_0)^{k-1}] \leq \\ &\leq \frac{A_0 \delta_0 h_0^k f_0^{k-1} \eta_0}{1 - h_0 f_0} \end{aligned}$$

Отсюда видим, что существует  $x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$  и имеет место неравенство (28).

То, что  $x^*$  является решением уравнения (1), доказывается совершенно так же, как в [1].

## Литература

1. Каази́к Ю. Я. и Тамме Э. Э., Об одном методе приближенного решения функциональных уравнений, ДАН 101, № 6, (1955), 981—984.
2. Каази́к Ю. Я., О приближенном решении нелинейных операторных уравнений итеративными методами, УМН 12, вып. 1, (1957), 195—199.
3. Каази́к Ю. Я., Об одном классе итерационных процессов для приближенного решения операторных уравнений, ДАН 112, № 4, (1957), 579—582.
4. Канторович Л. В., О методе Ньютона для функциональных уравнений, ДАН 59, № 7, (1948), 1237—1240.
5. Мертвецова М. А., Аналог процесса касательных гипербол для общих функциональных уравнений, ДАН 88, № 4, (1953), 611—614.
6. Нечепуренко М. И., О методе Чебышева для функциональных уравнений, УМН 9, вып. 2, (1954), 163—170.
7. Ульм С. И., О сходимости некоторых итерационных процессов в пространстве Банаха, Ученые записки ТГУ. 42, (1956), 135—142.
8. Тамме Е., Mõningatest mittelineaarsete funktsionaalvõrrandite ligikaudse lahendamise meetoditest, Eriseminaritöö, Tartu (1954).
9. Võhandu L., Iteratsioonimeetoditest võrrandite lahendamisel, Dissertatsioon, Tartu (1955).

# ITERATSIOONIMEETODITE KOONDUMISEST

U. Kaasik

Resümee

Artiklis vaadeldakse operaatorvõrrandi

$$P(x) = 0 \tag{1}$$

(kus  $P$  on analüütiline operaator Banachi ruumist linearsesse normeeritud ruumi) lahendamist iteratsioonimeetoditega

$$\Delta x_{n+1} = x_{n+1} - x_n = G_n \Gamma_n P(x_n) \quad (n = 0, 1, \dots), \tag{2}$$

kus  $x_0$  on antud alglähend,  $\Gamma_n = [P'(x_n)]^{-1}$  ja  $G_n$  tähendab lineaarset operaatorit, mis on moodustatud operaatoritest  $E, \Gamma_n P''(x_n), \dots, \Gamma_n P^{(k)}(x_n)$  ( $k$  on fikseeritud naturaalarv) ja elemendist  $\Gamma_n P(x_n)$ .

Töös [2] on antud põhiteoreem valemist (2) saadud jada  $\{x_n\}$  koondumise kohta võrrandi (1) lahendiks  $x^*$

Käesolevas artiklis näidatakse kõigepealt selle teoreemi rakendamist uute iteratsioonimeetodite konstrueerimiseks ning tuleatakse näidetena viis klassi iteratsioonimeetodeid.

Konstrueeritud iteratsioonimeetodite koonduvusteoreemide järeldamist põhiteoreemist demonstreeritakse üksikasjaliselt meetodi

$$\Delta_k x_{n+1} = - \left[ E + \sum_{j=2}^k \frac{1}{j!} \Gamma_n P^{(j)}(x_n) \Delta_{k-j+1} x_{n+1} \quad \dots \quad \Delta_{k-1} x_{n+1} \right]^{-1} \Gamma_n P(x_n) \tag{3}$$

puhul.

Lõpuks näidatakse, kuidas konstrueeritud meetoditest ja nende koonduvusteoreemidest võib saada nn. muutuva iteratsioonioperaatoriga iteratsioonimeetodeid ja nende koonduvusteoreeme. Näitena tuuakse artiklis valemist (3) saadav meetod

$$\Delta_k x_k = x_k - x_0 =$$

$$= - \left[ E + \sum_{j=2}^k \frac{1}{j!} \Gamma_0 P^{(j)}(x_0) \Delta_{k-j+1} x_{k-1} \quad \dots \quad \Delta_{k-1} x_{k-1} \right]^{-1} \Gamma_0 P(x_0) \tag{4}$$

ja selle koonduvusteoreem. Antakse ka meetodi (4) koonduvusteoreemi vahetu tõestus.

# ÜBER DIE KONVERGENZ VON ITERATIONSMETHODEN

U. Kaasik

## Zusammenfassung

Es sei  $P(x)$  ein analytischer Operator, der den Banachschen Raum in den linearen normierten Raum abbildet. Es werden für die Gleichung

$$P(x) = 0 \quad (1)$$

die Iterationsmethoden

$$\Delta x_{n+1} = x_{n+1} - x_n = G_n \Gamma_n P(x_n) \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (2)$$

betrachtet, wo  $x_0$  die Anfangsnäherung,  $\Gamma_n = [P'(x_n)]^{-1}$  und  $G_n$  ein linearer Operator ist, der von den Operatoren  $E, \Gamma_n P''(x_n), \dots, \Gamma_n P^{(k)}(x_n)$  ( $k$  ist eine fixierte positive ganze Zahl) und von dem Element  $\Gamma_n P(x_n)$  zusammengestellt ist.

Der Hauptsatz für die Konvergenz durch die Formel (2) angegebene Folge  $\{x_n\}$  (zur Lösung von Gleichung (1)) ist in [2] bewiesen.

In vorliegender Arbeit wird die Anwendung dieses Theorems für das Konstruieren neuer Iterationsmethoden angezeigt. Es werden als Beispiele fünf Klassen solcher Methoden hergeleitet.

Die Sätze über hinreichende Bedingungen zur Konvergenz neuer Methoden werden nur für die Methode

$$\Delta_k x_{n+1} = - \left[ E + \sum_{j=2}^k \frac{1}{j!} \Gamma_n P^{(j)}(x_n) \Delta_{k-j+1} x_{n+1} \quad \Delta_{k-1} x_{n+1} \right]^{-1} \Gamma_n P(x_n) \quad (3)$$

vollständig gebracht, für die anderen Methoden sind nur die Endresultate gegeben.

Endlich wird gezeigt, wie man aus diesen Methoden und aus ihren Konvergenzbedingungen Iterationsmethoden mit sogenannten veränderlichen Iterationsoperatoren und ihre Konvergenzbedin-

gungen herleiten kann. Als Beispiele werden von der Formel (3) abgeleitete Methode

$$\begin{aligned} \Delta x_k &= x_k - x_0 = \\ &= - \left[ E + \sum_{j=2}^k \frac{1}{j!} \Gamma_0 P^{(j)}(x_0) \Delta x_{k-j+1} \quad \Delta x_{k-1} \right]^{-1} \Gamma_0 P(x_0) \end{aligned} \quad (4)$$

und ihre Konvergenzbedingungen angegeben. Es wird auch ein unmittelbarer Beweis für das Konvergenztheorem der Methode (4) gebracht.

# ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ю. Я. Каазик и Э. Э. Тамме

Кафедра геометрии

## § 1. Построение и сходимость одного класса итерационных процессов

В настоящей статье рассматривается метод приближенного решения таких нелинейных операторных уравнений, для которых удается найти все производные соответствующего оператора в точке начального приближения. Этот метод состоит в применении итерационных процессов с изменяющимися операторами итерирования. Некоторые такие процессы исследованы в [3] и [4] (для несколько более узкого случая)

Пусть дано начальное приближение  $x_0$  решения уравнения

$$P(x) = 0, \quad (1)$$

где  $P$  — аналитический оператор (в некоторой окрестности точки  $x_0$ ) из банахова пространства  $\mathfrak{X}$  в линейное пространство  $\mathfrak{Y}$ .

Если существует обратный оператор  $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$  то в силу аналитичности оператора  $P$  уравнение (1) можно заменить на (эквивалентное ему в окрестности точки  $x_0$ ) уравнение

$$\Gamma_0 P(x_0) + \Delta x + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i!} \Gamma_0 P^{(i)}(x_0) \Delta x^i = 0, \quad (2)$$

где  $\Delta x = x - x_0$ . Для нахождения приближенных решений  $x_1, x_2, \dots$  уравнения (2) положим

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0 = -\Gamma_0 P(x_0),$$

$$\Delta x_k = x_k - x_0 = -\Gamma_0 P(x_0) -$$

$$- \sum_{i=2}^k \frac{1}{i!} \Gamma_0 P^{(i)}(x_0) F_k^i(\Delta x) \quad (k = 2, 3, \dots), \quad (3)$$

где  $F_k^i(\Delta x) = \Delta x_{k-i+1}^\alpha \dots \Delta x_{k-2}^\alpha \Delta x_{k-1}^\beta [\gamma_i \Delta x_k - (\gamma_i - 1) \Delta x_{k-1}] \epsilon x^i$   
(см. [2]) и числа  $\alpha, \beta, \gamma_i$  выбраны так, чтобы было

$$\alpha = \beta = 1, 0 \leq \gamma_i \leq 2 \quad (4_1)$$

или

$$\alpha = 0, \beta = i - 1, 0 \leq \gamma_i \leq i. \quad (4_2)$$

Решив уравнение (3) относительно  $\Delta x_k$ , получим

$$\Delta x_k = - \left\{ \begin{aligned} & \left[ E + \sum_{i=2}^k \frac{\gamma_i}{i!} \Gamma_0 P^{(i)}(x_0) \Delta x_{k-i+1}^\alpha \dots \Delta x_{k-2}^\alpha \Delta x_{k-1}^\beta \right]^{-1} \\ & \left[ \Gamma_0 P(x_0) - \sum_{i=2}^k \frac{\gamma_i - 1}{i!} \Gamma_0 P^{(i)}(x_0) \Delta x_{k-i+1}^\alpha \dots \Delta x_{k-2}^\alpha \Delta x_{k-1}^{\beta+1} \right], \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где мы допустили, что соответствующий обратный оператор существует при любом  $k$ .

Из итерационных процессов (5), по-видимому, наибольший практический интерес представляют те, которые получаются при  $\alpha = \beta = 1, \gamma_i = 1$ ;  $\alpha = 0, \beta = i - 1, \gamma_i = 1$ ;  $\alpha = 0, \beta = i - 1, \gamma_i = 0$  или  $\alpha = 0, \beta = i - 1, \gamma_i = i$ , т. е. процессы

$$\Delta x_k = - \left[ E + \sum_{i=2}^k \frac{1}{i!} \Gamma_0 P^{(i)}(x_0) \Delta x_{k-i+1} \quad \Delta x_{k-1} \right]^{-1} \Gamma_0 P(x_0); \quad (6)$$

$$\Delta x_k = - \left[ E + \sum_{i=2}^k \frac{1}{i!} \Gamma_0 P^{(i)}(x_0) \Delta x_{k-1}^{i-1} \right]^{-1} \Gamma_0 P(x_0); \quad (7)$$

$$\Delta x_k = - \Gamma_0 P(x) - \sum_{i=2}^k \frac{1}{i!} \Gamma_0 P^{(i)}(x_0) \Delta x_{k-1}^i; \quad (8)$$

$$\Delta x_k = - \left[ E + \sum_{i=2}^k \frac{1}{(i-1)!} \Gamma_0 P^{(i)}(x_0) \Delta x_{k-1}^{i-1} \right]^{-1} \left[ \Gamma_0 P(x_0) - \sum_{i=2}^k \frac{i-1}{i!} \Gamma_0 P^{(i)}(x_0) \Delta x_{k-1}^i \right] \quad (9)$$

В силу необходимого и достаточного условия аналитичности оператора  $P$  можно найти такие оценки

$$\| \Gamma_0 P(x_0) \| \leq a_0, \quad a_1 = -1, \quad \left\| \frac{1}{i!} \Gamma_0 P^{(i)}(x) \right\| \leq a_i \quad (10)$$

$(i = 2, 3, \dots)$ .

что в некоторой окрестности точки  $\delta = 0$  существует функция

$$\pi(\delta) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \delta^i \quad (11)$$

В обозначениях (10) и (11) имеет место следующая

Т е о р е м а. Пусть выполнены условия:

1° Существует обратный оператор  $\Gamma_0$

2° Уравнение

$$\pi(\delta) = 0 \quad (12)$$

имеет неравные положительные корни<sup>1</sup>.

3° Оператор  $P$  аналитичен в сфере

$$\|x - x_0\| \leq \delta^*, \quad (13)$$

где  $\delta^*$  наименьший положительный корень уравнения (12).

Тогда уравнение (1) имеет в сфере (13) решение  $x^*$ , к которому сходится полученная из (5) последовательность  $\{x_k\}$  со скоростью

$$\|x^* - x_k\| \leq \delta^* - \delta_k, \quad (14)$$

где  $\delta_k$  суть приближенные решения уравнения (12), полученные по той же формуле (5), исходя из начального приближения  $\delta_0 = 0$ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем обозначения

$$\|\Delta x_k\| \leq \delta_k, \quad \|\Delta x_k - \Delta x_{k-1}\| \leq \varepsilon_{k-1}$$

и выберем

$$\delta_k = \delta_{k-1} + \varepsilon_{k-1} \quad (15)$$

Для  $k \geq 2$  из (3) получим

$$\begin{aligned} \Delta x_k - \Delta x_{k-1} = & - \sum_{i=2}^k \frac{1}{i!} \Gamma_0 P^{(i)}(x_0) F_k^i(\Delta x) + \\ & + \sum_{i=2}^{k-1} \frac{1}{i!} \Gamma_0 P^{(i)}(x_0) F_{k-1}^i(\Delta x), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \Delta x_k - \Delta x_{k-1} = & - \left[ E + \sum_{i=2}^k \frac{1}{i!} \Gamma_0 P^{(i)}(x_0) \Delta x_{k-i+1}^\alpha \dots \Delta x_{k-2}^\alpha \Delta x_{k-1}^\beta \right]^{-1} \\ & \left[ \frac{1}{k!} \Gamma_0 P^{(k)}(x_0) \Delta x_1^\alpha \dots \Delta x_{k-2}^\alpha \Delta x_{k-1}^{\beta+1} + \right. \\ & \left. + \sum_{i=2}^{k-1} \frac{1}{i!} \Gamma_0 P^{(i)}(x_0) \Delta x_{k-i+1}^\alpha \dots \Delta x_{k-2}^\alpha G_{ik}^{\beta+1}(\Delta x) \right], \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Больше двух положительных корней уравнение (12), очевидно, иметь не может.

где

$$G_{ik}^{\beta+1}(\Delta x) = (1 - \gamma_i) \Delta x_{k-i}^\alpha \Delta x_{k-2}^{\beta-\alpha} (\Delta x_{k-1} - \Delta x_{k-2}) + \\ + \Delta x_{k-1} (\Delta x_{k-1}^\beta - \Delta x_{k-i}^\alpha \Delta x_{k-2}^{\beta-\alpha}) \in \mathfrak{X}^{\beta+1}$$

Нетрудно проверить, что если  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma_i$  удовлетворяют условию (4<sub>1</sub>) или (4<sub>2</sub>), то (в силу выбора (15))

$$\|G_{ik}^{\beta+1}(\Delta x)\| \leq G_{ik}^{\beta+1}(\delta) = (1 - \gamma_i) \delta_{k-i}^\alpha \delta_{k-2}^{\beta-\alpha} (\delta_{k-1} - \delta_{k-2}) + \\ + \delta_{k-1} (\delta_{k-1}^\beta - \delta_{k-i}^\alpha \delta_{k-2}^{\beta-\alpha})$$

Следовательно, можем выбрать

$$\|\Delta x_k - \Delta x_{k-1}\| \leq \frac{a_k \delta_1^\alpha \dots \delta_{k-2}^\alpha \delta_{k-1}^{\beta+1} + \sum_{i=2}^{k-1} a_i \delta_{k-i+1}^\alpha \dots \delta_{k-2}^\alpha G_{ik}^{\beta+1}(\delta)}{1 - \sum_{i=2}^k \gamma_i a_i \delta_{k-i+1}^\alpha \dots \delta_{k-2}^\alpha \delta_{k-1}^\beta} = \varepsilon_{k-1}$$

Подставив это в равенство (15), получим

$$\delta_k (1 - \sum_{i=2}^k \gamma_i a_i \delta_{k-i+1}^\alpha \dots \delta_{k-2}^\alpha \delta_{k-1}^\beta) = \delta_{k-1} (1 - \\ - \sum_{i=2}^{k-1} \gamma_i a_i \delta_{k-i}^\alpha \dots \delta_{k-3}^\alpha \delta_{k-2}^\beta) - \sum_{i=2}^k (\gamma_i - 1) a_i \delta_{k-i+1}^\alpha \dots \delta_{k-2}^\alpha \delta_{k-1}^{\beta+1} + \\ + \sum_{i=2}^{k-1} (\gamma_i - 1) a_i \delta_{k-i}^\alpha \dots \delta_{k-3}^\alpha \delta_{k-2}^{\beta+1}.$$

Повторное применение этого рекуррентного соотношения (с учетом, что  $\delta_1 = a_0$ ) дает

$$\delta_k = \frac{a_0 - \sum_{i=2}^k (\gamma_i - 1) a_i \delta_{k-i+1}^\alpha \dots \delta_{k-2}^\alpha \delta_{k-1}^{\beta+1}}{1 - \sum_{i=2}^k \gamma_i a_i \delta_{k-i+1}^\alpha \dots \delta_{k-2}^\alpha \delta_{k-1}^\beta}. \quad (16)$$

Таким образом, оценки  $\delta_k$  вычисляются как приближенные решения уравнения (12) по формуле (5), исходя из начального приближения  $\delta_0 = 0$ .

По условию (15) последовательность  $\{\delta_k\}$  монотонно возра-

стает. Так как  $\delta_1 = a_0 \leq \delta^*$ , то, пользуясь формулой (16), нетрудно индуктивно доказать, что при всех  $k$

$$\delta_k \leq \delta^*$$

Следовательно существует  $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k$  и, переходя в (16) к пределу, получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = \delta^*,$$

т. е.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k$  является решением уравнения (12).

Так как  $\delta^*$  наименьший положительный простой корень уравнения (12), то в силу непрерывности  $\pi'(\delta^*) < 0$ . Следовательно

$$\sum_{i=2}^k \gamma_i a_i \delta_{k-i+1}^\alpha \dots \delta_{k-2}^\alpha \delta_{k-1}^\beta \leq \sum_{i=2}^k i a_i (\delta^*)^{i-1} \leq \pi'(\delta^*) + 1 < 1.$$

Из этого неравенства вытекает существование нужного нам обратного оператора (при всех  $k$ ) и такая оценка его нормы, какую мы использовали при нахождении  $\varepsilon_{k-1}$ .

Теперь нетрудно доказать, что последовательность  $\{x_k\}$  сходится к решению уравнения (1) со скоростью (14). Действительно,

$$\begin{aligned} \|x_{k+p} - x_k\| &\leq \|x_{k+p} - x_{k+p-1}\| + \dots + \|x_{k+1} - x_k\| \leq \\ &\leq \varepsilon_{k+p-1} + \dots + \varepsilon_k = \delta_{k+p} - \delta_k, \end{aligned}$$

и таким образом (в силу полноты пространства  $\mathfrak{X}$ ) существует  $x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ . Переход в последнем неравенстве к пределу ( $p \rightarrow \infty$ ) дает (14).

Учитывая аналитичность оператора  $P$  в сфере (13) и равенство (3), получим

$$\begin{aligned} P(x_k) = P'(x_0) \left\{ \sum_{i=2}^k \frac{1}{i!} \Gamma_0 P^{(i)}(x_0) [\Delta x_k^i - F_k^i(\Delta x)] + \right. \\ \left. + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{i!} \Gamma_0 P^{(i)}(x_0) \Delta x_k^i \right\} \end{aligned}$$

Если  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma_i$  удовлетворяют условию (4<sub>1</sub>) или (4<sub>2</sub>), то нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} \|\Delta x_k^i - F_k^i(\Delta x)\| &\leq \delta_k^i - F_k^i(\delta) = \\ &= \delta_k^i - \delta_{k-i+1}^\alpha \delta_{k-2}^\alpha \delta_{k-1}^\beta [\gamma_i \delta_k - (\gamma_i - 1) \delta_{k-1}]. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \| P(x_k) \| &\leq \| P'(x_0) \| \left\{ \sum_{i=2}^{\infty} a_i \delta_k^i - \sum_{i=2}^k a_i F_k^i(\delta) \right\} = \\ &= \| P'(x_0) \| \left\{ \sum_{i=2}^{\infty} a_i \delta_k^i - \delta_k + a_0 \right\} = \| P'(x_0) \| \pi(\delta_k) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $k \rightarrow \infty$ . Таким образом

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(x_k) = P(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k) = P(x^*) = 0,$$

и наша теорема доказана.

Сделаем еще несколько замечаний по доказанной теореме.

**З а м е ч а н и е 1.** Пользуясь методом сжатых отображений, можно доказать, что в условиях теоремы решение  $x^*$  уравнения (1) является единственным в сфере (13). Таким образом эта теорема применима также для доказательства существования и единственности решения уравнения (1).

**З а м е ч а н и е 2.** Если в (14) заменить  $\delta_k$  на меньшее число  $\| \Delta x_k \|$ , то получим

$$\| x^* - x_k \| \leq \delta^* - \| \Delta x_k \|.$$

Эта оценка обычно значительно более грубая, чем (14), но ее можно иногда использовать в тех случаях, когда норму  $\| \Delta x_k \|$  не трудно определить.

**З а м е ч а н и е 3.** Из теоремы видим, что одновременно с уравнением (1) для получения оценки погрешности (14) придется тем же методом (5) решить вещественное уравнение (12). Особенно простой алгоритм для решения уравнения (12) получается в случае процесса (6) (см. напр. [5]):

$$\delta_k = -a_0 \frac{D_{k-1}}{D_k},$$

$$\text{где } D_0 = 1, D_k = \sum_{i=1}^k (-a_0)^{i-1} a_i D_{k-i} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

**З а м е ч а н и е 4.** В практических применениях мы обычно находим и используем не точные значения  $\Delta x_k$ , а их некоторые приближения  $\bar{\Delta x}_k$ . Пусть оценки этой погрешности суть

$$\| \Delta x_k - \bar{\Delta x}_k \| \leq \vartheta_k \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Из доказательства теоремы нетрудно убедиться, что оценка (14) верна и для полученных приближений  $\bar{x}_k = x_0 + \Delta x_k$ , если

$$\|\Delta x_1\| \leq a_0 \text{ и } \|\Delta x_k - \Delta x_{k-1}\| + \vartheta_k + \vartheta_{k-1} \leq \delta_k - \delta_{k-1}$$

**З а м е ч а н и е 5.** В работах [3] и [4] итерационные процессы вида (5) рассматривались в предположении, что удастся найти оценки (10) в виде

$$\|\Gamma_0 P(x_0)\| \leq \eta, \quad \|\frac{1}{i!} \Gamma_0 P^{(i)}(x_0)\| \leq AH^{i-1} \quad (i = 2, 3, \dots)$$

В этом случае имеем (для  $|\delta| < \frac{1}{H}$ )

$$\pi(\delta) = \eta - \delta + \frac{AH\delta^2}{1-H\delta} = \frac{\eta - (1+H\eta)\delta + H(1+A)\delta^2}{1-H\delta}$$

Условие 2° нашей теоремы выражается теперь неравенством

$$H\eta + 2\sqrt{AH\eta} < 1$$

и для  $\delta^*$  получим

$$\delta^* = \frac{1+H\eta - \sqrt{(1-H\eta)^2 - 4AH\eta}}{2H(1+A)}$$

**З а м е ч а н и е 6.** Обозначив  $\delta_k$  для процесса (6) через  $\delta_k'$  и для процесса (7) через  $\delta_k''$ , нетрудно показать, что  $\delta_k' \leq \delta_k''$ , т. е.  $\delta^* - \delta_k'' \leq \delta^* - \delta_k'$ . Поэтому оценки, полученные для процесса (6) (см. напр. [4]) применимы также для процесса (7). Можно еще отметить, что эти процессы имеют практически одинаковую скорость сходимости.

## § 2. Некоторые применения построенных итерационных процессов

Рассмотрим теперь применение процессов (5) для приближенного решения систем уравнений, интегральных и обыкновенных дифференциальных уравнений. Много общего с этими случаями имеет приближенное решение дифференциальных уравнений с частными производными и систем дифференциальных уравнений.

1. Решение систем уравнений. Систему нелинейных уравнений

$$u_i(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

можно рассматривать как операторное уравнение (1), где  $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  и  $P(x) = (u_1(x), \dots, u_n(x))$ . Оператор  $P$  аналитичен в некоторой области  $n$ -мерного векторного пространства  $X$ , если в этой области аналитичны все функции  $u_i(x)$ . Дифференциалы оператора  $P$  выражаются формулами

$$P^{(k)}(x) \Delta x_1, \dots, \Delta x_k = (d^k u_1, \dots, d^k u_n) \quad (k = 1, 2, \dots),$$

где  $d^k u_i$  — дифференциалы функций  $u_i$  в точке  $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  с приращениями аргументов соответственно  $\Delta x_1 = (\Delta \xi_1^{(1)}, \dots, \Delta \xi_n^{(1)})$ ,  $\Delta x_k = (\Delta \xi_1^{(k)}, \dots, \Delta \xi_n^{(k)})$ .

Для практических вычислений можно указать довольно простые правила, если учесть, что производную  $P^{(k)}(x)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) как линейный оператор из пространства  $\mathcal{X}$  в  $\mathcal{Y}$  (см. [2]) можно представить матрицей

$$P^{(k)}(x_0) = \left( \frac{\partial^k u_i}{\partial \xi_1^{k_1} \dots \partial \xi_n^{k_n}} \right)$$

и элемент  $\Delta x_1 \dots \Delta x_k \in \mathcal{X}^k$  — вектором, который получается от умножения векторов  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_k$  по правилу, аналогичному правилу умножения линейных форм  $n$  переменных. При этом надо согласовать порядок компонентов вектора  $\Delta x_1 \dots \Delta x_k$  и элементов строк матрицы  $P^{(k)}(x)$ .

Так как для общей системы подробные выкладки громоздки, мы остановимся на системе двух уравнений с двумя неизвестными. Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} u(\xi, \eta) = 0 \\ v(\xi, \eta) = 0. \end{cases}$$

Введем обозначения

$$u_{ik} = \frac{1}{(i+k)!} \cdot \frac{\partial^{i+k} u(\xi_0, \eta_0)}{\partial \xi^i \partial \eta^k}, \quad v_{ik} = \frac{1}{(i+k)!} \cdot \frac{\partial^{i+k} v(\xi_0, \eta_0)}{\partial \xi^i \partial \eta^k}$$

Тогда производные оператора  $P$  можно представить матрицами

$$\frac{1}{k!} P^{(k)}(x_0) = \begin{pmatrix} u_{k0} & u_{k-1,1} & \dots & u_{0k} \\ v_{k0} & v_{k-1,1} & \dots & v_{0k} \end{pmatrix}$$

Определим умножение векторов формулой

$$\begin{aligned} & (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i) (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_j) = \\ & = (\alpha_1 \beta_1, \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1, \alpha_1 \beta_3 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_1, \dots, \alpha_i \beta_j) \end{aligned}$$

( $i, j = 2, 3, \dots$ ), умножение матрицы с вектором формулой

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{1n} \\ c_{21} & c_{2n} \end{pmatrix} (\alpha_1, \dots, \alpha_i) = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{1,n-i+1} \\ d_{21} & d_{2,n-i+1} \end{pmatrix} \quad (n \geq i),$$

где  $d_{lm} = \sum_{j=1}^i c_{l,m+j-1} \alpha_j$ , и умножение матриц обычным образом.

Тогда выражение  $\frac{1}{k!} \Gamma_0 P^{(k)}(x_0) \Delta x_1 \dots \Delta x_k$  является произведением,

причем соблюден закон ассоциативности. Заметим еще, что в рассматриваемом случае

$$\Gamma_0 = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} v_{01} & -u_{01} \\ -v_{10} & u_{10} \end{pmatrix}, \quad \text{где } D = \begin{vmatrix} u_{10} & u_{01} \\ v_{10} & v_{01} \end{vmatrix}$$

Если определить нормы в  $\mathfrak{X}$  и  $\mathfrak{Y}$  соответственно равенствами

$$\|x\| = \max(|\xi|, p|\eta|) \quad \text{и} \quad \|y\| = \max(|\varphi|, q|\psi|),$$

где  $x = (\xi, \eta)$ ,  $y = (\varphi, \psi)$  и  $p, q > 0$ , то нужные нам оценки (10) можно найти следующим образом:

$$\begin{aligned} \|\Gamma_0 P(x_0)\| &= \|\Delta x_1\| = \max(|\Delta \xi_1|, p|\Delta \eta_1|), \\ \|\Gamma_0\| &= \frac{1}{|D|} \max(|v_{01}| + \frac{1}{q}|u_{01}|, p|v_{10}| + \frac{p}{q}|u_{10}|), \\ \frac{1}{k!} \|P^{(k)}(x_0)\| &\leq \max\left(\sum_{i=0}^k \frac{1}{p^i} \binom{k}{i} |u_{k-i, i}|, q \sum_{i=0}^k \frac{1}{p^i} \binom{k}{i} |v_{k-i, i}|\right) \end{aligned}$$

Более точную оценку получаем, если аналогично последней формуле оцениваем норму  $\frac{1}{k!} \|\Gamma_0 P^{(k)}(x_0)\|$ . В таком случае оценки

не зависят от выбора нормы в пространстве  $\mathfrak{Y}$ .

Оценка (14) дает

$$\|x^* - x_k\| = \max(|\xi^* - \xi_k|, p|\eta^* - \eta_k|) \leq \delta^* - \delta_k,$$

где  $x^* = (\xi^*, \eta^*)$ .

Пример 1. В случае системы

$$\begin{cases} \xi^2 \eta^2 - 2\xi^3 - 5\eta^3 + 10 = 0 \\ \xi^4 - 8\eta + 1 = 0, \end{cases}$$

начального приближения  $x_0 = (-2, 2)$  и  $p = 1,1$  мажорантное уравнение (12) имеет вид

$$\tau(\delta) = 0,0258 - \delta + 1,62\delta^2 + 0,60\delta^3 + 0,067\delta^4 = 0.$$

Результаты вычислений следующие<sup>1</sup>:

Процесс	$k$	$\xi_k$	$\eta_k$	Оценка (14)	Действительная погрешность
(6)	1	-1,9743	2,0221	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$
	2	-1,973529	2,021156	$6,7 \cdot 10^{-5}$	$1,3 \cdot 10^{-5}$
	3	-1,97352060	2,02116718	$3,7 \cdot 10^{-6}$	$0,2 \cdot 10^{-6}$
	4	-1,973520515	2,021167040	$2,1 \cdot 10^{-7}$	$0,02 \cdot 10^{-7}$

<sup>1</sup> Первые приближения совпадают у всех рассматриваемых процессов; вторые — у процессов (6) и (7).

Процесс	$k$	$\xi_k$	$\eta_k$	Оценка (14)	Действительная погрешность
(7)	3	-1,97352080	2,02116743	$3,5 \cdot 10^{-6}$	$0,5 \cdot 10^{-6}$
(8)	2	-1,973540	2,021147	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$0,3 \cdot 10^{-4}$
	3	-1,9735217	2,0211686	$1,1 \cdot 10^{-5}$	$0,2 \cdot 10^{-5}$
	4	-1,97352056	2,02116701	$1,1 \cdot 10^{-6}$	$0,05 \cdot 10^{-6}$
(9)	2	-1,9735154	2,0211642	$1,6 \cdot 10^{-5}$	$0,6 \cdot 10^{-5}$
	3	-1,973520533	2,021167051	$4,0 \cdot 10^{-8}$	$1,9 \cdot 10^{-8}$

2. Решение интегральных уравнений. Нелинейное интегральное уравнение

$$\int_a^b K(s, t, x(s), x(t)) dt = 0,$$

где  $K$  — непрерывная функция своих аргументов и аналитическая по  $x(s)$  и  $x(t)$ , можно рассматривать как уравнение (1), взяв

$$P(x) = \int_a^b K(s, t, x(s), x(t)) dt.$$

Дифференциалы этого оператора выражаются в виде

$$P^{(k)}(x) \Delta x_1 \dots \Delta x_k = \int_a^b d_{x(s), x(t)}^k K(s, t, x(s), x(t)) dt,$$

если только последнее выражение является непрерывным  $k$ -линейным оператором в пространстве  $\mathfrak{X}$ .

Выбрав  $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = C[a, b]$ , получим необходимые оценки следующим образом:

$$\|\Gamma_0 P(x_0)\| = \max_{s \in [a, b]} |\Delta x_1(s)|,$$

$$\|P^{(k)}(x_0)\| \leq \max_{s \in [a, b]} \int_a^b \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} |K_{x(s)^{k-i} x(t)^i}^{(k)}(s, t, x_0(s), x_0(t))| dt.$$

Доказанная теорема гарантирует в этом случае равномерную сходимость приближений  $x_k(s)$  к решению  $x^*(s)$  со скоростью

$$\max_{s \in [a, b]} |x^*(s) - x_k(s)| \leq \delta^* - \delta_k.$$

Пример 2. Решим интегральное уравнение

$$P(x) = \int_0^1 t \operatorname{arctg} [x(s) + x(t)] dt - 0,55 - 0,01s = 0,$$

взяв в качестве начального приближения  $x_0(s) = 1$ .

Здесь

$$P^{(k)}(x_0) \Delta x^k = \operatorname{arctg}^{(k)} 2 \int_0^1 t [\Delta x(s) + \Delta x(t)]^k dt$$

и в качестве мажорантного уравнения (12) можем взять

$$\pi(\delta) = 0,0513 - \delta + 2,4\delta^2 + 1,76\delta^3 + 1,152\delta^4 + 0,63\delta^5 + \\ + \frac{1,25(0,9\delta)^6}{1-0,9\delta} = 0.$$

Для оценки погрешности  $\|x^* - x_k\|$  по формуле (14) получаем:

Процесс				
k	(6)	(7)	(8)	(9)
1	0,0092	0,0092	0,0092	0,0092
2	0,0020	0,0020	0,0029	0,00081
3	0,00044	0,00040	0,0009	0,00003

Процесс (6) дает следующие первые приближения:

$$x_1(s) = 0,9488 + 0,1s,$$

$$x_2(s) = 0,94908 + 0,09721s + 0,00383s^2 + 0,00016s^3,$$

$$x_3(s) = 0,94911 + 0,09720s + 0,00381s^2 + 0,00017s^3$$

3. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть на отрезке  $se [a, b]$  надо решить дифференциальное уравнение

$$f(s, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0 \quad (17)$$

при граничных условиях

$$U_i(x) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (18)$$

где  $U_i(x) = \sum_{j=0}^{n-1} [\alpha_{ij} x^{(j)}(a) + \beta_{ij} x^{(j)}(b)]$ .

В этой общей граничной задаче содержится (если все  $\beta_{ij} = 0$ ) и задача Коши.

В качестве пространства  $\mathfrak{X}$  выберем множество функций,  $n$  раз непрерывно дифференцируемых на отрезке  $[a, b]$  и удовлетворяющих граничным условиям (18). Норму определим равенством

$$\|x\| = \max_{\substack{s \in [a, b] \\ 0 < i < n}} p_i |x^{(i)}(s)|, \quad (19)$$

где  $p_i > 0$ . Определим в этом пространстве оператор

$$P(x) = f(s, x, x', \dots, x^{(n)});$$

тогда рассматриваемая граничная задача принимает вид операторного уравнения (1). Предполагая, что  $f$  аналитическая функция от  $x, x', \dots, x^{(n)}$ , получим дифференциалы оператора  $P$  в виде

$$P^{(k)}(x) \Delta x_1 \dots \Delta x_k = d_{x, x', \dots, x^{(n)}}^k f,$$

если только последнее выражение является непрерывным  $k$ -линейным оператором из  $\mathfrak{X}$  в  $\mathfrak{Y} = C[a, b]$ .

Обозначив функцию Грина граничной задачи  $P'(x_0) \Delta x = 0$  через  $\Gamma(s, t)$ , можем оценить

$$\|\Gamma_0 P(x_0)\| = \max_{\substack{s \in [a, b] \\ 0 < i < n}} p_i |\Delta x_1^{(i)}(s)|,$$

$$\|\Gamma_0\| \leq \max_{\substack{s \in [a, b] \\ 0 < i < n}} p_i \int_a^b |\Gamma_{s^i}^{(i)}(s, t)| dt,$$

$$\left\| \frac{1}{k!} P^{(k)}(x_0) \right\| \leq \max_{\substack{s \in [a, b] \\ i_1 + \dots + i_n = k}} \sum \frac{1}{i_0! \dots i_n! p_0^{i_0} \dots p_n^{i_n}} \left| f_{x^{i_0} \dots x^{i_n}}^{(k)}(s, x_0, \dots, x_0^{(n)}) \right|.$$

Из доказанной теоремы вытекает равномерная сходимость последовательности приближений  $x_k(s)$  и их производных (до порядка  $n$ ) к решению  $x^*(s)$  и его производным со скоростью

$$\max_{\substack{s \in [a, b] \\ 0 < i < n}} p_i |x^{*(i)}(s) - x_k^{(i)}(s)| \leq \delta^* - \delta_k.$$

**Пример 3.** Решим на отрезке  $[0, 1]$  дифференциальное уравнение

$$x'^2 - (x - s)^3 - 1 - 0,1s = 0$$

с начальным условием  $x(0) = 0$ .

Для начального приближения  $x_0(s) = s$ :

$$P(x_0) = -0,1s, \quad P'(x_0) \Delta x = 2\Delta x'(s),$$

$$P''(x_0) \Delta x^2 = 2\Delta x'^2(s) \quad \text{и} \quad P'''(x_0) \Delta x^3 = -6\Delta x^3(s).$$

Выбрав в (19)  $p_0 = 1$ ,  $p_1 = 0,8$ , можем взять

$$\pi(\delta) = 0,04 - \delta + 0,782\delta^2 + 0,5\delta^3$$

и из (14) получаем следующие оценки погрешностей:

$k$ \backslash Процесс	(6)	(7)	(8)	(9)
1	$1,4 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$
2	$8,3 \cdot 10^{-5}$	$8,3 \cdot 10^{-5}$	$1,3 \cdot 10^{-4}$	$4,0 \cdot 10^{-5}$
3	$4,1 \cdot 10^{-6}$	$3,0 \cdot 10^{-6}$	$8,3 \cdot 10^{-6}$	$1,6 \cdot 10^{-9}$

Три первые приближения по формуле (6) будут:

$$x_1(s) = s + 0,025s^2,$$

$$x_2(s) = 3s - 80 \ln(1 + 0,025s),$$

$$x_3(s) = 1,5s + 0,0125s^2 - 10 \ln(1 + 0,05s) \quad (\pm 2 \cdot 10^{-6}).$$

Если дифференциальное уравнение (17) имеет вид

$$\sum_{i=1}^n q_i(s)x^{(i)} + g(s, x, \dots, x^{(m)}) = 0 \quad (m < n) \quad (20)$$

и существует функция Грина  $G(s, t)$  уравнения

$$\sum_{i=1}^n q_i(s)x^{(i)} = 0$$

при граничных условиях (18), то граничную задачу  $\{(20), (18)\}$  можно заменить равносильным ей интегро-дифференциальным уравнением

$$P(x) = x(s) + \int_a^b G(s, t)g(t, x(t), \dots, x^{(m)}(t))dt = 0. \quad (21)$$

Применение процессов (5) к уравнению (21) дает те же приближения, что и применение этих процессов к задаче  $\{(20), (18)\}$  (если, конечно, начальное приближение  $x_0(s)$   $n$  раз непрерывно дифференцируемо и удовлетворяет граничным условиям (18)). Но в случае уравнения (21) можем применить нашу теорему, если за  $\mathfrak{X}$  выбрать множество  $m$  раз непрерывно дифференцируемых функций и определить норму равенством (19) (заменив там  $n$  на  $m$ ). В случае  $m = 0$  полагаем  $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = C[a, b]$ .

В некоторых типах задач можно для норм указать простые оценки, которые не содержат функцию Грина  $\Gamma(s, t)$ . Например, преобразовав граничную задачу

$$x'' + g(s, x) = 0, \quad x(a) = x(b) = 0$$

в форму (21), можем для нее дать оценки (10) в виде

$$\| \Gamma_0 P(x_0) \| = \max_{s \in [a, b]} | \Delta x_1(s) |,$$

$$\| \Gamma_0 P^{(k)}(x_0) \| \leq \frac{(b-a)^2}{8-(b-a)^2 M} \max_{s \in [a, b]} | g_{x^k}^{(k)}(s, x_0(s)) |,$$

если только  $M = \max_{s \in [a, b]} | g_{x'}(s, x_0(s)) | < \frac{8}{(b-a)^2}$ .

**Пример 4.** Для граничной задачи (см. [1])

$$x'' - \frac{1}{3} x^3 - s = 0, \quad x(0) = x(1) = 0$$

с начальным приближением  $x_0(s) = 0$  получим

$$\pi(\delta) = 0,0643 - \delta + 0,0417\delta^3.$$

Так как в данном случае  $P''(x_0) = 0$ , то при всех процессах (5) первые и вторые приближения совпадают. Процесс (8) дает следующие приближения:

$$x_1(s) = x_2(s) = \frac{1}{6} s(s^2 - 1),$$

$$x_3(s) =$$

$$= \frac{1}{6} s(s^2 - 1) \left[ 1 + \frac{1}{997920} (84s^8 - 301s^6 + 359s^4 - 103s^2 - 103) \right].$$

Из формулы (14) видим, что на отрезке  $s \in [0,1]$

$$| x^*(s) - x_1(s) | \leq 1,2 \cdot 10^{-6} \quad \text{и} \quad | x^*(s) - x_3(s) | \leq 5,8 \cdot 10^{-11}$$

### Литература

1. Бабкин, Б. Н., Решение одной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка методом Чаплыгина, Прикл. мат. и мех. 18, № 2, (1954), 239—242.
2. Гавурин, М. К., Аналитические методы исследования нелинейных функциональных преобразований, Уч. зап. ЛГУ. серия матем. н., вып. 19, (1950), 59—154.
3. Казик, Ю. Я. и Тамме, Э. Э., Об одном методе приближенного решения функциональных уравнений, ДАН 101, № 6, (1955), 981—984.
4. Казик, Ю. Я., О сходимости итерационных методов (в настоящем выпуске).
5. Hamilton, H. J., A Type of variation on Newton's Method, Am. Math. Monthly, 57, (1950), 517—522.

# ÜHEST MITTELINEAARSETE OPERAATORVÖRRANDITE LIGIKAUDSE LAHENDAMISE MEETODIST

U. Kaasik ja E. Tamme

Resümee

Olgu  $P(x)$  analüütiline operaator Banachi ruumist lineaarsesse ruumi. Käesolevas töös vaadeldakse võrrandi

$$P(x) = 0 \tag{1}$$

lahendamist iteratsiooniprotsessidega

$$\Delta x_k = x_k - x_0 = - \left[ E + \sum_{i=1}^k \frac{\gamma_i}{i!} \Gamma_0 P^{(i)}(x_0) \Delta x_{k-i+1}^\alpha \dots \Delta x_{k-2}^\alpha \Delta x_{k-1}^\beta \right]^{-1} \cdot \left[ \Gamma_0 P(x_0) - \sum_{i=2}^k \frac{\gamma_i - 1}{i!} \Gamma_0 P^{(i)}(x_0) \Delta x_{k-i+1}^\alpha \dots \Delta x_{k-2}^\alpha \Delta x_{k-1}^{\beta+1} \right] \tag{2}$$

( $x_0$  on alglähend ja  $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$ ), kus kas  $\alpha = \beta = 1$  ja  $0 \leq \gamma_i \leq 2$  või  $\alpha = 0$ ,  $\beta = i - 1$  ja  $0 \leq \gamma_i \leq i$ .

Operaatori  $P$  analüütilisuse tõttu eksisteerib selline analüütiline funktsioon

$$\pi(\delta) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \delta^i,$$

et  $\|\Gamma_0 P_0(x_0)\| \leq a_0$ ,  $a_1 = -1$  ja  $\frac{1}{i!} \|\Gamma_0 P^{(i)}(x_0)\| \leq a_i$  ( $i = 2, 3, \dots$ ).

Tõestatakse järgmine teoreem. Kui:

1° eksisteerib pöördoperaator  $\Gamma_0$ ;

2° võrrand

$$\pi(\delta) = 0 \tag{3}$$

omab mittevõrdseid positiivseid lahendeid;

3° operaator  $P$  on analüütiline sfääris

$$\|x - x_0\| \leq \delta^*, \tag{4}$$

kus  $\delta^*$  on võrrandi (3) vähim positiivne lahend;

siis võrrand (1) omab sfääris (4) ainsa lahendi  $x^*$ , milleks koondub valemist (2) arvatud jada  $\{x_k\}$  kiirusega

$$\|x^* - x_k\| \leq \delta^* - \delta_k,$$

kus  $\delta_k$  on võrrandi (3) lähilahendid, mis on arvatud sama valemiga (2), lähtudes alglahendist  $\delta_0 = 0$ .

Töö teises paragrahvis näidatakse meetodi rakendamist võrrandsüsteemide, integraal- ja diferentsiaalvõrrandite lahendamisel.

# ÜBER EINE METHODE ZUR ANGENÄHERTEN LÖSUNG NICHTLINEAREN OPERATORGLEICHUNGEN

U. Kaasik und E. Tamme

Z u s a m m e n f a s s u n g

Es sei  $P(x)$  ein analytischer Operator, der einen Banachschen Raum in einen linearen Raum abbildet. In der vorliegenden Arbeit werden für die Gleichung

$$P(x) = 0 \tag{1}$$

die Iterationsverfahren

$$\Delta x_k = x_k - x_0 = - \left[ E + \sum_{i=2}^k \frac{\gamma_i}{i!} \Gamma_0 P^{(i)}(x_0) \Delta x_{k-i+1}^\alpha \dots \Delta x_{k-2}^\alpha \Delta x_{k-1}^\beta \right]^{-1} \left[ \Gamma_0 P(x_0) - \sum_{i=2}^k \frac{\gamma_i - 1}{i!} \Gamma_0 P^{(i)}(x_0) \Delta x_{k-i+1}^\alpha \dots \Delta x_{k-2}^\alpha \Delta x_{k-1}^{\beta+1} \right] \tag{2}$$

( $x_0$  ist die Anfangsnäherung und  $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$ ) betrachtet, wo entweder  $\alpha = \beta = 1$  und  $0 \leq \gamma_i \leq 2$  oder  $\alpha = 0$ ,  $\beta = i - 1$  und  $0 \leq \gamma_i \leq i$ .

Da  $P$  ein analytischer Operator ist, gibt es eine solche analytische Funktion

$$\pi(\delta) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \delta^i,$$

dass

$$\| \Gamma_0 P(x_0) \| \leq a_0, \quad a_1 = -1 \text{ und} \\ \frac{1}{i!} \| \Gamma_0 P^{(i)}(x_0) \| \leq a_i \quad (i = 2, 3, \dots).$$

Es wird der folgende Satz bewiesen.

1°  $\Gamma_0$  sei vorhanden;

2° die Gleichung

$$\pi(\delta) = 0 \tag{3}$$

habe ungleiche positive Lösungen;

3° der Operator  $P$  sei analytisch im Gebiet

$$\|x - x_0\| \leq \delta^* \quad (4)$$

wo  $\delta^*$  die kleinste positive Lösung der Gleichung (3) ist.

Dann besitzt die Gleichung (1) im Gebiet (4) die einzige Lösung  $x^*$  gegen die die aus der Formel (2) berechnete Folge  $\{x_k\}$  mit der Schnelligkeit

$$\|x^* - x_k\| \leq \delta^* - \delta_k$$

konvergiert, wo  $\delta_k$  die aus derselben Formel (2) berechneten Näherungslösungen der Gleichung (3) sind (Anfangsnäherung  $\delta_0 = 0$ ).

In § 2 werden die Anwendungen der Methode zur Auflösung der Gleichungssysteme, Integral- und Differentialgleichungen betrachtet.

# МИНИМАЛЬНЫЕ $n$ -МЕРНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ, ИМЕЮЩИЕ В КАЖДОЙ ТОЧКЕ $(n - 1)$ -МЕРНОЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ НАПРАВЛЕНИЕ

Ю. Г. Лумисте  
Кафедра геометрии

## Введение

1. Рассматриваются  $n$ -мерные поверхности  $V_n$  в  $N$ -мерном евклидовом пространстве  $R_N$ . Для их изучения применяются метод подвижного репера и исчисление внешних дифференциальных форм [1, 3].

Инфинитезимальное перемещение подвижного репера  $\{M, \mathbf{e}_I\}$  ( $I, K, \dots = 1, \dots, N$ ) определяется формулами

$$d\mathbf{M} = \omega^I \mathbf{e}_I, \tag{1}$$

$$d\mathbf{e}_I = \omega_I^K \mathbf{e}_K,$$

в которых формы  $\omega^I, \omega_I^K$  удовлетворяют т. н. уравнениям инвариантности метрики

$$dg_{IK} = g_{LK}\omega_I^L + g_{IL}\omega_K^L, \tag{2}$$

где  $g_{IK} = (\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_K)$  — метрический тензор пространства  $R_N$ , и т. н. структурным уравнениям

$$D\omega^I = [\omega^K \omega_K^I], \tag{3}$$

$$D\omega_I^K = [\omega_I^L \omega_L^K].$$

В дальнейшем часто применяется т. н. ортонормированный репер, в котором  $g_{IK} = \delta_{IK}$ , и уравнения (2) принимают вид

$$\omega_I^K + \omega_K^I = 0. \tag{2'}$$

2. Поверхность  $V_n$  в пространстве  $R_N$  определяется заданием её точки  $M$  как функции от  $n$  параметров.

Подвижной репер присоединяется к точке  $M$  поверхности  $V_n$  так, чтобы векторы  $\mathbf{e}_a$  ( $a, b, \dots = 1, \dots, n$ ) лежали в касательной плоскости к  $V_n$  в точке  $M$  (т. е. в плоскости точек  $\mathbf{M} + d\mathbf{M}$ )

Тогда  $d\mathbf{M} = \omega^\alpha \mathbf{e}_\alpha$ , и

$$\omega^\alpha = 0 \quad (\alpha, \beta, \dots = n + 1, \dots, N) \tag{4}$$

Продолжением системы (4) получается

$$\omega_a^\alpha = \Lambda_{ab}^\alpha \omega^b, \quad \Lambda_{ab}^\alpha = \Lambda_{ba}^\alpha, \quad (5)$$

и дальше

$$d\Lambda_{ab}^\alpha = \Lambda_{cb}^\alpha \omega_a^c + \Lambda_{ac}^\alpha \omega_b^c - \Lambda_{ab}^\beta \omega_\beta^\alpha + \Lambda_{abc}^\alpha \omega^c, \quad (6)$$

где  $\Lambda_{abc}^\alpha$  — симметричны по нижним индексам.

Плоскость, натянутая на точку  $M$  и векторы  $\mathbf{e}_{ab} = \Lambda_{ab}^\alpha \mathbf{e}_\alpha$ , инвариантно связана с поверхностью  $V_n$  и называется её первой нормальной плоскостью в точке  $M$ . Если она имеет размерность

$n_1, n_1 \leq \frac{n(n+1)}{2}$ , то можно  $n_1$  векторов репера  $\mathbf{e}_{a_1} (a_1, b_1, \dots = n+1, n+n_1)$  выбрать лежащими на ней. Тогда  $\Lambda_{ab}^{\alpha_1} = 0 (a_1, \beta_1, \dots = n+n_1+1, \dots, N)$ , и из (6)

$$\Lambda_{ab}^{a_1} \omega_{a_1}^{\alpha_1} = \Lambda_{abc}^{\alpha_1} \omega^c \quad (7)$$

Плоскость, натянутая на касательную плоскость и первую нормальную плоскость поверхности  $V_n$  в точке  $M$ , называется первой соприкасающейся плоскостью поверхности  $V_n$  в этой точке. Она является плоскостью точек  $\mathbf{M} + d\mathbf{M} + d^2\mathbf{M}$ .

3. Поверхность  $V_n$  в пространстве  $R_N$  называется минимальной, если вариация объёма каждой её области, ограниченной замкнутой  $(n-1)$ -мерной подповерхностью, равна нулю при закреплённой границе. Известная теорема Липшица [2] утверждает, что это определение равносильно требованию равенства нулю т. н. вектора средней кривизны

$$g^{ab} \Lambda_{ab}^{a_1} \mathbf{e}_{a_1} = 0 \quad (8)$$

во всех точках поверхности.

4. Любые  $p$  линейно независимые векторы определяют направление ( $p$ -мерное) в точке  $M$ : плоскость, натянутую на точку  $M$ , и эти векторы.

Два одномерных направления в касательной плоскости поверхности  $V_n$  в точке  $M$ , определяемые векторами  $\mathbf{e}_a$  и  $\mathbf{e}_b$ , называются сопряжёнными, если они обладают взаимно тем свойством, что при смещении точки  $M$  в одном направлении другое направление инфинитезимально не выходит из касательной плоскости поверхности  $V_n$  в точке  $M$ . Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\Lambda_{ab}^{a_1} = 0 \quad (a, b \text{ — фикс.}). \quad (9)$$

Направление ( $p$ -мерное) в касательной плоскости поверхности  $V_n$  называется асимптотическим, если любые два его одномерных направления сопряжены.

Подповерхность  $V_p$  поверхности  $V_n$  называется асимптотической, если её касательная плоскость в каждой её точке имеет асимптотическое направление. Легко доказывается, что подповерхность  $V_p$  является асимптотической тогда и только тогда, если её первая соприкасающаяся плоскость в любой её точке содержится в касательной плоскости поверхности  $V_n$  в этой точке. В частности, любая плоская подповерхность данной поверхности является асимптотической.

Число параметров, от которых зависит касательная плоскость поверхности  $V_n$ , называется рангом поверхности [3]. Поверхность  $V_n$  имеет ранг  $r$  тогда и только тогда, если она расслаивается на  $r$ -параметрическое семейство  $(n - r)$ -мерных плоских образующих, причём касательная плоскость поверхности  $V_n$  остается неизменной при любом смещении точки касания внутри плоской образующей.

5. В настоящей работе рассматриваются  $n$ -мерные минимальные поверхности  $V_n$  имеющие в каждой своей точке  $(n - 1)$ -мерное асимптотическое направление. Дается их классификация, охватывающая все основные случаи, и характеризуется строение поверхности в каждом отдельном случае.

Работа выполнена при кафедре дифференциальной геометрии Московского государственного университета под руководством доц. А. М. Васильева, которому автор выражает свою искреннюю благодарность.

## § 1. Минимальная поверхность $V_n$ с полем асимптотических направлений $A_{n-1}$ , не являющаяся гиперповерхностью

1. Поверхность  $V_n$  в пространстве  $R_N$  называется поверхностью с полем асимптотических направлений  $A_{n-1}$  (с полем  $A_{n-1}$ ), если она имеет в каждой точке одно  $(n - 1)$ -мерное асимптотическое направление  $A_{n-1}$ . Репер к точке  $M$  такой поверхности присоединяется так, чтобы векторы  $e_i$  ( $i, j = 2, \dots, n$ ) лежали в асимптотическом направлении  $A_{n-1}$ .

Тогда, в силу (9),

$$A_{ij}^{a_1} = 0 \quad (10)$$

Если поверхность  $V_n$ , кроме того, является минимальной, то имеет место (8), из которого, в силу ортогональности репера и (10), следует, что

$$A_{11}^{a_1} = 0, \quad (11)$$

т. е. направление в касательной плоскости, ортогональное к  $A_{n-1}$ , также является асимптотическим.

**Теорема 1.** *Минимальная поверхность  $V_n$  с полем асимптотических направлений  $A_{n-1}$  лежит в своей первой соприкасающейся плоскости, размерность которой не превышает  $2n - 1$ .*

**Доказательство.** Из (7) следует, в силу (10), (11) и линейной независимости т. н. главных форм  $\omega^i$ , что  $A_{abc}^{\alpha_1} = 0$ , и так как матрица  $\|A_{ab}^{\alpha_1}\|$  (в которой значениям  $a_1$  соответствуют строки, а сочетаниям  $(a, b)$  — столбцы) имеет полный ранг, то  $\omega_{a_1}^{\alpha_1} = 0$ . Теперь из формул (1), (4), (5) следует, что векторы  $dM$ ,  $d^2M$ ,  $d^{n+n_1+1}M$  выражаются через  $n + n_1$  векторов  $e_a$ ,  $e_{a_1}$  и, следовательно, между ними имеет место линейная зависимость. Радиус-вектор точки  $M$  поверхности  $V_n$  является, таким образом, решением линейного однородного дифференциального уравнения, и выражается, следовательно, в виде суммы постоянного вектора и линейной комбинации  $n + n_1$  постоянных векторов, т. е. поверхность лежит в некоторой  $(n + n_1)$ -мерной плоскости, которая естественно совпадает с её первой соприкасающейся плоскостью.

Так как из векторов  $e_{ab}$  на которые натянута первая нормальная плоскость поверхности, отличны от нуля только  $e_{ii}$ , то  $n_1 \leq n - 1$  и  $n + n_1 \leq 2n - 1$ .

**2. Теорема 2.<sup>1</sup>** *Если минимальная поверхность  $V_n$  с полем  $A_{n-1}$  не является гиперповерхностью, то она существует с произволом постоянных и расслаивается на однопараметрическое семейство  $\infty^1 R_{n-1}$   $(n - 1)$ -мерных плоских образующих  $R_{n-1}$ . При  $n_1 < n - 2$  она является цилиндром, построенным на минимальной поверхности  $V_m$  с семейством  $\infty^1 R_{m-1}$ , лежащей в плоскости  $R_{m+m_1}$ , причём образующие цилиндра ортогональны к плоскости  $R_{m+m_1}$ . Относительно  $t$  и  $t_1$  возможны два случая: (а)  $t = n_1 + 1$ ,  $t_1 = t - 1$ ; (б)  $t = n_1 + 2$ ,  $t_1 = t - 2$ .*

**Доказательство.** Если минимальная поверхность  $V_n$  с полем  $A_{n-1}$  не является гиперповерхностью, то, в силу теоремы 1,  $n_1 > 1$ . Среди векторов  $e_{ii}$  имеются, следовательно, по крайней мере два линейно независимых. Векторы  $e_i$  можно перенумеровать так, чтобы линейно независимыми были  $e_{1p}$  ( $p, q = 2, \dots, n_1 + 1$ ) Пусть

$$e_{i\pi} = c_{\pi}^p e_{1p} \quad (\pi, \varrho = n_1 + 2, \dots, n)$$

<sup>1</sup> Результаты теоремы 2 допускают следующие обобщения: Если  $n$ -мерная поверхность с полем  $(n - 1)$ -мерных асимптотических направлений в проективном пространстве имеет соприкасающуюся плоскость размерности  $n + n_1$ ,  $n_1 > 2$ , то она расслаивается на однопараметрическое семейство  $(n - 1)$ -мерных плоских образующих. Если  $n_1 < n - 1$ , то поверхность имеет неполный ранг  $n_1 + 1$  и обладает в каждой точке ещё вторым  $(n - n_1)$ -мерным асимптотическим направлением. Поверхность расслаивается на второе семейство  $(n - n_1)$ -мерных асимптотических подповерхностей тогда и только тогда, когда она является конусом с  $(n - n_1 - 2)$ -мерной «вершиной».

Если совершить преобразование репера

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_p &= \mathbf{e}_p, \\ \mathbf{e}_\pi &= \xi_\pi^p \mathbf{e}_p + \xi_\pi^0 \mathbf{e}_\varrho, \end{aligned} \quad (12)$$

то

$$\mathbf{e}_{1\pi} = (\xi_\pi^p + \xi_\pi^0 c_\varrho^p) \mathbf{e}_{1p}.$$

Преобразование (12) можно выбрать так, чтобы после него векторы  $\mathbf{e}'_{1i}$  были попарно линейно независимы. Действительно, векторы  $\mathbf{e}_\pi$  можно выбрать последовательно, причем на каждом шаге исключается только конечное число направлений в касательной плоскости, уравнения которых выражают коллинеарность соответствующего вектора  $\mathbf{e}_{1\pi}$  с каждым предыдущим.

Из (6) и (10) следует

$$\Lambda_{1i}^{a_1} \omega_j^1 + \Lambda_{1j}^{a_1} \omega_i^1 + \Lambda_{ij}^{a_1} \omega^1 + \Lambda_{ijk}^{a_1} \omega^k = 0, \quad (13)$$

и отсюда

$$\omega_i^1 = \Gamma_{ik}^1 \omega^k + \Gamma_{i1}^1 \omega^1, \quad (14)$$

$$\Lambda_{1i}^{a_1} \Gamma_{jk}^1 + \Lambda_{1j}^{a_1} \Gamma_{ik}^1 + \Lambda_{ij}^{a_1} = 0, \quad (15)$$

$$\Lambda_{1i}^{a_1} \Gamma_{j1}^1 + \Lambda_{1j}^{a_1} \Gamma_{i1}^1 + \Lambda_{1ij}^{a_1} = 0 \quad (16)$$

Если выписать равенство (15) при  $i = j$  и вычесть из него почленно равенство, которое получается из (15), если заменить в нём индексы  $j$  и  $k$ , и взять опять  $i = j$ , то получается

$$\Lambda_{1i}^{a_1} (2\Gamma_{ik}^1 - \Gamma_{ki}^1) - \Lambda_{1k}^{a_1} \Gamma_{ii}^1 = 0. \quad (17)$$

Отсюда заменой индексов  $i$  и  $k$  получается

$$\Lambda_{1i}^{a_1} \Gamma_{kk}^1 - \Lambda_{1k}^{a_1} (2\Gamma_{ki}^1 - \Gamma_{ik}^1) = 0. \quad (18)$$

Репер по вышеуказанному может быть выбран так, чтобы векторы  $\mathbf{e}_{1i}$  и  $\mathbf{e}_{1k}$  при любых фиксированных  $i$  и  $k$ ,  $i \neq k$  были линейно независимы. Тогда из (17) и (18) следует, что  $\Gamma_{ik}^1 = \Gamma_{ki}^1 = \Gamma_{ii}^1 = \Gamma_{kk}^1 = 0$ , т. е.

$$\omega_i^1 = a_i \omega^1 \quad (19)$$

Продолжение системы (19) приводит к уравнениям

$$da_i = a_j \omega_j^1 + (\Lambda_{1i,1j} - a_i a_j) \omega^1 + a_i \omega^1, \quad (20)$$

где

$$\Lambda_{1i,1j} = \sum_{a_i} \Lambda_{1i}^{a_i} \Lambda_{1j}^{a_i} = (\mathbf{e}_{1i}, \mathbf{e}_{1j}). \quad (21)$$

Из (6) и (11) следует, в силу (2') и (19), что

$$\Lambda_{11i}^{a_1} = 0 \quad (22)$$

и, следовательно

$$d\Lambda_{1i}^{a_1} = \Lambda_{1j}^{a_1} \omega^j - \Lambda_{1i}^{b_1} \omega_{b_1}^{a_1} - (\Lambda_{1i}^{a_1} a_j + \Lambda_{1j}^{a_1} a_i) \omega^j. \quad (23)$$

Если продифференцировать внешним образом уравнения (23) и подставить (20), то получаются внешние квадратичные уравнения, большинство членов которых взаимно сокращаются. Остаются только

$$(\Lambda_{1j}^{a_1} a_i + \Lambda_{1i}^{a_1} a_j) [\omega^1 \omega^j] = 0,$$

и отсюда, в случае неплюской поверхности,

$$\alpha_i = 0. \quad (24)$$

Теперь система пфаффовых уравнений (4), (5) (с учётом (10) и (11)), (19), (20) и (23) оказывается вполне интегрируемой, т. е. рассматриваемая поверхность  $V_n$  существует с произволом постоянных.

Уравнение  $\omega^1 = 0$  также является, в силу (19), вполне интегрируемым, и поверхность  $V_n$  расслаивается, следовательно, на однопараметрическое семейство  $(n-1)$ -мерных подповерхностей. Так как, в силу (10) и (19),

$$de_i \equiv \omega_i^j e_j \pmod{\omega^1},$$

то эти подповерхности являются плоскостями. Поверхность  $V_n$  расслаивается, таким образом, на семейство  $\infty^1 R_{n-1}$ .

Преобразование (12) можно, с другой стороны, выбрать так, чтобы векторы  $e'_\pi$  лежали в  $(n-n_1-1)$ -мерном направлении

$$x^p + x^\pi c_\pi^p = 0.$$

Тогда  $e_{1\pi} = 0$ , и, если вернуться к старым обозначениям,

$$\Lambda_{1\pi}^{a_1} = 0. \quad (25)$$

Из (6) и (24) следует теперь, в силу (10), (11) и (22), что

$$\Lambda_{1p}^{a_1} \omega_\pi^p + \Lambda_{1\pi p}^{a_1} \omega^p + \Lambda_{1\pi q}^{a_1} \omega^q = 0. \quad (26)$$

Если подставить (25) в (16), то получается  $\Lambda_{1\pi q}^{a_1} = 0$ ,  $\Lambda_{1\pi q}^{a_1} = -\Lambda_{1p}^{a_1} a_\pi$ . Уравнения (26) можно писать, следовательно, в виде

$$\Lambda_{1p}^{a_1} (\omega_\pi^p - a_\pi \omega^p) = 0$$

и отсюда

$$\omega_\pi^p = a_\pi \omega^p \quad (27)$$

Формулы инфинитезимального перемещения репера пишутся теперь в виде

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{M} &= \omega^1 \mathbf{e}_1 + \omega^p \mathbf{e}_p + \omega^\pi \mathbf{e}_\pi, \\
 d\mathbf{e}_1 &= -\omega^1 \sum_p a_p \mathbf{e}_p - \omega^1 \sum_\pi a_\pi \mathbf{e}_\pi + \Lambda_{1p}^{a_1} \omega^p \mathbf{e}_{a_1}, \\
 d\mathbf{e}_p &= a_p \omega^1 \mathbf{e}_1 + \omega_p^q \mathbf{e}_q - \omega^p \sum_\pi a_\pi \mathbf{e}_\pi + \Lambda_{1p}^{a_1} \omega^1 \mathbf{e}_{a_1}, \quad (28) \\
 d\mathbf{e}_\pi &= a_\pi (\omega^1 \mathbf{e}_1 + \omega^p \mathbf{e}_p) + \omega_\pi^q \mathbf{e}_q, \\
 d\mathbf{e}_{a_1} &= -\Lambda_{1p}^{a_1} \omega^p \mathbf{e}_1 - \omega^1 \sum_p \Lambda_{1p}^{a_1} \mathbf{e}_p + \omega_{a_1}^{b_1} \mathbf{e}_{b_1},
 \end{aligned}$$

а система  $\omega^p = 0$  является вполне интегрируемой. Поверхность  $V_n$  расслаивается, следовательно, на семейство  $(n - n_1)$ -мерных асимптотических подповерхностей  $V_{n-n_1}$ . Подповерхность  $V_{n-n_1}$  пересекается с образующей  $R_{n-1}$  по некоторой  $(n - n_1 - 1)$ -мерной подповерхности, касательная плоскость которой натянута на векторы  $\mathbf{e}_\pi$ . Так как, в силу (28<sub>1</sub>)

$$d\mathbf{e}_\pi \equiv \omega_\pi^q \mathbf{e}_q \pmod{\omega^1, \omega^p},$$

то эта подповерхность является плоскостью  $R_{n-n_1-1}$ .

Из того, что по формулам (28)  $d\mathbf{e}_1 \equiv 0$ ,  $d\mathbf{e}_p \equiv \omega_p^q \mathbf{e}_q \pmod{\omega^1, \omega^p}$ , следует, что при смещении точки  $M$  на плоскости  $R_{n-n_1-1}$  касательные плоскости как всей поверхности  $V_n$ , так и асимптотической подповерхности  $V_{n-n_1}$ , остаются неизменными. Следовательно,  $V_{n-n_1}$  имеет ранг 1, а  $V_n$  имеет ранг  $n_1 + 1$ .

Система  $\omega^\pi = 0$  также является, в силу (19) и (27), вполне интегрируемой и определяет семейство подповерхностей  $V_{n_1+1}$ , ортогональных к образующим  $R_{n-n_1-1}$ .

В дальнейшем оказывается полезным вектор  $\mathbf{a} = \sum_\pi a_\pi \mathbf{e}_\pi$

Так как из (20), (24) и (27) следует

$$da_\pi = a_\rho \omega_\pi^q - a_\pi a_\rho \omega^\rho, \quad (29)$$

то, в силу (29), (28<sub>4</sub>) и (2'),

$$d\mathbf{a} = -\mathbf{a} a_\pi \omega^\pi + (\mathbf{a}, \mathbf{a})(\omega^1 \mathbf{e}_1 + \omega^p \mathbf{e}_p),$$

т. е. вектор  $\mathbf{a}$  инвариантно связан с точкой  $M$  поверхности  $V_n$

(а) Пусть  $\mathbf{a} = 0$ , т. е.  $a_\pi = 0$ . В этом случае при помощи (28) нетрудно проверить, что имеет место случай (а) теоремы 2.

(b) Пусть  $\mathbf{a} \neq 0$ . В этом случае можно репер выбрать так, чтобы вектор  $\mathbf{e}_{n_1+2}$  был коллинеарен с вектором  $\mathbf{a}$ . Тогда

$$a_{\hat{\pi}} = 0 \quad (\pi, \hat{q} = n_1 + 3, \dots, n),$$

и из (29) следует

$$\omega_{\hat{\pi}}^{n_1+2} = 0, \quad da_{n_1+2} = -(a_{n_1+2})^2 \omega^{n_1+2} \quad (30)$$

Формулы (28<sub>2-4</sub>) пишутся теперь в виде

$$\begin{aligned} d\mathbf{e}_1 &= -\omega^1 \sum_p a_p \mathbf{e}_p - \mathbf{a}\omega^1 + \Lambda_{1p}^{a_1} \omega^p \mathbf{e}_a, \\ d\mathbf{e}_p &= a_p \omega^1 \mathbf{e}_1 + \omega_p^q \mathbf{e}_q - \omega^p \mathbf{a} + \Lambda_{1p}^{a_1} \omega^1 \mathbf{e}_a, \\ d\mathbf{e}_{n_1+2} &= a_{n_1+2} (\omega^1 \mathbf{e}_1 + \omega^p \mathbf{e}_p), \\ d\mathbf{e}_{\hat{\pi}} &= \omega_{\hat{\pi}}^{\hat{q}} \mathbf{e}_{\hat{q}}. \end{aligned} \quad (31)$$

Система  $\omega^1 = \omega^p = \omega^{n_1+2} = 0$  является вполне интегрируемой и определяет семейство подповерхностей, которые, в силу (31<sub>4</sub>) являются плоскими образующими  $R_{n-n_1-2}$ . Система  $\omega^{\hat{\pi}} = 0$  также является вполне интегрируемой и определяет семейство подповерхностей  $V_{n_1+2}$ , ортогональных к образующим  $R_{n-n_1-2}$ . При помощи (31) и (28<sub>5</sub>) нетрудно теперь проверить, что имеет место случай (b) теоремы 2.

**З а м е ч а н и е 1:** Из доказательства теоремы 2 явствует, что минимальная поверхность  $V_n$  с семейством  $\infty^1 R_{n-1}$  при  $n_1 = n - 2$  (случай (b)) имеет семейство прямолинейных образующих с направлением вектора  $\mathbf{e}_n$ , при смещении вдоль которых касательная плоскость к  $V_n$  остается неизменной. Так как, в силу (30<sub>2</sub>) и (31<sub>3</sub>),

$$d(\mathbf{M} - \frac{1}{a_n} \mathbf{e}_n) = 0,$$

то все прямолинейные образующие проходят через точку  $\mathbf{P} = \mathbf{M} - \frac{1}{a_n} \mathbf{e}_n$ , которая остается неподвижной при любом смещении точки  $M$  на поверхности  $V_n$ .

**З а м е ч а н и е 2:** Теорему 2 нельзя распространить на минимальные гиперповерхности  $V_n$  с полем  $A_{n-1}$ . Но если уже заранее требовать, чтобы минимальная гиперповерхность обладала семейством  $\infty^1 R_{n-1}$  (т. е. имело место (19)), то для таких поверхностей все остальные утверждения теоремы 2 оказываются верными. В доказательстве теоремы нужно просто считать  $n_1 = 1$ . В случаях (a) и (b) мы имеем тогда дело (a) с прямым геликоидом в  $R_3$ , и (b) с минимальной  $V_3$  с  $\infty^1 R_2$  в  $R_4$ .

§ 2. О движениях в  $R_{n+n_1}$  оставляющих инвариантной минимальную поверхность  $V_n$  с семейством  $\infty^1 R_{n-1}$

1. В силу теоремы 2 и замечания 2 исследование свойств минимальной поверхности  $V_n$  с полем асимптотических направлений  $A_{n-1}$  в случае, когда  $V_n$  не является гиперповерхностью, и минимальной гиперповерхности с семейством  $\infty^1 R_{n-1}$  сводится к исследованию двух случаев:

- (а) минимальная  $V_n$  с семейством  $\infty^1 R_{n-1}$  в  $R_{2n-1}$ ,  
 (б) минимальная  $V_n$  с семейством  $\infty^1 R_{n-1}$  в  $R_{2n-2}$

Их исследование естественно начинать с рассмотрения ортогональных траекторий семейства  $\infty^1 R_{n-1}$ . Оказывается, что они являются кривыми с постоянными кривизнами. Чтобы это показать, нужно в случае ортогональных траекторий рассматривать формулы Френе [2]

$$\begin{aligned} d\mathbf{M} &= \mathbf{i}_0 ds, \\ d\mathbf{i}_0 &= \kappa_1 \mathbf{i}_1 ds, \\ d\mathbf{i}_1 &= -(\kappa_1 \mathbf{i}_0 - \kappa_2 \mathbf{i}_2) ds, \\ d\mathbf{i}_2 &= -(\kappa_2 \mathbf{i}_1 - \kappa_3 \mathbf{i}_3) ds, \\ &\dots \\ d\mathbf{i}_r &= -\kappa_r \mathbf{i}_{r-1}, \end{aligned} \quad (32)$$

где  $s$  — длина дуги,  $\mathbf{i}_0$  — единичный касательный вектор,  $\mathbf{i}_\varrho$  ( $\varrho = 1, \dots, r$ ) — единичный вектор по  $\varrho$ -той нормали, а  $\kappa_\varrho$  —  $\varrho$ -тая кривизна кривой.

Так как, в силу (19),  $D\omega^i = [\omega^j \omega_j^i]$ ,  $D\omega^1 = [a_i \omega^i \omega^1]$ , то система  $\omega^i = 0$  ( $i = 2, \dots, n$ ) и уравнение  $\omega^1 = 0$  являются вполне интегрируемыми и их левые части можно, следовательно [1], представить в виде

$$\omega^i = \alpha_j^i du^j, \quad \omega^1 = \alpha du^1 \quad (33)$$

Из (33<sub>2</sub>) следует, что  $D\omega^1 = [dln\alpha \omega^1]$ , т. е.  $[dln\alpha - \alpha_i \omega^i, \omega^1] = 0$ . Отсюда получается, что  $dln\alpha$  выражается только через  $du^1$  и  $du^i$ , т. е.  $\alpha = \alpha(u^1, u^i)$ . Если обозначить  $s = \int \alpha(u^1, u^i) du^1$ , то

$$\omega^1 = ds - \alpha_i du^i. \quad (34)$$

Ортогональная траектория семейства  $\infty^1 R_{n-1}$  определяется теперь уравнениями  $u^i = \text{const}$ . Если символ дифференцирования при  $u^i = \text{const}$  обозначить через  $\delta$ , то, в силу (33) и (34)

$$\delta \mathbf{M} = \mathbf{e}_1 \delta s,$$

т. е.  $s$  является длиной дуги, а  $\mathbf{e}_1$  — вектором  $\mathbf{i}_0$  в формулах Френе для ортогональной траектории.

В дальнейшем нужно случаи (а) и (б) рассматривать отдельно.

(a) Так как

$$\delta \mathbf{e}_1 = -\delta s \sum_i a_i \mathbf{e}_i,$$

то в формуле (32<sub>2</sub>)

$$\kappa_1 \mathbf{i}_1 = -\sum_i a_i \mathbf{e}_i \quad (35)$$

Если выбрать  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{i}_1$ , то  $\kappa_1 = -a_2$ ,  $a_{i'} = 0$  ( $i' = 3, \dots, n$ ). Здесь  $\kappa_1$  не может равняться нулю тождественно, так как в этом случае из (20) и (24) следовало бы противоречие

$$\Delta_{1i, 1j} = (\mathbf{e}_{1i}, \mathbf{e}_{1j}) = 0.$$

Из (20) и (24) следует теперь, что

$$\delta \kappa_1 = 0, \quad \omega_{i'}^2(\delta) = \omega_2^{i'}(\delta) = 0 \quad (36)$$

Так как

$$\delta \mathbf{e}_2 = -\kappa_1 \mathbf{e}_1 \delta s + \mathbf{e}_{12} \delta s,$$

то в формуле (32<sub>3</sub>)

$$\kappa_2 \mathbf{i}_2 = \mathbf{e}_{12}, \quad \text{т. е. } \kappa_2^2 = \Delta_{12, 12}.$$

Здесь  $\kappa_2 \neq 0$ , так как  $\mathbf{e}_{1i} \neq 0$  ( $i = 2, \dots, n$ )

Из (21) и (23) следует, что

$$d\Delta_{1i, 1j} = \Delta_{1k, 1j} \omega_i^k + \Delta_{1i, 1k} \omega_j^k - (2\Delta_{1i, 1j} a_k + \Delta_{1k, 1j} a_i + \Delta_{1i, 1k} a_j) \omega^k, \quad (37)$$

и отсюда, в силу (36<sub>2</sub>), следует  $\delta \kappa_2 = 0$ .

Так как, в силу (23) и (28<sub>5</sub>)

$$d\mathbf{e}_{1i} = \mathbf{e}_{1j} \omega_i^j - (\mathbf{e}_{1i} a_j + \mathbf{e}_{1j} a_i + \Delta_{1i, 1j} \mathbf{e}_1) \omega^j - \omega^1 \sum_j \Delta_{1i, 1j} \mathbf{e}_j, \quad (38)$$

то

$$\kappa_2 \delta \mathbf{i}_2 = \delta \mathbf{e}_{12} = -(\kappa_2^2 \mathbf{i}_1 + \sum_{j'} \Delta_{12, 1j'} \mathbf{e}_{j'}) \delta s.$$

Следовательно, в формуле (32<sub>4</sub>)

$$\kappa_2 \kappa_3 \mathbf{i}_3 = -\sum_{j'} \Delta_{12, 1j'} \mathbf{e}_{j'}.$$

Здесь исключительным является случай, когда  $\Delta_{12, 1j'} = 0$  ( $j' = 3, \dots, n$ ), т. е. когда  $\kappa_3 = \kappa_4 = \dots = \kappa_{2n-2} = 0$  и ортогональные траектории являются винтовыми линиями в трехмерных плоскостях.

В общем случае можно выбрать  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{i}_3$ . Тогда

$$\kappa_2 \kappa_3 = -\Delta_{12, 13}, \quad \Delta_{12, 1j''} = 0 \quad (j'' = 4, \dots, n).$$

Из (37) следует теперь, что

$$\delta \kappa_3 = 0, \quad \omega_{j''}^3(\delta) = \omega_3^{j''}(\delta) = 0. \quad (39)$$

Так как  $\delta \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_{31} \delta s$ , то в формуле (32<sub>5</sub>)

$$\kappa_4 \mathbf{i}_4 = \mathbf{e}_{13} + \kappa_3 \mathbf{i}_2$$

Отсюда

$$\kappa_4^2 = \Lambda_{13,13} + 2 \frac{\kappa_3}{\kappa_2} \Lambda_{12,13} + \kappa_3^2 = \Lambda_{13,13} - \kappa_3^2$$

и из (37) следует, в силу (39), что  $\delta \kappa_4 = 0$ .

В общем случае можно этот процесс продолжать до тех пор, пока число векторов  $\mathbf{i}_0, \mathbf{i}_1, \dots$  равно размерности пространства  $2n - 1$ . В исключительных случаях, когда  $\kappa_\rho = 0$  ( $\rho = 2\sigma + 1, \dots, 2n - 2$ ), ортогональные траектории лежат в нечетномерных плоскостях, размерности которых меньше  $2n - 1$ . Во всех случаях получается, что кривизны ортогональной траектории постоянны.

(b) В случае (b) равенство (35) пишется в виде

$$\kappa_1 \mathbf{i}_1 = - \sum_p a_p \mathbf{e}_p - a_n \mathbf{e}_n \quad (p = 2, \dots, n - 1),$$

где  $\mathbf{e}_n$  — единичный вектор, направленный по той прямолинейной образующей поверхности  $V_n$ , при смещении вдоль которой касательная плоскость к  $V_n$  остается неизменной (см. замечание 1).

Если выбрать  $\mathbf{e}_2$  коллинеарным с вектором  $\kappa_1 \mathbf{i}_1 + a_n \mathbf{e}_n$ , то получается

$$\begin{aligned} \kappa_1 \mathbf{i}_1 &= -a_2 \mathbf{e}_2 - a_n \mathbf{e}_n, \quad \kappa_1^2 = a_2^2 + a_n^2 \neq 0, \\ a_{p'} &= 0 \quad (p' = 3, \dots, n - 1). \end{aligned} \quad (40)$$

Из (20) и (24) следует, в силу (27), что

$$\delta a_2 = \delta a_n = 0, \quad \omega_{p'}^2(\delta) = \omega_{2'}^2(\delta) = 0. \quad (41)$$

Следовательно,  $\delta \kappa_1 = 0$ . Из (40<sub>1</sub>), в силу (31<sub>1,3</sub>) и (41<sub>1</sub>),

$$\kappa_1 \delta \mathbf{i}_1 = -a_2 (a_2 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_{12}) \delta s - a_n^2 \mathbf{e}_1 \delta s = -(\kappa_1^2 \mathbf{i}_0 + a_2 \mathbf{e}_{12}) \delta s.$$

Следовательно, в формуле (32<sub>3</sub>)

$$\kappa_1 \kappa_2 \mathbf{i}_2 = -a_2 \mathbf{e}_{12}, \quad \text{т. е. } \kappa_1^2 \kappa_2^2 = a_2^2 \Lambda_{12,12}. \quad (42)$$

Из (37) и (41) следует, что  $\delta \kappa_2 = 0$ .

Здесь является исключительным случай, когда  $a_2 = 0$ , т. е. когда  $\kappa_2 = 0$  и ортогональные траектории являются окружностями.

Из (42), в силу (38) и (40<sub>1</sub>),

$$\kappa_1 \kappa_2 \delta \mathbf{i}_2 = - \left[ \Lambda_{12,12} (\kappa_1 \mathbf{i}_1 + a_n \mathbf{e}_n) - a_2 \sum_{p'} \Lambda_{12,1p'} \mathbf{e}_{p'} \right] \delta s,$$

где левая часть по формуле (32<sub>4</sub>) равна

$$-\kappa_1 \kappa_2^2 \mathbf{i}_1 + \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 \mathbf{i}_3$$

Если выбрать  $\mathbf{e}_3$  в плоскости векторов  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_3, \mathbf{e}_n$ , то, в силу (42<sub>2</sub>) и (40<sub>2</sub>),

$$\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 \mathbf{i}_3 = \sigma^2 \kappa_1 \kappa_2^2 \mathbf{i}_1 - a_n \Lambda_{12, 12} \mathbf{e}_n + a_2 \Lambda_{12, 13} \mathbf{e}_3, \quad (43)$$

где  $\sigma^2 = \frac{a_n^2}{a_2^2}$ , а  $\Lambda_{12, 1p''} = 0$  ( $p'' = 4, \dots, n-1$ ).

Отсюда, в силу (37),

$$\delta \Lambda_{12, 13} = 0, \quad \omega_{p''}^3(\delta) = \omega_3^{p''}(\delta) = 0,$$

и следовательно  $\delta \kappa_3 = 0$ .

Из (43) явствует, что если  $\kappa_2 \neq 0$ , то  $\kappa_3 \neq 0$ . Если продифференцировать (43) при  $u^i = \text{const}$  и воспользоваться формулами (35<sub>5</sub>), (42<sub>2</sub>), получается

$$\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 \kappa_4 \mathbf{i}_4 = \kappa_1 \kappa_2 (\kappa_3^2 - \sigma^2 \kappa_2^2) \mathbf{i}_2 + a_2 \Lambda_{12, 13} \mathbf{e}_{13}$$

Здесь исключительным является случай, когда  $\kappa_3^2 = \sigma^2 \kappa_2^2$ ,  $\Lambda_{12, 13} = 0$ , т. е. когда  $\kappa_4 = 0$ , и ортогональные траектории лежат в четырёхмерных плоскостях.

В общем случае  $\kappa_4 \neq 0$ ,  $\delta \kappa_4 = 0$  и процесс можно продолжить. Здесь ортогональные траектории всегда являются кривыми с постоянными кривизнами в чётномерных пространствах.

2. Оказывается, что поверхность  $V_n$  в обоих случаях (а) и (б) переходит в себя при движениях некоторой однопараметрической группы движений, и что ортогональные траектории семейства  $\infty^1 R_{n-1}$  являются при этом траекториями точек образующей  $R_{n-1}$ .

Эту группу движений можно характеризовать при помощи точек, прямых, двумерных направлений и т. д., которые остаются инвариантными при её движениях. При её изучении следует отнести поверхность к такому реперу, в котором  $\omega_i^j(\delta) = 0$ . Это окажется всегда возможным, так как сначала можно, в силу (33<sub>1</sub>), перейти в голономный репер  $\{M, \mathbf{e}^i\}$ , в котором  $\omega^i = du^i$ , и следовательно  $\omega_i^j = \Gamma_{ik}^j du^k$ , а затем совершить любое преобразование  $\mathbf{e}^{i'} = \beta_i^j \mathbf{e}_j$ , где  $\delta \beta_i^j = 0$ . Новый репер не обязан быть ортогональным, но всегда имеют место  $g_{11} = 1$ ,  $g_{1i} = g_{i1} = g_{ia} = 0$ , и их дифференциальные следствия.

Инфинитезимальное вращение направления вектора  $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$ ,  $\delta x^i = 0$ , при смещении вдоль ортогональной траектории определяется формулой

$$\delta \mathbf{x} = \mathbf{y} \delta s,$$

где  $\mathbf{y} = x^i (a_i \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_{1i})$ ,  $\delta(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = 0$ .

Следовательно, условие, при котором направление вектора описывает двумерное направление при смещении вдоль ортогональной траектории, имеет вид

$$\delta \mathbf{y} = \lambda \mathbf{x} \delta s$$

и, в силу того, что

$$\delta y = -x^i (g^{ik} a_i a_j e_k + g^{ik} \Lambda_{1i, 1j} e_k) \delta s,$$

пишется в виде системы

$$(A_{ij} + \lambda g_{ij}) x^i = 0, \quad (44)$$

где

$$A_{ij} = \Lambda_{1, i 1j} + a_i a_j. \quad (45)$$

Существование и число искомых направлений зависит от свойств уравнения

$$\text{Det} | A_{ij} + \lambda g_{ij} | = 0. \quad (46)$$

Его решения являются собственными числами симметрической матрицы, т. е. они вещественны и в общем случае различны.

Таким образом, в общем случае на образующей в каждой точке  $M$  имеются  $n - 1$  искомых направлений.

Пусть единичные векторы репера  $e_i$  направлены в этих направлениях. Тогда решением системы (44) при  $\lambda = \lambda_k$  являются  $x^j = \delta_k^j$ , т. е.  $A_{kj} + \lambda_k g_{kj} = 0$ .

Если здесь совершить альтернацию по индексам  $k$  и  $j$ , получается

$$(\lambda_k - \lambda_j) g_{kj} = 0.$$

В общем случае отсюда следует, что  $g_{kj} = 0$  при  $k \neq j$ , и следовательно,  $A_{kj} = 0$  ( $k \neq j$ ),  $A_{kk} = -\lambda_k$ , т. е.

$$\Lambda_{1k, 1j} = -a_k a_j \quad (k \neq j), \quad \Lambda_{1i, 1i} = -(a_i^2 + \lambda_i). \quad (47)$$

Если продифференцировать (47<sub>1</sub>) при помощи формул (37), (20) и (24), то получается после сокращений

$$(\lambda_k - \lambda_j) \omega_k^j = 0 \quad (k \neq j).$$

В общем случае отсюда следует, что  $\omega_k^j = 0$ , и

$$de_k = (a_k e_1 + e_{1k}) \omega^1$$

т. е. двумерные направления, которые описываются векторами, определяемыми из системы (44), остаются инвариантными при любом смещении на поверхности  $V_n$ .

Эти двумерные направления называются направляющими линиями поверхности  $V_n$ . Они натянуты на векторы

$$e_k, \quad a_k e_1 + e_{1k} \quad (48)$$

и поэтому, в силу (47<sub>1</sub>), вполне ортогональны между собой.

3. В случае (b) оказалось (см. замечание 1), что точка  $P = M - \frac{1}{a_n} e_n$  остается неподвижной при любом смещении на поверхности  $V_n$ . Если смещение производится вдоль ортогональной траектории, то, в силу  $\delta a_n = 0$ , точка  $P$  остается неподвижной и по отношению к подвижному ортонормированному реперу.

Следовательно, такое смещение является поворотом в пространстве  $R_{2n-2}$  вокруг точки  $P$ .

Так как, в силу (46<sub>2</sub>),

$$\delta\varphi_k = |\delta e_k| = \sqrt{|\lambda_k|} \delta s, \quad \text{где } \delta \sqrt{|\lambda_k|} = 0, \quad (49)$$

то стационарные углы [4] поворота на направляющих листах являются линейными функциями от параметра  $s$ .

В исключительном случае, когда  $a_p = 0$ , из (20) и (24) следует, что

$$-a_n^2 \omega^p + \Lambda_{1p, 1q} \omega^q = 0,$$

т. е.

$$\Lambda_{1p, 1p} = a_n^2, \quad \Lambda_{1p, 1q} = 0 \quad (p \neq q).$$

Теперь

$$A_{pq} = 0 \quad (p \neq q), \quad A_{pp} = a_n^2, \quad A_{pn} = 0, \quad A_{nn} = a_n^2, \quad g_{ij} = \delta_{ij},$$

и уравнение (46) имеет один  $(n-1)$ -кратный корень  $\lambda = -a_n^2$ , который обращает в нуль элементы матрицы системы (44). Следовательно, в этом случае любое направление в образующей описывает двумерное направление при смещении вдоль ортогональной траектории, т. е. это смещение является паратактическим поворотом [4] вокруг точки  $P$ .

Вообще, в случаях, когда уравнение (45) имеет кратные корни, при смещении вдоль ортогональной траектории в некоторых четномерных инвариантных направлениях совершается, в силу (48), паратактический поворот. Они соответствуют случаям, когда ортогональные траектории лежат в плоскостях, размерности которых меньше размерности пространства.

В случае (а) оказывается, что если  $x^i$  являются решением системы

$$A_{ij} x^j + a_i = 0, \quad (50)$$

то точка  $\mathbf{P} = \mathbf{M} + x^i \mathbf{e}_i$  описывает прямую при смещении на  $V_n$  вдоль ортогональной образующей. Действительно, в силу  $\delta x^i = 0$ ,  $\delta \mathbf{P} = \mathbf{p} \delta s$ , где

$$\mathbf{p} = (1 + x^i a_i) \mathbf{e}_1 + x^i \mathbf{e}_{1i}, \quad (51)$$

и следовательно

$$\delta \mathbf{p} = -\delta s \sum_j [(1 + x^i a_i) a_j + x^i \Lambda_{1i, 1j}] \mathbf{e}_j = 0,$$

в силу (45) и (50).

Оказывается, что матрица  $\|A_{ij}\|$  системы (50) является всегда неособой. Действительно, если воспользоваться репером, постро-

енным при рассмотрении ортогональных траекторий, то матрица  $\|A_{1i, 1j}\|$  принимает вид

$$\left( \begin{array}{c|c} K_{\xi\eta} & 0 \\ \hline 0 & A_{1\varphi, 1\psi} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \xi, \eta = 2, \dots, \rho \\ \varphi, \psi = \rho + 1, \dots, n \end{array} \right),$$

где

$$\|K_{\xi\eta}\| = \begin{pmatrix} \kappa_2^2 & -\kappa_2\kappa_3 & 0 & 0 \\ -\kappa_2\kappa_3 & \kappa_3^2 + \kappa_4^2 & -\kappa_4\kappa_5 & 0 \\ 0 & -\kappa_4\kappa_5 & \kappa_5^2 + \kappa_6^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa_{2\rho-1}^2 + \kappa_{2\rho}^2 \end{pmatrix}$$

В общем случае  $\rho = n$  и  $\|A_{1i, 1j}\| = \|K_{ij}\|$ .

В силу того, что  $A_{1i, 1j} = (\mathbf{e}_{1i}, \mathbf{e}_{1j})$  где  $\mathbf{e}_{1i}$  — линейно независимые векторы, матрица  $\|A_{1i, 1j}\|$  является неособой. Следовательно, матрица  $\|A_{ij}\|$ , которая, в силу (45), получается из нее заменой элемента  $\kappa_2^2$  в левом верхнем углу элементом  $\kappa_1^2 + \kappa_2^2$ , также является неособой.

Система (50) определяет, таким образом, единственную точку  $P$ . Пусть вершина репера помещена в эту точку. Тогда  $a_i = 0$ , и из (20) следует, в силу  $\text{Det } |A_{1i, 1j}| \neq 0$ , что  $\omega^j = 0$ . Следовательно, точка  $P$  является вполне фиксированной точкой на образующей. Она называется горловой точкой образующей. Прямая, состоящая из горловых точек, называется осью поверхности  $V_n$ . Так как вектор (51), в силу (49), ортогонален к векторам (48), то ось поверхности ортогональна ко всем направляющим листам поверхности.

Из того, что  $\delta | \mathbf{p} | = 0$ , следует, что смещение вдоль ортогональной траектории на поверхности  $V_n$  является винтовым движением [4] в пространстве  $R_{2n-1}$ .

В итоге получается следующая теорема.

**Теорема 3.** Минимальная поверхность  $V_n$  с семейством  $\infty^1 R_{n-1}$  в пространстве  $R_{n+n_1}$  при  $n_1 \geq n - 2$  допускает однопараметрическую группу движений пространства  $R_{n+n_1}$ , которые оставляют ее инвариантой. При  $n_1 = n - 1$  эта группа является группой винтовых движений с неподвижной прямой, при  $n_1 = n - 2$  она является группой поворотов вокруг неподвижной точки. При  $n_1 < n - 2$ , когда  $V_n$  является цилиндром (см. теорема 2 и замечание 2), к этим движениям прибавляются соответствующие переносы и отражения.

Эта теорема обобщает известный результат, по которому единственными минимальными линейчатыми поверхностями  $V_2$  в  $R_3$

являются прямые геликойды. Рассмотренные в ней поверхности в случае  $n_1 = n - 1$  называются  $n$ -геликойдами; они обладают рядом замечательных свойств [4].

### § 3. Минимальная гиперповерхность $V_n$ с полем асимптотических направлений $A_{n-1}$

1. В случае гиперповерхности  $V_n$  одномерные асимптотические направления образуют в каждой точке  $M$   $(n - 1)$ -мерный асимптотический конус второго порядка

$$\Lambda_{ab}x^ax^b = 0 \quad (52)$$

Если гиперповерхность имеет в точке  $M$  асимптотическое направление  $A_{n-1}$  то асимптотический конус (52) имеет  $(n - 1)$ -мерную плоскую образующую и распадается, следовательно, на два  $(n - 1)$ -мерные направления  $A_{n-1}$  и  $A'_{n-1}$ . Если бы направления  $A_{n-1}$  и  $A'_{n-1}$  совпадали, то, при выборе вектора  $e_1$  ортонормированного репера ортогонально к ним, имели бы место

$$\Lambda_{ij} = \Lambda_{1i} = 0 \quad (i, j = 2, \dots, n)$$

и условие минимальности (8) было бы для неплоских поверхностей противоречивым. Следовательно, в случае минимальной гиперповерхности направления  $A_{n-1}$  и  $A'_{n-1}$  не совпадают.

**Теорема 4.** *Минимальная гиперповерхность  $V_n$  имеет поле асимптотических направлений  $A_{n-1}$  тогда и только тогда, когда её ранг равен двум.<sup>2</sup> Она существует в этом случае с произволом  $2(n - 1)$  функций одного аргумента.*

**Доказательство:** Пусть векторы репера  $e_1$  и  $e_2$  лежат, соответственно, в направлениях  $A_{n-1}$  и  $A'_{n-1}$  ортогонально к их пересечению  $A_{n-2}$ , и пусть векторы  $e_i$  ( $i, j = 3, \dots, n$ ) лежат в направлении  $A_{n-2}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \Lambda_{11} = \Lambda_{1i} = \Lambda_{22} = \Lambda_{2i} = \Lambda_{ij} = 0, \\ g_{1i} = g^{1i} = g_{2i} = g^{2i} = 0. \end{aligned} \quad (53)$$

Из условия минимальности (8) следует теперь для неплоских поверхностей, что

$$g^{12} = g_{12} = 0.$$

Репер можно теперь выбрать ортонормированным.

<sup>2</sup> Этот результат имеет более общий характер и является справедливым и для гиперповерхностей с полем  $(n - 1)$ -мерных асимптотических направлений в  $(n + 1)$ -мерном проективном пространстве (если исключить поверхности ранга 1).

Из (6) следует, в силу (53), что

$$\begin{aligned}\omega_i^1 &= a_i \omega^1 - b_i \omega^2 \\ \omega_i^2 &= b_i \omega^1 + a_i \omega^2 \\ \omega^1 &= \lambda \omega^1 + \mu \omega^2 + \frac{1}{2} b_i \omega^i \\ d \ln \sqrt{|\Lambda_{12}|} &= \lambda \omega^2 - \mu \omega^1 - \frac{1}{2} a_i \omega^i.\end{aligned}\tag{54}$$

Внешнее дифференцирование уравнений (54) даёт следующую систему ковариантов

$$\begin{aligned}[\Delta a_i \omega^1] - [\Delta b_i \omega^2] &= 0 \\ [\Delta b_i \omega^1] + [\Delta a_i \omega^2] &= 0 \\ [\Delta \lambda \omega^1] + [\Delta \mu + \nu \omega^1, \omega^2] + \frac{1}{2} [\Delta b_i \omega^i] &= 0 \\ [\Delta \lambda - \kappa \omega^1, \omega^2] - 2[\Delta \mu \omega^1] - [\Delta a_i \omega^i] &= 0,\end{aligned}\tag{55}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta a_i &= da_i - a_j \omega^j + (a_i a_j - b_i b_j) \omega^i \\ \Delta b_i &= db_i - b_j \omega^j + (a_i b_j + a_j b_i) \omega^i \\ \Delta \lambda &= d\lambda + (\lambda a_i + \frac{1}{2} \mu b_i) \omega^i \\ \Delta \mu &= d\mu + (\mu a_i - \frac{1}{2} \lambda b_i) \omega^i \\ \nu &= \lambda^2 + \mu^2 - \Lambda_{12}^2 + \sum_i (a_i^2 + b_i^2) \\ \kappa &= \sum_i a_i b_i.\end{aligned}\tag{56}$$

Если развернуть систему ковариантов по лемме Картана, то получается

$$\begin{aligned}\Delta a_i &= a_i \omega^1 + \beta_i \omega^2 \\ \Delta b_i &= -\beta_i \omega^1 + a_i \omega^2 \\ \Delta \lambda &= \varrho \omega^1 + \sigma \omega^2 - \frac{1}{2} \beta_i \omega^i \\ \Delta \mu &= (\sigma - \nu) \omega^1 + (\kappa - \varrho) \omega^2 + \frac{1}{2} a_i \omega^i.\end{aligned}\tag{57}$$

Следовательно, произвол общего интегрального элемента определяется  $N = 2(n - 1)$  произвольными коэффициентами. При определении характеров системы получается, что  $s_1 = 2(n - 1)$ ,  $s_i = 0$ , т. е. число Картана равно  $Q = 2(n - 1)$  и  $Q = N$ . Рассматриваемая система находится в инволюции [1], и её решение определяется с произволом  $2(n - 1)$  функций одного аргумента.

Так как, в силу (54),  $D\omega^1 \equiv 0, D\omega^2 \equiv 0 \pmod{\omega^1, \omega^2}$ , то система  $\omega^1 = \omega^2 = 0$  является вполне интегрируемой и определяет семейство  $(n-2)$ -мерных подповерхностей. Из

$$de_1 \equiv \frac{1}{2} b_i \omega^i e_2, \quad de_2 \equiv -\frac{1}{2} b_i \omega^i e_1, \quad de_i \equiv \omega_i^j e_j \pmod{\omega^1, \omega^2}$$

следует, что эти подповерхности являются плоскостями  $R_{n-2}$  и касательная плоскость к  $V_n$  остается неизменной при любом смещении точки касания внутри  $R_{n-2}$  т. е. поверхность  $V_n$  имеет ранг 2.

Обратно, если поверхность  $V_n$  имеет ранг 2, и векторы  $e_i$  ( $i = 3, \dots, n$ ) лежат в плоской образующей, то

$$\Lambda_{1i} = \Lambda_{2i} = \Lambda_{ij} = 0$$

и асимптотический конус (52) имеет уравнение

$$\Lambda_{11}(x^1)^2 + 2\Lambda_{12}x^1x^2 + \Lambda_{22}(x^2)^2 = 0$$

то есть распадается на два  $(n-1)$ -мерные направления.

2. При помощи коэффициентов  $a_i$  и  $b_i$  в уравнениях (54) можно построить два вектора в плоской образующей  $R_{n-2}$

$$\mathbf{a} = \sum_i a_i \mathbf{e}_i \quad \text{и} \quad \mathbf{b} = \sum_i b_i \mathbf{e}_i.$$

Оказывается, что, в силу (54—56) и (2'),  $d\mathbf{a}$  и  $d\mathbf{b}$  выражаются только через главные формы  $\omega^1, \omega^2, \omega^i$ , т. е. векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  инвариантно связаны с точкой поверхности.

Теорема 5. Минимальная гиперповерхность  $V_n$  с полем  $A_{n-1}$  является

1) При  $\mathbf{a} \neq 0, \mathbf{b} \neq 0, \mathbf{a} \neq \mathbf{b}$  или

а) — поверхностью  $V_n$ , образованной из касательных плоскостей некоторой поверхности  $V_{n-2}$  ранга 2, являющейся минимальной тогда и только тогда, если  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ , или

б) — цилиндром, построенным на минимальной поверхности  $V_4$  ранга 2 в  $R_5$ , плоские образующие которой проходят через неподвижную точку  $P$  причем образующие цилиндра ортогональны к  $R_5$ ;

2) при  $\mathbf{a} \neq 0, \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$  — цилиндром построенным на минимальной поверхности  $V_3$  ранга 2 в  $R_4$ , причем образующие цилиндра ортогональны к  $R_4$ ; если здесь  $\mathbf{b} = 0$ , то  $V_3$  является конусом;

3) при  $\mathbf{a} = 0$  (тогда и  $\mathbf{b} = 0$ ) — цилиндром, построенным на минимальной поверхности  $V_2$  в  $R_3$ , причем образующие цилиндра ортогональны к  $R_3$ .

Расслоение поверхности  $V_n$  на семейства  $(n-1)$ -мерных асимптотических подповерхностей имеет место только в случаях, когда  $\mathbf{b} = 0$ .

Доказательство: 1) Ортонормированный репер в образующей  $R_{n-2}$  можно выбрать так, чтобы  $\mathbf{e}_3$  был коллинеарен с вектором  $\mathbf{b}$ , а  $\mathbf{e}_4$  лежал в плоскости векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Тогда

$$b_4 = b_p = a_p = 0 \quad (p, q = 5, \dots, n), \quad (58)$$

т. е.  $\mathbf{a} = a_3\mathbf{e}_3 + a_4\mathbf{e}_4$ ,  $\mathbf{b} = b_3\mathbf{e}_3$ ,  $a_4 \neq 0$ ,  $b_3 \neq 0$ .

Из (54)

$$\begin{aligned} \omega_3^1 &= a_3\omega^1 - b_3\omega^2, & \omega_4^1 &= a_4\omega^1, & \omega_p^1 &= 0, \\ \omega_3^2 &= b_3\omega^1 + a_3\omega^2, & \omega_4^2 &= a_4\omega^2, & \omega_p^2 &= 0, \end{aligned} \quad (59)$$

а из (56) и (57)

$$\begin{aligned} da_3 - a_4\omega_3^4 + (a_3^2 - b_3^2)\omega^3 + a_3a_4\omega^4 &= a_3\omega^1 + \beta_3\omega^2 \\ da_4 - a_3\omega_3^4 + a_4(a_3\omega^3 + a_4\omega^4) &= a_4\omega^1 + \beta_4\omega^2 \\ &\quad - a_3\omega_p^3 - a_4\omega_p^4 = a_p\omega^1 + \beta_p\omega^2 \\ db_3 + 2a_3b_3\omega^3 + a_4b_3\omega^4 &= -\beta_3\omega^1 + a_3\omega^2 \\ &\quad - b_3\omega_4^3 + a_4b_3\omega^3 = -\beta_4\omega^1 + a_4\omega^2 \\ &\quad - b_3\omega_p^3 = -\beta_p\omega^1 + a_p\omega^2 \end{aligned} \quad (60)$$

Оказывается, что плоскость  $R_{n-4}$ , натянутая на точку  $\mathbf{P} = \mathbf{M} - \frac{1}{a_4}\mathbf{e}_4$  и векторы  $\mathbf{e}_p$ , инфинитезимально не выходит из плоской образующей при любом смещении точки  $M$  на поверхности  $V_n$ . Действительно, из (59) и (60) следует, что

$$d\mathbf{P} = \Theta^3\mathbf{e}_3 + \Theta^4\mathbf{e}_4 + \Theta^p\mathbf{e}_p,$$

где

$$\begin{aligned} \Theta^3 &= s\omega^1 + t\omega^2, & s &= -\frac{1}{a_4b_3}\beta_4, & t &= \frac{1}{a_4b_3}a_4 \\ \Theta^4 &= u\omega^1 + v\omega^2, & u &= \frac{1}{a_4^2}(a_4 + \frac{a_3}{b_3}\beta_4), & v &= \frac{1}{a_4^2}(\beta_4 - \frac{a_3}{b_3}a_4) \end{aligned} \quad (61)$$

$$d\mathbf{e}_p = \omega_p^3\mathbf{e}_3 + \omega_p^4\mathbf{e}_4 + \omega_p^q\mathbf{e}_q.$$

Плоскость  $R_{n-4}$  описывает некоторую поверхность, размерность которой зависит от ранга системы форм  $\Theta^3$ ,  $\Theta^4$ ,  $\Theta^p$ . Этот ранг, очевидно, зависит только от определителя

$$\Delta = sv - ut = -\frac{1}{a_4^3b_3}(a_4^2 + \beta_4^2).$$

а) Пусть  $\Delta \neq 0$ . Тогда точка  $P$  описывает некоторую поверхность  $V_{n-2}$ . Очевидно, что  $V_{n-2}$  имеет ранг 2, и что  $V_n$  образована из касательных плоскости поверхности  $V_{n-2}$

Векторы репера  $\mathbf{e}_3$ ,  $\mathbf{e}_4$ ,  $\mathbf{e}_p$  являются касательными, а векторы  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}$  — нормальными к поверхности  $V_{n-2}$ .

Дифференциалы касательных векторов имеют следующие нормальные компоненты:

$$\begin{aligned} d\mathbf{e}_3 &: (a_3\omega^1 - b_3\omega^2)\mathbf{e}_1 + (b_3\omega^1 + a_3\omega^2)\mathbf{e}_2, \\ d\mathbf{e}_4 &: a_4\omega^1\mathbf{e}_1 + a_4\omega^2\mathbf{e}_2, \\ d\mathbf{e}_p &: 0. \end{aligned}$$

Следовательно, для поверхности  $V_{n-2}$

$$\begin{aligned} \Lambda_{33}^1\Theta^3 + \Lambda_{34}^1\Theta^4 &= a_3\omega^1 - b_3\omega^2, & \Lambda_{33}^2\Theta^3 + \Lambda_{34}^2\Theta^4 &= b_3\omega^1 + a_3\omega^2, \\ \Lambda_{43}^1\Theta^3 + \Lambda_{44}^1\Theta^4 &= a_4\omega^1, & \Lambda_{43}^2\Theta^3 + \Lambda_{44}^2\Theta^4 &= a_4\omega^2, \\ \Lambda_{3p}^1 &= \Lambda_{3p}^2 = \Lambda_{4p}^1 = \Lambda_{4p}^2 = \Lambda_{pq}^1 = \Lambda_{pq}^2 = 0. \end{aligned} \quad (62)$$

Из (61)  $\omega^1 = \frac{1}{\Delta}(v\Theta^3 - t\Theta^4)$ ,  $\omega^2 = \frac{1}{\Delta}(-u\Theta^3 + s\Theta^4)$ . Если подставить эти результаты в (62), получаются, в частности, равенства

$$\begin{aligned} \Lambda_{33}^1 &= \frac{1}{\Delta}(a_3v + b_3u), & \Lambda_{33}^2 &= \frac{1}{\Delta}(b_3v - a_3u), \\ \Lambda_{44}^1 &= -\frac{1}{\Delta}a_4t, & \Lambda_{44}^2 &= \frac{1}{\Delta}a_4s \end{aligned}$$

Условие минимальности (8) поверхности  $V_{n-2}$  приводит теперь к системе

$$\begin{aligned} 2a_3b_3\beta_4 + (b_3^2 - a_4^2 - a_3^2)\alpha_4 &= 0 \\ 2a_3b_3\alpha_4 - (b_3^2 - a_4^2 - a_3^2)\beta_4 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу  $a_4^2 + \beta_4^2 \neq 0$ , следует  $a_3 = b_3^2 - a_4^2 = 0$ , т. е. векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  действительно ортогональны. Остается заметить что условие  $b_3^2 - a_4^2 = 0$  является следствием из условия  $a_3 = 0$ . Это легко получается из уравнений (60<sub>1,5</sub>) в силу того, что  $\omega_4^3 + \omega_3^4 = 0$ .

б) Пусть  $\Delta = 0$ , т. е.

$$\alpha_4 = \beta_4 = 0.$$

Из (60<sub>2,5</sub>) следует

$$d\left(\frac{1}{a^4}\right) = \omega^4 \quad (63)$$

$$\omega_4^3 = a_4\omega^3 \quad (64)$$

При внешней дифференцировании уравнения (63) получается

$$[\omega^p\omega_p^4] = 0.$$

Если сюда подставить выражение  $\omega_p^4$  из (60<sub>3,6</sub>), получается

$$a_3\alpha_p - b_3\beta_p = 0$$

$$b_3\alpha_p + a_3\beta_p = 0.$$

Так как  $b_3 \neq 0$ , то отсюда

$$\alpha_p = \beta_p = 0.$$

Следовательно, из (60<sub>3,6</sub>)

$$\omega_p^3 = \omega_p^4 = 0.$$

Теперь

$$d\mathbf{P} = \omega^p \mathbf{e}_p, \quad d\mathbf{e}_p = \omega_p^q \mathbf{e}_q, \quad (65)$$

а остальные формулы инфинитезимального перемещения пишутся в виде

$$\begin{aligned} d\mathbf{M} &= \omega^1 \mathbf{e}_1 + \omega^2 \mathbf{e}_2 + \omega^3 \mathbf{e}_3 + \omega^4 \mathbf{e}_4 + \omega^p \mathbf{e}_p \\ d\mathbf{e}_1 &= \omega_1^2 \mathbf{e}_2 - (a_3 \omega^1 - b_3 \omega^2) \mathbf{e}_3 - a_4 \omega^1 \mathbf{e}_4 + \Lambda_{12} \omega^2 \mathbf{e}_{n+1} \\ d\mathbf{e}_2 &= -\omega_2^1 \mathbf{e}_1 - (b_3 \omega^1 + a_3 \omega^2) \mathbf{e}_3 - a_4 \omega^2 \mathbf{e}_4 + \Lambda_{12} \omega^1 \mathbf{e}_{n+1} \\ d\mathbf{e}_3 &= (a_3 \omega^1 - b_3 \omega^2) \mathbf{e}_1 + (b_3 \omega^1 + a_3 \omega^2) \mathbf{e}_2 - a_4 \omega^3 \mathbf{e}_4 \\ d\mathbf{e}_4 &= a_4 (\omega^1 \mathbf{e}_1 + \omega^2 \mathbf{e}_2 + \omega^3 \mathbf{e}_3) \\ d\mathbf{e}_{n+1} &= -\Lambda_{12} (\omega^2 \mathbf{e}_1 + \omega^1 \mathbf{e}_2). \end{aligned} \quad (66)$$

Семейство подповерхностей, определяемое вполне интегрируемой системой  $\omega^1 = \omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = 0$ , состоит, в силу (66<sub>1</sub>) и (65<sub>2</sub>), из параллельных плоскостей  $R_{n-4}$ , т. е. поверхность  $V_n$  является цилиндром. Любая подповерхность семейства, определяемого вполне интегрируемой системой, является, в силу (66), поверхностью  $V_4$  в  $R_5$  на которой система  $\omega^1 = \omega^2 = 0$  выделяет семейство плоских образующей, вдоль которых касательная плоскость поверхности  $V_4$  остается неизменной. Из (65) следует, что точка  $\mathbf{P} = \mathbf{M} - \frac{1}{a_4} \mathbf{e}_4$  в плоской образующей остается неподвижной при любом смещении на поверхности  $V_4$ .

2) Ортонормированный репер в образующей  $R_{n-2}$  можно выбрать так, чтобы  $\mathbf{e}_3$  был коллинеарен к  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ . Тогда, кроме (58), ещё

$$a_4 = 0 \text{ т. е. } \omega_4^1 = \omega_4^2 = 0 \quad (67)$$

и из (60<sub>2,5</sub>), (60<sub>3,6</sub>) следует, что

$$\begin{aligned} a_3 a_4 - b_3 \beta_4 &= 0, & a_3 a_p - b_3 \beta_p &= 0, \\ b_3 a_4 + a_3 \beta_4 &= 0, & b_3 a_p + a_3 \beta_p &= 0 \end{aligned}$$

Отсюда, в силу  $a_3 \neq 0$ ,  $a_4 = \beta_4 = a_p = \beta_p = 0$  и следовательно,  $\omega_4^3 = \omega_p^3 = 0$

Формулы инфинитезимального перемещения репера принимают вид

$$\begin{aligned} d\mathbf{e}_1 &= \omega_1^2 \mathbf{e}_2 - (a_3 \omega^1 - b_3 \omega^2) \mathbf{e}_3 + \Lambda_{12} \omega^2 \mathbf{e}_{n+1} \\ d\mathbf{e}_2 &= -\omega_2^1 \mathbf{e}_1 - (b_3 \omega^1 + a_3 \omega^2) \mathbf{e}_3 + \Lambda_{12} \omega^1 \mathbf{e}_{n+1} \\ d\mathbf{e}_3 &= (a_3 \omega^1 - b_3 \omega^2) \mathbf{e}_1 + (b_3 \omega^1 + a_3 \omega^2) \mathbf{e}_2 \\ d\mathbf{e}_{n+1} &= -\Lambda_{12} (\omega^2 \mathbf{e}_1 + \omega^1 \mathbf{e}_2) \\ d\mathbf{e}_4 &= -\sum_p \omega_p^4 \mathbf{e}_p \\ d\mathbf{e}_p &= \omega_p^4 \mathbf{e}_4 + \omega_p^q \mathbf{e}_q. \end{aligned} \quad (68)$$

Система  $\omega^1 = \omega^2 = \omega^3 = 0$  является вполне интегрируемой и определяет семейство подповерхностей, которые, в силу (68), являются плоскими образующими  $R_{n-3}$ . Система  $\omega^4 = \omega^p = 0$  также является вполне интегрируемой и определяет семейство подповерхностей  $V_3$  в плоскости  $R_4$ , ортогональной к  $R_{n-3}$ . При помощи (68) нетрудно проверить, что имеет место случай 2) теоремы 5.

Если  $\mathbf{b} = 0$ , тогда кроме (58) и (67) ещё  $b_3 = 0$ ,  $\alpha_3 = \beta_3 = 0$ , и точка  $\mathbf{P} = \mathbf{M} - \frac{1}{a_3} \mathbf{e}_3$  остается неподвижной при любом смещении точки  $M$  на поверхности  $V_3$ .

3) В этом случае в (60<sub>1</sub>)  $a_3 = a_4 = 0$  и, следовательно,  $b_3 = 0$ , т. е.  $\mathbf{b} = 0$ . Тогда

$$\omega_i^1 = \omega_i^2 = 0 \quad (i, j = 3, \dots, n)$$

и формулы инфинитезимального перемещения репера принимают вид

$$d\mathbf{e}_1 = \omega_1 \mathbf{e}_2 + \Lambda_{12} \omega^2 \mathbf{e}_{n+1}$$

$$d\mathbf{e}_2 = -\omega_1^2 \mathbf{e}_1 + \Lambda_{12} \omega^1 \mathbf{e}_{n+1}$$

$$d\mathbf{e}_i = \omega_i^j \mathbf{e}_j$$

$$d\mathbf{e}_{n+1} = -\Lambda_{12} (\omega^2 \mathbf{e}_1 + \omega^1 \mathbf{e}_2).$$

Справедливость утверждения теоремы 5 в этом случае очевидна.

## Литература

1. Фиников, С. П., Метод внешних форм Картана, М.Л. (1948).
2. Схоутен И. А. и Стройк Д. Дж., Введение в новые методы дифференциальной геометрии, т. II, М. (1948).
3. Яненко, Н. Н., Некоторые вопросы теории вложения римановых метрик в евклидовы пространства, Успехи математических наук, т. VIII, вып. 1, (1953), 21—100.
4. Розенфельд, Б. А., Неевклидовы геометрии, М. (1955).

## OMA IGAS PUNKTIS $(n-1)$ -MÕÖTMELIST ASÜMPTOOTI- LIST SIHTI OMAVAD $n$ -MÕÖTMELISED MINIMAALPINNAD

U. Lumiste

Resümee

Vaadeldakse  $N$ -mõõtmelises eukleidilises ruumis selliseid  $n$ -mõõtmelisi minimaalpindu, mille igas punktis leidub vähemalt üks  $(n-1)$ -mõõtmeline asümptootiline siht. Antakse nende pindade kõiki põhijuhte haarav klassifikatsioon ning iseloomustatakse pinna geomeetrilist ehitust üksikutel juhtudel.

Põhilised tulemused võib kokku võtta järgmiselt.

Vaadeldav pind osutub

I juhul, kui ta ei ole hüperpind, kas

a) pinnaks  $(2n-1)$ -mõõtmelises ruumis, mis moodustatakse  $(n-1)$ -mõõtmelise tasandi poolt sellises pidevas krüviliikumises, mille telg lõikab moodustajat risti ( $n$ -mõõtmeline helikoid), või

b) pinnaks  $(2n-2)$ -mõõtmelises ruumis, mis moodustatakse  $(n-1)$ -mõõtmelise tasandi poolt pidevas pöörlemisliikumises ümber tasandi kindla punkti, või

c) silindriks, mille juhtpinnaks on üks mainitud pindadest ning mille moodustajad on risti juhtpinda sisaldava tasandiga;

II juhul, kui ta on hüperpind, kas

a) pinnaks, mis moodustatakse teatava kaheparameetrilist puutujatasandite parve omava  $(n-2)$ -mõõtmelise pinna puutujatasandite poolt, või

b) silindriks, mille juhtpinnaks on selline neljamõõtmeline minimaalpind kaheparameetrilise puutujatasandite parvega viiemõõtmelises tasandis, mille kahemõõtmelised tasandilised moodustajad lõikuvad ühes punktis; silindri moodustajad on siinjuures risti juhtpinda sisaldava tasandiga; või

c) silindriks, mille juhtpinnaks on kolmemõõtmeline minimaalpind kaheparameetrilise puutujatasandite parvega neljamõõtmelises tasandis ning mille moodustajad on risti juhtpinda sisaldava tasandiga, või

d) silindriks, mille juhtpinnaks on harilik kahemõõtmeline minimaalpind kolmemõõtmelises tasandis ning mille moodustajad on risti juhtpinda sisaldava tasandiga.

# DIE $n$ -DIMENSIONALEN MINIMALFLÄCHEN MIT EINER ( $n - 1$ )-DIMENSIONALEN ASYMTOTISCHEN RICHTUNG IN JEDEM PUNKTE

U. Lumiste

## Zusammenfassung

In der Arbeit werden im  $N$ -dimensionalen euklidischen Raum diejenigen  $n$ -dimensionalen Minimalflächen behandelt, die in jedem Punkte wenigstens eine  $(n - 1)$ -dimensionale asymptotische Richtung besitzen. Es wird die Klassifikation dieser Flächen gegeben und die geometrischen Eigenschaften der Fläche in einzelnen Fällen untersucht.

Die Hauptergebnisse lassen sich folgenderweise zusammenfassen:

Die betrachtete Fläche ist

I im Falle, wenn sie keine Hyperfläche ist, entweder

a) die Fläche in dem  $(2n - 1)$ -dimensionalen Raum, welche von der  $(n - 1)$ -dimensionalen Ebene erzeugt wird bei stetiger Schraubung, deren Schraubenachse die Erzeugende senkrecht trifft ( $n$ -dimensionale Schraubenfläche), oder

b) die Fläche in dem  $(2n - 2)$ -dimensionalen Raum, welche von der  $(n - 1)$ -dimensionalen Ebene erzeugt wird bei stetiger Drehung um einen festen Punkt der Ebene, oder

c) der Zylinder in dem  $N$ -dimensionalen Raum ( $N < 2n - 2$ ), dessen Leitfläche eine von den oberwähnten Flächen ist und dessen Erzeugende die die Leitfläche enthaltende Ebene senkrecht treffen;

II im Falle, wenn sie eine Hyperfläche ist, entweder

a) die Fläche, welche von den Tangentialebenen einer  $(n - 2)$ -dimensionalen Fläche mit zweiparametrischer Schar von Tangentialebenen erzeugt wird, oder

b) der Zylinder, dessen Leitfläche eine derartige vierdimensionale Minimalfläche mit zweiparametrischer Schar von Tangentialebenen in der fünfdimensionalen Ebene ist, deren zweidimensionale ebene Erzeugenden einen festen Punkt durchgehen; hierbei treffen

die Erzeugenden des Zylinders die die Leitfläche enthaltende Ebene senkrecht; oder

c) der Zylinder, dessen Leitfläche eine dreidimensionale Minimalfläche mit zweiparametrischer Schar von Tangentialflächen in der vierdimensionalen Ebene ist und dessen Erzeugenden die die Leitfläche enthaltende Ebene senkrecht treffen, oder

d) der Zylinder, dessen Leitfläche eine gewöhnliche, zweidimensionale Minimalfläche in der dreidimensionalen Ebene ist und dessen Erzeugende die die Leitfläche enthaltende Ebene senkrecht treffen.

## О ВЛИЯНИИ НАЧАЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ И ЭКСЦЕНТРИЧНОГО НАГРУЖЕНИЯ НА ПРОГИБЫ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

Доц., канд. физ.-мат. наук Ю. Р. Лепик

Кафедра теоретической механики

В последнее время появился ряд работ, в которых рассматривается равновесие сжатых упруго-пластических стержней при малой начальной кривизне или при внецентренно приложенной нагрузке. Все эти работы можно разделить на две группы. К первой группе относятся работы о равновесии более гибких стержней, где соответствующий идеальный (т. е. прямой) стержень теряет устойчивость при упругих деформациях; эту задачу можно в настоящее время считать — по крайней мере в главных чертах — решенной (см., например, работы [1], [2], [3]). Ко второй группе принадлежат работы о равновесии стержней настолько малой гибкости, что потеря устойчивости соответствующего идеального стержня происходит за пределом упругости. Этот вопрос был предметом исследования многих зарубежных авторов (см. работы [4], [5], [6], [7]), однако, во всех этих работах исходят из тех или других упрощающих предположений (допуская, например, что начальная форма стержня является синусоидом, пренебрегая влиянием зоны разгрузки или ограничивая идеализированными моделями стержня). Вследствие этого все эти решения являются только приближительными, точность которых нам неизвестна.

В настоящей работе сделана попытка решить задачу о равновесии стержней малой гибкости в точной постановке. При этом допускается, что гибкость стержня и эксцентриситет приложения нагрузки настолько малы, что в стержне не возникает зон пластических деформаций от растяжения. Материал пластинки считается несжимаемым; ограничивается случаем линейного упрочнения материала. Дается метод решения поставленной задачи, который позволяет учитывать и влияние зоны разгрузки.

§ 1. Постановка задачи и основные соотношения. Рассмотрим сжатый продольной силой стержень, сечение которого обладает двумя осями симметрии. Концы стержня

будем считать свободно опертыми. Допустим, что сжимающая сила  $P$  приложена с некоторым эксцентриситетом  $a$ ; эту величину мы будем считать положительной, если точка приложения силы  $P$  находится на отрицательной стороне оси  $z$  (фиг. 1). Пусть стержень имеет небольшой начальный прогиб, который обозначим символом  $w_n$ ; дополнительный прогиб, возникающий при изгибании стержня, обозначим символом  $w_g$ . Будем ограничиваться только случаем малых прогибов, считая при этом, что  $(\frac{dw}{dx})^2 \ll 1$  (здесь  $w = w_n + w_g + a$ ).

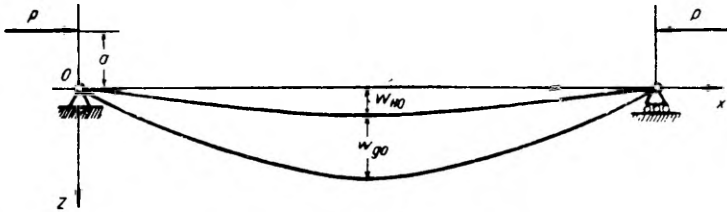


Рис. 1.

Обозначим символами  $e$  и  $\sigma$  величины относительного укорочения и сжимающего напряжения в элементе стержня. Если под символом  $\epsilon$  понимать величину относительного укорочения при  $z = 0$ , то на основании гипотезы плоских сечений можем написать, что

$$e = \epsilon + z \frac{d^2 w_g}{dx^2} \quad (1.1)$$

Деформация в рассматриваемой точке стержня может происходить упруго или пластически. В случае упругих деформаций очевидно

$$\sigma = Ee = E \left( \epsilon + z \frac{d^2 w_g}{dx^2} \right) \quad (1.2)$$

Пластические деформации можно разделить на активные и пассивные. Для случая линейного упрочнения материала (фиг. 2) имеем в зоне активных пластических деформаций соотношение ( $\sigma_s$  — напряжение на пределе текучести,  $\lambda = 1 - \frac{G''}{G}$  — параметр упрочнения):

$$\sigma = \lambda \sigma_s + E (1 - \lambda) \left( \epsilon + z \frac{d^2 w_g}{dx^2} \right) \quad (1.3)$$

Аналогичное соотношение для зоны пассивных пластических деформаций (для зоны разгрузки), можно получить только тогда,

если значения относительного укорочения и сжимающего напряжения, при которых началась разгрузка, известны.

Обозначим эти величины символами  $\bar{\sigma}$  и  $\bar{\epsilon}$ . Теперь на основании фиг. 2 (отрезок 3) уже легко найдём, что

$$\sigma = E \left( \epsilon + z \frac{d^2 w_g}{dx^2} \right) - \frac{\lambda}{1-\lambda} (\bar{\sigma} - \sigma_s). \quad (1.4)$$

С развитием разгрузки в стержне могут возникать вторичные пластические деформации, т. е. пластические деформации от растяжения (отрезок 4 на фиг. 2). Так как этот случай в настоя-

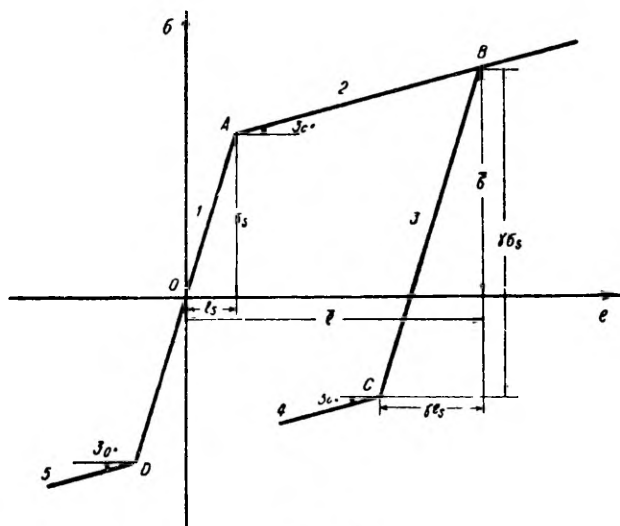


Рис. 2.

щей работе не рассматривается, то мы здесь и формулу для вычисления напряжения  $\sigma$  при вторичных пластических деформациях выписывать не будем.

Сжимающая сила  $P$  и изгибающий момент  $M$  в стержне вычисляются по формулам ( $h$  — высота,  $b(z)$  — ширина рассматриваемого сечения):

$$P = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma b(z) dz; \quad M = - \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma b(z) z dz. \quad (1.5)$$

Пусть будет  $z_0 = z_0(x)$  уравнением кривой, разделяющей зоны упругих и пассивных пластических деформаций;  $z_1 = z_1(x)$  — уравнением кривой, разделяющей зоны активных и пассивных пластических деформаций. Допустим еще для конкретности, что на всех этапах нагружения выполняется условие  $w_g + w_n +$

$+a > 0$ ; в таком случае возникновение зон пластических деформаций начинается у края  $z = -h/2$ .

Вычисляем интегралы (1.5), применяя при этом соотношения (1.2)–(1.4). Если ввести ещё обозначения

$$B_i = \int_{-h/2}^{z_1} b(z) z^{i-1} dz \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\Delta P = \frac{\lambda}{1-\lambda} \int_{z_1}^{z_0} (\bar{\sigma} - \sigma_s) b(z) dz; \quad \Delta M = \frac{\lambda}{1-\lambda} \int_{z_1}^{z_0} (\bar{\sigma} - \sigma_s) b(z) z dz \quad (1.6)$$

то мы находим ( $F$  — площадь сечения,  $I$  — момент инерции):

$$\begin{aligned} P &= E(F - \lambda B_1) \varepsilon - E \lambda B_2 \frac{d^2 w_g}{dx^2} + \lambda \sigma_s B_1 - \Delta P \\ M &= E \lambda B_2 \varepsilon - E(I - \lambda B_3) \frac{d^2 w_g}{dx^2} - \lambda \sigma_s B_2 + \Delta M. \end{aligned} \quad (1.7)$$

В дальнейшем целесообразно перейти к следующим безразмерным величинам

$$\begin{aligned} \xi &= 1 - \frac{2}{l} x; \quad w^* = \frac{2}{h} w; \quad z^* = \frac{2}{h} z; \quad a^* = \frac{2a}{h}; \\ b^* &= \frac{b(z)}{b(0)}; \quad F^* = \frac{2}{hb(0)} F; \quad I^* = \left(\frac{2}{h}\right)^3 \frac{I}{b(0)}; \quad B_i^* = \left(\frac{2}{h}\right)^i \frac{B_i}{b(0)}; \\ P^* &= \frac{Pl^2}{4EI}; \quad p = \frac{\lambda Pl^2}{4EI}; \quad m = \frac{\lambda Ml^2}{2Elh}; \quad \mu = \frac{e_s l^2}{h^2}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Теперь можем формулы (1.7), если учесть еще условие  $M = Pw = P(w_g + w_n + a)$ , переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{l^2}{h^2} (F^* - \lambda B_1^*) \varepsilon + \lambda \mu B_1^* - \lambda B_2^* w_g^{*''} &= I^* (P^* + p) \\ \frac{l^2}{h^2} \lambda B_2^* \varepsilon - \lambda \mu B_2^* - (I^* - \lambda B_3^*) w_g^{*''} &= I^* (P^* w^* - m) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь и в дальнейшем штрихами обозначены производные по  $\xi$ .

Элиминируя из зависимостей (1.9) величину  $\varepsilon$ , приходим к уравнению

$$w_g^{*''} = -I^* \Phi_1(z_1^*) (P^* w^* - m) - \Phi_2(z_1^*) [I^* (P^* + p) - \mu F^*], \quad (1.10)$$

где обозначено

$$\begin{aligned}\Phi_1(z_1^*) &= \frac{F^* - \lambda B_1^*}{(I^* - \lambda B_3^*)(F^* - \lambda B_1^*) - \lambda^2 B_2^{*2}} \\ \Phi_2(z_1^*) &= \frac{-\lambda B_2^*}{(I^* - \lambda B_3^*)(F^* - \lambda B_1^*) - \lambda^2 B_2^{*2}}\end{aligned}\quad (1.11)$$

Следует отметить, что уравнение (1.10) выведено для случая, когда в стержне имеются зоны пассивных пластических деформаций (тогда в рассматриваемой точке выполняется условие  $z_0 > z_1$ ). При тех значениях координаты  $\xi$ , где  $z_0 < z_1$  зона разгрузки не возникает; в этом случае поправочные члены  $p$  и  $m$  равняются нулю и в формулах (1.6)–(1.11) следует заменить символ  $z_1$  на  $z_0$  (здесь  $z_0$  граница упругих и пластических зон).

§ 2. Определение зоны разгрузки. Уравнение (1.10) может быть интегрировано только в случае, когда зависимость  $z_1^* = z_1^*(\xi)$  известна, т. е. когда распределение зоны разгрузки уже найдено. Дадим метод для определения искомой функции  $z_1^* = z_1^*(\xi)$ .

На границе активных и пассивных пластических деформаций всегда выполняется условие

$$\delta e|_{z^*=z_1^*} = \delta \varepsilon + \frac{h^2}{l^2} z_1^* \delta \omega_g^{*''} = 0. \quad (2.1)$$

Варьируя зависимости (1.9) и имея в виду, что\*

$$\delta B_i^* = b^*(z_1^*) z_1^{*i-1} \delta z_1^*$$

$$\delta p = -\lambda \frac{l^2}{I^* h^2} b^*(z_1^*) (\bar{e} - e_s)|_{z^*=z_1^*} \delta z_1^*$$

$$\delta m = -\lambda \frac{l^2}{I^* h^2} b^*(z_1^*) (\bar{e} - e_s)|_{z^*=z_1^*} z_1^* \delta z_1^*,$$

находим

$$-k_1 \delta \omega_g^{*''} = I^* \delta P^*$$

$$-k_2 \delta \omega_g^{*''} = I^* (\omega^* \delta P^* + P^* \delta \omega_g^*). \quad (2.2)$$

Здесь обозначено

$$k_1 = (F^* - \lambda B_1^*) z_1^* + \lambda B_2^*$$

$$k_2 = \lambda B_2^* z_1^* + I^* - \lambda B_3^* \quad (2.3)$$

Введем еще вспомогательную величину  $v = \frac{1}{I^*} \frac{\delta \omega_g^*}{\delta P^*}$ . Теперь можем переписать систему (2.2) в виде

$$v'' = -\frac{1}{k_1}$$

$$I^* P^* v = \frac{k_2}{k_1} \omega^*. \quad (2.4)$$

\* Поскольку в данном случае речь идёт о действительных вариациях деформационного состояния, то величины  $\bar{e}$  и  $\bar{\sigma}$  варьированию не подлежат.

Решая эту систему и элиминируя из решения величину  $v$ , находим нужную нам величину  $z_1^*$

Здесь следует принять во внимание, что уравнения (2.4) имеют смысл только при  $\delta P^* \neq 0$ , так как в противном случае было бы  $v \rightarrow \infty$ . Докажем, что если  $\delta \omega_g^* \neq 0$ , то и должно быть  $\delta P^* \neq 0$ . Доказательство можно провести от противного. Допустим, что при  $\delta \omega_g^* \neq 0$  вариация  $\delta P^*$  равняется нулю. Из первого уравнения системы (2.2) следует, что в этом случае  $k_1 \equiv 0$ ; следовательно  $z_1^* = const$  и  $k_2 = const$  (т. е. эти величины не зависят от координаты  $\xi$ ). Второе уравнение системы (2.2) получает теперь вид

$$\delta \omega_g^{*''} + \frac{I^* P^*}{k_2} \delta \omega_g^* = 0. \quad (2.5)$$

Решаем дифференциальное уравнение (2.5) при граничных условиях

$$\delta \omega_g^* |_{\xi=1} = \delta \omega_g^{*''} |_{\xi=1} = \delta \omega_g^{*'} |_{\xi=0} = 0.$$

Тривиальное решение  $\delta \omega_g^* \equiv 0$  очевидно не представляет интереса; нетривиальное решение возможно только при  $\frac{I^* P^*}{k_2} = \frac{\pi^2}{4}$ . Нетрудно видеть, что полученное значение для величины  $P^*$  даёт критическую нагрузку прямого стержня по Энгессеру-Кармана. Так как у реальных стержней эта критическая нагрузка не достигается, то и наше утверждение, что при  $\delta \omega_g^* \neq 0$  не может быть  $\delta P^* = 0$ , доказано.

Из полученного результата можно сделать еще один важный вывод. Так как всегда  $\delta P^* \neq 0$ , то и величина  $v = \frac{1}{I^*} \frac{\delta \omega_g^*}{\delta P^*}$  не может стать бесконечной; следовательно диаграмма ( $P^* - w^*$ ) не имеет вертикальное касательное. Это означает, что если в стержне не возникли зоны вторичных пластических деформаций, то приложенная к нему нагрузка всегда меньше максимальной (т. е. критической нагрузки второго рода)

§ 3. Анализ отдельных стадий равновесия. Очевидно, что с ростом сжимающей силы  $P$  изменяется и распределение зон упругих и пластических деформаций в стержне. При этом представляется целесообразным разделить этот процесс на отдельные стадии, анализ которых дается ниже.

I стадия. Здесь деформации происходят упруго во всем стержне. В этом случае  $\lambda=0$ ;  $\Phi_1 = \frac{1}{I^*}$ ;  $\Phi_2 = 0$  и уравнение (1.10) получает вид (здесь  $a^2 = P^*$ ):

$$\omega_g^{*''} + a^2 \omega_g^* = -a^2 (\omega_n^* + a^*) \quad (3.1)$$

Если ввести обозначение

$$\varrho(\xi) = \int_0^{\xi} \omega_{\kappa}^*(\eta) \sin [\alpha(\xi - \eta)] d\eta, \quad (3.2)$$

то решение уравнения (3.1), удовлетворяющее граничным условиям  $\omega_g^* = 0$  при  $\xi = 1$  и  $\omega_g^{*\prime} = 0$  при  $\xi = 0$ , можно представить в виде

$$\omega_g^* = \alpha^* \left( \frac{\cos \alpha \xi}{\cos \alpha} - 1 \right) + \alpha \varrho(1) \frac{\cos \alpha \xi}{\cos \alpha} - \alpha \varrho(\xi) \quad (3.3)$$

В рассматриваемой стадии во всех точках стержня должно быть выполнено неравенство  $e < e_s$ , которое в силу формул (1.1), (1.8) и (1.9) получает вид

$$\frac{I^*}{F^*} P^* + z^* \omega_g^{*\prime\prime} < \mu. \quad (3.4)$$

Учитывая, что возникновение пластических деформаций начинается при  $z^* = -1$  и вычисляя величину  $\omega_g^{*\prime\prime}$  из уравнения (3.1), можем условие (3.4) заменить более простым требованием

$$P^* \left( \frac{I^*}{F^*} + \omega^* \right) < \mu, \quad (3.5)$$

которое определяет предел применения формулы (3.3).

**II стадия.** Эта стадия характеризуется тем, что в средней части стержня возникла зона пластических деформаций, которая, однако, не простирается до концов  $\xi = \pm 1$  (фиг. 3а). В этой стадии с увеличением нагрузки зона пластических деформаций постепенно расширяется, вследствие чего зона разгрузки возникнуть не может. На основании последнего обстоятельства в формуле (1.10) придется заменить величину  $z_1^*$  на  $z_0^*$ ; учитывая ещё, что  $p = m = 0$ , находим

$$\omega_g^{*\prime\prime} = -I^* P^* \omega^* \Phi_1(z_0^*) - (I^* P^* - \mu F^*) \Phi_2(z_0^*). \quad (3.6)$$

На границе упругих и пластических деформаций  $z = z_0$  выполняется условие  $e = e_s$ , которое в силу (1.1) и (1.8) получает вид

$$\frac{l^2 \varepsilon}{h^2} + z_0 \omega_g^{*\prime\prime} = \mu. \quad (3.7)$$

Вычисляя величину  $\varepsilon$  из первого уравнения системы (1.9), можем соотношения (3.6) — (3.7) представить в окончательной форме

$$\begin{aligned} \omega_g^{*\prime\prime} &= -\frac{I^* P^* - \mu F^*}{k_1^*} \\ \frac{k_g^*}{k_1^*} &= \frac{I^* P^* \omega^*}{I^* P^* - \mu F^*}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь под символами  $k_1^*$  и  $k_2^*$  следует понимать выражения, определенные формулами (2.3), если только в этих формулах заменить везде величину  $z_1^*$  на  $z_0^*$

Решая систему (3.8), можем определить величины  $w_g^*$  и  $z_0^*$  как функции от координаты  $\xi$  для упруго-пластической области. При чисто-упругих деформациях остается в силе уравнение (3.1). На границе упругих и упруго-пластических областей должны быть выполнены условия непрерывности относительно безразмерного прогиба  $w_g^*$  и ее первой производной.

Рассмотрим прочие условия, которые должны быть выполнены относительно величин  $w_g^*$ ,  $z_0^*$  и  $P^*$  во второй стадии. Здесь можно указать два из таких условий. Во-первых, в стержне не должно быть зон пластических деформаций от растяжения. В аналитической форме это требование можно написать в виде неравенства \*

$$-e_s \leq e|_{z^*=1} = \varepsilon + \frac{h^2}{l^2} w_g^{*''}$$

которое — если вычислить величину  $\varepsilon$  из уравнений (1.9) — можно переписать еще и в форме

$$-(F^* - \lambda B_1^* + \lambda B_2^*) w_g^{*''} \leq I^* P^* + \mu(F^* - 2\lambda B_1^*) \quad (3.9)$$

Условие (3.9) будем называть условием односторонней пластичности.

Ко второму условию приходим на основании следующих соображений. Вторая стадия характеризуется тем, что область упруго-пластических деформаций не распространяется до конца стержня, а заканчивается в некоторой точке  $\xi_1 < 1$ . Для крайнего случая, когда  $\xi_1 = 1$  и  $z_0^* = -1$ , из второго уравнения системы (3.8) находим, что

$$\frac{k_2^*}{k_1^*} = -\frac{I^*}{F^*} = \frac{I^* P^* a^*}{I^* P^* - \mu F^*}$$

Отсюда приходим к выводу, что во второй стадии должно быть

$$P^* < \frac{\mu F^*}{I^* + a^* F^*} \quad (3.10)$$

III стадия. Здесь область упруго-пластических деформаций распространяется на весь стержень (фиг 3 б, в, д). Кроме того предположим, что гибкость стержня настолько мала, что условие односторонней пластичности (3.9) остается выполненным и в третьей стадии.

---

\* Для коэффициента  $\gamma$ , смысл которого вытекает из фиг. 2, выбрано здесь и в дальнейшем значение  $\gamma = 2$ .

Прежде чем приступить к анализу рассматриваемой стадии, выведем некоторые свойства величин  $k_1^*(z_0^*)$  и  $k_2^*(z_0^*)$ . Для этого будем исходить из формулы

$$k_1^* = [F^* - \lambda B_1^*(z_0^*)]z_0^* + \lambda B_2^*(z_0^*)$$

и дифференцируем ее по  $z_0^*$ ; сделав это, получаем, что

$$\frac{dk_1^*}{dz_0^*} = F^* - \lambda B_1 > 0;$$

функция  $k_1^*(z_0^*)$ , следовательно, является монотонно возрастающей. Учитывая еще обстоятельство, что  $k_1^*(-1) = -F^* < 0$

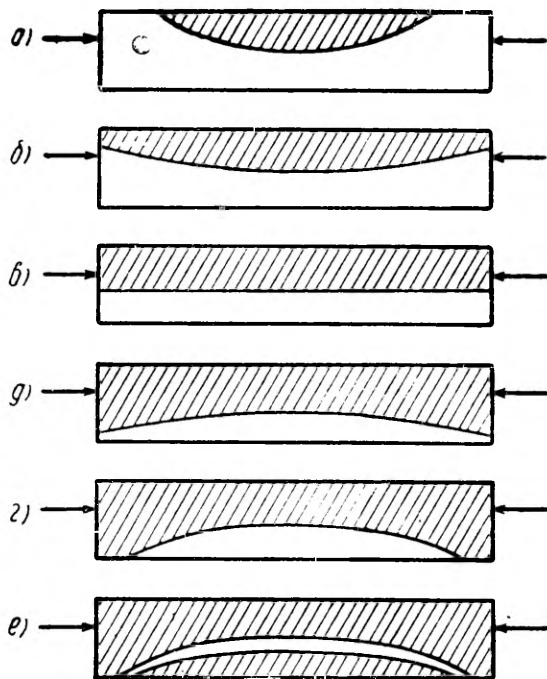


Рис. 3.

и  $k_1^*(+1) = F^*(1 - \lambda) > 0$ , приходим к выводу, что внутри промежутка  $-1 < z_0^* < +1$  найдется некоторое значение  $z_0^* = \bar{z}_0^*$ , при котором  $k_1^* = 0$ . Таким же образом можно доказать, что функция  $k_2^*(z_0^*)$  является в промежутке  $-1 < z_0^* < +1$  монотонно убывающей; при этом всегда  $k_2^* > 0$  (т. е. функция  $k_2^*$  не имеет при  $-1 < z_0^* < +1$  нулевых точек). Из вышеуказанного следует еще, что отношение  $\frac{k_2^*}{k_1^*}$  является в промежутке  $-1 < z_0^* < +1$  монотонно убывающей функцией.

После этих предварительных замечаний переходим к изучению третьей стадии. Рассмотрим сначала случай, когда  $I^*P^* - \mu F^* < 0$ . Так как  $\omega_g^* + \omega_n^* + a^* > 0$ , то из (3.8) следует, что  $k_1^*(z_0^*) < 0$ , следовательно, во всех точках пластинки выполняется условие  $z_0^* < \bar{z}_0^*$ . Если идти от центра стержня к концам, то величина  $\omega_g^* + \omega_n^* + a^*$  убывает. Так как  $k_1^* < 0$ , то из второго уравнения системы (3.8) следует, что при этом величина отношения  $\frac{k_2^*}{k_1^*}$  должна увеличиваться; но это в свою очередь равносильно убыванию величины  $z_0^*$ . Итак, мы приходим к заключению, что при  $I^*P^* - \mu F^* < 0$  кривая разделения упругих и пластических зон  $z_0^* = z_0^*(\xi)$  всегда является относительно оси  $z$  вогнутой. Рассмотренную нами подстадию будем в дальнейшем обозначать символом III<sub>1</sub> (фиг. 3 б).

Таким же образом можно показать, что если  $I^*P^* - \mu F^* > 0$ , то кривая  $z_0^* = z_0^*(\xi)$  оказывается относительно оси  $z$  выпуклой (подстадия III<sub>2</sub>, фиг. 3 д).

Переход от подстадии III<sub>1</sub> к III<sub>2</sub> происходит при  $I^*P^* = \mu F^*$ . В этом случае из второго уравнения системы (3.8) следует, что  $k_1^* \equiv 0$ ; следовательно,  $z_0^* = \bar{z}_0^*$  и мы приходим к случаю, указанному на фиг. 3 в.

Отметим еще, что величина  $P^* = \frac{\mu F^*}{I^*}$  является той безразмерной нагрузкой, при которой в стержне появились бы пластические деформации, если стержень был бы прямым и оставался бы таким в процессе нагружения.

Задача о равновесии стержня при  $P^* = \frac{\mu F^*}{I^*}$  решается особенно просто. Так как в этом случае  $z_0^* = const$ , то и величины  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  являются постоянными и уравнение (1.10) принимает вид (здесь  $\alpha^{*2} = I^*P^*\Phi_1$ ):

$$\omega_g^{*''} + \alpha^{*2}\omega_g^* = -\alpha^{*2}(\omega_n^* + a^*). \quad (3.11)$$

Нетрудно видеть, что уравнение (3.11) совпадает с уравнением (3.1), если заменить символ  $\alpha$  на  $\alpha^*$ . Следовательно, и решение уравнения (3.11) можно представить в виде зависимостей (3.2) и (3.3), заменяя только  $\alpha \rightarrow \alpha^*$ .

Докажем теперь, что в подстадии III<sub>1</sub> не может возникать зона разгрузки. Действительно, так как с увеличением нагрузки  $P^*$  увеличивается и прогиб  $\omega_g^*$ , то должно быть  $v = \frac{1}{I^*} \frac{\delta \omega_g^*}{\delta P^*} > 0$ . Учитывая условие  $\omega_g^* + \omega_n^* + a^* > 0$ , из второго уравнения системы (2.4) находим, что  $\frac{k_2}{k_1} > 0$ ; следовательно и  $k_1 > 0$ . Раньше мы показали, что  $k_1^* < 0$ , если только  $I^*P^* - \mu F^* < 0$ .

Так как величины  $k_1$  и  $k_1^*$  являются монотонно возрастающими функциями относительно их аргументов, то из обстоятельства  $k_1 > k_1^*$  следует  $z_1^* > z_0^*$ , что и требовалось доказать.

Можно еще доказать, что зоны разгрузки не могут возникать и вблизи концов  $\xi = \pm 1$ . Это доказывается от противного следующим образом. Если у края  $\xi = 1$  было бы возможно уменьшение нагрузки, то в начальном моменте разгрузки должно быть  $z_0^* = z_1^*$  или  $\frac{k_2}{k_1} = \frac{k_2^*}{k_1^*}$ . Учитывая, что  $w_g^* = w_n^* = v = 0$  при  $\xi = 1$ , из (2.4) и (3.8) находим, что

$$a^* = \frac{P^* I^* a^*}{I^* P^* - \mu F^*}$$

Это условие может быть выполнено только при  $a^* = 0$ ; но в этом случае из второго уравнения следовало бы, что  $k_2 = 0$ . Последнее условие введет нас в противоречие, так как мы доказывали, что функция  $k_2$  нулевых точек не имеет. Из этого противоречия можно освободиться только предполагая, что все пластические деформации в сечении  $\xi = 1$  являются активными.

Рассмотрим, в каких пределах может изменяться величина  $P^*$ , чтобы стержень находился в третьей стадии. В предельном случае, когда концы стержня деформируются чисто-пластически, имеем  $z_0^* = 1$  и  $\frac{k_2^*}{k_1^*} = \frac{I^*}{F^*}$  при  $\xi = 1$ . Из второго уравнения системы (3.8) находим, что  $P^* \leq \frac{\mu F^*}{I^* - a^* F^*}$ . Учитывая еще условие (3.10), видим, что в третьей стадии должны быть выполнены неравенства

$$\frac{\mu F^*}{I^* + a^* F^*} \leq P^* \leq \frac{\mu F^*}{I^* - a^* F^*} \quad (3.12)$$

Интересно отметить, что третья стадия равновесия имеет фактически место только при внецентренно сжатых стержнях (т. е. при  $a^* \neq 0$ ); если  $a^* = 0$ , то при нагрузке  $P^* = \frac{\mu F^*}{I^*}$  стержень сразу переходит из второй стадии в четвертую.

IV стадия. В этой стадии вблизи стержня имеются области чисто-пластических деформаций; условие односторонней пластичности (3.9) остается выполненным (фиг. 3 г). Равновесие стержня в четвертой стадии описывается следующими уравнениями: в области упруго-пластических деформаций — уравнением (1.10); в области чисто-пластических деформаций — уравнением

$$w_g^{*''} + \beta^2 w_g^* = -\beta^2 (w_n^* + a^*), \quad \text{где } \beta^2 = \frac{P^*}{1 - \lambda}. \quad (3.13)$$

В четвертой стадии, вообще говоря, нужно учитывать и влияющие разгрузки. Для определения границы зоны разгрузки  $z_1^* = z_1^*(\xi)$  следует в области упруго-пластических деформаций решить уравнение (2.4), а в области чисто-пластических деформаций уравнение\*

$$v'' + \beta^2 v = - \frac{w^*}{I^*(1-\lambda)} \quad (3.14)$$

Подробности, связанные с решением уравнений (1.10), (2.4) и (3.13) — (3.14), рассмотрим в § 4 настоящей работы.

**V стадия.** Здесь у концов стержня деформации происходят чисто-пластически, но в средней части появляются зоны вторичных пластических деформаций (фиг. 3 е). Так как после возникновения этих зон сопротивление стержня к изгибу резко уменьшается, то, по нашему мнению, эта стадия практического значения не имеет. Учитывая еще обстоятельство, что решение задачи о равновесии стержня в пятой стадии связано с довольно большими и неудобными вычислениями, мы в настоящей работе эту стадию подробнее рассматривать не будем.

**§ 4. Метод решения поставленной задачи. Заключительные замечания.** Дифференциальные уравнения (1.10), (2.4) и (3.8), выведенные в § 1—3 настоящей работы, могут быть интегрированы только численно или графическим методом\*\*. Так как при этом наибольшие затруднения возникают при IV стадии, то рассмотрим этот случай поближе.

В четвертой стадии в стержне могут возникать следующие три области:

а) Область упруго-пластических деформаций с зоной разгрузки (допустим, что эта область распространяется от центра стержня до некоторой координаты  $\xi = \xi_1$ )

б) Область упруго-пластических деформаций без зоны разгрузки (от  $\xi = \xi_1$  до некоторого значения  $\xi = \xi_2$ ).

в) Область чисто-пластических деформаций (от  $\xi = \xi_2$  до  $\xi = 1$ ).

Одна из возможных схем для решения задачи в рассматриваемой стадии состоит из следующих шагов:

1) Разрешаем поставленную задачу вначале без учета зоны разгрузки. Для этого следует решить систему (3.8) при  $0 < \xi < \xi_2$  и уравнение (3.13) при  $\xi_2 < \xi < 1$ . В точке  $\xi = \xi_2$  должны быть выполнены условия непрерывности для  $w_g^*$  и  $w_g^{*}$ . Этот шаг дает нам величины  $w_g^*$  и  $z_0^*$  в первом приближении.

\* Уравнение (3.14) получено варьированием соотношения (3.13).

\*\* Исключением здесь является только система (3.8) при  $w_n^* \equiv 0$ , где решение может быть дано и в замкнутом виде.

2) Определяем зону разгрузки. Для этого нужно при  $z_1^* < 1$  решить систему (2.4); в остальных точках — уравнение (3.14). В точке где  $z_1^* = 1$ , должны быть удовлетворены условия непрерывности относительно величин  $v$  и  $v'$ . Таким образом находим величины  $z_1^*(\xi)$  и  $\xi_1$  в первом приближении.

3) Вычисляем поправочные коэффициенты  $p$  и  $m$ ; это можно сделать методом, указанным в работе [8]. Учитывая обстоятельство, что при  $z^* = z_0^*$  должен быть  $\bar{e} = e_s$ , можем теперь найти и второе приближение для величины  $z_0^*$ .

4) Определяем величины  $\omega_g^*$  и  $\xi_2$  во втором приближении. Считая величину  $z_1^*(\xi)$  известной из 2 шага нашей схемы, решаем для промежутка  $0 < \xi < \xi_1$  систему (1.10); в промежутках  $\xi_1 < \xi < \xi_2$  и  $\xi_2 < \xi < 1$  следует решить соответственно уравнениям (3.8) и (3.13). В точках  $\xi_1$  и  $\xi_2$  должны быть выполнены условия непрерывности для  $\omega_g^*$  и  $\omega_g^{* \prime}$ .

Эту схему можно продолжать, пока требуемая точность не будет достигнута. Наконец, следует еще проверить, выполнено ли условие односторонней пластичности (3.9).

Сходимость указанного метода явствует из следующего численного примера. Вычисления были проведены при  $\mu = 0,2$ ;  $\lambda = 0,5$ ;  $a^* = 0,1$ ;  $\omega_n^* \equiv 0$ ;  $P^* = 1,09$ . Интегрирование дифференциальных уравнений (1.10) (2.4) и (3.8) производилось графическим путем, причем значения величин  $\omega_g^*$  и  $v$  в середине стержня были найдены методом проб. Проведя вычисления в случае прямоугольного сечения, в первом приближении мы получили следующие результаты (символами  $v_0, \omega_0^*, z_{00}^*, z_{10}^*$  обозначены значения величин  $v, \omega_g^*, z_0^*, z_1^*$  в середине стержня):

$\omega_0^* = 0,53$ ;  $v_0 = 2,6$ ;  $\xi_1 = 0,87$ ;  $\xi_2 = 0,96$ ;  $z_{00}^* = 0,37$ ;  $z_{10}^* = 0,30$ .

Второе приближение дает

$\omega_0^* = 0,48$ ;  $v_0 = 2,1$ ;  $\xi_1 = 0,89$ ;  $\xi_2 = 0,95$ ;  $z_{00}^* = 0,45$ ;  $z_{10}^* = 0,32$ .

Вычисляя еще третье приближение, получаем для относительного прогиба опять значение  $\omega_0^* = 0,48$ ; следовательно, точность второго приближения можно считать вполне достаточной. Поправочные члены  $p$  и  $m$  в рассматриваемом случае малы (наибольшие значения этих поправок в середине стержня имеют величины  $p = 0,003$  и  $m = 0,001$ ) и влияния на вычисленные выше величины не оказывают.

Для случая  $\lambda = 0,5$ ;  $\mu = 0,2$ ;  $\omega_n^* \equiv 0$  составлены еще кривые «прогиб-нагрузка» (фиг. 4); здесь вычисления были проведены при двух значениях эксцентриситета  $a^* = 0,1$  и  $a^* = 0,3$ . Пунктирная линия соответствует решениям, найденным без учета влияния зоны разгрузки; римские цифры обозначают отдельные стадии равновесия, рассмотренные в § 3 настоящей работы. Символом  $P_0$  обозначена касательно-модульная нагрузка для прямого стержня; буквой  $A$  намечены те состояния равновесия, при кото-

рых начинается возникновение зон вторичных пластических деформаций.

Наконец, можно сделать еще следующие общие выводы:

1) Если начальный прогиб стержня или эксцентриситет приложения нагрузки не слишком малы, то влиянием зоны разгрузки можно пренебречь.

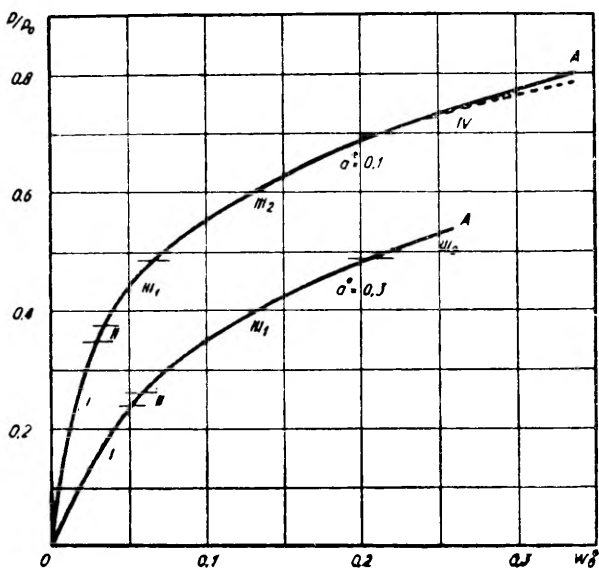


Рис. 4.

2) Метод, указанный в настоящей работе, принципиально применим и в случае прямого стержня, однако при этом вычисления в значительной мере усложняются, так как уже нельзя игнорировать влияние поправочных членов  $p$  и  $t$ . Поэтому в случае прямого стержня более удобным оказывается метод, который дан в работе [8].

3) По мнению автора, в случае стержней малой гибкости для максимальной нагрузки было бы целесообразно взять ту нагрузку, при которой появляются первые пластические деформации от растяжения.

## Литература

1. Лейтес, С. Д., Устойчивость сжатых стальных стержней, Гос. изд. лит. по строительству и архитектуре, Москва (1954).
2. Р ж а н и ц ы н, А. Р., Устойчивость равновесия упругих систем, Гостехтеоретиздат, Москва (1955).

3. Пинаджян, В. В., Некоторые вопросы предельного состояния сжатых элементов стальных конструкций, Изд. АН Арм. ССР, Ереван (1956).
4. Tung-Hua Lin, Inelastic Column Buckling, Journal of the Aeronautical Sciences, 17, 3, (1950) (перевод в сб. «Механика» 1951, № 4).
5. Cicala, P., Column Buckling in the Elasto-plastic Range, Journal of the Aeronautical Sciences, 17, 8, (1950) (перевод в сб. «Механика» 1951, № 4).
6. Pearson, C. E., Bifurcation Criterion and Plastic Buckling of Plates and Columns, Journal of the Aeronautical Sciences, 17, 7, (1950) (перевод в сб. «Механика» 1951, № 5).
7. Хофф, Н., Продольный изгиб и устойчивость, Изд. иностр. лит., Москва (1955).
8. Лепик, Ю. Р., О равновесии сжатых упруго-пластических стержней. Прикл. матем. и механ. Т. 21, вып. 1 (1957).

# ALGKÕVERUSE JA EKSTSENTRILISE KOORMAMISE MÕJUST ELASTILIS-PLASTILISTE SURUTUD VARRASTE LÄBIPAINETELE

Ü. Lepik

Resümee

Viimasel ajal on ilmunud rida töid, milledes käsitletakse surutud elastilis-plastiliste varraste tasakaaluprobleemi juhul, kus varras omab väikest algkõverust või kus koormus on rakendatud ekstsentriliselt. Peaaegu kõigis neis töödes tuuakse sisse teatud eeldused, mis peavad lihtsustama püstitatud ülesande lahendamist (näiteks oletatakse, et läbipaindunud varda kuju võib aproksimeerida siinuskõveraga; jäetakse arvesse võtmata koormuse languse piirkond vardas; mõningatel juhtudel asendatakse reaalsed vardad idealiseeritud mudelitega jne.).

Käesolevas töös lahendatakse püstitatud ülesanne ilma niisuguseid lisatingimusi kasutamata. Antakse üldine arvutuskeem, mille puhul võetakse arvesse ka koormuse languse piirkonna mõju.

Kõik käesolevas töös antud valemid on tuletatud eeldusel, et varda nõtkus on niivõrd väike, et läbipaindunud vardas ei või tekkida plastilisi deformatsioone venitusest (suurema nõtkusega varraste juhtu on ammendavalt käsitletud monograafias [3]).

# ÜBER DEN EINFLUSS DER ANFANGSKRÜMMUNG UND EXZENTRISCHEN BELASTUNG AUF DIE DURCHBIEGUNGEN ELASTISCH-PLASTISCHER DRUCKSTÄBE

U. Lepik

## Zusammenfassung

In der letzten Zeit sind mehrere Arbeiten erschienen, in denen das Gleichgewichtsproblem elastisch-plastischer Druckstäbe behandelt wird für den Fall, dass der Stab eine kleine Anfangskrümmung hat oder dass die Belastung exzentrisch angesetzt ist. Beinahe bei allen diesen Arbeiten werden gewisse Voraussetzungen eingeführt, die das Lösen der gestellten Aufgabe erleichtern sollen (z. B. es wird angenommen, dass die Form des durchgebogenen Stabes einer Sinuskurve angenähert werden kann; es wird das Entlastungsgebiet im Stabe nicht berücksichtigt; in manchen Fällen werden reale Stäbe durch idealisierte Modelle ersetzt usw.).

In der vorliegenden Arbeit wird die gestellte Aufgabe ohne solche Zusatzbedingungen gelöst. Es wird ein allgemeines Rechnungsschema gegeben, bei dem auch der Einfluss des Entlastungsgebiets in Betracht gezogen wird.

Alle Formeln der vorliegenden Arbeit sind unter der Voraussetzung abgeleitet, dass die Schlankheit des Stabes so gering ist, dass im durchgebogenen Stabe plastische Deformationen von Dehnung nicht entstehen können (der Fall der Stäbe mit grösserer Schlankheit ist schon ausführlich in der Monographie [3] behandelt worden.

# О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ С РАЗЛИЧНЫМ СПОСОБОМ ЗАКРЕПЛЕНИЯ КОНЦОВ

Э. А. Иыги

Кафедра теоретической механики

В работе [1] А. Пфлюгер рассматривает продольный изгиб стержня с свободно опертыми концами, исходя из концепции Шенли-Работнова [2, 3], согласно которой сжимающая сила изменяется в процессе продольного изгиба.

В настоящей работе рассматривается потеря устойчивости стержней с различным способом закрепления концов, исходя из концепции Шенли-Работнова-Пфлюгера.

## 1. Оба конца зажаты.

Пусть прямой стержень, сечение которого имеет две оси симметрии, будет сжат центральной силой  $P$ . Координатные оси возьмем в соответствии с фиг. 1.

Обозначим относительное укорочение стержня буквой  $e$ , напряжение буквой  $\sigma$ , и эти величины в критическом состоянии соответственно через  $e_0$  и  $\sigma_0$ .

В случае линейного упрочнения материала ( $\lambda = 1 - \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{de} = \text{const}$ ) при активных пластических деформациях

$$\sigma = \sigma_0 + E(1 - \lambda)(e - e_0), \quad (1)$$

а в зоне разгрузки

$$\sigma = \sigma_0 + E(e - e_0). \quad (2)$$

Пусть  $z_0 = z_0(x, y)$  будет уравнением поверхности, разделяющей зоны активных и пассивных пластических деформаций,  $\varepsilon$  — относительное укорочение срединного слоя ( $z = 0$ ),  $w$  — прогиб и пусть  $\kappa = \frac{d^2w}{dx^2}$

Варьируя условие плоских сечений

$$e = \varepsilon + z\kappa, \quad (3)$$

получим

$$\varepsilon - \varepsilon_0 + z_0 \kappa = 0. \quad (4)$$

Символом  $h$  и  $b(z)$  обозначим высоту и ширину рассматриваемого сечения.

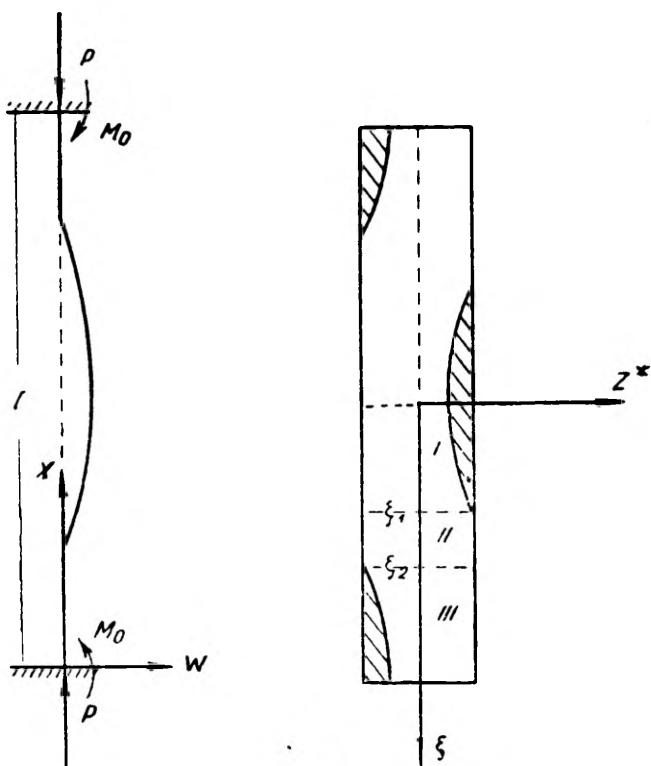


Рис. 1.

Допустим, что зоны разгрузки возникают на концах и в середине стержня (фиг. 1). Используя формулы (1) — (4), выразим растягивающее усилие в I области в виде

$$\begin{aligned}
 T = - \int_{F_0} \sigma dF = - \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} [\sigma_0 + E(1 - \lambda)(z - z_0)\kappa] b(z) dz - \\
 - \int_{z_0}^{+\frac{h}{2}} [\sigma_0 + E(z - z_0)\kappa] b(z) dz = - \sigma_0 F_0 + \lambda E S_1 \kappa + \\
 + E z_0 (F_0 - \lambda F_1) \kappa,
 \end{aligned}$$

где  $F_0$  — площадь сечения,  $F_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} b(z) dz$  и  $S_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} z b(z) dz$ .

Изгибающий момент

$$M = -E\kappa(I_0 - \lambda I_1) - E\lambda z_0 S_1 \kappa,$$

где  $I_0$  — момент инерции сечения, а  $I_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{z_0} z^2 b(z) dz$ .

Учтем условия равновесия

$$T = -P; M = P\omega - M_0 \quad (5)$$

и обозначим значения  $P$  и  $T$  в критическом состоянии через  $P_0$  и  $T_0$ , а через  $\Delta P$  разность  $P - P_0$

Подставляя в полученную систему

$$E(F_0 - \lambda F_1) z_0 \kappa + E\lambda S_1 \kappa + \Delta P = 0.$$

$$E(I_0 - \lambda I_1) \kappa + E\lambda S_1 z_0 \kappa + P\omega - M_0 = 0$$

модуль Кармана

$$K_i = E \left[ 1 + \frac{\lambda}{I_0} (z_0 S_i - I_i) \right] \quad (i = 1, 2), \quad (6)$$

найдем после упрощения

$$\omega = \frac{K_1 \Delta P I_0}{P E} \frac{1}{z_0 (F_0 - \lambda F_1) + \lambda S_1} + \frac{M_0}{P} \quad (7)$$

$$\kappa = -\frac{\Delta P}{E} \frac{1}{z_0 (F_0 - \lambda F_1) + \lambda S_1}$$

Используя безразмерные величины

$$\omega^* = \frac{2\omega}{h}; z^* = \frac{2z}{h}; \xi = 1 - \frac{2}{l} x; F_i^* = \frac{2F_i}{b(0)h^2}$$

$$S_i^* = \frac{4S_i}{b(0)h^2}; I_i^* = \frac{8I_i}{b(0)h^3}; \Delta P^* = \frac{2\Delta P l^2}{Eb(0)h^3} \quad (8)$$

$$P^* = \frac{2Pl^2}{Eb(0)h^3}; M_0^* = \frac{4M_0 l^2}{Eb(0)h^4}; L_i = \frac{1}{z_0^* (F_0^* - \lambda F_i^*) + \lambda S_i^*} \quad (i = 0, 1, 2)$$

и  $z_0^* = 2\zeta - 1$  ( $\zeta$  — относительная толщина пластического слоя), можно систему (7) переписать в виде

$$\omega^* = \frac{\Delta P^*}{P^*} \frac{K_1 L_1}{E} I_0 + \frac{M_0^*}{P^*} \quad (9)$$

$$\omega^{*''} = -\Delta P^* L_1$$

Здесь и в дальнейшем штрихами обозначены производные по  $\xi$ .

Умножим части второго уравнения соответственно на  $\omega^{*'}d\zeta = d\omega^*$  и проинтегрируем результат. Пусть в середине стержня, где  $\frac{d\omega}{dx} = 0$ ,  $\zeta = \zeta_0$ . Тогда, введя еще обозначения

$$\Phi(\zeta) = - \int_{\zeta}^1 L_1 \cdot \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{K_1 L_1}{E} \right) d\zeta$$

$$\Phi(\zeta_0) = - \int_{\zeta_0}^1 L_1 \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{K_1 L_1}{E} \right) d\zeta,$$

получаем

$$\omega^{*'} = - \Delta P^* \sqrt{\frac{2I_0^*}{P^*}} [\Phi(\zeta_0) - \Phi(\zeta)].$$

Сравнивая результат с первым уравнением системы (9), находим, что

$$\xi = \sqrt{\frac{2I_0^*}{P^*}} \left[ \frac{1}{L_1} \sqrt{\Phi(\zeta_0) - \Phi(\zeta)} + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{L_1'}{L_1^2} \sqrt{\Phi(\zeta_0) - \Phi(\zeta)} d\zeta \right].$$

Пусть при  $\zeta = 1$  будет  $\xi = \xi_1$ . Тогда

$$\begin{aligned} \xi_1 = & \sqrt{\frac{2I_0^*}{P^*}} \left[ \left( \frac{1}{L_1} \right)_{\zeta=1} \sqrt{\Phi(\zeta_0) - \Phi(1)} + \right. \\ & \left. + \int_{\zeta_0}^1 \frac{L_1'}{L_1^2} \sqrt{\Phi(\zeta_0) - \Phi(\zeta)} d\zeta \right] \end{aligned} \quad (10)$$

В III области

$$\begin{aligned} T = & -\sigma_0 F_0 + E z_0 (F_0 - \lambda F_2) \kappa + E \lambda S_2 \kappa \\ M = & -E \lambda S_2 z_0 \kappa - E (I_0 - \lambda I_2) \kappa, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{где } F_2 = \int_{z_0}^{+\frac{h}{2}} b(z) dz; \quad S_2 = \int_{z_0}^{+\frac{h}{2}} z b(z) dz; \quad I_2 = \int_{z_0}^{+\frac{h}{2}} z^2 b(z) dz.$$

Систему (11) можно в силу (5) и (6) написать в виде

$$\begin{aligned} \omega = & \frac{\Delta P}{P} \frac{K_2 I_0}{E} \frac{1}{z_0 (F_0 - \lambda F_2) + \lambda S_2} + \frac{M_0}{P} \\ \kappa = & - \frac{\Delta P}{E} \frac{1}{z_0 (F_0 - \lambda F_2) + \lambda S_2} \end{aligned}$$

Переходя к безразмерным величинам (8) и принимая во внимание соотношение

$$z_0^* = 1 - 2\zeta < 0, \text{ находим, что} \quad \bullet$$

$$\omega^* = \frac{\Delta P^*}{P^*} \frac{K_2 L_2}{E} I_0^* + \frac{M_0^*}{P^*} \quad (12)$$

$$\omega^{*''} = -\Delta P^* L_2$$

Пусть на концах стержня  $\zeta = \zeta_0'$ . Используя обозначения

$$\Phi_1(\zeta) = - \int_{\zeta}^1 L_2 \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{K_2 L_2}{E} \right) d\zeta$$

$$\Phi_1(\zeta_0') = - \int_{\zeta_0'}^1 L_2 \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{K_2 L_2}{E} \right) d\zeta,$$

получим аналогично с предыдущим, что

$$\zeta_2 = 1 + \sqrt{\frac{2I_0^*}{P^*} \left[ \left( \frac{1}{L_2} \right)_{\zeta=1} \sqrt{\Phi_1(\zeta_0') - \Phi_1(1)} + \right.}$$

$$\left. + \int_{\zeta_0'}^1 \frac{L_2'}{L_2^2} \sqrt{\Phi_1(\zeta_0') - \Phi_1(\zeta)} d\zeta \right]} \quad (13)$$

Во II области, области чисто-пластических деформаций,

$$F_0 = F_1 = F_2; \quad S_1 = S_2 = 0; \quad I_1 = I_2 = I_0 \text{ и}$$

$$E(1 - \lambda)I_0 \kappa + P\omega - M_0 = 0.$$

В безразмерных величинах решение уравнения

$$\omega^{*''} + \frac{P^*}{(1 - \lambda)I_0^*} \omega^* - \frac{M_0^*}{(1 - \lambda)I_0^*} = 0$$

будет иметь вид

$$\omega^* = A \sin k\xi + B \cos k\xi + \frac{M_0^*}{P^*},$$

где

$$k^2 = \frac{P^*}{(1 - \lambda)I_0^*}$$

Удовлетворим условие непрерывности упруго-пластических и чисто-пластических деформаций. При  $\xi = \xi_1$

$$k(A \cos k\xi_1 - B \sin k\xi_1) = -\sqrt{2} \Delta P^* \sqrt{\frac{I_0^*}{P^*} [\Phi(\zeta_0) - \Phi(1)]}$$

$$A \sin k\xi_1 + B \cos k\xi_1 = \frac{\Delta P^*}{P^*} I_0^* \left( \frac{K_1 L_1}{E} \right)_{\zeta=1}$$

и при  $\xi = \xi_2$

$$\begin{aligned} k(A \cos k\xi_2 - B \sin k\xi_2) &= -\Delta P^* \sqrt{\frac{2I_0^*}{P^*} [\Phi_1(\zeta_0') - \Phi_1(1)]} \\ A \sin k\xi_2 + B \cos k\xi_2 &= \frac{\Delta P^*}{P^*} I_0^* \left( \frac{K_2 L_2}{E} \right)_{\zeta=1} \end{aligned}$$

Обозначая

$$\begin{aligned} D_1 &= \sqrt{2(1-\lambda) [\Phi_1(\zeta_0') - \Phi_1(1)]} \\ D &= \sqrt{2(1-\lambda) [\Phi(\zeta_0) - \Phi(1)]} \\ \varphi &= k\xi_2 - k\xi_1 \end{aligned}$$

после упрощений получаем условие непрерывности в виде

$$\begin{aligned} \left( \frac{K_1 L_1}{E} \right)_{\zeta=1} \cos \varphi - D \sin \varphi &= \left( \frac{K_2 L_2}{E} \right)_{\zeta=1} \\ \left( \frac{K_2 L_2}{E} \right)_{\zeta=1} \cos \varphi + D_1 \sin \varphi &= \left( \frac{K_1 L_1}{E} \right)_{\zeta=1} \end{aligned} \quad (14)$$

Величину  $P_0^*$  определим, предполагая, что потеря устойчивости происходит при чисто-пластических деформациях. Учет граничных условий

$$\begin{cases} \text{при } x = 0: \omega^* = 0, \omega^{*'} = 0 \\ \text{при } x = l: \omega^* = 0, \omega^{*'} = 0, \end{cases}$$

приводит к величине критической силы

$$P_0^* = \pi^2 I_0^* (1 - \lambda).$$

Поскольку на концах стержня  $\omega^* = 0$ , то из первого уравнения системы (12)

$$M_0^* = -\Delta P^* I_0^* \left( \frac{K_2 L_2}{E} \right)_{\zeta=\zeta_0'}$$

и из первого уравнения системы (9)

$$\omega^* = \frac{\Delta P^*}{P^*} I_0^* \left[ \frac{K_1 L_1}{E} - \left( \frac{K_2 L_2}{E} \right)_{\zeta=\zeta_0'} \right] \quad (15)$$

Уравнения (10), (13), (14) и (15) определяют продольный изгиб стержня, оба конца которого зажаты.

В качестве примера рассмотрим продольный изгиб стержня с прямоугольным сечением. Вычисления проведены численно, выбирая  $\zeta_0$  и  $\zeta_0'$  так, чтобы условие непрерывности было выполнено.

В I области

$$F_0^* = 2; \quad I_0^* = \frac{2}{3}; \quad F_1^* = 2\zeta; \quad S_1^* = 2\zeta(\zeta - 1); \quad I_1^* = \\ = \frac{1}{3}\zeta(8\zeta^2 - 12\zeta + 6);$$

$$L_1 = \frac{1}{2(-\lambda\zeta^2 + 2\zeta - 1)}; \quad \frac{K_1 L_1}{E} = \frac{1 + \lambda(2\zeta^3 - 3\zeta^2)}{2(-\lambda\zeta^2 + 2\zeta - 1)};$$

$$\Phi(\zeta) = \frac{1 - 3\zeta + 3\zeta^2 - \lambda\zeta^3}{2(\lambda\zeta^2 - 2\zeta + 1)^2} - \frac{1}{2(1 - \lambda)}; \quad \Phi(1) = 0.$$

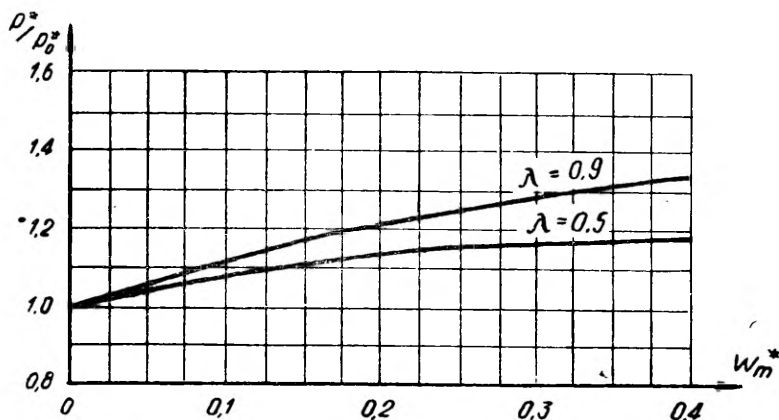


Рис. 2.

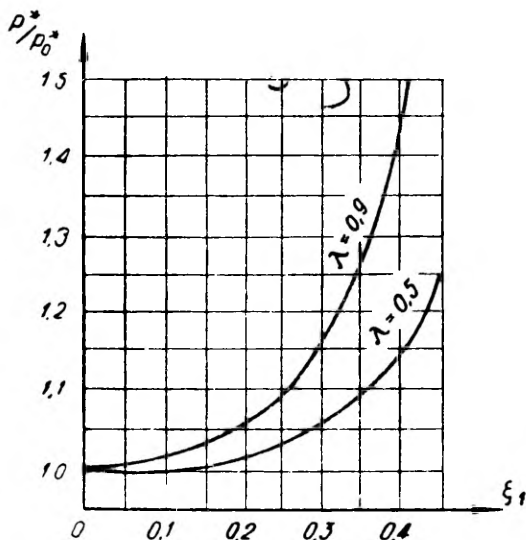


Рис. 3.

В III области

$$F_2^* = F_1^*; I_2^* = I_1^*; S_2^* = 2\zeta(1 - \zeta); L_2 = \frac{1}{2(\lambda\zeta^2 - 2\zeta + 1)}$$

$$\frac{K_2 L_2}{E} = \frac{1 + \lambda(2\zeta^3 - 3\zeta^2)}{2(\lambda^2\zeta - 2\zeta + 1)}; \Phi_1(\zeta) = \Phi(\zeta); \Phi_1(1) = 0.$$

Результаты вычисления при значениях  $\lambda = 0,5$  и  $\lambda = 0,9$  даны в виде графиков на фиг. 2—3. Из вычислений следует, что вышеуказанный метод можно применять при значениях  $\xi_1 < 0,5$ .

2. Нижний конец стержня зажат, верхний может перемещаться, но не может поворачиваться.

Допустим, что зона разгрузки возникает в обоих концах стержня. Пусть  $f$  — стрелка прогиба верхнего свободного конца,  $m$  — реактивный момент верхнего конца. Используя частично формулы (8) и

$$\begin{aligned} f^* &= \frac{2f}{h}; \quad \xi = 1 - \frac{x}{l}; \quad \Delta P^* = \frac{8\Delta P l^2}{Eb(0)h^3}; \\ P^* &= \frac{8Pl^2}{Eb(0)h^3}; \quad m^* = \frac{16ml^2}{Eb(0)h^4} \end{aligned} \quad (16)$$

можно задачу свести к предшествующей. Стрела прогиба равна прогибу середины вдвое удлиненного зажатого стержня.

3. Нижний конец стержня зажат, верхний свободен.

Допустим, что зона разгрузки возникает у зажатого конца. Используя безразмерные величины (8) и (16), задача может быть сведена к системе

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 1 + \sqrt{\frac{2I_0^*}{P^*} \left[ \left( \frac{1}{L_2} \right)_{\zeta=1} \sqrt{\Phi_1(\zeta_0') - \Phi(1)} + \right.} \\ &\quad \left. + \int_{\zeta_0'}^1 \frac{L_2'}{L_2^2} \sqrt{\Phi_1(\zeta_0') - \Phi_1(\zeta)} d\zeta \right]} \\ \tan \sqrt{\frac{P^*}{(1-\lambda)I_0^*}} \xi_1 &= - \frac{\left( \frac{K_2 L_2}{E} \right)_{\zeta=1}}{D_1} \\ \omega^* &= \frac{\Delta P^*}{P^*} \frac{K_2 L_2}{E} I^* + f^* \end{aligned}$$

В случае прямоугольного сечения  $\zeta_0 = \zeta_0'$ , так что

$$\left(\frac{K_1 L_1}{E}\right)_{\zeta=\zeta_0} = -\left(\frac{K_2 L_2}{E}\right)_{\zeta=\zeta_0'}$$

и стрела прогиба получается равной прогибу середины стержня, вдвое удлиненного и свободно опертого.

### Литература

1. Pflüger, A., Zur plastischen Knickung gerader Stäbe, Ingenieur-Archiv, XX 5, (1952).
2. Shanley, F., Inelastic Column Theory, Journal of Aeronautical Sciences, 14, 5, (1947).
3. Работнов, Ю. Н., О равновесии сжатых стержней за пределом пропорциональности, Инженерный сборник, том XI, (1952).
4. Ильюшин, А. А., Пластичность, Москва (1948).

## ELASTILIS-PLASTILISTE VARRASTE STABIILSUSE KAO JUHTE ELASTSUSPIIRI ÜLETAMISEL

E. Jõgi

Resümee

1952. a. töös [1] lahendas A. Pflüger vabalt toetatud elastilis-plastilise varda stabiilsuse kao probleemi, lähtudes Shanley kontseptsioonist [2].

Käesolevas töös on autor seadnud endale ülesandeks lahendada sama probleem varraste kinnitusviiside mõningatel erijuhitudel. Varda kinnitusviisidest on käsitletud kolme: 1° mõlemad otsad on kinnitatud jäigalt, 2° üks ots on kinnitatud jäigalt, teine ots võib libiseda, kuid mitte pöörduda, 3° üks ots on kinnitatud jäigalt, teine vaba. Jäigalt kinnitatud ristkülikukujulise ristlõikega varda juhu kohta saadud tulemused on esitatud graafikutena (vt. joon. 2—3).

## ÜBER EINIGE FÄLLE DER KNICKUNG ELASTISCH-PLASTISCHER STÄBE BEI ÜBERSCHREITUNG DER ELASTIZITÄTSGRENZE

E. Jõgi

Zusammenfassung

Das Problem der Knickung freigestützter elastisch-plastischer Stäbe wurde von A. Pflüger [1] bei Zugrundelegung der Konzeption F. Shanley's [2] im Jahre 1952 gelöst.

In vorliegender Arbeit ist dieses Problem für einige spezielle Fälle der Einspannung des Stabes gelöst und zwar: 1° für den Fall, dass der Stab an beiden Enden fest eingeklemmt ist, 2° für den Fall, dass das eine Ende fest eingeklemmt ist, das zweite aber frei gleiten kann ohne Drehmöglichkeit, 3° für den Fall, dass das eine Ende eingeklemmt ist, das zweite frei beweglich ist. Die Rechnungsergebnisse für den Fall 1° bei Voraussetzung rechteckigen Querschnitts sind in Fig. 2 und 3 dargestellt.

## К ТЕОРИИ ОПТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МНОГОСЛОЙНЫХ ПОКРЫТИЙ

Доц., канд. физ.-мат. наук П. Г. Кард

Кафедра теоретической физики

§ 1. В работе [1] автор настоящей статьи предложил теорию оптических свойств многослойных диэлектрических покрытий, основанную на матричном методе Фрау [2] и Сухановского [3], [4].

Эта теория дает правила написания выражений для  $\frac{1}{d_N}$  и  $\frac{r_N}{d_N}$ , где  $r_N$  — амплитудный коэффициент отражения от  $N$ -слойного покрытия при нормальном падении, а  $d_N$  — амплитудный коэффициент пропускания. С другой стороны, для теории многослойных покрытий, а также для практических расчетов важное значение имеют формулы Власова [5], на основании которых также можно написать выражения для коэффициентов отражения и пропускания света данным покрытием, что сделано в общем виде Лисицей [6]. До сих пор оба названных метода — матричный метод и метод рекуррентных формул Власова — рассматривались независимо друг от друга. Различны также их основы: матричный метод исходит из граничных условий для векторов поля на плоскостях раздела сред, а основой метода Власова является рассмотрение многократного отражения и преломления падающего луча (плоской волны) по образцу обычного рассмотрения плоскопараллельной пластинки. Поэтому представляется интересным с теоретической (и отчасти с практической) точки зрения найти непосредственный контакт между обеими теориями. Цель настоящей статьи и состоит в том, чтобы показать связь между этими методами. Оказывается целесообразным исходить для этого из нашей теории [1]; путем простых преобразований эта теория приводится к такому виду, что связь с теорией Власова становится очевидной. Вместе с тем мы получим новые формулы, по существу тождественные с формулами Лисицы, но имеющие гораздо более простую структуру и некоторые полезные особенности.

§ 2. Мы начнем наше изложение с краткого обзора теории [1]; при этом мы сделаем в ней, по сравнению с первоначаль-

ной формой, ряд небольших, но существенных изменений и дополнений.

Обозначим через  $n_m$ ,  $h_m$  ( $m = 1, 2, \dots, N$ ) показатель преломления и толщину  $m$ -ого слоя (нумерация слоев идет по направлению падения света), через  $n_0$ ,  $n_{N+1}$  показатели преломления исходной и конечной сред, через  $k$  волновое число в вакууме; далее, пусть

$$M(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix} \quad (1)$$

и

$$G(u) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} u & \operatorname{sh} u \\ \operatorname{sh} u & \operatorname{ch} u \end{pmatrix} \quad (2)$$

Тогда матрица

$$F = G(v_N)M(\alpha_N)G(v_{N-1})M(\alpha_{N-1}) \dots G(v_1)M(\alpha_1)G(v_0), \quad (3)$$

где

$$\alpha_m = kn_m h_m \quad (4)$$

и

$$v_m = \frac{1}{2} \ln \frac{n_{m+1}}{n_m}, \quad (5)$$

определяет амплитудные коэффициенты отражения и пропускания (при нормальном падении) следующим образом:

$$\frac{1}{d_N} = F_{22}; \quad -\frac{r_N}{d_N} = F_{21} \quad (6)$$

Однако, вычисление  $F$  непосредственно по (3) громоздко. Поэтому, как показано в [1], нужно привести  $F$  к виду:

$$F = S_N S_{N-1} \dots S_2 S_1 G(u_0), \quad (7)$$

где

$$S_m = \cos \alpha_m E + i \sin \alpha_m \bar{G}(2u_m); \quad (8)$$

здесь  $E$  есть единичная матрица,

$$\bar{G}(u) = \begin{pmatrix} -\operatorname{ch} u & \operatorname{sh} u \\ -\operatorname{sh} u & \operatorname{ch} u \end{pmatrix} \quad (9)$$

и

$$u_m = v_m + v_{m+1} + \dots + v_N = \frac{1}{2} \ln \frac{n_{N+1}}{n_m} \quad (10)$$

В форме (7) для  $F$  легко получается выражение, имеющее простую структуру и могущее быть сразу написано по определенным правилам без фактического выполнения матричных произведений в каждом отдельном случае. В самом деле, поскольку матрицы

$S_m$  состоят каждая из двух членов, то после выполнения всех матричных произведений в (7) получится  $2^N$ -членное выражение вида:

$$F = \sum_C i \sin \alpha_{k_1} i \sin \alpha_{k_2} \dots i \sin \alpha_{k_s} \cos \alpha_{l_1} \cos \alpha_{l_2} \dots \cos \alpha_{l_{N-s}} \bar{G}(2u_{k_s}) \bar{G}(2u_{k_{s-1}}) \dots \bar{G}(2u_{k_1}) G(u_0), \quad (11)$$

где суммирование распространяется на все комбинации индексов  $k_1, \dots, k_s, l_1, \dots, l_{N-s}$  из  $1, 2, \dots, N$ , причем положено  $k_s > k_{s-1} > \dots > k_1$ . Далее, в силу формул

$$\left. \begin{aligned} \bar{G}(u_2) G(u_1) &= \bar{G}(u_2 - u_1) \\ \bar{G}(u_2) \bar{G}(u_1) &= G(u_2 - u_1) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

матричное произведение в (11) заменяется одной матрицей  $G$  или  $\bar{G}$ :

$$\begin{aligned} &\bar{G}(2u_{k_s}) \bar{G}(2u_{k_{s-1}}) \dots \bar{G}(2u_{k_1}) G(u_0) = \\ &= \begin{cases} G(2u_{k_s} - 2u_{k_{s-1}} + \dots - 2u_{k_1} + u_0), & \text{если } s \text{ чётно} \\ \bar{G}(2u_{k_s} - 2u_{k_{s-1}} + \dots + 2u_{k_1} - u_0), & \text{если } s \text{ нечётно} \end{cases} \quad (13) \end{aligned}$$

Следовательно,

$$F = \sum_C i \sin \alpha_{k_1} i \sin \alpha_{k_2} \dots i \sin \alpha_{k_s} \cos \alpha_{l_1} \cos \alpha_{l_2} \dots \cos \alpha_{l_{N-s}} \overset{(-)s}{G}(2u_{k_s} - 2u_{k_{s-1}} + \dots - (\pm 1)^s 2u_{k_1} + (\pm 1)^s u_0), \quad (14)$$

где  $\overset{+}{G} \equiv G$ . Здесь оказывается целесообразным выразить аргумент матрицы  $\overset{(-)s}{G}$  через  $v_0, v_1, \dots, v_N$ . Не останавливаясь более на подробностях, сформулируем окончательные правила написания формул для  $\frac{1}{d_N}$  и  $-\frac{r_N}{d_N}$ . Они таковы:

1.  $\frac{1}{d_N}$  и  $-\frac{r_N}{d_N}$   $2^N$ -членны.
2. Каждый член в  $\frac{1}{d_N}$  и  $-\frac{r_N}{d_N}$  содержит  $N + 1$  множителей;

из них  $N$  множителей являются одной из  $2^N$  комбинаций из  $N$  косинусов и  $i$ -кратных синусов величин  $\alpha_m$  с разным индексами  $(1, 2, \dots, N)$ .

3.  $(N + 1)$  ый множитель есть гиперболический косинус (в  $\frac{1}{d_N}$ ) или гиперболический синус (в  $-\frac{r_N}{d_N}$ ) от аргумента вида

$$v_0 + \sum_{m=1}^N \varepsilon_m v_m, \text{ где } \varepsilon_m = \pm 1.$$

4. Если первые  $N$  множителей в данном члене написаны в порядке возрастания индексов, то в аргументе  $v_0 + \sum \varepsilon_m v_m$ , где члены также написаны в порядке возрастания индексов, каждая перемена знака соответствует синусу в числе первых  $N$  множителей, а каждое сохранение знака — косинусу. Например, если при  $N = 5$  первые 5 множителей в каком-либо члене суть  $-i \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 \sin \alpha_4 \cos \alpha_5$ , то последний множитель будет  $\text{ch}(v_0 - v_1 + v_2 + v_3 - v_4 - v_5)$ .

В работе [1] оговаривается, что данная теория применима только при условии действительности всех показателей преломления, т. е. только для диэлектрического покрытия. На самом же деле, все наши формулы имеют силу и в общем случае; однако, в случае комплексности некоторых (или даже всех, кроме  $n_0$ ) показателей преломления величины  $a_m$  и  $v_m$  будут, вообще говоря, также комплексными; но все формулы и выведенные из них правила сохраняют в точности ту же форму. Разница будет, конечно, в том, что в случае диэлектрического покрытия мнимая единица  $i$  будет входить в  $\frac{1}{d_N}$  и  $-\frac{r_N}{d_N}$  только через множители  $i \sin a_m$  а в общем случае она появится также в самих  $a_m$  и  $v_m$ .

§ 3. Приступим теперь к преобразованию формул предыдущего параграфа. Произведём в формулах (1) — (3) следующее унитарное преобразование:

$$\left. \begin{aligned} F' &= T F T^{-1} \\ G' &= T G T^{-1} \\ M' &= T M T^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Вычисляя, находим из (1) — (3):

$$M'(a_m) = \begin{pmatrix} \cos a_m & i \sin a_m \\ i \sin a_m & \cos a_m \end{pmatrix} = G(i a_m), \quad (17)$$

$$G'(v_m) = \begin{pmatrix} e^{v_m} & 0 \\ 0 & e^{-v_m} \end{pmatrix} = M(i v_m), \quad (18)$$

$$F' = M(i v_N) G(i a_N) \quad M(i v_1) G(i a_1) M(i v_0). \quad (19)$$

Положив на время

$$a_0 = a_{N+1} = 0, \quad (20)$$

перепишем (19) в виде:

$$F' = G(ia_{N+1})M(iv_N)G(ia_N)M(iv_{N-1}) \\ G(ia_1) M(iv_0) G(ia_0) \quad (21)$$

С другой стороны, написав (3) в виде:

$$F = G(v_{N+1})M(a_{N+1})G(v_N)M(a_N) \\ G(v_1) M(a_1) G(v_0) \quad (22)$$

с

$$v_{N+1} = 0, \quad (23)$$

находим, что  $F'$  в (21) имеет структуру, аналогичную структуре  $F$  в (22). Именно,  $F'$  получается из  $F$  путем замены:

$$\left. \begin{aligned} v_m &\rightarrow ia_m \quad m = 0, 1, \quad N+1 \\ \alpha_m &\rightarrow iv_{m-1}, \quad m = 1, 2, \quad N+1. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Следовательно, поскольку  $F$  имеет эквивалентную форму (7), то и  $F'$  может быть преобразовано к такому же виду; только  $v_m$  и  $\alpha_m$  следует везде заменить согласно (24). Таким образом, учитывая также (10), находим:

$$F' = P_N P_{N-1} \dots P_1 P_0 G(i(\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{N+1})), \quad (25)$$

где

$$P_m = \operatorname{ch} v_m E - \operatorname{sh} v_m \bar{G} (2i(\alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} + \dots + \alpha_{N+1})) \quad (26)$$

получается из  $S_{m+1}$  путем замены (24). Теперь мы должны перейти обратно от  $F'$  к  $F$ . Обозначим

$$T^{-1} P_m T = Q_m, \quad (27)$$

так что

$$Q_m = \operatorname{ch} v_m E + \operatorname{sh} v_m \bar{M} (2(\alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} + \dots + \alpha_{N+1})), \quad (28)$$

где

$$\bar{M}(\beta) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\beta} \\ e^{i\beta} & 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

Далее, имеем:

$$T^{-1} G(ia) T = M(\alpha). \quad (30)$$

Следовательно,

$$F = Q_N Q_{N-1} \dots Q_1 Q_0 M(\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{N+1}). \quad (31)$$

Теперь существенно, что матрицы  $M$  и  $\bar{M}$  удовлетворяют соотношениям, совершенно аналогичным (12):

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}(\beta_2) M(\beta_1) &= \bar{M}(\beta_2 - \beta_1) \\ \bar{M}(\beta_2) \bar{M}(\beta_1) &= M(\beta_2 - \beta_1). \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Вместе с тем формулы (28) и (31) вполне сходны с формулами (8) и (7). Поэтому мы можем написать и здесь общую формулу, подобную (14), и сформулировать затем соответствующие правила. Именно, легко видеть из (28), (31) и (32), что, если обозначить  $chv$  или  $shv$  через  $xhv$ , то

$$\begin{aligned} F &= \sum_{c^+} xhv_0 xhv_1 \quad xhv_N M(a_0 \pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_N + a_{N+1}) + \\ &+ \sum_{c^-} xhv_0 xhv_1 \quad xhv_N \bar{M}(-a_0 \pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_N + a_{N+1}), \end{aligned} \quad (33)$$

где  $\sum_{c^+}$  берется по всем  $2^N$  комбинациям  $shv$  и  $chv$  с чётным числом гиперболических синусов, а  $\sum_{c^-}$  берется по всем  $2^N$  комбинациям с нечётным числом гиперболических синусов; знаки же членов аргументов матриц  $M$  и  $\bar{M}$  определяются правилом: каждому гиперболическому синусу (в порядке возрастания индексов) соответствует перемена знака, а каждому гиперболическому косинусу — сохранение знака.

Из формулы (33) легко получаются выражения для  $\frac{1}{d_N}$  и  $-\frac{r_N}{d_N}$

Согласно (6), (1) и (29) имеем:

$$\frac{1}{d_N} = \sum_{c^+} xhv_0 xhv_1 \dots xhv_N \exp[i(a_0 \pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_N + a_{N+1})] \quad (34)$$

и

$$-\frac{r_N}{d_N} = \sum_{c^-} xhv_0 xhv_1 \quad xhv_N \exp[i(-a_0 \pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_N + a_{N+1})]. \quad (35)$$

Заметим теперь, что если в каком-либо члене сумм  $\sum_{c^+}$  или  $\sum_{c^-}$  изменим знаки  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_N$  на обратные, и одновременно заменим  $shv_0 \rightleftharpoons chv_0$  и  $shv_N \rightleftharpoons chv_N$ , то получим другой член той

суммы; объединяя попарно такие члены и опуская  $\alpha_0$  и  $\alpha_{N+1}$  (см. (20)), находим:

$$\frac{1}{d_N} = \sum_{C^+} xh v_1 xh v_2 \dots xh v_{N-1} xh(v_N + v_0) \cos(\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \dots \pm \alpha_N) +$$

$$+ \sum_{C^+} xh v_1 xh v_2 \dots xh v_{N-1} xh(v_N - v_0) i \sin(\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \dots \pm \alpha_N); \quad (36)$$

$$- \frac{r_N}{d_N} = \sum_{C^-} xh v_1 xh v_2 \dots xh v_{N-1} xh(v_N + v_0) \cos(-\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \dots \pm \alpha_N) +$$

$$+ \sum_{C^-} xh v_1 xh v_2 \dots xh v_{N-1} xh(v_N - v_0) i \sin(-\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \dots \pm \alpha_N). \quad (37)$$

В этих формулах  $C^+$  по-прежнему обозначает комбинации с четным числом гиперболических синусов, а  $C^-$  — комбинации с нечетным числом гиперболических синусов; знаки  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_N$  определяются по тому же правилу: каждой перемене знака соответствует гиперболический синус среди первых  $N - 1$  множителей, а каждому сохранению знака — гиперболический косинус.

Вместо формул (36) и (37) удобнее пользоваться для написания выражений  $\frac{1}{d_N}$  и  $-\frac{r_N}{d_N}$  следующими правилами:

1.  $\frac{1}{d_N}$  и  $-\frac{r_N}{d_N}$   $2^N$ -членны.

2. В каждом члене  $N + 1$  множителей.

3. Первые  $N - 1$  множителей являются одной из комбинаций гиперболических синусов и косинусов от  $v_1, v_2, \dots, v_{N-1}$  с разными индексами.

4.  $N$ -ый множитель есть  $\text{ch}(v_N \pm v_0)$  или  $\text{sh}(v_N \pm v_0)$  таким образом, что общее число гиперболических синусов в каждом члене  $\frac{1}{d_N}$  четное, а в каждом члене  $-\frac{r_N}{d_N}$  — нечетное.

5.  $(N + 1)$ -ый множитель есть в членах с  $v_N + v_0$  косинус, а в членах с  $v_N - v_0$   $i$ -кратный синус от аргументов вида

$$\alpha_1 + \sum_{m=2}^N \varepsilon_m \alpha_m \text{ в } \frac{1}{d_N}, \text{ и вида } -\alpha_1 + \sum_{m=2}^N \varepsilon_m \alpha_m \text{ в } -\frac{r_N}{d_N}; \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_N$$

равны  $+1$  или  $-1$  таким образом, что каждой перемене знака соответствует по порядку гиперболический синус среди первых  $N - 1$  множителей, а каждому сохранению знака — гиперболический косинус.

Например,  $\frac{1}{d_3}$  и  $-\frac{r_3}{d_3}$  напишутся так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{d_3} = & \operatorname{ch} v_1 \operatorname{ch} v_2 \operatorname{ch} (v_3 + v_0) \cos (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \\ & + \operatorname{sh} v_1 \operatorname{sh} v_2 \operatorname{ch} (v_3 + v_0) \cos (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) + \\ & + \operatorname{ch} v_1 \operatorname{sh} v_2 \operatorname{sh} (v_3 + v_0) \cos (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) + \\ & + \operatorname{sh} v_1 \operatorname{ch} v_2 \operatorname{sh} (v_3 + v_0) \cos (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) + \\ & + i \operatorname{ch} v_1 \operatorname{ch} v_2 \operatorname{ch} (v_3 - v_0) \sin (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \\ & + i \operatorname{sh} v_1 \operatorname{sh} v_2 \operatorname{ch} (v_3 - v_0) \sin (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) + \\ & + i \operatorname{ch} v_1 \operatorname{sh} v_2 \operatorname{sh} (v_3 - v_0) \sin (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) + \\ & + i \operatorname{sh} v_1 \operatorname{ch} v_2 \operatorname{sh} (v_3 - v_0) \sin (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3); \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} -\frac{r_3}{d_3} = & \operatorname{ch} v_1 \operatorname{ch} v_2 \operatorname{sh} (v_3 + v_0) \cos (-\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) + \\ & + \operatorname{sh} v_1 \operatorname{sh} v_2 \operatorname{sh} (v_3 + v_0) \cos (-\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) + \\ & + \operatorname{ch} v_1 \operatorname{sh} v_2 \operatorname{ch} (v_3 + v_0) \cos (-\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) + \\ & + \operatorname{sh} v_1 \operatorname{ch} v_2 \operatorname{ch} (v_3 + v_0) \cos (-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \\ & + i \operatorname{ch} v_1 \operatorname{ch} v_2 \operatorname{sh} (v_3 - v_0) \sin (-\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) + \\ & + i \operatorname{sh} v_1 \operatorname{sh} v_2 \operatorname{sh} (v_3 - v_0) \sin (-\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) + \\ & + i \operatorname{ch} v_1 \operatorname{sh} v_2 \operatorname{ch} (v_3 - v_0) \sin (-\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) + \\ & + i \operatorname{sh} v_1 \operatorname{ch} v_2 \operatorname{ch} (v_3 - v_0) \sin (-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3). \end{aligned} \quad (39)$$

Полученные нами формулы, также как и формулы, выведенные в § 2 этой статьи, применимы одинаковым образом как для диэлектрических покрытий, так и в случае комплексных показателей преломления. В первом случае величины  $v_m$  и  $\alpha_m$  действительны, во втором случае — вообще говоря комплексны.

Изложенная теория применима также в случае косо́го падения света, а не только при нормальном падении, как мы предполагали до сих пор. Таким образом, весьма важный случай полного отражения (реального или «снятого») тоже включается в теорию. Как показано в работе [7], введение «эффективных» значений показателей преломления и толщин слоев сводит случай косо́го падения к случаю нормального падения. На языке нашей теории это означает, что величины  $\alpha_m$  и  $v_m$  будут иметь вместо (4) и (5) следующие значения:

$$\alpha_m = k n_m h_m \cos \vartheta_m \quad (40)$$

и

$$\left. \begin{aligned} v_m^{\parallel} &= \frac{1}{2} \ln \frac{\sin 2 \vartheta_m}{\sin 2 \vartheta_{m+1}}, \\ v_m^{\perp} &= \frac{1}{2} \ln \frac{\tan \vartheta_m}{\tan \vartheta_{m+1}}, \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

где  $\vartheta_m$  есть угол преломления (или падения) в  $m$ -ой среде, а  $\parallel$  и  $\perp$  указывают параллельность или перпендикулярность электрического вектора плоскости падения.

Как вытекает из (5) и (41), если обозначить через  $a_m$  и  $b_m$  амплитудные коэффициенты отражения и пропускания на границе между  $m$ -ой и  $(m + 1)$ -ой средами, то

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sh} v_m &= -\frac{a_m}{b_m}, \\ \operatorname{ch} v_m &= \frac{1}{b_m}, \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

и отсюда еще

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sh}(v_N \pm v_0) &= -\frac{a_N \pm a_0}{b_0 b_N}, \\ \operatorname{ch}(v_N \pm v_0) &= \frac{1 \pm a_0 a_N}{b_0 b_N} \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Подставляя эти выражения в формулы, получаемые по нашим правилам (например, в (38) и (39)), будем иметь формулы, близкие к формулам Лисицы [6]. А так как формулы Лисицы основаны непосредственно на рекуррентных формулах Власова, то наше преобразование (15) осуществляет действительно связь между матричным методом и методом Власова.

С точки зрения практики прямых численных расчетов наши новые формулы не дают ничего более того, что содержится уже в формулах Власова или Лисицы. Однако, формулы с гиперболическими синусами и косинусами, в которых не сделана замена (42)—(43), имеют благодаря своей простой симметричной структуре самостоятельный интерес. Они могут быть использованы для получения общих теоретических соотношений безотносительно к конкретным численным данным. Эти вопросы выходят за рамки настоящей статьи и мы здесь их рассматривать не будем.

## Литература

1. Кард, П. Г., Оптика и спектроскопия, **2**, (1957), 237.
2. Canals-Frau, D., Revue d'opt. théor. et instr., **31**, (1952), 161.
3. Сухановский, В. В., Докл. АН СССР, **95**, (1954), 245.
4. Сухановский, В. В., Докл. АН СССР, **106**, (1956), 226.
5. Власов, А. Г. и др., Просветление оптики, Гостехиздат, 1946.
6. Лисица, М. П., Журнал техн. физики, **24**, (1954), 1837.
7. Кард, П. Г., Труды инст. физ. и астр. АН ЭССР, № 5, (1956), 54.

## MITMEKIHILISTE KATETE OPTILISTE OMADUSTE TEOORIAST

P. Kard

Re s ü m e e

Mitmekihiliste katete teoorias on seni kasutatud peamiselt kaht meetodit: D. C.-Frau [2] ja V. V. Suhhanovski [3], [4] maatriksmeetodit ja A. G. Vlassovi [5] rekurrentsete valemite meetodit. Käesolevas töös on leitud seos mõlema meetodi vahel. Lähtekohaks on võetud autori teooria [1], mis põhineb maatriksmeetodil ja mis annab lihtsad reeglid  $\frac{1}{d_N}$  ja  $-\frac{r_N}{d_N}$  avaldiste üleskirjutamiseks kõigi keskkondade murdumisnäitajate, kihtide pakustuste ja langemisnurga funktsioonidena.  $r_N$  tähendab siin  $N$ -kihilise katte amplituudset peegeldumiskoefitsienti ja  $d_N$  amplituudset läbilaskvuse koefitsienti. Lihtsa unitaarse teisenduse abil teisendatakse need valemid uude kujusse, mis on vahetult tuletatav ka Vlassovi rekurrentsetest valemitest. Formuleeritakse uued reeglid nende uute valemite üleskirjutamiseks lihtsal ja sümmeetrilisel kujul. Kogu teooria on esitatud kõige üldisemal viisil, mis sisaldab neelavate keskkondade juhtu kui ka täieliku peegeldumise (tõelise või näilise) juhtu.

## ON THE THEORY OF OPTICAL PROPERTIES OF MULTI-LAYER COATINGS

P. Kard

### Summary

Two principal methods have hitherto been used in the theory of multilayer coatings: the matrix method of D. C.-Frau [2] and V. V. Sukhanovsky [3], [4], and the recurrent method of A. G. Vlasov [5]. In this paper the connection between both methods is found proceeding from the author's own theory [1] based on the matrix method. This theory gives simple rules for writing the expressions for  $\frac{1}{d_N}$  and  $-\frac{r_N}{d_N}$  as functions of refractive indices of all media, of thicknesses of layers and of the angle of incidence. Here  $r_N$  denotes the amplitude reflectance and  $d_N$  the amplitude transmittance of  $N$ -layer coating. By means of a simple unitary transformation these formulae are transformed into new ones, which can immediately be deduced from Vlasov's recurrent formulae as well. New rules for writing the new formulae for  $\frac{1}{d_N}$  and  $-\frac{r_N}{d_N}$  in a simple and symmetrical form are given. The whole theory is formulated in a most general manner including the case of absorbing media and of (actual or frustrated) total reflection.

# МЕТОД РАСЧЕТА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОКРЫТИЙ С НЕПРЕРЫВНО ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ПОКАЗАТЕЛЕМ ПРЕЛОМЛЕНИЯ (СЛУЧАЙ НОРМАЛЬНОГО ПАДЕНИЯ СВЕТА)\*

Канд. физ.-мат. наук К. К. Ребане

Кафедра теоретической физики

Теоретическое исследование многослойных покрытий, начатое А. Г. Власовым [1], получило в последние годы дальнейшее развитие, особенно в работах В. В. Сухановского [2] и П. Г. Карда [3]. В работах последних авторов используется идея продолжения светового поля с помощью граничных условий из одного слоя в другой и матричные методы расчета.<sup>1</sup> Аналогичный подход использовался нами [4], а также в [5] для исследования уравнения Шредингера в задачах зонной теории твердого тела.

В данной заметке методы, развитые в [4, 5], применяются для расчета диэлектрических покрытий. Несколько более общий подход позволяет включить в рассмотрение и слои с непрерывно изменяющимся показателем преломления. Выбор частных решений согласно условиям § 2 формула (3) представляется нам весьма целесообразным, позволяющим существенно упростить матричные выкладки. Возможно, что некоторые расчеты, а также исследование некоторых общих свойств многослойных покрытий, более удобно проводить на основе формул данной заметки. Некоторые примеры их применения имеются в §§ 4 и 5.

## § 1. Постановка задачи

Имеется изотропная диэлектрическая среда с показателем преломления  $n(x)$  и с постоянной магнитной восприимчивостью

---

\* Настоящая работа была доложена на научной сессии Тартуского государственного университета 25-го ноября 1956 г.

<sup>1</sup> Несколько нам известно, впервые предложил и использовал такой подход к проблеме многослойного покрытия ст. научный сотрудник Ленинградского государственного университета Ю. Н. Демков. В 1949 г. им был сконструирован специальный прибор, механизмирующий процесс графического нахождения коэффициентов отражения и пропускания многослойных покрытий.

$\mu(x) = \text{const.} = 1$  (будем пользоваться гауссовой системой единиц). На промежутке  $x_1 \leq x \leq x_N$   $n(x)$  является произвольной кусочно-непрерывной функцией  $x$ ; вне этого промежутка среда однородна: при  $x \leq x_1$   $n(x) = n_v = \text{const.}$ , при  $x \geq x_N$   $n(x) = n_p = \text{const.}$  (рис. 1). В направлении оси  $x$  распространяется плоская и плоско поляризованная монохроматическая световая волна. Задача заключается в нахождении количества световой энергии прошедшего через участок неоднородности  $n(x)$  («покрытие»), и отраженного от него.



Рис 1. Общий вид функции  $n(x)$ . Показана одна из возможностей деления покрытия на слои.

## § 2. Основное матричное соотношение

Исходим из уравнений Максвелла, в которых положим:

$$\vec{i} = 0, \rho = 0, \vec{B} = \vec{H}, \vec{D} = \varepsilon(x)\vec{E}, \varepsilon(x) = n^2(x) \quad (1)$$

Пусть координатная ось  $z$  лежит в плоскости поляризации, так что  $E_x = E_y = 0, E_z = E_z(x)$ .

Обычные преобразования приведут систему уравнений Максвелла к волновому уравнению нижеследующего вида:

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + k^2(x)E = 0, \quad (2)$$

где  $k^2(x) \equiv k_0^2 n^2(x)$  ( $k_0$  — волновое число в пустоте)  $E \equiv E_z$ .

Сделаем два замечания относительно уравнения (2).

1. Оно математически тождественно с уравнением Шредингера, описывающим движение электрона в одномерном потенциальном поле. Величине  $k^2(x)$  соответствует  $k^2(x) = (E - V(x))2m/\hbar^2$  где  $E$  — собственное значение энергии электрона,  $V(x)$  — оператор потенциальной энергии.

Как уравнение Шредингера, уравнение (2) подвергалось подробному исследованию, в особенности в связи с зонной теорией твердого тела. Ряд полученных результатов можно перенести в теорию покрытий. Например, нахождению зонного спектра электрона соответствует определение зон частот света, пропускаемых

или отражаемых данным покрытием при бесконечном увеличении числа слоев (см. §§ 4 и 5).

2. Общеизвестные математические свойства уравнения (2), используемые в дальнейшем, таковы:

а) общее решение (2) выражается через линейную комбинацию двух линейно независимых решений.

б) определитель Вронского для уравнения (2) — величина постоянная.

Переходим к выводу основного матричного соотношения.

Разделим ось  $x$  произвольно на конечное число  $N + 1$  промежутков (слоев). Пронумеруем слои начиная от нулевой до  $N$ . Промежуток номера  $k$  простирается от координаты  $x_k$  до  $x_k + 1$  (рис. 1).

В каждом слое можно найти, хотя бы путем численного интегрирования, два линейно независимых решения уравнения (2). Частное решение, фиксированное начальными условиями в каком-нибудь из слоев, однозначно определено для всей оси  $x$ . Это следует из наличия двух условий сшивания решения на границе между слоями: в точках  $x_k$  необходимо требовать непрерывность решения и его первой производной. Первое условие — непрерывность решения  $E(x)$  — следует непосредственно из требования непрерывности тангенциальной составляющей вектора  $E$ , второе условие — непрерывность первой производной — является следствием требования непрерывности тангенциальной составляющей

магнитного вектора  $\vec{H}$ .

Итак, имея линейные независимые частные решения для всех слоев, можно на их основе построить путем последовательного продолжения решения из одного слоя в другой желаемое решение для всей оси  $x$ .

Целесообразно определить базисные решения для  $k$ -того слоя  $E_{1,k}(x - x_k)$  и  $E_{2,k}(x - x_k)$  нижеследующими начальными условиями:

$$\begin{aligned} E_{1,k}(0) &= 1 & E_{2,k}(0) &= 0 \\ E'_{1,k}(0) &= 0 & E'_{2,k}(0) &= 1 \end{aligned} \quad (3)$$

Общее решение в слое номера  $k$  имеет вид:

$$E(x)_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} = a_k E_{1,k}(x - x_k) + b_k E_{2,k}(x - x_k), \quad (4)$$

где  $a_k, b_k$  — произвольные коэффициенты.

Пусть в точке  $x_0$  (рис. 1) определены коэффициенты  $a_0, b_0$  и тем самым зафиксировано частное решение

$$E(x)_{x_0 \leq x \leq x_1} = a_0 E_{1,0}(x) + b_0 E_{2,0}(x) \quad (5)$$

Коэффициенты  $a_1, b_1$  слоя номер 1 однозначно определяются из условий непрерывности решения  $E(x)$  и его первой производ-

ной  $E'(x)$  в точке  $x_1$ . Благодаря выбору линейно независимых решений  $E_{1,k}$  и  $E_{2,k}$  согласно (3), связь между  $a_1 b_1$  и  $a_0 b_0$  удобно записывается в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \hat{c}^{(0)} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где  $\hat{c}^{(0)}$  матрица с элементами:

$$\begin{aligned} c_{11}^{(0)} &\equiv E_{1,0}(x_1 - x_0) & c_{12}^{(0)} &\equiv E_{2,0}(x_1 - x_0) \\ c_{21}^{(0)} &\equiv E'_{1,0}(x_1 - x_0) & c_{22}^{(0)} &\equiv E'_{2,0}(x_1 - x_0) \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогично  $a_2 b_2$  связаны с  $a_1 b_1$  и т. д. В итоге связь между коэффициентами  $a_0 b_0$  и  $a_N b_N$  дается матричным соотношением

$$\begin{pmatrix} a_N \\ b_N \end{pmatrix} = \hat{c}^{(N-1)} \hat{c}^{(N-2)} \dots \hat{c}^{(1)} \hat{c}^{(0)} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \equiv \hat{C}^{(N)} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где элементы матрицы  $\hat{c}^{(k)}$  являются значениями частных решений  $E_{1,k}$ ,  $E_{2,k}$  и их первых производных на правой границе  $k$ -того слоя и определены формулами (7), где индексы слоев ноль и 1 заменены соответственно на  $k$  и  $k+1$ .

Изучение связи между коэффициентами  $a_0 b_0$  и  $a_N b_N$  сводится тем самым к изучению матричного произведения (8):

$$\hat{C}^{(N)} \equiv \hat{c}^{(N-1)} \hat{c}^{(N-2)} \dots \hat{c}^{(1)} \hat{c}^{(0)} \quad (9)$$

Все матричные элементы в (9) вещественны, т. к. вещественны коэффициенты уравнения (2) и начальные условия (3)

Сделаем еще два замечания относительно свойств матриц  $\hat{c}^{(k)}$ .

1. Если  $k^2(x)$  в слое номера  $k$  является четной функцией относительно середины слоя, то диагональные элементы  $\hat{c}^{(k)}$  равны между собой [5]:

$$c_{11}^{(k)} = c_{22}^{(k)} \quad (10)$$

2. Из независимости определителя Вронского от  $x$  и из (3) следует

$$\det \hat{c}^{(k)} = 1. \quad (11a)$$

Отсюда в свою очередь:

$$\det \hat{C}^{(N)} = \det \hat{c}^{(N-1)} \det \hat{c}^{(N-2)} \dots \det \hat{c}^{(0)} = 1 \quad (11b)$$

### § 3. Отражение плоской волны

В § 2 было получено выражение связи электромагнитного поля перед покрытием с полем за ним в достаточно общем случае. Выделим теперь интересующие нас поля — плоские волны. Коэффициенты отражения и пропускания для покрытия выражаются

через амплитуды падающей, отраженной и прошедшей волн. Найдём связь между этими амплитудами.

В пределах нулевой ячейки (и дальше левее) показатель преломления постоянный. Решения уравнения (2), удовлетворяющие начальным условиям (3), таковы:

$$E_{1,0} = \cos k_v x, \quad E_{2,0} = k_v^{-1} \sin k_v x, \quad (12)$$

где  $k_v \equiv k(x) = \text{const.}$  и имеет смысл обычного волнового числа плоской волны в однородной среде с показателем преломления  $n_v$ .

Пусть волна падает слева на покрытие. Тогда мы имеем справа от покрытия (где  $n = n_p$ ) такое же общее решение:

$$E(x) = a_n \cos k_p(x - x_N) + \frac{b_N}{k_p} \sin k_p(x - x_N). \quad (13)$$

$x \geq x_N$

Но справа от покрытия мы должны иметь только прошедшую волну, т. е. плоскую волну, распространяющуюся вправо:

$$E(x) = G_0 e^{-ik_p(x - x_N)} \quad (14)$$

$x \geq x_N$

Из условия равенства (13) и (14) определяются коэффициенты  $a_N$  и  $b_N$ :

$$a_N = G_0, \quad b_N = -ik_p G_0. \quad (15)$$

Тем самым определены согласно (8) и коэффициенты  $a_0$  и  $b_0$ , фиксирующие поле перед покрытием:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \hat{B}^{(N)} \begin{pmatrix} a_N \\ b_N \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где для обратной матрицы введено обозначение  $(\hat{C}^{(N)})^{-1} = \hat{B}^{(N)}$ .

Поле перед покрытием представим в виде падающей и отраженной плоских волн:

$$E(x) = A_N e^{-ik_v x} + B_N e^{ik_v x} \quad (17)$$

$x \leq x_1$

Из (13), (16) и (17) мы получаем для  $A_N B_N$  выражения:

$$\begin{aligned} A_N &= \frac{1}{2} G_0 \left[ B_{11}^{(N)} + \frac{k_p}{k_v} B_{22}^{(N)} + i \left( \frac{B_{21}^{(N)}}{k_v} - k_p B_{12}^{(N)} \right) \right] \\ B_N &= \frac{1}{2} G_0 \left[ B_{11}^{(N)} - \frac{k_p}{k_v} B_{22}^{(N)} - i \left( \frac{B_{21}^{(N)}}{k_v} + k_p B_{12}^{(N)} \right) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

Энергетические коэффициенты отражения  $R$  и пропускания (прозрачность)  $D$  выражаются формулами:

$$R = \frac{I_{\text{отр.}}}{I_{\text{пад.}}} = \frac{|B_N|^2}{|A_N|^2} \quad D = \frac{I_{\text{прош.}}}{I_{\text{пад.}}} = \frac{n_p}{n_v} \frac{|G_0|^2}{|A_N|^2} \quad (19)$$

Удобный для расчета вид принимает формула для отношения  $a_N \equiv \frac{R}{D}$ . Зная  $a_N$  и используя связь  $R + D = 1$ , уже нетрудно вычислить  $R$  и  $D$ .

Из (18) и (19) мы имеем окончательную расчетную формулу для  $a_N$ :

$$a_N \equiv \frac{R}{D} = \frac{1}{4} \left[ \frac{k_p}{k_v} \left( C_{11}^{(N)} \right)^2 + \frac{k_v}{k_p} \left( C_{22}^{(N)} \right)^2 + \frac{\left( C_{21}^{(N)} \right)^2}{k_v k_p} + k_v k_p \left( C_{12}^{(N)} \right)^2 - 2 \right] \quad (20)$$

Из формулы (20) хорошо видно, что величина  $a_N$  для данного покрытия не зависит от того, с какой стороны, слева или справа, падает свет на покрытие.<sup>2</sup>

Ясно, что основная трудность в расчете сложных покрытий заключается в вычислении матричных элементов  $C_{ik}^{(N)}$ . Но целесообразное деление покрытия на слои позволяет в некоторых случаях существенно облегчить эту задачу.

#### § 4. Примеры

1. Проиллюстрируем метод на примере многослойного «периодического» покрытия, зависимость  $n(x)$  для которого приведена на рис. 2.

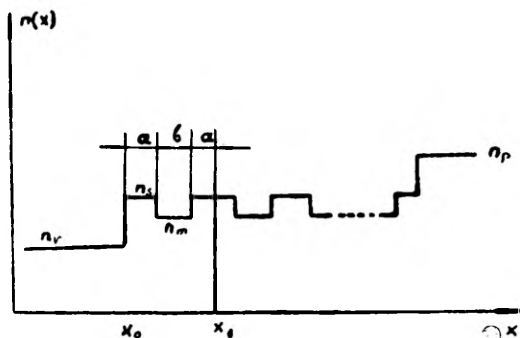


Рис. 2.  $n(x)$  в случае простейшего периодического покрытия.

Такое покрытие можно делить на одинаковые слои, причем  $n(x)$  в каждом слое четная функция  $x$  относительно середины слоя. Вычислим матрицу  $\hat{c}^{(N)}$  для такого покрытия. Матрицы  $\hat{c}^{(k)}$

<sup>2</sup> При падении света справа на покрытие следует в формуле (20) поменять местами  $k_v k_p$  и заменить  $C_{ik}^{(N)}$  на элементы обратной матрицы  $B_{ik}^{(N)}$ . При этом  $C_{11}^{(N)} = B_{22}^{(N)}$ ,  $C_{22}^{(N)} = B_{11}^{(N)}$ ,  $B_{12}^{(N)} = -C_{12}^{(N)}$ ,  $B_{21}^{(N)} = -C_{21}^{(N)}$

для внутренних слоев одинаковы и равны матрице  $\hat{c}$ , которую можно выразить в виде произведения следующих трех матриц [4]:

$$\hat{c}^{(k)} = \begin{pmatrix} \cos k_s a & \frac{1}{k_s} \sin k_s a \\ -k_s \sin k_s & \cos k_s a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos k_m b & \frac{1}{k_m} \sin k_m b \\ -k_m \sin k_m b & \cos k_m b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos k_2 a & \frac{1}{k_s} \sin k_s a \\ -k_s \sin k_s a & \cos k_s a \end{pmatrix} \quad (21)$$

Вспомним, что для симметричного слоя  $c_{11} = c_{22}$ . Если  $|c_{11}| \leq 1$ , то результат вычисления  $\hat{c}$  по формуле (21) можно выразить в виде<sup>3</sup>:

$$\hat{c} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \frac{1}{\beta} \sin \gamma \\ -\beta \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix} \equiv \hat{a}. \quad (22)$$

Возможность такой записи следует из (10) и (11). Если же  $|c_{11}| \geq 1$ , то

$$\hat{c} = \pm \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \gamma & \frac{1}{\beta} \operatorname{sh} \gamma \\ \beta \operatorname{sh} \gamma & \operatorname{ch} \gamma \end{pmatrix} \equiv \hat{b} \quad (23)$$

Непосредственным перемножением можно убедиться в том, что для возведения  $\hat{a}$  или  $\hat{b}$  в  $n$ -ную степень следует увеличить аргумент в  $n$  раз. Для  $\hat{a}^N$  мы имеем таким образом:

$$\hat{c}_a^{(N)} = \hat{a}^N = \begin{pmatrix} \cos N\gamma & \frac{1}{\beta} \sin N\gamma \\ -\beta \sin N\gamma & \cos N\gamma \end{pmatrix} \quad (24)$$

Аналогичную формулу можно получить для  $\hat{c}_b^{(N)} = \hat{b}^N$ .

Для  $\alpha_N$  мы имеем в первом случае ( $|c_{11}| \leq 1$ ):

$$\alpha_N = \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{k_p}{k_v} + \frac{k_v}{k_p} \right) \cos^2 N\gamma + \left( \frac{\beta^2}{k_v k_p} + \frac{k_v k_p}{\beta^2} \right) \sin^2 N\gamma - 2 \right] \quad (25)$$

и во втором случае ( $|c_{11}| \geq 1$ ):

$$\alpha_N = \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{k_p}{k_v} + \frac{k_v}{k_p} \right) \operatorname{ch}^2 N\gamma + \left( \frac{\beta^2}{k_v k_p} + \frac{k_v k_p}{\beta^2} \right) \operatorname{sh}^2 N\gamma - 2 \right] \quad (26)$$

Из формул (25) и (26) видно, что если один слой «периодического» покрытия характеризуется матрицей типа  $\hat{b}$  (формула (23)), то при  $N \rightarrow \infty$  отражается полностью весь падающий на него свет рассматриваемой частоты. Покрытие, которому соответствует матрица типа  $\hat{a}$  (ф-ла (22)) при  $N \rightarrow \infty$  пропускает некоторую долю света, причем для периодически повторяющихся значений

<sup>3</sup> В виде (22) или (23) можно записать матрицы для любых симметричных слоев. Поэтому дальнейшее относится также к таким покрытиям, которые можно делить на одинаковые симметричные слои.

$N$  отражение от покрытия приблизительно такое же, как от одного слоя.

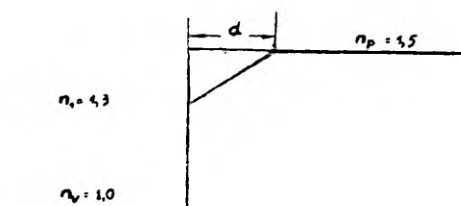


Рис. 3.  $n(x)$  для покрытия с линейно изменяющимся показателем преломления. Для указанных на рисунке численных значений  $n_v$ ,  $n_1$ ,  $n_p$  и для различных толщин слоя  $d$  проведен расчет, результаты которого приведены на рис. 4.

2. Рассмотрим покрытие с линейно изменяющимся показателем преломления (рис. 3). Уравнение (2) сводится в этом случае к обобщенному уравнению Эйри с показателем 2. Решения  $E_1$  и

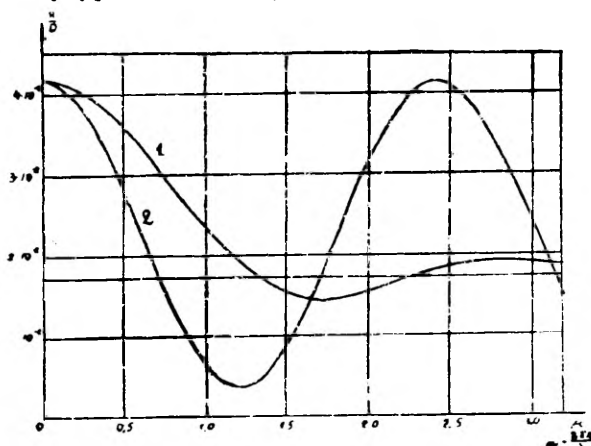


Рис. 4. Кривая 1 — зависимость  $\alpha(\mu) = \frac{R(\mu)}{D(\mu)}$  для покрытия с линейно изменяющимся показателем преломления (см. рис. 3). Здесь —  $R$  и  $D$  — энергетические коэффициенты отражения и пропускания, а  $\mu = \frac{2\pi d}{\lambda}$  — толщина слоя, выраженная через длину волны света в пустоте. Расчет проведен для различных  $\mu$  при фиксированных показателях преломления:  $n_v = 1,0$ ;  $n_p = 1,5$ ;  $n_2 = 1,3$ . Для сравнения приведена  $\alpha(\mu)$  для случая, когда между однородными средами с  $n_v = 1,0$  и  $n_p = 1,5$  имеется однородный слой толщины  $d$  с показателем преломления  $n = 1,3$  (кривая 2).

$E_2$ , удовлетворяющие начальным условиям (3), можно построить, например, с помощью табулированных функций  $U_1(s, 2)$ ,  $U_2(s, 2)$  [6]. Соответствующее вычисление для различных толщин слоя  $d$  были проведены дипломантом ТГУ О. Кеербергом и их результаты приводятся на рис. 4.

## § 5. К использованию аналогии с задачами зонной теории твердого тела

а) В зонной теории математическое исследование уравнения (2) сводилось прежде всего к изучению устойчивости его решений в зависимости от величины  $E$  и функции  $V(x)$ . Для некоторых частных видов  $V(x)$  построены диаграммы устойчивости решений [7, 8]. Из этих диаграмм, а также из общих исследований устойчивости решений уравнения (2), можно делать выводы и о некоторых свойствах периодических покрытий и свойствах матрицы  $\hat{c}$ . При этом заданию  $E$  и  $V(x)$  соответствует задание  $\lambda_0 = \frac{1}{k_0}$  и  $n(x)$ . Так на диаграммах устойчивости можно указать точки и линии, где следует ожидать экстремальные свойства  $\alpha$  (например,  $\alpha = 0$  для покрытия из одного слоя) или при заданном  $n(x)$  определить интервалы длин волн (которые могут быть и весьма узкими), свет из которых хорошо проходит через данное покрытие или сильно отражается от него (монокроматоры).

б) Используя соответствующую теорему, доказанную для уравнения Шредингера в виде (2) [4], можно для отражающего покрытия указать простые требования, которым должны удовлетворять используемые слои для того, чтобы каждый следующий слой усиливал отражение.

в) В связи с релеевским рассеянием света в кристаллах представляет интерес отражение от покрытия с синусоидальным  $n(x)$  при большом числе периодов (слоев).

В этом случае  $k^2(x) = k_0^2 \sin^2 x = k_0^2 \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$  и уравнение (2) есть хорошо изученное уравнение Матье [8]. Из диаграммы устойчивости решения для уравнения Матье следует, что при отражении полихроматического света от такого покрытия возникают отражения всех порядков, т. е. при уменьшении длины рассматриваемой монохроматической волны мы проходим последовательно через такие участки  $\lambda_{01}$ ,  $\lambda_{02}$ , ..., где имеет место сильное, а при  $N \rightarrow \infty$  — полное отражение света. Длина волны  $\lambda_{s+1}$  каждого следующего промежутка в спектре отражения приблизительно в два раза меньше предыдущего  $\lambda_{s+1} \approx \frac{\lambda_s}{2}$ .

Если считать, что вышесказанное распространяется также на случай косоуго падения света и при рассмотрении релеевского рассеяния оставаться в рамках наглядной приближенной трактовки

явления как отражения от синусоидальной дифракционной решетки, созданной в кристалле тепловым возбуждением упругой волны подходящей длины и подходящего направления (см. например [9]) то следует заключить, что в спектре релеевского рассеяния должны присутствовать, кроме обычных, еще некоторые линии. Отклонения их частот от частоты падающего света составляют приблизительно  $\frac{\Delta\omega}{2}$ ,  $\frac{\Delta\omega}{3}$ ,  $\frac{\Delta\omega}{n}$ , где  $\Delta\omega$  — изменение частоты для основных рассеянных линий. Интенсивность этих линий быстро убывает по мере увеличения  $n$ .

Для того, чтобы считать последний вывод окончательным, требуется рассмотрение на основе более строгой теории релеевского рассеяния.

### Литература

1. Н. В. Гребенщиков, А. Г. Власов, Б. С. Непорент, и И. В. Суйковская, Просветление оптики, (1946).
2. Сухановский, В. В., ДАН 95, (1954) 245; ДАН 106, (1956), 226.
3. Кард, П. Г., ДАН 108, (1956) 60; Труды инст-та физики и астрономии АН ЭССР № 5, (1957), 54; Оптика и спектроскопия 2, (1957), 237 и 246.
4. Ребане, К. К., Диссертация, ЛГУ, (1955); Труды инст-та физики и астрономии АН ЭССР № 5, (1956), 72.
5. James, H. M., Phys. Rev. 76, (1949), 1602; James, H. M., Ginzburg, A. G., J. Phys. Chem. 57, (1953), 840.
6. Смирнов А. Д., Таблицы функций Эйри и специальных вырожденных гипергеометрических функций, (1955).
7. Бриллюэн, Л., Квантовая статистика, (1934), Стретт, М. Д. О., Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике, (1935).
8. Мак Лахлан, Н. В., Теория и приложения функций Матье, (1953).
9. Волькенштейн, М. В., Молекулярная оптика, (1951), 331.

# PIDEVALT MUUTUVA MURDUMISNÄITAJAGA KATETE ARVUTUSMEETOD (VALGUSE NORMAALSE LANGEMISE JUHT)

K. Rebane

Resümee

Töodes [4,5] ühemõõtmelise Schrödingeri võrrandi uurimiseks kasutatud meetodi alusel on antud meetod pidevalt muutuva murdumisnäitajaga dielektriliste katete peegeldumisvõime ja läbilaskvuse arvutamiseks. On arvatud lineaarselt muutuva murdumisnäitajaga kate kattekihi mitmesuguste paksuste puhul (joon. 4). Kasutades analoogiat tahke keha tsooniteooriaga on uuritud valguse peegeldumist sinusoidaalselt muutuva murdumisnäitajaga keskkonnalt — ülesannet, mis on seotud Rayleigh' hajumisega kristallides.

Meetodi rakendamisel mitmekihilistele katetele on saadud valemid, mille kuju on sobiv katete üldiste omaduste uurimiseks. On toodud näiteid nende valemite kasutamisevõimalustest.

# METHOD OF COMPUTATION OF DIELECTRIC COATINGS WITH CONTINUOUS REFRACTION INDEX (THE CASE OF NORMAL INCIDENCE)

K. Rebane

## Summary

On the basis of the method used in [4,5] to investigate Schrödinger's one-dimensional equation a method is evolved for calculating reflection and transmission coefficients of dielectric coatings with continuous refractive index. A coating with linear variable refraction index for various thicknesses of the layer is computed. Making use of the analogy with the solid state zone theory, the reflection from a medium with sinusoidal refraction index, i. e. the problem concerned with the Rayleigh dispersion of light in crystal, is investigated.

Applied to multilayer coatings, this method gives the formulae in a convenient form for the investigation of some of the general properties of the coatings. Examples are given of the use of these formulae.

## AMPLITUUDFILTRITE JA DIAFRAGMADE MÕJUST DIFRAKTSIOONPILDILE. I\*

L. Tuvikene

Teoreetilise füüsika kateeder

Optiliste riistade teoorias kui ka praktikas on tähtsal kohal difraktsioonefekti varieerimise võimalused eesmärgiga 1) nõrgendada fooni difraktsioonpildis (diafrageerunud valgust), kahandades kõrvalmaksimume, või 2) vähendada tsentraalse maksimumi ulatust ja seega suurendada optilise riista lahutusvõimet pildi keskel.

Selleks et varieerida amplituudijaotust (intensiivsust) kujutises (difraktsioonpildis), on tarvis muuta amplituudijaotust optilise süsteemi sisenemisavas, s. t. mõjuda kas langeva valguse amplituudile või faasile või mõlematele korraga. Vastavaid vahendeid nimetatakse kas amplituudfiltriteks (need on teatava läbilaskvuse jaotusega ekraanid) või faasiekraanideks (tekivad teatavad faasijaotused avas) või üldjuhul amplituud-faasiekraanideks. Peale nende võimaluste tuleb märkida difraktsioonefekti varieerimise vahendina veel ühtlase läbilaskvusega ava äärejoone kuju varieerimist, s. o. diafragma kuju varieerimist.

Mis puutub optilises kujutises kõrvalmaksimumide kahandamise probleemi (apodisatsiooni probleemi)<sup>1</sup>, siis on seda püütud lahendada rea autorite, nagu Boughon, Dossier', Jacquinet', Lansraux' jt. poolt ([1], [2], [3], [4], [5], [6], kes töötasid pidevalt muutuva läbilaskvusejaotusega amplituudfiltritega; nad said mitmesuguseid tulemusi nii arvutusmeetodite väljatöötamise osas kui ka konkreetsete filtrite väljaarvutamisel.

Hoopis vähem leidub tsentraalse maksimumi kokkusurumise eesmärgil teostatud uurimusi. Nendest võiks märkida Osterbergi ja Wilkinsi töid [7, 8], kes kasutasid amplituudfiltreid, ning Moseri ja Schmidti töid [9], kus rakendatakse spetsiaalset faasiekraani tsentraalse maksimumi lõhestamiseks.

---

\* Ette kantud Tartu Riikliku Ülikooli teaduslikul sessioonil 25. nov. 1956.

<sup>1</sup> Kõrvalmaksimumide kahandamise protsessi nimetavad prantslased apodisatsiooniks.

Huvi pakub ka katkeva läbilaskvusejaotusega amplituudfiltrite arvutamine, mis ongi käesoleva töö üheks ülesandeks. Arvutatakse kaks klassi  $n$ -komponendilisi amplituudfiltreid ümmarguse ava jaoks: I klass —  $n$ -komponendilised amplituudfiltrid esimese ja teise kõrvalmaksimumi kahandamiseks, ja II klass —  $n$ -komponendilised amplituudfiltrid tsentraalse maksimumi kokkusurumiseks.

Käesoleva töö teises osas püstitatakse mittelineaarne integraalvõrrand ühtlase läbilaskvusega ava äärejoone arvutamiseks fokaaltasandis etteantud amplituudijaotuse korral ja antakse probleemi lahendamiseks kaks meetodit. Töös on arvutatud läbi mõned ka praktilisest seisukohast huvipakkuvad näited.

Töö kolmandas osas uuritakse muutuva läbilaskvuse-jaotusega ava (etteantud äärejoonega) vastavuse küsimust konstantse läbilaskvusejaotusega avale (vastavalt teistsuguse äärejoonega)

Meetodit, mida rakendatakse töö I ja II osas, võiks nimetada etteantud amplituudijaotuse meetodiks. Selle meetodi kohaselt võetakse ette sobiv amplituudijaotus fokaaltasandis ja arvutatakse vastav amplituudfilter (töö I osas) või ava äärejoon (töö II osas).

## I. $n$ -komponendiline amplituudfilter ümmarguse ava jaoks

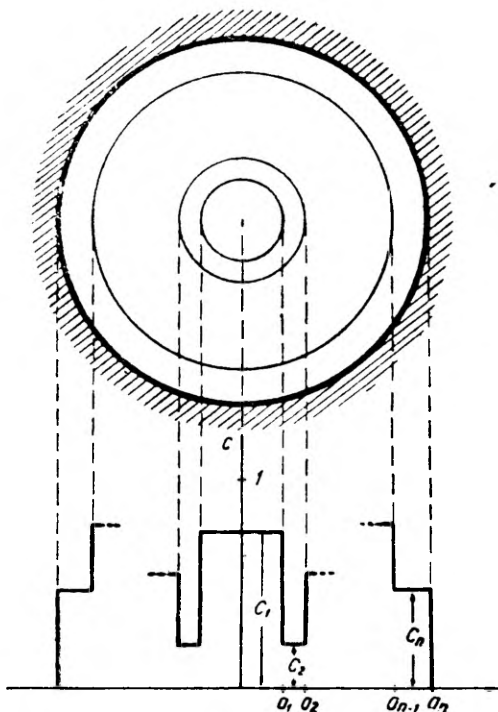
a) Läbipaistmatusse ekraani on tehtud ümmargune ava raadiusega  $a = 1$ , mis on jaotatud  $n$  osaks  $n - 1$  kontsentrilise ringiga raadiustega  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$  ja  $a_n = a = 1$ . Tähistame  $a_0 = 0$ . Iga rõngas, mis jääb kahe teineteisele järgneva kontsentrilise ringjoone vahele, olgu konstantse neeldumiskordajaga (vast. läbilaskvuskordajaga) Nii saamegi  $n$ -komponendilise amplituudfiltri amplituudsete läbilaskvuskordajatega  $c_1, c_2, \dots, c_i, \dots, c_{n-1}, c_n, c_{n+1} = 0$  (ekraanil) (vt. joonis 1)

Langegu tasalaine amplituudiga 1 sellele amplituudfiltrile, siis saame vahetult amplituudfiltri taga katkeva amplituudijaotuse, mis on iseloomustatud suurustega  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ . Superponeerime amplituudfiltrit läbinud tasalaine erineva amplituudiga komponendid:

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \int_{a_{i-1}}^{a_i} c_i \cdot J_0(v\rho) \rho d\rho \right\},$$

mille tulemusena saame fokaaltasandil amplituudijaotuse

$$u(v) = (c_1 - c_2) a_1 \cdot \frac{J_1(a_1 v)}{v} + (c_2 - c_3) \cdot a_2 \cdot \frac{J_1(a_2 \cdot v)}{v} + \\ \dots + (c_{n-1} - c_n) a_{n-1} \cdot \frac{J_1(a_{n-1})}{v} + (c_n - 0) \cdot \frac{J_1(v)}{v},$$



Joon. 1.

kus  $J_0, J_1$  on nullindat ja esimest järku Besseli funktsioonid,  $\rho$  on ava mingi punkti kaugus ava tsentrist,  $v = k\alpha$ ,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $\lambda$  on kasutatava valguse lainepikkus,  $\alpha$  tähendab tsentraalsümmeetrilise jaotuse korral fokaaltasandis difraktsioonipildi punkti kaugust pildi tsentrist.

Seame endale ülesandeks kõrvaldada filtriga valgus ühtlase läbilaskvusega ava difraktsioonipildis ringidelt (tsoonidest), mis on iseloomustatud parameetri  $v$  etteantud väärtustega  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}$ . Konstantide  $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$  määramiseks  $c_n$  funktsioonina saadakse siis järgmine  $n - 1$  võrrandiga lineaarhomogeenne süsteem:

$$\left. \begin{aligned} u(v_1) &= 0 \\ u(v_2) &= 0 \\ &\vdots \\ u(v_{n-1}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Raadiused  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  loetakse etteantuiks.

b) Vaatleme amplituudfiltri karakteristikuid seoses filtri mõjuga difraktsioonipildile. Amplituudfiltri mõju ühtlase läbilaskvusega

ava difraktsioonipildi intensiivsuse jaotusele iseloomustab apodisatsioonifunktsioon

$$K(v) = \frac{I_0(v)I_0(o)}{I(v)I(o)}, \quad (1.3)$$

kus  $I_0(v)$  on intensiivsuse jaotus difraktsioonipildis ühtlase läbilaskvusega ava korral (nn. apodiseerimata jaotus),  $I_0(o)$  on vastav intensiivsus fookuses,  $I(v)$  on süsteemist (1.2) arvatud amplituudfiltriga samas avas tekitatud intensiivsuse jaotus, nn. apodiseeritud jaotus, ja  $I(o)$  on intensiivsus fookuses filtri puhul. Nendes punktides, kus apodisatsioon teostatud, on  $K(v) > 1$ .

Teiseks amplituudfiltri mõju karakteristikuks on nn. suhteline dispersioonikordaja

$$D_{v_1, v_2}^r = \frac{D_{v_1, v_2}}{D_0(v_1, v_2)}, \quad (1.4)^2$$

kus

$$D_0(v_1, v_2) = \frac{\int_{v_1}^{v_2} I_0(v) v dv}{\int_0^{\infty} I_0(v) v dv}$$

esitab difraktsioonipildi tsooni  $(v_1, v_2)$  difrageerunud energia suhet avast väljunud kogu energiasse ühtlase läbilaskvusega ava korral ja

$$D_{v_1, v_2} = \frac{\int_{v_1}^{v_2} I(v) v dv}{\int_0^{\infty} I(v) v dv}$$

tähendab sama filtreeritud ava puhul.

Samuti on olulise tähtsusega kogu amplituudfiltri energeetiline läbilaskvuse kordaja  $\tau$ , mõõdetud ühtlase läbilaskvusega ava suhtes, s. o.

$$\tau = \frac{\int_0^{\infty} I_0(v) v dv}{\int_0^{\infty} I(v) v dv} \quad (1.5)^2$$

<sup>2</sup> Antud valemid  $D_0$ ,  $D$ ,  $\tau$  jaoks kehtivad ringsümmeetriliste jaotuste korral.

ning apodiseeritud ja apodiseerimata intensiivsuste suhe  $\frac{I(0)}{I_0(0)}$  fookuse jaoks.

Tabelid 1 ja 2 sisaldavad arvulisi andmeid süsteemi (1.2) alusel arvutatud konkreetsete kahe-, kolme- ja neljakomponendiliste amplituudfiltrite kohta eeldusel, et komponentide pindalad on võrdsed.

Tabel 1

I ja II kõrvalmaksimumi kahandavate filtrite karakteristikud. (I ja II kõrvalmaksimum asuvad ühtlaselt läbilaskva ümmarguse ava difraktsioonipildis kohtadel  $v_1 = 5,14$ ;  $v_2 = 8,42$ )

$n$	$v$	$c$	$\tau$	$\frac{I(0)}{I_0(0)}$	$D_{5,9}^r$	$D_{9,\infty}^r$
2	$v_1 = 5,14$	$c_1 = 1,00$ $c_2 = 0,63$	0,70	0,66	0,557	0,285
3	$v_1 = 5,14$ $v_2 = 8,42$	$c_1 = 1,00$ $c_2 = 0,34$ $c_3 = 0,42$	0,44	0,34	0,137	1,295
4	$v_1 = 5,14$ $v_2 = 7,00$ $v_3 = 8,42$	$c_1 = 1,00$ $c_2 = 0,64$ $c_3 = 0,17$ $c_4 = 0,53$	0,43	0,33	0,009	1,615

Tabel 2

Tsentraalset maksimumi kokkusuruvate filtrite karakteristikud. (Ühtlaselt läbilaskva ümmarguse ava difraktsioonipildi tsentraalse maksimumi poollaius asub vahemikus  $0 \leq v \leq 3,8$ )

$n$	$v$	$c$	$\tau$	$\frac{I(0)}{I_0(0)}$	$D_{2,4}^r$	$D_{4,\infty}^r$
2	$v_1 = 3,0$	$c_1 = 0,15$ $c_2 = 1,00$	0,51	0,33	0,359	3,621
3	$v_1 = 3,0$ $v_2 = 3,8$	$c_1 = 0,49$ $c_2 = -0,98$ $c_3 = 1,00$	0,73	0,03	0,0041	6,018
4	$v_1 = 2,0$ $v_2 = 3,0$ $v_3 = 3,8$	$c_1 = -0,23$ $c_2 = 0,82$ $c_3 = -1,00$ $c_4 = 0,42$	0,47	$1,5 \cdot 10^{-5}$	0,0001	10,110

Nagu nähtub esitatud tabelitest, kahaneb  $D_{5,9}^r$ ,  $D_{2,4}^r$  komponentide arvu kasvuga nii tabelis 1 kui ka tabelis 2 antud filtrite puhul, mis on kooskõlas ka apodisatsioonifunktsiooni  $K(v)$  käiguga. Nii on neljakomponendilise filtriga võimalik küllaldaselt valgusenergiast puhastada tsoone 5—9, 2—4. Teiselt poolt aga ilmneb komponentide arvu kasvuga energia ülekandumine tsentraalsest

tsoonist difraktsioonipildi äärele, mis on eriti märgatav tsentraalset maksimumi kokkusuruvate filtrite puhul (vt. tabel 2) Selle tõttu ka fookuses intensiivsus tunduvalt kahaneb, mida enam tsentraalset maksimumi kokku suruda ning mida laiemat tsooni ümber tsentraalse maksimumi puhastada. Seejuures tuleb märkida, et tsentraalset maksimumi kokkusurunud filtrid ei oma ainult neela-void komponente, vaid ka  $\pi$  võrra faasi muutvaid komponente.

Tabelis 1 esitatud filtrid on autori poolt valmistatud, kasutades vaakuumaurustamise meetodit. Eksperimentaalne uurimus nimetatud filtrite kohta avaldatakse hiljem.

## 2. Ühtlase läbilaskvusega ava äärejoone arvutamine integraalvõrrandi abil, kui amplituudijaotus on ette antud fokaaltasandil

Difraktsiooniteoorias tuntud Kirchhoff'i ligikaudset valemit ([10] lk. 154) võib esitada fokaaltasandi jaoks järgmiselt:

$$\int_{-a}^{+a} e^{ik\alpha\xi} d\xi \int_{\eta_1(\xi)}^{\eta_2(\xi)} e^{ik\beta \cdot \eta} d\eta = u_0(k\alpha, k\beta), \quad (2.1)$$

kus  $\xi, \eta$  on ava punkti Cartesiuse ristkoordinaadid,  $\eta_1(\xi), \eta_2(\xi)$  määravad ühtlase läbilaskvusega ava äärejoone kuju,  $\alpha, \beta$  on difraktsioonipildi punkti koordinaadid<sup>3</sup>,  $u_0(k\alpha, k\beta)$  on amplituudijaotus fokaaltasandil,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $\lambda$  on kasutatava valguse lainepikkus.

Tähistame  $k\alpha = v$ ,  $k\beta = w$ . Kui  $\eta_1 = -\eta_2 = -\eta_0(\xi)$ , siis valem (2. 1) kujuneb järgmiseks:

$$\int_{-a}^{+a} \frac{\sin[w \cdot \eta_0(\xi)]}{w} e^{iv\xi} d\xi = \frac{1}{2} u_0(v, w) \quad (2. 1a)$$

Seost (2. 1a) võib vaadelda kui mittelineaarset integraalvõrrandit ühtlase läbilaskvusega ava äärejoone  $\eta_0(\xi)$  arvutamiseks, kui on ette antud fokaaltasandi mõnesuguses lõikes  $w = \text{const.}$  amplituudijaotus  $u_0(v, w)$

Vaatame järgnevas võrrandi (2. 1a) lahendamismeetodeid.

a) Tähistame võrrandis (2. 1a)

$$\frac{\sin[w \cdot \eta_0(\xi)]}{w} = \Psi(\xi, w) \quad (2. 2)$$

ja defineerime uue funktsiooni  $\Psi_0$  järgmiselt:

<sup>3</sup> Kirchhoff'i valemis  $\alpha, \beta$  esitavad täpsemalt ava tsentrist fokaaltasandi punkti viiva raadiusvektori sihikoosinusi.

$$\Psi_0(\xi, \omega) = \begin{cases} \Psi(\xi, \omega), & \text{kui } -a < \xi < +a \\ 0, & \text{kui } |\xi| > a. \end{cases} \quad (2.3)$$

Siis avaldub võrrand (2. 1a) kujul

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0(\xi, \omega) e^{i v \xi} d\xi = \frac{1}{2} u_0(v, \omega). \quad (2. 1b)$$

Siit leiame Fourier' transformatsiooni rakendes

$$\Psi_0(\xi, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} u_0(v, \omega) e^{-i v \xi} dv. \quad (2. 4)$$

Äärejoone kuju määrab seega (2. 2) põhjal järgmine seos:

$$\eta_0(\xi) = \frac{1}{\omega} \arcsin [\omega \Psi_0(\xi, \omega)], \quad (2. 5)$$

kus  $\Psi_0(\xi, \omega)$  on antud võrdusega (2. 4).

Näiteid:

1° Amplituudijaotus fokaaltasandil on antud funktsiooniga

$$u_0(v, \omega) = 4 \frac{\sin(v a)}{v} \cdot \frac{\sin(\omega \cdot b)}{\omega} \quad (2. 6)$$

( $a, b$  on konstandid) Määrata vastav  $\eta_0(\xi)$ .

Valemist (2. 4)

$$\Psi_0(\xi, \omega) = \begin{cases} \frac{\sin(\omega b)}{\omega}, & \text{kui } -a < \xi < +a \\ 0, & \text{kui } |\xi| > a. \end{cases}$$

Siis valemist (2. 5) järgneb

$$\eta_0(\xi) = \frac{1}{\omega} \arcsin [\sin(\omega b)] = b.$$

Tähendab, et jaotus (2. 6) on saadud ristkülikukujulise avaga.

2° On antud fokaaltasandil amplituudijaotus

$$u_0(v, \omega) = 2\pi a \cdot \frac{J_1(a \sqrt{\omega^2 + v^2})}{\sqrt{\omega^2 + v^2}} \quad (2. 7)$$

( $a = \text{const.}$ ) Leida vastav  $\eta_0(\xi)$ .

Valemist (2. 4)

$$\Psi_0(\xi, \omega) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2\pi}}{2 \omega^{1/2}} (a^2 - \xi^2)^{1/4} J_{1/2}(\omega \sqrt{a^2 - \xi^2}), & \text{kui } (\xi) < a \\ 0 & \text{kui } (\xi) > a. \end{cases}$$

Asetades selle avaldise pärast lihtsustamist valemisse (2. 5), saame

$$\eta_0(\xi) = \sqrt{a^2 - \xi^2},$$

s. o. antud amplituudijaotus vastab ringikujulisele avale raadiusega  $a$ .

3° On antud fokaaltasandis amplituudijaotus

$$u_0(v, \omega) = 2\pi a^2 \cdot \frac{J_2(a \sqrt{\omega^2 + v^2})}{\omega^2 + v^2}, \quad (2.8)^4$$

mille kõrvalmaksimumid on enam alla viidud kui jaotuse (2.7) omad. Leida  $\eta_0(\xi)$ .

Rakendades antud  $u_0$ -le transformatsiooni (2.4), saame  $\eta_0(\xi)$  arvutamiseks järgmise valemi

$$\begin{aligned} \sin[\omega \eta_0(\xi)] = \\ = \omega \cdot \Psi_0(\xi, \omega) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \cdot \omega^{-1/2} (a^2 - \xi^2)^{3/4} J_{3/2}(\omega \cdot \sqrt{a^2 - \xi^2}), & \text{kui } (\xi) < a \\ 0 & \text{kui } (\xi) > a \end{cases} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Valemist (2.9) on näha, et  $\eta_0(\xi)$  sõltub  $\omega$ -st, s. t. difraktsioonipildis tehtud löike  $\omega = \text{const.}$  asukohast, milles amplituudijaotus on ette antud.

Kui  $\omega = 0$ , siis vastav  $\eta_0(\xi)_{\omega=0} = (a^2 - \xi^2)^{3/2}$ , (2.9<sub>1</sub>)

kui  $\omega = 1$ , siis vastav  $\eta_0(\xi)_{\omega=1} = \arcsin \left\{ \frac{\sqrt{2\pi}}{2} (a^2 - \xi^2)^{3/2} J_{3/2}(\omega \cdot \sqrt{a^2 - \xi^2}) \right\}$  (2.9<sub>2</sub>)

jne.

Peale selle on  $\eta_0$  üldiselt mitmene.

4° Olgu amplituudijaotus ette antud difraktsioonipildi tsentraalses löikes  $\omega = 0$  kujul

$$u_0(v) = 2\pi \cdot \sum_i b_i \cdot \frac{J_i(v)}{v^i},$$

kus  $J_i$  on  $i$ -ndamat järku Besseli funktsioon,  $b_i$ -d on kordajad, milised määrame tingimustest

$$u_0(v=0) = 2\pi u_{00} \quad (\text{amplituud fookuses})$$

$$u_0(v=v_1) = 2\pi u_1$$

$$u_0(v=v_2) = 2\pi u_2$$

Leida vastav  $\eta_0(\xi)_{\omega=0}$ .

Võtame konkreetset

$$\frac{u_0(v)}{2\pi} = b_1 \cdot \frac{J_1(v)}{v} + b_2 \cdot \frac{J_2(v)}{v^2} + b_3 \cdot \frac{J_3(v)}{v^3} \quad (2.10)$$

<sup>4</sup> Amplituudijaotus (2.8), kui  $a=1$ , on realiseeritav ka amplituudfilt-riga, mille läbilaskusejaotus  $C = 1 - \xi^2 - \eta^2$  (vt. töö 3. osa, lk. 207).

ja

$$\begin{aligned} u_0(v=0) &= 2\pi u_{00} \\ u_0(v=2) &= 0 \\ u_0(v=3) &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Vastavalt tingimustele (2.11) kujunevad kordajad avaldises (2.10) järgmisteks:

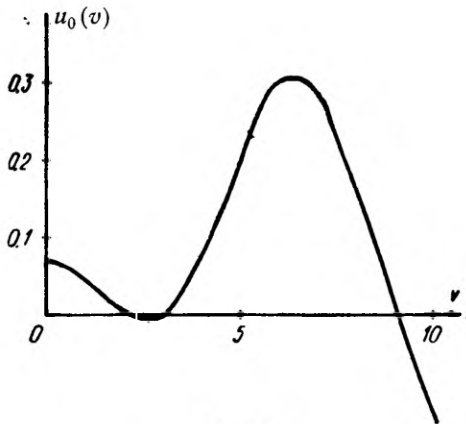
$$b_1 = 106,6335 u_{00}; \quad b_2 = -1133,4870 u_{00}; \quad b_3 = 4297,0550 u_{00}.$$

Rakendades nüüd  $u_0$ -le transformatsiooni (2.4.), saame

$$\Psi_0(\xi)_{\omega=0} = \eta_0(\xi)_{\omega=0}$$

ja

$$\eta_0(\xi)_{\omega=0} = [106,6335(1 - \xi^2)^{1/2} - 377,8200(1 - \xi^2)^{3/2} + 286,4703(1 - \xi^2)^{5/2}] \cdot u_{00}, \quad \text{kui } -1 \leq \xi \leq +1. \quad (2.12)$$



Joon. 2.

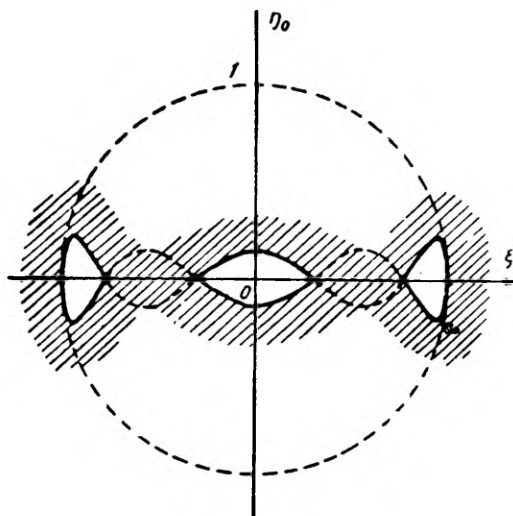
Kui võrdlusaluseks võtta ümmarguse ava (raadiusega  $\alpha = 1$ ) difraktsioonipildi energiajaotus  $\left(\frac{J_1^2(v)}{v^2}\right)$ , mille tsentraalse maksimumi poollaius ulatub 0 — 3,8, siis punktid  $v = 2$ ,  $v = 3$  langevad tsentraalse maksimumi piirkonda ja tingimustest (2.11) teine ning kolmas tähendavad tsentraalse maksimumi kokkusurumist suunas  $\omega = 0$ . Selleks on tarvis arvutada niisugune äärejoon  $\eta_0(\xi)_{\omega=0}$ , mis kulgeks ringjoonega (raadius  $a = 1$ ) piiratud piirkonna sees. Viimase teostamiseks tuleb valida vastavalt  $u_{00}$  ette  $\eta_0(\xi)_{\omega=0}$  kõik juhul  $u_{00} = 0,0094$  on antud joonisel 3 ja vastav amplituudijaotus joonisel 2.

Võrdluseks arvutame vastava filtri<sup>5</sup> kasutamisel ümmarguses

<sup>5</sup> Vastav filter kujutab endast kolmekomponendilist filtrit amplituudsete läbilaskvuskordajatega  $c_1 = 0,397$ ;  $c_2 = -1,00$ ;  $c_3 = 0,680$ , mis võimaldab kõrvaldada valguse ringidelt  $v = 2$ ;  $v = 3$ .

avas raadiusega 1 saadud amplituudijaotuse  $u^{(fi)}$  (või intensiivsuse jaotuse  $I^{(fi)}$ ). Selgub, et  $\frac{I^{(\eta_0)}(0)}{I^{(fi)}(0)} = 22,5$ , kus  $I^{(\eta_0)}(0)$  tähendab intensiivsust fookuses, kui äärejooneks on  $\eta_0$  (vt. valem (2.12) ja joonis 3).

Saadud tulemuste põhjal võib öelda, et on olemas kahe suguseid amplituudijaotusi: 1) amplituudijaotused (näit. jaotused (2.6) ja (2.7)), millele vastavad ühtlase läbilaskvusega ava äärejooned ei sõltu difraktsioonpildi koordinaadist  $\omega$ , 2) amplituudijaotused



Joon. 3.

(näit. jaotused (2.8) ja (2.10)), millele vastavad ühtlase läbilaskvusega ava äärejooned sõltuvad difraktsioonpildi koordinaadist  $\omega$ .

Kui etteantud amplituudijaotuse kuju on selline, et täpne Fourier' transformatsioon valemis (2.4) ei ole praktiliselt teostatav, siis võib ikka läbi viia ligikaudse transformatsiooni<sup>6</sup>.

b) Integraalvõrrandi

$$\int_{-a}^{+a} \frac{\sin[\omega \cdot \eta_0(\xi)]}{\omega} e^{i\nu\xi} d\xi = \frac{1}{2} u_0(\nu, \omega) \quad (2.1a)$$

lahendamine lineariseerimismeetodil.

<sup>6</sup> Грантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике. М., (1956), lk. 156.

Lisame võrrandi (2.1a) vasakule poolele liikme  $+\omega\eta_0(\xi) - \omega\eta_0(\xi)$  ja kirjutame võrrandi (2.1a) kujul:

$$\int_{-a}^{+a} \eta_0(\xi) e^{i\nu\xi} d\xi + p \int_{-a}^{+a} \frac{\sin[\omega \cdot \eta_0(\xi)]}{\omega} e^{i\nu\xi} d\xi = \frac{1}{2} u_0(\nu, \omega). \quad (2.14)$$

Otsime lahendit  $\eta_0$  kujul:

$$\eta_0(\xi, p) = F_0(\xi) + pF_1(\xi) + p^2F_2(\xi) + p^3F_3(\xi) + \dots, \quad (2.15)$$

kus  $p$  on parameeter, mille hiljem võtame võrdseks 1-ga; siis võrrand (2.14) saab identseks võrrandiga (2.1a) ja  $\eta_0(\xi, p)$  läheb üle võrrandi (2.1a) lahendiks  $\eta_0(\xi)$ . Ka ettevõetav amplituudijaotus  $u_0(\nu, \omega, p)$  peab olema esitatav arendusena parameetri  $p$  astmete järgi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_0(\nu, \omega, p) = u_{00}(\nu, \omega) + pu_{01}(\nu, \omega) + p^2u_{02}(\nu, \omega) \\ + p^3u_{03}(\nu, \omega) + \dots, \end{aligned} \quad (2.16)$$

kusjuures  $u_0(\nu, \omega, p)$  läheb üle etteantud  $u_0(\nu, \omega)$ -ks, kui  $p \rightarrow 1$ .

Asetame arendused (2.15) ja (2.16) võrrandisse (2.14) ning võrreldes ühe ja sama  $p$  astme kordajaid, saame võrrandi (2.14) asemel järgmise võrrandite süsteemi:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{+a} F_0(\xi) e^{i\nu\xi} d\xi &= u_{00}(\nu, \omega) \\ \int_{-a}^{+a} F_1(\xi) \cdot e^{i\nu\xi} d\xi + \int_{-a}^{+a} \frac{\sin(\omega F_0) - \omega \cdot F_0}{\omega} e^{i\nu\xi} d\xi &= u_{01}(\nu, \omega) \\ \int_{-a}^{+a} F_2(\xi) e^{i\nu\xi} d\xi + \int_{-a}^{+a} F_1 [\cos(\omega F_0) - 1] e^{i\nu\xi} d\xi &= u_{02}(\nu, \omega) \\ \int_{-a}^{+a} F_3(\xi) e^{i\nu\xi} d\xi + \int_{-a}^{+a} \left\{ F_2 [\cos(\omega F_0) - 1] - \frac{\omega \cdot F_1^2}{2} \cdot \sin(\omega F_0) \right\} e^{i\nu\xi} d\xi &= \\ &\vdots \\ &= u_{03}(\nu, \omega) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.17)$$

Süsteem (2.17) on rekurrentne lineaarsete integraalvõrrandite süsteem funktsioonide  $F_i(\xi)$  määramiseks. Nendes integraalvõrrandites tuleb  $\omega$  vaadelda parameetrina, kuna ta ei esine integraalvõrrandite tuumas  $e^{i\nu\xi}$ -s, s. t. nende võrrandite lahendamine nõuab, et oleks ette antud amplituudijaotus lõikes  $\omega = \text{const}$ . Kui

$\omega = 0$ , siis võib näidata, et süsteemi (2 17) kõikide võrrandite (peale esimese) vasakutes pooltes teised integrandid saavad nullideks.

Peale selle kui amplituudijaotus on sobivalt ette valitud, tuleb anda arendus  $u_0(v, \omega, \rho)$ . Seda arendust võib võtta lõpmata mitmesel kujul, sest selle arenduse püstitamiseks on ainult üks tingimus lim  $u_0(v, \omega, \rho) = u_0(v, \omega)$  Nendest  $u_0(v, \omega, \rho)$  arenduse eri-

$\rho \rightarrow 1$

nevatest kujudest pakuvad erilist huvi need, mis lubavad süsteemile (2 17) leida lahendeid võimalikult kergesti. Eriti oluline on, et süsteemi (2 17) esimese võrrandi parem pool, s. o.  $u_{00}$  oleks võimalikult lihtne. Süsteemi (2 17) võrrandite lahendamine laseb tavaliselt end taandada Fourier' transformatsioonidele, kaasa arvatud ligikaudne transformatsioon.

Näiteid:

1° Fokaaltasandil on amplituudijaotus ette antud kujul

$$u_0(v, \omega) = 4 \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin v}{v}. \quad (2 18)$$

Määrata vastav äärejoon  $\eta_0(\xi)$  süsteemist (2 17).

Olgu

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} u_0(v, \omega, \rho) &= u_{00}(v, \omega) \\ u_{0i} &= 0 \text{ kui } i > 0 \end{aligned} \right\} \quad (2 19)$$

Defineerides funktsiooni

$$f_0(\xi) = \begin{cases} F_0(\xi) & \text{kui } -a < \xi < +a \\ 0 & \text{kui } |\xi| > a \end{cases}$$

saame süsteemi (2 17) esimesest võrrandist, Fourier' transformatsiooni kasutades

$$f_0(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 \cdot \sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin v}{v} e^{-iv\xi} d\xi = \begin{cases} \frac{\sin \omega}{\omega} & \text{kui } (\xi) \leq 1 \\ 0 & \text{kui } (\xi) > 1, \end{cases}$$

seega

$$F_0(\xi) = \frac{\sin \omega}{\omega}, \text{ kui } -1 \leq \xi \leq +1,$$

s. t.  $F_0(\xi)$  on konstantne  $\xi$  suhtes.

Nüüd võib leida süsteemi (2 17) teisest võrrandist

$$F_1(\xi) = F_0 - F_0 \frac{\sin \omega F_0}{\omega F_0}, \text{ kui } -1 < \xi < +1,$$

ja kolmandast võrrandist

$$F_2(\xi) = F_1 - F_1 \cdot \cos(\omega F_0),$$

siis

$$\eta_0(\xi) = F_0 + F_1 + F_2 +$$

Teeme kindlaks, kas antud juhul  $\eta_0(\xi)$  sõltub  $\omega$ -st. Selleks arvutame  $\eta_0(\xi)$   $\omega = 0$  juures ja  $\eta_0(\xi)$  näiteks  $\omega$  väärtuse  $\omega = \frac{\pi}{4}$  juures (üldiselt  $\omega$  väärtuse juures, mis palju ei erineks väärtusest  $\omega = 0$ , et tagada kiiremat koonduvust):

$$\omega = 0, \eta_0(\xi) = F_0(\omega = 0) = 1, F_1(\omega = 0); F_2(\omega = 0) = 0,$$

$$\omega = \frac{\pi}{4}, \eta_0(\xi) = 0,9 + 0,08 + 0,019 + \dots \rightarrow 1,00.$$

Toodud arvutuste põhjal võib oletada, et äärejoon, mis vastab jaotusele (2 18), on ristkülik (ruut)  $\eta_0(\xi) = 1$  ning ei sõltu lõikest  $\omega$ .

2° Amplituudijaotus on antud kujul:

$$u_0(v, \omega) = 4 \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin v}{v} + 2\pi \cdot \frac{J_1(\sqrt{v^2 + \omega^2})}{\sqrt{v^2 + \omega^2}} \quad (2 \ 20)$$

Esitame

$$\frac{u_0(v, \omega, p)}{2} = 2 \cdot \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{\sin v}{v} + p \cdot \pi \cdot \frac{J_1(\sqrt{v^2 + \omega^2})}{\sqrt{v^2 + \omega^2}}$$

Arvutada süsteemist (2 17)  $\eta_0$ .

Arvutustulemused on koondatud tabelisse 3.  $\eta_0(\xi)\omega = \frac{\pi}{8}$  avaldises on piiratud nelja esimese liikmega  $F_0, F_1, F_2, F_3$  (mis on arvutatud süsteemist (2 17)). Võrdluseks on antud tulemused, mis on arvutatud meetodil a) /vt. valemid (2 4), (2 5)/.

Tabel 3

			$\xi = 0$	$\xi = 0,25$	$\xi = 0,5$	$\xi = 0,75$	$\xi = 1,0$
$\eta_0$	Arvutatud süsteemist (2. 17) meetodil b)	$\omega = 0$	2,0000	1,9683	1,8660	1,6615	1,0000
		$\omega = \frac{\pi}{8}$	2,1230	2,0871	1,9711	1,7385	0,9999
	Arvutatud valemitest (2. 4), (2.5) (meetodil a)	$\omega = \frac{\pi}{8}$	2,2195	2,1744	2,0332	1,7671	1,0000

Tabelist 3 selgub, et erinevates lõigetes  $\omega = \text{const.}$  ettevõetud amplituudijaotustele (2 20) vastavad erineva kujuga ühtlase läbilaskvusega ava äärejooned  $\eta_0(\xi, \omega)$ . Erinevused tulemustes, mis on saadud meetodil b) ja meetodil a) lõike  $\omega = \frac{\pi}{8}$  jaoks, vähenevad, kui meetodil b) arvutada  $\eta_0$  avaldises rohkem liikmeid kui 4.

Kui aga lõige  $\omega = \text{const.}$  erineb vähem nullist kui  $\frac{\pi}{8}$ , siis võib ka  $\eta_0$  avaldises väiksema liikmete arvuga kui 4 saada paremat kokkulangemist meetodil a) saadud tulemustega.

### 3. Mittekonstantse läbilaskvusejaotusega ava vastavuse uurimine konstantse läbilaskvusega avale.

Ühelt poolt võib amplituudijaotust fokaaltasandil esitada kujul

$$u_1(v, \omega) = \int_{-a}^{+a} \int_{\eta_1(\xi)}^{\eta_2(\xi)} e^{i(v\xi + \omega \cdot \eta)} d\xi d\eta. \quad (3.1)$$

Siin on varieeritavaks ava äärejoon  $[\eta_1, \eta_2]$ .

Teiselt poolt sama amplituudijaotus

$$u_2(v, \omega) = \int_{-a}^{+a} \int_{b_1(\xi)}^{b_2(\xi)} C(\xi, \eta) e^{i(v\xi + \omega\eta)} d\xi d\eta, \quad (3.2)$$

kus varieeritavaks on ava läbilaskvuse jaotusfunktsioon  $C(\xi, \eta)$ .

Nõuame, et

$$u_1(v, \omega) = u_2(v, \omega) \quad (3.3)$$

kehtiks iga  $v, \omega$  korral.

Arvestades võrdusi (3.1) ja (3.2) võib võrdust (3.3) esitada kujul

$$\int_{b_1(\xi)}^{b_2(\xi)} C(\xi, \eta) e^{i\omega\eta} d\eta = \frac{1}{i\omega} [e^{i\omega \cdot \eta_2(\xi)} - e^{i\omega \cdot \eta_1(\xi)}]. \quad (3.4)$$

Saadud võrrand (3.4) on autori arvates aluseks kahesuguste difraktsiooniteooria ülesannete lahendamisele. Need on:

I. Ette on antud kujuga  $[b_1(\xi), b_2(\xi)]$  ava läbilaskvusejaotusega  $C(\xi, \eta)$ , määrata vastava konstantse läbilaskvusega ava äärejoone kuju  $[\eta_1(\xi), \eta_2(\xi)]$ . Selle ülesande lahendamine viib võrrandis (3.4) oleva integraali arvutamisele ja siis  $\eta_2, \eta_1$  avaldamisele.

II. Eelmise pöördülesanne. On teada konstantse läbilaskvusejaotusega ava äärejoone kuju  $[\eta_1(\xi), \eta_2(\xi)]$ , leida vastava ava  $[b_1(\xi), b_2(\xi)]$  läbilaskvuse jaotusfunktsioon  $C(\xi, \eta)$ . See ülesanne kujutab matemaatiliselt endast võrrandi (3.4) kui integraalvõrrandi lahendamist  $C(\xi, \eta)$  suhtes.

Võrrandiga (3.4) on samaväärne järgmine võrrandsüsteem:

$$\int_{b_1}^{b_2} C(\xi, \eta) \cos(\omega \eta) d\eta = \frac{1}{\omega} \left\{ \sin[\omega \eta_2(\xi)] - \sin[\omega \eta_1(\xi)] \right\} \quad (3.5a)$$

$$\int_{b_1}^{b_2} C(\xi, \eta) \sin(\omega \eta) d\eta = -\frac{1}{\omega} \left\{ \cos[\omega \eta_2(\xi)] - \cos[\omega \eta_1(\xi)] \right\}, \quad (3.5b)$$

mis on saadud võrrandis (3.4) reaalosa ja imaginaarosa eraldamise teel.

Kui äärejoon  $[\eta_1, \eta_2]$  osutub sümmeetriliseks  $\xi$ -telje suhtes, siis  $\eta_1 = -\eta_2 = -\eta_0(\xi)$  ja süsteem (3.5) taandub järgmiseks

$$\int_{b_1}^{b_2} C(\xi, \eta) \cos(\omega \eta) d\eta = 2 \cdot \frac{\sin[\omega \cdot \eta_0(\xi)]}{\omega} \quad (3.6a)$$

$$\int_{b_1}^{b_2} C(\xi, \eta) \sin(\omega \eta) d\eta = 0 \quad (3.6b)$$

ja kui on tegu I liiki ülesandega, tuleb  $\eta_0(\xi)$  määrata süsteemi (3.6) esimesest võrrandist (3.6a).

Võib näidata, et tarvilik ja piisav selleks, et ava äärejoon  $[\eta_1(\xi), \eta_2(\xi)]$  oleks tsentraalsümmeetriliselt paigutatud alguse suhtes, on see, kui ühtlase läbilaskvusega ava äärejoonele vastav  $C(\xi, \eta)$  koos  $(b_1, b_2)$ -ga rahuldab järgmisi tingimusi:

$$C(-\xi, -\eta) = C(\xi, \eta), \quad b_1 = -b_2 \quad \text{ja} \quad b_2(-\xi) = b_2(\xi). \quad (3.7)^7$$

Siis on integraal (3.6b) võrdne nulliga ja võrrandist (3.6a) tuleb  $\eta_0(\xi)$  välja tsentraalsümmeetrilisena.

### *I liiki ülesannete näiteid:*

1° Ümmarguses avas, s. t.  $-b_1 = b_2 = \sqrt{1 - \xi^2}$  on antud konstantne läbilaskvusejaotus  $C(\xi, \eta) = 1$ . Leida vastav  $[\eta_1, \eta_2]$ .

Ei ole raske näha, et tingimused (3.7) on rahuldatud ja integraal (3.6b) on 0 ning võrrand (3.6a) tsentraalsümmeetrilise  $\eta_0(\xi)$  määramiseks võtab kuju

$$\int_{-\sqrt{1-\xi^2}}^{\sqrt{1-\xi^2}} 1 \cos(\omega \eta) d\eta = \frac{2 \cdot \sin(\omega \sqrt{1-\xi^2})}{\omega} = \frac{2 \cdot \sin[\omega \eta_0(\xi)]}{\omega},$$

<sup>7</sup> Nende tarvilike ja piisavate tingimuste näitamiseks on kasutatud võrrandeid (3.5), võttes ette  $C(\xi, \eta)$  kujul  $C_1(\xi) + C_2(\eta)$  ja kujul  $C_1(\xi) \cdot C_2(\eta)$ .

siit

$$\eta_0(\xi) = \sqrt{1 - \xi^2},$$

seega iga  $\omega$  korral üks ja seesama.

2° Ümmargune ava ( $b_2 = -b_1 = \sqrt{1 - \xi^2}$ ) läbilaskvusejaotusega  $C(\xi, \eta) = 1 - \xi^2 - \eta^2$ , s. t. selle amplituudfiltril võrdse läbilaskvusega kohad moodustavad kontsentrilised ringid. Leida vastav  $[\eta_1(\xi), \eta_2(\xi)]$ .

Kontroll näitab, et nõuded (3.7) on rahuldatud. Seega otsitav  $[\eta_1, \eta_2]$  peab olema tsentraalsümmeetriline, s. o.  $\eta_2 = -\eta_1 = -\eta_0(\xi)$ . Võrrand (3.6a)  $\eta_0(\xi)$  määramiseks kujuneb:

$$\begin{aligned} \frac{\sin[\omega \cdot \eta_0(\xi)]}{\omega} &= 2 \left\{ \frac{\sin(\omega \cdot \sqrt{1 - \xi^2})}{\omega^3} - \frac{\sqrt{1 - \xi^2} \cdot \cos(\omega \sqrt{1 - \xi^2})}{\omega^2} \right\} \quad (3.8) \\ &= 2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \xi^2)^{3/4}}{\omega^{3/2}} \cdot J_{3/2}(\omega \sqrt{1 - \xi^2}). \end{aligned}$$

Saadud võrdusest (3.8) on näha, et igale lõikele  $\omega = \text{const.}$  vastab oma  $\eta_0(\xi, \omega)$ . Seejuures lõikele  $\omega = 0$  vastab üks äärejoone  $\eta_0(\xi)$  kuju, lõikele  $\omega \neq 0$  vastab rohkem kui üks  $\eta_0$  (vt. tabel 4).

Arvutades viimase võrduse (3.8) piirväärtuse, kui  $\omega \rightarrow 0$ , saame lõikele  $\omega = 0$  vastava ava äärejoone kujus

$$\eta_0(\xi, \omega = 0) = \frac{2}{3} (1 - \xi^2)^{3/2} \quad (3.9)$$

See tulemus (3.8) [kaasa arvatud (3.9)] on sama, mis me saime eespool [valem (2.9)] etteantud amplitudijaotuse  $\frac{J_2 \sqrt{v^2 + w^2}}{v^2 + w^2}$  korral. Siit järgneb, et viimati märgitud amplitudijaotus on realiseeritav nii amplituudfiltriga, mille läbilaskvusejaotus on  $1 - \xi^2 - \eta^2$ , kui ka ühtlase läbilaskvusega ava äärejoonega, mis on antud võrdusega (3.8)

Tabel 4

		$\xi = 0$	$\xi = 0,25$	$\xi = 0,5$	$\xi = 0,75$	$\xi = 1,0$
$\eta_0(\xi, \omega)$	$\omega = 0$	0,6667	0,6047	0,4420	0,019	0,0000
	$\omega = 1$	0,6463	0,5826	0,4130	0,1857	0,0000
		2,4955	2,5590	2,7284	2,9556	$\pi$
		6,9295	6,8658	6,6962	6,4689	$2\pi$
		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$

Et igale  $\omega$ -le vastab oma äärejoon  $\eta_0(\xi, \omega)$ , siis arvutame  $\omega$ -de

vahemikule  $(-\omega_0, +\omega_0)$  vastava keskmise äärejoone kuju

$\overline{\eta_0(\xi, \omega)}^{(\omega_0)}$  Selleks avaldame võrdusest (3.8)  $\eta_0$ , s. o.

$$\eta_0(\xi, \omega) = \frac{1}{\omega} \arcsin \left\{ 2 \cdot \omega \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{(1-\xi^2)^{3/4}}{\omega^{3/2}}} \cdot J_{3/2}(\omega \sqrt{1-\xi^2}) \right\},$$

siis keskmine

$$\overline{\eta_0(\xi, \omega)}^{(\omega_0)} = \frac{1}{2 \omega_0} \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} \frac{\arcsin \{x\}}{\omega} d\omega.$$

Arendame

$$\arcsin \{x\} = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots,$$

kus

$$\begin{aligned} x &= 2 \omega \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{(1-\xi^2)^{3/4}}{\omega^{3/2}}} \cdot J_{3/2}(\omega \sqrt{1-\xi^2}) \\ &= 2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[ \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} (1-\xi^2)^{3/2}}{\Gamma(5/2)} \omega - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{7/2} (1-\xi^2)^{5/2}}{\Gamma(7/2)} \cdot \omega^3 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{11/2} (1-\xi^2)^{7/2}}{2 \Gamma(9/2)} \cdot \omega^5 - \dots \right] \\ &= a_1 \omega - a_3 \omega^3 + a_5 \omega^5 - \dots \end{aligned}$$

Analoogiliselt arendame ka  $x^3, x^5, \dots$ ,

siis

$$\begin{aligned} \arcsin x &= a_1 \omega + (a_1^3 - a_3) \omega^3 + (a_5 - 3a_1^2 a_3 + a_1^5) \cdot \omega^5 + \\ &\quad + (-a_7 + 3a_1 a_3^2 - 5a_1^4 a_3 + a_1^7) \omega^7 + \dots, \end{aligned}$$

kus

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{3} (1-\xi^2)^{3/2}, & a_5 &= \frac{1}{420} (1-\xi^2)^{7/2} \\ a_3 &= \frac{1}{15} (1-\xi^2)^{5/2}, & a_7 &= \frac{1}{22680} (1-\xi^2)^{9/2} \end{aligned}$$

ning

$$\begin{aligned} \overline{\eta_0(\xi, \omega)}^{(\omega_0)} &= a_1 + (a_1^3 - a_3) \frac{\omega_0^2}{3} + (a_5 - 3a_1^2 a_3 + a_1^5) \frac{\omega_0^4}{5} + \\ &\quad + (-a_7 + 3a_1 a_3^2 - 5 a_1^4 a_3 + a_1^7) \cdot \frac{\omega_0^6}{7} + \dots \quad (3.10) \end{aligned}$$

Olgu  $\omega_0 = 0,1$ , siis vastav keskmine äärejoone kuju

$$\overline{\eta_0(\xi, \omega)}^{(\omega_0)} = 0,66667(1 - \xi^2)^{3/2} + 0,00066(1 - \xi^2)^{9/2} - 0,00022(1 - \xi^2)^{5/2} + \dots$$

erineb vähe äärejoone kujust, mis vastab tsentraalsele löikele  $\omega = 0$ .

Saadud tulemuste tõttu pakub huvi arvutada järgmised amplituudijaotused:

a) Olgu ühtlase läbilaskvusega ava äärejoone kujuks  $\eta_0(\xi) = \frac{2}{3}(1 - \xi^2)^{3/2}$  [vt. valem (3.9)]. Nõuame, et ta oleks üks ja sama iga löike  $\omega = \text{const.}$  jaoks, siis amplituud

$$u'(v, \omega) = 4 \int_0^1 \frac{\sin[\omega \cdot \frac{2}{3}(1 - \xi^2)^{3/2}]}{\omega} e^{iv\xi} d\xi,$$

mis laseb end taandada arenduseks Besseli funktsioonide järgi, s. o.

$$u'(v, \omega) = \frac{4}{3} \sqrt{\pi} \left\{ \Gamma(5/2) \left(\frac{v}{2}\right)^{-2} J_2(v) - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Gamma(11/2) \frac{\omega^2}{3!} \left(\frac{v}{2}\right)^{-5} J_5(v) + \left(\frac{2}{3}\right)^4 \Gamma(17/2) \frac{\omega^4}{5!} \left(\frac{v}{2}\right)^{-8} J_8(v) - \dots \right\} \quad (3.11)$$

b) Olgu ühtlase läbilaskvusega ava äärejoone kujuks  $\eta_0(\xi)$ , mis on määratud võrdusega (3.8), s. t. on iga löike  $\omega = \text{const.}$  korral erinev, siis amplituudijaotus  $u''$  määratakse valemiga

$$u''(v, \omega) = 8 \int_0^1 \left[ \frac{\sin(\omega \sqrt{1 - \xi^2})}{\omega^3} - \frac{\sqrt{1 - \xi^2} \cos(\omega \sqrt{1 - \xi^2})}{\omega^2} \right] e^{iv\xi} d\xi$$

$$= \frac{4}{3} \sqrt{\pi} \left\{ \Gamma(5/2) \left(\frac{v}{2}\right)^{-2} J_2(v) - \frac{1}{10} \Gamma(7/2) \cdot \omega^2 \cdot \left(\frac{v}{2}\right)^{-3} J_3(v) + \frac{1}{280} \Gamma(9/2) \omega^4 \left(\frac{v}{2}\right)^{-4} J_4(v) - \dots \right\} \quad (3.12)$$

Kuna  $u''$  arvutamisel igale löikele  $\omega = \text{const.}$  vastav ava kju-funktsioon peab andma samasuguse amplituudijaotuse selles löikes kui sellele äärejoonele vastav amplituudifilter läbilaskvusega  $C = 1 - \xi^2 - \eta^2$  (ümmarguses avas raadiusega  $a = 1$ ), s. o. amplituudijaotuse

$$u(v, \omega) = \frac{4}{3} \sqrt{\pi} \Gamma(5/2) \frac{J_2(\sqrt{v^2 + \omega^2})}{\left(\frac{\sqrt{v^2 + \omega^2}}{2}\right)^2},$$

siis

$$u(v, \omega) = u''(v, \omega).$$

On ilmne, et lõike  $\omega = 0$  jaoks kehtib  $u'(v, \omega = 0) = u''(v, \omega = 0)$ , kuna aga lõigete  $\omega \neq 0$  jaoks on  $u' - u''$  nullist erinev

c) Olgu ava äärejoone kujuks

$$\overline{\eta_0(\xi, \omega)^{(w_0)}} = 0,6667(1 - \xi^2)^{3/2} + [0,0658(1 - \xi^2)^{9/2} - 0,0222(1 - \xi^2)^{5/2}]w_0^2,$$

mis vastab küllaldase täpsusega  $w_0 \sim 10^{-1}$  [vt. valem (3. 10)].

Arvestame amplituudi  $u^{(w_0)}$  arvutamisel, et  $\overline{\eta_0(\xi, \omega)^{(w_0)}}$  oleks üks ja seesama iga lõike  $\omega = \text{const}$  jaoks, siis

$$\begin{aligned} u^{(w_0)}(v, \omega) &= 4 \int_0^1 \frac{\sin[\overline{w\eta_0(\xi, \omega)^{(w_0)}}]}{w} e^{iv\xi} d\xi = \\ &= u^0(v, \omega) + \Delta u(v, \omega), \end{aligned} \quad (3. 13)$$

kus  $u^0$  on lõikele  $\omega = 0$  vastava äärejoonega määratud amplituudijaotus, mis on samaväärne  $u'(v, \omega)$  (vt. valem (3. 11));  $\Delta u$  on amplituudiparandus, mis arvestab väikesele  $w_0$ -le vastava keskmise äärejoone erinevust sellest äärejoonest, mis vastab lõikele  $\omega = 0$ , s. o.

$$\begin{aligned} \Delta u(v, \omega) &= 2 \sqrt{\pi} w_0^2 \left\{ [0,0658 \cdot \Gamma(11/2) \left(\frac{v}{2}\right)^{-5} \cdot J_5(v) - \right. \\ &\quad - 0,0222 \Gamma(7/2) \left(\frac{v}{2}\right)^{-3} \cdot J_3(v)] - \\ &\quad - \frac{w^2}{3!} [0,1316 \Gamma(17/2) \left(\frac{v}{2}\right)^{-8} \cdot J_8(v) - \\ &\quad \left. - 0,0444 \Gamma(13/2) \left(\frac{v}{2}\right)^{-6} \cdot J_6(v)] + \right\} \end{aligned} \quad (3. 14)$$

<sup>30</sup> Vaatame jälle sedasama amplituudfiltrit läbilaskvusega  $C = 1 - \xi^2 - \eta^2$  ümmarguses avas, mille raadius on aga nüüd  $\sqrt{2}$ , s. t.  $b_1 = -b_2 = -\sqrt{2 - \xi^2}$ . Siis on selle filtri  $C$  kõik ringis raadiusega  $a = 1$  positiivsel poolel, aga tsoonis, mis jääb ringjoonte  $a = 1$  ja  $a = \sqrt{2}$  vahele, on negatiivsel poolel, s. t. peale neeldumise muudab see filter nimetatud tsoonis faasi vastupidiseks. Arvutame nüüd sellele filtrile antud avas vastava ühtlase läbilaskvuse jaotusega ava äärejoone kuju  $[\eta_1, \eta_2]$ .

Tsentraalsümmeetrilisuse tingimused (3. 7) on täidetud ja  $\eta_0$  tuleb võrrandi (3. 6a) põhjal arvutada võrdusest

$$\begin{aligned} \frac{\sin[w \eta_0(\xi)]}{w} &= (1 - \xi^2) \cdot \frac{\sin[w \sqrt{2 - \xi^2}]}{w} - \\ &- 2\sqrt{2 - \xi^2} \cdot \frac{\cos[w \cdot \sqrt{2 - \xi^2}]}{w^2} - [(w \sqrt{2 - \xi^2})^2 - 2] \cdot \frac{\sin[w \cdot \sqrt{2 - \xi^2}]}{w^3} \end{aligned}$$

ja siit siis lõikele  $\omega = 0$  vastav äärejoone kuju avaldub:

$$\eta_0(\xi)_{(\omega=0)} = (1 - \xi^2) \sqrt{2 - \xi^2} - \frac{1}{3}(2 - \xi^2)^{3/2}$$

mis on keerulisem kui ülesandes 2<sup>o</sup> kus  $b_1 = -b_2 = -\sqrt{1 - \xi^2}$ .

Täiesti analoogiliselt saaduga avaldub ka äärejoone kuju  $\eta_0(\xi)$ , siis kui antud amplituudfilter asetada avasse  $b_1 = -b_2 = -\sqrt{(0,5)^2 - \xi^2}$ , mille ulatuses faasimuutust ei esine. Siit järeldub, et  $\eta_0(\xi)$  kuju ei saa olla eriti seotud faasi muutusega ava ulatuses, vaid sellega kas amplituudfiltri neeldumine läheb üle ava äärele (läbipaistmatule seinale) pidevalt või hüppegaga.

4<sup>o</sup> Amplituudfilter läbilaskvuskordajaga  $C = 1 - \xi^2 - \eta^2$  on asetatud riskülikukujulisse avasse  $b_1 = -b_2 = -1$ . Nüüd ei ole ava äärejoon paralleelne amplituudfiltri samaläbilaskvusjoontega.

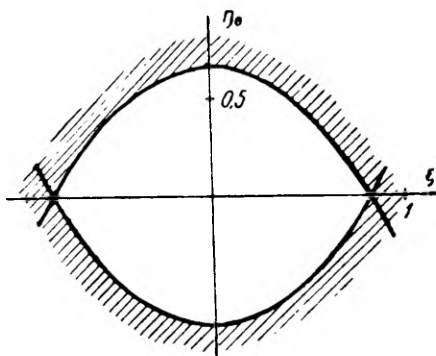
Et otsitava äärejoone  $[\eta_1, \eta_2]$  tsentraalsümmeetrilisuse tingimused (3 7) on täidetud, siis  $\eta_0(\xi)$  määramiseks saame võrrandi

$$\frac{\sin[w \cdot \eta_0(\xi)]}{w} = (1 - \xi^2) \cdot \frac{\sin w}{w} - 4 \cdot \frac{\cos w}{w^2} - \frac{2[w^2 - 2]}{w^3} \cdot \sin w.$$

Lõikele  $\omega = 0$  vastav äärejoon kujuneb

$$\eta_0(\xi)_{(\omega=0)} = (1 - \xi^2) - \frac{1}{3} \quad (\text{vt. joonis 4}).$$

5<sup>o</sup> Amplituudfilter läbilaskvusega  $C = e^{-n^2(\xi^2 + \eta^2)}$  on asetatud



Joon. 4.

ümmargusse avasse raadiusega  $a = 1$ , siis  $b_1 = -b_2 = \sqrt{1 - \xi^2}$ . Leida vastav  $[\eta_1, \eta_2]$ .

Tsentraalsümmeetrilisuse tingimused (3 7) on rahuldatud ja

tsentraalsümmeetriline  $\eta_0(\xi)$  võrrandi (3 6a) põhjal leitakse võrdusest

$$\frac{\sin [\omega \eta_0(\xi)]}{\omega} = e^{-n^2 \cdot \xi^2} \left\{ \sqrt{1 - \xi^2} - [n^2 + \omega^2] \frac{(1 - \xi^2)^{3/2}}{3} + \right. \\ \left. + \left[ \frac{n^2 \omega^2}{2} + \frac{\omega^4}{4!} + \frac{n^4}{2} \right] \frac{(1 - \xi^2)^{5/2}}{5} - \dots \right\}$$

Äärejoone avaldis lõike  $\omega = 0$  jaoks kujuneb

$$\eta_0(\xi)_{\omega=0} = e^{-n^2 \cdot \xi^2} \left( \sqrt{1 - \xi^2} - \frac{n^2}{3} (1 - \xi^2)^{3/2} + \frac{n^4}{10} (1 - \xi^2)^{5/2} - \dots \right)$$

Et vaadeldav amplituudfilter omab mõtet ka n. ö. lõpmata suures avas (lõpmatutes on läbilaskvus 0) siis arvutame vastava  $\eta_0(\xi)$  võrrandist (3 6a), saame

$$2 \frac{\sin [\omega \eta_0(\xi)]}{\omega} = \frac{\sqrt{\pi}}{n} e^{-\frac{\omega^2}{4n^2}} \cdot e^{-n^2 \cdot \xi^2}$$

ja

$$\eta_0(\xi)_{\omega=0} = \frac{\sqrt{\pi}}{2n} e^{-n^2 \cdot \xi^2}$$

Viimasest selgub, et ka n. ö. puht amplituudfiltri mõju (ilma lõplikus kauguses oleva ääreta) on realiseeritav (antud juhul) vastavakujulise ava ääreefektina.

6<sup>o</sup> On antud  $n$ -komponendiline amplituudfilter ümmarguses avas raadiusega 1 (vt. 1. osa) Leida vastav  $\eta_0$ .

Lähtume  $n$ -komponendilise amplituudfiltriga ümmarguses avas raadiusega  $a = 1$  tekitatud fokaalsest amplituudijaotusest kujul

$$u_0(v, \omega) = 2\pi \left\{ c_1 - c_2 \right\} a_1 \frac{J_1(a_1 \sqrt{v^2 + \omega^2})}{\sqrt{v^2 + \omega^2}} + \\ + (c_2 - c_3) \cdot a_2 \frac{J_1(a_2 \sqrt{v^2 + \omega^2})}{\sqrt{v^2 + \omega^2}} + \dots + c_n \frac{J_1(\sqrt{v^2 + \omega^2})}{\sqrt{v^2 + \omega^2}} \left\} = \\ = 2 \int_{-1}^{+1} \frac{\sin [\omega \eta_0(\xi)]}{\omega} e^{iv\xi} d\xi \\ (a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = 1).$$

Rakendades viimasele võrdusele Fourier' transformatsiooni saame  $\eta_0(\xi)$  arvutamiseks järgmised eeskirjad:



## ДЕЙСТВИЕ АМПЛИТУДНЫХ ФИЛЬТРОВ И ДИАФРАГМ НА ДИФРАКЦИОННУЮ КАРТИНУ. I

Л. М. Тувикене

### Резюме

Как в теории оптических приборов, так и в их практическом использовании важное место занимает возможность варьирования дифракционных эффектов. Цель этого варьирования двоякая: 1) ослабить фон в дифракционной картине, снижая побочные максимумы, или 2) уменьшить ширину центрального максимума и увеличить тем самым разрешающую способность оптического прибора.

1. Для достижения вышеуказанной цели в первой части настоящей работы вычислены характеристики многокомпонентных амплитудных фильтров<sup>1</sup> в случае круглого отверстия. Для этого формулой (1.1)<sup>2</sup> задано распределение амплитуды  $u(v)$  в фокальной плоскости, и из уравнения (1.2) определяются амплитудные коэффициенты пропускания компонентов фильтра  $c_1, c_2, c_{n-1}$  как функции  $c_n$ . Уравнения (1.2) требуют гашения света в дифракционной картине на окружностях, определяемых значениями  $v = v_1, v_2, v_{n-1}$ . Результаты расчета 2-, 3-, 4-компонентных фильтров с равными площадями компонентов собраны в таблицах 1 и 2 (стр. 196). В таблицах  $\tau$  (см. формулу (1.5)) означает энергетический коэффициент пропускания всего амплитудного фильтра по отношению к отверстию с равномерным пропусканием;  $D_{v_1, v_2}^r$  (см. формулу (1.4)) означает т. н. относительный дисперсионный коэффициент;  $I(v) = u(v) \cdot u^*(v)$  есть распре-

---

<sup>1</sup> Многокомпонентные амплитудные фильтры суть амплитудные фильтры с прерывным распределением пропускания, об употреблении которых автор до сих пор не нашел данных в литературе. Имеющиеся в литературе (см. (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8)) методы вычисления амплитудных фильтров относятся к фильтрам с непрерывным распределением пропускания.

<sup>2</sup> Формула (1.1) предполагает, что во входной зрачок оптического прибора с радиусом  $a = 1$  помещен  $n$ -компонентный фильтр с амплитудными коэффициентами пропускания  $c_1, c_2, \dots, c_n$  и радиусами линий раздела компонентов  $a_1, a_2, \dots, a_n = a = 1$ .

деление интенсивности, если отверстие закрыто амплитудным фильтром;  $I_0(v) = \frac{J_1^2(v)}{v^2}$  (распределение интенсивности в дифракционной картине при круглом отверстии с радиусом  $a = 1$  и с равномерным пропусканием). Отметим, что в  $I_0(v)$  I и II побочные максимумы занимают места  $v_I = 5,14$ ,  $v_{II} = 8,42$  и половина ширины центрального максимума находится в  $v$ -промежутке между 0—3,8. В таблице 1 даны характеристики фильтров, подавляющих I и II побочные максимумы<sup>3</sup>. В таблице 2 даны характеристики фильтров, сужающих центральный максимум. Как видно из приведенных таблиц,  $D_{5,9}^r$ ,  $D_{2,4}^r$  уменьшаются с возрастанием числа компонент. Таким образом, с помощью четырехкомпонентного фильтра возможно в достаточной мере погасить свет на рассматриваемых зонах 5—9, 2—4. С другой стороны, с увеличением числа компонентов обнаруживается переход энергии из центральной зоны на край дифракционного изображения, заметный в особенности при применении фильтров, сужающих центральный максимум. В результате, чем больше сужается центральный максимум, тем меньше становится интенсивность света в фокусе. При этом надо отметить, что фильтры, сужающие центральный максимум, имеют наряду с только поглощающими компонентами также компоненты, изменяющие фазу на  $\pi$ .

2. Во второй части работы формулируется нелинейное интегральное уравнение (2.1а) для вычисления контура отверстия  $\eta_0(\xi)$  (формы диафрагмы) с равномерным пропусканием, если задано распределение амплитуды  $u_0(v, \omega)$  на фокальной плоскости. Для решения уравнения (2.1а) найдены два метода а) и б). Метод а) сводит решение уравнения непосредственно к преобразованию Фурье (см. формулу (2.4)<sup>4</sup> с последующим определением контура  $\eta_0(\xi)$  по формуле (2.5). Метод б) сводит нелинейные уравнения (2.1а) к решению системы рекуррентных линейных интегральных уравнений (т. е. к вычислению функций  $F_0, F_1, F_2, \dots$ ). Чтобы свести данное уравнение (2.1а) к системе (2.17), рассматривается уравнение (2.14), решение которого имеется в виде  $\eta_0(\xi, \omega, p)$  (2.15), где  $p$  — параметр; вместо заданного распределения амплитуды рассматривается функция  $u_0(v, \omega, p)$  в виде (2.16) При  $p \rightarrow 1$  уравнение (2.14) совпадает с уравнением (2.1а), а решение  $\eta_0(\xi, p)$  переходит в решение  $\eta_0(\xi)$  уравнения (2.1а) и  $u_0(v, \omega, p)$  переходит в заданное распределение амплитуды  $u_0(v, \omega)$

Среди полученных результатов следует отметить как имеющие

<sup>3</sup> Эти фильтры изготовлены методом испарения в вакууме. Экспериментальное исследование их будет опубликовано впоследствии.

<sup>4</sup> Если вид заданного распределения амплитуды таков, что точное преобразование Фурье в формуле (2.4) невозможно, то приближенное преобразование все-таки возможно, если аппроксимировать распределение амплитуды в виде ломанной линии.

практическое значение следующее: 1) Контур  $\eta_0$  соответствующий распределению амплитуды (2.8) (побочные максимумы которого подавлены сильнее, чем у распределения (2.7)), может быть найден из формулы (2.9) и зависит очевидно от координаты дифракционного изображения  $\omega$ ; 2) распределению амплитуды (2.10), заданному в сечении  $\omega = 0$  вместе с условиями (2.11) сужения центрального максимума соответствует  $\eta_0(\xi)_{\omega=0}$  по формуле (2.12)<sup>5</sup> (см. рис. 2 и 3). Оба метода приводят к одинаковым результатам. См., например, в таблице 3 результаты вычисления двумя методами контура, соответствующего распределению амплитуды в сечении  $\omega = \frac{\pi}{8}$  (из системы (2.17) вычислены первые четыре члена для выражения  $\eta_0(\xi)_{\omega = \frac{\pi}{8}}$ ). На основании полученных результатов можно сказать, что заданные распределения амплитуды можно разделить на две группы: 1) распределение амплитуды (см. (2.6), (2.7) и др.), которым соответствуют контуры отверстия с равномерным пропусканием, не зависящие от координаты  $\omega$  дифракционной картины; 2) распределения амплитуды (см. (2.8), (2.10) и др.), которым соответствуют контуры отверстия с равномерным пропусканием, зависящие от координаты  $\omega$  дифракционной картины.

3. В третьей части работы исследуется соответствие отверстия с фильтром (для заданного контура) отверстию без фильтра (соответственно для другого контура). Здесь под соответствием отверстий друг другу подразумевается условие одинаковости их дифракционных картин. Для выполнения этого исследования выведено уравнение (3.4)<sup>6</sup>, и тождественная ему система уравнений (3.5). Уравнение (3.4) (или уравнения (3.5)) является основой решения задач теории дифракции двух родов в зависимости от того, дано ли  $[b_1(\xi), b_2(\xi)]$  вместе с распределением пропускания  $C(\xi, \eta)$  и ищется соответствующая функция формы отверстия  $[\eta_1(\xi), \eta_2(\xi)]$  с равномерным пропусканием, или наоборот.

В работе показано: необходимое и достаточное условие для того, чтобы контур отверстия  $[\eta_1(\xi), \eta_2(\xi)]$  был центральносимметричен относительно начала, состоит в том, чтобы функция  $C(\xi, \eta)$  вместе с  $[b_1(\xi), b_2(\xi)]$ , соответствующие контуру с рав-

<sup>5</sup> Расчет соответствующего 3-компонентного фильтра для круглого отверстия (т. е. учитывая условия (2.11)) сжатия центрального максимума одинаково во всех направлениях, дает значение интенсивности в фокусе в  $\sim 22$  раза меньше той интенсивности в фокусе, которая получается с помощью отверстия с равномерным пропусканием формы  $\eta_0(\xi)_{\omega=0}$  (см. формулы (2.12)) (если  $u_{00} = 0,0094$ , то кривая  $\eta_0(\xi)_{\omega=0}$  находится внутри единичного круга).

<sup>6</sup> Обозначения в формулах (3.4), (3.5):  $C(\xi, \eta)$  — распределение пропускания отверстия, имеющего форму  $[b_1(\xi), b_2(\xi)]$ ;  $[\eta_1(\xi), \eta_2(\xi)]$  — контур отверстия с равномерным пропусканием.

номерным пропусканием, удовлетворяли условиям (3.7) Центральносимметричная функция  $\eta_1 = -\eta_2 = -\eta_0(\xi)$  определяется тогда из уравнения (3.6а).

Вычисления в пунктах 1°—6° показывают, что 1) каждому амплитудному фильтру в отверстии определенной формы соответствует отверстие с постоянным пропусканием, но с иным контуром  $\eta_0$ ; 2)  $\eta_0$  связан с параметром  $\omega$  дифракционного изображения в общем случае так, что каждому сечению  $\omega = \text{конст.}$  соответствует своя  $\eta_0(\xi, \omega)$ . Тогда имеет смысл вычислить средний контур  $\overline{\eta_0(\xi, \omega)^{(\omega_0)}}$ , который соответствует интервалу  $(-\omega_0, +\omega_0)$  значений  $\omega$  (см. в задаче 2° на стр. 207 амплитудный фильтр с пропусканием  $C(\xi, \eta) = 1 - \xi^2 - \eta^2$  помещен в круглом отверстии  $b_2 = -b_1 = \sqrt{1 - \xi^2}$ ; соответствующая  $\overline{\eta_0(\xi, \omega)^{(\omega_0)}}$  дана в формуле (3.10); 3)  $\eta_0(\xi, \omega)$  существенно зависит при данном амплитудном фильтре от того находится ли амплитудный фильтр в таком отверстии, контур которого параллелен линиям одинакового пропускания амплитудного фильтра, или нет. Вид  $\eta_0$  зависит также от того, изменяется ли поглощение амплитудного фильтра на краю отверстия (при переходе на непрозрачную стенку) непрерывно или скачком.

Если будет экспериментально доказано утверждение 1) пункта, то это будет иметь следующее практическое значение: а) технически трудное изготовление амплитудных фильтров можно заменить изготовлением диафрагмы соответствующей формы  $\eta_0$ , которая даст по крайней мере в одном сечении такое же распределение амплитуды (соответ. распределение интенсивности), как амплитудный фильтр в данном отверстии; б) указанные в пункте а) диафрагмы можно использовать прежде всего для лучшего разделения двух точечных объектов в центральной части изображения или вне ее.

Настоящая работа была доложена на научной сессии Тартуского гос. университета 25-го ноября 1956 г.

# ÜBER DIE WIRKUNG DER AMPLITUDENFILTER UND DIAFRAGMEN AUF DAS BEUGUNGSBILD. I

L. Tuvikene

## Zusammenfassung

Sowohl in der Theorie der optischen Instrumente, als auch bei der praktischen Anwendung derselben, steht an wichtiger Stelle die Möglichkeit des Variierens des Beugungseffektes zu zweierlei Zwecken:

a) um im Beugungsbild die Nebenmaxima beliebigen Grades herunterzudrücken;

b) um das Hauptmaximum bis zur gewünschten Breite zusammenzuziehen und damit das Auflösungsvermögen zu vergrössern.

Zur Erreichung dieser Ziele wurden berechnet:

1) Amplitudenfilter mit 2-, 3-, 4-Komponenten für eine kreisförmige Öffnung, die Charakteristiken der Filter sind in den Tabellen 1 und 2 gegeben;

2) die Randkurven einiger Öffnungen mit gleichmässiger Verteilung der Durchlässigkeit (Diafragmen) aus einer nichtlinearen Integralgleichung (2 1a).

In beiden Fällen sind passende Amplitudenverteilungen auf der Brennebene vorgenommen.

Es wird nachgewiesen, dass ein vorgegebener Amplitudenfilter bei einer Öffnung mit vorgegebener Randkurve mindestens auf einer Geraden der Brennebene dieselbe Amplitudenverteilung besitzt wie ein entsprechend gewähltes Diafragma.

Vorgetragen während der wissenschaftlichen Session der Staatlichen Universität zu Tartu am 25. Nov. 1956.

## О СОДЕРЖАНИИ ВАНАДИЯ В ГОРЮЧИХ СЛАНЦАХ ЭСТОНСКОЙ ССР

Ю. Л. Халдна

Кафедра аналитической химии

Ванадий редко образует крупные самостоятельные месторождения, хотя его содержание в земной коре значительно превышает содержание меди, цинка, свинца и ряда других элементов, скопления которых в промышленных концентрациях широко распространены в природе. Отсутствие самостоятельных месторождений является следствием резко выраженной тенденции к рассеянию, в результате чего ванадий чаще встречается в качестве примеси в различных минералах и горных породах, в том числе и в породах осадочного происхождения. Работами многих исследователей установлены основные геохимические особенности скопления ванадия в осадочных породах [1]:

а) При выветривании изверженных пород большая часть ванадия остается связанной с мелкодисперсными продуктами выветривания. По Иосту, эта связь носит адсорбционный характер [1] и является достаточно прочной в условиях гумидного климата.

Некоторое повышение содержания ванадия в продуктах выветривания констатируется и в аридных условиях. Повидимому, этот процесс идет параллельно с разложением алюмосиликатов; образовавшиеся латериты обогащены ванадием;

б) другой путь накопления ванадия в осадочных породах связан с осаждением ванадия из содержащих его разведенных растворов. Такие растворы могут образоваться при выветривании изверженных пород и от воздействия грунтовых вод на латериты. Осаждение ванадия из растворов базируется, с одной стороны, на малой растворимости сульфида ванадия и, с другой стороны, на способности ванадия довольно легко менять свою валентность под действием восстановителей или окислителей. Высокие концентрации ванадия отмечаются только там, где ванадий осаждался из растворов. Повидимому, таким путем в восстановительной среде ванадий накопился и в некоторых органических отложениях (в битумах, асфальтитах, нефти и возможно — иногда в горючих сланцах).

В литературе имеются указания на скопление ванадия в горючих сланцах Швеции, Шотландии и Средней Азии [1, 2]. В связи с этим на кафедре аналитической химии Тартуского государственного университета была проведена работа по изучению распространения ванадия в горючих сланцах Эстонской ССР. Изучались следующие вопросы:

1. Распределение ванадия по стратиграфическим горизонтам отдельных месторождений.

2. Распределение ванадия между основными компонентами в составе горючих сланцев республики.

3. Возможность накопления ванадия в продуктах переработки горючих сланцев.

Количественное определение ванадия производилось по методике акад. А. П. Виноградова [3], дополненной рядом авторов [4, 5, 6]. Примененная методика количественного определения ванадия основывается на образовании желтого фосфорновольфрамованадиевого комплекса. Колориметрирование производилось на фотоэлектрическом колориметре ФЭК-3 с синим светофильтром. Предельная чувствительность метода была примерно  $1 \cdot 10^{-3} \%V$ , относительная ошибка до  $\pm 50\%$  (см. также [5]).

Пробы горючих сланцев были любезно предоставлены нам кафедрой органической химии Таллинского Политехнического Института. Анализируемый материал взят из шахт Убья и Кютте-Йюд [7].

Перед анализом пробы подвергались озолению на воздухе при температуре  $700 \div 800^\circ C$ . 0,9 г полученной золы сплавлялось в платиновом тигле с 4,7 г  $Na_2CO_3$ . Сплав выщелачивался 50 мл горячей воды и нерастворившийся осадок отделялся от раствора фильтрованием. Бумажный фильтр предварительно подвергался пятикратной промывке горячим 10%-м раствором  $Na_2CO_3$  для удаления растворяющихся органических красящих веществ [5]. Ванадий определялся в фильтрате указанным выше колориметрическим методом [4].

Результаты анализов показывают, что содержание ванадия в горючих сланцах Эстонской ССР несколько ниже среднего содержания его в земной коре (кларк ванадия 0,02); в распределении по стратиграфическим горизонтам существенного обогащения среди анализируемых слоев не обнаружено.

Горючие сланцы Эстонской ССР состоят из трех основных компонентов: из органической части (кероген), из карбонатной части и из силикатной (терригенной) части. Для выяснения вопроса о том, с каким из этих компонентов связан ванадий, изученные пробы сланцев были подвергнуты разделению на слагающие их компоненты по следующей методике: проба была измельчена на куски диаметром около 5 мм и выдержана 24 часа под слоем этилового эфира. После отгонки эфира кероген был отделен в распределительной воронке с помощью 20%-ого раствора  $CdSO_4$  ( $d = 1.22$ ) Осадок, состоящий из карбонатной и тер-

ригенной части, обрабатывался 10%-м раствором HCl. При этом карбонатная часть растворялась. В полученных разделенных таким образом компонентах ванадий определялся вышеупомянутым колориметрическим методом.

Таблица № 1.

Стратиграфический горизонт	$10^{-3} \% V$ на воздушносухой сланец
Шахта Кютте-Йуд	
A	2,5
BA'	3,3
B	2,2
C	2,2
DC	2,5
D	3,2
ED	2,3
G	1,8
H	3,6
битуминозная прослойка 9 см выше слоя H	2,1
Шахта Убья	
D	3,2
ED	1,9
E	1,7
FE	1,6
F	2,5
GF	1,7

Таблица № 2.

Название объекта анализа	Содержание ванадия в данном компоненте $10^{-3} \% V$	Содержание данного компонента в горячем сланце %	Количество V, связанное с данным компонентом в мг на 100 г воздушносухого горячего сланца
Горючий сланец из соля А (шахта Кивийли)			
1. Зола при сжигании	6.0	60,0	3.6
2. Кероген	1.6	24.5	0.4
3. Карбонатная часть	—	35.2	—
4. Терригенная часть	7.5	40.3	3.0
Горючий сланец из соля D (шахта Кивийли)			
1. Зола при сжигании	4.4	59.0	2.6
2. Кероген	1.3	23.2	0.3
3. Карбонатная часть	—	40,5	—
4. Терригенная часть	6.9	36,3	2.5

Из приведенных в таблице № 2 данных видно, что ванадий в горючих сланцах Эстонской ССР в основном связан с терригенной частью.

Присутствие ванадия в керогене сомнительно, хотя анализы и показали содержание его в нем порядка  $1,5 \cdot 10^{-3}\%$  ( $10 \div : 20\%$  от всего количества ванадия, содержащегося в горючих сланцах). Данный способ разделения на компоненты не позволяет получить кероген в достаточно чистом виде; обогащенная органикой фракция содержала иногда до 25% минеральных веществ (золы), чем вероятно и обусловлено установленное нами содержание ванадия в керогене. В карбонатной части сланца обнаружены только следы ванадия (до  $10^{-4}\%V$ )

Сравнивая содержание ванадия в терригенной составляющей горючих сланцев со средним содержанием его в глинах и в глинистых сланцах [1], необходимо отметить близость численных значений в том и в другом случае. Это дает основание сделать вывод, что: а) практически весь ванадий, содержащийся в горючих сланцах Эстонской ССР содержится в терригенной составляющей, состоящей из различных продуктов выветривания изверженных пород; б) в условиях образования горючих сланцев Эстонской ССР осаждение ванадия из растворов не играло существенной роли.

Возможность накопления ванадия в продуктах переработки горючих сланцев была проверена рядом анализов, проведенных спектральным методом с помощью спектрографа ИСП-22. При этом получены следующие результаты:

Т а б л и ц а № 3.

1. Зола смолы из барилет (газовый завод в Кохтла-Ярве)	— до $5 \cdot 10^{-3}\% V$
2. Зола тяжелой фракции смолы (ген. цех № 5 в Кохтла-Ярве)	— следы V
3. Сажа при сжигании горючих сланцев или смолы	— не обнаружено V (иногда следы V)
4. Летучая зола из ТЭЦ-2 в Кохтла-Ярве	— следы V

Ограниченное число проведенных анализов и характер взятия проб, не рассчитанных специально для геохимических исследований по ванадию, не позволяют охарактеризовать всей толщ осадочных образований республики. По отношению к сланцевой толще двух обследованных месторождений могут быть сделаны следующие предварительные выводы:

1. В изученных пробах горючего сланца Эстонской ССР содержание ванадия оказалось низким — до  $0.005\%V$  на воздушно-сухую пробу.

2. В обоих исследованных месторождениях ванадий распределяется более или менее равномерно по всем изученным стратиграфическим горизонтам.

3. В горючих сланцах Эстонской ССР ванадий связан преимущественно с терригенным компонентом, где его содержание близко к среднему в глинах и прочих продуктах выветривания изверженных пород.

4. При скоплении органической массы и последующем формировании горючих сланцев Эстонской ССР существенного осаждения ванадия из растворов очевидно не происходило, поскольку достаточно глубокое разложение являющейся носителем ванадия терригенной части не имело места.

5. При сжигании или коксовании горючих сланцев большая часть ванадия удерживается в золе или в коксе. В других продуктах переработки существенного накопления ванадия не обнаружено.

За любезное предоставление проб горючих сланцев автор выражает благодарность заведующему кафедрой органической химии Таллинского Политехнического Института тов. Х. Раудсеппу; за оказанную помощь при выполнении анализов — глубокую благодарность работникам кафедры аналитической химии Тартуского государственного университета тов. Эвальду Педяк, А. Кийслер и Т. Пыльдер.

### Литература

1. Jost, K., *Chemie der Erde* 7, (1932), 177.
2. Assarson, G., *Geol. Fören. Stockholm Förh.* 63, (1941), 182.
3. Виноградов, А. П., *ДАН СССР, серия А*, 10 (1931).
4. Финкельштейн, Д. Н., *Зав. лаборатория*, 7, (1953), 789.
5. Методы химического анализа минерального сырья, вып. 1, Москва, Госгеолтехиздат (1955).
6. Генерозов, Б. А., Кускова, Н. К., *Ж. анал. химии*, 5 — 6, (1946).
7. Раудсепп, Х. Т., Фомина, А. С. и др., *Труды Таллинского Политехнического Института, серия А*, 57, (1954), 5.

## VANAADIUMI LEVIKUST EESTI NSV PÕLEVKIVIS

U. Haldna

Resümee

Paljud kivimid, sealhulgas ka settekivimid, sisaldavad väikeses hulkades vanaadiumi. Vanaadiumi geokeemias on tuntud kaks teineteisest erinevat teed selle elemendi kogunemiseks settekivimitesse. Esimene neist seisneb selles, et vanaadium kantakse settekivimisse terrigeense materjaliga, mis on tekkinud väikesi vanaadiumihulki sisaldavate tardkivimite porsumisel. Teiseks teeks, mille kaudu vanaadium satub settekivimitesse, on selle elemendi väljasadestumine tema lahjadest lahustest.

Kirjanduse andmetel leidub vanaadiumi Rootsi, Šoti ja Kesk-Aasia põlevkivides. Käesolevas töös on esitatud mõningaid andmeid vanaadiumi leidumise kohta Eesti NSV põlevkivis. Vanaadiumi kvantitatiivseks määramiseks kasutati kolorimeetrilist meetodit, mille alused on antud A. P. Vinogradovi poolt. Nimetatud meetod põhineb kollase fosfor-volfram-vanaadiumkompleksi tekkimisel. Analüüsides kasutati põlevkivi proove Kohtla-Järve ja Ubja kaevandustest. Vanaadiumi määramisel üksikutes strati-graafilistes kihtides selgus, et vanaadiumi hulk analüüsitud proovides oli  $(1,6 \div 3,6) \cdot 10^{-1}\%$  V arvestatult õhukuivale põlevkivile.

Töö teises osas lagundati põlevkivi etüüleetri ja 10%-lise HCl abil oma põhikoostisosadeks (kerogeen, terrigeenne ja karbonaatne osa). Edasi selgus, et praktiliselt kogu põlevkivis leiduv vanaadium on seotud terrigeense komponendiga, mis lubab oletada, et põlevkivi tekkeprotsessi käigus ei ole toimunud märgatavat vanaadiumi sadenemist lahustest.

Töös on jälgitud vanaadiumi saatust põlevkivi utmisel ja põletamisel. Saadud andmetest järeldati, et põlevkivi utmisel ja põletamisel suurem osa vanaadiumi jääb põlevkivi koksi või tuha sisse.

Teostatud analüüside väikese arvu tõttu ei saa käesolevas töös saavutatud tulemuste alusel teha lõplikke järeldusi kogu Eesti NSV põlevkivivarude ulatuses.

## ÜBER DIE VERBREITUNG DES VANADIUM IM ÖLSCHIEFER DER ESSR

Ü. Haldna

### Zusammenfassung

Das vorliegende Schreiben enthält einige Analysenergebnisse über das Vanadiumvorkommen in estländischen Ölschiefer. Der Vanadiumgehalt wurde durch die verbesserte kolorimetrische Methode von A. P. Vinogradov ermittelt. Die analysierten Proben entstammen den Schichten Kohtla-Järve und Ubja. Die Bestimmungen des Vanadiums in einzelnen stratigraphischen Schichten ergaben einen Vanadiumgehalt von etwa  $(1,6 \div 3,6) \cdot 10^{-3}\%$  V, gerechnet auf die lufttrockene Probe. Es wurde festgestellt, daß Vanadium hauptsächlich mit dem terrigenen Bestandteil der Ölschiefer verbunden ist. Daraus ersieht man leicht, daß fast die ganze in Ölschiefer vorhandene Vanadiummenge bei der Verbrennung oder Verkohlung der Ölschiefer mit den mineralischen Rückständen verbunden bleibt.

## SISUKORD

И. Кулль, Умножение суммируемых двойных рядов	3
I. Kull, Kahekordsete summeeruvate ridade korrutamise. Resümee	56
I. Kull, Multiplication of double summable series. Summary	58
Э. Реймерс, Теоремы о среднем значении для двойных рядов	60
E. Reimers, Keskväärtusteoreemid kahekordsete ridade jaoks. Resümee	78
E. Reimers, The mean value theorems for double series. Summary	79
Ю. Каазик, О сходимости итерационных методов	80
Ü. Kaasik, Iteratsioonimeetodite koondumisest. Resümee	96
Ü. Kaasik, Über die Konvergenz von Iterationsmethoden. Zusammenfassung	97
Ю. Каазик и Э. Тамме, Об одном методе приближенного решения нелинейных операторных уравнений	99
Ü. Kaasik ja E. Tamme, Ühest mittelineaarsete operaatorvõrandite ligikaudse lahendamise meetodist. Resümee.	113
Ü. Kaasik und E. Tamme, Über eine Methode zur angenäherten Lösung der nichtlinearen Operatorgleichungen. Zusammenfassung.	115
Ю. Лумисте, Минимальные $n$ -мерные поверхности, имеющие в каждой точке $(n-1)$ -мерное асимптотическое направление . . . . .	117
Ü. Lumiste, Oma igas punktis $(n-1)$ -mõõtmelist asümptootilist sihti omavad $n$ -mõõtmelised minimaalpinnad. Resümee	139
Ü. Lumiste, Die $n$ -dimensionalen Minimalflächen mit einer $(n-1)$ -dimensionalen asymptotischen Richtung in jedem Punkte. Zusammenfassung	140
Ю. Лепик, О влиянии начальной кривизны и эксцентричного нагружения на прогибе сжатого стержня за пределами упругости	142
Ü. Lepik, Algkõveruse ja ekstsentrilise koormamise mõjust elastilisplastiliste surutud varraste läbipainetele. Resümee	157
Ü. Lepik, Über den Einfluss der Anfangskrümmung und exzentrischen Belastung auf die Durchbiegungen elastisch-plastischer Druckstäbe. Zusammenfassung	158
Э. Йюги, О потере устойчивости упруго-пластических стержней с различным способом закрепления концов	159
E. Jõgi, Elastilis-plastiliste varraste stabiilsuse kao juhte elastsuspiiri ületamisel. Resümee	168
E. Jõgi, Über einige Fälle der Knickung elastisch-plastischer Stäbe bei Überschreitung der Elastizitätsgrenze. Zusammenfassung	168
П. Кард, К теории оптических свойств многослойных покрытий	169
P. Kard, Mitmekihiliste katete optiliste omaduste teooriast. Resümee	178
P. Kard, On the theory of optical properties of multilayer coatings. Summary	179
К. Ребане, Метод расчета диэлектрических покрытий с непрерывно изменяющимся показателем преломления (случай нормального падения света)	180
K. Rebane, Pidevalt muutuva murdumisnäitajaga katete arvutusmeetod (valguse normaalse langemise juht). Resümee	190

K. Rebane, Method of computation of dielectric coatings with continuous refraction index (the case of normal incidence). Summary	191
L. Tuvikene, Amplituudfiltrite ja diafragmade mõjust difraktsioonpildile. I.	192
Л. Тувикене, Действие амплитудных фильтров и диафрагм на дифракционную картину. I. Резюме	214
L. Tuvikene, Über die Wirkung der Amplitudenfilter und Diafragmen auf das Beugungsbild. I. Zusammenfassung	218
Ю. Халдна, О содержании ванадия в горючих сланцах Эстонской ССР	219
Ü. Haldna, Vanaadiumi levikust Eesti NSV põlevkivis. Resümees	224
Ü. Haldna, Über die Verbreitung des Vanadium im Ölschiefer der ESSR. Zusammenfassung	225

ТРУДЫ ЕСТЕСТВЕННО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТА

На русском, эстонском, английском  
и немецком языках

Тарту, ул. Юликооли 18

Vastutav toimetaja H. Keres

Korrektorid M. Mardi ja E. Uuspõld

Ladumisele antud 6. VII 1957. Trükkimisele antud  
18. VI 1958. Paber 60 × 92, 1/16. Trükipoognaid 14,25.  
Trükiarv 700. MB-04856. Tellimise nr. 1919.  
Hans Heidemanni nim. trükkikoda, Tartu, Vallikraavi 4.

Hind rbl. 10.—

Trüktivigu — Опечатки

Lk. ja rida Стр. и строка	On trükitud Напечатано	Peab olema Следует читать
Lk. 65, r. 3 ja 4 ü.	$g$	$g\alpha$
, 106, „ 12 a.	$\delta$	$\partial$
, 134, „ 9 a.	$a \neq 0, a \parallel b$	$a \neq 0, a \parallel b$
, 166, „ 3 ü.	$\lambda^2 \zeta$	$\lambda \zeta^2$
, 171, „ 10 a.	$(\pm 1)^s$	$(-1)^s$
, 173, „ 2 ü.	$a_0$	$\alpha_0$
, 191, „ 7 ja 9 a.	refraction	refractive
, 193, „ 1 a.	$\frac{J_1(a_{n-1})}{v}$	$\frac{J_1(a_{n-1} v)}{v}$
, 195, „ 2 a.	$\tau = \frac{\int_0^{\infty} I_0(v) v dv}{\int_0^{\infty} I(v) v dv}$	$\tau = \frac{\int_0^{\infty} I(v) v dv}{\int_0^{\infty} I_0(v) v dv}$
, 208, „ 7 ü.	Rea lõpust on ära jäänud ( $-1 \leq \times \leq +1$ )	
, 222, „ 5 ü.	$10 \div : 20 \%$	$10 \div 20 \%$
, 224, „ 14 a.	$10^{-1} \%$	$10^{-3} \%$