Leitfaden

C. A. F. Knorr

bei meinen

mathematischen Vorlesungen.

1

Dorpat, 1803.
Gedruckt bei M. G. Grenzius,
Universitätsbuchdrucker.

Koopia [illegible]
Läti TA Fundamentaal-
raamatukogule kuulu-
vast raamatust,
see pärineb aga
Ges. f. Gesch. u. Altert.-Kd.
der Ostseeprov. Russl.

Vorbericht.

Diese Sätze sollen nur ein Leitfaden beim Unterricht in der Mathematik seyn. Es können also beim Vortrag nach Bedürfniß noch Sätze hinzugefügt oder weggelassen werden. Es sind zwar eine Menge kürzerer und weitläuftiger Lehrbücher vorhanden, aus denen man die Mathematik mit und ohne Hülfe eines Lehrers lernen kann. Bei einem Lehrbuch aber, das man beim Vortrag dieser Wissenschaft zum Grunde legt, ist es meines Erachtens in vielen Rücksichten zweckmäßiger, wenn die Erläuterungen und Beweise der Lehrsätze und die Auflösungen der Aufgaben nicht dabei stehen. Schreiben, zeichnen und rechnen muß man beim Studium der Mathematik doch immer und so sind Erläuterungen, Auflösungen und Beweise beim Vortrage bald nachgeschrieben. Vorbereitung und Wiederholung sind zweckmäßiger und da man bei Anhörung des Vortrags auf nichts,

was

was schon im Buche steht, sich etwa zu verlassen hat: so wird dadurch eine ununterbrochene Aufmerksamkeit auf denselben um so nothwendiger, je mehr Jemandem daran gelegen ist, die Lehren der Mathematik deutlich, zusammenhangend und vollständig zu erlernen. Auch fallen Vorträge um so glücklicher aus, je mehr sie der Ordnung und dem Zusammenhang in denen die Sätze einer Wissenschaft in unserer Seele beisammen liegen, angemessen sind; und in dieser Rücksicht schrieben auch viele Lehrer der Mathematik ihre eigenen Lehrbücher und lasen am liebsten darüber.

Dies bestimmt, hoff' ich, schon den Gesichtspunct, aus dem man meinen unvollkommnen Versuch dieser Art anzusehen hat. Uebrigens werd' ich vielleicht an einem andern Orte mich noch etwas mehr sowol hierüber als auch überhaupt über Studium der Mathematik zu erklären Gelegenheit haben.

E. Ch. F. Knorre.

Inhalt.

Inhalt.

Zwei

Ein=

Einleitung.

1. **Was ist Mathematik?** 1) — μάθησις, μάθημα, disciplina, institutio, Wissenschaft, Lehre, Unterricht. — Der Ursprung dieser Benennung läßt sich nur vermuthlich angeben. — War bei den Griechen sehr geschätzt. — Plato nahm keinen Zuhörer an, der nicht Geometrie verstand.
2. **Größenlehre, Meßkunst.** — Größe (Quantität) was einer Vermehrung und Verminderung fähig ist. — Läßt sich ohne die übrigen Eigenschaften eines Dinges vorstellen. — Ist der Gegenstand der Mathematik.
3. **Messen** giebt einen deutlichen Begriff von Größe — ist Vergleichung mit einer willkührlichen Größe. —
4. **Reine** (mathesis pura, abstracta) und **angewandte** Mathematik (m. applicata, mixta).

5. Reine

1) Pythagoras.

5. Reine theilt sich in Arithmetik (Rechenkunst) u. Geometrie (Meßkunst) als die beiden Haupttheile der gesammten Mathematik.
6. Trigonometrie behandelt die Lehre von Dreiecken arithmetisch.
7. Theile der angewandten Mathematik sind so viel als verschiedene Gattungen der Dinge in der Welt. Letztere nur bestimmt die Grenzen.
8. Die 3 gewöhnlichen Gegenstände dieser Art — die Kräfte und Bewegungen der Körper — das Licht — die Himmelskörper — daher gewöhnlich mechanische, optische, astronomische Wissenschaften.
   1. Wissenschaften von Ausmessung der Bewegungen und des Gleichgewichts — statische Wissenschaften.
      Statik — Mechanik — Hydrostatik — Hydraulik — Aërometrie.
   2. Von Ausmessung des Lichts — optische Wissenschaften.
      Optik — Dioptrik — Catoptrik — Perspectiv. 2)
   3. Ausmessung des Weltgebäudes — astronomische Wissenschaften.
      Astronomie — Geographie — Chronologie — Gnomonik.
9. Wissenschaften, die keinen reinen Antheil mehr an der Mathematik haben aber doch dazu gezählt werden.

Ver-

2) Siehe 11.

Verhältnisse und Abmessungen bei Gebäuden — architectonische Wissenschaften.
   1. Bei Gebäuden auf vestem Lande:
      a) Zum bürgerlichen Gebrauch — Civilbaukunst.
      b) Zum Kriegsgebrauch — militärische Baukunst, Fortification.
   2. Auf und am Wasser — Wasserbaukunst, besonders Schiffsbaukunst.
      Artillerie — Anwendung geometrischer, mechanischer und aërometischer Lehren auf den Gebrauch des Pulvers und Geschützes.
10. Die allgemeinen Grundsätze von allen liegen in 5. Folglich legt man durch reine Mathematik den Grund zur gesammten Mathematik, und kommt in letzterer ohne erstere nicht fort.
11. Vermehrung unserer Kenntnisse in natürlichen Dingen (7) vermehrt die Theile angewandter Mathematik.

Wolf brachte die Aërometrie in ein System — Bouguer und Lambert die Photometrie — letzterer die Pyrometrie.

12. Elementarmathematik (mathesis elementaris, inferior) höhere Mathematik (m. sublimior). 3)
13. Arithmetik, Geometrie, Trigonometrie — Elementarmathematik.

a) Ele-

3) Unterschied ist in Inhalt, Umfang und Methode.

a) Elementararithmetik läßt sich nur auf leichte Gleichungen vom 1sten, 2ten und 3ten Grad ein.
b) Elementargeometrie 4) handelt blos von graden Linien und unter den krummen nur von der Cirkellinie und von den Figuren, Flächen und Körpern, die sich durch beide Linien construiren lassen.
c) Elementartrigonometrie enthält also das, was sich aus beiden (a. b.) herleiten läßt.

14. a. Höhere Arithmetik — Untersuchung der Natur und Auflösung aller möglichen Gleichungen. Analysis 5) des Endlichen und Unendlichen.
b. Höhere Geometrie — Beschäftigung mit allen übrigen krummen Linien (ausser der Kreislinie 13, b), Flächen und Körpern.
c. Höhere Trigonometrie also enthält, was sich durch 13, a und b nicht herleiten läßt.

15. Was sich nun in angewandter Mathematik durch 13 darthun läßt, gehört zu ihrem Elementartheil — das übrige zum höhern.

16. a Elementarmathematik stellt gewöhnlich ihre Sätze als schon bekannt auf und begründet sie durch vorher berichtigte Sätze.
b. Höhere Mathematik macht sich selbst einen Weg, auf dem sie den Satz findet und beweist.
a. Synthetische, b. analytische Methode. 6)

17. Theoretische und practische Mathematik.

18. Wo

4) Ursprung dieses Namens. Anm. 9.
5) Algebra das arabische Wort für's griechische Analysis.
6) Es läßt sich aus beiden eine 3te zusammensetzen.

18. Wo und woraus die ersten mathematischen Kenntnisse entsprungen — ob Arithmetik von den Phöniciern und Geometrie von den Aegyptern erfunden — läßt sich nicht ausmachen.

19. Viel wußten die Aegyptier wol nicht davon — wenn sie gleich Pyramiden, Obelisken u. dergl. baueten.

20. Das Wenige was sie etwa hatten, brachten Thales und Pythagoras nach Griechenland und beider Erfindungen zeigen deutlich genug die niedere Stufe an, auf der sich die Geometrie in Aegypten noch befinden mußte.

21. Den Griechen muß man auch hierin den Ruhm lassen, daß sie zuerst die Theorie der Meßkunst entwickelten. Sie stiegen schon auf eine hohe Stufe in dieser Wissenschaft; und man kann ihren Scharfsinn nicht genug bewundern, wenn man Plato schon als Erfinder der geometrischen Analysis und seine Schüler durch Betrachtung der (sogenannten) Kegelschnitte den Grund zur höhern Geometrie legen sieht.

22. Das delphische Problem 7) und die Trisection eines Winkels zeugen von der allgemeinen Theilnahme an mathematische Untersuchungen, und trugen nicht wenig zur Vervollkommnung und Erweiterung der Wissenschaft bei. 8)

23. Ale-

7) Geom. 307.
8) Proclus Commentar übers 1ste Buch Euclid's.

23. Alexandrien bildete vor Christo einen Euclid [9]) — und nach Christi Geburt einen Apollonius [10]) (Männer, deren Andenken nur mit der Wissenschaft selbst verlöschen kann). Eine Schule, deren Ruhm sich bis ins 7te Secul. nach Christo erhielt. Aus derselben kamen auch unter andern Diophantus, Pappus und Theon.

24. Zu Syracus berechnete Archimed [11]) den Cirkel und ein Ptolemäus, Theodosius und Proclus machten sich nicht minder wichtig.

25. Mathematik bei den Römern verdient keiner Erwähnung.

26. Den Arabern oder Saracenen verdanken wir die Erhaltung der Wissenschaft in dem mittlern Zeitalter. Sie übersetzten die Griechen — commentirten darüber — führten die Ziffern [12]) ein und schufen dadurch die Arithmetik um. — Algebra.

27. Im Occident blühete diese Wissenschaft mit dem 15. Jahrhundert auf. Leonhard von Pisa, Lukas von Burgo, Cardan, Vieta, Purbach, Regiomontan, Rhäticus, Nepper, Kepler, Harriot, Cartesius, Fermat, Barrow, Leibnitz, Newton, die Bernoulli's, Euler u. s. w. sind unter andern die

9) 300 Jahr vor Christo. Von seinen Elementen der Name Elementargeometrie. Geom. 14.
10) 100 Jahr nach Christo.
11) Was er im Euclid vermißte.
12) Unsere 10 Zahlziffern, die ursprünglich aus Indien kommen.

die Männer, denen die Wissenschaft ihr Aufkeimen, Wachsthum und Vervollkommung zu danken hat.

28. Zur allgemeinern Ausbreitung der Wissenschaft trugen besonders gute Lehrbücher bei, wo man den Deutschen ihre großen Verdienste nicht absprechen kann.

Die ersten waren Sturm, Wolf, Hausen.

Gründlichere und ausführlichere Lehrbücher lieferten Segner, Kästner, Karsten, deren Lehrbücher das gründlichste Studium dieser Wissenschaft gewähren. [13])

---

29. In Rücksicht des allgemeinen Einflusses auf menschliche Glückseligkeit hat Mathematik den ersten Rang.

30. Woher die Gründe zu den Erfindungen und Bewegungen aller Arten von Maschinen? —

Woher — zu Schiffahrt — Wasserleitungen — Mühlen aller Art — Bergwerkskunde? —

Kann der Astronom — der Physiker — der bildende Künstler und Mahler der optischen Wissenschaften entbehren? —

Was sichert den Lauf des Schiffes? — Was bestimmt Jahre, Tage und Zeiteintheilung, ohne wel-

13) Die zu große Anzahl neuerer Lehrbücher würde eine eigene kritische Abhandlung nothwendig machen, die nicht in diese Grenzen paßt.

welche in menschlichen Geschäften nie Ordnung seyn würde? — Wo nimmt die Geographie ihre Gründe zur Bestimmung der Längen und Breiten her? —
Wodurch wird die Größe und Figur der Erde bestimmt, um hieraus richtige Schlüsse auf die übrigen Weltkörper zu machen? —
Sind bürgerliche und militärische Baukunst entbehrlich? —
Welche Wissenschaft lehrt alle Werkzeuge der Handwerker und Künstler — ja selbst des Landmanns — als Maschinen betrachten und in Absicht ihrer Beschaffenheit, Einrichtung und Gebrauch richtig beurtheilen und schätzen? —

31. Ist also die Verbindung der mathematischen Wissenschaften mit allen menschlichen Beschäftigungen so genau, so ist es für jeden Menschen, der Ansprüche auf Bildung macht — also vorzüglich für den Gelehrten — gewiß nicht anständig, von so nützlichen Dingen nicht mehr als der gemeine Mann zu wissen.

32. Der Gelehrte kann aber noch ganz vorzügliche Vortheile aus dieser Wissenschaft ziehen.

a) Er findet Wahrheit — unumstößliche, ewige Wahrheit. —
b) Studium der Natur ist ohne sie nicht möglich. — Der mathematische Theil der Physik ist der gewisseste.
c. Sie lehrt die Größe und Schranken des menschlichen Geistes kennen.
d) Keine Wissenschaft schärft und stärkt die Kräfte der Seele mehr.

33. Die mathematische Lehrart ist einzig in ihrer Art. 14)

a) Sie fängt von Erklärungen an und giebt theils Worterklärungen (Nominaldefinition), theils Sacherklärungen (genetische).
b) Daraus fliessen Grundsätze (Axiomata), die in manchen Fällen Foderungen (Postulata) heissen.
c) Lehrsätze (Theoremata) können nicht wie Grundsätze ohne Beweis aufgestellt werden. Sie bekommen den Namen Aufgaben (Problemata), wenn sie etwas zu bewerkstelligen verlangen, wo denn die Art, das Verlangte zu bewerkstelligen, Auflösung (solutio) heißt, zu der man einen Beweis hinzufügt.
d) Eine leichte Folge aus einem Satz — Corollarium, Zusatz.
e) Anmerkungen, Scholien.
f) Hat man nöthig, ein Theorem oder Problem aus einer andern Wissenschaft zu entlehnen: so giebt man ihm den Namen Lehnsatz (Lemma).
g) Die mathematischen Beweise (Demonstrationes) sind directe oder indirecte (apagogisch). Beide von gleichem Werth.

Das

14) Weil sie sich in keiner andern Wissenschaft so anbringen läßt.

Das Wesentliche der mathematischen Methode 15) liegt also hauptsächlich darin, daß ihre ersten Gründe unbestreitbare Wahrheiten sind, woraus Lehren bewiesen und Folgerungen gemacht werden, deren Richtigkeit jeden Verstand, der sie begreift, zum Beifall zwingt.

15) Da uns Euclid in seiner Geometrie das erste Muster davon gegeben: so nennt man sie die geometrische oder euclidische.

Arithmetik.

1. Arithmetik ist die Wissenschaft, aus bekannten Größen unbekannte durch Rechnung zu finden.
2. Allgemeine Arithmetik drückt die Größen durch allgemeine Zeichen (Buchstaben) aus; Zahlenarithmetik durch Zahlen (Ziffern). Erstere allgemeine Theorie der Größen.
3. Dinge von einerlei Art nennt man solche, die in Rücksicht auf das, was sie mit einander gemein haben, einerlei sind. Dieses Gemeinschaftliche heißt die Einheit, und eine Menge solcher Einheiten eine Zahl.
4. Mit einer Zahl läßt sich nichts weiter vornehmen, als sie vermehren oder vermindern. Jenes heißt addiren, dieses subtrahiren. 1)
5. Unsere gewöhnlichen Zahlzeichen 2) gehen bekanntermaßen von 1 bis 9. 3) Und jede dieser 9 Ziffern kann Einer, Zehner, Hunderte, Tausende, Millionen u. s. w. bedeuten, je nachdem sie an einer gewissen Stelle steht. Daher der Ursprung der Null.
6. Aussprechen und Schreiben auch der größten Zahlen ist also leicht, wenn man nur immer 6 Zahlen abtheilt.

1) Es giebt also 2 Species der Rechenkunst. 2) Welche morgenländischen Ursprungs sind. 3) Das Zählen bis 10 von der Anzahl der Finger.

7. a. **Addiren** heißt eine Zahl finden, die andern gegebenen zusammen genommen gleich ist. Die gefundene Zahl, **Summe, Aggregat.**

b. **Subtrahiren** heißt von einer gegebenen Zahl eine andere wegnehmen. Das übriggebliebene **Rest, Unterschied, Differenz.**

8. a. **Multipliciren** ist nichts anders, als addiren, und dividiren nichts anders, als subtrahiren.

b. Die multiplicirten Zahlen heißen **Factoren**; was herauskommt, **Product.**

c. Die dividirte Zahl heißt **Dividendus**, die dividirende **Divisor.** Was herauskommt, Quotient.

9. Sprache und Schreibart bei den arithmetischen Operationen werden durch folgende Zeichen kürzer und bequemer: $+ \quad - \quad \cdot \quad \times \quad : \quad \frac{a}{b} \quad = \quad \backsim \quad \cong \quad < \; >$ $0 \quad \infty \quad r$.

10. a. Die einzige **Regel** bei der Addition ist, daß man Einer unter Einer, Zehner unter Zehner u. s. w. schreibt und eben so addirt.

b. Beim Subtrahiren kommt nur noch die Regel des (sogenannten) Borgens hinzu, wodurch man 10 mehr bekommt, weil man aus der folgenden Stelle nahm. 5.

c. Multipliciren und dividiren ist mit Hülfe des 1 mal 1 leicht, wenn man nur die Zahlen gehörig unter einander setzt. 5.

11. Es ist leicht zu erkennen, daß

a) im Product der eine Factor so oft als die Einheit im andern, und

b) der

b) der Divisor im Dividendus so oft als die Einheit im Quotienten enthalten sei.

12. Eben so finden wir, daß sich immer 2 Rechnungsarten entgegenstehen. Die Addition hebt die Subtraction und die Multiplication die Division auf, und umgekehrt.

13. Wenn man daher

a) eine Zahl zu der andern addirt und von der Summe die eine wieder abzieht: so erhält man die andere wieder;

b) eine Zahl von der andern abzieht und zum Rest die eine wieder addirt: so erhält man die andere wieder;

c) eine Zahl mit der andern multiplicirt und das Product mit einem Factor dividirt: so bekommt man den andern wieder;

d) eine Zahl durch eine andere dividirt und den Quotienten mit dem Divisor wieder multiplicirt: so bekommt man die dividirte Zahl wieder. 4)

14. Eine Zahl durch 1 multiplicirt oder dividirt wird nicht verändert. 11.

---

15. Ein oder mehrere von gleichen Theilen, worin ein Ganzes getheilt ist, heißt ein **Bruch** oder **gebrochene Zahl** (fractio) 5); und zwar ein **ächter** (fr. propria), wenn der **Zähler** (numerator) kleiner ist als der **Nenner** (denominator) im umgekehrten Fall aber ein **unächter** (fr. spuria).

 Ihre

4) Hieraus ergeben sich die Proben dieser 4 Rechnungsarten.
5) Der Ursprung dieser Benennung ist leicht zu errathen.

Ihre Schreibart und der Grund derselben sind leicht zu erklären.

16. Man erkläre und vergleiche die Brüche [6]), z. B. durch Linien: so sieht man, daß eine durch einen Bruch ausgedrückte Größe auf verschiedene Weise [7]) ausgedruckt oder geschrieben werden kann. [8])

17. Daraus entsteht das Reduciren [9]) der Brüche und umgekehrt. [10])

18. a. Auf diese Weise kann man mehrere Brüche unter einen gemeinschaftlichen Nenner bringen. Dadurch vergleicht oder erforscht man den Werth der Brüche oder findet, welche von ihnen kleiner oder größer sind.

b. Da man hier aber oft zu große Zahlen bekommen würde: so kann man den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner finden.

19. Aus beiden Verfahren 17. lernen wir, daß Brüche unverändert bleiben, wenn man Zähler und Nenner mit einer und ebenderselben Zahl multiplicirt oder dividirt.

20. a. Wenn man aber den Zähler eines Bruches allein mit einer Zahl multiplicirt oder dividirt: so wird im ersten Fall der Bruch so viel mal größer und im zweyten Fall so viel mal kleiner.

b. Multiplicirt oder dividirt man den Nenner aber allein mit einer Zahl: so wird der Bruch einmal so viel kleiner, das andremal so viel größer.

21. Brü-

6) Nicht durch Zahlen, sondern 7) Ja auf unzählige Art. 8) Ohne ihren Werth dabey zu verlieren. 9) Verkürzen, abbreviren u. s. w. 10) Ersteres ist unsern Vorstellungen angemessener und erleichtert die Rechnung, letzteres erfordert zuweilen die Rechnung.

21. Brüche können nur addirt oder subtrahirt werden, wenn sie gleiche Nenner haben. Sind also die gegebenen Brüche mit gleichen Nennern: so ist beides leicht. Sind sie es nicht: so bringe man sie unter einerlei Benennung und addire und subtrahire sie dann.

22. Sind Brüche mit ganzen Zahlen verbunden: so werden (beim Addiren) die ganzen Zahlen, die die zusammen addirten und mit dem Nenner dividirten Brüche geben, zu den vorhandenen ganzen Zahlen addirt. 1 von einer ganzen Zahl geborgt, giebt so viel Theile, als der Nenner anzeigt.

23. Brüche multiplicirt man, wenn man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt. [11])

24. Soll man einen Bruch mit einer ganzen Zahl multipliciren: so betrachtet man die ganze Zahl als einen unächten Bruch. Auch das Multipliciren der Brüche, die beide mit ganzen Zahlen verbunden sind, hat keine Schwierigkeit.

25. Das Product von 2 Brüchen ist in dem einen Factor so oft, als der andere Factor in der Einheit enthalten.

26. Brüche dividirt man, wenn man den Divisor umkehrt und dann multiplicirt.

27. Eben so ists auch bei Brüchen mit ganzen Zahlen verbunden.

28. Der

11) Der Grund, warum das Product hier weniger sei, als man nach 11 erwarten sollte, ist leicht zu finden.

28. Der Divisor ist in dem Dividendus so oft, als die Einheit im Quotienten.

---

29. Gleiche Dinge sind nur im Orte, ähnliche nur in der Größe verschieden.
30. Jede Größe ist sich selbst gleich.
31. Das Ganze ist größer, als jeder einzelne Theil.
32. Das Ganze ist allen seinen Theilen zusammen genommen gleich.
33. Sind 2 oder mehrere Größen einer dritten gleich: so sind sie auch unter sich gleich.
34. a. Sind 2 oder mehrere Größen einander gleich und man addirt zu ihnen gleiche Größen: so sind die Summen gleich.
b. Subtrahirt man aber von gleichen Größen gleiche Größen: so sind auch die Reste gleich.
c. Multiplicirt man gleiche Größen mit gleichen Größen: so werden die Producte gleich, und endlich
d. gleiche Größen mit gleichen Größen dividirt, geben gleiche Quotienten.

---

35. Ein Decimalbruch [12]) ist ein solcher, dessen Nenner nach der decadischen Ordnung fortgeht.
36. Kürze wegen läßt man die (leicht hinzuzudenkenden) Nenner weg und bezeichnet durch (,) oder (.), wo die ganzen Zahlen von den Brüchen getrennt sind.
37. Ist kein Ganzes da: so setzt man in dessen Stelle eine Null. [13])

38. Mit

---

12) 10theiliger Bruch. 13) In der Rechnung mit Logarithmen heißt die ganze Zahl die Characteristik.

38. Mit Decimalbrüchen sind alle 4 Rechnungsarten leichter und anschaulicher.
a) Addiren und Subtrahiren geschieht wie bey ganzen Zahlen.
b) Beim Multipliciren schneidet man im Product so viel Zahlen von der rechten Hand her ab, als in den Factoren Zahlen der Decimalbrüche stehen.
c) Beim Dividiren schneidet man so viel Zahlen im Quotienten ab, als im Dividendus mehr denn im Divisor abgeschnitten waren.
39. Alle (gemeine) Brüche können in Decimalbrüche verwandelt werden, wenn man die Zahl findet, die sich zu 10, 100 u. s. w. eben so verhält, wie der Zähler zum Nenner.
40. a. Hier entsteht also die Regel: zum Zähler eine Null hinzugesetzt und mit dem Nenner dividirt, giebt Zehntheile; zum Zähler 2 Nullen gesetzt und mit dem Nenner dividirt, giebt Hundertheile u. s. w.
b. Will die fortgesetzte Division nicht aufgehen: so höre man da auf, wo man glaubt, daß das übrige nicht mehr in Betracht kommt.
c) Man wird bald bemerken, daß die Zahlen bei fortgesetzter Division wiederkehren, und diese also nie zu Ende gehen kann. Folglich können manche gemeine Brüche nicht genau durch Decimalbrüche ausgedrückt werden.

---

41. a. Sexagesimalbrüche [14]) haben Nenner, die in der Progression 60, 60, u. s. w. fortgehen.

b. So

---

14) 60theilige Brüche.

b. So sind die Stunden eingetheilt. Ein solcher Theil der Stunde (Minute) wieder in 60 Theile (Sekunden) [15] u. s. w.

c. Man schreibt sie $4^{St.}$ (auch 4^{h}) [16] $50' \, 20''$ $30'''$. [17]

42. Man kann auch hier alle 4 Rechnungsarten anwenden, wenn man nur nicht vergißt, daß eine Einheit der höhern Ordnung hier allemal 60 von der unmittelbar darauf folgenden niedern enthält. Weiß man nun mit gewöhnlichen Brüchen umzugehen: so ist alles ohne Schwierigkeit.

43. Die Lehre von den Potenzen stellt die Gründe dieser Rechnungen in ein helleres Licht. [18]

---

44. Die Buchstabenrechnung bedient sich statt der Ziffern allgemeiner Zeichen und zwar der Buchstaben [19], und bezeichnet gemeiniglich die bekannten Größen mit den ersten und die unbekannten mit den letzten des Alphabets.

45. Ein Hauptvortheil in der Buchstabenrechnung entsteht aus dem richtigen Gebrauch obiger Zeichen, 9.

46. Will man darin glücklich seyn: so muß man sich einen deutlichen und richtigen Begriff von entgegen-

15) Secunda scil. minuta. Erstere: minuta prima. 16) 4 Stunden, 4 horae. 17) Dieselbe Eintheilung und Bezeichnung der Cirkelperipherie Geometrie. 98. 18) In der Astronomie und Chronologie werden die Sexagesimalbrüche nothwendig. Auf eben diese Art kann man nun auch Duodecimalbrüche rechnen. 19) Fr. Vieta führte zuerst in der Rechenkunst statt der Zahlen die grossen lateinischen Buchstaben ein. Harriot vertauschte sie mit den kleinen.

gengesetzten Größen machen, wo nämlich das Entgegengesetzte nicht in den Größen selbst, sondern nur in der Bedingung liegt, unter der man dieselben betrachtet; und unter welcher also eine die andere aufhebt.

47. Von 2 entgegengesetzten Größen nennt man die eine [20] positiv (bejahend), die andere negativ (verneinend), und bezeichnet erstere mit +, letztere mit —.

48. Die Addition ist a) bei gleichen Zeichen eben so, wie in der Zahlenarithmetik; b) bei ungleichen Zeichen aus 46 leicht und c) bei Größen von verschiedener Art bloß ein Aneinanderschreiben der Größen.

49. Die Subtraction erfordert nur die Anwendung der kleinen Regel: man kehre das Zeichen der Größe, die subtrahirt werden soll, um und addire.

50. Multipliciren und Dividiren ist durch die Regel: gleiche Zeichen geben +, ungleiche —, leicht zu verrichten.

51. Bedenkt man nun noch, daß eine Größe durch Hinzuthuung (Addition) einer entgegengesetzten vermindert, aber durch Wegnahme (Subtraction) derselben vermehrt wird: so wird diese Rechnung noch leichter und deutlicher.

---

52. a) Ein Ausdruck der Gleichheit heißt eine Gleichung (aequatio). b) Man unterscheidet simple

20) Gleichviel, welche von beiden man will.

ple und zusammengesetzte Gleichungen (aeq. incomplexa et complexa). c) Jede Gleichung hat 2 Theile. Ein Theil (membrum) sind alle Größen auf einer Seite. d) Jede einzelne Größe auf einer Seite heißt ein Glied (terminus).

53. Wenn man eine Aufgabe durch Gleichungen auflösen will: so muß man erst den Zusammenhang der darin vorkommenden Größen aufsuchen und die Bedingung der Aufgabe durch obige Zeichen 9. ausdrücken: dadurch erhält man die erste oder Fundamentalgleichung. Diese muß man dann so lange verändern [21], bis man alle bekannte Größen auf eine, und die unbekannte, die man sucht, auf die andere Seite allein gebracht hat; dann ist die Aufgabe aufgelöst. [22]

---

54. Wenn man eine Zahl (oder Größe) mit sich selbst multiplicirt: so nennt man das Product ihre **Potenz** (oder Dignität) und zwar die 2te, 3te u. s. w., je nachdem man sie mehreremal mit sich multiplicirt hat.

55. Von 2 gleichen Factoren heißt das Product (also die 2te Potenz) auch ein **Quadrat**, von dreien **Cubus**.

56. Die

21) Welches sich besser durch eine Menge wohlgewählter Beispiele, aus dem sich die Regeln dann von selbst ergeben, als aus den Regeln allein lernt.

22) Dis ist ein eigentliches Geschäft der Algebra. Umständlich wird von Gleichungen in der Analysis gehandelt. Hier nur so viel, als zu manchen analytischen Beweisen in der Geometrie hinlänglich ist.

56. Die wievielte **Potenz** deutet man durch eine kleine Nebenziffer an, 2^2, 2^3 u. s. w., welche **Exponent** heißt. Die **Wurzel** (den einfachen Factor) durch r. Allein zeigt dies Zeichen allemal die Quadratwurzel an. Höhere Wurzeln schreibt man $\overset{3}{r}$ $\overset{4}{r}$ u. s. w.

57. Quadrat oder Cubus eines Bruchs ist Quadrat oder Cubus des Zählers, dividirt durch Quadrat oder Cubus des Nenners. Also ist überhaupt die höhere Potenz eines Bruchs die Potenz des Zählers durch dieselbe Potenz des Nenners dividirt.

58. Demnach ist also auch die Wurzel aus einem Bruch die Wurzel aus dem Zähler dividirt mit der Wurzel aus dem Nenner.

59. Also ist die Potenz von einem Bruch wiederum ein Bruch; und die Wurzel aus einem Bruch ebenfalls ein Bruch.

60. Sind daher die Potenzen keine ganze Zahlen: so sind es auch die Wurzeln nicht. [23]

61. Man kann jede Wurzel so ansehen, als bestände sie aus 2 Theilen. [24]

62. Besteht eine Zahl aus 2 Theilen: so enthält ihr Quadrat

a) das Quadrat des ersten Theils,

b) ein

23) Die steigenden Potenzen sind leicht von einer Zahl zu machen, wenn man mit der Wurzel anfängt. Hat man aber schon eine Potenz und soll weiter zu den höhern fortgehen: so muß man die Wurzel zu finden wissen.

24) Radix binomia.

b) ein doppeltes Product aus dem ersten in den zweiten Theil, und

c) das Quadrat des andern Theils.

63. Nennt man also den einen Theil der Wurzel a und den andern b: so drückt man durch
$a + b$ alle mögliche Wurzeln, durch
$(a + b)^2$ alle mögliche Quadrate, und durch
$(a + b)^3$ alle mögliche Cubi aus u. s. w.

64. Das Quadrat von $a + b$ ist $a^2 + 2\,ab + b^2$ (62). Folglich bestehen alle mögliche Quadrate aus a, b, c in 60.

65. Nach diesem Ausdrucke (64) [25] kann man jede Zahl quadriren, indem man sie in 2 andere bequeme Zahlen theilt; welches öfters viel bequemer als die gewöhnliche Multiplication ist, zugleich auch auf die Ausziehungsart der Quadratwurzeln führt.

66. Hieraus ergeben sich nun leicht die Regeln für die Ausziehung einer Quadratwurzel.

67. Ein jeder Cubus von $a + b$ ist $a^3 + 3a^2b + ab^2 + b^3$. Er besteht also

a) aus dem Cubus des ersten Theiles,

b) aus dem dreifachen Product des Quadrats vom ersten Theile in den zweiten,

c) aus dem dreifachen Product des ersten Theiles ins Quadrat des zweiten, und endlich

d) aus dem Cubus des zweiten Theils.

68. Daraus entwickeln sich nun auch von selbst die Regeln zur Ausziehung der Cubikwurzeln. [26] 69. Will

25) Der sich so wie der $(a - b)^2$ durch eine geometrische Figur sehr anschaulich machen läßt.

26) Vergl. Formeln 64. 67. haben den Vortheil, daß man durch sie die vergeßnen Regeln sehr bald wieder herleiten kann.

69. Will man aus einer Zahl, die kein vollkommnes Quadrat oder Cubus ist, die Wurzel ausziehen: so geschieht dis durch Näherung (approximatio); indem man beim Quadratwurzelausziehen immer 2 und beim Cubikwurzelausziehen 3 Nullen anhängt und so lange fortrechnet, als man es der erforderlichen Genauigkeit willen für nöthig findet. [27]

70. Ergiebt sich die Wurzel nicht genau: so heißt sie irrational, als $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{10}$ u. s. w.

71. Bei Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzeln kann man sich der gewöhnlichen kleinen Hülfstafel bedienen, welche nur bis auf die dritte Potenz der Zahlen 1 bis 9 geht, weil in der Zahlenarithmetik selten mehr als Quadrat- und Cubikwurzeln vorkommen.

---

72. Durch die Subtraction findet man das arithmetische und durch die Division das geometrische Verhältniß zweier Zahlen; und bezeichnet sie durch — und :. Vorderglied, Hinterglied.

73. Die Gleichheit zweier Verhältnisse ist eine Proportion und zwar

a) die Gleichheit zweier arithmetischen Verhältnisse eine arithmetische, und

b) die

27) Als Probe der Rechnung dient die Erhebung der gefundenen Wurzel in die gegebene Potenz, wo man, was übriggeblieben, zuzählt.

b) die Gleichheit zweier geometrischen Verhältnisse eine geometrische Proportion. 28)

74. Die 4 Theile in jeder Proportion heißen Glieder (termini), (antecedens, consequens.)

75. Man unterscheidet abgesonderte (proportio discreta) und zusammenhangende (continua) Proportion.

76. a. In einer arithmetischen Proportion ist die Summe der beiden äußern Glieder der Summe der beiden mittlern gleich.

b. Man findet also das vierte Glied, wenn man von der Summe der beiden mittlern das erste abzieht. 13 a.

77. a. In einer zusammenhangenden arithmetischen Proportion ist also (76.) die Summe der beiden äußern Glieder dem mittlern Gliede doppelt genommen gleich.

b. Man findet also das mittlere Glied, wenn man die Summe der beiden äußern halbirt. 29)

78. In der geometrischen Proportion nennt man das das erste und dritte, so wie auch das zweite und vierte, gleichnahmige (gleichliegende, homologe) Glieder. 72.

79. a. In einer geometrischen Proportion ist das Product der beiden äußern Glieder dem Product der beiden mittlern gleich.

b. Mul-

28) Die von Leibnitz eingeführte Art, die Proportionen durch $\dot{-}$: $=$ zu schreiben, ist die natürlichste, folglich die beste, obgleich Manche sie anders schreiben.
Die Alten beschäftigten sich nur mit geometrischen Proportionen, daher ists noch gewöhnlich, da, wo nur Proportion steht, geometrische Proportion zu verstehen.

29) Mit 2 dividirt.

b. Multiplicirt man also die 2 mittlern Glieder mit einander und dividirt das Product durch das erste Glied: so erhält man das vierte. 13. c.

80. Durch Versetzung kann man jedes der 4 Glieder 30) zum vierten machen, also welches man will, finden.

81. a. Weil in jeder zusammenhangenden Proportion die beiden mittlern Glieder gleich sind: so ist (79. b.) das Product des mittlern Gliedes mit sich selbst (d. i. sein Quadrat (55.)) dem Product der beiden äußern Glieder gleich.

b. Man findet also das mittlere Glied, wenn man aus dem Product der beiden äußern die Quadratwurzel zieht.

c. In einer zusammenhangenden Proportion läßt sich daher schon aus 2 gegebenen Gliedern das 3te finden; man mag das mittlere oder eins der beiden äußern suchen.

82. a. Aus obigem Grundsatz (33.) folgt: wenn 2 oder mehrere arithmetische oder geometrische Verhältnisse einem 3ten gleich sind: so sind sie auch unter sich gleich.

b. Und daher müssen auch 2 oder mehrere arithmetische oder geometrische Proportionen, wenn sie einer dritten gleich sind, auch einander selbst gleich seyn.

83. Wenn man mehrere Zahlen (oder Größen) mit einer gleichen Zahl multiplicirt oder dividirt: so sind die Producte und Quotienten in demselben Verhältniß, als die multiplicirten oder dividirten Zahlen.

84. Man

30) Sowohl der arithmetischen als geometrischen Proportion.

84. Man mag daher geometrische Proportionen durch Versetzung der Glieder (80.) oder auch durch Addition, Subtraction, Multiplication, Division, Erhebung zu Potenzen und Ausziehung der Wurzeln verändern, so wird jedesmal eine richtige geometrische Proportion wieder herauskommen. 34. 83.

85. Sind 2 geometrische Proportionen so beschaffen, daß 2 Verhältnisse davon einem dritten gleich sind: so kommt auf dreierlei Art eine dritte Proportion heraus. 31)

86. Man kann auch ganz verschiedene geometrische Proportionen mit einander multipliciren oder dividiren: und man erhält doch wieder geometrische Proportionen daraus.

87. Haben die geometrischen Proportionen einerlei Verhältniß: so erhält man noch eine Proportion, wenn man die gleichnahmigen Glieder addirt oder subtrahirt.

Haben sie aber nicht einerlei Verhältniß: so geht es durch Addition und Subtraction nicht; durch Multiplication und Division aber in allen Fällen. 86.

88. Sind bei geometrischen Proportionen, die in einander multiplicirt werden, 2 nicht gleichnahmige Glieder gleich: so verhält sich das Product des ersten Paar Glieder zum Product des zweiten Paares, wie das dritte Glied der ersten Proportion zum vierten Glied der zweiten Proportion. 32).

89. Ha-

31) Im ersten Fall schließt man ex aequo überhaupt oder simpliciter ex aequo; im zweiten ordinatim ex aequo, im dritten perturbate ex aequo.

32) Dis ist die regula quinque.

89. Haben 3 oder mehrere geometrische Proportionen ein so gemeinschaftliches Glied: so werden die Producte aller ersten Glieder zu den Producten aller zweiten Glieder sich verhalten, wie das dritte Glied der ersten Proportion zum vierten der letzten. 33)

90. a. Wenn mehrere Zahlen (oder Größen) in lauter zusammenhangenden Verhältnissen fortgehen: so machen sie eine **Progression** oder **Reihe**.

b. Gehen sie in arithmetischem Verhältnisse fort: so machen sie eine **arithmetische**; gehen sie aber im geometrischem Verhältniß fort — eine **geometrische Progression**. 34)

c. Jede dieser Zahlen heißt ein Glied der Progression (terminus).

d. Die Progression kann **steigend** (adscendens) oder **fallend** (descendens) seyn.

91. a. Die **Summe** der äußersten und der von den äußersten gleich weit abstehenden Glieder in einer arithmetischen Progression sind einander gleich.

b. Man findet also die Summe einer arithmetischen Progression, wenn man die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der halben Anzahl der Glieder multiplicirt. 35)

 92. Die-

33) Dis die Kettenregel. Nur eine deutliche und vollständige Kenntniß der geometrischen Proportionen allein schützt vor der verwirrenden Last der Regeln in gemeinen Rechenbüchern, wo man wol schwerlich einen Begriff von zusammengesetzten Verhältnissen bekommen mögte, da sie nicht einmal den Grund der regula de tri als das Finden der 4ten Proportionalzahl angeben.

34) So ist also die Folge unserer Zahlen eine arithmetische Progression.

85) Dadurch lassen sich also lange Reihen von Zahlen leicht addiren,

92. Diejenige Zahl (oder Größe), welche anzeigt, wie viel in einer geometrischen Progression das eine Glied in dem nächstfolgenden enthalten sei, heißt der Exponent (Name des Verhältnisses).

93. a. Aus dem ersten und zweiten Gliede oder aus dem ersten Gliede und dem Exponenten kann man also alle folgende Glieder finden. 82. c.

b. So wie man auch aus dem ersten und zweiten Gliede einer arithmetischen Progression oder deren Differenz die folgenden finden kann. 78.

94. In einer geometrischen Progression sind die Producte der äußern und der von diesen gleich weit abstehenden Glieder gleich.

95. Zieht man das vorhergehende Glied von dem nächstfolgenden immer ab: so ist in den Differenzen wieder eine geometrische Progression mit demselben Exponenten. So kann man also die 2te, 3te, 4te u. s. w. Reihe der Unterschiede finden, und allemal eine geometrische Progression bekommen. 36)

Aufgaben.

I. Aus einem Decimalbruch die Quadrat- oder Cubikwurzel auszuziehen. 57.

II. Zu 3 Größen die 4te arithmetische Proportionalgröße zu finden. 77.

III. Zwischen 2 Größen die mittlere arithmetische Proportionalgröße zu finden. 78.

IV. Zu 3 Größen die 4te geometrische Proportionalgröße zu finden. 80. 37)

36) Die Lehren von den Proportionen -- Potenzen ꝛc. lassen sich in der allgemeinen oder Buchstabenrechenkunst besser und vollständiger vortragen. Davon in einer der Fortsetzungen dieses Leitfadens! --

V. Zu 2 Größen die mittlere geometrische Proportionalgröße zu finden. 82.

VI. Die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 1000, oder so weit man will, auf die kürzeste Art zu addiren. 92.

VII. Die Summe aller auf einander folgenden graden oder ungeraden Zahlen, so weit man will, auf eben die Weise zu addiren. 92.

VIII. Eine Wittwe bekommt 800 Rubel geschenkt und soll sich mit ihren beiden Töchtern so darin theilen, daß sie eben so viel als die älteste Tochter und diese 100 Rubel mehr als die jüngste bekomme. Wie viel wird jede bekommen?

IX. Ein Vater hinterläßt 4 Söhne und 3 Töchter und 99000 Rbl. Der erste Sohn soll 1000 Rbl. mehr als der 2te, der 2te 1000 mehr als der 3te, der 4te 3000 mehr als der erste, und jede Tochter soll 5000 mehr als der erste Sohn bekommen. Wieviel bekommt jedes der Kinder?

X. Eine Wittwe mit ihren 3 Töchtern und eine Schwester der Wittwe mit ihren 3 Söhnen sollen sich in das Vermögen des verstorbenen Mannes auf folgende Art theilen. Die jüngste Tochter soll 5000 Rbl.

37) Dis ist die bekannte und nützliche Regel de tri (Regula de tribus numeris.)

Rbl. mehr als die älteste und die 2te 2000 mehr als die älteste, die Mutter aber so viel als die jüngste und älteste Tochter zusammen bekommen. Die Tante soll soviel bekommen, als alle 3 Söhne zusammen und von diesen jeder gleichviel und zwar die Hälfte von dem, was die älteste Tochter bekommt. Das ganze hinterlassene Vermögen war 92000 Rubel.

XI. Eine Schuld von 2500 Rbl. soll in 5 Terminen folgendermaaßen bezahlt werden:

Auf dem 2ten Termin noch einmal so viel als auf dem ersten;

auf dem 3ten Termin anderthalbmal so viel als auf dem 2ten;

auf dem 4ten Termin so viel als auf dem 3ten und noch 150 Rbl.;

auf dem 5ten Termin so viel als auf dem 4ten und noch 400 Rbl.

Wieviel ist auf jedem Termin zu bezahlen?

XII. Jemand hat eine Zahl in Gedanken, wenn er 8 dazu addirt, die Summe mit 6 multiplicirt, vom Product 16 subtrahirt und den Rest mit 2 dividirt: so kommt 34 heraus. Was für eine Zahl hat er in Gedanken?

XIII. Fünf Personen haben jede eine Zahl in Gedanken. Nachdem Jede zu ihrer Zahl 5 addirt, mit 3 multiplicirt, vom Product 15 subtrahirt und den Rest mit 6 dividirt hat, hat die erste Person 1, die andere 2, die 3te 3, die 4te 4, die 5te 5. Welche

che waren die Zahlen, die jede Person in Gedanken genommen hatte?

XIV. Was ist das für eine Zahl, die, wenn man 9 dazu addirt, und dann mit 5 dividirt, 13 giebt?

XV. Es werden 3 Zahlen gesucht, die so beschaffen sind, daß, wenn man die erste und 2te addirt, 13, durch die Addition der 2ten und 3ten aber 15 herauskommt; addirt man die 3te und erste: so erhält man 14.

XVI. Man sucht 6 Zahlen. Die 5 ersten addirt geben 11111; die 5 letzten addirt geben 111110; die 3te, 4te, 5te, 6ste und 1ste addirt geben 111101. Die 4te, 5te, 6ste, 1ste und 2te geben 111011; die 5te, 6ste, 1ste, 2te und 3te geben 110111; die 1ste bis 4te und die 6ste zusammen addirt, geben 101111.

XVII. Was sind das für Zahlen, deren Unterschied 20 und deren Summe 252 ist?

XVIII. Man soll 2 Größen finden, deren Summe = s und deren Unterschied = d ist.

Aus diesen wenigen Aufgaben, die nur ein Versuch seyn sollten, wie man leichte Aufgaben durch Gleichungen auflösen kann, lassen sich schon einige von den Regeln herleiten, die man am öftersten bei dergleichen Aufgaben anwendet, von denen sich aber nicht wohl lehren läßt, wie sie bei vorkommenden Fällen anzuwenden sind. Die letzte Aufgabe giebt eine allgemeine Regel.

Ge-

Geometrie.

1. Die Gegenstände der Geometrie sind ausgedehnte Größen.
2. Die Größe körperlicher Dinge beurtheilen wir nach dem Raum, den sie einnehmen. Diesen nennt man auch die Ausdehnung eines Körpers. Beide also gleich.
3. a. In der Geometrie kommt nur die Größe oder Ausdehnung der Körper und keine andere Eigenschaft derselben, die den Raum ausfüllen, in Betracht.

   b. Deswegen stellt man sich diese Größe (Raum, Ausdehnung) als ein Continuum (stetige Größe), d. h. als eine solche vor, daß, wo ein Theil derselben aufhört, auch sogleich der andere schon anfängt.
4. Man sagt auch, ein (geometrischer) Körper sei eine Ausdehnung in die Länge, Breite und Höhe oder Tiefe, weil man nach 3. b. die Theile eines solchen Körpers ohne Zwischenräume in einer solchen zusammenhangenden Verbindung sich denkt, daß der eine in Rücksicht des andern oben, unten, oder neben demselben liegt.
5. Kein Körper geht ohne Ende fort, sondern jeder wird von allen Seiten in gewisse Grenzen eingeschlossen, die man seine Oberfläche nennt.
6. Diese Oberfläche oder auch einzelne Theile desselben kann man sich allein vorstellen; und sie sind (natürlich

türlich) auch nicht ohne Grenzen, welche man geometrische Linien nennt. Die Grenzen der Linien sind Puncte.

7. Hierauf 4 angewandt: so haben
   a) Flächen nur Länge und Breite, aber keine Höhe oder Dicke.
   b) Linien nur Länge, aber keine Breite.
   c) Puncte weder Länge, noch Breite, noch Dicke.
8. Es ist also nothwendig, einen mathematischen Punct als untheilbar zu bestimmen.
9. Da man in der Geometrie (3.) nur auf die Ausdehnung, nicht auf die übrigen Eigenschaften der Körper Rücksicht nimmt: so ists hier einerlei, ob man sich den Körper selbst oder seinen Raum, den er einnimmt, vorstellt. In dieser Hinsicht nennt man, obgleich uneigentlich, den Raum eines Körpers selbst eine ausgedehnte Größe oder einen geometrischen Körper.
10. Was eine grade Linie sei, ist bekannt. [1] In der krummen ist kein Theil grade. [2]
11. Durch 2 Puncte wird die Lage (Positio) einer graden Linie und durch die 2 Endpuncte ihre Länge (Magnitudo) bestimmt.
12. Zwischen 2 Puncten ist allemal eine grade Linie, aber auch nur eine einzige möglich [3] und diese, welche

---

1) Alle vorhandene Erklärungen einer graden Linie findet man verständlich, wenn man schon weiß, was eine grade Linie ist. Sonst sind sie für jeden das, was eine Erklärung der Farben für einen Blinden ist.

2) Man spricht auch von vermischten und gebrochenen Linien, die man aber nicht als eine, sondern als verschiedene betrachtet.

3) Wo nicht zu ziehen, doch denkbar.

welche zugleich die kürzeste unter allen möglichen Linien zwischen diesen 2 Puncten ist, nennt man die (wahre) Entfernung beider Puncte. [4]

13. Wenn die Oberfläche eines (geometrischen) Körpers so beschaffen ist, daß jede beliebig darauf gezogene Linie ganz [5] in dieser Oberfläche liegt: so heißt sie eine ebene Fläche, oder Ebene (superficies plana, planum).

Wo das nun nicht der Fall ist, da ist die Fläche krumm.

14. Man merke hier ein vor allemal, daß in der Geometrie zum Grunde gesetzt wird, daß alle Linien, Puncte, Figuren, womit sie sich beschäftigt, in einer Ebene liegen.

Sonach zerfällt die Geometrie sehr natürlich in zwei Haupttheile: ebene Geometrie (Geometria plana) und körperliche (Stereometrie).

15. Liegen Linien in einer Ebene in allen ihren Puncten in gleicher Entfernung von einander, so daß sie also, auch bei noch so weit fortgesetzter Verlängerung, nie einander näher kommen würden: so nennt man sie Parallellinien.

16. Nähern oder neigen sie sich aber gegen einander: so werden sie auf einer Seite immer weiter auseinander gehen (lineae divergentes), auf der andern aber (bei gehöriger Verlängerung) zusammenkommen (convergentes).

17. Nur

4) Krumme sind unzählich viele möglich. Welche sollte also die wahre Entfernung geben, wenn es nicht die grade, als die kürzeste (mithin einzige in ihrer Art) von allen wäre?

5) d. h. in allen ihren Theilen.

17. Nur in diesem einzigen Punct (der Vereinigung) schneiden sich grade Linien (bei gehöriger Verlängerung), aber dann auch nirgends wieder.

18. Wo sich grade Linien vereinigen oder schneiden, da entstehen Winkel. Also ist ein (ebener) Winkel [6] (angulus) die Neigung zweier Linien gegen einander in einem Punct. [7] Ihr Durchschnitt heißt Spitze, Scheitel (vertex) des Winkels, die beiden Linien seine Schenkel (crura). [8]

19. Vereinigen sich auf einer Seite einer graden Linie in einem Punct eine oder mehrere grade Linien mit derselben: so entstehen Nebenwinkel (auguli contigui, deinceps positi). [9]

20. Steht eine Linie auf der andern so, daß beide Nebenwinkel (deinceps positi) einander gleich sind: so heißen sie rechte (grade) Winkel (anguli recti).

Sind beide Nebenwinkel ungleich: so heißt der kleinere spitz (acutus), der größere stumpf (obtusus); beide schief (obliquus).

21. Ein Nebenwinkel bestimmt also den andern.

22. Alle rechte Winkel sind gleich.

23. Alle Nebenwinkel auf einer Seite zusammen sind 2 rechten gleich = 2 R.

24. 2 Linien, die einen rechten Winkel bilden, stehen senkrecht, lothrecht, perpendiculär auf

6) Gradlinigter, krummlinigter Winkel. 7) Daraus erhellet bald, was ein unebener Winkel sei. Länge der Schenkel also nicht, sondern Entfernung derselben von einander bestimmt einen Winkel. 8) Man bezeichnet Winkel durch einen oder drei Buchstaben. 9) Sind von einander unterschieden.

auf einander (linea perpendicularis, normalis). 10)

25. Von allen Winkeln um den Punct, wo sich 2 oder mehrere grade Linien schneiden, sind immer 2 gegen einander über liegende sich gleich und heißen Verticalwinkel (anguli verticales). 23.
Ein Verticalwinkel bestimmt also auch den andern. 11)

26. Alle Winkel um einen Punct sind zusammen 4 rechten gleich = 4 R. 23.

27. Wechselwinkel haben einen Schenkel gemeinschaftlich, liegen aber mit ihren Öffnungen nach entgegengesetzten Seiten.

28. Gleiche Größen nennt man (nach obigen Begriffen) diejenigen, welche einen gleichen Raum einnehmen. Für diese ist in der Geometrie kein Unterschied, und man kann allemal eine für die andere setzen. 12)

---

29. Zwei grade Linien begränzen noch keinen Raum. Zur Bildung einer Figur gehören also wenigstens 3 grade Linien. Gradlinigte Figur (rectilinea). Von 3 graden Linien Dreieck (triangulum, trigo-

10) Hier sieht man schon, was weiterhin noch klärer werden wird, daß in einem Punct einer Linie nur 1 Perpendikel möglich ist.

11) Thales von Milet (600 J. v. Chr.) soll zuerst die Gleichheit der Verticalwinkel gefunden haben.

12) Dis soll der, der Geometrie eigene und so gewöhnliche Ausdruck decken bedeuten, der aber nur bei gleichen Figuren, die auch ähnlich sind, bei Linien und Winkeln aber allemal anzuwenden ist.

gonum), von 4 graden Linien Viereck, (tetragonum) von mehreren Vieleck (polygonum). 13)

30. Bei Dreiecken
a) auf die Seiten gesehen, giebt es
gleichseitige (triangulum aequilaterum, isopleuron),
gleichschenkelichte (triangulum aequicrurum, isosceles) und
ungleichseitige (scalenum).
b) In Rücksicht der Winkel aber
rechtwinkelichte (triangulum rectangulum, orthogonium),
stumpfwinklichte (obtusangulum, amblygonium),
spitzwinklichte (acutangulum, oxygonium).

31. Drei grade Linien, wovon je zwei zusammen länger als die dritte sind, geben ein △.

32. Drei von den 6 Stücken eines Dreiecks, wobei aber wenigstens eine Seite seyn muß, bestimmen ein △.
Untersucht man alle diese Fälle: so findet man die allgemeinen Bestimmungsgründe für △△, woraus dann die 3 wichtigen Sätze 33. 34. 40. für die Gleichheit der △△ von selbst fließen.

33. Wenn in 2 oder mehrern △△ 2 Seiten und der davon eingeschlossene 14) Winkel gleich sind: so sind die ganzen △△ einander gleich.

34. Sind

13) Jede Figur (ausgenommen, die in eine krumme Linie eingeschlossen sind) hat so viel Seiten als Winkel.

14) Nur mit dem eingeschlossenen ist der Satz allgemein wahr. 32.

34. Sind in 2 oder mehreren △△ 2 Winkel und die zwischen liegende Seite gleich: so sind die ganzen △△ einander gleich.

35. In einem gleichschenkelichten △ sind die Winkel an der Grundlinie 15) (anguli ad basin) gleich 16) und umgekehrt.

36. Da man nun ein gleichseitiges △ in allen Lagen als ein gleichschenkelichtes ansehen kann: so sind alle 3 Winkel einander gleich und umgekehrt.

37. Ein gleichseitiges △ wird durch eine Seite und ein gleichschenkelichtes durch die Grundlinie und einen Schenkel völlig bestimmt.

38. Wenn in einem △ 2 Winkel gleich sind: so sind auch ihre Gegenseiten einander gleich und umgekehrt.

39. Zwei an die Endpuncte einer graden Linie gesetzte grade Linien können (bei möglicher Erreichung) nur in einem Punct zusammentreffen.

40. Wenn in 2 oder mehreren △△ alle 3 Seiten einander gleich sind: so sind die ganzen △△ sich gleich. 17)

41. Nach dem Bisherigen sind also Winkel, welche gleichen Seiten entgegenliegen und Seiten, die gleichen Winkeln gegenüberliegen, auch einander gleich.

A u f g a b e n. 18)

I. Aus 3 gegebenen graden Linien ein △ zu machen. 31. 39.

II. Ein

15) So nennt man die ungleiche Seite im gleichschenkelichten △.
16) Diese Gleichheit soll auch Thales zuerst entdeckt haben.
17) Diese 3 Sätze 33. 34. 40. sind, so wie die weiter hin von der Aehnlichkeit der Dreiecke folgenden, sehr wichtig.
18) Bei jeder Aufgabe ist zweierlei nothwendig, nämlich Auflösung und Beweis von der Richtigkeit der Auflösung.

II. Ein △, einem gegebenen gleich, zu machen. 39. 40.
III. Einen Winkel einem andern gleich zu machen. 40.
IV. Aus 2 Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel ein △ zu zeichnen. 33.
V. Aus einer graden Linie und 2 der anliegenden Winkeln ein △. 34.
VI. Ein gleischenkelichtes △ zu zeichnen. 37.
VII. Ein gleichseitiges △ zu verzeichnen. 37.
VIII. Aus 2 graden Linien und einem Winkel, den diese Linien nicht einschließen, ein △. 39.
IX. Jeder Winkel und jede grade Linie läßt sich in 2 gleiche Theile theilen. 19) Wie macht man es? 20)
X. a. Mitten auf einer graden Linie, b. in jedem Punct derselben, c. auch am Ende (wenn man nämlich die Linie verlängern kann) ein Perpendikel aufzusetzen.
XI. Von einem Punct außer 21) der Linie ein Perpendikel auf die Linie zu ziehen.

---

42. Aus 38. IX. bis XI. läßt sich nun folgendes vestsetzen.

a) Eine von der Mitte der Grundlinie eines gleichschenkelichten Dreiecks durch die entgegengesetzte Spitze gehende grade Linie steht auf derselben senkrecht und theilt diesen Winkel und das ganze △ in 2 gleiche Theile.

b) Ein

19) Versteht sich hier, g e o m e t r i s c h.
20) Fortgesetzte Theilung giebt also immer noch einmal so viel Theile, als man schon hat, oder die nte Arbeit giebt 2^n Theile.
21) d. h. weder in derselben, noch in ihrer Verlängerung.

b) Ein Perpendikel auf der Mitte der Grundlinie eines gleichschenkelichten Dreiecks geht durch die Spitze des gegenüberliegenden Winkels und theilt ihn und das △ in 2 gleiche Theile.

c) Eine grade Linie, die den Winkel, welcher der Grundlinie eines gleichschenkelichten Dreiecks gegenüberliegt, in 2 gleiche Theile theilt, theilt auch das ganze △ in 2 gleiche Theile und steht perpendikulär auf der Grundlinie.

43. In jedem △ sind 2 Winkel zusammen kleiner, als 2 rechte. IX. 25. 33. 23.

44. Verlängert man in einem △ eine Seite: so ist der äußere Winkel größer, als jeder der beiden innern ihm entgegengesetzten. [22]) 43.

45. In jedem △ liegt die größere Seite dem größern Winkel und die kleinere dem kleinern gegenüber. 44.

46. In jedem △ sind allemal 2 Seiten zusammen größer, als die 3te. 45.

47. Von einem Punct nach einer Linie ist ein Perpendikel die kürzeste Linie oder die Entfernung. XI. 44. 45.

48. a. Sowohl von einem Punct außer der Linie nach derselben hin, als auch von einem Punct in der Linie ist nur 1 Perpendikel möglich. 20. XI. X.

b. Von diesem Punct außer der Linie sind immer 2 gleich große Linien nach der Linie zu ziehen, wovon aber allemal die eine auf der einen, die andere auf der andern Seite des Perpendikels liegt.

c. Je weiter vom Perpendikel, desto größer. 49. a.

22) d. h. von denen keiner sein Nebenwinkel ist.

49. a. Also ist ein Perpendikel zwischen Parallellinien ihre Entfernung von einander.

b. Und da Parallellinien in allen ihren Theilen gleiche Entfernung von einander haben: (15.) so sind alle Perpendikel zwischen denselben Parallellinien gleich.

50. Wenn 2 Parallellinien von einer graden Linie durchschnitten werden: so sind

a) die Wechselwinkel (anguli alterni);

b) ein äußerer Winkel (angulus externus) dem innern (internus) entgegengesetzten gleich, und

c) die beiden innern entgegengesetzten (interni oppositi) 2 rechten gleich. a. 47. 20. 33. Ar. 33. b. 25. Ar. 33. c. 23. Ar. 33. [23])

51. Perpendikel zwischen Parallellinien halten also gleiche Stücke von den Parallellinien zwischen sich. 50. Ar. 34.

52. Und auch Parallelen zwischen Parallelen sind gleich. 50, a. 34.

53. Durch einen Punct geht mit einer Linie nur eine einzige parallel.

54. Zwei grade Linien, die mit einer dritten parallel sind, müssen auch unter sich parallel seyn. 50. Und eine grade Linie, die mehrere Parallelen schneidet, machet bei allen solche Winkel, als in 50. vesgesetzt sind. 50.

XII.

23) Die Natur der Parallellinien läßt sich sehr deutlich und überzeugend entwickeln. Allein diese aufgestellten Sätze a, b, c müssen vorbereitet werden und lassen sich nicht als Axiome, wie Euclid 1. B. 11. Axiom, aufstellen.

XII. Durch einen Punct eine Linie mit einer andern parallel zu ziehen. 50.

---

55. In jedem gradlinigten △ sind alle 3 Winkel zusammen 2 rechten gleich = 2 R. 50. 23. Anm. 28.
56. Ist also in einem △ ein Winkel den andern beiden zusammen gleich: so muß er ein rechter seyn. 55.

XIII. Aus einer graden Linie und 2 Winkeln, von denen aber nur einer an der gegebenen Seite liegt, ein △ zu machen.

---

57. In einem rechtwinkelichten gleichschenkelichten △ ist jeder Winkel außer dem rechten die Hälfte eines rechten. 55.
58. Da nun ein gleichseitiges △ als ein gleichschenkelichtes kann angesehen werden (36): so ist jeder der 3 Winkel $\frac{1}{3}$ von 2 rechten Winkeln, oder = $\frac{2}{3}$ (1 R.) Nr 20.
59. Also ist in einem ungleichseitigen △ bei 2 bekannten Winkeln auch der 3te bekannt.
Und im gleichschenkelichten △ sind bei einem bekannten Winkel auch die andern beiden bekannt. 55.
60. Der äußere Winkel an einem △ (44.) ist den beiden innern entgegengesetzten gleich. 55. 50.
61. a. Ist also der äußere Winkel bekannt: so sind auch die 2 innern entgegengesetzten, mithin auch der 3te, als Nebenwinkel vom äußern bekannt.
b. Beim gleichschenkelichten △ ist also der äußere Winkel, wenn ihm die Winkel an der Grundlinie ent-

entgegenliegen, noch einmal so groß, als einer von diesen — oder der Winkel an der Grundlinie ist dann die Hälfte vom äußern. 55.
62. Ein Winkel zwischen 2 Parallellinien ist die Summe der beiden spitzen Winkel, die seine Schenkel mit den Parallellinien machen. 50.[24]

XIV. Am Ende einer graden Linie ein Perpendikel aufzurichten, ohne die Linie zu verlängern.[25] VI. VII. 54.

---

63. a. Sind in einem Viereck (29) die entgegengesetzten Seiten parallel: so heißt es Parallelogramm.
b. Dergleichen sind das Quadrat, Oblongum[26], Rhombus und Rhomboides.
c. Sind nur 2 Seiten parallel: so heißt es Trapezium, und wenn keine Seite der andern parallel ist Trapezoides.
d. Eine grade Linie zwischen entgegengesetzten Winkeln nennt man eine Diagonale.
64. Von jedem Parallelogramm läßt sich folgendes behaupten:
a) Es wird durch die Diagonale in 2 gleiche Theile (△△) getheilt; 52.
b) Nicht nur die Gegenseiten, sondern auch die Gegenwinkel sind einander gleich, a;

C c) Zwei

---

24) Da der rechte Winkel einzig in seiner Art (wie die grade Linie) ist: so konnte man nichts schicklicheres zur Vergleichung aller Winkel unter einander wählen.
25) Wie bei XI.
26) Auch Rectangel genannt. Eigentlich heißt Rectangel eine vierseitige Figur mit rechten Winkeln. 73.

c) Zwei aneinanderliegende Seiten sind größer, als die Diagonale. 46.

65. Hieraus lassen sich nun schon die Stücke vestsezzen, wodurch ein Viereck völlig bestimmt wird.

a) Ein Quadrat wird durch 1 grade Linie,

b) ein Oblongum durch 2 grade Linien,

c) ein Rhombus durch 1 grade Linie und 1 Winkel,

d) ein Rhomboides durch 2 grade Linien und 1 Winkel,

e) und jedes andere Viereck

α) durch 2 Seiten und die 3 anliegenden Winkel,

β) durch 3 Seiten und die 2 eingeschlossenen Winkel,

γ) durch alle 4 Seiten und 1 Winkel,

δ) durch alle 4 Seiten und die Diagonale.

66. Wenn also in 2 oder mehrern Vierecken diese Stücke gleich sind: so müssen auch die ganzen Vierecke sich gleich seyn. 27)

67. In gleichen Quadraten ist also die Seite des einen der Seite des andern gleich.

Und wenn gleiche Seiten gleiche Quadrate geben: so müssen auch ungleiche Seiten ungleiche Quadrate, d. h. eine größere Seite ein größeres und eine kleinere Seite ein kleineres Quadrat geben.

68. Nimmt man in einem Parallelogramm eine Seite als Grundlinie an: so heißt die Entfernung derselben von

27) Da man jedes Viereck durch ein Diagonale in 2 gleiche Dreiecke theilen kann: so lassen sich hier auch 33. 34. 40. anwenden. Bei e) muß man auf gleichliegende (homologe) Seiten und Winkel Rücksicht nehmen.

von der gegenüberliegenden Seite die Höhe des Parallelogramms.

b. Und wenn man im △ eine Seite für die Grundlinie annimt: so ist die Höhe des Dreiecks die Entfernung dieser Grundlinie von der Spitze des gegenüberliegenden Winkels.

69. a. Folglich ist im rechtwinkelichten Parallelogramm allemal eine Seite mit der anliegenden die Grundlinie und Höhe.

b. Und wenn im rechtwinkelichten △ ein Cathete die Grundlinie ist: so ist der andere die Höhe.

70. In schiefwinkelichten Parallelogrammen und △△ zeigen Perpendikel von den Spitzen auf die Grundlinie, oder die Entfernungen der Parallelen, zwischen denen sie liegen, ihre Höhe an. 47. 48. 53.

71. Im Parallelogramm liegen an jeder Seite 2 Winkel, die zusammen 2 rechten gleich sind. 50.

72. Ist also im Parallelogramm ein Winkel ein rechter: so sind alle rechte, ist einer schief: so sind sie alle schief.

73. Also hat jedes Parallel entweder lauter rechte oder lauter schiefe Winkel.

XV. Aus einer gegebenen Linie ein Quadrat zu machen. XIV. X.

XVI. Aus 2 Seiten ein Oblongum. XV.

XVII. Aus einer Seite und einem Winkel einen Rhombus. III.

XVIII. Aus 2 Seiten und einem Winkel ein Rhomboides. XVII.

XIX. Von 2 Seiten und den anliegenden 3 Winkeln ein Viereck.

XX. Von 3 Seiten und 2 davon eingeschlossenen Winkeln ein Viereck.

XXI. Von 4 gegebenen Seiten und einem Winkel ein Viereck.

XXII. Von 4 gegebenen Seiten, einem Winkel und einer Diagonale ein Viereck.

XXIII. Ein Viereck dem andern gleich zu machen.

---

74. Parallelogrammen und △△, die gleiche Grundlinie und Höhe haben, oder mit gleichen Grundlinien zwischen einerlei Parallellinien liegen, sind gleich. 40. 34.

75. Es ist also jedes △ die Hälfte von einem Parallelogramm, das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat. 74.

XXIV. Ein △ in 2, 4, 8, 16 u. s. w. gleiche Theile zu theilen. XI. 74.

XXV. Aus jedem △ ein Parallelogramm zu machen, dessen Hälfte das △ ist. 75.

---

76. Die Diagonalen eines Parallelogramms halbiren einander und theilen dasselbe in 4 △△, wovon jede 2 entgegengesetzte gleich sind. 63. 34.

77. Im rechtwinkelichten Parallelogramm sind die beiden Diagonalen gleich und theilen sich in 4 gleiche Theile. 76. 33. Ar. 34, b. a.

78. Das

78. Das Quadrat theilen die Diagonalen in 4 gleiche △△ und schneiden sich unter rechten Winkeln. 77. 40.

79. Wenn man die Diagonale eines Perallelogramms in 2 gleiche Theile theilt,[28] und durch den Theilungspunct eine (beliebige) grade Linie von einer Parallelseite zur andern zieht: so sind von den daher entstandenen Figuren immer 2 gegenüberliegende gleich. 64, a. 34.

80. Es läßt sich also jedes Parallelogramm durch den Mittelpunct seiner Diagonale in so viel gleiche Trapezia theilen, als durch diesen Punct grade Linien möglich sind.

XXVI. Aus einem Punct, der innerhalb oder ausserhalb oder in einer Seite des Parallelogramms liegt, dasselbe in 2 gleiche Theile zu theilen.

---

81. Die 4 Winkel in einem Viereck sind zusammen 4 rechten Winkeln gleich. 64, a. 55.

82. In jedem rechtwinkelichten △ ist das Quadrat der Hypotenuse[29] den Quadraten der beiden Catheten[30] zusammengenommen gleich.[31]

XXVII.

---

28) Nach 76.

29) Hypotenusa von ὑποτεινουσα i. e. linea angulum rectum subtendens.

30) Catheti von καθετος perpendicularis.

31) Dis ist der so nützliche pythagorische Lehrsatz, welcher sich auf vielerlei Weise sowohl hier, wo er zum erstenmal erscheint, als auch weiterhin, demonstriren läßt. Die

Be-

XXVII. Ein gegebenes Quadrat verdoppeln, d. i. in eins zu verwandeln, was noch einmal so groß ist.

XXVIII. Ein Quadrat in 2 gleiche Quadrate zu theilen.

XXIX. Mehrere gleiche oder ungleiche Quadrate in eins zu verwandeln, das allen zusammen an Größe gleich sei.

XXX. Ein Quadrat zu machen, das dem Unterschiede zweier oder mehrerer Quadrate gleich sei.

---

83. Vom Quadrat der Hypotenuse das Quadrat eines Catheten abgezogen, läßt das Quadrat des andern Catheten übrig.

84. [32]) Theilt man eine grade Linie in einem beliebigen Punct: so ist das Quadrat der ganzen Linie den Quadraten beider Abschnitte, nebst dem zweifachen Rectangel [33]) aus beiden Abschnitten gleich. [34])

85. Theilt man eine grade Linie in einem beliebigen Punct: so sind die Quadrate der ganzen Linie und eines der Abschnitte dem zweifachen Rectangel aus der ganzen Linie und dem erwähnten Abschnitte, nebst dem Quadrate des andern Abschnittes gleich. 84.

86. In

Beweise werden noch mannichfaltiger, wenn man (bei eigner Uebung) die Quadrate in allen möglichen Lagen zeichnet und in jeder Stellung derselben den Beweis zu führen sucht.

32) Nicht bloß beim rechtwinkelichten (82.), sondern in allen Dreiecken ist unter den Quadraten der Seiten ein gewisses beständiges Verhältniß, das man hier kennen lernen muß, um Formeln der Trigonometrie für Auflösung der Dreiecke zu verstehen.

33) Anmerk. 26.

34) Hierdurch macht man sich die Formel fürs Quadrat einer zweitheiligen Wurzel sehr deutlich. Ar. 19te Anm.

86. In jedem stumpfwinkelichten △ ist das Quadrat der größten Seite (Gegenseite vom stumpfen Winkel) größer als die Quadrate der beiden kleinern (am stumpfen Winkel anliegenden) Seiten und zwar um das zweifache Rectangel von einer der kleinern Seiten und ihrer Verlängerung bis zum Perpendikel von ihrem Gegenwinkel. 84.

87. In jedem spitzwinkelichten △ ist das Quadrat einer Seite kleiner, als die beiden Quadrate der andern beiden Seiten, und zwar um das zweifache Rectangel von einer dieser beiden Seiten und ihrem Abschnitt vom Perpendikel vom Gegenwinkel auf dieselbe. 85.

88. Wenn man in einem Parallelogramm die Diagonale zieht und in selbiger einen beliebigen Punct annimmt, durch welchen man mit den Seiten des Parallelogramms Parallellinien zieht: so sind von den daher entstehenden Parallelogrammen die 2, durch welche die Diagonale nicht geht, einander gleich.

XXXI. Ein schiefwinkelichtes Parallelogramm in ein rechtwinkelichtes zu verwandeln. [35])

XXXII. Ein Quadrat in ein Oblongum, und umgekehrt. 64, a. 88.

XXXIII. Ein △ in ein Parallelogramm. 75. 88.

---

89. Jede gradlinigte Figur läßt sich durch Diagonalen in △△ und diese in Parallelogrammen u. s. w. verwandeln. [36])

90. Eine

35) Daß beide nämlich gleich sind, d. h. einen gleichen Raum einnehmen. 28. Anm.

36) Und da sich die Cirkelfläche in ein Dreieck verwandeln läßt (wie weiter unten wird bewiesen werden): so sieht man

90. Eine jede gradlinigte Figur läßt sich in ein ih gleiches Quadrat verwandeln. [37]

---

91. Diejenige Figur, welche von einer krummen Linie so begrenzt ist, daß die Entfernungen von ihr nach einem innerhalb der Figur liegenden Puncte alle einander gleich sind, heißt ein Cirkel.

92. Dieser Punct innerhalb der Figur heißt der Mittelpunct (centrum) und die krumme Linie der Umkreis, Kreislinie (Peripheria). [38] Die gleichen Linien von jedem Punctder Peripherie nach dem Mittelpunct Halbmesser (Radii). Eine grade Linie von einem Punct der Peripherie zum andern eine Sehne (Chorda) und wenn diese durch den Mittelpunct geht, Durchmesser (Diameter). Ein Theil der Peripherie heißt ein Bogen (arcus circuli).

93. Wenn der Schnitt eines Cirkels eine Sehne ist: so entsteht ein Abschnitt (Segmentum). [39] Schneidet man aber von der Peripherie in Radien nach dem Mittelpunct: so bekommt man einen Ausschnitt (Sector).

94. Jede Sehne gehört also zu 2 Bogen. [40]

95. Durch den Radius oder Diameter ist jeder Cirkel bestimmt.

96. Alle

---

man die Möglichkeit, jede gegebene Figur in eine andere zu verwandeln.

37) Hieraus die Möglichkeit der Quadratur des Cirkels.

38) Gradlinigter Figuren Umfang Perimeter.

39) Wo sich im größern Abschnitt der Mittelpunct befindet.

40) Dieser Satz wird bei den Sinussen in der Trigonometrie wieder angewandt.

96. Alle Radii, folglich auch alle Diameter eines Cirkels sind gleich. (91.) Der Radius ist $= \frac{1}{2}$ Diameter und also der Diameter $= 2$ Radien, deshalb letzterer auch Semidiameter genannt wird. [41]

97. Also sind auch Cirkel von gleichen Durchmessern oder Radien gleich; und ungleiche Radien oder Diameter geben auch ungleiche Cirkel.

98. Eine grade Linie, die den Cirkel berührt, d. h. so durch die Peripherie (oder vielmehr nur durch einen Punct derselben) geht, daß kein Theil von ihr innerhalb der Kreisfläche fällt, heißt eine Tangente; so wie jede grade Linie, die den Kreis schneidet, eine Secante genannt wird.

99. Es können auch Cirkel einander berühren. [42]

100. Concentrische Cirkel haben einen (gemeinschaftlichen) excentrische verschiedene Mittelpuncte.

101. Die Peripherie des Cirkels theilt man in 360 gleiche Theile [43], welche Grade (°) heißen; einen

---

41) Davon überzeugt man sich auch noch durch die Entstehung eines Cirkels. Dasselbe Verfahren ist bei der Zeichnung eines Cirkels (circulus) vermittelst des Cirkels (circinus.)

42) Zwei grade Linien können sich nie berühren, wohl aber 2 krumme, oder eine grade und eine krumme. Anm. 56.

43) Die soll man gewählt haben, weil sie sich durch alle Zahlen von 1 bis 10 (7 ausgenommen), ohne Rest theilen läßt. In Frankreich theilt man jetzt die Peripherie des Cirkels in 400 gleiche Theile, also den Quadranten in 100 Grade, einen Grad in 100 Minuten, eine Minute in 100 Secunden, eine Secunde in 100 Terzien. Der Genauigkeit wegen in den Rechnungen ist es, da die trigonometrischen Tafeln für beide Eintheilungen hierin gleich

nen Grad in 60 gleiche Minuten (′) und eine Minute in 60 gleiche Secunden (″), und eine Secunde in 60 gleiche Tertien (‴). So ist also 20° 14′ 30″ 15‴ leicht zu verstehen.

102. Nach den Bögen der Peripherie lassen sich die Winkel genau bestimmen und von jeher sind jene als Maaß von diesen eingeführt. Man denkt sich nämlich die Spitze eines Winkels als Mittelpunct eines Cirkels und den Bogen zwischen seinen Schenkeln nach jener Theilung (101) als Maaß.

103. Da sich nun alle Winkel nach dem rechten bestimmen lassen (Anm. 24.): so legt man auch hier den rechten Winkel oder die 90° des Quadranten zum Grunde.

104. Die genaue Bestimmung eines Winkels hängt also von einem Cirkel ab, dessen Diameter von hinlänglicher [44] Größe ist.

105. Und da hier keine gewisse bestimmte Größe des Diameters oder Radius vorausgesetzt wird: so müssen gleichnahmige (oder ähnliche) Bogen auch gleich viel Theile oder Grade, Minuten u. s. w. haben.

106. Gleiche Winkel haben also eine gleiche Anzahl Grade, Minuten u. s. w., oder gleiches Maaß oder gleiche Bögen. [45] 105.

107. Cir=

gleich sind, nicht geschehen, sondern der Bequemlichkeit und Leichtigkeit wegen. In der Trigonometrie läßt sich mehr und verständlicher davon reden.

44) In der Trigonometrie hat man ihn hinlänglich groß angenommen, um darnach alle Winkel aufs genauste bestimmen zu können.

45) Gleich in Rücksicht auf die Eintheilung derselben, sonst ähn=

107. Cirkel, die sich schneiden oder berühren, können keinen gemeinschaftlichen Mittelpunct haben.

108. In jedem Cirkel sind die Sehnen gleicher Bogen gleich, und umgekehrt. 33. 40.

109. Ein Perpendikel mitten auf einer Sehne theilt, fortgesetzt, auch die Bögen der Sehne und die ganze Cirkelfläche in 2 gleiche Theile und geht durchs Centrum. 108. 33. Ar. 34, a.

110. Je näher eine Sehne am Mittelpunct liegt, desto größer ist sie, je weiter davon, desto kleiner. 109. 67. 83.

111. Also sind Sehnen, die vom Mittelpunct gleich weit abstehen, auch gleich. 109. 67. 83.

112. Nach 108. theilt also der Diameter sowohl die Peripherie als die ganze Cirkelfläche in 2 gleiche Theile. [46]

113. Ein Cirkel ist in eine gradlinigte Figur (oder die gradlinigte Figur um den Cirkel) beschrieben, wenn jede Seite der gradlinigten Figur und die Peripherie des Cirkels einander berühren.

114. Eine gradlinigte Figur heißt im Cirkel (oder der Cirkel um die gradlinigte Figur) beschrieben, wenn jede Ecke (oder Winkel) derselben und die Peripherie des Cirkels einander berühren.

115. Eine gradlinigte Figur ist in eine andere oder um eine andere beschrieben, wenn die Winkel der einen Figur die Seiten der andern berühren.

116. Da

ähnlich. Der Ausdruck kann erst weiterhin (bei Aehnlichkeit 213. 217.) erklärt und verständlich werden. Hierauf gründet sich die mechanische Messung und Verzeichnung der Winkel vermittelst des Transporteurs.

46) Dis soll Thales zuerst gefunden haben.

116. Da jede Sehne kleiner ist, als ihr Bogen (12. 46.): so muß der Umfang (Perimeter) jeder Figur, die in einer andern beschrieben ist, kleiner seyn als diese; hingegen muß der Umfang einer äußern Figur größer, als die innere seyn.

117. Durch 3 in keiner graden Linie liegende Puncte wird allemal ein Cirkel bestimmt. 109. 47)

118. Es können sich also 2 Cirkel nur in 2 Puncten schneiden. 107.

XXXIV. Den Mittelpunct eines Cirkels oder eines Bogens zu finden. 117. 109.

XXXV. Drei nicht in grader Linie liegende Puncte in einen Cirkelbogen zu vereinigen. 117. 109.

XXXVI. Einen Bogen in 2 gleiche Theile zu theilen. VIII. 109. 48)

---

119. Ein Winkel am Mittelpunct (angulus ad centrum) ist grade noch einmal so groß, als der an der Peripherie (angulus ad peripheriam), 49) wenn beide auf gleichem Bogen stehen. 60. 35.

120. Da nun (nach 102.) der Bogen zwischen den Schenkeln eines Winkels am Mittelpunct sein Maaß ist (102.): so hat der Winkel am Mittelpunct den ganzen Bogen, worauf er steht und der an

---

47) Eine grade Linie wird also durch 2 Puncte (11.) und ein Cirkel durch 3 Puncte bestimmt.

48) Wie durch fortgesetztes Halbiren der Unterschied zwischen Bogen und Sehne immer geringer werde, davon 146.

49) Winkel im Abschnitt.

an der Peripherie nur die Hälfte des Bogens, worauf er steht, zum Maaße. 50)

121. Alle Winkel am Mittelpunct, die auf gleichen Bogen stehen, und alle Winkel an der Peripherie auf gleichen Bogen sind gleich. 120.

122. Daher ist der Winkel an der Peripherie, wenn er auf dem halben Umkreis steht, einem r e c h t e n 51) gleich; steht er auf einem größern Bogen: so ist er ein stumpfer, und steht er auf einem kleinern, ein spitzer Winkel. 120.

123. In jedem Viereck also, das im Cirkel beschrieben ist, sind die gegenüberliegenden Winkel 2 rechten gleich. 120.

124. In einem Cirkel verhalten sich nun also (119.) die Winkel an der Peripherie, wie die Winkel am Mittelpunct, die mit ihnen auf gleichen Bogen stehn. 120. 52)

125. Ein Winkel ausser der Peripherie hat den Unterschied zwischen dem halben kleinen und halben großen Bogen, worauf beide Schenkel stehen (oder die halbe Differenz der ganzen Bogen) zum Maaße. 53) 60. 120.

126. Zieht man aus einem Punct der Peripherie 2 grade Linien, so, daß sie einen Winkel bilden, der zum Theil in, zum Theil außer dem Cirkel liegt: so

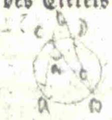
---

50) Dis ist auch so mit d e m Peripheriewinkel, dessen einer Schenkel eine Tangente ist. 137

51) Dient also zu einer leichten Probe rechter Winkel, rechtwinkelichter Instrumente, als Winkelhaken u. dgl.

52) Weil die Hälften sich wie die Ganzen verhalten.

53) Dis ist auch der Fall bei einem Winkel, den 2 Tangenten des Cirkels außer demselben formiren. 139.



$\angle a = \angle b + \angle c$
$\angle b = \angle a - \angle c$
$\angle a = \frac{1}{2} AD$
$\angle c = \frac{1}{2} CD$
$\angle b = \frac{1}{2} AD - \frac{1}{2} CD$

so ist dieser Winkel den beiden halben Bögen zusammen gleich, die der Schenkel innerhalb des Cirkels und die Verlängerung des außerhalb liegenden faßt. 60.

127. Ein Winkel im Kreise 54) ist der halben Summe beider Bogen, die seine Schenkel und die Verlängerung derselben fassen, (oder der Summe beider halben Bogen) gleich. 60.

XXXVII. Auf einer gegebenen graden Linie einen Bogen zu beschreiben, der einen gegebenen Peripheriewinkel misst.

XXXVIII. Ans Ende einer graden Linie ein Perpendikel zu setzen. 122.

---

128. Die zwischen 2 parallelen Sehnen liegenden Bogen sind gleich. 50.

129. Wenn ein Cirkel einen andern, entweder inwendig oder auswendig berührt: so trifft die grade Linie, die beider Mittelpuncte verbindet, (genugsam verlängert) den Berührungspunct der Cirkel.

130. Zwei Cirkel berühren einander nur in e i n e m Punct.

131. Eine grade Linie, die auf dem Diameter, in dem Punct, wo er mit der Peripherie zusammen fällt, senkrecht steht, berührt den Cirkel in diesem Punct 55) und bleibt außerhalb dem Cirkel. 45. 55. 56.

122. Tan-

54) Weder am Mittelpunct noch an der Peripherie.
55) Und zwar n u r in d i e s e m Punct a l l e i n.

132. Tangenten auf diesen 2 Puncten des Diameters sind also parallel. 55.

133. Jede grade Linie, die auf erwähntem Puncte des Diameters schief steht, muß also den Kreis außer in diesem Punct noch in einem andern schneiden.

134. Folglich kann eine grade Linie einen Cirkel (133.) oder ein Cirkel den andern (130.) nur in e i n e m Punct berühren; und es ist in e i n e m Punct der Peripherie nur e i n e Tangente möglich.

135. Deswegen ist auch nun z w i s c h e n 56) der Peripherie und der Tangente keine andere grade Linie mehr möglich. (133.)

136. Zwei Cirkel, die sich berühren, haben im Berührungspunct eine gemeinschaftliche Tangente. 129. 131.

137. Ein Winkel, dessen Spitze in der Peripherie eines Cirkels liegt, und wovon der eine Schenkel den Cirkel berührt, der andere ihn schneidet, ist ebenfalls ein Peripheriewinkel und hat die Hälfte des Bogens zwischen seinen Schenkeln zum Maaße. 57) 122.

XXXIX. An einen Punct der Peripherie eine Tangente zu ziehen. 131.

XL. Von einem Punct außer dem Kreise eine Tangente an den Kreis zu ziehen. 122.

XL.

56) Dis ist der bekannte Satz, der sich schon beim Euclid III. Bd. 16. Satz findet und von dem Mancher mehr Aufhebens macht, als nöthig ist.
57) Aus dem Bisherigen ist klar genug, daß nie grade Linien, wohl aber eine grade und eine krumme sich berühren können.

XLI. Von einem Punct außer dem Kreise 2 Tangenten an den Kreis zu ziehen. 122.

138. Zwei Tangenten an einem Cirkel, die in einem Punct außer demselben zusammen kommen, sind gleich. 131. 67. 83.

139. Der Winkel, den 2 Tangenten außerhalb dem Cirkel machen, hat den halben Unterschied der beiden Bogen (oder den Unterschied beider halber Bogen) zwischen seinen Schenkeln zum Maaße. 58) 120. 138.

140. In jedes △ läßt sich ein Cirkel einschreiben. 117. VIII. 34. 131.

XLII. Einen Cirkel zu beschreiben, der 3 andere gegebene 59) berühre.

141. a. Regulär heißt eine Figur, wenn sie lauter gleiche Seiten und lauter gleiche Winkel hat. 60)
b. Hat also ein Polygon lauter gleiche Seiten und gleiche Winkel: so heißt es regulär, wo nicht, irregulär.

142. Man stelle sich ein reguläres Polygon als eine im Cirkel beschriebene Figur vor, 61) deren gleiche Seiten gleiche Sehnen im Cirkel sind. 114.

143. Wenn

58) In 120. 125. 126. 127. 137. 139. sind also nun alle Winkel beim Cirkel bestimmt.

59) Die aber nach 117. nicht in grader Linie liegen. Dis Problem ist von Apollonius.

60) Desgleichen sind nun also das gleichseitige Dreieck, das Quadrat und alle reguläre Polygone.

61) Man fange in diesen Vorstellungen mit dem gleichseitigen Dreieck, als der Erfindung des Thales, an.

143. Wenn man in einer im Cirkel beschriebenen regulären Figur vom Centro nach den Winkeln Radien zieht: so entstehen lauter gleiche △△. 121. 40.

144. Folglich kann man sich jedes reguläre Polygon aus so vielen gleichen △△, als es Seiten hat, bestehend, vorstellen. 143.

145. Und es muß nun (nach 74.) jedes reguläre Polygon so groß seyn, als ein △, dessen Grundlinie dem Umfang (Perimeter) des Polygons und dessen Höhe der Entfernung der Seiten vom Centro des umschriebenen Cirkels 62) gleich ist.

146. Je kleiner in einem Cirkel die Sehnen sind, desto näher kommen sie ihren zugehörigen Bogen. 63) 110.

147. Also muß der Unterschied zwischen Sehne und Bogen durch fortgesetzte unzählige Halbirungen zuletzt kleiner werden, als jede angebliche Größe.

148. Jedes reguläre in einem Cirkel beschriebene Polygon läßt sich verdoppeln oder in eins verwandeln, das noch einmal so viel Seiten hat; und dis gefundene wieder in eins, das noch einmal so viel Seiten hat, als das 2te u. s. f. 82.

149. Je mehr ein im Cirkel beschriebenes reguläres Polygon Seiten hat, desto näher liegen dieselben der Peripherie und desto weniger sind sie von ihren Bogen in (Absicht) der Größe unterschieden. 146.

D 150.

62) Vom Centro der regulären Figur kann man hier auch sagen.

63) Sowohl im Abstande, als in der Größe.

150. Hierdurch läßt sich die Länge der Peripherie eines Cirkels finden. 64)

151. Das Verhältniß des Diameters zur Peripherie ist wie 100 : 314. (genauer wie 1000 : 3141, noch genauer 10000 : 31415 u. s. w.) 65)

152. Man hat eine krumme Linie rectificirt, wenn man eine grade gefunden hat, die ihr gleich ist. 66)

XLIII. Wenn der Radius oder Diameter gegeben, die Peripherie zu finden. 151.

XLIV. Bei gegebener Peripherie den Diameter zu finden. 151.

---

153. Da man bei Linien nur auf die Ausdehnung in die Länge sieht (7.): so kann ihr Maaß nichts anders, als eine Länge seyn, und man mißt sie also auch mit Längen oder andern willkührlich angenommenen graden Linien.

64) Welches nöthig ist, wenn man den Flächeninhalt des Cirkels erforschen will.
Will man diese Rechnung selbst machen: so fange man z. B. mit dem Sechseck an. Nach 142. ist die Seite desselben dem Radius des umschriebenen Cirkels gleich. Man nehme sie nur an zu 100000000 (100 Millionen) und suche nach 148 die Seite vom 384eck: so wird man dem Verhältniß zwischen Diameter und Peripherie schon sehr nahe gekommen seyn. Weiter unten noch ein Paar Worte hievon.

65) Durch Rechnung läßt sich dis Verhältniß so genau finden, als es nur immer möglich und zu allem Gebrauch überflüßig genau ist.

66) Geometrisch ist dis vom Cirkel nicht, mechanisch ziemlich, aber nicht ganz genau möglich. Prüfung dieses Verfahrens in der Trigonometrie. Von regulären Polygonen weiter unten.

154. a. Eine solche willkührliche grade Linie hat man längst angenommen, die ohngefähr der Länge des Fußes eines erwachsenen Menschen gleich ist. Daher der Name Fuß oder Schuh.

b. Eine Länge von 10 Füßen heißt eine Ruthe; der 10te Theil des Fußes ein Zoll; der 10te eines Zolles — eine Linie; der 10te einer Linie — ein Scrupel.

c. Die Zeichen für Ruthen, Füße, Zolle, Linien, und Scrupel sind wie die Grade, Minuten, Secunden rc. beim Cirkel, ° ′ ″ ‴ ⁗.

d. Ein Längenmaaß nach dieser Eintheilung heißt ein 10theiliges oder Decimalmaaß.

e. Im gemeinen Leben ist es mehr gewöhnlich, jene Längen in 12 Theile zu theilen, welches Duodecimalmaaß heißt.

f. Man kann aber die Zahlen, welche das Duodecimalmaaß ausdrücken, leicht auf Decimalmaaß bringen, und umgekehrt.

155. Bestimmt man nun, wie vielmal eine Ruthe Fuß oder dessen Decimalmaaß Theile in einer Linie enthalten: so mißt man sie. 67) Anm. zu 28.

156. Winkel vergleicht man alle mit dem rechten und mißt sie mit einer sehr genauen Eintheilung desselben. 68) 102. 103. 104.

67) Gemessene Linien sind also nichts anders, als gezählte Größen. Die verschiedenen angenommenen Längenmaaße, ihre Eintheilung und Gebrauch gehört in die practische Geometrie und es können hier nur Grundsätze angegeben werden, worauf die Richtigkeit der Messung beruht.

68) Von Auftragen oder Abnehmen der Winkel mit dem gewöhnlichen oder dem gradlinigten Transporteur, oder durch Seh-

157. a. Eine gradlinigte oder ebene Figur wird durch eine kleinere Fläche, die man so vielmal, als es angeht, in ihr herumlegt, ausgemessen. 69)

b. Die Zahl, welche anzeigt, wie vielmal die kleine Fläche in der großen enthalten sei, bestimmt also den Inhalt (area) 70) der gradlinigten Fläche.

158. a. Da sich alle Figuren in Quadrate verwandeln lassen (90.): so hat man ein Quadrat zur Ausmessung ebener Figuren gewählt.

b. Das kleinere zum Messen gewählte Quadrat bestimmt man durch einen Längenmaaßstab, 71) als Ruthe, Fuß, Zoll, Linie, Werst, Meile u. s. w. und nennt eine Quadratruthe, Quadratschuh, Quadratzoll, Quadratlinie, Quadratwerst, Quadratmeile u. s. w. ein Quadrat, dessen Seite eine Ruthe, Schuh, Zoll, Linie, Werst, Meile u. s. w. ist.

c. Die Bezeichnung ist dieselbe, wie beim Längenmaaß. 154, c.

159. Nach dem Decimalmaaß enthält
die Quadratruthe 100 Quadratfuß,
ein Quadratfuß 100 Quadratzoll,
ein Quadratzoll 100 Quadratlinien,
weil die Seite der Quadratruthe 10mal so groß ist, als die Seite des Quadratfußes u. s. w. 154, b. 72)

160. a.

Sehnen oder andere Methoden gehört eigentlich, so wie alle Aufgaben, in die practische Geometrie. Die genaueste Bestimmung der Winkel lehrt die Trigonometrie.

69) Also mißt man Längen mit Längen, Winkel mit Winkel, Flächen mit Flächen und -- wie wir weiter unten sehen werden -- Körper mit Körpern.

70) Area, der Flächeninhalt jeder ebenen Figur.

71) Weil durch die Seite das Quadrat bestimmt wird. 65, a.

72) Bei Verwandelung dieser Maaße in kleineres oder größeres sieht man den Vortheil der Decimalrechnung.

160. a. Wenn man nun bestimmt, wievielmal ein erwähntes Flächenmaaß in einer Figur enthalten sei: so mißt man dieselbe.

b. So mißt man z. B. einen Rectangel aus, wenn man erforscht, wie vielmal das zum Maaß angenommene kleinere Quadrat in demselben Raum hat, oder hineingelegt werden kann. Anm. zu 28.

c. Mißt man die Grundlinie und Höhe mit der Seite des zum Maaß gewählten Quadrates: so findet man, daß das kleine Quadrat im Rectangel grade so vielmal enthalten ist, als das Product der Grundlinie in die Höhe Einheiten in sich enthält.

161. Daher hat man den bequemen Ausdruck gewählt: das Product der Grundlinie in die Höhe ist dem Flächenraum gleich. 73)

162. Da ein schiefwinkelichtes Parallelogramm in ein rechtwinkelichtes verwandelt werden kann (XXXI.): so ist sein Flächeninhalt ebenfalls zu finden.

163. Und da jedes $\triangle$ die Hälfte eines Parallelogramms ist, das einerlei Grundlinie und Höhe mit ihm hat (75.): so ist ein $\triangle$ das halbe Product aus der Grundlinie in die Höhe, d. i. wenn ad die Grundlinie, ab, db die andern beiden Seiten und eb die Höhe des Dreiecks sind:

$$\frac{ad.\ be}{2} = \tfrac{1}{2}\ ad.\ be = \tfrac{1}{2}\ eb.\ ad = \tfrac{1}{2}\ (ad.\ be)$$

164.

73) Sieht man nun eine Linie als eine Einheit, eine Fläche auch als eine Einheit und einen körperlichen Raum ebenfalls als eine Einheit an: so kann nie Irrung aus diesem Ausdruck entstehen.

164. Und da ein Trapezium durch die Diagonale in 2 △△ getheilt wird (Anm. 27.): so ist sein Inhalt der Inhalt beider △△ zusammen. 163.

165. Hat ein Trapezium (abcd) 2 parallele Seiten (ad, bc): so ist sein Inhalt die Summe der parallelen Seiten (ad + bc) multiplicirt mit der halben Höhe ($\frac{1}{2}$ be), also:

$$(ad+bc)\ \tfrac{1}{2}\,be = abcd.\quad 163.$$

166. Jedes reguläre und irreguläre Polygon läßt sich durch Diagonalen in △△ zerlegen, folglich ist jedes Polygons Inhalt dem Inhalt aller △△ zusammengenommen gleich. 144. 163.

167. a. Jede gradlinigte Figur läßt sich durch Diagonalen in so viel △△ zerlegen, als die Figur Seiten hat, weniger 2.

b. Es läßt sich aber (nach 144.) jedes reguläre Polygon als aus lauter gleichen △△ bestehend, oder (nach 145.) als ein △ vorstellen. Es wird also der Flächeninhalt des Polygons gleich seyn dem Flächeninhalt aller △△ zusammen, d. i. dem Inhalt eines △ multiplicirt mit der Anzahl der △△; oder nach der andern Vorstellung (145.) wird der Inhalt des Polygons gleich seyn einem △, dessen Grundlinie dem Umfange des Polygons (allen Seiten zusammengenommen) und dessen Höhe die Entfernung einer Polygonseite vom Centro der Figur ist. Also findet man eines regulären Polygons Flächeninhalt, wenn man die Summe seiner Seiten mit genannter halben Höhe multiplicirt.

168. a.

168. a. Man stelle sich nun die Cirkelfläche als ein Polygon von unzählig [74]) vielen Seiten vor: so hat man eine unzählige Menge gleicher △△. Des Cirkels Peripherie ist die Zahl aller Grundlinien der △△ und sein Radius ihre Höhe. Folglich wird die Peripherie multiplicirt mit dem halben Radius (oder $\frac{1}{4}$ des Diameters) den Flächeninhalt des Cirkels geben. 163.

b. Und also gleicht der Cirkel einem △, dessen Basis der Peripherie und dessen Höhe dem Radius gleich ist. 145.

169. a. Unter allen Figuren, die gleichen Umfang [75]) haben, ist der Cirkel die größte.

b. Unter Figuren von gleichem Umfange hat die reguläre mehr Fläche, als die irreguläre, ja selbst die mehr, welche der regulären näher kommt; und die reguläre von einer größern Anzahl Seiten mehr, als die von einer geringern.

170. Der Flächeninhalt der Figuren läßt sich also keinesweges aus ihrem Umfange angeben. Denn dieser kann (wie z. B. 74.) ohne Ende zunehmen, wenn jener ungeändert bleibt.

---

171. [76]) Wenn man eine grade Linie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile eintheilt und man verbindet

74) Unendlich sagt man auch.

75) D. h., wenn die Seiten, die den Umfang ausmachen, zusammen addirt, gleich sind.

76) Da alle Sätze der Arithmetik allgemein wahr sind: so sind sie nicht bloß auf Zahlen eingeschränkt, sondern können auch auf geometrische Größen, als Linien, Figuren und Körper ausgedehnt werden; und es müssen also jene Proportionen Nr. 72. und folg. auch hier ihre Richtigkeit haben.

bindet mit ihr eine andere Linie und zieht durch die Theilungspuncte Parallellinien: so theilen diese auch die andere Linie in eben so viel gleiche Theile. 50. 52.

172. Also schneidet jede Parallele von der einen Linie ein eben so Vielfaches, als von der andern ab.

173. Wenn 2 (nach 171. verbundene) grade Linien von einer 3ten oder von Parallellinien durchschnitten werden: so sind die abgeschnittenen Stücke der einen Linie

a) ihren zugehörigen Seiten,

b) denen Stücken der andern (Linie) und

c) den Parallelen proportional.

174. Wenn 2 grade Linien von 3 Parallellinien geschnitten werden (oder wenn man zwischen 3 Parallelinien von einer der äußern zur andern 2 grade Linien zieht): so sind die Zwischentheile auf der einen Linie denen auf der andern proportional. 171. 173. 77)

175. Wenn daher zwischen Parallellinien 2 grade Linien so gezogen werden, daß sie sich in einem gewissen Punct schneiden: so werden die abgeschnittenen Stücke ihren ganzen Linien und sich wechselsweise proportional seyn. 174.

176. Zieht man also in einem △, wo man will, eine Linie mit einer Seite parallel: so sind die durch die Parallele abgeschnitteten Stücke der beiden Seiten

77) Eine Hauptlehre in der Mathematik ist die von der Aehnlichkeit der Figuren. Alles in der Arithmetik von geometrischen Proportionen ist hier durch Linien anzuwenden. Euclid 7tes B. und folg.

ten a) sich b) ihren zugehörigen Seiten und c) den Parallelen proportional. 175.

177. a. Gradlinigte Figuren nennt man **ähnliche Figuren**, wenn bei gleicher Anzahl von Seiten die Winkel in der einen Figur den gleichliegenden Winkeln in der andern gleich, und die Seiten, die gleiche Winkel einschließen, einander proportional sind.

b. Die Seiten, die in ähnlichen Figuren gleichen Winkeln gegenüber liegen, heißen **ähnlichliegende, gleichnahmige Seiten**, (latera homologa).

c. Figuren also, die (auf oder in einander passen, oder) sich decken, sind nicht nur gleiche, sondern auch ähnliche Figuren.

d. Eben so müssen auch 2 Figuren, die einer 3ten ähnlich sind, sich selbst ähnlich seyn. Ar. 82.

178. Zieht man also in einem △ mit einer Seite eine Parallellinie: so entstehen ähnliche △△. 50.

179. Sind daher in 2 oder mehrern △△ alle 3 Winkel oder nur 2 (59.) sich gleich: so haben jene Proportionen (176.) darin statt.

180. Folglich sind gleichwinkelichte △△ einander ähnlich.

181. Sind in 2 (oder mehrern) △△ die Seiten, die einen gleichen Winkel einschließen, proportional: so sind die △△ sich ähnlich.

182. Sind in 2 (oder mehrern) △△ alle 3 Seiten proportional: so sind die △△ sich ähnlich. 78)

183. a.

78) In 180. bis 182. also auch 3 Sätze von der Aehnlichkeit der Dreiecke, so wie oben 3 (in 33. 34. 40.) von der Gleichheit derselben.

183. a. Jede gradlinigte Figur von mehr als 3 Seiten läßt sich in △△ zerlegen, deren Summe der ganzen Figur gleich ist. 167. 166.

b. Alle gleichwinkelichte △△ sind sich ähnlich. 180.

c. Folglich müssen alle Figuren von mehr als 3 Seiten, wenn sie sich durch gleichnahmige Diagonalen in ähnliche △△ theilen lassen, einander ähnlich seyn.

d. Da aber (nach 180.) auch alle gleichseitige △△ einander ähnlich sind (36.): so sind also

alle gleichseitige △△,
alle Quadrate,
alle reguläre Polygone und
alle Cirkel [79]) einander ähnlich.

184. Triangel und Parallelogrammen von gleicher Höhe verhalten sich, wie ihre Grundlinien, und bei gleichen Grundlinien wie ihre Höhen. 163.

185. a. Eine Linie, die einen Winkel eines Dreiecks in 2 gleiche Theile theilt, theilt auch die Gegenseite so, daß sich ihre beiden Abschnitte gegeneinander verhalten, wie die anliegenden Seiten.

b. Also ist, wo diese Proportion sich findet, dergleichen Winkel in 2 gleiche Theile getheilt.

186. Aehnliche △△ verhalten sich, wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten, gegen einander. 163.

187. Aus gleichen Gründen müssen sich alle ähnliche Figuren, wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten verhalten.

188.

79) Weil der Cirkel einem regulären Polygon gleich gesetzt werden kann.

188. Da nun die Höhen der △△ auf ähnliche Art bestimmt werden: so verhalten sich ähnliche △△ auch wie die Quadrate ihrer Höhen.

189. Eben dis gilt auch von andern ähnlichen Figuren, wo in den durch Diagonalen entstandenen △△ ein Perpendikel als Höhe auf eine mit den homologen Seiten ähnliche Weise bestimmt wird. [80])

XLV. Eine grade Linie a) in eine gewisse Anzahl gleicher Theile, oder b) in eben so viel proportionirte Theile, als eine andre zu theilen. 171. 176.

XLVI. Zu 3 graden Linien die 4te Proportionallinie, und

XLVII. Zu 2 graden Linien die ~~mittlere~~ und 4. Proportionallinie zu finden. 174. 176.

190. Wenn 2 grade Linien durch einen Punct (a) in oder außer dem Cirkel gehen: so ist

ab : ad = ae : ac [81]).

191. Sind also ad, ae denen ab, ac proportional: so ist, wenn a außer dem Cirkel liegt, ihre Differenz, liegt es aber im Cirkel, ihre Summe der Sehne de gleich.

192. Liegt a außer dem Cirkel: so nimmt die Differenz ab; wenn a [82]) zunimmt und verschwindet,

wenn

80) Und da der Cirkel einem Dreieck gleich ist, dessen Grundlinie der Peripherie und dessen Höhe dem Radius gleicht: so werden sich Cirkel, weil sie ähnliche Figuren sind, wie die Quadrate ihrer Radien oder Diameter verhalten, wie bald (197.) noch mehr erläutert werden soll.

81) Eine Figur erläutert diesen und folgende Sätze.

82) Der Winkel a.

wenn ad den Cirkel berührt. In diesem Falle also, wo d mit e zusammen fällt, wird

$$ab : ad = ad : ac$$

also ad die mittlere Proportionallinie zwischen ab und ac.

193. Liegt aber a im Cirkel: so kann de so gezogen seyn, daß, wenn es in a in 2 gleiche Theile getheilt wird, da = ae. In diesem Fall kann die Proportion

$$ab : ad = ae : ac \text{ mit}$$

dieser $ab : ad = ad : ac$

vertauscht werden, und es wird wiederum ad die mittlere Proportionallinie zwischen ab und ac.

194. Folglich ist jedes Perpendikel von der Peripherie eines Cirkels auf den Diameter die mittlere Proportionallinie zwischen den Abschnitten (Segmenten) des Diameters. 83)

195. Zieht man daher in einem rechtwinkelichten △ vom rechten Winkel auf die Gegenseite ein Perpendikel: so erhält man 3 ähnliche △△, und das Perpendikel wird die mittlere Proportionallinie zwischen den beiden Abschnitten der Seite, worauf es fället. 194.

83) Hierin unterscheidet sich der Cirkel von allen krummen Linien. Nennt man daher den Diameter = a, das Perpendikel = y und den einen Abschnitt des Diameters = x: so ist der andere Abschnitt = a — x und es wird, wo man auch das Perpendikel fallen läßt, in jedem Fall allemal

$$x : y = y : a - x$$

folglich nach Ar. 79, a

$$y^2 = ax - x^2 \quad (\text{Ar. } 50.)$$

seyn, durch welche Gleichung also die Natur des Cirkels ausgedrückt ist.

[illegible]

196. Betrachten wir hier den rechten Winkel als einen Peripheriewinkel: so wird seine Gegenseite der Diameter eines Cirkels seyn, der durch die 3 Spizzen dieses rechtwinkelichten Dreiecks (122.) geht, und es wird dieses Perpendikel die mittlere Proportionallinie zwischen den Abschnitten der Seite seyn, worauf es fället. 194. 84)

197. a. Weil alle Cirkel ähnlich sind (183.): so ist das Verhältniß des Diameters zur Peripherie in allen Cirkeln dasselbe (151.) und jeder Cirkel einem △ gleich (168, b.), dessen Basis der Peripherie und dessen Höhe dem Radius gleich ist, dessen Inhalt also das Product der Peripherie in den Radius dividirt mit 2 ist (163).

b. Also verhalten sich in verschiedenen Cirkeln die Peripherien wie die Diameter (oder Radien) und die Flächen wie die Quadrate der Diameter (oder Radien).

c. Die Cirkelfläche verhält sich aber zum Quadrat des Diameters (fast) 85) wie 785 : 1000.

XLVIII. Aus gegebener Peripherie oder Diameter (oder Radius) die Cirkelfläche, und

XLIX. aus gegebener Fläche des Cirkels den Diameter (oder Radius) oder die Peripherie zu finden.

L. Ein

84) Das giebt die beste Veranlassung zur Verwandelung eines Parallelogramms in ein Quadrat. L.

85) Weil 100 zu 314 auch nur fast das Verhältniß zwischen Diameter und Peripherie ist.

210. Wenn man durch einen beliebigen Punct in der Diagonale eines Parallelogramms Linien mit den Seiten des Parallelogramms parallel zieht: so theilen diese dasselbe in 4 Parallelogramme, wovon die beiden, durch welche die Diagonale geht, sich und dem ersten ähnlich und die, wodurch sie nicht geht, sich gleich sind. 88.

211. Wenn 4 grade Linien proportional sind: so ist das Rectangel aus den beiden äußern (1sten und 4ten) dem Rectangel der beiden innern (2ten und 3ten) gleich. Anm. 76. Nr. 79, a.

212. Also ist das Quadrat der mittlern Proportionallinie dem Rectangel der andern beiden gleich. 88)

213. Das Rectangel aus der Summe zweier Linien und ihrer Differenz ist der Differenz ihrer Quadrate gleich. 210.

214. Dreiecke und Parallelogramme sind im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Grundlinien und Höhen. 184. 75.

215. Also sind Rectangel in zusammengesetztem Verhältniß ihrer Seiten, weil die Seiten auch die Höhen sind. 214.

216. Quadrate sind also im duplicirten 89) Verhältnisse ihrer Seiten.

88) Die Quadratwurzel aus einer Linie ist also zwischen dieser Linie und der Einheit die mittlere Proportionallinie. So wie die Cubikwurzel aus einer Linie die erste von 2 Proportionallinien zwischen der Einheit und jener Linie ist. Von letzterem bei der delischen Aufgabe in der Stereometrie.

89) Zweifach höhern.

217. Beim regulären 90) Polygon kommen 2 Winkel in Betracht, nämlich der **Polygonwinkel** und der **Centriwinkel**. Beide werden durch die Anzahl der Seiten des Polygons bestimmt.

218. Man stelle sich das Polygon im Cirkel beschrieben vor, 142: so ist (wenn n die Zahl der Seiten ausdrückt) der Centriwinkel $= \frac{360}{n}$ und der Polygonwinkel $= 180 - \frac{360}{n}$.

Also findet man erstern, wenn man 360 mit der Zahl der Seiten dividirt, und letztern, wenn man den Centriwinkel von 180 abzieht.

219. Ist die Zahl der Seiten des Polygons grade: so macht die Hälfte der Centriwinkel 180° und das Polygon wird durch jeden fortgesetzten Radius in 2 gleiche Theile getheilt.

220. Nach 218 kann man also für jedes Polygon die Winkel finden und (wenn man will) in eine Tabelle bringen.

Im 3eck ist der C. W. =	120°	u. d. P. W. =	60°
„ 4 — — —	90	— —	90
„ 5 — — —	72	— —	108
„ 6 — — —	60	— —	120
„ 7 — — —	$51\frac{3}{7}$	— —	$128\frac{4}{7}$
„ 8 — — —	45	— —	135
„ 9 — — —	40	— —	140
„ 10 — — —	36	— —	144

u. s. w. 91)

90) Regulär heißt das Polygon, wenn es (nach der Erklärung von regulärer Figur überhaupt 141.) lauter gleiche Seiten und gleiche Winkel hat.

91) Wir bemerken hier ein Verhältniß, daß nämlich der P. W. eben so viel zunimmt, als der C. W. abnimmt.

221. Je größer die Zahl der Seiten einer regulären Figur ist, desto größer ist auch der Winkel derselben (Seiten). Also ist der kleinste Winkel, den eine reguläre Figur haben kann, der Winkel des gleichseitigen $\triangle = 60^\circ$.

LI. Aus einer gegebenen Linie ein reguläres Polygon von einer bestimmten Anzahl Seiten zu machen.

---

222. Da (nach 145.) jede im Cirkel beschriebene reguläre Figur so groß ist, als ein $\triangle$, dessen Grundlinie dem Umfang der regulären Figur und dessen Höhe das Perpendikel vom Centro auf eine Seite ist: so ist eine um den Cirkel beschriebene reguläre Figur so groß als ein $\triangle$, dessen Grundlinie dem Umfang der Figur und dessen Höhe dem Radius gleich ist.

223. In jeder gradlinigten Figur ist die Summe aller Winkel zweimal so viel rechten Winkeln gleich, als die Figur Seiten (oder nach Anm. 13. Winkel) hat, weniger 4.

Nennt man nun die Zahl der Seiten n: so ist die Summe der rechten Winkel (die alle Winkel der Figur ausmachen) $= 2n - 4$.

224. Hiernach findet man also die Summe der Winkel in allen regulären Figuren durch $2n - 4$.

Im regulären	3eck	$= 2.3R - 4R$	$= 2R$	$= 180^\circ$
— —	4 =	— —	= 4	= 360
— —	5 =	— —	= 6	= 540
— —	6 =	— —	= 8	= 720

Im

Im regulären	7eck	$= 2.3R - 4R$	$= 10R$	$= 900$
— —	8 =	— —	= 12	= 1080
— —	9 =	— —	= 14	= 1260
— —	10 =	— —	= 16	= 1440

u. s. w.

225. a. Die schwierigste Foderung bei den Polygonen ist, in einem gegebenen Cirkel jedes reguläre Polygon zu beschreiben.

Wenn man das Verhältniß der Seite jedes regulären Polygons zum Radius findet: so ist dieser Foderung ein Genüge geschehen.

b. Diese Verhältnisse haben auch sonst noch weiterhin 92) ihren Nutzen und lassen sich am besten in der Trigonometrie (und Analysis) entwickeln.

c. Geometrisch ist es nicht durchgängig von allen Polygonen, sondern nur von einigen möglich, sie zu construiren.

So lassen sich geometrisch z. B. das 3. 4. 5eck und die von doppelt so viel Seiten, als 6. 8. 10. 12. 16. 20eck, u. s. w., auch das 15. 30eck u. s. w., aber nicht das 7. 9. 11. 13eck u. s. w. verzeichnen.

d. In practischen Geometrieen (wohin eigentlich auch dis, Anm. 68. gehört) findet man (doch oft mehr mechanische als geometrische) Anweisungen zur Auflösung dieses Problems.

Wegen 225, b. werden folgende Aufgaben nicht unnütz seyn, worin LI. bis LVI. die möglichen geome-

E 2 trischen

---

92) Z. B. in der Stereometrie, wo man sich die regulären Körper in einer Kugel beschrieben vorstellet.

trischen Constructionen regulärer Polygone im Cirkel, LVII. bis LXI. die Bestimmung des Verhältnisses zwischen Radius und Seite des regulären Polygons im Cirkel, LXIV. bis LXV. eben dis in Zahlen, und LXII. bis LXIII. die Verdoppelung und Halbirung der Anzahl der Polygonseiten enthalten.

LII. Jn einem gegebenen Cirkel ein reguläres 3eck zu beschreiben.

LIII. Jm Cirkel ein reguläres 4eck zu zeichnen.

LIV. Jm Cirkel ein 5eck,

LV. Jm Cirkel ein 6. 8. 10. 12. 16. 20. 24. 32eck u. s. w. zu verzeichnen.

LVI. Jm Cirkel ein 15. 30eck u. s. w. einzuschreiben.

LVII. Einen Cirkel mit einem regulären Polygon von einer gewissen Anzahl Seiten zu umschreiben.

LVIII. Aus dem Radius des Cirkels die Seite des regulären 3ecks zu finden.

LIX. Aus dem Radius des Cirkels die Seite des regulären 4ecks,

LX. Aus dem Radius des Cirkels die Seite des 10ecks.

LXI. Aus dem Radius des Cirkels die Seite des 5ecks.

LXII. Aus dem Radius des Cirkels die Seite des 8ecks.

LXIII. Aus dem Radius und der Seite des Polygons die Seite eines Polygons von noch einmal so vielen Seiten.

LXIV. Aus dem Radius und der Seite des Polygons die Seite eines Polygons von halb so viel Seiten zu finden.

LXV.

LXV. Aus dem Radius des Cirkels die Seiten der eingeschriebenen regulären Polygone in Zahlen zu finden.

LXVI. Umgekehrt aus der Seite eines im Cirkel beschriebenen regulären Polygons den Radius dieses Cirkels zu finden.

---

226. a. Ein im Cirkel beschriebenes reguläres Polygon von unzählig vielen Seiten ist etwas kleiner, und ein solches um den Cirkel beschriebenes etwas größer, als die Peripherie. 116. Also giebt der Unterschied zwischen beiden Polygonen die Cirkelperipherie so nahe wie möglich.

b. Man kann daher obige Rechnung (Anm. zu 151.) auch auf folgende Art machen. Wenn man in derselben bis auf ein inneres Vieleck von vielen Seiten gekommen: so sucht man das äußere von eben so vielen Seiten. Die Seite des innern sei $=$ ab, des äußern de, der Mittelpunct c: so erhält man dies durch folgende Proportion:

$$ca : ab = cd : de.$$

Je mehr Seiten diese 2 Polygone haben, desto geringer ist beider Unterschied, also desto näher die Länge der Peripherie gefunden.

c. Nennt man den Diameter des Cirkels $= 1$: so ist die Peripherie

$= 3, 14159265358979323846264338327950.$ 93)

d. Die

---

93) Soweit (also bis auf 32 Decimalstellen) hat Ludolph van Ceulen gerechnet, welches schon zu allem Gebrauch überflüßig genau ist, Anm. 65. Sherwin hat bis auf 72, Machin auf 120, Lagny bis auf 128 Decimalstellen die Rechnung gebracht.

d. Die genaue Berechnung der Cirkelfläche hängt also von der genauen Bestimmung des Verhältnisses zwischen Diameter und Peripherie ab. Und von der genauen Bestimmung der Cirkelfläche die Quadratur des Cirkels. Ersteres Verhältniß scheint irrational zu seyn. Und letztere haben wir überflüßig genau.

e. Mündlich hier noch einige Erläuterungen über 152. und Anm. 66.

---

227. Nach 13. ist eine Ebene oder ebene Fläche eine solche, worin man aus beliebigen Puncten grade Linien so ziehen kann, daß alle Puncte dieser graden Linien in der Ebene liegen.

228. Wenn eine Linie oder Fläche mit einer Ebene 94) zusammenkommt: so berühren oder schneiden sie sich.

229. Nur eine krumme Linie oder krumme Fläche kann eine Ebene berühren; aber keine grade Linie oder Ebene kann eine andere berühren. Anm. 57.

Schneiden können sich grade und krumme Linien und grade und krumme Flächen.

230. Liegen 2 Puncte einer graden Linie in der Ebene: so liegt die ganze Linie darin. 11.

231. Sind 3 Puncte, die nicht in grader Linie liegen, in der Ebene: so liegt die ganze Figur, die durch diese 3 Puncte bestimmt wird, in derselben. 95)

232.

---

94) Man unterscheide hier ja immer, daß Ebene nur eine grade Fläche, Fläche überhaupt aber grade und krumm seyn könne. 13.

95) Ein gradlinigtes Dreieck kann also nicht anders, als in einer Ebene gedacht werden. Die Seiten können wohl in 3 Ebenen liegen, aber die Fläche des Dreiecks liegt allemal nur in einer Ebene. 14.

232. Folglich bestimmen 3 Puncte (die nämlich nicht grader Linie liegen) die Lage einer Ebene.

233. Kommt eine grade Linie mit einer Ebene in einem Punct zusammen: so wird sie (verlängert) von ihr geschnitten. 228.

234. Kommen also 2 Ebenen zusammen: so müssen sie sich ebenfalls (bei gehöriger Verlängerung) schneiden und zwar in einer graden Linie, 229. welche die Durchschnittslinie beider Ebenen genannt wird.

235. a. Eine grade Linie steht auf einer Ebene senkrecht, wenn sie auf allen durch den Punct, wo sie die Ebene trifft, möglichen graden Linien senkrecht ist. 20.

b. Also steht eine grade Linie, die nicht senkrecht auf der Ebene ist, schief auf ihr. 20.

c. Kommt aber eine grade Linie, ohne Ende verlängert, nie mit der Ebene zusammen: so ist sie mit der Ebene parallel und liegt in allen Puncten weit von ihr. 15.

236. Wenn eine grade Linie auf einer Ebene oder nur auf 2 graden Linien in derselben da, wo sie sich schneiden, senkrecht steht: so steht sie auch auf allen durch diesen Punct möglichen graden Linien senkrecht und macht also mit allen rechte Winkel. 235.

237. Also müssen auch umgekehrt Linien, die sich alle in 1 Punct schneiden, wenn eine andere grade

grade Linie in diesem Puncte mit allen einen rechten Winkel macht, in einer Ebene sich befinden. 236.

238. Zwei grade Linien, die auf einer Ebene perpendiculär stehen, sind parallel. 55.

239. Steht also eine von Parallelen auf der Ebene senkrecht: so werden auch die übrigen senkrecht darauf seyn. 238.

240. Aus einem Punct außer 96) der Ebene kann man nicht mehr als ein Perpendikel auf die Ebene herablassen. 235, a. 48, a.

241. a. Also ist das Perpendikel von einem Punct außer der Ebene nach derselben die möglichst kürzeste Linie oder die Entfernung dieses Punctes von der Ebene. 47. 48, a.

b. Und eben so ist auch aus einem Punct in der Ebene nur ein Perpendikel möglich. 48, a.

242. Ist eine grade Linie auf der Ebene senkrecht: so läuft jede andere grade Linie, die auf ersterer senkrecht ist, mit der Ebene parallel. 235.

243. Also kann eine grade Linie auf 2 sich schneidenden Ebenen zugleich nicht perpendiculär seyn.

244. Man ziehe zwischen 2 Parallellinien auf einer Ebene eine grade Linie (ab), errichte auf dem einen Endpunct (a) derselben ein Perpendikel (ac 97) und ziehe von der obern Spitze (c) dieses Perpendikels eine grade Linie (cb) nach dem andern Endpunct (b) der ersten Linie: so wird diese Hypotenuse eines recht-

96) d. h. weder in der Ebene, noch in ihrer Verlängerung. XI.
97) Welches sowohl auf der Parallele, als auch auf der Ebene perpendiculär stehe.

rechtwinkelichten Dreiecks nur dann auf der einen Parallele perpendiculär 98) seyn, wenn die Grundlinie (ab) auch auf der andern perpendiculär steht.

245. In dem Fall nun, daß erwähnte Linie cb zwar auf der Ebene schief, aber auf der einen Parallele durch b perpendiculär, und ac auf der andern und der Ebene zugleich perpendiculär stehet: so fallen alle Perpendikel aus cb nach der Ebene herab in ab.

246. Die grade Linie cb macht nun unter allen graden Linien, die auf der Ebene durch b können gezogen werden, nur mit derjenigen den kleinsten Winkel, auf welche die Perpendikel aus cb nach der Ebene fallen, (also mit ab) und den größten mit der Verlängerung dieser Linie (also mit bd).

247. a. Diesen kleinsten Winkel nun, den eine grade Linie (cb) mit derjenigen in der Ebene macht, auf welche jedes Perpendikel (aus cb) fällt, nennt man die Neigung einer graden Linie (cb) gegen die Ebene.

b. Der Neigungswinkel einer auf der Ebene senkrechten graden Linie ist also ein rechter; der Neigungswinkel einer schiefen ein schiefer.

248. a. Laufen die Schenkel zweier in verschiedenen Ebenen liegenden Winkel mit einander parallel: so sind die Winkel gleich.

b. Also haben Parallellinien gegen eine Ebene eine gleiche Neigung.

249. Kommt also eine Ebene mit der andern zusammen: so haben alle Linien in der einen die auf der Durch-

98) Auf der Ebene steht sie schief.

Durchschnittslinie (234.) perpendiculär stehen, eine gleiche Neigung gegen die andere.

250. Wenn 2 Ebenen zusammenkommen: so heißt der Winkel, dessen beide Schenkel auf der Durchschnittslinie beider Ebenen perpendiculär stehen, der Neigungswinkel beider Ebenen.

251. a. Also wird der Neigungswinkel zweier Ebenen durch die Neigung, welche ein in der einen Ebene auf der Durchschnittslinie stehendes Perpendikel gegen die andere Ebene hat bestimmt. 247.

b. Und er ist (nach 249.) beständig gleich groß, in welchem Punct der Durchschnittslinie man auch das Perpendikel ziehen mag.

252. Folglich ist die Durchschnittslinie zweier Ebenen auf der Ebene ihres Neigungswinkels allemal senkrecht.

253. a. Der Neigungswinkel zweier Ebenen heißt ein Flächenwinkel.

b. Die 2 Ebenen nennt man seine beiden Schenkel, und die Linie, in der sie zusammen kommen, (Durchschnittslinie) seine Scheitellinie.

254. a. Flächenwinkel werden eben so, wie Linienwinkel, durch den Cirkelbogen gemessen. 99)

b. Und da der Flächenwinkel durch seinen Neigungswinkel bestimmt wird (251.): so ist der Neigungswinkel das Maaß des Flächenwinkels.

255. Der Neigungswinkel zweier Ebenen bestimmt also ihren Flächenwinkel.

256.

99) Und auch durch 3 Buchstaben bezeichnet.

256. Flächenwinkel von einerlei Größe sind also gleich. Und 2 Flächenwinkel, welche gleiche Neigungswinkel haben, sind sich auch gleich. 255. 100)

257. Man wird sich nun leicht vorstellen können, was ein (grader oder) rechter, ein spitzer und stumpfer (oder schiefer), ein verticaler und Nebenflächenwinkel sei.

258. a. Zwei verticale Flächenwinkel sind sich gleich.

b. Zwei Nebenflächenwinkel machen zusammen 180°.

c. Zwei Ebenen sind senkrecht auf einander, wenn ihr Neigungswinkel ein rechter — und schief, wenn ihr Neigungswinkel kein rechter ist.

259. a. Parallele Ebenen sind solche, die, wenn sie auch ohne Ende verlängert würden, nie zusammen stoßen.

b. Sie machen also mit einer 3ten Ebene, auf der sie stehen, gleiche Winkel. 248. und folg.

c. Und sie stehen in allen ihren Puncten gleich weit von einander ab.

260. Werden 2 parallele Ebenen von einer dritten durchschnitten: so gilt eben das von ihren Neigungswinkeln, was oben bei Parallellinien (50.) behauptet ist.

261. Wenn die Durchschnittslinie zweier sich schneidender Ebenen auf einer dritten Ebene perpendiculär steht: so stehen beide Ebenen auch perpendiculär darauf, und umgekehrt.

LXVII.

100) Man kann auch hier die Vorstellung von decken anwenden. Anm. 12.

LXVII. Von einem Punct außer der Ebene ein Perpendikel auf die Ebene zu lassen. 244.

LXVIII. Aus einem Punct in der Ebene ein Perpendikel aufzurichten. LXVII. 239.

LXIX. Zu prüfen, ob eine Linie senkrecht auf der Ebene stehe. 235.

LXX. Den Neigungswinkel zweier Ebenen einem gegebenen Winkel gleich zu machen. 248.

LXXI. Eine Ebene mit der andern durch einen gegebenen Punct parallel zu legen. 248.

---

262. Ein Prisma ist ein Körper, dessen Oberfläche aus 2 gleichen parallelen Figuren und eben so vielen Parallelogrammen bestehet, als eine von jenen 2 Figuren Seiten hat.

263. Die Grundflächen des Prisma können 2 gleiche Dreiecke, Vierecke, oder Vielecke seyn. Daher ein dreieckigtes, viereckigtes und vieleckigtes Prisma.

264. Sind die Flächen alle gleich: so heißts ein Cubus (Würfel). Sind nur [101]) die gegenüberliegenden gleich — Parallelepipedum.

265. Die verschiedenen Theile am Prisma heißen: Grundflächen, Seitenflächen, Seiten, Höhe des Prisma.

Ein Prisma (folglich auch Cubus und Parallelepipedum) kann grade oder schief seyn.

266. Sind jene 2 Grundflächen 2 gleiche Cirkel und die Seitenfläche eine zusammenhängende runde Fläche: so ists ein Cylinder (Walze).

267. a.

101) Bei vierseitiger Grundfläche.

267. a. Im graden sowohl als schiefen Cylinder sind alle Seiten der Axe desselben gleich und parallel, und haben also mit der Grundfläche alle eine gleiche Neigung. 239. 248.

b. Im graden ist die Axe der Höhe gleich.

268. Die Pyramide hat zur Grundfläche eine Figur von 3, 4 und mehrern gleichen oder ungleichen Seiten, und so viel Seitenflächen, als an der Grundfläche Seiten sind, die alle in eine Spitze zusammenlaufen.

269. a. Ist diese Grundfläche ein Cirkel und die Seiten in eine runde Fläche eingeschlossen, die oben eine Spitze bildet: so heißt dieser Körper ein Kegel.

b. Dieser heißt abgekürzt (conus decurtatus), wenn er von einer Ebene mit der Grundfläche parallel geschnitten wird. Er hat dann 2 Grundflächen, und beide sind Cirkelflächen, so wie jeder mit der Grundfläche parallele Schnitt.

c. Eben so heißt eine von einer Ebene mit der Grundfläche parallel geschnittene Pyramide eine abgekürzte (pyramis truncata), die dann auch 2 Grundflächen hat.

270. a. Höhe der Pyramide und des Kegels — Axe des Kegels — grade und schiefe Pyramiden und Kegel sind nun leicht zu verstehen.

b. Beim graden Kegel ist die Axe zugleich seine Höhe.

271. Bei der Kugel (sphära, globus) hat jeder Punct ihrer Oberfläche vom Mittelpunct eine gleiche Entfernung.

272.

272. [102])

(1.) a. Ein Prisma entsteht, wenn sich die Grundfläche längs der einen Seitenfläche mit seiner ersten Lage parallel bewegt.

b. Ist diese Bewegung mit der Grundfläche perpendiculär: so wird es grade; ist sie schief damit: so wird das Prisma ein schiefes. [103])

(2.) a. Hieraus ist die Entstehung eines graden und schiefen Cylinders leicht vorzustellen.

b. Einen graden Cylinder kann man sich auch aus der Bewegung eines Parallelogramms um seine eine Seite entstanden, vorstellen.

(3.) Bewegt sich die Seite einer Pyramide um die Spitze (als um einen vesten Punct), in dem Umfang der Grundfläche: so entsteht die grade Pyramide.

(4.) a. Bewegt sich diese grade Linie im Kreise herum: so entsteht der grade Kegel.

b. Dieser wird auch aus der Bewegung eines rechtwinkelichten Dreiecks, das sich um einen seiner Catheten, als um eine Axe bewegt, erzeugt.

(5.) Die Kugel entsteht, wenn sich ein halber Cirkel um seinen Diameter (als Axe) herumbewegt.

273. a. Ein körperlicher Winkel (angulus solidus) ist die Neigung einiger Flächen gegen einander.

b. Man

102) In der Stereometrie tragen die genetischen Definitionen viel zur Verständlichkeit bei.

103) Dis gilt auch vom Cubus und Parallelepipedum, da sie nur Species vom Prisma (genus) sind.

b. Man kann sich einen körperlichen Winkel aus gradlinigten so zusammengesetzt vorstellen, daß sie in verschiedenen Ebenen zusammen liegen und je 2 einen Schenkel, alle aber eine Spitze gemeinschaftlich haben.

c. Dann gehören also zu einem körperlichen Winkel wenigstens 3 Seiten.

274. Da nun 3 Ebenen erst einen körperlichen Winkel (Ecke) machen: so gehören zu einem Körper wenigstens 4 Ebenen.

---

275. Durch die Grundfläche und eine Seitenfläche, nebst beider Flächenwinkel, ist das ganze Prisma bestimmt. 262.

276. Sind also jene 3 Stücke in mehreren Prismen gleich: so sind die ganzen Prismen sich gleich. [104]) 275.

277. a. Also sind Würfel von gleichen Seiten sich gleich, 264;

b. und gleiche Seiten geben gleiche Würfel und ungleiche ungleiche.

278. Wird ein Prisma von einer Ebene mit der Grundfläche parallel geschnitten: so ist die Durchschnittsfigur der Grundfläche gleich.

279. Theilt man die Seite eines Prisma in lauter gleiche Theile und zieht durch die Theilungspuncte Ebenen mit der Grundfläche parallel: so theilt man auch das ganze Prisma in lauter gleiche Theile. 280.

104) d. h. an körperlichem Inhalte, welches bei dem Worte gleich auch in der Folge allemal gedacht werden muß.

280. Nach 272, (2.), b. ist ein grader Cylinder durch ein Parallelogramm bestimmt.

281. Schneidet man einen Cylinder durch eine Ebene mit der Grundfläche parallel: so erhält man im Durchschnitt wieder einen Kreis, der der Grundfläche gleich und dessen Mittelpunct in der Axe des Cylinders ist. 278.

282. a. Durch eine Grundfläche und einen Punct außerhalb derselben ist die Pyramide und der Kegel bestimmt. 268. 269.

Folglich sind dadurch allemal diese beiden Körper möglich.

b. Auch durch die Grundfläche und Seitenfläche und beider Winkel ist die Pyramide bestimmt.

c. Und ein grader Kegel ist auch durch ein rechtwinkelichtes △ auf der Grundfläche ebenfalls bestimmt. (272, (4.), b.

283. a. Es müssen also Pyramiden, worin gleiche Grund- und Seitenflächen einen gleichen Flächenwinkel einschließen, auch ganz gleich seyn. 282, a.

b. Und Kegel von gleicher Grundfläche und solchen gleichen △△ (282, c.) müssen auch gleich seyn.

284. Ein grader oder senkrechter Kegel ist allemal ein gleichseitiger (272, (4.) b.) und ein schiefer ein ungleichseitiger (scalenus).

285. Diameter — Mittelpunct — Radius — Sehne und Kugelfläche sind leicht zu verstehende Ausdrücke.

286. a. Aus 271. und 272, (5.) folgt, daß alle Radii und Diameter der Kugel gleich sind, und daß folglich nicht nur

b. durch

b. durch den Radius oder Diameter die Kugel gegeben ist, sondern daß auch

c. Kugeln von gleichen Radien oder Diametern gleich seyn, und

d. ungleiche Radii (oder Diameter) auch ungleiche Kugeln geben müssen.

287. Ein Kugelschnitt [105] theilt die Kugel in 2 Abschnitte, die, wenn sie gleich sind (welches geschieht, wenn dieser Schnitt durch den Mittelpunct gehet), Halbkugeln heißen. [106]

288. Jeder eckigte Körper läßt sich aus einem Punct innerhalb desselben in so viel Pyramiden theilen, als ebene Figuren ihn begrenzen. [107] 282, a.

---

289. a. Ein schiefes Parallelepipedum läßt sich in ein senkrechtes verwandeln, das ihm an körperlichem Inhalte vollkommen gleich ist.

b. Dies geschieht, wenn man beiden einerlei Grundfläche und Höhe giebt.

290. Parallelepipeda von gleichen Grundflächen und Höhen sind also gleich.

291. Es wird sich also auch der Cubus in ein schiefwinkelichtes Parallelepipedum verwandeln lassen, welches ihm an körperlichem Inhalte gleich ist. 289.

F　　292. Pris-

105) Hier und überhaupt in der Stereometrie muß man immer bei Schnitt eines Körpers hinzudenken: von einer Ebene, wenn nicht ausdrücklich: von einer krummen Fläche, dabei steht.

106) Bei der sphärischen Trigonometrie noch dasjenige von der Kugel, was dort gleich seine Anwendung bekommt.

107) Dieser Satz wird weiterhin bei den regulären Körpern seine Anwendung bekommen.

292. Prismata von gleichen Grundflächen und Höhen sind gleich.

293. Jedes Parallelepipedum läßt sich durch eine Diagonalfläche in 2 gleiche 3eckigte Prismata theilen.

294. Es muß daher jedes 3eckigte Prisma die Hälfte von einem Parallelepipedum seyn, welches gleiche Grundfläche und Höhe mit ihm hat.

295. a. Und nach 293 muß sich ein vieleckigtes Prisma durch Diagonalflächen in lauter 3eckigte verwandeln lassen, und zwar in so viel als die Grundfläche Seiten hat, weniger 2. 167.

b. Die Summe dieser 3eckigten Prismata wird dem Inhalt des vieleckigten gleich seyn.

296. a. Man kann den Cylinder als ein unendlicheckiges 108) Prisma ansehen, 168, a. Es wird also auch auf ihn passen, was 289 gesagt ist.

b. Und Cylinder mit gleichen Grundflächen und Höhen können nicht in der Größe verschieden seyn.

297. Jedes 3eckigte Prisma läßt sich in 3 Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe 109) zerlegen.

298. Also ist jede 3eckigte Pyramide der 3te Theil eines 3eckigten Prisma von ebenderselben Grundfläche und Höhe.

299. Und da ein vieleckigtes Prisma (295) durch Diagonalflächen in lauter 3eckigte zerlegt werden kann: so muß diese Zerlegung auch bei der Pyramide ihre Richtigkeit haben. 110)

300. Folg-

108) Anm. 74.
109) Folglich in 3 gleiche Pyramiden. 302.
110) Diese Sätze erhalten weiterhin bei Berechnung des körperlichen Inhalts ihre Anwendung.

300. Folglich ist eine vieleckigte Pyramide der 3te Theil eines eben so vieleckigten Prisma. 111) 297.

301. Und daher ist nun jede Pyramide der 3te Theil eines Prisma, welches gleiche Grundfläche und Höhe mit ihr hat.

302. Pyramiden von gleichen Grundflächen und Höhen sind sich also gleich.

303. Einen Kegel kann man als eine Pyramide von unzählich vielen Seiten ansehen. 112)

304. Dann wird also auch der Kegel der 3te Theil vom Cylinder seyn, der mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat.

305. Kegel von gleicher Grundfläche und Höhe sind also gleich.

306. a. Eine Kugel läßt sich als eine Pyramide ansehn, deren Grundfläche und Höhe der Oberfläche und dem Radius der Kugel gleich sind.

b. Und vermöge 303 ist dann die Kugel auch so groß als ein Kegel, dessen Grundfläche der Oberfläche der Kugel und dessen Höhe dem Radius der Kugel gleich ist.

307. Ein Cubus läßt sich verdoppeln. 113)

 308. Zur

111) Nemlich bei einerlei Grundfläche und Höhe.
112) Wenn man Prisma und Cylinder als Körper von einerlei Art (nur unter verschiedenen Namen) betrachtet: so wird das, was bei Vergleichung der Pyramide mit dem Prisma bestimmt wird, auch eben so vom Kegel in Vergleich mit dem Cylinder gelten.
113) d. h. in einen andern verwandeln, der an körperlichem Inhalte noch einmal so groß ist. Dis ist die berühmte delische Aufgabe (problema deliacum).

308. Zur Ausmessung der Körper bedient man sich eines Körpers.[114] Diesen nimmt man zur Einheit an und sucht, wie oft er in einem auszumessenden enthalten sei. Hiezu hat man den (graden) Cubus als den schicklichsten gewählt.

309. Ein Cubus, dessen Seite 1 Fuß ist, heißt ein Cubikfuß — dessen Seite 1 Zoll ist — Cubikzoll u. s. w. Die Bezeichnung ist wie bei dem Längen- und Flächenmaaße.

310. Eine Cubikruthe enthält nun 1000 Cubikfuß, der Cubikfuß 1000 Cubikzoll u. s. w.

311. Es sei nun z. B. ein grades Parallelepipedum 8' lang, 6' breit und 4' hoch, und der zur Einheit angenommene Cubus (308) sei 1' lang, breit und hoch: so kann man ihn (308) im größern Parallelepipedum 8. 6. 4 = 192 mal herumlegen. Also ist der Inhalt des Parallelepipedums = 192 Cubikfuß.

312. Man hat hier ebenfalls[115] den bequemen Ausdruck gewählt: der körperliche Inhalt eines Parallelepipedums ist das Product der Grundfläche in seine Höhe.

313. Da nun jedes schiefe Parallelepipedum in ein grades verwandelt werden kann, 289: so läßt sich auch jedes schiefe Parallelepipedum ausmessen; und es ist (312) das Product seiner Grundfläche in die Höhe.

314. Und da ein 3eckigtes Prisma die Hälfte eines Parallelepipedums ist, welches mit ihm gleiche Grund-

114) Anm. 69. Anm. 73.
115) 161.

Grundfläche und Höhe hat, 294: so ist der Inhalt des 3eckigten Prisma das Product der Grundfläche[116] in die Höhe.

315. Folglich müssen auch (295) vieleckigte (oder überhaupt alle) Prismata dem Producte der Grundfläche in die Höhe gleich seyn.

316. Und weil der Cylinder einem unendlicheckigen Prisma gleich ist, 296: so ist sein Inhalt ebenfalls gleich dem Product seiner Grundfläche in die Höhe.

317. Da eine Pyramide der 3te Theil eines Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe ist, 301: so ist der Inhalt derselben ebenfalls dem Product ihrer Grundfläche in die Höhe dividirt mit 3 (oder dem 3ten Theil der Grundfläche in die Höhe — oder dem Product der Grundfläche in den 3ten Theil der Höhe) gleich.

318. Und eben so ist, da der Kegel dem 3ten Theil eines Cylinders von ebenderselben Grundfläche und Höhe gleicht, 304, sein Inhalt dem Product der Grundfläche in die Höhe dividirt mit 3 (oder, wie vorher, der Grundfläche in $\frac{1}{3}$ der Höhe, oder des 3ten Theils der Grundfläche in die Höhe) gleich.

319. Da man die Kugel für einen Kegel halten kann, (306) und da dieser der 3te Theil eines Cylinders ist (304): so muß auch die Kugel der 3te Theil eines Cylinders seyn, dessen Grundfläche der

116) Nemlich des gefundenen Dreiecks. Ein Parallelogramm aber zur Grundfläche angenommen — das Product mit 2 dividirt.

der Kugelfläche und dessen Höhe dem Radius der Kugel gleich ist.

320. Auch ist die Kugel $\frac{2}{3}$ von einem Cylinder, der einerlei Höhe und Diameter mit ihr hat.

321. Nach 319 muß also der Inhalt der Kugel das Product der Oberfläche in den 3ten Theil des Radius oder 6ten Theil des Diameters seyn, 318. 117)

322. Die Oberfläche der Kugel ist 4 größten 118) Cirkelflächen gleich.

323. Da man nun die Fläche des größten Cirkels findet, wenn man seine Peripherie mit dem 4ten Theil des Diameters (oder halben Radius) multiplicirt, 168: so ist die ganze Oberfläche der Kugel das 4fache Product der Peripherie des größten Cirkels in den Diameter.

324. Multiplicirt man dieses Product (nach 321) noch einmal mit dem 3ten Theil des Radius oder 6sten des Diameters: so bekommt man den Inhalt der Kugel. 306. 321.

325. Wir fanden, daß die Kugel vom Cylinder, wenn beide gleichen Diameter und gleiche Höhe haben, $\frac{2}{3}$ sei, 320.

Wir wissen auch, daß der Kegel vom Cylinder, wenn sie beide gleiche Grundfläche und Höhe haben, $\frac{1}{3}$ sei, 304.

Ver-

117) Es findet sich also, wenn man die Oberfläche der Kugel weiß. 322.

118) Größte Cirkel (circuli maximi) auf der Kugel sind, deren Ebenenmittelpunct der Mittelpunct der Kugel selbst ist.

Vergleichen wir nun diese gefundenen Größen: so finden wir folgendes Verhältniß. Der Cylinder = 1, die Kugel = $\frac{2}{3}$, der Kegel = $\frac{1}{3}$. Also verhalten sich Cylinder, Kugel und Kegel von gleichen Höhen und Durchmessern wie 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ oder wie 3, 2, 1. 119)

326. Von abgekürzten Körpern läßt sich ebenfalls der Inhalt finden. 120)

327. So findet man z. B. eines abgekürzten Kegels Inhalt, wenn man erst den Inhalt des vollständigen Kegels und dann des fehlenden Stückes sucht und diesen von jenem abzieht.

328. Auf dieselbe Art findet man den Inhalt einer abgekürzten Pyramide.

329. Ganz irreguläre 121) Körper mißt man (mechanisch) aus, wenn man sie mit einem regulären 122) umschließt, und den übrigen Raum mit einer flüssigen oder ähnlichen Masse 123) ausfüllt, wo sich dann aus dem Raum, den letztere einnimmt, auch der Raum des erstern finden läßt.

---

330. a. Den Flächeninhalt der Körper findet man,

119) Archimed's Erfindung.

120) Die man auf vollständige reducirt. Es ist nur der Pyramide und des Kegels zu gedenken.

121) Solche, die nicht wie die bisherigen auf eine gewisse regelmäßige Weise begrenzt, sondern so gestaltet sind wie Felsenstücke, Steine, Statüen u. dgl.

122) Z. B. in Parallelepipeda oder solche, worin sie am besten Raum finden.

123) Die dem Körper nicht schadet.

man, wenn man die Oberfläche derselben entwickelt, d. h. als eine ebene Fläche darstellt. 124)

b. So findet man den Flächeninhalt des **Prisma**, wenn man den Inhalt der Grundfläche sucht, ihn doppelt nimmt und zu dem gefundenen Inhalt aller Seitenflächen 125) addirt.

c. Die Grundfläche ist, nach 263, entweder ein △, Viereck oder Vieleck. Die übrigen Flächen allemal Parallelogrammen. Aller deren Inhalt findet man aus 163 u. folg.

d. Die Berechnung ist bei graden und schiefen Prismen dieselbe.

331. a. Entwickelt man die Oberfläche des **Cylinders** und stellt sie auf **einer** Ebene vor: so sieht man außer den 2 gleichen Cirkeln (Grundflächen) ein Parallelogram (welches im graden Cylinder ein Rectangel ist) dessen Grundlinie die Peripherie jenes Zirkels und dessen Höhe die Cylinderhöhe ist.

b. Man suche also den Flächeninhalt der (Cirkel) Grundflächen und den Inhalt des erwähnten Parallelogramms: so wird der Flächeninhalt des ganzen Cylinders leicht zu bestimmen seyn.

c. Die Grundlinie des Parallelogramms findet man aus dem Ludolphschen Verhältniß XLIII. 151.

d. Der Flächeninhalt des schiefen Cylinders wird auf dieselbe Art gefunden.

332. Die

124) Dazu ist nichts geschickter, als wenn man alle diese Körper aus Pappe (als Ebene gedacht) verfertiget, wobei die **Netze** zu denselben nicht nur die ganze Oberfläche der Körper deutlich vor Augen legen, sondern auch 273. 336 u. dergl. erläutern.

125) Parallelogrammen. 262.

332. Die entwickelte Oberfläche der **Pyramide** zeigt entweder ein △, Viereck oder Vieleck als Grundfläche und lauter △△ als Seitenflächen, deren Inhalt zu berechnen auch oben, 163 und folg. gelehrt ist.

333. Beim **Kegel** berechnet man die Cirkelgrundfläche, XLIII; die übrige Oberfläche desselben (des graden nemlich) ist einem Cirkelausschnitt gleich, dessen Bogen der Peripherie der Grundfläche und dessen Radius der Seite des Kegels gleich ist. 198.

334. Will man die Oberfläche eines **abgekürzten Kegels** oder einer **abgekürzten Pyramide** finden: so muß man erst die Oberfläche dieser ganzen Körper und der fehlenden Theile suchen, und eins vom andern abziehen.

335. Die Oberfläche der **Kugel** findet man nach 322.

---

336. Ist ein Körper in lauter gleiche Flächen und gleiche Winkel eingeschlossen: so heißt er **regulär**. Deren sind

I. Das **Tetraëdron**, welches 4 gleiche gleichseitige △△ zu seiner Oberfläche hat, und wo in jeder der gleichen körperlichen Ecken 3 gleiche Winkel, jeder zu 60° den körperlichen Winkel also $= 3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$ bilden.

II. Das **Hexaëdron** oder der **Cubus**, welcher in 6 gleiche Quadrate und in gleiche körperliche Winkel, deren jeder $= 3 \cdot 90^\circ = 270^\circ$, eingeschlossen ist.

III. Das

III. Das Octaëdron, von 8 gleichen gleichseitigen △△ und gleichen Winkeln, von 4. 60° = 240° begränzt.

IV. Das Icosaëdron, von 20 gleichen gleichseitigen △△ und lauter gleichen Winkeln, jeder 5. 60° = 300°, umgeben.

V. Das Dodecaëdron, dessen Oberfläche 12 gleiche reguläre 5ecke sind, die lauter gleiche körperliche Winkel, jeden zu 3. 108° = 324°, machen. [126])

337. Wir können uns nicht nur jede der gleichen Flächen, von denen die regulären Körper eingeschlossen sind, in einen Cirkel beschrieben [127]), sondern jeden dieser 5 regulären Körper in eine Kugel eingeschrieben vorstellen.

Dann liegen die körperlichen Ecken in der Oberfläche der Kugel, und der Mittelpunct der Kugel ist der Mittelpunct des regulären Körpers. [128])

338. Das Quadrat der Seite von Tetraëdron verhält sich zum Quadrat des Diameters der Kugel, worin es beschrieben ist, wie 2 : 3.

339. Das Quadrat der Seite des Cubus oder Hexaë-

drons

126) Mehr reguläre Körper sind nicht möglich, wovon man sich leicht überzeugt. Man müßte denn die Kugel als den 6sten dazu rechnen wollen.

127) Weil sie alle reguläre Figuren sind und jede derselben in einen Cirkel eingeschrieben werden kann. 218.

128) Diese Vorstellung wird uns weiterhin bei Berechnung des körperlichen Inhalts dieser Körper wieder zu statten kommen. Folgende Sätze enthalten die Verhältnisse zwischen Diameter und den Seiten der in die Kugel beschriebenen regulären Körper.

drons verhält sich zum Quadrat des Diameters der Kugel, worin es beschrieben, wie 1 : 3.

340. Das Quadrat der Seite von Octaëdron verhält sich zum Quadrat des Diameters der Kugel, worin es beschrieben, wie 1 : 2.

341. Der größere Theil [129]) einer nach stetiger Proportion [130]) getheilten Diagonale eines im Cirkel beschriebenen regulären 5ecks ist der Seite dieses 5ecks selbst gleich.

342. Und der größere Theil der nach stetiger Proportion getheilten Seite des Cubus ist der Seite des Dodecaëdrons gleich; beide nemlich in 1 Kugel beschrieben.

343. Das Quadrat des Diameters einer Kugel, worin ein Icosaëdron beschrieben, ist 5 mal so groß als das Quadrat des Radius von demjenigen Cirkel, auf welchem das Icosaëdron beschrieben ist. Oder

der Diameter der Kugel besteht auch aus der Seite des Cubus und aus 2 Seiten des 10ecks zusammengenommen die beide in einen Cirkel beschrieben sind.

LXXII. In einer Kugel ein Tetraëdron zu beschreiben. 338.

LXXIII. In einer Kugel ein Hexaëdron zu beschreiben. 339.

LXXIV. In einer Kugel ein Octaëdron zu beschreiben. 340.

LXXV.

129) Mediane.

130) Lineam rectam media et extrema ratione secare.

LXXV. In einer Kugel ein Dodecaëdron zu beschreiben. 342.

LXXVI. In einer Kugel ein Icosaëdron zu beschreiben. 343.

LXXVII. Bei gegebenem Diameter der Kugel die Seiten der 5 regulären Körper, die sich in diese Kugel beschreiben lassen, nebst ihrem Verhältniß gegen einander darzustellen.

---

344. Das halbe Product aller Flächen in die Seiten einer Fläche giebt die Anzahl der Seiten. 131)

345. Das Product der Flächen in die Zahl der Winkel einer Fläche, dividirt durch die Zahl der Winkel, die zu einem körperlichen gehören, giebt die Anzahl der körperlichen Winkel.

346. Die Zahl der Flächen multiplicirt mit der Zahl der Seiten einer Fläche giebt die Zahl der ebenen Winkel auf jedem regulären Körper.

LXXVIII. Den Neigungswinkel der Ebenen in den 5 regulären Körpern zu finden.

---

347. Wenn der Diameter der Kugel bestimmt ist: so lassen sich nach dem Bisherigen die Seiten der 5 regulären Körper auch berechnen. 132)

348. Sind die Seiten gefunden: so lassen sich auch die Flächen finden.

Multiplicirt man nun eine Fläche mit der Anzahl aller Flächen: so erhält man die ganze Oberfläche.

---

131) Die Anzahl der Seiten der körperlichen und der ebenen Winkel bei den regulären Körpern finden sich also leicht aus 344. 345. 346.

132) Geometrisch fanden wir sie durch LXXVII.

349. Und dann läßt sich auch der körperliche Inhalt aller regulären Körper finden, wobei 288 seine Anwendung bekommt. 133)

350. Aus den bisher gefundenen Verhältnissen bei den regulären Körpern lassen sich noch folgende Aufgaben auflösen.

LXXIX. Die 5 regulären Körper so zu machen, daß alle eine gleiche Seite haben.

LXXX. Die 5 regulären Körper so zu machen, daß alle eine gleiche Oberfläche haben.

LXXXI. Die 5 regulären Körper so zu machen, daß alle einen gleichen körperlichen Inhalt haben.

---

351. Da Körper durch ihre Flächen, die sie einschliessen und deren Neigungen oder Winkel bestimmt werden: so werden Körper, die von gleich vielen ähnlichen Flächen und gleichen Flächenwinkeln begrenzt werden, ähnliche Körper seyn.

352. Also sind alle gleichnahmige reguläre Körper, auch alle Kugeln einander ähnlich. 134)

353. Wird ein Prisma von einer Ebene durch irgend einen Punct mit der Grundfläche parallel geschnitten: so verhalten sich die daraus entstandenen Prismata wie ihre Seiten oder auch wie ihre Höhen gegen einander. 292. 176. Ar. 82, b.

354. Da nun Cubus und Parallelepipedum ebenfalls

---

133) Also nicht 312, wenigstens nicht geradehin.

134) Man muß bei 351 natürlich hinzudenken: gleichliegende, homologe Seiten und Winkel. 183.

falls Prismata sind, 264: so gilt eben dis auch von ihnen.

355. Prismata, oder Cylinder, oder Pyramiden, oder Kegel verhalten sich bei gleichen Grundflächen wie ihre Höhen, und bei gleichen Höhen wie ihre Grundflächen. 315. 316. 317. 318.

356. Auch verhalten sich Cylinder von gleichen Höhen wie die Quadrate der Durchmesser ihrer Grundflächen. 201.

357. Mehrere Pyramiden oder Kegel von gleicher Höhe sind zusammen so groß, als **ein** solcher Körper von gleicher Höhe, dessen Grundfläche allen ihren Grundflächen zusammengenommen gleich ist. 302.

358. Prismata sind in zusammengesetztem Verhältniß ihrer Grundflächen und Höhen.

359. Würfel stehen also im triplicirten 135) Verhältniß ihrer Seiten.

360. Sind 4 grade Linien proportional: so sind auch ihre Würfel proportional und umgekehrt. 136) 359. Ar. 82. 275.

361. Prismata, welche ähnliche Grundflächen haben, und in denen die Höhen den gleichliegenden Seiten der Grundflächen proportional sind, verhalten sich, wie die Cubi der gleichnamigen Seiten oder auch der Höhen. 360.

362. Sind daher in 2 Prismen die Grundflächen und Seitenflächen ähnlich, und die Flächenwinkel gleich:

135) 3fach höhern.

136) d. h. sind 4 Cubi proportional: so sind auch ihre Seiten ebenfalls proportional.

gleich: so werden sie sich, nach 360, wie die Würfel der Seiten gegen einander verhalten.

363. a. Die Kugel verhält sich zum Cubus ihres Diameters wie 157 : 300.

b. Und da (352) Kugeln ähnliche Körper sind: so verhalten sie sich gegen einander, wie die Cubi ihrer Diameter. 137)

364. Vom **Visiren** der **Fässer** mündlich.

137) Im 14. und 15. Buch der Euclid'schen Elemente, die beide ein Zusatz von **Hypsicles** (Mathematiker in Alexandrien im 2. Seculo) sind, finden sich noch einige Verhältnisse bei den regulären Körpern.

$x = \frac{c}{2}$

$cx = c^2$

$x : b = b : c$

$xc = b^2 = \frac{c^2}{2} = \frac{1}{2}c^2$

$2b^2 = c^2$

$b^2 + b^2$

$3b^2 = c^2 + b^2$

$3b^2 = a^2$ Ebene

Ebene Trigonometrie.

1. Trigonometrie (überhaupt) lehrt, aus 3 bekannten Stücken eines △ die übrigen 3 durch Rechnung finden.
2. Ebene Trigonometrie (trigonometria plana) beschäftigt sich mit gradlinigten oder ebenen △△, sphärische 1) (trigonometria sphærica) mit △△, die sich auf der Oberfläche oder an der innern Höhlung einer Kugel bilden.
3. a. In der sphärischen Trigonometrie können die 3 gegebenen Stücke eines △ entweder Seiten oder Winkel oder beides zugleich seyn.
   b. In der ebenen aber muß unter den gegebenen 3 Stücken wenigstens 1 Seite sich befinden. 2)
4. Also lehrt ebene Trigonometrie aus 3 in Zahlen gegebenen Stücken eines △, wobei aber wenigstens 1 Seite seyn muß, die übrigen durch Rechnung finden.
5. 2 Radii eines Cirkels bilden einen Winkel. Zieht man von dem Punct des einen, wo er die Peripherie trifft, ein Perpendikel auf den andern: so heißt dieses der Sinus des Winkels oder dessen Bogens.

6. Ein

1) Hat ihren Ursprung aus der Astronomie. Daraus schliesse man aber nicht, daß sie auch nur in der Astronomie anzuwenden sei.
2) Ursach von a in der sphärischen Trigonometrie: 41, a.

6. Ein anderes Perpendikel, auf den Punct, wo der eine Radius mit der Peripherie zusammenkommt, bis dahin, wo es von dem andern verlängerten Radius geschnitten wird, heißt die Tangente dieses Winkels oder dessen Bogens. G. 131.
7. Der verlängerte Radius bis dahin, wo er die Tangente schneidet, heißt die Secante des Winkels oder Bogens. 3)
8. Die Anzahl Grade, Minuten u. s. w., die einem Winkel unter 90° fehlen 4), nennt man das Complement 5) (Ergänzung) desselben.
9. Setzt man zu obigen beiden Radien (5) noch einen unterm rechten Winkel: so wird der neue Winkel oder dessen Bogen das Complement von ersterem.
10. In diesem andern Winkel (als Complement des erstern) kann man sich auch den Sinus, die Tangente und Secante ziehen, welche in Beziehung auf den ersten Winkel Cosinus, Cotangente und Cosecante heissen.
11. a. Wenn der Winkel seine Größe ändert: so ändert auch der Sinus seine Größe und seine Stelle.
    b. Alle Sinus laufen auf demselben Radius 6) miteinander parallel.
    c. Bei Veränderung des Winkels verändert auch die Tangente ihre Größe, aber nicht ihre Lage.
    d. Bei Aenderung des Winkels ändert sich die

 Größe

3) Diese 3 Hauptlinien muß man augenblicklich anzugeben wissen. Sinus, Tangente, Secante eines Winkels oder dessen Bogens ist einerlei. G. 102.
4) Nemlich an 90° noch fehlen.
5) Von complere.
6) Oder Diameter.

Größe der Secante; ihre Lage so, daß ihr einer Endpunkt immer im Centro des Cirkels bleibt.

12. a. Man nenne die von 2 sich rechtwinklicht durchschneidenden Diametern entstehenden 4 gleichen Theile des Cirkels den 1sten, 2ten, 3ten und 4ten Quadranten.

b. Wendet man nun 11 darauf an: so
nehmen die Sinus im 1sten u. 3ten Quadranten zu,
⸗ 2 ⸗ ⸗ 4 ⸗ ⸗ ab.

c. Das **Minimum** eines Sinus ist = o, das Maximum = r.

13. a. 11 auf die Tangenten angewandt: so
nehmen die Tangenten im 1sten u. 3. Quadranten zu,
⸗ 2 ⸗ ⸗ 4. ⸗ ab.

b. Das Minimum einer Tangente ist = o, das Maximum = ∞.

14. a. Auf die Secanten 11 angewandt: so
nehmen diese im 1sten und 3ten Quadranten zu,
⸗ 2 ⸗ ⸗ 4 ⸗ ⸗ ab.

b. Die kleinste Secante ist = r, die größte = ∞.

15. a. Bei den Cosinussen, Cotangenten und Cosecanten muß es nun der umgekehrte Fall seyn. 7) Wir können also vestsetzen:

b. Die Cosinus nehmen im 1. u. 3. Quadranten ab,
⸗ 2. ⸗ 4. ⸗ zu.

c. Eben dis thun die Cotangenten.

d. Und eben so ists mit den Cosecanten.

16. Um nun das Bisherige leicht zu übersehen, fassen wir alles zusammen.

a) Die

7) Denn wenn ein Winkel zunimmt: so muß sein Complement abnehmen.

a) Die Sinus, Tangenten und Secanten nehmen (bei zunehmendem Winkel) im 1. und 3. Quadranten zu, im 2. und 4ten ab.
Bei den Cosinus, Cotangenten und Cosecanten findet das Gegentheil statt.

b) Die kleinste Größe des Sinus oder Cosinus ist = o und die größste = r.
Die kleinste Größe der Tangente oder Cotangente ist = o, die größte = ∞.
Die kleinste Größe der Secante oder Cosecante ist = r, die größte = ∞.

c)

Sinus	0° =	0	Cosinus	0° =	r
—	90° —	r	—	90° —	0
—	180° —	0	—	180° —	r
—	270° —	r	—	270° —	0
—	360° —	0	—	360° —	r
Tangente	0° =	0	Cotangente	0° =	∞
—	90° —	∞	—	90°	0
—	180° —	0	—	180° —	∞
—	270° —	∞	—	270° —	0
—	360° —	0	—	360° —	∞
Secante	0° =	r	Cosecante	0° =	∞
—	90° —	∞	—	90° —	r
—	180° —	r	—	180° —	∞
—	270° —	∞	—	270° —	r
—	360° —	r	—	360° —	∞

17. a. Der Sinus eines Winkels (oder Bogens) theilt den Radius (auf dem er perpendiculär steht 5)

 in

in 2 Theile, wovon der zwischen ihm 8) und der Peripherie der **Sinus versus**, **Quersinus** (Pfeil, Sagitta) des Winkels genannt wird.

b. Der andere Theil des Radius (zwischen Sinus und Centrum) ist dem Cosinus des Winkels gleich. 9)

c. Also r — cosinus = sinus versus.

18. Der Sinus versus des Complements wird nun der **Cosinus versus** seyn. Cosinus versus = r — sinus. 17.

19. Obige Betrachtungen (11) hierauf angewandt: folgt:

a) Der Sinus versus nimmt im 1. u. 2. Quadr. zu,
〃 3. 〃 4. 〃 ab.

b) Bei dem Cosinus versus ists umgekehrt.

c) Die kleinste Größe des Sin. vers. oder Cos. vers. ist = 0, die größte 2 r.

d)

Sin. vers.		Cos. vers.	
	0° = 0		0° = r
—	90° — r	—	90° — 0
—	180° — 2r	—	180° — r
—	270° — r	—	270° — 2r
—	360° — 0	—	360° — r

20. a. Wenn man den Sinus verlängert, bis er abermals die Peripherie erreicht: so entsteht eine Sehne.

b. Also ist jeder Sinus eines Bogens die halbe Sehne dieses doppelten Bogens.

21. a.

8) Dem Sinus.
9) Also bestimmt der Sinus den Cosinus und Sinus versus.

21. a. Vergleichen wir den Sinus eines Winkels (oder Bogens) unter 90° mit einem über 90°, so daß einer das Complement des andern zu 180° ist: 10) so finden wir in beiden keinen Unterschied.

b. Also ist der Sinus eines Winkels (oder Bogens) auch der Sinus seines Complements zu 180°. 11)

22. Sehen wir auf die **Lage** dieser trigonometrischen Linien im Kreise: so bemerken wir eine andere Eigenschaft derselben, die noch wichtiger ist. 12)

23. Die Sinus von 0° bis 180° stehen alle auf **einer Seite** des Diameters **parallel**. 11, b. Die von 180° bis 360° auch parallel, aber auf der **entgegengesetzten Seite** des Diameters. 13)

24. Man kann also zur Bezeichnung der Sinus die Zeichen für entgegengesetzte Größen, nemlich + und — gebrauchen. 14)

25. Man ist darin übereingekommen, **alle trigonometrischen Linien im ersten Quadranten positiv anzunehmen, also ihnen das Zeichen + zu geben.** 15)

26. a.

10) Z. B. den von 30° mit dem von 150°
11) Geometrie, 94.
12) Und für trigonometrische Rechnungen **unentbehrlich.**
13) Den erstern also **grade entgegen.**
14) Arithmetik, 47.
15) Es läßt sich also durch eine kleine Betrachtung und Zeichnung oder auch weiter unten (18. Anm.) das + und — leicht bestimmen. Dergleichen muß man nie in der Mathematik scheuen. Sie sind ein Prüfstein des mathematischen Kopfes — die beste Art, mit den trigonometrischen Linien bekannt zu werden, und nie — ohne Lohn. Uebrigens hat man sich, da in der ebenen Trigonometrie Win-

26. a. Also sind die Sinus
im 1sten und 2ten Quadranten positiv,
= 3 = = 4 = = = negativ.
b. Die Cosinus sind
im 1sten und 4ten Quadranten positiv,
= 2 = = 3 = = = negativ.
c. Die Tangenten und Cotangenten sind
im 1sten und 3ten Quadranten positiv,
= 2 = = 4 = = = negativ.
d. Die Secanten sind [16]
im 1sten und 4ten Quadranten positiv,
= 2 = = 3 = = = negativ.
e. Die Cosecanten sind [17]
im 1sten und 2ten Quadranten positiv.
= 3 = = 4 = = = negativ.

27. Die Sinus versus sind durchaus positiv. [18]

28. Da nach 12, c und 16, c die Sinus (oder Cosinus) nie größer als der Radius werden können: so kann man, wenn man den r als 1 annimmt, alle Sinus (oder Cosinus) als Theile vom Radius oder als ächte Brüche desselben ansehen.

In dieser Rücksicht hat man auch den größten Sinus = r den **Sinus totus** genannt. [19]

29. Diese

Winkel und Bögen über 180° zu vermeiden sind, nur mit den ersten beiden Quadranten und besonders mit Sin. Cosinus, Tangente und Cotangente bekannt zu machen.

16) Wie die Cosinus.

17) Wie die Sinus.

18) Das + und − der trigonometrischen Linien läßt sich auch durch die Proportionen in 29 festsetzen.

19) Es ist nicht nur sehr natürlich den Radius, auf den alle tri-

29. Diese trigonometrischen Linien [20] stehen mit dem Halbmesser = r in folgenden Proportionen, die sich aus den Eigenschaften ähnlicher $\triangle\triangle$ ergeben.

1) $\cos. : \sin. = r : \text{tang.} \ldots \text{tang.} = \frac{r.\ \sin.}{\cos.}$

2) $\cos. : r = r : \sec. \ldots \sec. = \frac{r^2}{\cos.}$

3) $\sin. : \cos. = r : \cot. \ldots \cot. = \frac{r.\ \sin.}{\sin.}$

4) $\sin. : r = r : \text{cosec.} \ldots \text{cosec.} = \frac{r^2}{\sin.}$

30. Daraus erhellet die Möglichkeit, eine trigonometrische Linie aus der andern zu finden.

31. Da nun alle Cirkel einander ähnlich sind [21], folgl. die Sehnen ähnlicher Bogen zu ihren Radien dasselbe Verhältniß haben [22]: so müssen auch die Sinus, da sie die Hälften der Sehnen sind (20) eben dasselbe Verhältniß zu ihren Radien haben.

Also müssen die trigonometrischen Linien in allen Cirkeln einerlei Verhältniß haben.

32. Also

trigonometrischen Linien bezogen, folglich in ihrem Verhältniß zu ihm bestimmt werden, wodurch er also der Maaßstab derselben wird, als **Einheit** anzunehmen, sondern es werden auch alle trigonometrische Rechnungen dadurch ungemein abgekürzt und erleichtert.

20) Von denen bisher die Rede gewesen, als Sinus, Cosinus, Tangente, Cotangente u. s. w. und die man auch **ttigonometrische Hülfslinien** nennt.

21) Geometrie, 183, d.

22) Geom. 201.

32. Also wird es gleichgültig seyn, wie groß man bei Berechnung dieser Verhältnisse den Radius annehme. 23)

33. Obige Proportionen (29) erfodern aber 24) ausser dem Radius noch 2 bekannte Größen.

34. Die Geometrie lehrt, aus dem Radius 2 Sinus finden, Sinus 30° und Sinus 45°. 25)

35. Aus dem Sinus lassen sich allemal auch Cosinus, Tangente, Cotangente, Secante und Cosecante finden.

36. Man nehme (32) den Radius zu 10000000 Theilen 26) oder 1,0000000 an 27); und suche (34) einen Sinus z. B. von 30°: so wird sich aus letzterm auch (35) sein Cosinus u. s. w. finden lassen.

37. Aus dem bekannten Sinus eines Bogens oder Winkels den Cosinus, die Tangente, Cotangente, Secante und Cosecante zu finden?

38. Aus 3 Sinussen, nemlich aus dem Sinus 30° 28), 45° und 36° 29) lassen sich alle übrigen, mithin (35) alle trigonometrische Linien finden.

39. Aus dem Sinus eines Bogens den Sinus des halben Bogens zu finden?

40. Aus

23) Man nimmt ihn groß an, um die trigonometrischen Linien desto genauer zu erhalten. Oder nach 28 als 1, so drückt man dieselben in mehrern Decimalstellen aus.
24) So wie jede andere Proportion. Ar. 79.
25) Auch die Tangente 45°.
26) 10 Millionen.
27) 1 mit 7 Decimalstellen.
28) Daraus durch 39 den Sinus 15°.
29) Oder 18°.

40. Aus dem bekannten Sinus eines Bogens den Sinus des doppelten Bogens zu finden.

41. Aus bekannten Sinussen und Cosinussen 2er Bogen (a und b) die Sinus und Cosinus der Summe oder des Unterschieds beider Bogen zu finden?

42. Vorige Aufgabe läßt uns finden:

1) Sin. $(a + b) = \sin. a. \cos. b + \cos. a. \sin. b$
2) sin. $(a - b) = \sin. a. \cos. b - \cos. a. \sin. b$
3) cos. $(a + b) = \cos. a. \cos. b - \sin. a. \sin. b$
4) cos. $(a - b) = \cos. a. \cos. b + \sin. a. \sin. b$

43. a. Hiernach kann man also durch den ganzen (ersten) Quadranten alle Sinus und Cosinus (folgl. nach 37) alle trigonometrische Linien von 3° zu 3° finden.

b. Nach 21 sind dann auch dieselben von 90° bis 180° leicht bestimmt.

44. Und nach 39 findet man die trigonometrischen Linien für noch kleinere Bögen; wo sich zugleich ergiebt, daß dergleichen kleine Bögen sich eben so wie ihre Sinus verhalten. 30)

45. Dadurch wird es leicht alle trigonometrischen Linien nicht nur von Minute zu Minute, sondern auch von Secunde zu Secunde 31) zu berechnen.

46. Geschichte der Tafeln.

47. Die allgemeine Theorie der trigonometrischen Rechnungen liegt in folgenden Sätzen.

I. a. In jedem rechtwinkelichten △ verhält sich die Hy=

30) Geom. 146. 147.
31) Ja wenn man wollte, auch für Tertien.

Hypotenuse zu einem der Catheten, wie der Radius zum Sinus des Gegenwinkels dieses Catheten.

b. Und ein Cathete zum andern, wie der Radius zur Tangente des Gegenwinkels vom andern Catheten. Und umgekehrt. 5. 6. 7.

II. In jedem △ 32) verhalten sich die Seiten wie die Sinus ihrer Gegenwinkel, und umgekehrt. 20.

III. In jedem △ verhält sich die Summe 2er Seiten zu ihrem Unterschied, wie die Tangente der halben Summe beider Gegenwinkel zur Tangente ihrer halben Differenz. Ar. XVIII.

IV In jedem △, wenn man aus einer beliebigen Ecke desselben mit einer der beiden anliegenden Seiten einen Cirkel beschreibt: so entstehen folgende Verhältnisse.

a) Wenn man mit der längern der beiden (anliegenden) Seiten den Cirkel beschreibt und die 3te Seite bis zum Umkreise verlängert: so verhält sich diese 3te Seite zur Summe der beiden andern, wie ihr Unterschied zu jener Verlängerung. G. 180.

b) Beschreibt man aber mit der kürzern Seite den Cirkel und verlängert die größere bis zum Umkreis: so verhält sich die 3te Seite zur Summe der beiden andern umgekehrt wie die Segmente ausser dem Cirkel. G. 190.

48. Mit Hülfe dieser I – IV und des pythagorischen Lehrsatzes 33) lassen sich alle nur vorkommende Fälle

32) Versteht sich gradlinigten, denn in der ebenen Trigonometrie ist von keinen andern △△ die Rede. 2.

33) Geom. 82.

Fälle in der ebenen Trigonometrie auflösen, wie folgende Tafeln zeigen. 34)

49. In jedem rechtwinkelichten △ ist ein schiefer Winkel das Complement des andern; 35) Folglich Sinus, Tangente, Secante des einen schiefen Winkels, Cosinus, Cotangente, Cosecante vom andern.

Tafel

zur Auflösung rechtwinkelichter △△

△ = ABC, Gegenseiten a, b, c. A = R.

Fälle.	Geg.	Ges.	Proport. und Auflös.	
1.	b. c.	a	$b^2 + c^2 = a^3$	Geom. 82.
	a. c.	b	$a^2 - c^2 = b^2$	Geom. 83.
	a. b.	c	$a^2 - b^2 = c^2$	Geom. 83.
2.	a. B.	b oder	r : sin. B = a : b	47. I. a.
		c	r : cos. B = a : b	47. I. 49.
3.	c. B.	b	r : tang. B = c : b	47. I. b.
	c. C.		r : cot. C = c : b	47. I. b. 49.

Die Aufgabe sei wie sie wolle, so bringe man nur, nach 29 u. Ar. 80. die gegebenen Stücke mit dem Gesuchten in solche Proportion, wo das Gesuchte das 4te Glied wird. Ob nun in der Proportion Sin. oder Tang. vorkommen müssen, sieht man aus den gegebenen Stücken und 47, I.

Tafel

34) Worin alle nur mögliche Fälle vorkommen. Wenn auch die Data anders scheinen, so läßt sich aus der Tafel doch die jedesmalige Antwort finden.

35) Geom. 55. 56.

Tafel
für schiefwinkelichte ΔΔ
Δ ABC, Gegenseiten a, b, c.

Fälle.	Geg.	Ges.	Proport. u. Gleich. zur Aufl.	
1.	B. A. b. a. b. A.	a B	sin. B : sin. A = b : a a : b = sin. A : sin. B 36)	47. II. 47. II.
2.	a. b. C.	A oder B	$(b+a) : (b-a) = \text{tang.} \frac{1}{2}(B+A) : \text{tang.} \frac{1}{2}(B-A)$	47. III.
3.	a. b. C.	c	Durch 2 und 1 oder durch: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \text{ Cos. } C$ 37)	Geom. 87.
4.	a. b. c.	C	Durch 47. IV. od. durch $\text{Cos. } C = \frac{(a^2+b^2-c^2)}{2ab}$	

36) Dieser einzige Fall ist im Allgemeinen 2deutig.
37) Geom. 87. Die Formel läßt sich auch auf ein stumpfwinkelichtes Δ anwenden, wegen 26, b.

Sphä-

Sphärische Trigonometrie.

1. a. Sphärische Trigonometrie behandelt diejenigen ΔΔ, welche sich aus 3 Bogen auf der Oberfläche oder an der inwendigen Höhlung einer Kugel ergeben;
   b. und lehrt, wie aus 3 gegebenen Stücken eines sphärischen Δ, sie mögen nun Seiten oder Winkel oder theils Seiten theils Winkel seyn, die 3 andern durch Rechnung sich finden lassen. 1)
2. Ihren Ursprung hat sie von der Astronomie genommen, in deren sphärischen Theil 2) sie vorzüglich ihre Anwendung bekommt. 3)
3. a. Kugel ist (Geom. 271.) ein Körper, dessen Oberfläche von einem Punct innerhalb demselben überall (d. h. in allen ihren Puncten) gleich weit absteht.
   b. Dieser Punct ist der Mittelpunct (centrum) der Kugel.
   c. Die ganze Oberfläche die Kugelfläche.
   d. Jede grade Linie von der Oberfläche nach dem Mittelpunct ein Radius oder Halbmesser der Kugel.

e. Eine

1) Hierin unterscheidet sie sich schon von der ebenen. E. T. 3.
2) Der sich mit Erscheinungen an der Himmelskugel beschäftigt.
3) Auch in den von der Astronomie abstammenden Wissenschaften, als mathematischen Geographie, Gnomonik, ja selbst dem Feldmesser ist sie nöthig.

e. Eine grade Linie von einem Punct der Oberfläche zu einem andern (die also allemal innerhalb der Kugel liegt) eine Sehne;

f. und wenn diese durch den Mittelpunct geht, ein Durchmesser (diameter) der Kugel.

4. a. Kugel entsteht (S. 272, (5)) wenn ein halber Cirkel sich um seinen ruhenden Diameter bewegt.

b. Stellt man sich einen Diameter der Kugel, um den sie sich bewegt, als ruhend vor: so bekommt man durch ihn den Begriff einer Axe der Kugel.

c. Die äussersten Puncte der Axe 4) sind die Pole der Kugel; deren 2 sind, die in der Entfernung des Diameters einander gegenüber liegen.

5. Eine von dem Schnitt einer Ebene entstandene ebene Figur heißt ein Kugelschnitt (sectio sphærica).

6. a. Alle Radii der Kugel sind gleich. 3. a. d.

b. Und der Durchmesser besteht aus 2 Radien (3, f.) folglich sind auch alle Durchmesser der Kugel gleich. 3, a. f.

7. a. Durch den Radius oder Diameter ist also die Kugel bestimmt.

b. Folglich sind alle Kugeln von gleichen Radien oder Diametern gleich. 4, a.

8. Jeder Kugelschnitt ist eine Kreisebene (Cirkelfläche) deren Mittelpunct im Durchmesser der Kugel liegt.

9. Also steht ein Durchmesser der Kugel, der durch den Mittelpunct eines Kugelschnitts geht, senkrecht auf dieser Kreisebene.

10. Die-

4) In der Oberfläche.

10. Dieser Durchmesser heißt des Cirkels Axe, und die beiden in der Oberfläche der Kugel liegenden Puncte desselben des Cirkels Pole.

11. a. Ein Pol eines Cirkels auf der Kugel ist von allen Puncten desselben gleichweit entfernt.

b. Also sind Linien aus jedem Punct des Cirkels nach einem Pol gezogen, alle einander gleich.

12. Größte Cirkel auf der Kugel sind solche, deren Ebenenmittelpunct der Mittelpunct der Kugel selbst ist.

13. a. Von einem größten Cirkel ist also der Theil der Axe auf der einen Seite dem Theil der Axe auf de. andern Seite gleich, und also ist vom größten Cirkel der eine Pol so weit als der andere.

b. Hingegen bei einem kleinen Cirkel ist, (weil seine Ebene nicht durch den Mittelpunct der Kugel geht) der eine Pol weiter von ihm als der andere. 5)

14. a. Der Durchmesser eines größten Cirkels ist dem Durchmesser der Kugel gleich. 12.

b. Der Durchmesser eines kleinern Cirkels aber ist kleiner als der Durchmesser der Kugel.

c. Nach 4, a. ist der Durchmesser eines größten Cirkels dem Durchmesser des Cirkels gleich, aus dem die Kugel entstand,

d. und der Durchmesser des kleinern Cirkels (irgend) einer Sehne dieses Cirkels.

15. Der größte Kugelschnitt geht durch den Mittelpunct der Kugel. 8.

16. Alle

5) Doch jeder von allen Puncten des Cirkels gleich weit entfernt. 11.

16. Alle größte Cirkel auf einer Kugel sind gleich. 14. a. c.

17. Geht ein größter Cirkel durch einen Punct a. auf der Kugel: so geht er auch durch den b, der erstern um den Diameter entgegenliegt.

18. Die grade Linie also zwischen den beiden Puncten, wo sich 2 größte Cirkel schneiden, ist ein Durchmesser der Kugel.

19. Ein größter Cirkel theilt die Kugel in 2 gleiche Theile (Halbkugeln).

20. Größte Cirkel theilen einander in die Hälfte und umgekehrt.

21. Eine grade Linie von einem Pol eines Cirkels nach dem andern geht durchs Centrum der Kugel und die von einem Pol durchs Centrum — in den andern Pol.

22. Geht also ein Cirkel durch die Pole eines andern: so muß er ein größter Cirkel seyn. 21. 17.

23. a. Die Bögen eines größten Cirkels, die zwischen einem andern größten Cirkel und dessen Polen liegen, sind allemal Quadranten; und wenn die Bögen eines größten C. die zwischen einem andern Cirkel und dessen Polen liegen, Quadranten sind: so ist dieser andere C. ein größter.

b. Die Bögen eines größten C. aber, die zwischen einem kleinern C. und dessen Pole liegen, sind auf der einen Seite größer als auf der andern.

24. Geht ein größter C. durch die Pole eines andern größten C., so geht letzterer auch durch die Pole des erstern; und sie schneiden sich unter rechten Winkeln.

25. Theilt ein größter C. einen kleinern in 2 gleiche Theile: so schneidet er ihn unter rechten Winkeln und geht durch dessen Pole und umgekehrt.

26. Ein sphärischer Winkel wird durch 2 sich schneidende größte Cirkel gebildet.

Der Durchschnittspunct ist die Spitze, die beiden Bogen die Schenkel des Winkels.

27. Die Größe oder das Maaß eines sphärischen Winkels wird zwischen seinen Schenkeln von demjenigen Bogen eines größten Cirkels bestimmt, dessen 6) Pol in der Spitze des Winkels liegt. 7)

28. Dieselben Cirkel bilden nochmal denselben Winkel (17), die beide auf derselben Halbkugel zwischen denselben Schenkeln liegen. 8)

29. Wenn 2 größte Cirkel sich wechselseitig in den Polen eines 3ten größten Cirkels schneiden: so geht letzterer durch die Pole der beiden ersten.

30. Schneiden sich 2 größte Cirkel unter einem gewissen Winkel: so ist derselbe dem Abstand ihrer Pole gleich. 9)

31. Cirkel, deren Mittelpuncte 10) vom Centro der Kugel gleich weit entfernt sind, sind gleich.

32. Also können von allen den Cirkeln, die mit einem andern auf der Kugel parallel liegen, nur 2 gleich seyn.

6) Größten Cirkels nemlich.
7) Man kann ihn auch auf andere Art bestimmen.
8) Und wie wir weiter unten sehen werden, 2mal 4 gleiche Winkel.
9) Darum ist Aequatorhöhe und Abstand des Zeniths vom Pol allemal gleich, und Aequatorhöhe und Polhöhe immer Complemente von einander.
10) Ebenenmittelpuncte.

33. Liegen die vom Mittelpuncte der Kugel gleich weit entfernte Mittelpuncte der Kreise zugleich in der Axe eines größten Cirkels: so laufen sie mit diesem parallel.
34. Sind die Bogen zwischen 2 kleinern und dem größten Cirkel der zwischen ihnen liegt, gleich: so sind auch die 2 kleinern Cirkel sich gleich.
35. Ueberhaupt müssen Cirkel, zwischen denen die Bogen eines größten Cirkels gleich sind, parallel mit einander seyn.
36. Liegen die Mittelpuncte 2er Cirkel vom Centro der Kugel in ungleichen Entfernungen: so ist derjenige Cirkel, dessen Mittelpunct weiter absteht, kleiner als der andere.
37. Parallelcirkel haben einerlei Pole und umgekehrt. Und die Bogen eines durch ihre Pole gehenden Cirkels zwischen ihnen müssen (nach 35) gleich seyn.
38. a. Sphärische Nebenwinkel sind zusammen 2 rechten gleich. Und
b) sphärische Verticalwinkel sind gleich.
c) Alle sphärische Winkel um einen Punct sind 4 rechten gleich.
39. Bogen 2er Parallelcirkel, die von 2 größten Cirkeln abgeschnitten werden, sind, wenn beide Parallelcirkel gleich sind, auch gleich, wo nicht — ähnlich.
40. Die kürzeste Linie auf der Kugel von einem Punct zum andern 11) ist der zwischen ihnen liegende kleinere Bogen eines größten Kreises.

41. a.

11) Also beider Puncte Abstand oder Entfernung von einander.

41. a. Sphärische △△, wie sie hier betrachtet werden, bestehen aus Bogen größter Kreise.
b. Rechtwinklicht heißt dasselbe, wenn 1 oder mehrere rechte Winkel 12), schiefwinkelicht, wenn alle Winkel schief darin sind.
42. In einem rechtwinkelichten sphärischen △ heissen die den rechten Winkel einschliessenden Seiten die Perpendikel (einer von ihnen heißt auch wol Grundlinie) und die dem rechten Winkel gegenüberliegende — Hypotenuse.
43. In jedem sphärischen △ ist jedwede Seite kleiner als ein halber Cirkel.
44. Wenn in 2 oder mehreren sphärischen △△ 2 Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gleich sind: so sind die △△ gleich.
45. Sind in 2 oder mehrern sphärischen △△ 2 Winkel und die davon eingeschlossene Seite gleich: so sind die △△ ganz gleich.
46. Sind alle 3 Seiten in 2 oder mehrern sphärischen △△ gleich: so sind die ganzen △△ einander gleich.
47. In einem gleichschenkelichten sphärischen △ sind die Winkel an der Grundlinie gleich und umgekehrt. 13)
48. In jedem sphärischen △ sind 2 Seiten zusammengenommen größer als die 3te.
49. In jedem sphärischen △ sind alle 3 Seiten zu-

H 2. sam-

12) Wieviel rechte Winkel in einem sphärischen △, wie groß oder klein ein oder alle Winkel sind, davon weiter unten, 53.
13) Hieraus ist nun leicht auf ein gleichseitiges (oder gleichwinkelichtes) zu schliessen.

sammen genommen kleiner als die Peripherie des größten Cirkels.

50. In jedem sphärischen △ liegt die größere Seite dem größeren Winkel und dem kleinern die kleinere Seite gegenüber.

51. a. Wenn in einem sphärischen △ (ABC) 2 Seiten (AB, BC) zusammen einem halben Cirkel gleich sind: so ist, bei verlängerter 3ten Seite (AC) der äussere Winkel (bei C) dem innern entgegengesetzten (A) gleich.

b. Sind aber die beiden Seiten zusammen (AB + BC) kleiner als ein halber Cirkel: so ist jener äussere Winkel größer als der innere entgegengesetzte.

c. Und sind endlich jene 2 Seiten zusammen größer als ein halber Cirkel: so ist der äussere Winkel kleiner als der innere entgegengesetzte, und umgekehrt.

52. Wenn in einem sphärischen △ 2 Seiten zusammen entweder einem halben Cirkel gleich oder größer als derselbe, oder kleiner sind: so werden die Winkel an der 3ten Seite im ersten Fall 2 rechten gleich, im 2ten größer, im 3ten kleiner als 2 rechte seyn, und umgekehrt.

53. In jedem sphärischen △ ist jedweder Winkel kleiner als 2 rechte, alle 3 zusammen sind kleiner als 6 rechte und größer als 2 rechte. 14)

---

54. a. Wenn in einem sphärischen △ (ABC) 2 Seiten (AB, BC) Quadranten sind, so sind die Gegen-

14) Nun hat man alle Bestimmungsstücke für ein sphärisches △ zusammen. 41, a. 43. 49. 53.

genwinkel (an der 3ten Seite A, C) rechte und umgekehrt;

b. ist auch der eingeschlossene Winkel (B) ein rechter: so ist auch die Grundlinie ein Quadrant;

c. ist B stumpf: so ist die Gegenseite größer; B spitz: so ist AC kleiner als ein Quadrant.

55. Wenn im gleichschenkelichten sphärischen △ (ABC) die gleichen Schenkel (AB, BC) größer als Quadranten sind: so sind ihre Gegenwinkel stumpf; sind sie kleiner — spitz; und umgekehrt.

56. Wenn in einem rechtwinkelichten sphärischen △ die am rechten Winkel (A) liegende Seite (AC) ein Quadrant ist: so ist ihr Gegenwinkel (B) ein rechter; ist sie (AC) größer als ein Quadrant: so ist B stumpf; ist sie endlich kleiner: so ist B spitz, und umgekehrt.

57. Sind in einem rechtwinkelichten sphärischen △

a) beide Perpendikel (AB, AC) oder beider Gegenwinkel (B, C) gleichartig (d. h. beide über oder unter 90°), so ist die Hypotenuse (BC) kleiner als ein Quadrant;

b) sind aber beide Perpendikel oder beider Gegenwinkel ungleichartig: so ist die Hypotenuse größer als ein Quadrant. Und umgekehrt.

58. Wenn in einem schiefwinkelichten sphärischen △ (ABC) 2 Winkel (A, B) gleichartig sind: so fällt das aus dem 3ten Winkel (C) auf seine Gegenseite (AB) herabgelassene Perpendikel (CD) innerhalb dem △;

sind aber jene beiden Winkel ungleichartig: so fällts ausser dem Cirkel.

59. Die

59. Die Entfernung eines Punctes auf der Kugel von einem Cirkel ist ein von jenem auf diesen senkrecht gezogener Bogen eines größten Cirkels.

60. Wenn in einem sphärischen △
   a) alle Winkel spitz sind: so ist jede Seite kleiner als ein Quadrant;
   b) sind aber 2 Winkel stumpf und der 3te spitz: so sind die Gegenseiten der stumpfen Winkel größer, die des spitzen aber kleiner als ein Quadrant.

61. Ist also in einem schiefwinkelichten sphärischen △ eine Seite größer als ein Quadrant: so ist auch ihr Gegenwinkel stumpf; und sind 2 Seiten kleiner als ein Quadrant: so sind auch die Gegenwinkel spitz.

62. Ist in einem sphärischen △
   a) jede Seite oder nur 2 größer als ein Quadrant, und die 3te ein Quadrant: so ist jeder Winkel stumpf;
   b) sind aber 2 Seiten kleiner als ein Quadrant und die 3te größer: so wird der Gegenwinkel der größern Seite stumpf, die andern beiden aber werden spitz seyn.

63. Verlängert man in einem rechtwinkelichten sphärischen △ die Seiten wenn sie kleiner als Quadranten sind, so weit, bis sie Quadranten sind: so wird der Bogen eines größten Cirkels, der durch die Endpuncte der Verlängerungen geht ein Quadrant seyn, und bei 2 dieser Puncte rechte Winkel machen.

64. Dadurch erhält man Bögen und Winkel als Complemente derer im △.

65. In

65. In einem rechtwinkelichten sphärischen △
   a) verhält sich der Sinus totus zum Sinus der Hypotenuse, wie der Sinus eines schiefen Winkels zum Sinus seiner Gegenseite; und
   b) der Sinus totus zum Sinus eines Perpendikels, wie die Tangente des Winkels an diesem Perpendikel zur Tangente des andern [15] Perpendikels.

66. Daraus erhellet, daß die sphärische Trigonometrie mit der ebenen ähnliche Grundregeln habe, nur daß statt der Seiten hier die Sinus und Tangenten der übereinstimmenden Bogen gebraucht werden. Woraus auch folgender allgemeiner Satz fließt.

67. In jedem sphärischen △ verhalten sich die Sinus der Seiten gegeneinander, wie die Sinus ihrer Gegenwinkel.

68. Wenn man in einem sphärischen △ (ABC) [16] den kleinen Schenkel (AC) so weit (bis D) verlängert, bis er dem größern (BC) gleich ist, und den größern (in E) so theilt, daß ein Theil (CE) dem kleinern Schenkel, der andere (BE) jener Verlängerung (AD) gleich ist und durch die Puncte A, E ingleichen durch D, B Bogen größter Cirkel zieht: so ist das Rectangel aus den Sinussen dieser halben Bogen dem Rectangel aus den Sinussen der Unterschiede der Schenkel von der halben Summe aller Seiten gleich.

69. In

15) Also diesem Winkel gegenüberliegenden.
16) AB als Grundlinie,
AC als den kleinern und
BC als den größern Schenkel genommen.

69. In jedem sphärischen △ verhält sich das Rectangel aus den Sinussen der Schenkel (AC, BC) [17] zum Quadrat des Sinus totus, wie das Rectangel aus den Sinussen der Unterschiede der Schenkel von der halben Summe aller Seiten zum Quadrat des halben Verticalwinkels. [18]

70. a. Folglich ist das Rectangel aus den Sinussen der Unterschiede der Schenkel von der halben Summe aller Seiten gleich dem Rectangel aus den Sinussen der halben Unterschiede eines jeden Schenkels von der Summe der Grundlinie und des andern Schenkels.

b. Das Rectangel aus den Sinussen verhält sich also zum Quadrat des Sinus totus, wie das Rectangel aus den Sinussen der halben Unterschiede jedweden Schenkels von der Grundlinie und dem andern Schenkel zum Quadrat des halben Scheitelwinkels.

71. Ein sphärisches △ kann in ein anderes verwandelt werden, worin die Seiten und Winkel des einen den Winkeln und Seiten des andern correspondiren. [19]

---

72. a. Aus den bisherigen Sätzen sind alle bei sphärischen △△ (sowohl recht- als schiefwinkelichten) vorkommende Aufgaben aufzulösen.

b. Beim

---

17) Dieselbe Figur.

18) Des Winkels (C) den beide Schenkel einschliessen, und der also der Grundlinie (AB) gegenüber liegt.

19) Oder beider Complementen zu 180°, wenn sie über 90° sind.

b. Beim rechtwinkelichten △ sind nur 3 Hauptfragen; man sucht nemlich die Hypotenuse, oder ein Perpendikel oder einen schiefen Winkel.

c. Beim schiefwinkelichten sind

Gegeben.		Gesucht.	Tafel.
I. Alle 3 Seiten		1 Winkel	11.
II. „ 3 Winkel		1 Seite	12.
III. 2 Seiten und 1 Winkel			
	1) der eingeschlossene	1. die 3te Seite	9.
		2. ein Winkel	10.
	2) Gegenwink. einer gegebenen Seite	1. die 3te Seite	3.
		2. Gegenw einer geg. Seite	1.
		3. Winkel zwischen den gegebenen Seiten	4.
IIII. 2 Winkel und 1 Seite.			
	1) eingeschlossene	1. 3ter Winkel	7.
		2. 1 Seite	8.
	2) Gegenseite eines Winkels.	1. 3ter Winkel	5.
		2. Gegenseite eines gegebenen Winkels	2.
		3. Anliegende Seite	6.

73. Jedes schiefwinkelichte △ läßt sich durch ein Perpendikel in 2 rechtwinkelichte zerlegen, wodurch man in Stand gesetzt wird, jene wie diese aufzulösen. So werden also die rechtwinkelichten △△, als die leichtesten in der Auflösung, die wichtigsten.

74. Aus

74. Aus 65 folgt, wenn das rechtwinkelichte $\triangle$ bei A einen rechten Winkel hat, die Hyp. BC und die Perp. AB, AC heissen.

I. r : sin. BC = sin. B : sin. AC

II. r : sin. AB = tang. B : tang. AC

Aus diesen beiden Grundproportionen fliessen alle Auflösungen rechtwinkelichter $\triangle\triangle$.

Es lassen sich zwar manche Fragen nicht geradehin daraus beantworten. Man verlängere daher alle Seiten, bis sie Quadranten werden (63) so erhält man (64) Complemente von den Seiten und Winkeln des $\triangle$.

So sei die Verlängerung

der Hypoten. (BC) = CN [20] (od. BN) [21]

des einen Perp. (AC) = CD (— AM)

des and. Perp. (AB) = AM (— BD)

so folgt aus I im $\triangle$ DCN

1) r : sin. DC = sin. D : sin. CN

2) r : sin. DC = sin. C : sin. DN, 65; a.

und aus II.

1) r : sin. DN = tang. D : tang. CN

2) r : sin. CN = tang. C : tang. DN

Die Glieder dieser Proportion nun so ausgedrückt, wie sie sich auf das $\triangle$ ABC beziehen: so geben sie

III. r : cos. AC = cos. AB : cos. BC (I, 1.)

IIII. r : cos. AC = sin. C : cos. B (I, 2.)

V. r : cos. B = cot. AB : cot. BC (II, 1.)

VI. r : cos. BC = tang. C : cot. B (II, 2.)

75. Hier-

20) Auf der einen (z. B. rechten = r) Seite.
21) Auf der andern (linken = l) Seite.

75. Hierdurch wird es schon möglich, sich eine Tafel für die Beantwortung aller bei rechtwinkelichten $\triangle\triangle$ möglichen Fragen zu entwerfen.

76. Mit Hülfe des folgenden Satzes aber lassen sich manche Proportionen in dergleichen Tafel so abändern, daß r das vorderste Glied wird. [22]

77. Der Sinus totus ist die mittlere Proportionallinie zwischen der Tangente und Cotangente eines Winkels, und es verhalten sich demnach die Tangenten umgekehrt wie die Cotangenten.

78. Einige der Proportionen in 74 lassen sich nun so ausdrücken.

Man macht

aus II … VII. r : sin. AB = cot. AC : cot. B

„ V … VIII. r : cos. B = tang. BC : tang. AB

„ VI … IX. r : cos. BC = tang. B : tang. C.

79. Aendern wir nun den 1. 8. 12. 14. 18. 19. 23. 26 und 29. Fall, bis r das erste Glied wird: so haben wir nun folgende Tafel.

I. Tafel

22) Wodurch die Rechnung verkürzt und erleichtert wird.

I. Tafel

für rechtwinkelichte sphärische ΔΔ.

Δ ABC. AB Grundlin. AC Perpend. A = R.

Fälle.	Gegeben.	Gesucht.	Proportionen	zur Auflösung.	74. 78.	74 Δ
1.	C. B.	B C	tangente C : r	= cot. B : cos. BC	VI.	r.
			Oder r : cotang. C	= cot. B : cos. BC	IX.	
2.	C. AC.		r : cos. C	= cot. AC : cot. BC	V.	I.
3.	B. AC.		sin. B : sin. AC	= r : sin. BC	I.	Δ.
4.	B. AB.		r : cos. B	= cot. AB : cot. BC	V.	r.
5.	C. AB.		sin. C : sin. AB	= r : sin. BC	I.	Δ.
6.	AC. AB.		r : cos. AC	= cos. AB : cos. BC	III.	r.
7.	BC. AB.	A C	cos. AB : cos. BC	= r : cos. AC	III.	r.
8.	BC. C.		cos. C : r	= cot. BC : cot. AC	V.	I.
			Oder r : cos. C	= tang. BC : tang. AC	VIII.	
9.	BC. B.		r : sin. BC	= sin. B : sin. AC	I.	Δ.
10.	C. B.		sin. C : cos. B	= r : cos. AC	IV.	r.
11.	AB. B.		r : sin. AB	= tang. B : tang. AC	II.	Δ.
12.	AB. C.		tang. C : tang. AB	= r : sin. AC	II.	Δ.
			Oder r : cot. C	= tang. AB : sin. AC	VII.	

13.	BC. AC.		coſ. AC : BC
14.	BC. B.		coſ. B : r
			Oder r : coſ. B
15.	BC. C.	AB.	r : ſin. BC
16.	C. B.		ſin. B : coſ. C
17.	AC. C.		r : ſin. AC
18.	AC. B.		tang. B : tang. AC
			Oder r : cot. B
19.	BC. AC.		cot. AC : cot. BC
			Oder r : cot. BC
20.	BC. AB.		ſin. BC : r
21.	BC. B.	C.	r : coſ. BC
22.	AC. B.		coſ. AC : r
23.	AC. AB.		ſin. AC : r
			Oder r : ſin. AC
24.	AB. B.		r : coſ. AB
25.	BC. AC.		ſin. BC : r
26.	BC. AB.		cot. AB : cot. BC
			Oder r : cot. BC
27.	BC. C.	B.	r : coſ. BC
28.	AC. C.		r : coſ. AC
29.	AB. AC.		ſin. AB : r
			Oder r : ſin. AB
30.	AB. C.		coſ. AB : r

= r : coſ. AB	III.	I.
= cot. BC : cot. AB	V.	r.
= tang. BC : tang. AB	VIII.	
= ſin. C : ſin. AB	I.	Δ.
= r : coſ. AB	IV.	I.
= tang. C : tang. AB	II.	Δ.
= r : ſin. AB	II.	Δ.
= tang. AC : ſin. AB	VII.	
= r : coſ. C	V.	I.
= tang. AC : coſ. C	VIII.	
= ſin. AB : ſin. C	I.	Δ.
= tang. B : cot. C	VI. (IX)	I.
= coſ. B : ſin. C	IV.	r.
= tang. AB : tang. C	II.	Δ.
= cot. AB : cot. C	VII.	
= ſin. B : coſ. C	IV.	r.
= ſin. AC : ſin. B	I.	Δ.
= r : coſ. B	V.	r.
= tang. AB : coſ. B	VIII.	
= tang. C : cot. B	VI. (IX)	r.
= ſin. C : coſ. B	IV.	r.
= tang. AC : tang. B	II.	Δ.
= cot. AC : cot. B	VII.	
= coſ. C : ſin. B	IV.	I.

80. Da die Sinus der Winkel und Bogen sowohl über als unter 90° [23]) alle positiv, die Cosinus, Tangenten und Cotangenten aber nur im 1sten Quadranten positiv, im 2ten negativ sind, (E. T. 26.) so wird es in einigen Fällen 2deutig [24]) seyn, ob der gefundene Bogen oder Winkel unter oder über 90° ist.

a) Der 10. 11. 16. 17. 23. 24. 28. 29. Fall wird entschieden durch 56.

b) Der 7. 8. 9. 13. 14. 15. 19. 20. 21. 25. 26. 27. Fall durch 57.

c) Der 1. und 6. Fall ebenfalls durch 57.

d) Der 2. und 4. Fall durch 56 und 57.

e) Zweideutig bleiben der 3. 5. 12. 18. 22 und 30. Fall [25]), die sich nicht allgemein bestimmen lassen.

81. ΔΔ mit 2 oder 3 Quadranten bedürfen nach 54 keiner Rechnung.

82. Wie man nun bei rechtwinkelichten ΔΔ (größtentheils) finden kann, welche Winkel oder Seiten größer oder kleiner als 90° sind (80): so wird man es auch bei schiefwinkelichten, die man zu leichterer Auflösung durch ein Perpendikel [26]) in rechtwinkelichte theilt [27]) (73), im Stande seyn.

83. Die

23) Von 0° bis 180°.

24) In der E. T. war nur ein einziger Fall im Allgemeinen zweideutig. E. T. Anm. 36.

25) Eigentlich nur 3 Fälle. 83.

26) Welches man am besten dem gegebenen Winkel gegenüber fället.

27) In den reducirten rechtwinkelichten ΔΔ muß man die Cosinus und Tangenten von den innern Winkeln verstehen, wenn man aus den Zeichen was bestimmtes schliessen will.

83. Die folgende Tafel für schiefwinkelichte ΔΔ enthält die Antworten für alle dabei vorkommende Fragen.

Findet sich eine, die nicht so lautet: so läßt sich die Antwort mit leichter Mühe durch eine Veränderung der Proportion bald finden.

Selbst die erste Tafel kann auf weniger Fälle zurükgebracht werden, wenn man bedenkt, daß oft 2 Aufgaben im Grunde nur 1 sind, als

2	und	4
3	—	5
7	—	13
8	—	14
9	—	15
10	—	16
11	—	17
12	—	18
19	—	26
20	—	25
21	—	27
22	—	28
23	—	29
24	—	30

wodurch also nur 16 Fälle in der ganzen Tabelle bleiben. Leichter behält man die Aufgaben, wenn man sie nach 72 zu unterscheiden sucht.

84. Aus den hinter jeder Proportion in der letzten Spalte der Tafel citirten Sätzen lassen sich die Formeln herleiten.

II. Tafel

für schiefwinkelichte sphärische ΔΔ.

Δ CBD. E größter, B kleinster Winkel.

Perpendikel CA oder DA.

Fälle	Gegeben.	Gesucht.	Proportionen	zur Auflösung.	
1.	BC. CD. B.	D.	sin. CD : sin. BC	= sin. B : sin. D	67.
2.	BC. B. D.	CD.	sin. D : sin. B	= sin. BC : sin. CD	67.
3.	BD. CD. B.	BC.	r : cos. B	= tang. BD : tang. AB	Taf. I. 8.
			cos BD : cos. AB	= cos. CD : cos. AC	74. III.
4.	BD. CD. B.	D.	r : cos. BD	= tang. B : cot. ADB	Taf. I. 27.
			tang. CD : tang. BD	= cos. ADB : cos. ADC	74. VIII.
5.	B. C. BD.	D.	r : cos. BD	= tang. B : cot. ADB	Taf. I. 27.
			cos. B : sin. ADB	= cos. C : sin. ADC	74. IV.
6.	B. D. CD.	BD.	r : cos. D	= tang. CD : tang. AD	Taf. I. 8.
			tang. B : tang. D	= sin. AD : sin. AB	74. II.
7.	B. D. BD.	C.	r : cos. BD	= tang. B : cot. ADB	Taf. I. 27.
			sin. ADB : sin. ADC	= cos. B : cos. C	Taf. II. 5.
8.	B. D. BD.	CD.	r : cos. BD	= tang. B : cot. ADB	Taf. . 27.
			cos. ADC : cos. ADB	= tang. BD : tang. CD	Taf. II. 4.
9.	BC. BD. B.	CD.	r : cos. B	= tang. BD : tang. AB	Taf. I. 8.
			cos. AB : cos. BD	= cos. AC : cos. CD	Taf. II. 3.
10.	BD. CD. D.	B.	r : cos. D	= tang. CD : tang. AD	Taf. I. 8.
			sin. AB : sin. AD	= tang. D : tang. B	Taf. II. 6.
11.	BC. BD. CD.	B.	(sin. BC) (sin. BD) : r^2	$= \sin. \frac{CD + BC - BD}{2}$.	70. b.
			$\sin. \frac{BD + CB - BC}{2}$	: sin. $\frac{1}{2}$ B^2	
12.	B. C. D.	BC. BD. CD.	Durch	Verwandelung.	71.

Logarithmen.

1. Aus Nr. 56 ist bekannt, was a^2, a^3, a^4 u. s. w. bedeutet.
2. Der Exponent einer Potenz von einer beliebigen Zahl heißt der Logarithmus [1]) der gefundenen Zahl.
3. Stellt man sich unter a, m, c beliebige Zahlen vor, und a^m (oder die mte Potenz von a) sei $= c$: so ist allgemein $m = \log. a^m = \log. c$.
4. Behält nun m einerlei Werth: so hängt der Werth von c bloß vom Werth a ab.
5. Folglich kann dieselbe Zahl der Logarithmus von verschiedenen Zahlen seyn.
6. Folglich giebt es auch so viele verschiedene Systeme von Logarithmen, als man für die Wurzel einer Potenz verschiedene Werthe annehmen kann.
7. Da $a^4 = a.\,a.\,a.\,a.$ und $a^2 = a.\,a$: so ist $a^4.\,a^2 = a^{4+2} = a^6$. Folglich ist $4+2=6 = \log.\,a^4.\,a^2$.
8. Man nehme nun, wie vorhin a, m, n, c, d als beliebige Zahlen: so folgt, daß wenn

$$a^m = c \text{ und } a^n = d$$

so muß auch $a^m.\,a^n = a^{m+n} = c.\,d$

oder $m+n = \log.\,a^{m+n} = \log.\,c.\,d$

und da $m = \log.\,c$ und $n = \log.\,d$

so

1) Deutsch nach Segner Verhältnißzahl, die schicklichste Benennung.

so muß auch ebenfalls

$$\log.\,c.\,d = \log.\,c + \log.\,d.$$

Also ist der Logarithmus eines Products die Summe der Logarithmen der Factoren.

9. Nach 7 wird also a^4 dividirt durch a^2

$$= \frac{a^4}{a^2} = \frac{a.\,a.\,a.\,a}{a.\,a} = a.\,a = a^2 = a^{4-2} \text{ seyn.}$$

Es wird also $\frac{c}{d} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

und $m - n = \log.\,a^{m-n} = \log.\,\frac{c}{d}$ seyn,

oder da $m = \log.\,c$ und $n = \log.\,d$ ist:

so wird auch $\log.\,\frac{c}{d} = \log.\,c - \log.\,d$ seyn.

Folglich ist der Logarithmus eines Quotienten [2]) der Logarithmus des Dividendi [3]) weniger dem Logarithmus des Divisors. [4])

10. Da nun diese beiden Eigenschaften der Logarithmen nicht von der Wurzel eines Systems abhangen: so müssen sie auch bei jedem System anwendbar seyn.
11. Aus 8. folgt:
   a) Der Logarithmus des Quadrats ist dem doppelten Logarithmus der Wurzel gleich.
   b) Die Hälfte eines Logarithmus ist also der Logarithmus der Wurzel aus der ihm zugehörigen Zahl.

c) Eben

2) oder Bruches, nemlich hier unächten. 15.
3) Zählers.
4) Nenners.

c) Eben so ist der Logarithmus einer Cubikzahl der 3fache Logarithmus der Wurzel.

d) Und der Logarithmus der Cubikwurzel ist also der 3te Theil vom Logarithmus der Cubikzahl.

e) Es ist also der Log. einer Potenz dem Log. der Wurzel, multiplicirt mit dem Exponenten gleich.

12. Man findet also:

Nach 8. das Product 2er Factoren, wenn man ihre beiden Logarithmen addirt und von der Summe als Log. die ihm zugehörige Zahl nimmt.

Nach 11, a das Quadrat einer Zahl, wenn man den Log. derselben doppelt und von diesem Doppelten als Log. betrachtet, die ihm zugehörige Zahl nimmt.

Nach 11, b die Wurzel aus einer Quadratzahl durch den halben Logarithmus dieser Quadratzahl und der demselben zugehörigen Zahl.

Nach 11, c und d nun leicht durch Logarithmen die Cubikzahl und die Cubikwurzel,

und nach 11, e findet man überhaupt eine gewisse Potenz einer Zahl, wenn man den Log. dieser Zahl (Wurzel) mit dem Exponenten multiplicirt,

und die Wurzel einer Zahl (sie sei in welcher Potenz sie wolle) wenn man den Logarithmus dieser Zahl mit dem Exponenten dividirt.

Eben so leicht ist nach 9 der Quotient 2er Zahlen gefunden, wenn man nur den Unterschied beider Log. als Logarith. und die ihm zugehörige Zahl nimmt.

13. Daraus erhellet nun sehr deutlich, daß die Log. das Multipliciren in Addiren,
das Dividiren in Subtrahiren,
das Ausziehen der Quadratwurzeln in Halbiren,
das Ausziehen der Cubikwurzeln in Dividiren durch 3,
und überhaupt das Ausziehen der Wurzel in Dividiren mit dem Exponenten verwandeln.

14. Aus dem Bisherigen ist begreiflich, daß in jedem System die Log. eine arithmetische und die ihnen zugehörigen Zahlen eine geometrische Progression machen.

15. Aus 9 fließt sehr natürlich, daß der Log. eines ächten Bruchs negativ sei. Nr. 15. 57.

16. Die Log. sind von einem Deutschen [5] zuerst erfunden. Oeffentlich bekannt gemacht aber zuerst von Nepper und in die Trigonometrie eingeführt; ohne deren Gebrauch wir auch in derselben nicht viel [6] ausrichten würden.

Nepper nahm [7] zuerst ein leicht zu berechnendes System an, weil er die Log. desselben nur in der Trigonometrie nutzen wollte. Man fand aber bald, daß die Rechnung mit Log. auch ausser der Trigonometrie sehr zu nutzen wäre. Da aber Neppers Log. hiezu nicht recht schicklich waren: so wählte man ein anderes System und zwar das, worin die Wurzel $a = 10$ genommen ist, welches sich zu unsern Zahlen, wo wir immer nach 10 zählen, am besten passet. [8]

17. a.

5) Jost Byrge.
6) Wenigstens nicht ohne viele und große Müh
7) Da es nach 6 willkührlich ist.
8) Die besondern Vorzüge dieses Log. Syst. verdienen eine nähere Bekanntschaft mit ihnen, die man auch des Gebrauchs wegen schon haben muß.

17. a. Es ist also $10^0 = 1$
$10^1 = 10$
$10^2 = 100$
$10^3 = 1000$ u. s. w.

b. folglich nach 2
log. 1 = 0
log. 10 = 1
log. 100 = 2
log. 1000 = 3 u. s. w.

c. und es wird seyn (9)
$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$
$10^{-2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$
$10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$ u. s. w.

d. folglich nach 15
log. 0,1 = — 1
log. 0,01 = — 2
log. 0,001 = — 3 u. s. w.

18. Es hat also in diesem System jeder Log. so viel Einheiten, als die ihm zugehörige Zahl ausser der 1 Nullen hat.

Stehen letztere rechter Hand der 1: so ist der Log. positiv; stehen sie aber linker Hand — negativ.

19. Daraus läßt sich also schon sowohl für Zahlen, die nur mit 1 und Nullen geschrieben werden, der positive und negative Log.; als auch aus dem Log. 9) die ihm zugehörige Zahl angeben.

20. Nach 17, b muß für Zahlen, die zwischen 1 und 10 sind, der Log. auch zwischen 0 und 1 folgl. ein ächter Bruch seyn.

Für

9) Mit einer ganzen Zahl nemlich ausgedruckt.

Für Zahlen zwischen 10 und 100 wird also der Log. 1, ... und für die von 100 bis 1000 wird er 2, ... und für die von 1000 bis 10000 muß er 3, ... u. s. w. seyn.

21. Da man aus der ganzen Zahl im Log. erkennen kann, zwischen welchen Potenzen von 10 die Zahl, zu der er gehört, sich befindet: so heißt sie die Kennziffer.

22. Es läßt sich also aus einer Zahl schon die Kennziffer des ihr zugehörigen Log. errathen; so wie sich auch aus der Kennziffer des Log. schon auf die zugehörige Zahl schliessen läßt.

23. Dis läßt sich nicht bloß auf positive sondern auch auf negative Log. anwenden.

24. Der Hauptvortheil dieses logarithmischen Systems (16) besteht darin, daß ein Log. in demselben, für eine gewisse Zahl berechnet, auch für viele andere Zahlen, (wenn sie nur mit denselben Ziffern geschrieben werden) gilt, indem man die Kennziffer des Log. so ändert, als sich die Ziffern in der zugehörigen Zahl in ihrem Werthe ändern.

25. Aus 14 läßt sich schon auf die Berechnung der Log. ein Schluß machen. 10)

26. Erklärung und Gebrauch logarithmischer Tafeln mündlich.

10) Das Bisherige ist zur allgemeinen Kenntniß der Log. hinlänglich und der Gebrauch derselben bei trigonometrischen Rechnungen das Nothwendigste. Deswegen die Berechnung derselben nicht hier, sondern in einer der Fortsetzungen dieses Leitfadens (Ar. Anm. 36.) folgen wird.

Per-

Perspectiv.

1. Von unserm Auge bis zu jedem beliebigen Punct ist eine grade Linie möglich. 1)
2. Befindet sich zwischen unserm Auge und diesem Puncte in der graden Linie ein undurchsichtiger Gegenstand: so wird dieser uns hindern, den Punct zu sehen.
3. Wenn nun Lichtstralen, die von Gegenständen nach unserm Auge gelangen, uns die Gegenstände sichtbar machen: so gehen sie also in graden Linien nach unserm Auge.
4. Bei allen perspectivischen Zeichnungen wird ein gewisser Punct angenommen, von dem aus die Gegenstände gezeichnet werden. In sofern nun alles in grader Linie gesehen wird (2. 3.), gehört die Perspectiv zu den optischen Wissenschaften.
5. Da nun schon in der Geometrie Zeichnung der Figuren und Körper und in der 2) Trigonometrie Projectionen vorkommen: so wird die Erklärung und der Grund solcher Zeichnungen hier am rechten Orte stehen, welche letztere durch erstere nun deutlich gemacht werden können.
6. Nicht nur dem Mathematiker, sondern auch dem Mahler, Bildhauer und Baumeister ist die Perspectiv

1) Geom. 12.
2) sphärischen.

unentbehrlich. Für letztere sind eine Menge Anweisungen vorhanden. Diese wenigen Sätze sind bloß für erstern und zwar so weit sie aus obigen 3) Wissenschaften bewiesen werden können. Auf diesen mathematischen Grundsätzen beruhen indessen alle Anweisungen zur Perspectiv, und man hat also mit ihnen die Grundlage der ganzen Wissenschaft. 4)

7. Hier also nur die Grundgesetze der Perspectiv. Zur Perspectiv in ihrem ganzen Umfange gehören auch ichnographische und orthographische Zeichnung, Zeichnung des Lichts und Schattens und Zeichnung der Figuren, die nur aus einem Gesichtspunct in ihrer wahren Gestalt sich zeigen. 5)
8. Nur von nahen Gegenständen aber nicht von entfernten sind wir im Stande ihre verschiedene Entfernung von unserm Auge zu beurtheilen. 6)

Daher scheinen oft Gegenstände, die in derselben graden Linie von uns gesehen werden, einerlei Weite zu haben.

9. Für

3) Elementarmathematik.
4) Da practische Anweisung Anwendung der Theorie ist: so kann der Künstler Perspectiv richtig ausüben, ohne ihre Gründe zu wissen, durch deren Erlernung er aber sich selbst Rechenschaft von seinem Verfahren geben kann.
5) Diese 4 Stücke kann man zum practischen Theil der Perspectiv rechnen. Und was der Mathematiker hieraus nöthig hat, soll hier angezeigt werden.
6) So lassen sich wol in einem Zimmer, auf einer Straße oder Markte oder von einer Anhöhe nahe gelegene Gegenstände in ihren Entfernungen beurtheilen. Aber sehr weite Gegenstände z. B. am fernen Horizont nicht. Am Himmel irren wir uns schon bei den Wolken und noch mehr bei den Himmelskörpern. 11.

9. Für das Auge ist also kein Unterschied, ob ein Gegenstand a oder ein anderer b, wenn beide in derselben graden Linie gesehen werden, uns sichtbar wird.

10. Man denke sich zwischen dem Auge und den vor ihm liegenden sichtbaren Gegenständen eine durchsichtige Ebene 7): so werden für alle Puncte der sichtbaren Gegenstände correspondirende in der Tafel anzugeben seyn, d. h. wir sehen die Gegenstände in der Tafel da, wo Stralen, die als grade Linien von ihnen nach dem Auge gehen, die Tafel durchschneiden.

11. Dem Auge ists gleich 8), ob die Puncte aus ihrer wahren Entfernung vom Auge oder von denen (correspondirenden) in der Tafel kommen. 8. 9.

12. Alle Puncte in genannter Tafel gezeichnet, haben fürs Auge dieselbe scheinbare Lage und Entfernung gegen einander als die wirklichen. 9)

13. Eine Bezeichnung oder Abbildung dieser Puncte in der Tafel wäre also für die Lage des Auges das wahre Bild aller durch dieselbe sichtbaren Gegenstände, welches man eine Projection nennt.

24. Man stelle sich nun solche Tafel senkrecht auf der Horizontalfläche stehend vor. In einer ge-

7) Z. B. eine vollkommen durchsichtige ebene Glastafel, deren beide Ebenen vollkommen parallel laufen und also die Lichtstralen nicht von ihrer ersten Richtung ableiten, sondern sie vom Gegenstande durch die Tafel bis ins Auge als eine grade Linie gehen lassen.

8) In der hier gemeinten Rücksicht nemlich gleich.

9) d. h. dasselbe Verhältniß in Lage und Entfernung.

gewissen Entfernung das Auge und von demselben ein Perpendikel (Distanzlinie) auf die Tafel (Augenpunct). Eine durch den Augenpunct mit der Durchschnittslinie der Tafel und Horizontalfläche (Grundlinie) parallel laufende grade Linie (Horizontallinie). Auf beiden Seiten und in gleichen Entfernungen vom Augenpuncte die Distanzpuncte: so hat man die vornehmsten Linien zu den Hauptgrundsätzen.

15. Zeichnet man sich die gewöhnlichen Figuren dazu und vereinigt gewisse Puncte durch Linien: so erhält man ähnliche △△, aus deren Proportionen 10) sich die Hauptsätze 11) (7.) leicht herleiten lassen; wodurch man in Stand gesetzt wird, die perspectivischen Abbildungen leicht zu machen und deren Richtigkeit zu beweisen.

16. So lassen sich dann mit Hülfe derselben grade Linien 12), grad- und krummlinigte 13) Figuren, reguläre und irreguläre Körper, sie mögen liegen oder aufrecht und zwar grade oder schief stehen, sich über oder unter der Horizontallinie zeigen, perspectivisch richtig zeichnen.

17. Hieher gehören auch die Kugelprojectionen, als die orthographische, stereographische und Centralprojection.

18. Er-

10) Geom. 176.

11) Die ohne Zeichnung hier zu unverständlich ausfallen würden und beim mündlichen Vortrage gehörig erläutert werden sollen.

12) Deren Projection auch grade Linien sind.

13) In denen man so viele Puncte annehmen und projiciren kann als man will.

18. Ersterer bedient man sich z. B. in der Baukunst, Astronomie, Geographie u. s. w. 14)

19. Auch für die Zeichnung des Schattens lassen sich nun die Regeln aus vorigen Sätzen leicht auffinden.

Ist das Licht kleiner als der schattenwerfende Körper: so wird der Schatten mit seiner Entfernung vom Körper nach gewissen optischen Gesetzen 15) an Größe zunehmen.

Im umgekehrten Fall nimmt er ab und wenn beide 16) Kugeln 17) sind: so wird der Schatten einen Kegel bilden. 18)

Man unterscheidet ganzen und Halbschatten.

20. Beim Vortrage werden durch Erklärungen und Beweise obiger Hauptgrundsätze (15) und durch Anwendung derselben auf einige Beispiele auch alle andere 19) ihre völlige Klarheit erhalten, welches sich ohne Figuren 20) nicht kurz und deutlich ausdrücken läßt.

---

14) Hierauf gründen sich auch die Figuren in der sphärischen Trigonometrie.
15) Nach dem Quadrat der Entfernung.
16) Licht und dunkler Körper.
17) Oder parallele Cirkelflächen.
18) So wie z. B. bei Verfinsterungen der Himmelskörper.
19) Von 1 — 20 Satz.
20) Und selbst durch diese nicht mal recht deutlich, da sie schon perspectivische Abbildungen sind, von denen man doch hier erst eine richtige Kenntniß erlangen will.

Einige wenige Druckfehler sollen beim Vortrage angezeigt werden.

Für den Buchbinder.

Der Buchbinder muß beim Binden vorzügliche Aufmerksamkeit auf die Bogen H und J wenden, damit die Reihen der Tafeln pag. 124 bis 127 und pag. 130 und 131 recht genau gegeneinander überstehen, weil jede Formel getheilt ist, und jede Reihe von einer Seite auf die gegenüberstehende gelesen werden muß.