

NSV LIIDU KÕRGEMA JA KESK-ERIHARIDUSE MINISTEERIUM

MATEMAATIKA

PROGRAMM, METOODILISED JUHENDID JA
KOONDÜLESANDED TEHNIKUMIDE
KAUGÕPPEOSAKONDADE ÕPILASTELE

II osa

EESTI NSV MINISTRITE NÕUKOGU RIIKLIK
KÕRGEMA JA KESK-ERIHARIDUSE KOMITEE TEADUSLIK
METOODILINE KABINET

TALLINN 1962

ARH

A-24897
NSV LIIDU KÕRGEMA JA KESK-ERIHARIDUSE MINISTEERIUM

*Kinnitatud
Keskerihariduse Õppemethodika
Kabineti poolt*

M. I. TŠERNOBELSKI

MATEMAATIKA

PROGRAMM, METOODILISED JUHENDID
JA KOONDÜLESANDED TEHNIKUMIDE
KAUGÕPPEOSAKONDADE ÕPILASTELE

II osa

(Koondülesanded 4, 5, 6)

EESTI NSV MINISTRITE NOUKOGU RIIKLIK
KÕRGEMA JA KESK-ERIHARIDUSE KOMITEE TEADUSLIK
METOODILINE KABINET

TALLINN 1962

SISUKORD

Sissejuhatus	3
Kirjandus	4

Koondülesanne nr. 4

Algebra

Teema 1. Logaritmid	5
Teema 2. Arvutuslükat	14

Trigonomeetria

Teema 3. Liitmisteoreemid. Kahekordse ja poolnurga trigonomeetrilised funktsioonid	23
Teema 4. Trigonomeetriliste funktsioonide summa ja vahe teisendamine korrutiseks	23
Teema 5. Trigonomeetrilised pöördfunktsioonid	27
Teema 6. Trigonomeetrilised võrrandid	27
Teema 7. Kaldnurksete kolmnurkade lahendamine	29
Kontrolltöö nr. 4	30

Koondülesanne nr. 5

Geomeetria

Teema 1. Sirge ja tasapind	35
Teema 2. Kahetahulised ja mitmetahulised nurgad.	35
Teema 3. Hulktahtukad	43
Kontrolltöö nr. 5	62

Koondülesanne nr. 6

Geomeetria

Teema 4. Pöördkehad	65
-------------------------------	----

Algebra

Teema 5. Ühendid. Newtoni binoomvalem	86
Kontrolltöö nr. 6	89

ARHIIVKOGU



SISSEJUHATUS

Tehnikumi kaugõppeosakonna teise kursuse õpilastel tuleb õppeaasta jooksul matemaatikas läbi töötada kolm koondülesannet. Igale koondülesandele järgneb vastava kontrolltöö ühe variandi lahendamine.

Koondülesanne nr. 4 sisaldab järgmised teemad:

- 1) logaritmid *;
- 2) arvutuslukat;
- 3) liitmisteoreemid;
- 4) trigonomeetriliste funktsioonide summa ja vahe teisendamine korrutiseks;
- 5) trigonomeetrilised pöördfunktsioonid;
- 6) trigonomeetrilised võrrandid;
- 7) põhilised seosed kaldnurkse kolmnurga elementide vahel.

Koondülesanne nr. 5 sisaldab järgmised teemad:

- 1) sirged ja tasapinnad;
- 2) kahe- ja mitmetahulised nurgad;
- 3) hulktahukad.

Koondülesanne nr. 6 sisaldab järgmised teemad:

- 4) pöördkehad;
- 5) ühendid. Newtoni binoom **.

Kontrolltööde variandi valikul juhinduge alljärgnevast:

- a) kontrolltöö esimese variandi lahendavad õpilased, kelle perekonnanime algustäht on A kuni E;
- b) kontrolltöö teise variandi lahendavad õpilased, kelle perekonnanime algustäht on F kuni L;

* Teemas «Logaritmid» on küsimused liitprotsentidest, tähtjalistest hoistest ja maksetest ette nähtud ainult majandustehnikumide ja -osakondade õpilastele. Need õpilased lahendavad ka vastavad ülesanded kontrolltööst nr. 4.

** Teema 5 on ette nähtud ainult majandustehnikumide ja -osakondade õpilastele. Need õpilased lahendavad ka selle kohta käivad ülesanded kontrolltööst nr. 6.

c) kontrolltöö kolmanda variandi lahendavad õpilased, kelle perekonnanime algustäht on M kuni S;

d) kontrolltöö neljanda variandi lahendavad õpilased, kelle perekonnanime algustäht on T kuni Ü.

Kirjandus

- P. A. Калнин. Курс алгебры. Гостехиздат (edaspidi — Kalnin).
- A. P. Küsseljov. Algebra õpik keskkooli VIII—X klassile, II osa. RK «Pedagoogiline kirjandus». Tallinn (edaspidi Küsseljov, Algebra II).
- P. A. Laritšev. Algebra ülesannete kogu, II osa, keskkooli VIII—X klassile. RK «Pedagoogiline kirjandus». Tallinn (edaspidi — Laritšev, II).
- A. П. Андреев. Курс элементарной геометрии. Гостехиздат (edaspidi — Andrejev).
- A. P. Küsseljov. Geomeetria. Stereomeetria XI klassile. Eesti Riiklik Kirjastus (edaspidi Küsseljov, Geomeetria II).
- N. A. Rõbkin. Geomeetria ülesannete kogu. Stereomeetria XI klassile. Eesti Riiklik Kirjastus (edaspidi — Rõbkin, II).
- П. Я. Кожеуров. Курс тригонометрии. Гостехиздат (edaspidi — Кожеуров).
- N. A. Rõbkin. Tasapinnaline trigonomeetria. Opik keskkooli X klassile. RK «Pedagoogiline Kirjandus». Tallinn (edaspidi — Rõbkin, Trigonomeetria).
- S. Novosjолоv. Trigonomeetria. Keskkooli IX—X klassile. Eesti Riiklik Kirjastus. Tallinn (edaspidi — Novosjолоv, Trigonomeetria).
- N. A. Rõbkin. Trigonomeetria ülesannete kogu keskkooli X klassile. RK «Pedagoogiline Kirjandus». Tallinn (edaspidi — Rõbkin, Trigonomeetria ülesannete kogu).
- P. Stratilatov. Trigonomeetria ülesannete kogu IX—XI klassile. Eesti Riiklik Kirjastus. Tallinn (edaspidi — Stratilatov, Ülesannete kogu).
- V. M. Bradis. Neljakohalised matemaatilised tabelid.
- A. Borkvell. Arvutuslükati teooria ja käsitlemine. Eesti Riiklik Kirjastus (edaspidi — Borkvell, Arvutuslükat).

KOONDÜLESANNE NR. 4

ALGEBRA

Teema 1. Logaritmid

Logaritmi mõiste. Pöördfunktsiooni mõiste. Otsese ja pöördfunktsiooni graafikute vaheline seos. Logaritmifunktsioon kui eksponentfunktsiooni pöördfunktsioon. Logaritmifunktsiooni graafik. Logaritmifunktsiooni omadused, kui logaritmi alus $a > 1$. Korrutise, jagatise, astme ja juure logaritm. Üksliikmete logaritmine. Potentseerimine.

Kümnendlogaritmid ja nende omadused. Logaritmi karakteristik ja mantiss; täienduslogaritm. Logaritmi tabeli ehitus ja arvutusi logaritmi tabeli abil. Moodul üleminekuks ühest logaritmi süsteemist teise. Logaritmi tabeli kasutamisel tekkiv viga. Eksponent- ja logaritmivõrrandid.

Majandustehnikumide ja -osakondade õpilastele: Liitprotsendi valem. Ülesanded tähtjaliste hoiuste ja maksete kohta.

Kirjandus

1. Kalnin. § 105—127, harjutused: 1—6, 10, 18, 19, 22—30, 35—38.
2. Küsseljov. Algebra II, § 101—121.
3. Laritšev, II. Ülesanded nr. 281, 824, 841—846, 859, 860, 867, 872, 874, 883, 890, 901, 904, 905, 908, 917.
4. Kalnin. § 172—174, harjutused: 1—11 (majandustehnikumide ja -osakondade õpilastele).

METOODILISED JUHENDID

Teema läbitöötamist tuleb alata logaritmi mõiste omandamisega.

Antud arvu logaritmiks antud alusel nimetatakse astendajat, millega tuleb astendada alust, et saada antud arv:

$$\log_a M = x, \text{ see tähendab, et } a^x = M,$$

kus a on logaritmi alus, M — antud arv ja x on selle arvu logaritm.

Pidage meeles, et logaritmi alus on positiivne arv. Näiteks: $\log_4 64 = 3$, sest $4^3 = 64$.

Võib esineda kolme liiki ülesandeid:

1) $\log_2 x = 5$; $x = 2^5 = 32$;

2) $\log_x 16 = 2$; $x^2 = 16$; $x = 4$ (sest logaritmi alus on positiivne);

3) $\log_5 \frac{1}{25} = x$; $5^x = \frac{1}{25}$; $x = -2$, sest $5^{-2} = \frac{1}{25}$.

Keerulisemaid ülesandeid tuleks lahendada järgmiselt:

Leida arvu $\frac{1}{3\sqrt{81}}$ logaritm alusel 3.

L a h e n d u s:

$$\log_3 \frac{1}{3\sqrt{81}} = x, \text{ siit } 3^x = \frac{1}{3\sqrt{81}};$$

$$3^x = \frac{1}{3\sqrt{81}} = \frac{1}{3\sqrt{3^4}} = \frac{1}{3 \cdot 3^{\frac{4}{2}}} = \frac{1}{3^{\frac{9}{2}}}; \quad 3^x = 3^{-\frac{9}{2}}.$$

Kui astmed on võrdsed ja ka astme alused on võrdsed, ühest erinevad positiivsed arvud, siis on võrdsed ka astmenäitajad.

$$\text{Järelikult } x = -\frac{9}{2}.$$

Logaritmifunktsiooni omadused:

1. Negatiivsetel arvudel ei ole logaritme. Näiteks proovime leida arvu (-9) logaritmi alusel 3. $\log_3(-9) = x$, siis $3^x = -9$. Kuid 3^x ei saa olla negatiivne mitte ühegi argumendi x väärtuse korral ($3^2 = 9$; $3^{-2} = \frac{1}{9}$). Seetõttu negatiivsetel arvudel logaritme olla ei saa.

2. Arvu 1 logaritm on null.

$$\log_a 1 = 0, \text{ sest } a^0 = 1.$$

3. Aluse enda logaritm on 1.

$$\log_a a = 1, \text{ sest } a^1 = a.$$

4. Ühest suuremate arvude logaritmid on positiivsed ja ühest väiksemate arvude logaritmid negatiivsed (kui $a > 1$).

Näiteks: $\log_3 9 = 2$; $\log_3 \frac{1}{9} = -2$.

5. Suuremale arvule vastab ka suurem logaritm (kui $a > 1$).

Näiteks: $\log_3 9 = 2$; $\log_3 81 = 4$.

On vajalik tunda võrdust: $a^{\log_a M} = M$.

Tõepoolest, olgu $a^{\log_a M} = x$; logaritmime selle võrduse mõlemad pooled alusel a : $\log_a M \cdot \log_a a = \log_a x$, kuna $\log_a a = 1$, siis $\log_a M = \log_a x$. Kui logaritmid on võrdsed ja alused on võrdsed, siis peavad ka arvud võrdsed olema, s.t. $x = M$, mida oligi vaja tõestada.

Näiteks: $3^{\log_3 5} = 5$;

$$3^{2 \log_3 5} = 25, \text{ sest } 3^{2 \log_3 5} = 3^{\log_3 5^2} = 5^2 = 25.$$

Logaritmifunktsiooni omadusi võib näha graafikult, ehitades näiteks funktsiooni $y = \log_3 x$ graafiku.

Omandage hästi korrutise, murru, astme ja juure logaritmitmise reeglid. Pidage meeles, et summat logaritmid ei saa.

Näited: 1) $\log(abc) = \log a + \log b + \log c$;

2) $\log\left(\frac{a}{bc}\right) = \log a - (\log b + \log c)$;

3) $\log\left(\sqrt[3]{\frac{a^2}{mn^2}}\right) = \frac{1}{3} (2 \log a - \log m - 2 \log n)$;

4) $\log(a + b) = \log(a + b)$;

5) $\log(a^2 - b^2) = \log[(a - b)(a + b)] =$
 $= \log(a - b) + \log(a + b)$;

6) leida $\log_{10} 36$, kui $\log_{10} 2 = 0,3010$, $\log_{10} 3 =$
 $= 0,4771$.

Lahendus.

$$\log_{10} 36 = \log_{10}(2^2 \cdot 3^2) = 2 \log_{10} 2 + 2 \log_{10} 3 = 2 \cdot 0,3010 +$$
$$+ 2 \cdot 0,4771 = 0,6020 + 0,9542 = 1,5562.$$

Logaritmitmisele vastupidist tehet nimetatakse potentsseerimiseks.

Näiteks: $\log x = 2 \log a - 3 \log b + \frac{1}{5} \log c$, leida x .

$$x = \frac{a^2 \sqrt[5]{c}}{b^3}.$$

Tõepoolest, logaritmidest selle võrduse, saame:

$$\log x = 2 \log a + \frac{1}{5} \log c - 3 \log b.$$

Arvutamiseks kasutatakse matemaatikas tavaliselt kümnendlogaritme. See on logaritmidest kogu alusel 10. Kümnendlogaritmidel on rida omadusi, milliseid peab hästi tundma. Nendel omadustel põhinevad arvutused logaritmidest tabeli abil.

Kalnini õpikus (§ 122 jj.) ja Kisseljovi õpikus (§ 119) on selgitatud, kuidas kasutada arvutuseks Bradise logaritmidest tabelit.

Tabelis on logaritmidest mantissid positiivsed. Negatiivse karakteristiku korral jääb siis logaritmile kunstlik, poolnegatiivne kuju. On vaja osata poolnegatiivset logaritmi teisendada negatiivseks arvuks ja vastupidi. Näitame, kuidas seda teha.

a) Teisendada poolnegatiivsele kujule logaritmi $-2,5628$. Siin on logaritmi karakteristik ja mantiss mõlemad negatiivsed. Et teisendada logaritmi poolnegatiivseks, peame tema murdosa muutma positiivseks, Selleks liidame logaritmi murdosale (+1) ja täisosale (-1):

$$\overset{-1+1}{-2,5628} = \bar{3},4372 \text{ (arvust 1 tuleb lahutada 0,5628).}$$

b) Teisendada negatiivseks arvuks logaritmi $\bar{3},5624$.

Siin on logaritmi karakteristik negatiivne, kuid mantiss positiivne. On vaja teisendada ka mantiss negatiivseks. Selleks liidame logaritmi murdosale (-1) ja täisosale (+1):

$$\overset{+1-1}{3,5624} = -2,4376.$$

Logaritmidest võib sooritada tehteid ka poolnegatiivsel kujul:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } \begin{array}{r} \bar{1},5726 \\ + \bar{3},9658 \\ \hline \bar{3},5384 \end{array} \\ \text{b) } \begin{array}{r} \bar{2},3286 \\ - \bar{5},8427 \\ \hline \bar{2},4859 \end{array} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Siin me } (-2)\text{-st võtsime ühe,} \\ \text{jäi } (-3); (-3) - (-5) = -3 + \\ + 5 = 2. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{c) } \begin{array}{r} \bar{3},5624 \\ \times \quad 5 \\ \hline 13,8120 \end{array} \\ \text{d) } \begin{array}{r} \overset{-1+1}{5,3672} \\ | \quad 2 \\ \hline \bar{3},6836 \end{array} \end{array}$$

Et viimases näites logaritmi täisosa jaguks kahega, me peame liitma temale (-1), et aga logaritmi väärtus seejuures ei muutuks,

liidame murdosale (+1). Algul jagame (-6) 2-ga, siis 13 2-ga jne.

Kui logaritmidega arvutamise oleme selgeks saanud, võime asuda eksponent- ja logaritmvõrrandite lahendamisele.

Lahendame mõned eksponentvõrrandid.

1. $2^x = 4$. Viime võrrandi mõlemad pooled ühisele alusele 2, st. kirjutame 4 asemel 2^2 , saame

$$\begin{aligned}2^x &= 2^2; \\ x &= 2\end{aligned}$$

(kui astmed on võrdsed ja astme alused on võrdsed, siis on ka astendajad võrdsed).

2. $3^{x+3} = \frac{1}{9}$;

$$3^{x+3} = \frac{1}{3^2};$$

$$3^{x+3} = 3^{-2};$$

$$x + 3 = -2; \quad x = -5.$$

3. $2^{\sqrt{3x+1}} = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3x+1}}$;

$$2^{\sqrt{3x+1}} + 2^4 \cdot 2^{-\sqrt{3x+1}};$$

$$2^{\sqrt{3x+1}} = 2^{4-\sqrt{3x+1}};$$

$$\sqrt{3x+1} = 4 - \sqrt{3x+1};$$

$$2\sqrt{3x+1} = 4; \quad \sqrt{3x+1} = 2;$$

$$3x = 3; \quad x = 1.$$

Kontrollime:

$$2^{\sqrt{3x+1}} = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3x+1}};$$

$$2^{\sqrt{3 \cdot 1 + 1}} = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3 \cdot 1 + 1}};$$

$$2^{\sqrt{4}} = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{4}}.$$

$$2^2 = 2^4 \cdot 2^{-2};$$

$$2^2 = 2^2.$$

4. $2^x = 6$. Kui astme aluseid ei saa võrdsustada, tuleb võrandi mõlemad pooled logaritmidada:

$$x \lg 2 = \lg 6; \quad x = \frac{\lg 6}{\lg 2} = \frac{0,7782}{0,3010} \text{ (arvutage tulemus).}$$

5. $3^x + 9^{x+1} - 84 = 0$; kuid $9^{x+1} = 9^x \cdot 9^1$;

$$3^x + 9^x \cdot 9^1 - 84 = 0; \quad 9^x = 3^{2x};$$

$$3^x + 3^{2x} \cdot 9 - 84 = 0;$$

Olgu $3^x = y$, siis saame

$$y + 9y^2 - 84 = 0;$$

$$9y^2 + y - 84 = 0;$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 9 \cdot 84}}{18} = \frac{-1 \pm \sqrt{3025}}{18};$$

$$y_1 = \frac{-1 + 55}{18},$$

$$y_1 = 3;$$

$$y_2 = \frac{-1 - 55}{18}.$$

$$y_2 = -3 \frac{1}{9},$$

y_2 on sobimatu, sest $y = 3^x$ (eksponentfunktsioon) ei saa olla negatiivne.

Seega $y = 3$; $3^x = 3$; $x = 1$.

Näitame ka logaritmivõrrandite lahendamist.

1. $\lg x = \lg 2 + \lg 5 - 3 \lg 3$;

$$x = \frac{2 \cdot 5}{3^3}; \quad x = \frac{10}{27}.$$

2. $1 + \lg x = 3 \lg 2$, kuna $1 = \lg 10$, võime kirjutada:

$$\lg 10 + \lg x = 3 \lg 2;$$

$$10x = 2^3;$$

$$x = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

3. $x^{\lg x} = 10\,000$.

Logaritmime mõlemad pooled:

$$\lg x \lg x = \lg 10\,000, \text{ kuna } \lg 10\,000 = 4, \text{ võime kirjutada:}$$

$$\lg^2 x = 4; \quad \lg x = \pm 2;$$

$$(\lg x)_1 = 2; \quad x_1 = 10^2 = 100;$$

$$(\lg x)_2 = -2; \quad x_2 = 10^{-2} = 0,01.$$

Kontrollime:

$$100 \lg 100 = 100^2 = 10\,000;$$

$$(0,01) \lg 0,01 = (0,01)^{-2} = (10^{-2})^{-2} = 10^4 = 10\,000.$$

Liitprotsendid

(majandustehnikumide ja -osakondade õpilastele)

Oletame, et hoiukassasse pandi tähtajalisele hoiule 500 rubla. Kui suureks kasvab see rahasumma 5 aastaga?

Nagu teada, maksab hoiukassa tähtajalise hoiuse pealt 3% aastas hoiusetasu ehk intressi. Kuna aastaga suureneb hoius 3% 500-st, s. o. 15 rubla võrra, siis järgmisel aastal arvestatakse intress juba 515 rublalt. Siin on meil tegemist muutumisega liitprotsentide seaduse järgi, s. t. arvutatakse ka protsentide protsendid. Kuidas sellist ülesannet lahendada?

Iga hoiuleantud rubla kasvab aastas $\frac{3}{100}$ rubla võrra, st. aasta lõpuks suureneb rublane hoius $\left(1 + \frac{3}{100}\right)$ rublani. Kogu hoius moodustab aasta lõpul $500\left(1 + \frac{3}{100}\right)$ rubla. Teise aasta lõpuks kasvab iga rubla uuesti $\left(1 + \frac{3}{100}\right)$ rublaks, seega $500\left(1 + \frac{3}{100}\right)$ rubla kasvab $500\left(1 + \frac{3}{100}\right)\left(1 + \frac{3}{100}\right)$ rublaks, s. o. $500\left(1 + \frac{3}{100}\right)^2$ rublaks. Kolmanda aasta lõpuks moodustab hoiusumma $500\left(1 + \frac{3}{100}\right)^3$ rubla, viienda aasta lõpul on aga hoiusumma $500\left(1 + \frac{3}{100}\right)^5$ rubla. Tähistades selle summa A -ga, võime kirjutada:

$$A = 500\left(1 + \frac{3}{100}\right)^5;$$

$$A = 500 \cdot 1,03^5.$$

Selle arvutamiseks logaritmime mõlemad pooled:

$$\lg A = \lg 500 + 5 \lg 1,03;$$

$$\lg A = 2,6990 + 5 \cdot 0,0128 = 2,6990 + 0,0640 = 2,7630.$$

Antilogaritmid tabelist leiame, et $A = 579,4$. Seega on hoius 5 aasta lõppedes 579,40 rubla.

Kui tähistada: a — hoiusumma (algsumma),
 p — liitprotsendimäär,
 t — aastate arv,
 A — kasvanud summa,

saame järgmise valemi:

$$A = a \left(1 + \frac{p}{100} \right)^t.$$

Lahendame veel ühe ülesande.

Kui suur summa tuleb panna hoiukassasse tähtajalisele arvele, et kuue aasta pärast oleks hoius 1000 rubla?

Selles ülesandes on juba teada kasvanud summa $A = 1000$ rbl., kuid on tundmatu algsumma a . Kasutades liitprotsendi valemit, võime kirjutada:

$$1000 = a \cdot 1,03^6;$$

$$a = \frac{1000}{1,03^6};$$

saadud võrduse logaritmime:

$$\begin{aligned} \lg a &= \lg 1000 - 6 \cdot \lg 1,03 = \\ &= 3 - 6 \cdot 0,0128 = 3 - 0,0768 = 2,9232. \end{aligned}$$

Antilogaritmid tabelist leiame a :

$$a = 837,9.$$

Seega algsumma on 837,90 rubla.

Tähtajalised sissemaksud

(majandustehnikumide ja -osakondade õpilastele)

Oletame, et iga aasta algul makstakse hoiukassasse 50 rubla. Kui suur summa koguneb hoiukassasse 20 aasta jooksul, arvestades liitprotsendimääraks 2%?

Lahendame selle ülesande.

Esimene sissemaks muutub 20 aastaga $50 \cdot 1,02^{20}$ rublaks. Kuna teine sissemaks on hoiukassas 19 aastat, siis ta muutub $50 \cdot 1,02^{19}$ rublaks.

Kolmas sissemaks on hoiukassas 18 aastat ja muutub selle aja jooksul $50 \cdot 1,02^{18}$ rublaks jne.

Viimane sissemaks asub hoiukassas ühe aasta ja muutub $50 \cdot 1,02$ rublaks.

Kui liita kõik need summad, saame hoiukassasse 20 aasta jooksul kogunenud summa, mille tähistame tähega A .

$$A = 50 \cdot 1,02^{20} + 50 \cdot 1,02^{19} + 50 \cdot 1,02^{18} + \dots + 50 \cdot 1,02 = \\ = 50 \cdot 1,02(1,02^{19} + 1,02^{18} + \dots + 1).$$

Sulgudes on geomeetrilise progressiooni summa, mille esimeks liikmeks on 1, teguriks — 1,02 ja viimaseks liikmeks $1,02^{19}$. Selle progressiooni liikmete arv on 20 (nullist kuni 19-ni). Kasutades geomeetrilise progressiooni liikmete summa valemit võime kirjutada:

$$A = 50 \cdot 1,02 \cdot \frac{1,02^{20} - 1}{1,02 - 1},$$

$$A = \frac{50 \cdot 1,02(1,02^{20} - 1)}{0,02} = 2550(1,02^{20} - 1).$$

Arvutame $1,02^{20}$, tähistades selle x -ga;

$$x = 1,02^{20}, \text{ logaritmidest saame:}$$

$$\lg x = 20 \cdot \lg 1,02 = 20 \cdot 0,0086 = 0,172,$$

$$x = 1,486.$$

$$A = 2550(1,486 - 1) = 2550 \cdot 0,486 = 1239.$$

Niisiis, 20 aastaga on hoiukassasse kogunenud 1239 rubla.

Kasutades sama mõttekäiku, võib tuletada valemi ülesannete lahendamiseks tähtajalistele sissemaksudele.

Olgu a — iga aastane tähtajaline sissemaks,

p — liitprotsendimäär,

t — aastate arv,

$$1 + \frac{p}{100} = q.$$

Siis esimene tähtajaline sissemaks kasvab t aasta jooksul aq^t rublaks. Teine sissemaks on hoiukassas $(t-1)$ aastat ja kasvab tähtaja lõpuks aq^{t-1} rublaks. Kolmas sissemaks on hoiukassas $(t-2)$ aastat ja kasvab tähtaja lõpuks aq^{t-2} rublaks jne. Viimane sissemaks on hoiukassas ühe aasta ja moodustab aasta lõpuks aq rubla.

Seetõttu

$$A = aq^t + aq^{t-1} + aq^{t-2} + \dots + aq = \\ = aq(q^{t-1} + q^{t-2} + q^{t-3} + \dots + 1) = \\ = aq(1 + \dots + q^{t-3} + q^{t-2} + q^{t-1}).$$

Sulgudes on geomeetriline progressioon, mille esimene liige on 1, progressiooni tegur q , liikmete arv t ja viimane liige q^{t-1} .

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{t-3} + q^{t-2} + q^{t-1} = \frac{q^t - 1}{q - 1}.$$

$$A = aq \frac{q^t - 1}{q - 1}.$$

Tähtajaliste maksete valemit ja näiteid vaadake Kalnini õpikust.

Kontrollküsimusi

1. Mida nimetatakse antud arvu logaritmiiks antud alusel?
 2. Missuguseid logaritmifunktsiooni omadusi te teate?
 3. Millega võrdub korrutise, murru, astme ja juure logaritm?
- Tõestage need teoreemid.
4. Mis on potentseerimine?
 5. Missuguseid kümnendlogaritmid omadusi te teate?
 6. Tooge näiteid kõikide tehete kohta logaritmidega poolnegatiivsel kujul.
 7. Missugust võrrandit nimetatakse eksponentvõrrandiks?
 8. Missugust võrrandit nimetatakse logaritmivõrrandiks?
 9. Tooge näiteid eksponent- ja logaritmivõrrandite lahendamise kohta.
 10. Tuletage liitprotsentide valem.
 11. Tuletage tähtajaliste sissemaksude valem.
 12. Tuletage tähtajaliste maksete valem.
- (Viimased kolm küsimust on ainult majandustehnikumide ja -osakondade õpilastele).

Teema 2. Arvutuslükat

Arvutuslükati ehituse põhimõte ja skaalad. Põhiskaala, ruut- ja kuupskaalad. Arvude korrutamine ja jagamine lükatil. Kombi- neeritud tehted korrutamise ja jagamisega. Ruudud ja ruutjuured, kuubid ja kuupjuured. Arvude logaritmid leidmine. Lükati trigonomeetrilised skaalad.

Kirjandus

1. Kalnin. XI ptk., § 135—171; harjutused nr. 1—83.
2. Панов. Счетная линейка. Гостехиздат, 1952.
3. Borkwell. Arvutuslükat.

METOODILISED JUHENDID

Enne kui hakata töötama arvutuslükatiga, tuleb kõigepealt õppida skaaladel olevate arvude lugemist, sest enamik vigu arvu-

tuslükatiga töötamisel tekib arvude ebaõigest lugemisest ja märkimisest skaalal. Arvutuslükati kasutaja esmaseks ja peamiseks tingimuseks on skaalade ja nendel esinevate jaotiste põhjalik tundmine.

Kui põhiskaala (C ja D skaala) alguskriipsu lugeda 1-ks, siis suured numbrid ühest kuni üheksani tähendavad ühelisi ja nende vahelised pikemad jaotuskriipsud kümnendikke. Sajandik-jaotused esinevad täielikult ainult 1-st kuni 2-ni, edasi 2-st kuni 4-ni on kõige lühem jaotuskriipsude vahe 2 sajandikku, 4-st kuni lõpuni — 5 sajandikku. Siin saab sajandik-jaotisi määrata ühekaupa silma järgi.

Arvude märkimiseks ei vaadelda koma asukohta arvus, vaid ainult selle arvu tüvenumbreid. Esimesele tüvenumbrile vastavad arvutuslükati numbriga märgitud jaotised (suured numbrid), teisele tüvenumbrile kümnendikud ja kolmandale sajandikud.

Kui märkida põhiskaalal arv 35,6, siis loeme: kolm — viis — kuus, kus 3 on esimene tüvenumber, 5 on teine tüvenumber ja 6 on kolmas tüvenumber; kui märkida põhiskaalal arv 0,0723, siis loeme: seitse — kaks — kolm, kus 7 on esimene tüvenumber, 2 on teine tüvenumber ja 3 on kolmas tüvenumber. Rohkem kui kolmekohalised arvud tuleb eelnevalt ümardada kolmekohalisteks. Juhul, kui mitmekohalise arvu esimene tüvenumber on 1, võib selle arvu ümardada neljakohaliseks, sest vahemikus 1—2 saab sajandik-jaotusi silma järgi jagada tuhandikeks.

Vaatleme üksikuid tehteid.

Kahe arvu a ja b korrutise c leidmist tuleb teostada kahe logaritmilise skaalaga, millel on ühesugused mõõtkavad. Korrutise leidmiseks tuleb nende skaalade abil liita arvude a ja b logaritmidelle vastavad lõigud, sest

$$\text{kui } c = a \cdot b, \text{ siis } \lg c = \lg a + \lg b.$$

Me saame korrutamiseks järgmise eeskirja: esimese teguri kohale, mille märgime põhiskaalal D , viime keele alguskriipsu $C-1$, seejärel, muutmata keele asendit, nihutame märkijat paremale, kuni märkija niit läbib keelel (C -skaalal) teisele tegurile vastava jaotuskriipsu ja loeme seejärel vastuse märkija niidi alt D -skaalalt.

Kui aga teisele tegurile (b) vastav jaotuskriips satub välja-poolle D -skaala piirkonda, siis peaks D -skaalast paremal asuma veel üks logaritmiline skaala jaotustega 10-st kuni 100-ni. Kuid logaritmilise skaala perioodsuse tõttu võib sel korral nihutada arvutuslükati keelt vasakule poole, nii et C -skaala parempoolne ots ($C-10$) tuleks D -skaalal esimese teguri kohale. Asetades nüüd

märkija niidi *C*-skaalal teise teguri (*b*) kohale, loeme vastuse niidi alt *D*-skaalalt.

Tuleb kohe märkida, et lükatil arvutades saame kätte vastuse tüvenumbrid, kuid koma määramiseks peame sooritama lisaarvutuse. Praktikaks kasutatakse selleks peamiselt resultaadi ligikaudset hindamist tegurite jämeda ümardamise kaudu. Arvud ümardatakse ühe tüvenumbrini ja sooritatakse peast vastavad tehted. Lükatiilt loetud vastuse tüvenumbrites pannakse koma nii, et saadud resultaat oleks kõige lähemal ümardatud teguritega sooritatud tehete tulemusele.

Näide 1. $1530 \cdot 0,054 =$

Märgime esimese teguri 1-5-3 lükati *D*-skaalal keele alguskriipsuga *C*—1. Nüüd viime niidi *C*-skaalal teise teguri 5-4-0 kohale. Loeme *D*-skaalalt märkija nüüdi alt korrutise tüvenumbrid 8-2-6.

Koma asukoha määrame järgmiselt:

$$2000 \cdot 0,05 = 100.$$

Vastus peab olema 100 lähedal, st. 82,6. Seega:

$$1530 \cdot 0,054 = 82,6.$$

Näide 2. $0,755 \cdot 3250 =$

Kui nüüd keele alguskriips *C*—1 viia esimese teguri 7-5-5 kohale *D*-skaalal, siis jaotuskriips *C*-skaalal, mis märgib teise teguri tüvenumbreid 3-2-5, jääb väljapoole *D*-skaala piirkonda. Seepärast tuleb keele alguskriipsu asemel viia esimese teguri kohale keele lõppkriips *C*—10, või, nagu öeldakse, teha keele ülekanne. Korrutise tüvenumbrid on 2-4-5, et $0,8 \cdot 3000 = 2400$, on

$$0,755 \cdot 3250 = 2450.$$

Näide 3. Leida 23,4% järgmistest arvudest: 167; 254; 678; 832; 1226; 2402.

Ülesanne taandub antud arvude korrutamisele arvuga 0,234.

Märgime keele algusega *C*—1 lükati põhiosal (*D*-skaalal) arvu 2-3-4. Nihutades seejärel märkija niiti *C*-skaalal esiteks arvu 167 ja siis 254 kohale, leiame kaks esimest tulemust: 39,1 ja 59,4.

Järgmiste tulemuste saamiseks tuleb keele lõppkriips viia arvu 0,234 kohale *D*-skaalal. Praktiliselt on soovitatav leida kõik võimalikud resultaadid keele esimese asendi juures (toodud ülesandes tuleks ka kahe viimase arvu puhul leida resultaat keele esimese asendi juures) ja alles seejärel teha keele ülekanne. Keele ülekanne

teeme kõikidel juhtudel, kui jaotuskriips, mille kohalt tuleks lugeda vastus, asub väljaspool arvutuslükati põhiosa. Ülekanne toimub järgmiselt: märkija niit paigutatakse kas keele alguskriipsu või lõppkriipsu kohale, olenevalt sellest, kumb neist asub lükati põhiosal, seejärel viiakse märkija niidi alla keele lõppkriips, kui märkija niit asus alguskriipsu kohal, või alguskriips, kui märkija niit asus lõppkriipsu kohal. Pärast keele ülekannet leiame ülejäänud tulemused. Tehes kõik ülaltoodud võtted saame, et 23,4% arvudest 167; 254; 678; 832; 1226; 2402 on vastavalt 39,1; 59,4; 158,6; 194,7; 287; 562.

Teostage nüüd iseseisvalt arvutuslükati abil järgmised tehted:

$$\begin{aligned} 0,015 \cdot 3,5 &= 0,0525; \\ 2,96 \cdot 7,5 &= 22,2; \\ 1,54 \cdot 3,26 &= 5,02; \\ 0,546 \cdot 90,8 &= 49,6; \\ 4,3 \cdot 73,5 \cdot 0,124 &= 39,2. \end{aligned}$$

Et leida arvutuslükati abil kahe arvu a ja b jagatist c , selleks tuleb samuti nagu korrutamiselgi kasutada kahte logaritmilist skaalat, millede mõõtkavad on võrdsed. Siin tuleb nende skaalade abil lahutada arvudele a ja b vastavad logaritmilised lõigud, sest

$$\text{kui } c = \frac{a}{b}, \text{ siis } \lg c = \lg a - \lg b.$$

Sellest saame jagamiseks järgmise eeskirja: lükati D -skaalal niidi abil märgitud jagatavaga (a) kohakuti paigutatakse keele C -skaalal võetud jagaja (b) ja jagatis loetakse kas keele alguskriipsu või lõppkriipsu kohalt, olenevalt sellest, kumb neist jääb lükati põhiosal D -skaala piirkonda.

Jagamisprotsess, samuti nagu korrutamisprotsesski, koosneb kahest etapist — jagatise tüvenumbrite leidmisest ja saadud tulemuses koma õigest paigutamisest. Arvutuslukat täidab ainult selle etapi esimese osa. Koma paigutamiseks tuleb jällegi nii jagatavat kui ka jagajat jämedalt ümardada ja leida koma õige asukoht nende ümardatud arvude jagamise teel.

Näide 4. $35,7 : 0,271 =$

Viime märkija niidi D -skaalal jagatava tüvenumbrite 3-5-7 kohale, seejärel nihutame keelt, kuni C -skaala jagaja tüvenumbreid 2-7-1 tähistav jaotuskriips jääb märkija niidi alla. Jagatise tüvenumbrid 1-3-1-8 leiame lükati D -skaalal (keele alguskriipsu kohalt). Koma asukoht jagatise määratakse jämedalt ümardatud

jagatava ja jagaja jagamise teel: $30 : 0,3 = 100$, seega $35,7 : 0,271 = 131,8$.

Näide 5. $0,00274 : 0,873 =$

Viime märkija niidi D -skaalal jaotuskriipsule 2-7-4 ja nihutame keelt, kuni sellel asuv C -skaala jaotuskriips, mis kujutab jagaja tüvenumbreid 8-7-3, jääb märkija niidi alla. Jagatise tüvenumbrid 3-1-4 leiame jällegi lükati põhiosal D -skaalal (keele lõppkriipsu kohalt). Koma asukoha jagatises määrame jämedalt ümardatud jagatava ja jagaja jagamise teel: $0,003 : 1 = 0,003$, järelikult $0,00274 : 0,873 = 0,00314$.

Arvutuslükatiga on mugav lahendada ka korrutamise ja jagamise tehteid sisaldavaid kombineeritud ülesandeid.

Vaatleme ühte kombineeritud ülesannetest.

Näide 6.

$$\frac{6,3 \cdot 4,3}{8,7} =$$

Arvutada võib kahel viisil — alguses korrutamine ja siis jagamine, või vastupidi. Vaatleme, kuidas see toimuks praktiliselt.

Asetame märkija niidi D -skaalal jaotuskriipsule 6-3-0 ja viime keele lõppkriipsu märkija niidi alla. Nihutame seejärel märkija niidi C -skaalal jaotuskriipsu 4-3-0 kohale ja märgime sellega lükati D -skaalal saadud korrutise. Jäi üle teostada jagamine. Selleks viime C -skaalal jaotuskriipsu 8-7-0 märkija niidi alla ja loeme keele lõppkriipsu kohalt D -skaalal lõpptulemuse: 3,12.

Nüüd teeme need tehted teises järjekorras. Asetame märkija niidi jälle D -skaalal jaotuskriipsule 6-3-0 ja viime C -skaala jaotuskriipsu 8-7-0 märkija niidi alla. Keele lõppkriipsu kohale D -skaalal jäi nende arvude jagatis. Järgnevas korrutamiseks tuleks jagatise kohale viia kas keele alguskriips või lõppkriips, kuid viimane juba asubki jagatise kohal, seepärast lõpptulemuse leidmiseks tuleb meil, lugemata vahepealset resultaati, nihutada märkija niit C -skaalal jaotuskriipsu 4-3-0 kohale ja lugeda niidi alt D -skaalal lõpptulemus 3,12. On ilmne, et teine viis on palju ratsionaalsem ja täpsem, kuna seal tuli teha ainult üks keele lüke. Niisiis tuleks korrutamise ja jagamise kombineeritud ülesannete lahendamise juures teha kõigepealt jagamise ja seejärel korrutamise tehe.

Kui nii murru lugejas kui ka nimetajas on mitu tegurit, näiteks avaldise $\frac{a \cdot b \cdot c \cdot d}{e \cdot f \cdot g}$ arvutamisel on soovitatav jagada ja kor-

rutada vaheldumisi, s. t. arvutada alljärgneva skeemi kohaselt $[(a \cdot e \cdot b) : f \cdot c] : g \cdot d$, tänu sellele väheneb keele lükete arv ja suureneb arvutuse täpsus.

Toodud näitest ilmneb, et teostades lükatiga kombineeritud tehteid, pole vaja lugeda (ja veel vähem üles kirjutada) vahepealseid tulemusi, vaid ainult märkida neid lükatil märkija niidi abil.

Ruutskaalad (A ja B) kujutavad endast samasuguseid logaritmilisi skaalasid nagu põhiskaalad, kuid mõõtkavalt kaks korda väiksemaid, seepärast vastab põhiskaala ühele pikkusele ruutskaala kaks pikkust, ehk teisiti väljendatult koosneb ruutskaala kahest logaritmilisest ühikust. Skaaladega A ja B saab korrutada ja jagada täpselt samuti nagu põhiskaaladega, kuid vastuse saame ebatäpsema. Selleks, et leida antud arvu ruutu, tuleb see arv märkida niidiga põhiskaalal ja vastus lugeda ruutskaalal märkija niidi alt. Kuna asetamiseks kasutame kas jämedalt ümardamise viisi või järgmist võtet. Lahutame astendatava arvu kaheks teguriks nii, et üks teguritest oleks ühekohaline arv ja teine tegur arvu 10-ne vastav aste. Sel juhul astendame arvutuslükatil ühekohalise täisosaga arvu, ning saadud astet korrutame 10-ne vastava astmega.

Näiteid:

$$525^2 = (5,25 \cdot 10^2)^2 = 5,25^2 \cdot 10^4 = 27,6 \cdot 10\,000 = 276\,000$$

$$0,0017^2 = (1,7 \cdot 10^{-3})^2 = 1,7^2 \cdot 10^{-6} = 2,89 \cdot 0,000\,001 = 0,000\,002\,89.$$

Ruutjuure leidmiseks märgitakse juuritav arv märkija niidiga ruutskaalal ja juure tüvenumbrid loetakse põhiskaalal märkija niidi alt. Ruutjuure leidmisel ei ole ükskõik, kummal logaritmilisel ühikul märkida juuritav arv. Lähtume siin ruutjuure leidmise eeskirjast. Kõigepealt jaotame juuritava arvu (kümnendmurru) komast vasakule ja paremale poole kahe numbri kaupa rühmadeks. Kui seejuures esimene (vasakpoolne) tüvenumbreid sisaldav rühm koosneb ühest tüvenumbrist, siis märgitakse juuritav arv niidiga ruutskaala esimesel logaritmilisel ühikul, kui aga esimene tüvenumbreid sisaldav rühm koosneb kahest tüvenumbrist, siis märgitakse juuritav arv ruutskaala teisel logaritmilisel ühikul. Nii näiteks arvude 625; 3,042; 0,0248 ruutjuurte arvutamisel tuleb nad niidiga märkida ruutskaala esimesel logaritmilisel ühikul, sest rühmitatult on need arvud: 6'25; 3,04'20; 0,02'48; kuid arvude 1352; 16,15; 0,008 13 ruutjuurte arvutamisel tuleb nad niidiga märkida ruutskaala teisel logaritmilisel ühikul, sest rühmitatult on nad 13'52; 16,15; 0,00'81'30. Selle võttega on lihtne määrata ruutjuure väärtuses koma asukoht: juuritava arvu iga rühm

komast vasakul pool annab ruutjuure täisosas ühe numbrini. Kui seejuures juuritav arv on väiksem kui üks ja koma järel esinevad nullid (kuni esimese tüvenumbrini), siis on muidugi ruutjuure täisosa null ja koma järel esineb nii mitu nulli, kui mitu rühma järgemööda komast paremal pool sisaldavad kaks nulli.

Näide 7. $\sqrt{2653} =$

Jaotades juuritava arvu alates koma asukohast rühmadesse 26'53 näeme, et esimene rühm sisaldab kahte tüvenumbrit — 26 — ja seetõttu tuleb juuritav arv märkida *A*-skaala teisel logaritmilisel ühikul. Ruutjuure väärtuse loeme põhiskaalalt *D* märkija niidi alt: $\sqrt{2653} = 51,5$. Juure täisosa sisaldab eespool toodud kohtade määramise reegli põhjal kahte tüvenumbrit, sest juuritava arvu täisosas on kaks rühma.

Näide 8. $\sqrt{0,00052} =$

Jaotame siin juuritava arvu rühmadesse järgmiselt: 0,00'05'20 ja märgime niidiga *A*-skaala esimesel logaritmilisel ühikul tüvenumbrid 5-2 ning loeme niidi alt *D*-skaalal ruutjuure tüvenumbrid 2-2-8.

Seega $\sqrt{0,00052} = 0,0228$.

Näide 9.

$$\frac{48,5}{\sqrt{6,03}}$$

Ruutjuure väärtuse leiame põhiskaalalt, kui märgime juuritava arvu ruutude skaalal. Järelikult tuleb ülaltoodud jagamine sooritada põhiskaaladega, kusjuures aga jagaja tüvenumbrid tuleb võtta ruutude skaalal *B*.

Seega viime märkija niidi *D*-skaalal jagatava tüvenumbrite 4-8-5 kohale ja *B*-skaala jaotuskriipsu, mis märgib jagaja tüvenumbreid 6-0-3, märkija niidi alla. Jagatise väärtuse 19,7 loeme keele alguskriipsu kohalt *D*-skaalal. Kuna asukohta jagatise määrame jagatava ja jagaja jämedalt ümardamise teel.

Arvude kuupide ja kuupjuurte nii otseseks leidmiseks, kui ka arvude kuupe ja kuupjuuri sisaldavate kombineeritud avaldiste arvutamiseks on lükati ülemisel äärel kuupskaala ehk lühidalt *K*-skaala. *K*-skaalal on lükati põhiskaala pikkuses kolm ühepikkust logaritmilist ühikut, milliseid loeme järgemööda (vasakult paremale) esimeseks, teiseks ja kolmandaks logaritmiliseks ühikuks.

K-skaala esimene logaritmiline ühik sisaldab arvusid 1—10,

teine 10—100 ja kolmas 100—1000. Seega esinevad K -skaalal kõik arvud 1—1000, kui skaala alguskriipsu lugeda 1-ks.

Arvude kuupi tõstmiseks märgime niidiga astendatava arvu D -skaalal ja loeme kuubi K -skaalal.

Kui astendatava arvu täisosa on ühekohaline arv, siis koma asukoha kuubis määrab logaritmiline ühik K -skaalal, kust loetakse kuubi tüvenumbrid.

Kui aga astendatava arvu täisosa ei ole ühekohaline arv, siis koma asukoha määramiseks kuubis lahutame astendatava arvu kaheks teguriks nii, et üks teguritest oleks ühekohalise täisosaga arv ja teine tegur kujutaks arvu 10-ne vastavat astet. Sel juhul astendame arvutuslükatil ühekohalise täisosaga arvu, mille astet korrutame 10-ne vastava astmega.

Näiteks toimuks arvu 0,003 65 kuupi tõstmine järgmiselt:

$$0,003\ 65^3 = (3,65 \cdot 10^{-3})^3 = 3,65^3 \cdot 10^{-9} = 48,6 \cdot 10^{-9} = 0,000\ 000\ 048\ 6.$$

Arvude kuupjuurte leidmiseks ja koma asukoha määramiseks kuupjuures jaotame juuritava arvu (kümnennumru) komast vasakule ja paremale poole kolme numbri kaupa rühmadeks. Kõige esimesse tüvenumbreid sisaldavasse rühma võib jääda seega kas üks, kaks või kolm tüvenumbrit. Jääb kõige esimesse tüvenumbreid sisaldavasse rühma üks tüvenumber, siis märgitakse juuritav arv niidiga kuupskaala esimesel logaritmilisel ühikul; jääb kaks tüvenumbrit, siis teisel logaritmilisel ühikul. Näiteks arvude 1234; 3,05 ja 0,006 42 kuupjuurte arvutamisel tuleb nad märkida kuupskaala esimesel logaritmilisel ühikul, sest rühmadesse jaotatult on nad: 1'234; 3'050 ja 0,006'420; ning arvude 12 340; 30,5 ja 0,0642 kuupjuurte arvutamisel tuleb nad märkida kuupskaala teisel logaritmilisel ühikul, sest rühmitatult on nad: 12'340; 30',500; 0,064'200; ning arvude 123,4; 305 ja 0,000 642 kuupjuurte arvutamisel tuleb nad märkida kuupskaala kolmandal logaritmilisel ühikul, kuna nad rühmadesse märgitult on 123,400; 305,000; 0,000'642. Kuupjuurte väärtuses koma asukoha määramiseks annab juuritava arvu iga rühm komast vasakul pool kuupjuure täisosa ühe numbri. Kui seejuures juuritav arv on väiksem kui üks ja koma järel esinevad nullid (kuni esimese tüvenumbrini), siis on kuupjuure täisosa null ja koma järel esineb nii mitu nulli, kui mitu rühma järgemööda komast paremal pool sisaldavad kolm nulli. Siit järeldub, et koma asukoha kuupjuures võime kindlaks määrata juuritava arvu rühmade järgi, nagu see toimus ruutjuure leidmisel.

Näide 10. $\sqrt[3]{7502} =$

Jaotades juuritava arvu kolme numbriga rühmadeks näeme, et esimene rühm sisaldab ühte tüvenumbrit. Seega tuleb juuritav arv märkida kuupide skaala esimesel logaritmilisel ühikul. Märkija niidi alt D -skaalal loeme juure tüvenumbrid 1-9-6. Kuna juuritavas arvus on kaks rühma, siis juure täisosa sisaldab kahte tüvenumbrit ja järelikult:

$$\sqrt[3]{7502} = 19,6.$$

Arvutuslükatiga on kerge lahendada ka võrdeid. Selle küsimuse teoreetiline osa on käsitletud vastavas kirjanduses; siin piirdume ainult mõningate näidete vaatlemisega. Tähendame, et juhul, kui võrde eesliikmed märkida arvutuslükati põhiskaalal D ja tagaliikmed põhiskaalal C , siis neil skaaladel kohakuti seisvate arvude suhted on võrdsed, vaatamata sellele, kas arvutuslükati keel on lükatud paremale või vasakule.

Siis saame järgmise eeskirja.

1) Antud võrde eesliikme märgime märkija niidi abil D -skaalale ja viime sellega kohakuti vastava tagaliikme C -skaalal.

2) Seejärel viime märkija niidi teise suhte tuntud liikme kohta (kui see on eesliige, siis D -skaalal, kui tagaliige, siis C -skaalal). Teise suhte tundmatu liikme loeme vastavalt kas C -skaalal või D -skaalal märkija niidi alt. Eesliikmete ja tagaliikmete paigutus põhiskaaladel võib olla ka vastupidine, s. t. eesliikmed võetakse C -skaalal ja tagaliikmed D -skaalal.

Näide 11. Leida antud võrdest $\frac{0,65}{x} = \frac{3,2}{7,5}$ tundmatu x .

Asetame keele selliselt, et jaotuskriips, mis tähistaks arvu 7,5, jääks kohakuti D -skaala jaotuskriipsuga 3,2. Teeme keele ülekande ja loeme D -skaala jaotuskriipsu 0,65 kohalt C -skaalal vastuse 1,523; järelikult $x = 1,523$. Sama tulemuse oleks saanud ka siis, kui tuntud liikmete paigutus põhiskaaladel oleks olnud vastupidine.

Näide 12. Keemilise analüüsi tulemusena koosnes analüüsitav segu järgmistest komponentidest: $A - 258$ g, $B - 150$ g, $C - 94$ g, $D - 28$ g.

Leida mitu % moodustab iga komponent segu üldkaalust. Ulesanne taandub järgmiste võrrete lahendamisele:

$$\frac{x_1}{258} = \frac{x_2}{150} = \frac{x_3}{94} = \frac{x_4}{28} = \frac{100}{530}.$$

Võrtete kirjutusest järeldub, et D -skaala lõppkriipsu kohale tuleb asetada C -skaala jaotuskriips 5-3-0. Viime märkija niidi järk-järgult C -skaalal nimetajate 258; 150; 94 ja 28 kohale ja loeme D -skaalalt vastused (x_3 leidmiseks tuleb teha keele ülekanne). Vastuseks saame, et komponent A moodustab 48,7%; B — 28,3%; C — 17,7% ja D — 5,3%.

Käesoleva teema lõpul ei ole kontrollküsimusi, sest oma teadmiste ja oskuste parimaks kontrolliks on siin ülesannete lahendamine. Pidage meeles, et ainult harjutamine teeb meistriks.

TRIGONOMEETRIA

Teema 3. Liitmisteoreemid. Kahekordse- ja poolnurga trigonomeetrilised funktsioonid.

Kahe nurga summa või vahe, kahekordse ja poolnurga trigonomeetrilised funktsioonid.

Teema 4. Trigonomeetriliste funktsioonide summa ja vahe teisendamine korrutiseks.

Kahe siinuse või koosinuse summa ja vahe teisendamine korrutiseks. Kahe tangensi või kootangensi summa ja vahe teisendamine korrutiseks.

Kirjandus

1. Kožuevov. Trigonomeetria, § 35—42; harjutused 1, 2, 3, 7, 8, 12, 14, 28, 33, 39, 43, 45, 49—51 (teema 3 kohta); 1—12, 21—32 (teema 4 kohta).
2. Rõbkin. Trigonomeetria, § 50—53, 55—62, 63—66.
3. Rõbkin. Ülesannete kogu, § 9, nr. 1—9, 15—20, 21, 22, 24, 26, 27, 33, 36; § 10, nr. 1, 4—6, 8, 19—25, 28—30, 34, 37, 46, 47; § 11, nr. 1, 2, 3, 7, 8, 10, 11, 12, 15, 19, 26, 28, 31, 32, 36, 41, 50—58, 59.

METOODILISED JUHENDID

Kõigepealt tuleb õppida selgeks kahe nurga summa ja vahe, kahekordse ja poolnurga trigonomeetriliste funktsioonide valemite tuletamine. Pidage meeles, et $\sin(\alpha + \beta)$ ei võrdu $\sin \alpha + \sin \beta$, vaid $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$; $\sin 2\alpha$ ei võrdu $2 \sin \alpha$, vaid $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.

$\cos 2\alpha$ avaldamiseks tuleb osata põhivalemitega $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ ja sellest tuletatud valemid:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha;$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1;$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Kõiki neid seoseid on vaja tunda.

Tõestame, et $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \cos 2\alpha$;

$$\begin{aligned} \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} &= \frac{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

On kerge näha, et kui $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, siis $\sin 4\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha$ (võrduse paremal pool on nurk kaks korda väiksem vasakul pool asuvast nurgast).

Seepärast on õiged ka järgmised võrdused:

$$\sin 3\alpha = 2 \sin \frac{3\alpha}{2} \cdot \cos \frac{3\alpha}{2};$$

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2};$$

$$\cos 4\alpha = \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha;$$

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Tõestame, et $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ (joon. 1).

Olgu $\angle ABC = \alpha$

$\angle CBN = \beta$.

Tõmbame sirge $MKD \perp BC$.

$$S_{\triangle MBD} = S_{\triangle MBK} + S_{\triangle KBD}. \quad (1)$$

Me teame, et kolmnurga pindala võrdub tema kahe külje ja nendevahelise nurga siinuse poole korrutisega, seepärast saame võrdusest (1):

$$\frac{BM \cdot BD \cdot \sin(\alpha + \beta)}{2} = \frac{BM \cdot BK \cdot \sin \alpha}{2} + \frac{BK \cdot BD \cdot \sin \beta}{2},$$

või $BM \cdot BD \cdot \sin(\alpha + \beta) = BM \cdot BK \cdot \sin \alpha + BK \cdot BD \cdot \sin \beta$.

Jagades võrduse mõlemaid pooli korrutisega $BM \cdot BD$, saame

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \frac{BK}{BD} + \frac{BK}{BM} \cdot \sin \beta = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta.$$

Kõiki valemeid trigonomeetriliste funktsioonide summa ja vahe korrutiseks teisendamise kohta tuleb hästi osata. Sageli saab kasutada valemeid:

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}; \quad 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Ka neid on vaja tunda.

Ülesannete lahendamise näiteid:

1. $\sin \alpha = \frac{1}{3}$; $\cos \beta = \frac{2}{5}$. Leida $\sin(\alpha + \beta)$, kui $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ja $270^\circ < \beta < 360^\circ$.

Selle ülesande lahendamisel tuleb silmas pidada, et α on teise veerandi nurk ja β — neljanda veerandi nurk:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{3};$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Me kirjutame miinusmärgi juure ette sellepärast, et II veerandi nurga koosinus on negatiivne.

Teades $\cos \beta$ väärtust, arvutame $\sin \beta$:

$$\sin \beta = -\sqrt{1 - \frac{4}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5},$$

siit

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right) = \\ &= \frac{2}{15} + \frac{2\sqrt{42}}{15} = \frac{2(1 + \sqrt{42})}{15}. \end{aligned}$$

Arvutage tulemus täpsusega kuni 0,01.

2) Tõestada samasus: $\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha + 2 = 0$.

L a h e n d u s:

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} &= \frac{2(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \\ &= \frac{-2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{-2 \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = -2 \operatorname{ctg} 2\alpha; \\ -2 \operatorname{ctg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha + 2 &= -2 \cdot 1 + 2 = 0. \end{aligned}$$

Seega $0 = 0$; samasus on tõestatud.

3) Teisendada korrutiseks $1 + \sin \alpha$.

L a h e n d u s. Teame, et $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ ja $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ seepärast

$$1 + \sin \alpha = 1 + \cos(90^\circ - \alpha) = 2 \cos^2 \left(\frac{90^\circ - \alpha}{2} \right) = 2 \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right).$$

Seda ülesannet saab lahendada ka teisiti:

$$\begin{aligned} 1 + \sin \alpha &= \sin 90^\circ + \sin \alpha = 2 \sin \frac{90^\circ - \alpha}{2} \cos \frac{90^\circ - \alpha}{2} = \\ &= 2 \sin \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right); \text{ kuid } \sin \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) = \\ &= \cos \left[90^\circ - \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \right] = \cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{seepärast } 1 + \sin \alpha &= 2 \cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = \\ &= 2 \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right). \end{aligned}$$

Nagu näete on esimene lahendusvõte lihtsam.

4) Teisendada korrutiseks $\sin \alpha + \sin 9\alpha + \sin 10\alpha$;

L a h e n d u s. Algul teisendame $\sin \alpha + \sin 9\alpha$;

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin 9\alpha &= 2 \sin \frac{\alpha + 9\alpha}{2} \cos \frac{\alpha - 9\alpha}{2} = \\ &= 2 \sin 5\alpha \cos(-4\alpha) = 2 \sin 5\alpha \cos 4\alpha, \quad \text{sest } \cos(-4\alpha) = \cos 4\alpha. \\ \sin \alpha + \sin 9\alpha + \sin 10\alpha &= 2 \sin 5\alpha \cos 4\alpha + \sin 10\alpha, \end{aligned}$$

kuid $\sin 10\alpha = \sin 2(5\alpha) = 2 \sin 5\alpha \cos 5\alpha$;
seetõttu:

$$\sin \alpha + \sin 9\alpha + \sin 10\alpha = 2 \sin 5\alpha \cos 4\alpha + 2 \sin 5\alpha \cos 5\alpha =$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \sin 5\alpha (\cos 4\alpha + \cos 5\alpha) = 2 \sin 5\alpha \cdot 2 \cos \frac{9\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \\
 &= 4 \sin 5\alpha \cdot \cos \frac{9\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}.
 \end{aligned}$$

Kontrollküsimusi

1. Tuletage valemid $\sin(\alpha + \beta)$ ja $\cos(\alpha + \beta)$ teisendamiseks.
2. Tuletage kahekordse nurga trigonomeetriliste funktsioonide valemid.
3. Tuletage poolnurga trigonomeetriliste funktsioonide valemid.
4. Tõestage, et $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ ja $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$.
5. Tuletage kahe nurga siinuse, koosinuse ja tangensi summa või vahe korrutiseks teisendamise valemid.
6. Arvutage ilma tabelita $\sin 75^\circ$ ja $\operatorname{tg} 15^\circ$.

T e e m a 5. Trigonomeetrilised pöördfunktsioonid (tehniliste erialade õpilastele)

Trigonomeetriliste pöördfunktsioonide mõiste. Põhivalemid. Pöördfunktsioonide graafikud.

T e e m a 6. Trigonomeetrilised võrrandid (tehniliste erialade õpilastele)

Lihtsamad trigonomeetrilised võrrandid. Trigonomeetriliste funktsioonide antud väärtustele vastavate nurkade üldavaldis.

Võrrandid, mis sisaldavad ühe ja sama argumendi üht ja sama funktsiooni. Võrrandid, mis taanduvad ühe ja sama argumendi üht ja sama funktsiooni sisalduvaiks võrrandeks. Homogeensed võrrandid. Võrrandid, mis sisaldavad erisuguste argumentidega funktsioone. Võrrandid, mille vasak pool on korrutis ja parem pool null.

Kirjandus

1. Kožuevov. Trigonomeetria, § 43–50; ülesanded 1, 2, 3–12 (teema 5 kohta); 1–12, 15–26, 32–44, 52–54, 72–75, 85–87, 125–126 (teema 6 kohta).
2. Rõbkin. Trigonomeetria, § 48–49, 45–47, 70–71.
3. Rõbkin. Ülesannete kogu, § 15, 1–7, 17–24; § 3, 93, 97, 105; § 10, 52–62; § 14, 1, 6, 16–26, 35–45, 48–52.

METOODILISED JUHENDID

Eelkõige õppige selgeks trigonomeetrilise pöördfunktsiooni ja trigonomeetrilise võrrandi definitsioon. Trigonomeetrilised pöördfunktsioonid on nurgad: $\text{arc sin } a$ on nurk, mille siinus on a .

$$\text{arc sin } \frac{1}{2} = 30^\circ, \quad \text{sest } \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\text{arc tg } 1 = 45^\circ, \quad \text{sest } \text{tg } 45^\circ = 1.$$

Kui te kirjutate $\text{arc sin } x$ (arcus tähega väike «a»), siis see tähendab nurga peaväärtust, s. t. nurk asub vahemikus -90° kuni $+90^\circ$ ehk vahemikus $-\frac{\pi}{2}$ kuni $+\frac{\pi}{2}$; $\text{arc cos } x$ asub vahemikus 0° kuni 180° ehk vahemikus 0 kuni π ; $\text{arc tg } x$ asub vahemikus -90° kuni $+90^\circ$ ehk vahemikus $-\frac{\pi}{2}$ kuni $+\frac{\pi}{2}$; $\text{arc ctg } x$ asub vahemikus 0° kuni 180° ehk vahemikus 0 kuni π .

Pidage meeles, et nurga igale väärtusele vastab täiesti määratud trigonomeetrilise funktsiooni väärtus, kuid trigonomeetrilise funktsiooni igale väärtusele vastab lugemata hulk nurki, seepärast tuleb enne, kui lahendada trigonomeetrilist võrrandit, õppida selgeks nurkade avaldamine üldkujul.

$$\text{sin } x \text{ jaoks: } x = 180^\circ n + (-1)^n \alpha; \quad \text{ehk } x = \pi n + (-1)^n \cdot \alpha;$$

$$\text{cos } x \text{ jaoks: } x = 360^\circ n \pm \alpha; \quad \text{ehk } x = 2\pi n \pm \alpha;$$

$$\text{tg } x \text{ jaoks: } x = 180^\circ n + \alpha; \quad \text{ehk } x = \pi n + \alpha;$$

$$\text{ctg } x \text{ jaoks: } x = 180^\circ n + \alpha; \quad \text{ehk } x = \pi n + \alpha,$$

kus n on mistahes täisarv.

$$\text{N ä i t e k s: } \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$x = 180^\circ n + (-1)^n \cdot 60^\circ.$$

See võrdus määrab kõik nurgad, mille siinus on $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Tõepoolest, olgu $n = 0$, siis

$$x = 180^\circ \cdot 0 + (-1)^0 \cdot 60^\circ = 60^\circ.$$

$$\text{Olgu } n = 1, \text{ siis } x = 180^\circ \cdot 1 + (-1)^1 \cdot 60^\circ = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

$$\text{Tõepoolest, } \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Olgu } n = 2; \text{ siis } x = 180^\circ \cdot 2 + (-1)^2 \cdot 60^\circ = 420^\circ;$$

$$\text{Tõepoolest, } \sin 420^\circ = \sin(360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Trigonomeetrilise võrrandi lahendamiseks tuleb teda eelkõige teisendada, nii et võrrandisse jääks ainult ühe argumendi üks funktsioon. Arvutades siis selle funktsiooni väärtuse, määrame leitud funktsiooni väärtusele vastava nurkade üldavaldise.

Näiteks, $\sin x = \cos x$, jagades võrrandi mõlemad pooli suurusga $\cos x$, saame $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos x}$, siit $\operatorname{tg} x = 1$; $x = 180^\circ n + 45^\circ$ ehk $x = \pi n + \frac{\pi}{2}$.

Kožeurovi õpikus § 47 on toodud näiteid trigonomeetriliste pöördfunktsioone sisaldavate ülesannete lahendamise kohta ja § 50 trigonomeetriliste võrrandite lahendamise kohta. Soovitame need ülesanded läbi töötada.

Kontrollküsimusi

1. Mis on $\operatorname{arc} \sin a$, $\operatorname{arc} \cos a$, $\operatorname{arc} \operatorname{tg} a$?
2. Missuguses vahemikus asuvad trigonomeetriliste pöördfunktsioonide peaväärtused?
3. Millega võrdub $\operatorname{tg} 2 \left(\operatorname{arc} \operatorname{tag} \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$?
4. Mis on trigonomeetriline võrrand?
5. Mis tähendab lahendada trigonomeetriline võrrand?
6. Kirjutage nurkade üldavaldis, mis vastab antud siinuse, koosinuse või tangensi väärtusele?
7. Kuidas lahendatakse järgmise kujuga homogeenset võrrandit:

$$a \sin^2 x + b \cos x \sin x + c \cos^2 x = 0?$$

T e e m a 7. Kaldnurksete kolmnurkade lahendamine

Kaldnurkse kolmnurga elementide vahelised põhiseosed. Siinusteoreem. Koosinusteoreem. Kaldnurkse kolmnurga lahendamine 1) ühe külje ja kahe nurga järgi; 2) kahe külje ja nende vahelise nurga järgi; 3) kolme külje järgi.

Trigonomeetriliste funktsioonide logaritmid tabelid ja nende kasutamine kolmnurkade lahendamisel.

1. Kožeurov. § 51—59, ülesanded nr. 1, 5, 13, 14, 53, 54, 59, 60, 73, 76, 79, 81.
2. Rõbkin. Trigonomeetria, § 98—99, 102—103, 111—114.
3. Rõbkin. Trigonomeetria ülesannete kogu, § 12, ülesanded nr. 1, 2, 5, 35—37; § 13, nr. 1, 2, 7, 10, 24.
4. Novosjолоv. Trigonomeetria, VI ptk., § 35—45.
5. Stratilatov. V ptk., § 15, ülesanded 336 (1; 3; 4; 5), 337; § 16, 341, 342; § 17, 344, 345, 347—349, § 18, 352—362, 364.

METOODILISED JUHENDID

Enne, kui asuda selle teema õppimisele, tuleb korrata logaritme. Kui kaldnurkses kolmnurgas on antud külj ja kaks nurka, tuleb kasutada lahendamiseks siinusteoreemi.

Koosinusteoreemi kasutatakse siis, kui on antud kaks külge ja nendevaheline nurk. Kuid see teoreem on ebamugav seepärast, et summat ei saa logaritmidada. Siin tuleb kas ositi logaritmidada või kasutada valemeid:

$$\operatorname{tg} A = \frac{a \sin C}{b - a \cos C}; \quad \operatorname{tg} A = \frac{a \sin B}{c - a \cos B}.$$

mis on toodud Kožeurovi õpikus § 47. Seda valemit on kasutatud ülesande lahendamiseks § 53.

Näited ülesannete lahendamise kohta on igas trigonomeetria õpikus. Uurige neid.

Kontrollküsimusi

1. Tõestage siinusteoreem.
2. Tõestage koosinusteoreem.
3. Kuidas lahendada kolmnurk, kui on antud üks külj ja kaks nurka?
4. Kuidas lahendada kolmnurk, kui on antud kaks külge ja nende külgede vaheline nurk?
5. Kuidas lahendada kolmnurk, kui on antud kolm külge?

KONTROLLTÖÖ NR. 4

Esimene variant

1. Arvutada x , kui $\log_{0,1} x = -2$.
2. Logaritmidada:

$$x = (a^3 + b^3) \sqrt[3]{ab^2(a+b)}.$$

3. Leida x , kui $\log x = -\frac{3}{5} \log a + 1 \frac{1}{4} \log c - \log 3$.

4. Arvutada logaritmid tabeli abil:

a) $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{0,76 \sqrt{0,754}}}{18,36^2}}$;

b) $\sqrt[4]{2,56^3 + 0,00366^2}$;

(tehniliste erialade õpilastele).

5. Metsa iga-aastane juurdekasv on 2,5%. Kui palju puud võib anda metsatükk 20 aasta pärast, kui käesoleval ajal on seal 14 000 m³ puitu? (majandustehnikumide ja -osakondade õpilastele).

6. Teisendada korrutiseks:

$$\sin \beta + \cos 2\alpha.$$

7. Tõestada samasus:

$$\sin 80^\circ - \sin 20^\circ + 2 \sin 40^\circ \sin 20^\circ = 4 \cos 50^\circ \cos 65^\circ \cos 5^\circ.$$

8. Lahendada kolmnurk, kui on antud:

$$a = 12,5 \text{ dm}; \angle A = 53^\circ 16'; \angle B = 68^\circ 20'.$$

9. Arvutada lükatiga:

a) $0,064 \cdot 0,075$;

b) $\frac{12,8 \sin 55^\circ}{\operatorname{tg} 32^\circ}$.

Anda lühike seletus.

Teine variant

1. Arvutada $\log_{0,04} 5$.

2. Logaritmid:

$$x = \sqrt{\frac{\sqrt[3]{a \sqrt{b^2}}}{b \sqrt{a}}}.$$

3. Leida y , kui $\log y = \frac{1}{5} [3 \log(a + b) - 2 \log(a - b)]$.

4. Arvutada logaritmid tabeli abil:

a) $\frac{\sqrt[3]{18,46^2 \sqrt{0,481}}}{4,715}$;

$$b) \sqrt[3]{0,00864^2 + 3,5893};$$

(tehniliste erialade õpilastele).

5. Kui suur summa koguneb hoiukassasse 10 aasta jooksul, kui iga aasta algul makstakse sisse 300 rubla ja hoiukassa poolt arvestatav intressimäär on 3% aastas? (majandustehnikumide ja -osakondade õpilastele).

6. Teisendada korrutiseks:

$$1 - \cos 4\alpha + \sin 4\alpha.$$

7. Tõestada samasus:

$$\left(\frac{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha}{2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha} \right)^2 \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1}{\sin^2 4\alpha}.$$

8. Lahendada kolmnurk, kui on antud:

$$b = 13,6 \text{ cm}; \angle A = 36^\circ 19'; \angle C = 73^\circ 41'.$$

9. Arvutada lükatiga:

$$a) 3,56 : 0,0025;$$

$$b) \frac{22,4 \operatorname{tg} 41^\circ}{\sin 35^\circ}.$$

Anda lühike seletus.

Kolmas variant

1. Arvutada x , kui $\log_x \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$.

2. Logaritmid:

$$x = 0,3 \sqrt[5]{\left(\frac{a^2 - b^2}{5ab^2} \right)^2}.$$

3. Leida x , kui $\log x = 4 \log c - \frac{1}{3} \log b + 1 \frac{1}{2} \log(a + b)$.

4. Arvutada logaritmid tabeli abil:

$$a) \sqrt[5]{0,42 \sqrt{0,0275}};$$

$$b) \frac{0,367^3 + 4,256^2}{\sqrt{7,56}};$$

(tehniliste erialade õpilastele).

5. Milline summa tuleb maksta iga aasta lõpul, et 5 aastaga

tasuda 2800 rublane laen, millelt arvestatakse 4% aastas? (majandustehnikumide ja -osakondade õpilastele).

6. Lihtsustada:

$$\frac{4 \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha}{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha} \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - 4\alpha).$$

7. Teisendada korrutiseks:

$$\sin 2\alpha + \sin 8\alpha + \sin 5\alpha.$$

8. Lahendada kolmnurk, kui on antud:

$$a = 16,76 \text{ dm}; b = 18,58 \text{ dm}; \angle C = 63^\circ 22'.$$

9. Arvutada lükatiga:

$$\text{a) } \sqrt[3]{0,000076};$$

$$\text{b) } \frac{2 \cos 42^\circ}{\sin 66^\circ}.$$

Anda lühike seletus.

Neljas variant

1. Arvutada x , kui $\log_x \frac{1}{27} = -2$.

2. Logaritmid:

$$x = \sqrt[3]{\frac{3}{5} \sqrt[7]{a^3(b^3 + c^3)}}.$$

3. Leida x , kui $\log x = 1 \frac{1}{4} \log a - 3 \log b + \frac{1}{5} \log(a + b)$.

4. Arvutada logaritmid tabeli abil:

$$\text{a) } \frac{75,82^3 \cdot \sqrt{0,658}}{8,433};$$

$$\text{b) } \sqrt[5]{2,356^2 + \sqrt[3]{0,0168}};$$

(tehniliste erialade õpilastele).

5. Mitme aastaga kahekordistub hoiumussumma, kui igal aastal arvestatakse juurde 3% intressi? (majandustehnikumide ja -osakondade õpilastele).

6. Teisendada korrutiseks:

$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha.$$

7. Leida $\operatorname{tg} 2\alpha$, kui $\cos \alpha = 0,8$ ja $270^\circ < \alpha < 360^\circ$.

8. Lahendada kolmnurk, kui on antud:

$$c = 23,56 \text{ m}; b = 16,28 \text{ m}; \angle A = 46^\circ 16'.$$

9. Arvutada lükatiga:

a) $7,638^3$;

b) $\frac{0,82 \cdot \operatorname{tg} 7^\circ 30'}{\sin 46^\circ}$

Anda lühike seletus.

KOONDÜLESANNE NR. 5

GEOMEETRIA

Teema 1. Sirged ja tasapinnad

Tasapinna põhiomadused. Kahe sirge vastastikune asend ruumis: lõikuvad sirged, paralleelsed sirged, kiivsirged. Tasapinna ristsirge ja kaldsirge. Teoreem tasapinna ristsirgest*. Teoreem tasapinna kaldsirgest ja ristsirgest ning kaldsirgete projektsioonidest tasapinnal*. Kolme ristsirge teoreem (otsene ja pöördteoreem)*. Teoreem kaldsirge ja tema projektsiooni vahelisest nurgast*. Sirge ja tasapinna vaheline nurk.

Paralleelsed sirged ja paralleelsed tasapinnad. Teoreem tasapinnast, mis on risti ühega paralleelsetest sirgetest. Sirge ja tasapinna paralleelsuse kaks tunnust. Teoreem tasapinnast, mis läbib teise antud tasapinnaga paralleelset sirget.

Paralleelsed tasapinnad. Kahe tasapinna paralleelsuse tunnused. Teoreemid kahest paralleelsest tasapinnast, mis on lõigatud kolmanda tasapinnaga; sirgest, mis on risti ühega kahest paralleelsest tasapinnast; paralleelsete tasapindade vahel asuvatest paralleelsetest sirglõikudest; vastavalt paralleelsete haaradega nurkadest.*

Teema 2. Kahetahulised ja mitmetahulised nurgad

Kahetahulise nurga definitsioon. Kahetahulise nurga joonnurk. Kahetahuliste nurkade võrdsus ja mittevõrdsus. Kahetahuline täisnurk.

Ristuvad tasapinnad. Tasapindade ristseisu tunnüs*. Tasapinnalise kujundi projektsiooni pindala*. Kolmetahuline ja mitmetahuline nurk. Kolmetahulise nurga tasanurkade omadus; mitmetahulise nurga tasanurkade omadus.

* Märgitud teoreeme peavad õpilased oskama tõestada.

1. Kissel'jov. Geomeetria, II osa, § 1—18; 23—34; 38—52.
2. Rõbkin. Geomeetria, II osa. Ülesanded: § 1, nr. 9, 13—19, 22; § 2, nr. 7, 9, 10; § 3, nr. 1, 2, 9, 11, 18, 19, 20, 29, 30; § 4, nr. 1—6, 12, 19; § 5, nr. 1—5.
3. Andrejev. Geomeetria, § 79—95, ülesanded 1—20; § 96—106, ülesanded 1—6, 12, 15, 16.

METOODILISE JUHENDID

Siimaani käsitleti geomeetrias kujundite ja joonte omadusi, millistel oli üks või kaks mõõdet. Selliste kujundite kõik punktid asetsevad ühel tasapinnal. Seda geomeetria osa nimetatakse planimeetriaks.

Geomeetria teises osas, mida nimetatakse stereomeetriaks, õpitakse geomeetriliste kehade omadusi. Geomeetrilised kehad omavad kolme mõõdet.

Kõigepealt omandage tasapinna ristsirge ja kaldsirge ning kaldsirge projektsiooni mõiste. Samas on vaja lahendada ülesandeid kaldlõigu ja selle projektsiooni teoreemide rakendamiseks. Pöörake erilist tähelepanu kolme ristsirge teoreemile; see leiab edaspidi laialdast rakendust. Lahendage selle teoreemi põhjal ülesanne nr. 22, § 1 (Rõbkin).

Pidage meeles, et kaldsirge ja tasapinna vaheliseks nurgaks nimetatakse nurka, mis tekib kaldsirge ja selle projektsiooni vahel. See nurk on ühtlasi väikseim kõikidest nurkadest, mis kaldsirge moodustab tasapinnal asetsevate ja kaldsirge aluspunkti läbivate sirgetega. Vaadake ka selle omaduse tõestust.

Kindlalt tuleb omandada joonnurga mõiste. Iga kahtahulist nurka mõõdab tema joonnurk. Joonnurga saamiseks tuleb kahtahulise nurga serva mingist punktist tõmmata kummalegi tahule servaga ristuv sirge. Nende ristsirgete vaheline nurk ongi kahtahulise nurga joonnurk. Tuleb meeles pidada, et võrdsete kahtahulistest nurkade joonnurgad on võrdsed ja et suuremal kahtahulisel nurgal on ka suurem joonnurk.

Stereomeetrilise joonise puhul tuleb arvestada kujutise tinglikkust: võrdsed lõigud joonisel võivad olla tegelikult erinevate pikkustega ja vastupidi; täisnurka võib joonisel kujutada nii nürinurk, täisnurk kui ka teravnurk.

Kuna stereomeetiline joonis valmistatakse kaldparalleelprojektsioonis, siis tuleb joonise valmistamisel täita järgmisi nõudeid:

1) sirge projektsiooniks on sirge, väljaarvatud kujutamiskiirtega paralleelne sirge (siin saadakse punkt);

- 2) paralleelsed sirged jäävad paralleelseteks;
- 3) ühel ja samal sirgel asetsevate lõikude suhe ei muutu.

Joonise valmistamisel soovitame veel täita järgmisi nõudeid:

- 1) valmistada joonis pliatsiga;
- 2) kujutades prismat (rööptahukat), mis asub teie ees, joonestage teie suhtes paralleelselt asuvad servad horisontaalselt, teie poole suunduvad servad aga 45° nurga all horisontaalsetega;
- 3) kõik teie suhtes paralleelsed sirglõigud joonestage ühes ja samas mõõtkavas, nendega ristuvad lõigud aga kaks korda vähenatud mõõtkavas;

4) mõnikord on kasulik teha planimeetrilisi abijooniseid üksikutest hulktahuka elementidest (kolmnurgast, rööpkülikust). See kergendab ülesande ühe või teise küsimuse lahendamist.

Materjali paremaks omandamiseks võib valmistada näitlikke vahendeid traadist, vineerist, kartongist.

Soovitame õpilastel muretseda vineeri (30×20 cm), plastiliini, mõned vardakesed (10—15).

Kattes vineeri 2—3 mm paksuse plastiliini kihiga, võib varaste abil ehitada peaaegu iga stereomeetrilise kujundi (väljaarvatud ümarkehad).

Lahendame 1. ja 2. teema kohta mõned ülesanded.

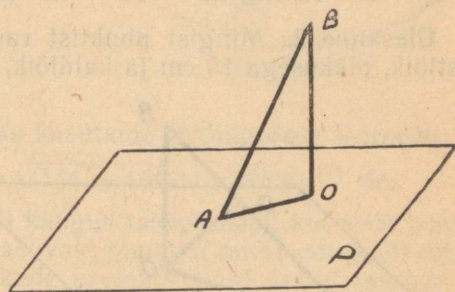
Ülesanne 1. Väljaspool tasapinda asuvast punktist on tasapinnani ehitatud ristlõik ja kaldlõik. Leida kaldlõigu pikkus, kui ta on ristlõigust 4 cm võrra ja oma projektsioonist sellel tasapinnal 8 cm võrra pikem (joon. 2).

Antud: AB — tasapinna P kaldlõik; $BO \perp P$; AO — kaldlõigu AB projektsioon tasapinnal P ; $AB - BO = 4$ cm; $AB - AO = 8$ cm. Leida AB .

Lahendus.

Vaatleme kolmnurka AOB . Ülesande tingimuste kohaselt $BO \perp$ tasap. P , seega, vastavalt ristsirge definitsioonile, BO on risti iga sirgega, mis asub tasapinnal P ja läbib punkti O ; seetõttu $BO \perp AO$; s. t. $\angle BOA = 90^\circ$; järelikult $\triangle AOB$ on täisnurkne.

1. Ülesande tingimuste kohaselt $BO = AB - 4$; $AO = AB - 8$.



Joon. 2.

2. Pythagorase teoreemi kohaselt $AB^2 = AO^2 + BO^2$, seetõttu

$$AB^2 = (AB - 8)^2 + (AB - 4)^2;$$

$$AB^2 = AB^2 - 16AB + 64 + AB^2 - 8AB + 16;$$

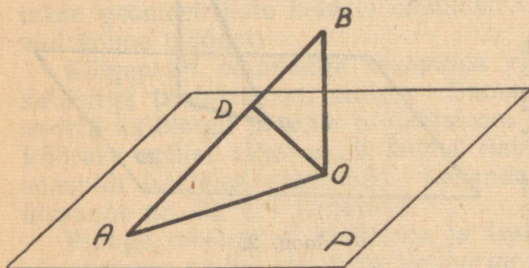
$$AB^2 - 24AB + 80 = 0;$$

$$AB_{1,2} = 12 \pm \sqrt{144 - 80}; \quad AB_1 = 12 + 8 = 20;$$

$$AB_2 = 12 - 8 = 4.$$

AB_2 ei sobi, sest kui hüpotenuus AB oleks 4 cm, siis $AO = 4 - 8 = -4$, mis ei ole võimalik. Seepärast $AB = 20$ cm. Tõepoolest, kui $AB = 20$ cm, siis $BO = 20 - 4 = 16$ cm ja $AO = 20 - 8 = 12$ cm; $20^2 = 16^2 + 12^2$ (kontrollige).

Ülesanne 2. Mingist punktist ruumis on tasapinnani juhitud ristlõik, pikkusega 15 cm ja kaldlõik, pikkusega 25 cm. Leida ristlõigu projektsioon kaldlõigule (joon. 3).



Joon. 3.

Antud: AB — kaldlõik tasapinnale P ; $BO \perp P$;

$BO = 15$ cm; $AB = 25$ cm.

Leida BO projektsioon lõigul AB .

Lahendus.

1. BO projektsiooni saamiseks lõigul AB ehitame ristlõigu AB -le punktist O ; BD ongi

otsitav projektsioon. Selle ülesande lahendamiseks meenutame teoreemi: täisnurkse kolmnurga kaatet on keskmine võrdeline hüpotenuusi ja selle kaateti projektsiooniga hüpotenuusil (vt. Kisseljov, I osa, § 188 või Andrejev, § 29).

2. $BO^2 = AB \cdot BD$; siit $BD = \frac{BO^2}{AB} = \frac{15^2}{25} = \left(\frac{15}{5}\right)^2 = 3^2 = 9$. Nii-
siis $BD = 9$ cm.

Ülesanne 3. Mingist punktist ruumis on juhitud tasapinnani kaks võrdset kaldlõiku AB ja AC ning ristlõik AO pikkusega 6 dm. $\angle ACO = \angle ABO = 60^\circ$; $\angle CAB = 90^\circ$. Leida kaldlõikude aluspunktide vaheline kaugus CB ja kolmnurga ABC pindala (joon. 4).

Antud: tasapind P ; $AB = AC$ — kaldlõigud; $AO \perp P$; $AO = 6$ dm; $\angle CAB = 90^\circ$; $\angle OAB = \angle OAC = 60^\circ$.

Leida CB ja $\triangle ABC$ pindala.

Lahendus.

1. $\triangle ABO$ on täisnurkne, sest $AO \perp P$. $\angle OBA = 30^\circ$, sest $\angle OAB = 60^\circ$.

2. Et 30° -se nurga vastas-kaadet võrdub poole hüpotenuusiga, saame $AB = 2AO = = 2 \cdot 6 = 12$ dm; siis ka $AC = = 12$ dm.

3. $\angle CAB = 90^\circ$, seetõttu

$$S_{\triangle ABC} = \frac{CA \cdot AB}{2} =$$

$$= \frac{12 \cdot 12}{2} = 72 \text{ dm}^2.$$

4. Lõigu BC arvutamiseks kasutame Pythagorase teoreemi:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{144 + 144} = \sqrt{288} \approx 17 \text{ dm}.$$

Ülesanne 4. Leida punkti kaugus tasapinnast, kui selle punkti kaugused kahest tasapinnal asuvast punktist on 51 cm ja 30 cm ja neid kaugusi kujutavate lõikude projektsioonid antud tasapinnal suhtuvad nagu 5 : 2 (Andrejev, VI ptk., ül. nr. 6).

Antud: $AB = 51$ cm; $AC = = 30$ cm (joon. 5); $AO \perp$ tasap. M ; $BO : OC = 5 : 2$.

Leida AO .

Lahendus.

1. Olgu $BO = 5x$ ja $OC = 2x$. Siis Pythagorase teoreemi kohaselt

$$AO^2 = 51^2 - 25x^2 \text{ ja}$$

$$AO^2 = 30^2 - 4x^2.$$

2. Kuna mõlema võrduse vasakud pooled on võrdsed, siis peavad võrdsed olema ka paremad pooled, s. o.

$$51^2 - 25x^2 = 30^2 - 4x^2;$$

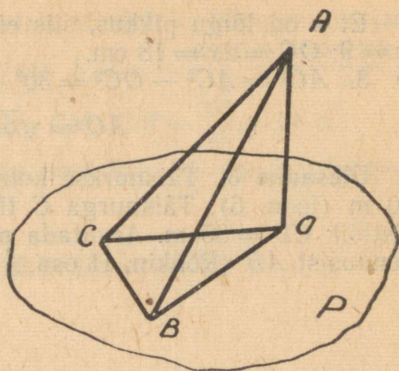
$$51^2 - 30^2 = 25x^2 - 4x^2;$$

$$(51 + 30)(51 - 30) = 21x^2;$$

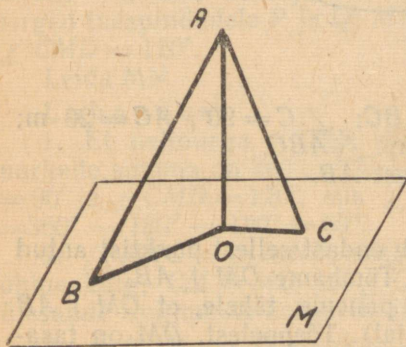
$$21x^2 = 81 \cdot 21;$$

$$x^2 = 81;$$

$$x_{1,2} = \pm 9.$$



Joon. 4.



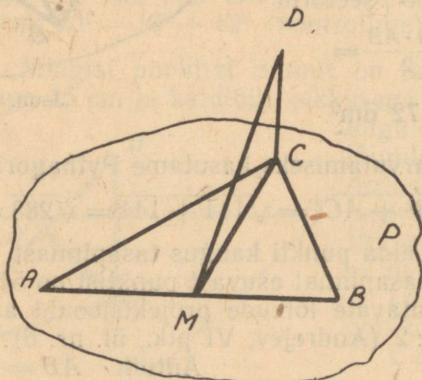
Joon. 5.

Et x on lõigu pikkus, siis ei saa ta olla negatiivne; järelikult $x = 9$; $OC = 2x = 18$ cm.

$$3. AO^2 = AC^2 - OC^2 = 30^2 - 18^2 = 576;$$

$$AO = \sqrt{576} = 24 \text{ cm.}$$

Ülesanne 5. Täisnurkse kolmnurga ABC kaatetid on 15 m ja 20 m (joon. 6). Täisnurga C tipust väljub kolmnurga tasapinna ristlõik $CD = 35$ m. Arvutada punkti D kaugus kolmnurga hüpotenuusist AB (Rõbkin, II osa, § 1, nr. 22–2).



Joon. 6.

Antud: täisnurkne kolmnurk ABC ; $\angle C = 90^\circ$; $AC = 20$ m; $BC = 15$ m; $CD = 35$ m; $CD \perp$ tasap. $\triangle ABC$.

Arvutada punkti D kaugus sirgest AB .

Lahendus.

1. Punkti kaugus sirgest kujutab endast sellest punktist antud sirgeni tõmmatud ristlõigu pikkust. Tõmbame $DM \perp AB$.

2. Ühendades punktid C ja M paneme tähele, et $CM \perp AB$ (kolme ristsirge pöördteoreemi põhjal). Tõepoolest, DM on tasapinna P kaldlõik, mis on risti tasapinnal ABC asuva sirgega AB ; $DM \perp AB$ (konstruktsiooni põhjal), CM on kaldlõigu DM projektsioon samal tasapinnal, seepärast $CM \perp AB$.

3. Pythagorase teoreemi põhjal $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 20^2 + 15^2 = 625$; $AB = 25$ m.

4. Arvutame lõigu CM . Täisnurkse kolmnurga pindala võrdub tema kaatetite poole korrutisega, s. t. $S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{15 \cdot 20}{2} =$

$= 150 \text{ m}^2$. Sellesama kolmnurga pindala võrdub ka hüpotenuusi ja kõrguse CM poole korrutisega, seepärast $S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot CM}{2} = \frac{25 \cdot CM}{2}$.

Võrrutades $150 = \frac{25 \cdot CM}{2}$, arvutame CM ; $CM = \frac{300}{25} = 12 \text{ m}$.

5. Kolmnurk DCM on täisnurkne, sest lõik DC on risti kolmnurga ABC tasapinnaga. Seepärast

$$DM^2 = DC^2 + CM^2;$$

$$DM^2 = 35^2 + 12^2 = 1225 + 144 = 1369;$$

$$DM = \sqrt{1369} = 37.$$

Seega $DM = 37 \text{ m}$.

Ülesanne 6. Kahetahulise nurga sees võetud punkti M kaugus kummastki kahetahulise nurga tahust on 2 dm (joon. 7).

Leida punkti M kaugus kahetahulise nurga servast, kui punktist M kahetahulise nurga tahkudele tõmmatud ristsirgete vaheline nurk on 120° (Andrejev, VII ptk., ül. nr. 1).

Antud: kahetahuline nurk AB ; punkt M kahetahulise nurga sees; $MC = MD = 2 \text{ dm}$; MC ja MD on ristsirged tasapindadele P ja Q ; $MN \perp AB$; $\angle CMD = 120^\circ$.

Leida MN .

L a h e n d u s.

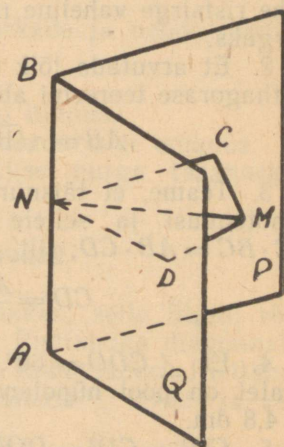
1. Et nelinurga $NCMD$ kõigi sisenurkade summa on 360° , $\angle C = \angle D = 90^\circ$ ja $\angle CMD = 120^\circ$, siis $\angle CND = 360^\circ - 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

2. $\triangle MNC = \triangle MND$, sest MN on ühine külge; $CM = MD$ ja $\angle C = \angle D$ ülesande tingimuste kohaselt. Järelikult $\angle CNM = \angle MND = 30^\circ$.

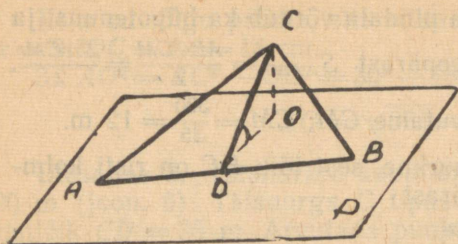
3. $\triangle NCM$ on täisnurkne, selles on 30° nurga vastaskaatet pool hüpotenuusi pikkusest, seepärast $MN = 2MC = 2 \cdot 2 = 4 \text{ dm}$. Seega $MN = 4 \text{ dm}$.

Ülesanne 7. Läbi täisnurkse kolmnurga hüpotenuusi on pandud tasapind, mis moodustab kolmnurga tasapinnaga nurga 60° . Arvutada täisnurga tipu kaugus sellest tasapinnast, kui täisnurkse kolmnurga kaated on 12 dm ja 16 dm (joon. 8).

Antud: täisnurkne kolmnurk ABC ; $\angle ACB = 90^\circ$; nurk kolm-



Joon. 7.



Joon. 8.

nurga ABC tasapinna ja P vahel on 60° ; $AC = 16$ dm; $BC = 12$ dm; $CO \perp$ tasap. P .

Arvutada CO .

Lahendus.

1. Kahetahulist nurka tasapinna P ja kolmnurga ABC tasapinna vahel mõõdetakse tema joonnurgaga. Et joonnurka saada, tõmbame tasapinnal ABC lõigu $CD \perp AB$; ühendame punkti D

ristlõigu CO alusega; OD on kaldlõigu CD projektsioon tasapinnal P . Kolme ristsirge pöördteoreemi põhjal AB on risti ka OD -ga. Seetõttu $\angle CDO = 60^\circ$, sest see servale AB tõmmatud kahe ristsirge vaheline nurk ongi antud kahetahulise nurga joonnurgaks.

2. Et arvutada lõik CO , leiame algul CD . Selleks määrame Pythagorase teoreemi abil AB :

$$AB = \sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{400} = 20 \text{ dm.}$$

3. Teame, et täisnurkse kolmnurga kaatetite korrutis võrdub hüpotenuusi ja sellele tõmmatud kõrguse korrutisega, s. o. $AC \cdot BC = AB \cdot CD$; siit

$$CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{12 \cdot 16}{20} = 9,6 \text{ dm.}$$

4. Et $\angle CDO = 60^\circ$, siis $\angle OCD = 30^\circ$, selle nurga vastaskaatet on pool hüpotenuusi pikkusest, seepärast $DO = 9,6 : 2 = 4,8$ dm.

$$5. CO^2 = CD^2 - DO^2,$$

$$CO^2 = 9,6^2 - 4,8^2 = 92,16 - 23,04 = 69,12;$$

$$CO = \sqrt{69,12} \approx 8,3.$$

Seega $CO \approx 8,3$ dm.

Kontrollküsimusi

1. Mida õpetab stereomeetria?
2. Sõnastage tasapinna põhiomadused ja järeldused nendest.
3. Missuguseid sirgeid nimetatakse paralleelseteks?
4. Missuguseid sirgeid nimetatakse kiivsirgeteks?

5. Mis on tasapinna ristsirge?
6. Mis on tasapinna kaldsirge ja selle projektsioon antud tasapinnal?
7. Nimetage sirge ja tasapinna ristseisu tunnus.
8. Sõnastage teoreem kahest kaldsirgest ja nende projektsioonidest tasapinnal.
9. Sõnastage ja tõestage kolme ristsirge teoreem (otsene ja pöördteoreem).
10. Mis on kaldsirge ja tasapinna vaheline nurk?
11. Tõestage teoreem kaldsirge ja tema projektsiooni vahelisest nurgast.
12. Sõnastage sirge ja tasapinna ning kahe tasapinna paralleelsuse tunnus.
13. Nimetage pralleelsete haaradega nurkade omadus.
14. Mis on kahetahuline nurk?
15. Mis on joonnurk?
16. Sõnastage seos kahetahuliste nurkade ja nende joonnurkade vahel.
17. Millised on ristuvad tasapinnad?
18. Tõestage kahe tasapinna ristseisu tunnus.
19. Sõnastage kolmetahulise nurga tasanurkade omadus.
20. Kui suur on kumera mitmetahulise nurga tasanurkade summa?

T e e m a 3. H u l k t a h u k a d

Hulktahuka mõiste. Prisma. Rööptahukas; selle liigid; rööptahuka servade ja diagonaalide omadus. Risttahuka diagonaalide omadus*. Prisma pindala*. Põhimõisted ruumaladest. Risttahuka ruumala. Cavalieri printsiip. Prisma ruumala*. Püst- ja kaldrööptahuka ruumala*.

Püramiid. Püramiidi põhjaga paralleelse tasapinnalise lõike omadus*. Täis- ja tüvipüramiidi pindala*. Pindvõrdsete põhitahkude ja võrdsete kõrgustega püramiidide ruumvõrdsus. Kolmnurkse ja hulknurkse püramiidi ruumala*. Tüvipüramiidi ruumala*.

K i r j a n d u s

1. Andrejev, VIII ptk., § 107—124; ülesanded nr. 1—3, 6—8, 14, 15, 18, 21, 23—26, 32, 37, 45, 46, 48—50, 64—66.
2. Kissel'ov. Geomeetria, II osa, § 67—92.

* Märgitud teoreeme peavad õpilased oskama tõestada.

3. Rõbkin. Ülesannete kogu, II osa, § 7, nr. 1—3, 10—11, 20, 29; § 8, nr. 1, 2, 6—8, 11—14, 24, 25; § 9, nr. 1, 2, 5—6, 13—15; § 10, nr. 1—5, § 11, nr. 1—4, § 12, nr. 1—4; § 16, nr. 1—4, 7, 18—21, 26, 27; § 17, nr. 1—4, 15, 16; § 18, nr. 1—8.

METOODILISED JUHENDID

Teema «hulktahukad» on põhiliseks temaks stereomeetrias. Siin õpime prisma, püramiidi ja tüvipüramiidi omadusi, nende pindala ja ruumala.

Eelkõige on vaja hästi mõista iga keha definitsiooni, need kehad täpselt joonestada, tõmmates nähtamatud jooned punktiiriga.

Käesoleva teema materjali suure hulga tõttu jaotame selle kolmeks alateemaks:

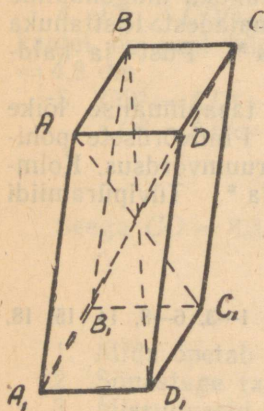
- 1) prisma,
- 2) püramiid,
- 3) tüvipüramiid.

I. Prisma

Kõigepealt õppige ära prisma definitsioon ja liigitus põhja kuju ning külgserva ja põhitahu vahelise nurga järgi. On vajalik teada, mitu tippu, serva, tahku ja diagonaali on igal prismal. Näiteks nelinurksel prismal on 8 tippu, 12 serva, 6 tahku ja 4 diagonaali (joon. 9). Pidage meeles, et korrapärane prisma on eelkõige püstprisma, mille põhjaks on korrapärane hulknurk. Rööptahukas on selline prisma, mille põhjaks on rööpkülik. Rööptahukaid liigitatakse kaldrööptahukaiks, püströöptahukaiks ja risttahukaiks.

Püströöptahuka kaks põhja on rööpkülikud, aga neli külgtahku — ristkülikud.

Risttahuka kõik kuus tahku on ristkülikud. Kuup on risttahuka erijuhus — võrdsete mõõdetega risttahukas. Kuubi kõik tahud on ruudud, kõik servad ühepikkused. On vajalik tõestada teoreem risttahuka diagonaalist. Pöörake erilist tähelepanu prisma pindala mõistele. Tõestage teoreem kaldprisma külgpindalast. Püstprisma külgpindala võrdub tema põhja ümbermõõdu ja kõrguse korrutisega: $S_k = P \cdot h$.



Joon. 9.

Prisma ruumala õppimisel tutvuge algul kahe põhilausega ruumalade kohta, siis ruumalaühikutega ja risttahuka ruumala arvutamise juhul, kus mõõtmed väljenduvad täis- või murdarvudena. Siis vaadake Cavalieri printsiipi ja sellele tuginedes tõestage prisma ruumala. Seda on hästi selgitatud P. Andrejevi õpikus (§ 117—118) ja A. Kisseljovi õpikus (II osa, § 89). Iga teoreemi püüdke kinnistada ühe või kahe ülesande lahendamisega.

Lahendame näidisülesandeid prisma kohta.

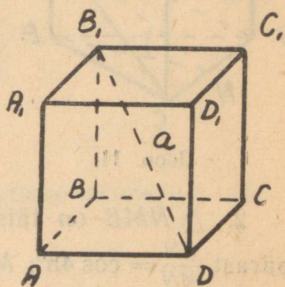
Ülesanne 1. Kuubi diagonaal on a . Leida kuubi täispindala ja ruumala (joon. 10).

Antud: kuup $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$;
diagonaal $B_1 D = a$.

Leida: S_t , V .

Lahendus.

1. Tähistame kuubi serva x -ga, siis, kasutades teoreemi risttahuka diagonaalist, võime kirjutada:



Joon. 10.

$$a^2 = x^2 + x^2 + x^2; a^2 = 3x^2; x^2 = \frac{a^2}{3}.$$

2. Et x on kuubi serv, siis x^2 on kuubi ühe tahu pindala. Kuubi kõik kuus tahku on võrdsed, seega on kuubi täispindala $6x^2$, saame:

$$S_t = \frac{6a^2}{3} = 2a^2.$$

3. Kuubi ruumala leidmiseks tuleb enne määrata külje pikkus:

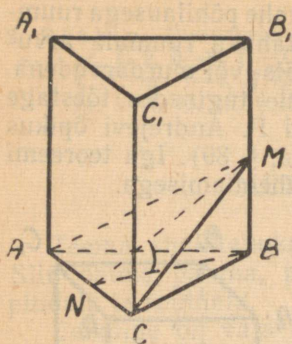
$$x = \sqrt{\frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

4. Kuubi ruumala võrdub tema külje kuubiga:

$$V = x^3 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{a^3\sqrt{27}}{27} = \frac{a^3 \cdot 3\sqrt{3}}{27} = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}.$$

Kui võtta $\sqrt{3} = 1,73$, siis võime avaldada kuubi ruumala tema diagonaali a kaudu täpsusega kuni 0,01 (arvutage iseseisvalt).

Ülesanne 2. Läbi kolmnurkse püstprisma ühe põhiserva on võetud tasapind, mis lõikab selle vastas asetsevat külgserva ja



Joon. 11.

moodustab põhitahuga nurga 45° (joon. 11). Prisma põhja pindala on Q . Avaldada lõike pindala (Rõbkin, II, § 7, nr. 28).

Antud: kolmnurkne püstprisma $ABCA_1B_1C_1$; $S_{\triangle ABC} = Q$; nurk AMC ja ABC vahel on 45° .

Avaldada $S_{\triangle AMC}$.

Lahendus.

1. Kahetahulise nurga AC mõõduks on tema joonnurk. Selle saamiseks tõmbame $BN \perp AC$, siis on MN ka risti AC -ga (kolme ristsirge teoreemi põhjal) ja $\angle MNB$ on kahetahulise nurga AC joonnurk, s. t. $\angle MNB = 45^\circ$.

2. $\triangle NMB$ on täisnurkne, sest prisma on püstprisma. Seejärest $\frac{BN}{MN} = \cos 45^\circ$; $MN = \frac{BN}{\cos 45^\circ} = BN\sqrt{2}$.

$$3. S_{\triangle AMC} = \frac{AC \cdot MN}{2} = \frac{AC \cdot BN}{2} \sqrt{2}.$$

$$4. S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot BN}{2} = Q.$$

$$5. \text{ Järelikult, } S_{\triangle AMC} = Q\sqrt{2}.$$

Märkus. Kasutades teoreemi, et projektsiooni pindala võrdub kujundi pindala ja kaldenurga koosinuse korrutisega, saaksime kohe:

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AMC} \cdot \cos 45^\circ;$$

$$S_{\triangle AMC} = \frac{S_{\triangle ABC}}{\cos 45^\circ} = \frac{Q}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = Q\sqrt{2}.$$

Lahendades aga ülesannet eelpooltoodud viisil, et ühtlasi tuletasite meelde ka nimetatud teoreemi tõestust.

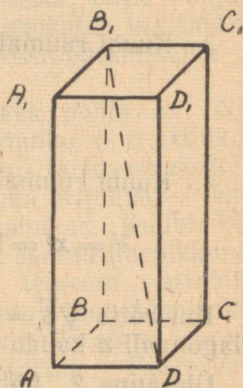
Ülesanne 3. Korrapärase nelinurkse prisma diagonaal on 9 cm ja täispindala 144 cm^2 . Leida prisma ruumala (joon. 12).

Antud: korrapärase nelinurkne prisma $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$; $B_1 D = 9 \text{ cm}$; $S_1 = 144 \text{ cm}^2$.

Leida prisma ruumala.

Lahendus.

1. Prisma ruumala $V = S_p \cdot h$. Nagu näeme, tuleb leida prisma põhiserv ja kõrgus.



Joon. 12.

2. Tähistame prisma põhiserva x ja kõrguse y . Arvestades, et risttahuka diagonaali ruut võrdub tema kolme mõõtme ruutude summaga, saame koostada esimese võrrandi:

$$2x^2 + y^2 = 81.$$

3. Teise võrrandi koostamiseks kasutame antud täispindala. Prisma täispindala võrdub tema külgpindala ja kahe põhja pindala summaga. Külgpindala võrdub põhja übermõõdu ja kõrguse korrutisega, seetõttu

$$\begin{aligned} S_t &= 4xy + 2x^2 = 144; \\ 2xy + x^2 &= 72. \end{aligned}$$

4. Saame:
$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 81 \\ x^2 + 2xy = 72. \end{cases}$$

Selle võrrandisüsteemi lahendamiseks lahutame esimesest võrrandist teise, saame

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy + y^2 &= 9, \\ (x - y)^2 &= 9, \\ x - y &= \pm 3. \end{aligned}$$

Vaatleme veelkord võrrandisüsteemi kujul

$$\begin{cases} 2x^2 + 4xy = 144 \\ 2x^2 + y^2 = 81. \end{cases}$$

Liites mõlemad võrrandid, saame

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4xy + y^2 &= 225, \\ (2x + y)^2 &= 225, \\ 2x + y &= 15 \quad (\text{võtame } 15 \text{ märke}) \end{aligned}$$

giga +, kuna kahe lõigu summa ei saa olla negatiivne).

5. Nüüd peame lahendama järgmised süsteemid:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 15 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + y = 15 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \underline{3x = 18,} & \quad \underline{3x = 12,} \\ x = 6, & \quad x = 4, \\ y = 3, & \quad y = 7. \end{aligned}$$

Kui võtta $x = 6$ cm ja $y = 3$ cm, siis

$$V = x^2y = 36 \cdot 3 = 108 \text{ cm}^3.$$

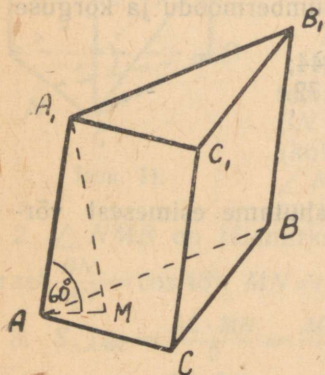
Võttes aga $x = 4$ cm ja $y = 7$ cm, saame

$$V = 16 \cdot 7 = 112 \text{ cm}^3.$$

Niisiis, $V_1 = 108 \text{ cm}^3$; $V_2 = 112 \text{ cm}^3$.

Ülesanne 4. Leida kolmnurkse kaldprisma ruumala, kui prisma põhjaks on võrdkülgne kolmnurk küljega $a=4$ dm (joon. 13), külgserv on võrdne põhiservaga ja moodustab põhja tasapinnaga nurga 60° (Andrejev, VIII ptk., ülesanne nr. 35).

Antud: prisma $ABCA_1B_1C_1$; $AB=BC=AC=a=4$ dm; $AA_1=AB=a=4$ dm; nurk sirge AA_1 ja tasapinna ABC vahel on 60° .



Joon. 13.

Leida prisma ruumala.

Lahendus.

1. Prisma ruumala $V = S_p \cdot h$.

2. Sirge ja tasapinna vaheliseks nurgaks loetakse nurka, mis tekib sirge ja tema projektsiooni vahel tasapinnal; seepärast tuleb külgserva ja põhja tasapinna vahelise nurga saamiseks tõmmata tipust A_1 ristsirge tasapinnale ABC , ristsirge aluse ühendame punktiga A . $\angle A_1AM$ ongi 60° . A_1M on prisma kõrgus.

3. Kolmnurgast A_1AM leiame A_1M :

$$A_1M = AA_1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

4. Võrdkülgse kolmnurga pindala avaldub külje a kaudu $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ tõepoolest, kasutades näiteks Heroni valemit, saame:

$$S = \sqrt{\frac{3a}{2} \cdot \left(\frac{3a}{2} - a\right) \left(\frac{3a}{2} - a\right) \left(\frac{3a}{2} - a\right)} = \sqrt{\frac{3a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}},$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

5. Prisma ruumala on:

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3}{8} = \frac{3 \cdot 64}{8} = 24 \text{ dm}^3.$$

Niisiis, $V = 24 \text{ dm}^3$.

Ülesanne 5. Risttahuka diagonaal on l ja ta moodustab põhitahuga nurga α . Põhja diagonaal moodustab väiksema põhiser-

vaga nurga β . Arvutada risttahuka ruumala ja külgpindala (joon. 14).

Antud:

risttahukas $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$; $B_1 D = l$; $\angle B_1 D B = \alpha$; $\angle A B D = \beta$.

Leida: V ja S_k .

L a h e n d u s.

Ruumala ja külgpindala arvutamiseks peame leidma külgserva ja põhiservad.

1. Vaatleme kolmnurka $BB_1 D$;

$$\frac{BB_1}{B_1 D} = \sin \alpha; \quad BB_1 = B_1 D \cdot \sin \alpha.$$

$$h = l \cdot \sin \alpha.$$

$$2. \frac{BD}{B_1 D} = \cos \alpha; \quad BD = B_1 D \cdot \cos \alpha = l \cos \alpha.$$

$$\cdot \cos \alpha = l \cos \alpha.$$

3. Vaatleme kolmnurka ABD ; $\angle A = 90^\circ$; $\frac{AB}{AD} = \cos \beta$; $AB = BD \cdot \cos \beta = l \cos \alpha \cos \beta$.

$$\frac{AD}{BD} = \sin \beta; \quad AD = BD \cdot \sin \beta = l \cos \alpha \sin \beta.$$

4. Nüüd saame arvutada ruumala:

$$\begin{aligned} V &= S_p \cdot h = AB \cdot AD \cdot h = \\ &= l \cos \alpha \cos \beta \cdot l \cos \alpha \sin \beta \cdot l \sin \alpha = \\ &= l^3 \cos^2 \alpha \cos \beta \sin \beta \sin \alpha. \end{aligned}$$

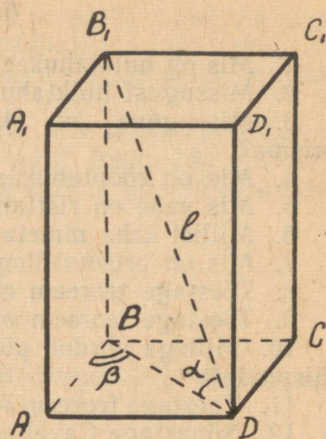
Et $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$, siis $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$ ja $\cos \beta \sin \beta = \frac{\sin 2\beta}{2}$, saame

$$V = l^3 \frac{\sin 2\alpha}{2} \cos \alpha \cdot \frac{\sin 2\beta}{2} = \frac{l^3 \cos \alpha \sin 2\alpha \sin 2\beta}{4}.$$

5. Arvutame külgpindala:

$$\begin{aligned} S_k &= P \cdot h = (2AB + 2AD) h = \\ &= 2(l \cos \alpha \cos \beta + l \cos \alpha \sin \beta) l \sin \alpha = \\ &= 2l^2 \cos \alpha \sin \alpha (\cos \beta + \sin \beta) = \\ &= 2l^2 \sin \alpha \cos \alpha [\cos \beta + \cos(90^\circ - \beta)] = \\ &= l^2 \sin 2\alpha \cdot 2 \cos 45^\circ \cdot \cos(\beta - 45^\circ) = l^2 \sqrt{2} \sin 2\alpha \cos(\beta - 45^\circ). \end{aligned}$$

Arvutage logaritmid abil külgpindala, kui $l = 13,5$ dm; $\alpha = 38^\circ 14'$; $\beta = 62^\circ 22'$.

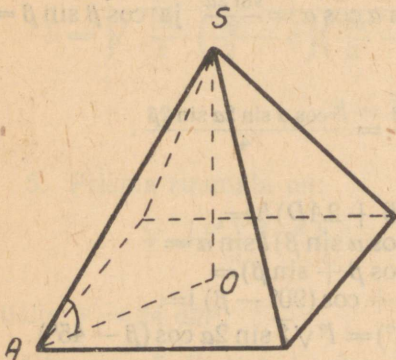


Joon. 14.

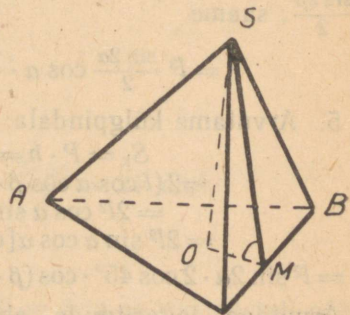
1. Mis on hulktahukas?
2. Missugust hulktahukat nimetatakse prismaks?
3. Missugune on kaldprisma, püstprisma, korrapärane prisma?
4. Mis on rööptahukas?
5. Mis vahe on risttahuka ja püströöptahuka vahel?
6. Millist keha nimetatakse kuubiks?
7. Mis on prisma diagonaal?
8. Tõestage teoreem risttahuka diagonaalist.
9. Tõestage teoreem prisma külgpindalast.
10. Millega võrdub püstprisma külgpindala? Kuidas arvutada täispindala?
11. Tõestage teoreem risttahuka ruumalast.
12. Sõnastage Cavalieri printsiip ja selle põhjal tõestage, millega võrdub prisma ruumala.
13. Millega võrdub kuubi ruumala?

II. Püramiid

Kirjutage välja ja õppige ära püramiidi definitsioon, joonestage kolmnurkne, nelinurkne, kuusnurkne püramiid. Nähtamatud jooned tõmmake punktiiriga (näiteks püramiidi kõrgus). Pidage meeles, et korrapärase püramiidi põhjaks on korrapärane hulknurk ja püramiidi kõrgus langeb põhja keskpunkti (joonisel korrapärase püramiidi põhi ei pea olema korrapärane hulknurk).



Joon. 15.



Joon. 16.

Tuleb kindlalt teada erinevust külgserva ja põhja vahel tekkinud nurga ja põhiserva juures tekkinud kahetahulise nurga vahel.

Esimesel juhul määratakse nurk külgserva ja selle projektsiooni vahel põhitasapinnal (joon. 15, $\angle SAO$).

Teisel juhul mõõdab nurka joonnurk, mis tekib kahetahulise nurga servale tõmmatud kahe ristsirge vahel (joon. 16, $\angle SMO$).

Tuleb korrata valemeid korrapärase hulknurga külje arvutamiseks ümberringi raadiuse kaudu:

$$a_3 = R\sqrt{3}; a_6 = R; a_n = R\sqrt{2};$$

$$a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

Samuti on vaja teada kolmnurga siseringjoone ja ümberringjoone raadiuste arvutamise valemeid.

a) $r = \frac{S}{p},$

kus r on kolmnurga (või hulknurga) siseringi raadius;
 S — kolmnurga (või hulknurga) pindala;
 p — kolmnurga (või hulknurga) pool ümbermõõtu.

b) $R = \frac{abc}{4S},$

kus R on kolmnurga ümberringi raadius;
 a, b ja c on kolmnurga küljed;
 S — selle kolmnurga pindala.

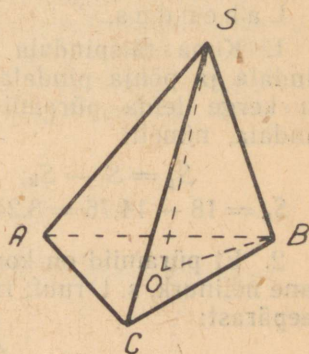
Püramiidi külgpindala arvutamise teoreem kehtib ainult korrapärase püramiidi puhul, korrapärase püramiidi külgpindala leitakse üksikute külgtahkude pindalade summana.

Püramiidi ruumala tõestamiseks tuleb kasutada lemmat pindvõrdsete põhjadega ja võrdsete kõrgustega kolmnurksete püramiidide ruumvõrdsusest. Selle lemma tõestuse õppimine ei ole kohustuslik, kuigi seda on lihtne tõestada Cavalieri printsiibi abil (Andrejev, § 122).

Lahendamise mõned ülesanded.

Ülesanne 1. Korrapärase kolmnurkse püramiidi põhja ümbermõõt on $30\sqrt{3}$ cm ja külgserv 26 cm. Määrata püramiidi kõrgus (joon. 17).

Antud: korrapärane kolmnurkne



Joon. 17.

püramiid $SABC$; $AB + BC + AC = 30\sqrt{3}$ cm; $SB = 26$ cm;
 $SO \perp$ tasap. ABC .

Määrata SO .

Lahendus.

1. Leiame külgserva $AB = BC = AC$:

$$AB = \frac{30\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3} \text{ cm.}$$

2. Leiame OB ; et püramiid on korrapärane, siis tema kõrgus langeb põhja keskpunkti. Seega on OB kolmnurga ümberringi raadius:

$$AB = R\sqrt{3}; \quad R = \frac{AB}{\sqrt{3}};$$

$$OB = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 10 \text{ cm.}$$

3. Täisnurksest kolmnurgast SOB ($SO \perp OB$) saame:

$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{36 \cdot 16} = 6 \cdot 4 = 24.$$

Järelikult, $SO = 24$ cm.

Ülesanne 2. Korrapärase nelinurkse püramiidi külgpindala on $14,76 \text{ dm}^2$ ja täispindala 18 dm^2 . Arvutada püramiidi ruumala (joon. 18).

Antud: korrapärane nelinurkne püramiid $SABCD$; $S_k = 14,76 \text{ dm}^2$; $S_t = 18 \text{ dm}^2$.

Arvutada püramiidi ruumala.

Lahendus.

1. Kuna täispindala on külgpindala ja põhja pindala summa, on kerge leida püramiidi põhja pindala, nimelt:

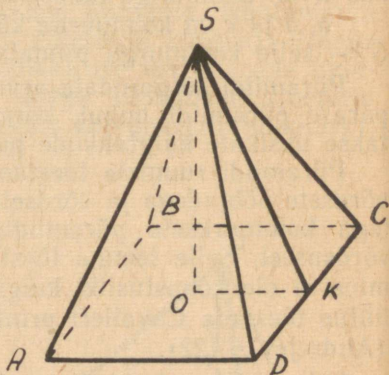
$$S_p = S_t - S_k;$$

$$S_p = 18 - 14,76 = 3,24 \text{ dm}^2.$$

2. Et püramiid on korrapärane, siis on tema põhjaks korrapärane nelinurk, s. t. ruut; ruudu pindala võrdub tema külje ruuduga, seepärast:

$$AB^2 = 3,24 \text{ dm}^2;$$

$$AB = \sqrt{3,24} = 1,8 \text{ dm.}$$



Joon. 18.



3. Püramiidi ruumala arvutamiseks tuleb leida kõrgus SO . Selle saame leida täisnurksest kolmnurgast SOK , kus SK on püramiidi apoteem ja OK on pool ruudu külge. Et korrapärase püramiidi külgpindala võrdub põhja übermöödu (U) ja apoteemi poole korrutisega, saame leida SK külgpindala valemist, nimelt:

$$S_k = \frac{U \cdot SK}{2}; \quad SK = \frac{2S_k}{U} = \frac{2 \cdot 14,76}{4 \cdot 1,8} = 4,1 \text{ dm.}$$

4. $OK = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} \cdot 1,8 = 0,9 \text{ dm.}$

5. $SO = \sqrt{SK^2 - OK^2} = \sqrt{4,1^2 - 0,9^2} = \sqrt{16,81 - 0,81} = 4 \text{ dm.}$

6. Arvutame püramiidi ruumala:

$$V = \frac{S_p \cdot h}{3} = \frac{3,24 \cdot 4}{3} = 4,32.$$

Niisiis, $V = 4,32 \text{ dm}^3$.

Ülesanne 3. Püramiidi põhjaks on võrdhaarne kolmnurk, mille alus on 12 cm ja haar on 10 cm. Külgtahkude ja põhitahu vahelised kahetahulised nurgad on igaüks 45° . Arvutada püramiidi kõrgus (Rõbkin, II osa, § 9, nr. 6).

Antud: kolmnurkne püramiid $SABC$ (joon. 19); $AB = BC = 10 \text{ cm}$; $AC = 12 \text{ cm}$; $\angle SMO = \angle SNO = \angle SKO = 45^\circ$; $SO \perp$ tasap. ABC .

Arvutada SO .

L a h e n d u s.

1. Kuna külgtahkude ja põhitahu vahelised kahetahulised nurgad on kõik võrdsed, siis püramiidi kõrgus langeb kolmnurga ABC siseringi keskpunkti. Tõepoolest, kahetahuliste nurkade joonnurgad SMO , SNO ja SKO on kõik võrdsed — 45° , mistõttu $\triangle SMO = \triangle SNO = \triangle SKO$ (ühise kaateti SO ja kahe nurga järgi), järelikult $OM = ON = OK$, st. et O on kolmnurga siseringi keskpunkt.

2. Leiame OM valemi $r = \frac{S}{p}$ järgi:

$$p = \frac{10 + 10 + 12}{2} = 16;$$

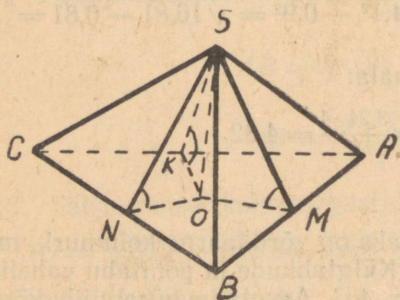
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{16 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4} = 4 \cdot 6 \cdot 2 = 48 \text{ cm}^2;$$

$$r = \frac{48}{16} = 3 \text{ cm.}$$

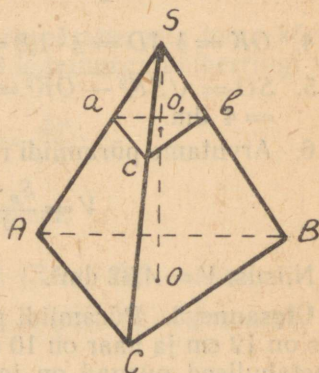
3. Arvutame SO . Kuna kolmnurk SOM on võrdhaarne ($\angle SMO = \angle OSM = 45^\circ$), siis $SO = MO = 3$ cm.

Seega $SO = 3$ cm.

Ülesanne 4. Püramiidi kõrgus on 16 m ja põhja pindala on 512 m^2 . Kui kaugel põhitahust asetseb põhjaga paralleelne lõige, mille pindala on 50 m^2 (Rõbkin, II, § 9, nr. 17)?



Joon. 19.



Joon. 20.

Antud: püramiid $SABC$ (joon. 20); $SO \perp ABC$; $SO = 16$ m; $S_p = 512 \text{ m}^2$; $abc \parallel ABC$; $S_{abc} = 50 \text{ m}^2$.

Leida OO_1 .

Lahendus.

1. On teada, et kui püramiid on lõigatud põhjaga paralleelse tasapinnaga, siis lõike pindala suhtub põhja pindalasse nii nagu suhtuvad nende kauguste ruudud püramiidi tipust.

$$\frac{S_{abc}}{S_{ABC}} = \frac{SO_1^2}{SO^2}.$$

2. Kuna $SO_1 = SO - OO_1 = 16 - OO_1$, siis

$$\frac{50}{512} = \frac{(16 - OO_1)^2}{16^2}.$$

3. Taandades vasakut poolt 2-ga, saame:

$$\frac{25}{256} = \frac{(16 - OO_1)^2}{16^2}.$$

Siin on kasulik võtta vasakust ja paremast poolest ruutjuur, saame:

$$\frac{5}{16} = \pm \frac{16 - OO_1}{16}; \quad 5 = \pm (16 - OO_1);$$

kui $5 = 16 - OO_1$, siis $OO_1 = 11$;

kui $5 = -(16 - OO_1) = -16 + OO_1$, siis $OO_1 = 21$, see aga ei ole võimalik, kuna kogu püramiidi kõrgus on 16 m, OO_1 on aga osa kõrgusest ja ei saa seepärast olla 21 m.

Seega $OO_1 = 11$ m.

Ülesanne 5. Avaldada korrapärase kuusnurkse püramiidi täispindala, kui püramiidi apoteem on k ja põhja apoteem on r (Rõbkin, II, § 10, nr. 3).

Antud: korrapärase kuusnurkse püramiidi $SABCDEF$ (joon. 21); apoteem $SM = k$; $OM = r$.

Avaldada S_t .

L a h e n d u s.

1. Täispindala leidmiseks peame kõigepealt teadma külgpindala, mis võrdub põhja übermõõdu ja poole apoteemi korrutisega. Nagu näeme, tuleb leida põhiseriv. Tähistame selle x -ga. Kuna põhjaks on korrapärase kuusnurk, siis

$$AB = BC = CD = DE = EF = AF = x.$$

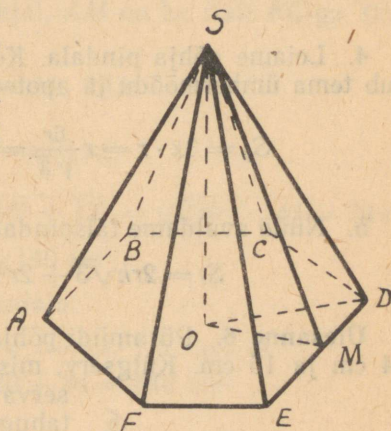
2. OD on kuusnurga ümberringi raadius. $R = x$, sest korrapärase kuusnurga külge võrdub ümberringi raadiusega. $DM = \frac{x}{2}$. OM on antud põhja apoteem r .

Täisnurksest kolmnurgast ODM saame:

$$OD^2 = \left(\frac{DE}{2}\right)^2 + OM^2;$$

$$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + r^2;$$

$$4x^2 = x^2 + 4r^2;$$



Joon. 21.

$$3x^2 = 4r^2;$$

$$x^2 = \frac{4r^2}{3}; \quad x = \frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

3. Leiame külgpindala:

$$S_k = \frac{U \cdot SM}{2}.$$

Et $U = 6x$, $SM = k$, siis

$$S_k = \frac{6x \cdot k}{2} = 3x \cdot k = \frac{6r \cdot k}{\sqrt{3}} = \frac{6rk\sqrt{3}}{3} = 2rk\sqrt{3}.$$

4. Leiame põhja pindala. Korrapärase hulknurga pindala võrdub tema ümbermõõdu ja apoteemi poole korrutisega.

$$S_p = 3x \cdot r = r \frac{6r}{\sqrt{3}} = \frac{6r^2}{\sqrt{3}} = \frac{6r^2\sqrt{3}}{3} = 2r^2\sqrt{3}.$$

5. Nüüd avaldame täispindala:

$$S_t = 2rk\sqrt{3} + 2r^2\sqrt{3} = 2r(k + r)\sqrt{3}.$$

Ülesanne 6. Püramiidi põhjaks on kolmnurk külgedega 13 cm, 14 cm ja 15 cm. Külgserv, mis asetseb suuruselt keskmise põhiserva vastas, on 16 cm ja on risti põhitahuga. Arvutada püramiidi täispindala (Rõbkin, II, § 10, nr. 18).

Antud püramiid $SABC$ (joon. 22);

$$AC = 15 \text{ cm};$$

$$AB = 13 \text{ cm};$$

$$BC = 14 \text{ cm};$$

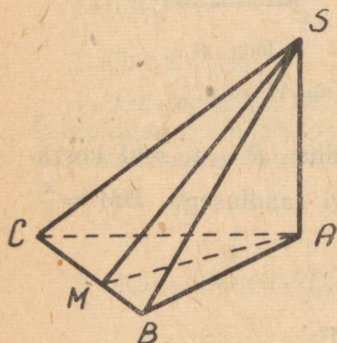
$SA \perp$ tasap. ABC ; $SA = 16 \text{ cm}$.

Leida S_t .

L a h e n d u s.

1. Et püramiid ei ole korrapärane, tuleb tema täispindala arvutada üksikute tahkude pindalade summana.

2. Kuna $SA \perp$ põhja tasapinnaga, siis $SA \perp AC$ ja $SA \perp SA$, s. t. et $\triangle SAC$ ja $\triangle SAB$ on täisnurksed.



Joon. 22.

3. Leiame nende kahe kolmnurga pindalad:

$$S_{\Delta SAB} = \frac{SA \cdot AB}{2} = \frac{16 \cdot 13}{2} = 104 \text{ cm}^2;$$

$$S_{\Delta SAC} = \frac{SA \cdot AC}{2} = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120 \text{ cm}^2.$$

4. Leiame kolmnurga ABC pindala:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$S = \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 7 \cdot 3 \cdot 4 = 84 \text{ cm}^2.$$

5. Kolmnurga SBC pindala leidmiseks tõmbame $SM \perp BC$, siis, kolme ristsirge teoreemi põhjal, AM on ka risti BC -ga (kuna AM on SM projektsioon).

$$6. \frac{AM \cdot BC}{2} = S_{\Delta ABC}; \quad \frac{AM \cdot 14}{2} = 84; \quad 7AM = 84;$$

$$AM = \frac{84}{7} = 12 \text{ cm}.$$

$$7. SM = \sqrt{AS^2 + AM^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{256 + 144} = 20 \text{ cm}.$$

$$8. S_{\Delta SCB} = \frac{BC \cdot SM}{2} = \frac{14 \cdot 20}{2} = 140 \text{ cm}^2.$$

9. Arvutame püramiidi täispindala:

$$S_t = S_{\Delta SAB} + S_{\Delta SAC} + S_{\Delta SCB} + S_{\Delta ABC} = \\ = 104 + 120 + 140 + 84 = 448 \text{ cm}^2.$$

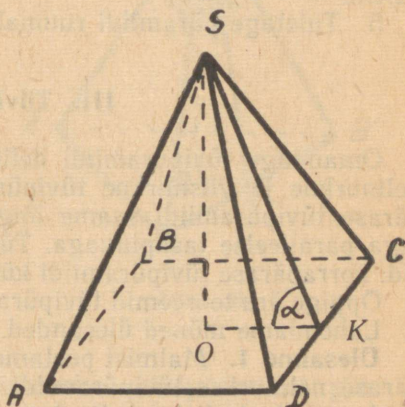
Ülesanne 7. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on a ja kahetahuline nurk külgtahu ja põhitahu vahel on α . Avaldada püramiidi täispindala ja ruumala (joon. 23).

Antud: korrapärane nelinurkne püramiid $SABCD$; $AB = a$; $\angle SKO = \alpha$.

Leida S_t , V .

Lahendus.

1. $S_k = \frac{Ü \cdot SK}{2}$, kus $Ü$ on põhja ümbermõõt ja SK — püramiidi apoteem.



Joon. 23.

2. Leiame SK . Kolmnurk SOK on täisnurkne;

$$OK = \frac{AD}{2} = \frac{a}{2};$$

$$\frac{OK}{SK} = \cos \alpha; SK = \frac{OK}{\cos \alpha} = \frac{a}{2 \cos \alpha}.$$

3. Et leida püramiidi ruumala, avaldame kõrguse $SO = h$:

$$\frac{SO}{OK} = \operatorname{tg} \alpha; SO = OK \cdot \operatorname{tg} \alpha; SO = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

$$4. S_k = U \cdot \frac{SK}{2} = \frac{4a \cdot a}{4 \cos \alpha} = \frac{a^2}{\cos \alpha}.$$

$$5. S_t = \frac{a}{\cos \alpha} + a^2 = a^2 \left(\frac{1}{\cos \alpha} + 1 \right) = a^2 \left(\frac{1 + \cos \alpha}{\cos \alpha} \right) = \\ = \frac{2a^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}.$$

$$6. V = \frac{1}{3} S_p \cdot h = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a \operatorname{tg} \alpha}{2} = \frac{a^3 \operatorname{tg} \alpha}{6}.$$

Kontrollküsimusi

1. Mis on püramiid (definiitsioon)?
2. Missugust püramiidi nimetatakse korrapäraseks?
3. Tõestage püramiidi põhjaga paralleelse lõike omadused.
4. Tuletage korrapärase püramiidi külgpindala arvutamise valem.
5. Tuletage püramiidi ruumala arvutamise valem.

III. Tüvipüramiid

Omandage tüvipüramiidi definiitsioon. Joonestage kolmnurkne, nelinurkne ja viisnurkne tüvipüramiid. Pidage meeles, et korrapärase tüvipüramiidi saame lõigates korrapärast püramiidi põhjaga paralleelse tasapinnaga. Tüvipüramiidi külgtahud on trapetsid: korrapärase tüvipüramiidi külgtahud — võrdhaarsed trapetsid.

Õppige ära teoreemid tüvipüramiidi külgpindalast ja ruumalast. Lahendame mõned ülesanded.

Ülesanne 1. Malmist postament, kõrgusega 1,5 m, omab korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi kuju. Põhiservad on 3 m ja 2m. Leida postamendi kaal (almi erikaal on $7,2 \text{ G/cm}^3$) (Andrejev, VIII ptk., ül. nr. 65).

Antud: korrapärase nelinurkne malmist tüvipüramiid $A_1B_1C_1D_1a_1b_1c_1d_1$ (joon. 24); kõrgus $OO_1 = 15$ m; $A_1B_1 = 3$ m; $a_1b_1 = 2$ m.

Leida püramiidi kaal.

L a h e n d u s.

1. Püramiidi kaal võrdub tema ruumala ja erikaalu korrutisega. Et erikaal on antud, tuleb leida ruumala:

$$V = \frac{h}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}).$$

2. Leiame põhjade pindalad S_1 ja S_2 . Kuna tüvipüramiid on korrapärase, siis on põhjaks korrapärase hulknurk, antud juhul ruut, mille pindala võrdub külje ruuduga.

Seepärast $S_1 = 3^2 = 9$ m²; $S_2 = 2^2 = 4$ m².

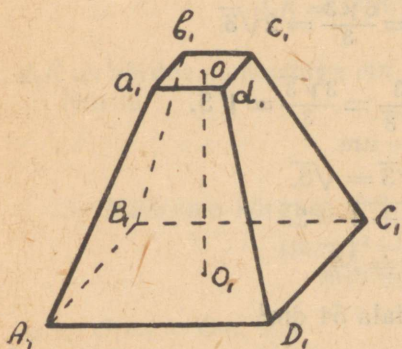
3. $V = \frac{1,5}{3} (9 + 4 + \sqrt{9 \cdot 4}) = 9,5$ m³.

4. Leiame postamendi kaalu:

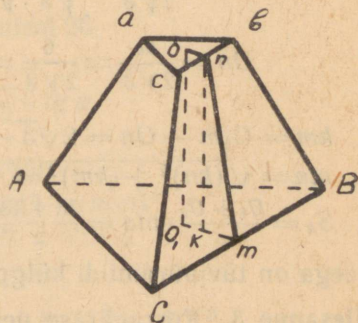
$$P = 9,5 \cdot 7,2 = 68,4.$$

Et ruumala on väljendatud kuupmeetrites, saame kaalu tonnides.

Seega on postamendi kaal 68,4 tonni.



Joon. 24



Joon. 25

Ulesanne 2. Korrapärase kolmnurkse tüvipüramiidi põhiservad on 6 dm ja 12 dm, kõrgus on 1 dm. Arvutada külgpindala (joon. 25).

Antud: korrapärase kolmnurkne tüvipüramiid $ABCabc$; $AB = 12$ dm; $ab = 6$ dm; kõrgus $OO_1 = 1$ dm.

Leida S_k .

L a h e n d u s.

1. Korrapärase tüvipüramiidi külgpindala võrdub põhjade ümbermõõtude poolsumma ja apoteemi korrutisega. Et põhiservad on antud, tuleb leida apoteem.

2. Apoteemi (s. o. külgtahu kõrguse) leidmiseks tõmbame $O_1m \perp BC$ ja $On \perp bc$. Punktist n tõmbame põhitahule ristsirge nk . Siis kolme ristsirge teoreemi alusel ka mn on risti BC -ga ja samuti ka risti bc -ga,

s. t. mn — apoteem.

Vaatleme kolmnurka nmk . Pythagorase teoreemi põhjal

$$(mn)^2 = (kn)^2 + (km)^2.$$

Et leida mn , peame teadma km pikkust.

3. O_1m ja On on kolmnurkade siseringide raadiused, mistõttu saame:

$$O_1m = \frac{BC}{2\sqrt{3}} \left(r = \frac{a_3}{2\sqrt{3}} \right);$$

$$O_1m = \frac{12}{2\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

$$On = \frac{bc}{2\sqrt{3}} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}.$$

$$4. km = O_1m - On = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

$$5. mn = \sqrt{(kn)^2 + (km)^2} = \sqrt{1 + 3} = 2.$$

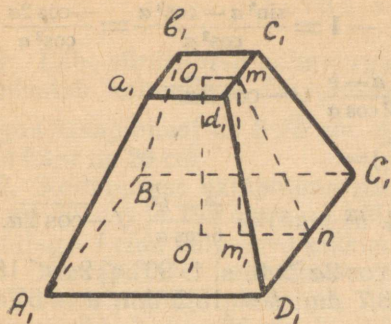
$$6. S_k = \frac{O_1 + O_2}{2} \cdot mn = \frac{36 + 18}{2} \cdot 2 = 54.$$

Seega on tüvipüramiidi külgpindala 54 dm².

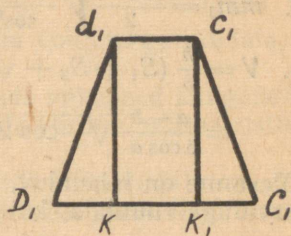
Ülesanne 3. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi põhiservad on a ja b ($a > b$). Külgserva ja põhiserva vaheline teravnurk on α . Avaldada tüvipüramiidi ruumala (Rõbkin. Trigonomeetria, § 21, nr. 24).

Antud: korrapärase nelinurkne tüvipüramiid $A_1B_1C_1D_1a_1b_1c_1d_1$ (joon. 26); $A_1B_1 = a$; $a_1b_1 = b$; $\angle d_1D_1C_1 = \alpha$.

Avaldada ruumala.



Joon. 26



Joon. 27

Lahendus.

$$1. V = \frac{h}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}),$$

kus $S_1 = a^2$ — alumise põhja pindala,
 $S_2 = b^2$ — ülemise põhja pindala.

2. Vaatleme ühte külgtahku $D_1C_1c_1d_1$ (joon. 27.).

$$D_1K = K_1C_1 = \frac{a-b}{2};$$

$$d_1K = D_1K \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{a-b}{2} \operatorname{tg} \alpha;$$

d_1K on võrdne apoteemiga mn joonisel 26.

Niisiis,

$$mn = \frac{a-b}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

3. Määrame kõrguse $OO_1 = mm_1$:

$$(mm_1)^2 = (mn)^2 - (m_1n)^2;$$

$$m_1n = O_1n - O_1m_1;$$

kuna $O_1m_1 = Om$, siis

$$m_1n = O_1n - Om = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a-b}{2};$$

$$(mm_1)^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 (\operatorname{tg}^2 \alpha - 1);$$

$$mm_1 = \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 (\operatorname{tg}^2 \alpha - 1)} = \frac{a-b}{2} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}.$$

$$\text{Teisendame } \operatorname{tg}^2 \alpha - 1 = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 1 = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{-\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}.$$

$$4. \quad mm_1 = \frac{a-b}{2} \sqrt{\frac{-\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{a-b}{2 \cos \alpha} \sqrt{-\cos 2\alpha}.$$

$$5. \quad V = \frac{h}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}) = \\ = \frac{a-b}{6 \cos \alpha} \sqrt{-\cos 2\alpha} (a^2 + b^2 + ab) = \frac{a^3 - b^3}{6 \cos \alpha} \sqrt{-\cos 2\alpha}.$$

Ülesanne on lahenduv, kui $-\cos 2\alpha > 0$, s. t. $90^\circ < 2\alpha < 180^\circ$, Arvutage ruumala, kui $a = 28,7$ dm; $b = 15,2$ dm; $\alpha = 65^\circ 12'$.

Kontrollküsimusi

1. Missugust keha nimetatakse tüvipüramiidiks?
2. Milline on korrapärane tüvipüramiid?
3. Joonestage kolm erinevat tüvipüramiidi.
4. Tuletage korrapärase tüvipüramiidi külgpindala arvutamise valem.
5. Tuletage tüvipüramiidi ruumala arvutamise valem.

KONTROLLTÖÖ NR. 5

Esimene variant

1. Punktist väljaspool tasapinda on tasapinnani juhitud kaldlõik, pikkusega 2 m ja ristlõik, pikkusega 1,6 m. Leida ristlõigu projektsiooni pikkus kaldlõigul.

2. Risttahuka diagonaal on 13 m. Põhja pindala on 12 m², põhja ümbermõõt 14 m. Arvutada selle risttahuka ruumala ja külgpindala.

3. Korrapärase kuusnurkse püramiidi kõrgus on h . Põhja pindala on $\frac{3a^2 \sqrt{3}}{2}$. Avaldada püramiidi täispindala.

4. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi põhiservad on 15 cm ja 8 cm. Külgserv on 7 cm. Arvutada tüvipüramiidi ruumala.

5. Korrapärase kolmnurkse püramiidi põhitahu kõrgus on h , kahetahuline nurk külgtahu ja põhitahu vahel on α . Avaldada püramiidi ruumala ja leida selle arvuline väärtus, kui $h = 15$ cm ja $\alpha = 60^\circ 28'$.

Teine variant

1. Läbi võrdhaarse kolmnurga aluse on juhitud tasapind, mis moodustab kolmnurga tasapinnaga nurga 45° . Kolmnurga tipu kaugus tasapinnast on $5\sqrt{2}$ cm. Arvutada kolmnurga pindala, kui tema haar on 26 cm.

2. Kolmnurkse kaldprisma külgservade vahelised kaugused on 148 cm, 60 cm ja 104 cm ning külgpindala võrdub prisma ristlõike pindalaga. Leida külgserva pikkus.

3. Korrapärase kolmnurkse püramiidi külgpindala on kaks korda suurem põhja pindalast. Arvutada selle püramiidi ruumala, kui tema põhiserv on 36 cm.

4. Leida korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi ruumala, kui tema apoteem on 130 cm, kõrgus 126 cm ja põhiservad suhtuvad nagu 7 : 3.

5. Püstprisma põhjaks on võrdhaarne kolmnurk, mille kõrgus on h ja tipunurk α . Avaldada prisma külgpindala, kui prisma kõrgus võrdub põhja ümbermõõduga. Arvutada külgpindala, kui $\alpha = 43^\circ 16'$ ja $h = 13,5$ dm.

Kolmas variant

1. Kahe paralleelse tasapinna vahel asub kaks lõiku. Nende lõikude summa on 120 cm ja nende projektsioonid tasapinnal on 10 cm ja 70 cm. Leida antud tasapindade kaugus teineteisest.

2. Kuubi diagonaallõike pindala on $16\sqrt{2}$ cm. Arvutada kuubi täispindala, ruumala ja diagonaali pikkus.

3. Püramiidi aluseks on võrdhaarne kolmnurk, mille ümbermõõt on 80 cm ja haar 25 cm. Iga külgtahk moodustab põhitahuga nurga 45° . Arvutada püramiidi ruumala.

4. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi põhiservad on $2a$ ja $2b$ ($a > b$), külgserv on $2c$. Avaldada tüvipüramiidi ruumala.

5. Püramiidi aluseks on täisnurkne kolmnurk hüpotenuusiga c ja teravnurgaga α . Määrata püramiidi ruumala, kui tema kõrgus võrdub põhja kolmnurga hüpotenuusile tõmmatud kõrgusega. Arvutada, kui $c = 12,5$ dm ja $\alpha = 38^\circ 20'$.

Neljas variant

1. Ringi keskpunktist väljub ringi tasapinnaga ristuv lõik, mille pikkus on 16 cm. Arvutada selle ristlõigu otspunkti kaugus ringjoone mistahes punktist, kui ringi pindala on 144π cm².

2. Püstprisma aluseks on kolmnurk külgedega 28 cm, 26 cm ja 30 cm. Prisma kõrgus on võrdne põhjaks oleva kolmnurga suuruselt keskmise kõrgusega. Arvutada prisma täispindala ja ruumala.

3. Püramiidi põhja pindala on 512 cm^2 . Põhjast 11 cm kaugusel asuva põhjaga paralleelse lõike pindala on 50 cm^2 . Leida püramiidi ruumala.

4. Tiigi süvendil on korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi kuju. Põhiservad on 14 m ja 10 m. On teada, et süvend mahutab 227 tonni vett. Määrata tiigi sügavus (täpsusega kuni 0,01).

5. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhja ümbermõõt on $2a$. Tipu juures asuva mitmetahulise nurga kõik tasanurgad on α . Avaldada ja arvutada püramiidi ruumala, kui $a = 38 \text{ dm}$ ja $\alpha = 39^\circ 40'$.

KOONDÜLESANNE NR 6.

GEOMEETRIA

Teema 4. Pöördkehad

Silindriline pind. Püstringilinder. Silindri pinnalaotus. Silindri kül- ja täispindala *. Silindri ruumala *.

Kooniline pind. Püstringkoonus. Koonuse pinnalaotus. Koonuse kül- ja täispindala *. Koonuse ruumala *.

Tüvikoonus. Tüvikoonuse pinnalaotus. Tüvikoonuse kül- ja täispindala. Tüvikoonuse ruumala.

Kerapind (sfäär). Kera. Kera tasapinnalised lõiked. Kera suur-ring. Puutujatasapind. Lemma pöördkeha pindalast. Kera, keravöö ja segmendi pindala. Kera ruumala *. Kera sektori ja segmendi ruumala.

Kirjandus

1. Andrejev. Geomeetria, IX ptk., § 125—145, ülesanded nr. 1—4, 9—11, 20—25, 30—38, 44—49, 53—60.
2. Kissel'jov. Geomeetria, II osa, § 105—122; 125—145.
3. Rõbkin. Ülesannete kogu, II osa, § 13, nr. 1—4, 11—13, 16—20, 23; §14, nr. 1—4, 15—18; § 15, nr. 1—5, 11—15; § 16, nr. 56—60; § 17, nr. 36—40, 52—54; § 18, nr. 24—27, 32, 33; § 20, nr. 1—2; § 21, nr. 1—3; § 22, nr. 1—4; § 23, nr. 1, 2, 12, 29, 30, 39.

METOODILISED JUHENDID

Teema materjali jaotame neljaks alateemaks:

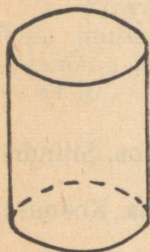
- 1) silinder,
- 2) koonus,
- 3) tüvikoonus,
- 4) kera.

* Märgitud teoreeme peavad õpilased oskama tõestada.

I. Silinder

Eelkõige märgime, et kõik pöordkehad tekivad mingi tasapinnalise kujundi pöörlemisel ümber telje. Silinder on keha, mis on piiratud silindrilise pinnaga ja kahe paralleelse tasapinnaga. Võime ka öelda, et silindriks nimetame keha, mis tekib risküliku pöörlemisel ühe oma külje ümber.

Silindri iga lõige, mis on paralleelne põhjaga, on ring. Arvestage, et teie õpite ainult selliseid silindeid, millede põhjadeks on ringid ja moodustajad on põhjadega risti (joon. 28).



Joon. 28.

Silindri külgpinnalaotus tasapinnal on riskülik, mille aluseks on silindri põhjaks oleva ringjoone pikkus ja kõrguseks silindri moodustaja.

Silindri külgpindala ja ruumala kohta käivate teoreemide tõestamisel tuleb kasutada teoreeme piirväärtustest, nimelt: a) korrutise piirväärtus võrdub piirväärtuste korrutisega ja b) konstandi piirväärtus võrdub selle konstandi enesega.

Tõepoolest, kui silindri külgpinnaks võtta piir, millele läheneb silindri sisse kujundatud korrapärase prisma külgpindala, kui tema külgede arv tõkestamatult kasvab, siis võime kirjutada:

$$S_{k \text{ silinder}} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{nk \text{ prisma}} \lim_{n \rightarrow \infty} (P_n \cdot h),$$

kus n tähistab prisma külgede arvu,
 P_n — prisma põhja ümbermõõt,
 h — kõrgus.

Kasutades nüüd korrutise ja konstandi piirväärtuse leidmise teoreeme, saame:

$$S_{k \text{ sil.}} = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} h = C \cdot h = 2\pi R h,$$

kus C on põhja ringjoone pikkus, s. t.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = C.$$

Samal viisil tõestame teoreemi silindri ruumalast:

$$V_{\text{sil.}} = \lim_{n \rightarrow \infty} V_{n \text{ prisma}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (Q_n \cdot h) = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n \lim_{n \rightarrow \infty} h = S \cdot h = \pi R^2 h,$$

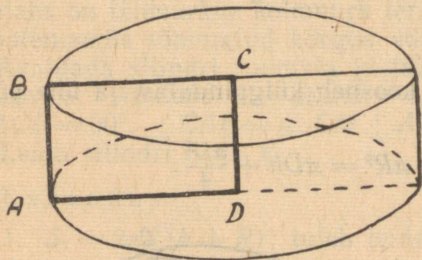
kus Q_n — silindri sissekujundatud prisma põhja pindala,
 R — silindri põhja raadius.

Lahendame mõned ülesanded.

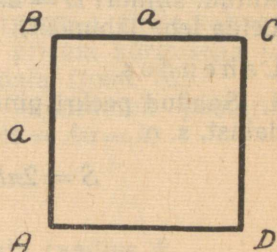
Ülesanne 1. Ristkülik külgedega a ja b ($a > b$) pöörleb ümber väiksema külje. Leida tekkinud pöördkeha täispindala ja ruumala (joon. 29).

Antud: $ABCD$ — ristkülik, pöörleb ümber CD ; $BC = AD = a$; $AB = CD = b$.

Leida pöördkeha S_t ja V .



Joon. 29.



Joon. 30.

Lahendus.

1. Ristküliku pöörlemisel tekib silinder, mille kõrgus on b ja põhja raadius a .

Selle pindala ja ruumala on kerge leida.

$$S_t = 2\pi R(h + R) = 2\pi a(b + a).$$

$$3. V = \pi R^2 h = \pi a^2 b.$$

Ülesanne 2. Ruut küljega a kujutab ühe silindri külgpinnalaotust. Leida selle silindri põhja pindala (Andrejev, IX ptk., nr. 2).

Antud: ruut $ABCD$; $AB = BC = a$ (joon. 30).

Leida sellise külgpinnaga silindri põhja pindala.

Lahendus.

1. Silindri külgpindala $S_k = 2\pi R h$, mis võrdub ruudu pindalaga a^2 ; seetõttu

$$2\pi R h = a^2.$$

2. Et $h = a$, siis $2\pi R a = a^2$;

$$R = \frac{a}{2\pi}.$$

3. Ringi pindala $S_p = \pi R^2$,
järelikut

$$S_p = \frac{\pi a^2}{4\pi^2} = \frac{a^2}{4\pi}.$$

Seega põhja pindala on $\frac{a^2}{4\pi}$.

Ülesanne 3. Ringikujulisest metall-lehest on stantsitud silindrikujuline peeker läbimõõduga 25 cm ja kõrgusega 50 cm. Leida lehe läbimõõt oletades, et lehe pindala stantsimisel ei muutunud.

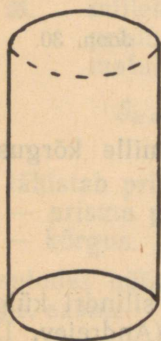
Antud: silindri $D = 25$ cm; $h = 50$ cm (joon. 31).

Leida lehe läbimõõt.

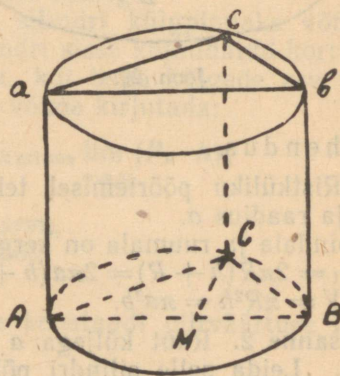
Lahendus.

1. Saadud peekri pindala koosneb külgpindalast ja ühe põhja pindalast, s. o.

$$S = 2\pi R h + \pi R^2 = \pi D h + \frac{\pi D^2}{4}.$$



Joon. 31.



Joon. 32.

2. Olgu lehe diameeter x , siis tema pindala on $\frac{\pi x^2}{4}$.

3. Kuna lehe pindala võrdub silindri pindalaga, võime kirjutada järgmise võrduse:

$$\frac{\pi x^2}{4} = \pi D h + \frac{\pi D^2}{4};$$

$$\frac{x^2}{4} = D h + \frac{D^2}{4}.$$

Paneme sisse arvulised väärtused:

$$\frac{x^2}{4} = 25 \cdot 50 + \frac{625}{4}.$$

4. Lahendame saadud võrrandi:

$$x^2 = 5000 + 625;$$

$$x^2 = 5625;$$

$$x = 75 \text{ cm.}$$

Ulesanne 4. Silindri sisse on kujundatud püstprisma, mille põhjaks on täisnurkne kolmnurk teravnurgaga α . Selle kolmnurga hüpotenuusile tõmmatud kõrgus võrdub prisma kõrgusega ja on h . Avaldada silindri ruumala ja täispindala (joon. 32).

Antud: $ABCabc$ — silindri sisse kujundatud püstprisma;
 $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle CAB = \alpha$; $CM \perp AB$; $CM = Aa = h$.

Leida silindri S_t ja V .

Lahendus.

1. $S_t = 2\pi R(h + R)$; tuleb leida põhja raadius R .

2. $\frac{CM}{AC} = \sin \alpha$; $AC = \frac{CM}{\sin \alpha} = \frac{h}{\sin \alpha}$;

3. $\frac{AC}{AB} = \cos \alpha$; $AB = \frac{AC}{\cos \alpha} = \frac{h}{\sin \alpha \cos \alpha}$.

4. $2R = AB = \frac{h}{\sin \alpha \cos \alpha}$;

$$R = \frac{h}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{h}{\sin 2\alpha}.$$

5. $S_t = \frac{2\pi h}{\sin 2\alpha} \left(h + \frac{h}{\sin 2\alpha} \right) = \frac{2\pi h}{\sin 2\alpha} \left(\frac{h \sin 2\alpha + h}{\sin 2\alpha} \right) =$
 $= \frac{2\pi h^2}{\sin^2 2\alpha} (\sin 2\alpha + 1) = \frac{2\pi h^2}{\sin^2 2\alpha} [\cos(90^\circ - 2\alpha) + 1] =$
 $= \frac{4\pi h^2}{\sin^2 2\alpha} \cos^2(45^\circ - \alpha).$

6. Leiame silindri ruumala:

$$V = \pi R^2 h = \frac{\pi h^2}{\sin^2 2\alpha} \cdot h = \frac{\pi h^3}{\sin^2 2\alpha}.$$

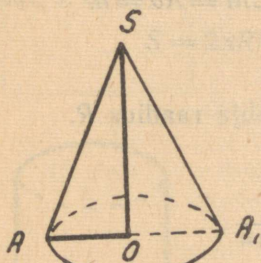
Kontrollküsimusi

1. Missugust pinda nimetatakse silindriliseks pinnaks?
2. Missugust keha nimetatakse silindriks?

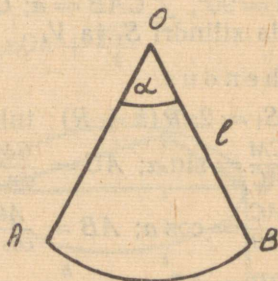
3. Millega võrdub silindri külgpindala? Tõestage.
4. Sõnastage silindri täispindala valem.
5. Millega võrdub silindri ruumala? Tõestage.

II. Koonus

Kõigepealt joonestage koonus ning omandage koonilise pinna ja koonuse definitsioon. Koonuseks nimetatakse keha, mida piiravad ühel pool tippu asetseva koonilise pinna osa ja tasapind, mis lõikab kõiki moodustajaid ühel ja samal pool tippu (Kisseljov, § 109). Võib anda ka teise definitsiooni: koonus on keha, mis tekib täisnurkse kolmnurga pöörlemisel ühe oma kaateti ümber (joon. 33). See definitsioon on täiesti vastuvõetav, sest teie õpite



Joon. 33.



Joon. 34.

ainult püstringkoonusi, s. t. koonusi, mille põhjaks on ring ja kõrguse aluspunktiks on põhja keskpunkt. Koonuse külgpinnalaotus kujutab endast ringi sektorit, mille kaare pikkuseks on koonuse põhja ümbermõõt ja raadiuseks on koonuse moodustaja (joon. 34). Selle sektori kesknurga α saame leida järgmiselt.

Kaare pikkuse arvutamise valem on $\frown AB = \frac{\pi r n^\circ}{180^\circ}$, vastavalt meie tähistele $\frown AB = \frac{\pi l \alpha}{180^\circ}$. Kaare pikkus võrdub aga koonuse põhja ümbermõõduga, seepärast $2\pi R = \frac{\pi l \alpha}{180^\circ}$, kust $\alpha = \frac{2\pi R \cdot 180^\circ}{\pi l} = \frac{R}{l} \cdot 360^\circ$, seega $\alpha = \frac{R}{l} \cdot 360^\circ$.

Koonuse külgpindala ja ruumala arvutamise valemid tuleta-
takse piirväärtuste abil. Koonuse külgpindala all mõistame piiri,

millele läheneb koonuse sisse kujundatud korrapärase püramiidi külgpindala, kui tema külgede arv tõkestamata kasvab. Selle põhjal võime kirjutada:

$$S_k \text{ koonus} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_k \text{ püramiid} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{P_n \cdot a_n}{2} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} P_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2} = C \cdot \frac{l}{2} = \frac{2\pi R l}{2} = \pi R l,$$

kus C — koonuse põhja ümbermõõt,
 P_n — püramiidi põhja ümbermõõt,
 a_n — apoteem,
 l — koonuse moodustaja.

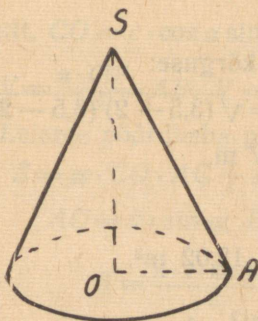
Püramiidi külgede arvu tõkestamata kasvamisel tema apoteem läheneb koonuse moodustajale ja põhja ümbermõõt — koonuse põhjaks oleva ringi ümbermõõdule $C = 2\pi R$. Samuti tuletame ka koonuse ruumala valemi. Koonuse sisse kujundatud korrapärase püramiidi külgede arvu tõkestamatu kasvamisel püramiidi põhja pindala läheneb koonuse põhja pindalale ja

$$V_{\text{koonus}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{Q_n \cdot h}{3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h}{3} = \frac{K \cdot h}{3} = \frac{\pi R^2 h}{3},$$

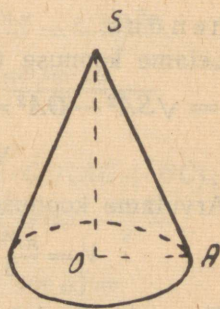
kus Q_n — püramiidi põhja pindala,
 h — püramiidi ja koonuse kõrgus,
 K — koonuse põhja pindala.

Lahendame mõningad ülesanded.

Ülesanne 1. Koonuse põhja pindala on $25\pi \text{ dm}^2$. Koonuse moodustaja on kõrgusest $l \text{ dm}$ võrra pikem. Arvutada koonuse ruumala ja täispindala (joon. 35).



Joon. 35.



Joon. 36.

Antud: koonus;

$$S_p = 25\pi \text{ dm}^2; SA - SO = 1 \text{ dm.}$$

Leida V ja S_t .

Lahendus.

1. Leiame koonuse põhja raadiuse:

$$\pi R^2 = 25\pi,$$

$$R^2 = 25,$$

$$R = 5 \text{ dm.}$$

2. $\triangle SOA$ on täisnurkne;

$$SA = SO + 1;$$

$$SA^2 = SO^2 + OA^2;$$

$$(SO + 1)^2 = SO^2 + 25;$$

$$SO^2 + 2SO + 1 = SO^2 + 25;$$

$$2SO = 24.$$

Saame, et $SO = 12 \text{ dm}$; $SA = 13 \text{ dm}$.

$$3. V = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 25 \cdot 12}{3} = 100\pi \approx 314 \text{ dm}^3.$$

$$4. S_t = \pi R(R + l) = 5\pi(5 + 13) = 90\pi \approx 282,6 \text{ dm}^2.$$

Ülesanne 2. Kruusakuhjal on koonuse kuju, mille põhja raadius on 2 m ja moodustaja on 3,5 m. Mitu vankrikoormat saadakse kruusast, mis on kümnes niisuguses kuhjas? 1 m³ kruusa kaalub 3 T. Ühele vankrile laaditakse 0,5 T (Rõbkin, II osa, § 17, nr. 34).

Antud: koonus (joon. 36);

$$OA = 2 \text{ m}; SA = 3,5 \text{ m.}$$

Leida kruusa äraveoks vajalik koormate arv.

Lahendus.

1. Leiame koonuse (kruusakuhja) kõrguse:

$$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{3,5^2 - 2^2} = \sqrt{(3,5 + 2)(3,5 - 2)} = \sqrt{5,5 \cdot 1,5} = 2,87 \text{ m.}$$

2. Arvutame koonuse ruumala:

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 4 \cdot 2,87}{3} = 12,02 \text{ m}^3.$$

3. Kui palju kaalub üks kruusakuhi?

$$12,02 \cdot 3 = 36,06 \text{ T.}$$

4. Kui palju kaaluvad 10 kuhja?

$$36,06 \cdot 10 = 360,6 \text{ T.}$$

5. Mitu koormat saadakse kruusast?

$$360,6 : 0,5 = 721 \text{ koormat.}$$

Märkus. Ülesannete kogus on antud vastus ühe kruusakuhja kohta.

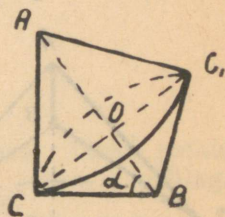
Ülesanne 3. Täisnurkne kolmnurk hüpoteenusiga c ja teravnurgaga α pöörleb ümber hüpoteenuusi. Leida tekkinud pöördkeha ruumala ja pindala (joon. 37).

Antud: täisnurkne kolmnurk ABC ;

$$AB = c; \angle ABC = \alpha.$$

Leida pöördkeha V ja S .

Lahendus.



Joon. 37.

1. Kolmnurga pöörlemisel ümber hüpoteenuusi tekib kaks koonust, järelikult võrdub pöördkeha ruumala nende kahe koonuse ruumalade summaga: $V = V_1 + V_2$.

2. Esimese koonuse ruumala $V_1 = \frac{\pi \cdot CO^2 \cdot AO}{3}$.

3. Teise koonuse ruumala $V_2 = \frac{\pi \cdot CO^2 \cdot OB}{3}$.

4. $V_1 + V_2 = \frac{\pi \cdot CO^2}{3} (AO + OB) = \frac{\pi \cdot CO^2}{3} \cdot AB$.

5. Leiame CO ; $CO = BC \cdot \sin \alpha$;

$$\frac{BC}{AC} = \cos \alpha; BC = AB \cdot \cos \alpha = c \cdot \cos \alpha;$$

järelikult, $CO = c \cdot \cos \alpha \sin \alpha = \frac{2c \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{c \cdot \sin 2\alpha}{2}$.

6. $V = \frac{\pi \cdot CO^2}{3} \cdot AB$; $V = \frac{\pi c^2 \sin^2 2\alpha \cdot c}{12} = \frac{\pi c^3 \sin^2 2\alpha}{12}$.

7. Leiame pöördkeha pindala:

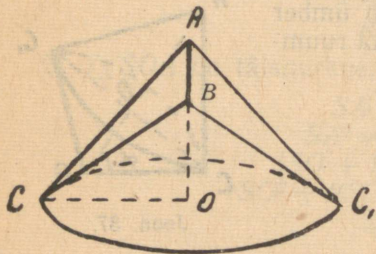
$$S = \pi \cdot CO \cdot AC + \pi \cdot CO \cdot BC = \pi \cdot CO (AC + BC);$$

$$AC = c \cdot \sin \alpha; BC = c \cdot \cos \alpha; CO = \frac{c \cdot \sin 2\alpha}{2}.$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi \cdot c \cdot \sin 2\alpha}{2} (c \cdot \sin \alpha + c \cdot \cos \alpha) = \\ &= \frac{\pi c^2}{2} \sin 2\alpha [\sin \alpha + \sin(90^\circ - \alpha)] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{c \cdot \sin 2\alpha}{2} \cdot 2 \sin \frac{\alpha + 90^\circ - \alpha}{2} \cos \frac{\alpha - 90^\circ + \alpha}{2} = \\
 &= \pi c^2 \sin 2\alpha \cdot \sin 45^\circ \cos(\alpha - 45^\circ) = \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi c^2 \sin 2\alpha \cos(\alpha - 45^\circ).
 \end{aligned}$$

Niisiis, $S = \frac{\pi c^2 \sqrt{2}}{2} \sin 2\alpha \cos(\alpha - 45^\circ)$.



Joon. 38.

Ülesanne 4. Kolmnurk, mille küljed on 6 cm, 25 cm ja 29 cm, pöörleb oma väikseima külje ümber. Arvutada pöördkeha ruumala ja pindala (Rõbkin, II osa, § 17, nr. 56₂).

Antud: $\triangle ABC$ pöörleb ümber külje AB (joon. 38); $AB = 6$ cm; $BC = 25$ cm; $AC = 29$ cm.

Leida pöördkeha V ja S .

Lahendus.

1. Kõige enne tuleb märkida, et kolmnurk ABC on nürinurkne, sest $AC^2 > AB^2 + BC^2$ ($29^2 > 25^2 + 6^2$).

2. Pöördkeha ruumala võrdub kahe koonuse ruumalade vahega (koonused CAC_1 ja CBC_1).

$$V = \frac{\pi \cdot CO^2 \cdot AO}{3} - \frac{\pi \cdot CO^2 \cdot OB}{3} = \frac{\pi \cdot CO^2}{3} (AO - OB) = \frac{\pi \cdot CO^2}{3} \cdot AB.$$

3. Et arvutada CO , leiame algul $\triangle ABC$ pindala Heroni valemiga:

$$S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{30 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 24} = 60 \text{ cm}^2.$$

$$4. S_{\Delta} = \frac{AB \cdot CO}{2}; \text{ siit } CO = \frac{2S_{\Delta}}{AB}; CO = \frac{2 \cdot 60}{6} = 20 \text{ cm}.$$

$$5. V = \frac{\pi \cdot 400 \cdot 6}{3} = 800\pi \text{ cm}^3 \approx 2,5 \text{ dm}^3.$$

6. Leiame pöördkeha pindala:

$$\begin{aligned}
 S &= \pi \cdot CO \cdot AC + \pi \cdot CO \cdot BC = \pi \cdot CO (AC + BC) = \\
 &= 20\pi \cdot 54 = 1080\pi \text{ cm}^2 \approx 34 \text{ dm}^2.
 \end{aligned}$$

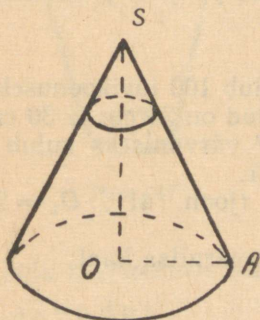
Pöörake tähelepanu asjaolule, et pöördkeha ruumala arvutamisel tuli ühe koonuse ruumalast lahutada teise koonuse ruumala (kuna tekkis tühik), kuid pindala arvutamisel tuli kahe koonuse külgpindalad liita.

Kontrollküsimusi

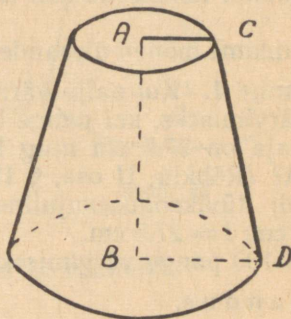
1. Missugust pinda nimetatakse kooniliseks pinnaks?
2. Missugust keha nimetatakse koonuseks?
3. Tuletage koonuse külgpindala valem.
4. Tuletage koonuse ruumala valem.
5. Mida kujutab endast koonuse pinnalaotus ja kuidas arvutada tipu juures tekkinud nurka?

III. Tüvikoonus

Kõigepealt omandage tüvikoonuse definitsioon. Tehke joonis. Tüvikoonus on täiskoonuse osa, mis jääb tema põhja ja põhjaga paralleelse tasapinnalise lõike vahele (joon. 39).



Joon. 39.



Joon. 40.

Tüvikoonust võib vaadelda ka kui keha, mis tekib täisnurkse trapetsi $ABCD$ pöörlemisel alustega ristuva haara AB ümber (joon. 40).

Tüvikoonuse külgpindala all mõistame piiri, millele läheneb selle tüvikoonuse sisse kujundatud korrapärase tüvipüramiidi külgpindala, kui tema külgede arv tõkestamata kasvab. Vastavalt sellele tuletame tüvikoonuse külgpindala arutamise valemi, nimelt:

$$\begin{aligned} S_k \text{ tüvikoonus} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_k \text{ tüvipüramiid} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{P_n + P_n'}{2} \cdot a_n \right) = \\ &= \frac{\lim P_n + \lim P_n'}{2} \cdot \lim a_n = \frac{C_1 + C_2}{2} \cdot l = \frac{2\pi R_1 + 2\pi R_2}{2} \cdot l = \pi(R_1 + R_2)l. \end{aligned}$$

kus P_n ja P_n' — tüvipüramiidi põhjade übermõõdud;
 a_n — tüvipüramiidi apoteem;
 l — tüvikoonuse moodustaja;
 C_1 ja C_2 — tüvikoonuse põhjade übermõõdud.
Tüvikoonuse ruumala valemi tuletame nii:

$$\begin{aligned} V &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h}{3} (S_n + S_n' + \sqrt{S_n \cdot S_n'}) = \\ &= \frac{h}{3} (\lim_{n \rightarrow \infty} S_n + \lim_{n \rightarrow \infty} S_n' + \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{S_n \cdot S_n'}) = \\ &= \frac{h}{3} (\pi R^2 + \pi r^2 + \sqrt{\pi R^2 \cdot \pi r^2}) = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr). \end{aligned}$$

Siin on tüvikoonuse ruumalaks võetud piir, millele läheneb tüvikoonuse sisse kujundatud korrapärase tüvipüramiidi ruumala tema külgede arvu tõkestamata kasvamisel. Tüvipüramiidi põhjade pindalad lähenevad siis tüvikoonuse põhjade pindaladele πR^2 ja πr^2 .

Lahendame mõned ülesanded.

Ülesanne 1. Kui palju värnitsat kulub 100 tüvikoonusekujulise pange värvimiseks, kui pange läbimõõdud on 25 cm ja 30 cm ning moodustaja on 27,5 cm ning kui 1 m² värvimiseks kulub 150 G värnitsat? (Rõbkin, II osa, § 15, nr. 17).

Antud: tüvikoonusekujuline pang (joon. 41); $D_1 = 25$ cm; $D_2 = 30$ cm; $l = 27,5$ cm.

Leida 100 pange värvimiseks kuluva värnitsa kaal.

L a h e n d u s.

1. Arvutame pange külgpindala:

$$S_k' = \pi(R_1 + R_2)l = \pi(12,5 + 15) \cdot 27,5 \approx 2375 \text{ cm}^2 = 0,2375 \text{ m}^2.$$

Saja pange külgpindala on siis:

$$S_k = 0,2375 \cdot 100 = 23,75 \text{ m}^2.$$

2. Arvutame pange põhja pindala:

$$S_p' = \frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{\pi \cdot 25^2}{4} = \frac{625\pi}{4} = 490,62 \text{ cm}^2.$$

Saja pange põhja pindala on siis:

$$S_p = 490,62 \cdot 100 = 49062 \text{ cm}^2 \approx 4,91 \text{ m}^2.$$

3. Kogu värvimisele kuuluv pindala on:

$$23,75 + 4,91 = 28,66 \text{ m}^2.$$

4. Arvutame värnitsa hulga, mis kulub 100 pange värvimiseks:
 $0,15 \cdot 28,66 \approx 4,3$ kG.

Ülesanne 2. Tüvikoonuse moodustaja on 17 cm, telglõike pindala on 420 cm^2 ja kesklõike pindala on $196\pi \text{ cm}^2$. Arvutada tüvikoonuse ruumala ja külgpindala (Rõbkin, II osa, § 18, nr. 33).

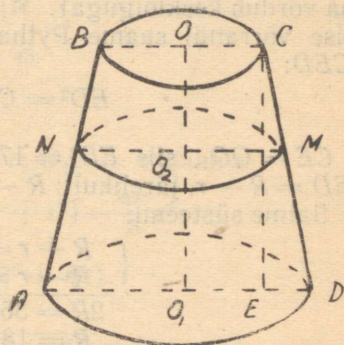
Antud: tüvikoonus (joon. 42);

$$CD = 17 \text{ cm}; S_{ABCD} = 420 \text{ cm}^2;$$

O_2 — kesklõige; ringi O_2 pindala on $196\pi \text{ cm}^2$.



Joon. 41



Joon. 42

Leida tüvikoonuse külgpindala ja ruumala.

Lahendus.

1. Leiame kesklõike raadiuse:

$$\pi R^2 = 196\pi; R^2 = 196; R = 14 \text{ cm}.$$

2. Arvutame kesklõike übermõõdu:

$$C_1 = 2\pi R = 2\pi \cdot 14 = 28\pi \text{ cm}.$$

3. Leiame tüvikoonuse külgpindala:

$$S_k = C_1 \cdot l = 28\pi \cdot 17 = 476\pi \text{ cm}^2,$$

kus $\pi \approx 3,14$.

4. Leiame tüvikoonuse kõrguse. Selleks vaatleme telglõike pindala:

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot OO_1;$$

$$\text{kuid } \frac{AD + BC}{2} = MN \text{ (kesklõik),}$$

$$MN = 2R = 2 \cdot 14 = 28 \text{ cm,}$$

$$\text{seepärast } S_{ABCD} = 2R \cdot OO_1 = 28 \cdot OO_1,$$

$$\text{kuna } S_{ABCD} = 420 \text{ cm}^2, \text{ siis } 28 \cdot OO_1 = 420,$$

$$\text{siit } OO_1 = \frac{420}{28} = 15 \text{ cm.}$$

5. Põhjade raadiuste määramiseks koostame kaks võrrandit kahe tundmatuga; üks neist on: $R + r = 28$ (kuna raadiuste summa võrdub kesklõiguga).

Teise võrrandi saame Pythagorase teoreemi põhjal kolmnurgast CED :

$$ED^2 = CD^2 - CE^2.$$

Kuna $CE = OO_1$, siis $ED^2 = 17^2 - 15^2 = 64$, $ED = \sqrt{64} = 8 \text{ cm}$,
 kuid $ED = R - r$, järelikult: $R - r = 8$.

6. Saime süsteemi:

$$\begin{cases} R + r = 28 \\ R - r = 8 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2R &= 36 \\ R &= 18 \\ r &= 18 - 8 = 10. \end{aligned}$$

Seega $R = 18 \text{ cm}$, $r = 10 \text{ cm}$.

7. Arvutame tüvikoonuse ruumala:

$$V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr) = \frac{\pi \cdot 15}{3} (10^2 + 18^2 + 10 \cdot 18);$$

$$V = 3020\pi \text{ cm}^3.$$

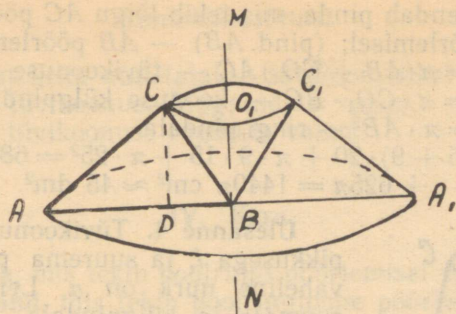
Ülesanne 3. Täisnurkne kolmnurk kaetatitega 15 cm ja 20 cm pöörleb ümber sirge, mis on tõmmatud suurema teravnurga tipust risti hüpotenuusiga. Leida pöördkeha ruumala ja pindala (joon. 43).

Antud: täisnurkne kolmnurk ABC pöörleb ümber MN ; $AC = 20 \text{ cm}$; $BC = 15 \text{ cm}$.

Leida pöördkeha ruumala ja pindala.

L a h e n d u s.

1. Pöörlemisel tekib joonisel 43 kujutatud keha. Et leida selle ruumala, tuleb tüvikoonuse ACC_1A_1 ruumalast lahutada koonuse CBC_1 ruumala.



Joonis 43.

2. Tähistades $AB = R$; $CO_1 = r$; $O_1B = h$, saame:

$$V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + Rr + r^2) - \frac{\pi h}{3} r^2;$$

$$V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + Rr).$$

3. $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$,
st. $R = 25$ cm.

4. Leiame r . Eukleidese teoreemi põhjal (Kisseljov, I osa, § 188) võime kirjutada:

$$CB^2 = AB \cdot DB;$$

$$225 = 25 \cdot DB; \quad DB = \frac{225}{25} = 9 \text{ cm.}$$

5. Määrame h ; $h^2 = CB^2 - BD^2 = 225 - 81 = 144$;
 $h = 12$ cm.

6. Pöördkeha ruumala on:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi h}{3} (R^2 + Rr) = \frac{\pi \cdot 12}{3} (25^2 + 25 \cdot 9) = \\ &= 4\pi (625 + 225) = 3400\pi \text{ cm}^3, \text{ kus } \pi \approx 3,14. \\ V &\approx 11 \text{ dm}^3. \end{aligned}$$

7. Leiame pöördkeha pindala:

$$S = (\text{pind. } AC) + (\text{pind. } BC) + (\text{pind. } AB);$$

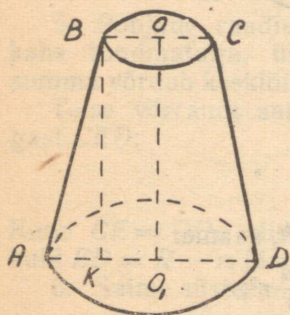
(pind. AC) tähendab pinda, mis tekib lõigu AC pöörlemisel; (pind BC) — BC pöörlemisel; (pind. AB) — AB pöörlemisel.

(pind. AC) = $\pi(AB + CO_1)AC$ — tüvikoonuse külgpindala;

(pind. BC) = $\pi \cdot CO_1 \cdot BC$ — koonuse külgpindala;

(pind. AB) = $\pi \cdot AB^2$ — ringi pindala.

$$8. S = \pi(25 + 9) \cdot 20 + \pi \cdot 9 \cdot 15 + \pi \cdot 25^2 = 680\pi + 135\pi + 625\pi = 1440\pi \text{ cm}^2 \approx 45 \text{ dm}^2.$$



Joon. 43

Ülesanne 4. Tüvikoonuse moodustaja, pikkusega l , ja suurema põhja tasapinna vaheline nurk on α . Leida tüvikoonuse ruumala ja külgpindala, kui ühe põhja raadius on teise põhja raadiusest kaks korda pikem (joon. 44).

Antud: tüvikoonus; $AB = l$; $\angle BAK = \alpha$; $R = 2r$.

Leida ruumala ja külgpindala.

L a h e n d u s.

$$1. \frac{AK}{AB} = \cos \alpha;$$

$$AK = AB \cdot \cos \alpha = l \cos \alpha.$$

$$2. BO = KO_1 = \frac{1}{2} AO_1;$$

$$\text{järelikult } AK = \frac{1}{2} AO_1; \quad AO_1 = 2AK; \quad AO_1 = 2l \cos \alpha; \quad AO_1 = R;$$

seega $R = 2l \cos \alpha$.

$$3. \frac{BK}{AB} = \sin \alpha; \quad BK = AB \cdot \sin \alpha = l \sin \alpha.$$

$$4. V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr) = \frac{\pi l \sin \alpha}{3} (4l^2 \cos^2 \alpha + l^2 \cos^2 \alpha + 2l^2 \cos^2 \alpha) = \frac{7}{3} \pi l^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha; \text{ kuid } \sin \alpha \cos^2 \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2};$$

$$\text{järelikult } V = \frac{7}{6} \pi l^3 \sin 2\alpha \cos \alpha.$$

5. Leiame külgpindala:

$$S_k = \pi(R + r)l = \pi(2l \cos \alpha + l \cos \alpha)l = 3\pi l^2 \cos \alpha.$$

1. Missugust keha nimetatakse tüvikoonuseks?
2. Tuletage tüvikoonuse külgpindala valem.
3. Tuletage tüvikoonuse ruumala valem.

IV. Kera

Kera on keha, mis tekib poolringi pöörlemisel diameetri ümber. Kera pind on pind, mis tekib poolringjoone pöörlemisel diameetri ümber. Neid kahte erinevat mõistet tuleb kindlalt teada ja mitte segi ajada.

Kera pinda võib vaadelda kuj punktide geomeetrilist kohta, mis asuvad ühest ja samast punktist (mida nimetatakse kera keskpunktiks) võrdsetel kaugustel.

Kindlalt tuleb omandada kera segmendi, kera vöö, kera sektori ja kera kihi mõiste. On vaja teada teoreemi, et kera iga tasapinnaline lõige on ring. Sellest teoreemist järeldame:

a) kera keskpunkti läbiv lõige on kera suuring, s. t. tema raadius on võrdne kera raadiusega; see nähtub ka valemist $r = \sqrt{R^2 - d^2}$,

kus R — kera raadius,

r — lõikeringi raadius,

d — lõiketasapinna kaugus kera keskpunktist.

Tõepoolest, kui $d = 0$, siis $r = \sqrt{R^2} = R$;

b) lõige, mille kaugus kera keskpunktist võrdub raadiusega, taandub punktiks, s. t. lõikeringi raadiuseks on null.

Tõepoolest, $r = \sqrt{R^2 - R^2} = 0$;

c) Kera keskpunktist võrdsetel kaugustel asetsevate lõigete raadiused on võrdsed. Tõepoolest, kui $d_1 = d_2$, siis $r_1 = r_2$,

kus $r_1 = \sqrt{R^2 - d_1^2}$,

$r_2 = \sqrt{R^2 - d_2^2}$; kuna $d_1 = d_2$,

siis ka $r_1 = r_2$;

d) kahest lõikest on suurem raadius sellel, mis asetseb keskpunktile ligemal.

Tõepoolest, $r_1 = \sqrt{R^2 - d_1^2}$,

$r_2 = \sqrt{R^2 - d_2^2}$,

kui $d_2 < d_1$, siis $r_2 > r_1$ (sest lahutatava vähenedes vahe suureneb).

Töestust nõutakse ainult nendele teoreemidele, mis on program-
mis märgitud tärnikesega.

See märkus käib kõigi stereomeetria teoreemide kohta: Kuid
kera pindala, segmendi ja vöö pindala, kera ruumala, segmendi
ja sektori ruumala arvutamise valemeid peab kindlalt teadma.

Lahendame mõningad ülesanded.

Ülesanne 1. Kera ruumala on V . Leida kera pindala.

Antud: kera ruumala V .

Leida kera pindala.

L a h e n d u s.

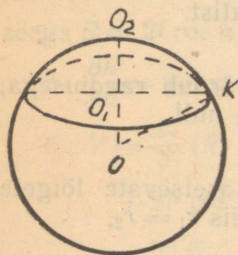
1. Leiame kera raadiuse.

$$\text{Et } V = \frac{4}{3} \pi R^3, \text{ siis } R^3 = \frac{3V}{4\pi} \text{ ja } R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}.$$

2. Määrame kera pindala.

$$\begin{aligned} S &= 4\pi R^2 = 4\pi \sqrt[3]{\frac{9V^2}{16\pi^2}} = 4\pi \sqrt[3]{\frac{9V^2 \cdot 4\pi}{16\pi^2 \cdot 4\pi}} = 4\pi \sqrt[3]{\frac{36\pi V^2}{64\pi^3}} = \\ &= \frac{4\pi}{4\pi} \sqrt[3]{36\pi V^2} = \sqrt[3]{36\pi V^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Seega } S_{\text{kera}} = \sqrt[3]{36\pi V^2}.$$



Ülesanne 2. Kera pindala on $100\pi \text{ cm}^2$.
Läbi kera raadiuse keskpunkti on juhitud
raadiusega ristuv tasapind. Leida saadud
lõike pindala (joon. 45).

Antud: kera O ;

$$S_{\text{kera}} = 100\pi \text{ cm}^2;$$

Lõige O_1 on risti raadiusega;

$$O_1O = \frac{R}{2}.$$

Leida lõike O_1 pindala.

L a h e n d u s.

1. Leiame kera raadiuse. Kuna kera pindala on $100\pi \text{ cm}^2$, siis
 $4\pi R^2 = 100\pi$, kust $R = 5$.

2. Arvutame lõikeringi raadiuse ruudu täisnurksest kolmnur-
gast OO_1K . $OO_1 = 2,5 \text{ cm}$; $OK = 5 \text{ cm}$.

$$O_1K^2 = OK^2 - OO_1^2 = 5^2 - 2,5^2 = 25 - 6,25 = 18,75 \text{ cm}^2.$$

3. Leiame lõike O_1 pindala:

$$S = \pi r^2 = \pi \cdot 18,75 \approx 59 \text{ cm}^2.$$

Ülesanne 3. Kera on lõigatud kahe paralleelse tasapinnaga, millede vaheline kaugus on 39 dm. Üks tasapind asub ühel ja teine teisel pool kera keskpunkti (joon. 46). Lõigete pindalad on $49\pi \text{ dm}^2$ ja $400\pi \text{ dm}^2$. Leida kera ruumala ja pindala ning iga tekkinud kera osa ruumala ja pindala.

Antud: kera O ; lõiked $O_1 \parallel O_2$;
 $O_1O_2 = 39 \text{ dm}$; $S_{O_1} = 49\pi \text{ dm}^2$;
 $S_{O_2} = 400\pi \text{ dm}^2$.

Leida kera ja tekkinud kera osade ruumala ja pindala.

Lahendus.

1. Leiame lõike O_1 raadiuse (O_1K).

$$\pi \cdot O_1K^2 = 49\pi, \text{ kust } O_1K = 7 \text{ dm.}$$

2. Leiame lõike O_2 raadiuse (O_2M).

$$\pi \cdot O_2M^2 = 400\pi, \text{ kust } O_2M = 20 \text{ dm.}$$

3. Kera raadiuse määramiseks vaatleme $\triangle OO_1K$ ja $\triangle OO_2M$. Olgu kera raadius R , siis $OO_2 = 39 - OO_1$;

$$OK^2 = OO_1^2 + O_1K^2; \quad OK^2 = OO_2^2 + 49;$$

$$OM^2 = OO_2^2 + O_2M^2; \quad OM^2 = (39 - OO_1)^2 + 400.$$

Kuid $OK = OM = R$, sellepärast on kahe võrduse paremad pooled võrdsed:

$$OO_1^2 + 49 = (39 - OO_1)^2 + 400.$$

Lahendame saadud võrrandi:

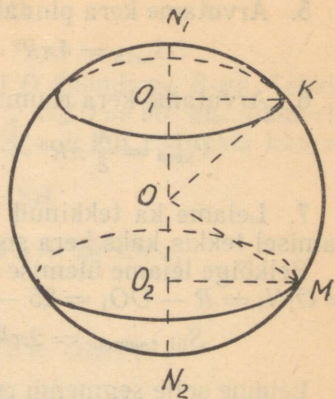
$$OO_1^2 + 49 = 1521 - 78 \cdot OO_1 + OO_1^2 + 400;$$

$$78 \cdot OO_1 = 1872;$$

$$OO_1 = \frac{1872}{78} = 24.$$

4. Leiame kera raadiuse:

$$R^2 = OO_1^2 + 7^2 = 24^2 + 49, \text{ kust } R = 25 \text{ dm.}$$



5. Arvutame kera pindala:

$$S_{\text{kera}} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 625 = 2500\pi \text{ dm}^2.$$

6. Arvutame kera ruumala:

$$V_{\text{kera}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 15625 = 20833\frac{1}{3}\pi \text{ dm}^3.$$

7. Leiame ka tekkinud kera osade pindalad ja ruumalad. Lõikamisel tekkis kaks kera segmenti ja üks kiht.

Eelkõige leiame ülemise segmenti pindala. Et tema kõrgus $h_1 = O_1N_1 = R - OO_1 = 25 - 24 = 1 \text{ dm}$, siis

$$S_{\text{ül. segment}} = 2\pi R h_1 = 2\pi \cdot 25 \cdot 1 = 50\pi \text{ dm}^2.$$

Leiame selle segmenti ruumala:

$$V_{\text{ül. segment}} = \pi h_1^2 \left(R - \frac{h_1}{3} \right) = \pi \cdot 1 \left(25 - \frac{1}{3} \right) = 24\frac{2}{3}\pi \text{ dm}^3.$$

Selle järel leiame alumise segmenti pindala. Tema kõrgus $h_2 = O_2N_2 = R - OO_2 = 25 - 15 = 10 \text{ dm}$. Seega

$$S_{\text{al. segment}} = 2\pi R h_2 = 2\pi \cdot 25 \cdot 10 = 500\pi \text{ dm}^2.$$

Leiame ka selle segmenti ruumala:

$$V_{\text{al. segment}} = \pi h_2^2 \left(R - \frac{h_2}{3} \right) = \pi \cdot 100 \left(25 - \frac{10}{3} \right) = \frac{6500}{3}\pi = 2167\pi \text{ dm}^3.$$

Nüüd arvutame kera vöö pindala:

$$S = 2\pi R h = 2\pi \cdot 25 \cdot 39 = 1950\pi \text{ dm}^2.$$

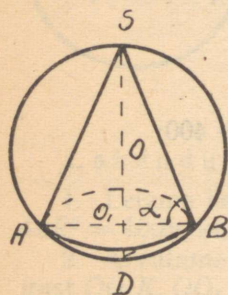
Leiame kera kihi ruumala. Selle saame, kui kera ruumalast lahutame kahe segmenti ruumalade summa.

$$V_{\text{kiht}} = 20833\frac{1}{3}\pi - \left(24\frac{2}{3}\pi + 2166\frac{2}{3}\pi \right);$$

$$V_{\text{kiht}} = 20833\frac{1}{3}\pi - 2191\frac{1}{3}\pi = 18642\pi \text{ dm}^3.$$

Ülesanne 4. Koonuse ümber on kujundatud kera raadiusega R (joon. 47). Koonuse moodustaja ja põhja vaheline nurk on α . Avaldada koonuse ruumala ja täispindala.

Antud: koonuse ümber kujundatud kera; R — kera raadius; $\angle SBO_1 = \alpha$.



Leida koonuse ruumala ja täispindala.

L a h e n d u s.

1. Tõmbame diameetri SD ja punkti D ühendame B -ga. Tekkinud kolmnurk SBD on täisnurkne, sest $\angle SBD = 90^\circ$ kui diameetritele toetuv piirdenurk; $\angle SDB = \angle SBA = \alpha$ kui ristuvate haaradega nurgad.

2. Leiame koonuse moodustaja $l = SB$.

$$\frac{SB}{SD} = \sin \alpha; SB = SD \cdot \sin \alpha = 2R \sin \alpha;$$

$$l = 2R \sin \alpha.$$

3. Leiame koonuse põhja raadiuse $r = O_1B$.

$$\frac{O_1B}{SB} = \cos \alpha; O_1B = SB \cdot \cos \alpha = 2R \sin \alpha \cos \alpha = R \sin 2\alpha;$$

$$r = R \sin 2\alpha.$$

4. Leiame koonuse kõrguse $h = O_1S$.

$$\frac{O_1S}{SB} = \sin \alpha; O_1S = SB \cdot \sin \alpha, \text{ et } SB = 2R \sin \alpha,$$

siis $O_1S = 2R \sin \alpha \cdot \sin \alpha = 2R \sin^2 \alpha$;

$$h = 2R \sin^2 \alpha.$$

5. Koonuse täispindala on:

$$S = \pi R(l + r) = \pi R \sin 2\alpha (2R \sin \alpha + 2R \sin \alpha \cos \alpha) =$$

$$2\pi R^2 \sin 2\alpha \sin \alpha (1 + \cos \alpha) = 2\pi R^2 \sin 2\alpha \sin \alpha \cdot 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2};$$

$$S = 4\pi R^2 \sin 2\alpha \sin \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

6. Koonuse ruumala on:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi R^2 \sin^2 2\alpha \cdot 2R \sin^2 \alpha}{3} = \frac{2}{3} \pi R^3 \sin^2 2\alpha \sin^2 \alpha.$$

Kontrollküsimusi

1. Mida nimetatakse keraks?
2. Millist pinda nimetatakse kera pinnaks e. sfääriks?
3. Mis on kera segment?
4. Mis on kera vöö?

5. Millega võrdub kera pindala?
6. Millega võrdub segmendi pindala?
7. Millega võrdub vöö pindala?
8. Millised on kera lõiked?
9. Millega võrdub kera ruumala?
10. Millega võrdub kera segmendi ruumala?
11. Millega võrdub kera sektori ruumala?

ALGEBRA

(majandustehnikumide ja -osakondade õpilastele)

T e e m a 5. Ühendid. Newtoni binoomvalem

Variatsioonid. Variatsioonide arvu valem.

Permutatsioonid. Permutatsioonide arvu valem (faktoriaal).

Kombinatsioonid. Kombinatsioonide arvu valem.

Newtoni binoomvalem; selle omadused.

Kirjandus

Kalnin. § 152—160, ülesanded nr. 12—22.

METOODILISED JUHENDID

Kõigepealt tuleb õppida eraldama ühendite liike ja tundma kolme liiki ühendite arvu valemeid.

1. $A_m^n = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)$ — see on variatsioonide arvu valem m elemendist n kaupa.

2. $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$ — see on permutatsioonide arvu valem n elemendist.

3. $C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}$ — see on kombinatsioonide arvu valem m elemendist n kaupa.

Ei tohi ära segada ühendite üht liiki teisega. Tuleb meeles pidada, et variatsioonides on oluline nii elementide erinevus kui ka elementide järjekord, kuid kombinatsioonides elementide järjekord ei ole oluline. Selgitame seda näitega.

Ülesanne. Koosoleku 100 osavõtja hulgast tuleb valida koosoleku juhataja ja protokollija. Kui palju on erinevaid valikuvõimalusi?

Siin on tegemist sellise ühendite liigiga, kus nii elementide kui

ka nende järjekorra erinevus moodustab uue ühendi, s. t. tuleb arvutada variatsioonide arv: $A_{100}^2 = 100 \cdot 99 = 9900$. Seega on koosoleku juhatuse valimiseks 9900 erinevat võimalust.

Muutes selle ülesande tingimusi järgmiselt: 100-st inimesest tuleb valida 2 delegaati, siis siin enam järjekord ei ole oluline, vaid uus ühend peab eelmisest erineva vähemalt ühe elemendi poolest, s. t. tuleb arvutada kombinatsioonide arv, nimelt:

$$C_{100}^2 = \frac{100 \cdot 99}{1 \cdot 2} = 4950.$$

Pange tähele, et $P_n = n!$ (! — faktoriaal).

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ tähistatakse $n!$

Näiteks:

$$\frac{n!}{(n-1)!} = n, \text{ sest } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)n;$$

$$(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1);$$

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} = n.$$

Newtoni binoomvalemi õppimisel tuleb eelkõige teada arendit:

$$(x+a)^m = x^m + C_m^1 a x^{m-1} + C_m^2 a^2 x^{m-2} + \dots + C_m^n a^n x^{m-n} + \dots + a^m.$$

Pidage meeles, et selle arendi liikmete arv on $(m+1)$, kus m on binoomi astendaja. Näiteks arendis $(x+a)^{10}$ on 11 liiget.

On vaja teada, et binoomrea algusest ja lõpust võrdsetel kaugustel seisvate liikmete koefitsiendid on võrdsed.

Kõigi binoomkordajate summa on 2^m ; $(n+1)$ -ne liige võrdub $L_{n+1} = C_m^n a^n x^{m-n}$. Igas arendi liikmes a ja x astendajate summa võrdub binoomi astendajaga (m). Tuleb meeles pidada, et järgneva liikme binoomkoefitsiendi leidmiseks tuleb eelneva liikme koefitsient korrutada tähe x astendajaga selles liikmes ja saadud korrutis jagada kõigi eelnevate liikmete arvuga.

Kontrollige kõiki neid binoomvalemi omadusi näites:

$$(x+a)^6 = x^6 + 6x^5a + 15x^4a^2 + 20x^3a^3 + 15x^2a^4 + 6xa^5 + a^6.$$

Lahendame mõned ülesanded.

1. Mitmest esemest saab moodustada 380 variatsiooni kahekaupa?

Lahendus.

Olgu esemete arv x ; siis vastavalt ülesande tingimusele

$$A_x^2 = 380;$$

s. o.

$$x(x-1) = 380;$$

$$x^2 - x - 380 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 1520}}{2};$$

$$x_1 = \frac{1 + 39}{2}; \quad x_1 = 20;$$

$$x_2 = \frac{1 - 39}{2}; \quad x_2 = -19 \text{ (ei sobi).}$$

Järelikult, $x = 20$.

2. Mitu diagonaali saab tõmmata kumeras kümmenurgas?

Lahendus.

On selge, et omades tasapinnal n punkti, millest ükski kolmik ei asu ühel sirgel, on neid punkte ühendavate sirgete arv võrdne kombinatsioonide arvuga n elemendist 2-kaupa (sest iga kahte punkti ühendab üks sirge), s. o. C_n^2 . Et leida diagonaalide arvu, tuleb arvust C_n^2 lahutada hulknurga külgede arv n , seetõttu on kumera n -nurga diagonaalide arv:

$$C_n^2 - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2 - n - 2n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Meie ülesandes $n = 10$, seepärast, tähistades diagonaalide arvu S -ga, saame:

$$S = \frac{10(10-3)}{2} = 35;$$

$$\text{või } S = C_{10}^2 - 10 = \frac{10 \cdot 9}{2} - 10 = 35.$$

3. Leida arendi $\left(\frac{a}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)^n$ viies liige, kui kolmanda liikme kordaja on 66 (Kalnin, nr. 22).

Lahendus.

Kõige enne leiame binoomi astendaja.

Et kolmanda liikme kordaja on C_n^2 , siis võime kirjutada:

$$C_n^2 = 66, \text{ või } \frac{n(n-1)}{2} = 66;$$

$$n^2 - n = 132; \quad n^2 - n - 132 = 0;$$

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 528}}{2};$$

$$n_1 = \frac{1+23}{2}; n_1 = 12;$$

$$n_2 = \frac{1-23}{2}; n_2 = -11 \text{ (ei sobi).}$$

Järelikult $n = 12$. Nüüd võime leida $\left(\frac{a}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{a}\right)^{12}$ arendi viienda liikme:

$$L_{4+1} = C_{12}^4 \left(\frac{\sqrt{x}}{a}\right)^4 \left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^8 = C_{12}^4 \cdot \frac{x^2}{a^4} \cdot \frac{a^8}{x^4} = \frac{495a^4}{x^2}.$$

Kordamisküsimusi

1. Mida nimetatakse variatsioonideks? Mitu variatsiooni saab koostada m elemendist n kaupa?
2. Mida nimetatakse permutatsioonideks? Mitu permutatsiooni saab koostada m elemendist?
3. Mida nimetatakse kombinatsioonideks? Mitu kombinatsiooni saab koostada m elemendist n kaupa?
4. Mida tähendab sümbol $n!$?
5. Kirjutage Newtoni binoomvalem.
6. Kirjeldage Newtoni binoomvalemi omadusi.

KONTROLLTÖÖ NR. 6

Esimene variant

1. Silindri külgpindala suhtub tema täispindalasse nagu 2:3,5. Arvutada silindri täispindala, kui silindri kõrgus on 32 cm.
2. Koonuse põhja pindala on 100π cm². Koonuse moodustaja on kõrgusest 2 cm võrra pikem. Arvutada koonuse ruumala ja täispindala.
3. Koonuse moodustaja on 10 cm ja tema kõrgus 6 cm. Arvutada selle koonuse sissekujundatud kera ruumala ja ümberkujundatud kera pindala.
4. Mitu ruutmeetrit vaskplekki kulub ruupori valmistamiseks, mille avade raadiused on 21,5 cm ja 18 mm ja moodustaja 1,42 m?
5. Koonuse telglõike pindala on Q . Telglõike tipunurk on α . Avaldada koonuse ruumala (tehniliste erialade õpilastele).
6. Mitmest elemendist saab moodustada kahekaupa 210 kombinatsiooni? (majandustehnikumide ja -osakondade õpilastele).

Teine variant

1. 2,5 m vaskjuhet kaalub 10,07 grammi. Arvutada juhtme raadius, võttes vase erikaaluks 8,9 (arvutada logaritmidega).

2. Koonuse põhja raadius on R ja tema ruumala V . Avaldada koonuse täispindala.

3. Tüvikoonuse suurema põhja ja moodustaja vaheline nurk on 60° . Ühe põhja raadius on kaks korda pikem teise põhja raadiusest, mis on 15 dm. Arvutada tüvikoonuse ruumala ja täispindala.

4. Kera pindala on 900π cm². Arvutada kera ruumala ja löike pindala, mis on juhitud läbi raadiuse keskpunkti risti raadiusega.

5. Koonuse põhjasse on kujundatud ruut, mille külg on a . Tasapind, mis läbib koonuse tippu ja ruudu ühte külge, moodustab koonuse pinda lõigates kolmnurga, mille tipunurk on α . Avaldada koonuse ruumala (tehniliste erialade õpilastele).

6. Leida arendi $\left(\frac{b^2}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{b^2}\right)^n$ viies liige, kui kolmanda liikme kordaja on 66 (majandustehnikumide ja -osakondade õpilastele).

Kolmas variant

1. Avaldada silindri ruumala, kui tema põhja pindala on b cm² ja telglõike pindala a cm².

2. Koonuse telglõike pindala on 48 cm². Põhja pindala on 36π cm². Arvutada koonuse ruumala ja täispindala.

3. Täisnurkne kolmnurk kaatetiga 8 cm ja hüpotenuusiga 10 cm pöörleb ümber sirge, mis läbib väiksema teravnurga tippu ja on risti hüpotenuusiga (sirge asub kolmnurgaga samal tasapinnal). Arvutada pöördkeha ruumala.

4. Kera kihi põhjade raadiused on 20 cm ja 7 cm. Kihi kõrgus on 39 cm. Arvutada kera kihiga ruumvõrdse kuubi serv.

5. Täisnurkne kolmnurk kaatetiga a ja teravnurgaga α pöörleb ümber hüpotenuusi. Avaldada pöördkeha pindala (tehniliste erialade õpilastele).

6. Lahendada võrrand:

$$5A_x^2 = 280x$$

(majandustehnikumide ja -osakondade õpilastele).

Neljas variant

1. Ringikujulisest metall-lehest, mille raadius on 37,5 cm, on stantsitud silindrikujuline peeker raadiusega 12,5 cm. Arvutada peekri kõrgus, kui lehe pindala stantsimisel ei muutunud.

2. Kooniline nõu, raadiusega 12 cm ja kõrgusega 21 cm, on ääreni täidetud vedelikuga. Kallates selle vedeliku ümber teise, silindrikujulisse nõusse, täidab vedelik ka selle nõu ääreni. Arvutada silindrikujulise nõu täispindala, kui vedeliku sügavus selles nõus on 35 cm.

3. Tüvikoonuse põhjade raadiused ja moodustaja suhtuvad nagu 1 : 5,5 : 12,5. Tüvikoonuse ruumala on 1448π m³. Arvutada tüvikoonuse külgpindala.

4. Kera pindala on S . Avaldada selle kera segmendi ruumala, kui segmendi kõrgus moodustab 0,2 osa kera raadiusest.

5. Koonuse põhja pindala on πQ cm². Moodustaja ja põhitasapinna vaheline nurk on α . Avaldada koonuse täispindala (tehniliste erialade õpilastele).

6. Leida arendi $\left(\frac{2a}{3\sqrt{x}} - \frac{3a^2}{5x^4}\right)^{12}$ keskmine liige (majandustehnikumide ja -osakondade õpilastele).

М. И. Чернобельский
МАТЕМАТИКА

программа, методические указания
и контрольные задания для учащихся
заочных средних специальных
учебных заведений

Часть II

На эстонском языке

*

Государственный комитет высшего
и среднего специального образования
Совета Министров ЭССР
научно-методический кабинет

*

Toimetaja V. Luigelahd

*

Ladumisele antud 6. VI 1962. Trükkimisele antud
25. X 1962. Paber 60 × 84, 1/16. Trükipoognaid 5,75.
Trükiarv 4000. Tellimise nr. 5306. Hans Heidemannii
nimelise trükikoda, Tartu, Ülikooli 17/19. II.

Tasuta

Vigade parandus

Lk.	Rida	Trükitud	Peab olema
8	5. alt	$-1+1$ 5,3672	$-1+1$ $\bar{5},3672$
67	13. "	$\cdot S_t = \dots$	2. $S_t = \dots$

Tellimise nr. 5306

TASUTA

A-24897

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00418287 1