TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI

TOIMETISED

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

504

FUNKTSIOONITEOORIA KÜSIMUSI

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

MATEMAATIKA- JA MEHHAANIKA-
ALASEID TÖID
ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ
XXVI

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893. a. VIHIK 504 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ в 1893 г.

FUNKTSIOONITEOORIA KÜSIMUSI

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

MATEMAATIKA- JA MEHHAANIKA-ALASEID TÖID

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ

XXVI

ТАРТУ 1981

Настоящее издание является межвузовским сборником высших учебных заведений Эст. ССР.

Tartu Ülikooli toimetised, Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1979, **504**, 3—9.

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ТЕОРЕМЫ СТОУНА—ВЕЙЕРШТРАССА

М. Абель

Тартуский государственный университет

1. Пусть X — топологическое пространство, $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(X)$ — покрытие пространства X и A — локально выпуклая алгебра с единицей над $\mathbf{F}$ (т. е. над $\mathbf{C}$ или над $\mathbf{R}$). Через $C(X, A; \mathfrak{S})$ будем обозначать алгебру[1] всех тех A-значных непрерывных на X функций f, для которых $f(S)$ является относительно компактным в A для каждого $S \in \mathfrak{S}$. Как известно, подмножество U является относительно компактным в $\mathbf{F}$ тогда и только тогда, когда оно ограничено. Поэтому алгебра $C(X, \mathbf{F}; \mathfrak{S})$ совпадает с алгеброй всех тех непрерывных на X функций, которые ограничены на каждом $S \in \mathfrak{S}$. В дальнейшем предполагаем, что локально выпуклая топология алгебры A определена семейством $\{p_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ непрерывных полунорм. Таким образом, получаем, что семейство $\{p_{S,\lambda}: S \in \mathfrak{S},\ \lambda \in \Lambda\}$ непрерывных полунорм, где

$$p_{S,\lambda}(f) = \sup_{x \in S} p_\lambda(f(x))$$

для всех $f \in C(X, A; \mathfrak{S})$, определяет на алгебре $C(X, A; \mathfrak{S})$ топологию $\mathfrak{S}$-сходимости (см. [4], стр. 103).

В случае, когда каждое множество $S \in \mathfrak{S}$ является компактным в X, алгебра $C(X, A; \mathfrak{S})$ совпадает с алгеброй $C(X, A)$ всех A-значных непрерывных на X функций. Если, кроме того, покрытием $\mathfrak{S}$ пространства X является множество $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(X)$ всех компактных подмножеств пространства X, то топология $\mathfrak{S}$-сходимости на $C(X, A)$ совпадает с топологией компактной сходимости. Далее, если $\mathfrak{S}$ является конечным покрытием пространства X, то алгебра $C(X, A; \mathfrak{S})$ совпадает с алгеброй $C_c(X, A)$ всех A-значных непрерывных на X функций f, для которых образ $f(X)$ является относительно компактным в A, а алгебра $C(X, \mathbf{F}; \mathfrak{S})$ совпадает с алгеброй $C_b(X, \mathbf{F})$ всех непрерывных ограниченных функций на X. В дальнейшем алгебры $C_c(X, A)$ и $C_b(X, \mathbf{F})$ наделим топологией равномерной сходимости на X.

[1] Алгебраические операции в $C(X, A; \mathfrak{S})$ определяются поточечно.

2. Теорема Стоуна—Вейерштрасса применима во многих разделах математики. Имеется большое количество различных обобщений этой теоремы (см. [11], стр. 119, и [2]). Из этих обобщений в дальнейшем нам понадобятся следующие:

Теорема А (см. [8], стр. 48). *Пусть X — вполне регулярное пространство. Подалгебра (при $\mathbf{F} = \mathbf{C}$ самосопряженная подалгебра) $\mathfrak{A}$ всюду плотна в $C(X, \mathbf{F})$ в топологии компактной сходимости тогда и только тогда, когда* [2]

a) *подалгебра $\mathfrak{A}$ разделяет точки* [3] *пространства X,*

b) *для каждой точки $x \in X$ подалгебра $\mathfrak{A}$ содержит функцию f с $f(x) \neq 0$.*

Теорема Б (см. [10], стр. 229 при [4] $\mathbf{F} = \mathbf{R}$, и [1], стр. 106 при $\mathbf{F} = \mathbf{C}$). *Пусть X — топологическое пространство. Подалгебра (при $\mathbf{F} = \mathbf{C}$ самосопряженная подалгебра) $\mathfrak{A}$ всюду плотна в $C_b(X, \mathbf{F})$ тогда и только тогда, когда*

c) *подалгебра $\mathfrak{A}$ разделяет* [5] *нуль-множества пространства X $\mathbf{R}$-значными функциями,*

d) *подалгебра $\mathfrak{A}$ содержит функцию f с*

$$\inf_{x \in X} |f(x)| > 0.$$

Как указано выше, если $\mathfrak{S}$ — некоторое покрытие пространства X, то имеет место включение $C_b(X, \mathbf{F}) \subseteq C(X, \mathbf{F}; \mathfrak{S}) \subseteq C(X, \mathbf{F})$. Теоремы А и Б дают нам описание всюду плотных подалгебр в алгебрах $C(X, \mathbf{F})$ и $C_b(X, \mathbf{F})$ соответственно. Целью настоящей статьи является описать всюду плотные подалгебры алгебры $C(X, \mathbf{F}; \mathfrak{S})$, предполагая, что пара $(X, \mathfrak{S})$ удовлетворяет условию продолжимости или строгому условию продолжимости. Таким образом, в настоящей статье обобщаются теоремы А и Б на алгебру $C(X, \mathbf{F}; \mathfrak{S})$ при некоторых ограничениях на X и $\mathfrak{S}$. В качестве применений этих результатов даются достаточные условия для всюду плотности подалгебры $\mathfrak{A}$ в $C(X, A; \mathfrak{S})$ в случае, когда A является локально выпуклой алгеброй (с единицей) над $\mathbf{F}$, а $\mathfrak{S}$ — покрытием пространства X, удовлетворяющим некоторым ограничениям.

---

[2] В книге [9], стр. 268, теорема Стоуна—Вейерштрасса обобщена на алгебру $C(X, \mathbf{R})$ с топологией компактной сходимости в случае, когда X является хаусдорфовым (не обязательно вполне регулярным) пространством.

[3] Говорят, что подалгебра $\mathfrak{A} \subseteq C(X, \mathbf{F})$ *разделяет точки пространства X*, если для каждых двух различных точек x_1 и x_2 из X в подалгебре $\mathfrak{A}$ существует такая функция f, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.

[4] Строгий вариант теоремы Б сформулирован в статье [7].

[5] Множество $Z \subseteq X$ называется *нуль-множеством* пространства X, если $Z = \{x \in X : f(x) = 0\}$ при некоторой $f \in C(X, \mathbf{R})$. Говорят, что подалгебра $\mathfrak{A} \subseteq C(X, \mathbf{R})$ *разделяет нуль-множества пространства X*, если для каждых двух непересекающихся непустых нуль-множеств Z_1 и Z_2 пространства X в подалгебре $\mathfrak{A}$ существует такая функция f, что замыкания множеств $f(Z_1)$ и $f(Z_2)$ не пересекаются.

3. Пусть $\mathfrak{S}$ — покрытие пространства X. Будем говорить, что пара $(X, \mathfrak{S})$ удовлетворяет *условию продолжимости* (*строгому условию продолжимости*), если для всех множеств $S \in \mathfrak{S}$ каждая функция $f \in C_b(S, \mathbf{R})$ обладает продолжением $\tilde{f} \in C(X, \mathbf{R}; \mathfrak{S})$ (соответственно продолжением $\tilde{f} \in C_b(X, \mathbf{R})$).

Как известно (см. [5], стр. 43), если X — вполне регулярное хаусдорфово пространство и $\mathfrak{S}$ — покрытие пространства X, в котором все элементы компактны, то пара $(X, \mathfrak{S})$ удовлетворяет условию продолжимости. Далее, пусть X — нормальное пространство и $\mathfrak{S}$ — замкнутое покрытие пространства X. Тогда, по теореме Титце (см., например, [11], стр. 101), пара $(X, \mathfrak{S})$ удовлетворяет строгому условию продолжимости. Относительно других случаев, при которых пара $(X, \mathfrak{S})$ удовлетворяет условию продолжимости или строгому условию продолжимости, см., например, [3], теорема 5, и [6].

Предложение 1. *Пусть X — топологическое пространство и $\mathfrak{S}$ — покрытие пространства X такие, что пара $(X, \mathfrak{S})$ удовлетворяет условию продолжимости. Подалгебра $\mathfrak{A}$ является всюду плотной в $C(X, \mathbf{F}; \mathfrak{S})$ тогда и только тогда, когда для каждого $S \in \mathfrak{S}$ подалгебра*

$$\mathfrak{A}_S = \{f \mid S : f \in \mathfrak{A}\}$$

всюду плотна в $C_b(S, \mathbf{F})$.

Доказательство. По предположению, для каждого $S \in \mathfrak{S}$ отображение $f \to f \mid S$ является непрерывным гомоморфизмом $C(X, \mathbf{F}; \mathfrak{S})$ на $C_b(S, \mathbf{F})$. Поэтому из всюду плотности подалгебры $\mathfrak{A}$ в $C(X, \mathbf{F}; \mathfrak{S})$ следует всюду плотность подалгебры $\mathfrak{A}_S$ в $C_b(S, \mathbf{F})$ для каждого $S \in \mathfrak{S}$.

Пусть теперь для каждого $S \in \mathfrak{S}$ подалгебра $\mathfrak{A}_S$ всюду плотна в $C_b(S, \mathbf{F})$. Далее, пусть $f \in C(X, \mathbf{F}; \mathfrak{S})$ и $S \in \mathfrak{S}$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая функция $g \in \mathfrak{A}_S$, что

$$\|f \mid S - g\|_{C_b(S, \mathbf{F})} < \varepsilon.$$

Поскольку $g = h \mid S$ при некоторой функции $h \in \mathfrak{A}$ и

$$\sup_{x \in S} |(f - h)(x)| = \|f \mid S - g\|_{C_b(S, \mathbf{F})},$$

то подалгебра $\mathfrak{A}$ всюду плотна в $C(X, \mathbf{F}; \mathfrak{S})$.

Следствие 1. *Пусть X — топологическое пространство и $\mathfrak{S}$ — покрытие пространства X такие, что пара $(X, \mathfrak{S})$ удовлетворяет строгому условию продолжимости. Подалгебра $\mathfrak{A}$, содержащая всюду плотную в топологии $\mathfrak{S}$-сходимости подалгебру $\mathfrak{B}$ алгебры $C_b(X, \mathbf{F})$, является всюду плотной в $C(X, \mathbf{F}; \mathfrak{S})$.*

Доказательство. Учитывая предположение следствия, мы получаем равенство $C_b(X. \mathbf{F})_S = C_b(S, \mathbf{F})$ для каждого $S \in \mathfrak{S}$. Поскольку отображение $f \to f \mid S$ непрерывно, то подалгебра $\mathfrak{B}_S$ всюду плотна в $C_b(S, \mathbf{F})$ при $S \in \mathfrak{S}$. Поэтому, в силу предложения 1, подалгебра $\mathfrak{B}$ и, следовательно, подалгебра $\mathfrak{A}$ *всюду плотны в* $C(X, \mathbf{F}; \mathfrak{S})$.

По предложению 1 и теореме Б справедлива [6]

Теорема 1. *Пусть X — топологическое пространство и $\mathfrak{S}$ — покрытие пространства X такие, что пара $(X, \mathfrak{S})$ удовлетворяет условию продолжимости. Подалгебра (при $\mathbf{F} = \mathbf{C}$ самосопряженная подалгебра) $\mathfrak{A}$ всюду плотна в $C(X, \mathbf{F}; \mathfrak{S})$ тогда и только тогда, когда для каждого $S \in \mathfrak{S}$ выполнены следующие условия:*

e) *подалгебра $\mathfrak{A}$ разделяет нуль-множества пространства S $\mathbf{R}$-значными функциями,*

f) *подалгебра $\mathfrak{A}_S$ содержит функцию g с*

$$\inf_{x \in S} |g(x)| > 0.$$

В частном случае из теоремы 1 получаем следующее обобщение теоремы А:

Следствие 2. *Пусть X — вполне регулярное хаусдорфово пространство и $\mathfrak{S}$ — покрытие пространства X, в котором все элементы $\mathfrak{S}$ компактны. Подалгебра (при $\mathbf{F} = \mathbf{C}$ самосопряженная подалгебра) $\mathfrak{A}$ всюду плотна в $C(X, \mathbf{F})$ относительно топологии $\mathfrak{S}$-сходимости тогда и только тогда, когда подалгебра $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условию* b) *и для каждого $S \in \mathfrak{S}$ условию*

g) *подалгебра $\mathfrak{A}$ разделяет точки множества S.*

Доказательство. В силу компактности множеств $S \in \mathfrak{S}$, пара $(X, \mathfrak{S})$ удовлетворяет условию продолжимости. Кроме того, условия e) и g) равносильны (см. [1], стр. 107). Покажем теперь равносильность следующих утверждений: 1) подалгебра $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условию b) и 2) подалгебра $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условию f) для каждого $S \in \mathfrak{S}$. Для этого пусть $x \in X$. Тогда $x \in S$ для некоторого $S \in \mathfrak{S}$. По условию f) в подалгебре $\mathfrak{A}$ существует такая функция g, что $(g|S)(x) \neq 0$. Значит, подалгебра $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условию b).

Предположим теперь, что подалгебра $\mathfrak{A}$ не удовлетворяет условию b), т. е. существует точка $x_0 \in X$ такая, что $f(x_0) = 0$ для каждой $f \in \mathfrak{A}$. Так как $x_0 \in S_0$ для некоторого множества $S_0 \in \mathfrak{S}$, то для всех $f \in \mathfrak{A}$ справедливо соотношение

$$\inf_{x \in S_0} |f(x)| = 0.$$

---

[6] В частном случае, когда каждое множество $S \in \mathfrak{S}$ псевдокомпактно и C^*-продолжимо, теорема 1 доказана в [10], стр. 230.

Следовательно, подалгебра $\mathfrak{A}$ не удовлетворяет условию f) при $S=S_0$. Таким образом, равносильность выше названных утверждений показана. Следовательно, по теореме 1, справедливо следствие 2.

Примечание 1. Если подалгебра $\mathfrak{A}$ разделяет точки пространства X, то $\mathfrak{A}$ разделяет точки множества S при каждом $S \in \mathfrak{S}$. При этом обратное утверждение справедливо только тогда, когда покрытие $\mathfrak{S}$ пространства X обладает свойством[7]

(α) из S_1, $S_2 \in \mathfrak{S}$ следует $S_1 \cup S_2 \in \mathfrak{S}$.

4. В статье [2] найдены достаточные условия для всюду плотности подалгебр в $C(X,A)$ и в $C_c(X,A)$ в случае, когда A является локально выпуклой алгеброй (с единицей e_A) над $\mathbf{F}$. Чтобы обобщить эти результаты на алгебру $C(X,A;\mathfrak{S})$, приведем следующие обозначения: для каждой подалгебры $\mathfrak{A} \subseteq C(X,A;\mathfrak{S})$ пусть

$$\mathfrak{A}(X,\mathbf{F};\mathfrak{S}) = \{\alpha \in C(X,\mathbf{F};\mathfrak{S}) : \alpha e_A \in \mathfrak{A}\}$$

и

$$\mathfrak{A}(A) = \{a \in A : \bar{a} \in \mathfrak{A}\},$$

где $(\alpha e_A)(x) \equiv \alpha(x) e_A$ и $\bar{a}(x) \equiv a$ на X.

По теореме 1 из статьи [2] справедливо

Предложение 2. *Пусть X — топологическое пространство и $\mathfrak{S}$ — покрытие пространства X. Пусть, далее, A — локально выпуклая алгебра (с единицей) над $\mathbf{F}$ и $\mathfrak{A}$ — подалгебра алгебры $C(X,A;\mathfrak{S})$. Если подалгебры $\mathfrak{A}(X,\mathbf{F};\mathfrak{S})$ и $\mathfrak{A}(A)$ всюду плотны в $C(X,\mathbf{F};\mathfrak{S})$ и A соответственно, то $\mathfrak{A}$ всюду плотна в $C(X,A;\mathfrak{S})$.*

Теорема 2. *Пусть X — топологическое пространство и $\mathfrak{S}$ — покрытие пространства X такие, что пара $(X,\mathfrak{S})$ удовлетворяет условию продолжимости. Пусть, далее, A — локально выпуклая алгебра (с единицей e_A) над $\mathbf{F}$ и $\mathfrak{A}$ — подалгебра алгебры $C(X,A;\mathfrak{S})$. Если выполнены условия*

h) *подалгебра $\mathfrak{A}(A)$ всюду плотна в A и $e_A \in \mathfrak{A}(A)$,*

i) *для каждого $S \in \mathfrak{S}$ подалгебра $\mathfrak{A}(X,\mathbf{F};\mathfrak{S})$ разделяет нуль-множества пространства S $\mathbf{R}$-значными функциями,*
а при $\mathbf{F}=\mathbf{C}$ выполнены условия h), i) *и*

j) *подалгебра $\mathfrak{A}(X,\mathbf{F};\mathfrak{S})$ самосопряженна,*
то подалгебра $\mathfrak{A}$ всюду плотна в $C(X,A;\mathfrak{S})$.

Доказательство. По условию h) справедливо соотношение $ee_A = \bar{e}_A \in \mathfrak{A}$, где e обозначает единицу в $C(X,\mathbf{F})$. Поэтому $e \in \mathfrak{A}(X,\mathbf{F};\mathfrak{S})$. В силу этого и условий i) и j), подалгебра $\mathfrak{A}(X,\mathbf{F};\mathfrak{S})$ всюду плотна в $C(X,\mathbf{F};\mathfrak{S})$ по теореме 1. Следовательно, подалгебра $\mathfrak{A}$ всюду плотна в $C(X,A;\mathfrak{S})$ по предложению 2.

---

[7] В частном случае, когда покрытие $\mathfrak{S}=\mathfrak{C}$, покрытие $\mathfrak{S}$ обладает свойством (α).

Аналогично, используя предложение 2 и следствия 1 и 2, мы получаем

Следствие 3. *Пусть X — топологическое пространство и $\mathfrak{S}$ — покрытие пространства X такие, что пара $(X, \mathfrak{S})$ удовлетворяет строгому условию продолжимости. Пусть, далее, A — локально выпуклая алгебра с единицей над $\mathbf{F}$ и $\mathfrak{A}$ — подалгебра алгебры $C(X, A; \mathfrak{S})$. Если подалгебра $\mathfrak{A}(X, \mathbf{F}; \mathfrak{S})$ содержит всюду плотную (в топологии $\mathfrak{S}$-сходимости) подалгебру алгебры $C_b(X, \mathbf{F})$, а подалгебра $\mathfrak{A}(A)$ всюду плотна в A, то $\mathfrak{A}$ всюду плотна в $C(X, A; \mathfrak{S})$.*

Следствие 4. *Пусть X — вполне регулярное хаусдорфово пространство и $\mathfrak{S}$ — покрытие пространства X, в котором все элементы компактны. Пусть, далее, A — локально выпуклая алгебра с единицей над $\mathbf{F}$ и $\mathfrak{A}$ — подалгебра алгебры $C(X, A)$. Если выполнены условия* h) *(при $\mathbf{F} = \mathbf{C}$ условие* j)) *и*

k) *для каждого $S \in \mathfrak{S}$ подалгебра $\mathfrak{A}(X, \mathbf{F}; \mathfrak{S})$ разделяет точки множества S,*

то $\mathfrak{A}$ всюду плотна в $C(X, A)$ в топологии $\mathfrak{S}$-сходимости.

Примечание 2. Если покрытие $\mathfrak{S}$ пространства X обладает свойством (α), то условие k) следствия 4 равносильно условию

l) *подалгебра $\mathfrak{A}(X, \mathbf{F}; \mathfrak{S})$ разделяет точки пространства X.*

В случае, когда $\mathfrak{A}(A) = A$ и $\mathfrak{S} = \mathfrak{C}$, следствие 3 известно (см. [2], теорема 3).

Положив в теореме 2 покрытие $\mathfrak{S} = \{X\}$, мы получаем следующее обобщение теоремы 2 из статьи [2]:

Следствие 5. *Пусть X — топологическое пространство, A — локально выпуклая алгебра (с единицей) над $\mathbf{F}$ и $\mathfrak{A}$ — подалгебра алгебры $C_c(X, A)$. Если выполнены условия* h) *и*

m) *подалгебра $\mathfrak{A}(X, \mathbf{F}; \mathfrak{S})$ разделяет нуль-множества пространства X $\mathbf{R}$-значными функциями,*

то $\mathfrak{A}$ всюду плотна в $C_c(X, A)$. Если, кроме того, X — компактное хаусдорфово пространство, то условия m) *и* l) *равносильны.*

Литература

1. Абель М., Об обобщении теоремы Неля. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 277, 104—114.
2. Абель М., Условия всюду плотности в некоторых пространствах непрерывных функций. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1977, **430**, 6—13.
3. Щепин Е. В., Действительные функции и пространства, близкие к нормальным. Сиб. Мат. ж., 1972, **13**, № 5, 1182—1196.
4. Шефер Х., Топологические векторные пространства. Москва, 1971.
5. Gillman, L., Jerison, M., Rings of continuous functions. Princeton, 1960.
6. Lutzer, D., Martin, H., A note on the Dugundji extension theorem. Proc. Amer. Math. Soc., 1974, **45**, 137—139.

7. Mrówka, S. G., Still on approximation theorems. Notice Amer. Math. Soc., 1965, **12**, 212.
8. Nachbin, L., Elements of approximation theory. Princeton, 1967.
9. Nagata, J., Modern general topology. Amsterdam, 1968.
10. Nel, L. G., Theorems of Stone-Weierstrass type for non-compact spaces. Math., Z., 1968, **104**, 226—230.
11. Semadeni, Z., Banach spaces of continuous functions. Warszawa, 1971.

Поступило
21 III 1978

SOME GENERALIZATIONS OF THE STONE-WEIERSTRASS THEOREM

Summary

M. Abel

Let X be a topological space, $\mathfrak{S}$ be a covering of X and A be a locally convex algebra with unit over **F** (over **C** or **R**). Let $C(X, A; \mathfrak{S})$ denote the algebra of all continuous A-valued functions on X for which $f(S)$ is relatively compact in A for every $S \in \mathfrak{S}$.

We shall say that the pair $(X, \mathfrak{S})$ satisfies the condition of extension when for all $S \in \mathfrak{S}$ every bounded continuous **R**-valued function f on S has an extension $\bar{f} \in C(X, \mathbf{R}; \mathfrak{S})$.

Supposing that the pair $(X, \mathfrak{S})$ satisfies the condition of extension the dense subalgebras of algebra $C(X, \mathbf{F}; \mathfrak{S})$ in the topology of $\mathfrak{S}$-convergence are descrebed. As an application of it the sufficient conditions for the density of subalgebra $\mathfrak{A}$ in $C(X, A; \mathfrak{S})$ are given in the case when A is a locally convex algebra (with unit) over **F**.

Tartu Ülikooli toimetised, Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1979, **504**, 10—16.

О ПРОСТРАНСТВАХ, В КОТОРЫХ НЕТ ЛИНЕЙНОГО ЛИФТИНГА

А. Монаков-Рогозкин

Таллинский педагогический институт

В заметке рассматриваются точечные функционалы, порожденные лифтингами и линейными лифтингами пространств измеримых функций. В частности, показывается, что теорема Ионеску Тулча [8] об отсутствии линейного лифтинга в пространствах $L^p(T, \Sigma, \mu)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ с неатомичной мерой по существу выражает тот факт, что при наличии линейного лифтинга множество всех сингулярных (т. е. анормальных) функционалов является тотальным на соответствующем пространстве. Обсуждаются некоторые аспекты и обобщения упомянутой теоремы.

1. В терминологии из теории векторных решеток мы следуем [2] и [6]. Приведем некоторые сведения и обозначения. Пусть X — векторная решетка над полем $\mathbf{R}$ вещественных чисел. Всюду будут рассматриваться только архимедово упорядоченные векторные решетки. Линейное подмножество $H \subset X$ называется *идеалом* в X, если из $x \in X$, $y \in H$, $|x| \leqslant |y|$ следует $x \in H$. Идеал H в X называется *фундаментом*, если его дизъюнктное дополнение $H^d = \{0\}$. *Полосой* в X называется подмножество, являющееся дизъюнктным дополнением некоторого множества $F \subset X$. Линейный функционал f на X называется: а) *регулярным*, если $f = f_1 - f_2$, где f_i $(i = 1, 2)$ — положительные линейные функционалы; б) *порядково непрерывным*, если он регулярен и из того, что [1] $(o)\text{-}\lim x_\alpha = x$ вытекает, что $f(x_\alpha) \to f(x)$; в) *сингулярным*, если он регулярен и обращается в нуль на некотором фундаменте в X. Множества всех регулярных, порядково непрерывных и сингулярных функционалов на X обозначим соответственно через $X^\sim$, $X_n^\sim$ и $X_S^\sim$.

Если τ — топология на множестве Y, то соответствующее топологическое пространство обозначается через (Y, τ). Пусть (X, τ) — топологическая векторная решетка (см. [6], сокращенно ТВР). Пространство, топологически сопряженное к X, обозна-

[1] Запись $(o)\text{-}\lim x_\alpha = x$ означает сходимость по упорядочению (см. [2], стр. 365).

чим через $(X, \tau)' = X'$. Напомним, что под условиями (A_σ) и (A) Канторовича понимают следующие условия:

(A_σ) из $x_n \downarrow 0$ следует, что $x_n \to 0$ в топологии τ,

(A) из $x_\alpha \downarrow 0$ следует, что $x_\alpha \to 0$ в топологии τ.

Если в (X, τ) выполнено условие (A), то говорят, что *топология τ порядково непрерывна*; в этом случае $X' \subset X_n{}^\sim$.

Следуя [6], будем называть *порядковой топологией* векторной решетки X сильнейшую локально выпуклую топологию $\mathfrak{T}$ на X, в которой любой порядковый интервал ограничен. Если $X^\sim$ тотально на X, то $\mathfrak{T}$ есть сильнейшая топология, в которой X является локально выпуклой решеткой (ЛВР). Если эта топология порядково непрерывна, то будем говорить, что векторная решетка X *минимальна* (или *минимального типа*). Так как $X^\sim \subset (X, \mathfrak{T})'$ (см. [6], стр. 290), то минимальность X означает, что $(X, \mathfrak{T})' = X_n{}^\sim = X^\sim$.

Пусть (T, Σ, μ) — пространство с полной мерой такое, что $T \in \Sigma$. Обозначим через $M = M(T, \Sigma, \mu)$ пространство всех вещественно-значных измеримых функций на T с поточечными алгебраическими операциями и поточечным отношением порядка, а через $N = N(T, \Sigma, \mu)$ — идеал всех μ-пренебрежимых функций из M. Пусть $S = S(T, \Sigma, \mu)$ есть фактор-пространство M/N, снабженное естественными алгебраическими операциями и отношением порядка, и $\pi: M \to S$ — канонический гомоморфизм. Мы будем писать $\pi(x) = x^*$. Пусть также N_0 — совокупность всех μ-пренебрежимых множеств, $\Omega = \Sigma/N_0$ — булева алгебра классов эквивалентных измеримых множеств и $\pi_0: \Sigma \to \Omega$ — канонический гомоморфизм. Будем писать $\pi_0(A) = A^*$. Всюду будет предполагаться, что мера μ обладает следующими свойствами:

1) если множество $A \subset T$таково, что для любого множества $B \in \Sigma$ с $\mu(B) < \infty$ выполнено $A \cap B \in \Sigma$, то $A \in \Sigma$;

2) мера μ *локально конечна*, т. е. для любого $A \in \Sigma$ с $\mu(A) > 0$ существует $B \in \Sigma$ такое, что $B \subset A$ и $0 < \mu(B) < \infty$.

Заметим, что мы не предполагаем порядковой полноты пространства $S(T, \Sigma, \mu)$. Всякий идеал $H \subset S(T, \Sigma, \mu)$ будем называть *идеальным пространством на* (T, Σ, μ). Если $A \in \Sigma$, то через $(H; A^*)$ будет обозначаться полоса[2] $\{x^* \chi_A{}^* : x^* \in H\}$ пространства H. Будем говорить, что $E^* \in \Omega$ *рассеяно*, если E^* не содержит атомов алгебры с мерой (Ω, μ).

Пусть X — векторная подрешетка пространства $S(T, \Sigma, \mu)$. *Лифтингом* (*линейным лифтингом*) пространства X называется такой решеточный гомоморфизм (соответственно линейный положительный оператор) $\varrho: X \to \pi^{-1}(X)$, что $\pi \circ \varrho$ — тождественное отображение на X. Положим $\mathbf{1} = \chi_T$ и будем, для простоты,

[2] Через χ_A обозначается характеристическая функция множества A.

предполагать, что, если $1^* \in X$, то $\varrho(1^*) = 1$. Подробные сведения из теории лифтинга содержатся в [3] и [9]. Всякое пространство, в котором существует лифтинг (линейный лифтинг), будем называть *пространством, допускающим лифтинг (линейный лифтинг)*.

2. Как показано в [4] и [5], класс пространств, допускающих лифтинг, не исчерпывается пространством $L^\infty(T, \Sigma, \mu)$ ограниченных функций из $S(T, \Sigma, \mu)$ (и ему изоморфными). В пространствах типа L^∞ существование лифтинга равносильно существованию линейного лифтинга [9]. Неизвестно, верен ли указанный факт для произвольных идеальных пространств на (T, Σ, μ). Пространства, допускающие лифтинг, могут быть весьма велики — в них может не быть ненулевых порядково непрерывных функционалов [5]. Укажем некоторые необходимые свойства таких пространств.

Теорема 1. *Пусть ϱ — линейный лифтинг идеального пространства X на (T, Σ, μ) с неатомичной мерой. Если $L^\infty \subset X$, то для почти всех $t \in T$ $(\operatorname{mod} \mu)$ функционал f_t, определенный соотношением*

$$f_t(x^*) = \varrho(x^*)(t), \tag{1}$$

является ненулевым сингулярным функционалом на X.

Доказательство. Очевидно, что $f_t \in X^\sim$ для любого $t \in T$. Не умаляя общности, можно считать, что $\mu(T) = a < \infty$. Построим последовательность $\{\xi_n\}$ разбиений множества T по следующему правилу: ξ_{n+1} получается разбиением всех элементов разбиения ξ_n на непересекающиеся подмножества вдвое меньшей меры. Таким образом,

$$\xi_n = \{F_1{}^n;\ F_2{}^n;\ \ldots;\ F_{2^n}{}^n\}; \qquad \mu(F_k{}^n) = \frac{a}{2^n}, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2^n.$$

Пусть Θ — нижняя плотность на Σ, ассоциированная с ϱ, т. е.

$$\Theta(A) = \{t : \varrho(\chi_A{}^*)(t) = 1\}, \qquad A \in \Sigma.$$

Положим

$$E_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} \Theta(F_k{}^n).$$

Тогда $E_n{}^* = T^*$ при всех $n \geqslant 1$. Кроме того, если мы положим

$$T_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n,$$

то $T_0{}^* = T^*$. Зафиксируем некоторое $t_0 \in T_0$. Для любого $n \geqslant 1$ существует $k(n)$ с $1 \leqslant k(n) \leqslant 2^n$ такое, что $t_0 \in \Theta(F_{k(n)}{}^n)$. При этом $k(n)$ определяется единственным образом. Действительно, достаточно заметить, что если $t_0 \in \Theta(A)$ и $B^* \cap A^* = \varnothing^*$, то

$$1 = \varrho(\chi_A{}^*)(t_0) = \varrho(1^*)(t_0) \geqslant \varrho(\chi_A{}^*)(t_0) + \varrho(\chi_B{}^*)(t_0) \geqslant 0,$$

откуда $\varrho(\chi_B{}^*)(t_0) = 0$.

Положим $A_n = F_{k(n)^n}$. Тогда последовательность $\{A_n\}$ монотонно убывающая и $\mu(A_n) \to 0$. При этом

$$f_{t_0}(\chi_{A_n}{}^*) = 1$$

для всех $n \geqslant 1$. Положим

$$B_n = T \setminus A_n, \quad z_n{}^* = \chi_{B_n}{}^*$$

и обозначим через K линейную оболочку совокупности функций $z_n{}^*$. Тогда из $z^* \in K$ следует $|z^*| \in K$. Положим также

$$P = \{x^* : x^* \in H,\ |x^*| \leqslant z^* \text{ для некоторого } z^* \in K\}.$$

Непосредственно проверяется, что P — идеал в H. Поскольку $\sup B_n{}^* = T^*$, то P — фундамент в H. Из соотношения $P \subset f_{t_0}{}^{-1}(0)$ вытекает, что $f_{t_0} \in X_S{}^\sim$. Остается воспользоваться тем, что $t_0 \in T_0$ выбрано произвольно и $T_0{}^* = T^*$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если идеальное пространство X на (T, Σ, μ) с неатомичной мерой допускает линейный лифтинг ϱ, причем $L^\infty \subset X$, то $X_S{}^\sim$ тотально на X.*

Для доказательства достаточно заметить, что из $x^* \neq y^*$ вытекает $\varrho(x^*) \neq \varrho(y^*)$ и воспользоваться теоремой 1.

Замечание. Условие $L^\infty \subset X$ в теореме 2 может быть опущено, если мера μ обладает свойством прямой суммы (см. определение в [2], стр. 70), в частности, если она σ-конечна.

Таким образом, если $X_S{}^\sim$ (а стало быть, и $X^\sim$) не является тотальным на X, то в X не может существовать линейного лифтинга (а, значит, и лифтинга). Из таких пространств укажем, к примеру, пространства $L^p(T, \Sigma, \mu)$ для $0 < p < 1$ и неатомичной меры. И подавно не существует линейного лифтинга всего пространства $S(T, \Sigma, \mu)$ и любой его полосы $(S; A^*)$. Отсюда следует, что для того, чтобы идеальное пространство X на (T, Σ, μ) допускало линейный лифтинг, необходимо, чтобы X было «разреженным» в следующем смысле: всякая полоса $(S; A^*)$, где A^* рассеяно, должна содержать элементы, не входящие в $(X; A^*)$.

3. Рассмотрим теперь некоторые аспекты обобщения теоремы Ионеску Тулча об отсутствии линейного лифтинга в пространствах L^p для $1 \leqslant p < \infty$. Хорошо известно, что если X — нормированная решетка, то $X^\sim \supset X'$. При этом $X_n{}^\sim \supset X'$ тогда и только тогда, когда в X выполнено условие (А) (см. [2], стр. 377 и 381). В этом случае, если $X^\sim \subset X'$ (в частности, если X — банахова решетка), то $X' = X_n{}^\sim$, т. е. в X топологическая сходимость направлений совпадает с порядковой сходимостью. Как показано в [7], всякая локально выпуклая решетка X, для которой $X' = X_n{}^\sim$, нормируема. Таким образом, сказанное в пункте 1 относительно порядковой топологии $\mathfrak{T}$ удобно сформулировать следующим образом.

Теорема 3. *Пусть X — векторная решетка с тотальным $X^\sim$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *X — векторная решетка минимального типа;*
2) *пространство $(X, \mathfrak{T})$ нормируемо;*
3) *$(X, \mathfrak{T})' = X_n^\sim$.*

Покажем, что условие $X' = X_n^\sim = X^\sim$ влечет минимальность X и в том случае, когда X есть ТВР.

Теорема 4. *Пусть (X, τ) — ТВР с тотальным $X^\sim$. Если топология τ порядково непрерывна и $X^\sim \subset X'$, то векторная решетка X минимальна.*

Доказательство. Из условий теоремы следует, что $(X, \tau)' = X^\sim$. Так как порядковая топология $\mathfrak{T}$ есть топология Макки $\tau(X, X^\sim)$ относительно двойственности $\langle X, X^\sim\rangle$ (см. [6], стр. 294), то мы имеем $\mathfrak{T} = \tau(X, X')$. Пусть $x_\alpha \in X$, $x_\alpha \downarrow \mathbf{0}$. Тогда $x_\alpha \to \mathbf{0}$ в топологии τ, а значит, и в ослабленной топологии $\sigma(X, X')$. По теореме о монотонной сходимости ([6], стр. 281, теорема 4.3), $x_\alpha \to \mathbf{0}$ в топологии $\mathfrak{T}$.

Теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Пусть X — нормированное идеальное пространство на (T, Σ, μ) такое, что $X^\sim \subset X'$. Если в X выполнено условие* (A) *и существует такое $E \in \Sigma$, что $\mu(E) > 0$, $\chi_{E^*} \in X$ и E^* рассеяно, то не существует линейного лифтинга пространства X.*

Доказательство. Полоса $(X; E^*)$ является нормированным идеальным пространством с условием (A) относительно индуцированной из X нормы. Положим $\Sigma_E = \{A \cap E : A \in \Sigma\}$ и обозначим через μ_E сужение меры μ на σ-алгебру Σ_E. Тогда полоса $(S(T, \Sigma, \mu); E^*)$ изоморфна пространству $S(E, \Sigma_E, \mu_E)$. Если Y — изометричный образ полосы $(X; E^*)$ в $S(E, \Sigma_E, \mu_E)$, то Y есть нормированное идеальное пространство на (E, Σ_E, μ_E), удовлетворяющее условию (A). Поэтому $Y' = Y_n^\sim = Y^\sim$, откуда $Y_S^\sim = \{0\}$.

Предположим теперь, что существует линейный лифтинг ϱ пространства X. Не умаляя общности, можно считать, что $\chi_E \leqslant \varrho(\chi_{E^*})$. Положим для всякой функции $y \in M(E, \Sigma_E, \mu_E)$

$$y'(t) = \begin{cases} y(t), & \text{если } t \in E, \\ 0, & \text{если } t \in T \setminus E. \end{cases}$$

Наконец, для любого $t \in E$ и всякой функции $y^* \in Y$ положим [3]

$$\varrho'(y^*) = \varrho(y'^*) \,|\, E.$$

Тогда ϱ' есть линейный лифтинг пространства Y. По теореме 2, $Y_S^\sim$ тотально на Y, что противоречит соотношению $Y_S^\sim = \{0\}$.

Теорема 5 доказана.

---

[3] Через $z|E$ обозначается сужение функции z на множестве E.

Следующая теорема сразу вытекает из теорем 3 и 5.

Теорема 6. *Пусть X — идеальное пространство на (T, Σ, μ). Если векторная решетка X минимального типа и существует такое $E \in \Sigma$, что $\mu(E) > 0$, $\chi_E{}^* \in X$ и E^* рассеяно, то не существует линейного лифтинга пространства X.*

В работе [4] доказан следующий результат.

Теорема 7. *Пусть X — идеальное пространство на (T, Σ, μ) и множество $E \in \Sigma$ таково, что $\mu(E) > 0$, $\chi_E{}^* \in X$ и E^* рассеяно. Если на X можно задать удовлетворяющую условию (A_σ) топологию τ, относительно которой X есть ТВР и $X^\sim \subset X'$, то не существует линейного лифтинга пространства X.*

Доказательство. Подберем, в силу локальной конечности меры μ и рассеяности E^*, такое $B \in \Sigma$, что $B \subset E$ и $0 < \mu(B) < \infty$. Тогда полоса $(X; B^*)$ является ТВР порядково счетного типа в индуцированной из (X, τ) топологии, а в таких пространствах условия (A_σ) и (A) равносильны. По теореме 4, векторная решетка $(X; B^*)$ минимального типа. Из теоремы 6 вытекает, что в $(X; B^*)$, а подавно и в X, нет линейного лифтинга.

Теорема 7 доказана.

Ясно, что теорема 5, в свою очередь, следует как из теоремы 6, так и из теоремы 7. Поэтому, хотя условия теорем 6 и 7 могут в некоторых случаях быть более удобными для проверки, эти теоремы не дают содержательного обобщения теоремы 5.

Следствие. *Если мера μ неатомична, то ни одно банахово идеальное пространство на (T, Σ, μ) с порядково непрерывной нормой не допускает линейного лифтинга.*

Таким образом, если в идеальном пространстве X на (T, Σ, μ) или в некотором его подпространстве выполнены условия теорем 5, 6 или 7, то в X нет линейного лифтинга. Отсюда вытекает отсутствие линейного лифтинга во многих классических идеальных пространствах. Кроме уже упоминавшихся пространств $L^p(T, \Sigma, \mu)$, назовем пространства Лоренца и пространства Орлича (с произвольной N-функцией). Рассмотрим, наконец, пространство $L_\omega(T, \Sigma, \mu)$, состоящее из всех функций из $S(T, \Sigma, \mu)$, суммируемых с любой степенью, т. е.

$$L_\omega = \bigcap_{1 \leqslant p < \infty} L^p.$$

Наделим L_ω топологией τ счетно-нормированного пространства (см. [1], стр. 217—223). Тогда (L_ω, τ) — метризуемая и полная ТВР, следовательно, $L_\omega{}^\sim \subset L'_\omega$ (см. [6], стр. 287). Так как в (L_ω, τ) выполнено условие (A_σ), то, по теореме 7, в L_ω не существует линейного лифтинга.

Литература

1. Вулих Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств. Москва, 1961.
2. Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ. Москва, 1977.
3. Левин В. Л., Выпуклые интегральные функционалы и теория лифтинга. Успехи мат. наук, 1975, **30**, № 2, 115—172.
4. Монаков-Рогозкин А. К., Пространства, допускающие лифтинг. В сб., «Работы по мат. и физ.», Таллин, 1974, 5—14.
5. Монаков-Рогозкин А. К., Об одном способе сравнения лифтингов. В сб. «Работы по мат. и физ.», Таллин, 1974, 15—34.
6. Шефер Х., Топологические векторные пространства. Москва, 1971.
7. De Marr, R. E., Order convergence in linear topological spaces. Pacific J. Math., 1964. **14**, № 1, 17—20.
8. Ionescu Tulcea, A., Ionescu Tulcea, C., On the lifting property II. J. Math. Mech., 1962, **11**, 773—795.
9. Ionescu Tulcea, A., Ionescu Tulcea, C., Topics in the theory of lifting. Berlin — Heidelberg — New York, 1969.

Поступило
17 IV 1978

ON THE SPACES WHICH HAVE NOT THE LINEAR LIFTING PROPERTY

A. Monakov-Rogozkin

Summary

Let (T, Σ, μ) be a measure space with complete non-atomic measure, $S = S(T, \Sigma, \mu)$ a space of all real-valued measurable functions and X an order ideal of S. If there is a linear lifting of the space X, then the set of all singular functionals is total on X. This yields some nonexistence theorems for linear lifting in the space X. For example, there is no linear lifting in any ideal Banach space with an order continuous norm.

Tartu Ülikooli toimetised, Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1979, **504**, 17—34.

ВКЛЮЧЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ

Т. Лейгер

Тартуский государственный университет

Пусть X и Y — некоторые F-пространства, т. е. полные метризуемые линейные топологические пространства и [1] $A_{nk} \in L(X, Y)$. Преобразование $y = Ax$, где $y = (\eta_n)$ и [2]

$$\eta_n = \sum_k A_{nk} \xi_k,$$

определяет обобщенный матричный метод суммирования A. В случае, когда X и Y — банаховы пространства, обобщенные методы суммирования изучали Мелвин-Мелвин [15], Целлер [23], Кангро [6], Юримяэ [11, 12]. Рамануджан [16], Барик [13], Вуд [19] исследовали суммируемость последовательностей элементов пространства Фреше, т. е. локально выпуклого F-пространства. Более общие методы суммирования изучаются в работах Меленцова, Бакусовой и Жаворонкова (см. [1, 4, 5, 8, 9]).

В данной статье рассматриваем суммирование последовательностей в F-пространстве, т. е. не обязательно локально выпуклом пространстве. Известно (см., например, [3], стр. 358), что пространство вполне измеримых функций $TM(S, \Sigma, \mu)$ является не локально выпуклым F-пространством, сходимость в котором равносильна сходимости по мере. Чтобы теория суммируемости включала суммируемость по мере, необходимо изучать суммируемость последовательностей в F-пространстве.

В § 1 сформулируем основные факты теории FK-пространств, в § 2 найдем общий вид линейного непрерывного оператора $F \in L(c(X), Y)$ и обобщим теорему Кожима—Шура. В § 3 изучаются обратимые обобщенные методы суммирования. В последнем параграфе обобщим теорему Мазура—Хилла и некоторые результаты Каулинга и Расселя.

Обобщенный метод суммирования мы в дальнейшем обычно называем методом суммирования.

---

[1] Через $L(M, N)$ обозначается пространство линейных непрерывных операторов из M в N.

[2] Если пределы изменения индексов не указаны, то каждое соотношение справедливо при всех значениях $1, 2, 3 \ldots$ соответствующих индексов.

§ 1. Пространства последовательностей элементов F-пространства

Пусть X является F-пространством. Через $\mathfrak{B}(X)$ и $\operatorname{bd} X$ обозначим соответственно базис окрестностей нуля и семейство ограниченных подмножеств в X. Далее, F-пространство $E(X)$ последовательностей $x = (\xi_n)$ элементов пространства X называем FK-пространством, если в нем имеет место покоординатная сходимость, т. е. если $x_n \to x$ в $E(X)$, то $\xi^n{}_k \to \xi_k$ в X, где $x_n = (\xi^n{}_k)$. Пространство $s(X)$ всех последовательностей $x = (\xi_n)$ с $\xi_n \in X$ является FK-пространством в топологии Тихонова, т. е. в топологии произведения. Сходимость в $s(X)$ равносильна покоординатной сходимости. Пространство $m(X)$ ограниченных последовательностей является FK-пространством с базисом окрестностей нуля $\mathfrak{B}(m(X))$, состоящим из множеств

$$\{x \in m(X) : \xi_k \in U\}, \qquad U \in \mathfrak{B}(X).$$

Пространства $c(X)$ и $c_0(X)$ соответственно сходящихся и сходящихся к нулю последовательностей являются замкнутыми подпространствами пространства $m(X)$ и, таким образом, FK-пространствами в индуцированной топологии (см. [4], § 2).

Через $E^\infty(X)$ обозначим пространство последовательностей $x = (\xi_n)$, где[3] $\xi_n \neq \theta$ для конечного числа индексов n. В данной работе мы рассматриваем только такие FK-пространства $E(X)$, которые включают $E^\infty(X)$.

Пространства последовательностей элементов F-пространства, структура полей суммируемости, а также включение и совместность обобщенных методов суммирования исследовались в работах Жаворонкова [4, 5].

Пространства $E(X)$, где X — локально выпуклое пространство, изучались в работах [7, 8, 9, 16, 19]. В таком случае топологию в $s(X)$ и $m(X)$ можно определить семейством полунорм. Нетрудно убедиться, что если X — не локально выпуклое F-пространство, то FK-пространства $s(X)$ и $m(X)$ не являются локально выпуклыми. Если же X такое F-пространство, топологическое сопряженное X' которого состоит лишь из нулевого функционала (например, $TM(S, \Sigma, \mu)$, где $S = [0, 1]$, а μ — мера Лебега, см. [3], стр. 358), то, согласно нижеследующему предложению, не существует локально выпуклых FK-пространств $E(X)$.

Предложение 1. *Пусть X и $E(X)$ — линейные топологические пространства, причем в $E(X)$ имеет место покоординатная сходимость и $E(X) \supset E^\infty(X)$. Топологическое сопряженное $E(X)'$ разделяет точки*[4] *на $E(X)$ в точности тогда, когда X' разделяет точки на X.*

---

[3] Через θ обозначаем нулевой вектор в линейных пространствах.

[4] Мы говорим, что множество H линейных функционалов на линейном пространстве Z разделяет точки на Z, если для всякой пары элементов $x, y \in Z$ с $x \neq y$ существует $f \in H$ такой, что $fx \neq fy$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $E(X)'$ разделяет точки на $E(X)$ и $\xi^1, \xi^2 \in X$ с $\xi^1 \neq \xi^2$. Тогда для некоторого k существует $f \in E(X)'$ с $fe_k(\xi^1) \neq fe_k(\xi^2)$, где

$$e_k(\xi) = (\theta, \ldots, \theta, \xi, \theta, \ldots),$$

причем $\xi \in X$ стоит на k-том месте. Пусть $\varphi_k \xi = fe_k(\xi)$. Тогда $\varphi_k \in X'$ и $\varphi_k \xi^1 \neq \varphi_k \xi^2$, т. е. X' разделяет точки на X.

Достаточность. Пусть $x^1, x^2 \in E(X)$ с $x^1 \neq x^2$ и X' разделяет точки на X. Тогда $\xi_k{}^1 \neq \xi_k{}^2$ при некотором индексе k и существует $\varphi \in X'$ с $\varphi\xi_k{}^1 \neq \varphi\xi_k{}^2$. Если $f_k x = \varphi\xi_k$, то $f_k \in E(X)'$ и $f_k x^1 \neq f_k x^2$, т. е. $E(X)'$ разделяет точки на $E(X)$.

Отрезками последовательности $x = (\xi_k)$ называем последовательности

$$P_n x = \sum_{k=1}^{n} e_k(\xi_k).$$

Если $E(X)$ является FK-пространством, то $P_n \in L(E(X), E(X))$. Далее, $e_k \in L(X, E(X))$ и $\pi_k \in L(E(X), X)$, где $\pi_k x = \xi_k$. Мы говорим, что в точке $x \in E(X)$ имеет место *сходимость* (*ограниченность*) *по отрезкам*, если $P_n x \to x$ (соответственно $(P_n x)$ ограничена) в $E(X)$ и обозначим

$$E(X)_{AK} = \{x \in E(X) : P_n x \to x\},$$
$$E(X)_{AB} = \{x \in s(X) : (P_n x) \text{ ограничена в } E(X)\},$$
$$E(X)_{AD} = \operatorname{cl} E^\infty(X),$$

т. е. $E(X)_{AD}$ — замыкание подпространства $E^\infty(X)$ в $E(X)$. Отметим, что $c_0(X)_{AK} = c(X)_{AK} = m(X)_{AK} = c_0(X)$, а $c_0(X)_{AB} = c(X)_{AB} = m(X)_{AB} = m(X)$.

Пусть $E(X)$ и $F(X)$ суть FK-пространства и $E(X) \supset F(X)$. Аналогично случаю $X = \mathbf{R}$ или $X = \mathbf{C}$ (см. [20], предложение 4.5) доказывается, что если $x_n \to x$ в $F(X)$, то $x_n \to x$ и в $E(X)$. Из этого факта следует, что FK-топология в пространстве последовательностей элементов F-пространства определяется однозначно.

Предложение 2. *Для FK-пространства $E(X)$ равенство $E(X)_{AK} = E(X)$ имеет место в точности тогда, когда $E(X) = E(X)_{AD}$ и $E(X) \subset E(X)_{AB}$.*

Доказательство аналогично доказательству в случае, когда X — пространство Фреше (см. [7], предложение 3).

Пусть $E(X)$ — локально выпуклое FK-пространство и

$$E(X)_{SAK} = \{x \in E(X) : \ fx = \Sigma fe_k(\xi_k) \ \forall f \in E(X)'\}.$$

Мы говорим, что в точке $x \in E(X)_{SAK}$ имеет место *слабая сходимость по отрезкам*. Справедливы включения

$$E(X)_{AK} \subset E(X)_{SAK} \subset E(X)_{AB}. \tag{1}$$

Предложение 3. *Пусть $E(X)$ — локально выпуклое FK-пространство. Если $E(X) = E(X)_{SAK}$, то $E(X) = E(X)_{AK}$.*

Доказательство. Пусть $x \in E(X)$. Так как $P_n x$ сходится слабо к x в $E(X)$, то согласно теореме 3.13 из [10] найдется последовательность линейных комбинаций z^m отрезков $P_n x$, которая сходится в исходной топологии пространства $E(X)$ к элементу x, т. е. существуют $z^m \in E^\infty(X)$ с $z^m \to x$ в $E(X)$. Таким образом, $E(X) = E(X)_{AD}$. Согласно включениям (1) и предложению 2, $E(X) = E(X)_{AK}$.

В случае $X = \mathbf{R}$ или $X = \mathbf{C}$ соответствующий результат принадлежит Целлеру ([21], предложение 3.4).

Пусть X и Y являются F-пространствами и $A_{nk} \in L(X, Y)$. Для FK-пространства $E(Y)$ обозначим

$$E_A(X) = \{x \in s(X) : Ax \in E(Y)\}.$$

Тогда $E_A(X)$ является FK-пространством с базисом окрестностей нуля $\mathfrak{B}(E_A(X))$, состоящим из множеств

$$\{x \in E_A(X) : (\eta_n) \in W\}, \qquad W \in \mathfrak{B}(E(Y)),$$

$$\{x \in E_A(X) : \sum_{k=1}^{p} A_{nk}\xi_k \in U\}, \quad U \in \mathfrak{B}(Y), \tag{2}$$

$$E_A(X) \cap Q, \quad Q \in \mathfrak{B}(s(X)). \tag{3}$$

Доказательство этого факта в принципе не отличается от доказательства соответствующего результата для числовых последовательностей в [20]. Пространство $c_A(X)$ мы называем полем суммируемости метода A. Базис $\mathfrak{B}(c_A(X))$ состоит из окрестности нуля (2), (3), где $E_A(X) = c_A(X)$, и

$$\{x \in c_A(X) : \eta_n \in V\}, \qquad V \in \mathfrak{B}(Y),$$

(см. также [5], стр. 16). Поле нуль-суммируемости

$$c^0{}_A(X) = \{x \in s(X) : Ax \in c_0(Y)\}$$

является замкнутым подпространством в $c_A(X)$. В дальнейшем мы пользуемся следующими обозначениями:

$$A_n x = \eta_n, \qquad x \in s_A(X),$$
$$\lim_A x = \eta = \lim \eta_n, \qquad x \in c_A(X).$$

Метод A называется консервативным, если $c_A(X) \supset c(X)$. Консервативный метод A называется L-регулярным, если $\lim_A x = L\xi$ при всех $x \in c(X)$, где $L \in L(X, Y)$ и $\xi = \lim \xi_n$. Последовательность $x \in s(X)$ называется A-суммируемой, если $x \in c_A(X)$.

§ 2. Непрерывные линейные операторы в FK-пространствах

В теории суммируемости числовых последовательностей многие проблемы решаются при помощи общего вида непрерывных линейных функционалов на поле суммируемости. Если X и Y — пространства Фреше, то непрерывные линейные функционалы играют важную роль и в теории обобщенных методов суммирования A, где $A_{nk} \in L(X, Y)$. Так, например, через слабую сходимость по отрезкам в поле суммируемости определяются корегулярные и конулевые методы суммирования (см. [11, 12, 5]). Но при решении многих проблем обобщенного суммирования (включение и совместность методов суммирования, множители суммируемости) пользуются непрерывными линейными операторами из $c_A(X)$ в Y. В данном параграфе мы изучаем операторы такого типа.

В дальнейшем нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1 ([3], стр. 67, теорема 18). *Пусть X и Y суть F-пространства и $T_n \in L(X, Y)$. Если $\lim T_n\xi$ существует для всех ξ из некоторого фундаментального множества пространства X и если для каждого $\xi \in X$ последовательность $(T_n\xi)$ ограничена, то предел $T\xi = \lim T_n\xi$ для каждого $\xi \in X$ существует и $T \in L(X, Y)$.*

Лемма 2 ([10], теорема 2.6). *Пусть X и Y суть F-пространства и $T_n \in L(X, Y)$. Если при каждом $\xi \in X$ последовательность $(T_n\xi)$ ограничена в Y, то (T_n) равностепенно непрерывна.*

Непосредственным следствием из лемм 1 и 2 является следующая

Лемма 3. *Пусть X и Y суть F-пространства и $T_n \in L(X, Y)$. Если $\lim T_n \xi$ существует для всех ξ из некоторого фундаментального множества пространства X и если для каждого $B \in \operatorname{bd} X$ множество $\{T_n\xi : \xi \in B\} \in \operatorname{bd} Y$, то предел $T\xi = \lim T_n\xi$ для каждого $\xi \in X$ существует и $T \in L(X, Y)$.*

Следующие предложения в случае, когда X — пространство Фреше, $E(X)$ — локально выпуклое FK-пространство и $\Phi_k \in E(X)'$, доказаны в [7].

Предложение 4. *Если ряд $\Sigma\Phi_k\xi_k$ с $\Phi_k \in L(X, Y)$ сходится при всех $x \in E(X)$ и $E(X)$ является FK-пространством, то оператор $F \in L(E(X), Y)$, где*

$$Fx = \Sigma\Phi_k\xi_k. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $F_n x = \Phi_1\xi_1 + \ldots + \Phi_n\xi_n$. Тогда $F_n \in L(E(X), Y)$. Действительно, $\Phi_k\xi_k = \Phi_k\pi_k x$, а так как $\pi_k \in L(E(X), X)$ и $\Phi_k \in L(X, Y)$, то $\Phi_k \circ \pi_k \in L(E(X), Y)$ и операторы F_n непрерывны как конечные суммы непрерывных операторов. Мы имеем $F_n x \to Fx$ при всех $x \in E(X)$ и согласно лемме 1 оператор $F \in L(E(X), Y)$.

Предложение 5. *Если для FK-пространства $E(X)$ верно равенство $E(X)_{AK} = E(X)$, то $F \in L(E(X), Y)$ в точности тогда, когда он имеет вид* (4).

Доказательство. Для всех $x \in E(X)$ имеем

$$x = \Sigma\, e_k(\xi_k)$$

и поэтому

$$Fx = \Sigma\, Fe_k(\xi_k) = \Sigma\, \Phi_k\xi_k,$$

где $\Phi_k\xi = Fe_k(\xi)$. Ввиду непрерывности операторов e_k все $\Phi_k \in L(X, Y)$.

С другой стороны, как следует из предложения 4, каждый оператор в виде (4) непрерывен. Предложение доказано.

Мы найдем общий вид оператора $F \in L(c_0(X), Y)$. Так как $c_0(X)_{AK} = c_0(X)$, то $F \in L(c_0(X), Y)$ в точности тогда, когда он представляется в виде (4). Согласно лемме 3 последовательность $F_nx \to Fx$ в Y при всех $x \in E(X)$ в точности тогда, когда

$$\{F_nx:\ x \in M\} \in \mathrm{bd}\, Y \qquad \forall M \in \mathrm{bd}\, c_0(X), \tag{5}$$

$$F_ne_k(\xi) \to Fe_k(\xi) \qquad \forall k, \qquad \xi \in X. \tag{6}$$

При $n \geqslant k$ имеем $F_ne_k(\xi) = Fe_k(\xi)$, поэтому условие (6) всегда выполнено.

Пусть $B \in \mathrm{bd}\, X$, тогда множество

$$\{(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \theta, \ldots): \quad \xi_k \in B,\ n=1, 2, \ldots\} \in \mathrm{bd}\, c_0(X)$$

и из (5) для непрерывности оператора F мы получим необходимое условие:

$$\{\sum_{k=1}^{n} \Phi_k\xi_k:\ \xi_k \in B,\ n=1, 2, \ldots\} \in \mathrm{bd}\, Y \qquad \forall B \in \mathrm{bd}\, X. \tag{BS}$$

Вместо (BS) будем в дальнейшем часто говорить, что $(\Phi_k) \in BS(X, Y)$.

Покажем, что это условие является и достаточным. Пусть $B = \{\xi_k\}$, где $x = (\xi_k) \in c_0(X)$. Тогда из (BS) вытекает точечная ограниченность последовательности (F_n) и согласно лемме 1 при всех $x \in c_0(X)$ существует $\lim F_nx = Fx$ и $F \in L(c_0(X), Y)$. Мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Оператор $F \in L(c_0(X), Y)$ в точности тогда, когда он представляется в виде* (4), *где $\Phi_k \in L(X, Y)$ и $(\Phi_k) \in BS(X, Y)$.*

Теорема 2. *Оператор $F \in L(c(X), Y)$ в точности тогда, когда он представляется в виде*

$$Fx = \Phi\xi + \Sigma\, \Phi_k(\xi_k - \xi), \tag{7}$$

где $\xi = \lim \xi_k$ и $\Phi, \Phi_k \in L(X, Y)$, а $(\Phi_k) \in BS(X, Y)$.

Доказательство. Если $x \in c(X)$, то

$$x = e(\xi) + \Sigma\, e_k(\xi_k - \xi),$$

где $e(\xi) = (\xi, \xi, \ldots, \xi, \ldots)$, и поэтому справедливо представление (7) с $\Phi\xi = Fe(\xi)$ и $\Phi_k\xi = Fe_k(\xi)$. Так как из $\xi_n \to \xi$ в X следует $e(\xi_n) \to e(\xi)$ в $c(X)$, то $e \in L(X, c(X))$ и таким образом $\Phi, \Phi_k \in L(X, Y)$.

С другой стороны, если $x \in c(X)$, то $(\xi_k - \xi) \in c_0(X)$ и согласно теореме 1 ряд $\Sigma\Phi_k(\xi_k - \xi)$ сходится при всех $x \in c(X)$. Из предложения 4 вытекает непрерывность оператора (7).

Следующая теорема устанавливает необходимые и достаточные условия для консервативности метода A. В теории суммируемости она называется теоремой Кожима—Шура ([2], теорема 1.1). Для банаховых пространств X и Y эта теорема была доказана Мелвин-Мелвином [15] и Целлером [23], для пространств Фреше—Рамануджаном [16].

Теорема 3. *Пусть X и Y суть F-пространства, $A=(A_{nk})$ с $A_{nk}\in L(X,Y)$. Метод A является консервативным в точности тогда, когда выполняются условия*

$$\exists \lim_m A_{nk}\xi = a_k\xi, \quad \xi\in X, \tag{8}$$

$$\exists \lim_n \sum_k A_{nk}\xi = a\xi, \quad \xi\in X, \tag{9}$$

$$\{\sum_{k=1}^{m} A_{nk}\xi_k : \xi_k\in B,\ n,\ m=1,\ 2,\ \ldots\}\in \mathrm{bd}\, Y \qquad \forall B\in \mathrm{bd}\, X. \tag{10}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $c_A(X)\supset \supset c(X)$. Существование пределов (8) и (9) вытекает из A-суммируемости последовательностей $e_k(\xi)$ и $e(\xi)$ с $\xi\in X$. Операторы $A_n\in L(c(X),Y)$ и $A_nx\to\eta$ в Y. Таким образом, последовательность A_n точечно ограничена на $c(X)$ и согласно лемме 2

$$\{A_nx : x\in M\}\in \mathrm{bd}\, Y \qquad \forall M\in \mathrm{bd}\, c(X).$$

Положив $M=\{(\xi_1,\xi_2,\ \ldots\ ,\xi_n,\theta,\ \ldots) : \xi_k\in B,\ n=1,2,\ \ldots\}$, где $B\in \mathrm{bd}\, X$, получим необходимость условия (10).

Достаточность. Последовательности $e_k(\xi)$ и $e(\xi)$ с $\xi\in X$ образуют фундаментальное множество в $c(X)$. Рассматриваем операторы $T_{nm}\in L(c(X),Y)$, где

$$T_{nm}x=\sum_{k=1}^{m} A_{nk}\xi_k.$$

При каждом индексе n применяем к последовательности операторов (T_{nm}) лемму 3. Так как существуют пределы

$$\lim_m T_{nm}e_k(\xi)=\lim_m A_{nk}\xi=A_{nk}\xi, \quad \xi\in X,$$

$$\lim_m T_{nm}e(\xi)=\sum_k A_{nk}\xi, \quad \xi\in X,$$

и из условия (10) вытекает точечная ограниченность последовательности (T_{nm}), то при всех $x\in c(X)$ существуют

$$\lim_m T_{nm}x=A_nx, \quad A_n\in L(c(X),Y).$$

Пусть $x\in c(X)$ и $V\in\mathfrak{B}(Y)$, тогда ввиду условия (10) существует $\lambda>0$ с $T_{nm}x\in\lambda V$. Мы предполагаем (без ограничения общности), что $\mathfrak{B}(Y)$ состоит из замкнутых уравновешенных множеств. Тогда λV является замкнутым и $A_nx\in\lambda V$. Таким образом, последовательность операторов (A_n) точечно ограничена на $c(X)$. Пределы

$$\lim_n A_n e_k(\xi) = \lim_n A_{nk}\xi, \qquad \xi \in X,$$

$$\lim_n A_n e(\xi) = \lim_n \sum_k A_{nk}\xi, \qquad \xi \in X,$$

существуют для всех $\xi \in X$ согласно условиям (8) и (9). По лемме 1 существует $\lim A_n x$ для каждой $x \in c(X)$, т. е. $c_A(X) \supset \supset c(X)$. Теорема доказана.

В дальнейшем вместо условия (10) будем говорить, что $(A_{nk}) \in KS(X, Y)$.

Теорема 3 является уточнением результата Жаворонкова [4]. В частных случаях из нее получаем теорему 1 из [16], предложение 1 из [23] и теорему 1.1 из [2].

Теорема 4. *Для L-регулярности метода A необходимо и достаточно выполнение условий* (8), (9) *и* (10) *с* $a_k = \theta$ *и* $a = L$.

Доказательство. Необходимость. Так как $L\theta = \theta$, то при всех $\xi \in X$ из L-регулярности метода A вытекает $a_k\xi = = \lim_A e_k(\xi) = \theta$ и $a\xi = \lim_A e(\xi) = L\xi$.

Достаточность. Ввиду консервативности метода A оператор $\lim_A \in L(c(X), Y)$ и согласно теореме 2 для всех $x \in c(X)$ имеем

$$\lim_A x = \Phi\xi + \Sigma\Phi_k(\xi_k - \xi),$$

где $\Phi, \Phi_k \in L(X, Y)$ и (Φ_k) удовлетворяет условию (BS). Так как $\lim_A e_k(\xi) = a_k\xi$ и $\lim_A e(\xi) = a\xi$, получаем

$$\lim_A x = a\xi + \Sigma\, a_k(\xi_k - \xi) \tag{11}$$

для всех $x \in c(X)$. Если $a_k = \theta$ и $a = L$, то $\lim_A x = L\xi$, т. е. A является L-регулярным.

Теорема 5. *Для включения* $c_A(X) \supset c_0(X)$ *необходимы и достаточны условия* (8) *и* (10). *Если эти условия выполнены, то*

$$\lim_A x = \Sigma\, a_k\xi_k \tag{12}$$

для всех $x \in c_0(X)$.

Доказательство. Так как $e_k(\xi)$ с $\xi \in X$ составляют в $c_0(X)$ фундаментальное множество, то условие (9) можно опустить. В остальном доказательство совпадает с доказательством теоремы 2.

Равенство (12) доказывается аналогично равенству (11).

§ 3. Обратимые методы суммирования

Метод A, определяемый матрицей $A = (A_{nk})$, где $A_{nk} \in \in L(X, Y)$, мы называем *обратимым* на FK-пространстве $E(Y)$, если для каждой $y \in E(Y)$ существует в точности одна $x \in s(X)$ с $Ax = y$. Если A — обратимый метод на $E(Y)$, то существует обратный оператор $A^{-1} \in L(E(Y), E_A(X))$ и FK-пространства $E(Y)$ и $E_A(X)$ являются топологически изоморфными.

Предложение 6. *Пусть X, Y и Z являются F-пространствами, $A_{nk} \in L(X, Y)$ и A — обратимый на $E(Y)$ метод. Оператор $F \in L(E_A(X), Z)$ в точности тогда, когда существует $G \in L(E(Y), Z)$ с*

$$Fx = G \circ Ax, \quad x \in E_A(X).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $F \in L(E_A(X), Z)$, тогда для всех $x \in E_A(X)$ имеем $Fx = F(A^{-1}y)$, где $y = Ax$. Так как $A^{-1} \in L(E(Y), E_A(X))$, то $F \circ A^{-1} \in L(E(Y), Z)$, т. е. существует $G \in L(E(Y), Z)$ с $Gy = F \circ A^{-1}y$ и имеет место равенство $Fx = G \circ Ax$.

Достаточность. Если $G \in L(E(Y), Z)$, то $G \circ A \in L(E_A(X), Z)$, так как $A \in L(E_A(X), E(Y))$.

Следующие теоремы являются непосредственными следствиями из предложения 6 и теорем 1 и 2.

Теорема 6. *Если метод A, где $A_{nk} \in L(X, Y)$, является обратимым методом на $c_0(Y)$, то $F \in L(c^0{}_A(X), Z)$ в точности тогда, когда*

$$Fx = \Sigma\, \Phi_n \eta_n, \quad x \in c^o{}_A(X),$$

где $\Phi_n \in L(Y, Z)$ и $(\Phi_n) \in BS(Y, Z)$.

Обратимый на $c(Y)$ метод называем *обратимым.*

Теорема. 7. *Если метод A, где $A_{nk} \in L(X, Y)$, является обратимым, то $F \in L(c_A(X), Y)$ в точности тогда, когда*

$$Fx = \Phi\eta + \Sigma\, \Phi_n(\eta_n - \eta), \quad x \in c_A(X),$$

где $\Phi, \Phi_n \in L(Y, Y)$ и $(\Phi_n) \in BS(Y, Y)$.

Если X и Y — произвольные F-пространства, то ненулевой матрицы A с $A_{nk} \in L(X, Y)$ может не существовать (например, $X = TM(S, \Sigma, \mu)$, где $S = [0, 1]$ и μ — мера Лебега, а $Y = \mathbf{R}$). Существование же обратимого метода A, где $A_{nk} \in L(X, Y)$, является еще более жестким условием. На это указывает и следующее

Предложение 7. *Пусть A — обратимый метод на FK-пространстве $E(Y)$ и $A_{nk} \in L(X, Y)$. Топологическое сопряженное X' разделяет точки на X в точности тогда, когда Y' разделяет точки на Y.*

Доказательство. Пусть $E_A(X)'$ разделяет точки на $E_A(X)$ и $y^1, y^2 \in E(Y)$ с $y^1 \neq y^2$. Тогда $A^{-1}y^1 \neq A^{-1}y^2$ и существует $f \in E_A(X)'$ с $fA^{-1}y^1 \neq fA^{-1}y^2$. Так как $f \circ A^{-1} \in E(Y)'$ согласно предложению 6, то $E(Y)'$ разделяет точки на $E(Y)$.

Если же $E(Y)'$ разделяет точки на $E(Y)$ и $x^1, x^2 \in E_A(X)$ с $x^1 \neq x^2$, то $Ax^1 \neq Ax^2$ и для некоторого $g \in E(Y)'$ имеем $gAx^1 \neq gAx^2$. Но $g \circ A \in E_A(X)'$ по предложению 6 и $E_A(X)'$ разделяет точки на $E_A(X)$.

Мы доказали, что $E_A(X)'$ разделяет точки на $E_A(X)$ тогда и только тогда, когда $E(Y)'$ разделяет точки на $E(Y)$. Из предложения 1 следует, что X' разделяет точки на X в точности тогда, когда $E_A(X)'$ разделяет точки на $E_A(X)$, а Y' разделяет точки на Y в точности тогда, когда $E(Y)'$ разделяет точки на $E(Y)$. Отсюда вытекает утверждение.

Пусть A обратим. Так как $\pi_k \in L(c_A(X), X)$, то $\pi_k \circ A^{-1} \in L(c(Y), X)$ и согласно теореме 2

$$\xi_k = \Psi_k\eta + \sum_i \Psi_{ki}(\eta_i - \eta) \tag{13}$$

для всех $x \in c_A(X)$ и $k = 1, 2, \ldots$. Здесь $\Psi_k, \Psi_{ki} \in L(Y, X)$ и при всех k последовательность $(\Psi_{ki}) \in BS(Y, X)$.

Пусть ряды $\sum \Psi_{ki}\eta$ сходятся при всех $\eta \in Y$ и k. Рассмотрим операторы $R_{km} \in L(c(Y), c_A(X))$, где

$$R_{km}y = \sum_{i=1}^{m} \Psi_{ki}\eta_i.$$

Тогда при всех k последовательность (R_{km}) сходится на фундаментальном множестве пространства $c(Y)$ к оператору R_k, где

$$R_k y = \sum_i \Psi_{ki}\eta_i.$$

Так как (Ψ_{ki}) при всех k удовлетворяет условию (BS), то (R_{km}) точечно ограничена для каждого k. Из леммы 1 вытекает, что $R_{km}y \to R_k y$ при всех k и $y \in c(Y)$, т. е. ряды $\sum \Psi_{ki}\eta_i$ сходятся на $c(Y)$. Тогда из равенства (13) получаем

$$\xi_k = \varrho_k\eta + \sum_i \Psi_{ki}\eta_i,$$

где

$$\varrho_k\eta = (\Psi_k - \sum_i \Psi_{ki})\eta.$$

Предложение 8. *Если имеет место равенство*

$$\sum_k \sum_i A_{nk}\Psi_{ki}\eta = \sum_i \sum_k A_{nk}\Psi_{ki}\eta \tag{14}$$

для всех n и $\eta \in Y$, то $\varrho_k \equiv \theta$.

Доказательство. Если взять $y = e(\eta)$ с $\eta \in Y$, то

$$\xi_k = \varrho_k\eta + \sum_i \Psi_{ki}\eta$$

и из (14) получим

$$\eta = \sum_k A_{nk}\xi_k = \sum_k A_{nk}\varrho_k\eta + \sum_k A_{nk} \sum_i \Psi_{ki}\eta =$$

$$= \sum_k A_{nk}\varrho_k\eta + \sum_i \sum_k A_{nk}\Psi_{ki}\eta.$$

Если $y = e_i(\eta)$ с $\eta \in Y$, то $\xi_k = \Psi_{ki}\eta$ и

$$\delta_{ni}\eta = \sum_k A_{nk}\xi_k = \sum_k A_{nk}\Psi_{ki}\eta.$$

В итоге получаем

$$\eta = \sum_k A_{nk}\varrho_k\eta + \sum_i \delta_{ni}\eta = \sum_k A_{nk}\varrho_k\eta + \eta,$$

откуда

$$\sum_k A_{nk}\varrho_k\eta=\theta$$

для всех n и $\eta\in Y$. Так как метод A обратим и матрица (A_{nk}) не содержит столбцов из нулей, то $\varrho_k\equiv\theta$.

Соответствующий результат для числовых матриц и последовательностей доказал Виланский [18].

Мы говорим, что матрица $C=(C_{nk})$ с $C_{nk}\in L(Y,X)$ является *правосторонней* (*левосторонней*) *обратной* матрицей для $A=(A_{nk})$, где $A_{nk}\in L(X,Y)$, если

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}C_{ki}\eta=\delta_{ni}\eta \qquad \forall\eta\in Y \tag{15}$$

(соответственно

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_{nk}A_{ki}\xi=\delta_{ni}\xi \qquad \forall\xi\in X).$$

В доказательстве предыдущего результата мы показали, что матрица (Ψ_{ki}) является правосторонней обратной для матрицы A. При этом сходимость рядов $\Sigma\,\Psi_{ki}\eta$ не имеет значения. Если же она имеет место и $\varrho_k\equiv\theta$, то (Ψ_{ki}) является и левосторонней обратной для матрицы A. Действительно, в таком случае

$$\xi_k=\sum_i \Psi_{ki}\sum_j A_{ij}\xi_j$$

и если $x=e_r(\xi)$, где $\xi\in X$, то

$$\delta_{kr}\xi=\sum_i \Psi_{ki}\sum_j A_{ij}\delta_{rj}\xi=\sum_i \Psi_{ki}A_{ir}\xi.$$

Матрицу $A=(A_{nk})$ с $A_{nk}\in L(X,Y)$ мы называем *нормальной*, если $A_{nk}=\theta$ при $k>n$ и операторы A_{kk} являются биективными отображениями X на Y. Примером нормальной нечисловой матрицей служит матрица $A=(A_{nk})$, где $A_{nk}\in L(X,X)$ с $A_{nk}=\theta$ при $n<k$ и $A_{kk}\xi=a_{kk}\xi$, а $a_{kk}\in\mathbf{R}$ и $a_{kk}\neq 0$.

Для нормальной матрицы A существует единственная правосторонняя обратная матрица $C=(C_{nk})$ с $C_{nk}\in L(Y,X)$. Когда $n=1$, то согласно (15) имеем $A_{11}C_{11}\eta=\eta$ и $A_{11}C_{1i}\eta=\theta$ при $i>1$, поэтому $C_{11}=A_{11}{}^{-1}$ и $C_{1i}=\theta$ при $i>1$. При $n=2$ справедливы равенства

$$A_{21}C_{11}\eta+A_{22}C_{21}\eta=\theta,$$

$$A_{22}C_{22}\eta=\eta, \quad A_{22}C_{2i}\eta=\theta$$

для $i>2$, откуда $C_{21}=-A^{-1}{}_{22}A_{21}A^{-1}$, $C_{22}=A^{-1}{}_{22}$ и $C_{2i}=\theta$ при $i>2$. Продолжая таким путем, мы определим матрицу C, которая будет единственной.

Мы покажем, что C является и левосторонней обратной для нормальной матрицы A. Для этого в (15) возьмем $\eta = A_{ij}\xi$, где $\xi \in X$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{ni}\eta = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ni}A_{ij}\xi = A_{nj}\xi$$

и

$$A_{nj}\xi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{nk}C_{ki}A_{ij}\xi = \sum_{k=1}^{n} A_{nk} \sum_{i=1}^{k} C_{ki}A_{ij}\xi.$$

С другой стороны,

$$A_{nj}\xi = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}\delta_{kj}\xi$$

и поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} A_{nk}\left(\sum_{i=1}^{k} C_{ki}A_{ij} - \delta_{kj}\right)\xi = \sum_{k=1}^{n} A_{nk} \sum_{i=1}^{k} C_{ki}A_{ij}\xi - \sum_{k=1}^{n} A_{nk}\delta_{kj}\xi = \theta.$$

Рассмотрим матрицу $B = (B_{nk})$, где

$$B_{kj}\xi = \sum_{i=1}^{k} C_{ki}A_{ij}\xi - \delta_{kj}\xi.$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{n} A_{nk}B_{kj}\xi = \theta$$

при всех $\xi \in X$, то матрица $(C_{ki} + B_{ki})$ является правосторонней обратной для A. Поскольку C есть единственная правосторонняя обратная матрица для A, то $B_{ki} = \theta$ и C является левосторонней обратной для матрицы A.

Предложение 9. *Нормальная матрица $A = (A_{nk})$, где $A_{nk} \in L(X, Y)$, определяет обратимый метод суммирования и обратный оператор $A^{-1} \in L(c(Y), c_A(X))$ определяется обратной матрицей $C = (C_{nk})$.*

Доказательство. Пусть $x \in c_A(X)$ и (C_{mn}) — обратная для A матрица. Тогда

$$\sum_{n=1}^{m} C_{mn}\eta_n = \sum_{n=1}^{m} C_{mn} \sum_{k=1}^{n} A_{nk}\xi_k = \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=k}^{m} C_{mn}A_{nk}\xi_k = \xi_n,$$

т. е. $CAx = x$ и поэтому $C = A^{-1}$.

Следствие. *Если $X = Y$ и метод A определяется нормальной числовой матрицей $A = (a_{nk})$, то A является обратимым и обратный оператор A^{-1} определяется матрицей A^{-1}.*

§ 4. Включение методов суммирования

Пусть $A_{nk}, B_{nk} \in L(X, Y)$. Мы говорим, что метод B включает метод A, если

$$c_A(X) \subset c_B(X). \tag{16}$$

Вопрос о включении методов суммирования числовых последовательностей решен в случае, где A — обратимый метод.

В 1928 году Мазур доказал, что если $A = (a_{nk})$ — нормальная матрица, то B включает A в точности тогда, когда метод, определяемый матрицей BA^{-1}, является консервативным. Если A — произвольный обратимый метод суммирования числовых последовательностей, то соответствующий результат доказан Хиллом и называется теоремой Мазура—Хилла (см. [2], теорема 12.2).

Включение операторов и обобщенных методов суммирования изучал Жаворонков [4]. Он сформулировал общие условия для включения (16), где X — полное полуметризуемое линейное топологическое пространство или же полное бочечное пространство. В случае $X = \mathbf{R}$ или $X = \mathbf{C}$ из результатов Жаворонкова вытекает вышеупомянутая теорема Мазура—Хилла, которую мы докажем для обобщенных методов суммирования. В этом параграфе X и Y везде будут F-пространства.

Теорема 8. *Пусть A — обратимый и B — произвольный методы суммирования с A_{nk}, $B_{nk} \in L(X, Y)$. Включение* (16) *имеет место в точности тогда, когда*

$$(\Psi_k\eta) \in c_B(X) \qquad \forall \eta \in Y, \tag{17}$$

$$(\Psi_{ki}\eta) \in c_B(X) \qquad \forall \eta \in Y,\ i=1,\ 2,\ \ldots, \tag{18}$$

$$(D^n_{mi}) \in KS(Y, Y), \quad n=1,\ 2,\ \ldots, \tag{19}$$

$$(D_{nk}) \in KS(Y, Y), \tag{20}$$

где Ψ_k и Ψ_{ki} определены в (13), *а*

$$D^n_{mi}\eta = \sum_{k=1}^{m} B_{nk}\Psi_{ki}\eta, \qquad \eta \in Y,$$

$$D_{nk}\eta = \sum_i B_{ni}\Psi_{ik}\eta, \qquad \eta \in Y.$$

Доказательство. Для всех $x \in c_A(X)$ и m имеем

$$\sum_{k=1}^{m} B_{nk}\xi_k = \sum_{k=1}^{m} B_{nk}\Psi_k\eta + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m} B_{nk}\Psi_{ki}(\eta_i - \eta).$$

Так как $(\Psi_k\eta) \in c_A(X)$ для $\eta \in Y$, то она должна быть и B-суммируемой. Поэтому ряды $\sum B_{nk}\Psi_k\eta$ должны сходиться при всех n и $\eta \in Y$. Таким образом, согласно теореме 5 ряд $\sum B_{nk}\xi_k$ сходится при всех $x \in c_A(X)$ в точности тогда, когда методы $D^n = (D^n{}_{mi})$ удовлетворяют условиям (8) и (10), т. е.

$$\exists \lim_m D^n_{mi}\eta = D_{ni}\eta, \qquad \eta \in Y, \qquad n, i=1,\ 2,\ \ldots, \tag{21}$$

и выполняется (19). Тогда по теореме 5 для всех $y \in c_0(Y)$

$$\lim\nolimits_{D^n} y = \sum_i D_{ni}\eta_i = \sum_i \sum_k B_{nk}\Psi_{ki}\eta_i$$

и при $m \to \infty$ получим

$$\sum_k B_{nk}\xi_k = \sum_k B_{nk}\Psi_k\eta + \sum_i \sum_k B_{nk}\Psi_{ki}(\eta_i - \eta).$$

Так как $(\Psi_k\eta) \in c_B(X)$, то, согласно теореме 5, для существования $\lim_B x$ при всех $x \in c_A(X)$ необходимо и достаточно выполнение условия (20) и существование предела

$$\lim_n \sum_k B_{nk}\Psi_{ki}\eta, \qquad \eta \in Y, \quad i = 1, 2, \ldots . \tag{22}$$

Условия (21) и (22) равносильны условию (18). Теорема доказана.

Следствие 1. *Для включения $c^0{}_A(X) \subset c_B(X)$ необходимо и достаточно выполнение условий* (18), (19) *и* (20).

Следствие 2. *Если B — конечнострочная матрица, то для включения* (16) *необходимо и достаточно выполнение условий* (17), (18) *и* (20).

Следствие 3. *Если B — конечнострочная матрица, то $c^0{}_A(X) \subset c_B(X)$ в точности тогда, когда выполняются условия* (18) *и* (20).

Последний результат был в случае, где X и Y — пространства Фреше, а $c^0{}_A(X) \supset c_0(X)$, доказан Вудом ([19], теорема 5.1).

Если $X = Y$ и $A = I$, где $I = (\delta_{nk})$, то из теоремы 8 вытекает теорема 3 Кожима—Шура. Если же в следствии 2 взять $B = I$, то получим следующую теорему мерсерова типа.

Следствие 4. *Пусть $A = (A_{nk})$ — обратимый метод и $A_{nk} \in L(X, X)$. Включение $c_A(X) \subset c(X)$ имеет место в точности тогда, когда*

$$\exists \lim_k \Psi_{ki}\eta \qquad \forall \eta \in Y, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

$$\exists \lim \Psi_k\eta \qquad \forall \eta \in Y,$$

$$(\Psi_{ki}) \in KS(Y, X).$$

Теорема 8 и следствия 1—4 применимы, например, в случае, где $X = Y$ и A — обратимый метод суммирования, определенный числовой матрицей, обратная матрица которой известна.

В теории суммируемости числовых последовательностей часто при изучении включения (16) с целью освободиться от неприятного условия (19) в теореме 8 накладывают на матрицу A дополнительные ограничения. При доказательстве теорем включения в таких случаях используется общий вид непрерывного линейного функционала на поле суммируемости.

Исходя из полученного нами общего вида оператора из $L(c_A(X), Y)$, мы найдем необходимые условия для включения (16).

Предложение 10. *Пусть A — обратимый и B — произвольный методы с A_{nk}, $B_{nk} \in L(X, Y)$. Если $c_A(X) \subset s_B(X)$, то существуют R_n, $T_{nk} \in L(Y, Y)$ с*

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_{nk}\xi_k = R_n\eta + \sum_{m=1}^{\infty} T_{nm}(\eta_m - \eta). \tag{23}$$

При этом

$$(T_{nm}) \in BS(Y, Y), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Если $c_A(X) \subset c_B(X)$, то

$$(T_{nm}) \in KS(Y, Y) \tag{24}$$

и

$$\exists \lim_n T_{nm}\eta \qquad \forall \eta \in Y, \qquad m = 1, 2, \ldots. \tag{25}$$

Доказательство. Если $c_A(X) \subset s_B(X)$, то оператор $B_n \in L(c_A(X), Y)$. Первая часть предложения вытекает из теоремы 7. Если $c_A(X) \subset c_B(X)$, то для всех $x \in c^0{}_A(X)$ имеем

$$B_n x = \sum_m T_{nm} \sum_i A_{mi}\xi_i$$

и так как A является обратимым методом, то согласно теореме 5 выполнены условия (24) и (25).

Следствие. *Если $e_k(\xi) \in c_A(X)$ и имеет место включение* (16), *где A_{nk}, $B_{nk} \in L(X, Y)$, то*

$$B_{nk}\xi = R_n a_k \xi + \sum_m T_{nm}(A_{mk} - a_k)\xi, \qquad \xi \in X. \tag{26}$$

Доказательство. Равенство (26) вытекает из (23) при $x = e_k(\xi)$.

Соответствующие результаты для числовых последовательностей доказаны Расселем [17] и Каулингом [14]. Ими выведены и достаточные условия для (16), когда $c_A(\mathbf{R}) \subset c_A(\mathbf{R})_{AB}$.

Для FK-пространства $E(X)$ обозначим

$$E(X)_{OAK(X,Y)} = \{x \in E(X) : Fx = \sum Fe_k(\xi_k) \ \ \forall F \in L(E(X), Y)\}$$

и в случае $E(X)_{OAK(X,Y)} = E(X)$ говорим, что в $E(X)$ имеет место *операторная сходимость по отрезкам.*

Введенное понятие является обобщением понятия слабой сходимости по отрезкам. Согласно определению из сходимости по отрезкам следует операторная сходимость по отрезкам.

Теорема 9. *Пусть A — обратимый на $c_0(Y)$ и B — произвольный методы суммирования с $A_{nk}, B_{nk} \in L(X, Y)$ и $a_k = \theta$. Если $c^0{}_A(X)_{OAK(X,Y)} = c^0{}_A(X)$, то $c^0{}_A(X) \subset c_B(X)$ в точности тогда, когда существует матрица $T = (T_{nk})$ с $T_{nk} \in L(Y, Y)$, которая удовлетворяет условиям* (24) *и* (25), *а $B = TA$.*

Здесь $B = TA$ означает

$$B_{nk}\xi = \sum_i T_{ni}A_{ik}\xi, \qquad \xi \in X.$$

Доказательство. Необходимость. Если $c^0{}_A(X) \subset c_B(X)$, то согласно предложению 10 имеем

$$B_n x = \sum_m T_{nm} \sum_i A_{mi} \xi_i, \qquad x \in c^0{}_A(X),$$

где для $T = (T_{nm})$ выполняются условия (24) и (25). Так как $c^0{}_A(X)_{OAK(X,Y)} = c^0{}_A(X)$, то

$$\sum_m T_{nm} \sum_i A_{mi} \xi_i = \sum_i \sum_m T_{nm} A_{mi} \xi_i \,. \tag{27}$$

Положив здесь $x = e_i(\xi)$ с $\xi \in X$, получаем $B = TA$.

Достаточноть. Пусть $B = TA$ и T удовлетворяет условиям (24) и (25). Тогда $T_n \in L(c_0(Y), Y)$, отсюда $T_n \cdot A \in L(c^0{}_A(X), Y)$ и имеет место равенство (27). Утверждение следует из теоремы 5.

Аналогично доказывается

Теорема 10. *Пусть A — обратимый L-регулярный, а B — произвольный методы с $L, A_{nk}, B_{nk} \in L(X, Y)$ и L — отображение из X на Y. Пусть $c^0{}_A(X)_{OAK(X,Y)} = c^0{}_A(X)$. Включение* (16) *имеет место в точности тогда, когда $B = TA$, где (T_{nk}) удовлетворяет условиям* (24) *и* (25).

В случае, если X и Y — пространства Фреше, предположение об операторной сходимости по отрезкам можно заменить легко проверяемым условием ограниченности по отрезкам. Для доказательства этого факта мы пользуемся следующим предложением.

Предложение 11. *Пусть X и Y — пространства Фреше и $A_{nk} \in L(X, Y)$. Если $c^0{}_A(X) \subset c^0{}_A(X)_{AB}$, то $c^0{}_A(X) = c^0{}_A(X)_{AK}$.*

Доказательство. Функционал $f \in c^0{}_A(X)'$ в точности тогда, когда существуют $(\alpha_k) \in s(X')$ такая, что $\Sigma\, \alpha_k \xi_k$ сходится при всех $x \in s_A(X)$, и[5] $(\tau_n) \in l(Y')$, что

$$fx = \sum_k \alpha_k \xi_k + \sum_n \tau_n \sum_k A_{nk} \xi_k$$

(см. [13], предложение 2.11). Тогда

$$fP_m x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \xi_k + \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \sum_{k=1}^{m} A_{nk} \xi_k.$$

Ясно, что $fP_m x \to fx$ в точности тогда, когда

$$\lim_m \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \sum_{k=1}^{m} A_{nk} \xi_k = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} \xi_k.$$

---

[5] Здесь

$$l(X) = \{x = (\xi_k) : \sum_k p_j(\xi_k) < \infty, \ j = 1, 2, \ldots\},$$

где полунормы p_j определяют топологию на локально выпуклом пространстве X.

Поэтому $x \in c^0{}_A(X)_{SAK}$ в точности тогда, когда $AP_m x$ сходится слабо к Ax в $c_0(Y)$, а согласно теореме 6 из [5] для этого необходимо и достаточно выполнение условий

$$\exists \lim_m \tau\Big(\sum_{k=1}^{m} A_{nk}\xi_k\Big) \qquad \forall \tau \in Y',$$

$$\Big\{\sum_{k=1}^{m} A_{nk}\xi_k : \ n, \ m = 1, \ 2, \ \ldots\Big\} \in \operatorname{bd} c_0(Y).$$

Первое условие выполняется потому, что $x \in c^0{}_A(X)$, а второе равносильно ограниченности по отрезкам в точке x.

Итак, если $c^0{}_A(X) \subset c^0{}_A(X)_{AB}$, то $c^0{}_A(X) = c^0{}_A(X)_{SAK}$ и согласно предложению 3, $c^0{}_A(X) = c^0{}_A(X)_{AK}$.

Положив здесь $X = Y = \mathbf{R}$, получим предложение 3.6 из [22].

Теорема 10. *Пусть X и Y — пространства Фреше, A — обратимый L-регулярный, а B — произвольный методы с L, A_{nk}, $B_{nk} \in L(X, Y)$. Если $c_A(X) \subset c_A(X)_{AB}$, то $c_A(X) \subset c_B(X)$ в точности тогда, когда существует матрица $T = (T_{nk})$ с $T_{nk} \in \in L(Y, Y)$, которая удовлетворяет условиям* (24) *и* (25) *и* $B = TA$.

Доказательство. Утверждение вытекает непосредственно из теоремы 9 и предложения 11.

Литература

1. Бакусова С. М., Некоторые свойства полей эффективности линейных операторов. Мат. зап. Уральск. ун-т, 1974, **8**, № 4, 11—18.
2. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Таллин, 1977.
3. Данфорд Н., Шварц, Дж., Линейные операторы. Общая теория. Москва, 1962.
4. Жаворонков В. Д., Структура полей эффективности линейных операторов (Кандидатская диссертация). Тарту, 1975.
5. Жаворонков В. Д., Конулевые и корегулярные преобразования. Мат. зап. Уральск. ун-т, 1975, **9**, № 4, 14—26.
6. Кангро Г. Ф., О матричных преобразованиях последовательностей в банаховых пространствах. Изв. АН ЭстССР. Сер. техн. и физ. матем. наук, 1956, **5**, № 2, 108—128.
7. Лейгер Т., Включение абстрактных FK-пространств. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, **448**, 40—45.
8. Меленцов А. А., Топологические основы теории бесконечных матриц. Мат. зап. Уральск. ун-т, 1967, **6**, № 2, 66—101.
9. Меленцов А. А., Бакусова С. М., Топология полей эффективности операторов непрерывных относительно тихоновской системы окрестностей. Мат. зап. Уральск. ун-т, 1968, **6**, № 4, 132—148.
10. Рудин У., Функциональный анализ. Москва, 1975.
11. Юримяэ Э. И., Некоторые вопросы обобщенных матричных методов суммирования. Корегулярные и конулевые методы. Изв. АН ЭстССР. Сер. техн. и физ. матем. наук, 1959, **8**, № 2, 115—121.
12. Юримяэ Э. И., Об одном классе обобщенных матричных методов суммирования. Изв. АН ЭстССР. Сер. техн. и физ. матем. наук, 1959, **8**, № 3, 166—171.

13. B a r i c, L. W., The chi function in generalized summability. Studia math., 1971, **39**, 155—180.
14. C o w l i n g, V. F., Inclusion relations between matrices. Math. Z., 1967, **98**, 192—195.
15. M e l v i n - M e l v i n, H., On generalized K-transformations in Banach spaces. Proc. London Math. Soc., 1951, **53**, 83—108.
16. R a m a n u j a n, M. S., Generalized Kojima-Toeplitz matrices in certain linear topological spaces. Math. Ann., 1965, **159**, 365—373.
17. R u s s e l l, D. C., Inclusion theorems for section-bounded matrix transformations. Math. Z., 1970, **113**, 255—265.
18. W i l a n s k y, A., Convergence fields of row-finite and row-infinite reversible matrices. Proc. Amer. Math. Soc., 1952, **3**, 389—391.
19. W o o d, B., Consistency and inclusion results for Toeplitz matrices of bounded linear operators. Compos. math., 1972, **24**, 313—327.
20. Z e l l e r, K., Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Z., 1951, **53**, 463—487.
21. Z e l l e r, K., Abschnittskonvergenz in FK-Räumen. Math. Z., 1951, **55**, 55—70.
22. Z e l l e r, K., Verallgemeinerte Matrixtransformationen. Math. Z., 1952, **56**, 18—20.

Поступило
14 III 1978

VERGLEICHSSÄTZE FÜR VERALLGEMEINERTE LIMITIERUNGSVERFAHREN

T. Leiger

Zusammenfassung

Es werden zwei F-Räume X und Y vorgelegt. Wir betrachten Matrixverfahren $A = (A_{nk})$, wobei $A_{nk} \in L(X, Y)$. Die allgemeinen Darstellungen für Operatoren aus $L(c(X); Y)$ (Theorem 2) und $L(c_A(X), Y)$ bei einem umkehrbaren Verfahren A (Theorem 6) werden erhalten. Dieser Darstellungen bedienen wir uns bei der Verallgemeinerung des Mazur-Satzes (Theorem 8) und der Sätze von Russell [17].

Tartu Ülikooli toimetised, Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1979, 504, 35—47.

МНОЖИТЕЛИ АБСОЛЮТНОЙ СУММИРУЕМОСТИ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

С. Барон

Тартуский государственный университет

Введение

Комплексные числа ε_n называются *множителями суммируемости в последовательности типа* $(|A|, |B|)$ (соответственно $(A, |B|)$ или $(A_0, |B|)$), если для любой абсолютно A-суммируемой (соответственно A-суммируемой или A-ограниченной) числовой последовательности

$$(U_n) \tag{0.1}$$

числовая последовательность

$$(\varepsilon_n U_n) \tag{0.2}$$

абсолютно B-суммируема. В дальнейшем будем их часто называть *множителями типа* $(|\mathfrak{A}|, |\mathfrak{B}|)$ (соответственно $(\mathfrak{A}, |\mathfrak{B}|)$ или $(\mathfrak{A}_0, |\mathfrak{B}|)$), обозначая здесь методы суммирования вместо латинских букв соответствующими готическими буквами, и писать $\varepsilon_n \in (|\mathfrak{A}|, |\mathfrak{B}|)$ (соответственно $\varepsilon_n \in (\mathfrak{A}, |\mathfrak{B}|)$ или $\varepsilon_n \in (\mathfrak{A}_0, |\mathfrak{B}|)$). Если $B = E$, где E — метод сходимости, то говорят о *множителях абсолютной сходимости в последовательности для* $|A|$, A или A_0.

В то время, как для нахождения множителей суммируемости в ряде разработаны даже некоторые общие методы (например, методы Мура—Кангро, Пейеримхоффа и др.), то множители суммируемости в последовательности сравнительно мало изучены. Первой в этой области является работа Бозанкет [13] относительно обычной суммируемости методами Чезаро C^α и C^β при $\alpha, \beta = 0, 1, \ldots$. Достаточные условия для этого типа множителей рассматривались Бозанкет еще раньше (см. [11], лемма 6). Распространяя результат Бозанкет на абсолютную суммируемость, Тайлер [15] нашла множители типа $(|\mathfrak{C}^\alpha|, |\mathfrak{C}^\beta|)$ при $\alpha, \beta = 0, 1, \ldots$. Множители типов $(|\mathfrak{C}^\alpha|, |\mathfrak{E}|)$, $(\mathfrak{C}^\alpha, |\mathfrak{E}|)$, $(\mathfrak{C}^\alpha{}_0, |\mathfrak{E}|)$ и др. при произвольном комплексном α с $\operatorname{Re} \alpha > 0$ нашел Абель [1]. В статье Кангро—Тыннова [8] дается полное решение вопроса при $A = P$ и произвольном методе B, где P — нормальный метод взвешенных средних Рисса (R, p_n).

3*

Множители сходимости и степенные (т. е. при $\varepsilon_n = x^n$) множители суммируемости в последовательности для метода Эйлера—Кноппа нашел Эспенберг [9, 10]. Отметим, что задача о нахождении множителей суммируемости в последовательности возникает при рассмотрении множителей суммируемости в ряде, если их искать методом Пейеримхоффа (см. [8], § 3, и [5], стр. 223 и 213—216, ср. также [12], лемма 7).

В настоящей статье находим определенные выше множители суммируемости в последовательности для методов A^α. Для них множители сходимости и абсолютной сходимости нашли Абель и Тюрнпу [2]. Через A^α обозначаем нормальный метод, определенный матрицей [1] (a_{nk}) преобразования последовательности в последовательность, в обратной матрице (ξ_{nk}) которой имеется $\alpha+1$ отличных от нуля диагоналей, т. е. (ср. [5], стр. 189)

$$\xi_{nk}=0 \quad \text{при} \quad k<n-\alpha.$$

Метод $B = (b_{nk})$ считаем треугольным.

Для упрощения условий теорем введем обозначения [2] (ср. [3], стр. 166, и [5], стр. 186 и 188)

$$K'\varepsilon_n=\sum_{k=n}^{n+\alpha-1}\sum_{\nu=k}^{n+\alpha-1}\xi_{\nu k}\varepsilon_\nu,$$

$$H'\varepsilon_n=\sum_{\nu=n}^{n+\alpha}\xi_{\nu n}\varepsilon_\nu,$$

$$b_k=\sum_{n=k}^{\infty}|\bar{b}_{nk}|, \qquad \bar{b}_{nk}=\bar{\Delta} b_{nk}=b_{nk}-b_{n-1,k}.$$

Обозначив (ср. [5], стр. 56)

$$\bar{\xi}_{nk}=\sum_{\nu=k}^{n}\xi_{n\nu}, \tag{0.3}$$

получаем

$$K'\varepsilon_n=\sum_{k=n}^{n+\alpha-1}\bar{\xi}_{kn}\varepsilon_k. \tag{0.4}$$

Условия доказываемых теорем сильно упрощаются, если предположить, что для метода A^α имеет место

$$\sum_{k=0}^{n}a_{nk}=1 \tag{0.5}$$

и в случае $\alpha \geqslant 1$ существуют конечные грани

$$D'_n=\sup_k|a_{n+k,n+k}\xi_{n+k,k}| \tag{0.6}$$

при $n = 1, \ldots, \alpha$, а для метода B выполнено условие [1]

$$b_n=O(b_{nn}). \tag{0.7}$$

[1] Всюду пользуемся обозначениями книги [5]. Если пределы изменения индексов не указаны, то они изменяются от 0 до $+\infty$.

[2] Величины с отрицательными индексами полагаем равными нулю. Поэтому полагаем $K'\varepsilon_n = 0$ при $\alpha = 0$.

§ 1. Множители типа $(|\mathfrak{A}^\alpha|, |\mathfrak{B}|)$

Начнем с доказательства следующей теоремы.

Теорема 1.1. *Пусть метод A^α удовлетворяет условию* (0.5) *и сохраняет абсолютную сходимость, а метод B треуголен. Для того, чтобы ε_n были множителями типа $(|\mathfrak{A}^\alpha|, |\mathfrak{B}|)$, необходимо и достаточно: при $\alpha = 0$ выполнение условий* [3]

$$(\varepsilon_n) \in |B|', \tag{1.1}$$

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \Big| \sum_{\nu=0}^{k} \bar{b}_{n\nu}\varepsilon_\nu \Big| = O(1), \tag{1.2}$$

а при $\alpha \geqslant 1$ — выполнение условий [4] (1.1), (1.2) *и*

$$\sum_{n=k}^{\infty} |K'(\bar{b}_{nk}\varepsilon_k)| = O(1). \tag{1.3}$$

Доказательство. Необходимость. Как известно (см. [5], стр. 226, теорема 26.3), если A нормален и B треуголен, то $\varepsilon_n \in (|\mathfrak{A}|, |\mathfrak{B}|)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=k}^{\infty} |\bar{\gamma}_{nk}| = O(1), \tag{1.4}$$

где

$$\bar{\gamma}_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} \bar{b}_{n\nu}\varepsilon_\nu\bar{\xi}_{\nu k}. \tag{1.5}$$

Так как по условию метод $A = A^\alpha$ сохраняет абсолютную сходимость, т. е. $|A| \supset |E|$, то для $\varepsilon_n \in (|\mathfrak{A}|, |\mathfrak{B}|)$ необходимо выполнение условия

$$\sum_{n=k}^{\infty} \Big| \sum_{\nu=k}^{n} \bar{b}_{n\nu}\varepsilon_\nu \Big| = O(1), \tag{1.6}$$

ибо по теореме 26.4 из [5] оно необходимо для $\varepsilon_n \in (|\mathfrak{E}|, |\mathfrak{B}|)$. При $k = 0$ из (1.6) следует (1.1). Заменяя в (1.6) индекс k на $k+1$, мы при помощи (1.1) получаем необходимость условия (1.2).

Далее, для методов A^α при выполнении (0.5) имеем (ср. [7], стр. 80)

$$\bar{\xi}_{nk} = \begin{cases} 1/a_{nn} & \text{при} \quad k = n, \\ 1 & \text{при} \quad 0 \leqslant k \leqslant n-\alpha, \end{cases}$$

ибо, ввиду равенства (0.3),

$$\bar{\xi}_{nk} = 1 - \sum_{\nu=0}^{k-1} \xi_{n\nu},$$

так как $\bar{\xi}_{n0} = 1$ (см. формулу (9.11) и теорему 9.2 из [5]). Следовательно,

---

[3] Напомним, что условие (1.1) означает абсолютную B-суммируемость последовательности (ε_n).

[4] При наличии двух индексов операторы K' и H' применяем относительно второго индекса. Также $\Delta s_{nk} = s_{nk} - s_{n,k+1}$.

$$\overline{\gamma}_{nk}=K'(\overline{b}_{nk}\varepsilon_k)+\sum_{\nu=k+\alpha}^{n}\overline{b}_{n\nu}\varepsilon_\nu, \tag{1.7}$$

откуда, ввиду необходимости условия (1.6) и треугольности B, следует необходимость условия (1.3).

Достаточность. Из условий (1.1) и (1.2) вытекает (1.6), а ввиду (1.7) из (1.3) и (1.6) следует (1.4).

Теорема 1.1 доказана.

В теореме 1.1 трудно проверяемым является условие (1.3). Поэтому рассмотрим несколько случаев, когда оно упрощается.

Если (0.5) выполнено, то $A^0 = E$, для которого $K'\varepsilon_n = 0$.

При $\alpha = 1$ имеем $A^1 = (R, p_n)$ (см. [7], стр. 81) и условие (1.3) превращается в

$$b_n P_n \varepsilon_n = O(p_n). \tag{1.8}$$

Следовательно, по теореме 1.1 для $P = (R, p_n)$ верно

Следствие 1.1. *Пусть метод P сохраняет абсолютную сходимость, а B треуголен. Для того, чтобы ε_n были множителями типа* ($|\mathfrak{P}|$, $|\mathfrak{B}|$), *необходимо и достаточно выполнение условий* (1.1), (1.2) *и* (1.8).

Следствие 1.1 при произвольном B доказана в статье Кангро—Тыннова ([8], теорема 8).

При $\alpha > 1$ удобна

Теорема 1.2. *Пусть метод A^α удовлетворяет условию* (0.5), *сохраняет абсолютную сходимость и существуют конечные D'_n при $n = 1, \ldots, \alpha - 1$, а метод B треуголен и удовлетворяет условию* (0.7). *Для того, чтобы ε_n были множителями типа* ($|\mathfrak{A}^\alpha|$, $|\mathfrak{B}|$), *необходимо и достаточно выполнение условий* (1.1), (1.2) *и*

$$\varepsilon_n = O(a_{nn}/b_{nn}). \tag{1.9}$$

Доказательство. Из (1.3) при $n = k$ получаем необходимость условия (1.9), ибо ввиду (1.5)

$$\overline{\gamma}_{kk}=\overline{b}_{kk}\varepsilon_k\overline{\xi}_{kk}=b_{kk}\varepsilon_k/a_{kk}.$$

Учитывая теорему 1.1, остается показать, что из условий теоремы 1.2 следует условие (1.3), что сделать очень просто. Действительно, применяя равенство (0.3), условие (1.9) и определение величин (0.6), так как $0 \leqslant k + \alpha - 1 - \varkappa \leqslant \alpha - 1$, получаем

$$K'(\overline{b}_{nk}\varepsilon_k)=\sum_{\nu=k}^{k+\alpha-1}\overline{b}_{n\nu}\varepsilon_\nu\sum_{\varkappa=k}^{\nu}\xi_{\nu\varkappa}=\sum_{\varkappa=k}^{k+\alpha-1}\sum_{\nu=0}^{k+\alpha-1-\varkappa}\overline{b}_{n,\nu+\varkappa}\varepsilon_{\nu+\varkappa}\xi_{\nu+\varkappa,\varkappa}=$$

$$=O(1)\sum_{\varkappa=k}^{k+\alpha-1}\sum_{\nu=0}^{\alpha-1}|\overline{b}_{n,\nu+\varkappa}/b_{\nu+\varkappa,\nu+\varkappa}|D'_\nu.$$

Отсюда ввиду условия (0.7) выводим

$$\sum_{n=k}^{\infty}|K'(\overline{b}_{nk}\varepsilon_k)|=O(1)\sum_{\nu=0}^{\alpha-1}\sum_{\varkappa=k}^{k+\alpha-1}b_{\nu+\varkappa}|b_{\nu+\varkappa,\nu+\varkappa}|^{-1}=O(1).$$

Условию (0.7) удовлетворяют многие методы суммирования B, например (см. [3], § 5), метод Вороного—Нёрлунда (WN, q_n) при $0 \leqslant q_n \downarrow$, метод взвешенных средних Рисса (R, q_n), сохраняющий абсолютную сходимость, метод Бернштейна—Рогозинского и др. Все же условие (0.7) — сильное ограничение, ибо, например, метод Чезаро C^β удовлетворяет ему лишь при $-1 < \beta \leqslant 1$ или $-1 < \operatorname{Re} \beta < 1$. Поэтому докажем новую теорему, в которой (0.7) заменится более слабым условием [4]

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} |\Delta \bar{b}_{nk}| = O(b_{kk}). \tag{1.10}$$

Действительно, условию (1.10) удовлетворяет метод Вороного—Нёрлунда (WN, q_n), если $q_n > 0$, а Δq_n не убывает и ограничена. Это потому, что $Q_n \uparrow$ и

$$\bar{b}_{nk} = \bar{\Delta}(q_{n-k}/Q_n), \qquad \Delta \bar{b}_{nk} = \Delta q_{n-k} \cdot \bar{\Delta}(1/Q_n) + \Delta^2 q_{n-k}/Q_{n-1}.$$

Условию (1.10) также удовлетворяет любой метод GC^1, где G — произвольный нормальный метод суммирования, для которого (1.10) выполнено (см. [4], стр. 173).

При помощи преобразования Абеля, учитывая (0.4), находим

$$K'(\bar{b}_{nk}\varepsilon_k) = \sum_{\nu=k}^{k+\alpha-1} \Delta \bar{b}_{n\nu} \cdot \sum_{\varkappa=k}^{\nu} \bar{\xi}_{\varkappa k}\varepsilon_\varkappa + \bar{b}_{n,k+\alpha} K'\varepsilon_k,$$

откуда

$$K'(\bar{b}_{nk}\varepsilon_k) = \bar{b}_{nk} K'\varepsilon_k - \bar{\lambda}_{nk}, \tag{1.11}$$

где

$$\bar{\lambda}_{nk} = \sum_{\nu=k}^{k+\alpha-1} \Delta \bar{b}_{n\nu} \cdot \sum_{\varkappa=\nu+1}^{k+\alpha-1} \bar{\xi}_{\varkappa k}\varepsilon_\varkappa.$$

Пусть метод B удовлетворяет условиям (1.10) и

$$b_{kk} = O(b_{k+1,k+1}). \tag{1.12}$$

Тогда ввиду (0.3)

$$\sum_{n=k}^{\infty} |\bar{\lambda}_{nk}| \leqslant \sum_{\nu=k}^{k+\alpha-1} |b_{\nu\nu}| \sum_{\varkappa=\nu}^{k+\alpha-1} |\bar{\xi}_{\varkappa k}\varepsilon_\varkappa| =$$

$$= O(1) \sum_{\varkappa=k}^{k+\alpha-1} |\bar{\xi}_{\varkappa k}\varepsilon_\varkappa| \sum_{\nu=k}^{\varkappa} |b_{\nu\nu}| =$$

$$= O(1) \sum_{\varkappa=k}^{k+\alpha-1} |b_{\varkappa\varkappa}\varepsilon_\varkappa| \sum_{s=k}^{\varkappa} |\xi_{\varkappa s}| = O(1) \sum_{s=k}^{k+\alpha-1} \sum_{\varkappa=s}^{k+\alpha-1} |b_{\varkappa\varkappa}\varepsilon_\varkappa\xi_{\varkappa s}|.$$

Применяя необходимое условие (1.9), находим

$$\sum_{n=k}^{\infty} |\bar{\lambda}_{nk}| = O(1) \sum_{s=k}^{k+\alpha-1} \sum_{\varkappa=0}^{k+\alpha-1-s} |a_{\varkappa+s,\varkappa+s}\xi_{\varkappa+s,s}| =$$

$$= O(1) \sum_{s=k}^{k+\alpha-1} \sum_{\varkappa=0}^{\alpha-1} D'_\varkappa = O(1).$$

Поэтому, ввиду необходимости условия (1.3) теоремы 1.1, из равенства (1.11) вытекает необходимость условия[2]

$$b_n K'\varepsilon_n = O(1). \qquad (1.13)$$

По доказанному видно, что и обратно, ввиду (1.11) из (1.10) и (1.12) и необходимых условий (1.9) и (1.13) вытекает (1.3). Итак, на основе теоремы 1.1 доказана основная

Теорема 1.3. *Пусть метод A^α удовлетворяет условию* (0.5), *сохраняет абсолютную сходимость и существуют конечные D'_n при $n = 1, \ldots, \alpha - 1$, а метод B треуголен и удовлетворяет условиям* (1.10) *и* (1.12). *Для того, чтобы ε_n были множителями типа* $(|\mathfrak{A}^\alpha|, |\mathfrak{B}|)$, *необходимо и достаточно выполнение условий* (1.1), (1.2), (1.9) *и* (1.13).

Применим теорему 1.3 к методу $R = QP$ с $P = (R, p_n)$ и $Q = (R, q_n)$. Для него условие (0.5) выполнено, а вычисляя для R элементы матрицы (ξ_{nk}), видим, что R является методом A^2, причем $\xi_{n,n-1} = -(P_n/q_n + P_{n-1}/q_{n-1})Q_{n-1}/p_n$ и $\xi_{n,n-2} = P_{n-1}Q_{n-2}/(p_n q_{n-1})$. Следовательно, D'_1 и D'_2 конечны, если P и Q таковы, что

$$p_n = O(P_n), \quad q_n = O(Q_n), \quad q_{n+1}/Q_{n+1} = O(q_n/Q_n), \qquad (1.14)$$

и условие (1.13) принимает вид (ср. [3], стр. 177)

$$b_n (P_n Q_n \Delta e_n + q_n P_{n+1} e_{n+1}) = O(q_n), \qquad (1.15)$$

где $e_n = \varepsilon_n / p_n$. Таким образом, из теоремы 1.3 вытекает

Следствие 1.2. *Пусть методы P и Q удовлетворяют условиям* (1.14), *метод R сохраняет абсолютную сходимость, а метод B треуголен и удовлетворяет условиям* (1.10) *и* (1.12). *Для того, чтобы $\varepsilon_n \in (|\mathfrak{R}|, |\mathfrak{B}|)$, необходимо и достаточно выполнение условий* (1.1), (1.2), (1.15) *и*

$$b_{nn} P_n Q_n \varepsilon_n = O(p_n q_n).$$

В случае, когда A^α есть метод Чезаро C^α выполнено (0.5) и существуют $D'_n = |A_n^{-\alpha-1}|$, ибо $a_{nn} = 1/A_n^\alpha$, причем C^α сохраняет абсолютную сходимость (см. [5], стр. 191—192 и 85). Для проверки условия (1.13) теоремы 1.3 найдем удобную формулу для величин (0.3). Действительно, для метода C^α имеем

$$\bar{\xi}_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} A_\nu^\alpha A_{n-\nu}^{-\alpha-1} = \sum_{\nu=k}^{n} A_{n-\nu}^{-\alpha-1} \sum_{\varkappa=0}^{\nu} A_\varkappa^{\alpha-1},$$

откуда, обозначая[5] здесь $\bar{\xi}_{nk}^\alpha = \bar{\xi}_{nk}$, перестановкой порядка суммирования выводим

$$\bar{\xi}_{nk}^\alpha = A_{k-1}^\alpha A_{n-k}^{-\alpha} + \bar{\xi}_{nk}^{\alpha-1},$$

---

[5] Отметим, что (ξ^α_{nk}) — обратная матрица преобразования последовательности в ряд для метода C^α.

Применяя последнее рекуррентное соотношение последовательно α раз, находим

$$\bar{\xi}^{\alpha}_{nk}=1+\sum_{\varkappa=1}^{\alpha} A^{\varkappa}_{k-1} A^{-\varkappa}_{n-k}, \tag{1.16}$$

ибо $\xi^0_{nk} = 1$. Теперь, ввиду (0.4) и (1.16) можем писать

$$K'\varepsilon_n=\sum_{k=n}^{n+\alpha-1}\varepsilon_k+\sum_{\varkappa=1}^{\alpha} A^{\varkappa}_{n-1}\sum_{k=n}^{n+\alpha-1} A^{-\varkappa}_{k-n}\varepsilon_k,$$

откуда (см. [5], стр. 143)

$$K'\varepsilon_n=\sum_{k=n}^{n+\alpha-1}\varepsilon_k+\sum_{\varkappa=1}^{\alpha} A^{\varkappa}_{n-1}\Delta^{\varkappa-1}\varepsilon_n, \tag{1.17}$$

ибо $A^{-\varkappa}_{k-n}=0$ при $k>n+\varkappa-1$.

Если $\alpha=1$, то по (1.17) имеем $K'\varepsilon_n=(n+1)\varepsilon_n$ и условие (1.13) таково

$$b_n\varepsilon_n=O[(n+1)^{-1}]. \tag{1.18}$$

Поэтому, если $\alpha \geqslant 1$, то, ввиду включения $|C^1| \subset |C^\alpha|$, для $\varepsilon_n \in (|\mathfrak{C}^\alpha|, |\mathfrak{B}|)$ по теореме 1.3 необходимо выполнение (1.18). Если теперь потребуем, чтобы

$$(k+1)b_k=O[(n+1)b_n] \quad (k<n), \tag{1.19}$$

то из (1.18) следует оценка первой суммы в (1.17). Далее, заменив в (1.17) число α последовательно на $s=1, \ldots, \alpha-1$, ввиду включений $|C^s| \subset |C^\alpha|$ получаем, что для $\varepsilon_n \in (|\mathfrak{C}^\alpha|, |\mathfrak{B}|)$ из-за (1.13) необходимо выполнение условий

$$b_n\Delta^s\varepsilon_n=O[(n+1)^{-s-1}] \tag{1.20}$$

при всех $s=0, \ldots, \alpha-1$. Однако (см. Чжоу [14], доказательство леммы 13), условия (1.20) вытекают из условий (1.19) и

$$b_n\Delta^{\alpha-1}\varepsilon_n=O[(n+1)^{-\alpha}]. \tag{1.21}$$

Таким образом, из теоремы 1.3 получаем

Следствие 1.3. *Пусть* $\alpha=1, 2, \ldots$, *а метод* B *треуголен и удовлетворяет условиям* (1.10), (1.12) *и* (1.19). *Для того, чтобы* $\varepsilon_n \in (|\mathfrak{C}^\alpha|, |\mathfrak{B}|)$, *необходимо и достаточно выполнение условий* (1.1), (1.2), (1.21) *и*

$$b_{nn}\varepsilon_n=O[(n+1)^{-\alpha}]. \tag{1.22}$$

Применим теперь теорему 1.1 и следствие 1.3 к случаю $B=C^\beta$. Для метода [6] C^β

$$\bar{b}_{nk}=(nA^\beta_n)^{-1}(nA^{\beta-2}_{n-k}-\beta A^{\beta-1}_{n-k-1}), \tag{1.23}$$

ибо [7] $kA^{\beta-1}_{n-k}=nA^{\beta-1}_{n-k}-\beta A^{\beta}_{n-k-1}$. Ввиду (1.23)

$$\Delta\bar{b}_{nk}=(nA^\beta_n)^{-1}(nA^{\beta-3}_{n-k}-\beta A^{\beta-2}_{n-k-1}). \tag{1.24}$$

---

[6] См. [5], формулы (15.21) и (8.9).

[7] См. [5], стр. 80 и 181.

Следовательно [8], условие (1.10) выполнено при $-1 < \beta \leqslant 2$ или $-1 < \operatorname{Re}\beta < 2$. Условие (1.19) выполнено [8], причем условие (1.21) переходит в

$$\Delta^{\alpha-1}\varepsilon_n = O[(n+1)^{-\alpha}\varkappa_n], \tag{1.25}$$

где [8]

$$\varkappa_n = \begin{cases} (n+1)^{\operatorname{Re}\beta} & \text{при} \quad -1<\beta\leqslant 1 \quad \text{или} \quad -1<\operatorname{Re}\beta<1, \\ (n+1)/\ln(n+2) & \text{при} \quad \beta\neq 1 \quad \text{с} \quad \operatorname{Re}\beta=1, \\ n+1 & \text{при} \quad \beta\geqslant 1 \quad \text{или} \quad \operatorname{Re}\beta>1. \end{cases}$$

Рассмотрим условие (1.2). При $B = E$ оно переходит в $\varepsilon_n = O(1)$ и вытекает из (1.22), при $B = C^1$ оно означает

$$\sum_{\nu=0}^{k} \varepsilon_\nu = O(k+1), \tag{1.26}$$

что видно из (1.23), а при $B = C^2$ условие (1.2) есть

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} (nA^2_n)^{-1} \Big|\sum_{\nu=0}^{k} (2\nu - n)\varepsilon_\nu\Big| = O(1). \tag{1.27}$$

Покажем, что (1.26) необходимо при $B = C^2$. Тогда в силу включения $|C^\beta| \subset |C^2|$ оно необходимо и при $B = C^\beta$ с $\operatorname{Re}\beta < 2$. Действительно, обозначив через S^1_k и S^2_k чезаровские суммы последовательности (ε_n) и применяя преобразование Абеля ко внутренней сумме в (1.27), получаем

$$\sum_{\nu=0}^{k} (2\nu - n)\varepsilon_\nu = -2S^2_{k-1} + (2k-n)S^1_k.$$

Отсюда, учитывая, что из (1.1) при $B = C^2$ следует оценка $S^2_k = O[(k+1)^2]$, то из (1.27) вытекает

$$S^1_k \sum_{n=3k+1}^{\infty} n^{-2}|1 - 2k/n| = O(1),$$

что равносильно условию (1.26), ибо $1/3 < |1 - 2k/n| \leqslant 1$. Применяя преобразование Абеля ко внутренней сумме в (1.27), получаем, что и обратно из (1.26) вытекает (1.27).

Теперь можем доказать необходимость условия $b_k S^1_k = O(1)$, т. е. условия [8]

$$\sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon_\nu = O(\varkappa_n). \tag{1.28}$$

В самом деле, условие (1.28) получаем из (1.2) и (1.26), если ко внутренней сумме в (1.2) применим преобразование Абеля, с учетом (1.24) и (1.23), и убедимся в справедливости оценки

$$\sum_{n=k}^{\infty} [(n+1)^{-\beta}(n+1-\nu)^{\beta-3} + (n+1)^{-\beta-1}(n+1-\nu)^{\beta-2}] = O[(k+1)^{-2}] \tag{1.29}$$

при $0 \leqslant \nu \leqslant k$ и $-1 < \beta < 2$. Действительно, при $0 \leqslant \beta < 2$

---

[8] См. [4], стр. 171.

левая часть в (1.29) не превосходит величины

$$(k+1)^{-\beta}\sum_{n=k+\nu}^{\infty}[(n+1)^{\beta-3}+(n+1+\nu)^{-1}(n+1)^{\beta-2}]=O[(k+1)^{-2}],$$

а при $-1<\beta<0$ она равна

$$\sum_{n=k+\nu}^{\infty}(n+1+\nu)^{-\beta-1}[(n+1+\nu)(n+1)^{\beta-3}+(n+1)^{\beta-2}]=$$

$$=O[(k+1)^{-\beta-1}]\sum_{n=k}^{\infty}(n+1)^{\beta-2}=O[(k+1)^{-2}].$$

Применяя преобразование Абеля к (1.2), при помощи (1.24) и (1.29) находим, что и обратно из (1.28) следует (1.2).

Итак, доказано, что из теоремы 1.1 и следствия 1.3 вытекает

Следствие 1.4. *Пусть* $\alpha=0, 1, \ldots$ *и* $-1<\beta\leqslant 2$ *или* $-1<\operatorname{Re}\beta<2$. *Для того, чтобы* $\varepsilon_n\in(|\mathfrak{C}^\alpha|, |\mathfrak{C}^\beta|)$, *необходимо и достаточно при* $\alpha=0$ *выполнение условий* (1.28) *и*

$$(\varepsilon_n)\in|C^\beta|', \tag{1.30}$$

а при $\alpha\geqslant 1$ — *выполнение условий* (1.25), (1.28), (1.30) *и*

$$\varepsilon_n=O[(n+1)^{\beta-\alpha}].$$

Следствие 1.4 при $\beta=0, 1, \ldots$ доказала Тайлер ([15], стр. 345—350). При $\beta=0$ следствие 1.4 доказал Абель ([1], теорема 8).

Примечание. Все результаты § 1 верны и в случае, когда (0.1) — последовательность B-пространства X и ε_n — непрерывные линейные операторы из X в B-пространство Y, если во всех условиях теорем 1.1—1.3 и следствий 1.1—1.4 заменить ε_n на $\varepsilon_n x$ с $x\in X$ и знаки абсолютных величин заменить на нормы. В этом убеждаемся, если сравнить теорему Кноппа—Лоренца ([5], теорема 4.1), из которой вытекает теорема 1.1, с теоремой Кангро ([6], теорема 4).

§ 2. Множители типов $(\mathfrak{A}^\alpha, |\mathfrak{B}|)$ и $(\mathfrak{A}^\alpha{}_0, |\mathfrak{B}|)$

Имеет место следующая

Теорема 2.1. *Пусть метод* B *треуголен. Для того, чтобы* ε_n *были множителями типа* $(\mathfrak{A}^\alpha, |\mathfrak{B}|)$ *или* $(\mathfrak{A}^\alpha{}_0, |\mathfrak{B}|)$, *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\forall(d_n)\in m:\sum_k\Big|\sum_{n=k}^{\infty}d_nH'(\bar{b}_{nk}\varepsilon_k)\Big|<\infty, \tag{2.1}$$

и необходимо выполнение условия

$$\sum\Big|\frac{b_{nn}}{a_{nn}}\varepsilon_n\Big|<\infty. \tag{2.2}$$

Доказательство. По теоремам 26.1 и 12.1 из [5] к (2.1) и (2.2) приходим применением теорем Пейеримхоффа (см. [5], следствия 5.2 и 5.1) к

$$\bar{g}_{nk}=\sum_{\nu=k}^{n}\bar{b}_{n\nu}\varepsilon_{\nu}\xi_{\nu k}=H'(\bar{b}_{nk}\varepsilon_k)$$

и учитывая, что $\bar{g}_{nn}=b_{nn}\varepsilon_n/a_{nn}$.

Рассмотрим несколько случаев, когда трудно проверяемое условие (2.1) сильно упрощается.

Теорема 2.2. *Пусть для метода A^{α} существуют конечные D'_n при $n=1, \ldots, \alpha$, а метод B треуголен и удовлетворяет условию* (0.7). *Для того, чтобы ε_n были множителями типа* $(\mathfrak{A}^{\alpha}, |\mathfrak{B}|)$ *или* $(\mathfrak{A}^{\alpha}{}_0, |\mathfrak{B}|)$, *необходимо и достаточно выполнение условия* (2.2).

Доказательство. Учитывая теорему 2.1, остается доказать, что из условий теоремы 2.2 следует условие (2.1).

Отметим, что (2.1) вытекает из более жесткого условия

$$\sum_{k}\sum_{n=k}^{\infty}|H'(\bar{b}_{nk}\varepsilon_k)|<\infty. \tag{2.3}$$

Так как

$$H'(\bar{b}_{nk}\varepsilon_k)=\sum_{\varkappa=0}^{\alpha}\bar{b}_{n,\varkappa+k}\varepsilon_{\varkappa+k}\xi_{\varkappa+k,k}, \tag{2.4}$$

то по определению величин (0.6) имеем

$$H'(\bar{b}_{nk}\varepsilon_k)=O(1)\sum_{\varkappa=0}^{\alpha}|\bar{b}_{n,\varkappa+k}\varepsilon_{\varkappa+k}/a_{\varkappa+k,\varkappa+k}|D'_{\varkappa}.$$

Отсюда при помощи (0.7) и (2.2) выводим, что имеет место (2.3), ибо

$$\sum_{k}\sum_{n=k}^{\infty}|H'(\bar{b}_{nk}\varepsilon_k)|=O(1)\sum_{\varkappa=0}^{\alpha}\sum_{k}|\varepsilon_{\varkappa+k}/a_{\varkappa+k,\varkappa+k}|b_{\varkappa+k}=$$

$$=O(1)\sum_{\varkappa=0}^{\alpha}\sum_{k=\varkappa}^{\infty}|b_{kk}\varepsilon_k/a_{kk}|<\infty.$$

Теорема 2.2 доказана.

Теорему 2.2 при $B=E$ доказали Абель и Тюрнпу ([2], стр. 119).

Теорема 2.3. *Пусть для метода A^{α} существуют конечные D'_n при $n=1, \ldots, \alpha$, а метод B удовлетворяет условиям* (1.10), (1.12) *и*

$$\exists (c_n)\in m:\quad b_k=O\Big(\sum_{n=k}^{\infty}c_n\bar{b}_{nk}\Big). \tag{2.5}$$

Для того, чтобы ε_n были множителями типа $(\mathfrak{A}^{\alpha}, |\mathfrak{B}|)$ *или* $(\mathfrak{A}^{\alpha}{}_0, |\mathfrak{B}|)$, *необходимо и достаточно выполнение условий* (2.2) *и*

$$\sum b_n|H'\varepsilon_n|<\infty. \tag{2.6}$$

Доказательство. При помощи преобразования Абеля, аналогично (1.11), получаем

$$H'(\bar{b}_{nk}\varepsilon_k)=\bar{b}_{nk}H'\varepsilon_k-\bar{l}_{nk}, \tag{2.7}$$

где

$$\bar{l}_{nk}=\sum_{\nu=k}^{k+\alpha}\Delta\bar{b}_{n\nu}\cdot\sum_{\varkappa=\nu+1}^{k+\alpha}\xi_{\varkappa k}\varepsilon_{\varkappa}.$$

Ввиду (1.10) и (1.12), аналогично оценке $\bar{\lambda}_{nk}$ в доказательстве теоремы 1.3, находим

$$\sum_{n=k}^{\infty}|\bar{l}_{nk}|=O(1)\sum_{\varkappa=k}^{k+\alpha}|\xi_{\varkappa k}\varepsilon_{\varkappa}|\sum_{\nu=k}^{\varkappa}|b_{\nu\nu}|=O(1)\sum_{\varkappa=k}^{k+\alpha}|b_{\varkappa\varkappa}\varepsilon_{\varkappa}\xi_{\varkappa k}|=$$

$$=O(1)\sum_{\varkappa=0}^{\alpha}|b_{\varkappa+k,\,\varkappa+k}\varepsilon_{\varkappa+k}\xi_{\varkappa+k,k}|.$$

Сравнивая полученное с (2.4) и учитывая существование величин $D'_{\varkappa}$, заключаем, что так же, как при доказательстве теоремы 2.2, из необходимого по теореме 2.1 условия (2.2) следует

$$\sum_k\sum_{n=k}^{\infty}|\bar{l}_{nk}|=O(1)\sum_{\varkappa=0}^{\alpha}\sum_{k=\varkappa}^{\infty}|b_{kk}\varepsilon_k/a_{kk}|<\infty.$$

Теперь, принимая во внимание равенство (2.7) и условие (2.5), убеждаемся в том, что условие (2.1) теоремы 2.1 сводится к (2.6), ибо для любой $(d_n)\in m$

$$\sum_k\Big|\sum_{n=k}^{\infty}d_n\bar{b}_{nk}H'\varepsilon_k\Big|=O(1)\sum_k b_k|H'\varepsilon_k|=O(1)\sum_k\Big|\sum_{n=k}^{\infty}c_n\bar{b}_{nk}H'\varepsilon_k\Big|.$$

Теорема 2.3 доказана.

Для метода $P=(R,p_n)$ получаем $D'_1=\sup|P_k/P_{k+1}|$, что конечно, если

$$p_n=O(P_n). \tag{2.8}$$

Поэтому из теоремы 2.2 при $\alpha=1$ выводим

Следствие 2.1. *Пусть метод P удовлетворяет условию* (2.8), *а метод B треуголен и удовлетворяет условию* (0.7). *Для того, чтобы $\varepsilon_n\in(\mathfrak{P},\,|\mathfrak{B}|)$ или $\varepsilon_n\in(\mathfrak{P}_0,\,|\mathfrak{B}|)$, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\sum|b_{nn}P_n\varepsilon_n/p_n|<\infty.$$

Применяя теорему 2.3 к методу $R=PQ$, где $P=(R,p_n)$ и $Q=(R,q_n)$, аналогично следствию 1.2, получаем

Следствие 2.2. *Пусть методы P и Q удовлетворяют условиям* (1.14), *а метод B треуголен и удовлетворяет условиям* (1.10), (1.12) *и* (2.5). *Для того, чтобы $\varepsilon_n\in(\mathfrak{R},\,|\mathfrak{B}|)$ или $\varepsilon_n\in(\mathfrak{R}_0,\,|\mathfrak{B}|)$, необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\sum\Big|b_{nn}Q_n\frac{P_n\varepsilon_n}{p_nq_n}\Big|<\infty,\qquad\sum\Big|b_nQ_n\Delta\frac{P_n\Delta e_n}{q_n}\Big|<\infty.$$

В случае, когда A^α — метод Чезаро C^α имеем $H'\varepsilon_n = A^\alpha{}_n\Delta^\alpha\varepsilon_n$ и из теоремы 2.3 немедленно выводим

Следствие 2.3. *Пусть* $\alpha = 0, 1, \ldots$, *а метод B треуголен и удовлетворяет условиям* (1.10), (1.12) *и* (2.5). *Для того, чтобы* $\varepsilon_n \in (\mathfrak{C}^\alpha, |\mathfrak{B}|)$ *или* $\varepsilon_n \in (\mathfrak{C}^\alpha{}_0, |\mathfrak{B}|)$, *необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\sum |b_{nn}(n+1)^\alpha\varepsilon_n| < \infty, \qquad \sum b_n(n+1)^\alpha|\Delta^\alpha\varepsilon_n| < \infty.$$

Положим в следствии 2.3 метод $B = C^\beta$. Условие (2.5) выполнено при $\beta \geqslant 1$ или $\operatorname{Re}\beta > 1$, если взять $c_n = A_n^\beta / A_n^{\beta+i\psi}$, где $\psi \neq 0$ и вещественно, ибо по формуле (1.23) и формулам (15.19) и (15.18) книги [5] получаем

$$\left|\sum_{n=k}^{\infty} c_n\bar{b}_{nk}\right| = \left|\frac{\beta+i\psi}{1+i\psi}\frac{1}{A_k^{1+i\psi}} - \beta\frac{1}{(k+1)A_{k+1}^{i\psi}}\right| =$$

$$= \left|\frac{i\psi}{1+i\psi}\frac{1}{A_k^{1+i\psi}}\right| \sim \frac{|\psi\Gamma(1+i\psi)|}{k+1}.$$

Таким образом, из теоремы 2.2 и следствия 2.3 вытекает

Следствие 2.4. *Пусть* $\alpha = 0, 1, \ldots$ *и* $-1 < \beta \leqslant 2$ *или* $-1 < \operatorname{Re}\beta < 1$ *или* $1 < \operatorname{Re}\beta < 2$. *Для того, чтобы* $\varepsilon_n \in (\mathfrak{C}^\alpha, |\mathfrak{C}^\beta|)$ *или* $\varepsilon_n \in (\mathfrak{C}^\alpha{}_0, |\mathfrak{C}^\beta|)$, *необходимо и достаточно при* $-1 < \operatorname{Re}\beta < 1$ *выполнение условия*

$$\sum |(n+1)^{\alpha-\beta}\varepsilon_n| < \infty, \tag{2.9}$$

а при $\operatorname{Re}\beta \geqslant 1$ — *выполнение условий* (2.9) *и*

$$\sum (n+1)^{\alpha-1}|\Delta^\alpha\varepsilon_n| < \infty.$$

Следствие 2.4 при $\beta = 0$ доказано Абелем ([1], теорема 11).

Литература

1. Абель М., О множителях ψ-сходимости для методов Чезаро комплексного порядка. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1970, **253**, 179—193.
2. Абель М., Тюрнпу Х., Множители ψ-сходимости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1967, **206**, 106—121.
3. Барон С., Теоремы о множителях суммируемости для методов A^α. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1970, **253**, 165—178.
4. Барон С., О локальном свойстве абсолютной суммируемости продифференцированных рядов Фурье. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, **281**, 157—177.
5. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Таллин, 1977.
6. Кангро Г. Ф., О матричных преобразованиях последовательностей в банаховых пространствах. Изв. АН ЭстССР. Сер. техн. и физ.-матем. н., 1956, **5**, № 2, 108—128.
7. Кангро Г., Ламп Ю., Об одном классе матричных методов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, **177**, 80—91.

8. Кангро Г., Тыннов М., Множители суммируемости в последовательности для метода взвешенных средних Рисса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 249—262.
9. Эспенберг Х., О множителях суммируемости для метода Эйлера—Кноппа. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 241—249.
10. Эспенберг Х., О множителях суммируемости в последовательности для метода Эйлера—Кноппа. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1963, **31**, 73—81.
11. Bosanquet, L. S., Note on convergence and summability factors. II. Proc. London Math. Soc., (2), 1948, **50**, 295—304.
12. Bosanquet, L. S., Note on convergence and summability factors (III). Proc. London Math. Soc., (2), 1949, **50**, № 7, 482—496.
13. Bosanquet, L. S., On convergence and summability factors in a sequence. Mathematika, 1954, **1**, № 1, 24—44.
14. Chow, H. C., Note on convergence and summability factors. J. London Math. Soc., 1954, **29**, № 4, 459—476.
15. Tyler, B., Absolute convergence and summability factors in a sequence. J. London Math. Soc., 1958, **33**, № 3, 341—351.

Поступило
17 V 1978

ABSOLUTE SUMMABILITY FACTORS IN A SEQUENCE

S. Baron

Summary

Suppose that A^α is a normal matrix summability method, where the inverse matrix of sequence-to-sequence transformation has $\alpha+1$ non-zero diagonals, and let B be a triangle matrix method, satisfying the condition (0.7) or the conditions (1.10) and (1.12).

In the present paper the necessary and sufficient conditions for the sequence (ε_n) are considered, under which for any A^α-summable, or A^α-bounded or absolutely A^α-summable sequence (0.1) the sequence (0.2) is absolutely B-summable. As particular cases of A^α there are considered the weighted means method $P=(R,p_n)$ of Riesz, the method PQ, where $Q=(R,q_n)$, and the Cesàro method C^α.

Tartu Ülikooli toimetised, Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1979, **504**, 48—57.

О НУЛЬ-ВЫПУКЛЫХ СЕМЕЙСТВАХ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ

А. Тали

Таллинский педагогический институт

§ 1. Введение

Настоящая работа продолжает исследования о выпуклых семействах методов суммирования, начатые в статье [2].

Пусть A_α — семейство методов суммирования (с непрерывным вещественным параметром $\alpha > \alpha_0$ или же $\alpha \geqslant \alpha_0$), переводящих последовательности или ряды [1] $x = \{s_n\}$ в последовательности $A_\alpha x = \{t_n^\alpha\}$. Перенесем на данный случай определение, приведенное в работе [2] для матричных методов.

Определение 1. *Семейство A_α называется выпуклым, если*[2] *$A_\alpha \subset A_\beta$ при $\alpha < \beta$ и из условий*

$$A_\alpha x \in m, \quad A_\beta x \in c, \quad \alpha < \gamma < \beta$$

всегда следует $A_\gamma x \in c$.

Известно (см. [2], доказательство леммы 1), что важную роль в исследовании выпуклости методов суммирования играет нуль-выпуклость.

Определение 2. *Будем называть семейство A_α нуль-выпуклым (0-выпуклым), если*[3] *$A^0{}_\alpha \subset A^0{}_\beta$ при $\alpha < \beta$ и из условий*

$$A_\alpha x \in m, \quad A_\beta x \in c_0, \quad \alpha < \gamma < \beta$$

всегда следует $A_\gamma x \in c_0$.

В данной работе мы остановимся подробнее на 0-выпуклости. В § 2 мы докажем общую теорему, дающую достаточные условия для 0-выпуклости. Опираясь на работу [2], мы получим в § 3 более конкретные результаты для некоторых линейно связанных семейств. Здесь мы ограничиваемся изучением соотношений между методами A_α, не обращая внимания на конкретное определение этих методов. Поэтому доказываемые результа-

---

[1] Свободные индексы принимают значения 0, 1, 2, ...

[2] Включение $A_\alpha \subset A_\beta$ означает здесь, что $mA_\alpha \subset mA_\beta$ и $cA_\alpha \subset cA_\beta$.

[3] Включение $A^0{}_\alpha \subset A^0{}_\beta$ означает, что $mA_\alpha \subset mA_\beta$ и $c_0A_\alpha \subset c_0A_\beta$.

ты пригодны для обширных классов семейств методов суммирования (существует, например, сколь угодно много разных семейств, связанных одним и тем же соотношением (2)). В § 4 мы применим теорему о 0-выпуклости к нахождению тауберовых условий для методов, связанных соотношением (2). Все результаты, получаемые для методов A_α, переносятся на функциональные методы $\mathfrak{A}_\alpha$.

§ 2. Теорема о 0-выпуклости

1. Пусть A_α с $\alpha > \alpha_0$ (или $\alpha \geqslant \alpha_0$) — семейство методов суммирования, заданных в виде преобразований, переводящих последовательности (ряды) в последовательности. Аналогично лемме 1 работы [2], мы получим результат, упрощающий исследование 0-выпуклости.

Лемма 1. *Если $A^0_\alpha \subset A^0_\beta$ при $\alpha < \beta$ и из условий*

$$A_\alpha x \in m, \quad A_{\alpha+1} x \in c_0, \quad 0 < \delta < 1$$

всегда следует $A_{\alpha+\delta} x \in c_0$, то семейство A_α 0-выпукло.

Эта лемма позволяет сразу сформулировать следующую теорему о 0-выпуклости.

Теорема 1. *Пусть $A^0_\alpha \subset A^0_\beta$ при $\alpha < \beta$. Пусть, далее, существуют числа a, b и матричные методы*

$$E^{\alpha\delta\theta} = (e^{\alpha\delta\theta}_{nk}), \qquad G^{\alpha\delta\theta} = (g^{\alpha\delta\theta}_{nk})$$

такие, что при любых α, $0 < \delta < 1$ и $a < \theta < b$ справедливо неравенство

$$|t^{\alpha+\delta}_n| \leqslant \Big|\sum_{k=0}^{\infty} e^{\alpha\delta\theta}_{nk} t^{\alpha+1}_k\Big| + \Big|\sum_{k=0}^{\infty} g^{\alpha\delta\theta}_{nk} t^\alpha_k\Big| \tag{1}$$

для всех $x \in mA_\alpha \cap c_0 A_{\alpha+1}$. Если выполнены условия

1° *методы $E^{\alpha\delta\theta}$ являются методами типа $c_0 \to c_0$,*

2° *методы $G^{\alpha\delta\theta}$ удовлетворяют условию*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g^{\alpha\delta\theta}_{nk}| \leqslant \varphi^{\alpha\delta}(\theta), \qquad \lim_{\theta \to b^-} \varphi^{\alpha\delta}(\theta) = 0,$$

то семейство A_α является 0-выпуклым.

Доказательство. Выберем произвольно значение параметра α и элемент $x \in mA_\alpha \cap c_0 A_{\alpha+1}$. В силу леммы 1, достаточно доказать, что $x \in c_0 A_{\alpha+\delta}$ при каждом $0 < \delta < 1$. Так как $t_n{}^\alpha = O(1)$, то условие 2° позволяет нам зафиксировать число $\theta \in (a, b)$ такое, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g^{\alpha\delta\theta}_{nk}|\,|t^\alpha_k| = O(1)\varphi^{\alpha\delta}(\theta) < \varepsilon/2$$

для каждого $n = 0, 1, 2 \ldots$. Учитывая условия $t_n{}^{\alpha+1} = o(1)$ и 1°, подберем такое натуральное число N, что при $n > N$ имеет место неравенство

$$\Big|\sum_{k=0}^{\infty} e^{\alpha\delta\theta}_{nk} t^{\alpha+1}_{k}\Big| < \varepsilon/2.$$

К теореме 1 можно отнести следующее

Примечание 1. Следуя доказательству леммы 1 работы [2], мы получаем, что если $A_\alpha = (a_{nk}{}^\alpha)$ — матричные методы, которые преобразуют последовательности в последовательности и удовлетворяют условию

$$\lim_n \sum_{k=0}^{\infty} a^\alpha_{nk} = a^\alpha$$

с $a^\alpha \neq 0$, то из 0-выпуклости семейства A_α следует его выпуклость. В частности, если $a^\alpha = 1$, то методы A_α к тому же совместны.

2. Приведем теперь интегральный аналог теоремы 1. Пусть $\mathfrak{A}_\alpha$ с $\alpha > \alpha_0$ (или $\alpha \geqslant \alpha_0$) — методы суммирования[4], заданные в виде преобразований, переводящих функции $x = s(u)$ из X (или последовательности (ряды) $x = \{s_n\}$) в функции $t^\alpha(u) \in X$, где X — множество функций с $u \geqslant 0$, интегрируемых[5] и ограниченных на любом отрезке $[0, u]$. Сформулируем для этого случая определение 0-выпуклости.

Определение 2′. *Семейство $\mathfrak{A}_\alpha$ называется 0-выпуклым, если*[6] $\mathfrak{A}^0{}_\alpha \subset \mathfrak{A}^0{}_\alpha$ *при $\alpha < \beta$ и из условий*

$$t^\alpha(u) = O(1), \qquad \lim_{u\to\infty} t^\beta(u) = 0, \qquad \alpha<\gamma<\beta$$

всегда следует $\lim\limits_{u\to\infty} t^\gamma(u) = 0.$

Аналогично теореме 1, мы приходим к следующему результату.

Теорема 1′. *Пусть $\mathfrak{A}^0{}_\alpha \subset \mathfrak{A}^0{}_\beta$ при $\alpha < \beta$. Пусть, далее, существуют числа a, b и интегральные методы $E^{\alpha\delta\theta}$ и $G^{\alpha\delta\theta}$ (определенные соответственно функциями*[7] *$e^{\alpha\delta\theta}$, $g^{\alpha\delta\theta}$) такие, что при любых α, $0 < \delta < 1$ и $a < \theta < b$ справедливо неравенство*

$$|t^{\alpha+\delta}(u)| \leqslant \Big|\int_0^\infty e^{\alpha\delta\theta}(u, v)\, t^{\alpha+1}(v)\, dv\Big| + \Big|\int_0^\infty g^{\alpha\delta\theta}(u, v)\, t^\alpha(v)\, dv\Big| \qquad (1')$$

для всех $x \in m\mathfrak{A}_\alpha \cap c_0\mathfrak{A}_{\alpha+1}$. Если выполнены условия

---

[4] Метод $\mathfrak{A}_\alpha$ суммирует x к сумме t, если $\lim\limits_{u\to\infty} t^\alpha(u) = t$.

[5] Интегрируемость полагается везде по Лебегу.

[6] Включение $\mathfrak{A}^0{}_\alpha \subset \mathfrak{A}^0{}_\beta$ означает, что из условий $t^\alpha(u) = O(1)$ и $t^\alpha(u) = o(1)$ следуют соответственно соотношения $t^\beta(u) = O(1)$ и $t^\beta(u) = o(1)$ при $u \to \infty$.

[7] Преобразования $E^{\alpha\delta\theta}$ и $G^{\alpha\delta\theta}$ преобразуют функции r и t соответственно в функции

$$\int_0^\infty e^{\alpha\delta\theta}(u, v)\, r(v)\, dv, \qquad \int_0^\infty g^{\alpha\delta\theta}(u, v)\, t(v)\, dv.$$

1° *методы* $E^{\alpha\delta\theta}$ *суммируют к нулю все функции из* X, *сходящиеся к нулю при* $y \to \infty$,

2° *методы* $G^{\alpha\delta\theta}$ *удовлетворяют условию*

$$\int_0^\infty |g^{\alpha\delta\theta}(u, v)|\, dv \leqslant \varphi^{\alpha\delta}(\theta), \qquad \lim_{\theta \to b^-} \varphi^{\alpha\delta}(\theta) = 0,$$

то семейство $\mathfrak{A}_\alpha$ *является* 0-*выпуклым.*

§ 3. Некоторые линейно связанные 0-выпуклые семейства

1. Предположим, что методы A_α и $A_{\alpha+\delta}$ с $\delta > 0$ связаны соотношением (см. [2])

$$t_n^{\alpha+\delta} = \frac{1}{b_n^{\alpha+\delta}} \sum_{k=0}^{n} d_{nk}^{\alpha\delta} b_k^\alpha t_k^\alpha, \tag{2}$$

где $(d_{nk}^{\alpha\delta})$ — треугольная матрица с $d_{nk}^{\alpha 1} = 1/M_\alpha$, причем M_α не зависит от k и n, а $\{b_n^\alpha\}$ — некоторая последовательность с $b_n^\alpha \neq 0$.

Отметим, что соотношение (2) обеспечивает выполнение неравенства (1). Это вытекает из доказательства теоремы 1 работы [2], если ввести обозначения:

$$e_{nk}^{\alpha\delta\theta} = \begin{cases} M_\alpha \Delta_k d_{nk}^{\alpha\delta} b_k^{\alpha+1}/b_n^{\alpha+\delta} & \text{при} \quad k < N, \\ M_\alpha d_{nN}^{\alpha\delta} b_N^{\alpha+1}/b_n^{\alpha+\delta} & \text{при} \quad k = N, \\ 0 & \text{при} \quad k > N \end{cases}$$

и

$$g_{nk}^{\alpha\delta\theta} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant N, \\ d_{nk}^{\alpha\delta} b_k^\alpha / b_n^{\alpha+\delta} & \text{при} \quad N < k \leqslant n, \\ 0 & \text{при} \quad k > n, \end{cases}$$

где $1/2 < \theta < 1$ и $N = [\theta n]$.

Далее, условия 1° и 2° теоремы 1 в этом случае совпадают с условиями 1°—3° теоремы 1 работы [2]. Таким образом, из теоремы 1 непосредственно вытекает следующий результат.

Теорема 2. *Если* $A^0{}_\alpha \subset A^0{}_\beta$ *при* $\alpha < \beta$ *и методы* A_α *связаны соотношением* (2), *удовлетворяющим при каждом* α *и* $0 < \delta < 1$ *условиям* 1°—3° *теоремы* 1 *работы* [2], *то семейство* A_α *является* 0-*выпуклым.*

Рассуждая так же, как и в теоремах 2 и 3 работы [2], мы получим следующие две теоремы о 0-выпуклости.

Теорема 3. *Если методы A_α связаны соотношением* (2), *удовлетворяющим условиям* 1°—6° *теоремы* 2 *работы* [2], *то семейство A_α является* 0-*выпуклым.*

Теорема 4. *Если методы A_α связаны соотношением* (2), *которое удовлетворяет при $0 < \delta < 1$ условиям*

1° *последовательности $\{|b_n{}^\alpha|\}$ монотонно возрастают и*[8]

$$M_2 n^\delta \leqslant |b_n{}^{\alpha+\delta}/b_n{}^\alpha| \leqslant M_1 n^\delta \qquad (n>0),$$

2° $d_{nk}{}^{\alpha\delta} = O\{(n-k+1)^{\delta-1}\}$ $\qquad (0 \leqslant k \leqslant n)$,

3° $\Delta_k d_{nk}{}^{\alpha\delta} = O\{(n-k+1)^{\delta-2}\}$ $\qquad (0 \leqslant k < n)$,

то семейство A_α является 0-*выпуклым.*

2. Теоремы 3 и 4 позволяют строить 0-выпуклые семейства A_α на базе любого заданного метода A. Для этого введем здесь аналогично работе [2] параметр α при помощи некоторого соотношения (2) с $\alpha \geqslant \alpha_0$, учитывая, что $\{t_n{}^{\alpha_0}\} = \{t_n\} = Ax$. Таким образом, мы получим *семейство A_α с $\alpha \geqslant \alpha_0$, построенное на базе метода A.*

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Если соотношения* (2) *с $\alpha \geqslant \alpha_0$ удовлетворяют условиям* 1°—6° *теоремы* 2 *работы* [2], *то семейство A_α, построенное на базе метода A, является* 0-*выпуклым.*

Отметим, что условия теоремы 5 выполнены, если выполнены условия 1°—3° теоремы 4 с $\alpha \geqslant \alpha_0$.

Примечание 2. Если $A = (a_{nk})$ — треугольная K-матрица, где

$$\lim_n \sum_{k=0}^{n} a_{nk} = a$$

и $a \neq 0$, а соотношение (2) удовлетворяет, кроме условий теоремы 5, еще условию

$$\lim_n \frac{1}{b_n^{\alpha+\delta}} \sum_{k=0}^{n} d_{nk}^{\alpha\delta} b_k^\alpha = d^{\alpha\delta}$$

с $d^{\alpha\delta} \neq 0$, $\alpha \geqslant \alpha_0$ и $0 < \delta < 1$, то семейство A_α, построенное на базе метода A, выпукло, причем матрицы A_α являются K-матрицами. В частности, если A является T-матрицей и $d^{\alpha\delta} = 1$, то матрицы A_α являются T-матрицами и семейство A_α выпукло с совместностью (см. [2], теорема 4).

[8] В условиях ограниченности постоянные могут зависеть от α и δ.

§ 4. Применение теоремы о 0-выпуклости к нахождению тауберовых условий

1. Если семейство A_α связано соотношением (2), удовлетворяющим условиям 2° и 3° теоремы 4, то мы можем в соотношении (2) заменить последовательности $\{b_n^\alpha\}$ на некоторые последовательности $\{c_n^\alpha\}$, удовлетворяющие условию 1° теоремы 4. Таким образом мы образуем новое семейство B_α, где

$$B_\alpha x=\{r_n^\alpha\},\qquad r_n^\alpha=s_n^\alpha t_n^\alpha,\qquad s_n^\alpha=b_n^\alpha/c_n^\alpha\quad \text{и}\quad \{t_n^\alpha\}=A_\alpha x.$$

Так как методы A_α связаны соотношением (2), то методы B_α связаны соотношением такого же типа:

$$r_n^{\alpha+\delta}=\frac{1}{c_n^{\alpha+\delta}}\sum_{k=0}^{n} d_{nk}^{\alpha\delta}c_k^\alpha r_k^\alpha.$$

Сказанное выше позволяет переформулировать теорему 4 следующим образом.

Теорема 6. *Пусть методы A_α связаны соотношением* (2), *удовлетворяющим условиям* 2° *и* 3° *теоремы* 4. *Если $\{c_n^\alpha\}$ с $c_n^\alpha\neq 0$ — некоторые последовательности, удовлетворяющие условию* 1° *теоремы* 4, *то семейство B_α с $r_n^\alpha=s_n^\alpha t_n^\alpha$ и $s_n^\alpha=b_n^\alpha/c_n^\alpha$ является* 0-*выпуклым.*

Последняя теорема о 0-выпуклости семейства B_α является в то же время тауберовой теоремой для методов A_α и может быть использована для нахождения тауберовых условий. Ясно, что она применима, например, к методам A_α, связанным соотношением

$$t_n^{\alpha+\delta}=\frac{1}{b_n^{\alpha+\sigma}}\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\delta-1}b_k^\alpha t_k^\alpha, \tag{3}$$

где $A_n^{\delta-1}$ — числа Чезаро, так как выполнены условия 2° и 3° теоремы 4 с $d_{nk}^{\alpha\delta}=A_{n-k}^{\delta-1}$.

В качестве примера рассмотрим

Следствие 1. *Пусть $A_\alpha=(N,p_n^\alpha,q_n)$ — обобщенные методы Нёрлунда, где*

$$t_n^\alpha=\frac{1}{P_n^\alpha}\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}^\alpha q_k s_k$$

с

$$\alpha>-1,\ P_n^\alpha=\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}^\alpha q_k,\ p_n^\alpha=\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\alpha-1}p_k,\ p_0>0,\ p_n\geqslant 0\ \text{и}\ q_n>0$$

при $n\geqslant 0$. Если $\{c_n^\alpha\}$ с $\alpha>\alpha_1\geqslant -1$ (или $\alpha\geqslant\alpha_1>-1$) и $c_n^\alpha\neq 0$ — некоторые последовательности, удовлетворяющие условиям теоремы 6, *то семейство B_α с $r_n^\alpha=P_n^\alpha t_n^\alpha/c_n^\alpha$ и $\alpha>\alpha_1\geqslant -1$ (или $\alpha\geqslant\alpha_1>-1$) является* 0-*выпуклым.*

Доказательство. Легко проверить, что методы (N, p_n^α, q_n) связаны соотношением (3) с $b_n^\alpha = P_n^\alpha$ и следствие 1 вытекает непосредственно из теоремы 6.

Примечание 3. Отметим, что если в следствии 1 положить $c_n^\alpha = b_n^\alpha$, то мы получим теорему о 0-выпуклости [9] семейства $A_\alpha = (N, p_n^\alpha, q_n)$. Поскольку треугольные методы $A_\alpha = (a_{nk}^\alpha)$, где $a_{nk}^\alpha = p_{n-k}^\alpha q_k / P_n^\alpha$, удовлетворяют условию

$$\sum_{k=0}^{n} a_{nk}^\alpha = 1,$$

то, в силу примечания 1, теорема о 0-выпуклости превращается в теорему о выпуклости (с совместностью). Аналогичная теорема доказана в работе [8]. В частности, если $q_n = 1$, то методы (N, p_n^α, q_n) являются методами Нёрлунда (N, p_n^α); если к тому же $p_0 = 1$ и $p_n = 0$ при $n > 0$, то мы получаем семейство Чезаро (C, α) (см. [2]).

Последовательности $\{c_n^\alpha\}$ с $\alpha \geqslant 0$, удовлетворяющие условиям теоремы 6, можно, например, построить при помощи заданной неубывающей положительной последовательности $\{V_n\}$, полагая $c_n^\alpha = V_n n^\alpha$. Последовательности $\{c_n^\alpha\}$ можно строить и при помощи двух заданных последовательностей $\{V_n\}$ и $\{W_n\}$.

Непосредственно из теоремы 6 вытекает следующее

Следствие 2. *Пусть $\{V_n\}$ и $\{W_n\}$ — положительные неубывающие последовательности, удовлетворяющие условию*

$$M_2 n^r \leqslant W_n / V_n \leqslant M_1 n^r \qquad (n > 0,\ r > 0).$$

Если методы A_α связаны соотношением (2), *удовлетворяющим условиям 2° и 3° теоремы 4, то семейство $B_{\alpha_1+\gamma}$ с*

$$c_n^{\alpha_1+\gamma} = (V_n)^{1-\gamma/r} (W_n)^{\gamma/r},$$

где $\gamma \in [0, r]$, а α_1 — некоторое произвольно выбранное число из области определения семейства A_α, является 0-выпуклым.

Примечание 4. Теоремы 1—6, а также следствия 1 и 2, сформулированные выше для числовых последовательностей $\{s_n\}$, переносятся на последовательности элементов отделимого локально выпуклого пространства E над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$, то есть на случай, когда $s_n \in E$. Для этого нужно в неравенстве (1) заменить знак абсолютной величины $|\cdot|$ на полунормы $p_\omega(\cdot)$, определяющие в E топологию. Далее, остается учесть тот факт, что условия, при которых треугольный матричный метод суммирует к нулю все сходящиеся к нулю последовательности, остаются при переходе от $\mathbf{R}$ к E неизменными (см. [1], утверждение 2 и его доказательство).

[9] Условие 1° теоремы 4 можно здесь ослабить, наложив условие монотонности только на последовательности $\{P_n^{\alpha+1}\}$. Соответствующая теорема доказывается при помощи теоремы 2.

2. Остановимся снова на функциональных метода $\mathfrak{A}_\alpha$, введенных в разделе 2 параграфа 2. Предположим, что методы $\mathfrak{A}_\alpha$ и $\mathfrak{A}_{\alpha+\delta}$ с $\delta > 0$ связаны соотношением (см. [2])

$$t^{\alpha+\delta}(u)=\frac{1}{b^{\alpha+\delta}(u)}\int_0^u d^{\alpha\delta}(u,v)\,b^\alpha(v)\,t^\alpha(v)\,dv, \qquad (2')$$

где функции b^α с $b^\alpha(u)\neq 0$ принадлежат множеству X, а функции $d^{\alpha\delta}$ дифференцируемы по v и $d^{\alpha 1}(u,v)=1/M_\alpha$ при $0\leqslant v<u$, причем M_α не зависит от v и u.

Отметим, что соотношению (2′) удовлетворяют, например, семейство нормальных средних Рисса (R,λ_n,α) и семейство интегральных методов Чезаро. Результаты, полученные выше для методов A_α легко переносятся на методы $\mathfrak{A}_\alpha$. Мы не будем приводить здесь интегральные аналоги теорем 2—5, заметим только, что при этом следует исходить из теоремы 1′, опираясь на теоремы 5 и 6 работы [2]. Сформулируем здесь аналог теоремы 6.

Теорема 6′. *Пусть* $|c^\alpha|$ *с* $c^\alpha(u)\neq 0$ — *неубывающие функции, которые удовлетворяют условию*

1° $M_2u^\delta\leqslant|c^{\alpha+\delta}(u)/c^\alpha(u)|\leqslant M_1u^\delta \qquad (u>0,\ 0<\delta<1).$

Если методы $\mathfrak{A}_\alpha$ *связаны соотношением* (2′), *удовлетворяющим при* $0<\delta<1$ *условиям*

2° $d^{\alpha\delta}(u,v)=O\{(u-v)^{\delta-1}\} \qquad (0\leqslant v<u),$

3° $\dfrac{\partial d^{\alpha\delta}(u,v)}{\partial v}=O\{(u-v)^{\delta-2}\} \qquad (0\leqslant v<u),$

то семейство $\mathfrak{B}_\alpha$ *с* $\mathfrak{B}_\alpha x=r^\alpha(u)$, *где* $r^\alpha(u)=b^\alpha(u)t^\alpha(u)/c^\alpha(u)$, *является* 0-*выпуклым.*

Ясно, что, если методы $\mathfrak{A}_\alpha$ связаны соотношением

$$t^{\alpha+\delta}(u)=\frac{M_{\alpha\delta}}{u^{\alpha+\delta}}\int_0^u (u-v)^{\delta-1}b^\alpha(v)\,t^\alpha(v)\,dv, \qquad (3')$$

то к семейству $\mathfrak{A}_\alpha$ применима теорема 6′, так как выполнены условия 2° и 3° этой теоремы с $d^{\alpha\delta}(u,v)=M_{\alpha\delta}(u-v)^{\delta-1}$. Таким образом, теорема 6′ применима, например, к семейству (R,λ_n,α) и к семейству интегральных методов Чезаро с $b^\alpha(u)=u^\alpha$ (см. [2]). Приведем ниже аналоги следствий 1 и 2.

Следствие 1′. *Пусть* $\mathfrak{A}_\alpha$ — *методы суммирования, определенные соотношением*

$$t^\alpha(u)=\frac{1}{P^\alpha(u)}\int_0^u p^\alpha(u-v)\,q(v)\,s(v)\,dv,$$

где

$$\alpha>0,\ P^{\alpha}(u)=\int_0^u p^{\alpha}(u-v)q(v)\,dv,\ p^{\alpha}(u)=\int_0^u (u-v)^{\alpha-1}p(v)\,dv,$$

а $p(u)$ и $q(u)$ — положительные функции, принадлежащие множеству X. Если c^{α} с $\alpha>\alpha_1\geqslant 0$ (или $\alpha\geqslant\alpha_1>0$) — некоторые положительные функции, удовлетворяющие условиям теоремы 6′, то семейство $\mathfrak{B}^{\alpha}$ с $r^{\alpha}(u)=P^{\alpha}(u)t^{\alpha}(u)/c^{\alpha}(u)$ является 0-выпуклым.

Доказательство. Так как семейство $\mathfrak{A}_{\alpha}$ связано соотношением (3′) с $b^{\alpha}(u)=P^{\alpha}(u)$ и $M_{\alpha\delta}=\Gamma(\alpha+\delta)/\Gamma(\alpha)\Gamma(\delta)$, то следствие вытекает непосредственно из теоремы 6′. Если же в следствии положить $c^{\alpha}(u)=P^{\alpha}(u)$, то мы получим теорему о 0-выпуклости семейства $\mathfrak{A}_{\alpha}$. Поскольку методы $\mathfrak{A}_{\alpha}$ удовлетворяют условию [10]

$$\int_0^u a^{\alpha}(u,v)\,dv=1,$$

то, аналогично примечанию 1, мы заключаем, что 0-выпуклое семейство $\mathfrak{A}_{\alpha}$ также выпукло (с совместностью).

Отметим, что функции c^{α} с $\alpha\geqslant 0$, удовлетворяющие условиям теоремы 6′, можно построить, например, при помощи заданной неубывающей функции $V(u)>0$, полагая $c^{\alpha}(u)=u^{\alpha}V(u)$.

Справедливо также следующее

Следствие 2′. *Пусть $V(u)$ и $W(u)$ — положительные неубывающие функции, удовлетворяющие условию*

$$M_2u^r\leqslant W(u)/V(u)\leqslant M_1u^r \qquad (u>0,\ r>0).$$

Если методы $\mathfrak{A}_{\alpha}$ связаны соотношением (2′), которое удовлетворяет условиям 2° и 3° теоремы 6′, то семейство $\mathfrak{B}_{\alpha_1+\gamma}$ с

$$c^{\alpha_1+\gamma}(u)=(V(u))^{1-\gamma/r}(W(u))^{\gamma/r},$$

где $\gamma\in[0,r]$, а α_1 — некоторое произвольно выбранное число из области определения семейства $\mathfrak{A}_{\alpha}$, является 0-выпуклым.

Теоремы тауберова типа с различными ограничениями на последовательности $\{V_n\}$ и $\{W_n\}$ (или на функции $V(u)$ и $W(u)$), вытекающие из утверждения следствия 2 (соответственно 2′), доказаны ранее для методов Чезаро и Рисса. Мы не будем здесь на них подробнее останавливаться. Отметим лишь, что такие теоремы для матричных методов (C,α) доказаны, например, Риссом [5], Рангачари [4] и Саката [6]; для методов (R,λ_n,α) аналогичные теоремы доказаны, например, Риссом [5] и Саката [7], более общую теорему, относящуюся также к интегральным методам Чезаро, доказали Ирвин и Пейеримхофф [3]. Более подробный обзор по этим теоремам дан в работах [6] и [7]. Отметим, что в упомянутых выше результатах ограничения несколько слабее, чем в следствии 2 (или 2′), однако наши заключения более общие.

---

[10] Здесь $a^{\alpha}(u,v)=p^{\alpha}(u-v)q(v)/P^{\alpha}(u)$.

Литература

1. Менихес Л., Суммирование в линейных топологических пространствах. Мат. зап. Уральск. ун-т, 1975, **9**, № 2, 65—76.
2. Тали А., Один способ для построения выпуклых семейств методов суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, **448**, 55—65.
3. Irwin, R., Peyerimhoff, A., On the convexity theorem of M. Riesz. Indian J. Math., 1967, **9**, № 1, 109—121.
4. Rangachari, M. S., Tauberian theorems for Cesàro sums. Colloq. Math., 1963, **11**, № 1, 101—108.
5. Riesz, M., Sur un théorème de la moyenne et ses applications. Acta litt. scient. Univ. hung., 1923, **1**, 114—126.
6. Sakata, H., Tauberian theorems for Cesàro sums. I. Proc. Japan Acad., 1965, **41**, № 7, 532—534.
7. Sakata, H., Tauberian theorems for Riesz means. Mem. Def. Acad., 1966, **5**, № 4, 335—340.
8. Sinha, R., Convexity theorem for (N, p, q) summability. Kyungpook Math. J., 1973, **13**, 37—40.

Поступило
4 V 1978

ON ZERO-CONVEX FAMILIES OF SUMMABILITY METHODS

A. Tali

Summary

Let A_α be a family of sequence-to-sequence or series-to-sequence transforms where index α varies continuously on the set (α_0, ∞) or $[\alpha_0, \infty)$.

The present paper continues researches on convex families of summability methods A_α begun in [2].

The family of summability methods A_α is said to be zero-convex if $mA_\alpha \subset mA_\beta$ and $c_0A_\alpha \subset c_0A_\beta$ for $\alpha<\beta$ and from $A_\alpha x \in m$, $A_\beta x \in c_0$ follows $A_\gamma x \in c_0$ for $\alpha<\gamma<\beta$.

In section 2 sufficient conditions for zero-convexity of the family A_α are established. In sections 3 and 4 some more specific results are obtained for families A_α which satisfy relations (2). The problem of constructing zero-convex families is studied also. Some Tauberian theorems for methods A_α are proved. All these results are transmitted to some functional summability methods $\mathfrak{A}_\alpha$.

Tartu Ülikooli toimetised, Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1979, **504**, 58—73.

МНОЖИТЕЛИ СУММИРУЕМОСТИ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ

Т. Лейгер

Тартуский государственный университет

Пусть $\mathfrak{D}$ — некоторый класс числовых последовательностей, а $B = (b_{nk})$ — метод суммирования. Числа[1] ε_k называются множителями B-суммируемости для $\mathfrak{D}$, если ряд $\sum \varepsilon_k \xi_k$ является B-суммируемым для всех $x = (\xi_k) \in \mathfrak{D}$. Обычно класс $\mathfrak{D}$ определяется некоторым методом суммирования $A = (a_{nk})$. Исходным результатом для теории множителей суммируемости является известная теорема Дедекинда—Адамара: ряд $\sum \varepsilon_k \xi_k$ сходится для всех сходящихся рядов $\sum \xi_k$ в точности тогда, когда $\sum |\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}| < \infty$. Подробный обзор о результатах и методах теории множителей суммируемости дан в главе IV книги С. Барона [1].

Пусть X и Y суть F-пространства над полем K, где $K = \mathbf{R}$ или $K = \mathbf{C}$, т. е. полные метризуемые линейные топологические пространства[2] и $A_{nk} \in L(X, Y)$. Обобщенный метод суммирования $A = (A_{nk})$ определяется преобразованием

$$\eta_n = \sum_k A_{nk} \xi_k, \tag{1}$$

где $\xi_k \in X$ и $\eta_n \in Y$. В настоящей статье исследуются множители суммируемости для таких методов суммирования. Тем самым продолжаем изучение суммируемости в F-пространствах, начатое в [7]. Мы пользуемся понятиями и обозначениями, введенными в указанной работе. Там же приведены основные результаты теории суммируемости в F-пространствах.

Первый параграф является вводным, в нем доказываются предложения относительно абстрактных рядов. В § 2 определим понятие множителей суммируемости для обобщенных методов суммирования и докажем основные теоремы, обобщающие известные результаты Пейеримхоффа [12]. В последних двух параграфах изучаются множители суммируемости для методов

---

[1] Если пределы изменения индексов не указаны, то они принимают все значения 0, 1, ...

[2] Через $L(M, N)$ обозначаем пространство всех непрерывных линейных операторов из M в N.

Чезаро и взвешенных средних Рисса. При этом наша главная цель — продемонстрировать применение обобщенного нами метода Пейеримхоффа для нахождения множителей суммируемости. Поэтому мы не будем во всех случаях выводить наиболее эффективные условия, а лишь на некоторых примерах в § 4.

§ 1. Понятия и общие предложения

Используемые ниже понятия и обозначения в основном введены в работе [7]. В этом параграфе даем некоторые новые определения и докажем несколько общих предложений.

Пространство последовательностей

$$cs(X)=\{x=(\xi_k):\ \exists \lim s_n=s,\ \ s_n=\xi_0+\xi_1+\ldots+\xi_n\}$$

является FK-пространством, базис окрестностей нуля $\mathfrak{B}cs(X)$ которого состоит из множеств $\{x\in cs(X):\ s_n\in U\}$ с $U\in\mathfrak{B}X$ (см. [2], § 7). Элементы пространства $cs(X)$ обычно называются рядами. Следуя Пейеримхоффу [12], обобщенные методы суммирования в виде преобразования ряда в последовательность называем *RF-методами*. Обобщенные методы суммирования в виде преобразования последовательности в последовательность, рассматриваемые в [7], будем называть *FF-методами*. Напомним, что FF-метод (RF-метод) A называется *консервативным*, если $c_A(X)\supset c(X)$ (соответственно $c_A(X)\supset cs(X)$).

Предложение 1. *Для включения $c^0{}_A(X)\supset c_0(X)$ необходимо и достаточно выполнение условий*

1° $\exists \lim\limits_n A_{nk}\xi=a_k\xi,\quad \xi\in X,$

2° $(A_{nk})\in KS(X,Y),$

с $a_k=\theta$.

Доказательство. Необходимость условий 1° и 2° вытекает из теоремы 5 статьи [7]. Кроме того, для всех $x\in c_0(X)$ верно равенство

$$\lim{}_A x=\sum a_k\xi_k. \tag{2}$$

Так как при $x\in c_0(X)$ имеем $\lim_A x=\theta$, то $a_k\xi=$ $=\lim_A e_k(\xi)=\theta$ для всех $\xi\in X$.

Достаточность следует из равенства (2).

Предложение 2. *Оператор $F\in L(cs(X),Y)$ в точности тогда, когда*

$$Fx=\sum \Phi_k\xi_k,\qquad x\in cs(X), \tag{3}$$

где[3] $(\Delta\Phi_k)\in BS(X,Y)$.

[3] Всюду $\Delta\Phi_{nk}=\Phi_{nk}-\Phi_{n,k+1}$.

Доказательство. Из-за равенства $cs(X)_{AK} = cs(X)$ каждый $F \in L(cs(X), Y)$ имеет вид (3). Преобразование Абеля дает

$$\sum_{k=0}^{m} \Phi_k \xi_k = \sum_{k=0}^{m-1} \Delta\Phi_k (s_k - s) + \Phi_0 s + \Phi_m (s_m - s), \qquad x \in cs(X). \qquad (4)$$

Необходимость. Пусть $F \in L(cs(X), Y)$. Тогда ряд $\Sigma\, \Phi_k \xi_k$ сходится при всех $x \in cs(X)$. Для произвольного $B \in \mathrm{bd}\, X$ множество $G = \{\Phi_m \xi : \xi \in B, \quad m = 0, 1, \ldots\} = \{F e_m(\xi) : \xi \in B, \ m = 0, 1, \ldots\}$ ограничено в Y как образ ограниченного в $cs(X)$ множества $\{e_m(\xi) : \xi \in B, \ m = 0, 1, \ldots\}$.

Рассмотрим метод суммирования $C = (C_{nk})$ с

$$C_{nk} = \begin{cases} \Phi_k, & \text{если } k = n, \\ \theta, & \text{если } k \neq n. \end{cases}$$

Этот метод удовлетворяет условиям 1° и 2°, и $c_k = \theta$. Действительно,

$$\{\sum_{k=0}^{m} C_{nk} \xi_k : \ \xi_k \in B, \ m, n = 0, 1, \ldots\} = G,$$

а $C_{nk}\xi \to \theta$ при $\xi \in X$ и $n \to \infty$. В силу предложения 1 имеем $\lim_C x = \lim \Phi_n \xi_n = \theta$ для всех $x \in c_0(X)$. Из равенства (4) получаем

$$\sum \Phi_k \xi_k = \sum \Delta\Phi_k (s_k - s) + \Phi_0 s, \qquad (5)$$

и, согласно теореме 1 из [7], имеем $(\Delta\Phi_k) \in BS(X, Y)$, ибо $(s_n - s)$ описывает всё $c_0(X)$, если x принимает все значения из $cs(X)$.

Достаточность. Пусть $(\Delta\Phi_k) \in BS(X, Y)$. Так как

$$\Phi_m \xi = \Phi_0 \xi - \sum_{k=0}^{m-1} \Delta\Phi_k \xi,$$

то $G \in \mathrm{bd}\, Y$ для каждого $B \in \mathrm{bd}\, X$. Отсюда получаем, что $\lim \Phi_n (s_n - s) = \theta$ для каждой $x \in cs(X)$. Согласно теореме 1 из [7] ряд $\Sigma\, \Delta\Phi_n (s_n - s)$ сходится при всех $x \in cs(X)$, а ввиду равенства (4) сходится ряд $\Sigma\, \Phi_k \xi_k$ и имеет место равенство (5). Предложение доказано.

Теперь найдем необходимые и достаточные условия для консервативности RF-метода $A = (A_{nk})$. Следующее предложение было для банаховых пространств X и Y доказано Мельвин-Мелвином ([11], теорема III) и Целлером ([15], предложение 2), а для пространств Фреше—Будом ([13], теорема 2.1).

Предложение 3. *Для включения* $c_A(X) \supset cs(X)$ *необходимо и достаточно выполнение условий* 1° *и*

$$(\Delta A_{nk}) \in KS(X, Y). \qquad (6)$$

Доказательство. Вопрос о существовании преобразования (1) с $x \in cs(X)$ решен предложением 2, ибо при доказательстве необходимости мы исходим из факта, что $A_n \in L(cs(X), Y)$, а для доказательства достаточности заметим, что из условия (6) для каждого n следует $(\Delta A_{nk}) \in BS(X, Y)$. В обоих случаях в силу равенства (5) имеем

$$\eta_n - A_{n0}s = \sum_k \Delta A_{nk}(s_k - s).$$

Так как $(s_n - s) \in c_0(X)$ при всех $x \in cs(X)$, то согласно теореме 5 из [7] существует $\lim(\eta_n - A_{n0}s)$ в точности тогда, когда выполняется условие (6) и

$$\exists \lim_n \Delta A_{nk}\xi, \qquad \xi \in X. \tag{7}$$

Для существования предела $\lim \eta_n$ должен существовать

$$a_0\xi = \lim_n A_{n0}\xi, \qquad \xi \in X. \tag{8}$$

Из условий (7) и (8) получим 1°. Обратно, из 1° получается (7). Таким образом, условия 1° и (6) необходимы и достаточны для консервативности RF-метода A.

Будем FF-метод (RF-метод) $A = (A_{nk})$ называть *L-регулярным*, если при всех $x \in c(X)$ (соответственно $x \in cs(X)$) имеем $L\xi = \lim_A x$ (соответственно $Ls = \lim_A x$), где $L \in L(X, Y)$.

Предложение 4. *Для L-регулярности RF-метода A необходимы и достаточны условия* 1° *и* (6) *с* $a_k = L$.

Доказательство. Условия 1° и (6) необходимы для L-регулярности метода A ввиду предложения 3. В силу равенства $cs(X)_{AK} = cs(X)$ для всех $x \in cs(X)$ верно равенство (2). Положив $x = e_i(\xi)$ с $\xi \in X$, из (2) получим необходимость условия $a_k = L$. Обратно, если в (2) все $a_k = L$, то

$$\lim_A x = \sum L\xi_k = Ls.$$

Предложение доказано.

Предложения 3 и 4 являются уточнениями результатов В. Д. Жаворонкова ([2], теорема 2.20). В частных случаях из них получаем вышеупомянутые теоремы Мелвин-Мелвина, Целлера и Вуда.

Мы называем FF-метод A *совершенным*, если

$$H_1 = \{e_k(\xi), \quad e(\xi): \quad \xi \in X, \ k = 0, 1, \ldots\},$$

где $e(\xi) = (\xi, \xi, \ldots)$, является фундаментальным множеством в $c_A(X)$. Подмножество $\{e_k(\xi): \xi \in X, k = 0, 1, \ldots\}$ обозначим через H.

Метод $A = (A_{nk})$ называется *обратимым*, если для каждой $y \in c(Y)$ система (1) имеет единственное решение. Метод $A = (A_{nk})$ с $A_{nk} = \theta$ при $k > n$ и биективными отображениями A_{nn} называем *нормальным*.

При $X = Y$ обобщенный метод суммирования A может быть задан числовой матрицей (a_{nk}). Такие методы будем обозначать через $A = (a_{nk})$.

§ 2. Обобщенный метод Пейеримхоффа для нахождения множителей суммируемости

В этом параграфе X, Y и Z — везде F-пространства, $\mathfrak{D}(X)$ — заданный класс последовательностей $x = (\xi_k)$ с $\xi_k \in X$. Пусть $A_{nk} \in L(X, Y)$, а $B_{nk} \in L(Z, Z)$, причем $\lim B_{nk}\zeta = \zeta$ для всех k и $\zeta \in Z$. Оператор L — непрерывный линейный оператор из X на Y, а $\varepsilon_k \in L(X, Z)$.

Операторы ε_k мы называем *множителями B-суммируемости* для $\mathfrak{D}(X)$, если ряд $\Sigma\, \varepsilon_k\xi_k$ суммируем RF-методом B для всех $x \in \mathfrak{D}(X)$.

Предложение 5. *Если ε_k являются множителями суммируемости для FK-пространства $E(X)$, то существует $F \in L(E(X), Z)$ с $\varepsilon_k\xi = Fe_k(\xi)$ для всех k и $\xi \in X$. Это условие достаточно, если $E(X)$ — такое FK-пространство, что при всех $x \in E(X)$ и $F \in L(E(X), Z)$ ряд $\Sigma\, Fe_k(\xi)$ сходится, а $B = (B_{nk})$ — регулярный RF-метод.*

Доказательство. Пусть

$$Tx = \lim_n \sum_k B_{nk}\varepsilon_k\xi_k.$$

Если ε_k — множители B-суммируемости для $E(X)$, то $T \in L(E(X), Z)$, а

$$Te_k(\xi) = \lim_n B_{nk}\varepsilon_k\xi = \varepsilon_k\xi.$$

Если $E(X)$ подчинено приведенному во второй части предложения свойству и $\varepsilon_k\xi = Fe_k(\xi)$, то ряд $\Sigma\, \varepsilon_k\xi_k = \Sigma\, Fe_k(\xi_k)$ сходится при всех $x \in E(X)$. Из регулярности метода B следует утверждение.

Для числовых последовательностей аналогичный результат принадлежит Целлеру ([14], предложения 6.2 и 6.3).

Пусть A — некоторый FF-метод (RF-метод) суммирования. Множители B-суммируемости для $c_A(X)$ мы называем *множителями суммируемости типа* $(A, B)_F$ (соответственно $(A, B)_R$). Часто называют множители типа $(A, B)_F$ множителями суммируемости первого рода, а типа $(A, B)_R$ — множителями суммируемости второго рода. Множители суммируемости для $c^0{}_A(X)$ называют множителями типа $(A_0, B)_F$ (соответственно типа $(A_0, B)_R$.

В теории суммируемости числовых последовательностей разработано несколько методов нахождения множителей суммируемости. Все они применимы лишь тогда, когда A обратим. Если обратная матрица A^{-1} существует и имеет несложный вид, то удобно пользоваться методом обратного преобразования (см. [1], § 22). При изучении множителей суммируемости для метода суммирования (WN, p_n) Вороного—Нёрлунда применяется метод Мура—Кангро (см. [1], § 23), который также требует некоторую информацию об обратной матрице A^{-1}. Метод Пейеримхоффа основан на общем виде непрерывного линейного функционала на c_A. Он применим и в случаях, когда обратная матрица A^{-1} не известна.

Пейеримхофф [12] доказал, что если A и B регулярны, A обратим и удовлетворяет теореме о среднем значении, т. е. $c_A \subset (c_A)_{AB}$, то условие $\varepsilon_k = fe_k$, где[4] $f \in c'_A$ и $e_k = (\delta_{ik})$, является необходимым и достаточным для того, чтобы ε_k были множителями суммируемости типа $(A, B)_F$. Т. Тяхт [8] показал, что выполнение теоремы о среднем значении можно заменить более слабым предположением о существовании базиса B-суммируемости в $c^0{}_A$.

Г. Кангро и М. Тыннов [6] изучали с помощью метода Пейеримхоффа множители суммируемости $\varepsilon_k \in L(X, Z)$ для методов $A = (a_{nk})$ и $B = (b_{nk})$ суммирования рядов в банаховых пространствах X и Z соответственно. Мы обобщим метод Пейеримхоффа для нахождения множителей суммируемости на обобщенные методы суммирования последовательностей и рядов элементов F-пространств, заданные матрицами операторов.

Теорема 1. *Пусть $A = (A_{nk})$ — такой L-регулярный обратимый FF-метод, что для всех $x \in c^0{}_A(X)$ и $G \in L(c^0{}_A(X), Z)$ имеет место равенство*

$$Gx = \lim_n \sum_k B_{nk} G e_k(\xi_k). \tag{9}$$

Операторы ε_k являются множителями суммируемости типа $(A, B)_F$ в точности тогда, когда

$$\exists F \in L(c_A(X), Z): \quad \varepsilon_k \xi = F e_k(\xi) \quad \forall \xi \in X, \tag{10}$$

$$(\varepsilon_k \xi) \in c_B(X), \quad \xi \in X. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость условия (10) следует непосредственно из предложения 5. В силу L-регулярности метода A имеем $e(\xi) \in c_A(X)$ при всех $\xi \in X$. Поэтому условие (11) необходимо.

Достаточность. Пусть $\varepsilon_k \xi = F e_k(\xi)$. Так как L — сюръективное отображение, то для каждой $x \in c_A(X)$ существует $\xi \in X$ с $L\xi = \lim_A x$. Отсюда $\lim_A x = \lim_A e(\xi)$ и

[4] Топологическое сопряженное линейного топологического пространства X обозначается через X'.

$x - e(\xi) \in c^0{}_A(X)$. Поэтому каждая последовательность $x \in c_A(X)$ представима в виде $x = x_0 + e(\xi)$ с $x_0 = (\xi^0{}_k) \in \in c^0{}_A(X)$. Отсюда

$$\sum Fe_k(\xi_k) = \sum Ge_k(\xi^0{}_k) + \sum \varepsilon_k \xi,$$

где G — сужение оператора F на $c^0{}_A(X)$, т. е. $G = F|c^0{}_A(X)$. Таким образом,

$$\sum \varepsilon_k \xi_k = \sum Ge_k(\xi^0{}_k) + \sum \varepsilon_k \xi.$$

Первый ряд справа B-суммируем в силу предложения (9), а второй — в силу условия (11).

Из теоремы 7 статьи [7] и теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *В предположениях теоремы 1 операторы ε_k являются множителями суммируемости типа $(A, B)_F$ в точности тогда, когда выполняется условие* (11) *и*

$$\varepsilon_k \xi = \sum_n \Phi_n A_{nk} \xi, \qquad \xi \in X, \tag{12}$$

где $(\Phi_n) \in BS(Y, Z)$.

Следствие 2. *Пусть $A = (A_{nk})$ — обратимый L-регулярный FF-метод, а $B = (B_{nk})$ — регулярный RF-метод суммирования. Если $c^0{}_A(X)_{AK} = c^0{}_A(X)$, то ε_k являются множителями суммируемости типа $(A, B)_F$ в точности тогда, когда выполняются условия* (11) *и* (12).

Рассмотрим конечнострочную числовую матрицу $T = (t_{nk})$ с $t_{nk} \to 1$ для всех k при $n \to \infty$. Мы говорим, что в FK-пространстве $E(X)$ имеет место *T-суммируемость по отрезкам*, если

$$x = \lim_n \sum_k t_{nk}\, e_k(\xi_k)$$

при всех $x \in E(X)$. В случае $X = K$ тогда говорят, что в $E(X)$ существует базис суммируемости метода T (см. [8] и ср. [1], стр. 218).

Следствие 3. *Если в поле нуль-суммируемости L-регулярного обратимого FF-метода A имеет место B-суммируемость по отрезкам, а $B = (b_{nk})$ — конечнострочная числовая матрица, то ε_k являются множителями суммируемости типа $(A, B)_F$ в точности тогда, когда выполняются условия* (11) *и* (12).

Следствие 4. *В предположениях теоремы 1 операторы ε_k являются множителями суммируемости типа $(A_0, B)_F$ в точности тогда, когда выполняется условие* (12).

При изучении множителей суммируемости второго рода мы воспользуемся следующей леммой.

Лемма 1. *Пусть $A = (A_{nk})$ — обратимый L-регулярный RF-метод суммирования. Если операторы ε_k являются множителями суммируемости типа $(A_0, B)_R$, то они являются и множителями суммируемости типа $(A, B)_R$.*

Доказательство. Так как L — сюръективное отображение, то для каждой $x \in c_A(X)$ существует $\xi \in X$ с $\lim_A x = \lim_A e_0(\xi)$. Отсюда $x_0 \in c^0{}_A(X)$, где $x_0 = x - e_0(\xi)$. Поэтому любую последовательность $x \in c_A(X)$ можно представить в виде $x = x_0 + e_0(\xi)$ с $x_0 = (\xi^0{}_k) \in c^0{}_A(X)$. Тогда существует предел

$$\lim_n \sum_k B_{nk}\varepsilon_k\xi_k = \lim_n \sum_k B_{nk}\varepsilon_k\xi^0{}_k + \lim B_{n0}\varepsilon_0\xi =$$
$$= \lim_n \sum_k B_{nk}\varepsilon_k\xi^0{}_k + \varepsilon_0\xi,$$

т. е. ε_k являются множителями суммируемости типа $(A, B)_R$, если только они — множители суммируемости типа $(A_0, B)_R$.

Для RF-метода $A = (A_{nk})$ обозначим $A^\Delta = (\Delta A_{nk})$. В силу предложения 3 и теоремы 3 из [7] каждый RF-метод A с $A_{nk} = \theta$ при $k > n$ является L-регулярным в точности тогда, когда FF-метод A^Δ также L-регулярен.

Теорема 2. *Пусть $A = (A_{nk})$ — такой L-регулярный нормальный RF-метод, что A^Δ удовлетворяет условию* (9). *Пусть $B = (B_{nk})$ — регулярный треугольный RF-метод. Операторы ε_k являются множителями суммируемости типа $(A, B)_R$ в точности тогда, когда*

$$\Delta\varepsilon_k\xi = \sum_{n=k}^{\infty} \Phi_n \Delta A_{nk}\xi, \qquad \xi \in X, \tag{13}$$

и

$$(\varepsilon_n s_n) \in c_B{}^\Delta(Z) \qquad \forall x \in c^0{}_A(X), \tag{14}$$

где $(\Phi_n) \in BS(Y, Z)$.

Доказательство. Из предложения 5 следует, что если ε_k — множители суммируемости типа $(A, B)_R$, то

$$\varepsilon_k\xi = \Phi L\xi + \sum_{n=k}^{\infty} \Phi_n (A_{nk}\xi - L\xi), \qquad \xi \in X,$$

где $\Phi \in L(Y, Z)$ и $(\Phi_n) \in BS(Y, Z)$. Отсюда получается необходимость условия (13).

Пусть $x \in c^0{}_A(X)$. Применим преобразование Абеля

$$\sum_{k=0}^{n} B_{nk}\varepsilon_k\xi_k = \sum_{k=0}^{n-1} B_{nk}\Delta\varepsilon_k s_k + \sum_{k=0}^{n} \Delta B_{nk}\varepsilon_k s_k. \tag{15}$$

Согласно предположению, A^Δ является L-регулярным нормальным FF-методом. Из условия (13) и следствия 4 получим, что $\Delta\varepsilon_k$ — множители суммируемости типа $(A^\Delta{}_0, B)_F$ для каждого регулярного RF-метода $B = (B_{nk})$, в том числе и для метода $S = (s_{nk})$, где $s_{nk} = 1$ при $k \leqslant n$ и $s_{nk} = 0$ при $k > n$. Поэтому ряд $\Sigma\, \Delta\varepsilon_k s_k$ сходится при всех $x \in c^0{}_A(X)$. Так как B — консервативный метод, то RF-метод $B^* = (B^*{}_{nk})$ с

$$B^*_{nk}=\begin{cases} B_{nk}, & \text{если } k\leqslant n-1, \\ \theta, & \text{если } k>n-1, \end{cases}$$

является консервативным в силу предложения 3. Поэтому существует предел

$$\lim_n \sum_{k=0}^{n-1} B_{nk}\Delta\varepsilon_k s_k, \qquad x\in c_A(X),$$

т. е. ε_k — множители суммируемости типа (A_0, B) в точности тогда, когда выполняется условие (14). Из леммы 1 следует утверждение.

Следствие 5. *Пусть $A=(A_{nk})$ — нормальный L-регулярный RF-метод суммирования. Если в поле нуль-суммируемости метода A^Δ имеет место сходимость по отрезкам, то ε_k являются множителями суммируемости типа $(A, B)_R$ в точности тогда, когда выполняются условия* (13) *и* (14).

Положив здесь $X=Y=Z=K$, получаем предложение 5.6 из [12]. Для банаховых пространств X и Z и числовых матриц A и B аналогичный результат принадлежит Г. Кангро и М. Тыннову ([6], теорема 9).

Для пространств Фреше X, Y и Z в следствиях 2 и 5, согласно предложению 11 из [7], предположение о сходимости по отрезкам можно заменить условием об ограниченности по отрезкам.

Следствие 6. *Пусть $A=(A_{nk})$ — нормальный L-регулярный RF-метод. Если в поле нуль-суммируемости метода A^Δ имеет место B-суммируемость по отрезкам, где $B=(b_{nk})$ — нормальный регулярный RF-метод, то ε_k являются множителями суммируемости типа $(A, B)_R$ в точности тогда, когда выполняются условия* (13) *и* (14).

§ 3. Множители суммируемости первого рода для методов Чезаро и взвешенных средних Рисса

Для методов суммирования $A=(a_{nk})$ и $B=(b_{nk})$ множители суммируемости $\varepsilon_k\in L(X, Z)$, где X и Z — банаховые пространства, изучались в работах Г. Кангро [3, 4], Г. Кангро и Ф. Вихманна [5], Г. Кангро и М. Тыннова [6]. В этих работах применялся, главным образом, метод обратного преобразования для нахождения множителей суммируемости, а также метод Мура—Кангро [4]. Метод Пейеримхоффа использовался в [6] для изучения множителей типа $(R, B)_R$, где $R=(R, p_n)$ — метод взвешенных средних Рисса. В настоящем параграфе мы применяем обобщенный нами метод Пейеримхоффа к нахождению множителей суммируемости типов $(C^\alpha, B)_F$ при $\alpha>0$ и $(R, B)_F$.

Предположим (здесь и всюду далее), что $B = (b_{nk})$ — регулярный RF-метод, операторы $\varepsilon_k \in L(X, Z)$, а X и Z — пространства Фреше. Известно [2], что если X — пространство Фреше, то $c_A(X) \supset c(X)$ (или $c_A(X) \supset cs(X)$) для $A = (a_{nk})$ в точности тогда, когда $c_A \supset c$ (соответственно $c_A \supset cs$). Метод A регулярен в точности тогда, когда он регулярен для числовых последовательностей (рядов).

Пусть $A = C^\alpha$ с $\alpha \geqslant 0$. Известно ([1], теорема 15.1), что метод C^α регулярен. Если $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, то аналогично случаю $X = K$ (см. [1], стр. 209—210) доказывается, что $c_A(X) \subset \subset c_A(X)_{AB}$. Тогда $c^0{}_A(X)_{AK} = c^0{}_A(X)$ согласно предложению 11 из [7], а из следствия 2 вытекает

Предложение 6. *Операторы ε_k являются множителями суммируемости типа $(C^\alpha, B)_F$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ в точности тогда, когда выполняется условие* (11) *и*

$$\varepsilon_k \xi = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A^\alpha{}_n} \Phi_n \xi, \qquad \xi \in X, \tag{16}$$

где $(\Phi_n) \in BS(X, Z)$.

В случае $X = Z = K$ предложение 6 доказано Пейеримхоффом ([12], предложение 7.3).

Известно [12], что в случае $\alpha > 1$ в поле нуль-суммируемости $c^0{}_A$ метода $A = C^\alpha$ сходимость по отрезкам не имеет места. Однако, как показали Лоренц и Целлер [10], в $c^0{}_A$, где $A = C^{\alpha+1}$, имеет место C^α-суммируемость по отрезкам при $\alpha > 0$ (ср. [1], стр. 219). Оказывается, что аналогичное утверждение верно и для суммируемости последовательностей элементов пространства Фреше. При доказательстве этого мы используем две следующие леммы,

Лемма 2. *Нормальный регулярный FF-метод $A = (a_{nk})$ является совершенным в точности тогда, когда из условий*

$$(\varphi_k) \in l(X')$$

и

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_{nk} \varphi_n \xi = 0, \qquad \xi \in X, \tag{17}$$

следует $\varphi_k = \theta$ для всех k.

Доказательство. Согласно теореме 7 из [7] каждый $f \in c_A(X)'$ представим в виде

$$fx = \varphi\eta + \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \sum_{k=0}^{n} a_{nk} \xi_k,$$

где $\varphi, \varphi_k \in X'$ и $(\varphi_n) \in l(X')$. Множество H_1 фундаментально в $c_A(X)$ в точности тогда, когда каждый вырождающийся на H_1 функционал $f \in c_A(X)'$ вырождается на $c_A(X)$, т. е. из равенств (17) и

$$\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n\sum_{k=0}^{n}a_{nk}\xi+\varphi\xi=0, \qquad \xi\in X, \tag{18}$$

следует $\varphi_k = \varphi = \theta$. Ввиду равенства

$$\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n\xi\sum_{k=0}^{n}a_{nk}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}a_{nk}\varphi_n\xi$$

из (17) и (18) следует, что $\varphi = \theta$. Лемма доказана.

Положив $X = K$ в лемме 2, получаем предложение 4.2 из [12]. В теории суммируемости числовых последовательностей этот результат называется теоремой Мазура—Банаха и обобщен многими авторами.

Лемма 3. *Если $A = (a_{nk})$ — регулярный нормальный FF-метод и столбцы обратной матрицы $A^{-1} = (a'_{nk})$ ограничены, то метод A является совершенным.*

Доказательство. Пусть $(\varphi_n) \in l(X')$ и выполнено (17). Тогда

$$0=\sum_{k=m}^{\infty}a'_{km}\sum_{n=k}^{\infty}a_{nk}\varphi_n\xi=\sum_{n=m}^{\infty}\varphi_n\xi\delta_{nm}=\varphi_m\xi$$

и, согласно лемме 2, метод A совершенен.

Так как ([1], стр. 85)

$$a'_{nk}=A^{\alpha}_{k}A^{-\alpha-1}_{n-k}$$

для $A = C^{\alpha}$, то все методы Чезаро при $\alpha > 0$ удовлетворяют условиям леммы 3 и тем самым являются совершенными.

Пусть $A = C^{\alpha+1}$ и RF-метод $B = C^{\alpha}$, где $\alpha > 0$. Для установления B-суммируемости по отрезкам в $c^0{}_A(X)$, следуя Лоренцу и Целлеру, рассматриваем A-преобразования

$$\tau^n{}_m=\sum_{k=0}^{l}b_{mk}a_{nk}\xi_k, \qquad x\in c^0{}_A(X), \qquad l=\min(m,n),$$

отрезков $(b_{m0}\xi_0, b_{m1}\xi_1, \ldots, b_{mm}\xi_m, \theta, \ldots)$. Пусть

$$t_j(m,n)=\sum_{k=j}^{l}b_{mk}a_{nk}a'_{kj}.$$

Тогда

$$\tau^n{}_m=\sum_{j=0}^{l}t_j(m,n)\eta_j, \qquad y=(\eta_j)\in c_0(X). \tag{19}$$

В [10] доказывается, что $t_j(m,n) \geqslant 0$ и $t_0(m,n) + \ldots \ldots + t_l(m,n) \leqslant 1$.

Преобразование (19) определяет последовательность операторов $T_m \in L(c_0(X), c_0(X))$. По лемме 3 метод A является совершенным. Множество H фундаментально в $c^0{}_A(X)$. Поэтому $\{Ae_k(\xi)\colon \xi \in X,\ k = 0, 1, \ldots\}$ является фундаментальным множеством в $c_0(X)$. Для каждого k и $\xi \in X$ имеем

$$\lim_m T_m(Ae_k(\xi)) = \lim_m b_{mk}a_{nk}\xi = (a_{nk}\xi) = Ae_k(\xi). \qquad (20)$$

Покажем, что последовательность (T_m) ограничена в $L(c_0(X), c_0(X))$ в топологии равномерной сходимости на ограниченных подмножествах. Напомним, что FK-топология в $c_0(X)$ определяется полунормами

$$P_i(x) = \sup_n p_i(\xi_n), \quad i=0, 1, \ldots,$$

где полунормы p_i определяют топологию в X. Пусть $M \in \in \operatorname{bd} c_0(X)$. Тогда $p_i(\xi_j) \leqslant N_i$ для всех $x \in M$ и

$$P_i(T_m x) = \sup_n p_i((T_m x)_n) = \sup_n p_i\left(\sum_{j=0}^{l} t_j(m, n)\xi_j\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_n \sum_{j=0}^{l} t_j(m, n) p_i(\xi_j) \leqslant N_i.$$

Из последнего неравенства и равенства (20) следует, что последовательность операторов (T_m) удовлетворяет условиям теоремы Банаха—Штейнгауза (см. [7], лемма 3). Поэтому $T_m x \to x$ в $c_0(X)$ для всех $x \in c_0(X)$ и, следовательно, $(b_{m0}\xi_0, b_{m1}\xi_1, \ldots, b_{mm}\xi_m, \theta, \ldots) \to x$ в $c^0{}_A(X)$. Мы доказали

Предложение 7. *Если $A = C^{\alpha+1}$, то в поле нуль-суммируемости $c^0{}_A(X)$ имеет место C^α-суммируемость по отрезкам при $\alpha > 0$.*

С помощью предложения 7 найдем множители суммируемости типа $(C^\alpha, C^\beta)_F$ с $1 \leqslant \alpha \leqslant \beta + 1$.

Предложение 8. *Операторы ε_k являются множителями суммируемости типа $(C^\alpha, C^\beta)_F$, где $1 \leqslant \alpha \leqslant \beta + 1$, в точности тогда, когда выполняется условие (16) и $(\varepsilon_k\xi)$ является C^β-суммируемой для любой $\xi \in X$.*

Доказательство. Из теоремы 8 статьи [7] и уже упомянутого факта, что для пространства Фреше X и метода $A = (a_{nk})$ включения $c_A(X) \supset c(X)$ и $c_A \supset c$ равносильны, следует эквивалентность включений $c_A(X) \subset c_B(X)$ и $c_A \subset c_B$, если A — обратимый метод. Известно ([1], теорема 15.3), что при $\gamma \geqslant \delta \geqslant 0$ метод C^γ сильнее метода C^δ. Поэтому для $A = C^\alpha$ с $\alpha \geqslant 1$ в $c^0{}_A(X)$, согласно предложению 7, имеет место C^β-суммируемость по отрезкам. Утверждение вытекает из следствия 3.

Пусть $A = R$ — регулярный метод, т. е. $\lim |P_n| = \infty$ и $|p_0| + |p_1| + \ldots + |p_n| = O(P_n)$ (см. [1], теорема 17.1). Тогда $c_A(X)_{AB} \supset c_A(X)$, т. е.

$$\left\{\sum_{k=0}^{m} a_{nk}\xi_k: \quad n, m = 0, 1, \ldots\right\} \in \operatorname{bd} X \quad \forall x \in c_A(X). \qquad (21)$$

В самом деле,

$$\sum_{k=0}^{m} a_{nk}\xi_k = \frac{P_m}{P_n}\sum_{k=0}^{m}\frac{p_k}{P_m}\xi_k = \frac{P_m}{P_n}\eta_m,$$

из-за регулярности метода A имеем $P_m = O(P_n)$ при $m \leqslant n$ и тем самым выполняется условие (21).

Предложение 9. *Операторы* ε_k *являются множителями суммируемости типа* $(R, B)_F$ *в точности тогда, когда выполняется условие* (11) *и*

$$\varepsilon_k\xi = p_k \sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{P_n}\Phi_n\xi, \qquad \xi \in X,$$

где $(\Phi_n) \in BS(X, Z)$.

Положив $X = Z = K$, получаем предложение 7.8 из [12].

§ 10. Множители суммируемости второго рода для методов Чезаро и взвешенных средних Рисса

Учитывая сделанные в § 3 замечания, а также предложение 7, получаем из теоремы 2 следующие предложения.

Предложение 10. *Операторы* ε_k *являются множителями суммируемости типа* $(C^\alpha, B)_R$ *с* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ *в точности тогда, когда выполняется условие* (14) *и*

$$\Delta\varepsilon_k\xi = \sum_{n=k}^{\infty} A_{n-k}^{\alpha-1}/A_n^\alpha \cdot \Phi_n\xi, \qquad \xi \in X, \tag{22}$$

где $(\Phi_n) \in BS(X, Z)$.

Предложение 11. *Операторы* ε_k *являются множителями суммируемости типа* $(C^\alpha, C^\beta)_R$ *при* $1 \leqslant \alpha \leqslant \beta + 1$ *в точности тогда, когда выполняются условия* (22) *и* (14) *с* $B = C^\beta$.

Предложение 12. *Операторы* ε_k *являются множителями суммируемости типа* $(R, B)_R$ *в точности тогда, когда выполняется условие* (14) *и*

$$\Delta\varepsilon_k\xi = p_k \sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{P_n}\Phi_n\xi, \qquad \xi \in X,$$

где $(\Phi_n) \in BS(X, Z)$.

Условие (14), фигурирующее в предложениях 10—12, неэффективно, т. е. практически трудно проверяемо. В теории суммируемости числовых рядов операторы ε_n в (14) называют множителями суммируемости в последовательности и изучаются отдельно (см. [1], § 26, и [6]).

В теории суммируемости неэффективные условия используют при нахождении эффективных условий (см. [1], § 22). Мы проиллюстрируем это на примере, где X и Z — банаховые пространства, $A = (a_{nk})$ — некоторый RF-метод суммирования с $c_A(X)_{AB} \supset c_A(X)$ и $B = S = (s_{nk})$. Множители суммируемости типа $(A, S)_F$ и $(A, S)_R$ называются множителями сходимости.

Лемма 4. *Если ε_k являются множителями суммируемости типа $(A, B)_R$ для нормальных методов $A = (a_{nk})$ и $B = (b_{nk})$, то*

$$\|\varepsilon_k\| = O(a_{kk}/b_{kk}). \tag{23}$$

Доказательство. Из теоремы 1 статьи [5] следует, что если ε_k — множители типа $(A, B)_R$, то

$$\sup_{m,n,\|\xi_k\| \leqslant 1} \|\sum_{k=0}^{m} G_{nk}\xi_k\| \leqslant M, \tag{24}$$

где

$$G_{nk}\xi = \sum_{\nu=k}^{n} b_{n\nu}a'_{\nu k}\varepsilon_\nu\xi, \qquad \xi \in X,$$

и

$$(a'_{nk}) = (\sum_{i=k}^{n} a_{ni})^{-1}.$$

Так как $a'_{nn} = 1/a_{nn}$, то из (24) получим

$$\|G_{nn}\| = |b_{nn}|\,|1/a_{nn}|\,\|\varepsilon_n\| = O(1),$$

т. е. имеет место оценка (23).

Лемма 5. *Пусть $A = (a_{nk})$ — нормальный регулярный FF-метод с $c_A(X) \subset c_A(X)_{AB}$. Тогда* [5]

$$c^0{}_A(X) \subset (1/a_{nn})c_0(X). \tag{25}$$

Доказательство. Поле нуль-суммируемости $c^0{}_A(X)$ является BK-пространством с нормой $p(x) = \sup \|\eta_n\|$ (см. [7], § 3). Согласно предложению 11 из [7] имеем $c^0{}_A(X)_{AK} = c^0{}_A(X)$. Поэтому

$$\sup_n \|\sum_{k=j}^{m} a_{nk}\xi_k\| = p(\sum_{k=j}^{m} e_k(\xi_k)) \to 0$$

для всех $x \in c^0{}_A(X)$ при $j, m \to \infty$. Таким образом, $\|\xi_n\| = o(1/a_{nn})$ для всех $x \in c^0{}_A(X)$. Это равносильно условию (25).

Приступим к изучению множителей сходимости.

Предложение 13. *Пусть $A = (a_{nk})$ — нормальный RF-метод и $c_A{}^\Delta(X) \subset c_A{}^\Delta(X)_{AB}$. Операторы ε_k являются множителями сходимости типа $(A, S)_R$ в точности тогда, когда выполняются условия*

---

[5] Для $\lambda = (\lambda_k) \in s$ и $D(X) \subset s(X)$ обозначаем

$$(\lambda_k)D(X) = \{(\lambda_k\xi_k) : x \in D(X)\}.$$

$$\|\varepsilon_n\| = O(a_{nn}), \tag{26}$$

$$\Delta\varepsilon_k \xi = \sum_{n=k}^{\infty} \Delta a_{nk} \Phi_n \xi, \qquad \xi \in X,$$

где $(\Phi_n) \in BS(X, Z)$.

Доказательство. Необходимость этих условий следует из леммы 4 и теоремы 2.

Достаточность. Из леммы 5 следует, что $c^0{}_A{}^\Delta(X) \subset \subset (1/a_{nn}) c_0(X)$, но тогда и $c^0{}_A(X) \subset (1/a_{nn}) c_0(X)$. В силу условия (26) имеем $(\|\varepsilon_k\|) c^0{}_A(X) \subset c_0(X)$ и $\|\varepsilon_k \xi_k\| \to 0$ для каждой $x \in c^0{}_A(X)$. Таким образом, из (26) следует (14). Операторы ε_k — множители сходимости типа $(A, S)_R$.

В итоге, нам удалось заменить неэффективное условие (14) условием (26), проверка которого не составляет трудностей. Доказанное предложение обобщает результат Юрката и Пейеримхоффа ([9], предложение 10). Из предложения 13 выведем условия для множителей сходимости в случаях $A = C^\alpha$ с $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ и $A = (R, p_n)$.

Будем для $\mu_k \in L(X, Z)$ пользоваться обозначением (ср. [1], стр. 176)

$$\Delta^\alpha \mu_k \xi = \sum_{n=k}^{\infty} A_{n-k}^{-\alpha-1} \mu_k \xi.$$

Предложение 14. *Операторы* ε_k *являются множителями сходимости типа* $(C^\alpha, S)_R$ *с* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ *в точности тогда, когда*

$$\sup_{m, \|\xi_n\| \leqslant 1} \left\| \sum_{n=0}^{m} n^\alpha \Delta^{\alpha+1} \varepsilon_n \xi_n \right\| \leqslant N, \tag{27}$$

$$\|\varepsilon_n\| = O(n^\alpha). \tag{28}$$

Доказательство. Из равенства (22)

$$\Phi_n \xi = A^\alpha{}_n \Delta^{\alpha+1} \varepsilon_n \xi.$$

Так как $A^\alpha{}_n \sim n^\alpha / \Gamma(\alpha + 1)$, то условие (22) принимает вид (27) и из оценки (26) заключаем (28).

Предложение 14 в более общем виде доказано Г. Кангро [3] методом обратного преобразования, а следующее предложение — Г. Кангро и Ф. Вихманном [5].

Предложение 15. *Операторы* ε_k *являются множителями сходимости типа* $(R, S)_R$ *в точности тогда, когда*

$$\sup_{m, \|\xi_n\| \leqslant 1} \left\| \sum_{n=0}^{m} P_n \Delta (p_n^{-1} \Delta\varepsilon_n \xi_n) \right\| \leqslant N,$$

$$\|\varepsilon_n\| = O(P_n / p_n).$$

Доказательство. Утверждение следует из предложения 12, так как $\Delta(p_n^{-1} \Delta\varepsilon_n \xi) = P_n^{-1} \Phi_n \xi$.

Литература

1. Барон С., Введение в теорию суммируемость рядов. Таллин, 1977.
2. Жаворонков В. Д., Структура полей эффективности линейных операторов (Кандидатская диссертация). Тарту, 1975.
3. Кангро Г. Ф., О матричных преобразованиях последовательностей в банаховых пространствах. Изв. АН ЭстССР. Сер. техн. и физ. матем. наук, 1956, **5**, 108—128.
4. Кангро Г., Об обобщении одной теоремы Мура. Докл. АН СССР, 1958, **121**, 967—969.
5. Кангро Г., Вихманн Ф., Об абстрактных множителях суммируемости для метода взвешенных средних Рисса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 209—225.
6. Кангро Г., Тыннов М., Множители суммируемости в последовательности для метода взвешенных средних Рисса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 249—269.
7. Лейгер Т., Включение обобщенных методов суммирования. Настоящий сборник, стр. 17—34.
8. Тяхт Т., Мультипликаторы базисов суммирования и множители суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, **355**, 157—164.
9. Jurkat, W., Peyerimhoff, A., Mittelwertsätze bei Matrix- und Integraltransformationen. Math. Z., 1951, **55**, 92—108.
10. Lorentz, G. G., Zeller, K., Abschnittslimitierbarkeit und der Satz von Hardy-Bohr. Arch. Math., 1964, **15**, 208—213.
11. Melvin-Melvin, H., On generalized K-transformations in Banach spaces. Proc. London Math. Soc., 1951, **53**, 83—108.
12. Peyerimhoff, A., Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren. Math. Z., 1951, **55**, 23—54.
13. Wood, B., Series to sequence and series to series transformations in Frechet' spaces. Math. Ann., 1970, **184**, 224—232.
14. Zeller, K., Abschnittskonvergenz in FK-Räumen. Math. Z., 1951, **55**, 55—70.
15. Zeller, K., Verallgemeinerte Matrixtransformationen. Math. Z., 1952, **56**, 18—20.

Поступило
11 I 1978

SUMMIERBARKEITSFAKTOREN FÜR VERALLGEMEINERTE LIMITIERUNGSVERFAHREN

T. Leiger

Zusammenfassung

Es seien F-Räume X, Y und Z und ein verallgemeinertes Matrixverfahren $A=(A_{nk})$ von der Gestalt (1) gegeben, wobei $A_{nk}\in L(X, Y)$. Es sei noch ein verallgemeinertes Matrixverfahren $B=(B_{nk})$ mit $B_{nk}\in L(Z,Z)$ und $B_{nk}\zeta\to\zeta$ für alle $\zeta\in Z$ und $k\in \mathbf{N}$ gegeben. Die Operatoren $\varepsilon_k\in L(X,Z)$ heißen Summierbarkeitsfaktoren des Typus (A, B), wenn $\Sigma\,\varepsilon_k\xi_k$ für alle A-summierbaren Folgen (ξ_k) (oder Reihen $\Sigma\,\xi_k$) B-summierbar ist.

In diesem Artikel wird mit der Hilfe allgemeiner Darstellung [7] für Operatoren aus $L(c_A(X),Y)$ die Methode von Peyerimhoff [12] für die Feststellung der Summierbarkeitsfaktoren verallgemeinert. Diese Methode wird zur Untersuchung der Summierbarkeitsfaktoren der Typen (C^α, B) und (P, B), wo C^α das Cesàrosche Verfaren der Ordnung α und P das Verfahren der bewichteten Mittel von Riesz bezeichnet, angewendet.

Tartu Ülikooli toimetised, Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1979, **504**, 74—84.

О СУММИРУЕМОСТИ ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ПЕРЕСТАНОВОК. I

Э. Кольк

Тартуский государственный университет

Введение

Пусть E и F — локально выпуклые топологические векторные пространства[1] над полем K, где $K = \mathbf{R}$ или $K = \mathbf{C}$. Обозначим через $L(E, F)$ множество всех линейных непрерывных операторов $f: E \to F$, а символом $L_s(E, F)$ — множество всех линейных секвенциально непрерывных операторов $f: E \to F$. Обозначим, далее, через $s(E)$ множество всех последовательностей[2] $X = (x_i)$ с $x_i \in E$, а через $m(E)$, $w(E)$ и $c(E)$ — его подмножества, состоящие соответственно из всех ограниченных, слабо сходящихся и сходящихся последовательностей X.

Обобщенная (или операторная) матрица $A = (A_{nk})$ с элементами $A_{nk}: E \to F$ определяет на множестве

$$d_A(E) = \{X \in s(E): \ \exists \lim_m \sum_{k \leqslant m} A_{nk}(x_k)\}$$

обобщенный матричный метод суммирования A, причем последовательность $X \in d_A(E)$ называется *A-суммируемой*, если существует $\lim A(X)$ в F, где $A(X) = (A_n(X))$ с

$$A_n(X) = \sum_k A_{nk}(x_k).$$

Если $h: E \to F$ — фиксированный оператор, то последовательность $X \in d_A(E)$ называется *$A(h)$-суммируемой* к элементу $x_0 \in E$ (коротко, $A(h)\text{-}\lim X = x_0$), если $\lim A(X) = h(x_0)$ в пространстве F. Множество всех A-суммируемых ($A(h)$-суммируемых) последовательностей обозначим символом $c_A(E)$ (соответственно $c_{A(h)}(E)$). Метод суммирования A называется *консер-*

---

[1] Все встречающиеся в статье топологические пространства предполагаются отделимыми.

[2] Во всей статье свободные индексы принимают все значения из множества $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

вативным, если $c(E) \subseteq c_A(E)$ и *h-регулярным* (см. [11], стр. 365), если $c(E) \subseteq c_{A(h)}(E)$ и из $\lim X = x$ следует $A(h)\text{-}\lim X = x$. Множество всех h-регулярных матриц обозначим через $\mathfrak{T}(h)$. Матрица $A = (A_{nk})$ с нулевыми A_{nk} при $k > n$ называется *треугольной*, а треугольная матрица A с ненулевыми элементами A_{nn} — *строго треугольной*. Строго треугольная числовая матрица $A = (a_{nk})$ называется также *нормальной*.

В частности, когда $F = E$ и $A_{nk}(x) = a_{nk}x$ с $a_{nk} \in K$, мы пишем $A = (a_{nk})$ вместо $A = (A_{nk})$. Если при этом $h: E \to E$ — тождественное отображение, то вместо h-регулярности мы будем говорить о регулярности, а вместо $A(h)$ и $\mathfrak{T}(h)$ пишем соответственно A и $\mathfrak{T}$. Введем здесь еще подкласс $\mathfrak{P}$ класса $\mathfrak{T}$, состоящий из всех $A \in \mathfrak{T}$ со свойством

$$\lim_n \sup_k |a_{nk}| = 0. \tag{P}$$

В § 1 обобщается одна теорема Брудно (см. [5], теорема 3; [12]) на некоторые операторные матрицы A и локально выпуклые пространства E и F с порождающими наборами полунорм соответственно P и Q.

В § 2 доказывается, что при некоторых ограничениях на конечнострочную обобщенную матрицу $A = (A_{nk})$ из A-суммируемости всех перестановок последовательности $X \in s(E)$ со свойством

$$\lim_n q(A_{nk}(x_i)) = 0 \ \forall q \in Q \text{ равномерно по } i \in \mathbf{N} \tag{B}$$

следует A-суммируемость всех ее подпоследовательностей. Отсюда вытекает, что в банаховом пространстве E суммируемость методом $A \in \mathfrak{P}$ всех перестановок последовательности $X \in s(E)$ равносильна ее p-сходимости (см. [7], стр. 103), а при $A \in \mathfrak{T} \setminus \mathfrak{P}$ — сходимости в E. Следовательно, в банаховом пространстве E суммируемость всех перестановок последовательности X методом $A \in \mathfrak{T}$ равносильна A-суммируемости всех ее подпоследовательностей.

Для последовательности $X \in s(E)$ обозначим через $X(\leqslant m)$ вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, а через $X(>m)$ последовательность $(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots)$. Нулевые элементы локально выпуклого пространства E и его топологического сопряженного пространства E' обозначим соответственно сиволами θ и θ'. Нулевой оператор из E в F обозначим через O.

§ 1. О суммируемости ограниченных последовательностей

Пусть E и F — локально выпуклые пространства с порождающими наборами полунорм соответственно P и Q.

Обозначим символом $\mathfrak{G}$ совокупность матриц (или матричных методов суммирования) $A = (A_{nk})$ со следующим свойством: существуют числа $\lambda_{nk} > 0$ такие, что

$$\sum_k \lambda_{nk} < \infty, \tag{1}$$

и каждой полунорме $q \in Q$ соответствует некоторая полунорма $p \in P$ с

$$q(A_{nk}(x)) \leqslant \lambda_{nk} p(x) \qquad \forall x \in E. \tag{2}$$

Из этого определения непосредственно вытекает, что для матрицы $A \in \mathfrak{G}$ верно соотношение

$$m(E) \subseteq d_A(E).$$

Кроме того, если все элементы A_{nk} матрицы $A \in \mathfrak{G}$ суть линейные операторы, то они являются и непрерывными (см. [1], стр. 68).

Теорема 1. *Пусть E и F — локально выпуклые пространства, $h \in L(E, F)$ — фиксированный отличный от нулевого оператор и $A \in \mathfrak{G}$. Тогда существует строго треугольный матричный метод суммирования B, эквивалентный методу A на множестве $m(E)$. Если при этом A является h-регулярным, то таким же будет и метод B.*

Доказательство. Пусть (ε_i) — некоторая положительная нуль-последовательность. Построим сначала по индукции последовательность индексов $(m(i))$ следующим образом. Из условия (1) при $n = 1$ следует существование такого индекса $m(1)$, что

$$\sum_{k > m(1)} \lambda_{1k} < \varepsilon_1.$$

Затем на основе сходимости ряда $\Sigma_k \lambda_{2k}$ определим индекс $m(2) > m(1)$ столь большим, чтобы

$$\sum_{k > m(2)} \lambda_{2k} < \varepsilon_2.$$

В общем случае, если индексы $m(1) < m(2) < \ldots < m(i-1)$ уже определены, то в силу условия (1) можно найти такой индекс $m(i) > m(i-1)$, что

$$\sum_{k > m(i)} \lambda_{ik} < \varepsilon_i. \tag{3}$$

Продолжая этот процесс неограниченно, мы получим требуемую последовательность $(m(i))$.

Теперь, следуя Тропперу [12], мы определим матрицу $B = (B_{nk})$ равенствами

$$\begin{array}{ll} B_{nk}=A_{1k} & (1\leqslant k<n<m(1)),\\ B_{nn}=A_{1n} & (A_{1n}\neq O,\ n<m(1)),\\ B_{nn}=n^{-1}h & (A_{1n}=O,\ n<m(1)),\\ B_{nk}=A_{ik} & (m(i)\leqslant n<m(i+1),\ i\geqslant 1,\ 1\leqslant k<n),\\ B_{nn}=A_{in} & (A_{in}\neq O, m(i)\leqslant n<m(i+1), i\geqslant 1),\\ B_{nn}=n^{-1}h & (A_{in}=O,\ m(i)\leqslant n<m(i+1),\ i\geqslant 1),\\ B_{nk}=O & (k>n). \end{array}$$

Тогда при $m(i)\leqslant n<m(i+1)$ имеем

$$A_i(X)-B_n(X)=\sum_{k>n}A_{ik}(x_k)+A_{in}(x_n)-B_{nn}(x_n). \qquad (4)$$

Если $X\in m(E)$, то $\sup_k p(x_k)\leqslant M_p<\infty$ для каждой полунормы $p\in P$ и поэтому для произвольной полунормы $q\in Q$ при помощи условий (2) и (3) из равенства (4) выводим

$$q(A_i(X)-B_n(X))\leqslant\sum_{k>n}q(A_{ik}(x_k))+q(A_{in}(x_n)-B_{nn}(x_n))\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k>m(i)}\lambda_{ik}p(x_k)+q(n^{-1}h(x_n))<$$

$$<M_p\varepsilon_i+n^{-1}\lambda M_r, \qquad (5)$$

ибо в силу $h\in L(E,F)$ существуют такие $r\in P$ и $\lambda>0$, что $q(h(x))\leqslant\lambda r(x)$ для всех $x\in E$. Так как i и n стремятся одновременно к бесконечности, то из неравенства (5) следует одновременная сходимость последовательностей $(A_i(X))$ и $(B_n(X))$, причем $\lim_i A_i(X)=\lim_n B_n(X)$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть E и F — банаховы пространства и $O\neq h:E\to F$. Тогда любому h-регулярному обобщенному матричному методу суммирования A со свойством*

$$\sum_k\|A_{nk}\|<\infty \qquad (6)$$

соответствует строго треугольный h-регулярный метод B, эквивалентный методу A на множестве $m(E)$.

Следствие 2. *Пусть E — банахово пространство с топологическим сопряженным пространством E' и $\theta'\neq h\in E'$. Тогда для h-регулярного матричного метода A с элементами $A_{nk}\in E'$ существует эквивалентный ему на множестве $m(E)$ строго треугольный h-регулярный метод B.*

Доказательство. Из результатов работ [2, 11] следует, что h-регулярный метод суммирования A с $A_{nk}\in E'$ удовлетворяет условию

$$\sup_n\sum_k\|A_{nk}\|<\infty.$$

Следовательно, условие (6) выполнено и доказательство завершается применением следствия 1.

Следствие 3 (ср. [5], теорема 3). *Пусть E — секвенциально полное локально выпуклое пространство и $A = (a_{nk})$ — скалярная матрица с*

$$\sum_k |a_{nk}| < \infty. \tag{7}$$

Тогда найдется нормальная матрица B такая, что методы A и B эквивалентны на множестве $m(E)$. Если метод A регулярный, то таким же можно подобрать и метод B.

Доказательство. Наше утверждение непосредственно вытекает из теоремы 1, если $F = E$ и h — тождественное отображение, ибо матрица A со свойством (7) принадлежит классу $\mathfrak{G}$ с $\lambda_{nk} = |a_{nk}|$, а матрица A регулярного метода суммирования удовлетворяет условию (7) по теореме 2 из статьи [3].

§ 2. Суммируемость подпоследовательностей и перестановок

Известно, что числовая последовательность сходится тогда и только тогда, когда все ее подпоследовательности суммируемы некоторым регулярным матричным методом (см. [6], стр. 401), или все ее перестановки суммируемы некоторым регулярным методом (см. [10], стр. 187). Отсюда непосредственно следует

Теорема 2. *Пусть $A \in \mathfrak{T}$ и $X \in s(\mathbf{C})$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *все подпоследовательности последовательности X суммируемы методом A;*

2) *все перестановки последовательности X суммируемы методом A.*

Возникает вопрос, остается ли теорема 2 в силе, если в ней заменить $\mathbf{C}$ произвольным банаховым пространством? Мы докажем здесь, что ответ на поставленный вопрос является положительным.

Обозначим через $\mathfrak{N}(X)$ множество всех подпоследовательностей последовательности X, а через $\mathfrak{R}(X)$ — множество всех ее перестановок. Талалян [9] доказал несколько теорем о суммируемости перестановок и подпоследовательностей обобщенным матричным методом в нормированном пространстве. Нетрудно убедиться, что рассуждения Талаляна остаются в силе при замене норму полунормой. Таким образом, имеют место следующие предложения.

Предложение 1. *Пусть E и F — локально выпуклые пространства, а A — обобщенная матрица, элементы $A_{nk} : E \to F$ которой удовлетворяют условию*

$$\lim_n A_{nk}(x) = \theta \qquad \forall x \in E. \tag{R$_1$}$$

Тогда из A-суммируемости всех перестановок последовательности $X \in s(E)$ следует соотношение

$$\lim A(Y) = \lim A(X) \qquad \forall Y \in \mathfrak{R}(X).$$

Предложение 2. *Пусть E и F — локально выпуклые пространства, а A_{nk}, $h \in L_s(E, F)$ — такие отображения, что выполнены условия* (R_1) *и*

$$\exists \lim_{m} \sum_{k \leqslant m} A_{nk}(x), \qquad \lim_{n} \sum_{k} A_{nk}(x) = h(x) \qquad \forall x \in E, \qquad (\mathrm{R}_2)$$

причем h инъективно[3]. *Если все перестановки последовательности $X \in s(E)$ являются $A(h)$-суммируемыми, то*

1) $A(h)\text{-}\lim Y = A(h)\text{-}\lim X \qquad \forall Y \in \mathfrak{R}(X)$;

2) *множество секвенциальных предельных точек последовательности X состоит не более, чем из одной точки $A(h)\text{-}\lim X$.*

Предложение 3. *Пусть E и F — локально выпуклые пространства, а $A \in \mathfrak{T}(h)$ с A_{nk}, $h \in L_s(E, F)$, причем h инъективно. Если все подпоследовательности последовательности $X \in s(E)$ суммируемы методом $A(h)$, то множество секвенциальных предельных точек последовательности X состоит не более, чем из одной точки.*

Отсюда в силу леммы 1 из статьи [3] непосредственно вытекает

Следствие 4. *Пусть E — локально выпуклое пространство и $A \in \mathfrak{T}$. Если все подпоследовательности последовательности $X \in s(E)$ суммируемы методом A, то*

1) $A\text{-}\lim Y = A\text{-}\lim X \qquad \forall Y \in \mathfrak{R}(X)$;

2) *множество секвенциальных предельных точек последовательности X состоит не более, чем из одной точки $A\text{-}\lim X$.*

Любопытно отметить, что утверждение 1) из следствия 4 не обобщается на случай матрицы $A \in \mathfrak{G}$, удовлетворяющей условию (R_1) (ср. предложение 1). Для обоснования этого рассмотрим обобщенную матрицу $A = (A_{nk})$ с элементами $A_{nk} : c_0 \to \mathbf{R}$, где $A_{nk} = O$ при $k \neq n$ и $A_{nn}(x) = \xi_n$ для произвольного элемента $x = (\xi_k)$ пространства c_0 комплексных нуль-последовательностей с нормой $\|x\| = \sup |\xi_k|$. Такие A_{nk} являются непрерывными линейными функционалами, $A \in \mathfrak{G}$ и выполнено условие (R_1). Последовательность $X = (e_i)$ с $e_i = (\delta_{ik})$ является A-суммируемой, причем $\lim_n A_n(X) = \lim_n A_{nn}(e_n) = \lim_n \delta_{nn} = 1$. В то же время A-суммируемы и все подпоследовательности $Y \neq X$ последовательности X, но $\lim_n A_n(Y) = 0$.

Отметим, что доказательство леммы 1 статьи [4], являющейся по содержанию обобщением утверждения 1) следствия 4, ошибочно, ввиду чего не обоснована и теорема 6 статьи [4].

---

[3] Т. е. из $x \neq y$ следует $h(x) \neq h(y)$, где $x, y \in E$.

Предложение 4. *Пусть E и F — локально выпуклые пространства, A — конечнострочная обобщенная матрица со свойством* (R_1) *и $X \in s(E)$ — такая последовательность, что выполнено условие* (B). *Тогда из A-суммируемости всех перестановок последовательности X следует A-суммируемость всех ее подпоследовательностей, причем*

$$\lim A(Y) = \lim A(X) \qquad \forall Y \in \mathfrak{R}(X). \tag{8}$$

Доказательство. Без ограничения общности можно предполагать, что длины строк матрицы A не равномерно ограничены, ибо в противном случае нечего доказывать ввиду вытекающего из (R_1) соотношения

$$\lim A(X) = \theta \qquad \forall X \in s(E).$$

Пусть все перестановки последовательности X суммируемы методом A. Тогда по предложению 1 при любой $Y \in \mathfrak{R}(X)$ имеем $\lim A(Y) = \lim A(X) = u_0$ в пространстве F. Мы должны показать, что $\lim A(Z) = u_0$ для каждой подпоследовательности Z последовательности X. Предположим обратное. Тогда существуют последовательность $Y \in \mathfrak{R}(X)$, полунорма $q \in Q$, число $\alpha > 0$ и последовательности индексов $n(1) < n(2) < \ldots$ $\ldots < n(i) < \ldots$ и $l(1) < l(2) < \ldots l(i) < \ldots$ такие, что

$$q\Big(\sum_{k<l(i)} A_{n(i)k}(y_k) - u_0\Big) > \alpha. \tag{9}$$

Построим теперь перестановку $U = (u_k)$ последовательности X такую, что $\lim A(U) \neq u_0$. Сначала введем несколько обозначений. Для последовательности $V = (v_k)$ обозначим символом $N(v)$ номер элемента $v \in V$. Введем также одну операцию над конечными последовательностями. Если G и H — векторы из элементов последовательности V, то через GH обозначим вектор, построенный следующим образом: зачеркиваем из H все элементы, встречающиеся в G, сохраняя порядок между оставшимися элементами, и полученный вектор добавляем справа к G. Если G, H и J — векторы, то условимся вместо $(GH)J$ писать GHJ.

Пусть $m(1) = N(y_{l(1)})$. Положим $i(1) = 1$ и в силу условия (B) найдем индекс $i(2) > i(1)$ столь большим, чтобы $n(i(2)) >$ $> m(1)$ и

$$m(1)\, q(A_{n(i(2))k}(x)) < \alpha/4 \qquad \forall x \in X.$$

Если индексы $i(1) < i(2) < \ldots < i(j-1)$ уже определены, то ввиду условия (B) существует индекс $i(j) > i(j-1)$ такой, что $n(i(j)) > m(j-1) \geqslant l(i(j-1))$ и

$$m(j-1)\, q(A_{n(i(j))k}(x)) < \alpha/4 \qquad \forall x \in X, \tag{10}$$

где $m(j-1) = N(y_{l(i(j-1))})$. Продолжая этот процесс неограниченно, мы получим последовательность индексов $l(i(1)) \leqslant \leqslant m(1) < l(i(2)) \leqslant m(2) < \ldots < l(i(j)) \leqslant m(j) < \ldots$ с $m(j) = N(y_{l(i(j))})$ такую, что для всех $j \geqslant 2$ выполнено условие (10).

Рассмотрим последовательность

$$U = Y(\leqslant l(i(1))) \cdot X(\leqslant m(1)) \cdot Y(\leqslant l(i(2))) \cdot X(\leqslant m(2)) \ldots .$$

На основе наших построений U является перестановкой последовательности X, причем для любого $j \geqslant 2$ из (9) и (10) вытекает

$$\begin{aligned} q\Big(\sum_{k \leqslant l(i(j))} A_{n(i(j))k}(u_k) - u_0\Big) \geqslant \Big(\sum_{k \leqslant l(i(j))} A_{n(i(j))k}(y_k) - u_0\Big) - \\ - \sum_{k \leqslant m(j-1)} q(A_{n(i(j))k}(y_k)) - \\ - \sum_{k \leqslant m(j-1)} q(A_{n(i(j))k}(u_k)) > \\ > \alpha - \alpha/4 - \alpha/4 = \alpha/2, \end{aligned}$$

или, короче,

$$q(A_{n(i(j))}(U) - u_0) > \alpha/2.$$

Следовательно, $\lim A(U) \neq u_0$, что противоречит предположению об A-суммируемости всех перестановок последовательности X. Доказательство закончено.

Следствие 5. *Пусть E и F — локально выпуклые пространства, $h \in L(E, F)$ — некоторый инъективный оператор и $A \in \mathfrak{G}$ — такая обобщенная матрица, что* [4]

$$\lim_n \lambda_{nk} = 0. \tag{11}$$

Тогда из $A(h)$-суммируемости всех перестановок последовательности $X \in m(E)$ следует $A(h)$-суммируемость всех ее подпоследовательностей, причем

$$A(h)\text{-}\lim Y = A(h)\text{-}\lim X \qquad \forall Y \in \mathfrak{N}(X). \tag{12}$$

Доказательство. Пусть все перестановки последовательности $X \in m(E)$ суммируемы методом $A(h)$. По теореме 1 найдется строго треугольный матричный метод суммирования $B = (B_{nk})$, эквивалентный методу A на множестве $m(E)$. Ввиду строгой треугольности матрицы B имеем $m(E) \subseteq d_B(E)$. Далее, по построению матрицы B (см. доказательство теоремы 1) справедливо

$$\lim_{n>k} q(B_{nk}(x)) = \lim_i q(A_{ik}(x)),$$

---

[4] См. определение класса $\mathfrak{G}$ на стр. 76.

где $q \in Q$ и $x \in E$. Отсюда при помощи условий (2) и (11) выводим, что B обладает свойством (R_1) и для всех последовательностей $X \in m(E)$ выполнено условие (B). Так как по предложению 1 все перестановки последовательности X суммируемы методом $B(h)$ к элементу $x_0 = B(h)\text{-}\lim X$, то из предложения 4 следует $B(h)$-суммируемость всех $Y \in \mathfrak{R}(X)$ с

$$\lim B(Y) = \lim B(X) = h(x_0) \qquad \forall Y \in \mathfrak{R}(X),$$

откуда ввиду эквивалентности методов A и B вытекает

$$\lim A(Y) = \lim A(X) = h(x_0) \qquad \forall Y \in \mathfrak{R}(X). \tag{13}$$

Доказательство завершено, ибо равенства (12) и (13) равносильны.

Следствие 6. *Пусть E — секвенциально полное локально выпуклое пространство и A — регулярный метод суммирования, определенный скалярной матрицей $A = (a_{nk})$. Тогда из A-суммируемости всех перестановок последовательности $X \in s(E)$ следует A-суммируемость всех ее подпоследовательностей к элементу $A\text{-}\lim X$.*

Доказательство. Проверим выполнение условий следствия 5, где $F = E$ и $h: E \to E$ — тождественное отображение. Условия (R_1), $A \in \mathfrak{G}$ и (11) выполнены ввиду вытекающего из теоремы 2 статьи [3] соотношения $A \in \mathfrak{T}$. Далее, если все $Y \in \mathfrak{R}(X)$ суммируемы методом A к элементу x_0 и $x' \in E'$, то

$$\lim_n \sum_k a_{nk} x'(y_k) = x'(x_0) \qquad \forall Y \in \mathfrak{R}(X),$$

т. е. все перестановки числовой последовательности $(x'(y_k))$ суммируемы методом A к значению $x'(x_0)$. Но тогда по теореме 1 из статьи Фрайди [10] имеем $\lim_k x'(x_k) = x'(x_0)$, откуда ввиду произвольности $x' \in E'$ вытекает $X \in w(E)$. Следовательно, $X \in m(E)$, и доказательство завершается применением следствия 5.

Пусть E — банахово пространство с сопряженным пространством E'. Обозначим символом S' единичный шар пространства E', а через $\operatorname{card} M$ — количество элементов конечного множества M.

Последовательность $X \in s(E)$ называется *p-сходящейся* к элементу $x_0 \in E$ (коротко, $p\text{-}\lim X = x_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $n(\varepsilon) \in \mathbf{N}$, что (см. [7], стр. 103)

$$\operatorname{card}\{k : |x'(x_k - x_0)| \geqslant \varepsilon \|x'\|\} < n(\varepsilon) \qquad \forall x' \in E'.$$

Рудаковым доказаны следующие теоремы о подпоследовательностях (см. [7], теоремы 1 и 2; [8]).

Теорема А. *Пусть* $A \in \mathfrak{P}$ *— числовая матрица и* $X \in s(E)$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

а) $p\text{-}\lim X = x_0$,

б) $\lim_n \Sigma_k |a_{nk} x'(x_k - x_0)| = 0$ *равномерно по* $x' \in S'$ *и* $Y \in \mathfrak{R}(X)$;

в) $\lim_n \Sigma_k |a_{nk} x'(x_k - x_0)| = 0$ *равномерно по* $x' \in S'$ *для всех* $Y \in \mathfrak{R}(X)$;

г) $A\text{-}\lim Y = x_0$ *равномерно по* $Y \in \mathfrak{R}(X)$;

д) $A\text{-}\lim Y = x_0 \quad \forall Y \in \mathfrak{R}(X)$.

Теорема Б. *Пусть* $A \in \mathfrak{T} \setminus \mathfrak{P}$ *и* $X \in s(E)$. *Если при некотором* $x_0 \in E$ *выполнено условие* д) *теоремы* А, *то последовательность* X *сходится к элементу* x_0.

Мы докажем здесь аналогичные теоремы для перестановок.

Теорема 3. *Пусть* E *— банахово пространство,* $A \in \mathfrak{P}$ *и* $X \in s(E)$. *Тогда р-сходимость последовательности* X *равносильна каждому из следующих условий:*

б') $\lim_n \Sigma_k |a_{nk} x'(x_k - x_0)| = 0$ *равномерно по* $x' \in S'$ *и* $Y \in \mathfrak{R}(X)$;

в') $\lim_n \Sigma_k |a_{nk} x'(x_k - x_0)| = 0$ *равномерно по* $x' \in S'$ *для всех* $Y \in \mathfrak{R}(X)$;

г') $A\text{-}\lim Y = x_0$ *равномерно по* $Y \in \mathfrak{R}(X)$;

д') $A\text{-}\lim Y = x_0 \quad \forall Y \in \mathfrak{R}(X)$.

Доказательство. Непосредственно ясно, что б') $\Rightarrow$ в') $\Rightarrow$ д') и б') $\Rightarrow$ г') $\Rightarrow$ д'). Импликация а) $\Rightarrow$ б') доказывается точно так же, как и в случае подпоследовательностей (см. [7], стр. 105). Из следствия 6 выводим, что утверждение д') влечет за собой условие д) теоремы А, откуда по теореме А вытекает а). Следовательно, д') $\Rightarrow$ а). Теорема полностью доказана.

Так как д') $\Rightarrow$ д) по следствию 6, а соотношение д) из теоремы A равносильно сходимости последовательности X при $A \in \mathfrak{T} \setminus \mathfrak{P}$, то имеет место следующее дополнение к теореме 3.

Теорема 4. *Пусть* E *— банахово пространство,* $A \in \mathfrak{T} \setminus \mathfrak{P}$ *и* $X \in s(E)$. *Тогда из* A*-суммируемости всех перестановок последовательности* X *следует ее сходимость к элементу* $A\text{-}\lim X$.

Из теорем А, Б, 3 и 4 непосредственно вытекает

Следствие 7. *Пусть* E *— банахово пространство,* $A \in \mathfrak{T}$ *и* $X \in s(E)$. *Тогда* A*-суммируемость всех перестановок последовательности* X *равносильна* A*-суммируемости всех ее подпоследовательностей.*

Литература

1. Иосида К., Функциональный анализ. Москва, 1967.
2. Кангро Г., О матричных преобразованиях последовательностей в банаховых пространствах. Изв. АН ЭстССР. Сер. техн. и физ. матем. наук, 1956, 5, № 2, 108—128.

3. Кольк Э., Теорема Бака в локально выпуклых пространствах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, **374**, 128—140.
4. Кольк Э., Обобщение теоремы Бака. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1977, **430**, 22—28.
5. Кольк Э., Обобщенная секвенциальная сходимость и свойство Банаха—Сакса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, **448**, 21—30.
6. Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. Москва, 1960.
7. Рудаков С. А., Суммируемость слабо сходящихся последовательностей в банаховых пространствах. Мат. зап. Уральск. ун-т, 1975, **9**, № 2, 103—110.
8. Рудаков С. А., Исправление к статье «Суммируемость слабо сходящихся последовательностей в банаховых пространствах.» Мат. зап. Уральск. ун-т, 1975, **9**, № 4, 128.
9. Талалян Ф. А., О суммировании последовательностей в нормированных пространствах. Изв. АН АрмССР. Математика, 1976, **11**, № 6, 548—564.
10. Fridy, J. A., Summability of rearrangements of sequences. Math. Z., 1975, **174**, 187—192.
11. Ramanujan, M. S., Generalized Kojima—Toeplitz matrizes in certain linear topological spaces. Math. Ann., 1965, **159**, 365—373.
12. Tropper, A. M., A sufficient condition for a regular matrix to sum a bounded divergent sequence. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, **4**, 671—677.

Поступило
21 IV 1978

ÜBER DIE LIMITIERBARKEIT DER TEILFOLGEN UND UMORDNUNGEN. I

E. Kolk

Zusammenfassung

Es sei E (ebenso F) ein reeller oder komplexer separierter lokalkonvexer topologischer linearer Raum. Im Aufsatz betrachtet man die Limitierbarkeit der Folgen $X=(x_i)$, $x_i \in E$ mit den verallgemeinerten Matrixverfahren $A=(A_{nk})$, wo A_{nk} die Abbildungen des Raumes E in den Raum F sind. Man beweist, daß bei jeder zeilenfiniten verallgemeinerten Matrix A mit der Eigenschaft (R_1) aus der A-Limitierbarkeit aller Umordnungen der die Bedingung (B) erfüllenden Folge X sich immer die A-Limitierbarkeit aller ihrer Teilfolgen ergibt. Als Folgerung bekommt man, daß die Pseudokonvergenz (s. [7], S. 103) der Folge X im Banach-Raum E gleichbedeutend mit der A-Limitierbarkeit aller ihrer Umordnungen ist, wo A eine skalare Toeplitz-Matrix mit der Eigenschaft (P) ist.

Tartu Ülikooli toimetised, Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1979, **504**, 85—89.

МУЛЬТИПЛИКАТОРНЫЕ МЕТОДЫ СУММИРОВАНИЯ И ТЕОРЕМЫ ТАУБЕРОВА ТИПА

Э. Реймерс

Тартуский государственный университет

В настоящей статье мы вводим понятие мультипликаторного метода суммирования расходящихся рядов и используем его для получения тауберовых теорем сходимости.

В § 1 дается общее определение мультипликаторного метода суммирования (определение 1.1) и вводятся понятия консервативности и линейности таких методов (определения 1.2 и 1.3 соответственно). В § 2 определяется матричный мультипликаторный метод и показывается его связь с матричными методами суммирования (теорема 2.1). В § 3 матричные мультипликаторные методы используются для получения тауберовых теорем сходимости для матричных методов суммирования, дополняющие результаты статей [2, 3].

Во всей статье, если пределы изменения индексов не указаны, то они принимают все целочисленные значения от 0 до ∞. Всюду $\lim$ означает предел $n \to \infty$.

§ 1. Определение мультипликаторного метода суммирования

Пусть X — множество числовых последовательностей $x = (x_n)$ и a_n — некоторая последовательность функционалов, заданных на этом множестве X.

Определение 1.1. *Мы скажем, что последовательность* $x \in X$ *суммируема мультипликаторным методом* $\mathfrak{A} = (a_n)$, *или* $\mathfrak{A}$*-суммируема, к сумме* $\mathfrak{A}(x)$, *если существует конечный предел*

$$\lim a_n(x) x_n = \mathfrak{A}(x). \tag{1.1}$$

Если предел (1.1) существует для всех $x \in X$, то множество X будем называть *полем суммируемости* метода $\mathfrak{A}$ и писать $X = c\mathfrak{A}$ (ср. [1], § 6).

Пусть c — множество всех сходящихся последовательностей x.

Определение 1.2. *Метод $\mathfrak{A}$ будем называть консервативным, если предел* (1.1) *существует для каждой $x \in c$, и регулярным, если при этом будет выполняться равенство*

$$\lim a_n(x) x_n = \lim x_n$$

для каждой $x \in c$.

Для консервативного метода $\mathfrak{A}$, следовательно, будет выполняться включение $c \subset c\mathfrak{A}$, а для регулярного метода $\mathfrak{A}$ будет выполняться равенство

$$\lim a_n(x) = 1$$

для каждой $x \in c$.

Последовательность $cx = (cx_n)$ будем называть произведением последовательности $x = (x_k)$ на постоянную c.

Определение 1.3. *Метод $\mathfrak{A} = (a_n)$ будем называть линейным на X, если на множестве X он*

1) *аддитивен, т. е.*

$$a_n(x+y)(x_n+y_n) = a_n(x) x_n + a_n(y) y_n \tag{1.3}$$

для всех $x \in X$, и

2) *однороден, т. е.*

$$a_n(cx) cx_n = ca_n(x) x_n \tag{1.4}$$

для всех $x \in X$ и вещественных чисел c.

Из последнего условия видно, что для однородности метода $\mathfrak{A}$ на X необходимо и достаточно, чтобы было

$$a_n(cx) = a_n(x)$$

для всех $x \in X$.

§ 2. Матричный мультипликаторный метод

Пусть матрица $A = (a_{nk})$ определяет треугольный матричный метод суммирования A, который при помощи преобразования

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} x_k$$

переводит последовательности $x = (x_k)$ в последовательность $\{A_n(x)\}$.

Пусть cA — поле суммируемости метода A. Через zA обозначим множество всех последовательностей $x \in cA$, в которых $x_k \neq 0$. Пусть $e = (1, 1, 1, \ldots)$ — последовательность, состоящая из единиц. Обозначим

$$V_k = 1/x_k, \qquad v_k = V_k - V_{k-1}.$$

Определение 2.1. *Мультипликаторный метод* $\mathfrak{A} = (a_n)$ *из функционалов* a_n, *определенных равенством*

$$a_{n+1}(x) = A_n(e) + \sum_{k=0}^{n} v_{k+1} \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} x_\nu, \tag{2.1}$$

будем называть матричным мультипликаторным методом суммирования.

Найдем линейный метод $\mathfrak{A}$, полем суммируемости которого будет множество zA.

Теорема 2.1. *Последовательность функционалов* $\mathfrak{A} = (a_n)$, *заданных равенством* (2.1), *определяет линейный мультипликаторный метод* $\mathfrak{A}$ *с полем суммируемости* $c\mathfrak{A} = zA$. *Если* A *консервативен или регулярен, то* $\mathfrak{A}$ *также консервативен или регулярен соответственно.*

Доказательство. Для любой последовательности x с $x_k \neq 0$ мы можем написать

$$\begin{aligned} A_n(x) &= x_{n+1}A_n(e) - x_{n+1}A_n(e) + A_n(x) = \\ &= x_{n+1}A_n(e) - x_{n+1}\sum_{i=0}^{n} a_{ni}x_i(V_i - V_{n+1}) = \\ &= x_{n+1}\Big[A_n(e) + \sum_{i=0}^{n} a_{ni}x_i \sum_{k=i}^{n} v_{k+1}\Big] = \\ &= x_{n+1}\Big[A_n(e) + \sum_{k=0}^{n} v_{k+1} \sum_{i=0}^{k} a_{ni}x_i\Big] = \\ &= x_{n+1}a_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$a_n(x)\,x_n = A_{n-1}(x). \tag{2.2}$$

Если $x \in zA$, то

$$\lim a_n(x)\,x_n = \lim A_{n-1}(x).$$

Из последнего равенства следуют утверждения теоремы. Из-за линейности метода A таковым будет и метод $\mathfrak{A}$. Теорема доказана.

§ 3. Теоремы тауберова типа

Общая точная тауберова теорема сходимости для мультипликаторного метода $\mathfrak{A}$ будет следующей.

Теорема 3.1. *Если метод* $\mathfrak{A}$ *регулярен и* $x \in c\mathfrak{A}$, *то* $x \in c$ *тогда и только тогда, когда*

$$\lim a_n(x) = 1. \tag{3.1}$$

Доказательство очевидно из-за равенства (1.1).

Для матричных методов суммирования мы можем получить следующие тауберовы теоремы сходимости. Обозначим

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} v_{k+1} \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} x_\nu .$$

Тогда равенство (2.1) мы можем переписать в виде

$$a_{n+1}(x) = A_n(e) + F_n(x). \tag{3.2}$$

Теорема 3.2. *Пусть метод A регулярен. Из $x \in zA$ следует $x \in c$ тогда и только тогда, когда*

$$\lim x_{n+1} F_n(x) = 0. \tag{3.3}$$

Доказательство. Ввиду равенств (2. 2) и (3.2) мы имеем

$$A_n(x) = x_{n+1} A_n(e) + x_{n+1} F_n(x). \tag{3.4}$$

Из-за регулярности метода A будет $\lim A_n(e) = 1$ и равенство (3.4) дает требуемое условие (3.3). Теорема доказана.

Аналогичный результат, дающий точную тауберову теорему сходимости, но с условием в другом виде, имеется в статье [2] (теорема 2.2.1).

Теорема 3.3. *Пусть метод A регулярен. Последовательности $\{A_n(x)\}$ и $\{x_{n+1}\}$* с $x_n \neq 0$ *эквивалентны тогда и только тогда, когда*

$$\lim F_n(x) = 0. \tag{3.5}$$

Доказательство. Из (3.4) следует, что

$$A_n(x)/x_{n+1} = A_n(e) + F_n(x),$$

откуда получаем, что

$$\lim A_n(x)/x_{n+1} = 1.$$

Теорема доказана.

Литература

1. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Таллин, 1977.
2. Реймерс Э., Теоремы тауберова типа для матричных методов суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 43—51.
3. Реймерс Э., Тауберовы теоремы для числовых рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1976, **430**, 51—57.

Поступило
7 I 1978

MULTIPLICATOR METHODS OF SUMMABILITY AND THEOREMS OF THE TAUBERIAN TYPE

E. Reimers

Summary

In the article the notion of the multiplicator method of summability is introduced and its applications to derive the convergence theorems of Tauberian type for ordinary summability methods are given. In the whole article lim means the limit $n \to \infty$.

In § 1 the definition of the multiplicator method of summability is given. Let X be a set of number sequences $x=(x_n)$ and $\mathrm{A}=(a_n)$ be a sequence of functionals a_n defined on the set X.

Definition 1.1. *The sequence $x \in X$ is called summable by the multiplicator method* A *to the sum* A(x) *if there exists the finite limit* (1.1).

For the sequence $x=(x_n)$ and constant c let $cx=(cx_n)$ be their product sequence. The method A is called *linear* on the set X if the conditions (1.3) of additivity and (1.4) of homogeneity are fulfilled (definition 1.3). In the usual way the notions of regularity and conservativity for A are defined (definition 1.2).

In § 2 an example of the multiplicator method of summability is given. Let a matrix $A=(a_{nk})$ define the method of summability with the summability field cA. Let zA be the subset of cA in which the sequences $x=(x_n)$ have $x_n \neq 0$.

Theorem 2.1. *The sequence of functionals* $\mathrm{A}=(a_n)$ *given by* (2.1) *defines a linear matrix multiplicator method* A *with the summability field* $c\mathrm{A}=zA$.

In § 3 the Tauberian theorems for convergence are given. Let the matrix method A be triangular and regular. Denote by c the set of convergence sequences and by $\{A_n(x)\}$ the A-transform of the sequence $x=(x_n)$.

Theorem 3.2. *From $x \in zA$ it follows $x \in c$ if and only if the condition* (3.3) *is fulfilled.*

Theorem 3.3. *The sequences $\{A_n(x)\}$ and (x_{n+1}) with $x_n \neq 0$ are equivalent if and only if the condition* (3.5) *is fulfilled.*

Tartu Ülikooli toimetised, Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1979, **504**, 90—94.

НЕКОТОРЫЕ ТАУБЕРОВЫ ТЕОРЕМЫ С ОСТАТКОМ

И. Таммерайд

Таллинский политехнический институт

При изучении некоторых задач теории приближения функций возникает потребность [4] применить результаты суммируемости со скоростью. В [2] введена топология в пространстве всех последовательностей, λ-суммируемых методом A, и найден общий вид непрерывного линейного функционала в этом пространстве. В настоящей заметке изучаются вопросы применения результатов наилучшего приближения, связанных с геометрической формой теоремы Хана—Банаха, к суммируемости со скоростью. Получены тауберовы теоремы с остатком с тауберовыми условиями двойственного характера. Теорема 1 без доказательства уже опубликована раньше в материалах конференции [5], посвященной 65-летию со дня рождения проф. Г. Кангро.

1. Основные понятия и леммы. Пусть $x = \{\xi_k\}$ — сходящаяся последовательность с $\xi = \lim \xi_k$. При $\lambda = \{\lambda_k\}$, $0 < \lambda_k \uparrow \infty$, определим

$$c^\lambda = \{x:\ \exists \lim \beta_k\}, \qquad m^\lambda = \{x:\ \beta_k = O(1)\},$$

где $\beta_k = \lambda_k(\xi_k - \xi)$. Если над последовательностями $x = \{\xi_k\}$ и $z = \{\zeta_k\}$ определить обычные линейные операции $x + z = \{\xi_k + \zeta_k\}$ и $\alpha x = \{\alpha \xi_k\}$, то c^λ превращается в векторное пространство. При нормировке $\|x\| = \sup \{|\beta_k|, |\xi|\}$ пространство c^λ является BK-пространством (см. [2], стр. 111—112).

Матричный метод суммирования $A = (a_{nk})$ переводит последовательность x в последовательность $Ax = \{\eta_n\}$ с

$$\eta_n = \sum_k a_{nk} \xi_k, \tag{1}$$

если ряды в (1) сходятся. Метод A называется *реверсивным*, если система (1) имеет только единственное решение для всех $y = \{\eta_n\} \in c$, где $c = \{x: \exists \lim \xi_k\}$. Пусть $c^\lambda{}_A = \{x: Ax \in c^\lambda\}$ — поле λ-суммируемости метода A. По теореме Целлера (см. [7], стр. 38) пространство $c^\lambda{}_A$ является FK-пространством с полунормами (см. [2], стр. 114)

$$|\xi_k|, \quad \sup_m |\sum_{k=0}^{m} a_{nk}\xi_k|, \quad \sup_n \{|\gamma_n|, |\eta|\},$$

где

$$\eta = \lim \eta_n, \tag{2}$$

и

$$\gamma_n = \lambda_n (\eta_n - \eta). \tag{3}$$

При этом общий вид линейного непрерывного функционала f в пространстве $c^\lambda{}_A$ определяется формулой (см. [2], стр. 114)

$$f(x) = d\eta + t\gamma + \sum d_k\gamma_k + \sum t_k\xi_k, \quad \sum |d_k| < \infty,$$

где

$$\gamma = \lim \gamma_n, \tag{4}$$

а коэффициенты t_k таковы, что ряд $\Sigma\, t_k\xi_k$ сходится при всех $x \in c^\lambda{}_A$. Если метод A реверсивен, то как частный случай получается следующая лемма.

Лемма 1. *Если A — реверсивный матричный метод суммирования, то пространство $c^\lambda{}_A$ есть BK-пространство с нормой*

$$\|x\| = \sup \{|\gamma_n|, |\eta|\}.$$

При этом общий вид линейного непрерывного функционала f в пространстве $c^\lambda{}_A$ определяется формулой

$$f(x) = d\eta + t\gamma + \sum d_k\gamma_k, \quad \sum |d_k| < \infty,$$

и

$$\|f\| = |d| + |t| + \sum |d_k|,$$

где величины η, γ_k и γ определены формулами (2), (3) *и* (4), *а константы d, t и d_k зависят лишь от f.*

Пусть X — вещественное нормированное пространство и в пространстве X выделены подпространство E и $z \in X$, $z \notin E'$, где E' — замыкание пространства E. Рассматривается расстояние от z до E

$$\varrho(z, E) = \inf_{x \in E} \|z - x\|.$$

Через $E^\perp$ обозначен аннулятор E, т. е. совокупность всех непрерывных линейных функционалов, обращающихся в нуль на E.

Лемма 2 (см. [6], стр. 9—15). *Справедливы соотношения*

$$\varrho(z, E) = \max_{f \in E^\perp,\ f(z)=1} \{1/\|f\|\} = \max_{f \in E^\perp,\ \|f\|=1} |f(z)|.$$

2. Наилучшее приближение и тауберовы теоремы с остаточным членом. Тауберовыми теоремами принято называть теоремы (см. [3], стр. 3), в которых по заданной асимптотике какого-либо преобразования функции

из некоторых условий, накладываемых на эту функцию, делается заключение об асимптотическом поведении другого ее преобразования, когда последнее определено уже на более узком классе функций, чем первое (в частности, об асимптотическом поведении самой функции). В такой трактовке можно рассматриваемые нами теоремы называть тауберовыми, несмотря на своеобразный двойственный характер тауберовых условий и асимптотического поведения самой последовательности.

Теорема 1. *Пусть A — реверсивный матричный метод суммирования,* $\lambda=\{\lambda_n\}$, $0<\lambda_n\uparrow\infty$, $\mu=\{\mu_n\}$, $0<\mu_n\uparrow$,

$$A(c^\mu)\subset c^\lambda \tag{5}$$

и

$$z=\{\zeta_n\}\in c^\lambda_A.$$

Если существуют действительные решения системы

$$d\vartheta+t\varkappa+\sum d_k\varkappa_k=1, \tag{6}$$

$$d\eta+t\gamma+\sum d_k\gamma_k=0, \qquad \forall x\in c^\mu, \tag{7}$$

причем $\Sigma|d_k|<\infty$, *и величины* η, γ_k *и* γ *определены формулами* (1), (2), (3) *и* (4), *а величины* ϑ, $\varkappa_k$ *и* $\varkappa$ *формулами*

$$\vartheta_n=\sum_k a_{nk}\zeta_k, \qquad \vartheta=\lim_n \vartheta_n,$$

$$\varkappa_n=\lambda_n(\vartheta_n-\vartheta), \qquad \varkappa=\lim_n \varkappa_n,$$

то $z\notin c^\mu$, *причем*

$$\varrho(z,c^\mu)=\max(|d|+|t|+\sum|d_k|)^{-1},$$

где max *берется по всем решениям системы* (6), (7) *или*

$$\varrho(z,c^\mu)=\max(|d\vartheta+t\varkappa+\sum d_k\varkappa_k|,$$

где max *берется по всем решениям системы* (7) *при дополнительном условии*

$$|d|+|t|+\Sigma\,|d_k|=1.$$

Доказательство. Согласно лемме 1, общий вид линейного непрерывного функционала в пространстве $c^\lambda{}_A$ определяется формулой $f(x)=d\eta+t\gamma+\Sigma\, d_k\gamma_k$ с $\Sigma\,|d_k|<\infty$. Если существуют действительные решения системы (6), (7), то существует, по крайней мере, один линейный непрерывный функционал f, удовлетворяющий условиям

$$f(z)=1 \tag{8}$$

и

$$f(x)=0 \qquad \forall x\in c^\mu. \tag{9}$$

По условию (5) пространство c^μ и его замыкание являются подпространствами BK-пространства $c^\lambda{}_A$. Из непрерывности функционала f и из (8) и (9) заключаем, что элемент z не принадлежит замыканию пространства c^μ, следовательно, $z \notin c^\mu$. Теперь можно применить лемму 2, выбрав $X = c^\lambda{}_A$ и $E = c^\mu$. При реверсивном методе A соотношения леммы 2, ввиду общего вида функционала f и нормы $\|f\|$, примут вид, заданный в формулировке теоремы 1.

Если в теореме 1 за A выбрать регулярный метод Рисса $P = (R, p_n)$, то в качестве применения получим тауберову теорему с остатком для метода P.

Теорема 2. *Если регулярный метод Рисса P с $p_n > 0$ сохраняет μ-ограниченность, $\lambda_n = o(\mu_n)$ и последовательность z суммируема методом P со скоростью λ, причем $\varkappa \neq 0$, то $z \notin c^\mu$ и $\varrho(z, c^\mu) = |\varkappa|$.*

Доказательство. Ввиду регулярности метода P с $p_n > 0$ и условия $\lambda_n = o(\mu_n)$, метод P, сохраняющий μ-ограниченность, принадлежит классу (c^μ, c^λ), т. е. $P(c^\mu) \subset c^\lambda$. Следовательно, c^μ является подпространством BK-пространства $c^\lambda{}_P$. Для применения теоремы 1 построим функционал, удовлетворяющий условиям теоремы 1. Нетрудно показать, что последовательности $e = \{\delta_{kk}\}$ и $e_\nu = \{\delta_{k\nu}\}$, где $\delta_{k\nu}$ — символ Кронекера, принадлежат c^μ. Для $x = e$ соотношение (7) примет вид $d \cdot 1 + t \cdot 0 + \Sigma\, d_k \cdot 0 = 0$. Следовательно, $d = 0$. Ввиду регулярности метода P для $x = e_\nu$ соотношение (7) примет вид

$$d \cdot 0 + t \cdot \lim_n p_\nu \lambda_n / P_n + \sum_{k \geqslant \nu} (p_\nu \lambda_k / P_k)\, d_k = 0.$$

Далее, так как метод P сохраняет μ-ограниченность, то (см. [1], стр. 140) $\mu_n = o(P_n)$, откуда ввиду условия $\lambda_n = o(\mu_n)$ вытекает, что $\lambda_n = o(P_n)$. Следовательно,

$$p_\nu \sum_{k \geqslant \nu} \lambda_k d_k / P_k = 0$$

и $d_k = 0$. Так как последовательность z является P-суммируемой со скоростью λ и $\varkappa \neq 0$, то можно выбирать $f(x) = \gamma/\varkappa$. Поскольку

$$\gamma/\varkappa = \varkappa^{-1} \lim [(\lambda_n/\mu_n)\, \mu_n (\eta_n - \eta)] = 0 \qquad \forall x \in c^\mu,$$

ввиду сохранения μ-ограниченности методом P и условия $\lambda_n = o(\mu_n)$, то функционал f удовлетворяет условиям (6) и (7), а в силу теоремы 1 имеем $z \notin c^\mu$ и в силу леммы 2 получаем $\varrho(z, c^\mu) = |\varkappa|$.

Литература

1. К а н г р о Г., Множители суммируемости для рядов λ-ограниченных методами Рисса и Чезаро. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, **277**, 136—154.
2. К а н г р о Г., О λ-совершенности методов суммирования и ее применениях. Изв. АН ЭстССР. Физ., Мат., 1971, **20**, № 2, 111—120.
3. С у б х а н к у л о в М. А., Тауберовы теоремы с остатком. Москва, 1976.
4. Т а м м е р а й д И., Приближение функций и теоремы абелева и тауберова типа с остаточным членом. Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1971, **A 312**, 39—53.
5. Т а м м е р а й д И., Наилучшее приближение и тауберовы теоремы с остатком. Материалы конф. «Методы алгебры и функциональн. анализа при исслед. семейств операторов, 1978». Тарту, 1978, 30—31.
6. Х а в и н с о н С. Я., Ч а ц к а я Е. Ш., Соотношение двойственности и критерии элементов наилучшего приближения. Москва, 1976.
7. Z e l l e r K., B e e k m a n n W., Theorie der Limitierungsverfahren. Berlin Heidelberg, New-York, 1970.

Поступило
23 XI 1978

SOME TAUBERIAN REMAINDER THEOREMS

I. Tammeraid

S u m m a r y

In previous research [2] some fundamental topological properties of the vector space $c\lambda_A$ were studied. In order to apply these results to Tauberian remainder theorems, in the present paper the Hahn-Banach theorem is applied. Some dual Tauberian conditions for reversible matrix methods of summability have been achieved.

Tartu Ülikooli toimetised, Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1979, **504**, 95—98.

О СВОЙСТВАХ ОДНОГО МЕТОДА СУММИРОВАНИЯ ТИПА ПУАССОНА—АБЕЛЯ

Ф. Вихманн

Таллинский политехнический институт

Пусть задана числовая последовательность $\{\lambda_k\}$, удовлетворяющая условию $0 \leqslant \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Определение 1. *Ряд*[1]

$$\sum z_k \tag{1}$$

называется суммируемым методом Пуассона—Абеля $PA(\lambda_k)$ *к сумме* z, *если при всех* $\alpha > 0$ *ряд*

$$\sum e^{-\lambda \alpha_k} z_k = \varphi(\alpha) \tag{2}$$

сходится и $\varphi(\alpha) \to z$, *если* $\alpha \to 0+$.

Определение 2. *Ряд* (1) *называется суммируемым методом* $AT_s(\lambda_k)$ *к сумме* z, *если при всех* $\alpha > 0$ *ряд*

$$\sum (1+\alpha\lambda_k)^{-s} e^{-\alpha\lambda_k} z_k = \varrho_s(\alpha) \tag{3}$$

сходится и $\varrho_s(\alpha) \to z$, *если* $\alpha \to 0+$.

Метод $AT_s(\lambda_k)$ регулярен. Этот метод суммирования рядов был введен автором в [1], где рассматривался вопрос взаимного включения методов $PA(\lambda_k)$, $AT_s(\lambda_k)$ и $T_s(\lambda_k)$. В [1] была доказана

Теорема. *Если* $\lambda_0 \geqslant 1$ *и ряд* $\sum \lambda_k^{-\alpha} z_k$ *сходится при всех* $\alpha > 0$, *то из суммируемости ряда* (1) *методом* $AT_s(\lambda_k)$ *следует его суммируемость методом* $PA(\ln \lambda_k)$ *к той же сумме.*

Теоремы подобного типа включения доказывались Харди (см. [4], стр. 99) и Ю. Х. Худаком [5] для рядов и К. Жусиповым [3] для интегралов.

Целью настоящей заметки является доказательство того, что метод суммирования $AT_s(\lambda_k)$ сильнее метода Пуассона—Абеля $PA(\lambda_k)$. Основная идея доказательства — представление суммы $\varrho_s(\alpha)$ в виде интегрального преобразования от суммы $\varphi(\alpha)$. Исследуется интегральный аналог метода.

[1] Если пределы изменения индексов суммирования не указаны, то они принимают все целочисленные значения от 0 до ∞.

Теорема 1. *Если ряд* (2) *сходится для всех* $\alpha > 0$, *то при* $s \geqslant 1$

$$\varrho_s(\alpha) = \frac{1}{\alpha^s \Gamma(s)} \int_{\alpha}^{+\infty} (t-\alpha)^{s-1} e^{1-t/\alpha} \varphi(t)\, dt. \qquad (4)$$

Доказательство. Очевидно, что ряд (3) сходится при всех $\alpha > 0$. Так как

$$\varphi(t) = \sum (e^{-\alpha\lambda_k} z_k)\, e^{(\alpha-t)\lambda_k},$$

то ряд (2) сходится равномерно на любом отрезке $[\alpha, T]$. Поэтому

$$\int_{\alpha}^{T} (t-\alpha)^{s-1} e^{1-t/\alpha} \varphi(t)\, dt = \sum z_k \int_{\alpha}^{T} (t-\alpha)^{s-1} e^{1-\lambda_k t - t/\alpha} dt. \qquad (5)$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $T \to +\infty$. Покажем, что в (5) правомерна перестановка справа процессов суммирования и предельного перехода. Для этого достаточно доказать, что ряд

$$\sum \alpha^{-s} \Gamma^{-1}(s) \cdot z_k \int_{T}^{+\infty} (t-\alpha)^{s-1} e^{1-\lambda_k t - t/\alpha} dt = L(\alpha, s, T)$$

сходится и его предел при $T \to +\infty$ равен нулю. Сделав в интеграле замену переменной, получим

$$L(\alpha, s, T) = \sum (1+\alpha\lambda_k)^{-s} e^{-\alpha\lambda_k}\, z_k f_k(\alpha, s, T),$$

где

$$f_k(\alpha, s, T) = \Gamma^{-1}(s) \cdot \int_{a}^{+\infty} u^{s-1} e^{-u}\, du$$

и $a = (1+\alpha\lambda_k)(T-\alpha)/\alpha$. Поскольку ряд (3) сходится при любом $\alpha > 0$ и при фиксированном α функция $f_k(\alpha, s, T)$ монотонно убывает по k и ограничена для всех T, то рассматриваемый ряд сходится равномерно относительно T. Если теперь перейти к пределу $T \to +\infty$, то $L(\alpha, s, T) \to 0$. Поскольку при $u > 0$, $\nu > -1$ и $\mu > 0$

$$\int_{u}^{+\infty} (x-u)^{\nu} e^{-\mu x}\, dx = \mu^{-\nu-1} e^{-\mu u} \Gamma(\nu+1) \qquad (6)$$

(см. [2], формула 3.382.2), то утверждение теоремы следует теперь уже непосредственно из равенства (5), где $T = +\infty$.

Теорема 2. *Если ряд* (1) *суммируем методом* $PA(\lambda_k)$ *к сумме* z, *то он суммируем методом* $AT_s(\lambda_k)$ *к той же сумме.*

Доказательство. Рассмотрим разность $\varrho_s(\alpha) - z$ при $\alpha \to 0+$. По заданному $\varepsilon > 0$ найдем $\delta > 0$, что $|\varphi(t) - z| < \varepsilon/3$ для всех $0 < |\alpha| < \delta$. Тогда, с учетом (4), можем представить

$$|\varrho_s(t)-z|\leqslant|\int_\alpha^\delta\psi_s(t)(\varphi(t)-z)\,dt|+$$

$$+|(\int_\alpha^\delta\psi_s(t)\,dt-1)z|+|\int_\delta^{+\infty}\psi_s(t)\varphi(t)\,dt|=\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III},$$

где

$$\psi_s(t)=\alpha^{-s}\Gamma^{-1}(s)\cdot(t-\alpha)^{s-1}e^{1-t/\alpha}.$$

По формуле (6) получаем

$$\mathrm{I}\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\int_\alpha^{+\infty}\psi_s(t)\,dt=\frac{\varepsilon}{3}.$$

Так как $|\varphi(t)|\leqslant M$ на $[\delta,+\infty[$, то с учетом (6) находим

$$\mathrm{III}\leqslant Me^{1-\delta/\alpha}.$$

Поскольку

$$\mathrm{II}=|z|\,(1-\Gamma^{-1}(s)\cdot\int_0^{\delta/\alpha-1}u^{s-1}e^{-u}\,du),$$

то, очевидно, можно выбрать α таким малым, что $\mathrm{II}<\varepsilon/3$ и и $\mathrm{III}<\varepsilon/3$. Тем самым $|\varrho_s(\alpha)-z|<\varepsilon$, что и завершает доказательство.

З а м е ч а н и е. Можно показать, что метод $PA(\ln n)$ строго сильнее метода $AT_s(n)$, т. е. найдется ряд, который суммируем методом $PA(\ln n)$, но не суммируем методом $AT_s(n)$. Примером может служить ряд (1), где $z_k=(-1)^kC_{-i,k}$, а i — мнимая единица. Поскольку доказательство в основном следует рассуждениям К. Жусипова (см. [2], теорема 10), то мы его опускаем.

Рассмотрим теперь аналог метода $AT_s(\lambda_k)$ для суммирования интегралов.

Определение 3. *Пусть* $0\leqslant\lambda(u)\uparrow+\infty$. *Интеграл*

$$\int_0^{+\infty}a(u)\,du \tag{7}$$

называется суммируемым интегральным методом $AT_s\{\lambda(u)\}$ *к числу* z, *если при всех* $\alpha>0$ *интеграл*

$$\int_0^{+\infty}(1+\alpha\lambda(u))^{-s}e^{-\alpha\lambda(u)}a(u)\,du=\varrho_s(\alpha)$$

сходится и $\varrho_s(\alpha)\to z$, *если* $\alpha\to0+$.

Сформулируем без доказательства основной результат для этого метода, поскольку доказательство его отличается от случая рядов только в деталях.

Теорема 3. *Метод $AT_s\{\lambda(u)\}$ сильнее метода*[2] $PA\{\lambda(u)\}$, *и метод* $PA\{\ln\lambda(u)\}$ *при* $\lambda(u)\geqslant 1$ *сильнее метода* $AT_s\{\lambda(u)\}$, *если он применим к интегралу* (7).

Как известно, в случае рядов из суммируемости методом Чезаро (C,k), $k>0$, следует суммируемость методом $PA(n)$ и, значит, по теореме 2 и суммируемость методом $AT_s(n)$. Для интегральных методов Чезаро положение иное, поскольку суммируемость интегральным методом Чезаро (C,k) не гарантирует еще сходимости интегралов, фигурирующих в определениях соответствующих методов $AT_s(u)$ и $PA(u)$, для всех $\alpha>0$. Но при дополнительных условиях на $a(u)$ из теоремы 3 с помощью одного результата из монографии Г. Харди ([4], стр. 174—175) непосредственно следует

Теорема 4. *Если при всех* $\alpha>0$ *интеграл*

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha u}a(u)\,du$$

сходится, то из суммируемости интеграла (7) *методом Чезаро* (C,k), $k>0$, *следует его суммируемость методом* $AT_s(u)$ *к той же сумме.*

Литература

1. Вихманн Ф., Об одном методе суммирования рядов. Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1975, **А373**, 27—35.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва, 1962.
3. Жусипов К., Теоремы включения для одного метода суммирования интегралов. Сб. материалов Алгебр. семинара Кафедры алгебры и теории чисел. Казахск. гос. пед. ин-т, 1973, **3**, 41—48.
4. Харди Г., Расходящиеся ряды. Москва, 1951.
5. Худак Ю. И., Две теоремы включения для метода обобщенного суммирования рядов $T(\lambda_k)$. Докл. АН СССР, 1972, **202**, № 6, 1284—1287.

Поступило
23 XI 1978

ABOUT SOME PROPERTIES OF A POISSON-ABEL TYPE SUMMABILIY METHOD

F. Vichmann

Summary

A series Σz_k is called summable by the method $AT_s(\lambda_k)$ to the sum z if by all $\alpha>0$ the series (3) is convergent and it exists $\varrho_1(\alpha)\to z$ by $\alpha\to 0^+$. It is proved that the method $AT_s(\lambda_k)$ is stronger than the Poisson-Abel method $PA(\lambda_k)$ (theorem 2). The proof of the theorem is substantially based on the integral representation (4) of the sum $\varrho_1(\alpha)$.

An analogue of the method $AT_s(\lambda_k)$ for summation of integral is considered.

[2] Определение этого метода см., например, [4], стр. 41.

Tartu Ülikooli toimetised, Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1979, **504**, 99—104.

О ЯДРАХ СРЕДНИХ БОРЕЛЯ ДЛЯ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В. Лотоцкий

Тернопольский педагогический институт

Пусть $\{S_n\}$ — последовательность комплексных чисел $a_0 = S_0$ и $a_n = S_n - S_{n-1}$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$. Обозначим $a_k(x) \equiv \exp(-x)\Gamma^{-1}(k + \alpha + 1)x^{k+\alpha}$, где α — любое действительное число, $0 \leqslant x < +\infty$ и $k = 0, 1, 2, \ldots$. Числовой ряд [1] Σa_n с частичными суммами S_n называется *B_α-суммируемым*, если ряд $B_\alpha(x) \equiv \Sigma s_k a_k(x)$ сходится при $x \geqslant 0$ и $B_\alpha(x) \to S$ при $x \to +\infty$ (см. [2], стр. 10, или [7], стр. 139). Числа $B_\alpha(x)$ называются *B_α-средними* последовательности $\{S_n\}$. Если $\alpha = 0$, то получаем обычные средние Бореля (см. [1]. стр. 236, или [5], стр. 229) последовательности $\{S_n\}$. Обозначим еще

$$r(m, \beta) = (m - n_k) \cdot n_k^{-0,5-\beta},$$

где (n_k) — некоторая подпоследовательность натуральных чисел, β — действительное число, а m — натуральное. В работе [6] приведена следующая теорема.

Теорема (Раджагопал). *Пусть задан ряд Σa_n с $a_n \in \mathbf{R}$ и $a_n = 0$ для $n \neq n_k$, причем $r(n_{k+1}, \beta) \geqslant \Theta$, где $\Theta > 0$ — любое фиксированное число, $0 < \beta < 1/6$. Если $S_n = O(\exp n^\alpha)$ для некоторого $\alpha < 2\beta$, то*

$$\liminf_{n\to\infty} S_n = \liminf_{x\to+\infty} B_0(x), \qquad \limsup_{n\to\infty} S_n = \limsup_{x\to+\infty} B_0(x).$$

Обобщению этой теоремы посвящена настоящая работа. Нам понадобится одно вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть $\alpha \geqslant 0$, $x > \alpha$ и $M = [x - \alpha]$. Если $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ — некоторые константы, h — целое число, $|h| \leqslant x^\delta$, где $0,5 < \delta < 1$ и $m = M + h$, то*

$$a_0(x) < a_1(x) < a_2(x) < \ldots < a_M(x) \geqslant a_{M+1}(x) > \ldots, \tag{1}$$

$$a_m(x) = O(M^{-0,5}\exp(-(h+\alpha)^2(2M)^{-1} + O((h+\alpha)^3 M^{-2}))), \tag{2}$$

$$a_m(x) > C_1(2\pi M)^{-0,5}\exp(-(h+\alpha)^2(2M)^{-1} + C_2 h^3 M^{-2}). \tag{3}$$

---

[1] Если пределы изменения индексов не указаны, то они имеют все значения от 0 до ∞.

Доказательство этой леммы мы здесь опускаем, поскольку оно аналогично доказательству теоремы 137 книги [5].

Пусть $R_{B(\alpha)}(S)$ — ядро в смысле Кноппа функции $B_\alpha(x)$ (см. [5], стр. 76—77).

Теорема 1. *Пусть $\{S_n\}$ — последовательность комплексных чисел и*

$$S_n = O(\exp(c^2 n^{2\beta})), \quad c>0, \quad 0\leqslant\beta<1/2. \tag{4}$$

а) Если z_0 — конечная точка комплексной плоскости и для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют возрастающие последовательности натуральных чисел $n_k(\varepsilon; z_0)$ и $m_k(\varepsilon; z_0)$ такие, что

$$|S_n - z_0| \leqslant \varepsilon \quad \text{для} \quad n_k \leqslant n \leqslant m_k < n_{k+1} \quad (k=1, 2, \ldots), \tag{5}$$

причем

$$r(m_k, \beta_k) \geqslant a > 2^{1,5}c \quad \text{для} \quad k>k_0, \tag{6}$$

где $\beta_k \geqslant \beta$ и $n_k^{\beta_k} \to +\infty$ при $k\to+\infty$, то $z_0 \in R_{B(\alpha)}(S)$.

б) Если $\{G_k\}$ — последовательность замкнутых выпуклых множеств, удовлетворяющих условию $\varrho(0; G_k)\to+\infty$, где $\varrho(0; G_k)$ — расстояние от начала координат до множества G_k, и существуют последовательности натуральных чисел $\{n_k\}$ и $\{m_k\}$ (зависящие, вообще говоря, от выбранной последовательности $\{G_k\}$), для которых

$$S_n \in G_k, \quad \text{когда} \quad n_k\leqslant n\leqslant m_k < n_{k+1}, \tag{7}$$

причем для n_k и m_k выполняется условие (6) с $\beta_k \equiv \beta > 0$, то существует последовательность действительных чисел $\{x_k\}$ с $x_k \to +\infty$ такая, что для произвольного $\varepsilon > 0$ будем иметь

$$B_\alpha(x_k) \in G_k(\varepsilon) \qquad (k>k_1(\varepsilon)),$$

где $G_k(\varepsilon)$ — замкнутое выпуклое множество, содержащее в себе множество G_k и каждая точка которого отстоит от множества G_k на расстоянии, не превосходящем ε.

Доказательство. В работе [7], стр. 139, приведено равенство

$$B_\gamma(\lambda) = \Gamma^{-1}(\gamma-\alpha)\int_0^\lambda e^{-(\lambda-\nu)}(\lambda-\nu)^{\gamma-\alpha-1}B_\alpha(\nu)\,d\nu, \qquad \alpha<\gamma,$$

из которого в силу теоремы Кноппа ([5], стр. 77), условия которой здесь выполнены, имеем $R_{B(\gamma)}(S) \subset R_{B(\alpha)}(S) \subset R(S)$. Поэтому теорему 1 достаточно доказать для $\alpha \geqslant 0$. Если $\alpha=0$ и $\beta=0$, то утверждения теоремы 1 а) доказано в [3]. Если $\beta=0$ и $\alpha>0$, то теорема 1 а) доказывается аналогично теореме 1 работы [3]. Пусть $\beta>0$ и $\alpha\geqslant 0$. Взяв в этом случае $\beta_k=\beta$, положим

$$x_k \equiv n_k + 0{,}5r(m_k; \beta)\cdot n_k^{0,5+\beta}. \tag{8}$$

Не умаляя общности, можем считать $r(m_k; \beta) < a_1$, где a_1 — произвольное фиксированное число, большее a. Тогда

$$x_k = n_k\lambda_k, \quad \text{где} \quad \lambda_k = 1+2^{-1}r(m_k; \beta)\cdot n_k^{-(0,5-\beta)} \to 1 \qquad (k\to\infty).$$

Отсюда и из (8) имеем

$$n_k = x_k - 2^{-1} r(m_k;\beta)\nu_k \cdot x_k^{0,5+\beta},$$
$$m_k = x_k + 2^{-1} r(m_k;\beta)\gamma_k \cdot x_k^{0,5+\beta}, \tag{9}$$

где $\nu_k \equiv \lambda_k^{-0,5-\beta} \to 1$. Обозначим $y_k \equiv x_k + \alpha$. Тогда

$$B_\alpha(y_k) = \Big(\sum_{0\leqslant i\leqslant n_k-1} + \sum_{n_k\leqslant i\leqslant m_k} + \sum_{i\geqslant m_k+1}\Big) S_i a_i(y_k) = A_1 + A_2 + A_3.$$

Оценим сверху A_1 и A_3. Учитывая неравенства (1), из соотношений (4), (2), (9) и (6) получаем

$$A_1 = O(1)\cdot n_k \cdot \exp(c^2 n_k^{2\beta})\cdot a_{n_k}(y_k) =$$
$$= O(1)\cdot x_k^{0,5}\cdot \exp(-c^2 x_k^{2\beta}(2^{-3}c^{-2}a^2\mu_k^2 - 1 + o(1))),$$

где

$$\mu_k \equiv 2r(m_k;\beta)\cdot x_k^{-0,5-\beta}(2^{-1}r(m_k;\beta)\cdot\nu_k\cdot x_k^{0,5+\beta}+\alpha)\, x_k^{0,5}\cdot[x_k]^{-0,5} \to 1. \tag{10}$$

Из (10) и (6) имеем $\mu_k > 2^{-1}(1 + 8c^2a^{-2})$ для $k > k'$ и, значит,

$$A_1 = O(1)\, x_k^{0,5}\cdot\exp(-2^{-2}c^2(a^2 2^{-3}c^{-2} - 1)\, x_k^{2\beta}). \tag{11}$$

Так как $2^{1,5}c < a$, то существует положительное число γ, удовлетворяющее равенству $2^{1,5}c(1+\gamma) = a$. Тогда

$$A_3 = \Big(\sum_{m_k+1\leqslant i\leqslant(1+\gamma)x_k-1} + \sum_{i>(1+\gamma)x_k-1}\Big) S_i a_i(y_k) \equiv \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Если $0,5\gamma < \gamma_1 < \gamma$, то для $i > (1+\gamma)x_k - 1$ имеем

$$a_{i+1}(y_k)/a_i(y_k) = y_k(i+\alpha+1)^{-1} < (1+\gamma_1)^{-1} \qquad (k > k'_1). \tag{12}$$

Так как $\exp(c^2(n+1)^{2\beta})\cdot\exp(-c^2n^{2\beta}) \to 1$ при $n\to\infty$, то из (12) для $i > (1+\gamma)x_k - 1$ и $k > k'_2 > k'_1$ имеем

$$\exp(c^2(i+1)^{2\beta})\cdot a_{i+1}(y_k)\cdot\exp(-c^2 i^{2\beta})/a_i(y_k) < \varrho,$$

где $\varrho \equiv (1 + 2^{-1}\gamma)^{-1} < 1$. Таким образом, для $k > k'_2$

$$|\Sigma_2| < \exp(c^2((1+\gamma)x_k)^{2\beta})\cdot a_{[(1+\gamma)x_k]}(y_k)\cdot(1+\varrho+\varrho^2+\ldots) =$$
$$= a_2\exp(c^2((1+\gamma)x_k)^{2\beta})\cdot a_{[(1+\gamma)x_k]}(y_k) \quad \text{и} \quad a_2 > 1.$$

Отсюда, учитывая соотношения (1), (4), (2) и (10), получаем

$$|A_3| < \sum_{m_k+1\leqslant i\leqslant(1+\gamma)x_k-1} |S_i|\, a_i(y_k) +$$
$$+ a_2\exp(c^2((1+\gamma)x_k)^{2\beta})\cdot a_{[(1+\gamma)x_k]}(y_k) =$$
$$= O(1)\, x_k^{0,5}\exp(-c^2x_k^{2\beta}(1+\gamma)^2(\mu_k - (1+\gamma)^{2\beta} + o(1))).$$

Так как $\mu_k \to 1$, то для $k > k'_3 > k'_2$

$$\mu^2_k > 2^{-1}((1+\gamma)^{2(\beta-1)}+1).$$

Следовательно, для $k > k_4 > k'_3$ справедливо равенство

$$A_3 = O(1)\cdot x_k^{0,5}\cdot \exp(-2^{-2}c^2(1+\gamma)(1-(1+\gamma)^{2(\beta-1)})x_k^{2\beta}). \qquad (13)$$

Из (11) и (13), учитывая (6), имеем

$$A_1 \to 0 \ (k\to\infty) \quad \text{и} \quad A_3 \to 0 \ (k\to\infty). \qquad (14)$$

Методом, которым были доказаны соотношения (14), легко показать, что

$$\tau_k \equiv S_{n_k}(1 - \sum_{n_k\leqslant i\leqslant m_k} a_i(y_k)) =$$

$$= S_{n_k}\sum_{0\leqslant i\leqslant n_k-1} a_i(y_k) + S_{n_k}\sum_{i\geqslant m_k+1} a_i(y_k) \to 0.$$

Отсюда и из (14) следует равенство

$$B_\alpha(y_k) = \sum_{n_k\leqslant i\leqslant m_k} S_i a_i(y_k) + \tau_k + o(1) \equiv z_k + o(1). \qquad (15)$$

Если мы находимся в условиях пункта а) доказываемой теоремы, то из неравенств (5), в силу хорошо известного факта, $|z_k - z_0| \leqslant \varepsilon$, а это вместе с (15) влечет неравенство $|B_\alpha(y_k) - z\,| < 2\varepsilon$ для $k > k_0$, т. е. точка $z_0 \in R_{B(\alpha)}(S)$ и первая часть теоремы доказана.

В случае б) из включений (7) имеем: $z_k \in G_k$. Из (15) для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число k'_0 такое, что

$$B_\alpha(y_k) \in G_k(\varepsilon) \qquad (k > k'_0).$$

Теорема 1 доказана полностью.

Теорема 2. *Для любого* $b \in (0; 2^{1,5}c)$ *и* $c > 0$ *существуют последовательность* $\{S_n\}$, *удовлетворяющая условию* (4), *и точка* z_0 *такие, что для произвольного* $\varepsilon > 0$ *найдутся последовательности натуральных чисел* $\{n_k\}$ *и* $\{m_k\}$, *для которых имеет место* (5), *причем* $r(m_k; \beta) \leqslant b < 2^{1,5}c$, $\beta > 0$ *и* $z_0 \notin R_{B(\alpha)}(S)$.

Доказательство. Рассмотрим последовательности натуральных чисел $\{n_k\}$ и $\{m_k\}$, удовлетворяющие условиям $n_k < m_k < n_{k+1}$ и $r(m_k; \beta) \leqslant b < 2^{1,5}c$, где $0 < \beta < 2^{-1}$ и $c > 0$. Построим теперь последовательность $\{S_n\}$ следующим образом: $S_n = 0$ для $n_k \leqslant n \leqslant m_k$ и $S_n = \exp(c^2 n^{2\beta})$ для $m_k < n < n_{k+1}$. Нетрудно (хотя и громоздко) убедиться, что для таким образом построенной последовательности B_α-средние $B_\alpha(x) \to \infty$ при $x \to +\infty$. Поэтому ядро $R_{B(\alpha)}(S)$ состоит из единственной бесконечно удаленной точки и, значит, $z_0 = 0 \notin$ $\notin R_{B(\alpha)}(S)$. Теорема 2 доказана.

Теорема 2 показывает, что константа $2^{1,5}c$ в теореме 1 точная.

Если последовательность $\{S_n\}$ ограничена, то, как это следует из теоремы 1 работы [3] и замечания, сделанного в начале доказательства теоремы 1 настоящей заметки, достаточным условием для того, чтобы точка z_0 принадлежала ядру $R_{B(\alpha)}(S)$ есть условие: для произвольного $\varepsilon > 0$ найдутся последовательности натуральных чисел $\{n_k\}$ и $\{m_k\}$ такие, что (5) имеет место, причем

$$\lim_{k\to\infty}((m_k - n_k)n_k^{-0,5}) = +\infty. \tag{16}$$

Условие (16) нельзя заменить на $m_k - n_k = O(n_k^{0,5})$. Это следует из того, что точка $z_0 = 1$ не принадлежит ядру $R_{B(\alpha)}(S)$ последовательности $\{S_n\}$, где $S_n = 1$, когда $4^k \leqslant n \leqslant 4^k + 2^k$, и $S_n = 0$, когда $4^k + 2^k < n < 4^{k+1}$.

Рассмотрим теперь последовательность $\{S_n\}$ с такими свойствами:

а) Последовательность $\{S_n\}$ удовлетворяет условию (4) с $0 < \beta < 2^{-1}$;

б) Ядро $R(S)$ отлично от всей плоскости и от полуплоскости;

в) Существуют последовательности замкнутых выпуклых множеств $\{G_k\}$ и натуральных чисел $\{n_k\}$ и $\{m_k\}$ такие что $S_n \in G_k$, когда $n_k \leqslant n \leqslant m_k < n_{k+1}$, причем $r(m_k; \beta) \geqslant$ $\geqslant a > 2^{1,5}c$.

г) Для произвольного $\varepsilon > 0$ справедливы включения $G_{k(i)} \subset H_1(S; \varepsilon)$ и $G_{n(i)} \subset H_2(S; \varepsilon)$, где $\{G_{k(i)}\}$ и $\{G_{n(i)}\}$ — подпоследовательности последовательности $\{G_k\}$, а $H_1(S; \varepsilon)$ и $H_2(S; \varepsilon)$ — криволинейные полуполосы, получающиеся из бесконечной криволинейной полосы шириной ε, средней линией которой является граница ядра $R(S)$ последовательности $\{S_n\}$, если разрезать ее вдоль отрезка минимальной длины с концами на разных краях полосы, проходящего через любую конечную фиксированную точку границы ядра $R(S)$.

д) Расстояние от начала координат до G_k стремится к $+\infty$.

Множество всех последовательностей $\{S_n\}$, обладающих свойствами а)—д), обозначим через $T(S)$. Ясно, что $T(S)$ не пусто.

Теорема 3. *Пусть последовательность* $\{S_n\} \in T(S)$. *Если каждая крайняя точка*[2] *ядра* $R(S)$ *последовательности* $\{S_n\}$ *обладает свойством точки* z_0 *теоремы* 1 а), *то* $R_{B(\alpha)}(S) = R(S)$.

Доказательство этой теоремы легко следует из теоремы 1, свойств а)—д) последовательности $\{S_n\}$ и теоремы Кноппа. Поэтому мы его здесь опускаем.

---

[2] См. [4], стр. 85.

Следствие. *Пусть дан ряд* $\sum a_n$ *с* $a_n \in \mathbf{R}$ *и последовательностью частичных сумм, удовлетворяющей условию* (4). *Если* $a_n = 0$ *для* $n \neq n_k$, *причем*

$$r(n_{k+1} : \beta_k) \geqslant a > 2^{1,5}c, \tag{17}$$

где $\beta_k \geqslant \beta$ *и* $n_k^{\beta_k} \to +\infty$ $(k \to \infty)$, *то*

$$\liminf_{n\to\infty} S_n = \liminf_{x\to+\infty} B_\alpha(x), \quad \limsup_{n\to\infty} S_n = \limsup_{x\to+\infty} B_\alpha(x).$$

Настоящее следствие является частным случаем теоремы 3 и содержит в себе теорему Раджагопала, сформулированную выше. Кроме того, как показывает теорема 2, условие (17) в некотором смысле точное.

В заключение автор искренне благодарит С. А. Барона за большую помощь, оказанную при подготовке этой заметки к печати.

Литература

1. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Таллин, 1977.
2. Кангро Г., Теория суммируемости последовательностей и рядов. В сб. «Мат. анализ. Т. 12. Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР». Москва, 1974, 5—70.
3. Лотоцкий В. А., О ядре средних Бореля. В сб. «Приближен. методы мат. анализа». Киев, 1978, 63—72.
4. Рудин У., Функциональный анализ. Москва, 1975.
5. Харди Г., Расходящиеся ряды. Москва, 1951.
6. Rajagopal, C. T., Gap Tauberian theorems on oscillation for the Borel method (*B*). I. London Math. Soc., 1968, **44**, № 1, 41—51.
7. Zeller, K., Beekmann, W., Theorie der Limitierungsverfahren. Berlin—Heidelberg—New York, 1970.

Поступило
20 XII 1978

ON CORES OF BOREL MEANS FOR UNBOUNDED SEQUENCES

V. Lototzky

Summary

The Borel transforms B_α of any real degree α are considered and the problem is solved for the determination of sufficient conditinos for the coincidence of the cores for a given unbounded sequence, the growth of which is restricted by a certain majorant, and for its B_α-means.

Tartu Ülikooli toimetised, Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1979, **504**, 105—115.

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ МАТРИЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

М. Тыннов и Я. Пээт

Тартуский государственный университет

Пусть T — регулярный матричный или полунепрерывный метод суммирования, определенный преобразованием [1]

$$\sigma_\omega = \sum_k \tau_k(\omega)\xi_k$$

ряда $\Sigma\,\xi_k$ в функцию σ_ω аргумента $\omega \in [0, \omega_0)$. Ряд $\Sigma\,\xi_k$ называется T-суммируемым, если существует $\lim_\omega \sigma_\omega$, и T-ограниченным, если $\sigma_\omega = O(1)$ на $[0, \omega_0)$ (см. [4], стр. 27 и 80).

Последовательность (ε_k) банахова пространства X называется *Т-базисом* пространства X с сопряженной последовательностью $(\varphi_k) \subset X'$, если [2]

$$\lim_\omega \|x - \sigma_\omega(x)\|_X = 0 \qquad \forall x \in X,$$

где

$$\sigma_\omega(x) = \sum_k \tau_k(\omega)\xi_k\varepsilon_k, \qquad \xi_k = \varphi_k x.$$

Если существует T-базис в X, то пишем $X = X_{TN}$.

Пусть X и Y являются BK-пространствами (см. [1], стр. 26). Определим оператор $U : X \to Y$ следующим образом:

$$Ux = (U_n x), \tag{0.1}$$

$$U_n x = \sum_k \tau_k(\omega) a_{nk}\xi_k,$$

где $A = (a_{nk})$ — некоторая заданная матрица.

Аналогично определим оператор $U^* : X \to Y$, где

$$U^* x = (U_n{}^* x),$$

$$U_n{}^* x = \sum_k \tau_k(\omega) a_{kn}\xi_k.$$

---

[1] Если пределы изменения индексов не указаны, то они принимают все значения от 1 до ∞.

[2] Всюду $\lim\limits_\omega$ и $\lim_\omega$ означают $\lim\limits_{\omega\to\omega_0}$.

В данной работе рассматриваются преобразования U, переводящие по формуле (0.1) одно BK-пространство в другое. Для изучения оператора U вводим T-дополнительные пространства и исследуем их свойства.

§ 1. Дополнительные пространства

Пусть $x = (\xi_k)$ и $y = (\eta_k)$. Обозначим

$$\langle \sigma_\omega(y), x\rangle = \sum_k \tau_k(\omega)\,\xi_k\eta_k, \tag{1.1}$$

если этот ряд сходится.

Множества

$$(X, T) = \{y \mid \exists \lim \langle \sigma_\omega(y), x\rangle \quad \forall x \in X\},$$

$$(X, T_O) = \{y \mid \langle \sigma_\omega(y), x\rangle = O_{xy}(1) \quad \forall x \in X\}$$

называются соответственно T-дополнительным и T_O-дополнительным пространством пространства X.

Из определения дополнительных пространств следует

Теорема 1.1. *Если $X \subset Y$, то*

$$(X, T) \subset (X, T_O), \quad (Y, T) \subset (X, T), \quad (Y, T_O) \subset (X, T_O).$$

Дополнительные пространства для рядов Фурье изучены в статьях [7, 8, 11, 12, 13].

Лемма 1.1. *Функционал $\langle \sigma_\omega(y), \cdot\rangle$, определенный на BK-пространстве X формулой* (1.1) *при всех $\omega \in [0, \omega_0)$, является непрерывным и линейным на X.*

Доказательство. Поскольку в BK-пространстве X для $x = (\xi_k)$ имеем $\xi_k = \varphi_k x$ и $\varphi_k \in X'$, то

$$\sum_{k=1}^{m} \tau_k(\omega)\,\eta_k\xi_k$$

— непрерывный линейный функционал на X, следовательно, и предел $\langle \sigma_\omega(y), x\rangle$ непрерывен и линеен (см. [2], стр. 67, теорема 18) на X.

Теорема 1.2. *Если X является BK-пространством и $e_k = (\delta_{nk}) \in X$, то (X, T_O) является BK-пространством с нормой*

$$\|y\|_{(X,T_O)} = \sup_\omega \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} |\langle \sigma_\omega(y), x\rangle| = \sup_\omega \|\langle \sigma_\omega(y), \cdot\rangle\|_{X'},$$

а (X, T) является BK-пространством с нормой

$$\|y\|_{(X,T)} = \|y\|_{(X,T_O)}.$$

Доказательство. Учитывая лемму 1.1 и применяя принцип равномерной ограниченности к $\langle\sigma_\omega(y),\cdot\rangle$, получаем

$$\|y\|_{(X,T_O)}<\infty \quad \forall y\in(X,T_O), \qquad \|y\|_{(X,T)}<\infty \quad \forall y\in(X,T).$$

Убедимся, что (X,T_O) — нормированное пространство. Действительно, если $y=(0)$, то $\|y\|=0$. А если $\|y\|=0$, то

$$\sup_{\|x\|_X\leqslant 1}|\langle\sigma_\omega(y),x\rangle|=0 \qquad \forall\omega\in[0,\omega_0).$$

При $x=e_i=(\delta_{ik})$ отсюда получаем $\tau_i(\omega)\eta_i=0$ для всех $\omega\in[0,\omega_0)$. Следовательно, $\eta_i=0$. Выполнение остальных аксиом нормы вытекает непосредственно из ее определения.

Докажем полноту пространства (X,T_O). Пусть $y_m=(\eta_k{}^m)$ — последовательность Коши в (X,T_O). Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется $M\in\mathbf{N}$ такое, что при любых $m>M$ и j

$$\|y_m-y_{m+j}\|_{(X,T_O)}=\sup_\omega\sup_{\|x\|_X\leqslant 1}|\langle\sigma_\omega(y_m-y_{m+j}),x\rangle|<\varepsilon. \tag{1.2}$$

При $x=e_k$ отсюда при любых $m>M$ и j вытекает, что

$$|\tau_k(\omega)(\eta_k^m-\eta_k^{m+j})|\leqslant\|y_m-y_{m+j}\|<\varepsilon.$$

Итак,

$$\exists\lim_m \eta_k^m=\eta.$$

Из неравенства (1.2) для любых $m>M$ и $\omega\in[0,\omega_0)$ следует

$$\sup_{\|x\|_X\leqslant 1}|\langle\sigma_\omega(y_m-y),x\rangle|<\varepsilon, \tag{1.3}$$

где $y=(\eta_k)$. Следовательно,

$$\|y_m-y\|_{(X,T_O)}\leqslant\varepsilon \qquad \forall m>M,$$

причем $y\in(X,T_O)$. Действительно, если $y\notin(X,T_O)$, то найдется $x_0\in X$ такой, что $\langle\sigma_\omega(y),x_0\rangle\neq O(1)$. Ввиду линейности $\langle\sigma_\omega(y),\cdot\rangle$ можем выбрать $x_0\in X$ с $\|x_0\|\leqslant 1$. Тогда из неравенства (1.3) вытекает для каждого $m>M$ и $\omega\in[0,\omega_0)$, что

$$\Big||\langle\sigma_\omega(y_m),x_0\rangle|-|\langle\sigma_\omega(y),x_0\rangle|\Big|\leqslant|\langle\sigma_\omega(y_m-y),x_0\rangle|\leqslant$$
$$\leqslant\sup_{\|x\|_X\leqslant 1}|\langle\sigma_\omega(y_m-y),x\rangle|\leqslant\varepsilon.$$

Поскольку $\langle\sigma_\omega(y_m),x_0\rangle$ ограничен при $\omega\to\omega_0$, то $\langle\sigma_\omega(y),x_0\rangle$ не может быть неограниченным.

Сходимость по координатам вытекает из неравенства

$$|\tau_k(\omega)(\eta_k^m-\eta_k)|\leqslant\|y_m-y\|_{(X,T_O)}.$$

Аналогично можно доказать, что (X, T) является BK-пространством.

Из теоремы 1.2 вытекает

Следствие 1.1. *Дополнительное пространство (X, T) является подпространством пространства (X, T_O).*

Теорема 1.3. *Для дополнительных пространств имеют место соотношения*

$$X \subset ((X, T_O), T_O), \qquad \|x\|_X \geqslant \|x\|_{((X, T_O), T_O))},$$

$$X \subset ((X, T), T), \qquad \|x\|_X \geqslant \|x\|_{((X, T), T)}.$$

Доказательство. Пусть $x \in X$. По определению пространства (X, T_O) имеем $\langle \sigma_\omega(y), x \rangle = O_{xy}(1)$ при $y \in (T, T_O)$. Следовательно, $x \in ((X, T_O), T_O)$, ибо

$$((X, T_O), T_O) = \{x \mid \langle \sigma_\omega(y), \ x \rangle = O_{xy}(1), \quad y \in (X, T_O)\}.$$

Аналогично, по определению пространства (X, T) существует $\lim_\omega \langle \sigma_\omega(y), x \rangle$ при $y \in (X, T)$. Следовательно, $x \in ((X, T), T)$, ибо

$$((X, T), T) = \{x \mid \exists \lim_\omega \langle \sigma_\omega(y), x \rangle, \quad y \in (X, T)\}.$$

Докажем неравенства для норм. Поскольку

$$|\langle \sigma_\omega(y), x \rangle| \leqslant \sup_\omega \|\langle \sigma_\omega(y), \cdot \rangle\|_{X'} \|x\|_X = \|y\|_{(X, T_O)} \|x\|_X,$$

то для $y \in (X, T_O)$

$$\sup_\omega \sup_{\|y\| \leqslant 1} |\langle \sigma_\omega(y), x \rangle| \leqslant \sup_{\|y\| \leqslant 1} \|y\|_{(X, T_O)} \|x\|_X,$$

т. е. первое неравенство теоремы 1.3 доказано. Второе неравенство доказывается аналогично.

Из теоремы 1.3 вытекает

Следствие 1.2. *Для дополнительных пространств имеют место неравенства*

$$\sup_\omega |\langle \sigma_\omega(y), x \rangle| \leqslant \|y\|_{(X, T_O)} \|x\|_X \qquad \forall x \in X, \ \forall y \in (X, T_O),$$

$$\sup_\omega |\langle \sigma_\omega(y), x \rangle| \leqslant \|y\|_{(X, T)} \|x\|_X \qquad \forall x \in X, \ \forall y \in (X, T).$$

Теорема 1.4. *Имеют место равенства:*

$$(((X, T_O), T_O), T_O) = (X, T_O), \qquad \|y\|_{(((X, T_O), T_O), T_O)} = \|y\|_{(X, T_O)}, \tag{1.4}$$

$$(((X, T), T), T) = (X, T), \qquad \|y\|_{(((X, T), T), T)} = \|y\|_{(X, T)}. \tag{1.5}$$

Доказательство. Применяя теорему 1.3 для пространства (X, T_O), получаем

$$(((X, T_O), T_O), T_O) \supset (X, T_O), \tag{1.6}$$

$$\|y\|_{(((X, T_O), T_O), T_O)} \leqslant \|y\|_{(X, T_O)}.$$

По теоремам 1.3 и 1.1 имеем $(((X, T_O), T_O), T_O) \subset (X, T_O)$. Ввиду включения $X \subset ((X, T_O), T_O)$ получаем

$$\|y\|_{(((X,T_O),T_O),T_O)} = \sup_{\omega} \sup_{\|x\|_{((X,T_O),T_O)} \leqslant 1} |\langle \sigma_\omega(y), x\rangle| \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{\omega} \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} |\langle \sigma_\omega(y), x\rangle| = \|y\|_{(X,T_O)},$$

что вместе с (1.6) приводит к равенствам (1.4).

Аналогично доказываются равенства (1.5).

Теорема 1.5 (ср. [9]). *Если* $X = X_{TN}$, *то*

$$X' = (X, T) = (X, T_O)$$

и нормы в этих пространствах эквивалентны.

Доказательство. Пусть $x \in X = X_{TN}$. Возьмем некоторый $\varphi \in X'$. Тогда

$$|\varphi x - \varphi\sigma_\omega(x)| \leqslant \|\varphi\| \|x - \sigma_\omega(x)\| = o(1)$$

при $\omega \to \omega_0$, ввиду чего существует предел

$$\varphi x = \lim_{\omega} \langle \sigma_\omega(\varphi\varepsilon_k), x\rangle = \lim \langle \sigma_\omega(y), x\rangle \qquad \forall x \in X.$$

Итак, $(\varphi\varepsilon_k) \in (X, T) \subset (X, T_O)$. Следовательно, $X' \subset (X, T) \subset$ $\subset (X, T_O)$.

Остается доказать обратное включение, т. е. что $(X, T_O) \subset X'$. Действительно, пусть

$$P = \{x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \varepsilon_k\}.$$

Определим на P функционал φ_0 равенством

$$\varphi_0 x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k,$$

где $(\eta_k) \in (X, T_O)$ и $\eta_k = \varphi_0 \varepsilon_k$. Покажем, что

$$\sup_{\|x\|_P \leqslant 1} |\varphi_0 x| < \infty.$$

Поскольку $\varphi_0 x = \lim_\omega \langle \sigma_\omega(y), x\rangle$ для $x \in P$, то при $\|x\| \leqslant 1$ имеем

$$|\varphi_0 x| \leqslant \sup_{\omega} |\langle \sigma_\omega(y), x\rangle| \leqslant \sup_{\omega} \|\langle \sigma_\omega(y), \cdot\rangle\|.$$

Учитывая лемму 1.1 и применяя принцип равномерной ограниченности к $\langle \sigma_\omega(y), \cdot\rangle$, получаем

$$\|\varphi_0\| \leqslant \sup_{\omega} \|\langle \sigma_\omega(y)), \cdot\rangle\| < \infty.$$

Итак, φ_0 — непрерывный линейный функционал на P, и по теореме Банаха—Хана существует $\varphi \in X'$ такой, что $\varphi = \varphi_0$ на P и $\varphi e_k = \eta_k$. Поскольку $(\eta_k) \in (X, T_O)$, то $(\eta_k) \in X'$.

Докажем, что в X и (X, T) нормы эквивалентны. Если $x \in X = X_{TN}$, то $\sigma_\omega(x) \in X$ при всех $\omega \in [0, \omega_0)$ и $\sup_\omega \|\sigma_\omega(x)\|_X < \infty$. Следовательно, $x \to \sigma_\omega(x)$ является непрерывным линейным оператором из X в X. По принципу равномерной ограниченности

$$\sup_\omega \|\sigma_\omega(x)\|_X \leqslant C\|x\|_X.$$

Если $y \in (X, T)$, то

$$\begin{aligned}\|y\|_{(X,T)} &= \sup_\omega \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} |\langle \sigma_\omega(x), y\rangle| \leqslant \\ &\leqslant \sup_\omega \sup_{\|\sigma_\omega(x)\|_X \leqslant C} |\langle \sigma_\omega(x), y\rangle| \leqslant \\ &\leqslant C \sup_\omega \sup_{\|\sigma_\omega(x)\|_X \leqslant 1} |\langle \sigma_\omega(x), y\rangle| \leqslant \\ &\leqslant C \sup_\omega \sup_{\|\sigma_\omega(x)\|_X \leqslant 1} |\lim_{\varkappa \to \omega_0} \langle \sigma_\omega(x), \sigma_\varkappa(y)\rangle| \leqslant \\ &\leqslant C \sup_\omega \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} |\lim_{\varkappa \to \omega_0} \langle \sigma_\varkappa(y), x\rangle| = \\ &= C\|y\|_{X'},\end{aligned}$$

ибо

$$\lim_{\varkappa \to \omega_0} \langle \sigma_\varkappa(y), \cdot\rangle = y, \qquad y \in X'.$$

Обратно, пусть $y \in X'$. Тогда

$$\begin{aligned}\|y\|_{X'} &= \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} |\lim_\omega \langle \sigma_\omega(x), y\rangle| \leqslant \\ &\leqslant \sup_\omega \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} |\langle \sigma_\omega(x), y\rangle| = \|y\|_{(X,T)}.\end{aligned}$$

Тем самым мы и доказали неравенство

$$\|y\|_{(X,T)} \leqslant c\|y\|_{X'} \leqslant c\|y\|_{(X,T)}.$$

§ 2. Необходимые и достаточные условия для оператора U

Обозначим строку и столбец матрицы A через a_n и a^k, т. е.

$$a_n = (a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \ldots), \qquad a^k = (a_{1k}, a_{2k}, a_{3k}, \ldots).$$

Теорема 2.1. *Оператор U определен на всем X тогда и только тогда, когда $a_n \in (X, T)$.*

Доказательство. Если Ux существует для всех $x \in X$, то существует предел $\lim_\omega \langle \sigma_\omega(a_n), x\rangle$. Следовательно, $a_n \in (X, T)$. Обратно, если $a_n \in (X, T)$, то Ux существует для всех $x \in X$.

Теорема 2.2. *Если $e_k = (\delta_{nk}) \in X$, то $U(P) \subset Y$ тогда и только тогда, когда $a^k \in Y$.*

Доказательство. Пусть $U(P) \subset Y$. Тогда $(A_n x) \in Y$, где $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, 0, \ldots)$, т. е.

$$\left(\sum_{k=1}^{m} a_{nk}\xi_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \xi_k a^k \in Y \qquad \forall m \in \mathbf{N}.$$

Следовательно, взяв $x = e_k$, получим, что $a^k \in Y$.

Обратно, если $a^k \in Y$, то $(U_n x) \in Y$ при $x \in P$. Теорема доказана.

Введем обозначения:

$$N = ((Y, T_O), T_O),$$

$$\|U\|_1 = \sup_\omega \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|\langle \sigma_\omega(a_n), x\rangle\|_N.$$

Лемма 2.1. *Если $U: X \to Y$, то*

$$\|Ux\|_N \leqslant \|U\|_1 \|x\|_X. \tag{2.1}$$

Доказательство. Поскольку при $y \in (X, T_O)$

$$\|Ux\|_N = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \sup_\omega \sup_{\|y\| \leqslant 1} |\langle \sigma_\omega(y), \lim_\varkappa \langle \sigma_\varkappa(a_n), x\rangle\rangle| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_\varkappa \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \sup_\omega \sup_{\|y\| \leqslant 1} |\langle \sigma_\omega(y), \langle \sigma_\varkappa(a_n), x\rangle\rangle| =$$

$$= \sup_\omega \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|\langle \sigma_\omega(a_n), x\rangle\|_N,$$

то

$$\sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Ux\|_N \leqslant \|U\|_1,$$

откуда и следует неравенство (2.1).

Теорема 2.3. *Пусть P плотно в X и Y замкнуто в N. Тогда*

$$\|U\|_1 < \infty, \quad a^k \in Y, \quad a_n \in (X, T) \Rightarrow U \in L(X, Y).$$

Доказательство. Если $x \in P$, то по теореме 2.2 имеем $U: P \to Y$. Из неравенства (2.1) и предположения теоремы вытекает, что

$$\|Ux\|_N \leqslant \|U\|_1 \|x\|_X < \infty.$$

Следовательно, $U: P \to N$. Поскольку Y замкнуто в N, то и $U: P \to Y$. Итак (см. [6], стр. 142, теорема 2), существует оператор U_0 такой, что $U_0 = U$ на P и $\|U_0\| = \|U\|$. Пусть

$$U_\omega x = (\langle \sigma_\omega(a_n), x\rangle).$$

Тогда

$$\|U\|_1 = \sup_{\omega} \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|U_\omega x\|_N < \infty$$

и $U_\omega x \to Ux$ при $\omega \to \omega_0$ для всех $x \in P$, и по теореме Банаха—Штейнгауза для всех $x \in X$. Так как $U_0 = U$ на P, то $U \in L(X, Y)$.

Лемма 2.2. *Если $Y = Y_{TN}$, то Y является подпространством в N и нормы в Y и N эквивалентны.*

Доказательство. Если $Y = Y_{TN}$, то по теореме 1.5 найдутся c_1, $c_2 > 0$ такие, что

$$c_1\|z\|_{(Y,T_0)} \leqslant \|z\|_{Y'} \leqslant c_2\|z\|_{(Y,T_0)} \qquad \forall z \in (Y, T_0).$$

По теореме Банаха—Хана для каждого $y \in Y$ существует $\varphi \in Y'$ такой, что $\|\varphi\|_{Y'} = 1$ и

$$|\varphi y| = \|y\|_Y = |\lim \langle \sigma_\omega(y), \varphi\rangle| \leqslant \sup |\langle \sigma_\omega(y), \varphi\rangle| \leqslant$$
$$\leqslant \|\varphi\|_{(Y,T_0)} \|y\|_N \leqslant 1/c_1\|\varphi\|_{Y'}\|y\|_N = 1/c\|y\|_N.$$

По теореме 1.3 отсюда получаем неравенство

$$c_1\|y\|_Y \leqslant \|y\|_N \leqslant \|y\|_Y. \tag{2.2}$$

Если $y_n \in Y$ и $y_n \to y$ по норме в N, то (y_n) — последовательность Коши в N и в силу неравенства (2.2) она является и последовательностью Коши в Y. Ввиду его полноты $y \in Y$. Следовательно, Y замкнуто в N.

Лемма 2.3. *Если $X = X_{TN}$, то найдется $c > 0$ такое, что*

$$\|x\|_X \leqslant \sup_{\omega} \|\sigma_\omega(x)\|_X \leqslant c\|x\|_X.$$

Доказательство. Для каждого $x \in X = X_{TN}$ имеем

$$\|x\|_X = \lim_{\omega} \|\sigma_\omega(x)\|_X \leqslant \sup_{\omega} \|\sigma_\omega(x)\|_X.$$

С другой стороны, оператор $x \to \sigma_\omega(x)$ является непрерывным и линейным из X в X, и по принципу равномерной ограниченности $\|\sigma_\omega(x)\|_X \leqslant C\|x\|_X$, что и требовалось доказать.

Теорема 2.4. *Пусть $X = X_{TN}$ и $Y = Y_{TN}$. Тогда*

$$U(X) \subset Y \Leftrightarrow \|U\|_1 < \infty, \qquad a_n \in (X, T), \qquad a^k \in Y.$$

Доказательство. Из теоремы 2.3 и леммы 2.2 вытекает, что если $\|U\|_1 < \infty$, $a^k \in Y$ и $a_n \in (X, T)$, то $U : X \to Y$.

Обратно, если $U : X \to Y$, то по теоремам 2.1 и 2.2 получаем, что $a^k \in Y$ и $a_n \in (X, T)$. Поскольку P плотно в X, то ввиду теоремы 2.2

$$U_\omega x = (\langle \sigma_\omega(a_n), x\rangle) \in Y \qquad \forall \omega \in [0, \omega_0).$$

Так как $Ux = (U_n x)$, где $U_n \in X'$, то оператор U_ω непрерывен (см. [1], стр. 26—27) при любом $\omega \in [0, \omega_0)$ и, следовательно, поскольку Y является BK-пространством, то оператор $U =$

$= \lim_\omega U_\omega$ существует и непрерывен (см. [2], стр. 67, теорема 18). Из лемм 2.1 и 2.2 получаем

$$c_1\|Ux\|_Y \leqslant \|Ux\|_N \leqslant \|U\|_1\|x\|_X, \tag{2.3}$$

откуда вытекает $c_1\|U\| \leqslant \|U\|_1$. Докажем, что найдется $c_2 > 0$ такое, что $\|U\|_1 \leqslant c_2\|U\|$. Действительно, по теореме 1.3 имеем

$$\|U\|_1 = \sup_\omega \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|(\langle\sigma_\omega(a_n), x\rangle)\|_N \leqslant$$

$$\leqslant \sup_\omega \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|(\langle\sigma_\omega(a_n), x\rangle)\|_Y,$$

а ввиду регулярности T

$$\langle\sigma_\omega(a_n), x\rangle = \lim_{\varkappa\to\omega_0} \langle\sigma_\varkappa(a_n), \sigma_\omega(x)\rangle,$$

откуда $\|(\langle\sigma_\omega(a_n), x\rangle)\|_Y \geqslant \|U\| \|\sigma_\omega(x)\|_X$. Поскольку $X = X_{TN}$, то по лемме 2.3 найдется $c_2 > 0$ такое, что

$$\|\sigma_\omega(x)\|_X \leqslant c_2\|x\|.$$

Следовательно,

$$\|U\|_1 \leqslant \sup_\omega \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|U\| \cdot c_2\|x\|_X = c_2\|U\|,$$

и доказано неравенство

$$c_1\|U\| \leqslant \|U\|_1 \leqslant c_2\|U\|. \tag{2.4}$$

Поскольку U непрерывен, то из неравенства (2.4) следует, что $\|U\|_1 < \infty$, а это и надо было доказать.

Следствие 2.1. *Если* $X = X_{TN}$, *то*

а) $U: X \to (Z, T_O) \Leftrightarrow a_n \in (X, T),\ a^k \in (Z, T_O),\ \|U\|_1 < \infty,$

б) $U: X \to (Z, T) \Leftrightarrow a_n \in (X, T),\ a^k \in (Z, T),\ \|U\|_1 < \infty,$

Доказательство. Из теоремы 1.4 вытекает, что $N = Y$ и ввиду теоремы 2.3 получаем

$$a_n \in (X, T),\ a^k \in (Z, T_O),\ \|U\|_1 < \infty \Rightarrow U: X \to (Z, T_O).$$

Обратная импликация вытекает из теоремы 2.4.

§ 3. Применения

Поскольку $c_0 = c_{0TN}$ и $l^p = l^p{}_{TN}$, то из теорем 2.3 и 2.4 и следствия 2.1 получаем необходимые и достаточные условия для того, чтобы $U(l^p) \subset l^r$ при $1 \leqslant p,\ r < \infty$, а также $U(l^p) \subset c_0$ и т. д. (ср. [15, 16, 18]).

Например, применяя теорему 2.4 к случаю $X = Y = l^p$ и $T = C^0$, получаем, что $U(l^p) \subset l^p$ тогда и только тогда, когда выполнены условия (ср. [5])

$$\sum_k |a_{nk}|^{p/p-1} < \infty\ \forall n, \quad \sup_{\|x\|_{l^p} \leqslant 1} \sum_n \Big|\sum_k a_{nk}\xi_k\Big|^p < \infty.$$

Для тригонометрической системы проблема изучена многими математиками. Обозначим через X_c и X_s соответственно пространства косинус- и синус-рядов из X. Для матрицы A арифметических средних, например, известно, что $U(L_{pc}) \subset L_{pc}$ при $1 \leqslant p < \infty$ (см. [14]), $U(L_{ps}) \subset L_{ps}$ при $1 \leqslant p < \infty$ и $U(L_s) \subset L_c$ (см. [11]). Известны и для общих матриц A и $T = C^1$ необходимые и достаточные условия для того, чтобы $U(X) \subset Y$ при наличии C^1-базиса в X (см. [11, 19, 20]). Если T — метод арифметических средних и $A = C^1$, то $U^*(L_{pc}) \subset L_{pc}$ при $1 < p \leqslant \infty$ (см. [10, 17]).

Все эти результаты вытекают из теоремы 2.4 и следствия 2.1. Для этого отметим (см. [7, 8]), что

1) $L_p = L_{pTN}$ при $1 < p < \infty$ для всех регулярных T, а если T удовлетворяет условию

$$\int_0^\pi \Big|\sum_k \tau_k(\omega) \cos ku\Big| du = O(1), \tag{3.1}$$

то $L = L_{TN}$ и $C = C_{TN}$;

2) $(L_p, T) = L_q$ при $1 < p < \infty$ и $1/p + 1/q = 1$ для всех регулярных методов T, а если T удовлетворяет условию (3.1), то $(L, T) = L_\infty$, $(L_\infty, T) = L$ и $(C, T) = dV$.

Из теоремы 2.4 вытекает, что $U(C) \not\subset C \subset L_\infty$ при $A = C^\alpha$ с $\alpha > 0$.

Если $A = (\lambda_k \delta_{nk})$, то вопрос об $U(X) \subset Y$ сводится к вопросу, когда мультипликатор $(\lambda_k) \in (X, Y)$. Например, из теоремы 2.4 вытекает известный результат, что $(\lambda_k) \in (L, L)$ тогда и только тогда, когда $\Sigma \lambda_k \cos ku$ является рядом Фурье—Стильтьеса (см. [1], стр. 249).

Литература

1. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Таллин, 1977.
2. Данфорд Н., Шварц Дж. Г., Линейные операторы, общая теория. Москва, 1962.
3. Козлов В. Я., Об одном обобщении понятия базиса. Докл. АН СССР 1950, **73**, № 4, 643—646.
4. Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. Москва, 1960.
5. Ладыженский Л. А., Об одной лемме Шура. Лат. мат. ежегодник. 1971, 9, 139—150.
6. Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа. Москва, 1965.
7. Тыннов М., T-дополнительные пространства коэффициентов Фурье. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1966, **192**, 65—81.
8. Тыннов М., Коэффициенты Фурье и множители суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1970, **253**, 194—201.
9. Тыннов М., Сопряженные и дополнительные пространства. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1970, **253**, 202—204.
10. Bellmann, R., A note on a theorem of Hardy on Fourier constants. Bull. Amer. Math. Soc., 1944, **50**, 741—744.
11. Goes, G., BK-Räume und Matrixtransformationen für Fourierkoeffizienten. Math. Z., 1959, **70**, № 4, 345—371.

12. G o e s, G., Complementary spaces of Fourier coefficients, convolutions and generalized matrix transformations and operators between *BK*-spaces. J. Math. and Mech., 1961, **10**, 135—157.
13. G o e s, G., Komplementäre Fourierkoeffizientenräume und Multiplikatoren. Math. Ann., 1959, **137**, № 5, 371—384.
14. H a r d y, G. H., The arithmetic mean of a Fourier constant. Mess. of Math., 1928, **58**, 50—52.
15. J a k i m o v s k i, A., L i v n e, A., On matrix transformation between sequence spaces. J. analyse math. 1972, **25**, 345—370.
16. J a k i m o v s k i, A., R u s s e l l, D. C., T z i m b a l a r i o, J., Inclusion theorems for matrix transformations. J. analyse math., 1973, **26**, 391—404.
17. L o o, C. T., Note on the properties of Fourier coefficients. Amer. J. Math., 1949, **71**, 269—282.
18. S t i e g l i t z, M., T i e t z, H., Matrixtransformationen quasikonvexer Folgen. Hokkaido Math. J., 1977, **6**, 10—15.
19. Y o u n g, F. H., A matrix transformation of Fourier coefficients. Thesis, Univ. of Oregon, 1950.
20. Y o u n g, F. H., Transformation of Fourier coefficients. Proc. Amer. Math. Soc., 1952, **3**, 783—791.

Поступило
12 I 1977

INCLUSION THEOREME DER MATRIXTRANSFORMATIONEN

M. Tõnnov und J. Peet

Z u s a m m e л f a s s u n g

In vorliegenden Artikel beweist man einige Sätze über T-komplementärräume (X, T) und findet man hinreichende und notwendige Bedingungen für die Matrixtrasformation $U : X \to Y$, wo X und Y gewisse BK-Räume sind.

Tartu Ülikooli toimetised, Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1979, **504**, 116—125.

О МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

С. Барон

Тартуский государственный университет

Одной из трудных проблем теории тригонометрических рядов является вопрос о том, как по свойствам коэффициентов тригонометрического ряда установить, является ли этот ряд рядом Фурье заданного класса функций. Этой проблемой занимались многие математики (см., например, [24], стр. 82). В 1923 г. Колмогоров доказал, что косинус-ряд $\Sigma\, a_n \cos nx$ является рядом Фурье интегрируемой (по Лебегу) функции, если его коэффициенты $a_n \to 0$ и (a_n) — квазивыпуклая последовательность (см. [1], стр. 652). При более общих условиях относительно (a_n) результат Колмогорова обобщили Мур и Чезари в 1933—34 гг. В 1960 г. Гёс ([25], стр. 136—137) дал новое доказательство теоремы Мура—Чезари, применяя теоремы о множителях суммируемости для метода Чезаро C^α порядка $\alpha > 0$ (см., например, [5], теоремы 22.3 и 22.2 при $\beta = \alpha$), и нашел условия, при которых косинус-ряд является рядом Фурье—Стилтьеса ([10], стр. 26). Тыннов ([24], следствия 3.1 и 3.4), обобщая результаты Гёса, показал, что $\Sigma\, a_n \cos nx$ является рядом Фурье интегрируемой функции (рядом Фурье—Стилтьеса), если a_n — множители суммируемости типа (T_O, T_1) (соответственно (T, T_1)), где T и T_1 — произвольные регулярные методы суммирования, причем T равномерно суммирует ряды Фурье всех 2π-периодических непрерывных функций. Далее, знание эффективных условий для определения класса функций по коэффициентам косинус-ряда дает возможность легко найти эффективные условия для мультипликаторов (см. [24], стр. 84, или [5], стр. 248) рядов Фурье. Этим, начиная с 1923 года, также занимались многие математики (см., например, [10], стр. 592).

В настоящей статье мы решаем аналогичные вопросы для двойных тригонометрических рядов. Сначала находим условия для определения класса функции двух переменных по коэффициентам ее двойного ряда Фурье, а затем, применяя их и некоторые теоремы Скворцовой [17—19], получаем условия для мультипликаторов двойных рядов Фурье. Эти условия выражаем мы через множители суммируемости двойных рядов. Напомним, что числа ε_{mn} называются *множителями суммируемости типа* (S_O, T_r) (или (S_r, T_r)), если для любого S-ограниченного (вполне S-суммируемого) двойного ряда[1] Σu_{mn} двойной ряд $\Sigma \varepsilon_{mn} u_{mn}$ вполне T-суммируем.

§ 1. Леммы о *T*-дополнительных пространствах

Пусть f и g — вещественные функции двух переменных, определенные почти всюду на $\mathbf{R}^2$, периодичные с периодом 2π по каждой переменной и интегрируемые по Лебегу на квадрате $Q = [-\pi, \pi]^2$. Пусть f и g разлагаются в тригонометрические двойные ряды Фурье[1]

$$f^\circ = \sum A_{kl}, \tag{1}$$

$$g^\circ = \sum \mathrm{A}_{kl} \tag{2}$$

соответственно, где

$$A_{kl}(s, t) = \lambda_{kl}(a_{kl} \cos ks \cos lt + b_{kl} \sin ks \cos lt + \\ + c_{kl} \cos ks \sin lt + d_{kl} \sin ks \sin lt),$$

$$\mathrm{A}_{kl}(s, t) = \lambda_{kl}(\alpha_{kl} \cos ks \cos lt + \beta_{kl} \sin ks \cos lt + \\ + \gamma_{kl} \cos ks \sin lt + \delta_{kl} \sin ks \sin lt),$$

причем $\lambda_{00} = 1/4$, $\lambda_{kl} = 1/2$ при $kl = 0$ с $k + l > 0$ и $\lambda_{kl} = 1$ при $k, l > 0$.

Функции, равные почти всюду на Q, отождествляем.

Будем обозначать одним и тем же символом как множество самих функций f двух переменных, так и множество их двойных тригонометрических рядов f°. Например, через C обозначаем пространство всех непрерывных на Q функций f, а также пространство всех двойных рядов (1) этих функций.

Пусть X — некоторое множество двойных рядов (1). Пусть[2] $T = (\tau_{mnkl})$ — треугольный метод суммирования. Следуя Гёсу и Тыннову (ср. [5], стр. 241), пространство всех тригонометрических рядов (2), для которых двойной числовой ряд

$$\sum \lambda_{kl}(\alpha_{kl} a_{kl} + \beta_{kl} b_{kl} + \gamma_{kl} c_{kl} + \delta_{kl} d_{kl}) \tag{3}$$

вполне T-суммируем при каждом $f^\circ \in X$, назовем *T-дополнительным к X* и обозначим через $(X \to T)$. Если $a_{kl} = 0$ для всех $f^\circ \in X$, то полагаем и $\alpha_{kl} = 0$ для всех $g^\circ \in (X \to T)$. Аналогичные соглашения делаем относительно коэффициентов b_{kl}, c_{kl} и d_{kl}. Таким образом, если X состоит лишь из косинус-косинус-

---

[1] Если пределы изменения индексов у знака суммы не указаны, то они изменяются от 0 до ∞.

[2] Методы суммирования задаем матрицами преобразования двойного ряда в двойную последовательность. Свободные индексы принимают все значения 0, 1, ...

рядов

$$c^\circ(s,t)=\sum \lambda_{kl}a_{kl}\cos ks\cos lt, \qquad (4)$$

то таково и $(X\to T)$, т. е. $(X\to T)$ состоит из косинус-косинус-рядов

$$k^\circ(s,t)=\sum \lambda_{kl}\alpha_{kl}\cos ks\cos lt. \qquad (5)$$

Пусть $S=(\sigma_{mnkl})$ — некоторый треугольный метод суммирования двойных рядов. Пусть X состоит из всех косинус-косинус-рядов (4), для которых[3] $\Sigma\,\lambda_{kl}a_{kl}\in S_O$ (соответственно $\Sigma\,\lambda_{kl}a_{kl}\in S_r$). Тогда (по определению) T-дополнительное пространство $(X\to T)$ состоит из всех таких двойных рядов (5), для которых двойной ряд $\Sigma\,\alpha_{kl}\lambda_{kl}a_{kl}$ вполне T-суммируем. Последнее означает, что числа α_{kl} являются множителями суммируемости типа (S_O, T_r) (соответственно (S_r, T_r)).

Таким образом, доказана

Лемма 1. *Если множество X состоит из всех рядов* (4) *с S-ограниченными (вполне S-суммируемыми) коэффициентами, то T-дополнительное пространство $(X\to T)$ состоит из таких рядов* (5), *коэффициенты α_{kl} которых являются множителями суммируемости типа (S_O, T_r) (соответственно (S_r, T_r)).*

Пусть L — множество всех интегрируемых по Лебегу на Q функций f, а M — множество всех ограниченных почти всюду на Q функций $f\in L$. Посмотрим из каких двойных рядов (1) состоит T-дополнительное пространство $(M\to T)$.

Обозначим S- и T-средние ряда (1) через $\sigma_{mn}f$ и $\tau_{mn}f$, т. е.

$$\sigma_{mn}f=\sum_{k,l\leqslant m,n}\sigma_{mnkl}A_{kl},$$

$$\tau_{mn}f=\sum_{k,l\leqslant m,n}\tau_{mnkl}A_{kl},$$

а T-средние ряда (3) — через h_{mn}, т. е.

$$h_{mn}=\sum_{k,l\leqslant m,n}\tau_{mnkl}\lambda_{kl}(\alpha_{kl}a_{kl}+\beta_{kl}b_{kl}+\gamma_{kl}c_{kl}+\delta_{kl}d_{kl}).$$

По определению T-дополнительного пространства двойной ряд $g^\circ\in(M\to T)$ тогда и только тогда, когда двойной числовой ряд (3) вполне T-суммируем, т. е. двойная числовая последовательность (h_{mn}) вполне сходится для любой $f\in M$. Поставим в соответствие каждой $f\in M$ функцию $g\in(M\to T)$ при помощи (2) и (3) и определим функционал $\varphi: L\to\mathbf{R}$ по формуле

$$\varphi(\tau_{mn}g)=h_{mn}.$$

Теперь, учитывая общий вид непрерывного линейного функционала в L (см. [13], стр. 257), видим, что сходимость двойной последовательности (h_{mn}) означает слабую сходимость $(\tau_{mn}g)$

---

[3] Через S_O (соответственно S_r) обозначено множество всех S-ограниченных (соответственно вполне S-суммируемых) двойных рядов.

в L, ибо, выражая коэффициенты Фурье a_{kl}, b_{kl}, c_{kl} и d_{kl} функции f через интегралы (см., например, [23], стр. 222, или [9], стр. 122), получаем

$$h_{mn}=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_Q f(x, y)\,(\tau_{mn}g)\,(x, y)\quad dx\,dy. \tag{6}$$

Покажем, что $(\tau_{mn}g)$ слабо вполне сходится к g. Для этого достаточно показать, что двойной ряд Фурье слабого предела совпадает с g°. Действительно, положив в (6) сначала $f(x, y) = \cos\mu x\cdot\cos\nu y$, получаем $h_{mn}=\tau_{mn\mu\nu}\lambda_{\mu\nu}\alpha_{\mu\nu}$, затем, положив $f(x, y)=\sin\mu x\cdot\cos\nu y$, находим $h_{mn}=\tau_{mn\mu\nu}\lambda_{\mu\nu}\beta_{\mu\nu}$ и т. д., откуда, если T удовлетворяет условию [4]

$$r\text{-}\lim_{m,n}\tau_{mnkl}=1, \tag{7}$$

вытекает требуемое. Итак, доказана

Лемма 2. *Если T удовлетворяет условию (7), то T-дополнительное пространство $(M\to T)$ состоит из таких $g^\circ\in L$, для которых $(\tau_{mn}g)$ слабо вполне сходится к g в L.*

§ 2. Нахождение условий для определения класса функций

Пусть K_{mn} — ядро метода S, т. е. (ср. [5], стр. 242)

$$K_{mn}(u, v)=\sum_{k,l\leqslant m,n}(\Delta_{kl}\sigma_{mnkl})\,D_k(u)\;D_l(v)$$

где D_k — ядро Дирихле, и L_{mn} — константы Лебега метода S, т. е.

$$L_{mn}=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_Q|K_{mn}(u, v)|\,du\,dv.$$

Пусть метод S удовлетворяет условию

$$L_{mn}=O(1). \tag{8}$$

Тогда, учитывая, что

$$(\sigma_{mn}f)\,(s, t)=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_Q f(s+u, t+v)\,K_{mn}(u, v)\,du\,dv \tag{9}$$

(ср. [11], стр. 455), для всех $f\in M$ получаем

$$|\,(\sigma_{mn}f)\,(s, t)\,|\leqslant L_{mn}\|f\|_M, \tag{10}$$

где

$$\|f\|_M=\operatorname*{vraisup}_Q|f(s, t)|.$$

---

[4] Символ $r\text{-}\lim\limits_{m,n}x_{mn}=a$ означает, что (x_{mn}) вполне сходится к a, т. е.

$$\lim_{m,n\to\infty}x_{mn}=a,\qquad \exists\lim_{n\to\infty}x_{mn},\qquad \exists\lim_{m\to\infty}x_{mn}.$$

Отсюда ввиду (8) вытекает, что всюду на Q

$$(\sigma_{mn}f)(s,t)=O(1),$$

т. е. все $f^\circ \in M$ являются S-ограниченными всюду на Q и, следовательно, $\Sigma \lambda_{kl}a_{kl} \in S_O$, ибо $f^\circ(0,0) = \Sigma \lambda_{kl}a_{kl}$. Отсюда, обозначив

$$X_O=\{c^\circ : \sum \lambda_{kl}a_{kl} \in S_O\},$$

получаем, что $M_c \subset X_O$, где M_c — множество всех четных (см. [9], стр. 149) функций, ограниченных почти всюду на Q. Тогда по определению T-дополнительного пространства имеем $(X_O \to T) \subset (M_c \to T) \subset (M \to T)$. По лемме 1 ряд $k^\circ \in (M \to T)$, если числа α_{mn} — множители суммируемости типа (S_O, T_r), т. е. если $\Sigma \lambda_{kl}(\alpha_{kl}a_{kl} + \beta_{kl}0 + \gamma_{kl}0 + \delta_{kl}0) \in T_r$ для любого $f^\circ \in M$. По лемме 2 имеем $(M \to T) \subset L$. Значит, если α_{kl} являются множителями суммируемости типа (S_O, T_r), то $k^\circ \in L$. Итак, доказана

Теорема 1. *Пусть треугольные методы S и T удовлетворяют соответственно условиям* (8) *и* (7). *Если числа α_{mn} являются множителями суммируемости типа (S_O, T_r), то косинус-косинус-ряд* (4) *является рядом Фурье из L.*

Пусть V — пространство всех функций двух переменных с ограниченным изменением на Q в смысле Витали (см. [9], стр. 220). Через dV обозначим пространство всех двойных рядов Фурье—Стилтьеса функций из V, т. е. двойных рядов (1), для которых коэффициенты a_{kl} Фурье—Стилтьеса функции $F \in V$ определяются по формуле

$$a_{kl}=\frac{1}{\pi^2}\iint_Q \cos kx \cdot \cos ly \; dF(x,y)$$

(см. [21], стр. 275), а коэффициенты b_{kl}, c_{kl} и d_{kl} вычисляются по аналогичным формулам.

Докажем, что имеет место

Теорема 2. *Пусть треугольные методы S и T удовлетворяют соответственно условиям* (8) *и* (7), *причем*

$$r\text{-}\lim_{m,n} \sigma_{mnkl}=1. \qquad (11)$$

Если числа a_{mn} являются множителями суммируемости типа (S_r, T_r), то косинус-косинус-ряд (4) *является рядом Фурье—Стилтьеса.*

Доказательство. Сначала докажем, что ввиду (11) и (8) все $f^\circ \in C$ равномерно вполне S-суммируемы на Q. Действительно, из (10) вытекает, что для операторов $\sigma_{mn}: C \to C$, определенных равенством (9),

$$\|\sigma_{mn}\| \leqslant L_{mn}. \qquad (12)$$

Далее, по аппроксимационной теореме Вейерштрасса (см. [8], стр. 110, или [22], стр. 14) множество двойных тригонометрических многочленов плотно в C и, следовательно, множество

$$E=\{1/2,\ \cos\mu s,\ \sin\mu s\}\times\{1/2,\ \cos\nu t,\ \sin\nu t\},\qquad \mu,\nu\geqslant 1,$$

является фундаментальным в C. Но ввиду (11) для каждой $f\in E$ двойная последовательность, определенная в (9), равномерно вполне сходится на Q, ибо для любой $f\in E$ имеем $\|f-\sigma_{mn}f\|=|1-\sigma_{mn\mu\nu}|\,\|f\|$. Ввиду (12) и (8) по обобщению теоремы Хана—Банаха—Штейнгауза, данному Куллем ([14], стр. 10, теорема III), получаем требуемое, т. е. для любой $f\in C$

$$r\text{-}\lim_{m,n}\|f-\sigma_{mn}f\|=0.$$

Итак, $C\subset S_r$, откуда для всех $f^\circ\in C$ имеем $\sum\lambda_{kl}a_{kl}\in S_r$. Отсюда, обозначив

$$X_r=\{c^\circ:\ \sum\lambda_{kl}a_{kl}\in S_r\},$$

получаем, что $C_c\subset X_r$, где C_c — множество всех четных функций, непрерывных на Q. Тогда по определению T-дополнительного пространства имеем $(X_r\to T)\subset(C_c\to T)\subset(C\to T)$, откуда по лемме 1 заключаем, что $k^\circ\in(C\to T)$, если числа α_{mn} — множители суммируемости типа (S_r, T_r), т. е. если $\sum\alpha_{kl}\lambda_{kl}a_{kl}\in T_r$ для любого $f^\circ\in C$. Это имеет место, когда двойная последовательность (h_{mn}), определенная формулой (6), вполне сходится для любой $f\in C$. Отсюда вытекает, что $k^\circ\in dV$. Для доказательства этого определим точечно вполне сходящуюся на C двойную последовательность линейных функционалов $\psi_{mn}: C\to \mathbf{R}$ по формуле

$$\psi_{mn}f=h_{mn}.$$

Из теоремы Рисса—Маркова (см. [16], стр. 143, или [20], стр. 81) об общем виде непрерывного линейного функционала на C следует, что все ψ_{mn} непрерывны на C. Тогда и предельный функционал ψ линеен и непрерывен (см. [14], стр. 12, теорема IV) на C. По теореме Рисса—Маркова функционал ψ определен равенством

$$\psi f=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_Q f(s,t)\,dG(s,t)$$

с $G\in V$. Отсюда при $f(x,y)=\cos\mu x\cdot\cos\nu y$, учитывая (6) и (7), выводим

$$\psi f=\lim_{m,n}\tau_{mn\mu\nu}\lambda_{\mu\nu}\alpha_{\mu\nu}=\lambda_{\mu\nu}\alpha_{\mu\nu}.$$

Следовательно, (α_{kl}) — последовательность коэффициентов ряда Фурье—Стилтьеса, т. е. $k^\circ\in dV$. Теорема доказана.

§ 3. Нахождение условий для мультипликаторов

Двойная последовательность (a_{mn}) называется *мультипликатором класса* (X, Y), если двойной ряд $\Sigma a_{ki}A_{kl}$ является двойным рядом Фурье функции из Y всякий раз, когда $g^\circ \in X$.

Докажем, что имеет место

Теорема 3. *Пусть треугольные методы S и T удовлетворяют соответственно условиям* (8) *и* (7). *Если числа a_{mn} являются множителями суммируемости типа (S_O, T_r), то (a_{mn}) является мультипликатором класса (dV, L).*

Доказательство. Скворцова (см. [17], теорема 4) доказала, что (a_{mn}) является мультипликатором класса (dV, L) тогда и только тогда, когда $c^\circ \in L$. Применяя теорему 1, получаем требуемое.

Пусть φ — выпуклая непрерывная функция одной переменной $u \geqslant 0$ такая, что $0 \leqslant \varphi(u)\uparrow$, $\varphi(2u) = O(1)\varphi(u)$ и $u^{-1}\varphi(u) \to \infty$ при $u \to \infty$. Через L_φ обозначим класс функций f, для которых

$$\iint\limits_Q \varphi(|f(x, y)|)\, dx\, dy < \infty$$

(ср. [19], стр. 19). В частности, при $\varphi(u) = u^p$ с $p > 1$ вместо L_φ пишем L^p.

Через R обозначим класс функций двух переменных, интегрируемых по Риману на Q.

Теорема 4. *Пусть методы S и T треугольны, S удовлетворяет условиям* (8) *и* (11), *а T — условию* (7). *Если числа a_{mn} являются множителями суммируемости типа (S_r, T_r), то (a_{mn}) является мультипликатором классов (M, M), (R, R), (C, C), (dV, dV), (R, M), (C, M), (C, R), (L_φ, L_φ) и (L^p, L^p).*

Доказательство. Скворцова (см. [17], теорема 2, [18], теорема 7, и [19], теорема 12) доказала, что (a_{mn}) является мультипликатором первых семи классов теоремы 4 тогда и только тогда, когда $c^\circ \in dV$ и класса (L_φ, L_φ) тогда, когда $c^\circ \in dV$. Применяя теперь теорему 2, получаем требуемое.

Теоремы 3 и 4 сводят проблему нахождения условий для рассматриваемых мультипликаторов двойных рядов Фурье к проблеме множителей суммируемости типов (S_O, T_r) и (S_r, T_r), решенной для методов суммирования Чезаро ([2], теоремы 3 и 1) и взвешенных средних Рисса ([3], теоремы 6 и 4), а также для произвольных методов S и T, удовлетворяющих некоторым условиям (см. [7], теорема 1, и [6], теоремы 3 и 1), или, когда T — метод сходимости E (см. [12], теорема 14, и [4], теоремы 5 и 3). Таким образом, получаем для мультипликаторов эффективные условия, наложенные непосредственно на них.

Применим теоремы 3 и 4 в случае, когда S и T — методы суммирования Чезаро соответственно $C^{\alpha,\beta}$ с $\alpha, \beta > 0$ и $C^{\gamma,\delta}$ с

$\gamma, \delta \geqslant 0$. Для них условия (11) и (7) выполнены. Выполнение условия (8) вытекает из теоремы Никольского (см. [1], стр. 476 и 481, или [15], стр. 265 и 277) или получается непосредственным вычислением (см. [10], стр. 157), ввиду факторизируемости методов Чезаро. Применяя теперь теоремы 3 и 1 статьи [2], получаем следующее

Следствие 1. *Если при $\alpha, \beta > 0$ и $0 \leqslant \gamma, \delta \leqslant \alpha, \beta$ выполнены условия $a_{mn} = O(1)$,*

$$\sum_{m,n} (m+1)^{\alpha}(n+1)^{\beta}|\Delta_{mn}^{\alpha+1\, \beta+1}a_{mn}| < \infty, \tag{13}$$

$$\sum_{m} (m+1)^{\alpha}|\Delta_{m}^{\alpha+1}a_{mn}| = o[(n+1)^{\beta-\delta}], \tag{14}$$

$$\sum_{n} (n+1)^{\beta}|\Delta_{n}^{\beta+1}a_{mn}| = o[(m+1)^{\gamma-\alpha}], \tag{15}$$

$$\lim_{m,n} [(m+1)^{\alpha-\gamma}(n+1)^{\beta-\delta}a_{mn}] = 0,$$

то (a_{mn}) является мультипликатором класса (dV, L), если же выполнены условия (13) *и*

$$a_{mn} = O[(m+1)^{\gamma-\alpha}(n+1)^{\delta-\beta}],$$

а в (14) *и* (15) *заменить o на O, то (a_{mn}) является мультипликатором всех классов из теоремы* 4.

Применим еще теоремы 3 и 4 в случае, когда S — факторизуемый метод суммирования Вороного—Нёрлунда с $\sigma_{mnkl} = P_{m-k,n-l}/P_{mn}$, где $P_{mn} = P'_m P''_n > 0$, а $T = E$. Тогда, определив числа d_{mn} двойным степенным рядом

$$\sum d_{mn}x^m y^n = (\sum P_{mn}x^m y^n)^{-1},$$

получаем следующее

Следствие 2. *Если $P'_m - P'_{m-1}$, $P''_n - P''_{n-1} \downarrow 0$ и $P'_m, P''_n \to \infty$, причем*

$$\sum_{k,l \leqslant m,n} (k+1)^{-1}(l+1)^{-1}P_{kl} = O(P_{mn})$$

и $\Sigma (m+1)(n+1)|d_{mn}| < \infty$, то (a_{mn}) является мультипликатором класса (dV, L), если выполнены условия

$$r\text{-}\lim_{m,n} (P_{mn}a_{mn}) = 0,$$

$$\sum_{m,n} P_{mn} |\sum_{k,l \geqslant m,n} d_{k-m,l-n}a_{kl}| < \infty, \tag{16}$$

$$\sum_{m} P_{mn} |\sum_{k \geqslant m} d_{k-m,0}a_{kn}| = o(1), \tag{17}$$

$$\sum_{n} P_{mn} |\sum_{l \geqslant n} d_{0,l-n}a_{ml}| = o(1), \tag{18}$$

если же выполнены условия (16) *и* $P_{mn}a_{mn} = O(1)$, *а в* (17) *и* (18) *заменить о на О, то* (a_{mn}) *является мультипликатором всех классов из теоремы* 4.

Доказательство. Условия (11) и (7) выполнены, ибо факторы метода S регулярны (см. [5], стр. 102) и $\tau_{mnkl} = 1$. Условие (8) также выполнено (см. [15], стр. 262, или [10], стр. 495—496). Остается применить теоремы 5 и 3 статьи [4].

Литература

1. Бари Н. К., Тригонометрические ряды. Москва, 1961.
2. Барон С., Множители суммируемости для двойных рядов, суммируемых или ограниченных методом Чезаро вещественного порядка. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 91—117.
3. Барон С., Множители суммируемости для двойных рядов, суммируемых или ограниченных методом взвешенных средних Рисса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 225—240.
4. Барон С., О распространении метода Мура—Кангро на двойные ряды. Изв. вузов. Математика, 1971, № 7, 20—31.
5. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Таллин, 1977.
6. Барон С., Тяхт М., О множителях суммируемости двойных рядов для методов $A^{\alpha,\beta}$. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, **305**, 185—198.
7. Вихманн Ф., Теоремы типа Бора—Харди для двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 194—198.
8. Дзядык В. К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. Москва, 1977.
9. Жижиашвили Л. В., Сопряженные функции и тригонометрические ряды. Тбилиси, 1969.
10. Зигмунд А., Тригонометрические ряды, т. I. Москва, 1965.
11. Зигмунд А., Тригонометрические ряды, т. II. Москва, 1965.
12. Кангро Г., О множителях суммируемости для двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1957, **46**, 3—42.
13. Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ. Москва, 1977.
14. Кулль И. Г., Умножение суммируемых двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, **62**, 3—59.
15. Никольский С. М., О линейных методах суммирования рядов Фурье. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1948, **12**, № 3, 259—278.
16. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу. Москва, 1954.
17. Скворцова М. Г., К теории множителей, преобразующих двойные ряды Фурье (часть 1). Уч. зап. Кабардино-Балкарск. ун-т, 1957, **2**, 219—231.
18. Скворцова М. Г., К теории множителей, преобразующих двойные ряды Фурье (часть 2-я). Уч. зап. Кабардино-Балкарск. ун-т, 1962, **16**, 40—42.
19. Скворцова М. Г., К теории множителей, преобразующих двойные ряды Фурье (часть 3-я). Уч. зап. Кабардино-Балкарск. ун-т, 1963, **17**, 19—22.
20. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. V. Москва, 1959.
21. Стейн И., Вейс Г., Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. Москва, 1974.
22. Тиман А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного. Москва, 1960.

23. Толстов Г. П., Ряды Фурье. Москва, 1960.
24. Тыннов М., Множители суммируемости, коэффициенты Фурье и мультипликаторы. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1966, **192**, 82—96.
25. Goes, G., Charakterisierung von Fourierkoeffizienten mit einem Summierbarkeitsfaktorentheorem und Multiplikatoren. Studia math., 1960, **19**, № 2, 133—148.

Поступило
18 X 1978

ABOUT THE MULTIPLICATORS FOR THE DOUBLE FOURIER SERIES

S. Baron

Summary

Let S and T be two triangular summability methods. The numbers ε_{mn} are called the *summability factors of the type* (S_O, T_r) (resp. (S_r, T_r)), if for any S-bounded (resp. regularly S-summable) double series Σu_{mn} the double series $\Sigma\varepsilon_{mn}u_{mn}$ is regularly T-summable. The double sequence (a_{mn}) is called the *multiplicator of the class* (X, Y), if $\Sigma\, a_{kl}A_{kl}(s, t)$ is a double Fourier series of a function $f\in Y$ for every $g^\circ\in X$, where g° is defined by (2).

In the article some ideas of the method, developed by Goes and Tynnov (see [25, 24] and [5], § 28) to investigate the Fourier series of function of one variable are generalized to double trigonometric series. So the effective conditions imposed on a_{mn} are found in order that the series (4) would be the double Fourier series of a function f of two variables integrable on $Q=[-\pi,\pi]^2$ or double Fourier—Stieltjes series. For this in the first case it is sufficient that a_{mn} will be the summability factors of the type (S_o, T_r), and in the second case of the type (S_r, T_r), if the methods S and T satisfy the conditions (7), (8) and (11).

Applying the results of Skvortsova [17—19] the following theorems are proved, where we denote by L (resp. R) the set of all functions integrable on Q in the Lebesgue (resp. Riemann) sense, by M the set of all bounded functions $f\in L$, by C the set of all continuous functions on Q, by L^p the set of all f for which $\int\int_Q |f(x,y)|^p\, dx\, dy<\infty$, where $p>1$, and by dV — the class of all double Fourier—Stieltjes series.

Theorem 3. *Let S and T satisfy the conditions* (8) *and* (7), *respectively. If a_{mn} are summability factors of the type (S_O, T_r), then (a_{mn}) is a multiplicator of the class (dV, L).*

Theorem 4. *Let S satisfy the conditions* (8) *and* (11) *and T satisfy the condition* (7). *If a_{mn} are summability factors of the type (S_r, T_r), then (a_{mn}) is a multiplicator of the classes (M,M), (R,R), (C,C), (dV,dV), (R,M), (C,M), (C,R) and (L^p,L^p).*

Tartu Ülikooli toimetised, Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1979, **504**, 126—130.

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О τP-ТОПОЛОГИИ НА ПРОСТРАНСТВЕ ИЗМЕРИМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Т. Мелс

Тартуский государственный университет

Понятие τP-топологии на множестве измеримых отображений измеримого пространства (Ω, Σ) в хаусдорфово пространство (M, τ) со счетной базой дано в [2]. Оно обобщает топологию сходимости по мере и находит применение, например, в теории вероятностей. Настоящая заметка дополняет [2] в двух направлениях: получены критерии τP-сходимости (теорема 1) и условие метризуемости τP-топологии (теорема 2).

§ 1. Обозначения и определения

В этой статье приняты следующие обозначения: (M, τ) — хаусдорфово пространство со счетной базой топологии τ, $\tau \times \tau$ — тихоновское произведение топологий, Σ^τ — порожденная топологией σ-алгебра, $\Sigma^\tau \times \Sigma^\tau$ — произведение σ-алгебр. В силу того, что τ имеет счетную базу, $\Sigma^{\tau\times\tau} = \Sigma^\tau \times \Sigma^\tau$.

Допустим временно, что τ — регулярная топология. Тогда (M, τ) метризуемо некоторой метрикой d, которая является измеримой функцией на $(M \times M, \Sigma^{\tau\times\tau})$. В частности, для любого числа ε и любой меры μ на $\Sigma^{\tau\times\tau}$ существует число

$$\mu((m_1, m_2): d(m_1, m_2) < \varepsilon). \tag{1}$$

Обычно мера μ возникает следующим естественным путем. Пусть (Ω, Σ, P) — измеримое пространство с неотрицательной нормированной мерой P на Σ, а x и y — некоторые (Σ, Σ^τ)-измеримые отображения $\Omega \to M$. Класс всех таких отображений обозначим X. Тогда для измеримых прямоугольников $A \times B$

$$\mu(A \times B) = P(x^{-1}(A) \cap y^{-1}(B)), \tag{2}$$

что определяет меру μ. Если (2) верно, то вместо (1) будем писать просто $P(d(x, y) < \varepsilon)$.

Определение 1. *Последовательность $x_1, x_2, \ldots$ в X называется сходящейся по мере P к x в X и пишется $x_i \to^P x$, когда для любого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{i\to\infty} P(d(x_i, x) < \varepsilon) = 1. \tag{3}$$

Определение 1 корректно в том смысле, что не зависит от выбора метрики d.

Возвратимся к общему случаю, где (M, τ) не обязательно регулярно (но по-прежнему имеет счетную базу топологии). Тогда определение 1 может терять смысл из-за неметризуемости пространства (M, τ). В [2] дано определение τP-сходимости, которое является расширением определения 1 на случай неметризуемого (M, τ). Если (M, τ) метризуемо, то τP-сходимость и сходимость по мере совпадают. Напомним некоторые понятия, связанные с τP-сходимостью.

Определение 2. *Оградой называется любое семейство $S = \{S_m : m \in M\}$ подмножеств M, где $m \in S_m$ для всех $m \in M$. Правильными называются ограды, удовлетворяющие условию*

$$\bigcup_m (\{m\} \times S_m) \in \Sigma^\tau \times \Sigma^\tau.$$

Открытыми называются ограды, которые состоят из открытых множеств.

Определение 3. *Последовательность $x_1, x_2, \ldots$ в X называется τP-сходящейся к x в X и пишется $x_i \to^{\tau P} x$, когда при любой открытой правильной ограде S*

$$P(x_i \in S_x) \to 1. \tag{4}$$

Отметим, что все пределы τP-сходящейся последовательности P-почти всюду равны.

Определение 4. *Базой множества всех правильных открытых оград (или просто базой оград) называется любое семейство $\{{}_kS, k \in K\}$ правильных открытых оград, обладающее свойством: для каждой правильной открытой ограды S, числа $\varepsilon > 0$ и множества $\{x, x_1, x_2, \ldots\} \subset X$ существует такое значение $k \in K$, что*

$$P \bigcap_i ((x_i \notin {}_kS_x) \cup (x_i \in S_x)) > 1 - \varepsilon. \tag{5}$$

База оград важна тем, что $x_i \to^{\tau P} x$ тогда и только тогда, когда (4) имеет место для любой ограды S из базы оград. В [2] построена счетная база $\{{}_1S, {}_2S, \ldots\}$ оград. Здесь

$${}_kS_m = \bigcap_{j \leqslant k} U_j(m) \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{6}$$

где $U_j(m)$ обозначает j-тое множество в последовательности всех тех множеств в некоторой счетной базе топологии τ, которые содержат точку $m \in M$. Для краткости, эту базу называем *стандартной.*

§ 2. Критерии τP-сходимости

Определение 5. *Будем называть ограду $S = \{S_m : m \in M\}$ оградой счетного типа, если для некоторого счетного разбиения $\{E_1, E_2, \ldots\}$ множества M на непересекающиеся подмножества*

E_i имеет место равенство

$$\bigcup_m (\{m\}\times S_m)=\bigcup_j \{E_j\times V_j\}, \tag{7}$$

где V_j — некоторые множества.

Лемма 1. *Ограды* (6) *из стандартной базы не более, чем счетного типа.*

Доказательство. Определим эквивалентность $a\sim^k b$ равенством ${}_kS_a={}_kS_b$. Отношение $\sim^k$ разбивает M на классы эквивалентности E_j:

$${}_kS_a={}_kS_b \Leftrightarrow a, b\in E_j \text{ для некоторого } E_j.$$

Каждое множество ${}_kS_m$ является пересечением конечного числа множеств счетной базы τ. Поэтому варьированием $m\in M$ можно получить не больше, чем счетное семейство множеств ${}_kS_m$. Поскольку каждое множество ${}_kS_m$ однозначно определяет некоторое множество E_j, то и классов эквивалентности не больше, чем счетное множество. Сопоставляя каждому E_j (однозначно определенное) открытое множество $V_j={}_kS_m$, где $m\in E_j$, получим равенство (7). Лемма доказана.

Используя стандартную базу, докажем следующую теорему о τP-сходимости.

Теорема 1. *Пусть $x, x_1, x_2, \ldots\in X$, а $\{U_1, U_2, \ldots\}$ — счетная база топологии τ. Тогда следующие условия 1°—3° эквивалентны.*

1° $x_i\to^{\tau P} x$;

2° *для любого открытого множества $U\in\tau$*

$$P(x\in U \Rightarrow x_i\in U)\to 1; \tag{8}$$

3° *сходимость* (8) *имеет место для любого (открытого) множества U_j из базы топологии τ.*

Доказательство. Докажем теорему по схеме $1°\Rightarrow 2°\Rightarrow 3°\Rightarrow 2°\Rightarrow 1°$. Рассмотрим правильную открытую ограду $\{S_m : m\in M\}$, определенную условием

$$S_m=\begin{cases} U, \text{ если } m\in U,\\ M, \text{ если } m\notin U,\end{cases} \tag{9}$$

где U — произвольное фиксированное открытое множество в (M,τ). Тогда, если выполняется условие 1°, имеем

$$\begin{aligned}P(x\in U\Rightarrow x_i\in U)&=P(x\notin U\vee x_i\in U)=\\&=P(x\notin U\wedge x_i\in M\vee x\in U\wedge x_i\in U)=\\&=P(x_i\in S_x)\to 1,\end{aligned}$$

чем импликация $1°\Rightarrow 2°$ доказана. Далее, из 2° следует 3° с очевидностью.

Предположим теперь, что выполняется условие 3° и $U\in\tau$. Возьмем такие множества $U_{j1}, U_{j2}, \ldots$ из базы топологии, что при $n\to\infty$

$$U - \bigcup_{k \leqslant n} U_{jk} \downarrow \varnothing.$$

Учтя это, возьмем n настолько большим, чтобы

$$P(x \in (U - \bigcup_{k \leqslant n} U_{jk})) < \varepsilon.$$

Тогда

$$P(x \in U \wedge x_i \notin U) = P(x \in \bigcup_{k \leqslant n} U_{jk} \wedge x_i \notin U) +$$

$$+ P(x \in (U - \bigcup_{k \leqslant n} U_{jk}) \wedge x_i \notin U) < P(x \in \bigcup_{k \leqslant n} U_{jk} \wedge x_i \notin U) + \varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k \leqslant n} P(x \in U_{jk} \wedge x_i \notin \bigcup_{s \leqslant n} U_{js}) + \varepsilon \leqslant \sum_{k \leqslant n} P(x \in U_{jk} \wedge x_i \notin U_{jk}) + \varepsilon. \tag{10}$$

В силу 3° правая часть (10) сходится при $i \to \infty$ к числу $\varepsilon > 0$, которое сколь угодно мало. Значит, 3° $\Rightarrow$ 2°.

Докажем, наконец, импликацию 2° $\Rightarrow$ 1°. Используя E_j и V_j из леммы 1 получим

$$P(x_i \in {}_kS_x) = \sum_{j \leqslant n} P(x \in E_j \wedge x_i \in V_j) + P(x \notin \bigcup_{j \leqslant n} E_j \wedge x_i \in {}_kS_x) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{j \leqslant n} P(x \in E_j \wedge x_i \in V_j) =$$

$$= \sum_{j \leqslant n} P(x \in E_j \Rightarrow x_i \in V_i) - \sum_{j \leqslant n} P(x \notin E_j). \tag{11}$$

Основываясь на сходимость $E_1 \cup \ldots \cup E_n \uparrow M$, которая следует из леммы 1, возьмем n настолько большим, чтобы

$$-\sum_{j \leqslant n} P(x \notin E_j) = \sum_{j \leqslant n} P(x \in E_j) - n \geqslant 1 - \varepsilon - n. \tag{12}$$

Используя далее 2°, выберем i столь большим, чтобы при всех $1 \leqslant j \leqslant n$

$$P(x \in V_j \Rightarrow x_i \in V_j) \geqslant 1 - \varepsilon/n. \tag{13}$$

Поскольку

$$P(x \in E_j \Rightarrow x_i \in V_j) \geqslant P(x \in V_j \Rightarrow x_i \in V_j),$$

то в силу (12) и (13) получаем из (11) неравенство

$$P(x_i \in {}_kS_x) \geqslant 1 - 2\varepsilon. \tag{14}$$

Итак, увеличивая i можно получить (14) для любого $\varepsilon > 0$. Этим импликация 2° $\Rightarrow$ 1°, а, значит, и вся теорема доказана.

§ 3. Условие псевдометризуемости τP-топологии

Хорошо известно ([1], стр. 185), что пространство измеримых вещественных функций с топологией сходимости по мере псевдометризуемо. Следующая теорема показывает, что всякое собственное обобщение (в смысле определения 3) сходимости по мере порождает уже неметризуемую топологию.

Теорема 2. *Топология τP-сходимости псевдометризуема тогда и только тогда, когда пространство (M, τ) метризуемо.*

Доказательство. Достаточность. Если пространство (M, τ) метризуемо метрикой d, то формула

$$\varrho(x, y) = \inf_{\varepsilon > 0} (\varepsilon + P(d(x, y) > \varepsilon))$$

определяет псевдометрику ϱ на X. Проверить надо только неравенство треугольника. Оно получается, если вычислить inf по $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ в неравенствах

$$\begin{aligned} &\varepsilon + \delta + P(d(x, y) > \varepsilon) + P(d(y, z) > \delta) \geqslant \\ &\geqslant \varepsilon + \delta + P(d(x, y) > \varepsilon \vee d(y, z) > \delta) \geqslant \\ &\geqslant \varepsilon + \delta + P(d(x, y) + d(y, z) > \varepsilon + \delta) \geqslant \\ &\geqslant \varepsilon + \delta + P(d(x, z) > \varepsilon + \delta). \end{aligned}$$

Необходимость. Пусть $x = c$, $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, ... — постоянные отображения класса X. Тогда, подставляя в (4) ограду (9), увидим, что $x_i \xrightarrow{\tau P} x$ тогда и только тогда, когда $c_i \to c$ в (M, τ). Итак, имеем естественное непрерывное вложение $(M, \tau) \subset (X, \tau P)$. Если теперь пространство $(X, \tau P)$ псевдометризуемо, то и любое его подпространство, в частности (M, τ), псевдометризуемо. Поскольку (M, τ) является хаусдорфовым, то его псевдометризуемость равносильна метризуемости. Теорема доказана.

Литература

1. Лоэв М., Теория вероятностей. Москва, 1962.
2. Мелс Т. Э., Обобщение сходимости по вероятности: τP-сходимость. Тр. Вычисл. центра. Тартуск. ун-т, 1972, **25**, 45—60.

Поступило
23 V 1978

SOME RESULTS ABOUT τP-TOPOLOGY ON THE SPACE OF MEASURABLE MAPPINGS

T. Möls

Summary

The τP-topology on a set of measurable mappings of a measurable space into a Hausdorff space (M, τ) with countable-base topology was introduced in [2]. As shown in [2], in the special case of metrizable (M, τ), a sequence τP-converges iff it converges in measure. Consequently, in the most general situation where convergence in measure is still definable and preserves its natural meaning, the τP-convergence is equivalent to it. But τP-convergence is defined also in more general situations.

In this paper two further results about τP-topology are obtained. In theorem 1 a simple criterion of τP-convergence is established (see formula (8)). Theorem 2 shows that τP-topology is pseudometrizable iff the space (M, τ) is metrizable.

СОДЕРЖАНИЕ — SISUKORD

Ученые записки Тартуского государственного университета. Выпуск 504. ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ. Труды по математике и механике XXVI. На русском языке. Резюме на английском и немецком языках. Тартуский государственный университет. ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18. Ответственный редактор Э. Реймерс. Корректоры Д. Барон, О. Мутт, К. Уусталу. Сдано в набор 15. 03. 1979. Подписано к печати 10. 03. 1981. Бумага печатная № 1, 60×90, 1/16. Печ. листов 8,25. Учетно-издат. листов 7,9. Тираж 450. МВ 01198. Типография им. Ханса Хейдеманна, ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 17/19.
Зак. № 1037. Цена 1 руб. 20 коп.
2—2

Цена 1 руб. 20 коп.