

Elektron relativistliku elektrodünaamika vaatenurgast

Näide arvuti kasutamisest teoreetilises füüsikas

Ülo Uder

IV osa

Sissejuhatus

Selles osas eemaldame "jämeduse", mis iseloomustab eelmisi arvutusi. Eriti näitab seda III osas saadud laengu jaotusfunktsioon – suur osa laengust koguneb silindri nurkadesse, kus reaalse elektroni puhul laengut ilmselt ei ole. Siin läheme üle sfäärilisele laengujaotusele.

Teiseks suureks muutuseks on loobumine viisist kus kõiki funktsioone lähendati praktiliselt üht tüüpi reaksarendustega. Ometi on funktsioonid üsna erivate omadustega ja selles osas valime igale võimalikult sobivama reaksarenduse. Modifitseerime peamiselt nn harmooniste sfääriliste funktsioonide radiaalmuutujast r sõltuvat tegurit.

1. Algmudeli valimine

Valitavaid funktsioone (arvumassiivide kujul) on 4 – kolm kiiruse komponenti ja üks laengu jaotusfunktsioon. Nende abil esitame algmudeli, mille oleme nimetanud solenoidaalseks.

Alustame programmi algusosaga, mis määrab sfäärilises vaateväljas kasutatavad koordinaadid ja nende väärtuste piirid. Sfääriline vaateväli on raadiusega $\rho 1m$, mille võtame nüüd lähema nn elektroni klassikalisele raadiusele, sest varemates arvutustes kasutasime umbes 11 korda suuremat. Seekordne on umbes 2 korda suurem ja pole ka esitatud mõtetult suure hulga kümnendkohtade arvuga. Sfääriline ruum jagatakse kaheks punktidesüsteemiks nimedega **integreerimispunktid** ja **vaatluspunktid**. Kõik punktid asuvad sfäärilistel pindadel. Integreerimispunktidesse on jagatud kogu süsteemi laeng. Vaatluspunktid, milledes arvutatakse väljatugevused, asuvad eelmiste sfääripindade vahel, et vältida singulaarsuste tekkimist jagamisel punktidevahelise kaugusega integraalsummades, mis arvutavad väljatugevusi. Saadakse integraalide nn peaväärtused funktsioonide integreerimisel, mis sisaldab singulaarset punkti. Viga ei ole nii suur, et oluliselt suurendaks järgnevate ligikaudsete numbriliste arvutuste paratamatult tekkivaid vigu.

Integreerimispunktid toimuvad edaspidi kõik edasised arvutused ja sellel juhul muutuvad need vaatluspunktideks.

Mõõtmel on võetud angströmid ja arvutused tehakse Gaussi süsteemis. kr on sellest tulenev konstant integraalavaldistes. Algmudeli arvutustes kasutatakse 10^5 korda suuremat koordinaati $r1$, mis tähistab integreerimispunktide sfääride raadiusi. Formaalselt kordajatega säilitakse suhtelised kiiruste – mõõdetud valguse kiirustes – suurused väiksemaks ühest ja ääretingimusi andvad tegurid vahemikku $-1...+1$. Täpne suuruste arvestamine algab väljatugevuste arvutamise ja võrrandite lahendamise juures.

Alljärgnev toetub kogemustele, mis on saadud trükise I...III osades tehtud arvutustulemuste analüüsi tulemusena.

Integreerimispunktide arv ja koordinaadid on:

$$\rho 1m := 5.6 \times 10^{-5} \quad r1m := 5.6 \quad im := 35 \quad i := 0..im \quad \Delta r1 := \frac{r1m}{im} \quad r1_i := \Delta r1 \cdot i$$

$$km := 35 \quad k := 0..km \quad \Delta \theta 1 := \frac{\pi}{km} \quad \theta 1_k := \Delta \theta 1 \cdot k \quad jm := 35 \quad j := 0..jm \quad \phi 1_j := \frac{2 \cdot \pi}{jm} \cdot j$$

Vaatluspunktide koordinaadid väljattugevuste arvutamisel on (indeksid kreeka tähed ι, κ, λ):

$$\iota := 0..im \quad r_0 := \frac{r1m}{2 \cdot im} \quad r_\iota := r_0 + \Delta r1 \cdot \iota \quad \kappa := 0..km \quad \theta_\kappa := \Delta \theta1 \cdot \kappa \quad \lambda := 0..jm$$

$\varphi_\lambda := \frac{2 \cdot \pi}{jm} \cdot \lambda$ Nihke r_0 tõttu asub vaatluspunktide süsteemi suurim sfäär juba laengusüsteemist väljas, poole sammu r_0 kaugusel välispinnast.

Laengupunkti ja vaatluspunkti, kus arvutatakse väljattugevus, kaugus arvutub valemiga:

$$R(r, \theta, \varphi, r1, \theta1, \varphi1) := \sqrt{r1^2 - 2 \cdot r1 \cdot r \cdot (\sin(\theta1) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi1 - \varphi) + \cos(\theta1) \cdot \cos(\theta)) + r^2}$$

Algmudeli kiiruskomponente v_r ja v_θ sfäärilises taustsüsteemis määrame $\varphi1 = \varphi = 0$ tasandil. Parema ruumilise ettekujutise saavutamise eesmärgil määrame algväärtused Cartesiusse koordinaadistikus ja teisendame nad siis sfäärilisse. Ristkoordinaadistiku $z1$ telg on laengusüsteemi pöörlemistelg, mille suhtes on ta telgsümmeetriline ja siin määratud komponendid, kaasaarvatud ka kolmas komponent v_φ ei olene nurgast $\varphi1$. Samal tasandil asub ka $x1$ -telg. Väljapunktide ristkoordinaadid valitud tasandil määrame nii:

$$u := 0..35 \quad x1_u := \frac{r1m}{35} \cdot u \quad t := 0..35 \quad z1_t := -r1m + \frac{2 \cdot r1m}{35} \cdot t \quad \text{Kõigepealt loome teguri,}$$

millega funktsioone korrutades nullistab tegur need väljaspool sfäärilist laengusüsteemi, kui nad seal põhimõtteliselt ei tohiks nullist erinevaid väärtusi omada. Kõigepealt võtame kasutussele nurga $\beta1$, mille moodustab $z1 = 0$ punkti väljapunktini $x1, z1$ joonistatud raadius $\rho1$ tellega $z1$. Siis:

$$\rho1 = \sqrt{x1^2 + z1^2} \quad x1 = \rho1 \cdot \sin(\beta1) \quad z1 = \rho1 \cdot \cos(\beta1) \quad O_{u,t} := \text{if} \left[\sqrt{(x1_u)^2 + (z1_t)^2} > r1m, 0, 1 \right]$$

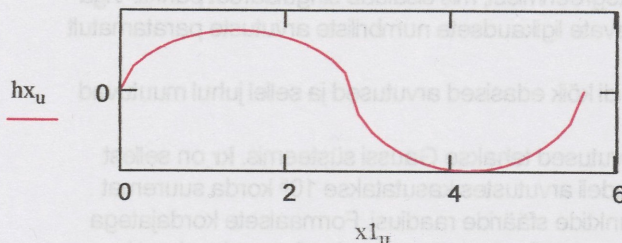
Alustame algmudeli loomist kiiruskomponendile v_z . Trükitöö I.. III osas tehtud arvutustega saadud kogemuste põhjal alustan järgmisest muutusest mööda $x1$ telge, mille algus on asetatud punkti $z1 = 0$.

$$a := -0.010329690671204 \quad b := 0.14461566939702 \quad c := -0.587139617751874$$

$$d := 0.396825396825362 \quad f := 0.952380952380967 \quad \beta1 := \theta1$$

$$h0_u := a \cdot (x1_u)^5 + b \cdot (x1_u)^4 + c \cdot (x1_u)^3 + d \cdot (x1_u)^2 + f \cdot x1_u \quad hx_u := \text{if} \left(x1_u < \frac{r1m}{2}, \frac{3}{4} \cdot \sqrt{h0_u}, -\sqrt{-h0_u} \right)$$

$$hx_{35} := 0$$



Selle ja kõigi allpooltoodud valemite tuletuskäiku ei ole siin näidatud, sest need täidaks liialt palju kirjaruumi.

Sellega tekitame pinna kogu $x1, z1$ tasandi kohal nurga $\beta1$ muutmisega. $x1$ telje kohal asub näidatud joon, kui $\beta1 = \pi/2$. Pöörame joont asenditesse kogu $\beta1$ väärtuste $0.. \pi$ ulatuses.

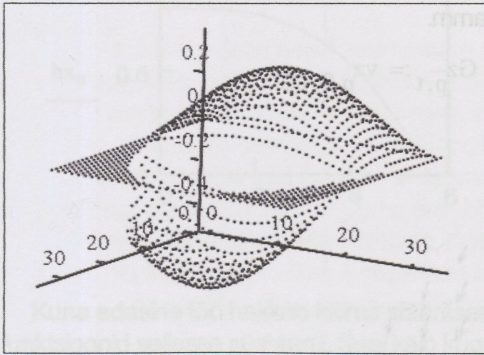
$$V(h, ve) := \begin{cases} \text{for } t \in 0..35 \\ \quad v_t \leftarrow ve \cdot \sin(\beta1_t) \\ \text{for } t \in 0..35 \\ \quad \text{for } u \in 0..35 \\ \quad \quad H_{u,t} \leftarrow h_u \cdot v_t \\ H \end{cases}$$

Seejuures kahnegu kogu joone kõrgus 0-ni jõudmisel $z1$ teljele ($\beta1 = 0$ ja π juures). Viimast tagab $\sin(\beta1)$ kõrvaleavas programmis.

Järgnevalt asume teise kiiruskomponendi v_x arvumassiivi leidma. See on suurim kohas, kus v_z vahetab märki laengusüsteemi sees ja kahaneb samuti kaugenemisel sellest, saavutades 0 väärtuse laengukera välispiiril. Antud juhul on $v_z = 0$ sirgel $x1 = x1_{17}$.

Alustame jällegi joonest $x1$ teljel:

$$vz := V(hx, 0.5) \quad vz_{u,t} := vz_{u,t} \cdot O_{u,t}$$



$$a := \frac{16}{r1m^4} \quad b := \frac{-32}{r1m^3} \quad c := \frac{16}{r1m^2}$$

$$hx_u := a \cdot (x1_u)^4 + b \cdot (x1_u)^3 + c \cdot (x1_u)^2$$

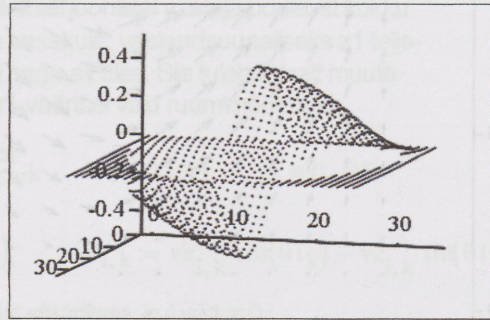
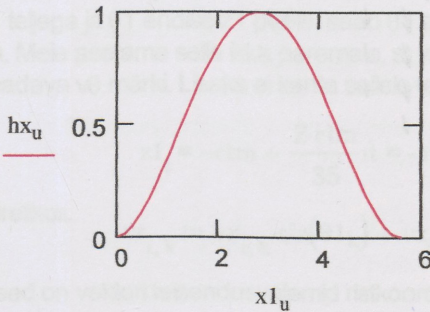
Sama programmiga V(h,ve) tekitame 3-mõõtmelise kujundi.

$$vx := V(hx, 0.5) \quad vx_{u,t} := vx_{u,t} \cdot O_{u,t}$$

Kuid vx peab olema assümmeetriline nn ekvatoriaalse tasandi suhtes ($z1 = 0$):

$$ta := 0..17 \quad vx_{u,ta} := -vx_{u,ta}$$

vz



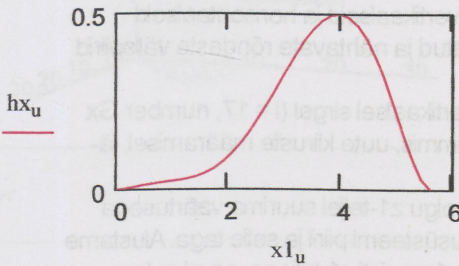
Kolmas kiirusvektori komponent on vy.

Alustame siingi joonest x1 teljel:

$$a := 1.43547803204561 \times 10^{-3}$$

$$b := -0.019917740582699 \quad c := 0.090999528241492 \quad d := -0.1562819634671$$

$$f := 0.107587423510484 \quad hx_u := a \cdot (x1_u)^6 + b \cdot (x1_u)^5 + c \cdot (x1_u)^4 + d \cdot (x1_u)^3 + f \cdot (x1_u)^2$$



$$vy := V(hx, 1) \quad vy_{u,t} := vy_{u,t} \cdot O_{u,t}$$

Peale algmudeli kiiruskomponentidele väärtuste andmist peab kontrollima, kas ei ole ületatud relativistlikku piiri. Selleks arvutame kiiruse mooduli. Kui selle maksimum ületab väärtust 1, tuleb eelmistes arvutustes vähendada programmide sisendis märgitud konstante ve. Samuti sättisime kõigi komponentide suurimad väärtused ligikaudselt võrdseteks:

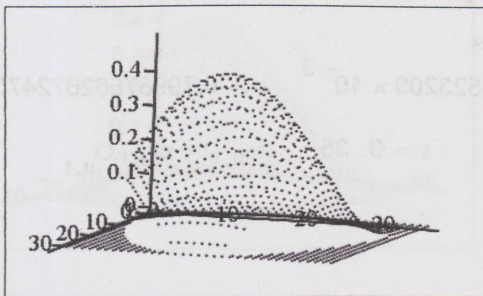
$$vm_{u,t} := \sqrt{(vx_{u,t})^2 + (vy_{u,t})^2 + (vz_{u,t})^2}$$

$$\max(vm) = 0.782323423226303$$

$$\max(vx) = 0.49868136158554$$

$$\max(vy) = 0.498681361585973$$

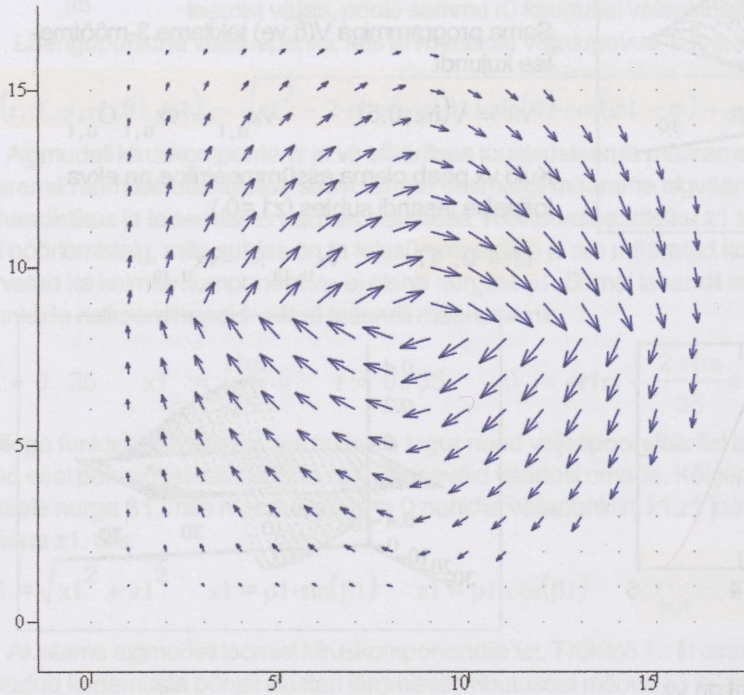
$$\min(vz) = -0.499236326674251$$



vy

Nii nagu trükitöö I.III osas me järgisime nn **suitsurõnga** või **solenoidaalse** liikumise mudelit, nii ka siin kasutame seda algväärtuste valimisel. Kas tasandil (x_1, z_1) on meie valik tekitanud pöörleva liikumise, seda näitab järgmine vektordiagramm.

$$p := 1..16 \quad t := 1..16 \quad Gx_{p,t} := vx_{p-2,t-2} \quad Gz_{p,t} := vz_{p-2,t-2}$$



(Gx, Gz)

Joonistatud vektordiagrammil on v_x telg horisontaalne ja v_z oma vertikaalne. See joonis hõlmab laengukera meridiaantasandi ühte poolt. Teise poole saame, kui peegeldame olemasolevat vertikaalse telje suhtes vasakule. Lisaks näidatud liikumistele toimub tekkinud rõngaste sees laengu liikumine kiirusega v_y ümber vertikaalse telje, omades suurimat väärtust nähtavate rõngaste tsentri kohal. Joonise esitamisel ei ole jälgitud õigeid vertikaalseid ja horisontaalseid mastaape (see ei ole siinkohal oluline). Vasakule peegeldatud ja nähtavate rõngaste välispiirid kokku peavad tegelikult moodustama ringjoone.

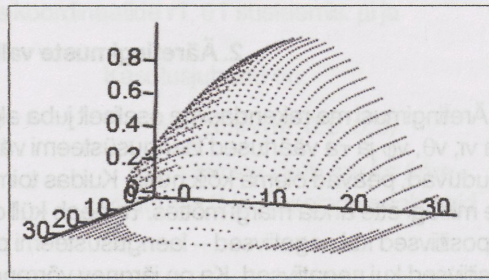
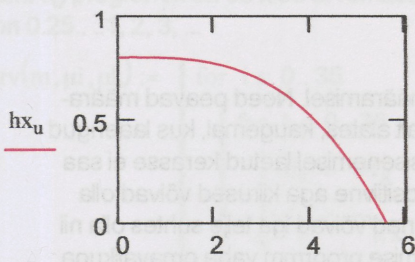
Joonisel on ka näha, et v_z komponent muudab märki vertikaalsel sirgel ($i = 17$, number Gx teljel $17/2 = 8.5$). Edasises võrrandite lahendamise programmis, uute kiiruste määramisel, jätkame programmile voli joone kuju muutmiseks.

Viimasena leiame algmudelile jaotusfunktsiooni τ_a . See olgu z_1 -teljel suurima väärtusega ja kahanegu x_1 kasvades, saavutades väärtuse 0 laengusüsteemi piiril ja selle taga. Alustame jällegi joonest x_1 teljel, mille algus asub $z_1 = 0$ kohal ja telg x_1 on risti z_1 teljega, asudes laetud kera nn ekvatoriaaltasandil.

$$a := -5.06076152720018 \times 10^{-3} \quad b := 2.83402645523209 \times 10^{-3} \quad c := 0.799875626724708$$

$$hx_u := a \cdot (x1_u)^3 + b \cdot (x1_u)^2 + c \quad \tau_a := V(hx, 1.25) \quad t := 0..35 \quad \tau_{a,u,t} := \tau_{a,u,t} O_{u,t}$$

τ_a normeeritakse iteratsioonitsükli alguses p 4.



τ_a

Kuna edasine töö hakkab käima sfäärilises koordinaatsüsteemis, teisendame saadud funktsioonid sellesse süsteemi. Seal käib kogu töö meridiaantasandis $\varphi_1 = 0$. Selles tasandis asuvad ka seni kasutatavad x_1 ja z_1 teljed. Ka r_1 ja sellega ristuv θ_1 telg jääb sinna. Kuigi punktid r_1 ja θ_1 telgedel on tähistatud indeksitega i ja k , väärtusvahemikud on neil indeksitel samad kui on u - ja t - 0..35. Keerates r_1 telje ka sfäärilistel joonistel vaataja poole, st kokku x_1 teljega ja θ_1 endise z_1 peale, saab θ_1 ainult suuna vasakule, vastandsuunaliseks z_1 teljega. Meie asetame selle ikka paremale, st vaatame pilti nagu alt üles. Siis tuleb lihtsalt muuta saadava $v\theta$ märki. Lisaks ei kanta sellele teljele mitte θ_1 väärtusi vaid ruumimõõtmeid:

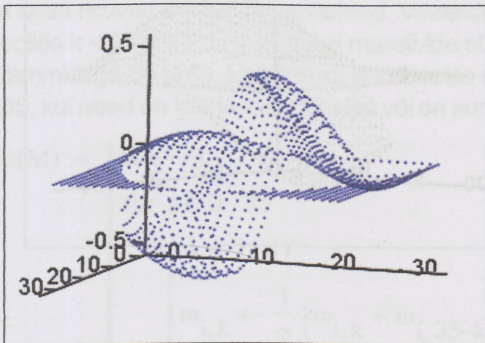
$$z_{1,t} = -r_{1m} + \frac{2 \cdot r_{1m}}{35} \cdot t = -r_{1m} + \frac{2 \cdot r_{1m}}{35} \cdot k \quad t = 0..35 \quad k = 0..35$$

Järelikult

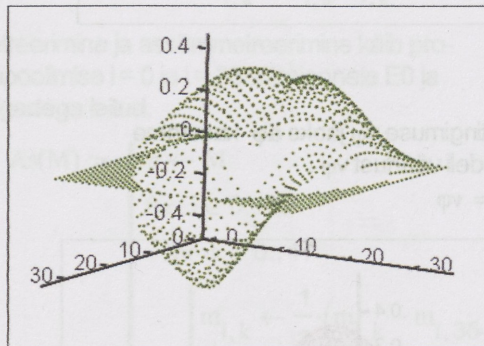
$$v_{r_{i,k}} := v_{x_{i,k}} \cdot \sin(\theta_{1k}) + v_{z_{i,k}} \cdot \cos(\theta_{1k}) \quad v_{\theta_{i,k}} := v_{x_{i,k}} \cdot \cos(\theta_{1k}) - v_{z_{i,k}} \cdot \sin(\theta_{1k})$$

Need on vektori teisendusvalemid ristkoordinaadistikust sfäärilisse, kui $v\varphi_1 = 0$.

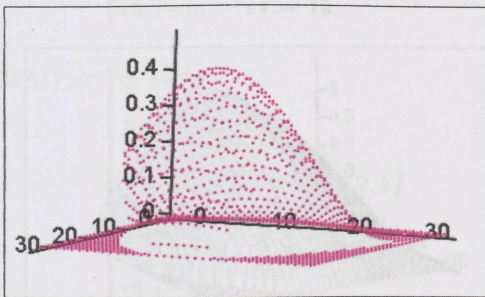
$$v\theta := -v\theta \quad v\varphi := v\varphi \quad \tau_a := \tau_a \quad v\theta \text{ ei pea olema } i = 0 \text{ teljel } 0: \quad v\theta_{0,k} := 0.5 \cdot v\theta_{1,k}$$



v_r



v_θ



v_φ

Algväärtusi kasutatakse ainult ühel korral. Järgnevad iteratsioonid asuvad neid muutma. Nagunii ei ole teada, millised need peaks olema, st ei pea täpselt tõele vastama. Valikust on ainult iteratsiooniprotsessi koondumise kiirus. Lõpptulemus on ääritingimuste valikust.

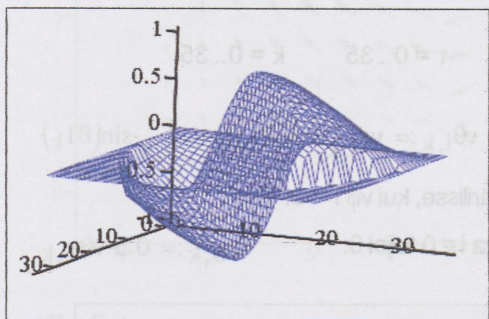
2. Ääritingimuste valimine

Ääritingimusi me rakendasime osaliselt juba algväärtuste määramisel. Need peavad määrama v_r , v_θ , v_φ ja τ_a väärtused laengusüsteemi välispiiridel. Sealt alates, kaugemal, kus laengud puuduvad, peavad olema kõik nullid. Kuidas toimub muutus sisenemisel laetud kerasse ei saa me midagi ette anda märgi mõttes. τ_a peab küll olema seal positiivne aga kiirused võivad olla nii positiivsed kui negatiivsed – laengusüsteemi pöörlemissuunad võivad iga telje suhtes olla nii positiivsed kui negatiivsed. Ka on järgnev võrrandite lahendamise programm vaba omavalikuga märkide suhtes. Hälvete miinimumi määramise programm võib anda juhuslikult muutuvad märgid. Kui programm ei anna just meie poolt valitud märke, siis parandame neid oma soovide järgi **paranduste** osas. See parandamine kuulub ka ääritingimuste esitamise valda. Ääritingimusi joonistame valitud algväärtuste jooniste järgi.

Esmalt määrame ääritingimuse \ddot{r} kiirusele v_r . Võrreldes v_r ja v_x jooniseid näib, et v_x joonis sobibki hästi ääritingimuseks v_r -le. Ainult v_x väärtuste amplituudid suurendane 1-ni:

$$\ddot{r}_{i,k} := \frac{v_{x,i,k}}{\max(v_x)}$$

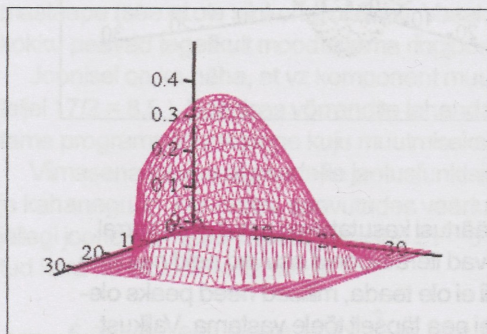
Uue **vru** määramise programmil on vaba voli tegutseda nende "katuste" ümbruses aga välispiiril same kindlalt 0-sed väärtused.



\ddot{r}

Ääritingimuse v_φ jaoks $\ddot{\varphi}$ kasutame algmudeli väärtust v_φ .

$$\ddot{\varphi} := v_\varphi$$

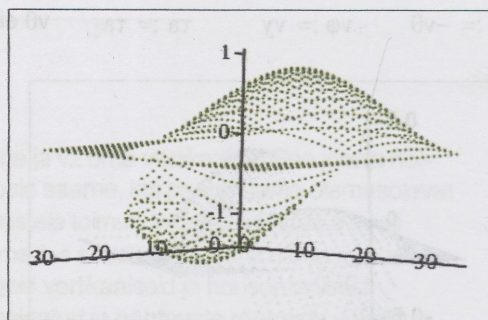


$\ddot{\varphi}$

Järgmisena esitame vajaminevaid silumisprogramme, mis arvutustes saadud arvumassiive siluda võimaldavad. Pikkades arvutustes tekkivate aritmeetiliste vigade tõttu muutuvad nende antud pildid üsna "karvaseks".

Analoogiliselt tegutseme v_θ ääritingimuste $\ddot{\theta}$ määramisel, võrreldes v_θ ja v_z :

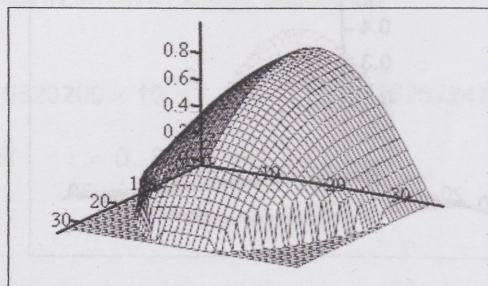
$$\ddot{\theta}_{i,k} := \frac{v_{z,i,k}}{\max(v_z)} \quad \ddot{\theta}_{0,k} := \frac{1}{2} \cdot \ddot{\theta}_{1,k}$$



$\ddot{\theta}$

Viimasena leiame ääritingimuse $\ddot{\tau}$ laengu jaotusfunktsiooni uuele väärtusele τ_u . Sobib

$$\ddot{\tau} := \tau_a$$



$\ddot{\tau}$

Smrv() programm on 36 x 36 arvumassiivi silumiseks koordinaatide $r1, \theta1$ süsteemis. μ_i ja μ_k on 0.25... 1, 2, 3, ...

```

Smrv(m,  $\mu_i, \mu_k$ ) :=
  for i  $\in$  0..35
    for k  $\in$  0..35
       $v\theta_k \leftarrow \theta1_k$ 
       $vf_k \leftarrow m_{i,k}$ 
      as  $\leftarrow$  loess( $v\theta, vf, \mu_k$ )
      for k  $\in$  0..35
         $s\theta_{i,k} \leftarrow$  interp(as,  $v\theta, vf, v\theta_k$ )
      for k  $\in$  0..35
        for i  $\in$  0..35
           $wr_i \leftarrow r1_i$ 
           $wf_i \leftarrow s\theta_{i,k}$ 
          bs  $\leftarrow$  loess(wr, wf,  $\mu_i$ )
          for i  $\in$  0..35
             $tf_{i,k} \leftarrow$  interp(bs, wr, wf,  $wr_i$ )
  tf
  
```

Kasutusjuhend on:

$$m = \text{Smrv}(m, 0.5, 0.5)$$

See silumine rikub ära ka ääreväärtuste 0-id. Taastada saab neid nii:

$$m_{i,k} = \text{if}(O_{i,k} = 0, 0, m_{i,k}) \quad (1)$$

Programm rikub ka ära näiteks järsu ülemineku $\theta1$ telje suunas kohal $k = 17$, kui massiiv on selle suhtes assümmeetriline. Sellisel juhul annab parema tulemuse kui teha alguses sümmeetriliseks tehetege (muidugi omistamismärgiga \equiv)

$$m_{i,35-k} = m_{i,k}$$

ja pärast silumist taastada assümmeetria tehetege:

$$m_{i,35-k} = -m_{i,k}$$

Nullväärtuste taastamiseks võib (1) asemel kasutada ka:

$$m_{i,k} = m_{i,k} \cdot O_{i,k}$$

See silumine rakendub kogu poolriigi tasandi kohta.

Vajalikud on ka sümmeereerimisprogrammid, sest ka seda rikuvad lihtsad arvutustehted. Vaatevälja

pooltes $k < 18$ ja $k > 17$ arvutatud massiivide sümmeereerimine ja assümmeereerimine käib programmidega Sü ja As. Esitame ka paraboolse ekstrapoolimise $i = 0$ ja $i = 35$ äärejoonele E0 ja E35, kui need on kas jäänud tühjaks või on suurte vigadega leitud.

```

Sü(M) :=
  m  $\leftarrow$  M
  for i  $\in$  0..35
    for k  $\in$  0..17
       $m_{i,k} \leftarrow \frac{1}{2} \cdot (m_{i,k} + m_{i,35-k})$ 
       $m_{i,35-k} \leftarrow m_{i,k}$ 
  vä  $\leftarrow$  m
  
```

```

As(M) :=
  m  $\leftarrow$  M
  for i  $\in$  0..35
    for k  $\in$  0..17
       $m_{i,k} \leftarrow \frac{1}{2} \cdot (m_{i,k} - m_{i,35-k})$ 
       $m_{i,35-k} \leftarrow -m_{i,k}$ 
  vä  $\leftarrow$  m
  
```

```

E0(M) :=
  m  $\leftarrow$  M
  for k  $\in$  0..35
    a  $\leftarrow$  3 · ( $m_{1,k} - m_{2,k}$ )
     $m_{0,k} \leftarrow a + m_{3,k}$ 
  vä  $\leftarrow$  m
  
```

```

E35(M) :=
  m  $\leftarrow$  M
  for k  $\in$  0..35
    a  $\leftarrow$  3 · ( $m_{34,k} - m_{33,k}$ )
     $m_{35,k} \leftarrow a + m_{32,k}$ 
  vä  $\leftarrow$  m
  
```

Veel tarvitame ühel real või veerul silumise programmi, kus μ omab samu väärtusi, mis ülalnäidatud μ_i ja μ_k . nm

```

Sm(f, x,  $\mu, nm$ ) :=
  for n  $\in$  0..nm
     $wx_n \leftarrow x_n$ 
  
```

on rea või veeru x punktide koguarv.

Kõigi arvatud väärtuste massiivid näitavad neid tasandis $\varphi = 0$. Telgsümmeetrilisel juhul peab see olma sama kõigis tasandites $\varphi = 0..2\pi$. Telg, mille ümber tuleb kujutisi pöörata, on paremale pööratud $\theta 1$ -telg. Vaataja poole on suunatud $r 1$ -telg.

```

| wy_n ← f_n
bs ← loess(wx, wy, μ)
for n ∈ 0..nm
  sf_n ← interp(bs, wx, wy, x_n)
sf

```

Peale ääreväärtuste leidmist tuleb nendest leida ka osatuletied $r 1$ ja $\theta 1$ järgi. Uued väärtused vru , $v\theta u$, $v\varphi u$ ja τu avaldatakse ääretingimuste ja neid lähendava rittaarenduse korrutisena ja asetatakse dif-võrranditesse. Seal leitakse ka mainitud osatuletised. Osatuletised $\varphi 1$ järgi on 0-id meie eelduse järgi, et laengusüsteem ja laengute liikumine on telgsümmeetriline. Osatuletisi tähistame, nagu ikka, 3. tähega r või θ tuletist võetava suuruse tähistusele lisades. Kuna on tegu arvumassiividega, siis on kasulikum kõigi jaoks kirjutada ühine programm. Programm **Sfu()** töötab 36×36 mõõtmeliste massiividega (koordinaatides $r 1$, $\theta 1$), muutes need pidevateks funktsioonideks. See võimaldab neist osatuletisi leida. Programmi sisendis kasutame koordinaate $r 1$ ja $\theta 1$ tähistustega er , θe . m tähistab arvumassiivi.

```

Sfu(er, θe, m) :=
  Δr ← r1m / 35
  Δθ ← π / 35
  sr ← er / Δr
  Δsr ← mod(sr, 1)
  pr ← sr - Δsr
  if pr < 0
    pr ← 0
    Δsy ← sr
  if pr > 34
    pr ← 34
    Δsr ← sr - pr
  otherwise
    pr ← pr
    Δsr ← Δsr
  sθ ← θe / Δθ
  Δsθ ← mod(sθ, 1)
  pθ ← sθ - Δsθ
  if pθ < 0
    pθ ← 0
    Δsθ ← sθ
  if pθ > 34
    pθ ← 34
    Δsθ ← sθ - pθ

```

Osatuletiste leidmine:

$mf(r 1, \theta 1, m) := Sfu(r 1, \theta 1, m)$

$mrf(r 1, \theta 1, m) := \frac{d}{dr 1} mf(r 1, \theta 1, m)$

$m\theta f(r 1, \theta 1, m) := \frac{d}{d\theta 1} mf(r 1, \theta 1, m)$

$mr_{i,k} := 0$ on error $mrf(r 1_i, \theta 1_k, m)$

$m\theta_{i,k} := 0$ on error $m\theta f(r 1_i, \theta 1_k, m)$

"on error" välistab tekkida võivaid tõrkeid. Nendesse kohtadesse kirjutatakse 0. Nulli võib vajadusel asendada ka mõne muu arvuga.

Leiame kõigi ääretingimuste osatuletised:

$\ddot{a}rr_{i,k} := 0$ on error $mrf(r 1_i, \theta 1_k, \ddot{a}r)$

$\ddot{a}r\theta_{i,k} := 0$ on error $m\theta f(r 1_i, \theta 1_k, \ddot{a}r)$

$\ddot{a}\theta r_{i,k} := 0$ on error $mrf(r 1_i, \theta 1_k, \ddot{a}\theta)$

$\ddot{a}\theta\theta_{i,k} := 0$ on error $m\theta f(r 1_i, \theta 1_k, \ddot{a}\theta)$

$\ddot{a}\varphi r_{i,k} := 0$ on error $mrf(r 1_i, \theta 1_k, \ddot{a}\varphi)$

$\ddot{a}\varphi\theta_{i,k} := 0$ on error $m\theta f(r 1_i, \theta 1_k, \ddot{a}\varphi)$

$\ddot{a}\tau r_{i,k} := 0$ on error $mrf(r 1_i, \theta 1_k, \ddot{a}\tau)$

$\ddot{a}\tau\theta_{i,k} := 0$ on error $m\theta f(r 1_i, \theta 1_k, \ddot{a}\tau)$

otherwise

$p\theta \leftarrow p\theta$

$\Delta s\theta \leftarrow \Delta s\theta$

$f0 \leftarrow m_{pr, p\theta}$

$f1 \leftarrow m_{pr+1, p\theta}$

$f2 \leftarrow m_{pr+1, p\theta+1}$

$f3 \leftarrow m_{pr, p\theta+1}$

$fr1 \leftarrow f0 + (f1 - f0) \cdot \Delta sr$

$fr2 \leftarrow f3 + (f2 - f3) \cdot \Delta sr$

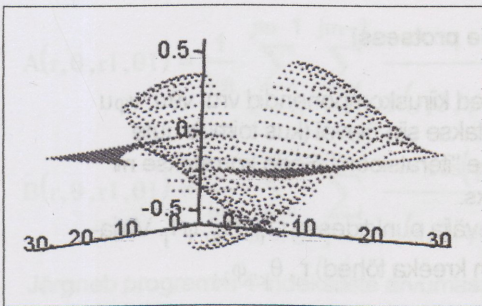
$fr \leftarrow fr1 \cdot (1 - \Delta s\theta)$

$fr \leftarrow fr + fr2 \cdot \Delta s\theta$

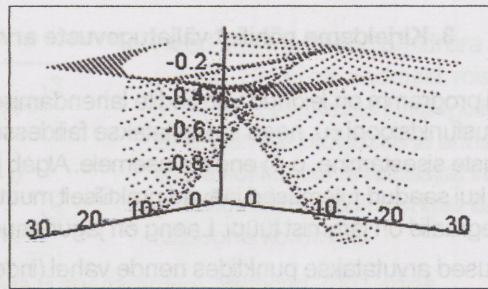
fr

Programm tekitab vigu kohtades, kus toimuvad järsud hüpped m massiivi väärtustes. Neid tuleb siluda. Ka lihtsalt käsitsi parandada. Osa nendest on siin näha, teised on tehtud kõrvallehekülgedel, mida siin ei ole näidatud ruumi kokkuhoiu mõttes. Ka ei peaks need lugejat huvitama.

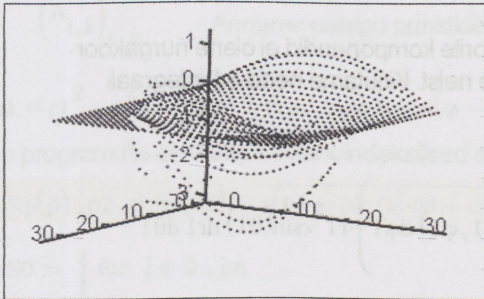
ka := 0..17



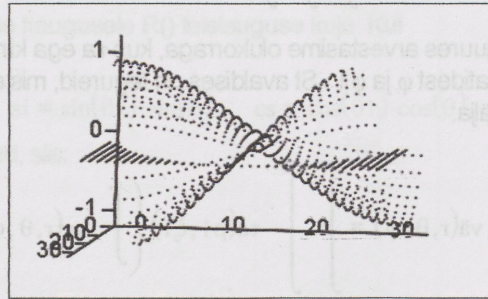
ärr



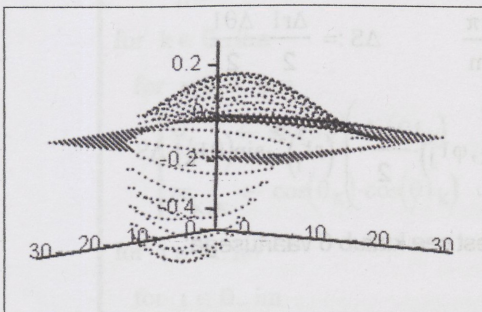
ärθ



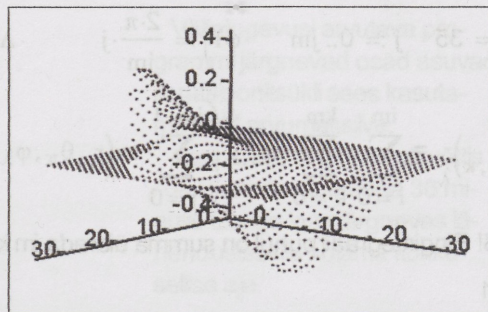
äθr



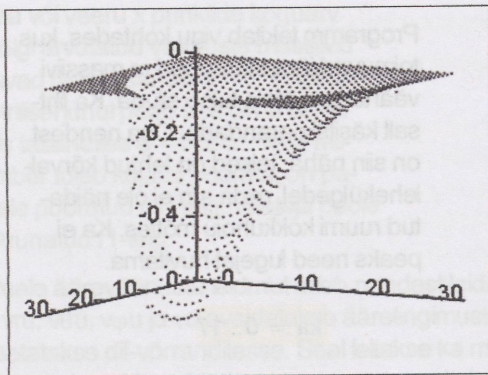
äθθ



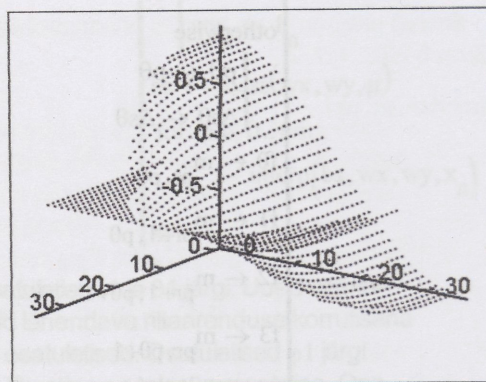
äφr



äφθ



är τ



är θ

Kõik senised arvutused on tehtud koordinaatides, mis on tegelikest laengussüsteemi mõõtetest 10^5 korda suuremad. Vajalikud tasaarvestused tehakse võrrandite lahendamise juures.

3. Kirjeldame põhilist väljatugevuste arvutamise protsessi

Kui programm on leidnud võrrandite lahendamisega uued kiiruskomponendid v_r , v_θ , v_φ ja jaotusfunktsiooni τu , need salvestatakse failidesse ja loetakse siin üleval (kus toimub uute väärtuste sisestamine, p 4) endiste asemele. Algab järgmine "iteratsioon". Seda korratakse nii kaua, kui saadud tulemused jäävad praktiliselt muutumatuks.

Integraalid on järgmist tüüpi. Laeng on jagunenud vaatevälja punktidesse r_{1j} , θ_{1k} , φ_{1j} . Väljatugevused arvutatakse punktides nende vahel (indeksid on kreeka tähed) r_i , θ_k , φ_λ .

$$v\ddot{a}(r, \theta, \varphi) = \int \int \int \tau a(r_1, \theta_1) \cdot a v(r, \theta, \varphi, r_1, \theta_1, \varphi_1) \cdot r_1^2 \cdot \sin(\theta_1) dr_1 d\theta_1 d\varphi_1$$

Seejuures arvestasime olukorraga, kus τa ega kiirusvektorite komponendid ei olene nurgakoordinaatidest φ ja φ_1 . St avaldises on tegureid, mis ei olene neist. Kirjutame need φ_1 integraali alt välja:

$$v\ddot{a}(r, \theta, \varphi) = \int \int \tau a(\rho_1, \zeta_1) \cdot \left(\int a v(r, \theta, \varphi, r_1, \theta_1, \varphi_1) d\varphi_1 \right) \cdot r_1^2 \cdot \sin(\theta_1) dr_1 d\theta_1$$

Integraalid arvutame summadena, kasutades trapetsi meetodit (lühema kirjutusviisi saamiseks kirjutame siin risküliku meetodi järgi, programmis tehakse seda trapetsi meetodil):

$$j_m := 35 \quad j := 0..j_m \quad \varphi_{1j} := \frac{2 \cdot \pi}{j_m} \cdot j \quad \Delta\varphi_1 := \frac{2 \cdot \pi}{j_m} \quad \Delta S := \frac{\Delta r_1}{2} \cdot \frac{\Delta\theta_1}{2}$$

$$(v\ddot{a}_{i, \kappa})_\lambda = \sum_{i=0}^{i_m} \sum_{k=0}^{k_m} \tau a_{i, k} \cdot \left(\sum_{j=0}^{j_m-1} a v(r_i, \theta_k, \varphi_\lambda, r_{1j}, \theta_{1k}, \varphi_{1j}) \cdot \frac{\Delta\varphi_1}{2} \right) \cdot (r_{1j})^2 \cdot \sin(\theta_{1k}) \cdot \Delta S$$

NB! Ringintegraali puhul on summa ülaraada i_m kurjast, sest see kattub 0 väärtusega:

$$\sum_{j=0}^{j_m-1} \Delta\varphi_1 = 6.28318530717959 \quad \text{on } 2\pi \text{ aga} \quad \sum_{j=0}^{j_m} \Delta\varphi_1 = 6.46270488738472 \quad \text{mitte!}$$

Kõigi 5 väljatugevustekomponendi valemite ülevaatamisel saime 5 erinevat avaldist av.

$$a_0 = \frac{r}{R(r, \theta, \varphi, r_1, \theta_1, \varphi_1)^3} \quad a_1 = \frac{r_1 \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\theta_1)}{R(r, \theta, \varphi, r_1, \theta_1, \varphi_1)^3} \quad a_2 = \frac{r_1 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta_1)}{R(r, \theta, \varphi, r_1, \theta_1, \varphi_1)^3}$$

$$a_3 = \frac{r_1 \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\theta_1) \cdot \cos(\varphi - \varphi_1)}{R(r, \theta, \varphi, r_1, \theta_1, \varphi_1)^3} \quad a_4 = \frac{r_1 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta_1) \cdot \cos(\varphi - \varphi_1)}{R(r, \theta, \varphi, r_1, \theta_1, \varphi_1)^3}$$

Neis on veel tegureid, mis saab võtta j-summa märgi ette. Järele jääb ainult 2 tüüpi:

$$A(r, \theta, \varphi, r_1, \theta_1) = \sum_{j=0}^{jm-1} \frac{\cos(\varphi - \varphi_{1j})}{R(r, \theta, \varphi, r_1, \theta_1, \varphi_1)^3} \quad B(r, \theta, \varphi, r_1, \theta_1) = \sum_{j=0}^{jm-1} \frac{1}{R(r, \theta, \varphi, r_1, \theta_1, \varphi_1)^3}$$

Kuidas need olenevad φ -st? Kui kõik kasutatavad füüsikalised suurused ei olene nurgakoordi naatidest, ei peaks ka lõpptulemus – integraalide väärtused sellest olenema. Ligikaudsel arvutusel nad muidugi olenevad. St tuleks veel keskmistada üle kõikvõimalike φ väärtuste. Nii saame:

$$A(r, \theta, r_1, \theta_1) = \frac{1}{jm} \cdot \sum_{\lambda=0}^{jm-1} \sum_{j=0}^{jm-1} \frac{1}{R(r, \theta, \varphi, r_1, \theta_1, \varphi_1)^3}$$

$$B(r, \theta, r_1, \theta_1) = \frac{1}{jm} \cdot \sum_{\lambda=0}^{jm-1} \sum_{j=0}^{jm-1} \frac{\cos(\varphi_{\lambda} - \varphi_{1j})}{R(r, \theta, \varphi, r_1, \theta_1, \varphi_1)^3}$$

Need summad saab eraldi ära arutada. Siin ei ole andmeid, mis muutuksid järgnevas järkjärgulise lähendamise protsessis ja annab suure kokkuhoiu arvutusajas integraalsummade leidmisel igas iteratsioonis korduvalt.

Järgneb programm 4-indeksiliste arvumassiivide A ja B arvutamiseks. Mathcad 2001, mida autor oma töös saab kasutada, ei luba töölehel 4-indeksilisi kasutada, küll aga koostatavates programmides kujul:

$(A_{i,k})_{i,k}$ Anname esialgu punktidevahelise kaugusele R() teistsuguse kuju. Kui

$$\rho_1 = r_1^2 + r^2 \quad \rho_2 = 2 \cdot r_1 \cdot r \quad co = \cos(\varphi - \varphi_1) \quad si = \sin(\theta_1) \cdot \sin(\theta) \quad cs = \cos(\theta_1) \cdot \cos(\theta)$$

on programmis arvutatavad kaheindeksilised suurused, siis:

$$Rp(\rho_1, \rho_2, si, co, cs) := \sqrt{\rho_1 - \rho_2 \cdot (si \cdot co + cs)}$$

```
S0 :=
for j ∈ 0..jm
  for λ ∈ 0..jm
    coj,λ ← cos(φλ - φ1j)
for k ∈ 0..km
  for κ ∈ 0..km
    sik,κ ← sin(θκ) · sin(θ1k)
    csk,κ ← cos(θκ) · cos(θ1k)
for i ∈ 0..im
  for ι ∈ 0..im
    ρi,ι ← (r1i)2 + (rι)2
```

$$A := S0_0 \quad B := S0_1$$

Väljatugevusi arvutava programmi järgnevad osad asuvad iteratsioonitsükli sees kasutama neid arvumassiive.

Kasutuses olnud arvutil võttis A ja B arvutamine aega 36 minutit. Seega igas järgnevas lähendustsükli hoiaime kokku sellise aja.

```

    | ρ2i,ι ← 2·r1,ι·rι
for i ∈ 0..im
  for k ∈ 0..km
    for ι ∈ 0..im
      for κ ∈ 0..km
        for λ ∈ 0..jm - 1
          for j ∈ 0..jm - 1
            scj ← sik,κ·coj,λ + csk,κ
            aj ← (√(ρ1i,ι - ρ2i,ι·scj))3
            aaj ← 1/aj
            baj ← coj,λ/aj
            AAλ ← Δφ1/2 · ∑j=0jm-2 (aaj + aaj+1)
            BBλ ← Δφ1/2 · ∑j=0jm-2 (baj + baj+1)
            Aaι,κ ← 1/jm · ∑λ=0jm-1 AAλ
            Baι,κ ← 1/jm · ∑λ=0jm-1 BBλ
            Ai,k ← Aa
            Bi,k ← Ba
vä0 ← A
vä1 ← B
vä

```

4. Iteratsiooniprotsess algab siit

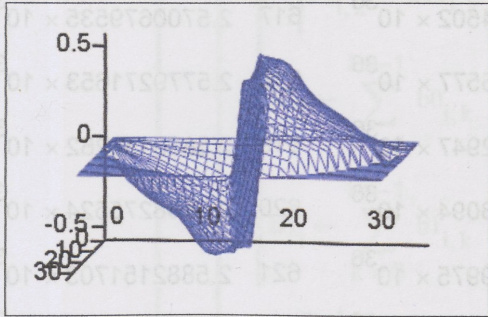
Esimesel tsüklil, numbridame selle 600-ga, sisestatakse algmudeli andmed:

vra := vr vθa := vθ vφa := vφ τaa := τa

Järgmistel tsüklitel loetakse need failidest, kuhu uued salvestati eelmise tsükli lõpus. Selles trükitöös oleme jõudnud 622-ni.

vr :=

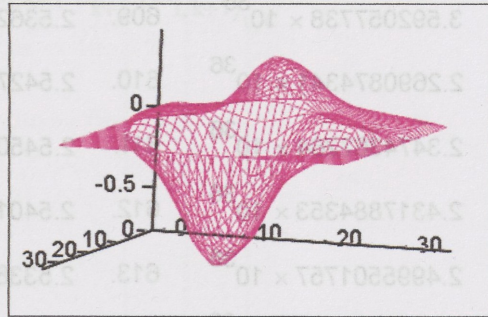
C:\..lvru622



vr

vθ :=

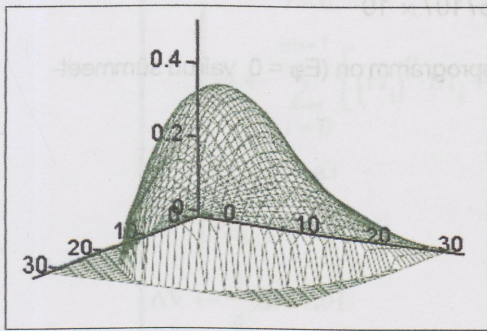
C:\..lvdu622



vθ

vφ :=

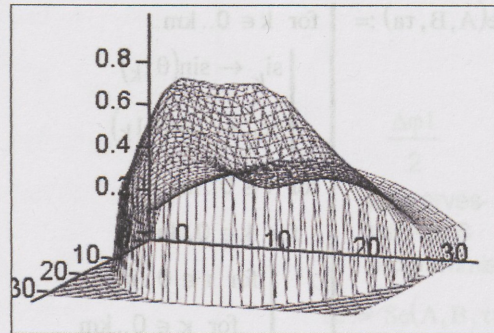
C:\..lvju622



vφ

τα :=

C:\..tu622



τα

$$\Delta r_1 := \frac{r_{1m}}{im} \quad \Delta \theta_1 := \frac{\pi}{km}$$

```

Nor(τu) :=
  for i ∈ 0..im
    for k ∈ 0..km
      fi,k ← τui,k · sin(θ1k) · (r1i)2
    for i ∈ 0..im
      gi ← 1/2 · ∑k=0km-1 (fi,k + fi,k+1)
    s ← 1/2 · ∑i=0im-1 (gi + gi+1)
  s ← s · 2 · π · Δr1 · Δθ1

```

Jaotusfunktsioon tuleb normeerida 1-le. Kõrvalolev programm teeb seda. Integreerimine asendub summeerimisega trapetsi meetodil ja arvestada tuleb ka süsteemi reaalseid mõõtmeid angströmites. Siin kasutatud ruumimõõde on 10⁵ korda suuremates ühikutes.

Seega 1/cm³-tes mõõdetuna on suurem

$$(10^{13})^3 \text{ korda: } \tau_a := \text{Nor}(\tau_a) \quad \tau_a \cdot A_\tau = 1$$

$$A_\tau := \frac{1}{\tau_a} \cdot 10^{39} \quad A_\tau = 2.5693511622 \times 10^{36}$$

All on kirjas normeerimiskonstandi A_τ muutu-

mine tsükli 600..622 jooksul. Nendele vastavaid vr, vθ, vφ ja τα väärtusi vaata Lisast.

Kontrolliks arvutame sisendkiruse mooduli maksimaalväärtuse, mis võis ekslikult olla eelmise iteratsiooni lõpus saanud väärtuse > 1. Siis muutuksid paljud tulemused kompleksarvudeks. Sellise võimalusega allpool ei arvestata. Sellel juhul tuleb eelmist tsükli parandada.

$$va_{i,k} := \sqrt{(vr_{i,k})^2 + (v\theta_{i,k})^2 + (v\varphi_{i,k})^2} \quad vm := \max(va) \quad vm = 0.999999997248628$$

600.	$3.6461799397 \times 10^{36}$	608.	$2.5437145079 \times 10^{36}$	616.	$2.5599577664 \times 10^{36}$
601.	$3.5920577738 \times 10^{36}$	609.	$2.5362034502 \times 10^{36}$	617.	$2.5700679535 \times 10^{36}$
602.	$2.2690874341 \times 10^{36}$	610.	$2.5427305577 \times 10^{36}$	618.	$2.5779271653 \times 10^{36}$
603.	$2.3474367264 \times 10^{36}$	611.	$2.5450072947 \times 10^{36}$	619.	$2.5833158262 \times 10^{36}$
604.	$2.4317884353 \times 10^{36}$	612.	$2.5401018094 \times 10^{36}$	620.	$2.5868275524 \times 10^{36}$
605.	$2.4995501757 \times 10^{36}$	613.	$2.5338299975 \times 10^{36}$	621.	$2.5882151703 \times 10^{36}$
606.	$2.5476236039 \times 10^{36}$	614.	$2.5372939424 \times 10^{36}$	622.	$2.5693511622 \times 10^{36}$
607.	$2.5607247975 \times 10^{36}$	615.	$2.5479557107 \times 10^{36}$		

Elektriväljatugevuse komponentide E_r ja E_θ arvutusprogramm on ($E_\varphi = 0$ valitud sümmeetria tõttu):

```

Se(A,B,ta) :=
  for k ∈ 0..km
    | si_k ← sin(θ1_k)
    | co_k ← cos(θ1_k)
  for i ∈ 0..im
    for k ∈ 0..km
      for l ∈ 0..im
        for κ ∈ 0..km
          | α0l ← (r_l - r_l_i · co_κ · co_k) · (A_i,k)_{l,κ}
          | er_{l,κ} ← α0l - r_l_i · si_κ · si_k · (B_i,k)_{l,κ}
          | α1l ← si_κ · co_k · (A_i,k)_{l,κ}
          | α1 ← α1l - co_κ · si_k · (B_i,k)_{l,κ}
          | eθ_{l,κ} ← α1 · r_l_i
          a0_{i,k} ← er
          a1_{i,k} ← eθ
        for l ∈ 0..im
          for κ ∈ 0..km
            for i ∈ 0..im
              for k ∈ 0..km - 1
                | b01_{i,k} ← ta_{i,k} · si_k · (a0_{i,k})_{l,κ}

```

$$\begin{aligned}
b0_{i,k} &\leftarrow b01_{i,k} + \tau a_{i,k+1} \cdot si_{k+1} \cdot (a0_{i,k+1})_{i,k} \\
b11_{i,k} &\leftarrow \tau a_{i,k} \cdot si_k \cdot (a1_{i,k})_{i,k} \\
b1_{i,k} &\leftarrow b11_{i,k} + \tau a_{i,k+1} \cdot si_{k+1} \cdot (a1_{i,k+1})_{i,k} \\
B0_i &\leftarrow \sum_{k=0}^{km-1} b0_{i,k} \\
B1_i &\leftarrow \sum_{k=0}^{km-1} b1_{i,k} \\
a3 &\leftarrow \sum_{i=0}^{im-1} [(r1_i)^2 \cdot B0_i + (r1_{i+1})^2 \cdot B0_{i+1}] \\
a4 &\leftarrow \sum_{i=0}^{im-1} [(r1_i)^2 \cdot B1_i + (r1_{i+1})^2 \cdot B1_{i+1}] \\
Er_{i,k} &\leftarrow a3 \\
E\theta_{i,k} &\leftarrow a4 \\
\Delta V &\leftarrow \frac{1}{4} \cdot \Delta r1 \cdot \Delta \theta 1 \\
v\ddot{a}_0 &\leftarrow Er \cdot \Delta V \\
v\ddot{a}_1 &\leftarrow E\theta \cdot \Delta V \\
v\ddot{a} &
\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta \phi 1}{2}$$

juba arvestati A ja B programmis.

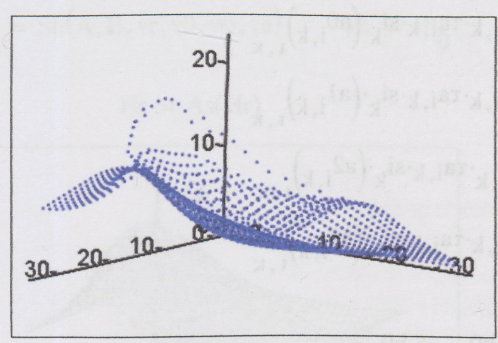
$$se := Se(A, B, \tau a)$$

$$Er := se_0$$

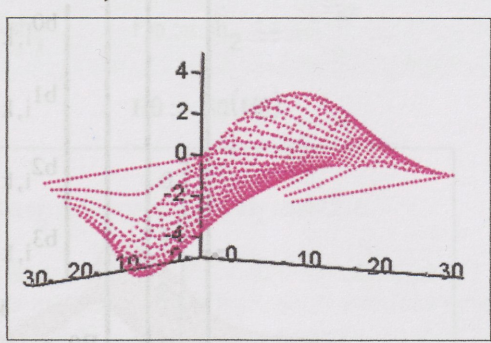
$$Er := S\ddot{u}(Er)$$

$$E\theta := se_1$$

$$E\theta := As(E\theta)$$



Er



Eθ

Järgnevalt arvutame magnetväljatugevuste komponendid Hr, Hθ ja Hφ.

$$Sh(A, B, vr, v\theta, v\phi, \tau a) := \begin{cases} \text{for } k \in 0..km \\ si_k \leftarrow \sin(\theta 1_k) \\ co_k \leftarrow \cos(\theta 1_k) \end{cases}$$

for $i \in 0..im$

for $k \in 0..km$

for $l \in 0..im$

for $\kappa \in 0..km$

$$\alpha_{01} \leftarrow si_{\kappa} \cdot co_{\kappa} \cdot (A_{i,k})_{l,\kappa}$$

$$\alpha_0 \leftarrow \alpha_{01} - co_{\kappa} \cdot si_{\kappa} \cdot (B_{i,k})_{l,\kappa}$$

$$\alpha_{11} \leftarrow (r_l - r_{l,i} \cdot co_{\kappa} \cdot co_{\kappa}) \cdot (A_{i,k})_{l,\kappa}$$

$$\alpha_1 \leftarrow \alpha_{11} - r_{l,i} \cdot si_{\kappa} \cdot si_{\kappa} \cdot (B_{i,k})_{l,\kappa}$$

$$hr_{l,\kappa} \leftarrow r_{l,i} \cdot \alpha_0$$

$$h\theta_{l,\kappa} \leftarrow \alpha_1$$

$$h\varphi_{1,l,\kappa} \leftarrow r_{l,i} \cdot \alpha_0$$

$$h\varphi_{2,l,\kappa} \leftarrow \alpha_1$$

$$a_{0,i,k} \leftarrow hr_{l,\kappa}$$

$$a_{1,i,k} \leftarrow h\theta_{l,\kappa}$$

$$a_{2,i,k} \leftarrow h\varphi_{1,l,\kappa}$$

$$a_{3,i,k} \leftarrow h\varphi_{2,l,\kappa}$$

for $l \in 0..im$

for $\kappa \in 0..km$

for $i \in 0..im$

for $k \in 0..km$

$$b_{0,i,k} \leftarrow v\varphi_{i,k} \cdot \tau a_{i,k} \cdot si_{\kappa} \cdot (a_{0,i,k})_{l,\kappa}$$

$$b_{1,i,k} \leftarrow v\varphi_{i,k} \cdot \tau a_{i,k} \cdot si_{\kappa} \cdot (a_{1,i,k})_{l,\kappa}$$

$$b_{2,i,k} \leftarrow v r_{i,k} \cdot \tau a_{i,k} \cdot si_{\kappa} \cdot (a_{2,i,k})_{l,\kappa}$$

$$b_{3,i,k} \leftarrow v\theta_{i,k} \cdot \tau a_{i,k} \cdot si_{\kappa} \cdot (a_{3,i,k})_{l,\kappa}$$

$$B_{0,i} \leftarrow \sum_{k=0}^{km-1} (b_{0,i,k} + b_{0,i,k+1})$$

$$B_{1,i} \leftarrow \sum_{k=0}^{km-1} (b_{1,i,k} + b_{1,i,k+1})$$

$$B_{2,i} \leftarrow \sum_{k=0}^{km-1} (b_{2,i,k} + b_{2,i,k+1})$$

$$B3_i \leftarrow \sum_{k=0}^{km-1} (b3_{i,k} + b3_{i,k+1})$$

$$a4 \leftarrow \sum_{i=0}^{im-1} [(r1_i)^2 \cdot B0_i + (r1_{i+1})^2 \cdot B0_{i+1}]$$

$$a5 \leftarrow \sum_{i=0}^{im-1} [(r1_i)^2 \cdot B1_i + (r1_{i+1})^2 \cdot B1_{i+1}]$$

$$a6 \leftarrow \sum_{i=0}^{im-1} [(r1_i)^2 \cdot B2_i + (r1_{i+1})^2 \cdot B2_{i+1}]$$

$$a7 \leftarrow \sum_{i=0}^{im-1} [(r1_i)^2 \cdot B3_i + (r1_{i+1})^2 \cdot B3_{i+1}]$$

$$Hr_{i,\kappa} \leftarrow a4$$

$$H\theta_{i,\kappa} \leftarrow a5$$

$$H\phi_{i,\kappa} \leftarrow a6 - a7$$

$$\Delta V \leftarrow \frac{1}{4} \cdot \Delta r1 \cdot \Delta \theta1$$

$$v\ddot{a}_0 \leftarrow Hr \cdot \Delta V$$

$$v\ddot{a}_1 \leftarrow H\theta \cdot \Delta V$$

$$v\ddot{a}_2 \leftarrow H\phi \cdot \Delta V$$

v\ddot{a}

$$sh := Sh(A, B, vr, v\theta, v\phi, \tau a)$$

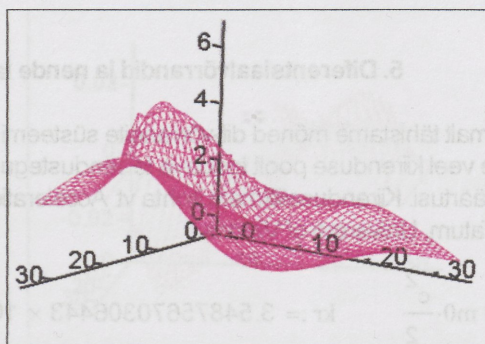
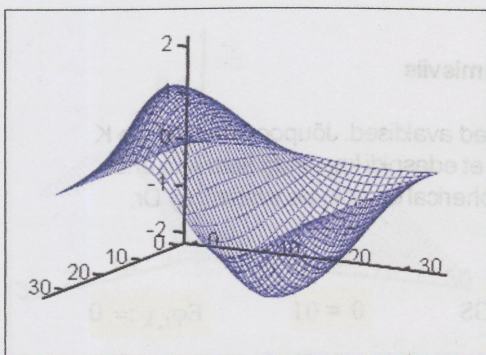
$$Hr := sh_0$$

$$H\theta := sh_1$$

$$H\phi := sh_2$$

$$Hr := As(Hr)$$

$$H\theta := S\ddot{u}(H\theta)$$



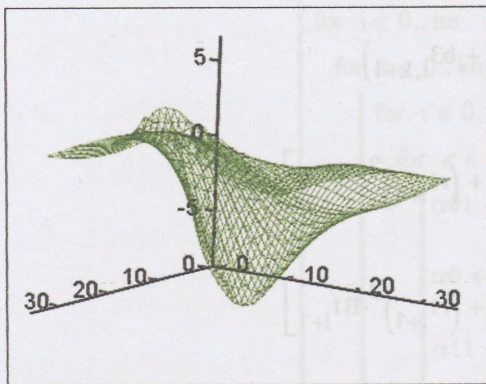
Hr

Hθ

$$H\phi := S\ddot{u}(H\phi)$$

$$A_j := A\tau \cdot 10^{-13}$$

$$A_j = 2.569351116223303 \times 10^{23}$$



Näidatud kordaja A_j tuleb integreeritud väärtustele juurde kirjutada, et saada $E_r, E_\theta, H_r, H_\theta$ ja H_ϕ väärtusi CGS süsteemis. A_r on jaotuse r_a normeerimistegur ja 10^{-13} teisendab angströmites arvatud integraali aluse avaldise cm-tekst (arvestades ka, et angströmites esitatud ruumimõõtmeid on 10^5 korda suurendatud). A_j on viidud allpool üldkordajasse K .

Kiiruste ja jaotusfunktsiooni arvumassiivide indeksid on:

i ja k , arvatud väljatugevuste indeksid aga

i ja k Väärtusvahemikud 0..35 on samad,

ainus erinevus on koordinaatide r_{1_i} ja r_i väärtus-

H_ϕ

tes poole sammu suuruses nihkes: $\frac{\Delta r_1}{2} = 0.08$ $r_i = r_{1_i} + r_0$ $r_0 = 0.08$

Teise indeksite paari asemel võib ka kautada esimesi aga tähise r asemel r_1 mitte.

Tuleb arvestada, et väljatugevused arvutati r punktides. Kogu järgnev arvutus toimub aga punktides r_1 . Seetõttu on tarvis teha väljatugevustes ümberarvutus reaalsele vaatevälja koordinaatidele r_1 . Näiteks r_0 ja r_1 väärtuste keskmine tuleb kanda r_{1_1} kohale jne. Selle tulemuseks jääb r_{1_0} tühjaks, mille täidame saadud r_{1_1}, r_{1_2} ja r_{1_3} väärtuste abil parabolse ekstrapoolimisega. Seda teeb järgmine programm (V_a on arvatud väljatugevus, V - paikanihutatu). Programmi tööle li sanduvad mõningad parandused parabolse ekstrapoolimise tööle.

$Ni(V_a) := \begin{cases} \text{for } k \in 0..35 \\ \text{for } i \in 0..34 \\ V_{i+1,k} \leftarrow \frac{1}{2} \cdot (V_{i,k} + V_{i+1,k}) \\ V_{0,k} \leftarrow 3 \cdot (V_{1,k} - V_{2,k}) + V_{3,k} \\ V \end{cases}$	$\begin{aligned} E_r &:= Ni(E_r) & E_\theta &:= Ni(E_\theta) \\ H_r &:= Ni(H_r) & H_{r_{0,k}} &:= \frac{1}{2} \cdot H_{r_{1,k}} \\ H_\theta &:= Ni(H_\theta) & H_{\theta_{0,k}} &:= \frac{1}{2} \cdot H_{\theta_{1,k}} \\ H_\phi &:= Ni(H_\phi) \end{aligned}$
--	--

Edasise arvutuse mugavuse mõttes säilitame seal needsamad reaalsest 10^5 korda suuremaid ruumimõõtmeid ja teeme "tagasiarvutuse" 10^{-13} alles dif-võrrandsüsteemi ja suuruste arvutusprogrammi sees.

5. Diferentsiaalvõrrandid ja nende lahendamisviis

Esmalt tähistame mõned dif-võrrandite süsteemi kuuluvad avaldised. Jõupooole kordajale K lisame veel kiirenduse poolt toodava teisendusteguri 10^{13} , et edaspidi kasutada seal ikka endisi r_1 väärtusi. Kiirenduselikkmete kohta vt Acceleration in spherical coordinate system, by Dr. J. B. Tatum, University of Victoria.

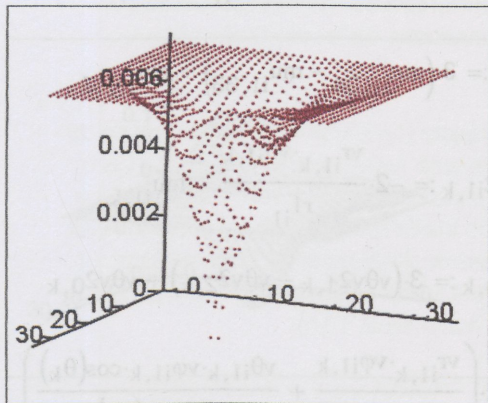
$$k_r = m_0 \cdot \frac{c^2}{e} \quad k_r := 3.54875670306443 \times 10^{12} \text{ CGS} \quad \theta = \theta_1 \quad E_{\phi_{i,k}} := 0$$

$$K_{i,k} := \frac{A_j \cdot 10^{-13}}{k_r} \cdot \sqrt{1 - (v_{r_{i,k}})^2 - (v_{\theta_{i,k}})^2 - (v_{\phi_{i,k}})^2} \quad v_{E_{i,k}} := v_{r_{i,k}} \cdot E_{r_{i,k}} + v_{\theta_{i,k}} \cdot E_{\theta_{i,k}}$$

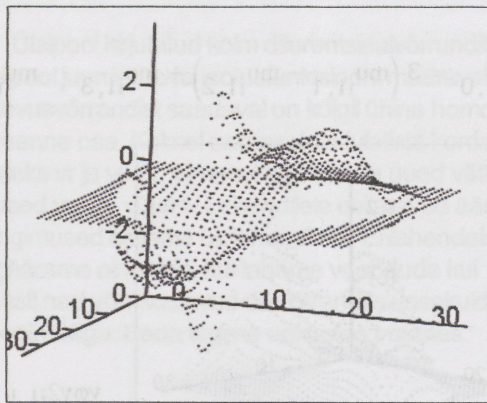
$$v_r \cdot \frac{d}{dr} v_{ru} + \frac{v_\theta}{r} \cdot \frac{d}{d\theta} v_{ru} = K \cdot (E_r - v_r \cdot v_E + v_\theta \cdot H_\varphi - v_\varphi \cdot H_\theta) + \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r}$$

$$v_r \cdot \frac{d}{dr} v_{\theta u} + \frac{v_\theta}{r} \cdot \frac{d}{d\theta} v_{\theta u} = K \cdot (E_\theta - v_\theta \cdot v_E + v_\varphi \cdot H_r - v_r \cdot H_\varphi) - 2 \cdot \frac{v_r \cdot v_\theta}{r} + \frac{v_\varphi^2 \cdot \cos(\theta)}{r \cdot \sin(\theta)}$$

$$v_r \cdot \frac{d}{dr} v_{\varphi u} + \frac{v_\theta}{r} \cdot \frac{d}{d\theta} v_{\varphi u} = K \cdot (-v_\varphi \cdot v_E + v_r \cdot H_\theta - v_\theta \cdot H_r) - 2 \cdot \left(\frac{v_r \cdot v_\varphi}{r} + \frac{v_\theta \cdot v_\varphi \cdot \cos(\theta)}{r \cdot \sin(\theta)} \right)$$



K



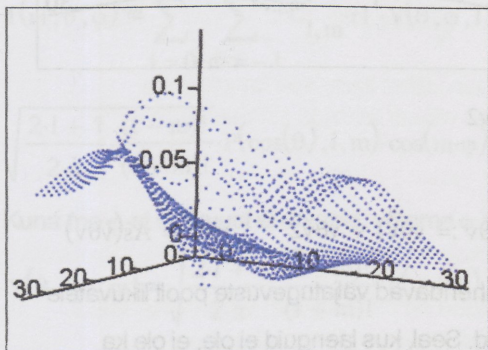
vE

Arvutame vabad liikmed sisendkiiruste väärtusi kasutades. Esmalt väljatugevuste osad:

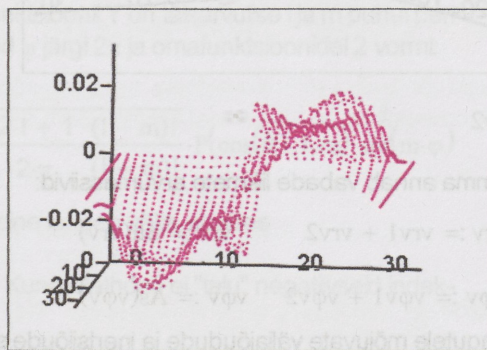
$$v_r v_{1,i,k} := K_{i,k} \cdot (E_{r,i,k} - v_{r,i,k} \cdot v_{E,i,k} + v_{\theta,i,k} \cdot H_{\varphi,i,k} - v_{\varphi,i,k} \cdot H_{\theta,i,k})$$

$$v_\theta v_{1,i,k} := K_{i,k} \cdot (E_{\theta,i,k} - v_{\theta,i,k} \cdot v_{E,i,k} + v_{\varphi,i,k} \cdot H_{r,i,k} - v_{r,i,k} \cdot H_{\varphi,i,k})$$

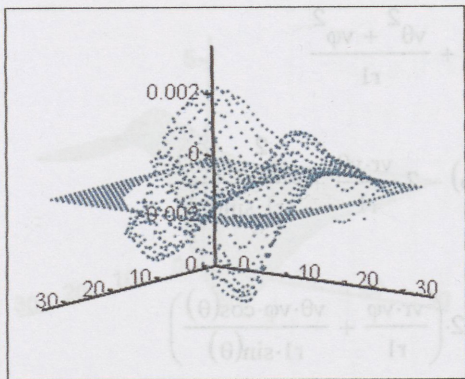
$$v_\varphi v_{1,i,k} := K_{i,k} \cdot (-v_{\varphi,i,k} \cdot v_{E,i,k} + v_{r,i,k} \cdot H_{\theta,i,k} - v_{\theta,i,k} \cdot H_{r,i,k})$$



$v_r v_1$



$v_\theta v_1$



$v\varphi v1$

$$\mu_{i1,0} := 3 \cdot (\mu_{i1,1} - \mu_{i1,2}) + \mu_{i1,3}$$

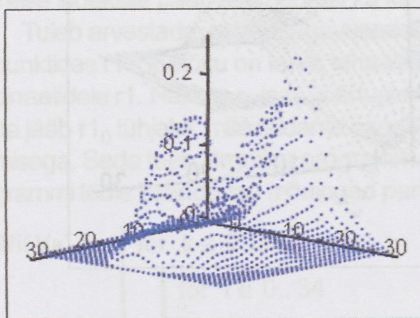
Seejärel inertsjõududele vastavad liikmed.
Inertsjõudude avaldistes tuleb singulaarsusi vältida ja tulemusi sümmetreerida.

$$i1 := 1..35 \quad vrv2_{i1,k} := \frac{(v\theta_{i1,k})^2 + (v\varphi_{i1,k})^2}{r1_{i1}}$$

$$vrv2_{0,k} := 3 \cdot (vrv2_{1,k} - vrv2_{2,k}) + vrv2_{3,k}$$

$$k1 := 1..34 \quad \mu_{i1,k1} := \frac{(v\varphi_{i1,k1})^2 \cdot \cos(\theta_{k1})}{r1_{i1} \cdot \sin(\theta_{k1})}$$

$$\mu_{i1,35} := 3 \cdot (\mu_{i1,34} - \mu_{i1,33}) + \mu_{i1,32}$$



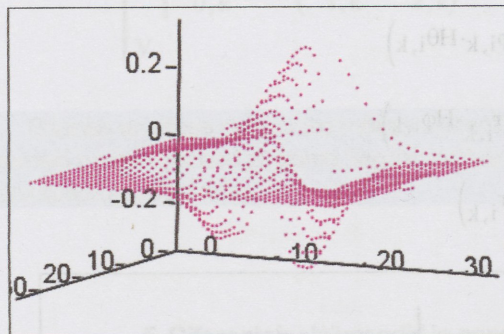
$vrv2$

$$v\theta v2_{i1,k} := -2 \cdot \frac{v r_{i1,k} \cdot v\theta_{i1,k}}{r1_{i1}} + \mu_{i1,k}$$

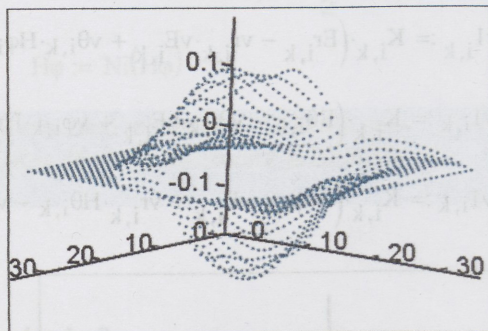
$$v\theta v2_{0,k} := 3 \cdot (v\theta v2_{1,k} - v\theta v2_{2,k}) + v\theta v2_{0,k}$$

$$v\varphi v2_{i1,k} := -2 \cdot \left(\frac{v r_{i1,k} \cdot v\varphi_{i1,k}}{r1_{i1}} + \frac{v\theta_{i1,k} \cdot v\varphi_{i1,k} \cdot \cos(\theta_k)}{r1_{i1} \cdot \sin(\theta_k)} \right)$$

$$v\varphi v2_{0,k} := 3 \cdot (v\varphi v2_{1,k} - v\varphi v2_{2,k}) + v\varphi v2_{3,k}$$



$v\theta v2$



$v\varphi v2$

Summa annab vabade liikmete arvumassiivid:

$$vrv := vrv1 + vrv2 \quad vrv := \text{Sü}(vrv)$$

$$v\theta v := v\theta v1 + v\theta v2 \quad v\theta v := \text{As}(v\theta v)$$

$$v\varphi v := v\varphi v1 + v\varphi v2 \quad v\varphi v := \text{As}(v\varphi v)$$

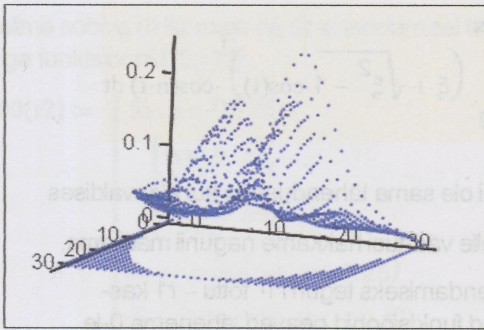
Need tähendavad väljatugevuste poolt liikuvatele

laengutele mõjuvate väljajõudude ja inertsjõude summasid. Seal, kus laenguid ei ole, ei ole ka jõudusid ehk nad pavad olema nullised:

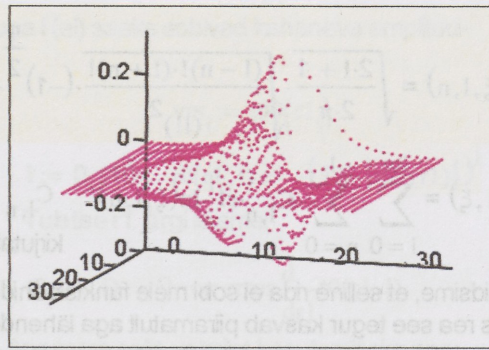
$$vrv_{i,k} := vrv_{i,k} \cdot O_{i,k}$$

$$v\theta v_{i,k} := v\theta v_{i,k} \cdot O_{i,k}$$

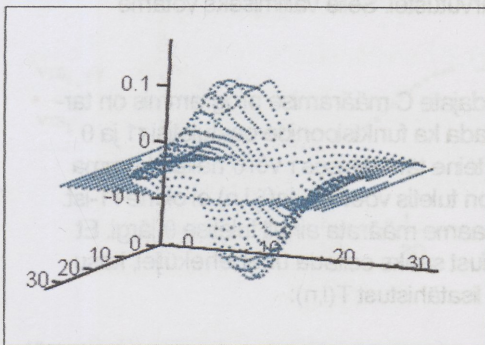
$$v\varphi v_{i,k} := v\varphi v_{i,k} \cdot O_{i,k}$$



vrv



vθv



vθv

Ülalpool kirjutatud kolm diferentsiaalvõrrandit ja allpool juurdetuleva jaotusfunktsiooni määraval pidevusvõrrandist saadaval on kõigil ühine homogeenne osa. Kolmel esimesel on tuletiste kordajateks v_r ja v_θ/r_1 , viimasel aga nende uued väärtused v_{ru} ja $v_{\theta u}/r_1$. Lahenditele esitatavad ääretingimused esitame üldlahenditele. Eri lahendeid määrame ainult siis, kui tahame veenduda kui hästi nad võrdsustavad dif-võrrandite vasakuid pooli nulliga. Seda tegime eelmistes trükistes.

Otsitavad kiirused ja jaotusfunktsiooni arendame kahemõõtmelisse ritta. Selles IV osas koosnevad need sfäärilistest harmoonilistest funktsioonidest (vt G.A.Korn, T.M. Korn lk 324).

$$\xi = \cos(\theta) \quad P(\xi, l, m) = (-1)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{(l+m)!}{l! \cdot \pi} \cdot \int_0^\pi \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \cdot \cos(t) \right)^l \cdot \cos(m \cdot t) \, dt \quad \text{Teine argu-}$$

ment (el) ja kolmas m on täisatvud. Reaksarenduse üldvale on (lõppmatu rea asemel kasutame muidugi lõplikku, l m määrab kasutatava rea pikkuse):

$$f(r_1, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l C_{l,m} \cdot r_1^l \cdot Y(\theta, \varphi, l, m) \quad \text{Funktsioonil } Y \text{ on täisarvulise } l \text{ ja } m \text{ puhul periood } \varphi \text{ järgi } 2\pi \text{ ja omafunktsioonidel 2 vormi:}$$

$$\sqrt{\frac{2 \cdot l + 1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \cdot P(\cos(\theta), l, m) \cdot \cos(m \cdot \varphi) \quad \sqrt{\frac{2 \cdot l + 1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \cdot P(\cos(\theta), l, m) \cdot \sin(m \cdot \varphi)$$

Kuna me φ -st sõltuvust ei arvesta, võtame $\varphi = 0$, siis teine langeb välja, saades

$$Y(\theta, 0, l, m) = \sqrt{\frac{2 \cdot l + 1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \cdot P(\cos(\theta), l, m) \quad \text{Kuna Mathcad ei "talu" negatiivseid indek-$$

seid, peame reaksarendusest need kaotama. Kogu teisenduse esitamine siin võtaks palju ruumi. Näitame lõpptulemuse.

$$\ln(\xi, l, n) = \sqrt{\frac{2 \cdot l + 1}{2 \cdot \pi}} \cdot \sqrt{\frac{(l-n)! \cdot (l+n)!}{(l!)^2}} \cdot (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \cdot \cos(t) \right)^l \cdot \cos(n \cdot t) dt$$

$$f(r_1, \xi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^l C_{l,n} \cdot r_1^l \cdot \ln(\xi, l, n) \quad C_{l,n} \text{ siin ei ole sama tähendusega kui algavaldises kirjutatu. Selle väärtusi hakkame nagunii määrama.}$$

Leidsime, et selline rida ei sobi meie funktsioonide lähendamiseks teguri r_1^l tõttu – r_1 kasvades rea see tegur kasvab piiramatult aga lähendatavad funktsioonid peavad lähenema 0-le jõudmisel laengusüsteemi piirile. Seetõttu modifitseerime rea seda tegurit sättides selle lähendatava funktsiooni järgi. Tähistame selle $t(r_1, l)$. Niisiis ei saa ühte rida kasutada kõigil juhtudel. Teiseks, teguris $\ln(\xi, l, n)$ seisva integraali ligikaudsel arvutamisel tekivad mõningal juhul üliväikesed imaginaarosad, mis tekitavad probleeme järgnevatel arvutustel. Selle vältimiseks võtame tegurist reaalosa. Niisiis kasutatav rida on:

$$f(r_1, \xi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^l C_{l,n} \cdot t(r_1, l) \cdot \operatorname{Re}(\ln(\xi, l, n))$$

Kordajate C määramise programmis on tarvis teada ka funktsioonide osatuletisi r_1 ja θ järgi (teine täht tähises r või θ näitab kumma järgi on tuletis võetud), $\ln(\xi, l, n)$ ei olene r_1 -ist. Siin saame määrata ainult tuletise θ järgi. Et tulemust saaks esitada ühel leheküljel, kasutame lisatähistust $T(l, n)$:

$$T(l, n) = \frac{-1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot l + 1}{2 \cdot \pi}} \cdot \sqrt{\frac{(l-n)! \cdot (l+n)!}{(l!)^2}} \cdot (-1)^{\frac{n}{2}}$$

$$\ln\theta(\xi, l, n) = T(l, n) \cdot \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \xi^2} \cdot \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \cdot \cos(t) \right)^{l-1} \cdot \left(1 + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot \cos(t) \right) \cdot \cos(n \cdot t) dt$$

$$f\theta(r_1, \xi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^l C_{l,n} \cdot t(r_1, l) \cdot \operatorname{Re}(\ln\theta(\xi, l, n))$$

Et vältida rea kordajate määramise lineaarvõrrandite süsteemis lineaarselt üksteisest sõltuvaid võrrandeid, saab kasutada ainult poole vaatevälja üht poolt. Kasutame $z < 0$

poolt ehk $k = 0..17$, mida tähistasime juba ülevalpool ka $= 0..17$. Teise poole võib vajadusel saada sümmeetriaomadusi kasutades.

$$\theta_k := \frac{\pi}{35} \cdot k \quad \theta_{17} = 1.52591643174361 \quad \text{ei ole } \pi/2 \quad \text{puudu jääb } \frac{\pi}{2} - \theta_{17} = 0.0448799$$

st ükski võrrand ei sattu ekvaatorile, mis oleks sümmetriaküsimustes iseenese koopia ja ka trigonomeetrilistel funktsioonidel erilised väärtused (0). Need võivad tekitada singulaarsusi.

6. Kõigepealt lahendame vru võrrandi

Võrrand on: $v_r \cdot \frac{d}{dr_1} v_{ru} + \frac{v\theta}{r_1} \cdot \frac{d}{d\theta} v_{ru} = v_{rv}$ (1) Tuletised on osatuletised. vru määramiseks asendame selle reaksarendusega:

$v_{ru} = \ddot{a}r \cdot f(r_1, \theta)$ (2) Valime kõigepealt teguri $t(r_1, l)$. Selle määrame sisendkiiruse algse

väärtuse v_{ra} veeru 17. järgi, mis ei olene nurgakoordinaadist θ . Silume veergu loess-interp operaatoritega. See võimaldab veerumassiivi muuta ka pidevaks funktsiooniks $t_0(r_1)$. Sellele

valime sobiva üldkordaja nii, et astendamisel täisarvuga l (el) saaks sobivad kahaneva amplituudiga funktsioonid $t0(r1,l)$:

```
t00(r2) :=
  for i ∈ 0..35
    wxi ← r1i
    wyi ← vrai,17
  bs ← loess(wx, wy, 0.25)
  sf ← interp(bs, wx, wy, r2)
  sf
```

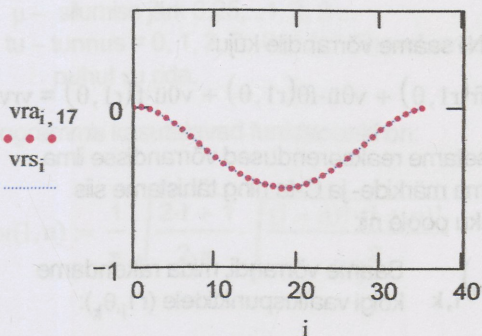
$$vrs_i := t00(r1_i)$$

$$l := 0..10 \quad t0(r1,l) := -(1.6 \cdot |t00(r1)|)^l$$

Tuletise $r1$ järgi leiame:

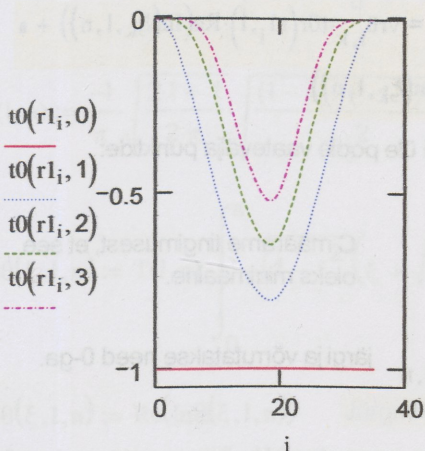
$$t0r(r1,l) := 0 \quad \text{on error} \quad \frac{d}{dr1} t0(r1,l)$$

Arvutame selle valmiks kasutamiseks arvu-massiivina $tr0$ peaprogrammis VU(U), mis oluliselt lühendab arvutusaega programmi töös.



```
tr0 :=
  for l ∈ 0..10
    for i ∈ 1..34
      tri ← t0r(r1i,l)
    tr0 ← 3 · (tr1 - tr2) + tr3
    tr35 ← 3 · (tr34 - tr33) + tr32
    Trl ← tr
  (Trl)0 ← 0
  (Trl)35 ← 0
  Tr
```

Järgmisel joonisel on näidatud 4 esimese l (el) väärtusele vastavad funktsioonid.



vru tuletised $r1$ ja θ järgi on siis:

$$vrur = \text{är} \cdot f(r1, \theta) + \text{är} \cdot fr(r1, \theta)$$

$$vru\theta = \text{är}\theta \cdot f(r1, \theta) + \text{är} \cdot f\theta(r1, \theta) \quad f\theta(r1, \theta) \text{ on ülal toodud ja } fr(r1, \theta) \text{ võrdub}$$

$$fr(r1, \theta) = \sum_{l=0}^{lm} \sum_{n=0}^l C_{l,n} \cdot t0r(r1,l) \cdot \text{Re}(\ln(\xi, l, n))$$

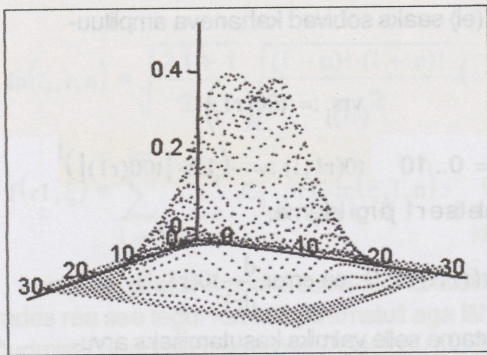
(2) asetamisel võrrandisse (1) saame:

$$vr \cdot \text{är} \cdot fr(r1, \theta) + \frac{v\theta}{r1} \cdot \text{är} \cdot f\theta(r1, \theta) + \left(vr \cdot \text{är}r + \frac{v\theta}{r1} \cdot \text{är}\theta \right) \cdot f(r1, \theta) = vr_v \quad \text{Tähistame kordajad,}$$

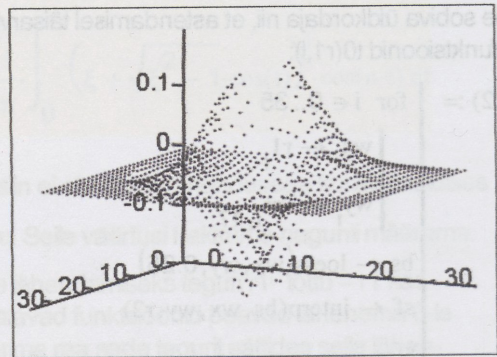
millised võib arvumassiivina kohe arvutada ja tulemused sümmetreerida:

$$vr_{i,k} := vr_{i,k} \cdot \text{är}_{i,k} \quad v\theta_{i,k} := v\theta_{i,k} \cdot \frac{\text{är}_{i,k}}{r1_i} \quad v0_{i,k} := vr_{i,k} \cdot \text{är}_{i,k} + v\theta_{i,k} \cdot \frac{\text{är}\theta_{i,k}}{r1_i}$$

$$vr_{\bar{u}} := S_{\bar{u}}(vr_{\bar{u}}) \quad v\theta_{\bar{u}} := A_{\bar{u}}(v\theta_{\bar{u}})$$

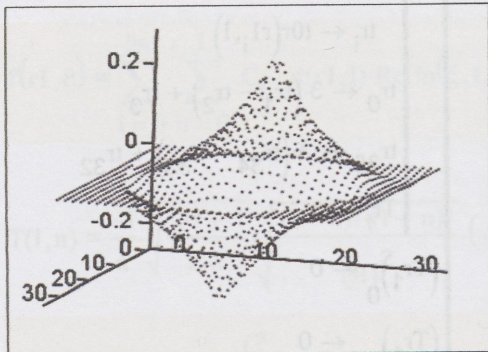


vrü



vθü

$$v\theta\ddot{u} := S\ddot{u}(v\theta\ddot{u})$$



v0ü

Nii saame võrrandile kuju:

$$vr\ddot{u} \cdot fr(r1, \theta) + v\theta\ddot{u} \cdot f\theta(r1, \theta) + v0\ddot{u} \cdot f(r1, \theta) = vrv$$

Asetame reaksarendused võrrandisse ilma summa märkide- ja C-ta ning tähistame siis vasaku poole nii:

$(G_{l,n})_{i,k}$ Saame võrrandi, mida rakendame kõigi vaatluspunktile $(r1_i, \theta_k)$:

$$\sum_{l=0}^{lm} \sum_{n=0}^1 C_{l,n} \cdot (G_{l,n})_{i,k} = vrv_{i,k}$$

$$(G_{l,n})_{i,k} = vr\ddot{u}_{i,k} \cdot t0r(r1_i, l) \cdot \text{Re}(\ln(\xi_k, l, n)) +$$

$$+ v\theta\ddot{u}_{i,k} \cdot t0(r1_i, l) \cdot \text{Re}(\ln\theta(\xi_k, l, n)) + v0\ddot{u}_{i,k} \cdot t0(r1_i, l) \cdot \text{Re}(\ln(\xi_k, l, n))$$

Leiame võrrandi vasaku ja parema poole vahe ruudu summa üle poole vaatevälja punktide:

$$SU(C) = \sum_{i=0}^{35} \sum_{k=0}^{17} \left[\sum_{l=0}^{lm} \sum_{n=0}^1 C_{l,n} \cdot (G_{l,n})_{i,k} - vrv_{i,k} \right]^2$$

C määrame tingimusest, et see oleks minimaalne.

Leitakse osatuletised $\frac{d}{dC} SU(C)$ iga komponendi $C_{l,n}$ järgi ja võrrutatakse need 0-ga.

$$2 \cdot \sum_{i=0}^{35} \sum_{k=0}^{17} \left[\sum_{l=0}^{lm} \sum_{n=0}^1 C_{l,n} \cdot (G_{l,n})_{i,k} - vrv_{i,k} \right] \cdot (G_{ll, n1})_{i,k} = 0$$

Tuletsid leiti $C_{l1, n1}$ järgi, kus l1 ja n1 omavad samu

väärtusi, mis l ja n. Võrrandite arv võrdub tundmatute arvuga **inm**. Näiteks juhul $lm := 9$

$$inm := \sum_{l=0}^{lm} \sum_{n=0}^1 1 \quad inm = 55 \quad in = 0..inm - 1 \quad in1 := 0..inm - 1$$

Süsteemi maatriks on:

$$M_{in, in1} = \sum_{i=0}^{35} \sum_{k=0}^{17} (G_{l,n})_{i,k} \cdot (G_{l1, n1})_{i,k} \quad \text{ja vabad liikmed}$$

$$V_{in1} = \sum_{i=0}^{35} \sum_{k=0}^{17} vrv_{i,k} \cdot (G_{11,n1})_{i,k}$$

Kahjuks ei saa kasutada kõiki 35x35 võljapunkti. Kõik ühel pool ekvatoriaaltasandit ($\theta = \pi/2$) olevates punktides määratud suuruste väärtused on pegelpunktides samad või ainult märgilt erinevad. Kõiki kasutades tu-

leb süsteemi maatriks 0-se determinandiga ja lahendit ei eksisteeri. Seetõttu kasutame ainult väljpoolt $k = 0..17$. Selline muutus on juba sisse kirjutatud viimastesse valemitesse.

Suurem osa vajalikest järgnevatest arvutustehetest on asetatud programmi VU(U). Lisaks üleval mainitutele läheb sisendisse:

ko – kordaja lineaarse võrrandsüsteemii pooltele, et vältida ülisuurt võrrandi maatriksi determinandi väärtust, mis viib arvits ületäitumisele (10^{305}) või väljatrüki 0-le ($<10^{-16}$).

sil – võrrandi vasaku poole arvumassiivi silumise keelamine või lubamine, sil = 0 keelab ja sil = 1 lubab.

μ – silumise järk 0.25,...,1, 2, 3 ...

tu – tunnus = 0, 1, 2, 3: 0 puhul lähendusreaks on vru rida,, 1 puhul $v\theta u$, 2 puhul $v\varphi u$, ja 3 puhul τu rida.

Programmis kasutatavad funktsioonid on:

$$\text{kor}(l, n) := \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot l + 1}{2 \cdot \pi}} \cdot \sqrt{\frac{(l-n)! \cdot (l+n)!}{(l!)^2}}$$

Kuna integraale ei ole mõtet siin arvutada ülitäpselt, tekivad mõningates 0 lähedastes väärtustes üliväikesed imaginaarosad, mis segaks järgnevaid arvutusi, võetakse vajalikes kohtades ainult reaalosad.

$$\text{In}(\xi, l, n) := \text{kor}(l, n) \cdot \text{Re} \left[(-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \int_0^{\pi} \left[\xi + \sqrt{(\xi)^2 - 1 \cdot \cos(t)} \right]^l \cdot \cos(n \cdot t) dt \right]$$

$$T(l, n) := \frac{-1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot l + 1}{2 \cdot \pi}} \cdot \sqrt{\frac{(l-n)! \cdot (l+n)!}{(l!)^2}} \cdot (-1)^{\frac{n}{2}}$$

Tähistus, et järgmine avaldis mahuks sellele leheküljele.

$$\text{In}\theta(\xi, l, n) := T(l, n) \cdot \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \xi^2} \cdot \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1 \cdot \cos(t)} \right)^{l-1} \cdot \left(1 + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot \cos(t) \right) \cdot \cos(n \cdot t) dt$$

$$\text{In}\theta(\xi, l, n) := \text{Re}(\text{In}\theta(\xi, l, n))$$

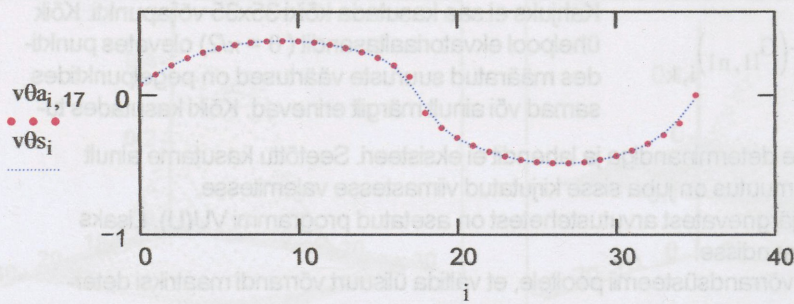
Järgnevad $v\theta u$, $v\varphi u$ ja τu r1-st sõltuvate tegurite määramised.

Selleks kasutame mainitud kiiruskomponentide algväärtuste massiivide maksimumväärtustega

$$t10(r2) := \begin{cases} \text{for } i \in 0..35 \\ \quad | \text{wx}_i \leftarrow r1_i \\ \quad | \text{wy}_i \leftarrow v\theta a_i, 17 \\ \quad | \text{bs} \leftarrow \text{loess}(\text{wx}, \text{wy}, 0.25) \\ \quad | \text{sf} \leftarrow \text{interp}(\text{bs}, \text{wx}, \text{wy}, r2) \\ \quad | \text{sf} \end{cases}$$

veerge, mis ei olene nurgakoordinaadist θ . Silume neid loess-interp operaatoritega. See võimaldab neid muuta ka pidevateks funktsioonideks $t(r1)$. Neile valime sobiva üldkordaja nii, et astendamisel täisarvuga l (el) saaks sobivad kahaneva amplituudiga funktsioonid $t(r1, l)$. Esimesel, $v\theta u$ juhul, teeme seda vasakul näidatud programmiga ($k = 17$):

$$v\theta s_i := t10(r1_i)$$



$$l := 0..10 \quad t1(r1, l) := \text{if}[t10(r1) > 0, (1.75 \cdot t10(r1))^l, -(|1.5 \cdot t10(r1)|)^l]$$

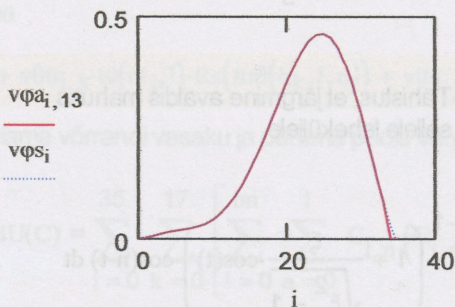
$$t1(r1, l) := \text{if}(r1 = 0 \wedge l = 0, 0, t1(r1, l)) \quad T1_{l,i} := t1(r1_i, l) \quad \text{Tuletis } r1 \text{ järgi on } t1r(r1, l):$$

$$t10r(r1, l) := 0 \text{ on error } \frac{d}{dr1} t1(r1, l) \quad t1r(r1, l) := \text{if}(l = 2 \wedge r1 = r1m, 0, t10r(r1, l))$$

$$T1r(l) := \begin{cases} \text{for } il \in 1..34 \\ Tr_{il} \leftarrow t1r(r1_{il}, l) \\ Tr_0 \leftarrow 3 \cdot (Tr_1 - Tr_2) + Tr_3 \\ Tr_{35} \leftarrow (Tr_{34} - Tr_{33}) + Tr_{32} \\ Tr \end{cases} \quad T1r_l := T1r(l) \quad \text{Analogiliselt } v\varphi \text{ jaoks:}$$

$$v\varphi_s_i := t20(r1_i) \quad t2(r1, l) := (1.8 \cdot t20(r1))^l$$

$$t20(r2) := \begin{cases} \text{for } i \in 0..35 \\ wx_i \leftarrow r1_i \\ wy_i \leftarrow v\varphi_{a_i, 13} \\ bs \leftarrow \text{loess}(wx, wy, 0.25) \\ sf \leftarrow \text{interp}(bs, wx, wy, r2) \\ sf \end{cases}$$



$$T2_{l,i} := t2(r1_i, l)$$

$$t20r(r1) := 0 \text{ on error } \frac{d}{dr1} t20(r1)$$

$$t2r(r1, l) := 1 \cdot (1.4 \cdot t20(r1))^{l-1} \cdot 1.4 \cdot t20r(r1)$$

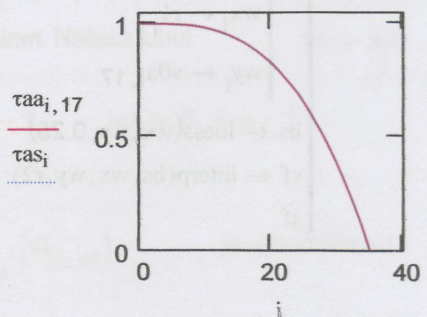
$$T2r(l) := \begin{cases} \text{for } il \in 1..35 \\ Tr_{il} \leftarrow t2r(r1_{il}, l) \\ Tr \end{cases}$$

$$T2r_l := T2r(l)$$

Järgnev on τu rea $r1$ -tegur ja selle tuletis.

$$t30(r2) := \begin{cases} \text{for } i \in 0..35 \\ wx_i \leftarrow r1_i \\ wy_i \leftarrow \tau a_{a_i, 17} \\ bs \leftarrow \text{loess}(wx, wy, 0.25) \\ sf \leftarrow \text{interp}(bs, wx, wy, r2) \\ sf \end{cases} \quad \tau a_s_i := t30(r1_i) \quad t3(r1, l) := (0.9 \cdot t30(r1))^l$$

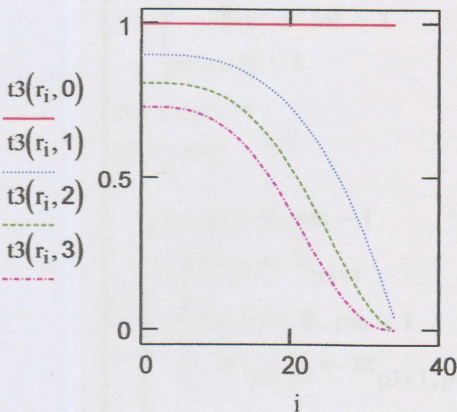
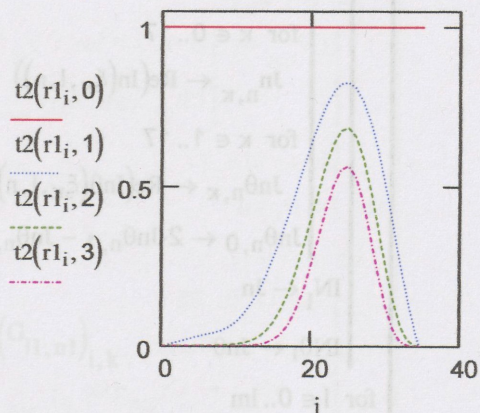
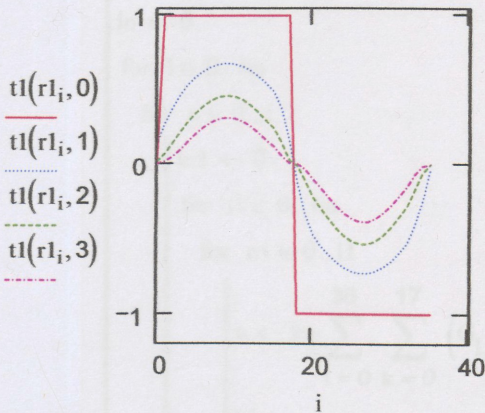
$$T3_{l,i} := t3(r1_i, l) \quad t30r(r1) := 0 \text{ on error } \frac{d}{dr1} t30(r1)$$



$$t3r(r1, l) := 1 \cdot (0.9 \cdot t30(r1))^{l-1} \cdot 0.9 \cdot t30(r1)$$

$$T3r(l) := \begin{cases} \text{for } il \in 1..35 & T3r_1 := T3r(l) \\ Tr_{il} \leftarrow t3r(r1_{il}, l) \\ Tr \end{cases}$$

Kollasega toonitud arvumassiive kasutab peaprogramm **VU(U)**. Näitame siin $v\theta u$, $v\phi u$ ja τu rea $r1$ -tegureid 4 esimese l (el) väärtuse puhul – 0, 1, 2, 3:



Kõik arvutused võrrandite lahendite leidmiseks käesoleval iteratsioonil teeb programm **VU(U)**. Vektorisse U pakitakse kõik selleks vajalikud sisendandmed. Nende kõigi üksikult sisendiargumentide kohale asetamisel muudaks programmi horisontaalsuunas nii laiaks, et see ei mahuks trükileheküljele. Kõik eeltoodud arvutused vähendavad võrrandsüsteemi lahendamise programmi **VU(U)** ühekorse tööaja suurusjärguni 1 sek, muidugi lauarvutil, mis on autori käsutuses.

```

VU(U) :=
  lm ← U0
  r1m ← U1
  vrü ← U2
  vθü ← U3
  v0ü ← U4
  va ← U5
  ko ← U6
  sil ← U7
  μ ← U8
  tu ← U9
  for κ ∈ 0..17
  
```

$$\xi_{\kappa} \leftarrow \cos\left(\frac{\pi}{35} \cdot \kappa\right)$$

$$s_{i_{\kappa}} \leftarrow \sin\left(\frac{\pi}{35} \cdot \kappa\right)$$

for $l \in 0..lm$

for $n \in 0..1$

for $\kappa \in 0..17$

$$J_{n,\kappa} \leftarrow \operatorname{Re}(\ln(\xi_{\kappa}, l, n))$$

for $\kappa \in 1..17$

$$J_{n\theta_{n,\kappa}} \leftarrow \operatorname{Re}(\ln\theta(\xi_{\kappa}, l, n))$$

$$J_{n\theta_{n,0}} \leftarrow 2 \cdot J_{n\theta_{n,1}} - J_{n\theta_{n,1}}$$

$$IN_l \leftarrow J_n$$

$$IN\theta_l \leftarrow J_{n\theta}$$

for $l \in 0..lm$

for $i \in 0..35$

$$r_{1,i} \leftarrow \frac{r_{1m}}{35} \cdot i$$

$$T_{1,i} \leftarrow \begin{cases} t_0(r_{1,i}, 1) & \text{if } tu = 0 \\ T_{1,i} & \text{if } tu = 1 \\ T_{2,i} & \text{if } tu = 2 \\ T_{3,i} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$T_{1,i}$$

$$T_{2,i}$$

$$T_{3,i}$$

$$Tr_{1,i} \leftarrow \begin{cases} (tr_0)_i & \text{if } tu = 0 \\ (T1r)_i & \text{if } tu = 1 \\ (T2r)_i & \text{if } tu = 2 \\ (T3r)_i & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$(T1r)_i$$

$$(T2r)_i$$

$$(T3r)_i$$

for $n \in 0..1$

for $i \in 0..35$

for $\kappa \in 0..17$

$$a_{0,i,\kappa} \leftarrow v_0 \ddot{u}_{i,\kappa} \cdot (IN_l)_{n,\kappa} + v\theta \ddot{u}_{i,\kappa} \cdot (IN\theta_l)_{n,\kappa}$$

$$a_{1,i,\kappa} \leftarrow vr \ddot{u}_{i,\kappa} \cdot Tr_{1,i} \cdot (IN_l)_{n,\kappa} + a_{0,i,\kappa} \cdot T_{1,i}$$

$$G_{1,n} \leftarrow a_1$$

$$inl \leftarrow 0$$

for $ll \in 0..lm$

```

for n1 ∈ 0..l1
  v ← ko · ∑i=035 ∑κ=017 vai,κ · (Gl1,n1)i,κ
  Vin1 ← v
  in1 ← in1 + 1
in ← 0
for l ∈ 0..lm
  for n ∈ 0..l
    in1 ← 0
    for l1 ∈ 0..lm
      for n1 ∈ 0..l1
        a ← ko · ∑i=035 ∑k=017 (Gl,n)i,k · (Gl1,n1)i,k
        Min,in1 ← a
        in1 ← in1 + 1
      in ← in + 1
    pm ← in - 1
    if V0 = 0
      for p3 ∈ 0..pm - 1
        Vp3 ← Vp3+1
        for p4 ∈ 0..pm - 1
          Mp3,p4 ← Mp3+1,p4+1
        pm1 ← pm - 1
      otherwise
        M1 ← M
        V1 ← V
        pm1 ← pm
    D ← |M1|
    for p2 ∈ 0..pm1
      for p1 ∈ 0..pm1
        for p3 ∈ 0..pm1
          bp1,p3 ← Mp1,p3
        for p1 ∈ 0..pm1
          bp1,p2 ← Vp1
        Cp2 ←  $\frac{|b|}{D}$ 

```

for $p_2 \in 0..pm1$ if $V_0 = 0$

$Ch_{p_2} \leftarrow \text{if}(p_2 = 0, 0, C1_{p_2-1})$

$Ch \leftarrow C1$ otherwise

$id \leftarrow 0$

for $l \in 0..lm$

for $n \in 0..1$

$Cv_{l,n} \leftarrow \begin{cases} 0 & \text{if } l = lm \wedge V_0 = 0 \\ Ch_{id} & \text{otherwise} \end{cases}$

$id \leftarrow id + 1$

for $l \in 0..lm$

for $n \in 0..1$

for $i \in 0..35$

for $k \in 0..17$

$vf_{i,k} \leftarrow Cv_{l,n} \cdot (G_{l,n})_{i,k}$

$Vf_{l,n} \leftarrow vf$

for $i \in 0..35$

for $k \in 0..17$

$vs0_{i,k} \leftarrow \sum_{l=0}^{lm} \sum_{n=0}^1 (Vf_{l,n})_{i,k}$

for $i \in 0..35$

if $sil = 1$

for $k \in 0..17$

$f_k \leftarrow vs0_{i,k}$

$\psi_k \leftarrow si_k \cdot r1m$

$vs \leftarrow Sm(f, \psi, \mu, 17)$

for $k \in 0..17$

$vs1_{i,k} \leftarrow vs_k$

$vs1 \leftarrow vs0$ otherwise

for $k \in 0..17$

if $sil = 1$

for $i \in 0..35$

$f_i \leftarrow vs1_{i,k}$

$\xi_i \leftarrow r1_i$

$vs \leftarrow Sm(f, \xi, \mu, 35)$

for $i \in 0..35$

```

| | vs2i,k ← vsi
| vs2 ← vs1 otherwise
for i ∈ 0..35
  for k ∈ 0..17
    vasi,k ← Oi,k · vs2i,k
  ja ← ∑i=035 ∑k=017 Oi,k
  Su ← √ [ 1 / (ja · (ja - 1)) · ∑i=035 ∑k=017 (vasi,k - vai,k)2 ]
  for i ∈ 0..35
    for k ∈ 0..17
      rfi,k ← ∑l=0lm ∑n=01 Cvl,n · Tl,i · (INl)n,k
  vä0 ← Ch
  vä1 ← vas
  vä2 ← Su
  vä3 ← D
  vä4 ← M1
  vä5 ← rf
  vä6 ← pm1
  vä

```

7. Niisiis vru võrrandi üldlahendi leidmine

ko valimisega saavutame võrrandsüsteemi determinandile **Dr** 1.05 lähedase väärtuse. Seda teeme mõne **lm** väärtuse puhul, jäädes selle juurde, mis annab väikseima ruutkeskmise hälbe **Sur** võrrandi poolte vahel, arvatatuna poole välja 36 x 18 punktide väärtustega.

```

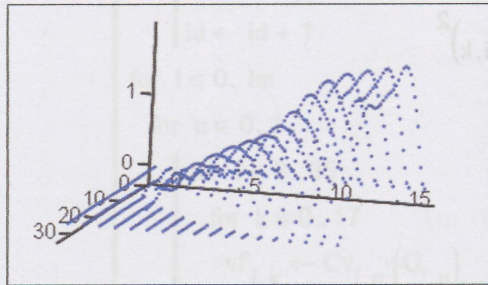
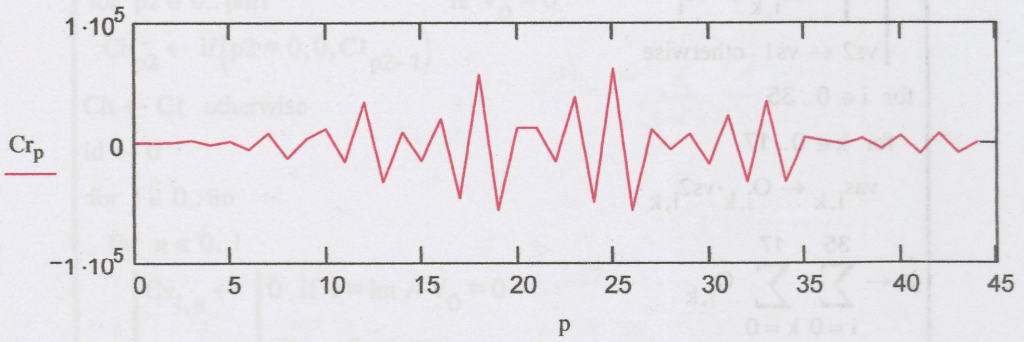
ko := 2.32054 × 105   sil := 1   μ := 0.8   lm := 8   U0 := lm   U1 := rlm   U2 := vru
U3 := vθü   U4 := v0ü   U5 := vrv   U6 := ko   U7 := sil   U8 := μ   U9 := 0
vu := VU(U)   Cr := vu0   vas := vu1   Sur := vu2   Dr := vu3   pm := vu6   pm = 44

```

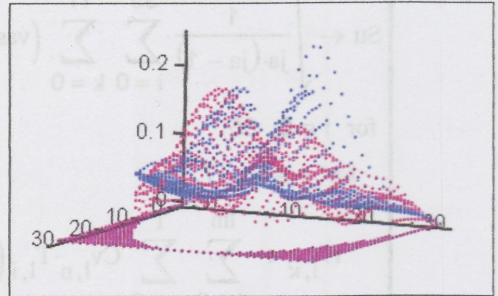
```

Dr = 1.0496453523983   rf := vu5   vrui,ka := äri,ka · rfi,ka   vas1,35-ka := vas1,ka
p := 0..pm

```



vru



vrv, vas

Teine, kahevärvilise joonis, näitab kuivõrd häst programm võrdsustas vru dif-võrrandi pooli. Sinisega on vaba liige, punasega vasak pool.

Parandused ja silumine: vru eeldasime võtta ka = 0 ... 17 osas negatiivsena. Teine, k = 18 .. 35 osa, on siis > 0. Täidame ka selle poole, määrame amplituudi muutuse, võrreldes seda sisendi omaga (μ) ja taastame sisendi amplituudi:

$$\text{vru} := -\text{vru} \quad \text{vru}_{i, 35-\text{ka}} := -\text{vru}_{i, \text{ka}} \quad \mu := \frac{\max(\text{vr})}{\max(\text{vru})} \quad \text{vru} := \text{vru} \cdot \mu \quad \text{Keskmitame}$$

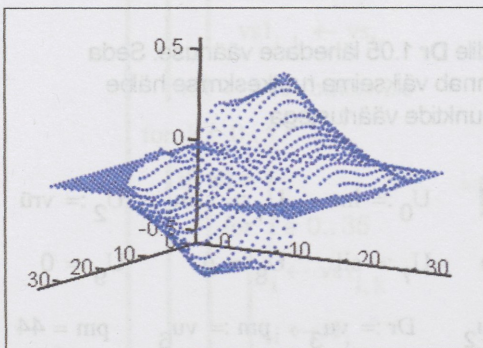
sisendiga: $\text{vru} := 0.5 \cdot (\text{vr} + \text{vru})$ See väldib liialt suurt muutumist, mis võib vial iteratsiooniprotsessi "hajumisele". Tõsi, see muudab ka koondumise aeglasemaks.

Kuna keskmistamisel amplituud muutus, teeme taastuse uuesti.

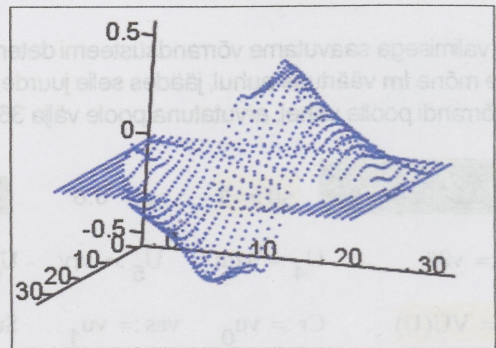
$$\text{vru} := \text{vru} \cdot \frac{\max(\text{vr})}{\max(\text{vru})} \quad \text{vru} := \text{As}(\text{vru}) \quad \text{Välispiiri taha sattunud osa nullistame:}$$

$$\text{vru}_{i, k} := \text{vru}_{i, k} \cdot O_{i, k}$$

Sisendväärtused olid:



vru



vr

Tulemused esitame tabelis, mis näitab nende muutumist iteratsioonide käigus.

$$\text{Sur} = 1.77346782692717 \times 10^{-3}$$

$$\text{pm} = 44 \quad \text{mu} = 0.274 \quad \text{ko} = 2.32054 \times 10^5$$

600:	$2.13597539337838 \times 10^{-3}$	54	0.302	8.2796×10^5
601:	$2.68654705401887 \times 10^{-3}$	44	0.321	1.05047×10^5
602:	$1.88471572098278 \times 10^{-3}$	44	0.274	1.62754×10^5
603:	$1.27231309271812 \times 10^{-3}$	44	0.227	2.40478×10^5
604:	$1.15618745997604 \times 10^{-3}$	44	0.207	3.00656×10^5
605:	$1.1654829496196 \times 10^{-3}$	44	0.206	3.14108×10^5
606:	$1.23148149135581 \times 10^{-3}$	44	0.211	3.11234×10^5
607:	$1.26542659534087 \times 10^{-3}$	44	0.216	3.05947×10^5
608:	$1.31738248100706 \times 10^{-3}$	44	0.219	2.881×10^5
609:	$1.3178124545818 \times 10^{-3}$	54	0.222	1.65967×10^6
610:	$1.42646379545761 \times 10^{-3}$	54	0.252	1.53047×10^6
611:	$1.62836927904023 \times 10^{-3}$	44	0.27	2.63373×10^5
612:	$1.62875541532526 \times 10^{-3}$	44	0.264	2.70513×10^5
613:	$1.67255595847087 \times 10^{-3}$	44	0.268	2.43117×10^5
614:	$1.6468861473836 \times 10^{-3}$	44	0.268	2.4995×10^5
615:	$1.62931531130311 \times 10^{-3}$	44	0.268	2.50985×10^5
616:	$1.62336558928437 \times 10^{-3}$	44	0.268	2.50483×10^5
617:	$1.6127350313495 \times 10^{-3}$	44	0.269	2.50173×10^5
618:	$1.60296764982026 \times 10^{-3}$	44	0.269	2.50006×10^5
619:	$1.61467102414707 \times 10^{-3}$	44	0.269	2.49904×10^5
620:	$1.62223924199945 \times 10^{-3}$	44	0.269	2.4994×10^5
621:	$1.55400630177552 \times 10^{-3}$	54	0.254	1.38019×10^6
622:	$1.77346782692717 \times 10^{-3}$	44	0.274	2.32054×10^5

8. Teisena lahendame v θ u v θ rrandi

Määrame sisendi v θ nulljoone punktide indeksid i θ , silume seda punktirida (saame mitte-täisarvuliste rea is) ja parandame selle järgi allpool saadavat v θ u – arutatud väärtused peavad olema ühel pool 0-joont positiivsed ja teisel negatiivsed.

$$v_{\theta 0}(\mu) := \begin{cases} \text{for } k \in 0..35 \\ \quad \text{for } i \in 0..35 \\ \quad \quad v_{i,k} \leftarrow \text{if}(v_{i,k} > 0, 1, 0) \\ \quad \quad v_{i,k} \leftarrow \text{if}(i = 0, 1, v_{i,k}) \\ \text{for } k \in 0..35 \\ \quad \text{for } i \in 0..34 \end{cases} \begin{pmatrix} 1.15212554829698 \\ 9.19219516047609 \\ 15.3779824500232 \\ 19.7283600560401 \\ 22.0589839293452 \\ 23.5826026941214 \end{pmatrix}$$

```

i0 ← i if v0i,k = 1 ∧ v0i+1,k = 0
      continue otherwise
IOk ← i0
Is ← Sm(IO, z1, μ, 35)
vä0 ← IO
vä1 ← Is
vä

```

$V0 := V\theta(0.25)$ $i0 := V0_0$ $is := V0_1$ $is_k := \text{if}(is_k < 0, 0, is_k)$

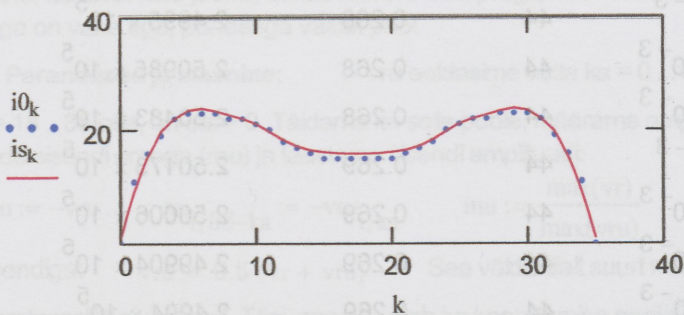
Juhuks, kui rikuti sümmeetriat:

$$is_{ka} := \frac{1}{2} \cdot (is_{35-ka} + is_{ka}) \quad is_{35-ka} := is_{ka}$$

isu :=

Säilitame joone andmed kõrvaltabelis niikaua kui see enam-vähem stabiliseerub. Edaspidi jääme seda kasutama, vältides sellega võimalust, et programm joone edaspidi ära rikub arvutusvigade kuhjumise tõttu.

is := isu



Diferentsiaalvõrrand ja $v\theta$ lähendusvalem on:

$$vr \cdot \frac{d}{dr1} v\theta + \frac{v\theta}{r1} \cdot \frac{d}{d\theta} v\theta = v\theta v \quad v\theta = \ddot{a}\theta \cdot f(r1, \theta)$$

Osatuletised $r1$ ja θ järgi on: $v\theta_{ur} = \ddot{a}\theta \cdot f(r1, \theta) + \ddot{a}\theta \cdot f_r(r1, \theta)$

$v\theta_{u\theta} = \ddot{a}\theta \cdot f(r1, \theta) + \ddot{a}\theta \cdot f_\theta(r1, \theta)$ Vajalikud suurused üldla-

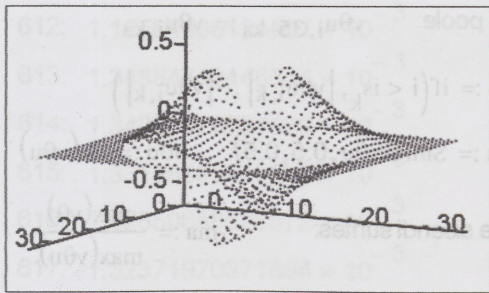
hendi $v\theta$ leidmisprogrammile on:

$$vr \cdot \ddot{a}\theta \cdot f_r(r1, \theta) + \frac{v\theta}{r1} \cdot \ddot{a}\theta \cdot f_\theta(r1, \theta) + \left(vr \cdot \ddot{a}\theta + \frac{v\theta}{r1} \cdot \ddot{a}\theta\theta \right) \cdot f(r1, \theta) = v\theta v \quad vr_{i,k} := vr_{i,k} \cdot \ddot{a}\theta_{i,k}$$

$$i1 := 1..35 \quad v\theta_{i1,k} := v\theta_{i1,k} \cdot \frac{\ddot{a}\theta_{i1,k}}{r1_{i1}} \quad v\theta_{i0,k} := 3 \cdot (v\theta_{i1,k} - v\theta_{i2,k}) + v\theta_{i3,k}$$

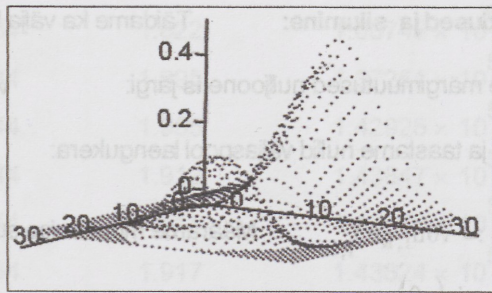
$$vr_{i,k} := As(vr_{i,k}) \quad v\theta_{i,k} := S\ddot{u}(v\theta_{i,k}) \quad \mu_{i1,k} := \frac{\ddot{a}\theta_{i1,k}}{r1_{i1}} \quad i = 0 \text{ koha täidame allpool.}$$

- 23.9387611704238
- 23.4808910356859
- 22.757299581926
- 22.0612388295762
- 21.0612388295763
- 19.6393317232356
- 18.2994294471881
- 17.2404455178429
- 16.5780928936594
- 16.242700418074
- 15.997745099769
- 15.9410160706548
- 15.9410160706548
- 15.997745099769
- 16.242700418074
- 16.5780928936594
- 17.2404455178429
- 18.2994294471881
- 19.6393317232356
- 21.0612388295763
- 22.0612388295762
- 22.757299581926
- 23.4808910356859
- 23.9387611704238
- 23.5826026941214
- 22.0589839293452
- 19.7283600560401
- 15.3779824500232
- 9.19219516047609
- (1.15212554829698)



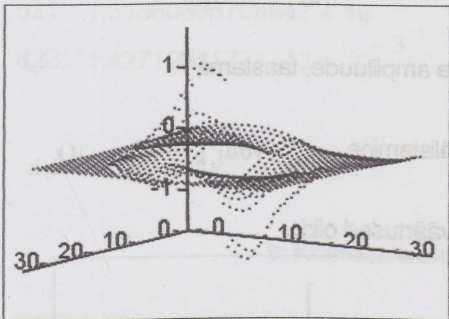
vrü

$$\mu_{0,k} := 3 \cdot (\mu_{1,k} - \mu_{2,k}) + \mu_{3,k}$$



vθü

$$v\theta\ddot{u}_{i,k} := v_{r,i,k} \cdot \ddot{\theta}_{r,i,k} + v\theta_{i,k} \cdot \mu_{i,k}$$



v0ü

ko := 1.28412 × 10⁵ lm := 8 sil := 1 μ := 0.3

U₀ := lm U₁ := rlm U₂ := vrü U₃ := vθü

U₄ := v0ü U₅ := vθv U₆ := ko U₇ := sil

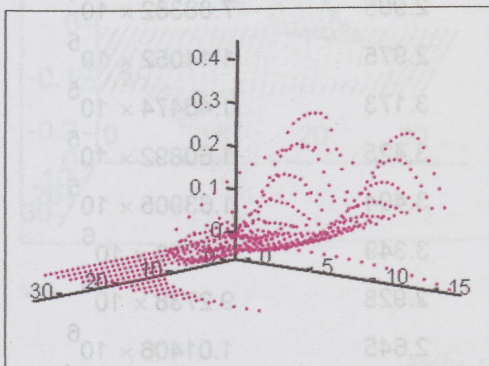
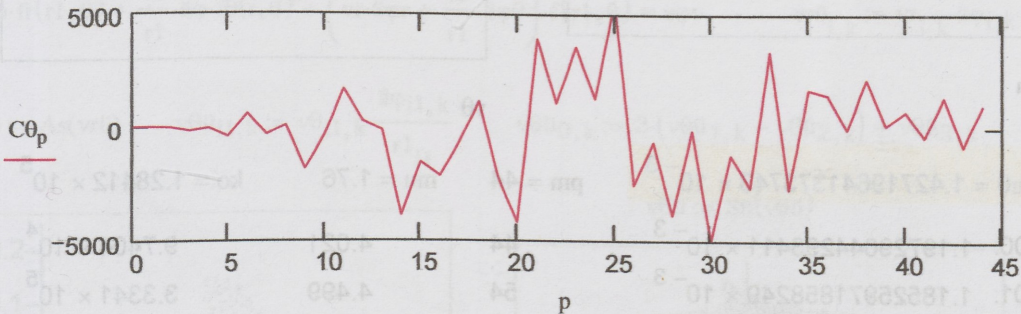
U₈ := μ U₉ := 1 vu := VU(U)

Cθ := vu₀ vas := vu₁ Suθ := vu₂ Dθ := vu₃

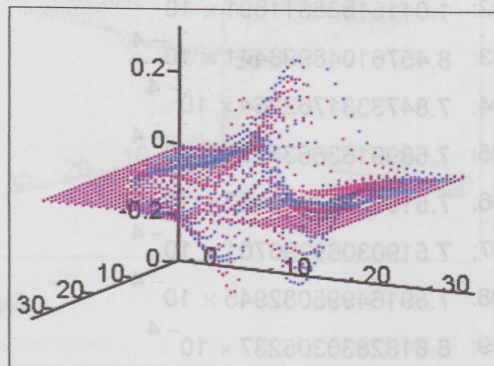
Dθ = 1.04953137579048

rf := vu₅

pm := vu₆ vθu_{i,ka} := äθ_{i,ka} · rf_{i,ka} vas_{i,35-ka} := -vas_{i,ka} pm = 44 p := 0..pm



vθu



vθv, vas

Parandused ja silumine:

Täidame ka välja $k > 17$ poole:

$$v\theta_{i, 35-ka} := v\theta_{i, ka}$$

Teeme märgimuutused nulljoone is järgi:

$$v\theta_{i, k} := \text{if}(i < is_k, |v\theta_{i, k}|, -|v\theta_{i, k}|)$$

Silume ja taastame nullid väljaspool laengukera:

$$v\theta_u := \text{Srv}(v\theta_u, 0.5, 0.5) \quad v\theta_u := \text{Sü}(v\theta_u)$$

$$v\theta_{i, k} := v\theta_{i, k} \cdot O_{i, k}$$

Määrame muutumise suuruse sisendi suhtes:

$$ma := \frac{\max(v\theta)}{\max(v\theta_u)}$$

$$mi := \frac{\min(v\theta)}{\min(v\theta_u)}$$

$$mu := (ma + mi) \cdot 0.5$$

Säilitame ka positiivse ja negatiivse osa amplituudide

omavahelise suhte ja sisendi suuruse ning keskmistame sisendiga.

$$ma := \frac{\max(v\theta)}{\max(v\theta_u)}$$

$$mi := \frac{\min(v\theta)}{\min(v\theta_u)}$$

$$v\theta_{i, k} := \text{if}(v\theta_{i, k} > 0, ma \cdot v\theta_{i, k}, mi \cdot v\theta_{i, k})$$

$$v\theta_u := 0.5 \cdot (v\theta + v\theta_u)$$

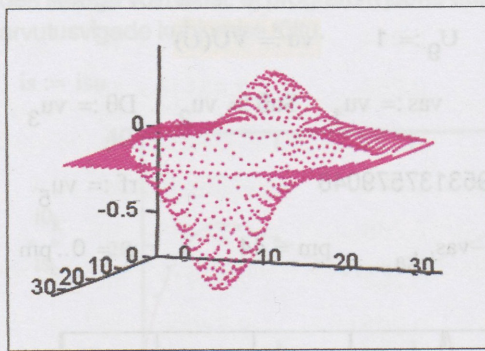
$$v\theta_u := \text{Sü}(v\theta_u)$$

See muudab ka amplituude, taastame :

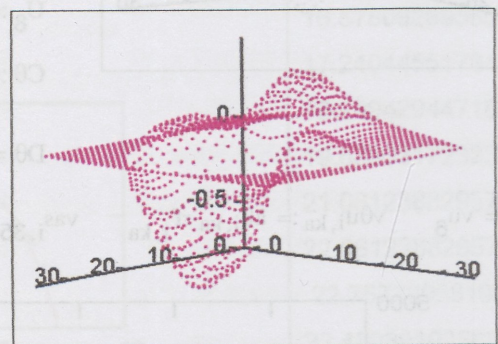
$$v\theta_u := v\theta_u \cdot \frac{\max(v\theta)}{\max(v\theta_u)}$$

Laenguvälises ruumis liikumise välistamine:

$$v\theta_{i, k} := v\theta_{i, k} \cdot O_{i, k}$$



Sisendväärtused olid:



$v\theta_u$

$v\theta$

$$Su\theta = 1.42719641373743 \times 10^{-3}$$

$$pm = 44$$

$$mu = 1.76$$

$$ko = 1.28412 \times 10^5$$

$$600: 1.19729044293411 \times 10^{-3}$$

$$44$$

$$4.021$$

$$9.7404 \times 10^4$$

$$601: 1.18525971858249 \times 10^{-3}$$

$$54$$

$$4.499$$

$$3.3341 \times 10^5$$

$$602: 1.01151835811891 \times 10^{-3}$$

$$44$$

$$2.905$$

$$7.88382 \times 10^4$$

$$603: 8.45761048998441 \times 10^{-4}$$

$$44$$

$$2.975$$

$$1.14052 \times 10^5$$

$$604: 7.8473331762264 \times 10^{-4}$$

$$44$$

$$3.173$$

$$1.46474 \times 10^5$$

$$605: 7.58991636635722 \times 10^{-4}$$

$$44$$

$$3.425$$

$$1.60892 \times 10^5$$

$$606: 7.51053353389152 \times 10^{-4}$$

$$44$$

$$3.404$$

$$1.63905 \times 10^5$$

$$607: 7.51903069296701 \times 10^{-4}$$

$$54$$

$$3.349$$

$$1.0713 \times 10^6$$

$$608: 7.89164995082945 \times 10^{-4}$$

$$54$$

$$2.928$$

$$9.2738 \times 10^5$$

$$609: 8.8182830305237 \times 10^{-4}$$

$$54$$

$$2.645$$

$$1.01406 \times 10^6$$

$$610: 1.07147804386331 \times 10^{-3}$$

$$54$$

$$2.096$$

$$9.74666 \times 10^5$$

$$611: 1.17430249795747 \times 10^{-3}$$

$$54$$

$$1.701$$

$$9.6522 \times 10^5$$

612:	$1.18564338124561 \times 10^{-3}$	54	1.822	1.00749×10^6
613:	$1.34884712446644 \times 10^{-3}$	44	1.895	1.37251×10^5
614:	$1.34252676737689 \times 10^{-3}$	44	1.905	1.42925×10^5
615:	$1.33196555713828 \times 10^{-3}$	44	1.913	1.43847×10^5
616:	$1.32650658526872 \times 10^{-3}$	44	1.918	1.43688×10^5
617:	$1.32371970371894 \times 10^{-3}$	44	1.917	1.43624×10^5
618:	$1.32287450870417 \times 10^{-3}$	44	1.916	1.4361×10^5
619:	$1.32274171032516 \times 10^{-3}$	44	1.915	1.43598×10^5
620:	$1.32842819024172 \times 10^{-3}$	44	1.847	1.43643×10^5
621:	$1.31660663706842 \times 10^{-3}$	54	1.772	9.4412×10^5
622:	$1.42719641373743 \times 10^{-3}$	44	1.76	1.28412×10^5

9. Kolmanda ehk $v_{\varphi u}$ võrrandi lahenduskäik

$$v_r \frac{d}{dr} v_{\varphi u} + \frac{v_{\theta}}{r} \frac{d}{d\theta} v_{\varphi u} = v_{\varphi v}$$

$$v_{\varphi u} = \ddot{\alpha} \varphi \cdot f(r, \theta)$$

$$v_{\varphi ur} = \ddot{\alpha} \varphi_r \cdot f(r, \theta) + \ddot{\alpha} \varphi \cdot f_r(r, \theta)$$

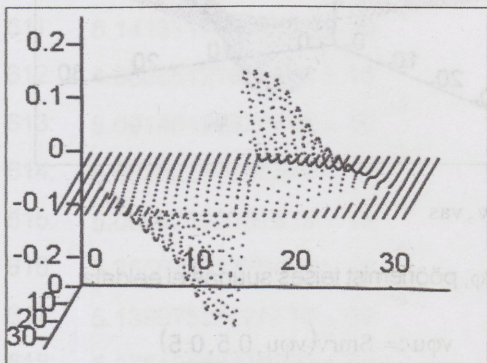
$v_{\varphi u \theta} = \ddot{\alpha} \varphi_{\theta} \cdot f(r, \theta) + \ddot{\alpha} \varphi \cdot f_{\theta}(r, \theta)$ Vajalikud suurused üklahendi $v_{\varphi u}$ leidmisprogrammile on:

$$v_r \cdot \ddot{\alpha} \varphi \cdot f_r(r, \theta) + \frac{v_{\theta}}{r} \cdot \ddot{\alpha} \varphi_{\theta} \cdot f(r, \theta) + \left(v_r \cdot \ddot{\alpha} \varphi_r + \frac{v_{\theta}}{r} \cdot \ddot{\alpha} \varphi_{\theta} \right) \cdot f(r, \theta) = v_{\varphi v} \quad v_{r\ddot{u}}_{i,k} := v_{r_{i,k}} \cdot \ddot{\alpha} \varphi_{i,k}$$

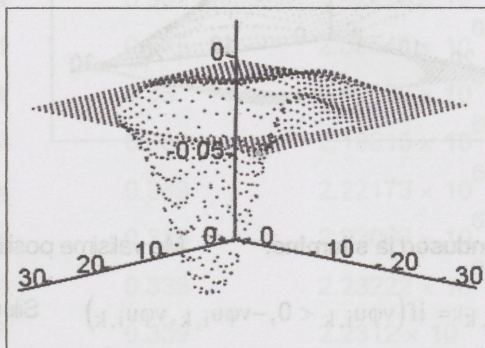
$$v_{r\ddot{u}} := A_s(v_{r\ddot{u}}) \quad v_{\theta\ddot{u}}_{i1,k} := v_{\theta_{i1,k}} \cdot \frac{\ddot{\alpha} \varphi_{i1,k}}{r_{i1}}$$

$$v_{\theta\ddot{u}}_{0,k} := 3 \cdot (v_{\theta\ddot{u}}_{1,k} - v_{\theta\ddot{u}}_{2,k}) + v_{\theta\ddot{u}}_{3,k}$$

$$v_{\theta\ddot{u}} := S_{\ddot{u}}(v_{\theta\ddot{u}})$$



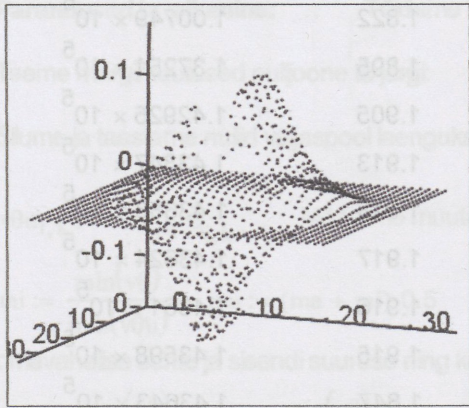
$v_{r\ddot{u}}$



$v_{\theta\ddot{u}}$

$$v_{\theta\ddot{u}}_{i1,k} := \left(v_{r_{i1,k}} \cdot \ddot{\alpha} \varphi_{r_{i1,k}} + v_{\theta_{i1,k}} \cdot \frac{\ddot{\alpha} \varphi_{\theta_{i1,k}}}{r_{i1}} \right)$$

$$v_{\theta\ddot{u}}_{0,k} := 3 \cdot (v_{\theta\ddot{u}}_{1,k} - v_{\theta\ddot{u}}_{2,k}) + v_{\theta\ddot{u}}_{3,k}$$



$$ko := 1.98284 \times 10^6 \quad lm := 8 \quad sil := 1 \quad \mu := 0.6$$

$$U_0 := lm \quad U_1 := rlm \quad U_2 := vrü \quad U_3 := v\thetaü$$

$$U_4 := v0ü \quad U_5 := v\varphi v \quad U_6 := ko \quad U_7 := sil$$

$$U_8 := \mu \quad U_9 := 2 \quad vu := VU(U)$$

$$C\varphi := vu_0 \quad vas := vu_1 \quad Su\varphi := vu_2 \quad D\varphi := vu_3$$

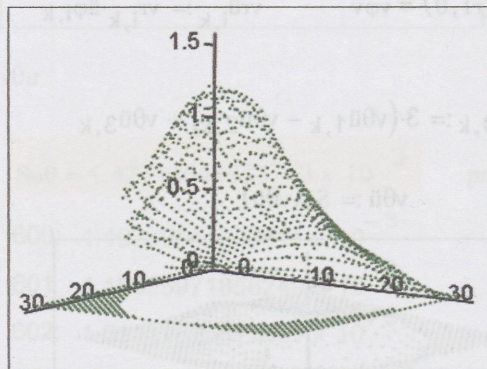
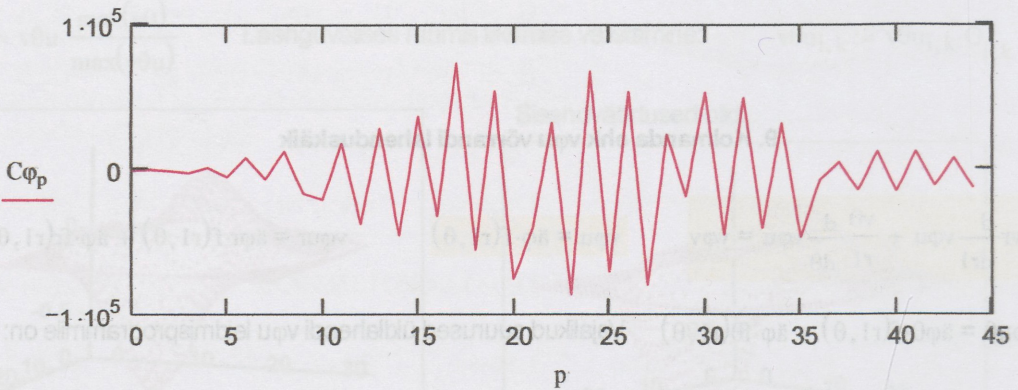
$$D\varphi = 1.04963904677835 \quad rf := vu_5$$

$$pm := vu_6 \quad pm = 44 \quad v\varphi_{i,ka} := -\ddot{a}\varphi_{i,ka} \cdot rf_{i,ka}$$

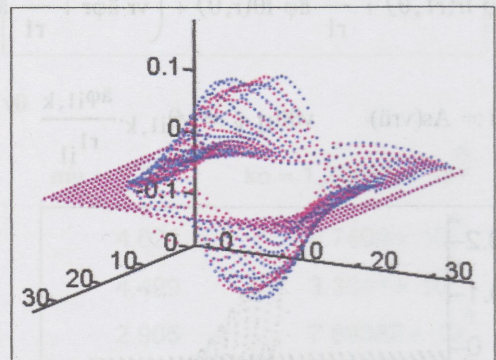
$$v\varphi_{i,35-ka} := v\varphi_{i,ka} \quad vas_{i,35-ka} := -vas_{i,ka}$$

$v0ü$

$p := 0..pm$



$v\varphi u$



$v\varphi v, vas$

Parandused ja silumine:

Me valisime positiivse $v\varphi$, pöörlemist teises suunas ei eeldata.

$$v\varphi_{i,k} := \text{if}(v\varphi_{i,k} < 0, -v\varphi_{i,k}, v\varphi_{i,k})$$

$$\text{Silume: } v\varphi u := \text{Smrv}(v\varphi u, 0.5, 0.5)$$

Kaotame laengukera välised väärtused:

$$v\varphi_{i,k} := v\varphi_{i,k} \cdot O_{i,k}$$

$$v\varphi u := \text{Sü}(v\varphi u)$$

$$v\varphi_{0,k} := 0$$

Taastame sisendväärtuse amplituudi ja keskmistame sisendväärtusega:

$$\mu := \frac{\max(v\varphi)}{\max(v\varphi u)}$$

$$v\varphi u := v\varphi u \cdot \mu$$

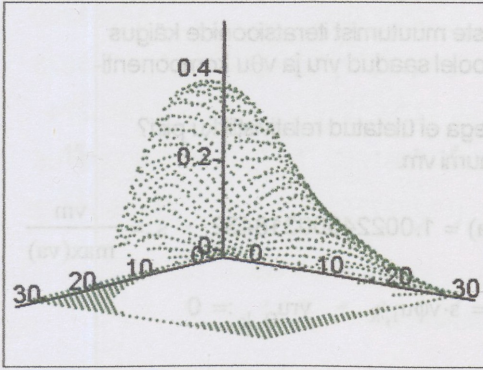
$$v\varphi u := 0.5 \cdot (v\varphi + v\varphi u)$$

Kuna amplituud võis muutuda

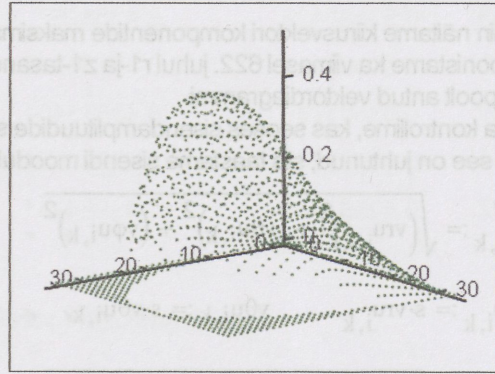
siis taastame selle:

$$v\varphi u := v\varphi u \cdot \frac{\max(v\varphi)}{\max(v\varphi u)}$$

Sisendväärtus oli:



vφu



vφ

Suφ = $5.51384168796191 \times 10^{-4}$

pm = 44

mu = 0.341

ko = 1.98284×10^6

600:	$8.89587610572897 \times 10^{-4}$	44	0.464	2.19332×10^6
601:	$5.49372483750396 \times 10^{-4}$	44	0.691	1.54933×10^6
602:	$3.74601013548941 \times 10^{-4}$	44	0.698	1.60616×10^6
603:	$2.8702189295632 \times 10^{-4}$	44	0.71	1.67278×10^6
604:	$2.68960592337134 \times 10^{-4}$	44	0.55	1.70384×10^6
605:	$3.14141750508709 \times 10^{-4}$	44	0.467	1.68701×10^6
606:	$3.51787165008828 \times 10^{-4}$	44	0.467	1.67902×10^6
607:	$3.70353543154247 \times 10^{-4}$	44	0.467	2.2995×10^6
608:	$3.67132910214713 \times 10^{-4}$	44	0.405	2.58712×10^6
609:	$3.82087597967286 \times 10^{-4}$	44	0.349	2.7184×10^6
610:	$4.77690909099257 \times 10^{-4}$	44	0.364	2.57787×10^6
611:	$5.14137186952723 \times 10^{-4}$	44	0.382	2.42236×10^6
612:	$4.95086121658144 \times 10^{-4}$	44	0.365	2.39542×10^6
613:	$5.09146198328436 \times 10^{-4}$	44	0.36	2.19132×10^6
614:	$5.06282357713572 \times 10^{-4}$	44	0.339	2.19915×10^6
615:	$5.09062392197515 \times 10^{-4}$	44	0.339	2.22173×10^6
616:	$5.23564863379416 \times 10^{-4}$	44	0.339	2.23006×10^6
617:	$5.13997506825118 \times 10^{-4}$	44	0.339	2.23222×10^6
618:	$5.17619168818832 \times 10^{-4}$	44	0.339	2.2312×10^6
619:	$5.14482107911286 \times 10^{-4}$	44	0.339	2.22891×10^6
620:	$5.32432130712322 \times 10^{-4}$	44	0.331	2.22753×10^6
621:	$5.47800595567323 \times 10^{-4}$	44	0.343	2.18268×10^6
622:	$5.51384168796191 \times 10^{-4}$	44	0.341	1.98284×10^6

10. Kokkuvõte

Siin näitame kiirusvektori komponentide maksimaalväärtuste muutumist iteratsioonide käigus ja joonistame ka viimasel 622. juhul r1-ja z1-tasandi ühel poolel saadud vru ja vθu komponentide poolt antud vektordiagrammi.

Ka kontrollime, kas seoses sisendamplituudide säilitamisega ei ületatud relativistlikku piiri? Kui see on juhtunud, siis taastame sisendi mooduli maksimumi vm.

$$va_{i,k} := \sqrt{(vru_{i,k})^2 + (v\theta u_{i,k})^2 + (v\varphi u_{i,k})^2} \quad \max(va) = 1.00224600318432 \quad s := \frac{vm}{\max(va)}$$

$$vru_{i,k} := s \cdot vru_{i,k} \quad v\theta u_{i,k} := s \cdot v\theta u_{i,k} \quad v\varphi u_{i,k} := s \cdot v\varphi u_{i,k} \quad vru_{0,k} := 0$$

$$va_{i,k} := \sqrt{(vru_{i,k})^2 + (v\theta u_{i,k})^2 + (v\varphi u_{i,k})^2} \quad vmu := \max(va) \quad \mathbf{vmu = 0.999999997248628}$$

vru väärtus pöörlemisel peab olema 0. Selle miinimum on alati suuruselt võrdne maksimumiga, kuid negatiivne. Seetõttu pole mõtet seda tabelisse kirjutada.

$$mi := \min(v\varphi u) \quad mi = 0$$

$$\max(vru) = 0.53587889 \quad \max(v\theta u) = 0.43878761 \quad \min(v\theta u) = -0.72797751$$

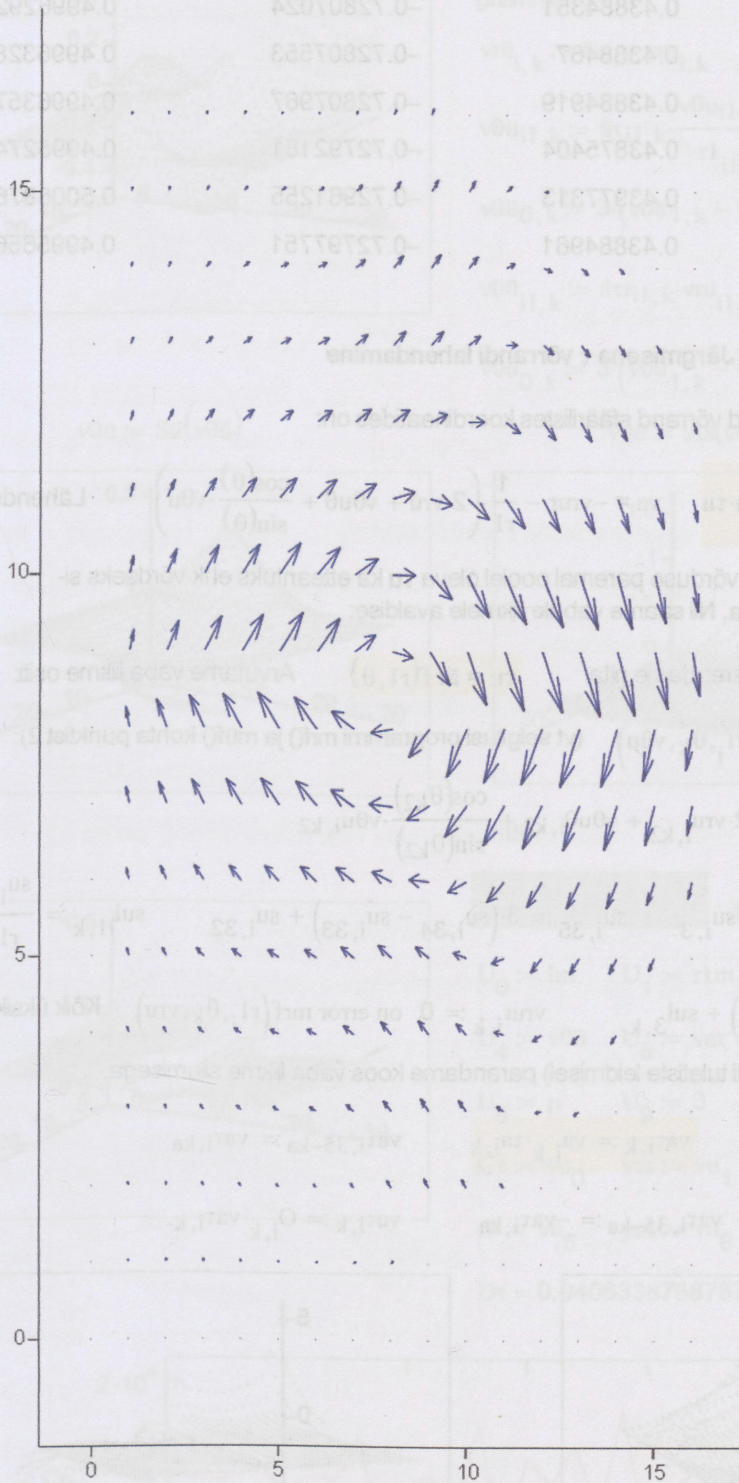
$$\max(v\varphi u) = 0.49956562$$

	max(vru)	max(vθu)	min(vθu)	max(vφu)
600:	0.43283528	0.35745718	-0.59009963	0.40696982
601:	0.55291519	0.45662522	-0.75736671	0.51987397
602:	0.55249945	0.45628188	-0.75679725	0.51948308
603:	0.55046604	0.45460259	-0.75436233	0.51757118
604:	0.55158673	0.45385159	-0.75311614	0.51671617
605:	0.55197539	0.4534211	-0.75240179	0.51622605
606:	0.55204776	0.45305042	-0.75221466	0.51580402
607:	0.55180806	0.45248347	-0.75142909	0.51515855
608:	0.54447427	0.44646976	-0.74144225	0.50831185
609:	0.5399317	0.44274484	-0.73525636	0.50407098
610:	0.53766785	0.44088848	-0.73178985	0.50195749
611:	0.53652595	0.43995213	-0.73012782	0.50089144
612:	0.53595105	0.43948071	-0.7291274	0.50035472
613:	0.53535272	0.43899007	-0.7283134	0.49979612
614:	0.53581099	0.43887535	-0.72812306	0.49966551
615:	0.53591798	0.43884826	-0.72807814	0.49963468

Kuna vektordiagramm võtab enda alla terve lehekülje, siis tabel jätkub ülejäärgmisel leheküljel.

Erinevalt algmudeli loomise juures (p.1) tehtud diagrammist, teeme selle enamvõhem õigete mastaapidega mõlemal teljel. Joonisel on ka näha, et vertikaalne joon, millel vθu muudab märki, ei ole enam sirge.

$p := 1..16$ $t := 1..16$ $Gr_{p,t} := vru_{p-2,t,2}$ $Gz_{p,t} := v\theta u_{p-2,t,2}$



(Gr, Gz)

Joonistatud vektordiagrammil on vru telg horisontaalne ja $v\theta u$ vertikaalne. Kuna joonis näitab pilti sfääri ühel pooltasandil, peab kõrgus olema 2x suurem laiusest. Punktidevaheline samm on vetrikaalses suunas 2x suurem horisontaalsete omast. Nagu algväärtuste juures sai mainitud, pildi kogu meridaantasandis saame peegeldusega vasakule poole veertikaaltelge.

616:	0.53594428	0.43884272	-0.72806894	0.49962836
617:	0.53595201	0.43884351	-0.72807024	0.49962926
618:	0.53595495	0.4388467	-0.72807553	0.49963289
619:	0.5359541	0.43884919	-0.72807967	0.49963573
620:	0.53583789	0.43875404	-0.72792181	0.4995274
621:	0.53708248	0.43977313	-0.72961255	0.50068765
622:	0.53587889	0.43884961	-0.72797751	0.49956562

11. Järgmisena τ võrrandi lahendamine

Pidevusvõrrandist tuletatud võrrand sfäärilistes koordinaatides on:

$$vru \cdot \frac{d}{dr1} \tau u + \frac{v\theta u}{r1} \cdot \frac{d}{d\theta} \tau u = va - \tau u \quad va = -vrur - \frac{1}{r1} \cdot \left(2 \cdot vru + v\theta u + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \cdot v\theta u \right) \quad \text{Lähendus-}$$

meetodi kasutamisel võtame võrduse paremal pool oleva τu ka etteantuks ehk võrdseks si-sendis esitatud väärtusega τa . Nii saame vabale liikmele avaldise:

$$vat = va - \tau a \quad \text{Otsitava arendame ritta:} \quad \tau u = \ddot{a} \tau f(r1, \theta) \quad \text{Arvutame vaba liikme ositi:}$$

$v\theta u_{i,k} := 0$ on error $m\theta f(r1_i, \theta_k, v\theta u)$ (vt selgitusi programmi $mrf()$ ja $m\theta f()$ kohta punktist 2):

$$k2 := 1..34 \quad su_{i,k2} := 2 \cdot vru_{i,k2} + v\theta u_{i,k2} + \frac{\cos(\theta_{k2})}{\sin(\theta_{k2})} \cdot v\theta u_{i,k2}$$

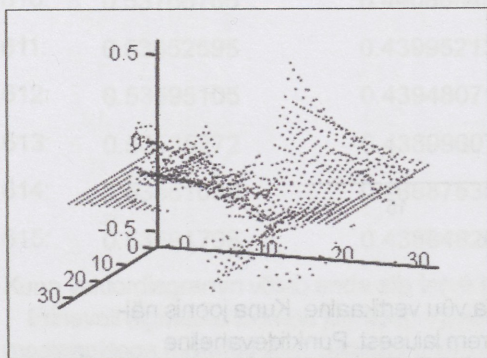
$$su_{i,0} := 3 \cdot (su_{i,1} - su_{i,2}) + su_{i,3} \quad su_{i,35} := 3 \cdot (su_{i,34} - su_{i,33}) + su_{i,32} \quad sul_{i1,k} := \frac{su_{i1,k}}{r1_{i1}}$$

$$sul_{0,k} := 3 \cdot (sul_{1,k} - sul_{2,k}) + sul_{3,k} \quad vrur_{i,k} := 0 \quad \text{on error } mrf(r1_i, \theta_k, vru) \quad \text{Kõik üksiku-}$$

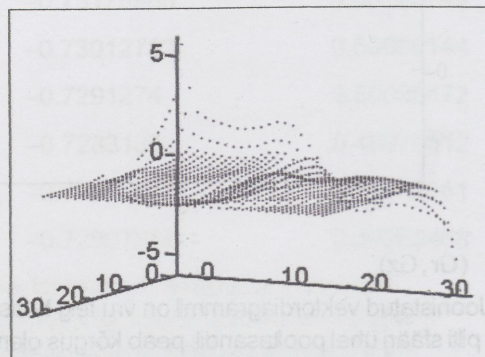
tes tehetes tekkinud vigu (eriti tuletiste leidmisel) parandame koos vaba liikme silumisega.

$$va_{i,k} := -vrur_{i,k} - sul_{i,k} \quad \tau a_{i,k} := va_{i,k} - \tau a_{i,k} \quad \tau a_{i,35-ka} := \tau a_{i,ka}$$

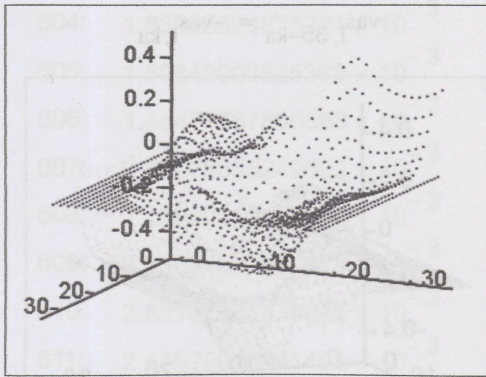
$$\tau a := Smrv(\tau a, 0.5, 0.5) \quad \tau a_{i,35-ka} := -\tau a_{i,ka} \quad \tau a_{i,k} := O_{i,k} \cdot \tau a_{i,k}$$



vrur



sul



vat

$$v\theta\ddot{u} := S\ddot{u}(v\theta\ddot{u})$$

Vajalikud suurused üldlahendi leidmisprogrammile on:

$$vr\ddot{u}_{i,k} := \ddot{a}\tau_{i,k} \cdot vr_{i,k} \quad vr\ddot{u} := As(vr\ddot{u})$$

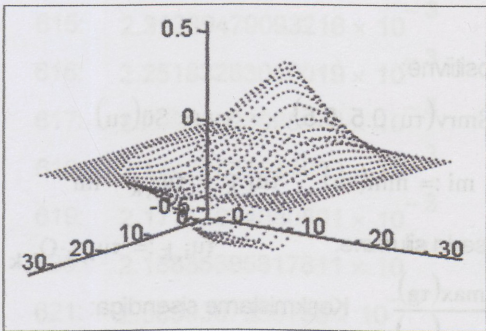
$$v\theta\ddot{u}_{i1,k} := \ddot{a}\tau_{i1,k} \cdot \frac{v\theta u_{i1,k}}{r_{i1}}$$

$$v\theta\ddot{u}_{0,k} := 3 \cdot (v\theta\ddot{u}_{1,k} - v\theta\ddot{u}_{2,k}) + v\theta\ddot{u}_{3,k}$$

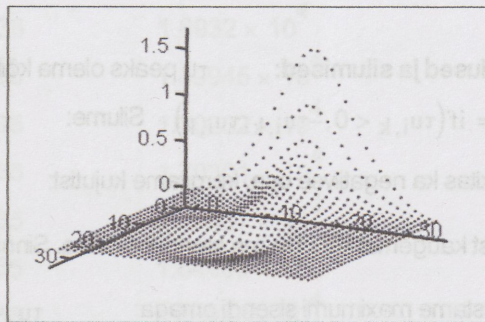
$$v0\ddot{u}_{i1,k} := \ddot{a}\tau_{i1,k} \cdot vr_{i1,k} + \ddot{a}\tau_{i1,k} \cdot \frac{v\theta u_{i1,k}}{r_{i1}}$$

$$v0\ddot{u}_{0,k} := 3 \cdot (v0\ddot{u}_{1,k} - v0\ddot{u}_{2,k}) + v0\ddot{u}_{3,k}$$

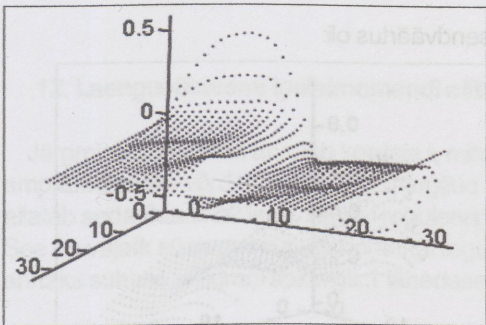
$$v0\ddot{u} := As(v0\ddot{u})$$



vrü



v0ü



v0ü

$$ko := 1.41695 \times 10^4 \quad sil := 1 \quad \mu := 0.4 \quad lm := 7$$

$$U_0 := lm \quad U_1 := rlm \quad U_2 := vr\ddot{u} \quad U_3 := v\theta\ddot{u}$$

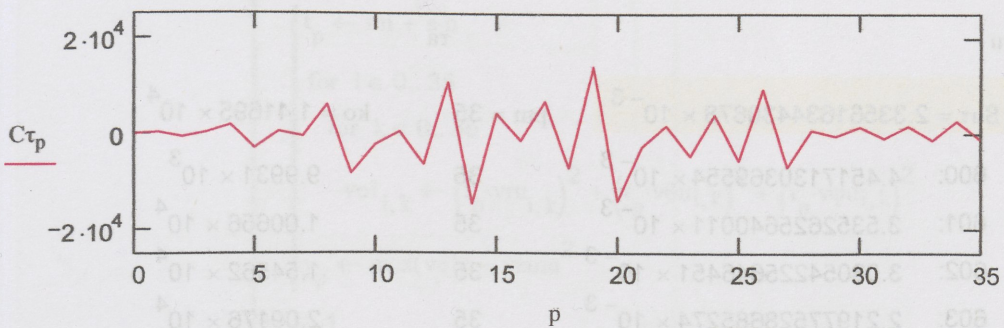
$$U_4 := v0\ddot{u} \quad U_5 := vat \quad U_6 := ko \quad U_7 := sil$$

$$U_8 := \mu \quad U_9 := 3 \quad vu := VU(U)$$

$$C\tau := vu_0 \quad vas := vu_1 \quad Sur := vu_2 \quad Dr := vu_3$$

$$rf := vu_5 \quad pm := vu_6 \quad pm = 35$$

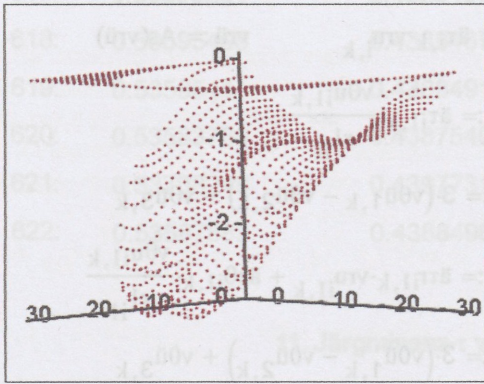
$$Dr = 0.040633876875724 \quad p := 0..pm$$



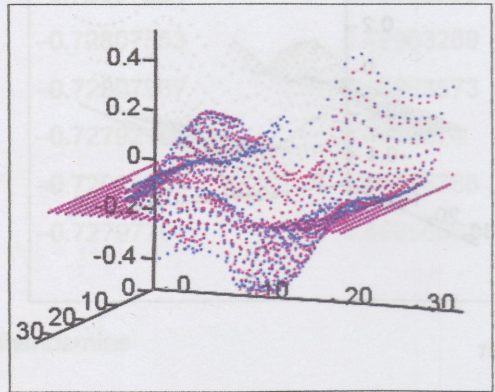
$$\tau_{i,ka} := \ddot{\tau}_{i,ka} \cdot r_{i,ka}^f$$

$$\tau_{i,35-ka} := \tau_{i,ka}$$

$$\text{vas}_{i,35-ka} := -\text{vas}_{i,ka}$$



τ_u



var, vas

Parandused ja silumised: τ_u peaks olema kõikjal positiivne:

$$\tau_{i,k} := \text{if}(\tau_{i,k} < 0, -\tau_{i,k}, \tau_{i,k}) \quad \text{Silume:} \quad \tau_u := \text{Smrv}(\tau_u, 0.5, 0.5) \quad \tau_u := \text{Sü}(\tau_u)$$

See tekitab ka negatiivse osa, kergitame kujutist:

$$m_i := \min(\tau_u) \quad \tau_{i,k} := \tau_{i,k} - m_i$$

Tsentrist kaugemal kui **r1m** me laengut ei luba. Sinna viis seda silumine:

$$\tau_{i,k} := \tau_{i,k} \cdot O_{i,k}$$

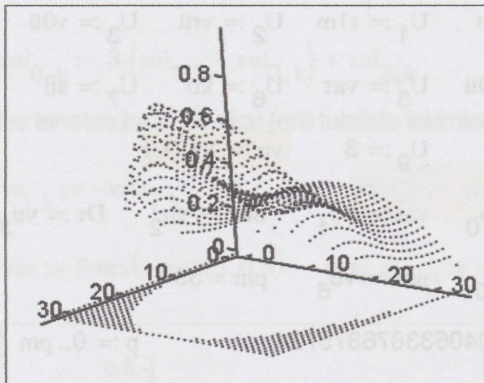
Võrdsustame maximumi sisendi omaga:

$$\tau_u := \tau_u \cdot \frac{\max(\tau_a)}{\max(\tau_u)} \quad \text{Keskmistame sisendiga:}$$

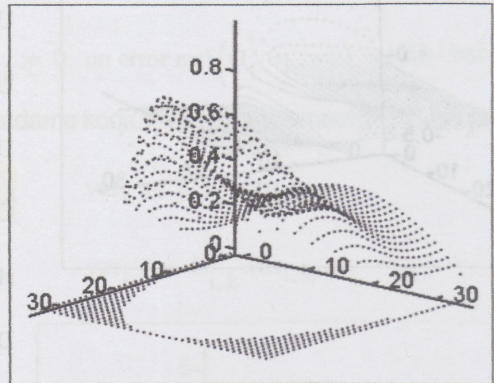
$$\tau_u := 0.5 \cdot (\tau_u + \tau_a) \quad \min(\tau_u) = 0 \quad \text{Muudame maksimumi 1-ks. Normeerimine toimub p 2.}$$

$$\tau_u := \frac{\tau_u}{\max(\tau_u)} \quad \max(\tau_u) = 1$$

Sisendväärtus oli:



τ_u



τ_a

$$\text{Sut} = 2.33561634430878 \times 10^{-3}$$

$$pm = 35$$

$$ko = 1.41695 \times 10^4$$

$$600: 4.4517130369554 \times 10^{-3}$$

$$35$$

$$9.9931 \times 10^3$$

$$601: 3.5352625640011 \times 10^{-3}$$

$$35$$

$$1.00656 \times 10^4$$

$$602: 3.08054225646451 \times 10^{-3}$$

$$35$$

$$1.54562 \times 10^4$$

$$603: 2.21977528685274 \times 10^{-3}$$

$$35$$

$$2.09176 \times 10^4$$

604:	$1.86905621875321 \times 10^{-3}$	35	2.51064×10^4
605:	$1.58849003525363 \times 10^{-3}$	35	2.6212×10^4
606:	$1.45471767880588 \times 10^{-3}$	35	2.52858×10^4
607:	$2.04278835249692 \times 10^{-3}$	35	1.93038×10^4
608:	$2.13060510474638 \times 10^{-3}$	35	1.95652×10^4
609:	$2.46034611960028 \times 10^{-3}$	35	1.7866×10^4
610:	$2.53107835379075 \times 10^{-3}$	35	1.65583×10^4
611:	$2.47525693841499 \times 10^{-3}$	35	1.6741×10^4
612:	$2.57997214273286 \times 10^{-3}$	35	1.55215×10^4
613:	$2.46239738384419 \times 10^{-3}$	35	1.64882×10^4
614:	$2.38470537630473 \times 10^{-3}$	35	1.68108×10^4
615:	$2.31239479093216 \times 10^{-3}$	35	1.6932×10^4
616:	$2.25183283010019 \times 10^{-3}$	35	1.69945×10^4
617:	$2.20955693095048 \times 10^{-3}$	35	1.70232×10^4
618:	$2.18429831944053 \times 10^{-3}$	35	1.70301×10^4
619:	$2.17713074080801 \times 10^{-3}$	35	1.70337×10^4
620:	$2.18835395817811 \times 10^{-3}$	35	1.64405×10^4
621:	$2.3859307356766 \times 10^{-3}$	35	1.45248×10^4
622:	$2.33561634430878 \times 10^{-3}$	35	1.41695×10^4

12. Laengusüsteemi impulsimomendi sättimine võrreldavaks elektroni spinniga

Järgmine programm arvutab kordaja t , millega tuleks vru , $v\theta u$ ja $v\varphi u$ korrutada, et kiiruse amplituud saaks võrdseks sinisega märgitud väärtusega (programmi sisendi ees). Programm aitab seda lihtsamalt teha. Käsitsi reguleerime ainult sinise arvu viimaseid kümnendkohti. See on vajalik süsteemi impulsimomendi reguleerimiseks nii, et järgmine programm **võrdlus()** annaks suhtele elektroni spinniga 1 lähedase väärtuse.

```

vamuut(vemu, mi, mx, pm) :=
  s ← (mx - mi) / pm
  for p ∈ 0..pm
    t_p ← mi + s·p
    for i ∈ 0..35
      for k ∈ 0..35
        veli,k ← (t_p · vrui,k)2 + (t_p · vθui,k)2 + (t_p · vφui,k)2
      y_p ← max(vel) - vemu2
  tx ← 1

```

px ← 0

for p ∈ 1..pm - 1

if $y_p \cdot y_{p+1} < 0 \vee y_p = 0$

y1 ← y_{p-1}

t1 ← t_{p-1}

y2 ← y_p

t2 ← t_p

y3 ← y_{p+1}

t3 ← t_{p+1}

px ← p

if $y_{p+1} = 0$

y1 ← y_p

t1 ← t_p

y2 ← y_{p+1}

t2 ← t_{p+1}

y3 ← y_{p+2}

t3 ← t_{p+2}

px ← p + 1

otherwise

tx ← tx

px ← px

if $px \neq 0$

$$a \leftarrow \frac{1}{2 \cdot s} \cdot (y_3 - 2 \cdot y_2 + y_1)$$

$$b \leftarrow \frac{y_3 - y_1}{2 \cdot s} - 2 \cdot a \cdot t_2$$

$$c \leftarrow y_2 - a \cdot t_2^2 - b \cdot t_2$$

$$tx \leftarrow \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

continue otherwise

for i ∈ 0..35

for k ∈ 0..35

$$ve_{i,k} \leftarrow \sqrt{(tx \cdot vru_{i,k})^2 + (tx \cdot v\theta u_{i,k})^2 + (tx \cdot v\phi u_{i,k})^2}$$

vä₀ ← y

```

vä1 ← t
vä2 ← tx
vä3 ← px
vä4 ← ve
vä5 ← max(ve)
vä

```

vmu := 0.9999999972663905

mi := 0.9

mx := 1.1

pm := 100

yp := vamuut(vmu, mi, mx, pm)

tx := yp₂

tx = 1.00000000001776

vem := yp₅

vru := tx·vru

vθu := tx·vθu

vφu := tx·vφu

vem = 0.9999999997266391

Kas ei tekkinud imaginaarsust? Kontroll:

$$ve_{i,k} := (vru_{i,k})^2 + (v\theta u_{i,k})^2 + (v\phi u_{i,k})^2$$

$$ju_{i,k} := \text{Im}(\sqrt{1 - ve_{i,k}})$$

max(ju) = 0

Vajalikud arvutused, mis on seotud süsteemi impulsimomendi ja elektroni spinni suhte määramisega, kaasa haaratud ka "τu" normeerimine, on vormistatud programmina "võrdlus".

Konstant kor avaldises muutub, kui välja mõõtmeid muudetakse!

võrdlus(τu, vρ, vθ, vφ) :=

$$ko \leftarrow \frac{2.730969971695}{\sum_{i=0}^{35} \sum_{k=0}^{35} \tau u_{i,k} (r1_i)^2 \cdot \sin(\theta_k)}$$

$$kor \leftarrow ko \cdot 10^{-30}$$

$$su \leftarrow \sum_{i=0}^{35} \sum_{k=0}^{35} \frac{\tau u_{i,k} \cdot v\phi u_{i,k} \cdot (r1_i)^3 \cdot \sin(\theta_k)}{\sqrt{1 - (vru_{i,k})^2 - (v\theta u_{i,k})^2 - (v\phi u_{i,k})^2}}$$

$$\text{Imz} \leftarrow kor \cdot su$$

$$h \leftarrow 6.626176 \cdot 10^{-27}$$

$$\text{spip} \leftarrow \frac{4 \cdot \pi}{h}$$

$$\text{suhspi} \leftarrow \text{spip} \cdot \text{Imz}$$

$$v\ddot{a}_0 \leftarrow ko$$

$$v\ddot{a}_1 \leftarrow \text{spip}$$

$$v\ddot{a}_2 \leftarrow su$$

$$v\ddot{a}_3 \leftarrow \text{suhspi}$$

vä

vä := võrdlus($\tau u, vru, v\theta u, v\phi u$)

$$vä = \begin{pmatrix} 6.30755171706521 \times 10^{-4} \\ 1.89647401674196 \times 10^{27} \\ 8.35973033961377 \times 10^5 \\ 0.99999966773563 \end{pmatrix}$$

kor ilma astmeta 10^{-30} .

spip, spinni pöördväärtus

su, kahekordne summa

suhspi juhul, kui tegu on käesoleva läbijooksu kiiruste ja jaotusega.

vä₃ = 0.9999996677

vem = 0.999999997266391

	shsp	vem		
600:	0.99923309473	0.999999998534	vem reguleeritud kiiruse mooduli vmu	
601:	0.99982371068	0.999999997926	muutmiseks selliseks, et shsp tuleks 1 lähedale. Ei ole mingit mõtet reguleerida suhspi täpselt 1-ks. Sellele ei oleks siin mingit mõistlikku põhjendust.	
602:	0.99996525888	0.9999999977485		
603:	0.99998761146	0.9999999976717		
604:	0.99999581667	0.999999997616	614:	0.999999999359 0.999999997354803
605:	0.99999904352	0.99999999758069	615:	0.999999998538 0.999999997320449
606:	0.99999966123	0.999999997558905	616:	0.999999999251 0.999999997296615
607:	0.99999989346	0.999999998286097	617:	0.99999999913 0.999999997280403
608:	0.9999999936	0.999999997593877	618:	0.9999999978 0.999999997268962
609:	0.99999995046	0.999999997606488	619:	0.999999999082 0.99999999726171
610:	0.99999999027	0.999999997573893	620:	0.999999999181 0.999999997261257
611:	0.99999998353	0.999999997528153	621:	0.999999998918 0.999999997248628
612:	0.99999999169	0.999999997463957	622:	0.999999996677 0.999999997266391
613:	0.9999999945	0.99999999740134		

Kaks viimast programmi ei võimalda lähendada suhet spinniga rohkem lähemale 1-le kui arv 7-9 üheksaga (0.9999999-0.999999999) ühelt poolt või sama arvu nullidega teiselt poolt 1.00000001- 1.0000000001. Põhjus on Matcadis, mis ei luba programmi viia enama kümnendkohtade arvuga arve kui 15. Võib küll kirjutada töölehele (18 kümnendkohta)

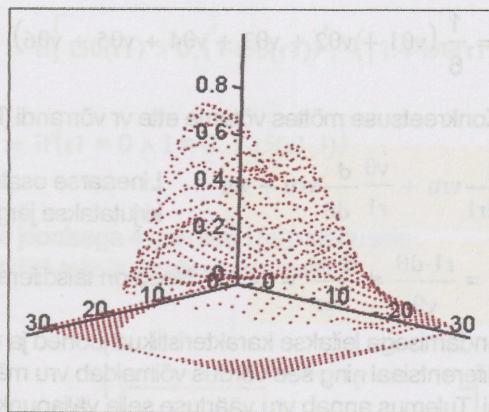
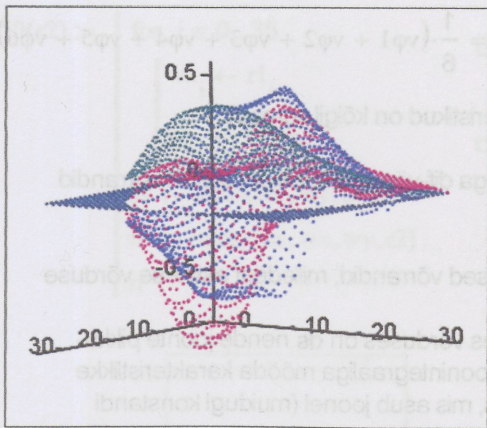
s := 0.123456789987654321

kuid ta edastab seda väärtusega: s = 0.123456789987654 ehk ümardab 15 kümnendkohale.

Nagu juba kirjutatud – reguleerimisel täpselt 1-ks ei ole siin mingit tähtsust või vajadust.

$$vm_{i,k} := \sqrt{(vru_{i,k})^2 + (v\theta u_{i,k})^2 + (v\phi u_{i,k})^2} \quad \max(vm) = 0.999999997266391$$

Järgmistel joonistel näitame 3 kiiruskomponenti ühel joonisel erinevate värvidega ja teisel kiiruse mooduli jaotust.



$vru, v\theta u, v\varphi u$



















vm

sinine, punane, roheline

Väljastame tulemused ($vru, v\theta u, v\varphi u, \tau u$) failidesse **vru601, vdu601, vju601, tu601** alates. Seejärel pöördume tsükli algusesse, punkti 4, väljastame need ja uus tsükkel algab. Edaspidi suurendatakse siin näidatud failinumbreid ja nii oleme selles trükis jõudnud 622-ni. Suurustes ja kujutistes ei toimunud viimastes tsüklites enam olulisi muutusi. Vt Lisa.

13. Alustame võrrandite lahendamist karakteristlike võrrandite meetodil

Näitena kasutame eelmistes punktides saadud lahendite $v\varphi u, v\theta u$ ja $v\varphi u$ 6 viimase iteratsiooni tulemuste keskmisi, et siluda viimastes esinenud väikseid muutusi.

$vr1 :=$		$vr2 :=$		$vr3 :=$	
	C:\..\vru617		C:\..\vru618		C:\..\vru619
$vr4 :=$		$vr5 :=$		$vr6 :=$	
	C:\..\vru620		C:\..\vru621		C:\..\vru622
$v\theta1 :=$		$v\theta2 :=$		$v\theta3 :=$	
	C:\..\vdu617		C:\..\vdu618		C:\..\vdu619
$v\theta4 :=$		$v\theta5 :=$		$v\theta6 :=$	
	C:\..\vdu620		C:\..\vdu621		C:\..\vdu622
$v\varphi1 :=$		$v\varphi2 :=$		$v\varphi3 :=$	
	C:\..\vju617		C:\..\vju618		C:\..\vju619
$v\varphi4 :=$		$v\varphi5 :=$		$v\varphi6 :=$	
	C:\..\vju620		C:\..\vju621		C:\..\vju622

Arvutame 6 keskmise:

$$vr := \frac{1}{6} \cdot (vr1 + vr2 + vr3 + vr4 + vr5 + vr6)$$

$$v\theta := \frac{1}{6} \cdot (v\theta_1 + v\theta_2 + v\theta_3 + v\theta_4 + v\theta_5 + v\theta_6) \quad v\varphi := \frac{1}{6} \cdot (v\varphi_1 + v\varphi_2 + v\varphi_3 + v\varphi_4 + v\varphi_5 + v\varphi_6)$$

Konkreetsuse mõttes võtame ette vr võrandi (karakteristikud on kõigil samad):

$$vr \cdot \frac{d}{dr1} vru + \frac{v\theta}{r1} \cdot \frac{d}{d\theta} vru = var$$

Lineaarse osatuletistega dif-võrandi karakteristikud võrandid kirjutatakse järgmiselt:

$$\frac{dr1}{vr} = \frac{r1 \cdot d\theta}{v\theta} = \frac{dvru}{var} = ds$$

Need on täisdiferentsiaalsed võrandid, milledest esimese võrduse

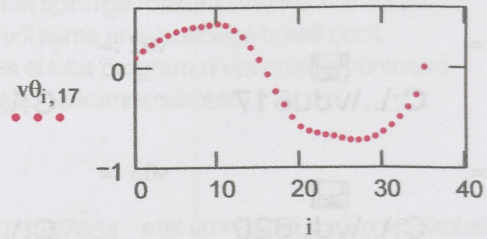
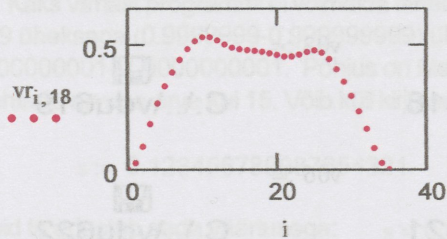
lahendamiseiga leitakse karakteristikud jooned ja viimases võrduses on ds nende joonte pikku-se diferentsiaal ning see võrdus võimaldab vru määrata joonintegraaliga mööda karakteristikke jooni. Tulemus annab vru väärtuse selle väljapunkti jaoks, mis asub joonel (muidugi konstandi täpsusega):

$$v\theta \cdot dr1 = r1 \cdot vr \cdot d\theta \quad v\varphi(r1, \theta) = \int var(r1, \theta) ds \quad \text{Esimese lahendamine annab funktsioo-}$$

ni $\theta = \theta(r1)$, mis $r1, \theta$ -tasandil kujundab karakteristikku joone. Neidki lahendamisi on lihtsam teostada, kui arendada vru ja $v\theta$ ülevaalt määratud keskmised vr ja $v\theta$ ritta sobivatest funktsioonidest. Funktsioonid leiame samasugustel viisidel, nagu eelmistelgi arendustel – vru puhul radiaalse teguriga $t0(r1, l)$, tunnus $tu = 4$, ja $v\theta$ puhul radiaalse teguriga $t1(r1, l)$, unnus 5. Siin saame muidugi erinevad tulemused kuna "algandmed" on vähesel määral teistsugused.

14. Kiiruse komponentide arvamassiivide lähendamine sfäärilistest harmoonikutest reaga

Reaksarendus on sama, mis ülevaalt kasutatud, kuid arvutusprogramm tuleb mõnevõrra lihtsam, sest rida võrdub reaksarendatava massiivga. Määratakse reaalikmete kordajad C võrdusepoolte erinevuste ruutude summa miinimumi järgi. Rea koordinaadist $r1$ sõltuv tegur $t(r1, l)$ ei saa siiski olla kõigis ühesugune, kui tahame võimalikult paremat lähendust. Selle teguri määrame kõigi lähendatavate $k = 17$ või 18 veeru punktide järgi ja teisendame Mathcadi loess- ja iterpret-programmide abil pidevateks funktsioonideks.



```
t40(r2) := for i ∈ 0..35
  wx_i ← r1_i
  wy_i ← vr_i,18
  bs ← loess(wx, wy, 0.5)
  sf ← interp(bs, wx, wy, r2)
  sf

t4(r1, l) := (1.4 · t40(r1))l
```

```

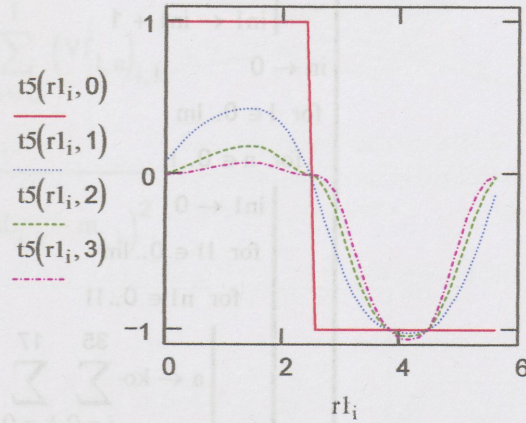
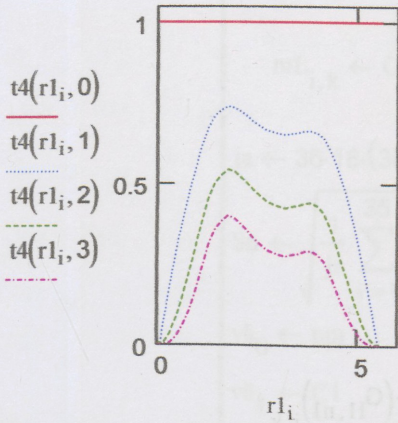
t50(r2) :=
  for i ∈ 0..35
    wxi ← r1i
    wyi ← vθi, 17
  bs ← loess(wx, wy, 0.5)
  sf ← interp(bs, wx, wy, r2)
  sf

```

$$t5(r1, l) := \text{if} \left[t50(r1) > 0, (1 \cdot t50(r1))^l, -(|1.4 \cdot t50(r1)|)^l \right]$$

$$t5(r1, l) := \text{if}(r1 = 0 \wedge l = 0, 1, t5(r1, l))$$

Esitame joonisega 4 esimese l (el) väärtusele vastavad r1-telje suunalised muutused.



Rea kordajad C määratame järgmise programmiga, tu = 4..5 valib välja ülalnäidatud juhud.

```

Wv(lm, ko, tu, m) :=
  for κ ∈ 0..17
    ξκ ← cos(π · κ / 35)
    for l ∈ 0..lm
      for n ∈ 0..1
        for κ ∈ 0..17
          Jn, κ ← Re(ln(ξκ, l, n))
          INl ← Jn
    for l ∈ 0..lm
      for i ∈ 0..35
        r1i ← r1m / 35 · i
        Tl, i ←
          | t4(r1i, l) if tu = 4
          | t5(r1i, l) otherwise
      for n ∈ 0..1
        for i ∈ 0..35
          for k ∈ 0..17
            ai, k ← Tl, i(INl)n, k

```

```

| |  $G_{l,n} \leftarrow a$ 
inl  $\leftarrow 0$ 
for ll  $\in 0..lm$ 
  for nl  $\in 0..ll$ 
     $va \leftarrow ko \cdot \sum_{i=0}^{35} \sum_{k=0}^{17} m_{i,k} \cdot (G_{ll,nl})_{i,k}$ 
     $V_{inl} \leftarrow va$ 
    inl  $\leftarrow inl + 1$ 
in  $\leftarrow 0$ 
for l  $\in 0..lm$ 
  for n  $\in 0..l$ 
    inl  $\leftarrow 0$ 
    for ll  $\in 0..lm$ 
      for nl  $\in 0..ll$ 
         $a \leftarrow ko \cdot \sum_{i=0}^{35} \sum_{k=0}^{17} (G_{l,n})_{i,k} \cdot (G_{ll,nl})_{i,k}$ 
         $M_{in,inl} \leftarrow a$ 
        inl  $\leftarrow inl + 1$ 
    in  $\leftarrow in + 1$ 
pm  $\leftarrow in - 1$ 
D  $\leftarrow |M|$ 
for p2  $\in 0..pm$ 
  for p1  $\in 0..pm$ 
    for p3  $\in 0..pm$ 
       $b_{p1,p3} \leftarrow M_{p1,p3}$ 
    for p1  $\in 0..pm$ 
       $b_{p1,p2} \leftarrow V_{p1}$ 
     $Cl_{p2} \leftarrow \frac{|b|}{D}$ 
id  $\leftarrow 0$ 
for l  $\in 0..lm$ 
  for n  $\in 0..l$ 
     $Cv_{l,n} \leftarrow \begin{cases} 0 & \text{if } l = lm \wedge V_0 = 0 \\ Cl_{id} & \text{otherwise} \end{cases}$ 
    id  $\leftarrow id + 1$ 
for l  $\in 0..lm$ 

```

```

for n ∈ 0..1
  for i ∈ 0..35
    for k ∈ 0..17
      vfi,k ← Cvl,n · (Gl,n)i,k
    Vfl,n ← vf
  for i ∈ 0..35
    for k ∈ 0..17
      mLi,k ← Oi,k · ∑l=0lm ∑n=01 (Vfl,n)i,k
    ja ← 36·18·(36·18 - 1)

```

$$Su \leftarrow \sqrt{\frac{1}{ja} \cdot \sum_{i=0}^{35} \sum_{k=0}^{17} (mL_{i,k} - m_{i,k})^2}$$

vä₀ ← pm

vä₁ ← C1

vä₂ ← Cv

vä₃ ← mL

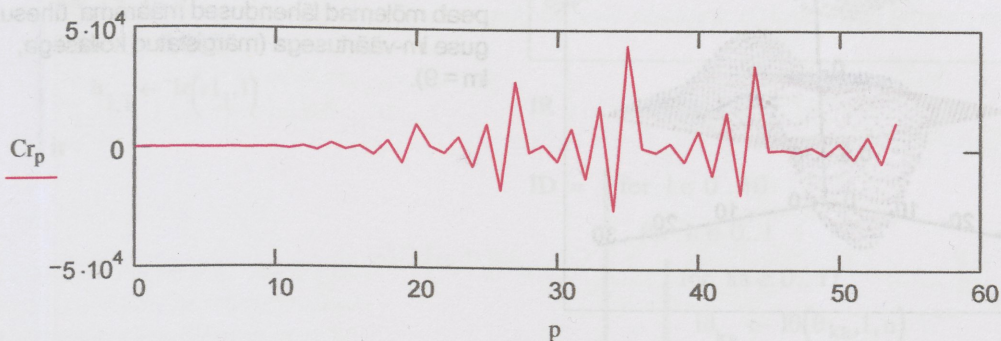
vä₄ ← Su

vä₅ ← D

vä

lm := 9 ko := 1.40507 × 10⁵ tu := 4 wv := Wv(lm, ko, tu, vr) pm := wv₀ Cr := wv₁

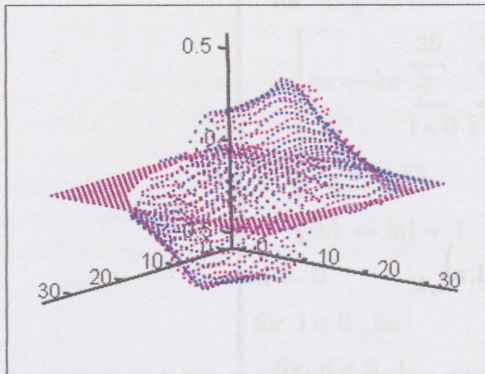
vrL := wv₃ svr := wv₄ Dr := wv₅ pm = 54 p := 0..pm vrL_{i,35-ka} := -vrL_{i,ka}



Cvr := wv₂

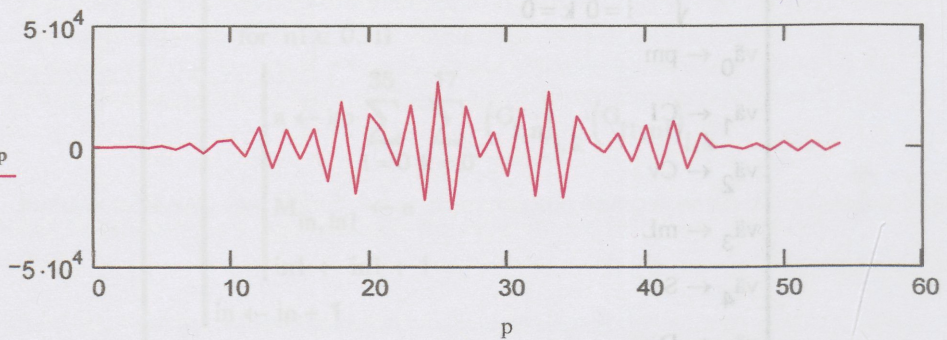
lm = 9 Dr = 1.04966123245643 ko = 1.40507 × 10⁵ svr = 9.71947697130716 × 10⁻⁴

8	1.04964242132148	2.04207×10^4	$9.84699482836942 \times 10^{-4}$
9	1.04966123245643	1.40507×10^5	$9.71947697130716 \times 10^{-4}$

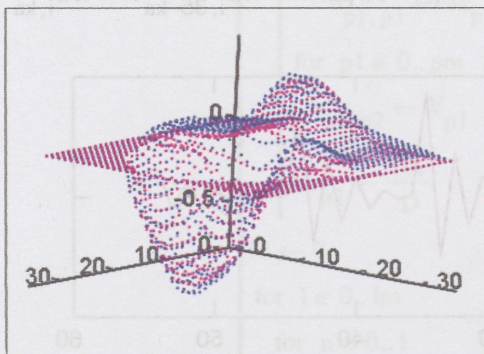


vr, vrL

$lm := 9$ $ko := 4.35817 \times 10^3$ $tu := 5$
 $wv := Wv(lm, ko, tu, v\theta)$ $pm := wv_0$
 $C\theta := wv_1$ $v\theta L := wv_3$ $sv\theta := wv_4$
 $D\theta := wv_5$ $pm = 54$ $p := 0..pm$
 $v\theta L_{i, 35-ka} := v\theta L_{i, ka}$ $Cv\theta := wv_2$



$lm = 9$	$D\theta = 1.04969649858078$	$ko = 4.35817 \times 10^3$	$sv\theta = 1.79000596770982 \times 10^{-3}$
8	1.04959215362103	940.435	$1.80807852556407 \times 10^{-3}$
9	1.04969649858078	4.35817×10^3	$1.79000596770982 \times 10^{-3}$



vθ, vθL

Edaspidiseks kasutamise lihtsustamiseks peab mõlemad lähendused määrama ühesuguse lm -väärtusega (märgistatud kollasega, $lm = 9$).

15. Karakteristlike joonte määramine

Karakteristlikke jooni määravad osatuletisi kordavad funktsionid võrrandites. Käesoleval juhul on need vr ja $v\theta/r1$ kõigi võrrandite puhul. Seetõttu on need jooned kõigi võrrandite jaoks ühed ja samad. Karakteristlikuks võrrandiks saime 13. punktis:

$v\theta \cdot dr1 = r1 \cdot vr \cdot d\theta$ Selle integreerimiseks on siin parim viis kui kasutame $v\theta$ ja vr jaoks eelmises punktis saadud reaksarendusi. Cvr ja $Cv\theta$ on ülalmääratud Cr ja $C\theta$ kaheindeksilises vormis. Viimased on määratud ainult poole vaatevälja jaoks: $i = 0..35$, $ka = 0..17$. Siingi teeme arvutused selle poole jaoks, kuna teise poole tulemused saame kirjutada sümmeetria järgi.

$$Vr(r1, \xi) = \sum_{l=0}^{lm} \sum_{n=0}^l Cvr_{l,n} \cdot t4(r1, l) \cdot Re(In(\xi, l, n))$$

$$\xi = \cos(\theta)$$

$$V\theta(r1, \xi) = \sum_{l=0}^{lm} \sum_{n=0}^l Cv\theta_{l,n} \cdot t5(r1, l) \cdot Re(In(\xi, l, n))$$

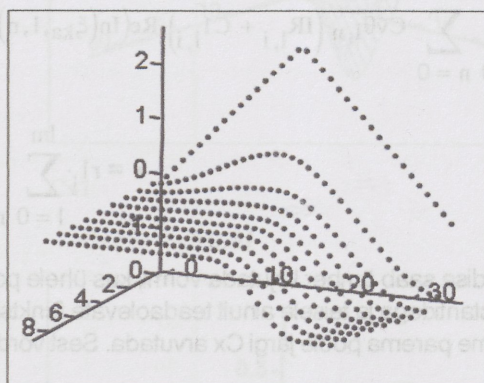
Asetades read karakteristlikku võrrandisse, same, ilma summa märkideta, võrduse:

$Cv\theta_{l,n} \cdot t5(r1, l) \cdot Re(In(\xi, l, n)) \cdot dr1 = r1 \cdot Cvr_{l,n} \cdot t4(r1, l) \cdot Re(In(\xi, l, n)) \cdot d\theta$ Integreerime vasakut poolt $r1$ ja paremat θ järgi. Saame kaks integraali:

$$Ir(r1, l) := \int_0^{r1} t5(r1, l) dr1 \quad I\theta(\theta, l, n) := \int_0^\theta Re(In(\cos(\theta), l, n)) d\theta$$

Nendest saab integreerimise tulemusel vastavalt kahe ja kolmeindeksilise arvumassiivi. Esimese programmi IR $l=0$ osa on koostatud $t5(r1, 0)$ joonise järgi.

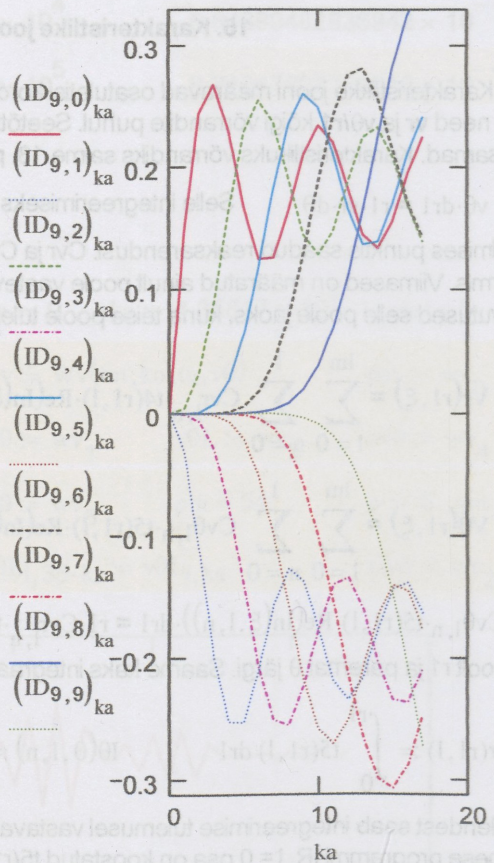
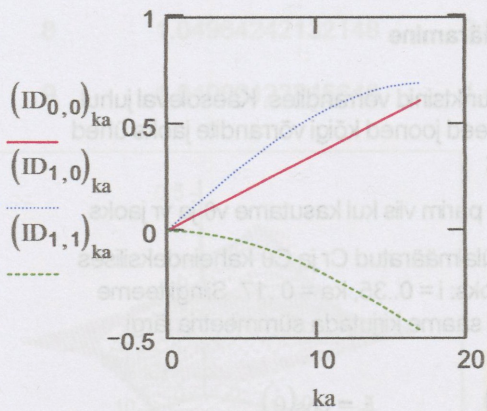
```
IR := | ir0,0 ← 0
      | for i ∈ 1..16
      |   ir0,i ← i·r11
      | ir0,17 ← ir0,16
      | for i ∈ 18..35
      |   ir0,i ← ir0,17 - (i - 17)·r11
      | for l ∈ 1..9
      |   for i ∈ 0..35
      |     ir1,i ← Ir(r11, l)
      | ir
```



IR

```
ID := | for l ∈ 0..10
      |   for n ∈ 0..l
      |     for ka ∈ 0..17
      |       idka ← Iθ(θka, l, n)
      |       Idl,n ← id
      | Id
```

Näiteid ID kohta (kõigile ei jätku ruumi):



Integraalidele tuleb lisada integreerimis-
konstandid, mis on samade indeksitega na-
gu integraalide väärtused, sest ka konstan-
did võivad olla erinevad eri väljapunktides. Nii
saame allkirjutatud avaldise, kui lisame ka
ridade summeerimismärgid.

$$\sum_{l=0}^{lm} \sum_{n=0}^1 C_{v\theta_{l,n}} (IR_{l,i} + C_{1,l,i}) \cdot \text{Re}(\ln(\xi_{ka,l,n})) = \blacksquare$$

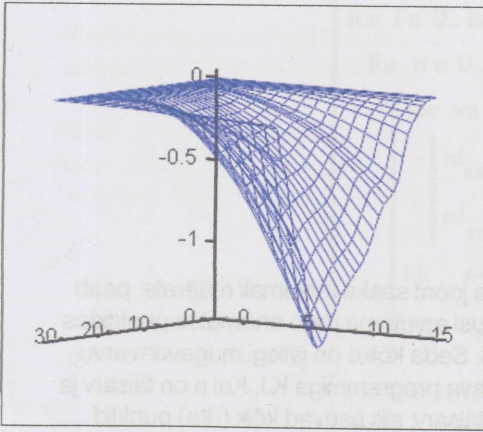
$$\blacksquare = r_{1,i} \sum_{l=0}^{lm} \sum_{n=0}^1 C_{vr_{l,n}} \cdot t_4(r_{1,i}, l) \cdot \left[(ID_{l,n})_{ka} + (C_{2,l,n})_{ka} \right]$$

Avaldise saab ümber kirjutada vormi, kus ühele poole võrdusmärgi jäävad liikmed tundmatute
konstantidega ja teisele ainult teadaolevate funktsioonidega. Esimese tähistame $C_{x_{i,ka}}$. Nii
saame parema poole järgi C_x arvutada. Sest võrdus peab kehtima igas väljapunktis $(r_{1,i}, \theta_{ka})$.

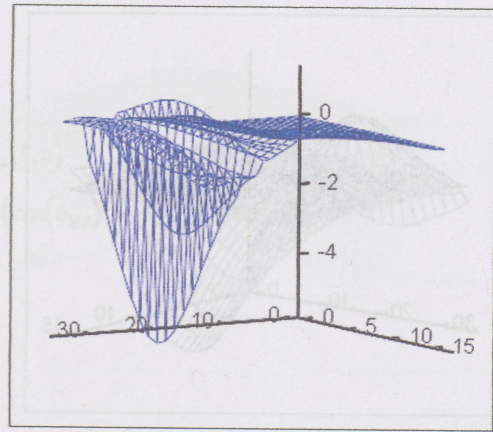
$$C_{x_{i,ka}} = \sum_{l=0}^{lm} \sum_{n=0}^1 \left[C_{vr_{l,n}} \cdot r_{1,i} \cdot t_4(r_{1,i}, l) \cdot (ID_{l,n})_{ka} - C_{v\theta_{l,n}} \cdot IR_{l,i} \cdot \text{Re}(\ln(\cos(\theta_{ka}), l, n)) \right]$$

$$lm := 9 \quad C_{x1_{i,ka}} := r_{1,i} \sum_{l=0}^{lm} \sum_{n=0}^1 C_{vr_{l,n}} \cdot t_4(r_{1,i}, l) \cdot (ID_{l,n})_{ka}$$

$$C_{x2_{i,ka}} := \sum_{l=0}^{lm} \sum_{n=0}^1 C_{v\theta_{l,n}} \cdot IR_{l,i} \cdot \text{Re}(\ln(\cos(\theta_{ka}), l, n))$$



Cx1



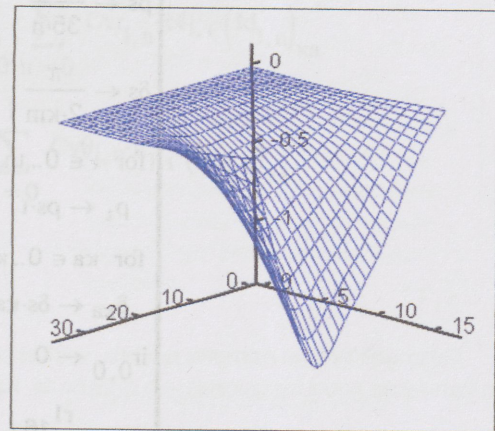
Cx2

Silume saadud massiive enne asetamist Cx avaldisse:

```

cs1(μ) := for ka ∈ 0..17
           for i ∈ 0..35
             wxi ← r1i
             wyi ← Cx1i,ka
             bs ← loess(wx, wy, μ)
             for i ∈ 0..35
               cx1i,ka ← interp(bs, wx, wy, r1i)
           cx1
  
```

Cx1 := cs1(0.5)

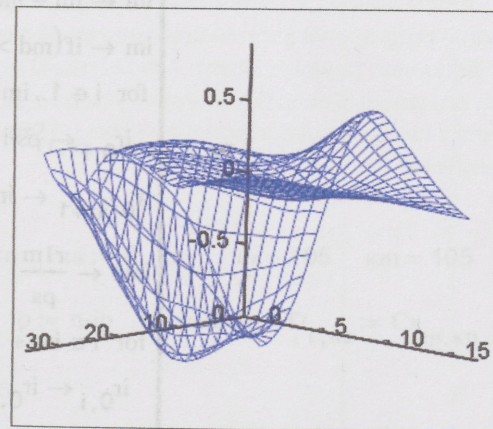


Cx1

```

cs2(μ) := for ka ∈ 0..17
           for i ∈ 0..35
             wxi ← r1i
             wyi ← Cx2i,ka
             bs ← loess(wx, wy, μ)
             for i ∈ 0..35
               cx2i,ka ← interp(bs, wx, wy, r1i)
           cx2
  
```

Cx2 := cs2(0.5)

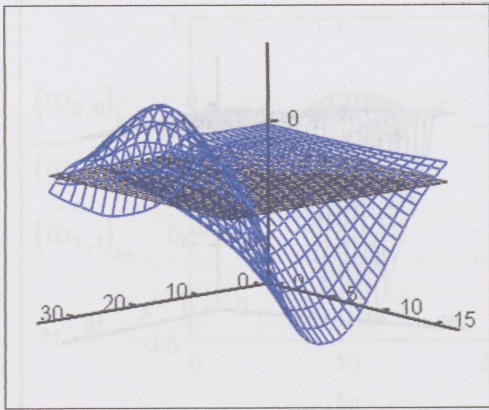


Cx2

Cx := Cx1 - Cx2

Kui valime konkreetsele väljapunktile vastava Cx väärtuse ja lisame joonisele sellel kõrgusel seisva tasandi, saame lõikejoone nende vahel. See ongi karakteristik joon, mis läbib väljavalitud väljapunkti. Leides Cx ja T vahe, on karakteristik joonel, kus vahe on 0.

$T_{i,ka} := Cx_{15,5}$



Cx, T

Et seda joont saaks lihtsamalt määrata, peab kõiki suursi arvutama palju enamates punktides kui 36x18. Seda kõike on jällegi mugavam arvutada vastava programmiga KJ. Kui n on täisarv ja m paaris-täisarv, siis asuvad kõik (i,ka) punktid tihedamalt võetud punktide peal.

```

KJ(lm, n, m, Cvr, Cvθ, μ) :=
  un ← n-35
  km ← m-17.5
  ps ←  $\frac{r1m}{35-n}$ 
  δs ←  $\frac{\pi}{2 \cdot km}$ 
  for i ∈ 0..un
    ρi ← ps·i
    for ka ∈ 0..km
      δka ← δs·ka
      ir0,0 ← 0
      im ←  $\frac{r116}{ps}$ 
      md ← mod(im, 1)
      im ← im - md
      im ← if(md > 0.5, im + 1, im)
      for i ∈ 1..im
        ir0,i ← ps·i
      ir0,im+1 ← ir0,im
      im1 ←  $\frac{r1m}{ps}$ 
      for i ∈ im + 1..im1
        ir0,i ← ir0,im+1 - (i - im - 1)·ps
      for l ∈ 1..lm
        for i ∈ 0..un
          irl,i ← Ir(ρi, l)

```

```

for l ∈ 0..lm
  for n ∈ 0..l
    for ka ∈ 0..km
      id_ka ← Iθ(δ_ka, l, n)
      rd_ka ← Re(In(cos(δ_ka), l, n))
      Id_l, n ← id
      Rd_l, n ← rd

```

```

for l ∈ 0..lm
  for i ∈ 0..ln
    τ4_l, i ← t4(ρ_l, l)

```

```

for i ∈ 0..ln
  for ka ∈ 0..km
    cx1_i, ka ← ρ_i · ∑_{l=0}^{lm} ∑_{n=0}^l Cvr_l, n · τ4_l, i · (Id_l, n)_ka
    cx2_i, ka ← ∑_{l=0}^{lm} ∑_{n=0}^l Cvθ_l, n · ir_l, i · (Rd_l, n)_ka

```

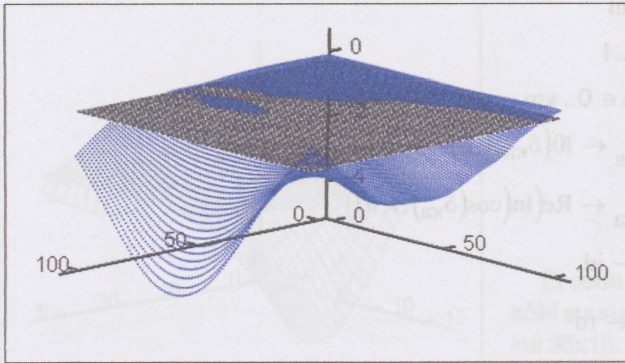
```

for ka ∈ 0..km
  for i ∈ 0..ln
    wx_i ← ρ_i
    wy_i ← cx2_i, ka
    bs ← loess(wx, wy, μ)
    for i ∈ 0..ln
      cx2_i, ka ← interp(bs, wx, wy, ρ_i)
  for i ∈ 0..ln
    for ka ∈ 0..km
      cx_i, ka ← cx1_i, ka - cx2_i, ka
cx

```

n := 3 m := 6 ln := n·35 km := m·17.5 i := 0..ln ka := 0..km ln = 105 km = 105

Cx := KJ(9,3,6, Cvr, Cvθ, 0.75) ip := 15 kp := 5 ip := n·ip kp := m·kp Tt_{i, ka} := Cx_{ip, kp}



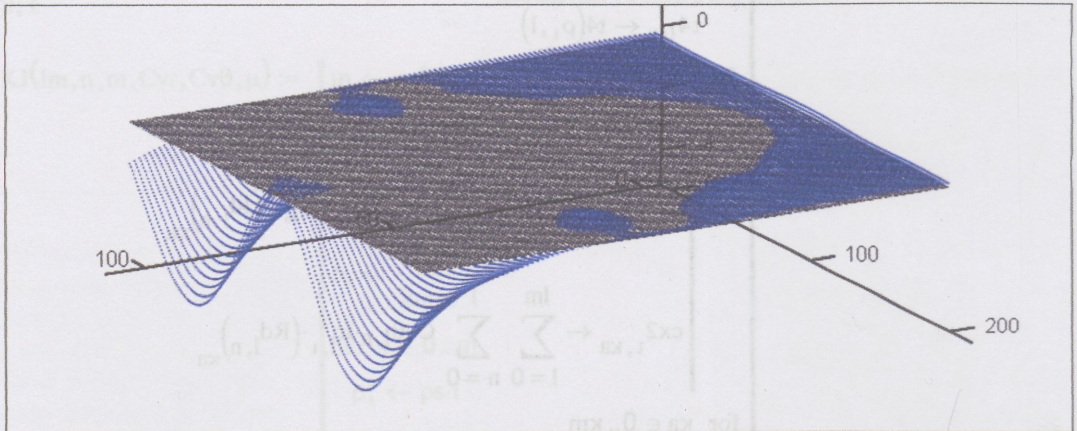
Cx, Tt

Kogu sfäärilise laengusüsteemi meridiaanse pooltasandi ulatuses saame karakteristliku joone, kui peegeldame vasakul olevat pilti parema seina kui ekvatoriaalse tasandi taha. Tulemust näitab järgmine joonis.

$$um := 2 \cdot km \quad u := 0..um$$

$$CX_{t,u} := \text{if}(u \leq km, CX_{t,u}, CX_{t,um-u})$$

$$TT_{t,u} := \text{if}(u \leq km, TT_{t,u}, TT_{t,um-u})$$



CX, TT

Järgmiselt leiame esimese joonise, st ühel pool ekvatoriaaltasandit asuvad karakteristikud, ja kanname need tasapinnalisele graafikule. Kõigepealt leiame kõvera ja tasase pinna vahe:

$$V_{t,ka} := CX_{t,ka} - TT_{t,ka}$$

Karakteristliku joone kohtades saab see olema 0 või selle lähedaste väärtustega. Osutub, et täpselt 0 on vahe väärtus ainult joone ühes punktis, selles mille jaoks on tasand joonistatud, st (ip, kp) . Muudes joone punktides on vahe 0 lähedane.

Allpool koostatud programm **J()** määrab mainitud punktide koordinaadid (r_i, θ_i) . Need kanname programmile järgnevale tasapinnalisele joonisele. Joonistele kanname ka punktid, millist jooned peavad läbima. Neid nimetatatakse ka **karakteristlikeks punktideks**. Tähisteks on sinine ring. Kontrolliks kanname joonisele teise punkti (roheline ruut), mis esitab sama punkti varem kasutatud koordinaatides (r_{ip}, θ_{kp}) . Täpse arvutuse puhul peavad mõlemad kokku langema.

$$J(n, m, V) := \begin{array}{l} un \leftarrow n \cdot 35 \\ km \leftarrow m \cdot 17.5 \\ \rho_s \leftarrow \frac{r1m}{un} \\ \delta_s \leftarrow \frac{\pi}{2 \cdot km} \\ \text{for } i \in 0..un \\ \rho_i \leftarrow \rho_s \cdot i \end{array}$$

```

for ka ∈ 0..km
  δka ← δs·ka
for i ∈ 0..in
  km ← 0
  for κ1 ∈ 1..km - 1
    km ← | κ1 if Vi,κ1-1 > 0 > Vi,κ1+1 ∨ Vi,κ1-1 < 0 < Vi,κ1+1
          | continue otherwise
  θji ← δkm
  rji ← ρi
vä0 ← rj
vä1 ← θj
vä

```

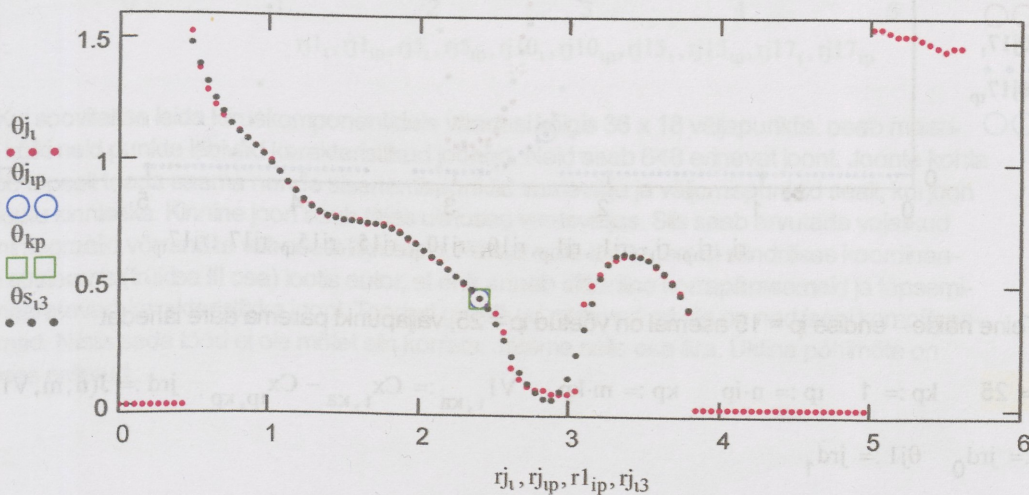
```

Si(t1, t2, θj, rj, μ) := | un ← t2 - t1
                       | for i ∈ 0..un
                       |   wxi ← rjt1+i
                       |   wyi ← θjt1+i
                       | bs ← loess(wx, wy, μ)
                       | for i ∈ 0..un
                       |   θjst1+i ← interp(bs, wx, wy, rjt1+i)
                       | θjs

```

jrd := J(n, m, V) r_j := jrd₀
θ_j := jrd₁ Silumise joont sidusas
osas programmiga Si() (mustad
punktid). Joont katkestavad osad,
kus θ_j on täpselt 0 – karakteristik
kaob vaateväljast. Toodud näites
saame joonel kaks eraldi seisvat
sidusat osa. Silumise teeme esi-
mesele.
t1 := 9 t2 := 71 t3 := t1..t2
θ_s := Si(t1, t2, θ_j, r_j, 0.25)

Lausnullidega ala otstes karakteristik joon kas siseneb vaatevälja või väljub sealt. Siin on vaateväljaks see ala, kus arvutusi tehakse – $i = 0 \dots 35$ ja $k = 0 \dots 17$ ($\theta = 0 \dots 1.57$, $r = 0 \dots 5.6$).



Edasi lisame sellele veel teistele kp väärtustele vastavaid jooni. Need on etteantud väljapunkti-dega peaaegu välja keskel. Pärast neid teeme samad joonised ka teise ip väärtuse 25 juures, kus väljapunktid asuvad joonise parema ääre lähedal.

ip := 15 $kp := 1$ $ip := n \cdot ip$ $kp := m \cdot kp$ $V1_{1,ka} := Cx_{1,ka} - Cx_{ip,kp}$ $jrd := J(n, m, V1)$

$rj1 := jrd_0$ $\theta j1 := jrd_1$ $kp1 := kp$ $\theta j1_{kp1} := 0.095$ Väljapunkt sattus katkestuse kohale
ja sai seetõttu valele kohale – parandasin seda.

$kp := 10$ $kp := m \cdot kp$ $V10_{1,ka} := Cx_{1,ka} - Cx_{ip,kp}$ $jrd := J(n, m, V10)$

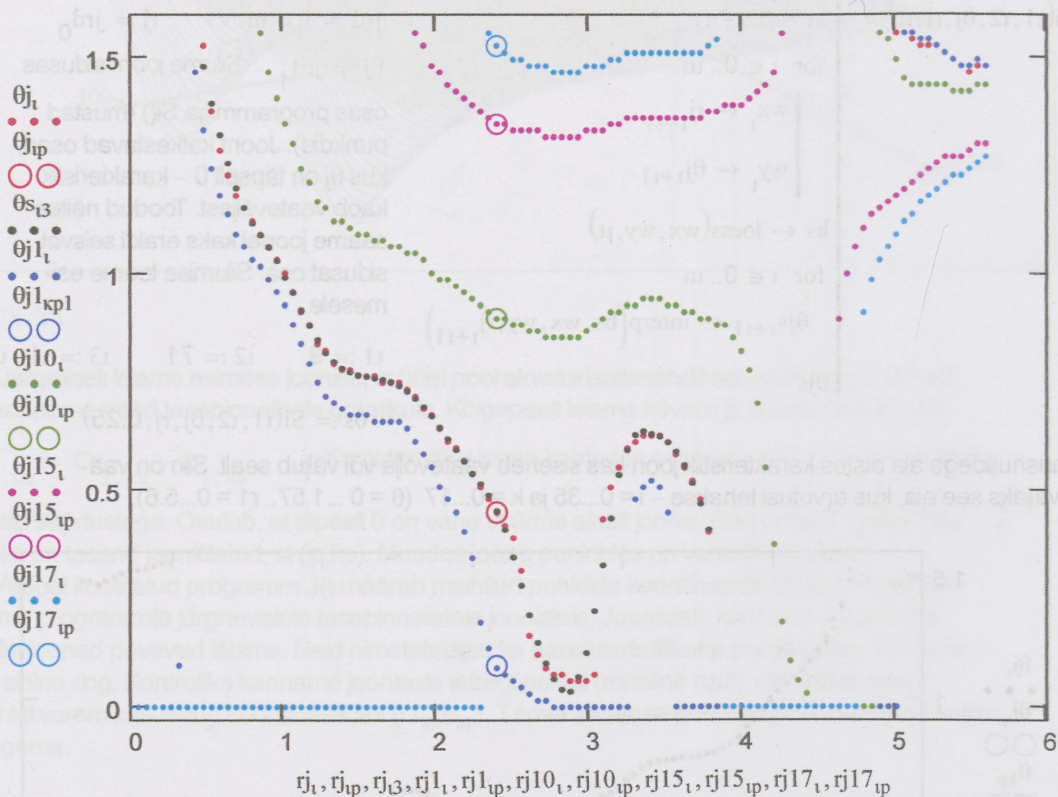
$rj10 := jrd_0$ $\theta j10 := jrd_1$

$kp := 15$ $kp := m \cdot kp$ $V15_{1,ka} := Cx_{1,ka} - Cx_{ip,kp}$ $jrd := J(n, m, V15)$

$rj15 := jrd_0$ $\theta j15 := jrd_1$

$kp := 17$ $kp := m \cdot kp$ $V17_{1,ka} := Cx_{1,ka} - Cx_{ip,kp}$ $jrd := J(n, m, V17)$

$rj17 := jrd_0$ $\theta j17 := jrd_1$



Teine näide – endise ip = 15 asemel on võetud ip = 25, väljapunkt parema ääre lähedal.

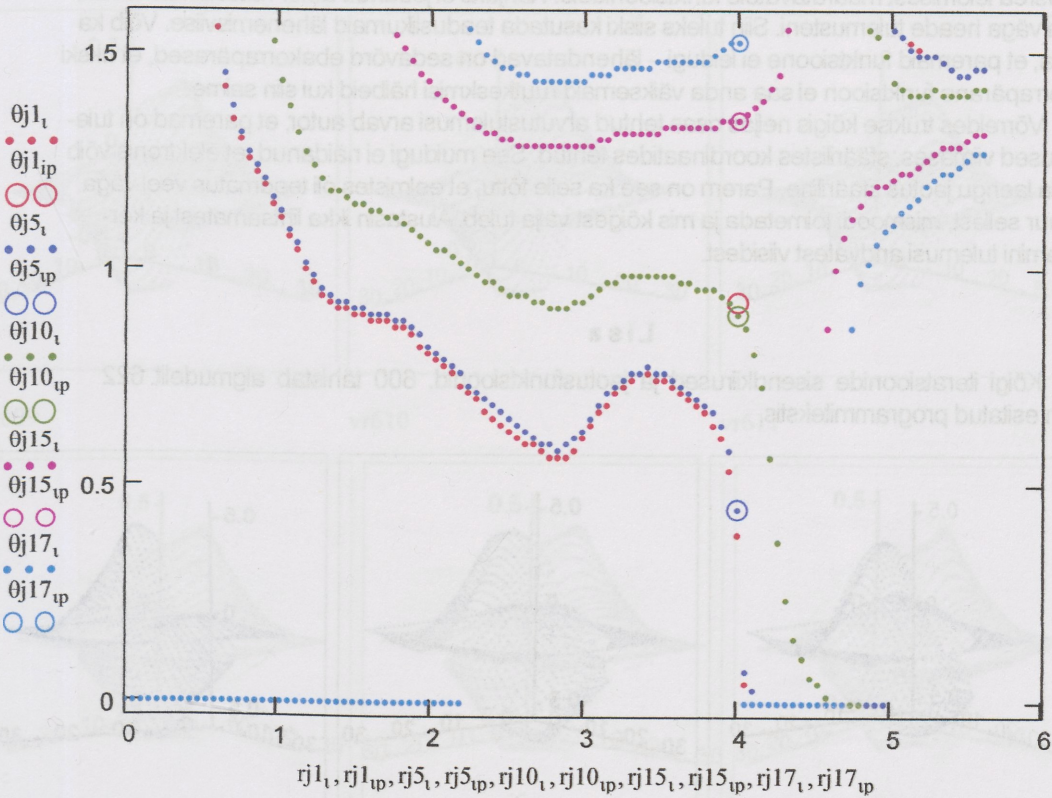
ip := 25 $kp := 1$ $ip := n \cdot ip$ $kp := m \cdot kp$ $V1_{1,ka} := Cx_{1,ka} - Cx_{ip,kp}$ $jrd := J(n, m, V1)$

$rj1 := jrd_0$ $\theta j1 := jrd_1$

$kp := 5$ $kp := m \cdot kp$ $V5_{1,ka} := Cx_{1,ka} - Cx_{ip,kp}$ $jrd := J(n, m, V5)$

$rj5 := jrd_0$ $\theta j5 := jrd_1$

$kp := 10$ $kp := m \cdot kp$ $V10_{1,ka} := Cx_{1,ka} - Cx_{1p,kp}$ $jrd := J(n,m,V10)$
 $rj10 := jrd_0$ $\theta j10 := jrd_1$
 $kp := 15$ $kp := m \cdot kp$ $V15_{1,ka} := Cx_{1,ka} - Cx_{1p,kp}$ $jrd := J(n,m,V15)$
 $rj15 := jrd_0$ $\theta j15 := jrd_1$
 $kp := 17$ $kp := m \cdot kp$ $V17_{1,ka} := Cx_{1,ka} - Cx_{1p,kp}$ $jrd := J(n,m,V17)$
 $rj17 := jrd_0$ $\theta j17 := jrd_1$



Kui soovitakse leida kiiruskomponentidele väärtusi kõigis 36×18 väljapunktis. peab maas-
 ma kõiki neid punkte läbivad karakteristikud jooned. Neid saab 648 erinevat joont. Joonte kohta
 peab täpselt teada saada nende sisenemispunktid vaatevälja ja väljumispunktid sealt, kui joon
 ei osutu kinniseks. Kinnine joon asub täies ulatuses vaateväljas. Siis saab arvutada vajalikud
 joonintegraalid võrrandite vabadest liikmetest. Pärast selle töö tegemist silindrilises koordinaa-
 tade süsteemis (trükise III osa) lootis autor, et ehk annab sfääriline korrapärasemaid ja täpsemi-
 ni määratavaid karakteristikke jooni. Toodud graafikud näitavad, et siin on nad isegi komplitseeritud.
 Niisiis seda tööd ei ole mõtet siin korrata. Jätame selle osa ära. Üldine põhimõte on
 III osas esitatud.

16. Kokkuvõtteks

Tehtud arvutused näitavad, et karakteristlike joonte meetod vaadeldud diferentsiaalvõrrandite lahendamisel on teostatav ainult siis, kui on teada täpsed valemid osatuletiste kordajatele. Vaadeldud juhul on need samuti määratavad funktsioonid ja saame nendele järkjärgulise lähendamise meetodil ligikaudsed arvumassiivid. Nende täpsus ei ole piisav karakteristlike joonte määramiseks. Seetõttu ei ole loota, et see meetod kõlbab isegi ligikaudse lahendi kontrolliks.

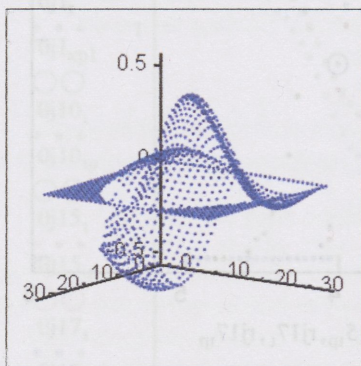
Täpsete valemite olemasolul võrrandite kordajatele ei ole vajadust ka lahendada võrrandeid lähendusmeetodil. Seda saaks teha karakteristlike joonte abil. Kahjuks ei ole autoril kogemusi niisuguse juhu kohta ega oska arvata kui võrd edukas on sellelgi juhul karakteristlike joonte meetod.

Mis puudutab kasutatud järkjärgulise lähendamise viisi võib väita, et kõik oleneb õige lähendusrea leidmisest määratavatele funktsioonidele. Kahjuks ei jõudnud autor katsetamismeetodiga väga heade tulemusteni. Siin tuleks siiski kasutada teaduslikumaid lähenemisviise. Võib ka olla, et paremaid funktsioone ei leidugi – lähendatavad on sedavõrd ebakorrapärased, et ükski korrapärane funktsioon ei saa anda väiksemaid ruutkeskmisi hälbeid kui siin saime.

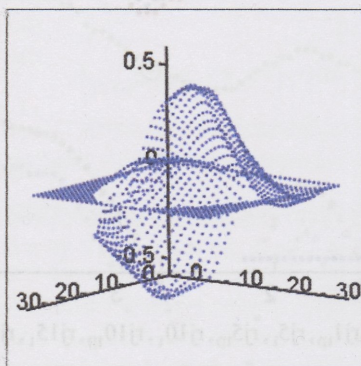
Võrreldes trükise kõigis neljas osas tehtud arvutustulemusi arvab autor, et paremad on tulemused viimases, sfäärilistes koordinaatides tehtud. See muidugi ei näidanud, et elektronis võib olla laengu jaotus sfääriline. Parema on see ka selle tõttu, et eelmistes oli teadmatus veel väga suur sellest, mismoodi toimetada ja mis kõigest välja tuleb. Alustasin ikka lihtsamatest ja kergemini tulemusi andvatest viisidest.

Lisa

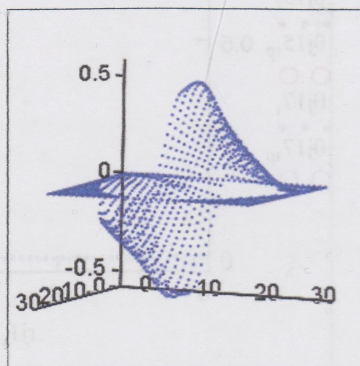
Kõigi iteratsioonide sisendkiirused ja jaotusfunktsioonid. 600 tähistab algmudelit. 622 on esitatud programmitekstis.



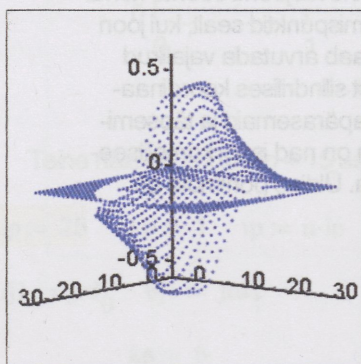
vr600



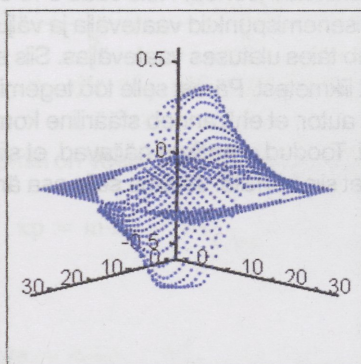
vr601



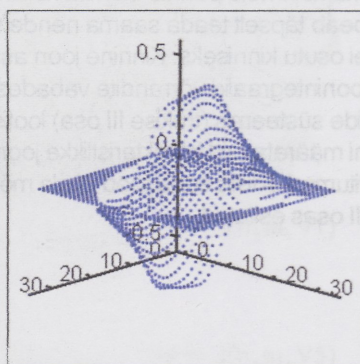
vr602



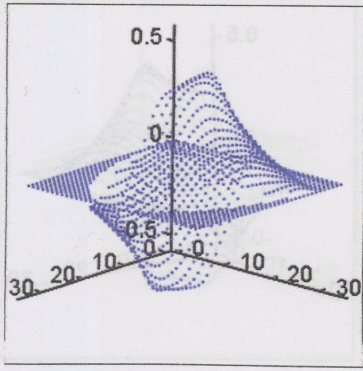
vr603



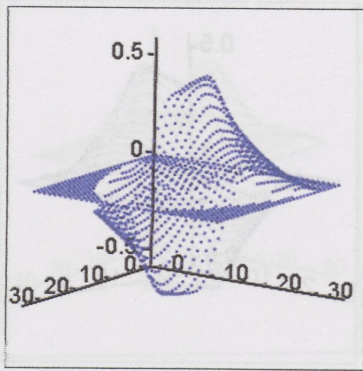
vr604



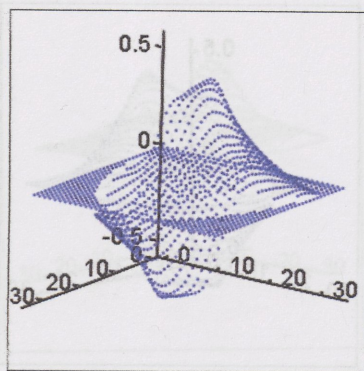
vr605



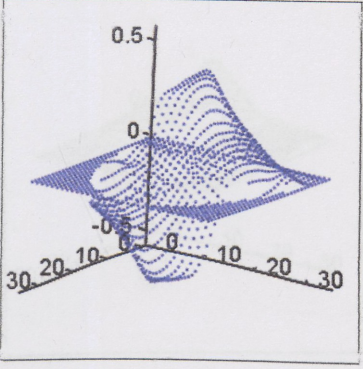
vr606



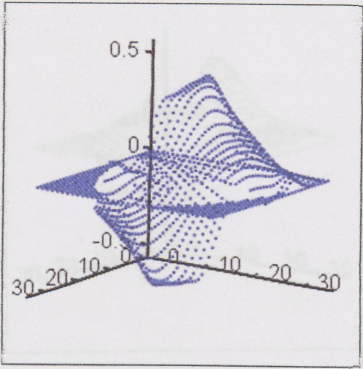
vr607



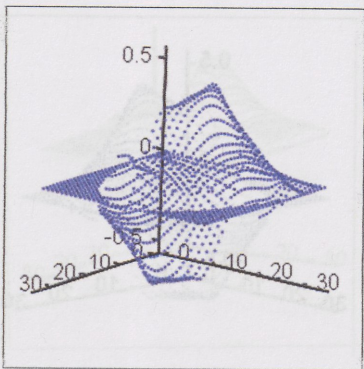
vr608



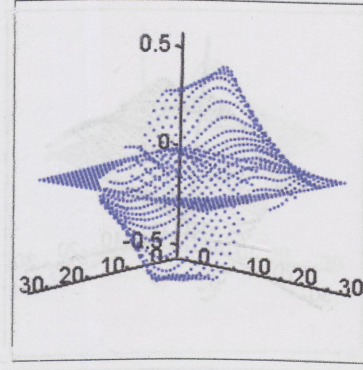
vr609



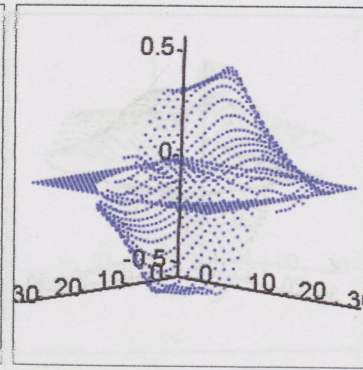
vr610



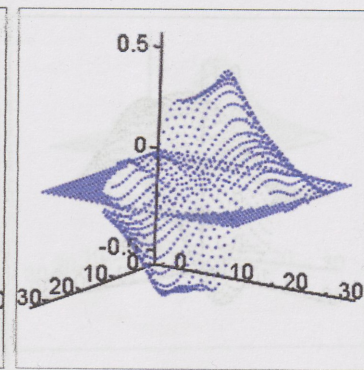
vr611



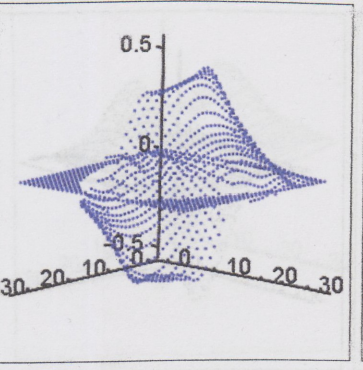
vr612



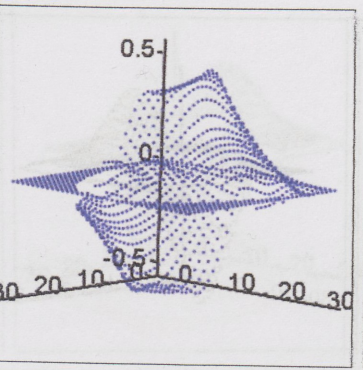
vr613



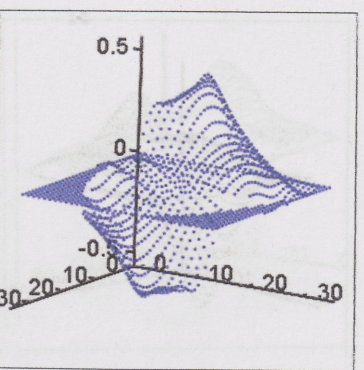
vr614



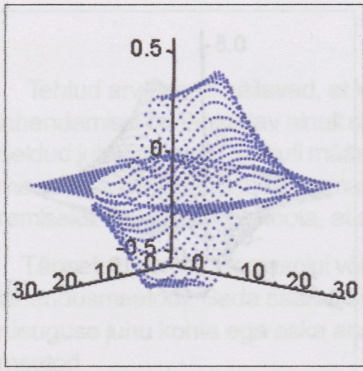
vr615



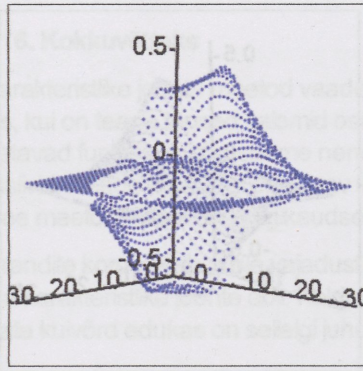
vr616



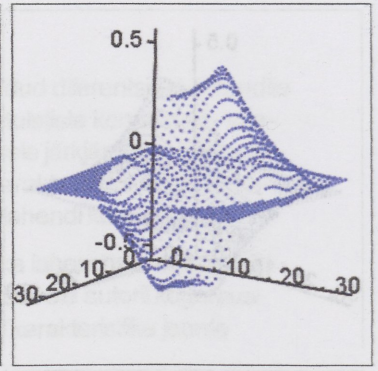
vr617



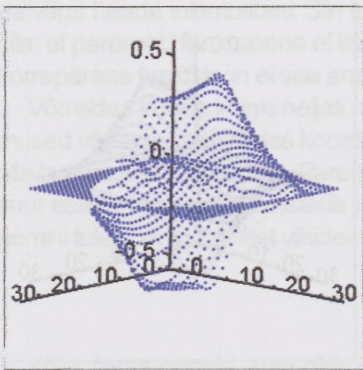
vr618



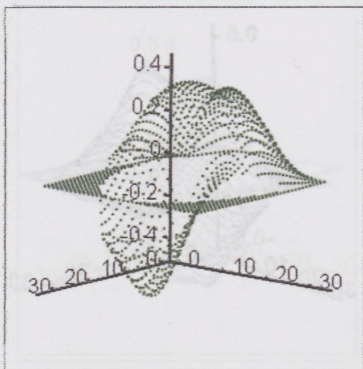
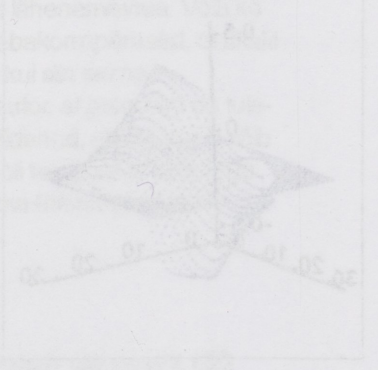
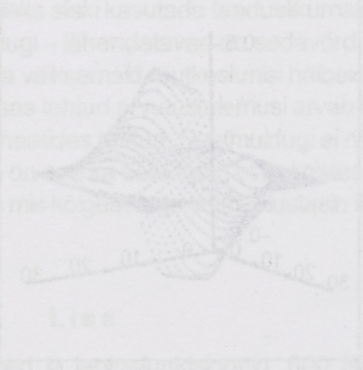
vr619



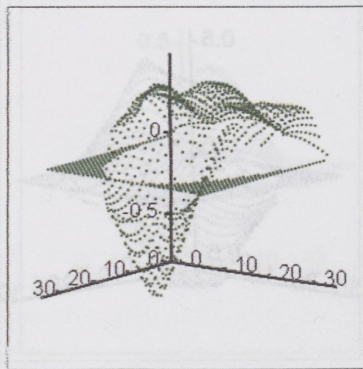
vr620



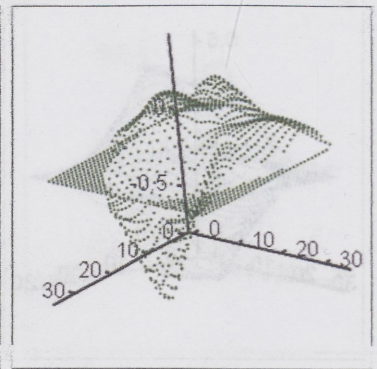
vr621



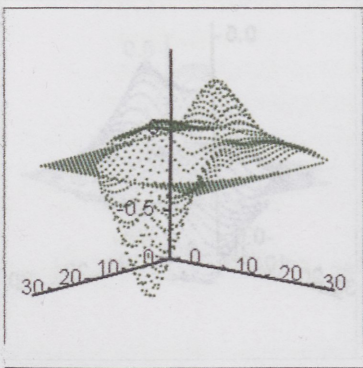
vθ600



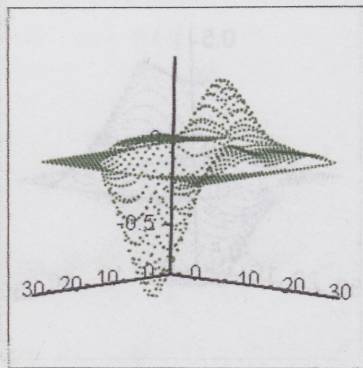
vθ601



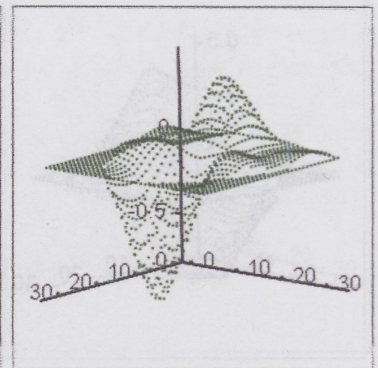
vθ602



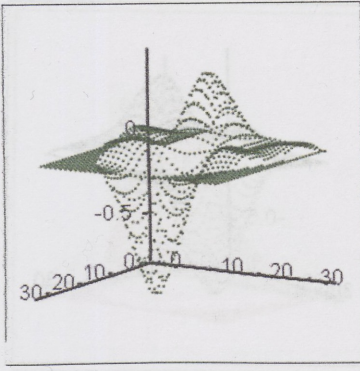
vθ603



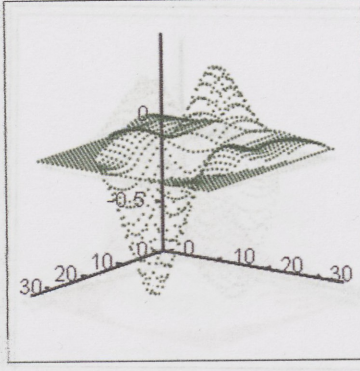
vθ604



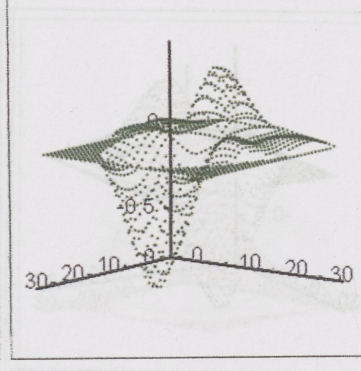
vθ605



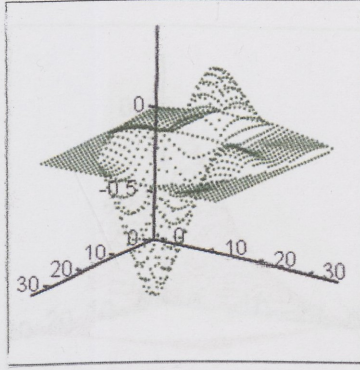
v0606



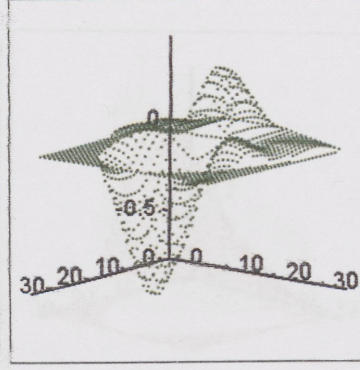
v0607



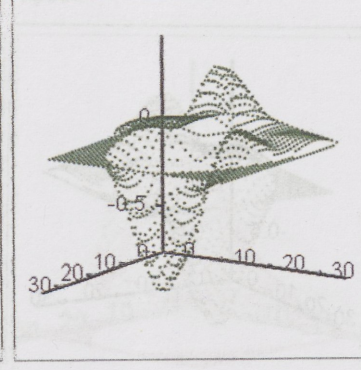
v0608



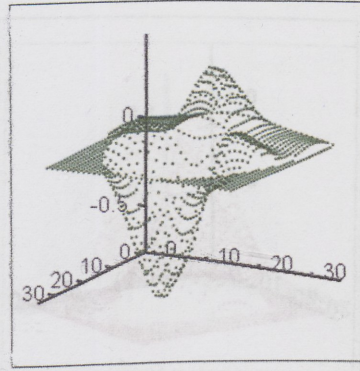
v0609



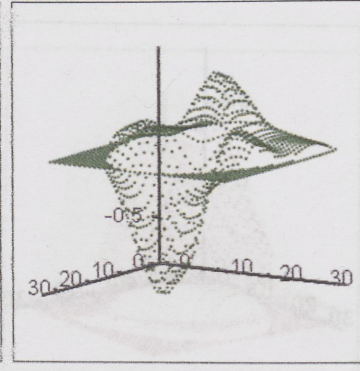
v0610



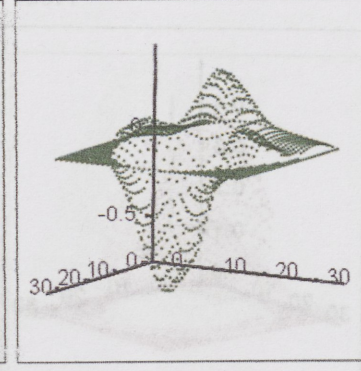
v0611



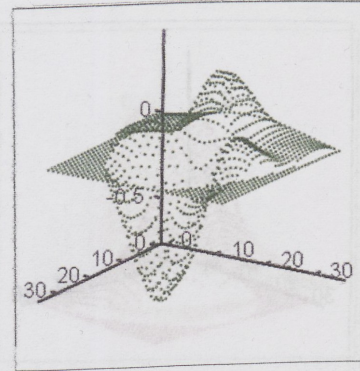
v0612



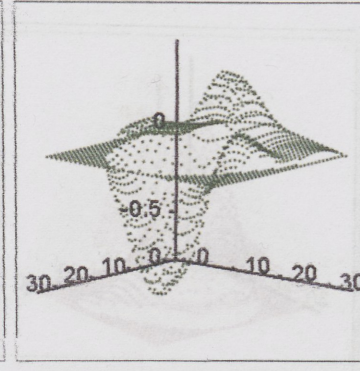
v0613



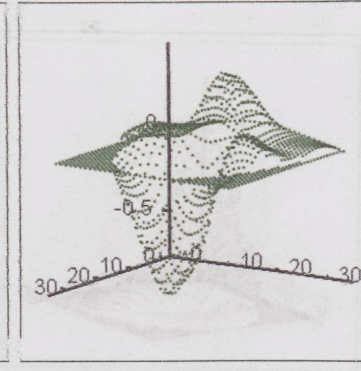
v0614



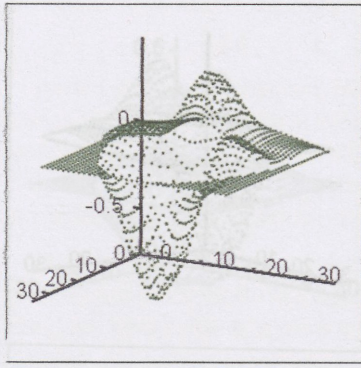
v0615



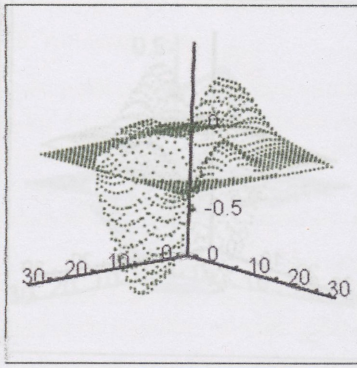
v0616



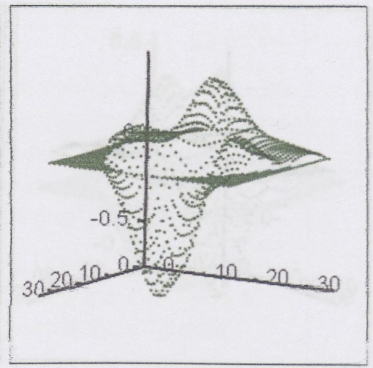
v0617



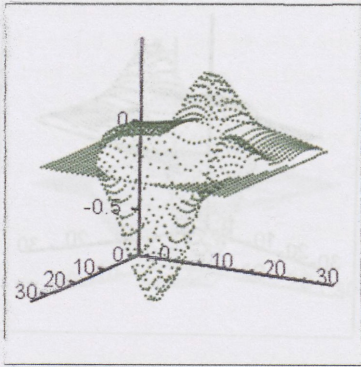
v0618



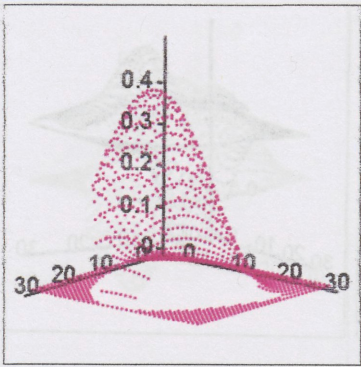
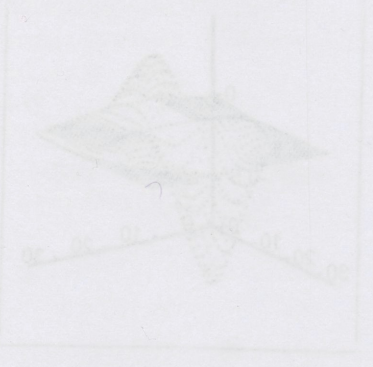
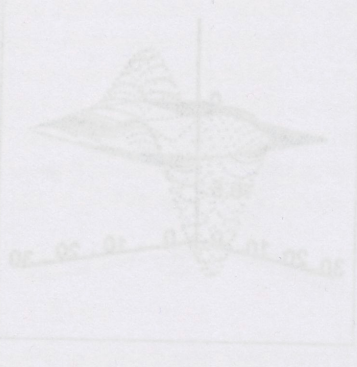
v0619



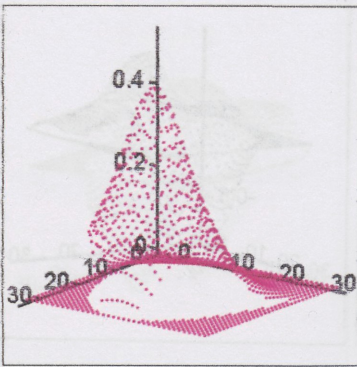
v0620



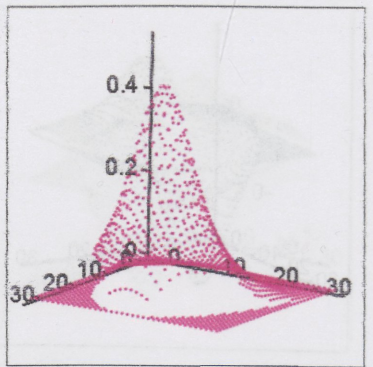
v0621



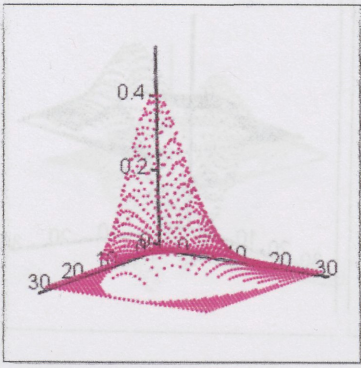
vφ600



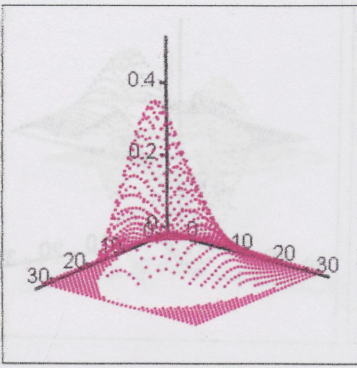
vφ601



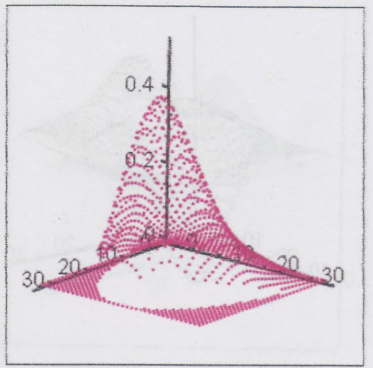
vφ602



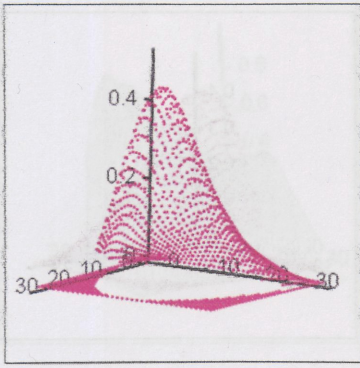
vφ603



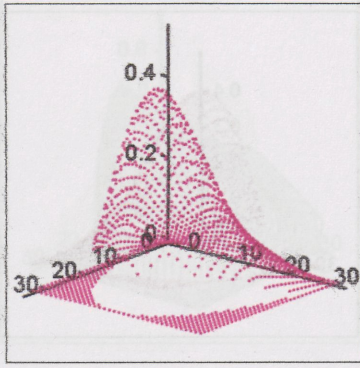
vφ604



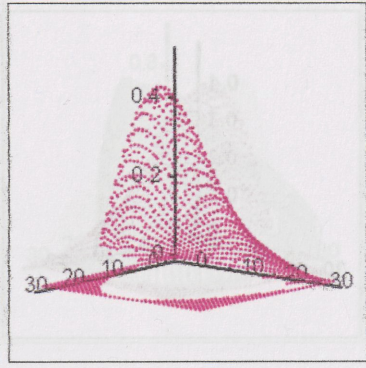
vφ605



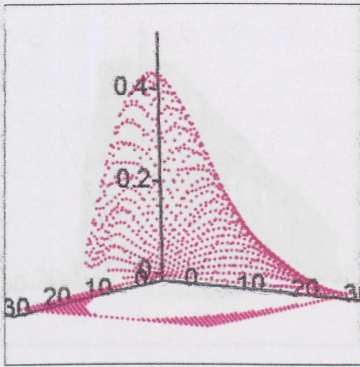
vφ606



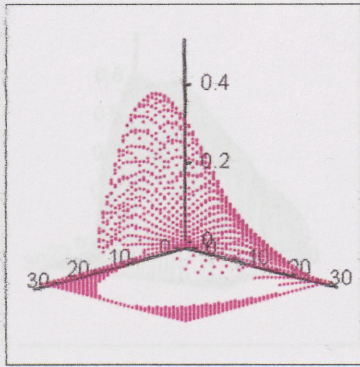
vφ607



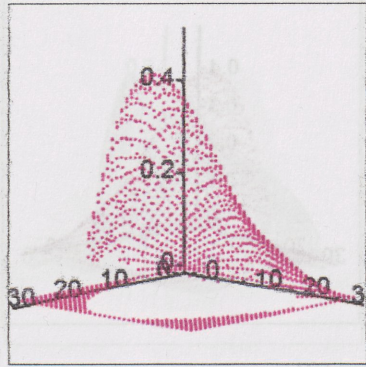
vφ608



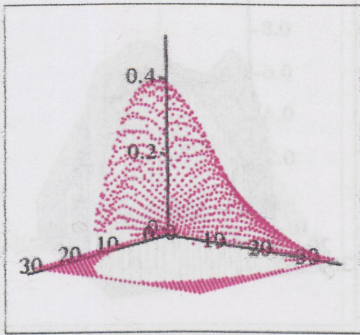
vφ609



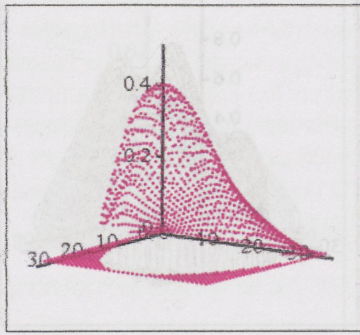
vφ610



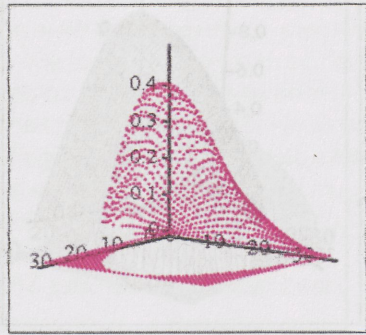
vφ611



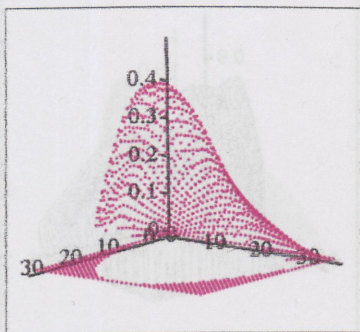
vφ612



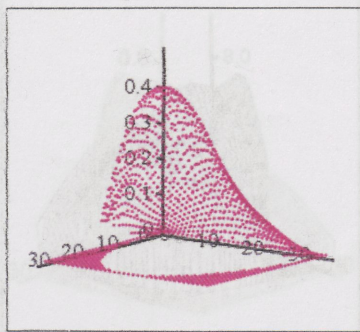
vφ613



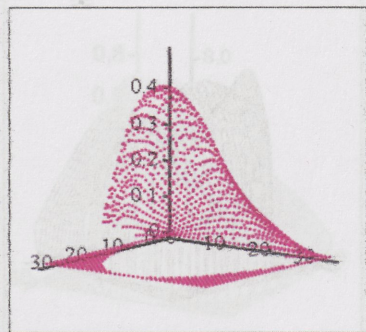
vφ614



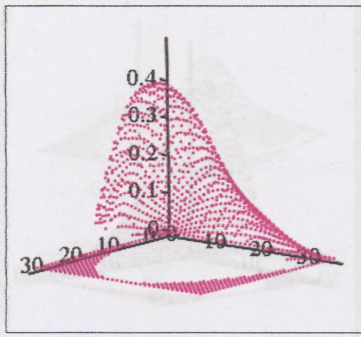
vφ615



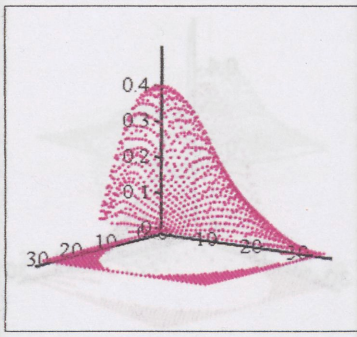
vφ616



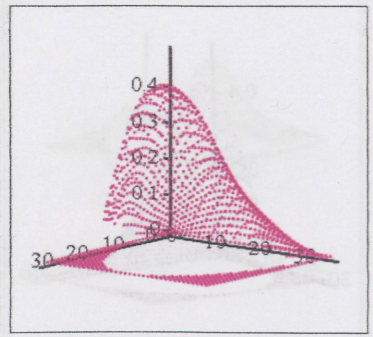
vφ617



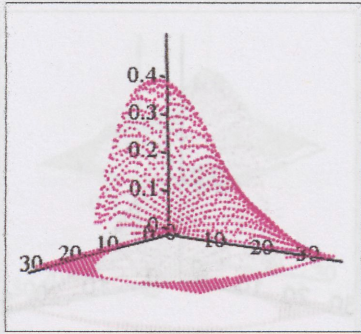
νφ618



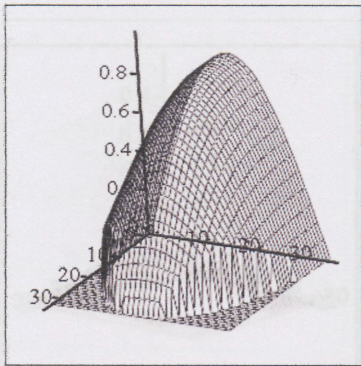
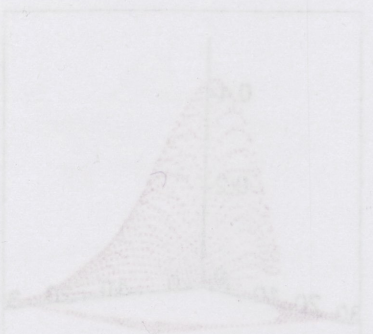
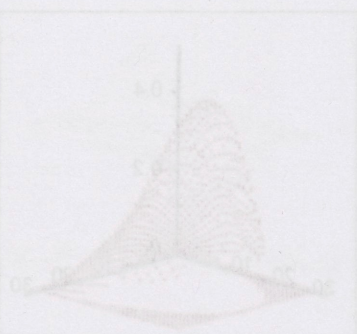
νφ619



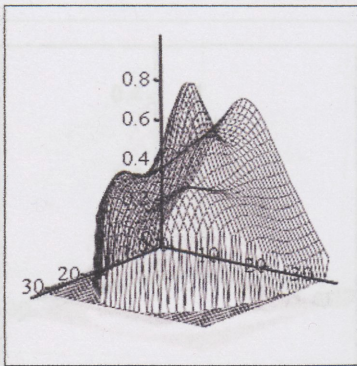
νφ620



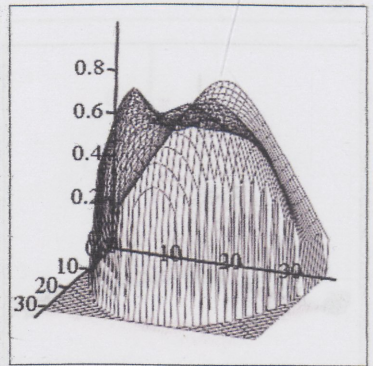
νφ621



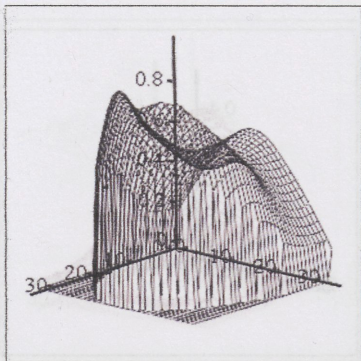
τα600



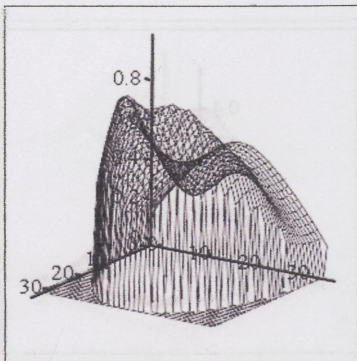
τα601



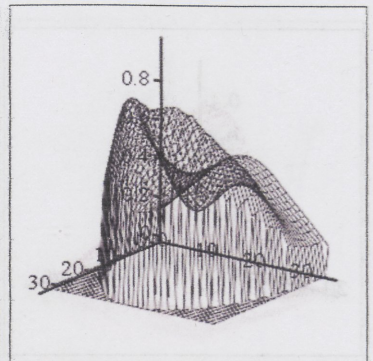
τα602



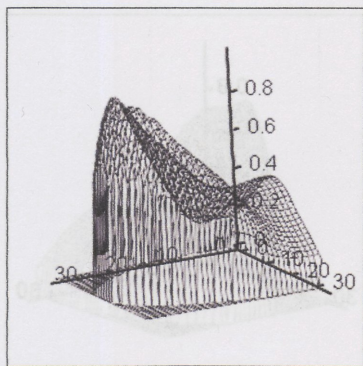
τα603



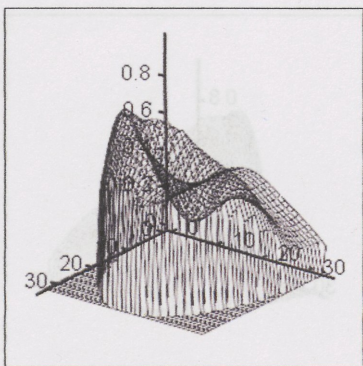
τα604



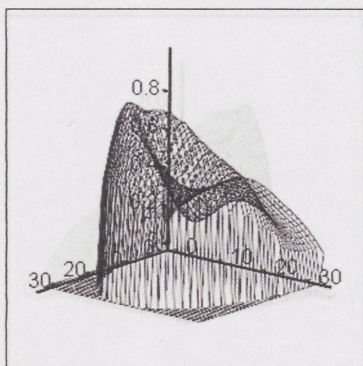
τα605



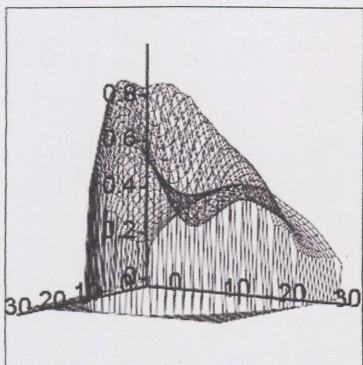
та606



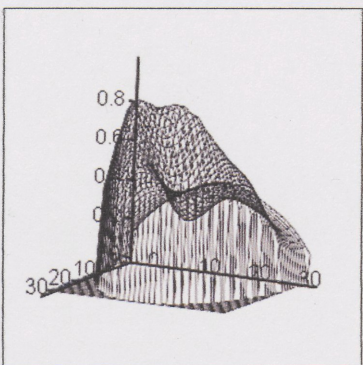
та607



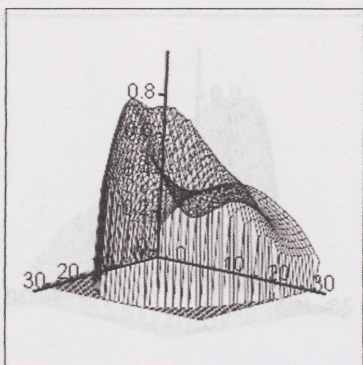
та608



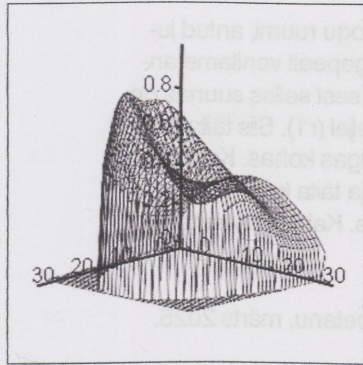
та609



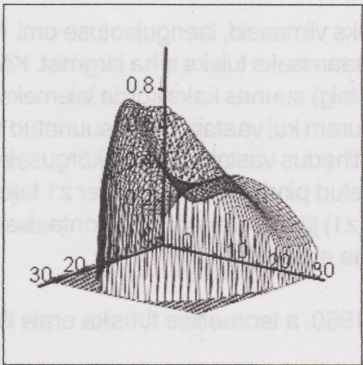
та610



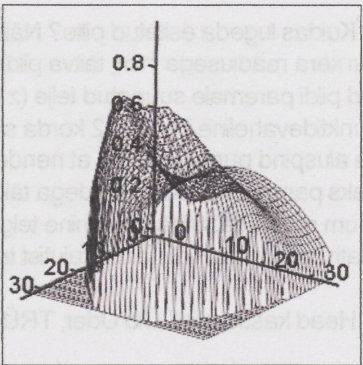
та611



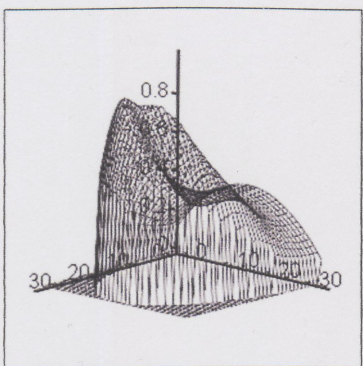
та612



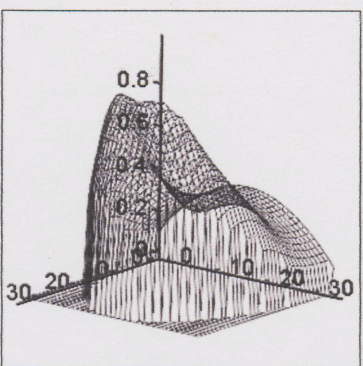
та613



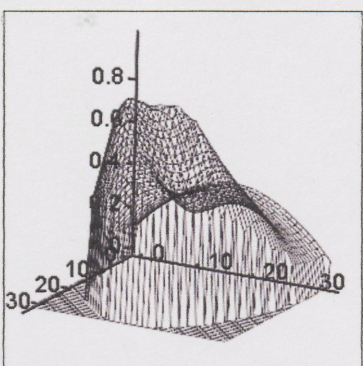
та614



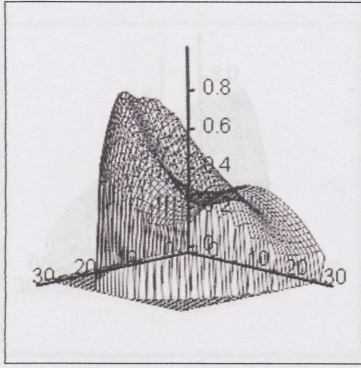
та615



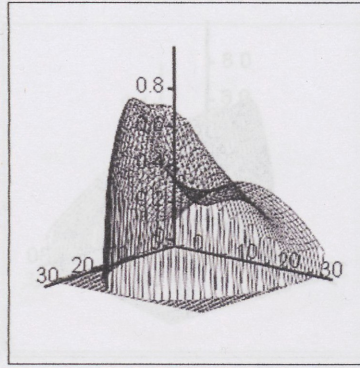
та616



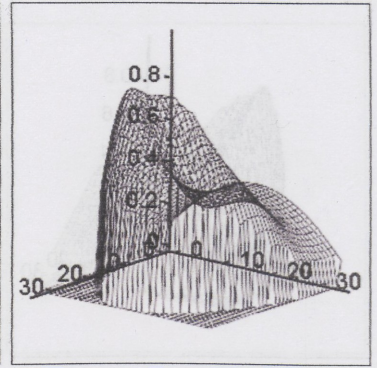
та617



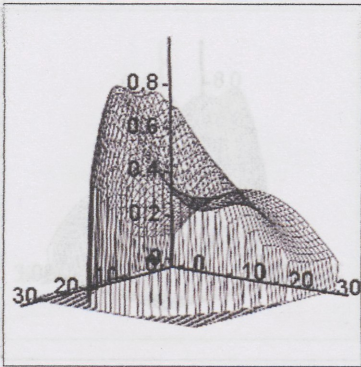
та618



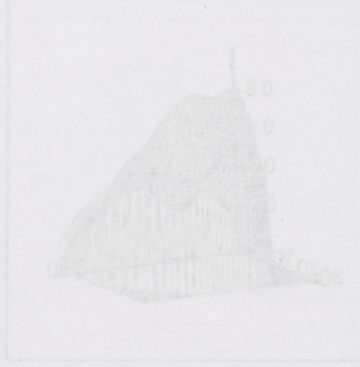
та619



та620



та621



та622

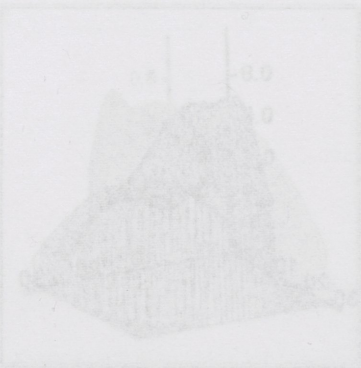


та623

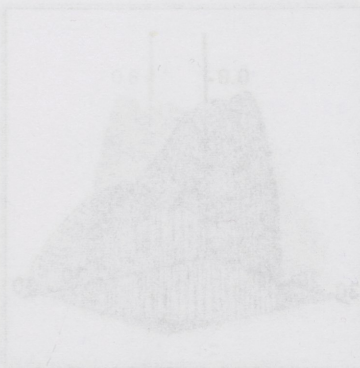
та624

Kuidas lugeda esitatud pilte? Näiteks viimaseid, laengujaotuse omi. Kogu ruumi, antud ju-
 nni kera raadiusega r_1 m, täita pildi saamiseks tuleks teha järgmist. Kõigepealt venitame an-
 tud pildi paremale suunatud telje (z_1 -telg) suunas kaks korda laiemaks, sest selles suunas on
 punktidevaheline kaugus 2 korda suurem kui vaataja poole suunatud teljel (r_1). Siis täita jooni-
 se aluspind punktidega nii, et nende tihedus vastaks joonise kõrgusele igas kohas. Kolman-
 daks panna saadud punktidega täidetud pind pöörlema ümber z_1 telje ja täita kogu kera sise-
 ruum nendega. Sfääri peamine telg (z_1) jääb sellel juhul horisontaalseks. Kahjuks kasutatud
 Mathcadis sellist võimalust kujutist teha ei olnud.

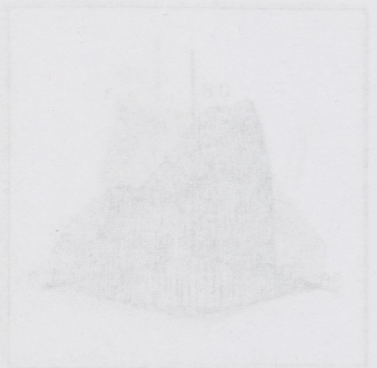
Head kasutamist! Ülo Uder, TRÜ 1960. a teoreetilise füüsika erala lõpetanu, märts 2025.



та625



та626



та627

та628