Abhandlungen

zur

Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik.

Von

W. Lexis.

Mit 10 Abbildungen im Text.

Verlag von Gustav Fischer in Jena
1903.

Vorbemerkung.

Nur zwei von den folgenden Abhandlungen (VII und VIII) sind in ihrer gegenwärtigen Gestalt — abgesehen von einigen Anmerkungen — schon früher veröffentlicht worden. Die übrigen sind teils ganz neue Bearbeitungen älterer Aufsätze, teils erscheinen sie hier zum ersten Male, und zwar hauptsächlich zu dem Zweck, die übrigen soweit zu ergänzen, dass die wesentlichen Grundzüge der Theorie der demographischen und demologischen Statistik sich in der Schrift vereinigt finden. Die mathematischen Ausführungen sind durchweg elementar gehalten, wenn sich auch manches mit Hülfe einfacher Integrationen kürzer hätte darstellen lassen.

Göttingen, 30. Dezember 1902.

W. Lexis.

Inhalt.

I. Die graphische Konstruktion der Sterblichkeitsverhältnisse[1].

1. Die zur leichteren Uebersicht der statistischen Beobachtungen dienenden graphischen Darstellungen sind meistens solche, die durch Linien oder andere geometrische Grössen das Verhältnis gewisser Zahlen veranschaulichen, sei es, dass diese sich auf ein in der Zeit veränderliches statistisches Objekt derselben Art oder auf verschiedene miteinander zu vergleichende Objekte beziehen. Solche Darstellungen sind oft recht nützlich, sie haben aber im ganzen einen mehr pädagogischen als selbständigen wissenschaftlichen Wert. Wesentlich anderer Art sind geometrische Konstruktionen, die nicht bestimmte Zahlen, sondern die Abgrenzungen darstellen, durch welche gewisse Gruppen von Einzelfällen zu bestimmten Gesamtheiten vereinigt werden. Solche Konstruktionen lassen nicht nur die zwischen den einzelnen Gesamtheiten bestehenden Beziehungen erkennen, sondern es ist auch leicht, mit ihrer Hilfe diese Beziehungen geometrisch zu beweisen, während diese Beweisführung auf dem Wege der Rechnung weit umständlicher ist. Insbesondere lässt sich diese Methode zur Aufstellung einer streng korrekten Sterblichkeitstabelle mit Vorteil verwenden.

Bei der Konstruktion der Sterbetafeln hatte man früher die Thatsache ausser acht gelassen, dass es nirgendwo eine grössere Anzahl von Personen giebt, die wirklich in demselben Augenblick geboren sind und genau in demselben Alter stehen. Eine Absterbeordnung soll angeben, wie viele von 1000 Geborenen das Alter von genau 1, 2, 3 u. s. w. Jahren erreichen; aber direkte

1) Neue Bearbeitung einer in den „Annales de Démographie internationale" IV. Année, Paris 1880, p. 297) erschienenen Abhandlung „La représentation graphique de la mortalité au moyen de points mortuaires".

Beobachtungen lassen sich nur anstellen an Personen, die in einer gewissen Zeitstrecke geboren sind, z. B. im Kalenderjahr 1850, die also die „Generation" dieses Jahres bilden und sich in jedem Beobachtungszeitpunkt in verschiedenen Altersabstufungen zwischen x und x + 1 Jahren befinden. Zieht man nun von der Zahl der Geborenen des Jahres 1850 die Zahl der in eben diesem Kalenderjahre Gestorbenen ab, so ist der Rest offenbar grösser, als die Zahl derjenigen, die von jener Jahresgeneration das Alter von genau einem Jahre erreichen, denn diejenigen, die z. B. im Dezember geboren sind, haben am Ende des Kalenderjahres erst ein Alter von 0 bis 31 Tagen und eine Anzahl von ihnen wird noch im Kalenderjahr 1851 vor Erreichung des Alters von einem vollen Jahre sterben. Zieht man andererseits die Zahl der Kinder ab, die 1850 im Alter von 0—1 Jahre gestorben sind, so erhält man allerdings ein richtigeres, aber doch kein genaues Resultat, denn diese Todesfälle sind nicht sämtlich aus der Generation von 1850, sondern teilweise auch aus der von 1849 hervorgegangen. Ein Kind, das z. B. im Januar im Alter von 2 Monaten stirbt, war im Laufe des Novembers 1849 geboren. Andererseits werden allerdings die Kinder, die im November 1850 geboren sind und im Alter von 2 Monaten sterben, sich nicht in der in Rede stehenden Gesamtheit von Gestorbenen finden, da ihr Tod erst in den Januar 1851 fällt; es findet also eine gewisse Ausgleichung statt, aber diese wird nie ganz vollständig sein und es bleibt immer eine grössere oder geringere Ungenauigkeit übrig, d. h. also, die Zahl derjenigen, die aus der Generation von 1850 wirklich die Altersgrenze von genau einem Jahr erreichen, ist der auf dem bezeichneten Wege gefundenen nicht vollkommen gleich. Ebensowenig kann man durch unmittelbare Beobachtung die Zahl derjenigen erhalten, die, aus einem bestimmten Geburtsjahr stammend, genau die untere Grenze einer Altersklasse, z. B. der von 10—11 Jahren erreichen. Denn die Volkszählung kann bestenfalls, wenn sie genau am Ende eines Kalenderjahres stattfindet, nur angeben, wie viele Angehörige der rückwärtsliegenden Jahresgenerationen in den entsprechenden Altersklassen stehen, also z. B. wie viele von den Geborenen des Jahres 1850 am 31. Dezember 1861 (dem Zählungstage) in der Altersklasse von 10—11 Jahren stehen. Die Volkszählung ergiebt also nur Gesamtheiten von Gleichzeitigen, unterschieden nach Altersklasssen, also mit einem Spielraum des Alters, der bei einjährigen Klassen eben ein Jahr beträgt.

2. Es ist aber möglich, indirekt Gesamtheiten von gleichalterigen Lebenden aus derselben Jahresgeneration zu bilden, die also diese gleiche Altersgrenze nach und nach im Laufe eines Jahres erreichen; und ebenso kann man indirekt Gesamtheiten aller Verstorbenen zusammensetzen, die aus einer einzigen Jahresgeneration hervorgegangen und in einer einzigen einjährigen Altersklasse gestorben sind. Die Zahl dieser Gestorbenen dividiert durch die Zahl der Lebenden, welche die untere Grenze der betreffenden Altersklasse erreichen, giebt dann den theoretisch richtigen Ausdruck für die empirische Sterbenswahrscheinlichkeit dieser Altersklasse.

Knapp hat zuerst diese Beobachtungsweise der Sterblichkeit und die Bestimmung der verschiedenen Gesamtheiten von Lebenden und Gestorbenen durchgeführt und zwar mit Anwendung von Formeln der Integralrechnung[1]. Das richtige Prinzip für eine den Anforderungen genügende statistische Erhebung der Sterbefälle hatte kurz vorher bereits G. Meyer[2] angegeben und Becker[3] hatte es in der Oldenburgischen Statistik bereits zur Anwendung gebracht. Knapp und Becker haben auch einfache graphische Konstruktionen der in Frage kommenden Gesamtheiten angegeben; ich glaube indes, dass in mancher Beziehung die Darstellungsmethode vorzuziehen ist, die ich in meiner „Einleitung in der Theorie der Bevölkerungsstatistik"[4] angewandt habe.

1) Die Ermittlung der Sterblichkeit etc., Leipzig, 1868. Vergl. auch „Die Sterblichkeit in Sachsen" (Leipzig 1869) und „Theorie des Bevölkerungswechsels" (Braunschweig 1874).

2) In Hildebrands Jahrbüchern, Bd. VIII (1867), S. 19. Für das erste Lebensjahr hat übrigens Sargant schon 1865 die richtige Darstellung gegeben. Journ. of the Statistical Society, Vol XXVIII, p. 76.

3) Statistische Mitteilungen über das Grossherzogtum Oldenburg, IX, 1867. — Graphische Darstellung in der Schrift „Zur Aufstellung von Sterbetafeln" etc. (Berlin 1874).

4) Strassburg 1875. Die Schrift wurde schon 1874 gedruckt und ist von der eben erwähnten Abhandlung Beckers ganz unabhängig entstanden. Fast ganz dieselbe Konstruktion, jedoch ohne Anwendung der Sterbepunkte, in einer ursprünglich holländisch erschienenen Doktordissertation von Verwey, die in englischer Uebersetzung im Journal of the Statistical Society, Dezember 1875, veröffentlicht ist. Ansatz zu einer ähnlichen Konstruktion auch bei Brasche, Beitrag zur Methode der Sterblichkeitsberechnung. Würzburg 1870. Zeuner hat (Abhandlungen zur mathematischen Statistik, Leipzig

Fig. 1.

Die Linie OX (Fig. 1) stelle die von dem Anfangspunkt der Zeitrechnung O ab verflossene Zeit dar. Die von den Geburtspunkten a, b, c, d, e . . . auslaufenden Lebenslinien der einzelnen Geborenen mögen in den Sterbepunkten A, B, C, D, E . . . endigen. Aber diese Lebenslinien fallen alle mit der allgemeinen Zeitlinie zusammen und

1869) eine stereometrische Konstruktion angewandt, indem er die Knapp'schen Doppelintegrale räumlich veranschaulichte. Es ist durchaus unberechtigt, wenn Zeuner (dessen Schrift ich übrigens in meiner Einleitung in die Theorie der Bevölkerungsstatistik, S. 33 und auch in dem französischen Text der vorliegenden Abhandlung angeführt habe) in einer späteren Arbeit (Beilage zur Zeitschrift des sächs. statistischen Bureaus, XXXI, Dresden 1886) behauptet, meine Konstruktion sei dem Grundriss seiner stereometrischen Darstellung entnommen. Ich bin von einer ganz anderen Vorstellung ausgegangen, als Zeuner, und wenn dabei dieselbe Form eines Netzwertes entstand, wie in dem Zeuner'schen Grundriss, so ist doch der Inhalt desselben gänzlich verschieden gedacht. Bei meiner Darstellung handelt es sich um die mit verschiedener Dichtigkeit in der Ebene verbreiteten Sterbepunkte und wenn man von dieser planimetrischen zu einer stereometrischen Vorstellung übergehen wollte, so hätte man nur Senkrechte in der Grundebene proportional der Punktendichtigkeit an ihren Fusspunkten zu errichten und deren oberen Endpunkt durch eine Fläche zu verbinden. Diese Senkrechten würden also die Dichtigkeit der Verstorbenen darstellen, während bei Zeuner die Senkrechten zur Grundebene die Dichtigkeit der Lebenden ausdrücken. Meine Konstruktion giebt daher unmittelbar eine einfache Uebersicht der Sterbefälle, deren Gesamtheiten alle in der Grundebene geradlinig begrenzt sind. Bei Zeuner dagegen erscheinen die Gesamtheiten der Verstorbenen nicht in der Grundebene, sondern in einer darauf senkrechten seitlichen Coordinatenebene, was zur Folge hat, dass die wichtigen Elementargesamtheiten mit teilweise gekrümmten Begrenzungslinien in einer unbequemen perspektivischen Zeichnung auftreten. Dass sich aus meiner Konstruktion leicht eine stereometrische Darstellung ableiten lasse, habe ich in dem Anhang zu meiner Uebersetzung der Perozzo'schen Abhandlung in Conrads Jahrbüchern N. F. I, (1880), S. 175 ff. gezeigt. Es war aber gerade meine Absicht, statt der stereometrischen Konstruktion eine möglichst einfache planimetrische zu geben, die ohne umständliche Zeichnungen die so höchst elementaren Beziehungen, um die es sich hier handelt, sofort erkennen lässt. Dass dabei die Einzelfälle durch diskrete Punkte dargestellt oder vielmehr dargestellt gedacht werden, kann nur als ein Vorteil der Methode angesehen werden, da es der Wirklichkeit entspricht und überdies sowohl die Schnittpunkte der isochronischen Linien wie auch die Punkteninhalte der Elementargesamtheiten wirklich, nämlich durch Volkszählungen und durch kombinierte Erhebung des Geburtsjahrs und des Altersjahrs der Verstorbenen, gezählt werden können. Zu Demonstrationen aber können körperliche Modelle, wie Bodio solche hat herstellen lassen, immerhin zweckmässig sein.

es lässt sich auf diese Art keinerlei Einsicht in die Verteilung der Sterbepunkte und ihre Beziehungen zu den Geburtspunkten gewinnen. Nach der Knapp'schen Darstellungsmethode werden nun die einzelnen Lebenslinien parallel mit sich selbst und zur Zeitlinie emporgehoben und nach der Zeitfolge ihrer Geburtspunkte in gleichen Abständen übereinander gelegt. So erhält man also die isolierten Linien a' A', b' B, c' C' etc., wo der Abstand $aa' = \frac{1}{2}bb' = \frac{1}{3}cc'$ etc. In dieser Konstruktion bilden also die Punkte a', b', c' . . . eine gebrochene Linie, die, wenn die Geburtspunkte sehr zahlreich und dicht zusammengedrängt sind, als eine Kurve betrachtet werden kann. Statt dieser Kurve aber erhält man eine unter 45 Grad gegen OX geneigte gerade Linie, wenn man (Fig. 2) die einzelnen Lebens-

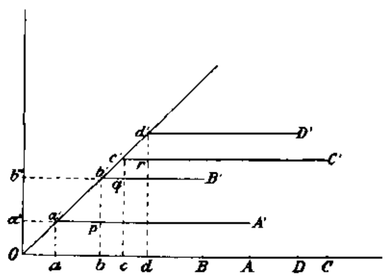

Fig. 2.

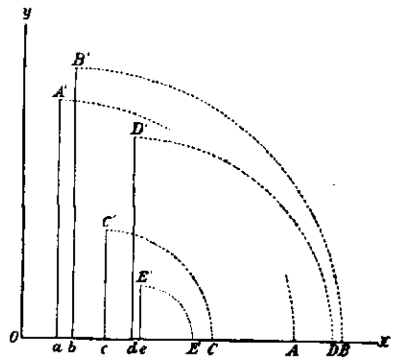

Fig. 3.

linien a'A', b'B', c'C' . . . nicht in gleichen Abständen voneinander, sondern so legt, dass jede von der vorhergehenden ebenso weit absteht, wie ihr Geburtspunkt von dem der vorhergehenden, dass also $pb' = pa' = ab$, $qc' = qb' = bc$, $rd' = rc' = cd$ etc. Noch bequemer lassen sich die Lagen der Punkte a', b', c'... bestimmen, wenn man in O eine zu OX senkrechte Achse OY errichtet und hier die Punkte a'', b'', c'' in Abständen von O bezeichnet, die gleich sind Oa, Ob, Oc etc. und von diesen Parallelen zu OX zieht; diese schneiden die schräge Linie Od' in den gesuchten Punkten. Es ist dies die Becker'sche Konstruktion. Meinerseits habe ich in dem angeführten Werke folgenden Weg eingeschlagen. Jede Lebenslinie, z. B. cC (Fig. 3), wird dadurch isoliert, dass sie durch eine Drehung um den Geburtspunkt c als

Mittelpunkt auf die Achse OX senkrecht aufgestellt, also in die Lage cC′ gebracht wird. Man könnte auch eine geringere Drehung, etwa eine solche von 60 Grad, für zweckmässiger halten, jedoch müssten dann auch alle übrigen Lebenslinien dieselbe Neigung erhalten, also sämtlich einander parallel gelegt werden. In meiner „Einleitung in die Theorie der Bevölkerungsstatistik" habe ich hervorgehoben, dass die Rücksicht auf die Symmetrie der (unten zu besprechenden) Elementargesamtheiten für die Wahl eines Neigungswinkels von 60 Grad geltend gemacht werden könnte, und Lewin hat in einer für den statistischen Kongress zu Budapest bestimmten Abhandlung dies weiter ausgeführt. Für alle praktischen Anwendungen dieser Konstruktionsmethode ist indes die senkrechte Aufstellung der Lebenslinien (aA′, bB′, cC′, dD′ u. s. w.) vorzuziehen, die sich auch am besten zur Erläuterung des Begriffs der Normaldauer des menschlichen Lebens eignet (von der an einer anderen Stelle die Rede sein wird) und auch zur Darstellung mehrfacher Zustandsänderungen im Menschenleben erweitert werden kann. Die Lebensdauer jedes Einzelnen wird also durch eine Linie dargestellt, deren Anfang der Geburtspunkt in der Achse OX bildet und deren Endpunkt wir als Sterbepunkt bezeichnen. Da die Lebenslinien einfach die Senkrechten von den Sterbepunkten auf die Zeitachse sind, so kann man von ihrer Zeichnung ganz absehen und nur die Sterbepunkte beibehalten, die sich mit verschiedener Dichtigkeit über die Ebene verbreiten. Wenn die Zahl der Geburten in einer Jahresstrecke so gross ist, dass auf alle Altersklassen mit Ausnahme der allerhöchsten eine beträchtliche Zahl von Sterbepunkten kommt, so wird die Dichtigkeit der Verteilung ausgedrückt durch die Zahl dieser Punkte, die in einem schmalen Parallelogramm enthalten sind, dessen Grundlinie einer einjährigen oder auch kleineren Geburtsstrecke und dessen Höhe einer einmonatlichen oder noch kleineren Altersstrecke gleich ist. Diese Dichtigkeit ändert sich für kleine Altersdifferenzen desselben Geburtsjahrgangs, wenn auch nicht kontinuierlich, so doch nur wenig, und innerhalb einer einjährigen Altersklasse kann sie, mit Ausnahme der jüngsten und der ältesten, als annähernd gleichbleibend betrachtet werden.

3. Im übrigen kommt für die Darstellung der Beziehungen der Sterbefälle unter sich und zu den Geburten auf die wirkliche Zeichnung der Sterbepunkte oder die Bezeichnung ihrer Dichtig-

keit durch Schraffierung oder andere Mittel nichts an, man bedarf vielmehr nur des Netzwerks von Linien, in dem man sich die Sterbepunkte verteilt denkt. Dieses Netz entsteht auf folgende Art.

Man denke sich die Zeitlinie OX (Fig. 4) in gleiche Strecken, wie $O_1\ O_2$ oder $N_1\ N_2$, $N_2\ N_3$ u. s. w. geteilt, von denen jede, je nach den Umständen, einem Jahre oder einer Periode von Jahren oder auch nur einem Monat entspricht. Die Geburten sind durch

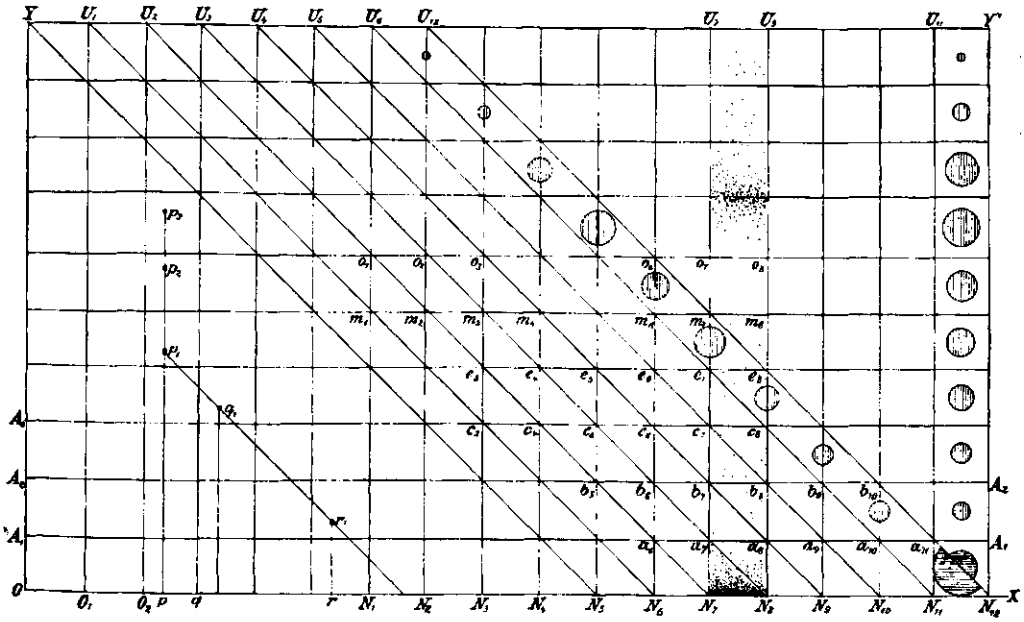

Fig. 4.

Punkte auf dieser Zeitlinie bezeichnet, und von diesen gehen die Lebenslinien, wie pp', qq', rr' senkrecht aus. Die Länge derselben, also das Alter der einzelnen Individuen wird auf der Achse OY gemessen. Man teilt diese in eben solche Teile wie OX und zieht von A_1, A_2, A_3 etc. „Altersgrenzlinien", wie $A_1\ A'_1$, $A_2\ A'_2$ u. s. w., die mit den in N_1, N_2 u. s. w. errichteten „Geburtsgrenzlinien" Quadrate bilden. Schliessen wir die Figur oben durch eine genügend hochgegriffene Altersgrenzlinie YY' ab, die dem höchsten überhaupt vorkommenden Alter, sagen wir von 100 Jahren, entspricht, so fallen die Sterbepunkte aller in einer bestimmten, nehmen wir an, zehnjährigen Geburtsstrecke $N_7\ N_8$ Geborenen (einer zehnjährigen Generation) in den senkrechten Streifen N_7 N_8 U_7 U_8, und sie sind durch die horizontalen Linien in Gruppen eingeteilt, die den verschiedenen zehnjährigen Altersklassen entsprechen. Demnach ist z. B. die Zahl der Sterbepunkte in dem Rechteck N_7 N_8 c_7 c_8 gleich der Zahl derjenigen, die in der zehnjährigen Zeitstrecke N_7 N_8 geboren und vor der Erreichung des Alters von genau 30 Jahren gestorben sind. Andererseits ist also die Zahl der in dem oberen Teile des Streifens, nämlich dem Rechteck c_7 c_8 U_7 U_8 enthaltenen Sterbepunkte gleich der Zahl derjenigen, die, aus derselben Geburtsstrecke N_7 N_8 stammend, nach und nach das Alter von genau 30 Jahren erreicht haben. Eine solche Gruppe von genau gleichalterigen Ueberlebenden aus einer bestimmten Generation nennen wir nach Knapp eine „erste Hauptgesamtheit von Lebenden" und bezeichnen sie allgemein mit L^1. Die Reihenfolge von Zahlen, welche diese Gesamtheiten von gleichalterigen Ueberlebenden aus einer bestimmten Geburtsstrecke für die einzelnen (am besten einjährigen) Altersstufen angiebt, bildet die Absterbeordnung dieser bestimmten Generation. Die einzelnen Glieder derselben bezeichnen wir durch Beifügung der betreffenden Altersgrenze zu dem allgemeinen Symbol L^1, also mit L_0^1 (gleich der Zahl der Geborenen), L_1^1, L_2^1, L_3^1 u. s. w. Nötigenfalls könnte man auch eine Bezeichnung der zugehörigen Geburtsstrecke, in unserem Beispiel das n-te Jahrzehnt von dem angenommenen Anfang der Zeitrechnung ab, beifügen, also ${}_nL_1^1$, ${}_nL_2^1$ u. s. w., doch bleiben wir hier und in den folgenden Betrachtungen innerhalb derselben Generation und können daher von diesem Merkmal absehen.

Ferner ist die Zahl der Sterbepunkte in dem Quadrat c_7 c_8 e_7 e_8 gleich der Zahl derjenigen, die in der Strecke N_7 N_8 geboren und zwischen der Altersgrenze von 30 und 40 Jahren gestorben sind. Eine solche durch Geburtsstrecke und Altersklasse abgegrenzte Gruppe von Verstorbenen nennen wir eine „erste Hauptgesamtheit von Verstorbenen" und bezeichnen sie allgemein mit M^1. Diesem allgemeinen Symbol kann man zur Unterscheidung der Altersklassen die Ordnungszahl der letzteren als Jndex beifügen und es bedeuten demnach M_1^1, M_2^1, M_3^1 u.s.w. die Gestorbenen aus einer bestimmten Generation, die der ersten, zweiten, dritten u. s. w. zehnjährigen Altersklasse, oder wenn man eine einjährige Strecke als Altersmass annimmt, den Altersstufen von 0 bis 1 Jahr, 1 bis 2 Jahr, 2 bis 3 Jahr u. s. w. angehörten. Der Quotient $\frac{M_x^1}{L_{x-1}^1}$ giebt nun für die betreffende Generation den empirischen Ausdruck der korrekt aufgefassten Sterbenswahrscheinlichkeit in der x ten Altersklasse, d. h. das Verhältnis der Zahl derjenigen, die im Alter von $x-1$ bis x Jahren gestorben sind, zu der Zahl derjenigen, die die Altersgrenze von genau $x-1$ Jahren überschritten haben.

Die Hauptaufgabe der Sterblichkeitsstatistik ist nun die Ermittelung der ersten Hauptgesamtheiten von Lebenden und von Verstorbenen, denn nur aus diesen lassen sich Absterbeordnungen und richtige Beobachtungswerte von Sterbenswahrscheinlichkeiten bilden. Diese Gesamtheiten lassen sich aber nicht durch direkte Beobachtung bestimmen; denn die Angehörigen der Gesamtheit L^1 erreichen das für sie bezeichnende gleiche Alter nicht zur gleichen Zeit, sondern sie überschreiten die Altersgrenze $c_7\,c_8$ in der Figur 4 nach und nach in einem Zeitraume von 10 Jahren, und um ihre Zahl unmittelbar festzustellen, müsste man 10 Jahre lang die Personen registrieren, die, aus der Geburtsstrecke $N_7\,N_8$ stammend, nach und nach das Alter von genau 30 Jahren erreichten, was praktisch nicht ausführbar wäre. Ebensowenig lässt sich die Hauptgesamtheit von Gestorbenen M^1 durch direkte Beobachtung gewinnen, denn die betreffenden Todesfälle verteilen sich bei einjährigen Altersklassen auf zwei Kalenderjahre und überhaupt immer auf doppelt so viele Kalenderjahre, als die Altersklasse Jahre umfasst. In Fig. 4 würde für die Geborenen aus der Strecke $N_7\,N_8$ der frühest mögliche Sterbefall in der Altersklasse von 30 bis 40 Jahren durch den Punkt c_7, der spätest mögliche durch den Punkt e_8 bezeichnet sein. Die absoluten oder Beobachtungszeitpunkte aber, die diesen Sterbepunkten entsprechen, sind N_{10} und N_{12}, wie sich durch Niederlegung der Linien $N_7\,c_7$ und $N_8\,e_8$ auf die Achse OX ergiebt. Diejenigen also, die in der Zeit vom 1. Januar 1820 bis Ende 1829 geboren sind, können in der Zeit vom 1. Januar 1850 bis Ende 1869 im Alter von 30 bezw. 40 Jahren sterben.

4. Diese Betrachtungen führen uns nun dazu, unser Netz durch ein weiteres System von Linien zu vervollständigen. Es

sind dies solche, die, wie die Linie N_7 U_2 unter 45 Grad gegen die Achse OX geneigt sind und von rechts nach links als Diagonalen durch die vorher gebildeten Quadrate laufen. Es ist klar, dass alle Punkte einer solchen Linie, wie a_6 c_4 m_2, demselben Kalender- oder Beobachtungszeitpunkt auf der Achse OX entsprechen, denn bei dem Niederlegen der Linien N_6 a_6, N_4 c_4, N_2 m_2 fallen diese Punkte sämtlich in den Punkt N_7. Wir bezeichnen daher die schrägen Linien als „isochronische" und diejenigen, welche den nach der angenommenen Zeiteinheit abgegrenzten Beobachtungszeiten entsprechen, als „Zeitgrenzlinien".

Jeder Sterbepunkt, der unterhalb der schrägen Linie N_7 U_2 liegt, bezeichnet einen vor dem Zeitpunkt N_7 eingetretenen Todesfall, und alle oberhalb der Linie N_7 U_2 liegenden Sterbepunkte beziehen sich auf später vorgekommene Todesfälle. Die Sterbepunkte aber, die sich in dem schrägen Streifen zwischen den Linien N_7 U_2 und N_8 U_3 befinden, fallen in die Beobachtungsperiode N_7 N_8, die in der Figur als eine zehnjährige angenommen ist, natürlich aber auch als eine einjährige oder noch kleinere gedacht werden kann.

In den statistischen Veröffentlichungen wird die Zahl der Sterbefälle für die einzelnen Kalenderjahre angegeben und jede solche Zahl entspricht daher dem Punkteninhalt eines schrägen Jahresstreifens. Häufig findet sich auch die Unterscheidung der Sterbefälle nach den einzelnen Kalendermonaten, deren Darstellung zu einer Zerlegung der Jahresstreifen in zwölf schmalere schräge Streifen führt. Ferner werden die Gestorbenen in den meisten Ländern einfach nach Altersklassen und zwar mit Ausnahme der kleinere Unterabteilungen erfordernden ersten Lebensjahre, nach einjährigen unterschieden. Man erhält auf diese Art Gesamtheiten von Gestorbenen, die in unserer Figur durch Parallelogramme, wie c_4 c_5 e_3 e_4 umgrenzt, nämlich in einem bestimmten Zeitraum und in einer bestimmten Altersklasse gestorben sind. Es sind dies die von Knapp sogenannten „dritten Hauptgesamtheiten von Verstorbenen", die wir mit M^3 bezeichnen. Die Figur zeigt aber, dass diese Verstorbenen nicht alle derselben Generation angehören, sondern teils aus der Geburtsstrecke N_3 N_4, teils aus N_4 N_5 stammen. Nehmen wir die Masseinheit gleich einem Jahre an, so ist also innerhalb dieser Gesamtheit für Sterbezeit und Alter je ein einjähriger, für die Geburtszeit aber ein zweijähriger Spielraum gegeben, und zwar sind die zu der Geburtsstrecke N_3 N_4 gehörenden Sterbepunkte durch das Dreieck c_4 e_3 e_4 und die Zeit der Strecke N_4 N_5 gehörenden durch das Dreieck c_4 c_5 e_4 umgrenzt.

In Preussen werden seit 1864 die Sterbefälle jedes Kalenderjahres durchweg nach dem Geburtsjahre der Gestorbenen und ausserdem bis zu einem gewissen Alter auch nach Altersklassen gruppiert. Die durch Sterbezeit und Geburtsstrecke bestimmten Gesamtheiten von Gestorbenen werden in der Figur durch Parallelogramme, wie c_4 e_3 e_4 m_3 begrenzt und von Knapp „zweite Hauptgesamtheiten von Verstorbenen" genannt. Wir bezeichnen sie allgemein für irgend eine Geburtsstrecke mit M^2, während die Sterbestrecke durch einen besonderen Index unten rechts anzudeuten wäre. Nehmen wir wieder das Jahr als Masseinheit, so zeigt die Figur, dass in einer solchen Gesamtheit für die Geburtszeit und die Sterbezeit ein einjähriger, für das Alter aber ein zweijähriger Spielraum besteht, indem die betreffenden Sterbepunkte zwischen den Altersgrenzlinien c_3 c_4 und m_3 m_4 liegen, und zwar werden die zu der unteren Altersklasse gehörenden durch das Dreieck c_4 e_3 e_4, und die zu der oberen gehörenden durch das Dreieck c_3 c_4 m_3 umgrenzt.

5. Die isochronischen Linien gestatten auch die Unterscheidung einer anderen Gesamtheit von Lebenden, nämlich der in einem bestimmten Zeitpunkt gleichzeitig Lebenden oder der „zweiten Hauptgesamtheit von Lebenden" nach Knapp, die wir mit L^2 bezeichnen. Nehmen wir wieder die Strecke N_7 N_8 gleich 10 Jahren an, so ist die Zahl der Sterbepunkte in dem Trapez e_7 c_8 U_7 U_8 gleich der Zahl der von m_4 e_5 durchschnittenen Lebenslinien, d. h. gleich der im Beobachtungszeitpunkt N_{11} lebenden Personen im Alter von 30 bis 40 Jahren. Ebenso ist die Zahl der in dem Dreieck N_{11} U_6 U_{11} enthaltenen Sterbepunkte gleich der Zahl der Schneidepunkte der Linie N_{11} U_6 und sämtlicher Lebenslinien oder gleich der gesamten Volkszahl im Zeitpunkte N_{11}. Die Zahl dieser Schneidepunkte sowie auch der den verschiedenen Altersabschnitten entsprechenden, also der Gesamtheiten L^2 lassen sich unmittelbar durch Beobachtung, nämlich durch eine Volkszählung feststellen. Ebenso können die Gesamtheiten M^2 und M^3 direkt erhoben werden, während

dies bei den Gesamtheiten L^1 und M^1, wie bereits erwähnt, nicht der Fall ist. Indes kann man ohne grosse Schwierigkeit zu einer indirekten Bestimmung derselben gelangen. Wie oben gezeigt ist, setzen sich die Gesamtheiten M^2 und M^3 beide aus Gruppen zusammen, die in der Figur von Dreiecken begrenzt sind. Aus Dreiecken derselben Art, wie c_4 c_5 e_4 und c_5 e_4 e_5, wird aber auch die Umgrenzung der Gesamtheiten M^1, wie z. B. das Quadrat c_4 c_5 e_4 e_5 gebildet. Es genügt also, die durch solche Dreiecke bestimmten Gesamtheiten von Sterbefällen, die wir als „Elementargesamtheiten" bezeichnen, zu kennen, um die Gesamtheiten M^1 zusammensetzen zu können. Ist in diesen letzteren Gesamtheiten der Spielraum der Geburtszeit und des Alters je ein Jahr, so ist der der Beobachtungs- oder Sterbezeit zwei Jahre, in jeder der zugehörigen Elementargesamtheiten aber hat auch die Sterbezeit nur einen einjährigen Spielraum. Ueberhaupt ist es für die Elementargesamtheiten charakteristisch, dass sie für jedes der drei Bestimmungsstücke, Geburtszeit, Alter und Beobachtungszeit nur eine Zeitmasseinheit als Spielraum haben, während der Spielraum bei jeder der drei Hauptgesamtheiten von Verstorbenen für je eines der Bestimmungsstücke zwei Einheiten beträgt.

Die die Elementargesamtheiten begrenzenden Dreiecke liegen teils oberhalb (wie c_5 e_4 e_5), teils unterhalb der die Hypotenusen bildenden isochronischen Linien (wie c_4 c_5 e_4). Wir unterscheiden hiernach obere und untere Elementargesamtheiten von Verstorbenen und bezeichnen die ersteren mit Δ^2, die letzteren mit Δ^1. Wenn ferner die auf die Zeitmasseinheit bezogene Geburtsstrecke mit n, die Altersklasse mit a bezeichnet wird, so werden die Gesamtheiten M^1 allgemein gegeben durch die Gleichung:

$$ {}_{n}M_{a}^{1} = {}_{n}\Delta_{a}^{1} + {}_{n}\Delta_{a}^{2} $$

Auch die ersten Hauptgesamtheiten von Lebenden L^1 lassen sich jetzt leicht zusammensetzen. Eine solche wird z. B. dargestellt durch den Punkteninhalt des Rechtecks c_7 c_8 U_7 U_8; dieses aber ist gleich dem Punkteninhalt des Trapezes e_7 c_8 U_7 U_8 nebst dem des Elementardreiecks c_7 c_8 e_7. Der erstere wird durch die Volkszählung in einem bestimmten Zeitpunkt N_{11} gegegeben, den wir allgemein mit z bezeichnen, und man hat demnach die Gleichung:

$$ {}_nL^{1}_{a-1} = {}_zL^{2}_{a} + {}_n\Delta^{1}_{a} $$

6. Es handelt sich also nur noch darum, die Elementargesamtheiten zu ermitteln, was entweder direkt und theoretisch genau oder durch Näherungsrechnungen geschehen kann. Die direkte Methode besteht einfach darin, dass man die Sterbefälle jedes Kalenderjahres unterscheidet nach den Altersjahren, kombiniert mit den Geburtsjahren der Gestorbenen. Nehmen wir die Strecke N_7 N_8 wieder gleich einem Jahr an, so ist der Punkteninhalt des schrägen Streifens N_7 N_8 U_2 U_3 gleich der Zahl der Gestorbenen des betreffenden Kalenderjahres und der Punkteninhalt des Parallelogramms c_4 c_5 e_3 e_4 stellt die Zahl der in diesem Jahre im Alter von 3—4 Jahren Gestorbenen dar. Diese Gestorbenen aber stammen teils aus dem Geburtsjahr N_3 N_4, teils aus N_4 N_5. Werden sie also in der Statistik auch nach den Geburtsjahren unterschieden, so erhält man die von den Dreiecken c_4 c_5 e_4 und c_4 e_3 e_4 umgrenzten Elementargesamtheiten.

Das statistische Schema für die Erhebung der Elementargesamtheiten ist demnach das folgende:

Gestorben im Jahre 1875:

Alter	Geburtsjahr	männlich	weiblich
0—1 Jahr	1875	2461	2020
	1874	1111	943
1—2 „	1874	590	525
	1873	398	349
2—3 „	1873	${}_{73}\overset{m}{\Delta}{}^{1}_{8}$	${}_{73}\overset{w}{\Delta}{}^{1}_{8}$
	1872	${}_{72}\overset{m}{\Delta}{}^{2}_{8}$	${}_{72}\overset{w}{\Delta}{}^{2}_{8}$
u. s. w.			

Die obigen Zahlen sind der norwegischen Statistik entnommen, die seit 1872 wenigstens für die beiden ersten Altersjahre die Elementargesamtheiten unterscheidet. In der oldenburgischen Statistik reicht diese Unterscheidung bis 1861 zurück, in der holländischen wurde sie 1870 angenommen.

Eine andere ebenfalls theoretisch streng richtige, aber indirekte Methode der Bestimmung der Elementargesamtheiten besteht darin, dass, wie es in Preussen für die jüngeren Altersklassen geschieht, die Sterbefälle sowohl nach Geburtsjahren als auch selbständig — ohne Kombination mit dieser ersten Art — nach einjährigen Altersklassen gruppiert, d. h. die Gesamtheiten M^2 und M^3 direkt erhoben werden. Für die erste Altersklasse ist also z. B. einerseits gegeben P. (N_7 N_8 a_6 a_7) — wenn durch das vorgesetzte P. der Punkteninhalt der in der Klammer angegebenen Figur bezeichnet wird — und andererseits P. (N_7 N_8 a_7), also eine Elementargesamtheit; die Differenz dieser beiden Punkteninhalte aber ist P. (N_7 a_6 a_7), also ebenfalls eine Elementargesamtheit. Durch die Statistik des folgenden Kalenderjahres werden unmittelbar gegeben P. (N_8 N_9 a_7 a_8) und P. (N_8 N_9 a_8), woraus sich die Elementargesamtheit P. (N_8 a_7 a_8) ergiebt. Weiter kann man dann auch die direkt erhobenen Hauptgesamtheiten P. (a_6 a_7 b_5 b_6) und P. (N_7 a_6 a_7 b_6) in ihre Elementargesamtheiten zerlegen und dieses Verfahren lässt sich fortsetzen, soweit die Hauptgesamtheiten M^2 und M^3 gegeben sind.

In den meisten Ländern beschränkt sich die amtliche Statistik jedochauf der Angabe der Sterbefälle nach Hauptgesamtheiten der dritten Art, also M^3. Wenn dabei einjährige Altersklassen der Verstorbenen unterschieden werden, so können die Elementargesamtheiten vom dritten Altersjahre ab näherungsweise mit genügender Genauigkeit durch Halbierung der einzelnen Gesamtheiten M^3 dargestellt werden. Denn die Dichtigkeit der Sterbepunkte ändert sich nach den ersten Lebensjahren mit fortschreitendem Alter nur langsam und man darf daher annehmen, dass z. B. (wenn c_4 c_5 1 Jahr) der Punkteninhalt des Dreiecks c_4 c_5 e_4 nicht erheblich von dem des gleich grossen Dreiecks c_4 e_3 c_4 abweicht, zumal auch die Geburtendichtigkeit in den aufeinanderfolgenden Jahresstrecken N_3 N_4 und N_4 N_5 sich nicht viel geändert haben wird. Im ersten Altersjahre jedoch ist diese einfache Näherungsmethode nicht anwendbar und auch für das zweite giebt sie noch ungenügende Resultate. Denn die Dichtigkeit der Sterbepunkte ändert sich in diesen Altersklassen noch sehr merklich innerhalb der einjährigen Stufen. Wenn man nun z. B. das Parallelogramm N_7 N_8 a_6 a_7 durch die Linie N_7 a_7 in zwei Elementardreiecke teilt, so sind die Punkteninhalte derselben keineswegs gleich, denn das Dreieck N_7 a_6 a_7 reicht nur mit der Spitze in die Region der grössten Dichtigkeit der Sterbepunkte hinein, während das Dreieck N_7 N_8 a_7 mit seiner ganzen Basis in diese Region fällt. Auch in der Nachbarschaft der grössten Dichtigkeit der Sterbefälle in dem höheren Alter (von 70—75 Jahren) finden die Aenderungen der Dichtigkeit rascher statt, so dass hier durch die einfache Teilung der Hauptgesamtheiten M^3 die Elementargesamtheiten nur mit grösserer Ungenauigkeit ausgedrückt werden können. Immerhin bleibt die Methode bei einjährigen Altersklassen auch für diese Lebensperiode noch zulässig. Dagegen ist die Gruppierung der Sterbefälle nach fünfjährigen Altersstufen oder gar nach zehnjährigen (auf welche sich die englische Statistik vom 25. Jahre ab beschränkt) für die Aufstellung einer brauchbaren Sterblichkeitstabelle überhaupt kaum zu verwerten.

7. Für die annähernde Berechnung der so wichtigen Kindersterblichkeit im ersten Lebensjahr findet man in der amtlichen Statistik der meisten Länder spezielleres Material, wenn auch die Elementargesamtheiten nicht direkt gegeben werden. Eine sehr befriedigende Annäherung gestattete das von der belgischen Statistik bis 1865 angewandte Schema, nach welchem die Sterbefälle des ersten Lebensjahres nach Altersmonaten in Kombination mit den Sterbemonaten unterschieden werden. Wenn (Fig. 5) N_3 N_4

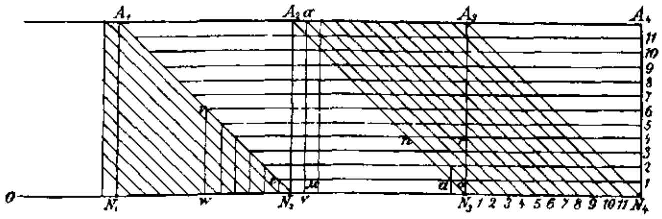

Fig. 5.

eine Geburtsstrecke von einem Jahre und N_3 A_3 eine einjährige Altersstrecke darstellt, so wird das Parallelogramm N_3 N_4 A_2 A_3 durch je 12 horizontale und schräge Linien in 144 kleine Parallelogramme geteilt, deren Seiten je einer Monatsstrecke entsprechen. Diese umgrenzen in verkleinertem Masstabe Gesamtheiten von der Art M^3, die also durch die Gruppierung der Gestorbenen nach Altersmonat und Sterbemonat unmittelbar gegeben sind. Durch Summierung der Punkteninhalte solcher kleiner Parallelogramme lassen sich nun auch die beiden Elementargesamtheiten N_3 A_2 A_3 und N_3 N_4 A_3 annähernd bestimmen. Eine Ungenauigkeit entsteht nur dadurch, dass die Punkteninhalte von 12 Parallelogrammen, die von der Linie N_3 A_3 durchschnitten werden, bei unserer Unkenntnis ihrer wirklichen Verteilung einfach je zur Hälfte der einen und der anderen Elementargesamtheit zugewiesen werden müssen. Der so begangene Fehler wird aber um so kleiner, je höher der betreffende

Altersmonat ist und auch die Summe dieser Fehler wird im Verhältnis zu der Gesamtzahl der Gestorbenen des ersten Jahres und auch zu dem Punkteninhalt der beiden Elementargesamtheiten nur klein sein.

Im Jahre 1864 sind z. B. in Belgien gestorben im Alter von 0—1 Monat 4776 Knaben, und von diesen kamen auf den Januar 574, auf die übrigen 11 Monate 4202. Diese letzteren gehören nun ganz in das Elementardreieck $N_3\ N_4\ A_3$, die 574 aber bilden den Punkteninhalt des Parallelogramms $N_3 a o 1$, und von diesen nehmen wir an, dass sie zur Hälfte in das kleine Dreieck $N_3 o 1$ und somit in das Elementardreieck $N_3\ N_4\ A_3$ und zur Hälfte in das Dreieck $N_3 a o$ und somit in das Elementardreieck $N_3\ A_2\ A_3$ fallen. Von dem zweiten horizontalen Streifen (dem Alter von 1—2 Monat entsprechend) gehören alle in den Monaten März bis Dezember vorgekommenen Sterbefälle (1226) zu dem Elementardreieck $N_3\ N_4\ A_3$, die des Januar aber (163) zu $N_3\ A_2\ A_3$ und die des Februars (145) rechnen wir wieder zur Hälfte auf jedes der beiden Elementardreiecke. So erhält man für Belgien in dem genannten Jahr als Bestandteile der beiden Elementargesamten der Hauptgesamtheit $\overset{3}{M_1}$:

Alter der Gestorbenen	$_{1863}\overset{2}{\Delta}_1$	$_{1864}\overset{1}{\Delta}_1$
0— 1 Monat	$\frac{574}{2}$	$\frac{574}{2} + 4202$
1— 2 „	$163 + \frac{145}{2}$	$\frac{145}{2} + 1226$
2— 3 „	$248 + \frac{91}{2}$	$\frac{91}{2} + 893$
3— 4 „	$273 + \frac{76}{2}$	$\frac{76}{2} + 751$
4— 5 „	$280 + \frac{82}{2}$	$\frac{82}{2} + 555$
5— 6 „	$344 + \frac{47}{2}$	$\frac{47}{2} + 411$
6— 7 „	$405 + \frac{51}{2}$	$\frac{51}{2} + 330$
7— 8 „	$356 + \frac{58}{2}$	$\frac{58}{2} + 218$
8— 9 „	$415 + \frac{54}{2}$	$\frac{54}{2} + 160$
9—10 „	$477 + \frac{50}{2}$	$\frac{50}{2} + 81$
10—11 „	$494 + \frac{36}{2}$	$\frac{36}{2} + 70$
11—12 „	$601 + \frac{58}{2}$	$\frac{58}{2}$

Die Addition der einzelnen Posten ergiebt demnach ${}_{1863}\varDelta_1^2 = 4718$ und ${}_{1864}\varDelta_1^1 = 9560$, das heisst also, von den 14 278 im Jahren 1864 in Belgien gestorbenen Knaben im Alter von 0–1 Jahre gehörten annähernd 4718 dem Geburtsjahr 1863 und 9560 dem Geburtjahr 1864 an. Die letzteren machen also 66,9 Prozent der Gesamtzahl der Gestorbenen der ersten Altersklasse aus. Ueberhaupt findet man für alle Länder, dass in jedem Kalenderjahre die Sterbefälle im ersten Altersjahre ungefähr zu zwei Dritteln aus den Geburten desselben Jahres und zu einem Drittel aus denen des Vorjahres stammen.

8. Wenn in den statistischen Veröffentlichungen die Sterbefälle nur nach den Altersmonaten, jedoch ohne Unterscheidung des Kalendermonats des Todes angegeben sind, so hat man statt der obigen 144 kleinen Parallelogramme nur die Punkteninhalte der zwölf horizontalen Streifen, die das Parallelogramm $N_2\ N_3\ A_1\ A_2$ (Fig. 5) bilden. Die Näherungsberechnung des von den Dreiecken $N_2\ A_1\ A_2$ und $N_2\ N_3\ A_2$ begrenzten Elementargesamtheiten ist jetzt nur unter der Annahme möglich, dass die Punkte in jedem horizontalen Streifen gleichmässig verteilt sind. Demnach wird angenommen, dass ungefähr $^1/_{24}$ der in dem untersten Streifen $N_2\,N_3\,a\,e$ enthaltenen Sterbepunkte auf das dem vorhergehenden Geburtsjahr entsprechenden Elementardreieck $N_2\ A_1\ A_2$ entfallen, während $^{23}/_{24}$ auf das Trapez $N_2\,N_3\,a\,\mu$ kommen. In dem zweiten Streifen werden hiernach $^3/_{24}$ der Punkte auf das Elementardreieck $\varDelta_1^2$ und $^{21}/_{24}$ auf das Dreieck $\varDelta_1^1$ gerechnet und so weiter für die folgenden Streifen. Nehmen wir als Beispiel wieder die Sterbefälle unter den Knaben der ersten Altersklasse im Jahre 1864 in Belgien, jedoch nur mit Berücksichtigung der Unterscheidung nach Altersmonaten, so finden wir:

(Siehe Tabelle S. 18.)

Wir erhalten also jetzt näherungsweise als Punkteninhalt des (dem Geburtsjahr 1863 entsprechenden) Elementardreiecks $\varDelta_1^2$ die Zahl 4585 und für $\varDelta_1^1$ (dem Geburtsjahr 1864 entsprechend) 9693, während die vorher angewandte genauere Näherungsmethode bezw. 4718 und 9560 ergab. Das Verhältnis von $\varDelta_1^2$ zu der Gesamtzahl der Sterbefälle der ersten Altersklasse stellt sich jetzt auf 0.679, also immer noch nicht zu weit von $^2/_3$ entfernt.

Alter	${}_{1863}\Delta^{2}_{1}$	${}_{1864}\Delta^{1}_{1}$
0—1 Monat	$\frac{1}{24} \cdot 4776 = 199$	$\frac{23}{24} \cdot 4766 = 4577$
1—2 „	$\frac{3}{24} \cdot 1534 = 192$	$\frac{21}{24} \cdot 1534 = 1342$
2—3 „	$\frac{5}{24} \cdot 1232 = 255$	$\frac{19}{24} \cdot 1232 = 977$
3—4 „	$\frac{7}{24} \cdot 1000 = 321$	$\frac{17}{24} \cdot 1000 = 779$
4—5 „	$\frac{9}{24} \cdot 917 = 344$	$\frac{15}{24} \cdot 917 = 573$
5—6 „	$\frac{11}{24} \cdot 802 = 368$	$\frac{13}{24} \cdot 802 = 434$
6—7 „	$\frac{13}{24} \cdot 789 = 427$	$\frac{11}{24} \cdot 789 = 362$
7—8 „	$\frac{15}{24} \cdot 632 = 395$	$\frac{9}{24} \cdot 632 = 237$
8—9 „	$\frac{17}{24} \cdot 629 = 446$	$\frac{7}{24} \cdot 629 = 183$
9—10 „	$\frac{19}{24} \cdot 608 = 481$	$\frac{5}{24} \cdot 608 = 127$
10—11 „	$\frac{21}{24} \cdot 600 = 525$	$\frac{3}{24} \cdot 600 = 75$
11—12 „	$\frac{23}{24} \cdot 659 = 632$	$\frac{1}{24} \cdot 659 = 27$

Der Fehler entsteht hauptsächlich in der Altersklasse von 0—1 Monat. Denn während nach der direkten Beobachtung im Januar 1864 574 Knaben im Alter von 0—1 Monat gestorben sind, findet man für diese Zahl bei der Annahme einer gleichmässigen Verteilung der Sterbefälle auf alle Kalendermonate nur 398.

Aber auch bei der ersten Methode entsteht schon ein merklicher Fehler durch die einfache Halbierung der Sterbefälle des Januar im Alter von 0—1 Monat. Denn die Sterblichkeit nimmt vom ersten bis zum dreissigsten Lebenstage beträchtlich ab, so dass die angenommene Gleichmässigkeit der Verteilung der Sterbepunkte in dem kleinen Parallelogramm N_3 1 a o in Wirklichkeit nicht stattfindet, sondern das Dreieck N_3 1 o, dessen Basis ganz in die Region der grössten Sterblichkeit fällt, wird mehr Punkte enthalten, als das Dreieck N_3 a o, das nur mit der Spitze in diese Region hineinreicht. Die Differenz lässt sich mit ungefährer Annäherung aus den Daten der französischen Statistik der Bewegung der Bevölkerung berechnen, in der sich die Unterscheidung der Gestorbenen nach den Altersstufen von 0—7 Tagen, 8—15 und

16—30 Tagen findet. So werden z. B. für diese drei Gruppen von Sterbefällen bei beiden Geschlechtern zusammen im Jahre 1874 die Zahlen 16 369, 11 262 und 13 387 angegeben. In Ermangelung genauerer Bestimmungen nehmen wir an, dass im dritten und vierten Viertelmonat des Alters die Zahl der Sterbefälle gleich sei und je 6694 betrage. Wir nehmen ferner innerhalb jeder dieser vier Altersstufen gleiche Verteilung der Sterbepunkte ohne Rücksicht auf den Kalendermonat des Sterbens und die Verschiedenheit des Alters nach Tagen an. Setzen wir nun für den vorliegenden Fall voraus, dass in Figur 5 die Strecken N_3 1 und N_3 o nicht, wie früher, einen Monat, sondern einen Viertelmonat bedeuten und demnach der Punkteninhalt des Parallelogramms N_3 4 n r die Gestorbenen im Alter von 0—1 Monat in einem Kalendermonat darstellt, so ist leicht zu übersehen, wie die Verteilung der Sterbepunkte auf die beiden Elementardreiecke dieses Parallelogramme näherungsweise berechnet werden kann. Von den 16369 in der ersten Alterswoche Gestorbenen kommt auf das erste Kalendermonatsviertel ungefähr ein Zwölftel oder 1364 und von diesen gehören $\frac{1}{8} \cdot 1364$ oder 170 in das Elementardreieck N_3 n r und $\frac{7}{8} \cdot 1364$ oder 1194 in das Elementardreieck N_3 4 r. Zerlegt man in entsprechender Weise die drei übrigen Viertelmonatsstreifen, so erhält man als Punkteninhalt des ersteren Elementardreiecks 1359 und als den des letzteren 2059 und diese beiden Zahlen stehen zu einander in dem Verhältnis von 1 : 1.52. Demnach wäre also bei Anwendung der ersten Näherungsmethode die Zahl der im Januar im Alter von 0—1 Monat Gestorbenen nicht gleichmässig, sondern nach dem Verhältnis von ungefähr 2 : 3 auf die Elementargesamtheiten $\overset{2}{\Delta}_1$ und $\overset{1}{\Delta}_1$ zu verteilen.

9. Aber auch die Annahme, dass die Kindersterblichkeit in der ersten Alterswoche gleichmässig verteilt sei, ist noch keineswegs genau, denn die Sterblichkeit ist am ersten Tage weitaus am stärksten und zeigt dann eine rasche Abnahme. Es ist dies aus der preussischen Statistik zu ersehen, die für den ersten halben Monat der Gestorbenen nach Alterstagen unterscheidet. So war z. B. im Jahre 1878 die Zahl der Gestorbenen in diesen kleinsten Altersstufen:

Alter	Knaben	Mädchen
0— 1 Tag	5171	3742
1— 2 „	3048	2198
2— 3 „	1959	1522
3— 4 „	1311	1008
4— 5 „	1082	806
5— 6 „	1343	996
6— 7 „	1710	1182
7— 8 „	1550	1132
8— 9 „	1317	1010
9—10 „	1096	816
10—11 „	1090	827
11—12 „	1102	790
12—13 „	1176	912
13—14 „	1138	929
14—15 „	1306	1029
15—30 „	11757	9710

Es ist nun leicht, mit Hülfe unserer Konstruktion näherungsweise die Verteilung der Sterbepunkte auf die beiden Elementargesamtheiten einer durch einmonatliche Sterbezeit und einmonatliche Altersstrecke bestimmten Hauptgesamtheit von Verstorbenen zu berechnen. Man denke sich ein Parallelogramm wie $N_2N_3A_1A_2$ (Fig. 5) in 30 kleine horizontale Streifen zerlegt, von denen jeder einer Altersstufe von einem Tage entsprechen soll. Es kommen dann von den am ersten Lebenstage Gestorbenen $^1/_{60}$ auf das Elementardreieck $N_2A_1A_2$ und $^{59}/_{60}$ auf das Dreieck $N_2N_3A_2$; in dem zweiten Streifen von unten kommen auf das erste Dreieck $^3/_{60}$, auf das zweite $^{57}/_{60}$ u. s. w. Für die Altersstufe von 15 bis 30 Tagen fehlt die Unterscheidung nach Tagen und es muss daher für die ganze obere Hälfte des Parallelogramms gleichmässige Verteilung der Sterbepunkte angenommen werden. Man sieht leicht, dass dann $^3/_4$ der in dieser Altersstufe Gestorbenen auf das zum Geburtsjahr 1877 und $^1/_4$ auf das zum Geburtsjahr 1878 gehörende Elementardreieck kommen. So findet man, dass die beiden gesuchten Elementargesamtheiten annänernd bei den Knaben 13679 und 22437, bei den Mädchen 10988 und 17584 betragen. Das Verhältnis der beiden zu einander stellt sich für beide Geschlechter rund auf 1 : 1,6, und diese Verhältniszahl wird auch für andere Länder zur Zerlegung der Sterbefälle der ersten Monatsaltersklasse im Januar angewendet werden dürfen. Wir können demnach die Näherungsrechnung in unserem ersten, der belgischen Statistik entnommenen Beispiel berichtigen: anstatt der unter Δ_1^2 stehenden Zahl $\frac{574}{2}$ ist zu setzen $\frac{1}{2,6} \times 574$ oder

221, und unter $\Delta_1^1 \frac{1,6}{2,6} \times 574 + 4202$. So ergiebt sich $\Delta_1^2 = 4652$ und $\Delta_1^1 = 9626$ und das Verhältnis der letzteren Elementargesamtheit zu der Hauptgesamtheit der Verstorbenen der ersten Altersklasse im Kalenderjahr 1864 stellt sich also jetzt auf 0,674.

Man könnte diese Korrektion auch auf das Ergebnis der zweiten Näherungsmethode anwenden, aber es würde dadurch keine Verbesserung erzielt werden. Denn sie hat die Wirkung, dass die Elementargesamtheit Δ_1^2 verkleinert wird. Nun fällt aber bei dieser Näherungsmethode diese Elementargesamtheit ohnehin fast immer zu klein aus, weil der Monat Januar in der Regel eine verhältnismässig grosse Kindersterblichkeit aufweist; wenn man ihm also nur ein Zwölftel der Zahl der Gestorbenen des ganzen Jahres im Alter von 0 bis 1 Monat zuschreibt, so ist dieser Anteil zu klein, wie er ja auch in unserem Beispiel 398 statt 574 beträgt. Durch die obige Korrektion würde also der Fehler von Δ_1^2 noch vergrössert, während die Unterlassung derselben meistens eine gewisse Kompensation des spezifischen Fehlers der Methode erzeugt.

10. Wenn in der amtlichen Statistik die Sterbefälle des ersten Altersjahres nach Kalendermonaten, jedoch ohne Kombination mit Unterabteilungen dieses Alters angegeben werden, so ist es immerhin zweckmässig, die verhältnismässige Sterblichkeit des Monats Januar in der ersten Jahresklasse auch auf die Sterblichkeit im ersten Altersmonat zu übertragen. So kamen z. B. nach der italienischen Statistik im Jahre 1875 auf den Januar nicht $^1/_{12}$, sondern $^{11}/_{120}$ der Gesamtzahl der Sterbefälle im Alter von 0 bis 1 Jahr. Die Zahl der Gestorbenen im Alter von 0 bis 1 Monat aber betrug 101 558, und man wird daher annehmen, dass von diesen nicht 8463, sondern 9309 auf den Monat Januar entfallen. Auch diese Zahl ist freilich noch immer zu klein, denn nach der direkten Beobachtung betrug sie 10985, was beweist, dass der ungünstige Einfluss der Jahreszeit sich nicht gleichmässig über die ganze erste Altersklasse erstreckt, sondern besonders stark auf die Stufe von 0 bis 1 Monat wirkt.

In mehreren Ländern giebt die amtliche Statistik die Unterabteilungen der Sterbefälle des ersten Jahres nicht nach einzelnen Altersmonaten, sondern in grösseren Abstufungen an. In Frankreich z. B. unterscheidet die „Statistique annuelle“ nur die Stufen 0—1 Monat (diese allerdings mit den oben erwähnten drei Unterabteilungen), 1—6 Monate und 6—12 Monate. Die Näherungsberechnung der Elementargesamtheiten wird dadurch natürlich noch wesentlich ungenauer. Bezeichnen wir die Zahl der Todesfälle im Alter von 1—6 Monaten mit [1,6] und die im Alter von 6—12 Monaten mit [6,12], so kommen, wie sich aus der Figur 5 leicht ergiebt, annähernd von der ersteren Gruppe $\frac{35}{120}$ [1,6] auf die Elementargesamtheit $\varDelta_1^2$ und $\frac{85}{120}$ [1,6] auf die Elementargesamtheit $\varDelta_1^1$, während die zweite Gruppe sich entsprechend in $\frac{3}{4}$ [6,12] und $\frac{1}{4}$ [6,12] zerlegt.

Die italienische Statistik giebt in den allgemeinen Tabellen[1]) für das erste Altersjahr nur die Unterabteilungen von 0—1 Monat, 1—3 Monaten, 3—6 Monaten, 6—9 Monaten und 9—11 Monaten. Als angenäherte Werte der beiden Elementargesamtheiten findet man hieraus mit Beibehaltung der eben angewandten Bezeichnung:

$$\varDelta_1^2 = \frac{1}{24}\,[0,1] + \frac{8}{48}\,[1,3] + \frac{27}{72}\,[3,6] + \frac{45}{72}\,[6,9] + \frac{63}{72}\,[9,12]$$

$$\varDelta_1^1 = \frac{23}{24}\,[0,1] + \frac{40}{48}\,[1,3] + \frac{45}{72}\,[3,6] + \frac{27}{72}\,[6,9] + \frac{9}{72}\,[9,12]$$

Auch diese Rechnung kann kein genaues Resultat liefern, da namentlich die Annahme einer gleichmässigen Sterblichkeit in der Altersstufe von 1—3 und von 3—6 Monaten von der Wirklichkeit erheblich abweicht. In den Spezialtabellen der italienischen Statistik (in ihrer früheren Gestalt) findet sich aber auch die Kombination der obigen Altersgruppierung mit den Kalendermonaten des Todes, wodurch sich, ähnlich wie in dem ersten Beispiel aus der belgischen Statistik, eine wesentlich bessere Annäherung erreichen lässt.

Es möge hier noch eine allgemeine Formel für die Verteilung in Fällen der oben bezeichneten Art angegeben werden,

1) Seit mehreren Jahren sind die Veröffentlichungen der italienischen Statistik bedeutend eingeschränkt worden. Sie enthalten jetzt überhaupt keine Angaben über die Sterblichkeit in den Unterabteilungen des ersten Jahres.

deren Richtigkeit leicht zu erkennen ist. Teilen wir das Jahr in n gleiche Unterabteilungen ein (Monate, Wochen oder Tage, wo also n bzw. = 12, 52 oder 365) und bezeichnen wir die Zahl der Todesfälle des ersten Lebensjahres im Alter von $\frac{a}{n}$ bis $\frac{b}{n}$ Jahr mit $\left[\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right]$, so wird der auf die Elementargesamtheit $\overset{2}{\varDelta}_1$ (die dem vorhergehenden Geburtsjahr entspricht) entfallende Anteil an den Sterbefällen dieser Unterstufe näherungsweise durch $\frac{b+a}{2n}\left[\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right]$ und der Anteil von $\overset{1}{\varDelta}_1$ durch $\frac{2n-b-a}{2n}\left[\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right]$ ausgedrückt.

In der belgischen Statistik findet man seit 1867 nicht mehr die Gruppierung der Sterbefälle des ersten Jahres nach Altersmonaten, sondern nach Monaten der Geburt in Kombination mit den Kalendermonaten des Todes. Hieraus ergiebt sich eine geometrische Darstellung, wie sie teilweise in dem Dreieck $N_1 N_2 A_1$ (Fig. 5) gezeichnet ist. An der oberen Grenze der ersten Altersklasse gehen die kleinen schrägstehenden Parallelogramme mit ihrer oberen Hälfte über die verlängerte Linie A_2 A_1 hinaus, und zur Bildung der Elementargesamtheiten müssen in Ermangelung genauerer Daten die Punkteninhalte dieser Parallelogramme halbiert werden. Der an dieser Stelle begangene Fehler ist aber verhältnismässig grösser als derjenige, der bei der Halbierung der in den vorigen Beispielen vorkommenden Parallelogramme mit horizontaler Grundlinie entsteht, da der Altersspielraum jetzt 2 Monate beträgt, während er vorher nur 1 Monat war. Andererseits allerdings entstehen in dem vorliegenden Falle sämtliche Fehler ausschliesslich an der oberen Grenze der ersten Altersjahresklasse, wo die Sterblichkeit sich schon weit weniger rasch ändert, als in den ersten Monaten. Für alle früheren Monatsstufen liefert die Methode genau passende Bestandteile der Elementargesamtheiten, und die unteren Elementargesamtheiten $\overset{1}{\varDelta}_1$ (dem späteren Geburtsjahr entsprechend) liefert sie überhaupt ganz korrekt. Gleichwohl ist im allgemeinen die Unterscheidung der Gestorbenen nach dem Alter der nach der Geburtszeit — wenn man nicht beide zugleich geben will — vorzuziehen.

Zur Näherungsberechnung der Elementargesamtheiten der Gestorbenen in der Altersklasse von 1—2 Jahren genügt die Unterscheidung der Sterbefälle nach vierteljährigen Stufen. Das Ergebnis wird natürlich noch genauer, wenn mit dieser Gruppierung auch die nach den Kalendermonaten oder wenigstens den Kalenderquartalen des Todes kombiniert ist. Bei den höheren Altersklassen kann man sich, wie schon erwähnt, einfach mit der Halbierung der durch Altersjahr und Kalenderjahr bestimmten Hauptgesamtheiten der Verstorbenen begnügen. Nur vom 75. Jahre ab sind wieder genauere Unterscheidungen zu wünschen.

II. Die Absterbeordnung.

1. Sind nun die Elementargesamtheiten der Verstorbenen auf irgend eine Art direkt oder näherungsweise bestimmt, so kann man aus je zweien der Begrenzungsdreiecke mit zusammenfallenden Hypotenusen die quadratisch begrenzten ersten Hauptgesamtheiten von Verstorbenen M^1 zusammensetzen, deren Kenntnis die unumgängliche Bedingung für die Aufstellung einer theoretisch genauen Absterbeordnung bildet. Reiht man solche Gesamtheiten M^1, die demselben Geburtsjahr angehören, nach einjährigen Altersklassen bis zu dem höchsten vorkommenden Alter — etwa bis zu 100 Jahren — aneinander, so erhält man in unserer geometrischen Darstellung (Fig. 4) den Punkteninhalt eines senkrechten Streifens, wie $N_7\ N_8\ U_7\ U_8$ eingeteilt nach einjährigen Altersklassen[1]. So würde sich also das beobachtete Absterben einer wirklichen Generation, d. h. der Geborenen aus der Strecke $N_7\ N_8$, darstellen und die Absterbeordnung, d. h. die Reihenfolge der Ueberlebenden aus dieser Generation im Alter von genau 1, 2, 3 u. s. w. Jahren (welche Altersgrenze von den einzelnen nicht gleichzeitig, sondern nach und nach im Laufe eines Jahres erreicht werden) lässt sich nun leicht berechnen, indem man von der Zahl der Geborenen G die der Gestorbenen bis zu den einzelnen Altersstufen abzieht, also die Differenzen bildet $G - M_1^1$, $G - (M_1^1 + M_2^1)$, $G - (M_1^1 + M_2^1 + M_3^1)$ u. s. w. Diese Differenzen sind zugleich die oben als „erste“ bezeichneten Hauptgesamtheiten von Lebenden L_1^1, L_2^1, L_3^1 u. s. w. Aber die

1) In der Figur erscheinen die Altersklassen als zehnjährige; es müssen dann für die Hauptgesamtheiten M^1 auch zehnjährige Geburtsstrecken angenommen werden. Wir nehmen aber im obigen an, dass die Massstrecke ein Jahr sei, wobei man sich die Figur etwa zehnmal höher ausgeführt denken muss.

Berechnung einer solchen Absterbeordnung würde eine Beobachtungsperiode von etwa einem Jahrhundert erfordern, und es würde überdies noch fraglich bleiben, ob sie auf andere Generationen anwendbar wäre, da in der langen Zeit die Bedingungen der Sterblichkeit von den späteren erheblich verschieden sein könnten. Praktisch brauchbar ist sie daher nur für die Darstellung der Kindersterblichkeit, also der Sterblichkeit in den ersten fünf oder zehn Lebensjahren und für diese bietet sie die theoretisch vollkommen korrekte Lösung des Problems. Man erhält dann also die Sterbenswahrscheinlichkeit im Alter von 0—1 Jahr $= \frac{M_1^1}{G}$, im Alter von 1—2 Jahr $\frac{M_2^1}{L_1^1}$, im Alter von 2—3 Jahr $\frac{M_3^1}{L_1^2}$ u. s. w.

Da diese Wahrscheinlichkeiten auch für die Zukunft um so genauer Geltung haben werden, je grösser die der Rechnung zu Grunde liegenden Zahlen sind, so empfiehlt es sich, mehrere Geburtenjahrgänge ${}_nG$, ${}_{n+1}G$, ${}_{n+2}G$ u. s. w., und andererseits auch die entsprechenden ${}_nM^1$, ${}_{n+1}M^1$, ${}_{n+2}M^1$ u. s. w. zusammenzufassen und aus diesen grösseren Zahlen die Sterbenswahrscheinlichkeiten abzuleiten. Für die erste Altersklasse erhält man also:

$$w = \frac{{}_nM_1^1 + {}_{n+1}M_1^1 + {}_{n+2}M_1^1 \dots}{{}_nG + {}_{n+1}G + {}_{n+2}G \dots}$$

2. Dieser theoretisch strengen Methode schliesst sich als Näherungsmethode die sogenannte Hermann'sche an. Diese setzt an die Stelle der nur mit Hülfe der Elementargesamtheiten bestimmbaren Hauptgesamtheiten M^1 die „dritten" Hauptgesamten von Verstorbenen M^3, die durch Sterbealter und Sterbezeit bestimmt sind und direkt beobachtet werden können, und die den einzelnen Altersklassen entsprechenden M^3 werden so aneinandergereiht, dass ihre unteren Elementargesamtheiten demselben Geburtsjahr angehören. So nimmt man also z. B. die Punkteninhalte der Parallelogramme $N_7\ N_8\ a_6\ a_7$, $a_7\ a_8\ b_6\ b_7$, $b_7\ b_8\ c_6\ c_7$ u. s. w. statt der Punkteninhalte der Quadrate $N_7\ N_8\ a_7\ a_8$, $a_7\ a_8\ b_7\ b_8$, $b_7\ b_8\ c_7\ c_8$ u. s. w. Die beiden Gesamtheiten M^3 und M^1 haben stets die unteren Elementargesamtheiten Δ^1 ge-

meinsam, der durch die Vertauschung begangene Fehler ist also immer nur gleich der Differenz der beiden oberen, zu verschiedenen Geburtsjahren gehörenden Elementargesamtheiten, also ${}_{n+1}\varDelta^2 - {}_n\varDelta^2$. Da die Geburtenzahl von einem zum andern Jahr verhältnismässig nicht viel zunimmt, so wird dieser Fehler im allgemeinen nicht gross sein. Für jede höhere Altersklasse der M^3 rückt das Kalenderjahr des Todes um 1 vor, so dass sie, wenn das Kalenderjahr durch den Index t angedeutet wird, allgemein durch die Symbole ${}_t\overset{3}{M}_1$, ${}_{t+1}\overset{3}{M}_2$, ${}_{t+2}\overset{3}{M}_3$ u. s. w. dargestellt werden. Bezeichnet ${}_tG$ die Geburtenzahl im Jahr t, so hat man also jetzt als Näherungswerte der Ueberlebenden im Alter von genau 1, 2, 3 u. s. w. Jahren ${}_tG - {}_t\overset{3}{M}_1$, ${}_tG - \left({}_t\overset{3}{M}_1 + {}_{t+1}\overset{3}{M}_2\right)$, ${}_tG - \left({}_t\overset{3}{M}_1 + {}_{t+1}\overset{3}{M}_2 + {}_{t+2}\overset{3}{M}_3\right)$ u. s. w.

Die Sterbenswahrscheinlichkeit für die erste Altersklasse wird demnach durch $\frac{{}_t\overset{3}{M}_1}{{}_tG}$ ausgedrückt. Es empfiehlt sich auch hier, mehrere Geburtsjahrgänge und die entsprechenden M^3 zusammenzufassen, um für die Sterbenswahrscheinlichkeiten grössere Zahlen als Grundlagen zu erhalten. Zur Geburtstrecke $N_7\ N_{10}$ würde also für die erste Altersklasse der Punkteninhalt des Parallelogramms $N_7\ N_{10}\ a_6\ a_9$ (statt desjenigen des Rechtecks $N_7\ N_{10}\ a_7\ a_{10}$), für die zweite Altersklasse der Punkteninhalt des Parallelogramms $a_7\ a_{10}\ b_8\ b_9$ (statt desjenigen des Rechtecks $a_7\ a_{10}\ b_7\ b_{10}$) gehören u. s. w., und die mit grösserem Gewicht bestimmte Sterbenswahrscheinlichkeit der ersten Altersklasse wäre also $\frac{{}_t\overset{3}{M}_1 + {}_{t+1}\overset{3}{M}_1 + {}_{t+2}\overset{3}{M}_1}{{}_tG + {}_{t+1}G + {}_{t+2}G}$. Der Fehler in der Zahl der Gestorbenen der ersten Altersklasse, die man als hervorgegangen aus den Geborenen der Strecke $N_7\ N_{10}$ annimmt, ist in diesem Beispiel gleich der Differenz der Punkteninhalte der Dreiecke $N_{10}\ a_9\ a_{10}$ und $N_7\ a_6\ a_7$. Die absolute Grösse dieses Fehlers nimmt bei fortwährend wachsender Geburtenzahl und gleichbleibender Sterblichkeit mit der Zahl der zusammengefassten Geburtsjahrgänge zu, im Verhältnis zu der zugehörenden Gesamtzahl von Geburten aber nimmt er im allgemeinen ab, und in jedem Falle wächst bei Vergrösserung der Grundzahl, hier also der Geburtenzahl, die Präzision der Bestimmung der Sterbenswahrscheinlichkeit.

Im übrigen gilt von der Hermann'schen Methode dasselbe, wie für die oben besprochene strenge Methode: sie liefert erst in einem Jahrhundert annähernd die volle Absterbeordnung einer wirklichen Generation und ihre praktische Verwendbarkeit beschränkt sich daher auf die Sterblichkeit in der Kindheit und frühen Jugend.

3. Eine Absterbeordnung, die allgemein für die Gegenwart Anwendung finden soll, muss auf denjenigen Sterbenswahrscheinlichkeiten beruhen, die unter den gegenwärtigen hygienischen und socialen Verhältnissen in den verschiedenen Altersklassen wirklich bestehen und nicht auf denjenigen, die vor vielen Jahren einmal bestanden haben. Diese gegenwärtigen Sterbenswahrscheinlichkeiten müssen unmittellbar bestimmt werden, und mit ihrer Hülfe kann man dann auch leicht berechnen, wie sich die Absterbeordnung einer hypothetischen Generation von 100 000 oder einer Million gestalten würde, wenn diese dauernd unter der Herrschaft der gegenwärtig geltenden Sterblichkeitsbedingungen stände. Zu diesem Zwecke muss man die Zahlen der in einem gegebenen Zeitpunkt in den verschiedenen Altersjahresklassen gleichzeitig lebenden Personen kennen, also die oben mit ${}_zL_a^2$ bezeichneten Hauptgesamtheiten von Lebenden, wie sie durch eine Volkszählung im Zeitpunkt z ermittelt werden können. Ferner müssen bekannt sein die beiden Elementargesamtheiten aller derjenigen Hauptgesamtheiten M^1, deren Begrenzungsquadrate von der dem Zeitpunkt z entsprechenden isochronischen Linie durchschnitten werden. Ist z. B. dieser Zeitpunkt N_8 (Fig. 4), die zugehörige isochronische Linie also N_8 U_3, so müssen die Punkteninhalte aller der Dreiecke, wie c_4 c_5 e_4 und c_5 e_4 e_5, gegeben sein, deren Hypotenusen durch diese Linie gebildet werden. Daraus ergeben sich dann die Hauptgesamtheiten M^1, in diesem Beispiel also der Punkteninhalt des Quadrats c_4 c_5 e_4 e_5. Für die Altersklasse von a—1 bis a Jahren wird die erste Hauptgesamtheit von Verstorbenen mit M_a^1, die gezählte zweite Hauptgesamtheit von Lebenden mit L_a^2, wenn wir die Indices n und z für das Geburtsjahr und den Zählungszeitpunkt der Einfachheit wegen weglassen. Durch die Division der ersten Grösse durch die zweite erhält man aber keineswegs die Sterbenswahrscheinlichkeit der a-Altersklasse, denn diese ist das Verhältnis von M_a^1 zu der Zahl derjenigen, die über-

haupt, und zwar nach und nach im Laufe eines Jahres, die untere Grenze der Altersklasse, in unserem Beispiele die Grenzlinie $c_4\ c_5$ überschritten haben, nicht aber zur Zeit z zusammen im Alter von a bis a + 1 leben, d. h. mit ihren Lebenslinien die Linie $c_4\ c_5$ treffen. Diese letztere Zahl ist offenbar kleiner als die erstere, und zwar um die Zahl der Sterbepunkte, die das Dreieck $c_4\ c_5\ e_4$ enthält. Mit anderen Worten: als Nenner des Wahrscheinlichkeitsbruches ist nicht die zweite Hauptgesamtheit $\overset{2}{L}_a$ zu nehmen, sondern die erste $\overset{1}{L}_{a-1}$, und diese wird, wie schon oben angeführt, dargestellt durch $\overset{2}{L}_a + \overset{1}{\varDelta}_a$ und die Sterbenswahrscheinlichkeit der a-ten Altersklasse demnach durch

$$\frac{\overset{1}{\varDelta}_a + \overset{2}{\varDelta}_a}{\overset{2}{L}_a + \overset{1}{\varDelta}_a} \text{ oder } \frac{\overset{1}{M}_a}{\overset{2}{L}_a + \overset{1}{\varDelta}_a}.$$

Soll diese Bestimmung theoretisch genau sein, so müssten also die Elementargesamtheiten der Gestorbenen wenigstens in dem der Volkszählung vorangehenden und dem ihr nachfolgenden Jahre unmittelbar erhoben werden. In Wirklichkeit aber findet die Erhebung der Elementargesamtheiten nur in wenigen Ländern und in diesen nicht immer für alle Altersklassen statt und die Berechnung der Absterbeordnung einer hypothetischen oder idealen Generation nach der obigen Methode kann daher bisher meistens nur annähernd ausgeführt werden, indem man für die fehlenden Elementargesamtheiten Näherungswerte einsetzt. Häufig wird der Quotient angeführt, den man erhält, indem man die Zahl der in der a-ten Altersklasse in einem Kalenderjahre Gestorbenen (also eine Hauptgesamtheit M^3) durch die Zahl der in derselben Altersklasse gezählten Lebenden dividiert. Dieser Bruch, den man als Sterblichkeitscoefficient zu bezeichnen pflegt, wurde früher oft mit der Sterbenswahrscheinlichkeit verwechselt. Ad. Bertillon gab dann einen verbesserten Ausdruck für diese letztere, der sich leicht zurückführen lässt auf den folgenden,

$$w_a = \frac{\overset{3}{M}_a}{\overset{2}{L}_a + \frac{1}{2}\overset{3}{M}_a}.$$

Das heisst also: es wird statt der ersten Hauptgesamtheit von Verstorbenen die direkt zu bestimmende dritte für dieselbe Altersklasse genommen (in dem obigen Beispiele der Punkteninhalt des Parallelogramms c_4 c_5 e_3 e_4 oder auch des Parallelogramms c_5 c_6 e_4 e_5 oder besser noch das Mittel aus diesen beiden) und statt der Elementargesamtheit Δ_a^2 einfach die Hälfte von M_a^3 genommen. Nach dieser sogenannten „direkten" Methode erhält man in der That einen Näherungswert von w_a, der für alle Altersklassen mit Ausnahme der beiden ersten und der des höchsten Greisenalters hinlänglich genau ist. Für die erste Altersklasse aber müsste man im Nenner etwa zwei Drittel statt der Hälfte von M_1^3 und auch in der zweiten noch einen grösseren Bruch als $^1/_2$ annehmen. Ueberdies dürften aber auch die Volkszählungsergebnisse für die erste Altersklasse häufig weniger sicher sein, als für die übrigen. Daher empfiehlt diese sich für immer am meisten die unmittelbare Bestimmung des Verhältnisses der Gestorbenen zu den Geborenen nach der zuerst besprochenen Methode oder bei fehlender Kenntnis der Elementargesamtheiten nach der Hermann'schen Methode.

Sind nun die Sterbenswahrscheinlichkeiten w_1, w_2, w_3 u. s. w. nach einer mehr oder weniger genauen Methode bestimmt, so sind die Ueberlebenswahrscheinlichkeiten am Ende der 1., 2., 3. u. s. w. Altersklassse $1-w_1$, $1-w_2$, $1-w_3$ u. s. w. und die ideale Absterbeordnung wird daher, wenn man die Zahl der Geborenen als Einheit nimmt: $(1-w_1)$, $(1-w_1)$. $(1-w_2)$, $(1-w_1)$. $(1-w_2)$. $(1-w_3)$ u. s. w.

4. Die von R. Boeckh in der Berliner Statistik angewandte Methode hat als Grundlage ebenfalls die Zahl der Lebenden am Anfang des Kalenderjahres, unterschieden nach Geburtsjahren (was bei diesem Anfangspunkt mit der Unterscheidung nach Altersjahren zusammenfällt), ferner die Zahl der Geburten und die Elementargesamtheiten der Gestorbenen innerhalb des betrachteten Kalenderjahres. Boeckh legt auf diesen letzteren Umstand besonderes Gewicht und in demselben liegt der Hauptunterschied von der vorher besprochenen, bei der Elementargesamtheiten aus dem dem Zählungszeitpunkt vorhergehenden und nachfolgenden Kalenderjahr benutzt werden. Es soll eben durch die Boeckh'sche Methode die Absterbeordnung aufgestellt werden, die den besonderen innerhalb des Beobachtungsjahrs wirksam gewesenen Sterblichkeitsbedingungen entspricht. Damit ist aber auch schon gesagt, dass sie nicht die Absterbeordnung

einer wirklichen, sondern ebenso, wie die obige Methode, die einer hypothetischen Generation darstellt. Ihre Elemente sind also z. B. (Fig. 4) die Gesamtheiten von Lebenden in den verschiedenen Altersklassen in dem Zeitpunkte N_7, am Anfang des Kalenderjahres $N_7\ N_8$ oder n, also ${}_{n-1}L_1^2$, ${}_{n-2}L_2^2$, ${}_{n-3}L_3^2$ u. s. w. (wo die Indices mit n die Geburtsjahre andeuten), die Zahl der Geborenen aus diesem Kalenderjahre, die Elementargesamtheiten P. $(N_7\ N_8\ a_7)$, P. $(N_7\ a_6\ a_7)$, P. $(a_6\ a_7\ b_6)$, P. $(a_6\ b_5\ b_6)$ u. s. w. oder symbolisch ausgedrückt, ${}_n\Delta_1^1$, ${}_{n-1}\Delta_1^2$, ${}_{n-1}\Delta_2^1$, ${}_{n-2}\Delta_2^2$, ${}_{n-2}\Delta_3^1$ u. s. w. Wir bilden ferner die Verhältnisse $\frac{{}_n\Delta_1^1}{G}$, $\frac{{}_{n-1}\Delta_1^2}{{}_{n-1}L_1^2}$, $\frac{{}_{n-1}\Delta_2^1}{{}_{n-1}L_1^1}$, $\frac{{}_{n-2}\Delta_2^2}{{}_{n-2}L_2^2}$, $\frac{{}_{n-2}\Delta_3^1}{{}_{n-2}L_2^1}$ u. s. w. und bezeichnen sie mit bezw. δ_1^1, δ_1^2, δ_2^1, δ_2^2, δ_3^1 u. s. w., wo die L^1 gefunden sind, indem von den L^2 die entsprechenden Δ^2 abgezogen wurden. Nehmen wir nun die Geburtszahl G (oder ${}_nL_0^1$) als Einheit, so können wir mit diesen Verhältniszahlen die Relativzahlen derjenigen berechnen, deren Lebenslinien die Linien $N_8\ a_7$, $a_7\ a_8$, $a_8\ b_7$, $b_7\ b_8$, $b_8\ c_7$, $c_7\ c_8$ u. s. w. schneiden. Die 2., 4., 6. u. s. w. von diesen Zahlen bilden die ideale Absterbeordnung in unserem Sinne, die 1., 3., 5. u. s. w. stellen unter bestimmten Voraussetzungen (s. u.) die innerhalb jeder Altersklasse von den Gestorbenen und Ueberlebenden im ganzen durchlebte Zeit dar und zugleich auch die Zahl derjenigen, die von der idealen Generation unter den gegebenen Bedingungen am Ende des Kalenderjahres der Geburt und der folgenden Kalenderjahre in den einzelnen Altersklassen noch gleichzeitig leben würden. Die obige Zahlenreihe wird durch folgende Formeln ausgedrückt:

$(1-\delta_1^1)$, $(1-\delta_1^1)\cdot(1-\delta_1^2)$, $(1-\delta_1^1)\cdot(1-\delta_1^2)\cdot(1-\delta_2^1)$, $(1-\delta_1^1)\cdot(1-\delta_1^2)\cdot(1-\delta_2^1)\cdot(1-\delta_2^2)$ u. s. w. und die Absterbeordnung bilden ausser der Anfangsgrösse 1 die Glieder $(1-\delta_1^1)\cdot(1-\delta_1^2)$, $(1-\delta_1^1)\cdot(1-\delta_1^2)\cdot(1-\delta_2^1)\cdot(1-\delta_2^2)$ u. s. w. Während man also nach der zuerst besprochenen Methode bei der Berechnung der Absterbeordnung stets nach vollen, aus zwei Elementargesamtheiten gebildeten Hauptgesamtheiten M^1 fortschreitet, geht die Rechnung nach der Boeckh'schen Methode von Elementargesamtheit zu Elementargesamtheit und jeder der Faktoren $(1-w)$ wird hier in zwei Faktoren $(1-\delta^1)\ (1-\delta^2)$ zerlegt.

Die sachliche Bedeutung dieses Unterschiedes erkennt man am leichtesten in der untersten Altersklasse. Um von der gleichen Geburtenzahl ausgehen zu können, nehmen wir an, dass die erste Methode mit Benutzung einer Zählung im Zeitpunkt N_8, also nicht am Anfang, sondern am Ende der Jahresstrecke N_7 N_8, angewandt werde. Der empirische Wert der Sterbenswahrscheinlichkeit im Alter von 0 bis 1 Jahr für die in dem Jahre n oder N_7 N_8 Geborenen wird nun in aller Strenge ausgedrückt durch den Punkteninhalt des Quadrats N_7 N_8 a_7 a_8 geteilt durch die Zahl der Geborenen G. Die hier in Rechnung zu bringenden Sterbefälle finden aber nicht sämtlich in dem Beobachtungsjahr N_7 N_8 statt, sondern teilweise, und zwar soweit sie dem Elementardreieck N_8 a_7 a_8 entsprechen, erst in dem folgenden Jahre. Bei der ersten Methode wird nun für das erste Altersjahr theoretisch genau der Punkteninhalt des Quadrats N_7 N_8 a_7 a_8, die wirkliche erste Hauptgesamtheit von Verstorbenen ${}_nM_1^1$ verwendet, und es fällt daher für dieses erste Altersjahr die ideale Absterbeordnung mit der in diesem Falle wirklich auftretenden zusammen. Nach der **Boeckh**'schen Methode dagegen hat die erste Altersklasse von Verstorbenen aus dem Geburtsjahr n nur die untere Elementargesamtheit P. (N_7 N_8 a_7) oder ${}_n\varDelta_1^1$ mit der wirklichen Hauptgesamtheit ${}_nM_1^1$ gemein. Für die obere oder P. (N_8 a_7 a_8) dagegen wird nicht der wirkliche Wert, sondern der durch Multiplikation von ${}_nL_1^2$ und δ_1^1 berechnete eingesetzt, indem aus der Elementargesamtheit P. (N_7 a_6 a_7), die von den Lebenden ${}_{n-1}L_2^1$ in der isochronischen Linie N_7 a_6 ausgeht, durch Proportionsrechnung die von den Lebenden ${}_nL_1^2$ in der isochronischen Linie N_8 a_7 ausgehende Elementargesamtheit P. (N_8 a_7 a_8) abgeleitet wird. In den höheren Altersklassen weicht nun auch die nach der ersten Methode berechnete ideale Absterbeordnung von der wirklichen der Generation des Jahres n ab; bei der **Boeckh**'schen Methode aber werden diese Abweichungen im allgemeinen noch grösser sein, weil die rechnerischen Uebertragungen auf die ideale Generation nicht nach Hauptgesamtheiten von Verstorbenen, sondern nach Elementargesamtheiten stattfinden, also doppelt so zahlreich sind. Welche von den nach der einen oder der anderen Methode erhaltenen Absterbeordnungen vorzuziehen sei, hängt von dem Zweck ab, den man im Auge hat. Will man eine Absterbeordnung aufstellen, die auch für andere Jahre die wahrscheinlichen Sterblichkeitsverhältnisse darstellt, so ist die erste Methode zweckmässiger, da sie aus den Beobachtungen zweier Kalenderjahre abgeleitet ist und daher durch die Besonderheiten der einzelnen Jahre weniger beeinflusst wird. Grössere Sicherheit freilich erlangt man erst durch Mittelwerte aus den Ergebnissen mehrerer Beobachtungsjahre. Will man dagegen gerade die besonderen Eigentümlichkeiten der Sterblichkeit eines einzelnen Jahres durch eine für dieses Jahr gewissermassen spezifizierte Absterbeordnung charakterisieren, so dient dazu die Boeckh'sche Methode. Wenn z. B. in einem Jahre die Influenza oder die Cholera ungewöhnlich zahlreiche Opfer forderte, so werden diese ungünstigen Umstände durch die Boeckh'sche Methode bestimmt zum Ausdruck gebracht, während sie bei Anwendung der anderen Methode, die die Ergebnisse des folgenden Jahres mit normaler oder sogar besonders günstiger Sterblichkeit mit verwendet, schon mehr oder weniger stark verwischt werden. Aber eben deswegen ist die Boeckh'sche Methode zur Darstellung einer möglichst auch für die Zukunft gültigen Absterbeordnung an sich weniger geeignet. Auch wird bei der ersten Methode das Beobachtungsmaterial unmittelbarer verwertet, während bei der Boeckh'schen Methode mehr proportionale Uebertragungen stattfinden und überhaupt eine umständlichere Rechnung erfordert wird, bei der allerdings zugleich auch die durchlebte Zeit in den einzelnen Altersklassen der idealen Generation mit gefunden wird.

5. Die einfachste, aber auch unvollkommenste Methode der Berechnung einer Sterblichkeitstabelle ist diejenige, die man als die Halley'sche zu bezeichnen pflegt, obwohl Halley selbst sie in ihrer reinen Gestalt gar nicht angewandt hat. Sie nimmt einfach die Altersklassen der Verstorbenen eines oder mehrerer Kalenderjahre als zusammenfallend an mit den Altersklassen der Gestorbenen aus einer Generation, die der Summe jener Verstorbenen gleich ist. Mit anderen Worten, sie nimmt statt der Hauptgesamtheiten M^1 von Verstorbenen in dem Streifen N_7 N_8 U_7 U_8 (Fig. 4) die Hauptgesamtheiten M^3 in dem schrägen Streifen N_7 N_8 U_2U_3 und setzt zugleich den Punkteninhalt dieses Streifens oder ΣM^3 gleich der Zahl der Geborenen. Die Ab-

sterbeordnung wird also einfach, wenn der Index t sich auf das Kalenderjahr der Beobachtung bezieht:

$$\Sigma_t M^s,\ \Sigma_t M^s - {}_tM^s_1,\ \Sigma_t M^s - ({}_tM^s_1 + {}_tM^s_2),\ \Sigma_t M^s - ({}_tM^s_1 + {}_tM^s_2 + {}_tM^s_3)$$

u. s. w.

Diese Methode würde richtige Ergebnisse liefern, wenn die untersuchte Bevölkerung seit etwa hundert Jahren stationär geblieben wäre, d. h. wenn in diesem Zeitraum sowohl die Zahl der jährlichen Geburten als auch die Sterblichkeitsverhältnisse in allen Altersklassen unverändert geblieben wären. Die Dichtigkeit der Sterbepunkte wäre dann ja in jedem horizontalen Streifen vollkommen gleichmässig und der Punkteninhalt eines Parallelogramms wie z. B. $m_2\ m_3\ o_1\ o_2$ dem des Quadrats $m_7\ m_8\ o_7\ o_8$ gleich. Ebenso bliebe die Gesamtzahl der Sterbepunkte in den schrägen Streifen immer gleich der unveränderlichen Geburtenzahl. Jene Bedingung wird aber thatsächlich wohl niemals erfüllt, vielmehr hat die Bevölkerung und die jährliche Geburtenzahl in allen Kulturländern seit einem Jahrhundert mehr oder weniger zugenommen und auch die Sterblichkeitsverhältnisse sind infolge von Kriegen und Seuchen mehrfach bedeutenden Veränderungen unterworfen gewesen. Im allgemeinen werden daher die Differenzen zwischen den Punkteninhalten der Quadrate des senkrechten und des derselben Altersklasse entsprechenden Parallelogramms des schrägen Streifens um so grösser sein, je höher die Altersklasse ist und je weiter daher das Geburtsjahr der beobachteten Gestorbenen zurückliegt. Bei einigermassen stark zunehmender Bevölkerung ist demnach eine nach dieser Methode berechnete Absterbeordnung überhaupt nicht brauchbar. Die Methode hat aber den Vorzug grosser Bequemlichkeit, und es erhebt sich daher die Frage, ob sie nicht durch eine Korrektion brauchbar gemacht werden könnte. Zunächst bietet sich hier die Möglichkeit, die Zahl der Gestorbenen der einzelnen Altersklassen im Verhältnis der Geburtenzahl des Beobachtungsjahrs $N_7\ N_8$ zu der Geburtenzahl in dem der Alterklasse entsprechenden Jahre z. B. $N_2\ N_3$ für die durch das Parallelogramm $m_2\ m_3\ o_1\ o_2$ abgegrenzte Gesamtheit von Verstorbenen, zu vergrössern. Es bleibt dabei allerdings die Ungenauigkeit, dass diese Gesamtheiten nur mit ihren untern Elementargruppen dem betreffenden Geburtsjahrgang entsprechen; doch könnte man diesen

Fehler, der überhaupt nicht bedeutend ist, noch vermindern, indem man das Mittel aus den beiden jedesmal in Betracht kommenden Jahresgenerationen nähme. Weit misslicher ist die zu Grunde liegende Annahme, dass die Sterblichkeitsverhältnisse sich während eines Jahrhunderts in allen Altersklassen nicht geändert hätten. Durch Zusammenfassung mehrerer Beobachtungsjahre liesse sich auch dieser Uebelstand mildern; es bleibt dann aber noch die Schwierigkeit, dass es, ganz abgesehen von den vorgekommenen Gebietsänderungen, nur sehr wenige Länder giebt, in denen eine genügende Statistik der Geburten für ein ganzes Jahrhundert rückwärts vorhanden ist, und man müsste sich daher für die früheren Jahre mit hypothetischen Annahmen über der Geburtenzahl behelfen. Man könnte auch überhaupt hypothetische mittlere Geburtenzahlen an die Stelle der wirklichen setzen, indem man etwa von einem 30 oder 40 Jahre zurückliegenden Geburtsjahre ausginge und annähme, dass wir die Geburtenzahl von diesem bis zum letzten Jahre in arithmetischer oder auch in geometrischer Progression vermehrt hätten, und nach derselben Norm könnte man dann auch weiter zurückrechnen. Eine solche Näherungsrechnung wäre natürlich noch weniger genau, als die von den wirklichen Geburtenzahlen ausgehende. Aber auch die mit Hilfe der letzeren verbesserte Halley'sche Methode (die der von Knapp als Anhalt'sche Methode bezeichneten entspricht) wird man nicht anwenden, wenn man die Resultate einer Volkszählung mit Unterscheidung wenigstens fünfjähriger Alterklassen zur Verfügung hat. Immerhin aber ist es manchmal erwünscht, aus den Beobachtungen eines einzigen Jahres und ohne Zuziehung von Bevölkerungszahlen sich eine ungefähre Vorstellung von der Absterbeordnung zu verschaffenen und dazu dürfte das folgende summarische Verfahren ausreichen.

6. Der Fehler der Halley'schen Methode tritt offen darin hervor, dass bei fortschreitender Bevölkerung die Zahl der in dem Beobachtungsjahr Geborenen stets grösser ist als die Gesamtzahl der Verstorbenen. Die Differenz dieser beiden Zahlen D muss daher, um die nach der Halley'schen Methode bestimmte Absterbeordnung zu korrigieren, auf die einzelnen Altersklassen in zweckmässiger Weise verteilt werden, und zwar müssen die Zahlen M_2^3, M_3^3, M_4^3 u. s. w. in um so stärkerem Verhältnis vergrössert werden, je weiter die ihnen entsprechenden Geburts-

jahre zurückliegen. Nähme man Abnahme der Geburtenzahlen nach rückwärts in arithmetischer Progression an, so würde der Faktor, mit dem M_n^3 zu multiplizieren wäre, die Form $\frac{1}{1-(n-1)\beta}$ haben, wo β ein konstanter und zwar kleiner Bruch wäre. Man ist aber ebenso berechtigt, für den fraglichen Faktor die Form $1+(n-1)\beta$ anzunehmen (die beiden ersten Glieder der Entwickelung des obigen unechten Bruches), wodurch der Zuschlag für die höheren Altersklassen etwas schwächer wird[1]. Bezeichnet man nun die (unbekannten) aus den Geborenen G der Beobachtungsjahre künftig wirklich hervorgehenden Gesamtheiten von Verstorbenen der verschiedenen Altersklassen wieder mit M_1^1, M_2^1, M_3^1 u. s. w., so hat man

$$\begin{aligned} M_1^3 &= M_1^1 \\ (1+\beta)\, M_2^3 &= M_2^1 \\ (1+2\beta)\, M_3^3 &= M_3^1 \\ (1+3\beta)\, M_4^3 &= M_4^1 \\ \ldots\ldots &\quad \ldots \\ (1+(n-1)\beta)\, M_n^3 &= M_n^1. \end{aligned}$$

Addiert man diese Gleichungen, die bis zur höchsten Altersstufe reichen (wobei $M_{n+1}^3 = 0$), so ist die Summe rechts gleich der als gegeben angenommenen Zahl G der Geburten im Beobachtungsjahr, und nach Auflösung der Klammern erhält man:

$$\beta\,(M_2^3 + 2M_3^3 + 3M_4^3 + \ldots (n-1)M_n^3) = G - \Sigma M^3 = D$$

und wenn man die links in der Klammer stehende Summe mit B bezeichnet, so ergiebt sich

$$\beta = \frac{D}{B}.$$

Durch Einsetzung dieses Wertes von β erhält man aus den obigen Gleichungen die Näherungswerte der Gesamtheiten M^1,

1) Es ist an sich wahrscheinlicher, dass der absolute Zuwachs der Geburten von einem Jahre zum anderen vor 50 oder 90 Jahren bei der damals weit geringeren Bevölkerung kleiner gewesen ist, als in der jüngsten Zeit. Die obige Hypothese hält einigermassen die Mitte zwischen den Annahmen einer arithmetischen und einer geometrischen Progression der Geburtenzahl bei fortschreitender Zeit.

mittelst deren man dann näherungsweise die Absterbeordnung der Generation G aufstellen kann.

Der Ausdruck B hat noch eine besondere Bedeutung. Fügen wir ihm die halbe Summe der M^3 hinzu, so hat man

$$\tfrac{1}{2}M_1^3 + 1\tfrac{1}{2}M_2^3 + 2\tfrac{1}{2}M_3^3 + 3\tfrac{1}{2}M_4^3 + \ldots ((n-1) + \tfrac{1}{2})M_n^3$$

d. h. annähernd die Summe der von den sämtlichen Verstorbenen des Beobachtungsjahres durchlebten Jahre, wenn für die Verstorbenen jeder Jahresklasse das mittlere Alter in Rechnung gebracht wird. Wird diese Alterssumme mit A bezeichnet, so ist also $B = A - \tfrac{1}{2}\Sigma M^3$. Für die erste Altersklasse ist allerdings die Annahme eines Durchschnittsalters der Gestorbenen von $^1/_2$ Jahr zu hoch, denn in Wirklichkeit beträgt dieses nur $^1/_4$ bis $^1/_3$ Jahr.

7. Es möge hier auch noch etwas näher auf die Beziehung zwischen der Alterssumme der Verstorbenen und der Zahl der Lebenden eingegangen werden, die oben schon gelegentlich berührt worden ist. Nehmen wir als Zeiteinheit ein Jahr an, so ist die Alterssumme der Verstorbenen der n-ten Altersklasse einer Hauptgesamtheit M^1, wie sie z. B. durch das Quadrat $m_1\ m_2\ o_1\ o_2$ (Fig. 4) abgegrenzt ist, annähernd gleich $((n-1)) + \tfrac{1}{2}\ M_n^1$. Ist nun die Bevölkerung durchweg in dem oben bezeichneten Sinne stationär, so ist der Punkteninhalt des bis zu der Geburtsgrenzlinie $N_7\ U_7$ reichenden horizontalen, trapezförmigen Streifens $m_2\ m_7\ o_1\ o_7$ ebenfalls gleich $((n-1) + \tfrac{1}{2}\ M_n^1$. Aus solchen trapezförmigen Streifen aber nebst dem Dreieck $N_7\ a_6\ a_7$ als unterer Spitze setzt sich das Dreieck $N_7\ U_2\ U_7$ zusammen, dessen Punkteninhalt gleich ist der Zahl der die isochronische Linie $N_7\ U_2$ schneidenden Lebenslinien und somit gleich der Zahl der Lebenden in dem Zeitpunkte N_7, die nach der Voraussetzung auch in der Folge unverändert bleibt. Andererseits ist bei stationärer Bevölkerung auch der Punkteninhalt jedes Quadrats von der Art $m_1\ m_2\ o_1\ o_2$ gleich dem des zum Teil mit diesem Quadrat zusammenfallenden Parallelogramms $m_2\ m_3\ o_1\ o_2$, oder allgemein $M_n^1 = M_n^3$ und demnach ist die Summe aller $((n-1) + \tfrac{1}{2})\ M_n^3$, wenn für n alle Zahlen von 1 bis zu dem höchsten vorkommenden Altersjahre, etwa 100, eingesetzt werden, d. h. also die Alterssumme aller in einem Kalenderjahre Gestorbenen (die durch den Punkteninhalt

des Streifens $N_7 N_8 U_2 U_3$ dargestellt werden) bei stationärer Bevölkerung ist gleich der Zahl der gleichzeitig in allen Altersstufen Lebenden. Dieser Satz ist streng richtig, obwohl die oben gemachte Annahme über die Alterssumme der Gestorbenen der Hauptgesamtheiten M^1 oder M^3 nur annähernd zutrifft. Denn die Schlussfolgerung bleibt dieselbe, wenn man das Alter nicht, wie bei diesen Hauptgesamtheiten nach Jahren, sondern nach beliebig kleinen Bruchteilen eines Jahres, ein x tel Jahr, abstuft. Denken wir uns das der n ten Altersklasse entsprechende Parallelogramm $m_2\ m_3\ o_1\ o_2$ (Fig. 4) vergrössert durch das Parallelogramm $N_3\ N_4\ A_2\ A_3$ (Fig. 5) dargestellt und dieses in x gleiche horizontale Streifen geteilt, die $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \ldots \mu_x$ Sterbepunkte enthalten, so ist die in Jahren ausgedrückte Alterssumme der Gestorbenen des höchsten (x ten) Streifens gleich $\left((n-1) + \frac{x-\frac{1}{2}}{x}\right)\mu_x$. Ebenso gross ist aber bei stationärer Bevölkerung auch die Zahl der Sterbepunkte in dem ebenso schmalen trapezförmigen Streifen, der von der Spitze A_2 bis zu der (nicht gezeichneten) Geburtsgrenzlinie reicht, die der Linie $N_7 U_7$ in Fig. 4 entsprechend in dem Punkte auf der Achse errichtet ist, wo diese von der verlängerten isochronischen Linie $A_2 N_3$ getroffen wird. Für die übrigen Streifen gelten entsprechende Gleichungen, und so gelangt man durch Summierung auf der einen Seite wieder zu der Alterssumme aller Verstorbenen eines Jahres und auf der anderen zur Zahl der Lebenden bei stationärer Bevölkerung. Man hat auch hier für das Alter der Verstorbenen in jedem der schmalen Streifen den mittleren Wert angenommen, aber da man sich die Altersstufe von ein x tel Jahr beliebig klein denken kann, so wird der Fehler zum Verschwinden gebracht, und dies gilt auch für die erste Altersklasse, in der die Dichtigkeit der Sterbepunkte von der Geburt an ausserordentlich schnell abnimmt. Man sieht auch, dass der Satz bei beliebiger Veränderlichkeit der μ, d. h. der Sterblichkeit innerhalb der Jahresklassen gilt; notwendige Voraussetzung dagegen ist, dass jedes μ innerhalb des betreffenden horizontalen Streifens unveränderlich bleibt, was eben mit der Annahme der stationären Bevölkerung zusammenfällt.

8. Statt der Alterssumme aller Verstorbenen eines Jahres kann man auch die von den Gestorbenen und Ueberlebenden innerhalb der quadratischen Grenzen einer Hauptgesamtheit M^1

durchlebte Zeit betrachten. Beträgt die Zahl derjenigen, welche die obere einjährige Grenzstrecke A_2 A_3 (Fig. 5) einer einjährigen Altersstufe lebend überschreiten L, so haben diese innerhalb des betreffenden Altersjahres auch L Jahre durchlebt. Teilen wir dieses Jahr wieder in n Teile, entsprechend den schmalen horizontalen Streifen in der Figur, so haben die μ_x im xten Jahresteil Gestorbenen innerhalb der betrachteten Altersgrenzen $\frac{x - \frac{1}{2}}{n}$ Jahre durchlebt. Ebenso gross aber ist bei stationärer Bevölkerung auch die Zahl der Sterbepunkte in dem (von unten gerechnet) xten trapezförmigen Streifenstück rechts von der Linie N_3 A_2. Die Summe dieser Streifenstücke aber ist gleich der Zahl derjenigen, deren Lebenslinien zwar die Linie N_3 A_2 schneiden, die aber dann vor Erreichung der oberen Altersgrenze, also innerhalb des Dreiecks N_3 A_2 A_3 sterben. Addiert man dazu die Zahl L der Ueberlebenden, so erhält man die Zahl der aus demselben Geburtsjahr stammenden Lebenden in dem der isochronischen Linie N_3 A_2 entsprechenden Zeitpunkt und diese Gesamtzahl ist wieder gleich der Summe der von den Gestorbenen und Ueberlebenden in dieser einjährigen Altersstufe durchlebten Zeit. Die Bedingung der stationären Bevölkerung ist auch hier unumgänglich; sie wird aber nur für eine Jahresstrecke verlangt und ist daher immer, wenn auch nicht genau, so doch sehr nahe erfüllt. Wenn die Sterblichkeit sich innerhalb einer einjährigen Altersstufe nicht merklich ändert, d. h. wenn die Sterbepunkte sich innerhalb derselben nahezu gleichmässig verteilen, so kann man ohne weiteres sagen: sind m Personen innerhalb dieser Altersgrenzen gestorben und haben L die obere Grenze überschritten, so haben die ersteren innerhalb der Altersklasse $\frac{1}{2}$ m Jahre, die letzteren L Jahre, beide zusammen also $L + \frac{1}{2}$ m Jahre durchlebt und die Zahl der gleichzeitig in dieser Altersklasse Lebenden ist bei stationärer Bevölkerung ebenfalls $L + \frac{1}{2}$ m. Aus dem Obigen geht aber hervor, dass der Satz auch bei beliebig grosser Veränderlichkeit der Sterblichkeit innerhalb der Altersklasse gilt, also namentlich auch für die jüngsten und ältesten Klassen anwendbar ist.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass die Zahl der Lebenden, die in den Grenzen einer Hauptgesamtheit M^1 am Ende des ersten der beiden in Betracht kommenden Kalenderjahre vorhanden sind, d. h. die Zahl der z. B. die Diagonale $N_3 A_2$ schneidenden Lebenslinien gleich ist der Durchschnittszahl der Lebenden der betreffenden Generation innerhalb der beiden Altersgrenzen, in unserem Beispiel also zwischen den Linien $N_2 N_3$ und $A_2 A_3$. Dabei kann wieder die Dichtigkeit der Sterbepunkte sich mit dem Alter beliebig ändern, dagegen muss sie in jedem beliebig schmalen horizontalen Streifen zwischen den beiden senkrechten Grenzlinien gleichmässig bleiben.

Teilt man die Altersstrecke wieder in n gleiche Teile, ist die Zahl der in den einzelnen Streifen enthaltenen Sterbepunkte von unten nach oben $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots m_n$ und die Zahl der die untere Altersgrenze überschreitenden Lebenden L^1, so hat man als durchschnittliche Zahl der Lebenden in den einzelnen Streifen:

$$L^1 - \tfrac{1}{2}\mu_1$$
$$L^1 - (\mu_1 + \tfrac{1}{2}\mu_2)$$
$$L^1 - (\mu_1 + \mu_2 + \tfrac{1}{2}\mu_3)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$L^1 - (\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \tfrac{1}{2}\mu_n)$$

Addiert man diese Ausdrücke und dividiert die Summe durch n, so erhält man $L^1 - \frac{1}{n} \Sigma \mu$, wenn $\Sigma \mu$ die Summe aller in den Einzelausdrücken vorkommenden μ und $\frac{1}{2} \mu$ bezeichnet. Dies ist bei beliebiger Aenderung der Sterblichkeit mit dem Alter um so genauer die durchschnittliche Zahl der Lebenden zwischen den beiden Altersgrenzen, je grösser n angenommen wird. Die senkrechten Reihen der μ aber sind, wie man leicht sieht, gleich dem n-fachen Punkteninhalte der von der Grenzlinie $N_2 A_2$ (Fig. 5) ausgehenden trapezförmigen Streifenstücke. Demnach ist $\frac{1}{n} \Sigma\mu$ gleich dem Punkteninhalt des Dreiecks $N_2 N_3 A_2$ oder der Elementargesamtheit Δ^1. Die Durchschnittszahl $L^1 - \Delta^1$ ist aber auch gleich der Zahl der Lebenslinien, welche die Diagonale $N_3 A_2$ schneiden, also gleich der Zahl der Lebenden der betreffenden Altersklasse in dem dieser isochronischen Linie entsprechenden Zeitpunkte. Vorausgesetzt ist dabei, dass die Geburtendichtigkeit in dem Geburtsjahr der betrachteten Generation konstant ist und die Absterbeordnung unverändert bleibt.

III. Die Sterbenswahrscheinlichkeiten unter dem Einfluss der Wanderungen.

1. Wir haben bisher angenommen, dass die Volkszahl nur durch Geburten und Sterbefälle Aenderungen erfahre, also die Ein- und Auswanderungen in ihrer Bedeutung für die Bestimmung der Sterbenswahrscheinlichkeiten und der Absterbeordnung ausser Betracht gelassen. Bevor wir indes auf diese Frage näher eingehen, mögen einige allgemeine Bemerkungen über das Wesen der mathematischen Wahrscheinlichkeit vorausgeschickt werden.

Die Lehre von der Wahrscheinlichkeit a priori ist ein von jeder Erfahrungsthatsache unabhängiger Zweig der reinen Mathematik, und zwar der kombinatorischen Analysis. Sie nimmt an, was in der Wirklichkeit gar nicht vorkommt, dass s Fälle irgend eines Ereignisses gleich möglich seien und dass unter diesen m Fälle einer bestimmten Art seien, die man als „günstige" zu bezeichnen pflegt.. Werden nun die Verhältnisse $\frac{m'}{s'}, \frac{m''}{s''}, \frac{m'''}{s'''}$ u. s. w. für irgend welche Arten von Ereignissen als gegeben angenommen, so beschränkt sich die Aufgabe der eigentlichen Wahrscheinlichkeitsrechnung darauf, im voraus zu berechnen, wie viele überhaupt mögliche und wie viele günstige Fälle im obigen Sinne sich für ein aus diesen Ereignissen in irgend einer bestimmten Art kombiniertes Ereignis ergeben und wie sich demnach das Verhältnis der — nur gedachten — günstigen zu den — ebenfalls nur gedachten — möglichen Fällen, also die ihrer Definition entsprechende apriorische Wahrscheinlichkeit des kombinierten Ereignisses herausstellt. Um sich von solchen Ereignissen eine anschauliche Vorstellung zu machen, benutzt man in der Regel das Bild eines Glückspiels mit Würfeln oder mit schwarze und weisse Kugeln enthaltenden Urnen. Man nimmt z. B. an, dass für jede Seite eines Würfels die gleiche Möglichkeit bestehe, nach einem Wurfe als oberste herauszukommen. Ob dies bei einem gegebenen Würfel wirklich der Fall sei, kommt gar nicht in Frage. Der Umstand, dass die gleiche Möglichkeit der Fälle nach unserem subjektiven Wissen vorhanden ist, hat hier nur die Bedeutung, dass wir unter dieser Annahme ein von beiden Parteien als gerecht anerkanntes Glückspiel regeln können. Auf Grund einer solchen Voraussetzung gleich möglicher Fälle ist also die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel eine Vier zu werfen $= 1/_6$. Fragen wir nun, welches ist das Verhältnis der günstigen zu den möglichen Fällen, wenn der günstige Fall das Herauskommen der Vier in zwei aufeinander folgenden Würfen ist, so ergiebt sich aus einer einfachen Ueberlegung, dass unter diesen Bedingungen die Zahl der möglichen Fälle 36 ist und dass auf diese nur ein günstiger kommt; das Verhältnis, das wir als Wahrscheinlichkeit des geforderten Ereignisses bezeichnen, ist also $1/_{36}$. Fragen wir, wie sich das Verhältnis der günstigen zu den möglichen Fällen stellt, wenn verlangt wird, dass bei 600 Würfen zuerst 200mal nacheinander die Vier und bei den folgenden 400 Würfen immer eine der übrigen Nummern herauskomme, so findet man

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{200} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{400} = \frac{5^{400}}{6^{600}}.$$

Fragt man nach dem entsprechenden Verhältnis, wenn der günstige Fall darin besteht, dass auf 600 Würfe überhaupt 200mal die Vier kommt, gleichviel in welcher Stellung in der ganzen Reihe, so ergiebt die Rechnung $\frac{600 \cdot 599 \cdot 598 \ldots\ldots 401}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots 200} \cdot \frac{5^{400}}{6^{600}}$. Vergleicht man dieses Verhältnis mit der Wahrscheinlichkeit, dass die Vier, gleichviel in welcher Reihenfolge, bei 600 Würfen 100mal vorkomme, so findet man, dass diese letztere, nämlich $\frac{600 \cdot 599 \cdot 598 \ldots\ldots 501}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots 100} \cdot \frac{5^{500}}{6^{600}}$, grösser ist als jenes. Allgemein findet man, dass die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens von 100mal Vier auf 600 Versuche, nämlich desjenigen Zahlenverhältnisses der Versuchsergebnisse, das der apriorischen Wahrscheinlichkeit des verlangten Ereignisses gleich ist, die relativ grösste ist und dass jedes andere Verhältnis des Vorkommens der Vier um so grösser ist, je weniger es von 100:600 abweicht. Fasst man die Wahrscheinlichkeiten einer Anzahl von diesem Verhältnis nahestehenden Kombinationen zusammen, z. B. von 80 bis 120-mal Vier auf 600 Versuche, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis zwischen die angenommenen Grenzen falle, gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Kombinationen und daher schon ziemlich gross. Diese Wahrscheinlichkeit eines zwischen zwei Grenzen fallenden Ergebnisses aber wird um so grösser, je grösser die Zahl der Versuche angenommen wird, wenn die Grenzzahlen in konstantem Verhältnis zu den Versuchszahlen bleiben, also z. B. bei der Versuchszahl 6000 auf 800 und 1200 steigen. So kann man es durch Annahme einer genügend grossen Versuchszahl dahin bringen, dass die Rechnung eine beliebig hohe (d. h. der Einheit beliebig nahe kommende) Wahrscheinlichkeit dafür ergiebt, dass das Verhältnis der in der Versuchsreihe vorkommenden günstigen Fälle zu der Versuchszahl nur bis zu einem beliebig kleinen Bruch von der gegebenen Wahrscheinlichkeit des günstigen Falles abweicht. Auch dieser nach J. Bernouilli benannte Satz ist ein rein mathematischer, da unabhängig von jeder Erfahrung unter der Annahme gleicher Möglichkeit aller Fälle nach der Kombinationslehre a priori berechnet wird, wie sich bei zahlreichen Wiederholungen die Zahl der möglichen Fälle einer bestimmten Art zu der Zahl der überhaupt möglichen verhält. Wenn sich nun aber zeigt, dass in der That, wenn man einige Tausend Versuche mit einem Würfel oder mit Zügen aus einer Urne macht, eine bestimmte Nummer oder eine Kugel mit bestimmter Farbe annähernd in der Zahl herauskommt, deren Verhältnis zur Versuchszahl der nach den Bedingungen dieses Zufallspiels angenommenen Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses gleich ist, so ist dies eine interessante Thatsache, von der aber die mathematische Wahrscheinlichkeitsrechnung ganz unabhängig ist. Diese Erfahrung lässt nur erkennen, dass die uns subjektiv plausibel scheinende Annahme, dass jede Nummer des Würfels oder jede Kugel der Urne mit gleicher Möglichkeit herauskommen könne, objektiv durch die Thatsachen bis zu einem gewissen Grade bestätigt wird. Ob die Bestätigung wirklich so vollständig ist, dass man sagen kann, die Beobachtungsergebnisse sind solche, wie sie sein müssten, wenn für das Grundereignis das angenommene Verhältnis von günstigen und möglichen Fällen wirklich bestände, bedürfte immer noch einer besonderen Untersuchung, denn die Bejahung dieser Frage hängt davon ab, ob auch die Abweichungen, die bei einer grösseren Zahl von Versuchsreihen in dem Ergebnis auftreten, sich auf die nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu erwartenden Art verteilen. Bei gut eingerichteten Glückspielen wird auch diese Bedingung erfahrungsmässig annähernd erfüllt und insoweit findet dann die Wahrscheinlichkeitsrechnung eine Anwendung auf wirkliche Ereignisse. Wenn aber der Würfel auf dem Tische rollt, steht physisch schon fest, welche Nummer schliesslich oben liegen wird. Gleichwohl ist es dann noch ein rationell geregeltes Spiel, wenn der eine Spieler 1 darauf einsetzt, dass die 6 herauskommen werde, und der andere 5 darauf, dass dies nicht der Fall sein werde. Wie die annähernde Uebereinstimmung der Erfahrung bei einer grossen Zahl von Versuchen in einem korrekten Glückspiel mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung zustande kommt und zu erklären ist, hat diese gar nicht zu untersuchen, wie es auch für sie gleichgültig ist, wenn bei einer gegebenen Versuchsreihe die erwartete Uebereinstimmung sich nicht herausstellt.

2. Man kann nun auch umgekehrt die Hypothese aufstellen, dass ein Ereignis, das in einer grossen Zahl s von Versuchen pmal aufgetreten ist, die Wahrscheinlichkeit $\frac{p}{s}$ habe, dass also z. B., wenn bei 600 Zügen aus einer Urne (wobei die gezogene Kugel stets wieder in die Urne zurückzulegen war) 105mal eine weisse und 495mal eine schwarze Kugel gezogen worden ist, das Verhältnis der weissen zu den schwarzen Kugeln in der Urne ungefähr 105 : 495 betrage, oder 1 : 5, wenn man wüsste, dass überhaupt nur 6 Kugeln in der Urne seien. Man kann auch noch weiter gehen und solche Hypothesen aufstellen für Ereignisse, auf die das Bild eines Glücksspiels mit Würfeln oder Urnen gar nicht mehr angewandt werden kann. Wenn überhaupt ein Ereignis unter gewissen festgesetzten Bedingungen pmal eingetreten ist, das, soviel wir die Sache beurteilen können, an jedem von s beobachteten Einzelfalle hätte vorkommen können, so nehmen wir

hypothetisch an, dass $\frac{m}{s}$ näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses darstelle. Ob diese Annahme richtig sei, ob sie überhaupt einen Sinn habe, kann erst durch die Untersuchung mehrerer gleichartiger Beobachtungsreihen entschieden werden. Durchaus irrig ist die Meinung, dass überhaupt jedes aus grossen Zahlen gebildete Verhältnis sich wie der Näherungswert eines festen Wahrscheinlichkeit verhalte und sich daher mit steigender Beobachtungszahl einem konstanten Werte nähere. Es ist vielmehr leicht möglich, dass bei fortschreitender Vergrösserung von s durch Hinzufügung neuer Beobachtungen das Verhältnis $\frac{m}{s}$ fortschreitend grösser oder kleiner wird.

Zu diesen hypothetischen oder sogenannten Wahrscheinlichkeiten „a posteriori" gehören nun die Sterbenswahrscheinlichkeiten der Bevölkerungsstatistik. Wenn man sagt, die Wahrscheinlichkeit, dass ein neugeborenes Kind vor Erreichung des Alters von genau einem Jahr sterbe, sei $\frac{m}{s}$, so hat dieser Satz für sich keinen weiteren Sinn, als dass man m gegen (s — m) darauf wetten wolle, dass ein beliebig herausgegriffenes neugeborenes Kind im ersten Lebensjahre sterbe. Eine solche in der Luft schwebende Wette würde nun wohl schwerlich jemals zu stande kommen. Wohl aber wäre sie denkbar, wenn vorher die Beobachtung gemacht worden wäre, dass von einer grossen Zahl s Neugeborener wirklich m vor dem Ende des ersten Lebensjahres gestorben seien. Man hätte dann wenigstens einen vernünftigen Anhaltspunkt, um, wenn z. B. m = 20 000 und s = 100 000 wäre, in Bezug auf ein beliebiges neugeborenes Kind 1 gegen 4 darauf zu wetten, dass es im Alter von 0 — 1 Jahr sterben werde. Und wenn solche Wetten für eine grosse Anzahl von Kindern, etwa wieder 100 000 abgeschlossen würden und dabei also der eine Teil immer 1 Mark und der andere 4 Mark einsetzte, so würde sich schliesslich vielleicht herausstellen, dass der eine ungefähr 20 000 × 4 M. gewonnen und 80 000 × 1 M. verloren hätte und ebenso für den anderen Gewinn und Verlust sich nahezu ausglichen. Die aus der Beobachtung gewonnene Norm für die Regelung der Wette wäre also dann richtig gewesen, und, was für die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung wichtiger ist, man wäre berechtigt, anzunehmen, dass die empirische Wahrscheinlichkeit, die sich aus der Beobachtung der Sterbefälle im ersten Lebensjahre bei einer grossen Zahl von Kindern ergeben hat, auch für andere genügend grosse Gesamtheiten von Neugeborenen annähernd Geltung habe. Sicher ist dieses freilich keineswegs. Wenn z. B. in einem Lande jährlich 100 000 Kinder geboren würden, die Sterblichkeit derselben im ersten Lebensjahre aber infolge der Verbesserung der hygieinischen Verhältnisse, einer rationelleren Ernährung u. s. w. in fortschreitender Abnahme begriffen wäre, so könnte überhaupt keine feste auch für die Zukunft geltende Sterbenswahrscheinlichkeit im Alter von 0—1 angenommen werden, und auch durch Zusammenfassung der Sterbefälle dieser Klasse und der Geburten für mehrere Jahre könnte man eine solche nicht darstellen. Thatsächlich sind indes die Sterblichkeitsverhältnisse innerhalb der praktisch in Betracht kommenden Zeiträume bei grossen Beobachtungszahlen in der Regel so wenig verändert, dass man das Verhältnis der Zahl der Gestorbenen der meisten Altersklassen zur Zahl der in diese Altersklasse eingetretenen Lebenden ohne zu grosse Unsicherheit für weitere Rechnungen so verwenden kann, als wenn es die Bedeutung einen mathematischen Wahrscheinlichkeit a priori besässe.

3. Bei einer Sterbenswahrscheinlichkeit für eine einjährige Altersklasse ist der „günstige" Fall der, dass ein Lebender, der das Alter von genau x Jahren erreicht hat, in der Altersstrecke von x bis x + 1 Jahr stirbt. Das Ereignis wird nur durch diese Grenzangaben bestimmt, im übrigen aber kann es in unendlich mannigfaltiger Gestalt zustande kommen. Welche Zustände der gleichsam auf die Probe gestellte Mensch während dieser Altersstrecke durchläuft, welchen Krankheiten und Lebensgefahren er ausgesetzt ist, kommt gar nicht in Frage, es handelt sich nur um die im voraus erwogenen zwei Möglichkeiten, ob er die Altersstrecke durchlebt oder nicht. So ist es auch gleichgültig, in welcher Art ein Würfel geworfen wird und welche Bahnen er während des Rollens beschreibt: es sind nur sechs Endmöglichkeiten vorhanden, von denen jede auf unendlich viele Arten sich verwirklichen kann. Treten nacheinander 100 000 Lebende durch Ueberschreitung der Altersgrenze x gewissermassen in das Versuchsfeld ein, so sind dies ebenso viele einzelne Erprobungen der Sterbenswahrscheinlichkeit, für die man auf

diese Art einen Näherungswert erhält. Man muss sich nun immer erinnern, dass die Sterbenswahrscheinlichkeit nur auf den Anfang der Versuchszeit bezogen werden darf, dass sie sich von hier aus als ein einheitliches Zahlenverhältnis auf die ganze Versuchszeit, nämlich die betreffende Altersstrecke bezieht und dass sie daher nicht durch Addition der Sterbenswahrscheinlichkeiten für Teile dieser Altersstrecke gebildet werden kann[1]. Denken wir uns das Alter von x bis x + 1 Jahre in n Teile zerlegt, in denen von den anfangs vorhandenen L Lebenden je μ sterben, so sind die empirischen Sterbenswahrscheinlichkeiten in diesen Abschnitten für sich betrachtet $\frac{\mu}{L}, \frac{\mu}{L-\mu}, \frac{\mu}{L-2\mu}, \frac{\mu}{L-(n-1)\mu}$. Die Summe dieser besonderen Wahrscheinlichkeiten für die Unterabteilungen der Altersstrecke ist aber immer grösser, als die unmittelbar betrachtete Sterbenswahrscheinlichkeit für das ganze Altersjahr, nämlich $\frac{\Sigma\mu}{L}$. Wenn wir aber die Wahrscheinlichkeit ausdrücken wollen, dass einer der L x-jährigen in der Altersstrecke von $x + \frac{r}{n}$ bis x + 1 Jahren (wo $\frac{r}{n}$ ein echter Bruch) sterben werde, so ist auch hier die Ueberlegung vom Alter x aus anzustellen und es zeigt sich dann, dass es sich um eine zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit handelt, nämlich um die des Lebens von x bis $x + \frac{r}{n}$ Jahren und dann um die des Sterbens in der Altersstrecke von $x + \frac{r}{n}$ bis x + 1 Jahre. Der empirische Ausdruck dieser Wahrscheinlichkeit ist aber allgemein und unabhängig von

1) Selbstverständlich aber steht nichts im Wege, von vornherein eine Sterbenswahrscheinlichkeit σ d t für eine unendlich kleine Zeitstrecke d t in der betrachteten einjährigen Altersstrecke anzunehmen. Die endliche Grösse σ ist die „force of mortality" der Engländer, die Westergaard (Theorie der Statistik, S. 175) als „Intensität der Sterblichkeit" bezeichnet. Man findet leicht, dass σ, wenn es innerhalb der Altersklasse konstant bleibt, gleich ist der Zahl der in dieser Altersklasse Gestorbenen, geteilt durch die Grösse der von den Ueberlebenden und Gestorbenen in derselben durchlebten Zeit. Diese letztere aber (auf das Jahr als Einheit bezogen) ist gleich der Durchschnittszahl der innerhalb der einjährigen Altersstrecke (in den Grenzen einer ersten Hauptgesamtheit M[1]) Lebenden, σ also sowohl von der Sterbenswahrscheinlichkeit für die ganze Altersklasse, als auch bei nicht-stationärer Bevölkerung von dem obenerwähnten Sterblichkeitskoefficient für eine stationäre Bevölkerung verschieden.

der Annahme einer gleichmässigen Verteilung der Sterbefälle innerhalb der Altersstrecke $\frac{L-R}{L} \cdot \frac{M-R}{L-R} = \frac{M-R}{L}$, wenn R die Zahl der Gestorbenen in dem ersten Bruchteil des Jahres und M die der Gestorbenen in dem ganzen Altersjahr bezeichnet. Nehmen wir nunmehr an, dass innerhalb der Grenzen einer Hauptgesamtheit M^1 und einer einjährigen Alterstrecke neue Personen in das Beobachtungsgebiet eintreten: ihre Zahl sei e und ihr Alter bei ihrem (successiven und gleichmässigen) Eintritt $x + \frac{r}{n}$ Jahre, wo $\frac{r}{n}$ ein echter Bruch ist. Die Sterbenswahrscheinlichkeit φ_r für die Altersstrecke von $x + \frac{r}{n}$ bis $x + 1$ Jahr ist nun eine durchaus selbständige und nicht etwa ein Bestandteil der Sterbenswahrscheinlichkeit φ für die ganze Altersstrecke von x bis $x + 1$ Jahre. Denn die beiden allein in Betracht kommenden Grenzbedingungen für jeden „Versuch", nämlich das Alter beim Eintritt in die Beobachtung und die zu durchlaufende Altersstrecke sind in dem einen und dem anderen Falle verschieden. Man kann wohl eine der Erfahrung entsprechende Grössenbeziehung zwischen φ_r und φ hypothetisch annehmen, aber die Erprobung der ersteren Wahrscheinlichkeit fällt mit der der letzteren in keiner Weise zusammen, sondern wenn 100 000 Personen in dem Alter von x Jahren und dann weitere 10 000 in dem Alter von $x + \frac{r}{n}$ Jahren eingetreten sind, so sind die wahrscheinlichsten Zahlen der bis zum Alter $x + 1$ vorkommenden Sterbefälle aus beiden Wahrscheinlichkeiten unabhängig zu bestimmen und zu addieren: $100\,000\,\varphi + 10\,000\,\varphi_r$. Man kann nun allerdings eine mittlere Wahrscheinlichkeit $\frac{100\,000\,\varphi - 10\,000\,\varphi_r}{110\,000}$ bilden, deren empirischer Wert gleich ist der Summe aller in der Altersklasse beobachteten Sterbefälle, geteilt durch die Summe aller anfangs oder später in sie eingetretenen Lebenden. Aber die eigentliche Frage ist damit nicht beantwortet, nämlich diese: wenn durch spätere Eintritte oder Austritte die ausschliessliche Beobachtung der ursprünglich in die Altersklasse eingetretenen Personen gestört wird, wie lässt sich dann die für die ganze einjährige Strecke geltende Wahrscheinlichkeit φ bestimmen? Wenn es möglich ist, die Gestorbenen aus der ursprünglichen Gesamtheit und die aus den Eingetretenen gesondert zu ermitteln, so ist es am besten, die gesuchte Sterbenswahrscheinlichkeit ausschliesslich aus dem Anfangsbestand und dessen Sterbefällen für sich zu bestimmen und sich um die Eintretenden nicht zu kümmern. Diese Sonderung ist aber in der Bevölkerungsstatistik kaum möglich und bei Ausscheidungen lässt sich ein solches einfaches Verfahren überhaupt nicht anwenden, ebensowenig in den Fällen, in denen der Anfangsbestand sehr klein oder gar Null ist. Es ist zu beachten, dass es sich hier nicht nur um eigentliche Einwanderungen und Auswanderungen handelt, sondern allgemein um Eintritte und Austritte aus einer statistischen Kategorie in eine andere. Wenn man z. B. die Sterbenswahrscheinlichkeit der verheirateten Frauen in einer Altersklasse bestimmen will, so entsprechen den Einwanderungen die in dieser Altersklasse stattfindenden Trauungen und den Auswanderungen die in derselben Altersstrecke eintretenden Verwitwungen von Frauen. Ebenso sind bei der Untersuchung der Sterblichkeit der aktiven Beamten die neuen Anstellungen mit der Einwanderung, die Uebertritte in den Ruhestand mit der Auswanderung zu vergleichen und rücksichtlich der Sterblichkeit der Pensionäre sind die letzteren wieder wie Einwanderungen zu behandeln. Häufig ist man zu der Annahme berechtigt, dass die Eintretenden auserlesene Leben repräsentieren und innerhalb der betreffenden einjährigen Altersklasse nur einer minimalen Sterbenswahrscheinlichkeit unterliegen. Man darf dann also annehmen, dass die beobachteten Sterbefälle in einer Altersklasse ausschliesslich von den ursprünglich vorhandenen Lebenden herrühren, woraus sich dann deren Sterbenswahrscheinlichkeit ohne weiteres ergiebt.

4. Im allgemeinen aber hilft man sich mit Hypothesen über das Verhältnis der kurzstreckigen Wahrscheinlichkeiten φ_r zu der gesuchten Wahrscheinlichkeit φ. Am nächsten liegt die Annahme, dass sich φ_r zu φ verhalte wie die bis zur Grenze $x+1$ noch zu durchlaufende Altersstrecke zu einem Jahr, dass also $\varphi_r = \frac{n-r}{n}\varphi$. Diese Annahme harmoniert freilich keineswegs vollständig mit den aus der Bedeutung von φ sich ergebenden Folgerungen. Ist z. B. $\varphi = \frac{1}{50}$ und die Zahl der in das Alter von genau x Jahren Eintretenden 12 000, so ist die wahrscheinlichste Zahl der

Sterbefälle im Alter von x bis $x + 1$ Jahre 240. Nimmt man aber an, dass die Sterbenswahrscheinlichkeit sowohl vom Alter x bis $x + \frac{1}{2}$ wie von $x + \frac{1}{2}$ bis $x + 1$ gleich $\frac{1}{2}\varphi$ sei, so erhält man als wahrscheinlichste Zahl der Gestorbenen im Alter von x bis $x + 1$ für einen Anfangsbestand von ebenfalls 12 000 nur $12\,000 \cdot \frac{1}{100} + 11\,400 \cdot \frac{1}{100}$ oder 234. Der allerdings nicht grosse Unterschied entsteht dadurch, dass nach dem Begriff der Wahrscheinlichkeit φ, wie schon erwähnt, die Veränderung des ursprünglichen Bestandes an Beobachtungspersonen im Laufe der Altersstrecke gar nicht verfolgt werden soll, sondern es nur darauf ankommt, wie viele lebend aus der Probe herauskommen und wie viele darin bleiben. Für diese Wahrscheinlichkeit würde sich nichts ändern, wenn z. B. alle Todesfälle plötzlich in demselben, gleichviel welchem, Alterszeitpunkt eingetreten wären.

Lassen wir aber die obige Hypothese gelten und nehmen wir an, dass die Altersstrecke x bis $x + 1$ Jahre in n gleiche Abschnitte geteilt sei und dass an der unteren Grenze einer jeden je e Personen eintreten, an der Grenze x aber kein Anfangsbestand vorhanden sei, so ist die Zahl der aus den Einwandernden in der ganzen Altersklasse Gestorbenen:

$$M = \frac{e\,n\,\varphi}{n} + \frac{e\,(n-1)\,\varphi}{n} + \frac{e\,(n-2)\,\varphi}{n} + \ldots \frac{e\,(n-(n-2))\varphi}{n} + \frac{e\,\varphi}{n} = \frac{e\,n\,(n+1)\,\varphi}{2n}.$$

Da aber n e gleich der Gesamtzahl der eingewanderten E ist und n beliebig gross angenommen werden kann, so erhält man einfach

$$\tfrac{1}{2}\,E\,\varphi = M \text{ oder } \varphi = \frac{M}{\frac{1}{2}E}.$$

Ist ein Anfangsbestand von L Lebenden im Alter von X Jahren vorhanden, so kommt auf diese in der Strecke von x bis $x + 1$ Jahre die statistisch nicht isoliert feststellbare Zahl von $\varphi\,L = M^1$ Todesfällen. Durch Verbindung mit der vorigen Gleichung hat man also

$$\varphi L + \tfrac{1}{2}E\varphi = M + M^1 = (M) \text{ oder } \varphi = \frac{(M)}{L + \frac{1}{2}E}$$

wo (M) die statistisch zu beobachtende Zahl der Gestorbenen aus dem Anfangsbestande und den Einwandernden zusammen bezeichnet. Anstatt einer gleichmässig über die Altersstrecke verteilten Einwanderung E kann man also eine solche von der Grösse $\frac{1}{2}$ E am Anfang der Altersklasse annehmen, so dass also im Ganzen $L + \frac{1}{2} E$ Personen während eines Altersjahres der Sterbensgefahr ausgesetzt wären. Nimmt man aber weiter an, dass von diesen (M) Personen sterben würden, so ist dies nicht ganz genau, und wenn die Zahl M^1 bekannt und genügend gross wäre, so würde der Wert $\frac{M^1}{L}$ für φ dem obigen Näherungsausdruck vorzuziehen sein. Sind aber die Eintretenden sämtlich gesunde und kräftige Leute mit sehr geringer Sterbensgefahr, so wird der praktisch richtigste Ausdruck von $\varphi = (M) / L$ sein. Handelt es sich um Auswanderungen oder sonstige Ausscheidungen, so nehmen wir wieder dieselbe Hypothesen über die φ_r und ferner an, dass das Ausscheiden von je a Personen an der unteren Grenze jedes der n kleinen Abschnitte der einjährigen Altersstrecke x bis $x + 1$ stattfinde, dass die letzten am Anfang des n-ten Abschnittes ausscheiden und dann kein Bestand mehr übrig bleibe. Wenn alle Ausscheidenden bis zum Ende der Altersstrecke weiter hätten beobachtet werden können, so würde man unter ihnen folgende Zahl von Todesfällen gefunden haben:

$$\frac{a\, n\, \varphi}{n} + \frac{a\,(n-1)\,\varphi}{n} + \frac{a\,(n-2)\,\varphi}{n} \dots + \frac{a\,\varphi}{n} =$$

$$\frac{a\, n\,(n+1)\,\varphi}{2n} = \tfrac{1}{2}\, A\, \varphi = M,$$

wenn A die Gesamtzahl der Auswanderungen bezeichnet und n sehr gross angenommen wird. War ein ursprünglicher Bestand vor L Lebenden im Alter von x Jahren vorhanden, so würden aus diesem, wenn keine Auswanderung stattgefunden hätte, φ L Todesfälle hervorgegangen sein. Die wirklich beobachtete Zahl der Todesfälle (M) ist aber infolge der Auswanderungen um M oder $\frac{1}{2} A\varphi$ kleiner. Man hat also $L\varphi - \frac{1}{2} A\varphi = (M)$ und demnach $\varphi = \frac{(M)}{L - \frac{1}{2}A}$.

5. Man kann aber auch von anderen Annahmen über das Verhältnis der φ_r zu φ ausgehen, wie sie sich aus der Betrachtung der Verteilung der Dichtigkeit der Sterbepunkte in den Altersklassen einer in ihrem Absterben verfolgten Generation ergeben. Vom 5. bis etwa zum 60. Altersjahre kann man ohne erhebliche Fehler annehmen, dass in den durch einjährige Strecken

bestimmten Grenzen der Hauptgesamtheiten M^1 die Dichtigkeit der Sterbepunkte gleichmässig bleibt, dass also auf jede Altersstrecke von $\frac{1}{n}$ Jahr gleich viele, nämlich μ Sterbefälle kommen. Ueberschreiten L^1 Personen die untere Altersgrenze von x Jahren und erreichen von diesen L_r^1 die Altersgrenze von $x + \frac{r}{n}$ Jahren, so ist nach der obigen Annahme $L_r^1 = L^1 - r\mu$ und der empirische Ausdruck für die Sterbenswahrscheinlichkeit im Alter von $x + \frac{r}{n}$ bis $x + 1$ Jahre $\varphi_r = \frac{(n-r)\,\mu}{L^1 - r\mu}$ oder, da $\frac{n\mu}{L^1} = \varphi$,

$$\varphi_r = \frac{\frac{(n-r)}{n}\,\varphi}{1 - \frac{r}{n}\,\varphi}.$$

Im Vergleich mit dem oben angenommenen Ausdruck für φ_r ist dieser also grösser und da er der Voraussetzung einer konstanten Dichtigkeit der Sterbepunkte in der einjährigen Altersstrecke entspricht, so setzt jener, nämlich $\varphi_r = \frac{n-r}{n}\,\varphi$, eine a b n e h m e n d e Dichtigkeit der Sterbepunkte voraus. Es mögen nun bei einem Anfangsbestande o im Alter von x Jahren am E n d e[1]) jeder Altersstrecke von $\frac{1}{n}$ Jahr e Personen einwandern, auf die dann bis zu der oberen Grenze von $x + 1$ Jahren die Sterbenswahrscheinlichkeiten φ_r nach der vorliegenden Annahme zur Anwendung kommen. Wird nun die Zahl der aus einer solchen Gruppe von Einwandernden hervorgehenden Sterbefälle mit m_r bezeichnet, also allgemein

$$e \cdot \frac{\frac{(n-r)}{n}\,\varphi}{1 - \frac{r}{n}\,\varphi} = m_r \text{ gesetzt,}$$

so folgt aus dieser Gleichung:

1) Bei der Annahme, dass die Einwanderung am Ende jedes kleinen Altersabschnittes stattfinde, wird e i n e Elementargruppe e vernachlässigt. Dadurch wird ein Fehler von derselben Ordnung begangen, wie bei den vorigen Rechnungen dadurch, dass das Verhältnis $\frac{n+1}{n}$ gleich 1 angenommen wurde. Er verschwindet in beiden Fällen, weil n beliebig gross angenommen werden kann. Dieselbe Bemerkung gilt für die folgende Rechnung in Betreff der Auswanderung.

$$e \cdot \frac{n-1}{n} \varphi = m_1 - m_1 \frac{1}{n} \varphi$$

$$e \cdot \frac{n-2}{n} \varphi = m_2 - m_2 \frac{2}{n} \varphi$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$e \cdot \frac{1}{n} \varphi = m_{n-1} - m_{n-1} \frac{n-1}{n} \varphi.$$

Da φ für die Altersklassen, für die die Annahme einer gleichmässigen Dichtigkeit der Sterbepunkte überhaupt zulässig ist, nur ein kleiner Bruch ist, so sind die letzten Glieder auf der rechten Seite im Vergleich mit den m nur klein. Sie dürfen zwar nicht vernachlässigt werden, aber es ist gestattet, in ihnen bei der Summierung für die m_r einen Näherungswert, nämlich $(n-r)\,\nu$ einzusetzen, wo ν die für alle gleiche Grösse $e\varphi/n$ darstellt. Es rechtfertigt sich dies bei kleinen φ ohne weiteres aus der Betrachtung des vorher für m_r aufgestellten allgemeinen Ausdrucks, da der Nenner $1 - \frac{r}{n}\varphi$ näherungsweise gleich 1 gesetzt werden kann. Man erhält also (r von 1 bis $n-1$):

$$\Sigma e \cdot \frac{n-r}{n} \varphi = \Sigma m_r - \Sigma (n-r)\nu \cdot \frac{r}{n} \varphi \text{ oder}$$

$$e \cdot \frac{n-1}{2} \varphi = M - \Sigma r\nu\varphi + \Sigma \frac{r^2\nu}{n} \varphi.$$

Auf der linken Seite ist $e\,(n-1)$ gleich der Gesamtzahl der Einwanderer, die wir mit E bezeichnen. M ist die Gesamtzahl der aus den Einwanderern hervorgegangenen Sterbefälle und diese wird auch näherungsweise durch $\Sigma r\nu$ oder durch $\Sigma(n-r)\nu$ ausgedrückt. Das letzte Glied rechts endlich stellt die Summe der Reihe zweiter Ordnung $1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots (n-1)^2$ multipliziert mit $\frac{\nu}{n}\varphi$ dar, ist also gleich

$$\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \cdot \frac{\nu}{n} \varphi.$$

Nun ist aber $\frac{n(n-1)}{2}\nu$ wieder annähernd gleich M und da n beliebig gross angenommen werden kann, so darf man $\frac{2n-1}{n}$ einfach gleich 2 setzen und somit wird $\Sigma \frac{r^2\nu}{n} \varphi = \frac{2M}{3} \varphi$.

Also hat man $\frac{E}{2} \cdot \varphi = M - M\varphi + \frac{2M}{3}\varphi$ oder $\varphi = \frac{M}{\frac{1}{2}E + \frac{1}{3}M}$.

Ist ein Anfangsbestand von L Lebenden im Alter von x Jahren vorhanden, so kommen auf diesen innerhalb der betreffenden Altersklasse $\varphi L = M^1$ Gestorbene und durch Verbindung dieser Gleichung mit der vorhergehenden findet man

$$\varphi = \frac{M + M^1}{L + \frac{1}{2}E + \frac{1}{3}M} = \frac{(M)}{L + \frac{1}{2}E + \frac{1}{3}M},$$

wo (M) wieder die Summe aller Gestorbenen aus den ursprünglich Lebenden wie aus den Einwanderern bezeichnet. Diese Summe ist als gegeben anzunehmen, die im Nenner vorkommende Summe M aber wird in der Regel, namentlich bei bevölkerungsstatistischen Aufgaben, nicht bekannt sein, aber doch mit genügender Genauigkeit näherungsweise geschätzt, bei kleinem φ aber auch vernachlässigt werden können. Findet statt der Einwanderung Auswanderung (oder irgend ein anderes Ausscheiden aus dem vorhandenen Zustand, ausser durch Sterben) statt, so sei wieder a die Zahl der Auswandernden am Ende jeder kleinen Altersstrecke von $x + \frac{1}{n}$ bis $x + \frac{n-1}{n}$ Jahr und es seien ursprünglich im Alter von x Jahren L Lebende vorhanden. Hätte man die Auswandernden bis zur Erreichung des vollen Alters von $x + 1$ Jahren weiter beobachten können, so würde allgemein die Zahl der in einer Gruppe a nach der Auswanderung noch konstatierten Sterbefälle betragen haben

$$a \cdot \frac{\frac{(n-r)}{n}\varphi}{1 - \frac{r}{n}\varphi} = m_r.$$

Nach Einsetzung der Näherungswerte $(n-r)\,\nu$ für m_r findet man ganz auf dieselbe Art, wie bei der Einwanderung

$$\frac{A}{2}\varphi = M - \tfrac{1}{3}M\varphi$$

wenn A die Gesamtzahl der Auswanderer und M die Gesamtzahl der unter ihnen nach der Auswanderung innerhalb der Altersklasse noch vorgekommenen, nicht beobachteten Sterbefälle bezeichnet. Aus den ursprünglich vorhandenen L Lebenden aber würden, wenn keine Auswanderung stattgefunden hätte, bis zum Alter von $x+1$ Jahren φ L sterben, die wirklich beobachtete Zahl (M) der Gestorbenen aber ist um M kleiner, also $(M) = \varphi L - M$. Setzt man hier statt M auf Grund der obigen Gleichung $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{3}M)\varphi$, so erhält man

$$\varphi = \frac{(M)}{L - \frac{1}{2}A - \frac{1}{3}M}.$$

Bei kleinem φ kann die nicht gegebene Grösse $\frac{1}{3}$ M vernachlässigt werden, andernfalls wird man einen Näherungswert einsetzen müssen.

6. Man könnte nun auch annehmen, dass die Dichtigkeit der Sterbepunkte in der einjährigen Altersklasse in einem gewissen Verhältnisse mit dem Alter zunähme, wie es in den Altersklassen von 60 bis 70 Jahren wirklich der Fall ist, oder dass sie, wie in dem ersten Lebensjahre, mit fortschreitendem Alter in einem gewissen Verhältnisse abnehme. Die Rechnungen dieser Art sind mit Hilfe einfacher Integrationen leicht auszuführen und lassen sich bis zu einem gewissen Punkte auch elementar behandeln, allerdings mit Anwendung von Differenzenreihen höherer Ordnung. Wir gehen aber auf diesen Gegenstand nicht weiter ein, zumal man sich in der Praxis ohnehin meistens mit ungenauen hypothetischen Annahmen behelfen muss. So ist es in der Regel schon nicht zutreffend, dass die neu Eintretenden und die lebend Ausscheidenden innerhalb der betreffenden Altersklassen derselben Sterbenswahrscheinlichkeit unterliegen, wie die bereits Vorhandenen oder Zurückbleibenden. Bei den eigentlichen Einwanderern und Auswanderern wird man, wie schon erwähnt, abgesehen etwa von den mitgeführten Kindern im zartesten Alter, weit günstigere Sterblichkeitsverhältnisse annehmen müssen, als die durchschnittlichen. Ebenso haben die neu Getrauten im ersten Jahre sicher eine geringere Sterbenswahrscheinlichkeit, als die bereits vorhandenen Verheirateten derselben Altersklasse. Dagegen ist die Sterbenswahrscheinlichkeit für die in den Ruhestand tretenden Beamten vermutlich grösser, als die der gleichalterigen, die noch im Dienste bleiben können. Auch die Annahme einer gleichmässigen Verteilung der Ein- und Austritte über die einjährige Altersstrecke trifft nicht zu und es kommt daher auch nicht lediglich auf die (positive oder negative) Differenz der Eintritte und der Austritte in der Alterklasse an. Die be-

gangenen Fehler können indes um so unbedenklicher vernachlässigt werden, je kleiner die Zahl der Zu- oder Abgehenden im Vergleich mit dem vorhandenen Bestande ist.

7. Wir schliessen hier noch die Frage an: Wie gross ist die Zahl der Gestorbenen, die innerhalb der Grenzen einer jeden der beiden Elementargesamtheiten einer Hauptgesamtheit M^1, also z. B. in den Dreiecken $N_2\ N_3\ A_2$ und $N_3\ A_2\ A_3$ aus den innnerhalb derselben Grenzen Einwandernden hervorgehen? Die Einwanderung soll wieder gleichmässig am Ende der Altersabschnitte von $\frac{1}{n}$ Jahr stattfinden, die durch die horizontalen Linien angedeutet sind. Wir teilen ferner das Dreieck $N_2\,N_3\,A_2$ in n gleich breite senkrechte Streifen, wie $N_2\,\nu\,A_2\,a'$, die mit ihren oberen Ecken über die Seite $N_3\,A_2$ hinausragen, was aber um so eher vernachlässigt werden kann, je grösser n ist. Für die Sterbenswahrscheinlichkeiten der Einwanderer in den Altersabstufungen eines solchen Streifens nehmen wir die einfache Näherungsformel $\varphi_r = \frac{z-r}{n}\ \varphi$ an, wo φ wieder die allgemein geltende Sterbenswahrscheinlichkeit für die Altersklasse von x bis x + 1 Jahr, z aber eine in den einzelnen senkrechten Streifen verschiedene Grösse bezeichnet, die in dem ersten links mit n beginnt und in dem letzten rechts mit 1 endigt. Auch der Endwert von r ist in einzelnen Streifen verschieden: er geht in dem ersten bis n — 1, in dem den Schluss bildenden vorletzten aber nur bis 1, da dieser überhaupt nur einen Summanden enthält. Bezeichnet man die Zahl der an der oberen Grenze der einzelnen kleinen Quadrate Einwandernden mit ε, so hat man für die aus diesen Einwanderern in allen einzelnen Streifen hervorgehenden Sterbefälle: $\frac{\varepsilon \cdot \varphi}{n}$ multipliziert mit der Summe

$$\begin{array}{r} (n-1)+(n-2)+(n-3)\ \ldots\ldots+1 \\ (n-2)+(n-3)\ \ldots\ldots+1 \\ (n-3)\ \ldots\ldots+1 \\ \ldots\ldots \end{array}$$

oder $1(n-1)+2(n-2)+3(n-3)\ \ldots\ (n-1)(n-(n-1)) =$

$$\frac{n^2(n-1)}{2} - (1^2+2^2+3^2\ldots(n-1)^2) = \frac{n^2(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

Die gesuchte Zahl Δ_e^1 der gestorbenen Einwanderer der unteren Elementargesamtheit ist also

$$\frac{\varepsilon\varphi}{6}\left(3n(n-1)-n(n-1)\left(2-\frac{1}{n}\right)\right)$$

oder, da die Gesamtzahl E der Einwanderer innerhalb des Quadrats $N_2\,N_3\,A_2\,A_3$ gleich $n(n-1)\varepsilon$, bei grossem n: $\Delta_e^1 = \frac{E\varphi}{6}$. Die Hauptgesamtheit M aller gestorbenen Einwanderer in diesen Grenzen ist aber bei demselben Näherungsverfahren $\frac{E\varphi}{2}$ und für die obere Elementargesamtheit derselben hat man also $\Delta_e^2 = \frac{E\varphi}{3}$. Diese Elementargesamtheit gestorbener Einwanderer ist doppelt so gross, wie die untere, was sich daraus erklärt, dass ein Teil der inneshalb des Elementardreiecks $N_2\,N_3\,A_2$ Eingewanderten auch in dem Dreieck $N_3\,A_2\,A_3$ Sterbepunkte aus der betreffenden Altersklasse liefert. In Betreff der Auswandernden gelangt man leicht zu einem entsprechenden Resultate.

8. Es sei hier noch darauf hingewiesen, dass bei der oben besprochenen sogenannten direkten Methode der Berechnung der Absterbeordnung, wenn sie mit Hülfe der wirklich beobachteten Elementargesamtheiten angewandt wird, der Einfluss der Wanderungen bei gleichmässiger Verteilung derselben nahezu von selbst eliminiert wird. Ist L^2 die durch die Volkszählung gegebene Zahl der gleichzeitig Lebenden in dem der Diagonale des Quadrats $N_2\ N_3\ A_2\ A_3$ (Fig. 5) entsprechenden Zeitpunkte, L^1 die zu bestimmende Zahl derjenigen, die lebend die Altersgrenze $N_2\ N_3$ von genau x Jahren überschritten haben, Δ_l^1 die durch das Dreieck $N_2\ N_3\ A_2$ begrenzte untere Elementargesamtheit der aus diesen Lebenden hervorgegangenen Gestorbenen, E^1 die Zahl der Einwanderer innerhalb der Grenze desselben Dreiecks und Δ_e^1 die Zahl der aus diesen in denselben Grenzen herstammenden Gestorbenen, so hat man

$$L^1 = L^2 + \Delta_l^1 - (E^1 - \Delta_e^1) = L^2 + (\Delta_l^1 + \Delta_e^1) - E^1,$$

oder wenn man für $(\Delta_l^1 + \Delta_e^1)$ setzt (Δ^1), nämlich die untere Elementargesamtheit aller Gestorbenen in den Grenzen $N_2\,N_3\,A_2$, die, ebenso wie L^2 und E^1 durch direkte Beobachtung festgestellt werden kann:

$$L^1 = L^2 + (A^1) - E^1.$$

Bezeichnet wieder (M^1) die ebenfalls statistisch festzustellende erste Hauptgesamtheit aller Gestorbenen im Alter von x bis x + 1, ohne Rücksicht auf die Herkunft, die durch das Quadrat $N_2\,N_3\,A_2\,A_3$ begrenzt wird, so ist bei der ersten Näherungsannahme für φ

$$\varphi = \frac{(M^1)}{L^1 + E^1},$$

da E^1 bei gleichmässiger Verteilung der Einwanderung gleich der Hälfte der in den Grenzen des Quadrats überhaupt einwandernden E angenommen werden darf. Setzt man nun für L^1 den obigen Wert ein, so erhält man

$$\varphi = \frac{(M^1)}{L^2 + (A^1)},$$

E^1 ist also weggefallen und die Formel enthält ausser den gezählten Lebenden nur Zahlen von Gestorbenen, die durch direkte Beobachtung leicht ermittelt werden können.

Die Unabhängkeit der nach der obigen Methode berechneten Sterbenswahrscheinlichkeit φ ergiebt sich auch noch bei der Annahme, dass die Grösse der Einwanderung (im weiteren Sinne) nicht gleichmässig bleibt, sondern innerhalb der Altersklasse proportional der Alterszunahme wächst. Denn auch in diesem Falle ist der im Nenner von φ vorkommende Bruchteil der Gesamtzahl der Einwanderer in dem Quadrat $N_2\,N_3\,A_2\,A_3$ gleich der unteren, von dem Dreieck $N_2\,N_3\,A_2$ umschlossenen Elementargesamtheit dieser Einwanderer. Wenn wieder die Näherungsannahme $\varphi_r = \frac{n-r}{n}\varphi$ gemacht wird und die Zahl der Einwanderer am Ende einer jeden der (n—1) Altersabschnitte e, 2e, 3e, . . . (n—1) e beträgt, so hat man als Zahl der aus den Einwanderern innerhalb des Quadrats hervorgegangenen Gestorbenen M

$$\frac{e\varphi}{n}(1.(n-1) + 2(n-2) + 3(n-3) \ldots (n-1)(n-(n-1)))$$

also mit Rücksicht auf den bereits oben angegebenen Wert der Reihe in der Klammer und bei grossem n

$$M = \frac{en(n-1)\varphi}{6} = \frac{E\varphi}{3}$$

wenn E die Gesamtzahl der Einwanderer in dem Quadrat bezeichnet, die ja durch $\frac{n(n-1)e}{2}$ ausgedrückt wird. Ist nun wieder L^1 die Zahl der die untere Altersgrenze überschreitenden Lebenden und M^1 die Zahl der aus diesen allein in der Altersklasse hervorgehenden Gestorbenen, so ergiebt sich

$$\varphi = \frac{M^1 + M}{L^1 + \frac{1}{3}E} = \frac{(M^1)}{L^1 + \frac{1}{3}E}.$$

Andererseits hat man wie oben

$$L^1 = L^2 + (A^1) - E^1$$

wo E^1 wieder die untere Elementargesamtheit der Einwanderer (in dem Dreieck $N_2 N_3 A_2$) bezeichnet. Man sieht aber sofort, dass diese ausgedrückt wird durch $\frac{e}{n}$ $(1\ (n-1) + 2\ (n-2) + \ldots (n-1)$ $(n-(n-1)))$, demnach gleich $\frac{1}{3}E$ ist und daher E nach Einsetzung des Wertes von L^1 aus dem Ausdruck für φ verschwindet. Bei den Ausscheidungen gelangt man zu analogen Resultaten. Auch bei einer innerhalb der Altersklasse gleichmässig steigenden Abnahme der Zahl der Ein- oder Austretenden findet man bei derselben Näherungsannahme die Unabhängigkeit des Wertes von φ von der Wanderung. Die Genauigkeit dieser Methode wird aber erheblich vermindert, wenn man für die Elementargesamtheit (A^1) der sämtlichen in den Dreiecksgrenzen Gestorbenen nicht den wirklich beobachteten Wert, sondern den üblichen Näherungswert einsetzt.

IV. Uebersicht der demographischen Elemente und ihrer Beziehungen zu einander[1].

1. Die amtlichen Aufzeichnungen über die Eheschliessungen, über die Taufen oder Geburten, die Begräbnisse oder Sterbefälle sind ursprünglich durch praktische Bedürfnisse des kirchlichen und bürgerlichen Lebens veranlasst worden. Auch nachdem Graunt, Halley und Süssmilch gezeigt hatten, dass dieses Material die Bausteine für eine neue Wissenschaft bilde, die wir jetzt als Demographie zu bezeichnen pflegen, blieb die Statistik der Bewegung der Bevölkerung doch noch lange Zeit ausschliesslich von jenen praktischen Interessen abhängig und unbeeinflusst von den rein wissenschaftlichen Fragen, die übrigens, mit Ausnahme der die Sterblichkeitstabellen betreffenden, nach dem Tode Süssmilch's wieder mehr und mehr in den Hintergrund traten. Es bedurfte des von Quetelet gegebenen Anstosses zur Wiederaufnahme und Vertiefung der auf Massenbeobachtung gegründeten Wissenschaft vom Menschen, um auch die amtliche Statistik zu bewegen, den Rahmen ihrer Erhebungen nach den theoretischen Wünschen der nunmehr kräftig aufblühenden Demographie allmählich zu erweitern. Sie nahm manche Fragen in ihr Programm auf, die über die unmittelbaren Zwecke der Standesbuchführung hinausgingen; neben dem offiziellen erschien vielfach in den Zählkarten auch ein gewissermassen offiziöser Teil; namentlich aber brachten es in der neueren Zeit die statistischen Aemter mehrerer Grossstädte, wie die von Berlin, Paris, Budapest, sowohl in der Fragestellung, als auch in der Verarbeitung des Stoffs zu einer Vollständigkeit, die vom demographischen

1) Neue Bearbeitung eines im Bulletin de l'Institut international de statistique (Tome VI, Vienne 1891) abgedruckten Vortrags.

Standpunkt nur noch wenig zu wünschen übrig lässt. Einzelne kleinere Staaten waren imstande, diesen Beispielen mehr oder weniger zu folgen; aber man darf wohl nicht erwarten, dass Länder von dreissig und mehr Millionen Einwohnern sich auf statistische Aufnahmen von solcher Ausführlichkeit einlassen werden, und wenn es dennoch geschähe, so würde man sich wahrscheinlich bald durch die Schwierigkeit und die Kosten der Verarbeitung und Veröffentlichung des massenhaften Stoffs wieder abschrecken lassen. Gleichwohl bleibt es eine erfreuliche Thatsache, dass wenigstens eine lokale Vollständigkeit der demographischen Erhebungen als erreichbar zu erachten ist und dass die statistischen Idealforderungen in einem allmählich sich immer mehr erweiternden Kreise von Städten wenigstens annähernd erfüllt werden können. Daher scheint es auch nicht überflüssig, sich über die Frage Rechenschaft zu geben: Was ist denn das letzte Forschungsziel der Demographie, d. h. der Wissenschaft, die sich mit der zahlenmässigen methodischen Untersuchung der bedeutsamen Massenerscheinungen des Menschenlebens befasst?

Um diese Frage zu beantworten, genügt es nicht, einfach die nötig oder zweckmässig erscheinenden Rubriken der bevölkerungsstatistischen Erhebungen zusammenzustellen, sondern man muss von einem allgemeinen, einheitlichen Gesichtspunkt ausgehen, der alle einzelnen Elemente der Untersuchung in ihrem natürlichen Zusammenhange zu überblicken gestattet. Eine solche Einheit der Auffassung der demographischen Erscheinungen hat schon Quetelet erstrebt, indem er sich die Feststellung der Eigenschaften und natürlichen Tendenzen des mittleren Menschen als Aufgabe setzte. Er hatte dabei principiell nicht nur die ruhenden oder statischen, sondern auch die beweglichen oder dynamischen Erscheinungen des Menschenlebens im Auge, aber thatsächlich hat er seine Theorie der Mittelwerte nur auf die festen anthropometrischen Typen angewandt und in Betreff der Bewegung der Bevölkerung nur die von früher bekannte angenäherte Stabilität gewisser Verhältniszahlen durch neues Material genauer nachgewiesen. Zu einer befriedigenden Darstellung des typischen Geschehens in den menschlichen Dingen kann man jedoch nur durch ein umfassenderes und tiefer greifendes Verfahren gelangen. Als natürliche Richtschnur für dasselbe aber bietet sich die Vorstellung des demographischen Lebenslaufs nicht des mittleren, sondern des abstrakt betrachteten Menschen dar. Jeder Mensch durchläuft eine Reihe von Zuständen und Zustandsänderungen, die die Statistik als von ihrem Standpunkt bedeutsam registriert. Man kann aus diesen Beobachtungen zunächst gewisse Mittelzahlen ableiten, wie die mittlere Lebensdauer, das mittlere Alter der Heiratenden u. s. w., aber diese Zahlen genügen nicht zur Aufstellung der in Rede stehenden demographischen Biographie, da für diese vor allem die Thatsache in Betracht kommt, dass nicht alle Menschen alle Phasen durchlaufen, sondern bei jedem nur gewisse Wahrscheinlichkeiten dafür bestehen, dass er in die verschiedenen möglichen Zustände eintreten wird. Was nun diese Wahrscheinlichkeiten betrifft, so ist die Statistik berechtigt, sie als empirische Verhältniszahlen nach ihren besonderen Bedürfnissen zu bilden. Wir können nötigenfalls einen besonderen Begriff der statistischen Wahrscheinlichkeit aufstellen und diesen definieren als einen echten Bruch, dessen Zähler eine Anzahl beobachteter besonderer Fälle oder Elemente angiebt, die aus der im Nenner angegebenen Anzahl beobachteter Fälle oder Elemente entweder hervorgegangen sind oder einen Teil dieses letzteren bilden. Die demographischen Verhältniszahlen dieser Art zeigen bei genügend grosser Grundzahl meistens eine bemerkenswerte Stabilität, aber diese ist dennoch nur bei wenigen Arten von Erscheinungen so gross, wie es nach der Theorie zu erwarten wäre, wenn den beobachteten Erscheinungen eine konstante mathematische Wahrscheinlichkeit zu Grunde läge. Es wird also bei tiefergehenden Untersuchungen notwendig sein, den Grad der Stabilität jener empirischen Verhältniszahlen im Vergleich mit derjenigen Stabilität, die sich bei konstanter mathematischer Wahrscheinlichkeit herausstellt, nach einer an anderer Stelle dargelegten Methode zu bestimmen. Setzen wir voraus, dass dieses geschieht, so sind im übrigen die statistischen Wahrscheinlichkeitsverhältnisse leicht zu handhaben.

2. Der abstrakte Mensch, dessen demographischer Lebenslauf dargestellt werden soll, ist im Anfang ohne alle unterscheidenden Merkmale zu denken: er ist weder männlich noch weiblich, weder verheiratet noch ledig u. s. w., aber jede der in Betracht kommenden Qualitäten kann ihm mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit zufallen. Ehe das Geschlecht des Geborenen

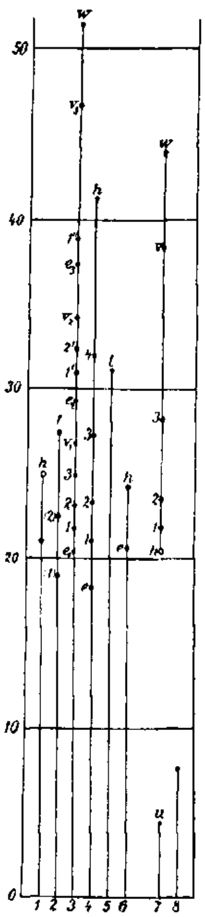
Fig. 6.

bekannt ist, besteht die Wahrscheinlichkeit von ungefähr 515/1000 dafür, dass er männlich, und die von 485/1000 dafür, dass er weiblich ist, und dies ist, nebenbei gesagt, einer der Fälle, in denen die statistische Wahrscheinlichkeit einer konstanten mathematischen Wahrscheinlichkeit entspricht. Nehmen wir nun die Unterscheidung nach dem Geschlechte als bei allen Beobachtungen gegeben an, so können wir die Zustände des abstrakten männlichen und des abstrakten weiblichen Individuums für sich verfolgen. Fassen wir speziell das weibliche Geschlecht ins Auge, weil dessen demographischer Lebenslauf reichhaltiger ist als der des männlichen, so würde ein sich möglichst vollständig auslebendes weibliches Individuum auf seiner nach dem Alter eingeteilten Lebenslinie (Fig. 6, Linie 3) etwa die folgenden durch verschieden bezeichnete Punkte dargestellten Veränderungen durchmachen. Es würde in einem gewissen Alter (Punkt e_1) zum ersten Male in die Ehe treten und dann in irgend welchen Abständen (bei 1, 2, 3) eine gewisse Anzahl von Kindern gebären. Bisher sind die Entbindungen als Lebensereignisse der Frauen allerdings nur in der Statistik weniger Staaten und einiger Gross-

Die Punkte e_1, e_2, e_3 bezeichnen eine erste, zweite, dritte Eheschliessung; die Punkte 1, 2, 3 . . . eine erste, zweite, dritte . . . Niederkunft in der ersten Ehe; die Punkte 1', 2', . . . und 1'', 2'', . . . die Niederkünfte in der zweiten und driten Ehe; die Punkte (1), (2) . . . die unehelichen Niederkünfte; die Punkte v_1, v_2, v_3 die erste, zweite, dritte Verwitwung. Die Todesfälle sind durch die schwarzen Endpunkte bezeichnet. Sie sind nach dem Familienstande der Gestorbenen unterschieden durch die Buchstaben l, h, w für Ledige, Verheiratete und Verwittwete. Bei den Gestorbenen unter 10 Jahren wird die uneheliche Geburt durch den Buchstaben u angedeutet. Die kleinen Kreise am Ende oder am Anfang der Zeichnung einer Lebenslinie bedeuten eine Auswanderung oder eine Einwanderung. Bei der letzteren ist auch der Familienstand angegeben; so soll in der letzten Linie rechts durch h angedeutet werden, dass die Einwandernde verheiratet ist.

städte berücksichtigt worden, aber es unterliegt keinem Zweifel, dass sie sowohl in biologischer als in sozialer Hinsicht ein grosses Interesse darbieten, und unserem Ideal würde also die Forderung entsprechen, dass jede Geburt auf doppelte Art, nämlich als Anfangspunkt einer Lebenslinie und als bedeutsamer Punkt mindestens in der Lebenslinie der Mutter, womöglich auch in der des Vaters verzeichnet werde, d. h. also, dass ausser dem Datum derselben auch das Alter, oder genauer, das Geburtsdatum der Mutter oder beider Eltern registriert werde.

Verfolgen wir nun den weiteren Verlauf der Lebenslinien 3, so finden wir in einem gewissen Alter die erste Verwitwung (v_1), und auf diese folgt nach einiger Zeit eine zweite Verheiratung (e_2). Auch in der zweiten Ehe werden einige Kinder geboren, und es wäre jedenfalls wünschenswert, dass diese Folge von Entbindungen nicht in einer Reihe mit den früheren, sondern wieder von 1 beginnend besonders gezählt würde. Bei v_2 tritt eine zweite Verwitwung ein, bei e_3 eine dritte Eheschliessung, die noch zu weiteren Entbindungen führen kann. Nach einer dritten Verwitwung (v_3) erreicht dann endlich unser weibliches Normalindividuum bei t das Ende seiner Laufbahn. Diese Vollständigkeit des demographischen Lebenslaufs wird freilich nur wenigen weiblichen Personen zu teil. Die meisten weisen eine geringere Anzahl von Zustandsänderungen auf, wie dies auf den keiner weiteren Erklärung bedürfenden Lebenslinien 1, 2, 3 u. s. w. dargestellt ist. Die unehelichen Entbindungen sind neben den überall statistisch festgestellten unehelichen Geburten als solchen natürlich ebenfalls als Lebensereignisse nach dem Alter der Mutter zu verzeichnen (Linie 2). Uebrigens ist auch zu empfehlen, dass bei den Gestorbenen im Kindesalter, etwa bis zum vollendeten 10. Lebensjahre, die unehelich Geborenen unterschieden werden (Linie 7). Manche Lebenslinien, wie 1, brechen für die statistische Beobachtung mit der Auswanderung (bei h) ab, andere beginnen statt mit der Geburt mit einer Einwanderung (bei h w). Die Auflösung der Ehe erfolgt nicht nur durch Tod oder Verwitwung, sondern in einer verhältnismässig kleinen Zahl von Fällen auch durch Scheidung. Diese wäre also wieder durch eine besondere Art von Punkten auf den Lebenslinien zu bezeichnen, was aber in unserer Figur nicht geschehen ist. Als bedeutsames Ereignis im demographischen Lebenslauf der Frauen, oder überhaupt der Eltern, könnte man auch noch den Tod der Kinder betrachten, wenigstens soweit derselbe vor der Auflösung der Ehe der Eltern eintritt. Aus der Zahl der in der Ehe geborenen und der in derselben gestorbenen Kinder würde sich gleichsam der Nettowert der ehelichen Fruchtbarkeit ergeben, aber bei der sehr grossen möglichen Verschiedenheit des Alters und der Sterbenswahrscheinlichkeit der überlebenden Kinder hätte diese Zahl doch nur eine ziemlich unbestimmte Bedeutung. Auch diese Art von Punkten ist aus der Figur weggelassen worden.

Denken wir uns nun für ein gegebenes Land die Lebenslinien einer ganzen Generation, d. h. aller Geborenen aus einer bestimmten Zeitstrecke, mit allen ihren demographisch bedeutsamen Punkten in den der Zeitfolge nach eingetragenen Geburtspunkten senkrecht zu der Grundlinie aufgestellt, so bilden die verschiedenen Arten von Punkten in den einzelnen Altersklassen »Massen« im statististischen Sinne, die zu einander in mehr oder weniger festen Zahlenverhältnissen stehen. Die Gesamtheit dieser in einen langen Streifen zusammengedrängten mannigfaltigen Punkte in ihrer natürlichen Aufeinanderfolge stellt den demographischen Lebenslauf einer Generation als Massenerscheinung dar, und dieser kann nun auch zahlenmässig durch eine Reihe von statistischen Wahrscheinlichkeiten ausgedrückt werden. Wie bei der Darstellung der Sterblichkeitsverhältnisse Hauptgesamtheiten und Elementargesamtheiten von Verstorbenen unterschieden worden sind, so ergeben sich jetzt ähnliche Gesamtheiten von Getrauten, Verwitweten und Entbindungen, und wenn, wie in Fig. 4, mehrere Generationen mit den zugehörigen senkrechten Streifen aneinander gereiht werden, so treten auch die verschiedenen Arten der Hauptgesamtheiten dieser Kategorien hervor. Es dürfte auch nicht ganz ohne Interesse sein, eine graphische Darstellung einer solchen Mannigfaltigkeit von Zustandsänderungen zu versuchen. Es liegt nahe, die Grösse des Punkteninhalts in den Quadraten einer Zeichnung, wie Fig. 4, mag er sich nun auf Sterbefälle oder andere Zustandsänderungen beziehen, durch Kreise mit den Punkteninhalten proportionalem Flächeninhalt darzustellen. Handelt es sich um Sterbefälle, so wird man zweckmässigerweise wenigstens in den beiden ersten Jahresklassen des Alters die grosse Verschiedenheit der beiden Elementargesamtheiten von Gestorbenen unterscheiden müssen, wie in Fig. 7, in der ein Jahr als Masseinheit genommen ist, dargestellt ist. Von der dritten Altersklasse kann man ohne Bedenken die ganze quadratische Hauptgesamtheit durch einen einzigen Kreis bezeichnen. Uebrigens ist es bei dieser Darstellungsmethode nicht zu empfehlen, von der ersten bis zur höchsten Altersklasse denselben Massstab für die Kreise beizubehalten, da die Sterblichkeit des ersten Altersjahres so ausserordentlich gross ist, dass die der jugendlichen und mittleren Altersstufen nur durch Kreise von ganz geringfügigem Radius ausgedrückt werden können. Bei einer graphischen Darstellung der Sterblichkeit einer Generation wird es daher am besten sein, etwa vom sechsten Altersjahre ab eine besondere Zeichnung zu entwerfen, in der dieselbe Zahl von Sterbefällen durch eine wenigstens zehnmal so grosse Kreisfläche repräsentiert wird als nach dem für die fünf ersten Jahre angewandten Massstabe. Die Trauungen und sonstigen Zustandsänderungen kommen überhaupt erst für die Altersklassen von mehr als 15 Jahren in Betracht und für sie ist ebenfalls der grössere Massstab zu Grunde zu legen. Es lassen sich ohne Schwierigkeit drei Zustandsänderungen in einer Zeichnung für jedes Geschlecht zusammen darstellen, so z. B. in Fig. 8 die Eheschliessungen und die Ehelösungen sowohl durch Tod wie durch Verwitwung der Frau, ohne Unterscheidung der Ordnungszahl dieser Vorgänge. Die weissen Kreisflächen entsprechen der Zahl der Eheschliessungen in den fünfjährigen Altersklassen. Wenn in der Klasse von 15—20 Jahren die Elementargesamtheiten der Trauungen unterschieden würden, so würde der zu dem unteren Dreieck gehörende Halbkreis erheblich kleiner sein als der obere. Die

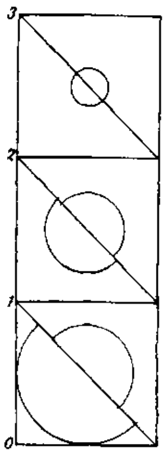

Fig. 7.

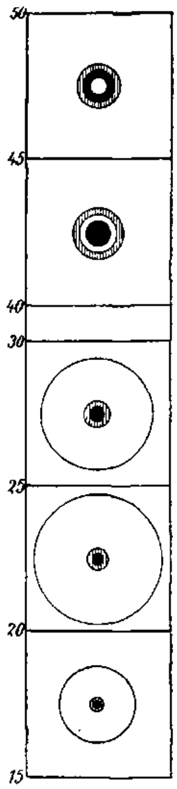

Fig. 8.

schwarzen Kreisflächen drücken die Zahl der Sterbefälle von verheirateten Frauen, die schraffierten Kreisflächen die Zahl der Verwitwungen derselben aus. Die letztere wird, da die Männer durchschnittlich älter sind als die Frauen, im allgemeinen grösser sein als die erstere. Beide Arten der Ehelösungen sind in den jugendlichen Altersklassen im Vergleich mit den Trauungen wenig zahlreich, sie werden aber mit dem Fortschreiten des Alters immer häufiger, während die Zahl der Trauungen immer mehr abnimmt. Daher wird z. B. in der Altersklasse von 40—50 Jahren der die letztere darstellende Kreis von den beiden anderen umschlossen, während er in der Klasse von 40—45 Jahren noch grösser ist als der den Todesfällen entsprechende und in den früheren Altersstufen weit über die beiden anderen hinausreicht. Die Zeichnung stimmt übrigens kaum in roher Annäherung mit den wirklichen Zahlenverhältnissen überein. Wollte man die Eheschliessungen und -Lösungen nach ihrer Ordnungszahl unterschieden darstellen, so müsste man die ersten, zweiten und dritten Eheschliessungen und den zugehörigen weiteren Verlauf in besondere Zeichnungen bringen, die etwa mit gleichen Altersstufen nebeneinander zu stellen wären. Auch zur Darstellung der ehelichen Geburten nach dem Alter der Mutter, mit Unterscheidung etwa der ersten, zweiten, dritten und der folgenden Entbindungen, vielleicht auch noch kombiniert mit den Eheschliessungen der betreffenden Altersklasse, wäre wieder eine besondere Figur erforderlich. Die Anschaulichkeit dieser Zeichnungen würde noch wesentlich gewinnen, wenn die konzentrischen sich teilweise überdeckenden Kreisflächen von verschiedener Bedeutung durch verschiedene Farben gekennzeichnet würden. Auch könnte man eine Art von Modell herstellen, indem man die verschiedenen Kreisflächen aus verschiedenfarbigem Papier herstellt und diese Papierscheiben konzentrisch übereinander legte. Dann könnte man auch in demselben Rahmen beliebig viele Zustandsänderungen darstellen.

4. Eine ähnliche Uebersicht des demographischen Verlaufs einer Generation lässt sich auch ohne graphische Konstruktion durch blosse Symbole geben, für die man in jedem Falle die wirklich beobachteten Zahlen einsetzen kann. Man erhält dadurch ein zusammenhängendes Schema derjenigen statistischen Rubriken, deren Ausfüllung wünschenswert wäre, wenn sie auch für grössere Staaten schwerlich jemals zu erwarten ist.

	${}^e_tG + {}^u_tG$		M_0		H_1	M_1	W_1	M_1^v	H_2	M_2	W_2	M_2^v	H_3	M_3	W_3	M_3^v	S	M_s	H_s	${}^eN_k$	${}^eN_m$	${}^uN_k$	${}^uN_m$	N_k^t	N_m^t
	$_7M$	$_7(E-A)_0$	$_7M_0$	$_7(E-A)_h$	$_7H_1$	$_7M_1$	$_7W_1$	$_7M_1^v$	$_7H_2$	$_7M_2$	$_7W_2$	$_7M_2^v$	$_7H_3$	$_7M_3$	$_7W_3$	$_7M_3^v$	$_7S$	$_7M_s$	$_7H_s$	${}^e_7N_k$	${}^e_7N_m$	${}^u_7N_k$	${}^u_7N_m$	$_7N_k^t$	$_7N_m^t$
30	$_6M$	$_6(E-A)_0$	$_6M_0$	$_6(E-A)_h$	$_6H_1$	$_6M_1$	$_6W_1$	$_6M_1^v$	$_6H_2$	$_6M_2$	$_6W_2$	$_6M_2^v$	$_6H_3$	$_6M_3$	$_6W_3$	$_6M_3^v$	$_6S$	$_6M_s$	$_6H_s$	${}^e_6N_k$	${}^e_6N_m$	${}^u_6N_k$	${}^u_6N_m$	$_6N_k^t$	$_6N_m^t$
25	$_5M$	$_5(E-A)_0$	$_5M_0$	$_5(E-A)_h$	$_5H_1$	$_5M_1$	$_5W_1$	$_5M_1^v$	$_5H_2$	$_5M_2$	$_5W_2$	$_5M_2^v$	$_5H_3$	$_5M_3$	$_5W_3$	$_5M_3^v$	$_5S$	$_5M_s$	$_5H_s$	${}^e_5N_k$	${}^e_5N_m$	${}^u_5N_k$	${}^u_5N_m$	$_5N_k^t$	$_5N_m^t$
20	$_4M$	$_4(E-A)_0$	$_4M_0$	$_4(E-A)_h$	$_4H_1$	$_4M_1$	$_4W_1$	$_4M_1^v$	$_4H_2$	$_4M_2$	$_4W_2$	$_4M_2^v$	—	—	—	—	$_4S$	$_4M_s$	$_4H_s$	${}^e_4N_k$	${}^e_4N_m$	${}^u_4N_k$	${}^u_4N_m$	$_4N_k^t$	$_4N_m^t$
15	$_3M$	$_3(E-A)_0$	$_3M_0$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—						
10	${}^e_2M + {}^u_2M$	$_2(E-A)_0$	$_2M_0$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	${}^1N_k$	${}^1N_m$			${}^eN_k^t$	${}^eN_m^t$
5	${}^e_1M + {}^u_1M$	$_1(E-A)_0$	$_1M_0$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	${}^2N_k$	${}^2N_m$			${}^uN_k^t$	${}^uN_m^t$
0	${}^e_lG + {}^u_lG$	$(E-A)_0 + (E-A)_h$																		${}^3N_k$	${}^3N_m$				

Das Schema bezieht sich nur auf je ein Geschlecht, und zwar in unserem Beispiel auf das weibliche. Die ganze zu verfolgende weibliche Generation, die nach dem angenommenen System mit G zu bezeichnen wäre, umfasst Lebend- und Totgeborene (erste Kolonne links). Letztere (${}_tG$) scheiden wir jedoch sofort aus, indem wir sie zugleich in eheliche und uneheliche Totgeborene zerlegen $\left({}^e_tG \text{ und } {}^u_tG\right)$. Bei den Lebendgeborenen (${}_lG$) wird dieselbe Unterscheidung nach dem Familienstand gemacht $\left({}^e_lG \text{ und } {}^u_lG\right)$. In unserer Aufstellung sind nun bloss fünfjährige Altersstufen angenommen, was für die Darstellung der Sterblichkeit jedenfalls nicht ausreichen würde, wenn man sich auch für die übrigen Zustandsänderungen vielleicht mit dieser summarischen Abstufung begnügen kann. Die Sterbefälle sind jedenfalls nach Jahresklassen und im ersten Lebensjahr mindestens nach Monatsstufen zu unterscheiden.

Die fünfjährige Strecke ist auch als Einheit für die das Alter angebenden Indices genommen und es bezeichnet daher z. B. ${}_4M$ die Zahl der Gestorbenen in der vierten Altersstrecke, d. h. im Alter von 15 bis 20 Jahren. Zu den beiden untersten Altersstrecken, also bis zum Alter von 10 Jahren, ist auch die Unterscheidung der Gestorbenen nach ehelicher oder unehelicher Geburt mittels der Indices e und u vorgenommen.

Die Einwanderer werden mit E, die Auswanderer mit A bezeichnet und nach Altersstufen (durch die Indices links) und nach dem Familienstand insoweit unterschieden, als das Symbol für die Ledigen rechts den Index o und das für die Verheirateten den Index h trägt. Zu den Verheirateten werden also auch die — wahrscheinlich wenig zahlreichen — verheiratet Gewesenen, also die Verwitweten gezählt. Der Einfachheit wegen sind die Indices nicht den einzelnen, E und A, sondern der allein weiter in Betracht kommenden Differenz dieser Grössen (die auch negativ werden kann) beigefügt.

Die M_0, wo x (mit dem Jahrfünft als Einheit) die Zahlen von 1 bis 20 durchlaufen müsste, bezeichnen die im ledigen Stande gestorbenen in der xten Altersstufe, d. h. im Alter von 5x — 5 bis 5x Jahren. Sie schliessen auch die aus den Einwanderern hervorgehenden Gestorbenen ein, soweit diese ursprünglich ledig waren und ledig geblieben sind. In der dritten senkrechten Abteilung bezeichnet ${}_xH_1$ allgemein die Zahl der ersten Heiraten in der x-ten fünfjährigen Altersstufe, ${}_xM_1$ die Zahl der in dieser Altersstufe in der ersten Ehe Gestorbenen, ${}_xW_1$ die Zahl der in dieser Altersstufe zum ersten Mal Verwittweten, ${}_xM_1^v$ die Zahl der in dieser Stufe im ersten Witwenstande Gestorbenen. In allen diesen Zahlen können auch Fälle enthalten sein, die von Einwanderern herrühren. In der vierten Abteilung haben die Symbole ${}_xH_2$, ${}_xM_2$, ${}_xW_2$, ${}_xM_2^v$ entsprechende Bedeutungen für die zweiten Heiraten und Verwitwungen. Ebenso in der fünften Abteilung ${}_xH_3$, ${}_xM_3$, ${}_xW_3$, ${}_1M_3^v$ für die dritten Heiraten und Verwitwungen. Sollten vierte Heiraten und Verwitwungen vorkommen, so können sie mit den dritten vereinigt werden. Die Wanderungen haben auf die Zahlen der zweiten und dritten Ehen jedenfalls weit weniger Einfluss, als auf die der ersten. In der vierten Altersstufe wird es dritte Ehen wohl überhaupt nicht geben.

Ferner bedeutet ${}_xS$ die Zahl der Ehescheidungen in der x-ten Altersstufe, ${}_xM^s$ die Zahl der als Geschiedene in dieser Stufe Gestorbenen, ${}_xH_s$ die Zahl der Verheiratungen von Geschiedenen in dieser Stufe.

Die N enthaltenden Symbole endlich beziehen sich auf die Niederkunft. ${}^e_xN_k$ bedeutet die Zahl der in der x-ten Altersstufe der Mutter ehelich und lebend geborenen Knaben und ${}^e_xN_m$ hat dieselbe Bedeutung für die Mädchen. Eine Unterscheidung der Ordnungszahl der Geburt ist hier nicht vorgesehen. Es wäre aber vielleicht zweckmässig, wenigstens die weitere Unterscheidung in ${}^e_xN_k^1$ und ${}^e_xN_k^n$ nebst der entsprechenden für die Mädchen vorzunehmen, wo das erste Symbol sich auf die ersten Entbindungen der Mütter und das andere sich auf die zweiten und folgenden bezieht.

In dem unteren Stücke dieser Abteilung bedeuten die Symbole ${}^1N_k$, ${}^1N_m$, ${}^2N_k$, ${}^2N_m$ u. s. w. die Zahlen der lebendgeborenen Knaben und Mädchen aus ersten, zweiten und dritten Ehen.

Die folgende Abteilung mit den Symbolen ${}^u_xN_k$ und ${}^u_xN_m$ bezieht sich auf die unehelichen Lebendgeborenen mit Unterscheidung ihres Geschlechts und der Altersstufe der Mutter und in der letzten Abteilung bezeichnen ${}_xN_k^t$ und ${}_xN_m^t$ die Totgeborenen mit denselben Unterscheidungen. In dem unteren Teile ist noch mit leicht verständlichen Symbolen die Unterscheidung der Gesamtzahl der männlichen und weiblichen Totgeborenen nach dem Familienstande beigefügt.

Wie man sieht, enthalten die senkrechten Reihen Gesamtheiten derselben Art, die sich (abgesehen von den N in den unteren Stücken der drittletzten und letzten Abteilung) nur durch die Altersstufe unterscheiden. Die Summe einer jeden Art kann einfach durch Weglassen des Altersindex ausgedrückt werden, wie das in der untersten Horizontalreihe geschehen ist.

Ebenso bilden die ${}_{x}M$ die Summe der rechtsstehenden Horizontalreihen von ${}_{x}M$ mit besonderen Indices. Auch die ${}_{x}H$ und die ${}_{x}W$ bilden homogene Horizontalreihen und den ${}_{x}W$ können nötigenfalls auch die ${}_{x}S$ als nächstverwandt zugerechnet werden.

5. Alle Zahlen in dieser Uebersicht beziehen sich nur auf Zustandsänderungen, nicht aber auf die in einem bestimmten Zustande an einer bestimmten Altersgrenze vorhandenen Gesamtheiten. Wir wollen diese mit einem allgemeinen Ausdruck, der den Fall der Ueberlebenden in der Absterbeordnung mit umfasst, als die Uebergehenden bezeichnen. Wird nur die einzige Zustandsänderung des Sterbens vorausgesetzt, so ist immer einfach ${}_{x+1}U = {}_{x}U - {}_{x}M$, wenn mit ${}_{x}U$ und ${}_{x+1}U$ die in die x-te und (x + 1)-te Jahresklasse Uebergehenden bezeichnet werden[1]. Der Anfangsbestand ${}_{1}U$ ist hier gleich der Zahl der lebend Geborenen ${}_{0}G$. Finden Wanderungen statt und bezeichnen wir die Differenz ${}_{x}(E - A)$ mit ${}_{x}D$, so ist ${}_{x+1}U = {}_{x}U - {}_{x}M + {}_{x}D$, wo ${}_{x}M$ alle Gestorbenen der betreffenden Altersstufe, also mit Einschluss der etwa gestorbenen Einwanderer, bedeutet. Stellen wir so die Reihe der U von ${}_{1}U$ bis ${}_{100}U$ auf, so erhalten wir eine Uebergangsordnung, die aber von der Absterbeordnung der ursprünglichen Generation um so mehr verschieden ist, je grösser die Differenzen der Ein- und Auswanderungen in den einzelnen Altersstufen sind. Daher stellt auch das Verhältnis $\frac{{}_{x}M}{{}_{x}U}$ nicht die Sterbenswahrscheinlichkeit in der x-ten Altersklasse dar, jedoch wird dieses Verhältnis, wenn die Wanderungen nicht bedeutend sind oder in derselben Altersklasse annähernd gleichmässig bleiben, für die

---

1) Im folgenden sind einjährige Altersklassen wie auch eine einjährige Geburtsstrecke angenommen, während das Schema S. 68 des Raumes wegen fünfjährige Altersstufen enthält.

aufeinander folgenden Generationen ziemlich konstant bleiben. Noch mehr unterscheidet sich das Verhältnis $\frac{{}_xU - {}_{x+1}U}{{}_xU}$ oder $\frac{{}_xM - {}_xD}{{}_xU}$, das wir als das **Abgangsverhältnis der Lebenden** einer durch Wanderung beeinflussten Generation bezeichnen wollen, von einer Sterbenswahrscheinlichkeit. Bei starker Einwanderung kann es negativ, also ein **Zugangsverhältnis**, werden und nur bei kleinem D im Vergleich zu M oder bei geringer Veränderlichkeit von D wird es sich einigermassen konstant zeigen.

Addieren wir die Gleichungen ${}_xU - {}_{x+1}U = {}_xM - {}_xD$, wenn für x alle Zahlen von 1 bis 100 gesetzt werden, so erhalten wir ${}_1U = {}_1G = M - D$, wo M und D die Summe aller Gestorbenen und der sämtlichen (positiven und negativen) Ueberschüsse der Einwanderer über die Auswanderer bezeichnen.

Bedeutet ${}_xU_0$ die Zahl der als **Ledige** in die x-te Altersstufe Uebergehenden, so bildet die vollständige Reihe dieser Zahlen die Uebergangsordnung der Ledigen, und zwar ist ${}_{x+1}U_0 = {}_xU_0 - {}_xM_0 + {}_xD_0 - {}_xH_1$, wo ${}_xH_1$ auch die zum ersten Male heiratenden Einwanderer aus dieser Altersstufe mit einschliesst. Addiert man die Gleichungen ${}_xU_0 - {}_{x+1}U_0 = {}_xM_0 - {}_xD_0 + {}_xH_1$ (von x = 1 bis x = 100), so erhält man ${}_1U_0 = {}_1G = M_0 - D_0 + H_1$.

Das Verhältnis $\frac{{}_xU_0 - {}_{x+1}U_0}{{}_xU_0}$ oder $\frac{{}_xM_0 - {}_xD_0 + {}_xH_1}{{}_xU_0}$ kann als das Abgangsverhältnis der Ledigen bezeichnet werden. Es wird wohl immer positiv sein und unterliegt dem Einflusse der Wanderungen weit weniger als das vorher erwähnte, da dem ${}_xD_0$ die Summe ${}_xM_0 + {}_xH_1$ gegenübersteht. Es wird sich von Generation zu Generation ziemlich konstant erhalten, obwohl es keine Wahrscheinlichkeit darstellt.

Werden die in die x-te Altersstufe übergehenden **Verheirateten in erster Ehe** mit ${}_xU_1$ bezeichnet, so hat man für die Uebergangsordnung dieser Verheirateten ${}_{x+1}U_1 = {}_xU_1 + {}_xH_1 - {}_xM_1 - {}_xW_1 + {}_xD_h - {}_xS$. Dabei ist angenommen, dass die verheirateten Ein- und Auswanderer ${}_xD_h$ und die Geschiedenen ${}_xS$ ausschliesslich in der ersten Ehe stehen. Geht man von dem Alter von 15 Jahren, also von der 16. Altersklasse aus, so ist ${}_{16}U_1 = 0$ und durch Summierung der Gleichungen für ${}_xU_1 - {}_{x+1}U_1$ erhält man: $0 = H_1 - M_1 - W_1 + D_h - S$ oder $H_1 = M_1 + W_1 - D_h + S$, wie sich auch leicht durch unmittelbare Ueberlegung ergiebt. Das Verhältnis der Differenz ${}_xU_1 - {}_{x+1}U_1$ oder ${}_xM_1 + {}_xW_1 - {}_xH_1 - {}_xD_h + {}_xS$ zu ${}_xU_1$ wird in den jüngeren Altersklassen wegen des Uebergewichts von ${}_xH_1$ negativ sein, also der Zugang den Abgang überwiegen. Es kann natürlich erst von dem Alter ab gebildet werden, in dem ${}_xU_1$ mindestens $= 1$ ist und es bleibt dann während einer gewissen Altersstrecke grösser als -1. Bei nicht allzu grossen Wanderungen wird es ebenfalls ziemlich konstant sein. Für die Verheirateten in zweiter Ehe ist ${}_xU_2 - {}_{x+1}U_2 = {}_xM_2 + {}_xW_2 - {}_xH_2 - {}_xH_s$, wenn man annimmt, dass Wanderungen und Scheidungen in zweiter Ehe wegen ihrer geringen Zahl nicht besonders berücksichtigt zu werden brauchen. Für die Verheirateten in dritter Ehe fällt unter dieser Voraussetzung auch das Glied ${}_xH_s$ weg. Das Abgangsverhältnis für beide Kategorien von dem dem Werte ${}_xU_2 = {}_xU_3 = 1$ entsprechenden Alter ab ergiebt sich ohne weiteres.

Lässt man die Unterscheidung der Ordnungszahlen der Eheschliessungen fallen und fasst alle Heiraten zusammen und bezeichnet die in die x-te Altersstufe Uebergehenden mit ${}_xU_h$ und die zusammengefassten Ordnungszahlen bei den H, M und W ebenfalls mit dem Index h, so ist ${}_xU_h - {}_{x+1}U_h = {}_xM_h + {}_xW_h - {}_xH_h + {}_xS - {}_xH_s - {}_xD_h$, woraus sich auch das Abgangsverhältnis der Verheirateten ergiebt, das anfangs negativ ist.

Für die Gesamtheit aller Verwitweten ohne Unterscheidung der Ordnungszahl endlich erhält man bei Vernachlässigung der Wanderungen und Scheidungen, wenn der Index w die dem h in dem vorigen Fall entsprechende Bedeutung hat, während durch den Index w bei H nur die H_2 und H_3, also die Wiederverheiratungen zusammengefasst werden, ${}_xU_w - {}_{x+1}U_w = {}_xM_w^v + {}_xH_w - {}_xW_w$ wiederum eine anfangs negative Differenz, also ein Zugang, dem auch ein negatives Abgangsverhältnis entspricht.

6. Will man die Wahrscheinlichkeiten der **einzelnen** Zustandsänderungen in einer Altersklasse ausdrücken, so sind alle übrigen wie Einwanderung und Auswanderung zu behandeln. So erhält man bei Anwendung der einfachsten Näherungsformel für die allgemeine Sterbenswahrscheinlichkeit der x-ten Altersklasse mit Berücksichtigung der Wanderungen

$$ {}_x\varphi = \frac{{}_xM}{{}_xU + \frac{1}{2}{}_xD}\,; $$

für die Sterbenswahrscheinlichkeit der Ledigen:

$$ {}_x\varphi_o = \frac{{}_xM_o}{{}_xU_o + \frac{1}{2}({}_xD_o - {}_xH_1)}; $$

für die Sterbenswahrscheinlichkeit aller Verheirateten, ohne Rücksicht auf die Ordnungszahl:

$$ {}_x\varphi_h = \frac{{}_xM_h}{{}_xU_h + \frac{1}{2}({}_xH_h - {}_xW_h + {}_xD_h - {}_xS)}; $$

für die Sterbenswahrscheinlichkeit der Verwitweten, ohne Rücksicht auf die Ordnungszahl:

$$ {}_x\varphi_w = \frac{{}_xM_w^v}{{}_xU_w + \frac{1}{2}({}_xW_w - {}_xH_w + {}_xD_w)}, $$

wo H_w sich, wie oben, auf die Wiederverheiratungen bezieht und die Scheidungen von Witwen vernachlässigt sind.

Für ${}_xU$ ist in ${}_x\varphi$ einzusetzen ${}_1G - \Sigma_y M + \Sigma_y D$, wo das erste Symbol Σ die Summe aller ${}_xM$ von $y = 1$ bis $y = x - 1$ und das zweite die entsprechende Summe der Ein- oder Ausgewanderten bezeichnet.

In ${}_x\varphi_o$ ist ${}_xU_o = {}_1G - \Sigma_y M_o + \Sigma_y D_o - \Sigma_y H_h$, wo y bei den Summierungen wieder bis $x - 1$ geht.

In ${}_x\varphi_h$ ist ${}_xU_h = \Sigma_y H_h - \Sigma_y M_h - \Sigma_y W_h + \Sigma_y D_h - \Sigma_y S$, wo y von dem frühesten zulässigen Heiratsalter bis $x - 1$ zu nehmen ist.

In ${}_x\varphi_w$ ist ${}_xU_w = \Sigma_y W_w - \Sigma_y H_w - \Sigma_y M_w^v + \Sigma_y D_w$, wo y frühestens mit 17 beginnt und wieder bis $x - 1$ reicht.

Einfacher jedoch ist es, wenn die Zahl der Uebergehenden für alle Zustandsänderungen in ähnlicher Weise wie bei der sogenannten direkten Methode der Bestimmung der Sterbenswahrscheinlichkeiten in den einzelnen Altersklassen aus den Ergebnissen der Volkszählung mit Hinzufügung einer entsprechenden, wenn nicht direkt bestimmten, so doch geschäzten unteren Elementargesamtheit ermittelt wird. Unter der Voraussetzung gleichförmiger oder gleichförmig veränderlicher Verteilung der nach Analogie der Wanderungen aufgefassten Ab- und Zugänge erhält man dann nach der ersten Näherungsmethode für die Bestimmung von φ die Sterbenswahrscheinlichkeiten der einzelnen Kategorien unabhängig von der Kenntnis der Grösse der Ab- und Zugänge, wie dies oben hinsichtlich der Wanderungen gezeigt worden ist. Ist z. B. die Zahl der ledigen Lebenden in der betrachteten x-ten einjährigen Altersklasse nach der Volkszählung

${}_xL_0^2$ und wird die unmittelbar beobachtete anliegende untere Elementargesamtheit von gestorbenen Ledigen, die durch Abgang von Heiratenden und vielleicht durch Zugang von Einwandernden beeinflusst ist, mit $({}_x\varDelta_0^1)$ bezeichnet, so hat man

$${}_xU_0 = {}_xL_0^2 + ({}_x\varDelta_0^1) - \tfrac{1}{2}({}_xD_0 - {}_xH_1).$$

Andererseits aber ist der Nenner in dem Näherungswerte von ${}_x\varphi_0$ gleich ${}_xU_0 + \frac{1}{2}({}_xD_0 - {}_xH_1)$ und durch Einsetzen des Wertes von ${}_xU_0$ erhält man also

$${}_x\varphi_0 = \frac{{}_xM_0}{{}_xL_0^2 + ({}_x\varDelta_0^1)}.$$

Entsprechend ist die Sterbenswahrscheinlichkeit der Verheirateten ${}_x\varphi_h = \frac{{}_xM_h}{{}_xL_h^2 + ({}_x\varDelta_h^1)}$ und die der Verwitweten

$${}_x\varphi_w = \frac{{}_xM_w^v}{{}_xL_w^2 + ({}_x\varDelta_w^1)},$$

wenn durch die L_h^2 und L_w^2 die gezählten gleichzeitig Lebenden der betreffenden Kategorie und durch die $(\varDelta_h^1)$ und $(\varDelta_w^1)$ die entsprechenden anliegenden Elementargesamtheiten von Verstorbenen bezeichnet werden. Die M bedeuten in diesen Ausdrücken immer die beobachteten, durch die Ab- und Zugänge beeinflussten ersten Hauptgesamtheiten von Verstorbenen der einzelnen Kategorien. Das Verschwinden der die Ab- und Zugänge selbst ausdrückenden Grössen aus den Formeln erklärt sich einfach dadurch, dass die L^2 einen durchschnittlichen, durch die Ab- und Zugänge beeinflussten Bestand der Standesgruppe, deren Sterbenswahrscheinlichkeit zu bestimmen ist, darstellen. Näherungsweise kann man natürlich auch wieder für die ersten Hauptgesamtheiten M die leichter zu bestimmenden entsprechenden dritten Hauptgesamtheiten und für die $\varDelta^1$ die Hälfte dieser letzteren einsetzen.

7. In gleicher Weise wie diese Sterbenswahrscheinlichkeiten lassen sich auch die Wahrscheinlichkeiten für die sonstigen Zustandsänderungen aufstellen. In diesen Fällen werden die Abgänge durch Tod wie Auswanderungen behandelt und die im Nenner des Wahrscheinlichkeitsausdrucks auftretende Elementargesamtheit bezieht sich auf die Zustandsänderung, um die es sich handelt. Ist z. B. die Heiratswahrscheinlichkeit ${}_x\varphi_h^0$ der Ledigen im x-ten Altersjahr zu bestimmen, so ist der Zähler dieses Bruches

${}_xH_1$ und der Nenner ${}_xU_0 + \frac{1}{2}({}_xD_0 - {}_xM_0)$. Andererseits aber ist ${}_xU_0 = {}_xL_0^2 + ({}_x\Delta_h^1) - \frac{1}{2}({}_xD_0 - {}_xM_0)$, wo $({}_x\Delta_h^1)$ die Elementargesamtheit derjenigen darstellt, die nach Ueberschreitung der unteren Grenze des x-ten Altersjahres und vor dem (am Ende des Kalenderjahres liegenden) Zeitpunkt der Volkszählung aus dem ledigen in den Ehestand getreten sind. Der Näherungswert von ${}_x\varphi_h^0$ ist demnach $\frac{{}_xH_1}{{}_xL_0^2 + ({}_x\Delta_h^1)}$. Aehnlich findet man als Wahrscheinlichkeit der Verwitwung (ohne Unterscheidung der Ordnungszahl der aufgelösten Ehe) im x-ten Altersjahre ${}_x\varphi_w^h = \frac{{}_xW_h}{{}_xL_h^2 + ({}_x\Delta_w^1)}$, wo ${}_xL_h^2$ die durch Volkszählung ermittelte Zahl der verehelichten Frauen im x-ten Altersjahr und $({}_x\Delta_w^1)$ die Elementargesamtheit der noch vor der Volkszählung in diesem Altersjahr verwitweten bezeichnet.

Mit gewissen Modifikationen liessen sich diese Methoden auch anwenden, um die Wahrscheinlichkeit der Niederkunft der verheirateten Frauen in den einzelnen Altersklassen näherungsweise darzustellen. Das dazu erforderliche Material wird indes schwerlich jemals beschafft werden und man würde schon zufrieden sein können, wenn wenigstens die relativen Wahrscheinlichkeiten der Niederkünfte in den verschiedenen Altersklassen einer weiblichen Generation bestimmt werden könnten, d. h. wenn angegeben werden könnte, wie viele von der Gesamtzahl der aus dieser Generation hervorgegangenen ehelichen und unehelichen Geburten in die einzelnen Altersklassen fallen, wobei auch das Geschlecht der Geborenen zu unterscheiden wäre.

Ausser den hier angeführten lassen sich noch viele andere statistisch bedeutsame Zustandsänderungen in den demographischen Lebenslauf einfügen, so Beginn und Aufhören der Berufs- oder Erwerbsthätigkeit, Invalidität, Unfälle, Vergehen und Verbrechen, bei den Sterbefällen auch Unterscheidung der Todesursachen. Aus diesem allgemeinen Leitfaden ergiebt sich leicht das Schema für die rationelle Behandlung auch dieser Erscheinungen.

8. Bei dem demographischen Lebenslauf wird aber vorausgesetzt, dass alle Zustandsänderungen innerhalb derselben ursprünglichen Generation oder Gesamtheit von Geborenen stattfinden. Zur vollständigen Beobachtung desselben an einer

wirklichen Generation wäre also etwa ein Jahrhundert erforderlich, und daher lässt sich praktisch dieser Lebenslauf nur rechnungsmässig für eine ideale Generation aufstellen, indem angenommen wird, dass in dieser die verschiedenen Zustandsänderungen in jeder Altersklasse mit denjenigen Wahrscheinlichkeiten eintreten, die für die Gegenwart gelten. Der so gewonnene demographische Lebenslauf ist also nur ein Gedankending, das theoretisch ohne Zweifel grosses Interesse darbietet und, sofern es die Absterbeordnung einschliesst, auch praktische Bedeutung für das Versicherungswesen besitzt, aber eine zweckmässige Uebersicht über die unmittelbaren Ergebnisse der statistischen Beobachtungen nicht gewährt. Diese stellen nicht die demographischen Zustände und Zustandsänderungen einer Generation, sondern die einer ganzen, gleichzeitig lebenden, auf alle Altersklassen verteilten Bevölkerung dar und dürfen eine besondere methodische Behandlung in Anspruch nehmen. Jedoch kann auch für diese der demographische Lebenslauf einer Generation als Leitfaden dienen, da die in diesem bedeutsamen Zustandsänderungen auch für die gleichzeitig lebende Bevölkerung zu berücksichtigen sind. Wäre eine Bevölkerung in allen Beziehungen vollständig stationär, so würden alle Arten von Zustandsänderungen innerhalb eines Kalenderjahres in jeder Altersklasse der Bevölkerung mit derselben Frequenz auftreten, wie in der gleichen Altersklasse einer in ihrem Lebenslauf verfolgten Jahresgeneration. Es würden also die Punkteninhalte der verschiedenen Arten, z. B. in den Altersstufen des schrägen Streifens $b a_4 c a_5$ (Fig. 9) denen der entsprechenden Stufen in dem senkrechten Streifen bcef gleich sein. In Wirklichkeit trifft diese Annahme freilich nicht zu, immerhin aber behalten die Zustandsänderungen der gleichzeitigen Bevölkerung, wie sie sich in dem schrägen Streifen darstellen, eine leicht zu übersehende Beziehung zu dem demographischen Lebenslauf und dieser selbst tritt, wie z. B. längs der Linie be, wenigstens annähernd in um so grösseren Bruchstücken hervor, je mehr Jahresbeobachtungen der Zustandsänderungen der Bevölkerung aneinandergereiht werden.

Diese letzteren indes, die durch die fortlaufenden statistischen Erhebungen in grösserer oder geringerer Vollständigkeit geliefert werden, und zwar meistens in der Form dritter Hauptgesamtheiten (wie die von b c m n begrenzten), seltener in zweiten Hauptgesamtheiten (wie die von b m o n begrenzten) und bisher nur ausnahmsweise in Elementargesamtheiten. Die für diese Gesamtheiten zu bildenden Verhältniszahlen aber sind wesentlich anderer Art, als die für die gleichartigen Zustandsänderungen einer Generation aufgestellten. Aus der Reihe der dritten Hauptgesamtheiten der Zustandsänderungen eines Kalenderjahres (die also einen schrägen Streifen ausfüllen würden) lassen sich bei nichtstationärer Bevölkerung die absoluten Wahrscheinlichkeiten dieser Zustandsänderungen in den einzelnen Altersklassen nicht ableiten, d. h. man kann nicht sagen, wie viele von denjenigen, die die untere Grenze dieser Altersklasse überschreiten, innerhalb derselben die Zustandsänderung erfahren. Wohl aber kann man relative oder analytische Wahrscheinlichkeitsverhältnisse bilden, d. h. bestimmen, wie viele von der Gesamtzahl der in einem Jahr vorkommenden Zustandsänderungen einer gewissen Art auf die einzelnen Altersklassen entfallen. Die einzelnen Fälle gehen hier nicht aus einer gemeinschaftlichen Quelle, einer Jahresgeneration hervor, dennoch aber kann man der Form nach von einer Wahrscheinlichkeit reden, bei den Todesfällen z. B. von der, dass ein aus der Gesamtzahl der Gestorbenen eines Kalenderjahres zufällig herausgegriffener einer bestimmten Altersklasse angehöre. Eine für technische Zwecke brauchbare Sterblichkeitstabelle lässt sich auf diese Art nicht ableiten, aber diese relativen Sterbenswahr-

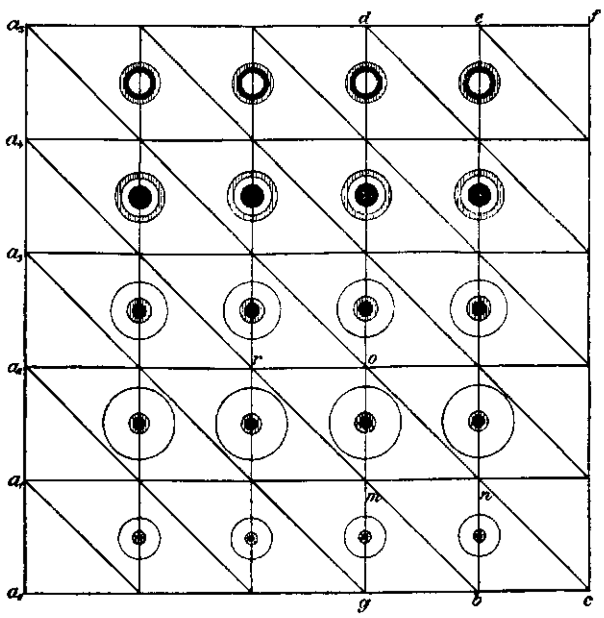

Fig. 9.

scheinlichkeiten der Altersklassen sind von Jahr zu Jahr ebenfalls ziemlich konstant, wenn sie nicht durch ungewöhnliche Störungen beeinflusst werden, und sie sind daher zur Charakterisierung der Mortalitätsverhältnisse einer Bevölkerung wohl geeignet. Dasselbe gilt von den relativen Wahrscheinlichkeiten der jährlich in einer Bevölkerung in den verschiedenen Altersklassen stattfindenden Trauungen, Verwitwungen und Niederkünften.

Innerhalb der einzelnen Altersklassen vollends kann man durchaus vergleichbare, weil durch Bevölkerungszunahme und Wanderungen nicht oder nur sehr wenig gestörte analytische Wahrscheinlichkeitsverhältnisse bilden, z. B. für das Verhältnis der Knabengeburten oder der Totgeburten zur Gesamtzahl der Geburten in den verschiedenen Altersstufen der Mütter oder das Verhältnis des Vorkommens einer bestimmten Todesursache zu der Gesamtheit der Sterbefälle.

9. Ein anderes charakteristisches Verhältnis wird dadurch gebildet, dass die Zahl der Zustandsänderungen einer bestimmten Art innerhalb eines Kalenderjahres und einer Altersklasse durch die Durchschnittszahl derjenigen geteilt wird, die sich während des Jahres in dem der Aenderung unterliegenden Zustand befinden. In der Sterblichkeitsstatistik wird dieses Verhältnis als Sterblichkeitskoëfficient für die einzelnen Altersklassen bezeichnet, und analog kann man einen Heiratskoëfficient der Ledigen, einen Verwitwungskoëfficienten der Verheirateten u. s. w. aufstellen. Diese Aenderungskoëfficienten, wie man sie allgemein bezeichnen kann, sind keine Wahrscheinlichkeiten von Zustandsänderungen in Jahresstrecken oder überhaupt in endlichen Zeitstrecken, sondern sie ergeben sich aus der Reihe der unendlich vielen unendlich kleinen Wahrscheinlichkeiten, die im Laufe der Beobachtungszeit dafür bestehen, dass die beobachteten Personen in dem nächsten unendlich kleinen Zeitelement die betreffende Zustandsänderung erfahren. Dabei bilden diese Personen aber nicht eine Gesamtheit von Gleichalterigen, sondern von Gleichzeitigen in der Altersklasse von x bis x+n Jahren. Bei gleichmässigem Fortschreiten der Bevölkerung in allen ihren Bestandteilen ist der Nenner des fraglichen Quotienten gleich dem Mittel aus dem Stande am Anfang und am Ende des Beobachtungsjahres, also z. B. aus den Zahlen der entsprechenden Schneidepunkte in den Linien mr und no (Fig. 9), während der Zähler durch die Zahl

der betreffenden Aenderungspunkte in dem Parallelogramm m n o r gebildet wird. Bei stationärer Bevölkerung werden im Laufe des Jahres die Ausscheidenden fortwährend durch eine gleiche Zahl von neu in die Altersklasse Eintretenden ersetzt und der Nenner der Aenderungskoëfficenten ist dann einfach gleich der am Anfang des Beobachtungsjahres in dem der Aenderung unterworfenen Zustande Lebenden. Bei einjährigen Beobachtungsstrecken übt der Unterschied zwischen der mittleren und der Anfangsbevölkerung auf den Aenderungskoëfficienten nur einen geringen Einsfluss aus und man kann daher z. B. als Sterblichkeitskoëfficienten auch den Quotienten der in einem Kalenderjahr in einer Altersklasse Gestorbenen durch die in dieser Altersklasse am Jahresanfang Lebenden nehmen. Lässt man die Unterscheidung der Altersklassen fallen, so erhält man die allgemeinen Aenderungskoëfficienten für die ganze Bevölkerung oder Bevölkerungskategorie. Für die Gesamtheit der Sterbefälle eines Jahres ist dies die sogenannte Sterbeziffer. Man kann sie insofern als ein genetisches Verhältnis bezeichnen, als die im Zähler stehenden Sterbefälle aus allen Altersstufen der den Nenner bildenden, durch neue Geburten sich fortwährend ergänzenden Bevölkerung hervorgehen. Die entsprechend gebildete Heiratsziffer aber hat eine weniger homogene Grundlage. Als Nenner müsste für sie rationellerweise nicht die Zahl der Bevölkerung, sondern die der Ledigen des betreffenden Geschlechts, oder wenn die Ordnungszahl der Heiraten nicht berücksichtigt wird, die der Ledigen und der Verwitweten genommen werden. Aber auch diese Zahl hat noch immer gleichsam einen unnützen Ballast, da die Ledigen unterhalb einer gewissen Altersgrenze und auch in der höchsten Stufe des Greisenalters zu der Zahl der Heiratenden nichts beitragen. Eine Abgrenzung dieser Grundzahl etwa nach dem niedrigsten gesetzlich zulässigen Heiratsalter behält immer etwas Willkürliches, zumal diese Grenze für die beiden Geschlechter verschieden ist. Ein fest begrenztes Verhältnis ist die Verwitwungsziffer für beide Geschlechter, da die während eines Jahres entstehenden Verwitwungen bei allen gleichzeitig vorhandenen Verheirateten vorkommen können. Dagegen ist das Verhältnis der jährlichen Geburten zu der Zahl der bestehenden Ehen wieder nicht rein genetisch und nicht fest bestimmt, da die Geburten nicht aus allen diesen Ehen hervorgehen können, sondern nur aus denjenigen, in denen die Ehegatten gewisse, aber nicht genau festzustellende Altersgrenzen nicht überschritten haben und in denen seit der letzten Geburt eine gewisse Zeit verstrichen ist.

10. Anstatt die jährlich erhobenen Zustandsändernngen zu der Bevölkerung oder den entsprechenden Bevölkerungskategorien in Beziehung zu setzen, kann man auch ihre Verhältnisse untereinander als demographische Kriterien benutzen. Um die Bedeutung derselben zu übersehen, nehmen wir eine in allen ihren Zuständen und Zustandsänderungen stationäre Bevölkerung an. Dann veranschaulicht ein bis zur höchsten Altersgrenze durchgehender, mit allen Arten von Punkten ausgefüllter senkrechter Streifen, wie $N_7 N_8 U_7 U_8$ (Fig. 4), den demographischen Lebenslauf einer Generation, andererseits aber enthält auch jedes Parallelogramm des schrägen Streifens $N_7 N_8 U_2 U_3$, der die Zustandsänderungen der gleichzeitigen Bevölkerung darstellt, nach Art und Zahl die gleichen Punkteninhalte, wie das derselben Altersklasse entsprechende Quadrat des senkrechten Streifens. So sind also auch z. B. die die ehelichen Niederkünfte bezeichnenden Punkte in beiden Streifen in gleicher Zahl und Altersverteilung vorhanden. Ihre Gesamtzahl aber ist in den Streifen $N_7 N_8 U_2 U_3$ offenbar gleich der in der Zeitstrecke $N_7 N_8$ enthaltenen Punkte für die ehelichen Geburten und daher ist die Zahl des in dem Streifen $N_7 N_8 U_7 U_8$ verzeichneten Niederkünfte ebenfalls dieser letzteren Zahl gleich. Wenn man N^e die Zahl aller ehelichen Niederkünfte und H die Zahl aller Heiraten bezeichnet, die in einer bis zu ihrem Aussterben verfolgten weiblichen Jahresgeneration vorgekommen sind, so bietet das Verhältnis $\frac{N^e}{H}$ offenbar das Mass der gesamten ehelichen Fruchtbarkeit dar. Diese beiden Zahlen sind aber auch den Zahlen $[N^e]$ und $[H]$ aus dem schrägen Streifen gleich, welche angeben, wie viele Kinder in einem Kalenderjahre ehelich geboren und wie viele Ehen in demselben geschlossen worden sind und demnach bildet bei durchweg stationären Bevölkerungszuständen auch das Verhältnis $\frac{[N^e]}{[H]}$ das Mass der ehelichen Fruchtbarkeit. In Wirklichkeit ist nun ein solcher stationärer Zustand nicht vorhanden und im allgemeinen wird die jährliche Zahl der verschiedenen Zustands-

änderungen der Bevölkerung im Vergleich mit der, die in der gleichen Altersklasse der jüngsten Jahresgeneration zu erwarten ist, um so kleiner sein, je höher diese Altersklasse ist und je weiter daher die ihr entsprechende Geburtszeit zurückliegt. Wenn aber zwei Zustandsänderungen, die in einer ablaufenden Jahresgeneration im ganzen in der Anzahl A und B auftreten, aus einer gleichzeitigen Bevölkerung in einem Kalenderjahr in der Anzahl [A] und [B] hervorgehen, so können A und [A] sowie B und [B] erheblich voneinander verschieden sein, während das Verhältnis $\frac{[A]}{[B]}$ doch vielleicht nur wenig von $\frac{A}{B}$ abweicht. Bei den für die Demographie in Betracht kommenden Verhältnissen von Gesamtheiten, die nicht die ganze Lebenszeit, sondern nur die mittleren Altersjahrzehnte umfassen, trifft dies in der That mehr oder weniger zu und insbesondere wird bei nur mässig fortschreitender Bevölkerung das Verhältnis $\frac{[N^e]}{[H]}$ nicht allzuweit von $\frac{N^e}{H}$ abweichen und dass demnach wenigstens mit einiger Annäherung als Mass der ehelischen Fruchtbarkeit betrachtet werden können. Ebenso können die Verhältnisse $\frac{[W]}{[H]}$ und $\frac{[M^h]}{[H]}$ als Näherungsausdrücke für $\frac{W}{H}$ und $\frac{M^h}{H}$ genommen werden, nämlich für die bei jedem Geschlecht besonders zu bestimmenden Wahrscheinlichkeiten, dass die geschlossenen Ehen durch Verwitwung oder Tod des betreffenden Teiles gelöst werden.

11. Die Zahlenverhältnisse, welche die Zustände und jährlichen Zustandsänderungen der gleichzeitigen Bevölkerung charakterisieren, zeigen im allgemeinen einen ähnlichen Grad von Konstanz, wie diejenigen, die sich aus dem demographischen Verlauf einer Generation ergeben. Die ersteren aber sind aus den unmittelbaren Beobachtungen abgeleitet und sie stellen gleichsam das annähernd feste Fachwerk dar, das fortwährend von den sich stets erneuernden demographischen Massen ausgefüllt wird. Gerade diese Stetigkeit der inneren Struktur der Gesellschaft festzustellen und aus den Massenerscheinungen der Gegenwart auf die wenigstens der nächsten Zukunft zu schliessen, ist eine für die Statistik sowohl wissenschaftlich wie praktisch besonders

wichtige Aufgabe und diese lässt sich praktisch leichter mit Hilfe der Aenderungskoëfficienten der Bevölkerung als mit den Wahrscheinlichkeits- oder sonstigen Verhältnissen der rechnerisch verfolgten Generationen darstellen. So liegt z. B. keinerlei Grund zu der Annahme vor, dass das Verhältnis der im Alter von 20 bis 25 Jahren in einem Kalenderjahr Gestorbenen zu der Zahl der im Anfang des Jahres in dieser Altersklasse Lebenden weniger konstant sei, als das Verhältnis der aus einer Jahresgeneration stammenden Gestorbenen in dieser Altersklasse zu der Zahl derjenigen, die aus dieser Generation die Altersgrenze von zwanzig Jahren überschritten haben. Das erstere Verhältnis aber ist ohne weiteres aus der Volkszählung und den gewöhnlichen Beobachtungen eines Jahres abzuleiten, während das letztere eine umständliche Rechnung, das Material einer fünfjährigen Periode und, wenn man sich nicht mit einem blossen Näherungswerte begnügen will, die Kenntnis der Elementargesamtheiten erfordert. Allerdings haben die auf eine Generation bezogenen Zahlenverhältnisse einen inneren genetischen Zusammenhang ihrer Glieder und dadurch eine anschauliche Bedeutung, die den Aenderungskoëfficienten der Bevölkerung nicht zukommt; aber dass die ersteren deswegen als Wahrscheinlichkeitsausdrücke aufgefasst werden können, trägt zur Erhöhung ihrer Stabilität nichts bei.

V. Ueber die Ursachen der geringen Veränderlichkeit statistischer Verhältniszahlen.

Die statistischen Verhältniszahlen sind ihrer Form nach entweder Wahrscheinlichkeitsverhältnisse oder Koordinationsverhältnisse. Die ersteren sind echte Brüche von der Art, dass die den Zähler bildenden Einheiten mittelbar oder unmittelbar auch im Nenner enthalten sind. Eine genauere Untersuchung der Wahrscheinlichkeitsverhältnisse wird weiter unten folgen; hier sei nur ihre Unterscheidung in genetische und analytische hervorgehoben. Bei den unteren giebt der Zähler die Zahl von Fällen oder Ereignissen besonderer Art an, die aus der den Nenner bildenden Gesamtheit hervorgegangen sind; ein solches Verhältnis ist z. B. das der Gestorbenen einer bestimmten Altersklasse zu der der Lebenden, die die untere Grenze dieser Altersklasse erreicht haben und unter das betreffende Sterbensrisiko getreten sind. Bei den analytischen Wahrscheinlichkeitsverhältnissen dagegen gehören die Einheiten des Zählers zu derselben Gattung, wie die des Nenners und sind nur durch irgend ein besonderes Merkmal unterschieden; der Zähler bildet also eine besondere Abteilung in der durch den Nenner bestimmten Gesamtheit. Ein solches Verhältnis ist z. B. das der Zahl der Knabengeburten zu der Gesamtzahl der Geburten oder das der Zahl der Heiraten zwischen Ledigen zu der Gesamtzahl der Eheschliessungen. Als Koordinationsverhältnisse können alle betrachtet werden, die nicht die Form der Wahrscheinlichkeitsverhältnisse haben. Sie sind im allgemeinen Verhältnisse von statistischen Gesamtheiten, die ganz oder teilweise voneinander unabhängig sind. Hierher gehören z. B. die Aenderungskoëfficenten in dem oben bezeichneten Sinne (Sterblichkeits-, Heirats-, Verwitwungskoëfficenten), ferner auch Verhältnisse wie das der jährlichen Zahl der Geburten zu der der Eheschliessungen, der jährlichen Zahl der Heiraten zu der der Verwittwungen etc. Aus den Wahrscheinlichkeitsverhältnissen lassen sich immer auch Koordinationsverhältnisse ableiten und diese werden als statistische Kriterien den analytischen Wahrscheinlichkeitsverhältnissen häufig vorgezogen. So ist z. B. von dem Verhältnis der Knabengeburten zu den Mädchengeburten häufiger die Rede, als von dem Wahrscheinlichkeitsverhältnis einer Knabengeburt. Wird das Wahrscheinlichkeitsverhältnis, aus dem ein solches Koordinationsverhältnis c abgeleitet werden kann, mit w bezeichnet, so hat man die Beziehung $c = \frac{w}{1-w}$ und c erscheint demnach als eine Funktion von w.

Ob nun aber ein statistisches Verhältnis die Form eines Wahrscheinlichkeitsverhältnisses oder die eines Koordinationsverhältnisses hat, ist, wie schon oben bemerkt, für die Stabilität desselben durchaus gleichgültig. Die statistischen Verhältniszahlen sind überhaupt nicht als die Ereignisse beherrschende Normen nach Art der Naturgesetze aufzufassen, sondern sie werden ihrerseits durch den Verlauf der gesellschaftlichen Massenerscheinungen hervorgebracht, und wenn sie längere Zeit hindurch annähernd konstant bleiben, so ist das nur ein Zeichen dafür, dass der gesellschaftliche Prozess sich in gewissen Beziehungen annähernd in einem Beharrungszustande befindet oder nur langsamen Aenderungen unterworfen ist. Die Stabilität der demographischen Zustände kommt uns überhaupt nicht auffallend, vielmehr, abgesehen von ausserordentlichen Störungen oder Katastrophen, ziemlich selbstverständlich vor. Dass die Volkszahl nur langsam steigt, dass das Zahlenverhältnis der beiden Geschlechter keinen plötzlichen Aenderungen unterworfen ist, dass auch die Relativzahlen der im Kindesalter, in der Jugendperiode, im gereiften Alter, im Greisenalter stehenden Personen sich von Jahr zu Jahr nicht wesentlich verschieben, das gilt als Ergebnis der gewöhnlichen Lebenserfahrung, über das sich niemand wundert; dagegen findet man die konstanten Verhältnisse der jährlichen Zustandsänderungen merkwürdig und oft erstaunlich, obwohl sie aus der anerkannten Stabilität der Zustände logisch von selbst folgen Bei genauerer Erwägung ergiebt sich allerdings, dass die Regelmässigkeit der Zustandsänderungen in der That die primäre Erscheinung ist. Die Bevölkerung stellt ja überhaupt keinen festen Bestand dar, sie ist eine Masse, deren Elemente in einem fortwährenden Wechsel begriffen sind, indem die ausscheidenden mehr oder weniger genau, und zwar auch in ihrem besonderen Verhältnis zur Gesamtheit durch teils ganz neue, theils nachrückende ersetzt werden. Wenn also die Volkszahl und das Zahlenverhältnis der Geschlechter sich von Jahr zu Jahr nur wenig ändert, so muss für die Todesfälle, die Geburten und die Geschlechtsbestimmung der Geborenen eine gewisse biologische Gesetzmässigkeit bestehen.

2. Es fragt sich nun, wie weit sich solche statistische Regelmässigkeiten nachweislich auf bestimmte naturgesetzlich wirkende Ursachen zurückführen lassen.

Am leichtesten verständlich ist uns eine in einer Massenerscheinung hervortretende Gesetzmässigkeit in dem Falle, wenn sie in jeder Einzelerscheinung mit wenigstens annähernder Gleichmässigkeit wirksam ist. Eine physiologisch-biologische Gesetzmässigkeit dieser Art ist freilich kein einheitliches und primäres Naturgesetz, sondern wieder nur das Resultat des Zusammentreffens eines Komplexes naturgesetzlicher Faktoren, aber es ist nicht nötig, auf diese letzten Grundthatsachen zurückzugehen, sondern man ist berechtigt, eine solche abgeleitete oder sekundäre Gesetzmässigkeit als Ausgangspunkt zu nehmen. So darf man z. B. sagen, es ist ein Naturgesetz, dass die erwachsenen Männer und Frauen einer jeden Rasse normalerweise eine bestimmte Körpergrösse erreichen. Dieses Gesetz kommt wegen mannigfaltiger störender Einwirkungen in den einzelnen Individuen nicht zum reinen Ausdruck, es giebt sogar bei Riesen und Zwergen starke Abweichungen von der Normalgrösse, aber das sind seltene Ausnahmen und im ganzen tritt ein normaler Mittelwert, die gewissermassen von der Natur in allen Fällen erstrebte, wenn auch nicht genau erreichte Grösse, deutlich hervor. Solche naturgesetzliche Normalgrössen giebt es aber auch in den zeitlichen Verhältnissen des Menschenlebens. Die Dauer des Embryonallebens ist naturgesetzlich bestimmt; ebenso das Alter der Pubertät bei dem männlichen, wie bei dem weiblichen Geschlecht und dieses Gesetz ist wieder bei jedem normalen Individuum wirksam, wenn auch mit einem gewissen mässigen Spielraum. Ebenso ist für alle weiblichen Individuen, wenn auch wieder mit einem Spielraum, das Alter naturgesetzlich bestimmt, in dem sie die Konceptionsfähigkeit verlieren. Man sollte daher von vornherein erwarten, dass der menschliche Organismus auch von der Natur auf eine bestimmte Lebensdauer eingerichtet sei und dass alle Individuen innerhalb gewisser Schwankungsgrenzen und mit einzelnen extremen Ausnahmen dieses normale Alter erreichen würden. In der folgenden Abhandlung wird in der That nachgewiesen, dass man berechtigt ist, bei den europäischen Nationen ein Alter zwischen 70—75 Jahren in gewissem Sinne als die normale menschliche Lebensdauer anzunehmen, aber diese gewissermassen naturgesetzliche Norm gilt nicht für alle, sondern nur für einen Teil der ins Leben tretenden Individuen. Ein anderer beträchtlicher Teil der Neugeborenen stirbt regelmässig schon in den ersten Altersjahren und zwar drängen sich in dieser Altersstrecke die Sterbefälle um so enger zusammen, je näher sie der Geburt liegen. In manchen Ländern sterben 20—25 Prozent der Geborenen vor Erreichung des Alters von 1 Jahr und dazu kommen auch noch 3—4 Prozent Totgeborene. Der Prozentsatz dieser Sterblichkeit im ersten Lebensjahr ist allerdings in den verschiedenen Bevölkerungsklassen sehr verschieden und namentlich bei den Wohlhabenden weit niedriger, als bei der grossen Masse der Unbemittelten. Aber auch unter deu günstigsten hygieinischen und wirtschaftlichen Verhältnissen bleibt er auffallend hoch und überdies wird durch die bessere Pflege und Ernährung der Kinder häufig nur eine Lebensverlängerung erreicht, so dass der Tod sie noch einige Jahre verschont, während in den weniger begünstigten Volksschichten die strenge Auslese rasch und ungehindert von statten geht. Man kann es daher unbedenklich als eine naturgesetzliche Thatsache betrachten, dass ein grosser Teil der erzeugten Kinder nicht wirklich lebensfähig ist, sondern einer gewissermassen specifischen Sterblichkeit unterliegt. Das Dichtigkeitsmaximum dieser Sterblichkeit, die schon vor der Geburt beginnt, liegt auf dem Tage der Geburt selbst und die letzten Ausläufer dieser Gruppe mögen bis in das zehnte Altersjahr reichen.

3. Wenn wir nun sagen können: „Es giebt in jeder Generation eine Normalgruppe, deren Angehörige alle in einem Alter in der Nähe von 70 Jahren sterben, und eine Gruppe von Lebensunfähigen, die alle in kurzer Frist nach der Geburt weggerafft werden“, so sind diese Sätze allerdings schon insofern etwas mehr

als blosse Umschreibungen der statistisch beobachteten Thatsachen, als sie eine für alle Einzelfälle der beiden Gruppen — mit einem gewissen Spielraum — geltende Norm aufstellen; als eigentliche, wenn auch nur sekundäre Naturgesetze aber würden sie erst formuliert sein, wenn jede der beiden Gruppen auch durch bestimmte Merkmale erkennbar gemacht und abgegrenzt werden könnte, wenn man also den Satz aufstellen könnte, Neugeborene, bei denen diese oder jene Bedingungen zutreffen, gehören in die eine oder in die andere Gruppe. Die Eigentümlichkeit eines Naturgesetzes besteht ja eben darin, dass man auf Grund desselben für jeden einzelnen Fall etwas allgemein Geltendes voraussagen kann. So kann man für jedes neugeborene Kind voraussagen, dass es, falls es am Leben bleibt, in einer bestimmten Altersstrecke die Geschlechtsreife erlangen werde, und so würde man auch von jedem sagen können, ob es in der Periode des Normalalters oder in frühester Jugend sterben werde, wenn jene Gruppenmerkmale bekannt wären.

Aber diese beiden Gruppen umfassen noch nicht die Gesamtheit der Geborenen, denn eine bedeutende Zahl stirbt etwa vom 10. bis zum 60. Jahre, die weder zu der einen noch zu der anderen gerechnet werden kann. Die Normalgruppe erleidet allerdings schon vor Erreichung dieser eigentlichen Sterblichkeitsperiode gewisse Verluste durch Verunglückungen, Epidemien und andere Zufälle, aber die Zahl derselben kann doch nur verhältnismässig klein sein, während die Beobachtung zeigt, dass etwa 25 Prozent der Sterbefälle auf jene Altersstrecke kommen. Es muss also noch eine dritte Gruppe unterschieden werden, die man als die der minderwertigen Leben bezeichnen kann. Für diese Gruppe giebt es jedoch keine typische Lebensdauer, wie sie für die Normalgruppe und in anderer Weise auch für die der Lebensunfähigen durch das Maximum der Dichtigkeit der Sterbefälle bezeichnet wird. In Fig. 10 ist die Verteilung der Sterbefälle für den ganzen Lebenslauf einer Generation schematisch dar-

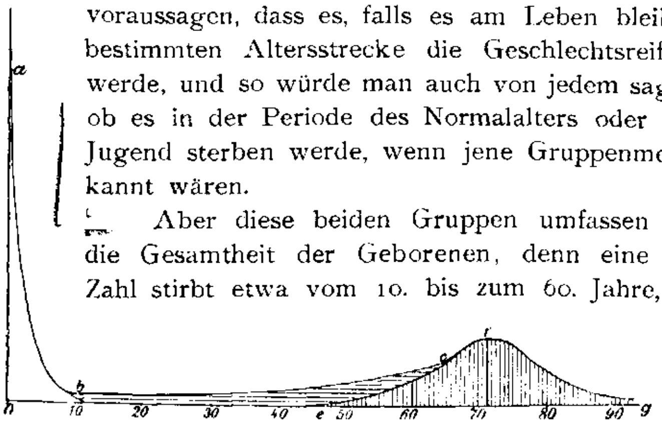

Fig. 10.

gestellt. Die Normalgruppe mit dem Dichtigkeitsmaximum bei f ist durch die Kurve efg, die zweite Gruppe durch ab, die dritte durch bc begrenzt; die letztere überlagert an ihrem Anfang und ihrem Ende die beiden anderen und die Sterbefälle in diesen Uebergangsstrecken sind demnach von gemischter Herkunft.

Wenn also auch die Merkmale der Zugehörigkeit zu der dritten Gruppe bekannt wären, so könnte man doch nicht, wie bei den anderen Gruppen, etwas Bestimmtes für jeden Fall dieser Art voraussagen, abgesehen von dem ganz vagen Satze, dass die Sterbefälle sich mit einer nur langsam steigenden, aber schliesslich abnehmenden Dichtigkeit zwischen dem 10. und 60. Lebensjahre verteilen werden. Im allgemeinen dürfte der vorzeitige Tod der Angehörigen dieser Gruppe durch eine ursprüngliche Schwäche der Organisation, durch einen Mangel an Widerstandskraft gegen die lebengefährdenden Einwirkungen bedingt sein. Günstige hygienische und wirtschaftliche Verhältnisse werden den Tod innerhalb der ganzen Altersstrecke hinausschieben, ungünstige ihn beschleunigen. Der zeitliche Fortbestand der Gruppe in annähernd gleichbleibender relativer Stärke aber dürfte hauptsächlich auf die Erblichkeit der unternormalen Widerstandsfähigkeit zurückzuführen sein. Man könnte versuchen, die Gruppe nach den Todesursachen in kleinere zu zerlegen, in denen vielleicht Dichtigkeitsmaxima erkennbar sein werden. Als die wichtigste, für diese Gruppe gewissermassen spezifische Todesursache stellt sich die Tuberkulose heraus. In Preussen z. B. entfällt auf diese Krankheit ein volles Drittel aller im Alter von 15—60 Jahren Gestorbenen und ihren Höhepunkt erreicht diese Sterblichkeit in der Mitte der dreissiger Jahre.

4. Die Normalgruppe hat einen bestimmteren typischen Charakter, aber bestimmte, schon bei den Neugeborenen erkennbare Merkmale derselben können wir ebensowenig angeben, wie bei der dritten Gruppe. Es ist jedoch sehr wahrscheinlich, dass auch hier die Erblichkeit von wesentlichem Einfluss ist und durch genauere Untersuchungen über die in Familien sich fortpflanzende Langlebigkeit wird sich die Lösung des vorliegenden Problems vielleicht fördern lassen. Unter den in dieser Gruppe wirkenden Todesursachen tritt die Altersschwäche mit etwa 40 Prozent der Fälle als besonders charakteristisch hervor. Auch die durch Schlagfluss verursachten Sterbefälle zeigen in der hierher ge-

hörenden Altersstrecke ein deutliches Dichtigkeitsmaximum. Abgesehen von der Altersschwäche finden sich übrigens in dieser Periode dieselben Todesursachen, wenn auch in anderer Proportion, wie in der mittleren Lebensstrecke; die Langlebigen haben jetzt eben auch ihre Widerstandsfähigkeit eingebüsst.

Was endlich die Gruppe der nicht lebensfähigen Kinder betrifft, so überwiegen unter den Todesursachen im ersten Lebensjahr Atrophie, Lebensschwäche, Krämpfe und andere Krankheiten, die auf eine ursprüngliche Unzulänglichkeit des Organismus und seiner Entwicklungsfähigkeit hindeuten. Ausserdem kommt allerdings etwa ein Drittel der Fälle auf Diarrhoe und Brechdurchfall und diese sind ohne Zweifel grösstenteils durch unzweckmässige Ernährung verursacht. Viele von diesen Kindern hätten also bei besserer Pflege länger am Leben erhalten werden können, aber diese würden doch im allgemeinen schwächlicher und weniger lebensfähig gewesen sein, als diejenigen, die die Auslese bei ungeeigneter Nahrung überstanden haben. Im ganzen scheint die Annahme berechtigt, dass die grosse Kindersterblichkeit gewissermassen eine natürliche Reaktion gegen die menschliche Fruchtbarkeit bildet. Damit würde auch die Thatsache übereinstimmen, dass die Sterblichkeit der Kinder mit der Zahl der Niederkünfte der Mutter zunimmt und dass der Prozentsatz der überlebenden Kinder (nach Körösi) mit der Zahl der Geburten in der Ehe abnimmt. Ebenso ergiebt sich aus dem bisher vorliegenden, allerdings noch wenig umfassenden Beobachtungsmaterial, dass die Zahl der Totgeburten in der Regel verhältnismässig um so grösser wird, je höher die Ordnungszahl der Niederkünfte ist. Auch mit dem Alter der Mutter steigt die relative Wahrscheinlichkeit einer Totgeburt [1]). Erwägt man ferner, dass ein gewisser Prozentsatz der Frauen von vornherein gänzlich unfruchtbar ist und dass die Mehrzahl nach ~~drei bis vier~~ Geburten unfruchtbar wird, so liegt die Annahme nahe, dass die Entwicklungsfähigkeit der menschlichen oder speziell der weiblichen Keimzellen selbst bei gesunden Personen sehr verschieden sei, dass ein Teil derselben überhaupt nicht zur Entwicklung gelangen könne, ein

1) Ueber den Zusammenhang der Häufigkeit der Totgeburten und der Kindersterblichkeit mit der Fruchtbarkeit der Mütter vgl. u. a. Westergaard, Die Lehre von der Mortalität und Morbilität, 2. Aufl. (Jena 1901), S. 333 u. 366 ff.

anderer Teil aber nach der Befruchtung nur Individuen mit ungenügender Lebenskraft hervorbringe, woraus sich dann das Auftreten der rasch absterbenden zweiten Gruppe als eine ständige Naturerscheinung ergeben würde, zumal wenn für die Verteilung der Grade der Entwicklungsfähigkeit der Keime auch eine gewisse Erblichkeit bestände.

5. Bisher wissen wir also überhaupt für die Entstehung der drei Gruppen in der absterbenden Generation keine andere hypothetische Ursache anzugeben, als die Erblichkeit, nämlich die Erblichkeit einerseits der Langlebigkeit, andererseits der Disposition zu gewissen Krankheiten und der ungenügenden Widerstandskraft gegen die das Leben bedrohenden Einflüsse, endlich auch der unzulänglichen Entwicklungsfähigkeit eines Teils der Keime. Nimmt man hiernach die relative Grösse der drei Gruppen als gegeben an, so wird im übrigen der Verlauf der Absterbeordnung als eine naturgesetzliche Erscheinung begreiflich. Der Stand und die allmähliche Aenderung der gleichzeitigen Bevölkerung ist damit jedoch noch nicht gegeben. Zur Erklärung der letzteren Erscheinung muss der Sterblichkeit die „Natalität" gegenübergestellt werden und es erhebt sich hier die Frage, ob ein naturgesetzlicher Zusammenhang zwischen diesen beiden Aenderungsursachen des demographischen Zustandes besteht oder ob einfach durch den Kampf ums Dasein das der Ernährungsmöglichkeit entsprechende Verhältnis zwischen Zugang und Abgang hergestellt werde. Für die Tiere mit enormer Fruchtbarkeit mag die letztere Auffassung ohne weiteres zugegeben werden. Für den Menschen aber trifft sie schon deswegen nicht zu, weil die Gründung einer Familie als Vorbedingung der ehelichen Fruchtbarkeit von seiner vernünftigen Ueberlegung abhängt und er auch die Kindererzeugung in der Ehe — was allerdings zu bedenklichen Folgen führen kann — nach seinem Willen zu beschränken imstande ist. Dieser Einfluss des Willens zeigt sich u. a. in der von Geissler aus Beobachtungen an sächsischen Bergmannsfamilien festgestellten Thatsache, dass die Zwischenzeit von einer Niederkunft zur andern erheblich kleiner ist, wenn das vorher geborene Kind gestorben, als wenn es am Leben geblieben ist.

Aber auch rein physiologisch ist die menschliche Fruchtbarkeit verhältnismässig eng beschränkt und die Sterblichkeit kann auch bei den höchststehenden Kulturvölkern leicht den Punkt erreichen, bei dem eine Abnahme der Bevölkerung beginnt. Nur ein kleiner Prozentsatz der Niederkünfte ergiebt Zwillings- oder Mehrgeburten; die einfachen Geburten sind durchaus als das Normale anzusehen. Die Dauer der Fruchtbarkeitsperiode des weiblichen Geschlechts kann für Mitteleuropa auf etwa 30 Jahre angenommen werden, und da in Deutschland die Verheiratung der Frauen erst nach vollendetem 16. Jahre zulässig ist, so entfaltet sich die eheliche Fruchtbarkeit der Frauen mit Ausnahme weniger Verspätungen in der Altersstrecke vom 16.—46. Jahre. Als die physiologisch durch Schwangerschaft und Säugeperiode bestimmte normale Zwischenzeit zwischen zwei Niederkünften ist etwa $1^3/_4$ Jahr anzunehmen, doch hätte es keinen Sinn, aus dieser Zahl und der Fruchtbarkeitsperiode etwa die Maximalzahl der möglichen Geburten in dieser Periode zu berechnen. Denn einmal ist das Durchschnittsalter der wirklich heiratenden Frauen 7—8 Jahre höher als das gesetzliche Minimalalter, ferner stirbt ein Teil der Frauen während der Periode der Fruchtbarkeit und ein anderer verwitwet, ohne wieder zu heiraten, endlich ist ein Teil der Ehen — und wie es scheint, meistens wegen des Zustandes der Frau — überhaupt unfruchtbar, viele Frauen werden es, wie schon oben erwähnt, nach wenigen Geburten und allgemein nimmt ihre Fruchtbarkeit mit dem vorrückenden Alter ab. Genauere Untersuchungen über die Verbreitung der Unfruchtbarkeit unter den Frauen wären sehr zu wünschen. Sie würden vielleicht ergeben, dass die zunehmende Unnatürlichkeit des civilisierten, namentlich städtischen Lebens auf die Konceptions- und Gebärfähigkeit des weiblichen Geschlechts einen allmählich mehr und mehr schädigenden Einfluss ausübt, wie man auch durch die tägliche Erfahrung zu der Vermutung geführt wird, dass die Fähigkeit der Mütter zum Säugen der Kinder immer seltener werde. Eine solche allmähliche Degeneration der Fortpflanzungsfähigkeit würde allerdings der Verwirklichung der Malthus'schen Theorie entgegen wirken, aber nicht im Sinne der optimistischen und harmoniegläubigen Bekämpfer dieser Lehre.

6. Spuren eines unmittelbaren Zusammenhanges zwischen Sterblichkeit und Geburtenzahl sind in den oben erwähnten Beziehungen zwischen der Kindersterblichkeit und der Zahl der Niederkünfte zu finden, ferner auch in den hie und da festgestellten Verhältnissen zwischen der Zahl der am Leben erhaltenen und der

in der Ehe geborenen Kinder, aber auch schon in der blossen Thatsache der grossen Kindersterblichkeit überhaupt. Wenn der Prozentsatz derselben annähernd gleich bleibt, so entspricht doch immerhin einer grösseren Geburtenzahl auch eine grössere Zahl von gestorbenen Kindern aus dieser Generation. Es scheint aber, dass unter Umständen die Vergrösserung der Geburtenzahl auch eine Steigerung des Prozentsatzes der Kindersterblichkeit im Gefolge hat. Genauere Untersuchungen über diesen Punkt wären sehr zu empfehlen; es müssten dabei aber natürlich die ersten, nicht die dritten Hauptgesamtheiten der Gestorbenen im Alter von 0—1 Jahr verwendet werden. Allerdings würde es noch immer zweifelhaft bleiben, ob diese Steigerung der Kindersterblichkeit physiologisch oder durch die sozialen Verhältnisse bedingt wäre, im letzteren Falle also durch die steigende Schwierigkeit der Ernährung der vermehrten Kinderzahl der besitzlosen Bevölkerung. Im ganzen unterliegt es keinem Zweifel, dass das Verhältnis von Mortalität und Natalität des Menschengeschlechts bis zu einem gewissen Grade auf physiologischen naturgesetzlichen Bedingungen beruht, wenn auch ein bedeutender Spielraum für andere Einwirkungen übrig bleibt. In allen Kulturländern ist, abgesehen von ungewöhnlichem Anschwellen der Sterblichkeit durch schwere Seuchen oder Kriege, die jährliche Zahl der Geburten nicht kleiner als die der Sterbefälle, in der Regel grösser, aber doch kaum jemals mehr als doppelt so gross. Daraus allein geht schon hervor, dass das Verhältnis dieser beiden Zahlen nicht jeden beliebigen Wert annehmen, sondern nur zwischen gewissen Grenzen schwanken kann, wenn auch damit nicht bewiesen ist, dass eine funktionelle Abhängigkeit zwischen beiden bestehe, da es genügt, wenn jede selbständig auf naturgesetzlicher Grundlage innerhalb eines Spielraums bestimmt wird.

Naturgesetzliche Bedingungen regeln auch ohne Zweifel die Bestimmung des Geschlechts der Geborenen. Man kann hier entweder annehmen, dass bei jeder einzelnen Konception die gleiche Ursache wirksam sei, um einen durchschnittlich konstanten Ueberschuss von Knabengeburten herbeizuführen, oder dass mehrere Ursachen in annähernd konstantem Verhältnis nebeneinander bestehen, von denen jede ein besonderes durchschnittliches Geschlechtsverhältnis der Geborenen bedingt. Die letztere Annahme würde z. B. zutreffen, wenn dieses Geschlechtsverhältnis durch die Altersverhältnisse der Eltern bestimmt wäre. Es würde dann, da die verschiedenen Alterskombinationen sich ziemlich ständig erhalten, auch das in der Gesamtheit der Geburten erscheinende Geschlechtsverhältnis eine entsprechende Stabilität aufweisen. Die auffallende Uebereinstimmung der Schwankungen des Geschlechtsverhältnisses der Geborenen mit den Ergebnissen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die in einer der folgenden Abhandlungen nachgewiesen ist, dürfte uns jedoch mehr geneigt zu der Vorstellung machen, dass schon die Keimzellen, sei es allein die weiblichen oder auch die männlichen, geschlechtlich bestimmt seien und dass schon in ihnen in allen Fällen durchschnittlich das Geschlechtsverhältnis angelegt sei, das in der Gesamtheit der Geburten zu Tage tritt. Die physiologische Ursache dieser Thatsache bleibt uns freilich ganz unbekannt, ebenso wie die des Zusammenhangs, der in kaum zu bestreitender Weise zwischen dem Knabenüberschuss bei der Geburt und der grösseren Sterblichkeit der Knaben in den ersten Lebensjahren besteht.

7. Aus diesen Darlegungen wird es wenigstens im allgemeinen begreiflich, wie die gegebene Zahl einer Bevölkerung und ihre Verteilung nach Geschlecht und Altersklassen auf Grund naturgesetzlicher Bedingungen zustande gekommen ist, dass sie sich in dieser ihrer Struktur nur langsam verändern kann und dass alle diese Aenderungen auch in ziemlich konstanten Verhältnissen erfolgen müssen. Diese Stabilität der biologischen Konstitution der Bevölkerung ist nun aber auch die Hauptbedingung für die relative Festigkeit der sozialen und wirtschaftlichen Zustände und für die Regelmässigkeiten der Massenerscheinungen auf diesem Gebiete. Die sozialen Zustände sind hauptsächlich durch die Vermögens- und Einkommensverteilung, die wirtschaftlichen durch die Gliederung der Gesellschaft nach Beruf und Gewerbe bedingt. Die nach diesen Merkmalen unterschiedenen gesellschaftlichen Gruppen unterliegen bei genügender Grösse trotz des fortwährenden Wechsels der sie bildenden Personen nur einer langsamen, meistens einigermassen mit der Bevölkerungszunahme parallel gehenden Aenderung, was einfach aus der natürlichen Dauer der gesellschaftlichen Existenzen und Beziehungen folgt und nur bei grossen zerstörenden Katastrophen Ausnahmen erleidet. Normalerweise findet jede einzelne Gruppe in der ganzen gesellschaftlichen Struktur eine Stütze und Schutz

gegen plötzliche Umwälzungen. Die von der Statistik beobachteten Regelmässigkeiten in gesellschaftlichen Vorgängen, die vom Willen der einzelnen abhängen, entstehen nun hauptsächlich dadurch, dass die Angehörigen gewisser Gruppen sämtlich, wenn auch mit einem Spielraum nach Zeit und Umständen, eine gewisse Handlung ausführen oder sich auf bestimmte Art verhalten. Können wir die Kennzeichen einer solchen Gruppe genau angeben, so ist uns das Zustandekommen der betreffenden Handlung in jedem Falle vollkommen begreiflich, und da die Gruppe sich nur langsam verändert, so erklärt sich uns auch die Wiederholung dieser Vorgänge in annähernd gleich bleibender Zahl während einer Reihe von Jahren.

So darf man annehmen, dass fast alle ledigen jungen Männer, die gesund sind, heiraten werden, sobald sie wirtschaftlich in der Lage sind, eine Familie nach dem für ihren Stand geltenden Massstab zu unterhalten. Die Arbeiterklasse erlangt diese wirtschaftliche Selbständigkeit in der Regel schon in jungen Jahren, für die bürgerlichen Gewerbetreibenden schiebt sie sich meistens schon weiter hinaus und noch weiter für die Angehörigen der gelehrten Berufsstände; jedoch kommen für diese Kategorien auch wieder die Vermögensverhältnisse der einzelnen in Betracht. Erst nach Erreichung eines gewissen schon reiferen Alters, etwa von 35—40 Jahren, nimmt die Neigung der Ledigen zur Heirat überhaupt ab, da sie sich dann mehr und mehr an ihre Lage gewöhnt haben. Bis dahin aber kann man nach Altersklassen, Beschäftigung und Beruf, Einkommens- und Vermögensverhältnissen, Wohnort, Gesundheitsverhältnissen Gruppen bilden, in denen das Heiraten durchaus die Regel bildet und die sich von Jahr zu Jahr ziemlich konstant erhalten. Daraus ergiebt sich denn auch eine entsprechende Gleichmässigkeit in der Zahl der Heiraten im Vergleich zur Bevölkerung, die aber Schwankungen infolge der mehr oder weniger günstigen wirtschaftlichen Konjunkturen in den einzelnen Jahren nicht ausschliesst. Durch die verhältnismässig kleine Zahl der mehr sporadischen Heiraten in den höheren Altersklassen wird sie nicht beeinträchtigt. So entsteht also auch eine ständige Verteilung der jährlich heiratenden ledigen Männer auf die einzelnen Altersklassen. Ueberwiegend haben sie die Neigung, Frauen zu heiraten, die jünger sind als sie selbst. Diese Tendenz nimmt in der Regel mit dem steigen-

Alter des Mannes, wenigstens bis zu einer gewissen Grenze, zu. Wenn sich nun auch die Ursachen der Altersdifferenzen der Getrauten im einzelnen nicht verfolgen lassen, so ergiebt sich doch schon aus den beiden erwähnten Umständen auch eine annähernd ständige Gruppierung der mit ledigen Männern getrauten Frauen nach dem Heiratsalter. Diese Frauen werden vor ihrer Verheiratung zum weitaus grössten Teile ledig und nicht verwitwet gewesen sein, schon aus dem Grunde, weil die Zahl der Witwen in den hauptsächlich in Betracht kommenden Altersklassen weit kleiner ist als die der ledigen, ausserdem aber auch deshalb, weil die ledigen Männer entschieden mehr Neigung haben, eine Jungfrau als eine Witwe zu heiraten. Unter den letzteren aber haben jedenfalls die relativ wohlhabenden am meisten Aussicht auf eine solche Wiederverheiratung. Schon aus diesen allgemeinen Erwägungen wird es begreiflich, dass das Verhältnis der Trauungen zwischen ledigen Männern und Witwen im Vergleich mit dem zwischen Ledigen und Jungfrauen nicht nur klein, sondern auch ziemlich stabil bleibt.

Die Zahl der jährlich heiratenden Witwer hängt zunächst von der Zahl und der Altersverteilung der vorhandenen Witwer, also von ständigen demographischen Grössen ab. Die Wiederverheiratung wird überwiegend die Regel sein bei denjenigen, die noch für die Erziehung jüngerer Kinder zu sorgen haben oder in ihrem Wirtschaftsbetrieb auf die Mitwirkung einer Hausfrau angewiesen sind. Die Witwer werden ebenfalls meistens Frauen wählen, die jünger sind als sie selbst, auch die ledigen vor den Witwen bevorzugen, jedoch nicht in demselben Masse, wie dies von seiten der Junggesellen geschieht. So werden auch die Heiraten der Witwer sich dem langsamen Fortschritt der Bevölkerung anpassen und man wird sich auch nicht wundern, wenn die verschiedenen Familienstandskombinationen bei den Eheschliessungen jährlich in nur mässig schwankenden Verhältniszahlen auftreten. Auch das Zahlenverhältnis der jährlichen Heiraten von Witwen einerseits und Junggesellen andererseits, ein reines Koordinationsverhältnis und gar nicht als ein Wahrscheinlichkeitsausdruck aufzufassen, zeigt eine bemerkenswerte Stabilität, die jedenfalls hauptsächlich darauf beruht, dass das Verhältnis der gleichzeitig unterhalb gewisser Altersgrenzen lebenden Witwer und Junggesellen sich nahezu konstant erhält

8. Auch in betreff der unehelichen Geburten lassen sich theoretisch Gruppen weiblicher Personen bilden, bei denen ein solches Ereignis fast mit Gewissheit eintreten wird, während die natürliche (nicht mathematisch gedachte) Wahrscheinlichkeit desselben bei anderen Gruppen fast Null ist.

Für Mädchen in gewissen Altersgrenzen, die des Familienschutzes entbehren, auf sich selbst angewiesen sind, in den Mietskasernen einer grossen Stadt wohnen, den Verlockungen des städtischen Lebens ausgesetzt sind, dabei normale Gesundheit und Körperbeschaffenheit besitzen, besteht offenbar die Gefahr einer unehelichen Schwangerschaft in sehr hohem Grade. Auch in manchen ländlichen Distrikten, in denen gewisse laxe Sitten herkömmlich sind, ist diese Gefahr gross, jedoch folgt hier der unehelichen Niederkunft häufiger die Heirat. Grossen Einfluss auf die Vermehrung der unehelichen Geburten hatte bekanntlich früher in Bayern die Erschwerung der Niederlassung und Verheiratung.

Wir können die gefährdeten Gruppen nach den angeführten und sonstigen Merkmalen nicht wirklich ausscheiden, aber wir wissen, dass sie bestehen und dass sie sich infolge der gegebenen demographischen, wirtschaftlichen und sozialen Konstitution der Bevölkerung, trotz des Wechsels der Personen stetig behaupten, solange nicht besondere Aenderungsursachen, wie z. B. die Erleichterung der Eheschliessung in Bayern, wirksam werden. Diese Stetigkeit der Gruppen, aus denen die unehelichen Geburten ganz überwiegend hervorgehen, bedingt dann auch die annähernde Stabilität des Verhältnisses dieser Geburten zu der Gesamtzahl der Geburten oder auch zu der Zahl der unverehelichten weiblichen Personen im gebärfähigen Alter.

Bei den in den Bereich der Moralstatistik fallenden gesellschaftlichen Erscheinungen sind allerdings nicht nur die äusseren, sondern auch die subjektiven Bedingungen ihres Auftretens zu berücksichtigen. Aber bei grossen Bevölkerungsgruppen zeigen auch diese sich gewissermassen kontinuierlich in allen ihren Abstufungen und Schattierungen. So wird sich auch z. B. der Grad des Leichtsinns, der ein Mädchen der Verführung zugänglich macht, in einer Gesamtheit von vielen Tausenden, die auch äusserlich dieser Gefahr in hohem Grade ausgesetzt sind, immer mit einiger Gleichmässigkeit wiederfinden. Andere in dieses Gebiet fallende menschliche Handlungen, wie namentlich Verbrechen und Selbstmord, treten nicht als eigentliche Massenerscheinungen in grossem Massstabe, sondern, wenigstens im Vergleich mit den Thatsachen der Bevölkerungsbewegung, in verhältnismässig kleinen Zahlen auf. Die entscheidenden objektiven und subjektiven Bedingungen sind bei ihnen weit mannigfaltiger und individualisierter. Man kann auch hier auf Grund der gewöhnlichen Lebenserfahrungen Komplexe von Bedingungen aufstellen, deren Zusammentreffen fast mit völliger Gewissheit eine jener Handlungen zur Folge hat; aber man kann nicht ~~annehmen,~~ dass grössere Gruppen unter diesen Bedingungen stehen, weil eben die betreffenden Ereignisse verhältnismässig selten vorkommen. Gleichwohl aber sind auch in diesen Fällen Wiederholungen in Zahlen wenigstens von derselben Grössenordnung zu erwarten. Wenn in einem Lande in einem Jahre 1000 Unterschlagungen stattgefunden haben, so ist nicht zu erwarten, dass dieses Verbrechen in anderen Jahren gar nicht und wieder in anderen in 10000 Fällen vorkommen werde. In einer grossen Bevölkerung sind fortwährend alle Abstufungen zwischen Arm und Reich vorhanden, ebenso alle Arten von Geschäftsbeziehungen und Amts- und Dienststellungen, die zu einem solchen Verbrechen Veranlassung geben können, ferner werden immer wieder viele Personen von wirtschaftlichen Schwierigkeiten, Verlegenheiten und Notständen betroffen, auch sind Leichtsinn, Gewissenlosigkeit, Verschwendungssucht und andere übele Eigenschaften stets in mannigfaltigen Graden verbreitet, und so treffen dann auch immer wieder die Bedingungen, die zu dem genannten und anderen Verbrechen und Vergehen gegen das Eigentum führen, in einer Anzahl von Fällen zusammen. Weil diese Anzahl aber nicht sehr gross ist, wird sie durch individuelle und konkrete Umstände stark beeinflusst; die Schwankungen dieser Zahlen sind daher bedeutend, lassen sich aber häufig auf ganz bestimmte Ursachen zurückführen, deren Wirkung auf diese Weise zahlenmässig geschätzt werden kann.

9. Das Interessante in den moralstatistischen Zahlen und Zahlenverhältnissen ist überhaupt nicht ihre Stabilität, sondern ihre Veränderlichkeit. Die erstere bleibt meistens hinter den von Quetelet erregten Erwartungen weit zurück und beschränkt sich oft, wie schon gesagt, auf das Einhalten derselben Grössen-

ordnung, der Hunderte, der Tausende, der Zehntausende. Bedeutende Aenderungen solcher Grössen aber sind unmittelbar symptomatisch für Aenderungen des Ursachensystems der betreffenden Erscheinungen. Diese Kausalitätsverhältnisse nachzuweisen, ist aber für die Gesellschaftswissenschaft ohne Zweifel wichtiger als die Feststellung, dass die Schwankungen gewisser statistischer Verhältnisse dem Gesetz der rein zufälligen Abweichungen von einem Mittelwerte entsprechen. So erkennt man leicht den Zusammenhang der Zahl der Diebstähle mit den Preisen der Lebensmittel, mit der Ausdehnung der Arbeitslosigkeit und überhaupt mit dem auf- und niedersteigenden Gange der Volkswirtschaft. Schwere Bankerotte und Unterschlagungen sind charakteristisch für Zeiten grosser wirtschaftlicher Krisen, Rohheitsverbrechen vermehren sich nach Kriegen u. s. w.

Vom Standpunkt der Wahrscheinlichkeitsrechnung müsste man erwarten, dass die Stabilität eines statistischen Verhältnisses, das die Form einer Wahrscheinlichkeitsgrösse hat, um so grösser sein, je grösser die Grundzahl der Nenner ist. Für die eigentlichen moralstatistischen Verhältnisse trifft dies aber schon deshalb nicht zu, weil deren Nenner meistens gar keine genetische Beziehung zu dem Zähler, der Zahl der betreffenden Ereignisse, hat und die ganze Bevölkerung oder einen willkürlich abgegrenzten Teil derselben darstellt. Das Verhältnis der jährlichen Zahl der Selbstmorde zu der ganzen Volkszahl z. B. ist zwar der Form nach eine Wahrscheinlichkeitsgrösse, hat aber sachlich nicht die Bedeutung einer solchen, sondern nur die einer Reduktionsformel zum Zweck von Vergleichungen. Die Selbstmorde gehen thatsächlich nur aus ~~einer~~ sehr zersplitterten Gesamtheit von Personen mit gewissen Merkmalen hervor und die Zahl derselben ist von der Grössenordnung der Zahl der wirklich vorkommenden Selbstmorde. Die Stabilität der moralstatistischen Verhältniszahlen hängt daher im allgemeinen von der Grösse der Ereigniszahlen, also dem Zähler und nicht von der mehr oder weniger willkürlich gewählten Grundzahl ab. Je grösser der Kreis der Personen ist, die nach den gegebenen Bedingungen fast mit Gewissheit zu der fraglichen Handlung veranlasst werden, um so weniger deutlich wird sich das Hinzutreten neuer oder das Wegfallen vorher vorhandener Einwirkungen in den Ereigniszahlen bemerklich machen und um so leichter werden Ausgleichungen zwischen den auf die Vergrösserung und auf die Verkleinerung dieser Zahlen gerichteten Ursachen eintreten. So zeigt sich z. B. zwar auch in der Verhältniszahl der jährlichen Eheschliessungen zu der Bevölkerung — die ja auch noch eine moralstatistische Bedeutung hat — ein Zusammenhang mit der Gunst oder Ungunst der Lage der Volkswirtschaft, aber bei weitem nicht in dem Masse, wie in den der entsprechenden Verhältniszahlen für Betrug und betrügerischen Bankerott.

VI. Die typischen Grössen und das Fehlergesetz.

1. Als typische Grössen bezeichnen wir diejenigen, deren beobachtete Einzelwerte sich nach dem Gesetz der zufälligen Abweichungen um ihren Mittelwert gruppieren. Dieser Mittelwert stellt also möglichst genau den Typus dar, der in jedem einzelnen Falle gewissermassen erstrebt, aber infolge von zufälligen Störungen, die ebenso leicht in positiver wie in negativer Richtung wirken können, fast niemals genau erreicht wird. Eine solche Grösse kann sowohl eine absolute wie eine Verhältniszahl sein, doch beschäftigen wir uns hier zunächst nur mit der ersteren Art. Quetelet hat das grosse Verdienst, die in der Astronomie ausgebildete Fehlertheorie auf die menschlichen Körperdimensionen angewandt und nachgewiesen zu haben, dass diese als typische Grössen im obigen Sinne zu betrachten sind und ähnliche Untersuchungen lassen sich auch auf andere anthropologische und demographische Gegenstände ausdehnen. Selbstverständlich ist nicht jeder Mittelwert aus gleichartigen Beobachtungsgrössen ein Typus, sondern er hat nur dann die Bedeutung eines solchen, wenn die obige Bedingung in der Verteilung der Einzelwerte erfüllt ist, während er in allen anderen Fällen zweckmässiger als blosser Durchschnittswert zu bezeichnen ist. Eine anschauliche Ableitung der hier angewendeten Theorie hat G. Hagen in seiner Wahrscheinlichkeitsrechnung (1. Aufl., Berlin 1837) gegeben, die dann von Quetelet in seinen „Lettres sur la théorie des probabilites" (Bruxelles 1846) auf eine sehr einfache populäre Form gebracht wurde. Wenn eine gleichartige Grösse in vielen Einzelfällen mit zufälligen Abweichungen ihres typischen Wertes beobachtet wird, so kann man annehmen, dass sie stets unter dem Einfluss einer grossen Zahl elementarer Fehlerursachen steht, die ebenso leicht positiv wie negativ wirken können und zwar, wie

wir zunächst annehmen, mit absolut gleicher Wirkungsfähigkeit. Sind z. B. immer 1000 Elementarstörungen (auf diese Zahl kommt weiter nichts an, sie muss nur gross sein) bei dem Zustandekommen der Körpergrösse eines erwachsenen Mannes im Spiel, so wird die typische Normalgrösse sich nur dann herausstellen, wenn 500 positive und 500 negative Elementarstörungen zusammentreffen. Dieser Fall ist relativ der wahrscheinlichste, aber absolut ist seine Wahrscheinlichkeit wegen der ungeheuer grossen Zahl der überhaupt möglichen Fehlerkombinationen doch äusserst klein. Treffen 550 positive und 450 negative Störungsursachen zusammen, so ist das Resultat eine Abweichung von 100 Störungseinheiten nach der positiven Seite hin und die Wahrscheinlichkeit desselben ist ebenso gross, wie die des Zusammentreffens von 550 negativen mit 450 positiven Störungsursachen, das einen um 100 Einheiten nach der negativen Seite verschobenen Beobachtungswert herbeiführt.

2. Dieses zufällige Zusammentreffen von gleich grossen positiven und negativen Elementarstörungen lässt sich vergleichen mit Serien von Zügen aus einer Urne, die eine gleiche Zahl schwarzer und weisser Kugeln enthält, wenn die Zahl der Züge in jeder Serie gleich ist der angenommenen grossen Zahl des jedesmal zusammentreffenden Elementarstörungen. Man kann sich aber auch vorstellen, dass die Urne viele Millionen kleiner schwarzer und weisser Kugeln in gleicher Zahl enthalte, die immer neu durcheinander gemischt werden und von denen nun immer eine an sich grosse, aber mit der Gesamtmenge verglichen, doch relativ sehr kleine Anzahl gleichzeitig auf zufällige Art herausgenommen werde. Quetelet nimmt, um alle Kombinationen doppelt zu erhalten, eine ungerade Zahl der jedesmal zusammengefassten Kugeln an, nämlich 999. Die beiden grössten und zugleich einander gleichen Wahrscheinlichkeiten sind dann die der Fälle 499 w, 500 s und 500 w, 499 s. Bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit des einen dieser Fälle, etwa 499 w und 500 s (die gleich ist dem zugehörigen Binomialkoëfficienten geteilt durch 2^{999}) mit x, so ist die der folgenden Kombination nach der Seite von schwarz, nämlich 498 w und 501 s, gleich $x\,\frac{499}{501}$, die der folgenden, nämlich 497 w und 502 s, gleich $x\,\frac{499}{501}\cdot\frac{498}{502}$, die der folgenden

$x\ \frac{499}{501} \cdot \frac{498}{502} \cdot \frac{497}{503}$ u. s. w. Quetelet hat auf diese Art die relativen Wahrscheinlichkeiten für 80 Kombinationen von w und s, mit der wahrscheinlichsten beginnend, berechnet, wobei sich die der letzten, nämlich 420 w und 579 s gleich 0,000 003 . x, also so klein ergab, dass alle übrigen vernachlässigt werden können, da x bei grosser Zahl der zusammengezogenen Kugeln immer ein kleiner Bruch ist. Dieselbe Tabelle gilt natürlich auch für den anderen Zweig der Entwickelung des Binoms, der die Kombinationen mit steigendem w und abnehmendem s enthält. Die so gefundenen relativen Wahrscheinlichkeiten sind aber proportional den Zahlen der möglichen Fälle der einzelnen Kombinationen und die Gesamtzahl aller möglichen Fälle ist proportional der Summe aller relativen Wahrscheinlichkeiten. Man erhält also die absoluten Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Kombinationen mit Eliminierung des x, indem man die entsprechenden relativen Wahrscheinlichkeiten durch die Gesamtsumme derselben dividiert, wobei man die letztere nur in den von der Tabelle angenommenen Grenzen zu nehmen braucht. Nachstehend folgt ein Auszug aus der Quételet'schen Tabelle. Die „Stufen" entsprechen der Abnahme der Zahl der w und der Zunahme der Zahl der s um je 1. Unter W ist die Wahrscheinlichkeit der einzelnen Kombinationen, unter S die Summe aller Wahrscheinlichkeiten von der ersten bis zu der angegebenen Stufe (einschliesslich) angegeben. S giebt also die Wahrscheinlichkeit, dass eine der Kombinationen von 499 w, 500 s bis zu den bezeichneten herauskommen werde. Der Wert derselben nähert sich immer mehr der Grenze 0,500, da die Wahrscheinlichkeit $^1/_2$ dafür besteht, dass überhaupt 500 oder mehr schwarze Kugeln (wie andererseits auch 500 oder mehr weisse Kugeln) vorkommen werden.

Kombination	Stufe	W	S	Kombination	Stufe	W	S
499 w, 500 s	1	0,0252	0,0252	487 w, 512 s	13	0,0185	0,2946
498 w, 501 s	2	0,0251	0,0503	486 w, 513 s	14	0,0175	0,3122
497 w, 502 s	3	0,0249	0,0753	485 w, 514 s	15	0,0166	0,3287
496 w, 503 s	4	0,0246	0,0999	484 w, 515 s	16	0,0156	0,3443
495 w, 504 s	5	0,0242	0,1241	483 w, 516 s	17	0,0146	0,3590
494 w, 505 s	6	0,0238	0,1479	482 w, 517 s	18	0,0137	0,3727
493 w, 506 s	7	0,0232	0,1711	481 w, 518 s	19	0,0127	0,3854
492 w, 507 s	8	0,0226	0,1936	480 w, 519 s	20	0,0118	0,3972
491 w, 508 s	9	0,0218	0,2155	479 w, 520 s	21	0,0109	0,4081
490 w, 509 s	10	0,0211	0,2365	478 w, 521 s	22	0,0100	0,4181
489 w, 510 s	11	0,0202	0,2568	477 w, 522 s	23	0,0092	0,4272
488 w, 511 s	12	0,0194	0,2762	476 w, 523 s	24	0,0084	0,4356

Kombination	Stufe	W.	S.	Kombination	Stufe	W.	S.
475 w, 524 s	25	0,0076	0,4432	465 w, 534 s	35	0,0023	0,4866
474 w, 525 s	26	0,0069	0,4501	460 w, 539 s	40	0,0011	0,4943
473 w, 526 s	27	0,0062	0,4563	455 w, 544 s	45	0,0005	0,4978
472 w, 527 s	28	0,0056	0,4618	450 w, 549 s	50	0,0002	0,4992
471 w, 528 s	29	0,0050	0,4668	445 w, 554 s	55	0,00007	0,49975
470 w, 529 s	30	0,0044	0,4712	440 w, 559 s	60	0,00002	0,49993

Denkt man sich statt der Kugeln zusammentreffende positive und negative Elementarfehler, die eine Abweichung des beobachteten von dem wahren oder typischen Werte einer Grösse verursachen, so nimmt die ganze hervortretende Abweichung auf jeder Stufe um das Zweifache der Elementarabweichung e zu, die erste Stufe aber entspricht nur dem einfachen e. Allgemein gehört demnach zur n-ten Stufe die Abweichung $(2n-1)e$. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler überhaupt positiv oder überhaupt negativ sein werde, ist je $\frac{1}{2}$. Für die Stufe 11 ist $S = 0{,}2567$, also schon etwas grösser als 0,250 oder die Wahrscheinlichkeit derjenigen Abweichung, die nach der positiven wie auch nach der negativen Seite ebenso oft nicht erreicht, wie überschritten wird. Nehmen wir die diesem sogenannten „wahrscheinlichen" Fehler entsprechende Stufe genauer gleich $10\frac{2}{3}$ an, so ist die Grösse desselben nach beiden Seiten hin gleich $(2.10\frac{2}{3}-1)e$ oder $20\frac{1}{3}e$, also die Wahrscheinlichkeit, dass der beobachtete Wert zwischen den Abständen $-20\frac{1}{3}e$ und $+20\frac{1}{3}e$ vom Mittelwerte falle, gleich $\frac{1}{2}$.

3. Die Anwendung der obigen Tabelle lässt sich noch leichter machen, als nach dem von Quetelet angewandten Verfahren. Wir nehmen als Beispiel die Ergebnisse der Messung der Körpergrösse von 25878 Rekruten der Freiwilligen-Armee der amerikanischen Nordstaaten im Jahre 1863. Die Masse sind in englischen Zollen angegeben und wir nehmen an, dass jede Messung einen Spielraum von $\frac{1}{2}$ Zoll nach oben und nach unten gehabt hat. Werden die Grössenklassen auf 1000 bezogen, so ergiebt sich folgende Gruppierung:

Zoll	Zahl (beobachtet)	Zahl (berechnet)
unter $62\frac{1}{2}$	4	15
$62\frac{1}{2}-65\frac{1}{2}$	143	136
$65\frac{1}{2}-68\frac{1}{2}$	408	403
$68\frac{1}{2}-71\frac{1}{2}$	341	345
$71\frac{1}{2}-74\frac{1}{2}$	96	93
über $74\frac{1}{2}$	8	8

Der mittlere und demnach wahrscheinlichste Wert ist 68,20 und wir nehmen an, dass von diesem aus je 500 Fälle nach der positiven und nach der negativen Seite liegen. Demnach ist die Zahl 408 in 353 und 55 zu zerlegen und der letztere Teil fällt noch auf die positive Seite. Bis zu der Grenze von $74\frac{1}{2}$ Zoll finden sich dann auf dieser Seite 492 Fälle und 0,492 ist also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Beobachtungswert bis zu 74,50, also um 6,30 Zoll vom Mittel abweicht. Dieser Wahrscheinlichkeit entspricht in der Tabelle die Stufe 38 und demnach die Abweichung 75e. Auf einen Zoll kommen also 75:6,30 oder 11,9 Elementarabweichungen. Die Strecke von 68,20 bis 71,50 ist gleich 3,30 Zoll, entspricht also 39,27 Elementarabweichungen oder der Stufe 20,13 (da, wenn x die Zahl der Elementarabweichungen, die zugehörige Stufe $n = \frac{x+1}{2}$). Für diese Stufe giebt die Tabelle als Zahl der Fälle 399 auf 1000 und somit fallen $492 - 399 = 93$ in die Grössenklasse von 71,50 bis 74,50. Ebenso findet man 54 Fälle für die Strecke 68,20 bis 68,50 und demnach 345 für die Strecke 68,50—71,50 u. s. w.

Statt des arithmetischen Mittels kann man bei grossen Beobachtungszahlen unbedenklich den von Cournot sogenannten Medianwert nehmen, nämlich denjenigen, bei welchem die der Grösse nach geordneten Fälle in zwei gleiche Gruppen getheilt werden. Denn wenn den Beobachtungsgrössen überhaupt ein typischer Wert zu Grunde liegt, der mit der grössten Wahrscheinlichkeit durch das arithmetische Mittel dargestellt wird, so muss dieser ebenfalls sehr nahe in der Mitte der nach der Grösse geordneten Einzelfälle liegen. Uebrigens ist es auch gestattet, versuchsweise zu verfahren und innerhalb der am stärksten besetzten Grössenklasse, die immer in der Nähe der Mitte liegen muss, sich den Wert auszusuchen, von dem aus sich die mit der wirklichen am besten übereinstimmende Verteilung ergiebt, wobei auch hypothetische Annahmen über die Lage dieses Wertes innerhalb der betreffenden Grössenklasse zulässig sind.

Wir haben bisher der Einfachheit wegen angenommen, dass die zusammentreffenden Elementarfehlern sämtlich einander gleich seien. Diese Annahme ist indes gar nicht nötig: es genügt, wenn der mittlere Wert von e gleich bleibt, also die Einzelwerte nur zufälligen Aenderungen unterliegen und bei Zusammenfassung einer genügend grossen Zahl derselben immer nahezu die gleiche Summe herauskommt. Bei denjenigen Kombinationen von positiven und negativen Elementarfehlern, für die nach dem obigen Schema eine überhaupt in Betracht kommenden Wahrscheinlichkeit besteht, sind von den positiven wie von den negativen Elementen immer mehr als 400 als zusammentreffend angenommen, wobei die Schwankungen von e, wenn sie rein zufällig sind, schon hinlänglich ausgeglichen werden. Uebrigens hat die Gesamtzahl 999 hier und überhaupt nur die Bedeutung einer „grossen Zahl" und sie kann beliebig grösser gedacht werden.

4. Man könnte auch fragen, was sich ergiebt, wenn die Elementarfehler der einen Art, etwa die positiven, zwar mit gleicher Wahrscheinlichkeit, wie die der anderen, vorkommen können, aber der (feste oder mittlere) Wert derselben grösser oder kleiner ist, als der mit dem anderen Vorzeichen. Ein Beispiel dieser Art wäre es, wenn die schwarzen und weissen Kugeln zwar gleich leicht gezogen werden könnten, aber verschiedenes Gewicht hätten und nur noch der Verteilung der Gewichte der in jeder Serie gezogenen gleichen Gesamtzahl gefragt würde. Die Verteilung der Einzelwerte wird auch in diesem Falle durch eine symmetrische Kurve von derselben Art wie in dem vorhergehenden dargestellt, aber die grösste Ordinate derselben, also das Maximum der Dichtigkeit der Fälle, entspricht nicht mehr dem richtigen, durch die Fehler nicht beeinflussten Werte. Dieser richtige Wert ist eben unter den gegebenen Bedingungen nicht mehr der wahrscheinlichste, er tritt überhaupt in der Verteilungskurve nicht erkennbar hervor, sondern dient nur als Ausgangspunkt für die Berechnung. Wenn stets 2n gleich wahrscheinliche Elementarfehler zusammentreffen, von denen jeder negative die Abweichung $-e$, jeder positive aber die Abweichung $+\alpha e$ von dem richtigen Wert erzeugt, so ist der wahrscheinlichste Fall das Zusammentreffen von n positiven und n negativen Elementarfehlern und dadurch wird, wenn $\alpha > 1$, eine Verschiebung des zugehörigen wahrscheinlichsten Wertes um $n\alpha e - ne$ oder $n(\alpha - 1)e$ nach der positiven Seite vom richtigen Werte ab erzeugt. Für die folgenden Kombinationen erhält man die Abweichungen vom richtigen Wert nach dieser Seite hin: $(n+1)\alpha e - (n-1)e$, $(n+2)\alpha e - (n-2)e$, $(n+3)\alpha e - (n-3)e$

u. s. w. oder $n(a-1)e+(a+1)e$, $n(a-1)e+2(a+1)e$, $n(a-1)e+3(a+1)e$ u. s. w. Gegenüber dem wahrscheinlichsten Werte im Dichtigkeitsmaximum verschiebt sich also jeder den folgenden Kombinationen entsprechende Wert um gleich viel, nämlich jedesmal um $(a+1)e$. Nach der negativen Seite hin erhält man ähnlich $n(a-1)e-(a+1)e$, $n(a-1)e-2(a+1)e$, $n(a-1)e-3(a+1)e$ u. s. w.; auch hier entspricht also jede weitere Kombination der gleichen Verschiebung $-(a+1)e$ vom Dichtigkeitsmaximum aus. Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Kombinationen sind sämtlich dieselben, wie bei der Gleichwertigkeit der positiven und negativen Elementarfehler, und da diese Wahrscheinlichkeiten als Ordinaten in gleichen Abständen aufzutragen sind, so unterscheidet sich diese Kurve von der dem früheren Fall entsprechenden in ihrer Form nur durch die Verschiedenheit des Elementarabstandes, indem sie, wenn $a>1$ flacher gestreckt, dagegen, wenn $a<1$, in der Mitte höher gewölbt erscheint; ihre gesamte Lage aber ist durch die Verschiebung der grössten Ordinate geändert.

5. Nimmt man an, dass statt 999 eine weit grössere Zahl, etwa das Vielfache 999 v, gleicher Elementarfehler mit gleicher Wahrscheinlichkeit für die positiven und negativen zusammentreffen, so bleibt die Gattung der mit den Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Kombinationen als Ordinaten gebildeten Kurve unverändert; es steigt nur die Zahl der Stufen, die auf eine gleiche verhältnismässige Abweichung von der wahrscheinlichsten Kombination entfällt. Die angenommene Gesamtzahl der zusammentreffenden Elementarfehler entspricht der Zahl der Züge bei einer Versuchsreihe an einer Urne mit gleich vielen schwarzen und weissen Kugeln. Bei 999 Zügen besteht nach einem bekannten Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Wahrscheinlichkeit $^1/_2$ dafür, dass das Verhältnis der gezogenen schwarzen Kugeln zu der Gesamtzahl der Züge zwischen den Grenzen $0{,}500-0{,}477\sqrt{\frac{1}{2\cdot 999}}$ und $0{,}500+0{,}477\sqrt{\frac{1}{2\cdot 999}}$ liegen werde[1]). Die wahr-

1) Das wahrscheinlichste Verhältnis $\frac{500}{1000}$ kann bei 999 Zügen natürlich nicht genau herauskommen, sondern man muss von dem nur wenig verschiedenen Verhältnis 500 schwarze Kugeln auf 999 Züge ausgehen. Wenn man die Gesamtzahl der Züge gerade nimmt, so erhält das mittlere Glied als Stufe 0 eine isolierte Stellung und

scheinlichste Abweichung ist also nach jeder Seite gleich 10,67 Tausendstel oder 10,66 999stel. Diese Zahl der 999stel aber giebt die **Stufennummer** der wahrscheinlichen Abweichungsart jeder Seite an, denn jede von der wahrscheinlichsten ausgehende Kombination entfernt sich um $^1/_{999}$ von dem wahrscheinlichsten Verhältnis. Dieses Ergebnis stimmt auch genügend mit der aus der obigen Tabelle unmittelbar ersichtlichen Stufennummer der wahrscheinlichen Abweichung der s nach der positiven Seite überein. Ist aber die Zahl der Züge — oder die Gesamtzahl der Elementarfehler — 999 v, so wird die wahrscheinliche Abweichung nach jeder Seite $0{,}477\sqrt{\frac{1}{2 \cdot 999\, v}}$ oder $0{,}01067\sqrt{\frac{1}{v}}$. Wird dieser Bruch auf einen solchen mit dem Nenner 999 v gebracht, so erhält man als dessen Zähler $10{,}66\sqrt{v}$ und dies ist die Stufennummer der wahrscheinlichen Abweichung bei 999 v Zügen. Ueberhaupt ist hieraus leicht ersichtlich, dass bei den Gesamtzahlen z und z′ der Elementarfehler — vorausgesetzt, dass z und z′ beide **grosse** Zahlen sind — die Stufennummern n und n′ der zugehörigen gleichen wahrscheinlichen Abweichungen in den betreffenden Binomialtabellen im Verhältnis von $\sqrt{z} : \sqrt{z'}$ stehen. Ist nun eine Beobachtungsgrösse in zahlreichen Exemplaren nach irgend einer Einheit gemessen worden und ist r die in dieser Einheit ausgedrückte wahrscheinliche Abweichung der Einzelwerte vom Mittel, so ergiebt sich der Elementarfehler, wenn z und z′ gerade sind, bei Anwendung der Tabelle der z gleich $\frac{r}{2n}$, nach der Tabelle der z′ aber gleich $\frac{r\sqrt{z}}{2n\sqrt{z'}}$. Der Elementarfehler ändert sich also bei Anwendung einer anderen Tabelle im umgekehrten Verhältnis, wie die Stufennummern, die in den Tabellen einer Abweichung von gleicher Wahrscheinlichkeit entsprechen. Bei ungeraden z kommt $2n-1$ statt $2n$ in den Nenner, jedoch verschwindet der dadurch in dem Ausdruck des Elementarfehlers entstehende Unterschied von dem vorigen um so mehr, je grösser n wird. Aus diesem Grunde empfiehlt es

---

man kann die ganze Reihe nicht mehr in zwei Teile mit ganz gleichen Gliedern zerlegen. Die kleinen Unbequemlichkeiten in beiden Fällen verschwinden übrigens um so vollständiger, je grösser die Gesamtzahl der Züge angenommen wird.

sich auch, statt der wahrscheinlichen Abweichung eine grössere und mit grösserer Wahrscheinlichkeit, z. B. 0,9, nicht überschrittene der Berechnung von e zu Grunde zu legen, da dann auch ein grösse- res n zur Anwendung kommt.

6. Man kann nun auch die Zahl der zusammentreffenden Elementarfehler als unendlich gross annehmen, wobei der einzelne Elementarfehler unendlich klein wird. Man erhält dann als Grenzfall die Tabelle eines mit $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ multiplizierten bestimmten Integrals mit den Grenzen o und u, die in abgekürzter Form im Anhang beigefügt ist. Weiteres über diese Funktion findet man in der folgenden Abhandlung. Wir bezeichnen sie mit F_u, weil u das Argument ist, mit dem man in die Tabelle eingeht. Es entspricht der Stufenummer in der Binomialtabelle, F_u selbst aber ist mit den verdoppelten Werten S zu vergleichen. Denn die letzteren bezeichnen die Wahrscheinlichkeiten der bis zu den betreffenden Stufennummern gehenden Abweichungen von der wahrscheinlichsten Kombination nur nach einer Seite hin, während die F_u die Wahrscheinlichkeiten angeben, dass die Fehler oder Abweichungen zwischen den durch $-u$ und $+u$ bestimmten Grenzen liegen. Eine Vergleichung der Werte von 2S und F_u ergiebt sofort eine bestimmte Beziehung zwischen ihnen und dem zugehörigen u. So hat man, wenn n die Stufennummer bezeichnet, als dem Werte von 2S jedesmal zunächst liegenden Werte von F_u und dem entsprechenden zweistelligen u:

n	2S	F_u	u	n	2S	F_u	u
1	0,0505	0,0451	0,04	10	0,4731	0,4755	0,45
2	0,1007	0,1013	0,09	11	0,5136	0,5117	0,49
3	0,1505	0,1459	0,13	12	0,5523	0,5465	0,53
4	0,1998	0,2009	0,18	15	0,6575	0,6566	0,67
5	0,2483	0,2443	0,22	20	0,7943	0,7918	0,89
6	0,2958	0,2974	0,27	30	0,9424	0,9419	1,34
7	0,3422	0,3389	0,31	40	0,9887	0,9886	1,79
8	0,3873	0,3893	0,36	50	0,9985	0,9985	1,80
9	0,4310	0,4284	0,40	60	0,99985	0,99985	2,68

Wie man sieht, entsprechen jeder Stufe der n sehr nahe 4,5 Stufen in der Reihe der u, wenn diese nur mit 2 Dezimalstellen ausgedrückt werden. In der Funktion F_u ist u für das Produkt hx eingesetzt, in dem x die in irgend einer Masseinheit ausgedrückte Abweichung von dem wahrscheinlichsten Werte darstellt, die mit der gegebenen Wahrscheinlichkeit F_u eintritt, und h die von der Art der Grössenbestimmung und der Masseinheit abhängende Präcision der Einzelwerte bezeichnet. Demnach ist $h = \frac{u}{x}$ und muss für alle zusammengehörende Werte von n und x gleich sein. Sucht man dieselbe Wahrscheinlichkeit in der Tabelle der 2S, so muss ihr die gleiche Abweichung x entsprechen. Ist die zugehörige Stufennummer in dieser Tabelle n, so ist der Elementarfehler $\frac{x}{2n-1}$ oder bei genügend grossem n sehr nahe $\frac{x}{2n}$; n aber ist nach der obigen Vergleichung annähernd gleich $\frac{100\,u}{4.5}$ und demnach $e = \frac{0{,}045}{2h}$ und $h = \frac{0{,}045}{2e}$. Der Elementarfehler nach der Binomialtabelle ist also der Präcision nach der Tabelle der F_u sehr nahe umgekehrt proportional.

7. Macht man eine Anwendung auf das obige Beispiel in betreff der amerikanischen Soldaten, so entspricht der Stufe 38 mit der Abweichung von 6,30 Zoll, die in der Binomialtabelle bei Berücksichtigung der positiven und der negativen Seite mit der Wahrscheinlichkeit $2 \times 0{,}0492 = 0{,}0984$ erscheint, in der Tabelle der F_u der Wert $u = 0{,}045 \times 38 = 1{,}71$ und diesem wieder die Wahrscheinlichkeit $F_u = 0{,}9844$, fast genau mit der ersteren übereinstimmend. Man erhält ferner $h = \frac{u}{x} = \frac{1{,}71}{6{,}30} = 0{,}2714$ und daraus z. B. für x = 3,30 Zoll $u = 0{,}89_{,56}$, wozu die Wahrscheinlichkeit $F_u = 0{,}795$ gehört. Auf die positive Seite vom Mittelwert 68,20 bis zum Wert von 71,50 Zoll kommen also nach der Berechnung 397 Fälle, auf die Strecke 71,50 bis 74,50 demnach 95 Fälle gegen 96 nach der Beobachtung.

Denkt man sich statt der obigen Binomialtabelle mit der Gesamtfehlerzahl 999 eine solche mit der Gesamtzahl G = 999 v, so sind nach dem oben Gesagten die den gleichen Wahrscheinlichkeiten entsprechenden Stufenzahlen n und n′ in diesen Tabellen durch die Gleichung $n' = n\sqrt{v}$ verbunden. Vergleicht man nun die zweite Tabelle mit der der F_u, so kommen auf eine Stufe der n′ nicht mehr 4.5, sondern nur $\frac{4.5}{\sqrt{v}}$ Stufen der u und u ist daher allgemein gleich $\frac{0{,}045\,n'}{\sqrt{v}}$. Wird $\sqrt{v} = 4{,}5$, also $v = 20{,}25$, so ist einfach $n' = 100\,u$, die Stufenzahl ist dann in den beiden Tabellen gleich und sie fallen überhaupt fast genau zusammen. Wird $\sqrt{v}$ noch grösser, so muss die Tabelle der F_u für die drei- oder mehrstelligen u berechnet werden, wodurch die Stufenzahl derselben beliebig erhöht werden kann.

Die Tabelle der F_u lässt sich übrigens auch unabhängig von der Hypothese des Zusammentreffens einer grossen Zahl von durchschnittlich gleichen Fehlerelementen ableiten und sie gilt bei grossen Beobachtungszahlen auch für den Fall, dass die Wahrscheinlichkeit des Ziehens einer schwarzen Kugel von der des Ziehens einer weissen verschieden sei. Sie ist demnach wegen dieser allgemeinen Bedeutung der Binomialtabelle vorzuziehen.

8. Man kann nun nicht nur räumliche Grössen, wie Körpermasse, sondern auch Zeitstrecken auf ihren typischen Charakter untersuchen und es ist oben schon erwähnt worden, dass man, wenn auch nicht für alle Menschen, so doch für eine gewisse, als die „normale" bezeichnete Gruppe mit genügender Sicherheit eine typische Lebensdauer nachweisen kann, also eine solche, die von der Natur in allen Fällen gewissermassen erstrebt, aber nur mit zufälligen, dem theoretischen Fehlergesetz folgenden Abweichungen erreicht wird. Man denke sich, jemand werfe von einem festen Standpunkt aus Kugeln nach einem 70 oder mehr Fuss entfernten Punkte. Seine Geschicklichkeit — die Präcision seines Werfens — ist nur mässig, nur ausnahmsweise fällt eine Kugel genau in der beabsichtigten Entfernung nieder, aber sie häufen sich doch in der Nähe des Zieles am stärksten an und bei genügend grosser Zahl verteilen sie sich um dasselbe annähernd nach dem Fehlergesetz. Einen Teil der sich ihm darbietenden Kugeln findet der Schleuderer gänzlich ungeeignet zu dem Versuche und er wirft sie einfach vor sich hin; ein anderer Teil wird durch irgend welche Hindernisse im Fluge aufgehalten und diese Kugeln bilden auf der Strecke zwischen 10 und 55 bis 60 Fuss Entfernung eine ziemlich gleichmässige, sich nur wenig verstärkende Schicht, die dann weiter bei Ueberlagerung des Ausläufers der ersten Gruppe rasch auskeilt. Das ist ungefähr ein Bild der Art, wie sich die Sterbefälle einer in ihrem Absterben verfolgten Generation auf die einjährigen Altersklassen verteilen, wenn jede durch eine Strecke von einem Fuss dargestellt wird.

In den für verschiedene Länder aufgestellten Sterbetafeln tritt diese Verteilung mehr oder weniger deutlich hervor. Eine sehr gute Uebereinstimmung mit der Theorie zeigt z. B. die Tabelle für Frankreich in der von **Quetelet** herausgegebenen Sammlung „Tables de Mortalité" (Bruxelles 1872). Von 500 Geborenen [1]) starben in den angegebenen Altersstrecken nach der Tabelle und nach der Theorie

Männer

Alter	Tabelle	Theorie
40—45	15	—
45—50	16	(2)
50—55	19	(4)
55—60	24	(12)
60—65	32	(24)
—	—	—
65—70	38	37
72—72½	20	21
—	—	—
73½—75	20	21
75—80	38	37
80—85	26	24
85—90	12	12
über 90	4	6

Normalalter: 72½.
Präcision: 0,076 (aus 72½—80).
Wahrscheinliche Abweichung: + 6,275 Jahre; oben und unten je 50 Fälle, was zutrifft.
Normalgruppe: 200 Fälle = 40,0% der Generation.

Frauen

Alter	Tabelle	Theorie
40—45	14	—
45—50	15	(2)
50—55	18	(7)
55—60	23	(16)
—	—	—
60—65	31	28
65—70	39	40
70—72	17	18
—	—	—
72—75	27	27
75—80	38	38
80—85	26	26
85—90	14	14
über 90	7	8

Normalalter: 72.
Präcision: 0,071 (aus 72—80).
Wahrscheinliche Abweichung: + 6,72 Jahre: beobachtete aufwärts 55, abwärts 56 Fälle statt je 56.
Normalgruppe: 224 Fälle = 44,8% der Generation.

Das Normalalter ist in der am dichtesten besetzten fünfjährigen Altersstrecke, also der von 70—75 Jahren, anzunehmen, jedoch nicht durch eine Interpolation, sondern durch Schätzung mit Rücksicht auf die Besetzung der beiden Nachbarstrecken zu bestimmen, unter Umständen auch durch Versuche, bis sich die beste Uebereinstimmung zwischen der beobachteten und der theo-

1) Vergl. meine Schrift „Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft" (Freiburg 1877), S. 51. Von der Theorie des Normalalters kommt bei **Quetelet** selbst nichts vor, die angeführte Sammlung enthält lediglich die Tabellen, mit deren Zahlen ich die von mir theoretisch abgeleiteten Zahlen verglichen habe. Ich erwähne dies mit Rücksicht auf die Abhandlung von E. **Oekinghaus**, Die mathematische Statistik in allgemeinerer Entwickelung und Ausdehnung auf die formale Bevölkerungstheorie (Teschen 1902, aus den Monatsheften für Mathematik und Physik, XIII. Jahrgang), in der S. 306, die von mir nach den Sterblichkeitstabellen der Quetelet'schen Sammlung berechneten Ziffern des Normalalters für verschiedene Länder irrtümlicherweise **Quetelet** zugeschrieben sind.

retischen Verteilung ergiebt. In der Tabelle für die Männer sind die Strecken 65—70 und 75—80 gleich stark, nämlich mit 38 besetzt und wir nehmen daher das Normalalter gerade in der Mitte der Strecke von 70—75 Jahren, also zu $72^1/_2$ Jahren an. Zwischen $72^1/_2$ und 80 Jahren liegen 58 und im ganzen auf der Seite der positiven Abweichungen 100 Fälle. Demnach ist die empirische Wahrscheinlichkeit einer Abweichung bis zu $\pm 7^1/_2$ Jahren gleich 0.580. Dieser Wert ist in der Tabelle des F_u aufzusuchen und es entspricht ihm $u = 0.57 = hx$. Da x die absolute in der gegebenen Masseinheit — hier dem Jahre — ausgedrückte Abweichung, in dem vorliegendem Falle $7^1/_2$, ist, so ergiebt sich $h = 0.076$. Mit Hülfe dieser Präcision lässt sich nun die theoretische Wahrscheinlichkeit für jede Abweichung x nach beiden Seiten des Normalalters leicht berechnen. Für $x = 2^1/_2$, entsprechend der Altersgrenze 75 oder 70, hat man $2.5 \times 0.076 = u = 0.190$ und diesem u entspricht $F_u = 0.212$. Von 200 Fällen werden also 42 zwischen den Grenzen 70—75 und zwar je 21 von 70—$72^1/_2$ und von $72^1/_2$—75 liegen. Die sogenannte wahrscheinliche Abweichung ist die, welche nach beiden Seiten mit der Wahrscheinlichkeit $^1/_2$ auftritt. Für sie ist also $F_u = 0.500$, demnach $u = 0.4769 = 0.076 \times x$, also das zugehörige $x = 6.275$.

Bei der Tabelle für die Frauen wird die Uebereinstimmung mit der Theorie etwas besser, wenn man das Normalalter aus der Mitte der Strecke von 70—75 Jahren um ein halbes Jahr zurückschiebt. Ueberhaupt wird man darauf verzichten müssen, das Normalalter genauer, als mit einer Unsicherheit von einem halben Jahr zu schätzen.

Im übrigen sieht man, dass die Normalgruppe (deren Stärke man durch Verdoppelung der über das Normalalter hinausgehenden Fälle erhält) bei den Frauen früher aus der Ueberlagerung durch die vorzeitigen Sterbefälle heraustritt als bei den Männern, wenn auch die weibliche Altersgruppe von 60—65 Jahren noch etwas stärker ist als der auf sie fallende Teil der Normalgruppe.

9. Im zweiten Bande des Bulletin de l'Institut international de statistique (Année 1887, p. 264 ss.) sind einer Abhandlung von Bodio graphische Darstellungen der Verteilung der Sterbefälle nach den für mehrere Länder aufgestellten Sterbetafeln beigegeben, die der obigen Theorie in befriedigender Weise entsprechen, obwohl in den Tabellen beide Geschlechter zu-

sammengefasst sind. Es mögen hier noch einige nach diesen Tafeln berechnete Beispiele folgen. Die Zahlen sind hier auf eine Generation von 1000 reduziert.

Frankreich (1880—82)

Alter	Tabelle	Theorie	Aeltere Tabelle
45—50	35	(19)	31
50—55	41		37
55—60	50	(30)	47
60—65	63	(54)	63
—	—	—	—
65—70	76	78	77
70—$72^1/_2$	43	44	42
—	—	—	—
$72^1/_2$—75	43	44	42
75—80	79	78	76
80—85	58	54	54
85—90	28	30	26
über 90	17	19	11

Unter der Rubrik „ältere Tabelle" sind die beiden oben nach Quetelet angeführten Tabellen für Männer und Frauen zusammengefasst. Die Sterblichkeit der späteren Periode hat hiernach im ganzen denselben Charakter wie die der früheren.

Das Normalalter ist nach der neuen Tabelle für beide Geschlechter $72^1/_2$ Jahre.

Die Präcision: 0.070 (aus $72^1/_2$—80 abgeleitet).

Wahrscheinliche Abweichung: 6.81 Jahre (0.4769 : 0.070).

Normalgruppe: $2 \times 225 = 45.0$ Prozent der Generation.

Gestorbene bis zum Alter von 10 Jahren 27.6 Proz. der Generation,

Mittelgruppe 27.4 Proz. der Generation.

Die Normalgruppe hat also etwas zugenommen, ebenso die Besetzung der höchsten Altersklassen, wozu auch die Verminderung der Präcision beigetragen hat.

(Siehe Tabelle S. 115.)

Die Ergebnisse für Belgien weichen von den in meiner Schrift „Zur Theorie der Massenerscheinungen" (S. 46) nach der älteren Quetelet'schen Tabelle berechneten nicht unerheblich ab. Namentlich stellte sich nach dieser das Normalalter der Männer auf 67 Jahre, das der Frauen allerdings wie hier auf $72^1/_2$ Jahre, jedoch mit einer nur 38.2 % starken Normalgruppe. Für die

Belgien (1881—83)

Alter	Tabelle	Theorie
45—50	38	{(17)
50—55	44	
55—60	54	(29)
60—65	68	(55)
—	—	—
65—70	80	80
70—72 1/2	45	45
—	—	—
72 1/2—75	45	45
75—80	80	80
80—85	60	55
85—90	29	29
über 90	12	17

Normalalter: 72 1/2 Jahr.
Präcision: 0,0717 (aus 72 1/2—80).
Wahrscheinliche Abweichung: 6,65 Jahre.
Normalgruppe: 45,2 %.
Gestorben von 0—10 Jahren 26,8 %.
Mittelgruppe: 28,0 %.

Schweiz (1881—83)

Alter	Tabelle	Theorie
45—50	40	(8)
50—55	47	(18)
55—60	51	(41)
—	—	—
60—65	76	71
65—70	86	92
—	—	—
70—75	90	92
75—80	73	71
80—85	45	41
85—90	18	18
über 90	5	8

Normalalter: 70 Jahren.
Präcision: 0,074 (aus 70—80).
Wahrscheinliche Abweichung: 6,45 Jahre.
Normalgruppe: 46,2 %.
Gestorben von 0—10 Jahren 27,9 %.
Mittelgruppe: 26,9 %.

Schweiz ergab die frühere Berechnung (l. c. S. 53) für die Männer 70, und 69 1/2 Jahre für die Frauen als Normalalter.

Preussen (1881—83)

Alter	Tabelle	Theorie
45—50	33	(9)
50—55	45	(19)
55—60	56	(38)
—	—	—
60—65	69	62
65—70	77	78
—	—	—
70—75	79	78
75—80	61	62
80—85	40	38
85—90	18	19
über 90	8	9

Normalalter: 70 Jahre.
Präcision: 0,0701 (aus 70—80),
Wahrscheinliche Abweichung: 6,80 Jahre.
Normalgruppe: 41,2 %.
Gestorbene von 0—10 Jahren: 35,1 %.
Mittelgruppe: 23,7 %.

Italien (1881—83)

Alter	Tabelle	Theorie
45—50	30	{(11)
50—55	34	
55—60	45	(23)
60—65	53	(43)
—	—	—
65—70	71	67
70—72	29	30
—	—	—
72—75	43	45
75—80	66	64
80—85	38	39
85—90	20	18
über 90	7	8

Normalalter: 72 Jahre.
Präcision: 0,0782 (aus 72—80).
Wahrscheinliche Abweichung: 6,10 Jahre.
Normalgruppe: 34,6 %.
Gestorbene von 0—10 Jahren: 40,9 %.
Mittelgruppe: 24,5 %.

Aus der älteren Boeckh'schen Tabelle ergab sich (l. c. S. 59) für Preussen als Normalalter der Männer 70, als das der Frauen 71 Jahre, die Normalgruppe aber betrug für die ersteren nur 33.8 %, für die letzteren nur 36.0 % der Generation. Die für die Jahre 1890 und 1891 berechnete Tabelle (Statistisches Handbuch für den preuss. Staat, Bd. III, S. 193) weist für die Altersklassen von mehr als 65 Jahren folgende Zahlen auf:

		65—70.	—71;	—75.	—80.	—85.	—90.	über 90
Männer:	Tabelle:	78	16;	65	69	43	15	„ 3
	Theorie:	80	17;	67	67	38	16	„ 7
		65—70.	—72½;	—75.	—80.	—85.	—90.	„ 90
Frauen:	Tabelle:	88	48;	48	85	55	21	„ 6
	Theorie:	84	49;	49	84	51	22	„ 9

Das Normalalter sowohl wie die Normalgruppe hat also für beide Geschleehter im Vergleich mit den älteren Tabellen merklich zugenommen. Die Zahl der im Alter von 0—10 Jahren gestorbenen Knaben betrug indes noch immer 34.6 %, die der Mädchen 31.0 % der Generation.

In der Tabelle für Italien fällt bei einem verhältnismässig hohen Normalalter der niedrige Prozentsatz der Normalgruppe auf, der hauptsächlich durch die ungewöhnlich grosse Kindersterblichkeit verursacht wird.

Norwegen (1881—82)

Alter	Tabelle	Theorie
45—50	31	
50—55	39	(21)
55—60	52	
60—65	71	
65—70	84	(42)
—	—	—
70—75	85	78
75—78	55	57
—	—	—
78—80	37	39
80—85	85	83
85—90	54	49
über 90	22	27

Normalalter: 78 Jahre.
Präcision: 0,0877 (aus 78—85).
Wahrscheinliche Abweichung: 5,44 Jahre.
Normalgruppe: 39,6 %.
Gestorbene von 0—10 Jahren: 19,7 %.
Mittelgruppe: 40,7 %.

Schweden (1881—82)

Alter	Tabelle	Theorie
45—50	32	
50—55	39	(21)
55—60	48	
60—65	64	(40)
—	—	—
65—70	81	73
70—75	95	99
—	—	—
75—80	94	99
80—85	78	73
85—90	45	40
über 90	16	21

Normalalter: 75 Jahre.
Präcision: 0,0793 (aus 75—85).
Wahrscheinliche Abweichung: 6,01 Jahre.
Normalgruppe: 46,6 %.
Gestorbene von 0—10 Jahren: 25,5 %.
Mittelgruppe: 27,9 %.

Die Uebereinstimmung der berechneten mit den beobachteten Zahlen ist bei diesen beiden Tabellen weniger befriedigend als nach den in meiner früheren Schrift (S. 52 und S. 57) für dieselben Staaten angeführten Berechnungen. Bei diesen ergab sich für Norwegen als Normalalter der Männer 74, als das der Frauen

75 Jahre und für Schweden waren die entsprechenden Zahlen 72 und 75 Jahre.

Die Langlebigkeit in Norwegen scheint sich nach dieser neueren Tabelle noch bedeutend gesteigert zu haben. Die Normalgruppe ist allerdings nicht sehr stark besetzt, die Mittelgruppe aber ist nicht nur ausserordentlich gross, sondern sie schiebt sich auch in die hohen Altersklassen hinauf, die in den anderen Ländern ausschliesslich der Normalgruppe vorbehalten sind.

10. Dass manchmal grössere Abweichungen zwischen der Theorie und der Beobachtung vorkommen, kann nicht auffallen, denn, abgesehen davon, dass in den obigen Fällen die Zahlen für die beiden Geschlechter nicht auseinander gehalten sind, ist auch zu beachten, dass die Absterbeordnungen, aus denen die Verteilung der Sterbefälle abgeleitet wird, nicht durch Verfolgung des Absterbens einer wirklichen Generation gewonnen, sondern nur Erzeugnisse der Rechnung sind, indem die für eine bestimmte Zeit gefundenen Sterbenswahrscheinlichkeiten auf eine hypothetische Generation angewandt werden. Ueberdies werden die auf solche Art berechneten Tabellen meistens noch Ausgleichungen nach verschiedenen Methoden unterworfen, die die etwa vorhandene Verteilung der Sterbefälle der höheren Altersklassen nach dem Fehlergesetz mehr oder weniger verwischen können. Zur unmittelbaren Beobachtung dieser Verteilung werden sich nach der Hermann'schen Methode aufgestellte Absterbeordnungen besser eignen als die nach der sogenannten direkten Methode berechneten. Da die Statistik der Sterbefälle in den meisten Staaten 50 und mehr Jahre zurückreicht, so wäre fast überall das Material vorhanden, um das Absterben mehrerer Jahresgenerationen etwa vom 60. Lebensjahre ab mittelst der zusammengehörenden dritten Hauptgesamtheiten von Verstorbenen darzustellen und mit der Theorie zu vergleichen. Die Grösse der Normalgruppe in Prozent der ursprünglichen Generation lässt sich allerdings auf diese Art nicht bestimmen. Ein Beispiel einer solchen partiellen Absterbeordnung findet sich a. a. O. S. 55 für Bayern und die Rechnung stimmt befriedigend mit der Beobachtung überein.

Die Bedeutung der oben angeführten charakteristischen Zahlen für die Beurteilung der Sterblichkeitsverhältnisse eines Landes ist leicht zu erkennen. Diese Verhältnisse sind um so günstiger, 1) je höher das Normalalter und 2) je stärker die

Normalgruppe ist, und bei hohem Normalalter — etwa bei einem solchen von mehr als 75 Jahren — kann man noch als drittes Kriterium hinzufügen: je grösser die Präcision, d. h. je kleiner die wahrscheinliche Abweichung vom Normalalter ist. Denn die Existenz einer grossen Zahl von Neunzigjährigen ist weder für die Gesellschaft noch für die Volkswirtschaft ein Vorteil. In keinem Lande sind diese drei Bedingungen bisher so gut erfüllt wie in Norwegen.

Dass ferner eine geringe Kindersterblichkeit ein günstiges Symptom bildet, ist selbstverständlich. In den obigen Uebersichten ist das Alter von 10 Jahren als Grenze der Kindheitsperiode angenommen, weil durchweg in den nächsten Jahren das Minimum der Dichtigkeit der Sterbefälle eintritt. Wünschenswert ist ferner, dass die Mittelgruppe die grösste Dichtigkeit ihrer Sterbefälle in einem verhältnismässig vorgerückten Alter, etwa nach dem 45. Jahre, erlange und mit ihren Ausläufern dem Normalalter möglichst nahe komme. Auch in dieser Beziehung zeigt sich Norwegen als besonders begünstigt.

11. Zur Aufstellung der obigen Kriterien ist übrigens gar keine längere Rechnung erforderlich, sondern sie lässt sich ganz einfach und summarisch ausführen. In jeder Absterbeordnung findet man sofort unter den höheren Altersklassen diejenige, in der die Sterbefälle sich am dichtesten zusammendrängen, und es ist dann auch immer leicht, mit Berücksichtigung der beiden Nachbarklassen bis auf ein halbes Jahr das Normalalter zu schätzen. Die Verdoppelung der über dieses Normalalter hinausliegenden Sterbefälle ergiebt weiter die Normalgruppe und endlich findet man durch Abzählung und Schätzung auch leicht das Alter, bis zu welchem die Hälfte dieser Sterbefälle, vom Normalalter aufwärts gerechnet, erfolgt ist, also die wahrscheinliche Abweichung.

Ist die ganze Absterbeordnung gegeben, so erhält man ohne weiteres die Gruppe der Gestorbenen von 0—10 Jahren und dann auch die Mittelgruppe. Zur näheren Charakterisierung dieser letzteren empfiehlt es sich noch anzugeben, wie gross der Teil derselben ist, der nach dem 45. Jahre gestorben ist und demnach die Normalgruppe überlagert.

Man könnte überhaupt diese Mittelgruppe, wie auch die Kindheitsgruppe aus verschiedenen übereinander liegenden Gruppen zusammengesetzt denken, von denen jede ein Dichtigkeitsmaximum hätte und sich nach dem Fehlergesetz oder auch nach einer anderen Formel verteilte. So hat Prof. Pearson die Sterblichkeit der männlichen Engländer dargestellt, wo er verschiedene, teils symmetrische, teils unsymmetrische Dichtigkeitskurven der Sterbefälle übereinanderlegt, deren Dichtigkeitsmaxima sich im Alter von $71\frac{1}{2}$, 41, $22\frac{1}{2}$, 3 Jahren und im Anfang des ersten Jahres befinden. Eine solche Analyse hat ebenfalls ein theoretisches Interesse, aber sie giebt uns keine weiteren Aufschlüsse über die Ursachen der Verteilung der Sterbefälle und der annähernd sich behauptenden Gleichförmigkeit derselben. Eine Normalgruppe von Sterbefällen mit einem Dichtigkeitsmaximum zwischen 70 und 75 Jahren und eine annähernd dem einfachen Fehlergesetz entsprechende Verteilung der Fälle können wir als eine naturgesetzliche, in der menschlichen Konstitution begründete Thatsache hinnehmen, und wir würden uns dabei vollständig beruhigen, wenn entweder alle Sterbefälle in dieser Verteilung auftraten oder wenn wir besondere Merkmale, sei es für die Normalfälle, sei es für die nicht zu dieser Gruppe gehörenden Fälle angeben könnten. Eine bloss mathematische Zerlegung der Gruppen trägt aber zur Kenntnis der ursächlichen Verhältnisse nichts bei. Anders wäre dies allerdings, wenn sich z. B. für jede wichtigere Todesursache ein Dichtigkeitsmaximum in einem bestimmten Alter nachweisen liesse, von dem aus dann die Verteilung der Fälle nach dem Fehlergesetz stattfände.

12. Pearson[1]) hat auch eine mathematisch sehr wertvolle Darstellung der Verteilung nach unsymmetrischen Dichtigkeitskurven gegeben, von der das Gauss'sche Fehlergesetz einen besonderen Fall bildet. Für das statistische Interesse indes wird das letztere stets im Vordergrund bleiben, weil es allein eine anschauliche Vorstellung von der Entstehung einer ihm entsprechenden Verteilung giebt. Denn man erhält eine leicht fassliche Anschauung, wenn man sagen kann, dass eine wiederholt beobachtete Grösse von rein zufälligen Störungen beeinflusst werde, die ebenso leicht und in derselben Weise im positiven wie im negativen Sinne wirken könne; dagegen kann man sich nicht vorstellen, wie es zugehe, dass z. B. die positiven Störungen

1) Skew Variation in homogenous material. Philos. Transactions, Vol. CLXXXV. London 1895.

mit der Wahrscheinlichkeit $^5/_8$ und die negativen mit der Wahrscheinlichkeit $^3/_8$ auftreten. Uebrigens hat schon Quetelet[1]) eine elementare Methode zur Darstellung der Verteilung der Fälle bei ungleichen Chancen der positiven und negativen Störungsursachen gegeben, indem er annahm, dass aus einer Urne, die unendlich viele schwarze und weisse Kugeln im Verhältnis von s:w enthält, eine mässige Anzahl, nämlich je 16 Kugeln gezogen werden. Man darf die Zahl der zugleich gezogenen Kugeln nicht gross nehmen, weil dann das jedesmal herauskommende Verhältnis von schwarz und weiss von dem wahrscheinlichsten Werte, nämlich s:w, immer nur wenig abweichen würde, so dass bei einer langen Reihe von Versuchen (vorausgesetzt, dass nicht die eine der beiden Wahrscheinlichkeiten sehr klein ist) die praktisch in Betracht kommenden Kombinationen sich nahezu symmetrisch — und soweit nach dem einfachen Fehlergesetz — um die wahrscheinlichste Kombination gruppieren würden, während die grösseren und unsymmetrisch auftretenden Abweichungen wegen ihres seltenen Vorkommens ausser acht gelassen werden könnten. Ist aber die jedesmal gezogene Zahl von Kugeln n nicht gross, so erhält man keine Formel für eine kontinuierliche Verteilung, sondern $n + 1$ verschiedene Wahrscheinlichkeiten für die möglichen $n + 1$ Kombinationen. So ist z. B., wenn $s:w = 3:1$ und $n = 16$, die Wahrscheinlichkeit der Kombinationen: 16 s, 0 w = 0,010; 15 s, 1 w = 0,053; 14 s, 2 w = 0,134; 13 s, 3 w = 0,208; 12 s, 4 w = 0,225; 11 s, 5 w = 0,180; 10 s, 6 w = 0,110; 9 s, 7 w = 0,052; 8 s, 8 w = 0,020; 7 s, 9 w = 0,006; 6 s, 10 w = 0,001. Für die übrigen Kombinationen bis 0 s, 16 w ist die Wahrscheinlichkeit kleiner als $^1/_{1000}$.

Denkt man sich diesen Wahrscheinlichkeiten proportionale Senkrechte in gleichen Abständen auf einer Grundlinie errichtet, so erhält man gleichsam das Gerüst, über welches sich eine kontinuierliche unsymmetrische Kurve ziehen lässt. Diese Kurve kann man durch andere Wahl des Verhältnisses s:w auf die mannigfaltigste Art ändern und so wird es auch häufig möglich, durch sie die Vertheilung der Einzelfälle einer Störungen unterworfenen Beobachtungsgrösse annähernd darzustellen.

---

1) Lettres sur la Théorie des probabilités, p. 174 u. 408.

13. Man kann auch hier eine ähnliche Betrachtung anstellen, wie bei der obigen Ableitung des Fehlergesetzes: man könnte annehmen, dass immer 16 Fehlerursachen zusammentreffen, und zwar die positiven mit der Wahrscheinlichkeit $^3/_4$, die negativen mit der Wahrscheinlichkeit $^1/_4$. Wenn jeder dieser Elementarfehler durchschnittlich eine Abweichung $\pm$ e der beobachteten von der wahren Grösse g bewirkt, so wird das Dichtigkeitsmaximum der beobachteten Fälle bei $g + 12e - 4e$ oder $g + 8e$ liegen. Von 1000 Beobachtungen werden also nach der obigen Zusammenstellung 225 annähernd dieses Resultat ergeben, auf $g + 10e$ kommen annähernd 208, auf $g + 12e$ ungefähr 134, auf $g + 14e$ etwa 53, auf $g + 16e$ etwa 10, andererseits auf $g + 6e$ annähernd 180, auf $g + 4e$ etwa 110 u. s. w. Die diesen Dichtigkeiten proportionalen Senkrechten sind also in Abständen von 2 e auf der Grundlinie errichtet zu denken. Die aus ihnen und den Linienstücken 2 e gebildeten Rechtecke sind ebenfalls den Dichtigkeiten proportional und die Gesamtfläche einer durch die Endpunkte der Mittellinien dieser Rechtecke gezogenen Kurve wird von der Summe der Flächen dieser Rechtecke nicht allzuviel verschieden sein. Wenn nun die Ergebnisse einer grossen Zahl von Beobachtungen sich durch eine unsymmetrische Dichtigkeitskurve darstellen lassen, so kann man versuchen, ob diese näherungsweise mit einer auf die angegebene Art konstruierten Kurve übereinstimmt, wobei das Verhältnis s : w annähernd gegeben ist durch das Verhältnis der (gleichviel in welchem Masse ausgedrückten) Abstände der beiden Schnittpunkte der Kurve und der Grundlinie von dem Fusspunkt der grössten Ordinate. Im Grunde ist dieses Verfahren aber nichts anderes, als die nach einer besonderen Methode ausgeführte Aufstellung einer empirischen Formel für die beobachtete Verteilung, wie sie in anderen Fällen etwa durch eine Parabel höherer Ordnung gegeben wird. Die Annahme von 16 positiven oder negativen Fehlerursachen ist willkürlich, sie giebt, wie gesagt, nur ein Gerüst für die Kurve; man kann auch versuchen, ob man bei 20 oder 25 Fehlerelementen bessere Resultate erhält. Die verschiedenen Wahrscheinlichkeiten der positiven und negativen Fehlerelemente haben ebenfalls nur einen rein mathematischen Sinn und man kann sich über die physische Bedeutung dieser Bedingung keine Vorstellung machen. Der „wahre" Wert der Beobachtungsgrösse im obigen Sinne aber ist

bei unsymmetrischer Verteilung der Einzelfälle überhaupt nur eine rechnerische Fiktion, die sich ebensowenig äusserlich bemerkbar macht, als wenn die Beobachtungen sämtlich mit einem konstanten Fehler behaftet wären. Wenn die natürlichen Bedingungen der Entstehung eines Beobachtungsobjektes bewirken, dass eine gewisse Grösse desselben immer mit grösserer Wahrscheinlichkeit überschritten, als nicht erreicht wird, so hat nicht diese verdeckt bleibende Grösse, sondern nur die im Dichtigkeitsmaximum wirklich hervortretende für uns ein besonderes Interesse. Diese stellt eben das wahrscheinlichste Beobachtungsergebnis dar und sie ist zugleich, wenn die Verteilung der Fälle der unsymmetrischen Binomialformel entspricht, gleich dem Mittelwert aus allen Einzelbeobachtungen [1]).

---

1) Dieser von Quetelet angeführte Satz lässt sich auf folgende Art beweisen: Es seien $\frac{a}{m}$ und $\frac{b}{m}$ die sich zu 1 ergänzenden Wahrscheinlichkeiten des Auftretens der negativen und der positiven Fehlerelemente, also $a + b = m$, es sei ferner n die angenommene Zahl der jedesmal zusammentreffenden, teils positiven, teils negativen Fehlerelemente, die also den Exponenten des Binoms bildet, und die Grösse 2e, um die sich die beobachtete Grösse bei jedem Uebergang von einer Fehlerkombination zur nächstfolgenden verändert, werde als Massheit angenommen. Da derjenige Teil der Beobachtungsgrösse, der allen Einzelbestimmungen derselben gemeinsam ist, für uns weiter nicht in Betracht kommt, so berücksichtigen wir nur den veränderlichen Teil, und zwar nehmen wir den kleinsten der in diesem vorkommenden Werte, der durch das Zusammentreffen von n negativen Fehlerelementen entsteht, gleich der Masseinheit (also $= 2e$) an. Wenn m^n Einzelwerte bestimmt werden, so wird die theoretische Verteilung derselben durch die Entwickelung des Binoms

$$(a + b)^n = a^n + n_1\, a^{n-1} b + n_2\, a^{n-2} b^2 + n_3\, a^{n-3} b^3 + \ldots b^n \qquad (1)$$

dargestellt, wo die n_x die Binomialkoëfficienten bedeuten. Diese Summe ist die Zahl der Einzelwerte, ihre Grösse in Einheiten der erwähnten Art beträgt:

$$a^n + 2n_1\, a^{n-1} b + 3n_2\, a^{n-2} b^2 + 4n_3\, a^{n-3} b^3 + \ldots (n + 1) b^n = \Sigma (x + 1) n_x\, a^n b^{n-x} \qquad (2)$$

und das Mittel W der Einzelwerte demnach $\frac{\Sigma (x + 1) n_x a^n b^{n-x}}{(a + b)^n}$.

Nun kann man durch Entwickelung des Ausdrucks links leicht zeigen, dass

$$n(a + b)^{n-1} = n_1 a^{n-1} + 2n_2\, a^{n-2} b + 3n_3\, a^{n-3} b^2 + \ldots n b^{n-1}.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit b und addiert die Gleichung (1), so ergiebt sich

$$n(a + b)^{n-1} b + (a + b)^n = \Sigma (x + 1) n_x a^n b^{n-x}$$

14. Unsymmetrische Verteilung einer statistisch untersuchten Grösse kann auch dadurch entstehen, dass diese Grösse sich als Funktion einer anderen bestimmt, die ihrerseits sich regelmässig um einen Typus gruppiert. So verhält sich z. B. nach Quetelet das Gewicht der Erwachsenen annähernd wie das Quadrat der Körperlänge und da diese sich als eine typische Grösse verhält, so kann die Reihe der Gewichtsbestimmungen wenigstens bei einem grösseren Spielraum der Abweichungen keine symmetrische Verteilung der Fälle aufweisen. Ferner kann eine Mischung verschiedener Typen vorhanden sein, die bei den Beobachtungen nicht auseinander gehalten werden könnten. Denkt man sich z. B., dass 1000 Soldaten der Potomac-Armee mit einem typischen Brustumfang von 35 Zoll engl. und 1000 Schotten mit dem mittleren Brustumfang von $39^3/_4$ Zoll unterschiedslos zusammen gemessen worden wären, so würde man von 32 bis 43 Zoll folgende Gruppen erhalten haben: 69, 122, 173, 201, 201, 193, 191, 215, 210, 171,

---

und durch Division mit $m^n = (a + b)^n$

$$n \cdot \frac{b}{m} + 1 = W.$$

Demnach ist der Mittelwert W gleich der Ordnungszahl $n\frac{b}{m} + 1$ in der Reihe der nach ihrer Grösse und steigenden Potenzen von b geordneten $n + 1$ Gruppen von gleich grossen Einzelwerten. Ist aber die Wahrscheinlichkeit des negativen Fehlerelementes $\frac{a}{m} = w$ und die des positiven $\frac{b}{m} = s$, so entspricht diese Ordnungszahl dem grössten Gliede in der Reihe der Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Fehlerkombinationen, also dem wahrscheinlichsten Werte des Messungsresultates. Ist also z. B. $a = 1$, $b = 3$, demnach $w = \frac{1}{4}$, $s = \frac{3}{4}$, und n, die Zahl der jedesmal zusammentreffenden positiven oder negativen Fehlerelemente, gleich 16, so ist der Mittelwert in der hier anzuwendenden Einheit 13 und andererseits stellt das 13. Glied die wahrscheinlichste Kombination dar, nämlich die mit den Exponenten 4 für w und 12 für s, die sich wie diese Wahrscheinlichkeiten selbst verhalten. Demnach giebt das arithmetische Mittel aus der Gesamtheit der Beobachtungswerte auch bei unsymmetrischer Verteilung derselben den wahrscheinlichsten Wert, wenn die hier angenommene Hypothese über die Entstehung der Abweichungen durch die Kombination von positiven und negativen Fehlerelementen zulässig ist. Der Ausdruck „wahrscheinlichster Wert" aber hat vom Standpunkt dieser Hypothese die Bedeutung des bereits oben angewandten des „wahrscheinlichsten Messungsresultats", denn der hypothetische wahre Wert, von dem die positiven und negativen Störungen ausgehen, ist, wie oben ausgeführt worden, aus den Messungen gar nicht erkennber und das wahrscheinliche Messungsresultat ist gegen diesen um eine feste Grösse verschoben.

111, 56. Die Kurve hält sich also auf eine längere Strecke fast in gleicher Höhe mit einer Einsenkung zwischen den Maximalwerten 201 und 215, die den Stufen von 36 und 39 Zoll entsprechen. Da sie an beiden Enden die Ausläufer der einen und der andern Reihe ziemlich rein hevortreten lässt, so könnte man durch versuchsweises Rechnen die beiden ungleichartigen Elemente mit ausreichender Genauigkeit voneinander sondern. Eine solche Trennung wird um so leichter sein, je weiter die typischen Mittelwerte voneinander abstehen, mit je grösserer Präcision der Typus zum Ausdruck kommt und weniger die beiden vermischten Gruppen in ihrer Zahl verschieden sind. Bei einer zufälligen Auswahl der zu messenden Personen in grosser Zahl werden die verschiedenen Typen annähernd in dem Verhältnis auftreten, in dem sie in der betreffenden Bevölkerung vorhanden sind. Da die zusammengemischten Typen voneinander ganz unabhängig sind, so muss für die theoretische Bestimmung ihrer Gruppierung die Verteilung für jeden besonders berechnet werden und die Fälle der gleichen Grössenklasse sind dann zu summieren. Ist also der Typus mit der Normalgrösse a m-mal, der mit der Normalgrösse b n-mal in der Mischung vertreten und sind die zugehörigen Präcisionen h und k, so kommen auf die von der Grösse x ausgehende kleine Strecke Δx $(m h C e^{-h^2(x-a)^2} + n k C e^{-k^2(x-b)^2}) \Delta x$ Fälle, wo C den reciproken Wert der Wurzel aus der Zahl π und e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet (s. die folgende Abhandlung).

Die unregelmässige Verteilung der Messungsergebnisse kann auch dadurch entstehen, dass der Typus einer allmählichen Aenderung unterliegt. Die physische Beschaffenheit einer Bevölkerung kann sich infolge der schlechten Ernährung der Arbeitermasse, der vorzeitigen und übermässigen Arbeit der Kinder u. s. w. verschlechtern und dadurch die Entwickelung der normalen Körpergrösse oder des Brustumfanges beeinträchtigt werden. Diese Entartung des Typus wird sich aber hauptsächlich bei demjenigen Teile der Bevölkerung zeigen, der auch vorher schon das Normalmass nur verhältnismässig selten erreichte, sodass also eine unsymmetrische Verteilung mit weiterer Ausdehnung der unternormalen Gruppen entsteht. Wenn umgekehrt durch hygienische und wirtschaftliche Fortschritte eine Besserung der Körperkonstitution eines grossen Teiles der Bevölkerung bewirkt wird, so wird sich dieses ebenfalls hauptsächlich in dem die negativen Abweichungen darstellenden Zweige der Verteilungskurve zeigen und durch dessen Zusammenziehung die vorher etwa vorhandene Symmetrie gestört werden.

Endlich ist es auch möglich, dass gewisse statistische Massgrössen, namentlich anthropologische, mehr oder weniger indifferente Strecken aufweisen, auf denen die Natur überhaupt keinen bestimmten Typus bevorzugt. Gewisse äussere Grenzen werden eingehalten, innerhalb derselben ist die Verteilung ziemlich gleichmässig oder es kommen durch irgend welche unberechenbare Einflüsse hier und da ganz unregelmässige Anhäufungen bestimmter Beobachtungsgrössen vor. Die Bildung neuer fester Varietäten wäre wohl hauptsächlich innerhalb solcher Indifferenzstrecken zu erwarten, weil eben in diesen die Tendenz zu einer typischen Grösse nicht oder nur schwach vorhanden ist. Solche Spielräume in den Grössen und Grössenverhältnissen der menschlichen Glieder hat Alph. Bertillon mit Erfolg zur Ausbildung seines Messungsverfahrens zur Wiedererkennung von Verbrechern benutzt. Die Körpergrösse hat nur einen geringen „signaletischen Wert", weil die meisten Fälle sich in der Nähe des typischen Mittels zusammendrängen und grössere Abweichungen nur in geringer Zahl vorkommen. Dagegen schwankt z. B. die innere Länge des Beines bei einer Körpergrösse von 1,60 bis 1,65 m. von 730 bis 825 mm und die Verteilungskurve ist sehr gestreckt und unregelmässig. Von 100 untersuchten Individuen von der angegebenen Grösse hatten 8 eine innere Beinlänge von weniger als 755 mm und 9 eine solche von mehr als 810 mm; zwischen diesen Grenzen kamen auf die Abstufungen von 5 mm bezw. 6, 8, 10, 10, 9, 5, 7, 8, 4, 4, 9 Fälle, so dass 13 meistens ziemlich gleichmässig besetzte Klassen unterschieden werden konnten. Merkmale aber, die die Bildung zahlreicher Klassen gestatten, brauchen nur in geringerer Zahl kombiniert zu werden, um Gruppen zu erhalten, in denen nur wenige und daher nach ihren Photographien leicht erkennbare Individuen vereinigt sind. Zu diesen besonders brauchbaren Merkmalen mit indifferenten Spielräumen gehört u. a. auch die Breite der Hüften, die Länge des Kopfes, die Spannweite der Arme, die Länge des Fusses und die Länge des Mittelfingers. Die typische Körpergrösse einer Rasse oder eines Stammes kann man auch ohne zahlreiche Messungen bestimmen, indem man einfach eine grosse Anzahl von Personen, nach der Grösse geordnet, nebeneinander stellt und die in der Mitte stehenden allein misst. Um die typische Bedeutung dieses Messungsergebnisses zu konstatieren, zähle man zu beiden Seiten der Mittelperson je ein Viertel der Gesamtzahl ab und untersuche, ob von den beiden so bestimmten Personen die eine annähernd die Normalgrösse um ebenso viel überschreitet, wie der andere unter derselben bleibt. Diese positive und negative Differenz stellt dann näherungsweise die wahrscheinliche Abweichung dar und der reciproke Wert derselben giebt das Mass der Präcision, mit der die Natur den Typus zum Ausdruck gebracht hat.

Galton[1]) hat darauf hingewiesen, dass diese Methode der bloss vergleichenden Reihenordnung der Beobachtungsobjekte ohne Einzelmessungen auch auf solche Erscheinungen anwendbar ist, die einer Messung gar nicht unterworfen werden können, sondern sich nur im allgemeinen vergleichsweise nach dem grösseren oder geringeren Grade ihrer Intensität unterscheiden lassen, wie geistige Anlagen in bestimmter Richtung, Gedächtnis, musikalische Begabung u. s. w. So werden in vielen Anstalten die Schüler für jedes Hauptfach nach Ordnungsnummern klassificiert und der Inhaber der Mittelstelle kann daher als Vertreter der durchschnittlichen Befähigung in dem betreffenden Fach angesehen werden, wenn gleichzeitig die Zahl der sehr guten und sehr schlechten Schüler eine verhältnismässig kleine ist und die Mehrzahl beiderseits den mittleren nahesteht.

15. Wie oben erwähnt, können nicht nur absolute Massgrössen, sondern auch Verhältniszahlen als typische Grössen erscheinen. Von solchen wird in den beiden folgenden Abschnitten genauer die Rede sein; hier sei nur bemerkt, dass streng genommen nur solche Verhältniszahlen hierher gerechnet werden können, die unmittelbar als empirische Ausdrücke mathematischer Wahrscheinlichkeiten anzusehen sind. Hat man eine Reihe von Einzelwerten desselben Verhältnisses $\frac{a_1}{g_1}, \frac{a_2}{g_2}, \frac{a_3}{g_3}$ u. s. w., wo die Grundzahlen g_1, g_2 u. s. w. nur wenig verschieden voneinander sind, und bezeichnet man den Mittelwert $\frac{a}{g}$ mit p

1) Statistics by intercomparison, Philosophical Magazine, Vol. XLIX, p. 33.

und $1-p$ mit q, so werden diese Werte, wenn sie eine typische Grösse darstellen, sich nach dem Fehlergesetz mit der Präcision $h=\sqrt{\frac{g}{2pq}}$ gruppieren und die wahrscheinliche Abweichung beträgt $\varrho\sqrt{\frac{2pq}{g}}$, wo $\varrho=0{,}4769$.

Ist p ein typisches Verhältnis, so wird auch die lineare Funktion $ap+b$ noch eine dem Fehlergesetz folgende Verteilung der den Einzelwerten von p entsprechenden Werten aufweisen, und zwar mit der wahrscheinlichen Abweichung $\frac{\varrho a}{h}$. Bei anderen Funktionen von p wird dies aber im allgemeinen nicht der Fall sein. Denn den sich in gleichen Abständen folgenden Werten von p entsprechen Funktionswerte mit verschiedenen Differenzen und demnach unsymmetrischer Verteilung. Wenn indes die Werte einer Funktion von p nur in engen Grenzen in Betracht kommen, so macht sich diese Unsymmetrie nur wenig bemerklich, so dass ihre Einzelwerte sich dann ebenso, wie die von p, wenigstens annähernd nach dem Fehlergesetz verteilen. Dies gilt insbesondere von dem Koordinationsverhältnis $\frac{p}{1-p}=c$, das z. B. zur Darstellung des Knabenüberschusses bei den Geburten häufiger angewandt wird, als das Verhältnis p der Knabengeburten zu der Gesamtzahl der Geburten. Wenn z. B. das letztere die Werte 0,500, 0,505, 0,510, 0,515, 0,520, 0,525, 0,530 hat, so sind die zugehörigen Werte von $c=1{,}0000$, 1,0202, 1,0408, 1,0618, 1,0833, 1,1053, 1,1277 und deren Differenzen in Einheiten der vierten Stelle 202, 206, 210, 215, 220, 224. Auf jeder dieser annähernd gleichen Strecken fallen ebensoviele Werte von c, wie auf die entsprechende Abstufung des um 0,005 fortschreitenden Wertes von p und die Verteilung der ersteren ist daher ebenfalls annähernd symmetrisch, wenn dies bei den p der Fall ist. Dem Mittelwert 0,515 von p entspricht $c=1{,}0618$ und die nächsten Differenzen von c nach beiden Seiten hin sind 0,0210 und 0,0215 oder nahezu gleich 0,0213 der Differenz von p multipliziert mit $\frac{1}{(0{,}485)^2}$, d. h. mit dem Differentialquotienten von c nach p.

Es können aber auch Wahrscheinlichkeitsverhältnisse vorliegen, die Funktionen von zwei oder mehreren einfachen Wahrscheinlichkeiten sind. Eine solche Funktion, z. B. $a v_1 + b v_2$, wenn v_1 und v_2 irgend welche Wahrscheinlichkeiten und a und b Konstante bezeichnen, verhält sich wie eine einzige zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit, da bei einer grossen Zahl von Versuchsreihen jeder mögliche empirische Wert von v_1 mit jedem möglichen empirischen Werte von v_2 zusammentreffen kann. Es ergiebt sich eine Verteilung nach dem Fehlergesetz mit der Präcision $\varrho : \sqrt{a^2 r_1^2 + b^2 r_2^2}$, wenn r_1 und r_2 die wahrscheinlichen Abweichungen von v_1 und v_2 bezeichnen.

Eine sehr einfache Funktion zweier Wahrscheinlichkeiten ist auch die Differenz $v_1 - v_2$. Die wahrscheinliche Abweichung ist also $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ und die Verteilung einer grösseren Zahl von Einzelwerten um das Mittel findet mit der Präcision $\varrho : \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ statt. Anstatt der mit der Wahrscheinlichkeit $1/2$ auftretenden Abweichung kann man auch nach der Tabelle der F_u eine Abweichung nehmen, die mit einer der Gewissheit nahe kommenden Wahrscheinlichkeit, z. B. 0,995, nicht überschritten wird. Diese würde sein $\pm \frac{2}{\varrho} \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$. Wenn also zwei mit genügend grossen Grundzahlen gebildete empirische Wahrscheinlichkeiten, z. B. die Sterbenswahrscheinlichkeit der Neugeborenen zweier aufeinander folgender Jahren um die nach der letzteren Formel bestimmte Grösse oder um noch mehr voneinander verschieden wären, so würde man mit fast völliger Gewissheit annehmen können, dass eine reelle Aenderung der Sterbenswahrscheinlichkeit von einem Jahre zum anderen stattgefunden habe. Wenn dagegen die beobachtete Differenz kleiner ist, als die oben bezeichnete wahrscheinliche Abweichung, so ist es leicht möglich, dass die zu Grunde liegende Sterbenswahrscheinlichkeit sich gar nicht verändert hat und der Unterschied nur durch die zufällige Abweichung der empirischen von der wirklichen Wahrscheinlichkeit entstanden ist.

Der allgemeine Ausdruck für den wahrscheinlichsten Wert einer Funktion von mehreren veränderlichen $F(x_1, x_2, x_3 \ldots)$ ist $F(a_1, a_2, a_3 \ldots)$ wenn a_1, a_2, a_3 die wahrscheinlichsten Werte der einzelnen veränderlichen sind, und der wahrscheinliche Fehler ist

$$\sqrt{\left(\frac{dF}{da_1}\right)^2 r_2^1 + \left(\frac{dF}{da_2}\right)^2 r_2^2 + \left(\frac{dF}{da_3}\right)^2 r_3^2 + \ldots},$$

wenn r_1, r_2, r_3 . . die wahrscheinlichen Fehler der Einzelwerte (und verhältnismässig klein) sind. Wenn die x Wahrscheinlichkeitsverhältnisse sind, wie v_1, v_2, v_3, die genügend grosse Grundzahlen haben, so werden ihre wahrscheinlichen Abweichungen nach der „kombinatorischen" Methode durch den oben angeführten Wurzelausdruck mit p und q dargestellt und daraus ergiebt sich der wahrscheinliche Fehler des empirischen Ausdrucks der Funktion F. Hat man mehrere empirische Werte der Funktion, so kann man daraus auch direkt die wahrscheinliche Abweichung der Einzelwerte bestimmen und aus der Vergleichung dieses Ausdrucks mit dem nach der anderen Methode abgeleiteten ergiebt sich der Grad der Dispersion[1]).

---

1) Von weiteren hierher gehörenden Arbeiten seien noch erwähnt Edgeworth, Methods of Statistics, im Jubiläumsband des Journ. of the Royal statist. Soc., 1885. Verschiedene Abhandlungen desselben Verfassers in Bd. LXI und LXII derselben Zeitschrift, neu gedruckt u. d. T., The representation of statistics by mathematical formulae, 1900. Derselbe, Metretike, London, s. a., wo auch die zahlreichen verwandten früheren Arbeiten des Verfassers angeführt sind. Yule in mehreren Abhandlungen im Journal of the Stat. Soc. [Vol. LIX (1896), LX (Theory of correlation), LXII] mit Anwendungen auf soziale Verhältnisse. — Fechner, Kollektivmasslehre, herausgeg. von G. F. Lipps, Leipzig 1897. — G. Duncker, Die Methode der Variationsstatistik, Leipzig 1899, mit einem reichhaltigen Literaturverzeichnis. — E. Blaschke in Heft I der Mitteilungen des Verbandes österreichischer und ungarischer Versicherungstechniker, Wien 1899. Seit Oktober 1901 erscheint die Zeitschrift Biometrika, a Journal for the statistical study of biological problems (Cambridge), herausgegeben von Weldon, Pearson, Davenport in Verbindung mit Fr. Galton. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung von E. Czuber (Leipzig 1902) wird die Anwendung dieser Rechnung auf die Statistik ausführlich berücksichtigt.

VII. Das Geschlechtsverhältnis der Geborenen und die Wahrscheinlichkeitsrechnung[1].

1. Die eigentümliche Regelmässigkeit des Knabenüberschusses bei den Geburten hat den Mathematikern schon mehrfach Gelegenheit geboten, die allgemeinen Formeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf eine konkrete Erscheinung anzuwenden. Aber bei diesen Untersuchungen überwog das mathematische Interesse ganz entschieden das statistische, und die physiologische Frage wurde gewissermassen nur als Vorwand genommen, um allgemeine analytische Entwickelungen auszuführen, für welche aus den Zahlenverhältnissen der Knaben- und Mädchengeburten hinterher einige Anwendungsbeispiele gegeben wurden. In diesem Sinne ist namentlich die grosse Abhandlung von Poisson über die vorliegende Frage gehalten[2]: sie ist für die Ausbildung der

1) Diese Abhandlung ist zuerst in den Hildebrand-Conrad'schen Jahrbüchern Bd. XXVII (1876), S. 209 ff., veröffentlicht worden. Im Jahre 1878 erschien die Théorie mathématique des assurances sur la vie von E. Dormoy, in der — und zwar auch mit spezieller Anwendung auf das Geschlechtsverhältnis der Geborenen — eine „Théorie des écarts" entwickelt ist, die darauf hinausläuft, dass die Summe der absoluten Abweichungen vom Mittel der beobachteten Einzelwerte mit dem n-fachen der theoretisch (nach der kombinatorischen Methode) abgeleiteten mittleren Abweichung verglichen und der Quotient aus diesen beiden Grössen als das Mass der „Divergenz" betrachtet wird. Dieses Verfahren trifft mit dem Grundgedanken, wenn auch nicht mit den weiteren Ausführungen der obigen und der folgenden (VIII.) Abhandlung teilweise zusammen und Dormoy hat insoweit hierin die Priorität, da er seine Theorie schon 1874 in dem „Journal des actuaires français" veröffentlicht hatte, einer in Frankreich nur wenig und in Deutschland so gut wie gar nicht verbreiteten Zeitschrift, die mir gänzlich unbekannt geblieben war. Eine Vergleichung der Verteilung einer grossen Zahl von Einzelwerten mit der der Exponentialfunktion entsprechenden hat Dormoy nicht versucht.

2) Mém. de l'Acad. des sciences, Paris 1830 t. IX, p. 240.

Wahrscheinlichkeitsrechnung von grosser Bedeutung, aber die Anwendung der aufgestellten Formeln auf das Geschlechtsverhältnis des Geborenen erscheint nur als Nebensache unter Benutzung von sehr geringfügigem Material.

Was die Resultate Poisson's betrifft, so beschränken sie sich auf das, was ich hier die „statistische" Form der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf das Problem nennen will. Es ist gegeben das empirische Verhältnis der Knabengeburten zu der Gesamtzahl der Geburten eines Landes, und es wird bestimmt, innerhalb welcher Grenzen die der Massenerscheinung zu Grunde liegende, objektive Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt mit einer der Gewissheit nahe kommenden Wahrscheinlichkeit liegen wird — wie wenn man das wirklich vorhandene Verhältnis der schwarzen Kugeln zu der Gesamtzahl schwarzer und weisser Kugeln in einer Urne mit Hülfe der Zahl der schwarzen Kugeln annähernd bestimmen will, die bei einer grossen Anzahl von Versuchen — wobei die gezogene Kugel jedesmal wieder in die Urne zu legen ist — gezogen worden sind [1]). Ferner untersucht dann Poisson, ob der objektiven Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt in zwei gegebenen Beobachtungsreihen verschiedene Werte zukommen und welches die Wahrscheinlichkeit sei, dass der eine Wert den andern um eine gegebene Grösse überschreite.

2. Das Charakteristische dieser Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist dies, dass man von statistischen Verhältniszahlen ausgeht, die direkt als empirische Wahrscheinlichkeiten aufgefasst werden. Es giebt aber noch eine andere Art, die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Erscheinungen anzuwenden, die ich hier die „physikalische" nennen will, weil sie vorzugsweise bei astronomischen und physikalischen Beobachtungen üblich ist. Jede statistische Zahl, gleichviel ob sie als eine Wahrscheinlichkeit aufgefasst werden kann oder nicht, lässt sich als eine Grösse betrachten, die durch irgend ein Ursachensystem bestimmt ist. Hat nun dieses Ursachensystem eine gewisse Konstanz, obwohl es andererseits durch zufällige, ebenso leicht in dem einen wie in dem entgegengesetzten Sinne wirkende Störungen beeinflusst

1) Mit Rücksicht auf die Art der Ableitung dieses Ausdrucks der wahrscheinlichen oder höchsten zu erwartenden Abweichung habe ich diese Methode an anderen Stellen auch als die „kombinatorische" bezeichnet.

wird, so ist die wiederholte Feststellung jener Zahl aus mehreren Reihen von Massenbeobachtungen ganz analog der wiederholten Messung einer und derselben Grösse mit astronomischen oder physikalischen Instrumenten. Es handle sich z. B. um das Verhältnis der Zahl der Knabengeburten zur Zahl der Mädchengeburten in einem gegebenen Lande und im Laufe eines Jahres — ein Verhältnis, das nicht als eine Wahrscheinlichkeit betrachtet werden kann — so wird jedes Kalenderjahr einen Wert desselben ergeben, der sich von den übrigen um mehr oder weniger unterscheidet. Wenn nun diese Einzelwerte als zufällige Modifikationen eines in allen Jahren gleichbleibenden Normalwertes angesehen werden dürfen, so ist der wahrscheinlichste Wert dieses Normalverhältnisses das arithmetische Mittel aus den Einzelbestimmungen und man kann den wahrscheinlichen Fehler der letzteren sowohl wie des Mittelwertes oder auch die äussersten Fehlergrenzen, die mit einer der Gewissheit nahekommenden Wahrscheinlichkeit nicht überschritten werden, nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnen, eben derjenigen, die wir hier der Kürze wegen als die „physikalische“ bezeichnen.

3. Poisson weist am Schlusse seiner Abhandlung auch auf diesen Weg hin, aber er hält ihn nicht für praktisch, weil die Zahl der Einzelbestimmungen — von denen jede wieder das Ergebnis einer Massenbeobachtung ist — sehr gross sein müsse. Gleichwohl sind manchmal die wahrscheinlichsten Werte und die wahrscheinlichen Fehler statistischer Verhältniszahlen nach dieser Methode bestimmt worden — so z. B. von Heym und Fischer für die Sterblichkeitsverhältnisse. Aber wenn es sich nur um die Feststellung der wahrscheinlichsten Werte und der wahrscheinlichen Fehler handelt, so ist die „statistische Methode“, wie sie von Poisson angewandt wird, falls sie überhaupt zulässig ist, entschieden besser und zweckmässiger.

Dagegen eröffnet sich hier ein weiteres Feld der Untersuchung, das meines Wissens noch nicht betreten worden: man kann erstens beide Methoden auf dasselbe statistische Material anwenden und zusehen, ob die Resultate in der Weise übereinstimmen, wie es nach der Theorie zu erwarten ist; und man kann zweitens untersuchen, ob sich bei hinlänglich zahlreichen Beobachtungen desselben Zahlenverhältnisses die Abweichungen vom wahrscheinlichsten Werte so gruppieren, wie es das analytische Gesetz der Verteilung zufälliger Fehler verlangt.

In diesem letzteren Falle handelt es sich also um die Vergleichung der empirischen mit den theoretischen Gruppen von Fehlern oder Abweichungen, wie sie in Bezug auf astronomische Beobachtungen zuerst von Bessel angestellt wurde. Quetelet hat dieses Verfahren in einer elementaren, freilich nicht ganz genauen Gestalt auf die Messungen menschlicher Körperdimensionen angewendet. Aber nichts hindert, dasselbe auch auf statistische Verhältniszahlen auszudehnen, vorausgesetzt, dass die Verschiedenheit der „Präcision" der Einzelbestimmungen berücksichtigt wird und die Anzahl dieser Einzelbeatimmungen mindestens einige hundert beträgt. Man wird also die statistischen Verhältniszahlen nach dieser Rücksicht in zwei Kategorien teilen können, je nachdem sich nämlich die Einzelwerte um typische Normalwerte der Theorie gemäss gruppieren oder nicht.

4. Zu der ersten Klasse gehört nun, wie im folgenden gezeigt werden soll, die empirische Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt, oder auch, was aus derselben abgeleitet werden kann, das Zahlenverhältnis der Knaben- und Mädchengeburten. Es könnte allerdings scheinen, als ob dieser Nachweis an dem Mangel hinlänglich zahlreicher Einzelbestimmungen jenes Verhältnisses für ein gegebenes Land scheitern müsse. In Wirklichkeit aber ist mehr als ausreichendes Material vorhanden. Denn es ist gar nicht nötig, die einzelnen Werte des Verhältnisses aus den Beobachtungen für das ganze Land und ein ganzes Jahr abzuleiten; jede Provinz oder jeder Bezirk des Landes liefert für jeden Monat einen Wert, den man, zunächst hypothetisch, als mehr oder weniger ungenaue Bestimmung eines für das ganze Land gültigen Normalwertes ansehen kann.

Preussen also mit seinen 35 Regierungsbezirken (abgesehen von Hohenzollern) liefert uns jedes Jahr 420 Bestimmungen des Sexualverhältnisses der Geborenen und diese Zahl genügt schon, um Theorie und Erfahrung zu vergleichen.

Den zwölf monatlichen Werten, welche jeder Regierungsbezirk ergiebt, darf man unbedenklich gleiches Gewicht oder gleiche Präcision zuschreiben; die Bestimmungen aus den einzelnen Bezirken aber, deren durchschnittliche monatliche Geburtenzahl beträchtlich verschieden ist, haben eben deswegen verschiedene Genauigkeitsgrade und dieser Umstand darf bei der theoretischen Feststellung der Fehlergruppen natürlich nicht ausser acht gelassen werden.

5. Wie aber ist die „Präcision" der verschiedenen Beobachtungsgruppen auszudrücken? Die Beantwortung dieser Frage schliesst zugleich die erste der oben angeführten Untersuchungen ein, nämlich die Vergleichung der Ergebnisse der „statistischen" und der „physikalischen" Methode.

Das in der Wahrscheinlichkeitstheorie gebrauchte „Mass der Präcision" ist umgekehrt proportional dem wahrscheinlichen Fehler der auf eine bestimmte Art vollzogenen Beobachtungen. Je grösser der wahrscheinliche Fehler einer Einzelbestimmung, desto kleiner die Präcision der Beobachtungsart, und umgekehrt — das ist ein Satz, der auch dem Nichtmathematiker einleuchtet.

Es ist also zunächst der wahrscheinliche Fehler, d. h. der Fehler, dessen Wahrscheinlichkeit gleich $\frac{1}{2}$ ist, der also ebenso leicht nicht erreicht, wie überschritten werden kann — nach beiden Methoden für die gegebenen Beobachtungen zu berechnen [1]).

Die beobachtete monatliche Geburtenzahl eines Regierungsbezirks sei g, die der Knabengeburten k, so ist das Verhältnis $\frac{k}{g} = v$ die empirische Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt und es besteht die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ dafür, dass die wirkliche objektive Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt w zwischen den Grenzen $v \pm \frac{\varrho\sqrt{2v(1-v)}}{\sqrt{g}}$ liege, wenn durch ϱ die Konstante 0,4769 bezeichnet wird.

Es ist also hier die Grösse w zu vergleichen mit dem wirklich vorhandenen Verhältnis der schwarzen Kugeln zu der Gesamtzahl von schwarzen und weissen Kugeln in einer Urne, g entspricht der Zahl der Züge (mit jedesmaligem Zurücklegen der gezogenen Kugel), v ist ein aus dem Ergebnis der Züge bestimmter Näherungswert von w und der (absolut genommene)

---

1) Man übersehe nicht, dass, wenn im folgenden von dem „Fehler" einer Einzelbestimmung des Sexualverhältnisses die Rede ist, nie an Fehler der statistischen Aufnahme, sondern nur an die Abweichungen des aus der Beobachtung einer Partialmasse resultierenden Wertes von dem Normalwerte gedacht wird

wahrscheinliche Fehler r dieses Näherungswertes ist nach der obigen Formel $= \frac{\varrho \sqrt{2 v (1-v)}}{\sqrt{g}}$.

Der theoretische Ausdruck für die Präcision aber ist $h = \frac{\varrho}{r}$, also nach Einsetzung des Wertes von r ist $h = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2 v (1-v)}}$.

In diesen Ausdrücken von r und h müsste statt v unter dem einem Wurzelzeichen eigentlich der genaue Wert w stehen. Die hier begangene Ungenauigkeit darf indes bei hinlänglich grossem g vernachlässigt werden. Immerhin aber wird man, wenn mehrere, dasselbe w betreffende Beobachtungsreihen vorliegen, statt der verschiedenen v der Einzelreihen den aus der Gesamtheit der Beobachtungen abgeleiteten genauesten Näherungswert von w substituieren.

6. Die Präcisionen der verschiedenen Bestimmungen von w sind demnach proportional den Quadratwurzeln aus den monatlichen Geburtenzahlen der einzelnen Regierungsbezirke — vorausgesetzt, dass wirklich in allen Bezirken und in allen Monaten unverändert dieselbe objektive Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt vorhanden ist. Die Versuche werdeu in diesem Falle gleichsam immer mit derselben Anzahl schwarzer und weisser Kugeln gemacht und die Unterschiede der Genauigkeit der gefundenen Einzelverhältnisse hängen nur von der grösseren oder geringeren Zahl der Versuche in den verschiedenen Reihen ab.

Anders aber würde sich die Sache verhalten, wenn die objektive Wahrscheinlichkeit w selbst sich von Bezirk zu Bezirk und von Monat zu Monat änderte. Angenommen, diese Veränderungen seien nach Raum wie nach Zeit in gleicher Weise *zufällig*, so dass sich alle wie zufällige Beobachtungsfehler um einen Normalwert W gruppieren, so sind die empirischen Verhältnisse v mit Ziehungsresultaten aus Urnen zu vergleichen, welche schwarze und weisse Kugeln nicht in völlig gleichem Verhältnisse enthalten, sondern bei deren Füllung zwar ein bestimmtes Verhältnis W herzustellen *beabsichtigt* war, aber nicht mit voller Genauigkeit zu Werke gegangen worden, so dass zufällige Fehler entstanden sind. Die wahrscheinliche Abweichung eines empirischen Verhältnisses v von dem w der betreffenden Einzelreihe bleibt dieselbe, wie oben; aber die wahrscheinliche

Abweichung dieses v von dem allgemeinen Normalwerte W ist offenbar grösser, indem zur Erzeugung derselben zwei Fehlerursachen zusammenwirken, von denen man die eine die statistische und die andere die physiologische nennen könnte.

7. Bei der zweiten Methode der Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers und der Präcision ergiebt sich für jeden Bezirk direkt die wahrscheinliche Totalabweichung der einzelnen Monatswerte v von dem Normalwerte w dieses Bezirkes. Ist das w für alle Monate gleich geblieben, so erhält man wieder den reinen „statistischen" Fehler und beide Methoden müssen nahezu dasselbe Resultat liefern. Ist dagegen das objektive Wahrscheinlichkeitsverhältnis von Monat zu Monat zufälligen Störungen unterworfen, so muss die physikalische Methode einen grösseren wahrscheinlichen Fehler ergeben, als die statistische.

Bei Anwendung dieser zweiten Methode werden ganz andere Elemente als gegeben angenommen als bei der ersten. Es sind in n Versuchsreihen mit unbekannter, aber gleicher Anzahl von Ziehungen die n empirischen Verhältnisse $v_1, v_2, v_3 \ldots v_n$ bestimmt worden (während das Verhältnis der schwarzen und weissen Kugeln in der Urne möglicherweise von einer Serie zur anderen zufällige Aenderungen erfahren hat) — und es wird gefragt nach der wahrscheinlichen Abweichung eines solchen, unter den vorliegenden Bedingungen bestimmten Verhältnisses von der objektiven Wahrscheinlichkeit des Ziehens einer schwarzen Kugel.

Es wird hier der sogenannte mittlere Fehler zu Hülfe genommen, der eine allgemein plausible Bedeutung hat. Eine der wesentlichsten Eigenschaften der zufälligen Fehler ist die, dass positive und negative Fehler von gleicher Grösse gleich wahrscheinlich sein müssen. Die Fehler müssen daher ohne Rücksicht auf ihr Vorzeichen behandelt werden, und es liegt somit nahe, das Mittel aus den Quadraten derselben zu benutzen, weil dieses eben eine mit der absoluten Grösse der Fehler wachsende, aber von dem Vorzeichen der einzelnen unabhängige Grösse ist. Die Wurzel aus dem mittleren Fehlerquadrat wird nun der „mittlere Fehler" genannt, der sich von dem wahrscheinlichen Fehler nur durch einen konstanten Fehler unterscheidet.

Ist also w der wahre Wert der normalen Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt in einem gegebenen Bezirke und sind $v_1, v_2, v_3 \ldots v_{24}$ die beobachteten Werte derselben in 24 aufeinander folgenden Monaten, setzt man ferner $v_1 - w = \delta_1$, $v_2 - w = \delta_2 \ldots v_{24} - w = \delta_{24}$, so ist der mittlere Fehler eines v gleich $\sqrt{\frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \ldots \delta_{24}^2}{24}}$ oder mit abgekürzter Bezeichnung der Quadratsumme: $\sqrt{\frac{[\delta^2]}{24}}$.

Der wahrscheinliche Fehler aber ist, wie die Theorie zeigt, gleich dem mittleren multipliziert mit $\varrho \sqrt{2}$, wo ϱ wieder die oben angegebene Konstante bedeutet, und es ist demnach bei n mit gleicher Präcision bestimmten Werten v der wahrscheinliche Fehler des Einzelwertes $r = \varrho \sqrt{\frac{2[\delta^2]}{n}}$ und die Präcision der Einzelbestimmung $h = \frac{\varrho}{r} = \sqrt{\frac{n}{2[\delta^2]}}$.

Diese Werte von r und h müssten also den nach der ersten Methode bestimmten gleich sein, wenn die Einzelbestimmungen v nur mit dem statistischen und nicht auch mit einem physiologischen Fehler behaftet sind. Ist aber dieses letztere der Fall, so wird die zweite Methode ein grösseres r und ein kleineres h ergeben.

Jedoch ist noch folgendes zu bemerken:

In dem Ausdruck für den mittleren Fehler kommen die Quadrate der Abweichungen der Einzelbestimmungen von dem wahren Werte vor. Die Bildung der Differenzen δ würde also die Kenntnis dieses wahren Wertes voraussetzen, die wir aber nicht besitzen, Es bleibt nichts übrig, als statt dieses unbekannten wahren Wertes w den wahrscheinlichsten zu benutzen, welcher durch das arithmetische Mittel V der n Einzelbestimmungen von gleicher Präcision dargestellt wird. Durch diese Substitution von V für w wird aber der Ausdruck des mittleren Fehlers ungenau, und die Theorie lehrt nun, dass man dem wirklichen Wert desselben möglichst nahe kommt, wenn man die Summe der Quadrate der Abweichungen von V statt durch n durch $n - 1$ dividiert.

Der wahrscheinliche Fehler wird also, wenn die Differenzen δ sich auf das arithmetische Mittel V beziehen, $r = \varrho \sqrt{\frac{2\,[\delta^2]}{n-1}}$ und die Präcision $h = \sqrt{\frac{n-1}{2\,[\delta^2]}}$.

Aber auch die so korrigierten Werte von r und h sind nur Wahrscheinlichkeitsbestimmungen, deren Genauigkeit um so geringer ist, je kleiner die Zahl n der Einzelwerte ist. So ist der wahrscheinliche Fehler eines auf diese Art bestimmten h gleich $\frac{\varrho h}{\sqrt{n}}$, also, wenn z. B. $n = 24$, gleich 0,097 h, nahezu 10 Prozent des Wertes von h (in positiver und negativer Richtung).

Für $n = 24$ darf man also sehr hohe Erwartungen hinsichtlich der Uebereinstimmung der nach der statistischen oder direkten Methode einerseits und nach der physikalischen andererseits bestimmten Werte von h nicht hegen.

8. Im folgenden stellen wir nun eine Vergleichung der Wertbestimmungen von h nach beiden Methoden an, wobei jedoch als Beobachtungsobjekt nicht, wie bisher, die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt, sondern die Zahl z der Knaben genommen wird, die auf 1000 Mädchen geboren werden. Die physikalische Methode ist auf diese Beobachtungsgrösse unmittelbar anwendbar, die statistische aber nur nach einer besonderen Vorbereitung.

In den Formeln dieser letzteren stellt nämlich die Grösse v wesentlich eine Wahrscheinlichkeit dar. Die Zahl z dagegen ist keine Wahrscheinlichkeit, wohl aber lässt sie sich als Funktion von v ausdrücken. Ist p das Verhältnis der Knabengeburten zu den Mädchengeburten, so ist $z = 1000\,p$ (mit Vernachlässigung der Bruchstellen); andererseits aber hat man zwischen v und p die Beziehung:

$$p = \frac{v}{1-v}.$$

Ist nun r_1 der wahrscheinliche Fehler von v und darf derselbe als verhältnismässig klein angenommen werden, so lässt sich zeigen, dass der wahrscheinliche Fehler von p sehr nahe gleich $\frac{r_1}{(1-v)^2}$ ist.

Hieraus folgt als wahrscheinlicher Fehler von z, den wir jetzt mit r bezeichnen:

$$r = \frac{1000\,\varrho\sqrt{2\,v\,(1-v)}}{(1-v)^2\sqrt{g}}$$

und als Präcision der Einzelbestimmung von z:

$$h = \frac{(1-v)^2}{1000\,\sqrt{2\,v\,(1-v)}}\,\sqrt{g}.$$

Dieser Wert von h muss mit dem nach der zweiten Methode bestimmten innerhalb gewisser Fehlergrenzen übereinstimmen, wenn die Ungleichheiten der Einzelwerte von z nur aus der statistischen Fehlerquelle entspringen — vorausgesetzt natürlich, dass unsere Grundanschauung von der Zufälligkeit der Fehler berechtigt ist.

Da wir für jeden Regierungsbezirk 24 Einzelwerte von z benutzen, so würden streng genommen für jeden auch 24 verschiedene Werte von h zu berechnen sein, entsprechend den Verschiedenheiten der Geburtenzahlen g in den einzelnen Monaten. Der Einfachheit wegen nehmen wir jedoch, was ohne Bedenken für unseren Zweck gestattet ist, für g in jedem Bezirk die mittlere monatliche Geburtenzahl in den beiden betrachteten Jahrgängen 1868 und 1869, indem wir die Totalsumme der männlichen und weiblichen Geborenen (einschliesslich der Totgeborenen) jedes Bezirkes in den beiden Jahren durch 24 dividieren.

Für v aber nehmen wir durchweg den möglichst genauen Wert der Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt in Preussen, nämlich die Zahl sämtlicher Knabengeburten in dem ganzen Staatsgebiet (mit Ausschluss jedoch von Hohenzollern, des Jadegebiets und des Militärs im Auslande) während der beiden Jahre 1868 und 1869, dividiert durch die entsprechende Gesamtzahl der Knaben- und Mädchengeburten. Demnach ist $v = 0{,}515$ und $1-v = 0{,}485$, und der Bruch, mit dem $\sqrt{g}$ in dem obigen Ausdruck für h multipliziert ist, behält für alle Regierungsbezirke denselben Wert, nämlich $b = 0{,}0003328$, dessen Logarithmus $= 0{,}52219-4$.

Die Bestimmung der Präcision nach der statistischen Methode ist also sehr einfach.

Für den Regierungsbezirk Königsberg und die Jahre 1868 und 1869 z. B. hat man die mittlere Geburtenzahl (incl. Totgeb.) $g = 3426$, also $\log \sqrt{g} = 1{,}76740$

$$\begin{aligned} \log b & \quad 0{,}52219-4 \\ \hline \log h & = 0{,}28959-2, \text{ oder } h = 0{,}0195. \end{aligned}$$

10. Fügen wir nun die vollständige Berechnung von h nach der physikalischen Methode bei.

Die zwölf Monate von 1868 ergeben für Königsberg folgende Einzelbestimmungen von z:

1067 — 1111 — 1068 — 1041 — 1024 — 1055
1007 — 1037 — 1059 — 992 — 1001 — 1073

und für 1869 hat man die Monatswerte:

1044 — 1053 — 1098 — 985 — 1069 — 1085
1089 — 1009 — 1059 — 1058 — 1043 — 1089

Es sind dieses 24 Beobachtungswerte derselben Grösse, denen wir gleiche Präcision beilegen dürfen[1]). Der wahrscheinlichste Wert von z würde also nach dieser Beobachtungsreihe gleich dem arithmetischen Mittel aus jenen 24 Werten sein, also = 1051.

Demnach ergeben sich folgende Abweichungen vom wahrscheinlichsten Werte:

$+16, +60, +17, -10, -27, +4, -44, -14$
$+8, -59, -50, +22,$
$-7, +2, +47, -66, +18, +34, +38, -42$
$+8, +7, -8, +38.$

Die Summe der Quadrate dieser Abweichungen, also $[\delta^2]$ ist $= 26578$. Um die Ungenauigkeit des arithmetischen Mittels möglichst unschädlich zu machen, nimmt man bei der Bestimmung des mittleren Fehlerquadrats nicht 24, sondern 23 als Divisor, und somit findet man als Ausdruck der Präcision:

$$h = \sqrt{\frac{23}{2 \cdot 26578}} = 0{,}0208.$$

Dieser Wert stimmt mit dem nach der ersten Methode berechneten so gut überein, wie man nur irgend erwarten kann,

1) Dies heisst natürlich nicht, dass die Einzelwerte alle gleich richtig sind, sondern dass alle unter gleichen Genauigkeitsbedingungen, speziell aus annähernd gleichen Geburtenzahlen abgeleitet sind.

wenn man bedenkt, dass die zweite Methode bei Zuziehung von nur 24 Beobachtungswerten einen wahrscheinlichen Fehler von nahezu $^1/_{10}$ des gefundenen Wertes zulässt -- der ebenso leicht überschritten, als nicht erreicht wird. So sind also die oben zusammengestellten Abweichungen, eben weil sie zufällige sind, doch durch ein gewisses gemeinschaftliches Band gleichsam gezügelt; ihre Grösse ist bedingt durch die in der zweiten Formel für h gar nicht vorkommende mittlere Geburtenzahl des Bezirks, dergestalt, dass man diese letztere Zahl mit Hülfe des eben gefundenen Wertes von h und des allgemeinen Ausdrucks der Präcision nach der ersten Methode annähernd bestimmen kann.

Man hat nämlich, wenn b den oben angegebenen Bruch bezeichnet:

$$0{,}0208 = b \sqrt{g}$$

und hieraus $g = 3907$, welche Zahl von der wirklich erhobenen 3426 nicht übermässig abweicht, wenn man die oben erwähnte Unsicherheit des angewandten Wertes von h in Betracht zieht.

11. Im folgenden sind nun nach dem Material von 1868 und 1869 die Präcisionen für 34 Bezirke nach den beiden dargelegten Methoden berechnet und zur Vergleichung zusammengestellt. Die Resultate der statistischen Methode stehen unter S, die der physikalischen unter Q. Die Bezirke Aurich und Osnabrück sind wegen der gar zu kleinen monatlichen Geburtenzahl des ersteren zu einem Bezirk zusammengefasst, Hohenzollern, das Jadegebiet und das Militär im Auslande aber ganz weggelassen.

Bezirk	g	S	Q
Königsberg	3426	0,0195	0,0208
Gumbinnen	2275	0159	0144
Danzig	1830	0142	0151
Marienwerder . . .	2918	0180	0249
Berlin	2448	0165	0158
Potsdam	3028	0183	0176
Frankfurt	3211	0189	0185
Stettin	2167	0155	0166
Cöslin	1844	0143	0119
Stralsund	639	0086	0096
Posen	3738	0203	0205
Bromberg	2133	0154	0145
Breslau	4766	0230	0205
Liegnitz	2975	0182	0163
Oppeln	4855	0232	0214
Magdeburg	3650	0171	0174

Bezirk	g	S	Q
Merseburg	2899	0179	0146
Erfurt	1235	0117	0142
Schleswig	2715	0173	0118
Hannover	1142	0112	0130
Hildesheim	1200	0115	0114
Lüneburg	975	0104	0094
Stade	879	0099	0093
Aurich-Osnabrück .	1220	0116	0122
Münster	1118	0111	0092
Minden	1464	0127	0141
Arnsberg	2918	0180	0177
Cassel	2441	0164	0189
Wiesbaden	1837	0143	0108
Coblenz	1700	0137	0131
Trier	1901	0145	0148
Köln	1936	0146	0149
Düsseldorf	4305	0218	0247
Aachen	1485	0128	0151

12. Die Uebereinstimmung der Ergebnisse beider Methoden ist völlig befriedigend, denn eigentlich tritt nur ein einziges Mal, nämlich bei Marienwerder, eine Differenz auf, welche den wahrscheinlichen Fehler der zweiten Methode in auffallender Weise überschreitet. Das heisst also, es sind im Bezirk Marienwerder bei 24 Einzelbestimmungen von z ausnahmsweise die Abweichungen von Mittel im ganzen erheblich kleiner gewesen, als man es nach der Präcision dieser Bestimmungen und dem Spielraum, den die mittlere Geburtenzahl in diesem Bezirke gestattet, erwarten sollte.

In allen Fällen, in denen die Ziffer unter Q kleiner ist, als die unter S, ist man streng genommen gar nicht genötigt, sich auf den wahrscheinlichen Fehler der zweiten Bestimmung zu berufen. Man könnte annehmen, dass neben dem statistischen Fehler der Einzelbestimmungen von z auch noch ein physiologischer mit im Spiele sei, indem der Normalwert von Monat zu Monat in jedem Bezirke zufälligen Schwankungen unterworfen sei. Dann muss, wie bereits oben bemerkt wurde, die zweite Methode notwendig eine geringere Präcision ergeben.

Nun ist allerdings 19mal der Wert unter Q kleiner als der unter S, während das Umgekehrte nur 15mal vorkommt; auch ist das Mittel der Werte unter Q gleich 0,0154, während das Mittel der nach der ersten Methode berechneten h etwas grösser ist, nämlich 0,0156. Gleichwohl scheint es nicht zutreffend, einen physiologischen Fehler zur Erklärung der Differenzen in den

19 Fällen ersterer Art anzunehmen, da die 15 anderen Fälle doch nur durch die Unsicherheit der zweiten Methode erklärt werden können und vermöge eben dieser Ungenauigkeit auch recht wohl die 19 Differenzen nach der anderen Richtung auftreten können.

Somit ist also die Annahme berechtigt, dass der Normalwert von z in den 24 Monaten ungeändert bleibe.

13. Die vorstehende Doppelbestimmung der Präcisionen hat schon an sich ein unbestreitbares Interesse, da sie zwischen scheinbar voneinander unabhängigen Grössen einen der Wahrscheinlichkeitstheorie entsprechenden Zusammenhang nachweist. Ausserdem jedoch ist sie uns ein Mittel zur Feststellung der theoretisch zu erwartenden Gruppierung der Einzelbestimmungen um den wahrscheinlichsten Wert, die wir mit der beobachteten Gruppierung zu vergleichen wünschen.

Die hier anzuwendende Formel ist folgende. Wird der Abstand einer Einzelbestimmung von dem wahren Werte mit x (positiv oder negativ) und die Differenz x'—x zweier nahe auf einanderfolgender Werte von x mit $\varDelta$x bezeichnet, so ist die theoretische Wahrscheinlichkeit, dass bei Bestimmungen, die mit einer gegebenen Präcision angestellt werden, ein Einzelwert in die Strecke x'—x fallen werde, gleich

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} h\varDelta x$$

wenn π, wie gewöhnlich, die Ludolph'sche Zahl, e die Basis des natürlichen Logarithmensystems, also 2,71828, und h die Präcision bezeichnet.

Die obige Formel gilt ganz allgemein für alle möglichen Arten von Bestimmungen feststehender Grössen, die nur mit zufälligen Fehlern behaftet zur Beobachtung gelangen; die Spezialisierung derselben für die besonderen Fälle der Anwendung erfolgt lediglich durch die einzige Grösse h, den quantitativen Ausdruck der Präcision. Wir können diese Wahrscheinlichkeit daher zweckmässigerweise darstellen durch das Funktionssymbol $\varphi(x,h)\varDelta x$, in dem neben der Veränderlichen x die spezifische Konstante h angegeben ist.

Setzt man nun in diesen Wahrscheinlichkeitsausdruck, immer um dieselbe kleine Strecke $\varDelta$x fortschreitend, nacheinander alle

Werte von $x = o$ bis $x = X$ ein und summiert die Resultate, so ergiebt sich die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler einer Einzelbestimmung zwischen o und dem beliebigen Werte X falle, und das Doppelte dieser Summe stellte, da die positiven und negativen zufälligen Fehler von gleicher absoluter Grösse gleich wahrscheinlich sind, die Wahrscheinlichkeit eines zwischen $-X$ und $+X$ fallenden Fehlers dar.

Eine allgemeine brauchbare Tabelle über diese Wahrscheinlichkeit bei regelmässig fortschreitenden X könnte man indes auf diese Weise nicht herstellen, weil diese Wahrscheinlichkeiten nur für ein bestimmtes h gelten dürfen. Um diese Schwierigkeit zu beseitigen, setze man $hx = t$ und beachte, dass $h\Delta x = hx' - hx = t' - t$, also gleich der konstanten Differenz Δt zweier aufeinanderfolgender (d. h. je zweien um Δx voneinander abstehenden Werten von x entsprechender) Werte von t. Der obige Exponentialausdruck verwandelt sich alsdann in

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} \Delta t,$$

worin keine spezifische Konstante vorkommt und wofür wir das Symbol $\psi(t)\Delta t$ setzen wollen. Wenn man nun in diesen Ausdruck, nach der konstanten kleinen Differenz Δt fortschreitend, für t alle Werte von o bis zu der beliebigen Grösse u einsetzt und die Resultate addiert, so erhält man eine Summe, die wir ausdrücken durch das Symbol

$$\sum_{o}^{u} \psi(t)\Delta t.$$

Diese Summe stellt die Wahrscheinlichkeit dar, dass der Fehler eines Einzelwertes der Beobachtungsgrösse zwischen den Grenzen x liegt, welche den Grenzwerten von t, also o und u entsprechen, also abzuleiten sind aus den Gleichungen: $o = hx$ und $u = hx$, d. h. zwischen den Grenzen $x = o$ und $x = \frac{u}{h}$.

Verdoppelt man die obige Summe und setzt man

$$2 \sum_{o}^{u} \psi(t)\Delta t = F_u,$$

so ist F_u gleich der Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler der Einzelbeobachtung zwischen den Grenzen $-\frac{u}{h}$ und $+\frac{u}{h}$ liegt.

Ferner ist leicht zu sehen, dass $F_U - F_u$ die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, dass der Fehler in den beiden Strecken $+\frac{u}{h}$ bis $+\frac{U}{h}$ einerseits und $-\frac{u}{h}$ bis $-\frac{U}{h}$ andererseits liege.

14. Nun wird aber der Ausdruck F_u, wenn Δt unendlich klein genommen wird, zu einem bestimmten Integral, und es lässt sich daher ohne Schwierigkeit eine Tabelle berechnen, in welcher für eine Reihe von Werten von u der zugehörige Wert der Summe F_u angegeben ist. Diese Tabelle ist ganz unabhängig von der besonderen Art der Beobachtungen, die man vor sich hat; sie ist allgemein anwendbar, weil, wie bereits bemerkt wurde, in dem Ausdruck $\varphi(t)\Delta t$ keine spezifische Konstante enthalten ist.

Nachstehend ist zur Erleichterung des Verständnisses des Folgenden aus einer solchen Tabelle ein Bruchstück abgekürzt angeführt[1]).

u	F_u	u	F_u	u	F_u
0,30	0,329	0,60	0,604	0,90	0,797
0,31	0,339	0,61	0,612	0,91	0,802
0,32	0,349	0,62	0,619	0,92	0,807
0,33	0,359	0,63	0,627	0,93	0,812
0,34	0,369	0,64	0,635	0,94	0,816
0,35	0,379	0,65	0,642	0,95	0,821
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Hat man also für irgend eine Beobachtungsart die Präcision h, so ist z. B. 0,329 die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler einer Einzelbestimmung zwischen $-\frac{0,30}{h}$ und $+\frac{0,30}{h}$ falle.

Es ist ferner 0,604—0,329 oder 0,275 die Wahrscheinlichkeit, dass die Abweichung zwischen $+\frac{0,30}{h}$ und $+\frac{0,60}{h}$ auf der einen und $-\frac{0,30}{h}$ und $-\frac{0,60}{h}$ auf der anderen Seite falle.

Wenn nun die Zahl der Einzelbestimmungen eine sehr grosse ist, so werden die Abweichungen sich annähernd ihrer abstrakten Wahrscheinlichkeit gemäss gruppieren, d. h. es werden sich von 1000

1) Eine vollständige Tabelle bis u = 2 findet sich im Berliner Astronomischen Jahrbuch für 1834, S. 305, bis u = 3 in Cournot's Wahrscheinlichkeitsrechnung (Deutsch von Schnuse), S. 221, in Quetelet's „Lettres sur la théorie des probabilités, p. 389, und anderwärts. Eine abgekürzte ist am Schlusse dieses Werkes beigefügt.

Beobachtungen annähernd 329 Fehler ergeben, welche zwischen $-\frac{0,30}{h}$ und $+\frac{0,30}{h}$ fallen, und ungefähr 275 Fehler vorkommen, die in der oben angegebenen Doppelstrecke liegen, und zwar so, dass auf die positive und die negative Strecke annähernd gleich viele kommen.

Bei der uns vorliegenden Untersuchung haben wir im ganzen 816 Einzelbestimmungen von z, geteilt in 34 Gruppen zu 24 mit mehr oder weniger verschiedenen Präcisionen, während diese eigentlich gleich sein sollen.

Wenn indes die einzelnen Gruppen in ihrer Grösse nicht allzu weit voneinander abweichen, so wird die theoretische Verteilung der Fehler der Beobachtungsgrösse annähernd dieselbe sein, als wenn alle Beobachtungen eine gleiche, nämlich die mittlere Präcision besessen hätten.

Nun berechnet sich in unserem Beispiele diese mittlere Präcision, wie bereits angeführt wurde, aus der Kolonne S zu 0,0156, aus der Kolonne Q aber zu 0,0154.

Im allgemeinen wird man die Regel aufstellen dürfen, dass die mittlere Präcision aus den Ergebnissen der physikalischen Methode zu entnehmen ist, wenn diese letzteren durchweg oder ganz überwiegend merklich kleinere Werte haben, als die nach der statistischen Methode bestimmten h. Anderenfalls aber, und somit auch in unserem Beispiele, wird man dem aus den letzteren abgeleiteten Mittel den Vorzug geben.

Sind die einzelnen Gruppen zu verschieden, so zerlege man sie nach ihrer Grösse in zwei oder mehrere Abteilungen und berechne für jede die mittlere Präcision und die theoretische Verteilung.

15. Da die Präcision der Einzelbestimmungen aus den 34 Bezirken annähernd der Wurzel aus den mittleren Geburtenzahlen proportional ist, so ist nach unserem Material der wahrscheinlichste Wert des normalen, für das ganze Gebiet gleichen z derjenige, welcher sich aus der Gesamtzahl aller Knaben- und aller Mädchengeburten des ganzen Gebietes in den beiden Jahren 1868 und 1869 berechnet, nämlich 1063. Diesen wahrscheinlichsten Wert nehmen wir als den wahren an und bilden nun folgende Rubriken, die durch Ausstrichelung mit den beobachteten 816 Einzelwerten auszufüllen sind: 1063, 1064 bis 1072, 1073 bis 1082 u. s. w. bis zur vorletzten „1153 bis 1162“ und der letzten

„1163 und mehr"; und auf der negativen Seite: 1054 bis 1062, 1044 bis 1053 u. s. w. bis zur letzten „963 und weniger".

Die mittlere Rubrik 1063 kann angesehen werden als die Abweichungen zwischen — ½ und + ½ umfassend, auf die Rubrik 1064 bis 1072 kommen die Fehler zwischen + ½ und + 9½, auf die Rubrik 1073 bis 1082 diejenigen von + 9½ bis + 19½ u. s. w. Aehnlich entspricht die erste Rubrik auf der negativen Seite den Abweichungen von — ½ bis — 9½, die folgende den Fehlern zwischen — 9½ und — 19½ u. s. w.

Die so erhaltenen Fehlergruppen vergleichen wir indes nicht unmittelbar mit der theoretischen Verteilung, sondern wir fassen sie zu je zweien zusammen und teilen überdies die (10) Fälle der Rubrik 1063 zur Hälfte der positiven und zur Hälfte der negativen Seite zu.

So erhält man folgende Tabelle:

Fehler	Beobachtete Fälle			Theorie
(±)	(+)	(—)	(±)	(±)
0 bis 19½	152	130	282	272
19½ „ 39½	96	118	214	231
39½ „ 59½	74	61	135	159
59½ „ 79½	46	48	94	90
79½ „ 99½	25	22	47	42
Ueber 99½	29	15	44	23

Die theoretischen Zahlen sind auf folgende Art berechnet.

Als mittlere Präcision H haben wir den oben nach der statistischen Methode bestimmten Wert 0,0156. Allerdings trifft die Bedingung, dass die Einzelpräcisionen von diesem Mittel nicht erheblich abweichen dürfen, für mehrere derselben nicht zu, und man darf daher eine sehr genaue Uebereinstimmung zwischen den berechneten und beobachteten Zahlen nicht erwarten.

Die erste Fehlergrenze ist nun ± 19½ und das derselben entsprechende Tabellenargument u ist also $= 0{,}0156 \cdot 19\tfrac{1}{2} = 0{,}304$.

Für diesen Wert von u giebt die Tabelle der F_u (s. das Bruchstück S. 222) 0,333 als die Wahrscheinlichkeit, dass die Abweichungen der Einzelbestimmungen in die Doppelstrecke 0 bis ± 19½ fallen.

Wenn nun schon bei 816 Beobachtungen die Verteilung der Abweichungen nach ihrer abstrakten Wahrscheinlichkeit genau hervorträte — was indes nur näherungsweise zu erwarten ist — so würden auf die erste Fehlergruppe 272 Fälle kommen. Die

Beobachtung ergiebt 282, und diese Uebereinstimmung ist trotz der nicht ganz gleichmässigen Verteilung der Fälle auf die positive und die negative Seite sehr befriedigend.

Nehmen wir nun die Fehlergrenze auf der positiven wie auf der negativen Seite gleich $39\frac{1}{2}$, so ist das Tabellenargument $u = 0{,}0156 \cdot 39\frac{1}{2} = 0{,}616$, demnach F_u oder die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen $-39\frac{1}{2}$ und $+39\frac{1}{2}$ falle, zufällig ebenfalls 0,616, und die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zwischen $\pm 19\frac{1}{2}$ und $\pm 39\frac{1}{2}$ gleich $0{,}616 - 0{,}333$ oder 0,283, so dass, wenn die Verteilung nach der theoretischen Wahrscheinlichkeit erfolgte, bei 816 Beobachtungen 231 Abweichungen in die zuletzt bezeichnete Doppelstrecke fallen würden. Die beobachtete Zahl ist 214.

In ähnlicher Weise findet man für die Fehlergrenze $\pm 59\frac{1}{2}$ das Argument $u = 0{,}928$ (dasselbe wächst für eine Zunahme der Fehlergrenze von 20 immer um 0,312); die Tabelle ergiebt für die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers in diesen Grenzen 0,811, für die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers innerhalb der Doppelstrecke $\pm 39\frac{1}{2}$ bis $\pm 59\frac{1}{2}$, aber $0{,}811 - 0{,}616 = 0{,}195$, wonach bei 816 Beobachtungen am wahrscheinlichsten 159 Fehler in diesen Grenzen zu erwarten wären. Und in derselben Weise wird die Rechnung weiter geführt.

Dass die theoretischen Zahlen zusammen 817 statt 816 ausmachen, erklärt sich aus den Abrundungen der letzten Stellen.

16. Die verhältnismässig stärkste Differenz zwischen Theorie und Beobachtung zeigt sich in der letzten Fehlergruppe. Dieselbe findet jedoch darin ihre Erklärung, dass einige Beobachtungsreihen (wie die für Stralsund, Stade, Lüneburg mit $h = 0{,}009$ bis 0,010) verhältnismässig sehr kleine Präcisionen haben, so dass also auch beträchtlich mehr Einzelbestimmungen über die Grenze 1163 einerseits und 963 andererseits hinausfallen werden, als man es bei der Annahme einer gleichmässigen Mittelpräcision (0,0156) erwarten darf.

Man findet im Bezirk Stralsund (1868, Oktober und November) die extremen Werte 919 und 1240, im Bezirk Stade (1868, Januar und November) 977 und 1265.

Auf den ersten Blick erscheint die Unsymmetrie der sich entsprechenden Gruppen auf der positiven und negativen Seite nicht unerheblich. Aber es findet eine befriedigende Ausgleichung zwischen den aneinander stossenden Gruppen statt. Wenn man die berechneten Zahlen halbiert, um die nach der Theorie auf jede Seite kommenden Fälle zu erhalten, so ergiebt die Vergleichung grösserer Gruppen folgendes:

Fehler	Beobachtete Fälle		Theorie
(+)	(+)	(—)	(+ u. —)
0 bis $39\frac{1}{8}$	248	248	$251\frac{1}{2}$
$39\frac{1}{2}$ „ $79\frac{1}{2}$	120	109	$124\frac{1}{2}$
$79\frac{1}{2}$ „ $99\frac{1}{2}$	25	22	$21\frac{1}{2}$

Wenn überhaupt auf die negative Seite 394, auf die positive aber 422 Fehler kommen, so ist die Differenz hauptsächlich durch die Unregelmässigkeit der extremen Abweichungen über $\pm 99\frac{1}{2}$ entstanden.

17. Um der Bedingung, dass die Einzelpräcisionen von der Mittelpräcision nicht weit abweichen dürfen, besser zu genügen, als in dem obigen Beispiele, teilen wir die 34 Bezirke nach ihrer mittleren monatlichen Geburtenzahl in zwei Abteilungen von je 17. Die erste umfasst die Bezirke Königsberg, Gumbinnen, Marienwerder, Berlin, Potsdam, Frankfurt, Stettin, Posen, Breslau, Liegnitz, Oppeln, Magdeburg, Merseburg, Schleswig, Arnsberg, Düsseldorf, Kassel, mit Geburtenzahlen von 2167 (Stettin) bis 4855 (Oppeln).

Zu der zweiten gehören: Danzig, Bromberg, Köslin, Stralsund, Erfurt, Hannover, Hildesheim, Lünneburg, Stade, Aurich-Osnabrück, Münster, Minden, Wiesbaden, Koblenz, Trier, Köln, Aachen, mit Geburtenzahlen von 639 (Stralsund) bis 2133 (Bromberg).

Das Minimum und Maximum der Präcision (nach der statistischen Methode) ist in der ersten Abteilung 0,0155 und 0,0231, der Mittelwert H = 0,0188.

In der zweiten Abteilung sind die entsprechenden Zahlen 0,0086 und 0,0154 und das Mittel 0,0125.

Wir stellen nun für die erste Abteilung die beobachtete Gruppierung der Abweichungen der 408 Einzelbestimmungen von dem Werte 1063, den wir durchweg als den wahren ansehen, mit der auf Grund der Mittelpräcision 0,0188 berechneten theoretischen Verteilung der Fehler zusammen:

Fehler	Beobachtete Fälle			Theorie
(±)	(+)	(—)	(±)	(±)
0 bis 19½	83½	73½	157	161
19½ „ 39½	56	65	121	126
39½ „ 59½	48	33	81	74
59½ „ 79½	17	11	28	32
79½ „ 99½	7	8	15	11
Ueber 99½	3	3	6	3

Die Uebereinstimmung der beiden letzten Kolonnen ist sehr befriedigend; denn dass die sehr grossen Fehler etwas zahlreicher vorkommen, als die Theorie angiebt, war wegen der in der ersten Abteilung enthaltenen Beobachtungsreihen mit verhältnismässig geringer Präcision von vornherein zu erwarten.

Auf die positive Seite kommen im ganzen 214½, auf die negative 193½ Abweichungen.

Beim Zusammenfassen grösserer Gruppen erscheint die Verteilung genügend symmetrisch:

Fehler	Beobachtete Fälle		Theorie
(±)	(+)	(—)	(+ u. —)
0 bis 39½	139½	138½	144
39½ „ 99½	72	52	58½

Möglicherweise entsteht übrigens die Asymmetrie in diesem und in anderen Fällen durch die Ungenauigkeit des Mittelwertes 1063, der nur als der wahrscheinlichste aus den Beobachtungen des ganzen Gebietes abgeleitet ist.

Nimmt man statt desselben 1066, das arithmetische Mittel aus den 408 Einzelwerten der grösseren Bezirke, so erhält man folgende Verteilung:

Fehler	Beobachtete Fälle		Theorie
(±)	(+)	(—)	(+ u. —)
0 bis 19½	78	77	81
19½ „ 39½	57	65	63
39½ „ 59½	41	43	37
59½ „ 79½	16	9	16
79½ „ 99½	5	9	5½
Ueber 99½	3	5	1½

Die Gesamtzahl der positiven Fehler ist jetzt 200, die der negativen 208, und auch in den verhältnismässig kleinen Abstufungen gruppieren sich die Fehler auf beiden Seiten um den Ausgangswert 1066 im ganzen wohl besser, als um 1063,

18. Eine genauere Erörterung über die Wahl des Ausgangswertes würde indes hier zu weit führen und wir nehmen daher auch im folgenden 1063 als den wahren Wert von z an.

Für die 17 kleineren Bezirke ergiebt sich dann unter Annahme der Mittelpräcision $= 0{,}0125$ die folgende Vergleichung:

Fehler	Beobachtete Fälle			Theorie
(±)	(+)	(—)	(±)	(±)
0 bis 19½	68½	56½	125	110
19½ „ 39½	40	53	93	100
39½ „ 59½	26	28	54	78
59½ „ 79½	29	37	66	54
79½ „ 99½	18	14	32	33
Ueber 99½	26	12	38	32

Die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung ist nicht so mangelhaft, wie man auf den ersten Blick glauben könnte. Wegen der geringen mittleren Präcision verbreiten sich die Fehler nach beiden Seiten hin über verhältnismässig grosse Strecken. Die Wahrscheinlichkeitskurve, die im vorigen Falle rechts und links vom Maximum rasch abfiel, hat jetzt eine langgestreckte Form angenommen. Auf die einzelnen Fehlerstrecken kommen verhältnissmäsig kleine Gruppen und es ist kein Wunder, wenn in diesen die objektive Verteilungswahrscheinlichkeit noch nicht klar zum Ausdruck gelangt.

Fasst man aber einige dieser Strecken zusammen, so findet man:

Fehler	Beobachtete Fälle		Theorie
(±)	(+)	(—)	(+ u. —)
0 bis 39½	108½	109½	105
39½ „ 79½	55	65	66
79½ „ 99½	18	14	16½
Ueber 99½	26	12	16

Mit diesem Ergebnis darf man zufrieden sein. Es sei noch bemerkt, dass die Gesamtzahl der positiven Fehler 207½, die der negativen 200½ ausmacht.

19. Denkt man sich die korrespondierenden theoretischen Fehlergruppen der beiden Kategorien von Bezirken gleichsam zusammengelegt, so ergiebt sich eine theoretische Verteilung der sämtlichen 816 Beobachtungsfehler, die korrekter ist, als die oben mit Hülfe einer einzigen Mittelpräcision abgeleitete. Zur Vergleichung stellen wir die beobachteten Abweichungen (positive und negative vereinigt) und die oben nach der ungenaueren Methode bestimmten (a) mit den auf dem soeben angegebenen Wege berechneten Gruppen (b) zusammen:

Fehler (±)	Beobachtet (±)	Berechnet (a)	Berechnet (b)
0 bis 19½	282	272	272
19½ „ 39½	214	231	226
39½ „ 59½	135	159	152
59½ „ 79½	94	90	86
79½ „ 99½	47	42	44
Ueber 99½	44	23	35

Die korrektere Rechnungsmethode weist also auch eine bessere Uebereinstimmung mit den Beobachtungen auf. Ein noch besseres theoretisches Resultat würde man erhalten, wenn man die Bezirke in drei oder noch mehr Abteilungen zerlegte, für jede Abteilung eine mittlere Präcision und mit deren Hilfe die theoretische Verteilung der Fehler berechnete und endlich die entsprechenden Fehlergruppen zusammenlegte.

20. Anstatt indes diesen Weg hier weiter zu verfolgen, wollen wir die allzu kleinen Präcisionen dadurch beseitigen, dass wir eine Anzahl Bezirke paarweise zusammenfassen.

Ausser den oben angeführten Bezirken der ersten Abteilung lassen wir Danzig, Bromberg und Wiesbaden als selbständige Beobachtungsgebiete stehen. Die übrigen 14 aber werden vereinigt, wie es die folgende Uebersicht angiebt, welche zugleich die mittleren monatlichen Geburtenzahlen der vereinigten Gebiete und die aus derselben (also nach der statistischen Methode) berechneten Präcisionen enthält:

Gebiete	g	h
Köslin-Stralsund	2484	0,0166
Erfurt-Hannover	2377	0,0162
Hildesheim-Lüneburg . . .	2175	0,0155
Stade-Osnabrück-Aurich . .	2099	0,0152
Münster-Minden	2582	0,0169
Koblenz-Trier	3601	0,0200
Köln-Aachen	3421	0,0195

Man hat also nunmehr 27 Beobachtungsgebiete, für welche sich eine mittlere Präcision von 0,0174 ergiebt, während die Zahl der Einzelbestimmungen 648 beträgt. Als Ausgangswert behalten wir 1063 bei und so gelangen wir zu folgender Vergleichung zwischen Theorie und Beobachtung:

Fehler (±)	Beobachtete Fälle (+)	Beobachtete Fälle (−)	Beobachtete Fälle (±)	Theorie (±)
0 bis 19½	116½	119½	236	239
19½ „ 39½	82	106	188	194
39½ „ 59½	76	49	125	121
59½ „ 79½	34	27	61	61
79½ „ 99½	12	14	26	23
Ueber 99½	7	5	12	9

Die beiden letzten Reihen stimmen sehr gut zusammen. Auch die Reihen der positiven und negativen Fehler für sich sind nicht unbefriedigend. Die Zahl der ersteren beträgt $327\frac{1}{2}$, die der letzteren $320\frac{1}{2}$, und die Unebenheiten der mittleren Fehlergruppen gleichen sich aus, wenn man sie paarweise zusammenfasst:

Fehler	Beobachtete Fälle		Theorie
(+)	(+)	(—)	(+ u. —)
0 bis $19\frac{1}{2}$	$116\frac{1}{2}$	$119\frac{1}{2}$	$119\frac{1}{2}$
$19\frac{1}{2}$ „ $59\frac{1}{2}$	158	155	$157\frac{1}{2}$
$59\frac{1}{2}$ „ $99\frac{1}{2}$	46	41	42

21. Das bisher angewandte Rechnungsverfahren ist ziemlich zeitraubend infolge der vorher nötigen Bestimmung der mittleren Präcision, selbst wenn man diese nach der bequemeren (und in vielen Fällen auch sichereren) statistischen Methode ausführt. Will man sich aber möglichst schnell versichern, ob sich eine gegebene Masse von Beobachtungsresultaten ungefähr der Theorie gemäss um ihr Mittel gruppiert, so kann man ein mehr summarisches, allerdings auch ungenaueres Verfahren einschlagen. Man nimmt nämlich an, dass das beobachtete Verhältnis der Fehler innerhalb gewisser gleicher positiver und negativer Strecken vom Ausgangswerte ab zu der Gesamtzahl der Fehler identisch sei mit der theoretischen Wahrscheinlichkeit eines Fehlers innerhalb dieser Doppelstrecke, und hieraus lässt sich dann sowohl die mittlere Präcision als auch die theoretische Verteilung der Fehler auf die übrigen Strecken bestimmen.

So haben wir in dem letzten Beispiel als empirische Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zwischen $-19\frac{1}{2}$ und $+19\frac{1}{2}$ den Bruch $\frac{236}{648} = 0{,}364$.

Nimmt man diesen Wert als F_u, so ergiebt die Tabelle als zugehöriges u den Wert 0,335 und man hat nun zur Bestimmung der Präcision H die Gleichung: $0{,}335 = H . 19\frac{1}{2}$ und hieraus $H = 0{,}0172$ (statt des oben berechneten 0,0174). Mit Hülfe dieses Wertes rechnet man nun weiter: das u der nächsten Stufe ist $0{,}0172 . 39\frac{1}{2} = 0{,}679$, die zugehörige Wahrscheinlichkeit $F_u = 0{,}663$, so dass auf 648 Fälle am wahrscheinlichsten 430 zwischen $-39\frac{1}{2}$ und $+39\frac{1}{2}$, also 194 zwischen den Grenzen $\pm 19\frac{1}{2}$ bis $\pm 39\frac{1}{2}$ zu erwarten wären. Und ähnlich findet man für die Strecken

$\pm 39\frac{1}{2}$ bis $\pm 59\frac{1}{2}$: 122; $\pm 39\frac{1}{2}$ bis $\pm 79\frac{1}{2}$: 62; $\pm 79\frac{1}{2}$ bis $\pm 99\frac{1}{2}$: 24; über $99\frac{1}{2}$: 10.

Diese Ergebnisse weichen von den oben berechneten sowohl wie von den beobachteten nur wenig ab. Jedoch ist nicht zu vergessen, dass die ausführliche Theorie alle Fehlergruppen selbständig bestimmt, während das summarische Verfahren gerade für die wichtigste Fehlerstrecke das Zusammenstimmen der empirischen und der theoretischen Wahrscheinlichkeit hypothetisch annimmt.

22. Ein Beispiel von etwas anderer Art wollen wir mit dem Material der englischen Statistik durchführen. Die Beobachtungsgrösse ist wieder die Zahl z der Knabengeburten auf 1000 Mädchengeburten, jedoch mit Ausschluss der Totgeburten. Als Einzelbestimmungen aber nehmen wir diejenigen Werte von z, welche sich aus den jährlichen Geburtenzahlen in den einzelnen Registrierungsbezirken in den 13 Jahren 1859 bis 1871 ergeben.

Wir verfügen also, da die Zahl der „Registration-Counties" 45 beträgt, über 585 Einzelwerte von z, von denen wir wieder annehmen, dass sie sämtlich durch zufällige Modifikationen eines bestimmten Normalwertes entstanden seien. Die Präcision der Einzelbestimmungen ist sehr verschieden, zunächst wegen der grossen Verschiedenheit der mittleren jährlichen Geburtenzahl in den einzelnen Bezirken, ausserdem aber auch vielleicht wegen der physiologischen Fehlerursachen, welche in den verschiedenen Bezirken in verschiedenem Grade zufällige Ablenkungen des Normalwertes von Jahr zu Jahr erzeugen könnten.

Wir berechnen nun wieder die Präcision für jede Grafschaft sowohl nach der statistischen Methode (Kolonne S) als auch nach der physikalischen (Kol. Q). Bei der ersteren gehen wir aus von dem aus der Gesamtmasse der Beobachtungen bestimmten wahrscheinlichsten Wert $z = 1042$, und der Logarithmus des konstanten Faktors, mit dem die Wurzel aus den durchschnittlichen Geburtenzahlen multipliziert wird, ist $= 0{,}53081 - 4$. Als mittlere jährliche Geburtenzahl (g) aber nehmen wir für jede Grafschaft das Jahresmittel ihrer Geburten aus der zehnjährigen Periode 1859 bis 1868.

Was die physikalische Methode betrifft, so darf man nicht vergessen, dass zur Bestimmung der Präcision h für jede Grafschaft nur 13 Beobachtungen gegeben sind; der wahrscheinliche

Fehler ist daher $\frac{h\varrho}{\sqrt{13}}$, und man muss sich auf grössere Differenzen zwischen den Präcisionsbestimmungen nach den beiden Methoden gefasst machen, als die in dem früheren Beispiele vorgekommenen.

22. Wir stellen nun die Resultate der Rechnung zusammen.

Bezirk	g	S	Q
London	102808	0,1089	0,0796
Lancashire	97220	0,1058	0,1195
York, West R.	61593	0,0843	0,1231
Staffordshire	32957	0,0616	0,0596
Süd-Wales	25836	0,0546	0,0517
Durham	24974	0,0536	0,0593
Warwick	21338	0,0496	0,0529
Kent	19101	0,0480	0,0354
Devonshire	18551	0,0462	0,0616
Cheshire	17377	0,0447	0,0400
Hampshire	15144	0,0418	0,0410
Gloucester	14625	0,0411	0,0526
Sommerset	14442	0,0408	0,0332
Norfolk	13842	0,0399	0,0432
Lincoln	13629	0,0396	0,0482
Nord-Wales	13275	0,0391	0,0460
Essex	13071	0,0388	0,0410
Northumberland	13017	0,0387	0,0525
Cornwall	12520	0,0380	0,0387
Sussex	11772	0,0368	0,0524
Nottingham	11536	0,0365	0,0466
Suffolk	11079	0,0357	0,0354
Derbyshire	10874	0,0354	0,0296
Worcester	10678	0,0351	0,0529
York, East R.	9795	0,0336	0,0287
Surrey	9356	0,0328	0,0339
Leicester	8986	0,0322	0,0308
Shropshire	8546	0,0314	0,0279
Northampton	8387	0,0311	0,0268
Wiltshire	7574	0,0295	0,0443
Monmuth	7453	0,0293	0,0279
York, North R.	7391	0,0292	0,0233
Cumberland	7160	0,0287	0,0189
Berkshire	6734	0,0279	0,0265
Middlesex	6569	0,0275	0,0227
Cambridge	6084	0,0265	0,0199
Dorsetshire	5900	0,0261	0,0291
Hertford	5831	0,0259	0,0230
Oxford	5748	0,0257	0,0256
Buckingham	5079	0,0242	0,0267
Bedford	5082	0,0242	0,0445
Hereford	3243	0,0193	0,0269
Huntingdon	1984	0,0151	0,0127
Westmoreland	1889	0,0148	0,0223
Rutland	730	0,0092	0,0082

Im grossen und ganzen ist die Uebereinstimmung der beiden letzten Kolonnen so gross, als man bei der Unsicherheit der aus so wenigen Beobachtungsdaten abgeleiteten Werte unter Q erwarten darf. In den Fällen, in denen die Kolonne Q kleinere Zahlen aufweist, als Kol. S, könnte man wieder die Erklärung in dem Einfluss physiologischer Fehlerquellen suchen; da aber die Resultate der zweiten Methode die der ersten nahezu ebenso oft überschreiten, wie nicht erreichen, so sind auch die Differenzen der letzteren sehr wahrscheinlich auf die Unsicherheit der Zahlen der letzten Kolonne zurückzuführen.

22. Die mittlere Präcision berechnet sich aus Kol. S zu 0,0386, aus Kol. Q zu 0,0410; für unsere weitere Rechnung verdient der erstere Wert jedenfalls den Vorzug. Uebrigens ist infolge der sehr grossen Verschiedenheit der Einzelpräcisionen eine leidliche Uebereinstimmung der beobachteten Fehlerverteilung mit der auf Grund einer einzigen Mittelpräcision berechneten nur für eine kleine Fehlerstrecke zu erwarten. — Mit dem Ausgangswert 1042 erhält man folgende Gruppen:

Fehler	Beobachtete Fälle			Theorie
(+)	(+)	(−)	(±)	(±)
0 bis $9\frac{1}{2}$	117	122	239	232
$9\frac{1}{2}$ „ $19\frac{1}{2}$	72	72	144	185
$19\frac{1}{2}$ „ $29\frac{1}{2}$	46	40	86	104
$29\frac{1}{2}$ „ $39\frac{1}{2}$	32	25	57	46
$39\frac{1}{2}$ „ $49\frac{1}{2}$	12	17	29	14
Ueber $49\frac{1}{2}$	19	11	30	4

Die bedeutenden Differenzen der beiden letzten Reihen entstehen also hier durch die Ungenauigkeit der theoretischen Rechnung, indem die Bedingung, dass die Einzelpräcisionen von der Mittelpräcision nicht sehr verschieden sein dürfen, in diesem Falle nicht erfüllt ist. Wir teilen daher die Bezirke in mehrere Gruppen, bilden für jede eine Mittelpräcision, berechnen hiernach die zugehörige Fehlerverteilung und addieren schliesslich die korrespondierenden Fehlerzahlen der sämtlichen Gruppen.

23. Als erste Gruppe nehmen wir die Bezirke in der oben aufgestellten Reihe von London bis incl. Durham; man findet eine Mittelpräcision von 0,0781, und hiernach ist also die Verteilung von 78 Fehlern zu berechnen. (Eine weitere Zerlegung dieser Gruppe in die drei grösseren und die drei kleineren Bezirke mit den Präcisionen 0,0997 und 0,0566 giebt ein von dem ersteren nur unerheblich abweichendes Gesamtresultat.)

Die zweite Gruppe bestehe aus den 10 Bezirken Warwick bis Nord-Wales incl.; Mittelpräcision 0,0431, womit also die Verteilung von 130 Fehlern zu berechnen.

Dritte Gruppe: die 13 Bezirke Essex bis incl. Northampton; Mittelpräcision 0,0351, anzuwenden auf 169 Fälle.

Vierte Gruppe: die 13 Bezirke Wiltshire bis einschl. Hereford; Mittelpräcision 0,0265, anzuwenden auf 169 Fälle.

Fünfte Gruppe: die drei kleinen Bezirke Huntingdon, Westmoreland, Rutland; 39 Fälle mit der Mittelpräcision 0,0130. Diese kleinen Grafschaften wären besser mit benachbarten zu grösseren Beobachtungsgebieten zu verschmelzen.

Auf diesem Wege erhalten wir nun die in der folgenden Uebersicht unter b aufgestellte Fehlerverteilung, während unter a zur Vergleichung die oben aufgeführten ungenauen Zahlen nochmals beigefügt sind:

Fehler	Beobachtung	Theorie	
(±)	(±)	a	b
0 bis $9\frac{1}{2}$	239	232	223
$9\frac{1}{2}$ „ $19\frac{1}{2}$	144	185	166
$19\frac{1}{2}$ „ $29\frac{1}{2}$	86	104	93
$29\frac{1}{2}$ „ $39\frac{1}{2}$	57	46	50
$39\frac{1}{2}$ „ $49\frac{1}{2}$	29	14	25
Ueber $49\frac{1}{2}$	30	4	27

Die Beobachtungen und die Resultate der korrekteren Theorie unter b stimmen jetzt befriedigend zusammen. Man beachte, dass die einzelnen Fehlerstrecken hier nur halb so gross sind, wie in dem der preussischen Statistik entnommenen Beispiele. Die mittlere Präcision der hier vorliegenden Beobachtungsgrössen ist wegen der grösseren Geburtenzahlen bedeutend grösser, als in dem vorigen Falle, und die Fehler drängen sich daher viel enger um den Ausgangswert zusammen.

Auch die für sich betrachtete Verteilung auf der positiven und negativen Seite harmoniert zur Genüge mit der Theorie, wenn man etwas grössere Fehlergruppen vergleicht:

Fehler	Beobachtete Fälle		Theorie
(±)	(+)	(−)	(+ u. −)
0 bis $19\frac{1}{2}$	189	194	$194\frac{1}{2}$
$19\frac{1}{2}$ „ $39\frac{1}{2}$	78	65	$71\frac{1}{2}$
Ueber $39\frac{1}{2}$	31	28	26

Die Gesamtzahl der positiven Fehler ist 298, die der negativen 287.

24. Wir betrachten nun auch ein Beispiel aus der französischen Statistik. Die 5 Jahre 1861—65 liefern uns für jedes Departement 5 Bestimmungen der Zahl z (wir schliessen auch in diesem Falle die Totgeborenen aus), im ganzen also 445 Einzelwerte. Als wahrscheinlichsten Wert nehmen wir das Mittel der Beobachtungen für ganz Frankreich in der angegebenen Periode, nämlich 1051. Die Einzelpräcisionen konnten in diesem Falle nach der physikalischen Methode nicht berechnet werden, weil für jedes Departement nur 5 Bestimmungen von z vorliegen. Die Berechnung nach der statistischen Methode aber bietet keine Schwierigkeit: wir wenden sie jedoch nicht an, sondern bleiben bei dem oben angedeuteten summarischen Verfahren stehen.

Bildet man die Gruppen der positiven und negativen Abweichungen, so kommen auf die Strecke $-19\frac{1}{2}$ bis $+19\frac{1}{2}$ 243; die empirische Wahrscheinlichkeit eines Fehlers in diesen Grenzen ist also $\frac{245}{445} = 0{,}546$, und wenn wir diese der objektiven Wahrscheinlichkeit gleichsetzen, also als einen Wert von F_u behandeln, so ist das entsprechende $u = 0{,}531$; man setzt also $0{,}531 = 19\frac{1}{2} . H$, wenn H die Mittelpräcision darstellt, und erhält demnach $H = 0{,}0272$. Mit Hülfe dieses Wertes berechnen sich nun die Fehlergruppen wie folgt:

Fehler	Beobachtete Fälle			Theorie
(±)	(+)	(—)	(±)	(±)
0 bis $9\frac{1}{2}$	64	58	122	127
$9\frac{1}{2}$ „ $19\frac{1}{2}$	60	61	121	116
$19\frac{1}{2}$ „ $29\frac{1}{2}$	50	43	93	95
$29\frac{1}{2}$ „ $39\frac{1}{2}$	25	21	46	57
$39\frac{1}{2}$ „ $49\frac{1}{2}$	20	15	35	32
Ueber $49\frac{1}{2}$	18	10	28	25

Die beiden letzten Kolonnen zeigen eine grössere Uebereinstimmung, als man in Anbetracht der sehr grossen Präcisionsverschiedenheiten der Einzelwerte von z erwarten möchte. Es ist jedoch hier zu beachten, dass die Anzahl der Beobachtungsbezirke verhältnismässig gross ist, von jedem einzelnen aber nur 5 Werte geliefert werden. Man könnte daher z. B. die 5 extremen Departements (Seine und Nord einerseits, Hautes-Alpes, Basses-Alpes und Lozère andererseits ganz weglassen, ohne dass durch die Beseitigung der 25 entsprechenden Beobachtungswerte die verhältnismässige Gruppierung der übrigen 420 Abweichungen und die aus derselben summarisch abgeleitete empirische Mittelpräcision sich merklich ändern würde.

25. Interessant ist auch, dass man bei Zerlegung der Departements in zwei Abteilungen mit verschiedener Mittelpräcision (ebenfalls nach dem summarischen Verfahren bestimmt) sehr nahe dieselben Resultate erhält, wie oben.

Nimmt man in die erste Gruppe die 44 Departements, welche nach den Ergebnissen des Jahres 1861 die grössten Geburtenzahlen aufweisen (220 Einzelwerte), in die zweite die 45 übrigen (225 Werte), so findet man, indem man wieder die empirische Wahrscheinlichkeit einer Abweichung zwischen $-19\frac{1}{2}$ und $+19\frac{1}{2}$ der theoretischen gleich annimmt (in beiden Fällen bleibt der Ausgangswert 1051), als empirische Mittelpräcisionen resp. 0,0320 und 0,0227.

Hieraus folgt die Verteilung der Abweichungen auf die oben angegebenen Fehlerstufen bei der ersten Gruppe

Theorie ($\pm$): 73—64—43—24—11—5
Beob. ($\pm$): 70—67—45—16—13—9

bei der zweiten Gruppe:

Theorie ($\pm$): 54—52—42—31—21—25
Beob. ($\pm$): 52—54—48—30—22—19

Die Summen der korrespondierenden theoretischen Gruppen betragen also: 127—116—85—55—32—30.

Diese Zahlen weichen von den oben unmittelbar gefundenen wenig ab und im ganzen stimmen diese letzteren eben so gut mit den Beobachtungen, wie die mit Hilfe zweier Mittelpräcisionen berechneten.

26. Aus den obigen Erörterungen und Beispielen ist nun ersichtlich, wie man entscheiden kann, ob eine gegebene Anzahl von Beobachtungen derselben Grösse, die gleiche oder verschiedene Präcision besitzen, den Beweis liefert, dass die betreffende Grösse einen normalen oder typischen Wert besitzt, der in dem Einzelfalle nur durch zufällige Störungen modifiziert ist. Dabei ist aber angenommen worden, dass wir wenigstens einige Hundert Einzelwerte zur Verfügung haben.

Obwohl nun aber gezeigt worden, dass man sich die genügende Anzahl von Einzelwerten leichter verschaffen kann, als es auf den ersten Blick möglich scheint, so bleibt es doch in vielen Fällen wünschenswert, sich auch in Bezug auf kleinere Beobachtungsreihen, z. B. von 25—30 Einzelwerten von gleicher Präcision, ein Urteil darüber zu verschaffen, ob sie mit der Voraussetzung eines zufällig gestörten Normalwertes in Einklang stehen.

Zur Beantwortung dieser Frage giebt es verschiedene Kriterien.

Kann die beobachtete Grösse als eine empirische Wahrscheinlichkeit oder als Funktion einer solchen aufgefasst werden, so untersuche man auf die oben angegebene Weise, ob die nach der statistischen Methode berechnete Präcision mit der nach der physikalischen Methode bestimmten annähernd zusammentrifft. Ist dies der Fall, so darf man schliessen, dass die Verteilung der Einzelwerte einigermassen derjenigen entspricht, welche durch die oben angegebene Exponentialfunktion gegeben wird und die der Annahme zufälliger Störungen des Normalwertes entspricht.

Statt der beiden Präcisionsbestimmungen kann man natürlich auch die wahrscheinlichen Fehler, die sich nach den beiden Methoden ergeben, miteinander vergleichen, da der wahrschein-Fehler r, wie bereits mehrfach erwähnt wurde, mit der Präcision h durch die Gleichung $r = \frac{0{,}4769}{h}$ verbunden ist.

Ist die nach der physikalischen Methode bestimmte Präcision beträchtlich kleiner, als die von der statistischen Methode gelieferte (in welchem Falle neben der „statistischen" Fehlerquelle noch andere mitwirken), oder kann die Beobachtungsgrösse nicht als eine Wahrscheinlichkeit behandelt werden, so berechne man den wahrscheinlichen Fehler nach der physikalischen Methode (Methode der kleinsten Quadrate) und sehe zu, ob die positiven und negativen Abweichungen vom Mittelwerte wirklich innerhalb der gefundenen Grenzen annähernd ebenso zahlreich sind, wie ausserhalb derselben. Allzu gering darf natürlich die gegebene Zahl von Beobachtungen nicht sein.

Findet nun eine leidliche Uebereinstimmung des berechneten wahrscheinlichen Fehlers mit der beobachteten Fehlerverteilung statt und ist ausserdem die Gesamtzahl der positiven Fehler von derjenigen der negativen nicht sehr verschieden, so ist wieder der Schluss, wenn auch nicht sicher, so doch genügend gerechtfertigt, dass nur der Zufall die Abweichungen der Einzelwerte von einem typischen Normalwerte erzeugt habe.

27. Endlich sei noch ein anderes Kriterium erwähnt. Wenn wirklich nur zufällige Abweichungen von einem Normalwert vorliegen, d. h. wenn die Exponentialfunktion massgebend ist für die Verteilung der Abweichungen, so bestehen zwischen den Summen der verschiedenen Potenzen der ihrem absoluten Werte nach genommenen Abweichungen gewisse Beziehungen[1]), von denen wir hier die einfachste zur Anwendung bringen wollen. Ist wie oben n die Zahl der Beobachtungen, $[\delta^2]$ die Summe der Fehlerquadrate und $[\delta]$ die Summe der einfachen sämtlich positiv genommenen Abweichungen, so hat man (mit gewissen Vernachlässigungen) die Gleichung:

$$\pi \frac{[\delta]^2}{n^2} = \frac{2[\delta^2]}{n} \quad \text{oder} \quad \pi = \frac{2n[\delta^2]}{[\delta]^2},$$

wo π die Ludolph'sche Zahl bedeutet. Man kann somit aus den zufälligen Beobachtungsfehlern die Zahl π berechnen, wie Fechner dies mit Hülfe seiner psychophysischen Beobachtungen gethan hat.

Nicht sowohl als Kuriosum, sondern als Kriterium für die Richtigkeit unserer Voraussetzungen wollen wir diese Formel auf das oben behandelte preussische Material anwenden, indem wir π aus den 24 monatlichen Beobachtungswerten für jeden Regierungsbezirk berechnen. Um jedoch die Unsicherheit, welche aus der geringen Zahl der Beobachtungen entsteht, so weit wie möglich zu beschränken, wenden wir eine nach Fechner[2]) abgeleitete Korrektion jener Formel an. In derselben sind nämlich unter den δ die Abweichungen der Einzelbeobachtungen vom wahren Werte verstanden; statt dieser (unbekannten) Abweichungen aber nehmen wir die Abweichungen der 24 Einzelwerte von ihrem arithmetischen Mittel. Haben also die δ diese modifizierte Bedeutung, so ist der Ausdruck $\frac{2n[\delta^2]}{[\delta]^2}$, damit er wahrscheinlicherweise dem Werte π möglichst nahe komme, mit dem Korrektionsfaktor $\frac{(\pi n - 1)^2}{n(n-1)\pi^2}$, also für $n = 24$ mit 1,015 zu multiplizieren.

1) Der Beweis findet sich im Berliner astronomischen Jahrbuch von 1834, S. 289 ff.

2) Psychophysik, II. Teil, S. 371.

Nehmen wir wieder als Beispiel die oben bereits verwendeten Daten für Königsberg. Das Mittel der 24 Monatswerte von z ist 1051, die Summe der Quadrate der Abweichungen 26578, die einfache Summe der Abweichungen ohne Rücksicht auf das Vorzeichen 646 und es soll also der Ausdruck $\frac{2 \cdot 24 \cdot 26578}{(646)^2} \cdot 1{,}015$ der Zahl $\pi (3{,}14..)$ nahe kommen. Die Ausführung der Rechnung ergiebt in der That 3,103, was mit Rücksicht auf die geringe Zahl der zu Grunde gelegten Beobachtungen eine sehr gute Bestätigung unserer theoretischen Voraussetzung bildet.

28. In ähnlicher Weise findet man aus den Beobachtungen der übrigen Bezirke folgende Annäherungen an π:

Königsberg . .	3,103	Bromberg . . .	2,913	Stade	2,920
Gumbinnen . .	2,937	Breslau	2,987	Osnabrück-Aur. .	3,402
Danzig	2,639	Liegnitz . . .	3,359	Münster . . .	2,512
Marienwerder . .	3,366	Oppeln	2,882	Minden . . .	3,566
Berlin	2,982	Magdeburg . .	2,823	Arnsberg . . .	3,562
Potsdam . . .	3,333	Merseburg . . .	3,509	Kassel	2,767
Frankfurt . . .	3,751	Erfurt	3,350	Wiesbaden . .	3,389
Stettin	3,423	Schleswig . . .	2,735	Koblenz . . .	3,468
Köslin	2,898	Hannover . . .	3,497	Düsseldorf . .	2,893
Stralsund . . .	3,373	Hildesheim . .	2,585	Trier	3,264
Posen	2,996	Lüneburg . . .	3,010	Aachen . . .	3,380

Das Mittel aus den 11 Werten der ersten Reihe ist 3,164, das Mittel aus der zweiten Kolonne 3,059, das Mittel aus der dritten 3,193, das Mittel aus den sämtlichen 33 Werten endlich 3,139 oder rund 3,14, kommt also dem Werte von π auf zwei Dezimalstellen gleich.

Auch die Annäherungen der Einzelwerte an π sind so befriedigend, als man es bei Anwendung von nur je 24 Beobachtungsfehlern verlangen kann.

Nur in einem einzigen Bezirke, nämlich Köln, das in die obige Zusammenstellung nicht mit aufgenommen worden, kommt eine ganz abnorme Zahl heraus, nämlich 4,344. Als Grund dieser Anomalie erkennt man die ganz ungewöhnliche Verteilung der Werte von z, indem einerseits die kleinen Abweichungen vom Mittel verhältnismässig zahlreich sind, andererseits aber der ganz extreme und a priori nach der monatlichen Geburtenzahl höchst unwahrscheinliche Wert 1225 (November 1868) auftritt.

Zieht man bei der Bildung des allgemeinen Mittels dieses anomale Resultat mit hinzu, so erhält man 3,171, eine Zahl, die immer noch nicht allzuweit von π abweicht, und wahrscheinlich würde schon das Hinzutreten einiger weiteren Einzelbestimmungen genügen, um die hier entstandene Unebenheit auszugleichen. Aus den 24 monatlichen Beobachtungsresultaten von 1869 und 1870 ergiebt die Formel auch für Köln den genügend stimmenden Wert 3,413.

29. Sieht man die oben berechneten Werte als zufällige Modifikationen einer Grösse an, die den wahren Wert π hat, so kann man untersuchen, ob die unter dieser Voraussetzung berechnete wahrscheinliche Abweichung durch die Beobachtung bestätigt wird. Wir runden zu diesem Zwecke die sämtlichen Zahlen auf zwei Dezimalstellen ab und bilden die Abweichungen von dem wahren Wert 3,14.

Es finden sich, wenn man sämtliche 34 Beobachtungsgebiete in Betracht zieht, gleich viel positive und negative Abweichungen. Bei der Bestimmung des mittleren Fehlers ist 34 als Divisor zu nehmen, weil der Ausgangswert der wahre ist. Der wahrscheinliche Fehler berechnet sich alsdann (indem der Wert 4,344 mit berücksichtigt wird) zu 0,254. Nun findet man in der That 18 Abweichungen zwischen —0,25 und +0,25 (die Grenzwerte mit einbegriffen) und 16 ausserhalb dieser Grenzen. Lässt man jenen abnormen Wert beiseite, so erhält man einen wahrscheinlichen Fehler von 0,216, mit einer wahrscheinlichen Unsicherheit von ±0,018. Nach den Beobachtungen liegen von den 33 Abweichungen 14 in der Strecke —0,23 bis +0,23 (die Grenzwerte einbegriffen) und 19 ausserhalb derselben. Dieser kleinere Wert des wahrscheinlichen Fehlers stimmt also weniger gut mit den Beobachtungen.

Es ist in dem Vorstehenden angenommen worden, dass die Präcision aller dieser Näherungsbestimmungen von π dieselbe sei, was nur insofern berechtigt ist, als jeder Einzelbestimmung die gleiche Anzahl von (24) Werten von z zu Grunde liegt.

30. Als Resultat unserer Untersuchung ergiebt sich also folgendes:

Die Zahl z (oder auch die empirische Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt) gehört in ihren Einzelbestimmungen zu denjenigen statistischen Grössen, welche (wenigstens innerhalb einer gewissen Zeitperiode und eines gewissen geographischen

Gebietes) als zufällige Modifikationen eines typischen Normalwerts anzusehen sind.

Diese Eigentümlichkeit aber ist nicht in dem gewöhnlichen, vagen Sinne, sondern in ihrer mathematischen Strenge aufzufassen: der typische Normalwert ist ein eigentlicher Mittelwert im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung, d. h. die Wahrscheinlichkeit einer gegebenen Abweichung von demselben ist durch die oben angeführte Exponentialfunktion bestimmt.

Mit anderen Worten, die Veränderlichkeit in dem Geschlechtsverhältnis lässt sich zurückführen auf das Schema der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Annähernd dieselben 816 Zahlen, welche wir oben für z als Resultate von 24 monatlichen Bestimmungen in 34 preussischen Bezirken gefunden haben, würden sich in annähernd derselben Verteilung ergeben, wenn man aus einer Urne, die schwarze und weisse Kugeln im Verhältnis von 1063 zu 1000 enthielte, je 24mal so viele Züge thäte (mit jedesmaliger Zurücklegung der gezogenen Kugel), als die durchschnittliche monatliche Geburtenzahl der einzelnen Bezirke beträgt und wenn man alsdann die Zahl der in jeder Versuchsreihe gezogenen schwarzen Kugeln durch die zugehörige Zahl der weissen dividierte und den Bruch mit 1000 multiplizierte.

31. Wie soll man sich aber die physiologische Ursache dieser Erscheinung denken? Nach der Arbeit von Dr. W. Stieda über das Sexualverhältnis der Geborenen (Strassburg 1875) ist gar kein Grund mehr vorhanden, die Hofacker-Sadler-Hypothese festzuhalten. Auch ist eigentlich nie Grund vorhanden gewesen, sie anzunehmen, denn die Zahlen, auf die sie sich stützte, waren viel zu klein, um irgend welche Schlüsse zu gestatten. Bei einer Versuchsreihe von 3200 Zügen aus der oben erwähnten Urne besteht noch immer die Wahrscheinlichkeit 0,113, dass man statt der richtigen Zahl $z = 1063$ einen Wert erhält, der unter 1004 oder über 1122 liegt. Man kann also auch ungefähr noch 1 gegen 9 wetten, dass bei einer Gruppe von 3200 Geburten die Grösse z unter resp. über diese Grenzen fallen werde, trotzdem der Normalwert gleich 1063 wäre. Hieraus ist zu ersehen, wie vorsichtig man zu Werke gehen muss, wenn man zur Erklärung der Verschiedenheiten der Grösse z in verschiedenen Gruppen

von Geborenen, selbst wenn jede einige Tausend Köpfe zählt, statt zufälliger Ursachen spezifische und konstante annehmen will.

Unmöglich ist es nicht, dass jene Hypothese, die ursprünglich auf Sand gebaut worden, in Zukunft einmal auf dem festen Boden genügenden Materials begründet werde. Für jetzt aber brauchen wir uns durch sie nicht abhalten zu lassen, zur formalen Erklärung der Beobachtungen über das Sexualverhältnis der Geborenen die einfachste und bequemste Vorstellung zu benutzen. Diese Vorstellung ist die, dass schon die sehr zahlreichen unbefruchteten Keime in den weiblichen Ovarien für das eine oder das andere Geschlecht prädestiniert seien[1]), und zwar dass bei allen weiblichen Individuen — um zunächst eine streng schematische Annahme zu machen — die männlichen Keime die weiblichen in demselben Verhältnisse überwiegen. Die Analogie mit der Urne ist dann einleuchtend: jede Befruchtung ist zu vergleichen mit dem Zuge einer schwarzen oder weissen Kugel aus derselben Urne.

Das bei allen weiblichen Individuen gleiche Verhältnis der Keime würde nun mehr oder weniger scharf zum Ausdruck kommen in dem aus einigen hunderttausend oder Millionen Fällen abgeleiteten Verhältnis nicht der Knabengeburten zu den Mädchengeburten, sondern der Befruchtungen männlicher Keime zu den Befruchtungen weiblicher Keime. Dieses letztere Verhältnis aber kennen wir nicht. Wie gross ist die Zahl nicht nur der Fehlgeburten in den ersten Monaten nach Beginn der Schwangerschaft, sondern auch derjenigen Keime, die in den ersten Wochen nach der Befruchtung abortieren, vielleicht ohne dass die Mutter darum weiss! Wenn in Paris in den vier Monaten März bis Juni 1868 24 Embryonen von 1—3 und 156 Embryonen von 3—5 Monaten registriert wurden, so ist anzunehmen, dass die Gesamtzahl solcher Frühgeburten eine sehr

1) Dass der Embryo anfangs zweigeschlechtlich erscheint, steht dieser Anschauung nicht im Wege, denn man kann annehmen, dass die schliesslich überwiegende geschlechtliche Entwicklung in dem werdenden Organismus vorangelegt vorhanden sei. So müssen ja auch alle Aehnlichkeiten mit dem Vater, in Farbe des Haares, der Augen u. s. w. vom Augenblick der Befruchtung an in der Anlage vorhanden sein. Uebrigens hat van Beneden in neuerer Zeit gezeigt, dass bei niederen Thieren die Geschlechtsanlage bis in den Beginn der Entwicklung hinaufreicht.

beträchtliche ist und die Zahl der registrierten Totgeburten im gewöhnlichen Sinne vielleicht übersteigt.

32. Aber wie die Totgeburten eines Landes zu der Gesamtzahl der Geburten des einen und des anderen Geschlechtes in einem annähernd konstanten Verhältnis stehen, so darf man annehmen, dass die nicht registrierten und nicht bemerkten Frühgeburten und Aborte zu den beobachteten Geburtenzahlen beider Geschlechter ebenfalls in einem konstanten oder nur zufällig veränderlichen Verhältnis bleiben. Diese Voraussetzung genügt, damit die Konstanz des Verhältnisses der männlichen und weiblichen Keime auch für das Geschlechtsverhältnis der beobachteten Geburten einen Normalwert mit der Wahrscheinlichkeitstheorie entsprechenden Abweichungen erzeuge. In ähnlicher Weise haben wir oben gesehen, dass dieselbe Verteilungstheorie sowohl auf die Gesamtheit der Geborenen — wie in dem Beispiele aus der preussischen Statistik — als auch auf die Lebendgeborenen allein — wie in den Beispielen von England und Frankreich — anwendbar ist.

Uebrigens ist die der grösseren Einfachheit wegen angenommene Hypothese von dem konstanten Verhältnisse der Keime bei allen weiblichen Individuen nicht nötig. Es dürfen grosse individuelle Verschiedenheiten vorhanden sein, wenn nur das mittlere Verhältnis für die der Befruchtung ausgesetzten Individuen von einem Beobachtungsbezirke zum anderen (wenigstens für eine gewisse Periode) annähernd konstant bleibt. Schwankungen dieses Mittelverhältnisses eines Bezirkes von Monat zu Monat oder von Jahr zu Jahr dürfen vorkommen, wenn sie nur den Charakter der Zufälligkeit tragen.

Indes ist nicht zu leugnen, dass in Wirklichkeit verschiedene spezifische Einwirkungen wenigstens die Beziehungen dieses Mittelverhältnisses zu den beobachteten Werten von z in den einzelnen Bezirken auf verschiedene Art modifizieren. Grossstädtische Bevölkerungen pflegen durchweg kleinere Werte von z aufzuweisen, als ländliche; ebenso ergeben die unehelichen Geburten im ganzen kleinere Zahlen für z, als die ehelichen. Das Verhältnis der Stadt- zur Landbevölkerung, der ehelichen Fruchtbarkeit zur unehelichen wird also auf das beobachtete Geschlechtsverhältnis der Geborenen eines Bezirks von Einfluss sein, ohne dass es jedoch unumgänglich nötig ist, dieser Einwirkungen wegen eine Verschiedenheit des Mittelverhältnisses der männlichen und weiblichen Keime anzunehmen.

33. Man kann sich die Sache vielmehr so denken: A sei die Zahl der männlichen, B die der weiblichen Keime, die in einem Bezirke im Laufe einer gegebenen Zeit befruchtet worden und in den Entwicklungsprozess eingetreten sind; α aber sei der Bruchteil von A, β der Bruchteil von B, welcher in dem früheren embryonalen Stadium, bevor der Foetus als Totgeburt registriert wird, in Abgang gekommen ist. So hat man also für das der Beobachtung zugängliche Verhältnis der Knaben- und Mädchengeburten (incl. Totgeburten)

$$\frac{K}{M} = \frac{A - \alpha A}{B - \beta B} = \frac{A}{B} \cdot \frac{(1 - \alpha)}{(1 - \beta)}.$$

Das Verhältnis $\frac{A}{B}$ kann also im Mittel konstant bleiben, wenn auch das Verhältnis $\frac{K}{M}$ für verschiedene Gruppen verschiedene Mittelwerte erhält: es kommt eben nur auf den Bruch $\frac{1-\alpha}{1-\beta} = \gamma$ an, der für uneheliche Geburten kleiner ist als für eheliche, für grossstädtische kleiner als für ländliche. Eine solche Veränderlichkeit von γ, die auf der Veränderlichkeit von α und β beim Uebergang von einer Gruppe zur anderen beruht, scheint sehr annehmbar. Der Prozentsatz der Totgeborenen ist bei den unehelichen Geburten grösser als bei den ehelichen; und mit Rücksicht hierauf, wie auch aus anderen Erwägungen, ist es sehr wahrscheinlich, dass auch der Prozentsatz der frühen Fehlgeburten und der in der ersten Entwicklungsphase erstickten Keime bei der ersteren Kategorie grösser sei, als bei der zweiten. Wenn andererseits schon bei den ehelichen Geburten wohl glaublich ist, dass $\alpha > \beta$, also γ ein echter Bruch, so genügt schon, dass für die unehelichen α und β um gleich viel wachsen, um ein kleineres γ und somit auch ein kleineres $\frac{K}{M}$ für diese Kategorie hervorzubringen. Wenn aber die Gefahr einer unehelichen Frühgeburt für einen männlichen Foetus stärker zunimmt, als für einen weiblichen — wie es sich hinsichtlich der unehelichen Totgeburten aus vielen Beobachtungen herausstellt — so wird das γ für die unehelichen Geburten im Vergleich mit dem für die ehelichen sich noch mehr verkleinern.

Auch in Bezug auf die grossstädtischen Geburten scheint es nicht allzu kühn, einen vergrösserten Prozentsatz von Frühgeburten — also Vergrösserung der Brüche α und β — mit stärkerer Benachteiligung des männlichen Geschlechts anzunehmen, und es würden sich überhaupt alle konstanten Minderwerte von $\frac{K}{M}$ in gewissen Gruppen auf diesem Wege erklären lassen.

Uebrigens soll in diesen Erörterungen nicht etwa eine physiologische Hypothese zur Erklärung des Ueberschusses der Knabengeburten aufgestellt sein, sondern es war, wie bereits bemerkt wurde, nur die Entwicklung einer Anschauungsweise beabsichtigt, vermöge welcher man die früher dargelegten Regelmässigkeiten in den Erscheinungen am leichtesten und bequemsten begreift. Man könnte auch von anderen Vorstellungen ausgehen, wie z. B. von denen, welche der Sadler-Hofacker'schen Hypothese zu Grunde liegen, aber für jetzt sind wir durch nichts genötigt, diesen verwickelteren Ansichten den Vorrang einzuräumen.

34. Zum Schluss sei noch hervorgehoben, dass die Annahme eines in allen Beobachtungsgebieten gleichen Normalwertes von z nicht genau ist, schon deswegen, weil die unehelichen und die städtischen Geburten in den verschiedenen Bezirken einen verschiedenen Einfluss auf das Verhältnis $\frac{K}{M}$ ausüben würden, selbst wenn das Verhältnis $\frac{A}{B}$ in allen Bezirken konstant wäre. In einem grösseren Lande giebt es also wahrscheinlich mehrere lokal und geographisch bestimmte Normalwerte von z. Auch mögen diese Normalwerte langsamen Aenderungen im Laufe der Zeit unterworfen sein, so dass man wohl daran thun wird, die Perioden, deren Beobachtungen man gruppieren will, nicht zu lang zu nehmen. Trotz jener wahrscheinlichen lokalen Verschiedenheit der Normalwerte aber haben wir doch im obigen eine befriedigende Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung erhalten unter der Annahme, dass wir es nur mit zufälligen Modifikationen eines *einzigen* Normalwertes zu thun hätten. Dadurch wird bewiesen, dass die Mehrzahl der Beobachtungen

auf Normalwerte zu beziehen ist, die nicht oder nur wenig voneinander verschieden sind; einzelne Beobachtungsgruppen aber können immerhin zu weiter abseits liegenden Mittelwerten gehören, und indem diese ebenfalls auf den allgemeinen Mittelwert bezogen wurden, sind wahrscheinlich manche der Störungen entstanden, die sich, wenn auch nicht in bedenklicher Weise, oben in der Harmonie zwischen Theorie und Beobachtung herausgestellt haben. Bei der weiteren Fortführung dieser Untersuchungen, wie ich sie beabsichtige, wird also auch die Frage zu beantworten sein, ob sich die Gesamtmasse der in einem gegebenen Lande bestimmten Einzelwerte von z nicht in mehrere geographisch unterschiedene Partialmassen zerlegen lasse, von denen jede sich der Theorie gemäss um einen besonderen Normalwert gruppiert [1]).

1) Eine Fortführung der obigen Untersuchungen findet sich in meiner Schrift „Zur Theorie der Massenerscheinungen, S. 64 ff., ferner in den Freiburger Dissertationen von Stark über das Geschlechtsverhältnis bei unehelichen Geburten und bei Totgeburten (1877) und von Herrl über das Geschlechtsverhältnis bei Mehrlingsgeburten (1884). Fernere Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf diese Frage von Lehr, Zur Frage der Wahrscheinlichkeit von weiblichen Geburten und von Totgeburten (Zeitschrift für das ges. Staatsw., XLV. (1889), S. 172 ff. und S. 524 ff.) und von Geissler, Beiträge zur Frage des Geschlechtsverhältnisses der Geborenen (Zeitschr. des Kgl. sächs. statist. Bureaus, XXXV (1889), Heft I u. II). Wegen der allgemeinen statistischen und der physiologischen Untersuchung des Gegenstandes und der zugehörigen Literatur s. v. Mayr, Statistik und Gesellschaftslehre, Bd. II, S. 186 ff. und Handwörterbuch der Staatsw. Art. Geschlechtsverhältnis der Geborenen und Gestorbenen.

VIII. Ueber die Theorie der Stabilität statistischer Reihen [1].

1. Die Massenerscheinungen des Menschenlebens lassen sich durch statistische Zahlen oder Zahlenverhältnisse bis zu einem gewissen Grade äusserlich charakterisieren. Stellt man nun diese numerischen Symptome für eine Reihe von Beobachtungsstrecken zusammen, so gehen ihre Veränderungen denjenigen der betrachteten Massenerscheinung parallel. Diese Zahlenbewegung tritt in verschiedenen Hauptformen auf: in manchen Fällen zeigen die Glieder einer statistischen Reihe trotz aller Unregelmässigkeiten im einzelnen eine im ganzen durchdringende Tendenz zur Veränderung in einer bestimmten Richtung; diese Reihen entsprechen einer gewissermassen historischen Entwickelung und mögen daher „evolutorische" genannt werden. In anderen Reihen finden wir zwar eine gewisse Gemeinschaftlichkeit der Veränderungsrichtung in benachbarten Gliedern, aber im ganzen doch nur ein Auf- und Abgehen, das graphisch durch unregelmässige Wellenlinien darzustellen wäre, weshalb diese Reihen „undulatorische" genannt werden könnten.

Kehrten diese Bewegungen in Bezug auf Wellenlänge und Amplitude regelmässig wieder, so hätten wir „periodische" Reihen.

Wenn dagegen die Einzelwerte einer Reihe gänzlich zusammenhanglos in einem gewissen Spielraum aufwärts und abwärts springen, so dürfte die Bezeichnung „oscillatorisch" für dieselbe gerechtfertigt sein. Eine scharfe Abgrenzung dieser Klasse von den undulatorischen Reihen ist ebensowenig möglich, wie eine genaue Trennung der letzteren von der evolutorischen.

1) Zuerst erschienen in Conrad's Jahrbüchern, Bd. XXXII (1879), S. 60 ff.

Unter diesen allgemeinen Begriff der oscillatorischen Reihen aber würde nun eine Klasse fallen, die man allen übrigen als ganz eigenartig gegenüberstellen könnte, nämlich die „typischen" Reihen, deren Eigentümlichkeit darin besteht, dass ihre Einzelwerte ungenaue Darstellungen eines konstanten Grundwertes sind, der nur mit rein zufälligen Abweichungen zum Ausdruck kommt.

2. In allen angeführten Klassen von Reihen können die Veränderungen der Einzelwerte in so engen Grenzen bleiben, dass man den letzteren nach subjektiver Schätzung eine gewisse relative Konstanz zuschreiben dürfte. Doch erkennt man sofort, dass auch bei solchen relativ konstanten Reihen die Stabilität oder der Gegensatz derselben, die Dispersion, sehr verschieden ist. Man bedarf daher eines Masses der Stabilität oder der Dispersion, und zwar eines solchen, das auch bei Reihen von verschiedenartiger Natur vergleichbar bleibt. Ist die Stabilität dieser Reihe von Prozentzahlen grösser oder geringer als die jener anderen? — Das ist eine Frage, auf die man bei demologischen oder moralstatistischen Untersuchungen sehr häufig geführt wird. So hält A. von Oettingen die Regelmässigkeit der Prozentsätze, mit welchen sich von Jahr zu Jahr die verschiedenen Civilstandskategorien an den Eheschliessungen beteiligen, für sehr gross, W. Stieda[1]) dagegen glaubt sie, wenigstens für Elsass-Lothringen, gar nicht so hoch anschlagen zu dürfen. Wie ist da objektiv zu entscheiden? Schwankt der Prozentsatz der Eheschliessungen zwischen Junggesellen und Jungfrauen in Elsass-Lothringen weniger, als in Frankreich oder in England? Schwankt er mehr oder weniger als irgend welche andere demologische Verhältniszahl, wie z. B. die allgemeine Heiratsziffer?

Man hat längst versucht, solche Fragen zahlenmässig zu beantworten. Es lag nahe, die durchschnittliche Abweichung der Einzelglieder von ihrem Mittelwerte als Kriterium und Massgrösse der Schwankung zu betrachten. So verfuhren namentlich Ad. Wagner (in seiner Selbstmordstatistik), G. Mayr[2]) und A. von Oettingen. Aber diese Methode ist nur eine empirische, und

1) Die Eheschliessungen in Elsass-Lothringen, Dorpat 1878.

2) Vgl. namentlich auch dessen Schrift über „die Gesetzmässigkeit im Gesellschaftsleben", S. 57.

erst eine allgemeine theoretische Erörterung der Frage wird ergeben, in welchen Grenzen sie berechtigt ist.

3. Zuerst muss ein Unterschied gemacht werden zwischen den statistischen Reihen von absoluten Zahlen und den Reihen von solchen Verhältniszahlen, welche die Form von mathematischen Wahrscheinlichkeiten oder auch von Funktionen solcher Wahrscheinlichkeiten haben. Verhältniszahlen ohne diesen Charakter sind den absoluten gleichzustellen.

Bei Reihen absoluter Zahlen ist nun allerdings die durchschnittliche Abweichung im obigen Sinne[1]) ein brauchbares Schwankungsmass. Sind diese Reihen evolutorisch oder undulatorisch, so kann man überhaupt nur eine empirische Charakteristik ihrer Veränderlichkeit aufstellen und als solche bietet sich uns die durchschnittliche Abweichung in erster Linie dar. Ist aber die Reihe eine typische, so dass Wahrscheinlichkeitsbeziehungen zwischen den Einzelgliedern und dem Mittelwerte bestehen, indem jene als zufällige Modifikationen und letzterer als wahrscheinlichster Wert einer typischen Grundgrösse anzusehen sind, so wäre nach der Theorie die beste Charakteristik der Dispersion in der wahrscheinlichen Abweichung gegeben. Es ist dies diejenige Abweichung vom richtigen Werte, die bei einer sehr grossen Zahl von Einzelbestimmungen ebenso oft nicht erreicht wie überschritten werden würde. Man kann aber auch schon aus einer verhältnismässig kleinen Anzahl von Einzelwerten diese wahrscheinliche Abweichung, zwar nicht streng, aber doch nach ihrem wahrscheinlichsten Werte bestimmen, und eine, allerdings nicht die genaueste, Näherung dieser Art wird mit Hülfe der durchschnittlichen Abweichung ausgedrückt. Es ist nämlich näherungsweise die wahrscheinliche Abweichung $R = 0{,}8435\,D$, wenn D die durchschnittliche Abweichung bezeichnet. Wegen dieser angenäherten Proportionalität von R und D kann also die letztere Grösse auch bei typischen Reihen von absoluten Zahlen als Schwankungsmass verwendet werden. Wie R ist dann auch D umgekehrt proportional der Präcision, mit welcher die einzelnen Werte der Reihe unter den gegebenen Umständen zustande kommen, und diese ist ihrerseits als Mass der Stabilität zu betrachten.

1) Die Abweichungen vom Mittel sind ohne Rücksicht auf das Vorzeichen sämtlich positiv zu nehmen.

4. Mag man aber auch statt der theoretisch mehr zu empfehlenden wahrscheinlichen die durchschnittliche Abweichung zur Charakterisierung der Stabilität oder Dispersion einer Reihe benutzen, so folgt daraus noch keineswegs, dass diese Abweichung D in Prozenten des Mittelwertes auszudrücken sei. Bei evolutorischen oder undulatorischen Reihen mag man allenfalls diese Reduktion anwenden, da in diesen Fällen D überhaupt nur ein empirisches und ungenügendes Kriterium der Veränderlichkeit der untersuchten absoluten Grösse darbietet. Sind dagegen die Einzelwerte zufällige Modifikationen eines Grundwertes, so liegt im allgemeinen gar kein Grund zu der Annahme vor, dass die durchschnittliche (oder auch die wahrscheinliche) Abweichung irgendwie von der absoluten Grösse des Grundwertes abhänge. Wenn man wiederholte Messungen eines Winkels anstellt, die mit zufälligen Fehlern behaftet sind, so hängt der Grad der Uebereinstimmung der Einzelwerte und somit der durchschnittliche oder wahrscheinliche Fehler nicht von der Grösse des zu bestimmenden Winkels, sondern nur von der Beschaffenheit des Instrumentes, der Geschicklichkeit des Beobachters und den äusseren Umständen ab, und zwei Versuchsreihen werden daher, wenn diese Grundlagen der Präcision dieselben bleiben, dasselbe Schwankungsmass ergeben, wenn auch der zu messende Winkel in dem einen Falle z. B. 30 und in dem anderen 60 Grad beträgt. Das vergleichbare Schwankungsmass ist also in diesem Beispiele der absolute und nicht der in Prozenten der Mittelwerte ausgedrückte Wert von D oder R. Dasselbe wird aber, wenn nicht besondere Gründe für einen bestimmten Zusammenhang zwischen der Präcision und der Grundgrösse sprechen, bei den typischen Reihen absoluter Zahlen gelten. Man habe z. B. eine Anzahl zehnjähriger Knaben und eine gleiche Anzahl vollständig erwachsener Männer nach Grösse oder Brustweite gemessen. Vermutlich wird die erstere Reihe eine grössere durchschnittliche Abweichung vom Mittel ergeben, als die letztere, und diese Differenz ist es, welche dem physischen Unterschied in der Stabilität der beiden anthropometrischen Grössen entspricht. Bezieht man die beiden Abweichungen auf die zugehörigen sehr verschiedenen Grundgrössen, so wird die Divergenz dieser prozentmässigen Schwankungsmasse bedeutend grösser, als die der absoluten; aber die ersteren sind nicht vergleichbar unter sich, während die letzteren der Präcision

umgekehrt proportional sind und demnach als direkte und gleichartige Darstellung der Dispersion betrachtet werden können.

In Kürze gilt also für die Reihen absoluter Grössen folgendes: das beste Schwankungsmass der typischen Reihen ist die wahrscheinliche Abweichung, jedoch ist auch die durchschnittliche Abweichung für diesen Zweck brauchbar; die eine wie die andere Massgrösse aber ist absolut und nicht in Prozenten der Grundgrösse auszudrücken.

Bei nichttypischen Reihen aber lässt sich ein ähnliches Schwankungsmass überhaupt nicht theoretisch begründen; empirisch mag man immerhin die Schwankungsintensität durch die durchschnittliche Abweichung kennzeichnen und die letztere auch, wo man es für zweckmässig hält, prozentmässig auf den Durchschnittswert beziehen.

5. Wir gehen nun zu der Untersuchung der Schwankungen von Verhältniszahlen über, und zwar solcher, die als empirische Näherungswerte einer mathematischen Wahrscheinlichkeit oder auch einer Funktion einer solchen Wahrscheinlichkeit angesehen werden können. Das erstere trifft zu, wenn man eine grosse Anzahl $(a+b)$ Einzelbeobachtungen hat, von denen jede ein gewisses besonderes Resultat hätte ergeben können und von denen eine gewisse Anzahl (a) dieses Resultat auch wirklich ergeben hat. Wenn dieses Resultat als ein Ereignis von der Wahrscheinlichkeit v angesehen werden darf, so wird der Bruch $\frac{a}{a+b}$ mit einer gegebenen Wahrscheinlichkeit dem Werte v um so näher kommen, je grösser die gesamte Beobachtungszahl $a+b$ ist, die wir die Grundzahl nennen wollen. Ob aber eine Reihe gegebener Verhältniszahlen wirklich den Gesetzen folgt, die für Näherungswerte einer konstanten Wahrscheinlichkeit gelten, kann nur nachträglich durch die Erfahrung erprobt werden.

Bei der Aufstellung statistischer Verhältniszahlen ist vorzugsweise die Form des einfachen Wahrscheinlichkeitsbruches zu empfehlen, der allenfalls noch mit 100 oder 1000 multipliziert werden mag. Man wählt indes auch wohl Verhältnisse, die nicht die Form einer Wahrscheinlichkeit, sondern einer Funktion einer Wahrscheinlichkeit besitzen, weil diese manchmal für den praktischen Gebrauch bequemer sind. Es gilt dies besonders von der Form $\frac{a}{b}$, dem Verhältnis der Zahl der Fälle, in denen das besondere Resultat beobachtet worden, zu der Zahl derjenigen, in denen es nicht eingetreten ist. Liegt dem Ereignis eine konstante Wahrscheinlichkeit v zu Grunde, so ist dieser Bruch ein Näherungswert des Ausdrucks $\frac{v}{1-v}$.

6. Die Reihen von Verhältniszahlen können zunächst ebenfalls eingeteilt werden in evolutorische, undulatorische, periodische und typische. Die letzteren aber, die wir hier vorzugsweise betrachten, können als Grundlagen haben entweder eine konstante Wahrscheinlichkeit, die in den Partialmassen, welche einer Beobachtungsstrecke entsprechen, mehr oder weniger genau zum Ausdruck kommt; oder eine nicht konstante Wahrscheinlichkeit, deren Aenderungen aber, weil die Reihe typisch sein soll, den Charakter zufälliger Oscillationen um den Mittelwert besitzen müssen. Im ersten Falle entsprechen die Einzelwerte den Ergebnissen von Versuchen an einer Urne mit schwarzen und weissen Kugeln in konstant bleibendem Verhältnisse, wenn jedesmal so viele Versuche angestellt werden, als die Beobachtungszahl in einer Beobachtungsstrecke, also die Grundzahl der Einzelverhältnisse beträgt[1]). Die Stabilität der untersuchten Reihe ist dann a priori eben durch die Thatsache bestimmt, dass die volle Analogie mit einem korrekten Zufallsspiel mit konstanten Chancen vorliegt. Der wahrscheinliche Fehler[2]) berechnet sich nämlich direkt aus dieser Voraussetzung nach der Wahrscheinlichkeitstheorie zu

$$r = \varrho \sqrt{\frac{2\,v(1-v)}{g}}$$

wo ϱ die Konstante 0,4769, v einen möglichst genauen Näherungswert der zu Grunde liegenden Wahrscheinlichkeit (in Ermangelung des wahren Wertes) und g die Grundzahl bedeutet. Ist die letztere nicht für alle Einzelverhältnisse gleich, so kann in die obige Formel, falls die Unterschiede nicht sehr gross sind, ein mittlerer Wert derselben eingesetzt werden.

1) Ueber das Folgende vgl. meine Schrift „Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft“ (Freib. 1877) und die vorige Abhandlung über das Geschlechtsverhältnis der Geborenen.

2) Statt des wahrscheinlichen Fehlers könnte man natürlich im folgenden auch immer den einfacher auszudrückenden, aber weniger anschaulichen mittleren Fehler nehmen.

Nun kann aber der wahrscheinliche Fehler auch direkt aus den gegebenen Einzelwerten des Verhältnisses bestimmt werden, und zwar wenn die letzteren hinlänglich zahlreich sind, durch unmittelbares Abzählen vom Mittelwerte aus. Aber auch schon bei einer verhältnismässig kleinen Zahl von Einzelwerten erhält man den jeweilig wahrscheinlichsten Wert der wahrscheinlichen Abweichung durch die Formel:

$$R = \varrho \sqrt{\frac{2\,[\delta^2]}{n-1}}$$

wenn $[\delta^2]$ die Summe der Quadrate der Abweichungen der gegebenen Einzelwerte vom Mittelwerte und n die Anzahl der Einzelwerte bezeichnet[1]).

Wenn nun wirklich die aus den Beobachtungen abgeleiteten Einzelverhältnisse nur zufällig ungenaue Darstellungen einer konstanten Wahrscheinlichkeit v sind, so muss wenigstens annähernd die Gleichung zutreffen: $R = r$.

Je kleiner die Grundzahl g ist, um so grösser wird die wahrscheinliche Abweichung. Bei einem relativ kleinen, z. B. unter 1000 bleibenden g können vereinzelt sehr grosse Abweichungen vom Mittelwerte vorkommen und doch darf man, wenn die eben aufgestellte Gleichung erfüllt ist, die zu Grunde liegende Wahrscheinlichkeit und somit den allgemeinen Bedingungskomplex der untersuchten Erscheinungen als konstant betrachten. Wie gross also auch die Schwankungen der beobachteten Verhältniszahlen sein mögen, sie sind, falls sie den Schwankungen der Resultate von Versuchen an einer Urne mit konstanter Füllung entsprechen, gewissermassen nur unwesentlich, da sie eine wesentliche Aenderung der Grundlage der Erscheinung nicht voraussetzen.

7. Anders aber in dem zweiten der oben unterschiedenen Fälle. Derselbe entspricht der Annahme, dass das Füllungsverhältnis der Urne zwar in jeder Serie von g Versuchen, aus der ein Einzelwert von v berechnet wird, konstant bleibe, aber von Serie zu Serie zufälligen Aenderungen unterworfen sei, jedoch so, dass immer eine Tendenz zur Erzielung eines gewissen

1) Eine weniger sichere Darstellung der wahrscheinlichen Abweichung ist der oben bereits angeführte Ausdruck 0,8453 D, wenn D die durchschnittliche Abweichung bezeichnet.

festen Füllungsverhältnisses vorhanden ist. Jede einzelne Serie ergiebt also einen Näherungswert der ihr entsprechenden Wahrscheinlichkeit v; aber dieser letztere Spezialwert von v ist selbst wieder nur die ungenaue Darstellung des allgemeinen Mittelwertes, um welchen die den einzelnen Beobachtungsgruppen zu Grunde liegenden Wahrscheinlichkeiten oscillieren.

Die Totalschwankungen der beobachteten Verhältniszahlen setzen sich also aus zwei Komponenten zusammen: die eine kann man als die unwesentliche bezeichnen, weil sie einem Schwankungssystem angehört, das auch bei konstant bleibender Grundwahrscheinlichkeit auftritt; die andere dagegen beruht auf der physischen Aenderung der Grundwahrscheinlichkeit von Serie zu Serie und mag daher die physische Schwankungskomponente heissen.

Das Mass der Totalschwankung ist die unmittelbar aus den beobachteten Abweichungen nach der Formel R dargestellte wahrscheinliche Abweichung; die unwesentliche wird durch die Formel r gemessen, indem man für v den allgemeinen Mittelwert einsetzt, und wenn man die wahrscheinliche Abweichung der n Spezialwerte v von dem allgemeinen Mittelwerte mit p bezeichnet, so hat man nach der Wahrscheinlichkeitstheorie die Beziehung:

$$R = \sqrt{r^2 + p^2}.$$

Die „unwesentliche" und die „physische" Schwankungskomponente setzen sich also zu der beobachteten Totalschwankung zusammen, wie zwei rechtwinkelig gegeneinander gerichtete Kräfte zu einer Resultierenden.

8. Ist die physische Schwankungskomponente $p = 0$, d. h. bleibt die Grundwahrscheinlichkeit in der ganzen Reihe konstant, so verwandelt sich die obige Gleichung wieder in $R = r$. Ist eine reelle Komponente p vorhanden, so ist immer $R > r$.

Dagegen kann unter den hier gemachten Voraussetzungen niemals die Ungleichheit auftreten $R < r$, denn in diesem Falle würde p imaginär, was auf eine Unmöglichkeit hinweist.

Hieraus folgt, dass die Stabilität der typischen Reihen ein Maximum hat, dessen Ueberschreitung nur möglich wäre, wenn in der Massenerscheinung noch ganz besondere Verbindungen und Beziehungen beständen. Wenn bei einer statistischen Untersuchung sich mit Bestimmtheit $R < r$ herausstellte, also wenn das aus den Beobachtungen abgeleitete Schwankungsmass kleiner wäre, als das nach der Analogie eines Glücksspieles mit konstanten Chancen berechnete, so läge eben eine ähnliche Erscheinung vor, wie wenn bei einem Spiele ein bestimmtes Resultat mit einer nach der Wahrscheinlichkeitstheorie durchaus unwahrscheinlichen Konstanz und Regelmässigkeit aufträte [1]). Man müsste dann annehmen, dass die anscheinend isolierten Einzelereignisse nicht diejenige Unabhängigkeit voneinander und von dem numerischen Endresultat besässen, welche den einzelnen Versuchen an einer Urne oder an der Roulette zukommt. Mit anderen Worten, eine jene obere Grenze überschreitende Stabilität einer Verhältniszahl würde darauf hinweisen, dass die untersuchte Massenerscheinung eine innerlich verbundene oder dass sie gewissen regulierenden Eingriffen oder Normen unterworfen sei. Sie würde mehr oder weniger dem Bereiche der planmässigen

1) In einer Dissertation v. F. Stark „Ueber das Geschlechtsverhältnis der Totgeburten und der unehelichen Geburten" (Freiburg 1877) wird S. 47 eine erstaunliche Stabilität des Verhältnisses der männlichen zu den weiblichen Totgeburten in Frankreich während der Jahre 1831—40 erwähnt, die der Verfasser für eine ganz aussergewöhnliche Anomalie des Zufalles hält. Jenes Verhältnis schwankt nämlich nur zwischen 1,4480 und 1,4481! Die absoluten Zahlen sind der Tabelle entnommen, die Legoyt offiziell zu der von Quetelet und Heuschling herausgegebenen „Statistique internationale" (p. 225) beigetragen hat. Da nun die französische amtliche Statistik erst seit dem Jahre 1836 fragmentarische und erst seit 1841 regelmässige (wenn auch anfangs noch sehr unzuverlässige) Angaben über die Totgeborenen liefert, so musste man zunächst vermuten, dass die Daten der Legoyt'schen Tabelle nachträglich aus dem Urmaterial der Civilstandsregister gewonnen seien. Ich habe nun aber jenes Geschlechtsverhältnis nach den Zahlen der Tabelle auch von 1830 an rückwärts bis zum Anfang des Jahrhunderts berechnet und immer wieder denselben Wert 1,448 gefunden. Ferner aber ergiebt sich das Verhältnis der Totgeburten überhaupt zur Gesamtzahl der Geburten von 1840 an in allen vorhergehenden Jahren nach den Zahlen dieser Tabelle konstant gleich 0,03276. Eben diese Zahl ist aber auch der Durchschnittswert des letzteren Verhältnisses in den ersten fünf Jahren mit allgemeiner Erhebung der Totgeburten, 1841—45, und andererseits findet man 1,448 als Durchschnittswert des Sexualverhältnisses der Totgeborenen in diesem Jahrfünft. Unter diesen Umständen kann man mit einer der Gewissheit unendlich nahe kommenden Wahrscheinlichkeit behaupten, dass die betreffenden Zahlen jener Tabelle aus der Zeit vor 1841 nicht auf wirklichen Beobachtungen beruhen, sondern nachträglich berechnet worden sind, indem man das Durchschnittsverhältnis 0,03276 zur Bestimmung der Totgeburten aus der Gesamtzahl der Geburten benutzte und die gewonnene Zahl nach dem Durchschnittsverhältnis 1,448 in Knaben und Mädchen zerlegte! Aber wenn man in dieser Weise eine Tabelle von Beobachtungen „vervollständigt", so sollte man es doch mindestens ausdrücklich sagen.

Ordnung oder der gebietenden Gesetze angehören. Die Reihen dieser Art, die man „gebundene“ nennen kann, bilden eine besondere Klasse, die nicht bloss rein statistisch behandelt werden kann, da es vielmehr hauptsächlich darauf ankommt, die Beziehungen solcher Reihen zu der regelnden Kraft oder dem zwingenden Gesetze zu ermitteln und namentlich festzustellen, wie weit das letztere erfüllt wird. Also nicht die statistischen Zahlen für sich, sondern das Gesetz und dessen Erfüllung sind in diesen Fällen der Gegenstand der Untersuchung. Je intensiver das Gesetz wirkt, um so weiter kann die für unverbundene Reihen geltende Stabilitätsgrenze überschritten werden, was nicht ausschliesst, dass zugleich noch eine evolutorische Bewegung zur Erreichung des Punktes vorhanden, an welchem das Gesetz absolut erfüllt sein würde. So kann man z. B. das Verhältnis der Zahl der die Schule besuchenden Kinder zur Zahl der überhaupt unterrichtsfähigen formell als einen empirischen Ausdruck der Wahrscheinlichkeit des Schulbesuches betrachten. Besteht kein Schulzwang oder nur ein lax gehandhabter, so dass jenes Verhältnis noch ziemlich weit von der Einheit entfernt bleibt, so werden die Einzelwerte desselben in einer Reihe von Jahren vielleicht Schwankungen zeigen, die mit der Annahme einer konstanten Grundwahrscheinlichkeit vereinbar sind, vielleicht aber auch eine noch geringere Stabilität besitzen. Denkt man sich aber, dass die Ausführung des Gesetzes von Jahr zu Jahr immer strenger wird, so werden die beobachteten Verhältnisse sich immer mehr der Einheit nähern. Diese letztere aber spielt nicht etwa die Rolle eines typischen Mittelwertes, da Abweichungen über 1 hinaus gar nicht möglich sind; sie ist nur ein oberer Grenzwert, der gewissermassen eine einseitige Anziehungskraft ausübt. Bei genügender Intensität der gesetzlichen Zwangskraft werden dann auch die Schwankungen des der Einheit nahegerückten Verhältnisses weit geringer sein können, als die einer unverbundenen Reihe mit konstanter Grundwahrscheinlichkeit, zumal jetzt geradezu kompensatorische Beziehungen zwischen den aufeinanderfolgenden Einzelwerten auftreten können; denn bei energischer Tendenz zur Durchführung des Gesetzes wird der Umstand, dass das Verhältnis in einem Jahre etwas kleiner geworden ist, die Veranlassung zu grösserer Strenge in der Folgezeit bilden.

Ganz ähnlich verhält sich z. B. die empirische Bestrafungswahrscheinlichkeit für Verbrechen, d. h. das Verhältnis der Zahl der Verbrechen, die eine Bestrafung der Thäter nach sich gezogen, zu der Zahl der überhaupt vorgekommenen. Auch die Reihen dieses Verhältnisses können eine ähnliche Dispersion, wie unverbundene zeigen, solange jenes Verhältnis wegen Mängel der Polizei und Justiz einigermassen weit von der Einheit entfernt bleibt. Steht es dagegen dieser seiner oberen Grenze infolge der energischen Einwirkung der Staatsgewalt sehr nahe, so kommt für seine Stabilität die durch das Kriterium $R = r$ gesetzte Grenze nicht mehr in Betracht.

Weniger intensiv regelnd als die Staatsgesetze werden z. B. kirchliche Vorschriften wirken, obwohl immerhin in manchen Gegenden auch ohne staatlichen Taufzwang das Verhältnis der Zahl der getauften Kinder zu derjenigen der in der betreffenden christlichen Konfession geborenen ebenfalls seiner absoluten Grenze 1 so nahe kommen kann, dass die Stabilitätsgrenze der unverbundenen Reihen überschritten wird.

Es ist hier noch zu bemerken, dass der Ausdruck r, wenn v der Einheit sehr nahe kommt, ungenügend wird. Aber auch ohne Formel begreift man leicht, dass das Maximum der Stabilität, das aus der Analogie eines Glücksspiels mit konstanten Chancen abgeleitet wird, nicht massgebend sein kann für die Genauigkeit, mit welcher ein alle Einzelfälle normativ beherrschendes Gesetz in der Masse zum Ausdruck gebracht wird. Die obere Grenze der Genauigkeit ist unter diesen Umständen offenbar die dauernde Ausführung des Gesetzes in allen Fällen.

9. Unbegreiflich würde uns aber die Ueberschreitung des durch die Bedingung $R = r$ gegebenen Maximums der Stabilität dann sein, wenn sie bei einer unverbundenen Massenerscheinung von konkreten Einzelfällen vorkäme, also in einer solchen, in der wir weder kompensatorische innere Beziehungen noch die Wirkung eines normativen Gesetzes auf alle Einzelfälle entdecken könnten. Es gilt dies z. B. von den einzelnen Knaben- und Mädchengeburten in einem Lande; und eben deshalb giebt die Gleichung $R = r$ das mögliche Maximum der Stabilität des Verhaltnisses der Knabengeburten zur Gesamtzahl der Geburten an, eine Grenze, die auch wirklich erreicht wird.

Zu den „gebundenen" Reihen sind auch diejenigen zu rechnen, deren Glieder nach einem bekannten oder erkennbaren Normativgesetze äussere Veränderungen, z. B. regelmässig periodische Bewegungen aufweisen. Solche Veränderungen können nicht mehr als „Schwankungen" in dem bisherigen Sinne angesehen werden, da sie eben einer vorgeschriebenen Norm entsprechen. Wohl aber sind die in der Regel vorhandenen Abweichungen von der streng gesetzlichen Bahn als Schwankungen zu behandeln und womöglich zu messen. Diese letzteren können wieder in allen Grössengraden vorkommen, je nach der Kraft der herrschenden Gesetze. Wenn z. B. in einem Lande gesetzlich bestimmt ist, dass 2 % der männlichen Bevölkerung im stehenden Heere dienen sollen, dass jedoch in einer gewissen Jahreszeit ein Viertel der Armee zeitweise beurlaubt, in einer anderen Jahreszeit aber ein Viertel ihrer Normalstärke an Reserven eingezogen werden solle, so wird die Reihe der Zahlen, welche von Monat zu Monat das Verhältnis der Präsenzstärke der Armee zu der männlichen Bevölkerung des Landes angeben, eine deutliche Periodicität mit regelmässiger Wiederkehr von Maximum und Minimum erkennen lassen. Nach dem Gesetze steht auch fest, wie gross diese Verhältniszahl im Maximum, im Minimum und im Normalstande sein soll, aber in der Wirklichkeit werden immer Abweichungen vorkommen, die je nach dem Grade der Strenge und Genauigkeit, mit der das Gesetz durchgeführt wird, grösser oder kleiner sein werden. Jedenfalls aber muss man auch hier wieder die vollständige Ausführung des Gesetzes als die obere Grenze der Genauigkeit betrachten. Die nach den Kalendermonaten geregelte Periodicität der Heiratsfrequenz dagegen tritt mit weit geringerer Sicherheit auf. Sie hängt ab von der Sitte, von gewissen ökonomischen Verhältnissen und in katholischen Ländern von den kirchlichen Vorschriften über die geschlossene Zeit. Die letzteren wirken am intensivsten, da sie unmittelbar eine regelnde Einwirkung auf die Einzelfälle ausüben. Jedoch hat diese Vorschrift nicht die Zwangsgewalt eines Staatsgesetzes und sie wird thatsächlich nur von einem gewissen Teile der Bevölkerung berücksichtigt.

Noch mehr verwischt sich die Periodicität der Sterblichkeitsverhältnisse nach den Jahreszeiten. Reihen dieser Art gehören schon gar nicht mehr zu den gebundenen, da die nur sehr unklar auftretende Periodicität nicht auf einer herrschenden Regel, sondern nur auf der periodischen Veränderlichkeit eines äusseren Einflusses beruht, dessen Wirkung nicht streng fixiert, sondern im Zusammenhang mit den sonstigen Umständen sehr wechselvoll ist. Jedenfalls aber ist die Periodicität einer solchen Reihe insofern zu beachten, als man bei Untersuchung ihrer Schwankungen jede Phase für sich behandeln muss.

10. Den Gegenstand der selbständigen statistischen Untersuchung bilden wesentlich die unverbundenen konkreten Massenerscheinungen. In diesen herrschen weder normative Gesetze noch kompensatorische innere Beziehungen; jeder Einfall kommt natürlich nur in einer strengen Kausalitätsreihe zustande, die aus äusseren Ursachen oder inneren Motiven bestehen mag, aber das Zusammentreffen der Einzelfälle und die dadurch bedingten numerischen Verhältnisse der Massenerscheinungen beruhen nur auf Wahrscheinlichkeitsgesetzen, die keine Zwangskraft haben, sondern nur die allgemeinen Möglichkeitsbedingungen abspiegeln, unter denen jedes individuelle Ereignis auftritt. Diese Gattung ist also durchaus verschieden von derjenigen der verbundenen Massenerscheinungen, in denen ein das Ganze beherrschendes Gesetz unmittelbar bestimmte Zahlenverhältnisse als Endresultat verlangt. Als Beispiel der letzteren Art haben wir bereits erwähnt die wirkliche Präsenzstärke eines Heeres in Prozenten der Bevölkerung, wenn ein bestimmter Prozentsatz gesetzlich vorgeschrieben ist; als Gegenstück der ersteren Gattung würde dem entsprechen das thatsächliche Verhältnis zwischen Heeresziffer und Bevölkerung, wenn die Soldaten durchaus freiwillig zu feststehenden Bedingungen angeworben würden. Ohne Zweifel würde das letztere Verhältnis in einer Reihe von Jahren weit grössere Schwankungen zeigen, als das erstere, und die Untersuchung dieser Schwankungen wäre jedenfalls statistisch interessanter, als die der anderen.

11. Gehen wir nun zu einer näheren Betrachtung der nichtgebundenen typischen Reihen über, deren Glieder die Form von Wahrscheinlichkeiten (oder von einfachen Funktionen von Wahrscheinlichkeiten) besitzen. Für diese Gattung besteht unzweifelhaft das Maximum der Stabilität oder das Minimum der Dispersion, das durch die Bedingung $R = r$ bestimmt wird. Nimmt man als Beobachtungsgrösse nicht den empirischen Wert von v, sondern

das Verhältnis $\frac{a}{b} = \frac{v}{1-v}$, so bleibt die Formel R unverändert [1]) in Geltung, während statt r der Ausdruck $\frac{r}{(1-v)^2}$ zu nehmen ist, den wir mit (r) bezeichnen wollen. Allerdings giebt dieser Ausdruck nur eine Näherung, die um so ungenauer wird, je grösser r ist.

Bezeichnen wir den Quotienten $\frac{R}{r}$ mit Q, so wird die Bedingung des Maximums der Stabilität $Q = 1$. Die dieser Bedingung entsprechende minimale Dispersion habe ich in der oben angeführten Schrift die normale genannt, deutlicher wäre sie vielleicht noch als „normalzufällige" zu bezeichnen. Sie entsteht lediglich dadurch, dass eine konstante Grundwahrscheinlichkeit nur mit derjenigen Unsicherheit in den beobachteten Verhältniszahlen zum Ausdruck kommt, welche nach der Analogie eines korrekten Glücksspiels zulässig ist.

Die Bedingung $Q > 1$ entspricht der „übernormalen Dispersion", die dadurch entsteht, dass die „unwesentlichen" oder „normal-zufälligen" sich mit den physischen Schwankungen der Grundwahrscheinlichkeit kombinieren.

Die unternormale Dispersion, entsprechend dem Kriterium $Q < 1$, kommt hier nicht in Betracht, weil sie nur bei gebundenen Reihen möglich ist.

Wenn man nun verschiedene Reihen hinsichtlich ihrer Stabilität oder ihrer Dispersion vergleichen will, so kommt es wesentlich nur auf die physische Schwankungskomponente an. Gilt für alle verglichenen Reihen das Kriterium $Q = 1$, so ist ihnen in diesem Sinne gleiche Stabilität und Dispersion zuzuschreiben, wie verschieden auch die unmittelbar bestimmten Schwankungsmasse R sein mögen. Denn in allen diesen Fällen ist die physische Schwankungskomponente Null und die Verschiedenheit der Grösse R nur durch die verschiedenen Werte von g und v bedingt, und zwar nach einer festen theoretischen Formel. Allen verglichenen Reihen liegt eine konstante Wahrscheinlichkeit zu Grunde, das ist das sachlich entscheidende Moment.

---

1) Selbstverständlich ist sie mit den Einzelwerten und dem Mittelwerte der jetzt angenommenen Beobachtungsgrösse zu berechnen.

Demnach wird man auch bei der Vergleichung von Reihen mit übernormaler Dispersion, für welche das Kriterium $Q > 1$ gilt, die normal-zufälligen Schwankungskomponenten aus den Werten von R, welche die Totalschwankungen darstellen, eliminieren und nur die von den Grundzahlen g unabhängigen physischen Schwankungskomponenten p berücksichtigen. Aus der oben aufgestellten Beziehung zwischen R, r und p ergiebt sich $p = r\sqrt{Q^2 - 1}$, und dies wäre also die zur Charakterisierung und Vergleichung der Dispersion verschiedener Reihen theoretisch zu empfehlende Grösse.

12. Bei der Anwendung der obigen Formeln auf wirkliche statistische Daten muss man indes einige Ungenauigkeiten hinnehmen. Eine mathematisch genaue Erfüllung der Bedingung $Q = 1$ darf man nie erwarten, und wenn sie einträfe, so wäre dies nur auf Rechnung des Zufalls zu schreiben. Denn das den Zähler von Q bildende R ist nur der wahrscheinlichste Wert der wahrscheinlichen Abweichung und sein eigener wahrscheinlicher Fehler ist bei der gewöhnlich verwendeten mässigen Anzahl von Einzelwerten nicht unerheblich. Derselbe beträgt z. B. bei einem Werte n von 16—25 zwischen 0,1192 und 0,0954 des wahrscheinlichsten Wertes R und der wirkliche Fehler kann in einzelnen Fällen noch viel bedeutender sein. Nehmen wir nun den jedesmaligen Wert von r als genau an, was in der Praxis keineswegs immer der Fall ist, so wird man, wenn auch der wahre Wert von Q gleich 1 wäre, doch bei der gewöhnlich vorkommenden Grössse von n für das empirische Q eine wahrscheinliche Unsicherheit etwa zwischen den Grenzen 0.9 und 1.1 und vereinzelt sogar noch beträchtlich grössere Abweichungen erwarten müssen. Es wird also insbesondere doch auch manchmal das aus den Beobachtungen berechnete R kleiner sein als r, demnach $Q < 1$ werden. Da aber eine wirkliche unternormale Dispersion unter unseren Voraussetzungen nicht vorkommen kann, so sieht man aus solchen Fällen, wie gross der negative Fehler von Q infolge der Unsicherheit von R unter Umständen werden kann, und man wird daher in anderen Fällen einer gleichartigen Untersuchung auch positive Abweichungen von der Einheit in ähnlicher Grösse als zufällige Ungenauigkeiten ansehen dürfen, welche die normale Dispersion noch nicht ausschliessen. In meiner Abhandlung über das Geschlechtsverhältnis der Geborenen (s. o. S. 141) findet man

z. B. einen Vergleich der Präcisionen für 34 Reihen von je 24 Einzelwerten des Sexualverhältnisses und es ergiebt sich daraus, dass die Q entsprechende Grösse in einem einzigen extremen Falle bis 0,723 sinkt. Da der richtige Wert derselben aber mindestens 1 sein muss, so liegt hier ein ausnahmsweise grosser negativer Fehler im Betrage von mindestens 0,277 vor. Andererseits aber kommt bei jenen 34 Reihen auch in $Q = 1{,}324$ ein vereinzeltes Extrem in positiver Richtung vor und man darf nun mit Rücksicht auf den eben angeführten negativen Fehler schliessen, dass diese starke positive Abweichung wenigstens grösstenteils nur einen zufälligen Fehler darstelle und dass der wahre Wert von Q der Einheit noch sehr nahe komme.

13. Aus einer einzigen Reihe wird man daher die Normalität der Dispersion eines Verhältnisses, wie z. B. der empirischen Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt, im allgemeinen nicht mit genügender Sicherheit erkennen können. Man muss eine grössere Anzahl von Reihen gleicher Art zur Verfügung haben und aus derselben nachweisen, dass die einzelnen Werte von Q im ganzen in engen Grenzen um die Einheit oscillieren, wenn auch einzelne grössere Abweichungen vorkommen. Die Gleichartigkeit der Reihen schliesst übrigens die Verschiedenheit der zugehörigen äusseren Bedingungen nicht aus; man darf annehmen, dass die maximale Stabilität, d. h. die Konstanz der allgemeinen Möglichkeitsbedingungen des Ereignisses eine physische Bedeutung hat, die sich unter sehr verschiedenen äusseren Umständen behaupten kann.

Man wird sich nach dem eben Gesagten in der Praxis also damit begnügen müssen, zu zeigen, dass es Reihen von Verhältnissen giebt, die wenigstens nahezu dem Kriterium $Q = 1$ entsprechen. Dieser Nachweis genügt zunächst, um mit grösserer oder geringerer Sicherheit (je nach dem Werte von n) behaupten zu können, dass das betreffende Verhältnis v im wesentlichen den Charakter einer mathematischen Wahrscheinlichkeit besitzt und dass die empirischen Werte desselben sich nahezu so gruppieren, wie es theoretisch aus der Analogie mit einem korrekten Glücksspiel abgeleitet werden kann. Der Nachweis einer auch nur annähernden Regelmässigkeit dieser Art ist jedenfalls schon von wissenschaftlichem Interesse. Es ist eine positive Vermehrung unseres Wissens, wenn wir erfahren, dass eine Reihe zusammenhangloser Zahlen von verschiedener Grösse nicht etwa einer empirischen Formel, sondern einem a priori aus der Kombinationstheorie abgeleiteten Wahrscheinlichkeitsgesetze sich anpassen. Ferner lassen sich manchmal aus der Thatsache, dass den verschiedenen empirischen Einzelverhältnissen eine wenigstens näherungsweise konstante Wahrscheinlichkeit zu Grunde liegt, Schlüsse auf die innere Beschaffenheit der untersuchten Erscheinung ziehen. Man erfährt ferner, wie grosse Abweichungen einzelner Verhältniszahlen vom wahrscheinlichsten Werte vorkommen dürfen, ohne dass man genötigt ist, eine wesentliche Aenderung der allgemeinen Möglichkeitsbedingungen des Ereignisses anzunehmen. Man wird sich daher auch, falls nicht ein augenfälliger äusserer Störungsgrund vorliegt, nicht weiter zu bemühen brauchen, einzelne Abweichungen von ungewöhnlicher Grösse durch gewagte Vermutungen mit irgend welchen besonderen Umständen in Zusammenhang zu bringen. So finden sich z. B. unter den 36 monatlichen Werten des Geschlechtsverhältnisses der Geborenen im Regierungsbezirk Stralsund aus den Jahren 1870—72 nicht weniger als 7, die einen Ueberschuss von Mädchengeburten konstatieren, und zwar kommen in einem extremen Falle nur 930 Knaben auf 1000 Mädchen. Diesem steht ein anderes Extrem von 1292 Knaben auf 1000 Mädchen gegenüber. Aber diese enormen Schwankungen bedürfen weiter keiner Erklärung; sie sind mit der Konstanz der Möglichkeitsbedingungen einer Knabengeburt vereinbar, die Dispersion der 36 Einzelwerte ist normal-zufällig und der kleinen Grundzahl 630 (der durchschnittlichen monatlichen Geburtenzahl) entsprechend, denn man findet (für die Verhältnisform $\frac{100\,a}{b}$) $R = 56{,}4$ und $(r) = 57{,}1$, also fast vollständige Uebereinstimmung der direkt aus den Beobachtungen und der aus der kombinatorischen Theorie abgeleiteten wahrscheinlichen Abweichung.

Hieraus folgt ferner, dass man aus der Vergleichung einzelner Verhältnisse, selbst wenn deren Grundzahlen nicht sehr verschieden voneinander sind, keine irgendwie verlässlichen Schlüsse ziehen kann. Nur typische Mittelwerte können mit einiger Sicherheit verglichen werden und wenn sich zeigen lässt, dass normale Dispersion um einen Mittelwert stattfindet, so erlangt dieser auch bei mässiger Grundzahl eine genügende Sicherheit.

14. Es nehmen also auch diejenigen Reihen, bei denen nur näherungsweise das Kriterium $Q = 1$ zutrifft, eine ausgezeichnete Stellung ein. Es ist möglich, dass der Ueberschuss über die Einheit, den Q in solchen Fällen aufweist, nur durch die Ungenauigkeit von R entstanden ist, also in Wirklichkeit das Maximum der Stabilität erreicht ist. Eine mathematisch strenge Konstanz der Grundwahrscheinlichkeit ist indes nicht wohl vorauszusetzen, sondern es dürfte immer auch eine physische Schwankungskomponente vorhanden sein, die aber in den höchst stabilen Reihen im Vergleich mit der unwesentlichen oder normal-zufälligen Komponente sehr klein ist. Hier ist nun aber zu bemerken, dass das Kriterium $Q = 1$ in den praktisch annehmbaren Grenzen auch erfüllt sein kann, ohne dass die physische Komponente p gerade sehr klein zu sein braucht, also ohne dass das Maximum der Stabilität sehr nahe erreicht ist. Es ist dies aus der Gleichung $p = r\sqrt{Q^2 - 1}$ ersichtlich, für die man näherungsweise auch nehmen kann: $p = r\sqrt{2\varphi}$, wenn φ ein kleiner Bruch bis etwa 0,2 ist und man $Q = 1 + \varphi$ setzt.

Hat man also z. B. $Q = 1{,}1$, so würde, wenn dieser Wert streng richtig wäre, p noch immer 0,4447 r, also nur wenig kleiner als die Hälfte der zufälligen Schwankungskomponente sein. In Wirklichkeit wird nun allerdings der Wert von Q ungenau sein und der Ueberschuss φ daher vielleicht grösstenteils nur auf dieser Ungenauigkeit beruhen, aber Gewissheit hat man darüber im einzelnen Falle nicht.

Betrachten wir nun eine Reihe, in welcher die physische Schwankungskomponente irgend einen Wert p hat. Diese Komponente wird unverändert bleiben, welches auch der Wert der normal-zufälligen Komponente r sein mag, der sich seinerseits umgekehrt proportional der Wurzel aus der Grundzahl ändert. Man kann folglich die Grundzahl immer so gross nehmen, dass r gegen p gar nicht mehr in Betracht kommt und demnach der Ausdruck der Total-Schwankung $R = \sqrt{r^2 + p^2}$ sich nahezu verwandelt in $R = p$.

Umgekehrt wird man, wenn der konstante Wert p an sich nur mässig gross ist, durch die Wahl kleiner Grundzahlen es dahin bringen können, dass die normal-zufällige Komponente die physische stark überwiegt, wodurch man sich der Gleichung

$R = r$ nähert; übrigens muss die Grundzahl, d. h. die Beobachtungszahl in jeder Serie, doch immer noch einige Hundert betragen, weil sonst die Formel r zu unsicher wird.

15. Aus dem Obigen lässt sich nun folgern: ist die Bedingung $R = r$ nahezu erfüllt bei einer sehr grossen Grundzahl, z. B. 100000 oder mehr, so ist die physische Schwankungskompenente p jedenfalls sehr klein und man kann die Grundwahrscheinlichkeit praktisch als konstant betrachten. Ist aber bei einer sehr grossen Grundzahl die Total-Schwankung R nicht sehr klein, so stellt dieses letztere Schwankungsmass unmittelbar näherungsweise die physische Komponente dar, und zwar mit um so grösserer Annäherung, je grösser es ist.

Ist p von mässiger Grösse, so wird bei einer relativ kleinen Grundzahl (von einigen Hundert aufwärts) der Quotient Q der Einheit ziemlich nahe kommen; daher auch umgekehrt, wenn Q nur weniger grösser als 1 ist, die Möglichkeit vorliegt, dass eine gegen r nicht unerhebliche Komponente p vorhanden ist. Ob dies der Fall ist, würde sich entscheiden lassen, wenn man dasselbe Verhältnis in einer Reihe mit sehr grosser Grundzahl untersuchen könnte, da sich in dieser die physische Schwankung mit genügender Sicherheit unmittelbar herausstellen würde.

Je grösser also die Grundzahl ist, um so grösser ist die Annäherung an das Maximum der Stabilität, welche für eine Reihe durch das approximative Zutreffen des Kriteriums $Q = 1$ angedeutet wird.

Bei den mässigen Grundzahlen aber, die bei praktischen Untersuchungen gewöhnlich zur Anwendung kommen, bleibt ein ziemlich grosser Spielraum für die mögliche Annäherung an das Maximum.

16. Da nun absolut konstante Wahrscheinlichkeiten in den menschlichen Massenerscheinungen wohl nicht vorhanden sein werden, so wird im allgemeinen das Kriterium der normalen Dispersion oder maximalen Stabilität bei sehr grossen Grundzahlen besten Falls nur unvollkommen zutreffen, auch wenn es in Reihen desselben Verhältnisses mit mässigen Grundzahlen durchaus befriedigend erfüllt wird. In der Abhandlung über das Geschlechtsverhältnis der Geborenen habe ich z. B. gezeigt, dass in den sämtlichen 45 Registrierungsgrafschaften Englands nach den Beobachtungen aus den Jahren 1859—71 der Bedingung $R = (r)$

annähernd genügt wird. Untersucht man aber die Werte dieses Verhältnisses für England im ganzen, so bewegen sich dieselben in jenen 13 Jahren zwar nur zwischen den engen Grenzen von 1035 bis 1047, bei einem Mittel von 1042 Knaben auf 1000 Mädchen, aber man findet $R = 2{,}6$ und $(r) = 1.6$, den Quotienten $R:(r)$ also gleich 1.625, und demnach eine, wenn auch nur mässig übernormale Dispersion. Aber die Grundzahl ist hier die durchschnittliche jährliche Geburtenzahl in ganz England, über 730000, und dadurch wird (r) so klein, dass die physische Schwankung p, die sich nach der Formel $(r)\sqrt{Q^2-1}$ zu 2,0 berechnet, die Oberhand erhält. Diese letztere ist aber absolut betrachtet wieder so klein, dass sie gegen die grossen normal-zufälligen Schwankungen (r), die in den Grafschaften wegen der relativ kleinen Grundzahlen gestattet sind, gar nicht in Betracht kommt und demnach auch die Quotienten Q in den letzteren nicht merklich von der Einheit entfernen kann.

17. Will man die statistischen Verhältnisse suchen, für welche die Gleichung $Q = 1$ näherungsweise erfüllt ist, so wird man die Probe vorzugsweise mit solchen anstellen müssen, deren Grundzahlen nur mässig gross sind. Es wird dann möglicherweise eine gewisse physische Schwankungskomponente verdeckt bleiben, und in betreff der Stabilität der Reihen wird man auch bei kleinem Werte des Ueberschusses φ nur sagen können, dass sie sich dem Maximum einigermassen nähere. Aber trotz dieser Unsicherheit bleibt es ein Gewinn, wenn man zeigen kann, dass die unmittelbar beobachtete wahrscheinliche Abweichung bei relativ kleinem g sich annähernd so gestaltet, wie es die a priori aufgestellte Theorie verlangt. Es ist ja gerade eine neue Bestätigung der Theorie, wenn eine Verhältnisreihe bei mässiger Grundzahl annähernd $Q = 1$ aufweist, während bei sehr grossem g der entsprechende Quotient gleich 2 oder noch grösser ist. Auch ist die Erfüllung jenes Kriteriums der annähernd normalen Dispersion ein praktisch genügender Beweis dafür, dass die untersuchte Reihe im wesentlichen den Charakter einer typischen trägt, und das früher Gesagte in betreff der vereinzelten starken Abweichungen und der Vergleichbarkeit von Verhältnissen gilt auch mit Rücksicht auf Reihen dieser Art.

Um die bei kleiner Grundzahl verdeckte Komponente p zu bestimmen, hat man, wie gesagt, ein Mittel in der Untersuchung einer Reihe von Einzelwerten desselben Verhältnisses mit sehr grossen Grundzahlen. Wenn das betreffende Verhältnis nachweislich nicht von der Jahreszeit beeinflusst wird, so kann man z. B. die erste Reihe mit Hülfe von Monatsbeobachtungen bilden, etwa so, dass man die Ergebnisse je eines Monats aus 15—20 Jahren zu Grunde legt. Trifft nun annähernd das Kriterium $Q = 1$ zu, so berechne man auch für die Verhältnisreihe, die sich aus den Beobachtungen der ganzen Jahre ergiebt[1], sowohl R wie r und den entsprechenden Quotienten Q. Geht dieser letztere ebenfalls nur wenig über die Einheit hinaus, so kann die physische Schwankung als unbedeutend angesehen werden; ist er dagegen beträchtlich grösser als 1, so lässt sich die Komponente p mit genügender Genauigkeit nach der Formel $r\sqrt{Q^2 - 1}$ berechnen.

In anderen Fällen wird es vielleicht zweckmässiger sein, die Verhältnisreihen mit grosser und mit kleiner Grundzahl durch geographische Gruppierung zu bilden. Man berechne das betreffende Verhältnis für eine Reihe von Jahren einmal aus den Beobachtungen im ganzen Staatsgebiet und andererseits nach den Ergebnissen in einem Komplexe von kleinen Distrikten, die durch das ganze Land verteilt sind, indem man etwa in Preussen aus jedem Regierungsbezirke einen Kreis nähme. Grosse Städte mit individuellen Verhältnissen könnten nötigenfalls ausgeschlossen werden. Im übrigen würden das Verfahren und die Schlussfolgerungen dieselben bleiben wie oben[2].

18. Kommen wir nun auf den praktischen Gebrauch des Ausdrucks $r\sqrt{Q^2 - 1}$ als Dispersionsmass zurück, so kann man, wenn $Q > 4$, in der Praxis schon ohne Bedenken statt desselben die unmittelbar hervortretende wahrscheinliche Abweichung R nehmen, denn der Fehler, der durch die Vernachlässigung der 1 unter dem Wurzelzeichen entsteht, ist dann geringer, als die in der Regel vorhandene Unsicherheit von Q. Liegt Q zwischen 4 und etwa 1.5, so stellt die obige Formel die physische

---

1) Sollte diese Jahresstrecke noch nicht genügen, um eine sehr grosse Grundzahl zu liefern, so kann man die Einzelverhältnisse aus zwei- oder dreijährigen Beobachtungsstrecken ableiten.

2) Bildet man auf diese Art durch zeitliche oder geographische Gruppierung mehrere Reihen d e s s e l b e n Verhältnisses mit wesentlich verschiedenen Grundzahlen und übernormaler Dispersion, so wird man, wenn die Theorie zutrifft, aus den verschiedenen R und r immer ungefähr das gleiche p finden.

Schwankungskomponente, die wir eben als das rationelle Mass der Dispersion annehmen, natürlich immer mit der durch die Ungenauigkeit von Q bedingten Unsicherheit dar, aber ihre praktische Anwendbarkeit wird dadurch nicht wesentlich beeinträchtigt. Dagegen wird diese Unsicherheit störend, wenn Q kleiner ist als 1.5, also das Kriterium der grössten Stabilität beinahe erfüllt ist. Die Wurzelgrösse ist dann möglicherweise ungefähr von der Ordnung des Fehlers, mit dem Q behaftet ist, und es könnte daher fast der ganze Ueberschuss φ lediglich durch diesen Fehler entstanden sein. Man kann also dann aus der Formel für p nur schliessen, dass die Reihe dem Maximum der Stabilität nahe kommt; ob aber die physische Komponente wirklich so klein ist, dass man sie vernachlässigen darf, lässt sich nur durch Vergleichung mehrerer gleichartiger Reihen oder von Reihen desselben Verhältnisses mit sehr verschiedenen Grundzahlen einigermassen entscheiden. Es wird zweckmässig sein, mit Berücksichtigung der Natur der untersuchten Verhältnisse eine untere Grenze für p anzunehmen, über welche hinaus man die physische Dispersion als Null ansieht.

19. Wir haben bisher angenommen, dass die physischen Schwankungen der Grundwahrscheinlichkeit den Charakter zufälliger Abweichungen von einem Mittelwerte trügen. In der Wirklichkeit wird dies nur bei solchen Verhältnissen zutreffen, deren zeitlich aufeinander folgende Einzelwerte keinerlei Zusammenhang oder Solidarität unter sich besitzen. Streng genommen wird eine absolute Selbständigkeit der successiven Werte wohl nie vorhanden sein. Wenn auch z. B. kein Grund vorhanden ist zu der Annahme, dass ein starker Ueberschuss von Knabengeburten in dem einen Jahre an sich irgend eine Reaktion auf die relative Häufigkeit dieser Geburten im folgenden Jahre ausübe, wenn also keine innere Wechselwirkung zwischen den successiven Wahrscheinlichkeitswerten besteht, so können die letzteren doch unter gemeinsamen äusseren Einwirkungen stehen, die eine langsam kontinuierliche Veränderung der allgemeinen Möglichkeitsbedingungen verursachen. Bei manchen Verhältnissen kann man diese evolutorischen oder undulatorischen Bewegungen der Grundwahrscheinlichkeit wegen ihrer Kleinheit vernachlässigen oder auch ohne weiteres wie zufällige Schwankungen behandeln. Letzteres gilt namentlich für solche Fälle, in denen die aufeinander

folgenden beobachteten Einzelwerte äusserlich betrachtet keine zusammenhängenden Veränderungen erkennen lassen, sondern im ganzen unregelmässig um einen Mittelwert zerstreut scheinen.

In vielen Fällen aber treten solche Zusammenhänge so deutlich und stark hervor, dass sie nicht unbeachtet bleiben können. Wie bereits angedeutet wurde, beruhen dieselben teils auf Wechselwirkungen der sich folgenden Grundwahrscheinlichkeiten, teils auf allmählichen Entwickelungen in dem Komplexe der Möglichkeitsbedingungen eines Ereignisses. Der neue Zustand hat den alten als Ausgangspunkt und so wird auch die neue Grundwahrscheinlichkeit eine Modifikation, sei es eine Vergrösserung oder eine Verkleinerung, der vorhergehenden. Bezeichnen wir die verschiedenen Werte der Grundwahrscheinlichkeit mit v_1, v_2, ... und betrachten wir sie als Ordinaten einer Kurve, deren Abscissen die Zeit t bildet, so wird diese Linie auf längere Strecken zusammenhängende Hebungen oder Senkungen darstellen, während in dem Falle der zufälligen Schwankungen von v die Einzelwerte sprungweise bald oberhalb, bald unterhalb einer horizontalen Mittellinie auftreten.

Unter den Einzelwerten von v aber sind hier nicht die beobachteten Verhältniszahlen, die durch (v_1), (v_2) u. s. w. bezeichnet werden mögen, sondern eben die Grundwahrscheinlichkeiten zu verstehen, die in den Beobachtungen nur näherungsweise zum Ausdruck kommen. Wären die Ordinaten jener Kurve v_1, v_2, . . . bekannt, so müssten die Abweichungen $(v_1)-v_1$, $(v_2)-v_2$ u. s. w. den Charakter normal-zufälliger Schwankungen aufweisen, wenn die Werte v wirklich die Bedeutung mathematischer Wahrscheinlichkeiten besitzen sollen. Daher wäre es auch verfehlt, wenn man, was sich immer ausführen liesse, eine Kurvengleichung ableitete, welche für die gegebenen Werte t genau die zugehörigen Beobachtungswerte (v) wiedergäbe. Die Kurve der Grundwahrscheinlichkeiten lässt sich nur hypothetisch aufstellen; zeigt sich dann, dass die durchschnittliche Abweichung zwischen den berechneten und den beobachteten Werten nicht erheblich grösser und auch nicht erheblich kleiner ist, als man es nach der Wahrscheinlichkeitstheorie erwarten darf, so ist die Hypothese gerechtfertigt. Man darf dann annehmen, dass die angenommene Kurve die thatsächlichen Veränderungen der Grundwahrscheinlichkeit in der vergangenen Zeit annähernd veranschaulicht. Aber eine weitere Bedeutung für die Zukunft hat eine solche Kurve ebensowenig, wie sie irgend eine gesetzliche Kraft in der Vergangenheit besass. Sie ist nichts, als ein Bericht über Geschehenes in geometrischer Form.

20. Die wirkliche Ermittelung solcher Kurven wird im allgemeinen die Mühe nicht lohnen. Höchstens mag zuweilen ein Versuch mit der einfachsten Hypothese über die Veränderung der Grundwahrscheinlichkeit von einigem Interesse sein. Man könnte es vielleicht aus den äusseren Umständen sich noch einigermassen erklären, wenn gewisse Verhältniszahlen im ganzen auf längere Strecken regelmässig mit der Zeit fortschreitende Ab- oder Zunahme zeigten. Eine solche Veränderung würde einer gegen die Abscissenaxe geneigten geraden Linie entsprechen, deren Gleichung $v = a \pm bt$ wäre [1]). Man hätte dann aus den n Beobachtungswerten (v) die wahrscheinlichsten Werte der beiden Koefficienten a und b zu bestimmen und nur zu untersuchen, ob die Differenzen zwischen den berechneten Werten v und den beobachteten (v) der Wahrscheinlichkeitstheorie entsprechen. Zur Entscheidung dieser Frage würde die Vergleichung der Ausdrücke R und r in ihrer früheren Gestalt nicht mehr genügen, wenn die Grundwahrscheinlichkeit sich in der ganzen Beobachtungsstrecke um einen sehr bedeutenden Betrag geändert hätte. Denn die Grösse r, der wahrscheinliche Fehler, mit dem die jedesmalige Grundwahrscheinlichkeit v zum Ausdruck kommt, hängt eben auch von v selbst ab, indem sich bei gleicher Grundzahl und verschiedenem v die Präcisionen der zugehörigen Beobachtungswerte (v) umgekehrt verhalten wie die Wurzel aus dem Produkt v $(1 - v)$. Um weitläufigere Rechnungen zu vermeiden, wird es daher für praktische Untersuchungen empfehlenswert sein, die Reihen so abzugrenzen, dass die auftretenden Differenzen der Grundwahrscheinlichkeiten keine störende Grösse

1) Man könnte in ähnlicher Weise auch untersuchen, ob die Veränderungen von v denjenigen irgend eines anderen Elementes proportional wären, wie z. B. der Bevölkerungszahl, des Brotpreises oder sonstiger Faktoren, zu denen das betreffende v nach seiner besonderen Natur nähere Beziehungen haben könnte. Handelt es sich um eine **gebundene** Reihe, in welcher die progressive Erhaltung eines streng gehandhabten Gesetzes zum Ausdruck kommt, so werden die übrig bleibenden Abweichungen der Beobachtungswerte von der geneigten geraden Linie möglicherweise den Charakter der unternormalen Dispersion tragen.

erhalten. Der Einfluss derselben ist namentlich nur sehr gering, wenn v sich nicht sehr weit von 0,5 entfernt. Steigt die Grundwahrscheinlichkeit z. B. von 0,350 auf 0,500, so nimmt der wahrscheinliche Fehler r nur im Verhältnis von 1 : 1,048 zu, und bei weiterem Anwachsen von v über 0,500 hinaus wird r wieder kleiner, bis es bei $v = 0,650$ wieder bei der gleich 1 gesetzten Grösse ankommt. Solche und noch grössere Unterschiede in der Präcision der Einzelwerte aber kann man ohne praktische Bedenken vernachlässigen, zumal wenn man Ungleichheiten der Grundzahl g unberücksichtigt lässt, welche die Präcision der einzelnen (v) noch stärker beeinflussen. Man wird unter diesen Voraussetzungen also den theoretischen wahrscheinlichen Fehler einfach mit Hülfe eines mittleren Wertes von v berechnen und ihn mit dem aus den Quadraten der Abweichungen $(v_1) - v_1$, $(v_2) - v_2$ u. s. w. bestimmten wahrscheinlichen Fehler R vergleichen. Letzterer unterscheidet sich allerdings von dem früher aufgestellten R dadurch, dass die Abweichungen nicht auf einen festen Mittelwert, sondern auf die der aufgestellten Gleichung gemäss veränderlichen Grundwahrscheinlichkeiten v_1, v_2 u. s. w. bezogen werden. Auch ist es in diesem Falle korrekter (wegen der zwei Konstanten) die Quadratsumme unter der Wurzel statt durch $n-1$ durch $n-2$ zu dividieren, obwohl praktisch auf diese Verbesserung wenig ankommt. Findet man nun auf diese Weise annähernd $R = r$, so erscheint die Hypothese der proportionalen Veränderung von v und t genügend berechtigt.

21. Durch die Ermittelung einer Gleichung zwischen v und t würde man eine unmittelbare Darstellung der physischen Veränderungen der Grundwahrscheinlichkeit erhalten und ein Schwankungsmass in dem früheren Sinne wäre dadurch unnötig geworden. Das Aufsuchen einer solchen Gleichung ist indes selbst in dem zuletzt betrachteten einfachen Falle eine mühsame Arbeit von zweifelhaftem Nutzen. Für die Praxis ist daher ein anderes Verfahren zweckmässiger. Wenn die evolutorische oder undulatorische Bewegung der Grundwahrscheinlichkeit nicht über die Grenzen hinausgeht, innerhalb deren die mit einem Mittelwerte von v berechnete Formel r noch praktisch brauchbar ist, so kann man einfach den besonderen Charakter dieser Bewegung unberücksichtigt lassen und dieselbe behandeln wie die zufälligen Oscillationen der Glieder einer typischen Reihe. Man berechne

also R und r wie in dem früheren Falle aus dem arithmetischen Mittel der beobachteten Werte (v). Man wird nicht finden, dass $R < r$, denn in diesem Falle hätte man eine gebundene Reihe, deren Glieder durch besondere Einwirkungen noch weniger veränderlich wären, als bei konstantem v und normal-zufälliger Dispersion. Ergäbe sich näherungsweise $R = r$, so entsprächen die direkt beobachteten Schwankungen nahezu der Voraussetzung einer konstanten Grundwahrscheinlichkeit und die physische Veränderlichkeit derselben, mag sie evolutorischer oder undulatorischer Art sein, wäre jedenfalls so klein, dass sie vernachlässigt werden könnte. So bleibt also nur die Frage, ob auch, wenn entschieden $R > r$, das für die typischen Reihen geltende Mass p der physischen Dispersion für evolutorische oder undulatorische Reihen in den oben angegebenen Grenzen brauchbar ist und vergleichbare Grössen giebt.

22. Der Ausdruck, um den es sich handelt, ist $p = \sqrt{R^2 - r^2} = r\sqrt{Q^2 - 1}$. Hier haben nun p und R nicht, wie früher, die Bedeutung eines wahrscheinlichen Fehlers, denn die physischen Veränderungen von v sind ja nicht zufälliger Natur, sondern sie stehen in gewissen Verbindungen unter sich oder entsprechen zusammenhängenden Phasen derselben Entwickelung, und was R betrifft, so kombiniert sich diese Schwankungsgrösse aus den physischen Veränderungen und den zufälligen Abweichungen der empirischen Werte (v) von den zugehörigen unbekannten Grundwahrscheinlichkeiten v. Die letzteren Abweichungen müssen dem Kriterium der normal-zufälligen Dispersion entsprechen, welches annähernd durch die Bedingung gegeben ist: $\varrho\sqrt{\frac{2\,[\text{r}^2]}{n-1}} = r$, wenn unter $[\text{r}^2]$ die Summe der Quadrate der Differenzen $(v_1) - v_1$, $(v_2) - v_2$ u. s. w. zu verstehen ist. Nun ist aber R unmittelbar durch seine Form geeignet, die Totalschwankungen um das arithmetische Mittel der Beobachtungswerte zu charakterisieren, da dieser Ausdruck nahezu der Wurzel aus dem mittleren Quadrate dieser Totalabweichungen proportional ist. So würde sich schon durch die Analogie mit der früheren für die zufälligen physischen Schwankungen die obige Formel für p rechtfertigen lassen, indem man einfach durch Definition den Ueberschuss des Quadrates von R über das Quadrat von r als das Quadrat des Masses der physischen Schwankungen hinstellte. Aber die Beziehung

$R^2 = p^2 + r^2$ lässt sich überdies direkt ableiten, und zwar hat man sich darin p in derselben Form vorzustellen, wie man sich in dem früher betrachteten Falle die physische Schwankungskomponente gebildet denken muss [1]. Zugleich ersieht man aus

[1] Man wird sich immer vorstellen können, dass die Grundwahrscheinlichkeiten v_1, v_2, ... Ordinaten einer Kurve sind, deren Gleichung die Form hat:

$$v = a + b\,T' + c\,T'' + d\,T''' + \ldots, \text{ wo } T', T'', T''' \ldots$$

wo die T Funktionen (Potenzen, trigonometrische Funktionen oder sonst geeignet scheinende) von t sind und a, b, c, d, ... zu bestimmende Koefficienten darstellen, deren Zahl wir jedoch in Vergleich zur Zahl n der Beobachtungswerte als klein annehmen. Die Gleichung muss man sich so beschaffen denken, dass die Differenzen (v)—v oder r zwischen den beobachteten und der mit den wahrscheinlichsten Werten der Koëfficienten a, b, c, d .... berechneten Ordinatenwerten annähernd der oben in Bezug auf r aufgestellten Bedingung genügen. Es lässt sich nun allgemein der Satz beweisen, dass:

$$\Sigma((v) - V)^2 = \Sigma(v - V)^2 + \Sigma((v) - v)^2$$

wenn durch das Zeichen Σ die Summe der dahinter stehenden Quadrate dargestellt wird, (v) und v die successiven beobachteten resp. aus der Gleichung mit den wahrscheinlichsten Koëfficienten berechneten Ordinatenwerte bedeuten und V das arithmetische Mittel aus sämtlichen Beobachtungswerten (v) bezeichnet. Multipliziert man nun auf beiden Seiten mit $2\varrho^2$ und dividiert durch $n-1$, so erhält der Ausdruck links vom Gleichheitszeichen genau die Form von R^2, der erste Summand rechts stimmt der Form nach mit dem Quadrat der wahrscheinlichen physischen Abweichung in dem früheren Falle überein und der zweite Summand rechts wird annähernd gleich r^2. Wir behalten hier den Divisor $n-1$ aus Rücksicht auf die Form von R bei, obwohl er theoretisch nicht ganz korrekt ist. Der obige Satz gilt auch bei beliebiger Verschiedenheit der Präcisionen der Einzelbestimmungen, nur ist dann statt des einfachen arithmetischen Mittels V das mit Berücksichtigung des Gewichts der Einzelwerte berechnete Mittel, das „Gewichtsmittel", wie man es nennen könnte, zu nehmen.

Zusatz (1902). Der obige Satz kann auf folgende Art bewiesen werden:

Nehmen wir für T', T'' ... einfach die Potenzen t, t^2 u. s. w. an — die Ausdehnung auf andere Funktionen ergiebt sich ohne weiteres — so hat man nach der Methode den kleinsten Quadrate für a, b, c etc. die Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned}[(v)] &= [1]\,a + [t]\,b + [t^2]\,c \ldots \\ [(v)t] &= [t]\,a + [t^2]\,b + [t^3]\,c \ldots \\ [(v)t^2] &= [t^2]\,a + [t^3]\,b + [t^4]\,c \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

wenn durch die eckigen Klammern die Summen der betreffenden, den Einzelwerten von t entsprechenden Grössen bezeichnet sind. Die (v) drücken die unmittelbar beobachteten Wahrscheinlichkeitswerte aus. Wenn aber die Werte von a, b, c ... nach den obigen Bedingungsgleichungen bestimmt sind, so müssen für die aus der Gleichung $v = a + b\,t + c\,t^2$ .... abgeleiteten, den Beobachtungszeiten t entsprechenden Werte v die Gleichungen gelten:

$$[v] = [(v)],\ [vt] = [(v)\,t],\ [vt^2] = [(v)\,t^2], \ldots$$

dieser Beziehung, dass das arithmetische Mittel noch eine gewisse ausgezeichnete Stellung behält, auch wenn es nicht mehr den Charakter eines eigentlichen typischen Centralwertes besitzt.

Wir sind also berechtigt, alle Reihen von Verhältnissen, die die Form empirischer Wahrscheinlichkeiten besitzen, hinsichtlich ihrer Stabilität oder Dispersion durch Vergleichung der Grössen R und r zu beurteilen und den Ausdruck $p = r\sqrt{Q^2 - 1}$ als Mass der physischen Veränderung der Grundwahrscheinlichkeit zu betrachten, mag diese Veränderung nun in zufälligen Schwankungen oder in unregelmässigen Undulationen oder in einer fortschreitenden Evolution bestehen. Nur dürfen die äussersten Grenzen des Spielraumes, in dem v sich bewegt, nicht so weit auseinander liegen, dass der Ausdruck r nicht mehr mit praktisch genügender Genauigkeit aus einem einzigen, mittleren Werte von v berechnet werden kann.

23. Als neues Beispiel einer Anwendung der im vorstehenden erörterten Theorie der Dispersion statistischer Reihen wollen wir jetzt das Geschlechtsverhältnis der Gestorbenen in verschiedenen Altersstufen behandeln.

Man kann ohne Zweifel nach der Wahrscheinlichkeit fragen, dass eine in einer gewissen Altersstufe gestorbene Person, die aufs Geratewohl herausgegriffen wird, dem männlichen Geschlecht angehöre. Es ist dies eine relative Wahrscheinlichkeit, die abhängt von der absoluten Sterbenswahrscheinlichkeit des einen und des andern Geschlechts in der betreffenden Altersklasse und von der Zahl der dem Sterben ausgesetzten männlichen und weib-

---

Aus der Gleichung für v ergeben sich ohne weiteres die folgenden:

$$[(v)\,v] = [(v)]\,a + [(v)\,t]\,b + [(v)\,t^2]\,c \ldots$$
$$[v^2] = [v]\,a + [vt]\,b + [vt^2]\,c \ldots$$

Man hat also nach den vorigen Gleichungen $[(v)\,v] = [v^2]$. Daraus folgt, wenn man die Differenz $(v) - v = \tau$ quadriert: $[(v)^2] - [v^2] = [\tau^2]$. (1)

Wenn ferner $(v) - V = \Delta$, so ist $[(v)^2] - nV^2 = [\Delta^2]$ (2)

und wenn $v - V = D$, so ist $[v^2] - nV^2 = [D^2]$. (3)

Die Gleichungen (2) und (3) kommen dadurch zustande, dass $2\,[(v)]\,V$ ebenso wie $2\,[v]\,V$ gleich $2nV^2$, da $[(v)] = [v] = nV$.

Durch Addition von (1) und (3) erhält man schliesslich:

$$[(v)^2] - nV^2 = [\tau^2] + [D^2] = [\Delta^2],$$

also die zu beweisende Gleichung. Uebrigens gilt dieser Satz nicht nur für Wahrscheinlichkeitsverhältnisse, sondern für beliebige Messungsgrössen überhaupt.

lichen Lebenden. Jedoch kann sie als ganz selbständig nach unserer Theorie behandelt werden. Sind in einem Kalenderjahre a männliche und b weibliche Individuen der bestimmten Altersstufe gestorben, so ist $\frac{a}{a+b}$ ein empirischer Näherungswert jener relativen Sterbenswahrscheinlichkeit der Männlichen, und es fragt sich nun, ob in einer grösseren Reihe solcher Verhältniszahlen mit annähernd gleicher Grundzahl die wahrscheinliche Abweichung vom Mittelwerte so gross ist, wie bei den Ergebnissen eines analogen Glücksspiels mit konstanten Chancen, mit anderen Worten, ob die Reihe annähernd das Maximum der Stabilität aufweist oder ob eine erhebliche physische Schwankungskomponente vorhanden ist.

Als Zahlenmaterial nehmen wir zunächst die in der „Statistique internationale" (p. 117) zusammengestellten Daten über die Sterbefälle in Belgien in den Jahren 1841—60 [1]. Anstatt des Verhältnisses $v = \frac{a}{a+b}$ aber legen wir wieder die Relativzahl $z = \frac{1000\,a}{b}$ zu Grunde, weshalb statt r, wie früher bereits bemerkt wurde, $\frac{1000}{(1-v)^2}\,r$ oder (r) in dem Kriterium der Stabilität auftritt. Es ist also z die Zahl der gestorbenen männlichen Individuen auf 1000 weibliche. Die Schwankungen dieser Zahl sind nun in jener 20jährigen Periode sehr verschiedener Natur, je nachdem sich dieselben auf die Altersklassen der Kindheit, auf die des jugendlichen, mittleren und vorgerückten Alters und auf das äusserste Greisenalter beziehen. So findet man beispielsweise als Werte von z in den drei ersten Altersmonaten und in den drei Jahrfünften von 45—60 Jahren:

Jahr	0—1 M.	1—2 M.	2—3 M.	45—50 J.	50—55 J.	55—60 J.
1841	1384	1250	1232	853	837	1004
1842	1337	1296	1214	973	898	961
1843	1342	1317	1236	992	869	937
1844	1383	1403	1239	998	888	860
1845	1376	1375	1278	1083	934	960
1846	1353	1280	1318	1253	1078	1054
1847	1357	1315	1221	1468	1353	1138
1848	1330	1439	1310	1116	1077	860
1849	1340	1341	1245	1107	1138	873

1) Mit einigen Korrektionen nach den Originaltabellen.

Jahr	0—1 M.	1—2 M.	2—3 M.	45—50 J.	50—55 J.	55—60 J.
1850	1316	1335	1183	1100	1110	850
1851	1410	1247	1264	1070	1172	1028
1852	1364	1237	1255	1113	1165	1035
1853	1385	1445	1253	1188	1206	1067
1854	1417	1308	1158	1176	1170	1171
1855	1360	1316	1182	1206	1245	1278
1856	1341	1278	1244	1174	1252	1197
1857	1356	1344	1256	1106	1124	1081
1858	1355	1408	1318	1212	1238	1211
1859	1319	1250	1282	1218	1290	1116
1860	1375	1348	1390	1291	1276	1305

In den drei zuerst angeführten Altersklassen sind die Oscillationen von z ohne irgendwie merkbaren Zusammenhang und ohne alle Tendenz in einer bestimmten Richtung. Weder die Notjahre noch die Cholerajahre sind besonders ausgezeichnet und es zeigt sich auch keinerlei Parallelismus in den Veränderungen der drei Reihen. Kurz, die Schwankungen stellen sich hier von vornherein so dar, dass man in ihnen zufällige Störungen eines typischen Mittelwertes vermuten darf, und wir werden in der That unten sehen, dass trotz einiger sehr beträchtlicher Ausschläge die Stabilität dieser Reihen als maximale angesehen werden darf, also die Annahme nahezu konstanter Grundwahrscheinlichkeiten gerechtfertigt ist.

Ganz anders aber bewegen sich die Einzelwerte in den drei letzten Kolonnen. Die Veränderungen gehen hier, zumal bei den Altersklassen von 45—50 und von 50—55 Jahren, mit einem gewissen Parallelismus und zugleich in jeder einzelnen Reihe mit ziemlich deutlich auftretenden Entwickelungstendenzen von statten. Anfangs ist das Verhältnis z kleiner als 1000, also dem männlichen Geschlecht relativ günstig. In dem Notjahre 1846 aber steigt es stark an und in dem folgenden sehr ungünstigen Jahre erreicht es in allen drei Kolonnen ein Maximum. Dann aber tritt — wohl infolge der Wegräumung vieler schwächlicher Männer — auf kurze Zeit ein Rückschlag zu Gunsten des männlichen Geschlechtes ein, dem jedoch bald wieder und bis zum Ende des Zeitraumes eine im ganzen vorwiegende Entwickelung von z nach aufwärts folgt. Jedenfalls trägt das erste Jahrzehnt, abgesehen von dem ganz abnormen Jahre 1847, einen anderen Charakter als das zweite: die relative Sterblichkeit der Männer ist grösser geworden, und es scheinen sich also in Belgien mehr Ursachen angehäuft zu haben, welche auf die Lebensfähigkeit des männlichen Geschlechtes in seinem reiferen Alter spezifisch ungünstig einwirken. Hängt dies vielleicht mit der Entwickelung der Industrie in jenem Zeitraume zusammen?

24. Doch betrachten wir jetzt die theoretischen Kriterien der Dispersion in den verschiedenen Altersstufen. Die Rubriken z, R und (r) in der folgenden Tabelle bedürfen keiner Erklärung; jedoch sei erwähnt, dass die Werte von z und die in R und (r) vorkommenden Werte von v, welche die wahrscheinlichsten sein sollen, für jede Altersklasse aus den Gesamtzahlen der männlichen und weiblichen Gestorbenen des ganzen Zeitraumes abgeleitet sind [1]. Als Grundzahl g ist bei der Berechnung des (r) die jährliche Durchschnittszahl der Gestorbenen jeder Klasse angenommen [2]. Unter Q sind die Quotienten R:(r) aufgeführt. Die mit O bezeichnete Kolonne enthält die äussersten Werte von z, die in den einzelnen Klassen während der 20jährigen Periode vorgekommen sind. Man sieht daraus wieder, wie bedeutend bei relativ kleiner Grundzahl die Ausschläge werden können, die noch mit der normalen Dispersion, also der angenäherten Konstanz der allgemeinen Möglichkeitsbedingungen vereinbar sind.

Unter L ist für eine Reihe von Altersklassen angegeben, wie viele Knaben auf 1000 Mädchen die untere Grenze derselben überschreiten, damit man sich überzeuge, dass dieses Moment zu der Entstehung des grossen Uebergewichtes der relativen Knabensterblichkeit nichts Merkliches beiträgt. Bei den späteren Altersklassen ist diese Rubrik ersetzt durch αD, wo $\alpha = 0{,}8453$ und D die durchschnittliche absolute Abweichung vom Mittelwerte bedeutet. Es ist dies also die Formel, die oben als ein im Vergleich mit R etwas weniger sicherer Ausdruck des wahrscheinlichen Fehlers angegeben wurde, und unsere Zusammenstellung soll zeigen, wie fern dieselbe sich als Mass der Dispersion eignet.

1) Man kann übrigens, wenn die Grundzahlen nicht sehr verschieden sind, ohne erheblichen Fehler auch einfach das arithmetische Mittel der Einzelwerte von v oder z als wahrscheinlichsten Wert nehmen. Das oben angewandte Mittel ist das „Gewichtsmittel“.

2) Den dadurch begangenen Fehler kann man beurteilen, wenn man r einmal mit der grössten und einmal mit der kleinsten Grundzahl berechnet.

Alter	z	O	L	R	(r)	Q
Totgeb.	1348	(1281—1410)	1064	23,4	23,6	0,99
0— 1 M.	1359	(1316—1417)	1052	18,5	22,1	0,84
1— 2 M.	1323	(1237—1445)	1038	42,4	37,1	1,15
2— 3 M.	1253	(1158—1390)	1033	36,2	40,8	0,91
3— 4 M.	1224	(1099—1394)	1030	49,1	42,9	1,14
4— 5 M.	1284	(1174—1429)	1028	52,7	50,6	1,04
5— 6 M.	1257	(1117—1422)	1026	56,2	52,9	1,06
6— 9 M.	1179	(1109—1257)	1024	34,3	30,4	1,13
9—12 M.	1085	(1014—1182)	1020	31,1	27,8	1,12
1— 2 J.	1028	(966—1087)	1019	23,9	15,6	1,53
2— 3 J.	990	(926—1065)	1018	23,5	22,1	1,06
3— 5 J.	947	(879—1019)	1019	23,7	20,1	1,16
5—10 J.	878	(821— 945)	1022	28,7	17,4	1,66
			α D			
10—15 J.	713	(620— 847)	46,0	45,5	18,4	2,5
15—20 J.	770	(685— 919)	36,4	37,9	18,3	2,1
20—25 J.	1095	(965—1234)	38,0	40,2	23,9	1,7
25—30 J.	905	(804—1027)	30,2	32,8	21,3	1,5
30—40 J.	826	(766— 909)	33,2	29,7	13,9	2,1
40—45 J.	943	(812—1115)	48,3	50,3	21,6	2,3
45—50 J.	1143	(853—1468)	83,0	88,9	25,8	3,4
50—55 J.	1124	(837—1353)	103,2	104,4	24,2	4,3
55—60 J.	1055	(850—1305)	95,2	93,9	21,8	4,3
60—65 J.	962	(848—1140)	63,4	64,8	18,5	3,5
65—70 J.	913	(789—1151)	71,8	71,7	16,6	4,3
70—75 J.	906	(766—1150)	60,3	65,9	15,9	4,1
75—80 J.	903	(811—1019)	31,1	36,0	16,8	2,1
80—85 J.	866	(781— 940)	21,7	24,5	19,5	1,26
85—90 J.	800	(721— 904)	34,5	33,9	26,3	1,29
über 90 J.	693	(638— 831)	25,0	28,7	38,1	0,75

25. In den verschiedenen Stufen der ersten fünf Altersjahre kommt also Q durchweg (mit der wohl zufälligen Ausnahme für das zweite Jahr) der Einheit nahe, was darauf hindeutet, dass die angegebenen Werte z nahezu typisch sind und dass die Stabilität dieser Reihen nahezu das Maximum erreicht. Für die späteren Jugendjahre und für die Periode der Vollkraft bewegt sich der Wert von Q zwischen 1,5 und 2,5; das reifere und höhere Alter von 45—75 Jahren erhöht diesen Quotienten noch um ein Bedeutendes, so dass er 4,3 erreicht; dann aber sinkt er rasch und weist in der äussersten Lebensphase wieder auf maximale Stabilität hin. Der Quotient Q ist allerdings kein eigentliches Mass der Dispersion, sondern nur wenn (r) gleich bleibt oder kleiner wird, entspricht der Vergrösserung von Q mit Gewissheit auch eine Vergrösserung der Dispersion. Zur wirklichen Messung der letzteren dient nach den früheren Erörterungen nur die physische Dispersion, die nach Ausscheidung der normal-zufälligen Komponente übrig bleibt. Die Formel $p = (r)\sqrt{Q^2 - 1}$ giebt aber für

die Kindheitsperiode teils imaginäre, teils verhältnismässig kleine reelle Werte. Da nun die ersteren (entsprechend den Werten $Q < 1$) jedenfalls nur durch die Unsicherheit von Q entstanden sind und da die betreffenden Reihen ihrer Natur nach als gleichartig angesehen werden dürfen, so ist es statthaft, auch die kleinen Ueberschüsse von Q über die Einheit, welche reelle Werte von p erzeugen, auf jene Ungenauigkeit zurückzuführen. So kommt bei den ersten 9 Werten von Q als grösste negative Abweichung von der Einheit — 0,16 und andererseits als grösste positive eine solche von + 0,15 vor, und man wird der letzteren denselben Charakter beilegen dürfen, wie der ersteren. Das Mittel dieser 9 Werte aber ist 1,04. Man ist also wohl berechtigt zu der Annahme, dass die wahren Werte dieser Q der Einheit sehr nahe kommen, dass also ihre Einführung in die Formel für p diesen Ausdruck zu einer sehr kleinen Grösse machen würde, die man vernachlässigen kann. Ueberhaupt kann das empirische Q, wie früher bereits erörtert wurde, bis zu einer gewissen Grenze über die Einheit hinausgehen, während die wirkliche physische Schwankung gleichwohl ganz unbedeutend ist. Wo diese Grenze liegt, lässt sich natürlich nicht angeben; doch dürfte es nicht unpassend sein, eine Unterscheidung einzuführen zwischen der physischen Dispersion, die kleiner ist, als die mit ihr verbundene normal-zufällige Komponente, und derjenigen, die dieser letzteren gleich oder grösser ist. Die Grenze würde also dem Werte $Q = \sqrt{2} = 1{,}41$ entsprechen. Liegt Q unterhalb dieser Grenze, so ist es möglich, dass die Stabilität der betreffenden Reihe dem Maximum nahe kommt, ja dasselbe vielleicht so nahe erreicht, als dies in der Wirklichkeit überhaupt zu erwarten ist. Doch kann auch andererseits bei relativ kleiner Grundzahl g der Wert von p, wenn er auch kleiner ist als (r), an sich noch ziemlich gross sein.

26. Berechnen wir eine nach der Formel $p = (r)\sqrt{Q^2 - 1}$ die physische Dispersion für die Altersklassen, in denen sie grösser ist als (r), so ergeben sich folgende Zahlen:

Alter	p	Alter	p	Alter	p
1— 2 J.	18,8	25—30 J.	23,8	55—60 J.	91,2
5—10 J.	23,1	30—40 J.	25,7	60—65 J.	62,0
10—15 J.	42,2	40—45 J.	44,7	65—70 J.	69,4
15—20 J.	33,8	45—50 J.	83,8	70—75 J.	63,2
20—25 J.	32,8	50—55 J.	101,2	75—80 J.	31,0

Auch diese Zahlen sind mit einer Unsicherheit betrachtet, aber dieselbe ist jetzt im Verhältnis zur Grösse der Zahlen selbst als mässig oder klein anzusehen. Im wesentlichen sind diese als vergleichbar zu betrachten; man kann also z. B. sagen, die physische Dispersion des Verhältnisses z ist in der Altersklasse 50—55 Jahre ungefähr dreimal so gross als in der Klasse 15 bis 20 Jahre und mehr als viermal so gross als in der Klasse 25 bis 30 Jahre. In der noch der ersten Kindheit angehörigen Klasse 1—2 Jahre ist p am kleinsten; wahrscheinlich aber ist es in unserem Beispiel durch eine zufällige Anomalie noch aussergewöhnlich gross geworden, da die Analogie mit anderen Beobachtungen über diese Altersklasse und mit den kleinen Werten von Q in den beiden folgenden Klassen dafür spricht, dass auch in dieser Stufe das Maximum der Stabilität nahezu erreicht wird.

Die Werte von p kommen, wie es die Formel bedingt, denen von R sehr nahe, sobald Q einigermassen gross geworden ist. Andererseits aber stimmt R auch leidlich mit αD überein, so dass also für grössere Werte von Q die physische Dispersion ungefähr der durchschnittlichen Abweichung in dem früher angegebenen Sinne proportional wird.

In der frühesten Jugend ist also die Dispersion von z normal-zufällig, die physische Komponente kann vernachlässigt und die zu Grunde liegende relative Wahrscheinlichkeit als konstant angesehen werden. Das heisst also, es giebt für die ersten Stufen der Kindheit einen konstanten Bedingungskomplex, vermöge dessen mehr Knaben als Mädchen sterben. Die relative Anzahl der lebenden Knaben und Mädchen kann in diesem Komplexe keine merkliche Rolle spielen; denn die Zahl L weicht selbst in ihrem Maximum nur wenig von 1000 ab und ihre Veränderungen zeigen nicht den mindesten Zusammenhang mit denjenigen von z. Die letztere Grösse steigt z. B. von 1224 auf 1284, während L von 1030 auf 1028 sinkt, und andererseits sinkt z von 947 auf 878, während L von 1019 auf 1022 steigt. Die einfachste Hypothese ist jedenfalls die, dass in der physiologischen Konstitution des männlichen und weiblichen Organismus in seiner ersten Lebensphase jener Unterschied der Sterblichkeit begründet sei. Jedenfalls beweist die nahezu maximale Stabilität von z in diesen Altersstufen, dass erhebliche äussere Störungsursachen, welche zeitweise spezifisch die Sterblichkeit des einen oder des anderen Geschlechtes modifizieren könnten, nicht vorhanden sind. Denn wenn solche Einwirkungen zeitweilig oder in irgend einer selbständigen Entwickelung aufträten, so würde die Grundwahrscheinlichkeit nicht konstant bleiben. Wir können uns nicht wohl eine andere Vorstellung machen, als dass das Durchschnittsmass der Widerstandsfähigkeit der Knaben gegen den Tod aus organischen Gründen in einem festen Verhältnis geringer sei, als das der Mädchen [1]).

27. Ganz anders verhält sich die Dispersion des Verhältnisses z in den späteren Lebensperioden. Die normal-zufällige Komponente tritt gegenüber der physischen immer mehr zurück; wir müssen also jetzt energisch wirkende und stark wechselnde äussere Ursachen annehmen, welche spezifisch auf die Sterblichkeit des einen oder des anderen Geschlechtes einwirken. In der That sind die Bedingungen und Gefahren des selbständigen Lebensganges bei beiden Geschlechtern so verschieden, dass auch die Veränderungen derselben unabhängig nebeneinander hergehen können.

Im höchsten Greisenalter jedoch tritt wieder eine mehr gleichmässige Stellung der Geschlechter gegenüber den Todesursachen ein. Die Grundwahrscheinlichkeit nähert sich wieder der Konstanz; jedoch scheint in dieser Phase nicht, wie in der kindlichen, ein erheblicher organischer Unterschied in der durchschnittlichen Lebensfähigkeit der männlichen und weiblichen Individuen vorhanden zu sein. Es scheint vielmehr beiden Geschlechtern eine ziemlich gleiche absolute Sterblichkeit zuzukommen und die Werte von z werden hauptsächlich durch das Geschlechtsverhältnis der gleichzeitig Lebenden dieser Altersklassen beeinflusst. So kamen nach der belgischen Volkszählung vom 15. Oktober 1846 auf 1000 Frauen im Alter von 80 bis

1) Es ist bemerkenswert, dass die relative Knabensterblichkeit der beiden ersten Monate ungefähr ebenso gross ist, wie das ebenfalls auf konstanter Grundwahrscheinlichkeit beruhende Geschlechtsverhältnis der Totgeborenen. Es ist also nicht etwa die grössere Schwierigkeit der Knabengeburt, welche den Knabenüberschuss unter den letzteren wesentlich bedingt. Auch das Geschlechtsverhältnis der abortierten Embryonen bewegt sich nach den Pariser Beobachtungen ungefähr in denselben Zahlen. Auf die Schlüsse, die sich aus diesen Thatsachen in betreff der Ursache der Geschlechtsbestimmung ziehen lassen, gedenke ich bei einer anderen Gelegenheit zurückzukommen.

85 Jahre 850, im Alter von 85—90 Jahren 801, im Alter über 90 Jahren 720 Männer, und nach der Zählung vom 31. Dezember 1856 betrugen die entsprechenden Zahlen 766, 777 und 729. Die Zahlen von 1846 aber stimmen sehr nahe und die beiden letzten von 1856 wenigstens noch leidlich mit den Werten von z für jene Altersstufen zusammen.

28. Es mögen noch einige andere Beispiele folgen, welche bestätigen, dass die relative Sterblichkeit der beiden Geschlechter im Kindesalter eine typische Stabilität besitzt. Wir untersuchen zunächst die unmittelbar nach der Form $\frac{a}{a+b}$ ausgedrückte relative Sterbenswahrscheinlichkeit v der Knaben von 0—5 Jahren (excl. Totgeb.) in einigen österreichischen Kronländern nach den Beobachtungen der 13 Jahre 1862—74. Mit denselben Bezeichnungen, wie oben, erhält man hier[1]):

	10000 v	O	R	r	Q
Niederösterreich	5374	(5335—5410)	15,8	18,7	0,84
Oberösterreich	5447	(5327—5555)	42,8	37,0	1,16
Salzburg	5511	(5374—5825)	78,4	82,2	0,95
Steiermark	5461	(5359—5536)	32,2	30,1	1,07

Die entsprechenden 4 Werte von z sind 1162, 1196, 1228, 1203.

Die negativen Abweichungen der Grösse Q von der Einheit sind von derselben Bedeutung wie die positiven, man kann also

1) Bei diesen Beispielen ist eine etwas vereinfachte Rechnung angewandt worden, die indes für den praktischen Zweck genügt. Statt des Gewichtsmittels ist das arithmetische Mittel der Einzelwerte von v in jeder Reihe genommen und als jedesmalige Grundzahl nicht der Durchschnitt aus allen einzelnen Grundzahlen einer Reihe, sondern das Mittel aus der grössten und der kleinsten verwendet. Dieses letztere Verfahren ist im Grunde ebenso berechtigt, wie das erstere, das an sich auch nicht korrekt ist, Ist die Dispersion annähernd normal-zufällig — aber auch nur dann — so verhalten sich die Präcisionen der Einzelwerte einer Reihe annähernd wie die Quadratwurzeln aus ihren Grundzahlen, und das strenge Verfahren besteht dann darin, dass man nach diesem Prinzip alle Einzelwerte auf eine gleiche Präcision reduziert. So findet man z. B. für Niederösterreich: wahrscheinlichster Wert von 1000 v aus dem Gewichtsmittel: 5373 (statt 5374); Wert von R, wenn die Grundzahl (die Zahl aller Sterbefälle von 0—5 J.) in allen 13 Jahren gleich der kleinsten (26633 für 1868) gewesen wäre: 17,4; dieser Grundzahl entsprechendes r: 20,6. Bei Reduktion auf die grösste Grundzahl (37912 für 1873) dagegen wird R = 14,6, r = 17,3. Die im Texte gegebenen Werte von R und r liegen zwischen diesen Extremen und lassen die maximale Stabilität ebenso gut erkennen, wie diese letzteren.

ohne Bedenken schliessen, dass die untersuchten Reihen nahezu das Maximum der Stabilität besitzen und die Grundwahrscheinlichkeiten v in der 13jährigen Periode trotz der Schwankungen ihrer empirischen Werte nahezu konstant geblieben sind.

Einige weitere Beispiele entnehmen wir der bayerischen Statistik, indem wir die Unterscheidung der Gestorbenen nach ihrer Legitimität berücksichtigen. Als Beobachtungsgrösse nehmen wir wieder z, wie bei den belgischen Beispielen. Das Beobachtungsmaterial ist ebenfalls der „Stat. internationale" entnommen und bezieht sich auf die 25 Jahre von 1835/36—1859/60.

Totgeborene	z	O	R	(r)	Q
eheliche	1438	(1367—1544)	34,1	32,5	1,05
uneheliche	1158	(956—1273)	49,2	47,1	1,04
Gest. von 0—1 J.[1]					
eheliche	1276	(1245—1310)	9,5	8,9	1,07
uneheliche	1169	(1121—1234)	18,9	14,3	1,32
Gest. von 1—2 J.					
eheliche	1046	(965—1105)	24,2	20,9	1,16
uneheliche	970	(888—1039)	29,0	38,8	0,75

Mit Rücksicht auf den beträchtlichen negativen Fehler von Q bei den Unehelichen von 1—2 J. kann man auch die positive Abweichung bei den Unehelichen von 0—1 wieder hauptsächlich durch die Ungenauigkeit von R erklären und demnach die Stabilität der 6 untersuchten Reihen von je 25 Einzelwerten durchweg als nahezu maximal betrachten. Besonders bemerkenswert ist die geringe Abweichung von der Einheit, welche das den ehelichen Gestorbenen von 0—1 entsprechende Q aufweist, da hier die Grundzahl (über 38000) schon so gross ist, dass auch eine an sich kleine physische Schwankung schon merkbar hervortreten kann.

29. Da nun also die obigen Werte von z eine typische Konstanz besitzen, so deutet die Verschiedenheit dieser Zahlen bei den Ehelichen und Unehelichen auf eine spezifische und konstante Verschiedenheit der Bedingungskomplexe hin, auf welchen die relative Sterblichkeit der Geschlechter in beiden Kategorien beruht. Dieser Schluss ist erst jetzt gerechtfertigt, nachdem die Werte z nicht nur aus der Gesamtzahl der Beobachtungen des ganzen Zeitraumes abgeleitet sind, sondern auch der Nachweis

1) Die Totgeborenen sind wieder miteingerechnet.

geliefert ist, dass jedes z das Centrum einer normal-zufälligen Dispersion bildet. Wie wenig man aus vereinzelten Beobachtungswerten dieses Geschlechtsverhältnisses Folgerungen ziehen könnte, zeigt sich in der Klasse von 1—2 J., wo der Maximalwert für die Unehelichen (1039) weit über den Minimalwert für die Ehelichen (965) hinaus fällt.

Der relative Knabenüberschuss ist also für die Totgeburten wie für die Sterbefälle des ersten Kindesalters kleiner bei den Unehelichen als bei den Ehelichen und ein konstantes Bedingungssystem wirkt auf die Erhaltung dieser Differenz hin. Es folgt daraus aber keineswegs, dass das männliche Geschlecht durch die Unehelichkeit irgendwie positiv begünstigt werde, sondern die Ursache jenes Unterschiedes liegt vielmehr darin, dass die weiblichen Kinder durch die Unehelichkeit relativ mehr geschädigt werden. Beim Uebergange von den ehelichen Geburten zu den unehelichen steigt die Wahrscheinlichkeit einer Totgeburt für beide Geschlechter, aber die Steigerung ist relativ stärker bei dem weiblichen, das seine normale Begünstigung unter den schlimmen Einwirkungen der Unehelichkeit nicht vollständig behaupten kann. So findet man in Bayern in dem oben angegebenen 25jährigen Zeitraume auf:

10000	eheliche Knabengeburten	341	Totgeburten	= 1
„	uneheliche „	353	„	= 1,035
„	eheliche Mädchengeburten	254	„	= 1
„	uneheliche „	317	„	= 1,25

Dasselbe gilt für die relative Sterblichkeit des ersten Jahres. Die Unehelichkeit erzeugt vergrösserte Sterblichkeit für beide Geschlechter, das weibliche aber verliert einen Teil seines Vorsprunges und wird relativ schwerer getroffen als das männliche. So beträgt nach dem erwähnten bayerischen Material die Zahl der Gestorbenen von 0—1 Jahr (incl. Totgeb.) auf

10000	eheliche Knabengeburten	3375 = 1
„	uneheliche „	3919 = 1,16
„	eheliche Mädchengeburten	2828 = 1
„	uneheliche „	3485 = 1,23

Die vorstehenden Beispiele dürften zugleich den Nutzen klar machen, den die Stabilitätsbestimmung für massenphysiologische

Untersuchungen gewähren kann. Eine Verhältniszahl, welche sich als Centralwert einer normal-zufälligen Dispersion nachweisen lässt, erhält eine gewisse selbständige Konsistenz; sie deutet auf relativ feste Ursachensysteme hin, und die Unterschiede von Zahlen dieser Art gewinnen ebenfalls einen typischen Charakter. Ueberhaupt sind Vergleichungen statistischer Verhältniszahlen und Versuche, die gegenseitigen Beziehungen derselben zu ermitteln, immer unsicher, wenn man nicht die Dispersion derselben festgestellt hat.

30. Verhältnisse von näherungsweise normal-zufälliger Dispersion scheinen auf den ersten Blick im Gebiete der Demologie und Moralstatistik selten vorzukommen. Indes dürfte man sie in zahlreichen Fällen auffinden, wenn man sie nach dem früher besprochenen Prinzip aufsucht, nämlich Reihen mit mässigen Grundzahlen untersucht.

Man kann noch eine zweite Regel aufstellen für die Aufsuchung solcher Verhältnisse: je mehr ein Verhältnis den Charakter einer relativen Wahrscheinlichkeit trägt, um so eher darf man erwarten, dass ihm jene Eigentümlichkeit zukommen werde. Bei Wahrscheinlichkeiten dieser Art haben wir nämlich im allgemeinen am wenigsten erfahrungsmässigen Grund, Veränderungen derselben durch äussere Einflüsse als eine physische Dispersion anzunehmen. Unser Nichtwissen ist allerdings keineswegs ein Beweis für das Fehlen solcher Einwirkungen, aber es macht doch diese Annahme zunächst subjektiv wahrscheinlicher und die subjektive Wahrscheinlichkeit findet sich erfahrungsmässig häufig auch objektiv bestätigt. So sind z. B. die Verhältnisse der Zahl der im Alter 0—1 Jahr gestorbenen Knaben und Mädchen zu den lebend Geborenen desselben Geschlechtes Näherungswerte von absoluten Sterbenswahrscheinlichkeiten. Untersucht man aber diese empirischen Werte in einer Reihe von Jahren, so wird man bei beiden Geschlechtern eine übernormale Dispersion finden. Dieses Resultat lässt sich voraussehen, da wir imstande sind, eine Anzahl konkreter äusserer Ursachen nachzuweisen, wie Cholera, wirtschaftlichen Notstand u.s.w., die tiefgehende Störungen der normalen Sterblichkeitsverhältnisse hervorrufen. Dagegen sehen wir nicht ein, weshalb diese äusseren Einwirkungen specifisch verschieden auf das männliche und das weibliche Geschlecht einwirken sollten, solange die Lebensart der beiden Geschlechter, wie es in der Kindheit der Fall ist, ganz dieselbe ist. Daher darf man vermuten, dass die relative Sterbenswahrscheinlichkeit der beiden Geschlechter in der Kindheit trotz der Veränderungen der absoluten konstant bleibe, und dies haben wir oben bestätigt gefunden, indem sich normal-zufällige Dispersion der empirischen Werte jener Sterbenswahrscheinlichkeit herausstellte.

31. Bei relativ kleinen Grundzahlen zeigt, um noch einige Beispiele anzuführen, das Verhältnis der jährlichen Zahl der Geburten zu der Bevölkerung eines Gebietes manchmal eine dem Maximum nahe kommende Stabilität. Dieses Verhältnis kann als eine zusammengesetzte Totalwahrscheinlichkeit betrachtet werden, die durch ein System von Urnen versinnlicht werden kann, von welchen eine Anzahl nur die dem negativen Falle entsprechende Farbe enthält. Der aus der Ungenauigkeit der Bevölkerungszahl entspringende Fehler kann vernachlässigt werden. Untersucht man dieses Verhältnis für ganze Länder, deren Bevölkerung nach Millionen zählt, so ist der sehr grossen Grundzahl wegen die normal-zufällige Schwankungskomponente fast verschwindend klein, so dass Q einen ziemlich grossen Wert erhält, auch wenn die physische Schwankung an sich nur gering ist. Dagegen tritt in kleineren Gebieten die erstere Komponente überwiegend hervor und Q nähert sich in Uebereinstimmung mit der Theorie der Einheit. So finden wir in der englischen Grafschaft Rutland nach den Ergebnissen der 11 Jahre 1865—75 $R = 10{,}1$ und $r = 7{,}5$, bei einem Mittelwerte jenes Verhältnisses von 299 auf 10.000. In Westmoreland ist in derselben Periode der Mittelwert 303, $R = 6{,}6$ und $r = 4{,}6$. Ebenso finden wir in Rutland in jenem Zeitraume die allgemeine Heiratswahrscheinlichkeit des einen oder des anderen Geschlechtes (wobei die Grundzahl also nur ungefähr der Hälfte der Bevölkerung gleich ist) sehr nahe konstant, da bei einem Mittelwert v von 130 auf 10000 der Wert von $R = 7{,}2$, der von r aber gleich 7,1 gefunden wird. In Westmoreland dagegen ist die Dispersion übernormal: der Mittelwert ist 135, $R = 8{,}4$, $r = 4{,}4$ [1]).

1) L. v. Bortkiewicz hat gezeigt, dass bei grossen Beobachtungszahlen, aber sehr kleinen Ereigniszahlen die Wirkung der Veränderungen der Wahrscheinlichkeit

Untersuchen wir nun auch die oft bewunderte Stabilität der relativen Beteiligung der verschiedenen Civilstandsklassen an den Eheschliessungen. Da hier eine relative Wahrscheinlichkeit zu Grunde liegt, so dürfte man um so eher erwarten, dass die Stabilität solcher Reihen dem Maximum nahekomme. Es ist dies jedoch nicht der Fall. Wenn wir in den verdienstlichen vergleichend-statistischen Tabellen von Bodio[1]) die Zusammenstellung dieser Verhältnisse für mehrere Länder und meistens 11 Jahre überblicken, so ergiebt schon eine vorläufige Schätzung, dass bei der Mehrzahl der Staaten eine stark übernormale Dispersion vorhanden ist, während nur bei zweien, nämlich bei England und Schweden, die Dispersion sich wenigstens nicht allzu weit von der normalen entfernt. In England kamen in den 11 Jahren 1865—75 im Mittel auf 10000 Trauungen überhaupt 8168 Eheschliessungen zwischen Junggesellen und Jungfrauen, mit Schwankungen zwischen den Grenzen 8125 und 8194. Die Schwankungen sind an sich klein, aber dennoch grösser als diejenigen, welche bei den Versuchsresultaten an einer Urne zu erwarten wären, wenn jede Serie eine der durchschnittlichen jährlichen Zahl der Eheschliessungen (die 190000 übersteigt) gleiche Anzahl von Versuchen enthielte. Denn nach dem letzteren Schema ist die wahrscheinliche Abweichung $r = 6{,}0$, während man direkt aus den Quadraten der beobachteten Abweichungen findet $R = 13{,}5$. Hieraus ergiebt sich $p = 12{,}1$, was vergleichsweise allerdings eine mässige physische Dispersion anzeigt[2]). Wenn diese physische Schwankung gleich bleibt und nur die normal-zufällige Komponente durch Verminderung der Grundzahl (der Eheschliessungen) sich vergrössert, so wird bei einer Grundzahl von 16000 schon $R = 23{,}9$ und $r = 20{,}6$ sein, also Q der Einheit schon ziemlich nahe kommen. Wären die betreffenden Verhältniszahlen also monatsweise gegeben, wodurch die Grundzahl ungefähr auf den angegebenen Betrag herabgebracht würde, so könnte man

---

ebenfalls auf ein Minimum sinken und nahezu normale Dispersion entstehen kann. Das Gesetz der kleinen Zahlen, Leipzig 1898.

1) Movimento dello stato civile. Anno 1875. Introduzione, p. XVIII—XXIV.

2) Bei verschiedenen Reihen müssen natürlich die Schwankungskomponenten der Wahrscheinlichkeit v selbst (im obigen Falle also 0,00121) oder gleicher Funktionen dieser Wahrscheinlichkeit verglichen werden.

prüfen, ob Q wirklich sich ungefähr auf die theoretisch vorausgesehene Grösse reduziert.

Was Schweden betrifft, so beträgt der entsprechende Mittelwert in denselben 11 Jahren 8497, mit extremen Ausschlägen bis 8418 und 8555. Man findet $R = 33{,}8$, $r = 14{,}6$, also $Q = 2{,}315$ und demnach die physische Dispersion $= 30{,}5$. Diese Zahl, die unmittelbar mit der für England gefundenen vergleichbar ist, beweist also, dass im letzteren Lande die Stabilität des untersuchten Verhältnisses bedeutend grösser ist als in Schweden.

32. Auf weitere Anwendungen der Theorie müssen wir hier verzichten. Die angeführten Beispiele aber dürften hinreichen, um den Nutzen dieser Untersuchungsmethode klar zu machen. Dieselbe führt zur Kenntnis derjenigen Zahlenverhältnisse, die gewissermassen als massenphysiologische Konstanten zu betrachten sind. Ganz unverändert werden dieselben allerdings im Laufe der Zeit nicht bleiben, aber um so wichtiger ist es, die säkularen Veränderungen dieser stabilsten demologischen Elemente genau zu verfolgen. Auch wenn eine physische Dispersionskomponente verdeckt bleibt, liefert das Auftreten der normal-zufälligen Dispersion eines Verhältnisses immer den Beweis, dass das theoretische Gesetz der Schwankungen, das nicht auf Zwang, sondern auf den Kombinationen der Chancen beruht, in den untersuchten Zahlenverhältnissen die überwiegende Rolle spielt. Andererseits finden wir, dass die gewöhnlich bewunderte Regelmässigkeit demologischer und moralstatistischer Zahlenreihen niemals den Grad der Stabilität überschreitet, der bei entsprechend eingerichteten Versuchen des Glücksspiels mit festen Chancen zu erwarten ist; ja, man darf behaupten, dass dieser Grad bei den bisher untersuchten Verhältnissen niemals in aller Strenge auch nur erreicht wird. Als die zu bestimmende und zu vergleichende Dispersion der statistischen Reihen betrachten wir nur die physische Komponente, die nach Eliminierung der mit der Grundzahl wechselnden normal-zufälligen Komponente übrig bleibt. Diese physische Dispersion nehmen wir einfach gleich Null an, wenn das Kriterium der normal-zufälligen Dispersion mit hinreichender Genauigkeit erfüllt ist, anderenfalls aber giebt die Formel für p einen allgemeinen und vergleichbaren Ausdruck für dieselben. Bis zu welchem Grade die durchschnittliche Abweichung für denselben

Zweck dienlich ist, hat sich im Laufe dieser Untersuchung ebenfalls herausgestellt [1].

[1] Ausser dem Geschlechtsverhältnis der Geborenen und dem der Gestorbenen in gewissen Altersperioden hatte ich anfangs kein anderes Wahrscheinlichkeitsverhältnis mit sicher nachweisbarer normaler Dispersion gefunden. Dass insbesondere die beobachtete wahrscheinliche Abweichung der Sterbenswahrscheinlichkeit der Knaben und der Mädchen im ersten Lebensjahre um ein Vielfaches grösser ist als die theoretisch berechnete, habe ich in der „Theorie der Massenerscheinung" an einem der belgischen Statistik entnommenen Beispiel gezeigt. Nach neueren Untersuchungen kommt indes annähernd normale Dipersion in zahlreicheren Fällen vor, als ich ursprünglich angenommen habe. So hat namentlich Peek (Das Problem vom Risiko in der Lebensversicherung in Baumgarten's Zeitschrift für Versicherungsrecht und -Wissenschaft, Bd. V (1899), S. 168 ff.) aus der niederländischen Sterblichkeitsstatistik für die Jahre 1880—1889 nachgewiesen, dass die Dispersion der Sterbenswahrscheinlichkeit im ersten und zweiten Lebensjahre allerdings in sehr hohem Grade und auch in den nächsten Jahren noch erheblich übernormal ist, dass sie aber vom 8. Jahre ab befriedigend normal wird und weitere Untersuchungen haben zu ähnlichen Resultaten geführt. Auch in Westergaard's Lehre von der Mortalität und Morbilität (2. Aufl. 1901) sind verschiedene sonstige Uebereinstimmungen zwischen Theorie und statistischer Beobachtung nachgewiesen. Eine Kritik der Anschauungen von der statistischen „Gesetzmässigkeit" giebt K. Wagner, Das Problem vom Risiko in der Lebensversicherung (Jena 1898). Vergl. auch L. v. Bortkiewicz, Kritische Betrachtungen zur theoretischen Statistik in Conrad's Jahrbüchern, III. F. Bd. VIII, S. 641 ff., Bd. X, S. 321 ff., Bd. XI, S. 671 ff. (1894—1896).

IX. Naturgesetzlichkeit und statistische Wahrscheinlichkeit.

1. Das Verhältnis der statistischen Regelmässigkeiten zu den naturgesetzlichen Vorgängen, das in den vorstehenden Abhandlungen mehrfach berührt worden ist, möge jetzt hier noch einer kurzen zusammenfassenden Erörterung unterzogen werden.

Als Naturgesetz bezeichnen wir den Ausdruck eines Vorganges, der nach gesicherter wissenschaftlicher Erfahrung unter bestimmten Bedingungen und bei Abwesenheit von Störungen oder Hemmungen sich in allen Fällen auf bestimmte Art wiederholt. So ist es ein Naturgesetz, dass ein nicht unterstützter Stein zu Boden fällt, dass ein trockener mit Seide geriebener Glasstab elektrisch wird, dass in der Nähe eines von einem elektrischen Strom durchlaufenden Drahtes die Magnetnadel abgelenkt wird u. s. w. Einen exakten Charakter aber hat ein solches Gesetz erst dann, wenn der ihm entsprechende Vorgang auch quantitativ genau bestimmt ist, wenn also das Gesetz mathematisch formuliert ist. So gilt für das Fallen des Steines in der Nähe der Erdoberfläche das Galilei'sche Fallgesetz, für die Gravitation auf beliebig grosse Entfernungen von der Erde aber das Newton'sche Gesetz. Solche mathematisch formulierte Naturgesetze kennen wir bisher nur im Gebiet der anorganischen Naturerscheinungen und auch hier nur in den Fällen, in denen es möglich ist, die Erscheinungen auf einfache gleichmässige Elementarvorgänge unter bekannten Bedingungen zurückzuführen. Dies ist teils durch unmittelbare Beobachtung möglich, wie bei den Bewegungen der Himmelskörper, die störenden, von dem Gravitationsgesetz unabhängigen Einwirkungen nicht unterworfen sind; in den meisten Fällen aber müssen auf dem Wege des

Experiments die Elementarvorgänge isoliert und die einfachen und gleichmässigen Bedingungen derselben künstlich hergestellt werden. Je mannigfaltiger und veränderlicher die Bedingungen sind, unter denen die Naturerscheinungen auftreten, desto weniger sind wir imstande, sie aus exakten Naturgesetzen abzuleiten, selbst wenn diese für die Elementarvorgänge gegeben sind. So kennen wir zwar die hydrodynamischen und aerodynamischen Grundgesetze, auch die Gesetze der Wärmestrahlung und Wärmeleitung, dennoch aber können wir die Bewegungen des Meeres und der Luft und ihre Temperaturänderungen an einem gegebenen Ort nicht voraussagen, da diese von der Form und der Oberflächengestalt der Weltteile und den Zuständen des Meeres und der Atmosphäre auf der ganzen Erde abhängig sind.

Die physiologischen Vorgänge in den Organismen haben zum Teil einen physikalischen oder chemischen Charakter und können soweit einer exakten naturgesetzlichen Fassung nahegebracht werden. Eine Zurückführung auf mathematisch formulierte elementare Molekularbewegungen ist jedoch bisher nicht gelungen und bei den Untersuchungen auf diesem Gebiete macht sich auch der Umstand störend bemerkbar, dass die zu Versuchen dienenden Organismen mehr oder weniger grosse individuelle Verschiedenheiten darbieten und die Gleichheit der Bedingungen des Experiments oft nur ungenügend hergestellt werden kann.

Vollends aber sind wir nicht imstande, die Gesetze der organischen Formenbildung auf exakte, also mathematische Ausdrücke zu bringen. Es handelt sich hier namentlich um die embryologische Entwickelung der verschiedenen Organismen. Es lässt sich für jede Art ein regelmässiger Verlauf feststellen, aber ganz abgesehen davon, dass wir schlechterdings nichts über die Ursachen wissen, durch die der Aufbau des werdenden Organismus aus den ihm zugeführten Nährstoffen in bestimmter Form zustande kommt, ist dieser Verlauf wie auch das schliessliche Produkt individuellen Verschiedenheiten unterworfen. So zeigen die neugeborenen Tiere derselben Art mannigfache Variationen in Bezug auf Grösse, Gewicht, Farbe, namentlich aber auch in Bezug auf ihre Lebensfähigkeit, wie ja in betreff des Menschen oben als wahrscheinlich dargethan worden ist, dass die sogenannten Gesetze der Lebensdauer hauptsächlich aus der ursprünglichen Veranlagung der Neugeborenen abzuleiten sind. Daher bildet auch eine aus einer sehr grossen Zahl von Beobachtungen abgeleitete Absterbeordnung einer Generation keineswegs den Ausdruck eines exakten Naturgesetzes, sondern sie giebt nur eine zahlenmässige Darstellung der Wirkungen der in einer grossen Gesamtheit von Geborenen auftretenden individuellen Verschiedenheiten der Bedingungen der Lebensdauer. An sich könnte man erwarten, dass alle Menschen hinsichtlich ihrer Lebenskraft als gleichartige Individuen geboren würden, und wenn dies zuträfe, so könnte man das Naturgesetz aufstellen: der Mensch wird, wenn er nicht durch Unfall oder äussere Gewalt getötet wird, so und so viele Jahre alt. In Wirklichkeit aber zeigt sich, dass die Angehörigen der Spezies Mensch in Bezug auf ihre Lebensfähigkeit in hohem Grade individualisiert sind. Man müsste daher, um Naturgesetze für diese Erscheinungen formulieren zu können, imstande sein, eine gewisse Zahl verschiedener Komplexe von bestimmten Bedingungen aufzustellen und nun zu sagen: alle Menschen, für welche der Bedingungskomplex A besteht, haben ein natürliches Lebensalter von a Jahren, alle unter dem Bedingungskomplex B stehenden haben ein solches von b Jahren u. s. w. Es ist im höchsten Grade zweifelhaft, ob wir jemals auch nur annähernd zur Lösung dieser Aufgabe gelangen. Aber wir haben wenigstens noch eine weitere Erfahrung gemacht. Wir können allerdings nur die Verteilung der aus einer Generation hervorgehenden Sterbefälle nach Altersklassen feststellen; aber wir finden weiter, dass sich annähernd dieselbe Vertheilung auch bei den vorhergehenden und den nachfolgenden Generationen wiederholt. Dies würde natürlich auch der Fall sein, wenn jede Generation aus zahlreichen Gruppen mit naturgesetzlich bestimmtem Sterbealter bestände und wenn ausserdem — ebenfalls naturgesetzlich — diese Gruppen in jeder Generation in gleichen Verhältnissen aufträten. Die thatsächlich näherungsweise bestehende Uebereinstimmung der Absterbeordnung verschiedener Generationen spricht nun jedenfalls für die Existenz naturgesetzlicher Grundlagen der Sterblichkeitsverhältnisse und insbesondere wird man schliessen dürfen, dass die Individuen verschiedener Generationen hinsichtlich ihrer Gruppierung nach der Lebensfähigkeit annähernd gleichartig sind, sich gewissermassen ersetzen oder vertreten können, dass also mit anderen Worten die Individuen aus verschiedenen Generationen in dieser Beziehung bis zu einem gewissen Grade als fungibel betrachtet werden können. Diese Fungibilität der Individuen, die die Individualisierung teilweise wieder aufhebt, wird auch im folgenden im Auge zu behalten sein.

2. Mit den organischen Bildungsvorgängen in der Entwickelungsperiode, dem Wachstum und dem weiteren Lebenslauf der Organismen nahe verwandt sind die biologischen Thatsachen, die auf dem tierischen Thun beruhen, wenn wir die Bezeichnung „Handeln" dem bewussten und überlegten menschlichen „Thun" vorbehalten. Auch von diesen Vorgängen können viele, wenn auch nicht auf mathematisch exakte, so doch auf descriptive Naturgesetze zurückgeführt werden. Dass ein hungriges Raubtier sich auf eine ihm zugängliche Beute stürzt, ist ohne Zweifel eine naturgesetzliche Erscheinung. Ebenso bildet die Darstellung der instinktiven Thätigkeit der Thiere, wie des Nestbaues und der Brutpflege der Vögel, der Lebensweise der Ameisen, der Bienen u. s. w. den Ausdruck beschreibender Naturgesetze, da diese Tiere in allen Fällen, in denen ihnen keine Hindernisse entgegenstehen, in diesen Beziehungen gleichmässig verfahren. Aber die höher organisierten Tiere weisen auch Thätigkeiten auf, die nicht einfach als instinktive Reflexe erscheinen, sondern den konkreten Umständen angepasst sind oder auf Erfahrung, Erziehung oder Gewohnheit beruhen, kurz einen individuellen Charakter haben und demnach nicht unter das Schema der Naturgesetze gestellt werden können. Ein kluger, an menschlichen Umgang gewöhnter Hund z. B. wird sich unter gleichen Umständen ganz anders verhalten als ein roher Kettenhund. Der Spielraum dieser individuellen Thätigkeiten der Tiere hängt von dem Grade ihrer Intelligenz ab, ist aber auch bei den höchststehenden ausserordentlich viel beschränkter als bei einem normal entwickelten Menschen. Bei diesem tritt die instinktive und die durch blosse Reize ausgelöste Thätigkeit hinter der mit Bewusstsein und Ueberlegung ausgeübten, also dem in der höheren menschlichen Natur begründeten Handeln vollständig zurück. Das menschliche Handeln ~~ist wesentlich~~ individuell, da es auf unberechenbar mannigfaltige Art durch die Art und Energie der Willenserregung und durch die Urteilsfähigkeit des ~~Einzelnen~~ bestimmt wird. Die Art der Willenserregung giebt das Motiv des Handelns, die Urteilsfähigkeit wählt die zur Erreichung des vorgesetzten Zweckes am geeignetsten scheinenden Mittel, die Willensenergie bestimmt

die Nachhaltigkeit und Anstrengung, mit der der Zweck des Handelns verfolgt wird. Das menschliche Handeln fällt daher an sich ganz ausserhalb des Rahmens der Naturgesetzlichkeit, denn es besteht nicht nur aus dem äusseren Vorgange, sondern auch wesentlich aus den diesen bedingenden Akten des Willens und der Intelligenz. Daher findet, streng genommen, auch bei völlig gleichen äusseren Umständen ein menschliches Handeln niemals unter völliger Gleichheit aller *Bedingungen* statt. Auch wenn dasselbe Individuum wieder in die gleiche äussere Lage kommt, steht es ihr doch vielleicht ganz anders gegenüber als früher, weil es mittlerweile *älter* geworden ist und weitere Erlebnisse und Erfahrungen hinter sich hat. Diese Individualisierung der Bedingungen des Handelns schliesst indes keineswegs aus, dass die Menschen in grosser Zahl gewisse Handlungen gleichmässig ausüben ~~und regelmässig~~ wiederholen, denn es können eben für viele dieselben Bestimmungsgründe in gewisser Richtung entscheidend und dauernd wirksam sein. Zu solchen durchschlagenden Bestimmungsgründen gehört z. B. der staatsgesetzliche Zwang, der mit solcher Regelmässigkeit und Allgemeinheit wirkt, dass man den ursprünglich politisch-gesellschaftlichen Begriff des Gesetzes bildlich auf die Formel für streng regelmässig auftretende Naturvorgänge übertragen hat. Wie die zwingenden Gesetze, so bringen auch Sitte, Gewohnheit, Mode gleichmässige Massenhandlungen hervor. Aber alle diese Bestimmungsgründe des Handelns sind selbst wieder veränderlich und die auf ihnen beruhenden Massenerscheinungen haben daher keineswegs die Stabilität der sich wiederholenden Komplikationen von Naturerscheinungen, ~~sondern sie~~ zeigen einen *historischen* Charakter, teils mit erkennbarer Entwickelung ~~in~~ bestimmter Richtung, teils mit unregelmässig veränderlichen Phasen. Dasselbe gilt von den volkswirtschaftlichen Erscheinungen. Dem auf Erwerb gerichteten Handeln liegt bei den Einzelnen im allgemeinen das gleiche Motiv, nämlich das Streben nach möglichst grossem Gewinn zu Grunde, aber die Verschiedenheit der geistigen und körperlichen Fähigkeiten und der Arbeitsenergie bringt auch bei gleichen äusseren Umständen sehr verschiedene individuelle Ergebnisse hervor. Dazu kommt die Beschränkung der Bethätigung der Gewinnsucht durch staatliche Vorschriften, durch ethische Rücksichten, durch Trägkeit und Schlendrian, andererseits die Beeinflussung der Volkswirtschaft durch Gemeinsinn und Wohlthätigkeit, jedoch auch durch Genusssucht und unwirtschaftliche Konsumtion. Diese mannigfaltigen Bestimmungsgründe des wirtschaftlichen Handelns sind aber dem Wechsel unterworfen und abhängig von dem allgemeinen Kulturstande der Gesellschaft. In noch höherem Masse sind sie bedingt durch die geschichtliche Gestaltung der Produktionsverhältnisse und die Entwickelung der Produktionstechnik, durch das Wachstum oder die Abnahme der Bevölkerung, durch die weltwirtschaftlichen Wechselwirkungen der Nationen aufeinander.

3. Also auch ganz abgesehen von den oft sehr mächtigen Einwirkungen politisch-geschichtlicher Ereignisse, wie Krieg und Revolution, erweisen sich die wirtschaftlichen Massenerscheinungen als einen Teil des Geschichtsstoffes der menschlichen Gesellschaft, zeitweilig annähernd in einem Beharrungszustande, im ganzen aber mit bestimmt gerichteten Bewegungen. Zuweilen treten solche Erscheinungen in längeren oder kürzeren Zeitabständen auf, die eine gewisse Aehnlichkeit untereinander haben, wie z. B. im 19. Jahrhundert eine unregelmässig periodische Reihenfolge von wirtschaftlichen Hebungen und Krisen zu beobachten war. Dennoch darf man in solchen Wiederholungen keine Analogie einer naturgesetzlichen Regelmässigkeit sehen wollen, denn die Aehnlichkeiten ergeben sich nur bei einer höchst abstrakten Auffassung der Erscheinung, mit Absehen von den konkreten Thatsachen, die doch in den verschiedenen Perioden immer sehr wesentlich verschieden waren. Der wirtschaftliche Aufschwung in den Jahren 1896—1900 war an sich doch etwas ganz anderes als der von 1871—73 oder als die der Krisis von 1857 vorhergegangene Spekulationsperiode und vollends waren die vor dem Zeitalter der Eisenbahnen und Telegraphen aufgetretenen Krisen und Krisenursachen von wesentlich anderer Natur, als die in ihren allgemeinen Zügen ähnlichen Vorgänge der Neuzeit. Noch weniger ist man berechtigt, die allgemeinen Bewegungen der volkswirtschaftlichen Entwickelung, wie den Fortschritt von der Naturalwirtschaft zur Geldwirtschaft und von dieser zu dem modernen Kreditmechanismus oder die fortschreitende Verdrängung des Kleinbetriebs durch den Grossbetrieb und weiter die Organisierung des Grossbetriebs durch Trusts und Syndikate naturgesetzlich aufzufassen oder hier von „Entwickelungsgesetzen" zu

sprechen. Dieser Ausdruck wird überhaupt oft in ungenauer Weise für die einfache historische Thatsache einer bestimmten Ertwickelung angewandt. Unter Entwickelung ist nichts weiter zu verstehen, als der kausale Zusammenhang jedes folgenden Zustandes des Beobachtungsobjekts mit dem nächstvorhergehenden, ohne Wiederholung eines früheren Zustandes. Von einem Entwickelungsgesetz aber kann man nur sprechen, erstens, wenn sich dieselbe Entwickelung in allen gleichartigen Fällen wiederholt, wie z. B. bei dem Embryo einer bestimmten Tierart, bei dem alle Folgezustände schon in dem Anfangszustande des befruchteten Keims angelegt sind, und zweitens, wenn wir die Kombination von Naturgesetzen kennen, die die ganze Reihe von Zuständen beherrscht und in jedem Zeitpunkt den gegebenen Zustand herbeiführt. So können wir z. B. das Entwickelungsgesetz eines glühenden, um eine Achse rotierenden Weltkörpers aufstellen: er wird sich nach den Gesetzen der Wärmelehre abkühlen und sich infolge davon zusammenziehen und nach dem Flächengesetz der Mechanik wird sich seine Umdrehung infolge dieser Zusammenziehung in einem bestimmten Masse beschleunigen. Dieses Entwickelungsgesetz gilt nicht nur für die Vergangenheit des Weltkörpers, sondern auch für seine Zukunft, bis seine Temperatur auf die des Weltraumes gesunken ist.

Hinsichtlich der wirtschaftlichen und überhaupt der geschichtlichen Entwickelung der menschlichen Gesellschaft ist aber weder die eine noch die andere dieser Forderungen erfüllt. Wir dürfen bei ihr nicht einmal, wie es bei der geologischen Entwickelung berechtigt ist, die naturgesetzliche Gleichmässigkeit der Elementarvorgänge annehmen, aus denen sich die verwickelten Gesamterscheinungen in unberechenbarer Mannigfaltigkeit zusammensetzen. Denn die wichtigsten Elementarvorgänge in der menschlichen Gesellschaft sind stets die durch Intelligenz und Willen bestimmten Handlungen des Einzelnen; diese aber können zwar thatsächlich unter gleichen Umständen in gewissem Masse gleichartig auftreten, aber in längeren Zeiträumen findet stets eine Veränderung nicht nur der Umstände, sondern auch der subjektiven Anschauungen und Motive der in verschiedenen Kulturphasen stehenden Individuen statt. Ueberdies sind die Bestimmungsgründe für ein gleichartiges Handeln vieler Individuen für diese niemals nach Art eines Naturgesetzes zwingend, sondern man kann von ihnen nur mit Wahrscheinlichkeit vermuten, dass sie in der Mehrzahl der Fälle entscheidend sein werden. Die metaphysische Frage, ob der Mensch dem in ihm wirkenden jeweilig stärksten Motiv mit Notwendigkeit folgen muss, kommt hier gar nicht in Betracht; es genügt die erfahrungsmässige Thatsache, dass bei verschiedenen Menschen unter gleichen äusseren Bedingungen oft sehr verschiedene Motive auftreten und ihr Handeln entsprechend bestimmen.

Innerhalb des Kreises der spezifisch wirtschaftlichen Thätigkeit des Menschen lassen sich immerhin mit dem relativ besten Erfolge Regeln abstrahieren, die auch mit einiger Wahrscheinlichkeit auf die Zukunft angewandt werden können. Die meisten Menschen sind in ihrem wirtschaftlichen Handeln nicht frei, sondern durch ihre Lebensstellung als dienende Glieder dem volkswirtschaftlichen Mechanismus eingereiht; das Selbstinteresse ist das durchweg überwiegende Motiv, aber die Art seiner Bethätigung wird durch die wirtschaftlichen und gesellschaftlichen Verhältnisse jedes Einzelnen bestimmt, und diese sind für grosse Gruppen gleichartig und relativ stetig. Dennoch wird man wohl daran thun, auf die im Grunde nur bildliche Redensart von den „Naturgesetzen der Volkswirtschaft" zu verzichten. Schon jetzt sehen wir, wie die früheren Vorstellungen von den Naturgesetzen der freien Konkurrenz durch die aus freiem Willen der Beteiligten gebildeten Verbände zum Zweck der Aufhebung der Konkurrenz bis zu einem gewissen Grade ?dementiert werden, und über die Gestaltung der Wirtschaftsordnung jenseits der nächsten Zukunft wird uns weder durch die Geschichte noch durch die Beobachtung der Gegenwart eine einigermassen sichere Voraussagung ermöglicht.

4. Ueberhaupt wird es am besten sein, die spielende Analogie mit den Naturgesetzen ganz aufzugeben, wenn es sich um die aus bewussten und überlegten Willensakten hervorgehenden Massenerscheinungen des Menschenlebens handelt. Die Untersuchung der Regelmässigkeiten dieser Erscheinungen bleibt darum nicht weniger interessant und ist die Aufgabe des Zweiges der Statistik, die man als Moralstatistik zu bezeichnen pflegt. Die Wirtschaftsstatistik ist nur Hülfswissenschaft der Volkswirtschaftslehre; sie verfolgt nicht das menschliche Handeln als solches, sondern sie stellt entweder nur die Ergebnisse desselben quanti-

tativ fest, wie in der Statistik der Produktion, der Aus- und Einfuhr, der Preise, oder sie giebt, wie in der Berufs- und Gewerbestatistik, die numerische Gruppierung der Mitglieder der Gesellschaft nach ihrer wirtschaftlichen Stellung und Thätigkeit, oder endlich sie registriert nur die Hülfsmittel der Produktion oder überhaupt die Bestandteile des Nationalreichtums und hat dann überhaupt keine Beziehung zum menschlichen Handeln. Die Moralstatistik dagegen hat als Gegenstand der Beobachtung und der Zählung unmittelbar gewisse, für das Gesellschaftsleben in irgend einer Art bedeutsame menschliche Handlungen; es gehören dazu aber nicht nur Verbrechen und augenfällige unsittliche Handlungen, sondern auch gesellschaftlich normale, wie die Eheschliessungen. Durch diese aber wird eine Verbindung hergestellt mit den Geburten, die, wenn es sich um Menschen handelt, nicht bloss eine biologische, sondern auch eine soziale und als mit vom menschlichen Willen abhängig auch eine moralische Bedeutung haben. Die Statistik der Sterbefälle, die ebenfalls von sozialer Bedeutsamkeit sind, wenn sie auch nur ausnahmsweise durch den menschlichen Willen herbeigeführt werden, schliesst sich hier als nächstverwandter Zweig an.

5. Beträchtliche Veränderungen in den moralstatistischen Zahlen lassen sich, wie gesagt, meist durch leicht erkennbare Ursachen erklären; treten diese Zahlen aber stetig mit geringen Schwankungen auf, so ist zunächst eben nur diese Thatsache festzustellen und es ist nicht viel gewonnen, wenn zu ihrer Erklärung gesagt wird, dass das ihr zu Grunde liegende Ursachensystem annähernd konstant geblieben sei. Ein weiterer Schritt aber ist der, dass man diese Zahlen auf Verhältnisse bringt, die die Form von genetischen oder analytischen Wahrscheinlichkeitsausdrücken haben, und nun untersucht, ob diese als empirische Ausdrücke einer konstanten oder auch einer auf bestimmte Art veränderlichen mathematischen Wahrscheinlichkeit ansehen lassen. Man erhält dadurch wenigstens einen brauchbaren Masstab für die Stabilität oder Veränderlichkeit dieser Verhältnisse und kann das früher übliche Uebermass der Verwunderung einschränken, wenn sich zeigt, dass die Schwankungen in weiteren oder höchstens in denselben Grenzen liegen, wie die der Ergebnisse mehrerer Reihen von Zügen aus einer Urne mit schwarzen und weissen Kugeln. Immerhin aber bleibt der Wunsch bestehen, sich einiger-

massen eine Anschauung von der realen, physischen Bedeutung der einem solchen Verhältniss „zu Grunde liegenden Wahrscheinlichkeit“ zu verschaffen, denn die reine mathematische Wahrscheinlichkeit hat an sich gar keinen Zusammenhang mit der Wirklichkeit, sondern sie giebt nur Anlass zu Kombinationsaufgaben unter der Annahme gleich möglicher „günstiger“ oder „ungünstiger“ Fälle. Die erfahrungsmässige annähernde Uebereinstimmung solcher Rechnungen mit den wirklichen Ergebnissen von Glücksspielen wird wenigstens im allgemeinen begreiflich, wenn wir uns z. B. den Verlauf der Versuche mit einem Würfel überlegen. Der Würfel kann auf unendlich viele Arten geworfen werden, diese Verschiedenheiten des Verlaufes kommen aber für das Spiel gar nicht in Betracht, es handelt sich lediglich darum, welche Nummer schliesslich oben liegt. Es sind also nur sechs verschiedene Endergebnisse möglich und jedes von diesen kann auf unendlich viele Arten zustande kommen. Wenn nur die Flächen gleich gross sind und der Schwerpunkt genau in der Mitte des Würfels liegt, so scheint es plausibel, dass die unendlich vielen Möglichkeiten, unter denen eine der sechs Nummern herauskommt, zu den unendlich vielen Möglichkeiten, unter denen jede der übrigen herauskommen kann, mit Rücksicht auf das hier in Frage kommende Resultat sich wie 1 : 1 verhalten, woraus sich dann das Verhältnis 1 : 6 für das der Möglichkeiten einer Nummer zu der Summe aller Möglichkeiten ergiebt. Dieses stellt also gewissermassen die physische Wahrscheinlichkeit des Herauskommens dieser Nummer dar. Dieselbe Betrachtung kann man natürlich auch auf Züge aus einer Urne anwenden, die sechs gleiche Kugeln enthält, von denen eine schwarz und fünf weiss sind. Wenn man aber über das Zahlenverhältnis der schwarzen und weissen Kugeln in der Urne nichts weiss, so kann man durch häufige Wiederholung der Ziehungen — natürlich immer mit Zurücklegung der gezogenen Kugel — die vorhandenen physischen Möglichkeitsverhältnisse gleichsam ausprobieren[1]. Schon nach einer mässigen Zahl

1) Von diesem Standpunkt sind auch die Thatsachen zu beurteilen, aus denen Marbe (Naturphilosophische Untersuchungen zur Wahrscheinlichkeitslehre, Leipzig 1899) die Unvereinbarkeit der Erfahrungen beim Glücksspiel mit der Erfahrung nachweisen will. Er hat teils selbst Versuche mit dem Werfen einer Münze angestellt, teils die Ergebnisse des Roulettespiels in Monte Carlo benutzt und so ein immerhin interessantes Material zusammengebracht. Er glaubt nun daraus zeigen zu können, dass die so-

von Versuchen wird man zu dem Schluss gelangen, dass die Möglichkeit des Zuges weiss mehrfach grösser sei, als die des Zuges schwarz, und nach einigen hundert Versuchen wird man

genannten reinen Gruppen, nämlich solche, die in 2, 3, 4 u. s. w. Fällen dieselbe Farbe oder überhaupt dasselbe von zwei gleich wahrscheinlichen Ereignissen aufweisen, weit seltener vorkommen, als es nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu erwarten wäre. Marbe bildet aber dabei aus einer und derselben Versuchsreihe durch Verschiebung des Anfangspunktes der Abzählung eine grosse Anzahl von Gruppen, die nicht voneinander unabhängig sind, sondern teilweise die auch in anderen vorkommenden Fälle enthalten. So werden z. B. aus den 400 Versuchen mit der Münze zunächst 100 Gruppen zu 4 aus den Fällen 1—4, 5—8, . . . 397—400, dann aber auch noch je 99 Gruppen aus den Fällen 2—5, 6—9, . . . 394—397, aus den Fällen 3—6, 7—10, . . . 395—398 und aus den Fällen 4—7, 8—11, . . . 396—399, im ganzen also 397 Gruppen gebildet. Die wahrscheinlichste Zahl des Vorkommens reiner Vierer-Gruppen, sei es der einen oder der anderen Art, unter 397 ist $\frac{2}{2^4} \cdot 397$ oder rund 50, die wirklich gefundene Zahl aber war 69, also ziemlich viel grösser. Dagegen kamen unter 393, 392 und 391 auf ähnliche Art durch vielfache Abzählung gebildeten Gruppen zu 8, 9 und 10 gar keine reinen Gruppen vor, während die wahrscheinlichsten Zahlen bei den angenommenen Versuchszahlen rund 3, 2 und 1 gewesen wären.

Hierzu ist nun zu bemerken, dass das beobachtete Ereignis in dem als einheitlicher Vorgang aufgefassten successiven Zusammentreffen von 4 Wurfresultaten besteht. Die physische Möglichkeit der verschiedenen Formen dieses Ereignisses wird aber bei 400 Versuchen nicht 400 mal, sondern nur 100 mal ausprobiert. Ob ich 100 mal viermal nacheinander eine Münze oder 100 mal je vier Münzen auf einmal werfe, ist vom Standpunkt der Wahrscheinlichkeitsrechnung ganz dasselbe. Im letzteren Falle aber ist ohne weiteres klar, dass die physische Erprobung der Möglichkeit eines bestimmten Resultates, nämlich des Herauskommens von 4 mal Wappen oder 4 mal Schrift, nur 100 mal stattfindet. Bei den successiven Wurfgruppen zu vier aber ist die Sachlage nicht anders. Der physische Thatbestand ist der, dass 400 Würfe stattgefunden haben. Es steht uns aber frei, den ersten, die beiden oder die drei ersten Würfe ausser acht zu lassen, und wir erhalten dann drei andere Reihen von Vierer-Gruppen, die aber dieselbe thatsächliche physische Grundlage haben, wie die erste, also nicht als neue, selbständige Erprobungen der Möglichkeit des „günstigen" Falles gelten können. Diese vier Reihen sind demnach, abgesehen von dem Unterschied zwischen 100 und 99 in der Zahl der Fälle, in Bezug auf die untersuchte Frage als identisch, als Ausdruck derselben Möglichkeitsprobe zu betrachten. Denn die blosse Verschiedenheit der Abzählung derselben physischen Ereignisse zu gleich grossen Gruppen macht ebensowenig einen für die Wahrscheinlichkeitsrechnung in Betracht kommenden Unterschied des Thatbestandes des Versuches aus, wie ein solcher zwischen einem Wurf mit vier Münzen und vier Würfen mit einer Münze besteht. Die wahrscheinlichste Zahl des Vorkommens des günstigen Falles ist in unserem Beispiel in der Reihe von 100 selbständigen Gruppen $12\frac{1}{2}$, die von Marbe beobachtete Zahl stellt sich, wenn wir den Durchschnitt aus den Ergebnissen der vier äquivalenten Reihen nehmen, auf $17\frac{1}{4}$. Nun ist aber die Wahrscheinlichkeit dieser relativ wahrscheinlichsten Ergebniszahl.

schon zu der Annahme geführt werden, dass schwarze und weisse Kugeln in dem Verhältnis von 1 : 5 in der Urne verhanden seien. Stellt man mehrere Reihen von Versuchen in genügend grosser

---

absolut keineswegs gross; sie beträgt $\frac{100!}{12!\ 88!} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{88} \left(\frac{1}{8}\right)^{12}$ oder nach der Stirlingschen Näherungsformel ungefähr 0,113. Bestimmt man die wahrscheinliche Abweichung nach der Formel $\pm \varrho \sqrt{100 \cdot 2 \cdot (0{,}125 \times 0{,}875)}$, wo $\varrho = 0{,}4769$, so findet man $\pm$ 2,23, d. h. es ist ebenso wahrscheinlich, dass bei 100 Versuchen 10,27 bis 14,73 günstige Fälle (also reine Vierer-Gruppen vorkommen, als dass irgend eine andere Zahl derselben herauskommt.

Nach dieser Versuchszahl von 100, nicht nach der von 397, ist also die Wahrscheinlichkeit des wahrscheinlichsten Falles zu beurteilen und mit dem theoretisch bestimmten Vorkommen nicht die Zahl der in 397 Gruppen beobachteten Fälle, sondern nur der vierte Teil dieser letzteren zu vergleichen. Dass nun in diesem Beispiel die Durchschnittszahl der beobachteten günstigen Fälle noch über die obige Grenze nach der positiven Seite hinausging, ist keineswegs sehr auffallend, denn die Wahrscheinlichkeit einer solchen Grenzüberschreitung ist noch immer $^1/_4$. Die Wahrscheinlichkeit reiner Gruppen von noch grösserer Zahl der Einzelfälle nimmt in starkem Verhältnis mehr und mehr ab und zugleich wird bei derselben Gesamtzahl von Einzelfällen die Zahl der als selbständige Möglichkeitsproben anzusehenden Gruppenfälle immer kleiner. So kann man z. B. aus 400 Versuchen höchstens 57 selbständige Gruppen zu 7 bilden und die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens einer reinen Gruppe dieser Art ist $^1/_{64}$. Die gewöhnlich angewandten Formeln aber versagen jetzt, weil 57 nicht mehr als eine „grosse Zahl" angesehen werden kann und die Wahrscheinlichkeit von $^1/_{64}$ schon klein ist. Bei 57 Erprobungen ist der wahrscheinlichste Fall, dass gar **keine** reine Gruppe herauskommt und die Wahrscheinlichkeit dieses Ergebnisses ist $\left(\frac{63}{64}\right)^{57}$ oder 0,4095. Der nächste Fall, 1 reine Gruppe auf 56 andere, hat nur die Wahrscheinlichkeit 0,3686, für den folgenden, 2 reine auf 55 gemischte Gruppen, ist die Wahrscheinlichkeit 0,1635 und die weiteren Glieder der Reihe nehmen rapid ab.

Verlangt man reine Gruppen von 8, so geben 400 Einzelversuche höchstens 50 selbständige Erprobungen. Die Wahrscheinlichkeit einer solchen Gruppe ist $^1/_{128}$ und der wahrscheinlichste Fall bei 50 Erprobungen ist wieder der, dass **keine** reine Gruppe erscheint; dessen Wahrscheinlichkeit ist 0,6753 und die Wahrscheinlichkeit der Kombination 1 reine auf 49 gemischte Gruppen beträgt nur 0,2600. Bei den Gruppen zu 9 ist die höchste Zahl der möglichen selbständigen Erprobungen in dem **Marbe**'schen Beispiel 44, die Wahrscheinlichkeit einer reinen Gruppe $^1/_{256}$, die Wahrscheinlichkeit des wahrscheinlichsten Falles (0 reine Gruppen) 0,8418, die Wahrscheinlichkeit der Kombination 1 reine auf 43 gemischte Gruppen nur 0,1419.

Bei den Gruppen zu 10 endlich ist die mögliche Zahl der selbständigen Proben 40, die Wahrscheinlichkeit einer solchen Gruppe $^1/_{512}$, die Wahrscheinlichkeit des wahrscheinlichsten Falles bei 40 Proben (0 reine Gruppen) 0,9247. Man sieht hieraus: wenn die Zahl der selbständigen Erprobungen kleiner ist, als der reciproke Wert der Wahrscheinlichkeit der fraglichen reinen Gruppe, so ist der wahrscheinlichste Fall, Zahl an, so wird man, da die Möglichkeitsbedingungen ungeändert bleiben, immer annähernd gleiche Resultate erhalten. Diese Anschauungsweise lässt sich nun auch auf statistische Verhältnis-

dass keine reine Gruppe herauskommt und die Wahrscheinlichkeit dieses Falles wächst um so mehr, je grösser jener reciproke Wert und je kleiner die Zahl der Proben wird. Wenn also Marbe unter den von ihm benutzten grösstenteils nur formal gebildeten 393 Gruppen zu 8, 392 zu 9, 391 zu 10 statt der erwarteten 3, 2, 1 gar keine reinen Gruppen fand, so steht das mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung durchaus nicht in Widerspruch, weil diese grossen Gruppenzahlen vom Standpunkt der Wahrscheinlichkeitsrechnung nur die Bedeutung von 50, 44 und 40 selbständigen physischen Versuchsgruppen haben, d. h. weil man unter den 8 bez. 9 oder 10 Gruppenreihen mit verschiedenen Anfangsfällen nur eine Reihe, gleichviel welche, als das Resultat des Gesamtversuchs betrachten und mit dem entsprechenden Ergebnis der Wahrscheinlichkeitsrechnung vergleichen darf. (Die unvollständigen letzten Gruppen kann man übrigens durch die am Anfang ausser acht gelassenen Glieder ergänzen, um in jeder der zur Auswahl stehenden Reihen genau die gleiche Gliederzahl zu erhalten.) Will man die obige Auffassung bestreiten, so muss man auch in Abrede stellen, dass ein Wurf mit n Münzen für die Wahrscheinlichkeitsrechnung gleichbedeutend sei mit n Würfen mit einzelnen Münzen.

Dasselbe gilt für die von Marbe mitgeteilten weit grösseren Beobachtungsreihen am Roulettespiel. Die erste dieser Reihen z. B. beruht auf 11 483 einzelnen Spielresultaten, aus denen Marbe in ähnlicher Weise, wie in dem angeführten Beispiel auch annähernd ebenso grosse Zahlen von reinen Farbengruppen von 2 bis 14 Fällen ableitet. So findet er nach Ausscheidung der Zerofälle (die die Wahrscheinlichkeit $^1/_{37}$ haben und zu keiner Farbe gerechnet werden), als wahrscheinlichste Zahl der reinen Gruppen zu 10, 11, 12, 13, 14 bezw. 17, 8, 4, 2, 1 unter 11 339 bis 11 275 seiner künstlichen Gruppen, während nach der Beobachtung nur 7 Gruppen zu 10, 2 zu 11 und die übrigen gar nicht vorgekommen sind. Hier ist also wiederum zu sagen: die ganze Reihe der Spiele bildet einen einzigen physischen Thatbestand zur Erprobung der Möglichkeit des Herauskommens der beiden Farben (und des Zero). Man kann die Abzählung zum Zwecke der Gruppenbildung mit jedem beliebigen Einzelfall beginnen (wobei wieder zweckmässigerweise die unvollständigen Gruppen am Schluss durch die am Anfang nicht mitgezählten Fälle ergänzt werden), aber man darf nur eine von diesen Gruppenreihen als das Versuchsresultat annehmen. Sehen wir der Einfachheit wegen von dem Vorkommen der Zerofälle ab, so stellen also z. B. die 11 307 Marbe'schen Gruppen zu 12 nur 942 selbständige physische Versuchsgruppen dar. Die Wahrscheinlichkeit einer reinen Gruppe zu 12 ist $^1/_{2048}$, der wahrscheinlichste Fall ist 0 reine Gruppen, die Wahrscheinlichkeit dieses Falles 0,68, es kann daher nicht auffallen, wenn er in der Regel vorkommt. Wenn allerdings die 11 307 Gruppen Marbe's gleichbedeutend wären mit 12 selbständigen Beobachtungsreihen von 942 Fällen zu 12, so wäre anzunehmen, dass in diesen Reihen auch einmal oder einigemale eine reine Gruppe erscheint. denn wenn wir jede Reihe als einen einheitlichen Versuch auffassen, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass 12mal nacheinander keine reine Gruppe herauskomme, nur 0,0092. Aber jene 11 307 bilden eben keine 12 selbständigen Beobachtungsreihen, diese würden vielmehr 135 684 Einzelbeobachtungen zahlen übertragen. Es giebt z. B. unendlich viele Komplexe von Bedingungen oder Umständen, infolge deren ein dreissigjähriger Mensch im Laufe des 31. Lebensjahres sterben kann, und zwar sind diese Bedingungen teils in seiner körperlichen Beschaffenheit, teils in seinen äusseren Lebensverhältnissen begründet. Alle Dreissigjährigen einer Bevölkerung werden nun gleichsam ein Jahr lang auf die Probe gestellt, ob diese Todesmöglichkeiten für sie zutreffen oder nicht. Man erhält dadurch eine ungefähre Vorstellung von der für diese Gruppe bestehenden Sterbensmöglichkeit, wie man sich auch z. B. annähernd eine Vorstellung von der Bodengestalt eines Sees verschaffen kann, wenn man an einer grossen Zahl von zerstreuten Stellen seine Tiefe misst. Der Seeboden ist unveränderlich und eine zweite Reihe von Messungen wird daher wieder ungefähr dasselbe Bild von ihm ergeben. Aber auch die körperlichen Zustände der dreissigjährigen Individuen wiederholen sich in gewissen Grenzen, zwar nicht in identischer Weise, aber annähernd gleichwertig hinsichtlich des in Frage

---

erfordern und in einer solchen Anzahl werden sich auch wohl einzelne reine Gruppen finden. Die übliche Formel für die wahrscheinliche Abweichung ist wegen der Kleinheit der Wahrscheinlichkeit $^1/_{2048}$ nicht anwendbar. Die Wahrscheinlichkeit einer reinen Gruppe zu 14 vollends ist nur $^1/_{8192}$, der wahrscheinlichste Fall natürlich wieder 0 reine Gruppen, die Wahrscheinlichkeit desselben bei 806 selbständigen Gruppen, die hier höchstens anzunehmen sind, 0,906 und die Wahrscheinlichkeit, dass in 14 Reihen von je 806 selbständigen Gruppen zu 14 — also bei 157 976 Einzelbeobachtungen — keine einzige reine vorkomme, immer noch 0,2517. Durch die von Marbe beigebrachten Thatsachen wird daher nur bestätigt, dass die physische Möglichkeit eines zusammengesetzten Ereignisses durch Ausprobieren nur nach einer reell begründeten Zahl von Beobachtungsgruppen zu schätzen ist, die nicht durch eine bloss formale weitere Gruppenbildung vermehrt werden darf. Ueber die Marbe'sche Abhandlung vgl. auch v. Bortkiewicz in der Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, Bd. CXXI, der die Abhängigkeit der Marbe'schen Gruppen voneinander nachweist. — Auch Pearson (The Chances of death, London 1897, Vol. I, p. 42 ff.) behandelt „The scientific aspect of Monte Carlo Roulette". Er findet nach dem ihm zu Gebote stehenden Material, dass das Auftreten der Farben in seiner Gesamtheit dem mathematischen Gesetz befriedigend entspricht, dass dagegen die Gruppierung der aufeinanderfolgenden Resultate von der theoretischen erheblich abweicht. Aber gerade im Gegensatz zu Marbe findet er, dass die kleinen Permanenzen ein bedeutendes Defizit aufweisen. Versuche mit Ziehungen von Kugeln von Westergaard (Theorie der Statistik, S. 22 ff.) stimmten im ganzen befriedigend, ebenso die von ihm untersuchten Lotterieresultate. Vgl. auch die Versuche Quetelet's, Lettres sur la théorie des prob., p. 94 u. 374. Keiner von diesen Autoren denkt daran, die Gruppen in der Weise Marbe's zu vervielfältigen.

stehenden Resultates, nämlich des Todes im nächsten Jahre. Der todbringende Bedingungskomplex kann in unendlich vielen Abstufungen variieren und doch in dieser entscheidenden Beziehung als gleichbleibend zu betrachten sein, ähnlich wie ein Würfel an unendlich vielen verschiedenen Stellen des Tisches und mit unendlich vielen verschiedenen Orientierungen der Kante, um die er sich zuletzt dreht, zu derselben Ruhelage mit Bezug auf die herauskommende Nummer gelangen kann. Es besteht eben die schon erwähnte Fungibilität der Individuen der aufeinander folgenden Generationen von Dreissigjährigen hinsichtlich der Zustände, in die sie eintreten und das gilt sowohl von den physiologischen und pathologischen Zuständen, als von den äusseren Lebensverhältnissen.

6. Dieselbe Betrachtung aber gilt auch für die menschlichen Handlungen von moralstatistischem Interesse. Sie gehen aus Kombinationen von Bedingungen hervor, die teils durch die wirtschaftlichen, sozialen und sonstigen äusseren Lebensverhältnisse, teils durch die psychologischen und moralischen Eigentümlichkeiten der Individuen gegeben sind. Aber auch diese individuellen Typen wiederholen sich trotz ihrer möglichen unendlichen Mannigfaltigkeit doch gleichartig mit Bezug auf das fragliche Handeln. Das System der äusseren und der subjektiven Bedingungen dieses Handelns bildet gleichsam ein annähernd festes Rahmenwerk, in das von Jahr zu Jahr neue, gewissermassen abstrakte Individuen einrücken, wodurch dann die beobachtete statistische Regelmässigkeit herbeigeführt wird. Diese Betrachtungsweise giebt allerdings keineswegs einen Einblick in die Einzelheiten des Zustandekommens der Stabilität der statistischen Verhältniszahlen; aber sie verhindert wenigstens die Hypostasierung dieser Verhältniszahlen zu herrschenden Gesetzen, während sie in Wirklichkeit nur Resultate sind, die aus der verwickelten Mannigfaltigkeit der Erscheinungen hervorgehen.

Zeigen solche auf die Form von Wahrscheinlichkeitsausdrücken gebrachten Verhältniszahlen normale Dispersion, d. h. bewegen sich ihre Schwankungen in den Grenzen, wie sie bei den Ergebnissen eines analog geordneten Glücksspieles an einer Urne mit schwarzen und weissen Kugeln zu erwarten sind, so darf Konstanz des Bedingungssystems angenommen werden, wie ja auch das Verhältnis der beiden Arten von Kugeln in der Urne konstant bleibt. Ist die Dispersion unverkennbar noch geringer, als diesem Kriterium entspricht, so ist anzunehmen, dass die Einzelfälle nicht völlig unabhängig voneinander sind, dass zwischen ihnen irgend welche ausgleichende Wechselwirkungen oder doch besondere Verhältnisse bestehen, die diese übernormale Stabilität erzeugen. So können z. B. mehrere verschiedene Wahrscheinlichkeiten desselben Ereignisses, die für verschiedene Gruppen von Personen gelten, nach festen Verhältnissen zu einer mittleren Wahrscheinlichkeit vereinigt sein, deren empirische Werte unmittelbar beobachtet werden. Die Wahrscheinlichkeit des fraglichen Ereignisses sei für die Gruppen $g_1, g_2, g_3 \ldots$ bezw. $p_1, p_2, p_3 \ldots$, die Summe der g werde mit G bezeichnet und bei jeder weiteren Beobachtungsreihe von G Personen bleibe die Gruppierung genau eingehalten. Dann ist der Mittelwert $(g_1 p_1 + g_1 p_2 + g_3 p_3 + \ldots)/G$ eine Funktion mehrerer selbständiger Wahrscheinlichkeiten und die bei einer mehrfach wiederholten Bestimmung desselben hervortretende wahrscheinliche Abweichung von dem wahrscheinlichsten Wert ist kleiner[1]) als $\varrho \sqrt{\frac{2 \cdot P\,(1-P)}{G}}$, wenn $\varrho = 0{,}477$ und P gleich ist dem beobachteten Verhältnis der Summe aller Ereignisfälle zu der Grundzahl G, ohne Rücksicht auf die Gruppierung. Diesen letzteren Ausdruck aber würde man für die wahrscheinliche Abweichung halten, wenn man von der festen Gruppierung innerhalb der Gesamtmasse G nichts wüsste und bei der Vergleichung desselben mit der nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmten wahrscheinlichen Abweichung würde sich daher scheinbar eine unternormale Dispersion herausstellen. Es wäre denkbar, dass die in den verschiedenen Waffengattungen eines Heeres vorkommenden Unfälle ein Beispiel dieser Art darböten. Die Unfallwahrscheinlichkeit ist ohne Zweifel bei Infanterie, Kavallerie, Artillerie und Pionieren sehr verschieden, das Verhältnis der Stärke jedes dieser Truppenteile zur ganzen Heeresstärke aber kann wenigstens für eine längere Reihe von

1) Der wahrscheinliche Fehler der einzelnen Bestimmung der obigen mittleren Wahrscheinlichkeit ist nämlich $\varrho \sqrt{2\,(\gamma_1\, p_1\, q_1 + \gamma_2\, p_2\, q_2 + \gamma_3\, p_3\, q_3 + \ldots)/G}$, wo $\gamma_x = \frac{g_x}{G}$ und $q_x = 1 - p_x$. Der Beweis, dass dieser Ausdruck kleiner ist als der P enthaltende, findet sich in Cournot's Wahrscheinlichkeitsrechnung (deutsch von Schnuse), S. 113.

Jahren als konstant angesehen werden. Nimmt man aber P einfach als Unfallwahrscheinlichkeit für das ganze Heer an, so giebt die obige Formel unter der Voraussetzung fester Verhältnisse der Waffengattungen eine zu grosse wahrscheinliche Abweichung. Dagegen würde sie richtig sein, wenn die Verhältnisse g_1/G, g_2/G u. s. w. nicht fest, sondern wie empirische Wahrscheinlichkeitsausdrücke mit der Grundzahl G zufälligen Schwankungen unterworfen wären. In diesem Falle wäre eine gewöhnliche zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit vorhanden, wie $c_1\, p_1 + c_2\, p_2 + \ldots c_n\, p_n$, wo c_x die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass man in eine Urne greift, für die die Wahrscheinlichkeit des Ziehens einer schwarzen Kugel gleich p_x ist. Für eine solche zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit gilt derselbe Ausdruck der wahrscheinlichen Abweichung, wie für eine einfache von gleicher Grösse.

7. Man kann sich überhaupt jede der demographischen oder moralstatistischen Beobachtung unterliegende Gesamtheit von Personen nach physischen, wirtschaftlichen und sozialen Merkmalen in (ihrer Grösse nach unbekannte) Gruppen g_1, g_2, g_3 u. s. w. zerlegt denken, in denen das betrachtete Ereignis mit verschiedenen Wahrscheinlichkeiten vorkommt. In einigen Gruppen wird diese Wahrscheinlichkeit vielleicht der Einheit nahe kommen; von hier aus bildet sie dann eine abnehmende Reihe, bis sie schliesslich durch verschwindend kleine Verhältniszahlen ausgedrückt wird. Es werden dann häufig noch Gruppen angeschlossen, in denen die Möglichkeit des Ereignisses unzweifelhaft gar nicht besteht, seine Wahrscheinlichkeit also gleich o ist, wie ja man z. B. meistens die jährliche Zahl der Geburten auf die Gesamtzahl der Bevölkerung bezieht. Der Fall ist ähnlich, als wenn man den zufälligen Zügen aus einer Urne mit schwarzen und weissen Kugeln noch eine Anzahl anderer aus einer Urne, die bekanntermassen nur schwarze Kugeln enthält, folgen liesse. Ist die Zahl der Personen, bei denen das Ereignis überhaupt möglicherweise eintreten kann, G, die Zahl der beobachteten Personen aber αG, wo $\alpha > 1$, und ist e die Zahl der beobachteten Ereignisfälle, so wird die nach der kombinatorischen Methode bestimmte Dispersion der Verhältniswerte $e/G = p$ durch die wahrscheinliche Abweichung $\varrho \sqrt{\frac{2\,p\,(1-p)}{G}}$ ausgedrückt. Bildet man aber mit

der vergrösserten G = Grundzahl α G den entsprechenden Ausdruck, so erhält man die Grösse $\varrho \sqrt{\frac{2\,p\,(1-p/)\alpha}{\alpha^2 G}}$, die eine Abänderung der wahrscheinlichen Abweichung infolge der unberechtigten Vergrösserung der Grundzahl G darstellt. Bestimmt man andererseits, wenn n Beobachtungsreihen mit annähernd der gleichen Grundzahl G gegeben sind, die wahrscheinliche Abweichung nach der Methode der kleinsten Quadrate und setzt in diesen Ausdruck ebenfalls α G statt G, so verwandelt er sich in $\varrho \sqrt{\frac{2\,[\delta^2]}{\alpha^2 (n-1)}}$, wenn $[\delta^2]$ die Summe der Quadrate der Differenzen der einzelnen p von ihrem Mittelwert bezeichnet. Die beiden Ausdrücke der wahrscheinlichen Abweichung von p, aus deren Vergleichung sich das Kriterium der Dispersion ergiebt, haben sich also durch die unberechtigte Vergrösserung der Grundzahl nicht gleichmässig geändert und ihre Abänderungen können daher auch nicht zur Beurteilung der Dispersion dienen. Im Nenner des Bruches unter dem Wurzelzeichen ist zwar in beiden Formeln der Fehler α^2 hinzugetreten, dagegen ist der Zähler in der zweiten unverändert geblieben, während in der ersten der in der wirklichen wahrscheinlichen Abweichung vorkommende Faktor $(1-p)$ durch $(1-p/a)$ ersetzt ist. Demnach v e r g r ö s s e r t sich dieser Ausdruck umsomehr, je grösser α ist, und daraus folgt: wenn bei einer als Wahrscheinlichkeitsgrösse angenommenen Verhältniszahl die Grundzahl durch Hinzunahme indifferenter Einheiten vergrössert ist, so wird das auf die gewöhnliche Art bestimmte Mass der Dispersion unrichtig, und zwar vermindert, und es kann dann also eine in Wirklichkeit übernormale Dispersion normal und eine normale unternormal zu sein scheinen. Nur wenn die wirkliche Wahrscheinlichkeit p so klein ist, dass der Unterschied zwischen $1-p$ und $1-p/a$ vernachlässigt werden kann, lässt sich auch aus Verhältnissen mit unberechtigter Weise bedeutend vergrösserten Grundzahlen das Mass der Dispersion annähernd richtig ableiten.

8. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat also in ihrer Anwendung auf die Demographie und die Moralstatistik nur den Zweck, einerseits ein verständliches Schema für die Verteilung der Fälle und andererseits einen Massstab für die Stabilität der

statistischen Verhältniszahlen zu bieten. Die zur Erklärung der annähernden Konstanz wie auch der Veränderlichkeit derselben geeignete Vorstellung ist bereits angedeutet worden: man denke sich die Gesamtheit G der Personen, für die das in Frage stehende Ereignis überhaupt als möglich anzusehen ist, nach bestimmten Merkmalen in eine Anzahl von möglichst homogenen Gruppen zerlegt, deren Angehörige also während der Beobachtungsperiode, als die wir das Jahr annehmen, in Bezug auf das Ereignis auf die Probe gestellt werden. Es ist nun eine plausible Annahme, dass die objektive Möglichkeit des Ereignisses innerhalb jeder homogenen Gruppe durch das Verhältnis der Zahl der Personen, bei denen es eintritt, zu der Gesamtzahl der Gruppe ausgedrückt werden, und da der physische, wirtschaftliche und soziale Charakter der Gruppe gleich bleiben soll, so wird man sich auch nicht wundern können, wenn diese Möglichkeitsverhältnisse sich von Jahr zu Jahr nicht viel ändern, zumal man auch eine gewisse Fungibilität der in der Gruppe sich nach und nach ersetzenden Individuen mit Rücksicht auf das fragliche Ereignis voraussetzen darf. Es ist auch nicht erstaunlich, wenn die Veränderungen eines solchen Verhältnisses den Charakter von zufälligen Schwankungen aufweisen, und in diesem Falle kann das Verhältnis als der empirische Ausdruck einer mathematischen Wahrscheinlichkeit betrachtet werden. Wir können aber darüber nichts unmittelbar entscheiden, da wir die homogenen Gruppen gar nicht wirklich unterscheiden können. Es kommt nun darauf an, wie weit die Gruppen selbst von Jahr zu Jahr veränderlich sind. Da sie von der Grösse der Bevölkerung abhängen und auch durch wirtschaftliche und soziale Bedingungen bestimmt sind, so werden sie sich im allgemeinen im Laufe der Zeit, wenn auch mit wechselndem Tempo und zeitweiligen Rückschlägen, in bestimmter Richtung, zunehmend oder abnehmend entwickeln. Auch in den Verhältnissen der Stärke der einzelnen Gruppen zu der ganzen beobachteten Gesamtheit werden diese historischen Veränderungen hervortreten, aber wegen der im ganzen bestehenden Stetigkeit der menschlichen Zustände wird man in mässigen Zeiträumen von 10, 20 und bei rein demographischen Erscheinungen noch mehr Jahren eine ziemlich grosse Stabilität dieser Gruppierungsverhältnisse erwarten dürfen. Nur bei absichtlich fest geregelten Gruppierungen werden sie, wie die Verhältnisse γ in dem obigen Beispiel, unverändert bleiben können, dagegen ist es leicht denkbar, dass sie, wie die oben erwähnten Verhältnisse c, nur Schwankungen von zufälligem Charakter zeigen, also sich wie empirische Wahrscheinlichkeitsgrössen verhalten. Wenn dann dasselbe auch für die Wahrscheinlichkeiten p in den einzelnen Gruppen gilt, so hat auch das unmittelbar beobachtete Totalverhältnis e/G, wenn e die Zahl der Ereignisfälle in einem Jahr bedeutet, den Charakter einer Wahrscheinlichkeitsgrösse und demnach normale Stabilität. Viele Gruppierungsverhältnisse, wie z. B. die der Bevölkerung nach dem Alter, werden aber in einer mässigen Zahl von Jahren wahrscheinlich weniger schwanken, als nach dem Gesetz der zufälligen Abweichungen zu erwarten wäre. Wenn dann trotzdem das beobachtete Verhältnis e/G übernormale Dispersion zeigt, so wird man sich dies durch übernormale Schwankungen der Verhältnisse p in den einzelnen Gruppen erklären müssen. Wären diese letzteren Schwankungen normal, so könnte durch die grosse Stetigkeit der Gruppierungsverhältnisse, wenn auch nicht in dem Masse, wie bei voller Festigkeit derselben, eine gewisse übernormale Stabilität des Totalverhältnisses e/G herbeigeführt werden, die aber, auch wenn es sich um moralstatistische Beobachtungen handelte, durchaus begreiflich und erklärlich bliebe.

X. Naturwissenschaft und Sozialwissenschaft[1].

1. Das grosse Reich der Erfahrungswissenschaften vom Menschen umschliesst eine Anzahl innerlich selbständiger Gebiete, deren Inhalt sich nach den verschiedenen Seiten bestimmt, von denen aus die Forschung den Menschen erfassen kann.

Als ein Typus des organischen Naturlebens wird der Mensch zum Gegenstand verschiedener Disciplinen von rein naturwissenschaftlichem Charakter. Als Träger eines höher entwickelten Seelenlebens stellt er der empirischen Psychologie und der Sprachwissenschaft ihre Aufgaben, indem erstere die eigenartigen Prozesse jenes Seelenlebens erforscht, letztere aber das unmitttelbarste Kollektivprodukt der menschlichen Denkfähigkeit untersucht.

Aber der Mensch ist nicht nur in seinem physischen und psychischen Sein, sondern auch in seinem Thun der wissenschaftlichen Betrachtung zu unterwerfen. Er ist nicht nur ein mit der Fähigkeit des Empfindens und Denkens ausgestattetes Naturwesen, sondern auch eine nach Motiven handelnde und für ihr Handeln verantwortliche Persönlichkeit, die nicht isoliert, sondern in einer gesellschaftlichen Vereinigung steht.

Die verantwortlich handelnde Persönlichkeit ist nun zunächst das Grundelement der Geschichte. Aber diese Wissenschaft, wenigstens im engeren Sinne gefasst, sucht in jenem Handeln vor allem das Individuelle, Ein- und Eigenartige, sowohl in der Initiative der historischen Persönlichkeiten, als in den grossen Völkerbewegungen, die durch politische Katastrophen oder gewaltige Evolutionen des Kulturlebens bezeichnet werden.

---

1) Antrittsvorlesung, gehalten in Dorpat im August 1874. Ein Auszug ist in der „Neuen Dörpt'schen Zeitung" veröffentlicht.

Ausser diesem historischen giebt es jedoch 'auch ein unhistorisches, im einzelnen nicht erzählbares Thun und Leiden der Menschen das den Hintergrund des historischen bildet und seine eigene Bedeutsamkeit besitzt.

Es giebt daher auch eine Wissenschaft oder vielmehr eine Gruppe von Wissenschaften, welche in der Gegenwart wie in der Vergangenheit der menschlichen Gesellschaft nicht das Individuelle, sondern das Generelle, nicht das Veränderliche, sondern das relativ stetige ins Auge fassen. Diese relativ stetigen Erscheinungen in den menschlichen Dingen entstehen einesteils aus der generischen Beschränktheit der menschlichen Individualität, anderenteils aber aus der Verbindung der Individuen und der Gesellschaft, die dem einzelnen einen Platz mit mehr oder weniger festen Beziehungen zu den übrigen Gliedern anweist und ihm dadurch in vielen Fällen eine empfundene oder nicht empfundene Zwangsführung mit engem Spielraum der Abweichung setzt. So wirkt die Masse der Gesellschaft wie das Schwungrad einer Maschine als Regulator der Bewegung der Einzelteile; die Veränderungen des Ganzen erscheinen als Entwickelungen von solcher Langsamkeit, dass man auf längere Strecken konstante Phasen annehmen darf. In den einzelnen Fällen allerdings sind die Regelmässigkeiten der Gesamterscheinung nicht unmittelbar zu erkennen, aber dennoch trägt jeder Einzelfall das Seinige bei, um die grössere oder geringere Stetigkeit zu unterhalten, die durch die Massenbeobachtung enthüllt wird.

2. Diejenigen Wissenschaften nun, welche auf dem Wege der Erfahrung das persönlich-gesellschaftliche Menschenleben in seinen relativ stetigen Erscheinungen untersuchen, wollen wir empirische Sozialwissenschaften nennen. Durch die Betonung den Erfahrungsmässigkeit sind also aus diesem Kreise diejenigen den gesellschaftlichen Menschen betreffenden Wissenschaften ausgeschlossen, die nicht aus der Erfahrung, sondern aus allgemeinen Prinzipien die gebietenden Normen aufstellen und in ihren Konsequenzen entwickeln, nach denen sich das menschliche Wollen und Thun gestalten soll.

Materiell reicht das Gebiet der Sozialwissenschaften in dem bezeichneten Sinne so weit, als überhaupt Stetigkeiten in den menschlichen Erscheinungen, sei es in ihrem Bestande oder in ihren Veränderungen, nachweisbar sind. Die Form aber, in welcher dieser reiche Stoff wissenschaftlich aufgefasst werden kann, ist nicht eine einfache, sondern eine mehrfache, und auf dieser Mannigfaltigkeit der Auffassungsform beruht die später zu erörternde Zerlegung der Sozialwissenschaften.

Es fällt sofort eine gewisse Analogie auf, die zwischen den Sozialwissenschaften und den Naturwissenschaften besteht. Die letzteren erforschen die typischen Erscheinungen des äusseren Seins, die ersteren beschäftigen sich mit den zwar nicht absolut, aber relativ typischen Massenerscheinungen in der Mannigfaltigkeit des gesellschaftlichen Menschenlebens. Als Erkenntnismittel soll der einen wie der anderen Klasse von Wissenschaften die Erfahrung dienen. Da nun die Naturwissenschaft als spezifische Erfahrungswissenschaft gilt, so liegt die Versuchung nahe, die Sozialwissenschaft unter die Leitung der älteren Schwester zu stellen, indem man ihr die erprobte Methode der letzteren zuwiese.

Als Süssmilch zuerst mit umfassendem Blick die Stetigkeiten in gewissen menschlich-sozialen Erscheinungen beobachtete, stellte er sie mit den naturgesetzlichen zusammen unter seinen physico-theologischen Gesichtspunkt. In der neueren Zeit dagegen hat die Quetelet'sche Schule die sozialen Phänomene ohne weiteres auf das Kategorienschema der Naturwissenschaft zurückzuführen gesucht, indem sie das Gesetz im astronomisch-physikalischen Sinne zu ihrem leitenden Begriffe machte. So verdienstlich auch die Bestrebungen dieser Richtung gewesen sind, so musste doch die Einseitigkeit ihres Ausgangsprinzips eine Reaktion hervorrufen. Man hat Einspruch erhoben gegen die mechanische Grundauffassung, die jener Schule trotz mancher Verhüllungsversuche eigentümlich ist, und man hat dem naturwissenschaftlichen den ethischen Gesichtspunkt gegenübergestellt.

3. Bei diesem Stande der Diskussion dürfte eine nähere Erörterung der naturwissenschaftlichen Methode in ihrem Verhältnisse zu den Sozialwissenschaften nicht überflüssig sein; hier jedoch kann ich dieses Thema nur andeutungsweise in grossen Zügen behandeln.

Unter der Methode einer Wissenschaft verstehe ich hier das allgemeine Verfahren, nach welchem sie den unmittelbar gefundenen Stoff in die ihm adäquate wissenschaftliche Auffassungsform überführt. Demnach ist diese letzte Auffassungsform, das Kategorienschema, nach welchem wir reale Beziehungen der empirischen Erscheinungen annehmen, spezifisch charakteristisch für die Methode einer Wissenschaft und man kann zwei Wissenschaften dieselbe Methode zusprechen, wenn ihr allgemeinstes Kategorienschema dasselbe ist, mag auch die durch den Stoff bedingte Technik zur Ausfüllung des Schemas bei der einen und der anderen noch so verschieden sein.

Und andererseits bedingt die Verschiedenheit des höchsten Kategorienschemas die Verschiedenheit zweier Wissenschaften, selbst wenn ihr unmittelbarer Stoff derselbe ist.

Was ich unter dem höchsten Kategorienschema einer Wissenschaft verstehe, habe ich eben bereits angedeutet. Das wissenschaftliche Denken wie das Denken überhaupt besteht in dem Verknüpfen von Begriffen nach gewissen allgemeinen Grundbeziehungen. Diese Verknüpfungen haben zunächst nur eine logische Bedeutung. Da aber jede Erfahrungswissenschaft den realen Zusammenhang der ihr vorliegenden Erscheinungen erkennen will, so muss sie an einem gewissen Punkte den bloss logischen Verknüpfungen auch eine reale Bedeutung für die Beziehungen der Dinge selbst beilegen. Die eine Wissenschaft bleibt stehen bei der Auffassung der unmittelbar anschaulichen, mathematisch darstellbaren Beziehungen der Erscheinungen in Raum und Zeit; die andere erhebt den Anspruch, in den inneren Kausalzusammenhang der Erscheinungen einzudringen, also die Ursachen selbst noch als Realitäten zu behandeln; eine dritte fühlt sich berechtigt, dem Begriff des Zweckes noch eine wirksame Rolle in den von ihr untersuchten Prozessen zuzuschreiben.

Es ist für die einzelnen Wissenschaften keineswegs leicht, das ihnen adäquate Kategorienschema aufzufinden. Das beweist namentlich die Geschichte der Naturwissenschaften, deren Fortschritt fast zwei Jahrtausende hindurch gehemmt worden ist, weil der Mensch sich nicht von dem naiven Selbstvertrauen zu befreien vermochte, mit dem er bei seinen ersten wissenschaftlichen Bestrebungen seine subjektiven Denkformen als Erklärungsgründe in die Natur hineintrug.

Es fehlte den Alten nicht an naturwissenschaftlichen Beobachtungen, noch weniger an Geisteskraft und Scharfsinn, aber bei der Auffassung der Naturerscheinungen konnten sie sich nicht über den Subjektivismus des menschlichen Denkens erheben.

Während sie die Geometrie mit bewundernswürdiger Strenge behandelten, gerieten sie schon in der Lehre von der Bewegung, die doch der Geometrie so nahe steht, unter dem Einfluss der schlimmsten Idole, um einen Baconischen Ausdruck zu gebrauchen. So brachten sie z. B. in diese Lehre den Begriff der Volkommenheit als wirksame Kategorie hinein; der Kreis war ihnen die vollkommenste Figur, daher galt ihnen als natürliche Bewegung die kreisförmige. Solche Gesichtspunkte blieben massgebend bis zum Zeitalter Galilei's. Baco von Verulam weiss geistreich die Idole zu kritisieren, die das wissenschaftliche Denken irre geführt haben, aber er verfällt selbst der Herrschaft dieser Idole, sobald er sich an positive mechanische oder physikalische Aufgaben wagt. Sogar ein Descartes kann die Mechanik nicht ohne dogmatische Zusätze, ohne Einführung willkürlicher, zu besonderen Entitäten gestempelter Abstraktionen behandeln. Und noch im achtzehnten Jahrhundert zeigt der Streit der Cartesianer und Leibnizianer über die lebende Kraft, wieviel Verwirrung die Beibehaltung unnötiger Kategorien selbst in den Köpfen der mathematischen Mechaniker anrichten konnte.

Wenn dies bei der Mechanik möglich war, so ist es kein Wunder, wenn es den konkreteren Naturwissenschaften, der Physik, Chemie, Physiologie noch schwerer geworden, die Herrschaft der subjektiven Beziehungsbegriffe abzuschütteln, die sich den Schein von besonderen Wesenheiten verschafft hatten.

9. Giebt es nun aber irgend einen Leitfaden oder eine Regel, nach welcher jede Wissenschaft das ihrem Stoffe entsprechende Auffassungsschema bestimmen kann? Vor allem müssen wir uns bei einer solchen Bestimmung leiten lassen durch Misstrauen gegen den Subjektivismus unseres Denkens. Daraus folgt, dass wir die Beziehungsformen, die wir als real bedeutsam in letzter Instanz beibehalten, so weit wie irgend möglich reduzieren müssen, indem wir nur diejenigen festhalten, die wir nicht fallen lassen können, ohne auf einen Teil unseres möglichen Wissens zu verzichten.

Die erklärende Naturwissenschaft hat gegenwärtig diese Reduktion ihres Auffassungsschemas im wesentlichen vollständig vollzogen. Wenn sie auch der Bequemlichkeit wegen von Substanzen, Ursachen, Kräften und selbst Zweckmässigkeiten spricht, so enthält doch ihr wirkliches Endschema nur die Kategorien des unmittelbaren Seins angewandt auf räumlich zeitliche Anschauungen. Ihr Ideal ist eine rein mathematische Auffassung ihres Stoffes in Raum und Zeit, durch welche die Qualität der Erscheinungen in quantitative Bestimmungen aufgelöst wird.

Demnach besteht die Methode der Naturwissenschaft in der Erfüllung zweier Forderungen: sie hat erstens die subjektive Auffassung der äusseren Erscheinungen in eine objektive, die sinnliche Wahrnehmung in eine mathematische Anschauung zu verwandeln, die Erscheinungen gleichsam aus der perspektivischen in die orthogonale Projektion überzuführen. Sie hat zweitens die Erscheinungen so weit wie möglich in quantitativ bestimmte Elementarerscheinungen zu zerlegen, aus welchen letzteren dann nach dem rein logischen Verhältnis von Grund und Folge die beobachteten Thatsachen sich wieder zusammensetzen.

So erscheint die Bewegung eines Planeten der unmittelbaren Beobachtung von unserem irdischen Gesichtspunkte als eine höchst unregelmässige und verwickelte; beziehen wir sie aber auf den heliocentrischen Standpunkt, so ergiebt die genaue quantitative Beobachtung, dass der Planet mit einer in bestimmbarer Weise veränderlichen Geschwindigkeit eine Ellipse beschreibt, deren einen Brennpunkt die Sonne einnimmt. Diese Thatsache, verbunden mit der anderen Thatsache der Bewegung der Erde um die Sonne, bedingt als logische Folge die unmittelbar beobachtete Erscheinung.

Aber die Thatsache der elliptischen Bewegung des Planeten lässt sich noch weiter zerlegen. Als Elemente derselben finden wir die weiteren Thatsachen, dass der Planet in jedem Augenblick eine bestimmte Geschwindigkeit nach einer bestimmten Richtung besitzt und gleichzeitig einen nach der Newton'schen Formel ausdrückbaren Geschwindigkeitszuwachs nach dem Schwerpunkt des Sonnensystems hin erlangt. Diese neuen Thatsachen bilden in ihrer Verbindung wieder den Grund, aus dem sich als identische Folge die elliptische Bewegung zusammensetzt. Es ist also für die naturwissenschaftliche Erklärung der Erscheinungen nicht nötig, den Begriff der Kraft oder überhaupt einen metaphysischen Kausalitätsbegriff einzuführen. Die Frage nach der Ursache der äussersten bekannten Elementarthatsachen ist für die naturwissenschaftliche Auffassung gleichbedeutend mit der Frage, ob sich jene Elemente noch in andere räumlich-zeitliche Grundthatsachen zerlegen lassen.

5. So ergeben sich im Prinzip als Endformeln aller naturwissenschaftlichen Erklärungen der Erscheinungen die fundamentalen Differentialgleichungen der Dynamik, welche als veränderliche enthalten die Zeit und die Raumkoordinaten von bewegten Punkten. Durch diese Gleichungen werden also einfache thatsächliche Beziehungen ausgedrückt zwischen diesen Variabeln, ihren unendlich kleinen Aenderungen und gewissen empirischen Konstanten [1]). Denkt man sich diese Gleichungen integriert, so erhält man ein System von Gleichungen, durch welches in jedem Zeitpunkt die räumliche Lage aller bewegten Punkte bestimmt ist. Formell bestimmt also dieses System die räumlichen Erscheinungen für alle Zeit; abgeleitet ist es indes nur aus den Thatsachen der Vergangenheit und seine Gültigkeit für die Zukunft ist ein Induktionsschluss, den die Naturwissenschaft bis zum Beweise des Gegenteils als berechtigt betrachtet.

In dieser letzten Operation der Naturwissenschaft, dem induktiven Schliessen auf die Zukunft, ist zugleich in aller Bestimmtheit das Endschema der naturwissenschaftlichen Auffassung zu erkennen. Es wird geschlossen: weil die Erfahrung bisher in allen Fällen das Vorhandensein gewisser räumlich zeitlicher Be-

---

1) In meiner Dissertation „De generalibus motus legibus" (Bonn 1859) habe ich näher ausgeführt, dass in der Dynamik der Begriff der Kraft gar nicht zur Anwendung kommt, dass die allgemeinen dynamischen Gleichungen nur besagen: die Aenderung, die das Produkt aus der Masse und der Geschwindigkeit (die Bewegungsquantität) eines materiellen Punktes in einer unendlich kleinen Zeit erhält, ist, in einer bestimmten Einheit ausgedrückt, so und so gross (d. h. es ist für jede Koordinatenaxe eine Gleichung von der Form $m \frac{d^2x}{dt^2} dt = X\, dt$ gegeben, die auf beiden Seiten nur Bewegungsquantitäten enthält). Es entspricht dies der Anschauung **Kirchhof's**, nach der die Mechanik die Bewegungen nur zu *beschreiben* hat — allerdings in mathematischer Form. Dass in der neuesten Zeit die ältere, namentlich von **Laplace** ausgebildete Vorstellung, nach der die ganze Natur auf ein System von bewegten, sich anziehenden und abstossenden Atomen zurückgeführt wurde, teilweise durch weniger anschauliche Annahmen ersetzt worden ist, lässt die obigen Betrachtungen unberührt. Auch wenn man z. B. statt der Bewegungsquantität die lebendige Kraft — einer ursprünglich erst mit Hilfe der Bewegungsquantität gebildeten Funktion der Geschwindigkeit — oder allgemein die Energie als Grundbegriff der Mechanik annehmen will, bleibt deren Aufgabe doch die mathematisch-quantitative Darstellung der Veränderungen der materiellen Systeme in Raum und Zeit (1902).

ziehungen in bestimmten materiellen Systemen ergeben hat, so nehmen wir an, dass dieselben Systeme auch fernerhin dieselben Beziehungen zeigen werden. Von Kräften, Gesetzen, Zwecken ist in dieser Formel nicht die Rede, weil eben diese Hülfsbegriffe in der Naturwissenschaft nur bequeme Ausdrücke für beobachtete thatsächliche räumlich-zeitliche Beziehungen sind.

Nicht für alle Naturwissenschaften ist das Schema der rein quantitativen Auffassung der Erscheinungen in Raum und Zeit erreichbar: mehrere und namentlich die organischen müssen sich auf eine nichtmathematische Darstellung materieller Formen und Vorgänge beschränken, aber für alle ist die Reduktion der Erscheinungen auf quantitative Normen das letzte Ideal.

Die Methode der Naturwissenschaft besteht also in ihrer idealen Durchführung in der objektiven Auffassung der Erscheinungen in Raum und Zeit, ihrer Zerlegung in Grundthatsachen und der Aufstellung eines rein quantitativen mathematischen Schemas für die Beziehungen der Erscheinungen. Ist nun diese Methode auf den Stoff der Sozialwissenschaft anwendbar, und wenn dies der Fall ist, genügt das rein quantitative, nur äussere Beziehungen darstellende Schema, um die Gesamtheit unserer möglichen Erfahrungen auf diesem Gebiete aufzunehmen?

Der erstere Frage ist zu bejahen, die letztere zu verneinen.

Die Naturwissenschaften schliessen als solche mit dem Kategorienschema des unmittelbaren Seins ab.

Die Sozialwissenschaften dagegen können von verschiedenen Gesichtspunkten aufgefasst werden, die sich übereinander erheben, so dass der obere immer den unteren mit umfasst, während auch der untere eine relative Selbständigkeit besitzt.

6. Bleiben wir bei der naturwissenschaftlichen Auffassung der sozialen Erscheinungen stehen, so ergiebt dieselbe die Statistik. Wenn diese Wissenschaft überhaupt feste Grenzen haben soll, so muss sie streng auf das Gebiet quantitativ bestimmter Thatsachen beschränkt werden, während die ätiologischen und teleologischen Kategorien als konstitutive Bestandteile der schliesslichen Auffassungsform auszuschliessen sind.

Die Statistik hat, soweit sie einen selbständigen wissenschaftlichen Zweck verfolgt und nicht bloss als Hülfsorgan der praktischen Verwaltung dient, objektiv und zahlenmässig das relativ Stetige und Typische im Bestande und der Veränderung der menschlich-sozialen Erscheinungen zu **konstatieren**. Sie muss zu diesem Zweck Massenbeobachtungen anstellen, weil jenes relativ Stetige nicht in der Einzelerscheinung hervortritt, sondern nur in der Verbindung der Einzelerscheinungen in dem gesellschaftlichen Ganzen.

Sie wird ferner der naturwissenschaftlichen Methode gemäss die komplizierteren Massenerscheinungen soweit wie möglich in einfachere zu zerlegen suchen. Bei dieser Operation wird sie sich natürlich nach ursächlichen Verhältnissen in den Erscheinungen umsehen, aber schliesslich kommt sie immer zu gewissen numerisch bestimmten Massenerscheinungen von grösserer oder geringerer Stabilität, die sie einfach als Thatsachen annehmen muss, ohne dass sie von ihrem Standpunkt über die Ursachen derselben etwas auszusagen hat.

Sie untersucht z. B. in einem Lande die Sterblichkeit der Neugeborenen im ersten Lebensjahre. Sie kann nun die Gesamtmasse der Geborenen einer Zeitstrecke zerlegen nach gewissen Unterscheidungsmerkmalen, die mutmasslich einen Einfluss auf die Sterblichkeit ausüben, z. B. nach Geschlecht, ehelicher und unehelicher Geburt, Geburtsort, günstige oder ungünstige ökonomische Lage der Eltern u. s. w.; sie wird also möglichst gleichartige Gruppen bilden und das Sterblichkeitsverhältnis in jeder derselben bestimmen. Je weiter die Individualisierung geführt werden kann, je homogener jede einzelne Gruppe konstituiert ist, desto besser; aber schliesslich muss die Statistik bei einem System von Gruppen stehen bleiben, von denen jede noch eine Masse darstellt; und ihr letztes Wort ist dann dieses, dass in einer bestimmten Abteilung der Bevölkerung von 10000 Neugeborenen z. B. 2000 im ersten Lebensjahre gestorben sind. Neben dieser Thatsache kann sie in der Regel die fernere konstatieren, dass die aufeinander folgenden Jahresgenerationen annähernd das gleiche Sterblichkeitsverhältnis aufweisen.

Eine weitere Zerlegung dieser Thatsachen ist nicht Sache der Statistik. Die Massenerscheinungen sind Folgen der Einzelfälle, bis zur Untersuchung der Einzelfälle aber kann die Statistik nicht zurückgehen.

Daher ist auch die höchste wissenschaftliche Form, in welche die Statistik ihren Stoff fassen kann, das Schema der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Dieses aber ergiebt sich lediglich aus dem thatsächlichen Verhältnis, dass bei einer gegebenen Anzahl von möglichen Fällen eine gegebene Zahl von Fällen einer bestimmten Art vorkommt. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung kennt nur numerisch bestimmte Anfangs- und Endzustände; von den Ursachen, die den Endzustand aus dem Anfangszustand erzeugt haben, weiss sie ihrem Wesen nach nichts; denn wären diese Ursachen und ihre Wirkung bekannt, so wäre überhaupt die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht mehr am Platze. Wenn bei gewissen Erörterungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung von Ursachen die Rede ist, so verbindet man mit diesem Worte einen ganz anderen Begriff, als den eigentlichen und gewöhnlichen: man versteht dann unter Ursache eine Bedingung, von der man annimmt, dass sie nicht mit Gewissheit, sondern nur mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit eine gegebene Erscheinung nach sich zieht. Diese Ausdrucksweise wird übrigens nur der Bequemlichkeit wegen angewendet und könnte leicht vermieden werden.

7. Die Statistik kann also nach dem eben Gesagten als eine formell abgegrenzte Wissenschaft behandelt werden, die ihren Stoff mit den übrigen Sozialwissenschaften gemein hat, ihre Eigentümlichkeit aber durch die Beschränkung ihrer Auffassungsform erhält. Ihr höchster Begriff ist das rein numerische Verhältnis der mathematischen Wahrscheinlichkeit; und sie verfährt rein naturwissenschaftlich induktiv, wenn sie aus dem beobachteten Vorhandensein gewisser Zahlenverhältnisse schliesst, dass auch in Zukunft wahrscheinlich ähnliche Verhältnisse sich ergeben werden. Mit den Ursachen der möglichst individualisierten Massenerscheinungen, bei denen sie stehen bleibt, kann sie sich nicht befassen, weil die Zahlen, mit denen sie allein operiert, diese Ursachen überhaupt nicht enthalten.

Aber die statistische Auffassung der sozialen Erscheinungen ist keineswegs eine erschöpfende.

Die Naturwissenschaft verliert nichts von ihrem möglichen erfahrungsmässigen Erkenntnisstoffe, wenn sie die Frage nach dem W a r u m, sofern diese nicht den äusseren, sondern den inneren Zusammenhang der Dinge betrifft, fallen lässt.

Ganz anders bei den sozialen Wissenschaften: hier ist unsere Erkenntnis imstande, unmittelbar in den inneren Kausalzusammenhang der äusseren Erscheinungen einzudringen, und wir würden einen wesentlichen Teil unseres möglichen Wissens opfern, wenn wir die Frage nach diesem Kausalzusammenhange aufgeben wollten. Die Beantwortung dieser Frage führt uns hier nicht mehr bloss zur Zerlegung der Erscheinungen in ebenfalls äussere Grunderscheinungen, sondern sie führt uns über das Gebiet des äusseren quantitativ bestimmten Seins hinaus in ein anderes, in dem wir für die Erfahrung der Kausalität gewissermassen ein neues Organ erhalten.

Das Element der sozialwissenschaftlichen Erscheinungen ist das nach Motiven handelnde menschliche Individuum. Für die Kausalität des menschlichen Individuums aber, für die menschlichen Motive und deren Wirkungen haben wir vermöge unseres eigenen Bewusstseins ein unmittelbares Verständnis. Die Frage nach dem Warum erhält also den menschlich-sozialen Erscheinungen gegenüber eine ganz andere Tragweite als in der Naturwissenschaft, wo ihre Beantwortung nur das logische Verhältnis von Grund und Folge aufklären kann. Was vom statistischen Gesichtspunkt zu erkennen war, bleibt auch in dieser höheren Auffassungsform der menschlichen Dinge gewahrt. Höchstens könnte man von den mehr der Naturordnung angehörenden Ergebnissen der Geburts- und Sterblichkeitsstatistik behaupten, dass sie über das naturwissenschaftliche Schema nicht hinausgeführt werden können. Indes ist zu bemerken, dass auch diese Thatsachen nicht als bloss physische, sondern als Erscheinungen des persönlichen Menschenlebens in den Sozialwissenschaften ihren Platz finden. Mit voller Deutlichkeit aber zeigt sich die Unvollständigkeit der bloss statistischen Auffassung, wenn wir die menschlichen Handlungen und deren Resultate ins Auge fassen.

So sind wir also imstande, die menschlichen Dinge mit Rücksicht auf die Kausalität und Wechselwirkung der sich nach ihrem eigenen Wesen bestimmenden Individuen wissenschaftlich zu betrachten.

Jedoch bezieht sich diese Betrachtung nur auf das Wirkliche, auf die menschlich motivierten Handlungen, wie sie sind, nicht wie sie sein sollen.

Durch diese Beschränkung des Gesichtspunktes erhalten wir die Abgrenzung eines zweiten Kreises der Sozialwissenschaften. Er schliesst äusserlich wieder den ganzen Inhalt des sozialen Lebens nach seiner wissenschaftlichen, staatlichen, moralischen Seite ein, erhält aber seine relative Selbständigkeit durch die besondere Art der Auffassung dieses Erkenntnisstoffes.

8. Am vollständigsten ist diese Behandlungsform bisher ausgebildet für die Erscheinungen des wirtschaftlichen Lebens. In der Volkswirtschaftslehre in ihrer heutigen Gestalt betrachten wir die Massenerscheinungen, welche auf dem Boden eines gegebenen Rechtszustandes dadurch entstehen, dass der Mensch Bedürfnisse hat und auf möglichst leichte Weise deren Befriedigung zu erreichen sucht. Die Motivierung des wirtschaftlichen Handelns der Menschen ist, wenn auch nicht konkret in jedem Einzelfalle, so doch ihrem allgemeinen Wesen und Charakter nach unserer Erkenntnis durch psychologische Beobachtung zugänglich. Wir können mit genügender Sicherheit behaupten, dass gewisse Motive mit grosser Allgemeinheit wirken und daher auch die Ergebnisse der Massenbeobachtungen vorzugsweise beeinflussen werden. Zu diesen durchschlagenden Motiven gehört vor allem der wirtschaftliche Eigennutz, die das Individuum leitenden Maxime, möglichst vollständige Befriedigung seiner Bedürfnisse gegen eine möglichst geringe Gegenleistung zu erlangen. Die Volkswirtschaftslehre muss diese Triebkraft als ein wirklich vorhandenes Element hinnehmen, wie sie ist und ihre Wirkung nach aussen untersuchen. Viele glauben sogar, dass jener Faktor das einzige Grundprinzip liefere, von dem aus die Wissenschaft imstande sei, auf deduktivem Wege alle wirtschaftlichen Erscheinungen der Wirklichkeit zu erklären. Dieses Verfahren ist allerdings bequem und überdies bestechend durch die Durchsichtigkeit und scheinbare mathematische Strenge seiner Entwickelung. Aber vergleicht man die Sätze, zu denen es führt, mit exakten Resultaten der Erfahrung, oder versucht man auf Grund jener Sätze eine Voraussagung über den Ausgang eines vorliegenden wirtschaftlichen Prozesses, so wird sich in sehr vielen Fällen herausstellen, dass die lebendige Mannigfaltigkeit des Wirklichen das deduzierte Fachwerk von Abstraktionen überflutet und wegschwemmt. Selbst wenn der wirtschaftliche Egoismus in allen Individuen in der Form der rationellen Privatpolitik eines Grosshändlers oder Banquiers wirksam wäre, so würden abstrakte Voraussagungen über eine bestimmte wirtschaftliche Entwickelung immer höchst problematisch bleiben, weil sie die positive Ver-

teilung der wirtschaftlichen Macht unter die Individuen, deren Interessen sich bekämpfen, nicht berücksichtigen können.

Aber der Egoismus der grossen Masse ist überhaupt ein anderer als der des rationellen Grosshändlers. Der letztere ist bis zu einem gewissen Grade berechenbar, in dem ersteren aber steckt ein starker irrationeller Rest, bedingt durch Indolenz, Gewohnheit, Vorurteil, der als wesentlicher Faktor zur Gestaltung der wirtschaftlichen Gesamtverhältnisse mitwirkt; aber auch idealere Motive greifen thatsächlich in das Getriebe des wirtschaftlichen Eigennutzes ein, um die Ricardo'schen Zirkel zu stören.

9. Wenn also die Volkswirtschaftslehre die volle Wirklichkeit der wirtschaftlichen Erscheinungen erfassen soll, so muss sie die Gesamtheit der Motive berücksichtigen, die auf jene Erscheinungen einen erheblichen Einfluss üben. Diese Untersuchung aber muss nicht nur an ihrem Ausgangspunkte, sondern auch auf ihrem ganzen Wege eine erfahrungsmässige sein.

Es gilt zu erforschen, welche Kombination von rationellen, irrationellen und idealen Motiven für die Gestaltung des wirtschaftlichen Lebens der verschiedenen Völker zu verschiedenen Zeiten massgebend sind. Diese Untersuchung hat sich nicht nur auf allgemeine psychologische Erfahrungen zu stützen, sondern auch Rücksicht zu nehmen auf die konkreten Charaktere der Völker, auf die in ihnen vorherrschenden Strömungen des Denkens und Empfindens, ferner auf die Organisation des gesellschaftlichen und staatlichen Körpers, auf die Verteilung der wirtschaftlichen Macht u. s. w. Alle diese Momente sind in Beziehung zu setzen zu den unmittelbar hervortretenden wirtschaftlichen Erscheinungen, die ihrerseits in ihrem Verlauf und ihren Resultaten möglichst exakt und zahlenmässig zu beobachten sind. So wird man sich durch Beobachtung eines gleichartigen Prozesses unter verschiedenen Bedingungen und Einwirkungen ein Urteil bilden können über das relative Gewicht der kombiniert wirkenden Motive und Einflüsse; man wird entscheiden können, wie fern einzelne derselben von überwiegender Stärke sind, und wie weit ihre Wirksamkeit durch das Vorhandensein anderer Faktoren modifiziert und gestört wird. Kurz, man wird auf diesem Wege mühsam aber sicher zu einer erfahrungsmässigen Kenntnis des inneren Kausalzusammenhangs der volkswirtschaftlichen Thatsachen gelangen, die es möglich machen wird, mehr oder weniger allgemein gültige Sätze nicht nur aufzustellen, sondern auch erfahrungsmässig zu beweisen.

Offenbar fällt dieses Verfahren mit der naturwissenschaftlichen Methode insofern zusammen, als es von der naturwissenschaftlichen Grundlage der Sozialwissenschaften, der Statistik ausgeht und auch in seinem ferneren Verlaufe die objektive Betrachtung der Erscheinungen beibehält. Aber in seinem Ziele überschreitet es die Grenzen der naturwissenschaftlich-statistischen Auffassung, indem es nicht bei der Feststellung der äusseren Beziehungen der Erscheinungen stehen bleibt, sondern die innere Verbindung derselben durch menschliche Kausalität und Wechselwirkung erklärt, für die uns unser eigenes Bewusstsein ein unmittelbares Verständnis ermöglicht.

Die letzten Schlüsse der Wissenschaft sind daher bei diesem Verfahren nicht bloss Induktionsschlüsse aus äusseren Erfahrungsthatsachen. Wenn z. B. die Volkswirtschaftslehre sich berechtigt glaubt, die Wiederholung einer Massenerscheinung in der Zukunft vorauszusagen, so stützt sie sich nicht einfach auf das Faktum, dass diese Erscheinung vorher in einer bestimmten Weise stattgefunden hat, sondern sie beruft sich auf die Wahrscheinlichkeit, dass die Gesamtheit der menschlichen Motive, welche die Erscheinung bedingen, auch in der Zukunft gleichmässig wirken werde. Sie schliesst also: weil die wirkenden Motive dieselben bleiben, wird sich die äussere Erscheinung wiederholen — ein Schluss, der offenbar von der naturwissenschaftlichen Induktion wesentlich verschieden ist.

10. Daher sind denn auch die allgemeinen Sätze, zu denen die Volkswirtschaftslehre gelangt, keineswegs naturwissenschaftlich aufzufassen. Selbst wenn sie sich auf mathematische Formeln bringen liessen, so würden diese Formeln die unsere Kenntnisse abschliessende Bedeutung von sogenannten Naturgesetzen nicht besitzen; sie würden nicht als letzte thatsächliche Normen der Erscheinungen anzusehen sein, sondern nur als Produkte der realen Ursachen, die wir in den menschlichen Motiven und ihren Wechselwirkungen erkennen. Ein menschliches Handeln, das nicht auf ein individuelles Motiv zurückgeführt werden kann, gehört nicht mehr in das Gebiet der Sozialwissenschaften, sondern in das der Pathologie. Die Motive mögen gut oder böse, thöricht oder klug,

klar bewusst oder instinktiv sein, sie müssen jedenfalls in normalmenschlicher Weise als Vorstellungen das Wollen und Handeln des Individuums bestimmen. Wie auch die äusseren Einflüsse und namentlich die Wirkung der gesellschaftlichen Gesamtheit auf den Einzelnen beschaffen sein mögen, das Resultat dieser Einwirkungen tritt im Individuum immer in der Form von Motiven auf, die als solche beobachtet werden können oder wenigstens begreiflich sind.

Die naturgesetzliche, gewissermassen physikalische Auffassung der Volkswirtschaftslehre hat indes bei ihrer Einseitigkeit wenigstens eine exakte Tendenz. Dasselbe aber kann man nicht sagen von dem Spielen mit naturwissenschaftlichen Analogien, wie es z. B. Carey liebt. Sollen diese Analogien nur Bilder sein, so mögen sie hingehen; glaubt man aber dadurch der Wissenschaft eine ernstliche Förderung zu bringen, so begeht man eine Vermischung der Kategorien im umgekehrten Sinne, wie es die Alten gethan haben. Man fasst den motiviert handelnden Menschen auf nach der Schablone der bloss äusserlich erkannten Naturerscheinungen, während die Alten umgekehrt den subjektiven Formen des menschlichen Denkens eine reale Bedeutung für die Natur zuschrieben.

Dass jene Analogien sich ziemlich weit ausspinnen lassen, folgt aus ihrer abstrakten Natur. Man fasst z. B. die Veränderung unter dem Bilde der Bewegung auf, bezeichnet gewisse sociale Erscheinungen als Anziehung, Abstossung u. s. w. Sofern nun diese Bilder gewisse abstrakte Merkmale mit den wirklichen Erscheinungen gemein haben, werden auch ihre Verbindungen wieder eine Analogie mit den entsprechenden Verbindungen der Erscheinungen aufweisen.

Der soeben betrachtete Kreis der Sozialwissenschaften hat als höchsten Begriff von realer Bedeutung das individuelle Motiv, wie es in der Wirklichkeit in der gesellschaftlichen Wechselwirkung auftritt. Das Individuum erscheint als frei, sofern es sein Handeln durch seine eigenen Motive bestimmt; aber diese Motive selbst werden auf die mannigfaltigste Art bedingt und beeinflusst. Die Wissenschaft in der oben erörterten Beschränkung erfasst von diesen die Motive erzeugenden Einflüssen nur das Resultat, um daraus die Wirklichkeit zu erklären.

Nun aber steht über dem wirklichen Menschen und dem wirklichen Motiv der Begriff des sittlichen Menschen und des sittlichen Motivs. Als sittliche Wesen kennen wir unmittelbar das Gesetz der Motive, dem sie sich in der Wirklichkeit fügen sollen. Hier zum ersten Male stossen wir auf den Begriff des Gesetzes, nicht als einer Auffassungsform des Thatsächlichen in Raum und Zeit, sondern als einer Realität in unserem sittlichen Bewusstsein.

Hier auch finden wir den Begriff eines Zweckes, den wir nicht äusserlich in die Erscheinungen hineintragen, sondern der der inneren Entwickelung der menschlichen Dinge ein reales Endziel setzt, und hier erkennen wir als Zweck des Gesetzes die Verwirklichung einer höheren sittlichen Weltordnung.

Die soziale Wirklichkeit hebt sich also ab auf einem idealen Hintergrunde, auf dem wir sie wissenschaftlich erfahren können, indem wir über das Reich der empirischen Sozialwissenschaften hinausgehen und die teleologisch-sittlichen Kategorien zu Hülfe nehmen. Auf diesem neuen und höchsten Gesichtspunkte können wir uns zunächst den sozialen Erscheinungen gegenüber kritisch verhalten, d. h. wir können sie lobend und tadelnd beurteilen nach Massgabe der Prinzipien, die uns von der philosophischen Rechtslehre und Ethik geliefert werden; wir können ferner mit praktischer Absicht auftreten und nach den Mitteln suchen, um die Wirklichkeit jenen Prinzipien gemäss zu verbessern.

11. Aber wir können uns auch auf einen objektiv-erfahrungsmässigen Standpunkt stellen und eine besondere wissenschaftliche Untersuchung darüber unternehmen, wie sich in der sozialen Wirklichkeit das Sein zum Sollen verhält. Die menschlichen Motive entstehen aus einem Konflikt des naturalistischen Egoismus mit dem sittlichen Gesetze. Welches ist nun in einer gegebenen Gesellschaft die thatsächlich erkennbare relative Macht dieser sich bekämpfenden Faktoren? Wie bewegt sich das Zünglein der Wage, die Gutes und Böses in den Massenerscheinungen misst? Ist es wunderbar und mit der sittlichen Freiheit des Menschen unverträglich, wenn wir finden, dass der Ausschlag der Wage fast konstant bleibt oder nur in langsamer Schwankung sich ändert.

Eine solche relative Konstanz in den Massenerscheinungen, welche aus dem Kampfe der egoistischen und der sittlichen Elemente der menschlichen Motive hervorgehen, ist die Bedingung für die Möglichkeit, eine besondere soziale Erfahrungswissenschaft mit der oben angedeuteten Aufgabe zu begründen, eine Wissenschaft, die man etwa als empirische Sozialethik bezeichnen kann.

So unvollständig und mangelhaft unsere bisherigen Erfahrungen auf diesem Gebiete auch noch sein mögen, so beweisen sie doch schon zur Genüge, dass jene Bedingung in einem gewissen Umfange erfüllt ist. Es giebt unzweifelhaft eine gewisse Stabilität in den Massenergebnissen des gleichzeitigen Wirkens der egoistischen und der sittlichen Kräfte. Die Erfahrungsresultate dieser Art lassen eine Erklärung a priori nicht zu, da sie durch die empirische Natur des Menschen bedingt werden; sie sind vielmehr ihrerseits zu benutzen, um über die empirische Menschennatur und deren thatsächliche Beschränktheit Aufschluss zu geben. Die Frage, ob der Mensch volle moralische Willensfreiheit besitzt, d. h. ob er virtuell die Kraft besitzt, unter allen Umständen dem Gebote des Sittengesetzes zu folgen, können wir hier beiseite lassen; thatsächlich steht fest, dass das Durchschnittsmass der aktuell werdenden sittlichen Kraft des menschlichen Individuums ein begrenztes ist; und wenn wir dies zugeben, so darf es uns auch nicht wunder nehmen, wenn wir in den konkreten Massenresultaten dieser Durchschnittskraft und der sie beschränkenden egoistischen Gegenkraft dieselbe Stetigkeit wahrnehmen, wie sie überhaupt in den Massenerscheinungen der menschlichen Gesellschaft hervortritt.

12. Die empirische Sozialethik wird sich freilich immer darauf beschränken müssen, diese Messung des relativen Gewichts der sittlichen und egoistischen Elemente an einzelnen Punkten zu versuchen und zwar wird sie sich dabei auf äussere, mehr oder weniger unsichere Indicien angewiesen sehen. Die Statistik liefert ihr zunächst ein mehr und mehr anwachsendes Beobachtungsmaterial über menschliche Handlungen, die durch das Strafgesetz oder durch die öffentliche Moral als schlecht und unsittlich charakterisiert sind. Sie liefert aber auch Daten über andere Massenerscheinungen auf dem intellektuellen, wirtschaftlichen und sozialen Gebiete, denen eine sittliche Bedeutsamkeit zukommt. Die empirische Sozialethik fasst diesen statistischen Stoff unter ihren

spezifischen Gesichtspunkt und sucht durch Analyse zu Schlüssen über das Verhältnis der moralischen Kräfte zu gelangen, die jenen Massenerscheinungen zu Grunde liegen. Sie wird bei ihrer Untersuchung vergleichend verfahren, indem sie gleichartige Erscheinungen unter verschiedenen physischen, staatlichen und sozialen Umgebungen betrachtet, um ein Urteil über die spezifische Wirkung besonderer Faktoren zu erlangen. Sie wird feststellen, welche Kombination von erreichbaren Erfahrungsdaten den sozialethischen Gesamtzustand eines Volkes oder einer Gesellschaft unter gegebenen Umständen möglichst vollständig charakterisiert, und mit Hülfe dieser Kriteriensysteme wird sie imstande sein, die Evolutionen des sittlichen Lebens der Völker annähernd exakt zu verfolgen. So wird die empirische Sozialethik den gewichtigsten Beitrag liefern zu der Lösung der verhängnisvollen Frage, wie sich die sittliche Entwickelung der Menschheit inmitten des unzweifelhaften Fortschrittes auf dem materiellen und intellektuellen Gebiete verhält.

Völlige Unterwerfung unter die beobachteten Thatsachen, grösste Objektivität in der Anwendung der sittlichen Kategorien mit Abwehr aller optimistischen oder pessimistischen Tendenzen sind unbedingte Erfordernisse, wenn die empirische Sozialethik sich vor Irrgängen bewahren soll. Die naturwissenschaftliche Methode leitet sie auf ihrem Wege durch das Thatsächliche, aber die spezifische eigene Thätigkeit dieser Wissenschaft liegt weit jenseits der Grenzen der naturwissenschaftlich-statistischen Auffassung der menschlichen Dinge. Allerdings finden wir numerische Regelmässigkeiten, die den Resultaten jener Forschungen einen naturwissenschaftlichen Schein verleihen, aber daraus folgt nicht die Berechtigung eines naturwissenschaftlich induktiven Schlusses. Ein solcher würde lauten: weil in einer grossen Anzahl von Beobachtungen gewisse sittlich bedeutsame, insbesondere unsittliche Erscheinungen in einem gewissen Verhältnis vorgekommen sind, nehmen wir an, dass dasselbe Verhältnis sich auch fernerhin herausstellen wird.

Die beobachtete Sozialethik aber bleibt nicht bei dieser äusseren Beziehung der Thatsachen stehen; sie ist imstande, in die Genesis der ethischen Erscheinungen einzudringen und weiss daher, dass die numerischen Regelmässigkeiten diese Erscheinungen nicht beherrschen, sondern ihrerseits durch die sittliche

Konstitution der menschlichen Gesellschaft bedingt werden. Auch unter dem scheinbar glatten Spiegel der gleichmässig verlaufenden moralstatistischen Massenerscheinungen wirkt der immer neu erwachende Drang eines Sein-Sollens, das nicht ist, und wenn auch das Zahlenverhältnis der Siege des Egoismus über die sittliche Kraft in der Gesamtheit sich noch so lange constant erhält, so erheben wir immer von neuem die Forderung, dass dieses Verhältnis in der Zukunft nicht so bleiben, sondern anders und besser werden soll, und es bleibt die allen gemeinsame Aufgabe, zur Erfüllung dieser Forderung mitzuwirken.

Anhang.

Abgekürzte Tabelle der Funktion $F_u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-t^2} dt$.

u	F_u	u	F_u	u	F_u
0,00	0,000	0,30	0,329	0,60	0,604
0,01	0,011	0,31	0,339	0,61	0,612
0,02	0,023	0,32	0,349	0,62	0,619
0,03	0,034	0,33	0,359	0,63	0,627
0,04	0,045	0,34	0,369	0,64	0,635
0,05	0,056	0,35	0,379	0,65	0,642
0,06	0,068	0,36	0,389	0,66	0,649
0,07	0,079	0,37	0,399	0,67	0,657
0,08	0,090	0,38	0,409	0,68	0,664
0,09	0,101	0,39	0,419	0,69	0,671
0,10	0,112	0,40	0,428	0,70	0,678
0,11	0,124	0,41	0,438	0,71	0,685
0,12	0,135	0,42	0,447	0,72	0,691
0,13	0,146	0,43	0,457	0,73	0,698
0,14	0,157	0,44	0,466	0,74	0,705
0,15	0,168	0,45	0,475	0,75	0,711
0,16	0,179	0,46	0,485	0,76	0,718
0,17	0,190	0,47	0,494	0,77	0,724
0,18	0,201	0,48	0,503	0,78	0,730
0,19	0,212	0,49	0,512	0,79	0,736
0,20	0,223	0,50	0,521	0,80	0,741
0,21	0,234	0,51	0,529	0,81	0,748
0,22	0,244	0,52	0,538	0,82	0,754
0,23	0,255	0,53	0,546	0,83	0,760
0,24	0,266	0,54	0,555	0,84	0,765
0,25	0,276	0,55	0,563	0,85	0,771
0,26	0,287	0,56	0,572	0,86	0,776
0,27	0,297	0,57	0,580	0,87	0,781
0,28	0,308	0,58	0,588	0,88	0,787
0,29	0,318	0,59	0,596	0,89	0,792

u	F_u	u	F_u	u	F_u
0,90	0,797	1,20	0,910	1,50	0,966
0,91	0,802	1,21	0,913	1,51	0,967
0,92	0,807	1,22	0,916	1,52	0,968
0,93	0,812	1,23	0,918	1,53	0,970
0,94	0,816	1,24	0,921	1,54	0,971
0,95	0,821	1,25	0,923	1,55	0,972
0,96	0,825	1,26	0,925	1,56	0,973
0,97	0,830	1,27	0,928	1,57	0,974
0,98	0,834	1,28	0,930	1,58	0,975
0,99	0,839	1,29	0,932	1,59	0,975
1,00	0,843	1,30	0,934	1,60	0,976
1,01	0,847	1,31	0,936	1,62	0,978
1,02	0,851	1,32	0,938	1,64	0,980
1,03	0,855	1,33	0,940	1,66	0,981
1,04	0,859	1,34	0,942	1,68	0,982
1,05	0,862	1,35	0,944	1,70	0,984
1,06	0,866	1,36	0,946	1,72	0,985
1,07	0,870	1,37	0,947	1,74	0,986
1,08	0,873	1,38	0,949	1,76	0,987
1,09	0,877	1,39	0,951	1,78	0,988
1,10	0,880	1,40	0,952	1,80	0,989
1,11	0,884	1,41	0,954	1,82	0,990
1,12	0,887	1,42	0,955	1,84	0,991
1,13	0,890	1,43	0,957	1,86	0,991
1,14	0,893	1,44	0,958	1,88	0,992
1,15	0,896	1,45	0,960	1,90	0,993
1,16	0,899	1,46	0,961	1,95	0,994
1,17	0,902	1,47	0,962	2,00	0,995
1,18	0,905	1,48	0,964	2,50	0,99959
1,19	0,908	1,49	0,965	3,00	0,99998

Buchdruckerei v. Ant. Kämpfe, Jena.