

TARTU ÜLIKOOL

LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND

MATEMAATIKA JA STATISTIKA INSTITUUT

Karl-Robert Mõttus

**Pythagorase teoreemi tõestus
paberi voltimise kaudu**

Matemaatika

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendajad: PhD Kati Ain, PhD Tiina Kraav

TARTU 2025

PYTHAGORASE TEOREEMI TÕESTUS PABERI VOLTIMISE KAUDU

Bakalaureusetöö
Karl-Robert Mõttus

Lühikokkuvõte

Käesolevas bakalaureusetöös uuritakse origami matemaatilisi rakendusi, keskendudes Pythagorase teoreemi tõestamisele, kasutades 1-voldi origami. Töö vältel kasutatakse Huzita-Justini aksiomaatikat, mis kirjeldab põhireegleid geomeetriliste konstruktsioonide loomiseks paberile voltimise teel.

Tõestatakse, et teatud tingimustel, näiteks standardse A-formaadis paberi korral, on võimalik teostada Pythagorase teoreemi tõestuses kasutatud voltimised sõltumata paberi orientatsioonist, kuid suvalise ristkülikukujulise paberi puhul on orientatsioon siiski oluline.

CERCS teaduseriala: P150 Geomeetria, algebraalne topoloogia.

Märksõnad: Origami, Pythagorase teoreem, Huzita-Justini aksiomaatika, 1-voldi origami.

PROOF OF THE PYTHAGOREAN THEOREM BY PAPER FOLDING

Bachelor thesis
Karl-Robert Mõttus

Abstract

This bachelor's thesis explores the mathematical applications of origami, focusing on proving the Pythagorean theorem using 1-fold origami. The study employs the Huzita-Justin axioms, which describe the fundamental rules for creating geometric constructions through paper folding.

It is demonstrated that under certain conditions, such as when using standard A-series paper, the folds needed to prove the Pythagorean theorem can be performed regardless of the paper's orientation. However, for an arbitrarily sized rectangular sheet, the orientation still matters.

CERCS research specialisation: P150 Geometry, algebraic topology.

Key Words: Origami, Pythagorean theorem, Huzita–Justin axioms, 1-fold origami.

Sisukord

Sissejuhatus	4
1 Tõestamine voltimise abil	6
2 Origami matemaatiline konstruktsioon	8
3 1-voldi origami	10
3.1 Huzita-Justini aksiomaatika	10
3.2 Ristkülikulise paberi konstrueerimine	13
3.3 Ristkülikulise paberi pikemate servade leidmine	15
4 Pythagorase teoreem	18
4.1 Põhitulemuse tõestus	19
4.2 Järeldused ja tähelepanekud	25
Kasutatud kirjandus	35

Sissejuhatus

Origami, iidne Jaapani paberivoltimise kunst (jpn 折り紙, *ori* „voltimine“, *kami* „paber“), mille alguseks loetakse 17. sajandit, oli algselt seotud kultuuritraditsioonide, tseremoniaalsete ja esteetiliste väärtustega, omamata süsteemset seost matemaatika või muude teadusharudega. Tänapäeval leiame origami olulisi rakendusi matemaatikas, sealhulgas matemaatilistes tõestustes.

Esimene otsene viide paberi voltimise kasutamisest geomeetriliste konstruktsioonide jaoks pärineb 14. sajandi lõpust Luca Pacioli avaldamata käsikirjast, kus ta kirjeldab, kuidas saab paberitükist voltida täisnurga juhaks, kui puudub võimalus kasutada muid vahendeid täisnurga saamiseks [1]. Pacioli kasutab seejärel saadud täisnurka fikseeritud küljepikkustega kolmnurga ja ruudu konstrueerimiseks [1].

Matemaatikute tõsisemat huvi hakkas origami äratama 20. sajandi esimeses pooles. Aastal 1934 formaliseeris itaalia matemaatik Margherita Beloch voltimisprotseduuri, mille abil on võimalik konstrueerida positiivse reaalarvu x kuupjuur (eel-
dusel, et arv x on voltimisega konstrueeritav) [1]. See voltimine, mis käesolevas töös on Huzita-Justini aksioom 6, muudab voltimise vähemalt sama võimekaks konstrueerimise vahendiks geomeetrias kui sirglaua ja sirkliga konstrueerimine.

Voltimisreegleid ja nende seost klassikalise eukleidilise geomeetriaga hakati uurima 1980ndatel, mil teineteisest sõltumatult kirjeldasid Huzita ja Justin elementaarsed voltimistoimingud, mida nüüd tuntakse Huzita-Justini aksioomidena [1].

Käesoleva bakalaureusetöö eesmärk on anda ülevaade 1-voldi origami aksiomaatikast, sellele tuginedes konstrueerida suvalisest paberist ristkülikuline paber ning saadud ristkülikulist paberit kasutada Pythagorase teoreemi tõestamiseks. Töö vältel analüüsitakse paberi orientatsiooni mõju voltimise võimalikkusele.

Esimeses peatükis antakse epistemoloogiline ülevaade origami kasutamisest tõestamise eesmärgil. Teise peatüki ülesanne on esitada edasiseks tööks vajalikud definitsioonid ning tuua sisse kasutatavad põhimõisted.

Kolmas peatükk kirjeldab Huzita-Justini aksiomaatika. Sellest aksiomaatikast lähtuvalt kirjeldatakse, kuidas suvalisele paberile voltida ristkülik, ning kuidas leida ristüliku pikemat külge.

Viimases peatükis näidatakse artikli [2] eeskujul üksikasjalikult, kuidas saab Huzita-Justini aksiomaatikas antud voltimisreeglitega konstrueerida kolmnurgad, mille pindalad tõestavad Pythagorase teoreemi. Järeldusena näidatakse, et artiklis [2] kasutatud voltimised ei ole võimalikud suvalise ristkülikukujulise paberi korral.

1 Tõestamine voltimise abil

Selles peatükis anname ülevaate peamiselt Friedmani ja Rittbergi artiklile [3] tuginedes origami rollist matemaatilise tõestusmeetodina.

Origami oma ajalooliste traditsioonidega on nüüdseks pikka aega pakkunud huvi ka matemaatikutele tänu võimalusele geomeetrilisi kujundeid luua üksnes füüsiliste toimingute kaudu. Matemaatilises kontekstis ei piirdu origami aga vaid loomingulise väljendusviisiga, sest toimib ka vahendina geomeetriliste väidete uurimiseks ja tõestamiseks. Erinevalt klassikalisest eukleidilisest geometriast, kus on kasutada sirkel ja sirglaud, võimaldab origami lahendada probleeme, mis eukleidilisest geometriast tuntud vahenditega võivad olla ka lahendamatud. Neist kuulsaimad on nurga võrdselt kolmeks jaotamine või kuubi ruumala mõttes kahekordistamine. Seda võimaldavad kindlad voltimisoperatsioonid, nimelt seitse Huzita-Justini aksiomi. Nende kirjapanekuga kujunes välja materjalil põhinev loogika – origamika¹, mis võimaldab deduktiivset arutlust läbi käelise tegevuse.

Friedman ja Rittberg väidavad, et origami kujutab endast eraldiseisvat materiaalse arutlemise vormi, mis erineb nii tekstilisest kui diagrammilisest arutlusest. Kui tekstiline arutus tugineb sümbolitel ja diagrammiline visuaalidel, siis origami toimib läbi paberi omaduste. Kui punkt volditakse sirgele või moodustatakse voltejoon kahe olemasoleva joone poolt moodustatud nurga nurgapoolitajana, on tegemist käegakatsutava protsessiga, mitte üksnes sümboolse tegevusega.

Origami kasutamise väärtus arutlusprotsessis seisnebki oma intuitiivses selguses. Mõned 19. sajandi teadlased, näiteks india matemaatik Tandalam Sundara Row, uskusid, et läbi voltimise võib tõestust vahetult tajuda, muutes abstraktsed seosed ilmseks. Row avaldas juba 1893. aastal raamatu „Geometrical Exercises in Paper Folding“, milles esitab voltimise abil lahendatavaid ülesandeid ja tõestatavaid teoreeme. Teised, nagu Marcus Giaquinto, jäid ettevaatlikumaks, pidades voltimist pigem illustratiivseks tõestuseks. Friedman ja Rittberg väidavad aga, et

¹Sulandsõna origamika (ingl *origamics*) võttis kasutusele 1990. aastatel jaapani professor Kazuo Haga, et tähistada paberi voltimise kasutamist matemaatiliste avastuste tegemisel.

senini pole ükski korrektselt defineeritud voltimiskonstruktsioon olnud formaalsete tõestusprotseduuridega vastuolus.

Matemaatikas käsitletakse voltimist idealiseeritud tegevusena. Kui reaalses elus võivad voltejooned olla ebatäpsed, eeldab matemaatiline arutlus ideaalset paberit ja täiuslikke voltimisi. Selline abstraktsioon võimaldab origamikonstruktsioonidel kuuluda matemaatilise tõestuse sfääri. Friedman ja Rittberg kirjeldavad origami-põhises arutlemises kahte suunda: (1) voltimisoperatsioonide avastamine ja nõ õigustamine (nt Belochi volt), ja (2) voltimise kasutamine konkreetsete matemaatiliste tulemuste visualiseerimiseks ja tuletamiseks. Mõlemal juhul toimib voltimine lisaks õppevahendiks olemisele ka uute teadmiste allikana.

2 Origami matemaatiline konstruktsioon

Käesolevas töös eeldame, et paberi paksus ja sellest tulenevad voltimisel esinevad vead on täielikult ignoreeritud. Samuti lähtume eeldusest, et kõik voltimised on ideaalselt teostatud. Voltimise all peame silmas tegevust, mille käigus painutame ühe osa paberist teise peale ja vajutame tasaseks. Oluline on tähelepanu pöörata asjaolule, et vaadeldavaks objektiks ei ole voltimise teel saadud 3D või 2D objekt, vaid meile pakub huvi tekkinud murdejoonte muster. Märgime veel, et antud töös kasutame sõnu „volt“, „voltejoon“ ja „murdejoon“, mille all me mõistame sama tähendust ning mille definitsooni anname peatselt. Järgnevad definitatsioonid on pärit Adam Woodhouse'i doktoritööst [4] (v.a definitsoon 2, mille defineerime ise).

Definitsoon 1. Paber on hulga \mathbb{R}^2 üheli sidus tõkestatud alamhulk, mis on homöomorfne ühikringiga.

Voltimisprotseduuri läbiviimiseks kasutatav paber on enamasti ristkülikukujuline. Ka juhul, kui algselt on tegemist mitteristkülikukujulise paberitükiga, on sellele võimalik voltimise abil konstrueerida ristkülikukujuline ala, kuid sellest täpsemalt juba järgmises peatükis.

Definitsoon 2. Paberi voltimisel tekkivat joont nimetame **voltejooneks**.

Toome sisse tööks olulised tasandi geomeetria algmõisted, milleks on punkt ja sirge. Punkti P tähistamiseks kasutame tähistusviisi $P(x_p, y_p)$, kus x_p ja y_p on vastavalt punkti P x - ja y -koordinaat. Punktid jagunevad suvalisteks ja konstrueeritud punktideks. Suvalise punkti all mõistame paberi ehk tasandi peal olevat suvalist punkti. Seevastu konstrueeritud punkt saab olla ainult kahe joone (enamasti sirge) lõikepunkt.

Sirget esitame võrrandiga $y = ax + b$, kus a ja b on suvalised reaalarvud. Olemasolevateks sirgeteks on paberi servad (v.a juhul, kui serv on kõver), ülejäänud voltejooned on võimalik aksioomide abil konstrueerida. Käesolevas töös samastame sirge, sirglõigu ja voltejoone ning sirge saab olla vaid voltejoon või paberi serv.

Igal voltimisel tekib sirge, mis ulatub paberi servast paberi servani.

Definitsioon 3. Peale voltimine ehk joondamine on kokku viimise protsess.

Peale volditavateks protseduurideks on: punkti teise punkti peale voltimine, joone teise joone peale voltimine ja punkti joone peale voltimine.

Definitsioon 4. Huzita-Justini 1-voltimise konstruktsioonid on kõiksugused voltimised, kus ühe voltejoone saamiseks on kasutatud minimaalset arvu peale voltimisi.

3 1-voldi origami

1-voldi origami tähendab, et paberile voltejoone saamiseks võime paberit voltida vaid ühe korra. See tähendab, et peale paberi kokku voltimist peame uue murdejoone konstrueerimiseks paberi uuesti lahti tegema [5].

3.1 Huzita-Justini aksiomaatika

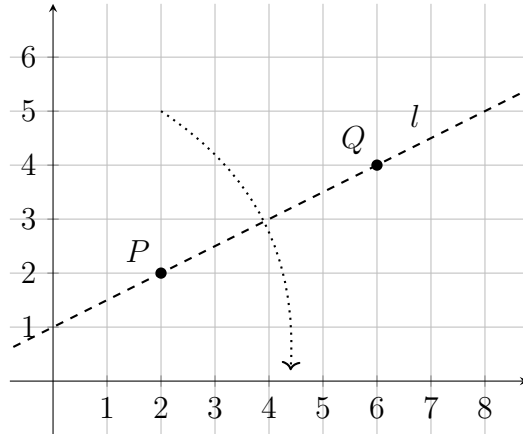
Origami ehk paberi voltimine on kasulik vahend geomeetriliste konstruktsioonide loomiseks. Aastal 1989 kirjeldas Humiaki Huzita kuus voltimisega seotud toimingut. Samal ajal avaldas Jacques Justin samateemalises töös seitse erinevat protseduuri, sealhulgas ühe, mida Huzita ei kirjeldanud. [6]

2006. aastal tõestasid Alperin ja Lang artiklis [7], et need seitse voltimisprotseduuri on täielikud ehk katavad kõik võimalikud punktide ja sirgete kombinatsioonid. Kuigi Huzita ei nimetanud oma voltimisprotseduure aksiomideks, on origami kogukonnas neid hakatud nimetama just Huzita või Huzita-Justini aksiomideks.

Huzita ja Justin märkisid ka ise, et nende algselt kirja pandud protseduuride loetelu võib täieneda uute reeglitega, nende teostatavus sõltub punktide ja joonte suhtelistest asukohtadest, ning need pole teineteisest sõltumatud [1]. Artiklis [6] täpsustatakse nende reeglite sõnastusi, eemaldades mittetöötavad juhtumid ja lõpmatud lahendid, ning lisatakse selged piirangud. See muudab need loogiliselt rangeteks. Iga protseduur on nüüd üheselt määratletud ja rakendatav lõpliku arvu reeglitega. Seega saab neid pärast täiendusi õigustatumalt kutsuda aksiomideks.

Kõik selles alapeatükis kasutatavad aksiomide kirjeldused pärinevad artiklist „Origami axioms and circle extension“ [6] ning joonised ja võrrandid pärinevad Mordechai Ben-Ari raamatust „Mathematical Surprises“ [8].

Aksiom 1. *Antud kahe erineva punkti $P(x_p, y_p)$ ja $Q(x_q, y_q)$ korral on olemas täpselt üks voltejoon l , mis läbib neid punkte (vt. joonis 1).*

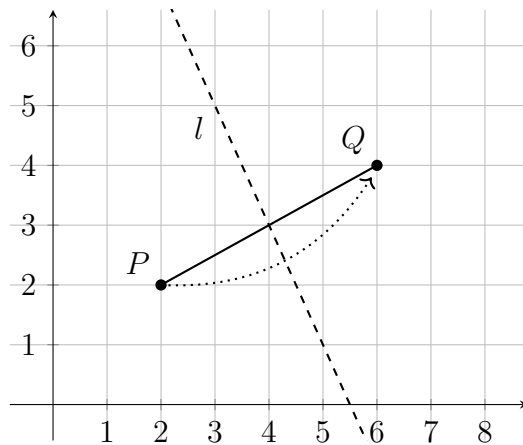


Joonis 1. Aksiom 1

Voltejoone l võrrandi tuletamiseks kasutame punktide P ja Q koordinaate. Tõus on koordinaatide erinevuste jagatis ja vabaliikme määramise punktiga P :

$$(y - y_p)(x_q - x_p) = (y_q - y_p)(x - x_p). \quad (1)$$

Aksiom 2. Antud kahe erineva punkti $P(x_p, y_p)$ ja $Q(x_q, y_q)$ korral on olemas täpselt üks voltejoon l , mis voldib punkti P punkti Q peale (vt. joonis 2).



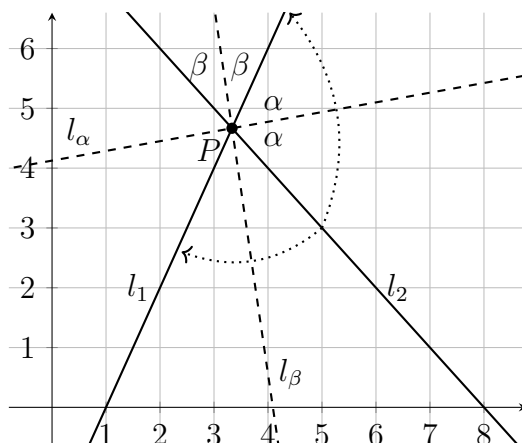
Joonis 2. Aksiom 2

Voltejoon l on risti lõiguga PQ , seetõttu on selle tõus punkte P ja Q läbiva sirge

tõusu negatiivne pöördväärtus ning sirge l läbib lõigu PQ keskpunkti:

$$\left(y - \frac{y_p + y_q}{2}\right)(y_q - y_p) = -(x_q - x_p)\left(x - \frac{x_p + x_q}{2}\right). \quad (2)$$

Aksioom 3. Antud kahe erineva sirge l_1 ja l_2 korral on olemas lõplik arv voltejooni l , mis voldib sirge l_1 sirge l_2 peale.



Joonis 3. Aksioom 3 juhul, kui sirged lõikuvad

Juhul, kui sirged l_1 ja l_2 on paralleelsed, siis sirge l_1 voltimisel sirge l_2 peale saame voltejoone l , mis on paralleelne sirgetega l_1 ja l_2 ning asetseb täpselt nende kahe vahel.

Vaatame nüüd juhtu, kui sirged l_1 ja l_2 lõikuvad (vt. joonis 3). Märgime siinkohal ära, et vaatame ainult juhtu, kus sirged l_1 ja l_2 ning saadud voltejoon l ei ole paralleelsed y -teljega. Olgu l_1 ja l_2 defineeritud vastavalt võrranditega $y = a_1x + b_1$ ja $y = a_2x + b_2$, kus üldisust kitsendamata eeldame, et $a_1 > a_2$. Voltides sirge l_2 sirge l_1 peale, tekib meil voltejoon l . Saadud murdejoon läbib sirgete l_1 ja l_2 lõikepunkti $P\left(\frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}, \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1 - a_2}\right)$ ning on sirgete l_1 ja l_2 poolt tekitatud nurga poolitaja. On kaks võimalikku murdejoont, l_α ja l_β , kuna meil on kaks paari vastasnurkasid. Tähistagu l_β voltejoont, mis tekib sirge l_2 voltimisel päripäeva sirgele l_1 ning l_α voltejoont, mis on saadud vastupäeva voltides.

Järgmisena tuletame sirgete l_α ja l_β tõusud. Kui sirge l_1 nurk x -telje suhtes on θ_1 ja sirge l_2 nurk x -telje suhtes on θ_2 , siis murdejoon l_β moodustab x -telje suhtes

nurga $\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$.

Sirgete l_1 ja l_2 tõusud avalduvad vastavalt $a_1 = \tan \theta_1$ ning $a_2 = \tan \theta_2$. Sirge l_β tõusuks saame

$$\begin{aligned} a_\beta = \tan \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} &= \frac{-1 + \operatorname{sgn}(\cos(\theta_1 + \theta_2))\sqrt{1 + \tan^2(\theta_1 + \theta_2)}}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} \\ &= \frac{a_1 a_2 - 1 + \operatorname{sgn}(\cos(\theta_1 + \theta_2))\sqrt{(1 + a_1^2)(1 + a_2^2)}}{a_1 + a_2}. \end{aligned}$$

Seega saadud voltejoone l_β võrrandiks on

$$y - y_p = a_\beta (x - x_p). \quad (3)$$

Voltejoone l_α võrrand on $y - y_p = -\frac{1}{a_\beta} (x - x_p)$, sest sirged l_β ja l_α on risti.

Aksioom 4. Antud punkti P ja sirge l_1 korral on olemas täpselt üks voltejoon l , mis läbib punkti P ning voldib sirge l_1 iseenda peale.

Aksioom 5. Antud sirge l_1 ja punktide P , mis ei asu sirgel l_1 ja punkti Q korral, on kas võimalik konstrueerida lõplik arv voltejooni l , mis läbivad punkti Q selliselt, et voltimine asetab punkti P sirgele l_1 või selline voltimine ei ole võimalik.

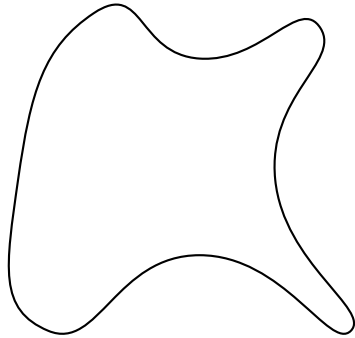
Aksioom 6. Antud kahe erineva punkti P ja Q ning kahe erineva sirge l_1 ja l_2 korral on olemas kas lõplik arv selliseid voltejooni l , mille korral punkt P volditakse sirgele l_1 ning punkt Q sirgele l_2 või selline voltimine ei ole võimalik.

Aksioom 7. Antud punkti P ning kahe erineva sirge l_1 ja l_2 korral, kus punkt P ei ole sirgel l_1 on olemas kas lõplik arv voltejooni l , mille korral samaaegselt volditakse P ja l_1 sirgele l_2 või selline voltimine ei ole võimalik.

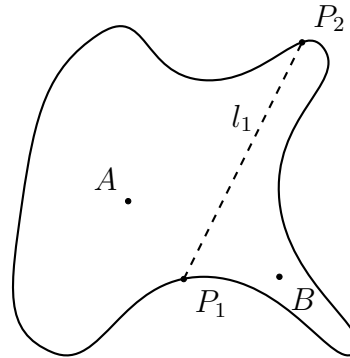
3.2 Ristkülikulise paberi konstrueerimine

Olgu meil suvaline paber definitsiooni 1 mõttes (vt. joonis 4). Valime paberil kaks erinevat suvalist punkti A ja B ning voldime ühe punkti teise peale. Tulenevalt

aksiomist 2 on meil võimalik teostada selline voltimine, mille tulemusel tekib voltejoon l_1 . Saadud voltejoon l_1 lõikab paberi serva(sid) kahes punktis, olgu nendeks P_1 ja P_2 (vt. joonis 5).

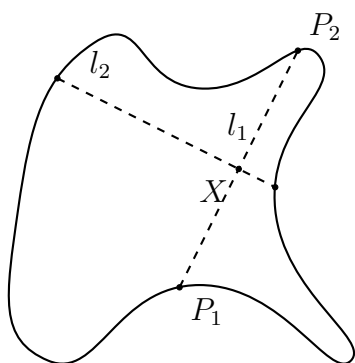


Joonis 4. Suvaline paber

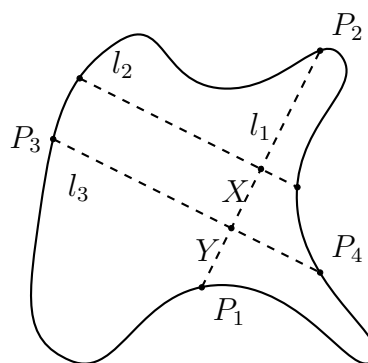


Joonis 5. Voltejoone l_1 konstrueerimine

Järgmise sammuna voldime punkti P_1 punkti P_2 peale. Tulenevalt aksiomist 2 tekib meil uus voltejoon l_2 , mis on risti sirgega l_1 . Lisaks tekivad kolm punkti, millest huvipakkuv on sirgete l_1 ja l_2 lõikepunkt X (vt. joonis 6). Võtame taaskord punkti P_1 ja voldime selle äsja konstrueeritud punkti X peale. Tulenevalt aksiomist 2 tekib meil sirge l_3 , mis on risti sirgega l_1 . Taaskord tekivad kolm punkti: lõikepunktid P_3 ja P_4 sirge l_3 ja paberi serva(de)ga ning sirgete l_3 ja l_1 lõikepunkt Y (vt. joonis 7).



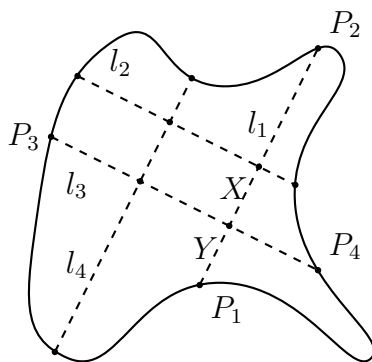
Joonis 6. Voltejoone l_2 konstrueerimine



Joonis 7. Voltejoone l_3 konstrueerimine

Viimase sammuna voldime punkti P_3 punkti X peale. Tulenevalt aksiomist 2 te-

kib meil sirge l_4 , mis on risti sirgega l_3 . Kui sirge l_4 lõikab sirget l_2 , siis on meil soovitud ristkülik olemas (vt. joonis 8). Kui sirge l_4 ei lõika sirget l_3 , siis kordame viimase voltimise protsessi, võttes punkti P_3 rolli sirgete l_3 ja l_4 lõikepunkti. Selliseid voltimisi tehes õnnestub meil lõpuks konstrueerida sirge l_n , mis lõikab sirget l_2 .



Joonis 8. Voltejoone l_4 konstrueerimine

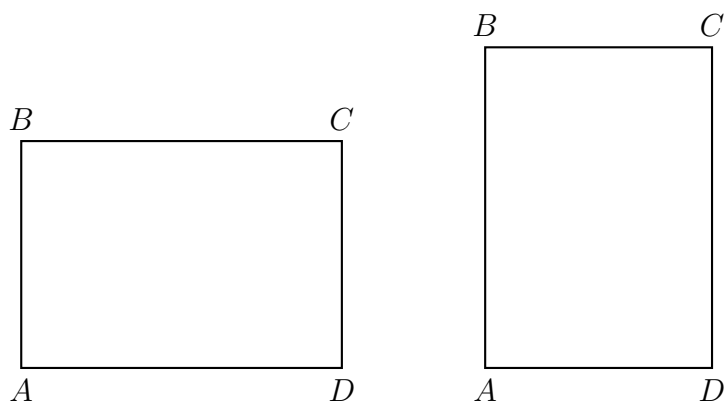
Saadud sirged l_1 , l_2 , l_3 ja l_n moodustavad soovitud ristküliku. Kuna edasised voltimistoimingud saame teostada just selle konstrueeritud ristküliku sees, muutub paberi algkuju voltimisprotsessi seisukohalt ebaoluliseks. Praktilises ja teoreetilises käsitluses võimaldab see meil lihtsustada arutelu, eeldades, et kogu voltimistegevus toimub ristkülikukujulisel pinnal. Seetõttu eeldame järgnevas, et paber on hulga \mathbb{R}^2 kinnine alamhulk $[a, b] \times [c, d]$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Muuhulgas kasutame sünonüümidena mõisteid paberi serv ja ristküliku külg. Analoogiliselt on ristküliku tipp ja paberi nurk meie jaoks samad mõisted.

3.3 Ristkülikulise paberi pikemate servade leidmine

Kuna oma edasises töös kasutame just ristkülikulist paberit, siis on loomulik küsimus, et kuidas ilma paberi servi mõõtmata leida pikemad servad.

Lemma 1. *Kui ristkülikulise paberi nurk voltida tema vastasnurga peale, siis saadud voltejoon lõikab ristküliku pikemaid servi.*

Tõestus. Olgu meil ristkülik (vt. joonis 9), mille tippudeks on $A(0,0)$, $B(0,b)$, $C(a,b)$ ja $D(a,0)$, kus $a, b > 0$.



Joonis 9. Kaks erineva orientatsiooniga ristkülikut

Kasutades aksioomi 2, saame voltida punkti A punkti C peale. Sellise voltimise teel tekib meil voltejoon l , mille võrrandi saame tuletada võrdusest (2). Selleks sirgeks on

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{a^2 + b^2}{2b}.$$

Saadud sirge l lõikab külge AB juhul, kui $\frac{a^2 + b^2}{2b} \leq b$ ehk

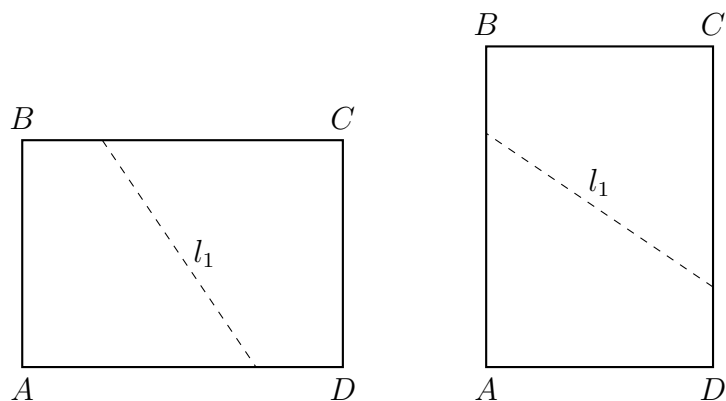
$$a^2 \leq b^2 \tag{4}$$

ning külge AD juhul, kui $\frac{a^2 + b^2}{2a} \leq a$ ehk

$$b^2 \leq a^2. \tag{5}$$

Sellest saame järeldada, et külge AD ja BC lõikab sirge l juhul, kui $b^2 \leq a^2$, teisisõnu AD ja BC on pikemad küljed. Külge AB ja CD läbib saadud voltejoon juhul, kui $a^2 \leq b^2$ ehk juhul, kui küljed AB ja CD on pikemad (vt. joonis 10).

□



Joonis 10. Voltejoon l lõikab pikemaid servi

Järeldus 1. *Olgu voltejoon l saadud paberi tipu voltimisel selle vastastipu peale. Paber on ruudukujuline parajasti siis, kui joon l lõikab paberi igat serva.*

Tõestus. Tarvilikkus. Olgu meil ruut küljepikkusega a ja tippudega $A(0, 0)$, $B(0, a)$, $C(a, a)$ ja $D(a, 0)$.

Eelduse kohaselt oleme saanud voltejoone l tipu voltimisel tema vastastipu peale. Lemma 1 kohaselt voltejoon l lõikab külgi AB ja CD , kui kehtib võrratus (4) ning külgi BC ja AD juhul, kui kehtib (5). Kuna $a = b$, siis voltejoon l lõikab ruudu igat külge.

Piisavus. Olgu meil voltejoon l , mis lõikab ruudu igat külge. Selleks, et voltejoon l lõikaks ruudu igat külge, peavad kehtima võrratused (4) ja (5). Lihtne on näha, et võrratuste kehtimiseks peab $a = b$ ehk paber olema ruudukujuline. \square

4 Pythagorase teoreem

Pythagorase teoreemi peetakse üheks vanimaks, kasulikeimaks ja tuntuimaks matemaatika teoreemiks, millel on arvukalt erinevaid tõestusi. Juba Eukleides esitas oma teoses „Elemendid“ sellele teoreemile mitu tõestust. Tuntuim kogumik Pythagorase teoreemi tõestuseid pärineb Elisha S. Loomise [9] sulest, kes klassifitseeris ja analüüsis 344 erinevat tõestust. Internetist on kättesaadavam Alexander Bogomolny veebilehel [10] esitatud 122 tõestust.

Tegemist on teoreemiga, mille tõestamine on aktuaalne ka tänapäeval ning tihti peale ilmubki uusi lähenemisi ning tõestusi. Ne’Kiya Jackson ja Calcea Johnson on 2024. aasta artiklis [11] toonud teoreemile välja viis uut tõestust. Lisaks on selles artiklis veel mainitud, et nende lähenemine võimaldab leida veel vähemalt viis lisatõestust.

Voltimise teel on samuti võimalik Pythagorase teoreemi tõestada ning seda on tehtud erinevatel viisidel mitmeid kordi. Enamus juhtudel on tõestused esitatud mitmekordset voltimist kasutades. Üks selline tõestus on toodud *mathcounts.org* veebilehel [12]. Meid aga huvitab käesolevas töös Pythagorase teoreemi tõestamine kasutades 1-voldi origamit. Teoreemi tõestuse läbi 1-voldi origami on esitanud ka Woodhouse oma doktoritöös [4]. Kuid selle tõestuse kitsaskohaks on asjaolu, et kõik tõestuses kasutatavad jooned ei ole saanud otsese voltimise teel, vaid on kasutatud (volte)joonte vahele jäävate kujundite ümberpaigutamist.

Käesolevas töös esitame Pythagorase teoreemile alternatiivse tõestuse, mida meile teadaolevalt ei ole 1-voldi origamiga varem tehtud. Esmalt tuletame meelde mõned tõestuses kasutatavad kolmnurga geomeetrilised omadused.

Definitsioon 5 ([13]). Öeldakse, et kolmnurgad on **sarnased**, kui ühe kolmnurga külgede pikkustest a_1, b_1, c_1 saab teise kolmnurga külgede pikkused a_2, b_2, c_2 , kui korrutada neid sama reaalarvuga. See tähendab, et kehtivad võrdused

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}. \quad (6)$$

Teisisõnu tähendab see, et nurgad ja külgedevahelised suhted on suurusteks, mis kolmnurga suurendamisel ja vähendamisel ei muutu.

Definitsioon 6 ([14]). Öeldakse, et kaks nurka on teineteise **täiendusnurgad**, kui nende nurkade summa on 90 kraadi.

4.1 Põhitulemus tõestus

Meie Pythagorase teoreemi tõestus tugineb Arsalan Warese tõestusele [2], milles kasutatud mitmekordse voltimise teel saadud jooned esitame ühekordse voltimise kaudu, kusjuures kasutades vaid aksioome 1 ja 2. Lisaks põhjendame ära, et artiklis [2] konstrueeritud nurk CXZ on alati täisnurk ning konstrueeritud punkt R asub sirgel, mis läbib punkte C ja Z .

Sõnastame ja tõestame töö põhitulemuse.

Teoreem 1 (Pythagorase teoreem). *Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusi ruut on võrdne kaatetite ruutude summaga.*

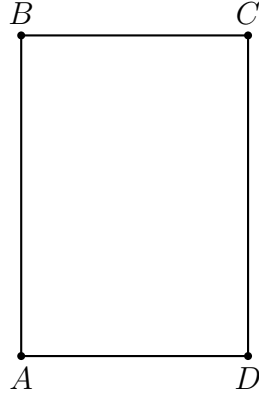
Tõestus. Olgu meil ristkülikuline paber, mille pikemad servad on paralleelsed y -teljega (vertikaalsed voltija suhtes). Kasutades lemmat 1 on lihtne leida pikemad servad ning võtta paber soovitud kujul ette.

Olgu paberi tippudeks $A(0, 0)$, $B(0, b)$, $C(2a, b)$ ja $D(2a, 0)$ (vt. joonis 11). Teiste sõnadega tähendab see seda, et $2a \leq b$. Esimese sammuna voldime punkti B punkti C peale. Aksioomi 2 kohaselt on murdejoone l_1 võrrandiks $x = a$. Sellise voltimise teel tekivad uued punktid $X(a, b)$ ja $Y(a, 0)$.

Järgmiseks kasutame aksioomi 2 selleks, et voltida punkt A punkti X peale. Sellise voltimise teel saame voltejoone l_2 , mille võrrand on võrduse (2) põhjal

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{a^2 + b^2}{2b}. \quad (7)$$

Kuna eeldasime, et $2a \leq b$, siis ka $a \leq b$ ning lemma 1 kohaselt löikab saadud



Joonis 11. Paber tippudega A, B, C ja D

voltejoon külge AB ja sirget l_1 . Tähistame punktiga $Q(x_q, y_q)$ külje AB ja sirge l_2 lõikepunkti. Teame, et $x_q = 0$, seega $y_q = \frac{a^2 + b^2}{2b}$. Olgu sirgete l_1 ja l_2 lõikepunktiks $R(x_r, y_r)$. Teame, et $x_r = a$, millest saame tuletada, et

$$y_r = -\frac{a^2}{b} + \frac{a^2 + b^2}{2b} = \frac{b^2 - a^2}{2b}.$$

Lisaks tekib meil ka kolmas punkt $P(x_p, y_p)$ murdejoone l_2 lõikumisel paberi serva-
ga AD või DC . Leiame, millisel juhul satuks punkt P küljele AD . Selleks fikseerime
sirge l_2 võrrandis (7) koordinaadi $y_p = 0$ ning saame, et $x_p = \frac{a^2 + b^2}{2a}$. Selleks, et
saadud punkt asuks küljel AD , peab kehtima $\frac{a^2 + b^2}{2a} \leq 2a$ ehk

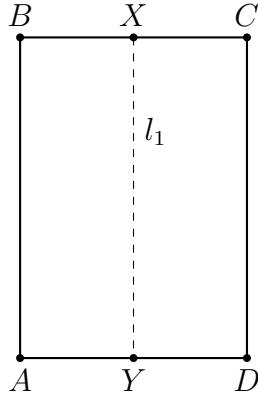
$$b^2 \leq 3a^2, \tag{8}$$

kuid see on võimatu eelduse $2a \leq b$ tõttu. Seega punkt P saab sattuda vaid küljele
 CD . Leiame nüüd punkti P koordinaadid. Et $x_p = 2a$, siis

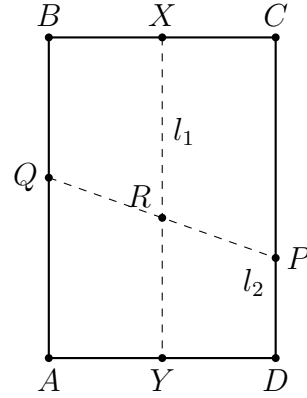
$$y_p = -\frac{2a^2}{b} + \frac{a^2 + b^2}{2b} = \frac{b^2 - 3a^2}{2b}.$$

Joone l_2 voltimisega konstrueerisime kolm uut punkti: $Q\left(0, \frac{a^2 + b^2}{2b}\right)$, $R\left(a, \frac{b^2 - a^2}{2b}\right)$
ja $P\left(2a, \frac{b^2 - 3a^2}{2b}\right)$.

Voltejoonte l_1 ja l_2 voltimist iseloomustavad vastavalt joonised 12 ja 13.



Joonis 12. Voltejoone l_1 konstrueerimine



Joonis 13. Voltejoone l_2 konstrueerimine

Järgmise sammuna kasutame aksioomi 1 ning voldime joone l_3 , mis läbib punkte A ja R . Võrdusest (1) saame sirge l_3 võrrandiks $y = \frac{b^2 - a^2}{2ba}x$. Olgu Z sirge l_3 ja külje CD lõikepunkt. Leiame punkti Z koordinaadid. Et $x_z = 2a$, siis

$$y_z = \frac{b^2 - a^2}{2ba}2a = \frac{b^2 - a^2}{b}.$$

Näeme, et punkt Z ei saa sattuda küljele BC ega küljele AD . Selleks, et punkt Z satuks küljele BC , peaks kehtima $\frac{b^2 - a^2}{b} \geq b$, mis ilmselgelt ei kehti. Punkti Z sattumiseks küljele AD peaks kehtima $\frac{b^2 - a^2}{b} \leq 0$, mis eelduse $2a \leq b$ tõttu samuti ei kehti.

Edasi kasutame aksioomi 1 selleks, et tekitada voltejoon l_4 punktide Y ja C vahele. Sirge l_4 võrrandiks tulenevalt võrdusest (1) on

$$y = \frac{b}{a}x - b.$$

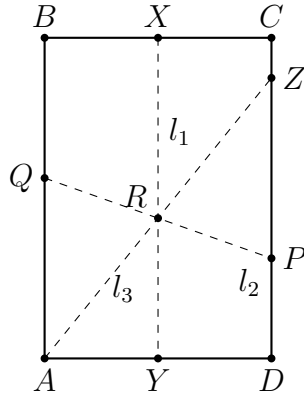
Volditud sirge l_4 lõikab sirgeid l_2 ning l_3 . Antud juhul huvitab meid vaid sirgete l_4 ja l_3 lõikumispunkt $W(x_w, y_w)$. Leiame punkti W koordinaadid. Sirgete l_3 ja l_4 võrranditest saame

$$\frac{b^2 - a^2}{2ab}x_w = \frac{b}{a}x_w - b$$

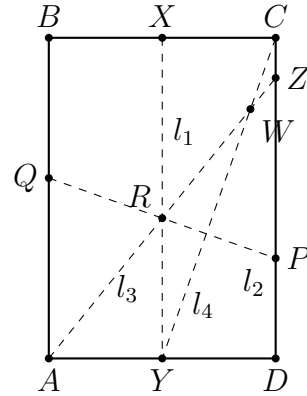
ehk $x_w = \frac{2ab^2}{a^2 + b^2}$. Asendades saadud punkti x -koordinaadi sirge l_3 võrrandise, saame otsitava punkti y -koordinaadiks

$$y_w = \frac{b^2 - a^2}{2ab} \frac{2ab^2}{a^2 + b^2} = \frac{b(b^2 - a^2)}{a^2 + b^2}.$$

Eelmist kahte voltimist iseloomustavad joonised on vastavalt 14 ja 15.



Joonis 14. Voltejoone l_3 konstrueerimine



Joonis 15. Voltejoone l_4 konstrueerimine

Järgmiseks sammuks kasutame aksioomi 2 ning voldime punkti C punkti W peale. Sellise voltimise tulemusel saame voltejoone l_5 ning kasutades võrdust (2) saame voltejoont iseloomustavaks võrrandiks

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{a^2 + b^2}{b}. \quad (9)$$

Joone l_5 voltimisel tekib kolm uut punkti, kuid antud hetkel huvitavad meid ainult punktid, mis tekkisid paberi servadele. Tähistame punktiga F sirge l_5 ja serva CD lõikumispunkti. Kuna $x_f = 2a$, saame sirge l_5 võrrandist, et

$$y_f = -\frac{2a^2}{b} + \frac{a^2 + b^2}{b} = \frac{b^2 - a^2}{b}.$$

Paneme tähele, et punkt F langeb kokku varasemalt konstrueeritud punktiga Z . Olgu E sirge l_5 ja serva BC lõikumispunkt. Kuna $y_e = b$, siis saame leida koordi-

naadi x_e asendades koordinaadi y_e sirge l_5 võrrandisse:

$$b = -\frac{a}{b}x_e + \frac{a^2 + b^2}{b}.$$

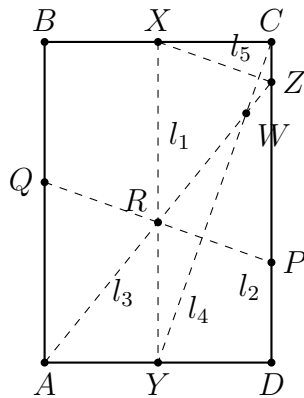
Saame, et $x_e = a$. Paneme taaskord tähele, et selliste koordinaatidega punkt on meil juba varasemalt olemas ning punkt E ja punkt X on samad.

Eelviimase sammuna kasutame taaskord aksioomi 2 ning voldime nüüd punkti B punkti W peale. Sellise voltimise teel tekib meil sirge l_6 . Kasutades võrdust (2) saame voltejoone l_6 võrrandiks

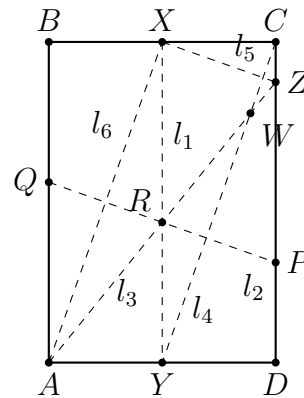
$$y = \frac{b}{a}x.$$

Lihtne on näha, et saadud voltejoon l_6 läbib punkti A ning läbib ka punkti X , kuna mõlema punkti koordinaadid rahuldavad sirge l_6 võrrandit. Lisaks tekkis meil ka sirgete l_6 ja l_2 lõikepunkt, aga selle punkti koordinaadid ei ole meie tõestuse seisukohalt olulised.

Voltejoonte l_5 ja l_6 voltimist iseloomustavad vastavalt joonised 16 ja 17.

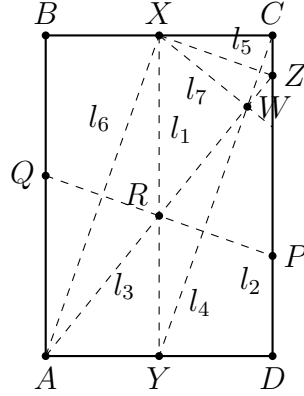


Joonis 16. Voltejoone l_5 konstrueerimine



Joonis 17. Voltejoone l_6 konstrueerimine

Viimase sammuna kasutame aksioomi 1 ning tekitame voltejoone l_7 , mis läbib



Joonis 18. Voltejoone l_7 konstrueerimine

punkte X ja W . Tulenevalt võrdusest (1) on voltejoone l_7 võrrandiks

$$y = -\frac{2ba}{b^2 - a^2}x + \frac{2ba^2}{b^2 - a^2} + b. \quad (10)$$

Antud juhul huvitab meid vaid sirge l_7 võrrand, seega viimase voltimise teel saadavad punktid meile huvi ei paku (vt. joonis 18).

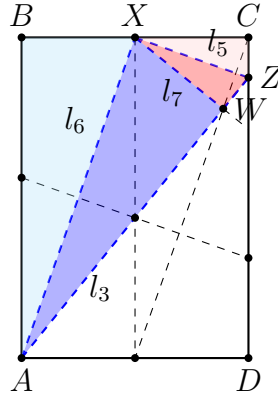
Teame, et külje BC pikkuseks on $2a$, seega lõikude BX ja XC pikkusteks on a . Lisaks teame, et külje AB pikkuseks on b . Olgu lõigu AX pikkuseks c .

Meie eesmärk on näidata, et täisnurkse kolmnurga ABX korral kehtib võrdus $a^2 + b^2 = c^2$. Kuna

$$\frac{b}{a} \cdot \left(-\frac{a}{b}\right) = -1,$$

siis on sirged l_6 ja l_5 risti, mistõttu on kolmnurk AXZ on täisnurkne. Kolmnurgad ABX ja XCZ on sarnased, sest mõlemad on täisnurksed ning nurgad $\angle AXB$ ja $\angle CXZ$ on teineteise täiendusnurgad. Kasutades sarnaste kolmnurkade küljepikkuste suhete omadust, saame samasuse (6) põhjal $\frac{|CZ|}{a} = \frac{a}{b}$ ehk $|CZ| = \frac{a^2}{b}$. Analoogiliselt $|XZ| = \frac{ac}{b}$. Lisaks on meil veel üks täisnurkne kolmnurk XWZ , sest sirged l_7 ja l_3 on risti:

$$-\frac{2ba}{b^2 - a^2} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2ba} = -1.$$



Joonis 19. Pythagorase teoreemi visualiseerivad kolmnurgad

Tuletame meelde, et sirge l_5 saime punkti C voltimisel punktile W ning saadud sirge läbib punkte X ja Z . Teiste sõnadega tähendab see, et ka lõik XW on pikku-sega a ehk kolmnurgad XZW ja XCZ on kongruentsed. Sirge l_6 saime punkti B voltimisel punktile W ning saadud sirge läbib punkte A ja X . Selle põhjal saame samuti öelda, et kolmnurgad ABX ja AXW on kongruentsed. See tähendab, et kolmnurga AXZ pindala on võrdne kolmnurkade ABX ja XCZ pindalade sum-maga (vt joonis 19). Selle asjaolu saame leitud küljepikkuseid kasutades esitada võrdusena

$$\frac{1}{2} \left(\frac{ac}{b} c \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{b} a \right) + \frac{1}{2} (ab). \quad (11)$$

Korrutades võrduse (11) mõlemad pooled läbi suurega $\frac{2b}{a}$, saamegi, et

$$a^2 + b^2 = c^2. \quad \square$$

4.2 Järeldused ja tähelepanekud

Teoreemi 1 tõestuses on oluline, et voltimiste teel saadud kolmnurga XCZ nurk $\angle XCZ$ oleks täisnurkne. Edaspidi vaatame, milliste a ja b valiku korral meil selline nurk tekib. Teisisõnu me ei eelda, et kehtib $2a \leq b$ ehk me ei vali ristküliku pikemat

külge voltija suhtes vertikaalseks. Selles tulenevalt saame teha mitmeid järeldusi teoreemi 1 tõestusest.

Järgnevas kasutatud punktide ja sirgete all mõistame teoreemi 1 tõestuses konstrueeritud punkte ja sirgeid.

Järeldus 2. *Punkt P asub küljel AD , kui kehtib võrratus $b^2 \leq 3a^2$.*

Tõestus. Väide järeldub vahetult tingimusest (8). Punkti P koordinaatideks on sel juhul $P\left(\frac{a^2 + b^2}{2a}, 0\right)$. □

Kui $a = b$, siis esitame sirge l_7 võrduse (2) põhjal hoopis kujul $y(b^2 - a^2) = -2bax + ba^2 + b^3$ ehk $x = a$, muul juhul esitame sarnaselt teoreemis 1 esitatud kujul (10).

Järeldus 3. *Kui $a \neq b$ ja sirged l_2 ja l_7 lõikuvad, siis asub nende lõikepunkt küljel AD .*

Tõestus. Eeldame, et sirged l_2 ja l_7 lõikuvad punktis S . Avaldame selle punkti x -koordinaadi:

$$-\frac{2ba}{b^2 - a^2}x_s + \frac{2ba^2}{b^2 - a^2} + b = -\frac{a}{b}x_s + \frac{a^2 + b^2}{2b}$$

ehk $x_s = \frac{a^2 + b^2}{2a}$. Asendades sirge l_2 võrrandisse (7) saadud koordinaadi x_s saame, et $y_s = 0$.

Selleks, et punkt S asuks paberil, peab kehtima

$$\frac{a^2 + b^2}{2a} \leq 2a$$

ehk $b^2 \leq 3a^2$. Muul juhul antud punkt voltimiste teel ei teki. □

Järeldustest 2 ja 3 saame vahetult, et $b^2 \leq 3a^2$ korral sirged l_2 ja l_7 lõikuvad punktis P .

Lemma 2. Kui $a \neq b$ ja sirged l_2 ja l_7 lõikuvad, siis on punkt W sirge l_2 ning punkte X ja P läbiva sirge lõikumispunkt.

Tõestus. Eeldame, et sirged l_2 ja l_7 lõikuvad. Siis $b^2 \leq 3a^2$ ja eelneva põhjal teame, et selleks lõikepunktiks on P . Punkti P koordinaatideks järelduse 2 põhjal on $P\left(\frac{a^2 + b^2}{2a}, 0\right)$. Kasutades aksioomi 1, saame punkte X ja P läbiva sirge l_7 võrrandi, milleks võrduse (1) põhjal on

$$y = -\frac{2ba}{b^2 - a^2}x + \frac{2ba^2}{b^2 - a^2} + b.$$

Leiame sirgete l_4 ja l_7 lõikumispunkti W' . Esmalt leiame koordinaadi $x_{w'}$:

$$-\frac{2ba}{b^2 - a^2}x_{w'} + \frac{2ba^2}{b^2 - a^2} + b = \frac{b}{a}x_{w'} - b$$

ehk $x_{w'} = \frac{2ab^2}{a^2 + b^2}$, mistõttu $y_{w'} = \frac{b(b^2 - a^2)}{a^2 + b^2}$. On ilmne, et W' on sama teoreemi 1 tõestuses leitud punktiga W . □

Teoreemi 1 tõestusest tuleb välja, et punkti Z on võimalik leida ka punkti C voltimisel punktile W . Võttes arvesse asjaolu, et sirge l_5 läbib punkti X ning lõigud XC ja XW on sama pikkusega, siis punkti C voltimine punktile W on sama protseduur, mis lõigu XC voltimine sirgele l_7 . Kasutades aksioomi 3 saame voltida serva XC sirgele l_7 . Asendades võrdusesse (3) serva XC rahuldava sirge võrrandi $y = b$ ning sirge l_7 võrrandi (10) saame tulemuseks

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{a^2 + b^2}{b}.$$

Lihtne on näha, et tegmist on võrrandiga (9).

Tegemist on olulise tähelepanekuga, kuna alati ei pruugi meil olla võimalik punkti W konstrueerida.

Järeldus 4. Järgmised väited on samaväärsed:

1. Ristküliku $ABCD$ üks külge on teisest 2 korda pikem ehk $a = b$.
2. Punktid P , Y , R ja W langevad kokku.
3. Punkt Z on sama punktiga D .

Tõestus. $1 \Rightarrow 2$. Kuna $a = b$, siis järelduse 1 põhjal voltejoon l_2 lõikab külge AY ja murdejoont l_1 . Seega punkt P langeb kokku punktiga Y . Tuletades meelde, et punkt R on sirgete l_1 ja l_2 lõikepunkt, siis on ilmne, et punkt R on sama punktidega Y ja P . Kuna punkt W oli sirgete l_3 ja l_4 lõikepunkt ja antud juhul langeb l_3 kokku küljega AD , siis on lihtne näha, et punkt W langeb kokku punktidega P , Y ja R .

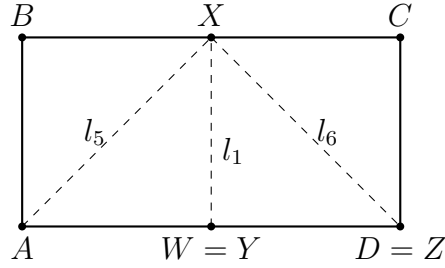
$2 \Rightarrow 3$. Langegu punktid P , Y , R , W kokku. Neid punkte läbiva sirge võrrand l_3 on sama külge AD kirjeldava sirge võrrandiga, sest l_3 saadi punkte A ja R läbiva voltejoonena ja antud juhul $R = Y$. Tuletame meelde, et punkt Z on saadud sirge l_3 ja külje CD lõikumisel. Sellest saame järeldada, et punkt Z on sama punktiga D .

$3 \Rightarrow 1$. Olgu punkt Z sama punktiga D . See tähendab, et kehtib $y_z = y_d$ ehk $\frac{b^2 - a^2}{b} = 0$. On ilmne, et võrduse kehtimiseks peab olema täidetud tingimus $a = b$.

□

Järeldus 5. Kui paberi servapikkuste suhe on $1 : 2$, on Pythagorase teoreem võrdhaarse kolmnurga jaoks tõestatav kolme voltimisega.

Tõestus. Olgu meil ristkülik tippudega $A(0, 0)$, $B(0, b)$, $C(2a, b)$ ja $D(2a, 0)$ ning kehtigu võrdus $a = b$. Tekitame voltejoone l_1 sarnaselt teoreemi 1 tõestusele. Tulenevalt järeldusest 4 on punkt Z sama punktiga D ning punkt W langeb kokku punktiga Y . Voltides punkti C punktile W , tekitame voltejoone, mille tähistus teoreemis 1 on l_5 . Voltides punkti B punktile W , tekitame voltejoone, mille tähistus teoreemis 1 on l_6 . Kuna teoreemis 1 sirge l_7 oli punkte X ja W läbiv voltejoon, siis l_7 langeb kokku sirgega l_1 (vt. joonis 20).



Joonis 20. Voltejooned juhul, kui $a = b$

Kui lõigu AX pikkuseks on c , siis ilmselt on ka lõigu XZ pikkuseks c . Sarnaselt teoreemile 1 on sirged l_5 ja l_6 risti. Lihtne on näha, et kehtib $c^2 = a^2 + b^2$. \square

Järeldus 6. *Kui kehtib*

$$b < a, \tag{12}$$

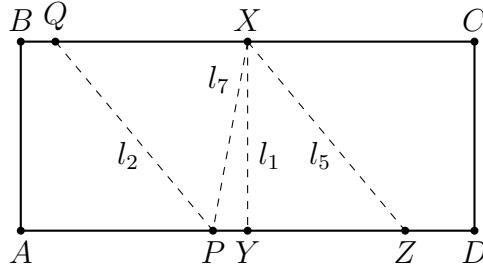
siis punkt Z asub küljel AD ning erineb punktist D .

Tõestus. Olgu meil ristkülik tippudega $A(0, 0)$, $B(0, b)$, $C(2a, b)$ ja $D(2a, 0)$ ning kehtigu võrratus (12). Voldime sarnaselt teoreemi 1 tõestusele jooned l_1 ja l_2 , mida kirjeldavad võrrandid on vastavalt $x = a$ ja $y = -\frac{a}{b}x + \frac{a^2 + b^2}{2b}$.

Kuna $b < a$, siis lemma 1 kohaselt lõikab sirge l_2 lõike BX ja AY , seega punkti R meil enam ei teki. Sirgete l_1 ja l_2 konstrueerimisel tekkisid meil punktid $X(a, b)$, $Y(a, 0)$, $Q\left(\frac{a^2 - b^2}{2a}, b\right)$ ja $P\left(2a, \frac{b^2 - 3a^2}{2b}\right)$. Punkte P ja X läbiv sirge on sama teoreemi 1 tõestuses saadud sirgega l_7 , sest järelduste 2 ja 3 põhjal lõikuvad sirged l_2 ja l_7 punktis P .

Kasutades lemmat 2 ning sellele järgnenud tähelepanekut, on punkt Z võimalik konstrueerida lõigu XC voltimisel punkte P ja X läbivale sirgele l_7 . Sellise voltimise tulemusel saame sirge, mille teoreemi 1 tõestuses tähistasime sirgega l_5 . Kuna $b < a$, siis saadud sirge lõikab külje CD asemel hoopis külge AD ehk tekib punkt $Z\left(0, \frac{a^2 + b^2}{b}\right)$ (vt. joonis 21).

\square



Joonis 21. Punkt Z asub serval AD

Lemma 3. *Olgu paber servapikkustega $2a$ ja b . Kui a ja b ei rahulda võrratust (12), siis on Pythagorase teoreem tõestatav teoreemi 1 tõestuses tehtud 1-voltidega, ilma paberit teoreemi 1 tõestuses toodud viisil ette võtmata.*

Tõestus. Sarnaselt teoreemi 1 tõestusele tekitame voltejooned l_1 ja l_2 . Murdejoone l_1 võrrandiks on $x = a$ ning selle murdejoone konstrueerimisel tekkisid punktid $X(a, b)$ ja $Y(a, 0)$. Voltejoone l_2 võrrandiks on $y = -\frac{a}{b}x + \frac{a^2 + b^2}{2b}$. Kui joon l_2 lõikab külge AD , siis tähistame nende lõikepunkti P' , kui l_2 lõikab külge DC , tähistame nende lõikepunkti P'' . Punktiga Q' tähistame sirge l_2 ja külge AB lõikumispunkti ning punktiga Q'' voltejoone l_2 ja külge BC lõikepunkti. Kui need punktid tekivad, siis on nendeks

$$\begin{aligned} P' & \left(\frac{a^2 + b^2}{2a}, 0 \right), & Q' & \left(0, \frac{a^2 + b^2}{2b} \right), \\ P'' & \left(2a, \frac{b^2 - 3a^2}{2b} \right), & Q'' & \left(\frac{a^2 - b^2}{2a}, b \right). \end{aligned}$$

Punkti Q' saame, kui $a^2 \leq b^2$, ning punkti P' , kui $b^2 \leq 3a^2$. Seega vaatleme kolme alamjuhtu:

1. $a^2 \leq b^2 \leq 3a^2$;
2. $b^2 < a^2 < 3a^2$;
3. $a^2 < 3a^2 \leq b^2$.

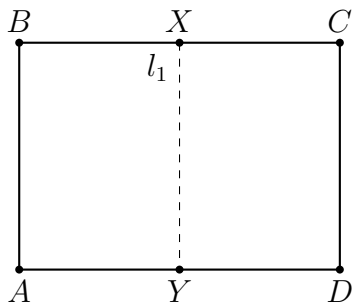
Kuna alamjuht, kus $a = b$ on meil vaadatud järelduses 5, siis piisab vaadata vaid

alamjuhtusid:

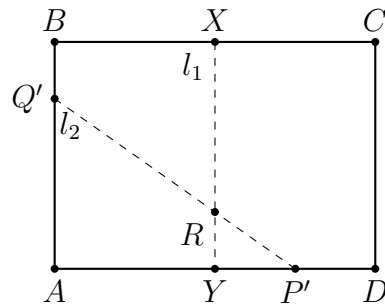
1. $a^2 < b^2 \leq 3a^2$;
2. $b^2 < a^2 < 3a^2$;
3. $a^2 < 3a^2 \leq b^2$.

Eelduse kohaselt a ja b ei rahulda võrratust (12), seega alamjuhtu 2 meil ei teki. Lisaks paneme tähele, et alamjuht 3 on käsitletud teoreemi 1 tõestuses, seega piisab vaid vaadata alamjuhtu 1.

Eeldame, et $a^2 < b^2 \leq 3a^2$ ehk voltejoone l_2 konstrueerimisel tekkisid meil punktid $Q' \left(0, \frac{a^2 + b^2}{2b}\right)$ ja $P' \left(\frac{a^2 + b^2}{2a}, 0\right)$. Lisaks tekib ka sirgete l_1 ja l_2 lõikepunkt $R \left(a, \frac{b^2 - a^2}{2b}\right)$. Voltejooni l_1 ja l_2 iseloomustavad vastavalt joonised 22 ja 23.



Joonis 22. Voltejoone l_1 konstrueerimine



Joonis 23. Voltejoone l_2 konstrueerimine

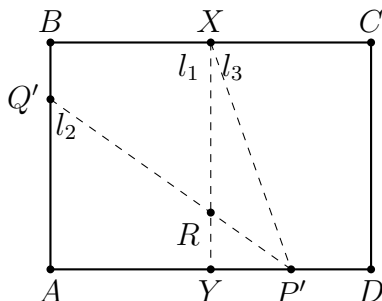
Järgmise sammuna kasutame aksioomi 1 ning tekitame voltejoone l_3 , mis läbib punkte X ja P' . Saadud sirgeks võrduse (1) põhjal on

$$y = -\frac{2ba}{b^2 - a^2}x + \frac{2ba^2}{b^2 - a^2} + b.$$

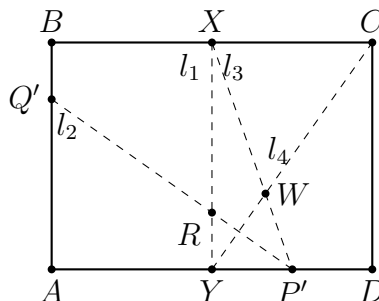
Kasutades aksioomi 1 saame voltida punkte C ja Y läbiva voltejoone l_4 , mille võrrandiks võrduse (1) põhjal on

$$y = \frac{b}{a}x - b.$$

Sirge l_4 lõikab sirgeid l_2 ja l_3 . Meile pakub huvi vaid sirgete l_4 ja l_3 lõikepunkt, milleks on $W \left(\frac{2ab^2}{b^2 + a^2}, \frac{b(b^2 - a^2)}{b^2 + a^2} \right)$. Viimast kahte voltimist iseloomustavad vastavalt joonised 24 ja 25.



Joonis 24. Voltejoone l_3 konstrueerimine



Joonis 25. Voltejoone l_4 konstrueerimine

Punkti W tekkimiseks peab kehtima võrratus $\frac{b(b^2 - a^2)}{b^2 + a^2} \geq 0$ ehk

$$b^2 \geq a^2. \tag{13}$$

Võrratus (13) on meil rahuldatud eelduse kohaselt.

Järgnevalt kasutame aksioomi 2 selleks, et voltida punkt A punkti W peale. Tulevalt võrdusest (2) on saadud sirge l_5 võrrandiks

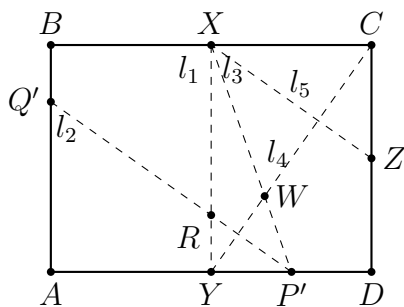
$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{a^2 + b^2}{b}.$$

Leiame sirge l_5 lõikepunktid paberi servadega. Sarnaselt teoreemile 1 on serva BC ja sirge l_5 lõikepunktiks $X(a, b)$ ning serva CD ja sirge l_5 lõikepunktis $Z \left(2a, \frac{b^2 - a^2}{b} \right)$. Lisaks tekib ka sirgete l_5 ja l_4 lõikepunkt, kuid antud tõestuses see meile huvi ei paku. Kasutades aksioomi 2, voldime punkti B punkti W peale. Sellise voltimise teel saadav sirge l_6 võrrandi saame tuletada võrdusest (2) ning selleks on

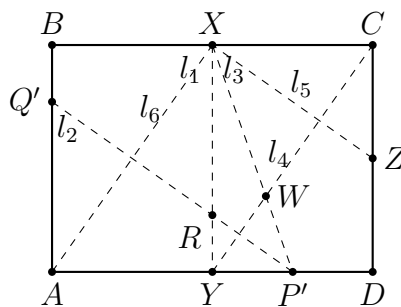
$$y = \frac{b}{a}x.$$

Sarnaselt teoreemile 1 läbib sirge l_6 punkte A ja X . Samuti lõikab saadud sirge l_6 sirget l_2 , kuid selle punkti koordinaadid meile taaskord huvi ei paku. Viimast

kahte voltimist iseloomustavad joonised 26 ja 27.



Joonis 26. Voltejoone l_5 konstrueerimine

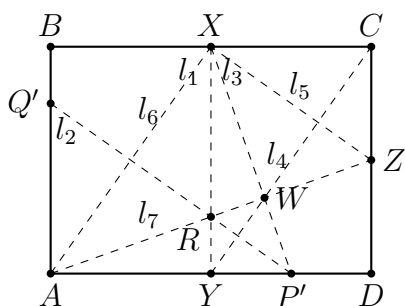


Joonis 27. Voltejoone l_6 konstrueerimine

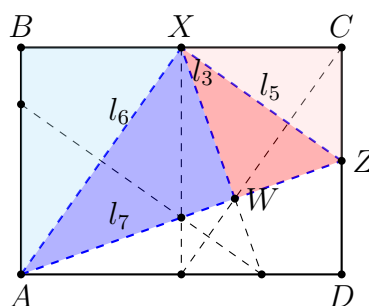
Viimase sammuna kasutame aksioomi 1 selleks, et tekitada voltejoon l_7 punktide A ja Z vahel. Sirge l_7 võrrandiks võrduse (1) põhjal on

$$y = \frac{b^2 - a^2}{2ab}x.$$

Paneme tähele, et saadud sirge läbib punkte R ja W . Viimast voltimist iseloomustavaks jooniseks on joonis 28.



Joonis 28. Voltejoone l_7 konstrueerimine



Joonis 29. Pythagorase teoreemi visualiseerivad kolmnurgad

Kuna kõik edasises tõestuses kasutatavad sirgete võrrandid on samad teoreemi 1 tõestuses saadud sirgetega, siis võrduse $a^2 + b^2 = c^2$ tõestus on analoogiline teoreemi tõestusele. □

Käesoleva töö raames oleme näidanud, et kasutades suvalist paberit, on võimalik 1-voldi origami abil näidata Pythagorase teoreemi kehtimist. Kui paber on suvaline,

siis on võimalik kehtimist näidata, kasutades teoreemis 1 toodud voltimisi, kuid oluline on tähelepanu pöörata paberi asendile.

Tulenevalt lemmast 3 ei ole oluline paberi orientatsioon, kui paber servapikkustega $2a$ ja b ei rahulda tingimust (12), ehk kehtib $a \leq b$. Kusjuures viimast tingimust rahuldavad kõik A-seeria formaadis paberid (vt joonis 29).

Arsalan Wares väitis oma artiklis „Looking for Pythagoras between the folds“ [2], et suvalise ristkülikulise paberiga on tõestamine teostatav. Selle väite peame ümber lükkama, kuna suvalise paberi puhul on oluline orientatsioon. Artiklis [2] teostatud mitmekordsed voltimised on saavutatavad lemma 3 tõestuses toodud 1-voltidega, kuid see eeldab teatavat küljepikkuste suhet. Lisaks tõestasime väite, et nurk AXZ (artiklis [2] nurk CXZ) on täisnurkne ning punkt W (artiklis [2] punkt R) asub sirgel, mis läbib punkte A ja Z .

Kasutatud kirjandus

- [1] M. Friedman, *A History of Folding in Mathematics: Mathematizing the Margins* (Science Networks. Historical Studies). Springer International Publishing, 2018. DOI: 10.1007/978-3-319-72487-4.
- [2] A. Wares, „Looking for Pythagoras between the folds,“ *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, köide 48, nr 6, lk. 938–941, 2017. DOI: 10.1080/0020739X.2017.1286526.
- [3] M. Friedman ja C. Rittberg, „The Material Reasoning of Folding Paper,“ *Synthese*, köide 198, 6333–6367, 2021. DOI: 10.1007/s11229-019-02131-x.
- [4] A. Woodhouse, „Origami as a Tool for Mathematical Investigation and Error Modelling in Origami,“ doktoritöö, University of Essex, Department of Mathematical Sciences, 2019.
- [5] H. Y. Lee, „Origami-constructible numbers,“ magistratöö, University of Georgia, 2017.
- [6] A. Kasem, F. Ghourabi ja T. Ida, „Origami axioms and circle extension,“ 2011, lk. 1106–1111. DOI: 10.1145/1982185.1982429.
- [7] R. Alperin ja R. Lang, „One, Two, and Multi-Fold Origami Axioms,“ *Origami4: 4th International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education, 4OSME 2006*, lk. 371–393, 2009.
- [8] M. Ben-Ari, „The Axioms of Origami,“ teoses *Mathematical Surprises*. 2022, lk. 113–130. DOI: 10.1007/978-3-031-13566-8_10.
- [9] E. S. Loomis, *The Pythagorean Proposition: Its Demonstrations Analyzed and Classified, and Bibliography of Sources for Data of the Four Kinds of Proofs*. National Council of Teachers of Mathematics, 1968, reprint.
- [10] A. Bogomolny, *Pythagorean Theorem*, <https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml>, Vaadatud: 14. mai 2025.

- [11] N. Jackson ja C. Johnson, „Five or Ten New Proofs of the Pythagorean Theorem,“ *The American Mathematical Monthly*, köide 131, nr 9, lk. 739–752, 2024. DOI: 10.1080/00029890.2024.2370240.
- [12] MATHCOUNTS Foundation, *Proofigami*, Vaadatud: 5. märts 2025, 2025. aadress: https://www.mathcounts.org/sites/default/files/Proofigami_0.pdf.
- [13] Tartu Ülikool, Füüsika Instituut, *Füüsika e-õpik*, Vaadatud: 5. märts 2025, 2025. aadress: <https://opik.fyysika.ee/index.php/book/section/1922#/section/1922>.
- [14] Cuemath, *Complementary Angles—Definition, Meaning, Examples*, <https://www.cuemath.com/geometry/complementary-angles/>, Vaadatud: 11. mai 2025.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Karl-Robert Mõttus,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose „Pythagorase teoreemi tõestus paberi voltimise kaudu“, mille juhendajad on Kati Ain ja Tiina Kraav, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Karl-Robert Mõttus

29.05.2025