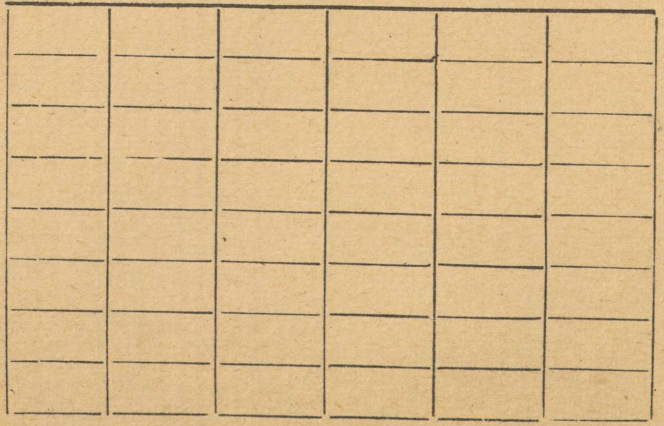
TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

R. LIAS

KVANTELEKTRODÜNAAMIKA

Tartu 1970

Tagastage raamat õigeaegselt!
Ьозвратите книгу вовремя!



A-30608

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

R. LIAS

KVANTELEKTRODÜNAAMIKA

Tartu 1970

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu

Р.И. Лиас
КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА
На эстонском языке
Тартуский государственный университет
ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, I8

Vastutav toimetaja J. Lembra
Korrektor V. Lang

TRÜ rotaprint 1970. Paljundamisele antud 18. V 1970.
Trükipoognaid 14,25. Tingtrükipoognaid 13,24. Arvestuspoognaid 9,9. Trükiarv 400. Paber 30 x 42.1/4.
MB 04125. Tell. nr. 344.

Hind 50 kop.

Eessõna.

Kvantelektrodünaamika tähtsus teoreetilises füüsikas on kahesugune. Esiteks, kvantelektrodünaamikas on detailselt välja arendatud matemaatiline aparatuur, mis baseerub kvantmehaanika ja erirelatiivsusteooria põhiprintsiipidel. Selle skeemi abil arvutatud efektid on heas kooskõlas katsega, mis näitab teooria põhialuste õigsust. Selles mõttes on kvantelektrodünaamika muutunud "klassikaliseks" teooriaks. Siin arendatud arvutusmeetodeid on rakendatud mujalgi, eeskätt tahke keha teoorias.

Teiseks, kvantelektrodünaamikas läbiproovitud ideede baasil on tekkinud uued suunad, nagu aksiomaatiline väljateooria, mis püüab tuletada võimalikult üldisi, rangelt tõestatavaid seoseid, ja S-maatriksi teooria kui iseseisev, esialgu poolfenomenoloogiline suund, mida kasutatakse peamiselt tugeva interaktsiooni protsesside uurimisel.

Kuid nimetatud uute suundade tekkimise otseseks põhjuseks on kvantelektrodünaamika enda piiratus: osutub, et elektromagnetiliste protsesside kirjeldamisel laitmatult töötanud skeem on muude interaktsioonide uurimisel kõlbmatu.

Käesolev konspekt ongi püütud üles ehitada lähtudes kvantelektrodünaamika sellisest asendist teoreetilises füüsikas. Seejuures on arvestatud, et konspekti kasutaja ei ole varem kvantväljateooriat õppinud, kuid on omandanud piisavalt teadmisi kvantmehaanikast ja osaliselt ka rühmateooriast.

Selleks et lugejal tekiks teatud intuitiivne kujutlus kvantiseeritud väljast, on üsna põhjalikult peatutud nn. vaba välja teoorial, kus loomulikul teel tuleb sisse osakese kui välja kvandi mõiste koos kiirgumis- ja neeldumisoperaatoritega.

Väljade interaktsiooni käsitletakse peamiselt S-maat-

riksi mõiste abil. On püütud esile tõsta neid S-maatriksi omadusi, millel on tähtsust ka väljaspool kvantelektrodünaamika raame, et lugejal hõlbustada edaspidist tutvumist kaasaegse S-maatriksi teooriaga.

Ruumi nappuse tõttu on välja jäetud konkreetsete protsesside detailsed arvutused, samuti spetsiifiliselt häiritusteooriaga seotud hajuvuste kõrvaldamise küsimused S-maatriksi elementidest.

Esitatav konspekt on määratud eeskätt füüsikaosakonna teoreetilise füüsika eriharu üliõpilastele.

Tähistused ja ühikud.

$u_A(x)$ tähistab suvalise välja potentsiaali (või selle konkreetset komponenti, kui A on fikseeritud).

$\psi(x)$ tähistab elektron-positronvälja potentsiaali (või Lorentzi rühma kindla esituse järgi teisenevat potentsiaali). Spiinorindekseid tähistavad kreeka alfabeedi esimesed tähed $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Tavaliselt jätame spiinorindeksid märkimata.

$A_\mu(x)$ tähistab elektromagnetvälja potentsiaali (selle üksikuid komponente): $\mu = 1,2,3,4$; $A_4 = iA_0$.

Kõik kreeka indeksid omandavad väärtusi 1,2,3,4; väikesed ladina indeksid vektorsuuruse juures omandavad väärtusi 1,2,3. Üle korduvate indeksite on alati summeeritud (kui ei ole lisatud märkust, et summeerimist ei toimu). Mõnel juhul on selguse huvides summa märk välja kirjutatud.

x tähistab 4-ruumi punkti koordinaate: $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (\vec{r}, i x_0)$. Vektori märki $\vec{r}$ kasutame ainult 3-ruumi vektorite korral.

px , kx, ... tähistab 4-vektorite p_μ , x_μ ... skalaarkorrutist:

$px \equiv p_\mu x_\mu \equiv \vec{p}\vec{r} - p_0 x_0 .$ $\qquad p_4 = ip_0 ; \quad x_4 = ix_0 .$

$\psi_{,\mu} \equiv \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu}$ on tuletis koordinaadi x_μ järgi; $\dot{\psi}$ - tuletis ajakoordinaadi $x_0 \equiv t$ järgi.

Diferentsiaalide korrutisi tähistame järgmiselt:

$d^4x = dx_1 dx_2 dx_3 dx_0 ; \quad d^3x \equiv (d\vec{r}) = dx_1 dx_2 dx_3 ; \quad (d\vec{p}) = dp_1 dp_2 dp_3 = d^3p ; \ldots$

δ -funktsioonid: $\delta(\vec{r}) \equiv \delta^3(\vec{r}) = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3) ;$

$\delta^4(x) = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)\delta(x_0) .$

A, B, C, ... operaatorid või maatriksid üldmõttes, ilma konkreetse tähenduseta; $Sp(A) = \sum_\alpha A_{\alpha\alpha}$ on maatriksi jälg.

A^+ ... operaatori A kaasoperaator, kaasmaatriks;

$\tilde{A} = A^T$ ... transponeeritud operaator, maatriks;

A^{-1} ... pöördoperaator, -maatriks;

A^* ... kaaskompleksne maatriks, arv; $A^+ = \tilde{A}^*$

$\hat{}$ - operaatori märk, mida kasutame ainult siis, kui selgus nõuab.

$[A, B]$ või $[A, B]_-$ - kommutaator: $[A, B] = AB - BA$;

$\{A, B\}$ või $[A, B]_+$ - antikommutaator: $\{A, B\} = AB + BA$.

ε_{ikl} ($\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$) täielikult antisümmeetriline 3-ndat (4-ndat) järku ühiktensor.

$f_{[\mu\nu]}$ ($f_{\{\mu\nu\}}$) suurus, mis on antisümmeetriline (sümmeetriline) sulgudesse paigutatud indeksite suhtes (kui seda omadust tahetakse rõhutada).

γ_μ Dirac'i maatriksid: $\gamma_\mu p_\mu \equiv \hat{p} = \sum_{k=1}^{3} \gamma_k p_k + i\gamma_4 p_0$.

Kõikjal on kasutatud ühikuid, kus $\hbar = c = 1$.

($\hbar = \frac{h}{2\pi}$ - Plancki konstant, c -valguskiirus). Nendes ühikutes on sagedamini esinevatel suurustel järgmised dimensioonid (pikkuse- ja ajaühikuks võtame cm):

1) laeng e , impulssmoment $\vec{M}$ - dimensioonita (cm^0);

2) impulss $\vec{p}$, energia E , mass m , laine levikuvektor $\vec{k}$, sagedus ω , potentsiaal $A_\mu(x)$ - cm^{-1} ;

3) väljatugevus $F_{\mu\nu}(x)$ - cm^{-2} ;

4) voolutihedus $\vec{j}(x)$, laengutihedus ρ - cm^{-3} .

Kui tähistame tärnikesega vastavaid suurusi CGSE süsteemis, saame järgmised üleminekuvalemid:

$$m^* = \frac{\hbar}{c} m ; \qquad \vec{M}^* = \hbar \vec{M} ;$$

$$\omega^* = c\,\omega \;; \qquad A^*_\mu = \sqrt{4\pi}\sqrt{\hbar c}\, A_\mu \;;$$

$$E^* = \hbar c \cdot E \;; \qquad e^* = \sqrt{\frac{\hbar c}{4\pi}}\, e \;;$$

$$\vec{p}^{\,*} = \hbar \vec{p} \;; \qquad \vec{j}^{\,*} = \frac{c\sqrt{\hbar c}}{\sqrt{4\pi}}\, \vec{j} \;;$$

$$\vec{k}^{\,*} = \vec{k} \;; \qquad \varrho^* = \sqrt{\frac{\hbar c}{4\pi}} \cdot \varrho \;.$$

Peenstruktuurikonstant $\alpha = \dfrac{e^{*2}}{\hbar c} = \dfrac{e^2}{4\pi} \approx \dfrac{1}{137}$.

I. VABA VÄLJA KVANTTEOORIA.

§ 1. Lagrange'i formalism klassikalises väljateoorias.

Käesolevas paragrahvis näitame, et klassikalist välja võib vaadelda mehaanilise süsteemina lõpmata paljude vabadusastmetega. Võrrandid, mida rahuldavad välja potentsiaalid, on tuletatavad variatsioonprintsiibist kui Euler-Lagrange'i võrrandid. Keskseks mõisteks teooria sellises formuleeringus on Lagrange'i tihedusfunktsioon e. välja lagranžiaan L.

Meenutame klassikalise mehaanika Lagrange'i formalismi. Olgu vaadeldav süsteem N vabadusastmega. Tähistagu q süsteemi üldistatud koordinaatide $q_1, q_2, \ldots, q_N$ kogumit ning $\dot{q}$ üldistatud kiiruste $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N$ kogumit. Süsteemi liikumisvõrrandid on siis tuletatavad variatsioonprintsiibist

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(q, \dot{q})\, dt = 0 , \qquad (1.1)$$

kus $\mathcal{L}(q,\dot{q})$ on süsteemi Lagrange'i funktsioon, t_0 mõnesugune alg- ja t_1 lõpphetk, millele vastavad q fikseeritud väärtused. Kui süsteem on suletud, siis $\mathcal{L}$ ei sõltu vahetult ajast ja koordinaadid q rahuldavad Lagrange'i võrrandeid

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\nu} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\nu} = 0 , \quad (\nu = 1,2,\ldots,N) \qquad (1.2)$$

Lagrange'i funktsioonist $\mathcal{L}$ on arvutatavad kanoonilised impulsid p_ν

$$p_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\nu} \qquad (\nu = 1,2,\ldots,N) \qquad (1.3)$$

ja Hamiltoni funktsioon $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} = \sum_{r=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_r} \dot{q}_r - \mathcal{L} \qquad (1.4)$$

Selleks et rakendada kirjeldatud formalismi väljateoorias, fikseerime eelkõige välja üldistatud koordinaadid. Klassikalisi välju kirjeldatakse tavaliselt ühe- või mitmekomponendilise funktsiooni $u_A(x)$ abil, mida edaspidi nimetame väljapotentsiaaliks. A = 1, 2, ..., n, kui potentsiaal on n-komponendiline (näit. elektromagnetvälja potentsiaal on 4-komponendiline). Oluline erinevus funktsioonide $u_A(x)$ ja üldistatud koordinaatide q(t) vahel on selles, et esimesed sõltuvad nii ruumi- kui ka ajakoordinaatidest, viimased ainult ajast. Välja käsitlemiseks mehaanilise süsteemina peame järelikult potentsiaali komponente erinevates ruumipunktides lugema erinevatele vabadusastmetele vastavateks üldistatud koordinaatideks. Samuti omandavad iseseisvate üldistatud koordinaatide tähenduse potentsiaali kõik tuletised ruumikoordinaatide järgi.

Kui kujutleme ruumi koosnevana lõpmata paljudest lõpmata väikese ruumalaga rakkudest, peame mis tahes p-nda rakuga, mille määrab tema keskpunkti raadiusvektor $\vec{r}_p$, siduma üldistatud koordinaadid $u_A(\vec{r}_p, t)$ ja $u_{A,i}(\vec{r}_p, t)$ $(i = 1,2,3)$.[x] Niisugune käsitlus samastab välja lõpmata paljude vabadusastmetega mehaanilise süsteemiga. Kui kirjutame väljavõrrandid üles iga ruumiraku jaoks eraldi, saame lõpmata paljudest komponentidest koosneva süsteemi, mille võime esitada kujul (1.2). See peab olema tuletatav variatsioonprintsiibist (1.1), kui on teada vastav Lagrange'i funktsioon $\mathcal{L}$. Lokaalses väljateoorias oletatakse, et iga ruumirakuga p võib siduda funktsiooni

---

x Üldistatud kiirustele vastavad $\dot{u}_A(\vec{r}_p, t)$.

$L_p = L(u_A(\vec{r}_p, t), u_{A,i}(\vec{r}_p, t), \dot{u}_A(\vec{r}_p, t), \ldots)\,\Delta p$ (Δp on vastava raku ruumala), mis sõltub potentsiaalist ja selle tuletistest[x] ainult selles rakus. Arvestades välja kõiki vabadusastmeid, s.o. kõiki ruumirakke, kirjutame välja Lagrange'i funktsiooni $\mathscr{L}$:

$$\mathscr{L} = \sum_p L_p$$

või piirjuhul, kui rakkude ruumalad lähenevad nullile,

$$\mathscr{L} = \int L[u_A(\vec{x},t), u_{A,i}(\vec{x},t), \dot{u}_A(\vec{x},t)]\,(d\vec{x}) \qquad (1.5)$$

Funktsiooni L nimetatakse välja Lagrange'i tihedusfunktsiooniks e. lühidalt välja lagranžiaaniks.

Valemi (1.1) asemel saame

$$\delta \int L\,[u_A(x), u_{A,\mu}(x)]\,d^4x = 0\,, \qquad (1.6)$$

mille vasaku poole teisendame järgmiselt:

$$\begin{aligned}
\delta \int L(u_A, u_{A,\mu})\,d^4x &= \int \delta L(u_A, u_{A,\mu})\,d^4x = \\
&= \int \sum_A \left(\frac{\partial L}{\partial u_A}\delta u_A + \frac{\partial L}{\partial u_{A,\mu}}\delta u_{A,\mu}\right) d^4x = \\
&= \int \sum_A \left[\frac{\partial L}{\partial u_A}\delta u_A + \frac{\partial L}{\partial u_{A,\mu}}(\delta u_A)_{,\mu}\right] d^4x = \\
&= \int \sum_A \left[\frac{\partial L}{\partial u_A} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial L}{\partial u_{A,\mu}}\right)\right]\delta u_A\,d^4x\,.
\end{aligned}$$

Teisenduse viimasel etapil oleme δu_A tuletisi sisaldavad liikmed integreerinud ositi ja arvestanud, et integraali rajal $\delta u_A = 0$.

---

x Punktid L avaldises tähistavad võimalikke kõrgemat järku tuletisi. Kuna piirdume väljadega, mille võrrandid on ülimalt teist järku, arvestame edaspidi L sõltuvust ainult potentsiaali u_A esimest järku tuletistest.

δu_A suvalisuse tõttu on võrdus (1.6) rahuldatud vaid siis, kui

$$\frac{\partial L}{\partial u_A} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial L}{\partial u_{A,\mu}}\right) = 0. \qquad (A = 1,2,\ldots,N) \qquad (1.7)$$

Euler-Lagrange'i võrrandid (1.7) langevad kokku väljavõrranditega, kui lagranžiaan L on õigesti konstrueeritud.

Võrrandite (1.7) abil saab näidata (veenduge selles!), et 1) lineaarsetele väljavõrranditele vastav lagranžiaan L võib sisaldada potentsiaali komponentide ja nende tuletiste korrutisi ülimalt teises astmes;

2) kui väljavõrrandid on maksimaalselt teist järku (näit. d'Alembert'i võrrand, Klein-Gordoni võrrand), võib L sõltuda potentsiaalist ja selle esimest (mitte kõrgemat!) järku tuletistest;

3) välja lagranžiaan L on määratud 4-divergentsi täpsuseni.

Viimase väite tõestuseks teeme valemis (1.6) asenduse $L \to L + \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu}$, kus f_μ ($\mu = 1,2,3,4$) on suvalised funktsioonid väljapotentsiaalidest u_A. Gaussi teoreemi abil teisendame divergentsi sisaldava liikme integraaliks üle 4-ruumi piirava hüperpinna, kus potentsiaali variatsioonid δu_A on nullid

$$\int \left(L + \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu}\right) d^4x = \int L\, d^4x + \oint f_\mu\, d\sigma_\mu ;$$

$$\delta \oint f_\mu\, d\sigma_\mu = \oint \left[\frac{\partial f_\mu}{\partial u_A}\delta u_A + \frac{\partial f_\mu}{\partial u_{A,\nu}}\delta u_{A,\nu}\right] d\sigma_\mu = 0 .$$

Selleks et väljavõrrandid oleksid relativistlikult koovariantsed, peab lagranžiaan L olema invariantne Lorentzi teisenduste suhtes.

Analoogiliselt valemile (1.4) on arvutatav välja Hamiltoni funktsioon $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} = \sum_{p,A} \frac{\partial L_p}{\partial \dot{u}_A(\vec{r}_p,t)} \dot{u}_A(\vec{r}_p,t) - L_p$$

või piirjuhul $\Delta p \to 0$

$$\mathcal{H} = \int H d^3x \quad ,$$

$$\text{kus} \quad H(x) = \sum_A \frac{\partial L(x)}{\partial \dot{u}_A(x)} \dot{u}_A(x) - L(x) . \qquad (1.8)$$

Välja Hamiltoni funktsiooni reaalsuse nõudest järgneb, et ka lagranžiaan L peab olema reaalne funktsioon väljapotentsiaalidest u_A. Vaba välja võrrandid on homogeensed, mistõttu vaba välja lagranžiaan ei sõltu vahetult aegruumi koordinaatidest, vaid ainult potentsiaalide $u_A(x)$ kaudu.

Kanooniliste impulsside definitsiooni (1.3) kohaselt võime defineerida ka väljapotentsiaalile $u_A(\vec{r}, t)$ vastava kanoonilise impulsi $\pi_A(\vec{r},t)$

$$\pi_A(\vec{r},t) = \frac{\partial L(\vec{r},t)}{\partial \dot{u}_A(\vec{r},t)} \qquad (1.9)$$

π_A avaldisi võib kasutada välja kanoonilisel kvantiseerimisel, seades suurustele π_A , u_A vastavusse operaatorid, mis rahuldavad kanoonilisi vahetuseeskirju

$$[u_A, u_B] = [\pi_A, \pi_B] = 0 ;$$
$$[u_A(\vec{r},t), \pi_B(\vec{r}',t)] = i\delta_{AB}\delta(\vec{r}-\vec{r}') . \qquad (1.10)$$

Eeskirjad (1.10) on täiesti universaalsed ning rakendatavad ka mittelineaarsete ja interageerivate väljade korral. Nende puuduseks on samaaegsuse nõue $u_A(\vec{r}, t)$ ja $\pi_B(\vec{r}', t)$ avaldistes.

§ 2. Noetheri teoreem.

Tuletame kvantiseerimata välja liikumisintegraalide üldised avaldised, mida järgnevates paragrahvides konkretiseerime. Lähtume Noetheri teoreemist (vt. näit. [2] lk. 20 jj.).

Kui välja variatsioonintegraal $J = \int L(u_A, u_{A,\mu}) d^4x$ on invariantne mõnesuguse n-parameetrilise pidevate teisenduste rühma suhtes, siis iseloomustab välja n jäävat suurust. Need suurused avalduvad väljapotentsiaali ja selle tuletiste kaudu. Nende tuletamiseks kasutame potentsiaalikomponentide teisenemiseeskirju ja arvestame väljavõrrandeid (1.7).

Vaatleme 4-ruumi infinitesimaalteisendust, mille tagajärjel punkti koordinaadid x_μ teisenevad järgmiselt:

$$x_\mu \to x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu ;$$

$$\delta x_\mu = \sum_{s=1}^{n} \delta\sigma_s f_\mu^s(x). \qquad (\mu = 1, \ldots, 4) \tag{2.1}$$

Valemis (2.1) oleme koordinaatide muudud δx_μ arendanud ritta teisenduse infinitesimaalsete parameetrite $\delta\sigma_s$ ($s = 1, 2, \ldots n$) järgi ja piirdunud viimaste suhtes esimest järku liikmetega. Kordajad $f_\mu^s(x)$ ($\mu = 1, \ldots, 4$) on üldiselt ruumipunkti funktsioonid (või ka konstandid, näit. nihketeisenduste korral).

Vastaku teisendusele (2.1) potentsiaali muut δu_A, mille arendame samuti parameetrite $\delta\sigma_s$ järgi:

$$u_A(x) \to u'_A(x') = u_A(x) + \delta u_A(x);$$

$$\delta u_A(x) = \sum_{s=1}^{n} \delta\sigma_s F_A^s(x). \tag{2.2}$$

Funktsioonid $F_A^s(x)$ sõltuvad üldjuhul väljapotentsiaalist. Konkreetsetes arvutustes on otstarbekam kasutada samale argumendile vastavat potentsiaali muutu $\bar{\delta} u_A$, mille defineerime

$$\bar{\delta} u_A \equiv u'_A(x) - u_A(x) \,. \tag{2.3}$$

Arvestades Taylori arenduse esimesi liikmeid

$$u'_A(x') \approx u'_A(x) + \frac{\partial u'_A(x)}{\partial x_\mu} \delta x_\mu \approx$$
$$\approx u'_A(x) + \frac{\partial u_A(x)}{\partial x_\mu} \delta x_\mu \tag{2.4}$$

ja valemeid (2.1 - 3), saame

$$\bar{\delta} u_A = \delta u_A - \frac{\partial u_A}{\partial x_\mu} \delta x_\mu \tag{2.5}$$

või

$$\bar{\delta} u_A = \sum_{s=1}^{n} \left(F_A^s - \frac{\partial u_A}{\partial x_\mu} f_\mu^s \right) \delta o_s \,. \tag{2.6}$$

Variatsioonide $\bar{\delta} u_A$ eelis on selles, et siin

$$\bar{\delta} \left(\frac{\partial u_A}{\partial x_\mu} \right) = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\bar{\delta} u_A \right) , \tag{2.7}$$

mis variatsioonide δu_A puhul ilmselt ei kehti, kuna δu_A sisaldavad kahte erinevat argumenti x ja x'.

Arvutame δJ :

$$\delta J = \int \delta L(x) d^4x + \int L(x) \delta (d^4x) \,, \tag{2.8}$$

kus

$$\delta L = L'(x') - L(x) = \bar{\delta} L + \frac{\partial L}{\partial x_\mu} \delta x_\mu \,, \tag{2.9}$$

$$\bar{\delta} L = \frac{\partial L}{\partial u_A} \bar{\delta} u_A + \frac{\partial L}{\partial u_{A,\mu}} \bar{\delta} (u_{A,\mu}) \tag{2.10}$$

(üle korduvate indeksite on kõikjal summeeritud) ning

$$\delta(d^4x) = \delta\left(\prod_{\mu=0}^{3} dx_\mu\right) = \frac{\prod_\mu dx_\mu}{dx_\varrho}\,\delta(dx_\varrho) =$$

$$= \prod_\mu dx_\mu \frac{\partial(\delta x_\varrho)}{\partial x_\varrho}. \qquad (2.11)$$

Kui paigutame (2.9 - 11) avaldisse (2.8), saame

$$\delta J = \int\left[\frac{\partial L}{\partial u_A}\bar{\delta}u_A + \frac{\partial L}{\partial u_{A,\mu}}(\bar{\delta}u_A)_{,\mu} + L(\delta x_\mu)_{,\mu}\right]d^4x \qquad (2.12)$$

või, pidades silmas välja võrrandeid (1.7),

$$\delta J = \int\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial L}{\partial(u_{A,\mu})}\bar{\delta}u_A + L\,\delta x_\mu\right)d^4x\,, \qquad (2.13)$$

millest asendus (2.6) annab

$$\delta J = \int\frac{\partial\Theta^s_\mu}{\partial x_\mu}\delta\sigma_s\,d^4x\,, \qquad (2.14)$$

kus

$$\Theta^s_\mu = L f^s_\mu - \frac{\partial L}{\partial(u_{A,\mu})}\left(\frac{\partial u_A}{\partial x_\varrho}f^s_\varrho - F^s_A\right). \qquad (2.15)$$

Järelikult on variatsioonintegraal invariantne vaadeldava teisenduse suhtes, s.t. $\delta J = 0$, kui (parameetrite $\delta\sigma_s$ suvalisuse tõttu)

$$\frac{\partial\Theta^s_\mu}{\partial x_\mu} = 0. \qquad (2.16)$$

$$(s = 1,2\ \ldots,\ n)$$

Veendume, et pidevusvõrranditele (2.16) vastab n jäävusseadust. Integreerime (2.16) vasaku poole üle suvalise 4-ruumi piirkonna Ω ja kasutame Gaussi teoreemi:

$$\int_\Omega\frac{\partial\Theta^s_\mu}{\partial x_\mu}d^4x = \oint\Theta^s_\mu\,d\sigma_\mu = 0. \qquad (2.17)$$

Siin $d\sigma_\mu$ on 4-ruumi piirkonda Ω ümbritseva (3-mõõtmelise) hüperpinna elemendi projektsioon hüpertasandile, mille normaaliks on x_μ-telg, s.t. $d\sigma_0 = dx_1 dx_2 dx_3$, $d\sigma_1 = dx_0 dx_2 dx_3, \ldots$.

Valime Ω nii, et see ruumisarnastes suundades ulatuks lõpmatusse, ajasarnastes suundades oleks aga piiratud kahe ruumisarnase hüperpinnaga σ_1 ja σ_2. Loomulikul eeldusel, et väli eksisteerib praktiliselt lõplikus piirkonnas ning et väljapotentsiaalidest sõltuvad suurused Θ^s_μ saavad ruumilises lõpmatuses nulliks, saame võrdusest (2.17)

$$\int_{\sigma_1} \Theta^s_\mu d\sigma_\mu - \int_{\sigma_2} \Theta^s_\mu d\sigma_\mu = 0 . \qquad (2.18)$$

Valemist (2.18) järeldub, et kui defineerime suurused C_s

$$C_s = -i \int_\sigma \Theta^s_\mu d\sigma_\mu , \qquad (2.19)$$

siis need ei sõltu hüperpinna σ valikust. Erijuhul, kui valime σ risti x_0-teljega, saame ajast sõltumatud suurused C_s avaldada 3-mõõtmeliste integraalide kaudu:

$$C_s = -i \int \Theta^s_4 d^3x . \qquad (2.19')$$

Θ^s_μ. Lõpuks märgime, et võrrandid (2.16) ei määra suurusi üheselt. Tõepoolest, samu võrrandeid rahuldavad ka suurused

$$\Theta'^s_\mu = \Theta^s_\mu + \frac{\partial f^s_{[\mu\nu]}}{\partial x_\nu} ,$$

kus $f_{[\mu\nu]}$ on suvalised funktsioonid, mis rahuldavad vaid antisümmeetria nõuet

$$f^s_{[\mu\nu]} = -f^s_{[\nu\mu]} .$$

§ 3. Kvantiseerimata välja liikumisintegraalid.

Tuletame Noetheri teoreemi abil välja energia, impulsi, impulssmomendi ja laengu avaldised, pidades silmas tingimusi, millistel nimetatud suurused on jäävad. Relatiivsusteooriale vastavalt moodustab impulss koos energiaga 4-mõõtmelise energia-impulssvektori P_μ, impulssmomenti aga kirjeldab II järku antisümmeetriline tensor $M_{\mu\nu}$.

1. Mehaanikast on teada, et homogeenses ruumis liigub süsteem konstantse impulsiga. Niisuguses ruumis on mõjuintegraal invariantne nihketeisenduste suhtes. Noetheri teoreemist saame 4 jäävat suurust, mida eelöeldu põhjal võime tõlgendada välja energia-impulssvektoritena.

Vastaku lõpmata väikestele nihetele 4-ruumi punkti koordinaatide teisenemiseeskiri

$$x_\mu \to x'_\mu = x_\mu + \delta\alpha_\mu \quad , \tag{3.1}$$

kus $\delta\alpha_\mu$ on konstantsed parameetrid. Võrdlus valemitega (2.1) näitab, et antud juhul $\delta\sigma_s \to \delta\alpha_\mu$ ja $f^s_\mu \to f^\nu_\mu = \delta_{\mu\nu}$. Nihketeisenduste suhtes käituvad kõik väljapotentsiaalid ühtemoodi, nimelt

$$u'_A(x') = u_A(x) \quad \text{või}$$

$$\delta u_A \equiv u'_A(x') - u_A(x) = 0. \tag{3.2}$$

Võrdlus valemitega (2.2) ütleb, et antud juhul

$$F_A^{\,s} \equiv 0. \tag{3.3}$$

Seega antud juhul rahuldavad pidevusvõrrandeid suurused (vrd. val. (2.15) kus $\Theta^s_\mu \to T_{\mu\nu}$; $\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0$)

$$T_{\mu\nu} = L\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial L}{\partial u_{A,\nu}} u_{A,\mu}. \tag{3.4}$$

Suurused $T_{\mu\nu}$ moodustavad kanoonilise energia-impulsstensori. Üldjuhul ei ole $T_{\mu\nu}$ sümmeetriline tensor. Kasutades aga eelmise paragrahvi lõpus märgitud suvalisust θ^s_μ määramisel, võime valida alati niisugused funktsioonid $f_{\mu[\nu\rho]} = -f_{\mu[\rho\nu]}$, et tensor

$$\tau_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \frac{\partial f_{\mu[\nu\rho]}}{\partial x_\rho} \tag{3.5}$$

oleks sümmeetriline. Vastavalt valemile (2.19') saame energia-impulssvektori ($C_s \to P_\mu$)

$$P_\mu = -i \int T_{\mu 4}\, d^3x . \tag{3.6}$$

Välja koguenergia $E = -iP_4$ avaldis

$$E = -\int T_{44}\, d^3x = \int \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_A}\dot{u}_A - L\right) d^3x \tag{3.7}$$

ühtib välja Hamiltoni funktsiooni $\mathcal{H}$ avaldisega (val. (1.8)), Hamiltoni tihedusfunktsioon $H = -T_{44} = -T_{00}$.

2. Välja impulssmomendi tuletamiseks vaatleme variatsioonintegraali invariantsust 4-ruumi pöördeteisenduste, s.t. Lorentzi pärisrühma teisenduste suhtes.

Lõpmata väikesi Lorentzi teisendusi iseloomustavad parameetrid $\delta o_s \to \delta\omega_{\mu\nu} = -\delta\omega_{\nu\mu}$, kusjuures 4-ruumi punkti koordinaadid teisenevad nii:

$$\begin{aligned} x_\mu \to x'_\mu &= x_\mu + \delta\omega_{\mu\nu} x_\nu = \\ &= x_\mu + \sum_{\rho<\sigma=1}^{4} \delta\omega_{\rho\sigma} \left(\delta_{\mu\rho} x_\sigma - \delta_{\mu\sigma} x_\rho\right). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Võrdlus valemitega (2.1) annab

$$f^s_\mu \to f_{\mu[\rho\sigma]} = \delta_{\mu\rho} x_\sigma - \delta_{\mu\sigma} x_\rho . \tag{3.9}$$

Pidevusvõrrandeid rahuldavad suurused (val. (2.15))

$$\Theta^{s}_{\mu} \to \mathcal{M}_{\mu[\rho\sigma]} = L\,(\delta_{\mu\rho}x_{\sigma} - \delta_{\mu\sigma}x_{\rho}) - \\ -\left[\frac{\partial L}{\partial u_{A,\mu}}u_{A,\rho}x_{\sigma} - \frac{\partial L}{\partial u_{A,\mu}}u_{A,\sigma}x_{\rho}\right] + \\ + \frac{\partial L}{\partial u_{A,\mu}}F_{A[\rho\sigma]}\,. \tag{3.10}$$

Kanoonilise energia-impulsstensori (val. (3.4)) abil võime selle esitada

$$\mathcal{M}_{\mu[\rho\sigma]} = T_{\rho\mu}x_{\sigma} - T_{\sigma\mu}x_{\rho} + \frac{\partial L}{\partial u_{A,\mu}}F_{A[\rho\sigma]}\,. \tag{3.11}$$

Tensor $\mathcal{M}_{\mu[\rho\sigma]}$ koosneb kahest osast: $\mathcal{M}_{\mu[\rho\sigma]} = L_{\mu[\rho\sigma]} + S_{\mu[\rho\sigma]}$, kus

$$L_{\mu[\rho\sigma]} = T_{\rho\mu}x_{\sigma} - T_{\sigma\mu}x_{\rho}\,, \tag{3.12}$$

on kõikide väljade korral ühtemoodi lagranžiaanist tuletatav ja annab orbitaalse impulssmomendi analoogi, kuna

$$S_{\mu[\rho\sigma]} = \frac{\partial L}{\partial u_{A,\mu}}F_{A[\rho\sigma]} \tag{3.13}$$

sõltub väljapotentsiaali teisenemiseeskirjast ja iseloomustab välja spinni. Näit. skalaarvälja korral $u'(x') = u(x)$, $F^{S}_{A} = 0$, s.t. skalaarvälja spinn on null.

Kui valemis (3.5) sisalduvad funktsioonid $f_{\mu[\rho\sigma]}$ määrame tingimusest

$$f_{\mu[\rho\rho]} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial L}{\partial u_{A,\mu}}F_{A[\nu\rho]} - \frac{\partial L}{\partial u_{A,\nu}}F_{A[\mu\rho]} - \frac{\partial L}{\partial u_{A,\rho}}F_{A[\mu\nu]}\right), \tag{3.14}$$

võime tensori $\mathcal{M}_{\mu[\rho\sigma]}$ esitada sümmeetrilise energia-impulsstensori $\tau_{\mu\nu}$ kaudu[x]

---

x (3.15) erineb avaldisest (3.11) ebaolulise 4-divergentsi võrra.

$$\mathcal{M}_{\mu[\rho\sigma]} = \tau_{\rho\mu} x_\sigma - \tau_{\sigma\mu} x_\rho \,. \qquad (3.15)$$

Seega, kui $\tau_{\mu\nu}$ rahuldab pidevusvõrrandit, rahuldab seda ka $\mathcal{M}_{\mu[\rho\sigma]}$. Välja impulssmomendi komponendid on määratud valemiga

$$M_{[\rho\sigma]} = -i \int \mathcal{M}_{4[\rho\sigma]}\, d^3x \,. \qquad (3.16)$$

Kui väljapotentsiaalid on kompleksse väärtustega, tähendab summeerimine üle potentsiaalikomponendi indeksi A valemites (3.4), (3.10) ühtlasi summeerimist üle kaaskompleksse komponentide u_A^*.

3. Kui välja kirjeldavad kompleksed potentsiaalid, järgneb lagranžiaani reaalsuse nõudest mõjuintegraali invariantsus kalibreerimisteisenduste

$$u_A(x) \to e^{i\alpha} u_A(x) \,, \quad u_A^*(x) \to e^{-i\alpha} u_A^*(x) \qquad (3.17)$$

suhtes. Siin α on reaalne parameeter. Lõpmata väike kalibreerimisteisendus parameetriga $\delta\alpha$ indutseerib potentsiaali muudud

$$\bar{\delta} u_A = i\delta\alpha\, u_A \,; \quad \bar{\delta} u_A^* = -i\delta\alpha\, u_A^* \,,$$

s.t. $f_\mu^s = 0$, $F_A^s \to F_A = i u_A \,; F_A^* = -i u_A^*$.

Järelikult iseloomustab <u>iga kompleksset välja</u> 4-vektor (vt. val. (2.15, 16))

$$j_\mu(x) = ie\left[\frac{\partial L}{\partial u_{A,\mu}} u_A - \frac{\partial L}{\partial u_{A,\mu}^*} u_A^*\right], \qquad (3.18)$$

mis rahuldab pidevusvõrrandit ja millele vastavat jäävat suurust

$$Q = -i\int j_4\, d^3x = ie\int\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_A} u_A - \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_A^*} u_A^*\right] d^3x \qquad (3.19)$$

tõlgendatakse välja kogulaenguna. Konstant e määrab laengu suuruse ja dimensiooni. Reaalsete potentsiaalidega väli on täielikult neutraalne (näit. elektromagnetväli).

§ 4. Välja kvantiseerimine.

Kaasaegse kvantväljateooria aluseks on mõned võimalikult üldised postulaadid (välja aksioomid), mis arvestavad kvantmehaanika ja relatiivsusteooria põhiprintsiipe ja on välja kasvanud tuntud väljamudelite analüüsist. Matemaatiline skeem on üldjoontes sama mis kvantmehaanikas (täpsustavaid detaile vt. näit. [5]). Oletatakse, et uuritava välja igale olekule vastab normeeritud olekuvektor Φ. Kõikide olekuvektorite hulk moodustab Hilberti ruumi $\mathfrak{H}$. Olekuvektorite Φ_i ja Φ_k skalaarkorrutise $\langle \Phi_i, \Phi_k \rangle = \langle \Phi_k, \Phi_i \rangle^*$ abil on arvutatav siirde tõenäosus w_{ik} olekust Φ_k olekusse Φ_i:*

$$w_{ik} = |\langle \Phi_i, \Phi_k \rangle|^2 . \qquad (4.1)$$

Kui mingi teisendus seab igale olekuvektorile $\Phi \in \mathfrak{H}$ vastavusse vektori $\Phi' \in \mathfrak{H}$, nii et

$$|\langle \Phi'_i, \Phi'_k \rangle|^2 = |\langle \Phi_i, \Phi_k \rangle|^2 , \qquad (4.2)$$

siis see teisendus kajastab välja sümmeetriat ehk teisiti öeldes, väli on invariantne selle teisenduse suhtes. Kui seose vektorite Φ' ja Φ vahel esitame kujul

$$\Phi' = U \Phi , \qquad (4.3)$$

siis tingimus (4.2) on rahuldatud, kui

$$\langle U\Phi_i, U\Phi_k \rangle = \langle \Phi_i, \Phi_k \rangle \qquad (4.4)$$

* Levinum on pikem termin "üleminekutõenäosus".

või kui

$$\langle U\phi_1 , U\phi_2 \rangle = \langle \phi_1, \phi_2 \rangle^* . \qquad (4.5)$$

Iga sümmeetriateisendus indutseerib olekuvektorite ruumis $\mathcal{H}$ unitaarse (tingimus (4.4)) või antiunitaarse (tingimus (4.5)) operaatori U .

Edasi oletatakse kvantmehaanika analoogia põhjal, et iga mõõdetavat suurust kirjeldab hermiitiline operaator ruumis $\mathcal{H}$. Kuna kõik suurused avalduvad väljapotentsiaalide kaudu (vastavus kvantiseerimata väljaga), siis kvantiseeritud välja potentsiaalid toimivad samuti operaatoritena $\hat{u}_\Delta$ ruumis $\mathcal{H}$. Nende operaatorite määramiseks vajalike vahetuseeskirjade leidmisel lähtutakse nõudest, et ükski mõju ei levi kiiremini valguskiirusest, s.t. kui aeg-ruumi kahe piirkonna kõikide punktide intervallid on ruumisarnased, siis füüsikaliste suuruste mõõtmine ühes piirkonnas ei saa mõjustada mõõtmistulemusi teises piirkonnas. Siit järgneb mikrokausaalsuse nõue: kui füüsikalisi suurusi vaadelda aeg-ruumi punktide funktsioonidena, siis kommuteeruvad niisugused mõõdetavatele suurustele vastavad operaatorid, mille argumentide intervall on ruumisarnane. Nagu hiljem näeme, järeldub sellest, et väljapotentsiaalid peavad ruumisarnase intervalliga eraldatud punktides kas kommuteeruma või antikommuteeruma.*

---

* Mikrokausaalsuse või ka lokaalse kommutatiivsuse tingimuseks nimetataksegi tavaliselt viimati formuleeritud nõuet. Tegelikult ei ole ükski välja iseloomustav suurus määratud ühes aeg-ruumi punktis, vaid kogu piirkonnas, kus väli eksisteerib. Matemaatiliselt kajastub see selles, et aeg-ruumi punktiga seotud potentsiaalid ja nende (anti-) kommutaatorid osutuvad tugevasti singulaarseteks funktsioonideks, mis on korrektselt käsitletavad ainult distributsioonide (üldistatud funktsioonide) teooria raames. Seepärast näib loomulikuna mikrokausaalsuse nõude modifitseerimine tulevastes väljateooriates.

Vabade väljade korral on suhteliselt lihtne leida vahetuseeskirju ka ajasarnaste intervallidega eraldatud piirkondade jaoks. Selleks on mitu moodust, mis viivad samadele tulemustele.

1) Kanooniline kvantiseerimine (vt. näit. [6]), kus igale väljapotentsiaalile u_A seatakse vastavusse "kanooniline impulss" π_A ja postuleeritakse kanooniliste kommutatsiooni-eeskirjade kehtivust (valemid (1.9), (1.10)). Kuna lineaarse vaba välja võrrandi lahendid on esitatavad tasalainete superpositsioonina, omandavad arenduse kordajad operaatortähenduse ja peavad rahuldama vastavaid vahetuseeskirju, et tagada seoste (1.10) kehtivust.

2) Postuleeritakse vahetuseeskirjade kuju eelmainitud operaatortähendusega kordajate jaoks ja näidatakse, et sellest tulenevad mõistlikud järeldused kvantiseeritud välja struktuuri kohta ([4]).

3) Peatume lähemalt meetodil, mis kasutab teooria relativistliku invariantsuse nõuet ja vastavusprintsiipi klassikalise teooriaga ([2]). Oletame, et väljapotentsiaalid $u_A(x)$ kui aeg-ruumi punkti funktsioonid teisenevad Lorentzi rühma mõnesuguse esituse kohaselt, s.t. teisendusele

$$x_\mu \to x'_\mu = \Lambda_{\mu\nu} x_\nu + a_\mu \,, \tag{4.6}$$

kus Λ on homogeense Lorentzi teisenduse maatriks (det Λ = = 1), a_μ - suvaline konstantne 4-vektor, vastab lineaarhomogeenne potentsiaalide teisendus

$$u_A(x) \to u'_A(x') \,; \quad u'_A(x') = S_{AB}(\Lambda)\, u_B(x) \,. \tag{4.7}$$

Maatrikselement $G_{A,ik} = \langle \Phi_i, \hat{u}_A(x) \Phi_k \rangle$ kui (x)-i funktsioon teiseneb samuti:

$$G_{A,ik}(x) \to G'_{A,ik}(x') = S_{AB}\, G_{B,ik}(x) = S_{AB} \langle \Phi_i, \hat{u}_B(x) \Phi_k \rangle . \tag{4.8}$$

Teiselt poolt võime aga maatrikselemendi $G'_{A,ik}(x')$ arvutada valemi (4.3) abil

$$G'_{A,ik}(x') = \langle \phi'_i, \hat{u}_A(x') \phi'_k \rangle = \langle U\phi_i, \hat{u}_A(x') U\phi_k \rangle . \quad (4.9)$$

Kui selle teisendame

$$\langle U\phi_i, \hat{u}_A(x') U\phi_k \rangle = \langle \phi_i, U^{-1} \hat{u}_A(x') U \phi_k \rangle$$

ja arvestame U unitaarsust, saame valemiga (4.8) võrdlemisel

$$U^{-1} \hat{u}_A(x') U = S_{AB} \hat{u}_B(x); \quad S^{-1}(\Lambda) \hat{u}(\Lambda x + a) = U \hat{u}(x) U^{-1}. \quad (4.10)$$

Seda üldist operaatorpotentsiaalide teisenemise valemit võime nüüd kasutada kommutatsioonieeskirjade tuletamiseks. Vaatleme infinitesimaalseid teisendusi

$$\Lambda_{\mu\nu} \to \delta_{\mu\nu} + \delta\omega_{[\mu\nu]}; \quad a_\mu \to \delta a_\mu ,$$

$$S_{AB} \to \delta_{AB} + \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu} \delta\omega_{\mu\nu} F_{AB[\mu\nu]} . \quad (4.11)$$

Operaatori U unitaarsuse tõttu[*]

$$U = I - i\delta a_\mu P_\mu - \frac{i}{2} \sum_{\mu,\nu} \delta\omega_{\mu\nu} M_{\mu\nu} ;$$
$$U^{-1} = I + i\delta a_\mu P_\mu + \frac{i}{2} \sum_{\mu,\nu} \delta\omega_{\mu\nu} M_{\mu\nu} , \quad (4.12)$$

kus P_μ, $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$ on mittehomogeense Lorentzi rühma hermiitilised infinitesimaaloperaatorid, mis rahuldavad vahetuseeskirju (vt. näit. [3])

---

[*] Meenutame, et Lorentzi rühmal ei ole muid unitaarseid esitusi kui triviaalne (ühedimensionaalne) ja lõpmatudimensionaalsed esitused. Kui nõuame, et vaakumolek vastaks välja energia miinimumile taustsüsteemist olenemata, peab vaakumi olekuvektor ϕ_0 ja ainult see teisenema triviaalse esituse kohaselt, s.t. jääma muutumatuks.

$$[M_{\mu\nu}, M_{\varrho\sigma}] = -i(\delta_{\mu\varrho}M_{\nu\sigma} + \delta_{\nu\sigma}M_{\mu\varrho} - \delta_{\mu\sigma}M_{\nu\varrho} - \delta_{\nu\varrho}M_{\mu\sigma}),$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\sigma] = i(\delta_{\nu\sigma}P_\mu - \delta_{\mu\sigma}P_\nu), \qquad (4.13)$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0.$$

Erijuhul, kui piirdume 3-ruumi pöörete ja nihetega ning tähistame

$$M_{23} = -J_1, \quad M_{31} = -J_2, \quad M_{12} = -J_3,$$

saame

$$[J_i, J_k] = i\varepsilon_{ikl}J_l; \quad [J_i, P_k] = i\varepsilon_{ikl}P_l. \qquad (4.13')$$

Need on aga kvantmehaanikast hästi tuntud vahetuseeskirjad impulsi ja impulssmomendi operaatori komponentide vahel. Järelikult on Lorentzi rühma infinitesimaaloperaatorid välja relativistliku impulsi (P_μ) ja impulssmomendi ($M_{\mu\nu}$) operaatoriteks ruumis $\mathcal{H}$. Vastavusprintsiibi kohaselt avalduvad P_μ ja $M_{\mu\nu}$ operaatorpotentsiaalide $\hat{u}_A(x)$ kaudu samuti (operaatorite järjestuse täpsuseni korrutistes) nagu kvantiseerimata välja vastavad suurused (valemid (3.4, 6) ja (3.11, 16)).

Vaatleme valemeid (4.10) infinitesimaalse nihketeisenduse korral. Siis $\Lambda = I$, $S_{AB} = \delta_{AB}$, $U = I - i\delta a_\mu \hat{P}_\mu$, $U^{-1} = I + i\delta a_\mu \hat{P}_\mu$ ja arvestades esimest järku väikesi suurusi δa_μ, saame

$$\hat{u}_A(x) - i\delta a_\mu(\hat{P}_\mu \hat{u}_A(x) - \hat{u}_A(x)\hat{P}_\mu) = \hat{u}_A(x+\delta a) = \hat{u}_A(x) + \frac{\partial \hat{u}_A(x)}{\partial x_\mu}\delta a_\mu,$$

millest δa_μ suvalisuse tõttu

$$\frac{\partial \hat{u}_A(x)}{\partial x_\mu} = -i[\hat{P}_\mu, \hat{u}_A(x)]. \qquad (\mu = 1, \ldots, 4) \qquad (4.14)$$

Kui valemeis (4.14) avaldame operaatorid $\hat{P}_\mu$ vastavalt seostele (3.4, 6), saame vahetuseeskirjad, mida peavad rahuldama kõikide väljade operaatorpotentsiaalid. Sa-

madele tulemustele viivad muidugi ka meetodid 1) ja 2), kuid seoseid (4.14) ei vaadelda seal kui kvanttingimusi, vaid kui järeldusi kvantteooria formalismist. Lineaarseid võrrandeid rahuldava välja korral on lagranžiaan L ja seega ka energia impulssvektor P_μ teise astme funktsioon välja potentsiaalidest. Järelikult kommutaator valemi (4.14) paremal poolel on tüüpi $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}]$. Selle kommutaatori võime arendada kas lihtsateks kommutaatoriteks

$$[\hat{A},\hat{B}\hat{C}] = [\hat{A},\hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A},\hat{C}] \qquad (4.15a)$$

või lihtsateks antikommutaatoriteks

$$[\hat{A},\hat{B}\hat{C}] = \{\hat{A},\hat{B}\}\hat{C} - \hat{B}\{\hat{A},\hat{C}\}. \qquad (4.15b)$$

Kuna võrduse (4.14) vasak pool sisaldab potentsiaalioperaatorit lineaarselt, peavad juhul (4.15a) kõik potentsiaalide kommutaatorid olema mitteoperaatorid (c-arvud), kuna juhul (4.15b) osutuvad c-arvudeks kõik antikommutaatorid. Esimesel juhul ütleme, et väli on kvantiseeritud kommutaatoritega, teisel juhul on väli kvantiseeritud antikommutaatoritega. Niisiis kvanttingimusest (4.14) järgneb võimalus kvantiseerida välja kas kommutaatorite või antikommutaatoritega. Edaspidi näeme (vrd. ka elektromagnetvälja ja elektronpositronvälja kvantiseerimist), et kõiki tensorvälju tuleb kvantiseerida kommutaatoritega, kõiki spiinorvälju aga antikommutaatoritega.

§ 5. Skalaarväli.

Illustreerime eelmises punktis arendatud mõttekäike reaalse skalaarvälja korral, mille potentsiaal $\varphi(x) = \varphi^*(x)$ rahuldab Klein-Gordoni võrrandit

$$(\Box - m^2)\,\varphi(x) = 0. \qquad (5.1)$$

1. Võrrand (5.1) on tuletatav variatsioonprintsiibil lagranžiaanist (vrd. (1.7))

$$L = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} + m^2\varphi^2\right). \qquad (5.2)$$

Lagranžiaani L abil arvutame energia-impulssvektori ((3.4, 6))

$$P_\mu = -i\int T_{\mu 4}(x)\,d^3x, \qquad (5.3)$$

kus

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\{\delta_{\mu\nu}[\varphi_{,\rho}\varphi_{,\rho} + m^2\varphi^2] - 2\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu}\}. \qquad (5.4)$$

Selleks et arvutada integraale P_μ avaldistes, peame teadma funktsiooni $\varphi(x)$ ilmutatud kuju. Integreerime võrrandi (5.1) eeldusel, et väli eksisteerib mõnesuguses lõplikus ruumalas V, mille võime oletada kuubikujulisena serva pikkusega L. Võrrandit (5.1) rahuldavad siis tasalained

$$\varphi(x) = e^{i(\vec{\kappa}\vec{r} - \omega_\kappa x_0)}, \qquad (5.5)$$

kus $\vec{\kappa} = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$, $\kappa_i = \frac{2\pi}{L}n_i$ $(i = 1,2,3)$, n_i on täisarvud (lahendi perioodilisuse tingimus kuubi servadel) ja

$$\omega_\kappa^2 = \vec{\kappa}^2 + m^2, \quad \text{s.t.} \quad \omega_\kappa = \pm\kappa_0, \quad \kappa_0 = +\sqrt{\vec{\kappa}^2 + m^2}. \qquad (5.6)$$

Tingimus (5.6) näitab, et võrrandil on kahte tüüpi lahendeid: positiivsele sagedusele vastavad lahendid $\varphi(x) = e^{i(\vec{\kappa}\vec{r} - \kappa_0 x_0)}$ ja negatiivsele sagedusele lahendid $\varphi(x) = e^{i(\vec{\kappa}\vec{r} + \kappa_0 x_0)}$. (5.1) üldlahendiks on nende superpositsioon

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{\kappa}}\frac{1}{\sqrt{2\kappa_0}}\left\{c(\vec{\kappa})e^{i(\vec{\kappa}\vec{r} - \kappa_0 x_0)} + b(\vec{\kappa})e^{i(\vec{\kappa}\vec{r} + \kappa_0 x_0)}\right\}.$$

Arvestame, et summeerimisindeksid kulgevad üle kõikvõimalike positiivsete ja negatiivsete väärtuste. Seepärast võime summa teises liikmes asendada $\vec{\kappa} \to -\vec{\kappa}$ ning tähistada $b(-\vec{\kappa}) \equiv c^*(\vec{\kappa})$. Üldlahendina saame siis

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{\kappa}} \frac{1}{\sqrt{2\kappa_0}} \left\{ c(\vec{\kappa}) e^{i\kappa x} + c^*(\vec{\kappa}) e^{-i\kappa x} \right\}. \quad (5.7)$$

Dimensioonilistel kaalutlustel on kordajatest $c(\vec{\kappa})$, $c^*(\vec{\kappa})$ välja eraldatud tegur $(2\kappa_0)^{-\frac{1}{2}}$ ja $V^{-\frac{1}{2}}$ ($c(\vec{\kappa}) \equiv c_\kappa$, $c^*(\vec{\kappa}) \equiv c_\kappa^*$ on dimensioonitud). $\varphi(x)$ reaalsusest järgneb, et c_κ ja c_κ^* on kaaskompleksid.

Kui ruumala, kus väli eksisteerib, on praktiliselt lõpmatu, asendub summa integraaliga. Kui täisarvud n_i muutuvad Δn_i võrra, muutuvad vektori $\vec{\kappa}$ komponendid $\Delta\kappa_i$ võrra, kus $\Delta\kappa_i = \frac{2\pi}{L}\Delta n_i$. Kuna summas $\Delta n_i = 1$, siis $\Delta\kappa_i = \frac{2\pi}{L}$. Kui $L \to \infty$, siis $\Delta\kappa_i \to d\kappa_i$ ja $\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{\kappa}} \to (2\pi)^{-3/2} \int d^3\kappa$. Seega saame (5.7) asemel

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3\kappa \left\{ \frac{c_\kappa}{\sqrt{2\kappa_0}} e^{i\kappa x} + \frac{c_\kappa^*}{\sqrt{2\kappa_0}} e^{-i\kappa x} \right\}. \quad (5.8)$$

Sellele valemile võime anda relativistliku kuju, kui arvestame, et $\int \delta(\vec{\kappa}^2 - \kappa_0^2 + m^2)\,\theta(\kappa_0) f(\kappa_0)\, d\kappa_0 = \frac{f(\kappa_0)}{2\kappa_0}\Big|_{\kappa_0 = \sqrt{\vec{\kappa}^2 + m^2}}$.

Siis

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^4\kappa\, \delta(\kappa^2 + m^2)\theta(\kappa) \left\{ a_\kappa e^{i\kappa x} + a_\kappa^* e^{-i\kappa x} \right\}, \quad (5.9)$$

kus $\delta(\kappa^2 + m^2) \equiv \delta(\vec{\kappa}^2 - \kappa_0^2 + m^2)$; $\theta(\kappa) \equiv \theta(\kappa_0)$;

$a_\kappa\big|_{\kappa_0 = \sqrt{\vec{\kappa}^2 + m^2}} = \sqrt{2\kappa_0}\, c_\kappa$.

Valemist (5.9) nähtub, et võrrandi (5.1) lahendi lahutamine

positiivseid ja negatiivseid sagedusi sisaldavateks osadeks on invariantne Lorentzi pöördumise rühma suhtes (k_0 märk säilib).

Pöördume tagasi lahendi (5.7) juurde ja arvutame selle abil välja koguenergia $E = P_0$. (5.4) põhjal

$$T_{44} = -\frac{1}{2}\left\{\dot{\varphi}^2 + \sum_{\alpha=1}^{3}\varphi_{,\alpha}^2 + m^2\varphi^2\right\},$$

millest

$$E = \frac{1}{2V}\sum_{\vec{k},\vec{k}'}\frac{1}{2\sqrt{k_0 k_0'}}\Big\{(m^2 - \vec{k}\vec{k}' - k_0 k_0')\Big[c_{\vec{k}}c_{\vec{k}'}\,e^{-i(k_0+k_0')x_0}\int_V e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\vec{x}}\,(d\vec{x}) +$$

$$+ c_{\vec{k}}^{*}c_{\vec{k}'}^{*}\,e^{i(k_0+k_0')x_0}\int_V e^{-i(\vec{k}+\vec{k}')\vec{x}}\,(d\vec{x})\Big] +$$

$$+ (m^2 + \vec{k}\vec{k}' + k_0 k_0')\Big[c_{\vec{k}}c_{\vec{k}'}^{*}\,e^{-i(k_0-k_0')x_0}\int_V e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{x}}\,(d\vec{x}) +$$

$$+ c_{\vec{k}}^{*}c_{\vec{k}'}\,e^{i(k_0-k_0')x_0}\int_V e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{x}}\,(d\vec{x})\Big]\Big\}.$$

Kuna

$$\int_V e^{i(\vec{k}\pm\vec{k}')\vec{x}}\,(d\vec{x}) = V\delta_{\vec{k},\pm\vec{k}'} \quad \text{ning} \quad k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2},$$

siis

$$P_0 = E = \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}} k_0\left\{c_{\vec{k}}c_{\vec{k}}^{*} + c_{\vec{k}}^{*}c_{\vec{k}}\right\}. \qquad (5.10)$$

Analoogiliselt saame arvutada välja impulsi ruumilised komponendid

$$\vec{P} = \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\vec{k}\left\{c_{\vec{k}}c_{\vec{k}}^{*} + c_{\vec{k}}^{*}c_{\vec{k}}\right\}. \qquad (5.11)$$

2. Kui kvantiseeritud väljas asendame P_μ operaatoriga $\hat{P}_\mu$, siis valemitest (5.10, 11) selgub, et operaatoriteks tuleb lugeda just lahendi (5.7) Fourier' kordajaid c_k, c_k^*. $\hat{P}_m$, $\hat{P}_0$ osutuvad seejuures hermiitilisteks, kui operaatorite $\hat{c}_k$, $\hat{c}_k^+$ korrutised sümmetriseerime

$$\hat{P}_\mu = \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}} \kappa_\mu \{ \hat{c}_{\vec{k}} \hat{c}^+_{\vec{k}} + \hat{c}^+_{\vec{k}} \hat{c}_{\vec{k}} \} . \qquad (5.12)$$

Siin $\hat{c}_{\vec{k}}$ ja $\hat{c}^+_{\vec{k}}$ on kaasoperaatorid.

Vaatleme kvanttingimust (4.14). Kuna operaatorpotentsiaalis

$$\hat{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\kappa_0}} \{ \hat{c}_{\vec{k}} e^{i\kappa x} + \hat{c}^+_{\vec{k}} e^{-i\kappa x} \} \qquad (513)$$

on kõik operaatorkordajad $\hat{c}_{\vec{k}}$ omavahel sõltumatud, saame tingimused

$$-\kappa_0 \hat{c}_{\vec{k}} = [\hat{P}_0, \hat{c}_{\vec{k}}] ; \qquad \kappa_0 \hat{c}^+_{\vec{k}} = [\hat{P}_0, \hat{c}^+_{\vec{k}}] ,$$

$$-\vec{k}\, \hat{c}_{\vec{k}} = [\hat{\vec{P}}, \hat{c}_{\vec{k}}] ; \qquad \vec{k}\, \hat{c}^+_{\vec{k}} = [\hat{\vec{P}}, \hat{c}^+_{\vec{k}}] \qquad (5.14)$$

või

$$\frac{1}{2}\sum_{\vec{k}'} \{ [\hat{c}_{\vec{k}} \hat{c}^+_{\vec{k}'}, \hat{c}_{\vec{k}}] + [\hat{c}^+_{\vec{k}'} \hat{c}_{\vec{k}'}, \hat{c}_{\vec{k}}] \} = -\kappa_0 \hat{c}_{\vec{k}} ,$$

$$\frac{1}{2}\sum_{\vec{k}'} \{ [\hat{c}_{\vec{k}} \hat{c}^+_{\vec{k}'}, \hat{c}^+_{\vec{k}}] + [\hat{c}^+_{\vec{k}'} \hat{c}_{\vec{k}'}, \hat{c}^+_{\vec{k}}] \} = +\kappa_0 \hat{c}^+_{\vec{k}} , \qquad (5.15)$$

mis peavad olema rahuldatud iga $\vec{k}$ korral. Otsene arvutus näitab, et (5.15) saab rahuldada ainult kommutaatoritega

$$[\hat{c}_{\vec{k}}, \hat{c}_{\vec{k}'}] = [\hat{c}^+_{\vec{k}}, \hat{c}^+_{\vec{k}'}] = 0 ; \quad [\hat{c}_{\vec{k}}, \hat{c}^+_{\vec{k}'}] = \delta_{\vec{k},\vec{k}'} . \qquad (5.16)$$

Kui püüaksime kvantiseerida antikommutaatoritega vastavalt valemile (4.15b), saaksime algebralise vastuolu võrduste (5.15) vasakute ja paremate poolte vahel. (Kontrollige!)

Seostest (5.14) selgub operaatorite $\hat{c}(k)$ ja $\hat{c}^+(k)$ füüsikaline mõte. Olgu Φ_ε operaatorite $\hat{P}_0$, $\hat{\vec{P}}$ omafunktsioon, mis kirjeldab välja olekut energiaga ε ja impulsiga $\vec{p}$,

$$\hat{P}_0 \Phi_\varepsilon = \varepsilon \Phi_\varepsilon ; \qquad \hat{\vec{P}} \Phi_\varepsilon = \vec{p}\, \Phi_\varepsilon . \qquad (5.17)$$

Leiame, millisele välja olekule vastavad funktsioonid $\hat{c}_\kappa \varphi_\varepsilon = \varphi'_\varepsilon$ ja $\hat{c}^+_\kappa \varphi_\varepsilon = \varphi''_\varepsilon$. Seostest (5.14)

$$\hat{P}_0 \varphi'_\varepsilon = \hat{P}_0 \hat{c}_\kappa \varphi_\varepsilon = \hat{c}_\kappa \hat{P}_0 \varphi_\varepsilon - \kappa_0 \hat{c}_\kappa \varphi_\varepsilon = (\varepsilon - \kappa_0)\varphi'_\varepsilon , \quad (5.18a)$$

$$\hat{P}_0 \varphi''_\varepsilon = \hat{P}_0 \hat{c}^+_\kappa \varphi_\varepsilon = \hat{c}^+_\kappa \hat{P}_0 \varphi_\varepsilon + \kappa_0 \hat{c}^+_\kappa \varphi_\varepsilon = (\varepsilon + \kappa_0)\varphi''_\varepsilon . \quad (5.18b)$$

($\hat{\vec{P}}$ omaväärtuste korral kehtib täielik analoogia)

Näeme, et operaatori $\hat{c}_\kappa$ mõju avaldub välja energia-impulsi vähenemises ($\kappa_0, \vec{\kappa}$) võrra, kuna operaatori $\hat{c}^+_\kappa$ toimel läheb väli olekusse, kus ta energia-impulss on ($\kappa_0, \vec{\kappa}$) võrra suurem esialgsest. Sellele vastavalt nimet. operaatorit $\hat{c}^+_\kappa$ kvandi (energiaga κ_0 ja impulsiga $\vec{\kappa}$) tekkeoperaatoriks (ka kiirgumisoperaatoriks), operaatorit $\hat{c}_\kappa$ aga vastava kvandi kadumis- (neeldumis-) operaatoriks.

3. Näitame, et operaatorit $A_\kappa = \hat{c}^+_\kappa \hat{c}_\kappa$ võib tõlgendada kui energiat κ_0 ja impulssi $\vec{\kappa}$ evivate kvantide arvu operaatorit, kusjuures olekus energiaga (κ_0) ja impulsiga $\vec{\kappa}$ võib olla mis tahes arv kvante. Veendume, et operaatori $\hat{A}_\kappa$ omaväärtused on kõik mittenegatiivsed täisarvud. Olgu φ_{a_κ} mõnesugune $\hat{A}_\kappa$ omavektor, siis

$$\hat{A}_\kappa \varphi_{a_\kappa} = \hat{c}^+_\kappa \hat{c}_\kappa \varphi_{a_\kappa} = a_\kappa \varphi_{a_\kappa} . \quad (5.19)$$

Kui selle võrduse mõlemast poolest moodustame skalaarkorrutise vektoriga φ_{a_κ}, saame olekuvektorite normi mittenegatiivsuse tõttu

$$a_\kappa = \frac{\langle \varphi_{a_\kappa}, \hat{c}^+_\kappa \hat{c}_\kappa \varphi_{a_\kappa} \rangle}{\langle \varphi_{a_\kappa}, \varphi_{a_\kappa} \rangle} = \frac{\langle \hat{c}_\kappa \varphi_{a_\kappa}, \hat{c}_\kappa \varphi_{a_\kappa} \rangle}{\langle \varphi_{a_\kappa}, \varphi_{a_\kappa} \rangle} \geq 0. \quad (5.20)$$

Viimases teisenduses oleme arvestanud, et $\hat{c}_k^+$ on $\hat{c}_k$ kaasoperaator. Rakendame vektorile Φ_{a_k} operaatorit $\hat{c}_k$ ja tähistame $\hat{c}_k \Phi_{a_k} = \Phi_{a_k}^{(-1)}$. Analoogiliselt $\hat{c}_k^2 \Phi_{a_k} = \Phi_{a_k}^{(-2)}$, ..., $\hat{c}_k^n \Phi_{a_k} = \Phi_{a_k}^{(-n)}$.

Vahetuseeskirju (5.16) silmas pidades saame

$$\hat{A}_k \Phi_{a_k}^{(-1)} = \hat{c}_k^+ \hat{c}_k \hat{c}_k \Phi_{a_k} = \{\hat{c}_k \hat{c}_k^+ - 1\} \hat{c}_k \Phi_{a_k} =$$

$$= \hat{c}_k \{\hat{A}_k - 1\} \Phi_{a_k} = (a_k - 1) \Phi_{a_k}^{(-1)}.$$

Täieliku induktsiooni teel veendume, et

$$\hat{A}_k \Phi_{a_k}^{(-n)} = (a_k - n) \Phi_{a_k}^{(-n)}. \qquad (5.21)$$

$$(n = 1,2,3, \ldots)$$

Kui a_k ei oleks täisarv, saaksime seda protsessi jätkates operaatorile $\hat{A}_k$ negatiivsed omaväärtused, vasturääkivalt tulemusele (5.20). Kui aga $a_k = N_k$ (s.o. täisarv), siis $\hat{A}_k \Phi_{N_k}^{(-N_k)} = 0$ või $\hat{c}_k \Phi_{N_k}^{(-N_k)} = \Phi_{N_k}^{(-N_k-1)} = 0$ ning ka $\Phi_{N_k}^{(-N_k-2)} = \ldots = 0$ ja $\hat{A}_k$ negatiivsetele omaväärtustele vastavad olekud tegelikult ei eksisteeri. Kui omavektorile Φ_{N_k} rakendame korduvalt operaatorit $\hat{c}_k^+$, saame (valemini (5.21) viinud mõttekäike korrates) $\hat{A}_k$ omaväärtusteks mis tahes mittenegatiivsed täisarvud.

Näitame, et täisarve N_k võib tõlgendada väljaga seotud osakeste - välja kvantide - arvudena olekutes impulsiga $\vec{k}$. Kuna erinevatele $\vec{k}$ väärtustele vastavad operaatorid $\hat{c}_k^+ \hat{c}_k$ ja $\hat{c}_k \hat{c}_k^+$ kommuteeruvad, saame $\hat{P}_0$ ja $\hat{\vec{P}}$ omaväärtustena

$$E = \sum_{\vec{k}} \kappa_0 N_{\kappa} + \sum_{\vec{k}} \kappa_0 \,, \qquad (5.22a)$$

$$\vec{P} = \sum_{\vec{k}} \vec{\kappa} N_{\kappa} \,. \qquad (5.22b)$$

Niisiis koosneb välja koguenergia ja koguimpulss üksikute kvantide energiate ja impulsside summast. Kuna igas olekus võib olla mis tahes arv kvante, siis Klein-Gordoni võrrandit (5.1) rahuldava skalaarvälja kvantiseerimisel (kommutaatoritega (5.16)) saame välja kvantidele Bose-Einsteini statistika. Nagu hiljem näeme (vt. § 15), kehtib see kõikide tensortüüpi väljade korral.

4. Välja energia (5.22a) sisaldab peale mõistlikult interpreteeritavate liikmete veel hajuvat summat $E_0 = \sum_{\vec{k}} \kappa_0$. Seda nimet. välja vaakumenergiaks, sest vaakumolekus φ_0 , kus reaalsed kvandid puuduvad, $N_k = 0$ ja $\hat{P}_0 \varphi_0 = E_0 \varphi_0$.

Nõuame, et igas taustsüsteemis oleks vaakumi energia minimaalne. Seda tingimust on võimalik rahuldada ainult siis, kui vaakumoleku energia ja impulss on alati võrdsed nulliga. Et seda saada, paigutame kõikide füüsikaliste suuruste operaatorites (antud näites operaatorites $\hat{P}_0$ ja $\hat{\vec{P}}$) operaatorpotentsiaalide (operaatorite $\hat{c}_{\kappa}$ ja $\hat{c}^{+}_{\kappa}$) korrutised normaaljärjestusse. Definitsiooni kohaselt on normaaljärjestuses (normaalkorrutises) kõik kiirgumisoperaatorid $\hat{c}^{+}_{\kappa}$ neeldumisoperaatoritest $\hat{c}_{\kappa}$ vasakul.

Vaakumi mõiste ja operaatorite $\hat{c}_{\kappa}$ füüsikalise mõtte kohaselt

$$\hat{c}_{\kappa} \varphi_0 = 0 \qquad \text{või} \qquad \varphi_0^{*} \hat{c}^{+}_{\kappa} = 0 \qquad (5.23)$$

iga $\vec{k}$ korral. Seepärast osutuvad operaatorite*

---

* Rõhutame, et need operaatorid on hermiitilised, kuna $\langle \varphi_s, \hat{c}^{+}_{\kappa} \hat{c}_{\kappa} \varphi_r \rangle = \langle \hat{c}^{+}_{\kappa} \hat{c}_{\kappa} \varphi_s, \varphi_r \rangle$, kus φ_s, φ_r on suvalised olekuvektorid.

$$\hat{P}_0 = \sum_{\vec{k}} \kappa_0 \hat{c}^+_{\kappa} \hat{c}_{\kappa} = \sum_{\vec{k}} \kappa_0 \hat{A}_{\kappa} , \qquad (5.24a)$$

$$\hat{\vec{P}} = \sum_{\vec{k}} \vec{\kappa} \hat{c}^+_{\kappa} \hat{c}_{\kappa} = \sum_{\vec{k}} \vec{\kappa} \hat{A}_{\kappa} \qquad (5.24b)$$

vaakumväärtused nulliks.

Teeme kokkuvõtte vaadeldud reaalse skalaarvälja kvantiseerimise näitest.

1) Energeetilises mõttes käitub kvantiseeritud vaba väli osakeste kogumina, kus iga osakest iseloomustab impulss $\vec{k}$ ja mass m (energia $k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$).

2) Igas (vektoriga $\vec{k}$ määratud) olekus võib olla kui tahes palju osakesi - skalaarvälja kvandid alluvad Bose-Einsteini statistikale.

3) Kuna skalaarvälja spinn on igas olekus null (vt. valemile (3.13) järgnenud märkust), siis on ka skalaarvälja kvantide spinn null.

4) Vaakumolekus on kõik välja iseloomustavate füüsikaliste suuruste väärtused võrdsed nulliga.

5) Kirjeldatud füüsikalise pildi saame, kui väljapotentsiaalidele seame vastavusse operaatorid, mis välja olekuvektoritele mõjuvad kui kvandi kiirgumis- või neeldumisoperaatorid. Bosonitele omase statistika saame operaatorite kommutatsiooni-eeskirjade järeldusena. Vaakum omandab füüsikaliselt mõistliku käitumise, kui nõuame, et kõikide neeldumisoperaatorite mõju vaakumvektorile annaks nulli (väljas puuduvad kvandid, mis võiksid kaduda) ja kõikidele mõõdetavatele suurustele seame vastavusse normaaljärjestuses operaatorid.

Märgime veel, et kui Φ_{N_κ} on osakeste arvu operaatori $\hat{A}_k$ omaolek omaväärtusel N_k, siis ($\hat{A}_k$ definitsiooni ja vahetuseeskirjade (5.16) põhjal

$$\hat{c}^+_{\kappa} \hat{c}_{\kappa} \Phi_{N_\kappa} = N_\kappa \Phi_{N_\kappa} \; ; \quad \hat{c}_{\kappa} \hat{c}^+_{\kappa} \Phi_{N_\kappa} = (N_\kappa + 1) \Phi_{N_\kappa} . \qquad (5.25)$$

Neid tingimusi rahuldavad operaatorid $\hat{c}_\kappa$ ja $\hat{c}_\kappa^+$, mis normeeritud vektorile Φ_{N_κ} mõjuvad järgmiselt:

$$\hat{c}_\kappa \Phi_{N_\kappa} = \sqrt{N_\kappa}\, \Phi_{N_\kappa - 1} \,, \qquad \hat{c}_\kappa^+ \Phi_{N_\kappa} = \sqrt{N_\kappa + 1}\, \Phi_{N_\kappa + 1} \,. \tag{5.26}$$

5. Peatume lühidalt <u>kompleksse skalaarvälja</u> kvantteoorial. Kuna antud juhul $\varphi^*(x) \neq \varphi(x)$, saame variatsioonprintsiibist (potentsiaalide $\varphi(x)$ ja $\varphi^*(x)$ variatsioonide sõltumatust arvestades) kaks Klein-Gordoni võrrandit:

$$(\Box - m^2)\, \varphi(x) = 0 \,, \tag{5.27a}$$

$$(\Box - m^2)\, \varphi^*(x) = 0 \,, \tag{5.27b}$$

kui lagranžiaani L valime kujul

$$L = -\{\varphi^*_{,\mu}\, \varphi_{,\mu} + m^2 \varphi^* \varphi\} \,. \tag{5.28}$$

Võrrandite (5.27) lahendid võime jälle esitada tasalainete summana

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{\kappa}} \frac{1}{\sqrt{2\kappa_0}} \{a_\kappa e^{i\kappa x} + b_\kappa^* e^{-i\kappa x}\}, \tag{5.29a}$$

$$\varphi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{\kappa}} \frac{1}{\sqrt{2\kappa_0}} \{b_\kappa e^{i\kappa x} + a_\kappa^* e^{-i\kappa x}\} \,, \tag{5.29b}$$

kus a_κ ja a_κ^* on kaaskompleksid ning samuti b_κ ja b_κ^*. Kvantiseerimine toimub täpselt samuti nagu reaalse välja korral: arvud a_κ, a_κ^*, b_κ ja b_κ^* asendame vastavalt operaatoritega $\hat{a}_\kappa$, $\hat{a}_\kappa^+$, $\hat{b}_\kappa$ ja $\hat{b}_\kappa^+$, kus $\hat{a}_\kappa$ ja $\hat{a}_\kappa^+$ ning $\hat{b}_\kappa$ ja $\hat{b}_\kappa^+$ on omavahel kaasoperaa-

torid. Välja energiaoperaatorile saame avaldise

$$\hat{P}_0 = \sum_{\kappa} \kappa_0 \{ \hat{a}_\kappa^+ \hat{a}_\kappa + \hat{b}_\kappa^+ \hat{b}_\kappa \}. \qquad (5.30)$$

Korrates valemite (5.16, 18) tuletamisel kasutatud mõttekäike, veendume, et operaatorid $\hat{a}_\kappa^+$, $\hat{b}_\kappa^+$ toimivad osakeste tekkeoperaatoritena $\hat{a}_\kappa$, $\hat{b}_\kappa$, aga kvantide neeldumisoperaatoritena. Näeme, et kompleksne väli sisaldab kahte liiki kvante, mida kirjeldavad operaatorid $\hat{a}_\kappa$, $\hat{a}_\kappa^+$ ja $\hat{b}_\kappa$, $\hat{b}_\kappa^+$ üksteisega kommuteeruvad, s.t.

$$[\hat{a}_\kappa, \hat{b}_{\kappa'}] = [\hat{a}_\kappa^+, \hat{b}_{\kappa'}^+] = [\hat{a}_\kappa, \hat{b}_{\kappa'}^+] = [\hat{a}_\kappa^+, \hat{b}_{\kappa'}] = 0 ,$$

$$[\hat{a}_\kappa, \hat{a}_{\kappa'}^+] = \delta_{\kappa,\kappa'} \; ; \quad [\hat{b}_\kappa, \hat{b}_{\kappa'}^+] = \delta_{\kappa,\kappa'} . \qquad (5.31)$$

Mõlemat liiki kvandid alluvad Bose-Ensteini statistikale ja käituvad välja energeetilises pildis ühtemoodi. Osutub, et nad erinevad laengu märgi poolest. Veendume selles.

Kasutades kvantiseerimata välja laengu Q avaldist (3.19), lagranžiaani (5.28) ja potentsiaalide arendusi (5.29), arvutame (samal meetodil, angu arvutasime (5.10)) kompleksse skalaarvälja laengu

$$\hat{Q} = e \sum_{\kappa} \{ \hat{b}_\kappa^+ \hat{b}_\kappa - \hat{a}_\kappa^+ \hat{a}_\kappa \}. \qquad (5.32)$$

Siin oleme c-arvud juba asendanud operaatoritega normaaljärjestuses. Olgu Φ_q operaatori $\hat{Q}$ omavektor, mis vastab omaväärtusele q

$$\hat{Q} \Phi_q = q \Phi_q . \qquad (5.33)$$

Defineerime olekuvektorid

$$\Phi_q^{(1)} = \hat{a}_\kappa \Phi_q \; ; \quad \Phi_q^{(2)} = \hat{a}_\kappa^+ \Phi_q \; ;$$

$$\Phi_q^{(3)} = \hat{b}_\kappa \Phi_q \; ; \quad \Phi_q^{(4)} = \hat{b}_\kappa^+ \Phi_q \qquad (5.34)$$

ja näitame, et ka need on $\hat{Q}$ omavektorid. Tõepoolest, vahetuseeskirju (5.31) silmas pidades saame

$$\hat{Q}\Phi_q^{(1)} = \hat{a}_\kappa \hat{Q}\Phi_q - e\sum_{\kappa'} [\hat{a}^+_{\kappa'}\hat{a}_{\kappa'}, \hat{a}_\kappa]\Phi_q =$$

$$= \hat{a}_\kappa q \Phi_q + e\hat{a}_\kappa \Phi_q = (q+e)\Phi_q^{(1)}. \qquad (5.35)$$

Analoogiliselt

$$\hat{Q}\Phi_q^{(2)} = (q-e)\Phi_q^{(2)},$$

$$\hat{Q}\Phi_q^{(3)} = (q-e)\Phi_q^{(3)}, \qquad (5.35')$$

$$\hat{Q}\Phi_q^{(4)} = (q+e)\Phi_q^{(4)}.$$

Valemitest (5.34 - 35') järeldame, et kui operaator $\hat{b}^+_\kappa$ ($\hat{b}_\kappa$) kirjeldab kvandi tekkimist (kadumist) laenguga e, siis operaator $\hat{a}^+_\kappa$ ($\hat{a}_\kappa$) kirjeldab kvandi tekkimist (kadumist) laenguga -e. Seega käitub komplekssе skalaarpotentsiaaliga kvantväli kahte liiki, nimelt erineva laengumärgiga osakeste kogumina.

6. Seni oleme füüsikalise pildi ülevaatlikkuse huvides oletanud, et väli eksisteerib lõplikus ruumalas V, see võimaldas esitada huvipakkuvaid suurusi summadena. Kui läheme üle lõpmatule ruumalale, siis summad asenduvad integraalidega ning Kroneckeri sümbolid vahetuseeskirjades (5.16, 31) δ-funktsioonidega. Operaatorid $\hat{c}^+_\kappa\ \hat{c}_\kappa$ (kompleksse välja korral vastavalt $\hat{a}^+_\kappa\ \hat{a}_\kappa$ ja $\hat{b}^+_\kappa\ \hat{b}_\kappa$) on siis tõlgendatavad osakeste tiheduse operaatoritena impulsi $\vec{k}$ ühikintervalli kohta.

Operaatoramplituudide arenduste (5.13) ja (5.29) abil (kui viimases c-arvud a(k), $a^*(k)$, b(k), $b^*(k)$ asendada operaatoritega), arvestades vahetuseeskirju (5.16, 31), võime leida operaatorpotentsiaalide $\hat{\varphi}(x)$, $\hat{\varphi}^+(x')$ kommutaato-

rid. Vahetu arvutus annab*.

$$[\hat{\varphi}(x), \hat{\varphi}^{+}(x')] = -i\Delta(x-x'), \qquad (5.36)$$

kus $\Delta(x-x')$ on Jordan-Pauli vahetusfunktsioon, mille kuju ja omadused on esitatud lisas A. Märgiksime siin vaid seda, et $\Delta(x)$ on Klein-Gordoni võrrandi invariantne erilahend (kooskõlas (5.36) vasaku poolega). $\Delta(x-x')$ on identselt null, kui argumentide x, x' vahel on ruumisarnane intervall, ja δ-singulaarne valguskoonusel. Järelikult on nii vahetuseeskirjad (5.36) kui ka operaatorpotentsiaalid $\hat{\varphi}(x)$ korrektse matemaatilise mõttega üksnes üldistatud funktsioonide tähenduses (vt. § 10).

Nagu nägime, on skalaarvälja kvandid nullist erineva seisumassiga osakesed, mille spinn on null. Teiselt poolt on aga niisuguste omadustega mesonid. Seepärast nimet. vaadeldud reaalset (kompleksset) välja neutraalseks (laetud) mesonväljaks.

§ 6. Elektron-positronväli. Dirac'i võrrand.

1. Selleks et rakendada kvantväljateooria põhiideed (mille kohaselt kõik osakesed on vaadeldavad mõnesuguse välja kvantidena) elektronide ja positronide kirjeldamiseks, peame esmalt postuleerima võrrandi, mida rahuldaksid vastava välja potentsiaalid kui aeg-ruumi punkti funktsioonid. Kuna vastav kvantiseerimata välja teooria puudub, toimitakse järgmiselt (vt. näit. [4]). Lähtutakse kvantmehaanilisest võrrandist relativistliku elektroni lainefunktsioonile, arvestades, et muutumatu osakeste arvu korral võib väljateooria asendada kvantmehaanikaga. Kui kvantmehaanilise mitme keha probleemi formuleerimisel

---

* Reaalse potentsiaaliga välja korral $\hat{\varphi}^{+}(x) = \hat{\varphi}(x)$, s.t. operaatorpotentsiaal on enesekaasne.

siirduda koordinaatesituselt täitearvude esitusele nn. sekundaarse kvantiseerimise protseduuriga (vt. näit. [3] pt. 6,7), osutuvad individuaalseid osakesi kirjeldavate lainefunktsioonide kordajad nimetatud esituses operaatoriteks, mis mõjuvad osakeste arvu (antud olekus) suurendavalt või vähendavalt. Eelmise punkti näite põhjal võime väita, et need operaatorid toimivad samuti nagu operaatorpotentsiaalide arenduse kordajad kvantiseeritud väljas. Sellepärast on mõistlik postuleerida, et antud osakestele vastava välja potentsiaali komponendid rahuldavad samasuguseid võrrandeid nagu osakese lainefunktsiooni komponendid. Relativistliku elektroni korral on selleks võrrandiks Dirac'i võrrand

$$(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\frac{\partial \psi_\beta}{\partial x_\mu} + m\psi_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1,\dots,4) \qquad \text{või} \qquad \gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} + m\psi = 0. \quad (6.1)$$

Siin γ_μ on 4-rea-veerulised Dirac'i maatriksid ja m – elektronimass, ψ on 4-komponendiline Dirac'i spiinor (õigemini bispiinor Lorentzi ortokroonsete teisenduste rühma esituste klassifikatsiooni järgi (vt. näit. [11] II osa § 5)). Meenutame Dirac'i maatriksite ja võrrandi (6.1) lahendite omadusi (vt. näit. [1,4]).

Kvantmehaanikas vastab osakese 4-impulsile p_μ teatavasti operaator $-i\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ ($\mu = 1,2,3,4$). Seosest osakese energia ja impulsi vahel $p_\mu p_\mu \equiv \vec{p}^2 - p_0^2 = -m^2$ saame p_μ asendamisel operaatoriga $-i\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ nn. Klein-Gordoni tingimuse

$$(\Box - m^2)\psi_\alpha = 0 \quad , \qquad (\alpha = 1,\dots,4) \qquad (6.2)$$

mida peavad rahuldama iga relativistliku osakese lainefunktsiooni (vastavas väljateoorias - väljapotentsiaali) kompo-

nendid. Võrrand (6.1) ja tingimused (6.2) on omavahel kooskõlas, kui maatriksid γ_μ täidavad antikommutatsioonieeskirju*

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \cdot \qquad (6.3)$$
$$(\mu,\nu = 1,\ldots,4)$$

(Tuletage tingimused (6.3)! Selleks korrutage (6.1) vasak pool operaatoriga $-\gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + m$ ja taotlege, et saadud II järku võrrandil oleks kuju (6.2)).

Tingimustega (6.3) on maatriksid γ_μ määratud sarnasusteisenduse täpsuseni. Tõepoolest, kui defineerime maatriksid γ'_μ

$$\gamma'_\mu = U \gamma_\mu U^{-1}, \qquad (6.4)$$

kus U on suvaline mittesingulaarne maatriks, saame vahetu arvutusega kontrollida, et γ'_μ rahuldavad tingimusi (6.3), kui neid rahuldavad γ_μ. Sellepärast võib kasutada mitmesuguseid γ_μ esitusi. Neist levinuim on esitus hermiitiliste maatriksitega

$$\gamma_0 \equiv \gamma_4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}; \quad \gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_k \\ i\sigma_k & 0 \end{pmatrix}. \qquad (6.5)$$
$$(k = 1,2,3)$$

Neis, formaalselt (2 x 2)-maatriksites tuleb iga elemendina mõista omakorda (2 x 2)-maatriksit: 0 on 2-rea-veeruline nullmaatriks, I 2-rea-veeruline ühikmaatriks ja σ_k (k = 1,2,3) - kaherea- ja -veerulised Pauli spinnmaatriksid,

---

* Võrduse (6.3) parem pool on korrutatud (4 x 4)-ühikmaatriksiga (samuti nagu konstant m valemis (6.1)). Maatriksitega opereerides jäetakse ühikmaatriks reeglina kirjutamata (analoogiliselt arvuga 1), kuid ei tohi unustada, et maatriksite korrutis on jälle maatriks.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (6.6)$$

Iga muu esitus hermiitiliste maatriksitega on unitaarteisenduse abil **seotud esitusega (6.5). Edaspidi loeme maatrikseid** γ_μ kõikjal hermiitilisteks, s.t. loeme täidetuks tingimuse

$$\gamma_\mu^+ = \gamma_\mu . \qquad (\mu = 1,2,3,4) \qquad (6.7)$$

2. Vaatleme võrrandi (6.1) lahendeid, mis vastavad osakese kindlale impulsile $\vec{p}$. Kuna impulss määrab ka vaba osakese energia (vastavad operaatorid kommuteeruvad), otsime mainitud lahendeid tasalainetena

$$\psi(x) = \varphi(\vec{p})\, e^{i(\vec{p}\vec{r} - \omega x_0)} . \qquad (6.8)$$

Kui selle paigutame võrrandisse (6.1), saame $\varphi(\vec{p})$ komponentide määramiseks homogeense võrrandsüsteemi

$$[i(\gamma_k p_k) - \gamma_0 \omega + m]\varphi(\vec{p}) = 0 , \qquad (6.9)$$

Selle lahenduvuse tingimus $\det\{i\gamma_k p_k - \gamma_0 \omega + m\} = 0$ ei sõltu γ -maatriksite kujust, sest det (γ_μ) = = det ($U\ \gamma_\mu\ U^{-1}$). Kasutades näit. maatrikseid (6.5), saame

$$\omega^2 = \vec{p}^2 + m^2 ; \quad \omega = \pm p_0 ; \quad p_0 = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} . \qquad (6.10)$$

Kui tähistame "positiivsele sagedusele" ($\omega = p_0$) vastava spiinori $u(\vec{p})$ ja "negatiivsele sagedusele" ($\omega = -p_0$) vastava $v(\vec{p})$, siis nad rahuldavad võrrandeid

$$(i\gamma_\mu p_\mu + m)\,u(\vec{p}) = 0 \quad \text{ehk} \quad (i\hat{p} + m)\,u(\vec{p}) = 0, \tag{6.11a}$$

$$(i\gamma_\mu p_\mu - m)\,v(-\vec{p}) = 0 \quad \text{ehk} \quad (i\hat{p} - m)\,v(-\vec{p}) = 0. \tag{6.11b}$$

(Siin oleme tähistanud $\gamma_\mu p_\mu \equiv \hat{p}$. Mitte ära segada operaatori märgiga ^ !)

Näitame, et võrrandeil (6.11) on kaks sõltumatut lahendit. Need võime valida spiraalsuse operaatori (spinni impulsisuunalise komponendi) omafunktsioonidena. Arvestades spiraalsuse füüsikalist mõtet ja elektroni spinnoperaatorite kuju (val. (6.34)), defineerime spiraalsuse operaatori $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{K} = \frac{-i}{4|\vec{p}|}\,\varepsilon_{\kappa\ell m}\gamma_\kappa\gamma_\ell p_m , \tag{6.12}$$

kus $\varepsilon_{\kappa\ell m}$ on täielikult antisümmeetriline ühiktensor. Vahetu arvutus näitab (kontrollige, kasutades γ -maatriksite omadusi!), et operaatorid $\mathcal{K}$ ja $\hat{p}$ kommuteeruvad ($\hat{p} = \gamma_\mu p_\mu$). Järelikult võime (6.11) lahenditeks valida omaväärtusvõrrandite

$$\mathcal{K}\,u(\vec{p}) = \lambda\,u(\vec{p}) \quad \text{või} \quad \mathcal{K}\,v(-\vec{p}) = \lambda\,v(-\vec{p}) \tag{6.13}$$

lahendid (või nende suvalised lineaarkombinatsioonid). Võrrandite (6.13) lahenduvustingimusest

$$\det\left\{\frac{-i}{4|\vec{p}|}\,\varepsilon_{\kappa\ell m}\gamma_\kappa\gamma_\ell p_m - \lambda I\right\} = 0$$

saame kaks λ väärtust: $\lambda_1 = +1/2$, $\lambda_2 = -1/2$, s.t. elektroni liikumissuunalisel spinni projektsioonil on kas väärtus + 1/2 või - 1/2. Tähistame $\mathcal{K}$ omafunktsioone

$u^r(\vec{p})$ või $v^r(\vec{p})$ ($r = 1,2$) ja nimetame polarisatsiooniseisundile r vastavateks lahenditeks.

Kasutades spiinorite $u^r(\vec{p})$ ja $v^r(\vec{p})$ (või $v^r(-\vec{p})$) omadusi määravaid võrrandeid (6.11, 13), saame tuletada järgmised kasulikud valemid (tuletuskäiku vt. lisas C):

$$\sum_{\alpha=1}^{4} u_\alpha^r(\vec{p}) \left[v_\alpha^s(\vec{p}) \right]^* = 0 , \qquad (6.14)$$

(r,s - suvalised)

mis väljendab erinevamärgilistele energia (ω) omaväärtustele vastavate lahendite ortogonaalsust;

$$\sum_{\alpha=1}^{4} u_\alpha^r(\vec{p}) \left[u_\alpha^s(\vec{p}) \right]^* = \delta_{rs} , \qquad (6.15a)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{4} v_\alpha^r(\vec{p}) \left[v_\alpha^s(\vec{p}) \right]^* = \delta_{rs} , \qquad (6.15b)$$

mis väljendavad erinevale spiraalsusele vastavate lahendite ortogonaalsust ja normeeritust;

$$\sum_{r=1}^{2} u_\alpha^r(\vec{p})\, \bar{u}_\beta^r(\vec{p}) = \frac{(m - i\hat{p})_{\alpha\beta}}{2p_0} ,$$

kus $\bar{u}_\beta^r(\vec{p}) \equiv \left[u_\delta^r(\vec{p}) \right]^* (\gamma_4)_{\delta\beta}$, (6.16a)

$$\sum_{r=1}^{2} v_\alpha^r(-\vec{p})\, \bar{v}_\beta^r(-\vec{p}) = -\frac{(m + i\hat{p})_{\alpha\beta}}{2p_0} ,$$

kus $\bar{v}_\beta^r(-\vec{p}) \equiv \left[v_\delta^r(-\vec{p}) \right]^* (\gamma_4)_{\delta\beta}$. (6.16b)

Kui oletame, et elektron ei viibi puhtas polarisatsi-

ooniolekus, vaid võrdse tõenäosusega w nii olekus r = 1 kui ka r = 2 (s.t. w = 1/2), siis valem (6.16a) (korrutatud teguriga 1/2) annab vastava segaoleku tihedusmaatriksi, mida nimetatakse (juhul, kui olekuid liigitatakse polarisatsiooni järgi) polarisatsioonimaatriksiks. Valemiga (6.16b) on seotud täielikult polariseerimata positronide polarisatsioonimaatriks (vt. [1] § 9). Seoste (6.16) paremates pooltes sisalduvad maatriksid on üksikasjalikumas tähistuses järgmised:

$$(m \pm i\hat{p})_{\alpha\beta} \equiv m\delta_{\alpha\beta} \pm i\,(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\, p_\mu \,.$$
$$(\alpha, \beta = 1, \ldots, 4)$$

3. Tuleme tagasi võrrandi (6.1) lahendite juurde. Nagu valemile (6.8) järgnenud arutlustest selgus, vastab osakese kindlale impulsile $\vec{p}$ 4 sõltumatut erilahendit:

$$u^{r}(\vec{p})\, e^{i(\vec{p}\vec{x} - p_0 x_0)} \quad \text{ja} \quad v^{r}(\vec{p})\, e^{i(\vec{p}\vec{x} + p_0 x_0)}$$

(r = 1,2). Võrrandi (6.1) üldlahend avaldub nende lineaarkombinatsioonina[*]

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \sum_{r=1}^{2} \left\{ a_r(p)\, u^{r}(\vec{p}) e^{ipx} + b_r^{+}(p)\, v^{r}(\vec{p}) e^{-ipx} \right\}, \quad (6.17)$$

kus $a_r(p)$, $b_r^{+}(p)$ on omavahel sõltumatud korda-jad.

Defineerime $\psi(x)$ kaasfunktsiooni $\bar{\psi}(x)$:

$$\bar{\psi}(x) = \psi^{+}(x)\gamma_4 \quad \text{s.t.} \quad \bar{\psi}_\alpha(x) = \psi_\beta^{*}(\gamma_4)_{\beta\alpha} \quad (6.18)$$

---

[*] Vrd. võrrandi (5.1) üldlahendi (5.7) moodustamist. Ka siin oletame esialgu lihtsustuseks, et võrrandi (6.1) lahend on määratud lõplikus piirkonnas ruumalaga V.

mis rahuldab võrrandit

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\mu}\gamma_\mu - m\bar{\psi} = 0 . \qquad (6.19)$$

(Tuletage see, lähtudes $\bar{\psi}(x)$ definitsioonist, võrrandist (6.1) ja γ-maatriksite omadustest!)

Valemitest (6.17, 18) saame

$$\bar{\psi}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{p}}\sum_{\lambda=1}^{2}\{a_\lambda^+(p)\bar{u}^\lambda(\vec{p})e^{-ipx} + b_\lambda(p)\bar{v}^\lambda(-\vec{p})e^{ipx}\}, \qquad (6.20)$$

kus $a_\lambda(p)$ ja $a_\lambda^+(p)$ ning $b_\lambda(p)$ ja $b_\lambda^+(p)$ on teineteise suhtes vastavalt kaaskomplekssed. Spiinorid $\bar{u}^\lambda(\vec{p})$ ja $\bar{v}^\lambda(-\vec{p})$ on defineeritud valemites (6.16).

Spiinori $\psi(x)$ ja tema kaasspiinori $\bar{\psi}(x)$ bilineaarkombinatsioonide abil saab moodustada tensortüüpi suurusi. Et selles veenduda, leiame nende teisenemiseskirjad Lorentzi teisendustel.

Lähtume Dirac'i võrrandi koovariantsuse nõudest. Olgu antud teisendus $x_\mu \to x'_\mu$,

$$x'_\mu = \Lambda_{\mu\nu}x_\nu \quad , \qquad x_\rho = \Lambda_{\mu\rho}x'_\mu \quad , \qquad (6.21)$$

kus Λ on Lorentzi teisendusmaatriks, mis rahuldab tingimusi

$$\{\det\Lambda\}^2 = 1 \quad , \quad \Lambda_{\mu\nu}\Lambda_{\mu\rho} = \delta_{\nu\rho} \quad , \quad \Lambda_{\mu\rho}\Lambda_{\nu\rho} = \delta_{\mu\nu} \qquad (6.22)$$

Teisenegu funktsioon $\psi(x)$ funktsiooniks $\psi'(x')$, nii et $\psi'(x') = S\,\psi(x)$ või komponentides

$$\psi'_\alpha(x') = S_{\alpha\beta}\psi_\beta(x). \qquad (6.23)$$

Nõuame, et $\psi'(x')$ rahuldaks samuti võrrandit (6.1), s.t.

$$\gamma_\mu \frac{\partial \psi'(x')}{\partial x'_\mu} + m\psi'(x') = 0 . \qquad (6.1')$$

Valemeid (6.21 - 23) arvestades saame siis

$$\gamma_\mu \frac{\partial \psi'(x')}{\partial x'_\mu} + m\psi'(x') = \gamma_\mu S \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_\varrho} \frac{\partial x_\varrho}{\partial x'_\mu} + mS\psi(x) = \gamma_\mu \Lambda_{\mu\varrho} S \frac{\partial \psi}{\partial x_\varrho} + mS\psi = 0,$$

$$S^{-1}\gamma_\mu \Lambda_{\mu\varrho} S \frac{\partial \psi}{\partial x_\varrho} + m\psi = 0 .$$

Selleks et see langeks kokku esialgse valemiga (6.1), peavad kehtima tingimused

$$S^{-1}\gamma_\mu \Lambda_{\mu\varrho} S = \gamma_\varrho , \qquad \Lambda_{\mu\varrho}\gamma_\varrho = S^{-1}\gamma_\mu S , \qquad (6.24)$$

millest saamegi määrata teisendusmaatriksi S.

Leiame $\bar{\psi}(x)$ teisenemiseeskirja kooskõlas valemiga (6.18)

$$\bar{\psi}'(x') = \psi'^{+}(x')\gamma_4 . \qquad (6.18')$$

Kuna $\psi'^{+}(x') = \psi^{+}(x)S^{+} = \bar{\psi}(x)\gamma_4 S^{+}$, saame $\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)\gamma_4 S^{+}\gamma_4$ või seose $\gamma_4 S^{+}\gamma_4 = S^{-1}$ tõttu (vt. lisa C)

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) S^{-1} . \qquad (6.25)$$

Valemeist (6.23 - 25) on näha, et ψ ja $\bar{\psi}$ bilineaarsetest kombinatsioonidest saab moodustada skalaare (s), 4-vektoreid (v_μ), teist järku antisümmeetrilisi tensoreid ($t_{\mu\nu}$), pseudovektoreid (a_μ), pseudoskalaare (p) jne. (Lorentzi ortokroonse rühma* suhtes) :

---

* Meenutame, et Lorentzi ortokroonne rühm säilitab ajakoordinaadi märgi ($\Lambda_{44} \geq 1$), kuid sisaldab peale Lorentzi päristeisenduste (3-ruumi pöörete ja üleminekute ühest inertsiaalsüsteemist teise) veel peegeldusi 3-ruumis.

$$s = \bar{\psi}\psi \quad , \quad v_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi \quad , \quad t_{\mu\nu} = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\psi \quad , \quad (\mu \neq \nu);$$

(6.26)

$$p = \bar{\psi}\gamma_5\psi \quad , \quad a_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi \quad , \text{ kus } \gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 \text{ jne.}$$

Veendume selles, et valemi (6.25) viimases reas on tõepoolest pseudotensorid. Selleks leiame maatriksi S, mis vastab 3-ruumi peegeldustele. Siis

$$\Lambda_{\mu\varrho} = \begin{cases} \delta_{\mu\varrho} & , \text{ kui } \mu = 4 \\ -\delta_{\mu\varrho} & , \text{ kui } \mu = m \ . \ (m = 1,2,3) \end{cases}$$

Järelikult peegelduste korral saame valemitest (6.24):

$$\mu = 4 \ : \quad \gamma_4 = S^{-1}\gamma_4 S \quad \text{või} \quad S\gamma_4 = \gamma_4 S \ ,$$

$$\mu = m \ : \quad -\gamma_m = S^{-1}\gamma_m S \quad \text{või} \quad S\gamma_m = -\gamma_m S \ .$$

Need seosed on rahuldatud, kui

$$S = \xi\gamma_4 \ . \qquad (6.27)$$

Seos $\gamma_4 S^+ \gamma_4 = S^{-1}$ asetab konstandile ξ tingimuse $\xi^* = \frac{1}{\xi}$, mis on rahuldatud, kui

$$\xi = \pm 1 \ , \ \pm i \ . \qquad (6.28)$$

Valemit (6.27) silmas pidades võib veenduda, et näit. $p = \bar{\psi}\gamma_5\psi$ muudab peegeldustel märki, s.t. käitub pseudoskalaarina, $a_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$ aga pseudovektorina.

Märgime, et kui kordame eeltoodud arutlust aja peegelduste korral,

$$\Lambda_{\mu\varrho} = \begin{cases} -\delta_{\mu\varrho} \ , \text{ kui } \mu = 4, \\ \delta_{\mu\varrho} \quad \text{kui } \mu = m, \ (m = 1,2,3) \end{cases}$$

siis vastav

$$S = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \,. \qquad (6.29)$$

Valemitest (6.27, 29) järeldame, et <u>aeg-ruumi inversioonile</u> ($x' = -x$) vastab Dirac'i spiinorite teisendus

$$\psi'(x') = \psi'(-x) = S\,\psi(x) \,, \text{ kus } S = \xi\,\gamma_5 \,. \qquad (6.30)$$

4. <u>Elektroni spinni operaatorid</u> Σ_m ($m = 1,2,3$) toimivad (kvantmehaanikast tuntud reegli järgi) kui 3-ruumi pöörete infinitesimaaloperaatorid ψ -de ruumis.

Lõpmata väikesele pöördele tasandis (i,k) vastab Lorentzi teisendusmaatriks $\Lambda_{ik} = \delta_{ik} + \delta\omega_{ik}$ koordinaatide ruumis (vrd. val. (3.8)) ja unitaarne* maatriks S ψ -de ruumis:

$$S = I - \frac{i}{2}\,\delta\omega_{ik}\,T_{ik} \,, \qquad T_{ik} = -T_{ki} \,, \qquad (6.31)$$

kus T_{ik} on otsitavad hermiitilised operaatorid, mis avalduvad γ -maatriksite kaudu. Kui maatriksid Λ ja S paigutame seostesse (6.24) ning arvestame liikmeid suuruste $\delta\omega_{ik}$ esimese astme täpsuseni, saame ($\delta\omega_{ik}$ antisümmeetria ja suvalisuse tõttu)

$$(\delta_{im}\gamma_k - \delta_{km}\gamma_i) = i\,[T_{ik}, \gamma_m] \,. \qquad (6.32)$$

Need tingimused on rahuldatud, kui**

---

* Meenutame, et pööreterühma kõik esitused on ekvivalentsed unitaarsete esitustega. Antud juhul $\Lambda_{4\varphi} = \delta_{4\varphi}$.

** Tegelikult on T_{ik} määratud kõikide γ -dega kommuteeruva maatriksi täpsuseni, ent see suvalisus taandub ψ faasi suvalisusele (vt. [4] lk. 52).

$$T_{ik} = \frac{i}{4}(\gamma_i\gamma_k - \gamma_k\gamma_i) \qquad (i \neq k). \qquad (6.33)$$

Ruumi pöördele ümber (x_m)-telje nurga $\delta\varphi_m$ võrra, kus $\delta\varphi_m = \frac{1}{2}\varepsilon_{ikm}\delta\omega_{ik}$, vastab operaator

$$\Sigma_m = \frac{1}{2}\varepsilon_{mkl}T_{kl}, \qquad (m = 1,2,3) \qquad (6.34)$$

mida tõlgendamegi elektroni spinni operaatorina. Valemeist (6.33, 34)

$$\Sigma_m = \frac{i}{4}\varepsilon_{mkl}\gamma_k\gamma_l. \qquad (m = 1,2,3) \qquad (6.35)$$

Operaatorite Σ_m omaväärtusprobleemi

$$\Sigma_m\psi_{\sigma m} = \sigma_m\psi_{\sigma m}; \qquad \det\{\Sigma_m - \sigma_m I\} = 0$$

lahendamine konkreetsete γ -maatriksitega (näit. kujul (6.5)) annab oodatud tulemuse $\sigma_m = \pm 1/2$ iga komponendi m korral.

Infinitesimaaloperaatoritega Σ_m on määratud ka lõplikule pöördenurgale φ_m vastav maatriks $S(\varphi_m)$

$$S(\varphi_m) = \exp[-i\varphi_m\Sigma_m] = \exp\left[\frac{\varphi_m}{4}\varepsilon_{mkl}\gamma_k\gamma_l\right]. \qquad (6.36)$$

Kui näit. m = 3, saame

$$S(\varphi_3) = \exp\left[\frac{\varphi_3}{4}\varepsilon_{3kl}\gamma_k\gamma_l\right] = \exp\left[\frac{\varphi_3}{2}\gamma_1\gamma_2\right]. \qquad (6.36')$$

γ -maatriksite omadustest (6.3) järgneb, et $(\gamma_1\gamma_2)^2 = -I$. Seega $(\gamma_1\gamma_2)^{2n+1} = (-1)^n\gamma_1\gamma_2$ ja $(\gamma_1\gamma_2)^{2n} = (-1)^n I$. Järelikult

$$S(\varphi_3) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\varphi_3}{2}\gamma_1\gamma_2\right)^n = I\cos\frac{\varphi_3}{2} + \gamma_1\gamma_2 \sin\frac{\varphi_3}{2}. \quad (6.36'')$$

Kui teostame füüsikalises mõttes identsusteisenduse, võttes $\varphi_3 = 2\pi$, saame $S(2\pi) = -I$ ja $\psi(x) \to -\psi(x)$. See näitab, et Dirac'i võrrandi lahendid (nagu spiinorid üldse) on igas aeg-ruumi punktis (x) määratud ainult märgi täpsuseni. Sellepärast ei saa ψ -dest lineaarselt sõltuvate avaldistega kirjeldada füüsikaliselt mõõdetavaid suurusi. Küll aga saab neid kirjeldada (6.26) tüüpi bilineaarsete kombinatsioonidega.

§ 7. Elektron-positronväli. Lagrange'i formalism ja kvantiseerimine.

Eelmise paragrahvi alguses esitatud kaalutlustel tõlgendame nüüd võrrandeid (6.1, 19) elektron-positronvälja (vahel ka Dirac'i väljaks nimetatud) võrranditena ning leiame lagranžiaani L, mille kaudu need avalduksid kui Euler-Lagrange'i võrrandid (1.7). Seejärel tuletame välja energia ja laengu valemid ning vaatleme operaatorpotentsiaalide omadusi.

1. Otsene arvutus näitab (vrd. (1.7)), et välja võrrandid

$$\gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} + m\psi = 0 \quad (6.1)$$

ja

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\mu}\gamma_\mu - m\bar{\psi} = 0 \quad (6.19)$$

on variatsioonprintsiibil tuletatavad invariantsest lagranžiaanist

$$L = -\frac{1}{2}\left(\bar{\psi}\gamma_\nu \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\nu}\gamma_\nu \psi\right) - m\bar{\psi}\psi , \qquad (7.1)$$

kui arvestada variatsioonide $\delta\psi$ ja $\delta\bar{\psi}$ sõltumatust.

Vastavalt eeskirjale (3.4) leiame välja energia-impulss-tensori

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\bar{\psi}\gamma_\nu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\mu}\gamma_\nu \psi\right) \qquad (7.2)$$

ja koguenergia*

$$P_0 = -\int T_{44}\, d^3x = \frac{1}{2i}\int\left[-\psi^+\frac{\partial \psi}{\partial x_0} + \frac{\partial \psi^+}{\partial x_0}\psi\right] d^3x . \qquad (7.3)$$

Välja vooluvektorile j_μ ja kogulaengule Q saame valemite (3.18, 19) põhjal kuju

$$j_\mu = ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi , \qquad (7.4)$$

$$Q = -i\int j_4\, d^3x = e\int \psi^+\psi\, d^3x . \qquad (7.5)$$

Märgiksime veel, et välja spinni komponendid $S_{[rs]}$ on valemitest (3.13, 16) ja (6.31, 33), (7.1) arvutatavad kui integraalid

$$S_{[rs]} = -i\int S_{4[rs]}\, d^3x = -i\int\left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{,4}} F_{[rs]} + \bar{F}_{[rs]}\frac{\partial L}{\partial \bar{\psi}_{,4}}\right) d^3x , \qquad (7.6)$$

kus

$$F_{[rs]} = -\frac{1}{2}\gamma_r\gamma_s\psi \; ; \quad \bar{F}_{[rs]} = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma_r\gamma_s .$$

$$\Sigma_m = \frac{1}{2}\varepsilon_{mrs}S_{[rs]} = \int \psi^+(x)\left[-\frac{i}{4}\varepsilon_{mrs}\gamma_r\gamma_s\right]\psi(x)\, d^3x \qquad (7.7)$$

---

* $\psi^+\psi \equiv \sum_{\alpha=1}^{4}\psi_\alpha^*\psi_\alpha \; ; \quad \psi^+\frac{\partial\psi}{\partial x_0} \equiv \sum_{\alpha=1}^{4}\psi_\alpha^*\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x_0} \; ; \ldots$

TRÜ Raamatukogu

langevad kujult kokku elektroni spinnoperaatori (6.35) kvantmehaanilise keskväärtusega, kui ψ tõlgendada osakese lainefunktsioonina.

Selleks et arvutada suurusi P_0 ja Q, kasutame arendusi (6.17), (6.20). Kui integreerimisel peame silmas valemile (5.10) eelnenud integraalide väärtusi ja spiinorite $u(\vec{p})$ ning $v(\vec{p})$ omadusi (6.14, 15), näeme, et kõik kahekordsed summad üle impulsside ja polarisatsioonide taanduvad ühekordseiks ja otsene arvutus annab (arvutage!)

$$P_0 = \sum_{\vec{p}} \sum_{n=1}^{2} p_0 \{ |a_n(p)|^2 - |b_n(p)|^2 \}, \qquad (7.8)$$

$$Q = e \sum_{\vec{p}} \sum_{n=1}^{2} \{ |a_n(p)|^2 + |b_n(p)|^2 \}. \qquad (7.9)$$

Erinevalt skalaarväljast, kus kvantiseerimata välja koguenergia on positiivselt definiitne (val. (5.11)), on kvantiseerimata elektron-positronvälja koguenergia indefiniitne. See asjalolu näitab, et kvantiseerimata Dirac'i väli on vaid abimõiste, millele ei saa omistada füüsikalist tähendust.

2. Elektron-positronvälja kvantiseerimisel seame c-arvudele P_0, Q vastavusse operaatorid $\hat{P}_0$, $\hat{Q}$:

$$\hat{P}_0 = \sum_{\vec{p},n} p_0 \{ \hat{a}_n^+(p) \hat{a}_n(p) - \hat{b}_n(p) \hat{b}_n^+(p) \}, \qquad (7.8')$$

$$Q = e \sum_{\vec{p},n} \{ \hat{a}_n^+(p) \hat{a}_n(p) + \hat{b}_n(p) \hat{b}_n^+(p) \}. \qquad (7.9')$$

Funktsioonid (6.17, 20) asenduvad samuti operaatoritega*

* Märgime, et ka elektron-positronvälja operaatorpotentsiaalidele võime anda relativistlikult koovariantse kuju (vrd. val. (5.9)).

$$\hat{\psi}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p},\sigma} \{\hat{a}_\sigma(p) u^\sigma(\vec{p}) e^{ipx} + \hat{b}^+_\sigma(p) v^\sigma(-\vec{p}) e^{-ipx}\}, \qquad (7.10)$$

$$\hat{\bar{\psi}}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p},\sigma} \{\hat{a}^+_\sigma(p) \bar{u}^\sigma(\vec{p}) e^{-ipx} + \hat{b}_\sigma(p) \bar{v}^\sigma(-\vec{p}) e^{ipx}\}, \qquad (7.11)$$

kus $\hat{a}^+_\sigma$ on $\hat{a}_\sigma$ ja $\hat{b}^+_\sigma$ vastavalt $\hat{b}_\sigma$ kaasoperaator.

Kvanttingimusest (4.14) saame antud juhul (vrd. ka (5.15))

$$\begin{aligned} p_0 \hat{a}^+_\sigma(p) &= [\hat{P}_0, \hat{a}^+_\sigma(p)]; \quad -p_0 \hat{a}_\sigma(p) = [\hat{P}_0, \hat{a}_\sigma(p)]; \\ p_0 \hat{b}^+_\sigma(p) &= [\hat{P}_0, \hat{b}^+_\sigma(p)]; \quad -p_0 \hat{b}_\sigma(p) = [\hat{P}_0, \hat{b}_\sigma(p)]. \end{aligned} \qquad (7.12)$$

Valemitest (7.12) järeldame (vrd. valemitega (5.14, 17, 18) seotud mõttekäike), et <u>operaatorid</u> $\hat{a}^+_\sigma(p)$ <u>ja</u> $\hat{b}^+_\sigma(p)$ <u>kirjeldavad energiakvandi</u> (<u>suurusega</u> p_0) <u>tekkimist väljas</u>, <u>operaatorid</u> $\hat{a}_\sigma(p)$ <u>ja</u> $\hat{b}_\sigma(p)$ <u>aga vastava kvandi kadumist</u>.

Valemid (7.12) koos avaldisega (7.8') näitavad, et

$$\begin{aligned} &[\hat{A}, \hat{a}^+_\sigma(p)] = \hat{a}^+_\sigma(p); \quad [\hat{A}, \hat{a}_\sigma(p)] = -\hat{a}_\sigma(p); \\ &[\hat{B}, \hat{a}_\sigma(p)] = [\hat{B}, \hat{a}^+_\sigma(p)] = 0; \quad [\hat{B}, \hat{b}^+_\sigma(p)] = -\hat{b}^+_\sigma(p); \\ &[\hat{B}, \hat{b}_\sigma(p)] = \hat{b}_\sigma(p); \quad [\hat{A}, \hat{b}_\sigma(p)] = [\hat{A}, \hat{b}^+_\sigma(p)] = 0; \\ &\hat{A} \equiv \sum_{\vec{k},s} \hat{a}^+_s(\kappa) \hat{a}_s(\kappa); \quad \hat{B} \equiv \sum_{\vec{k},s} \hat{b}_s(\kappa) \hat{b}^+_s(\kappa). \end{aligned} \qquad (7.13)$$

Seostest (7.13) ja operaatori $\hat{Q}$ avaldisest (7.9') saame

$$[\hat{Q}, \hat{a}^{+}_{r}(p)] = e\,\hat{a}^{+}_{r}(p) \; ; \; [\hat{Q}, \hat{a}_{r}(p)] = -e\,\hat{a}_{r}(p) ;$$

$$[\hat{Q}, \hat{b}^{+}_{r}(p)] = -e\,\hat{b}^{+}_{r}(p) ; \; [\hat{Q}, \hat{b}_{r}(p)] = e\,\hat{b}_{r}(p) . \qquad (7.14)$$

Võrdused (7.12) ja (7.14) koos vaadeldüna lubavad väita (vrd. valemitega (5.32 - 35') seotud mõttekäike), et operaatorid $\hat{a}^{+}_{r}(p)$ ($\hat{a}_{r}(p)$) kirjeldavad niisuguse kvandi tekkimist (kadumist), mille laeng on e, operaatorid $\hat{b}^{+}_{r}(p)$ ($\hat{b}_{r}(p)$) aga kvandi tekkimist (kadumist) laenguga $-e$. Kui lepime kokku nimetada osakesi laenguga e elektronideks, osakesi vastasmärgilise laenguga **positronideks**, võime avaldistes (7.8' - 11) sisalduvate operaatorite füüsikalise mõtte sõnastada nii: operaator $\hat{a}^{+}_{r}(p)$ ($\hat{a}_{r}(p)$) kirjeldab elektroni tekkimist (kadumist) impulsiga p ja polarisatsiooniga r, operaator $\hat{b}^{+}_{r}(p)$ ($\hat{b}_{r}(p)$) aga positroni tekkimist (kadumist) impulsiga p ja polarisatsiooniga r.*

Seoseid (7.13) saame rahuldada vastavalt valemitele (4.15a, 15b) nii kommutaatorite kui ka antikommutaatorite abil. (Kontrollige, et kummalgi juhul ei teki mingit vastuolu!) Ent kui oletame, et operaatorid $\hat{a}_{r}(p)$, $\hat{a}^{+}_{r}(p)$, ... rahuldavad kommutatsiooni-eeskirju, s.t. kui $[\hat{a}_{r}(p), \hat{a}^{+}_{s}(\kappa)] = \delta_{rs}\,\delta_{\vec{p},\vec{\kappa}}$, $[\hat{a}_{r}(\vec{p}), \hat{b}_{s}(\vec{\kappa})] = 0$, ... siis ei ole võ-

---

* Kui arvutaksime välja impulsioperaatori, saaksime $\hat{\vec{P}} = \sum_{p,r} \vec{p}\,\{\hat{a}^{+}_{r}(p)\hat{a}_{r}(p) - \hat{b}_{r}(p)\hat{b}^{+}_{r}(p)\}$ ning seostega (7.12) analoogilised tingimused $\vec{p}\,\hat{a}^{+}_{r}(p) = [\hat{\vec{P}}, \hat{a}^{+}_{r}(p)]$ jne.

malik saada positiivselt definiitset väärtust vaba välja energiale. Tõepoolest, kuidas me ka ei järjestaks operaatoreid $\hat{b}_\kappa(p)$ ja $\hat{b}^+_\kappa(p)$ avaldises (7.8'), jääb nende korrutise ette ikka (-)-märk, kui $\hat{b}_\kappa(p)$, $\hat{b}^+_\kappa(p)$ alluvad kommutatsiooni-seostele. Teiselt poolt, arvestades, et $\hat{b}_\kappa(p)$ ja $\hat{b}^+_\kappa(p)$ on kaasoperaatorid, saame välja mis tahes olekus φ :

$$\langle \varphi, \hat{b}^+_\kappa(p)\hat{b}_\kappa(p)\varphi\rangle = \langle \hat{b}_\kappa(p)\varphi, \hat{b}_\kappa(p)\varphi\rangle \geq 0;$$

$$\langle \varphi, \hat{b}\hat{b}^+\varphi\rangle \geq 0 \qquad (7.15a)$$

ning samuti

$$\langle \varphi, \hat{a}^+\hat{a}\varphi\rangle \geq 0 \; ; \; \langle \varphi, \hat{a}\hat{a}^+\varphi\rangle \geq 0 \qquad (7.15b)$$

Järelikult avaldub välja energia keskväärtus (erijuhul energia väärtus) kahe mittenegatiivse liikme vahena. Niisugune tulemus tähendaks seda, et eksisteeriksid niisugused olekud, kus vaba välja energia võiks olla kui tahes väike (absoluutväärtuselt kui tahes suur negatiivne arv). Teiste sõnadega, vaba välja energial puuduks miinimumväärtus. Selline mittefüüsikaline tulemus on sarnane kvantmehaanikast tuntuga, kus Dirac'i osake võib viibida kui tahes madalal negatiivsel energiatasemel. Selle raskuse kõrvaldamiseks postuleeris Dirac teatavasti, et vaakumolekus on kõik negatiivsed tasemed täidetud, "auk" negatiivses foonis aga tähendab vastava energiaga positroni olemasolu. Täidetud tasemele ei mahu enam ükski elektron Pauli' keeluprintsiibi tõttu. Järelikult garanteerib kirjeldatud mudel positiivse energiaga vabade elektronide stabiilsuse.

Kui välja kvantiseerime antikommutaatoritega, vabaneme kirjeldatud raskusest ilma ühegi täiendava postulaadita. Seejuures garanteerivad antikommutatsiooni-eeskirjad automaatselt õige statistika (Fermi-Dirac'i statistika) välja kvantidele.

3. Kooskõlas eelöelduga ja tingimustega (7.13) nõuame, et operaatorid $\hat{a}$, $\hat{a}^+$, $\hat{b}$, $\hat{b}^+$ rahuldaksid järgmisi antikommutatsiooni-eeskirju:

$$\{\hat{a}_\nu(p),\hat{a}^+_s(p')\}=\delta_{\nu s}\delta_{\vec{p},\vec{p}'} \;;\; \{\hat{b}_\nu(p),\hat{b}^+_s(p')\}=\delta_{\nu s}\delta_{\vec{p},\vec{p}'} \qquad (7.16)$$

kuna kõik ülejäänud antikommutaatorid on nullid, s.t.

$$\{\hat{a},\hat{b}\}=\{\hat{a},\hat{b}^+\}=\cdots=\{\hat{a}_\nu(p),\hat{a}_s(p')\}=\{\hat{b}_\nu(p),\hat{b}_s(p')\}=\cdots=0. \qquad (7.17)$$

Siis võime operaatori (7.8') ümber kirjutada

$$\hat{P}_0=\sum_{\vec{p},\nu}\{\hat{a}^+_\nu(p)\hat{a}_\nu(p)+\hat{b}^+_\nu(p)\hat{b}_\nu(p)\}-2\sum_{\vec{p}}\sqrt{\vec{p}^2+m^2}\,. \qquad (7.8'')$$

Vaakumi definitsiooni kohaselt (vt. val. (5.23) ja sellele eelnenud arutlust) rahuldab vastav olekuvektor Φ_0 tingimusi

$$\hat{a}_\nu(p)\Phi_0=0 \;;\; \hat{b}_\nu(p)\Phi_0=0\,. \qquad (7.18)$$

Kuna vaakumi mõiste invariantsus nõuab, et

$$\hat{P}_0\Phi_0=0 \;;\; \hat{Q}\Phi_0=0\,, \qquad (7.19)$$

peame operaatorid $\hat{P}_0$ ja $\hat{Q}$ ümber defineerima nii, et nad sisaldaksid operaatorite $\hat{a}$, $\hat{a}^+$, ... normaalkorrutisi. Selleks vahetame valemites (7.8', 9') operaatorite $\hat{b}$ ja $\hat{b}^+$ järjestuse, arvestades seoseid (7.16), ning jätame ära selle vahetamise tagajärjel tekkinud lõpmatud summad (viimane liige valemis (7.8'')), mis operaatoreid ei sisalda.*

* Kirjeldatud teguviis on õigustatud sellega, et me ehitame kvantteooria operaatorid vastavatest "klassikalise" teooria avaldistest, kus tegurite järjestus on suvaline. Järelikult peame operaatorite järjestuse kvantteoorias määrama täiendavatel kaalutlustel, näit. vaakumi definitsiooni abil.

Siis saame

$$\hat{P}_0 = \sum_{\vec{p},\alpha} p_0 \{\hat{a}^+_\alpha(p)\hat{a}_\alpha(p) + \hat{b}^+_\alpha(p)\hat{b}_\alpha(p)\}, \qquad (7.20)$$

$$\hat{Q} = e\sum_{\vec{p},\alpha} \{\hat{a}^+_\alpha(p)\hat{a}_\alpha(p) - \hat{b}^+_\alpha(p)\hat{b}_\alpha(p)\}. \qquad (7.21)$$

Arvestades tingimusi (7.15), võime vahetult kontrollida, et nõnda defineeritud operaatoritele $\hat{P}_0$ ja $\hat{Q}$ vastab positiivselt definiitne (või vaakumolekus nulliga võrduv) välja koguenergia ning indefiniitne kogulaeng. See tulemus on kooskõlas kujutlusega vabast elektron-positronväljast kui vabade elektronide ja positronide kogumist.

Märgime, et normaalselt järjestatud operaatoritega vooluvektoril on kuju $\hat{j}_\mu = \frac{ie}{2}[\hat{\bar{\psi}}, \delta_\mu \hat{\psi}]$ (7.4') (vt. lisa C).

Kujutluseni väljast kui vabade elektronide ja positronide kogumist, mis allub Fermi-Dirac'i statistikale, jõuame osakeste arvu operaatorite vahendusel (vrd. (5.19)).

Näitame, et operaatorit

$$\hat{N}^-_\alpha(p) = \hat{a}^+_\alpha(p)\hat{a}_\alpha(p) \qquad (7.22a)$$

võime tõlgendada kui olekus impulsiga $\vec{p}$ (energiaga $p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$) ja polarisatsiooniga α viibivate elektronide arvu operaatorit. Seega operaatori $\hat{N}^-_\alpha$ omaväärtused n^- annavad elektronide arvu vastavas olekus. Samuti defineerime operaatori $\hat{N}^+_\alpha$

$$\hat{N}^+_\alpha(p) = \hat{b}^+_\alpha(p)\hat{b}_\alpha(p), \qquad (7.22b)$$

mida tõlgendame vastavas olekus viibivate positronide arvu operaatorina.

Veendume selles, et arv $n^-_\nu(p)$ võib olla ainult kas 0 või 1, s.t. antud impulsiga ($\vec{p}$) ja polarisatsiooniga (ν) määratud olekus ei saa olla üle ühe elektroni. Kuna täpselt samasugused kaalutlused kehtivad positronide arvu $n^+_\nu(p)$ kohta, siis me neid ei korda.

Olgu φ_ν operaatori $\hat{N}^-_\nu(p)$ omavektor, s.t.

$$\hat{N}^-_\nu(p)\varphi_\nu = n^-_\nu(p)\varphi_\nu . \qquad (7.23)$$

Rakendame võrduse mõlemale poolele uuesti operaatorit $\hat{N}^-_\nu(p)$. Siis ühelt poolt

$$[\hat{N}^-_\nu(p)]^2\varphi_\nu = \hat{N}^-_\nu(p)\hat{N}^-_\nu(p)\varphi_\nu = [n^-_\nu(p)]^2\varphi_\nu , \qquad (7.24)$$

teiselt poolt aga definitsiooni (7.22a) ja antikommutaatorite (7.16, 17) põhjal

$$[\hat{N}^-_\nu(p)]^2\varphi_\nu = \hat{a}^+_\nu(p)\hat{a}_\nu(p)\,\hat{a}^+_\nu(p)\hat{a}_\nu(p)\varphi_\nu = \qquad (7.25)$$
$$= \hat{a}^+_\nu(p)\hat{a}_\nu(p)\varphi_\nu - \hat{a}^+_\nu(p)\hat{a}^+_\nu(p)\hat{a}_\nu(p)\hat{a}_\nu(p)\varphi_\nu = n^-_\nu(p)\varphi_\nu .$$

(7.25, 24) võrdlus annab

$$[n^-_\nu(p)]^2 = n^-_\nu(p) ,$$

mis võib olla rahuldatud vaid siis, kui

$$n^-_\nu(p) = 0,\ 1 \qquad (7.26)$$

iga ν ja $\vec{p}$ korral.

Elektronide ja positronide arvude $n^-_\nu(p)$ ja $n^+_\nu(p)$ kaudu avalduvad ka operaatorite $\hat{P}_0$ ja $\hat{Q}$ omaväärtused, välja koguenergia E ja -laeng q :

$$E = \sum_{\vec{p}} \sum_{\lambda=1}^{2} p_0 \{ n^-_\lambda(p) + n^+_\lambda(p) \} , \qquad (7.27)$$

$$q = e \sum_{\vec{p}} \sum_{\lambda=1}^{2} \{ n^-_\lambda(p) - n^+_\lambda(p) \} . \qquad (7.28)$$

Need avaldised kinnitavad eespool mainitud korpuskulaarset pilti kvantiseeritud elektron-positronvälja kohta.

4. <u>Antikommutatsiooni-eeskirjad operaatorpotentsiaalide</u> $\hat{\psi}(x)$ ja $\hat{\bar{\psi}}(x)$ jaoks saame arvutada valemite (7.10, 11, 16, 17) abil.* Kuna ainsad operaatorid, mis ei antikommuteeru, on paarid $\hat{a}, \hat{a}^+$ ja $\hat{b}, \hat{b}^+$, siis saame kohe

$$\{ \hat{\psi}(x), \hat{\psi}(x') \} = 0 \; ; \qquad \{ \hat{\bar{\psi}}(x), \hat{\bar{\psi}}(x') \} = 0 . \qquad (7.29)$$

Antikommutaatori $\{ \hat{\psi}_\alpha(x), \hat{\bar{\psi}}_\beta(x') \}$ arvutamisel lähtume arendustest (7.10, 11), mis korrutistes $\hat{\psi}_\alpha \hat{\bar{\psi}}_\beta$ ja $\hat{\bar{\psi}}_\beta \bar{\psi}_\alpha$ viivad kahekordsete summadeni üle impulsside ja polarisatsioonide. Need summad aga taanduvad antikommutaatorite (7.16) tõttu ühekordseteks. Kui summeerimisel üle polarisatsiooni λ arvestame valemeid (6.16),

$$\{ \hat{\psi}_\alpha(x), \hat{\bar{\psi}}_\beta(x') \} = \frac{1}{V} \Big[\sum_{\vec{p},\lambda} u^\lambda_\alpha(\vec{p}) \bar{u}^\lambda_\beta(\vec{p}) \, e^{ip(x-x')} +$$

$$+ \sum_{\vec{p},\lambda} v^\lambda_\alpha(-\vec{p}) \bar{v}^\lambda_\beta(-\vec{p}) \, e^{-ip(x-x')} \Big] =$$

$$= \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} \frac{1}{2p_0} \Big[(i\hat{p} - m)_{\alpha\beta} e^{ip(x-x')} + (i\hat{p} + m)_{\alpha\beta} e^{-ip(x-x')} \Big] =$$

$$= -(\delta_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m)_{\alpha\beta} \Big\{ \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} \frac{1}{2p_0} \Big[e^{ip(x-x')} - e^{-ip(x-x')} \Big] \Big\} .$$

---

* Üleminek lõplikult ruumalalt V lõpmatule toimub, nagu näidatud § 5-s, summa $\frac{1}{V} \sum_{\vec{p}}$ asendamisel integraaliga $(2\pi)^{-3} \int d^3p$.

Kasutades vahetusfunktsiooni $S_{\alpha\beta}(x-x')$ definitsiooni (vt. lisa A), saame need tulemused esitada kompaktsemalt

$$\{\hat{\psi}_\alpha(x), \hat{\bar{\psi}}_\beta(x')\} = -i S_{\alpha\beta}(x-x') \qquad (7.30)$$

või maatrikssümboolikas (ilma spiinorindeksiteta α, β)

$$\{\hat{\psi}(x), \hat{\bar{\psi}}(x')\} = -i S(x-x'). \qquad (7.31)$$

Funktsiooni S(x) omadustest on olulisemad järgmised (vt. lisa A).

1) Kuna S(x-x') avaldub valemis (5.36) esineva vahetusfunktsiooni $\Delta(x-x')$ kaudu

$$S(x-x') = -(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m)\Delta(x-x'), \qquad (7.32)$$

siis rahuldab ta Dirac'i võrrandit (kooskõlas (7.31) vasaku poolega).

2) S(x-x') = 0, kui punktide (x) ja (x') intervall on ruumisarnane. Viimasest asjaolust järgneb kõikide operaatoritest $\hat{\psi}(x)$, $\hat{\bar{\psi}}(x)$ moodustatud bilineaarkombinatsioonide kommuteeruvus punktides, mida lahutab ruumisarnane intervall (vt. § -s 4 valemile (4.5) järgnevat arutlust).

Kokkuvõttes võiks rõhutada, et kvantiseeritud laetud mensonvälja ja elektron-positronvälja olulised erinevused johtuvad operaatorpotentsiaalide vahetuseeskirjade erinevusest. Esimest pidime matemaatilistel kaalutlustel kvantiseerima kommutaatoritega, mis tingisid välja kvantidele Bose-Einsteini statistika. Dirac'i välja korral saime füüsikaliselt mõistliku tulemuse antikommutaatoritega kvantiseerimisel. Viimased annavad välja kvantidele Fermi-Dirac'i statistika. Sõnastatud tulemused on erinju-

hud üldisest seosest osakeste spinni ja statistika vahel (vt. § 15).

§ 8. Elektromagnetväli. Kvantiseerimine.

Kvantiseerimata elektromagnetväli on klassikalises teoorias kõige põhjalikumalt uuritud väli, mida kirjeldavad Maxwelli võrrandid. Avaldame nendes võrrandites sisalduvad väljatugevuse tensori komponendid potentsiaali $A_\mu(x)$ komponentide kaudu ja leiame potentsiaali võrrandile vastava lagranžiaani. Viimase abil arvutame välja koguenergia. Saadud avaldist tõlgendame operaatorina välja olekuvektorite ruumis. Nõudes kõikidelt operaatorpotentsiaalidelt tingimuse (4.14) täitmist, tuletame vahetuseeskirjad. Kuna skeem on sama mis § -s 5 (ja osaliselt § -s 7), siis eelmisi kordavatel mõttekäikudel me pikemalt ei peatu, vaid püüame esile tõsta ainult vaadeldava välja iseärasusi.

1. Maxwelli võrrandid vaba elektromagnetvälja tugevuse tensori $F_{\mu\nu}$ jaoks on järgmised:*

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0 \,, \tag{8.1}$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial F_{\nu\rho}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\rho\mu}}{\partial x_\nu} = 0 \,. \tag{8.2}$$

Kui $F_{\mu\nu}$ avaldame potentsiaali A_μ kaudu

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \,, \tag{8.3}$$

osutuvad seosed (8.2) identsusteks.

* Meenutame, et komponendid (iF_{14}, iF_{24}, iF_{34}) moodustavad elektrivälja tugevuse vektori $\vec{E}$, komponendid (F_{23}, F_{31}, F_{12}) aga magnetvälja tugevuse (pseudo-) vektori $\vec{H}$.

Valemiga (8.3) on välja potentsiaal A_μ määratud kalibreerimisteisenduse täpsuseni, s.t. $F_{\mu\nu}$ ei muutu, kui valemis (8.3) asendame potentsiaalid A_μ potentsiaalidega A'_μ, kus

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{\partial f}{\partial x_\mu} \qquad (8.4)$$

ja $f(x)$ on suvaline funktsioon. Teisendust $A_\mu \to A'_\mu$, mis on defineeritud valemiga (8.4), nimet. tavaliselt (II liiki) kalibreerimis- ehk gradientteisenduseks. Kuna klassikalises elektrodünaamikas omistatakse vahetu füüsikaline mõte väljatugevustele, siis potentsiaalide valik kujul A_μ või A'_μ ei saa mingisugustes füüsikalistes tulemustes kajastuda (kõik füüsikalised suurused on avaldatavad ainult $F_{\mu\nu}$ kaudu). Järelikult peavad kõik potentsiaali A_μ kaudu avaldatud füüsikalised suurused olema kalibreerimisinvariantsed.

Kui (8.3) parema poole paigutame võrrandisse (8.1), saame

$$\frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\nu} = 0. \qquad (8.5)$$

Kasutades potentsiaali suvalisust (8.4), kalibreerime ta selliselt, et (8.5) taanduks d'Alembert'i võrrandiks üksikutele A_μ komponentidele. Selleks nõuame, et kõik potentsiaalid A_μ rahuldaksid nn. Lorentzi tingimust

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0. \qquad (8.6)$$

Sel juhul võrrandid (8.5) omandavad kuju

$$\Box A_\mu(x) = 0. \qquad (8.7)$$
$$(\mu = 1,2,3,4)$$

Rõhutame, et (8.7) on samaväärne esialgsete Maxwelli võrranditega ainult koos Lorentzi tingimusega.

Ka Lorentzi tingimus (8.6) võimaldab kalibreerimisteisendust $A_\mu \to A_\mu + \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}$, kui kalibreerimisfunktsioon rahuldab võrrandit $\Box \varphi = 0$ ilma ühegi lisatingimuseta. (Kontrollige!)

Kui (8.7) tõlgendame Euler-Lagrange'i võrrandina (1.7), saame lihtsaima Lorentz-invariantse lagranžiaani L:

$$L = -\frac{1}{2} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} . \qquad (8.8)$$

Märgime, et see lagranžiaan L erineb kalibreerimisinvariantsest lagranžiaanist L_k, kus

$$L_k = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} , \qquad (8.9)$$

ebaolulise 4-divergentsi võrra

$$L_k = L + \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(A_\mu \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right) .$$

Lagranžiaani L abil arvutame välja energia-impulsstensori

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\mu} \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\sigma} \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\sigma} \qquad (8.10)$$

ja koguenergia

$$P_0 = -\int T_{44} d^3x = \frac{1}{2} \int \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial x_0} \frac{\partial A_\rho}{\partial x_0} + \frac{\partial A_\rho}{\partial x_k} \frac{\partial A_\rho}{\partial x_k} \right] d^3x . \qquad (8.11)$$

2. Integraali (8.11) arvutamiseks leiame A_μ kui aeg-ruumi punkti (x) funktsioonid. Oletame esialgu lihtsustuseks (nagu § -s 5,6), et väli eksisteerib lõplikus ruumalas V, ja lahendame d'Alembert'i võrran-

di potentsiaali iga komponendi jaoks sõltumatult, jättes esialgu vaatlusest välja Lorentzi tingimuse.

Võrrandi (8.7) erilahenditeks on tasalained $\exp i(\vec{k}\vec{x} - \omega x_0)$, kus $\omega = \pm \omega_k$, $\omega_k = |\vec{k}|$. Nagu eelmisteski paragrahvides, saame kahte tüüpi tasalained: positiivsele sagedusele vastav laine $a_\mu(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega_k x_0)}$ ja negatiivsele sagedusele vastav $b_\mu(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{x} + \omega_k x_0)}$. Siin $a_\mu(\vec{k})$ ja $b_\mu(\vec{k})$ on suvalised konstantsed 4-vektorid. Kuna iga 4-vektor avaldub nelja omavahel ortogonaalse ühikvektori lineaarkombinatsioonina, võime iga $\vec{k}$ korral vektorid $a_\mu(\vec{k})$, $b_\mu(-\vec{k})$ avaldada järgmiselt:

$$a_\mu(\vec{k}) = c_\lambda(\vec{k}) e_\mu^{(\lambda)}; \quad b_\mu(-\vec{k}) = c_\lambda^+(\vec{k})\, e_\mu^{(\lambda)}, \qquad (8.11)$$

kus $e_\mu^{(\lambda)}$ ($\lambda = 1,2,3,4$) on eelnimetatud ühikvektorid, $c_\lambda(\vec{k})$, $c_\lambda^+(\vec{k})$ aga omavahel sõltumatud (arvestades a_μ, b_μ suvalisust) arenduse kordajad. Igale $\vec{k}$-le vastavaid ortogonaalseid ühikvektoreid $e_\mu^{(\lambda)}$ (kus lihtsustuseks jätame $\vec{k}$ juurde kuuluvust tähistava indeksi märkimata), nimetatakse vastava tasalaine polarisatsioonivektoriteks[N]. Eelduse kohaselt on nad ortonormeeritud, s.t.

$$\sum_{\mu=1}^{4} e_\mu^{(\lambda)} e_\mu^{(\varrho)} = \delta_{\lambda\varrho} \qquad (\lambda,\varrho = 1,2,3,4) \qquad (8.12)$$

ja moodustavad täieliku süsteemi, s.t.

[N] Arusaamatuste vältimiseks juhime tähelepanu sellele, et edaspidi ülemised indeksid (λ) polarisatsioonivektorite tähistuses nummerdavad sõltumatuid vektoreid, alumised indeksid (μ) aga nende komponente (projektsioone koordinaattelgedele).

$$\sum_{\lambda=1}^{4} e_\mu^{(\lambda)} e_\nu^{(\lambda)} = \delta_{\mu\nu} . \qquad (\mu,\nu = 1,2,3,4) \qquad (8.13)$$

Iga konkreetse tasalaine ($\vec{k}$ fikseeritud) vaatlemisel on otstarbekas valida vektorid $e^{(\lambda)}$ koordinaattelgede ühikvektoritena, s.t. kujul $e^{(1)} = (1,0,0,0)$, $e^{(2)} = (0,1,0,0)$, $e^{(3)} = (0,0,1,0)$, $e^{(4)} = (0,0,0,1)$, või lühemalt

$$e_\mu^{(\lambda)} = \delta_{\mu\lambda} . \qquad (8.14)$$

Üldsust kitsendamata võime x_3-telje suunata piki vektorit $\vec{k}$. Siis $\kappa_\mu = (0,0,k,ik)$. Valemitest (8.14) näeme, et $\kappa_\mu e_\mu^{(\lambda)} = 0$, kui $\lambda = 1,2$. Sellepärast nimetatakse vektoreid $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ ristpolarisatsiooni- (transversaalse polarisatsiooni) vektoriteks, vektorit $e^{(3)}$ pikisuunalise (longitudinaalse) polarisatsiooni vektoriks, $e^{(4)}$ aga skalaarse polarisatsiooni vektoriks.*

Fikseeritud vektorile $\vec{k}$ vastab võrrandi (8.7) lahend

$$A_\mu(\vec{\kappa},x) = e_\mu^{(\lambda)} \{ c_\lambda(\vec{\kappa}) e^{i\kappa x} + c_\lambda^+(\vec{\kappa}) e^{-i\kappa x} \}$$

$$(\kappa x = \vec{\kappa}\vec{x} - \omega_\kappa x_0) \qquad (8.15)$$

või kui $e_\mu^{(\lambda)}$ on esitatud valemiga (8.14), siis

---

* Kui mingis tasalaines $c_1(\kappa) = c_2(\kappa) = c_3(\kappa) = 0$ (val. (8.11), siis selline laine on iseloomustatud ainult polarisatsioonivektoriga $e^{(4)}$. Valemitest (8.11,14) näeme, et niisugusel lainel on nullist erinev ainult komponent $A_4 = iA_0$, nn. skalaarne potentsiaal (skalaar 3-ruumi teisendustel).

$$A_\mu(\vec{k},x) = c_\mu(\vec{k})e^{ikx} + c_\mu^+(\vec{k})e^{-ikx} . \qquad (8.15')$$

Arve c_1 , c_2 nimetatakse ristlainete amplituudideks (ristpolarisatsioonile vastavateks amplituudideks), c_3 pikilaine ja c_4 skalaarsele polarisatsioonile vastavaks amplituudiks. Komponentide A_m ($m = 1,2,3$) reaalsusest ja A_4 imaginaarsusest järgneb, et

$$c_m^+(\vec{k}) = [c_m(\vec{k})]^* , \quad m = 1,2,3 ; \qquad (8.16)$$
$$c_4^+(\vec{k}) = -[c_4(\vec{k})]^* ,$$

$$c_0^+(\vec{k}) = [c_0(\vec{k})]^* , \text{ kui } c_4(\vec{k}) = i c_0(\vec{k}) ; \; c_4^+(\vec{k}) = i c_0^+(\vec{k}) . \qquad (8.16')$$

Lorentzi tingimus (8.6) on rahuldatud, kui $k_\mu a_\mu(\vec{k}) = 0$, $k_\mu b_\mu(-\vec{k}) = 0$ või, arvestades, et alati võime vektori k_μ võtta kujul $k_\mu = (0,0,k,ik)$.

$$c_3 + i c_4 = 0 , \qquad c_3^+(\vec{k}) + i c_4^+(\vec{k}) = 0 . \qquad (8.17)$$

Võrrandi (8.7) üldlahend on (vrd. ka (5.7))

$$A_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k},\lambda} \frac{e_\mu^{(\lambda)}}{\sqrt{2\omega_k}} \left(c_\lambda(\vec{k}) e^{ikx} + c_\lambda^+(\vec{k}) e^{-ikx} \right) . \qquad (8.18)$$

Kui seda avaldist ja polarisatsiooniverktorite omadusi kasutades arvutame integraali (8.11) (arvutage!), siis saame

$$P_0 = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \omega_k \left[\sum_{\lambda=1}^{4} \left(c_\lambda(\vec{k}) c_\lambda^+(\vec{k}) + c_\lambda^+(\vec{k}) c_\lambda(\vec{k}) \right) \right] \qquad (8.19)$$

või, arvestades seoseid (8.16, 16') ja Lorentzi tingimusi (8.17),

$$P_0 = \sum_{\vec{k}} \omega_k \{ |c_1(\vec{k})|^2 + |c_2(\vec{k})|^2 \} . \qquad (8.20)$$

Niisiis kvantiseerimata vaba elektromagnetvälja energia on mittenegatiivne ja sõltub ainult transversaalsete lainete amplituudidest.

3. Kvantteooria formuleerimisel on otstarbekas vaadelda kõiki tasalaine amplituude $c_\mu(\vec{k})$ ($\mu = 1,2,3,4$) lineaarselt sõltumatutena ja asendada nad kõikides avaldistes välja olekuvektoritele Φ mõjuvate operaatoritega $\hat{C}_\mu(\vec{k})$. Amplituudid $c^*_\mu(\vec{k})$ asendame operaatoritega $\hat{C}^+_\mu(\vec{k})$, kusjuures $\hat{C}_m(\vec{k})$ ja $\hat{C}^+_m(\vec{k})$ ($m = 1,2,3$) on kaasoperaatorid ning samuti $\hat{C}_0(\vec{k})$ ja $\hat{C}^+_0(\vec{k})$ (või $\hat{C}_4(\vec{k})$ ja $-\hat{C}^+_4(\vec{k})$). Lorentzi tingimusi, mida klassikalises teoorias väljendavad valemid (8.17), tõlgendame kui lisatingimusi mitte operaatoritele, vaid lubatud olekuvektoritele Φ. Sellist kitsendavate seoste nihutamist operaatoritelt olekuvektoritele õigustab **vastavusprintsiip klassikalise** ja kvantteooria vahel. Mõnesugustele seostele klassikaliste suuruste vahel ei pea vastama samasugused seosed mitte operaatorite, vaid ainult nende keskväärtuste vahel. Öeldu põhjal nõuame, et kõik vaba elektromagnetvälja olekuvektorid Φ rahuldaksid tingimusi

$$\langle \Phi, (\hat{C}_3 + i\hat{C}_4)\Phi \rangle = 0; \quad \langle \Phi, (\hat{C}^+_3 + i\hat{C}_4)\Phi \rangle = 0 \qquad (8.21)$$

iga $\vec{k}$ korral.

Välja energiaoperaatori saame valemist (8.19)

$$\hat{P}_0 = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k},\lambda} \omega_k \{ \hat{C}^+_\lambda(\vec{k}) \hat{C}_\lambda(\vec{k}) + \hat{C}_\lambda(\vec{k}) \hat{C}^+_\lambda(\vec{k}) \} . \qquad (8.22)$$

Kui ka potentsiaali avaldises (8.18) asendame amplituudid C, C^* operaatoritega, saame

$$\hat{A}_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k},\lambda} \frac{e^{(\lambda)}_\mu}{\sqrt{2\omega_k}} \{ \hat{C}_\lambda(\vec{k}) e^{ikx} + \hat{C}^+_\lambda(\vec{k}) e^{-ikx} \} , \qquad (8.23)$$

kus erinevatele indeksitele vastavad sõltumatud operaatorid.

Kvanttingimus (4.14) annab seosed

$$-\omega_{\vec{k}}\hat{C}_{\lambda}(\vec{k})=[\hat{P}_0,\hat{C}_{\lambda}(\vec{k})];\quad \omega_{\vec{k}}\hat{C}^{+}_{\lambda}(\vec{k})=[\hat{P}_0,\hat{C}^{+}_{\lambda}(\vec{k})] \qquad (8.24)$$

iga $\vec{k}$ ja λ korral. Tingimusi (8.24) saab (energiaoperaatorit (8.22) arvestades) rahuldada ainult kommutaatoritega (veenduge selles!)

$$[\hat{C}_{\lambda}(\vec{k}),\hat{C}^{+}_{\lambda'}(\vec{k}')]=\delta_{\lambda\lambda'}\delta_{\vec{k},\vec{k}'}\,. \qquad (8.25)$$

Kõik väljakirjutamata kommutaatorid on nullid.

4. Operaatorite $\hat{C}_{\lambda}$, $\hat{C}^{+}_{\lambda}$ interpreteerimisel ei teki raskusi, kui $\lambda = m$ ($m = 1,2,3$). Seepärast vaatleme esmalt tingimusi (8.24, 25) juhul, kui $\lambda,\lambda' = 1,2,3$. Kuna $\hat{C}_{m}(\vec{k})$ ja $\hat{C}^{+}_{m}(\vec{k})$ on täpselt samade omadustega kaasoperaatorid nagu § -s 5 vaadeldud operaatorid $\hat{C}(\vec{k})$, $\hat{C}^{+}(\vec{k})$ (vrd. (5.14, 16) ja (8.24, 25)), siis kehtib nende omaduste ja tõlgendamise kohta kõik see, millest oli juttu § -s 5. Sellepärast piirdume tulemuste refereerimisega.

1) Operaator $\hat{C}^{+}_{m}(\vec{k})$ ($\hat{C}_{m}(\vec{k})$) on välja niisuguse kvandi (footoni) kiirgumis- (neeldumis-) operaator, mille impulss on $\vec{k}$ (energia $|\vec{k}|$) ja polarisatsioon $e^{(m)}$.*

---

* Saab näidata, et laine polarisatsioon on seotud footoni spiraalsusega (vt. näit. [1] § 2,3). Kui 3-ruumi pöörete **infinitesimaaloperaatoreid** vektorite $\alpha_{m}(\vec{k})$ ruumis tõlgendame footoni spinnoperaatori komponentidena (nagu § -s 6 elektroni spinni vaatlemisel) ning lahendame nii leitud spiraalsusoperaatori (spinni $\vec{k}$-suunalise projektsiooni) omaväärtusvõrrandi, siis osutub, et omaväärtuste kolmikule +1, -1, 0 vastab omavektorite kolmik $\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{(1)}+i e^{(2)})$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{(1)}-i e^{(2)})$, $e^{(3)}$. Keskmisest valemist (4.13) lähtudes saab kontrollida, et osakese spiraalsuse ja impulsi operaatorid kommuteeruvad. Seetõttu liigitatakse footoneid nii impulsi $\vec{k}$ kui ka spiraalsuse, resp. polarisatsiooni järgi.

2) Operaator $\hat{C}^{+}_{m}(\vec{k})\,\hat{C}_{m}(\vec{k})$ on olekus polarisatsiooniga $e^{(m)}$ ja impulsiga $\vec{k}$ viibivate footonite arvu operaator, s.t. selle operaatori omaväärtused näitavad, mitu footonit impulsiga $\vec{k}$ ja polarisatsiooniga $e^{(m)}$ väli sisaldab. Need omaväärtused $N_{m}(\vec{k})$ võivad olla mis tahes mittenegatiivsed täisarvud. Järelikult alluvad footonid Bose-Einsteini statistikale.

Kuna me seni pole Lorentzi tingimusi arvestanud, figureerivad kõikjal meie arutlustes ka nn. longitudinaalsed footonid, millele vastab polarisatsioonivektor $e^{(3)}$ või spiraalsus 0. Hiljem näeme, et Lorentzi tingimuste tõttu vaba väli neid tootoneid ei sisalda.

Vaatleme operaatorite $\hat{C}_{4}(\vec{k})$, $\hat{C}^{+}_{4}(\vec{k})$ tõlgendamisega seotud raskusi. Asendame seostes (8.24, 25) operaatorid $\hat{C}_{4}(\vec{k})$, $\hat{C}^{+}_{4}(\vec{k})$ üksteise suhtes kaasoperaatoritega $\hat{C}_{0}(\vec{k})$, $\hat{C}^{+}_{0}(\vec{k})$ vastavalt valemile

$$\hat{C}_{4} = i\hat{C}_{0} \,, \qquad \hat{C}^{+}_{4} = i\hat{C}^{+}_{0} \,. \tag{8.26}$$

Siis saame

$$-\omega_{k}\hat{C}_{0}(\vec{k}) = [\hat{P}_{0}, \hat{C}_{0}(\vec{k})]; \quad \omega_{k}\hat{C}^{+}_{0}(\vec{k}) = [\hat{P}_{0}, \hat{C}^{+}_{0}(k)] \tag{8.24'}$$

ja

$$-[\hat{C}_{0}(\vec{k}), \hat{C}^{+}_{0}(\vec{k}')] = [\hat{C}^{+}_{0}(\vec{k}), \hat{C}_{0}(\vec{k}')] = \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \,. \tag{8.25'}$$

Kommutaatorid (8.25') näitavad (kui kordame valemitega (5.19 - 21) ja (5.25, 26) seotud mõttekäike), et antud juhul on kvantide arvu operaatori tähendusega operaator $\hat{C}_{0}(\vec{k})\,C^{+}_{0}(\vec{k})$, mille kõik omaväärtused on mittenegatiivsed täisarvud 0, 1, 2, ... Olekuvektorile Φ_{N_0} , mida iseloomustab operaatori $\hat{C}_{0}\hat{C}^{+}_{0}$ omaväärtus N_{0} , mõjuvad operaatorid $\hat{C}_{0}$ ja $\hat{C}^{+}_{0}$ järgmiselt (vrd. (5.26):

$$\hat{C}_0^+(\vec{k})\,\Phi_{N_0} = \sqrt{N_0}\,\Phi_{N_0-1}\,; \qquad \hat{C}_0(\vec{k})\,\Phi_{N_0} = \sqrt{N_0+1}\,\Phi_{N_0+1} \tag{8.27}$$

See näitab, et operaatoreid $\hat{C}_0^+(\vec{k})$ tuleb tõlgendada vastavate osakeste (skalaarsete footonite) neeldumis-, operaatoreid $\hat{C}_0(\vec{k})$ aga kiirgumisoperaatoritena. Kui seda tulemust võrdleme tingimustega (8.24') (rakendades võrduste mõlemaid pooli välja energia mõnesugusele omavektorile Φ_ε, (vrd. (5.18a, b)), jõuame järeldusele, et operaator $\hat{C}_0(\vec{k})$ $(\hat{C}_0^+(\vec{k}))$ kirjeldab kvandi teket (neeldumist) energiaga $-\omega_k$. Niisuguseid negatiivse energiaga kvante nimetatakse ka pseudofootoniteks.

5. Lorentzi tingimust (8.21) arvestades võime näidata, et kui mõne füüsikalise suuruse operaatori avaldis (näit. $\hat{P}_0$ valem (8.22)) sisaldab kobinatsioone $\hat{C}_3(\vec{k})\hat{C}_3^+(\vec{k}) + \hat{C}_4\hat{C}_4^+ = \hat{C}_3\hat{C}_3^+ - \hat{C}_0\hat{C}_0^+$ või $\hat{C}_3^+\hat{C}_3 + \hat{C}_4^+\hat{C}_4 = \hat{C}_3^+\hat{C}_3 - \hat{C}_0^+\hat{C}_0$, siis kõik tema maatrikselemendid (ja kesk- ning omaväärtused) sõltuvad ainult transversaalsete footonite operaatoritest.

Tingimused (8.21) või

$$\langle \Phi, (\hat{C}_3 - \hat{C}_0)\Phi\rangle = 0\,; \qquad \langle \Phi, (\hat{C}_3^+ - \hat{C}_0^+)\Phi\rangle = 0 \tag{8.21'}$$

on rahuldatud, kui kõik lubatud olekuvektorid allutame tingimusele

$$(\hat{C}_3(\vec{k}) - \hat{C}_0(\vec{k}))\,\Phi = 0 \quad \textbf{(iga k korral)}. \tag{8.28}$$

Olgu Φ_1 ja Φ_2 mõnesugused sellele tingimusele allutatud olekuvektorid. Näitame, et siis $\langle \Phi_1, (\hat{C}_3^+\hat{C}_3 - \hat{C}_0^+\hat{C}_0)\Phi_2\rangle = 0$. Lihtne liikmete ümberrühmitus koos operaatori $\pm\,\hat{C}_3^+\hat{C}_0$ lisamisega annab

$$\langle \Phi_1, \hat{C}_3^+(\hat{C}_3 - \hat{C}_0)\Phi_2\rangle + \langle \Phi_1, (\hat{C}_3^+ - \hat{C}_0^+)\hat{C}_0\Phi_2\rangle = \langle (\hat{C}_3 - \hat{C}_0)\Phi_1, C_0\Phi_2\rangle = 0.$$

Samuti

$$\langle \Phi_1, (\hat{C}_3\hat{C}_3^+ - \hat{C}_0\hat{C}_0^+)\Phi_2\rangle = \langle \Phi_1, (\hat{C}_3 - \hat{C}_0)\hat{C}_3^+\Phi_2\rangle + \langle \Phi_2, \hat{C}_0(\hat{C}_3^+ - \hat{C}_0^+)\Phi_2\rangle$$

või tähistusi $\hat{C}_3^+\Phi_2 = \Phi_2'$, $\hat{C}_0^+\Phi_1 = \Phi_1'$ kasutades

$$\langle \Phi_1, (\hat{C}_3 - \hat{C}_0)\Phi_2' \rangle + \langle \Phi_1', (\hat{C}_3^+ - \hat{C}_0^+)\Phi_2 \rangle = \langle (\hat{C}_3 - \hat{C}_0)\Phi_1', \Phi_2' \rangle = 0.$$

Järelikult võimaldab Lorentzi tingimus (8.28) tõepoolest vabandeda skalaarsete ja longitudinaalsete footonite arvu operaatoreid sisaldavatest maatrikselementidest. Kuid raskused tekivad tingimust (8.28) rahuldavate olekufunktsioonide normeerimisel. Tõsiasjast, et operaatorid $\hat{C}_0^+$ on kvandi neeldumis-, operaatorid $\hat{C}_0$ aga kiirgumisoperaatorid, järeldub (vt. näit. [1] lk. 62 jj.), et ei eksisteeri olekuid, kus skalaarsed ja longitudinaalsed footonid puuduksid, ning et olekuvektorid Φ ei ole normeeritavad (nende norm avaldub formaalselt hajuva summana).

Nimetatud raskustest saab vabaneda, kui teooria formuleerida nii, et tingimus (8.28) sisaldaks ainult neeldumisoperaatoreid, s.t. me peame teooriat modifitseerima nii, et ka operaatoreid $\hat{C}_0^+(k)$ võiksime tõlgendada kvandi kiirgumis-, operaatoreid $\hat{C}_0(k)$ aga neeldumisoperaatoritena. Osutub, et selline tõlgendus on tõepoolest võimalik. Vastav meetod kannab Gupta-Bleureri meetodi nimetust.*

Selle meetodi olemus on järgmine. Oletatakse, et mitte operaatorid $\hat{C}_0$ ja $\hat{C}_0^+$, vaid $\hat{C}_4$ ja $\hat{C}_4^+$ on kaasoperaatorid, s.t. iga Φ_1, Φ_2 korral

$$\langle \Phi_1, \hat{C}_4 \Phi_2 \rangle = \langle \hat{C}_4^+ \Phi_1, \Phi_2 \rangle. \qquad (8.29)$$

---

* Kasutatakse ka nimetust "indefiniitse meetrika meetod". Kuid selline nimetus on puhtformaalne, kuna osutub, et kõikide Lorentzi tingimust rahuldavate olekuvektorite norm on ikka mittenegatiivne (vt. [1] lk. 66).

Nagu nähtub seostest (8.24, 25), on operaatoritel $\hat{C}_4(\vec{k})$, $\hat{C}_4^+(\vec{k})$ kõik täpselt samad omadused mis operaatoritel $\hat{C}_m(\vec{k})$, $\hat{C}_m^+(\vec{k})$ $(m = 1,2,3)$ ja $\hat{C}_4^+(\vec{k})$ on kvandi (energiaga $+\omega_k$) kiirgumis-, $\hat{C}_4(\vec{k})$ aga neeldumisoperaator ning Lorentzi tingimus sisaldab ainult neeldumisoperaatoreid. Ent valem (8.29) viib vastuollu klassikalise teooria nõudega $c_4 = -(c_4)^*$, mis järeldub potentsiaalikomponendi A_4 imaginaarsusest. Nimetatud nõude kvantmehaaniliseks vasteks on operaatorite $\hat{C}_4^+$, $\hat{C}_4$ keskväärtuste $\langle \hat{C}_4 \rangle = \langle \Phi, \hat{C}_4 \Phi \rangle$ ja $\langle \hat{C}_4^+ \rangle = \langle \Phi, \hat{C}_4^+ \Phi \rangle$ vaheline seos

$$\langle \Phi, \hat{C}_4 \Phi \rangle^* = \langle \hat{C}_4 \Phi, \Phi \rangle = -\langle \Phi, \hat{C}_4^+ \Phi \rangle . \qquad (8.30)$$

Tingimust (8.30) saame rahuldada, kui sobivalt <u>muudame keskväärtuse arvutamise eeskirja</u>. Olgu uue definitsiooni kohaselt suvalise operaatori $\hat{B}$ keskväärtus $\langle B \rangle_\eta$, kus

$$\langle B \rangle_\eta \equiv \langle \Phi, \hat{\eta} \hat{B} \Phi \rangle \qquad (8.31)$$

ja $\hat{\eta}$ on sobivate omadustega operaator. Olekuvektori normi arvutame (kui ühikoperaatori keskväärtuse) valemist

$$\langle I \rangle_\eta = \langle \Phi | \hat{\eta} \Phi \rangle . \qquad (8.32)$$

Normi $\langle I \rangle$ reaalsuse nõudest $\langle \Phi, \hat{\eta} \Phi \rangle^* = \langle \hat{\eta} \Phi, \Phi \rangle = \langle \Phi, \hat{\eta}^+ \Phi \rangle = \langle \Phi, \eta \Phi \rangle$ selgub, et operaator $\hat{\eta}$ on hermiitiline. Valemist (8.31) ja tingimusest $\hat{\eta}^+ = \hat{\eta}$ saame arvutada $\langle B \rangle_\eta^*$:

$$\langle B \rangle_\eta^* = \langle \hat{\eta} \hat{B} \Phi, \Phi \rangle = \langle \Phi, \hat{B}^+ \hat{\eta} \Phi \rangle . \qquad (8.33)$$

Klassikalise teooria potentsiaalide reaalsusetingimused, millest eespool juttu oli, on rahuldatud, s.t. $\langle C_m^+ \rangle_\eta =$

$\langle C_m \rangle_\eta^*$, $\langle C_4^+ \rangle_\eta = -\langle C_4 \rangle_\eta^*$, kui ((8.31, 33) põhjal)

$$\hat{C}_m^+ \hat{\eta} = \hat{\eta} \hat{C}_m^+ ; \qquad \hat{C}_4^+ \hat{\eta} = -\hat{\eta} \hat{C}_4 . \tag{8.34}$$

Arvestades neid tingimusi ja operaatorite $\hat{C}_\lambda(\vec{x})$, $\hat{C}_\lambda^+(\vec{x})$ ($\lambda = 1,2,3,4$) toimet olekutele, mis on määratud footonite arvudega N_1 ,..., N_4 (vrd. (5.26)), saame

$$\hat{C}_\lambda(\vec{x}) \Phi_{N_\lambda} = \sqrt{N_\lambda(\vec{x})}\, \Phi_{N_\lambda - 1} ,$$
$$\hat{C}_\lambda^+(\vec{x}) \Phi_{N_\lambda} = \sqrt{N_\lambda(\vec{x})+1}\, \Phi_{N_\lambda + 1} . \qquad (\lambda = 1, \ldots, 4) \tag{8.35}$$

(Olekufunktsiooni indeksis oleme välja kirjutanud ainult selle arvu N_λ , mis muutub.) Nüüd võime vahetult veenduda, et

$$\langle \Phi_N , \hat{\eta} \Phi_N \rangle = (-1)^{N_4} \langle \Phi | \Phi \rangle$$

(Arvutage!)

Siit järeldub, et olekufunktsiooni Φ_N norm (8.29') võib olla positiivne või negatiivne, sõltuvalt skalaarsete footonite arvust vastavas olekus. Kuid saab näidata ([1] § 5), et iga Lorentzi tingimust rahuldava olekuvektori norm sõltub ainult olekutest, kus $N_4 = 0$, ja on seega mittenegatiivne.

6. Vahetuseeskirjad operaatorpotentsiaalidele $\hat{A}_\mu(x)$, $\hat{A}_\nu(x')$ arvutame arenduse (8.23) ja kommutaatorite (8.25) abil. Saame

$$[\hat{A}_\mu(x), \hat{A}_\nu(x')] = -i \delta_{\mu\nu} \mathcal{D}(x-x') . \tag{8.36}$$

Vahetusfunktsioon $D(x-x')$ on nullist erinev ainult valgus-

koonusel (vt. lisa A) ja tal on seal δ-singulaarsus. Kooskõlas valemi (8.36) vasaku poolega rahuldab D(x) d'Alembert'i võrrandit. Seosest (8.36) võime niisiis järeldada, et elektromagnetväljas kanduvad kõik mõjud edasi valguskiirusega (s.t. footonite abil). Operaatorpotentsiaalid kui aeg-ruumi punkti (x) funktsioonid on vaid abisuurused, mida tuleb käsitleda operaatorväärtustega üldistatud funktsioonidena (analoogia põhjal näit. "klassikalise" δ-funktsiooniga).

Lorentzi tingimus (8.28) avaldub järgmiselt:

$$\frac{\partial \hat{A}^{(-)}_{\mu}(x)}{\partial x_{\mu}} \Phi = 0, \qquad (8.28')$$

kus $\hat{A}^{(-)}_{\mu}(x)$ on ainult neeldumisoperaatoreid sisaldav (positiivsetele sagedustele vastav) osa operaatorist $\hat{A}_{\mu}(x)$.*

Kokkuvõttes võime märkida, et kasutatud matemaatilised protseduurid annavad õige pildi vabast elektromagnetväljast kui footonite kogumist. Välja füüsikalised karakteristikud sõltuvad seejuures ainult transversaalsetest footonitest, s.o. niisugustest, mille spinni projektsioon liikumissuunale on kas +1 või -1 ja millele vastavad ristpolarisatsiooniga lained. Rõhutame, et footonid on absoluutselt neutraalsed osakesed (sest vooluvektor $j_{\mu} \equiv 0$).

---

* Juhime tähelepanu sellele, et rangem tingimus $\frac{\partial \hat{A}_{\mu}(x)}{\partial x_{\mu}} \Phi = 0$, sisaldades operaatoreid $\hat{A}_{\mu}(x)$ tervikuna, annaks vastuolu vahetuseeskirjadega (8.36). Kontrollige seda, diferentseerides (8.36) mõlemat poolt x_{μ} järgi (ja summeerides) ning arvestades D(x-x') omadusi.

II. INTERAGEERIVAD VÄLJAD.

§ 9. Operaatorpotentsiaalide liikumisvõrrandid.

Nagu vabade väljade korral, kasutame siingi vastavusprintsiipi kvantteooria ja klassikalise teooria vahel. Sel teel leitud operaatorpotentsiaalide diferentsiaalvõrrandid teisendame vastavateks integraalvõrranditeks. Viimaste lahendeid otsime häiritusmeetodil, s.t. arendame otsitavad operaatorfunksioonid elektromagnetvälja ja elektron-positronvälja seoskonstandi e astmete järgi ritta. Kui piirdume saadud reas lõpliku arvu liikmetega, taandub interageerivate väljade operaatorite uurimine korrutiste uurimisele, mis sisaldavad lõpliku hulga juba tuntud omadustega vabade väljade operaatoreid. Kirjeldatud protseduuri õigustab seoskonstandi e väiksus (meenutame, et kasutatavates ühikutes on e peenstruktuurikonstandiga seotud dimensioonitu suurus $\frac{e^2}{4\pi} = \alpha \approx \frac{1}{137}$) ja häiritusteooria abil arvutatud efektide hea kooskõla katsega. Kuigi põhimõtteliselt jääb see meetod ebarahuldavaks, sest puudub võimalus jääkliikme korrektseks hindamiseks ja meetodi kasutamine muude interaktsioonide (ka nõrkade) korral viib vastuoludeni, on ta siiski ainus tõhus meetod traditsioonilises kvantelektrodünaamikas. (Kvantvälja kontseptsioone hülgaval S-maatriksi teoorial, milles S-maatriksit vaadeldakse primaarse mõistena, peatume lühidalt § -s 10 (vt. ka [10]).

Kuna selles peatükis vaatleme ainult operaatorpotentsiaale, jätame edaspidi kõikjal operaatori sümboli ^ märkimata. (Etteantud funktsioonidega (c-arvudega) kirjeldatavaid välju nimetame "välisteks" väljadeks ja tähistame eraldi.)

1. Vastavalt Maxwelli teooriale rahuldavad laengute tekitatud elektromagnetvälja potentsiaalid mittehomogeenseid võrrandeid

$$\Box A_\mu(x) = -j_\mu(x), \qquad (9.1)$$

mida kooskõlas eelöelduga tõlgendame interageeriva elektromagnetvälja operaatorpotentsiaalide liikumisvõrranditena. (9.1) parem pool koosneb (samuti interageeriva) elektron-positronvälja vooluvektori komponentidest. Viimase kohta oletame, et ta avaldub potentsiaalide $\bar{\psi}(x)$, $\psi(x)$ kaudu täpselt samuti nagu vaba välja korral (vt. val. (7.4'))

$$j_\mu(x) = \frac{ie}{2}\left[\bar{\psi}(x), \gamma_\mu \psi(x)\right]. \qquad (9.2)$$

Dirac'i teooriast on teada, et elektromagnetväljas viibivat elektroni kirjeldab võrrand

$$\left[\gamma_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu\right) + m\right]\psi(x) = 0$$

või

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)\psi(x) = f(x), \qquad (9.3)$$

kus

$$f(x) = ie\gamma_\mu A_\mu(x)\psi(x). \qquad (9.4)$$

Võrrandit (9.3) tõlgendame nüüd elektron-positronvälja operaatorpotentsiaali liikumisvõrrandina.

Operaator $\bar{\psi}$ rahuldab võrrandit

$$\frac{\partial \bar{\psi}(x)}{\partial x_\mu}\gamma_\mu - m\bar{\psi}(x) = f'(x), \qquad (9.3')$$

kus

$$f'(x) = -ie\bar{\psi}(x)\gamma_\mu A_\mu(x). \qquad (9.4')$$

Võrrandid (9.1, 3, 3') on tuletatavad variatsioonprintsiibil lagranžiaanist

$$L = L_0 + L_{int} \quad , \tag{9.5}$$

kus

$$L_0 = -\frac{1}{2}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2}\{\bar{\psi}(\delta_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m)\psi + \psi(\tilde{\delta}_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m)\bar{\psi}\} \tag{9.6}$$

ühtib kujult vaba elektron-positronvälja ja elektromagnetvälja lagranžiaanide summaga*, kuna L_{int} on interaktsioonilagranžiaan

$$L_{int} = j_\mu(x) A_\mu(x) = \frac{ie}{2} A_\mu [\bar{\psi}, \delta_\mu \psi] . \tag{9.8}$$

Sellele vastavat osa hamiltoniaanis (vt. val. (1.8)) nimetatakse <u>interaktsiooni-hamiltoniaaniks</u> H_{int}:

$$H_{int} = - L_{int} \quad . \tag{9.9}$$

Märgime, et välja <u>koguhamiltoniaan</u>, mis on defineeritud kui energia-impulsstensori $T_{\mu\nu}$ komponent $-T_{44}$, ühtib formaalselt vabade väljade hamiltoniaanide summaga, kui arvestame välja võrrandeid, sest

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\mu} + \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\mu}\frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\nu} - \delta_{\mu\nu}\frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\rho}\frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\rho} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\{[\bar{\psi}, \delta_\nu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu}] - [\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\mu}, \delta_\nu \psi]\}\right. . \tag{9.10}$$

---

* Elektron-positronvälja operaatorid oleme paigutanud nii, et lagranžiaan osutuks invariantseks laengulise konjugeerimise suhtes (vt. lisa C).

Selle avaldise abil võime moodustada välja energia-impulssvektori P_ν ja formuleerida kvanttingimused (4.14):

$$i\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu} = [P_\nu, A_\mu(x)] ,$$
$$i\frac{\partial \psi_\alpha(x)}{\partial x_\nu} = [P_\nu, \psi_\alpha(x)] . \qquad (9.11)$$

Kuid erinevalt vabade väljade juhust, kus seda tüüpi tingimused võimaldasid kohe välja arvutada operaatorpotentsiaalide kommutaatorid (antikommutaatorid), me tingimustest (9.11) neid arvutada ei saa. Põhjus on selles, et me ei tunne võrrandite (9.1, 3) lahendeid.* Vahetuseeskirjade leidmiseks võime antud juhul kasutada kanoonilist kvantiseerimist vastavalt valemitele (1.9, 10). Arvestades lagranžiaani avaldist (9.5 - 8), saame

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')]_{|x_0=x_0'} = 0 ,$$
$$[A_\mu(x), \frac{\partial A_\nu(x')}{\partial x_0'}]_{|x_0=x_0'} = i\delta_{\mu\nu}\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') ,$$
$$\{\psi_\alpha(x), \psi_\beta^+(x')\}_{|x_0=x_0'} = \delta_{\alpha\beta}\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') ,$$
$$\{\psi_\alpha(x), \psi_\beta(x')\}_{|x_0=x_0'} = 0 , \qquad (9.12)$$
$$[\psi_\alpha(x), A_\mu(x')]_{|x_0=x_0'} = [\psi_\alpha^+(x), A_\mu(x')]_{|x_0=x_0'} = 0 .$$

Tegelikult võime kanoonilisel kvantiseerimisel valida samuti kommutaatori või antikommutaatori nagu kvanttingimusest (4.14) lähtudeski. Valemeis (9.12) on valik teostatud vabade väljade (kui teatud piirjuhu) vahetuseeskirju arvestades ja pidades silmas üldist teoreemi seosest spinni ja statistika vahel (vt. § 15). Saab näidata ([1] § 15), et tingimused (9.11) ja (9.12) on omavahel kooskõlas. Seoste (9.12) puuduseks on see, et neil on n.ö. algtingimus-

* Meenutame, et vabade väljade korral kasutasime vahetuseeskirjade tuletamiseks väljavõrrandite lahendeid ilmutatud kujul (tasalainete superpositsioonina).

te kuju: nad ütlevad küll, missugused on vahetuseeskirjad hetkel $x_0 = x'_0$, kuid nende üldistamine mis tahes ajasarnastele intervallidele ei ole (väljavõrrandite lahendeid tundmata) võimalik. Kasu on neist siiski niipalju, et näit. avaldistes (9.4, 4') võime operaatorid A_μ ja ψ paigutada suvalises järjestuses, sest nad vastavad samale ajamomendile x_0.* Avaldistes aga, kus tuleb arvestada erinevate ajamomentidega seotud suurusi (näit. valemites (9.35 - 38)), mõistame $f(x)$, $f'(x)$ all sümmetriseeritud avaldisi

$$f(x) \to \frac{ie}{2}\gamma_\mu\{A_\mu(x), \psi(x)\}; \quad f'(x) \to \frac{-ie}{2}\{\bar{\psi}(x), A_\mu(x)\}\gamma_\mu. \qquad (9.13)$$

Tuleme tagasi võrrandite (9.1, 3) juurde. Nagu eelnenud arutlusest selgub, ei ole meil piisavalt tingimusi nende täpseks lahendamiseks: selleks et neid lahendada, peaksime teadma operaatorite vahetuseeskirju mis tahes ruumilis-ajaliste intervallide korral. Viimaste määramine aga (ilma täiendavate ja praegu teoorias puuduvate postulaatideta) ei ole väljavõrrandite lahendeid tundmata võimalik. Ainsaks väljapääsuks on lähendusmeetodite kasutamine. Siin esitatava häiritusmeetodiga taandame interageerivate väljade omadused juba tuntud vabade väljade omadustele.

Häiritusmeetodi kasutamine osutub eriti lihtsaks, kui diferentsiaalvõrrandid (9.1, 3, 3') teisendada eelnevalt integraalvõrranditeks, postuleerides füüsikaliselt mõistlikke algtingimusi (sest integraalvõrrand sisaldab automaatselt täiendavaid alg- või rajatingimusi).

2. Vaatleme järgmist abiprobleemi.

Olgu antud võrrand

---

* Rõhutame, et erinevalt vabade väljade juhust, kus operaatoreid A_μ ja ψ loetakse automaatselt kommutatiivseiks, kuna nad vastavad kinemaatiliselt sõltumatutele väljadele, antud juhul operaatorid A_μ ja ψ üldiselt ei kommuteeru.

$$(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m)\psi = 0 \quad , \text{ kui} \quad x_0 > T \tag{9.14}$$

algtingimusega $\psi(x) = u(\vec{x})$, kui $x_0 = T$.

Arvestades funktsiooni S(x) omadusi (vt. lisa A)

$$(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m)S(x) = 0 ; \quad S(x)_{|x_0=0} = i\gamma_4 \delta^{(3)}(\vec{x}), \tag{9.15}$$

võime esitada (9.14) lahendi

$$\psi(x) = -i\int_{(x_0'=T)} d^3x' \, S(x-x')\gamma_4 u(\vec{x}'). \tag{9.16}$$

Mittehomogeenset võrrandit

$$(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m)\psi = f(x) \qquad (x_0 > T) \tag{9.14'}$$

koos vastava algtingimusega

$$\psi(x)_{|x_0=T} = u(\vec{x})$$

rahuldab funktsioon

$$\psi(x) = \int d^3x' \int_T^{x_0} dx_0' \, S(x-x') f(x') -$$

$$- i\int_{(x_0'=T)} d^3x' \, S(x-x')\gamma_4 u(\vec{x}'), \tag{9.16'}$$

nagu näitab otsene kontroll.*

---

* $(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m)\int_T^{x_0} dx_0' \int d^3x' \, S(x-x')f(x') =$

$= -i\gamma_4 \int_{(x_0'=x_0)} d^3x' \, S(x-x')f(x') + \int_{T_0}^{x_0} d^4x' (\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m) S(x-x') f(x') =$

$= \int d^3x' \, \delta(\vec{x}-\vec{x}') f(x')_{|x_0'=x_0} = f(x).$

Lahendis (9.16') võime esimese liikme avaldada Dirac'i võrrandi retardeeritud Greeni funktsiooni $S_R(x)$ kaudu (vt. lisa A),

$$S_R(x) = \begin{cases} S(x) , & \text{kui } x_0 > 0 \\ 0 , & \text{kui } x_0 < 0 \end{cases} , \quad (\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m) S_R(x) = \delta^4(x). \tag{9.17}$$

Saame

$$\psi(x) = \int d^3x' \int_T^\infty dx_0' \, S_R(x - x') \, f(x') - \\ - i \int_{(x_0' = T)} d^3x' \, S(x - x') \, \gamma_4 \, u(\vec{x}') . \tag{9.16''}$$

Analoogiliselt võime lahendada mittehomogeense d'Alembert'i võrrandi koos algtingimustega

$$\Box A_\mu(x) = -j_\mu(x) , \quad x_0 > T ; \tag{9.18}$$
$$A_\mu(x)|_{x_0 = T} = \varphi_\mu(\vec{x}) , \quad \frac{\partial A_\mu}{\partial x_0}|_{x_0 = T} = \chi_\mu(\vec{x}) .$$

Arvestades funktsiooni D(x) omadusi (vt. lisa A)

$$\Box \mathcal{D}(x) = 0 ; \quad \mathcal{D}(x)|_{x_0 = 0} = 0 ; \quad \frac{\partial \mathcal{D}(x)}{\partial x_0}|_{x_0 = 0} = \delta^3(\vec{x}) , \tag{9.19}$$

saame[*]

$$A_\mu(x) = \int d^3x' \int_T^{x_0} dx_0' \, \mathcal{D}(x - x') \, j_\mu(x') + \\ + \int_{(x_0' = T)} d^3x' \left[\mathcal{D}(x - x') \, \chi_\mu(\vec{x}') + \frac{\partial \mathcal{D}(x - x')}{\partial x_0} \, \varphi_\mu(\vec{x}') \right] . \tag{9.20}$$

[*] $-\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \left\{ \int_T^{x_0} dx_0' \int d^3x' \, \mathcal{D}(x - x') \, j_\mu(x') = -\frac{\partial}{\partial x_0} \left\{ \int d^3x' \, \mathcal{D}(x - x') \, j_\mu(x')|_{x_0' = x_0} + \right. \right.$
$\left. \left. + \int_T^{x_0} d^4x' \, \frac{\partial \mathcal{D}(x - x')}{\partial x_0} \, j_\mu(x') \right\} = - \int d^3x' \, \frac{\partial \mathcal{D}(x - x')}{\partial x_0} \, j_\mu(x')|_{x_0' = x_0} - \int_T^{x_0} d^4x' \, \frac{\partial^2 \mathcal{D}(x - x')}{\partial x_0^2} \, j_\mu(x') .$

Kui algtingimusi sisaldavad integraalid valemites (9.16'', 20') tähistame vastavalt

$$\psi_T^{\circ}(x) = -i \int_{(x_0'=T)} d^3x'\, S(x-x')\, \gamma_4\, u(\vec{x}') \qquad (9.22)$$

ja

$$A_{\mu T}^{\circ}(x) = \int_{(x_0'=T)} d^3x' \left\{ D(x-x')\, \chi_\mu(\vec{x}') + \frac{\partial D(x-x')}{\partial x_0}\, \varphi_\mu(\vec{x}') \right\}, \qquad (9.23)$$

saame vahetu arvutusega kontrollida, et nad rahuldavad vabade väljade võrrandeid vastavate algtingimustega.

Kui visandatud meetodit rakendame võrrandite (9.1,3) korral, saame nad ümber kirjutada integraalvõrranditena (sest antud juhul ka võrrandite paremad pooled sisaldavad otsitavaid funktsioone)

$$\psi(x) = \psi_T^{\circ}(x) + \frac{ie}{2} \int_T^{\infty} dx_0' \int d^3x'\, S_R(x-x') \gamma_\mu \left\{ A_\mu(x'), \psi(x') \right\}, \qquad (9.24)$$

$$A_\mu(x) = A_{\mu T}^{\circ}(x) + \frac{ie}{2} \int_T^{\infty} dx_0' \int d^3x'\, D_R(x-x') \left[\bar{\psi}(x'), \gamma_\mu \psi(x') \right]. \qquad (9.25)$$

Siin ψ_T° ja $A_{\mu T}^{\circ}$ on mõnesugused <u>vaba välja</u> potentsiaalide omadustega operaatorid, mis on uuritavate operaatoritega seotud järgmiselt:

$$\psi(x)_{|x_0=T} = \psi_T^{\circ}(x) \;;\quad A_\mu(x)_{|x_0=T} = A_{\mu T}^{\circ}(x) \qquad (9.26)$$

3. Vaatleme, missuguse mõistliku tõlgenduse võime anda algtingimustele (9.26). Selleks meenutame väljade (neile vastavate osakeste) vastastikuse mõju uurimiseks koraldatavate katsete põhimõttelist skeemi (vt. joon. 1).

Joon. 1.

Vabade osakeste voog suunatakse märklauale, kus toimub uuritavate osakeste interaktsioon. Põrkeprotsessis tekkinud (sama liiki või uued) osakesed eemalduvad seejärel märklauast ja nad registreeritakse katsele kohandatud detektori abil. Interaktsiooni aeg (s.o. aeg, mille vältel pealelangenud osakesed viibisid märklauaosakeste vahetus läheduses) on praktiliselt väga väike võrreldes ajaga, mis osakestel kulub märklauani jõudmiseks või pärast hajumist detektorisse jõudmiseks. Sellepärast võime osakeste allikast (kiirendajast) väljumise hetke lugeda lõpmata kaugeks alghetkeks ($-\infty$), osakeste detektorisse saabumise hetke aga lõpmata kaugeks lõpphetkeks ($+\infty$). Uuritavad osakesed ise (neid kirjeldavad väljad) on nimetatud momentidel praktiliselt vabad. Tavaliselt märgitakse lõpmata kaugele alghetkele $-\infty$ vastavaid vabu välju sümboliga "in", lõpmata kaugele lõpphetkele $+\infty$ vastavaid aga sümboliga "out".*

Vastavuse kirjeldatud füüsikalise pildiga saame, kui valemites (9.26) võtame $T = -\infty$ või $T = +\infty$. Siis omandavad valemid (9.24, 25) vastavalt kuju:

$$\psi(x) = \psi^{in}(x) + \frac{ie}{2}\int d^4x' S_R(x-x')\delta_\mu\{A_\mu(x'), \psi(x')\}, \qquad (9.27)$$

---

* Tähistused pärinevad inglisekeelsetest sõnadest "incoming" - sisenev, s.t. interaktsiooniprotsessi tulev osake, väli, ja "outgoing" - väljuv, s.t. piirkonnast, kus toimus interaktsioon, väljuv osake või väli.

$$A_\mu(x) = A_\mu^{in}(x) + \frac{ie}{2}\int d^4x' D_R(x-x')\left[\bar\psi(x'), \gamma_\mu \psi(x')\right]. \qquad (9.28)$$

ψ^{in} ja A_μ^{in} on määratud tingimustest.

$$\psi^{out}(x) = \lim_{T\to-\infty} \psi_T^0(x); \quad A_\mu^{out}(x) = \lim_{T\to-\infty} A_{\mu T}^0(x). \qquad (9.29)$$

Märgime, et integraalvõrrandite vabad liikmed võime avaldada ka vabade väljade ψ^{out}, A_μ^{out} kaudu, kus

$$\psi^{in}(x) = \lim_{T\to+\infty} \psi_T^0(x),$$

$$A_\mu^{in}(x) = \lim_{T\to+\infty} A_{\mu T}^0(x), \qquad (9.30)$$

kui retardeeritud Greeni funktsioonide $S_R(x)$, $D_R(x)$ asemel kasutame avansseeritud Greeni funktsioone $S_A(x)$, $D_A(x)$, kus

$$D_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x_0>0 \\ -D(x), & \text{kui } x_0<0 \end{cases}, \quad S_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x_0>0 \\ -S(x), & \text{kui } x_0<0 \end{cases}. \qquad (9.31)$$

Siis saame

$$\psi(x) = \psi^{out}(x) + \frac{ie}{2}\int d^4x' S_A(x-x')\gamma_\mu \{A_\mu(x'), \psi(x')\}, \qquad (9.27')$$

$$A_\mu(x) = A_\mu^{out}(x) + \frac{ie}{2}\int d^4x' D_A(x-x')\left[\bar\psi(x'), \gamma_\mu\psi(x')\right] \qquad (9.28')$$

Analoogiliselt võime võrrandi (9.3') ümber kirjutada integraalvõrrandina (ka vahetult valemeist (9.27, 27'), sest $\bar\psi = \psi^+\gamma_4$)

$$\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^{in}(x) + \frac{ie}{2}\int d^4x' \{\bar{\psi}(x'), A_\mu(x')\}\gamma_\mu S_A(x'-x) \qquad (9.32)$$

või

$$\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^{out}(x) + \frac{ie}{2}\int d^4x' \{\bar{\psi}(x'), A_\mu(x')\}\gamma_\mu S_R(x'-x). \qquad (9.32')$$

4. Vastavalt paragrahvi alguses kirjeldatud häiritusmeetodile otsime võrrandite (9.27, 28) lahendeid kujul

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^n \psi^{(n)}(x); \quad A_\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^n A_\mu^{(n)}(x) \qquad (9.33)$$

ning kasutame ka vooluvektori arendust

$$j_\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{n+1} j_\mu^{(n)}(x). \qquad (9.34)$$

Kui võrrutame samadele e astmetele vastavad liikmed nimetatud võrrandite vasakutes ja paremates pooltes, saame arenduste (9.33) kõik liikmed avaldada vabade väljade (e^0-le vastavate liikmete) $\psi^{(0)}(x)$, $\bar{\psi}^{(0)}(x)$, $A_\mu^{(0)}(x)$ kaudu.

Vahetu arvutus annab (kontrollige!)

$$\psi^{(0)}(x) = \psi^{in}(x), \qquad (9.35^0)$$

$$\psi^{(1)}(x) = i\int d^4x' S_R(x-x')\gamma_\mu A_\mu^0(x')\psi^0(x') \qquad (9.35')$$

$$\psi^{(2)}(x) = \frac{i}{2}\int d^4x' S_R(x-x')\gamma_\nu \{A_\nu^{(1)}(x'), \psi^0(x')\} +$$
$$+ \frac{i}{2}\int d^4x' S_R(x-x')\gamma_\nu \{A_\nu^{(0)}(x'), \psi^{(1)}(x')\} =$$

$$= -\frac{1}{4}\int d^4x' d^4x'' S_R(x-x')\left[\mathcal{D}_R(x'-x'')\gamma_\nu\left\{\left[\bar\psi^\circ(x''),\gamma_\nu\psi^\circ(x'')\right]\psi^\circ(x')\right\}+\right.$$

$$\left.+2\gamma_\nu\left\{A^\circ_\nu(x'),A^\circ_\rho(x'')\right\}S_R(x'-x'')\gamma_\rho\psi^\circ(x'')\right], \qquad (9.35'')$$

.....

$$\bar\psi^\circ(x) = \bar\psi^{in}(x), \qquad (9.36^\circ)$$

$$\bar\psi^{(1)}(x) = i\int d^4x'\,\bar\psi^\circ(x')\gamma_\rho A^\circ_\rho(x')\,S_A(x'-x), \qquad (9.36')$$

$$\bar\psi^{(2)}(x) = \frac{i}{2}\int d^4x'\left\{\bar\psi^{(1)}(x'),A^\circ_\nu(x')\right\}\gamma_\nu S_A(x'-x)+$$

$$+\frac{i}{2}\int d^4x'\left\{\bar\psi^\circ(x'),A^{(1)}_\nu(x')\right\}\gamma_\nu S_A(x'-x)=$$

$$=-\frac{1}{2}\int d^4x\,d^4x''\left[\bar\psi^\circ(x'')\gamma_\rho\left\{A^\circ_\rho(x''),A^\circ_\nu(x')\right\}S_A(x''-x')\gamma_\nu+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\mathcal{D}_R(x'-x'')\left\{\bar\psi^\circ(x'),\left[\bar\psi^\circ(x''),\gamma_\nu\psi^\circ(x'')\right]\right\}\gamma_\nu\right]S_A(x'-x), \qquad (9.36'')$$

.....

$$A^\circ_\mu(x) = A^{in}_\mu(x), \qquad (9.37^\circ)$$

$$A^{(1)}_\mu(x) = \frac{i}{2}\int d^4x'\,\mathcal{D}_R(x-x')\left[\bar\psi(x'),\gamma_\mu\psi^\circ(x')\right], \qquad (9.37')$$

.....

$$j^\circ_\mu(x) = \frac{i}{2}\left[\bar\psi^\circ(x),\gamma_\mu\psi^\circ(x)\right], \qquad (9.38^\circ)$$

$$j^{(1)}_\mu(x) = \frac{i}{2}\left[\bar\psi^\circ(x),\gamma_\mu\psi^{(1)}(x)\right]+\frac{i}{2}\left[\bar\psi^{(1)}(x),\gamma_\mu\psi^\circ(x)\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\int d^4x'\left\{\left[\bar\psi^\circ(x),\gamma_\mu S_R(x-x')\gamma_\rho\psi^\circ(x')\right]+\right.$$

$$\left.+\left[\bar\psi^\circ(x')\gamma_\rho S_A(x'-x),\gamma_\mu\psi^\circ(x)\right]\right\}A^\circ_\rho(x'), \qquad (9.38')$$

$$j^{(2)}_\mu(x) = \frac{i}{2}\left\{\left[\bar\psi^\circ(x),\gamma_\mu\psi^{(2)}(x)\right]+\left[\bar\psi^{(1)}(x),\gamma_\mu\psi^{(1)}(x)\right]+\right.$$

$$\left.+\left[\bar\psi^{(2)}(x),\gamma_\mu\psi^\circ(x)\right]\right\}, \qquad (9.38'')$$

.....

Analoogilised avaldised saame valemitest (9.27', 28', 32') lähtudes. Neid kasutame hiljem (§ 14) nn. radiatsiooniliste paranduste arvutamisel.

Saab näidata, et interageerivate väljade lagranžiaan L (val. (9.5 - 8)) on invariantne Lorentzi teisenduste, aeg-ruumi peegelduste ja laengulise peegelduse suhtes ning muutub ebaolulise 4-divergentsi võrra gradientteisendustel

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}, \qquad (9.39)$$

$$\psi(x) \to \psi(x) e^{i\varphi(x)}, \qquad \bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}(x) e^{-i\varphi(x)},$$

kus $\varphi(x)$ on suvaline skalaarfunktsioon, mis rahuldab d'Alembert'i võrrandit (vrd. valemile (8.6) järgnenud arutlust). Nende teisenduste üksikasjalikum käsitlus on antud §-s 13.

§ 10. S-maatriksi definitsioon.

S-maatriksi formalismi kasutatakse tänapäeval ulatuslikult peamiselt tugeva interaktsiooniprotsesside kirjeldamisel, kusjuures see formalism vastandatakse sageli kvantväljateooriale. Asi on nimelt selles, et hadronite (s.o. tugevalt interageerivate osakeste) teoorias vaadeldakse S-maatriksit primaarse mõistena: S-maatriksi elemendid on siirdeamplituudid.* Kui mingi osakeste süsteem lä-

* S-maatriksi kui hajumisprotsessi kirjeldava suuruse mõiste tõi teoreetilisse füüsikasse W. Heisenberg 1938.a. (hajumine, saksa k. Streuung, ingl. k. scattering, - siit ka tähe "S" päritolu.) Et igasugust reaktsiooni osakeste vahel võib vaadelda hajumisena (elastsena või mitteelastsena), siis S-maatriksi abil võib kirjeldada mis tahes interaktsiooni-protsessi. S-maatriksit nimet. ka hajumismaatriksiks, tema konkreetseid maatrikselemente hajumisamplituudideks, protsessi tõenäosusamplituudideks, ülemineku-amplituudideks või siirdeamplituudideks. Viimast terminit kasutame lühiduse pärast.

heb toimunud protsessi tõttu antud algolekust antud lõppolekusse, siis vastava siirdeamplituudi mooduli ruut annabki selle protsessi tõenäosuse, mis on vahetult mõõdetav suurus. Siirdeamplituudide - S-maatriksi elementide - konstrueerimisel tuginetakse reale postulaatidele: 1) sümmeetria postulaadid, mis nõuavad siirdetõenäosuste invariantsust Lorentzi rühma ja mõnede diskreetsete teisenduste suhtes; 2) S-maatriksi unitaarsuse tingimus ja 3) oletus, et siirdeamplituude võib matemaatiliselt kirjeldada mõnesuguste analüütiliste funktsioonide piirväärtustena (analüütilisuse postulaat). Sellistel postulaatidel baseeruv teooria ei kasuta üldse kvantväljateooriale omast operaatorformalismi (maatrikselemendid on c-arvud) ja on vaba häiritusteooria mõnedest puudustest (vt. [10]). Ent teiselt poolt on see teooria oma olemuselt fenomenoloogiline. Loetletud postulaadid on sisuliselt välja kujunenud traditsioonilise väljateooria tulemuste üldistusena.

Kuna kvantelektrodünaamikas on Lagrange'i formalism ja sellega seotud kvantteooria end hästi õigustanud, vaatleme käesolevas paragrahvis S-maatriksit kui tuletatud mõistet ning uurime tema omadusi.

1. Üleminekul diferentsiaalvõrranditelt integraalvõrranditele eelmises paragrahvis oletasime vaba välja operaatorite ψ^{in}, A_μ^{in} ja ψ^{out}, A_μ^{out} kui $\psi(x)$, $A_\mu(x)$ teatud piirväärtuste eksisteerimist. Täpsustame nüüd seda postulaati.

Vaatleme in-välju (kõik öeldu on vahetult ülekantav out-väljadele). Eelduse kohaselt rahuldavad ψ^{in} ja A_μ^{in} vabade väljade võrrandeid

$$(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m)\psi^{in} = 0 \; ; \quad \frac{\partial \bar{\psi}^{in}}{\partial x_\mu}\gamma_\mu - m\bar{\psi}^{in} = 0 \, , \tag{10.1}$$

$$\Box A_\mu^{in} = 0 \tag{10.2}$$

ning me võime nad arendada vastavate võrrandite tuntud lahendite (c-arvude) järgi ritta: ✱

$$\hat{\psi}^{in}(x) = \sum_{(\nu)} \{ \hat{a}_\nu^{in} u^{(\nu)}(x) + \hat{b}_\nu^{+in} v^{(\nu)}(x) \}, \qquad (10.3)$$

$$\hat{\bar{\psi}}^{in}(x) = \sum_{(\nu)} \{ \hat{a}_\nu^{+in} \bar{u}^{(\nu)}(x) + \hat{b}_\nu^{in} \bar{v}^{(\nu)}(x) \}, \qquad (10.3')$$

kus $u^{\nu}(x)$ on positiivsetele, $v^{(\nu)}(x)$ aga negatiivsetele sagedustele vastavad Dirac'i võrrandi <u>normeeritud</u> lahendid:

$$(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m) u^{(\nu)}(x) = 0 \; ; \; (\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m) v^{(\nu)}(x) = 0 ,$$

$$\int \bar{u}^{(\nu)}(x) \gamma_4 u^{(\nu')}(x) d^3x = \delta_{\nu\nu'} ,$$

$$\int \bar{v}^{(\nu)}(x) \gamma_4 v^{(\nu')}(x) d^3x = \delta_{\nu\nu'} , \qquad (10.4)$$

$$\int \bar{u}^{(\nu)}(x) \gamma_4 v^{(\nu')}(x) d^3x = \int \bar{v}^{(\nu)}(x) \gamma_4 u^{(\nu')}(x) d^3x = 0 .$$

Indeks (ν) tähistab mõnesugust parameetrite (kvantarvude) kompleksi. Näit. tasalaineliste lahendite korral $\nu \to (r, \vec{p})$, kus r iseloomustab kvandi polarisatsiooni, $\vec{p}$ impulssi.

Analoogiliselt esitame operaatori $\hat{A}_\mu^{in}(x)$ ✱✱

$$\hat{A}_\mu^{in}(x) = \sum_{(\nu)} \{ \hat{C}_\nu^{in} \varphi_\mu^{(\nu)}(x) + \hat{C}_\nu^{+in} \varphi_\mu^{(\nu)*}(x) \}, \qquad (10.5)$$

✱ Kui tahame arenduse indeksitele omistada diskreetseid väärtusi, ilma et postuleeriksime (relativistlikult mitteinvariantse) lõpliku ruumala V olemasolu (nagu § -s 5 jj.), peame arendusfunktsioonideks valima võrrandite normeeritavad lahendid, mitte tasalained.

✱✱ Kasutame taas operaatori sümbolit, et vältida segiminekut harilike funktsioonidega $u^{(\nu)}(x)$, $v^{(\nu)}(x)$, $\varphi^{(\nu)}(x)$.

kus $f_\mu^{(\nu)}(x)$ on positiivseid sagedusi sisaldavad d'Alembert'i võrrandi normeeritud lahendid:

$$\Box f_\mu^{(\nu)}(x) = 0 ,$$

$$i\int [f_\mu^{(\nu)}(x) \frac{\partial f_\mu^{(\nu')*}(x)}{\partial x_0} - \frac{\partial f_\mu^{(\nu)}(x)}{\partial x_0} f_\mu^{(\nu')*}(x)] d^3x = \delta_{\nu\nu'} ,$$

$$\int [f_\mu^{(\nu)}(x) \frac{\partial f_\mu^{(\nu')}(x)}{\partial x_0} - \frac{\partial f_\mu^{(\nu)}(x)}{\partial x_0} f_\mu^{(\nu')}] d^3(x) = 0 . \qquad (10.6)$$

D'Alembert'i võrrandi lahendite ortogonaalsuse ja normeerituse tingimustel on kuju (10.6) (tavalise funktsioonide $f^{(\nu)}(x)$, $f^{(\nu')}(x)$ ortonormaalsuse tingimuse $\int d^3x f^{(\nu)}(x) f^{(\nu')*}(x) = \delta_{\nu\nu'}$ asemel) sellepärast, et me nõuame ON tingimuste sõltumatust ajast. D'Alembert'i võrrandist järelduvad pidevusvõrrandid

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma} [f_\mu^{(\nu)} \frac{\partial f_\mu^{(\nu')*}}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial f_\mu^{(\nu)}}{\partial x_\sigma} f_\mu^{(\nu')*}] = 0 ,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma} [f_\mu^{(\nu)} \frac{\partial f_\mu^{(\nu')}}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial f_\mu^{(\nu)}}{\partial x_\sigma} f_\mu^{(\nu')}] = 0 .$$

(Kontrollige!) Nendele vastavad ajaliselt konstantsed suurused

$$-i\int d^3x [f_\mu^{(\nu)} \frac{\partial f_\mu^{(\nu')*}}{\partial x_0} - \frac{\partial f_\mu^{(\nu)}}{\partial x_0} f_\mu^{(\nu')*}] ,$$

$$-i\int d^3x [f_\mu^{(\nu)} \frac{\partial f_\mu^{(\nu')}}{\partial x_0} - f_\mu^{(\nu')} \frac{\partial f_\mu^{(\nu)}}{\partial x_0}]$$

(vrd. (2.16, 19')). Tasalainete korral (vt. näit. (8.18))

$$(\nu) \to (\lambda, \kappa)$$

$$f_\mu^{(\lambda,\kappa)}(x) = \frac{e_\mu^{(\lambda)}}{\sqrt{V}\sqrt{2\kappa_0}} e^{i\kappa x}$$

ja tingimused (10.6) annavad vahetult

$$-i\int d^3x \left[f_\mu^{(\lambda,\kappa)} \frac{\partial f_\mu^{(\lambda',\kappa')*}}{\partial x_0} - \frac{\partial f_\mu^{(\lambda,\kappa)}}{\partial x_0} f_\mu^{(\lambda',\kappa')*} \right] =$$

$$= \frac{1}{V} \frac{(\kappa_0' + \kappa_0)}{2\sqrt{\kappa_0 \kappa_0'}} e_\mu^{(\lambda)} e_\mu^{(\lambda')} \int d^3x \, e^{i(\kappa - \kappa')x} = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\kappa\kappa'} .$$

Eelduse kohaselt moodustavad nii funktsioonid $u^{(\nu)}(x)$, $v^{(\nu)}(x)$ kui ka funktsioonid $f^{(\nu)}(x)$ täieliku ON süsteemi. Sellepärast võime nende järgi arendada ka interageerivate väljade operaatorpotentsiaale, kuid arenduse kordajatena esinevad operaatorid ei ole enam konstantsed, vaid sõltuvad ajast x_0. Saame

$$\hat{\psi}(x) = \sum_{(\nu)} \left\{ \hat{a}_\nu(x_0) u^{(\nu)}(x) + \hat{b}_\nu^+(x_0) v^{(\nu)}(x) \right\}, \tag{10.7}$$

$$\hat{\bar{\psi}}(x) = \sum_{(\nu)} \left\{ \hat{a}_\nu^+(x_0) \bar{u}^{(\nu)}(x) + \hat{b}_\nu(x_0) \bar{v}^{(\nu)}(x) \right\}, \tag{10.8}$$

$$\hat{A}_\mu(x) = \sum_{(\nu)} \left\{ \hat{C}_\nu(x_0) f_\mu^{(\nu)}(x) + \hat{C}_\nu^+(x_0) f_\mu^{(\nu)}(x) \right\}. \tag{10.9}$$

Eespool, valemitele (5.36), (8.36) järgnenud arutlustes märkisime, et operaatorpotentsiaalid on korrektselt käsitletavad üksnes üldistatud funktsioonide mõttes. Valemid (10.3 - 9) näitavad, kuidas seda teha. ON tingimusi (10.4, 6) arvestades saame arendustest (10.7 - 9):

$$\begin{aligned}
\hat{a}_\nu(x_0) &= \int d^3x \, \bar{u}^{(\nu)}(x) \gamma_4 \hat{\psi}(x), \\
\hat{a}_\nu^+(x_0) &= \int d^3x \, \hat{\bar{\psi}}(x) \gamma_4 u^{(\nu)}(x), \\
\hat{b}_\nu(x_0) &= \int d^3x \, \hat{\bar{\psi}}(x) \gamma_4 v^{(\nu)}(x), \\
\hat{b}_\nu^+(x_0) &= \int d^3x \, \bar{v}^{(\nu)}(x) \gamma_4 \hat{\psi}(x),
\end{aligned} \tag{10.10}$$

$$\hat{C}_\nu(x_0) = -i\int d^3x \left\{ \hat{A}_\mu(x) \frac{\partial f_\mu^{(\omega)*}(x)}{\partial x_0} - \frac{\partial \hat{A}_\mu(x)}{\partial x_0} f_\mu^{(\omega)*}(x) \right\},$$

$$\hat{C}_\nu^+(x_0) = i\int d^3x \left\{ \hat{A}_\mu(x) \frac{\partial f_\mu^{(\omega)}(x)}{\partial x_0} - \frac{\partial \hat{A}_\mu(x)}{\partial x_0} f_\mu^{(\omega)*}(x) \right\},$$

kus integraalid tuleb arvutada üle lõpliku ruumala võetud integraalide piirväärtustena (analoogiliselt integraalidega, mis sisaldavad δ-funktsiooni). Kuid selliste integraalide piirväärtustega on defineeritud üldistatud funktsioonid põhifunktsioonide $u^{(\omega)}(x)$, $v^{(\omega)}(x)$, $f^{(\omega)}(x)$ ruumis (vt. näit. [5, 9])* Seega on matemaatilises mõttes korrektselt defineeritud just operaatorid $\hat{a}_\nu(x_0)$, $\hat{b}_\nu(x_0)$, ... kui mõõduka kasvuga üldistatud operaator**funktsioonid.** Nüüd võime täpsustada tingimuste (9.29, 30) mõtet. Olgu Φ_i ja Φ_κ interageerivatest väljadest koosneva süsteemi kaks suvalist olekuvektorit (et ajast sõltuvatena vaatleme väljaoperaatoreid $\hat{a}_\nu(x_0)$, $\hat{b}_\nu(x_0)$, ..., siis Φ_i, Φ_κ on muidugi ajast sõltumatud vastavalt Heisenbergi esituse põhiideele). Siis nimetatud tingimused tähendavad järgmist maatrikselementidevahelist seost:

$$\lim_{x_0 \to -\infty} \langle \Phi_i, \hat{a}_\nu(x_0)\Phi_\kappa \rangle = \langle \Phi_i, \hat{a}_\nu^{in}\Phi_\kappa \rangle, \ldots$$

(10.11)

$$\lim_{x_0 \to +\infty} \langle \Phi_i, \hat{a}_\nu(x_0)\Phi_\kappa \rangle = \langle \Phi_i, \hat{a}_\nu^{out}\Phi_\kappa \rangle, \ldots$$

---

* Kuna eeldasime funktsioonide $u^{(\omega)}(x)$, $v^{(\omega)}(x)$, $f^{(\omega)}(x)$ normi lõplikkust, siis peavad need funktsioonid lõpmatuses saama nulliks. Selliste omadustega põhifunktsioonide ruumis defineeritud distributsioone nimet. mõõduka kasvuga e. tempereeritud distributsioonideks.

2. Näitame, et operaatorite $\hat{a}_\nu^{+in}$, $\hat{b}_\nu^{+in}$, $\hat{c}_\nu^{+in}$ ning samuti operaatorite $\hat{a}_\nu^{+out}$, $\hat{b}_\nu^{+out}$, $\hat{C}_\nu^{+out}$ abil saab moodustada <u>kaks ortonormeeritud olekuvektorite baasi</u> **Hilberti ruumis.** Kuna $\hat{a}_\nu^{+in}$, $\hat{b}_\nu^{+in}$ ja $\hat{C}_\nu^{+in}$ on vaba välja operaatorid, mis vastavad negatiivseid sagedusi sisaldavatele **lahenditele,** siis võime neid tõlgendada (kvantarvude kompleksiga (ν) iseloomustatud) osakese tekke-**operaatoritena,** $\hat{a}_\nu^{in}$, $\hat{b}_\nu^{in}$, $\hat{C}_\nu^{in}$ aga vastavate osakeste kadumis- (neeldumis-)operaatoritena (vrd. vastavaid tõlgendusi operaatorite arendustes tasalainete järgi § -s 5, 7, 8).

Kooskõlas eespool antud vaakumi definitsiooniga (näit. (5.23)) nõuame, et*

$$\hat{a}_\nu^{in}|0\rangle = 0 \; ; \quad \hat{b}_\nu^{in}|0\rangle = 0 \; ; \quad \hat{C}_\nu^{in}|0\rangle = 0 \qquad (10.12)$$

või

$$\langle 0|\hat{a}_\nu^{+in} = 0 \; ; \quad \langle 0|\hat{b}_\nu^{+in} = 0 \; ; \quad \langle 0|\hat{C}_\nu^{+in} = 0 . \qquad (10.12')$$

(Samasugused tingimused kehtivad out-operaatorite korral.)

Selleks et järgnevas eristada nn. elektroonseid, positroonseid ja fotoonseid olekuid, tähistame elektroni parameetreid (kvantarve) tähega ν (ν_1 , ν_2 , ...), positroni kvantarve μ (μ_1 , μ_2 , ...) ja footoni kvantarve ρ (ρ_1 , ρ_2 , ...). Siis saame vaakumolekust lähtudes moodustada uusi olekuid

---

* Mitme indeksiga iseloomustatud olekuvektorite tähistamisel on edaspidi otstarbekas loobuda tähest Φ ja kasutada Dirac'i sulgsümboolikat: $\Phi_0 \equiv |0\rangle$; $\Phi_0^* \equiv \langle 0|$; $\Phi_i \equiv |i\rangle$; $\Phi_i^* \equiv \langle i|$; $\langle \Phi_i, \Phi_k \rangle \equiv \langle i|k\rangle$; $\langle \Phi_i, \hat{B}\Phi_k \rangle \equiv \langle i|\hat{B}|k\rangle$.

$$\hat{a}_\nu^{+in}|0\rangle = |\nu;in\rangle;\quad \hat{b}_\mu^{+in}|0\rangle = |\mu;in\rangle;\quad \hat{C}_\rho^{+in}|0\rangle = |\rho;in\rangle. \quad (10.13)$$

Operaatorite $\hat{a}^{+in}$, $\hat{b}^{+in}$, $\hat{C}^{+in}$ tähendust silmas pidades nimetatakse neid <u>ühe osakese olekuteks</u>. Näit. olekuvektor $|\nu;in\rangle$ kirjeldab välja niisugust olekut, kus eksisteerib üks elektron parameetrite kompleksiga ν (ühe-elektroonne olek).

Otsene arvutus näitab, et kõik ühe osakese olekud on ortogonaalsed vaakumolekuga. Näit. (10.12') tõttu

$$\langle 0|\nu;in\rangle = \langle 0|\hat{a}_\nu^{+in}|0\rangle = 0, \ldots$$

Kasutame vaakumi definitsiooni ja operaatorite $\hat{a}_\nu^{in}$ $\hat{a}_\nu^{+in}$, $\hat{b}_\mu^{in}$, ... vahetuseeskirju, mis vastavalt (7.16, 17; 8.25) on esitatavad järgmiselt:

$$\begin{aligned}
&\{\hat{a}_\nu^{in}, \hat{a}_{\nu'}^{+in}\} = \delta_{\nu\nu'},\\
&\{\hat{b}_\mu^{in}, \hat{b}_{\mu'}^{+in}\} = \delta_{\mu\mu'},\\
&\{\hat{a}_\nu^{in}, \hat{b}_\mu^{in}\} = \cdots = 0, \qquad (10.14)\\
&[\hat{C}_\rho^{in}, \hat{C}_{\rho'}^{+in}] = \delta_{\rho\rho'};\quad [\hat{C}_\rho^{in}, \hat{C}_{\rho'}^{in}] = 0,\\
&[\hat{a}_\nu^{in}, \hat{C}_\rho^{in}] = [\hat{a}_\nu^{in}, \hat{C}_\rho^{+in}] = \cdots = 0.
\end{aligned}$$

Siis saab näidata, et ka kõik erinevate parameetritega iseloomustatud ühe osakese olekud on omavahel ortogonaalsed. Näit. olekuvektorite $|\nu;in\rangle$ ja $|\mu;in\rangle$ skalaarkorrutis on null

$$\langle \nu;in|\mu;in\rangle = \langle 0|\hat{a}_\nu^{in}\hat{b}_\mu^{+in}|0\rangle = -\langle 0|\hat{b}_\mu^{+in}\hat{a}_\nu^{in}|0\rangle = 0.$$

Kui vaakumolekule $|0\rangle$ rakendame kiirgusoperaatoreid korduvalt, saame moodustada kahe, kolme, ... osakese olekuid

$$\hat{a}^{+in}_{\nu_1} \dots \hat{a}^{+in}_{\nu_\kappa} \hat{b}^{+in}_{\mu_1} \dots \hat{b}^{+in}_{\mu_m} \hat{c}^{+in}_{\rho_1} \dots \hat{c}^{+in}_{\rho_s} |0\rangle =$$

$$= |\nu_1 \dots \nu_\kappa ; \mu_1 \dots \mu_m ; \rho_1 \dots \rho_s ; in\rangle . \qquad (10.15)$$

$(\kappa, m, s = 1, 2, \dots)$

Kõik nii moodustatud olekutele vastavad vektorid on omavahel ortogonaalsed ja järelikult lineaarselt sõltumatud. Üldsust kitsendamata võime nad lugeda ka normeerituiks.

Kui valemites (10.13, 15) kasutaksime in-operaatorite asemel out-operaatoreid, saaksime veel teise olekuvektorite ON süsteemi

$$\hat{a}^{+out}_{\nu_1} \dots \hat{a}^{+out}_{\nu_\kappa} \hat{b}^{+out}_{\mu_1} \dots \hat{b}^{+out}_{\mu_m} \hat{c}^{+out}_{\rho_1} \dots \hat{c}^{+out}_{\rho_s} |0\rangle =$$

$$= |\nu_1 \dots \nu_\kappa ; \mu_1 \dots \mu_m ; \rho_1 \dots \rho_s ; out\rangle . \qquad (10.16)$$

$(\kappa, m, s = 1, 2, \dots)$

Väljateoorias <u>postuleeritakse</u>, et kirjeldatud viisil saadud <u>olekuvektorite $|in\rangle$ ja $|out\rangle$ ortonormeeritud süsteemid on täielikud</u> ja moodustavad järelikult <u>kaks sõltumatut baasi</u> olekuvektorite Hilberti ruumis. Kuna kõik baasid on omavahel seotud unitaarteisendusega, peab eksisteerima unitaarne maatriks S, mis seob in-vektorite baasi out-vektorite baasiga.

Niisiis S-maatriksi definitsiooni kohaselt

$$\underline{|\alpha ; in\rangle = S |\alpha ; out\rangle .} \qquad (10.17)$$

(α tähistab suvalist (ν , μ , ρ) kompleksi.)

S-maatriksi unitaarsuse

$$SS^+ = S^+S = I ; \qquad S^+ = S^{-1} \qquad (10.18)$$

tõttu

$$\langle \alpha ; in | = \langle \alpha ; out | S^{-1} \qquad (10.17')$$

3. <u>Leiame seosed in- ja out-operaatorite vahel</u>. Vastavalt definitsioonile (10.15) seab iga in-operaator olekuvektorile $|\alpha ; in\rangle$ vastavusse mõnesuguse olekuvektori $|\alpha' ; in\rangle$, näit.

$$\hat{a}_\nu^{in} |\alpha ; in\rangle = |\alpha' ; in\rangle . \qquad (10.19)$$

Analoogiliselt

$$\hat{a}_\nu^{out} |\alpha ; out\rangle = |\alpha' ; out\rangle . \qquad (10.20)$$

Kui valemis (10.19) avaldame in-vektorid out-vektorite kaudu vastavalt definitsioonile (10.17) ja tulemust võrdleme valemiga (10.20), saame

$$\hat{a}_\nu^{out} = S^{-1} \hat{a}_\nu^{in} S. \qquad (10.21)$$

Samasugune seos kehtib kõikide teiste operaatorite korral, mistõttu arendusi (10.3, 5) silmas pidades võime kirjutada:

$$\psi^{out}(x) = S^{-1} \psi^{in}(x) S ,$$

$$\bar{\psi}^{out}(x) = S^{-1} \bar{\psi}^{in}(x) S ,$$

$$A_\mu^{out}(x) = S^{-1} A_\mu^{in}(x) S . \qquad (10.22)$$

(Siin ja edaspidi jätame jälle operaatori sümboli ^ märkimata.)

Teiselt poolt saame in- ja out-potentsiaalide vahelised seosed avaldada valemitest (9.27, 27'; 28, 28'; 32, 32'). Näit. valemitest (9.27, 27')[*]

$$\psi^{out}(x) = \psi^{in}(x) + ie\int d^4x' [S_R(x-x') - S_A(x-x')]\gamma_\mu A_\mu(x')\psi(x') =$$

$$= \psi^{in}(x) + \int d^4x' \, S(x-x')\,\varphi(x') \,. \qquad (10.23)$$

Vastava valemiga (10.22) võrdlemine näitab, et

$$S^{-1}\psi^{in}(x)S = \psi^{in}(x) + \int d^4x' \, S(x-x')\,\varphi(x'),$$

millest

$$[\psi^{in}(x), S] = S\int d^4x' \, S(x-x')\,\varphi(x'). \qquad (10.24)$$

Täpselt samuti

$$[A_\mu^{in}(x), S] = -S\int d^4x' \, D(x-x')\, j_\mu(x'). \qquad (10.25)$$

S(x-x') ja D(x-x') on siin vastavalt vaba elektron-positronvälja ja vaba elektromagnetvälja vahetusfunktsioonid, $j_\mu(x)$ ja $\varphi(x)$ on antud valemitega (9.2, 4).

Need kommutaatorid määravad unitaarse operaatori S faasikordaja täpsuseni. (Kommutaator $[\bar\psi^{in}(x), S] = S\int d^4x' \, \varphi(x')\, S(x'-x)$ on tuletatav seosest (10.24.).) Kui kasutame häiritusmeetodit, s.t. arendame S seoskonstandi e astmete järgi ritta

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} e^n S_n' \,. \qquad (10.26)$$

---

[*] $S_R(x) - S_A(x) = S(x)$

ja peame silmas arendusi (9.33, 34), saame rekurrentsed valemid:*

$$[\psi^{\circ}(x), S_0'] = 0 \; ; \quad [A_\mu^{\circ}(x), S_0'] = 0 , \tag{10.27°}$$

$$[\psi^{\circ}(x), S_1'] = S_0' \int d^4x' \, S(x-x') f_0(x') ,$$
$$[A_\mu^{\circ}(x), S_1'] = -S_0' \int d^4x' \, D(x-x') j_\mu^{\circ}(x') , \tag{10.27'}$$

$$[\psi^{\circ}(x), S_2'] = S_0' \int d^4x' \, S(x-x') f_1(x') + S_1' \int d^4x' \, S(x-x') f_0(x') ,$$
$$[A_\mu^{\circ}(x), S_2'] = -S_0' \int d^4x' \, D(x-x') j_\mu^{(1)}(x') - S_1' \int d^4x' \, D(x-x') j_\mu^{\circ}(x') . \tag{10.27''}$$

.....

Seoseist (10.27°) ja S-maatriksi unitaarsusest saame fikseerides eespool mainitud faasikordaja)

$$S_0' \equiv S_0 = I. \tag{10.28°}$$

Järelikult omandavad seosed (10.27') kuju

$$[\psi^{\circ}(x), S_1'] = i \int d^4x' \, S(x-x') \gamma_\mu A_\mu^{\circ}(x') \psi^{\circ}(x') ,$$
$$[A_\mu^{\circ}(x), S_1'] = \frac{i}{2} \int d^4x' \, D(x-x') [\bar{\psi}^{\circ}(x'), \gamma_\mu \psi^{\circ}(x')] . \tag{10.27'a}$$

---

* $\psi^{\circ}(x) \equiv \psi^{in}(x) \; ; \quad A_\mu^{\circ}(x) \equiv A^{in}(x) ,$
$f(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} e^{\lambda+1} f_\lambda(x) .$

Kui arvestame vabade väljade vahetuseeskirju, saame otsese arvutusega kontrollida, et tingimused (10.27'a) koos unitaarsuse nõudega on rahuldatud täpsuseni e^1, kui (arvutage!)

$$S_1 \equiv e S_1' = -i \int d^4x' \, H_{int}^{(0)}(x') \,, \qquad (10.28')$$

kus (vt. val. (9.8, 9))

$$H_{int}^{0}(x) = -\frac{ie}{2} A_\mu^0(x) [\bar{\psi}^0(x), \gamma_\mu \psi^0(x)] \,. \qquad (10.29)$$

Kõrgemat järku lähendite arvutamine valemitest (10.27) osutub aga küllalt keeruliseks. Seepärast leiame üldliikme S_n arenduses (10.26) nn. interaktsiooniesituses (vt. [1] § 15).

4. <u>Interaktsiooni-esitus</u> on teatud mõttes vahepealne kvantmehaanikast tuntud Schrödingeri ja Heisenbergi esituse suhtes.

Schrödingeri esituses vaadeldakse ajast sõltuvana teatavasti olekuvektorit $\psi(x_0)$, mis alluh Schrödingeri võrrandile

$$i \frac{\partial \psi(x_0)}{\partial x_0} = H^S \psi(x_0) \,, \qquad (10.30)$$

kus H^S on uuritava süsteemi Hamiltoni operaator.

Heisenbergi esituses olekuvektor Φ ajast ei sõltu, $\Phi = \psi_0$, kus ψ_0 on ψ väärtus mingil alghetkel $x_0 = T$. Ajast sõltuvad operaatorid $A(x_0)$, $B(x_0)$, ..., mis alluvad Heisenbergi esituse põhivõrrandile

$$-i \frac{\partial A(x_0)}{\partial x_0} = [H, A(x_0)] \,, \qquad (10.31)$$

on Schrödingeri esituse vastavate operaatoritega A^S, B^S, ... seotud valemiga

$$A(x_0) = e^{iHx_0} A^S e^{-iHx_0}; \quad H^S = H; \quad \psi(x_0) = e^{-iHx_0} \varphi . \tag{10.32}$$

Kui süsteemi Hamiltoni operaatori H saame lahutada kaheks osaks

$$H = H_0 + H_1 ,$$

nii et H_0 võime tõlgendada "vabade" süsteemi osade Hamiltoni operaatorina, H_1 aga nendevahelist interaktsiooni kirjeldava liikmena, siis võime defineerida veel interaktsiooni-esituse, kus olekuvektorid φ^i on Schrödingeri esituse olekuvektoritega ψ ja operaatorid A^i, B^i, ... operaatoritega A^S, B^S, ... seotud vastavalt valemitega

$$\varphi^i(x_0) = e^{iH_0^S x_0} \psi(x_0) ,$$

$$A^i = e^{iH_0^S x_0} A^S e^{-iH_0^S x_0} , \qquad H_0^i = H_0^S . \tag{10.33}$$

Nendest seostest järgnevad interaktsiooni-esituse põhivalemid

$$i \frac{\partial \varphi^i(x_0)}{\partial x_0} = H_1^i \varphi^i(x_0) ,$$

$$-i \frac{\partial A^i}{\partial x_0} = [H_0^i, A^i] . \tag{10.34}$$

Siit näeme, et <u>interaktsiooni puudumisel</u> ($H_1 = 0$, $H = H_0$) <u>interaktsiooni-esitus langeb kokku Heisenbergi esitusega</u>. Nagu (10.34) teisest valemist selgub, rahuldavad interaktsiooni-esituse operaatorid A^i tõepoolest täpselt samasuguseid liikumisvõrrandeid, nagu rahuldaksid vastavad Heisenbergi operaatorid, kui $H_1 = 0$.

Kui postuleerida, et interaktsiooni-esituse mõiste on kvantmehaanikast üle kantav ka väljade kvantteooriasse, siis äsjasõnastatud lause kohaselt peavad <u>kõik väljaoperaatorid</u>

interaktsiooni-esituses rahuldama vabade väljade võrrandeid. See muudabki formaalse manipuleerimise nende operaatoritega lihtsaks, sest ka vahetuseeskirjad võime muutmatul kujul vabade väljade teooriast üle võtta.

5. Leiame S-operaatori interaktsiooni-esituses kui mõnesuguse unitaarse operaatori $S(t, t_0)$ piirväärtuse.

Olgu $S(t, t_0)$ unitaarne operaator, mis seob olekuvektori $\varphi^i(t)$ mingil hetkel t olekuvektoriga $\varphi^i(t_0)$ hetkel t_0, s.t.

$$\varphi^i(t) = S(t, t_0)\,\varphi^i(t_0). \tag{10.35}$$

Esimesest valemist (10.34) ja definitsioonist (10.35) järeldub

$$i\frac{\partial S(t,t_0)}{\partial t} = H_1^i(t)\,S(t,t_0), \tag{10.36}$$

$$S(t_0,t_0) = I. \tag{10.36'}$$

Oletame, et interaktsiooni-hamiltoniaan H_1 sõltub mõnesugusest väikesest konstandist ε (seoskonstandist), mille võime tegurina operaatoravaldise ette võtta. Vastavalt häiritusarvutuse põhiideele otsime võrrandi (10.36) lahendit lõpmatu reana

$$S(t,t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(t,t_0), \tag{10.37}$$

kus S_n sisaldab kordajana ε^n. Kui selle avaldise paigutame võrrandisse (10.36) ja võrrutame ε igale astmele vastavad kordajad, saame rea rekursioonivalemeid

$$i\frac{\partial S_0(t,t_0)}{\partial t} = 0, \quad i\frac{\partial S_1(t,t_0)}{\partial t} = H_1^i(t)\,S_0(t,t_0),$$
$$i\frac{\partial S_2(t,t_0)}{\partial t} = H_1^i(t)S_1(t,t_0), \ldots, \quad i\frac{\partial S_n(t,t_0)}{\partial t} = H_1^i(t)S_{n-1}(t,t_0), \tag{10.38}$$

mille järk-järgulisel lahendamisel saame

$$S_0(t,t_0) = I\ ,$$

$$S_1(t,t_0) = -i\int_{t_0}^{t} H_1^i(t_1)\,dt_1\ , \tag{10.39}$$

$$S_2(t,t_0) = (-i)^2\int_{t_0}^{t} dt_1\, H_1^i(t_1)\int_{t_0}^{t_1} dt_2\, H_1^i(t_2)\ .$$

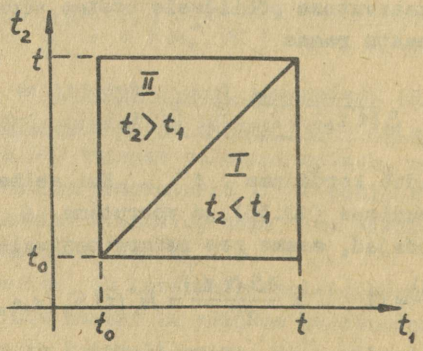
....

S_2 avaldise võime integreerimismuutujate t_1, t_2 suhtes sümmetriseerida

$$S_2(t,t_0) = \frac{(-i)^2}{2}\left\{\int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t_1} dt_2\, H_1^i(t_1)H_1^i(t_2) + \int_{t_0}^{t} dt_2\int_{t_0}^{t_2} dt_1\, H_1^i(t_2)\,H_1^i(t_1)\right\}$$

või, arvestades esimese ja teise liikme integreermispiirkondi I ja II (vt. joon. 2) ja säilitades operaatorite kronoloogilise järjestuse,

$$S_2(t,t_0) = \frac{(-i)^2}{2}\int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t} dt_2\, T\left[H_1^i(t_1)H_1^i(t_2)\right]. \tag{10.49}$$



Joon. 2

Siin $T[\ ]$ tähistab kronoloogilist korrutist (vt. lisa B).

Kasutades täieliku induktsiooni meetodit, saame üldjuhul

$$S_n(t,t_0)=\frac{(-i)^n}{n!}\int_{t_0}^{t}dt_1\cdots\int_{t_0}^{t}dt_n\,T[H_I^c(t_1)\cdots H_I^c(t_n)]. \qquad (10.41)$$
$$(n=0,1,2,\ldots)$$

Väljateoorias on H_I^c arvutatav interaktsiooni-hamiltoniaani tihedusest $H_{int}^{\circ}(x)$ (vrd. (1.8))

$$H_I^c(t)=\int_{|x_0=t} H_{int}^{\circ}(x)\,d^3x\ , \qquad (10.42)$$

kus H_{int}° sõltub vaba välja võrrandeid ja vaba välja vahetuseeskirju rahuldavatest operaatorpotentsiaalidest (mida rõhutab indeks $^{\circ}$). Näit. kvantelektrodünaamikas (vrd. val. (9.8, 9))

$$H_{int}^{\circ}(x)=-\frac{ie}{2}A_{\mu}^{\circ}(x)\,[\bar{\psi}^{\circ}(x),\gamma_{\mu}\psi^{\circ}(x)], \qquad (10.43)$$

kus A_{μ}° , ψ° on vabad väljad.

Piirjuhul $t\to+\infty$, $t_0\to-\infty$, $S_n(t,t_0)\to S_n$.

$$S_n\equiv S_n(+\infty,-\infty)=\frac{(-i)^n}{n!}\int dx_1\cdots dx_n\,T[H_{int}^{\circ}(x_1)\cdots H_{int}^{\circ}(x_n)] \qquad (10.44)$$

ning oletame, et see ongi otsitava S-operaatori rea n-s liige, s.t.

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}S_n.$$ ∎

∎ Kvantelektrodünaamikas $S_n=e^nS_n'$ (vrd. val. (10.26)).

Selle oletuse kinnituseks näitame, et tingimusest

$$S = \lim_{\substack{t \to +\infty \\ t_0 \to -\infty}} S(t, t_0) \tag{10.45}$$

määratud operaator S rahuldab esialgse definitsiooniga (10.17) ekvivalentseid seoseid (10.21).

Kui valemis (10.35) $t_0 \to -\infty$, siis vastavat konstantset olekuvektorit $\Phi^i(-\infty)$ võime vaadelda Heisenbergi esituse mõnesuguse olekuvektorina Φ (sest Heisenbergi esituses olekuvektorid ei sõltu ajast), kusjuures

$$\Phi^i(t) = S(t,-\infty)\Phi\,, \qquad \Phi = S^{-1}(t,-\infty)\Phi^i\,. \tag{10.46}$$

Olgu A(x) mõnesugune väljaoperaator Heisenbergi esituses, mis teisendab olekuvektori Φ vektoriks Φ',

$$A(x)\Phi = \Phi'. \tag{10.47}$$

Vastaku sellele interaktsiooni-esituses avaldis

$$A^i(x)\Phi^i(t) = \Phi^{i\prime}(t). \quad (x_0 = t) \tag{10.48}$$

Valemitest (10.46 - 48) saame

$$A(x) = S^{-1}(t,-\infty)A^i(x)S(t,-\infty). \quad (x_0 = t) \tag{10.49}$$

Arendame A(x) ja $A^i(x)$ vaba välja võrrandite mõnesuguste lahendite järgi ritta (vrd. val. (10.7 - 9) ja tähistame operaatorkordajaid nendes arendustes vastavalt $a_n(x_0)$ ja a_n^i (interaktsiooni-esituse puhul a_n^i ei sõltu ajast, sest $A^i(x)$ on ka ise vaba välja võrrandi lahend).

Kooskõlas valemiga (10.49)

$$a_\nu(t) = S^{-1}(t,-\infty)\, a_\nu^{in}\, S(t,-\infty)\,. \qquad (10.49')$$

Kui nõuame, et maatrikselemendid ei sõltuks esitusest, siis

$$\langle \Phi_c, a_\nu(t)\Phi_\xi\rangle = \langle \Phi_c^{in}(t), a_\nu^{in}\Phi_\xi^{in}\rangle = \\ = \langle \Phi_c, S^{-1}(t,-\infty) a_\nu^{in} S(t,-\infty)\Phi_\xi\rangle, \qquad (10.50)$$

kus Φ_ξ ja Φ_c on suvalised olekuvektorid.

Kuna (10.16') tõttu

$$S(-\infty,-\infty) = I$$

ja definitsiooni (10.11) tõttu

$$\lim_{t\to-\infty} \langle \Phi_c, a_\nu(t)\Phi_\xi\rangle = \langle \Phi_c, a_\nu^{in}\Phi_\xi\rangle,$$

siis saame

$$\langle \Phi_c, a_\nu^{in}\Phi_\xi\rangle = \langle \Phi_c, a_\nu^{in}\Phi_\xi\rangle\,. \qquad (10.51)$$

Teiselt poolt

$$\lim_{t\to+\infty} \langle \Phi_c, a_\nu(t)\Phi_\xi\rangle = \langle \Phi_c, a_\nu^{out}\Phi_\xi\rangle$$

ja definitsiooni (10.45) tõttu (arvestades (10.50))

$$\langle \Phi_c, a_\nu^{out}\Phi_\xi\rangle = \langle \Phi_c, S^{-1} a_\nu^{in} S\Phi_\xi\rangle. \qquad (10.52)$$

Valemite (10.51) ja (10.52) võrdlemine viibki seosteni

(10.21), kui lähtume S-maatriksi definitsioonist (10.45).

Kõik selles § -s esitatud arutlused on formaalsed ja vajavad range teooria seisukohalt täpsustamist. Osutub, et kvantmehaanikast pärinev interaktsiooni-esituse mõiste ei olegi lihtsalt üldistatav väljateooriasse. Uurimused näitavad, et vaba välja ja interageeriva välja olekuvektorid ei kuulu üldiselt samasse Hilberti ruumi (vt. [3] pt. 13 § 1). Sellepärast on oletus, et $\varphi^{c}(-\infty)$ kuulub Heisenbergi esituse, s.o. interageeriva välja operaatori A(x) määramispiirkonda (val. (10.47)), meelevaldne. Sellest oletusest järelduv seos (10.49) on vastuolus teoreemiga (Haagi teoreem), mille kohaselt vaba väljaga unitaarselt ekvivalentne väli saab ise ka olla ainult vaba väli (vt. [5] pt. 4.5). Niisiis vähemalt lõplike t väärtuste korral ei eksisteeri mittetriviaalset (ühikoperaatorist erinevat) unitaarset operaatorit S(t, -∞).

Nagu nägime (vt. alapunktid 2 ja 3), ei ole S-maatriksi defineerimisel interaktsiooni-esituse olemasolu vajalikki. Piisab postulaadist, et eksisteerivad vabad in- ja out-väljad, mille olekuvektoritest saab moodustada baasi interageerivate väljade olekuvektorite ruumis. Kuid nagu äsja märgitud, ei ole selline oletus kaugeltki enesestmõistetav. Küsimus, kuivõrd on interageerivate väljade operaatorid määratud formaalsete avaldistega (10.11), kui in- ja out-väljad on antud, pole selge.

Nende raskustega ongi seletatav paragrahvi alguses märgitud suund, milles püütakse vältida interageerivate väljade komplitseeritud mõistet. Kuna aga kvantelektrodünaamikas on interaktsiooni-esitusel baseeruv häiritusarvutus andnud konkreetsete efektide puhul katsega hästi kooskõlalisi tulemusi, kasutatakse seda ja kasutame meiegi järgnevates paragrahvides. Liiatigi on interageeriv väli S-maatriksi seisukohalt vaid abimõiste.

§ 11. S-maatriksi elementide füüsikaline tähendus ja arvutamine.

1. S-maatriksi elementide füüsikaline tähendus järgneb vahetult definitsioonivalemist (10.17).

Olgu väli enne interaktsiooni (hetkel $x_0 = -\infty$) mõnesuguses olekus α. Sattugu ta toimunud protsessi tõttu hetkeks $x_0 = +\infty$ olekusse β. Siirdetõenäosuse definitsioonist (4.1) ja tõsiasjast, et iga protsessile eelnev olek on in-olek, iga protsessile järgnev aga out-olek, saame

$$W_{\beta\alpha} = |\langle \beta; out | \alpha; in \rangle|^2, \qquad (11.1)$$

kus $W_{\beta\alpha}$ tähistabki vastava siirde tõenäosust. Kui avaldame $|\alpha; in\rangle$ valemist (10.17), siis

$$W_{\beta\alpha} = |\langle \beta; out | S | \alpha; out \rangle|^2 = \\ = |\langle \beta; in | S | \alpha; in \rangle|^2 \qquad (11.2)$$

või, arvestades baasist sõltumatust ja jättes in-, out-sümbolid ära,

$$W_{\beta\alpha} = |\langle \beta | S | \alpha \rangle|^2 . \qquad (11.3)$$

Saadud valem näitab, et S-maatriksi elemendi mooduli ruut annab ülemineku tõenäosuse vastavate olekute (α ja β) vahel.

S-maatriksi arendust (10.26) ning valemeid (10.43, 44) kasutades võime arvutada mitmesuguste protsesside tõenäosusi. Protsessi, mida kirjeldab e^n -le vastav liige S_n, nimet. n järku protsessiks.

Valemist (10.39) näeme, et S_0 ei vasta ühelegi protsessile, sest

$$\langle \beta | S_0 | \alpha \rangle = \langle \beta | \alpha \rangle = \delta_{\beta\alpha}$$

baasi ortonormeerituse tõttu. Seepärast vaadeldaksegi S asemel sageli nn. T-maatriksit, kus $S - I = iT$.

Osutub, et S arenduse kõikidel teistel liikmetel võib olla nullist erinevaid maatrikselemente mitmesuguste algja lõppolekute korral. Teiste sõnadega, iga arenduse liige S_n võib kirjeldada väga mitmesuguseid protsesse. See selgub otsekohe, kui valemis (10.44) sisalduvad kronoloogilised korrutised avaldame normaalkorrutiste kaudu, vastavalt Wicki teoreemile (vt. lisa B). Wicki teoreem, kohandatuna kronoloogilistele korrutistele, väidab, et iga kronoloogiline korrutis on esitatav normaalkorrutiste summana kõikvõimalike kronoloogiliste seostega (vt. lisa B, valem (B 17)). Kui kronoloogilises korrutises mõned operaatorid juba on normaaljärjestuses, siis nimetatud summas puuduvad liikmed, mis sisaldaksid seoseid omavahel normaalselt järjestatud operaatoritest.

2. Illustreerime öeldut S_2 avaldise abil. Kuna edaspidi kõik vaatluse alla tulevad väljapotentsiaalid rahuldavad vaba välja tingimusi, jätame kõikjal indeksi (^{0}) kirjutamata. Siis valemist (10.44) saame

$$S_2 = \frac{(i)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \, T\left[j_\mu(x_1) A_\mu(x_1) j_\rho(x_2) A_\rho(x_2) \right]. \qquad (11.4)$$

Teisendame siin esinevat T-korrutist, arvestades et (vt. lisa (C. 15))

$$j_\mu(x) = \frac{ie}{2}\left[\bar{\psi}(x), \gamma_\mu \psi(x)\right] = ie\, \delta_{\mu,\alpha\beta}\, N\left[\bar{\psi}_\alpha(x)\, \psi_\beta(x)\right].$$

Saame

$$T[j_\mu(x_1)A_\mu(x_1)j_\rho(x_2)A_\rho(x_2)] =$$

$$= (ie)^2 \delta_{\mu_1\alpha\beta}\gamma_{\beta\gamma}\delta_{\rho_2\delta\sigma} T[N(\bar\psi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_1))A_\mu(x_1)N(\bar\psi_\delta(x_2)\psi_\sigma(x_2))A_\rho(x_2)].$$

Wicki teoreemi põhjal

$$T[N(\bar\psi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_1))A_\mu(x_1)N(\bar\psi_\delta(x_2)\psi_\sigma(x_2))A_\rho(x_2)] =$$

$$= N[\bar\psi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_1)A_\mu(x_1)\bar\psi_\delta(x_2)\psi_\sigma(x_2)A_\rho(x_2)] +$$

$$+ N[\bar\psi_\alpha(x_1)\overbrace{\psi_\beta(x_1)A_\mu(x_1)\bar\psi_\delta(x_2)}\psi_\sigma(x_2)A_\rho(x_2)] +$$

$$+ N[\overbrace{\bar\psi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_1)A_\mu(x_1)\bar\psi_\delta(x_2)}\psi_\sigma(x_2)A_\rho(x_2)] +$$

$$+ N[\bar\psi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_1)A_\mu(x_1)\overbrace{\bar\psi_\delta(x_2)\psi_\sigma(x_2)}A_\rho(x_2)] +$$

$$+ N[\overbrace{\bar\psi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_1)A_\mu(x_1)\bar\psi_\delta(x_2)}\psi_\sigma(x_2)A_\rho(x_2)] +$$

$$+ N[\overbrace{\bar\psi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_1)A_\mu(x_1)\bar\psi_\delta(x_2)\psi_\sigma(x_2)}A_\rho(x_2)] +$$

$$+ N[\overbrace{\bar\psi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_1)A_\mu(x_1)\bar\psi_\delta(x_2)}\psi_\sigma(x_2)A_\rho(x_2)] +$$

$$+ N[\overbrace{\bar\psi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_1)A_\mu(x_1)\bar\psi_\delta(x_2)\psi_\sigma(x_2)}A_\rho(x_2)] .$$

Siin oleme arvestanud, et (vt. lisa (B. 21))

$$\overbrace{\psi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_2)} = \overbrace{\bar\psi_\alpha(x_1)\bar\psi_\beta(x_2)} = \overbrace{\psi_\alpha(x_1)A_\mu(x_2)} = \overbrace{\bar\psi_\alpha(x_1)A_\mu(x_2)} = 0.$$

Kuna (lisa (B. 16, 20))

$$\begin{aligned}
&\overbrace{\psi_\alpha(x_1)\bar\psi_\beta(x_2)} = -\overbrace{\bar\psi_\beta(x_2)\psi_\alpha(x_1)} = S^c_{\alpha\beta}(x_1-x_2),\\
&\overbrace{A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)} = \overbrace{A_\nu(x_2)A_\mu(x_1)} = \delta_{\mu\nu}\mathcal{D}^c(x_1-x_2)
\end{aligned} \qquad (11.5)$$

ja normaalkorrutise märgi all võime operaatoreid ümber paigutada, arvestades ainult, et iga kõrvuti seisva spiinoroperaatori vahetamine muudab korrutise märki, saame

$$\begin{aligned}
&T[N(\bar\psi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_1))A_\mu(x_1)N(\bar\psi_\delta(x_2)\psi_\delta(x_2))A_\rho(x_2)] =\\
&=N[\bar\psi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_1)A_\mu(x_1)\bar\psi_\delta(x_2)\psi_\delta(x_2)A_\rho(x_2)] +\\
&+S^c_{\beta\delta}(x_1-x_2)N[\bar\psi_\alpha(x_1)A_\mu(x_1)\psi_\delta(x_2)A_\rho(x_2)] -\\
&-S^c_{\delta\alpha}(x_2-x_1)N[\psi_\beta(x_1)A_\mu(x_1)\bar\psi_\delta(x_2)A_\rho(x_2)] +\\
&+\delta_{\mu\rho}\mathcal{D}^c(x_1-x_2)N[\bar\psi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_1)\bar\psi_\delta(x_2)\psi_\delta(x_2)] -\\
&-S^c_{\delta\alpha}(x_2-x_1)S^c_{\beta\delta}(x_1-x_2)N[A_\mu(x_1)A_\rho(x_2)] +\\
&+\delta_{\mu\rho}\mathcal{D}^c(x_1-x_2)S^c_{\beta\delta}(x_1-x_2)N[\bar\psi_\alpha(x_1)\psi_\delta(x_2)] -\\
&-\delta_{\mu\rho}\mathcal{D}^c(x_1-x_2)S^c_{\delta\alpha}(x_2-x_1)N[\psi_\beta(x_1)\bar\psi_\delta(x_2)] -\\
&-\delta_{\mu\rho}\mathcal{D}^c(x_1-x_2)S^c_{\delta\alpha}(x_2-x_1)S^c_{\beta\delta}(x_1-x_2).
\end{aligned}$$

Operaator (11.4) koosneb järelikult 8-liikmelisest summast

$$S_2 = \sum_{(R)=I}^{\overline{VIII}} M_2^{(R)} , \qquad (11.6)$$

kus

$$M_2^{\bar{I}} = \frac{(-e)^2}{2}\int d^4x_1 d^4x_2\, N[\bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\hat{A}(x_2)\psi(x_2)],$$

$$M_2^{\bar{II}} = \frac{(-e)^2}{2}\int d^4x_1 d^4x_2\, N[\bar{\psi}(x_1)\hat{A}(x_1)S^c(x_1-x_2)\hat{A}(x_2)\psi(x_2)],$$

$$M_2^{\bar{III}} = \frac{(-e)^2}{2}\int d^4x_1 d^4x_2\, N[\bar{\psi}(x_2)\hat{A}(x_2)S^c(x_2-x_1)\hat{A}(x_1)\psi(x_1)],$$

$$M_2^{\bar{IV}} = \frac{(-e)^2}{2}\int d^4x_1 d^4x_2\, D^c(x_1-x_2)N[\bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma_\mu\psi(x_2)], \qquad (11.7)$$

$$M_2^{\bar{V}} = \frac{(-e)^2}{2}\int d^4x_1 d^4x_2\{-N[\hat{A}_{\delta\delta}(x_2)S^c_{\delta\alpha}(x_2-x_1)\hat{A}_{\alpha\beta}(x_1)S^c_{\beta\delta}(x_1-x_2)]\} =$$

$$= -\frac{(-e)^2}{2}\int d^4x_1 d^4x_2\, N[Sp\{\hat{A}(x_2)S^c(x_2-x_1)\hat{A}(x_1)S^c(x_1-x_2)\}],$$

$$M_2^{\bar{VI}} = \frac{(-e)^2}{2}\int d^4x_1 d^4x_2\, D^c(x_1-x_2)N[\bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu S^c(x_1-x_2)\gamma_\mu\psi(x_2)],$$

$$M_2^{\bar{VII}} = \frac{(-e)^2}{2}\int d^4x_1 d^4x_2\, D^c(x_1-x_2)N[\bar{\psi}(x_2)\gamma_\mu S^c(x_2-x_1)\gamma_\mu\psi(x_1)],$$

$$M_2^{\bar{VIII}} = -\frac{(-e)^2}{2}\int d^4x_1 d^4x_2\, \gamma_{\mu,\alpha\beta}S^c_{\beta\delta}(x_1-x_2)\gamma_{\mu,\delta\alpha}S^c_{\delta\alpha}(x_2-x_1)\times$$

$$\times D^c(x_1-x_2) =$$

$$= -\frac{(-e)^2}{2} \int dx_1^\nu dx_2^\mu D^c(x_1 - x_2) Sp\{\gamma_\mu S^c(x_1 - x_2) \gamma_\mu S^c(x_2 - x_1)\}.$$

Siin oleme tähistanud

$$\hat{A}(x) \equiv \gamma_\mu A_\mu(x) \tag{11.8}$$

ja γ -maatriksite jälje

$$\delta_{\mu,\alpha\beta} \delta_{\nu,\rho\sigma} \delta_{\rho,\delta\sigma} \delta_{\delta,\alpha\alpha} \equiv Sp(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\delta). \tag{11.9}$$

Kuna üle kõikide indeksite (nii spiinorindeksite α , β ... kui tensorindeksite μ , ρ) toimub summeerimine, oleme kõik spiinoreid ja δ -maatrikseid sisaldavad avaldised kirjutanud nii, et summeeritavad indeksid seisaksid kõrvuti, ning siis nad kirjutamata jätnud, nagu ikka maatriksite korrutamisel tavaks.

Integreerimismuutujate x_1 , x_2 samaväärsuse tõttu

$$M_2^{\overline{II}} = M_2^{\overline{III}} \; ; \qquad M_2^{\overline{VI}} = M_2^{\overline{VII}} . \tag{11.10}$$

Seega jääb S_2 avaldisse 6 erineva operaatorsisaldusega liiget, mis ilmselt kirjeldavad erinevate protsesside tõenäosusi. Hiljem näeme, et iga operaator $M_2^{(R)}$ annab omakorda mitu nullist erinevat maatrikselementi, s.t. iga $M_2^{(R)}$ abil saab üldiselt kirjeldada mitut erinevat protsessi. ※

※ Väljendit "operaator $M_n^{(R)}$ kirjeldab teatud protsessi" tuleb mõista järgmiselt. Kui arvutame selle protsessi alg- ja lõppolekule vastava maatrikselemendi $\langle \beta | S_n | \alpha \rangle$, siis $\langle \beta | S_n | \alpha \rangle = \sum_{(R')} \langle \beta | M_n^{(R')} | \alpha \rangle = \langle \beta | M_n^{(R)} | \alpha \rangle$, kuna $\langle \beta | M_n^{(R')} | \alpha \rangle = 0$, kui $R' \neq R$.

Kui Wicki teoreemile vastavat kronoloogiliste korrutiste arendust kasutame kõrgemat järku S-maatriksi liikmete S_n ($n = 3,4, \ldots$) korral, saame valemitega (11.7) sarnanevad, kuigi keerulisemad operaatorid $M_n^{(R)}$. Neile kõigile on ühine see, et nad sisaldavad normaalkorrutisi operaatoritest ψ, $\bar{\psi}$ ja A_μ. Et leida nende normaalkorrutiste maatrikselemendid, on otstarbekas eelnevalt leida üksikute operaatorite $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$, $A_\mu(x)$ nullist erinevad maatrikselemendid.

3. Arvutame operaatorite $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$, $A_\mu(x)$ maatrikselemendid vaakumoleku ja ühe osakese oleku vahel, kusjuures vastavad olekud on defineeritud valemitega (10.12, 13) (sümboli "in" jätame ära). Operaatorid $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$, $A_\mu(x)$ esitame kujul (10.3, 3', 5). Tähistame, nagu valemites (10.13), tähega ν elektroni kvantarve, tähega μ positroni kvantarve ja tähega ρ footoni kvantarve. Peame silmas ka operaatorite a_ν, b_μ, c_ρ, ... vahetuseeskirju (10.14).

Arvutame $\psi(x)$ maatrikselemendi, kui lähteolekus on üks elektron, lõppolekuks aga vaakum.

$$\langle 0|\psi(x)|\nu\rangle = \langle 0|\sum_{(\nu')}\left(a_{\nu'}u^{\nu'}(x) + b^+_{\nu'}v^{\nu'}(x)\right)a^+_\nu|0\rangle =$$

$$= \sum_{\nu'}\langle 0|a_{\nu'}a^+_\nu|0\rangle u^{\nu'}(x) + \sum_{\nu'}\langle 0|b^+_{\nu'}a^+_\nu|0\rangle v^{\nu'}(x) = \tag{11.11}$$

$$= -\sum_{\nu'}\langle 0|a^+_\nu a_{\nu'}|0\rangle u^{\nu'}(x) + \sum_{\nu'}\langle 0|\{a_{\nu'},a^+_\nu\}|0\rangle u^{\nu'}(x) = u^\nu(x).$$

Analoogilise avaldise saame, kui lähteolekus on mis tahes arv osakesi, lõppolekus aga üks elektron vähem ning ülejäänud osakeste kvantarvud täpselt samad mis algolekus. Teiste sõnadega, kui toimub protsess, kus neeldub üks elektron, teised osakesed aga reaktsioonist osa ei võta.

Täpselt samuti saame näidata, et $\psi(x)$ maatrikselemendid on nullist erinevad veel siis, kui lõppolek erineb alg-

olekust ühe juurdetulnud positroni võrra, s.t. kui toimub protsess, kus tekib üks positron. Kuna ülejäänud osakesed reaktsioonist osa ei võta, võime vastava maatrikselemendi arvutamisel nad arvestamata jätta ning vaadelda $\psi(x)$ maatrikselementi, kui lähteolekuks on vaakum, lõppolekus aga üks positron. Saame

$$\langle \mu | \psi(x) | 0 \rangle = \langle 0 | b_\mu \sum_{\nu'} a_{\nu'} u^{\nu'}(x) + b^+_{\nu'} v^{\nu'}(x) | 0 \rangle =$$

$$= \sum_{\nu'} \langle 0 | b_\mu b^+_{\nu'} | 0 \rangle v^{\nu'}(x) = \sum_{\nu'} \langle 0 | - b^+_{\nu'} b_\mu | 0 \rangle v^{\nu'}(x) + \tag{11.12}$$

$$+ \sum_{\nu'} \langle 0 | \{ b_\mu, b_{\nu'} \} | 0 \rangle v^{\nu'}(x) = v^\mu(x).$$

Analoogiliselt veendume, et $\bar{\psi}(x)$ maatrikselemendid kirjeldavad protsesse, mille käigus tekib üks elektron, (muude osakeste karakteristikud, kui nad väljas olemas on, aga ei muutu) või neeldub üks positron, kusjuures

$$\langle \nu | \bar{\psi}(x) | 0 \rangle = \bar{u}^\nu(x) , \tag{11.13}$$

$$\langle 0 | \bar{\psi}(x) | \mu \rangle = \bar{v}^\mu(x) . \tag{11.14}$$

Operaatori $A_\mu(x)$ maatrikselemendid vastavad protsessidele, mille käigus tekib või neeldub üks footon:

$$\langle 0 | A_\mu(x) | \rho \rangle = f_\mu^{(\rho)}(x) , \tag{11.15}$$

$$\langle \rho | A_\mu(x) | 0 \rangle = f_\mu^{(\rho)*}(x) . \tag{11.16}$$

(Tuletage valemid (11.13 - 16) !).

4. Maatrikselementide arvutamisel normaalkorrutisest, mis sisaldab suvalise arvu operaatoreid, toimitakse põhimõtteliselt järgmiselt. Lähteolekut kirjeldav vektor esitatakse kujul (10.15), s.t. kirjutatakse välja kõik tekkeoperaatorid, mis mõjuvad vaakumolekule. Näit. kui algolekus on elektron ν_1, positron μ_1 ja footon ϱ_1, siis vastava olekuvektori esitame

$$|\nu_1 \mu_1 \varrho_1\rangle = a^+_{\nu_1} b^+_{\mu_1} c^+_{\varrho_1} |0\rangle .$$

Analoogiliselt, kui lõppolekus on elektron ν_2, positron μ_2 ja footon ϱ_2, siis maatrikselemendis sisaldub see vektor $|\nu_2 \mu_2 \varrho_2\rangle$ järgmiselt:

$$\langle \nu_2 \mu_2 \varrho_2| = \langle 0| a_{\nu_2} b_{\mu_2} c_{\varrho_2} .$$

Mõnesuguse normaalkorrutise $N[A(x_1)B(x_2)C(x_3)]$ maatrikselemendi arvutamine taandub nüüd vaakumkeskmise arvutamisele operaatorist

$$\langle 0| a_{\nu_2} b_{\mu_2} c_{\varrho_2} N[A(x_1)B(x_2)C(x_3)] a^+_{\nu_1} b^+_{\mu_1} c^+_{\varrho_1} |0\rangle .$$

See operaator ei ésine ilmselt normaalkujul, sest kõik kiirgumisoperaatorid ei seisa neeldumisoperaatoritega võrreldes vasakul. Seepärast tõstame $N[A(x_1)B(x_2)C(x_3)]$ avaldises sisalduvaid neeldumisoperaatoreid operaatoritest $a^+_{\nu_1}$, $b^+_{\mu_1}$, $c^+_{\varrho_1}$ nii kaua paremale (arvestades igakordsel vahetamisel kommutatsiooni- või antikommutatsiooni-eeskirju nagu (11.11, 12) arvutamisel), kiirgumisoperaatoreid aga operaatoritest a_{ν_2}, b_{μ_2}, c_{ϱ_2} nii kaua vasakule, kuni oleme saavutanud operaatorite normaaljärjestuse. Normaalkorrutise vaakumkeskmine on aga alati null (nagu järgneb normaalkorrutise ja vaakumi definitsioonist). Seepärast võivad nullist erinevateks osutuda maatrikselemendid ainult niisuguste olekute vahel, kus igale algolekut defineerivale kiirgusoperaatorile leidub vastav neeldumisoperaator N-korrutises, mis eelmainitu "kustutab" (operaatorid "kustutavad," teineteise, kui nende kommutaator on nullist erinev c-arv). Samuti peab N-korrutises lei-

duma igale lõppolekut defineerivale neeldumisoperaatorile vastav kiirgumisoperaator, mis just selle "kustutaks". Siit nähtub, et kui N-korrutises on rohkem neeldumisoperaatoreid (kiirgumisoperaatoreid) kui kiirgumisoperaatoreid lähteolekus (neeldumisoperaatoreid lõppolekus), siis on vastav maatrikselement kindlasti null. Kui aga N-korrutises on operaatoreid vähem, võib maatrikselement olla nullist erinev vaid juhul, kui alg- ja lõppolekus liigsed operaatorid omavahel kompenseeruvad, s.t. vastavad osakestele, mis läksid muutumatute kvantarvudega algolekust lõppolekusse, protsessist osa võtmata.

Äsjast arutlust arvestades saame vahetult arvutada näit. operaatori $M_2^{\overline{II}}$ val. (11.7) nullist erinevad maatrikselemendid. Olgu algolekus $|\alpha\rangle$ üks elektron ν_1 ja üks footon ρ_1 ning lõppolekus $|\beta\rangle$ elektron ν_2 ja footon ρ_2. Siis

$$|\alpha\rangle = |\nu_1 \rho_1\rangle = a^+_{\nu_1} C^+_{\rho_1} |0\rangle ; \quad \langle\beta| = \langle \nu_2 \rho_2| = \langle 0| a_{\nu_2} C_{\rho_2},$$

ja

$$\langle\beta|M_2^{\overline{II}}|\alpha\rangle = \frac{(-e)^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \{ \bar{u}^{\nu_2}(x_1) [\hat{f}^{(\rho_2)+}(x_1) S^c(x_1-x_2) \hat{f}^{(\rho_1)}(x_2) + \hat{f}^{(\rho_1)}(x_1) S^c(x_1-x_2) \hat{f}^{(\rho_2)+}(x_2)] u^{\nu_1}(x_2) \} ; \tag{11.17}$$

$$(f^{(\rho)+} \equiv \gamma_\mu f^{(\rho)*}_\mu).$$

Formaalselt saame selle tulemuse, kui $M_2^{\overline{II}}$ -s asendame operaatorid ψ, $\bar{\psi}$, A_μ nende maatrikselementidega, arvestades, et kõik lähteosakesed neelduvad, kõik lõpposakesed aga tekivad protsessi käigus.

Analoogilise tulemuse annab operaator $M_2^{\overline{III}}$:

$$\langle\beta|M_2^{\overline{III}}|\alpha\rangle = \frac{(-e)^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \{ \bar{u}^{\nu_2}(x_2) [\hat{f}^{(\rho_2)+}(x_2) S^c(x_2-x_1) \hat{f}^{(\rho_1)}(x_1) + \hat{f}^{(\rho_1)}(x_2) S^c(x_2-x_1) \hat{f}^{(\rho_2)+}(x_1)] u^{\nu_1}(x_1) \} . \tag{11.17'}$$

Järelikult on vaadeldavale II järku protsessile (Comptoni hajumisele) vastav kogu siirdeamplituud

$$\langle\beta|M_2^{\bar{u}}+M_2^{\bar{\bar{u}}}|\alpha\rangle=(-e)^2\int d^4x_1\,d^4x_2\,\{\bar{u}^{\nu_2}(x_2)[\hat{f}^{(\rho_2)+}(x_2)S^c(x_2-x_1)\hat{f}^{(\rho_1)}(x_1)+$$
$$+\hat{f}^{(\rho_1)}(x_1)S^c(x_1-x_2)\hat{f}^{(\rho_2)+}(x_2)]u^{\nu_1}(x_1)\}. \qquad (11.18)$$

Samade operaatorite abil saame arvutada paari tekkele või annihilatsioonile vastava amplituudi. Näit. kui lähteolekus on kaks footonit ρ_1, ρ_2, lõppolekus aga elektron ja positron vastavalt kvantarvudega ν ja μ, siis sellise paari tekkele vastab amplituud

$$\langle\nu\mu|M_2^{\bar{u}}+M_2^{\bar{\bar{u}}}|\rho_1\rho_2\rangle=(-e)^2\int d^4x_1\,d^4x_2\,\{\bar{u}^{\nu}(x_1)[\hat{f}^{(\rho_1)}(x_1)S^c(x_1-x_2)\hat{f}^{(\rho_2)}(x_2)+$$
$$+\hat{f}^{(\rho_2)}(x_2)S^c(x_2-x_1)\hat{f}^{(\rho_1)}(x_1)]v^{\mu}(x_2)\}, \qquad (11.19)$$

pöördprotsessile - paari kahefootonilisele annihilatsioonile - aga maatrikselement

$$\langle\rho_1\rho_2|M_2^{\bar{u}}+M_2^{\bar{\bar{u}}}|\nu\mu\rangle=(-e)^2\int d^4x_1\,d^4x_2\,\{\bar{v}^{\mu}(x_1)[\hat{f}^{(\rho_1)+}(x_1)S^c(x_1-x_2)\hat{f}^{(\rho_2)+}(x_2)+$$
$$+\hat{f}^{(\rho_2)+}(x_2)S^c(x_2-x_1)\hat{f}^{(\rho_1)+}(x_1)]u^{\nu}(x_2). \qquad (11.20)$$

5. Feynmani graafikute meetod* hõlbustab uuritava protsessi maatrikselemendi (siirdeamplituudi) leidmist.

---

* Selle meetodi autor, ameerika füüsik Richard Feynman, tema kaasmaalane Julian Schwinger ja jaapanlane Sin-Itiro Tomonaga said kaasaegse kvantelektrodünaamika väljaarendamise eest (peamiselt aastail 1949 - 1951) 1965.a. Nobeli füüsikapreemia. Graafikute ja S-maatriksi elementide vastavuse reeglid töötas välja F. Dyson.

Iga sellist graafikut võib tõlgendada vastava protsessi näitliku skeemina. Graafiku elementideks on erinevate omadustega jooned (ja nendega seotud punktid), kusjuures oluline on ainult eri liiki joonte hulk ja nende omavaheline seostatus (seepärast nimet. neid topoloogilisteks graafikuteks). Graafiku igale elemendile seatakse vastavusse mõnesugune funktsioon, mis sisaldub maatrikselemendi avaldises.

Kvantelektrodünaamika kõiki protsesse saab kirjeldada tabelis I esitatud vastavuste abil.

Maatrikselementides sisalduvad δ -maatriksid oleme selles tabelis sidunud footonfunktsioonidega $\varphi^{(p)}(x)$ ja $\mathfrak{D}^c(x_1 - x_2)$ sellepärast, et interaktsiooni-lagranžiaani struktuuri tõttu (vt. valem (9.8)) esinevad δ -maatriksid ainult n.ö. "skalaarkorrutistena" footonvälja operaatoritega, s.o. avaldistena $\delta_\mu A_\mu(x) \equiv \hat{A}(x)$.

Viimases veerus kasutatud väljendeid "osake suundub punkti (x)" või "osake väljub punktis (x)" tuleb mõista

T a b e l I

Graafiku element	Vastav avaldis maatrikselemendis		Piltlik tõlgendus
Punkti (x) suubuv (suunatud) joon, mille teine ots on vaba (x) ←	$u^{(\nu)}(x)$	.....	Lähte-elektron olekus (ν) suundub punkti (x)
	$v^{(\mu)}(x)$	.....	Lõpp-positron olekus (μ) väljub punktist (x)
Punktist (x) väljuv joon, mille teine ots on vaba (x) →	$\bar{u}^{(\nu)}(x)$	.....	Lõppelektron olekus (ν) väljub punktist (x)
	$\bar{v}^{(\mu)}(x)$	.....	Lähtepositron olekus (μ) suundub punkti (x)

Ühe vaba otsaga suunatu joon, mille teises otsas on punkt (x) (x) ~~~~	$\hat{f}^{(\rho)}(x)$	Lähtefoonton olekus (ρ) suundub punkti (x)
	$\hat{f}^{+(\rho)}(x)$	Lõppfooton olekus (ρ) väljub punktist (x)
Punktist (x_2) lähtuv ja punkti (x_1) suubuv joon (x_1) ——— (x_2)	$S^c(x_1-x_2)$	Virtuaalne elektron liigub punktist (x_2) punkti (x_1) või virtuaalne positron vastupidises suunas
Punkte (x_1) ja (x_2) ühendav suunatu joon (x_1) ~~~~ (x_2)	$\gamma_\mu D^c(x_1-x_2)\gamma_\mu =$ $=\gamma_\mu D^c(x_2-x_1)\gamma_\mu$	Virtuaalne footon liigub punktist (x_1) punkti (x_2) või vastupidi

tinglikult, sest osakeste liikumine ühest punktist teise pole põhimõtteliselt jälgitav. Liiatigi puudub punktil (x) iseseisev tähendus, kuna siirdeamplituudide arvutamisel tuleb integreerida üle kõikide aeg-ruumi punktide. Seepärast ei esine maatrikselemendi lõppavaldises ka tabelis I toodud funktsioone, vaid nende Fourier' transformid, kui kasutame impulssesitust. Ent Feynmani graafikute kirjeldamisel osutuvad eelmainitud tinglikud väljendid mugavaiks.

Nagu tabelist näha, kirjeldab iga suunatud joon elektroni (kas vaba või nn. virtuaalse elektroni) liikumist joone suunas, antiosakese - positroni - liikumist aga joone suunaga vastupidises suunas. Sellepärast nimetatakse suunatud jooni elektronjoonteks. Ilma suunata jooned* kirjeldavad

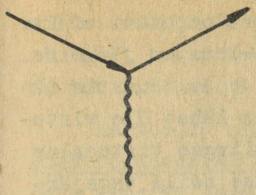
* Lainelist joont oleme kasutanud selleks, et neid jooni elektronjoontest paremini eristada. Mõnikord märgitakse neid jooni ka punktiiriga.

footonite liikumist (siin antiosake on identne osakesega) ja neid nimet. footonjoonteks. Iga vaba otsaga joon kirjeldab ühte vaba osakest, kas sellist, mis eksisteerib enne reaktsiooni (lähteosake), või sellist, mis on tekkinud reaktsiooni käigus (lõpposake). Neid jooni nimet. antud graafiku välisjoonteks. Kronoloogilistele seostele vastavatel joontel on mõlemas otsas graafiku punkt, s.t. neil pole ühtegi vaba otsa. Kausaalsed funktsioonid D^c ja S^c ei kirjelda mingisuguse osakese olekut. Seepärast ei kirjelda ka neile vastavad, mõlemast otsast seotud jooned ühegi reaalse osakese liikumist. Et aga säilitada mõttelist pilti osakeste liikumisest kogu reaktsiooni käigus, tõlgendatakse ka seostele vastavaid jooni virtuaalsete (reaalselt mitte-eksisteerivate, mittejälgitavate) osakeste* liikumisjoontena. Neid jooni nimet. graafiku sisejoonteks. Ka nende joonte korral on vastava virtuaalse osakese liikumissuuna ja joone suuna vahel samasugune seos nagu välisjoonte ja vastavate vabade osakeste liikumissuundade puhul.

Meenutame, et S-operaatori n-ndat järku arendusliikme S_n integrandis (vt. val. (10.44)) on iga punktiga (x) seotud operaator $H^{\circ}_{int}(x)$, mis sisaldab ühte footonvälja ja kahte elektron-positronvälja operaatorit (vt. val. (10.43)). Kui S_n viime normaalkujju ja arvutame maatrikselemendid, siis saame iga sellise operaatori asemele kas kronoloogilise seose (kui antud operaator seostub mõne teisega) või vaba osakese funktsiooni. Seega on iga punktiga (x) seotud üks footonvälja ja kaks elektron-positronvälja iseloomustavat funktsiooni. Ehk teisiti: Feynmani graafiku iga punkti läbib 3 joont, 1 footonjoon ja 2 elektronjoont, mille hulgas võib olla nii sise- kui ka välisjooni. Üks selline graafiku punkt on kujutatud joonisel 3.

---

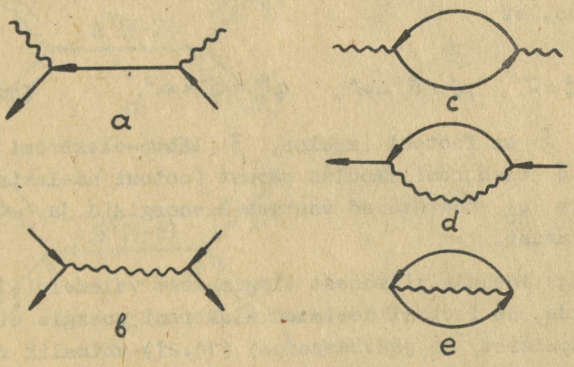
* Järgmises paragrahvis näeme, et virtuaalsed "osakesed" (või osakesed virtuaalses olekus, nagu sageli öeldakse) erinevad reaalsetest osakestest ka sellepoolest, et nende energia ja impulss on omavahel sõltumatud ega rahulda tingimust $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$.



Joon. 3.

Kuna suunatud joonega oleme sidunud kujutluse elektroni liikumisest, siis elektrilaengu jäävus eeldab elektronjoone (ja selle suuna) pidevust kogu graafiku ulatuses. S.t. igasse graafiku punkti suubub üks ja sealt väljub teine elektronjoon. n-ndat järku protsessi kirjeldaval graafikul on n punkti, mida nimet. ka graafiku tippudeks.

Joonisel 4 on esitatud kõikide võimalikkude II järku protsesside graafikud. Need on saadud kahe punkti (lühiduse huvides tähistatud (1) ja (2)) sidumisel osakeste liikumisjoontega kõikidel võimalikkudel viisidel.



Joon. 4.

6. Vaatleme lähemalt üksikute graafikute võimalikku füüsikalist tõlgendust ja seda, kuidas nad on seotud operaatori S_2 arenduse (11.6, 7) maatrikselementidega.

Graafiku a abil (joon. 4) võime kirjeldada järgmisi protsesse.

1) Kui graafiku joontele vastastame funktsioonid nii, nagu näidatud graafikul a (joon. 5), saame Compotoni efekti graafiku. Reaktsiooni käigu piltlik kirjeldus on järgmine. Lähteolekus on elektron (ν) ja footon (γ). Punktis (2) nad kohtuvad, elektron "neelab" footoni ja läheb üle virtuaalsesse olekusse. Jõudnud punkti (1), kiirgab virtuaalne elektron footoni olekus (γ') ja läheb ise selle tagajärjel üle reaalsesse olekusse (ν'). Seega toimus footoni hajumine vabal elektronil, mille tulemusena mõlemate olekud muutusid. Pärast footoni "neelamist" punktis (2) ei saa elektron edasi eksisteerida reaalse vaba elektronina, sest sel juhul ei kehtiks energia ja impulsi jäävusseadus. Lihtne arvutus näitab, et reaalse nurga puhul vektorite k ja p vahel ei saa rahuldada jäävusseadusi

$$\vec{q} = \vec{k} + \vec{p} \; ; \qquad q_0 = k_0 + p_0 \; , \tag{11.21}$$

kui oletada, et

$$k_0^2 = \vec{k}^2 \; ; \quad p_0^2 = \vec{p}^2 + m^2 \; ; \quad q_0^2 = \vec{q}^2 + m^2 . \tag{11.22}$$

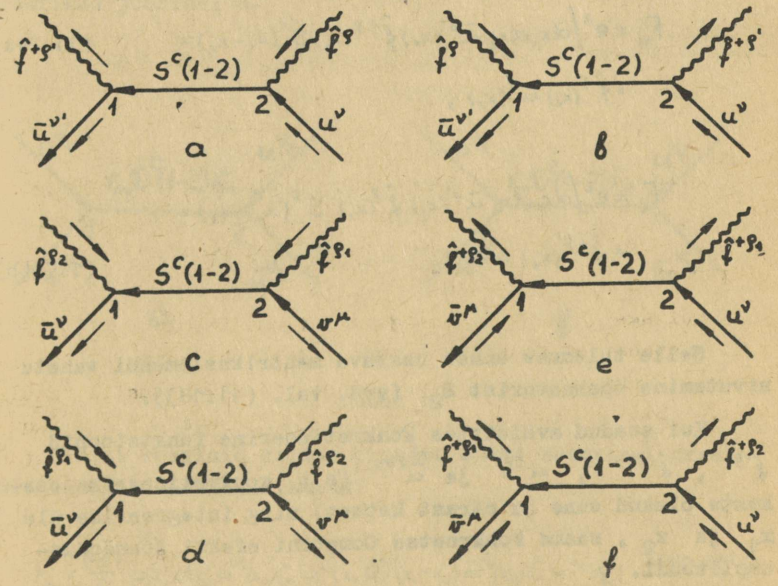
Siin $\vec{k}$ on footoni impulss, $\vec{p}$ lähte-elektroni impulss ja $\vec{q}$ elektroni impulss pärast footoni neelamist, k_0 , p_0 ja q_0 tähistavad vastavaid energiaid ja m elektroni massi.

Kui aga loobuda viimasest tingimusest valemeis (11.22), s.t. oletada, et footoni neelanud elektroni energia ei sõltu tema impulsist, on jäävusseadusi (11.21) võimalik rahuldada. Siit selgubki, miks punktist (2) punkti (1) liikuv elektron peab olema virtuaalne. Edasi, punktis (1) taastub õige vahekord elektroni energia ja impulsi vahel (tänu kiirgunud footonile) ja elektron läheb üle reaalsesse, katseliselt jälgitavasse olekusse. Märgime, et osakese siirdumine virtuaalsesse olekusse toimub alati siis, kui energia ja impulsi jäävusseadust saab rahuldada ainult nendevahelisest

sõltuvusest loobudes. Kui õige vahekord energia ja impulsi vahel taastub (mõne neelatud või kiiratud osakese arvel) muutub virtuaalne osake reaalseks.

Eeltoodud arutlusest järgneb ka, et esimest järku elektrodünaamika protsessid (s.o. protsessid, mida kirjeldaks graafik joonisel 3, kui sellel kõik jooned oleksid välisjooned) ei saa vabade osakeste vahel toimuda.

Lähteosakeste, mille kvantarvud on (ϱ) ja (ν), muutumine lõpposakesteks kvantarvudega (ϱ') ja (ν'), s.o. eespool kirjeldatud Comptoni hajumine võib kulgeda ka graafiku b kohaselt (joon. 5). Seepärast peame vastava maatrikselemendi üleskirjutamisel arvestama nii graafikut a kui ka b (joon. 5).



Joon. 5.

Avaldame Comptoni hajumisele vastava maatrikselemendi. Siinjuures peame silmas reeglit, mis on vahetult S-operaatori arenduskujust tuletatav: elektronjoone suunale graafikul vastab spiinorfunktsioonide ja γ -maatriksite järjestus paremalt vasakule. Kuna tegemist on II järku protsessiga, kirjutame ette teguri $\frac{(-e)^2}{2!}$ ja arvestame, et punkte (1) ja (2) ümber paigutades saaksime veel 2 formaalselt erinevat graafikut. Seega protsessi maatrikselement avaldub järgmiselt:

$$F_{\rho\alpha} \equiv \langle \nu'\rho' | S_2 | \nu\rho \rangle = F_a + F_b \,, \tag{11.23}$$

kus

$$F_a = e^2 \int dx_1 dx_2 \, \bar{u}^{\nu'}(x_1) \hat{f}^{+\rho'}(x_1) S^c(x_1 - x_2) \times \\ \times \hat{f}^{\rho}(x_2) u^{\nu}(x_2) \,, \tag{11.24a}$$

$$F_b = e^2 \int dx_1 dx_2 \, \bar{u}^{\nu'}(x_1) \hat{f}^{\rho}(x_1) S^c(x_1 - x_2) \times \\ \times \hat{f}^{+\rho'}(x_2) u^{\nu}(x_2) \,. \tag{11.24b}$$

Selle tulemuse annab vastava maatrikselemendi vahetu arvutamine operaatorist S_2 (vrd. val. (11.18)).

Kui saadud avaldistes konkretiseerime funktsioonid $\hat{f}^{(\rho)}$, $\hat{f}^{+(\rho')}$, $u^{(\nu)}$ ja $\bar{u}^{(\nu')}$ (s.t. konkretiseerime osakeste olekud enne ja pärast katset) ning integreerime üle x_1 ja x_2, saame konkreetse Comptoni efekti tõenäosusamplituudi.

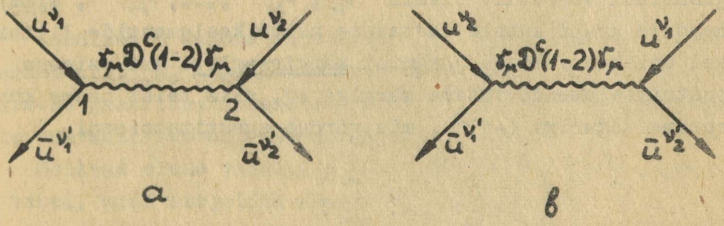
2) Kui graafiku joontele vastastame funktsioonid nii, nagu näidatud graafikutel c ja d (joon. 5), saame elekt-

ron-positronpaari tekke amplituudi (vt. val. (11.19)).

3) Kui kasutame graafiku joonte ja funktsioonide vastavust, mis on näidatud graafikutel e ja f (joon. 5), saame kehefootonilise annihilatsiooni siirdeamplituudi (vt. val. (11.20)).

Vaatleme graafikut (joon. 4). Kui vastastame elektronjoontele kõik võimalikud funktsioonide kombinatsioonid tabelist 1, näeme, et seda tüüpi graafikutega saab põhimõtteliselt kirjeldada kahe elektroni elastset hajumist, kahe positroni elastset hajumist või elektroni ja positroni elastset hajumist teineteisel. Veenduge, et nendele protsessidele vastavad nullist erinevad maatrikselemendid saadakse operaatorist M_2^{IV} val. (11.7).

Elektroni hajumist elektronil iseloomustavad näit. graafikud joonisel 6.



Joon. 6.

Üldisi reegleid silmas pidades saame kummalegi graafikule vastava maatrikselemendi

$$F_a = \frac{(-e)^2}{2}\int dx_1\,dx_2\,\bar{u}^{\nu_1'}(x_1)\gamma_\mu u^{\nu_1}(x_1)\mathcal{D}^c(x_1-x_2)\bar{u}^{\nu_2'}(x_2)\gamma_\mu u^{\nu_2}(x_2), \qquad (11.25a)$$

$$F_b = \frac{(-e)^2}{2}\int \bar{u}^{\nu_1'}(x_1)\gamma_\mu u^{\nu_2}(x_1) D^c(x_1-x_2)\bar{u}^{\nu_2'}(x_2)\gamma_\mu u^{\nu_1}(x_2)\,dx_1\,dx_2 . \qquad (11.25b)$$

Kui vahetult arvutaksime maatrikselemendi

$$\langle \nu_1'\nu_2' | S_2 | \nu_1\nu_2 \rangle ,$$

saaksime

$$\langle \nu_1'\nu_2' | S_2 | \nu_1\nu_2 \rangle = F_a - F_b . \qquad (11.26)$$

Maatrikselementide F_a ja F_b erinev märk on tingitud elektronoperaatorite normaalkorrutise struktuurist. (Selgitage, kuidas!) Reegel, mida väljendab val. (11.26), on üldistatav ka suurema arvu elektronide (või positronide) juhule. Kui algolekus on näit. n elektroni, siis nendega toimuvat protsessi saab kirjeldada n! graafiku abil, mis üksteisest erinevad vaid lähteelektronide ümberpaigutuselt. Kui ühel graafikul punktidesse 1, 2, ..., n suubuvad elektronid vastavalt olekus ν_1, ν_2, ..., ν_n ja teisel graafikul vastavalt olekus ν_{j_1}, ν_{j_2}, ..., ν_{j_n}, siis nendele graafikutele vastavate maatrikselementide liitmisel tuleb arvestada järgmist <u>märgireeglit</u>: kui esimese maatrikselemendi võtame märgiga +1, siis teist peame korrutama teguriga $(-1)^p$, mis võrdub substitutsiooni

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

paarsusega.

Graafik c (joon. 4), kirjeldab sellise footoni liikumist, mis oma teel tekitab virtuaalse elektron-positronpaari ning selle taas neelab. Mingisugust reaalset protsessi sellele graafikule ei vasta - jäävusseaduste tõttu on footoni kvantarvud enne ja pärast sellist virtuaalset protsessi samad. Kui üks osake kiirgab energiakvandi

ja teine selle neelab, siis öeldakse, et osakeste vahel on toimunud energiavahetus. Kui osake neelab iseenda kiiratud kvandi, siis sellist protsessi nimet. osakese omaenergiaprotsessiks ja graafikut c (joon. 4) vastavalt footoni omaenergia graafikuks.

Graafik d (joon. 4) kirjeldab protsessi, kus elektron-(positron) kiirgab virtuaalse footoni (muutudes ka ise virtuaalseks) ning seejärel selle neelab ja liigub edasi muutumatute kvantarvudega. Sellise virtuaalse protsessi graafikut, kus lähte- ja lõpposakeseks on elektron, nimet. elektroni omaenergia graafikuks.

Need omaenergia protsessid (millele vastavaid maatriks-elemente võib arvutada ka operaatorite M_2^V (footoni omaenergia) ja M_2^{VI} ning M_2^{VII} (elektroni omaenergia) abil (valemist (11.7)) viivad mõõdetavate efektideni, kui arvestada kõrgemat järku lähendusi (vt. § 14).

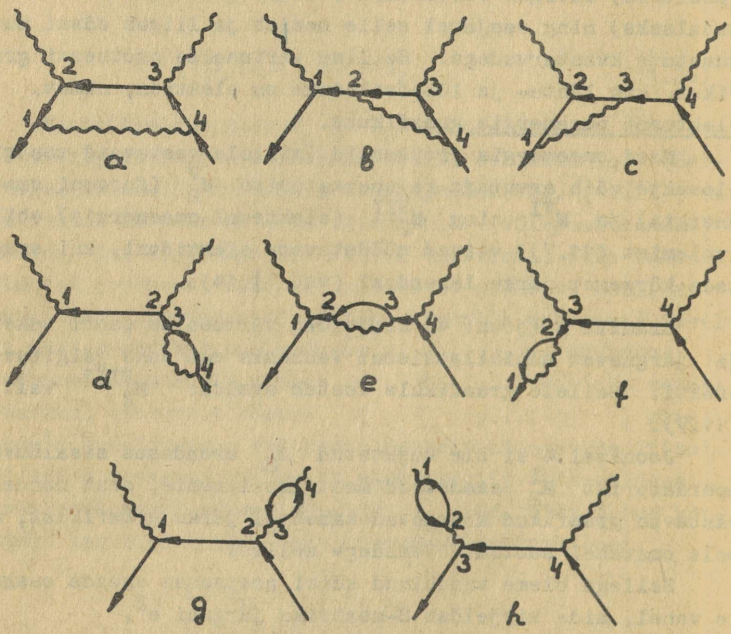
Graafik c (joon. 4) kirjeldab virtuaalse paari teket ja järgnevat annihilatsiooni vaakumis ega anna jälgitavat efekti. Sellele graafikule vastab avaldis M_2^{VIII} val. (11.7).

Joonisel 4 ei ole kujutatud S_2 arenduses sisalduvast operaatorist M_2^I saadavaid maatrikselemente, sest nendele vastavad graafikud koosnevad kahest I järku graafikust, mis pole omavahel seotud. Veenduge selles!

Sellega oleme vaadelnud kõiki protsesse vabade osakeste vahel, mida kirjeldab S-maatriks järguni e^2.

7. Rakenduslikult pakub muidugi huvi mõnesugune konkreetne protsess (või sellega seotud efekt), mille efektiivse ristlõike arvutamisel kasutatakse nii palju kõrgemat järku lähendusi, et tulemus oleks veel katsega kontrollitav. Selline protsess on mis tahes lähenduses täielikult iseloomustatud graafiku välisjoontega. Näit. Comptoni hajumist kirjeldab iga graafik, millel on kaks välist footonjoont ja kaks välist elektronjoont. Ent mida kõrgemas lähenduses protsessi vaatleme, seda rohkem

graafikuid tuleb maatrikselementide arvutamisel arvesse just kõikvõimalike virtuaalsete protsesside arvu kiire kasvu tõttu. Joonisel 7 on esitatud 4-ndat järku graafikud, mis kirjeldavad Comptoni hajumist.



Joon. 7.

Virtuaalsete protsesside arvu suurenemine ja sellega seotud renormeerimise vajadus (vt. § 14) muudab põhimõtteliselt lihtsa häiritusteooria aparatuuri kõrgemate lähendite arvutamisel väga kohmakaks.

Igale graafikule vastava tõenäosusamplituudi välja-

kirjutamisel peame arvestama ka graafiku sümmeetriat. Meenutame, et maatrikselemendi avaldises on graafiku punktid lihtsalt integreerimismuutujad, mis kulgevad üle samade väärtuste, graafikul aga on punktidel iseseisvad väärtused. Kui vaatleme näit. graafikut a (joon. 7), siis näeme, et ainult punktid (2) ja (3) on samaväärsed (kummassegi suubub ja kummastki väljub virtuaalne elektron ning kummagagi on seotud reaalne footon), ülejäänud punktid on aga kõik erinevad (punkti (1) suubuvad virtuaalne elektron ja virtuaalne footon ning sellest väljub reaalne elektron, punkti (4) suubub reaalne elektron, sellest väljuvad virtuaalne elektron ja virtuaalne footon). Kui erineva iseloomuga punktid kõikvõimalikul viisil ümber paigutame, saame 12 ehk 4!/2! ekvivalentset a-tüüpi graafikut (joon. 7), millele S-maatriksi avaldises vastab 12 võrdset maatrikselementi (mis saadakse operaatori S_4 nendest arendusliikmetest, kus seoste arv ja liik on küll samad, kuid seoste argumendid erinevad). Järelikult graafikule a (joon. 7) vastavad järgmised maatrikselemendid:

$$F_a^4 = \frac{(-e)^4}{4!}\frac{4!}{2!}\int dx_1 \dots dx_4\, \bar{u}^{\nu'}(x_1)\gamma_\mu D^c(x_1-x_4)\times$$
$$\times S^c(x_1-x_2)\hat{f}^{\rho+\rho'}(x_2)S^c(x_2-x_3)\hat{f}^{\rho}(x_3)S^c(x_3-x_4)\gamma_\mu u^{\nu}(x_4), \qquad (11.26a)$$

$$F_b^4 = \frac{(-e)^4}{4!}\frac{4!}{2!}\int dx_1 \dots dx_4\, \bar{u}^{\nu'}(x_1)\gamma_\mu D^c(x_1-x_4)\times$$
$$\times S^c(x_1-x_2)\hat{f}^{\rho}(x_2)S^c(x_2-x_3)\hat{f}^{\rho+\rho'}(x_3)S^c(x_3-x_4)\gamma_\mu u^{\nu}(x_4). \qquad (11.26b)$$

F_a^4, F_b^4 erinevad välise footonjoone erineva interpretatsiooni poolest. F_a^4 puhul lähtefooton suubub punkti (3) ja lõppfooton väljub punktist (2), F_b^4 puhul aga ümberpöördult (vrd. val. (11.24)).

Kui graafikul on n tippu, mis kõik on erineva iseloomuga, saame neid ümber nummerdades n! ekvivalentset

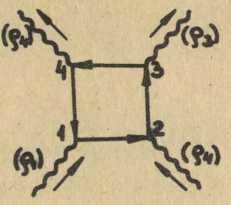
graafikut. Järelikult tuleb sel juhul maatrikselemendi ette võtta tegur $\frac{(-e)^n}{n!} \cdot n!$ ehk lihtsalt $(-e)^n$. Kui aga n järku graafik sisaldab omavahel võrdväärsete punktide rühmi (nagu joonisel 7 graafiku a punktid (2) ja (3)), kuhu kuulub vastavalt z_1, z_2, ... punkti, siis ühte sellisesse rühma kuuluvate punktide omavaheline permuteerimine midagi juurde ei anna. Järelikult saame sel juhul $\frac{n!}{z_1!\, z_2! \ldots}$ formaalselt erinevat graafikut. Kui lähtume ühestainsast graafikust suvaliselt nummerdatud punktidega, peame maatrikselemendi väljakirjutamisel tabeli I reeglite järgi võtma teguriks $\frac{(-e)^n}{n!} \cdot \frac{n!}{z_1!\, z_2! \ldots}$.

Leidke graafikute b, d, e ja g sümmeetria joonisel 7 ning vastava maatrikselemendi ees olev tegur!

Erilist tähelepanu tuleb pöörata niisugustele graafikutele, mis sisaldavad suletud elektronahelaid (nagu näit. graafik c joonisel 4). Kehtib nn. Furry teoreem: kui suletud elektronahel sisaldab paaritu arvu jooni, siis vastav maatrikselement on null.

Graafikute üldisest struktuurist (iga punkti läbib 2 elektronjoont ja 1 footonjoon) järgneb, et suletud elektronahelast väljuvad jooned võivad olla ainult footonjooned. Paaritu arvu elektronjoontega suletud ahel (tsükkel) sisaldab paaritu arvu punkte ja järelikult ka paaritu arvu väljuvaid footonjooni. See aga tähendab, et sellise tsükliga kirjeldatavas protsessis erineb lõppfootonite hulk lähtefootonite hulgast samuti paaritu arvu võrra. Footonite arvu muutumine paaritu arvu võrra on aga vastuolus laengulise paarsuse jäävusseadusega (vt. § 13) ja niisugused protsessid ei saa toimuda, mida väidabki Furry teoreem. (Selle teoreemi tõestust suletud tsüklile vastava maatrikselemendi struktuurist lähtudes vt. [1] §17.4.)

Vaatleme suletud elektronahelaid, kuhu kuulub paarisarv jooni. Näitena kirjutame üles graafiku, mis kirjeldab kõige madalamas järgus footoni hajumist footonil (vt. joon. 8).



Joon. 8.

Sellest graafikust lähtudes saame maatrikselemendi integrandina avaldise (selguse mõttes kirjutame esialgu välja spiinorindeksid ja meenutame, et $\hat{f}^{\varrho}_{\alpha\rho}(x) \equiv (\gamma_\mu)_{\alpha\rho} f^{\varrho}_{\mu}(x)$)

$$\hat{f}^{\varrho_1}_{\alpha\rho}(x_1)\, S^{c}_{\beta\delta}(x_1-x_4)\, \hat{f}^{+\varrho_4}_{\delta\vartheta}(x_4)\, S^{c}_{\vartheta\varepsilon}(x_4-x_3)\, \hat{f}^{+\varrho_3}_{\varepsilon\eta}(x_3)\times$$

$$\times S^{c}_{\eta\zeta}(x_3-x_2)\, \hat{f}^{\varrho_2}_{\zeta\iota}(x_2)\, S^{c}_{\iota\alpha}(x_2-x_1) =$$

$$= S_p\left[\gamma_{\mu_1} S^{c}(x_1-x_4)\, \gamma_{\mu_4} S^{c}(x_4-x_3)\, \gamma_{\mu_3} S^{c}(x_3-x_2)\, \gamma_{\mu_2} S^{c}(x_2-x_1)\right]\times \qquad (11.27)$$

$$\times f^{\varrho_1}_{\mu_1}(x_1)\, f^{\varrho_2}_{\mu_2}(x_2)\, f^{*\varrho_3}_{\mu_3}(x_3)\, f^{*\varrho_4}_{\mu_4}(x_4).$$

Sellesama maatrikselemendi annab S-operaatori arenduses 4-ndat järku liige, milles kõik elektronoperaatorid on seotud (kirjutame välja ainult integrandi):

$$N[\bar{\psi}(1)\hat{A}(1)\psi(1)\bar{\psi}(2)\hat{A}(2)\psi(2)\bar{\psi}(3)\hat{A}(3)\psi(3)\bar{\psi}(4)\hat{A}(4)\psi(4)] =$$

$$= -N[\hat{A}(1)\psi(1)\bar{\psi}(4)\hat{A}(4)\psi(4)\bar{\psi}(3)\hat{A}(3)\psi(3)\bar{\psi}(2)\hat{A}(2)\psi(2)\psi(1)] =$$

$$= -Sp\{S^c(1-4)\gamma_{\mu_4}S^c(4-3)\gamma_{\mu_3}S^c(3-2)\gamma_{\mu_2}S^c(2-1)\gamma_{\mu_1}\} \times$$

$$\times N[A_{\mu_4}(4)A_{\mu_3}(3)A_{\mu_2}(2)A_{\mu_1}(1)] . \qquad (11.28)$$

Nagu näha, peame omavahel seotud operaatorite ψ, $\bar{\psi}$ paarikaupa rühmitamiseks neid normaalkorrutise märgi all paaritu arv korda vahetama. Selle tulemusena muutub märk avaldise (11.28) ees võrreldes avaldisega (11.27). Selline märgi muutus toimub iga elektrontsükli korral, mis sisaldab paarisarvu jooni. Järelikult saame reegli: kui mõnesugune graafik sisaldab m elektrontsüklit paarisarvu joontega, siis selle graafiku järgi üleskirjutatud maatrikselemendi ette tuleb tegur $(-1)^m$.

Kokkuvõttes saame järgmised reeglid antud protsessi siirdeamplituudi leidmiseks.

1) Joonistame välja protsessi graafiku ja nummerdame tinglikult selle punktid. Seejuures peame arvestama kõiki võimalikke protsessi kulgemise viise antud järgus, mistõttu graafikute arv on üldiselt suurem kui 1.

2) Kasutame vastavust graafiku elementide ja siirdeamplituudi elementide vahel (integrandis) tabeli I kohaselt.

3) Järjestame γ-maatrikseid sisaldavad tegurid ja

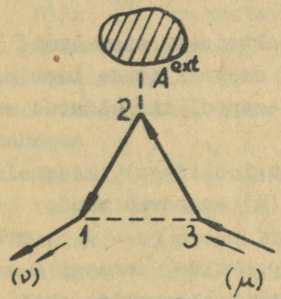
spiinorid vasakult paremale vastu elektronjoone suunda.

4) Arvestame graafiku järku (n), sümmeetriat (omavahel samaväärsete punktide arvud olgu z_1, z_2, ...) ja paarisarvu joontega suletud elektrontsüklite arvu (m), siis saame n-kordse integraali ette teguri $\frac{(-1)^m (-e)^n}{z_1! \; z_2! \; \ldots}$.

5) Kui lähte- või lõppelektrone (-positrone) on mitu, peame arvestama erinevatest graafikutest leitud maatrikselementide suhtelist märki valemile (11.26) järgneva selgituse kohaselt.

6) Liidame kõik eelsõnastatud reeglite järgi väljakirjutatud maatrikselemendid, konkretiseerime lähte- ja lõpposakesi iseloomustavad funktsioonid ja integreerime.

Näide 1. Vaatleme elektron-positronpaari teket etteantud välises väljas $A_\mu^{ext}(x)$. (Väliseks väljaks nimetatakse niisugust välja, mis on küllalt suure täpsusega kirjeldatav klassikalise elektrodünaamika võrranditega, järelikult etteantud c-arvulise funktsiooniga $A_\mu^{ext}(x)$. See väli on kvantide suhtes ammendamatuks energia reservuaariks.)[*] Kirjeldagu protsessi III järku graafik joonisel 9.



Joon. 9.

(ν) olgu tekkinud elektroni, (μ) vastavalt positroni kvantarvud. Seda protsessi (üleminekut algolekust $|\alpha\rangle$, kus eksisteeris ainult väline väli, lõppolekusse $|\beta\rangle$, kus peale selle on veel elektron-positronpaar), kirjeldab amplituud

$$\langle\beta|M|\alpha\rangle =$$

[*] A_μ^{ext} sarnaneb virtuaalse footoniga, mis ühendab graafikut energia reservuaariga . ("ext" on lühend ingl. k. sõnast "external" - väline.)

$$= (-e)^3 \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3\, \bar{u}^{\nu}(x_1)\gamma_\delta S^c(x_1-x_2)\hat{A}^{\alpha\nu\mu}(x_2) S^c(x_2-x_3)\gamma_\delta D^c(x_1-x_3) u^{\mu}(x_3).$$

Näide 2. Elektroni omaenergiale vastab graafik d joonisel 4. Arvutusreegleid silmas pidades leiame sellele vastava amplituudi

$$\Sigma_2 = (-e)^2 \int d^4x_1 d^4x_2\, \bar{u}^{\nu}(x_1)\gamma_\delta S^c(x_1-x_2)\gamma_\delta D^c(x_2-x_1) u^{\nu}(x_2). \qquad (11.29)$$

Näide 3. Footoni omaenergia graafikule c joonisel 4 vastab amplituud

$$\Pi_2 = -\frac{(-e)^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2\, Sp\left[\hat{f}^{(\rho)+}(x_1) S^c(x_1-x_2) \hat{f}^{(\rho)}(x_2) S^c(x_2-x_1)\right]. \qquad (11.30)$$

§ 12. S-maatriks impulsssesituses. Efektiivsed ristlõiked.

Praktikas iseloomustatakse reaktsiooni sisenevaid ja reaktsioonist väljunud (lõppoleku) osakesi nende impulsside ja energiate väärtustega. Kui eespool kirjeldatud suvaliste kvantarvude kompleksid ν, μ, ρ asendame osakeste impulssidega (ja polarisatsioonidega), kausaalsed Greeni funktsioonid $S^c(x)$ ning $D^c(x)$ asendame nende Fourier' arendustega ja kõikides $\langle \rho | S_n | \alpha \rangle$ avaldistes integreerime üle aeg-ruumi punktide, saamegi S-maatriksi impulsssesituses. Saadud maatrikselementide abil on siis lihtne leida protsesside diferentsiaalseid ja integraalseid efektiivseid ristlõikeid. Võime ka vahetult veenduda, et kõikides protsessides kehtib energia-impulsi jäävusseadus.

1. Lihtsustuseks oletame, et uuritav väli eksisteerib lõplikus ruumalas V. Siis on fikseeritud polarisatsioonile ja impulsile vastavad normeeritud spiinorid $u^{\nu}(x)$, $v^{\mu}(x)$ ja vektor $f_{\mu}^{(\varrho)}(x)$ järgmised (vt. § 6,8):

$$
\begin{aligned}
f_{\mu}^{\varrho}(x) &\to \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{e_{\mu}^{\lambda}}{\sqrt{2|\vec{k}|}} e^{ikx} ; && (\varrho \to (\lambda, \vec{k})) , \\
f_{\mu}^{*\varrho}(x) &\to \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{e_{\mu}^{\lambda}}{\sqrt{2|\vec{k}|}} e^{-ikx} ; && (\varrho \to (\lambda, \vec{k})) , \\
u^{\nu}(x) &\to \frac{1}{\sqrt{V}} u^{n}(\vec{p}) e^{ipx} ; && (\nu \to (n, \vec{p})) , \\
\bar{u}^{\nu}(x) &\to \frac{1}{\sqrt{V}} \bar{u}^{n}(\vec{p}) e^{-ipx} ; && (\nu \to (n, \vec{p})) , \\
v^{\mu}(x) &\to \frac{1}{\sqrt{V}} v^{n}(-\vec{p}) e^{-ipx} ; && (\mu \to (n, -\vec{p})) , \\
\bar{v}^{\mu}(x) &\to \frac{1}{\sqrt{V}} \bar{v}^{n}(-\vec{p}) e^{ipx} ; && (\mu \to (n, -\vec{p})) .
\end{aligned}
\qquad (12.1)
$$

Siin e_{μ}^{λ} on vastava tasalaine polarisatsioonivektor, mis rahuldab tingimusi (8.12, 13), $u^{n}(\vec{p})$ ja $v^{n}(-\vec{p})$ on kindlale impulsile ja elektroni polarisatsioonile n vastavad bispiinorid, mida iseloomustavad valemid (6.11, 14, 15, 16).

Valemid (12.1) näitavad, et antud tippu (x) sisenevate osakeste 4-impulss on eksponentfunktsioonis positiivse märgiga, väljuvate osakeste 4-impulss aga miinusmärgiga. Kausaalsete funktsioonide Fourier' kujust järgneb, et sama kehtib ka virtuaalsete osakeste kohta.

Et vältida summasid Fourier' arenduses, vaatleme piirjuhtu, kui $V \to \infty$. Siis saame kausaalsetele funktsioonidele integraalse kuju (vt. lisa A):

$$D^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int D^c(q) e^{iqx} d^4q ,$$

$$D^c(q) = \frac{-i}{q^2 - i0} , \qquad (12.2)$$

$$S^c_{\alpha\beta}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int S^c_{\alpha\beta}(q) e^{iqx} d^4q ,$$

$$S^c_{\alpha\beta}(q) = i \frac{(i\hat{q} - m)_{\alpha\beta}}{q^2 + m^2 - i0} . \qquad (12.3)$$

Peatume veel välja olekuvektorite $a^+_\nu |0\rangle$, $a^+_{\nu_1} a^+_{\nu_2} |0\rangle$, ... normeerimisel. Sisaldugu väli lõplikus ruumalas V. Meenutame, et $N = \sum_\nu a^+_\nu a_\nu$ tähendab elektronide arvu operaatorit ja avaldis

$$\langle 0 | a_\nu N a^+_\nu | 0 \rangle = \sum_{\nu'} \langle 0 | a_\nu a^+_{\nu'} a_{\nu'} a^+_\nu | 0 \rangle$$

elektronide keskmist arvu olekus $a^+_\nu |0\rangle$. Kui selles avaldises viime operaatorid normaalkujju, arvestades vahetuseeskirju ja vaakumoleku normeeritust, saame

$$\sum_{\nu'} \langle 0 | a_\nu a^+_{\nu'} a_{\nu'} a^+_\nu | 0 \rangle = \langle 0 | a_\nu a^+_\nu a_\nu a^+_\nu | 0 \rangle = \langle 0 | 0 \rangle = 1 . \qquad (12.4)$$

See tulemus näitab, et kui $a^+_\nu |0\rangle$ on normeeritud olekuvektor, siis kogu väljas (s.t. ruumalas V) on keskmiselt üks elektron. Esitatud arutlust korrates saab näidata, et olekus, mida kirjeldab normeeritud olekuvektor $a^+_{\nu_1} a^+_{\nu_2} |0\rangle$ $(\nu_1 \neq \nu_2)$, on keskmiselt 2 elektroni ruumala V kohta jne.

Katsega võrdlemise seisukohalt on otstarbekam vaadelda osakeste arvu mitte kogu väljas, vaid ühikruumalas. Määrame ühe osakese olekut kirjeldava normeeritud olekuvektori tingimusest, et sellas olekus tuleks ühikruumala kohta keskmiselt üks osake (ja järelikult ruumala V kohta V osa-

kest). Valemist (12.4) järeldub vahetult, et sel juhul peame olekuvektorid normeerima järgmiselt:

$$\varphi_1 = \sqrt{V}\, a^+_{\nu}|0\rangle\,, \quad \varphi_2 = \sqrt{V}\sqrt{V}\; a^+_{\nu_1} a^+_{\nu_2}|0\rangle\,, \ldots \qquad (12.4')$$

(Piirjuhul, kui $V \to \infty$, siis $\sqrt{V} \to (2\pi)^{3/2}$.) Valem (12.4') näitab, et olekus φ_2 tuleb ühikruumala kohta keskmiselt 2 osakest, jne.

Kui jätame vaatlusest välja protsessid, milledes teatud arv osakesi läheb algolekust lõppolekusse muutumatute kvantarvudega, s.t. protsessist osa võtmata, siis normeeritud olekuvektoritest (12.4') tuleb täpselt nii palju kordajaid $\sqrt{V}$ kui normeeritud funktsioonidest (12.1) kordajaid $\frac{1}{\sqrt{V}}$. Järelikult tingimusel, et ühikruumalas on üks osake, peame maatrikselementide avaldises sisalduvate (12.1) tüüpi funktsioonide normeerimisteguri võrrutama arvuga 1.

2. Selleks et leida siirdeamplituudide üldist struktuuri impulssesituses, vaatleme konkreetse näitena Comptoni hajumise tõenäosusamplituudi (11.23, 24). Kui siia paigutame funktsioonid vastavalt valemitele (12.1, 3) ($V = 1$), saame

$$F_{\rho\alpha} = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\sqrt{|\vec{\kappa}_1|\cdot|\vec{\kappa}_2|}} \int d^4x_1\, d^4x_2 \left\{ \bar{u}^{\nu_2}(\vec{p}_2)\, e^{-ip_2x_1} \times \right.$$

$$\times \left[\hat{e}^{\lambda_2} e^{-i\kappa_2 x_1} \int dq\, \frac{i\hat{q}-m}{q^2+m^2}\, e^{iq(x_1-x_2)}\, \hat{e}^{\lambda_1} e^{i\kappa_1 x_2} + \right. \qquad (12.5)$$

$$\left. + \hat{e}^{\lambda_1} e^{i\kappa_1 x_1} \int d^4q\, \frac{i\hat{q}-m}{q^2+m^2}\, e^{iq(x_1-x_2)}\, \hat{e}^{\lambda_2} e^{-i\kappa_2 x_2} \right] \times$$

$$\left. \times u^{\nu_1}(\vec{p}_1)\, e^{ip_1x_2} \right\}.$$

Siin indeks 1 iseloomustab lähteosakeste, indeks 2 lõpposakeste parameetreid. Pärast integreerimist saame esimesest liikmest

$$\int d^4x_1\, d^4x_2\, e^{i(q-\kappa_2-p_2)x_1}\, e^{i(\kappa_1+p_1-q)x_2} =$$

$$= (2\pi)^8\, \delta(q-\kappa_2-p_2)\, \delta(\kappa_1+p_1-q)$$

ja teisest liikmest

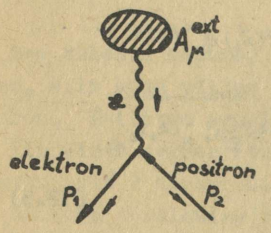
$$\int d^4x_1\, d^4x_2\, e^{i(\kappa_1+q-p_2)x_1}\, e^{i(p_1-\kappa_2-q)x_2} =$$

$$= (2\pi)^8\, \delta(\kappa_1+q-p_2)\, \delta(p_1-\kappa_2-q).$$

Need δ -funktsioonid näitavad, et graafiku <u>igasse</u> tippu sisenenud osakeste 4-impulsside summa võrdub täpselt sealt väljunud osakeste 4-impulsside summaga (kusjuures osakesed võivad olla kas reaalsed või virtuaalsed).*

---

* Virtuaalse osakese 4-impulsina tõlgendame kausaalse funktsiooni $S^c(x)$ Fourier' arendusest pärinevat integreerimismuutujat q, mille kõik 4 komponenti on sõltumatud. Seepärast ei kehtigi siin reaalsete osakeste 4-impulsile iseloomulik seos, s.t. $q^2 + m^2 \neq 0$.



Joon. 10.

Eelmises $\S$ -s näitasime, et energia ja impulsi jäävusseadus keelab I järku protsessid vabade osakeste vahel. Ent välises väljas võivad need protsessid toimuda. Vaatleme näitena paari teket nõrgas välises väljas $A_\mu^{ext}(x)$, mida võib käsitleda häiritusteooria kohaselt (vt. joonis 10). Footonjoone funktsiooni asendame siin A_μ^{ext} Fourier' arendusega $A_\mu^{ext}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k\, A_\mu^{ext}(k) e^{ikx}$.

Kuna selle välja "footonite" 4-impulsi k komponendid on sõltumatud integreerimismuutujad, saab energia ja impulsi jäävusseadust rahuldada täpselt samuti nagu siis, kui k oleks virtuaalse footoni 4-impulss.

Kui integreerime üle virtuaalse elektroni 4–impulsi q, saame lõplikult

$$F_{\beta\alpha} = \frac{ie^2(2\pi)^4}{2\sqrt{|\vec{\kappa}_1|\cdot|\vec{\kappa}_2|}}\,\bar{u}^{\kappa_2}(\vec{p}_2)\Big\{\hat{e}^{\lambda_2}\frac{i(\hat{\kappa}_1+\hat{p}_1)-m}{(\kappa_1+p_1)^2+m^2}\hat{e}^{\lambda_1} + \hat{e}^{\lambda_1}\frac{i(\hat{p}_1-\hat{\kappa}_2)-m}{(p_1-\kappa_2)^2+m^2}\Big\}u^{\kappa_1}(\vec{p}_1)\,\delta^4(\kappa_1+p_1-\kappa_2-p_2). \qquad (12.6)$$

Selles avaldises sisalduv δ–funktsioon alg– ja lõpposakeste 4–impulssidest väljendabki energia ja impulsi jäävusseadust.

3. Maatrikselemendile (12.6) vastava <u>tõenäosuse</u> $|F_{\beta\alpha}|^2$ <u>arvutamisel</u> tekib aga raskus δ –funktsiooni ruuduga, mis teatavasti pole defineeritud. See raskus on tingitud õieti sellest, et δ –funktsioonil kui mõnesuguse harilike funktsioonide jada piirväärtusel on mõte vaid üldistatud funktsioonina. Seepärast peame $(\delta)^2$ avaldises vähemalt ühe δ –funktsiooni asendama regulaarse funktsiooniga, mille saame näit., kui δ –funktsiooni Fourier' integraalis võtame lõpmatu 4–dimensionaalse ruumi asemel lõpliku aeg-ruumi piirkonna T.V

$$[\delta^4(a-b)]^2 = \delta^4(a-b)\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{(T\cdot V)} e^{i(a-b)x}\,d^4x =$$

$$= \delta^4(a-b)\,\frac{T\cdot V}{(2\pi)^4}\,.$$

Kui, nagu eespool märgitud, võtame normeerimisruumala V = 1 ja arvutame protsessi <u>tõenäosuse ajaühiku kohta</u>, saame

$$W_{\beta\alpha} = \frac{|F_{\beta\alpha}|^2}{T} = |R_{\beta\alpha}|^2\,\delta(p_2+\kappa_2-p_1-\kappa_1), \qquad (12.7)$$

kus

$$|R_{\alpha\beta}|^2 = \frac{e^4(2\pi)^4}{4|\vec{\kappa}_1|\cdot|\vec{\kappa}_2|} |\bar{u}^{\nu_2}(\vec{p}_2)\{\hat{e}^{(\lambda_2)}\frac{i(\hat{\kappa}_1+\hat{p}_1)-m}{(\kappa_1+p_1)^2+m^2}\hat{e}^{(\lambda_1)} +$$

$$+ \hat{e}^{(\lambda_1)}\frac{i(\hat{p}_1-\hat{\kappa}_2)-m}{(p_1-\kappa_2)^2+m^2}\hat{e}^{(\lambda_2)}\} u^{\nu_1}(\vec{p}_1)|^2 . \qquad (12.8)$$

Valemitega (12.7, 8) on määratud tõenäosus, et täpselt fikseeritud impulsiga ja polarisatsiooniga osakeste hajumisel saame jälle täpselt fikseeritud kvantarvudega osakesed. Katsetes on võimalik määrata ainult teatud ruuminurga elementi hajunud osakesi, s.t. osakesi mõnesuguses impulsivahemikus ($d\vec{p}_2$), ($d\vec{\kappa}_2$). Tõenäosuse leidmiseks impulsivahemike kohta peame valemi (12.7) korrutama osakeste olekute arvuga η impulsivahemiku ($d\vec{\kappa}_2 d\vec{p}_2$) ja ühikruumala V = 1 kohta. Vastav kvantmehaaniline avaldis on

$$\eta = \frac{d^3\kappa_2}{(2\pi)^3}\cdot\frac{d^3p_2}{(2\pi)^3} .$$

Järelikult tõenäosus, et footon hajub impulsivahemikku $d\vec{\kappa}_2$, hajunud elektronil on aga mis tahes energia ja impulss, on

$$dW_{\beta\alpha} = \frac{1}{(2\pi)^6}\int d^3p_2\{|R_{\beta\alpha}(\kappa_1,\kappa_2,p_1,p_2)|^2\delta^4(p_2+\kappa_2-p_1-\kappa_1)\}d^3\kappa_2 =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^6}|R_{\beta\alpha}(\kappa_1,\kappa_2,p_1,p_2)|^2_{\vec{p}_2=\vec{p}_1+\vec{\kappa}_1-\vec{\kappa}_2}\,\delta(\varepsilon_2+\omega_2-\varepsilon_1-\omega_1)d^3\kappa_2 . \qquad (12.9)$$

$$(\varepsilon_2 = \sqrt{(\vec{p}_1+\vec{\kappa}_1-\vec{\kappa}_2)^2+m^2})$$

Siin ε_2, ω_2 (ε_1, ω_1) tähistavad vastavalt lõppoleku (algoleku) elektroni ja footoni energiat.

Et leida tõenäosust dw' footoni hajumiseks ruuminurka $d\Omega$, avaldame impulsi diferentsiaali energia ja ruuminurga elemendi $d\Omega$ kaudu

$$d\vec{\kappa}_2 = \omega_2^2 d\omega_2 d\Omega$$

ja integreerime üle energia ω_2. Seejuures arvestame sümboolset valemit

$$d\left[f(\omega_2)\right] = \sum_k \frac{\delta(\omega_2 - \omega_k)}{|f'(\omega_k)|} \,, \qquad (12.10)$$

kus ω_k on võrrandi $f(\omega_2)=0$ juured.
Antud juhul

$$f(\omega_2) = \varepsilon_2 + \omega_2 - \varepsilon_1 - \omega_1 =$$

$$= \sqrt{(\vec{p}_1 + \vec{\kappa}_1 - \vec{\kappa}_2)^2 + m^2} + \omega_2 - \varepsilon_1 - \omega_1 \,, \qquad (|\vec{\kappa}_2| = \omega_2)$$

Arvutame avaldise (12.10) laboratoorses süsteemis. Siis

$$\vec{p}_1 = 0 \,, \qquad \varepsilon_1 = m$$

ja

$$\varepsilon_2 = E = \sqrt{(\vec{\kappa}_1 - \vec{\kappa}_2)^2 + m^2} =$$

$$= \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + m^2 - 2\omega_1\omega_2\cos\vartheta} \,, \qquad (12.11)$$

kus ϑ on footoni hajumisnurk, s.o. nurk vektorite $\vec{\kappa}_1$ ja $\vec{\kappa}_2$ vahel. Tingimus $f(\omega_2) = 0$ annab

$$\omega_2 = \omega = \frac{m\omega_1}{m + \omega_1(1 - \cos\vartheta)} \qquad (12.12)$$

ja

$$\frac{df(\omega_2)}{d\omega_2}\Big|_{f=0} = \frac{m\omega_1}{\omega E} \,. \qquad (12.13)$$

Arvestades neid avaldisi ja valemeid (12.8, 9), saame

$$d w'_{\beta\alpha|L} = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{\omega^3 E}{m\omega_1} |R_{\beta\alpha}|_L^2 \, d\Omega \,. \qquad (12.14)$$

Siin indeks L märgib laboratoorset süsteemi.

$|R_{\beta\alpha}|_L^2$ arvutame valemist (12.8) tingimustel (12.11, 12).

Lihtsustuseks asendame kõik lähteosakeste indeksid arvuga 1 ja lõpposakeste indeksid arvuga 2 ning tähistame

$$Q' = \frac{\hat{e}_2 [i(\hat{p}_1 + \hat{\kappa}_1) - m] \hat{e}_1}{(p_1 + \kappa_1)^2 + m^2} + \frac{\hat{e}_1 [i(\hat{p}_1 - \hat{\kappa}_2) - m] \hat{e}_2}{(p_1 - \kappa_2)^2 + m^2} \,. \qquad (12.15)$$

Laboratoorses süsteemis, kus $p_1 = (0,0,0,im)$, kehtivad seosed

$$(p_1 + \kappa_1)^2 + m^2 = -2m\omega_1 \,; \quad (p_1 - \kappa_2)^2 + m^2 = 2m\omega_2 \,, \qquad (12.16)$$

mistõttu

$$Q' = \frac{1}{2m\omega_1\omega_2} Q_{12} \,,$$

$$Q_{12} = \omega_1 \hat{e}_1 [i(\hat{p}_1 - \hat{\kappa}_2) - m] \hat{e}_2 - \omega_2 \hat{e}_2 [i(\hat{p}_1 + \hat{\kappa}_1) - m] \hat{e}_1 \,. \qquad (12.15')$$

$|R_{\beta\alpha}|_L$ avaldub siis järgmiselt:

$$|R_{\beta\alpha}|_L^2 = \frac{(2\pi)^4 e^4}{16 m^2 \omega_1^3 \omega_2^3} \bar{u}_2 Q_{12} u_1 \, (\bar{u}_2 Q_{12} u_1)^+ \,. \qquad (12.17)$$

$$(\bar{u}_2 Q_{12} u_1)^+ = (u_2^+ \gamma_4 Q_{12} u_1)^+ =$$

$$= u_1^+ Q_{12}^+ \gamma_4^+ u_2 = u_1^+ \gamma_4 \gamma_4 Q_{12}^+ \gamma_4 u_2 = \tag{12.18}$$

$$= \bar{u}_1 \bar{Q}_{12} u_2 .$$

$\bar{Q}_{12} \equiv \gamma_4 Q_{12}^+ \gamma_4$ arvutamisel kasutame valemeid (C. 46, 47) (vt. lisa C). Saame

$$\bar{Q}_{12} = \omega_1 \hat{e}_2 [i(\hat{p}_1 - \hat{\kappa}_2) - m] \hat{e}_1 -$$

$$- \omega_2 \hat{e}_1 [i(\hat{p}_1 + \hat{\kappa}_1) - m] \hat{e}_2 = Q_{21} , \tag{12.19}$$

kus indeksite vahetus kajastab lähte- ja lõppfootoni polarisatsioonivektori vahetust.

Seega

$$|R_{\beta\alpha}|_L^2 = \frac{(2\pi)^4 e^4}{16 m^2 \omega_1^3 \omega_2^3} \bar{u}_2 Q_{12} u_1 \bar{u}_1 Q_{21} u_2$$

ja

$$d w'_{\beta\alpha|_L} = \frac{e^4 E}{(8\pi)^2 m^3 \omega_1^4} \bar{u}_2 Q_{12} u_1 \bar{u}_1 Q_{21} u_2 . \tag{12.20}$$

Kui saadud avaldise jagame footonite voo tihedusega J, saame Comptoni hajumise efektiivse ristlõike $d\sigma'_L$. Üldiselt $J = nv$, kus n on osakeste arv ühikruumalas, v nende kiirus laboratoorses süsteemis. Kasutatud normeerimistingimustel $n = 1$ ja footonite kiirus (valguskiirus) $v = c = 1$. Järelikult

$$d\sigma'_L = d w'_{\beta\alpha|_L} . \tag{12.21}$$

4. Siiani vaatlesime täielikult polariseeritud osakeste hajumist, sest polarisatsiooni määravad kvantarvud τ ja λ olid nii alg- kui ka lõppolekus fikseeritud. Et saada efektiivset ristlõiget juhul, kui algosakesed on polariseerimata ja lõpposakeste polarisatsiooni ei registreerita, tuleb leitud tõenäosuse või efektiivse ristlõike avaldis keskmistada lähteosakeste polarisatsioonide (kvantarvude τ_1 , λ_1) suhtes ja summeerida üle lõpposakeste polarisatsiooni-indeksite τ_2 , λ_2 .

Kuna elektronil on 2 võimalikku polarisatsiooniolekut (spinni projektsiooni impulsi suunale) ja samuti 2 sõltumatut polarisatsiooni elektromagnetilisel lainel, siis keskmistamiseks peame summa üle kummagi osakese polarisatsiooniindeksite jagama lihtsalt 2-ga.

Valemitest (12.20, 21) saame juba polariseerimata osakeste korral

$$d\sigma_L' = \frac{e^4 E}{4(8\pi)^2 m^3 \omega_1^4} \sum_{\tau_1,\tau_2} \sum_{\lambda_1,\lambda_2} \bar{u}_{2,\alpha} Q_{12,\alpha\beta} u_{1,\beta} \bar{u}_{1,\gamma} Q_{21,\delta\gamma} u_{2,\delta} =$$

$$= \frac{e^4 E}{4(8\pi)^2 m^3 \omega_1^4} \sum_{\tau_1,\tau_2} \sum_{\lambda_1,\lambda_2} u_{2,\delta} \bar{u}_{2,\alpha} Q_{12,\alpha\beta} u_{1,\beta} \bar{u}_{1,\delta} Q_{21,\delta\delta} . \qquad (12.22)$$

Selguse mõttes oleme siin spiinorindeksid välja kirjutanud.

Summeerime esmalt üle elektroni polarisatsiooni-indeksite. Arvestades valemit (6.16a), saame

$$d\sigma_L = \frac{e^4 E}{4(8\pi)^2 m^3 \omega_1^4} \sum_{\lambda_1,\lambda_2} \frac{(m - i\hat{p}_2)_{\delta\alpha}}{2\varepsilon_2} Q_{12,\alpha\beta} \times$$

$$\times \frac{(m - i\hat{p}_1)_{\beta\delta}}{2\varepsilon_1} Q_{21,\delta\delta} = \qquad (12.23)$$

$$= \frac{e^4}{16(8\pi)^2 m^4 \omega_1^4} \sum_{\lambda_1,\lambda_2} Sp\left[(m - i\hat{p}_2) Q_{12} (m - i\hat{p}_1) Q_{21}\right],$$

kus oleme arvestanud, et $\varepsilon_2 = E$ ja $\varepsilon_1 = m$, ja tähistanud sümboliga Sp jälje üle spiinorindeksite.

Summeerime üle footoni polarisatsiooni-indeksite λ_1, λ_2. Eraldame Sp märgi all olevast avaldisest (mida tinglikult märgime [ ]) lähtefootoni polarisatsiooni-vektori $e_\mu^{\lambda_1}$, $\hat{e}^{\lambda_1} \equiv \gamma_\mu e_\mu^{\lambda_1}$, ja arvestame maatriksite tsüklilise ümberpaigutamise võimalust Sp märgi all. Saame

$$\sum_{\lambda_1} Sp[\ ] = \sum_{\lambda_1} Sp\left[A e_\mu^{\lambda_1} \gamma_\mu B e_\nu^{\lambda_1} \gamma_\nu\right] =$$

$$= \sum_{\lambda_1} e_\mu^{\lambda_1} e_\nu^{\lambda_1} Sp\left[A \gamma_\mu B \gamma_\nu\right], \qquad (12.24)$$

kus avaldised A ja B ei sisalda vektorit $e_\mu^{\lambda_1}$. Kui summeerime üle λ_1 ja arvestame tingimust (8.13), saame

$$\sum_{\lambda_1} Sp\left[A \hat{e}^{\lambda_1} B \hat{e}^{\lambda_1}\right] = Sp\left[A \gamma_\mu B \gamma_\mu\right]. \qquad (12.25)$$

(Võrduse paremal poolel on üle μ summeeritud.)

Analoogiliselt toimime summeerimisel üle lõppfootoni polarisatsioonivektorite.

Nii saame efektiivsele diferentsiaalsele ristlõikele, mis kirjeldab Comptoni efekti polariseerimata osakeste korral, avaldise

$$d\sigma_2 = \frac{e^4}{16(8\pi)^2 m^4 \omega_1^4} Sp\left\{(m - i\hat{p}_2)\left[\omega_1 \gamma_\mu (i(\hat{p}_1 - \hat{\kappa}_2) - m)\gamma_\nu - \right.\right.$$

$$- \omega_2 \gamma_\nu (i(\hat{p}_1 + \hat{\kappa}_1) - m)\gamma_\mu\left](m - i\hat{p}_1)\left[\omega_1 \gamma_\nu (i(\hat{p}_1 - \hat{\kappa}_2) - m)\gamma_\mu - \right.\right. \qquad (12.26)$$

$$\left.\left. - \omega_2 \gamma_\mu (i(\hat{p}_1 + \hat{\kappa}_1) - m)\gamma_\nu\right]\right\}.$$

Siin sisalduva jälje arvutamisel on otstarbekas esmalt välja eraldada liikmed, mis koosnevad korrutistest, kuhu kuulub paaritu arv γ -maatrikseid. Nende jälg on null (vt. lisa C). Baarisarvu γ-maatrikseid sisaldavate avaldiste jälje arvutamisel kasutame valemeid (C. 49, 50) ja nende järel sõnastatud üldreeglit (vt. lisa C).

Lõpptulemusena saame Klein-Nishina valemi[x]

$$d\sigma_1 = \frac{r_0^2}{2}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}+\frac{\omega_2}{\omega_1}-\sin^2\vartheta\right)d\Omega. \qquad (12.27)$$

Siin ϑ on hajumisnurk, s.o. nurk vektorite $\vec{\kappa}_1$ ja $\vec{\kappa}_2$ vahel. Pikkuse dimensiooniga konstant $r_0 = \frac{e^2}{4\pi m}$ kannab elektroni klassikalise raadiuse nimetust.

Kui lähteosakesed on osaliselt polariseeritud, siis nende polarisatsiooni iseloomustab vastav polarisatsioonimaatriks:[xx]

$\rho^{(e)}_{\alpha\beta}$ elektroni korral ja $\rho^{(\gamma)}_{\mu\nu}$ footoni korral.

Valemis (12.22) (ja footoni puhul valemis (12.24)) peame siis tegema järgmised asendused:

$$\frac{1}{2}\sum_{s_1} u_{1,\beta}\,\bar{u}_{1,\delta} \to \rho^{(e_1)}_{\beta\delta}\,; \quad \frac{1}{2}\sum_{\lambda_1} e^{\lambda_1}_{\mu} e^{\lambda_1}_{\nu} \to \rho^{(\gamma_1)}_{\mu\nu}. \qquad (12.28)$$

Arvutage jälg avaldisest (12.26) ning tuletage valem (12.27)!

---

x Tuletatud nimetatud teadlaste poolt 1929.a. siin esitatud kvantelektrodünaamika formalismi kasutamata.

xx Footoni ja elektroni polarisatsioonimaatriksi kohta [1] § 2.4 ja § 9.4 või [14] § 8 ja § 29.

5. Käsitletud näide annab ettekujutuse mis tahes protsessi efektiivse ristlõike arvutamise metoodikast, kui tõenäosusamplituud on teada. Teeme kokkuvõtte selle amplituudi struktuurist impulssesituses.

Kirjeldagu protsessi n tipuga graafik, millel on L sisejoont ja R välisjoont. Iseloomustame kõiki lähteosakesi indeksiga "i" (initial) ja kõiki lõpposakesi indeksiga "f" (final). Siis $R = R_i + R_f$. Olgu sise-elektronjoonte arv L_e ja sisefootonjoonte arv L_γ. Siis $L = L_e + L_\gamma$.

Kui protsess kulgeb nõrgas välisväljas A_μ^{ext}, mida võib vaadelda häiritusena, siis elektromagnetvälja operaator $A_\mu(x)$ tuleb S-operaatori arenduses kõikjal asendada järgmiselt:

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + A_\mu^{ext}(x).$$

Sel juhul osale välistest footonjoontest vastab impulssesituses A_μ^{ext} Fourier' kuju.

Et hõlpsam oleks protsessi maatrikselementi välja kirjutada üldjuhul, formuleerime veel kord kahes viimases paragrahvis kirjeldatud vastavusreeglid impulssesituse korral:

footon algolekus	$\frac{1}{\sqrt{2|\vec{k}_i|}}\hat{e}_i$
footon lõppolekus	$\frac{1}{\sqrt{2|\vec{k}_f|}}\hat{e}_f$
elektron algolekus	$u_i(\vec{p}_i)$
elektron lõppolekus	$\bar{u}_f(\vec{p}_f)$
positron algolekus	$\bar{v}_i(-\vec{p}_i)$
positron lõppolekus	$v^f(-\vec{p}_f)$
virtuaalne footon	$\frac{1}{(2\pi)^4}\gamma_\mu \frac{-i}{k^2}\gamma_\mu = \gamma_\mu D_c(k)\gamma_\mu$

virtuaalne elektron ..... $\frac{1}{(2\pi)^4} i \frac{i\hat{q} - m}{q^2 + m^2} = S^c(q)$

väline elektromagnetväli ..... $\frac{1}{(2\pi)^4} \hat{A}^{ext}(\varrho)$

(Virtuaalset positroni kirjeldab sama funktsioon mis virtuaalset elektronigi.) Kõik need γ-maatrikseid sisaldavad ja väljakirjutamata spiinorindeksitest sõltuvad suurused järjestame vastavalt elektronjoone suunale graafikul. Graafiku igale tipule (s) vastab $(2\pi)^4 \delta^4(p_s)$, kus (p_s) on tippu suubuvate ja sealt väljuvate (reaalsete või virtuaalsete) osakeste 4-impulsside vahe. Need δ-funktsioonid pärinevad integraalidest üle aegruumipunktide (x) ja nad annavad maatrikselemendi ette kordaja $(2\pi)^{4n}$. Kui summaarne sisejoonte arv on L, siis iga virtuaalse osakesega seotud kordaja $(2\pi)^{-4}$ tõttu tuleb maatrikselemendi ette veel tegur $(2\pi)^{-4L}$. Lõpuks tulevad arvesse veel graafiku sümmeetriast, elektrontsüklite arvust ja mitme lähte- või lõppelektroni (-positroni) korral ka neile vastavate joonte järjestusest tingitud tegurid, millest oli juttu eelmise paragrahvi lõpus.

Pärast integreerimist üle kõikide virtuaalsete osakeste 4-impulsside (samuti üle välisvälja "osakese" 4-impulsi ϱ) vabaneme δ-funktsioonidest, kausaalsete funktsioonide $S^c(q)$ ja $\mathfrak{D}^c(x)$ argumendid aga asenduvad reaalsete osakeste impulsside summade või vahedega (vrd. näit. val. (12.5) ja (12.6)). Järelejäänud δ^4-funktsiooni argumendiks on lähte- ja lõpposakeste 4-impulsside vahe ja see δ-funktsioon kajastab osakeste süsteemi kui terviku energia-impulsi jäävusseadust[*] (vrd. val. (12.6)).

Loetletud reeglite abil saame kirjeldatud n järku protsessi maatrikselemendile avaldise

---

[*] Välise välja juuresolekul see ei pea paika, sest väline väli muudab süsteemi energeetiliselt lahtiseks.

$$\langle f|(-e)^n S_n|i\rangle = \frac{(-1)^{m+p}(-e)^n}{z_1!\,z_2!\cdots}(2\pi)^{4(n-L)}\int d^4q_1\cdots d^4q_{L_e}\times$$

$$\times\int d^4x_1\cdots d^4x_{L_\gamma}\int d^4\xi_1\cdots d^4\xi_n\prod_{s=1}^{\tilde n}\delta^4(p_s)\times$$

$$\times\mathcal{O}\Big\{\prod_1^{R_i}\big[\omega^i(\vec p_i)\bar u^i(-\vec p_i)\frac{\hat e_i}{\sqrt{2|\varepsilon_i|}}\big]\prod_1^{R_f}\big[\bar u^f(\vec p_f)v^f(-\vec p_f)\frac{\hat e_f}{\sqrt{2|\varepsilon_f|}}\big]\times \qquad (12.29)$$

$$\times\prod_1^{\tilde n}\frac{\hat A^{ext}(\xi)}{(2\pi)^4}\prod_1^{L_e} i\,\frac{i\hat q-m}{q^2+m^2}\prod_1^{L_\gamma}\delta_\nu\,\frac{1}{ix^2}\,\delta_\nu\Big\}\,.$$

Siin $\mathcal{O}$ **on spiinoreid ja** γ **-maatrikseid järjestav operaator, mis arvestab elektronjoone suunda graafikul.**

(Teguri $\frac{(-1)^{m+p}(-e)^n}{z_1!\,z_2!\cdots}$ **päritolu kohta vt. § 11 lõppu.)**

See avaldis sisaldab tundmatuid, välisvälja kujust sõltuvaid funktsioone $A_\mu^{ext}(\xi)$**. Kui välisväli puudub, võime lõpuni integreerida. Saame**

$$\langle f|(-e)^n S_n|i\rangle = \delta\Big(\sum_f(p_f+\kappa_f)-\sum_i(p_i+\kappa_i)\Big)F(p_f,\kappa_f,p_i,\kappa_i) \qquad (12.30)$$

$$F(p_f,\kappa_f,p_i,\kappa_i) = C\,\mathcal{O}\Big\{\prod_1^{R_i}\big[\omega^i(\vec p_i)\bar u^i(-\vec p_i)\frac{\hat e_i}{\sqrt{2|\varepsilon_i|}}\big]\times \qquad (12.31)$$

$$\times\prod_1^{R_f}\big[\bar u^f(\vec p_f)v^f(-\vec p_f)\frac{\hat e_f}{\sqrt{2|\varepsilon_f|}}\big]\prod_1^{L_e} i\Big(\frac{i\hat q-m}{q^2+m^2}\Big)\prod_1^{L_\gamma}\Big(\delta_\nu\frac{-i}{x^2}\delta_\nu\Big)\Big\}\,,$$

kus kõik 4-impulsid q , x **on avaldatud alg- ja lõpposa-**

keste 4-impulsside kaudu, $C = \frac{(-1)^{m+p+n}}{z_1! z_2! \dots} e^{n} (2\pi)^{4(n-L)}$.

Siit saame arvutada tõenäosuse dw, et protsessi tulemusena iga lõpposake on teatud impulsivahemikus $d\vec{p}_f$, $d\vec{\kappa}_f$ (vrd. üleminekut valemilt (12.6) valemile (12.9):

$$dw = \frac{1}{(2\pi)^4} |F(p_f, \kappa_f, p_i, \kappa_i)|^2 \delta\left[\sum_f (p_f + \kappa_f) - \right.$$
$$\left. - \sum_i (p_i + \kappa_i)\right] \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \kappa_f}{(2\pi)^3} \qquad (12.32)$$

Seda valemit lõpposakeste impulsside suundade või suuruste järgi integreerides või üle polarisatsioonide summeerides saab arvutada mitmesugustele konkreetsetele katsetingimustele vastavaid tõenäosusi. Lähteosakeste polarisatsiooni arvestamiseks tuleb iga osakese puhul teha asendus (12.28). Rikkalikus valikus konkreetseid arvutusi leiab lugeja monograafiast [1].

§ 13. S-maatriksi sümmeetria jm. omadused.

Tutvunud S-maatriksi elementide füüsikalise tõlgenduse ja arvutamise tehnikaga, uurime edasi S-maatriksi sümmeetriat ja tema arendusrea liikmete üldist struktuuri.

1. S-maatriksi sümmeetria kajastab neid jäävusseadusi, millele alluvad elektrodünaamika protsessid. § -s 4 nägime, et iga sümmeetriateisendust (a) kirjeldab unitaarne (või antiunitaarne) operaator U_a olekuvektorite ruumis:

$$\Phi \to \Phi' = U_a \Phi , \qquad (13.1)$$

$$B(x) \to B'(x) = U_a^{-1} B(x) U_a , \qquad (13.2)$$

kus B (x) on mõnesugune väljaoperaator.

Välja operaatorlagranžiaan teiseneb samuti

$$L(x) \rightarrow L'(x) = U_a^{-1} L(x) U_a \quad , \tag{13.3}$$

kus definitsiooni kohaselt

$$L'(x) \equiv L[S_a u_A(x)] \tag{13.4}$$

ja S_a on väljapotentsiaali $u_A(x)$ teisenemiseeskiri

$$u'_A(x') = S_a u_A(x) .$$

Variatsioonintegraal on invariantne antud teisenduse suhtes, kui

$$L[S_a u_A(x)] = L[u(x)] \equiv L(x) ,$$

millest (13.3) tõttu

$$[L, U_a] = 0 . \tag{13.5}$$

S-maatriksi definitsioonist (10.17) ja valemist (13.1) järgneb, et ka S-maatriks kommuteerub oma sümmeetriateisenduse operaatoriga

$$[S, U_a] = 0 . \tag{13.6}$$

Vaatleme eraldi pidevaid ja diskreetseid teisendusi.

Pidevate teisenduste korral võime alati piirduda vastava infinitesimaalse rühma uurimisega ja operaatori U_a esitada kujul

$$U_a = I - i\varepsilon F_a \quad , \tag{13.7}$$

kus ε on lõpmata väike parameeter, F_a aga hermiitiline infinitesimaaloperaator (generaator). Invariantsustingimus (13.5) taandub järgmiseks:

$$[L, F_a] = 0. \qquad (13.5')$$

F_a hermiitilisuse tõttu võib teda tõlgendada kui välja mõnesuguse füüsikalise karakteristiku operaatorit. F_a kommuteeruvus lagranžiaaniga väljendab tõsiasja, et vastav füüsikaline suurus on jääv. Lähtudes variatsioonintegraali invariantsusest pidevate teisenduste suhtes, saime ka klassikalises väljateoorias arvutada jäävaid suurusi, kooskõlas Noetheri teoreemiga. Järelikult on igal pideval teisenduse infinitesimaaloperaatoril klassikaline vaste - asjaolu, mida oleme kasutanud energia, impulsi jm. operaatorite konstrueerimisel.

Peegeldusteisendused moodustavad väljateoorias olulise diskreetsete teisenduste hulga. Kuna kahe peegelduse järjest rakendamine annab identsusteisenduse, siis vastav unitaarne operaator taandub ühikoperaatoriks, s.t.

$$U_a^2 = I \qquad (13.8)$$

kõikide peegelduste korral. Siit nähtub, et peegeldusoperaatori U_a omaväärtused on ± 1. U_a ise on järelikult hermiitiline ning tõlgendatav mõne füüsikalise suuruse operaatorina. Peegeldusoperaatorile vastavat suurust nimet. paarsuseks (ruumiline paarsus, laenguline paarsus jne.), ning tal puudub klassikaline vaste.

Välja olekuid on otstarbekas iseloomustada samaaegselt mõõdetavate jäävate suuruste väärtustega. Vastavad operaatorid U_1, U_2,... F_1, F_2, ... moodustavad täieliku hulga. S-maatriksi kommuteeruvusest nendega järgneb, et reaktsiooni käigus nimetatud väärtused (kvantarvud) ei muutu ja (13.6) tõttu siirdeamplituudid rahuldavad tingimust

$$\langle \beta | S | \alpha \rangle = \langle \beta | U^{-1} S U | \alpha \rangle . \qquad (13.9)$$

Märgime, et samaaegselt mõõdetavate jäävate suuruste täielikku hulka võib mõnel juhul juurde võtta ka operaatoreid, mis kõigi täieliku hulga operaatoritega ei kommuteeru. Näit. oletame, et mõnesugune sümmeetriateisenduse operaator W ei kommuteeru operaatoriga U_1 eelmainitud hulgast, s.t.

$$[W, U_1] \neq 0 \ , \quad \text{kuid} \quad [W, U_2] = \cdots = 0 . \qquad (13.10)$$

Siis juhul, kui meid huvitavad ainult olekud, kus

$$\langle \varphi | U_1 | \varphi \rangle = 0 \ ,$$

võime jäävate suuruste täielikku hulka võtta ka suuruse W ning iseloomustada neid olekuid täiendavalt W omaväärtustega. Näit. laengu peegelduse operaator U_c antikommuteerub laenguoperaatoriga Q (nagu hiljem näitame):

$$U_c Q + Q U_c = 0 ; \qquad [U_c, Q] \neq 0$$

ja välja olekuid, kus laengul on kindel väärtus, ei saa iseloomustada laengulise paarsusega. Kui aga piirdume neutraalse väljaga, kus $\langle\, |Q| \,\rangle = 0$, saame välja olekuid klassifitseerida ühtlasi ka laengulise paarsusega.

Relativistlikus väljateoorias iseloomustatakse välja olekuid tavaliselt energiaga, impulsiga ja impulsmomendi projektsiooniga impulsile, samuti laenguga jm. võimalike suurustega, mille operaatorid eelnimetatutega kommuteeruvad. Tõepoolest, vahetuseeskirjadest (4.13) saame

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \ ; \quad [P_\mu, W_\nu] = 0 \ , \qquad (13.11)$$

kus

$$W_\nu = \tfrac{1}{2} \varepsilon_{\nu\rho\sigma\mu} M_{\rho\sigma} P_\mu ; \quad W_0 = \vec{P}\vec{M} . \qquad (13.12)$$

W_0 annabki impulssmomendi projektsiooni impulsile. (Kuna $[W_\mu, W_\nu] \neq 0$, siis ei saa korraga mõõta rohkem kui ühte W_ν komponenti, näit. ainult komponenti W_0.)

Operaatoritega P_μ , W_0 kommuteeruvad ka kõikide nende teisenduste operaatorid, mille puhul aeg-ruumi koordinaadid ei muutu, näit. kalibreerimisteisenduse (9.39) operaator $U_{(\varphi)}$, mis infinitesimaalse teisenduse korral on $U_{(\delta\varphi)} = I - i\delta\varphi Q$. Operaatorit Q nimetatakse klassikalise analoogia põhjal välja laengu operaatoriks (vt. § 3 lõpp).

S-operaatori invariantsus 4-ruumi nihete, Lorentzi pööristeisenduste ja kalibreerimisteisenduste suhtes on elektrodünaamikas väljaloetav S_n kujust (10.31) ja avaldise

$$\int d^4x_1 \dots d^4x_n \, T[H_{int}(x_1) \cdots H_{int}(x_n)] =$$

$$= (-1)^n \int d^4x_1 \dots d^4x_n \, T[j_\mu(x_1) A_\mu(x_1) \dots j_\mu(x_n) A_\mu(x_n)]$$

invariantsusest nimetatud teisenduste suhtes.■

Järelikult

$$[S, P_\mu] = 0 \; ; \quad [S, W_0] = 0 \; ; \quad [S, Q] = 0$$

ja nende operaatorite omaväärtused on kõikides reaktsioonides "head" kvantarvud, s.t. säilivad kõikides reaktsioonides.

Vaatleme diskreetseid teisendusi.

■ Kalibreerimisteisendustel $A_\mu \to A_\mu + \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}$; $\psi \to \psi e^{i\varphi}$ $\bar{\psi} \to \bar{\psi} e^{-i\varphi}$ H_{int} küll muutub: $H_{int} \to H_{int} - j_\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}$. Kuid kuna kõikides olekutes $\langle \frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} \rangle = 0$, siis $\langle \int j_\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} d^4x \rangle = \langle \int d^4x \frac{\partial}{\partial x_\mu} (j_\mu \varphi) \rangle = \int_\Sigma \langle j_\mu \varphi \rangle d\sigma_\mu = 0$, kus Σ on 4-ruumi piirav hüperpind.

2. 3-ruumi peegeldus e. P-teisendus jätab samuti S-maatriksi invariantseks, kuna invariantseks jääb $j_\mu(x)A_\mu(x)$ ja T-korrutis.

Vaatleme P-teisendusele vastavat nn. ruumilise paarsuse operaatorit U_p.

S invariantsusest järgneb

$$[S,U_p]=0;\quad \langle\beta|S|\alpha\rangle=\langle\beta|U_p^{-1}SU_p|\alpha\rangle, \tag{13.13}$$

mis väljendab paarsuse jäävust elektrodünaamika protsessides.

Kuid märgime, et paarsus ja välja impulss ei ole samaaegselt mõõdetavad suurused. Selles veendume järgmiselt.

Teostame järjest 3-ruumi nihke ja peegelduse kord ühes, kord teises järjekorras ja kirjutame välja teisendustele vastavad operaatorid. Kui mõlemal juhul oleme saanud sama tulemuse, peavad ka operaatorid võrdsed olema.

I. 1) peegeldus: $\vec{r}'=-\vec{r} \rightarrow U_p$,

2) nihe $\delta\vec{a}_1$ võrra: $\vec{r}''=\vec{r}'+\delta\vec{a}_1 \rightarrow U_a=I-i\delta\vec{a}_1\vec{P}$,

teisendus I: $\vec{r}''_I=-\vec{r}+\delta\vec{a}_1 \rightarrow U_I=(I-i\delta\vec{a}_1\vec{P})U_p$.

II. 1) nihe $\delta\vec{a}_2$ võrra: $\vec{r}'=\vec{r}+\delta\vec{a}_2 \rightarrow U_a=I-i\delta\vec{a}_2\vec{P}$,

2) peegeldus: $\vec{r}''=-\vec{r}' \rightarrow U_p$,

teisendus II: $\vec{r}''_{II}=-\vec{r}-\delta\vec{a}_2 \rightarrow U_{II}=U_p(I-i\delta\vec{a}_2\vec{P})$.

Kui $-\delta\vec{a}_2=\delta\vec{a}_1$, siis $\vec{r}''_I=\vec{r}''_{II}$ ja järelikult ka $U_I=U_{II}$

$$(I-i\delta a_1\vec{P})U_p=U_p(I+i\delta a_1\vec{P}),$$

millest

$$U_p\vec{P}+\vec{P}U_p=0. \tag{13.14}$$

Samasugune arutlus näitab, et U_p kommuteerub energiaoperaatoriga P_0. Valemist (13.14) järeldub, et paarsus saab olla määratud ainult sellistes olekutes, kus summaarne impulss on null.

Vaatleme U_p mõju ühe osakese olekutele $C^+_{\lambda,\kappa}|0\rangle$, $a^+_{\nu,p}|0\rangle$ .... Leiame operaatori $C^+_{\lambda,\vec{\kappa}}$ vahetuseeskirja operaatoriga U_p tingimusest (4.10). Elektromagnetvälja operaatorpotentsiaal $A_\mu(x)$ teiseneb järgmiselt:

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = U_p^{-1} A_\mu(x) U_p .$$

Teiselt poolt

$$A'_\mu(x') \equiv A'_\mu(-\vec{x}, x_0) = \begin{cases} -A_\mu(x), & \text{kui } \mu = 1,2,3 \\ A_\mu(x), & \text{kui } \mu = 4 , \end{cases}$$

millest saame (vt. (4.10))

$$U_p^{-1} A_\mu(x) U_p = \begin{cases} -A_\mu(-\vec{x}, x_0), & \text{kui } \mu = 1,2,3 \\ A_\mu(-\vec{x}, x_0), & \text{kui } \mu = 4 . \end{cases} \qquad (13.15)$$

Tasalainelise lahendi korral, kui $A_\mu(x) \sim e^{(\lambda)}_\mu [C_\lambda(\vec{\kappa}) e^{i\kappa x} + C^+_\lambda(\vec{\kappa}) e^{-i\kappa x}]$, $(e^{(\lambda)}_\mu = \delta_{\lambda\mu})$ järgnevad tingimustest (13.15) seosed*

---

* Reaalsete footonite korral $\lambda = 1, 2$.

$$U_p^{-1} C_\lambda(\vec{k}) U_p = -C_\lambda(-\vec{k}); \quad U_p^{-1} C_\lambda^+(\vec{k}) U_p = -C_\lambda^+(-\vec{k}). \quad (13.16)$$
$$(\lambda = 1,2)$$

Rakendame operaatorit U_p ühe footoni olekule $|\lambda, \vec{k}\rangle$. Siis

$$U_p |\lambda, \vec{k}\rangle = U_p C_\lambda^+(\vec{k})|0\rangle = -C_\lambda^+(-\vec{k}) U_p |0\rangle =$$
$$= -C_\lambda^+(-\vec{k})|0\rangle = -|\lambda, -\vec{k}\rangle, \quad (13.17)$$

sest $U_p|0\rangle = |0\rangle$. Kui peegeldusteisendusel ühe osakese olek $|\vec{k}\rangle$ teiseneb olekuks $|-\vec{k}\rangle$, siis öeldakse, et vastava osakese seesmine paarsus on +1, kui aga $|\vec{k}\rangle \to -|-\vec{k}\rangle$, siis -1.[*] Valemist (13.17) nähtub, et footoni seesmine paarsus on -1.

Elektron-positronvälja korral

$$\psi(x) \to \psi'(x) = U_p^{-1} \psi(x) U_p; \quad \bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}'(x) = U_p^{-1} \bar{\psi}(x) U_p.$$

Teiselt poolt (6.23, 25, 27, 28) tõttu

$$\psi'(x') = \psi'(-\vec{x}, x_0) = S\psi(x) = \xi \gamma_4 \psi(x); \quad (\xi = \pm i, \pm 1),$$

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}'(-\vec{x}, x_0) = \bar{\psi}(x) S^{-1} = \bar{\psi}(x) \gamma_4 \xi^{-1}.$$

Seega saame operaatorpotentsiaalidele $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ tingimused

$$U_p^{-1} \psi(x) U_p = \xi \gamma_4 \psi(-\vec{x}, x_0),$$
$$U_p^{-1} \bar{\psi}(x) U_p = \bar{\psi}(-\vec{x}, x_0) \gamma_4 \xi^{-1}. \quad (13.18)$$

---

[*] **Kui osakese mass $m \neq 0$, siis seisusüsteemis ($\vec{k} = 0$) on paarsuse <u>väärtus</u> vastavalt +1 või −1.**

Pärast lahendite avaldamist tasalainete järgi

$$\sum_{\vec{\kappa},\vec{k}} \{U_p^{-1} a_\kappa(\vec{k}) U_p u^\kappa(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x} - i\kappa_0 x_0} +$$

$$+ U_p^{-1} b_\kappa^+(\vec{k}) U_p v^\kappa(-\vec{k}) e^{-i\vec{k}\vec{x} + i\kappa_0 x_0}\} =$$

$$= \sum_{\kappa,\vec{k}} \{ a_\kappa(\vec{k}) \xi \gamma_4 u^\kappa(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\vec{x} - i\kappa_0 x_0} +$$

$$+ b_\kappa^+(\vec{k}) \xi \gamma_4 v^\kappa(-\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x} + i\kappa_0 x_0}\}.$$

Kui paremal poolel asendame $\vec{k} \to -\vec{k}$ ning võrdleme $e^{i\kappa x}$, $e^{-i\kappa x}$ kordajaid mõlemal pool võrdusmärki, saame

$$U_p^{-1} a_\kappa(\vec{k}) U_p u^\kappa(\vec{k}) = a_\kappa(-\vec{k}) \xi \gamma_4 u^\kappa(-\vec{k}),$$

$$U_p^{-1} b_\kappa^+(\vec{k}) U_p v^\kappa(-\vec{k}) = b_\kappa^+(-\vec{k}) \xi \gamma_4 v^\kappa(\vec{k}). \qquad (13.19)$$

Valemite (6.11a, 11b) abil saab lihtsalt kontrollida (normeerimiskordaja täpsuseni), et

$$\gamma_4 u^\kappa(-\vec{k}) = u^\kappa(\vec{k}),$$

$$\gamma_4 v^\kappa(\vec{k}) = -v^\kappa(-\vec{k}). \qquad (13.20)$$

Järelikult

$$U_p^{-1} a_\kappa(\vec{k}) U_p = \xi a_\kappa(-\vec{k}),$$

$$U_p^{-1} b_\kappa^+(\vec{k}) U_p = -\xi b_\kappa^+(-\vec{k}). \qquad (13.21)$$

Samasugused teisendused operaatoriga $\overline{\psi}$ viivad seosteni

$$U_p^{-1} a_\kappa^+(\vec{k}) U_p = \xi^* a_\kappa^+(-\vec{k}),$$

$$U_p^{-1} b_\kappa(\vec{k}) U_p = -\xi^* b_\kappa(-\vec{k}). \qquad (13.22)$$

Nagu hiljem näeme, võib ξ olla ainult $\pm i$, et laenguliselt konjugeeritud spiinor ψ_c teiseneks nagu ψ.

Kui ruumilise paarsuse operaatorit U_p rakendame ühe elektroni olekule $|\kappa,\vec{\kappa}\rangle = a^+_\kappa(\vec{\kappa})|0\rangle$ või ühe positroni olekule $|\tilde{\kappa},\tilde{\vec{\kappa}}\rangle = b^+_{\tilde{\kappa}}(\tilde{\vec{\kappa}})|0\rangle$ (positroni kvantarve tähistame $\tilde{\kappa}, \tilde{\vec{\kappa}}$, et neid eristada elektroni kvantarvudest; osakese impulsi oleme tähistanud $\vec{\kappa}$, et ei tekiks segadust paarsuse operaatoris esineva tähega p), saame

$$U_p|\kappa,\vec{\kappa}\rangle = U_p a^+_\kappa(\vec{\kappa})|0\rangle = \xi^* a^+_\kappa(-\vec{\kappa})U_p|0\rangle = \tag{13.23}$$
$$= \xi^* a^+_\kappa(-\vec{\kappa})|0\rangle = \xi^*|\kappa,-\vec{\kappa}\rangle ,$$

$$U_p|\tilde{\kappa},\tilde{\vec{\kappa}}\rangle = U_p b^+_{\tilde{\kappa}}(\tilde{\vec{\kappa}})|0\rangle = -\xi b^+_{\tilde{\kappa}}(\tilde{\vec{\kappa}})U_p|0\rangle = \tag{13.23'}$$
$$= -\xi b^+_{\tilde{\kappa}}(-\tilde{\vec{\kappa}})|0\rangle = -\xi|\tilde{\kappa},-\tilde{\vec{\kappa}}\rangle .$$

Kui operaatorit U_p rakendame elektronist ja positronist koosnevale süsteemile, s.t. olekule $|\kappa,\vec{\kappa};\tilde{\kappa},\tilde{\vec{\kappa}}\rangle = a^+_\kappa(\vec{\kappa})\, b^+_{\tilde{\kappa}}(\tilde{\vec{\kappa}})|0\rangle$ ja peame silmas (13.23, 23'), siis

$$U_p|\kappa,\vec{\kappa};\tilde{\kappa},\tilde{\vec{\kappa}}\rangle = -|\xi|^2|\kappa,-\vec{\kappa};\tilde{\kappa},-\tilde{\vec{\kappa}}\rangle = -|\kappa,-\vec{\kappa};\tilde{\kappa},-\tilde{\vec{\kappa}}\rangle . \tag{13.24}$$

Järelikult on elektronist-positronist koosneva süsteemi paarsus (valemi (13.17) puhul märgitud mõttes) -1. ∎

∎ Osakese (elektroni) seisusüsteemis saaksime $U_p|\kappa,m\rangle_{\vec{\kappa}=0,\,\kappa=m} = \xi^*|\kappa,m\rangle$, millest nähtub, et nendes olekutes peaksime paarsusoperaatorile omistama puhtimaginaarse omaväärtuse. Sellepärast võimegi elektroni või positroni paarsusest rääkida ainult tinglikult.

Valemite (13.17, 23, 23') tõttu omandab S-maatriksi invariantsus (13.13) järgmise mõtte. Tähistame kõikide lähteosakeste impulsse $\vec{p}_i$, laenguid e_i ja impulssmomendi projektsioone suunale $\vec{p}_i$ λ_i; vastavaid suurusi lõppolekus aga $\vec{p}_f$, e_f, λ_f.

Nimetatud valemitest järeldub, et kui vahetada kõikide lähte- ja lõpposakeste impulsside märgid, siis siirdeamplituud ei muutu

$$\langle \vec{p}_f, e_f, \lambda_f | S | \vec{p}_i, e_i, \lambda_i \rangle = \langle -\vec{p}_f, e_f, \lambda_f | S | -\vec{p}_i, e_i, \lambda_i \rangle . \qquad (13.25)$$

3. Laengu peegelduse e. C-teisenduse (nimet. ka laenguliseks konjugeerimiseks) defineerime kui teisenduse, mille puhul kõik osakesed asenduvad (kõikides olekutes) oma antiosakestega.

Kirjeldagu C-teisendust olekuvektorite ruumis unitaarne operaator U_c. Siis vastavalt definitsioonile

$$U_c^{-1} a_n(\vec{k}) U_c = \eta_c b_n(\vec{k}) ,$$
$$U_c^{-1} b_n^+(\vec{k}) U_c = \eta_c a_n^+(\vec{k}) . \qquad (13.26)$$

Esimesest tingimusest saame $a_n(\vec{k}) = \eta_c U_c b_n(\vec{k}) U_c^{-1}$, millest kaasoperaator $a_n^+(\vec{k}) = \eta_c^* U_c b_n^+(\vec{k}) U_c^{-1}$, kus oleme arvestanud, et $U_c^2 = I$ ja $U_c^+ = U_c^{-1}$. Siit saame tingimuse

$$U_c^{-1} a_n^+(\vec{k}) U_c = \eta_c^* b_n^+(\vec{k}) , \qquad (13.27)$$

kus $\eta_c \cdot \eta_c^* = 1$.

Vaatleme operaatorpotentsiaali Ψ teisenemist laengulisel konjugeerimisel. Esitame Ψ, $\bar{\Psi}$ tasa-

lainete reana . Siis

$$U_c^{-1}\psi(x)U_c = \sum_{r,\vec{k}} \{ U_c^{-1} a_r(\vec{k}) U_c\, u^r(\vec{k})\, e^{ikx} +$$

$$+ U_c^{-1} b_r^+(\vec{k}) U_c\, v^r(-\vec{k}) e^{-ikx}\} =$$

$$= \sum_{r,\vec{k}} \{ \eta_c b_r(\vec{k}) u^r(\vec{k})\, e^{ikx} + \qquad (13.28)$$

$$+ \eta_c a_r^+(\vec{k})\, v^r(-\vec{k})\, e^{-ikx} \} .$$

Kui tähistame laenguliselt konjugeeritud spiinori $\psi^c(x)$

$$\psi^c(x) = U_c^{-1}\psi(x)U_c \quad , \qquad (13.29)$$

siis, võrreldes (13.28) paremat poolt $\bar{\psi}(x)$ arendusega

$$\bar{\psi}(x) = \sum_{r,\vec{k}} \{ a_r^+(\vec{k}) \bar{u}^r(\vec{k}) e^{-ikx} + b_r(\vec{k}) \bar{v}^r(-\vec{k}) e^{ikx} \} , \qquad (13.30)$$

näeme, et ψ^c komponendid avalduvad $\bar{\psi}$ komponentide lineaarkombinatsioonidena

$$\psi_\alpha^c(x) = C_{\alpha\beta}\, \bar{\psi}_\beta(x) . \qquad (\alpha = 1, \ldots, 4) \qquad (13.31)$$

Konstantsed spiinorid $u^c(\vec{k})$, $v^c(\vec{k})$ arenduses (13.28) on seotud spiinoritega $\bar{u}^r(\vec{k})$ ja $\bar{v}^r(-\vec{k})$ järgmiselt:

$$u_\alpha^{rc}(\vec{k}) = C_{\alpha\beta}\, \bar{v}_\beta^r(-\vec{k}) , \qquad (13.32)$$

$$v_\alpha^{rc}(-\vec{k}) = C_{\alpha\beta}\, \bar{u}_\beta^r(\vec{k}) .$$

Kui nõuame, et laenguliselt konjugeeritud spiinor ψ^c rahuldaks samasugust võrrandit ja teiseneks samuti nagu spiinor ψ, saame maatriksile C tingimused (vt. lisa C)

$$-C\tilde{\gamma}_\mu = \gamma_\mu C\,; \quad C^+C = I\,; \quad C^*C = -I \tag{13.33}$$

ning valemi

$$U_c^{-1}\bar{\psi}(x)U_c = \bar{\psi}^c(x)\,; \quad \bar{\psi}^c(x) = C^+\psi(x)\,. \tag{13.34}$$

ψ ja $\bar{\psi}$ võime avaldada ka $\bar{\psi}^c$ ja ψ^c kaudu:

$$\psi(x) = C\,\bar{\psi}^c(x)\,; \quad \bar{\psi}^c(x) = C^+\psi(x)\,. \tag{13.35}$$

Nendest valemitest järgneb, et vooluvektor j_μ on sümmeetriline laenguliselt konjugeeritud spiinorite suhtes

$$j_\mu(x) = \frac{ie}{2}[\bar{\psi}, \gamma_\mu\psi] = \frac{ie}{2}[\bar{\psi}\gamma_\mu\psi + \psi^c\tilde{\gamma}_\mu\bar{\psi}^c]\,. \tag{13.36}$$

Siit saame

$$\begin{aligned} &U_c^{-1}j_\mu(x)U_c = j_\mu^c(x) = -j_\mu(x)\,, \\ &QU_c = -U_cQ\,, \qquad \left[Q = -i\int j_4(x)\,d^3x\right] \end{aligned} \tag{13.37}$$

kooskõlas teisenduse U_c kui laengu peegelduse mõttega.

Kui nõuame, et spiinorid ψ^c, $\bar{\psi}^c$ teiseneksid 3-ruumi peegelduste korral vastavalt valemeile (13.18), s.t.

$$U_p^{-1}\psi(x)U_p = \xi\gamma_4\psi^c(-\vec{x},x_0)\,,$$

$$U_p^{-1}\bar{\psi}^c(x)U_p = \xi^{-1}\bar{\psi}^c(-\vec{x},x_0)\gamma_4\,, \qquad (13.38)$$

ning teiselt poolt

$$U_p^{-1}\psi_\alpha^c(x)U_p = \xi\gamma_{4,\alpha\rho}C_{\rho\sigma}\bar{\psi}_\sigma(-\vec{x},x_0) =$$

$$= C_{\alpha\rho}U_p^{-1}\bar{\psi}_\rho(x)U_p = C_{\alpha\rho}\bar{\psi}_\sigma(-\vec{x},x_0)\gamma_{4,\sigma\rho}\xi^{-1} =$$

$$= \xi^{-1}C\tilde{\gamma}_4\bar{\psi}(-\vec{x},x_0)\,,$$

millest $\xi\gamma_4 C = \xi^{-1}C\tilde{\gamma}_4$ ja $\xi = -\xi^{-1}$,

siis näeme, et konstant ξ peab olema puhtimaginaarne.

Elektromagnetvälja operaatorpotentsiaalide C-teisenduse määrame tingimusest, et koos võrrandiga

$$\Box A_\mu(x) = -j_\mu(x)$$

kehtiks ka

$$\Box A_\mu^c(x) = -j_\mu^c(x)\,,$$

kus

$$A_\mu^c(x) = U_c^{-1}A_\mu(x)U_c\,; \qquad j_\mu^c(x) = U_c^{-1}j_\mu(x)U_c\,.$$

Valemitest (13.37) näeme, et

$$U_c^{-1}A_\mu(x)U_c = -A_\mu(x) \qquad (13.39)$$

või

$$U_c^{-1}C_\lambda(\vec{x})U_c = -C_\lambda(\vec{x})\,; \quad U_c^{-1}C_\lambda^+(\vec{x})U_c = -C_\lambda^+(\vec{x})\,. \qquad (13.39')$$

Kui operaatorit U_c rakendame ühe footoni olekule $C_\lambda^+(\vec{k})|0\rangle$, saame

$$U_c C_\lambda^+(\vec{k})|0\rangle = -C_\lambda^+(\vec{k})U_c|0\rangle = -C_\lambda^+(\vec{k})|0\rangle \qquad (13.40)$$

Valem (13.40) ütleb, et <u>footonile</u> saame omistada kindla <u>laengulise paarsuse – 1</u>. Analoogiliselt veendume, et n footonist koosneva süsteemi laenguline paarsus on $(-1)^n$. ■

Valemitest (13.37, 39) järeldub, et

$$U_c^{-1} j_\mu(x) A_\mu(x) U_c = j_\mu(x) A_\mu(x) , \qquad (13.41)$$

mis näitab, et S-maatriksi arenduse kõik liikmed on invariantsed laengu peegeldusteisenduse suhtes. Seega

$$\langle \rho | S | \alpha \rangle = \langle \rho | U_c^{-1} S U_c | \alpha \rangle \qquad (13.42)$$

või, kui kasutame samu tähistusi nagu valemis (13.25),

$$\langle \vec{p}_f, e_f, \lambda_f | S | \vec{p}_i, e_i, \lambda_i \rangle = \langle \vec{p}_f, -e_f, \lambda_f | S | \vec{p}_i, -e_i, \lambda_i \rangle . \qquad (13.43)$$

Valem (13.43) ütleb, et kui mingis katses asendame kõik osakesed nende antiosakestega, siis <u>protsess antiosakestega kulgeb täpselt sama siirdeamplituudiga</u> (ja järelikka sama tõenäosusega), <u>nagu kulges protsess esialgsete osakestega</u>.

Laengulise paarsuse jäävus kajastub valikureeglites, mis välistavad teatud (energeetiliselt võimalikud) protsess-

---

■ Olekutele, kus välja kogulaeng on nullist erinev, ei saa omistada mingit laengulise paarsuse väärtust, sest sellised olekud ei ole operaatori U_c omaolekuteks, nagu järgneb vahetult definitsioonist (13.26).

sid. Näit. kui välja olek enne ja pärast reaktsiooni on puhtfotoonne (absoluutselt neutraalne), siis laenguline paarsus lähteolekus on $(-1)^n$, lõppolekus $(-1)^m$, kus n ja m on vastavalt footonite arv enne ja pärast. Laengulise paarsuse jäävuse tõttu ei saa n - m olla paaritu. Nagu märgitud § -s 11, on selle tõttu nullid kõik S-maatriksi elemendid, mis sisaldavad paaritu arvu joontega kinnisi elektronahelaid (Furry teoreem). Samuti järgneb laengulise paarsuse jäävusest, et elektronist ja positronist koosnev süsteem - positroonium - võib olekus ^1S (summaarne orbitaalne kvantarv null ja summaarne spinn null) annihileeruda ainult paarisarvuks footoniteks, olekus ^3S annihileerudes aga annab paaritu arvu footoneid (sest siis positrooniumi paarsus on - 1 kvantarvu $l+s=1$ tõttu).

4. <u>Aja peegeldus e. T-teisendus</u> erineb seni vaadeldust selle poolest, et olekuvektorite ruumis vastab sellele mitte unitaarne, vaid antiunitaarne operaator (vt. val. (4.5)). See tuleneb nõudest, et T-teisendus seaks igale operaatorpotentsiaalile $u_A(x)$ vastavusse operaatori $u'_A(x)$, mis rahuldaks samu kanoonilisi kommutatsiooni-reegleid nagu $u_A(x)$ või nendega ekvivalentset kvanttingimust

$$-i\frac{\partial u_A(x)}{\partial x_0} = [P_0, u_A(x)] . \qquad (13.44)$$

Kui oletaksime, et

$$x_0 \to -x_0 : \quad u_A(x) \to u'_A(x) = U_T^{-1} u_A(x) U_T = S_{T,AB}\, u_B(\vec{x}, -x_0), \qquad (13.45)$$

kus U_T on unitaarne operaator, ja nõuaksime, et $u'_A(x)$ rahuldaks samuti kvanttingimust

$$-i\frac{\partial u'_A(x)}{\partial x_0} = [P_0, u'_A(x)], \qquad (13.44')$$

satuksime esialgse tingimusega (13.44) vastuollu. Tõepoolest, kui siin asendame $u'_A(x)$ vastavalt valemile (13.45), saame

$$-S_{T,AB}\, i\frac{\partial u_B(\vec{x},-x_0)}{\partial x_0} = S_{T,AB}\left[P_0, u_B(\vec{x},-x_0)\right]. \qquad (13.46)$$

Kui selle võrduse mõlemat poolt korrutame maatriksiga S_T^{-1} ja tähistame $-x_0 \to x_0$, saame

$$+i\frac{\partial u_A(x)}{\partial x_0} = \left[P_0, u_A(x)\right], \qquad (13.44'')$$

mis on vastuolus tingimusega (13.44).

Nimetatud vastuolust vabaneme, kui U_T asendame antiunitaarse operaatoriga V_T, mis definitsiooni (4.5) kohaselt teisendab vastavalt eeskirjadele iga olekuvektori $|\Phi\rangle$ olekuvektoriks $\langle\Phi'|$:

$$V_T|\Phi_1\rangle = \langle\Phi'_1|;\quad V_T|\Phi_2\rangle = \langle\Phi'_2|;\quad |\Phi'_2\rangle = \langle\Phi_2|V_T^{-1},$$
$$\langle\Phi'_1|\Phi'_2\rangle = \langle\Phi_2|V_T^{-1}V_T|\Phi_1\rangle = \langle\Phi_2|\Phi_1\rangle. \qquad (13.47)$$

Operaatori $u'_A(x)$ defineerime valemiga

$$\langle\Phi'_1|u_A(x)|\Phi'_2\rangle = \langle\Phi_1|u'_A(x)|\Phi_2\rangle. \qquad (13.48)$$

Kuna

$$\langle\Phi'_1|u_A(x)|\Phi'_2\rangle = \langle\Phi_2|V_T^{-1}u_A(x)V_T|\Phi_1\rangle, \qquad (13.48')$$

siis tingimus (13.48) on rahuldatud, kui esmalt rakendada operaatorile $u_A(x)$ unitaarteisendust ja seejärel transponeerida kõik maatrikselemendid. Sümboolselt

$$u'_A(x) = V_T^{-1} u_A(x) V_T = [U_T^{-1} u_A(x) U_T]^T . \qquad (13.49)$$

Transponeerimine muudab teatavasti korrutises operaatorite järjestust, mistõttu

$$[A(x)B(x)]' = V_T^{-1}[A(x)B(x)]V_T = B'(x)A'(x), \qquad (13.50)$$

kus $A(x)$ **ja** $B(x)$ **on suvalised operaatorid. Tegurite järjestuse muutmine valemi (13.44') paremal poolel, kui operaatorilt** $u'_A(x)$ **läheme üle operaatorile** $u_A(x)$ **, tagabki valemite (13.44) ja (13.44') kooskõlalisuse.**

Näitame, et kvantelektrodünaamika S-maatriks on invariantne T-teisenduse suhtes.

Selleks leiame esmalt vooluvektori $j_\mu(x)$ **teisenemiseeskirja. Lähtume** $\psi(x)$ **,** $\bar\psi(x)$ **teisendusvalemeist (13.49), (6.29)**

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= V_T^{-1}\psi(x)V_T = S_T\,\psi(\vec r, -x_0), \\ \bar\psi'(x) &= V_T^{-1}\bar\psi(x)V_T = \bar\psi(\vec r, -x_0)\,S_T^{-1}, \end{aligned} \qquad (13.51)$$

kus

$$S_T = \gamma_1\gamma_2\gamma_3; \qquad S_T^{-1}\gamma_\mu S_T = \begin{cases} \gamma_\mu, & \text{kui } \mu = 1,2,3 \\ -\gamma_\mu, & \text{kui } \mu = 4. \end{cases} \qquad (13.52)$$

Järelikult

$$j'_\mu(x) = V_T^{-1} j_\mu(x) V_T = \frac{ie}{2}\gamma_{\mu,\alpha\beta}\left[\psi'_\beta(x)\bar\psi'_\alpha(x) - \bar\psi'_\alpha(x)\psi'_\beta(x)\right] = \qquad (13.53)$$

$$= \frac{ie}{2}(S_T^{-1}\gamma_\mu S_T)_{\alpha\beta}\left[\psi_\beta(\vec r, -x_0)\bar\psi_\alpha(\vec r, -x_0) - \bar\psi_\alpha(\vec r, -x_0)\psi_\beta(\vec r, -x_0)\right],$$

või

$$j'_\mu(x) = \begin{cases} -j_\mu(\vec{x}, -x_0), & \text{kui } \mu = 1,2,3 \\ j_\mu(\vec{x}, -x_0), & \text{kui } \mu = 4 \end{cases} \qquad (13.54)$$

Elektromagnetvälja potentsiaalid teisenevad nii:

$$A'_\mu(x) = V_T^{-1} A_\mu(x) V_T = \begin{cases} -A_\mu(\vec{x}, -x_0), & \text{kui } \mu = 1,2,3 \\ A_\mu(\vec{x}, -x_0), & \text{kui } \mu = 4 \end{cases} \qquad (13.55)$$

Operaator H_{int} teiseneb järgmiselt:

$$V_T^{-1} H_{int}(x) V_T = -j_\mu(x) A'_\mu(x) = -A'_\mu(x) j'_\mu(x) = \\ = -j_\mu(\vec{x}, -x_0) A_\mu(\vec{x}, -x_0) = H_{int}(\vec{x}, -x_0). \qquad (13.56)$$

S-maatriksi arenduses sisalduvate operaatorite S_n teisenemise selgitame liikme S_2 teisenemise abil.

$$S_2 = \frac{(i)^2}{2} \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty}\int dx_0 dx'_0 \int d^3x d^3x' H_{int}(x) H_{int}(x'), & \text{kui } x_0 > x'_0 \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int dx_0 dx'_0 \int d^3x d^3x' H_{int}(x) H_{int}(x'), & \text{kui } x_0 < x'_0 \end{cases}$$

Kui peegeldame ajakoordinaati, saame

$$V_T^{-1} S_2 V_T = \frac{(-i)^2}{2} \begin{cases} \int_{\infty}^{-\infty}\int (-dx_0)(-dx'_0) \int d^3x d^3x' H_{int}(\vec{x}', -x'_0) H_{int}(\vec{x}, -x_0), \\ \qquad \text{kui } -x_0 < -x'_0 \\ \int_{\infty}^{-\infty}\int (-dx_0)(-dx'_0) \int d^3x d^3x' H_{int}(\vec{x}, -x_0) H_{int}(\vec{x}', -x'_0), \\ \qquad \text{kui } -x_0 > -x'_0 \end{cases}$$

Kui tähistame uute integreerimismuutujatena $-x_0 = \bar{x}_0$, $-x'_0 = \bar{x}'_0$, saame

$$V_T^{-1} S_2 V_T = \frac{(-i)^2}{2} \int dx_0 dx_0' d^3x d^3x' T[H_{int}(\vec{x},x_0) H_{int}(\vec{x}',x_0')] = S_2 . \quad (13.57)$$

Samasuguste mõttekäikude kordamine S_n korral ($n > 2$) viib analoogilisele tulemusele. Järelikult võime kirjutada

$$S' = V_T^{-1} S V_T = S . \quad (13.58)$$

Arvestades operaatori V_T toimet olekuvektoritele, saame S-maatriksi invariantsuse tingimuse tema maatriks-elementide kaudu avaldatuna

$$\langle \beta' | S | \alpha' \rangle = \langle \alpha | S | \beta \rangle . \quad (13.59)$$

Nn. ajas pööratud olekute $|\alpha'\rangle$, $|\beta'\rangle$ füüsikalise mõttega tutvume pisut hiljem.

Kvantelektrodünaamika S-maatriksi invariantsusest P-, C- ja T-teisenduste suhtes järeldub tema invariantsus ka nende mis tahes kombinatsioonide, s.o. CP-, PT- ja CTP suhtes.

5. Operaatori V_T mõju leidmiseks ühe osakese olekutele on hõlpsam lähtuda täielikust peegeldusest aeg-ruumis, $x_\mu \to -x_\mu$. Osutub, et nii täielikku kui ka ainult aja peegeldust võib defineerida kahte moodi. Kui aeg-ruumi peegeldusega kaasneb üleminek osakeselt antiosakesele, nimetatakse seda teisendust tugevaks aegruumi peegelduseks R_S ehk CTP-teisenduseks. Kui koos peegeldusega ei toimu üleminekut osakeselt antiosakesele, saame nõrga peegelduse R_W. Võimalus defineerida peegeldusi olekuvektorite ruumis kahte viisi on tingitud sellest, et aeg-ruumis C-teisendus ei kajastu.

Arvestades peegeldusoperaatorite omadusi $U_C^2 = I$,

$V_T^2 = I$, $U_p^2 = I$, võime nõrga peegelduse R_w kirjutada sümboolselt

$$R_w = C\,R_s \,. \tag{13.60}$$

Analoogilised defineerivad seosed kehtivad tugeva (T_s) ja nõrga (T_w) aja peegelduse korral

$$T_s = P\,R_s \;;\; T_w = P\,R_w = P\,C\,R_s \,. \tag{13.61}$$

Valemid (13.60, 61) näitavad, et kõikide teiste peegelduste uurimise võib taandada R_s uurimisele, kuna C ja P mõju on varem käsitletud.

Vastaku tugevale peegeldusele R_s antiunitaarne operaator V_s olekuvektorite Hilberti ruumis. Elektromagnetvälja operaatorpotentsiaal teiseneb siis

$$V_s^{-1} A_\mu(x) V_s = -A_\mu(-x) \,. \tag{13.62}$$

Sellest järelduvad operaatorite $C_\lambda(\vec{k})$, $C_\lambda^+(\vec{k})$ teisenemiseeskirjad

$$\begin{aligned} V_s^{-1} C_\lambda(\vec{k}) V_s &= -C_\lambda^+(\vec{k}) \,, \\ V_s^{-1} C_\lambda^+(\vec{k}) V_s &= -C_\lambda(\vec{k}) \,. \end{aligned} \tag{13.63}$$

Dirac'i spiinorite korral (vt. (6.30))

$$\begin{aligned} V_s^{-1} \psi(x) V_s &= \xi \gamma_5 \psi(-x) \,, \\ V_s^{-1} \bar{\psi}(x) V_s &= -\xi^* \bar{\psi}(-x) \gamma_5 \,. \qquad (\xi = \pm i) \end{aligned} \tag{13.64}$$

Kui tingimustes (13.64) $\psi(x)$ ja $\bar{\psi}(x)$ arendame tasalainete järgi ja arvestame seoseid

$$\gamma_5 u^r(\vec{k}) = r\, v^{(-r)}(-\vec{k}); \quad \gamma_5 v^r(-\vec{k}) = r\, u^{(-r)}(\vec{k}) \tag{13.65}$$

(mis tulenevad γ -maatriksite omadustest ja võrranditest (6.11 - 13) ning kus $r = \pm 1$ iseloomustab spinni projektsiooni suunale $\vec{\kappa}$), saame (analoogiliselt valemite (13.22) tuletuskäiguga)

$$
\begin{aligned}
V_s^{-1} a_r(\vec{\kappa}) V_s &= -\xi_r b^+_{-r}(\vec{\kappa}) , \\
V_s^{-1} b^+_r(\vec{\kappa}) V_s &= -\xi_r a_{-r}(\vec{\kappa}) , \\
V_s^{-1} a^+_r(\vec{\kappa}) V_s &= -\xi^*_r b_{-r}(\vec{\kappa}) , \\
V_s^{-1} b_r(\vec{\kappa}) V_s &= -\xi^*_r a^+_{-r}(\vec{\kappa}) .
\end{aligned}
\qquad (13.66)
$$

Kui arvestame antiunitaarse operaatori toimet olekuvektorile (val. (13.47)), siis

$$
\begin{aligned}
V_s a^+_r(\vec{\kappa})|0\rangle &= \xi_r b_{-r}(\vec{\kappa}) V_s |0\rangle = \\
&= \xi_r \langle 0| b_{-r}(\vec{\kappa}) = \xi_r \langle \tilde{\vec{\kappa}}, -\tilde{r}| .
\end{aligned}
\qquad (13.67)
$$

Valemid (13.67) näitavad, et kui lähteolekus $|\alpha\rangle$ oli üks elektron (impulsiga $\vec{\kappa}$ ja spinni projektsiooniga $\vec{\kappa}$ suunale r), siis R_s-teisendus viib selle oleku lõppolekuks $\langle\alpha'|$, mida iseloomustab positron impulsiga $\tilde{\vec{\kappa}}$ ja spinni projektsiooniga $\tilde{\vec{\kappa}}$ suunale $-\tilde{r}$.

Sümboolselt võime vaadeldud teisenduste toimet välja ühe osakese olekutele $|\vec{\kappa}, r\rangle$ (antiosakeste korral vastavalt $|\tilde{\vec{\kappa}}, \tilde{r}\rangle$) väljendada järgmiste skeemide abil:

$$R_s \equiv CTP: \quad |\vec{\kappa}, r\rangle \xrightarrow{R_s} \langle \tilde{\vec{\kappa}}, -\tilde{r}| , \qquad (13.68a)$$

$$C: \quad |\vec{\kappa}, r\rangle \xrightarrow{C} |\tilde{\vec{\kappa}}, \tilde{r}\rangle , \qquad (13.68b)$$

$$P: \quad |\vec{\kappa}, r\rangle \xrightarrow{P} |-\vec{\kappa}, r\rangle , \qquad (13.68c)$$

$$R_w \equiv CR_s: \quad |\vec{\kappa},\nu\rangle \xrightarrow{R_s} \langle\tilde{\vec{\kappa}},-\tilde{\nu}| \xrightarrow{C} \langle\vec{\kappa},-\nu|, \qquad (13.68d)$$

$$T_s \equiv PR_s: \quad |\vec{\kappa},\nu\rangle \xrightarrow{R_s} \langle\tilde{\vec{\kappa}},-\tilde{\nu}| \xrightarrow{P} \langle-\tilde{\vec{\kappa}},-\tilde{\nu}|, \qquad (13.68e)$$

$$T_w \equiv PR_w: \quad |\vec{\kappa},\nu\rangle \xrightarrow{R_w} \langle\vec{\kappa},-\nu| \xrightarrow{P} \langle-\vec{\kappa},-\nu|. \qquad (13.68f)$$

Faasikordajad (konstandid mooduliga 1) oleme jätnud kirjutamata.

6. Kvantelektrodünaamika S-maatriksi invariantsus nimetatud teisenduste suhtes annab rea seoseid erinevate protsesside siirdeamplituudide vahel.

Kui kasutame valemite (13.25, 43) sümboolikat, võime CTP invariantsuse väljendada

$$|\langle\vec{p}_f,e_f,\lambda_f|S|\vec{p}_i,e_i,\lambda_i\rangle| = |\langle\vec{p}_i,-e_i,-\lambda_i|S|\vec{p}_f,-e_f,-\lambda_f\rangle|. \qquad (13.69)$$

Kombineerides seda valemitega (13.25, 43), saame invariantsustingimused aja tugeva ja nõrga peegelduse korral:

$$T_s: |\langle\vec{p}_f,e_f,\lambda_f|S|\vec{p}_i,e_i,\lambda_i\rangle| = |\langle-\vec{p}_i,-e_i,-\lambda_i|S|-\vec{p}_f,e_f,-\lambda_f\rangle|, \qquad (13.70a)$$

$$T_w: |\langle\vec{p}_f,e_f,\lambda_f|S|\vec{p}_i,e_i,\lambda_i\rangle| = |\langle-\vec{p}_i,e_i,-\lambda_i|S|-\vec{p}_f,e_f,-\lambda_f\rangle|. \qquad (13.70b)$$

Võrdust (13.70b) tuntakse S-maatriksi teoorias vastastikususe (reciprocity) <u>teoreemi</u> nime all: kahel reaktsioonil, mis erinevad selle poolest, et lähte- ja lõppoleku osakesed ning kõikide osakeste impulsside ja spinniprojektsioonide suunad on vahetatud, on sama amplituud.

Kui valemi (13.70b) kombineerime valemiga (13.25), saame võrduse

$$R_w:\ |\langle \vec{p}_f, e_f, \lambda_f | S | \vec{p}_i, e_i, \lambda_i \rangle| = |\langle \vec{p}_i, e_i, -\lambda_i | S | \vec{p}_f, e_f, -\lambda_f \rangle|, \qquad (13.71)$$

mis pärast summeerimist (keskmistamist) üle spinniprojektsioonide λ_i , λ_f annab

$$\sum_{\lambda_i, \lambda_f} |\langle \vec{p}_f, e_f | S | \vec{p}_i, e_i \rangle| = \sum_{\lambda_i, \lambda_f} |\langle \vec{p}_i, e_i | S | \vec{p}_f, e_f \rangle| . \qquad (13.72)$$

Viimast tingimust nimetatakse <u>pooldetailse tasakaalu</u> tingimuseks.[■]

Märgime lõpuks, et S-maatriks rahuldab ka nn. ristsümmeetria (crossing symmetry) nõuet. Selle selgitamiseks vaatleme kahte reaktsiooni, näit. Comptoni hajumist ja paari kahefootonilist annihilatsiooni (val. (11.18), (11.20)). Nimetame neid vastavalt reaktsiooniks (A) ja (B). Nagu mainitud valemite võrdlemisel näeme, saame (A) amplituudist reaktsiooni (B) amplituudi, kui elektroni lainefunktsiooni lõppolekus ($\bar{u}^{(\nu)}(x)$) asendame positroni lainefunktsiooniga lähteolekus ($\bar{v}^{(\mu)}(x)$) ning lähtefootoni lainefunktsiooni ($\hat{f}^{(\rho)}(x)$) asendame lõppfootoni lainefunktsiooniga ($\hat{f}^{(\rho)*}(x)$). Impulssesitus näitab (vt. näit. (12.5)), et sellise vahetamisega vahetub ka osakeste 4-impulsi märk. Kui reaktsioonis (A) tähistame lähteosakesi a, b ja lõpposakesi c, d ning nende alla märgime vastavad 4-impulsid, võime reaktsiooni (A) esitada sümboolse skeemina

---

■ Detailse tasakaalu tingimuseks nimet. reaktsiooni amplituudide võrdsust kõikide alg- ja lõppoleku osakeste vahetamise korral (vt. näit. [13] § 125, 141).

(A) $a + b \to c + d$ (a - lähte-elektron, b - algfooton, c - lõppelektron, d - lõppfooton)

$p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4,$

reaktsiooni (B) aga ($\tilde{a}$, $\tilde{b}$, ... on vastavate antiosakeste tähised)

(B) $a + \tilde{c} \to \tilde{b} + d$ ($\tilde{c}$ - algpositron, $\tilde{b}$ - lõppfooton)

$q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4$.

Reaktsiooni (B) nimet. reaktsiooni (A) suhtes ristreaktsiooniks. Kui reaktsiooni-amplituude tähistame vastavalt $S_A(p_1, p_2, p_3, p_4)$ ja $S_B(q_1, q_2, q_3, q_4)$, siis ristsümmeetria tõttu

$$S_B(p_1, -p_3, -p_2, p_4) = S_A(p_1, p_2, p_3, p_4). \quad (13.73)$$

Kui seosed (13.73) kehtivad kõikide ristreaktsioonide korral (kus osakeste a,b,c,d iseloom ei tarvitse olla täpsustatud), võib oletada, et amplituudid $S_A(p)$ ja $S_B(q)$ on ühe ja sama analüütilise funktsiooni $S(z)$ piirväärtused.*

7. Lõpuks peatume S-maatriksi unitaarsusel, mis järeldub tema kui kahte normeeritud baasi siduva operaatori definitsioonist (10.17). Sellel tingimusel on lihtne füüsikaline mõte. Kui S unitaarsuse kirjutame maatrikselementide kaudu, saame

$$SS^+ = I : \quad \sum_n \langle \rho|S|n\rangle\langle n|S^+|\alpha\rangle = \delta_{\rho\alpha} , \quad (13.74)$$

---

* Vt. näit. [3] pt. 18.

või võttes $\beta = \alpha$, $\langle n|S^+|\alpha\rangle = \langle \alpha|S|n\rangle^*$,

$$\sum_n |\langle n|S|\alpha\rangle|^2 = 1 \,. \qquad (13.75)$$

Järelikult tõenäosus, et antud lähteolekust $|\alpha\rangle$ satub süsteem mis tahes lõppolekusse, on 1.

Sageli esitatakse unitaarsuse tingimus veel järgmisel kujul. Eraldame S avaldisest ühikmaatriksi, mis, nagu tähendatud § 11 alguses, ei kirjelda protsesse, ja tähistame

$$\langle \beta|S|\alpha\rangle = \delta_{\beta\alpha} + i(2\pi)^4 \delta^4(p_\beta - p_\alpha)\langle \beta|T|\alpha\rangle \,, \qquad (13.76)$$

kus p_α ja p_β tähistavad alg- ja lõppoleku summaarset 4-impulssi. Siis unitaarsustingimus omandab kuju

$$-i[\langle \beta|T|\alpha\rangle - \langle \beta|T^+|\alpha\rangle] = (2\pi)^4 \sum_n \langle \beta|T^+|n\rangle\langle n|T|\alpha\rangle \delta^4(p_n - p_\alpha). \qquad (13.77)$$

Kui siin arvestame TP-invariantsust (13.72), siis $\langle \beta|T|\alpha\rangle = \langle \alpha|T|\beta\rangle$ ja (13.77) asemel saame

$$\mathrm{Im}\langle \beta|T|\alpha\rangle = \frac{(2\pi)^4}{2} \sum_n \langle \beta|T^+|n\rangle\langle n|T|\alpha\rangle \delta^4(p_n - p_\alpha). \qquad (13.78)$$

Tingimusi (13.77, 78) kasutatakse postulatiivses S-maatriksi teoorias maatrikselementide arvutamiseks dispersioonseoste tehnika abil (vt. näit. [10]).

Analüüsitud S-maatriksi omadused võimaldavad sügavamalt mõista väljateooriast sõltumatu S-maatriksi teooria struktuuri üldse.*

---

* Kvantelektrodünaamika S-maatriksi arendusrea liikmete abil on võimalik uurida ka siirdeamplituudide kui reaktsiooni astuvate osakeste energiast sõltuva (analüütilise) funktsiooni singulaarsuste paigutust ja iseloomu.

Kontrollige interageerivate väljade võrrandite (9.1, 3) invariantsust CTP-teisenduste suhtes! Kas võrrandite invariantsus kehtib ka kõikide teiste siin käsitletud peegeldusteisenduste suhtes?

§ 14. Kõrgemat järku protsessid. Renormeerimine.

Nagu märgitud § -s 11, on häiritusteooria rakendamine kõrgemates lähendustes küllaltki keeruline. Selleks et jõuda eksperimendiga võrreldavate avaldisteni, tuleb igal lähendusetapil rakendada elektroni laengu ja massi renormeerimise protseduuri. Selle põhjuseks on asjaolu, et häiritusteooria võrrandites vaba välja teooriast pärinevad konstandid e ja m ei tähenda reaalse, füüsikalise elektroni laengut ja massi. Piltlikult rääkides ümbritseb reaalset elektroni alati virtuaalsete footonite pilv, ka siis, kui reaalsed footonid puuduvad, s.t. elektron interageerib ka elektromagnetvälja vaakumiga ega ole seega kunagi "vaba". Samasugune lugu on elektromagnetväljaga. Kvantiseeritud elektromagnetväljal iseloomustavad virtuaalsed elektron-positronpaarid (mille tekkimist ja annihileerumist kirjeldavad kõrgemat järku liikmed S-maatriksis), mistõttu laetud osakestele mõjuv efektiivne väli on alati erinev sellest, mille me saaksime ilma virtuaalseid paare arvestamata. Olukord meenutab klassikalisest elektrodünaamikast tuntud efekti: dielektrilisse keskkonda paigutatud laengute vastastikune mõju (ja välise välja mõju neile) erineb mõjust vaakumis. Klassikalises teoorias põhjendatakse niisugust efektiivse interaktsiooni muutust dielektriku polarisatsiooniga. Analoogia põhjal nimetatakse ka virtuaalsetest paaridest tingitud efektiivse interaktiooni erinevust "vabade" väljade interaktsioonist vaakumi polarisatsiooni efektiks. Kuna reaalsed laengud viibivad

sel moel alati polariseeritud vaakumis, siis on iga reaalse osakese elektrilaeng (kui interaktsiooni tugevust määrav seoskonstant) erinev "vaba" osakese laengukonstandist e. Kui valemites esinevat konstanti e tahame tõlgendada eksperimenaalselt mõõdetava laenguna, peame vaakumi polarisatsiooni arvestavates lähendustes elektroni laengu ümber defineerima e. renormeerima. Samuti peame toimima elektroni massiga. Vaatleme neid küsimusi lähemalt.

1. Määrame reaalse elektroni massi m_e tema seisuenergia kaudu. (Meenutame, et kasutatavates ühikutes seisuenergia langebki ühte seisumassiga,) Kui vaatleme välja olekut, kus kogulaneg on võrdne ühe elementaarlaenguga, koguimpulss on null ja energia minimaalne, siis füüsikalistel kaalutlustel peab seda olekut iseloomustama üksainus reaalne elektron (või positron), mille seisuenergia võrdubki välja energiaga.* Tähistame selle oleku $|1e\rangle$.

Lähtudes kvanttingimusest

$$i\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} = [P_\mu, \psi(x)], \qquad (14.1)$$

kus ψ on interageeriva elektronvälja potentsiaal ja P_μ välja energia-impulssoperaator, näitame, et maatrikselement $\langle 0|\psi(x)|1e\rangle$ rahuldab vaba osakese Dirac'i võrrandit äsja defineeritud füüsikalise elektroni massiga m_e .

Kui operaatorvõrduse (14.1) mõlemast poolest moodustame maatrikselemendi (arvestades olekuvektorite konstantsust), saame

$$i\frac{\partial}{\partial x_\mu}\langle 0|\psi(x)|1e\rangle = \langle 0|P_\mu\psi(x)|1e\rangle - \langle 0|\psi(x)P_\mu|1e\rangle = \qquad (14.2)$$

$$= \langle P_\mu\Phi_0|\psi(x)|1e\rangle - p'_\mu\langle 0|\psi(x)|1e\rangle = -p'_\mu\langle 0|\psi(x)|1e\rangle,$$

---

* Kui energia miinimumi nõue ei oleks rahuldatud, võiks väljas olla veel footoneid ja elektron-positronpaare.

kuna vaakumolekus $P_\mu \Phi_0 = 0$. Olekule $|1e\rangle$ vastav 4-impulss p'_μ rahuldab m_e definitsiooni kohaselt tingimust

$$P_\mu |1e\rangle = p'_\mu |1e\rangle ; \qquad p'^2 \equiv \vec{p}'^2 - p'^2_0 = -m_e^2 . \tag{14.3}$$

Võrrandit (14.2) rahuldab maatrikselement

$$\langle 0|\psi(x)|1e\rangle = Z_1^{1/2} u(\vec{p}') e^{ip'x} , \tag{14.4}$$

kus $u(\vec{p}')$ on normeeritud Dirac'i spiinor, Z_1 konstant.

Kui $u(p')$ määrame tingimusest

$$(i\hat{p}' + m_e) u(\vec{p}') = 0 , \tag{14.5}$$

veendume vahetult, et

$$(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m_e) \langle 0|\psi(x)|1e\rangle = 0 . \tag{14.6}$$

Arvutame nüüd sama maatrikselemendi häiritusmeetodiga, lähtudes valemitest (9.33, 35).

Tähistagu $|q\rangle$ "vabale väljale" vastavat ühe elektroni olekut, kus q_μ on elektroni 4-impulss, $q^2 = -m^2$. Siis

$$\langle 0|\psi(x)|q\rangle =$$
$$= \langle 0|\psi^0(x)|q\rangle + e\langle 0|\psi^{(1)}(x)|q\rangle + e^2\langle 0|\psi^{(2)}(x)|q\rangle + \cdots \tag{14.7}$$

Valemist (9.35') näeme kohe, et $\langle 0|\psi^{(1)}(x)|q\rangle = 0$, kuna olek $|q\rangle$ on elektromagnetvälja operaatori $A^0_\mu(x)$ suhtes vaakumolek. Kui avaldises (9.35") sisalduvad operaatorid paigutame vastavalt Wicki teoreemile (vt. lisa B) normaaljärjestusse, leiame $\langle 0|\psi(x)|q\rangle$ teist järku liikmete täpsuseni:

$$\langle 0|\psi(x)|q\rangle = \langle 0|\psi^0(x)|q\rangle - \int d^4x' \, S_R(x-x') \langle 0|\Phi(x')|q\rangle , \tag{14.8}$$

kus

$$\varphi(x') = \int d^4x'' F(x'-x'')\psi^0(x''),$$

$$F(x'-x'') = \frac{e^2}{2}\gamma_\mu\left[S^{(1)}(x'-x'')D_A(x''-x') + S_R(x'-x'')D^{(1)}(x''-x')\right]\gamma_\mu . \qquad (14.9)$$

(Funktsioonid $S^{(1)}(x)$, $D^{(1)}(x)$ on antud lisas A.)

Kuna

$$\langle 0|\psi^0(x)|q\rangle = u(\vec{q})\, e^{iqx} \qquad (14.10)$$

(normeerimisruumala $V = 1$),

siis

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)\langle 0|\psi^0(x)|q\rangle = 0 , \qquad (14.11)$$

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)\int d^4x' S_R(x-x')\langle 0|\varphi(x')|q\rangle = \qquad (14.12)$$

$$= \langle 0|\varphi(x)|q\rangle = \int d^4x' F(x-x')u(\vec{q})\, e^{iqx'} .$$

Kui $F(x-x')$ avaldame Fourier' arenduse kaudu

$$F(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4q' F(q')\, e^{iq'(x-x')} ,$$

saame

$$\int d^4x' F(x-x')u(\vec{q})\, e^{iqx'} = F(q)\, u(\vec{q})\, e^{iqx} . \qquad (14.13)$$

Järelikult

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)\langle 0|\psi(x)|q\rangle = -F(q)\, u(\vec{q})\, e^{iqx} . \qquad (14.14)$$

Kuna q_μ on määratud tingimusest $q_\mu q_\mu \equiv q^2 = -m^2$, siis

$F(q)$ selles seoses on tegelikult konstant. Kui tähistame

$$F(q)_{|q^2=-m^2} = \delta m \qquad (14.15)$$

ja arvestame, et vaadeldud täpsuseni võime (14.14) paremal poolel teha asenduse

$$u(\vec{q})e^{iqx} \to \langle 0|\psi(x)|q\rangle ,$$

saame

$$(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m + \delta m)\langle 0|\psi(x)|q\rangle = 0. \qquad (14.16)$$

Kui selles avaldises võrrutame q_μ füüsikalise elektroni 4-impulsiga p_μ, mis rahuldab tingimust $p^2 = -m_e^2$, siis võrreldes valemeid (14.16) ja (14.6) näeme, et ka konstandi $m + \delta m$ peame võrrutama elektroni eksperimentaalse massiga m_e, s.t.

$$m + \delta m = m_e . \qquad (14.17)$$

Kui interageeriva välja võrrandis (9.3) asendame $m \to m_e$, saame

$$(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m_e)\psi(x) = f(x) + \delta m \psi = f_e(x), \qquad (14.18)$$

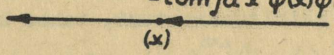
kus $f_e(x)$ tähistab eksperimentaalsele massile vastavaid väljaoperaatoreid. Kui edaspidi jätame kõikjal indeksi e kirjutamata ning mõistame võrrandites m all eksperimentaalset massi ja väljaoperaatorite $i e \gamma_\mu A_\mu(x)\psi(x) \equiv f(x)$ all sellele massile vastavaid reaalsete väljade operaatoreid, võime (14.18) kirjutada taas kujul (9.3), kuid interaktsiooni-lagranžiaanis (9.8) peame arvestama tingimust (vt. val. (3.4, 4')):

$$f(x) = f_e(x) - \delta m \psi \; ; \quad f'(x) = f'_e(x) + \delta m \bar{\psi} \qquad (14.19)$$

Seega interaktsiooni-lagranžiaanile lisandub $-\delta m\,\bar{\psi}\psi$:

$$L_{int} = \frac{ie}{2}\,[\bar{\psi}, \gamma_\mu \psi] A_\mu - \delta m\,\bar{\psi}\psi \,. \qquad (14.20)$$

Kui peame silmas Feynmani graafikute ehitust, kus vastavalt L_{int} kujule läbib graafiku iga tippu kaks elektron-joont ja üks footon-joon, siis elektroni massi ümbernormeerimisest tingitud liige lisab veel sellised tipud, mida läbib ainult kaks elektronjoont vastavalt joonisele 11.



Joon. 11.

Kui seda võrdleme elektroni omaenergia graafikuga d (joon. 4), täheldame silmatorkavat sarnasust: mõlemaid graafikuid iseloomustab sisenev ja väljuv elektronjoon, mis võib olla vaba või ka seotud Feynmani diagrammi muude, väljajoonistamata osadega (kui vaatleksime kõrgemat järku protsesse). Siit järeldus: elektroni massi renormeerimisest tingitud täiendav liige L_{int} avaldises modifitseerib neid maatrikselemente, mis sisaldavad elektroni omaenergia tüüpi graafikuid (s.t. mis on graafiku muude osadega seotud vaid kahe elektronjoonega).

2. Elektroni laengu renormeerimise vajadust on kõige lihtsam näidata, uurides välise, s.o. küllalt täpselt klassikalisele elektrodünaamikale alluva allika poolt tekitatud voolu $j^{ext}(x)$ välja vaakumolekus.* Vool j^{ext} tekitab klassikalise elektrodünaamika võrrandi

---

* Esitatav arutlus tugineb G. Kalléni artiklile kogumikust "Elementary Particle Physics and Field Theory", 1962 Brandeis Lectures Vol. 1, N.Y. - Amsterdam 1963.

$$\Box A_\mu^{ext}(x) - \frac{\partial^2 A_\nu^{ext}(x)}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = -j_\mu^{ext}(x) \qquad (14.21)$$

abil kirjeldatava välja A_μ^{ext}. Selle mõju kvantiseeritud elektronpositronväljale avaldub valemi (9.3) kaudu, mille parem pool sisaldab $A_\mu^{ext}(x)$:

$$(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m)\psi(x) = ie\gamma_\mu [A_\mu(x) + A_\mu^{ext}(x)]\psi(x). \qquad (14.22)$$

Kui oletada, et A_μ^{ext} on nõrk, võime ka selle mõju arvestamiseks kasutada häiritusarvutust, tehes kõikjal asenduse $A_\mu^0(x) \to A_\mu^0(x) + A_\mu^{ext}(x)$. Valemid (9.38) näitavad, et $A_\mu^{ext}(x)$ mõju avaldub kvantiseeritud välja vooluvektorile alates lähendusest $j_\mu^{(1)}(x)$. Selle tõttu osutub kvantvälja vooluvektori vaakumkeskmine nullist erinevaks ja kuigi reaalsed kvandid (elektronid, positronid) puuduvad, ei võrdu mõõdetav voolutugevus avaldisega j_μ^{ext}, vaid j_μ^{obs}[*], kus

$$j_\mu^{obs}(x) = j_\mu^{ext}(x) + \delta j_\mu(x), \qquad (14.23)$$

$$\delta j_\mu(x) = e\langle 0|j_\mu^0(x)|0\rangle + e^2\langle 0|j_\mu^{(1)}(x)|0\rangle + \cdots \qquad (14.24)$$

Piirdudes esimese nullist erineva liikmega δj_μ-s, saame

$$\delta j_\mu(x) = -\frac{e^2}{2}\int d^4x' A_\nu^{ext}(x')\{\langle 0|[\bar\psi^0(x), \gamma_\mu S_R(x-x')\gamma_\nu \psi^0(x')]|0\rangle +$$
$$+ \langle 0|[\bar\psi^0(x')\gamma_\nu S_A(x'-x), \gamma_\mu \psi^0(x)]|0\rangle. \qquad (14.25)$$

[*] "obs" on lühend ingl. k. sõnast "observable" - jälgitav.

Kui viime siin esinevad operaatorid normaaljärjestusse, saame otsese arvutusega

$$\delta j_\mu(x) = \int d^4x' K_{\mu\nu}(x-x') A_\nu^{ext}(x'), \qquad (14.26)$$

kus

$$K_{\mu\nu}(x-x') = \frac{e^2}{2}\{Sp[\gamma_\mu S_R(x-x')\gamma_\nu S^{(1)}(x'-x)] + Sp[\gamma_\mu S^{(1)}(x-x')\gamma_\nu S_A(x'-x)]\}. \qquad (14.27)$$

Fourier' arendusest

$$K_{\mu\nu}(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\, e^{ip(x-x')} K_{\mu\nu}(p) \qquad (14.28)$$

ning võrrandile (14.21) vastavast võrrandist impulssruumis

$$(p_\mu p_\nu - \delta_{\mu\nu}p^2) A_\nu^{ext}(p) = -j_\mu^{ext}(p) \qquad (14.21')$$

saame seosele (14.26) kuju

$$\delta j_\mu(p) = K_{\mu\nu}(p) A_\nu^{ext}(p). \qquad (14.26')$$

Defineerime uue funktsiooni G(p) valemiga

$$K_{\mu\nu}(p) = (p_\mu p_\nu - \delta_{\mu\nu}p^2) G(p). \qquad (14.29)$$

Arvestades (14.21', 26'), saame

$$\delta j_\mu(p) = -G(p) j_\mu^{ext}(p). \qquad (14.30)$$

Seega

$$j_\mu^{obs}(p) = [1 - G(p)] j_\mu^{ext}(p)$$

või, siirdudes impulssruumist koordinaatruumi,

$$j_\mu^{obs}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p\, e^{ipx} j_\mu^{ext}(p) [1 - G(p)] . \qquad (14.31)$$

Avaldis $d(p) = 1 - G(p)$, mis nagu näha, sõltub välise allika tekitatud voolu j_μ^{ext} sagedusest (täpsemalt, selles sisalduvate harmooniliste komponentide - Fourier ' komponentide - sagedustest), iseloomustab vaakumit samavõrd kui dielektriline konstant keskkonda. Seepärast võib suurust $d(p)$ nimetada "vaakumi dielektriliseks konstandiks".

Vaatleme konstantse tugevusega makroskoopilist voolu, mille abil teatavasti defineeritakse laenguühik. Olgu

$$j_\mu^{ext} = C_\mu ; \quad j_\mu^{ext}(p) = (2\pi)^4 C_\mu \delta^4(p) , \qquad (14.32)$$

siis

$$j_\mu^{obs}(x) = C_\mu \int e^{ipx} \delta^4(p) [1 - G(p)] d^4p = C_\mu [1 - G(0)] . \qquad (14.33)$$

Valemite (14.32, 33) võrdlemine näitab, et konstantsete voolude korral taandub vaakumi polarisatsiooniefekt vajadusele muuta esialgset laenguühiku definitsiooni (j_μ^{obs} erineb j_μ^{ext} väärtusest konstantse teguri võrra). Kui tahame, et konstantse allika tekitatud voolutugevus langeks ühte mõõdetavaga, peame kõikjal muutma vaakumi dielektrilise konstandi definitsiooni järgmiselt:

$$d(p) \to 1 - [G(p) - G(0)] . \qquad (14.34)$$

Avaldise (14.31) asemel saame siis

$$j_\mu^{obs}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p\, e^{ipx} j_\mu^{ext}(p) [1 - G(p) + G(0)] . \qquad (14.31')$$

Protseduur, millega konstantse allika tekitatud vool võrdsustatakse jälgitava vooluga, kannab laengu renormeerimise nimetust. Häiritusarvutuses taandub see vajadusele asendada kõik G(p) tüüpi integraalid avaldistega G(p) - - G(o).*

Elektroni laengu ja massi renormeerimisega kaasnevad lahutusoperatsioonid võimaldavad ühtlasi vabaneda elektroni omaenergiat ja vaakumi polarisatsiooni kirjeldavates avaldistes sisalduvatest hajuvatest integraalidest. Näit. G(p) - G(o) avaldub lõpliku väärtusega integraalina, kuna aga G(p) ja G(0) omaette on hajuvad.

3. Formaalselt hajuvate avaldiste sisaldumine kõrgemat järku protsesse kirjeldavates S-maatriksi elementides on hõlpsasti väljaloetav Feynmani diagrammidest. Vaatleme mõnesugusele n järku protsessile vastava maatrikselemendi üldstruktuuri (vrd. val. (12.30, 31)), Mingile kindlale protsessile vastab igas lähendusjärgus Feynmani graafik (diagramm) fikseeritud välisjoontega. Üleminek madalamalt lähenduselt kõrgemale suurendab ainult sisejoonte arvu. Igale sisejoonele ℓ vastab kausaalne Greeni funktsioon

$$\Delta^c(q_\ell) = \frac{Z(q_\ell)}{q_\ell^2 + m_\ell^2}$$, kus elektronjoone korral

$$\Delta^c(q_\ell) \to S^c(q_\ell) = \frac{im - \hat{q}_\ell}{q_\ell^2 + m^2}\,; \quad Z(q_\ell) = im - \hat{q}_\ell\,; \quad m_\ell = m,$$

footonjoone korral

$$\Delta^c(q_\ell) \to \mathcal{D}^c(q_\ell) = \frac{1}{iq_\ell^2}\,; \quad Z(q_\ell) = 1\,; \quad m_\ell = 0.$$

---

* Märgime, et teostatud välise voolu renormeerimine tagab ka füüsikalise elektroni laengu võrdsuse renormeeritud laenguga, tänu nn. Wardi identsusele (vt. [1] § 20, 22). Füüsikalise elektroni laengu definitsioon on analoogiline füüsikalise elektroni massi definitsiooniga, s.o. välja kogulaeng ühe elektroni olekus.

Olgu graafiku sisejoonte arv L. Siis virtuaalsete osakeste sõltumatuid "impulsse", mille järgi toimub integreerimine, on 4 L. Olgu graafikul n tippu. Iga tipuga on seotud δ-funktsioon $\delta(q, p)$ seda tippu läbivate sise- (q) ja välisjoonte impulsside (p) algebralisest summast. Tänu δ-funktsioonide olemasolule, seotakse integreerimisel 4(n - 1) sõltumatut muutujat (üks δ-funktsioon jääb alles, sest ta seob alg- ja lõpposakeste 4-impulsse). Järelikult sisaldab integraal üle virtuaalsete impulsside 4(L - n + 1) sõltumatut muutujat. Kui $\prod_\ell d^4 q_\ell$ avaldame "sfäärilistes koordinaatides" (jättes ära nurgamuutujatest sõltuva osa, mis hajuvust ei mõjusta), saame

$$\prod_\ell d^4 q_\ell \sim Q^{4(L-n+1)} \frac{dQ}{Q}.$$

Kui kausaalset funktsiooni Δ^c iseloomustava polünoomi $Z(q_\ell)$ aste on r_ℓ, siis iga kausaalne funktsioon lisab Q astmenäitajale $r_\ell - 2$ (-2 nimetaja tõttu). Järelikult suurte virtuaalsete impulsside korral $\frac{dQ}{Q}$ ees olev tegur kasvab nagu

$$Q^{4(L-n+1)+\sum_\ell (r_\ell - 2)} = Q^{\sum_\ell (r_\ell + 2) - 4(n-1)} = Q^{\omega(G)}$$

$\omega(G)$ nimet. diagrammi-indeksiks. Kui diagrammi-indeks

$$\omega(G) = \sum_{\ell=1}^{L} (r_\ell + 2) - 4(n-1) \geq 0, \qquad (14.35)$$

siis sellisele diagrammile vastav maatrikselement hajub. Kui

$$\omega(G) = \sum_{\ell=1}^{L} (r_\ell + 2) - 4(n-1) < 0, \qquad (14.36)$$

siis koondub.

Et otsustada selle üle, milliseid hajuvusi S-maatriks antud interaktsiooni korral üldse võib sisaldada, avaldame diagrammi-indeksi nn. tipuindeksite ω_i kaudu

$$\omega(G) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i + 4 \,, \qquad (14.37)$$

kus

$$\omega_i = \frac{1}{2} \sum_{\ell_i} (r_{\ell_i} + 2) - 4 \,.$$

(Summeeritakse üle kõikide i-ndasse tippu tulevate sisejoonte; kuna iga sisejoon läbib kahte tippu, tuleb ette kordaja 1/2.) ω_i on maksimaalne, kui tippu läbivad ainult sisejooned.

Kui

$$\omega_i^{max} > 0 \,, \qquad (14.38)$$

siis $\omega(G)$ kasvab piiramatult diagrammi järgu (lähendusjärgu) n kasvades. Niisuguseid interaktsioone kirjeldavaid teooriaid nimet. mitterenormeeritavateks väljateooriateks.*

Kui

$$\omega_i^{max} \leq 0 \,; \quad \omega(G) \leq 4 \,, \qquad (14.39)$$

siis mis tahes järku S-maatriksi elemendid sisaldavad vaid lõpliku hulga hajuvusi. Vastavaid teooriaid nimet. renormeeritavateks.**

---

* Nagu näitab analüüs ([2] § 28), ei kuulu mitterenormeeritavad teooriad ranges mõttes lokaalsete väljateooriate hulka, sest nende efektiivne interaktsiooni-lagranziaan ei sõltu ainult ühest aeg-ruumi punktist.

** Nendes teooriates on kõik hajuvused kõrvaldatavad lõpliku hulga konstantide ümbernormeerimisega, elektrodünaamikas näit. laengu ja massi renormeerimisega.

Tipuindeksi ω_i võib avaldada ka antud tippu läbivate välisjoonte ℓ_{ext} arvu kaudu. Iga sisejoone asendamisel välisjoonega kahaneb tipuindeks $\frac{1}{2}(r_\ell+2)$ võrra, järelikult

$$\omega_i = \omega_i^{max} - \frac{1}{2}\sum_{\ell_{ext}} (r_\ell+2)$$

või diagrammi-indeks

$$\omega(G) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^{max} + 4 - \frac{1}{2}\sum_{(i,\ell_{ext})} (r_\ell+2). \qquad (14.40)$$

Leiame ω_i^{max} kvantelektrodünaamikas. Kuna iga tippu läbib kaks elektronjoont ($r_\ell = 1$) ja üks footonjoon ($r_\ell = 0$), siis $\omega_i^{max} = 0$. Seega on kvantelektrodünaamika renormeeritav teooria.

Valemist (14.40) paistab kohe (kui arvestame, et $\omega_i^{max} = 0$), et hajuvusi võivad sisaldada ainult niisuguste protsesside maatrikselemendid ($\omega(G) \geq 0$), mille puhul välisjoonte arv ei ole suurem kui 4. Tähistame välisjoonte arvu R. Valemi (14.40) põhjal osutuvad hajuvateks järgmistele füüsikaliselt olulistele diagrammidele vastavad maatrikselemendid (N_γ tähistab footonjoonte, N_e elektronjoonte arvu).

1) $R = 4 : N_e = 0, N_\gamma = 4$. Vastav graafik kirjeldab footoni hajumist footonil (vt. joon. 8.). Siin $\omega(G) = 0$ ja maatrikselemendi avaldis hajub logaritmiliselt.

2) $R = 3 : N_e = 2, N_\gamma = 1$. Seda nimet. tipugraafikuks (vt. joon. 9, kui välisvälja asemel on vaba footon). Ka siin $\omega(G) = 0$ ja maatrikselement hajub logaritmiliselt.

3) $R = 2 : N_e = 2, N_\gamma = 0$. See on elektroni omaenergia graafik (vt. d joon. 4). Siin $\omega(G) = 1$ ja

maatrikselement hajub lineaarselt, nagu näitab ka otsene arvutus valemist (11.29).

4) $R = 2 : N_e = 0, \; N_\gamma = 2$. See on footoni omaenergia graafik (vt. c joon. 4). Siin $\omega(G) = 2$ ja vastavas maatrikselemendis saame teise astme hajuvuse (veenduge selles, arvutades footoni omaenergia maatrikselemendi valemist (11.30)).

Kõiki loetletud hajuvusi saab põhimõtteliselt kõrvaldada nn. piirimpulsi Λ abil (s.t. kui integraalid arvutada üle lõpliku piirkonna). Seejuures osutub, et laengu ja massi suhtes renormeeritud avaldised sellest piirimpulsist üldse ei sõltu. Integraalide lõplikustamist kirjeldatud viisil nimet. regulariseerimiseks.* Kuna piirimpulss Λ tuleb põhimõtteliselt valida nii, et häiritusteooria põhinõue häiritusrea liikmete kahanemise kohta jääks kehtima, siis ei saa Λ olla kui tahes suur. See viitab asjaolule, et kvantelektrodünaamikal on loomulik rakenduspiir suurte energiate valdkonnas (vt. ka arutlust paragrahvi lõpus).

4. Näitame, et vaakumi polarisatsioon on põhimõtteliselt jälgitav aatomi energiatasemete muutumise näol. Vaatleme vesinikusarnast aatomit, mille tuum tekitab kuloonilise potentsiaali

$$A_\mu^{coul}(\vec{r}) = -i\delta_{\mu 4}\frac{Ze}{4\pi|\vec{r}|} \qquad (14.41)$$

Tähistame kvantmehaanilise Dirac'i võrrandi lahendeid (energia omafunktsioone selles väljas) $u_n(\vec{r})$. Siis nn. välise vooluna j_μ^{ext} võime tõlgendada etteantud lainefunktsiooniga $u_n(\vec{r})$ kirjeldatud elektroni voolu, s.o.

---

* Piirimpulsiga regulariseerimine on küll füüsikaliselt selge mõttega, kuid mitteinvariantne protseduur. Samadele tulemustele viib mõnevõrra formaalsem, kuid relativistlikult invariantne Pauli-Villarsi regulariseerimismeetod (vt. [2] § 15).

$$j^{ext}_{\mu(n)}(\vec{x}) = ie\,\bar{u}_n(\vec{x})\gamma_\mu u_n(\vec{x}) . \qquad (14.42)$$

Vastavalt valemile (14.31') muutub see vool vaakumi polarisatsiooni tõttu suuruse $\delta j_{\mu(n)}$ võrra, kus

$$\delta j_{\mu(n)}(x) = \frac{ie}{(2\pi)^4}\int d^4p\, e^{ipx}\int d^4x'\, e^{-ipx'}\bar{u}_n(\vec{x}')\gamma_\mu u_n(\vec{x}')[G(0)-G(p)],$$

$$j^{ext}_\mu(p) = \int d^4x'\, e^{-ipx'} j^{ext}_\mu(x') . \qquad (14.43)$$

Täiendavast liikmest $\delta j_{\mu(n)}$ tingitud energiatasemete muutuse $\delta E_{(n)}$ saame arvutada häiritusteooria põhjal

$$\delta E_{(n)} = -\int d^3x\, A^{ext}_\mu(\vec{x})\,\delta j_{\mu(n)}(x) . \qquad (14.44)$$

Nagu näha, sõltub parandus Dirac'i võrrandi lahendit iseloomustavatest kvantarvudest (n) ja on seega üldiselt rääkides igal tasemel isesugune ja me saame tasemete suhtelisi nihkeid (võrreldes kvantmehaanikas arvutatutega) mõõta. Kvantmehaanika arvutuste järgi kokkulangevate tasemete $2\,S_{1/2}$ ja $2\,P_{1/2}$ suhtelist nihet, mis kinnitab kvantelektrodünaamika õigsust, nimet. selle avastaja järgi Lamb'i nihkeks.*

Osutub, et valemiga (14.44) kirjeldatav lähendus on siiski liiga jäme eksperimendiga kooskõlalise tulemuse saavutamiseks. Kuna vaakumi polariseerivate virtuaalsete osakeste maas on niisama suur kui aatomi elektronilgi, ei saa

---

* Nimetatakse ka Lamb–Retherfordi nihkeks mõlema katsesooritaja nime järgi. Energiatasemete nihe avastati 1947.a., s.o. enne kaasaegse kvantelektrodünaamika tekkimist, ja sai oluliseks stiimuliks selle väljakujunemisel.

paaride mõju viimasele arvestamta jätta. Täpsemas teoorias, mis annab eksperimendiga kooskõlalise tulemuse, asendub valem (14.44) valemiga

$$\delta E_{(n)} = -\int d^3x\, A_\mu^{ext}(\vec{x}) \langle n|\delta j_\mu(x)|n\rangle , \qquad (14.44')$$

kus

$$\delta j_\mu(x) = j_\mu(x) - e j_\mu^{(0)}(x) = e^2 j_\mu^{(1)}(x) + e^3 j_\mu^{(2)}(x) + \cdots \qquad (14.45)$$

vastavalt tähistustele valemites (9.38). $|n\rangle$ tähistab välja olekut, mida iseloomustab üks seotud elektron olekus (n). Arvutuste teostamiseks arendatakse $|n\rangle$ ritta välja olekute järgi, kus on üks vaba osake:

$$|n\rangle = \sum_{\nu,\beta} \psi_n^{\nu}(\vec{p})\, |\vec{p},\nu\rangle .$$

Arenduse kordajad vastavad elektroni olekufunktsiooni $u_n(\vec{x})$ Fourier' arenduse kordajatele

$$u_n(\vec{x}) = \sum_{\nu,\beta} \psi_n^{(\nu)}(\vec{p})\, u^{\nu}(\vec{p})\, e^{i\vec{p}\vec{x}} .$$

Siis on lihtne arvutada maatrikselemente $\langle 0|\psi^0(x)|n\rangle$:

$$\langle 0|\psi^0(x)|n\rangle = u_n(\vec{x})\, e^{-iE_n x_0} . \qquad (14.46)$$

Arvutused näitavad (vt. [1] § 38), et leitud parandus $\delta E_{(n)}$ koosneb kahest osast, millest üks on tingitud vaakumi polarisatsioonist, teine aga elektroni täiendavast magnetmomendist. Viimaseni jõuame uurides vooluvektorit j_μ teist järku lähenduses.

Märgime, et kirjeldatud viisil arvutatud energiatasemete $2P_{3/2}$ ja $2P_{1/2}$ vahe võrdlemisel eksperimendist saa-

dud väärtusega on täpsustatud peenstruktuurikonstanti $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$: $\alpha^{-1} = 137,0392 \pm 0,0012$.

Kui arvutused on teostatud täpsuseni $\alpha^4 E_0$ (E_0 on põhitaseme energia), saadakse Lamb'i nihke väärtuseks vesiniku aatomi korral $\Delta E_{teor} = E_{2S_{1/2}} - E_{2P_{1/2}} = 1057,95$ Mhz. See on heas kooskõlas katseandmetega, sest

$$\Delta E_{exp.} = 1057,77 \pm 0,1 \text{ Mhz}.$$

Ehkki puuduvad eksperimentaalsed tõendid selle kohta, et häiritusteoorial baseeruv kvantelektrodünaamika koos renormeerimistega annaks ebaõigeid tulemusi, ei saa oletada tema piiramatut kehtivust. Arvestades tugevalt interageerivate osakeste olemasolu ja tõsiasja, et tugev interaktsioon ei allu kvantelektrodünaamikas rakendatavale skeemile, võib arvata, et suurte energiate (väikeste distantside) korral asendub kvantelektrodünaamika mõnesuguse "ühtse välja" teooriaga, mis annab praegusest teooriast erinevaid tulemusi. Katsed modifitseerida olemasolevat teooriat mitmesuguste energiast sõltuvate parameetritega näitavad, et praegusel kujul on kvantelektrodünaamika katsega kooskõlas vähemalt energiateni suurusjärgus ε, kus $\varepsilon^{-1} \lesssim 10^{-13}$ cm (kasutatud ühikuis).

§ 15. Üldine väljade kvantiseerimise skeem. Seos spinni ja statistika vahel.

Kõik katseandmed viitavad sellele, et täisarvulise spinniga osakeste süsteemid alluvad Bose-Einsteini statistikale, poolarvulise spinniga süsteemid aga Fermi-Dirac'i statistikale. Nagu skalaarse mesonvälja, elektron-positronvälja ja elektromagnetvälja näite varal veendusime, jõuame loomulikul teel ühte liiki osakeste statistikani,

kui osakeste süsteeme kirjeldame kvantiseeritud väljadega, mis rahuldavad kommutatsiooni- või antikommutatsiooni-eeskirju. Olenemata välja muudest konkreetsetest omadustest, viivad kommutatsiooni-eeskirjad alati Bose-Einsteini statistikale, antikommutatsiooni-eeskirjad aga Fermi-Dirac'i statistikale.

Näitame nüüd, et kõiki poolarvulise spinniga osakestele vastavaid välju tuleb kvantiseerida antikommutaatoritega, kõiki täisarvulise spinniga osakestele vastavaid välju aga kommutaatoritega. Sõnastatud väidet nimet. teoreemiks spinni ja statistika kohta (või ka Pauli-Lüdersi teoreemiks).

Tõestame selle teoreemi vabade väljade korral. Nagu kvantelektrodünaamikast selgub, on interageeriv väli selline kompleks, mille operaatorpotentsiaalid teisenevad Lorentzi rühma erinevate esituste järgi (potentsiaalid $A_\mu(x)$ kui 4-vektorid, potentsiaalid $\psi(x)$ kui bispiinorid).

Seepärast tekib siin täiendav probleem: leida vahetuseeskirjad erinevate väljade vahel.* Osutub, et erinevate väljade vahel võivad eksisteerida mitmesugused vahetuseeskirjad. Normaalseteks vahetuseeskirjadeks nimetatakse tensortüüpi väljade korral kommutaatoreid, spiinortüüpi väljade korral aga antikommutaatoreid. Kui interageerivatest väljadest üks on tensortüüpi, teine spiinortüüpi, siis nende vahel loetakse normaalseks vahetuseeskirjaks kommutaatorit (mida me kasutasime ka elektrodünaamikas). Nimetatutest erinevaid vahetuseeskirju klassifitseeritakse anomaalseteks. Osutub, et interaktsiooni korral on erinevat tüüpi väljade vahel võimalikud nii normaalsed kui ka anomaalsed vahetus-

* Nagu kvantelektrodünaamikas nägime, ei ole interageerivate väljade korral võimalik formuleerida vahetuseeskirju valguse- või ajasarnase intervalliga eraldatud punktide jaoks. Küll aga võime nõuda, et potentsiaalid ruumisarnase intervalliga eraldatud punktides kas kommuteeruksid või antikommuteeruksid. Esimesel juhul ütlemegi, et väli on kvantiseeritud kommutaatoritega, teisel juhul aga antikommutaatoritega.

eeskirjad. Kuid anomaalseid vahetuseeskirju rahuldavaid välju on alati võimalik viia niisugusesse kujju, kus kehtivad juba normaalsed eeskirjad ([5]).

1. Et mõista spiinor- ja tensortüüpi väljadele vastavate kvantide olulist erinevust, meenutame Lorentzi pärisrühma esituste klassifikatsiooni ja selle seost osakeste spinniga.

Teatavasti on Lorentzi rühma kõik lõpliku dimensiooniga esitused iseloomustatud arvupaariga (j,k), kus j ja k võivad teineteisest sõltumatult olla 0, 1/2, 1, 3/2, ... Kui 2j ja 2k on korraga kas paaris või paaritud, on esitus ekvivalentne tensoresitusega. Lorentzi rühma iga tensoresitus sisaldab ainult täisarvulise kaaluga (3-ruumi) pööreterühma esitusi. Pööreterühma esituse kaal aga määrab osakese spinni, mille lainefunktsioon teiseneb selle kaaluga iseloomustatud (taandumatu) esituse järgi. Nagu Dirac'i võrrandi korral nägime, vastab välja potentsiaalile kvantmehaanikas osakese lainefunktsioon. Seega vastavad tensortüüpi väljadele täisarvulise spinniga osakesed. Kui 2j on paaris, 2k aga paaritu või vastupidi, siis Lorentzi rühma niisugused esitused on realiseeritavad ainult spiinoritega ja me nimetame neid lihtsalt spiinoresitusteks. Iga sellist tüüpi spiinoresitus sisaldab ainult poolarvulise kaaluga pööreterühma esitusi. Korrates eelmist arutlust, näeme, et spiinorväljadele vastavad poolarvulise spinniga kvandid.*

Öeldut arvestades tuleb spinni ja statistika kohta käiva teoreemi tõestamiseks näidata, et kõiki tensorvälju peab kvantiseerima kommutaatoritega, spiinorvälju aga antikommutaatoritega.

---

* Nendele tulemustele jõuaksime ka kvantmehaanikat appi võtmata, uurides Noetheri teoreemi abil tuletatud välja spinni struktuuri. (Vt. näit. [7] § 4.)

Piirdume vabade väljadega, s.t. potentsiaalidega, mis teisenevad Lorentzi rühma taandumatute esituste kohaselt. Kasutame seejuures järgmisi tähistusi.

Operaatorpotentsiaal Ψ kuulub (+)-klassi, kui ta teiseneb vastavalt esitusele, kus 2j ja 2k on mõlemad paaris (Ψ on ekvivalentne paarisjärku tensoriga).

Ψ kuulub (-)-klassi, kui 2j ja 2k on mõlemad paaritud (Ψ on ekvivalentne paaritut järku tensoriga, näit. 4-vektor teiseneb esituse (1/2, 1/2) kohaselt).

Ψ kuulub $(+\ell)$-klassi, kui 2j on paaris, 2k paaritu ja Ψ kuulub $(-\ell)$-klassi, kui 2j on paaritu, 2k paaris. (Osutub vajalikuks vaadelda ka suurusi, mis teisenevad taanduva esituse järgi. Kui aga niisuguse suuruse taandumatud osad kuuluvad näit. (+)-klassi, siis öelene, et ka suurus ise kuulub (+)-klassi jne.) Erinevatesse klassidesse kuuluvate suuruste korrutiste (vastavate esituste otsekorrutiste) klassifikatsiooni annab tabel 2. Tabeli 2 saamiseks meenutame, et esituse (j_1, k_1) otsekorrutis esitusega (j_2, k_2) laguneb järgmisteks taandumatuteks esitusteks:

$$(j_1, k_1) \otimes (j_2, k_2) = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{k=|k_1-k_2|}^{k_1+k_2} (j, k).$$

Tabel 2.

	+	−	$+\ell$	$-\ell$
+	+	−	$+\ell$	$-\ell$
−	−	+	$-\ell$	$+\ell$
$+\ell$	$+\ell$	$-\ell$	+	−
$-\ell$	$-\ell$	$+\ell$	−	+

Meenutame veel, et kui Ψ teiseneb esituse (j, k) järgi, siis kaaskompleksne funktsioon Ψ^* teiseneb esituse (k, j) järgi. Seega (+)- ja (−)-klassi suurused kuuluvad oma kaaskompleksi-

dega samasse klassi, $(+\varepsilon)$- ja $(-\varepsilon)$-klassi suurused aga erinevatesse klassidesse, võrreldes oma kaaskompleksidega. Näit. $(\psi^{+\varepsilon})^* \sim \psi^{(-\varepsilon)}$.

2. Vaatleme operaatorpotentsiaali ψ_r ja tema kaasoperaatorit ψ_r^+ (kaaskompleksele funktsioonile vastab operaatorite korral kaasoperaator). Indeksitega r,s, ... tähistame potentsiaali komponente. Et esitusviisi lihtsustada, tähistame nii kommutaatorit kui ka antikommutaatorit sümboliga $[\ ,\ ]_{\pm}$, lisades ainult (+) antikommutaatori ja (-) kommutaatori korral. ψ_r, ψ_s^+ vahetuseeskirjadele püstitame järgmised nõuded.

1)

$$[\psi_r(x_1), \psi_s^+(x_2)]_{\pm} = 0 \text{, kui } (x_1 - x_2)^2 > 0$$

(ruumisarnane intervall).

2)

$[\psi_r(x_1), \psi_s^+(x_2)]_{\pm} = G_{rs}(x_1 - x_2)$, kus vahetusfunktsioon $G_{rs}(x)$ on c-arv, mis aeg-ruumi homogeensuse tõttu võib sõltuda ainult koordinaatide x_1, x_2 vahest.

3) Kui väli kirjeldab kindla massiga kvante, alluvad ta üksikud komponendid Klein-Gordoni võrrandile (vt. valemi (6.2) juurde kuuluvat märkust). Järelikult peab seda rahuldama ka G_{rs}, $(\Box - m^2)\, G_{rs}(x) = 0$. Siit järeldub, et $G_{rs}(x)$ tuleb konstrueerida Klein-Gordoni võrrandi invariantsest erilahendist, mis saab nulliks, kui ta argumendiks on ruumisarnane 4-ruumi vektor. Selline erilahend on funktsioon $\Delta(x)$ (vt. lisa A). Seega otsime $G_{rs}(x)$ kujul

$$G_{rs}(x) = F_{rs}^{(n)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Delta(x), \qquad (15.1)$$

kus $F_{rs}^{(n)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ on mõnesugune n järku diferentseerimisoperaator.

Kui võtame r = s, siis korrutustabeli 2 põhjal (ja arvestades kaaskompleksete funktsioonide kuuluvust klassidesse) näeme, et $(\pm)$-klassi suuruste (tensorite) korral $[\psi_n(x_1), \psi_n^+(x_2)]_\pm$ sisaldab (+)-klassi suurusi. Järelikult on sel korral ka $G_{nn}(x)$ (+)-klassi suurus ja võib sisaldada üksnes paarisjärku tuletisi funktsioonist $\Delta(x)$ (tuletise võtmine on samaväärne korrutamisega (−)-klassi kuuluva 4-vektoriga). $(\pm\varepsilon)$-klassi suuruste korral aga $\psi_n(x)$ ja $\psi_n^+(x)$ kuuluvad erinevasse klassi, mistõttu korrutustabel näitab, et $[\psi_n(x_1), \psi_n^+(x_2)]_\pm$ kuulub (−)-klassi. Selle arutelu tulemuse võime kirja panna valemina

$$
\begin{aligned}
&(\pm): \quad [\psi_n(x_1), \psi_n^+(x_2)]_\pm = F_{nn}^{(2n)}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\Delta(x_1 - x_2), \\
&(\pm\varepsilon): \quad [\psi_n(x_1), \psi_n^+(x_2)]_\pm = F_{nn}^{(2n+1)}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\Delta(x_1 - x_2).
\end{aligned}
\tag{15.2}
$$

Moodustame argumentide x_1, x_2 suhtes sümmeetrilise funktsiooni

$$
K(x_1 - x_2) \equiv [\psi_n(x_1), \psi_n^+(x_2)]_\pm + [\psi_n(x_2), \psi_n^+(x_1)]_\pm , \tag{15.3}
$$

mis (15.2) tõttu avaldub järgmiselt:

$$
\begin{aligned}
&(\pm): \quad K(x_1 - x_2) = F_{nn}^{(2n)}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\Delta(x_1 - x_2) + F_{nn}^{(2n)}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\Delta(x_2 - x_1), \\
&(\pm\varepsilon): \quad K(x_1 - x_2) = F_{nn}^{(2n+1)}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\Delta(x_1 - x_2) + F_{nn}^{(2n+1)}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\Delta(x_2 - x_1).
\end{aligned}
\tag{15.4}
$$

Kuna Δ -funktsioon on sümmeetriline ruumikoordinaatide, kuid antisümmeetriline aja suhtes $\Delta(\vec{r}, x_0) = \Delta(-\vec{r}, x_0) = -\Delta(\vec{r}, -x_0)$ siis peab $K(x_1 - x_2)$ sisaldama paarisarvu tuletisi ruumikoordinaatide ja paaritu arvu tuletisi aja järgi, kokku paaritu arvu tuletisi. Nagu nähtub valemist

(15.2), võime sellise nullist erineva funktsiooni konstrueerida ainult ($\pm\varepsilon$)-tüüpi, s.o. poolarvulise spinniga väljade korral. Tensorväljade korral selline funktsioon on identselt null, s.t.

$$(\pm):\quad [\psi_n(x_1),\psi_n^+(x_2)]_\pm + [\psi_n(x_2),\psi_n^+(x_1)]_\pm = 0 . \qquad (15.5)$$

Erijuhul, kui $x_1 = x_2$, saame seost (15.5) rahuldada ainult kommutaatoriga. Kui antikommutaator oleks null vastavalt tingimusele (15.5), peaks väli ise olema identselt null. Sellega oleme osa teoreemist tõestanud: kõiki tensorvälju tuleb kvantiseerida kommutaatoritega.

Tõestamaks, et spiinorvälju (($\pm\varepsilon$)-klassi välja) tuleb kvantiseerida antikommutaatoritega, näitame, et ainult antikommutaatorid tagavad kvantiseeritud spiinorvälja energia positiivsuse (mittenegatiivsuse).

Näitame kõigepealt, et kvantiseerimata spiinorvälja energia on indefiniitne. Oletame, et väli rahuldab lineaarseid võrrandeid. Siis välja lagranžiaan ja energia-impulsstensor on potentsiaalide ψ, ψ^+ bilineaarkombinatsioonid (nimetatud suurused võivad sõltuda ainult ψ, ψ^+ ja nende tuletiste korrutistest, sest nad peavad olema reaalsed). Kui kasutame impulssesitust, kus tuletis x_μ järgi tähendab vastava Fourier' komponendi korrutamist impulsiga κ_μ, võime energia-impulsstensori (kui (+)-klassi suuruse) moodustada spiinoritest $\psi^{+\varepsilon}$, $\psi^{-\varepsilon}$ järgmiselt:

$$T^{(+)} \sim \sum \kappa^{2n}\psi^{+\varepsilon}\psi^{+\varepsilon} + \sum \kappa^{2n}\psi^{-\varepsilon}\psi^{-\varepsilon} + \sum \kappa^{2n+1}\psi^{+\varepsilon}\psi^{-\varepsilon} . \qquad (15.6)$$

Spiinorid $\psi^{+\varepsilon}$, $\psi^{-\varepsilon}$ rahuldavad seejuures järgmist tüüpi relativistlikult koovariantseid võrrandeid:

$$\Gamma_\mu \kappa_\mu \psi^{-\varepsilon} + m \psi^{+\varepsilon} = 0 , \qquad (15.7a)$$

$$\Gamma_\mu \kappa_\mu \psi^{+\varepsilon} + m \psi^{-\varepsilon} = 0 . \qquad (15.7b)$$

Γ_μ on Dirac'i maatriksitega sarnased maatriksid.

(15.7a) vasak pool koosneb $(+\varepsilon)$-klassi suurustest, (17.7b) vasak pool aga $(-\varepsilon)$-klassi suurustest. Võrrandid (15.7a, b) on invariantsed veel järgmise teisenduse suhtes:

$$\kappa_\mu \to -\kappa_\mu ; \quad \psi^{+\varepsilon} \to \alpha \psi^{+\varepsilon} ; \quad \psi^{-\varepsilon} \to -\alpha \psi^{-\varepsilon} . \qquad (15.8)$$

α peab olema puhtimaginaarne, et teisendatud väljad rahuldaksid tingimust

$$[\psi^{\pm\varepsilon}]^* \sim \psi^{\mp\varepsilon} \qquad (\pm\alpha \psi^{\pm\varepsilon})^* \sim \mp\alpha \psi^{\mp\varepsilon} . \qquad (15.9)$$

Kui avaldisele (15.6) rakendame teisendust (15.8), siis näeme, et $T^{(+)}$ märk muutub vastupidiseks. Järelikult ei saa kvantiseerimata spiinorväljadest moodustada definiitset energia-avaldist. Küll aga jõuame definiitsete omaväärtustega operaatorini kvantiseeritud väljas. Teisendused (15.8) on, nagu näha, 4-ruumi peegeldused. § -s 13 näitasime, et aja peegelduste korral kõik välja operaatorid alluvad antiunitaarsele teisendusele, mis vahetab korrutistes tegurite järjestuse. Kui koos teisendusega (15.8) muuta tegurite järjestust valemis (15.6), siis operaatorite antikommuteeruvuse korral niisugune operatsioon $T^{(+)}$ märki ei muuda. Seega saame omistada positiivselt definiitse energia ainult antikommutaatoritega kvantiseeritud spiinorväljale. Märgime, et analoogilise teisenduse korral ei muutu ka tensorvälja energia märk, kui tensorväli on kvantiseeritud kommutaatoritega.

Kehtib ka vastupidine teoreem (nn. CTP-teoreem): iga relativistlikult invariantne väljateooria, kus kehtib normaalne seos spinni ja statistika vahel, on automaatselt invariantne CTP-teisenduse suhtes. (Tõestusi vt. näit. [1] või [5, 9].) Siit järeldub, et teooria invariantsusele CTP-teisenduse suhtes ei vasta ühtegi jäävat suurust. Teiseks, kui oletaksime CTP-invariantsuse mittekehtivust mõningate väljade korral, satuksime vastuollu kaasaegse väljateooria põhikontseptsioonidega ning kujutlusega seosest väljade ja osakeste vahel.

Lisa.

A. Väljateooria singulaarsed funktsioonid.

Operaatorpotentsiaalide vahetuseeskirjades, samuti vaakumkeskmiste arvutamisel esinevad singulaarsed funktsioonid on kõik konstrueeritavad Klein-Gordoni võrrandi invariantsetest erilahenditest $\Delta^{+}(x)$ ja $\Delta^{-}(x)$. Põhjus on selles, et potentsiaalide üksikud komponendid rahuldavad Klein-Gordoni võrrandit (vt. valemile (6.2) eelnenud arutlust). D'Alembert'i võrrandit, mida rahuldavad elektromagnetvälja potentsiaalid, käsitleme Klein-Gordoni võrrandi erijuhuna, kui massikonstant $m = 0$.

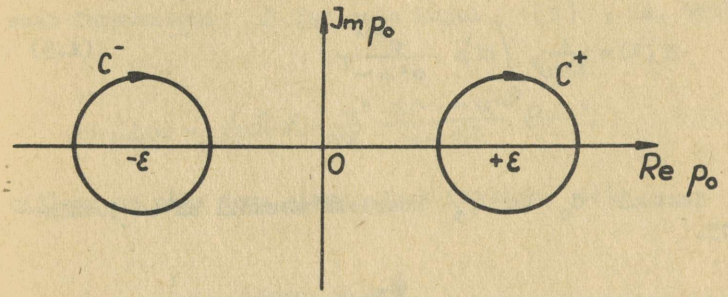
Funktsioonid $\Delta^{+}(x)$, $\Delta^{-}(x)$ defineeritakse nende Fourier' arenduse kaudu järgmiselt:

$$\Delta^{\pm}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C^{\pm}} \frac{e^{ipx}}{p^2 + m^2} \, , \qquad (A.1)$$

või üksikasjalikumalt,

$$\Delta^{\pm}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint_{-\infty}^{\infty} (d\vec{p}) e^{i\vec{p}\vec{x}} \oint_{C^{\pm}} \frac{e^{-ip_0 x_0}}{\vec{p}^2 + m^2 - p_0^2} dp_0 \,, \qquad (A.1')$$

kus $C^{\pm}$ tähistavad integreerimiskontuure p_0 komplekstasandil vastavalt joonisele 12. Siin $\varepsilon = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.



Joon. 12.

Kui arvutame resiidide teoreemi abil integraalid, saame

$$\Delta^{\pm}(x) = \frac{\pm i}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{\pm ipx}}{2p_0} d^3p \Big|_{p_0 = +\varepsilon} \,. \qquad (A.2)$$

Siit on näha, et $\Delta^{+}(x)$ sisaldab ainult positiivseid sagedusi ($p_0 = +\varepsilon$), $\Delta^{-}(x)$ aga ainult negatiivseid sagedusi ($p_0 = -\varepsilon$).

Jordan-Pauli vahetusfunktsiooni $\Delta(x)$ võime esitada $\Delta^{+}(x)$, $\Delta^{-}(x)$ summana

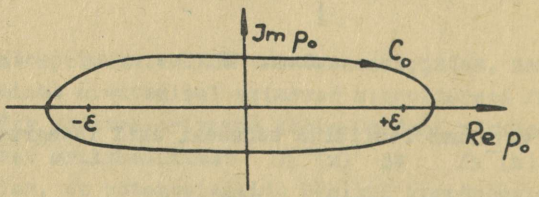
$$\Delta(x) = \Delta^{+}(x) + \Delta^{-}(x). \qquad (A.3)$$

Valemitest (A.1 - 3) saame mitmesugused $\Delta(x)$ kujud:

$$\left.\begin{aligned}\Delta(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{p}\vec{r}}\,\frac{\sin \varepsilon x_0}{\varepsilon}\,(d\vec{p})\\ \Delta(x) &= \frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4p\,\frac{p_0}{|p_0|}\,\delta^{(4)}(p^2+m^2)\,e^{ipx},\end{aligned}\right\} \qquad (A.4)$$

$$\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_0} d^4p\,\frac{e^{ipx}}{p^2+m^2}\,. \qquad (A.5)$$

Kontuur C_0 on p_0 komplekstasandil antud joonisega 13.



Joon. 13.

Valemist (A.4) on otseselt väljaloetavad $\Delta(x)$ tähtsamad omadused:

$$1^\circ \quad \Delta(\vec{r},x_0) = \Delta(-\vec{r},x_0) = -\Delta(\vec{r},-x_0)\,, \qquad (A.6)$$

$$2^\circ \quad \Delta(\vec{r},0) = 0 \qquad (A.7)$$

ja on järelikult null ka iga ruumisarnase x korral, s.t. kui $x^2 \equiv \vec{x}^2 - x_0^2 > 0$.

$$3^\circ \quad \frac{\partial}{\partial x_0} \Delta(\vec{x}, x_0)_{|x_0=0} = \delta^3(\vec{x}) . \qquad (A.8)$$

Kui arvutada valemis (A.4) sisalduvad integraalid, saab funktsiooni $\Delta(x)$ anda kujul ([2] , lk. 110)

$$\varepsilon(x_0)\Delta(x) = -\frac{1}{2\pi}\delta(-x^2) - \frac{m^2}{4\pi}\frac{J_1(-im\sqrt{x^2})}{-im\sqrt{x^2}}\,\theta(-x^2) , \qquad (A.9)$$

millest on näha tema singulaarne iseloom. Siin

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 , & \text{kui} \quad x > 0 \\ 0 , & \text{kui} \quad x < 0 , \end{cases} \qquad (A.10)$$

$$\varepsilon(x) = \theta(x) - \theta(-x) = \begin{cases} 1 , & \text{kui} \quad x > 0 \\ -1 , & \text{kui} \quad x < 0 . \end{cases} \qquad (A.11)$$

$J_1(x)$ tähistab esimest liiki Besseli funktsiooni järguga 1.

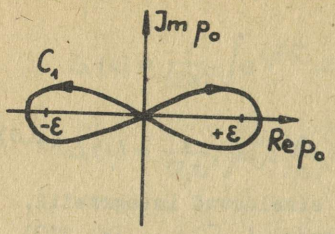
Funktsioonide $\Delta^+(x)$, $\Delta^-(x)$ kaudu on esitatav funktsioon $\Delta_1(x)$:

$$\Delta_1(x) = -i\left\{\Delta^+(x) - \Delta^-(x)\right\} . \qquad (A.12)$$

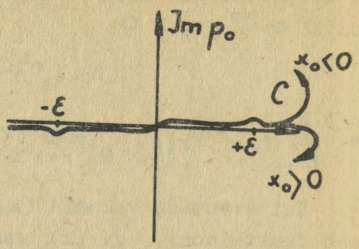
või

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int (d\vec{p})\, e^{i\vec{p}\vec{x}}\,\frac{\cos\varepsilon x_0}{\varepsilon} \\ \Delta_1(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^4p\, e^{ipx}\,\delta^4(p^2+m^2) \\ \Delta_1(x) &= \frac{-i}{(2\pi)^4}\int_{C_1} d^4p\,\frac{e^{ipx}}{p^2+m^2} \end{aligned}\right\} . \qquad (A.13)$$

Kontuur C_1 on antud joonisel 14.



Joon. 14.



Joon. 15.

Kõik seni vaadeldud funktsioonid rahuldavad Klein-Gordoni võrrandit:

$$(\Box - m^2)\Delta^{\pm}(x) = 0\,,$$
$$(\Box - m^2)\Delta(x) = 0\,,$$
$$(\Box - m^2)\Delta_1(x) = 0\,. \qquad (A.14)$$

Kausaalne funktsioon $\Delta^c(x)$, mille kaudu avalduvad nn. kronoloogilised seosed, on esitatav kujul

$$\Delta^c(x) = \frac{-i}{(2\pi)^4}\int_C d^4p\,\frac{e^{ipx}}{p^2+m^2}\,, \qquad (A.15)$$

kus kontuur C on antud joonisel 15. C tuleb sulgeda üle ülemise pooltasandi, kui $x_0 < 0$, ja üle alumise, kui $x_0 > 0$. ■

■

S.t. integraalis $\int_{-\infty}^{\infty} dp_0\,\frac{e^{-ip_0x_0}}{p^2+m^2}$ on reaalteljel asuvaid pooluseid nihutatud vastavalt asendusele $p^2+m^2 \to p^2+m^2-i0$, kus 0 on nullile lähenev positiivne arv.

Kui võrdleme kontuuri C p_0 komplekstasandil eespool defineeritud funktsioone iseloomustavate kontuuridega, saame

$$\Delta^c(x) = -i\left[\Theta(x_0)\Delta^+(x) - \Theta(-x_0)\Delta^-(x)\right] . \qquad (A.16)$$

Kui arvestame (A.14) ja seoseid

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\Theta(x_0) = \delta(x_0) ; \qquad \frac{\partial}{\partial x_0}\Theta(-x_0) = -\delta(x_0) ;$$

veendume vahetu arvutusega, et

$$(\Box - m^2)\Delta^c(x) = i\delta^4(x) . \qquad (A.17)$$

Retardeeritud ja avansseeritud Greeni funktsioonid $\Delta_R(x)$, $\Delta_A(x)$ defineeritakse valemiga

$$\Delta_R(x) = \begin{cases} \Delta(x), & \text{kui } x_0 > 0 \\ 0, & \text{kui } x_0 < 0 \end{cases} ; \quad \Delta_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x_0 > 0 \\ -\Delta(x), & \text{kui } x_0 < 0 \end{cases} \qquad (A.18)$$

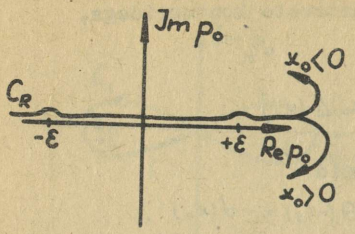
või kompaktsemalt

$$\Delta_R(x) = \Theta(x_0)\Delta(x) ,$$
$$\Delta_A(x) = -\Theta(-x_0)\Delta(x) . \qquad (A.18')$$

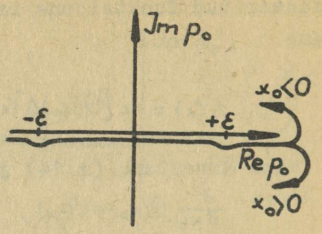
Nad on esitatavad kontuurintegraalidena

$$\Delta_R(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_R} d^4p \, \frac{e^{ipx}}{p^2 + m^2} ,$$
$$\Delta_A(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_A} d^4p \, \frac{e^{ipx}}{p^2 + m^2} . \qquad (A.19)$$

Kontuurid C_R ja C_A on antud vastavalt joonistel 16a ja 16b.



Joon. 16a.



Joon. 16b.

Näeme, et C_R puhul on reaalteljel asuvad poolused $\pm\varepsilon$ nihutatud reaalteljest allapoole, s.t. integrandis (A.19) on p_0 asemel võetud $p_0 - i0$ (0 - positiivselt poolelt nullile lähenev suurus). C_A puhul on kõik poolused nihutatud reaalteljest ülespoole, mis on ekvivalentne asendusega $p_0 \to p_0 + i0$.

Valemeist (A.18') saame arvutada operaatori $\Box - m^2$ mõju funktsioonidele $\Delta_R(x)$, $\Delta_A(x)$:

$$(\Box - m^2)\Delta_R(x) = -\delta^4(x),$$
$$(\Box - m^2)\Delta_A(x) = -\delta^4(x). \qquad \text{(A.20)}$$

Kõik elektromagnetvälja iseloomustavad D-funktsioonid saame vastavatest Δ-funktsioonidest, võttes $m^2 = 0$

$$\mathcal{D}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int (d\vec{p})\, e^{i\vec{p}\vec{x}}\, \frac{\sin|\vec{p}|x_0}{|\vec{p}|} \qquad \text{(A.21)}$$

jne.

Kõik elektron-positronvälja iseloomustavad S-funktsioonid, s.o.

$S^{\pm}_{\alpha\beta}(x)$, $S_{\alpha\beta}(x)$, $S^{c}_{\alpha\beta}(x)$, $S^{(1)}_{\alpha\beta}(x)$, $S_{R,\alpha\beta}(x)$, $S_{A,\alpha\beta}(x)$

on arvutatavad vastavatest Δ-funktsioonidest valemite

$$S(x) = -\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right) \Delta(x) \qquad \text{(A.22)}$$

jne. abil. Siit järgneb ka nende Fourier' arendus, näit.

$$S_{\alpha\beta}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_0} d^4p \, \frac{(m - i\hat{p})_{\alpha\beta}}{p^2 + m^2} e^{ipx} \quad \text{jne.}, \qquad \text{(A.23)}$$

võrrandid, mida nad rahuldavad,

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right) S^{\pm}(x) = 0 ; \qquad \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right) S(x) = 0 ,$$

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right) S^{c}(x) = -i\delta^4(x); \quad \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right) S_{\substack{R \\ A}}(x) = \delta^4(x) \qquad \text{(A.24)}$$

jm. omadused, näit. $S(x)_{|x_0 = 0} = i\gamma_4 \delta^3(\vec{x})$.

B. Operaatorite normaal- ja kronoloogilised korrutised.

1. Esitame vaba elektromagnetvälja potentsiaali $A_\mu(x)$ summana, mis koosneb neeldumisoperaatoreid $C_\lambda(\vec{k})$ sisaldavast osast $A^-_\mu(x)$ ja kiirgumisoperaatoreid $C^+_\lambda(\vec{k})$ sisaldavast osast $A^+_\mu(x)$, ■

■ Paljud autorid (näit. [1]) kasutavad tähistust $A^+_\mu(x)$ neeldumisoperaatoreid sisaldava osa puhul (kuna vastavad funktsioonid koosnevad positiivse sagedusega tasalainetest), tähistust $A^-_\mu(x)$ aga kiirgumisoperaatoreid sisaldava (negatiivsete sagedustega tasalainetest koosneva) osa puhul.

$$A_\mu(x) = A^-_\mu(x) + A^+_\mu(x) \,, \tag{B.1}$$

kus

$$\begin{aligned} A^-_\mu(x) &= (2\pi)^{-3/2} \int d^3k \, \frac{e^\lambda_\mu}{\sqrt{2|\vec{k}|}} \, C_\lambda(\vec{k}) \, e^{ikx} \,, \\ A^+_\mu(x) &= (2\pi)^{-3/2} \int d^3k \, \frac{e^\lambda_\mu}{\sqrt{2|\vec{k}|}} \, C^+_\lambda(\vec{k}) \, e^{-ikx} \,. \end{aligned} \tag{B.2}$$

Operaatorite $A_\mu(x)$, $A_\nu(y)$ <u>normaalkorrutise</u> $N[A_\mu(x)A_\nu(y)]$ defineerime nii:

$$\begin{aligned} N[A_\mu(x)A_\nu(y)] = {} & A^+_\mu(x)A^+_\nu(y) + A^+_\mu(x)A^-_\nu(y) + \\ & + A^-_\mu(x)A^-_\nu(y) + A^+_\nu(y)A^-_\mu(x) \,. \end{aligned} \tag{B.3}$$

Võrreldes normaalkorrutist $N[A_\mu(x)A_\nu(y)]$ harilikku korrutisega

$$\begin{aligned} A_\mu(x)A_\nu(y) = {} & A^+_\mu(x)A^+_\nu(y) + A^+_\mu(x)A^-_\nu(y) + \\ & + A^-_\mu(x)A^-_\nu(y) + A^-_\mu(x)A^+_\nu(y) \,, \end{aligned}$$

saame

$$\begin{aligned} A_\mu(x)A_\nu(y) &= N[A_\mu(x)A_\nu(y)] + [A^-_\mu(x), A^+_\nu(y)]_- = \\ &= N[A_\mu(x)A_\nu(y)] - i\delta_{\mu\nu} D^+(x-y) \,, \end{aligned} \tag{B.4}$$

sest valemeist (B.2), $C_\lambda(\vec{k})$, $C^+_{\lambda'}(\vec{k}')$ vahetuseeskirjadest ja valemeist (A.1', 2) järeldub otseselt seos

$$\begin{aligned} [A^-_\mu(x), A^+_\nu(y)] &= -\delta_{\mu\nu} D^+(x-y) = \\ &= \langle 0 | A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle \,. \end{aligned} \tag{B.5}$$

(Viimases valemis oleme kasutanud vaakumi definitsiooni, millest järgneb kõikide normaalkorrutiste vaakumkeskmiste

võrdus nulliga.) Kui normaalkorrutise definitsiooni (B,3) kasutame korrutise $A_\nu(y)A_\mu(x)$ korral ja arvestame operaatorite $A^+_\mu(x)$, $A^+_\nu(y)$ ja $A^-_\mu(x)$, $A^-_\nu(y)$ kommuteeruvust, saame

$$N[A_\nu(y)A_\mu(x)] = N[A_\mu(x)A_\nu(y)] \,. \qquad (B.6)$$

S.t. normaalkorrutis ei muutu, kui vahetame operaatorite $A_\mu(x)$, $A_\nu(y)$ järjestuse.

Analoogiliselt valemile (B.3) defineerime normaalkorrutise (N-korrutise) kolme, nelja jne. operaatori vahel, näit.

$$N[A_\mu(x)A_\nu(y)A_\rho(z)] = A^+_\mu(x)N[A_\nu(y)A_\rho(z)] + \\ + N[A_\nu(y)A_\rho(z)]A^-_\mu(x) \,. \qquad (B.3')$$

Kui seda võrdleme hariliku korrutisega $A_\mu(x)A_\nu(y)A_\rho(z)$, saame

$$A_\mu(x)A_\nu(y)A_\rho(z) = N[A_\mu(x)A_\nu(y)A_\rho(z)] - i\delta_{\mu\nu}\mathcal{D}^+(x-y)A_\rho(z) - \\ - i\delta_{\mu\rho}\mathcal{D}^+(x-z)A_\nu(y) - i\delta_{\nu\rho}\mathcal{D}^+(y-z)A_\mu(x). \qquad (B.4')$$

Funktsiooni

$$\langle 0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle \equiv \underline{A_\mu(x)A_\nu(y)} = -i\delta_{\mu\nu}\mathcal{D}^+(x-y)$$

nimetatakse sageli operaatorite $A_\mu(x)$, $A_\nu(y)$ <u>normaalseoseks</u>; Valemeid (B.4, 4') võime täieliku induktsiooni meetodil laiendada suvalise arvu operaatorite $A_{\mu_1}(x_1)$, $A_{\mu_2}(x_2)$, ... juhule. Tulemus kannab <u>Wicki teoreemi</u> nime:

operaatorite korrutis on esitatav normaalkorrutiste summana kõikvõimalike normaalseostega (seosteta liikmed kaasa arvatud).

Dirac'i välja korral toimime samuti. Esitame operaatorid $\psi(x)$ ja $\bar{\psi}(x)$ kiirgumisoperaatoreid ($a^{+}_{\nu}(\vec{p})$, $b^{+}_{\nu}(\vec{p})$) ja neeldumisoperaatoreid ($a_{\nu}(\vec{p})$, $b_{\nu}(\vec{p})$) sisaldavate osade summana

$$\psi(x) = \psi^{+}(x) + \psi^{-}(x) ; \qquad \bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^{+}(x) + \bar{\psi}^{-}(x) , \tag{B.7}$$

kus

$$\begin{aligned}
\psi^{+}(x) &= (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \; b^{+}_{\nu}(\vec{p})\, u^{\nu}(-\vec{p})\, e^{-ipx} , \\
\psi^{-}(x) &= (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \; a_{\nu}(\vec{p})\, u^{\nu}(\vec{p})\, e^{ipx} , \\
\bar{\psi}^{+}(x) &= (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \; a^{+}_{\nu}(\vec{p})\, \bar{u}^{\nu}(\vec{p})\, e^{-ipx} , \\
\bar{\psi}^{-}(x) &= (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \; b_{\nu}(\vec{p})\, \bar{u}^{\nu}(-\vec{p})\, e^{ipx} ,
\end{aligned} \tag{B.8}$$

ning <u>defineerime</u> normaalkorrutised (N-korrutised):

$$\begin{aligned}
N[\psi_{\alpha}(x)\,\bar{\psi}_{\beta}(y)] = {} & \psi^{+}_{\alpha}(x)\,\bar{\psi}^{+}_{\beta}(y) + \psi^{+}_{\alpha}(x)\,\bar{\psi}^{-}_{\beta}(y) + \\
& + \psi^{-}_{\alpha}(x)\,\bar{\psi}^{-}_{\beta}(y) - \bar{\psi}^{+}_{\beta}(y)\,\psi^{-}_{\alpha}(x) .
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Analoogiliselt avalduvad $N[\psi_{\alpha}(x)\,\psi_{\beta}(y)]$ ja $N[\bar{\psi}_{\alpha}(x)\,\bar{\psi}_{\beta}(y)]$. (Miinus arvestab antikommutatsiooni-seoseid.)

Võrdleme neid valemeid harilike korrutistega

$$\begin{aligned}
\psi_{\alpha}(x)\,\bar{\psi}_{\beta}(y) = {} & \psi^{+}_{\alpha}(x)\,\bar{\psi}^{+}_{\beta}(y) + \psi^{+}_{\alpha}(x)\,\bar{\psi}^{-}(y) + \\
& + \psi^{-}_{\alpha}(x)\,\bar{\psi}^{-}_{\beta}(y) + \psi^{-}_{\alpha}(x)\,\bar{\psi}^{+}_{\beta}(y) .
\end{aligned}$$

Kuna antikommutatsiooni-seeskirju rahuldavate operaatorite korral

$$AB = -BA + \{A,B\} ,$$

siis saame

$$\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y) = N[\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)] + \{\psi_\alpha^-(x), \bar{\psi}_\beta^+(y)\} ,$$
$$\psi_\alpha(x)\psi_\beta(y) = N[\psi_\alpha(x)\psi_\beta(y)] + \{\psi_\alpha^-(x), \psi_\beta^+(y)\} . \qquad (B.10)$$

Operaatorite $a_r(\vec{p})$, $b_r(\vec{p})$, $a_r^+(\vec{p})$, $b_r^+(\vec{p})$ vahetuseeskirjadest, valemitest (6.16a, b) ja funktsioonide $S_{\alpha\beta}^+(x)$, $S_{\alpha\beta}^-(x)$ definitsioonist (A.22) järgneb

$$\{\psi_\alpha^-(x), \psi_\beta^+(y)\} = \{\bar{\psi}_\alpha^-(x), \bar{\psi}_\beta^+(y)\} = 0 ,$$
$$\{\psi_\alpha^-(x), \bar{\psi}_\beta^+(y)\} = -i S_{\alpha\beta}^+(x-y) = \langle 0|\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)|0\rangle , \qquad (B.11)$$
$$\{\bar{\psi}_\beta^-(y), \psi_\alpha^+(x)\} = -i S_{\alpha\beta}^-(x-y) = \langle 0|\bar{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha(x)|0\rangle .$$

Operaatorite $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ antikommutatsiooni-seoste põhjal

$$N[\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)] = -N[\bar{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha(x)] , \ldots \qquad (B.12)$$

s.t. iga kahe kõrvuti seisva spiinoroperaatori vahetamisel normaalkorrutises muutub normaalkorrutise märk. Ka spiinoroperaatorite korral kehtib Wicki teoreem.

2. Defineerime kronoloogilised e. T-korrutised:

$$T[A_\mu(x)A_\nu(y)] = \begin{cases} A_\mu(x)A_\nu(y), & \text{kui } x_0 > y_0 \\ A_\nu(y)A_\mu(x), & \text{kui } x_0 < y_0 , \end{cases} \qquad (B.13)$$

$$T[\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)] = \begin{cases} \psi_\alpha(x)\,\bar{\psi}_\beta(y), & \text{kui } x_0 > y_0 \\ -\bar{\psi}_\beta(y)\,\psi_\alpha(x), & \text{kui } x_0 < y_0 . \end{cases} \qquad \text{(B.14)}$$

Arvestades harilike korrutiste ja normaalkorrutiste vahelisi seoseid (B.4), $D^{\pm}(x)$ definitsioonist järelduvat omadust $D^{+}(x) = -D^{-}(-x)$ ning $D^{c}(x)$ definitsiooni (val. (A.16) analoogi), saame T-korrutised avaldada N-korrutiste kaudu:

$$\begin{aligned} \underline{T[A_\mu(x)A_\nu(y)]} &= N[A_\mu(x)A_\nu(y)] - i\delta_{\mu\nu}[\theta(x_0-y_0)D^{+}(x-y) + \\ &+\theta(y_0-x_0)D^{+}(y-x)] = N[A_\mu(x)A_\nu(y)] - \qquad \text{(B.15)} \\ &- i\delta_{\mu\nu}[\theta(x_0-y_0)D^{+}(x-y) - \theta[-(x_0-y_0)]D^{-}(x-y)] = \\ &= \underline{N[A_\mu(x)A_\nu(y)] + \delta_{\mu\nu}D^{c}(x-y)} . \end{aligned}$$

Kuna

$$\langle 0|N[A_\mu(x)A_\nu(y)]|0\rangle = 0 ,$$

siis, moodustades võrduse (B.15) mõlemast poolest vaakumkeskmise,* saame

$$\langle 0|T[A_\mu(x)A_\nu(y)]|0\rangle = \delta_{\mu\nu}D^{c}(x-y) . \qquad \text{(B.16)}$$

---

* Siit selgub ka $D^{c}(x)$ nimetus "kausaalne": $\langle 0|T[A_\mu(x)A_\nu(y)]|0\rangle \neq 0$ ainult siis, kui varasemale hetkele vastavas operaatoris sisaldub kvandi kiirgumisoperaator, mis kompenseeritakse (kustutatakse) hilisemale hetkele vastavas operaatoris sisalduva neeldumisoperaatoriga - kvant ei saa enne kaduda, kui ta pole tekkinud.

Avaldist

$$\langle 0|T[A_\mu(x)A_\nu(y)]|0\rangle \equiv \overbrace{A_\mu(x)A_\nu(y)}$$

nimet. ka operaatorite $A_\mu(x)$, $A_\nu(y)$ <u>kronoloogiliseks seoseks</u>.

Täpselt samuti nagu harilike korrutiste ja N-korrutiste korral kehtib ka siin Wicki teoreem: iga kronoloogiline korrutis on esitatav normaalkorrutiste summana kõikvõimalike kronoloogiliste seostega.

Valemina väljakirjutatult:

$$T[A_{\mu_1}(x_1)A_{\mu_2}(x_2)A_{\mu_3}(x_3)\dots] = N[A_{\mu_1}(x_1)A_{\mu_2}(x_2)A_{\mu_3}(x_3)\dots] +$$
$$+N[\overbrace{A_{\mu_1}(x_1)A_{\mu_2}(x_2)}A_{\mu_3}(x_3)\dots] + N[\overbrace{A_{\mu_1}(x_1)A_{\mu_2}(x_2)}A_{\mu_3}(x_3)\dots] + \quad (B.17)$$
$$+\dots + N[\overbrace{A_{\mu_1}(x_1)A_{\mu_2}(x_2)}\overbrace{A_{\mu_3}(x_3)}\dots] + \dots$$

Analoogilised valemid kehtivad spiinoroperaatorite T-korrutiste korral. Valemitest (B.10, 11, 12, 14) järeldub

$$T[\psi_\alpha(x)\bar\psi_\beta(y)] = \begin{cases} N[\psi_\alpha(x)\bar\psi_\beta(y)] - i S^+_{\alpha\beta}(x-y), & \text{kui } x_0 > y_0 \\ -N[\bar\psi_\beta(y)\psi_\alpha(x)] + i S^-_{\alpha\beta}(x-y), & \text{kui } x_0 < y_0 \end{cases} \quad (B.18)$$

või

$$T[\psi_\alpha(x)\bar\psi_\beta(y)] = N[\psi_\alpha(x)\bar\psi_\beta(y)] - i[\Theta(x_0-y_0)S^+_{\alpha\beta}(x-y) - \Theta(y_0-x_0)S^-_{\alpha\beta}(x-y)]$$

või, arvestades kausaalse funktsiooni definitsiooni,

$$S^c_{\alpha\beta}(x) = -i[\Theta(x_0)S^+_{\alpha\beta}(x) - \Theta(-x_0)S^-_{\alpha\beta}(x)] \quad (B.19)$$

$$\underline{T[\psi_\alpha(x)\bar\psi_\beta(y)] = N[\psi_\alpha(x)\bar\psi_\beta(y)] + S^c_{\alpha\beta}(x-y).}$$

Analoogiliselt valemile (B.16) kehtib

$$S^{c}_{\alpha\beta}(x-y) = \langle 0|T[\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)]|0\rangle \equiv \overbrace{\psi_\alpha(x)\,\bar{\psi}_\beta(y)}\,. \qquad \text{(B.20)}$$

Kuna operaatorid $\psi_\alpha(x)$ ja $\psi_\beta(y)$ (samuti $\bar{\psi}_\alpha(x)$ ja $\bar{\psi}_\beta(y)$) omavahel täpselt antikommuteeruvad, siis

$$T[\psi_\alpha(x)\psi_\beta(y)] = N[\psi_\alpha(x)\psi_\beta(y)] = \psi_\alpha(x)\psi_\beta(y). \qquad \text{(B.21)}$$

Samasugused seosed kehtivad $\bar{\psi}_\alpha(x)$, $\bar{\psi}_\beta(y)$ korral.

Wicki teoreem kujul (B.17) jääb jõusse ka spiinoroperaatorite korral.

Lisame lõpuks maatrikselementide arvutamisel otstarbekaks osutuvad seosed (mis tulenevad vahetult funktsioonide $D_1(x)$, $S^{(1)}_{\alpha\beta}(x)$ definitsioonist ja kommutaatorite (antikommutaatorite) avamisest vaakumkeskmiste arvutamisel):

$$\langle 0|\{A_\mu(x), A_\nu(y)\}_+|0\rangle = \delta_{\mu\nu} D_1(x-y)\,, \qquad \text{(B.22a)}$$

$$\langle 0|[\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)]_-|0\rangle = S^{(1)}_{\alpha\beta}(x-y)\,. \qquad \text{(B.22b)}$$

C. Dirac'i võrrandi lahendite omadusi.

1. Tuletame valemid (6.14 - 16).

Lähtume valemitest

$$(i\hat{\partial} + m)u(\vec{p}) \equiv (i\delta_k p_k - \delta_4 p_0 + m)u(\vec{p}) = 0, \qquad \text{(C.1)}$$

$$(-i\hat{\vec{p}}+m)v(-\vec{p}) \equiv (-i\gamma_\kappa p_\kappa + \gamma_4 p_0 + m)v(-\vec{p}) = 0, \qquad (C.2)$$

$$(i\gamma_\kappa p_\kappa + \gamma_4 p_0 + m)\, v(\vec{p}) = 0. \qquad (C.2')$$

Moodustame valemi (C.1) vasakust poolest kaasmaatriksi ja arvestame, et $\gamma_\mu^+ = \gamma_\mu$. Saame

$$u^+(\vec{p})\,[-i\gamma_\kappa p_\kappa - \gamma_4 p_0 + m] = 0. \qquad (C.1')$$

Kui võrdust (C.1') korrutame spiinoriga $v(\vec{p})$ (paremalt), võrdust (C.2') aga spiinoriga $u^+(\vec{p})$ (vasakult) ja tulemused liidame, saame

$$2m\,u^+(\vec{p})\,v(\vec{p}) = 0$$

või spiinorindekseid välja kirjutades

$$\sum_{\alpha=1}^{4} u_\alpha^*(\vec{p})\,v_\alpha(\vec{p}) = \sum_{\alpha=1}^{4} u_\alpha(\vec{p})\,v_\alpha^*(\vec{p}) = 0, \qquad (C.3)$$

s.o. valemi (6.14).

Seoste (6.15) tuletamiseks lähtume võrranditest (6.13)

$$\mathcal{K}u^r(\vec{p}) = \lambda_r u^r(\vec{p}); \quad \mathcal{K}u^s(\vec{p}) = \lambda_s u^s(\vec{p}), \qquad (r,s = 1,2) \qquad (C.4)$$

kus definitsiooni (6.12) järgi operaator K on hermiitiline.

K hermiitilisuse tõttu

$$u^{s+}(\vec{p})\mathcal{K} = \lambda_s u^{s+}(\vec{p}). \qquad (C.4')$$

Valemeist (C.4, 4') saame

$$u^{s+}(\vec{p})\mathcal{K}u^r(\vec{p}) - u^{s+}(\vec{p})\mathcal{K}u^r(\vec{p}) = (\lambda_r - \lambda_s)u^{s+}(\vec{p})u^r(\vec{p}) = 0.$$

Järelikult, kui $\lambda_s \neq \lambda_r$, siis $u^{s+}(\vec{p})\, u^r(\vec{p}) = 0$.

Kui aga $\lambda_s = \lambda_r$, võime spiinori u^r nii normeerida, et $u^{r+}(\vec{p})\, u^r(\vec{p}) = 1$.

Mõlemaid tulemusi kokku võttes saame

$$u^{s+}(\vec{p})\, u^r(\vec{p}) = \delta_{rs} \,, \qquad (C.5)$$

s.o. valemi, mille number tekstis on (6.15a). Samasugused mõttekäigud annavad spiinori v^r puhul valemi (6.15b).

Fikseerime valemis (C.1) polarisatsiooni-indeksi r ja valemis (C.1') vastavalt s. Seejärel korrutame valemit (C.1) vasakult spiinoriga $u^{s+}(\vec{p})$ ja valemit (C.1') paremalt spiinoriga $u^r(\vec{p})$ ning liidame tulemused. Saame

$$-u^{s+}(\vec{p})\gamma_4 p_0 u^r(\vec{p}) + m u^{s+}(\vec{p})\, u^r(\vec{p}) = 0$$

või kuna $u^{s+}\gamma_4 = \bar{u}^s$ ja $u^{s+}u^r = \delta_{rs}$, siis

$$\bar{u}^s(\vec{p})\, u^r(\vec{p}) = \frac{m}{p_0}\,\delta_{rs} \,. \qquad (C.6)$$

Samasugune arutlus, kui seda rakendada valemi (C.2) või (C.2') puhul, annab

$$\bar{v}^s(\vec{p})\, v^r(\vec{p}) = -\frac{m}{p_0}\,\delta_{rs} \,. \qquad (C.6')$$

Tuletame valemid (6.16). Selleks defineerime maatriks-funktsiooni G(p')

$$(i\hat{p}' + m)\, G(p') = I \qquad \text{või} \qquad G(p') = \frac{m - i\hat{p}'}{p'^2 + m^2} \,, \qquad (C.7)$$

kus

$$p_0'^2 \neq \vec{p}^{\,2} + m^2 \,; \quad p'^2 + m^2 \equiv \vec{p}^{\,2} + m^2 - p_0'^2 = p_0^2 - p_0'^2 \,,$$
$$i\hat{p}' = i\gamma_\kappa p_\kappa - \gamma_4 p_0' = i\hat{p} + \gamma_4(p_0 - p_0') \,. \qquad (C.8)$$

Esitame $G_{\beta\delta}$ (spiinorindekseid β, δ välja kirjutades) formaalselt kujul

$$G_{\beta\delta}(p') = \sum_{r=1}^{2} \{ u_\beta^r(\vec{p}) A_\delta^r(p') + v_\beta^r(\vec{p}) B_\delta^r(p') \} . \qquad (C.9)$$

$A_\delta^r(p')$, $B_\delta^r(p')$ on esialgu tundmatud kordajad. Määrame nad. Rakendame võrduse (C.9) vasakule ja paremale poolele operaatorit ($i\hat{p}' + m$). Siis vasak pool annab (vt. (C.7))

$$(i\hat{p}' + m)_{\alpha\beta} G_{\beta\delta}(p') = \delta_{\alpha\delta} ,$$

parem pool aga (C.1, 2') tõttu

$$\sum_{r=1}^{2} \{ [i\hat{p} + m + \gamma_4 (p_0 - p_0')]_{\alpha\beta} u_\beta^r(\vec{p}) A_\delta^r(p') +$$

$$+ [i\gamma_\kappa p_\kappa + \gamma_4 p_0 + m - \gamma_4 (p_0 + p_0')]_{\alpha\beta} v_\beta^r(\vec{p}) B_\delta^r(p') \} =$$

$$= \sum_{r=1}^{2} \{ (p_0 - p_0') \gamma_{4,\alpha\beta} u_\beta^r(\vec{p}) A_\delta^r(p') - (p_0 + p_0') \gamma_{4,\alpha\beta} v_\beta^r(\vec{p}) B_\delta^r(p') \} .$$

Neid avaldisi võrreldes saame

$$\sum_{r=1}^{2} \{ (p_0 - p_0') \gamma_{4,\alpha\beta} u_\beta^r(\vec{p}) A_\delta^r(p') - (p_0 + p_0') \gamma_{4,\alpha\beta} v_\beta^r(\vec{p}) B_\delta^r(p') \} = \delta_{\alpha\delta} . \qquad (C.10)$$

Kui valemit (C.10) korrutame spiinoriga $\bar{u}_\alpha^s(\vec{p})$ ja arvestame (C.3, 5), saame

$$A_\delta^s(p') = \frac{\bar{u}_\delta^s(\vec{p})}{p_0 - p_0'} .$$

Kui seda korrutame spiinoriga $\bar{v}_\alpha^s(\vec{p})$, siis

$$B^s_\sigma(p') = -\frac{\bar{v}^s_\sigma(\vec{p})}{p_0 + p'_0} .$$

Paigutades nende seoste abil määratud kordajad $A^s_\sigma(p')$, $B^s_\sigma(p')$ valemisse (C.9), saame

$$G_{\alpha\beta}(p') = \sum_{s=1}^{2} \left\{ \frac{u^s_\alpha(\vec{p})\,\bar{u}^s_\beta(\vec{p})}{p_0 - p'_0} - \frac{v^s_\alpha(\vec{p})\,\bar{v}^s_\beta(\vec{p})}{p_0 + p'_0} \right\} . \qquad (C.11)$$

Kuna (C.7, 8) tõttu

$$G_{\alpha\beta}(p') = \frac{(m - i\hat{p})_{\alpha\beta}}{(p_0 - p'_0)(p_0 + p'_0)} ,$$

siis korrutades võrdust (C.11) teguriga $p_0^2 - p_0'^2$, saame

$$(m - i\hat{p}')_{\alpha\beta} = \sum_{s=1}^{2} \left\{ (p_0 + p'_0)\, u^s_\alpha(\vec{p})\,\bar{u}^s_\beta(\vec{p}) - (p_0 - p'_0)\, v^s_\alpha(\vec{p})\,\bar{v}^s_\beta(\vec{p}) \right\} . \qquad (C.12)$$

Kui siin võrrutame $p'_0 = p_0$, saame valemi (6.16a). Kui võrrutame $p'_0 = -p_0$ ja seejärel asendame $\vec{p} \to -\vec{p}$, saame valemi (6.16b).

2. Näitame, et valemiga (7.4') defineeritud vooluvektoris

$$j_\mu(x) = \frac{ie}{2} \left[\bar{\psi}(x), \gamma_\mu \psi(x) \right] \qquad (C.13)$$

on operaatorid normaaljärjestuses. Kirjutame j_μ avaldises spiinorindeksid välja, siis

$$j_\mu(x) = \frac{ie}{2} \gamma_{\mu,\alpha\beta} \left[\bar{\psi}_\alpha(x) \psi_\beta(x) - \psi_\beta(x) \bar{\psi}_\alpha(x) \right] . \qquad (C.14)$$

Kui operaatorid $\bar{\psi}_\alpha(x)$ ja $\psi_\beta(x)$ esitame kujul (B.7) ning arvestame normaalkorrutise definitsiooni (B.9), veendume vahetult, et

$$\psi_\alpha(x)\psi_\beta(x) - \psi_\beta(x)\bar{\psi}_\alpha(x) = 2N[\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(x)] \qquad (C.15)$$

3. Tõestame seose

$$\gamma_4 S^+ \gamma_4 = S^{-1} , \qquad (C.16)$$

kus maatriks S määrab spiinori ψ teisenemiseeskirja vastavalt valemitele (6.23, 24). Lähtume valemitest (6.24):

$$\Lambda_{\mu\varrho}\gamma_\varrho = S^{-1}\gamma_\mu S : \begin{cases} \Lambda_{\kappa\nu}\gamma_\nu + \Lambda_{\kappa 4}\gamma_4 = S^{-1}\gamma_\kappa S , & (\kappa = 1,2,3) \\ \Lambda_{4\nu}\gamma_\nu + \Lambda_{44}\gamma_4 = S^{-1}\gamma_4 S \end{cases} \qquad (C.17)$$

Moodustame mõlemast poolest kaasmaatriksi, arvestades, et

$$\Lambda^*_{\kappa\nu} = \Lambda_{\kappa\nu},\ \Lambda^*_{\kappa 4} = -\Lambda_{\kappa 4},\ \Lambda^*_{4\nu} = -\Lambda_{4\nu},\ \Lambda^*_{44} = \Lambda_{44},\ \gamma_\mu^+ = \gamma_\mu . \qquad (C.18)$$

Saame

$$\begin{aligned} S^+\gamma_\kappa S^{+-1} &= \Lambda_{\kappa\nu}\gamma_\nu - \Lambda_{\kappa 4}\gamma_4 , \\ S^+\gamma_4 S^{+-1} &= -\Lambda_{4\nu}\gamma_\nu + \Lambda_{44}\gamma_4 . \end{aligned} \qquad (C.19)$$

Korrutame seose (C.19) mõlemaid pooli vasakult ja paremalt maatriksiga γ_4 ja arvestame, et $\gamma_4^2 = I$, $\gamma_4\gamma_\nu\gamma_4 = -\gamma_\nu$. Kui tähistame $\gamma_4 S^+ \gamma_4 = \bar{S}$, saame

$$\left.\begin{aligned} -\bar{S}\gamma_4\bar{S}^{-1} &= -\Lambda_{\kappa\nu}\gamma_\nu - \Lambda_{\kappa 4}\gamma_4 \\ \bar{S}\gamma_4\bar{S}^{-1} &= \Lambda_{4\nu}\gamma_\nu + \Lambda_{44}\gamma_4 \end{aligned}\right\} : \quad \bar{S}\gamma_\mu\bar{S}^{-1} = \Lambda_{\mu\varrho}\gamma_\varrho . \qquad (C.20)$$

Valemite (C.17 , 20) võrdlus annab

$$\bar{S} \equiv \gamma_4 S^+ \gamma_4 = S^{-1} . \qquad (C.21)$$

4. Tuletame laengulise konjugeerimise maatriksi C omadused

$$\gamma_\mu C = -C\tilde{\gamma}_\mu \ , \qquad (C.22)$$

$$C^+C = I \ , \qquad (C.23)$$

$$C^*C = -I \ . \qquad (C.24)$$

Seos (C.22) tuleneb otseselt maatriksi C definitsioonist valemitega (13.31, 32):

$$\psi^c(x) = C\bar{\psi}(x): \quad \begin{cases} u^c_\alpha(\vec{p}) = C_{\alpha\beta}\bar{v}_\beta(-\vec{p}) \\ v^c_\alpha(-\vec{p}) = C_{\alpha\beta}\bar{u}_\beta(\vec{p}) \ . \end{cases} \qquad (C.25)$$

Nõuame, et $u^c(\vec{p})$ rahuldaks võrrandit (C.1), s.o.

$$(i\hat{p}+m)u^c(\vec{p}) = 0 \ , \qquad (C.26)$$

ning arvestame, et $\bar{v}(-\vec{p})$ rahuldab (C.2) tõttu võrrandit (võtke (C.2) mõlemast poolest kaasmaatriks ja korrutage tulemust paremalt maatriksiga γ_4)

$$\bar{v}(-\vec{p})[-i\hat{p}+m] = 0; \quad [-ip_\mu\tilde{\gamma}_{\mu,\alpha\beta}+m\delta_{\alpha\beta}]\bar{v}_\beta(-\vec{p}) = 0. \qquad (C.27)$$

Kui valemit (C.27) korrutame vasakult maatriksiga C ning seejärel tõstame ta maatriksitest $\tilde{\gamma}_\mu$ paremale, saame $u^c(\vec{p}) = C\bar{v}(-\vec{p})$ jaoks võrrandi (C.26), kui on rahuldatud (C.22).

Kui definitsioonile vastavalt moodustame $\bar{\psi}^c(x) = [\psi^c(x)]^+\gamma_4$, saame

$$\bar{\psi}^c(x) = [C\bar{\psi}(x)]^+\gamma_4 = [C\psi^+(x)\gamma_4]^+\gamma_4 = \gamma_4^+\psi(x)C^+\gamma_4 =$$
$$= \gamma_4\psi(x)C^+\gamma_4 = \psi(x)\tilde{\gamma}_4C^+\gamma_4 \ ,$$

s.t.

$$\bar{\psi}^c_\alpha(x) = \psi_\beta(x)[\tilde{\gamma}_4 C^+ \gamma_4]_{\beta\alpha} . \qquad (C.28)$$

Näitame, et kehtib valem

$$(\tilde{\gamma}_4 C^+ \gamma_4)_{\beta\alpha} = C^+_{\alpha\beta} , \qquad (C.29)$$

s.t. ($\tilde{C}^+ \equiv C^*$) : $C^+ = \tilde{\gamma}_4 C^* \gamma_4$.

Viimane tingimus järgneb otseselt valemeist (C.22 - 24). Kui võrduse mõlemast poolest moodustame kaasmaatriksi, saame

$$C^+ \gamma_4 = -\tilde{\gamma}_4 C^+ \qquad (\gamma_4^+ = \gamma_4 ; \quad (\tilde{\gamma}_4)^+ = \tilde{\gamma}_4)$$

või kuna valemeist (C.23, 24) $C^+ = -C^*$, siis $C^+ = \tilde{\gamma}_4 C^* \gamma_4$. Seega

$$\bar{\psi}^c(x) = C^* \psi(x) . \qquad (C.30)$$

Valemeid (C.23, 24) on kõige lihtsam tõestada konkreetses γ-maatriksite esituses. Kui nad selles esituses kehtivad, siis kehtivad nad ka kõikides teistes unitaarselt ekvivalentsetes esitustes.

Tõepoolest, olgu

$$\gamma'_\mu = U^+ \gamma_\mu U , \qquad (C.31)$$

kus U on unitaarmaatriks $U^+U = UU^+ = I$.

Kehtigu koos valemiga (C.22) ka valem

$$\gamma'_\mu C' = -C' \tilde{\gamma}'_\mu . \qquad (C.22')$$

Kui avaldame γ'_μ vastavalt valemile (C.31), saame

$$U^+ \gamma_\mu U C' = -C' \tilde{U} \tilde{\gamma}_\mu \tilde{U}^+ , \quad \gamma_\mu U C' \tilde{U} = -U C' \tilde{U} \tilde{\gamma}_\mu .$$

Võrdlus tingimusega (C.22) annab

$$C = U C' \tilde{U} ; \qquad C' = U^+ C U^* . \qquad (C.32)$$

Kasutades U unitaarsust, veendume nüüd vahetult, et valemeist (C.23, 24) järgnevad

$$C'^{+}\, C' = I\,; \qquad (C.23')$$

$$C'^{*}\, C' = -I. \qquad (C.24')$$

Valemite (C.22, 23, 24) kehtivust näitame esituses, kus (vt. val. (6.5, 6))

$$\gamma_\kappa = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_\kappa \\ i\sigma_\kappa & 0 \end{pmatrix}; \quad (\kappa = 1,2,3) \qquad \gamma_4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \qquad (C.33)$$

ning

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (C.34)$$

(Kontrollige vahetu arvutusega!)

Valemitest (C.25, 30, 23) tulenevad seosed

$$\bar{\psi}(x) = C^{+}\psi^{c}(x)\,; \qquad \psi(x) = C\,\bar{\psi}^{c}(x)\,. \qquad (C.35)$$

Neid seoseid ja (C.23, 24) kasutades saame arvutada

$$\underline{\bar{\psi}\psi} \equiv \bar{\psi}_\alpha \psi_\alpha = C^{+}_{\alpha\rho}\psi^{c}_{\rho} C_{\alpha\sigma}\bar{\psi}^{c}_{\sigma} = \psi^{c}_{\rho}\tilde{C}^{+}_{\rho\alpha} C_{\alpha\sigma}\bar{\psi}^{c}_{\sigma} =$$

$$= \psi^{c}_{\rho} C^{*}_{\rho\alpha} C_{\alpha\sigma}\bar{\psi}^{c}_{\sigma} = -\psi^{c}_{\rho}\delta_{\rho\sigma}\bar{\psi}^{c}_{\sigma} = \underline{-\bar{\psi}^{c}\bar{\psi}^{c}} \qquad (C.36)$$

ja

$$\underline{\bar{\psi}\gamma_\mu\psi} \equiv \bar{\psi}_\alpha \gamma_{\mu,\alpha\rho}\psi_\rho = C^{+}_{\alpha\sigma}\gamma_{\mu,\alpha\rho} C_{\rho\sigma}\psi^{c}_{\tau}\bar{\psi}^{c}_{\sigma} =$$

$$= -C^{+}_{\alpha\sigma} C_{\alpha\rho}\tilde{\gamma}_{\mu,\rho\sigma}\psi^{c}_{\sigma}\bar{\psi}^{c}_{\sigma} = -C^{*}_{\sigma\alpha} C_{\alpha\rho}\tilde{\gamma}_{\mu,\rho\sigma}\psi^{c}_{\tau}\bar{\psi}^{c}_{\sigma} =$$

$$= \tilde{\gamma}_{\mu,\tau\sigma}\psi^{c}_{\tau}\bar{\psi}^{c}_{\sigma} = \underline{\psi^{c}\tilde{\gamma}_\mu\bar{\psi}^{c}}\,. \qquad (C.37)$$

5. S-maatriksi elementide ja eriti tõenäosuste arvutamisel puutume kokku vajadusega arvutada γ-maatriksite jälgi. Definitsiooni kohaselt

$$Sp\, A \equiv \sum_{\alpha} A_{\alpha\alpha} \qquad (C.38)$$

ning sel on omadused

$$Sp[aA+bB] = a\,Sp\,A + b\,Sp\,B\,;\quad Sp[U^{-1}AU] = Sp\,A,$$
$$Sp[A_1A_2\cdots A_n] = Sp\,[A_nA_1A_2\cdots A_{n-1}]\,. \qquad (C.39)$$

Konkreetset esitust (C.33) ning omadusi (C.39) kasutades veendume vahetult, et

$$Sp\,(\gamma_\mu) = 0\,. \quad (\mu = 1,2,3,4) \qquad (C.40)$$

Valemist

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}\,I$$

ja tsüklilisuse omadusest $Sp(\gamma_\mu\gamma_\nu) = Sp(\gamma_\nu\gamma_\mu)$, $[Sp\,I = 4]$ saame

$$Sp\,(\gamma_\mu\gamma_\nu) = 4\,\delta_{\mu\nu}\,. \qquad (C.41)$$

Kasutades tsüklilisuse omadust ja maatriksite antikommuteeruvust, saab näidata, et kõikide <u>paaritut arvu γ-maatrikseid sisaldavate korrutiste jälg on null</u>. Vaatleme näit. $\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho$, kus $\mu \neq \nu \neq \rho$ (vastasel korral taanduks korrutis ühele γ-le). Korrutame $\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho$ maatriksiga $\gamma_\delta\gamma_\delta = I$ (summeerimist ei ole!). Viime ühe γ_δ vasakule, kasutades kord tsüklilisuse omadust, kord tõstes teistest teguritest mööda (paaritu arv korda). Siis ühelt poolt

$$Sp(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho) = Sp(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\delta\gamma_\delta) = Sp\,(\gamma_\delta\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\delta),$$

teiselt poolt

$$Sp(\delta_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \delta_\sigma) = -Sp(\delta_\sigma \delta_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma), \qquad [\sigma \neq \{^{\mu}_{\nu\ \rho}\}],$$

mis saab kehtida vaid siis, kui $Sp(\delta_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho) = 0$. $Sp(\delta_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma)$ saame antikommutatsiooni-seoseid kasutades taandada $Sp(\delta_\mu \gamma_\nu)$ arvutamisele:

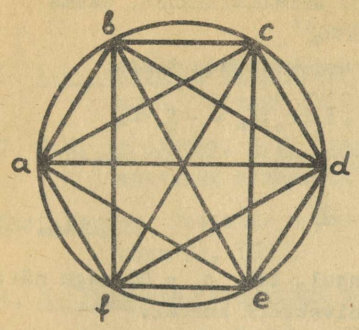
$$Sp(\delta_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) = \delta_{\rho\sigma} Sp(\delta_\mu \gamma_\nu) - \delta_{\nu\sigma} Sp(\delta_\mu \gamma_\rho) + \delta_{\mu\sigma} Sp(\delta_\nu \gamma_\rho) =$$

$$= 4\{\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma} - \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}\}. \qquad (C.42)$$

Valemeid (C.41; 42) saab üldistada ka n γ-maatriksi juhule, kus n on paarisarv (vt. [1] lk. 92). Kui (C.41) või (C.42) jagame 4-ga (neljandat järku ühikmaatriksi jäljega), jäävad valemite paremale poolele Kroneckeri sümbolite korrutised märgiga (+) või (-). Neid korrutisi on nii palju, kui mitut viisi on võimalik kõiki γ-maatrikseid paarikaupa ühendada, kusjuures maatriksite järjestus paaris ei ole oluline. Kuna n maatriksist saame n/2 paari, kusjuures ka paaride permuteerimine uusi liikmeid ei anna (Kroneckeri sümbolite järjestus korrutises võib olla milline tahes), saame n γ-maatriksi jäljes sisalduvate Kroneckeri korrutiste arvu N :

$$N = \frac{n!}{2^{n/2}\left(\frac{n}{2}\right)!} . \qquad (C.43)$$

Iga korrutise märk on määratav empiirilise reegli abil (mis on tuletatav γ-maatriksite antikommutatsiooniseoskirjadest). Seame igale γ-maatriksile vastavusse punkti mõnesugusel ringjoonel ja järjestame need punktid kooskõlas γ-maatriksite järjestusega jäljes (vt. joon. 17). Ühendame punktid omavahel kõõludega igal viisil. Igale omavahel niimoodi ühendatud punktipaarile vastab Kro-



Joon. 17.

neckeri sümbol. Joonisel 17 esitatud 6 punkti võime ühendada 3-ks paariks ja erinevaid paaride kombinatsioone saada (kooskõlas valemiga (C.43)) kokku 15. Igale kombinatsioonile vastava δ -sümbolite korrutise märk määratakse järgmiselt. Kui vastava kombinatsiooni puhul punkte ühendavad jooned lõikuvad omavahel P punktis, siis selle δ -sümbolite korrutise ette tuleb märk $(-1)^P$.

Nii saame üldiselt valemi

$$\frac{1}{4} Sp(\gamma_a \gamma_b \gamma_c \gamma_d \dots) = \sum_P (-1)^P \delta_{ab} \delta_{cd} \dots \qquad (C.44)$$

(Summeeritud on üle kõikide kombinatsioonide.)

Näit. joonisele 17 vastava 6 maatriksi korral tuleb δ -sümbolite korrutis $\delta_{ab} \delta_{cf} \delta_{de}$ (+)-märgiga, sest punktipaare (a,b), (c,f) ja (d,e) ühendavad jooned ei lõikugi (P = 0). Samuti tuleb märgiga (+) liige $\delta_{ad} \delta_{bf} \delta_{ce}$, sest punktipaare (a,d), (b,f) ja (c,e) ühendavad kõõlud lõikuvad omavahel kahes punktis (P = 2). Seevastu korrutis $\delta_{ac} \delta_{bd} \delta_{ef}$ on (-)-märgiga, sest paare (a,c), (b,d) ja (e,f) ühendavad kõõlud lõikuvad ühes punktis (P = 1). Sama kehtib kombinatsiooni (a,d), (b,e), (c,f) kohta jne.

Lõpuks esitame mõned valemid γ-maatriksite ja 4-vektorite "skalaarkorrutiste" $\hat{a}$, $\hat{b}$, ... kohta, kus

$$\hat{a} \equiv \gamma_\mu a_\mu = \gamma_m a_m + i \gamma_4 a_0 . \qquad (C.45)$$

Arvestades γ-maatriksite hermiitilisust, saame

$$\hat{a}^+ = \gamma_\mu a_\mu - i\gamma_4 a_0 ,$$

millest γ-maatriksite vahetuseeskirjade tõttu

$$\bar{a} \equiv \gamma_4 \hat{a}^+ \gamma_4 = \gamma_4 (\gamma_\mu a_\mu - i\gamma_4 a_0)\gamma_4 = -\gamma_\mu a_\mu$$

ehk

$$\bar{a} \equiv \gamma_4 \hat{a}^+ \gamma_4 = -\hat{a} . \qquad (C.46)$$

See valem kehtib ka erijuhul, kui $a_0 = 0$, nagu näit. reaalse footoni polarisatsioonivektori korral.

Kuna

$$(\hat{a}\hat{b}\hat{c})^+ = \hat{c}^+ \hat{b}^+ \hat{a}^+ ,$$

siis

$$\overline{abc} = \gamma_4 \hat{c}^+ \gamma_4 \gamma_4 \hat{b}^+ \gamma_4 \gamma_4 \hat{a}^+ \gamma_4 = (-\hat{c})(-\hat{b})(-\hat{a}) . \qquad (C.47)$$

Definitsioonist (C.45) järeldub, et

$$\hat{a}\hat{b} + \hat{b}\hat{a} = a_\mu b_\nu (\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu) = 2\delta_{\mu\nu} a_\mu b_\nu = \qquad (C.48)$$
$$= 2a_\mu b_\mu = 2(ab) .$$

Jälgede arvutamisel kasutame otseselt valemeid (C.41 - 44). Nii saame näit.

$$Sp(\hat{a}\hat{b}) = a_\mu b_\nu Sp(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4 a_\mu b_\nu \delta_{\mu\nu} = 4(ab), \qquad (C.49)$$

$$Sp(\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}) = 4\{(ab)(cd) + (ad)(bc) - (ac)(bd)\} \qquad (C.50)$$

jne. S.t. iga Kroneckeri sümbol valemis (C.44) asendub tema indeksitele vastavate 4-vektorite skalaarkorrutisega.

Kirjandus.

I. А.И. Ахиезер, В.Б. Берестецкий. Квантовая электродинамика. "Наука", I969.

2. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Широков. Введение в теорию квантованных полей. ГИТТЛ, I957.

3. С.Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля ИЛ, I963.

4. Х. Умэдзава, Квантовая теория поля. ИЛ, I958.

5. Р. Стритер, А. Вайтман. РСТ, спин и статистика и все такое. "Наука", I966.

6. Э. Хенли, В. Тирринг. Элементарная квантовая теория поля. ИЛ, I963.

7. В.Е. Тирринг. Принципы квантовой электродинамики. "Высшая школа", I964.

8. Р. Фейнман. Квантовая электродинамика. "Мир", I964.

9. Р. Йост. Общая теория квантованных полей. "Мир", I967.

I0. Я.И. Грановский. Дисперсионная теория взаимодействия элементарных частиц. ТГУ, Тарту, I966.

II. И.М. Гельфанд, Р.А. Минлос, З.Я. Шапиро. Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. Физматгиз, I958.

I2. Ричард Фейнман. Характер физических законов. "Мир", I968.

I3. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Квантовая механика. Физматгиз, I963.

I4. В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, А.П. Питаевский. Релятивистская квантовая теория, часть I, "Наука", I968.

S i s u k o r d .

Eessõna 3
Tähistused ja ühikud 5
I. Vaba välja kvantteooria 8

1. Lagrange'i formalism klassikalises väljateoorias 8
2. Noetheri teoreem 13
3. Kvantiseerimata välja liikumisintegraalid 17
4. Välja kvantiseerimine 21
5. Skalaarväli 26
6. Elektron-positronväli. Dirac'i võrrand .. 38
7. Elektron-positronväli. Lagrange'i formalism ja kvantiseerimine 50
8. Elektromagnetväli. Kvantiseerimine 61

II. Interageerivad väljad.

9. Operaatorpotentsiaalide liikumisvõrrandid 75
10. S-maatriksi definitsioon 87
11. S-maatriksi elementide füüsikaline tähendus ja arvutamine 107
12. S-maatriks impulssesituses. Efektiivsed ristlõiked 134
13. S-maatriksi sümmeetria jm. omadused ... 150
14. Kõrgemat järku protsessid. Renormeerimine 176
15. Üldine väljade kvantiseerimise skeem. Seos spinni ja statistika vahel 192

Lisa.

A. Väljateooria singulaarsed funktsioonid 200
B. Operaatorite normaal- ja kronoloogilised korrutised 205
C. Dirac'i võrrandi lahendite omadusi 214
Kirjandus 228

Hind 50 kop.

A
30608
S125671