Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Lota Otsus

Volterra teist liiki integraalvõrrandi lahendamine lineaarsplainidega kollokatsioonimeetodil

Matemaatika

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: prof. Arvet Pedas

Tartu 2024

VOLTERRA TEIST LIIKI INTEGRAALVÕRRANDI LAHENDAMINE LINEAARSPLAINIDEGA KOLLOKATSIOONIMEETODIL

Bakalaureusetöö

Lota Otsus

Lühikokkuvõte

Käesolevas bakalaureusetöös vaadeldakse interpoleerimist pidevate lineaarsplainidega ning lineaarse teist liiki Volterra integraalvõrrandi ligikaudset lahendamist splain-kollokatsioonimeetodiga. Käsitletakse nii pideva tuumaga kui ka nõrgalt singulaarse tuumaga integraalvõrrandite lahendamist. Töö eesmärgiks on uurida esitatud meetodi koonduvust ning saadud numbriliste tulemuste vastavust teooriale.

CERCS teaduseriala: P130 Funktsioonid, diferentsiaalvõrrandid.

Märksõnad: splain, Volterra integraalvõrrand, nõrgalt singulaarne tuum, kollokatsioonimeetod.

LINEAR SPLINE COLLOCATION METHOD FOR SOLVING VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS OF THE SECOND KIND

Bachelor thesis

Lota Otsus

Abstract

In the present bachelor's thesis the interpolation by continuous linear splines and finding an approximate solution for Volterra integral equations of the second kind with collocation method is described. The case of both Volterra integral equations with continuous kernels and weakly singular kernels are analyzed. The purpose of this thesis is to study convergence and the convergence rate of the proposed method and its correspondence to theory.

CERCS research specialisation: P130 Funktsioonid, differential equations.

Key Words: spline, Volterra integral equations, weakly singular kernel, collocation method.

Sisukord

Sissejuhatus

Käesolevas töös vaatleme integraalvõrrandit kujul

$$u(x) = \int_a^x (x-y)^{-\alpha} K(x,y)u(y)dy + f(x), \quad x \in [a,b], \tag{0.1}$$

kus K ja f on antud funktsioonid, $\alpha \in [0,1)$ on antud arv ja u otsitav funktsioon. Sellist võrrandit nimetatakse lineaarseks Volterra II liiki integraalvõrrandiks: liiget $(x-y)^{-\alpha}K(x,y)$ nimetatakse võrrandi tuumaks ja funktsiooni f nimetatakse vabaliikmeks. Juhul $\alpha \in (0,1)$ nimetatakse võrrandit (0.1) nõrgalt singulaarse tuumaga Volterra integraalvõrrandiks.

Funktsiooni K ja vabaliikme f kohta eeldatakse, et nad on pidevad funktsioonid vastavalt piirkonnas $a \leqslant y \leqslant x \leqslant b$ ja lõigul $[a,b]$. Sellisel juhul võrrandil (0.1) on olemas parajasti üks lahend $u(x)$, mis on pidev, kui $x \in [a,b]$ (vt teoreemi 5). Töös vaadeldakse võrrandi (0.1) ligikaudset lahendamist kollokatsioonimeetodiga, mis tugineb võrrandi lahendi u lähendamisele võrgul $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ antud pidevate lineaarsplainidega u_n. Meid huvitab, millistel tingimustel viga $u_n - u$ väheneb, kui võrgupunktide arv kasvab ning kuidas iseloomustada vea $u_n - u$ suurust (vt teoreeme 9 ja 10).

Bakalaureusetöö koosneb kuuest osast. Esimeses osas tuuakse sisse vajalikud tähistused ning tähtsamad abitulemused, mida töös kasutatakse. Teises osas käsitletakse lõigul $[a,b]$ antud funktsiooni interpoleerimist lineaarsplainidega. Töö kolmandas osas vaadeldakse võrrandi (0.1) lahendi olemasolu ja lahendi siledust. Neljandas osas käsitletakse võrrandi (0.1) ligikaudset lahendamist pidevate lineaarsplainidega kollokatsioonimeetodi abil ning uuritakse kollokatsioonimeetodil saadud lähislahendite koonduvust ja koonduvuskiirust. Selles esitatakse ka käesoleva töö põhitulemused. Viiendas osas rakendatakse vaadeldud meetodit selliste integraalvõrrandite ligikaudsel lahendamisel, mille lahend on teada. Kuuendas osas tuuakse praktiliste tulemuste saamiseks vajalik programm, mis on kirjutatud programmeerimiskeeles Python. Lisaks antakse ka selle programmi selgitus.

1 Tähistused ja abitulemused

Selles peatükis toome sisse vajalikud tähised ning tulemused, mida töös kasutatakse.

1.1 Tähistused

Edaspidi tähistame

1) naturaalarvude hulka kirjutisega $\mathbb{N}$,

2) reaalarvude hulka kirjutisega $\mathbb{R}$,

3) funktsiooni $f = f(x, y)$ esimest järku osatuletist muutuja x järgi kas kirjutisega $\frac{\partial}{\partial x} f$ või kirjutisega f'_x,

4) funktsiooni $f = f(x, y)$ teist järku osatuletist muutuja x järgi kas kirjutisega $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f$ või kirjutisega f''_x,

5) lõigul $[a, b]$ pidevate funktsioonide $g = g(x)$ ruumi kirjutisega $C[a, b]$,

6) lõigul $[a, b]$ k korda pidevalt diferentseeruvate funktsioonide $g = g(x)$ ruumi kirjutisega $C^k[a, b]$, kus $k \in \mathbb{N}$,

7) piirkonnas $Q = \{(x, y) : \ a \leqslant y \leqslant x \leqslant b\}$ pidevate funktsioonide ruumi kirjutisega $C(Q)$,

8) Euleri gammafunktsiooni $\Gamma = \Gamma(a)$ seosega

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx, \quad a > 0,$$

9) Euleri beetafunktsiooni $B = B(a, b)$ seosega

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1 - x)^{b-1} dx, \quad a > 0,\ b > 0,$$

10) pidevate lineaarsete operaatorite $A : X \to Y$ ruumi kirjutisega $L(X, Y)$ ja normiga $||A||_{L(X,Y)} = \min\{M : \ ||Au||_Y \leqslant M||u||_X \ \ \forall u \in C[a, b]\}$, kus X, Y Banachi ruumid.

Osutub, et (vt [2], lk 246-249)

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \quad a > 0, b > 0.$$

1.2 Abitulemused

Teoreem 1. *Olgu $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Olgu $f(x,y)$ ja tema osatuletis $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ pidevad funktsioonid piirkonnas $Q = \{(x,y) : a \leqslant y \leqslant x \leqslant b\}$. Olgu*

$$F(x) = \int_a^x f(x,y)dy, \quad x \in [a,b].$$

Siis funktsioon F on diferentseeruv lõigul $[a,b]$, kusjuures

$$F'(x) = \int_a^x f_x(x,y)dy + f(x,x), \quad x \in [a,b].$$

Eelneva teoreemi tõestus on leitav raamatust [4] lehekülgedel 236-237.

Teoreem 2. *(Lagrange'i keskväärtusteoreem) Olgu $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a < b$. Kui f on pidev funktsioon lõigus $[a,b]$ ja diferentseeruv vahemikus (a,b), siis leidub selline punkt $c \in (a,b)$ nii, et*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Lagrange'i keskväärtusteoreemi tõestus on leitav raamatust [7] leheküljel 127.

Lemma 1. *Kui $f \in C^2[a,b]$ ja $P = P(x)$ on funktsiooni f väärtusi $f(x_1), f(x_2)$ $(x_1, x_2 \in [a,b])$ interpoleeriv lineaarne polünoom, siis leidub selline $\xi \in (a,b)$, et*

$$f(x) - P(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-x_1)(x-x_2), \quad x \in [a,b].$$

Eelneva lemma tõestus on leitav raamatust [3] lehekülgedel 16-17.

Teoreem 3. *(Banach-Steinhausi teoreem) Olgu X,Y Banachi ruumd ja X_1 põhihulk ruumis X. Jada $A_n \in L(X,Y)$ koondub punktiviisi operaatoriks $A \in L(X,Y)$ parajasti siis, kui on täidetud järgmised tingimused:*

1) $\exists M \in \mathbb{R}, \quad ||A_n||_{L(X,Y)} \leqslant M \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

2) $A_n x \to Ax \quad \forall x \in X_1$.

Teoreemi 3 tõestuse võib leida raamatust [2] leheküljelt 137.

Teoreem 4. *Olgu T lineaarne täielikult pidev operaator Banachi ruumis E. Homogeensel võrrandil $v = Tv$ olgu vaid null-lahend $v = 0$. Projektorid P_n koondugu $n \to \infty$ punktiviisi ühikoperaatoriks: $P_n u \to u$, kui $n \to \infty$ $\forall u \in E$, s.t*

$$||P_n u - u||_E \to 0, \quad kui \quad n \to \infty \quad \forall u \in E.$$

Siis võrrand

$$u = Tu + f \tag{1.1}$$

on iga $f \in E$ korral üheselt lahenduv ning leidub selline n_0, et $n \geqslant n_0$ korral on ka võrrandid

$$u_n = P_n T u_n + P_n f \quad (n = 1, 2, ...) \tag{1.2}$$

üheselt lahenduvad. Võrrandite (1.2) lahendid u_n koonduvad $n \to \infty$ korral võrrandi (1.1) lahendiks u. Kehtib veahinnang

$$||u_n - u||_E \leqslant c||u - P_n u||_E, \quad n \geqslant n_0, \tag{1.3}$$

kus konstant c ei sõltu suurusest n ega vabaliikmest f.

Üleminekut võrrandilt (1.1) võrrandile (1.2) nimetatakse Galjorkini meetodiks. Eelneva teoreemi tõestuse võib leida raamatust [5] leheküljelt 59.

2 Splainid

2.1 Võrk

Olgu $n \in \mathbb{N}$. Vaatleme lõiku $[a, b]$, kus $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$. Moodustame punktihulga

$$\Delta_n = \{x_0, x_1, ..., x_n :\ a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}. \tag{2.1}$$

Hulka $\Delta_n = \Delta_{n,a,b}$ nimetatakse lõigul $[a, b]$ antud võrguks. Võrk Δ_n jaotab lõigu $[a, b]$ n osalõiguks $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, ..., n)$:

$$[a, b] = \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i].$$

Võrgu Δ_n põhjal moodustame osalõikude pikkused $x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, ..., n)$ ja tähistame maksimaalse osalõigu pikkuse tähega h_n:

$$h_n = \max_{i=1,...,n} (x_i - x_{i-1}).$$

Edaspidi eeldame, et

$$h_n \to 0, \quad kui \quad n \to \infty. \tag{2.2}$$

Kui iga osalõigu $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, ..., n)$ pikkuseks on $h = \dfrac{b-a}{n}$, siis

$$h_n = h = \frac{b-a}{n}$$

ja

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, ..., n.$$

Sellist võrku nimetatakse ühtlaseks võrguks lõigul $[a, b]$.

Vaatleme lõigul $[a, b]$ ka erikujulist võrku punktidega $x_0, ..., x_n$, kus

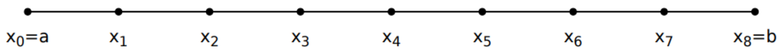
$$x_i = (b-a)\left(\frac{i}{n}\right)^r + a,\ i = 0, 1, ..., n. \tag{2.3}$$

Siin $r \in [1, \infty)$ on võrgu ebaühtlust näitav parameeter. Sellist võrku nimetatakse gradueeritud võrguks lõigul $[a, b]$. Märgime, et juhul $r = 1$ saame ühtlase võrgu.

Näiteks, kui $r = 1$ ja $n = 8$, siis jaotuvad sõlmed

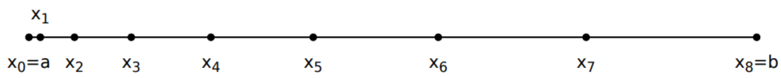
$$x_i = (b-a)\Big(\frac{i}{n}\Big) + a = a + ih \quad (i = 0, ..., 8)$$

lõigul $[a, b]$ ühtlaselt (vt joonist 1).



Joonis 1: Sõlmede jaotus $r = 1$ ja $n = 8$ korral.

Juhul $r > 1$ paiknevad võrgu (2.3) punktid tihedamalt lõigu $[a, b]$ vasakpoolse otspunkti ümbruses (vt joonist 2).



Joonis 2: Sõlmede jaotus $r = 2$ korral.

Osutub, et võrgu Δ_n sõlmede (2.3) korral on võrgu tingimus (2.2) täidetud. Tõepoolest, sõlmede (2.3) korral

$$\begin{aligned} x_i - x_{i-1} &= (b-a)\left[\Big(\frac{i}{n}\Big)^r - \Big(\frac{i-1}{n}\Big)^r\right] = (b-a)\Big(\frac{1}{n}\Big)^r\Big[i^r - (i-1)^r\Big] \\ &\leqslant (b-a)\Big(\frac{1}{n}\Big)^r rn^{n-1} = (b-a)rn^{-1}, \quad i = 1, ..., n. \end{aligned}$$

Seega

$$h_n = \max_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i - x_{i-1}) \leqslant (b-a)r\frac{1}{n} \to 0, \quad kui \quad n \to \infty.$$

2.2 Splaini definitsioon

Vaatleme lõiku $[a, b]$, millel on defineeritud võrk Δ_n seosega (2.1).

Definitsioon 1. *Olgu $n, m \in \mathbb{N}$ mingid konstandid. Võrgule Δ_n vastavaks $m-$järku splainiks, edaspidi lühidalt ka splainiks, nimetatakse funktsiooni $S_m = S_{m,\Delta_n}(x)$, mis*

1) igal osalõigul $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, .., n)$ on ülimalt m-astme polünoom, s.t

$$S_m(x) = a_{0,i-1} + a_{1,i-1}x + a_{2,i-1}x^2 + ... + a_{m,i-1}x^m, \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \tag{2.4}$$

kus $a_{j,i-1}$ $(i = 1, ..., n;\ j = 0, ..., m)$ on mingid konstandid;

2) on $m-1$ korda pidevalt diferentseeruv lõigul $[a, b]$ ehk $S_m \in C^{m-1}[a, b]$.

Edaspidi nimetame splainiga S_m seotud võrgu Δ_n punkte x_i $(i = 0, ..., n)$ splaini S_m sõlmedeks.

Definitsioonist 1 järeldub, et vabade parameetrite arv, millest splain S_m sõltub, on $n + m$. Tõepoolest, tingimusest 1) näeme, et m-järku splaini S_m määravaid parameetreid $a_{j,i-1}$ on kokku $(m + 1) \times n$ tükki. Tingimus 2) aga määrab splainile S_m igas sisesõlmes $x_1, x_2, .., x_{n-1}$ m kitsendavat tingimust

$$S_m, S'_m, ..., S_m^{(m-1)} \in C[a, b].$$

Kokku oleme saanud $(n - 1) \times m$ tingimust, mis kitsendavad polünoomi (2.4) kordajate $a_{j,i-1}$ $(i = 1, ..., n;\ j = 0, ..., m)$ valikut. Järelikult on vabu parameetreid

$$(m + 1)n - (n - 1)m = n + m.$$

Splaini S_m määravate parameetrite leidmisel lähtutakse sageli tingimustest, et S_m interpoleerib võrgul Δ_n etteantud funktsiooni $f = f(x)$ väärtusi $f_i = f(x_i)$:

$$S_m(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, ..., n. \tag{2.5}$$

Tingimusi (2.5) nimetatakse interpolatsioonitingimusteks ja splaini S_m, mis rahuldab tingimusi (2.5), nimetatakse väärtusi $f_0, f_1, ..., f_n$ interpoleerivaks splainiks.

Juhul $m = 1$ määravad tingimused (2.5) splaini S_1 üheselt ja sel juhul nimetatakse splaini S_1 interpoleerivaks lineaarsplainiks. Juhul $m \geq 2$ on tarvis splainide S_m määramiseks lisaks tingimustele (2.5) veel $m - 1$ lisatingimust. Käesolevas töös keskendutakse lineaarsplainidega interpoleerimisele. Edaspidi tähistame kõikide võrgule Δ_n vastavate lineaarsplainide hulga sümboliga $S(\Delta_n)$.

On lihtne näha, et $S(\Delta_n)$ on vektorruum: kui $S_1, S_1^* \in S(\Delta_n)$, siis ilmselt $S_1 + S_1^* \in S(\Delta_n)$ ning $\lambda \in \mathbb{R}$ korral ka $\lambda S_1 \in S(\Delta_n)$. Veelgi enam, eespool toodud arutelust järeldub, et $S(\Delta_n)$ on lõplikumõõtmeline vektorruum, mille dimensioon on $n+1$.

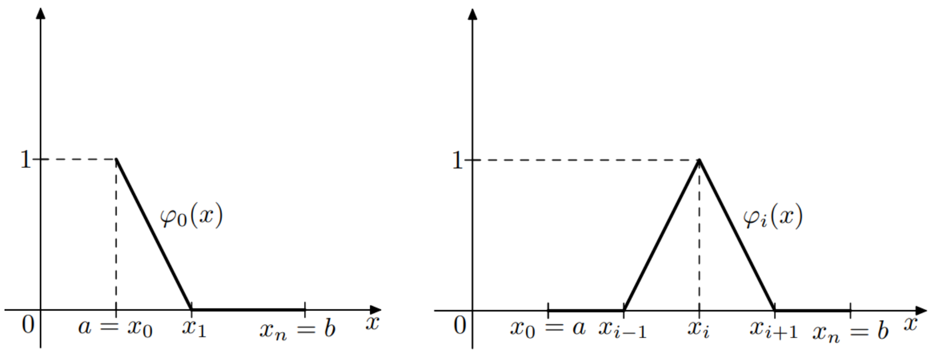
2.3 Lineaarsed baassplainid

Olgu lõigul $[a,b]$ antud võrk Δ_n (vt (2.1)). Defineerime võrgule Δ_n vastavad funktsioonid $\varphi_0, ..., \varphi_n$ järgnevalt:

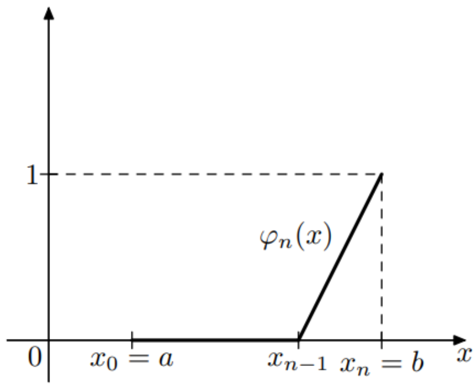
$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_0}, & x \in [x_0, x_1], \\ 0, & x \in (x_1, x_n], \end{cases} \qquad \varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}, & x \in [x_{n-1}, x_n], \\ 0, & x \in [x_0, x_{n-1}), \end{cases} \tag{2.6}$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, ..., n-1, \\ 0, & x \in [x_0, x_{i-1}) \cup (x_{i+1}, x_n]. \end{cases} \tag{2.7}$$

Selliselt defineeritud funktsioonid φ_i $(i = 0, ..., n)$ on esimese astme polünoomid igas osalõigus $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, ..., n)$ ning ka pidevad kogu lõigul $[a,b]$. Seega $\varphi_i \in S(\Delta_n)$ $(i = 0, ..., n)$. Splainide φ_0, φ_i $(i = 1, ..., n-1)$ ja φ_n esitused on toodud joonisel 3 ja joonisel 4.



Joonis 3: Splainide φ_0 ja φ_i $(i = 1, ..., n-1)$ esitus.



Joonis 4: Splaini φ_n esitus.

Splainide φ_i $(i = 0, ..., n)$ väärtused sõlmedes x_j $(j = 0, ..., n)$ avalduvad kujul

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{2.8}$$

Tõepoolest, kui $i = j$, siis $\varphi_i(x_j) = 1$ $(i, j = 0, ..., n)$. Kui aga $j \neq i$ ja $i = 0$, siis

$$\varphi_0(x_j) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x_j}{x_1 - x_0}, & x_j \in [x_0, x_1], \\ 0, & x_j \in (x_1, x_n]. \end{cases}$$

Kuna $j \neq i$, siis $x_j \neq x_0$. Kui $j = 1$, saame $\varphi_0(x_1) = 0$. Analoogiliselt jätkates saame omaduse (2.8) kehtivuse.

Tõestame järgmise lemma, mis kirjeldab splainide φ_i $(i = 0, ..., n)$ lineaarset sõltumatust lõigul $[a, b]$.

Lemma 2. *Valemitega (2.6) ja (2.7) defineeritud funktsioonid $\varphi_0(x), ..., \varphi_n(x)$ on lineaarselt sõltumatud lõigul $[a, b]$, s.t nad moodustavad baasi ruumis $S(\Delta_n)$.*

Tõestus. Näitame, et kui

$$a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + ... + a_n\varphi_n(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b], \tag{2.9}$$

siis

$$a_0 = a_1 = ... = a_{n-1} = a_n = 0.$$

Võttes seoses (2.9) argumendi x väärtuseks $x = x_0$, saame seose (2.8) põhjal

$$a_0 \cdot 1 + 0 + ... + 0 = 0$$

ehk $a_0 = 0$. Analoogiliselt, võttes seoses (2.9) $x = x_i$ $(i = 1, ..., n)$, saame vastavalt $a_i = 0$ $(i = 1, ..., n)$. Seega oleme näidanud, et kui kehtib (2.9), siis

$$a_0 = a_1 = ... = a_n = 0,$$

ehk funktsioonid $\varphi_i(x)$ $(i = 0, ..., n)$ on lineaarselt sõltumatud lõigul $[a, b]$. $\square$

Järelikult moodustavad funktsioonid φ_i $(i = 0, ..., n)$ baasi ruumis $S(\Delta_n)$ ja iga splaini $S_1 \in S(\Delta_n)$ saab esitada baasielementide lineaarkombinatsioonina kujul

$$S_1(x) = a_0\varphi_0(x) + ... + a_n\varphi_n(x), \quad x \in [a, b],$$

kus $a_0, ..., a_n$ on splaini $S_1 \in S(\Delta_n)$ määravad konstandid. Võrdustega (2.6)-(2.7) antud funktsioone φ_i $(i = 0, ..., n)$ nimetatakse lineaarseteks baassplainideks.

2.4 Interpoleerimine lineaarsplainidega

Olgu funktsioon $f = f(x)$ pidev lõigul $[a, b]$ ja olgu lõigul $[a, b]$ defineeritud võrk Δ_n sõlmedega $x_0, ..., x_n$. Esitame igas osalõigus $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, ..., n)$ interpolatsioonitingimusi $S_1(x_i) = f(x_i)$ ja $S_1(x_{i-1}) = f(x_{i-1})$ rahuldava funktsiooni S_1 järgmiselt:

$$S_1(x) = f(x_{i-1})\frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + f(x_i)\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad i = 1, ..., n. \tag{2.10}$$

Ilmselt on funktsioon (2.10) lineaarne. Osutub, et ta on ka pidev lõigul $[a, b]$. See aga järeldub asjaolust, et S_1 on igas sisesõlmes x_i $(i = 1, ..., n-1)$ pidev, s.t

$$\lim_{\substack{x \to x_i \\ x \leqslant x_i}} S_1(x) = f_i = \lim_{\substack{x \to x_i \\ x_i \leqslant x}} S_1(x), \quad i = 1, ..., n-1.$$

Seega $S_1 \in S(\Delta_n)$. Sõnastame ja tõestame järgmise lemma.

Lemma 3. *Olgu $n \in \mathbb{N}$ ja lõigul $[a,b]$ defineeritud võrk Δ_n. Olgu $f \in C[a,b]$ ja olgu $S_1 = S_{1,\Delta_n,f} \in S(\Delta_n)$ interpolatsioonitingimusi $S_1(x_i) = f(x_i)$ $(i = 0,...,n)$ rahuldav lineaarsplain. Siis kehtivad järgmised hinnangud:*

1) kui $f \in C^1[a,b]$, siis

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - S_1(x)| \leqslant \frac{h_n}{2} \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|; \tag{2.11}$$

2) kui $f \in C^2[a,b]$, siis

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - S_1(x)| \leqslant \frac{h_n^2}{8} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|, \tag{2.12}$$

kus h_n on defineeritud võrdusega (2.1).

Tõestus. Olgu $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1,...,n)$, $f \in C^1[a,b]$ ja $S_1 \in S(\Delta_n)$ interpolatsioonitingimusi $S_1(x_i) = f(x_i)$ $(i = 0,...,n)$ rahuldav lineaarsplain. Siis:

$$f(x) - S_1(x) = f(x)\Big(\frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\Big) - S_1(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

ehk igas osalõigus $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1,...,n)$

$$f(x) - S_1(x) = \big(f(x) - f(x_{i-1})\big)\frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + \big(f(x) - f(x_i)\big)\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}. \tag{2.13}$$

Teoreemi 2 põhjal leiduvad sellised $\xi \in (x_{i-1}, x)$, $\eta \in (x, x_i)$, et

$$f(x) - f(x_{i-1}) = f'(\xi)(x - x_{i-1}), \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \tag{2.14}$$

ja

$$f(x_i) - f(x) = f'(\eta)(x_i - x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i]. \tag{2.15}$$

Asendades seosed (2.14)-(2.15) seosesse (2.13), on tulemuseks

$$f(x) - S_1(x) = f'(\xi)\frac{(x - x_{i-1})(x_i - x)}{x_i - x_{i-1}} - f'(\eta)\frac{(x_i - x)(x - x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

ehk

$$f(x) - S_1(x) = \Big(f'(\xi) - f'(\eta)\Big)\frac{(x - x_{i-1})(x_i - x)}{x_i - x_{i-1}},$$

kus $\xi \in (x_{i-1}, x)$, $\eta \in (x, x_i)$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, ..., n)$. Vaatleme igas osalõigus $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, ..., n)$ vahe absoluutväärtust

$$|f(x) - S_1(x)| = \Big|\Big(f'(\xi) - f'(\eta)\Big)\frac{(x - x_{i-1})(x_i - x)}{x_i - x_{i-1}}\Big|.$$

Kuna $f \in C^1[a, b]$, siis

$$\begin{aligned} |f(x) - S_1(x)| &\leqslant \big(|f'(\xi)| + |f'(\eta)|\big)\frac{(x - x_{i-1})(x_i - x)}{x_i - x_{i-1}} \\ &\leqslant 2\max_{x\in[a,b]}\big|f'(x)\big|\frac{(x - x_{i-1})(x_i - x)}{x_i - x_{i-1}}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i]. \end{aligned}$$

Seega kehtib hinnang

$$\max_{x\in[x_{i-1},x_i]}|f(x) - S_1(x)| \leqslant 2\max_{x\in[a,b]}\big|f'(x)\big|\max_{x\in[x_{i-1},x_i]}\frac{(x - x_{i-1})(x_i - x)}{x_i - x_{i-1}}.$$

On lihtne näha, et iga $i = 1, ..., n$ korral

$$\max_{x\in[x_{i-1},x_i]}\frac{(x - x_{i-1})(x_i - x)}{x_i - x_{i-1}} = \max_{x\in[x_{i-1},x_i]}\frac{1}{x_i - x_{i-1}} \cdot \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{4} = \frac{h_n}{4},$$

kus h_n on maksimaalse osalõigu $[x_{i-1}, x_i]$ pikkus.

Tõepoolest, kuna funktsiooni $z(x) = (x - x_{i-1})(x_i - x)$ korral $z'(x) = x_i + x_{i-1} - 2x$ ning tuletise väärtus lõigu $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, ..., n)$ otspunktides on võrdne nulliga, asub maksimaalne väärtus lõigu keskpunktis $\dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$. Järelikult kehtib hinnang

$$\max_{x\in[x_{i-1},x_i]}|f(x) - S_1(x)| \leqslant 2\max_{x\in[a,b]}\big|f'(x)\big|\frac{h_n}{4} = \frac{h_n}{2}\max_{x\in[a,b]}\big|f'(x)\big|.$$

Kuna võrratuse parem pool enam ei sõltu konkreetsest osalõigust, saame tulemuseks hinnangu tervel lõigul ehk kehtib (2.11).

Olgu $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, ..., n)$, $f \in C^2[a, b]$ ja $S_1 \in S(\Delta_n)$ interpolatsioonitingimusi $S_1(x_i) = f(x_i)$ $(i = 0, ..., n)$ rahuldav lineaarsplain. Kuna $f \in C^2[a, b]$, saab lemma 1 põhjal funktsiooni f ja tema väärtusi interpoleeriva splaini S_1 vahe esitada igal osalõigul $[x_{i-1}, x_i]$ kujul

$$f(x) - S_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_i)(x - x_{i-1}), \quad \xi \in (x_{i-1}, x_i), \quad x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Kuna $x \leqslant x_i$ $(i = 1, ..., n)$, siis

$$\begin{aligned}
\max_{x\in[x_{i-1},x_i]} |f(x) - S_1(x)| &= \max_{x\in[x_{i-1},x_i]} |\frac{f''(\xi)}{2}(x - x_i)(x - x_{i-1})| \\
&\leqslant \frac{1}{2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \max_{x\in[x_{i-1},x_i]} |(x - x_i)(x - x_{i-1})| \\
&= \frac{1}{2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \max_{x\in[x_{i-1},x_i]} (x_i - x)(x - x_{i-1}).
\end{aligned}$$

Esimese väite tõestuse põhjal saame hinnanguks

$$\begin{aligned}
\max_{x\in[x_{i-1},x_i]} |f(x) - S_1(x)| &\leqslant \frac{1}{2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \max_{x\in[x_{i-1},x_i]} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{4} \\
&= \frac{h_n^2}{8} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|,
\end{aligned}$$

kus h_n tähistab maksimaalse osalõigu $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, ..., n)$ pikkust. Saadud seose parem pool ei sõltu enam konkreetsest osalõigust, seega saame tulemuseks hinnangu kogu lõigul $[a, b]$ ehk kehtib hinnang (2.12). $\square$

3 Lahendi olemasolu, ühesus ja siledus

Vaatleme integraalvõrrandit (vt (0.1))

$$u(x) = \int_a^x (x-y)^{-\alpha} K(x,y) u(y) dy + f(x), \quad x \in [a,b]. \tag{3.1}$$

Võrrandi (3.1) lahendi olemasolu ja ühesuse kohta kehtib järgnev teoreem (vt. [6], lk 5 ja 22).

Teoreem 5. *Olgu* $\alpha \in [0,1)$. *Kui funktsioon* K *on pidev piirkonnas* $Q = \{(x,y) : \ a \leqslant y \leqslant x \leqslant b\}$ *ja* $f \in C[a,b]$, *siis võrrandil (3.1) on olemas ühene lahend* $u \in C[a,b]$.

Järgnevas iseloomustame võrrandi (3.1) lahendi siledust. Kui $\alpha = 0$, siis võrrandi (3.1) sileduse kohta kehtib järgmine teoreem.

Teoreem 6. *Olgu* $\alpha = 0$. *Siis kehtivad järgmised väited.*

1) *Kui* K *on üks kord pidevalt diferentseeruv piirkonnas* Q *ja* $f \in C^1[a,b]$, *siis võrrandi (3.1) lahend* u *on kuulub hulka* $C^1[a,b]$ *ning tema tuletis avaldub kujul*

$$u'(x) = \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} K(x,y) u(y) dy + K(x,x) u(x) + f'(x), \quad x \in [a,b]; \tag{3.2}$$

2) *kui* K *on kaks korda pidevalt diferentseeruv piirkonnas* Q *ja* $f \in C^2[a,b]$, *siis* $u \in C^2[a,b]$ *ning*

$$u''(x) = \int_a^x \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x,y) u(y) dy + 2K(x,x) u'(x) + 2u(x) K'_x(x,x) + f''(x), \tag{3.3}$$

kus $x \in [a,b]$.

Tõestus. Olgu K üks kord pidevalt diferentseeruv piirkonnas $Q = \{(x,y) : \ a \leqslant y \leqslant x \leqslant b\}$ ja $f \in C^1[a,b]$. Siis leidub võrrandi (3.1) paremast poolest tuletis muutuja x järgi, sest iga $x \in [a,b]$ korral saame teoreemi 1 põhjal kirjutada

$$\frac{d}{dx}\Big[\int_a^x K(x,y)u(y)dy + f(x)\Big] = \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} K(x,y) u(y) dy + K(x,x) u(x) + f'(x),$$

mis on pidev funktsioon lõigul $[a, b]$. Seega võrrandi (3.1) lahendil $u(x)$ leidub pidev tuletis lõigul $[a, b]$, s.t kehtib võrdus (3.2) ja $u' \in C[a, b]$.

Oletame nüüd, et K on kaks korda pidevalt diferentseeruv piirkonnas Q ja $f \in C^2[a, b]$. Tõestuse esimese osa põhjal $u \in C^1[a, b]$. Siis leidub võrrandi (3.2) paremast poolest tuletis muutuja x järgi, sest iga $x \in [a, b]$ korral saame teoreemi 1 põhjal kirjutada

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left[\int_a^x \frac{\partial}{\partial x} K(x,y)u(y)dy + K(x,x)u(x) + f'(x)\right] \\
&= \frac{d}{dx}\left[\int_a^x \frac{\partial}{\partial x} K(x,y)u(y)dy\right] + K'_x(x,x)u(x) + K(x,x)u'(x) + f''(x) \\
&= \int_a^x \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x,y)u(y)dy + (K(x,x)u(x))'_x + K'_x(x,x)u(x) + K(x,x)u'(x) + f''(x) \\
&= \int_a^x \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x,y)u(y)dy + 2K'_x(x,x)u(x) + 2K(x,x)u'(x) + f''(x), \quad x \in [a, b],
\end{aligned}$$

mis on pidev funktsioon lõigul $[a, b]$. Seega võrrandi (3.1) lahendil $u(x)$ leidub pidev teist järku tuletis lõigul $[a, b]$, s.t kehtib võrdus (3.3) ja $u'' \in C[a, b]$. □

Kui $\alpha \in (0, 1)$, siis võrrandi (3.1) lahendi tuletiste käitumist iseloomustamiseks toome sisse hulga $C^{2,\alpha}(a, b]$, mille elementideks on lõigul $[a, b]$ pidevad funktsioonid u, mis on kaks korda pidevalt diferentseeruvad poollõigul $(a, b]$ ning rahuldavad tingimusi

$$|u'(x)| \leqslant c_1(x-a)^{-\alpha}, \quad |u''(x)| \leqslant c_2(x-a)^{-\alpha-1}, \quad a < x \leqslant b, \tag{3.4}$$

kus c_1 ja c_2 on mingid positiivsed konstandid:

$$\begin{aligned}
C^{2,\alpha}(a, b] = \{&u \in C[a, b] \cap C^2(a, b] : \\
&: |u'(x)| \leqslant c_1(x-a)^{-\alpha},\ |u''(x)| \leqslant c_2(x-a)^{-\alpha-1}, \quad a < x \leqslant b\}.
\end{aligned}$$

Võrrandi (3.1) lahendi siledust $\alpha \in (0, 1)$ korral kirjeldab järgmine teoreem (vt. [1]).

Teoreem 7. *Olgu $\alpha \in (0, 1)$. Kui funktsioon K on kaks korda pidevalt diferentseeruv piirkonnas $Q = \{(x, y) :\ a \leqslant y \leqslant x \leqslant b\}$ ja $f \in C^{2,\alpha}(a, b]$, siis võrrandi (3.1) lahend u kuulub hulka $C^{2,\alpha}(a, b]$, s.t $u \in C[a, b] \cap C^2(a, b]$ ning tema tuletiste u' ja u'' jaoks kehtivad hinnangud (3.4).*

4 Kollokatsioonimeetod

4.1 Kollokatsioonimeetodi kirjeldus

Vaatleme lineaarset teist liiki Volterra integraalvõrrandit (vt (0.1))

$$u(x) = \int_a^x (x-y)^{-\alpha} K(x,y) u(y) dy + f(x), \quad x \in [a,b], \tag{4.1}$$

kus

$$\alpha \in [0,1), \quad f \in C[a,b], \quad K \in C(Q), \quad Q = \{(x,y): \ a \leqslant y \leqslant x \leqslant b\}. \tag{4.2}$$

Teoreemist 5 järeldub, et sellisel juhul võrrand (4.1) on üheselt lahenduv ja tema lahend u on pidev funktsioon lõigul $[a,b]$, s.t $u \in C[a,b]$.

Olgu lõigul $[a,b]$ antud võrk Δ_n, kus $n \in \mathbb{N}$ ja olgu võrgule Δ_n vastavad lineaarsed baassplainid φ_j $(j = 0, ..., n)$ defineeritud võrdustega (2.6)-(2.7). Võrrandi (4.1) lähislahendit $u_n(x)$ otsime kujul

$$u_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j(x), \quad x \in [a,b], \tag{4.3}$$

kus $c_0, ..., c_n$ on konstandid, mis tuleb leida. Asetades lähislahendi u_n (4.3) võrrandisse (4.1) otsitava u kohale, saame defineerida funktsiooni kujul

$$r_n(x) = u_n(x) - \int_a^x (x-y)^{-\alpha} K(x,y) u_n(y) dy - f(x), \quad x \in [a,b].$$

Järgnevas vaatleme kollokatsioonimeetodit, mille korral nõutakse, et hälve $r_n(x)$ võrduks nulliga võrgu Δ_n sõlmedes x_i $(i = 0, ..., n)$, s.t lähislahend $u_n(x)$ tuleb leida tingimustest

$$u_n(x_i) - \int_a^{x_i} (x_i - y)^{-\alpha} K(x_i, y) u_n(y) dy - f(x_i) = 0, \quad i = 0, ..., n$$

ehk

$$u_n(x_i) = \int_a^{x_i} (x_i - y)^{-\alpha} K(x_i, y) u(y) dy + f(x_i), \quad i = 0, ..., n. \tag{4.4}$$

Saadud tingimusi nimetatakse kollokatsioonitingimusteks funktsiooni (4.3) jaoks ja nad kujutavad endast lineaarset algebralist võrrandisüsteemi otsitava funktsiooni (4.3) kordajate $c_0, ..., c_n$ leidmiseks. Tõepoolest, esituse (4.3) tõttu saame võrdused (4.4) kirjutada kujul

$$\sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j(x_i) = \int_a^{x_i} (x_i - y)^{-\alpha} K(x_i, y) \Big(\sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j(y) \Big) dy + f(x_i), \quad i = 0, ..., n.$$

Kasutades baassplainide omadust (2.8), jõuame järgmise võrrandisüsteemini suuruste $c_0, ..., c_n$ suhtes:

$$c_i - \sum_{j=0}^{n} K_{ij} c_j = f(x_i), \quad i = 0, ..., n, \tag{4.5}$$

kus

$$K_{ij} = \int_a^{x_i} (x_i - y)^{-\alpha} K(x_i, y) \varphi_j(y) dy, \quad i, j = 0, ..., n. \tag{4.6}$$

Suuruste K_{ij} $(i, j = 0, ..., n)$ leidmist saab lihtsustada, kuna kehtivad järgnevad seosed (vt (2.6)- (2.7)):

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(x) = 0, \quad x \notin (x_0, x_1), \\
&\varphi_j(x) = 0, \quad x \notin (x_{j-1}, x_{j+1}), \quad j = 1, ..., n-1, \\
&\varphi_n(x) = 0, \quad x \notin (x_{n-1}, x_n).
\end{aligned}$$

Seega saame K_{ij} arvutamisel teha mõningaid lihtsustusi. Kui $j = 0$, siis $K_{00} = 0$ ning $i = 1, ..., n$ korral

$$K_{i0} = \int_a^{x_i} (x_i - y)^{-\alpha} K(x_i, y) \varphi_0(y) dy = \int_a^{x_1} (x_i - y)^{-\alpha} K(x_i, y) \frac{x_1 - y}{x_1 - x_0} dy.$$

Kui $j \leqslant i - 1$, siis

$$\begin{aligned}
K_{ij} = \int_a^{x_i} (x_i - y)^{-\alpha} K(x_i, y) \varphi_j(y) dy = \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_i - y)^{-\alpha} K(x_i, y) \frac{y - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} dy \\
+ \int_{x_j}^{x_{j+1}} (x_i - y)^{-\alpha} K(x_i, y) \frac{x_{j+1} - y}{x_{j+1} - x_j} dy, \quad j = 1, ..., n, \quad i = 2, ..., n.
\end{aligned}$$

Kui $j = i$, siis $i, j = 1, ..., n$ korral

$$K_{ii} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - y)^{-\alpha} K(x_i, y)\varphi_i(y)dy = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - y)^{-\alpha} K(x_i, y)\frac{y - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}dy.$$

Kui $j > i$, siis

$$K_{ij} = \int_a^{x_i} (x - y)^{-\alpha} K(x_i, y)\varphi_j(y)dy = 0, \quad i = 0, 1, ..., n, \ j = 1, ..., n.$$

Kollokatsioonimeetodi (4.3)-(4.4) abil on integraalvõrrandi (4.1) lahendi u lähend u_n kujul (4.3) leitav, kui võrrandisüsteem (4.5) on üheselt lahenduv. Tingimused, millal see kehtib, on antud teoreemiga 8.

4.2 Kollokatsioonimeetodi koonduvus

Olgu $n \in \mathbb{N}$. Olgu $C[a, b]$ kõigi lõigul $[a, b]$ pidevate funktsioonide u normeeritud ruum normiga $||u||_{C[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |u(x)|$. Sellisel juhul on $C[a, b]$ Banachi ruum (vt [2] lk 32). Integraalvõrrandit (4.1) vaatleme operaatorvõrrandina kujul

$$u = Tu + f, \tag{4.7}$$

kus operaator T on defineeritud seosega

$$\big(Tu\big)(x) = \int_a^x (x - y)^{-\alpha} K(x, y)u(y)dy, \quad \alpha \in [0, 1), \quad x \in [a, b]. \tag{4.8}$$

Eeldustest (4.2) järeldub, et operaator $T : C[a, b] \to C[a, b]$ on kompaktne lineaarne operaator (vt [2], lk 215-216). Teoreemist 5 järeldub, et võrrandile (4.7) vastaval homogeensel võrrandil $u = Tu$ on vaid triviaalne lahend.

Järgnevas esitame kollokatsioonimeetodi (4.3)-(4.4) operaatorvõrrandina kujul (1.2). Selleks toome sisse operaatori $P_n : C[a, b] \to C[a, b]$, mis seab igale funktsioonile $u \in C[a, b]$ vastavusse funktsiooni $P_n u \in C[a, b]$ kujul

$$(P_n u)(x) = \sum_{j=0}^{n} u(x_j)\varphi_j(x), \quad x \in [a, b], \tag{4.9}$$

kus φ_j $(j = 0, ..., n)$ on võrgule Δ_n vastavad lineaarsed baassplainid, mis on defineeritud seostega (2.6)-(2.7). Osutub, et P_n on lineaarne ja tõkestatud operaator iga $n \in \mathbb{N}$ korral.

Tõepoolest, P_n on lineaarne, sest kui $u, v \in C[a,b]$ ja $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$, siis

$$\begin{aligned}
(P_n(\lambda u + \gamma v))(x) &= \sum_{j=0}^{n} \Big(\lambda u(x_j)\varphi_j(x) + \gamma v(x_j)\varphi_j(x) \Big) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \lambda u(x_j)\varphi_j(x) + \sum_{j=0}^{n} \gamma v(x_j)\varphi_j(x) \\
&= \lambda \sum_{j=0}^{n} u(x_j)\varphi_j(x) + \gamma \sum_{j=0}^{n} v(x_j)\varphi_j(x) \\
&= \lambda(P_n u)(x) + \gamma(P_n v)(x), \quad x \in [a,b].
\end{aligned}$$

Veendumaks, et operaator P_n on tõkestatud, tuleb näidata, et $||P_n u||_{C[a,b]} \leqslant c||u||_{C[a,b]}$ iga $u \in C[a,b]$ korral, kus $c \in \mathbb{R}$ on mingi konstant.

Tõepoolest, olgu $u \in C[a,b]$. Siis definitsiooni (4.9) põhjal saame

$$\begin{aligned}
||P_n u||_{C[a,b]} &= \max_{x \in [a,b]} \Big| \sum_{j=0}^{n} u(x_j)\varphi_j(x) \Big| \\
&\leqslant \max_{x \in [a,b]} \sum_{j=0}^{n} \Big| u(x_j) \Big| \varphi_j(x) \\
&\leqslant ||u||_{C[a,b]} \max_{x \in [a,b]} \sum_{j=0}^{n} \varphi_j(x) \\
&= ||u||_{C[a,b]},
\end{aligned}$$

sest $\sum_{j=0}^{n} \varphi_j(x) = 1$, kui $x \in [a,b]$. Oleme saanud, et iga $n \in \mathbb{N}$ ja $u \in C[a,b]$ korral

$$||P_n u||_{C[a,b]} \leqslant ||u||_{C[a,b]}.$$

Seega $P_n : C[a,b] \to C[a,b]$ on tõkestatud, kusjuures

$$||P_n||_{L(C[a,b],C[a,b])} \leqslant 1, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.10}$$

Seoste (2.8) ja (4.9) abil saame

$$(P_n u)(x_i) = \sum_{j=0}^{n} u(x_j)\varphi_j(x_i) = u(x_i), \quad i = 0, ..., n.$$

Seega iga $u \in C[a,b]$ korral

$$\begin{aligned}(P_n^2 u)(x) = \big(P_n(P_n u)\big)(x) &= \sum_{j=0}^{n} (P_n u)(x_j)\varphi_j(x) \\ &= \sum_{j=0}^{n} u(x_i)\varphi_j(x) = (P_n u)(x), \quad x \in [a,b],\end{aligned}$$

s.t $P_n^2 = P_n$, mis ütleb, et operaator P_n on projektor. Sel juhul teame, et kehtib $||P_n||_{L(C[a,b],C[a,b])} \geqslant 1$ (vt [2], lk 259-260). Kokkuvõttes saame, et

$$||P_n||_{L(C[a,b],C[a,b])} = 1, \quad (n = 1, 2, ...).$$

Lemma 4. *Võrdusega (4.9) defineeritud operaatori $P_n : C[a,b] \to C[a,b]$ korral $P_n u = 0$ parajasti siis, kui $u(x_i) = 0$, $i = 0, 1, ..., n$.*

Tõestus. Tarvilikkus. Olgu $u \in C[a,b]$ ja oletame, et $P_n u = 0$. Siis $(P_n u)(x_i) = 0$ $(i = 0, ..., n)$. Kuna P_n definitsioonist järeldub, et $(P_n u)(x_i) = u(x_i)$, siis $u(x_i) = 0$ $(i = 0, ..., n)$.

Piisavus järeldub vahetult definitsioonist (4.9), sest kui $u(x_i) = 0$ iga $i = 0, ..., n$ korral, siis $(P_n u)(x) = 0$ iga $x \in [a,b]$ korral. □

Eelneva lemma põhjal näeme, et kollokatsioonitingimused (4.4) on samaväärsed nõudega

$$P_n(u_n - Tu_n - f) = 0, \quad (n = 1, 2, ...), \tag{4.11}$$

kus operaator T on defineeritud seosega (4.8). Operaatori P_n lineaarsuse tõttu võime seose (4.11) kirjutada kujul

$$P_n u_n = P_n T u_n + P_n f, \quad (n = 1, 2, ...).$$

Kuna operaator P_n on projektor, siis saame, et $P_n u_n = u_n$ ning seega kollokatsioonitingimused (4.4) on samaväärsed võrrandiga

$$u_n = P_n T u_n + P_n f, \quad (n = 1, 2, ...), \tag{4.12}$$

kus u_n on otsitav.

Järgnevalt näitame, et iga $u \in C[a, b]$ korral

$$||P_n u - u||_{C[a,b]} \to 0, \quad n \to \infty, \tag{4.13}$$

s.t operaatorid P_n koonduvad $n \to \infty$ korral punktiviisi ühikoperaatoriks:

$$P_n u \to u, \quad kui \quad n \to \infty \quad \forall u \in C[a, b].$$

Selle näitamisel tugineme teoreemile 3, kus $X = Y = C[a, b]$ ning $X_1 = C^1[a, b]$, mis on kõikjal tihe ruumis $C[a, b]$. Operaatorite A_n osas vaatleme võrdusega (4.9) defineeritud operaatoreid P_n.

Olgu $u \in C^1[a, b]$. Siis lemma 3 põhjal

$$\max_{x \in [a,b]} |u(x) - \big(P_n u\big)(x)| \leqslant ch_n, \tag{4.14}$$

kus h_n on lõigul $[a, b]$ defineeritud võrgu Δ_n maksimaalse osalõigu pikkus ja $c \in \mathbb{R}$ mingi konstant, mis ei sõltu n valikust. Kuna $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ (vt (2.2)), siis hinnangust (4.14) järeldub, et

$$||u - P_n u||_{C[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |u(x) - \big(P_n u\big)(x)| \to 0, \quad kui\ n \to \infty.$$

Siis teoreemi 3 põhjal saame iga $u \in C[a, b]$ korral, et kehtib (4.13). Kuna võrrandile (4.7) vastaval homogeensel võrrandil $u = Tu$ on olemas vaid null-lahend $u = 0$, siis näeme, et on täidetud kõik üldise operaatorvõrrandite koonduvusteoreemi 4 eeldused.

Teoreemi 4 põhjal leidub selline n_0, et $n \geqslant n_0$ korral on võrrandid (4.12) üheselt lahenduvad ning

$$||u_n - u||_{C[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |u_n(x) - u(x)| \to 0, \quad kui \quad n \to \infty, \tag{4.15}$$

kus $u \in C[a,b]$ on võrrandi (4.1) (võrrandi (4.7)) lahend ja u_n on valemiga (4.12) määratud võrrandi (4.1) lähislahend.

Seega oleme tõestanud järgmise tulemuse.

Teoreem 8. *Olgu $\alpha \in [0,1)$ ja kehtigu eeldused (4.2). Olgu kollokatsioonimeetodis (4.3)-(4.4) kasutusel võrk Δ_n defineeritud seosega (2.1). Olgu h_n võrgu (2.1) maksimaalne osalõigu pikkus ning kehtigu koondumine (2.2).*

Siis integraalvõrrandil (4.1) on olemas ühene lahend $u \in C[a,b]$ ja leidub selline n_0, et $n \geqslant n_0$ korral on kollokatsioonimeetodi (4.3)-(4.4) abil saadav lähislahend $u_n \in C[a,b]$ üheselt määratud ning leiab aset koondumine (4.15).

Järgnevas uurime koonduvuse (4.15) kiirust, kus $u \in C[a,b]$ on võrrandi (4.1) lahend ja u_n on kollokatsioonimeetodil (4.3)-(4.4) leitud integraalvõrrandi lähislahend.

Teoreemi 4 põhjal kehtib hinnang

$$||u_n - u||_{C[a,b]} \leqslant c||P_n u - u||_{C[a,b]}, \tag{4.16}$$

kus c on mingi positiivne konstant, mis ei sõltu suurusest $n \in \mathbb{N}$. Kuna $P_n u$ on funktsiooni $u \in C[a,b]$ väärtusi interpoleeriv lineaarsplain, siis $\alpha = 0$ korral saame vahetult lemmast 3 ning teoreemidest 4 ja 6 järgmise tulemuse.

Teoreem 9. *Olgu täidetud teoreemi 8 eeldused. Olgu $\alpha = 0$.*

Kui funktsioon K on pidevalt diferentseeruv piirkonnas $Q = \{(x,y): \ a \leqslant y \leqslant x \leqslant b\}$ ning $f \in C^1[a,b]$, siis kehtib veahinnang

$$\max_{x\in[a,b]} |u_n(x) - u(x)| \leqslant c_1 h_n, \tag{4.17}$$

kus c_1 on mingi positiivne konstant, mis ei sõltu suurusest n.

Kui funktsioon K on kaks korda pidevalt diferentseeruv piirkonnas Q ja $f \in C^2[a,b]$, siis kehtib veahinnang

$$\max_{x\in[a,b]} |u_n(x) - u(x)| \leqslant c_2 h_n^2, \tag{4.18}$$

kus c_2 on mingi positiivne konstant, mis ei sõltu suurusest n.

Sõnastame ja tõestame ka tulemuse, mille abil saame hinnata lineaarsplainidega interpoleerimisel tekkivat viga juhul $\alpha \in (0,1)$.

Teoreem 10. *Olgu $\alpha \in (0,1)$ ja kehtigu eeldused (4.2). Olgu kollokatsioonimeetodis (4.3)-(4.4) kasutusel gradueeritud võrk Δ_n $(n \in \mathbb{N})$ sõlmedega*

$$x_i = (b-a)\Big(\frac{i}{n}\Big)^r + a, \quad i = 0, 1, ..., n. \tag{4.19}$$

Siis kehtivad järgmised väited.

1) *Integraalvõrrandil (4.1) on olemas ühene lahend $u \in C[a,b]$ ja leidub selline n_0, et $n \geqslant n_0$ korral on kollokatsioonimeetodi (4.3)-(4.4) abil saadud lähislahend $u_n \in C[a,b]$ üheselt määratud ning leiab aset koondumine (4.15).*

2) *Kui funktsioon K on kaks korda pidevalt diferentseeruv piirkonnas $Q = \{(x,y) :\ a \leqslant y \leqslant x \leqslant b\}$ ning $f \in C^{2,\alpha}(a,b]$, siis $n \geqslant n_0$ korral*

$$\max_{x\in[a,b]} |u_n(x) - u(x)| \leqslant c \begin{cases} n^{-r(1-\alpha)}, & kui\ 1 \leqslant r < \dfrac{2}{1-\alpha}, \\ n^{-2}, & kui\ r \geqslant \dfrac{2}{1-\alpha}, \end{cases} \tag{4.20}$$

kus c on mingi positiivne konstant, mis ei sõltu suurusest n.

Tõestus. Tõestust vajab vaid väide 2), sest väide 1) järeldub vahetult teoreemist 8.

Väite 2) tõestus tugineb hinnangul (4.16) ja teoreemist 7 saadavale tulemusele, et $u \in C^{2,\alpha}(a,b]$. Paneme tähele, et

$$||P_n u - u||_{C[a,b]} = \max_{\substack{i=1,...,n \\ x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i}} |u_n(x) - u(x)|.$$

Olgu $x \in [x_i, x_{i+1}]$ $(i = 1, ..., n-1)$. Kuna u_n on funktsiooni u väärtusi interpoleeriv lineaarsplain, siis lemma 1 põhjal leidub $\xi \in (x_i, x_{i+1})$ nii, et

$$u_n(x) - u(x) = \frac{u''(\xi)}{2}(x - x_i)(x - x_{i+1}), \quad x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Kuna $|(x - x_i)(x - x_{i+1})| \leqslant \dfrac{(x_{i+1} - x_i)^2}{4}$ ja teoreemi 7 põhjal

$$|u''(\xi)| \leqslant c_2(x_i - a)^{-\alpha-1}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, ..., n-1,$$

kus c_2 on mingi positiivne konstant, mis ei sõltu suurusest n, siis iga $x \in [x_i, x_{i+1}]$ korral

$$
\begin{aligned}
|u_n(x) - u(x)| &\leqslant \frac{1}{2} \cdot c_2 (x_i - a)^{-\alpha-1} \cdot \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{4} = \frac{c_2}{8} (x_i - a)^{-\alpha-1} (x_{i+1} - x_i)^2 \\
&\leqslant \frac{c_2}{8} \Big[(b-a) \Big(\frac{i}{n}\Big)^r \Big]^{-(\alpha+1)} \Big[(b-a) \Big(\frac{i+1}{n}\Big)^r - (b-a) \Big(\frac{i}{n}\Big)^r \Big]^2 \\
&= \frac{c_2}{8} (b-a)^{-\alpha-1} \Big(\frac{i}{n}\Big)^{-r(\alpha+1)} (b-a)^2 \Big[\Big(\frac{i+1}{n}\Big)^r - \Big(\frac{i}{n}\Big)^r \Big]^2 \\
&= \frac{c_2}{8} (b-a)^{-\alpha-1} \Big(\frac{i}{n}\Big)^{-r(\alpha+1)} (b-a)^2 n^{-2r} \Big[(i+1)^r - i^r \Big]^2.
\end{aligned}
$$

Teoreemi 2 põhjal leidub selline $\eta \in (i, i+1)$ $(i = 1, ..., n-1)$, et

$$(i+1)^r - i^r = r \cdot \eta^{r-1} (i + 1 - i)$$

ehk

$$(i+1)^r - i^r = r \cdot \eta^{r-1}.$$

Kuna $\eta \in (i, i+1)$, siis $r \cdot \eta^{r-1} \leqslant r \cdot (i+1)^{r-1}$ ja seega kehtib

$$\Big((i+1)^r - i^r \Big)^2 \leqslant r^2 \cdot (i+1)^{2(r-1)}, \quad i = 1, ..., n-1.$$

Nüüd saame iga $x \in [x_i, x_{i+1}]$ hinnata

$$
\begin{aligned}
|u_n(x) - u(x)| &\leqslant \frac{c_2}{8} (b-a)^{-\alpha-1} \Big(\frac{i}{n}\Big)^{-r(\alpha+1)} (b-a)^2 n^{-2r} r^2 (i+1)^{2(r-1)} \\
&= \frac{c_2}{8} (b-a)^{1-\alpha} \Big(\frac{i}{n}\Big)^{-r(\alpha+1)} n^{-2r} r^2 (i+1)^{2(r-1)} \\
&= \frac{c_2}{8} (b-a)^{1-\alpha} r^2 i^{-r(\alpha+1)} (i+1)^{2(r-1)} n^{r(\alpha+1)-2r}, \quad i = 1, ..., n-1.
\end{aligned}
$$

Kuna $i = 1, ..., n-1$, siis

$$\begin{aligned}
i^{-r(\alpha+1)}(i+1)^{2(r-1)} &= i^{-r(\alpha+1)}(i+1)^{2r}(i+1)^{-2} \\
&= i^{-r\alpha-r}(i+1)^{2r}i^{-2r}i^{2r}(i+1)^{-2} \\
&= i^{-r\alpha-r}\Big(\frac{i+1}{i}\Big)^{2r} i^{2r}\Big[i\Big(1+\frac{1}{i}\Big)\Big]^{-2} \\
&= i^{-r\alpha-r+2r}\Big(1+\frac{1}{i}\Big)^{2r} i^{-2}\Big(1+\frac{1}{i}\Big)^{-2} \\
&= i^{-r\alpha+r-2}\Big(1+\frac{1}{i}\Big)^{2r}\Big(1+\frac{1}{i}\Big)^{-2} \\
&= i^{r(1-\alpha)-2}\Big(1+\frac{1}{i}\Big)^{2(r-1)} \\
&\leqslant i^{r(1-\alpha)-2}2^{2(r-1)}, \quad i = 1, ..., n-1.
\end{aligned}$$

Järelikult saame hinnangu

$$\begin{aligned}
|u_n(x) - u(x)| &\leqslant \frac{c_2}{8}(b-a)^{1-\alpha}r^2 2^{2(r-1)} i^{r(1-\alpha)-2} n^{r(\alpha+1)-2r} \\
&= c_3 i^{r(1-\alpha)-2} n^{-r(1-\alpha)}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, ..., n-1,
\end{aligned}$$

kus $c_3 = \dfrac{c_2}{8}(b-a)^{1-\alpha}r^2 2^{2(r-1)}$ on konstant, mis ei sõltu suurusest n. Kui $r(1-\alpha) \leqslant 2$ ehk $r \leqslant \dfrac{2}{1-\alpha}$, siis kehtib hinnang

$$|u_n(x) - u(x)| \leqslant c_3 i^{r(1-\alpha)-2} n^{-r(1-\alpha)} \leqslant c_3 n^{-r(1-\alpha)}, \ x \in [x_i, x_{i+1}], \ i = 1, ..., n-1. \tag{4.21}$$

Kui aga $r(1-\alpha) > 2$, siis kehtib hinnang

$$|u_n(x) - u(x)| \leqslant c_3 i^{r(1-\alpha)-2} n^{-r(1-\alpha)} \leqslant c_3 n^{-2}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]. \tag{4.22}$$

Jääb vaid üle hinnata viga $u(x) - u_n(x)$, kus $x \in [a, x_1]$. Selleks esitame vea kujul

$$u(x) - u_n(x) = \frac{x_1 - x}{x_1 - a}\int_a^x u'(y)dy - \frac{x-a}{x_1-a}\int_x^{x_1} u'(y)dy, \quad x \in [a, x_1]. \tag{4.23}$$

Tõepoolest, kuna $a = x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, siis

$$\begin{aligned}
u(x) - u_n(x) &= u(x) - u(a)\varphi_0(x) - u(x_1)\varphi_1(x) \\
&= u(x) + u(a)\frac{x - x_1}{x_1 - a} - u(x_1)\frac{x - a}{x_1 - a} \\
&= \frac{u(x)x_1 - u(x)a + u(a)(x - x_1) - u(x_1)(x - a) + xu(x) - xu(x)}{x_1 - a} \\
&= \frac{(x_1 - x)(u(x) - u(a)) - (x - a)(u(x_1) - u(x))}{x_1 - a} \\
&= \frac{x_1 - x}{x_1 - a}(u(x) - u(a)) - \frac{x - a}{x_1 - a}(u(x_1) - u(x)), \quad x \in [a, x_1].
\end{aligned}$$

Kuna $u \in C^{2,\alpha}(a, b]$, siis näeme, et (4.23) kehtib:

$$u(x) - u_n(x) = \frac{x_1 - x}{x_1 - a}\int_a^x u'(y)dy - \frac{x - a}{x_1 - a}\int_x^{x_1} u'(y)dy, \quad x \in [a, x_1].$$

Kasutades seost (4.23), saame lõigul $[a, x_1]$ maksimaalset viga hinnata järmiselt:

$$\begin{aligned}
\max_{x\in[a,x_1]} |u(x) - u_n(x)| &= \max_{x\in[a,x_1]} \Big|\frac{x_1 - x}{x_1 - a}\int_a^x u'(y)dy - \frac{x - a}{x_1 - a}\int_x^{x_1} u'(y)dy\Big| \\
&\leqslant \max_{x\in[a,x_1]}\Big(\Big|\frac{x_1 - x}{x_1 - a}\int_a^x u'(y)dy\Big| + \Big|\frac{x - a}{x_1 - a}\int_x^{x_1} u'(y)dy\Big|\Big) \\
&\leqslant \max_{x\in[a,x_1]}\Big(\Big|\int_a^x u'(y)dy\Big| + \Big|\int_x^{x_1} u'(y)dy\Big|\Big) \\
&\leqslant \max_{x\in[a,x_1]}\Big(\int_a^x |u'(y)|dy + \int_x^{x_1} |u'(y)|dy\Big) \\
&\leqslant \max_{x\in[a,x_1]}\Big(\int_a^x (y - a)^{-\alpha}dy + \int_a^{x_1} (y - a)^{-\alpha}dy\Big) \\
&= \max_{x\in[a,x_1]}\Big(-\frac{(y - a)^{-\alpha+1)}}{\alpha - 1}\Big|_{y=a}^{y=x} - \frac{(y - a)^{-\alpha+1)}}{\alpha - 1}\Big|_{y=a}^{y=x_1}\Big) \\
&= \max_{x\in[a,x_1]}\Big(\frac{(y - a)^{1-\alpha}}{1 - \alpha}\Big|_{y=a}^{y=x} + \frac{(y - a)^{1-\alpha}}{1 - \alpha}\Big|_{y=a}^{y=x_1}\Big) \\
&= \max_{x\in[a,x_1]}\Big(\frac{(x - a)^{1-\alpha} + (x_1 - a)^{1-\alpha}}{1 - \alpha}\Big).
\end{aligned}$$

Kuna $\alpha \in (0,1)$ ja $x \in [a, x_1]$, siis

$$\max_{x\in[a,x_1]} |u(x) - u_n(x)| \leqslant \frac{2(x_1 - a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{2}{1-\alpha}\Big[(b-a)\Big(\frac{1}{n}\Big)^r\Big]^{1-\alpha}$$
$$= \frac{2(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} n^{-r(1-\alpha)} = c_4 n^{-r(1-\alpha)}, \qquad (4.24)$$

kus $c_4 = \dfrac{2(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ on konstant, mis ei sõltu suurusest n. Hinnangutest (4.21), (4.22) ja (4.24) järeldub hinnang (4.20). $\square$

5 Numbrilised eksperimendid

Käesolevas töös tõestatud teoreetilisi tulemusi on kontrollitud numbriliste eksperimentide abil. Numbriliste eksperimentide tulemused on toodud tabelites 1-5, kus n on osalõikude arv. Tabelites toodud kirjutis ε_n $(n \geqslant 8)$ tähistab vea

$$||u_n - u||_{C[a,b]} = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |u_n(x) - u(x)|$$

ligikaudset arvutamist (mille täpsem esitus on antud punktis 5.1), kus u on antud integraalvõrrandi täpne lahend, u_n on kollokatsioonimeetodil (4.3)-(4.4) saadud lähislahend, n on osalõikude arv. Lisaks on tabelites esitatud ka suurus $\dfrac{\varepsilon_{\frac{n}{2}}}{\varepsilon_n}$, mille abil on saab iseloomustada ligikaudset viga ε_n.

Suuruste u_n ja ε_n arvutamiseks on koostatud programm programmeerimiskeeles Python. Vastava programmiga saab tutvuda töö lisades.

5.1 Näide 1

Vaatleme integraalvõrrandit

$$u(x) = \int_0^x xyu(y)dy + x, \quad x \in [0,1]. \tag{5.1}$$

See võrrand on kujul (4.1), kus $[a,b] = [0,1]$, $K(x,y) = xy$, $\alpha = 0$ ning $f(x) = x$. Lähislahendi $u_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ leidmiseks kasutame osas 4 kirjeldatud kollokatsioonimeetodit, võttes aluseks ühtlase võrgu Δ_n punktidega $x_i = ih$, kus $i = 0, 1, ..., n$ ja $h = \dfrac{1}{n}$.

Kuna võrrandi (5.1) korral on funktsioon K kaks korda pidevalt diferentseeruv piirkonnas $Q = \{(x,y) : \ 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1\}$ ja $f \in C^2[0,1]$, siis teoreemi 9 põhjal saame hinnangu

$$\max_{x \in [0,1]} |u_n(x) - u(x)| \leqslant c_2 \frac{1}{n^2} = c_2 h^2,$$

kus c_2 on konstant, mis ei sõltu suurusest n. Arvutame suurused ε_n järgmiselt:

$$\varepsilon_n = \max_{\substack{i=0,1,...,n-1 \\ k=0,1,...,20}} |u_n(x_{ik}) - u(x_{ik})|,$$

kus $x_{ik} = x_i + \dfrac{k}{20}(x_{i+1} - x_i)$ $(i = 0, ..., n-1;\ k = 0, ..., 20)$. Suuruse ε_n arvutamiseks kasutame võrrandi täpset lahendit

$$u(x) = xe^{\frac{x^3}{3}}, \quad x \in [0,1],$$

mille korrektsuses saab veenduda vahetu kontrolli abil.

Tabel 1: Vigade suhted esimese näite puhul.

n	ε_n	$\frac{\varepsilon_{\frac{n}{2}}}{\varepsilon_n}$
8	0.01244	
16	$3.482 \cdot 10^{-3}$	3.581
32	$9.235 \cdot 10^{-4}$	3.770
64	$2.380 \cdot 10^{-4}$	3.881
128	$6.041 \cdot 10^{-5}$	3.939
256	$1.522 \cdot 10^{-5}$	3.969
512	$3.820 \cdot 10^{-6}$	3.985
1024	$9.568 \cdot 10^{-7}$	3.992

Kui suurendada sõlmede arvu 2 korda, väheneb suurus ε_n terves lõigus ligikaudu 4 korda. Saadud tulemused vastavad teoreemis 9 saadud teoreetilisele tulemustele ühtlase võrgu korral.

5.2 Näide 2

Vaatleme integraalvõrrandit

$$u(x) = \int_0^x \sin(x)\sin(y)u(y)dy + \cos(x) - \frac{\sin(x)^3}{2}, \quad x \in [0,4]. \tag{5.2}$$

See võrrand on kujul (4.1), kus $[a,b] = [0,4]$, $K(x,y) = \sin(x)\sin(y)$, $\alpha = 0$ ning

$$f(x) = \cos(x) - \frac{\sin(x)^3}{2}, \quad x \in [0,4].$$

Lähislahendi $u_n(x)$ ($n \in \mathbb{N}$) leidmiseks kasutame osas 4 kirjeldatud kollokatsioonimeetodit, võttes aluseks ühtlase võrgu Δ_n punktidega $x_i = ih$, kus $i = 0, 1, ..., n$ ning $h = \frac{4}{n}$. Kuna võrrandi (5.2) korral on K kaks korda pidevalt diferentseeruv piirkonnas $Q = \{(x,y) : \ 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 4\}$ ja $f \in C^2[0,4]$, siis teoreemi 9 põhjal saame hinnangu

$$\max_{x\in[0,4]} |u_n(x) - u(x)| \leqslant c_2 \frac{1}{n^2},$$

kus c_2 on konstant, mis ei sõltu suurusest n. Suuruse ε_n arvutame nii nagu näites 1 ja selleks kasutame võrrandi täpset lahendit

$$u(x) = \cos(x), \quad x \in [0,4].$$

Tabel 2: Vigade suhted teise näite puhul.

n	ε_n	$\frac{\varepsilon_{\frac{n}{2}}}{\varepsilon_n}$
8	$4.785 \cdot 10^{-2}$	
16	$1.224 \cdot 10^{-2}$	3.895
32	$3.133 \cdot 10^{-3}$	3.917
64	$7.951 \cdot 10^{-4}$	3.944
128	$2.004 \cdot 10^{-5}$	3.968
256	$5.031 \cdot 10^{-5}$	3.983
512	$1.260 \cdot 10^{-5}$	3.991
1024	$3.155 \cdot 10^{-6}$	$3.996 \approx 4$

Tabelist 2 on näha, et suurus ε_n väheneb terves lõigus 4 korda, kui suurendada osalõikude arvu 2 korda, mis vastab teoreemis 9 saadud hinnangule.

5.3 Näide 3

Vaatleme integraalvõrrandit

$$u(x) = \int_0^x (x-y)^{1.01} u(y)dy + x^{1.01} - \frac{\Gamma(2.01)\Gamma(2.01)}{\Gamma(4.02)} x^{3.02}, \quad x \in [0,3]. \tag{5.3}$$

See võrrand on kujul (4.1), kus $[a,b] = [0,3],\ K(x,y) = (x-y)^{1.01},\ \alpha = 0$ ning

$$f(x) = x^{1.01} - \frac{\Gamma(2.01)\Gamma(2.01)}{\Gamma(4,02)} x^{3.02}, \quad x \in [0,3].$$

Lähislahendi $u_n(x)$ ($n \in \mathbb{N}$) leidmiseks kasutame osas 4 kirjeldatud kollokatsioonimeetodit, võttes aluseks ühtlase võrgu Δ_n punktidega $x_i = ih$, kus $i = 0, 1, ..., n$ ja $h = \frac{3}{n}$. Kuna võrrandi (5.3) korral on funktsioon K üks kord pidevalt diferentseeruv piirkonnas $Q = \{(x,y) : 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 3\}$ ja $f \in C^1[0,3]$, siis teoreemi 9 põhjal saame hinnangu

$$\max_{x\in[0,3]} |u_n(x) - u(x)| \leqslant c_1 \frac{1}{n},$$

kus konstant c_1 ei sõltu suuruse n valikust. Suuruse ε_n arvutame nii nagu näites 1 ja selleks kasutame võrrandi täpset lahendit

$$u(x) = x^{1.01}, \quad x \in [0,3].$$

Tabel 3: Vigade suhted kolmanda näite puhul.

n	ε_n	$\frac{\varepsilon_{\frac{n}{2}}}{\varepsilon_n}$
8	$3.762 \cdot 10^{-3}$	
16	$1.148 \cdot 10^{-3}$	3.3011
32	$3.388 \cdot 10^{-4}$	3.4007
64	$1.659 \cdot 10^{-4}$	2.0439
128	$8.237 \cdot 10^{-5}$	2.0143
256	$4.090 \cdot 10^{-5}$	2.0140
512	$2.031 \cdot 10^{-5}$	2.0139
1024	$1.008 \cdot 10^{-5}$	$2.0139 \approx 2$

Tabelist 3 on väha, et vastavalt teoreemis 9 saadud tulemustele väheneb suuruste ε_n suhe 2 korda, kui osalõikude arvu suurendada 2 korda ja koondumine toimub kiiresti.

5.4 Näide 4

Vaatleme integraalvõrrandit

$$u(x) = \int_0^x (x-y)^{-0.5} u(y)dy + x^{0.5} + x^{0.75} - \frac{1}{2}\pi x - \frac{6}{5}\Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{0.5} \Gamma^2(\frac{3}{4})^2 x^{\frac{5}{4}}, \quad (5.4)$$

kus $x \in [0,1]$. See võrrand on kujul (4.1), kus $[a,b] = [0,1],\ K(x,y) = 1,\ \alpha = 0.5$ ning

$$f(x) = x^{0.5} + x^{0.75} - \frac{1}{2}\pi x - \frac{6}{5}\Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{0.5} \Gamma^2\Big(\frac{3}{4}\Big)^2 x^{\frac{5}{4}}, \quad x \in [0,1].$$

Kuna $\alpha \neq 0$, siis võrrandi (5.4) puhul on tegu nõrgalt singulaarse tuumaga integraalvõrrandiga. Lähislahendi $u_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ leidmiseks kasutame osas 4 kirjeldatud kollokatsioonimeetodit, võttes aluseks gradueeritud võrgu Δ_n, mille sõlmed on defineeritud seosega (2.3). Võrrandi (5.4) korral on funktsioon K kaks korda pidevalt diferentseeruv kolmnurgas $Q = \{(x,y) : \ 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1\}$ ja $f \in C^{2,0.5}(0,1]$, seega teoreemi 10 põhjal peab veahinnang $\max\limits_{x\in[0,1]} |u_n(x) - u(x)|$ vastavalt r valikule vähenema ligikaudu

$$2^{\frac{1}{2}} \approx 1.4 \text{ korda, kui } r = 1,$$
$$2^{1} \text{ korda, kui } r = 2,$$
$$2^{\frac{3}{2}} \approx 2.8 \text{ korda, kui } r = 3 \text{ ja}$$
$$2^{2} \text{ korda, kui } r \geqslant 4.$$

Suuruse ε_n arvutame nii nagu näites 1 ja selleks kasutame võrrandi täpset lahendit

$$u(x) = x^{0.5} + x^{0.75}, \quad x \in [0,1].$$

Tabel 4: Vigade suhted $r = 1$ ja $r = 2$ korral.

n	ε_n	$\frac{\varepsilon_{\frac{n}{2}}}{\varepsilon_n}$
8	1.04059	
16	0.40827	2.549
32	0.15711	2.599
64	$5.872 \cdot 10^{-2}$	2.676
128	$2.541 \cdot 10^{-2}$	2.311
256	$1.752 \cdot 10^{-2}$	1.450
512	$1.215 \cdot 10^{-2}$	1.443
1024	$8.450 \cdot 10^{-3}$	$1.437 \approx 2^{\frac{1}{2}}$

n	ε_n	$\frac{\varepsilon_{\frac{n}{2}}}{\varepsilon_n}$
8	0.26129	
16	$6.159 \cdot 10^{-2}$	4.242
32	$1.546 \cdot 10^{-2}$	3.984
64	$4.124 \cdot 10^{-3}$	3.749
128	$2.023 \cdot 10^{-3}$	2.033
256	$1.003 \cdot 10^{-3}$	2.023
512	$4.975 \cdot 10^{-4}$	2.016
1024	$2.474 \cdot 10^{-4}$	2.011

Tabel 5: Vigade suhted $r = 4$ korral.

n	ε_n	$\frac{\varepsilon_{\frac{n}{2}}}{\varepsilon_n}$
8	0.49760	
16	$8.550 \cdot 10^{-2}$	5.820
32	$2.051 \cdot 10^{-2}$	4.162
64	$5.194 \cdot 10^{-3}$	3.955
128	$1.326 \cdot 10^{-4}$	3.918
256	$3.395 \cdot 10^{-4}$	3.905
512	$8.638 \cdot 10^{-5}$	3.930
1024	$2.184 \cdot 10^{-5}$	$3.954 \approx 4$

Tabelis 4 ja 5 saadud suuruste ε_n suhted vastavad teoreemis 10 tõestatud tulemustele.

Kokkuvõte

Töös uuriti Volterra teist liiki integraalvõrrandi

$$u(x) = \int_a^x (x-y)^{-\alpha} K(x,y) u(y) dy, \quad x \in [a,b] \tag{5.5}$$

ligikaudset lahendamist pidevate lineaarsplainidega kollokatsiooonimeetodil. Selleks defineeriti esmalt lõigule $[a,b]$ võrk Δ_n ja võrgule vastavad lineaarsplainid. Järgnevalt avaldati splainid defineeritud baassplainide (2.6)-(2.7) kaudu ja hinnati lähislahendi viga (Lemma 3). Kolmandas peatükis toodi välja teoreemid võrrandi (5.5) lahendi olemasolu, ühesuse ja sileduse kohta vastavalt α valikule (Teoreemid 5, 6 ja 7). Viimasena tõestati kollokatsioonimeetodi (4.3)-(4.4) koonduvus lahendiks u ja 3 teoreemi integraalvõrrandi (5.5) lahenduvusest ja numbriliselt lahendamisel tekkiva vea kohta (Teoreemid 8, 9 ja 10).

Töö lõpetuseks esitati mõned numbrilised eksperimendid, kus numbriliselt leiti lähislahend u_n ja hinnati tekkivat viga $u_n - u$, kus u on teadaolev täpne lahend. Saadud viga võrreldi eelnevalt tõestatud teoreetiliste tulemustega. Koostati programm porgrammeerimiskeeles Python, mida kasutati lähislahendi leidmiseks ning vea koondumise hindamiseks.

Viited

[1] **A. Pedas, G. Vainikko**. Integral equations with diagonal and boundry singularities of the kernel. *J. Anal. Appl.*, 25(2006),457-486.

[2] **E. Oja, P. Oja**. *Funktsionaalanalüüs.* Tartu Ülikool, 1991.

[3] **E. Tamme, L. Võhandu, L. Luht**. *Arvutusmeetodid.* Kirjastus Valgus, 1986.

[4] **G. Kangro**. *Matemaatiline analüüs II.* Kirjastus "Valgus", 1968.

[5] **G. Vainikko**. *Kiirguslevi. Matemaatilise füüsika täiendavaid peatükke.* Tartu Ülikool, 1990.

[6] **H. Brunner**. *Volterra Integral Equations: An Introduction to Theory and Applications.* Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, 2017.

[7] **L. Loone, V. Soomer**. *Matemaatilise analüüsi algkursus.* Tartu Ülikool, 2009.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Lota Otsus (sünnikuupäev 14.02.2002)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose

   "Volterra teist liiki integraalvõrrandi lahendamine lineaarsplainidega kollokatsioonimeetodil",

   mille juhendaja on Arvet Pedas, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 4.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaaloman-di ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Lota Otsus
08.05.2024

6 Lisad

6.1 Programmikood

```
import numpy as np
import scipy
import math as m
import matplotlib.pyplot as plt
r=1
a=0
b=1
def nkorral(n):
    def K(x,y):
        return (x-y)**(-0.5)
    def F(x):
        return x**(0.5)+x**(0.75)-0.5*m.pi*x
        -6/5*(2/m.pi)**0.5*(m.gamma(0.75))**2*x**(5/4)
    def U(x):
        return x**(0.5)+x**(0.75)
    def phi(i,y):
        if i==0:
            if x[0]<=y and y<=x[1]:
                return (x[1]-y)/(x[1]-x[0])
            else:
                return 0
        if i==n:
            if x[n-1]<=y and y<= x[n]:
                return (y-x[n-1])/(x[n]-x[n-1])
            else:
                return 0
        if (x[i-1]<=y and y<=x[i]):
            return (y-x[i-1])/(x[i]-x[i-1])
        if (x[i]<=y and y<=x[i+1]):
            return (x[i+1]-y)/(x[i+1]-x[i])
```

```
        else:
            return 0
def integ(f, a, b):
    def real(x):
        return np.real(f(x))
    def imag(x):
        return np.imag(f(x))
    reaalosa = scipy.integrate.quad(real, a, b)
    imaginaarosa = scipy.integrate.quad(imag, a, b)
    return (reaalosa[0] + 1j*imaginaarosa[0])
def k(i,j):
    if j==0:
        return integ(lambda y: K(x[i],y)*phi(0,y),x[0],x[1])
    if i==j:
        return integ(lambda y: K(x[i],y)*phi(j,y),x[i-1],x[i])
    if j<=i-1:
        return integ(lambda y: K(x[i],y)*phi(j,y),x[j-1],x[j])
        +integ(lambda y: K(x[i],y)*phi(j,y),x[j],x[j+1])
    else:
        return 0
def Un(muutuja):
    summa=0
    for i in range(len(c)):
        summa=summa + c[i]*phi(i,muutuja)
    return summa
x=[]
for i in range(n+1):
    x.append((b-a)*(i/n)**r+a)
A=np.zeros((n+1,n+1), complex)
for i in range(n+1):
    for j in range(n+1):
        A[i,j]=k(i,j)
uhikmaatriks=np.identity(n+1)
```

```
    A=uhikmaatriks-A
    FF=np.zeros((n+1))
    for i in range(len(FF)):
        FF[i]=F(x[i])
    c=np.linalg.solve(A,FF)
    viga=0
    for i in range(n):
        for k in range(20):
            xik=x[i]+k*((x[i+1]-x[i])/20)
            vahe=abs(U(xik)-Un(xik))
            if vahe>viga:
                viga=vahe
    return viga
N=[8,16,32,64,128,256,512,1024]
N1=np.zeros(len(N))
for i in range(len(N1)):
    N1[i]=nkorral(N[i])
for i in range(len(N)-1):
    print(N1[i]/N1[i+1])
```

6.2 Programmikoodi selgitus

Antud punktis kirjeldame programmikoodis olevaid käske ja parameetrid ning kirjeldame koodi põhimõtet. Antud kood arvutab välja $n = 8, 16, ..., 1024$ jaoks neljanda näitevõrrandi (5.4) suurused ε_n.

Funktsioon *nkorral(n)* võtab argumendiks osalõikude arvu n ja tagastab lõigul $[a, b]$ suurima tekkinud vea.

Funktsioonid *K(x,y), F(x), U(x)* ja *phi(i,y)* on vastavalt võrrandi (5.4) tuum, vabaliige, täpne lahend ja baassplainid (2.6)-(2.7).

Funktsioon *integ(f,a,b)* annab meile võimaluse integreerida ka kompleksarvuliste väärtustega.

Funktsioon *k(i,j)* arvutab välja punktis 4.1 tehtud lihtsustusi arvesse võttes kordajad K_{ij} (vt (4.6)).

Funktsioon *Un(muutuja)* defineerib lähislahendi, kui on leitud konstandid c_i $(i = 0, ..., n)$ (vt (4.5)).

Programmi järgnev osa tekitab kõigepealt gradueeritud võrgu lõigul $[0, 1]$ parameetri $r = 1$, lahendab võrrandisüsteemi (4.5), arvutab suuruse ε_n ning tagastab selle.

Programmi viimane osa väljastab tabelites 1-5 toodud lahtri $\frac{\varepsilon_{\frac{n}{2}}}{\varepsilon_n}$.