Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Andres Truu

Inverssete poolrühmade Morita ekvivalentsus

Matemaatika eriala

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: Alvin Lepik

Tartu 2023

INVERSSETE POOLRÜHMADE MORITA EKVIVALENTSUS

Bakalaureusetöö

Andres Truu

Lühikokkuvõte

Käesolevas bakalaureusetöös antakse üksikasjalik tõestus Mark Lawsoni ja Bassima Afara artiklis „*Morita equivalence of inverse semigroups*" esitatud teoreemile, mis annab viisi kirjeldada inversseid poolrühmi, mis on Morita ekvivalentsed mingi fikseeritud inversse poolrühmaga S. Nimelt näidatakse selles töös, et neid poolrühmi on võimalik kirjeldada teatud omadustega Reesi maatrikspoolrühmade abil.

CERCS teaduseriala: P120 Arvuteooria, väljateooria, algebraline geomeetria, algebra, rühmateooria.

Märksõnad: Inversne poolrühm, McAlisteri funktsioon, Morita ekvivalentsus, Reesi maatrikspoolrühm.

MORITA EQUIVALENCE OF INVERSE SEMIGROUPS

Bachelor's thesis

Andres Truu

Abstract

In this Bachelor's thesis we give a detailed proof of the main theorem presented in the article „Morita equivalence of inverse semigroups" by Mark Lawson and Bassima Afara. The main theorem gives us a way do describe inverse semigroups that are Morita equivalent to some fixed inverse semigroup S. To be more precise we show that these semigroups can be described using Rees matrix semigroups with certain properties.

CERCS research specialisation: P120 Number theory, field theory, algebraic geometry, algebra, group theory.
Key Words: Inverse semigroup, McAlister function, Morita equivalence, Rees matrix semigroup.

Sisukord

Sissejuhatus

Kiiti Morita oli jaapani matemaatik, kelle peamisteks uurimissuundadeks olid algebra ja topoloogia. Morita 1958. aasta artiklist, „*Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition*", sai alguse Morita teooria, millest sai üks suur algebra osa. Järgnevatel aastakümnetel peale 1958. aasta artiklit on Morita teooriat arendatud paljude algebraliste struktuuride jaoks, muuhulgas ka poolrühmade jaoks. Antud töös keskendumegi Morita ekvivalentsusele inverssetel poolrühmadel.

Käesoleva referatiivse töö eesmärgiks on anda üksikasjalik tõestus Mark Lawsoni ja Bassima Afara artiklis „*Morita equivalence of inverse semigroups*"[1] esitatud peateoreemile. Anname teoreemi veidi mugavdatud kujul:

Teoreem (Teoreem 3.5 [1])**.** *Olgu S inversne poolrühm ja I mittetühi hulk.*

1. *Iga McAlisteri funktsiooni $p\colon I\times I \to S$ puhul on inversne Reesi maatrikspoolrühm $\mathcal{IM}(S,I,p)$ Morita ekvivalentne poolrühmaga S.*
2. *Iga inversne poolrühm, mis on Morita ekvivalentne poolrühmaga S on isomorfne mingi poolrühmaga kujul $\mathcal{IM}(S,I,p)$, kus p on mingi McAlisteri funktsioon.*

Töö on jaotatud kolmeks osaks. Esimeses osas esitame mõned vajaminevad definitsioonid ja abitulemused. Meenutame kategooriateooria mõisteid funktor ja kategooriate ekvivalents. Näitame, kuidas poolrühma S abil moodustada tema Cauchy täield $C(S)$. Lisaks kategooriateooria mõistetele tuletame ka meelde poolrühmateooriast mõisted regulaarsus ja inverssus ning sõnastame nende kohta edaspidi vajaminevad üldtuntud tulemused. Tutvustame polügoone ja nendega seonduvaid mõisteid. Ning toome muuhulgas sisse ka mõisted nagu Morita kontekst ja McAlisteri funktsioon. Samuti sõnastame teoreemi, mis annab meile erinevad viisid kirjeldada Morita ekvivalentsust kahe poolrühma vahel.

Teises osas tõestame peateoreemi esimese väite. Selle jaoks näitame, kuidas saada Reesi maatrikspoolrühmast regulaarne ning kuidas regulaarsest Reesi maatrikspoolrühmast saada inversne. Toome välja, mis omadused on regulaarsel Reesi maatrikspoolrühmal, kui on rahuldatud mõned või kõik McAlisteri funktsiooni tingimused. Lisame ka minimaalse inversse kongruentsi omadused ortodoksaalsel poolrühmal. Lõpuks sõnastame, millal kaks inversset poolrühma on Morita ekvivalentsed ja näitame, et kui S on inversne poolrühm, siis ta on Morita ekvivalentne inversse Reesi maatrikspoolrühmaga.

Kolmandas osas tõestame peateoreemi teise väite. Sarnaselt selle töö teise osaga toome sisse mõned abitulemused, millel ehitame peateoreemi teise väite tõestuse. Toome sisse mõned Morita konteksti definitsioonist tulevad omadused ning tõestame need. Samuti näitame, et Morita konteksti abil saame defineerida McAlisteri funktsiooni.

1 Definitsioonid ja abitulemused

Eeldame, et lugeja juba teab kategooria ja alamkategooria mõisteid. Selles töös kasutame neid mõisteid samamoodi nagu nad on defineeritud konspektis [6] vastavalt definitsioonis 1.6 ja definitsioonis 1.13.

Definitsioon 1.1. Olgu $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ kategooriad. Ning olgu F eeskiri, mis seab kategooria $\mathcal{K}$ igale objektile A vastavusse kategooria $\mathcal{L}$ üheselt määratud objekti AF ja kategooria $\mathcal{K}$ igale morfismile φ kategooria $\mathcal{L}$ üheselt määratud morfismi φF. Eelnevat on mugav väljendada joonisena järgmiselt:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K} \arrow[rr, "F"] & & \mathcal{L} \\ A \arrow[d, "\varphi"'] & \mapsto & AF \arrow[d, "\varphi F"'] \\ & \mapsto & \\ B & \mapsto & BF \end{tikzcd}$$

Eeskirja $F\colon \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ nimetatakse **kovariantseks funktoriks**, kategooriast $\mathcal{K}$ kategooriasse $\mathcal{L}$ kui kehtivad järgmised omadused.

1. Iga $A, B \in \mathsf{Obj}(\mathcal{K})$, $\varphi \in \mathcal{K}(A, B)$ korral $\varphi F \in \mathcal{L}(AF, BF)$.

2. Olgu φ, ψ mistahes morfismid, mida saab korrutada kategoorias $\mathcal{K}$, siis kehtib $(\varphi\psi)F = (\varphi F)(\psi F)$.

3. Mistahes $A \in \mathsf{Obj}(\mathcal{K})$ korral $(1_A)F = 1_{AF}$.

Kui eeskiri rahuldab tingimusi 1.-3., siis mõnikord öeldakse, et eeskiri on **funktoriaalne**.

Definitsioon 1.2. Vaatame funktorit $F\colon \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ ja iga objektipaari $A, B \in \mathsf{Obj}(\mathcal{K})$, kujutust

$$F_1^{A,B}\colon \mathcal{K}(A, B) \mapsto \mathcal{L}(AF, BF), \quad \varphi \mapsto \varphi F.$$

Funktor F on **täpne** (**täielik**), kui kujutus $F_1^{A,B}$ on injektiivne (sürjektiivne) iga $A, B \in \mathsf{Obj}(\mathcal{K})$ korral.

Definitsioon 1.3. Funktor $F\colon \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ on **tihe**, kui iga $A \in \mathsf{Obj}(\mathcal{L})$, korral leidub selline $B \in \mathsf{Obj}(\mathcal{K})$, et $BF \cong A$.

Võtame järgnevat tuntud teoreemi kui definitsiooni (vt teoreem 6.17 [6]).

Definitsioon 1.4. Öeldakse, et funktor F on **kategooriate ekvivalents**, kui F on täielik, täpne ja tihe. Kaks kategooriat on **ekvivalentsed**, kui nende vahel leidub kategooriate ekvivalents.

Definitsioon 1.5. Poolrühma S element $e \in S$ on **idempotent**, kui $e^2 = e$. Poolrühma S idempotentide hulka tähistatakse $E(S)$.

Definitsioon 1.6. Poolrühma S elementi a nimetatakse **regulaarseks**, kui leidub $x \in S$ nii, et $a = axa$. Öeldakse, et poolrühm S on **regulaarne**, kui tema iga element on regulaarne.

Definitsioon 1.7. Poolrühma S elementi a' nimetatakse elemendi a **inversseks elemendiks**, kui $a = aa'a$ ja $a'aa' = a'$. Elemendi a inverssete elementide hulka tähistatakse $V(a)$.

Märkus 1.8. Kui $a' \in V(a)$, siis $a'a\,, aa' \in E(S)$, kuna $(aa')(aa') = (aa'a)a' = aa'$ ja $(a'a)(a'a) = (a'aa')a = a'a$.

Lause 1.9. *Olgu S poolrühm, siis element $s \in S$ on regulaarne parajasti siis, kui $V(s) \neq \emptyset$.*

Tõestus. Tarvilikkus. Olgu $s \in S$ regulaarne. Siis leidub $x \in S$, et $sxs = s$.

Paneme tähele, et:

$$s(xsx)s = (sxs)xs = sxs = s$$

ja

$$(xsx)s(xsx) = s(sxs)(xsx) = xs(xsx) = x(sxs)x = xsx$$

Seega xsx on s inversne element, millest $xsx \in V(s)$.

Piisavus. Olgu S poolrühm ja olgu $s \in S$ suvaline. Kehtigu $V(s) \neq \emptyset$ iga $s \in S$ korral, siis leidub $x \in S$, et $x \in V(s)$, millest $sxs = s$. □

Järeldus 1.10. *Poolrühm S on regulaarne parajasti siis, kui iga $s \in S$ puhul kehtib $V(s) \neq \emptyset$.*

Definitsioon 1.11. Poolrühma nimetatakse **inversseks**, kui tema igal elemendil leidub täpselt üks inversne element. Inversse poolrühma elemendi a inversset elementi tähistatakse a^{-1}.

Sõnastame lausena Howie raamatust [3] peatükist 5.2 lehekülgedelt 152-153 pärit arutelu.

Lause 1.12. *Olgu S on inversne poolrühm ja $s, t \in S$, defineerime seose $\leq$ järgmiselt:*

$$s \leq t \iff (\exists e \in E(S))(s = et).$$

Seos $\leq$ on järjestusseos. Kusjuures kehtivad järgmised omadused:

(i) $s \leq t \iff (\exists f \in E(S))(s = tf)$;

(ii) $s \leq t \wedge s' \leq t' \Rightarrow ss' \leq ts' \leq tt'$;

(iii) $s \leq t \iff s^{-1} \leq t^{-1}$.

Toome abiks sisse ka teoreemi 5.1.1 [3].

Teoreem 1.13. *Poolrühm S on inversne parajasti siis, kui ta on regulaarne ja tema idempotendid kommuteeruvad.*

Definitsioon 1.14. Olgu S poolrühm ja olgu I, Λ mittetühjad hulgad; olgu meil kujutus

$$P \colon \Lambda \times I \to S, \quad (\lambda, i) \mapsto p_{\lambda,i}.$$

Kõikide kolmikute $(i, s, \lambda) \in I \times S \times \Lambda$ hulk on poolrühm, kus korrutamine defineeritakse võrdusega

$$(i, s, \lambda)(j, t, \mu) = (i, sp_{\lambda,j}t, \mu).$$

Seda poolrühma nimetatakse **Reesi maatrikspoolrühmaks** ja tähistatakse kirjutisega $\mathcal{M}(S; I, \Lambda; P)$. Kui $I = \Lambda$ ja $P \colon I \times I \to S$, $(i, j) \mapsto p_{i,j}$, siis $\mathcal{M}(S, I, P)$ kutsutakse **ruut** Reesi maatrikspoolrühmaks.

Kui edaspidi tahame rõhutada, et kujutus P eelnevast definitsioonist rahuldab mingeid kindlaid tingimusi, siis tähistame seda väikse tähega p.

Definitsioon 1.15. Poolrühma S nimetatakse **ortodoksaalseks** kui selle idempotendid moodustavad alampoolrühma.

Definitsioon 1.16. Poolrühm S sisaldab **lokaalseid ühikelemente**, kui iga $s \in S$ puhul leiduvad idempotendid $e, f \in S$ nii, et $es = s = sf$.

Nüüd toome sisse ühe väga tuntud kategooria, mille abil on kirjeldatud lokaalsete ühikelementidega poolrühmade Morita ekvivalentsust [2, 7].

Definitsioon 1.17. Poolrühma S **Cauchy täieldiks** kutsutakse kategooriat $C(S)$, mille objektideks on hulga $E(S)$ elemendid ja morfismid objektist e objekti f on kolmikud (f, s, e), kus $e, f \in E(S)$ ja $s \in S$, mille puhul kehtib võrdus $fse = s$.

Kui meil on morfismid (f, s, e) ja (e, s', g), siis nende kompositsioon on

$$(f, s, e)(e, s', g) = (f, ss', g).$$

Ühikmorfism objektil e on antud kolmikuga (e, e, e).

Definitsioon 1.18. Olgu S poolrühm ja X mingi mittetühi hulk. Kujutust $\circ \colon S \times X \to X$ nimetatakse **vasakpoolseks S-toimeks** hulgal X, kui

$$(\forall s, t \in S)(\forall x \in X)(s \circ (t \circ x) = (st) \circ x).$$

Hulka X koos vasakpoolse S-toimega nimetatakse **vasakpoolseks S-polügooniks** ja tähistatakse sümboliga ${}_SX$.

Analoogiliselt defineeritakse **parempoolne S-polügoon X_S**, milles **parempoolne S-toime** on kujutus $\star\colon X \times S \to X$, mille puhul kehtib

$$(\forall s, t \in S)(\forall x \in X)((x \star s) \star t) = x \star (st).$$

Edaspidi tähistame lühidalt $s \circ x = sx$ ja $x \star s = xs$.

Definitsioon 1.19. Olgu S ja T poolrühmad ja olgu X mingi mittetühi hulk. Öeldakse, et ${}_SX_T$ on **(S,T)-bipolügoon**, kui X on vasakpoolne S-polügoon ja parempoolne T-polügoon ning kehtib

$$(\forall s \in S)(\forall t \in T)(\forall x \in X)((sx)t = s(xt)).$$

Definitsioon 1.20. Olgu M ja N vasakpoolsed S-polügoonid öeldakse, et kujutus $\varphi\colon M \to N$ on **vasakpoolne S-homomorfism**, kui

$$(\forall m \in M)(\forall s \in S)(\varphi(sm) = s\varphi(m)).$$

Kategooriat, mille objektid on vasakpoolsed S-polügoonid ja morfismid on vasakpoolsed S-homomorfismid, tähistatakse ${}_S\mathsf{Act}$.

Definitsioon 1.21. Olgu S poolrühm ja X mingi mittetühi hulk. Öeldakse, et vasakpoolne polügoon ${}_SX$ on **unitaarne**, kui kehtib võrdus $SX = X$, kus

$$SX = \{sx \mid s \in S,\, x \in X\}.$$

Parempoolse polügoonide puhul defineeritakse unitaarsus analoogiliselt.

Definitsioon 1.22. Olgu $X = X_S$ ja $Y = {}_SY$ polügoonid ja ϑ vähim ekvivalentsiseos hulgal $X \times Y$, mis sisaldab kõik paarid $((xs, y), (x, sy))$, $x \in X$, $y \in Y$,

$s \in S$. Hulka $(X \times Y)/\vartheta$ nimetatakse polügoonide X ja Y **tensorkorrutiseks** ja tähistatakse $X \otimes Y$. Paarile $(x, y) \in X \times Y$ vastavat ekvivalentsiklassi $[(x, y)]_\vartheta$ tähistatakse kirjutisega $x \otimes y$.

Lühidalt tähistame edaspidi polügoonide tensorkorrutist $X \otimes_S Y$.

Definitsioon 1.23. Olgu ${}_SX$ vasakpoolne S-polügoon. Öeldakse, et ${}_SX$ on **püsiv**, kui kujutus

$$\mu_x \colon S \otimes_S X \to X,\ \mu_x(s \otimes x) = sx,$$

on bijektiivne. Kategooria ${}_S\mathsf{Act}$ alamkategooria, mille objektideks on püsivad vasakpoolsed polügoonid tähistatakse ${}_S\mathsf{FAct}$.

Definitsioon 1.24. Olgu S ja T poolrühmad, ütleme et S ja T on **Morita ekvivalentsed**, kui kategooriad ${}_S\mathsf{FAct}$ ja ${}_T\mathsf{FAct}$ on ekvivalentsed.

Kui S on poolrühm ja $e \in E(S)$, siis hulk

$$eSe = \{ese \mid s \in S\}$$

on poolrühma S alampoolrühm, mis on ühtlasi ka monoid ühikelemendiga e.

Definitsioon 1.25. Alampoolrühma eSe nimetatakse poolrühma S, idempotendile e vastavaks, **lokaalseks alammonoidiks**.

Definitsioon 1.26. Regulaarne poolrühm on **lokaalselt inversne**, kui tema iga lokaalne alammonoid on inversne.

Definitsioon 1.27. **Morita kontekst** koosneb viisikust $(S, T, X, \langle\, , \rangle, [\, ,])$, kus

- S ja T on inverssed poolrühmad
- X on (S, T)-bipolügoon ${}_SX_T$
- $\langle\, , \rangle \colon X \times X \to S$

- $[\,,\,]\colon X \times X \to T$

Kusjuures kujutused $\langle\,,\,\rangle$ ja $[\,,\,]$ on sürjektiivsed ja rahuldavad järgmisi nõudeid, kus $x, y, z \in X$, $s \in S$ ja $t \in T$):

(M1) $\langle sx, y\rangle = s\langle x, y\rangle$;

(M2) $\langle y, x\rangle = \langle x, y\rangle^{-1}$;

(M3) $\langle x, x\rangle x = x$;

(M4) $[x, yt] = [x, y]t$;

(M5) $[y, x] = [x, y]^{-1}$;

(M6) $x[x, x] = x$;

(M7) $\langle x, y\rangle z = x[y, z]$.

Öeldakse, et Morita kontekst on **unitaarne** kui polügoonid ${}_SX$ ja X_T on unitaarsed.

Järgmine teoreem on kokku pandud teoreemist 1.1 [7] ja teoreemist 2.14 [2]

Teoreem 1.28. *Olgu S ja T poolrühmad lokaalsete ühikelementidega, siis järgmised väited on samaväärsed:*

(i) S ja T on Morita ekvivalentsed;

(ii) kategooriad $C(S)$ ja $C(T)$ on ekvivalentsed;

(iii) Leidub unitaarne Morita kontekst $(S, T, X, \langle\,,\,\rangle, [\,,\,])$.

Lause 1.29 (Lause 2.5.1 [3])**.** *Olgu S regulaarne poolrühm, olgu $e, f \in E(S)$, siis hulk*

$$S(e, f) = \{g \in E(S)\colon egf = ef \text{ ja } ge = g = fg\}$$

on mittetühi.

Lemma 1.30 (Lemma 1.2 [8])**.** *Olgu S regulaarne poolrühm, olgu $e, f \in E(S)$ ja olgu*

$$S(e,f) = \{g \in E(S) \colon egf = ef \text{ ja } ge = g = fg\}.$$

Olgu $a' \in V(a)$ ja $b' \in V(b)$, siis iga $g \in S(a'a, bb')$ puhul $b'ga' \in V(ab)$.

Tõestus. Paneme tähele, et märkuse 1.8 tõttu $a'a, bb' \in E(S)$. Näitame, et $b'ga' \in S$ on elemendi $ab \in S$ inversne element.

$$\begin{aligned}(ab)b'ga'(ab) &= abb'ga'ab = a(bb'g)a'ab = a(ga'a)b = agb = aa'agbb'b \\ &= a(a'agbb')b = (aa'a)(bb'b) = ab\end{aligned}$$

ja

$$b'ga'(ab)b'ga' = b'(gaa')(bb'g)a' = b'g^2a' = b'ga'$$

Seega $b'ga' \in V(ab)$. □

Järeldus 1.31 (Järeldus 1.3 [8])**.** *Olgu S regulaarne poolrühm ja olgu $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$ ja olgu $x_1' \in V(x_1)$, $x_n' \in V(x_n)$. Siis $V(x_1x_2\ldots x_n) \cap x_n'Sx_1' \neq \emptyset$*

Tõestus. Tõestame järelduse kasutades matemaatlist induktsiooni.
Baas. Vaatame juhtu $n = 2$.

Olgu S regulaarne poolrühm, olgu $x_1, x_2 \in S$ ja olgu $x_1' \in V(x_1)$ ja $x_2' \in V(x_2)$, siis saame defineerida $S(x_1'x_1, x_2x_2')$, mis on mittetühi tänu lemmale 1.29 ning võttes $g_1 \in S(x_1'x_1, x_2x_2')$ saame tänu lemmale 1.30, et $x_2'g_1x_1' \in V(x_1x_2)$.

Samm. Olgu nüüd $n \geq 3$.

Eeldame, et väide kehtib juhul $n-1$, siis olgu $x_n \in S$, $x_n' \in V(x_n)$ ja $x_{n-1}'g_{n-1}x_1' \in V(x_1x_2\ldots x_{n-1}) \cap x_{n-1}'Sx_1'$. Märkusest 1.8 saame, et $x_{n-1}'g_{n-1}x_1'x_1x_2\ldots x_{n-1}$ on idempotent. Seega saame defineerida hulga $S(x_{n-1}'g_{n-1}x_1'x_1x_2\ldots x_{n-1}, x_nx_n')$, millest tänu lemmale 1.29 saame võtta suvalise elemendi g ning rakendada lemmat

1.30, et saada $x'_n g x'_{n-1} g_{n-1} x'_1 \in V(x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n)$, kuna $g, x'_{n-1}, g_{n-1} \in S$, siis ka $g x'_{n-1} g_{n-1} \in S$. Seega saame, et $x'_n g x'_{n-1} g_{n-1} x'_1 \in x'_n S x'_1$.

Ehk kokku $x'_n g x'_{n-1} g_{n-1} x'_1 \in V(x_1 x_2 \dots x_n) \cap x'_n S x'_1$ □

Definitsioon 1.32. Olgu funktsiooni $p\colon I \times I$ puhul rahuldatud tingimused:

(MF1) $(\forall i \in I)(p_{i,i} \in E(S))$;

(MF2) $(\forall i, j \in I)(p_{i,i} p_{i,j} p_{j,j} = p_{i,j})$;

(MF3) $(\forall i, j \in I)(p_{i,j} = p_{j,i}^{-1})$;

(MF4) $(\forall i, j, k \in I)(p_{i,j} p_{j,k} \leq p_{i,k})$;

(MF5) $(\forall e \in E(S))(\exists i \in I)(e \leq p_{i,i})$.

Sellist funktsiooni p kutsutakse **McAlisteri funktsiooniks**.

Definitsioon 1.33. Ekvivalentsiseost ρ poolrühmal S nimetatakse selle poolrühma **kongruentsiks**, kui ta rahuldab tingimust

$$x_1 \rho y_1 \wedge x_2 \rho y_2 \Rightarrow (x_1 x_2) \rho (y_1 y_2),$$

mistahes $x_1, x_2, y_1, y_2 \in S$ puhul.

Definitsioon 1.34. Olgu S poolrühm ja ρ kongruents poolrühmal S. Tähistame nüüd $\overline{a} = \{b \in S \mid a \,\rho\, b\}$ ja $S/\rho = \{\overline{a} \mid a \in S\}$. Defineerides nüüd hulgal S/ρ tehte $\overline{a}\overline{b} = \overline{ab}$ saame **faktorpoolrühma**. Kujutust

$$\pi\colon S \to S/\rho, \quad a \mapsto \overline{a},$$

nimetatakse poorühma S **loomulikuks projektsiooniks** faktorpoolrühmale S/ρ.

Definitsioon 1.35. Ühisosa kõikidest regulaarse poolrühma S kongruentsidest ρ, mille puhul S/ρ on inversne, tähistatakse γ ja kutsutakse **minimaalseks inversseks kongruentsiks**.

Edaspidi tähistame tähega γ alati minimaalset inversset kongruentsi.

Märkus 1.36. Olgu S regulaarne poolrühm. Siis triviaalne seos $S \times S$ on kongruents ja $S/(S \times S)$ on inversne. Seega eelnev definitsioon on korrektne.

Definitsioon 1.37. Poolrühm S on **ortodoksaalne** kui selle idempotendid moodustavad alampoolrühma. Ortodoksaalset lokaalselt inversset poolrühma kutsutakse **üldistatud inversseks poolrühmaks**.

Definitsioon 1.38. Alamhulka I poolrühmas S nimetatakse poolrühma S **parempoolseks (vasakpoolseks) ideaaliks**, kui

$$(\forall a \in I)(\forall s \in S)(as \in I \ (sa \in I)).$$

Lemma 1.39 (Lemma 6.1.4 [5])**.** *Olgu S poolrühm ja $a \in S$. Siis*

(i) $S^1 a = Sa \cup \{a\}$ *on vähim vasakpoolne ideaal, mis sisaldab elementi* a*.*

(ii) $aS^1 = aS \cup \{a\}$ *on vähim paremkpoolne ideaal, mis sisaldab elementi* a*.*

Definitsioon 1.40. Öeldakse, et $S^1 a$ (aS^1) on poolrühma S elemendi a poolt tekitatud **vasakpoolne (parempoolne) peaideaal**.

Definitsioon 1.41. Olgu $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{D}$ seosed poolrühmal S, mis on defineeritud järgmiselt:

(1) $a \,\mathcal{R}\, b \Longleftrightarrow aS^1 = bS^1$;

(2) $a \,\mathcal{L}\, b \Longleftrightarrow S^1 a = S^1 b$;

(3) $\mathcal{D} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ ehk $a \,\mathcal{D}\, b \Longleftrightarrow (\exists c \in S)(a \,\mathcal{L}\, c \,\mathcal{R}\, b)$,

mistahes $a, b \in S$ korral. Seoseid $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{D}$ nimetatakse **Greeni seosteks** poolrühmal S.

Selles töös läheb meil tarvis ainult $\mathcal{D}$ seost ja täpsemalt $\mathcal{D}$ seost idempotentidel. Lausest 2.3.5 [3] saame poolrühmal S idempotentidel $e, f \in E(S)$ defineerida:

$$e\,\mathcal{D}\,f \Longleftrightarrow (\exists a, a' \in S)(aa' = e, \quad a'a = f),$$

kus a' on elemendi a inversne element.

Definitsioon 1.42. Olgu S ja T lokaalseid ühikelemente sisaldavad poolrühmad. Öeldakse, et homomorfism $\theta\colon S \to T$ on **lokaalne isomorfism**, kui on täidetud järgmised tingimused:

(LI1) $(\forall e, f \in E(S))(\theta|_{eSf}\colon eSf \to \theta(e)T\theta(f)$ on isomorfism);

(LI2) $(\forall i \in E(T))(\exists e \in E(S))(i\,\mathcal{D}\,\theta(e))$.

Definitsioon 1.43. Olgu $\phi : S \to T$ poolrühmade homomorfism. Kongruentsi $\ker\phi \subseteq S \times S$, mis on defineeritud seosega

$$(s, s') \in \ker\phi \Leftrightarrow \phi(s) = \phi(s'),$$

nimetatakse homomorfismi ϕ **tuumaks**.

Toome teoreemina sisse ka homomorfismiteoreemi järelduse poolrühmade jaoks.

Teoreem 1.44 (Järeldus 10.5 [5]). *Olgu $\phi\colon S \to T$ sürjektiivne poolrühmade homomorfism. Siis $S/\ker\phi \cong T$.*

2 Inversse poolrühma S ja Reesi maatrikspoolrühma $\mathcal{IM}(S, I, p)$ Morita ekvivalentsus

Lemma 2.1 (Lemma 2.1 [8]). *Olgu S regulaarne poolrühm ja $\mathcal{M}(S, I, \Lambda, P)$ Reesi maatrikspoolrühm üle S. Siis kehtivad järgmised väited:*

(i) kolmik $(i, s, \lambda) \in \mathcal{M}(S; I, \Lambda; P)$ on regulaarne element parajasti siis, kui $V(s) \cap p_{\lambda,j} S p_{\mu,i} \neq \varnothing$ mingi $j \in I$, $\mu \in \Lambda$ puhul;

(ii) alamhulk $\mathcal{RM}(S; I, \Lambda; P) = \{(i, s, \lambda) \colon V(s) \cap p_{\lambda,j} S p_{\mu,i} \neq \varnothing$ mingi $j \in I, \mu \in \Lambda$ puhul$\}$ on $\mathcal{M}(S; I, \Lambda; P)$ regulaarne alampoolrühm.

Tõestus. (i) *Tarvilikkus.* Olgu $(i, s, \lambda) \in \mathcal{M}(S; I, \Lambda; P)$ regulaarne, siis lause 1.9 järgi leidub inversne element $(j, t, \mu) \in \mathcal{M}(S; I, \Lambda; P)$ nii, et $(j, t, \mu) \in V((i, s, \lambda))$. Saame, et $(i, s, \lambda)(j, t, \mu)(i, s, \lambda) = (i, s, \lambda)$ ning definitsiooni järgi korrutades saame ka, et

$$(i, s, \lambda)(j, t, \mu)(i, s, \lambda) = (i, s p_{\lambda,j} t, \mu)(i, s, \lambda) = (i, s p_{\lambda,j} t p_{\mu,i} s, \lambda)$$

ehk

$$(i, s p_{\lambda,j} t p_{\mu,i} s, \lambda) = (i, s, \lambda).$$

Samuti $(j, t, \mu)(i, s, \lambda)(j, t, \mu) = (j, t, \mu)$ ja ühtlasi kehtib ka, et

$$(j, t, \mu)(i, s, \lambda)(j, t, \mu) = (j, t p_{\mu,i} s, \lambda)(j, t, \mu) = (j, t p_{\mu,i} s p_{\lambda,j} t, \mu)$$

ehk

$$(j, t p_{\mu,i} s p_{\lambda,j} t, \mu) = (j, t, \mu).$$

Eelnevatest võrdustest saame, et $s p_{\lambda,j} t p_{\mu,i} s = s$ ja $t p_{\mu,i} s p_{\lambda,j} t = t$. Samuti

$$p_{\lambda,j} t p_{\mu,i} s p_{\lambda,j} t p_{\mu,i} = p_{\lambda,j} (t p_{\mu,i} s p_{\lambda,j} t) p_{\mu,i} = p_{\lambda,j} t p_{\mu,i},$$

mistõttu $p_{\lambda,j}tp_{\mu,i} \in V(s)$.

Piisavus. Olgu $j \in I$ ja $\mu \in \Lambda$ ja kehtigu $V(s) \cap p_{\lambda,j}Sp_{\mu,i} \neq \varnothing$. Võtame suvalise $x \in V(s) \cap p_{\lambda,j}Sp_{\mu,i}$. Teame, et x peab olema kujul $p_{\lambda,j}tp_{\mu,i}$, kus $t \in S$. Kehtib $sxs = sp_{\lambda,j}tp_{\mu,i}s = s$.

Saame

$$(i, s, \lambda)(j, t, \mu)(i, s, \lambda) = (i, sp_{\lambda,j}tp_{\mu,i}s, \lambda) = (i, s, \lambda)$$

ehk $(i, s, \lambda) \in \mathcal{M}(S; I, \Lambda; P)$ on regulaarne.

(ii) Olgu (i, s, λ), $(j, t, \mu) \in \mathcal{M}(S; I, \Lambda; P)$ regulaarsed, siis osa (i) järgi leiduvad $s' \in V(s) \cap p_{\lambda,k}Sp_{\nu,i}$ ja $t' \in V(t) \cap p_{\mu,h}Sp_{\rho,j}$ mingite $k, h \in I$, $\nu, \rho \in \Lambda$ jaoks. Kasutades järeldust 1.31 saame $V(sp_{\lambda,j}t) \cap t'Ss' \neq \emptyset$.

Võttes nüüd $x \in t'Ss'$, siis x on kujul $t'x's' = p_{\mu,h}t''p_{\rho,j}x'p_{\lambda,k}s''p_{\nu,i}$, kus $t'', x', s'' \in S$. Kuna korrutises $p_{\mu,h}t''p_{\rho,j}x'p_{\lambda,k}s''p_{\nu,i}$ on kõik elemendid poolrühmast S, siis võime tähistada $y = t''p_{\rho,j}x'p_{\lambda,k}s''$, millest $x = t'x's' = p_{\mu,h}yp_{\nu,i} \in p_{\mu,h}Sp_{\nu,i}$. Kuna x on valitud suvaline, siis $t'Ss' \subseteq p_{\mu,h}Sp_{\nu,i}$, millest $V(sp_{\lambda,j}t) \cap p_{\mu,h}Sp_{\nu,i} \neq \emptyset$.

Nüüd saame $(i, s, \lambda)(j, t, \mu) = (i, sp_{\lambda,j}t, \mu)$ ja $V(sp_{\lambda,j}t) \cap p_{\mu,h}Sp_{\nu,i} \neq \emptyset$, mingi $h \in I$, $\nu \in \Lambda$ puhul. Seega osast (i) saame, et $(i, sp_{\lambda,j}t, \mu)$ on regulaarne, ehk korrutis $(i, s, \lambda)(j, t, \mu)$ on regulaarne.

Kui me võtame suvalise maatriksi P elemendi $p_{\lambda,i} \in S$, siis S regulaarsuse ja järelduse 1.10 tõttu leidub $s \in V(p_{\lambda,i})$, mille puhul kehtib võrdus

$$(i, s, \lambda)^2 = (i, s, \lambda)(i, s, \lambda) = (i, sp_{\lambda,i}s, \lambda) = (i, s, \lambda).$$

Saame, et (i, s, λ) on idempotent, mistõttu $(i, s, \lambda) \in \mathcal{RM}(S; I, \Lambda, P)$ ehk $\mathcal{RM}(S; I, \Lambda, P)$ pole tühi.

Seega $\mathcal{RM}(S; I, \Lambda; P)$ on $\mathcal{M}(S; I, \Lambda; P)$ regulaarne alampoolrühm.

$\square$

Definitsioon 2.2. Olgu S regulaarne poolrühm. Poolrühma $\mathcal{M}(S; I, \Lambda; P)$ regulaarset alampoolrühma $\mathcal{RM}(S; I, \Lambda; P)$ nimetatakse **regulaarseks Reesi maatrikspoolrühmaks.**

Lemma 2.3 (Lemma 2.2 [1])**.** *Olgu S inversne poolrühm, siis regulaarne Reesi maatrikspoolrühm $\mathcal{RM} = \mathcal{RM}(S; I, \Lambda; P)$ on lokaalselt inversne.*

Tõestus. Olgu S inversne poolrühm. Olgu $(i, s, \lambda) \in \mathcal{RM}$ idempotent, siis kehtivad võrdused $(i, s, \lambda)(i, s, \lambda) = (i, s, \lambda)$ ja $(i, s, \lambda)(i, s, \lambda) = (i, sp_{\lambda,i}s, \lambda)$, millest saame $s = sp_{\lambda,i}s$.

Seega kõik elemendid $e \in E(\mathcal{RM})$ on kujul (i, s, λ), kus $s = sp_{\lambda,i}s$. Fikseerime idempotendi $e := (i, s, \lambda) \in \mathcal{RM}$ ja näitame, et $e\mathcal{RM}e$ on inversne alampoolrühm kasutades teoreemi 1.13.

1. Olgu meil $a \in e\mathcal{RM}e$, siis a on kujul $(i, s, \lambda)(j, t, \mu)(i, s, \lambda) = (i, sp_{\lambda,j}tp_{\mu,i}s, \lambda)$, kus $j \in I$, $t \in S$ ja $\mu \in \Lambda$. Kuna $(i, s, \lambda), (j, t, \mu) \in \mathcal{RM}$, siis ka nende korrutis $(i, sp_{\lambda,j}tp_{\mu,i}s, \lambda) \in \mathcal{RM}$, seega leidub $x \in V((i, sp_{\lambda,j}tp_{\mu,i}s, \lambda))$. Elemendi $exe \in e\mathcal{RM}e$, puhul kehtivad võrdused

$$\begin{aligned}
&a(exe)a \\
=&(i, s, \lambda)(j, t, \mu)(i, s, \lambda)(i, s, \lambda)x(i, s, \lambda)(i, s, \lambda)(j, t, \mu)(i, s, \lambda) \\
=&(i, s, \lambda)(j, t, \mu)(i, s, \lambda)x(i, s, \lambda)(j, t, \mu)(i, s, \lambda) \\
=&(i, sp_{\lambda,j}tp_{\mu,i}s, \lambda)x(i, sp_{\lambda,j}tp_{\mu,i}s, \lambda) = (i, sp_{\lambda,j}tp_{\mu,i}s, \lambda) \\
=&(i, s, \lambda)(j, t, \mu)(i, s, \lambda) = a.
\end{aligned}$$

   Seega $e\mathcal{RM}e$ on regulaarne.

2. Olgu r lokaalse alammonoidi $e\mathcal{RM}e$ idempotent, siis ta on kujul $r = exe$,

kus $x = (j,t,\mu)$. Siis kuna $rr = r$ saame

$$(i,s,\lambda)(j,t,\mu)(i,s,\lambda)(i,s,\lambda)(j,t,\mu)(i,s,\lambda) = (i, sp_{\lambda,j}tp_{\mu,i}s,\lambda)(i, sp_{\lambda,j}tp_{\mu,i}s,\lambda)$$
$$=(i, sp_{\lambda,j}tp_{\mu,i}sp_{\lambda,i}sp_{\lambda,j}tp_{\mu,i}s,\lambda) = r = (i, sp_{\lambda,j}tp_{\mu,i}s,\lambda).$$

Siit saame, et peab kehtima $(sp_{\lambda,j}tp_{\mu,i}s)p_{\lambda,i}(sp_{\lambda,j}tp_{\mu,i}s) = sp_{\lambda,j}tp_{\mu,i}s$. Siit aga saame, et $sp_{\lambda,j}tp_{\mu,i}sp_{\lambda,i}$ on idempotent poolrühmas S, kuna

$$(sp_{\lambda,j}tp_{\mu,i}sp_{\lambda,i}sp_{\lambda,j}tp_{\mu,i}s)p_{\lambda,i} = (sp_{\lambda,j}tp_{\mu,i}s)p_{\lambda,i}$$

Saame analoogiliselt, et ka $p_{\lambda,i}(sp_{\lambda,j}tp_{\mu,i}s)$ on idempotent.

Näitame, et $e\mathcal{RM}e$ idempotendid kommuteeruvad. Olgu nüüd $a = (j,t,\mu), b = (k,u,\xi)$, sellised et $eae, ebe \in E(e\mathcal{RM}e)$. Kuna S on inversne, siis temas idempotendid kommuteeruvad teoreemi 1.13 põhjal, tuletame meelde, et kehtib $s = sp_{\lambda,i}s$ ja $(sp_{\lambda,j}tp_{\mu,i}s)p_{\lambda,i}, (sp_{\lambda,k}up_{\xi,i}s)p_{\lambda,i} \in E(S)$ ning saame

$$\begin{aligned}
(eae)(ebe) &= (i, sp_{\lambda,j}tp_{\mu,i}s,\lambda)(i, sp_{\lambda,k}up_{\xi,i}s,\lambda) = (i, sp_{\lambda,j}tp_{\mu,i}sp_{\lambda,i}sp_{\lambda,k}up_{\xi,i}s,\lambda)\\
&= (i, [(sp_{\lambda,j}tp_{\mu,i}s)p_{\lambda,i}]sp_{\lambda,k}up_{\xi,i}(sp_{\lambda,i}s),\lambda)\\
&= (i, [(sp_{\lambda,j}tp_{\mu,i}s)p_{\lambda,i}][(sp_{\lambda,k}up_{\xi,i}s)p_{\lambda,i}]s,\lambda)\\
&= (i, [(sp_{\lambda,k}up_{\xi,i}s)p_{\lambda,i}][(sp_{\lambda,j}tp_{\mu,i}s)p_{\lambda,i}]s,\lambda)\\
&= (i, (sp_{\lambda,k}up_{\xi,i}s)p_{\lambda,i}(sp_{\lambda,j}tp_{\mu,i}(sp_{\lambda,i}s)),\lambda)\\
&= (i, sp_{\lambda,k}up_{\xi,i}s,\lambda)(i, sp_{\lambda,j}tp_{\mu,i}s,\lambda) = (ebe)(eae)
\end{aligned}$$

Kuna $e\mathcal{RM}e$ on regulaarne, siis teoreemi 1.13 põhjal ta on inversne.

□

Lemma 2.4 (Lemma 2.3 [1])**.** *Olgu $\mathcal{M} = \mathcal{M}(S,I,p)$, kus S on inversne poolrühm ja p rahuldab (MF1)-(MF4). Siis $\mathcal{M}$ on ortodoksaalne ja kolmiku $(i,s,j) \in \mathcal{M}$ puhul kehtivad väited:*

(i) *(i,s,j) on regulaarne parajasti siis, kui $s^{-1}s \leq p_{j,j}$ ja $ss^{-1} \leq p_{i,i}$;*

(ii) *kui (i,s,j) on regulaarne, siis $(j,s^{-1},i) \in V((i,s,j))$;*

(iii) *(i,s,j) on idempotent parajasti siis, kui $s \leq p_{i,j}$.*

Tõestus. (i) *Tarvilikkus.* Olgu (i,s,j) regulaarne element. Siis leidub (k,t,l), et $(i,s,j)(k,t,l)(i,s,j) = (i,s,j)$ ja $(k,t,l) = (k,t,l)(i,s,j)(k,t,l)$, millest saame ka $s = sp_{j,k}tp_{l,i}s$. Nüüd

$$(ss^{-1})p_{i,i} = sp_{j,k}tp_{l,i}(ss^{-1})p_{i,i} = sp_{j,k}tp_{l,i}p_{i,i}ss^{-1}.$$

Kasutades, et $p_{i,i}$ on idempotent ja tingimust (MF2) saame, et kehtib $p_{l,i}p_{i,i} = p_{l,l}p_{l,i}p_{i,i}^2 = p_{l,l}p_{l,i}p_{i,i} = p_{l,i}$ ning kokku

$$ss^{-1}p_{i,i} = sp_{j,k}tp_{l,i}ss^{-1} = ss^{-1}.$$

Lausest 1.12 saame, et $ss^{-1} \leq p_{i,i}$. Analoogiliselt saame näidata ka, et $s^{-1}s \leq p_{j,j}$.

Piisavus. Olgu $s^{-1}s \leq p_{j,j}$ ja $ss^{-1} \leq p_{i,i}$, siis saame $s^{-1}s = ep_{j,j}$ ja $ss^{-1} = e'p_{i,i}$, kus $e, e' \in E(S)$. Vaatame nüüd elementi (j,s^{-1},i).

$$\begin{aligned}
(i,s,j)(j,s^{-1},i)(i,s,j) &= (i, sp_{j,j}s^{-1}p_{i,i}s, j) = (i, sp_{j,j}s^{-1}(ss^{-1}p_{i,i})s, j)\\
&= (i, sp_{j,j}s^{-1}e'p_{i,i}^2 s, j) = (i, s(p_{j,j}s^{-1}s)s^{-1}e'p_{i,i}s, j)\\
&= (i, s(ep_{j,j}^2)s^{-1}e'p_{i,i}s, j) = (i, sep_{j,j}s^{-1}e'p_{i,i}s, j)\\
&= (i, (ss^{-1}s)s^{-1}(ss^{-1}s), j) = (i, ss^{-1}s, j) = (i,s,j)
\end{aligned}$$

Seega (i,s,j) on regulaarne.

(ii) Tõestuse osas (i) oleme näidanud, et $(i,s,j)(j,s^{-1},i)(i,s,j) = (i,s,j)$. Nüüd näitame, et $(j,s^{-1},i)(i,s,j)(j,s^{-1},i)=(j,s^{-1},i)$:

$$\begin{aligned}(j,s^{-1},i)(i,s,j)(j,s^{-1},i) &= (j,s^{-1}p_{i,i}sp_{j,j}s^{-1},i)\\ &= (j,s^{-1}(p_{i,i}ss^{-1})s(s^{-1}sp_{j,j})s^{-1},i)\\ &= (j,s^{-1}(ep_{i,i})s(e'p_{j,j})s^{-1},i)\\ &= (j,s^{-1}(ss^{-1})s(s^{-1}s)s^{-1},i)\\ &= (j,s^{-1}ss^{-1},i)=(j,s^{-1},i).\end{aligned}$$

(iii) *Tarvilikkus.* Olgu (i,s,j) idempotent. Kuna $(i,s,j)(i,s,j)=(i,s,j)$, siis peab kehtima $sp_{j,i}s=s$, sellest tulenevalt saame

$$s^{-1}=s^{-1}ss^{-1}=s^{-1}sp_{j,i}ss^{-1}\leq p_{j,j}p_{j,i}p_{i,i}=p_{j,i},$$

nüüd kasutades (MF3) saame $s^{-1}\leq p_{i,j}^{-1}$, millest $s\leq p_{i,j}$.

Piisavus. Olgu $s\leq p_{i,j}$, siis $s^{-1}\leq p_{j,i}$ ja leidub $e\in E(S)$, et $s^{-1}=ep_{j,i}$. Samuti

$$\begin{aligned}s^{-1}&=s^{-1}ss^{-1}=s^{-1}ss^{-1}ss^{-1}=s^{-1}sep_{j,i}ss^{-1}=es^{-1}sp_{j,i}ss^{-1}\\ &=e^2p_{j,i}sp_{j,i}ss^{-1}=ep_{j,i}sp_{j,i}ss^{-1}=s^{-1}sp_{j,i}ss^{-1}.\end{aligned}$$

Ning (MF2) põhjal $p_{i,j}p_{j,i}p_{i,j}\leq p_{i,j}$, millest saame, et

$$\begin{aligned}(sp_{j,i}s)s^{-1}(sp_{j,i}s)&=sp_{j,i}(ss^{-1}s)p_{j,i}s\leq sp_{j,i}(p_{i,j}p_{j,i}p_{i,j})p_{j,i}s\\ &\leq sp_{j,i}p_{i,j}p_{j,i}s\leq sp_{j,i}s\end{aligned}$$

samuti kehtib võrratus

$$\begin{aligned}sp_{j,i}s&=sp_{j,i}ss^{-1}s=sp_{j,i}s(s^{-1}s)^2=sp_{j,i}ss^{-1}ss^{-1}s=(sp_{j,i}s)s^{-1}(ss^{-1}s)\\ &\leq(sp_{j,i}s)s^{-1}(sp_{j,i}s).\end{aligned}$$

Eelnevatest võrratustest saame, et $(sp_{j,i}s)s^{-1}(sp_{j,i}s) = sp_{j,i}s$. Ehk kokku $sp_{j,i}s \in V(s^{-1})$ ja kuna S on inversne, siis saame $s = sp_{j,i}s$ ehk (i,s,j) on idempotent.

Näitame veel, et $\mathcal{M}$ on ortodoksaalne. Olgu (i,s,j) ja (k,t,l) idempotendid. Siis (iii) järgi $s \leq p_{i,j}$ ja $t \leq p_{k,l}$. Nüüd

$$(i,s,j)(k,t,l) = (i, sp_{j,k}t, l),$$

mille puhul, kasutades (MF4), saame $sp_{j,k}t \leq p_{i,j}p_{j,k}p_{k,l} \leq p_{i,l}$, ehk korrutis $(i,s,j)(k,t,l) = (i, sp_{j,k}t, l)$ on idempotent (iii) põhjal. □

Märkus 2.5. Kui $(i,s,j) \in \mathcal{M}$ on regulaarne element, siis lemmast 2.4(i) saame, et $p_{i,i}sp_{j,j} = s$.

Järeldus 2.6 (Järeldus 2.4 [1]). *Olgu S inversene poolrühm. Kui $\mathcal{M} = \mathcal{M}(S,I,p)$, kus p rahuldab (MF1)-(MF4), siis $\mathcal{RM}$ on üldistatud inversne poolrühm.*

Teoreemidest 6.2.4 ja 6.2.5 [3] saame sõnastada järgmise lemma.

Lemma 2.7. *Olgu S ortodoksaalne poolrühm, olgu $s,t \in S$ ja olgu γ minimaalne inversne kongruents, siis järgmised väited on samaväärsed:*

(1) $s \,\gamma\, t$;

(2) $V(s) \cap V(t) \neq \emptyset$;

(3) $V(s) = V(t)$.

Lemma 2.6 järgi on järgmises lemmas tegu ortodoksaalse poolrühmaga, mistõttu on lemma 2.7 kasutamine õigustatud.

Lemma 2.8 (Lemma 2.6[1]). *Olgu $\mathcal{RM} = \mathcal{RM}(S,I,p)$, kus p rahuldab (MF1)-(MF4) ja olgu $(i,s,j),(k,t,l) \in \mathcal{RM}$. Siis $(i,s,j)\,\gamma\,(k,t,l)$ parajasti siis, kui $s = p_{i,k}tp_{l,j}$ ja $t = p_{k,i}sp_{j,l}$.*

Tõestus. Tarvilikkus. Olgu $(i,s,j),(k,t,l) \in \mathcal{RM}$. Kehtigu $(i,s,j)\,\gamma\,(k,t,l)$, siis lemma 2.7 tõttu on mõlemal elemendil sama inverssete elementide hulk. Nüüd lemmast 2.4(ii) saame, et (j,s^{-1},i) on elemendi (i,s,j) inversne element, mistõttu on ta ka (k,t,l) inversne element. Seega

$$t = tp_{l,j}s^{-1}p_{i,k}t \text{ ja } s^{-1} = s^{-1}p_{i,k}tp_{l,j}s^{-1}.$$

Nüüd kasutame lemmat 2.4(i) ja (MF4) ning saame

$$s = ss^{-1}s = ss^{-1}p_{i,k}tp_{l,j}s^{-1}s \leq p_{i,i}p_{i,k}tp_{l,j}p_{j,j} \leq p_{i,k}tp_{l,j}.$$

Nüüd võttes (k,t,l) inversseks elemendiks (l,t^{-1},k) saame analoogliselt, et see on ka (i,s,j) inversne element, millest $t^{-1} = t^{-1}p_{k,i}sp_{j,l}t^{-1}$ ning kehtib

$$t = tt^{-1}t = tt^{-1}p_{k,i}sp_{j,l}t^{-1}t \leq p_{k,k}p_{k,i}sp_{j,l}p_{l,l} \leq p_{k,i}sp_{j,l}.$$

Nüüd

$$s \leq p_{i,k}tp_{l,j} \leq p_{i,k}p_{k,i}sp_{j,l}p_{l,j} \leq p_{i,i}sp_{j,j} = s$$

Seega $s = p_{i,k}tp_{l,j}$ ja analoogiliselt

$$t \leq p_{k,i}sp_{j,l} \leq p_{k,i}p_{i,k}tp_{l,j}p_{j,l} \leq p_{k,k}tp_{l,l} = t$$

Piisavus. Olgu $(i,s,j),(k,t,l) \in \mathcal{RM}$ ja olgu $s = p_{i,k}tp_{l,j}$ ja $t = p_{k,i}sp_{j,l}$. Olgu (j,s^{-1},i) elemendi (i,s,j) inversne element. Näitame, et (j,s^{-1},i) on ka elemendi (k,t,l) inversne element:

$$(j,s^{-1},i)(k,t,l)(j,s^{-1},i) = (j,s^{-1}p_{i,k}tp_{l,j}s^{-1},i) = (j,s^{-1}ss^{-1},i) = (j,s^{-1},i)$$

ja

$$(k,t,l)(j,s^{-1},i)(k,t,l) = (k, tp_{l,j}s^{-1}p_{i,k}t, l) = (k, t(p_{k,i}sp_{j,l})^{-1}t, l) = (k, tt^{-1}t, l)$$
$$= (k,t,l).$$

Seega $V(i,s,j) \cap V(k,t,l) \neq \emptyset$, millest lemma 2.7 tõttu $(i,s,j)\,\gamma\,(k,t,l)$. $\square$

Definitsioon 2.9. Kasutades lemma 2.8 eeldusi, tähistame

$$\mathcal{IM}(S,I,p) = \mathcal{RM}(S,I,p)/\gamma.$$

Poolrühma $\mathcal{IM}(S,I,p)$ kutsutakse **inversseks Reesi maatrikspoolrühmaks üle** S.

Lemma 2.10 (Lemma 2.7 [1])**.** *Olgu S ja T regulaarsed poolrühmad ja olgu $\theta \colon S \to T$ sürjektiivne homomorfism. Siis θ on lokaalne isomorfism parajasti, siis kui iga $e \in E(S)$ puhul $\theta|_{eSe} \colon eSe \to \theta(e)T\theta(e)$ on isomorfism.*

Tõestus. Tarvilikkus. Olgu θ lokaalne isomorfism. Siis definitsiooni 1.42 (LI1) põhjal $\theta|_{eSf} \colon eSf \to \theta(e)T\theta(f)$ on isomorfism iga $e,f \in E(S)$ seega saame võtta $f = e$.

Piisavus. Esialgu näitame, et kehtib (LI1). Olgu $x,y \in eSf$ ja kehtigu võrdus $\theta(x) = \theta(y)$. Elementidel x,y leiduvad inverssed elemendid $x',y' \in fSe$. Tõepoolest, olgu $x = eaf$ ja $x' \in V(x)$. Siis on vahetult kontrollitav, et $fx'e \in V(x)$. Homomorfismi omadustest saame $\theta(xx') = \theta(yx')$, kusjuures kuna kehtib

$$(eSf)(fSe) = eSfSe \subseteq eSe,$$

siis $xx', yy' \in eSe$. Nüüd kuna $\theta|_{eSe}$ on isomorfism, siis $xx' = yx'$, millest saame $x = yx'x$.

Sarnaselt võttes $\theta(y'x) = \theta(y'y)$, kuna kehtib

$$(fSe)(eSf) = fSeSf \subseteq fSf,$$

saame $y'x = y'y$, millest $yy'x = y$.

Kokku saame $x = yx'x = (yy'x)x'x = yy'(xx'x) = yy'x = y$. Seega $\theta|_{eSf}$ on injektiivne, kuna θ on sürjektiivne, siis $\theta|_{eSf}\colon eSf \to \theta(e)T\theta(f)$ on isomorfism.

Nüüd näitame, et kehtib (LI2). Olgu $i \in E(T)$, kuna θ on sürjektiivne, siis leidub $e \in S$, et $\theta(e) = i$. Kuna S on regulaarne poolrühm leidub $e' \in V(e)$ ja kehtib, et $ee', e'e \in E(S)$. Nüüd sellest, et kehtib (LI1) saame, et

$$\theta|_{ee'Se'e}\colon ee'Se'e \to \theta(ee')T\theta(e'e)$$

on isomorfism. Kuna

$$(ee')e(e'e) = e(e'ee')e = ee'e = e, \text{ ja}$$
$$(ee')e^2(e'e) = (ee'e)(ee'e) = ee = e^2,$$

siis $e, e^2 \in ee'Se'e$ ja kuna $\theta(e) = i = i^2 = \theta(e^2)$, siis $e = e^2$ ehk $e \in E(S)$. □

Lemma 2.11 (Lause 1.4 [9]). *Olgu S regulaarne poolrühm. Loomulik projektsioon poolrühmast S poolrühma S/γ on lokaalne isomorfism parajasti siis, kui S on üldistatud inversne poolrühm.*

Lemma 2.12 (Lemma 2.9 [1]). *Olgu S ja T inverssed poolrühmad. Kui $\theta\colon S \to T$ on sürjektiivne lokaalne isomorfism, siis S ja T on Morita ekivalentsed.*

Lemma 2.13 (Lemma 2.10 [1]). *Olgu S inversne poolrühm ja olgu $\mathcal{M} = \mathcal{M}(S, I, p)$, kus p rahuldab (MF1)-(MF5). Siis poolrühm S on Morita ekvivalentne poolrühmaga $\mathcal{RM} = \mathcal{RM}(S, I, p)$.*

Tõestus. Lemma tõestamiseks defineerime kategooriate ekvivalentsi kategooriast

$C(\mathcal{RM}(S, I, p))$ kategooriasse $C(S)$, siis teoreemi 1.28 põhjal saame, et S ja $\mathcal{RM}$ on Morita ekvivalentsed.

Olgu s morfism kategoorias $C(\mathcal{RM})$, siis s on kujul $\Big((i, a, j), (i, s, k), (l, b, k)\Big)$, kus $(i, s, k) \in \mathcal{RM}$ on regulaarne, $(i, a, j), (l, b, k) \in E(\mathcal{RM})$ ja kehtib võrdus $(i, a, j)(i, s, k)(l, b, k) = (i, s, k)$. Kuna $(i, a, j), (l, b, k) \in E(\mathcal{RM})$, siis $ap_{j,i}$ ja $bp_{k,l}$ on idempotendid ning kehtib võrdus $(ap_{j,i})sp_{k,l}(bp_{k,l}) = sp_{k,l}$. Seega saame, et kolmik $x = (ap_{j,i}, sp_{k,l}, bp_{k,l})$ on morfism kategoorias $C(S)$. Nüüd saame defineerida eeskirja Ψ järgmiselt:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(\mathcal{RM}) \arrow[rr, "\Psi"] & & C(S) \\
(l, b, k) \arrow[d, "s"'] & \mapsto & bp_{k,l} \arrow[d, "x"'] \\
(i, a, j) & \mapsto & ap_{i,j}
\end{tikzcd}$$

Kontrollime definitsiooni 1.1 põhjal, et Ψ on funktoriaalne.

1. On selge diagrammi põhjal.

2. Olgu s, t mistahes morfismid, mida saab korrutada kategoorias $C(\mathcal{RM})$, siis nad on kujul

$$s = \Big((i, a, j), (i, s, k), (l, b, k)\Big),\ t = \Big((l, b, k), (l, t, h), (g, c, h)\Big)$$

ja nende kompositsioon on

$$st = \Big((i, a, j)(i, sp_{k,l}t, h)(g, c, h)\Big)$$

Saame, et

$$
\begin{aligned}
(st)\Psi &= (ap_{i,j}, sp_{k,l}tp_{h,g}, c_{h,g}) \text{ ja} \\
(s\Psi)(t\Psi) &= (ap_{j,i}, sp_{k,l}, bp_{k,l})(bp_{k,l}, tp_{h,g}, cp_{h,g}) = (ap_{j,i}, sp_{k,l}tp_{h,g}, cp_{h,g})
\end{aligned}
$$

Seega $(st)\Psi = (s\Psi)(t\Psi)$.

3. Olgu $u = \Big((i,a,j),(i,a,j),(i,a,j)\Big)$ ühikmorfism kategoorias $C(\mathcal{RM})$, siis $u\Psi = (ap_{j,i}, ap_{j,i}, ap_{j,i})$, mis on ühtlasi kategooria $C(S)$ objekti $ap_{j,i}$ ühikmorfism. Kusjuures $(i,a,j)\Psi = ap_{j,i}$.

Seega Ψ on funktor.

Nüüd näitame, et Ψ on täpne ja täielik ja tihe. Olgu $(i,a,j),(l,b,k) \in \mathrm{Obj}(C(\mathcal{RM}))$ fikseeritud. Defineerime nendel kujutuse

$$
\Psi_1^{(l,b,k),(i,a,j)} \colon C(\mathcal{RM})((i,a,j),(l,b,k)) \to C(S)(bp_{k,l}, ap_{j,i}). \tag{1}
$$

Esialgu näitame, et funktor Ψ on täpne. Selleks peame näitama, et kujutus (1) on injektiivne. Olgu $\Big((i,a,j),(i,s,k),(l,b,k)\Big), \Big((i,a,j),(i,t,k),(l,b,k)\Big)$ kategooria $C(\mathcal{RM})$ morfismid, mis asuvad samas morfismide hulgas ning millel on sama kujutis funktoril Ψ. Sellest, et neil on sama kujutis järeldub, et $sp_{k,l} = tp_{k,l}$ ning sellest, et nad on samas morfismide klassis järeldub $s = ap_{j,i}sp_{k,l}b$ ja $t = ap_{j,i}tp_{k,l}b$, siit saame $s = ap_{j,i}(sp_{k,l})b = ap_{j,i}(tp_{k,l})b = t$. Seega kujutus (1) on injektiivne, mistõttu funktor Ψ on täpne.

Nüüd näitame, et Ψ on täielik. Olgu meil idempotendid (i,a,j), $(l,b,k) \in C(\mathcal{RM})$ ja olgu $(ap_{i,j}, s, bp_{k,l})$ morfism kategoorias $C(S)$. Vaatame kolmikut

$$
\Big((i,a,j),(i,sb,k),(l,b,k)\Big).
$$

Kuna $(ap_{i,j}, s, bp_{k,l})$ on morfism kategoorias $C(S)$, siis saame, et kehtib

$$ap_{j,i}sbp_{k,l}b = (ap_{j,i}sbp_{k,l})b = sb,$$

millest saame $(i, a, j)(i, sb, k)(l, b, k) = (i, sb, k)$. Nüüd on jäänud näidata, et (i, sb, k) on regulaarne element. Kasutame selleks lemmat 2.1(1.). Saame, et

$$ap_{j,i}s = ap_{j,i}(ap_{j,i}sbp_{k,l}) = ap_{j,i}sbp_{k,l} = s$$

Nüüd kuna (i, a, j) on idempotent, siis lemmast 2.4(iii) saame, et $a \leq p_{i,j}$. Nüüd kokku saame

$$\begin{aligned} s &= ap_{j,i}s \leq p_{i,j}p_{j,i}s \overset{\text{(MF4)}}{\leq} p_{i,i}s = p_{i,i}ap_{j,i}s \overset{\text{(MF2)}}{=} p_{i,i}ap_{j,j}p_{j,i}p_{i,i}s \\ &= (p_{i,i}ap_{j,j})p_{j,j}p_{j,i}p_{i,i}s \overset{(*)}{=} ap_{j,i}s = s, \end{aligned}$$

kus võrduse $(*)$ saame kasutame märkusest 2.5. Järelikult kehtib $p_{i,i}s = s$. Sellest saame ka $p_{i,i}sb = sb$. Sarnaselt $s = sbp_{k,l}$, mistõttu $sb = sbp_{k,l}b$. Analoogiliselt saame lemmast 2.4(iii), et $b \leq p_{l,k}$ ja kuna

$$\begin{aligned} sb &= sbp_{k,l}b \leq sbp_{k,l}p_{l,k} \leq sbp_{k,k} = sbp_{k,l}bp_{k,k} = sbp_{k,k}p_{k,l}p_{l,l}(p_{l,l}bp_{k,k}) \\ &= sbp_{k,l}b = sb, \end{aligned}$$

siis $sbp_{k,k} = sb$. Poolrühma S inverssuse tõttu leidub $(sb)^{-1} \in V(sb)$. Võtame nüüd elemendi $p_{k,k}(sb)^{-1}p_{i,i} \in p_{k,k}Sp_{i,i}$. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned} &sbp_{k,k}(sb)^{-1}p_{i,i}sb = sb(sb)^{-1}sb = sb, \text{ ja} \\ &(p_{k,k}(sb)^{-1}p_{i,i})sb(p_{k,k}(sb)^{-1}p_{i,i}) = p_{k,k}(sb)^{-1}sb(sb)^{-1}p_{i,i} = p_{k,k}(sb)^{-1}p_{i,i} \end{aligned}$$

Seega $V(sb) \cap p_{k,k}Sp_{i,i} \neq \emptyset$ ja lemma 2.1 põhjal on (i, sb, k) regulaarne, millest

$$\Big((i, a, j), (i, sb, k), (l, b, k)\Big) \in C(\mathcal{RM}).$$

Nüüd saame

$$\Psi[(i, a, j), (i, sb, k), (l, b, k)] = (ap_{j,i}, sbp_{k,l}, bp_{k,l}) = (ap_{j,i}, s, bp_{k,l}).$$

Sellega oleme näidanud, et kujutus (1) on sürjektiivne, mistõttu funktor Ψ on täielik.

Olgu meil $e \in \mathrm{Obj}(C(S))$, siis $e \in E(S)$. Omadusest (MF5) leidub $i \in I$, et $e \leq p_{i,i}$, millest tänu lausele 1.12 tuleneb, et $e = fp_{i,i}$, kus $f \in E(S)$. Saame nüüd, et (i, e, i) on idempotent poolrühmas $\mathcal{RM}$ kuna

$$(i, e, i)(i, e, i) = (i, ep_{i,i}e, i) = (i, (fp_{i,i})p_{i,i}e, i) = (i, fp_{i,i}e, i) = (i, ee, i) = (i, e, i).$$

Seega (i, e, i) on objekt kategoorias $C(\mathcal{RM})$. Aga

$$(i, e, i)\Psi = ep_{i,i} = fp_{i,i}p_{i,i} = fp_{i,i} = e.$$

Niisiis igal objektil e kategooriast $C(S)$ leidub objekt (i, e, i) kategooriast $C(\mathcal{RM})$, et $(i, e, i)\Psi = ep_{i,i} = e$. Seega funktor Ψ on tihe.

Sellega oleme näidanud, et funktor Ψ on täielik, täpne ja tihe, mistõttu on ta kategooriate ekvivalents definitsiooni 1.4 põhjal. □

Saame nüüd tõestada peateoreemi esimese osa.

Teoreem 2.14. *Olgu S inversne poolrühm ja olgu $p\colon I \times I \to S$ McAlisteri funktsioon. Siis S on Morita ekvivalentne poolrühmaga $\mathcal{IM}(S, I, p)$.*

Tõestus. Lemmast 2.13 saame, et S on Morita ekvivalentne Reesi maatrikspoolrühmaga $\mathcal{RM} = \mathcal{RM}(S, I, p)$. Samuti saame järeldusest 2.6, et $\mathcal{RM}$ on üldistatud inversne poolrühm. Seega lemmast 2.11 saame, et loomulik projektsioon $\pi\colon \mathcal{RM} \to \mathcal{RM}/\gamma = \mathcal{IM}(S, I, p)$ on lokaalne isomorfism. Teame ka, et loomulik projektsioon on sürjektiivne, mistõttu saame tänu lemmale 2.12, et Reesi maatrikspoolrühm $\mathcal{RM}$ on Morita ekvivalentne inversse Reesi maatrikspoolrühmaga $\mathcal{IM}(S, I, p)$. Kuna Morita ekvivalents on evivalentsiseos, siis S on Morita ekvivalentne inversse Reesi maatrikspoolrühmaga $\mathcal{IM}(S, I, p)$. $\square$

3 Inversse poolrühmaga Morita ekvivalentsed inverssed poolrühmad

Juhime tähelepanu, et kuna Morita kontekst on defineeritud inverssetel poolrühmadel, siis selles töö osas on tähtedega S ja T tähistatud poolrühmad inverssed.

Lemma 3.1 (Lause 2.3 [10])**.** *Olgu* $(S, T, X, \langle\ ,\ \rangle, [\ ,\ ])$ *Morita kontekst. Siis* $x, y \in X$*,* $s \in S$ *ja* $t \in T$ *puhul kehtib:*

(1) $\langle x, y\rangle\langle z, w\rangle = \langle x[y, z], w\rangle$*;*

(2) $[x, y][z, w] = [x\langle y, z\rangle, w]$*;*

(3) $\langle xt, y\rangle = \langle x, yt^{-1}\rangle$*;*

(4) $[sx, y] = [x, s^{-1}y]$*;*

(5) $\langle x, x\rangle$ *ja* $[x, x]$ *on idempotendid.*

Tõestus. Näitame kehtivust ainult juhul $\langle\ ,\ \rangle$, kuna juht $[\ ,\ ]$ on sümmeetriline. Kasutame tõestuses definitsiooni 1.27 omadusi (M1)-(M7).

(1) $\langle x, y\rangle\langle z, w\rangle \overset{\text{(M1)}}{=} \langle\langle x, y\rangle z, w\rangle \overset{\text{(M7)}}{=} \langle x[y, z], w\rangle$;

(3) esiteks märkusest 1.8 saame, et $\langle xt, y\rangle\langle xt, y\rangle^{-1}$ on idempotent. Paneme tähele, et kehtib:

$$\begin{aligned}
\langle x, yt^{-1}\rangle\langle xt, y\rangle^{-1}\langle xt, y\rangle &\overset{(M2)}{=} \langle x, yt^{-1}\rangle\langle y, xt\rangle\langle xt, y\rangle \\
&\overset{(1)}{=} \langle x[yt^{-1}, y], xt\rangle\langle xt, y\rangle \\
&\overset{\text{(M5)}}{=} \langle x[y, yt^{-1}]^{-1}, xt\rangle\langle xt, y\rangle \\
&\overset{\text{(M4)}}{=} \langle x([y, y]t^{-1})^{-1}, xt\rangle\langle xt, y\rangle \\
&= \langle xt[y, y], xt\rangle\langle xt, y\rangle \\
&\overset{\text{(M1)}}{=} \langle xt, y\rangle\langle y, xt\rangle\langle xt, y\rangle = \langle xt, y\rangle.
\end{aligned}$$

Lause 1.12 põhjal saame, et $\langle xt, y\rangle \leq \langle x, yt^{-1}\rangle$.

Analoogiliselt:

$$\begin{aligned}\langle y, xt\rangle\langle yt^{-1}, x\rangle^{-1}\langle yt^{-1}, x\rangle &= \langle y, xt\rangle\langle x, yt^{-1}\rangle\langle yt^{-1}, x\rangle \\ &= \langle y[xt, x], yt^{-1}\rangle\langle yt^{-1}, x\rangle \\ &= \langle yt^{-1}[x, x], yt^{-1}\rangle\langle yt^{-1}, x\rangle \\ &= \langle yt^{-1}, x\rangle\langle x, yt^{-1}\rangle\langle yt^{-1}, x\rangle = \langle yt^{-1}, x\rangle.\end{aligned}$$

Seega $\langle yt^{-1}, x\rangle \leq \langle y, xt\rangle$, millest $\langle x, yt^{-1}\rangle \leq \langle xt, y\rangle$.

Kokku saame $\langle xt, y\rangle = \langle x, yt^{-1}\rangle$;

(5) kehtivad võrdused

$$\langle x, x\rangle\langle x, x\rangle \overset{(1)}{=} \langle x[x, x], x\rangle \overset{(M6)}{=} \langle x, x\rangle.$$

□

Lemma 3.2 (Lause 2.4 [10]). *Olgu $(S, T, X, \langle\, ,\, \rangle, [\, ,\,])$ Morita kontekst ja olgu $x \in X$ fikseeritud. Olgu nüüd*

$$\begin{aligned}&\epsilon_x\colon E(S) \to E(T), \quad e \mapsto [ex, ex], \text{ ja} \\ &\eta_x\colon E(S) \to E(T), \quad f \mapsto \langle xf, xf\rangle.\end{aligned}$$

Siis ϵ_x ja η_x on homomorfismid.

Lemma 3.3 (Lemma 3.2 [1]). *Olgu $(S, T, X, \langle\, ,\, \rangle, [\, ,\,])$ Morita kontekst. Siis kehtivad järgmised väited:*

(1) iga $x \in X$ jaoks leidub homomorfism $\epsilon_x\colon E(S) \to E(T)$, et $ex = x\epsilon_x(e)$ iga $e \in E(S)$ puhul;

(2) iga $x \in X$ jaoks leidub homomorfism $\eta_x\colon E(S) \to E(T)$, et $xf = \eta_x(f)x$ iga $f \in E(S)$ puhul.

Tõestus. Tõestame väite (2). Olgu $\eta_x(f) = \langle xf, xf \rangle$, lemma 3.2 põhjal on η_x homomorfism. Tuletame meelde, et teoreemist 1.13 inversses poolrühmas idempotemdid kommuteeruvad ja arvutame nüüd $\eta_x(e)x$:

$$\begin{aligned}\langle xf, xf \rangle x &\overset{(M7)}{=} xf[xf, x] \overset{(M1)}{=} xf[x, xf]^{-1} \overset{((M4)}{=} xf([x, x]f)^{-1} = xf[x, x] \\ &\overset{(\star)}{=} x[x, x]f \overset{(M6)}{=} xf.\end{aligned}$$

Võrduse $(\star)$ saame lemmast 3.1(5).

Osa (1) saame tõestada analoogiliselt. □

Lemma 3.4 (Lemma 3.3 [1]). *Olgu $(S, T, X, \langle\ ,\ \rangle, [\ ,\ ])$ Morita kontekst. Olgu $p\colon X \times X \to S$ defineeritud kui $p_{x,y} = \langle x, y \rangle$. Siis p on McAlisteri funktsioon.*

Tõestus. Näitame, et kehtivad definitsiooni 1.32 tingimused $(MF1) - (MF5)$:

(MF1) lemmast 3.1(5) saame, et $p_{x,x} = \langle x, x \rangle$ on idempotent;

(MF2) kasutame lemmat 3.1(1) ja (M6), mille põhjal

$$p_{x,x}p_{x,y}p_{y,y} = \langle x, x \rangle \langle x, y \rangle \langle y, y \rangle = \langle x[x, x], y \rangle \langle y, y \rangle = \langle x, y \rangle \langle y, y \rangle.$$

Nüüd kasutame lemma 3.1(1),(3),(5) ja (M6), millest saame

$$\langle x, y \rangle \langle y, y \rangle = \langle x[y, y], y \rangle = \langle x, y[y, y]^{-1} \rangle = \langle x, y[y, y] \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Ehk kokku $p_{x,x}p_{x,y}p_{y,y} = p_{x,y}$;

(MF3) $p_{x,y} = p_{y,x}^{-1}$ järeldub otse omadusest (M2);

(MF4) lemmast 3.1(1) saame $p_{x,y}p_{y,z} = \langle x, y \rangle \langle y, z \rangle = \langle x[y, y], z \rangle$. Lemmast 3.3 saame, et $x[y, y] = \eta_x([y, y])x = ex$. Seega

$$p_{x,y}p_{y,z} = \langle x[y, y], z \rangle = \langle ex, z \rangle = e\langle x, z \rangle,$$

millest tänu lausele 1.12 saame $p_{x,y}p_{y,z} \leq \langle x, z\rangle$;

(MF5) olgu $e \in E(S)$. Kuna $\langle -, -\rangle$ on pealekujutus, leiduvad $x, y \in X$, et $e = \langle x, y\rangle$. Nüüd kuna kehtib (MF4), siis kehtib $e = ee = ee^{-1} = \langle x, y\rangle\langle y, x\rangle \leq \langle x, x\rangle = p_{x,x}$.

□

Meenutame, et γ on minimaalne inversne kongruents ja kasutades lemmat 2.4 saame järgmises lemmas vaadata kongruentsi γ nagu ta on defineeritud lemmas 2.7.

Lemma 3.5. *Olgu $(S, T, X, \langle\ ,\ \rangle, [\ ,\ ])$ Morita kontekst. Olgu $p\colon X \times X \to S$, $p_{x,y} = \langle x, y\rangle$. Olgu $\mathcal{R} = \mathcal{RM}(S, X, p)$ regulaarne Rees'i maatrikspoolrühm. Olgu $\theta\colon \mathcal{R} \to T$, $(x, s, y) \mapsto [x, sy]$. Siis θ on sürjektiivne homomorfism ja tema tuum on γ.*

Tõestus. Esiteks näitame, et θ on homomorfism. Reesi maatrikspoolrühma definitsioonist saame:

$$(x, s, y)(u, t, v) = (x, sp_{y,u}t, v) = (x, s\langle y, u\rangle t, v)$$

Nüüd

$$\theta(((x, s, y)(u, t, v))) = \theta((x, s\langle y, u\rangle t, v)) = [x, s\langle y, u\rangle tv]$$

ja

$$\theta((x, s, y))\theta((u, t, v)) = [x, sy][u, tv],$$

lemmast 3.1(2) ja omadusest (M1) saame

$$[x, sy][u, tv] = [x, \langle sy, u\rangle tv] = [x, s\langle y, u\rangle tv].$$

Seega θ on homomorfism.

Nüüd näitame, et θ on sürjektiivne. Olgu $t \in T$, siis leidub $(x, y) \in X \times X$, et $[x, y] = t$. Vaatame elementi $(x, \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle, y) \in \mathcal{M}(S, I, p)$. Paneme tähele, et lemmast 3.1(5) $p_{x,x} = \langle x, x\rangle$ ja $p_{y,y} = \langle y, y\rangle$ on idempotendid ja kuna S on inversne siis nad kommuteeruvad. Seega

$$p_{x,x}p_{y,y} = p_{y,y}p_{x,x} = p_{y,y}p_{y,y}p_{x,x}p_{x,x} \in V(\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle) \cap p_{y,y}Sp_{x,x}.$$

Seega lemma 2.1 põhjal on element $(x, \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle, y)$ ühtlasi ka poolrühma $\mathcal{RM}(S, X, p)$ element. Selle elemendi kujutis θ suhtes on

$$[x, \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle y] = [x, \langle x, x\rangle y].$$

Lemmast 3.1(4) saame $[x, \langle x, x\rangle y] = [\langle x, x\rangle x, y] = [x, y] = t$. Seega leidub elemendil t originaal ehk θ on sürjektiivne.

Jäänud on näidata, et $\ker\theta = \gamma$. Olgu $(x, s, y), (u, t, v) \in \mathcal{RM}(S, X, p)$. Kehtigu $\theta(x, s, y) = \theta(u, t, v)$. Kujutuse θ definitsioonist $[x, sy] = [u, tv]$. Nüüd saame, et kehtib

$$\begin{aligned} s &= \langle x, x\rangle s\langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle\langle sy, y\rangle \overset{(*)}{=} \langle x[x, sy], y\rangle \\ &= \langle x[u, tv], y\rangle = \langle x, u\rangle\langle tv, y\rangle = \langle x, u\rangle t\langle v, y\rangle \end{aligned}$$

kus võrdus $(*)$ tuleb lemmast 3.1(1). Analoogiliselt saame

$$\begin{aligned} t &= \langle u, u\rangle t\langle v, v\rangle = \langle u, u\rangle\langle tv, v\rangle = \langle u[u, tv], v\rangle \\ &= \langle u[x, sy], v\rangle = \langle u, x\rangle\langle sy, v\rangle = \langle u, x\rangle s\langle y, v\rangle \end{aligned}$$

Nüüd lemmast 2.8 saame $(x, s, y)\,\gamma\,(u, t, v)$.

Vaatame nüüd teistpidi, olgu $(x, s, y)\,\gamma\,(u, t, v)$, siis lemmast 2.8 saame

$$s = \langle x, u\rangle t\langle v, y\rangle \text{ ja } t = \langle u, x\rangle s\langle y, v\rangle.$$

Saame kasutades eelnevaid võrdusi ja (M7)

$$[u, tv] = [u, \langle u, x\rangle s\langle y, v\rangle v] = [u, \langle u, x\rangle sy[v, v]]$$

Nüüd kasutame lemma 3.1(4), (M2) ja (M7) ning saame

$$[u, \langle u, x\rangle sy[v, v]] = [x[u, u], sy[v, v]]$$

lõpuks kasutades (M4) ja (M5) saame

$$[x[u, u], sy[v, v]] = (sy, x[u, u])^{-1}[v, v] = [u, u][x, sy][v, v].$$

Seega $[u, tv] \leq [x, sy]$. Sümmeetriliselt saab näidata, et $[x, sy] \leq [u, tv]$ ehk kokku $[x, sy] = [u, tv]$ nagu vaja. □

Saame nüüd eelnevatest tulemustest tõestada peateoreemi teise osa.

Teoreem 3.6. *Olgu S, T Morita ekvivalentsed inverssed poolrühmad. Siis T on isomorfne poolrühmaga $\mathcal{IM}(S, I, p)$ mingi hulga I ja McAlisteri funktsiooni p korral.*

Tõestus. Olgu S, T Morita ekvivalentsed inverssed poolrühmad, siis teoreemist 1.28 saame, et leidub unitaarne Morita kontekst $(S, T, X, \langle\ ,\ \rangle, [\ ,\ ])$. Moodustame regulaarse Reesi maatrikspoolrühma $\mathcal{RM}(S, I, p)$ ja defineerime $p\colon X \times X \to S$, $p_{x,y} = \langle x, y\rangle$ lemmast 3.4 saame, et p on McAlisteri funktsioon. Lemmast 3.5 saame, et leidub sürjektiivne homomorfism $\theta\colon \mathcal{RM} \to T$, mille tuum on $\ker\theta = \gamma$, kus γ on minimaalne inversne kongruents. Järeldusest 1.44 saame, et kuna $\theta\colon \mathcal{RM} \to T$ on sürjektiivne, siis $\mathcal{RM}/\ker\theta = \mathcal{RM}/\gamma = \mathcal{IM}(S, I, p) \cong T$. □

Kokkuvõte

Töö eesmärgiks oli üksikasjalikult tõestada Mark Lawsoni ja Bassima Afara artiklli „*Morita equivalence of inverse semigroups*"[1] peateoreemi. Nimelt näitasime, et kui S on inversne poolrühm, siis ta on Morita ekvivalentne inversse Reesi maatrikspoolrühmaga $\mathcal{IM}(S, I, p)$, kus $p\colon I \times I \to S$ on McAlisteri funktsioon, ning et iga inversne poolrühm T, mis on Morita ekvivalentne poolrühmaga S, on isomorfne inversse Reesi maatrikspoolrühmaga mingi McAlisteri funktsiooni puhul.

Peateoreemi tõestamise käigus näitasime muuhulgas, kuidas saada Reesi maatrikspoolrühmast regulaarne Reesi maatrikspoolrühm ja kuidas sellest omakorda saada inversne Reesi maatrikspoolrühm. Näitasime veel, kuidas kontrollida, et homomorfism on lokaalne isomorfism ning tõime sisse lemma, mis seostab lokaalse isomorfismi leidumise kahe poolrühma vahel nende poolrühmade Morita ekvivalentsusega. Teise osa lõpus näitasime, et inversne poolrühm S on Morita ekvivalentne regulaarse Reesi maatrikspoolrühmaga $\mathcal{RM}(S, I, p)$. Sellega saime tõestada peateoreemi esimese väite.

Kolmandas osas tõestasime mõned Morita konteksti omadused ja näitasime, et võttes Morita konteksti $(S, T, X, \langle\ ,\ \rangle, [\ ,\ ])$ saame, leida sürjektiivse homomorfismi regulaarsest Reesi maatrikspoolrühmast $\mathcal{RM}(S, I, p)$, kus $p_{x,y} = \langle x, y\rangle$, poolrühma T, kusjuures selle homomorfismi tuum on minimaalne inversne kongruents γ. Kasutades homomorfismiteoreemi tuntud järeldust tõestasime peateoreemi teise väite.

Viited

[1] Afara, B. ja Lawson, M. V. (2011). *Morita equivalence of inverse semigroups.* Periodica Mathematica Hungarica. *66*(1), 119-130. doi:10.1007/s10998-013-3105-y

[2] Funk, J., Lawson M. V., Steinberg, B. (2011). *Characterizations of Morita equivalent inverse semigroups.* Journal of Pure and Applied Algebra, *215*(9), 2262-2279. doi: 10.1016/j.jpaa.2011.02.015

[3] Howie, J. M. (1995). *Fundamentals of semigroup theory.* Oxford: Clarendon Press.

[4] Kilp, M. (1998). *Algebra II.* Tartu: Paar.

[5] Laan V., Reimaa Ü., Tart L. (2023). *Sissejuhatus algebra struktuuridesse*, loengukonspekt. Vaadatud 30.03.2023 https://courses.ms.ut.ee/MTMM.00.013/2023_spring/uploads/Main/konspektV1.3.pdf

[6] Laan, V., Reimaa, Ü. ja Väljako, K. (2022). *Kategooriateooria*, loengukonspekt. Vaadatud 09.03.2023 https://courses.ms.ut.ee/MTMM.00.037/2022_spring/uploads/Main/kat2022c.pdf

[7] Lawson, M.V. (2011). *Morita equivalence of semigroups with local units.* Journal of Pure and Applied Algebra, *215*(4), 455-470. doi:10.1016/j.jpaa.2010.04.030

[8] McAlister, D. (1981). *Regular Rees matrix semigroups and regular Dubreil-Jacotin semigroups.* Journal of the Australian Mathematical Society, *31*(3), 325-336. doi:10.1017/S1446788700019467

[9] McAlister, D. B. (1983). *Rees Matrix Covers for Locally Inverse Semigroups.* Transactions of the American Mathematical Society, *277*(2), 727–738. doi:10.2307/1999233

[10] Steinberg, B. (2009). *Strong Morita Equivalence of Inverse Semigroups.* Houston Journal of Mathematics. *37*(3),1-29. doi:10.48550/arXiv.0901.2696

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Andres Truu,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose „Inverssete poolrühmade Morita ekvivalentsus”, mille juhendaja on Alvin Lepik, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 4.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Andres Truu
09.05.2023