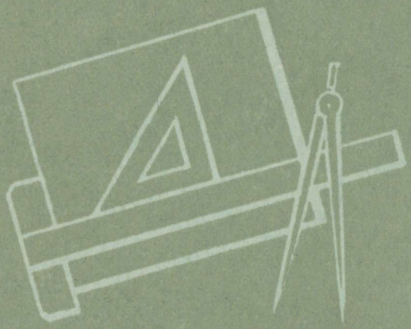
17. IX 48.

E. ETVERK

GEOMEETRIA

VIII KLASSILE



RK
„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS" • 1948

E. ETVERK

Geomeetria

KESKKOOLI VIII KLASSILE

3873

RK
„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“
TALLINN 1948

2

Bibliotheca
Universitatis
Tartuensis

(1948: 0852)
25000

A= 17354

PLANIMEETRIA.

Peatükk I.

Sirgjoon.

§ 1. Sissejuhatus.

Oma ümbruses me näeme mitmesuguseid esemeid — laudu, toole, raamatuid jm. Iga ese asetseb ruumis, mis ümbritseb meid kõikjal, viibime me toas või väljas. Meie eluase, Maakera, asetseb maailmaruumis, samuti kui Päike, planeedid ja kõik muud taevakehad.

Igal esemel on mitmesuguseid omadusi; nende kirjeldamiseks kasutame niisuguseid sõnu, nagu suur, raske, ümmargune. Teatavaid esemete omadusi nimetatakse geomeetrilisteks omadusteks. Need on:

1. eseme kuju iseloomustavad omadused, nagu sirge, kõver, ümmargune;

2. eseme suurust iseloomustavad omadused, nagu kõrge, lai, 100 meetrit pikk;

3. omadused, mis näitavad eseme asendit teiste esemete suhtes, nagu kummuli, rööbiti, nurgeti;

4. omadused, mis näitavad eseme asukohta teiste esemete suhtes, nagu peal, 5 meetri kaugusel, kõrval.

Kuju, suurust, asendit ja asukohta iseloomustavad omadused on geomeetrilised omadused.

Peale geomeetriliste omaduste on esemetel mitmeid muid omadusi. Viimastega geomeetria ei tegele. Vaadeldes geomeetriliselt seisukohalt näiteks raamatut, telliskivi või mõnda muud eset, jätame kõrvale aine, millest need esemed on valmistatud, nende kaalu, värvuse jm. ning pöörame tähelepanu ainult nende kujule ja suurusele. Nii vaadeldes kaovad erinevused paljude esemete vahel, näiteks nii raamat kui ka telliskivi muutuvad risttahukaks, liivahunnik ja kartulikuhi asenduvad koonusega, kummipallist ja piljardimunast saab kera. Niiviisi saame uued „esemed" — risttahuka, koonuse, ringi, rööpküliku jne., mida nimetatakse geomeetrilisteks kujunditeks.

Geomeetria on teadus, mis uurib geomeetrilisi kujundeid ja nende omadusi.

Geomeetrilised kujundid liigitatakse tasapinnalisteks ja ruumilisteks. Tasapinnalise kujundi kõik punktid asetsevad ühel ja samal tasapinnal. Niisugused kujundid on näiteks ring, sirglõik, kolmnurk. Geomeetria osa, mis uurib tasapinnalisi kujundeid, nimetatakse tasapinna geomeetriaks ehk planimeetriaks.

Kujundid, mille kõikidest punktidest ei saa läbi panna üht ja sama tasapinda, on ruumilised. Nende uurimisega tegelev geomeetria osa on ruumi geomeetria ehk stereomeetria.

Sõnad geomeetria, planimeetria ja stereomeetria on võetud kreeka keelest ja tähendavad vastavalt maamõõtmist, tasapinnamõõtmist ja ruumimõõtmist. Need nimetused näitavad, et geomeetria tähtsamaiks ülesandeiks on joone, pinna ja ruumi mõõtmise ülesanded. Nende mõõtmiste praktiline vajadus põhjustaski geomeetria tekkimist Babüloonias ja Egiptuses u. 4000 aastat tagasi.

Ülesanded.

1. Kirjeldada tikutoosi (oma pliiatsi, küünla) geomeetrilisi omadusi.

2. Nimetada kolm ruumilist kujundit ja kolm tasapinnalist kujundit.

3. Moodustada neljast tikust tasapinnaline nelinurk ja ruumiline nelinurk.

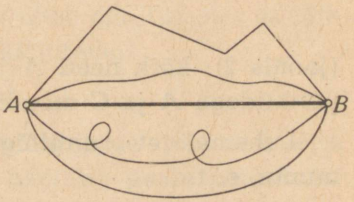
4. Kirjeldada mõnda kerapinna omadust.

5. Missuguseid geomeetrilisi omadusi kirjeldavad järgmised sõnad: kõrvuti; kumer; viltu; konarlik; madal?

§ 2. Sirglõik.

Kõige lihtsam geomeetriline kujund on punkt*. Geomeetriline punkt on suuruseta ja kujuta; tal on vaid üks geomeetriline omadus, nimelt asukoht. Punkti märgitakse väikese ringikesega, mille keskkoht ongi kujutatav punkt. Punkte tähistatakse suurte ladina tähtedega.

Märgime tasasel pinnal, näiteks klassitahvli pinnal, kaks punkti *A* ja *B* ning ühendame need punktid teineteisega mitmesuguste joonte abil (joonis 1). Leiame nende joonte hulgast kõige lühema. Selleks lähendame pinguletõmmatud niidi punktidele *A* ja *B*. Pinguletõmmatud niit nende punktide vahel kujutab sirglõiku *AB*. Punktid *A* ja *B* on sirglõigu otspunktid. Sageli nimetatakse sirglõiku lihtsalt lõiguks. Niisiis



Joonis 1.

sirglõik on kõige lühem joonlõik kahe punkti vahel.

Seega iga muu joon, mis ühendab punkte *A* ja *B*, on pikem kui sirglõik *AB*. Meie kujutluse järgi

* *punctum* (lad.) — torge, piste.

kaht antud punkti ühendab ainult üks sirglõik.

Et kaht punkti ühendab ainult üks sirglõik, siis öeldakse, et sirglõik on määratud oma otspunktidega.

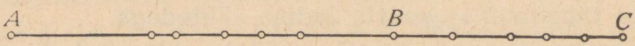
Sirglõigu omaduste tõttu on sobiv kahe punkti vahelist kaugust mõõta sirglõiku mööda:

kahe punkti vaheliseks kauguseks on neid punkte ühendava sirglõigu pikkus.

Sirglõigu joonestamiseks kasutame joonlauda. Sama vahend võimaldab ka sirglõiku pikendada. On selge, et

sirglõiku saab pikendada nii üle tema ühe kui ka teise otspunkti.

Kui sirglõik AB on pikendatud üle punkti B punktini C, siis ütleme, et punkt B on punktide A ja C vahel. Peale B on punktide A ja C vahel veel palju muid punkte



Joonis 2.

(joonis 2); kõik need A ja C vahel olevad punktid koos punktidega A ja C moodustavadki sirglõigu AC.

Lubame, et sirglõigu asukohta tasapinnal võib muuta, s. t.

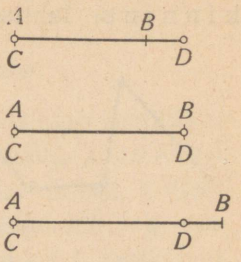
sirglõiku saab viia teisele kohale, ilma et tema pikkus muutuks.

Sirglõigu viimiseks teisele kohale kasutame sirklit*. Selleks võtame sirglõigu sirklile, s. t. paigutame sirkli harud nii, et sirkli üks otspunkt ühtiks lõigu ühe otspunktiga ja teine — lõigu teise otspunktiga. Viies nüüd sirkli teisele kohale oleme ka lõigu üle viinud.

---

* *circulus* (lad.) — ring.

Joonestame kaks sirglõiku; olgu need AB ja CD. Võrdleme nende pikkusi. Selleks paigutame sirkli abil ühe lõigu teise peale nii, et nende ühed otspunktid, näiteks A ja C, ühtivad, ja vaatame, kuidas asetsevad nende lõikude teised otspunktid, nimelt B ja D. Seejuures esineb kolm võimalust (joonis 3): kas punkt B jääb punktide C ja D vahele või punktid B ja D ühtivad või punkt D jääb punktide A ja B vahele.



Joonis 3.

Kui punkt B on punktide C ja D vahel, siis ütleme, et lõik AB on l ü h e m kui lõik CD, ja kirjutame:

$$AB < CD;$$

kui punkt B ühtib punktiga D, siis ütleme, et lõigud AB ja CD on v õ r d s e d, ja kirjutame:

$$AB = CD;$$

kui punkt D on punktide A ja B vahel, siis ütleme, et lõik AB on p i k e m kui lõik CD, ja kirjutame:

$$AB > CD.$$

Mõnikord saab sirglõikude võrdlemise tulemust ette öelda ja seetõttu pole vaja neid üksteise peale paigutada. Kui lõikude KL, MN ja OP kohta on teada näiteks, et

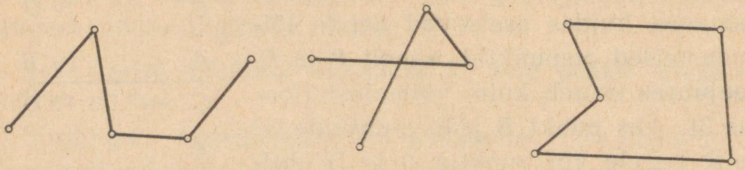
$$KL = MN \quad \text{ja} \quad MN > OP,$$

siis saab otsustada, et

$$KL > OP.$$

Sirglõiku tähistame sageli ka ainult ühe väikese tähega, näiteks sirglõik a. Seda tähistusviisi on sobiv kasutada eriti siis, kui ei ole oluline sirglõigu asukoht tasapinnal vaid ainult tema pikkus.

Joont, mis koosneb sirglõikudest, nimetatakse *murdjooneks* (joonis 4). Murdjoon on kas *lahtine* või *kinnine*; lahtisel murdjoonel on kaks otspunkti, kuna



Joonis 4.

kinnisel otspunkte ei ole. Näiteks joonisel 4 kujutatud murdjoontest viimane on kinnine. Murdjoone lõikude otspunktid on murdjoone *tipud*. Murdjoone tähistamine toimub tema tippude tähiste abil.

Ülesanded.

6. On antud punktid A ja B. Kuidas saada kõik punktid, mis on A ja B vahel?

7. Maapinnal on märgitud kaks punkti püstilöödud kepikeste abil. Kuidas leida uusi punkte, mis on antud punktide vahel?

8. Olgu Kuressaare, Viljandi ja Tartu kaugus Tallinnast õhuteed mööda kilomeetrites vastavalt k, v ja t. Võrrelda neid kaugusi joonise 9 alusel ja järjestada need kahanevas järjekorras.

9. Joonist kasutamata

1. võrrelda lõike a ja c, kui $a = b$ ja $b = c$;
2. võrrelda lõike x ja z, kui $x > y$ ja $y > z$;
3. võrrelda lõike s ja t, kui $s > u$ ja $t = u$.

10. On antud kolm punkti nii, et ükski neist ei ole teiste vahel. Mitu erisugust lahtist murdjoont on määratud nende punktidega ja mitu kinnist murdjoont?

11. Joonestada kinnine murdjoon *ABCD*, mis koosneb neljast lõigust. Leida mingi kahe tipu vahel punkt, mis on ka ülejäänud kahe tipu vahel.

§ 3. Sirglõikude summa ja vahe.

Olgu antud kaks sirglõiku *a* ja *b*. Joonestame sirglõigu, mis võrdub lõikude *a* ja *b* summaga ehk, teisiti, liidame lõigud *a* ja *b*. Selleks joonestame esiteks mingi küllalt pika lõigu ja kanname sellele sirkli abil lõigu $KL = a$; siis leiame sama riista abil *KL* pikendil üle punkti *L* punkti *M* nii, et $LM = b$. Nii saadud lõik *KM* on lõikude *a* ja *b* summa (joonis 5):

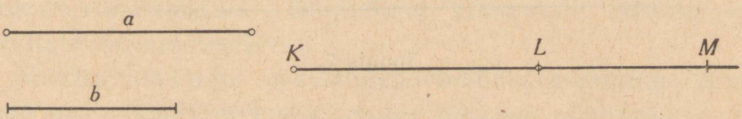
$$KM = a + b.$$

Kui juhtub, et lõigud *a* ja *b* on võrdsed, siis punkt *L* jaotab lõigu *KM* kaheks võrdseks lõiguks ehk, teisiti, punkt L poolitab lõigu *KM*. Sel juhul punkt *L* on lõigu *KM* keskpunkt. Seega

lõigu keskpunkt on punkt, mis jaotab lõigu kaheks võrdseks osaks.

Kolme või enama lõigu liitmiseks liidame enne kaks lõiku, siis tulemusega kolmanda lõigu jne.

Ühe ja sama lõigu korduval liitmisel saame joonestada lõigu, mis on antud lõigu kordne; et lõigu *a* järgi joonestada näiteks lõiku $3a$, selleks joonestame esiteks lõigu $a + a$ ja liidame sellega veel kord lõigu *a*.



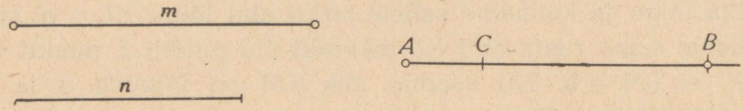
Joonis 5.

Kahe lõigu vahe leidmiseks ehk, teisiti, ühest lõigust teise lahutamiseks tuleb üht lõiku lühendada

teise võrra. Et leida antud lõikude m ja n vahet (joonis 6), selleks joonestame esiteks lõigu $AB = m$ ja leiame siis sirkli abil A ja B vahel punkti C nii, et $BC = n$.
Nii saadud lõik

$$AC = m - n.$$

On selge, et ühest lõigust saab lahutada teise lõigu ainult sel juhul, kui teine lõik on esimesest lühem. Kui ühest lõigust saab p korda lahutada teise lõigu, siis



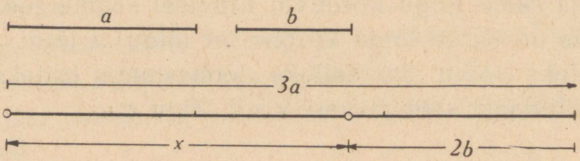
Joonis 6.

ütleme, et teine lõik mahub p korda esimesele.

Osates sirglõike liita ja lahutada saame mitmesuguseid algebralisi avaldisi kujutada sirglõikudena. Et kujutada lõiguna näiteks avaldist

$$3a - 2b,$$

võtame vabalt kaks lõiku a ja b, ehitame lõigu $3a$ ja lahutame sellest lõigu $2b$. Lahutamine on kindlasti võimalik,



Joonis 7.

kui võtame $a > b$; siis ülejääv lõik x kujutabki antud avaldist (joonis 7):

$$x = 3a - 2b.$$

Saab näidata, et lõikude liitmisel, lahutamisel ja arvuga

korrutamisel jäävad kehtima samad seadused, mis on kehtivad arvude puhul.

Ülesanded.

12. Joonestada kahe vabalt võetud lõigu summa.

13. Joonestada kahe vabalt võetud lõigu vahe.

14. Joonestada kahe punkti vahele vabalt kaks murdjoont ja ehitada sirglõigud, mis on nende murdjoontega ühepikkused. Kumb murdjoon on pikem ja kui palju?

15. Ehitada sirglõik $4a$, kus a on vabalt võetud lõik.

16. Ehitada sirglõik $5a - 3b$, kus a ja b on vabalt võetud lõigud, kuid nii, et $a > b$.

17. Kujutada sirglõikudena avaldised $a + b$ ja $b + a$ ning võrrelda tulemusi.

18. Kujutada sirglõikudena avaldised $2a + 2b$ ja $2(a + b)$. Mis võib öelda tulemuste võrdlemisel?

19. Näidata, et $a + (b + c) = a + b + c$, kus a, b ja c on vabalt võetud lõigud.

§ 4. Sirglõigu mõõtmine.

Eespool võrdlesime sirglõikude pikkusi o t s e s e l t — nende üksteise peale paigutamise teel (§ 2). Sedasama on võimalik teha ka k a u d s e l t, nimelt lõikude mõõtmise ja saadud mõõtarvude võrdlemise teel.

Mõõtmiseks vajame mõõtühikuid. Mõõtühikud määratakse riigivõimu poolt seadustega, et oleks tagatud ühtlaste ühikute tarvitamine. Riigivõimu kontrollile alluvad ka tarvitatavad mõõteriistad.

Nõukogude Liidus on seadusliku mõõdusüsteemina tarvitusel nn. meetermõõdustik, milles pikkuse põhiühikuks on m e e t e r *. Tarvitatavamad pikkusühikud selles süsteemis on järgmised:

---

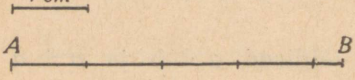
* *metreo* (kr.) — mõõtma.

$$1\ \text{m} = 10\ \text{dm} = 100\ \text{cm} = 1000\ \text{mm};$$
$$1\ \text{dm} = 10\ \text{cm} = 100\ \text{mm};$$
$$1\ \text{cm} = 10\ \text{mm};$$
$$1\ \text{km} = 1000\ \text{m}.$$

Meetermõõdustikku mittekuuluva ühikuna kasutatakse meresõidu alal ühikut

$$1\ \text{meremiil} = 1{,}852\ \text{km}.$$

Mõõta sirglõik tähendab leida, mitu korda pikkusühik mahub antud sirglõigule või missugune osa pikkusühikust on see lõik.



Joonis 8.

Olgu vaja mõõta sirglõik AB (joonis 8). Kasutades ühikuna sentimeetrit, mahutame selle mõõdetavale sirglõigule nii mitu korda, kui ta mahub. Joonisest näeme, et antud juhul 1 cm mahub mõõdetavale lõigule 4 korda ja et jääb üle lõik, mis on väiksem kui 1 cm. Seega

$$4\ \text{cm} < AB < 5\ \text{cm}.$$

Selle põhjal ütleme, et lõigu AB pikkus on ligikaudu 4 cm või 5 cm. Kumma neist mõõtarvudest loeme lõigu pikkuseks, see sõltub sellest, kas me lepime kokku mõõta p u u d u s e g a või l i i a g a. Nii ühel kui teisel juhul tekib mõõtmisel v i g a. Et mõõtmisvead oleksid võimalikult väikesed, selleks on kokku lepitud

mõõta puudusega, kui ülejääv lõik on väiksem kui pool ühikut, ja liiaga, kui ülejääv lõik on võrdne poole ühikuga või suurem kui pool ühikut.

Antud lõigu täpsemaks mõõtmiseks kasutame ülejäänud lõigu mõõtmiseks sentimeetrist väiksemat ühikut, s. o. millimeetrit. Kui 1 mm mahub ülejäänud lõigule 3 korda ja uus ülejääk on väiksem kui 1 mm, siis

$$4\ \text{cm}\ 3\ \text{mm} < AB < 4\ \text{cm}\ 4\ \text{mm}$$

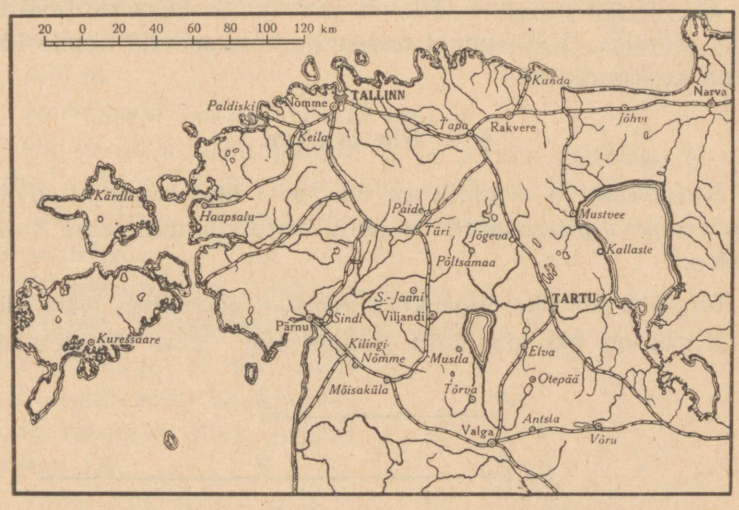
ehk

$$4{,}3\ \text{cm} < AB < 4{,}4\ \text{cm}.$$

Eespool-toodud kokkuleppe kohaselt loeme lõigu AB pikkuseks selle mõõtarvu, mis on väiksema veaga. Kui selleks on 4,3 cm, siis

$$AB = 4{,}3 \text{ cm}.$$

Vaadeldud juhul sirglõigu mõõtmine oli l i g i k a u d n e, sest kasutatud pikkusühik ei mahtunud täisarv kordi mõõdetavale lõigule. Küsime, kas sirglõigu mõõtmine võib olla ka t ä p n e. Palja silmaga vaadates võib mõnikord näida,



Joonis 9.

et pikkusühik mahub mõõdetavale lõigule täpselt täisarv kordi, kuid kontrollides seda luubi või mikroskoobi abil võib osutuda, et see ei ole nii. Et meil kunagi ei ole teada, kas täpsena näiv mõõtmine ka suurema suurenduse kasutamisel osutub täpseks või mitte, siis ütleme, et

sirglõigu mõõtmine on ikka ligikaudne.

Ülesanded.

20. Joonestada kinnine murdjoon ja leida mõõtmise teel selle pikkus.

21. Leida kaardil (vt. lk. 13, joonis 9) antud mõõdu alusel, kui kaugel on teineteisest Rakvere ja Narva, Tapa ja Tartu, Türi ja Viljandi, Viljandi ja Tartu.

22. Avaldada 3,5 meremiili kilomeetrites.

23. Avaldada 20 km meremiilides.

24. Sirglõik on jaotatud kaheks mittevõrdseks lõiguks. Nende lõikude keskpunktid on teineteisest 5,3 cm kaugusel. Kui pikk on antud sirglõik?

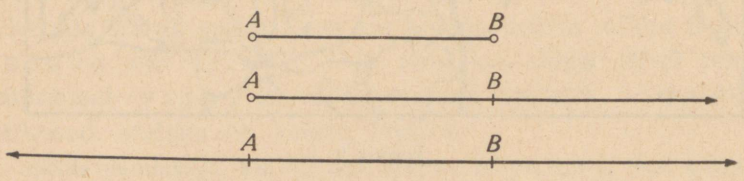
25. 15 cm pikkune lõik on jaotatud kaheks mittevõrdseks lõiguks. Kui kaugel teineteisest asetsevad nende lõikude keskpunktid?

§ 5. Kiir ja sirge.

Kujutleme, et sirglõik on üle tema ühe otspunkti *piiramatult* pikendatud. Saadud kujundit nimetame *kiireks*.

Sirglõiku üle ühe otspunkti piiramatult pikendades tekib kiir.

Kiirel on üks otspunkt (joonis 10). Kiirt tähistatakse



Joonis 10.

kas ühe väikese tähega või kahe suure tähega, milledest üks on tema otspunkti ja teine tema ühe vabalt võetud punkti tähis.

Sirglõiku saame pikendada ka üle mõlema otspunkti. Mõttes võime seda teha piiramatult kaugele.

Sirglõiku üle mõlema otspunkti piiramatult pikendades tekib sirgjoon ehk sirge.

Eelnevast selgub, et kiire ja sirge joonestamine paberile või kujutamine mudeli abil ei ole võimalik. Kui ütleme, et joonestame sirge, siis joonestame sellest sirgest ainult lõigu.

Sirget tähistatakse kas selle sirge kahe punkti tähiste abil, näiteks sirge *AB*, või ühe väikese tähega tähestiku viimaste tähtede hulgast, näiteks sirge *s*.

Joonestame kaks punkti *A* ja *B*. Nagu teame, neid punkte ühendab ainult üks sirglõik. Selle lõigu pikendamisel üle mõlema otspunkti saame üheainsa sirge. Sellest selgub, et

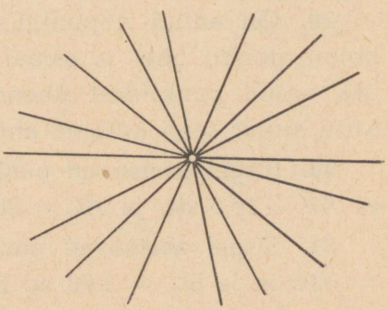
kahte punkti läbib ainult üks sirgjoon.

Kui sirge *s* läbib punkte *A* ja *B*, siis öeldakse ka, et sirge *s* ühendab neid punkte või et punktid *A* ja *B* on sel sirgel. Neid punkte nimetatakse siis selle sirge punktideks.

Et kahte punkti läbib ainult üks sirgjoon, siis

sirgjoon on määratud oma kahe punktiga.

Ühe punktiga ei ole sirge määratud, sest üht punkti läbib määratu hulk sirgeid (joonis 11).

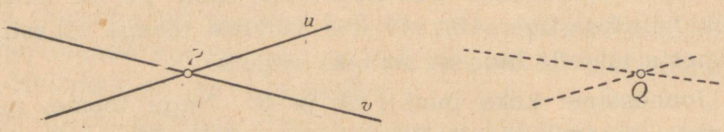


Joonis 11.

Joonestame sirged *u* ja *v* nii, et neil oleks ühine punkt *P* (joonis 12). Öeldakse, et need sirged lõikuvad selles ühises punktis. Küsime, kas need sirged lõikuvad veel mõnes teises punktis. Joonise piirkonnas ei leidu teist lõikepunkti, kuid võib-olla leidub see kuski väga kaugel. Järele mõeldes selgub, et teist lõikepunkti sirgetel *u* ja *v* ei saa olla. Tõepoolest, kui sirgetel *u* ja *v*

leiduks veel teine ühine punkt, ütleme Q (joonis 12), siis läbiks ju punkte P ja Q kaks eri sirget, mida olla ei saa. Sellest järeldub, et

kaks sirget saavad lõikuda ainult ühes punktis.



Joonis 12.

Ülesanded.

26. Kuidas nimetatakse sirge osasid, milleks selle jaotavad kaks sirgel võetud punkti?

27. Joonestada kõik sirged, mida määravad vabalt võetud viis punkti, kui nende hulgas ei leidu kolme punkti ühel sirgel.

28. Mitu sirget on määratud 3, 4, 5 punktiga, millede hulgas ei leidu kolme punkti ühel sirgel?

29. On antud n punkti nii, et nende hulgas ei leidu kolme punkti ühel ja samal sirgel. Mitu sirget saab, kui üks antud punktidest ühendada iga ülejäänud punktiga? Mitu sirget saab kõikide antud punktide ühendamisel?

30. Sirgel asetsevad punktid A, B ja C järjestikku nii, et $AB = 16{,}5$ cm ja $AC = 28{,}3$ cm. Kui pikk on lõik BC?

31. Sirgel asetsevad punktid A, B ja C nii, et $AB = 3{,}85$ m ja $BC = 1{,}68$ m. Kui pikk on lõik AC juhul, kui punkt B on punktide A ja C vahel, ja juhul, kui punkt C on punktide A ja B vahel?

32. On antud punktid A, B ja C. Kus asetseb punkt B, kui $AB + BC = AC$, ja kus on punkt B, kui $AB + BC > AC$? Kas saab juhtuda, et $AB + BC < AC$?

33. Linnast A linnani B on linna C kaudu 57 km ja linnast A linnani C on linna B kaudu 48 km. Kumb linnadest B ja C on lähemal linnale A ja kui palju?

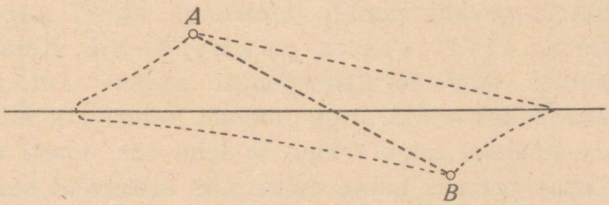
§ 6. Tasapind.

Sirgjoone abil saab otsustada, kas mingi pind on tasane või mitte. Kui sirge joonlaua serva paigutame laua pinnale ja seejuures näeme, et igas asendis joonlaua serv ühtib laua pinnaga, siis ütlemegi, et laud on tasane. Tasast pinda nimetatakse t a s a p i n n a k s. Eeltoodu põhjal ütleme, et

tasapind on niisugune pind, millel asetsevad iga sirge kõik punktid, niipea kui sirgel on selle pinnaga kaks ühist punkti.

Sellest järeldub, et kui tasapinnal, näiteks tasasel tahvlipinnal võtta kaks punkti ja neist tõmmata läbi sirge, siis selle sirge kõik punktid on sel tasapinnal.

Sirgjoon jaotab tasapinna, millel ta asetseb, kaheks pooltasapinnaks, milledest üks on sirgest ühel ja teine teisel pool. Kui võtta kaks punkti nii, et üks on sirgest



Joonis 13.

ühel ja teine teisel pool, siis meie kujutluse järgi ei ole võimalik minna mööda tasapinda ühest punktist teise ilma sirgest üle minemata (joonis 13). Seda sirge ja tasapinna omadust väljendame järgmise lausena:

sirgjoon jaotab tasapinna, millel ta asetseb, kaheks eraldatud pooltasapinnaks.

Ülesanded.

34. Näidata, et kiir ei jaota tasapinda kaheks eraldatud osaks.

35. Mitmeks osaks jaotavad tasapinna kaks lõikuvat sirget?

36. Kas vaikne merepind on tasane või mitte?

37. Miks ei saa silindri külgpinda lugeda tasaseks, kuigi sellele pinnale saab joonestada sirgeid?

§ 7. Teljeline sümmeetria.

Neid eraldatud pooltasapindu, milleks sirge jaotab tasapinna, saab kergesti ühtivusse viia, kui lubada, et

tasapinda võib tema mistahes sirget mööda kahekorra murda.

Seda tasapinna omadust nimetame tema sümmeetriaks*. Niisiis

tasapind on oma iga sirge suhtes sümmeetriline.

Tasapinna kahekorra murdmisel mingit sirget mööda tasapinna iga punkt ühtib sama tasapinna ühe punktiga. Neid ühtelangevaid punkte nimetame antud sirge suhtes sümmeetrilisteks punktideks. Kaks antud sirge suhtes sümmeetrilist punkti saame, kui näiteks paberilehe sellel antud sirget mööda kahekorra murrame, paberisse nõelaga augu teeme ja lehe siis uuesti avame; nüüd näeme paberis kahte auku, mis asetsevad sümmeetriliselt kokkumurdejoone suhtes. Kui leht sama joont mööda teistpidi kahekorra murda, siis osutuvad augud jällegi kohakuti olevaiks. Seetõttu ütleme, et

iga punkt on antud sirge suhtes sümmeetriline ühe ja ainult ühe punktiga.

---

* *symmetria* (kr.) — tasamõõdulisus; ühtlus.

Kui antud punkt ei asetse kokkumurdesirgel, siis temaga sümmeetriline punkt on samuti väljaspool seda sirget. Et igale punktile leiduks sümmeetriline punkt, peame kokkumurdesirge punkti lugema sümmeetriliseks tema endaga.

Sirget, mille suhtes kaks antud punkti on sümmeetrilised, nimetatakse nende punktide s ü m m e e t r i a t e l j e k s.

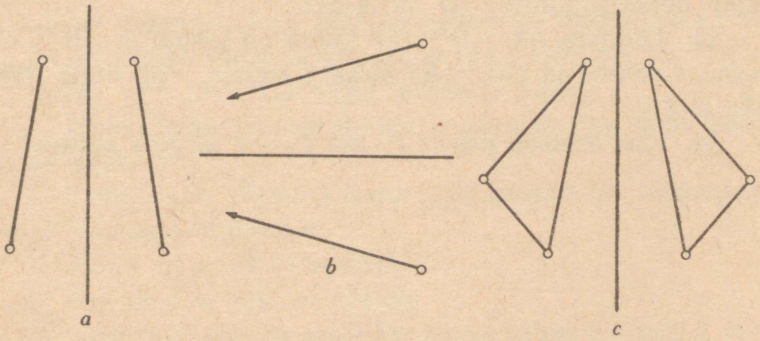
Lauset „punkt A on sümmeetriline punktiga B sirge s suhtes" kirjutame lühidalt kujul

$$A \div B \text{ sirge } s \text{ suhtes}$$

ehk veel lühemalt

$$A \div B \ (s).$$

Samas mõttes, nagu kõnelesime kahest sümmeetrilisest punktist, saame rääkida ka kahest sümmeetrilisest sirglõi-



Joonis 14.

gust (joonis 14 *a*), kahest sümmeetrilisest kiirest (joonis 14 *b*), kahest sümmeetrilisest kolmnurgast (joonis 14 *c*), üldiselt kahest sümmeetrilisest kujundist.

Kaks kujundit on antud sirge suhtes sümmeetrilised, kui tasapinna kahekorra murdmisel seda sirget mööda need kujundid ühtivad.

Kui kaks lõiku on sümmeetrilised, siis on nad ka võrd sed, sest tasapinna kahekorra murdmisel mööda sümmeetriatelge need lõigud ühtivad:

kui $AB \div CD$, siis $AB = CD$.

Ülesanded.

38. Leida loodusest ja tarbeesemete juurest näiteid sümmeetria kohta.

39. Teha paberile tindiga mingi joonis ja murda leht kokku, enne kui tint on kuivanud. Võrrelda saadud kahte „pilti".

40. Kuidas saab paberist lõikamise või rebimise teel sümmeetrilisi kujundeid?

41. Joonistada mingi suur trükitäht ja sellega sümmeetrilised kujundid püstsirge suhtes ja rõhtsirge suhtes.

42. On antud, et sirge t suhtes $A \div A_1$ ja $B \div B_1$. Mis saab öelda lõikudest AB ja A_1B_1?

43. Lõikude AB, CD ja EF kohta on teada, et $AB \div CD$ sirge t suhtes ja $CD \div EF$ sirge s suhtes. Võrrelda lõike AB ja EF.

44. Kus asetseb punkt P, kui $P \div P$ sirge s suhtes?

Peatükk II.

Nurk.

§ 8. Nurga mõiste.

Joonestame kaks kiirt *AB* ja *AC*, mis väljuvad ühest ja samast punktist *A* (joonis 15). Saadud kujundit nimetatakse nurgaks; seega

nurk on kujund, mille moodustavad kaks ühest ja samast punktist väljuvat kiirt.

Nurka moodustavaid kiiri nimetatakse nurga haaradeks ja nende ühist otspunkti nurga tipuks.

Nurka võib tähistada väga mitmeti, nimelt:

1. kolme punkti tähise kaudu, kusjuures tipu tähis peab jääma keskele;
2. kahe haara tähise kaudu, kui haarad on tähistatud ladina väikeste tähtedega;
3. ainult tipu tähise kaudu;
4. ühe kreeka väikese tähega.

Nii saab joonisel 15 esinevat nurka tähistada neljal erineval viisil:

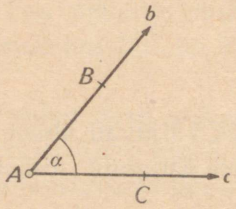
BAC (või *CAB*), *bc*, *A*, *α*.

Sõna nurk asendatakse kirjutamisel mõnikord ka sümboliga ∠, mis paigutatakse nurga nimetuse ette*; näiteks ∠ *bc*.

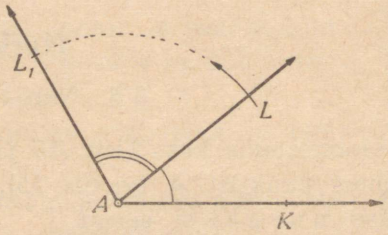
---

* *symbolon* (kr.) — tunnusmärk.

Nurga haarad jaotavad tasapinna, millel see nurk asetseb, kaheks eraldatud piirkonnaks nii, et ühest piirkonnast ei ole võimalik mööda tasapinda teise piirkonda minna ilma nurga üht haara ületamata. Tasapinna ühe piirkonna kohta öeldakse, et ta on nurga sees, ja teise piirkonna kohta, et ta on nurgast *väljaspool*. Kumma piirkonna loeme nurga sees olevaks, see on kokkuleppe küsimus.



Joonis 15.



Joonis 16.

Harilikult märgitakse nurga sees olev piirkond kaarekesega (joonis 15). Et nurga sees olevaks võib lugeda ükskõik kumma ülalkirjeldatud piirkonna, siis ütleme, et

kaks ühest ja samast punktist väljuvat kiirt määravad kaks nurka.

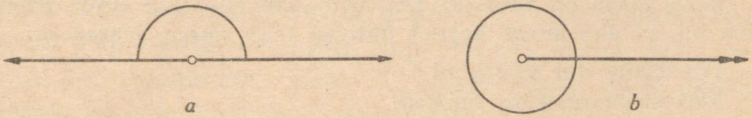
Seetõttu ongi vajalik nurga märkimine kaarekesega.

§ 9. Nurga suurus.

Meie kujutluse järgi on igal nurgal oma *suurus*. See suurus muutub, kui nurga üht haara pöörata tasapinnal nurga tipu ümber, teine aga endisele kohale jätta. Pöörates näiteks joonisel 16 kujutatud nurga KAL haara AL noolega näidatud suunas asendisse AL_1 on nurk KAL suurenenud ja nimelt nurga LAL_1 võrra. Kui haara AL pöörata vastassuunas, siis nurk KAL väheneb.

Pöörame haara AL noolega näidatud suunas, kuni ta satub haaraga AK ühele sirgele (joonis 17 *a*). Saadud nurka nimetatakse s i r g n u r g a k s.

Sirgnurk on nurk, mille haarad moodustavad sirgjoone.



Joonis 17.

Pöörates seda haara endises suunas veel edasi kuni ta ühtib esimese haaraga saame t ä i s p ö ö r d e (joonis 17 *b*).

Niisamuti, nagu sirglõigu puhul loeme siingi võimalikuks, et

nurka saab viia teisele kohale, ilma et tema suurus muutuks.

Edaspidi (§ 20) näeme, et nurga üleviimine taandub sirglõigu üleviimisele ja on seega teostatav sirkli abil. Esialgu aga teeme seda üleviimist mõttes või kasutame selleks vajaduse korral paberist väljalõigatud nurki.

Nurga viimine teisele kohale võimaldab võrrelda kahe nurga suurust. Selleks paigutame ühe nurga teise peale nii, et nende tipud ja ühed haarad ühtivad, ning vaatleme, kuidas asetsevad nende teised haarad. Võrdleme näiteks nurki NOP ja KLM (joonis 18). Paigutame nurga NOP nurga KLM peale nii, et tipp O ühtiks tipuga L ja et haar ON ühtiks haaraga LK. Haar OP võib seejuures sattuda kas nurga KLM sisse või selle nurga haarale LM või väljapoole nurka KLM. Esimesel juhul ütleme, et NOP on väiksem kui KLM, ja kirjutame

$$\angle NOP < \angle KLM;$$

teisel juhul nurgad on võrdsed

$$\angle NOP = \angle KLM;$$

kolmandal juhul NOP on suurem kui KLM

$$\angle NOP > \angle KLM.$$

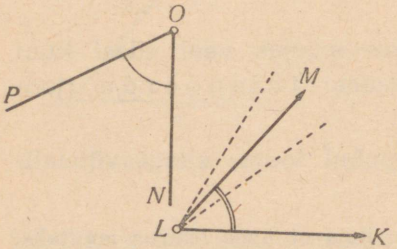
Seega

kaks nurka on võrdsed, kui neid saab teineteise peale paigutada nii, et ühe nurga haarad ühtivad teise nurga haaradega.

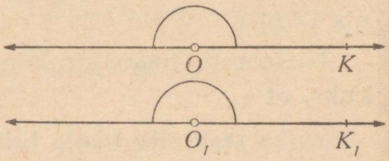
Tõestame sel viisil, et

kõik sirgnurgad on võrdsed.

Selleks võtame kaks sirgnurka, ütleme nurgad O ja O_1



Joonis 18.



Joonis 19.

(joonis 19), märgime nurga O ühel haaral mingi punkti K ja nurga O_1 haaral punkti K_1 nii, et $OK = O_1K_1$. Paigutame nüüd nurga O nurga O_1 peale nii, et tipp O ühtib tipuga O_1 ja et haar OK läheb mööda haara O_1K_1. Siis punkt K ühtib punktiga K_1, sest $OK = O_1K_1$, ja sirge OK ühtib sirgega O_1K_1, sest läbi punktide O_1 ja K_1 läheb ainult üks sirge. Kuid siis on ühtinud ka nurkade O ja O_1 teised haarad, sest nad on esimestega ühel sirgel, ja seega $\angle O = \angle O_1$. Et O ja O_1 on mistahes kaks sirgnurka, siis järeldub nende võrdsusest, et kõik sirgnurgad on võrdsed.

Ülesanded.

45. Nimetada nurki kiirte OK, OL ja OM vahel.

46. Mitu nurka tekib kahe sirge lõikumisel?

47. Nurkadest α, β ja γ on teada, et $\alpha < \beta$ ja $\gamma = \alpha$. Mis saab järeldada nurkade β ja γ kohta?

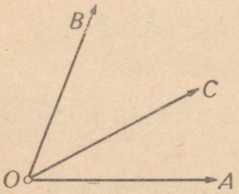
§ 10. Nurkade summa ja vahe.

Joonestame mingi nurga ja selle **sisse** vabalt kiire, mille otspunktiks on nurga tipp, näiteks nurga AOB sisse kiire OC (joonis 20). Kiir OC jaotab nurga AOB kaheks osaks, millede **summa** on $\angle AOB$:

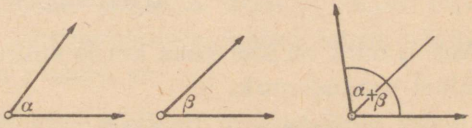
$$\angle AOC + \angle COB = \angle AOB.$$

Kumbagi liidetavat nimetame antud nurga ja teise liidetava **vaheks**:

$$\angle AOC = \angle AOB - \angle BOC$$
$$\angle COB = \angle AOB - \angle AOC.$$



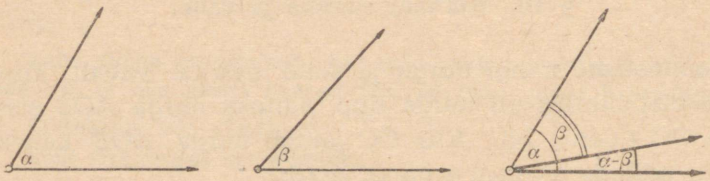
Joonis 20.



Joonis 21.

Olgu antud kaks nurka, näiteks α ja β. Nende summa saamiseks ehk nende liitmiseks tuleb üks nurk viia teise **külge**, nii et nad asetseksid ühel tasapinnal ja et neil oleks üks haar ühine (joonis 21). Siis nende teiste haarade poolt moodustatud nurk, mille sees on nurkade ühine haar, ongi α ja β summa. Samade nurkade vahe leidmiseks tuleb üks nurk viia teise **peale** nii, et neil oleks üks haar ühine (joonis 22). Nende teiste haarade poolt moodustatud nurk (mille sees ei ole nurkade ühist haara) on antud nurkade vahe.

Niisamuti nagu sirglõikude puhul on nurkade liitmise ja lahutamise abil võimalik mõningaid algebralisi avaldisi kujutada nurkadena, näiteks avaldisi 3α, $5\alpha - 2\beta$ jm.



Joonis 22.

Nurkade liitmisel, lahutamisel ja arvuga korrutamisel on kehtivad samad arvutusseadused, mis arvude puhul.

Võib juhtuda, et nurga AOB sees võetud kiir OC (joonis 20) jaotab selle nurga kaheks võrdseks osaks, s. t.

$$\angle AOC = \angle BOC.$$

Antud nurk on siis kaks korda suurem kui kumbki poolitamisel saadud nurk:

$$\angle AOB = 2 \cdot \angle AOC \text{ ja } \angle AOB = 2 \cdot \angle BOC.$$

Sel juhul kiirt OC nimetatakse nurga AOB p o o l i t a j a k s

Nurgapoolitaja on kiir, mis jaotab nurga kaheks võrdseks osaks.

Tõestame, et

nurgal ei saa olla rohkem kui üks poolitaja.

Oletame korraks, et mingil nurgal, näiteks nurgal ABC, on kaks poolitajat, nimelt BD ja BE (joonis 23). Et antud nurk on kaks korda suurem kui poolitamisel saadud iga uus nurk, siis

$$\angle ABC = 2 \cdot \angle ABD$$

ja

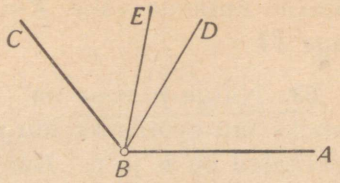
$$\angle ABC = 2 \cdot \angle ABE.$$

Mõlema võrduse vasakuks pooleks on $\angle ABC$; seetõttu nende paremad pooled peavad olema võrdsed, s. t.

$$2 \cdot \angle ABD = 2 \cdot \angle ABE,$$

millest järeldub, et

$$\angle ABD = \angle ABE.$$



Joonis 23.

Kuid see järeldus ei saa olla õige, sest üks nurkadest *ABD* ja *ABE* on osa teisest, seega väiksem teisest. Kui aga saadud järeldus ei ole õige, siis ei ole õige ka oletus, millest lähtudes selle järelduse saime. Niisiis ei ole õige, et nurgal *ABC* on kaks poolitajat.

Kui nurga tasapind nurgapoolitajat mööda kahekorra murda, siis nurga tipp jääb endisele kohale, kuid üks haar ühtib teisega, sest nurgapoolitaja jaotab nurga võrdseteks osadeks. Seetõttu ütleme, et

nurga haarad asetsevad sümmeetriliselt nurgapoolitaja suhtes.

Ülesanded.

48. Leida paberist väljalõigatud nurga poolitaja.

49. Punktist *O* väljuvad kiired *a* ja *b*, mis on sümmeetrilised sirge *s* suhtes. Kus asetsevad kiirte *a* ja *b* poolt moodustatud kahe nurga poolitajad?

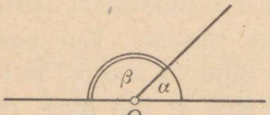
50. On teada, et $\angle A \div \angle B$ sirge *t* suhtes. Mis saab öelda nurkade *A* ja *B* suuruste kohta?

51. Nurk *ABC* on jaotatud kiirtega *BD* ja *BE* kolmeks võrdseks osaks. Kumb nurkadest *ABE* ja *CBD* on suurem?

52. Nurkade α ja β summa on kaks korda suurem kui samade nurkade vahe. Kui suur on nurk α võrreldes nurgaga β?

53. Nurga α sisse on joonestatud kiir, mis jaotab α kaheks mittevõrdseks nurgaks β ja γ. Nurkade β ja γ poolitajad on b ja c. Kui suur on $\angle bc$ võrreldes nurgaga α?

§ 11. Kõrvunurgad.



Joonis 24.

Joonestame sirgnurga sisse kiire, mille otspunktiks on nurga tipp (joonis 24). Saadud kaht nurka nimetatakse kõrvunurkadeks. Niisiis

kõrvunurkadeks nimetatakse kaht nurka, millel on ühine tipp, üks ühine haar, teised haarad aga moodustavad sirgjoone.

Olgu antud mingi nurk, mis on sirgnurgast väiksem, ütleme α (joonis 24). Tema kõrvunurga saamiseks tuleb nurga α üht haara pikendada üle nurga tipu, sest siis tekib α kõrvale nurk β, mis koos nurgaga α täidavad kõiki kõrvunurkade kohta saadud nõudeid. Kõrvunurkade saamisviisist järeldub, et

kõrvunurkade summa võrdub sirgnurgaga.

Tähistame sirgnurga suuruse, mis ju alati on üks ja sama, tähega π. Selle abil saame kõrvunurkade α ja β summa kirjutada kujul

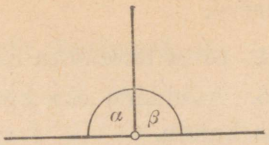
$$\alpha + \beta = \pi.$$

Võib juhtuda, et nurk ja tema kõrvunurk on võrdsed, s. t. $\beta = \alpha$ (joonis 25.). Siis

$$\alpha + \alpha = \pi$$

ehk

$$2\alpha = \pi \quad \text{ja} \quad \alpha = \frac{\pi}{2}.$$



Joonis 25.

Nurka, mis on võrdne oma kõrvunurgaga, nimetatakse täisnurgaks.

Nagu nägime,

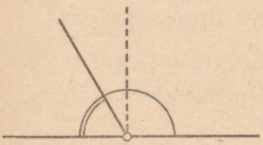
täisnurk on pool sirgnurgast;

seetõttu täisnurga tähisena kasutame sümbolit $\frac{\pi}{2}$. Et sirgnurgad on võrdsed, siis on seda ka nende pooled, tähendab

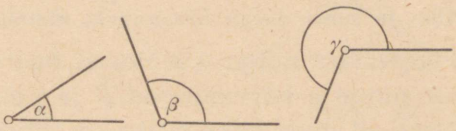
kõik täisnurgad on võrdsed.

Täisnurga joonestamine toimub joonestamiskolmnurga abil (joonis 32).

Vaatleme nüüd kaht mittevõrdset kõrvunurka (joonis 26). Sel juhul üks kõrvunurkadest on täisnurgast väiksem,



Joonis 26.



Joonis 27.

teine aga suurem. Täisnurgast väiksemat nurka nimetatakse teravnurgaks (α joonisel 27); täisnurgast suuremat, kuid sirgnurgast väiksemat nurka aga nürinurgaks (β joonisel 27). Niisiis

kui üks kõrvunurkadest on teravnurk, siis teine on nürinurk.

Sirgnurgast suuremat nurka nimetatakse kumernurgaks (γ joonisel 27).

54. Mitu täisnurka on täispöördes?

55. Avaldada üks kõrvunurkadest teise nurga ja sirgnurga kaudu.

56. Üks kõrvunurkadest on $\frac{5}{12}\pi$. Kui suur on teine nurk?

57. Mis liiki nurk on kahe nürinurga summa; nürinurga ja täisnurga vahe; teravnurga ja täisnurga summa?

58. Kahe kõrvunurga vahe on täisnurk. Millise osa sirgnurgast moodustab kumbki nurk?

59. Näidata, et kahe võrdse nurga kõrvunurgad on võrdsed.

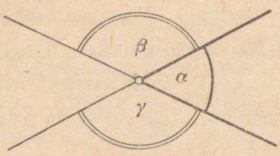
§ 12. Tippnurgad.

Antud nurga kõrvunurga joonestamiseks tuleb pikendada tema üht haara üle tipu. Et pikendada võib ükskõik kumba haara, siis on igal nurgal õieti kaks kõrvunurka.

Ühe ja sama nurga kõrvunurki nimetatakse tippnurkadeks.

Pikendades nurga α mõlemat haara üle tipu (joonis 28) saame nurga α kõrvunurgad β ja γ ehk tippnurgad β ja γ. Näitame, et need kaks nurka on võrdsed.

Et kõrvunurkade summa on sirgnurk, siis



Joonis 28.

$$\alpha + \beta = \pi$$

ja ka

$$\alpha + \gamma = \pi;$$

seega

$$\alpha + \beta = \alpha + \gamma.$$

Lahutades viimase võrduse mõlemast poolest nurga α saame

$$\beta = \gamma,$$

mida oligi tarvis tõestada. Nii oleme tõestanud, et

tippnurgad on võrdsed.

Joonestame kaks lõikuvat sirget (joonis 29). Nende lõikepunkti juures on tekkinud neli nurka, mis moodustavad kaks tippnurkade paari (α ja γ; β ja δ). Ühtlasi on joonisel aga ka neli kõrvunurkade paari. Kui üks siinesinevast neljast nurgast on antud, siis ülejäänud kolm nurka on sellega määratud: kui näiteks α on üks kolmandik sirgnurgast, s. t.

$$\alpha = \frac{\pi}{3},$$

siis tippnurkade võrdsuse tõttu

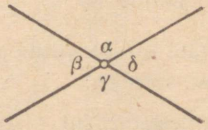
$$\gamma = \frac{\pi}{3};$$

et $\alpha + \beta = \pi$, siis $\beta = \pi - \alpha$ ehk $\beta = \pi - \frac{\pi}{3}$, seega

$$\beta = \frac{2\pi}{3}$$

ja samuti

$$\gamma = \frac{2\pi}{3}.$$



Joonis 29.

Ülesanded.

60. Nimetada kõik joonisel 29 esinevad kõrvunurkade paarid.

61. Kahe sirge lõikumisel tekkinud nurkadest üks on $\frac{2}{5}\pi$. Kui suured on teised nurgad?

62. Kahe sirge lõikumisel tekkinud nurkadest üks on $\frac{5}{8}\pi$. Kui suured on teised nurgad?

63. Kahe tippnurga summa on $\frac{\pi}{2}$. Kui suur on nende ühine kõrvunurk?

§ 13. Ristuvad sirged.

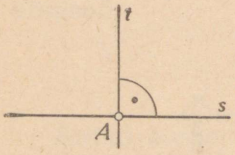
Kui kahe sirge s ja t lõikumisel tekkinud nurkadest üks nurk on täisnurk, siis ka teised on täisnurgad, sest täisnurga kõrvunurk on täisnurk ja täisnurga tippnurk on samuti täisnurk. Sirgete s ja t kohta öeldakse sel juhul, et nad on teineteisega risti ehk nad ristuvad ehk nad on perpendikulaarsed*. Niisiis

kaks sirget ristuvad, kui nende lõikumisel tekib täisnurk.

Sirgete s ja t ristumist märgitakse kirjas kujul

$$s \perp t$$

ja joonisel kaarekesega ning punktiga nurga sees (joonis 30). Sama asjaolu saab aga kirjutada ka kujul



Joonis 30.

$$\angle st = \frac{\pi}{2}.$$

Tõestame, et

läbi sirgel antud punkti läheb ainult üks sirge, mis on risti antud sirgega.

Olgu antud sirge s ja sellel punkt A (joonis 30). See punkt on ühiseks tipuks kahel sirgnurgal, milledest üks on ühel ja teine teisel pool sirget s. Kui läbi punkti A läheks rohkem kui üks sirge, mis on risti sirgega s, siis iga niisugune sirge oleks vaadeldud kahe sirgnurga poolitaja ja seega sirgnurgal oleks rohkem kui üks poolitaja. Et seda ei saa olla (§ 10), siis läbi punkti A läheb ainult üks sirge, mis on risti sirgega s.

On kerge näha, et kui joonise 30 tasapind mööda sirget t kahekorra murda, siis ühtivad need kaks kiirt, milledeks punkt A jaotab sirge s, ja sellega sirge s iga punkt

* *perpendiculum* (lad.) — lood.

osutub sümmeetriliseks sellesama sirge ühe punktiga. Niisamuti kujuneks olukord sirge t punktidega, kui tasapind kahekorra murda mööda sirget s. Seetõttu öeldakse, et

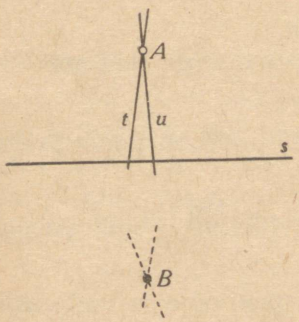
sirge on sümmeetriline oma ristsirge suhtes.

See asjaolu võimaldab näidata, et ka

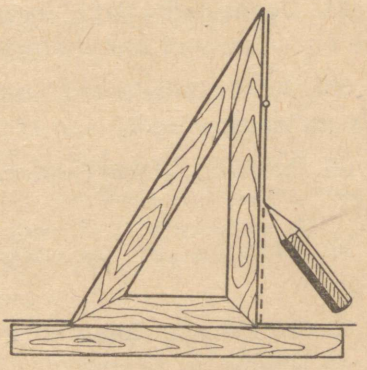
läbi punkti väljaspool sirget läheb ainult üks sirge, mis on risti antud sirgega.

Olgu antud sirge s ja väljaspool teda punkt A (joonis 31). Tõestame, et läbi punkti A läheb ainult üks sirge, mis ristub sirgega s.

T õ e s t u s. Oletame, et läbi punkti A läheb kaks sirget, mis ristuvad sirgega s, ütleme $t \perp s$ ja $u \perp s$. Siis



Joonis 31.



Joonis 32.

punkt A on sirge s suhtes sümmeetriline sirge t ühe punktiga teisel pool sirget s ja samuti on punkt A sümmeetriline sirge u ühe punktiga teisel pool sirget s, sest nii u kui ka t on sümmeetrilised oma ristsirge s suhtes. Et punktil A on ainult üks sümmeetriline punkt sirge s suhtes (§ 7), siis t ja u peaksid lõikuma veel ühes punktis, ütleme B.

Kaks sirget saavad lõikuda ainult ühes punktis; seega ei ole võimalik, et $t \perp s$ ja $u \perp s$.

Niisiis ei saa olla kahte sirget, mis läbiksid punkti A ja oleksid risti sirgega s. Küll leidub aga üks niisugune sirge: selleks on sirge, mis läbib punkti A ja temaga sirge s suhtes sümmeetrilist punkti A_1.

Kui kaks sirget lõikuvad, aga ei ristu, siis üks on teisega k a l d u.

Kõige lihtsam on antud sirgele ristsirget ehitada joonestamiskolmnurga ja joonlaua abil (joonis 32). Edaspidi näeme, kuidas seda ülesannet lahendada joonlaua ja sirkli abil.

Ülesanded.

64. Joonestada antud sirgega ristuv sirge läbi punkti, mis on väljaspool antud sirget.

65. Joonestada antud sirgega ristuv sirge läbi punkti, mis on antud sirgel.

66. Näidata, et kõrvunurkade poolitajad on teineteisega risti.

67. Näidata, et tippnurkade poolitajad moodustavad sirge.

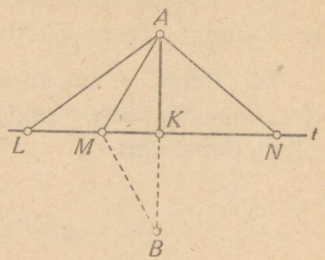
68. Näidata, et kahe kõrvunurga poolvahe ja väiksema nurga summa on täisnurk.

§ 14. Punkti kaugus sirgest.

Olgu antud sirge t ja väljaspool seda punkt A. Joonestame punkti A läbiva ristsirge lõigu sellest punktist kuni antud sirgeni, s. o. lõigu AK joonisel 33. Selle lõigu pikkust nimetatakse punkti A k a u g u s e k s sirgest t.

Punkti kaugus sirgest on punktist sirgeni tõmmatud ristlõigu pikkus.

Igal punktil on ainult üks kaugus antud sirgest, sest punkti läbib ainult üks sirge, mis on risti antud sirgega, ja sellel leidub ainult üks lõik, mis ühendab antud punkti antud sirgega. Kõiki teisi sirglõike, näiteks lõike AL, AM, AN joonisel 33, mis ka ühendavad antud punkti sirgega, nimetatakse selle sirge suhtes kaldlõikudeks. Tõestame, et



Joonis 33.

antud punktist antud sirgeni tõmmatud ristlõik on kaldlõigust lühem.

Selle tõestamiseks pikendame ristlõiku AK teisele poole sirget t punktini B nii, et $BK = AK$, ja ühendame punkti B mingi kaldlõigu otspunktiga, näiteks punktiga M. Nüüd

$$AB < AM + BM,$$

sest sirglõik AB on kõige lühem joonlõik kahe punkti A ja B vahel. Kui joonise tasapind mööda sirget t kahekorra murda, siis ühtivad lõigud AM ja BM, sest punkt A ühtib punktiga B ja punkt M jääb endisele kohale. Seega $BM = AM$. Kirjutades nüüd ülalantud võrratuses AB asemele $2 \cdot AK$ ja BM asemele AM saame, et

$$2 \cdot AK < AM + AM$$

ehk

$$2 \cdot AK < 2 \cdot AM,$$

millest

$$AK < AM.$$

Et AK on punktist A sirgeni t tõmmatud ristlõik ja AM on samast punktist sama sirgeni tõmmatud mingi kaldlõik, siis on tulemus kehtiv iga niisuguse kaldlõigu puhul.

Ülesanded.

69. Joonestada vabalt sirge ja väljaspool seda punkt ning mõõta nende vaheline kaugus.

70. Joonestada mingi teravnurk ja võtta selle sees punkt; leida võetud punkti kaugus nurga haaradest.

71. Joonestada kaks lõikuvat sirget ja võtta väljaspool neid punkt; leida võetud punkti kaugus mõlemast sirgest.

72. Punkt A on sirgest s kaugusel 5 cm. Kui pikk on lõik, mis ühendab punkti A temaga sirge s suhtes sümmeetrilise punktiga?

Peatükk III.

Ringjoon.

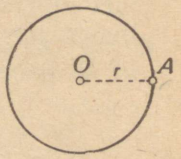
§ 15. Ringjoon ja ring.

Kui punkt liigub tasapinnal nii, et ta jääb ühest kindlast punktist ikka ühele ja samale kaugusele, siis ütleme, et punkt liigub ringjoont mööda. Niiviisi järjest edasi liikuv punkt jõuab varem või hiljem oma lähtekohta tagasi; seetõttu nimetame ringjoont kinniseks jooneks. Niisiis

ringjoon on kinnine tasapinnaline joon, mille kõik punktid on ühest kindlast punktist ühel ja samal kaugusel.

Ringjoone joonestamine toimub sirkli abil.

Seda kindlat punkti, millest ringjoone punktid on võrdsetel kaugustel, nimetatakse ringjoone keskpunktiks. Sirglõiku, mis ühendab keskpunkti ringjoone mingi punktiga (näiteks sirglõiku OA joonisel 34) nimetatakse raadiuseks*.



Joonis 34.

Ühe ja sama ringjoone raadiused on võrdsed, sest ringjoone kõik punktid on keskpunktist võrdsetel kaugustel. Raadiuse pikkust tähistatakse harilikult tähega r. Ringjoont keskpunktiga O ja raadiusega r märgime sümboliga $O(r)$ ning ringjoont keskpunktiga O läbi punkti A sümboliga $O(A)$.

---

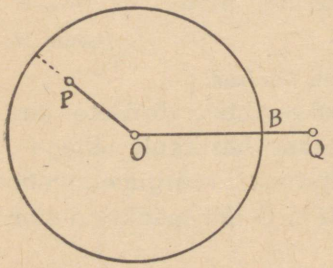
* *radius* (lad.) — kepp; kiir.

Tasapinna osa, mida piirab ringjoon, nimetatakse ringiks.

Keskpunkti ja ühe oma punktiga, samuti keskpunkti ja raadiuse pikkusega on ringjoon ja tema asukoht tasapinnal määratud, s. t. nende andmete järgi saab joonestada ainult ühe ringjoone. Ainult raadiuse pikkuse järgi saab joonestada piiramatu hulga ringjooni, sest keskpunkti võib siis vabalt valida. Võrdsete raadiustega ringjooned on üksteisega võrdsed, sest on mõeldav nende ringjoonte üksteise peale paigutamine nii, et nad ühtivad.

Kui ringjoont pöörata tema tasapinnal ümber keskpunkti, siis tema iga punkt jääb keskpunktist endisele kaugusele, tähendab liigub sama ringjoont mööda. Niisamuti saame kujutella, et ringjoone mingit lõiku kahe punkti vahel saab pööramise teel ümber keskpunkti viia teisele kohale sel ringjoonel.

Olgu tasapinnal antud ringjoon ühes keskpunktiga ja veel üks punkt, mis ei asetse ringjoonel. Ühendades ringjoone keskpunkti antud punktiga võib juhtuda, et see ühenduslõik ei lõiku ringjoonega (nagu *OP* joonisel 35); võib aga juhtuda, et lõikub sellega (nagu *OQ* joonisel 35). Esimesel juhul ütleme, et punkt asetseb ringis, teisel juhul, et ta asetseb väljaspool ringi. Ringis asetseva punkti kaugus keskpunktist on väiksem kui raadius, sest raadiuse saamiseks tuleb lõiku *OP* veel pikendada. Väljaspool ringi asetseva punkti kaugus keskpunktist on suurem kui raadius, sest näiteks lõik *OQ* koosneb raadiusest *OB* ja lõigust *BQ* (joonis 35).



Joonis 35.

Ümberpöördult, kui on teada tasapinna ning mingi punkti

kaugus ringi keskpunktist ja raadiuse pikkus, siis saab määrata punkti asukohta ringjoone suhtes:

punkt on ringis, ringjoonel või väljaspool ringi vastavalt sellele, kas tema kaugus ringi keskpunktist on väiksem kui raadius, võrdne raadiusega või suurem kui raadius.

Ülesanded.

73. Kasutades joonist 9 leida sirkli abil, missugused linnad on Pärnust õhuteed mööda ligikaudu niisama kaugel kui Kuressaare. Missugusel joonel asetsevad need linnad?

74. Tõmmata joon, mille kõik punktid on antud punktist 2,5 cm kaugusel.

75. Joonestada sirglõik pikkusega 4 cm ja leida kaks punkti nii, et nende kaugus selle lõigu kummastki otspunktist oleks 3 cm.

76. Antud punkt A on 12 cm kaugusel ringjoone keskpunktist. Kui kaugel punktist A asetseb ringjoone kõige lähem ja kui kaugel kõige kaugem punkt, kui raadius on 5 cm.

77. Kumb ringjoontest $A(B)$ ja $B(A)$ on suurema raadiusega?

78. Kus asetsevad kõik need punktid, mis on antud punktist antud kaugusel?

§ 16. Ringjoone diameeter.

Võtame ringjoonel kaks punkti ja ühendame need sirglõiguga (joonis 36). Saadud lõiku nimetatakse ringjoone k õ õ l u k s.

Kõõl on sirglõik, mis ühendab ringjoone kaht punkti.

Joonestades kõõlu läbi ringjoone keskpunkti saame ringjoone d i a m e e t r i* ehk läbimõõdu (DE joonisel 36).

---

* *dia* (kr.) — läbi; *metreo* (kr.) — mõõtma.

Diameeter on kõõl, mis läbib ringjoone keskpunkti.

Diameetri pikkust tähistatakse harilikult tähega d. On selge, et

$$d = 2r,$$

sest keskpunkt jaotab diameetri kaheks raadiuseks. Näitame, et

diameeter on kõige pikem kõõl.

Selleks joonistame mingi kõõlu, mis ei ole diameeter, näiteks kõõlu AB joonisel 36 ja ühendame selle otspunktid ringjoone keskpunktiga O. Siis

$$AB < AO + OB,$$

sest sirglõik AB on kõige lühem joonlõik punktide A ja B vahel. Asendades selles võrratuses AO ja OB tähega r saame

$$AB < r + r$$

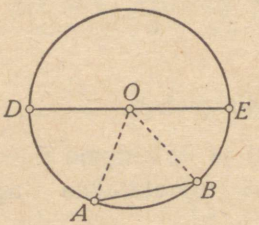
ehk

$$AB < 2r,$$

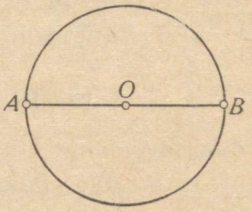
seega

$$d > AB,$$

millega oleme tõestanud, et diameeter on pikem kui iga muu kõõl.



Joonis 36.



Joonis 37.

Joonestame ringjoone ja selle ühe diameetri, ütleme AB (joonis 37). Kui ringjoone tasapind mööda sirget AB kahekorra murda, siis ühel pool sirget AB olevad ringjoone

punktid ühtivad teisel pool seda sirget olevate sama ringjoone punktidega, sest vastasel juhul ringjoone punktid ei oleks keskpunktist võrdsetel kaugustel. Seetõttu ütleme, et

ringjoon on sümmeetriline iga sirge suhtes, mis läbib keskpunkti.

Sellest nähtub ka, et diameetri otspunktid jaotavad ringjoone kaheks (võrdseks) poolringjooneks.

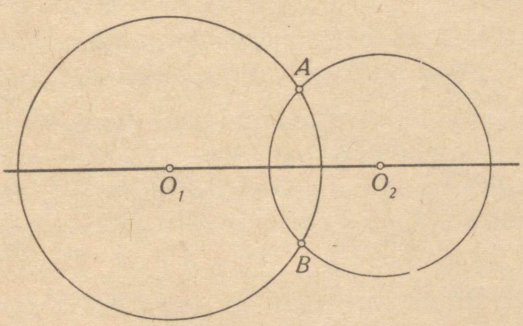
Ülesanded.

79. Antud on ringjoone keskpunkt ja diameetri üks otspunkt. Leida teine otspunkt.

80. Läbi antud punkti P joonestada 6 ringjoont raadiustega $r = 2{,}5$ cm. Kus asetsevad nende ringjoonte keskpunktid?

§ 17. Kahe ringjoone lõikumine.

Olgu antud punktid O_1 ja O_2 ning väljaspool sirget O_1O_2 punkt A (joonis 38). Joonestame ringjooned $O_1(A)$



Joonis 38.

ja $O_2(A)$. Joonis näitab, et teisel pool sirget O_1O_2 on neil ringjoontel veel teine ühine punkt, ütleme B. Selle punkti olemasolu saame aga ka tõestada, nimelt järgmiselt. Ringjoonte ühisel punktil A on olemas sirge O_1O_2 suhtes süm-

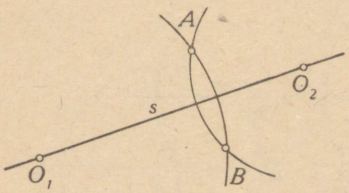
meetriline punkt, ütleme B (§ 7); see punkt peab asetsema nii esimesel kui ka teisel ringjoonel, sest kumbki neist ringjoontest on sümmeetriline sirge O_1O_2 suhtes (§ 16). Seega punkt B on nende joonte ühine punkt. Et A on väljaspool sirget O_1O_2, siis A ja B on kaks erinevat punkti (§ 7). Niisiis:

kui kahel ringjoonel leidub üks ühine punkt väljaspool nende keskpunkte läbivat sirget, siis neil leidub veel teine ühine punkt.

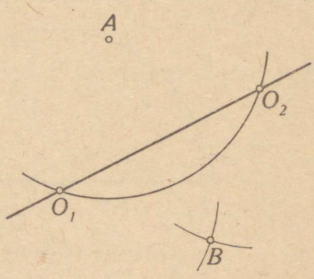
Kaht niisugust ringjoont nimetatakse lõikuvateks ringjoonteks. Edaspidi selgub, et üle kahe ühise punkti kahel ringjoonel olla ei saa ilma et need ringjooned ühtiksid. Nagu selgus,

kahe ringjoone lõikepunktid on sümmeetrilised nende ringjoonte keskpunkte läbiva sirge suhtes.

See tõsiasi võimaldab leida antud punktiga antud sirge suhtes sümmeetrilist punkti. Olgu antud sirge s ja väljaspool teda punkt A (joonis 39). Võtame sirgel s



Joonis 39.



Joonis 40.

v a b a l t kaks punkti ja joonestame nende kui keskpunktide ümber ringjooned, mis läbivad punkti A. Nende ringjoonte teine lõikepunkt B ongi sümmeetriline punktiga A sirge s suhtes.

Töö kergendamiseks on soovitav ringjoonte keskpunktid O_1 ja O_2 võtta nii, et nad on punktist A võrdsetel kau-

gustel. Selleks joonestame ümber punkti A vaba raadiusega ringjoone, mis lõikab sirget s kahes punktis O_1 ja O_2 (joonis 40). Joonestades nüüd s a m a raadiusega ringjooned ümber punkti O_1 ja O_2 saame nende joonte ühe lõikepunktina A ja teise lõikepunktina B, mis on sümmeetriline punktiga A sirge s suhtes. Niiviisi saab leida punkti B, ilma et tarvitseks muuta sirkli haaret, s. o. otspunktide vahelist kaugust.

Ülesanded.

81. Kahe ringjoone keskpunktide vaheline kaugus on 4 cm ja raadiused on 3 cm ning 2 cm. Leida nende ringjoonte lõikepunktid.

82. Joonestada ringjooned O_1 (2,5 cm) ja O_2 (3,5 cm), kui $O_1O_2 = 1{,}5$ cm.

83. Joonestada antud punktiga antud sirge suhtes sümmeetriline punkt a) kahe ringjoone abil, b) kolme ringjoone abil, c) ristsirge abil.

84. Antud on sirge ja väljaspool seda lõik. Joonestada antud lõiguga sümmeetriline sirglõik antud sirge suhtes.

85. Joonestada neli võrdsete raadiustega ringjoont nii, et iga ringjoone keskpunkt on kahe ringjoone lõikepunktiks. Mitu ringjoonte lõikepunktide paari on saadud joonises sümmeetrilised kahe ringjoone keskpunkte läbiva sirge suhtes?

86. On antud sirge ja ringjoon, mille keskpunkt on väljaspool antud sirget. Joonestada antud ringjoonega antud sirge suhtes sümmeetriline ringjoon.

87. Antud on lõik pikkusega 6 cm. Leida kaks punkti, mis on lõigu ühest otspunktist kaugusel 3 cm ja teisest kaugusel 5 cm. Mitu sellist punktipaari leidub?

88. Antud on ringjoon ja selle üks diameeter. Leida

viis paari selle ringjoone punkte, mis on sümmeetrilised antud diameetri suhtes.

89. Joonestada ringjooned $A(r_1)$ ja $B(r_2)$, kui $AB = r_1 + r_2$. Mitu ühist punkti on neil ringjoontel?

90. Joonestada ringjooned $A(r_1)$ ja $B(r_2)$, kui $AB = r_1 - r_2$. Mitu ühist punkti on neil ringjoontel?

§ 18. Kaar, kõõl ja kesknurk.

Ringjoone kaks punkti jaotavad selle joone kaheks kaareks. Kui need punktid ei ole ühe ja sama diameetri otspunktid, siis on üks kaartest väiksem kui pool ringjoonest, teine aga suurem. Kaare AB all mõistetakse harilikult väiksemat kaart otspunktidega A ja B (joonis 41). Kaart otspunktidega A ja B tähistatakse sümboliga $\overset{\frown}{AB}$ või, nagu sirglõikugi, ühe väikese tähega, näiteks $\overset{\frown}{a}$.

Kaks ühe ja sama ringjoone (või kahe võrdse ringjoone) kaart loetakse võrdseiks, kui neid saab teineteise peale paigutada nii, et neil ühtivad nii ühed kui ka teised otspunktid. Kui üks kaar on osa teisest, siis esimene kaar on loomulikult teisest väiksem, näiteks (joonis 41) $\overset{\frown}{DE} < \overset{\frown}{DA}$.

Kaartega on võimalik samu tehteid teostada, mis sirglõikudega. Näiteks (joonis 41)

$$\overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{CE}.$$

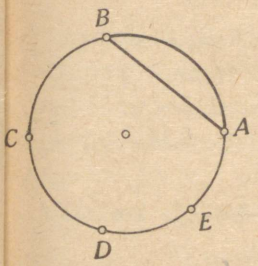
Ringjoone kaare otspunkte ühendab üks selle ringjoone kõõl, kuid iga kõõlu otspunkte ühendavad k a k s kaart; kõõlu ja selle otspunkte ühendava v ä i k s e m a kaare kohta öeldakse, et nad t o e t u v a d teineteisele: kõõlule AB joonisel 41 toetub kaar AB (mitte aga kaar ACB).

Joonestame kaare AB otspunktidesse raadiused ja pikendame neid; nii saame kaks kiirt OA ja OB ja nende

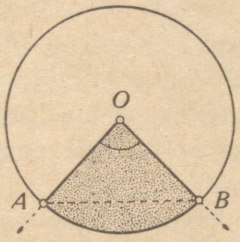
vahel nurga AOB (joonis 42). Seda nurka nimetatakse kesknurgaks. Seega

kesknurk on nurk, mille tipuks on ringjoone keskpunkt.

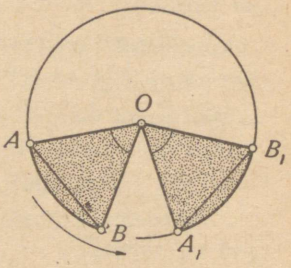
Kesknurga AOB, kaare AB ja kõõlu AB kohta öeldakse, et nad toetuvad üksteisele.



Joonis 41.



Joonis 42.



Joonis 43.

Kesknurga sees asetsevat ringi osa nimetatakse sektoriks*. Sektor on piiratud kahe raadiusega ja ühe kaarega.

Vaatleme ühes ja samas ringis kaht võrdset kesknurka AOB ja A_1OB_1 (joonis 43). Näitame, et

võrdsetele kesknurkadele toetuvad kaared on võrdsed ja kõõlud on võrdsed.

Selleks pöörame sektorit AOB tasapinnal ümber punkti O kuni ta satub sektori A_1OB_1 peale ja raadius OA läheb mööda teise sektori raadiust OA_1. Siis punkt A ühtib punktiga A_1, sest $OA = OA_1$, raadius OB läheb mööda raadiust OB_1, sest $\angle AOB = \angle A_1OB_1$, punkt B ühtib punktiga B_1, sest $OB = OB_1$, ja kaare AB iga punkt ühtib kaare A_1B_1 ühe punktiga, sest nad on keskpunktist võrdsetel kaugustel. Kuid siis $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A_1B_1}$ ja ka kõõl $AB = A_1B_1$, sest nende otspunktid on ühtinud.

---

* *secare* (lad.) — lõikama; välja lõikama.

Eeldame nüüd, et joonisel 43 kaared AB ja A_1B_1 on võrdsed. Pöörates sektorit AOB ümber punkti O endisel viisil, jõuame otsusele, et on võrdsed ka kõõlud AB ja A_1B_1 ning kesknurgad AOB ja A_1OB_1. Niisiis

võrdsetele kaartele toetuvad kõõlud on võrdsed ja kesknurgad on võrdsed.

Vaatleme võrdsetele kõõludele AB ja A_1B_1 toetuvaid kesknurki ja kaari. Pöörame sektorit AOB ümber punkti O kuni punkt A ühtib punktiga A_1 (joonis 43). Siis punkt B, jäädes ringjoonele, ühtib punktiga B_1, sest $AB = A_1B_1$. Nii selgub, et

võrdsetele kõõludele toetuvad kaared on võrdsed ja kesknurgad on võrdsed.

Viimane lause võimaldab joonestada antud kaarega võrdset kaart ja antud kesknurgaga võrdset kesknurka, sest sirkli abil on kerge saada antud kõõluga võrdset kõõlu.

Esitatud kolm lauset kaarte, kõõlude ja kesknurkade kohta on õiged ka siis, kui üks kaar, kõõl ja kesknurk on ühes ja teine on teises, kuid niisama suure raadiusega ringis. Sel juhul paigutame ühe ringi teise peale nii, et nende keskpunktid ühtivad, ja jätkame siis tõestamist endisel viisil.

Ülesanded.

91. Ringi raadiusega 3,5 cm joonestada kesknurk, mis toetub 5 cm pikkusele kõõlule.

92. Joonestada raadiusepikkusele kõõlule toetuv kesknurk.

93. Mitu korda mahub raadiusepikkusele kõõlule toetuv kaar ringjoonele?

94. Mitmeks sektoriks jaotavad ringi 1, 2, 3 ..., n diameetrit?

95. Ku. suur on diameetrile toetuv kesknurk?

96. Ringjoonel on järjestikku võetud punktid A, B, C ja D nii, et $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$. Näidata, et $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

§ 19. Kaare mõõtmine ja nurga mõõtmine.

Mõõta kaar tähendab leida, mitu korda kaareühik mahub antud kaarele või missugune osa kaareühikust on antud kaar.

Et antud kaarele saab mahutada ainult sama ringjoone kaart, siis kaareühikuiks saab võtta ainult sellesama ringjoone kaari. Nendeks ühikuteks on võetud kaarekraad, kaareminut ja kaaresekund*.

Kaarekraad on $\frac{1}{360}$ ringjoonest;

kaareminut on $\frac{1}{60}$ kaarekraadist;

kaaresekund on $\frac{1}{60}$ kaareminutist **.

Kraadi sümboliks on °, minuti sümboliks ′ ja sekundi sümboliks ″. Kaareühikud on üksteisega järgmiselt seotud:

$$1° = 60′ = 3600″;$$
$$1′ = 60″.$$

Erinevate raadiustega ringjoontel on erinevate pikkustega kaareühikud: mida pikem on raadius, seda pikem on ka kaarekraad.

Nurgaühikuna kasutasime eespool sirgnurka. Sellest

---

* *gradus* (lad.) — samm, aste; nimetused minut ja sekund on tuletatud ladinakeelsetest väljendustest *partes minutae primae* (esimesed vähendatud osad) ja *partes minutae secundae* (teised vähendatud osad).

** Ühiku jaotamine 60 väiksemaks ühikuks on pärit babüloonlastelt, kellel arvusüsteemi aluseks oli arv 60 (kuuekümneehk seksagesimaalsüsteem).

väiksemad ühikud on nurgakraad, nurgaminut ja nurgasekund.

Nurgakraad on $\frac{1}{360}$ täispöördest;

nurgaminut on $\frac{1}{60}$ nurgakraadist;

nurgasekund on $\frac{1}{60}$ nurgaminutist.

Et võrdsetele kaartele toetuvad võrdsed kesknurgad, siis ringjoone jaotamisel 360-ks kaarekraadiks ja saadud jaotuspunktide ühendamisel keskpunktiga jaotub täispööre 360-ks võrdseks osaks. Iga saadud osa ongi nurgakraad. Sellest järeldub, et nurgakraad, -minut ja -sekund on kesknurgad, mis toetuvad vastavatele kaareühikutele. Ühikute vastavuse tõttu

iga kaar sisaldab niisama palju kaareühikuid, kui palju kaarele toetuv kesknurk sisaldab vastavaid nurgaühikuid.

Seetõttu öeldakse, et

kesknurk mõõtub temale toetuva kaarega.

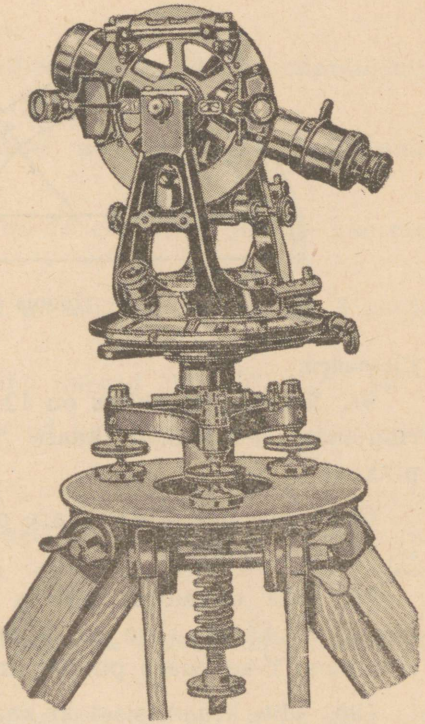
On kasulik mõnede nurkade suurused meeles pidada nii sirgnurga suuruse π kaudu kui ka kraadides:

täispööre	2π	$360°$
sirgnurk	π	$180°$
täisnurk	$\frac{\pi}{2}$	$90°$
pool täisnurka	$\frac{\pi}{4}$	$45°$

Et nurgaminut ja eriti nurgasekund on väga väikesed ühikud, siis tarvitatakse neid seal, kus on vajalikud väga täpsed mõõtmised, nagu maamõõtmisel ja astronoomias. Nende ühikute võrdlemiseks võiks näiteks öelda, et 10 meetri kauguselt vaadatuna paistab

inimese nägu (17,5 cm) ühekraadises nurgas,
õlekõrre läbimõõt (3 mm) üheminutises nurgas,
juuksekarva läbimõõt (0,05 mm) ühesekundises nurgas.

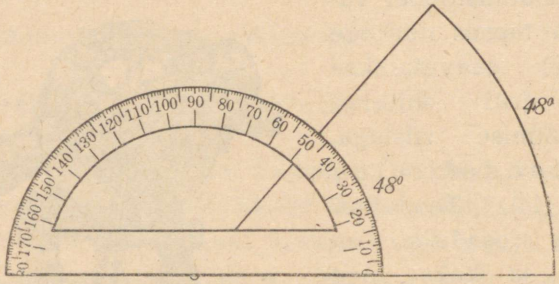
Maamõõtmistöödel vajalik suur täpsus nurkade mõõtmisel saavutatakse selleks eriti ehitatud nurgamõõtmise riistaga, nn. teodoliidiga (joonis 44). Teodoliidi olulisteks osadeks on pikksilm ja kaks väga peene jaotusega ringskaalat, üks horisontaalne, teine vertikaalne; neist esimene võimaldab mõõta nurki horisontaaltasapinnas ja teine vertikaaltasapinnas.



Joonis 44.

Paberile joonestatud nurkade mõõtmisel ja antud suurusega nurkade joonestamisel kasutatakse mõõtmisriistana malli (joonis 45). Malli poolringi kaar on jaotatud kaarekraadideks ja nurga mõõtmisel leitakse, mitu kraadi sisaldab nurgale kui kesknurgale toetuv malli kaar. Et kesknurk mõõtub temale toetuva kaarega, siis mõõdetava nurga kraadide arv on võrdne mallilt loetava kaarekraadide arvuga.

Malli abil saab mõõta ka mistahes raadiusega kaart: selleks joonestame kaarele toetuva kesknurga ja mõõdame saadud nurga (joonis 45).



Joonis 45.

Ülesanded.

97. Ringjoone pikkus on 12 km. Mitu meetrit on selle ringjoone 1-kraadise kaare pikkus, 1-minutise kaare pikkus?

98. Ringjoone 1°-se kaare pikkus on 7,5 cm. Kui pikk on see ringjoon?

99. Maa ekvaatori pikkus on 40 070 km. Arvutada ekvaatori 1°-se, 1′-se ja 1″-se kaare pikkus. Võrrelda ekvaatori 1′-se kaare pikkust meremiiliga.

100. Mitu kraadi sisaldab kaar, mis on $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{7}{8}$ ringjoonest?

101. Missugune osa ringjoonest on 10°-, 20°-, 18°-, 54°-, 210°-ne kaar?

102. Mitu minutit ja mitu sekundit on täisnurgas?

103. Avaldada kraadides nurgad $\frac{3}{4}\pi$; $\frac{7}{12}\pi$; $0{,}35\pi$; $1{,}4\pi$.

104. Mitu kraadi ja minutit on 12,5°, 7,3°, $24\frac{1}{3}$°, $87\frac{3}{5}$ °?

105. Mitu kraadi on $82°12'$, $15°54'$, $32°20'$, $30°30'30''$?

106. Arvutada nurkade $\alpha = 81°45'$ ja $\beta = 28°38'$ summa ja vahe.

107. Arvutada nurkade $\alpha = 17°38'15''$, $\beta = 43°25'44''$ ja $\gamma = 46°54'05''$ summa.

108. Kui suure nurga võrra pöördub kella minutiosuti 42 min. vältel?

109. Missuguse aja vältel pöördub kella tunniosuti $25°$-se nurga võrra?

110. Ringjoone pikkus on 75 cm. Kui pikale kaarele toetub $150°$-ne kesknurk?

111. Kui suur kesknurk toetub kaarele, mis on $\frac{5}{8}$ ringjoonest?

112. Joonestada malli abil nurgad $35°$, $60°$, $127°$, $240°$.

113. Jaotada vabalt võetud nurk malli abil 2-ks, 4-ks võrdseks nurgaks.

114. Joonestada kolm k o n t s e n t r i l i s t, s. o. ühise keskpunktiga ringjoont ja neis malli abil ühine kesknurk $45°$. Mitu kraadi sisaldab iga kaar, mis on kesknurga sees?

115. Malli kasutades joonestada sektor, mille nurk on $60°$ ja raadius on 5 cm.

116. Malli kasutades joonestada sektor, mille kaar on $\frac{2}{5}$ ringjoonest ja raadius on 4 cm.

117. Kui suur on nurga $141°57'$ kõrvunurk?

118. Kui suur on nurk, mis on oma kõrvunurgast $18°$ võrra suurem?

Ex bibl.

119. Kui suur on nurk, mis on $\frac{7}{8}$ oma kõrvunurgast?

120. Kahe tippnurga summa on $105°38'$. Kui suur kõrvunurk on neil tippnurkadel?

§ 20. Konstruktsioonülesanded.

Ülesannet, mida peab lahendama ainult joonestamise teel, nimetatakse konstruktsioonülesandeks*. Joonist ja ühtlasi ka mõttekäiku, mille kaudu ülesande lahend leitakse, nimetatakse selle lahendi konstruktsiooniks. Kus see teisiti pole öeldud, seal tohib konstruktsioonülesande lahendamisel joonestamisriistadena kasutada ainult joonlauda ja sirklit.

Konstruktsioonülesande lahendamisel ei ole lubatud arvutamine ega proovimine: otsitav punkt või joon leitakse ainult nende toimingutega, mida võimaldavad joonlaud ja sirkel, s. o. sirgete ja ringjoonte joonestamisega.

Konstruktsioonülesande täielikus lahenduses esinevad järgmised osad:

1. ülesande analüüs, s. o. ülesande lahendamise võimaluste selgitamine;
2. lahendi konstruktsioon, s. o. vajaliku joonise tegemine ja selle saamise kirjeldamine;
3. lahendi põhjendus, milles näidatakse, et saadud lahend on õige;
4. lahendi uurimine, s. o. ülesande lahendite arvu ja nende iseärasuste selgitamine.

Lihtsamate ülesannete lahendamisel osutuvad analüüs ja lahendi uurimine üleliigseteks; sel juhul lahendus koosneb kahest osast: konstruktsioonist ja selle põhjendusest.

Tutvume mõne lihtsama konstruktsioonülesande lahendusega, mis on aluseks teiste ülesannete lahendamisel. Neid ülesandeid nimetame põhikonstruktsioonideks.

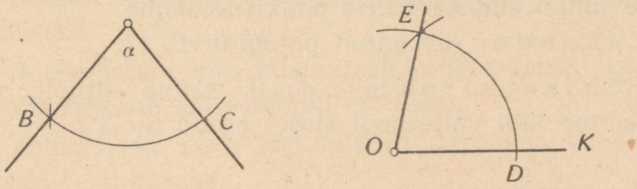
Põhikonstruktsioon 1. Antud nurgaga võrdse nurga joonestamine.

---

* *construere* (lad.) — kokku panema; üles ehitama.

Lahendus.

Analüüs. Olgu vaja joonestada nurgaga α võrdne nurk, mille üheks haaraks on antud kiir OK (joonis 46). Et otsitav nurk ja antud nurk on võrdsed



Joonis 46.

ka neile toetuvad kaared, mis tekivad, kui nende tippude ümber joonestada võrdsete raadiustega ringjooned (§ 18). Ühtlasi on võrdsed neile kaartele toetuvad kõõlud. Sellest selgub järgmine

Konstruktsioon: 1. joonestame nurga α tipu ümber vaba raadiusega kaare ja leiame selle ning nurga α haarade lõikepunktid B ja C;

2. joonestame sama raadiusega kaare ümber punkti O ja leiame selle kaare ning antud kiire lõikepunkti D;

3. joonestame ümber punkti D kaare raadiusega BC ja leiame selle ning punkti D läbiva kaare lõikepunkti E;

4. joonestame kiire OE.

Põhjendus: nurk DOE võrdub nurgaga α, sest võrdsete raadiustega ringides võrdsetele kõõludele toetuvad kesknurgad on võrdsed.

Uurimine: ülesandel on antud juhul kaks lahendit, sest punktide O ja D ümber joonestatud ringjoontel on kaks lõikepunkti, milledest üks on E. Teine nurk, mis ülesande nõudeid rahuldab, on sümmeetriline nurgaga EOD kiire OD suhtes.

Käsiteldud põhikonstruktsiooni abil lahenduvad mitmed ülesanded, nagu antud nurkade liitmine, nurgast nurga lahutamine jt., mis on seotud nurga üleviimisega (§ 10).

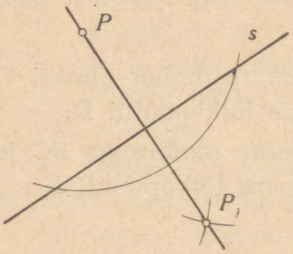
Põhikonstruktsioon 2. Antud punktiga antud sirge suhtes sümmeetrilise punkti leidmine.

Lahendus on antud paragrahvis 17.

Põhikonstruktsioon 3. Antud sirgele ristsirge ehitamine läbi väljaspool sirget antud punkti.

Lahendus.

Analüüs. Olgu antud sirge s ja väljaspool seda punkt P (joonis 47). On vaja ehitada läbi P sirge t, mis ristub sirgega s. Kui $t \perp s$, siis t on sümmeetriline sirge s suhtes (§ 13), seega sirge t läbib punktiga P sirge s suhtes sümmeetrilist punkti P_1. Nende kahe punktiga on sirge t määratud.



Joonis 47.

Konstruktsioon. Leiame punktiga P sirge s suhtes sümmeetrilise punkti P_1 (§ 17) ja joonestame sirge PP_1.

Põhjendus. Et konstruktsiooni järgi P_1 on sümmeetriline punktiga P sirge s suhtes, siis sirge PP_1 lõikumisel sirgega s tekivad võrdsed kõrvunurgad, s. o. täisnurgad. Seega $PP_1 \perp s$.

Uurimine. Ülesandel on igasuguste andmete puhul ainult üks lahend, sest läbi punkti väljaspool sirget läheb ainult üks sirge, mis on risti antud sirgega.

Ülesanded.

121. Joonestada kahe vabalt võetud nurga summa.

122. Joonestada nurk, mis on antud nurgast kolm korda suurem.

123. Joonestada vabalt kolmnurk ja ehitada sirkli ning joonlaua abil tema nurkade summa.

124. Joonestada vabalt kaks nurka ja lahutada suuremast väiksem.

125. Joonestada mingi kumernurk ja teravnurk. Leida, mitu korda viimane neist mahub esimesse.

126. Joonestada nurk $\pi - (\alpha + \beta)$, kus α ja β on vabalt võetud teravnurgad.

127. Antud on sirge ja selle ühest punktist väljuv kiir. Joonestada antud kiirega antud sirge suhtes sümmeetriline kiir.

128. Antud on nurk. Võtta vabalt sirge, mis lõikab nurga haarasid ja joonestada antud nurgaga sümmeetriline nurk võetud sirge suhtes.

129. Antud on sirge ja ühel pool seda punktid A ja B. Leida sirgel punkt C nii, et $AC + CB$ oleks võimalikult väike. N ä p u n ä i d e: kasutada ühe antud punktiga antud sirge suhtes sümmeetrilist punkti.

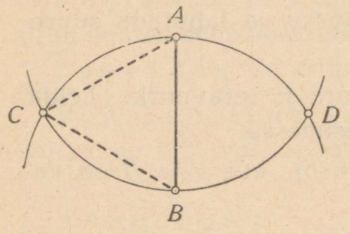
130. Antud on sirge ja väljaspool seda punkt. Joonestada antud punktist antud sirgeni minev ristlõik.

131. Antud on ringjoon ja selle üks diameeter. Joonestada kaks selle diameetriga ristuvat kõõlu ja näidata, et nende kõõlude vahelised kaared on võrdsed.

§ 21. Ringjoon läbi kahe punkti.

Eespool (§ 15) nägime, et ringjoon ja tema asukoht tasapinnal on määratud, kui on teada ringjoone keskpunkt ja raadiuse pikkus või kui on antud keskpunkt ja üks ringjoone punkt. Küsime nüüd, kas oma kahe punktiga on ringjoon määratud või mitte. Nõuame, et ringjoon läbiks

punkte A ja B (joonis 48) ehk, teisiti, lõik AB oleks ringjoone kõõluks ja küsime, kus peab olema selle ringjoone keskpunkt. Et keskpunkt on ringjoone punktidest võrdsetel kaugustel, siis keskpunktiks kõlbab nähtavasti iga punkt, mis on punktidest A ja B võrdsetel kaugustel. Niisuguseid punkte leidub: ühe paari neist saame, kui joonestame ringjooned $A(B)$ ja $B(A)$ ning leiame nende lõikepunktid C ja D (joonis 48). Siis



Joonis 48.

$$AC = AB$$

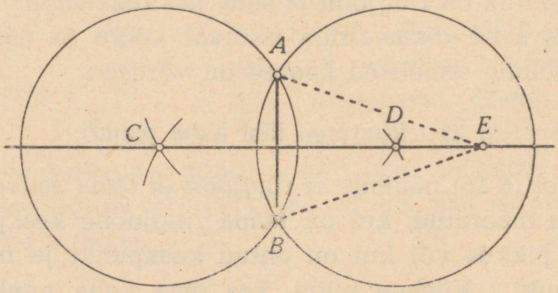
kui ringjoone $A(B)$ raadiused ja

$$BC = BA$$

kui ringjoone $B(A)$ raadiused. Kuid siis

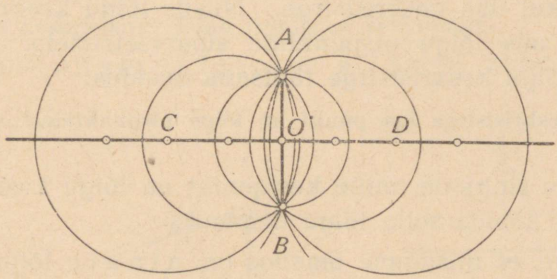
$$AC = BC,$$

sest nad mõlemad on võrdsed lõiguga AB. Seega ühele ringjoonele, mis läbib antud punkte A ja B, on keskpunktiks punkt C, ja teisele kõlbab selleks punkt D, sest $AD = BD$. Nii oleme leidnud kaks ringjoont, mis läbivad antud kaht punkti (joonis 49). Näitame nüüd, et sirge CD iga punkt



Joonis 49.

on punktidest A ja B võrdsetel kaugustel. Selleks paneme tähele, et $A \div B$ sirge CD suhtes, sest kahe ringjoone $C(A)$ ja $D(A)$ lõikepunktid A ja B on sümmeetrilised ringjoonte keskpunkte läbiva sirge CD suhtes (§ 17). Kui nüüd sirgel CD võtta mistahes punkt E (joonis 49), siis $AE = BE$, sest $AE \div BE$ sirge CD suhtes (§ 7). Seega sirge CD iga punkt kõlbab punkte A ja B läbiva ringjoone keskpunktiks



Joonis 50.

(joonis 50): läbi kahe punkti läheb lõpmatu hulk ringjooni. Lõik AB on nende ringjoonte ühiseks kõõluks, ühele neist aga diameetriks (nimelt sellele, mille keskpunktiks on sirgete AB ja CD lõikepunkt O).

Küsime nüüd, mis on sirge CD lõigu AB suhtes. Ülal saime ü h e vastuse sellele küsimusele: CD on sirge, mille suhtes punktid A ja B on sümmeetrilised; teisiti: CD on punktide A ja B s ü m m e e t r i a t e l g. Kuid sirget CD saab veel teisiti määrata. Selleks paneme tähele, et

1. sirge CD poolitab lõigu AB, sest sümmeetria tõttu $AO = BO$;

2. sirge $CD \perp AB$, sest sümmeetria tõttu kõrvunurgad AOC ja BOC on võrdsed, seega täisnurgad.

Sirget, mis poolitab antud lõigu ja on sellega risti, nimetatakse selle lõigu keskristsirgeks.

Niisiis sirge CD on lõigu AB keskristsirge.

Lõigul on ainult üks keskristsirge,

sest tal on ainult üks keskpunkt ja seda ainsat keskpunkti läbib ainult üks sirge, mis ristub lõiguga. Sellest järeldub otsekohe, et

antud kahel punktil on ainult üks sümmeetriatelg,

sest kui neid oleks enam kui üks, siis peaks lõigul olema ka enam kui üks keskristsirge. Niisiis lõigu keskristsirge on sama, mis lõigu otspunktide sümmeetriatelg. Sellest järeldub lõigu keskristsirge tähtsaim omadus:

lõigu keskristsirge iga punkt on lõigu otspunktidest võrdsetel kaugustel.

Seetõttu ringjoon, mille keskpunkt on lõigu keskristsirgel, saabki läbida selle lõigu otspunkte.

Näitame, et niisugune omadus on ainult lõigu keskristsirge punktidel:

iga punkt, mis on lõigu otspunktidest võrdsetel kaugustel, asetseb selle lõigu keskristsirgel.

Eeldame, et punkt C on lõigu AB otspunktidest võrdsetel kaugustel, ja näitame, et punkt C asetseb lõigu keskristsirgel t. Selleks näitame, et punkt C ei saa asetseda väljaspool sirget t (joonis 51). Kui punkt C oleks väljaspool sirget t, siis kas A ja C või B ja C on ühel pool sirget t. Olgu B ja C ühel pool, punkt A seega teisel pool. Siis AC lõikab telge, ütleme punktis D. Ühendame punkti B punktidega D ja C. Et sirglõik on kõige lühem joonlõik kahe punkti vahel, siis

$$BD + DC > BC.$$

Sümmeetria tõttu $BD = AD$. Asendamisel saame siis, et

$$AD + DC > BC$$

ehk

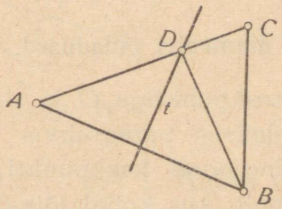
$$AC > BC.$$

Niisiis punkt C ei saa olla väljaspool sirget t, sest siis ta ei oleks võrdsetel kaugustel punktidest A ja B. Jääb üle, et punkt C on sirgel t, nagu tahtsime näidata, ja seega ainult lõigu keskristsirge punktid on lõigu otspunktidest võrdsetel kaugustel.

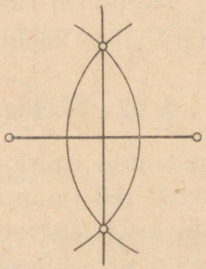
Kui sirglõik on ringjoone kõõluks, siis tema keskristsirge peab läbima ringjoone keskpunkti, sest keskpunkt on kõõlu otspunktidest võrdsetel kaugustel:

kõõlu keskristsirge läbib ringjoone keskpunkti.

Põhikonstruktsioon 4. Antud lõigu keskrist-



Joonis 51.



Joonis 52.

sirge joonestamiseks joonestame ühe ja sama raadiusega ringjooned ümber lõigu otspunktide ja tõmbame sirge läbi nende ringjoonte lõikepunktide (joonis 52). Selleks, et need ringjooned lõikuksid, tuleb ilmselt raadius võtta suurem kui pool antud lõigust.

Sama konstruktsioon võimaldab antud kahe punkti sümmeetriatelje leidmist ja antud lõigu poolitamist.

Ülesanded.

132. Joonestada ringjoon, mis läbib antud kaht punkti ja mille raadius on antud. Mitu lahendit on ülesandel?

133. Joonestada ringjoon, millele antud lõik on kõõluks ja mille raadius on antud. Mitu lahendit on ülesandel?

134. Joonestada antud kahe punkti sümmeetriatelg.

135. Joonestada antud lõigu keskristsirge.

136. Poolitada antud lõik.

137. Joonestada ringjoon, millele antud lõik on diameetriks.

138. Joonestada ringjooned raadiustega 4 cm ja 3 cm nii, et antud lõik $a = 2{,}5$ cm on neile ühiseks kõõluks. Mitu lahendit on ülesandel?

139. Kus lõikuvad antud ringjoone kõõludе keskristsirged?

140. Antud on ringjoon. Kuidas leida tema keskpunkti?

Näpunäide: kasutada ülesande 139 tulemust.

§ 22. Kõõluga ristuva diameetri omadused.

Olgu antud ringjoon oma keskpunktiga O ja ringjoone mingi kõõl AB (joonis 53). Eelmises paragrahvis nägime, et kõõlu keskristsirge läbib ringjoone keskpunkti. Vaatame nüüd pöördülesannet, nimelt: kus kohal lõikab kõõlu sirge, mis läbib ringjoone keskpunkti ja on risti kõõluga; teisiti: kus kohal lõikab kõõlu temaga ristuv diameeter.

Olgu diameeter CD risti kõõluga AB ja lõikugu sellega punktis E. Et läbi punkti O läheb ainult üks sirge, mis on risti lõiguga AB ja selleks ainsaks sirgeks on lõigu AB keskristsirge, siis diameeter CD asetseb lõigu AB keskristsirgel, seega läbib kõõlu keskpunkti. Ühtlasi see diameeter poolitab ka kaare AB ja sellele toetuva kesknurga AOB, sest punktide A ja B sümmeetrilise asetuse tõttu sirge CD suhtes

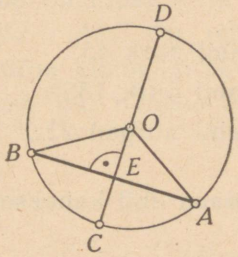
$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$, $\angle AOC = \angle BOC$.

Kokkuvõtteks saame öelda:

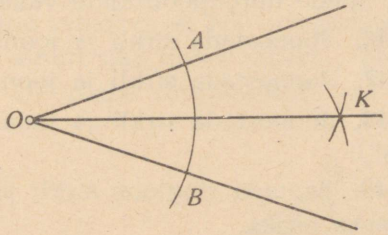
kõõluga ristuv diameeter poolitab kõõlu, sellele toetuva kesknurga ja kaare.

See lause võimaldab sirkli ja joonlaua abil poolitada kaart ja kesknurka, sest kõõluga ristuva diameetri ehitamine on sirkli ja joonlaua abil teostatav. Ühtlasi võimaldab ta aga ka poolitada i g a nurka, sest iga nurga saab ju teha kesknurgaks.

P õ h i k o n s t r u k t s i o o n 5. Joonestada antud nurga poolitaja.



Joonis 53.



Joonis 54.

L a h e n d u s: 1. Antud nurga tipu O kui keskpunkti ümber joonestame vaba raadiusega kaare ja leiame selle lõikepunktid nurga haaradega (A ja B joonisel 54);

2. punktide A ja B ümber joonestame kaared sama (või mõne teise) raadiusega ja leiame nende lõikepunkti K;

3. joonestame kiire OK, mis ongi otsitav nurgapoolitaja.

P õ h j e n d u s. Kirjeldatud viisil saadud sirge OK on lõigu AB keskristsirge, sest tema kaks punkti O ja K on võrdsetel kaugustel punktidest A ja B. Kuid nurk O on kõõlule AB toetuv kesknurk ja seega AB ristsirge OK poolitab selle nurga.

Ülesanded.

141. Antud on ringjoon ning sellel punktid P ja Q. Poolitada $\overset{\frown}{PQ}$.

142. Antud on ringjoon ja selle üks kõõl. Joonestada kõõluga ristuv läbimõõt.

143. Poolitada vabalt võetud nürinurk.

144. Joonestada sirgega ristuv sirge läbi esimesel sirgel antud punkti. Näpunäide: rakendada nurga poolitamise võtet.

145. Joonestada kõrvunurkade poolitajad. Kui suur on nurk nende nurgapoolitajate vahel?

146. Joonestada sirkli ja joonlaua abil nurk 45°.

147. Joonestada sirkli ja joonlaua abil nurk 135°.

148. Joonestada sirkli ja joonlaua abil nurgad 22,5° ja 157,5°.

149. Jaotada ringjoon sirkli ja joonlaua abil kaheksaks võrdseks osaks.

150. Antud on kolm punkti, mis ei asetse ühel sirgel. Joonestada ringjoon, mis läbib neid punkte. Näpunäide: kasutada tõsiasja, et kõõlu keskristsirge läbib ringjoone keskpunkti.

§ 23. Nurgapoolitaja omadused.

Tõestame, et

nurgapoolitaja iga punkt on nurga haaradest võrdsetel kaugustel.

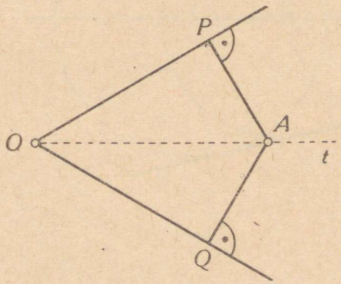
Eeldame, et sirge t on nurga O poolitaja ja A on selle üks punkt (joonis 55). Joonestame punktist A nurga haaradele ristlõigud AP ja AQ ning tõestame, et

$$AP = AQ.$$

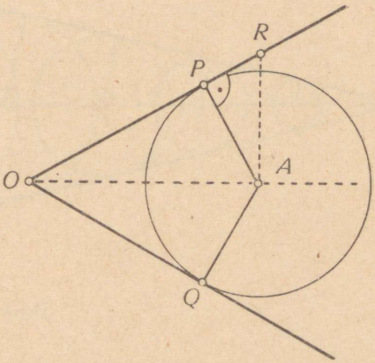
Tõestuseks näitame, et lõigud AP ja AQ on teineteisega sümmeetrilised sirge t suhtes. Nurga kahekorra murdmisel mööda sirget t ühtivad haarad OQ ja OP, sest sirge t on nurgapoolitaja. Seejuures punkt A jääb endisele kohale

ja ristlõik AQ läheb mööda ristlõiku AP, sest vastasel juhul oleks punktist A joonestatud sirgele OP kaks ristsirget, mis on võimatu. Et punkt Q nurga kahekorra murdmisel peab sattuma nii sirgele OP kui ka sirgele AP, siis ta võib sattuda ainult nende sirgete lõikepunkti, s. o. punkti P. Sellest järeldub aga, et lõigud AP ja AQ on võrdsed.

Joonestame nüüd ringjoone $A\,(P)$ (joonis 56). Tõestatud omaduse tõttu ringjoon $A\,(P)$ läbib ka punkti Q, sest $AQ = AP$. On tähelepanu vääriv, et sel ringjoonel on nurga kummagi haaraga ainult üks ühine punkt. Tõepoolest, kui näiteks haaral OP oleks ringjoonega veel teine



Joonis 55.



Joonis 56.

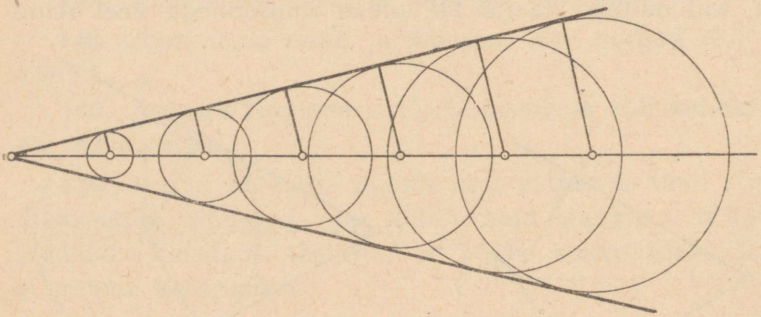
ühine punkt ütleme R, siis AP peaks olema võrdne lõiguga AR, sest mõlemad nad oleksid siis ringjoone $A\,(P)$ raadiused. Kuid lõik AP ei saa võrduda lõiguga AR, sest AP kui ristlõik on lühem igast kaldlõigust, mis on tõmmatud punktist A sirgeni OP (§ 14). Et $AR > AP$, siis punkt R on väljaspool ringi (§ 15).

Sirget, millel on ringjoonega ainult üks ühine punkt, nimetatakse ringjoone puutujaks.

Seda ainsat ühist punkti nimetatakse nende joonte puutepunktiks. Mõnikord nimetatakse ka puutuja lõiku lihtsalt puutujaks, näiteks öeldakse, et lõik OR joonisel 56 on ringjoone A (P) puutuja.

Et punkt A oli nurgapoolitajal vabalt võetud, siis (joonis 57):

nurga haarad on ühisteks puutujateks neil ringjoontel, mille keskpunkt on nurgapoolitajal ja raadiuseks on keskpunkti kaugus haarast.



Joonis 57.

Saab näidata, et kõigi niisuguste, parajasti nurga sisse mahtuvate ringjoonte keskpunktid on nurgapoolitajal.

Ülesanded.

151. Näidata, et sirgnurgast erineva nurga poolitaja punkti kaugus nurga haarast on väiksem kui sama punkti kaugus nurga tipust. Näpunäide: § 14.

152. Antud on nurga tipp, üks haar ja nurgapoolitaja üks punkt. Joonestada nurga teine haar.

153. Antud on kiir k ja väljaspool seda punkt A. Joonestada läbi antud kiire otspunkti uus kiir nii, et punkt A oleks neist kiirtest võrdsetel kaugustel.

154. Missuguse nurga poolitaja on risti nurga haaradega?

155. Joonestada neli ringjoont, mis puudutavad antud sirget antud punktis.

Peatükk IV.

Matemaatilised laused.

§ 24. Definitsioon.

Iga teadus uurib teatavaid objekte ja nende omadusi, näiteks botaanika käsitleb taimi ja nende mitmesuguseid omadusi, aritmeetika tegeleb arvudega ja nende omadustega jne.

Objektid, mida mingi teadus käsitleb, on kas looduse poolt meile antud või inimvaimu loodud. Näiteks algaine hapnik on looduses olemas, kuid ühtegi arvu pole loodusest leida — selle mõiste on inimene loonud. Inimvaimu poolt loodud mõistete sisu tuleb piinliku hoolega selgitada, sest vastasel juhul võivad ühest ja samast asjast tekkida hoopis erinevad kujutlused. Lauset, millega tutvustame oma kaasinimestele mingit uut objekti (mõistet), nimetatakse selle objekti d e f i n i t s i o o n i k s. Definitsiooni andmine on d e f i n e e r i m i n e.

Definitsioon * on lause, millega antakse sisu mingile uuele mõistele ja võetakse tarvitusele tema nimetus.

Näiteks lause „kõõl on lõik, mis ühendab ringjoone kaht punkti" on definitsioon, sest selle lausega antakse sisu mõistele „kõõl". Võiks öelda ka nii: uue mõiste definit-

* *definitio* (lad.) — piiramine, määramine.

sioon on täpne vastus selle mõiste kohta esitatud küsimusele: mis see on? Nii osutuvad definitsioonideks ka järgmised laused:

diameeter on kõõl, mis läbib keskpunkti;

ringjoone puutuja on sirge, millel on ringjoonega ainult üks ühine punkt.

On iseloomustav, et definitsioonides saab sõna „on" asendada sõnaga „nimetatakse". Näiteks, kõõlu definitsiooni saame anda ka sõnastuses: „kõõluks nimetatakse lõiku, mis ühendab ringjoone kaht punkti."

Matemaatikas püütakse defineerida võimalikult kõik mõisted, mida seal tarvitatakse. Mõistet, mida kasutatakse ilma definitsioonita, nimetatakse *algmõisteks* ehk *põhimõisteks*. Need on mõisted, mis on arusaadavad ilma definitsioonita ja mis on niivõrd lihtsad, et neid ei saagi defineerida; geomeetrias tarvitatakse algmõistena näiteks mõisteid „punkt", „pikkus", „suurus", „ruum" jm.

Ülesanded.

156. Missuguste mõistete abil defineeritakse nurga mõistet?

157. Anda järgmiste mõistete definitsioonid: sirgnurk, teravnurk, kaarekraad, ring, sirglõigu keskpunkt, võrdsed kaared.

158. Leida eespool jämedalt trükitud lausete hulgast definitsioone.

§ 25. Aksioom ja teoreem.

Matemaatiliste objektide, näiteks geomeetriliste kujundite omadusi väljendatakse lausetes, mida nimetatakse *aksioomideks* ja *teoreemideks**.

---

* *axioma* (kr.) — põhilause; *theorema* (kr.) — õppelause.

Aksioom ehk *põhilause* on niisugune lause, mis väljendab mingit lihtsat tõde, mida ei ole vaja või ei saagi põhjendada veel lihtsamate tõdede abil, sest sellest lihtsamaid tõdesid ei ole. Käesolevas õpikus on aksioomidena võetud näiteks järgmised laused:

kaht punkti ühendab ainult üks sirglõik;

sirglõiku saab pikendada nii üle tema ühe kui ka teise otspunkti.

Teoreem on niisugune lause, millega väljendatavat tõde saab ja tuleb põhjendada lihtsamate tõdede abil.

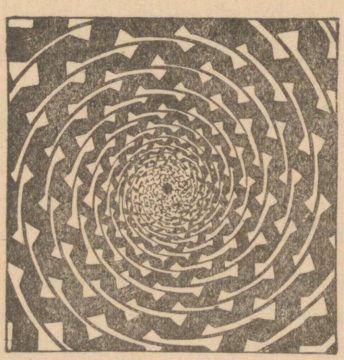
Teoreemid on näiteks järgmised laused:

kolmega jaguvad ainult need arvud, millede ristsumma jagub 3-ga;

kaks sirget saavad lõikuda ainult ühes punktis;

ühes ja samas ringis võrdsetele kesknurkadele toetuvad kaared on võrdsed.

Teoreemiga väljendatava tõe põhjendamist teiste tõdede abil nimetatakse teoreemi *tõestamiseks*. Teoreemi tõestamine toimub sel teel, et tuntud tõdedest (aksioomidest ja teoreemidest) *järeldatakse* järjest uusi tõdesid, kuni jõutakse selleni, mida soovitakse tõestada. Nõnda tõestatakse teoreem arutluse ja mõtlemise teel, mitte aga vaatluse või mõõtmise abil.

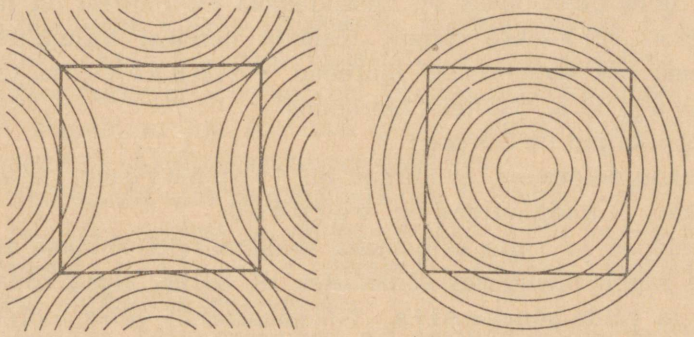


Joonis 58.

Geomeetriliste kujundite tundmaõppimisel rakendatakse siiski ka vaatlust ja mõõtmist. Sel teel leitud omadused ei tarvitse alati olla õiged ja vajavad seepärast tõestamist. Et vaatluse teel, s. t. silma

kaudu saadud muljed võivad olla ekslikud, selles võib veenduda vaadeldes joonist 58. Sellel näeme spiraali, tõeliselt kujutab see aga ühise keskpunktiga ringjooni, nagu selgub sirkliga kontrollides.

Sellelaadilisi silmapetteid esineb palju. Kaks niisugust on toodud joonisel 59. Joonlauaga kontrollides on kerge veenduda, et nende kujundite küljed on sirged, aga ainult vaatluse põhjal otsustades võiksime pidada neid kõveraiks.



Joonis 59.

Ülesanded.

159. Leida eespool jämedalt trükitud lausete hulgast aksioome ja teoreeme.

160. Loetella kõik need tõsiasjad, s. o. definitsioonid, aksioomid ja teoreemid, mida kasutasime teoreemi „tippnurgad on võrdsed" tõestamisel.

161. Otsustada iga järgneva lause kohta, kas ta on definitsioon, aksioom või teoreem:

1. kui üks kõrvunurkadest on teravnurk, siis teine on nürinurk;

2. nurgapoolitaja on kiir, mis jaotab nurga kaheks võrdseks osaks;

3. tasapinda saab iga tema sirget mööda kahekorra murda;

4. diameeter on kõige pikem kõõl.

Teoreemi puhul öelda tõde, mille abil seda teoreemi saab põhjendada.

§ 26. Teoreemi eeldus ja väide; teoreemi liigid.

Igas geomeetrilise sisuga teoreemis saab eristada kaht osa: ühes neist öeldakse, missugustest kujunditest on jutt, ja teises väidetakse mingit tõsiasja nendest kujunditest. Esimest osa nimetatakse teoreemi e e l d u s e k s ja teist osa v ä i t e k s. Näiteks teoreemis

tippnurgad on võrdsed

võetakse eeldusena, et nurgad on t i p p n u r g a d, ja väidetakse, et need nurgad on v õ r d s e d.

Eelduse ja väite selgemaks eraldamiseks antakse teoreem sageli niisuguses sõnastuses, et eeldus algab sõnaga k u i ja väide sõnaga s i i s. Nii sõnastatult võiks teoreem tippnurkade kohta esineda järgmiselt:

kui kaks nurka on tippnurgad, siis nad on võrdsed.

Kahel teoreemil on mõnikord üks ja sama eeldus või üks ja sama väide. Sel juhul saab neid ühendada üheks l i i t t e o r e e m i k s. Näiteks teoreeme

kõõluga ristuv diameeter poolitab kõõlu

ja

kõõluga ristuv diameeter poolitab kõõlule toetuva kaare

saab ühendada üheks liitteoreemiks:

kõõluga ristuv diameeter poolitab kõõlu ja sellele toetuva kaare.

Kui teoreemis vahetada eeldus ja väide, s. t. eeldus teha väiteks ja väide eelduseks, siis saame uue teoreemi, mida nimetatakse endise p ö ö r d t e o r e e m i k s. Moodustame näiteks pöördteoreemi järgmisele teoreemile:

kui ühe ja sama ringjoone kaared on võrdsed, siis on võrdsed ka kesknurgad, mis toetuvad neile kaartele.

Vahetades selles eelduse ja väite saame:

kui ühe ja sama ringi kesknurgad on võrdsed, siis on võrdsed ka kaared, mis toetuvad neile kesknurkadele.

Ka see teoreem on õige. Kuid mitte iga teoreemi pöördteoreem pole õige; näiteks tippnurkade teoreemi pöördteoreem kõlaks järgmiselt: võrdsed nurgad on tippnurgad. Kuid see pole üldiselt õige, sest mistahes kaks võrdset nurka ei tarvitse veel esineda tippnurkadena. Sellest selgub, et iga teoreemi pöördteoreemi tuleb uurida omaette ja vajaduse korral ka tõestada.

Teoreemist saab moodustada uue teoreemi veel sel teel, et teoreemi eeldust ja väidet eitatakse. Nii saame antud teoreemi vastandteoreemi. Anname vastandteoreemi järgmisele teoreemile:

kui üks kõrvunurkadest on teravnurk, siis teine on nürinurk;

vastandteoreem on:

kui üks kõrvunurkadest ei ole teravnurk, siis teine ei ole nürinurk.

On kerge näidata, et saadud teoreem on õige. Tõepoolest, kui üks kõrvunurkadest ei ole teravnurk, siis ta on kas täisnurk või nürinurk. Täisnurga kõrvunurk on täisnurk, nürinurga kõrvunurk on teravnurk, seega kumbki neist ei ole nürinurk. Nii siis on õige, et kui üks kõrvunurkadest ei ole teravnurk, siis teine ei ole nürinurk.

Kuid mõne teoreemi vastandteoreem ei ole õige. Näiteks ei ole õige järgmise teoreemi vastandteoreem:

kui kumbki kahest liidetavast jagub 5-ga, siis ka nende summa jagub 5-ga.

Selle eelduse ja väite eitamisel saame teoreemi:

kui kumbki kahest liidetavast e i j a g u 5-ga, siis ka s u m m a e i j a g u 5-ga.

See teoreem ei ole õige, sest 5-ga mittejaguvate liidetavate summa mõnikord jagub 5-ga; näiteks 17 ei jagu 5-ga ja 8 ei jagu 5-ga, kuid nende summa 25 jagub 5-ga. Eelnevast selgub, et ka vastandteoreem vajab omaette uurimist ja vajaduse korral tõestamist.

Vastandteoreemi saab moodustada mitte ainult antud teoreemist vaid ka selle pöördteoreemist. Nii siis on iga teoreemiga seotud veel kolm teoreemi: pöördteoreem, vastandteoreem ja pöördteoreemi vastandteoreem (ehk vastandteoreemi pöördteoreem).

N ä i d e: moodustame nimetatud kolm teoreemi järgmisest teoreemist:

kui punkt on lõigu keskristsirgel, siis on ta lõigu otspunktidest võrdsetel kaugustel.

Pöördteoreem:

kui punkt on lõigu otspunktidest võrdsetel kaugustel, siis on ta lõigu keskristsirgel.

Vastandteoreem:

kui punkt ei ole lõigu keskristsirgel, siis ei ole ta lõigu otspunktidest võrdsetel kaugustel.

Pöördteoreemi vastandteoreem:

kui punkt ei ole lõigu otspunktidest võrdsetel kaugustel, siis ei ole ta lõigu keskristsirgel.

Kõik need teoreemid on õiged.

Ülesanded.

162. Öelda iga järgneva teoreemi eeldus ja väide:

1. kõrvunurkade summa võrdub sirgnurgaga;
2. kaks sirget saavad lõikuda ainult ühes punktis;

3. ringi sees oleva punkti kaugus ringjoone keskpunktist on väiksem kui raadius;

4. võrdsete raadiustega ringjoonte võrdsetele kaartele toetuvad kõõlud on võrdsed.

163. Sõnastada eelmises ülesandes antud teoreemid nii, et neis esineksid sõnad „kui" ja „siis".

164. Anda iga järgneva teoreemi pöördteoreem, vastandteoreem ja pöördteoreemi vastandteoreem ning otsustada iga teoreemi puhul, kas ta on õige või mitte:

1. kui kaks nurka on võrdsed, siis on võrdsed ka nende kõrvunurgad;

2. kui lõigud a ja c on võrdsed ning lõigud b ja c on võrdsed, siis ka lõigud a ja b on võrdsed;

3. kui lõik a on sümmeetriline lõiguga b sirge s suhtes, siis lõigud a ja b on võrdsed;

4. kui nurk α on täisnurgast suurem, siis ta ei ole teravnurk.

§ 27. Teoreemi tõestusest.

Teoreem sisaldab, nagu nägime, kaks osa: eelduse ja väite. Need tõsiasjad, mida sisaldab eeldus, loetakse teoreemi tõestamisel täidetuks ehk antuks. Tõestada teoreem tähendab siis eelduses antud tõsiasjadest järeldada ehk tuletada need tõsiasjad, mida sisaldab väide. Niisiis tuleb teoreemi tõestamisele asumisel kõigepealt selgitada, mis on teoreemi eelduseks ja mis on väiteks, teisiti, mis on antud ja mida on vaja tõestada. Peale eelduse tuleb teoreemi tõestamisel harilikult kasutada ka varem tundmaõpitud tõdesid (definitsioone, aksioome ja teoreeme). Selleks, et näha, missuguste varem tundmaõpitud tõdede abil saab antud teoreemi tõestada, tuleb mõnikord joonist täiendada uute punktide ja joonte joonestamisega (§ 14),

viia uuritav kujund teisele kohale, näiteks paigutada teise kujundi peale (§18), uurida kujundi sümmeetriat (§ 22) või kasutada mõnda muud tõestamisvõtet.

Üks sageli kasutatav tõestamisvõte on *vastuväiteline* tõestus. Selle võtte puhul oletatakse, et tõestatav väide *ei ole õige* ja näidatakse siis, et see oletus tekitab vastuolu teoreemi eeldusega või mõne varem õpitud teoreemiga, ja seetõttu ei saa olla õige.

Näiteks teoreemi „kaks sirget saavad lõikuda ainult ühes punktis" tõestamiseks oletasime (§ 5), et sirged u ja v lõikuvad peale punkti P veel punktis Q. Sellest oletusest järeldub, et punkte P ja Q läbib kaks eri sirget. Et see järeldus on vastuolus lausega, mille järgi kaht punkti läbib ainult üks sirge, siis tõestuse algul tehtud oletus teise lõikepunkti Q olemasolust ei ole õige. Kui aga sirgetel u ja v teist lõikepunkti ei saa olla, siis on õige, et nad saavad lõikuda ainult punktis P.

Muidugi ei saa antud tõestusest järeldada, et *iga kaks* sirget lõikuvad: teoreem ütleb vaid seda, et kui kaks sirget lõikuvad, siis ainult ühes punktis.

Teoreemi tõestamiseks tuleb samm-sammult näidata, *kuidas* teoreemi eeldusest ja muudest kasutada olevaist tõsiasjadest tuleneb teoreemi väide.

Selleks peab oskama antud tõdedest teha järeldusi, s. t. tuletada uusi tõdesid. Uus tõde tuleneb kas ühest või mitmest antud tõest. Kui on teada näiteks, et lõik a ei ole suurem kui lõik b, siis saame järeldada, et kas $a = b$ või $a < b$. Siin uus tõde ($a \leqslant b$) järeldus ühest antud tõest (a ei ole suurem kui b).

Mitmest tõest uue tõe tuletamisel leiab sageli kasutamist järgmine *järeldusaksioom*:

võrduses ja võrratuses võib iga suurust asendada temaga võrdse suurusega.

Seda aksioomi kasutades saame, näiteks:

kui $a = b$ ja $c = b$, siis $a = c$,

sest asendades esimeses võrduses suuruse b temaga võrdse suurusega c saame järeldusena viimase võrduse.

Nende kolme võrdusega väljendatud tõsiasja sõnastame järgmise järeldusteoreemina:

kui kaks suurust on eraldi võrdsed ühe ja sama kolmanda suurusega, siis on need kaks suurust ka omavahel võrdsed.

Järeldusaksioomi põhjal saame veel:

1. kui $a > b$ ja $b = c$, siis $a > c$;
2. kui $a < b$ ja $b = c$, siis $a < c$.

Ülaltoodud aksioomi kasutades on kerge näidata, et on õiged ka järgmised neli järeldusteoreemi:

võrdsete suuruste liitmisel võrdsete suurustega saadakse võrdsed suurused;

võrdsete suuruste lahutamisel võrdsetest suurustest saadakse võrdsed suurused;

võrdsete suuruste korrutamisel võrdsete suurustega saadakse võrdsed suurused;

võrdsete suuruste jagamisel võrdsete suurustega saadakse võrdsed suurused.

Neid teoreeme sümbolites väljendades saame:

kui $a = b$ ja $c = d$, siis

$$a + c = b + d, \quad a - c = b - d, \quad a \cdot c = b \cdot d, \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Nende võrduste kehtivust näitame järgmiselt:
iseenesest mõistetav on, et

$$a + c = a + c, \quad a - c = a - c, \quad a \cdot c = a \cdot c, \quad \frac{a}{c} = \frac{a}{c};$$

asendades nende võrduste paremates pooltes suurused a ja c nendega võrdsete suurustega b ja d saame võrdused

$$a + c = b + d, \quad a - c = b - d, \quad a \cdot c = b \cdot d, \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d},$$

mida oligi vaja tõestada.

Ülesanded.

165. Teha järeldused igast järgnevast eeldusest ning anda eeldus ja järeldus ühe lausena:

1. nurk α ei ole suurem kui $90°$;
2. lõigu a pikkus ei ole 5 cm;
3. kõrvunurgad ei ole võrdsed;
4. punkt M on punktide A ja B sümmeetriateljel.

166. Kasutades järeldusaksioomi ja -teoreeme teha järeldused igast järgnevast eelduste paarist:

1. $x = a$, $y = b$
2. $a = b$, $x < b$
3. $x = a + b$, $x = a + c$
4. $s = a + b$, $a = b$

167. On antud, et $\alpha + \beta > 2\alpha$. Tõestada vastuväiteliselt, et $\beta > \alpha$.

168. Olgu α ja β kõrvunurgad ning γ ja δ kõrvunurgad. Tõestada, et kui $\alpha > \gamma$, siis $\beta < \delta$, ja sõnastada vastav teoreem.

§ 28. Vastandteoreemide kehtivusest.

Eespool nägime, et igast teoreemist saab eelduse ja väite vahetamise ja eitamise teel moodustada veel kolm teoreemi. Näitame nüüd, et kõik need neli teoreemi on õiged, kui teatavad kaks teoreemi neist neljast on tõestatud. Selleks märgime ühe tähega kõik need tõsiasjad, mida sisaldab teoreemi eeldus, näiteks tähega A ja teise tähega B kõik need tõsiasjad, mida sisaldab väide. Nüüd saab kõik neli kõnealolevat teoreemi anda järgmiste skeemidena.

Esialgne teoreem:

kui A on teada, siis on teada B.

Pöördteoreem:

kui B on teada, siis on teada A.

Vastandteoreem:

kui A ei ole teada, siis ei ole teada B.

Pöördteoreemi vastandteoreem:

kui B ei ole teada, siis ei ole teada A.

Olgu esimene teoreem neist neljast tõestatud. Näitame, et siis neljas teoreem on ikka õige, s. t. pöördteoreemi vastandteoreem ei vaja tõestamist. Niisiis on antud, et B ei ole teada (IV teoreemi eeldus); tuleb näidata, et siis ei ole teada ka A (IV teoreemi väide). Väide on õige, sest kui A oleks teada, siis esimese teoreemi järgi oleks teada ka B; kuid meil on antud, et B ei ole teada, seega A ei saa olla teada.

Niisamuti saame näidata, et pöördteoreemi kehtivusest järeldub vastandteoreemi kehtivus ja ümberpöördult, vastandteoreemi kehtivusest järeldub pöördteoreemi kehtivus.

Niisiis kõik neli kõnealolevat teoreemi on õiged, kui peale esialgse teoreemi on veel tõestatud pöördteoreem või vastandteoreem. Harilikult tõestatakse peale esialgse teoreemi veel pöördteoreem, kui seda saab tõestada. Kui see osutub võimatuks, siis neist neljast teoreemist on ainult kaks õiged: esialgne teoreem ja pöördteoreemi vastandteoreem.

N ä i d e: Eeldame, et on tõestatud järgmine teoreem:

kui kolmnurga kaks nurka on võrdsed, siis kolmnurk on võrdhaarne.

Sel juhul on õige ka pöördteoreemi vastandteoreem: kui kolmnurk ei ole võrdhaarne, siis tal ei ole kaht võrdset nurka.

Ülesanded.

169. Näidata, et vastandteoreemi kehtivusest järeldub pöördteoreemi kehtivus.

170. Moodustada pöördteoreem, vastandteoreem ja pöördteoreemi vastandteoreem teoreemist: kui x ei ole kehtiv, siis on kehtiv y.

171. Missuguse teoreemi kehtivus järeldub iga järgneva teoreemi kehtivusest:

1. kui $\angle A \div \angle B$ sirge s suhtes, siis $\angle A = \angle B$.

2. kui kaks lõikuvat sirget u ja v on sümmeetrilised sirge t suhtes, siis u ja v lõikepunkt asetseb sirgel t.

3. kui kumbki kahest liidetavast jagub 7-ga, siis ka summa jagub 7-ga.

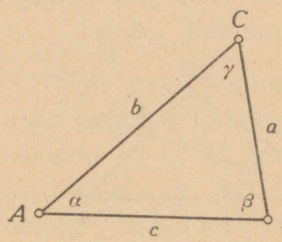
Peatükk V.

Kolmnurk.

§ 29. Kolmnurga elemendid ja nende tähistamine.

Kolmnurk on kujund, mis tekib kolme mitte ühel sirgel asetseva punkti ühendamisel sirglõikudega.

Need punktid on kolmnurga tipud ja neid ühendavad sirglõigud on kolmnurga küljed. Iga kahe külje vahel on kolmnurga üks nurk. Kolmnurga nurki ja külgi nimetatakse kolmnurga elementideks *.



Joonis 60.

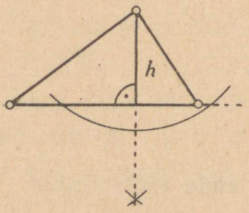
Harilikult tähistatakse kolmnurga tippe ladina suurte tähtedega, nurki väikeste kreeka tähtedega ja külgi väikeste ladina tähtedega. Kui kolmnurga tippude tähised on A, B ja C, siis tipu A vastas on külg a, tipu B vastas külg b ja tipu C vastas külg c (joonis 60). Selle tähistusviisi juures saab kolmnurga nurka nimetada kolmel viisil, näiteks nurk α ehk A ehk CAB (ehk BAC).

Kolmnurga tipust vastasküljele (joonis 61) või selle pikendile (joonis 62) joonestatud ristlõiku nimetatakse kolmnurga kõrguseks.

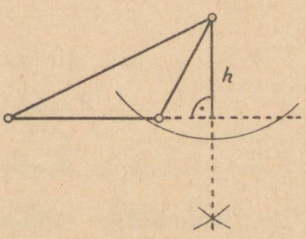
---

* *elementum* (lad.) — alge, algosis.

Kõrgust tähistatakse harilikult tähega *h*. Kolmnurga külge, millele on joonestatud kõrgus, nimetatakse **aluseks** ja kõrguse otspunkti alusel — kõrguse **aluspunktiks**. Et aluseks võib võtta kolmnurga ükskõik



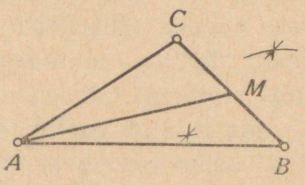
Joonis 61.



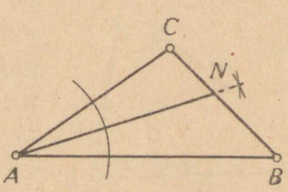
Joonis 62.

millise külje, siis on igal kolmnurgal kolm kõrgust.

Sirglõik, mis ühendab kolmnurga tippu selle vastaskülje keskpunktiga, on kolmnurga **mediaan***. Kolmnurgal on kolm mediaani. Kui punkt *M* on kolmnurga *ABC* külje *BC* keskpunkt (joonis 63), siis lõik *AM* on selle kolmnurga üks mediaan.



Joonis 63.



Joonis 64.

Joonestame kolmnurga mingi nurga poolitaja, näiteks nurga *A* poolitaja (joonis 64). Selle lõiku tipust kuni vastasküljeni, s. o. lõiku *AN* joonisel 64 nimetatakse **kolmnurga nurgapoolitajaks** ehk **bissektoriks****.

* *medius* (lad.) — keskmine.

** *bis* (lad.) — kaks korda; *secare* (lad.) — lõikama

Nii siis kolmnurga nurgapoolitajaks nimetatakse kolmnurga nurga poolitaja lõiku tipust kuni vastasküljeni. On selge, et igal kolmnurgal on kolm nurgapoolitajat.

Kolmnurga külgede summa on tema ümbermõõt.

Sõna kolmnurk asendatakse kirjutamisel sageli sümboliga $\triangle$.

Ülesanded.

172. Võtta vabalt kolmnurga tipud A, B ja C ning joonestada kolmnurga kõrgus AK, mediaan BM ja nurgapoolitaja CN.

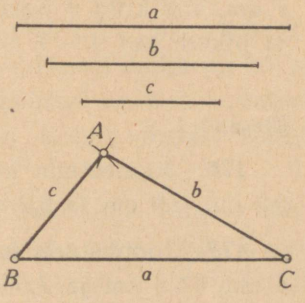
173. Joonestada vabalt võetud kolmnurga kolm kõrgust.

174. Joonestada vabalt võetud kolmnurga kolm mediaani.

175. Joonestada vabalt võetud kolmnurga kolm nurgapoolitajat.

§ 30. Kolmnurga kahe külje summa ja vahe.

Olgu vaja joonestada kolmnurk, mille külgedeks on kolm antud sirglõiku a, b, c. Ülesande lahendamiseks joonestame lõigu $BC = a$, selle otspunkti B ümber ringjoone raadiusega c ja otspunkti C ümber ringjoone raadiusega b (joonis 65). Nende ringjoonte lõikepunkti A ühendamisel punktidega B ja C tekib kolmnurk, mille külgedeks on a, b ja c.



Joonis 65.

Kui võtta vabalt kolm sirglõiku ja hakata neist ehitama kolmnurka, siis võib juhtuda, et see osutub võimatuks; niisugune olukord tekib näiteks, kui ring-

jooned B (c) ja C (b) joonisel 65 ei lõikuks. Vaatleme, missugustel tingimustel saab kolmest lõigust a, b ja c ehitada kolmnurga.

Et sirglõik on kõige lühem joonlõik kahe punkti vahel, siis peab kolmnurga kahe külje summa olema suurem kui kolmas külg. Seega

$$b + c > a, \quad a + c > b \text{ ja}$$
$$a + b > c.$$

Kui teise võrratuse mõlemast poolest lahutame c, siis saame, et

$$a > b - c.$$

Esimese võrratuse $b + c > a$ ja viimatisaadud võrratuse kirjutame järjestikku lühidalt järgmiselt:

$$b + c > a > b - c.$$

See näitab, et külg a on teiste külgede summast väiksem, aga nende vahest suurem.

Samal viisil leiame, et

$a + c > b > a - c$ ja $a + b > c > a - b$.

Seega oleme tõestanud, et

kolmnurga kahe külje summa on suurem ja vahe on väiksem kui kolmas külg.

N ä i d e. Kui kolmnurga külg a on 9 cm ja külg b on 7 cm, siis külg c peab olema lühem kui $9 + 7$ ehk 16 cm ja pikem kui $9 - 7$ ehk 2 cm:

$$16 > c > 2.$$

Ülesanded.

176. Joonestada kolmnurk, mille külgede pikkused on 5,8 cm, 3,9 cm ja 6,7 cm. Mõõta selle kolmnurga nurgad.

177. Joonestada kolmnurk, mille külgede pikkused on 4 cm, 4,5 cm ja 7,5 cm ja tõmmata selle kõige lühema külje vastastipust kõrgus, mediaan ja nurgapoolitaja.

178. Kas on olemas kolmnurk külgedega 1) 4 m, 8 m, 10 m; 2) 1,2 dm, 1 dm, 2,2 dm; 3) 7,9 cm, 4,3 cm, 3,1 cm?

179. Kolmnurga kahe *lühema* külje pikkused on 23 cm ja 18 cm. Missuguses vahemikus on kolmanda külje pikkus?

180. Kolmnurga külg $c = 8{,}5$ cm ja külg $a = 11{,}5$ cm. Missuguses vahemikus on külje b pikkus?

181. Kolmnurga kahe külje summa on 27,8 m ja ümbermõõt on 36,5 m. Kui pikk on kolmas külg?

182. Kolmnurga kahe külje summa on 28,6 m ja nende vahe on 5,8 m. Kui pikk on kumbki külg?

183. Kui suur peab olema lõikude AB ja BC summa, et punkt B oleks a) sirgel AC, b) väljaspool sirget AC?

184. Tõestada, et kolmnurga iga külg on väiksem kui kolmnurga pool ümbermõõtu.

185. Tõestada, et kolmnurga sees oleva punkti kauguste summa tippudest on suurem kui kolmnurga pool ümbermõõtu.

§ 31. Kolmnurkade liigitelu külgede järgi.

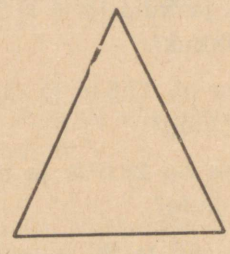
Kolmnurki liigitatakse külgede ja nurkade järgi.

Külgede järgi on kolmnurk kas *isekülgne*, *võrdhaarne* või *võrdkülgne*. Isekülgsel kolmnurgal ei ole võrdseid külgi (joonis 65), võrdhaarsel on kaks võrdset külge (joonis 66) ja võrdkülgsel on kolm võrdset külge (joonis 67).

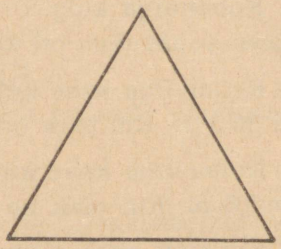
Võrdhaarse kolmnurga kaht võrdset külge nimetatakse *haaradeks* ja kolmandat külge *aluseks*. Selle kolmnurga aluse vastasnurka nimetatakse *tipunurgaks* ja aluse lähisnurki *alusnurkadeks*. Aluse vastastipust

alusele tõmmatud ristlõik on võrdhaarse kolmnurga kõrgus.

Võrdkülgset kolmnurka saab vaadelda kui võrdhaarset, mille alus on haaraga võrdne. Seega iga võrdkülgne kolmnurk on ka võrdhaarne.



Joonis 66.



Joonis 67.

Ülesanded.

186. Joonestada võrdhaarne kolmnurk, mille alus on 5 cm ja haar 4 cm. Mõõta selle kolmnurga kõrgus.

187. Võrdhaarse kolmnurga alus on 4,5 m ja haar on alusest 0,75 m võrra pikem. Arvutada kolmnurga ümbermõõt.

188. Mis liiki on kolmnurk:

a) mis ei ole võrdhaarne;

b) mis ei ole võrdkülgne;

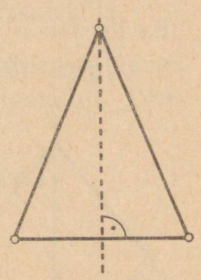
c) mis on saadud ringi keskpunkti ühendamisel kõõlu otspunktidega.

189. Võrdhaarse kolmnurga üks külg on 14 cm ja teine külg on 30 cm. Kumb neist külgedest on aluseks?

190. Võrdhaarse kolmnurga ümbermõõt on 15 m ja haar on alusest 1,5 m pikem. Kui pikk on alus?

§ 32. Võrdhaarse kolmnurga omadusi.

Joonestame võrdhaarse kolmnurga aluse keskristsirge (joonis 68). Sellel sirgel asetsevad kõik punktid, mis on aluse otspunktidest võrdsetel kaugustel. Et ka kolmnurga tipp on aluse otspunktidest võrdsetel kaugustel, siis aluse keskristsirge peab läbima tippu. Seetõttu



Joonis 68.

võrdhaarse kolmnurga aluse keskristsirge on selle kolmnurga sümmeetriateljeks.

Sellest järeldame, et

võrdhaarse kolmnurga alusnurgad on võrdsed,

sest nad on aluse keskristsirge suhtes sümmeetriliselt asetsevad nurgad. Et alusnurgad on haarade, s. o. võrdsete külgede vastas, siis viimast teoreemi saab veel teisiti sõnastada, nimelt:

kolmnurgas on võrdsete külgede vastas võrdsed nurgad.

Et võrdkülgsel kolmnurgal kõik küljed on võrdsed, siis on tal ka kõik nurgad võrdsed.

Vaatleme nüüd võrdhaarse kolmnurga kõrgust. Et tipust saab alusele joonestada ainult ühe ristlõigu, milleks on aluse keskristsirge lõik, siis võrdhaarse kolmnurga kõrgus asetseb aluse keskristsirgel, s. o. kolmnurga sümmeetriateljel. Sellest järeldame, et

võrdhaarse kolmnurga kõrgus poolitab aluse ja tipunurga, s. t. võrdhaarse kolmnurga kõrgus on ühtlasi aluse mediaan ja tipunurga poolitaja.

Võrdkülgset kolmnurka võime vaadelda kui võrdhaarset, mille aluseks võib võtta ükskõik missuguse külje; seetõttu

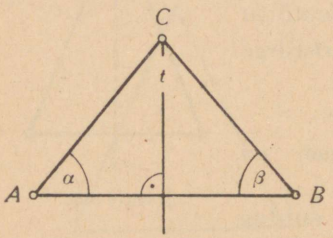
võrdkülgse kolmnurga iga külje keskristsirge on selle kolmnurga sümmeetriateljeks.

Vaatleme nüüd kolmnurka, mille kaks nurka on võrdsed. Saab tõestada, et nende nurkade vastasküljed on võrdsed, nii et

kahe võrdse nurgaga kolmnurk on võrdhaarne.

Eeldus: $\alpha = \beta$ (joonis 69).

Väide: $AC = BC$.



Joonis 69.

Tõestus. Ehitame külje AB keskristsirge t ja kujutleme, et joonis on seda sirget mööda kahekorra murtud. Siis ühtivad punktid A ja B kui sümmeetriliselt asetsevad punktid ning nurgad α ja β kui võrdsed nurgad.

Seega nurkade α ja β haarad AC ja BC on sümmeetrilises asendis sirge t suhtes, mistõttu nende lõikepunkt C asetseb sirgel t. Kuid siis lõigud AC ja BC on teineteisega sümmeetrilised sirge t suhtes ja

$$AC = BC.$$

Ühendades selle teoreemi teoreemiga võrdhaarse kolmnurga nurkade kohta saame järgmise teoreemi:

kolmnurgas on võrdsete nurkade vastas võrdsed küljed ja võrdsete külgede vastas võrdsed nurgad.

Ülesanded.

191. Joonestada kolmnurk, mille üks külg on 5,5 cm ja selle külje lähisnurgad on 40°.

192. Joonestada võrdhaarne täisnurkne kolmnurk.

193. Joonestada võrdhaarne kolmnurk, mille alus ja kõrgus on võrdsed.

194. Joonestada võrdkülgse kolmnurga kolm sümmeetriatelge.

195. Tõestada, et sirge, mis lõikab nurga haarasid punktides, mis on nurga tipust võrdsetel kaugustel, on risti nurga poolitajaga.

§ 33. Kolmnurga suurem nurk ja selle vastaskülg.

Kolmnurgas on võrdsete nurkade vastas võrdsed küljed. Vaatleme nüüd kahe mittevõrdse nurga vastaskülgi. Tõestame, et

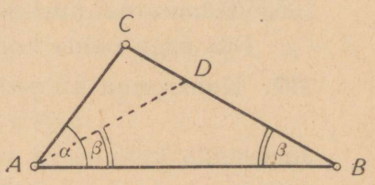
kolmnurgas on suurema nurga vastas suurem külg.

Eeldus: $\alpha > \beta$ (joonis 70).

Väide: $BC > AC$.

Tõestus. Ehitame punkti A juurde nurga β, nagu näidatud joonisel 70. Siis on kolmnurgas ABD kaks võrdset nurka ja seetõttu

$$AD = BD.$$



Joonis 70.

Kuna kolmnurga kahe külje summa on suurem kui kolmas külg, siis kolmnurgas ADC

$$AD + DC > AC.$$

Asendades selle võrratuse vasakpoolses avaldises AD temaga võrdse suurusega BD saame $BD + DC > AC$.

Et BD ja DC summa on BC, siis

$$BC > AC,$$

mida oligi vaja tõestada.

Tõestame, et on õige ka eelmise pöördteoreem, nimelt:

kolmnurgas on suurema külje vastas suurem nurk.

Eeldus: $BC > AC$ (joonis 70).

Väide: $\alpha > \beta$.

Tõestus. Mistahes nurkade α ja β kohta on alati õige üks kolmest väitest:

$$\alpha = \beta \quad \text{või} \quad \alpha < \beta \quad \text{või} \quad \alpha > \beta.$$

Antud kolmnurga nurkade α ja β kohta esimene väide ei ole õige, sest siis peaksid olema võrdsed nende nurkade vastasküljed BC ja AC, kuid eelduse järgi $BC > AC$. Ka teine väide ei saa olla õige, sest siis peaks BC olema väiksem kui AC, mis on vastuolus eeldusega. Ainsa võimalusena jääb püsima väide

$$\alpha > \beta,$$

mis ei ole vastuolus eeldusega.

Ülesanded.

196. Kolmnurga nurkade kohta on teada, et $\gamma > \alpha$ ja $\beta = \gamma$. Mis saab öelda kolmnurga külgedest?

197. Kolmnurga külgede a, b ja c kohta on teada, et

$$b - c > a - c > 0.$$

Järjestada kolmnurga nurgad nende suuruse järgi.

198. Kolmnurgas on $a < c$ ja $\beta > \gamma$. Järjestada kolmnurga nurgad nende suuruse järgi.

199. Kolmnurgas on $\gamma > \alpha$ ja $b - c > 0$. Missugune on kõige pikem külg selles kolmnurgas?

200. Võrdhaarse kolmnurga ümbermõõt on 19,7 dm ja aluse ning haara summa on 14 dm. Kumb on suurem, kas alusnurk või tipunurk?

§ 34. Kolmnurkade liigitelu nurkade järgi.

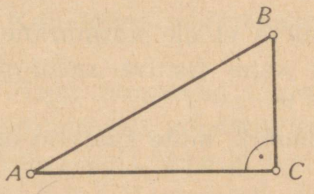
Kolmnurkade liigitamiseks nurkade järgi tõestame enne, et

kui kolmnurga üks nurk on täisnurk või nürinurk, siis ülejäänud nurgad on teravnurgad.

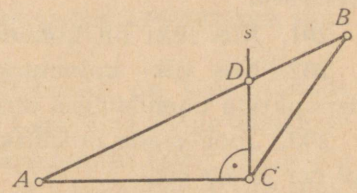
Eeldus: $\angle C \geqslant 90°$ (joonis 71 ja 72).

Väide: $\angle A < 90°$; $\angle B < 90°$.

Tõestus. Kui $\angle C = 90°$, siis BC on punktist B sirgele AC tõmmatud ristlõik ja BA on samast punktist samale sirgele tõmmatud kaldlõik. Seetõttu $BC < BA$ (§ 14). Et kolmnurgas on suurema külje vastas suurem nurk, siis külje BC vastasnurk on väiksem kui BA vastasnurk, s.t.



Joonis 71.



Joonis 72.

$$\angle A < \angle C$$

ehk, et $\angle C = 90°$,

$$\angle A < 90°.$$

Niisamuti saame tõestada, et

$$\angle B < 90°.$$

Kui $\angle C > 90°$, siis joonestame läbi tipu C sirge $s \perp AC$ (või $s \perp CB$). See sirge lõikab külge AB, sest külje AB üks otspunkt on ühel- ja teine teisel pool sirget s (§ 6). Olgu AB ja sirge s lõikepunkt D. Siis kolmnurga ACD nurk C on täisnurk (sest $CD \perp AC$) ja tõestuse esimese osa järgi

$$\angle A < 90°.$$

Niisamuti saame näidata (joonestades selleks sirge $s \perp CB$), et

$$\angle B < 90°.$$

Seega kolmnurga nurkadest ainult üks saab olla täisnurk või nürinurk. Sellest sõltuvalt on kolmnurk nurkade

järgi kas teravnurkne, täisnurkne või nürinurkne. Teravnurksel kolmnurgal on kõik nurgad teravnurgad (joonis 60), täisnurksel on üks nurk täisnurk (joonis 71) ja nürinurksel on üks nurk nürinurk (joonis 72).

Täisnurkse kolmnurga külge täisnurga vastas nimetatakse hüpotenuusiks*; küljed, mis moodustavad täisnurga on kaatetid**.

Ülesanded.

201. Mis liiki on kolmnurk, kui ta ei ole nürinurkne?

202. Mis liiki kolmnurk tekib kahe ristuva raadiuse otspunktide ühendamisel sirgega?

203. Joonestada täisnurkne kolmnurk, mille kaatetid on 2,9 cm ja 4,3 cm.

204. Joonestada täisnurkne kolmnurk, mille hüpotenuus on 6 cm ja üks kaatet on 4,8 cm.

205. Missugune külg on nürinurksel kolmnurgal kõige suurem?

§ 35. Kongruentsed kolmnurgad.

Kaht tasapinnalist kujundit, näiteks kaht kolmnurka, nimetatakse kongruentseiks, kui neid saab paigutada teineteise peale nii, et nad teineteist täpselt katavad, s. o. ühtivad. Seevastu kaht niisugust kujundit, mis ei saa ühtida, nimetatakse mittekongruentseiks.

Kui ühe kolmnurga teise peale paigutamisel ühe kolmnurga tipud ühtivad teise kolmnurga tippudega, siis ühtivad ka küljed, sest nad on tippude vahelised sirglõigud ja kaht tippu ühendab ainult üks sirglõik. Seepärast on kahe kolmnurga kongruentsuse kindlakstegemiseks küllalt, kui saab näidata, et nende tipud pealepaigutamisel ühtivad.

---

* *hypoteinusa* (kr.) — millegi üle pingutav.

** *kathetos* (kr.) — (tina-) lood.

Kongruentsete kujundite neid elemente, mis pealepaigutamisel ühtivad, nimetatakse *vastavateks elementideks*. On selge, et kongruentsete kujundite vastavad küljed on võrdsed ja samuti vastavad nurgad on võrdsed.

Kongruentsete kolmnurkade vastavaid tippe tähistame ühe ja sama tähega, lisades märgi ′ teise kolmnurga vastava tipu tähise juurde. Niiviisi tähistades on vastavad tipud A ja A' (lugeda „A prim"), B ja B' jne.

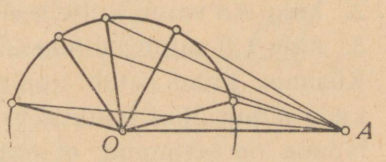
Kujundite kongruentsuse märkimiseks kasutatakse sümbolit $\cong$.

Nagu järgnevad teoreemid näitavad, on kolmnurkade kongruentsust võimalik kindlaks teha juba mõne elemendi võrdlemisega, ilma et tarvitseks kolmnurki teineteise peale paigutada. Elementide kohta, mis võimaldavad kolmnurkade kongruentsust kindlaks teha, öeldakse, et nendega on kolmnurk *määratud*.

Leiame, mitme elemendiga võiks kolmnurk olla määratud. Et on palju erinevaid kolmnurki, millede ühed küljed või ühed nurgad on võrdsed, siis

ühe elemendiga ei ole kolmnurk määratud.

Samuti on olukord *kahe* elemendiga: joonisel 73 on mitu kolmnurka, milledel on ühine külg OA ja milledel teiseks küljeks on ühe ja sama ringi raadiused, seega ka teised küljed on võrdsed; nii on neil kahed võrdsed elemendid, kuid kolmnurgad ei ole kongruentsed:



Joonis 73.

kahe küljega ei ole kolmnurk määratud.

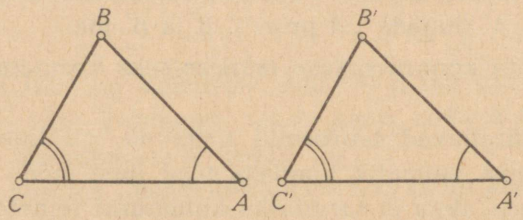
Kolmnurkade kongruentsuse tunnuste uurimisel jõuame varsti otsusele, et ainult

kolme sobivalt valitud elemendiga on kolmnurk määratud.

§ 36. Kolmnurkade kongruentsuse esimene tunnus.

Kaks kolmnurka on kongruentsed, kui ühe kolmnurga külg ja selle lähisnurgad on võrdsed teise kolmnurga vastavate elementidega.

Eeldus: $AC = A'C'$; $\angle A = \angle A'$; $\angle C = \angle C'$ (joonis 74).



Joonis 74.

Väide: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Tõestus. Paigutame mõttes kolmnurga ABC nii kolmnurga $A'B'C'$ peale, et tipp A ühtiks tipuga A' ja külg AC satuks küljele $A'C'$. Siis

1. tipp C ühtib tipuga C', sest eelduse järgi $AC = A'C'$;
2. külg AB satub küljele $A'B'$, sest $\angle A = \angle A'$;
3. külg CB satub küljele $C'B'$, sest $\angle C = \angle C'$.

Küsime: kuhu satub tipp B? Et kaks sirget võivad lõikuda ainult ühes punktis, siis tipp B peab ühtima tipuga B'. Nõnda on selgunud, et antud kolmnurki on võimalik niiviisi teineteise peale paigutada, et nende tipud vastavalt ühtivad. Järelikult

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$$

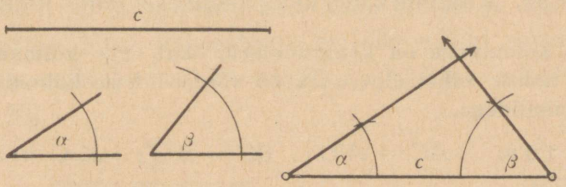
Kolmnurkade kongruentsuse esimene tunnus (ehk tunnus nkn) näitab, et

kolmnurk on määratud ühe külje ja selle kahe lähisnurgaga.

Kolmnurga joonestamiseks antud külje ja selle lähisnurkade järgi joonestame esmalt antud külje ja siis selle

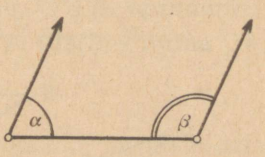
otspunktide juurde antud nurgad (joonis 75). Nende nurkade teiste haarade lõikepunkt on kolmnurga kolmandaks tipuks.

Võib juhtuda, et need haarad pikendamisel üldse ei lõiku (joonis 76). Antud nurgad sel juhul ei või olla kolmnurga nurkadeks. Edaspidi (§ 46) näeme, missugust tingimust peavad täitma kaks nurka, et nad võiksid olla kolmnurga nurkadeks.



Joonis 75.

Antud külje ja selle kahe lähisnurga järgi kolmnurka joonestades (joonis 75) võime antud nurgad paigutada kas küljest ülespoole või allapoole, võime nurga α paigutada kas külje vasakpoolse tipu juurde või parempoolse tipu juurde. Nii võime saada neli eri kolmnurka. Käsiteldud tunnuse järgi on kõik need kolmnurgad kongruentsed.



Joonis 76.

Ülesanded.

206. Näidata, et kaks täisnurkset kolmnurka on kongruentsed, kui ühe kolmnurga kaatet ja selle juures olev teravnurk on võrdsed teise kolmnurga vastavate elementidega.

207. Joonestada neli kolmnurka, millede üks külg on

3,5 cm ja selle lähisnurgad on 30° ning 70°, paigutades need kolmnurgad sümmeetriliselt kahe ristuva sirge suhtes.

208. Tõestada, et sirge, mis on risti nurgapoolitajaga, lõikab nurga haarasid punktides, mis on nurga tipust võrdsetel kaugustel.

209. Tõestada, et kolmnurk on võrdhaarne, kui tema nurgapoolitaja on ühtlasi ka kõrguseks.

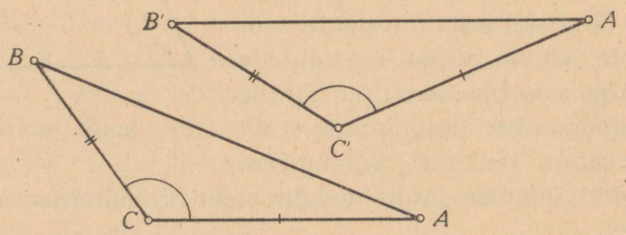
§ 37. Kolmnurkade kongruentsuse teine tunnus.

Kaks kolmnurka on kongruentsed, kui ühe kolmnurga kaks külge ja nende vahel olev nurk on võrdsed teise kolmnurga vastavate elementidega.

Eeldus: $AC = A'C'$; $BC = B'C'$; $\angle C = \angle C'$ (joonis 77).

Väide: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Tõestus. Paigutame mõttes kolmnurga ABC nii kolmnurga $A'B'C'$ peale, et tipp C ühtib tipuga C' ja külg AC satub küljele $A'C'$.



Joonis 77.

Siis

1. külg CB satub küljele $C'B'$, sest eelduse järgi $\angle C = \angle C'$;
2. tipp A ühtib tipuga A', sest samuti $AC = A'C'$;
3. tipp B ühtib tipuga B', sest $BC = B'C'$.

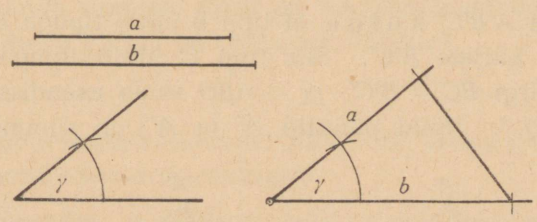
Sellest selgub, et neid kolmnurki on võimalik niiviisi teineteise peale paigutada, et nende tipud ühtivad; järelikult

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$$

Kolmnurkade kongruentsuse teine tunnus (ehk tunnus knk) näitab, et

kolmnurk on määratud kahe külje ja nende vahel oleva nurgaga.

Kolmnurga joonestamiseks kahe külje ja nende vahel oleva nurga järgi joonestame esiteks antud nurga ja kanname siis selle haaradele, alates nurga tipust, antud küljed (joonis 78).



Joonis 78.

Nende lõpp-punktide ühendamisel saame antud elementidega kolmnurga.

On ükskõik, kumma antud külgedest paigutame ühele või teisele haarale, sest kolmnurkade kongruentsuse teise tunnuse järgi on kongruentsed kõik kolmnurgad, millede kaks külge ja nende vahel olevad nurgad on vastavalt võrdsed.

Ülesanded.

210. Kasutades kolmnurkade kongruentsust näidata, et võrdsete raadiustega ringides võrdsetele kesknurkadele toetuvad võrdsed kõõlud.

211. Joonestada kaks kolmnurka nii, et neil on ühine nurk 35° ning selle lähisküljed on 3 cm ja 6 cm. Leida selle kujundi sümmeetriatelg.

212. Tõestada, et kolmnurk on võrdhaarne, kui tema kõrgus on ühtlasi ka mediaaniks.

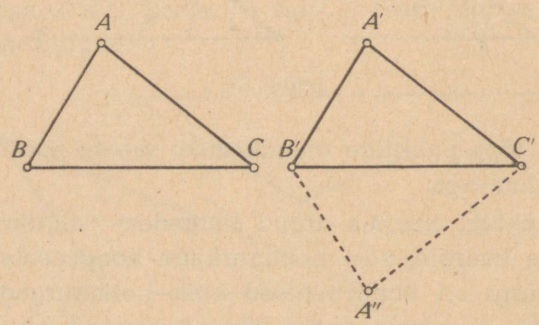
§ 38. Kolmnurkade kongruentsuse kolmas tunnus.

Kaks kolmnurka on kongruentsed, kui ühe kolmnurga kolm külge on võrdsed teise kolmnurga vastavate elementidega.

Eeldus: $AB = A'B'$; $BC = B'C'$; $CA = C'A'$ (joonis 79).

Väide: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Tõestus. Paigutame mõttes kolmnurga ABC nii kolmnurga $A'B'C'$ külge, et tipp B ühtib tipuga B' ja külg BC satub küljele $B'C'$. Siis tipp C ühtib tipuga C', sest eelduse järgi $BC = B'C'$, ja $\triangle ABC$ tuleb asendisse $A''B'C'$ (joonis 79).* Nüüd punktid A' ja A'' on sümmeetrilised



Joonis 79.

sirge $B'C'$ suhtes, sest eelduse kohaselt nad on sirge $B'C'$ kahest punktist võrdsetel kaugustel:

$$B'A' = B'A'' \quad \text{ja} \quad C'A' = C'A''.$$

* A'' lugeda „A sekund".

Kuid siis $\triangle A''B'C'$ ja $\triangle A'B'C'$ asetsevad sümmeetriliselt ning seega

$$\triangle A''B'C' \cong \triangle A'B'C',$$

millest järeldub, et ka

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$$

Kolmnurkade kongruentsuse kolmas tunnus (ehk tunnus kkk) näitab, et

kolmnurk on määratud kolme küljega.

Kolmnurga joonestamist kolme külje järgi vaatlesime eespool (§ 30).

On ükskõik, missuguses järjekorras antud külgi kasutame kolmnurga ehitamiseks, sest kolmnurkade kongruentsuse kolmanda tunnuse järgi on kongruentsed kõik kolmnurgad, millede küljed on vastavalt võrdsed.

Ülesanded.

213. Joonestada kolmnurk, millest on antud kaks külge ja ühele neist tõmmatud mediaan.

214. Tõestada, et võrdsete raadiustega ringides võrdsetele kõõludele toetuvad võrdsed kesknurgad.

§ 39. Kolmnurkade kongruentsuse neljas tunnus.

Kaks kolmnurka on kongruentsed, kui ühe kolmnurga kaks külge ja suurema külje vastasnurk on võrdsed teise kolmnurga vastavate elementidega.

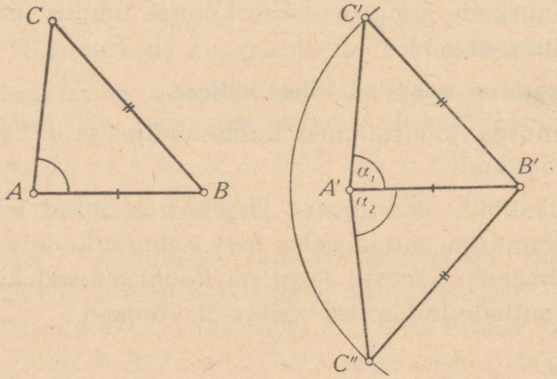
E e l d u s. $AB = A'B'$; $BC = B'C'$;
$BC > AB$; $\angle A = \angle A'$ (joonis 80).

V ä i d e. $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

T õ e s t u s. Paigutame mõttes kolmnurga ABC nii kolmnurga $A'B'C'$ k ü l g e, et võrdsete nurkade tipud A ja A' ühtivad ja külg AB satub küljele $A'B'$. Siis tipp B ühtib

tipuga B', sest eelduse järgi $AB = A'B'$, ja $\triangle ABC$ tuleb asendisse $A'B'C''$ (joonis 80).

Näitame nüüd, et sirge $A'B'$ suhtes $\triangle A'B'C' \div \triangle A'B'C''$. Selleks küsime, kus on punktiga C' sümmeetriline punkt. Punkt C' asetseb nurga α_1 haaral $A'C'$. Selle haaraga on



Joonis 80.

sümmeetriline nurga α_2 haar $A'C''$, sest eelduse kohaselt $\alpha_1 = \alpha_2$. Teiseks, punkt C' asetseb sümmeetriatelje punktist B' kaugusel $B'C'$; punktiga C' sümmeetriline punkt peab olema punktist B' niisama kaugel, seega ringjoonel, mille keskpunktiks on punkt B' ja raadiuseks $B'C'$. Seega punktiga C' sümmeetriline punkt on seal, kus lõikuvad kiir $A'C''$ ja ülalnimetatud ringjoon. Et eelduse järgi $A'B' < B'C'$, siis punkt A' asetseb ringi s e e s, mistõttu kiir $A'C''$ lõikab ringjoont a i n u l t ü h e s punktis, nimelt punktis C''. Järelikult C'' on sümmeetriline punktiga C' sirge $A'B'$ suhtes ja seega

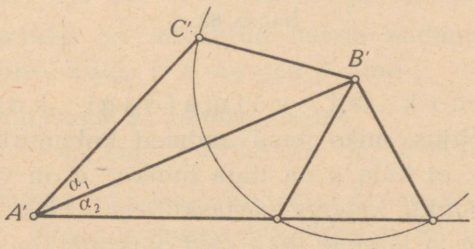
$$\triangle A'B'C'' \cong \triangle A'B'C'.$$

Et aga $A'B'C''$ on lihtsalt kolmnurk ABC, nagu teda mõttes paigutasime, siis järeldub, et

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$$

Seega on tõestatud kolmnurkade kongruentsuse neljas tunnus (ehk tunnus KkN).

M ä r k u s. Kui nurgad A ja A' ei oleks suuremate vaid väiksemate külgede vastasnurgad, s. t. kui $AB > BC$ ja sellega ühenduses $A'B' > B'C'$, siis punkt A' asetseks v ä l j a s p o o l ringi ja haar $A'C''$ lõikaks ringjoont k a h e s punktis (joonis 81). Sel juhul ülalantud tõestus ei kõlba, sest teoreemi eeldusest ei selgu, kumb neist punktidest on C''.



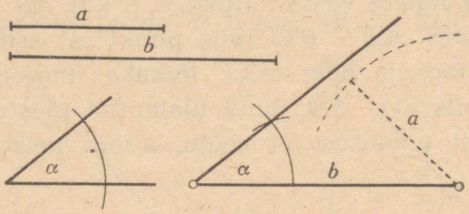
Joonis 81.

See, et kaks külge ja v ä i k s e m a külje vastasnurk ei olegi sobivad elemendid kolmnurga määramiseks, selgub järgneva ülesande lahendamisel.

Ü l e s a n n e. Joonestada kolmnurk, millest on antud kaks külge ja ühe külje vastasnurk.

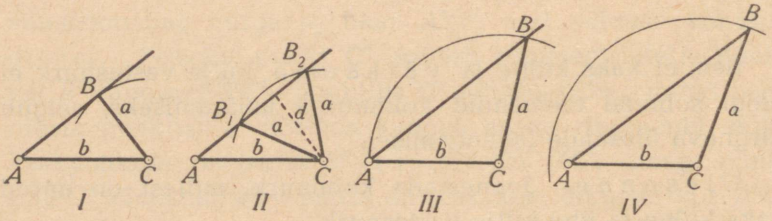
L a h e n d u s. Olgu antud elemendid a, b ja α (joonis 82). Et nurk α on külje b lähisnurk, siis joonestame külje b ja ehitame selle ühe otspunkti juurde nurga α. Edasi joonestame külje b teise otspunkti ümber kaare raadiusega a ja vaatame, kas kaar lõikab ehitatud nurga teist haara. Kui selle lõikepunkti ühendame külje b teise otspunktiga, siis tekib kolmnurk, milles nurga α vastasküljeks on a.

Joonisel 82 antud elementidega ülesannet lahendades selgub, et kaar raadiusega a ei lõikagi nurga teist haara; tähendab, siin antud kaks külge ja ühe külje



Joonis 82.

vastasnurk ei võimaldagi kolmnurka saada. Põhjus, miks need andmed kolmnurka ei anna, peitub selles, et külg a on liiga lühike: a on väiksem kui külje b otspunkti kaugus vastasküljest. Hakkame pikendama külge a ja jälgime tekkivaid olukordi (joonis 83):



Joonis 83.

I juhul $a = d$, kus d on punkti C kaugus nurga α teisest haarast; tekib täisnurkne kolmnurk;

II juhul $a > d$, kuid $a < b$; tekib kaks kolmnurka: $\triangle AB_1C$ ja $\triangle AB_2C$;

III juhul $a = b$; tekib üks võrdhaarne kolmnurk;

IV juhul $a > b$; tekib üks kolmnurk.

Kui jätta kõrvale need juhud, mis annavad erikujulisi kolmnurki (I ja III), siis võib öelda, et ainult neljandal juhul, s. o. kahe külje ja suurema külje vastasnurga järgi saab joonestada ühe kolmnurga. Kahe külje ja väiksema külje vastasnurgaga on määratud kaks ühtimatut kolmnurka või üks täisnurkne kolmnurk või ei saa tullagi kolmnurka.

Ülesanded.

215. Joonestada kolmnurk, milles

$$a = 3{,}5 \text{ cm}, \quad b = 5{,}5 \text{ cm} \quad \text{ja} \quad \alpha = 30°.$$

Mitu kolmnurka on määratud nende andmetega? Mõõta tehtud joonisel külg c ja nurgad β ning γ.

216. Joonestada kolmnurk, milles

$$a = 4{,}2 \text{ cm}, \quad b = 6{,}5 \text{ cm} \quad \text{ja} \quad \beta = 75°.$$

217. Näidata, et kaks täisnurkset kolmnurka on kongruentsed, kui ühe kolmnurga hüpotenuus ja üks kaatet on võrdsed teise kolmnurga vastavate elementidega.

218. Tõestada, et ühes ja samas ringis võrdsed kõõlud on keskpunktist võrdsetel kaugustel.

219. Tõestada, et iga punkt, mis nurga haaradest on võrdsetel kaugustel, asetseb selle nurga poolitajal.

§ 40. Võrdsete küljepaaridega kolmnurgad.

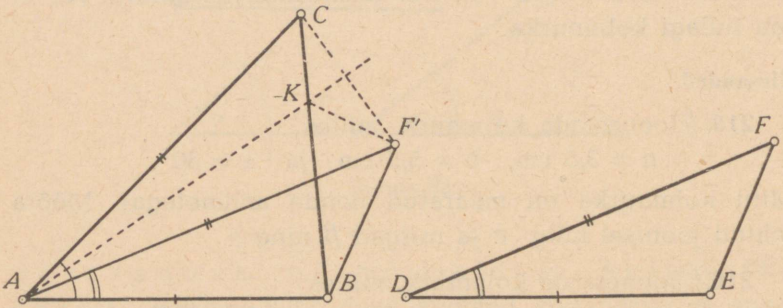
Kui ühe kolmnurga kaks külge on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe küljega, aga nende külgede vahelised nurgad ei ole võrdsed, siis suurema nurga vastas on pikem külg.

Eeldus: $AB = DE$; $AC = DF$; $\angle A > \angle D$ (joonis 84).

Väide: $BC > EF$.

Tõestus. Paigutame mõttes kolmnurga DEF nii kolmnurga ABC peale, et tipp D ühtiks tipuga A ja külg DE

satuks küljele AB. Siis tipp E ühtib tipuga B, sest $AB = DE$, ja külg DF satub nurga A sisse, sest eelduse järgi $\angle A > \angle D$ (joonis 84). Tipp F võib sattuda kas kolmnurga ABC sisse või selle küljele BC või väljapoole kolmnurka ABC. Kui ta satub küljele BC, siis ta jääb punktide



Joonis 84.

B ja C vahele ja seega $BC > EF$. Kui punkt F satub kas kolmnurga ABC sisse või väljapoole seda kolmnurka, ütleme punkti F', siis ühendame selle punktiga C. Nii saame kolmnurga ACF', mis on võrdhaarne, sest eelduse kohaselt $AC = AF'$. Joonestame selle kolmnurga sümmeetriatelje ja tähistame punkti, kus see telg lõikab külge BC, tähega K. Selle punkti K ühendame punktiga F' ja vaatleme kolmnurka BKF'. Selles

$$BK + KF' > BF',$$

sest kolmnurga kahe külje summa on suurem kui kolmas külg. Sümmeetria tõttu

$$KF' = KC.$$

Asendamisel saame, et

$$BK + KC > BF'$$

ehk

$$BC > BF'$$

ja seega ka

$$BC > EF.$$

Vahetades tõestatud teoreemis nurkade A ja D kohta tehtud eelduse väitega saame järgmise teoreemi:

kui ühe kolmnurga kaks külge on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe küljega, aga nende kolmnurkade kolmandad küljed ei ole võrdsed, siis pikema külje vastas on suurem nurk.

Eeldus: $AB = DE$; $AC = DF$; $BC > EF$.

Väide: $\angle A > \angle D$.

Tõestus: Mistahes nurkade A ja D kohta peab õige olema üks järgnevast kolmest väitest: kas

$\angle A = \angle D$ või $\angle A < \angle D$ või $\angle A > \angle D$.

Siinsete nurkade kohta aga esimene väide ei ole õige, sest kolmnurkade kongruentsuse tunnuse knk järgi peaksid siis kolmnurgad ABC ja DEF olema kongruentsed, seega nende küljed BC ja EF peaksid olema võrdsed; kuid seda ei saa olla, sest eelduse järgi $BC > EF$. Ka teine väide ei saa olla õige, sest kui ta seda oleks, siis väiksema nurga A vastas asetsev külg BC peaks olema väiksem kui külg EF, mis on vastuolus eeldusega. Õige on seega viimane väide, nimelt

$$\angle A > \angle D.$$

Ülesanded.

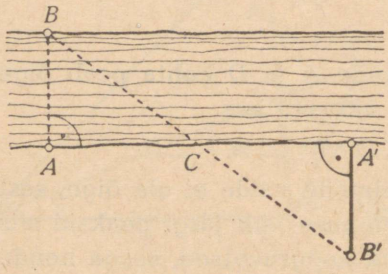
220. Tõestada, et võrdsete raadiustega ringides pikemale kõõlule toetub suurem kesknurk.

221. Tõestada, et võrdsete raadiustega ringides suuremale kesknurgale toetub pikem kõõl.

222. Viimase paragrahvi põhjal näidata, et kui ühe kolmnurga küljed on võrdsed teise kolmnurga vastavate elementidega, siis neis kolmnurkades võrdsete külgede vastas on võrdsed nurgad. Järeldada sellest kolmnurkade kongruentsuse III tunnus.

§ 41. Pikkuse kaudne mõõtmine kongruentsete kolmnurkade abil.

Kui kauguste ja kõrguste mõõtmine otseselt pole vahelolevate takistuste tõttu või mõnel muul põhjusel hästi teostatav, tuleb mõõta kaudselt. Paljudel juhtudel on see kergesti teostatav kongruentsete kolmnurkade abil. Mõnda niisugust võimalust selgitavad järgmised ülesanded.



Joonis 85.

Ülesanne 1. Mõõta kanali laius, kui ainult kanali ühele kaldale on võimalik juurde pääseda.

Lahendus. Tähistame kanali kaldal punkti A, mille vastas risti üle kanali on mingi hästi nähtav punkt B. Edasi tähistame kaldal kaks punkti C ja A' nii, et

$$AC = A'C.$$

Nüüd läheme punktist A' risti kanaliga nii kaugele kaldast, et meie asukoht B' oleks punktidega B ja C ühel sirgel, ja mõõdame punkt B' kauguse kaldast. See kaugus võrdub kanali laiusega (joonis 85).

Põhjendus: Kolmnurkadel ABC ja $A'B'C$ on järgmised elemendid võrdsed:

$$AC = A'C,$$
$$\angle A = \angle A' = 90^0$$

ja

$$\angle ACB = \angle A'CB'.$$

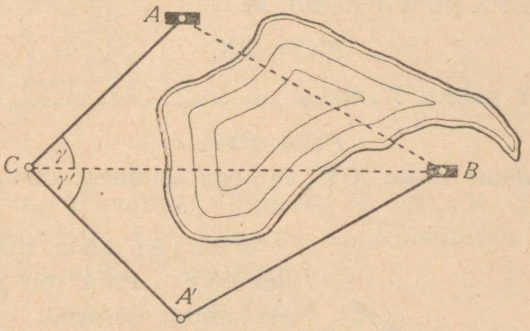
Seega tunnuse nkn järgi

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C.$$

Järelikult on võrdsed nende kolmnurkade vastavad küljed AB ja $A'B'$.

Ülesanne 2. Mõõta järve kaldal asetsevate talude A ja B vaheline kaugus.

Lahendus. Valime oma asukohaks niisuguse punkti C, millest mõlemad talud on nähtavad ja mille kaugust



Joonis 86

vähemalt ühest talust saab mõõta (joonis 86). Ehitame nüüd punkti C juurde nurga γ' nii, et

$$\gamma' = \gamma,$$

ja märgime selle haaral punkti A' nii, et

$$CA' = CA.$$

Otsitava kauguse saame, kui mõõdame punkti A' kauguse talust B.

Põhjendus. Kolmnurkadel ACB ja $A'CB$ on järgmised elemendid võrdsed:

$$AC = A'C$$
$$\gamma = \gamma'$$

ja CB on nende kolmnurkade ühine külg.
Kolmnurkade kongruentsuse tunnuse knk järgi siis

$$\triangle ACB \cong \triangle A'CB,$$

millest järeldub, et

$$AB = A'B.$$

Ülesanne 3. Mõõta kahe punkti X ja Y vaheline kaugus, kui neile punktidele on võimalik juurde pääseda.

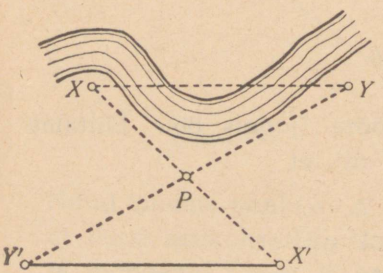
Lahendus. Valime oma asukoha P nii, et saaks mõõta selle kaugust punktidest X ja Y (joonis 87); tähistame sirgel PX punkti X' nii, et

$$PX' = PX,$$

ja sirgel PY punkti Y' nii, et

$$PY' = PY.$$

Nüüd mõõdame lõigu $X'Y'$, millega leiamegi otsitava kauguse.



Joonis 87.

Põhjendus. Kolmnurkadel $PXY = PX'Y'$ on järgmised elemendid võrdsed:

$$PX = PX',$$
$$PY = PY'$$

ja

$$\angle XPY = \angle X'PY'.$$

Kolmnurkade kongruentsuse tunnuse knk järgi siis

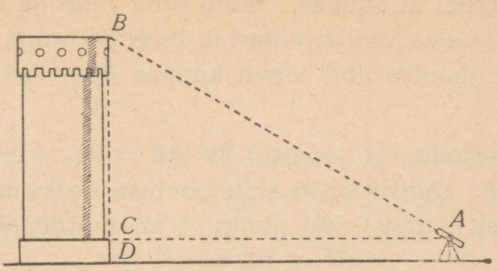
$$\triangle PXY \cong \triangle PX'Y',$$

millest järeldub, et

$$XY = X'Y'.$$

Ülesanne 4. Mõõta torni kõrgus, kui tornile on võimalik juurde pääseda.

Lahendus. Mõõdame mingi nurgamõõtmisriista, näiteks teodoliidi abil nurga A, mis sellest punktist torni tippu suunatud vaatekiir moodustab rõhtsirgega AC (joonis 88). Siis mõõdame punkti A kauguse tornist ja punkti C kauguse maapinnast. Nurk C kolmnurgas ABC on täisnurk.



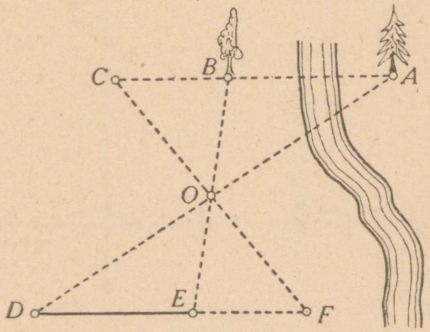
Joonis 88.

Nüüd ehitame maapinnal külje AC ja nurkade A ning C järgi kolmnurgaga ABC kongruentse kolmnurga ja mõõdame selle külje BC. Torni kõrgus on

$$BC + CD.$$

Ülesanded.

223. Torni kõrgus paistab 50 m kauguselt nurgas 62°. Leida vähendatud joonise abil torni kõrgus.



Joonis 89.

224. Mererannal asetsevate vaatluspunktide A ja B vaheline kaugus ehk baas * on 7,5 km. Merel olev laev

* *basis* (lad.) — alus.

paistab punktist A suunas, mille nurk baasiga on 34°, ja punktist B suunas, mis moodustab baasiga nurga 71°. Leida vähendatud joonise abil laeva kaugus kummastki vaatluspunktist.

225. Tõestada, et joonisel 89 $AB = DE$, kui $OB = OE$ ja $OC = OF$. Kuidas saab selle joonise eeskujul mõõta A ja B vahelist kaugust, kui punkt A on juurdepääsematu?

Peatükk VI.

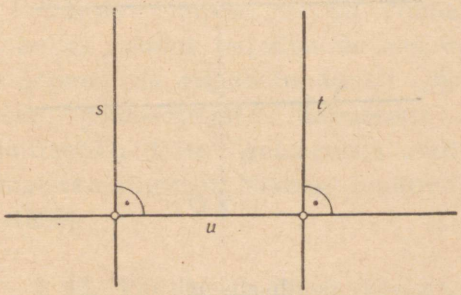
Paralleelsed sirged.

§ 42. Paralleelide aksioom.

Kaks sirget võivad olla tasapinnal nii, et nad lõikuvad. Näitame, et kaks sirget võivad ka mitte lõikuda, kuigi nad on ühel ja samal tasapinnal. Selleks tõestame, et

ühe ja sama sirge ristsirged ei lõiku.

Eeldus: $s \perp u$; $t \perp u$ (joonis 90).



Joonis 90.

Väide: s ja t ei lõiku.

Tõestus. Sirged s ja t kas lõikuvad või ei lõiku. Kui s ja t lõikuksid ütleme punktis P, siis sellest punktist oleks sirgele u joonestatud kaks ristsirget, mis on aga võimatu. Seega s ja t ei lõiku.

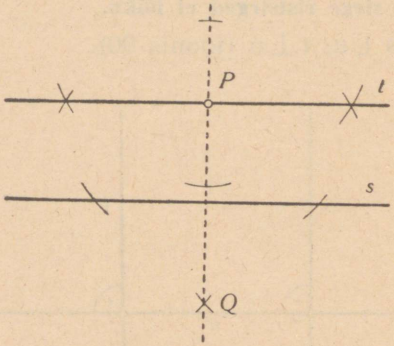
Tasapinna sirgeid, nagu s ja t, nimetatakse paralleelseteks* sirgeteks, lühemalt paralleelideks ehk rööbikuteks. Niisiis

paralleelsed sirged on ühel ja samal tasapinnal asetsevad sirged, mis ei lõiku.

Sirgete paralleelsust märgitakse sümboliga $\parallel$. Paralleelsete sirgjoonte lõike nimetatakse paralleelseteks lõikudeks.

Põhikonstruktsioon 6. Läbi antud punkti väljaspool antud sirget joonestada antud sirgega paralleelne sirge.

Lahendus. Olgu antud sirge s ja väljaspool seda punkt P (joonis 91). Joonestame läbi punkti P sirge $PQ \perp s$



Joonis 91.

ja samal tasapinnal läbi punkti P sirge $t \perp PQ$. Siis $t \parallel s$, sest nad asetsevad ühisel tasapinnal ja on ühe ja sama sirge PQ ristsirged. Et sirge t läbib punkti P ja on paralleelne sirgega s, siis ta ongi nõutud sirge.

---

* *parallelos* (kr.) — teineteise kõrval, kõrvuti.

Küsime nüüd, kas läbi punkti P võiks minna peale sirge t veel mõni teine sirge, mis oleks paralleelne sirgega s. Meie kujutluse järgi teist niisugust sirget ei saa olla, see tähendab,

läbi punkti väljaspool sirget läheb ainult üks sirge, mis on paralleelne antud sirgega.

Seda väidet püüti tõestada umbes 2000 aasta vältel, kuid need tõestamiskatsed ei õnnestunud. Veel enam: selle väite tõestamisvõimaluste uurimisel selgus, et seda väidet ei saagi tõestada ilma mõne uue selle väitega samaväärse aksioomi tarvitamiseta. Seetõttu kasutame seda aksioomina ja nimetame paralleelide aksioomiks.

Sellest aksioomist järeldub, et peale ühe kõik sirged, mis läbivad punkti P, lõikuvad sirgega s (joonis 91).

Paralleelide aksioomi tõestamiskatsete nurjumine viis XIX sajandi esimesel poolel vene matemaatiku Nikolai Lobatševski, ungari matemaatiku J. Bolyai ja saksa matemaatiku K. F. Gauss'i mõttele, et on võimalik niisugune geomeetria, milles puudub paralleelide aksioom ülaltoodud mõttes. See geomeetria erineb tunduvalt „harilikust" ehk „eukleidilisest" geomeetriast *. Esimesena avaldas oma uurimusi „mitteeukleidilise" geomeetria alalt Kaasani ülikooli matemaatikaprofessor Nikolai Ivanovitš Lobatševski (elas 1793—1856).

§ 43. Paralleelide ühine ristsirge.

Paralleelide aksioom võimaldab tõestada järgmist teoreemi:

kui sirge on risti ühega kahest paralleelsest sirgest, siis on ta risti ka teisega.

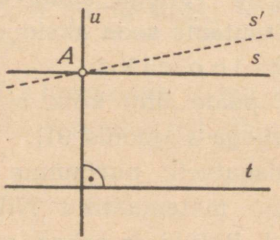
---

* Eukleides, kreeka matemaatik, elas u. 315—255 e. m. a., andis esimesena geomeetria süstemaatilise ülesehituse.

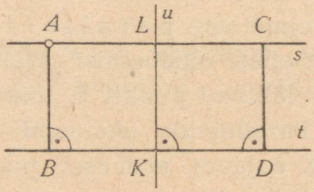
Eeldus: $s \parallel t$; $u \perp t$ (joonis 92).

Väide: $u \perp s$.

Tõestus. Kui sirged u ja s ei ristuks punktis A, siis saaksime läbi punkti A ehitada sirge s', mis oleks risti sirgega u; see uus sirge s' peaks olema paralleelne sirgega t, sest nad mõlemad ristuvad sirgega u. Kuid siis läbiksid punkti A kaks sirget, mis on paralleelsed sirgega t; et see paralleelide aksioomi järgi ei saa nii olla, siis peavad sirged u ja s ristuma.



Joonis 92.



Joonis 93.

Seega paralleelidel on ristsirge ühine. Selle ühise ristsirge lõiku paralleelide vahel nimetatakse paralleelide vaheliseks ristlõiguks. Tõestame, et

kahe paralleeli vahelised ristlõigud on võrdsed.

Eeldus: $s \parallel t$, $AB \perp t$, $CD \perp t$ (joonis 93)

Väide: $AB = CD$.

Tõestus. Joonestame lõigu BD keskristsirge u. Et paralleelidel ristsirged on ühised, siis sirge u on risti ka sirgega s, millest järeldub, et kogu joonis on sümmeetriline sirge u suhtes. Tõepoolest, kiired LA ja KB on sümmeetrilised vastavalt kiirtega LC ja KD, sest sirge u on risti nii sirgega s kui ka sirgega t; punkt B on sümmeetriline punktiga D, sest sirge u on lõigu BD keskristsirge; sirge BA on

sümmeetriline sirgega DC, sest nurgad B ja D on võrdsed; ja lõpuks punkt A on sümmeetriline punktiga C, sest sirgete BA ja LA lõikepunktiga A sümmeetriline punkt peab olema nende sirgetega sümmeetriliselt asetsevate sirgete DC ja LC ühine punkt, s. o. punkt C. Kuid siis

$$AB = CD$$

kui teineteisega sümmeetrilised lõigud.

Kahe paralleeli vahelise ristlõigu pikkust nimetatakse paralleelide vaheliseks kauguseks. Viimati tõestatud teoreemi järgi on kõik kahe antud paralleeli vahelised kaugused võrdsed.

Ülesanded.

226. Sirkli ja joonlaua abil joonestada antud sirgele rööpsirge läbi antud punkti.

227. Mõõta kahe paralleelse sirge vaheline kaugus.

228. Joonestada ringis kaks paralleelset kõõlu ja tõestada, et nende vahelised kaared on võrdsed. Näpunäide: leida kujundi sümmeetriatelg.

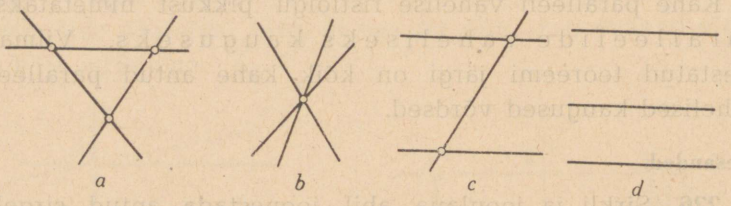
§ 44. Tasapinna kolm sirgjoont.

Kaks sirget tasapinnal kas lõikuvad või on paralleelsed. Paralleelsus on aga hoopis haruldasem kui lõikumine: läbi punkti väljaspool sirget läheb ainult üks selle sirge paralleel, kuid lõikavaid sirgeid väga palju.

Olgu antud kaks lõikuvat sirget. Kui joonestame lisaks neile veel kolmanda sirge, siis esineb üks järgnevast kolmest asendi-võimalusest: kas kolmas sirge lõikab antud sirgeid kahes eri punktis, nii et tekib kolmnurk (joonis 94 a), või kolmas sirge läbib antud sirgete lõikepunkti (joonis 94 b) või kolmas sirge on paralleelne ühega antud sirgetest (joonis 94 c). Esimesel juhul sirgetel on kolm

lõikepunkti, teisel — üks lõikepunkt ja kolmandal — kaks lõikepunkti.

Kui on antud kaks paralleelset sirget, siis mingi kolmas sirge kas lõikab mõlemat antud sirget (joonis 94 c) või ei lõika kumbagi neist (joonis 94 d). Kolmandat võimalust — kus kolmas sirge lõikuks ühega kahest paralleelist, teisega



Joonis 94.

aga mitte — ei saa olla, sest seda lõikepunkti läbiks siis kaks sirget, mis mõlemad peaksid olema paralleelsed ühe ja sama sirgega. Viimasel juhul, kui sirge ei lõika antud kaht paralleeli, on meil kolm paralleelset sirget. Viimase juhu tekkimise võimalust näitab järgmine teoreem:

kui kahest sirgest kumbki on paralleelne mingi kolmanda sirgega, siis on need kaks sirget paralleelsed.

Eeldus: $x \parallel z$; $y \parallel z$ (joonis 95).

Väide: $x \parallel y$.

Tõestus. Joonestame sirge s risti sirgega z. Et sirge, mis on risti ühega kahest paralleelist, on risti ka teisega, siis

$$s \perp x;$$

samal põhjusel ka

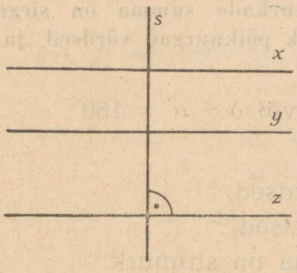
$$s \perp y.$$

Seega on sirged x ja y ühe ja sama sirge s ristsirged ja järelikult

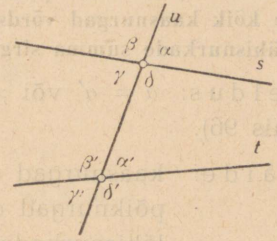
$$x \parallel y.$$

Kolme sirge x, y ja z paralleelsust märgime kujul

$$x \parallel y \parallel z$$



Joonis 95.



Joonis 96.

§ 45. Kahe sirge lõikumine kolmanda sirgega.

Kui kaht juhuslikku sirget s ja t, millede lõikepunktist me midagi ei tea, lõikame mingi kolmanda sirgega u, siis esineb meil kaks võimalust (vastavalt joonistele 94 a ja 94 c): kas sirged s ja t lõikuvad või on paralleelsed. Kumma juhuga on tegemist, seda saab otsustada nurkade abil, mis tekivad sirgete s ja u lõikumisel ning sirgete t ja u lõikumisel (joonis 96).

Et võrrelda nurki ühe lõikepunkti juurest nurkadega teise lõikepunkti juurest, selleks anname järgmistele nurgapaaridele nimetused:

1. nimetame k a a s n u r k a d e k s kaht nurka ühel pool sirget u, millede haarad sirgel u suunduvad ühtepidi, nagu nurgad α ja α' või γ ja γ';

2. nimetame p õ i k n u r k a d e k s kaht nurka, mis asetsevad üks ühel ja teine teisel pool sirget u ja millede haarad sirgel u suunduvad vastamisi, nagu nurgad δ ja β';

3. nimetame lähisnurkadeks kaht nurka ühel pool sirget u, millede haarad sirgel u suunduvad vastamisi, nagu nurgad δ ja α'.

Tõestame nende nurkade kohta järgmise teoreemi:

kui üks paar kaasnurki on võrdsed või kui üks paar põiknurki on võrdsed või kui ühe paari lähisnurkade summa on sirgnurk, siis on kõik kaasnurgad võrdsed, kõik põiknurgad võrdsed ja kõikide lähisnurkade summa sirgnurk.

Eeldus: $\alpha = \alpha'$ või $\gamma = \alpha'$ või $\delta + \alpha' = 180°$ (joonis 96).

Väide: kaasnurgad on võrdsed;
põiknurgad on võrdsed;
lähisnurkade summa on sirgnurk.

Tõestus. Eeldame, et üks paar kaasnurki on võrdsed näiteks $\alpha = \alpha'$; siis

$$\beta = \beta' \text{ ja } \delta = \delta'$$

kui võrdsete nurkade α ja α' kõrvunurgad ja

$$\gamma = \gamma'$$

kui võrdsete nurkade α ja α' tippnurgad; seega kõik kaasnurgad on võrdsed. Asendades võrdustes

$$\alpha = \alpha' \text{ ja } \beta = \beta'$$

nurgad α ja β nendega võrdsete nurkadega γ ja δ saame, et

$$\gamma = \alpha' \text{ ja } \delta = \beta';$$

seega põiknurgad on võrdsed. Et α ja δ, samuti ka β ja γ moodustavad kõrvunurkade paari, siis

$$\alpha + \delta = 180° \text{ ja } \beta + \gamma = 180°.$$

Asendades α ja β nendega võrdsete nurkadega α' ja β' saame, et

$$\alpha' + \delta = 180° \text{ ja } \beta' + \gamma = 180°.$$

Seega lähisnurkade summa on sirgnurk.

Eeldame nüüd, et üks paar põiknurki on võrdsed, näiteks $\gamma = \alpha'$. Et α ja γ on tippnurgad, seega võrdsed,

siis ka $\alpha = \alpha'$. Kuid sel juhul, nagu eespool tõestasime, on kõik kaasnurgad võrdsed, põiknurgad võrdsed ja lähisnurkade summa sirgnurk.

Eeldame lõpuks, et ühe paari lähisnurkade summa on sirgnurk, näiteks

$$\delta + \alpha' = 180°.$$

Et δ ja α on kõrvunurgad, siis

$$\delta + \alpha = 180°.$$

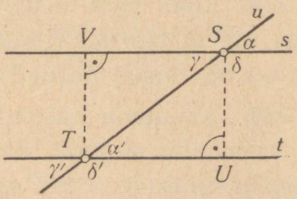
Neist võrdustest saame, et

$$\delta + \alpha = \delta + \alpha'$$

ehk lahutades võrduse mõlemast poolest δ

$$\alpha = \alpha'.$$

Kuid sellest järeldub endisel viisil, et kõik kaasnurgad on võrdsed, põiknurgad on võrdsed ja lähisnurkade summa on sirgnurk, mida oligi vaja tõestada.



Joonis 97.

Juhul, kui lõigatavad sirged s ja t on paralleelsed, on ülalmainitud nurkade kohta kehtiv järgmine teoreem:

kahe paralleelse sirge lõikamisel kolmanda sirgega tekivad võrdsed kaasnurgad, võrdsed põiknurgad ja niisugused lähisnurgad, millede summa on sirgnurk.

Eeldus: $s \parallel t$ (joonis 97).

Väide: $\alpha = \alpha'$; $\gamma = \alpha'$; $\delta + \alpha' = 180°$.

Tõestus. Kui sirge u ei ristu sirgega t, siis joonestame paralleelide s ja t vahelised ristlõigud SU ja TV. Nii saadud täisnurksetes kolmnurkades SUT ja TVS on peale ühise külje ST veel järgmised elemendid võrdsed:

$$SU = TV \text{ ja } \angle U = \angle V.$$

Kolmnurkade kongruentsuse tunnuse KkN järgi

$$\triangle SUT \cong \triangle TVS.$$

Et kongruentsete kolmnurkade vastavad elemendid on võrdsed, siis

$$\alpha' = \gamma,$$

millega on tõestatud, et punktide S ja T juures on üks paar võrdseid põiknurki. Sellest järeldub eespool tõestatud teoreemi alusel, et kaasnurgad on võrdsed, põiknurgad on võrdsed ja lähisnurkade summa on sirgnurk.

Kui $u \perp t$, siis ka $u \perp s$, mistõttu kõik nende sirgete lõikumisel tekkivad nurgad on täisnurgad ja teoreemi kehtivus on ilmne.

Ülesanded.

229. Kaks paralleelset sirget on lõigatud kolmanda sirgega nii, et üks tekkinud kaheksast nurgast on 63°. Kui suured on teised nurgad?

230. Arvutada nurgad, mis tekivad kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega, kui, kasutades joonisel 96 leiduvaid tähiseid, nurk $\delta' = 127°$ ja $\beta' + \gamma = 234°$.

231. Kõrvunurkade ja tippnurkade omadusi rakendades tõestada, et joonisel 96 kasutatud tähistuses $\alpha = \gamma'$, kui $\beta = \beta'$.

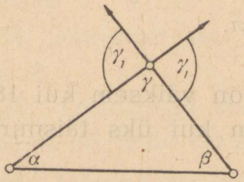
232. Tõestada samal viisil kui eelmises ülesandes, et $\delta + \alpha' = 180°$, kui $\beta = \beta'$.

233. Tõestada, et alusega paralleelne sirge, mis lõikab võrdhaarset kolmnurka, eraldab sellest kolmnurga, mis on võrdhaarne.

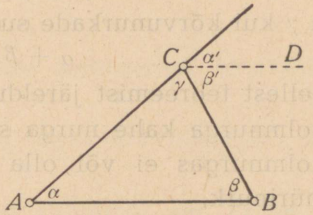
§ 46. Kolmnurga nurkade omadused.

Pikendame kolmnurga mingit külge üle ühe tipu. Nurka selle pikenduse ja kolmnurga teise külje vahel nimetatakse kolmnurga v ä l i s n u r g a k s. See nurk on kolmnurga

nurga (ehk s i s e n u r g a) kõrvunurk. Mõlema külje pikendamisel üle ühe ja sama tipu saaksime tippnurkade paarina kaks v õ r d s e t välisnurka (joonis 98). Seepärast edaspidi kõneldes kolmnurga välisnurkadest, arvestame iga tipu juures leiduvast välisnurkade paarist ainult ü h t neist kahest, ükskõik kumba. Selle kokkuleppe järgi on kolmnurgal k o l m välisnurka, iga tipu juures üks. Kolmnurga välisnurka tähistame sümboliga α_1 või β_1 või γ_1, vastavalt sellele, missuguse sisenurga kõrvunurk ta on.



Joonis 98.



Joonis 99.

Tõestame et,

kolmnurga välisnurk võrdub temaga mitte kõrvuti asetsevate sisenurkade summaga.

Tõestuseks joonestame läbi ühe tipu, näiteks läbi C, paralleeli CD vastasküljele AB. See sirge jaotab välisnurga γ_1 kaheks nurgaks α' ja β' (joonis 99). Et kahe paralleelse sirge lõikamisel kolmanda sirgega tekivad võrdsed kaasnurgad ja võrdsed põiknurgad, siis

$$\alpha = \alpha'$$

ja

$$\beta = \beta'.$$

Nende võrduste vastavate poolte liitmisel saame, et

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$$

ehk

$$\alpha + \beta = \gamma_1.$$

Samal viisil tõestub see teoreem ülejäänud kahe välisnurga kohta.

Sellest kolmnurga välisnurga omadusest järeldub kergesti, et

kolmnurga sisenurkade summa võrdub sirgnurgaga.

Tõestuseks liidame võrduse

$$\alpha + \beta = \gamma_1$$

mõlema poolega nurga γ. Siis saame, et

$$\alpha + \beta + \gamma = \gamma_1 + \gamma;$$

γ_1 ja γ kui kõrvunurkade summa on π; seega

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Sellest teoreemist järeldub, et

1. kolmnurga kahe nurga summa on väiksem kui 180° ja
2. kolmnurgas ei või olla rohkem kui üks täisnurk või nürinurk,

sest vastasel juhul sisenurkade summa peaks olema suurem kui 180°.

Edasi järeldub sellest teoreemist, et kui ühe kolmnurga kaks nurka on võrdsed teise kolmnurga vastavate nurkadega, siis ka nende kolmandad nurgad on võrdsed. Seetõttu võime kolmnurkade kongruentsuse I tunnuse nüüd järgmiselt üldistada:

kaks kolmnurka on kongruentsed, kui ühe kolmnurga üks külg ja kaks nurka on võrdsed teise kolmnurga vastavate elementidega.

Viimase teoreemina kolmnurga nurkade kohta tõestame, et

kolmnurga välisnurkade summa on täispööre.

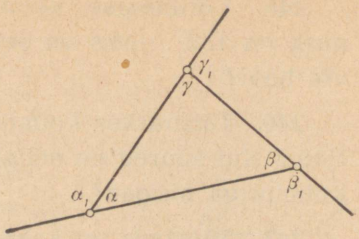
T õ e s t u s. Kolmnurga iga tipu juures oleva sisenurga ja välisnurga summa on π (joonis 100). Seega

$$\alpha + \alpha_1 = \pi,$$
$$\beta + \beta_1 = \pi$$

ja

$$\gamma + \gamma_1 = \pi.$$

Nende võrduste vastavate poolte liitmisel leiame, et
$\alpha + \beta + \gamma + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 3\pi$.
Et esimese kolme liidetava summa on π, siis
$\pi + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 3\pi$.
Lahutades selle võrduse mõlemast poolest π, jääb
$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 2\pi$.



Joonis 100.

Ülesanded.

234. Kui suur on täisnurkse kolmnurga teravnurkade summa?

235. Täisnurkse kolmnurga üks teravnurk on 37°48′. Kui suur on teine teravnurk?

236. Võrdhaarse kolmnurga tipunurk on 72°54′. Kui suured on alusnurgad?

237. Võrdhaarse kolmnurga alusnurk on tipunurgast 14° suurem. Arvutada nurkade suurused.

238. Võrdhaarse kolmnurga alusnurk on 52°10′. Kui suured on selle kolmnurga välisnurgad?

239. Kui suur on võrdkülgse kolmnurga nurk?

240. Võrdhaarse kolmnurga tipunurga kõrvunurk on 148°. Kui suur on alusnurk?

241. Kui suured on kolmnurga nurgad, kui nad suhtuvad nagu 1 : 2 : 3?

242. Kolmnurga välisnurk $\alpha_1 = 81°$ ja $\gamma_1 = 117°40'$. Kui suured on selle kolmnurga sisenurgad?

243. Mis liiki on kolmnurk, mille üks nurk on 34°15′ ja teine nurk on 55°45′?

244. Kolmnurga nurkadest $\alpha = 66°40'$ ja $\beta = 48°30'$. Järjestada selle kolmnurga küljed nende pikkuse järgi.

245. Võrdhaarse kolmnurga aluse juures olev välisnurk on 132°. Mis on sellel kolmnurgal pikem, kas alus või haar?

246. Täisnurkse kolmnurga teravnurk $\alpha = 38°$ on poolitatud. Kui suured on sellel poolitamisel tekkiva nürinurkse kolmnurga nurgad?

247. Tõestada, et kaks täisnurkset kolmnurka on kongruentsed, kui ühe kolmnurga hüpotenuus ja üks teravnurk on võrdsed teise kolmnurga vastavate elementidega.

248. Tõestada, et kaks täisnurkset kolmnurka on kongruentsed, kui ühe kolmnurga üks külg ja üks teravnurk on võrdsed teise kolmnurga vastavate elementidega.

249. Tõestada, et võrdhaarse kolmnurga haaradele tõmmatud kõrgused on võrdsed.

250. Tõestada, et täisnurkses kolmnurgas 30°-se teravnurga vastaskaatet on pool hüpotenuusi.

251. Jaotada sirkli ja joonlaua abil täisnurk kolmeks võrdseks nurgaks.

§ 47. Sirgete paralleelsuse tunnused.

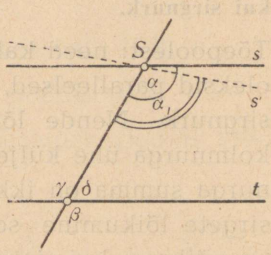
Kui kahest sirgest kumbki on risti mingi kolmanda sirgega või kumbki on rööbiti mingi kolmanda sirgega, siis need kaks sirget on paralleelsed (§ 42 ja § 44). Näitame nüüd, et kahe sirge paralleelsust saab kindlaks teha kolmanda sirge abil ka sel juhul, kui kolmas sirge ei ole risti ega ka rööbiti antud sirgega. Selleks tõestame järgmise teoreemi:

kaks sirget on paralleelsed, kui nende lõikamisel kolmanda sirgega tekivad võrdsed kaasnurgad või võrdsed põiknurgad või niisugused lähisnurgad, millede summa on sirgnurk.

Eeldus: $\alpha = \beta$ või
$\alpha = \gamma$ või
$\alpha + \delta = \pi$ (joonis 101).

Väide: $s \parallel t$.

Tõestus. Läbi sirge s ja lõikaja ühise punkti S läheb paralleelide aksioomi järgi kindlasti üks sirge, mis on paralleelne sirgega t. Et me esialgu ei tea, kas sirge s on see paralleel või mitte, siis tähistame selle paralleeli tähega s' ja näitame, et s' ja s on üks ja sama sirge. Sirgete s' ja t paralleelsuse tõttu (joonis 101):



Joonis 101.

$$\alpha_1 = \beta,\ \alpha_1 = \gamma \text{ ja } \alpha_1 + \delta = \pi.$$

Kuid eelduse järgi

$$\alpha = \beta \text{ või } \alpha = \gamma \text{ või } \alpha + \delta = \pi.$$

Kõigil kolmel juhul järeldub neist võrdusepaaridest, et $\alpha_1 = \alpha$. Kuna neil nurkadel üks haar on ühine, siis peab ka teine haar olema ühine, seega sirge s' ühtib sirgega s, ja $s \parallel t$.

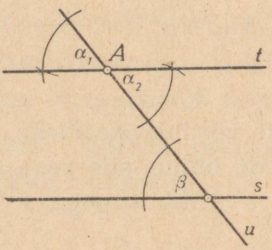
Viimane teoreem annab uusi võimalusi sirgele rööpsirge ehitamiseks läbi antud punkti.

Kui joonestada läbi punkti A (joonis 102) mingi antud sirget s lõikav sirge u ja ehitada selle juurde kas nurgaga β võrdne kaasnurk α_1 või nurgaga β võrdne põiknurk α_2, siis ehitatava nurga teine haar t on paralleelne antud sirgega s. Esimest võtet rakendatakse väga sagedasti rööpsirgete joonestamisel joonlaua ja joonestamiskolmnurga abil: kolmnurga nihutamisel piki paigalolevat joonlauda jääb kolmnurga külg ikka paralleelseks oma endise asendiga. Niisugust nihutamist nimetatakse r ö ö p l ü k k e k s (joonis 103).

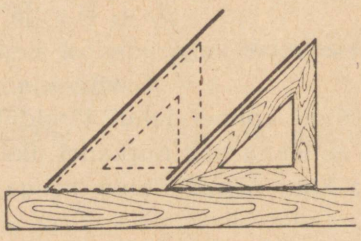
Eelnenud teoreemidest järeldub järgmine kahe sirge lõikumise tunnus:

kui kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega tekivad lähisnurgad, millede summa ei ole sirgnurk, siis need kaks sirget lõikuvad seal pool lõikajat, kus pool lähisnurkade summa on väiksem kui sirgnurk.

Tõepoolest: need kaks sirget peavad lõikuma, sest kui nad oleksid paralleelsed, siis lähisnurkade summa peaks olema sirgnurk. Nende lõikumise puhul üks paar lähisnurki on kolmnurga ühe külje lähisnurkadeks. Et kolmnurga kahe nurga summa on ikka väiksem kui sirgnurk, siis toimub sirgete lõikumine sealpool, kuspool lähisnurkade summa on väiksem kui sirgnurk.



Joonis 102.



Joonis 103.

Ülesanded.

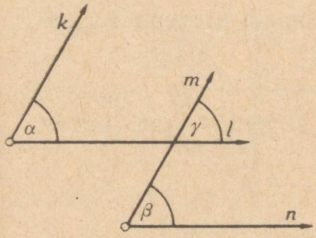
252. Joonestada võrdhaarse kolmnurga tipu juures oleva välisnurga poolitaja ja tõestada, et see on alusega paralleelne.

253. Punktis O lõikuvad kaks sirget. Ühel sirgel on võetud punktid A ja C nii, et $AO = CO$, ja teisel sirgel punktid B ja D nii, et $BO = DO$. Teha joonis ja tõestada, et $AB \parallel DC$.

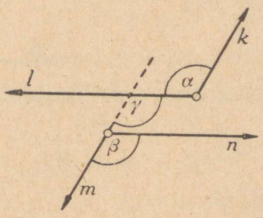
§ 48. Vastavalt paralleelsete haaradega nurgad.

Joonestame kaks nurka nii, et ühe haarad on vastavalt paralleelsed teise haaradega. Kui vaadelda ainult teravnurki ja nürinurki, siis saavad esineda järgnevad võimalused:

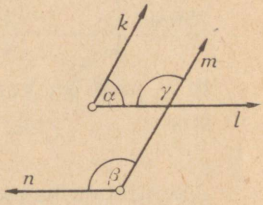
1. mõlemad nurgad on teravnurgad (joonis 104).
2. mõlemad nurgad on nürinurgad (joonis 105).
3. üks nurk on terav- ja teine on nürinurk (joonis 106).



Joonis 104.



Joonis 105.



Joonis 106.

Tõestame, et

vastavalt paralleelsete haaradega nurgad on võrdsed, kui mõlemad on teravnurgad või mõlemad nürinurgad.

E e l d u s: $k \parallel m$, $l \parallel n$; $\angle\, kl$ ja $\angle\, mn$ on mõlemad kas teravnurgad või nürinurgad (joonis 104 ja 105).

V ä i d e: $\angle\, kl = \angle\, mn$.

T õ e s t u s. Olgu $\angle\, kl = \alpha$ ja $\angle\, km = \beta$. Kui ühe nurga kumbki haar ei lõika teise nurga üht haara, siis pikendame neid nii, et see lõikumine tekiks. Siis β ja γ on kaasnurgad paralleelsete sirgete n ja l juures (joonised 104 ja 105) ja seega

$$\beta = \gamma.$$

Et nurgal α ja γ on kaasnurgad (joonis 104) või põiknurgad (joonis 105) paralleelsete sirgete k ja m juures, siis

$$\alpha = \gamma.$$

Neist võrdusist järeldub, et

$$\alpha = \beta,$$

mida oligi vaja tõestada.

Samal viisil tõestame, et

kahe vastavalt paralleelsete haaradega nurga summa on sirgnurk, kui üks nurk on teravnurk ja teine nürinurk.

Sel juhul (joonis 106) α ja γ on lähisnurgad, mis tekivad paralleelsete sirgete k ja m lõikumisel sirgega l; seetõttu

$$\alpha + \gamma = \pi.$$

Et γ ja β on kaasnurgad paralleelsete sirgete l ja n juures, siis

$$\gamma = \beta.$$

Asendades saame, et

$$\alpha + \beta = \pi,$$

mida oligi vaja tõestada.

Joonise abil saab veenduda, et kahe teravnurga ja kahe nürinurga puhul nurkade haarad on samasuunalised või vastassuunalised. Kui aga üks nurk on teravnurk ja teine nürinurk, siis nurkade ühed haarad on samasuunalised, teised vastassuunalised.

Ülesanded.

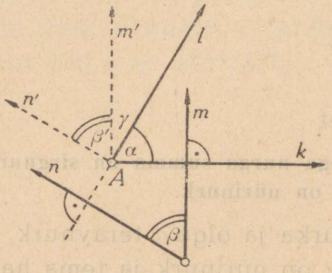
254. Kahest vastavalt paralleelsete haaradega nurgast üks on $\frac{4}{11}$ teisest. Kui suur on kumbki nurk?

255. Kahest vastavalt paralleelsete haaradega nurgast üks on teisest 76^0 võrra suurem. Kui suur on kumbki nurk?

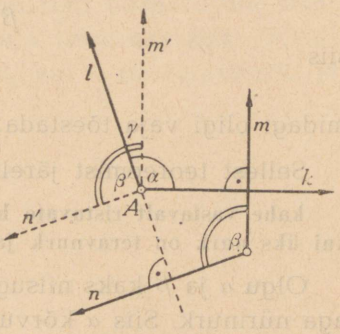
256. Joonestada kaks vastavalt paralleelsete ja vastassuunaliste haaradega nurka nii, et nende nurgapoolitajad on ühel ja samal sirgel. Uurida selle kujundi sümmeetriat.

§ 49. Vastavalt ristuvate haaradega nurgad.

Joonestame kaks nurka nii, et ühe nurga haarad on vastavalt risti teise nurga haaradega. Vaatleme juhtu, kus mõlemad nurgad on teravnurgad (joonis 107), ja juhtu, kus mõlemad nurgad on nürinurgad (joonis 108), ning tõestame järgmise teoreemi:



Joonis 107.



Joonis 108.

vastavalt ristiseisvate haaradega nurgad on võrdsed, kui mõlemad on teravnurgad või kui mõlemad on nürinurgad.

E e l d u s: $m \perp k$, $n \perp l$; α ja β on mõlemad teravnurgad või mõlemad nürinurgad (joonised 107 ja 108).

V ä i d e: $\alpha = \beta$.

T õ e s t u s. Joonestame läbi punkti A kiired

$$m' \parallel m \text{ ja } n' \parallel n$$

nii, et nende kiirte vaheline nurk

$$\beta' = \beta.$$

Et eelduse järgi $m \perp k$ ja $n \perp l$, siis ka $m' \perp k$ ja $n' \perp l$. Seetõttu

joonisel 107 $\alpha + \gamma = 90^0$ ja $\beta' + \gamma = 90^0$

joonisel 108 $\alpha - \gamma = 90^0$ ja $\beta' - \gamma = 90^0$.

Järelikult

$$\alpha + \gamma = \beta' + \gamma \qquad \alpha - \gamma = \beta' - \gamma.$$

Lahutades vasakul käsiteldud juhul võrduse mõlemast poolest γ ja liites paremal käsiteldud juhul γ võrduse mõlema poolega, saame nii ühel kui ka teisel juhul, et

$$\alpha = \beta'.$$

Et tõestuse järgi

$$\beta = \beta',$$

siis

$$\alpha = \beta,$$

midagi oligi vaja tõestada.

Sellest teoreemist järeldub, et

kahe vastavalt ristuvate haaradega nurga summa on sirgnurk, kui üks nurk on teravnurk ja teine on nürinurk.

Olgu α ja β kaks niisugust nurka ja olgu α teravnurk, β aga nürinurk. Siis α kõrvunurk γ on nürinurk ja tema haarad, samuti kui nurga α haarad on vastavalt risti nurga β haaradega. Vast-tõestatud teoreemi järgi

$$\gamma = \beta.$$

Et α ja γ on kõrvunurgad, siis

$$\alpha + \gamma = \pi.$$

Asendades γ temaga võrdse nurgaga β saame

$$\alpha + \beta = \pi.$$

Ülesanded.

257. Joonestada võrdhaarse kolmnurga aluse ühest otspunktist ristsirge vastasolevale haarale. Tõestada, et nurk selle ristsirge ja aluse vahel on pool tipunurgast.

258. Kahe vastavalt ristuvate haaradega nurga vahe on 34°. Kui suur on kumbki nurk?

259. Nürinurga tipust on joonestatud selle nurga haaradega ristuvad sirged. Nende sirgete vaheline nurk on 42°. Kui suur on nürinurk?

260. Kahest vastavalt ristuvate haaradega nurgast üks on teisest kolm korda suurem. Kui suur on kumbki nurk?

261. Nurga α haarad k ja l lõikuvad nurga β haaradega m ja n nii, et $k \perp m$, $l \perp n$ ja nurk haarade k ja n vahel on 35^0. Kui suured nurgad on haarade l ja m lõikepunkti juures?

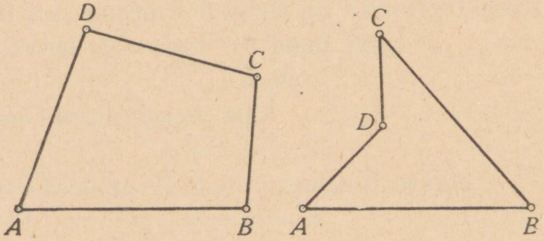
262. Teravnurga β üks haar on risti nurga α ühe haaraga ja teine on paralleelne nurga α teise haaraga. Avaldada nurk β nurga α kaudu juhul, kui α on teravnurk, ja juhul, kui α on nürinurk.

Peatükk VII.

Nelinurk.

§ 50. Hulknurkade liigitelu.

Kui tasapinna neli punkti A, B, C ja D, millede hulgas ei leidu kolme ühel sirgel asetsevat punkti, järjestikku ühendada sirglõikudega, siis tekib kujund, mida nimetatakse nelinurgaks (joonis 109). Samal viisil tekib viie

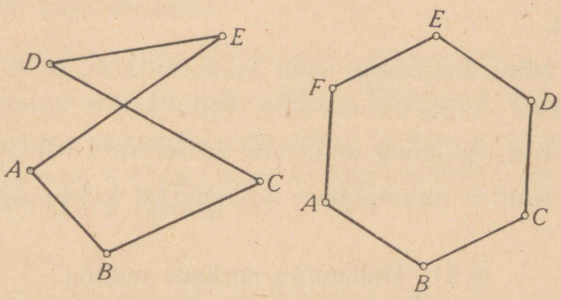


Joonis 109.

punkti ühendamisel viisnurk, kuue punkti ühendamisel kuusnurk jne. (joonis 110). Kolmnurki, nelinurki, viisnurki jne. nimetatakse üldiselt hulknurkadeks. Hulknurk on kinnine murdjoon.

Antud punkte A, B, C, ... nimetatakse hulknurga tippudeks ja neid järjestikku ühendavaid sirglõike hulknurga külgedeks. Hulknurga külgede summa

on tema ümbermõõt. Sirglõiku, mis ühendab hulknurga kaht mittejärjestikku asetsevat tippu, nimetatakse hulknurga diagonaaliks*. Hulknurga iga tipu juures on hulknurga üks sisenurk. Hulknurga küljed, nurgad ja diagonaalid on tema elemendid.



Joonis 110.

Hulknurgad liigitatakse

a) lihtsateks ja mittelihtsateks,

b) kumerateks ja mittekumerateks (ehk nõgusateks),

c) korrapärasteks ja mittekorrapärasteks (ehk korrapäratuteks).

Hulknurka nimetatakse lihtsaks, kui tema külgedel ei ole ühiseid punkte peale tippude.

Joonisel 110 kujutatud hulknurkadest esimene on mittelihtne viisnurk.

Hulknurka nimetatakse kumeraks, kui tema iga sisenurk on väiksem kui sirgnurk.

Joonisel 109 kujutatud nelinurkadest teine on nõgus nelinurk.

Hulknurka nimetatakse korrapäraseks, kui tema kõik küljed on võrdsed ja kõik sisenurgad on võrdsed.

---

* *dia* (kr.) — läbi; *gonia* (kr.) — nurk.

Joonisel 110 kujutatud hulknurkadest teine on korrapärane kuusnurk.

Et käesolevas õpikus edaspidi ei käsitelda mittelihtsaid ega ka nõgusaid hulknurki, siis sõna „hulknurk" tähendab edaspidi ikka kumerat lihtsat hulknurka.

Ülesanded.

263. Mitu diagonaali saab joonestada 4-, 5-, 6-, n-nurga igast tipust? Avaldada n-nurga diagonaalide üldarv.

264. Kas kolmnurk saab olla mittelihtne või nõgus?

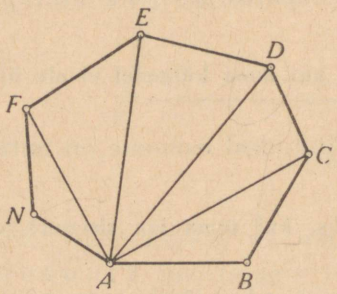
265. Kuidas nimetatakse korrapärast kolmnurka?

§ 51. Hulknurga nurkade summa.

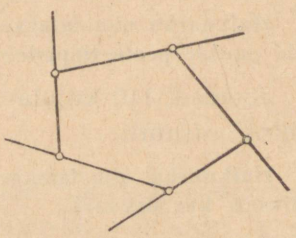
Tõestame, et

***n*-nurga sisenurkade summa on $(n-2)\cdot 180°$.**

T õ e s t u s. Joonestame diagonaalid hulknurga ühest tipust. Kui hulknurgal on n tippu, siis need diagonaalid



Joonis 111.



Joonis 112.

tükeldavad hulknurga $n-2$ kolmnurgaks (joonis 111). Nende kolmnurkade sisenurkade summa võrdub hulknurga sisenurkade summaga, sest nende kolmnurkade kõik nur-

gad on kas hulknurga nurgad või nende osad. Et iga kolmnurga sisenurkade summa on 180^0, siis $n-2$ kolmnurga sisenurkade summa ja seega ka hulknurga sisenurkade summa on

$$(n-2)\cdot 180^0,$$

mida oligi vaja tõestada.

N ä i d e. Nelinurga sisenurkade summa on

$$(4-2)\cdot 180^0 = 360^0.$$

Kui pikendame hulknurga mingit külge, siis saame selle hulknurga ühe v ä l i s n u r g a. Iga välisnurk on ühe sisenurga kõrvunurk (joonis 112).

Tõestame, et

iga hulknurga välisnurkade summa on 360°.

Hulknurga iga tipu juures on üks sisenurk ja üks välisnurk; nende summa on 180°, sest nad on kõrvunurgad. Olgu hulknurk n-nurk; tema n tipu juures olevate sise- ja välisnurkade summa on siis

$$n\cdot 180^\circ;$$

et sisenurkade summa on

$$(n-2)\cdot 180^\circ,$$

siis välisnurkade summa on

$$n\cdot 180^\circ - (n-2)\cdot 180^\circ$$

ehk

$$n\cdot 180^\circ - n\cdot 180^\circ + 360^\circ$$

ehk

$$360^\circ.$$

J ä r e l d u s. Et korrapärase hulknurga sisenurgad on võrdsed, siis on võrdsed ka välisnurgad; seepärast on korrapärase n-nurga iga välisnurk

$$\frac{360^0}{n}$$

ja iga sisenurk

$$180° - \frac{360°}{n}.$$

N ä i d e. Korrapärase 9-nurga välisnurk on

$$\frac{360°}{9} \text{ ehk } 40°$$

ja sisenurk

$$180° - 40° \text{ ehk } 140°.$$

Ülesanded.

266. Kui suur on 12-nurga sisenurkade summa?

267. Kui suur on 18-nurga sisenurkade summa?

268. Missuguse hulknurga sisenurkade summa on 12 täisnurka; 7 täispööret; 2340°?

269. Missuguse hulknurga sisenurkade summa on võrdne välisnurkade summaga?

270. Kuidas muutub hulknurga sisenurkade summa, kui tema külgede arv suureneb 3 võrra?

271. Arvutada korrapärase 16-nurga sisenurk ja välisnurk.

272. Missuguse korrapärase hulknurga välisnurk on 15°?

273. Missuguse korrapärase hulknurga sisenurk on 135°?

§ 52. Trapets.

Trapets on nelinurk, millel ainult üks paar vastaskülgi on paralleelsed.

Selle definitsiooni järgi joonisel 113 kujutatud nelinurk on trapets *, kui $AB \parallel DC$. Trapetsi paralleelseid külgi nimetatakse a l u s t e k s ja teisi külgi h a a r a d e k s.

* *trapeza* (kr.) — laud; nelijalg.

Aluste vaheline ristlõik on trapetsi *kõrgus*. Trapetsi elementide tähistamist juhatab joonis 113.

Trapetsi aluste paralleelsusest järeldame, et

trapetsi haara lähisnurkade summa on sirgnurk.

Selleks paneme tähele, et nurgad A ja D on lähisnurgad paralleelsete sirgete AB ja DC lõikamisel sirgega AD; seetõttu

$$\angle A + \angle D = \pi.$$

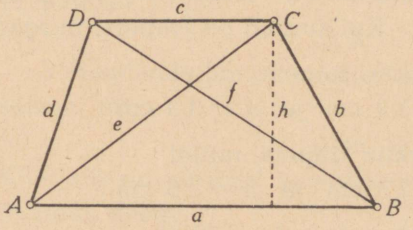
Samade paralleelide lõikamisel sirgega BC saame, et

$$\angle B + \angle C = \pi.$$

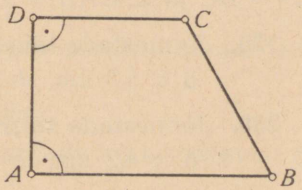
Kui trapetsi üks nurk on täisnurk, siis on selle teoreemi põhjal teine sama haara juures olev nurk samuti täisnurk; kui näiteks

$$\angle A = 90°, \text{ siis ka } \angle D = 90°$$

(nagu joonisel 114). Niisugust trapetsit nimetatakse *täisnurkseks*.



Joonis 113.



Joonis 114.

Diagonaal tükeldab nelinurga kaheks kolmnurgaks, milledel on üks külg ühine. Seetõttu nelinurk on üldiselt määratud oma viie elemendiga. Et trapetsi haara ühe lähisnurgaga teine lähisnurk on määratud, siis trapetsi määramiseks on küllalt neljast elemendist. Nende hulgas muidugi ei või esineda niisuguseid elemente, mis üksteisest olenevad, nagu näiteks kolm nurka, sest trapetsi kolmest nurgast on paratamatult kaks niisugust, millede

summa on 180°. Seetõttu trapetsi sisenurkadeks ei saagi anda kolme mistahes nurka. On aga näiteks antud kaks alust, üks haar ja selle üks lähisnurk, siis nende kui olenematute andmetega on trapets määratud ja tema joonestamine on võimalik.

Ülesanded.

274. Joonestada trapets, millel
$a = 7$ cm, $c = 3{,}2$ cm, $d = 3{,}5$ cm ja $\alpha = 70°$.

275. Joonestada trapets, millel
$a = 6{,}1$ cm, $b = 3{,}2$ cm, $e = 4{,}8$ cm ja $f = 5{,}4$ cm.

276. Joonestada trapets, millel
$a = 5{,}3$ cm, $\alpha = 55°$, $h = 2{,}4$ cm ja $c = 3{,}1$ cm.

277. Trapetsi ühe aluse lähisnurgad on $74° 10'$ ja $62° 30'$. Arvutada teised nurgad.

278. Trapetsi $ABCD$ kohta on teada, et $AC \perp CB$, $AD = DC$ ja $\angle CAB = 32°$. Kui suured on trapetsi nurgad?

279. Joonestada täisnurkne trapets, millel
$a = 5{,}5$ cm, $b = 3{,}9$ cm ja $d = 3{,}3$ cm.

280. Joonestada täisnurkne trapets, millel
$a = 4{,}2$ cm, $c = 2{,}3$ cm ja $h = 2{,}6$ cm.

281. Joonestada täisnurkne trapets, millel
$a = 6{,}4$ cm, $e = 5{,}4$ cm ja $f = 7{,}5$ cm.

§ 53. Võrdhaarne trapets.

Kui trapetsi haarad on võrdsed, siis nimetatakse teda võrdhaarseks trapetsiks (joonis 115). Tõestame, et

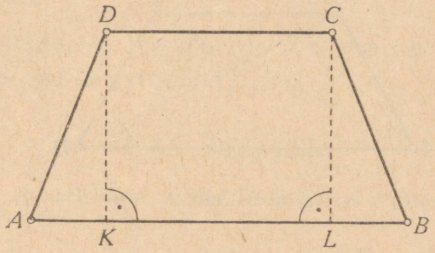
võrdhaarse trapetsi aluse lähisnurgad on võrdsed.

Eeldus: $AB \parallel DC$ ja $AD = BC$ (joonis 115).

Väide: $\angle A = \angle B$ ja $\angle D = \angle C$.

Tõestus. Joonestame ühe aluse otspunktidest, näiteks punktidest D ja C, ristlõigud DK ja CL teise aluseni. Et paralleelide vahelised ristlõigud on võrdsed, siis

$$DK = CL.$$



Joonis 115.

Eelduse järgi

$$AD = BC$$

ja joonise järgi

$$\angle K = \angle L.$$

Rakendades kolmnurkade kongruentsuse tunnust KkN saame, et

$$\triangle ADK \cong \triangle BCL.$$

Kuid siis on võrdsed nende kolmnurkade kõik vastavad elemendid, seega

$$\angle A = \angle B.$$

Et $\angle D = 180° - \angle A$ ja $\angle C = 180° - \angle B$, siis ka

$$\angle D = \angle C.$$

Järgmise teoreemina tõestame, et

võrdhaarse trapetsi diagonaalid on võrdsed.

Eeldus: $AB \parallel DC$ ja $AD = BC$ (joonis 116).

Väide: $BD = AC$.

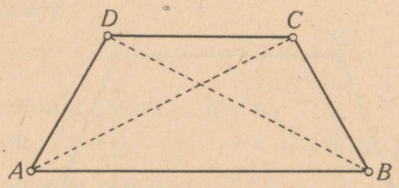
Tõestus. Kolmnurkades ABD ja ABC eelduse järgi

$$AD = BC$$

eelmise teoreemi järgi

$$\angle A = \angle B$$

ja ühise küljena neis kolmnurkades esineb AB.



Joonis 116.

Kolmnurkade kongruentsuse tunnuse knk järgi

$$\triangle ABD \cong \triangle BAC;$$

sellest järeldubki, et

$$BD = AC.$$

Ülesanded.

282. Joonestada võrdhaarne trapets, millel $a = 6$ cm, $\alpha = 60°$ ja $b = 3$ cm.

283. Joonestada võrdhaarne trapets, millel $a = 3{,}9$ cm, $e = 5{,}2$ cm ja $b = 2{,}5$ cm.

284. Kui suur on võrdhaarse trapetsi vastasnurkade summa?

285. Võrdhaarse trapetsi vastasnurkade vahe on $48° 34'$. Kui suured on trapetsi nurgad?

286. Võrdhaarse trapetsi haar on võrdne lühema alusega ja risti diagonaaliga. Kui suured on trapetsi nurgad?

287. Võrdhaarse trapetsi ümbermõõt on 54 cm ja pikem alus 18 cm. Leida lühem alus teades, et diagonaal poolitab pikema aluse lähisnurga.

288. Tõestada, et võrdhaarne trapets on sümmeetriline kujund.

289. Tõestada, et võrdhaarsest kolmnurgast eraldub võrdhaarne trapets, kui kolmnurgas joonestada alusega paralleelne lõik.

290. Tõestada, et trapets on võrdhaarne, kui tema ühe aluse lähisnurgad on võrdsed.

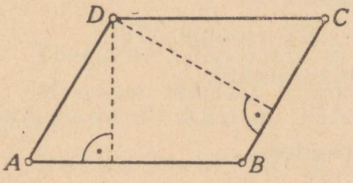
§ 54. Rööpkülik.

Rööpkülik on nelinurk, millel kaks paari vastaskülgi on paralleelsed.

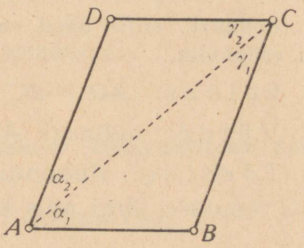
Selle definitsiooni järgi joonisel 117 kujutatud nelinurk on rööpkülik, kui

$$AB \parallel DC \text{ ja } AD \parallel BC.$$

Rööpkülikut nimetatakse ka p a r a l l e l o g r a m m i k s*. Rööpküliku kahe vastaskülje vahelist ristlõiku nimetatakse rööpküliku kõrguseks. Et vastaskülgi on rööpkülikul kaks paari, siis on tal ka kaks kõrgust.



Joonis 117.



Joonis 118.

Peale eespool-antud definitsiooni on rööpkülikul veel mitmeid tunnuseid, millede alusel saab otsustada, kas antud

* *parallelogrammon* (kr.) — kõrvutiminev joonis.

nelinurk on rööpkülik või mitte. Üheks niisuguseks tunnuseks on järgmine teoreem:

võrdsete vastaskülgedega nelinurk on rööpkülik.

Eeldus: $AB = DC$ ja $AD = BC$ (joonis 118).

Väide: nelinurk $ABCD$ on rööpkülik.

Tõestus. Joonestame nelinurga ühe diagonaali, näiteks diagonaali AC. Siis

$$\triangle ABC \cong \triangle CDA,$$

sest ühe kolmnurga kolm külge on võrdsed teise kolmnurga vastavate elementidega. Kuid siis

$$\alpha_1 = \gamma_2 \text{ ja } \gamma_1 = \alpha_2$$

kui vastavad nurgad neis kolmnurkades. Nende nurkade võrdsusest järeldub, et

$$AB \parallel DC \text{ ja } AD \parallel BC,$$

kuna nimetatud sirgete lõikamisel sirgega AC on tekkinud võrdsed põiknurgad. Et nelinurga $ABCD$ vastasküljed on paralleelsed, siis ta ongi rööpkülik.

Teine teoreem, mis võimaldab otsustada, kas antud nelinurk on rööpkülik, on järgmine:

nelinurk, mille ühed vastasküljed on võrdsed ja paralleelsed, on rööpkülik.

Eeldus: $AD = BC$ ja $AD \parallel BC$ (joonis 118).

Väide: nelinurk $ABCD$ on rööpkülik.

Tõestus. Kolmnurkadel ADC ja CBA on ühine külg AC, eelduse järgi neis kolmnurkades

$$AD = BC$$

ja põiknurkadena paralleelsete sirgete AD ja BC juures

$$\alpha_2 = \gamma_1.$$

Kolmnurkade kongruentsuse tunnuse knk järgi

$$\triangle ADC \cong \triangle CBA.$$

Kolmnurkade kongruentsusest järeldub, et

$$\alpha_1 = \gamma_2$$

ja seega nelinurga $ABCD$ vastasküljed AB ja DC on paralleelsed. Et eelduse järgi nelinurgal $ABCD$ ka teine paar vastaskülgi on paralleelsed, siis on ta rööpkülik.

Rööpküliku kaht lähiskülge tähistame tähtedega a ja b, külje a lähisnurki tähtedega α ja β, diagonaale tähtedega e ja f.

Ülesanded.

291. Joonestada rööpkülik, millel $a = 3{,}9$ cm, $b = 2{,}9$ cm ja $e = 5{,}8$ cm.

292. Joonestada rööpkülik, millel $a = 4{,}5$ cm, $\alpha = 48°$ ja $f = 4{,}2$ cm.

293. Joonestada rööpkülik, millel $a = 5{,}5$ cm, $\beta = 130°$ ja $b = 4{,}1$ cm.

294. Tõestada, et nelinurk, mille diagonaalid poolitavad teineteist, on rööpkülik.

295. Eelmises ülesandes tõestatud lauset kasutades joonestada rööpkülik, millel $a = 5{,}7$ cm, $e = 7{,}2$ cm ja $f = 5{,}2$ cm.

§ 55. Rööpküliku omadused.

Tõestame kõigepealt, et

diagonaal tükeldab rööpküliku kaheks kongruentseks kolmnurgaks.

Eeldus: $AB \parallel DC$ ja $AD \parallel BC$ (joonis 119).

Väide: $\triangle ABD \cong \triangle CDB$.

Tõestus. Kolmnurkadel ABD ja CDB on ühine külg BD; selle külje lähisnurkadest

$$\beta_1 = \delta_2$$

kui põiknurgad paralleelide AB ja DC juures ning

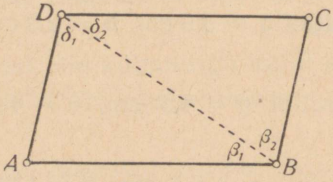
$$\delta_1 = \beta_2$$

kui põiknurgad paralleelide AD ja BC juures. Kolmnurkade kongruentsuse tunnuse nkn põhjal järeldame eeltoodust, et

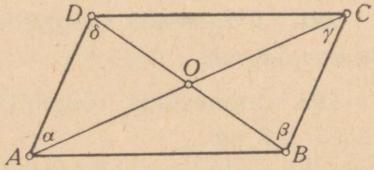
$$\triangle ABD \cong \triangle CDB.$$

Järeldus. Et kolmnurkade ABD ja CDB vastavad küljed on võrdsed, siis

$$AB = DC \text{ ja } AD = BC.$$



Joonis 119.



Joonis 120.

Tähendab

rööpküliku vastasküljed on võrdsed.

Samuti ka

$$\angle A = \angle C \quad \text{ja} \quad \angle B = \angle D,$$

sest nad on vastavateks nurkadeks kolmnurkades, milledeks rööpküliku jaotab diagonaal BD või diagonaal AC. Seega

rööpküliku vastasnurgad on võrdsed.

Tõestame veel, et

rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist.

Eeldus: $AB \parallel DC$ ja $AD \parallel BC$ (joonis 120).

Väide: $AO = CO$ ja $BO = DO$.

Tõestus. Kolmnurkade AOD ja COB külgedest

$$AD = BC,$$

sest nad on rööpküliku vastasküljed, aga

$$\alpha = \gamma$$

kui põiknurgad rööpsirgete AD ja BC lõikaja AC juures ja

$$\delta = \beta$$

kui põiknurgad samade rööpsirgete lõikaja BD juures. Kuid siis kolmnurkade kongruentsuse tunnuse nkn järgi

$$\triangle AOD \cong \triangle COB.$$

Sellest järeldub, et

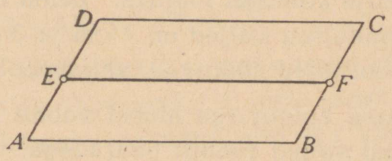
$$AO = CO \quad \text{ja} \quad BO = DO,$$

sest nad on kongruentsete kolmnurkade vastavad elemendid.

Kui rööpküliku kahe vastasküljе keskpunktid ühendame sirglõigu abil, saame rööpküliku **kesklõigu**. Tõestame, et

rööpküliku kesklõik on kahe küljega paralleelne ja võrdne.

Eeldus: $AB \parallel DC$ ja $AD \parallel BC$;
$AE = DE$ ja $BF = CF$ (joonis 121).



Joonis 121.

Väide: $EF \parallel AB$ ja $EF = AB$.

Tõestus. Et rööpküliku vastasküljed on paralleelsed ja võrdsed, siis on seda ka nende poolitamisel saadud lõigud; seetõttu

$$AE \parallel BF \quad \text{ja} \quad AE = BF.$$

Nelinurk $ABFE$ on seega rööpkülik. Sellest järeldub, et

$$EF \parallel AB \quad \text{ja} \quad EF = AB,$$

mida oligi vaja tõestada. Rööpküliku omaduste tõttu on siis kesklõik EF muidugi ka küljega DC paralleelne ja võrdne.

Ülesanded.

296. Rööpküliku ümbermõõt on 18,6 dm. Üks külg on teisest 1,8 dm pikem. Kui pikad on küljed?

297. Rööpküliku ümbermõõt on 5,5 m ja üks külg on $\frac{5}{6}$ teisest. Kui pikad on küljed?

298. Rööpküliku üks nurk on $57^\circ 15'$. Kui suured on teised nurgad?

299. Rööpküliku üks nurk on $52^\circ 20'$ suurem kui teine. Leida nurkade suurused.

300. Tõestada, et kui rööpküliku pikema külje lähisnurkade poolitajad lõikuvad vastasküljel, siis lühem külg on pool pikemast.

301. Rööpküliku pikema külje lähisnurkade poolitajad jaotavad vastaskülje kolmeks lõiguks. Leida nende lõikude pikkused, kui rööpküliku küljed on 7 cm ja 3 cm. *Näpunäide:* nurgapoolitajad lõikuvad väljaspool rööpkülikut.

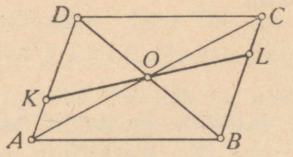
302. Võrdhaarse kolmnurga alusel vabalt võetud punktist on joonestatud sirged rööbiti haaradega. Leida saadud rööpküliku ümbermõõt, kui selle kolmnurga haar on 12 cm.

303. Tõestada, et rööpküliku ühe külje lähisnurkade poolitajad on risti.

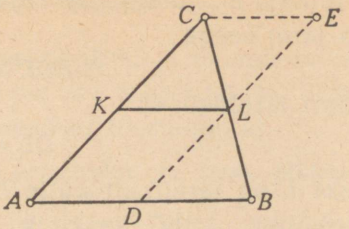
304. Tõestada, et rööpküliku vastasnurkade poolitajad on paralleelsed.

305. Tõestada, et lõigud KO ja LO joonisel 122 on võrdsed, kui $ABCD$ on rööpkülik.

306. Leida, kui pikad on lõigud AD ja BC joonisel 122, kui $ABCD$ on rööpkülik ja $AK = 1{,}7$ m ning $BL = 2{,}4$ m.



Joonis 122.



Joonis 123.

§ 56. Kolmnurga kesklõik.

Leiame kolmnurga kahe külje keskpunktid ja ühendame need sirglõiguga. Seda lõiku nimetatakse kolmnurga kesklõiguks. Tõestame, et

kolmnurga kahe külje keskpunkte ühendav lõik on paralleelne kolmanda küljega ja võrdub poolega sellest küljest.

Eeldus: $AK = CK$; $BL = CL$ (joonis 123).

Väide: $KL \parallel AB$ ja $KL = \frac{AB}{2}$.

Tõestus: Läbi punkti L joonestame abisirge paralleelselt küljega AC ja läbi punkti C teise abisirge paralleelselt küljega AB. Lõigaku esimene abisirge külge AB punktis D ja teist abisirget punktis E. Saadud nelinurk $ADEC$ on rööpkülik, sest tema vastasküljed on paralleelsed. Näitame, et lõik KL on selle rööpküliku kesklõik. Selleks on vaja näidata, et punktid K ja L on vastavalt külgedele AC ja DE keskpunktid. Punkti K kohta on see teada eeldusest ja punkti L kohta selgub see kolmnurkadest BDL ja CEL. Neis kolmnurkades eelduse järgi

$$BL = CL,$$

nurgad BLD ja CLE on võrdsed kui tippnurgad ning nurgad DBL ja ECL on võrdsed kui põiknurgad paralleelide AB ja

CE lõikaja BC juures. Kolmnurkade kongruentsuse tunnuse nkn järgi seega

$$\triangle BDL \cong \triangle CEL,$$

millest järeldub, et

$$DL = EL.$$

Punkt L on järelikult külje DE keskpunkt ja seega KL on rööpküliku $ADEC$ kesklõik. Rööpküliku kesklõigu omaduste tõttu

$$KL \parallel AD \quad \text{ja} \quad KL = AD.$$

Et $AD = CE$ kui rööpküliku vastasküljed ja $DB = CE$ kui kongruentsete kolmnurkade BDL ja CEL vastavad küljed, siis $AD = DB$; järelikult

$$AD = \frac{AB}{2}.$$

Avaldades lõigu KL omadused nüüd AB abil saame

$$KL \parallel AB \quad \text{ja} \quad KL = \frac{AB}{2}.$$

Ülesanded.

307. Kolmnurga küljed on 22 m, 28 m ja 34 m. Tema külgede keskpunktide ühendamisel saadakse uus kolmnurk. Kui pikad on viimase küljed?

308. Kolmnurga ümbermõõt on $2p$. Kui suur ümbermõõt on kolmnurgal, mis saadakse esimese kolmnurga külgede keskpunktide ühendamisel.

309. Tõestada, et sirge, mis läbib kolmnurga ühe külje keskpunkti ja on rööbiti teise küljega, poolitab kolmanda külje.

310. Nurga sees on võetud punkt P. Joonestada läbi punkti P sirge, mille lõik nurga haarade vahel poolitub punktis P. Näpunäide: kasutada eelmise ülesande tulemust.

§ 57. Trapetsi kesklõik.

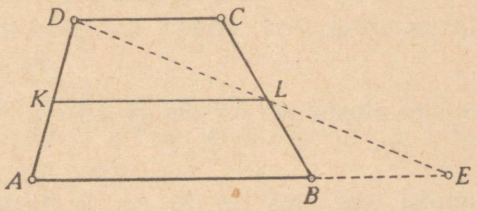
Leiame trapetsi haarade keskpunktid ja ühendame need sirglõiguga. See lõik on *trapetsi kesklõik*. Rakendades kolmnurga kesklõigu omadusi tõestame, et

trapetsi kesklõik on alustega paralleelne ja tema pikkus on aluste pikkuste poolsumma.

Eeldus: $AB \parallel DC$; $AK = DK$; $BL = CL$ (joonis 124).

Väide: $KL \parallel AB$ ja $KL = \frac{AB+DC}{2}$.

Tõestus. Joonestame sirge läbi punktide D ja L. See sirge ei ole paralleelne sirgega AB, järelikult lõikab teda mingis punktis E. Näitame, et lõik KL on kolmnurga AED kesklõik. Kuna punkt K on eelduse järgi külje AD



Joonis 124.

keskpunkt, siis on vaja veel näidata, et punkt L on külje ED keskpunkt. Et ta seda on, see järeldub kolmnurkade BLE ja CLD kongruentsusest. Neis kolmnurkades eelduse järgi

$$BL = CL,$$

nurgad BLE ja CLD on võrdsed kui tippnurgad ning nurgad LBE ja LCD on võrdsed kui põiknurgad rööpsirgete AB ja DC juures. Kolmnurkade kongruentsuse tunnuse nkn järgi

$$\triangle BLE \cong \triangle CLD,$$

millest järeldubki, et

$$EL = DL.$$

Punkt L on seega külje ED keskpunkt ja lõik KL on kolmnurga AED kesklõik. Kesklõigu omaduste tõttu

$$KL \parallel AE \quad \text{ja} \quad KL = \frac{AE}{2}.$$

Kuid AE on seesama sirge, mis AB; järelikult ka

$$KL \parallel AB.$$

Et $AE = AB + BE$ ja kolmnurkade BLE ja CLD kongruentsuse tõttu $BE = DC$, siis

$$AE = AB + DC;$$

sellepärast võime ülalsaadud võrdust KL pikkuse kohta kirjutada järgmiselt:

$$KL = \frac{AB+DC}{2}.$$

Ülesanded.

311. Trapetsi alused on 8,7 cm ja 5,9 cm. Kui pikk on kesklõik?

312. Trapetsi üks alus on 16 cm ja kesklõik 12 cm. Kui pikk on teine alus?

313. Trapetsi üks alus on 4,8 cm ja kesklõik 6,4 cm. Kui pikk on teine alus?

314. Tõestada, et trapetsi kesklõik poolitab trapetsi kõrguse.

315. Trapetsi kesklõik on 21,5 cm ja üks alus on teisest 7 cm pikem. Kui pikad on alused?

316. Trapetsi kesklõik on 12 cm. Diagonaal tükeldab selle lõikudeks, milledest üks on teisest 3 cm pikem. Kui pikad on trapetsi alused?

§ 58. Romb.

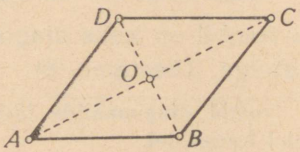
Romb on nelinurk, mille küljed on võrdsed *.

Selle definitsiooni järgi joonisel 125 kujutatud nelinurk on romb, kui

$$AB = BC = CD = AD.$$

Et rööpküliku vastasküljed on võrdsed, siis saame rombi defineerida ka järgmiselt:

romb on rööpkülik, mille ühe tipu lähisküljed on võrdsed.



Joonis 125.

Sellest definitsioonist järeldub siis juba k õ i k i d e külgede võrdsus.

Et romb on rööpkülik, siis on tal kõik rööpküliku omadused. Lisaks neile on rombil veel eriomadusi. Tähtsaim neist on see, et

rombi diagonaalid ristuvad.

E e l d u s: $AB = BC = CD = AD$ (joonis 125).

V ä i d e: $AC \perp BD$.

T õ e s t u s. Vaatleme kolmnurka ACD. Eelduse järgi

$$AD = CD,$$

nii et kolmnurk ACD on võrdhaarne. Et rombi kui rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist, siis punkt O on kolmnurga aluse AC keskpunkt. Võrdhaarse kolmnurga aluse keskpunkti ja tipu ühenduslõik on ühtlasi kolmnurga kõrgus. Seetõttu

$$DO \perp AC$$

ehk, teisiti,

$$AC \perp BD,$$

mis oligi tõestada.

---

* *rhombus* (kr.) — varem kaksikkoonus, hiljem võrdkülgne nelinurk.

Võrdhaarse kolmnurga kõrgus on ühtlasi tipunurga poolitaja. Nii poolitab DO nurga ADC; see tähendab aga, et

rombi diagonaal poolitab rombi nurga.

Rombi diagonaali nende kahe omaduse tõttu

rombi diagonaal on rombi sümmeetriateljeks.

Et rombil on kaks diagonaali, siis on tal ka kaks sümmeetriatelge. Tõestame, et

rombi diagonaalide lõikepunkt asetseb rombi külgedest võrdsetel kaugustel.

E e l d u s: nelinurk $ABCD$ on romb ja O tema diagonaalide lõikepunkt; $OK \perp AD$; $OL \perp AB$; $OM \perp BC$; $ON \perp CD$ (joonis 126).

V ä i d e: $OK = OL = OM = ON$.

T õ e s t u s. Eestpoolt teame, et nurgapoolitaja iga punkt asetseb võrdsetel kaugustel nurga haaradest. Et diagonaal AC on rombi nurkade A ja C poolitaja, siis on punkt O võrdsetel kaugustel nurga A haaradest ja nurga C haaradest, seega

$OK = OL$ ja $OM = ON$. Seesama punkt O kui diagonaali BD punkt on võrdsetel kaugustel nurga B haaradest, nimelt

$$OL = OM.$$

Ühendades need kolm võrdust saame

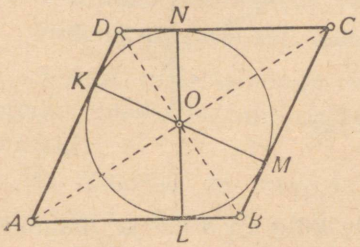
$$OK = OL = OM = ON,$$

mida tuligi tõestada.

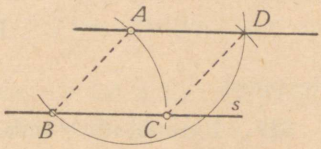
Ringjoon, mille keskpunktiks on punkt O ja raadiuseks on lõik OK, läbib punkte K, L, M ja N. Seda ringjoont nimetatakse rombi s i s e r i n g j o o n e k s. Siseringjoone kohta öeldakse, et ta on j o o n e s t a t u d rombi

sisse. Rombi küljed on tema siseringjoone puutujate lõigud, sest igal küljel on selle ringjoonega ainult üks ühine punkt (§ 23).

Rombi joonestamisega saab kergesti lahendada järgmisi konstruktsioonülesandeid:



Joonis 126.



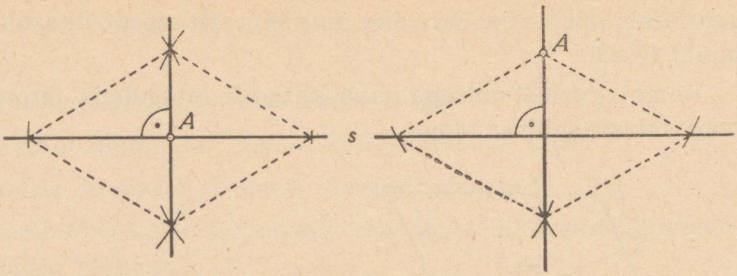
Joonis 127.

1. antud sirgele tõmmata rööpsirge läbi väljaspool sirget antud punkti;
2. antud sirgele tõmmata ristsirge läbi antud punkti;
3. poolitada antud nurk;
4. poolitada antud lõik.

Lahendame neist esimese. Olgu antud sirge s ja väljaspool seda punkt A. Võtame sirgel s vabalt punkti B ja joonestame sirkli abil rombi, mille üheks küljeks on lõik AB ja mille teine külg BC on sirgel s (joonis 127). Selle vastaskülje pikendamisel saadav sirge $AD \parallel s$ ja läbib punkti A.

Teise ülesande lahendamisel esineb kaks juhtu: antud punkt on antud sirgel või väljaspool seda. Nii ühel kui ka teisel juhul ülesande lahendamine toimub rombi abil, mille üks diagonaal on antud sirgel ja teine diagonaal otsitaval sirgel (joonis 128).

Et nurga poolitamist ja lõigu poolitamist saab teostada rombi abil, see nähtub joonistest 54 ja 52.



Joonis 128.

Ülesanded.

317. Joonestada romb, mille külg on 5 cm ja diagonaal on 8 cm.

318. Joonestada romb, mille külg on 6,5 cm ja üks nurk on 45^0.

319. Joonestada romb, mille diagonaalide pikkused on antud.

320. Tõestada, et rombi kõrgused on võrdsed.

321. Tõestada, et ristuvate diagonaalidega rööpkülik on romb.

322. Joonestada romb, mille külg võrdub ühe diagonaaliga, ja konstrueerida selle siseringjoon.

323. Joonestada romb tema kõrguse ja ühe nurga järgi.

324. Joonestada romb tema külje ja siseringjoone raadiuse järgi.

§ 54. Ristkülik.

Ristkülik on nelinurk, mille nurgad on võrdsed.

Selle definitsiooni järgi joonisel 129 kujutatud nelinurk on ristkülik, kui

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D.$$

Et nelinurga nurkade summa on 360°, siis ristküliku iga nurk on 360° : 4 ehk 90°. Seega ristkülik on täisnurkne nelinurk. Et ristküliku iga nurk on täisnurk, siis tema vastasküljed on paralleelsed, sest nad on risti ühe ja sama sirgega. Seega ristkülik on rööpkülik ja teda saab defineerida veel järgmiselt:

ristkülik on rööpkülik, mille üks nurk on täisnurk.

Sellest definitsioonist järeldub rööpküliku omaduste põhjal otsekohe, et ristküliku kõik nurgad on täisnurgad.

Et ristkülik on rööpkülik, siis on tal kõik rööpküliku omadused. Ristküliku ühe eriomadusena tõestame, et

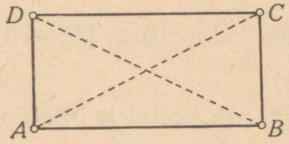
ristküliku diagonaalid on võrdsed.

Eeldus: $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$ (joonis 129).

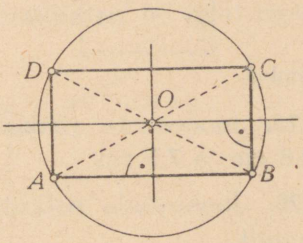
Väide: AC = BD.

Tõestus: Vaatleme kolmnurki *ABC* ja *BAD*. Neil on ühiseks küljeks *AB*, eelduse järgi nurgad *B* ja *A* on võrdsed ning ristküliku vastaskülgedena on ka küljed *BC* ja *AD* võrdsed. Kolmnurkade kongruentsuse tunnuse knk järgi

$$\triangle ABC \cong \triangle BAD.$$



Joonis 129.



Joonis 130.

Kuid siis on võrdsed ka nende kolmnurkade kolmandad küljed, nimelt

$$AC = BD.$$

Sellest ristküliku omadusest järeldub, et

ristküliku diagonaalide lõikepunkt on ristküliku tippudest võrdsetel kaugustel.

Tõepoolest, kuna ristküliku kui rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist ja seejuures diagonaalid on võrdsed, siis on võrdsed ka nende pooled; seega (joonis 130)

$$AO = BO = CO = DO.$$

Ringjoon, mille keskpunktiks on O ja raadiuseks on OA, läbib ristküliku tippe A, B, C ja D. Seda ringjoont nimetatakse ristküliku ümberringjooneks. Selle ringjoone kohta öeldakse, et ta on joonestatud ristküliku ümber. Ristküliku küljed on selle ringjoone kõõlud.

Kui ristküliku diagonaalide lõikepunktist O (joonis 130) joonestada ristsirge ühele küljele, siis see sirge on risti ka vastasküljega, sest paralleelidel on ristsirged ühised. Ühtlasi poolitab see ristküliku kaks külge, sest punktist O näiteks küljele AB joonestatud ristsirge kui võrdhaarse kolmnurga ABO kõrgus poolitab aluse AB. Nii selgub, et

diagonaalide lõikepunktist ristküliku küljele joonestatud ristsirge on ristküliku sümmeetriatelg.

Neid telgi on ristkülikul kaks.

Ülesanded.

325. Joonestada ristkülik, mille ühe tipu lähisküljed on 4,8 cm ja 7,5 cm.

326. Joonestada ristkülik, mille üks külg ja diagonaal on antud.

327. Joonestada ristkülik, mille ümberringjoone raadius on 3,5 cm ja nurk diagonaalide vahel on 35°.

328. Tõestada, et ristküliku külgede keskpunktid on ühe rombi tippudeks.

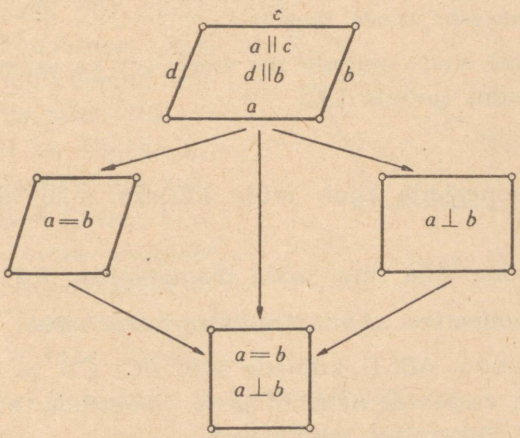
329. Tõestada, et rombi külgede keskpunktid on ühe ristküliku tippudeks.

330. Tõestada, et võrdsete diagonaalidega rööpkülik on ristkülik.

§ 60. Ruut.

Ruut on ristkülik, mille ühe tipu lähisküljed on võrdsed.

Sellest definitsioonist järeldub, et ruudu k õ i k küljed on võrdsed; tõepoolest: ristkülikul on vastasküljed ikka võrdsed; kui lisaks sellele ka ühe tipu lähisküljed on võrdsed, siis on juba kõik küljed võrdsed. Selle omaduse tõttu võib ruutu defineerida rombina, mille üks nurk on täisnurk. Sellest järeldub, et ka teised nurgad on täisnurgad.

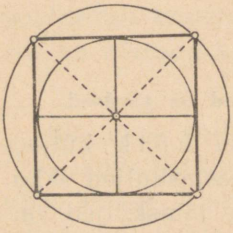


Joonis 131.

Nagu nägime, on rombi ja ristkülikut võimalik defineerida rööpküliku abil. Ka ruutu võime vaadelda rööpkülikuna, nimelt niisuguse rööpkülikuna, mille ühe tipu lähis-

küljed on võrdsed ja risti. Seega on romb, ristkülik ja ruut erikujulised rööpkülikud (joonis 131).

Et ruut on nii ristkülik kui ka romb, siis on ruudul kõik rombi ja ühtlasi ka ristküliku omadused. Ruudul kui ristkülikul on kõik nurgad võrdsed ja kui rombil — kõik küljed võrdsed: ruut on korrapärane nelinurk. Sümmeetriatelgedeks on ruudul nii rombi kui ka ristküliku sümmeetriateljed, nii et ruudul on neli sümmeetriatelge. Punkti, milles lõikuvad need neli sümmeetriatelge, nimetatakse ruudu keskpunktiks (joonis 132).



Joonis 132.

Ruudu keskpunkt on võrdsetel kaugustel ruudu külgedest ja võrdsetel kaugustel ruudu tippudest.

Seepärast saab ruudule nii sisse kui ka ümber joonestada ringjoont (joonis 132).

Ülesanded.

331. Joonestada ruut, mille küljeks jääb antud sirglõik.

332. Joonestada ruut, mille diagonaal on 6,5 cm.

333. Joonestada ruut antud ringjoone sisse.

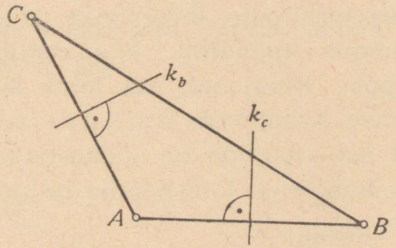
334. Ruudu *ABCD* külgede *AB*, *BC*, *CD* ja *DA* keskpunktid on vastavalt *K*, *L*, *M* ja *N*. Tõestada, et *AL*, *AM*, *CK* ja *CN* lõikumisel tekib romb.

Peatükk VIII.

Tähtsamad jooned ja punktid kolmnurgas.

§ 61. Kolmnurga külgede keskristsirged.

Tähistame kolmnurga külgede a, b ja c keskristsirgeid vastavalt sümbolitega k_a, k_b ja k_c. Küsime, kuidas asetsevad teineteise suhtes mingi paar keskristsirgeid, näiteks k_b ja k_c. On kerge näha, et nad ei või olla paralleelsed. Tõepoolest, kui k_b oleks paralleelne sirgega k_c, siis peaks külg b olema risti ka sirgega k_c, sest paralleelidel on ristsirged ühised (joonis 133). Kuid siis oleks külgede b ja c ühisest punktist A sirgele k_c joonestatud kaks ristsirget, nimelt AB ja AC, mida olla ei saa. Järelikult

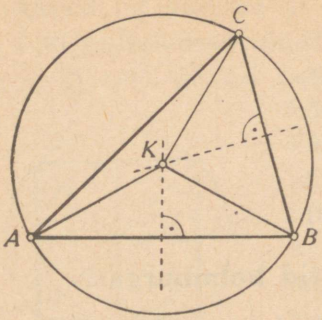


Joonis 133.

kolmnurga kahe külje keskristsirged lõikuvad.

Joonestame kolmnurga ABC külgede AB ja BC keskristsirged ja tähistame nende lõikepunkti tähega K (joonis 134).

Et keskristsirge iga punkt on võrdsetel kaugustel lõigu otspunktidest ja et punkt K on nii esimese kui ka teise keskristsirge punkt, siis



Joonis 134.

$$AK = BK$$

ja

$$CK = BK,$$

seega

$$AK = CK.$$

Viimasest võrdusest on näha, et punkt K on ka külje AC keskristsirgel, sest ainult lõigu keskristsirge punktid on võrdsetel kaugustel selle lõigu otspunktidest. Niisiis

kolmnurga külgede keskristsirged lõikuvad kõik ühes punktis, mis on selle kolmnurga tippudest võrdsetel kaugustel.

Joonestame ringjoone, mille keskpunktiks on külgede keskristsirgete lõikepunkt ja raadiuseks on selle punkti kaugus tippudest. See ringjoon läbib kolmnurga kõiki tippe. Ringjoont, mis läbib kolmnurga iga tippu, nimetatakse kolmnurga ümberringjooneks. Öeldakse ka, et see ringjoon on joonestatud kolmnurga ümber ehk — kolmnurk on joonestatud ringjoone sisse.

Seega:

kolmnurga ümberringjoone keskpunktiks on külgede keskristsirgete lõikepunkt.

Et kolmnurga külgede keskristsirged ikka lõikuvad ja ainult ühes punktis, siis

iga kolmnurga tippe läbib üksainus ringjoon.

Sellest järeldub, et

läbi kolme punkti, mis ei asetse ühel ja samal sirgel, läheb ainult üks ringjoon,

sest kolm niisugust punkti võib võtta kolmnurga tippudeks. Kui kolm punkti asetseb ühel ja samal sirgel, siis ei leidu

ringjoont, mis läbiks kõiki neid punkte, sest nendega määratud lõikude keskristsirged ei lõiku, vaid on paralleelsed kui ühe ja sama sirge ristsirged.

Ülesanded.

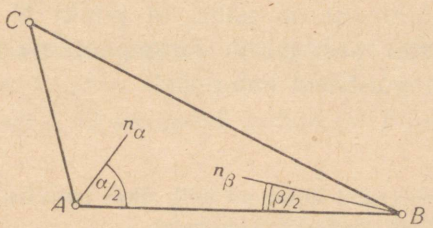
335. Otsustada, kus on ümberringjoone keskpunkt teravnurksel, kus täisnurksel ja kus nürinurksel kolmnurgal.

336. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 10 cm. Kui pikk on kolmnurga ümberringjoone raadius?

337. Joonestada ringjoon läbi kolme punkti, mis ei asetse ühel ja samal sirgel.

§ 62. Kolmnurga bissektorid.

Kolmnurga bissektor on kolmnurga nurga poolitaja lõik tipust kuni vastasküljeni (§ 29).



Joonis 135.

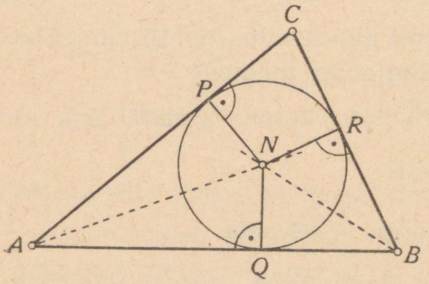
Tähistame kolmnurga bissektorid vastavalt nurgale sümbolitega n_α, n_β ja n_γ. Mingi nurgapaari poolitajad, näiteks n_α ja n_β ikka lõikuvad, sest kui nad ei lõikuks, oleksid nad paralleelsed, ja siis nende lõikamisel sirgega AB peaksid tekkima lähisnurgad $\frac{\alpha}{2}$ ja $\frac{\beta}{2}$, millede summa peaks olema 180° (joonis 135). Et teatavasti

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°,$$

siis

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}<180°;$$

järelikult n_α ja n_β lõikuvad ja nimelt kolmnurga sees. Tähistame nende lõikepunkti tähega N (joonis 136). Et nurgapoolitaja punkt on nurga haaradest võrdsetel kaugustel ja punkt N asetseb nii nurga A kui ka nurga B poolitajal, siis



Joonis 136.

$$NP = NQ$$

ja

$$NR = NQ,$$

seega

$$NP = NR.$$

Viimasest võrdusest on näha, et punkt N asetseb ka nurga C poolitajal, sest ainult nurgapoolitaja punktid on nurga haaradest võrdsetel kaugustel.

Niisiis

kolmnurga bissektorid lõikuvad kõik ühes punktis, mis on selle kolmnurga külgedest võrdsetel kaugustel.

Joonestame ringjoone, mille keskpunktiks on nurgapoolitajate lõikepunkt ja raadiuseks on selle punkti kaugus kolmnurga külgedest. Sellel ringjoonel on kolmnurga iga küljega ainult üks ühine punkt, s. t. kolmnurga küljed on ringjoone puutujateks. Seda ringjoont nimetatakse kolmnurga *siseringjooneks*. Öeldakse ka, et see ringjoon on joonestatud kolmnurga sisse ehk kolmnurk on joonestatud ringjoone ümber.

Seega

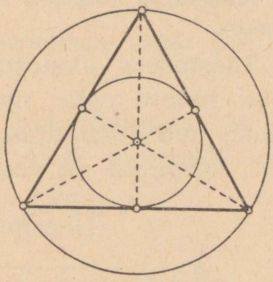
kolmnurga siseringjoone keskpunktiks on kolmnurga bissektorite lõikepunkt.

Et nurgapoolitajad ikka lõikuvad ja ainult ühes punktis, siis

iga kolmnurga sisse saab joonestada ainult ühe ringjoone.

Kui kolmnurk pole võrdkülgne, siis tema ümberringjoone keskpunkt ja siseringjoone keskpunkt ei ühti. Võrdkülgse kolmnurga külgede keskristsirged on ühtlasi ka nurkade poolitajad ja seepärast

võrdkülgse kolmnurga ümberringjoone keskpunkt on ühtlasi ka tema siseringjoone keskpunktiks.



Joonis 137.

Seda punkti nimetatakse võrdkülgse kolmnurga keskpunktiks (joonis 137). See punkt on võrdsetel kaugustel tippudest ja võrdsetel kaugustel külgedest.

Ülesanded.

338. Joonestada nürinurkne kolmnurk ja selle sise- ja ümberringjoon.

339. Joonestada võrdkülgne kolmnurk küljega 5 cm ja leida selle keskpunkt.

340. Leida kolmnurga küljel punkt, mis on võrdsetel kaugustel kahest ülejäänud küljest.

341. Leida kolmnurga ühe nurga poolitajal punkt, mis on kolmnurga kahest ülejäänud tipust võrdsetel kaugustel.

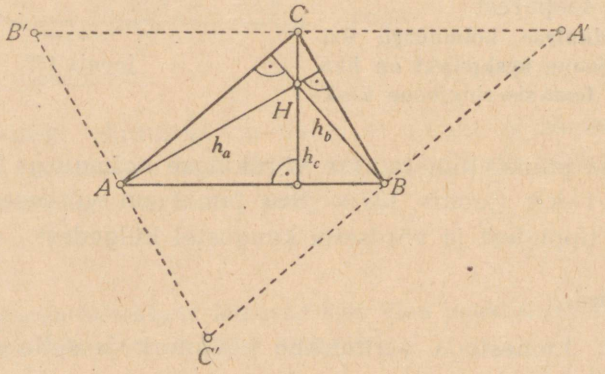
§ 63. Kolmnurga kõrgused.

Kolmnurga tipust selle vastasküljele või viimase pikendusele joonestatud ristlõiku nimetatakse kolmnurga kõrguseks. Et tippe on kolmnurgal kolm, siis on tal ka kolm kõrgust. Neid tähistatakse sümbolitega h_a, h_b ja h_c. Tõestame, et

kolmnurga kõrgused või nende pikendused lõikuvad kõik ühes punktis.

Tõestuseks joonestame läbi kolmnurga ABC iga tipu sirge rööbiti selle tipu vastasküljega (joonis 138). Nii saame uue kolmnurga $A'B'C'$, mille külgedega kolmnurga ABC kõrgused on vastavalt risti:

$$h_a \perp B'C', \quad h_b \perp A'C' \quad \text{ja} \quad h_c \perp A'B'.$$



Joonis 138.

Ühtlasi need kõrgused poolitavad kolmnurga $A'B'C'$ küljed. Tõepoolest, punkt A on külje $B'C'$ keskpunkt, sest

$$AB' = BC = C'A$$

kui rööpkülikute $ABCB'$ ja $C'BCA$ vastasküljed. Samal viisil võib veenduda, et punkt B on külje $A'C'$ keskpunkt ja punkt C on külje $A'B'$ keskpunkt. Niisiis kolmnurga ABC

kõrgused on risti kolmnurga $A'B'C'$ külgedega ja poolitavad neid külgi ehk, teisiti, nad on kolmnurga $A'B'C'$ külgede keskristsirgete lõigud. Et kolmnurga $A'B'C'$ külgede keskristsirged lõikuvad kõik ühes punktis, siis lõikuvad samas punktis ka kolmnurga ABC kõrgused või nende pikendused.

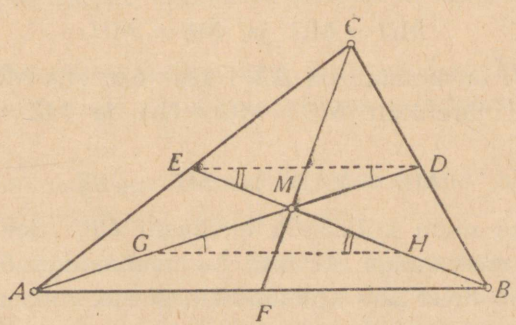
Ülesanded.

342. Joonestada nürinurkse kolmnurga kolm kõrgust ja leida nende lõikepunkt.

343. Kus lõikuvad teravnurkse, kus täisnurkse ja kus nürinurkse kolmnurga kõrgused või nende pikendid?

§ 64. Kolmnurga mediaanid.

Sirglõiku, mis ühendab kolmnurga tippu selle tipu vastaskülje keskpunktiga, nimetatakse küljepoolitajaks ehk mediaaniks (§ 29). Mediaane tähistatakse sümbolitega m_a, m_b ja m_c. Tõestame, et



Joonis 139.

kolmnurga mediaanid lõikuvad kõik ühes punktis; see punkt eraldab igast mediaanist ühe kolmandiku tema pikkusest.

Eeldus: $AE = CE$; $AF = BF$; $BD = CD$ (joonis 139).

V ä i d e: AD, BE ja CF lõikuvad ühes ja samas punktis M ning seejuures $MD = \frac{1}{3}AD$; $ME = \frac{1}{3}BE$ ja $MF = \frac{1}{3}CF$.

T õ e s t u s. Joonestame kolmnurga ABC mingid kaks mediaani, näiteks AD ja BE, ja tähistame nende lõikepunkti tähega M. Leiame lõikude AM ja BM keskpunktid G ja H; joonestame kolmnurga ABM kesklõigu GH ja kolmnurga ABC kesklõigu ED. Kolmnurga ABC kesklõik

$$ED \parallel AB \quad \text{ja} \quad ED = \frac{AB}{2};$$

kolmnurga AMB kesklõik

$$GH \parallel AB \quad \text{ja} \quad GH = \frac{AB}{2}.$$

Sellest järeldub, et

$$ED \parallel GH \quad \text{ja} \quad ED = GH.$$

Kuid siis

$$\triangle EDM \cong \triangle HGM,$$

sest neil on võrdsed üks külg ja selle kaks lähisnurka kui põiknurgad paralleelide juures. Nende kolmnurkade kongruentsusest järeldub, et

$$MD = MG \quad \text{ja} \quad ME = MH.$$

Aga et GH on kolmnurga ABM kesklõik, siis $MG = GA$ ja $MH = HB$; järelikult $MD = MG = GA$ ja $ME = MH = HB$, millest

$$MD = \frac{1}{3}AD \quad \text{ja} \quad ME = \frac{1}{3}BE.$$

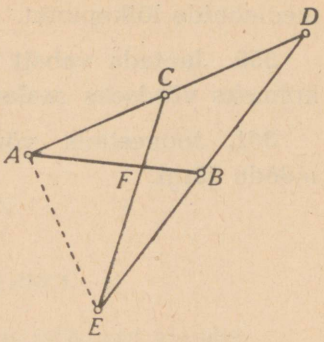
Joonestame nüüd kolmanda mediaani CF. See peab lõikuma nii mediaaniga AD kui ka mediaaniga BE punktis, mis eraldab neist ühe kolmandiku; seega kõik kolm mediaani lõikuvad ühes ja samas punktis M.

Kolmnurga mediaanide lõikepunkti nimetatakse tema r a s k u s p u n k t i k s. Toetades selles punktis näiteks ühtlase paksusega papist väljalõigatud kolmnurka, jääb see igas asendis tasakaalu.

Teoreem kolmnurga mediaanide lõikumisest annab võimaluse lõigu jaotamiseks kolmeks võrdseks osaks, nagu selgub järgnevast ülesandest.

Ülesanne. Leida antud lõigu AB kolmandik.

Lahendus. Tõmbame läbi punkti A vabalt kiire ja märgime sellel punktid C ja D nii, et $AC = CD$; sirgel DB märgime punkti E nii, et $EB = DB$. Siis sirge EC eraldab lõigust AB tema ühe kolmandiku (joonis 140).



Joonis 140.

Põhjendus. Sirgete AB ja EC lõikepunkt F on kolmnurga ADE mediaanide lõikepunkt ja teatavasti see eraldab igast mediaanist ühe kolmandiku. Seega $FB = \frac{1}{3} AB$.

Ülesanded.

344. Missugusel kolmnurgal ühtivad ühe külje poolitaja, sellele küljele tõmmatud kõrgus ja vastasnurga poolitaja?

345. Missugusel kolmnurgal ühtivad iga külje poolitaja, sellele küljele tõmmatud kõrgus ja vastasnurga poolitaja?

346. Tõestada, et täisnurkse kolmnurga hüpotenuusi poolitaja võrdub poole hüpotenuusiga.

347. Toetudes eelmise ülesande tulemusele leida, kui suur on nurk täisnurkse kolmnurga hüpotenuusi poolitaja ja täisnurga poolitaja vahel, kui kolmnurga üks nurk on 65°.

348. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusi poolitaja on risti ühe teravnurga poolitajaga. Leida kolmnurga teravnurkade suurused, kasutades ülesande 346 tulemust.

349. Leida täisnurkse kolmnurga siseringjoone keskpunkt, ümberringjoone keskpunkt, kõrguste lõikepunkt ja mediaanide lõikepunkt.

350. Jaotada vabalt võetud lõik sirkli ja joonlaua abil kolmeks võrdseks osaks.

351. Joonestada võrdkülgne kolmnurk tema ümbermõõdu järgi.

Peatükk IX.

Sirgjoon ja ringjoon.

§ 65. Sirgjoone ja ringjoone vastastikused asendid.

Eespool nägime, et läbi kolme punkti, mis ei asetse ühel ja samal sirgel, saab ikka joonestada ringjoone ja seejuures ainult ühe (§ 61). Kui aga kolm punkti on ühel sirgel, siis ei leidu ringjoont, mis neid läbiks. Viimasest tõsiasjast järeldub kergesti, et

sirgjoonel ja ringjoonel saab olla ülimalt kaks ühist punkti.

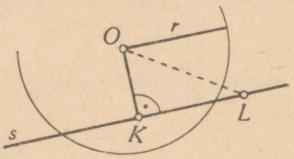
Tõepoolest, kui sirgel s oleks mingi ringjoonega kolm ühist punkti, siis läbi nende kolme punkti sirgel s läheks ringjoon; see aga on võimatu.

Niisiis jääb üle, et sirgjoonel ja ringjoonel võib olla kas kaks ühist punkti või üks ühine punkt või neil ei ole ühtki ühist punkti. Esimesel juhul sirgjoon on ringjoone *lõikaja*, teisel juhul *puutuja* (§ 23), kolmandal juhul sirge on täielikult väljaspool ringi. Missuguse juhuga neist kolmest on tegemist, seda näitab ringjoone keskpunkti kaugus sirgest:

sirgjoon lõikab ringjoont või puudutab ringjoont või on täielikult väljaspool ringi vastavalt sellele, kas ringjoone keskpunkti kaugus sirgest on väiksem kui raadius, võrdub raadiusega või on suurem kui raadius.

Tõestus. Keskpunkti kaugus sirgest on keskpunktist selle sirgeni tõmmatud ristlõigu pikkus (§ 14).

1. Eeldame, et $OK \perp s$ ja $OK < r$ (joonis 141). Siis sirge s punkt K on ringi sees, sest tema kaugus keskpunktist on väiksem kui raadius (§ 15). Teiselt poolt leidub sirgel s punkte, mis on väljaspool ringi; näiteks punkt L on väljaspool ringi (joonis 141), kui $KL = r$, sest siis



Joonis 141.

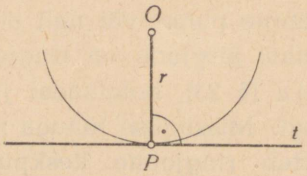
$$OL > KL$$

ehk

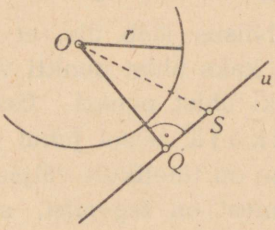
$$OL > r.$$

Et sirge s punkt L on väljaspool ringi, punkt K aga seespool, siis nende vahel peab leiduma punkt, kus sirge s lõikab ringjoont. Selle punktiga sirge OK suhtes sümmeetriline punkt on siis teiseks sirge s ja ringjoone lõikepunktiks. Niisiis sirge s on ringjoone lõikaja.

2. Eeldame, et $OP \perp t$ ja $OP = r$ (joonis 142). Nüüd punkt P on ringjoonel, sest tema kaugus keskpunktist on



Joonis 142.



Joonis 143.

võrdne raadiusega; seega P on sirgjoone ja ringjoone ühine punkt. Varem tõestasime (§ 23), et see punkt on

nende joonte a i n u s ühine punkt, s. t. sirge t on ringjoone puutuja.

3. Eeldame, et $OQ \perp u$ ja $OQ > r$ (joonis 143). Siis sirge u punkt Q on väljaspool ringi, sest tema kaugus keskpunktist $QO > r$. Sirge u iga muu punkti S kaugus ringjoone keskpunktist on aga suurem kui punkti Q kaugus, sest SO kui kaldlõik on pikem ristlõigust QO. Niisiis sirge u k õ i k punktid on väljaspool antud ringi.

Ülesanded.

352. Joonestada ringjoon raadiusega 3,5 cm ja selles kolm lõikajat, mis asetsevad keskpunktist 2,5 cm kaugusel. Kuidas asetsevad need lõikajad niisuguse ringjoone suhtes, mille raadius on 2,5 cm ja keskpunkt ühtib eelmise ringjoone keskpunktiga?

353. Joonestada ringjoon, mille raadius on 2,7 cm ja mis läbib punktid A ja B, kui lõik $AB = 4{,}2$ cm. Mõõtmise teel leida, kui kaugel on lõikaja AB ringjoone keskpunktist.

354. Antud on ringjoon. Leida sirkli ja joonlaua abil (ilma katsetamiseta) selle ringjoone keskpunkt.

355. Antud on sirge ja väljaspool seda kaks punkti. Joonestada ringjoon, mis läbib antud punktid ja mille keskpunkt asetseb antud sirgel. Missugusel andmete valikul see ülesanne ei ole lahenduv?

§ 66. Ringjoone puutuja omadused.

Tõestame, et

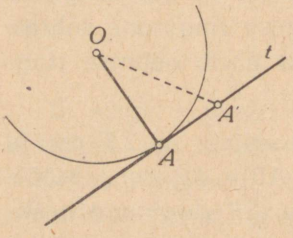
ringjoone puutuja on risti puutepunkti tõmmatud raadiusega.

Olgu sirge t ringjoone $O(A)$ puutuja punktis A (joonis 144). Tõestame, et $OA \perp t$. Rakendades vastuväitelist tõestust oletame, et OA e i o l e risti sirgega t ja tõm-

bame siis punktist O sirgeni t lõigu OA', mis on risti selle sirgega. Siis OA' kui ristlõigu pikkus on keskpunkti O kaugus sirgest t. Ühtlasi see kaugus on väiksem kaldlõigust OA, seega väiksem ringi raadiusest. Kuid siis sirge t on ringjoone lõikaja (§ 65). See tulemus on aga vastuolus teoreemi eeldusega, mille järgi t on ringjoone puutuja; järelikult oletus, et OA ei ole risti sirgega t, ei ole õige. Õige on siis, et $OA \perp t$.

Tõestame, et on õige ka eelmise pöördteoreem

raadiuse ristsirge, mis läbib tema otspunkti ringjoonel, on ringjoone puutuja.



Joonis 144.

Läbigu sirge t raadiuse OA otspunkti ringjoonel, s. o. punkti A ja olgu $t \perp OA$ (joonis 144). Siis OA pikkus on keskpunkti O kaugus sirgest t, sest eelduse järgi $OA \perp t$. Et see kaugus on võrdne raadiusega, siis eelmise paragrahvi järgi sirge t on ringjoone puutuja, nagu tahtsime tõestada.

Viimane teoreem võimaldab ehitada ringjoonele puutujat, kui puutepunkt on antud: puutuja saamiseks joonestame läbi puutepunkti ristsirge raadiusele, mille otspunktiks on antud puutepunkt. Et selliseid sirgeid on ainult üks, siis ringjoone iga punkti läbib ainult üks puutuja.

Ehitame ringjoonele puutujad läbi antud puutepunktide A ja B (joonis 145). Need kaks puutujat kas lõikuvad kuski punktis D või on paralleelsed. Eeldame, et nad lõikuvad, ja tõestame sel puhul järgmise teoreemi:

puutujate lõikepunkt on puutepunktidest võrdsetel kaugustel.

Eeldus: sirged AD ja BD on puutujad (joonis 145).

Väide: $AD = BD$.

Tõestus. Ühendame punktid C ja D; siis tunnuse KkN järgi

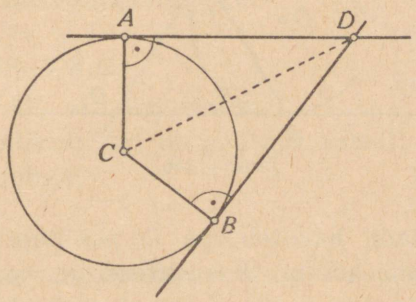
$$\triangle ADC \cong \triangle BDC,$$

sest CD on ühine külg,

$$\angle A = \angle B \text{ ja } AC = BC.$$

Järelikult

$$AD = BD$$



Joonis 145.

kui kongruentsete kolmnurkade vastavad küljed.

Vaatleme nüüd kõõlu AB koos selle otspunktidest joonestatud puutujatega AD ja BD (joonis 146). Et eelmise teoreemi järgi $AD = BD$, siis $\triangle ABD$ on võrdhaarne, mistõttu

$$\angle DAB = \angle DBA.$$

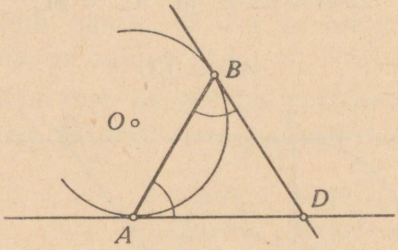
See tähendab, et

kõõlu otspunktidest joonestatud puutujad moodustavad kõõluga nurgad, mis on võrdsed.

Kui kõõl AB läbib ringjoone keskpunkti, siis nurgad kõõlu ja puutujate vahel on täisnurgad, sest kumbki neist on siis puutepunkti tõmmatud raadiuse ja puutuja vaheliseks nurgaks. Sel juhul puutujad ei lõiku, sest nad on siis ühe ja sama sirge AB ristsirged.

Puutujate vahelist nurka, mille sees on ringjoon, nimetatakse haardenurgaks ($\angle ADB$ joonisel 146). Olgu puutuja ja kõõlu vaheline teravnurk α ning haardenurk δ; kolmnurgast ABD (joonis 146) saame siis, et

$$2\alpha + \delta = \pi.$$



Joonis 146.

Kui joonestada haardenurga D poolitaja (joonis 146), siis peame saama kõõlu AB keskristsirge, sest võrdhaarse kolmnurga tipunurga poolitaja on aluse keskristsirgel. Et kõõlu keskristsirge läbib ringjoone keskpunkti (§ 21), siis ka

haardenurga poolitaja läbib ringjoone keskpunkti.

Vaatleme nüüd puutuja ehitamist juhul, kui puutepunkt ei ole antud.

Ülesanne. Konstrueerida ringjoonele puutuja läbi punkti väljaspool ringjoont.

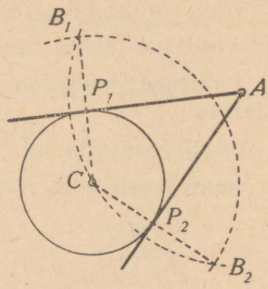
Lahendus (joonisel 147). Joonestame antud ringjoone keskpunkti C ümber uue ringjoone raadiusega, mis võrdub antud ringjoone diameetriga, ja antud punkti A ümber ringjoone, mis läbib keskpunkti C. Lõikugu need kaks uut ringjoont punktides B_1 ja B_2. Joonestame sirglõigud B_1C ja B_2C; lõigaku need antud ringjoont punktides P_1 ja P_2. Nii sirge AP_1 kui ka sirge AP_2 on siis antud ringjoone puutujad läbi punkti A.

P õ h j e n d u s. Punkti A ühendamisel punktidega B_1 ja C tekiks võrdhaarne kolmnurk AB_1C, sest

$$AC = AB_1$$

kui ühe ja sama ringjoone raadiused. Konstruktsiooni järgi on punkt P_1 selle kolmnurga aluse keskpunkt; et võrdhaarse kolmnurga tipu ja aluse keskpunkti ühenduslõik on kolmnurga kõrgus, siis

$$AP_1 \perp B_1C.$$



Joonis 147.

Seega sirge AP_1 on risti raadiusega P_1C, järelikult AP_1 on puutuja. Samuti saame näidata, et AP_2 on puutuja.

Ülesanded.

356. Joonestada puutuja, kui on antud ringjoone keskpunkt ja puutepunkt.

357. Joonestada ringjoonele, mille raadius on 3 cm, puutujad läbi punkti, mille kaugus ringjoone keskpunktist on 5 cm.

358. On antud ringjoone kaks puutujat ja puutepunkt ühel neist. Joonestada ringjoon.

359. Joonestada kaks ristuvat puutujat ringjoonele, mille raadius on 2,5 cm.

360. Ringjoone kaks paralleelset puutujat lõikuvad kolmanda puutujaga punktides A ja B. Tõestada, et $\triangle ABO$ on täisnurkne, kui punkt O on ringjoone keskpunkt.

§ 67. Puutujanelinurk.

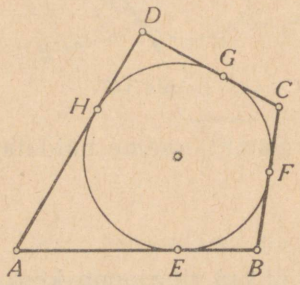
Joonestame ringjoonele puutujad väljaspool ringjoont olevast punktist A ja veel teise paari puutujaid punktist C,

mis on nurga A sees (kuid teisel pool ringjoont). Need puutujad lõikuvad kahes punktis B ja D, moodustades puutujanelinurga (joonis 148). Antud ringjoont nimetatakse selle nelinurga siseringjooneks.

Puutujanelinurk on nelinurk, mille küljed on ringjoone puutujateks.

Saab tõestada, et

puutujanelinurga vastaskülgede summad on võrdsed.



Joonis 148.

Eeldus: $ABCD$ on puutujanelinurk (joonis 148).

Väide: $AB + CD = BC + AD$.

Tõestus. Tähistame külgede ja ringjoone puutepunkte tähtedega E, F, G ja H, nagu näidatud joonisel. Et puutujate lõikepunkt on puutepunktidest võrdsetel kaugustel, siis $AE = AH$, $BE = BF$, $CG = CF$ ja $DG = DH$.

Avaldame nende lõikude kaudu vastaskülgede summa $AB + CD$:

$$AB + CD = AE + BE + CG + DG$$

ehk, asendades AE, BE jne. nendega võrdsete lõikudega,

$$AB + CD = AH + BF + CF + DH.$$

Et $BF + CF = BC$ ja $AH + DH = AD$, siis

$$AB + CD = BC + AD.$$

Tõestatud teoreemist selgub, et nelinurk ei saa olla ringjoone puutujanelinurgaks, kui tema vastaskülgede summad ei ole võrdsed. Näiteks rööpkülik, mis ei ole romb, ei saa olla puutujanelinurgaks, sest tema vastaskülgede summad ei ole võrdsed; teisiti: niisugusel rööpkülikul puudub siseringjoon.

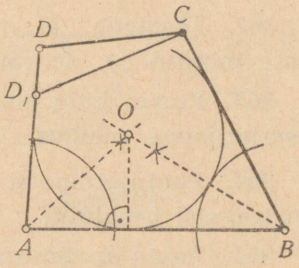
Vastuse küsimusele, missugusel nelinurgal leidub siseringjoon, annab eelmise pöördteoreem:

kui nelinurga vastaskülgede summad on võrdsed, siis nelinurk on puutujanelinurk.

Eeldus: $AB + CD = BC + AD$ (joonis 149).

Väide: $ABCD$ on puutujanelinurk.

Tõestus. Leiame A ja B poolitajate lõikepunkti O ja joonestame ringjoone, mille keskpunktiks on O ja raadiuseks on selle punkti kaugus küljest AB. Et nurgapoolitajate lõikepunkt on nurga haaradest võrdsetel kaugustel, siis joonestatud ringjoon puudutab külgi AD, AB ja BC. Näitame, et ta peab puudutama ka külge CD. Selleks oletame katseks, et CD ei ole puutuja ja joonestame puutuja CD_1. Siis $ABCD_1$ on puutujanelinurk ja eelmise teoreemi järgi



Joonis 149.

$$AB + CD_1 = BC + AD_1.$$

Eelduse järgi aga

$$AB + CD = BC + AD.$$

Lahutades alumise võrduse pooltest ülemise võrduse vastavad pooled saame

$$CD - CD_1 = AD - AD_1$$

ehk

$$CD - CD_1 = DD_1.$$

Et saadud võrduse vasak pool on kolmnurga CDD_1 kahe külje vahe, parem pool aga selle kolmnurga kolmas külg, siis viimane võrdus ei ole õige (§ 30). Järelikult ei ole

õiged ka eelnevad võrdused ja ei ole õige oletus, mille alusel need võrdused saime. Kuid siis on õige, et CD on puutuja, ja seega nelinurk $ABCD$ on puutujanelinurk.

Ülesanded.

361. Kõõlu otspunktidest tõmmatud puutujad moodustavad haardenurga 72°. Leida puutuja ja kõõlu vaheline nurk.

362. Tõestada, et rööpkülik, millele saab ringjoont sisse joonestada, on romb.

363. Rombi külg on 12 cm ja üks nurk on 30°. Leida siseringjoone raadius. Näpunäide: vt. ülesanne 250.

364. Puutujatrapetsi ümbermõõt on 18 cm. Kui pikk on trapetsi kesklõik?

365. Puutujanelinurga kolm nurka on 76°, 114° ja 98°. Kui suured nurgad on nelinurgal, mille tippudeks on puutepunktid?

§ 68. Kahe ringjoone vastastikused asendid.

Kui kahel ringjoonel on kolm ühist punkti, siis need ringjooned ühtivad, sest läbi kolme punkti (mis ei ole ühel sirgel) läheb ainult üks ringjoon (§ 61). Sellest järeldub, et

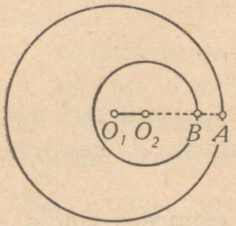
kahel erineval ringjoonel saab olla ülimalt kaks ühist punkti.

Vaatleme kahe ringjoone vastastikuseid asendeid sõltuvalt nende ühiste punktide arvust. Olgu ringjoonte raadiused r_1 ja r_2, kusjuures $r_1 > r_2$. Tähistame nende keskpunktide O_1 ja O_2 vahelise kauguse tähega d: $d = O_1O_2$.

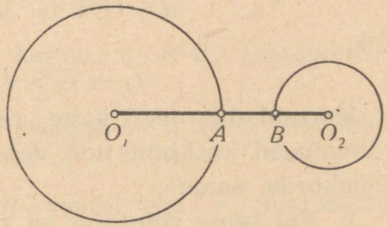
I. Kui ringjoonel ei ole ühtki ühist punkti, siis teine ringjoon on kas täielikult esimeses ringis (joonis 150) või täielikult väljaspool esimest ringi (joonis 151). Esimesel juhul (joonis 150)

$O_1A > O_1O_2 + O_2B$ ehk $r_1 > d + r_2$ ehk
$d < r_1 - r_2$.

Teisel juhul (joonis 151) $O_1O_2 > O_1A + O_2B$ ehk
$d > r_1 + r_2$.



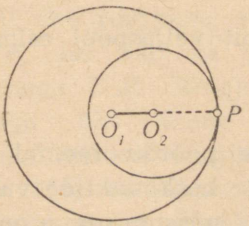
Joonis 150.



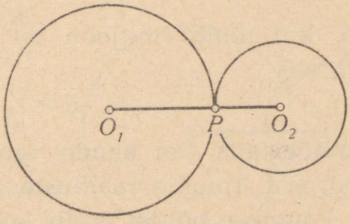
Joonis 151.

II. Kui ringjoontel on üks ühine punkt, siis teine ringjoon puudutab esimest kas seestpoolt (joonis 152) või väljastpoolt (joonis 153). Esimesel juhul (joonis 152)

$O_1O_2 + O_2P = O_1P$ ehk $O_1O_2 = O_1P - O_2P$ ehk
$d = r_1 - r_2$.



Joonis 152.



Joonis 153.

Teisel juhul (joonis 153) $O_1O_2 = O_1P + O_2P$ ehk
$d = r_1 + r_2$.

III. Kui ringjoontel on kaks ühist punkti, siis need jooned lõikuvad (joonis 154). Nende keskpunktid koos ühe lõikepunktiga moodustavad kolmnurga O_1O_2L, milles

$$O_1O_2 < O_1L + O_2L \text{ ja } O_1O_2 > O_1L - O_2L$$

ehk

$$d < r_1 + r_2 \text{ ja } d > r_1 - r_2$$

ehk

$$r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2.$$

Korraldades need kahe ringjoone vastastikuse asendi võimalused keskpunktide vahelise kauguse d kasvavasse järjekorda, saame:

1. kui teine ringjoon on täielikult esimeses ringis, siis
$$d < r_1 - r_2;$$
2. kui teine ringjoon puudutab esimest seestpoolt, siis
$$d = r_1 - r_2;$$
3. kui teine ringjoon lõikab esimest ringjoont, siis
$$d > r_1 - r_2 \text{ ja } d < r_1 + r_2;$$
4. kui teine ringjoon puudutab esimest väljastpoolt, siis
$$d = r_1 + r_2;$$
5. kui teine ringjoon on täielikult väljaspool esimest ringi, siis
$$d > r_1 + r_2.$$

Saab tõestada, et nende teoreemide pöördteoreemid on õiged, s. t. ringide raadiuste ja nende keskpunktide vahelise kauguse põhjal saab otsustada, missuguses asendis on need ringjooned teineteise suhtes. Kui on teada näiteks, et

$$d = 17 \text{ cm}, \ r_1 = 20 \text{ cm ja } r_2 = 8 \text{ cm}$$

siis

$$r_1 - r_2 = 12 \text{ cm ja } r_1 + r_2 = 28 \text{ cm};$$

see tähendab, et

$$r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2.$$

Tulemus ütleb, et ringjooned lõikuvad.

Ülesanded.

366. Kuidas asetsevad teineteise suhtes kaks ringjoont, kui nende

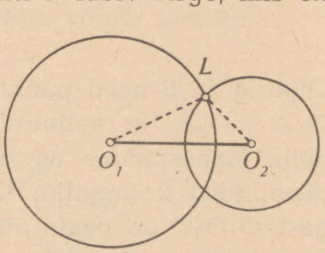
1. keskpunktide vaheline kaugus on 4 cm ja raadiused on 9 cm ning 5 cm;

2. keskpunktide vaheline kaugus on 3 dm ja raadiused on 1,8 dm ning 1,4 dm.

367. Kolm võrdset ringi raadiusega r puudutavad üksteist väljastpoolt. Kui suured nurgad ja küljed on kolmnurgal, mille tippudeks on puutepunktid?

§ 69. Kahe ringjoone ühised puutujad.

Kui ühe ringjoone kõik punktid on teises ringis (joonis 150), siis esimese ringjoone kõik puutujad on teise ringjoone lõikajaiks, järelikult ühiseid puutujaid neil ringjoontel ei ole. Kui üks ringjoon puudutab teist seestpoolt (joonis 152), siis nende ühist punkti P läbiv sirge, mis on risti ühe ringjoone raadiusega O_1P, on risti ka teise raadiusega O_2P. Ringjoontel on seega üks ühine puutuja. Kahel lõikuval ringjoonel (joonis 154) on nähtavasti kaks ühist puutujat. Nimetame neid *välisteks* puutujateks. Nende olemasolu kinnitab alljärgnev puutujate konstruktsioon. Kui üks ringjoon puudutab teist väljastpoolt (joonis 153), siis neil leidub kolm puutujat: kaks välist ja üks

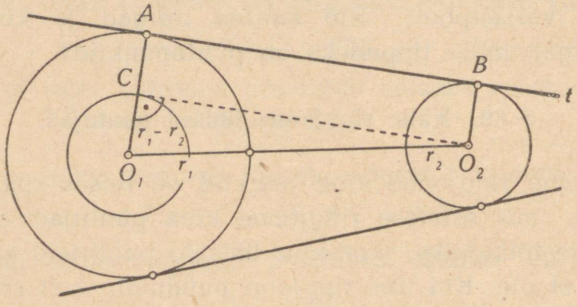


Joonis 154.

sisemine. Viimane on risti ringjoonte keskpunktide ühenduslõiguga. Lõpuks, kui üks ringjoon on täielikult väljaspool teist ringi (joonis 151), siis neil on neli ühist puutujat: kaks välist ja kaks sisemist.

Ülesanne. Antud kahele ringjoonele joonestada ühine väline puutuja.

Analüüs. Kui ringjooned on antud, siis on teada nende keskpunktid ja raadiused. Olgu O_1 (r_1) üks ringjoon, O_2 (r_2) teine ringjoon ja t nende ühine puutuja (joonis 155). Puutuja joonestamiseks on vaja leida tema kaks punkti, näiteks puutepunktid.



Joonis 155.

Olgu A ja B need punktid. Siis $O_1A \perp t$ ja $O_2B \perp t$, seega $O_1A \parallel O_2B$, ja nelinurk O_1ABO_2 on täisnurkne trapets. Selle joonestamine on teostatav, kui oskame joonestada täisnurkset kolmnurka O_1O_2C, kus $O_2C \perp O_1A$. Kolmnurgast O_1O_2C on peale nurga C teada veel tipud O_1 ja O_2 ning külje O_1C pikkus, mis võrdub raadiuste r_1 ja r_2 vahega (sest $O_1C = O_1A - CA = O_1A - O_2B = r_1 - r_2$).

Kolmnurga O_1O_2C joonestamiseks tõmbame punktist O_2 puutuja ringjoonele, mille keskpunkt on O_1 ja raadius on $r_1 - r_2$.

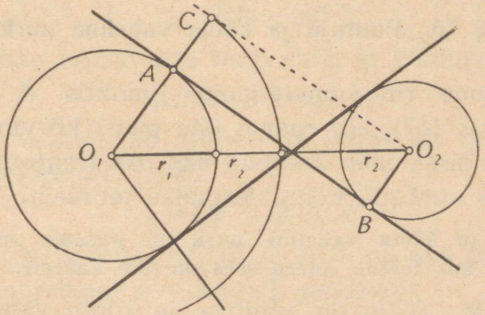
K o n s t r u k t s i o o n. Ümber punkti O_1 kui keskpunkti joonestame ringjoone raadiusega $r_1 - r_2$, tõmbame sellele punktist O_2 puutuja O_2C (§ 66) ja pikendame puutepunkti tõmmatud raadiust O_1C kuni lõikumiseni antud ringjoonega punktis A, mis on üks otsitav puutepunkt. Teiseks puutepunktiks B on üks neist punktidest, kus ringjoon raadiusega CO_2 ümber punkti A lõikab teist antud ringjoont. Sirge AB on puutuja.

P õ h j e n d u s. Nelinurk ABO_2C on ristkülik, sest konstruktsiooni järgi $AB = CO_2$, $AC = BO_2$ ja $\angle C = 90°$. Et ristküliku nurgad on täisnurgad, siis $AB \perp AO_1$ ja $AB \perp BO_2$, seega AB on ringjoonte ühine puutuja.

L a h e n d i u u r i m i n e. Ülesanne on lahenduv niipea, kui saab joonestada täisnurkse kolmnurga O_1O_2C. Sellest on antud hüpotenuus ja üks kaatet. Et hüpotenuus peab olema pikem kui kaatet, siis $O_1O_2 > O_1C$ ehk

$$d > r_1 - r_2.$$

See nõue on täidetud, kui teine ringjoon kas lõikab esimest või puudutab esimest väljastpoolt või on täielikult väljaspool esimest ringi (§ 68). Niisiis neil juhtudel on olemas väline puutuja. Joonise sümmeetria tõttu sirge O_1O_2 suhtes on siis olemas veel teine väline puutuja.



Joonis 156.

Kahe ringjoone sisemise puutuja konstruktsioon erineb välise puutuja konstruktsioonist sellepoolest, et abiringjoon O_1 (C) tuleb joonestada nüüd raadiusega $r_1 + r_2$ (joonis 156).

Ülesanded.

368. Joonestada kahe ringjoone ühised puutujad, kui ringjooned puudutavad teineteist väljastpoolt.

369. Kahe ringjoone keskpunktide vaheline kaugus on 8,5 cm ja raadiused on 3,5 cm ning 2 cm. Joonestada ringjoonte ühised puutujad.

370. Antud on kaks paralleelset sirget ja nende lõikaja. Joonestada ringjoon, millele antud kolm sirget on puutujaiks.

371. Võtta vabalt kolm sirget, milledel on kolm lõikepunkti ja joonestada ringjooned, mis puudutavad igat võetud sirget.

372. Kahe ringjoone ühised sisemised puutujad on teineteisega risti. Leida ringjoonte keskpunktide vaheline kaugus, kui puutepunkte ühendavate kõõlude pikkused on 4 cm ja 3 cm.

§ 70. Puutuja ja kõõlu vaheline nurk.

Joonestame ringjoonele tema punktis A puutuja ja kõõlu (joonis 157). Nii saame ühe paari kõrvunurki; kummagi nurga sisse jääb kaarena üks osa ringjoonest. Tõestame nende nurkade kohta järgmise teoreemi:

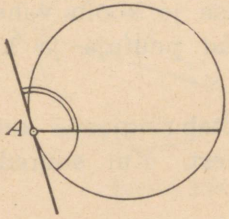
puutuja ja kõõlu vaheline nurk on niisama suur kui pool kesknurgast, mis toetub nurga sees olevale kaarele.

E e l d u s: DAB on puutuja ja kõõlu vaheline teravnurk; diameeter EF poolitab kesknurga ACB (joonis 158).

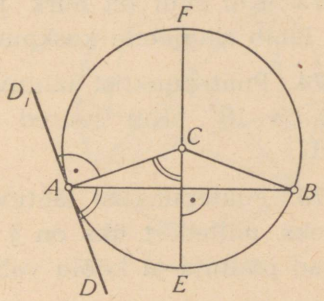
Väide: $\angle DAB = \angle ACE$; $\angle D_1AB = \angle ACF$.

Tõestus. Kui diameeter EF poolitab kesknurga ACB, siis EF on risti kõõluga AB, sest võrdhaarse kolmnurga ABC tipunurga C poolitaja on risti alusega AB. Nüüd selgub, et nurgad DAB ja ACE on vastavalt ristuvate haaradega teravnurgad, sest

$$DA \perp AC$$



Joonis 157.



Joonis 158.

kui puutuja ja puutepunktist lähtuv raadius ning

$$AB \perp CE,$$

nagu selgus eespool; ühtlasi aga

$$\angle ACE < 90°$$

kui täisnurkse kolmnurga teravnurk ja eelduse järgi ka

$$\angle DAB < 90°.$$

Niisiis vaadeldavad nurgad on vastavalt ristuvate haaradega teravnurgad, seega

$$\angle DAB = \angle ACE.$$

Nende kõrvunurgad D_1AB ja ACF on siis aga vastavalt ristuvate haaradega nürinurgad, järelikult

$$\angle D_1AB = \angle ACF.$$

Varem nägime (§ 19), et kesknurk mõõtub temale toetuva kaarega. Kasutades seda väljendit puutuja ja kõõlu vahelise nurga kohta saame öelda, et

puutuja ja kõõlu vaheline nurk mõõtub poolega nurga sees olevast kaarest.

Ülesanded.

373. Kui suur on nurk puutuja ja kõõlu vahel, kui kõõl läbib ringjoone keskpunkti?

374. Puutepunktist lähtuva raadiuse ja kõõlu vaheline nurk on 18°. Kui suured on nurgad puutuja ja kõõlu vahel?

375. Puutepunktist lähtuv kõõl jaotab ringjoone kaheks kaareks, milledest üks on $\frac{2}{5}$ ringjoonest. Kui suured on nurgad puutuja ja kõõlu vahel?

376. Puutuja ja kõõlu vahelise nurga sees olev kaar on 79°16′. Kui suured on nurgad puutuja ja kõõlu vahel?

377. Kahe raadiuse otspunktidest on joonestatud puutujad. Kui suur on nurk puutujate vahel, kui raadiuste vaheline nurk on 140°?

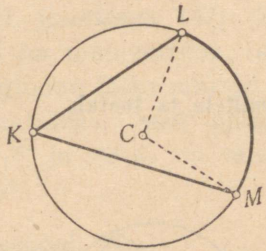
378. Tõestada, et haardenurk mõõtub poolega nende kaarte vahest, milledeks puutepunktid jaotavad ringjoone.

§ 71. Piirdenurk.

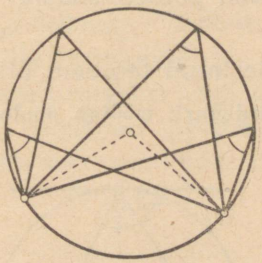
Joonestame ringjoone kaks ühise otspunktiga kõõlu *KL* ja *KM* (joonis 159). Need kõõlud moodustavad nurga *LKM*, mille tipp on ringjoonel; niisugust nurka nimetatakse piirdenurgaks.

Piirdenurk on nurk kahe kõõlu vahel, milledel on ühine otspunkt.

Iga piirdenurk toetub kaarele, millele toetub ka üks kesknurk: piirdenurk LKM toetub kaarele LM, millele toetub ka kesknurk LCM. Kuid ühele ja samale kaarele toetub määratupalju piirdenurki (joonis 160), sest piirdenurga tipuks võime valida mistahes punkti selle ringjoone ülejäänud kaarel.



Joonis 159.



Joonis 160.

Saab tõestada, et kõik piirdenurgad, mis toetuvad ühele ja samale kaarele, on võrdsed. Selleks tõestame enne, et

piirdenurga suurus on pool samale kaarele toetuva kesknurga suurusest.

E e l d u s: α on piirdenurk ja α_1 on kesknurk, mis toetuvad ühele ja samale kaarele (joonis 161)

V ä i d e: $\alpha = \frac{1}{2}\alpha_1$.

T õ e s t u s. Joonestame puutuja läbi piirdenurga α tipu (joonis 161). Eelmise teoreemi järgi puutuja ja kõõlu vaheline nurk

$$\beta = \tfrac{1}{2}\beta_1,$$

sest kesknurk β_1 toetub kaarele, mis on nurga β sees. Samuti puutuja ja kõõlu vaheline nurk

$$\alpha + \beta = \tfrac{1}{2}\,(\alpha_1 + \beta_1),$$

sest kesknurk $\alpha_1 + \beta_1$ toetub kaarele, mis on nurga $\alpha + \beta$ sees. Avades sulud teise võrduse paremal poolel saame

$$\alpha + \beta = \tfrac{1}{2}\,\alpha_1 + \tfrac{1}{2}\,\beta_1;$$

lahutades sellest ülalsaadud võrduse

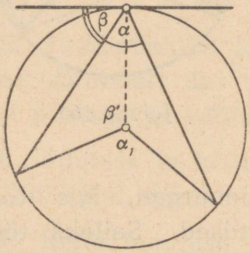
$$\beta = \tfrac{1}{2}\beta_1$$

vastavad pooled saame

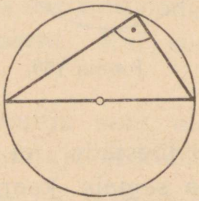
$$\alpha = \tfrac{1}{2}\alpha_1.$$

Tõestatud teoreem ütleb, et

piirdenurk mõõtub poolega kaarest, millele ta toetub.



Joonis 161.



Joonis 162.

Järeldused.

1. Ühele ja samale kaarele toetuvad piirdenurgad on võrdsed,

sest igaüks neist mõõtub poolega ühest ja samast kaarest.

2. Diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk,

sest vastav kesknurk on kaks täisnurka.

Viimast järeldust, mida nimetatakse Thales'e * teoreemiks, saab kasutada täisnurkse kolmnurga ehitamiseks hüpotenuusi ja kaateti järgi. Selleks joonestame (joonis

* *Thales*, kreeka filosoof, elas VI saj. 1. poolel e. m. a.

162) ringjoone, mille diameetriks on hüpotenuus, ja mõõdame diameetri ühest otspunktist kõõlu, mis võrdub antud kaatetiga. Selle kõõlu otspunkti ühendamisel diameetri teise otspunktiga saame täisnurkse kolmnurga, sest diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk.

Thales'e teoreem annab uue võimaluse ringjoonele puutujate ehitamiseks väljaspool ringjoont antud punktist (vrd. joonisega 147): joonestame ringjoone, millele lõik AC on diameetriks, ja leiame selle ringjoone ja antud ringjoone lõikepunktid P_1 ja P_2; need punktid ongi puutepunktideks, sest diameetrile AC toetuvad piirdenurgad AP_1C ja AP_2C on täisnurgad. Teostada see konstruktsioon!

Ülesanded.

379. Kui suur piirdenurk toetub kaarele 40°, 75°, 118°20′, 131°48′?

380. Piirdenurk toetub kaarele, mis on 76° võrra väiksem ülejäänud ringjoone osast. Kui suur on piirdenurk?

381. Ümber kolmnurga, milles $\angle A = 58°40'$ ja $\angle B = 72°30'$, on joonestatud ringjoon. Kui suurteks kaarteks jaotavad kolmnurga tipud selle ringjoone?

382. Ringjoonel asetsevad järjestikku punktid A, B, C ja D nii, et $\overset{\frown}{AB}$ on $\frac{1}{5}$ ringjoonest, $\overset{\frown}{BC}$ on $\frac{1}{6}$ ringjoonest ja $\overset{\frown}{CD}$ on $\frac{3}{10}$ ringjoonest. Kui suured nurgad on nelinurgal $ABCD$?

383. Kaks ringjoont lõikuvad punktides A ja B. Punktist A on joonestatud mõlema ringjoone diameetrid AC ja AD. Tõestada, et punktid B, C ja D asetsevad ühel ja samal sirgel.

384. Tõestada, et võrdsetele kaartele toetuvad võrdsed piirdenurgad.

385. Ringjoonel on tähistatud võrdsed kaared AB ja CD. Tõestada, et AC ja BD on kas võrdsed või paralleelsed lõigud.

386. Antud sirglõik $AB = 3{,}5$ cm. Joonestada ringjoon, milles kõõlule AB toetuv piirdenurk on $60°$.

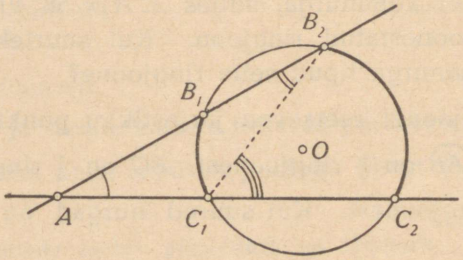
387. Antud sirglõik $AB = 4$ cm. Leida punktid, milledest lõik AB paistab täisnurgas.

388. Antud on sirge s ja väljaspool seda lõik AB. Leida, kas sirgel s on punkte, millest lõik AB oleks näha nurgas $60°$.

§ 72. Ringjoone lõikajate vaheline nurk.

Ringjoone kaks lõikajat on kas paralleelsed või lõikuvad. Eeldame, et nad lõikuvad väljaspool ringi, ja tõestame järgmise teoreemi:

väljaspool ringi lõikuvate lõikajate vaheline nurk mõõtub selle nurga sees olevate kaarte poole vahega.



Joonis 163.

E e l d u s: A sees on ringjoone kaared B_1C_1 ja B_2C_2 kus $B_2C_2 > B_1C_1$ (joonis 163).

V ä i d e: $\angle A$ mõõtarv on sama mis $\frac{1}{2}\,(\overset{\frown}{B_2C_2} - \overset{\frown}{B_1C_1})$ mõõtarv.

T õ e s t u s. Joonestame kõõlu B_2C_1; siis

$$\angle B_2C_1C_2 = \angle A + \angle AB_2C_1,$$

sest kolmnurga välisnurk võrdub temaga mitte kõrvuti asetsevate sisenurkade summaga. Siis

$$\angle A = \angle B_2C_1C_2 - \angle AB_2C_1.$$

Et esimene neist kui kaarele B_2C_2 toetuv piirdenurk mõõtub poolega kaarest B_2C_2 ja teine kui piirdenurk mõõtub poolega kaarest B_1C_1, siis nende vahe mõõtub saadud poolkaarte vahega ehk, mis on sama, nende kaarte vahe poolega; s. t.

$\angle A$ mõõtarv on sama mis $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{B_2C_2} - \overset{\frown}{B_1C_1})$ mõõtarv.

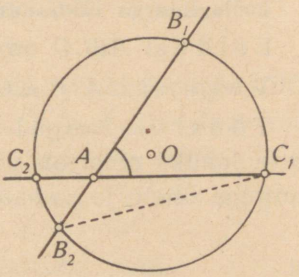
Olgu nüüd lõikajate ühine punkt ringi sees (joonis 164). Näitame, et

ringi sees lõikuvate lõikajate vaheline nurk mõõtub selle nurga ja tema tippnurga sees olevate kaarte poole summaga.

Joonestame endiselt kõõlu B_2C_1; et nüüd $\angle A$ on kolmnurga AB_2C_1 välisnurk, siis

$$\angle A = \angle AB_2C_1 + \angle AC_1B_2.$$

$\angle AB_2C_1$ kui piirdenurk mõõtub poolega kaarest B_1C_1 ja $\angle AC_1B_2$ mõõtub poolega kaarest B_2C_2. Nimetatud nurkade summa mõõtub siis saadud poolkaarte summaga, ehk, mis on sama, nende kaarte poole summaga. Niisiis $\angle A$ mõõtarv on sama mis $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{B_1C_1} + \overset{\frown}{B_2C_2})$ mõõtarv. Kaared B_1C_1 ja B_2C_2 on aga nurga A ja tema tippnurga sees, seega väide on õige.



Joonis 164.

Kõrvutades need teoreemid teoreemiga piirdenurga suurusest näeme, et a i n u l t piirdenurk mõõtub nurga sees oleva kaare poolega; kui nurga tipp on ringi sees, siis nurk on suurem kui sama kaarele toetuv piirdenurk

ja kui nurga tipp on väljaspool ringi, siis ta on väiksem sellest piirdenurgast.

Ülesanded.

389. Teoreemidest ringjoone lõikajate vahelise nurga kohta tuletada teoreem haardenurga kohta (vt. üles. 378) ja teoreem piirdenurga kohta.

390. Tõestada, et nurk ringjoone puutuja ja lõikaja vahel mõõtub poolega nende kaarte vahest, milledeks puutepunkt jaotab nurga sees oleva kaare.

391. Leida nurk ringjoone lõikajate vahel, kui nurga sees olevad kaared on 78° ja 134°; 55° ja 172°; 156°17′ ja 47°39′.

392. Ringjoonel järjestikku võetud punktid A, B, C ja D jaotavad ringjoone kaarteks, mis suhtuvad nagu 2:5:7:1. Kui suur on nurk sirgete AB ja DC vahel, sirgete AC ja BD vahel?

§ 73. Kõõlnelinurk.

Nelinurka, mille küljed on ühe ringjoone kõõludeks, nimetatakse kõõlnelinurgaks.

Kõõlnelinurga tippe läbivat ringjoont nimetame nelinurga ümberringjooneks. Tõestame, et

kõõlnelinurga vastasnurkade summad on võrdsed.

Eeldus: $ABCD$ on kõõlnelinurk (joonis 165).

Väide: $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$.

Tõestus. Nurgad A, B, C ja D on piirdenurgad, mistõttu igaüks neist on pool kesknurgast, mis toetub piirdenurgaga ühele ja samale kaarele. Niisiis (joonis 165)

$$\angle A = \tfrac{1}{2}\,\alpha$$

ja

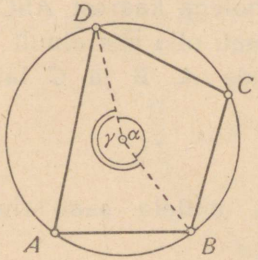
$$\angle C = \tfrac{1}{2}\,\gamma.$$

Nende summa

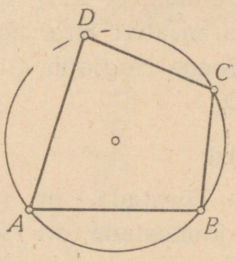
$$\angle A + \angle C = \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\gamma = \tfrac{1}{2}(\alpha + \gamma).$$

Nurkade α ja γ summa on aga 2π. Seega

$$\angle A + \angle C = \pi.$$



Joonis 165.



Joonis 166.

Niisamuti ka

$$\angle B + \angle D = \pi,$$

sest nelinurga nurkade summa on 2π. Kuid siis

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D.$$

Saab tõestada, et see omadus on ainult kõõlnelinurkadel:

kui nelinurga vastasnurkade summa on π, siis nelinurk on kõõlnelinurk,

s. t. tema ümber saab joonestada ringjoone.

Eeldus: $\angle A + \angle C = \pi$ (joonis 166).

Väide: $ABCD$ on kõõlnelinurk.

Tõestus. Joonestame ringjoone läbi nelinurga $ABCD$ kolme tipu, näiteks läbi tippude A, B ja C, mis teatavasti on alati võimalik. Näitame, et see ringjoon läbib siis ka tippu D. Et

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 2\pi$$

kui nelinurga nurkade summa ja eelduse järgi

$$\angle A + \angle C = \pi,$$

siis lahutades saame, et

$$\angle B + \angle D = \pi,$$

ehk

$$\angle D = \pi - \angle B = \frac{2\pi - 2\ \angle B}{2}.$$

See tähendab, et $\angle D$ mõõtub poolega kaarest ABC. Eelmise paragrahvi järgi aga $\angle D$ saab olla siis ainult piirdenurk. Seega ringjoon läbi punktide A, B ja C läbib ka tippu D.

Ülesanded.

393. Tõestada, et rööpkülik, millele saab ringjoont ümber joonestada, on ristkülik.

394. Missugustel erikujulistel nelinurkadel on olemas ümberringjoon?

395. Tõestada, et iga kõõltrapets on võrdhaarne.

396. Joonestada ringjoon, mille kahe paralleelse kõõlu pikkused on 7,5 cm ja 4 cm ning nende vaheline kaugus on 2 cm.

397. Kõõlnelinurga ABCD diagonaalide lõikepunkt on P. Tõestada, et $\triangle ABP$ ja $\triangle DCP$ on vastavalt võrdsete nurkadega, samuti ka $\triangle BCP$ ja $\triangle ADP$.

398. Ristküliku lühem külg on 5 dm ja diagonaalide vaheline teravnurk on 60°. Kui pikk on ristküliku ümberringjoone raadius?

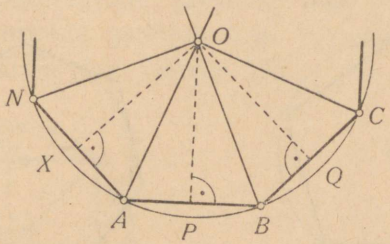
399. Kõõlnelinurga $ABCD$ nurk A on 130° ja nurk B on 95°. Kui suur on nurk sirgete AB ja CD vahel?

§ 74. Ringjoon ja korrapärane hulknurk.

Olgu $ABC \ldots N$ mingi korrapärane hulknurk (joonis 167). Poolitame selle nurgad A ja B ning tähistame nende nurgapoolitajate lõikepunkti tähega O. Nii

saadud $\triangle ABO$ on võrdhaarne, sest tema nurgad OAB ja OBA on võrdsed kui korrapärase hulknurga nurkade A ja B pooled. Ühendame nüüd punkti O punktiga C. Saadud uus kolmnurk BCO on kongruentne kolmnurgaga ABO, sest

$$AB = BC,\ \angle ABO = \angle CBO$$ ja BO on ühine külg.



Joonis 167.

Seetõttu ka $\triangle BCO$ on võrdhaarne ning selles

$$\angle OCB = \angle OBC.$$

Kuid siis OCB on pool korrapärase hulknurga nurgast ja OC on nurga C poolitaja. Ühendades punkti O hulknurga ülejäänud tippudega saame samal viisil tõestada, et need ühenduslõigud poolitavad ka hulknurga ülejäänud nurgad. Seega kõik hulknurga $ABC \ldots N$ nurgapoolitajad lõikuvad punktis O. Seejuures

$$OA = OB = OC = \ldots = ON,$$

sest nad on kongruentsete võrdhaarsete kolmnurkade haarad, ja

$$OP = OQ = \ldots = OX,$$

sest nad on samade kolmnurkade kõrgused. Seega:

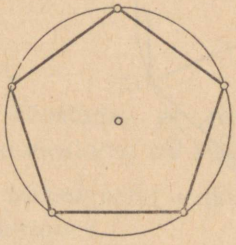
korrapärase hulknurga nurgapoolitajad lõikuvad kõik ühes ja samas punktis; see punkt on võrdsetel kaugustel hulknurga tippudest ja võrdsetel kaugustel hulknurga külgedest.

Sellest järeldub, et

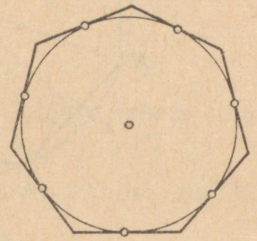
iga korrapärase hulknurga ümber ja sisse saab joonestada ringjoone.

Nende ringjoonte ühist keskpunkti nimetatakse korrapärase hulknurga keskpunktiks.

Korrapärase hulknurga saamiseks joonestame ringjoone



Joonis 168.



Joonis 169.

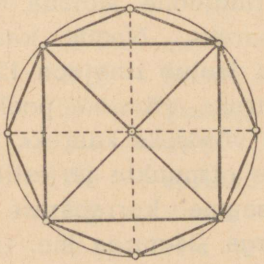
ja jaotame selle nii mitmeks võrdseks kaareks, kui mitu külge peab olema hulknurgal. Kui ühendame jaotuspunktid järjestikku sirglõikudega, siis tekib hulknurk, mille küljed on võrdsed, sest nad on kõõlud, mis toetuvad võrdsetele kaartele. Ka on võrdsed selle hulknurga nurgad, sest nad on piirdenurgad, mis toetuvad võrdsetele kaartele (joonis 168). Järelikult on see hulknurk korrapärane. Seda hulknurka nimetatakse korrapäraseks kõõlhulknurgaks.

Korrapärase hulknurga saame ka siis, kui ringjoonele jaotuspunktides joonestame puutujad (joonis 169). Seda hulknurka nimetatakse korrapäraseks puutujahulknurgaks.

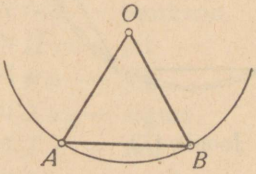
Ringjoone võib jaotada võrdseteks kaarteks kas sirkli ja joonlaua või malli abil. Ringjoone jaotamine sirkli ja joonlaua abil ilma katsetamiseta ei ole teostatav

igasuguse kaarte arvu juures; näiteks pole võimalik ringjoont sirkli ja joonlaua abil ilma katsetamiseta jaotada seitsmeks võrdseks kaareks.

Kõige lihtsamad ringjoone jaotamise juhud on jaotamine 4-ks, 8-ks, 16-ks, 32-ks jne. võrdseks kaareks. Nende jaotamiste teostamiseks joonestame kaks ristuvat diameetrit, millega on ringjoon jaotatud 4-ks võrdseks kaareks; saadud täisnurkade poolitamisega jaotame ringjoone 8-ks võrdseks kaareks jne. (joonis 170).



Joonis 170.



Joonis 171.

Ringjoone jaotamine 3-ks, 6-ks, 12-ks jne. võrdseks kaareks on võimalik lähtudes ringjoone jaotamisest kuueks võrdseks kaareks, mis on teostatav sirkli abil. Tõestame, et

korrapärase kuusnurga külg võrdub ümberringjoone raadiusega.

E e l d u s: AB on korrapärase kuusnurga külg ja punkt O on ümberringjoone keskpunkt.

V ä i d e: $AB = AO$ (joonis 171).

T õ e s t u s. $\triangle AOB$ on võrdhaarne, sest $AO = BO$; järelikult

$$\angle A = \angle B.$$

Selle kolmnurga tipunurk O võrdub $360° : 6$ ehk $60°$. Sama kolmnurga alusnurgad A ja B on seega

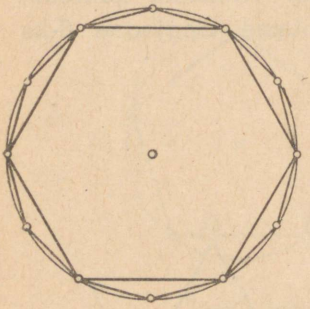
$$(180° - 60°) : 2$$

ehk

$$60°.$$

Seega kolmnurga AOB nurgad on võrdsed; kuid siis on võrdsed ka tema küljed ja seega

$$AB = AO = BO.$$



Joonis 172.

Niisiis raadiusepikkuste kõõlude abil saame ringjoone jaotada 6-ks võrdseks kaareks. Nende kaarte poolitamisega jaotub ringjoon 12-ks võrdseks kaareks, viimaste poolitamisega 24-ks võrdseks kaareks jne. Nende kaarte otspunkte järjestikku ühendades saame korrapärase 6-nurga, 12-nurga, 24-nurga jne. (joonis 172).

Ülesanded.

400. Joonestada korrapärane kuusnurk küljega 2 cm.

401. Joonestada korrapärane kaksteistnurk, mille ümberringjoone raadius on 2,5 cm.

402. Joonestada korrapärane kolmnurk, mille ümberringjoone raadius on 3 cm.

403. Joonestada korrapärane seitsenurk, mille ümberringjoone raadius on 3 cm. Ringjoone jaotamist toimetada sirkli abil katsetades.

404. Joonestada korrapärane kuusnurk, mille siseringjoone raadius on 3 cm.

405. Joonestada korrapärane kolmnurk, mille siseringjoone raadius on 2,5 cm.

406. Korrapärase kaheksanurga ühest tipust on tõmmatud diagonaalid teistesse tippudesse. Arvutada diagonaalide vahelised nurgad.

407. Korrapärase kümmenurga ühest tipust on tõmmatud diagonaalid teistesse tippudesse. Arvutada diagonaalide vahelised nurgad.

Kreeka tähestik.

$A\ \alpha$ — alfa	$N\ \nu$ — nüü
$B\ \beta$ — beeta	$\Xi\ \xi$ — ksii
$\Gamma\ \gamma$ — gamma	$O\ o$ — omikron
$\Delta\ \delta$ — delta	$\Pi\ \pi$ — pii
$E\ \varepsilon$ — epsilon	$P\ \varrho$ — roo
$Z\ \zeta$ — dseeta	$\Sigma\ \sigma\varsigma$ — sigma
$H\ \eta$ — eeta	$T\ \tau$ — tau
$\Theta\ \vartheta$ — teeta	$Y\ \upsilon$ — üpsilon
$I\ \iota$ — ioota	$\Phi\ \varphi$ — fii
$K\ \varkappa$ — kapa	$X\ \chi$ — hii
$\Lambda\ \lambda$ — lamda	$\Psi\ \psi$ — psii
$M\ \mu$ — müü	$\Omega\ \omega$ — omega.

Ülesannete vastuseid.

9. $a = c$; $x > z$; $s + t$.
10. 3; 1.
24. 10,6 cm.
25. 7,5 cm.
28. 3; 6; 10.
29. $\frac{n\,(n-1)}{2}$.
33. B on lähemal 9 km võrra.
43. $AB = EF$.
47. $\beta = \gamma$.
49. Sirgel s.
51. $\angle ABE = \angle CBD$.
52. $\alpha = 3\,\beta$.
53. $\angle bc = \frac{1}{2}\,\alpha$.
58. $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{4}$.
63. $\frac{3}{4}\,\pi$.
76. 7 cm; 17 cm.
80. Ringjoonel P(2,5 cm).
85. 5 paari.
87. 2 paari.
90. 1.
94. 2 n.
95. π.
97. Kaar 1′ on $\frac{5}{9}$ m.
99. Kaar 1″ on 31 m.
105. $30°30'30'' = 30\frac{61}{120}°$.
108. 252°.
109. 50 min.
110. 31,25 cm.
118. 99°.
119. 84°.
120. 127°11′.
147. Näpunäide: $135° = 90° + \frac{90}{2}$.
165. 1) $\alpha = 90°$ või $\alpha < 90°$.
179. $23 < c < 41$.
182. Üks on 11,4 cm.
184. Väide järeldub sellest, et $a < b + c$ jne.
189. 14 cm.
190. 4 m.
197. Antust järeldada, et $b > a > c$.
200. Tipunurk.
215. $\gamma_1 = 22°$; $\gamma_2 = 98°$.
237. Tipunurk on 50°40′.
241. Üks nurk on 30°.
242. $\beta = 18°40'$.

246. Üks nurk on 109°.
250. Täiendada kolmnurk võrdkülgse kolmnurgani.
255. Üks nurk on 52°.
261. Üks nurk on 35°.
262. Teisel juhul $\beta = \alpha - 90°$.
263. $\frac{n(n-3)}{2}$.
270. Suureneb 540° võrra.
273. 8-nurga.
278. $\angle D = 116°$.
286. Üks nurk on 60°.
Näpunäide: näidata, et diagonaal poolitab pikema aluse lähisnurga ja koostada siis võrrand.
287. 12 cm.
297. 1,25 m; 1,5 m.
301. 3 cm; 1 cm, 3 cm.
302. 24 cm.
306. 4,1 m.
315. 25 cm ja 18 cm.
316. 15 cm ja 9 cm.
347. 20°.
348. 60°; 30°.
363. 3 cm.
364. 4,5 cm.
365. Üks nurk on 95°, teine 106°.
367. Külje pikkus on r.
372. 7 cm.
380. 71°.
392. 48°; 72°.
398. 5 dm.
399. 35°.
406. 22,5°.
407. 18°.

SISUKORD.

Peatükk I.

Sirgjoon.

Lk.

§ 1. Sissejuhatus 3
§ 2. Sirglõik 5
§ 3. Sirglõikude summa ja vahe 9
§ 4. Sirglõigu mõõtmine 11
§ 5. Kiir ja sirge 14
§ 6. Tasapind 17
§ 7. Teljeline sümmeetria 18

Peatükk II.

Nurk.

§ 8. Nurga mõiste 21
§ 9. Nurga suurus 22
§ 10. Nurkade summa ja vahe 25
§ 11. Kõrvunurgad 28
§ 12. Tippnurgad 30
§ 13. Ristuvad sirged 32
§ 14. Punkti kaugus sirgest 34

Peatükk III.

Ringjoon.

§ 15. Ringjoon ja ring 37
§ 16. Ringjoone diameeter 39
§ 17. Kahe ringjoone lõikumine 41
§ 18. Kaar, kõõl ja kesknurk 44

Lk.

§ 19. Kaare mõõtmine ja nurga mõõtmine 47
§ 20. Konstruktsioonülesanded 52
§ 21. Ringjoon läbi kahe punkti 55
§ 22. Kõõluga ristuva diameetri omadused 60
§ 23. Nurgapoolitaja omadused 62

Peatükk IV.

Matemaatilised laused.

§ 24 Definitsioon 66
§ 25. Aksioom ja teoreem 67
§ 26. Teoreemi eeldus ja väide; teoreemi liigid 70
§ 27 Teoreemi tõestusest 73
§ 28. Vastandteoreemide kehtivusest 76

Peatükk V.

Kolmnurk.

§ 29. Kolmnurga elemendid ja nende tähistamine 79
§ 30. Kolmnurga kahe külje summa ja vahe 81
§ 31. Kolmnurkade liigitelu külgede järgi 83
§ 32. Võrdhaarse kolmnurga omadusi 85
§ 33. Kolmnurga suurem nurk ja selle vastaskülg . . . 87
§ 34. Kolmnurkade liigitelu nurkade järgi 88
§ 35. Kongruentsed kolmnurgad 90
§ 36. Kolmnurkade kongruentsuse esimene tunnus . . . 92
§ 37. Kolmnurkade kongruentsuse teine tunnus 94
§ 38. Kolmnurkade kongruentsuse kolmas tunnus 96
§ 39. Kolmnurkade kongruentsuse neljas tunnus 97
§ 40. Võrdsete küljepaaridega kolmnurgad 101
§ 41. Pikkuse kaudne mõõtmine kongruentsete kolmnurkade abil 104

Peatükk VI.

Paralleelsed sirged.

§ 42. Paralleelide aksioom 109
§ 43. Paralleelide ühine ristsirge 111
§ 44. Tasapinna kolm sirgjoont 113
§ 45. Kahe sirge lõikumine kolmanda sirgega 115

Lk.
§ 46. Kolmnurga nurkade omadused 118
§ 47 Sirgete paralleelsuse tunnused 122
§ 48. Vastavalt paralleelsete haaradega nurgad 125
§ 49. Vastavalt ristuvate haaradega nurgad 127

Peatükk VII.

Nelinurk.

§ 50. Hulknurkade liigitelu 130
§ 51. Hulknurga nurkade summa 132
§ 52. Trapets 134
§ 53. Võrdhaarne trapets 136
§ 54. Rööpkülik 139
§ 55. Rööpküliku omadused 141
§ 56. Kolmnurga kesklõik 145
§ 57. Trapetsi kesklõik 147
§ 58. Romb 149
§ 59. Ristkülik 152
§ 60. Ruut 155

Peatükk VIII

Tähtsamad jooned ja punktid kolmnurgas.

§ 61. Kolmnurga külgede keskristsirged 157
§ 62. Kolmnurga bissektorid 159
§ 63. Kolmnurga kõrgused 162
§ 64. Kolmnurga mediaanid 163

Peatükk IX.

Sirgjoon ja ringjoon.

§ 65. Sirgjoone ja ringjoone vastastikused asendid . . . 167
§ 66. Ringjoone puutuja omadused 169
§ 67. Puutujanelinurk 173
§ 68. Kahe ringjoone vastastikused asendid 176
§ 69. Kahe ringjoone ühised puutujad 179
§ 70. Puutuja ja kõõlu vaheline nurk 182
§ 71. Piirdenurk 184
§ 72. Ringjoone lõikajate vaheline nurk 188
§ 73. Kõõlnelinurk 190
§ 74. Ringjoon ja korrapärane hulknurk 192
Ülesannete vastuseid 198

III, muudetud ja täiendatud trükk.

Vastutav toimetaja A. Humal.

Keeleline toimetaja M. Tamm.

Ladumisele antud 7. VII 1948. Trükkimisele antud 3. IX 1948. Trükiarv 6000. Paber 56×79, 1/16. Trükipoognaid 12,75. Trükitähti trükipoognas 34.820. Arvutuspoognaid 11,1. MB-07558. Trükikoda „Tartu Kommunist", Tartu, Ülikooli 21/23. Tellimise nr. 1529.

На эстонском языке.

Э. Этверк. Геометрия для VIII класса.

RBL. 3.80