

ARVLEMISÕPETUS

KOKKU SEADNUD

M. OKAS

ESIMENE OSA: TÄISARVUD

HIND 120 MRK.



KIRJASTUS AKTSIA-SELTS „VARRAK“, TALLINNAS 1922

ARVLEMISÕPETUS

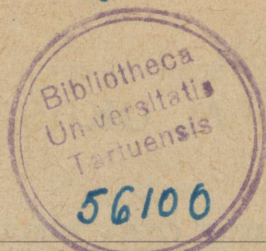
KOKKU SEADNUD

M. OKAS

ESIMENE OSA: TÄISARVUD

11709

2



Kirjastus A.-S. „Varra-ü“ trükk, Tartus.

A-5989

615663218

I. Aineselgitus.

§ 1. **Suurus.** Meid ümbritsevad mitmesugused asjad, nähtused, ilmutused. Otsustame nende üle mõnesuguste *tundemärkide* järele. Asja ennast ja asja tundemärke, omadusi võime (tegelikult või mõtteliselt) *suurendada* ja *väiksendada*. Kõike seda, mida võimalik on suurendada või väiksendada, nimetatakse *suuruseks*. Asjad võivad pikkuse, raskuse, hinna, kõvaduse, vanaduse, värvi ehk karva poolest mitmesugused olla. Tähendab: *pikkus, raskus, hind, kõvadus, vanadus, värv* ehk *karv* on suurused. Tigu käib aeglaselt, hobune jookseb ruttu, välgujuga tungib kõige suurema kiirusega läbi pilve. *Kiirus* liikumises on suurus. Kasu kauplemisest, vee sügavus järves, lambitule valgus jne. võib suurem või väiksem olla. *Kasu, sügavus, valgus* jne. on suurused.

§ 2. **Mõõtmine.** Mitmesuguseid suurusi võime mõõta. Kui, näituseks, maja pikkuse tahame kindlaks määrata, siis mõõdame ta süllapuuga, meetri- või tollipulgaga. Süllapuu on meile tuttav pikkusmõõt; niisama tuttavad pikkusmõõdud on meetri- ja tollipulk. *Tundmata* pikkust mõõdame *tuntud* pikkusega. Ütleme — maja pikkus on kaheksa sülda. See tähendab, et süllapuu pikkus maja pikkuse sisse kaheksa korda mahub, ehk maja pikkus on nii suur kui süllapuu kaheksa pikkust. Pikkust võime ainult pikkusmõõduga mõõta. Võimata oleks, näit., maja pikkust tundidega või puudadega mõõta. Mõõtmisel tarvitav suurus ehk *mõõtuksus* peab mõõdetava suurusega *suguldane* ehk *hõimuline* olema. Maja *pikkus* ja süllapuu *pikkus* on mõlemad *pikkuse suurused*; nad on *suguldased* ehk *hõimulised* suurused. Niisama kui pikkust *pikkusüksusega*, võime raskust *raskusüksusega*, pinna suurust *pindüksusega*, aja pikkust *aegüksusega* mõõta jne.

Kõiki suurusi ei saa mõõta. Näoiludust ei saa me miski üksuse abil kindlasti mõõta. Üks nagu on ilusam kui teine, aga mitme mõõtuksuse võrra üks nagu teisest ilusam on, seda me kindlaks teha ei saa: meil ei ole selleks mõõtuksust. Niisama on, näit., võimata ustavust, laiskust, kartust jne. mõne mõõtuksuse abil mõõta ja kindlaks määrata. Nii on siis *mõõdetavaid* ja *mittemõõdetavaid* (mõõtmataid) suurusi olemas.

§ 3. **Arv.** Mõõdetava suuruse vahekord mõõtüksusega sünnitab *arvu*. *Arv näitab, mitu mõõtüksust on ühe või teise suuruse sees.* Maja on kaheksa sülda pikk, — siin tähendab arv *kaheksa*, nagu eelpool (§ 2) nimetatud, et *sülla* pikkus mahub *maja* pikkuse sisse kaheksa korda. Lõunalaul istub kuus inimest, — siin on mõõdetav suurus inimeste *kogu* (ehk *hulk*). Mõõtmisel saadud arv *kuus* näitab, et üksus (üksik inimene) kuus korda kogu hulgas ette tuleb.

Arvu võime ka nii mõista, et ta *ühesarnaste asjade ehk ühesuguste (suguldaste) suuruste üksustekogu tähendab*. Eelolevais näitustes tähendab *kaheksa sülda* ühesuuruste üksuste (süldade) kogu, *kuus inimest* — ühesarnaste ehk suguldaste asjade (inimeste) kogu.

§ 4. **Arvuteadus ja arvlemine.** Arvude abil võime kindlaks määrata mõõdetavate suuruste arvumõistelised vahekorrad ja mitmesugused arvumõistelised omadused. Neid arvumõistelisi vahekordi ja omadusi õpime tundma *arvuteaduse* ehk *matemaatika* abil. *Arvlemine* on üks osa arvuteadusest. *Arvlemisõpetuse ülesanne on arvetamine, s. o. arvude tuletamine ja kujutamine kõnes ja kirjas, mitmesugused tegeldused (tehted) arvudega, arvude omaduste tundmaõppimine ja tarvitamine.* Selles raamatus on meil ainult arvlemisõpetusega tegemist.

II. Arvetamine.

§ 5. **Arvetamismõiste.** Ühesuguste asjade ehk üksuste kogu võime kõige lihtsamal viisil tuletada, kui *ühele* üksusele teise samasuguse tegelikult või mõttes juure lisame ja saadud kogu arvsõnaga *kaks* nimetame; edasi — sellele kogule üksuse juure lisame ja uue kogu arvsõnaga *kolm* nimetame, saadud kogule üksuse juure lisame ja uue kogu arvsõnaga *neli* nimetame jne. Niisugune arvude järjekordne tuletamine, üksuse juurelisamise abil, on *lihtne edasiarvetamine*. Lihtsa edasiarvetamise vastand on *lihtne tagasiarvetamine*. Lihtsal tagasiarvetamisel lahutame (tegelikult või mõtteliselt) üksuste kogust ühe üksuse ja nimetame ülejääva koguarvu; sellest kogust lahutame jälle üksuse ja nimetame ülejääva uue koguarvu jne. Arvetamine tähendab siis esialgselt lihtsat edasi- ja tagasiarvetamist. Edasi- ja tagasiarvetamine on ka kahe-, kolme-, neljakaupa jne. võimalik. Edasiarvetamisel üksuste kaudu leiame arvud: *üks, kaks, kolm, neli,*

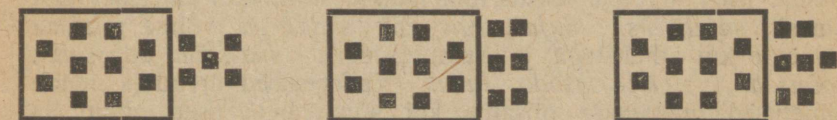
viis, kuus jne. Arvude järjekord, mis ühega algab ja milles iga järgmine arv ühe üksuse võrra eelolevast suurem on, nimetatakse arvude loomulikuks järjekorraks. Loomulikus järjekorras on määratamata hulk arvusid. Kui kõiki neid arvusid tahaksime kõnes isesuguste sõnadega ja kirjas isesuguste märkidega tähendada, siis peaksime lõpmata palju arvsõnu ja arvumärke tarvitama. Lõpmata hulka arvsõnu ja arvumärke (tuhandete ja miljonite kogu) oleks raske meeles pidada; nende hulk raskendaks arvude tarvitamist mitmesugustes väljaarvlemistes. Arvetamise ülesanne on abinõusid ja teesid leida, kuidas võimalikult vähese arvsõnade koguga ja mõningate arvumärkide abil kõiksuguseid arvusid võiks kõnes välja ütelda (kuuldavaks teha) ja kirjas üles tähendada (nähtavaks teha). Selle ülesande kohaselt on meil kahe- suguse arvetamisega tegemist: arvetamisega kõnes ja kirjas ehk suusõnalise ja kirjaliku arvetamisega.

Suusõnaline arvetamine.

§ 6. **Arvetamine kümnetekaupa.** Suusõnalisel arvetamisel antakse esimestele arvudele nende loomulikus järjekorras, ühest kunni kümneni, igaühele nimi. Edasiarvetamisel algame uuesti üksusest, lisame aga iga uue arvu nimetamisel juure, et see arv teisest kümnest on ehk esimesele kümnele lisaks teist kümnet tuletab. Kui arvetamisüksuse kujutame kandilise täpiga (■), siis saame loomulikus järjekorras, kümnest kunni teise kümne lõpuni, järgmised arvude kujutised ja arvude nimetused:



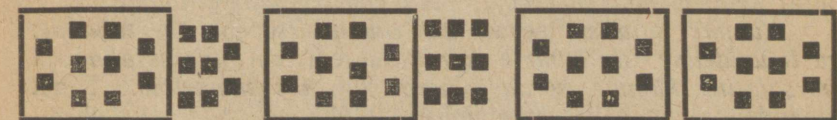
Üksteistkümmend. Kaksteistkümmend. Kolmeistkümmend. Nelisteistkümmend.



Viisteistkümmend.

Kuusteistkümmend.

Seitseistkümmend.



Kaheksateistkümmend. Üheksateistkümmend.

Kakskümmend.

Jõudsime arvetamisel teise kümne lõpuni, aga uut sõna ei ole me kümnele järgnevat arvude nimetamisel tarvitanud. Oleme arvu *kümme* kui uut üksust, nimelt kui *koguüksust*, tarvitanud (ja sellepärast kümme lihtüksust üheks koguüksuseks joonega sisse piiranud), millele lihtüksusi ühekaupa juure arvetasime. Arvul *kümme* on siis kahesugune tähendus: 1) ta näitab, mitu arvetamisüksust arvus leidub, 2) ta on üksuste *kogu*, mida arvetamisel kui uut üksust niisama võime tarvitada kui lihtüksusi. Lihtüksused nimetatakse *ühelisteks üksusteks*, *ühelisteks*, mõnikord ka *ühedeks*. Kümne lihtüksuse ehk ühelise kogu, kui uus arvetamisüksus, nimetatakse *kümmeliseks üksuseks* ehk lühidalt *kümmeliseks*. Ühelised nimetatakse *esimese järje* üksusteks, kümmelised — *teise järje* üksusteks. Iga kümmeline on nii suur kui kümme ühelist, ehk teiste sõnadega; iga *kümmeline* on *kümme korda* suurem kui *üks üheline*.

Kümmelistega arvetatakse niisama kui ühelistega: *kümme*, *kakskümmend*, *kolmkümmend*, *nelikümmend*, *viiskümmend*, *kuuskümmend*, *seitsekümmend*, *kaheksakümmend*, *üheksakümmend*, *sada*. Uus arvetamisüksus on *sada*, mis kümme kümnet tähendab. Sajani arvetades tarvitame ainult *üksteistkümmend* arvsõna. See on võimalik, sest et me arvule *kümme* uue arvetamisüksuse tähenduse andsime. Ilma uue arvetamisüksuseta oleksime sajani arvetades ka *sada* arvsõna pidanud tarvitama.

Kahestkümnest edasi arvetades käidi enne sedasama rada, nagu edasiarvetamisel kümnest: *ükskolmatkümmend*, *kakskolmatkümmend*, *kolmkolmatkümmend*, ..., *üheksakolmatkümmend*, *kolmkümmend*; *üksneljatkümmend*, *kaksneljatkümmend* jne. Lühendatult arvetati: *ükskolmat*, *kakskolmat*, *kolmkolmat* jne., nagu: *üksteist*, *kaksteist*, *kolmteist* jne. Meie ajal nimetatakse arvetamisel enne kümmelised ja nende järel ühelised: *kakskümmend üks*, *kakskümmend kaks*, *kakskümmend kolm* jne.

Arvetamisel sajast edasi anname arvsõnale *sada* kolmanda arvetamisüksuse tähenduse. Kümne kümmelise kogu, kui *kolmanda järje* arvetamisüksus, nimetatakse *sajaliseks üksuseks* ehk lihtsalt *sajaliseks*. *Sajalistega* ehk *sadadega* võime niisama arvetada kui ühelistega ja kümmelistega: (*üks*)*sada*, *kakssada*, *kolmsada*, ..., *üheksasada*, *tuhat*. Vahepealsed arvud ja nende nimetused tuletatakse niisama kui kümnetevahelised arvud ja nende nimetused: *sajalistele* lisatakse kümmelised ühelistega juure: *sada üksteistkümmend*, *sada kaksteistkümmend* jne.

Kümme sajalist teevad *ühe tuhandelise* ehk *ühe tuhande*. Iga *tuhandeline* on *kümme korda* suurem kui *üks sajaline*, ja *üks sajaline* *kümme korda* suurem kui *üks kümmeline*. *Tuhat* (tuhandeline) on neljas arvetamisüksus ehk *neljanda järje* üksus. *Tuhandelistega* arvetatakse samal viisil kui *sajalistega* ja teiste,

alamate üksustega. Vahepealsed arvud tuletatakse nii, et tuhandetele sajalised, kümnelised ja ühelised oma järjekorras juure lisatakse. Tuhandeni arvetades oleme ainult kaksteistkümmend isesugust arvsõna tarvitanud. Ilma uute arvetamisüksusteta (*kümme* ja *sada*) oleksime tuhat arvsõna selleks pidanud tarvitusele võtma.

§ 7. **Järje- ja klassiüksused.** Nagu eelpool (§ 6) nägime, sünnib iga uus arvetamisüksus oma ligemast alamjärjelisest selle läbi, et meie kümme ligemat alamjärjelist üksust kokku võtame ja uueks üksuseks nimetame. Arvetamisel käime järgmise üldise põhimääruse ehk seadluse järele:

Kümme ühesugust alamjärjelist üksust kokku tuletavad ligema ülemjärjelise üksuse.

Et iga ülemjärjeline üksus ligemast alamjärjelisest üksusest kümme korda suurem on — nagu eelpool (§ 6) nägime, — siis võime antud põhimäärust järgmisel kujul teisendada:

Iga ülemjärjeline üksus on nii suur kui ligema alamjärje kümme üksust.

Nende põhimääruste järele tuhandest edasi arvetades tuletame viienda, kuuenda, seitsmenda ja järgnevad järjeüksused. Viienda ja kuuenda järje üksused kannavad tuhandete nime, nagu neljanda järje üksused. Harilikult nimetatakse kolm esimest, alamat üksustejärge üheliste järgedeks. Need kolm üheliste järge tuletavad *üheliste klassi*. Üheliste klassile järgnevad tuhandeliste kolm järge, mis *tuhandeliste klassi* tuletavad. Üheliste klassi tuhandeliste klassiga võrreldes näeme, et meil on *lihtühed* ja *liht-tuhanded*, *kümnelised ühed* ja *kümnelised tuhanded* (ehk *kümne-tuhandelised*), *sajalised ühed* ja *sajalised tuhanded* (ehk *saja-tuhandelised*). Nii võime tuhandete *teise* ja *kolmanda* järje nimetamisel ilma uue arvsõnata läbi saada, kuna nende järgede nimetusteks võtame üheliste *teise* ja *kolmanda* järje nimetused (*kümme* ja *sada*).

Nagu arvetamisel neljanda järjeüksusega (tuhandega), nii talitame ka seitsmenda järjeüksusega, s. o. *miljoniga* arvetades: meil on *ühed miljonid*, *kümned miljonid* (ehk *kümnemiljonilised*) ja *sajad miljonid* (ehk *sajamiljonilised*). Miljonite kolm üksustejärge tuletavad *miljonite klassi*. Miljonite klassile järgneb *biljonite* (ehk *miljardite*) klass jne. Ühelised, tuhanded, miljonid, biljonid jne. nimetatakse *klassiüksusteks*, kuna nad igatahes ka järjeüksused on. *Lihtühelised* on *esimese klassi* üksused, *tuhandelised* — *teise*, *miljonid* — *kolmanda*, *biljonid* — *neljanda klassi* üksused, jne.

Kuna arvetamine klassiüksusega kunni tuhandeni ulatab ja tuhat ühesugust klassiüksust uue, ülema klassiüksuse nimetuse

saavad, siis tuleb klassiüksuste kokkuseade põhjendajaks võtta järgmine määrus:

Tuhat ühesugust klassiüksust kokku tuletavad järgmise ülema klassiüksuse.

Näit.: *tuhat* ühelist on *üks* tuhat; *tuhat* tuhandelist on *üks* miljon; *tuhat* miljonit on *üks* biljon (ehk miljard), jne.

§ 8. **Arvetamiskava.** Järje- ja klassiüksuste kaudu toimetatakse arvetamist lihtsalt, kindla korra järele ja arvsõnade vahelduse kogu abil. See kindel kord nimetatakse *arvetamiskavaks*. Meie arvetamiskava põhjeneb nende määruste peal, mis eelpool (§ 7) järje- ja klassiüksuste kohta on antud. Tähtsam on esimene, nimelt järjeüksuste kohta käiv määrus. Arv *kümme*, mis arvetamisüksuste vahekorra kindlaks määrab, nimetatakse arvetamiskava *põhiarvuks*. Põhiarvu järele nimetatakse meie arvetamiskava *kümnekavaks*.

Peale *kümnekava* võib ka teisi arvetamiskavasid tuletada, kui *kümne* asemele mõni muu arv kava põhjarvuks valitakse. Nii võivad tekkida *neljakava*, *viiekava*, *kuuekava*, . . ., *kaheteistkümnekava* jne.

Tarvitusel olev kümnekava on *kolmejärjeline klassikava*, sest igas klassis on *kolm* üksustejärge. Klasside kokkuseade võib ka teistsugune olla. Kui igasse klassi *kuus* üksustejärge võtta, siis tuletatakse *kuuejärjeline klassikava*. Mõnel maal on kuuejärjeline klassikava tarvitusel.

Kirjalik arvetamine.

§ 9. **Arvumärgid ja nende tähendus.** Kirjaliku arvetamise eesmärk on abinõusid leida, kuidas mõningate, võimalikult lihtsate kirjamärkide abil mitmesuguseid arvusid lühidalt üles tähendada ja meie silmale nähtavaks teha. Need kirjamärgid nimetatakse *arvumärkideks*. Iga arvumärk tähendab *järjeüksuste kogu*, sellega siis ka *arvsõna*, millega üksustekogu nimetatakse. Iga üksustekogu, olgu ta mis tahes järjeüksustest kokku pandud, tähendatakse isesuguse arvumärgiga. Kui mõnes järjes üksusi ei ole, siis tähendame seda märgiga 0 (null). Mitu järjeüksust võib *ühes* üksustekogus kirjalikult üles tähendada? Mitte rohkem kui *üheksa* üksust, sest kümme sellesama järje üksust tuletavad ühe uue, ülemjärjelise üksuse, mis kümne alamjärjelise asemele astub. Sellepärast võime iga järje mitmesugused üksustekogud *üheksa* isesuguse arvumärgiga kirja panna. Need arvumärgid on järgmised:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Üks.	Kaks.	Kolm.	Neli.	Viis.	Kuus.	Seitse.	Kaheksa.	Üheksa.

Arvumärk 5 tähendab *viis* üksust, arvumärk 7 tähendab *seitse* üksust, arvumärk 0 tähendab üksuste puudumist, jne. Iga arvu-

märk oma *nimega* tähendab järjeüksuste arvu. Arvumärk *null* oma ladinakeelse *nime* (*nullus*) järele tähendab üksuste mitte-olemist ehk puudumist. See tähendus, mis arvumärgil alati juures ja omane on, nimetatakse arvumärgi *nimeväärtuseks*.

Arvumärgil võib veel teine tähendus olla, mis *kohaväärtuseks* nimetatakse. Me lepime niiviisi, et *esimese järje* üksustekogu, s. o. lihtühelised, ühe arvumärgiga kirjutame. Sellel põhjusel tähendab, näit., 8 ainult *kaheksa ühelist*, 5 — *viis ühelist* jne. *Teise järje* üksuste arvumärgi paigutame *teisele* kohale, ühelistest pahemale poole, nii et esimese järje üksuste arvumärk *esimesele* kohale jääb, paremalt pahemale poole minnes. Selle järele tähendab arv 75 niipalju kui 7 kümnelist ja viis ühelist ehk seitsekümmendviis. Samal põhjusel paigutame *kolmanda järje* üksuste arvumärgi *kolmandale* kohale, kümnelistest pahemale poole, *neljanda järje* üksuste arvumärgi *neljandale* kohale jne.

§ 10. **Arvude lugemine ja kirjutamine.** Arvude *lugemisel* nimetame iga klassi järjeüksusi iseäraldi ja lisame neile klassinimetuse juure, peale üheliste klassi, kus sõna *ühte* ehk *ühelist* vaja ei ole juure lisada. Kui mõned järjeüksused kirjas puuduvad, siis puuduvad nad ka kõnes, sest mida olemas ei ole, seda ei või me ka kõnes nimetada. Klassiüksuste nimetused võime lausuda kindlama rõhuga kui järjeüksuste nimetused; klassiüksuste nimetuste järel on kasulik ja loomulik vähe peatada, iseäranis neil kordadel, kui arvus kolm ja enam klassiüksust ette tuleb. Järgnevates näitustes oleme peatuskohad klasside vahel püstjoontega ära tähendanud:

35 764 = kolmkümmend viis *tuhat* | seitset sada kuuskümmend neli;

208 503 = kakssada kaheksa *tuhat* | viissada üheksa.

46 583 917 = nelikümmend kuus *miljonit* | viissada kaheksakümmend kolm *tuhat* | üheksasada seitseteistkümmend.

Arvude *kirjutamisel* peame klassiüksuste nimetusi tähele panema, sest iga ülema klassi üksused kantakse kõnes ja kirjas ette samasuguses järjekorras kui esimese (s. o. üheliste) klassi üksused. Iga klassi järjeüksused paneme kirja iseäraldi, nagu oleks meil üheliste klassi järjeüksustega tegemist, puuduvaid järjeüksustekogusid nulliga märkides. Et klasside kogud silmapaistvamad oleksid, selleks eraldatakse nad kirjas üksteisest sagedasti väikese vaheruumiga (milleks arvumärgi poolest ruumist küll on), ehk punktiga. Niisugune eraldamine on siis tululik, kui meil suuremate arvudega tegemist tuleb teha. Nii kirjutame:

25 659 ehk 25.659 ; 37 896 472 ehk 37.896.472, jne.

Eraldamine kõnes ja kirjas jääb ära, kui arvus ainult neli alamast üksustejärge on. Kirjas tarvitatakse seda klasside eraldamist siiski mõnikord ka viimasel juhtumisel: 4659 ja 4 659 ehk 4.659.

§ 11. Ülesanded I. Kirjutatud arvude lugemine.

1. Lihtaastal on 365 päeva, liigpäeva aastal on 366 päeva.
2. Raudteed mööda on Tartust Petrogradi 380 versta, Tartust Petrogradi kaudu Moskva linna 984 versta.
3. Esimese üldise rahvalugemise järele oli Võru linnas 4154 elanikku, Viljandis 7659 elanikku, Pärnus 12.870 elanikku ja Tallinnas 64.378 elanikku.
4. Aastal 1914 oli Tallinnas üle 120.000 elaniku.
5. Üks ööpäev kestab 24 tundi. 24 tundi on 1440 minutit ehk 86.400 sekundit.
6. Ühes lihtaastas on 8760 tundi. See tundidearv on nii suur kui 525.600 minutit ehk 31.536.000 sekundit.

II. Sõnastatud arvude kirjutamine.

7. Tallinnast Pärnu on maanteed mööda, Märjamaa kaudu, *sada kolmkümmend viis* versta, aga raudteed mööda, Viljandi ja Laatre kaudu, *kakssada kolmkümmend seitse* versta.

8. Põhja-Eesti kõige kõrgem mägi, Emumägi, on (merepinnast arvatud) *viissada nelikümmend neli* jalga kõrge. Lõuna-Eesti kõige kõrgem mägi, Võrumaa Munamägi, on *üheksasada üheksakümmend seitse* jalga kõrge.

9. Rakvere linnas elas viimase rahvalugemise järele *viistuhat viissada kuuskümmend* inimest, Narva lähemas naabruses, Krenholmi agulis, *kolmteistkümmend tuhat kakssada seitsekümmend viis* inimest.

10. Rakvere Eesti laenu- ja hoiuühisus võttis *tuhat üheksasada kümnendal* aastal hoiule *viiskümmend üheksa tuhat üheksasada üheksakümmend kolm rubla kaheksakümmend üks* kopikat ja andis laenuks *viiskümmend kaheksa tuhat üks sada viiskümmend kaheksa rubla kaheksakümmend kaks* kopikat.

11. Üks puud-kuldrahasid maksis *üheksateistkümmend tuhat nelikümmend üks* kuldrubla *kolmkümmend kaks* kopikat; üks puud hõberahasid (rublasid, viiekümne- ja kahekümneviiekopikalisi) maksis *kaheksasada üheksateistkümmend* kuldrubla *kakskümmend* kopikat.

§ 12. Üksustekogude alandamine ja ülendamine. Järjekorras üksuste kogusid võime alamjärjelisteks muuta. Niisugune muutmine nimetatakse *alandamiseks*. Võtame 8 sajalist ja alandame nad kümnelisteks. Üks sajaline on, kümnekava põhimääruse järele, 10 kümnelist; 8 sajalist on 8 korda enam, s. o. 80 kümnelist. Antud 8 sajalist ja alandamisel tuletatud 80 kümnelist, kui ühesuurused arvud, võime järgmisel viisil kõrvu seada:

$$8 \text{ sajalist} = 80 \text{ kümnelist.}$$

Säärane ühesuuste arvude kõrvuseadmine sünnitab *võrduse* ehk *ühtluse*. Märk (=) mõlemate ühesuuste arvude vahel nimetatakse *võrdusmärgiks* ehk *ühtlusmärgiks* ja tähendab: *on, on võrdne, on nii suur kui, jne*. Kümnekava põhimäärusest järgneb,

et 6 künnelist = 60 ühelist, 7 tuhandelist = 70 sajalist, 4 künnetuhandelist = 40 tuhandelist, jne. Siit järeldub seadlus: *Et üksustekogu ühe järje võrra alandada, selleks kirjutame antud üksustekogule, paremale poole, ühe nulli otsa ja anname uuele arvule ligema alamjärjelise üksustekogu nimetuse.* Siit järgneb ka, et kui üksustekogu tahame kahe järje võrra alandada, siis peame antud üksustekogule, paremale poole, kaks nulli otsa kirjutama jne. Näit. 8 sajalist = 80 künnelist = 800 ühelist; 4 tuhandelist = 40 sajalist = 400 künnelist, jne.

Üksustekogu muutmine ülemjärjelisteks nimetatakse *ülendamiseks*. Kümnekava põhimääruse järele on 10 ühelist niisama suur kui 1 kümneline, s. o. 10 ühelist ülenevad 1-ks kümneliseks. Samal põhjusel ülenevad 10 künnelist üheks sajaliseks, 10 sajalist üheks tuhandeks jne. Kui 10 ühelist ülenevad 1-ks kümneliseks, siis ülenevad 40 ühelist 4 korda suuremaks künnelistekoguks, s. o. 4-ks kümneliseks. Samal viisil ja põhjusel ülenevad 60 künnelist 6-ks sajaliseks, 80 sajalist 8-ks tuhandeks jne.

Kui antud üksustekogu tervelt ei ülene ülemjärjeliseks üksustekoguks, siis eraldame nii mitu ülemjärjelist üksust kui võimalik ja muudame antud üksustekogu kahe- või mitmenimeliseks üksustekoguks. Ülendame, näit., 46 sajalist tuhandeteks. 46-st sajalisest võime 4 korda 10 sajalist võtta, s. o. 40 sajalist, mis 4-ks tuhandeks ülenevad. Jäeb üle 6 sajalist. *Ühendamismärki* ehk *kokkuarvamismärki* (+) tarvitusele võttes kujutame 46-e sajalise ülendamise tuhandeteks järgmiselt:

$$46 \text{ sajalist} = 4 \text{ tuhandelist} + 6 \text{ sajalist.}$$

§ 13. **Araabia ja Rooma arvumärgid.** Eelpool tarvitatud arvumärgid nimetatakse *Araabia* arvumärkideks, sest et nad araablaste läbi Hispaania kaudu Euroopasse teed leidsid. Enne tarvitati Lääne-Euroopas *Rooma* arvumärke. Rooma arvumärke on seitse. Need on järgmised: I=1, V=5, X=10, L=50, C=100, D=500, M=1000. Viies arvumärk C on sõna *centum* (= sada) algustäht, seitsmes arvumärk M on sõna *mille* (= tuhat) algustäht. Nende arvumärkide abil kirjutatakse kõiksugused arvud ühest kunni tuhandeni; arvumärkidel on ainult nimeväärtus, ükskõik missugustel kohtadel nad asuvad. Arvude kirjutamisel ja kirjutatud arvude lugemisel arvatakse *ülemväärtuslikele* arvumärgile järgnevate *alamväärtusliste* või *üheväärtusliste* arvumärkide tähendus *ülemväärtuslise* tähendusele juure, eelmineva *alamväärtuslise* arvumärgi tähendus aga arvatakse *ülemväärtuslise* arvumärgi tähendusest enne maha. Nii tuletatakse arvud loomulikus järjekorras ehk arvudereas: I=1, II=2, III=3, IV=4, V=5, VI=6, VII=7, VIII=8, IX=9, X=10, XI=11, XII=12, XIII=13, XIV=14, XV=15, XVI=16, XVII=17, XVIII=18, XIX=19, XX=20, XXI=21, ..., XXX=30, XL=40, L=50, LX=60, LXX=70, LXXX=80, XC=90, C=100, CC=200, CCC=300, CD=400, ..., CM=900, M=1000, jne. Mitme tuhande kirjutamisel tähendatakse üheliste arvu järel tuhandemärk *m* (sõna *mille* — tuhat — väike algustäht). Näit. $VI_m = 6000$, $CCCXXIII_m = 323000$, $CDLXXXVII_m$ $DCXXVI = 487626$, jne.

III. Tegeldused nimeta ja ühenimeliste täisarvudega.

§ 14. **Tegeldamine ja muutmine.** Kui antud arvusid mitmesugusel viisil ühendades ja lahutades kindlate määruste järele talitame, et otstarbekohast *uut arvu* leida, mis antud arvudest oma väärtuse poolest lahku läheb, siis nimetame säärast arvudega talitamist *tegeldamiseks*. Võtame näituse:

Ülesanne 1. *Peremees sai laadal ühe härja eest 65 kuldrubla, teise härja eest 30 kuldrubla. Kui palju raha sai ta kahe härja eest?*

Meie otstarve on *uut arvu* leida, millega kahe härja koguhind kindlaks määratakse. Otsitav arv on 95 kuldrubla. See arv läheb, oma väärtuse poolest, antud arvudest lahku: ta on kummastki arvust suurem. Et uut arvu leida, selleks talitasime ehk *tegeldasime* kindla korra järele: ühendasime antud arvud, kuna nad kokku võtsime ehk kokku arvasime üheks arvuks. — Teine näitus:

Ülesanne 2. *Kangur kudus 54 meetrit riiet, 9 meetrit päevas. Mitu päeva ta kudus?*

Meie otstarve on niisugust arvu leida, mis näitab, kui kaua (päevade arvu järele) kangur töötas. Mitu korda 54-st meetrist päevase tööosa, s. o. 9 meetrit, võime lahutada ehk eraldada, nii mitu päeva töötas kangur. Me võime 54-st meetrist 9 meetrit 6 korda eraldada, sest 9 meetrit mahub 54 meetrisse 6 korda. Tähendab: kangur töötas 6 päeva. Ka siin talitasime, töötasime ehk *tegeldasime* kindla korra järele, et uut, otstarbekohast arvu leida.

Muutmiseks nimetatakse arvu *teisendamine*, s. o. *teisekujuliseks* tegemine, ilma et arv ise oma väärtuse (suuruse) poolest muutuks. Eelpool (§ 12) seletatud üksustekogude alandamist ja ülendamist tuleb muutmiseks nimetada. Võttes 2 puuda asemele 80 naela on meil ka arvu muutmisega tegemist, sest 80 naela on raskuse poolest 2 puudaga ühesuurune. Peale alandamise ja ülendamise tulevad edaspidi veel teistsugused arvumuutmisel ette.

Arvlemisel tarvitatavoid *tegeldamisviisisid* ehk *tegeldusi* on *kuus*. Tegeldused on arvlemisõpetuse tähtsam osa. Arvude muutmised on sagedasti tegeldustele tarvilikuks kergituseks; muutmine ise võib tegelduste kaasabil teostuda.

Kokkuarvamine.

§ 15. **Kokkuarvamismõiste.** Kokkuarvamine tekib edasiarvetamisest. Et, näit., 5 penni ja 3 penni kokku arvata, selleks arvetame 5-le pennile esiti ühe penni juure, siis teise ja viimaks kolmanda. Mõnel korral võime paarikaupa, kolmekaupa jne. juure arvetada. Et juurearvetamine sagedasti pikale venib ja ajavaitlik on, sellepärast on abinõusid otsitud ja ka leitud, kuidas kokkuarvamist lihtsamalt toimetada. Kokkuarvamismõiste võime lühidalt järgmise ütlusega ära tähendada:

Kokkuarvamise abil leiame uue arvu, mille üksustekogu nii suur on kui antud arvude üksustekogud kokku.

Kokkuarvamiseks antud arvud nimetatakse *osanditeks*. Osandid võib kaks või enam olla. Kokkuarvamisel saadud uus arv on *kogund*. Kogund nimetatakse mõnikord *summaks*. Kokkuarvamismärk on püstrist (+). Kokkuarvamismärk tähendab: *ja, juure, arva kokku, ühenda* jne. Kui osandid ja kogund ühte ritta kirjutatakse, siis lahutatakse osandid kogundist võrdusmärgi (=) abil. Näit.:

$$\underbrace{35 + 10 + 8}_{\text{Osandid.}} = \underbrace{53}_{\text{Kogund.}}$$

Edasiarvetamismõistest selgub, et me võime üksustekogud üheks kogundiks ühendada ehk kokku arvata, *kui kokkuarvavad üksused suguldased on*. Nii võime, näit., margad markadega kokku arvata, markasid laudadega aga mitte.

Antud arvusid või nende osasid võime ühendada ükskõik missuguses järjekorras, ilma et kogund selle läbi muutuks. Kas arvame kokku $5 + 4$, või $4 + 5$, kogund on ikka 9. Kui osandid on kahe- või mitmekohalised arvud, siis võime osandid *järjeüksuste kogudeks* lahutada ja *ühenimelised järjeüksuste kogud* eraldatult kokku arvata.

§ 16. **Peastkokkuarvamine.** Kahe ühekohalise arvu kokkuarvamine toimetatakse esialgul lihtsa juurearvetamise abil. Kui kogund üle 10-ne ulatab, siis võime ka teise osandi kaheks osaks lahutada, nii et esimene osand ja osa teisest kokku ühe kümnelise tuletavad, millele teise osandi järgmise osa juure arvetame. Näit. $8 + 7 = 8 + 2 + 5 = 10 + 5 = 15$, jne.

Et suuremate arvude kokkuarvamine ikka kahe ühekohalise arvu kokkuarvamise abil toimetatakse, siis on tegelduse rutulisemaks täidesaatmiseks väga tarvilik, et peast teaksime iga kahe ühekohalise arvu kogundi. Teiste sõnadega: me peame üheko-

haliste arvude *kokkuarvamistabeliga* ehk *üksjäuhe-tabeliga* hästi tuttavad olema. Selle tabeli kokkuseade on järgmine:

Väike üksjäuhe-tabel.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Tabeli esimeses põikreas on arvud 0 kunni 10-ni loomulikus järjekorras üles tähendatud. Iga järgmine põikrida tuleatakse eelolevast, kui igale arvule 1 juure lisatakse. Arvud ja nende järjekord püstridades, pahemalt paremale poole minnes, on needsamad mis põikridades, ülevalt alla minnes. Et tabeli järele kahe arvu, näit. 7 ja 8 kogundit leida, selleks peame ühe osandi esimeses (ülemas) põikreas, teise osandi pahempoolses püstreas üles otsima, esimese osandi juurest püstrida mööda alla, teise osandi juurest põikrida mööda paremale poole minema, kunni mõlemad read ühise arvu kui kogundi peale kokku tulevad. Arvude 7 ja 8 kogund on tabeli järele 15. Kumma osandi meie esimeses

põikreas, kumma pahempoolses püstreas üles otsime, see on ükskõik. — Üksjaähe-tabel võib ka teistsuguse kokkuseadega olla.

Kui tarvis on kahe- või mitmekohalisi arvusid peast kokku arvata, siis algame tegeldamisega ülematest järjeüksustest ja läheme alamjärjeliste poole edasi. Selleks on meil hea põhjus. Ülemad järjeüksused arvus on oma väärtuse poolest tähtsamad kui alamad järjeüksused. Ülemjärjeliste üksuste kokkuarvamisel tehtud viga mõjub kogundi peale enam kui samasugune viga alamjärjeliste üksuste kokkuarvamisel; sellepärast on loomulik, kui suurema tähepanuga neid tähtsamaid arvuosasid meeles peame ja nendega tegeldamist algame. Koondamise mõttes on ka parem peastkokkuarvamist nimelt ülemjärjeliste üksustega alata, sest ühendatud (koondatud) ülemjärjelistele üksustele on kergem samanimeliste üksustekogu juure lisada kui sääraseid üksusi alamjärjeliste üksuste kokkuarvamisel saadakse. Näit. arvude 64 ja 25 kokkuarvamisel tegeldame järgmisel viisil: $60 + 20 = 80$; $4 + 5 = 9$; $80 + 9 = 89$. Teine viis: $64 + 20 = 84$; $84 + 5 = 89$. Arvude 75 ja 89 kokkuarvamisel, kus tarvitusele tuleb üksustekogu ülendamine, tegeldame niisama: $70 + 80 = 150$; $5 + 9 = 14$; $150 + 10 = 160$; $160 + 4 = 164$. Teisel viisil: $75 + 80 = 155$; $155 + 9 = 164$.

§ 17. Kirjaliku kokkuarvamise eeltingimused. Kirjalik kokkuarvamine toimetatakse osadekaupa: ühenimelised järjeüksused arvatakse iseäraldi *osakogunditeks* kokku ja osakogundid ühendatakse üheks *täiskogundiks*. Et ühenimelised üksustekogud osandites ülevaatlikult silma paistaksid, selleks kirjutame osandid üksteise alla, nii et ühenimeliste üksustekogude arvamärgid isekeskis püstread sünnitavad: ühelised — üheliste, kümnelised — kümneliste, sajalised — sajaliste alla jne. Kogund kirjutatakse samal viisil osandite *alla* ja lahutatakse viimastest põikjoonega. Osandite ette kirjutatakse kokkuarvamismärk (+). Kogundi võime ka osandite *üle* kirjutada, kui selleks tarvilist ruumi piisab ja muud tingimused (*missugused*?) lubavad.

Kokkuarvamist võime kas alamjärjelistest või ülemjärjelistest üksustest alata. Ühenimeliste üksustekogude kokkuarvamine toimetatakse enamasti ikka peast.

§ 18. Kokkuarvamine ilma osakogundite muutmiseta. Kui antud arvude kokkuarvamisel igasse osakogundisse tuleb vähem kui 10 järjeüksust, siis kirjutame iga osakogundi muutmata tema kohale, põikjoone alla: ühelised esimesele, kümnelised teisele, sajalised kolmandale kohale jne. Osakogundite üles-tähendamine annab otsekohe täiskogundi. Kas algame tegeldust alamjärjelistest või ülemjärjelistest üksustest, see on ükskõik: raskem ei ole üks ega teine tegeldamisviis. Näit.:

$$\begin{array}{r} 2462 \\ + 1204 \\ \hline 2130 \\ 1101 \\ \hline 6897 \end{array}$$

§ 19. **Kokkuarvamine osakogundite muutmisega.** Kui kokkuarvamisel üksikutesse osakogunditesse tuleb 10 või enam järjeüksust, siis peame ette võtma osakogundite muutmise, nimelt järjeüksuste ülendamise, et võimalik oleks osakogundid õigesti üles kirjutada.

Arvame ühed ja needsamad arvud kahel viisil kokku: *esiteks* alamjärjestest, *teiseks* ülemjärjestest üksustest alates.

5936		5936
2468		2468
+ 4327		+ 4327
6749		6749
4204		4204
34		21
+ 15		+ 25
25		15
21		34
23684	<i>Täiskogund ehk lihtsalt kogund.</i>	23684

Tegeldamist *alamjärjestest üksustega* alates arvame esiteks *ühelised* kokku. Peastkokkuarvamisel leiame 34 ühelist. Et selles osakogundis enam kui 9 ühelist on, siis on võimata saadud üheliiste-hulka otsekohe üheliiste kohale kogundisse kirjutada (vaata § 9). Teeme seda kaudsel teel. Ülendame osa üheliisi kümnelisteks. 30 ühelist on 3 kümnelist; tähendab: 34 ühelist = 3 kümnelist ja 4 ühelist. 34-ja üheliise asemele võime kirjutada 3 kümnelist ja 4 ühelist, ja nimelt 4 ühelist esimesele kohale, üheliiste alla, 3 kümnelist teisele kohale, kümneliste alla (nagu pahempoolses kokkuarvamisinäituses tehtud).

Kümnelisi kokku arvates leiame 15 kümnelist, mida otsekohe kümnete kohale kogundisse ei või kirjutada. Toimetame üleskirjutamist kaudsel teel. Ülendamisel leiame, et 15 kümnelist = 1 sajaline + 5 kümnelist. 15-ne kümnelise asemele kirjutame 1 sajalise ja 5 kümnelist. 1-he sajalise kirjutame kolmandale kohale, sajaliste alla, 5 kümnelist teisele kohale, kümneliste alla.

Sajalisi kokku arvates leiame 25 sajalist, mis niisama palju on kui 2 tuhandelist ja 5 sajalist. Kirjutame osakogundisse 5 sajalist kolmandale kohale, s. o. sajaliste alla, ja 2 tuhandelist neljandale kohale, s. o. tuhandeliste alla.

Tuhandelisi kokku arvates leiame 21 tuhandelist, mis niisama palju on kui 2 kümnetuhandelist ja üks tuhandeline. 21-he tuhandelise asemele kirjutame osakogundisse 2 kümnetuhandelist ja 1-he tuhandelise. 1-he tuhandelise kirjutame neljandale kohale,

s. o. tuhandeliste alla, ja 2 kümnetuhandelist viiendale kohale (s. o. kümnetuhandeliste koha alla).

Et täiskogundit leida, peame saadud osakogundid kokku arvama. Täiskogund on 23684.

Tegeldamist *ülemjärjeliste üksustega* alates talitame ühenimeliste järjeüksuste kokkuarvamisel niisama kui eelpool ja kirjutame osakogundid kaudsel teel üles. Tuhandeliste osakogund paigutatakse antud osandite alla esimesele reale, sajaliste osakogund teisele, kümneliste osakogund kolmandale ja üheliste osakogund neljandale reale, kuna alamjärjeliste üksustega tegeldamist alates osakogundid ümberpööratud järjekorras paigutatakse.

Eelpool antud näitustes on kümneliste osakogund ilma ühelisteta, sajaliste osakogund — ilma kümnelisteta ja ühelisteta, tuhandeliste osakogund — ilma sajalisteta, kümnelisteta ja ühelisteta. Puuduvate järjeüksuste kohad võiksime nullidega tähendada, tarvilik ei ole see aga mitte.

§ 20. **Kokkuarvamine osakogundite ärajätmisega.** Et täiskogundit rutemini leida, selleks jäetakse osakogundite üleskirjutamine ära. Alamjärjestest osakogunditest ülendamise teel saadud üksused arvatakse antud osandite samanimelistele üksustele otsekohe juure. Juurearvamine toimetatakse peastkokkuarvamise abil. Et eksijuhtumusi võimalikult ära hoida, selleks kirjutatakse juurearvatav üksustekogu kui lisaosand antud osandite samanimelistele üksuste püstreale alla või üle. See lisaosand kirjutatakse harilikult väiksema arvumärgiga kui antud osandite üksustekogud ja lahutatakse lookjoonelise kriipsuga teistest samanimelistest üksustest. Näitused:

$ \begin{array}{r} 3874 \\ 5098 \\ + 9659 \\ 8746 \\ 5487 \\ \hline \underline{233} \\ 32864 \end{array} $	Lisaosandid püstridade all.	$ \begin{array}{r} \overline{332} \\ 1879 \\ + 5647 \\ 28704 \\ 12795 \\ 27693 \\ \hline 56718 \end{array} $	Lisaosandid püstridade üle.	$ \begin{array}{r} 6138 \\ 5749 \\ + 28074 \\ 12968 \\ 9745 \\ \hline 62674 \end{array} $	Lisaosandid üles tähenda- mata.
---	-----------------------------------	---	-----------------------------------	---	---------------------------------------

Lisaosandite üleskirjutamist — meelepidamise otstarbel — võib ka teisel teha, kui üles kirjutamata läbi ei arvata saavat.

Kui osakogundid ära jätame, siis on lihtsam ja hõlpsam kokkuarvamist *alamjärjestest* üksustekogudest alata (*mis-pärast?*).

§ 21. **Kokkuarvamise järelkätsed ehk tõendid.** Kas kokkuarvamine õigesti on tehtud või mitte, seda võime järelkatsumise abil kindlaks teha. Kui väljaarvlemisel ühenimeliste üksuste kokkuarvamist püstridades ülevalt algasime, siis võime järelkatset kokkuarvamist püstridades altpoolt alata. Järelkatse otstarbel võime ka osandid uues järjekorras üles kirjutada ja kokku

arvata, jne. On kokkuarvamine õigesti tehtud, siis leiame igakord ühe ja selle-sama kogundi.

Kokkuarvamistõendis mahaarvamise abil selgub allpool (§ 33).

§ 22. **Ülesanne ja tema algosad.** Kõnes või kirjas avaldatud küsimus, milles kahe või mitme antud arvu abil uut arvu soovitakse leida, nimetatakse *arvlemise ülesandeks*. Ülesandel on kaks algosa: *andmed* ja *küsimus*. Andmed nimetavad arvusi, mis ülesandes selleks on antud, et nendega tegeldades uut, otsitavat arvu leida. Otsitava arvu iseloom ja tema vahetõeldus antud arvudega tähendatakse ligemalt ära ülesande küsimusosas. Võtame näituseks järgmise ülesande:

Peremees maksis aastapalgaks poisile 84 kuldrubla, tüdrukule 55 kuldrubla. Kui palju kulutas ta mõlemate palgaks aastas?

Andmed: Peremees maksis aastapalgaks poisile 84 kuldrubla, tüdrukule 55 kuldrubla.

Küsimus: Kui palju kulutas ta mõlemate palgaks aastas?

Küsimuses on otsitava arvu iseloom, kui kahe teenija kogupalk, ära tähendatud. Sellest iseloomust selgub ka otsitava arvu vahetõeldus antud arvudega: otsitav arv on antud arvude kogund. Me peame leidma antud arvude kogundi. Tegelduse abil leitud uus arv nimetatakse ka tegelduse *saaduseks*.

Otsitava arvu leidmine tegelduste abil nimetatakse ülesande *väljaarvlemiseks* ehk *väljarehkendamiseks* (ka ülesande *lahendamiseks*).

Ülesanne nimetatakse *sõnaliseks*, kui ära on üteldud antud arvude ja otsitava arvu vahetõeldus sõnadega, kõnes või kirjas. Eelpool käsitatud ülesanne kahe teenija kogupalka leidmiseks on sõnaline ülesanne. — Kui antud arvude ja otsitava arvu vahetõeldus ülesandes on tähendatud ainult tegeldusmärkide abil, ilma sõnastuseta, siis nimetatakse säärane ülesanne *kujutisliseks* ülesandeks ehk lihtsalt *kujutiseks*. Näit.:

$$17 + 8 = ?$$

$$25 + 12 = ?$$

$$34 + 15 + 8 = ?$$

Neis kujutistes tähendab küsimismärk (?) otsitavat arvu. Tegelduste järjekorra kujutis uue arvu leidmiseks nimetatakse ka tegelduse *valemiks*.

Ülesannetes tuleb kokkuarvamine tarvitusele, 1) kui kaks või mitu antud arvu üheks uueks arvuks ühendame, 2) kui ühe arvu teise arvu võrra (ehk mitme teise arvu võrra) suurendame.

§ 23. **Ülesanded.** — 12. Kui suur on kogund järgmistest kujutistest:

- a) $34 + 55 = ?$ b) $48 + 32 = ?$ d) $144 + 32 = ?$ e) $256 + 44 = ?$
g) $98 + 26 = ?$ h) $116 + 26 + 17 = ?$ i) $347 + 250 + 416 = ?$
k) $306 + 120 + 204 = ?$

13. Tartust raudteed mööda Tapale on 106 versta, Tapalt Tallinna 73 versta. Mitu versta on Tartust Tapa kaudu Tallinna?

14. Haapsalust raudteed mööda Tallinna on 98 versta, Tallinnast Narva kaudu Petrogradi 348 versta. Kui palju maad on raudteed mööda Haapsalust Petrogradi?

15. Kaubavagunisse, mis tühjalt 214 puuda kaalus, pandi 750 puuda kaupa. Kui raske on see kaubavagun kõige kaubaga?

16. Talunik sai sügisel oma põldudelt 108 vakka rukkid, 64 vakka otri, 56 vakka kaeru ja 28 vakka talinisu. Mitu vakka vilja sai ta ühtekokku?

17. Omanik müüs kaks talukohta. Esimese talukoha eest makseti 2465 kuldrubla, teise eest 360 kuldrubla enam. Kui palju makseti kahe talukoha eest kokku?

18. Talukoha rentnik maksis esimese asumisaasta eest 125 kuldrubla renti; teisel aastal maksis ta 24 kuldrubla enam kui esimesel aastal ja neljal järgmisel aastal 48 kuldrubla igal aastal enam kui esimesel aastal. Kui palju renti maksis ta 6 aasta jooksul?

19. Peremehelt küsiti, kui palju ta talukoht maksab. Peremees vastas: „Mõisale olen 2575 kuldrubla välja maksnud; krediitkassa võlga on koha peal 1800 kuldrubla; müügi korral nõuan koha hinnaks neile summadele 1875 kuldrubla lisaks“. Kui suur oli peremehe hindamise järele tema koha rahaline väärtus?

20. Rooma linna hakati 753 aastat enne Kristuse sündimist ehitama. Kui vanaks saab Rooma linn käesoleva aasta lõpul? Tallinna ehitamine algas aastal 1219 pärast Kristuse sündimist. Kui vana oli siis Rooma linn?

Teine tegeldus:

Mahaarvamine.

§ 24. **Mahaarvamismõiste.** Kokkuarvamine tekib, nagu nägime (§ 15), lihtsast edasiarvetamisest; mahaarvamist võime lihtsa tagasiarvetamise abil toimetada. Mahaarvamine on kokkuarvamise *vastand*, *vastupidine tegeldus* ehk *vastastegeldus*. Kui 4-le 3 juure arvetame, siis saame 7; vastupidi: kui 7-st 3 maha arvetame, siis saame 4. Võtame näituseks kaks ülesannet:

Ülesanne 1. *Kohaomanik maksis hobuse eest 142 kuldrubla, härja eest 56 kuldrubla; kui palju maksis ta mõlema eest?*

Kokkuarvamise abil leiame, et peremees kahe looma eest 198 kuldrubla maksis.

Ülesanne 2. *Kohaomanik ostis hobuse ja härja ja maksis nende eest 198 kuldrubla. Härg maksis 56 kuldrubla; kui palju maksis hobune?*

Esimeses ülesandes on *mõlemad osahinnad* (osandid) antud, *koguhind* (kogund) on otsitav; teises ülesandes on *koguhind* (kogund) ja *üks osahind* (osand) antud, *teine osahind* (osand) on otsitav. Kui otsitavad arvud küsimismärgiga tähendame, siis

võime mõlemate ülesannete antud ja otsitavad arvud tegelduse kujutisena järgmiselt üles kirjutada :

$$\begin{array}{l} 142 + 56 = ? \\ \hline ? + 56 = 198 \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \dots \dots \dots (1.)$$

$$\begin{array}{l} 142 + 56 = ? \\ \hline ? + 56 = 198 \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \dots \dots \dots (2.)$$

Esimesel korral otsime kahe osandi abil kogundit, kuna tegeldamisel läheme pahemalt poolt *paremale* poole, nagu esimene nooljoonistus näitab. Teisel korral otsime kogundi ja antud ühe osandi abil teist osandit, kuna tegeldamisel käiku *paremalt pahemale* poole teeme, s. o. esimese tegeldamiskäigule vastupidises sihis, nagu teine nooljoonistus näitab. *Teine tegeldusviis on esimese vastand.* Esimene tegeldus on kokkuarvamine, teine — mahaarvamine. Et otsitavat osandit leida, selleks peame antud kogundist (198-st) maha arvama antud osandi (56).

Eelpool antud seletuste järele võime mahaarvamismõiste järgmiselt kindlaks määrata :

Mahaarvamine on niisugune tegeldus, millega kogundi ja ühe osandi kaudu teise osandi võime leida.

Antud kogund ja mõlemad osandid saavad mahaarvamistegeldusel uued nimed. Antud kogund nimetatakse *vähendiks*, antud osand nimetatakse *vähendajaks*, otsitav osand nimetatakse *vahenguks* ehk *jäänuseks*. Vaheng näitab, kui suur kahe arvu *vahe* on, kui palju mahaarvamisel *järele jääb* (ehk *üle jääb*) ehk *kui palju* üks arv teisest *suurem* või *väiksem* on.

Nagu eelolevast määrusest selgub, on mahaarvamine niisuguse kokkuarvamise vastand, kus *kahe* osandi ühendamisel tuletatud kogund on antud. Mahaarvamisel võime ühekorraga ainult kahe antud arvuga tegeldada.

Mahaarvamismärgiks on lühike põikjoon (—). Mahaarvamismärki tarvitades võime eelpool antud teise ülesande arvud uue, otsitava arvu leidmiseks järgmiselt kujutisena kirjutada :

$$\underbrace{198}_{\text{Vähend.}} \quad - \quad \underbrace{56}_{\text{Vähendaja.}} \quad = \quad \underbrace{?}_{\text{Otsitav vaheng.}}$$

Arvusid võib *ainult suguldastest arvudest maha arvata*. Nii võime naelad naeladest maha arvata, naelasid tundidest mitte. *Mahaarvamist võib* (niisama kui kokkuarvamist) *osadekaupa, mitmesuguses järjekorras toimetada*. Siin tuleb muidugi silmas pidada, et suguldased arvuosad suguldastest, ühenimelised üksused samanimelistest maha arvatakse. Siit järgneb, et mahaarvamist osadekaupa ka ühenimeliste järjeüksuste kogude kaudu võib toimetada.

§ 25. **Peastmahaarvamine.** Ühekohaliste arvude mahaarvamisel tegeldatakse harilikult peast, kokkuarvamistabeli (§ 16) abil. Kui meil kahe ühekohalise arvu kogund teada on, siis võime selle kogundi ja ühe osandi abil ka teise osandi leida. Meie teame, näit., et $8 + 7 = 15$; tähendab: meie teame ka, et $15 - 8 = 7$ ehk $15 - 7 = 8$. Vahengud, mis teise kümne (kunni 20-ni) arvudest ühekohaliste arvude mahaarvamise kaudu saadakse, on tarvis peast teada. Vastasel korral on vaheng väljaarvlemise abil kerge leida. Vahengu $15 - 7$ võime leida, kui 15-st 7 osadekaupa maha arvame: $15 - 5 = 10$; $10 - 2 = 8$. Vahengu võime ka kokkuarvamise abil leida; selleks on tarvis leida osand, mis vähendajaga kokku vähendi (kui kogundi) tuletab. Samal viisil toimetame igakord, kui ühekohaline arv mõnest kahekohalisest arvust tuleb maha arvata. Ülemate järjeüksuste mahaarvamisel tegeldatakse samasugusel viisil kui lihtüheliste mahaarvamisel.

Suuremate arvude peastmahaarvamisel algame tegeldamisega enamasti ülematest järjeüksustest, nagu peastkokkuarvamiselgi. Näit. on tarvis 365-st 287 maha arvata. Tegeldame järgmiselt: $365 - 200 = 165$; $165 - 80 = 85$; $85 - 7 = 78$.

§ 26. **Kirjaliku mahaarvamise eeltingimused.** Kirjalik mahaarvamine toimetatakse osadekaupa. Vähendaja kirjutatakse vähendi alla, nii et esimese ühelised teise üheliste, esimese kümnelised teise kümneliste alla tulevad jne. Mahaarvamismärk (—) kirjutatakse vähendaja ette. Võime vähendi ka vähendaja alla kirjutada, sest peaasi tegelduse juures ei ole antud arvude üleskirjutamisviis, vaid tegeldus ise. Üks või teine arvude üleskirjutamisviis võib tegeldamist kergendada või raskendada sedamööda, kas ta arvusid ja nende osi ülevaatlikult, tegeldamise juures kergesti kättesaadavalt kujutab, ehk ümberpöörduvalt. Vaheng ehk jäänus kirjutatakse antud arvude (vähendi ja vähendaja) alla ja eraldatakse neist põikjoonega. Võiksime vahengu ka antud arvude üle kirjutada, kui ruum lubab, aga praktilisem ja hõlpsam on vahengut, kui antud arvudele järgnevat arvu, nende alla kirjutada. Mahaarvamist võime alamjärjesteliste või ülemjärjesteliste üksustest alata.

§ 27. **Kirjalik mahaarvamine vähendi muutmiseta.** Vähendi järjeüksused jäävad mahaarvamisel muutmata, kui vähendi iga üksustekogu suurem või vähemalt niisama suur on kui vähendaja samanimeline üksustekogu. Säärasel korral on ükskõik, kas mahaarvamist algame alamjärjesteliste või ülemjärjesteliste üksustest: tegeldamine on mõlemal korral lihtne ja kerge. Mõlemal korral tegeldame ühenimeliste üksustega ja kirjutame iga osavahengu tema kohale, põikjoone alla: ühelised üheliste, kümnelised küm-

neliste alla jne. Osavahengud oma järjekorras tuletavad täis-
vahengu. Näit:

$$\begin{array}{r} . \quad 6487 \\ - \quad 2451 \\ \hline 4036. \end{array}$$

§ 28. **Kirjalik mahaarvamine vähendi muutmisega.** Kui vähendis mõned järjeüksuste kogud vähendaja samanimelistest järjeüksuste kogudest väiksemad on, siis tuleb mahaarvamisel mõnda järjeüksust vähendis alamjärjeliseks muuta, s. o. vähendit tuleb alandamise teel muuta. Otsime arvude 4538 ja 1849 vahengu, tegeldamist alamjärjelistest üksustest alates.

Esiteks on tarvis 8-st ühelisest 9 ühelist võtta. Et võimata on 8-st ühelisest 9 ühelist maha arvata (mispärast?), siis katsume kümnelistest maha arvata. Vähendis on 3 kümnelist. Võiksime 9 ühelist 3-st kümnelisest katsuda maha arvata. Et aga juba 1 kümneline 9-st ühelisest suurem on, siis võtame vähendi 3-st kümnelisest 1-he kümnelise ja katsume 1-st kümnelisest maha arvata. Vähendisse jääb veel 2 kümnelist, mida läbikriipsutatud 3-me kümnelise üle arvumärgiga 2 kirjutame. Vähendi kümnelistelt võetud 1-st kümnelisest ei või me otseteel 9 ühelist maha arvata, sest kümnelised ja ühelised ei ole ühenimelised. Alandame kümnelise ühelisteks: leiame 10 ühelist. Enne on vähendis 8 ühelist. Need 8 ühelist, ühes 10-ne ühelisega, mis ühest kümnelisest saadud, teevad kokku 18 ühelist. Kokkuvõetud 18 ühelist kirjutame läbikriipsutatud 8 ühelise asemele. Nii saame vähendisse 18 ühelist. Et nad ühenimelised järjeüksused on, siis tähendame seda tingival allakriipsutatud lookjoonega: muidu on võimata meie arvumärkidega rohkem kui 9 ühenimelist järjeüksust üles tähendada. Arvame 18-nest ühelisest 9 ühelist maha, — jääb 9 ühelist järele. Ülejäänud 9 ühelist kirjutame vahengusse, üheliste alla.

Teiseks on tarvis 2-st kümnelisest 4 kümnelist maha arvata. Et see võimata on (sest 2 kümnelist on vähem kui 4 kümnelist), siis katsume vähendi sajalistest 4 kümnelist maha arvata. Võtame vähendi 5-st sajalisest 1 sajalise; vähendisse jääb veel 4 sajalist, mida läbikriipsutatud 5 sajalise asemele arvumärgiga 4 kirjutame. Vähendi sajalistelt võetud ühe sajalise alandame kümnelisteks: leiame 10 kümnelist. Enne on vähendis 2 kümnelist. Kokku saame 12 kümnelist, mida läbikriipsutatud 2 kümnelise üle, kümneliste koha peale, lookjoonega allakriipsutatult üles kirjutame. Arvame 12-st kümnelisest 4 kümnelist maha, — jääb 8 kümnelist järele. Need 8 kümnelist kirjutame vahengusse, kümneliste alla.

Kolmandaks on tarvis vähendi 4-st sajalisest 8 sajalist maha arvata. Et see võimata on, siis katsume vähendi tuhandelistest maha arvata. Võtame vähendi 4-st tuhandelisest 1 tuhandelise. Vähendisse jääb 3 tuhandelist, nagu see arv läbikriipsutatud 4 tuhandelise asemele on kirjutatud. Eraldatud 1 tuhandelise alandame 10-ks sajaliseks, arvame need 10 sajalist vähendis leiduva 4-ja sajalisega kokku ja kirjutame kokkuarvamisel leitud 14 sajalist, lookjoonega allakriipsutatult (kui ühenimelised üksused), läbikriipsutatud 4-ja sajalise asemele. Arvame 14-st sajalisest 8 sajalist maha. Jääb 6 sajalist järele. Need 6 sajalist kirjutame vahengusse sajaliste kohale.

Neljandaks arvame 1 tuhandelise klomest tuhandelisest maha; jääb 2 tuhandelist järele.

Jäänus ehk vaheng on 2689.

Nagu näha, pidime vähendi muutma, sest muidu ei olnud võimalik mahaarvamist teostada. Antud vähendi 4538 asemele astus muudetud vähend: 3 tuhandelist + 14 sajalist + 12 kümnelist + 18 ühelist. Et muudetud vähend on antud vähendi suurune, siis on ka vaheng seesama, mida antud vähendi ja vähendaja abil pidime otsima. Muudetud vähendis on iga üksustekogu omanimelisest üksustekogust vähendajas suurem ja sellepärast mahaarvamine võimalik.

§ 29. **Puuduvad üksustekogud vähendis.** Kui vähendis alamjärjeliste üksustekogude kohad nullidega on tähendatud, s. o. kui alamjärjelised üksustekogud puuduvad, siis hakkame vähendi muutmiseiga ligemast ülemjärjelisest üksustekogust peale ja

toimetame alandamist kunni	2 ^{9 9 9} 10 ¹⁰ 10 ¹⁰	2 9 9 9 10
esimese järje üksusteni, nagu	3 0 0 0 0	ehk: 3 0 0 0 0
kõrvalolevast näitusest selgub.	— 1 2 5 4 7	— 1 2 5 4 7
Vähendis puuduvad kõik neli	1 7 4 5 3	1 7 4 5 3

alamjärjelist üksustekogu. Et mahaarvamist toimetada, selleks tegeldame järgmiselt: Eraldame 3-st kümnetuhandelisest ühe kümnetuhandelise; vähendisse jääb 2 kümnetuhandelist. Eraldatud ühe kümnetuhandelise alandame tuhandelisteks. Saadud 10 tuhandelist kirjutame, lookjoonega allakriipsutatult, tuhandete koha peale. Eraldame 10-st tuhandelisest ühe tuhandelise, — jääb vähendisse 9 tuhandelist. Eraldatud ühe tuhandelise alandame sajalisteks ja kirjutame 10 sajalist samal viisil vähendisse sajaliste kohale, jne. Nii leiame antud vähendi asemele muudetud vähendi, millel antud vähendi puuduvate üksustekogude asemel on 9 üksust igas kogus, peale ühelistekogu, milles 10 ühelist leidub. Mahaarvamine muudetud vähendist on kerge.

Kui vähendis üles kirjutame ainult kohalejäävad üksustekogud, siis leiame muudetud vähendi otsekohe, nagu eelolevast teisest näitlikust väljaarvlemisest selgub.

§ 30. **Vähendi muutmise lihtsam ülestähendamine.** Eel-pool (§§ 28 ja 29) oleme vähendi üksustekogude muutmised kir-jalikult üles tähendanud, nii et vähendi ühenimelised üksuste-kogud kirjutati kahe- ja koguni kolmekordselt. Harilikult jäetakse säärane üleskirjutamine ära. Järjeüksuste kogu vähendamine ühe üksuse võrra tähendatakse üles ja tehakse silmapaistvaks punkti abil, mis üksustekogu arvumärgi üle või kõrvale (paremale poole) kirjutatakse. Ülemjärjelisest üksusest saadud 10-ne alamjärjelise üksuse kokkuarvamine samanimeliste alamjärjeliste üksustega toi-metatakse peast, ilma et kogund ise kirjalikult üles tähendataks. Võtame näituse 87300—42936. Vähendis ei ole ühelisi ega

87300	kümnelisi. Otseteel ei või me ühelisi ja kümnelisi
— 42936	maha arvata. Võtame vähendi 2-st sajalisest 1 saja-
44364	lise. Arvumärgi 3 kõrvale kirjutame punkti, — tä-
	hendusega, et 3-me sajalise asemele 2 sajalist jääb.

Võetud 1 sajalise alandame 10-ks kümneliseks. Neist 10-st küm-nelisest võtame 1-he kümnelise, mille 10-ks üheliseks alandame, ja kirjutame kümneliste kohal olevale nullile punkti paremale poole tähenduseks, et teisele kohale 9 kümnelist jääb. Ar-vame 10-nest ühelisest 6 ühelist maha, — jääb 4 ühelist järele. Nii-sama arvame 9-st kümnelisest 3 kümnelist maha, — jääb 6 küm-nelist järele. Kahest sajalisest on võimata 9 sajalist maha ar-vata. Võtame 7-st tuhandelise ühe tuhandelise ja kirjutame tuhandeliste arvumärgile punkti paremale poole — tähenduseks, et vähendisse 7-me tuhandelise asemele 6 tuhandelist jääb. Võe-tud 1 tuhandelise alandame 10-ks sajaliseks ja lisame vähendi 2-le sajalisele juure. Nii tuletame vähendisse 12 sajalist. Arvame 12-st sajalisest 9 sajalist maha, jääb järele 3 sajalist. Edasi, arvame 6-st tuhandelise 2 tuhandelist maha, jääb järele 4 tu-handelist. Viimaks leiame, et kümnetuhandelisi 4 järele jääb.

— Vaheng on 44364.

Näitusest selgub, et *punkt arvumärgi taga (paremal pool) vähendab üksustekogu ühe üksuse võrra, punkt arvumärgi ees (pahemal pool) suurendab üksustekogu kümne üksuse võrra; punkt arvumärgi ees ja teine arvumärgi taga suurendavad seda-mööda üksustekogu 9 üksuse võrra. Null eeloleva punktiga tähendab kümme üksust, null eeloleva ja järgneva punktiga — 9 üksust.*

Nagu mahaarvamise näitustest (§ 27—30) selgub, toimetat-se kirjalik mahaarvamine osadekaupa niiviisi, et iga osaline mahaarvamine muud midagi ei ole kui ühekohalise arvu maha-arvamine ühe- või kahekohalisest arvust. Et, näit., 6357-st 4768 maha arvata, selleks peame maha arvama: 8 (ühelist) 17-st (ühe-lisest), 6 (kümnelist) 14-st (kümnelisest), 7 (sajalist) 12-st (sajali-sest) ja 4 (tuhandelist) 5-st (tuhandelise).

Mahaarvamisel võime tegeldamist ka ülemjärjeliste üksustega alata. Säärasel korral tuleb niihästi vahengu kui ka vähendi muutmise tarvitusele, peale selle juhtumise, mis eelpool § 27 on seletatud. — 68453
 Kõrvalolevas mahaarvamise näituses on vähendi muut- — 25978
 mist peastkokkuarvamise abil toimetatud, ilma et 43585
 muutmise saadused kirjalikult iseäranis oleksid üles + 247
 tähendatud. Kuidas tuleb seletada tegeldamiskaiku, 42475
 mis ülemjärjestest üksustest alatud? Hõlpsam ja liht-
 sam on tegeldamist alamjärjestest üksustest alata kui ülemjärjestest. (Mispärast?)

§ 31. **Mahaarvamise tarvitamine.** Ülesannete väljaarvlemist toime-
 tatakse mahaarvamise abil: 1) kui otsitakse kahe arvu vahengut, s. o. kui
 palju üks arv teisest suurem või väiksem on; 2) kui üks arv teise arvu võrra
 vähendatakse, s. o. kui esimese arvu jäänus leitakse; 3) kui antud arvu ja
 ühe ta osa abil teine osa leitakse, s. o. kui kogundi ja ühe osandi abil
 teine osand leitakse.

Vaheng ehk *jäänus* võib ülesannetes ka teistsuguste nimede all ette
 tulla. Kaubaasjade ostu ja müügi korral nimetatakse vaheng *kasuks*, kui
 müügihind ostuhinnast suurem on, ja *kahjuks*, kui müügihind ostuhinnast
 väiksem on. Kasu nimetatakse *vahekasuks*, kui ta vaevatasuna vahetalitaja
 kätte läheb, kes kaubaomaniku volitusel kauba edasi müüs, jne. Vaheng (tema
 mitmesuguste nimetustega) on *tegelduse saadus*, nimelt mahaarvamise saadus,
 nagu kogund on kokkuarvamise saadus (§ 22). Tegelduse saadus võib *kaudne*,
 kujutisline olla, kui tegeldus ainult märkide abil ära näidatakse, ilma et saadus
 oleks leitud. Nii on 18 + 15 kogundi kujutis ehk *kaudne kogund*, 25—14
 vahengu kujutis ehk *kaudne vaheng*. Ka teiste tegelduste saadused võib
 kaudselt, kujutistena, üles tähendada (kirjutada).

§ 32. **Sulgude ehk klambrite tarvitamine.** Kui kujutises
 ehk valemis ettetulevad tegeldused mitte selles järjekorras, nagu
 nad üles tähendatud, ei tule täita, vaid mõnes teises, siis tarvi-
 tatakse selle teise, iseäralise järjekorra kindlaksmääramiseks *sul-*
gusid ehk *klambrid*. Üldiselt tarvitusel olevad sulud on kolme-
 sugused: *looksulud* (), *ruut-* ehk *püstsulud* [] ja *keerdsulud* { }.
 Kui tahaksime, näit., 65-st maha arvata 70-ne ja 37-me vahengu,
 siis peaksime tegelduse valemi ehk kujutise järgmiselt kirjutama:

$$65 - (70 - 37) = ?$$

Nagu näha, on antud arvude järjekorras võimata tegeldust
 täita. Esiteks peame sulgudes olevate arvudega tegeldama,
 teiseks — saadud vahengu esimesest antud arvust (65-st) maha
 arvama.

Kui mõni valemi osa *kahekordselt* sulgudesse tuleb võtta, siis tarvi-
 tatakse, peale ooksulgude, veel püstsulgusid, kui *kolmekordselt* — siis peale
 teiste veel keerdsulgusid. Näit.:

$$36 - [58 - (59 - 18)] = ?$$

$$30 - \{ 69 - (18 - 10) + [27 - (36 - 13)] - 46 \} = ?$$

Esimeses valemis tuleb kõik, mis püstsulgudes on, 36-st maha arvata,
 teises valemis — kõik, mis keerdsulgudes on, 30-st maha arvata. Tegeldamist
 algame arvudega, mis looksulgudes; selle järele tulevad tegeldused nende ar-
 vudega, mis püstsulgudes; kolmandas joones tulevad tegeldused nende arvu-
 dega, mis keerdsulgudes, ja lõpuks tegeldused keerdsulgude tegelduste saadusega
 ja arvudega, mis väljaspool sulgusid.

§ 33. **Kokkuarvamise ja mahaarvamise järeלקatsed ehk tõendised.** Kokkuarvamise ja mahaarvamise on vastastegeldused (§ 24). Sellepärast võib mahaarvamise abil järele katsuda, kas kokkuarvamine õigesti on tehtud, ja ümberpöördukt.

I. *Kokkuarvamise tõendiseks* on vaja osandid, mistahes järjekorras, kogundist maha arvata, kunni midagi enam üle ei jää. Vastaskorral on kokkuarvamine vigane. Näit.:

Tegeldus: 362 + 579 188 1129	Tõendis: 1·1·2·9 — 3 6 2 7·6·7 — 5 7 9 1 8 8 — 1 8 8 0
--	--

II. *Mahaarvamistõendise* selgituseks on tarvis meeles pidada, et selle tegelduse mõistest (§ 24) tekib järgmine vahekord: *Vähend on nii suur kui vähendaja ja vahengu kogund.* Sellest vahekorrast järeldame, et mahaarvamise tõendiseks vaja on vähendajat vahenguga kokku arvata. Kui kogundisse vähend ilmub, siis on mahaarvamine õigesti tehtud; vastaskorral on mahaarvamine vigane. Näit.:

Tegeldus: 2·7·9·4 — 1 8 5 8 9 3 6	Tõendis: 1858 + 936 2794
--	--

III. Mahaarvamismõistest tekib ka veel teine vahekord: *Vähend ilma vahenguta on nii suur kui vähendaja.* Selle vahekorra põhjal võime mahaarvamist mahaarvamise abil järele katsuda. Arvame vähendist vahengu maha; kui jäänus on vähendaja suurune, siis otsustame, et järeלקatsutav mahaarvamine õigesti oli tehtud. Näit.:

Tegeldus: 3·4·5·2 — 1 8 2 5 1 6 2 7	Tõendis: 3·4·5·2 1 6 2 7 1 8 2 5
--	--

Kogundi ja vahengu muutmine.

§ 34. **Kogundi muutmine.** Kogundis on kõik osandite üksused kokku võetud ehk ühendatud. Sellepärast mõjub ka osandite suurendamine või väiksendamine kogundi peale, nii et kogund suureneb või väikseneb, ehk vahest ka muutmata jääb. Niisugune muutmine on kogundi *kaudne* muutmine. Selgitame lühidalt mõnda lihtsamat muutmisviisi.

I. Kui osandi mõne arvu võrra suurendame, siis suureneb samavõrra ka kogund, ja ümberpöörduvalt: kui osandi mõne arvu võrra väiksendame, siis väikseneb samavõrra ka kogund.

Osandile juurelisatud üksused lähevad kokkuarvamisel kogundisse ja suurendavad kogundi nende üksuste võrra; osandist mahaarvatud üksused jäävad kokkuarvamise juures kogundisse võtmata, nii et kogund nende üksuste võrra väikseneb. Näitused:

$$\begin{array}{rcl}
 \begin{array}{r} 34 \\ + 45 \\ \hline 37 \\ \hline 116 \end{array} & \begin{array}{r} 41 \\ + 45 \\ \hline 37 \\ \hline 123 \end{array} & \begin{array}{l} \text{Esimene osand} \\ 7 \text{ võrra} \\ \text{suurendatud.} \end{array}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 \begin{array}{r} 34 \\ + 36 \\ \hline 37 \\ \hline 107 \end{array} & \begin{array}{l} \text{Teine osand.} \\ 9 \text{ võrra} \\ \text{väiksendatud.} \end{array}
 \end{array}$$

Esimese osandi suurendamise kaudu 7-me ühelise võrra on kogund samavõrra suurenenud, sest $116 + 7 = 123$. Teise osandi väiksendamise kaudu 9 ühelise võrra on ka kogund samavõrra väiksenenud, sest $116 - 9 = 107$.

II. Kui ühe osandi mõne antud arvu võrra suurendame, aga teise osandi sellesama arvu võrra väiksendame, siis jääb kogund muutmata.

Kui, näit., ühe osandi 25 võrra suurendame ja teise osandi 25 võrra väiksendame, siis suurendame esiteks kogundi 25 võrra, teiseks — vähendame kogundi 25 võrra. Kui kogundile juurelisatud 25 üksust jälle tagasi võtame (s. o. maha arvame), siis peab kogund endiseks, muutmatuks jääma.

Osandite muutmist võib mõnikord peastkokkuarvamise kergituseks tarvitada. Näituseks, arvude 194 ja 85 kogundi võime järgmisel viisil leida. Suurendame esimese osandi 6 võrra, saame 200. Kokku $200 + 85 = 285$. Arvame saadud kogundist 6 maha, — leiame otsitava kogundi 279. — Nii-sama leiame, et $87 + 113 = 100 + 100 = 200$; $34 + 35 + 36 = 35 + 35 + 35 = 70 + 35 = 100 + 5$, jne.

§ 35. **Vahengu muutmine.** Vahengu kaudne muutmise sünnib järgmistele seadlustele põhjal:

I. Kui vähendi mõne arvu võrra suurendame, siis suureneb samavõrra ka vaheng, ja ümberpöörduvalt: kui vähendi mõne arvu võrra väiksendame, siis väikseneb samavõrra ka vaheng.

Vähend on vähendaja ja vahengu kogund. Kogundit mõne antud arvu võrra suurendades või väiksendades peame ühe osandi samavõrra suurendama või väiksendama, et mõlemate osandite üksustekogu oleks muudetud kogundi suurune ja temast mitte väiksemaks või suuremaks ei jääks. Näitused:

$$\begin{array}{rcl}
 \begin{array}{r} 384 \\ - 175 \\ \hline 209 \end{array} & \begin{array}{r} 399 \\ - 175 \\ \hline 224 \end{array} & \begin{array}{l} \text{Vähend 15-ne} \\ \text{võrra} \\ \text{suurendatud.} \end{array}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 \begin{array}{r} 361 \\ - 175 \\ \hline 186 \end{array} & \begin{array}{l} \text{Vähend 23-ne} \\ \text{võrra} \\ \text{väiksendatud.} \end{array}
 \end{array}$$

Vähendi suurendamise kaudu 15-ne võrra on vaheng samavõrra suurenenud, sest $209 + 15 = 224$; vähendi väiksendamise kaudu 23 võrra on vaheng samavõrra väiksenenud, sest $209 - 23 = 186$.

II. Kui vähendaja mõne antud arvu võrra suurendame, siis väikseneb samavõrra vaheng, ja ümberpöörduvalt: kui vähendaja mõne antud arvu võrra väiksendame, siis suureneb samavõrra vaheng.

Kui jätame kogundi muutmata, ühe osandi aga mõne arvu võrra suurendame või väiksendame, siis peame teise osandi samavõrra väiksendama või

suurendama, et mõlemate osandite üksustekogu oleks muutmata jäänud kogundi suurune. Siit järgneb, et vähendaja, kui ühe osandi, suurendamise või väiksendamise korral vaheng, kui teine osand, samavõrra väikseneb või suureneb. Näituseks:

$$\begin{array}{rcl} 476 & 476 \} & \text{Vähendaja 17-ne} \\ -153 & -170 \} & \text{võrra} \\ \hline 323 & 306 & \text{suurendatud.} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 476 \} & \text{Vähendaja 24} \\ -129 \} & \text{võrra} \\ \hline 347 & \text{väiksendatud.} \end{array}$$

Vähendaja suurendamise kaudu 17-ne võrra on vaheng samavõrra väiksenenud, sest $323 - 17 = 306$; vähendaja väiksendamise kaudu 24 võrra on vaheng samavõrra suurenenud, sest $323 + 24 = 347$.

III. Kui vähendi ja vähendaja ühe ja sellesama antud arvu võrra suurendame või väiksendame, siis jääb vaheng muutmata.

Antud seadlus tekib kahe eeloleva seadluse ühisel tarvitamisel. Kui vähendi mõne antud arvu võrra suurendame, siis suurendame kaudsel teel ka vahengu sellesama arvu võrra; kuna me vähendaja suurendamise kaudu vahengu sellesama antud arvu võrra jälle väiksendame, siis jääb vaheng endiseks, s. o. muutmata. Vähendi ja vähendaja väiksendamise korral, ühe ja sellesama arvu võrra, väiksendame ja suurendame kaudsel teel ka vahengu sellesama arvu võrra, s. o. jätame vahengu muutmata endiseks. Näitused:

$$\begin{array}{rcl} 329 & 341 \} & \text{Vähend ja vähen-} \\ -115 & -127 \} & \text{daja 12-ne võrra} \\ \hline 214 & 214 & \text{suurendatud.} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 295 \} & \text{Vähend ja vähen-} \\ -81 \} & \text{daja 34-ja võrra} \\ \hline 214 & \text{väiksendatud.} \end{array}$$

§ 36. **Ülesanded.** — 21. Kui suur on vaheng järgmistes kujutistes: a) $364 - 156 = ?$ b) $4091 - 1874 = ?$ d) $2431 - 987 = ?$ e) $6124 - 3516 = ?$ g) $3000 - 1976 = ?$ h) $10000 - 6999 = ?$ i) $21010 - 14532 = ?$

22. Arvle järgmistele valemitele saadused välja: a) $34 + (68 - 17) = ?$ b) $84 - (71 - 28) = ?$ d) $11 - [15 - (344 - 338)] = ?$ e) $6 - (180 - 175) + [46 - (186 - 151)] = ?$ g) $[(84 - 56) - (906 - 884)] + (101 - 92) = ?$ h) $9 + \{36 - [136 - (260 - 129)]\} = ?$

23. Tartust on raudteed mööda Tapa kaudu Tallinna 179 versta, Rakveresse 47 versta vähem. Mitu versta on Tartust Tapa kaudu Rakveresse?

24. Aednik tõi linnaturule 270 õuna. Neist müüs ta esimesele ostjale 85 õuna, teisele 95 õuna ja kolmandale kõik ülejäänud õunad? Mitu õuna sai kolmas ostja?

25. Jalaväe polgus teenis 2864 sõdurit. Sügisel, enne uute nekrutite võtmist, lasti 985 sõdurit teenistusest koju ja arvati tagavaraväkke. Mitu sõdurit jäi veel polku?

26. Taluperemees, kes oma päriiskoha 5275 kuldrubla eest ära müüs, sai 980 kuldrubla kasuraha. Kui kallilt oli ta selle talukoha ostnud?

27. Jõgevalt maanteed mööda Põltsamaa ja Parikâ kaudu Viljandi on 76 versta. Selle maantee ääres, Jõgeva ja Põltsamaa vahel, on Sulustvere küla. Jõgevalt Põltsamaale on 29 versta, Sulustverest Viljandi on 55 versta. Kui palju maad on Sulustverest Põltsamaale?

28. Tallinnast raudteed mööda Tapa kaudu Riiga on 415 versta. Mõlemast linnast sõitsid ühel ajal kaubarongid välja Tapa poole. Kui Tallinna kaubarong Tapale jõudis, mis 73 versta Tallinnast kaugel on, jäi Riia kaubarongil veel 15 versta Võnnu linnani sõita. Mõlemad kaubarongid sõitsid ühesuguse kiirusega. Kui kaugel on Võnnu linn Tapalt? kui kaugel Tallinnast?

29. Kahes korvis oli kokku 164 õuna. Esimesest korvist võeti 12 õuna ja pandi teise korvi. Mitu õuna oli selle järele kokku kahes korvis?

30. Kahes toas oli 68 inimest. Esimesest toast lahkus 14 inimest, teise tuppa tuli 8 inimest juure. Kui palju inimesi oli selle järele kokku kahes toas?

31. Nelja töömehe kuupalk oli 82 kuldrubla. Kauase teenistuse järele lisati juure esimesele 7 kuldrubla, teisele 9 kuldrubla, kolmandale 11 kuldrubla kuus. Kui palju tuleb neljandale juure lisada, et kõigi nelja kogupalk oleks 121 kuldrubla kuus?

32. Ärimees oli kolmes ettevõttes tegev. Metsaga kauplemisel kaotas ta aasta jooksul 960 kuldrubla, viljaga kauplemine tõi talle 894 kuldrubla kasu, rendimaade harimine 775 kuldrubla kasu. Kui palju suurenes ta kapitaal aasta jooksul?

33. 18-aastane koolipoiss küsis oma koolivennalt, kui vana ta on. Koolivend vastas: „Kui ma 3 aastat vanem oleksin, siis oleksin sinust ainult 3-me aasta võrra noorem“. Kui vana oli koolivend?

34. Vennal oli 12 õuna rohkem kui õel. Kui vend 2 õuna õele kinkis, siis jäi vennale enesele samavõrra rohkem õunu, kui neid õel nüüd endistega kokku oli. Mitu õuna oli enne kummalgi?

35. Oraval oli puuõõnsuses 37 pähkli ja puu all maas 10 pähkli koorepoolikut. Mitu pähkli peab orav süües veel poolitama, et pähklike arv puuõõnsuses ja mahavisatud koorepoolikute arv ühesuured oleksid?

36. Talunikul oli ühes salves 145 puuda kaeru, teises salves olid odrad. Kui ta 68 puuda otri ja 94 puuda kaeru ära müüs, siis jäi otri salve 168 puuda rohkem kui kaeru. Kui palju oli enne müümist otri salves?

Kolmas tegeldus:

Kasvatamine.

§ 37. **Kasvatamismõiste.** Kasvatamine tuletatakse kokkuarvamisest. Kui mitu ühesuurst arvu on antud kokku arvata, siis nimetatakse säärane kokkuarvamine kasvatamiseks. Ühesuuste osandite kokkuarvamise võime lühemalt kasvatamismärgi abil, milleks põikristi ($\times$) või punkti ($\cdot$) tarvitatakse, järgmisel viisil üles tähendada:

$$6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 6 \times 5.$$

See tähendab: 6 osandiks võetud 5 korda; lühemalt: 6 viis korda ehk 5 korda 6; 6 kasvatatud 5-ga, 6 kasvatis 5-ga jne. Siit selgub kasvatamismõiste:

Kasvatamine on niisugune tegeldus, millega üks antud arv nii mitu korda osandiks võetakse kui teises antud arvus ühesid on.

Arv, mis osandiks võetakse, on *kasvand*; arv, mis näitab, mitu korda kasvand osandiks võetakse, on *kasvatataja*; uus arv, mis kasvatamisel saadakse, on *kasvatis*. Kasvatuses $6 \times 5 = 30$ on kasvand 6, kasvatataja 5, kasvatis 30. Kasvatis, mis ainult te-

geldusmärkidega ära on tähendatud, nimetatakse kasvatisse kujutiseks. Nii on 25×7 kasvatisse kujutis; kasvatis kui tegelduse saadus on 175.

Ühesuuruste osandite ühendamist tuleb kokkuarvamisel harvemini ette kui mitmesuuruste osandite ühendamist. *Mitmesuuruste osandite ühendamine* kogundiks on *harilik* kokkuarvamine, *ühesuuruste osandite ühendamine* kogundiks on *erandline* kokkuarvamine. Peale erandlise kokkuarvamise, kus ühesuurused osandid kogundiks ühendatakse, tuleb veel teistsuguseid erandlisi kokkuarvamisjuhtumusi ette. Kui, näit., iga osand oma eelminevast osandist mõnevõrra ehk mõnekorra suurem või väiksem on, siis on meil erandlise kokkuarvamise tegemist. Osandite ühendused: $1 + 2 + 3 + 4 + 5$; $16 + 14 + 12 + 10 + 8$; $3 + 15 + 75 + 375$ ja teised nende sarnased, kujutavad erandlisi kokkuarvamisjuhtumusi, ilma et neid ühendusi kasvatamiseks võiks nimetada. Järgnevalt on kasvatamine niisugune *erandline kokkuarvamine, milleks ühesuurused osandid on antud*. Erandlist kokkuarvamist võib lühemal ja rutemal teel lõpule viia kui harilikku kokkuarvamist. Sellepärast tarvitame saaduse leidmiseks kasvatamise, kui erandlise kokkuarvamise korral, iseäralist tegeldamisviisi, mis kokkuarvamise asemele astub.

Kasvandi ja kasvataja kohtade vahetamine ei muuda kasvatisist. Kasvatis 5×4 on niisama suur kui kasvatis 4×5 , sest kas võtame 5 osandiks 4 korda, ehk võtame 4 osandiks 5 korda, — kogund jääb ikka selleksamaks; see kogund on otsitav kasvatis. Kasvatisse kujutises võib ka kolm ja enam arvu ette tulla. Nende kohtade vahetamine ei muuda ka kasvatisist. Kui kasvandi ja kasvataja on nimeta arvud, siis on tegeldamise juures ükskõik, missugune neist arvudest kasvandiks, missugune kasvatajaks võetakse. Ühise tähenduse pärast antakse kasvandile ja kasvatajatele ka ühine nimetus: *kasvatajad* ehk *tegurid*.

Kasvatamist võime *osadekaupa* toimetada. Et arvu 25 kasvatada 4-ga, võime kasvandi lahutada osanditeks, näit. $20 + 5$, iga osandi iseäraldi kasvatada 4-ga ja saadud *osakasvatised* üheks *täiskasvatiseks* kokku arvata. Nii leiame, et $25 \times 4 = (20 + 5) \cdot 4 = 20 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 80 + 20 = 100$, jne. Nagu kasvandi, võime ka kasvataja osanditeks lahutada ja tegeldamist kasvataja osandite kaudu toimetada. *Kahe- ja mitmekohaliste arvude kasvatamise korral lahutame kasvandi ja kasvataja nende üksustekogude järele osanditeks ja toimetame kasvatamist üksustekogude kaudu.*

§ 38. **Peastkasvatamine.** Et meil kasvatamise korral kergem ja hõlpsam oleks tegeldada, selleks on tarvis iga kahe ühekohalise arvu kasvatisist peast teada. Kokkuarvamise abil leiame need kasvatised. Kui kõik säärased kasvatised ühiseks tabeliks kokku võtame, siis saame *väikese ükskordühe tabeli* ehk *väikese kasvatistabeli* arvupiiris 1 kunni 100-ni. Väikese ükskordühe tabelleid võib mitmel viisil kokku seada. Siin järgneb üks kõige lihtsamaist (Pythagoras'e ükskordühe tabel).

Väike ükskordüks.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Selle tabeli esimeses põikreas on arvud 1-st kunni 10-ni järgemööda üles tähendatud (10 on juba kahekohaline arv, nimelt kõige väiksem kahekohaliste hulgast). Teises põikreas järgemööda on esimese põikrea kahekordsed arvud, kolmandas põikreas on esimese põikrea kolmekordsed, neljandas — esimese põikrea neljakordsed arvud jne. üles tähendatud, kunni viimase, alumise põikreani, kus esimese põikrea arvude kümnekordsed on üles tähendatud. Seesama järjekord on ka püstridades, pahemalt paremale poole minnes.

Kui selle tabeli järele tahame leida kahe arvu, näit. 6 ja 8 kasvatist, siis peame esiteks need arvud esimeses põikreas ja pahempoolses püstreas üles otsima; teiseks peame püstrida mööda otse alla ja põikrida mööda paremale poole minema, kunni mõlemad read ühise arvu peale kokku tulevad. Nende kahe rea ühine arv on otsitav kasvatis. Arvude 6 ja 8 kasvatis on tabeli järele 48.

Peastkasvatamine suuremate arvudega toimetatakse osadekaupa. *Kahe-* ja *kolmekohalise* arvu peastkasvatamist *ühekohalisega* võib kergesti teostada. Näit.: $135 \times 6 = 100 \times 6 + 30 \times 6 + 5 \times 6 = 600 + 180 + 30 = 780 + 30 = 810$; $825 \cdot 4 = 800 \cdot 4 + 25 \cdot 4 = 3200 + 100 = 3300$, jne. Ühekohalise arvu kasvatamisel kahe- või kolmekohalise arvuga tegeldatakse nii, et kasvand kasvatajaks ja kasvataja kasvandiks tehakse. Nii leiame, et $8 \cdot 125 = 125 \cdot 8 = 100 \cdot 8 + 25 \cdot 8 = 800 + 200 = 1000$, jne.

Peastkasvatamisel alatakse tegeldamisega enamasti ülematest järjeüksustest, — neilsamadel põhjustel kui peastkokkuarvamiselgi (§ 16).

§ 39. Kirjaliku kasvatamise eeltingimused. Kirjalik kasvatamine toimetatakse osadekaupa, nagu peastkasvatamine. Et antud arvudega ja nende osadega ülevaatlikum oleks tegeldada, kirjutatakse kasvataja kasvandi alla; kasvataja *ette* kirjutatakse kasvatamismärk *põikrist* ($\times$). Kasvatis kirjutatakse kasvataja alla ja lahutatakse viimasest põikjoonega. Üleskirjutamisel on viisiks võetud ühenimelisi järjeüksusi samanimeliste alla kirjutada. Võib antud tegurid ja kasvatis ka teistviisi üles kirjutada. Üks või teine üleskirjutamisviis võib tegeldamist kergendada või raskendada, — tingimata tarvilik ei ole üks või teine üleskirjutamisviis iseenesest mitte. Kui kasvataja kasvandi *järel* kirjutatakse, siis tarvitatakse kasvatamismärgiks põikristi asemel ka punkti ($\cdot$). Nii on ükskõik, kas kirjutame 16×4 ehk $16 \cdot 4$, — mõlemal korral oleme 16 kasvatanud 4-ga. Kasvatamist võime alata alamjärjestest või ülemjärjestest üksustest.

Kui antud arvu kasvatame ühelistega, siis on osakasvatise ja osakasvandi järjeüksused ühenimelised. Seadlus järgneb kokkuarvamismõistest, millest kasvatamismõiste on tuletatud: on osandid ühelised, siis on kogundis ühelised; on osandid kümnelised, siis on kogundis kümnelised; on osandid sajalised, siis on kogundis sajalised, jne. Näit.: $5 \text{ ühelist} \times 7 = 35 \text{ ühelist}$; $8 \text{ kümnelist} \times 4 = 32 \text{ kümnelist} = 320$; $6 \text{ sajalist} \times 3 = 18 \text{ sajalist} = 1800$, jne.

§ 40. Mitmekohalise arvu kasvatamine ühekohalise arvuga.

I. Võtame esiteks näituse, kus osakasvatised muutmata jäävad. Antud on 213 kasvatada 3-ga. Lahutame kasvandi kolme osandisse, üksustejärgede põhjal, ja võtame iga osandi kolm korda, s. o. kasvatame 3-ga: $3 \text{ ühelist} \times 3 = 9 \text{ ühelist}$; $1 \text{ kümneline} \times 3 = 3 \text{ kümnelist}$; $2 \text{ sajalist} \times 3 = 6 \text{ sajalist}$. Kokkuvõetult on täiskasvatis 639. Kas siin tegeldamist algame alamjärjestest või ülemjärjestest üksustega, on ükskõik.

II. Võtame teiseks näituse, kus osakasvatiste ülendamine tarvitusele tuleb, ja katsume alamjärjestest kui ka ülemjärjestest

üksustest alates tegeldada. Antud on 978 kasvatada 6-ga. Lahu-
tame antud kasvandi, järjekordsuste kogude järele, kolme osandisse
ja võtame iga osandi kuuekordselt, s. o. kasvatame 6-ga.

$$\begin{array}{r}
 978 \\
 \times 6 \\
 \hline
 48 \\
 + 42 \\
 54 \\
 \hline
 5868
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r} 978 \\ \times 6 \\ \hline 48 \\ + 42 \\ 54 \\ \hline 5868 \end{array}} \right\} \text{Osakasvatished.}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r} 978 \\ \times 6 \\ \hline 54 \\ + 42 \\ 48 \\ \hline 5868 \end{array}} \right\} \text{Täiskasvatis.}$$

Alamjärjesteltest üksustest alates kasvatame 8 ühelist 6-ga;
leiame 48 ühelist. Et rohkem kui 9 ühelist ühelistele kohale kor-
raga ei või kirjutada (§ 9), siis ühendame osa ühelisti kümnelis-
teks. 40 ühelist annavad 4 kümnelist; jääb veel 8 ühelist. 48-sa
ühelise asemel kirjutame 4 kümnelist kümneliste alla (teisele
kohale) ja 8 ühelist ühelistele alla. 4 kümnelist ja 8 ühelist on
esimene osakasvatis.

Edasi — kasvatame 7 kümnelist 6-ga; leiame 42 kümnelist.
Et võimata on rohkem kui 9 kümnelist kümneliste kohale korraga
kirjutada, siis eraldame 42-he kümnelise hulgast ühendamise kaudu
4 sajalist (sest 40 kümnelist = 4 sajalist). 42-he kümnelise ase-
mel võime 4 sajalist sajalistele alla (kolmandale kohale) ja 2 küm-
nelist kümneliste alla kirjutada. 4 sajalist ja 2 kümnelist on *teine*
osakasvatis.

Lõpuks kasvatame 9 sajalist 6-ga; leiame 54 sajalist. Et
üle 9 sajalise võimata on sajalistele kohale korraga kirjutada, siis
eraldame 54-st sajalisest 5 tuhandelist (= 50 sajalist) ja kirjutame
54-ja sajalise asemel 5 tuhandelist tuhandeliste alla (neljandale
kohale) ja 4 sajalist sajalistele alla. 5 tuhandelist ja 4 sajalist on
kolmas osakasvatis.

Meil on kolm osakasvatist. Ühendame nad kokkuarvamise
abil üheks kasvatiseks ehk *kogu-* ehk *täiskasvatiseks*. Täiskas-
vatis on 5868.

Kui kasvatamist ülemjärjesteliste üksustekogude poolt algame,
siis tegeldame niisama kui eelpool; vahe on selles, et osakasva-
tised ümberpööratud järjekorras ette tulevad: viimane osakasvatis
saab esimeseks, esimene — viimaseks.

Osakasvatistes võiksime puuduvate üksuste kohad nullidega tähendada,
aga iseäralist tarvidust selleks ei ole.

§ 41. **Osakasvatiste ärajätmine.** Osakasvatiste üleskirjuta-
mine võib ka ära jääda. Alamjärjesteltest osakasvatistest ülen-
damise teel saadud ülemjärjestelised üksused arvatakse samanimelis-
tele osakasvatistele peast juure; ülendamisel järele jäänud alam-

järjelised üksustekogud kirjutatakse oma kohtadele täiskasvatisse. Võtame näituse.

Tarvis on 687 kasvatada 8-ga. Esiteks kasvatame 7 ühelist 8-ga; leiame 56 ühelist ehk 5 kümnelist ja 6 ühelist. 6 ühelist kirjutame kasvatisse esimesele (üheliste) kohale; 5 kümnelist (mis ühelite kasvatamise kaudu saadud) jätame algul üles kirjutamata ja peame meeles. Edasi — kasvatame 8 kümnelist 8-ga; leiame 64 kümnelist. Enne saime kasvatamisel 5 kümnelist; kokku on meil nendega 69 kümnelist, mis niisama palju on kui 6 sajalist ja 9 kümnelist. 9 kümnelist kirjutame kasvatisse teisele (kümneliste) kohale; kasvatamisel saadud 6 sajalist jätame üles kirjutamata ja peame meeles (hoiame tagavaral). Viimaks kasvatame 6 sajalist 8-ga; leiame 48 sajalist. Tagavaral on meil 6 sajalist. Arvame 48-le sajalisele 6 sajalist juure, — leiame kokku 54 sajalist, mis niisama palju on kui 5 tuhandelist ja 4 sajalist. Need 4 sajalist kirjutame kasvatisse kolmandale (sajaliste) ja 5 tuhandelist neljandale (tuhandeliste) kohale. Nii leiame allakirjutatult ainult kogukasvatise 5496.

Osakasvatiste ärajätmise korral võib tegeldamist ka ülemjärjestest üksustest alata, aga säärane tegeldamisjärjekord on raskem ja meelepidamisele üksikutel juhustel mõndapidi takistavam kui alamjärjestest üksustest alatud kasvatamine. (Näituse varal katset teha!) *Lihtsam on kasvatamist, osakasvatiste ärajätmise korral, alamjärjestest üksustest alata.*

Eelpool (selles ja eelolevas § 40) antud näitustest ja seletustest võime järeldada, et mitmekohalise arvu kasvatamine ühekohalise arvuga muud midagi ei ole kui järjekorraline ühekohaliste arvude kasvatamine ühekohalise arvuga, ehk teiste sõnadega: terve rida ühekohaliste arvude kasvatamisi ühe ja sellesama ühekohalise arvuga. Tegeldamiskäik on järgmine: *Kasvatame kasvandi järjeüksuste kogud alamjärjestest alates, igaühe iseäraldi, kui ühekohalise arvu, antud ühekohalise kasvatajaga; saadud osakasvatiseid on kas ühe- või kahekohalised arvud; esimese osakasvatise üheliised kirjutame osakasvandi järjenimelisele kohale kasvatisse, kümnelised arvome aga järgnevale ülemjärjestele osakasvatisele, kui samanimelised, juure; niiviisi suurendatud osakasvatise üheliised kirjutame nõutavale kohale ja kümnelised lisame järgmisele (ülemjärjestele) osakasvatisele juure; viimase osakasvatise kümnelised (kui neid juhtub olema) kirjutame muutmata oma kohale, s. o. ühe järje võrra ülemale kui üheliised.*

§ 42. Kasvatamine 10-ga ehk ülema järjeüksusega. Kümnekava põhimääruste põhjal ülenevad üksustekogud, kui neid kümnekordselt võetakse, ühe järje võrra ja muutuvad ligemateks ülemjärjesteks üksustekogudeks (§ 12). Kui, näit., arvu 572

kasvatame 10-ga, siis ülenevad 5 sajalist 5-ks tuhandeliseks, 7 kümnelist 7-ks sajaliseks ja 2 ühelist 2-ks kümneliseks. Ühelisi kasvatamise ei tule. Et kasvatise järjeüksuste kohad silmale nähtavad oleksid, selleks kirjutame üheliste kohale nulli (0). Nii leiame, et $572 \times 10 = 5720$. Samal põhjusel on $4576 \times 10 = 45760$; $1876 \times 10 = 18760$, jne. Siit järgneb seadlus:

Antud arv kasvatatakse 10-ga, kui antud arvule tema üheliste järele üks 0 otsa kirjutatakse.

Kümnekava kokkuseade põhjal ülenevad kasvandi üksustekogud kahe järje võrra, kui need üksustekogud sajakordselt võetakse; kasvandi üksustekogud ülenevad kolme järje võrra, kui need üksustekogud tuhandekordselt võetakse, — nelja järje võrra, kui üksustekogud kümnetuhandekordselt võetakse, jne. Siit järgneb seadlus:

Antud arv kasvatatakse 100-ga, 1000-ga, 10000-ga jne., kui antud arvule tema üheliste järele kaks, kolm, neli jne. nulli otsa kirjutatakse.

Näit.: $375 \times 100 = 37500$; $718 \times 1000 = 718000$; $1641 \times 10000 = 16410000$, jne.

Eelolevad seadlused võime järgmisel kujul kokku võtta:

Et antud arvu ükskõik missuguse järjeüksusega kasvatada, selleks kirjutame antud arvule tema üheliste järele nii mitu nulli otsa, kui palju nullisid kasvatajas järjeüksuses leidub.

Kasvatamist ühe ülema järjeüksusega võime ka järgmisel viisil seletada. — Kahe- ja mitmekohalise arvu peale võime kui lihtüheliste kogu peale vaadata. Kui ühe lihtühelise võtame 10 korda osandiks, s. o. 10-ga kasvatame, siis saame ühe kümnelise. Kui 35 ühelist kasvatame 10-ga, siis saame 35 korda rohkem kümnelisi, s. o. 35 kümnelist ehk 350 ühelist. Selsamal põhjusel annavad 476 ühelist, kui nad 10-ga kasvatatakse, 476 kümnelist ehk 4760 ühelist, jne. Nii kirjutame ühelistekogu kasvatamisel 10-ga kasvandile ühe nulli paremale poole otsa. — Kui ühe lihtühelise 100-ga kasvatame (teiste sõnadega: 100 korda osandiks võtame), siis saame ühe sajalise; kui 78 ühelist kasvatame 100-ga, siis saame 78 korda rohkem kui ühe sajalise, s. o. 78 sajalist ehk 7800 ühelist. Nisama leiame, et 125 ühelist, 100-ga kasvatatud, annavad 125 sajalist ehk 12500 ühelist, jne. Siit järgneb, et ühelistekogu kasvatamisel 100-ga kasvandile kaks nulli paremale poole otsa kirjutatakse. Samasuguste seletuste järelduel leiame, et ühelistekogu kasvatamisel 1000-ga kasvandile kolm nulli paremale poole otsa tuleb kirjutada, kasvatamisel 10000-ga — neli nulli jne., — järgnevalt nii mitu nulli, kui palju neid kasvatajas järjeüksuses leidub.

Antud üldine seadlus jääb ka siis maksma, kui kasvatajaks lihtüheline, kui järjeüksus, on. Et säärasel korral kasvatajas ühtegi nulli ei ole, siis ei ülene kasvandi üksustekogud ühegi järje võrra, vaid jäävad endisteks. See tähendab: kui antud arvu 1-ga kasvatame, siis on kasvatise kasvandiga ühesuurune.

§ 43. **Kasvatamine ülema järje üksustekoguga.** Üksikud järjeüksuste kogud võib, kui kasvatised, kaheks teguriks lahutada, nii et esimene neist teguritest üksuste nimeväärtuse, teine — nende kohaväärtuse kindlaks määrab. Nii võime, näit., 700 lahutada kaheks teguriks: $700 = 7 \times 100$. Esimene tegur näitab antud kogus ettetulevate üksuste arvu (7 üksust), kuna teine tegur üksuste järje ehk koha (sajaliste koha) määrab. Selle asemel, et, näit., arvu 37 otsekohe 60-ga kasvatada, katsume kasvatamist kasvataja tegurite kaudu toimetada. Võtame kasvatajaks 60-ne asemel 6×10 ; kasvatame 37 esiti 6-ga, kui ühekohalise arvuga, ja saadud kasvatisele kirjutame tema üheliste järele ühe nulli otsa, s. o. kasvatame saadud kasvatise 10-ga.

Tegeldamiskorda võime järgmiselt seletada ja tõestada. *Esimene* kasvatise kujutis 37×60 näitab, et on tarvis 37 võtta 60 korda osandiks, ikka ühe osandi kaupa. *Teine* kasvatise kujutis $37 \times 6 \times 10$ ehk $(37 \times 6) \times 10$ näitab, et on tarvis esiteks 37 võtta 6 korda osandiks; teiseks on tarvis salkkonda, mis koos seisab 6-st ühesugusest osandist, võtta 10 korda. Kuue ühesuguse osandiga salkkond, kui ta 10 korda võetakse, annab niisama 60 osandit kui üksik osand 60 korda võetuna.

Et antud arvu kolmanda järje üksustekoguga, näit. 700-ga kasvatada, selleks lahutame kasvataja kaheks teguriks: 7×100 , kasvatame antud arvu enne kasvataja esimese teguriga kui ühekohalise arvuga ja kirjutame saadud kasvatisele tema üheliste järele kaks nulli otsa. Samal viisil kasvatame antud arvu ikka ühekohalise arvuga, kui kasvataja on ülemjärjeline üksustekogu, ja kirjutame saadud kasvatisele tema üheliste järele nii mitu nulli otsa, kui neid leidub teises teguris kui järjeüksuses. Kasvataja esimese teguriga kui ühekohalise arvuga kasvatades kirjutame selle teguri otsekohe kasvandi üheliste alla, nagu kõrvalolevas näituses tehtud. Kasvatame antud arvu (358) kasvataja esimese teguriga, s. o. 6-ga; leiame kasvatise 2148, millele kasvataja teisest tegurist, s. o. 1000-st, kolm nulli otsa kirjutame.

$$\begin{array}{r} 358 \\ \times 6000 \\ \hline 2148000 \end{array}$$

Selles ja teistes sarnastes näitustes on kasvataja teises teguris niisama palju nullisid kui kasvatajas eneses. Siit järeneb seadlus:

Et antud arvu mõne ülemjärjelise üksustekoguga kasvatada, selleks on tarvis antud arvu kasvatada üksustekogu nimeväärtusega kui ühekohalise arvuga ja saadud kasvatisele tema üheliste järele nii mitu nulli otsa kirjutada, kui palju nullisid kasvatajas on.

Kui kasvandil nullid on lõpul, siis kasvatame kasvandi nimeväärtuse kasvataja esimese teguriga. Kohad, mis kasvandi lõpul nullidega on tähendatud, tähendatakse ka kasvatises nullidega (sest 0 üksust kasvatatud ühekohalise arvuga on ikka 0).

Kasvatise ühelistele kirjutame, nende koha järele, nii mitu nulli otsa, kui palju nullisid kasvatajas on. Näituseks $5400 \times 8000 = 43200000$, $640 \times 500000 = 320000000$, jne.

§ 44. **Kasvatamine mitmekohalise arvuga.** Mitmekohalise arvuga kasvatades tegeldame osadekaupa: lahutame kasvataja üksikuteks üksustekogudeks, kasvatame iga üksustekoguga iseäraldi ja arvame kõik saadud kasvatised kui osakasvatised üheks täiskasvatiseks kokku. Et, näituseks, leida kasvatist 467×398 , selleks lahutame kasvataja osanditeks: kolmeks *sajaliseks*, üheksaks *kümneliseks* ja kaheksaks *üheliseks*, ning kasvatame iga osandiga iseäraldi, alamjärjelise või ülemjärjelise üksustekoguga alates. Juhtnööriks võtame kasvatamise ühekohalise arvuga ja kasvatamise ülemjärjelise üksustekoguga. Antud arvud ja tegeldamisel leitud osakasvatised tulevad järgmiselt üles kirjutada, kui meie *esimesel* kohal (pahemat kätt) kasvatamist alamjärjeliste, *teisel* kohal (paremat kätt) ülemjärjeliste üksustekogudega algame. Algame tegeldamist alamjärjeliste üksustega, s. o. paremalt pahe-male poole minnes, nagu esimeses näituses on kujutatud.

$ \begin{array}{r} 467 \\ \times 398 \\ \hline 3736 \\ 42060 \\ + 174160 \\ \hline 185866 \end{array} $	<i>Osakasvatised.</i>	$ \begin{array}{r} 467 \\ \times 398 \\ \hline 12 \\ 18 \\ 21 \\ 36 \\ + 54 \\ 63 \\ 32 \\ 48 \\ 56 \\ \hline 185866 \end{array} $
<i>Täiskasvatis.</i>		

Kui arvu 467 kasvatame 8 ühelisega, siis leiame esimesed kolm osakasvatist samal viisil kui kasvatamisel ühekohalise arvuga (§ 40).

Edasi — kasvatame kümnelistega. Kümnelistega kasvata-des ülendame kasvandi üksustekogud *ühe* järje võrra (§ 42). — *Seitse ühelist*, 9 kümnelisega kasvatatud, annavad 63 kümnelist. Et me kasvatisse, kümneliste kohale, enam kui 9 kümnelist ei või kirjutada, siis lahutame 63-me kümnelise hulgast ülendamise teel 6 sajalist. $63 \text{ kümnelist} = 6 \text{ sajalist} + 3 \text{ kümnelist}$. Kasvatisse kirjutame, 63-me kümnelise asemel, 6 sajalist kolmandale, s. o. sajaliste kohale ja ülejäänud 3 kümnelist teisele, s. o. küm-

neliste kohale. — *Kuus kümnelist*, 9 kümnelisega kasvatatud, annavad 54 sajalist. Et võimata on 54 sajalist korraga kolmandale (sajaliste) kohale kirjutada, siis lahutame ülendamise teel 54 sajalist kahte osandisse: 5-ks tuhandeliseks ja 4-ks sajaliseks ja kirjutame 5 tuhandelist kasvatisse tuhandeliste, 4 sajalist — sajaliste alla. — *Neli sajalist*, 9 kümnelisega kasvatatud, annavad 36 tuhandelist ehk 3 kümnetuhandelist ja 6 tuhandelist 36-e tuhandelise asemel kirjutame kasvatisse 3 kümnetuhandelist viiendale, 6 tuhandelist — neljandale kohale. — Nii saime kümnelistega kasvatades kolm osakasvatist.

Lõpuks kasvatame sajalistega. Sajalistega kasvatades ülendame kasvandi üksustekogud *kahe* järje võrra. — *Seitse ühelist*, 3 sajalisega kasvatatud, annavad 21 sajalist. Et võimata on kasvatisse sajaliste kohale korraga enam kui 9 sajalist kirjutada, siis lahutame 21 sajalist ülendamise kaudu 2-ks tuhandeliseks ja 1-ks sajaliseks ja kirjutame kasvatisse 2 tuhandelist tuhandeliste alla, 1 sajalise — sajaliste alla. — *Kuus kümnelist*, 3-me sajalisega kasvatatud, annavad 18 tuhandelist ehk, ülendamise kaudu osanditeks lahutatult, 1-he kümnetuhandelise ja 8 tuhandelist. Mõlemad osandid kirjutame kasvatisse oma kohtadele: ühe kümnetuhandelise viiendale, 8 tuhandelist neljandale kohale. — *Neli sajalist*, 3-me sajalisega kasvatatud, annavad 12 kümnetuhandelist ehk, ülendamise kaudu osanditeks lahutatult, ühe sajatuhandelise ja 2 kümnetuhandelist. Esimese osandi kirjutame kasvatisse sajatuhandeliste (kuuendale), teise — kümnetuhandeliste (viiendale) kohale. — Sajalistega kasvatades leidsime niisama kolm osakasvatist kui iga alamjärjelise osakasvatajaga kasvatades.

Üldse leidsime antud arvude kasvatamisel 9 osakasvatist. Ühendame kõik osakasvatised üheks täiskasvatiseks. Selleks peame nad kokku arvama. Täiskasvatis on 185866.

Kui kasvatamist ülemjärjeliste üksustega, s. o. pahemalt paremale poole minnes algame, siis tuleb meil niisama tegeldada kui eelpool seletatud; osakasvatised tulevad ümberpööratud järjekorras ette: viimane osakasvatis saab esimeseks, eelviimane — teiseks jne.

Osakasvatistes võiksime puuduvate alamjärjeliste üksustekogude kohad nullidega ära tähendada, et arvumärkide järjekohad ülevaaticumalt silma paistaksid, aga tingimata tarvilik säärane tähendamine ei ole. Meie näitustes on osakasvatiste üksustejärjed punktjoontega tähendatud ja ülevaaticumaks tehtud.

Osakasvatiste üksustekogud on suuremalt jaolt teistsugused, ülemjärjelisemad kui osakasvatiste tegurite üksustekogud. Et kasvatamise juures kergemini osakasvatiste järje määrata, selleks on tarvis ühe teguri järjeüksuse kasvatis teise teguri järjeüksusega kindlaks teha. Näit., on tarvis 5000 kasvatada 700-ga. Üks tuhandeline, ühe sajalisega kasvatatud, annab ühe sajatuhandelise, s. o. 100000. Viis tuhandelist, 7-me sajalisega kasvatatult, annab 35 sajatuhandelist ehk 3 500 000.

§ 45. **Osakasvatiste arvu vähendamine kasvatamise korral mitmekohalise arvuga.** Kui kasvatamist algame alamjärjeliste üksustega, siis võime osakasvatistest eraldatud ülemjärjelised üksused ka peast samanimelistele osakasvatistele juure arvata, nagu kasvatamisel ühekohalise arvuga (§ 41) ja ülemjärjelise üksustekoguga (§ 43) juba enne oleme teinud. Eelpool (§ 44) antud tegeldusnäituses, s. o. kolmekohalise arvu kasvatamise korral kolmekohalise arvuga, ühinevad osakasvatistid kolmekaupaks üheks, nii et endise 9-sa osakasvatise asemele tekib kolm osakasvatist, nagu kõrvalolevast üleskirjutusest selgub. Tegelikult tuletatakse iga osakasvatis terve rea ühekohaliste arvude kasvatamise kaudu ühekohalise arvuga, — selle määruse põhjal, mis § 41 lõpul on antud.

$$\begin{array}{r}
 467 \\
 \times 398 \\
 \hline
 3736 \\
 + 4203 \\
 1401 \\
 \hline
 185866
 \end{array}$$

Ühekohaliste arvude kasvatise peastkokkuarvamise abil ühendades tuleme niipalju osakasvatise, kui palju antud kasvatajas arvumärke on, peale selle juhuse, kui kasvatajas puuduvad üksustekogud on nullidega tähendatud. Viimasel korral leiame nii mitu osakasvatist, kui mitu arvumärki kasvatajas on ilma nullideta. Kas meie kasvandi nulliga kasvatame või mitte, see ei muuda täiskasvatist. Parem on siis kasvatamist nulliga koguni ära jätta, nagu viimases näituses tehtud.

568		568
× 307		× 307
3976		3976
+ 000	Lihtsamalt	+ 1704
1704		1
1	kirjutatud:	174376
174376		

Järjeüksuste kogu võib ka olla mitmekohaline arv, kui ülemjärjelised üksustekogud alandamise kaudu alamjärjelisteks muudame (§ 12). Nii võib 3400 tähendada 34 sajalist; 157000 võib tähendada 157 tuhandelist, jne. Siin tähendab arv 34 sajaliste nimeväärtust, arv 157 — tuhandeliste nimeväärtust, jne. Et üksustekogu nimeväärtust juhtuval korral ühe-, kahe- ja mitmekohalise arvuga võimalik on tähendada, siis võime ka § 43-das antud seadluse mõistet järgmiselt laiendada ehk üldistada:

Et antud arvu kasvatada teise arvuga, millel nullid lõpul, selleks on tarvis antud arvu kasvatada kasvataja nimeväärtusega ja saadud kasvatise ühelistele nende koha järele nii mitu nulli otsa kirjutada, kui palju nullisid kasvataja lõpul on.

Näitused:

$$\begin{array}{r}
 87 \\
 \times 6500 \\
 \hline
 435 \\
 + 522 \\
 \hline
 565500
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 865 \\
 \times 30600 \\
 \hline
 5190 \\
 + 2595 \\
 1 \\
 \hline
 26469000
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5970 \\
 \times 624000 \\
 \hline
 23880 \\
 + 11940 \\
 35820 \\
 111 \\
 \hline
 3725280000
 \end{array}$$

Kui kasvandil nullid lõpul on, siis kasvatame, nagu näha, kasvandi nimeväärtuse kasvataja nimeväärtusega ja kirjutame saadud kasvatis ühelistele nende koha järele nii mitu nulli otsa, kui palju nullisid kokku kasvandi ja kasvataja lõpul on.

§ 46. **Kordarvud.** Ühe täisarvu kasvatis teise täisarvuga annab ikka täisarvu. Kasvatis ei ole muud midagi kui nii mitu korda võetud kasvand, kui palju kasvatajas ühelisi on. Sellepärast nimetatakse kasvatis sagedasti ka kasvandi *kordarvuks*. Kasvatatav arv nimetatakse *osaarvuks*.

Üks arv nimetatakse teise kordarvuks, kui esimene arv selle läbi saadakse, et teine arv mõne täisarvuga kasvatatakse.

Nii on arvu 7-me kordarv 28, sest 28 saadakse, kui 7 kasvatatakse 4-ga. Arv 28 on ka 2-he ja 4-ja kordarv. Kordarv võib osaarvu ühe-, kahe-, kolme- ja mitmekordne olla, kui see kordarv osaarvu kasvatamise kaudu 1-ga, 2-ga, 3-ga jne. tuletakse. Nii on arv 9 sellesama arvu ühekordne arv; 18 on arvu 9 kahekordne, 27 on arvu 9 kolmekordne, 180 on arvu 9 kahekümnekordne jne. Sõnad: ühekordne, kahekordne, kolmekordne jne. tähendavad lühidalt sedasama, mis ühega, kahega, kolmega jne. kasvatades saadud kordarv. Sõna *kordarv* asemel võime ka *mitmekordne* tarvitada. Arv 36 on 4-ja mitmekordne; arv 135 on 15-ne mitmekordne, jne.

§ 47. **Kasvatamise järelkatsed ehk tõendised.** Et kasvatamine õigesti on tehtud, selle tõendiseks võime antud tegurid ümberpöördud järjekorras üksteisega kasvatada, sest tegurite ümberpaigutamine (kohavahetus) ei muuda kasvatist. Kui tegurite ümberpaigutamise järele nende kasvatis endiseks jääb, siis võime otsustada, et esimesel korral kasvatamine õigesti oli tehtud. Kasvatamise tõendiseks võiksime kokkuarvamise appi võtta, see oleks aga aegaviitev töö. Ainult säärasel korral, kui kasvatajaks on väike arv (näit. ühekohaline arv), nii et ka osandite arv tuleks väike, maksab järelkatset kokkuarvamise abil ette võtta. Säärasel korral võiks ka mahaarvamise abil katset teha. (Kuida nimelt?)

Kasvatamise tõendistest jagamise abil kõneleme edaspidi (§ 62).

§ 48. **Kasvatamise tarvitamine.** Ülesannetes tuleb kasvatamine tarvitusele, 1) kui kahe või mitme arvu kasvatis otsitakse; 2) kui üks arv nii mitu korda suurendatakse, kui palju teises ühelisi on; 3) kui arvu ühekordse järele tema mitmekordne otsitakse. Oma sisu poolest võivad ülesanded mitmesugused olla, nende väljaarvlemine juhib meid lõpul kasvatis otsimisele, antud arvu mõnekordsele suurendamisele ehk tema mitmekordseks-tegemisele.

Kasvatis võib olla kahe või mitme teguri saadus. Kasvatamise juures võime korrata ainult kahe teguriga tegeldada. Kasvatamine mitme teguriga kujutises toimetatakse selles järjekorras, milles tegurid üksteisele, pahemalt paremale poole minnes, järgnevad. Nii leiame, et $12 \times 5 \times 7 = 60 \times 7 = 420$. Kui teistsugust järjekorda tegurite kasvatamisel tahame tähendada, siis tarvitame selleks sulgusid. Kergendusi kasvatamise juures silmas pidades on vahest kasulik tegurid ümber paigutada ja tegeldamise järjekorda sulgudega tähendada. Näit.: $3.4.7.25 = (3.7).(4.25) = 21.100 = 2100$. Kui teguriteks kogundi või vahengu kujutised on, siis tulevad need kujutised sulgudesse võtta. Näit. $(35 - 17).6 = 18.6 = 108$. Kui kõrvuseisvad tegurid sulgudesse tulevad võtta, siis võib kasvatamismärk sulgude vahelt ka ära jääda. Kui muud tegeldusmärke sulgude vahel ei ole, siis mõeldakse sinna kasvatamismärk. Näit.: $(19 - 11)(100 - 46) = (19 - 11) \times (100 - 46)$ jne.

§ 49. **Ülesanded.** 37. Kui suur on kasvatis järgmistes kujutistes: a) $79 \times 8 = ?$ b) $384 \times 6 = ?$ d) $657 \times 10 = ?$ e) $497 \times 50 = ?$ g) $609 \times 59 = ?$ h) $47 \times 1000 = ?$ i) $54 \times 800 = ?$ k) $818 \times 670 = ?$ l) $749 \times 708 = ?$ m) $768 \times 398 = ?$ n) $350 \times 476 = ?$ o) $2300 \times 860 = ?$ p) $6007 \times 905 = ?$ r) $8450 \times 3700 = ?$

38. Kui suured on järgmiste valemite saadused: a) $85 \times (97 - 86) = ?$ b) $(76 + 24)(184 - 95) = ?$ d) $36 + (28 - 9)(60 - 49) = ?$ e) $41 - (91 - 87); (102 - 94) = ?$ g) $12 + (62 - 49)(44 - 35) - 3(163 - 124) = ?$ h) $1000 - (101 - 98)(102 - 97)(103 - 96) = ?$

39. Raudtee kaubarongil oli 15 vagunit, millest igaüks 960 puuda kannab. Mitu puuda võib see kaubarong peale võtta?

40. Ehitustööline oli 34 päeva tööd teinud, läbistikku 12 tundi päevas. Kui palju sai ta palka, kui iga töötunni eest 9 marka makseti?

41. Talunik müüs laadal lehma ja hobuse. Lehm maksis 76 kuldrubla, hobuse hind oli lehma kahekordsest hinnast 6 kuldrubla võrra suurem. Kui palju maksis hobune?

42. Kaks reisijat sõitsid ühel ajal välja: esimene Tallinnast Märjamaa kaudu Pärnu, teine sedasama teed mööda Pärnust Tallinna. Esimene sõitis tunnis 8, teine 10 kilom. Kui reisijad 8 tundi olid sõitnud, said nad teel kokku. Mitu kilomeetrit on Tallinna ja Pärnu vahet Märjamaa kaudu?

43. 36 saarlast, kes ühesuguse eduga töötasid, kaevasid suure sookraavi 9 päevaga valmis. Mitme päevaga võib üks saarlane, kui ta samasuguse eduga töötab, niisuguse kraavi valmis kaevata?

44. Lihttöömehe kuupalk oli 27 kuldrubla, riigiametniku kuupalk oli 95 kuldrubla. Kui palju oli riigiametniku aastapalk suurem kui lihttöölise aastapalk?

45. Põllumees ostis talukoha. Kui temalt koha hinnasuurst küsiti, siis vastas ta: „Minu koht on Riia vakamaade arvu järele nii suur, kui kõige suurem kahekohaline arv kõige väiksema kahekohalise arvuga kokku. Et vakamaa hind läbistikku 47 kuldrubla on, siis võite ise koha hinnasuurst leida“. Kui palju oli põllumees talukoha eest maksnud?

46. Isa pärandas vanemale pojale 8310 marka, keskmisele pojale 2 korda rohkem ja veel 128 marka, nooremale pojale 3 korda rohkem kui vanemale pojale ja veel 206 marka. Kui suur oli isa pärandus?

47. Soomlane tuli purjekaga Tallinna sadamasse ja müüs oma silgukoorma kolmele Tallinna kaupmehele. Esimene kaupmees ostis 168 tündrit silku, teine ostis 2 korda rohkem ja veel 2 tündrit, kolmas ostis 3 korda rohkem kui teine ja veel 3 tündrit. Mitu tündrit silku oli soomlase purjekal koormaks?

48. Sõja ajal oli jalaväe roodus läbistikku 250 sõdurit. Mitu sõdurit oli polgus, kui neli rootu ühe pataljoni ja neli pataljoni ühe polgu moodustavad?

49. Suurkaupmees tahtis Norramaalt 375 tündrit silku ja 245 tündrit heeringaid tellida. Silgutündri ostuhind oli 624 Eesti marka, heeringatündri ostuhind 1092 Eesti marka. Eksikombel oli kaupmees tellimiskirjas silgutündrite arvu heeringatündrite arvuga ära vahetanud. Kui palju pidi ta tellitud kauba eest rohkem maksma kui oli soovinud?

50. Et tiiki veest tühjaks teha, pandi käsipump tööle, mis igas tunnis 637 ämbrit vett tiigist välja pumpas. Läbistikku nõrgus pumpamise ajal tiiki 49 ämbrit vett igas tunnis juure. Kui pumpamine vahetpidamata 13 tundi oli kestnud, sai vesi tiigist otsa. Mitu ämbrit vett pumpati tiigist välja ja kui palju oli tiigis pumpamise algul vett?

51. Talurentnik pani 6 aasta jooksul 105 vakka kartulid igal aastal maha. Neljal esimesel aastal sai ta 5 seemet, kahel viimasel aastal 7 seemet. Peale seemnekartuli tarvitas rentnik oma majapidamises iga aasta kohta läbistikku 54 vakka kartulid, kõik muu kartulisaagi müüs ta ära. Kui palju müüs ta kartulid kuueaastase rendiaja jooksul?

Neljas tegeldus:

Jagamine.

§ 50. **Jagamismõiste.** Kasvatamisel leiame kahe antud teguri (kasvandi ja kasvataja) abil kasvatis. Otsitav arv on kasvatis. Kui üks *teguritest* on otsitav, siis võime antud kasvatis ja teise teguri abil leida otsitava teguri. Kasvatis otsimisel tegime ühe teguri nii mitmekordseks, suurendasime ta nii mitu korda kui teises teguris ühelisi on. Teguri otsimisel talitame ümberpöörduvalt: väiksendame kasvatis nii mitu korda kui antud teguris ühelisi on, ehk teiste sõnadega — teeme kasvatis antud teguri kaudu ühekordseks, s. o. otsitavaks teguriks. Tegeldus, mille abil otsitav tegur leitakse, on *jagamine*. Jagamismõiste võime järgmiselt määrata:

Jagamine on niisugune tegeldus, millega kahe teguri kasvatis ja ühe teguri abil teise teguri leiame.

Kui kasvatamise ja jagamise juures ettetulevad otsitavad arvud küsimismärgiga tähendame, siis võime antud ja otsitavad arvud tegeldamiseks (kasvatamismõistet silmas pidades) järgmiselt üles kirjutada:

$$\begin{array}{l} 24 \times 15 = ? \\ \xrightarrow{\hspace{2cm}} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 24 \times 15 = ? \\ \xrightarrow{\hspace{2cm}} \end{array}} \right\} \dots \dots \dots (1.)$$

$$\begin{array}{l} ? \times 15 = 360 \\ \xleftarrow{\hspace{2cm}} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} ? \times 15 = 360 \\ \xleftarrow{\hspace{2cm}} \end{array}} \right\} \dots \dots \dots (2.)$$

Esimesel korral läheme antud kasvandi ja kasvataja poolt otsitava kasvatis poole, s. o. pahemalt *paremale* poole, nagu

esimene nooljoonistus näitab. Teisel korral läheme antud kasvatis ja antud teguri poolt otsitava teguri poole, s. o. paremalt *pahemale* poole, nagu teine nooljoonistus näitab. Mõlemad tegeldused, s. o. kasvatamine ja jagamine, on siis vastastegeldused.

Antud kasvatis nimetatakse jagamisel *jagandiks*, antud tegur nimetatakse *jagajaks*, otsitav tegur nimetatakse *jagatiseks*. Uued nimetused ei muuda tegurite ja kasvatis vahekorda. Siit järgneb seadlus:

Jagand on nii suur kui jagatise kasvatis jagajaga, ehk ümberpöörduvalt: nii suur kui jagaja kasvatis jagatisega.

Jagamismärgiks tarvitatakse kahte üksteise peal seisvat punkti (:), põikjoont (—) või püstjoont paremale poole mineva põikjoonega ühendatult (|—). Tegeldamisel täisarvudega on sagedamini tarvitusel esimene ja kolmas märk. Jagand kirjutatakse esimese ja kolmanda märgi pahemale küljele ehk teise märgi (kriipsu) peale; jagaja kirjutatakse esimese ja kolmanda märgi paremale küljele, viimasel korral põikjoone peale; teist jagamismärki tarvitades kirjutatakse jagaja kriipsu alla. Kolmanda tegeldusmärgi tarvitamise korral kirjutatakse jagatis paremale poole püstjoont, põikjoone alla; esimese ja teise tegeldusmärgi tarvitamise korral kirjutatakse jagatis võrdusmärgi järele. Näitused:

$$360 : 15 = 24 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\frac{360}{15} = 24 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\begin{array}{r|l} 360 & 15 \\ \hline & 24 \end{array} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Kasvatamismärki ja esimest jagamismärki tarvitades võime mõlemate vastastegelduste (kasvatamise ja jagamise) nimetused järgmisel viisil ülevaatlikult kõrvu seada:

<u>Kasvatis.</u>	<u>Tegur.</u>	<u>Tegur.</u>
360	= 15	× 24.
360	: 15	= 24.
<u>Jagand.</u>	<u>Jagaja.</u>	<u>Jagatis.</u>

Et kasvatamise juures tegurid ümber võib paigutada, ilma et kasvatis selle läbi muutuks (§ 37), siis on kasvatamise vastastegelduse, s. o. jagamise juures ükskõik, missugune kahest tegurist on otsitav: kasvand või kasvataja.

§ 51. **Jagamine osadekaupa.** Jagamist võime osadekaupa toimetada. Kasvatamise juures nägime, et kogundi kasvatamine

ka nii võimalik on, et iga osand antud kasvatajaga iseäraldi kasvatatakse ja saadud osakasvatiseid täiskasvatiseks kokku arvatakse. Jagamisel tuleb meil vastupidiselt tegeldada. Antud on kogund kui täiskasvatis. Lahutame ta osakasvatisteks. Kui antud arvuga (endise kasvatajaga) iga osakasvatise jagame, siis leiame üksikud osakasvandid ehk osandid. Et täiskasvandit leida, selleks arvame kõik osakasvandid kokku. Täiskasvatis on jagand; tähendab: *me lahutame jagandi osajaganditeks, jagame iga osajagandi antud jagajaga iseäraldi ja arvame kõik osajagatise üheks täisjagatiseks kokku*. Näit.: $72:6 = (24+18+30):6 = (24:6) + (18:6) + (30:6) = 4 + 3 + 5 = 12$.

Suuremalt jaolt — õieti väga sagedasti — lahutatakse jagand järjeüksuste kogude kaupa osanditeks ja toimetatakse jagamist järjeüksuste kogude kaudu.

Kui kahe teguri kasvatis ühe teguriga jagatakse, siis ilmub jagatisse teine tegur. Säärane jagamine on *jagamine ilma jäänusega*. Näit., $56:8 = 7$ on jagamine ilma jäänusega. Jagamine ilma jäänusega ehk täielik jagamine on siis võimalik, kui jagand on jagaja kordarv. Kui jagand ei ole jagaja kordarv, siis peab jagamisel osa jagandist jagamata, s. o. üle jääma. See ülejääv jagandi osa on *jäänus*. Kui, näit., 48 jagame 5-ga, siis on jagatis 9, jäänus 3; lühidalt kirjutatud: $48:5 = 9$ (jäänus 3). Jäänus on väiksem kui jagaja. Oleks jäänus suurem kui jagaja, siis võiksime jäänuselt veel võtta jagaja ühekordse, kui kahe- või mitmekordset ei saa võtta. *Jagamisel jäänusega on jagand nii suur kui jagatise ja jagaja (ehk jagaja ning jagatise) kasvatis, millele jäänus juure on lisatud*. Näit. $69:7 = 9$ (jäänus 6); siit järgneb: $69 = (9 \cdot 7) + 6$.

§ 52. **Peastjagamine.** Kui jagand on ühe- või kahekohaline, jagaja aga ühekohaline arv, siis toimetatakse jagamine *väikese ükskordühe* abil ja ikka peast. Näit. on antud $72:8$. Me teame, et $8 \cdot 9 = 72$; sellepärast on otsitav jagatis 9. Kui jagamine lõpeb jäänusega, siis ei takista see väikese ükskordühe tarvitamist. Näit. $47:9$. Kuna $9 \cdot 5$ annab kasvatisse 45, s. o. vähem kui 47, $9 \cdot 6$ kasvatisse aga 54 annab, s. o. rohkem kui 47, siis selgub siit, et otsitav jagatis ainult 5 võib olla, nii et jäänus on $47 - 45 = 2$.

Kahe- ja kolmekohalise arvu jagamisel ühekohalise arvuga lahutame jagandi osanditeks, nii et osandid on jagaja kordarvud ehk et vähemalt suuremad osandid on jagaja kordarvud. Näitused: $84:7 = (70+14):7 = (70:7) + (14:7) = 10 + 2 = 12$; $93:8 = (80+13):8 = (80:8) + (13:8) = 10 + 1$ (jäänus 5) $= 11$ (jäänus 5); $648:4 = (640+8):4 = (640:4) + (8:4) = 160 + 2 = 162$, jne.

Kui jagaja on kahekohaline arv, siis on harukordadel võimalik mitmekohalist jagandit peast jagada. Näit. $375 : 25 = (300 + 75) : 25 = (300 : 25) + (75 : 25) = 12 + 3 = 15$; $168 : 12 = (120 + 48) : 12 = (120 : 12) + (48 : 12) = 10 + 4 = 14$, jne.

§ 53. **Iseäralised jagamisviisid.** Jagamisel võime nii tegeldada, et jagamise kui kasvatamise vastastegelduse peale vaadata ja jagatise otsimise juures seda arvude vahekorda silmas peame, mis kasvatamisest järeldub. See on *jagamine üldises mõttes*. Me võime aga jagaja kui kasvataja või kasvandi peale vaadata. Mõlemal korral võib jagamine eritähenduse omandada, iseäranis kui kasvand (ja siis ka kasvatis) oli *nimeline* arv, s. o. kui tal mõõtüksuse või asja nimetus kaasas oli. Võtame näituseks kaks ülesannet.

1. *Majaehitamisel makseti 12-le töölisele, kes ühesuguse palgaga ja ühekaud tööl olid, kokku 2568 marka. Kui palju sai iga tööline?*

Kogupalk (2568 m.) on kasvatis, mis vastastegeldusel, s. o. jagamisel, jagandi nime omandab. Osapalk on otsitav kasvand (ehk jagatis). Kogupalgas on 12 osandit koos, millest igaüks kasvandiga ühesuurune on. Et ühe osandi, s. o. otsitava kasvandi, võiksime leida, selleks peame kogupalga, s. o. kasvatis, 12-ks ühesuuruseks osaks lahutama ehk *jaotama*. Kui, näit, toimetame üksikute markade kaupa lahutamist 12-sse osasse, siis leiame iga osandi markade arvu iseäraldi (214 m.). Ühe arvu lahutamine jagamise läbi nii mitmeks ühesuuruseks osaks kui jagajas on ühelisi, nimetatakse *jaotamiseks*. Jaotamine võib ka nimeta arvu jagamisel ette tulla. Nii võime arvu 96 lahutada 8-ks ühesuuruseks osaks.

2. *Majaehitamisel makseti igale töölisele palgaks 214 marka. Kui palju oli töölisi, kui nad kokku 2568 marka said?*

Kogupalk (2568 m.) on kasvatis, osapalk (214 m.) on kasvand. Tarvis on leida tööliste arv (otsitav kasvataja ehk jagatis), millega osapalga markade arvu tuleb kasvatada, et kasvatis annaks kogupalga suuruse, 2568 marka. Me võime järele katsuda, mitu korda 214 marka osandiks peame võtma, et kogundisse tuleks 2568 marka. On tarvis 214 marka 12 korda osandiks võtta. Tähendab: $2568 \text{ m.} : 214 \text{ m.} = 12$. Niisama leiame, et kogupalgast 12 korda tuleks 214-e marga kaupa maha arvetada, et kogupalgast enam midagi järele ei jääks. Mõlemal korral leiame, et 214 marka *mahtus* kogupalgä, s. o. 2568 marga sisse 12 korda; teiste sõnadega: 2568 marka *mahutas* eneseesse

214 marka 12 korda. Jagamine, mille abil teada saadakse, mitu korda üks arv teise arvu sisse mahub, nimetatakse *mahutamiseks*. Mahutamine võib ka nimeta arvude jagamisel ette tulla. Arv 27 mahub 162-he sisse 6 korda, s. o. arv 27 tuleb 6 korda osandiks võtta, et saadaks kogund 162.

Kasvatamismõistest järgneb, et kasvataja on ikka ja alati nimeta arv, sest kasvataja näitab ainult, mitu korda kasvand osandiks tuleb võtta. Kasvand võib olla nimeline või nimeta arv. On kasvand nimeline arv, siis ei või teda kasvatajaga vahetada. Me võime, näit., 12 tolli 4 korda osandiks võtta, s. o. 12 tolli kasvatada 4-ga, aga arvu 4 ei või me kuidagi 12 tolli kordselt osandiks võtta, s. o. 12 tolliga kasvatada. Et kasvandit sagedasti ei tohi kasvatajaga vahetada, siis tekib vastastegeldusel kaks erimõistelist jagamisviisi: jaotamine ja mahutamine, mis üldmõistelise jagamise viisisse kokku sulavad ehk ühinevad. — Mahaarvamise korral otsime antud kogundi ja ühe osandi abil teist osandit, ehk antud kogundi ja teise osandi abil esimest osandit. Mõlemad osandid on kogundiga ühenimelised; sellepärast on ükskõik, kumb osand on otsitav: vastupidine tegeldus (mahaarvamine) on ühemõisteline ja ei anna kahele erimõistelisele tegeldusviisile maad.

Mahutamine on mõõtmisega suguldanë. Jagand ja jagaja on ühenimelised ehk võib neid mõelda ühenimelistena, kui nad on nimeta arvud. Jagaja tähendab siis mõõtuksust, jagatav arv, s. o. jagand, — mõõdetavat suurust. Jagatis näitab, mitu mõõtuksust on jagandis.

§ 54. **Kirjaliku jagamise eeltingimused.** Kirjaliku jagamise kergendamise otstarbeks lahutame antud jagandi tema üksustekogude järele osadeks ja toimetame jagamist osadekaupa, ülematest järjeüksustest alates. Kirjalikult võime jagamist ka alamate järjeüksuste kogudest alata; säärane jagamine on aga raskem ja aegaviitvam, sellepärast ka tülikam. Tegelikul jagamisel tarvitatakse sagedamini märke (:) ja (┌). Kui jagamine ilma jäänuseta on võimalik, siis tarvitatakse mõnikord ka põikjoont (—) jagatismärgina. Jagamist võib toimetada kokku- ja mahaarvamise teel (ühesuguste salkkondade kaupa juure- või mahaarvamise kaudu), võib ka kasvatamise abil jagatise leida. Viimasel korral tuleks jagaja kasvatada järgemööda 1-ga, 2-ga, 3-ga jne., kunni niisuguse kasvataja leiame, mille kasvatis antud jagajaga nii suur on kui antud jagand. Et aga jagatise leidmine neil kordadel rohkesti aega nõuab ja pikale võib venida, iseäranis kui suuremate arvudega tuleb tegeldada, siis peame abinõusid otsima, mis tegeldamise teevad lihtsamaks ja kergemaks. Jagamine kui isesugune tegeldus juhatab meile need abinõud kätte, mis tegeldamise teevad lihtsamaks ja kergemaks.

Et jaotamine tegelikult kergem ja lihtsam on kui teised tegeldamisviisid, siis algame jaotamisega ja katsume pärast ka teisi tegeldamisviise lühidalt selgitada.

Kirjalik jaotamine.

§ 55. **Jaotamine ühekohalisele arvule.** I. Võtame esiteks näituse, kus jagandi iga üksustekogu on antud jagaja läbi jagatav. Säärasel korral on ükskõik, kas jaotamist algame ülematest või alamatest järjeküstest. Näit. 4682 jaotada 2-le. Ülematest järjeküstest alates tegeldame järgmiselt: Kõige enne jaotame 4 tuhandelist 2-le. Igaüks osaline saab 2 tuhandelist. Need 2 tuhandelist kirjutame jagatisse tuhandeliste kohale. Kokku saavad 2 osalist 2 tuhandelist $\times 2 = 4$ tuhandelist. Need ärajaotatud 4 tuhandelist arvame jagandis antud 4-st tuhandelisest maha (mahaarvatava ette kirjutame mahaarvamisjärgi). Ühtegi tuhandelist ei jäänud jaotamata. — Samal viisil jaotame 6 sajalist 2-le, 8 kümnelist 2-le ja 2 ühelist 2-le.

4682	2	ehk:	4682	2
— 4	2341		— 2	2341
6			8	
— 6			— 8	
8			6	
— 8			— 6	
2			4	
— 2			— 4	

Jagandi alamjärjestest üksustest alates tegeldame niisama; jaotamisel ilmuvad osajagatise ümberpööratud järjekorras: esiti ühelised, nende järel kümnelised, siis sajalised ja viimaks tuhandelised. Jagatis on mõlemal korral üks ja seesama.

II. Võtame teiseks näituse, kus jagatava arvu, s. o. jagandi üksustekogusid jaotamisel alamjärjesteks tuleb muuta ehk alandada. Osajagandite üksustekogude alandamine tuleb sagedasti tarvitusele ja ainult harukordadel võime jaotamise nii lõpule viia, et jagandi üksustekogud muutmata jäävad. Tarvis on, näit., 34896 jaotada 8-le. Algame jaotamisega jagandi ülemjärjestest üksustest. Kõige esiti peame 3 kümnetuhandelisi 8-le jaotama. Et meil kümnetuhandelisi arvu poolest vähem on kui osalisi, siis ei või ükski osaline tervet kümnetuhandelist saada, vaid vähem. Et iga osaline ühe kümnetuhandelise võiks saada, selleks peaks meil vähemalt 8 kümnetuhandelist jaotada olema; meil on jaotada aga 3 kümnetuhandelist. Tähendab: jagatisse ei või tulla kümnetuhandelisi, s. o. viienda järje üksusi. Et jagandi 3 kümnetuhandelist jaotada, selleks alandame nad *tuhandelisteks*. Leiame 30 tuhandelist, mis 3-me kümnetuhandelise asemel tulevad jaotada. Jagandis on veel antud 4 tuhandelist jaotada. Me võime 30 tuhandelist ja 4 tuhandelist

34896	8
32	4362
28	
— 24	
49	
— 48	
16	
— 16	

üheskoos korraga, s. o. 34 tuhandelist jaotada 8-le. Et meil tuhandelisi rohkem on kui osalisi, siis võib iga osaline tuhandelisi saada. Väikese ükskordühe abil leiame, et iga osaline kõige rohkem 4 tuhandelist võib saada. Need 4 tuhandelist kirjutame jagatisse ja peame meeles, et nad neljanda järje üksused, s. o. tuhandelised on. Katsume järele, mitu tuhandelist me ära jaotasime. Igaüks osaline sai 4 tuhandelist; 8 osalist said 8 korda rohkem kui üks osaline, s. o. 4 tuhandelist $\times 8 = 32$ tuhandelist. Nii oleme 32 tuhandelist jaotanud. Jaotada oli antud 34 tuhandelist. Et teada saada, mitu tuhandelist jaotamata jäi, selleks arvame jaotada antud 34-st tuhandelisest maha 32 ärajaotatud tuhandelist. Jääb veel 2 tuhandelist jaotada.

Et jaotamata jäänud *tuhandelisi* arvu poolest vähem on kui osalisi, siis ei või me jagatisse enam uusi tuhandelisi saada. Et 2 tuhandelist 8-le jaotada, selleks alandame 2 tuhandelist enne *sajalisteks*. Leiame 20 sajalist. Et kõigi sajaliste jaotamist ühekorraga toimetada, selleks ühendame tuhandelistest saadud 20 sajalist ja jagandis antud 8 sajalist üheks sajalistekoguks ja jaotame 20 saj. $+ 8$ sajalist, s. o. 28 sajalist 8-le. Näitlikult toimetame selle ühendamise ehk kokkuarvamise lihtsalt niiviisi, et sajaliste arvu-märgi 8 jagandist alla, ülejäänud tuhandeliste arvu-märgi (2) kõrvale, paremale poole, paigutame. Väikese ükskordühe abil leiame, et iga osaline kõige rohkem 3 sajalist võib saada. Need 3 sajalist kirjutame jagatisse sajaliste kohale, s. o. tuhandeliste järele. Jaotasime ära 24 sajalist, sest igale osalisele andsime 3 sajalist, nii siis 8-le osalisele 3 sajalist $\times 8 = 24$ sajalist. Jaotada antud 28-st sajalisest arvame ärajaotatud 24 sajalist maha; jääb jaotamata 4 sajalist.

Ülejäänud 4 *sajalist* ei või 8-le niiviisi jaotada, et iga osaline veel ühegi sajalise saaks. Alandame 4 sajalist *kümnelisteks*. Leiame 40 kümnelist. Jagandis on veel 9 kümnelist. Kokku tuleb 49 kümnelist jaotada. Iga osaline võib kõige rohkem 6 kümnelist saada. Need 6 kümnelist kirjutame jagatisse kümneliste kohale, s. o. sajaliste järele. Jaotatud kümneliste arvu leiame, kui osajagatise, 6 kümnelist, kasvatame jagajaga, s. o. 8-ga. Jaotatud 48 kümnelist arvame antud 49 kümnelisest maha. Jääb üle, s. o. jaotamata, 1 kümneline. — Alandame ülejäänud 1 kümnelise *ühelisteks*. Leiame 10 ühelist. Jagandis on antud 6 ühelist. Kokku tuleb 16 ühelist 8-le jaotada. Iga osaline saab 2 ühelist. Need 2 ühelist kirjutame jagatisse ühelite kohale. Jaotatud on 2 ühelist $\times 8 = 16$ ühelist. Et jaotada niisama palju ühelisi oli, siis ei jäänud ühtegi ühelist jaotamata. Jagand on täiesti, ilma jäänuseta, ära jaotatud.

Nagu näha, on jaotamisel ühekohalisele arvule iga osajagatis ühekohaline arv ja osajagandiga ühenimeline (nagu kasvatamisest jargneb

— § 39 —). Osajagandid võivad olla kõige rohkem kahekohalised arvud (näituses 34 tuhandelist, 28 sajalist, 49 kümnelist, 16 ühelist). Nende jaotamist võime peast, väikese ükskordühe abil toimetada, ilma et abitegeldamisi, näit. mahaarvamist, kirjalikult üles tähendada. Kõrvalolevas tegeldamisnäituses on igakordne jäänus, ühes järgneva arvumärgiga jagandist, üles kirjutatud, et uued osajagandid silmanähtavad oleksid.

34896	8
28	4362
49	
16	

III. Võtame kolmandaks paar näitust, kus jaotamine jäänusega lõpeb. Kui viimase osajagandi, s. o. üheliste jaotamisel jäänus tekib, siis lõpeb jaotamine jäänusega. Tegeldamine toimetatakse samal viisil ja samas järjekorras, nagu eelpool seletatud.

Kõrvalolevas esimeses näituses on esimene osajagand ühekohaline arv (9 tuhandelist), mis 9-le täiesti, ilma jäänuseta jagatav on. Sellepärast on teine osajagand (4 sajalist) ka ühekohaline arv. Et teises osajagandis sajalisi vähem

9472	9	30000	7
—9	1052	—28	4285
47		20	
—45		—14	
22		60	
—18		—56	
4 (jäänus).		40	
		—35	
		5 (jäänus).	

on kui osalisi, siis ei tule jagatisse ühtegi sajalist. Sajaliste koha tähendame jagatises nulliga. Kui sajaliste koha tähendama jätaksime, siis oleksid tuhandelised kolmandal kohal, ja see ei oleks õige: kolmandal kohal tähendab iga arvumärk ainult sajalisi. Kolmanda osajagandi tuletame otsekohe niiviisi, et kümneliste arvumärgi jagandist alla toome ja sajaliste arvumärgi järele, paremale poole kirjutame. Ka teised osajagandid tuletatakse niiviisi, et eeloleva osajagandi jäänusele otsekohe järgneva alamjärjelise üksustekogu arvumärk jagandist otsa kirjutatakse (kuna tarvilik alandamine ja kokkuarvamine peast toimetatakse). — Teises antud näituses on iga osajagand kahekohaline arv.

Nagu antud näitustest ja seletustest näha, on mitmekohalise arvu jaotamine ühekohalisele arvule — terve rida kahe- või ühekohaliste arvude jaotamisi ühekohalisele arvule. Tegeldamiskäik on järgmine: *Jagandi üksustekogud tulevad iseäraldi jaotada, ülemjärjestest alates. Kui ülemjärjelise kogu üksustearv väiksem on kui jagaja, siis võtame selle kogu arvumärgile järgmise alamjärjelise arvumärgi jagandist kõrvale ja jaotame niiviisi tuletatud kahekohalise osajagandi antud jagajaga. Osajagatise kirjutame tema kohale, s. o. säärasele kohale, mis vastab osajagandi alamjärjelise arvumärgi kohale täisjagandis. Osajagatise ja jagaja kasvatisel arvame osajagandist maha. Jäänusele kirjutame järgmise arvumärgi jagandist kõrvale ja*

jaotame niiviisi tuletatud kahekohalise arvu antud jagajaga jne. Kui mõne osajagandi üksuste arv väiksem on kui jagaja, siis tuleb jagatise osajagandi üksusteniimeline koht nulliga tähendada ja osajagand uueks jäänuseks arvata. Viimane jäänus jääb muutmata.

§ 56. **Jaotamine 10-le või ülemale järjeüksusele.** I. Kasvatamisel 10-ga ülenevad kasvandi üksustekogud ühe järje võrra. Vastastegeldusel, s. o. jagamise korral 10-ga, alanevad jagatava arvu üksustekogud ühe järje võrra: kümnelised ühelisteks, sajalised kümnelisteks, tuhandelised sajalisteks jne. See järgneb ka jaotamisel 10-ga. Jagandi järjeüksuste igas kogus on üksusi vähem kui 10, sellepärast ei või iga osaline tervet samanimelist üksust jagatavast üksustekogust saada. Et jaotamine 10-le oleks võimalik, selleks alandame antud üksustekogu ühe järje võrra. Näit., 7 tuhandelist alandame 70-ks sajaliseks ja jaotame 70 sajalist 10-le. Iga osaline saab 7 sajalist. Niisama jaotame 5 sajalise asemel 50 kümnelist 10-le, — saame jagatise 5 kümnelist, jne. Et lihtüheliste arv jagandis väiksem on kui 10, siis on

6478	10	50804	10
— 60	647	— 50	5080
47		80	
— 40		— 80	
78		4	
70		— 0	
8		4	

lihtüheliste jaotamine 10-le võimata: ükski osaline ei või tervet ühelist saada. Lihtühelised jäävad jaotamata ja võetakse jäänusesse, nagu selgub antud näitusest (kahe arvu jaotamisel 10-le). Ülemjärjelised üksustekogud on 10-ne kord-

arvud ja sellepärast 10-le jagatavad; jagatise tulevad jagandi üksustekogude arvumärgid, oma tähenduse poolest ühe järje võrra alandatud. Jagandi lihtühelised tulevad jäänusesse. Jaotamisel 10-le talitame siis järgmise põhimääruse järele: *võtame jagandi, ilma üheliste arvumärgita, jagatiseks; jagandi ühelised aga võtame jäänuseks.* Jagatiseks võetud arv on oma tähenduselt ühelistekogu (mitte kümnelistekogu). Nii on $6789:10 = 678$ (jäänus 9) jne.

II. Kui jagajaks on 100, siis jäävad jagandi kümnelised ja ühelised jaotamata ja võetakse jäänusesse, sest kümnelised ja ühelised kokku on vähem kui 100. Sajalised ja ülemad järjeüksused on 100-ja kordarvud ja nii siis 100-le täiesti jagatavad. Nad alanevad, kui nad 100-le jaotatakse, kahe järje võrra. Kui jagajaks on 1000, 10000 ehk mõni ülem järjeüksus, siis alanevad jagandi samanimelised ja ülemad järjeüksused kolme, nelja või enam järje võrra, teiste sõnadega: nii mitme järje võrra, kui palju jagajas nullisid on. Jagandi alamad üksustekogud, s. o.

nii mitu alamjärjest üksustekogu, kui palju jagajas nullisid on, jäävad jaotamata ja võetakse jäänusesse. Siit järgneb põhimäärus: *Et antud arvu ükskõik missugusele järjeüksusele jaotada, selleks võtame jagatiseks jagandi, mille lõpul nii mitu arvomärki kustutame, kui palju jagajas nullisid on. Jagandis kustutatud arvomärgid võtame nende täielikus väärtuses jäänuseks.* Näit. $32546 : 100 = 325$ (jäänus 46); $18740576 : 1000 = 18740$ (jäänus 576), jne. (Tegelikult jaotades järele katsuda!)

Jaotamisel *esimesele* järjeüksusele, s. o. ühele, saame jagatiseks jagandi; et jagajal nullisid lõpul ei ole, siis ei tule jagandis ühtegi arvomärki kustutada.

§ 57. Jaotamine kahe- ja mitmekohalisele arvule.

I. Jaotamine kahe- ja mitmekohalisele arvule toimetatakse samas järjekorras kui jaotamine ühekohalisele arvule. Võtame jaotamise *kahekohalisele* arvule. Antud on 8736 jaotada 24-le. Algame jaotamist ülemjärjestel üksustest. — Et 8 tuhandeliste võimata on 24-le nii jaotada, et iga osaline ühegi tuhandelise saaks (sest tuhandelisi on vähem kui osalisi), siis alandame 8 tuhandeliste sajalisteks. Laiame 80 sajalist, mis 8 tuhandelise asemel jaotamisele tulevad. Neile 80-le sajalisele jagandis antud 7 sajalist juure lisades leiame esimese osajagandi — 87 sajalist. Sajalisi on rohkem kui osalisi, — iga osaline võib sajalisi saada. Küsimine on: *mitu* sajalist iga osaline võib saada? Katsete teel võime iga osalise sajaliste arvu leida. Kui igale osalisele annaksime 1 sajalise, siis oleks ainult 24 sajalist jaotatud. Kui igale osalisele annaksime 2 sajalist, siis oleks jaotatud sajaliste arv $2 \text{ sajalist} \times 24 = 48 \text{ sajalist}$. Anname igale osalisele 3 sajalist; siis on jaotatud $3 \text{ sajalist} \times 24 = 72 \text{ sajalist}$. Rohkem kui 3 sajalist igasse osasse ei tule. Annaksime igale osalisele 4 sajalist, siis oleks jaotatud sajaliste arv $4 \text{ sajalist} \times 24 = 96 \text{ sajalist}$, s. o. jaotatud sajalisi oleks rohkem, kui neid jaotamiseks üldse on antud. Selle asemel, et katsetel 1-te, 2-te, 3-me jne. sajalist 24-ga kasvatada, võime ümberpöörduvalt talitada, s. o. jagajat kasvatada iseäraldi ühekohaliste arvudega nende loomulikus järjekorras, kuna kasvatisel sajaliste nimetuse juure mõtleme. Katset tehes leidsime, et sajaliste osajagatiseks 3 sajalist tuleb võtta, mis jagatise sajaliste kohale kirjutame. Arvame antud 87-st sajalisest maha 72 jaotatud sajalist. Jääb jaotamata 15 sajalist.

8736	24
— 72	364
153	
— 144	
96	
— 96	

Jaotamata sajalisi on vähem kui osalisi. Sajalisi enam ükski osaline ei saa. 15 sajalist alandame kümnelisteks. Leiame 150 kümnelist. Neile 150-le kümnelisele lisame jagandist 3 küm-

nelist juure, milleks näitlikult kümmeliste arvumärgi jagandist alla toome ja ülejäänud sajaliste arvule paremale poole otsa paigutame. Teisesse osajagandisse tuleb 153 kümmelist. Et kümmelisi rohkem on kui osalisi, siis võib iga osaline kümmelisi saada. Katsete teel (nagu sajaliste jaotamiselgi) leiame, et iga osaline 6 kümmelist võib saada. Need 6 kümmelist kirjutame jagatisse. Jaotatud on 6 kümmelist $\times 24 = 144$ kümmelist. Arvame jaotada antud 153-st kümmelisest maha 144 jaotatud kümmelist. Jääb järele, s. o. jaotamata, 9 kümmelist.

Jaotamata 9 kümmelist alandame, endistel põhjustel, 90-ks üheliseks, lisame jagandist 6 ühelist juure ja jaotame 96 ühelist kui kolmenda ja viimase osajagandi 24-le. Iga osaline saab 4 ühelist. Jaotatud on 4 ühelist $\times 24 = 96$ ühelist, s. o. niisama palju kui jaotada oli antud. Jaotamine lõppes jäänuseta.

Eelolevas näituses oli esimene osajagand kahekohaline arv; ta võib aga mõnikord kolmekohaline arv olla, nagu selgub siin antud teisest näitusest 29871 : 78. Kui jagandi kümnetuhandelised alandame tuhandelisteks ja neile jagandis leiduvad 9 tuhandelist juure lisame, siis saame kokku 29 tuhandelist. Iga osaline

$$\begin{array}{r|l}
 29871 & 78 \\
 -234 & 382 \\
 \hline
 647 & \\
 -624 & \\
 \hline
 231 & \\
 -156 & \\
 \hline
 75 &
 \end{array}$$

ei või tervet tuhandelist saada, sest tuhandelisi on vähem kui osalisi. Alandame 29 tuhandelist sajalisteks. Saame 290 sajalist. Lisame neile sajalistele jagandis leiduvad 8 sajalist juure. Kokku saame 298 sajalist. Need 298 sajalist võime 78-le jaotada, sest sajalisi on rohkem kui osalisi. Ülemateks järjeüksusteks jagatisse tulevad sajalised. Jaotamine lõpeb jäänusega.

Eelolevaist näitustest ja seletustest järgneb, et jaotamisel kahekohalisele arvule esimeseks osajagandiks kaks või kolm ülemat järjeüksustekogu antud jagandist võetakse. Nende kahe või kolme üksustekogu arvumärgid peavad, oma järjekorras isearaldi võetuna, niisama suure või suurema arvu sünnitama kui jagaja on. Esimese osajagandi alamjärjelised üksused on jagatise ülemjärjeliste üksustega ühenimelised.

II. Võtame jaotamise mitmekohalisele arvule, näituseks 942598 : 367. — Jagandi ülemad järjeüksused on sajatuhandelised. Iga osaline ei või täit sajatuhandelist saada. Alandamise ja kokkuarvamise kaudu leiame 94 kümnetuhandelist. Osalisi on aga rohkem kui kümnetuhandelisi. Iga osaline ei või täit kümnetuhandelist saada. Alandame 94 kümnetuhandelist tuhandelisteks; saame 940 tuhandelist. Kokku jagandis leiduva 2 tuhandelisega tuletame esimesse osajagandisse 942 tuhandelist. Iga osaline võib tuhandelisi saada. Tähendab: ülemateks järjeüksus-

teks jagatises on tuhandelised. Jagatis on neljakohaline arv. Katsete teel leiame, et jagatisse tuleb 2 tuhandelist. — Jagatise tuhandeliste arvu võime ka lihtsamal viisil leida, ilma et tervet jagajat üksikute ühekohaliste arvudega tuleks kasvatada. Võtame jagandi ja jagaja ülemjärjelised üksustekogud tähelepanemise alla ja küsime: Mitme tuhandelisega peame 3 sajalist kasvatama, et saaks 9 sajatuhandelist? Vastus on: 3 tuhandelisega, sest kasvatis annab 9 sajatuhandelist, ja rohkem neid jagandis ei ole kui 9. Kui me jagaja 6 kümnelist ka kasvatame 3-me tuhandelisega, siis saame kasvatisel lisaks 18 kümnetuhandelist = 1 sajatuhandelise + 8 kümnetuhandelist. Nii oleks kasvatises juba 10 sajatuhandelist, kuna neid osajagandis kui kasvatises ainult 9 on. Sellega oleme jagatisse tuhandelisi rohkem võtnud kui tarvis. Kolme tuhandelise asemele tuleb jagatisse võtta 2 tuhandelist.

Tuhandeliste ja järgnevate osajagandite jaotamine toimetakse samal viisil ja samas järjekorras kui jaotamine kahekohalisele arvule.

Jaotamisel mitmekohalisele arvule võib esimene (ülem) osajagand eneses niisama palju arvumärke sisaldada kui jagaja, ehk ühe arvumärgi võrra rohkem kui jagaja. Et, näituseks, 537485 jaotada 568-le, peame esimeseks osajagandiks võtma 5374 sajalist, s. o. neljakohalise sajalistearvu, jne.

Kirjalik mahutamine.

§ 58. **Ühekohalise arvu mahutamine.** Mahutamise korral on kergem tegeldamisega ülemjärjelistest üksustest alata, nagu jaotamiselgi. Võtame näituse: *Mitu korda mahub 8 (toopi) 3752-he (toobi) sisse?*

Tegeldamisega jagandi ülematest järjeüksustest alates küsime: Mitu korda läheb ehk mahub 3-me tuhande sisse 8 ühelist? Et teada saada, kas jagatisse *tuhandelisi* tuleb, selleks katsume järele, kas mahuvad 8 ühelist 3-me tuhande sisse 1 tuhat korda. Tuhat korda 8 ühelist on 8 tuhat. Nii mahuvad 8 ühelist tuhat korda 8-sa tuhande sisse, 3-me tuhande sisse mahuvad 8 ühelist vähem kui tuhat korda, võib olla ükskorda ehk mitusada korda. Et meil 8 ühelist ka jagandi 7-me sajalise sisse tuleb mahutada, siis ühendame tuhandelistest alandamise teel saadud 30 sajalist 7-me sajalisega ja katsume, *mitusada* korda mahub 8 ühelist 37 sajalise (esimese osajagandi) sisse. Jagaja 8 mahub ükskorda korda 8 sajalise sisse, sest $8 \times 100 = 800$, jagaja 8 mahub kakssada korda 16-ne sajalise sisse, sest $8 \times 200 = 1600$, s. o. 16 sajalist. Niisama leiame järelikatsetel, et 8 mahub

$$\begin{array}{r|l}
 3752 & 8 \\
 -32 & \\
 \hline
 55 & 469 \\
 -48 & \\
 \hline
 72 & \\
 -72 & \\
 \hline
 \end{array}$$

3-sada korda 24-ja sajalise sisse, 4-sada korda 32-he sajalise sisse ja 5-sada korda 40-ne sajalise sisse. Et meil osajagandis on 37 sajalist, siis võib 8 ühelist antud sajaliste sisse ainult 4-sada korda mahtuda. Kirjutame jagatisse arvumärgi 4 sajaliste tähendusega. Arvame 37-st sajalisest maha need 32 sajalist, mille sisse 8 täiesti 4-sada korda mahub; jääb üle 5 sajalist. Nende 5 sajalise sisse on jagaja alles mahutamata.

Jäänusesse võetud 5 sajalise sisse ei mahu jagaja 8 enam ühtki sadat korda. Alandamise teel 5-st sajalisest saadud 50-ne kümnelise sisse mahub jagaja rohkem kui kümme korda, sest juba 8-sse kümnelisse (s. o. 80-sse) mahub jagaja 8 täieliselt kümme korda. Lisame 5-st sajalisest alandamise teel saadud 50-le kümnelisele jagandis antud 5 kümnelist juure ja katsume, *mitukümmend* korda mahub jagaja 8 teise osajagandi, s. o. 55 kümnelise sisse. Nagu mahutamisel sajaliste sisse, nii leiame ka siin katsete teel, et 8 mahub 55 kümnelise sisse kuuskümmend korda, sest $8 \times 60 = 480$, s. o. 48 kümnelist, kuna $8 \times 70 = 560 = 56$ kümnelist, s. o. rohkem kümnelisi, kui neid teises osajagandis leidub. Kirjutame jagatisse arvumärgi 6 kümneliste tähendusega, s. o. sajaliste arvumärgist paremale poole. Katseid tehes nägime, et 8 mahub 48 kümnelise sisse täiesti 60 korda. Arvame teisest osajagandist, s. o. 55-st kümnelisest, need 48 kümnelist maha, mille sisse jagaja 8 täiesti 60 korda mahub. Jääb järele 7 kümnelist, mille sisse jagaja 8 alles mahutamata on.

Jäänusesse võetud 7-me kümnelise sisse mahuvad 8 ühelist vähem kui 10 korda. Et tarvis on jagajat ka jagandis antud 2-he ühelise sisse mahutada, siis alandame 7 kümnelist ühelisteks, ühendame alandamisel saadud 70 ühelist 2-he ühelisega ja mahutame jagaja, 8 ühelist, kolmanda osajagandi, 72-he ühelise sisse. Endisel viisil katseid tehes leiame, et 8 ühelist mahuvad 72-he ühelise sisse täiesti, ilma jäänuseta, 9 korda. Jagatisse kirjutame 9 ühelist ühelistele kohale.

Jagatisse tekkis arv 469. See arv tähendab, et 8 mahtus 3752 sisse 469 korda.

Mahutamine lõppis ilma jäänuseta. Mõnikord võib mahutamine ka jäänusega lõppeda.

§ 59. Kahe- ja mitmekohalise arvu mahutamine. Kahe- ja mitmekohalise arvu mahutamise korral seletatakse tegeldamiskäik samal viisil ja samas järjekorras kui ühekohalise arvu mahutamisel. Nagu mahutamisel ühekohalisele arvule esimene osajagand ühe- või kahekohaline arv võib olla, nii võib mahutamisel kahekohalisele arvule esimene (ülem) osajagand olla kahe- või kolmekohaline arv, mahutamisel kolmekohalisele arvule — kolme- või neljakohaline jne. *Esimene (ja ka iga järgmine, alam) osajagand võib siis mahutamise korral olla nii mitmekohaline arv kui palju arvumärke jagajas on, ehk osajagandis on ühe võrra rohkem arvumärke kui jagajas.* See kord maksab, nagu nägime, ka jaotamisel.

Esimese (ülema) osajagandi järele võib ka jagatise arvumärkide hulka ära määrata. Esimese osajagandi viimane, alamjärjeline arvumärk on oma kohaväärtuse poolest jagatise esimese (s. o. ülemjärjelise üksustekogu) arvumärgiga ühenimeline. On, näituseks, esimese osajagandi alamjärjeline arvumärk tuhandeliste tähendusega, siis on jagatise ülem üksustekogu tuhandelised. Arv, milles tuhandelised kui ülemad järjeüksused ette tulevad, on neljakohaline arv. Et jagatise arvumärkide hulka teada saada, selleks võime ka jagandi arvumärkide hulka vähendada jagaja arvumärkide hulga võrra, ehk jagaja arvumärkide hulga võrra ilma ühe arvumärgita. (Millal tuleb teine, millal esimene vähendamisviis tarvitusele?)

Järjeüksuste mahutamise korral leiame, niisama kui jaotamisel, et jagatiseks jagand võetakse, mille lõpul enne nii mitu arvumärki kustutatakse, kui palju jagajas nullisid on, kuna jagandis kustutatud arvumärgid nende täielikus väärtuses jäänuseks võetakse. Näituseks $6738 : 100 = 67$ (jäänus 38), jne.

Jagamine kui kasvatamise vastastegeldus.

§ 60. Üldised juhtmõtted. Jagamise kui kasvatamise vastastegelduse peale vaadates tuleb silmas pidada, et jagand muud midagi ei ole kui jagaja ja jagatise kasvatis (§ 50). Jagamisel jäänusega tuleb jagaja ja jagatise kasvatisse jäänus juure arvata, et jagandit leida (§ 51). Osadekaupa kasvatamisel arvame osakasvatiseid kokku. Jagamise korral otsime ja leiame osakasvatiseid ja arvame nad järgemööda täiskasvatise (jagandist) maha. Selle juures peame järjeüksuste kogusid, kui osakasvatise, silmas pidama. Osakasvatiste ja jagaja (kui antud teguri) abil leiame osajagatiseid kui otsitavad tegurid.

§ 61. Jagamine üldises mõttes kui kasvatamise vastastegeldus. Võtame näituseks $25794 : 48$ ja otsime vastastegelduse, s. o. kasvatamise abil jagatise. Algame tegeldamisega jagandi ülemjärjestest üksustest.

Jagandis on ülemjärjelisi üksusi 2 kümnetuhandelist. Mitme kümnetuhandelisega peame 48 ühelist kasvatama, et kasvatisse tuleks 2 kümnetuhandelist? Ei ühegi kümnetuhandelise, sest kasvataksime 48 ühelist 1 kümnetuhandelise, siis saaksime 48 kümnetuhandelist, kuna meil osakasvatistes ainult 2 kümnetuhandelist on. Alandame 2 kümnetuhandelist 20-ks tuhandeliseks ja lisame jagandis leiduvad 5 tuhandelist juure. Kokku saame 25 tuhandelist. Mitme

tuhandelisega peame 48 ühelist kasvatama, et kasvatisse tuleks 25 tuhandelist? Ei ühegi tuhandelise, sest kasvataksime 48 ühelist 1 tuhan-

$$\begin{array}{r}
 25794 : 48 = 537 \\
 \underline{- 240} \\
 179 \\
 \underline{- 144} \\
 354 \\
 \underline{- 336} \\
 18
 \end{array}$$

delisega, siis leiaksime 48 tuhandelist, kuna meil osakasvatistes on ainult 25 tuhandelist. Alandame 25 tuhandelist 250-ks sajaliseks ja lisame jagandis leiduvad 7 sajalist juure. Kokku saame 257 sajalist. Need 257 sajalist on esimene osajagand. *Mitme sajalisega* peame 48 ühelist kasvatama, et kasvatis oleks 257 sajalist või natuke vähem? Katseid tehes leiame, et 48 ühelise kasvatis 5 sajalisega annab 240 sajalist, aga 48 ühelise kasvatis 6 sajalisega annab 288 sajalist, s. o. rohkem kui osajagandis sajalisi leidub. Siit järgneb, et 48 ühelist on vaja 5 sajalisega kasvatada. Jagatisse tuleb 5 sajalist. Arvame esimesest osajagandist 48 ühelise ja 6 sajalise kasvatis (kui esimese, ülema osakasvatise) maha. Jääb järele 17 sajalist.

Osajagatise leidmise kergendamiseks on sagedasti kasulik jagaja *ülemjärjeldamine*, s. o. suuruse poolest lähema ülemjärjelise üksustekogu võtmine jagaja asemele. Jagaja 48 ülemjärjeldamisel leiame katselise jagaja 50, sest 50 on suuruse poolest 48-le lähemal kui 40. Katse line jagaja, 50 ühelist, 6-e sajalisega kasvatatud, annab 300 sajalist, s. o. rohkem kui osajagandis sajalisi on. Tähendab: 6 sajalist on palju osajagatisse võtta, 5 sajalist on paras osajagatis.

Et 48 ühelise kasvatis 1 sajalisega annab 48 sajalist, s. o. rohkem kui jäänuses sajalisi on, siis ei või jagatisse enam sajalisi tulla. Katsume järele, mitu kümnelist tuleb jagatisse. Üheliste ja kümneliste kasvatis seisab kümnelistest koos. Alandame jäänusesse tulnud 17 sajalist kümnelisteks ja lisame neile juure jagandis leiduvad 9 kümnelist. Kokku on meil siis teises osajagandis 179 kümnelist. *Mitme kümnelisega* peame 48 ühelist kasvatama, et kasvatis oleks 179 või natuke vähem? Katselisel kasvatamisel selgub, et 48 ühelist 3-me kümnelisega tuleb kasvatada, (sest 50 ühel. $\times$ 3 kümnelisega annavad 150 kümnelist, aga 50 ühel. $\times$ 4 kümnelisega annavad 200 kümnelist). Jagatisse tuleb 3 kümnelist. 48 ühelise kasvatis 3-me kümnelisega on 144 kümnelist. Arvame need 144 kümnelist teisest osajagandist maha. Jääb järele 35 kümnelist.

Et 48 ühelise kasvatis 1 kümnelisega annab 48 kümnelist, jäänuses aga 35 kümnelist on, siis ei või jagatisse enam ühtegi kümnelist võtta. Katsume järele, mitu ühelist võib jagatisse tulla. Et üheliste kasvatis ühelistega koos seisab ühelistest, siis alandame jäänuses leiduvad 35 kümnelist ühelisteks. Alandamisel saadud 350 ühelisele võtame jagandist 4 ühelist juure. Kokku tuleb siis kolmandasse osajagandisse 354 ühelist. *Mitme ühelisega* peame 48 ühelist kasvatama, et kasvatis oleks 354 ühelist või natuke vähem? Peame kasvatama 7 ühelisega. Jagatisse tuleb 7 ühelist. 48 ühelise kasvatis 7-me ühelisega annab 336 ühelist. Arvame selle kasvatis maha viimasest osajagandist (354 st ühelisest), jääb järele ja tuleb jäänusesse 18 ühelist.

Kui osajagandid ja jagaja on mitmekohalised arvud, siis võib osajagatiste leidmise kergendamiseks, peale jagaja ülemjärjeldamise, ka

osajagandi ülemjärjeldamise tarvitusele võtta. Mahutamise korral astub katselise kasvatamise asemele katseline mahutamine (jagamine). Katseline kasvatamine ja jagamine ei anna igakord õiget osajagatist: osajagatis võib harvadel kordadel ühe üksuse võrra õigest osajagatisest suurem või väiksem olla. (Näitused!)

§ 62. **Kasvatamise ja jagamise tõendised.** Et kasvatamine ja jagamine vastastegeldused on, siis võib esimese tegelduse abil järele katsuda, kas jagamine õigesti on tehtud, ja ümberpöörduvalt: jagamise abil võime tõestada, kas kasvatamisel õigesti on tegeldatud.

I. *Kasvatamise tõendiseks* on tarvis kasvatist jagada kasvandiga ehk kasvatajaga. Kui kasvatise jagame kasvandiga, siis

$$\begin{array}{l} \text{Tegeldus.} \left\{ \begin{array}{r} 345 \\ \times 27 \\ \hline 2415 \\ + 690 \\ \hline 9315 \end{array} \right. \quad \text{Esimehe tõendis.} \left\{ \begin{array}{r} 9315 \\ - 690 \\ \hline 2415 \\ - 2415 \\ \hline \end{array} \right. \begin{array}{r} 345 \\ 27 \end{array} \quad \text{Teine tõendis.} \left\{ \begin{array}{r} 9315 \\ - 81 \\ \hline 121 \\ - 108 \\ \hline 135 \\ - 135 \\ \hline \end{array} \right. \begin{array}{r} 27 \\ 345 \end{array}$$

tuleb jagatisse kasvataja, kui kasvatise jagame kasvatajaga, siis tuleb jagatisse kasvand (§ 50). Näitused tõendavad seda.

II. *Jagamise tõendiseks* on tarvis jagajat jagatisega kasvatada ehk ümberpöörduvalt. Kui jagamine jäänuseta lõppis, siis on jagaja ja jagatise kasvatis jagandiga ühesuurune. Kui jagamine

$$\begin{array}{l} \text{Tegeldus.} \left\{ \begin{array}{r} 20929 \\ - 162 \\ \hline 472 \\ - 432 \\ \hline 409 \\ - 378 \\ \hline 31 \end{array} \right. \quad \text{Tõendised.} \left\{ \begin{array}{r} 387 \\ \times 54 \\ \hline 1548 \\ + 1935 \\ \hline 20898 \\ + 731 \text{ (jäänus)} \\ \hline 20929 \end{array} \right. \quad \begin{array}{r} 54 \\ 387 \end{array} \quad \begin{array}{r} 54 \\ \times 387 \\ \hline 378 \\ + 432 \\ \hline 162 \\ 20898 \\ + 731 \text{ (jäänus)} \\ \hline 20929 \end{array}$$

jäänusega lõppis, siis on jagaja ja jagatise kasvatis, kui temale jäänus juure lisatakse, jagandi suurune, nagu siin antud näitused tõendavad.

Jagamise tõendist võime ka jagamise abil toimetada. Kui jagandi jagatisega jagame, siis peame uueks jagatiseks endise jagaja saama, — muidugi säärasel korral, kui esialgne jagamine jäänuseta lõppis. Kui jagamine, mida tahetakse tõendada, jäänusega lõppis, siis võime tõendist jagamise kaudu ainult niisugusel korral tarvitusele võtta, kui jäänus väiksem on kui jagatis. (Mispärast?)

§ 63. **Jagamise tarvitamine.** Ülesannetes tuleb jagamine tarvitusele, 1) kui kordarvu (ehk mitmekordse) osaarvu otsitakse, 2) kui üks arv nii mitu korda väiksendatakse ehk nii mitmeks ühesuuruseks osaks lahutatakse, kui palju teises arvus ühelisi on, 3) kui leida tahetakse, mitu korda väiksem arv suurema sisse mahub, 4) mitu korda üks antud arv teisest suurem või väiksem on ehk mitmes osa on väiksem arv suuremast arvust.

Kui jagandiks ja jagajaks on kogundi või vahengu kujutised, siis tulevad need kujutised, kui nad üksteisele järgnevad, sulgudesse võtta. Näituseks: $(328 - 49) : (6 + 60 - 35) = 279 : (66 - 35) = 279 : 31 = 9$, jne. Kui tegelduse valemis sulgusid ei ole, siis peame arvudega tegeldama nende järjekorras, pahemalt paremale poole minnes. Selle juures tuleb tähele panna, et kahe (või mitme) arvu kasvatis, niisama ka nende jagatis, üheks arvuks tulevad lugeda, nagu oleksid nad sulgudes. Näit. $40 + 13 \cdot 2 - 64 : 16 + 5 = 40 + 26 - 4 + 5 = 71 - 4 = 67$, jne. Kasvatamise ja jagamise järjekord määratakse mõnikord ka sulgudega kindlaks. Näit. $60 : (3 \cdot 5) = 60 : 15 = 4$. Siin tuleb enne leida kasvatis 3×5 , pärast 60 jagada 15-le.

§ 64. **Ülesanded.** — 52. Kui suur on jagatis järgmistes kujutistes:
 a) $93 : 3 = ?$ b) $762 : 6 = ?$ d) $815 : 5 = ?$ e) $847 : 7 = ?$ g) $8244 : 9 = ?$
 h) $6736 : 8 = ?$ i) $4125 : 11 = ?$ k) $1246 : 14 = ?$ l) $3675 : 25 = ?$ m) $11430 : 45 = ?$
 n) $8178 : 87 = ?$ o) $8178 : 94 = ?$ p) $14625 : 125 = ?$ r) $50508 : 36 = ?$
 s) $100000 : 125 = ?$

53. Isa jaotas kolmele pojale 4569 marka, nii et kõik pojad ühepalju said. Kui suur oli iga poja osa?

54. Rahamees müüs 64 Riia vakamaad metsamaad ja sai iga vakamaa eest 147 kuldrubla. Saadud raha eest ostis ta 98 Riia vakamaad põldu. Kui kallid olid põlluvakamaad?

55. Jagandi kujutis on $360 - (72 - 27)$, jagaja kujutis on $(71 - 68) + 2$; kui suur on jagatis?

56. Uue ülikonna peale läheb 3 meetrit vabrikus valmistatud kalevit. Mitu ülikonda võib rätsepp valmis õmmelda, kui tal 195 meetrit vabrikukalevit on?

57. Tosin hõbelusikaid (supilusikaid) maksis 84 kuldrubla. Kui palju maksid 45 samasugust hõbelusikat?

58. Aurupump vinnas tiigist ühe tunni jooksul 3528 ämbrit vett jõkke, käsipump sellesama aja jooksul ainult 84 ämbrit. Mitu korda vinnas aurupump tunni jooksul rohkem vett tiigist jõkke kui käsipump?

59. Sõjaväe tarvis osteti 96 hobust ja makseti iga hobuse eest 165 kuldrubla. Edasisaatmisel said raudteel 6 hobust otsa. Kui palju tuli läbistikkui järeljäänud hobune maksuma kuldrublades, kui palju Eesti markades, kui ostu ajal ühe kuldrubla väärtus oli 185 Eesti marka?

60. Majaehitamise eest makseti ehitusmeistrile ja töölistele palgaks kokku 6174 kuldrubla. Sellest rahast sai ehitusmeister seitsmenda osa omale. Iga tööline sai palgaks 84 kuldrubla. Mitmele töölistele makseti majaehitamise eest palka?

61. Asunik, kellel koha peale tulles 126000 marka raha oli, ostis oma raha neljanda osa eest hobuseid, viienda osa eest lehma, kuuenda osa eest härgi. Kui palju raha jäi talle muude tarvituste peale?

62. Ringkonnakohus jaotas isa päranduse, mis 44175 marka suur oli, viiele lapsele nende isa viimse tahtmise põhjal järgmisel viisil: vanema lapse

järgmine, s. o. teine laps, päris 2 korda rohkem, kolmas — 3 korda rohkem, neljas — 4 korda rohkem ja viies — 5 korda rohkem kui esimene, kõige vanem laps. Kui palju päris igaiüks?

63. Tuletikka mahub igasse toosi 75 tükki. Mitmesse toosi võib 1725 tuletikku mahutada?

64. Isa jaotas kolmele pojale 83460 marka niiviisi, et keskmine poeg 8 korda rohkem sai kui vanem poeg ja noorem 2 korda vähem kui keskmine poeg. Kui palju sai neist igaüks?

65. Neli kaupmeest panid ühiskauplemiseks raha kokku: esimene andis 295920 marka, teine 6 korda vähem kui esimene, kolmas 8 korda vähem kui esimene ja neljas 9 korda vähem kui esimene. Üldine kasu ühiskauplemisest oli 18 korda vähem kui kokkupanud rahasumma. Kui suur oli ühiskasu?

66. Otsitava arvu 16-nekordsest võeti ära 400; järele jäi 70000. Kui suur on otsitav arv?

67. Kahe arvu kasvatis on 41151; kasvataja on 87. Kui suur on kasvand?

68. Aasta jooksul makseti vabrikutöölisele nädala palkadeks 31920 marka, naistööliste kokku niisama palju kui meestööliste. Iga naistööline sai läbistikku nädalapalgaks 285 marka, iga meestööline 456 marka. Kui palju naisterahvaid ja kui palju meisterahvaid oli vabrikus tööl? Kui palju teenisid meestöölised aastas (= 52 näd.) rohkem kui naistöölised?

69. Sügisel osteti mõisa nuuma peale ja piimalehmadeks 24 sarvloomu. Iga härg maksis 67 kuldrubla, iga lehm 52 kuldrubla. Mitu härga ja mitu lehma osteti, kui nende koguhind 1473 kuldrubla oli?

70. Jalgrattasõitja ja jalamees hakkavad ühel ajal maanteed mööda Viru-Nigula poole rändama: esimene Tapalt, Rakvere kaudu, teine Rakverest, kuhu Tapalt maanteed mööda 28 versta on. Jalgrattasõitja jõuab 104 sülda, jalamees 24 sülda minutis edasi. Kui kaugel Viru-Nigulast ja Rakverest jõuab jalgrattasõitja jalamehele järele? Viru-Nigula ja Tapa on Rakverest ühekaugusel. Verstas on 500 sülda.

71. Aerutaja proovis suvisel madalvee ajal Tartu linnas Emajõe oma lootsiku sõidukiirust. Ta leidis, et allavett sõudes lootsik 5-e minuti vältusel 210 sülda, aga vastuvett sõudes 5-e minuti vältusel ainult 150 sülda edasi jõudis. Kui kiire oli proovisõidu ajal Emajõe veevool ühes minutis, kui kiire ühes tunnis?

72. Hobune ja härg maksid kokku 362 kuldrubla; seesama hobune ja lehm maksid kokku 335 kuldrubla; seesama härg ja seesama lehm maksid kokku 157 kuldrubla. Kui palju maksis igaüks elajaloom? Kui palju maksis iga loom Eesti markades 1921. aasta sügisel, kui kuldrubla väärtus oli 185 Eesti marka?

Kasvatise ja jagatise muutmine.

§ 65. **Kasvatise muutmine.** Kasvatist võime kaudsel teel, tegurite kaudu muuta. See muutmine võib olla suurendamine või väiksendamine. Kui ühe teguri suurendame, siis suureneb ka kasvatis, sest mida suurema arvu meie osandiks kordame, seda suurem on kasvatis. Kui ühe teguri väiksendame, siis väikseneb ka kasvatis, sest mida väiksema arvu me osandiks kordame, seda väiksem on kasvatis. Kasvatise kaudne muutmine toimetatakse juure- või mahaarvamise ehk kasvatamise või jagamise abil.

I. Katsume, esiteks, kasvatist juure- ja mahaarvamise abil kaudselt muuta. — Kui ühe teguri suurendame ühe võrra, siis peame teise teguri veel ühe korra osandiks võtma. Selle läbi suureneb kasvatis teise teguri ühekordse võrra. Kui, näit., ühe teguri suurendame 4-ja võrra, siis peame teise teguri veel 4 korda osandiks võtma. Kasvatis suureneb siis teise teguri neljakordse võrra. Kui ühe teguri väiksendame 1-he, 2-he, 3-me jne. võrra, siis peame teise teguri ühe korra, kaks, kolm jne. korda vähem osandiks võtma. Selle läbi väikseneb kasvatis teise teguri ühe-, kahe-, kolmekordse jne. võrra. Siit järgneb, *et kahe teguri kasvatis suureneb või väikseneb ühe teguri nii mitmekordse võrra, kui palju ühelisi me teisele tegurile juure või teisest tegurist maha arvame.*

Näitused: $15 \times 6 = 90$; $15 \times (6 + 3) = 15 \times 9 = 135$; kasvatis suurenes $135 - 90 = 45$ võrra, s. o. kasvandi kolmekordse võrra.

$24 \times 7 = 168$; $(24 - 5) \times 7 = 19 \times 7 = 133$; kasvatis väiksenes $168 - 133 = 35$ võrra, s. o. kasvataja viiekordse võrra.

Eelolev seadlus kergendab mõnikord arvude kasvatamist. Et, näit., 125 kasvatada 99-ga, selleks suurendame kasvataja 1-he ühelise võrra. Et kasvatis selle läbi kasvandi ühekordse võrra suureneb, siis arvame uuest kasvatisest 125 maha, et otsitava kasvatis leiaksime. Niisugune kergendamine on iseäranis siis kasulik, kui ühe teguritest mõne väikese arvu juure- või mahaarvamise kaudu kergesti võib ülemjärjeldada (ümarguseks teha), näit. 99, 98, 101, 102, 79, 81 jne.

II. Katsume teiseks kasvatist kaudselt muuta *kasvatamise* ja *jagamise* abil. — Kui ühe teguri kasvatame 2-ga, siis lisame sellele tegurile tema ühekordse juure. Selle läbi suureneb kasvatis teise teguri nii mitmekordse võrra, kui palju esimeses teguris (kui ühelistekogus) on ühelisi, s. o. terve kasvatis võrra. Tähendab: kasvatis muutub kahekordseks. Kui ühe teguri kasvatame 3-ga, siis lisame sellele tegurile tema kahekordse juure. Selle läbi suureneb kasvatis teise teguri nii mitmekordse võrra, kui palju esimese teguri kahekordses (kui ühelistekogus) on ühelisi, ja muutub kolmekordseks. Niisama muutub kasvatis neljakordseks, kui ühe teguri kasvatame 4-ga, jne. Ümberpöörduvalt — väikseneb kasvatis nii mitmekordselt, kui suure arvuga ühe teguri jagame. Siit järgneb, *et kahe teguri kasvatis suureneb või väikseneb nii mitmekordselt, kui suure arvuga me ühe neist teguritest kasvatame või jagame.*

Näit. $18 \times 4 = 72$; $18 \times (4 \cdot 3) = 18 \times 12 = 216$. Antud kasvatis suurenes $216 : 72 = 3$ -me kordselt. $(18 : 2) \times 4 = 9 \times 4 = 36$. Kasvatis 36 on 2 korda väiksem kui antud kasvatis 72.

Kahe teguri kasvatis jääb muutmata, kui ühe teguri sama arvuga kasvatame, millega teise jagame. Kui ühe teguri kasvatame, näit., 5-ga, siis suurendame kasvatis viiekordselt; kui teise teguri jagame 5-ga,

siis väikseneb viiekordselt võetud kasvatis samakordselt, s. o. muutub endiseks. Näit., $36 \times 12 = 432$; $(36 \times 2) \times (12 : 2) = 72 \times 6 = 432$, jne.

Antud seadlused maksavad ka siis, kui mitme teguri kasvatis on antud, sest mitmetegurline kasvatis võib kahtegurliseks muutuda. Näit. $8 \times 6 \times 10 = 48 \times 10 = 8 \times 60$ jne.

Kui mitmetegurlises kasvatises ühe teguri kasvatame 3-ga, siis teeme kasvatisel kolmekordseks. Kui mõne teise teguri kasvatame 5-ga, siis teeme kolmekordse kasvatisel viiekordseks; esialgse kasvatisel teeme sellega 15-nekordseks, s. o. suurendame 15 korda. Siit järgneb, et kui kaks või mitu tegurit kasvatatakse antud arvudega, siis suureneb kasvatis nii mitmekordselt, kui suur antud arvude kasvatis on.

Näit. $32 \times 15 = 480$; $(32 \times 4) \times (15 \times 2) = 128 \times 30 = 3840$. Viimane kasvatis on esimesest 8 korda suurem, sest $3840 : 480 = 8$.

Kui kaks või mitu tegurit jagatakse antud arvudega, siis väikseneb kasvatis nii mitmekordselt, kui suur antud arvude kasvatis on.

Näit. $132 \times 27 = 3564$; $(132 : 4) \times (27 : 3) = 33 \times 9 = 297$. Viimane kasvatis on esimesest $4 \times 3 = 12$ korda väiksem, sest 3564 jagatud 297 -ga annab 12.

Kasvatisel kaudne muutmine kasvatamise ja jagamise abil kergendab mõnikord arvude kasvatamist. Näit. $35 \times 16 = (35 : 2) \times (16 \times 2) = 17 \times 32 = 544$; $96 \times 25 = (96 : 4) \times (25 \times 4) = 24 \times 100 = 2400$, jne.

§ 66. **Jagatise muutmine.** Võtame oma seletustele aluseks niisuguse jagatise, mis jagamisel ilma jäänuseta on saadud, s. o. jagatise, mis näitab, et jagand on jagaja kordarv. Jagatise kaudse muutmise (suurendamise või väiksendamise) võib teostada juure- või mahaarvamise abil, ehk ka kasvatamise või jagamise abil.

I. Katsume esiteks juure- ja mahaarvamise abil jagatist kaudselt muuta. — Jagand on jagaja ja jagatise kasvatis. Kasvatis suureneb või väikseneb ühe teguri nii mitmekordse võrra, kui palju ühelisi teisele tegurile juure lisame või temast maha arvame. Kui esimese, muutmata teguri jagajaks, teise jagatiseks võtame, siis järeldame, et jagatis suureneb või väikseneb nii mitme ühelise võrra, kui mitmekordselt jagaja jagandile juure lisatakse või temast maha arvatakse.

Näit. $32 : 4 = 8$. Kui jagandile 5-kordse jagaja, s. o. 20 juure lisame, siis suureneb jagatis 5-e ühelise võrra: $(32 + 20) : 4 = 52 : 4 = 13$. Ümberpöörduvalt on $(32 - 20) : 4 = 12 : 4 = 3$, s. o. jagatis väiksenes 5-e ühelise võrra.

Kui muutmata teguri võtame jagatiseks, muudetava teguri jagajaks, siis järeldame, et jagatis jääb muutmata, kui jagaja mõne antud arvu võrra suurendatakse või väiksendatakse ja jagand sellesama antud arvu ja jagatise kasvatisel võrra suurendatakse või väiksendatakse.

Näit. $96 : 12 = 8$. Kui jagajale 2 juure lisame ehk temast 2 maha arvame, siis peame jagandile juure lisama ehk temast maha

arvama $2 \times 8 = 16$, et jagatis muutmata jääks. $(96 + 16) : 14 = 112 : 14 = 8$; $(96 - 16) : 10 = 80 : 10 = 8$. Mõlemal korral leidsime endise jagaja muutmata.

II. Katsume teiseks jagatist kaudselt muuta *kasvatamise* ja *jagamise* abil. — Kahe teguri kasvatis suureneb või väikseneb nii mitmekordselt, kui suure arvuga ühe teguri kasvatame või jagame, kuna teise teguri muutmata jätame. Siit järgneb, et kui kasvatis mõne antud arvuga kasvatame või jagame, siis peame ühtluse nõudel ühe teguri sellesama antud arvuga kasvatama või jagama, kuna teise teguri muutmata jätame. Et jagand on jagaja ja jagatise kasvatis, siis järeldame, et *jagatis suureneb või väikseneb nii mitmekordselt, kui suure arvuga me jagandi kasvatame või jagame.*

Näit. $36 : 9 = 4$; $(36 \cdot 3) : 9 = 108 : 9 = 12$; $(36 : 2) : 9 = 18 : 9 = 2$, jne.

Kasvatis jääb muutmata, kui ühe teguri sama arvuga kasvatame, millega teise teguri jagame. Jätame jagandi (kui jagaja ja jagatise kasvatis) muutmata. Ühtluse nõudel suureneb või väikseneb jagatis nii mitmekordselt, kui mitmekordselt jagaja väikseneb või suureneb. Siit järeldame, et *jagatis suureneb või väikseneb nii mitmekordselt, kui suure arvuga me jagaja jagame või kasvatame.*

Näit. $315 : 15 = 21$; $315 : (15 : 5) = 315 : 3 = 105$; $315 : (15 \cdot 7) = 315 : 105 = 3$, jne.

Eelolevast kahest põhimäärusest järgneb, et kui jagandit ja jagajat kasvatame ühe ja sellesama arvuga, siis jagatis ühe ja sellesama arvuga kasvatatakse ja jagatakse, nii siis muutmata jääb. Niisama jääb jagatis muutmata, kui jagandi ja jagaja ühe ja sellesama arvuga jagame. Mõlemate seadluste ühtlasel tarvitamisel järeldame, et *jagatis jääb muutmata, kui jagandi ja jagaja ühe ja sellesama arvuga kasvatame või jagame.*

Näit. $72 : 12 = 6$; $(72 \cdot 5) : (12 \cdot 5) = 360 : 60 = 6$; $(72 : 4) : (12 : 4) = 18 : 3 = 6$, jne.

Kui jagandi kasvatame ühe arvuga, näit. 6-ga, siis teeme jagatise kuuekordseks. Kui samal ajal jagajat teise arvuga, näit. 2-ga jagame, siis suurendame kuuekordse jagatise kahekordselt, s. o. saame 12-nekordse esialgse jagatise. Esialgne jagatis suurenes $6 \times 2 = 12$ korda. Ümberpöördukt: kui jagandi 6-ga jagame, jagaja aga 2-ga kasvatame, siis väikseneb jagatis $6 \times 2 = 12$ korda. Siit järgneb, et kui me jagandi ühe antud arvuga kasvatame ja jagaja teise antud arvuga jagame, siis suureneb jagatis nii mitmekordselt, kui suur kahe antud arvu kasvatis on; kui me aga jagandi ühe antud arvuga jagame ja jagaja teise antud arvuga kasvatame, siis väikseneb jagatis nii mitmekordselt, kui suur kahe antud arvu kasvatis on.

Näit. $168 : 6 = 28$; $(168 \cdot 5) : (6 : 3) = 840 : 2 = 420$; $(168 : 7) : (6 \cdot 2) = 24 : 12 = 2$. Nagu näha, on teine jagatis esimesest $5 \cdot 3 = 15$ korda suurem, kolmas jagatis esimesest $7 \cdot 2 = 14$ korda väiksem.

Jagandi ja jagaja muutmise kaudu võime mõnikord jagatise kergemal ja lihtsamal teel leida kui otsekohe jagades. Näit. $650 : 50 =$

$= (650 : 10) : (50 : 10) = 65 : 5 = 13$; $450 : 15 = (450 : 45) \cdot 3 = 10 \cdot 3 = 30$; $4625 : 25 = (4625 : 4) : (25 : 4) = 18500 : 100 = 185$, jne.

§ 67. **Ülesanded.** — 73. Kasvand on 64. Kui kasvataja suurendame 5-e võrra, siis on kasvatis 896. Kui suur oli kasvataja?

74. Kasvataja on 67. Kui kasvandi 13-ne võrra suurendame, siis on kasvatis 6633. Kui suur oli kasvand?

75. Kasvand on 365. Kui kasvataja väiksendame 7-me võrra, siis on kasvatis 14965. Kui suur oli kasvataja?

76. Metsakaupleja maksis päevapalgaks igale palgiparvetajale 116 marka. Kui palgiparvetajaid 9 võrra vähem oleks olnud, siis oleks metsakaupleja ühtekokku päevas 2900 marka pidanud parvetajaile maksma. Kui palju oli palgiparvetajaid?

77. Kasvand on 340. Kui kasvataja kahekordseks teeme, siis leiame kasvatisena arvu 5440. Kui suur oli kasvataja?

78. Kasvataja on 9. Kui kasvataja neljakordseks teeme, siis leiame kasvatisena arvu 6192. Kui suur on kasvand?

79. Tööstuse ettevõtja palkas 17 aastatöölist kindla rahapalgaga. Aasta lõpul alandas ta iga töölise aastapalga 5-e kuldrubla võrra, nii et kõigile aastatöölistele kokku 3791 kuldrubla maksta oleks tulnud. Kui suur pidi iga töölise aastapalk esialgse kokkuleppe järele olema?

80. Kahe arvu kasvatis on 8525. Kui kasvatajale 6 juure lisame, siis on kasvatis 10571. Kui suur on kasvand, kui suur oli kasvataja?

81. Mõisa põllul pidid 24 töölist 18 päeva karjatalid võtma. Kui palju töölisi oleks tarvis, et samasugune töö 6 päevaga ära tehtaks?

82. Kasvand suurendati 3 korda. Kuida tuleb kasvataja muuta, et kasvatis a) muutmata jääks? b) neli korda väikseneks?

83. Mitmekordse esimese teguri võrra suureneb kahe teguri kasvatis, kui teiseks teguriks 37-me asemele 49 võetakse?

84. Mitmekordse esimese teguri võrra suureneb või väikseneb kolme teguri kasvatis, kui kahe viimase teguri, 18-ne ja 19-ne asemele 17 ja 20 võetakse?

85. Jagand on 84. Kui jagandile 21 juure lisame, siis suureneb jagatis 1 võrra. Kui suur on jagaja, kui suur oli jagatis?

86. Jagand on 855. Kui jagandist 133 maha arvame, siis väikseneb jagatis 7-me võrra. Kui suur on jagaja, kui suur oli jagatis?

87. Jagand on 6 korda suurem kui jagaja. Jagaja suurendati 4 võrra. Mitme võrra peab jagandi suurendama, et ta endist viisi 6 korda suurem oleks kui jagaja?

88. Ühes toas on 2 korda rohkem inimesi kui teises toas. Teise tuppa tuli 6 inimest juure. Mitu inimest peaks esimesse tuppa juure tulema, et seal endist viisi 2 korda rohkem inimesi oleks kui teises toas?

89. Ühes korvis on 5 korda rohkem õunu kui teises. Esimesest korvist pandi 5 õuna teise korvi. Mitu õuna tuleks esimesse korvi juure panna, et seal endist viisi 5 korda rohkem õunu oleks kui teises korvis?

90. Jagand on 9765. Kui jagaja 7 korda väiksendatakse, siis on jagatis 315. Kui suur oli jagaja?

91. Jagaja on 159. Kui jagandi viiekordseks teeme, siis suureneb jagatis 152-he võrra. Kui suur oli jagatis, kui suur oli jagand?

92. Üks arv on teisest 14 korda suurem. Kui esimese arvu 335 võrra suurendame, siis on ta teisest 19 korda suurem. Missugused arvud need on?

93. Kahe arvu jagatis on 16. Kui väiksemale arvule 51 juure arvame, siis on jagaja jagandist 4 korda väiksem. Missugused arvud need on?

Ülesandest ja arvlemisviisidest.

§ 68. **Lihtülesanne ja liitülesanne.** Ülesanne võib *lihtülesanne* või *liitülesanne* olla. — Lihtülesanne on niisugune ülesanne, mille väljaarvlemine ühekordse tegeldamise abil võimalik on. Nii on § 32-es seletatud ülesanne lihtülesanne. Lihtülesandes võib *kaks* või *mitu* antud arvu ette tulla, kui otsitava arvu leidmine ühekordse *kokkuarvamise* läbi võimalik on, sest kokkuarvamisel võime kahe või mitme arvuga tegeldada. Teiste tegelduste tarvitamise korral võib lihtülesandes ainult *kaks* antud arvu ette tulla.

Arvlemisülesanne nimetatakse *liitülesandeks*, kui ta väljaarvlemiseks kahe- või mitmekordset tegeldust tarvis on. Liitülesandes võib kolm või enam antud arvu ette tulla.

Lihtülesande väljaarvlemine ei sünnita iseäralisi raskusi: antud arvude vahekord on nii lihtne ja selge, et me ilma pikema järelemõtlemiseta otstarbekohase tegeldamise ette võime võtta. Keerulisem on liitülesande väljaarvlemine.

Liitülesanne on kahest või mitmest lihtülesandest kokku pandud. Iga ühekordne tegeldus tähendab iseäralise lihtülesande väljaarvlemist. Et liitülesannet välja arvelda, selleks peame ta lihtülesanneteks *lahutama*. Järjekorralisel väijaarvlemisel *ühinevad* kahe või mitme lihtülesande saadused andmeteks uute lihtülesannete tarvis; viimaste saadused ühinevad omakord lihtülesannete andmeteks, jne. Niiviisi *ühendavalt* tegeldades jõuame viimase lihtülesande juure, mille väljaarvlus ühtlasi vastuseks on liitülesande küsimuse peale.

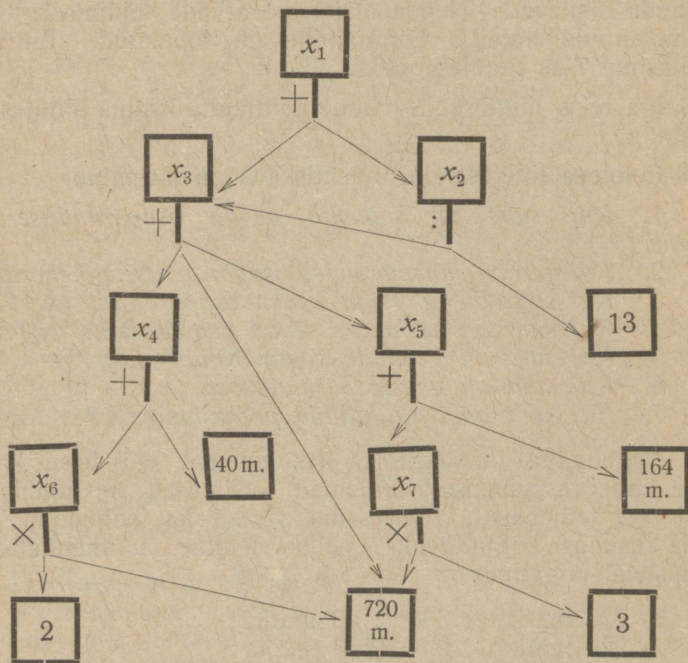
Liitülesande *lahutamise* (analüseerimise) järele võime lihtülesannete väljaarvlemise järjekorra ära määrata. See järjekord nimetatakse liitülesande *arvlemiskavaks*. Arvlemiskava järjekorras tulevad tegeldamised ette võtta. Iga lihtülesande juures seletatakse, mispärast see või teine tegeldus tarvitusele võetakse.

§ 69. **Liitülesande lahutamine lihtülesanneteks.** Võtame järgmise liitülesande ja lahutame ta lihtülesanneteks.

Isa jättis oma kolmele pojale ja kihelkonna vaestele summa raha pärida. Vanemale pojale määras ta 720 marka. Keskmine poeg pidi 2 korda rohkem saama kui vanem poeg ja veel 40 marka, noorem poeg — 3 korda rohkem kui vanem poeg ja

veel 164 marka; vaesed pidid 13 korda vähem saada kui kõik pojad kokku. Kui suur oli pärandatav rahasumma?

Et ülesandes ettetuleva küsimuse peale otsekohe vastata, selleks peame poegade kogupäranduse ja vaeste pärandusosa kokku arvama. Et poegade kogupärandus ja vaeste pärandusosa ülesandes otsekohe ei ole antud, siis peame mõlemad arvud otsitavaiks tegema ja katsuma kummagi otsitava iseäralise lihtülesande kaudu leida. Nii tuletatakse ühe lihtülesande väljaarvlemise nõudel kaks uut lihtülesannet. Kui tähemärk x_1 terve päranduse suurus, x_2 vaeste pärandusosa ja x_3 poegade kogupärandust tähendab, siis on $x_1 = x_2 + x_3$. Antud joonistuses, mis lihtüles-



ande lahutamiskäigu nägeliseks teeb, on esimene lahutamissamm näidatud ülemise, kahte haru mineva joonega. Tegeldusmärk joonte ühinemisel (tüvijoonel) tähendab siin ja terves joonistuses, et arvud, mis joonte alumisel lõpul kirjutatud, üheks arvuks tulevad tegeldada. Et vaeste pärandusosa suurus teada saada, selleks peame poegade kogupäranduse 13-ga jagama. Poegade kogupärandus (x_3) on otsitav. Et poegade kogupäranduse suurus teada saada, selleks peame kolme poja pärandusosad üheks koguks tegema, s. o. kokku arvama. Vanema poja pärandusosa

on teada. Et kahe teise poja pärandusosad teadmata on, siis tulevad need pärandusosad otsitavaiks teha. Kui teise poja pärandusosa tähemärgiga x_4 , kolmanda poja pärandusosa tähemärgiga x_5 kujutame, siis on $x_3 = x_4 + x_5 + 720$ marka, nagu tüvi-
joonest väljaminevad kolm nooljoonistust näitavad. Et teise ja kolmanda poja osapäranduse suurust teada saada, selleks peame esimesel korral vanema poja kahekordsele osapärandusele 40 marka, teisel korral vanema poja osapäranduse kolmekordsele 164 marka juure lisama. Et aga vanema poja osapäranduse kahekordne ja kolmekordne ülesandes otsekohe ei ole antud, siis peame nad otsitavaiks tegema. Joonistusel kujutasime otsitavad kordarvud tähemärkidega x_6 ja x_7 . Need on kuuenda ja seitsmenda liht-
ülesande otsitavad. Nende otsitavate arvude leidmiseks on tarvilikud arvud antud. Lahutamine on lõpetatud. Liitülesande lahutasime 7-ks lihtülesandeks.

Iga teise liitülesande võime näitlikult niisama lihtülesandeks lahutada.

Eeloleva liitülesande arvlemiskava on järgmine:

1. Kui suur on vanema venna osapäranduse kolmekordne (x_7)?
2. Kui suur on vanema venna osapäranduse kahekordne (x_6)?
3. Kui suur on noorema venna osapärandus (x_5)?
4. Kui suur on keskmise venna osapärandus (x_4)?
5. Kui suur on vendade kogupärandus (x_3)?
6. Kui suur on vaeste pärandusosa (x_2)?
7. Kui suur on isalt jäänud pärandus (x_1)?

Nagu näha, on ükskõik, kas esimese või teise küsimuse peale enne vastame, sest mõlemad küsimused on ühemõjulised ja ei ripu teineteisest. Sedasama võime ka kolmanda ja neljanda küsimuse kohta ütelda. Väljaarvlemine on lühendatult, ilma seletusteta, järgmine:

- 1) $720 \text{ marka} \times 3 = 2160 \text{ marka};$
- 2) $720 \text{ marka} \times 2 = 1440 \text{ marka};$
- 3) $2160 \text{ marka} + 164 \text{ marka} = 2324 \text{ marka};$
- 4) $1440 \text{ marka} + 40 \text{ marka} = 1480 \text{ marka};$
- 5) $720 \text{ marka} + 1480 \text{ marka} + 2324 \text{ marka} = 4524 \text{ marka};$
- 6) $4524 \text{ marka} : 13 = 348 \text{ marka};$
- 7) $4524 \text{ marka} + 348 \text{ marka} = 4872 \text{ marka}.$

Tegelikult ei lahuta me liitülesannet mitte igakord lihtülesanneteks; enamatel kordadel asume otsekohe lihtülesannete väljaarvlemisele. Nii talitame, kui liitülesande kokkuseade iseene-
sest küllalt selge ja ülevaatlik on.

§ 70. **Keerdülesanne.** Arvlemisviis on kõige lihtsam ja kergem, kui antud arvudega otsekohe tegeldades otsitava arvu leiame. Igakord aga ei ole ülesandes antud arvud otsekohe, vaid kaudselt, mõne tegelduse järele, otsitava arvu leidmiseks kõlblikud. Näit.: *Kui palju päivi saame, kui nädala päevadearvu kolmekordsele 4 päeva juure arvame?* Otsitava arvu leidmiseks peame tuttava (antud) arvu, 7 päeva, 3-ga kasvatama ja kasvatisele, s. o. 21-le päevale, 4 päeva juure arvama; otsitav päevadearv on 25.

Raskem ja keerulisem on väljaarvlemine neil kordadel, kui otsitav arv mõne tegelduse kaudu on ülesandes antud arvu kui tegeldussaaduse sisse peidetud. Näit.: *Kui otsitava arvu neljakordsele 4 juure arvame, siis leiame 100. Kui suur on otsitav arv?* Et otsitava arvu neljakordset leida, selleks arvame 100-st 4 maha; jääb 96. Otsitava arvu neljakordne on 96; ühekordne on 4 korda vähem, s. o. $96 : 4 = 24$. Nagu näha, peame väljaarvlemisel vastastegeldusi tarvitama ja nende abil otsitava arvu tegelduste saadusest, mis ülesandes antud, välja otsima ehk välja keerama.

Kui otsitavad arvud ülesandes antud arvudega niiviisi on seotud, et antud arvud otsitavaist mõne tegelduse läbi on saadud, siis nimetatakse ülesanne keerdülesandeks.

Keerdülesande otsitav arv võib peituda ükskõik missuguse tegelduse saaduses; ta võib ka kahe või mitme tegelduse saaduses varjul olla.

Keerdülesanded võivad ühe, kahe ja mitme otsitavaga olla. Mitme otsitavaga keerdülesannete väljaarvlemisel talitatakse üldistes joontes samal alusel ja samade abinõudega, kui kahe otsitava väljaarvlemisel. Sellepärast katsume lähemalt selgitada mõnda arvlemisviisi, mis kahe otsitava leidmisel tarvitusele võib tulla.

§ 71. **Kahe arvu leidmine nende kogundi ja vahengu kaudu.** Kahe otsitava arvu kogund on 64, nende vaheng 12. — Kogundis on kaks otsitavat arvu kokku võetud: üks suurem arv, teine väiksem. Kui kogundi suurema osandi teeme väiksema osandi suuruseks, s. o. kui kogundis leiduvast suuremast osandist vahengu 12 maha arvame, siis muutub kogund väiksema osandi kahekordseks. Antud kogund väikseneb sellega 12-ne võrra. Väiksema osandi, s. o. väiksema otsitava arvu kahekordne on siis 64—12. Et väiksema otsitava arvu ühekordset leida, selleks jagame tema kahekordse 2-ga. Väiksem otsitav arv on $\frac{64-12}{2} = \frac{52}{2} = 26$. Otsitava suurema arvu leiame, kui kogundist maha arvame otsitava väiksema arvu, ehk kui väiksemale arvule juure lisame otsitavate arvude vahengu.

Otsitava suurema arvu võime ka otseteel leida. Kui otsitavate arvude kogundile nende vahengu juure lisame, siis võime selle vahengu väiksema osandi külge arvata. Sellega muutub väiksem osand ühesuuruseks suurema osandiga; terve kogund suureneb 12-ne võrra ja muutub suurema osandi kahekordseks. Otsitava suurema arvu kahekordne on siis $64 + 12$. Otsitava suurema arvu ühekordne on 2 korda väiksem, s. o. $\frac{64 + 12}{2} = \frac{76}{2} = 38$.

Et me kahe otsitava arvu kogundiga ja vahenguga igakord samal viisil, kui eelpool seletatud, võime tegeldada, siis järeldame siit üldise juhtumääruse:

Kui kahe otsitava arvu kogund ja vaheng on antud, siis on otsitav suurem arv antud kogundi ja antud vahengu poolkogund, otsitav väiksem arv on antud kogundi ja antud vahengu poolvaheng.

Et otsitavate arvude leidmiseks valemit kokku seada, selleks kujutame otsitava suurema arvu tähemärgiga x (iks), otsitava väiksema arvu tähemärgiga y (üpsilon), otsitavate arvude kogundi selle sõna algtähega k , otsitavate arvude vahengu — selle sõna algtähega v . Nii tuletame kaks valemit:

$$x = \frac{k + v}{2}, \quad y = \frac{k - v}{2}.$$

Näit. $k = 837$, $v = 145$. Antud valemite abil leiame, et

$$x = \frac{837 + 145}{2} = \frac{982}{2} = 491; \quad y = \frac{837 - 145}{2} = \frac{692}{2} = 346.$$

Otsitavate arvude kogund ja vaheng võivad olla otsekohe või kaudselt, mõnesuguste muudatustega antud. Viimasel korral on ülesande väljaarvlemisel rohkem tööd ja see töö on mõnikord kaunis keeruline. Keerdülesannetes on otsitavate arvude kogund ja vaheng enamalt jaolt kaudsel kujul antud, nagu allpool (§ 74) toodud ülesannetest võime näha.

§ 72. Kahe arvu leidmine nende kogundi ja jagatise kaudu. Kahe otsitava arvu kogund on 96, nende jagatis (mis suurema arvu jagamisel väiksemaga saadud) on 7. Kui suur on kumbki otsitav arv? — Jagatis 7 tähendab, et otsitav suurem arv (jagand) on väiksema 7-mekordne. Kahe arvu kogund on siis tekkinud väiksema arvu ühekordse ja seitsmekordse kokkuarvamisel; sellega on otsitavate arvude kogund otsitava väiksema arvu 8-sakordne. Täheandab: otsitava väiksema arvu kaheksakordne on 96; tema ühekordne on 8 korda väiksem. Otsitav väiksem arv on $96 : 8 = 12$. Otsitava väiksema arvu ja antud jagatise (ehk kogundi) kaudu leiame ka otsitava suurema arvu.

Et kahe otsitava arvu kogundis igakord nii mitmekordne otsitav väiksem arv üheks osandiks tuleb, kui palju jagatises üheleli on, ja teiseks osandiks ühekordne otsitav väiksem arv, siis järeldame eelolevaist seletustest juhtlause:

Kui kahe otsitava arvu kogund ja jagatis on antud, siis leiame otsitava väiksema arvu, kui otsitavate arvude kogundi jagame otsitavate arvude jagatisega, mille ühe võrra oleme suurendanud.

Kui otsitava väiksema arvu nagu ennegi tähega y , kogundi tähega k kujutame, jagatise aga selle sõna algtähega j ära tähendame, siis tuletame otsitava väiksema arvu leidmiseks järgmise valemi:

$$y = \frac{k}{j+1}.$$

Näit. $k = 1066$, $j = 81$. Antud valemi abil leiame, et $y = \frac{1066}{81+1} = \frac{1066}{82} = 13$. Suurem arv on $1066 - 13 = 1053$, ehk $13 \times 81 = 1053$.

Otsitavate arvude kogund ja jagatis võivad olla kaudselt antud. Niisugusel korral peame otsitavate arvude kogundi ja jagatise mõnesuguste tegelduste järele enne kindlaks määrama ja siis otsitavad arvud välja arvlema, ehk me võtame muudetud kogundi, osandi või jagatise kaudu saadud uued arvud kaasotsitavaks ja leiame otsitavad arvud kaasotsitavate kaudu.

Kui otsitav suurem arv väiksema kordarv ei ole, siis võime mõnikord *osaarvu* tarvitusele võtta ja tema abil otsitavad arvud kui *osaarvu kordarvud* leida. Kui, näit., kahe otsitava arvu kogund on 98 ja kui otsitavate arvude jagatis 9 ja 5 jagamise kaudu peaks tuletatama, siis lahutame esimese otsitava arvu 9-ks, teise 5-ks ühesuuruseks osaks ehk *osaarvuks*, sest 9 ja 5 jagatis tähendab, et esimeses arvus 9 niisugust ühesuurust osa on, millesuurusi teises on 5. Kogundis on $9 + 5 = 14$ ühesuurust osa, ehk teiste sõnadega: antud kogund on osaarvu 14-nekordne. Ühekordne osaarv, mis siin kaasotsitavana tarvitatakse, on $98:14 = 7$. Esimene otsitav arv on $7 \times 9 = 63$, teine $7 \times 5 = 35$. — Nagu näha, peab osaarvuks niisugune arv olema, mille kordarvuks on niihästi suurem kui ka väiksem otsitav arv.

§ 73. Kahe arvu leidmine nende vahengu ja jagatise kaudu. Kahe otsitava arvu vaheng on 24, nende jagatis (mis saadud suurema arvu jagamisel väiksemaga) on 5. — Jagatis 5 tähendab, et otsitav suurem arv on väiksema 5-ekordne. Et otsitav väiksem arv iseene ühekordne on, siis on mõlemate otsitavate arvude vaheng nii suur kui otsitava väiksema arvu 4-jakordne. Nii on otsitava väiksema arvu neljakordne 24; ühekordne otsitav väiksem arv on $24:4 = 6$. Otsitav suurem arv on $6 \times 5 = 30$, ehk $6 + 24 = 30$.

Et kahe otsitava arvu vahengus väiksem arv igakord ühe võrra vähemal arvul ette tuleb (ehk kordub) kui jagajas ühelisi on, siis järeldame eeloleva seletuse põhjal juhtlause:

Kui on antud kahe otsitava arvu vaheng ja jagatis, siis leiame otsitava väiksema arvu, kui otsitavate arvude vahengu jagame otsitavate arvude jagatisega, mille ühe võrra oleme väiksendanud.

Kui otsitava väiksema arvu kujutame tähega y , vahengu tähega v , jagatise tähega j , siis võime otsitava väiksema arvu leidmiseks järgmise tegeldusvalemi kokku seada:

$$y = \frac{v}{j-1}.$$

Näit. $v=128$, $j=9$. Antud valemi abil leiame, et $y = \frac{128}{9-1} = \frac{128}{8} = 16$. Otsitav suurem arv on $16 + 128 = 144$, ehk $16 \times 9 = 144$.

Vaheng ja jagatis võivad ülesannetes olla ka kaudselt antud. Säärasel korral arvleme välja otsitavate arvude vahengu ja jagatise ja nende abil ka otsitavad arvud, ehk me leiame otsitavad arvud kaasotsitavate kaudu, nagu tegime eelpool § 72.

Kui kahe otsitava arvu *kasvatis* on antud, mõne teise tegelduse saaduse kaasas, siis on otsitavate arvude leidmine nelja esimese tegelduse abil võimalik. Mõned sesse liiki kuuluvad ülesanded võime *katselisel* teel välja arvelda, s. o. katseid tehes, missugused arvud väljaarvluses otsitavad võiksid olla. Kui, näit., otsitavate arvude kogund on 7, nende kasvatis 12, siis võime katsete varal leida, et otsitavad arvud on 3 ja 4.

§ 74. **Ülesanded.** — 94. Missugusele arvule on tarvis 28 juure lisada, et 100 saaks?

95. Päiviline kulutas oma päevapalgast 36 marka, jäi järele 54 marka. Kui suur oli päevapalk?

96. Kui otsitava arvu viiekordsele 70 juure lisatakse, siis saadakse 135. Kui suur on otsitav arv?

97. Kui nooremehe aastate viiekordse kolmeks jagame, siis saame 30 aastat. Kui vana on noormees?

98. Karjane hoidis lambaid. Kui kari 30-ne lamba võrra suurem oleks, siis puuduks lambakarja kolmekordsest arvust 4 lammast. Kui palju lambaid oli karjasel hoida?

99. Aednik müüs turul õunu. Oleks ta 3 korda rohkem müünud, kui ta tõesti müüs, ja veel pool osa sellest, mis ta müüs, siis oleks ta kolme võrra alla 150 õuna müünud. Mitu õuna müüs aednik? (Tähend.: pool osa müüdud õuntest tuleb kaasotsitavaks teha.)

100. Lastepidul jaotati väikestele pidulistele suurest korvist õunu; igale lapsele anti 3 õuna, järele jäi 76 õuna. Kui igale lapsele 5 õuna oleks antud, siis oleks 14 õuna puudu tulnud. Kui palju lapsi oli pidul? Mitu õuna oli korvis?

101. Eeltööline ja lihttööline said suvekuude eest kokku 451 kuldrubla. Kui eeltööliselt 27 kuldrubla lihttöölise palgale juure lisaksime, siis oleks mõlemate palgavahe ainult 21 kuldrubla. Kui suur oli kummagi töölise palk?

102. Vaheltkaupleja müüs kahele ostjale kokku 336 õuna. Kui esimene 12 õuna vähem, teine 11 õuna rohkem oleks ostnud, siis oleks esimene 4 korda rohkem õunu ostnud kui teine. Mitu õuna ostis kumbki?

103. Isa pärandas kahele pojale 52600 mk. Kui ta esimese poja pärandusosast 12400 m. teisele pojale oleks lubanud, siis oleks teine poeg 9200 m. rohkem saanud kui esimene poeg. Kui suur oli isa poolt määratud kummagi poja pärandusosa?

104. Kolmele poisile jagati 76 õuna niiviisi, et teine sai esimesest 3 korda rohkem, kolmas teisest 2 korda vähem ja peale selle veel 10 õuna. Mitu õuna sai igaüks?

105. Aednikul oli kahes korvis kokku 420 õuna. Kui ta suuremast korvist väiksemasse 32 õuna paneks, siis oleks mõlemas korvis ühepalju õunu. Mitu õuna on kummaski korvis?

106. Linnast rändas välja jalamees, kes 432 sülda edasi oli jõudnud, kui talle linnast jalgrattasõitja 4 korda suurema kiirusega järele hakkas kihutama. Kui kaugel linnast jõuab ta jalarändajale järele?

107. Mööda raudteed Tartust kunni Riiani on 236 versta. Sellel raudteel läksid Elva jaamast ühel ajal minema jalamees Tartu ja sõidurong Riia poole. Raudteerong sõidab 32 versta, jalamees käib 4 versta tunnis. Kui jalamees Tartu jõuab, on raudteerongil veel 20 versta Riiani sõita. Mitu versta on Elvast Tartu ja Riiga ja mitu tundi oli jalamees Elvast kunni Tartuni teel?

108. Isa on pojast 8 korda vanem; kolme aasta pärast on isa ainult 5 korda vanem kui poeg. Kui vana on isa, kui vana on poeg?

109. Isa oli 5 aasta eest pojast 5 korda vanem; 7 aasta pärast on isa ainult 3 korda pojast vanem. Kui vana on kumbki?

110. Kolm inimest pärisid kokku 11406 kuldrubla. Teine neist päris 2 korda rohkem kui esimene ja veel 120 kuldrubla, kolmas — 3 korda rohkem kui teine ja veel 126 kuldrubla. Kui palju päris igaüks?

111. Pulmas oli 3 korda niipalju mehi kui naisi. Pärastpoole läks 8 meest ära, aga 4 naist tuli juure. Selle järele oli pulmas mehi veel 2 korda niipalju kui naisi. Kui palju mehi ja naisi oli algul pulmas? (R. Kallas, Mõistl. rehk.)

112. Kolm jalameest olid rändamisel ühtekokku 738 kilom. käinud. Teine oli 5 korda pikema tee käinud kui esimene ja kolmas niipalju kui pool osa esimese ja pool osa teise teest kokku on. Kui suur oli igaühe teepikkus?

113. Ringjoonelisel teel, mille ümbermõõt 764 sülda on, hakkasid ühest kohast vastupidises sihis edasi tõttama jalamees ja ratsanik, kes jalamehest 3 korda kiiremini edasi jõuab. Kui palju maad jõuab jalamees selleks ajaks edasi, kui ratsanik temale ringteel vastu tuleb?

114. Ringteel, mille ümbermõõt 760 sülda on, hakkasid koos ja ühes sihis edasi tõttama jalamees ja rattasõitja, kes jalamehest 9 korda kiiremini edasi jõuab. Mitu sülda peab jalamees käima, enne kui rattasõitja temale ringteel järele jõuab?

115. Kalevipoeg tabas Sarviku, kes lauakandamiga salaja läbi lahe Soome tõttas, Naissaare rannal ja tegi temaga järgmise lepingu: Sarvik käigu lauakandamiga Naissaare ja Tallinna vahet edasi ja tagasi, võtku igakord teist niipalju laudu oma kandamile Tallinnast lisaks, kui palju tal neid sinnatulekul õlgadel lasub, ja ladugu Naissaarde jõudes igakord 200 lauda Kalevipoja ette lepingu tasuks. Et õiguse nimel Tallinna linna kõigist ehituslaudadest tühjaks rüüstada, leppis Sarvik tingimistega. Kui ta kolmat korda oma kandamiga

Kalevipoja juure Naissaarde tagasi tuli, ladus ta viimased 200 lauda Kalevipoja ette rannaliivale ja jäi ise ilma laudadeta. Kui palju laudu oli esimeses kandamis, millega Sarvik Kalevipojale Naissaares vastu juhtus ja millega ta oma rännakut algas?

Viies tegeldus:

Astendamine.

§ 75. **Astendamismõiste.** Astendamine on peripidine arvlemistegeldus, mis kasvatamisest tuletatakse. Nagu kasvatamine kokkuarvamisest, nii tuletatakse astendamine kasvatamisest. Kasvatamisel võivad tegurid mitmesuurused olla, näit. $3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 7 = 420$, võivad ka ühesuurused olla, näit. $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$. Kui tegurid mitmesuurused on, siis on meil *harilik*, kui tegurid ühesuurused, siis *erandlise* kasvatamisega tegemist. Peale erandlise kasvatamise, kus tegurid ühesuurused on, võivad veel teised erandlised kasvatamisjuhtumused ette tulla. Niisugune erandline kasvatamine, mille tegurid ühesuurused on, nimetatakse *astendamiseks*. Astendamise kui erandlise kasvatamise võime järgmisel viisil kujutada:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4.$$

Siit selgub astendamismõiste täielikumalt:

Astendamine on niisugune tegeldus, millega üks antud arv nii mitu korda kasvatajaks (ehk teguriks) võetakse, kui teises antud arvus on ühelisi.

Antud arv, mis kasvatajana korraldatakse, nimetatakse *algastendiks*, *algasteks* ehk lihtsalt *asteks*, mõnikord ka *aluseks*. Teine antud arv, mis näitab, mitu korda algastend kasvatajaks võetakse, on *astendaja* ehk *mitmendaja*. Astendaja kirjutatakse algastendi paremale poole üles ja väiksema arvumärgiga kui algastend. Uus arv, mis astendamisel saadakse, on *astend*. Näituses $5^4 = 625$ on algastend 5, astendaja 4, astend 625.

Algastend ühes astendajaga tuletavad astendi *kujutise*. Nii on 5^4 astendi kujutis ehk kaudne astend, 625 — otsekohene astend ehk astendamissaadus. Et astendamine kasvatamisest on saadud, siis tegeldatakse arvude astendamisel lihtsalt kasvatamise abil. Näit. $12^4 = 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 = 144 \cdot 144 = 20736$, jne.

Astend nimetatakse *nii mitmenda järje* astendiks, kui suur arv astendajaks on. Astend nimetatakse *esimese järje* astendiks, *esimeseks* astendiks, *esiastendiks* ehk *algastendiks*, kui astendajaks on arv 1. Esimese järje astendi kujutises jääb astendaja harilikult kirjutamata. Nii on 5^1 samasuguse tähendusega kui 5, samal põhjusel on $10^1 = 10$, $16^1 = 16$, jne.

Kui astendajaks on 2, siis nimetatakse astend *teise järje astendiks* ehk *ruutastendiks*. Kui astendi mitmendajaks on arv 3, siis nimetatakse astend *kolmanda järje astendiks* ehk *kantastendiks*. Astend 6^2 on teise järje astend ehk ruutastend, 4^3 on kolmanda järje astend ehk kantastend. Ruutastendit ja kantastendit võib ka algastendi *ruutarvuks* ja *kantarvuks* nimetada. Arv 64 on arvu 8 ruutastend ehk ruutarv, sest $8^2 = 64$. Arv 512 on arvu 8 kantastend ehk kantarv, sest $8^3 = 512$.

Ülemate järgede astendid nimetatakse astendi mitmendaja järele, teisi iseäralisi nimetusi neil ei ole. Ülemate järgede astendid võivad olla *neljanda*, *viienda*, *kuuenda* jne. järje astendid.

Antud arvu võime 2-ga, 3-ga jne. *astendada* ehk *mitmendada*, võime antud arvu teisele, kolmandale, neljandale jne. *järjele astendada*, *ülendada* ehk *tõsta*, võime ka antud arvu teiseks, kolmandaks, neljandaks jne. *astendiks ülendirada*, *mitmendada* ehk *tõsta*. Teisele järjele astendamine nimetatakse *ruutjärjele astendamiseks*, *ruutastendiks* tõstmiseks ehk *ruutastendamiseks*, kolmandale järjele astendamine — *kantjärjele astendamiseks*, *kantastendiks* tõstmiseks ehk *kantastendamiseks*.

§ 76. **Järjeüksuste astendid.** Esimese järje üksuse astend, s. o. 1-he astend, on ikka 1, sest kui 1-he kasvatame 1-ga, siis on kasvatis 1. Nii on $1^2 = 1$, $1^3 = 1$, $1^4 = 1$, jne.

Et teise, kolmanda, neljanda jne. järje üksust ruutastendiks mitmendada, selleks peame algastendid vastavalt 10-ga, 100-ga, 1000-ga jne. kasvatama, s. o. algastendite nullide arvu *kahekordseks* tegema.

Et neidsamu järjeüksusi kantastendiks mitmendada, selleks peame algastendid vastavalt kasvatama nende ruutastenditega: 100-ga, 10000-ga, 1000000-ga jne., s. o. me peame algastendite nullide arvu *kolmekordseks* tegema.

Nii leiame, et $10^2 = 100$, $100^2 = 10000$, $1000^2 = 1000000$; $10^3 = 1000$, $100^3 = 1000000$, jne.

Neilsamul põhjustel peame järjeüksuse ülendamisel neljandale astmele algastendi nullide arvu tegema *neljakordseks*, ülendamisel viiendale järjele — *viiekordseks*, jne.

Siit järeldame, et järjeüksuse astendamisel teeme algastendi nullide arvu nii mitmekordseks, kui mitu ühelist on astendajas kui ühelistekogus.

Näit. $10^8 = 100000000$; $100^5 = 10000000000$, jne.

Kasvatamisest järeldame, et järjeüksustekogu astendamisel selle üksustekogu nimeväärtuse astendame ja nimeväärtuse as-

tendile algastendi nullide arvu nii mitmekordselt otsa kirjutame, kui mitu ühelist astendajas kui ühelistekogus on.

Näit. $600^2 = 360000$; $1200^3 = 1728000000$, jne.

§ 77. Ruutastendi ja kantastendi arvumärkide hulk.

Ühekohaliste arvude ruutastendid teame peast, väikese ükskord-ühe põhjal. Need ruutastendid on *ühe-* või *kahekohalised* arvud. Et kõige väiksema kahekohalise arvu, s. o. 10-ne ruutastend kõige väiksema kolmekohalise arvu tuletab, siis ei või ühekohalise arvu ruutastend ilmaski tuletada kolmekohalist arvu.

Kahekohalised arvud ilmuvad kõige väiksema kahekohalise ja kõige väiksema kolmekohalise arvu vahel, s. o. 10-ne ja 100 vahel, esimene piiriarv (10) kaasa arvatud, teine mitte. Kahekohaliste arvude ruutarvud ilmuvad 10-ne ja 100 ruutarvude, s. o. 100 ja 10000 vahel, esimene piiriarv (100) kaasa arvatud. Piiriarvude 100 ja 10000 vahel võivad ette tulla ainult *kolme-* ja *neljakohalised* arvud. Järeldusliselt on kahekohaliste arvude ruutastendid kolme- või neljakohalised arvud.

Kolmekohaliste arvude ruutastendid ilmuvad 100^2 ja 1000^2 , s. o. 10000 ja 1000000 vahel, esimene piiriarv kaasa arvatud. Nende piiriarvude vahel, esimene kaasa arvatud, võivad ette tulla ainult *viie-* ja *kuuekohalised* arvud. Järgnevalt on kolmekohaliste arvude ruutastendid viie- või kuuekohalised arvud.

Samal viisil leiame, et neljakohaliste arvude ruutastendid on *seitsme-* või *kaheksakohalised*, viiekohaliste arvude ruutastendid on *üheksa-* või *kümnekohalised* arvud, jne.

Eelolevaist seletustest järeldame, et *antud arvu ruutastendi arvumärkide hulk on nii suur kui algastendi kahekordne arvumärkide hulk, ehk ühe võrra väiksem kui algastendi arvumärkide kahekordne hulk.*

Nii võiks, näit., arvu 347-me ruutarvul 6 või 5 arvumärki olla. Ruutastendamisel leiame $347^2 = 120409$. Tähendab: 347-me ruutastendil on 6 arvumärki. Arvu 235 ruutarvul on 5 arvumärki, sest $235^2 = 55225$.

Kui antud arvude kantastendamisel järjeüksuste kantastendid kui piiriarvusid tähele paneme, siis leiame, et *antud arvu kantastendi arvumärkide hulk nii suur on kui algastendi kolmekordne arvumärkide hulk, ehk ühe või kahe võrra väiksem kui algastendi arvumärkide kolmekordne hulk.*

Nii on arvu 69 kantastend 6 arvumärgiga, sest $69^3 = 328509$; arvu 41 kantastend on 5 arvumärgiga, sest $41^3 = 68921$; arvu 16 kantastend on 4 arvumärgiga, sest $16^3 = 4096$.

§ 78. Ruutastendamine osadekaupa. Iga kahekohalise arvu võime tema üksustekogude järele kaheks osandiks lahutada, nii et ühes osandis on kümnelised, teises ühelised. Astendamist

võib kasvatamise abil osandite kaudu toimetada. Võtame $35^2 = (3 \text{ kümnelist} + 5 \text{ ühelist})^2 = (30 + 5)^2$. Kasvatame kogundi $30 + 5$ samasuguse kogundiga. —

Kasvatame esimese kogundi esiti kasvataja kümnelistega. Kümnelisi kümnelistega kasvatades leiame $30 \cdot 30 = 30^2$, s. o. kümneliste ruutastendi.

Kasvandi ühelisi kasvataja kümnelistega kasvatades leiame $30 \cdot 5$, s. o. kümne-

liste kasvatis ühelistega. *Esimene* osakasvatis on kogund, mille esimene osand on *kümneliste ruutastend*, teine osand — *kümneliste kasvatis ühelistega*.

	30	+ 5
×	30	+ 5
30 ² +	30 · 5	
+	30 · 5 + 5 ²	
	30 ² + 2 · 30 · 5 + 5 ²	

Edasi — esimese kogundi kasvatame kasvataja ühelistega. Kasvandi kümnelisi kasvataja ühelistega kasvatades leiame $30 \cdot 5$, s. o. kümneliste kasvatis ühelistega. Kasvandi ühelisi kasvataja ühelistega kasvatades leiame $5 \cdot 5 = 5^2$, s. o. üheliste ruutastendi. *Teine* osakasvatis on selle järele kogund, mille esimene osand on *kümneliste kasvatis ühelistega*, teine osand — *üheliste ruutastend*.

Mõlemais osakasvatistes on ühesugune osand $30 \cdot 5$, s. o. kümneliste kasvatis ühelistega. Need ühesugused osandid ühinevad täiskasvatises *kahekordseks kümneliste ja üheliste kasvatiseks*, s. o. $30 \cdot 5 + 30 \cdot 5 = 2 \cdot 30 \cdot 5$. Antud arvu ruutastendi kujutist ja astendamisel leitud saadust võrdusmärgi abil ühendas tuletame järgmise valemi:

$$35^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 5 + 5^2.$$

Iga teise kahekohalise arvu ruutastendamisel tegeldame kümnelistega ja ühelistega niisama kui arvu 35-e ruutastendamisel. Siit järeldame, et *kahekohalise arvu ruutastend on nii suur kui selle arvu kümneliste ruutastend ühes kümneliste ja üheliste kahekordse kasvatisega ja üheliste ruutastendiga kokku*.

Näit. $35^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 5 + 5^2 = 900 + 300 + 25 = 1225$;
 $42^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 2 + 2^2 = 1600 + 160 + 4 = 1764$, jne.

Nagu näha, seisab kahekohalise arvu ruutastend koos kolmest osandist: 1) kümneliste ruutastendist, 2) kümneliste ja üheliste kahekordsest kasvatisest, 3) üheliste ruutastendist. Kümneliste ruutastend tuletab *sajalisi*, kümneliste ja üheliste kahekordne kasvatis tuletab *kümnelisi*, üheliste ruutastend tuletab *ühelisi*. Näit. $47^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 7 + 7^2 = 1600 + 560 + 49 = 16 \text{ sajalist} + 56 \text{ kümnelist} + 49 \text{ ühelist}$. (Seletada kasvatamismääruste põhjal!)

Kui kahekohalise arvu kümnelised kujutame tähega *a* ja ühelised tähega *b*, siis võime kahekohalise arvu ruutastendamise valemi järgmisel viisil kirjutada:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Selles valemis tähendab osand 2ab kolme arvu kasvatist: $2 \times a \times b$ ehk $2 \cdot a \cdot b$. Kasvatise kujutises jäetakse tegeldusmärk tegurite vahelt ära, kui tegurid tähtedega esitatud ehk kui üks tegur arvumärkidega, järgnevad tegurid tähemärkidega on kujutatud.

Sajad ja ülemad üksustekogud seisavad kümnelistest koos ja neid võib kümnelistekoguks alandada. Sel põhjusel võime iga kolme- ja mitmekohalise arvu lahutada kaheks osandiks: kümnelisteks ja ühelisteks. Näit. $547 = 54 \text{ kümnelist} + 7 \text{ ühelist} = 540 + 7$, jne. Iga kaheosandlist arvu võime kui kahekohalist arvu ruutastendada. Et, näit., arvu 365 ruutastendit leida, selleks tegeldame järgmisel viisil:

$$\begin{array}{rclclcl}
 + \left\{ \begin{array}{l} a^2 = 360^2 \\ 2ab = 2 \cdot 360 \cdot 5 \\ b^2 = 5^2 \end{array} \right. & = & \begin{array}{l} 360 \cdot 360 \\ 360 \cdot 10 \\ 5 \cdot 5 \end{array} & = & \begin{array}{l} 129600 \\ 3600 \\ 25 \end{array} \\
 \hline
 a^2 + 2ab + b^2 & = & 360^2 + 2 \cdot 360 \cdot 5 + 5^2 & = & 133225.
 \end{array}$$

Kui algastendi kümnelistekogu sajalistest ja kümnelistest koos seisab, s. o. kahekohalise arvuga kujutatakse, siis võime ruutastendamisel kümnelistekogu ruutastendi iseäraliselt kolmeks osandiks lahutada. Näit. $456^2 = 450^2 + 2 \cdot 450 \cdot 6 + 6^2 = (400 + 50)^2 + 2 \cdot 450 \cdot 6 + 6^2 = 400^2 + 2 \cdot 400 \cdot 50 + 50^2 + 2 \cdot 450 \cdot 6 + 6^2$. Ruutastendi 450^2 asemele saime kogundi, mille esimene osand on sajaliste ruutastend, teine — sajaliste ja kümneliste kahekordne kasvatis, kolmas — kümneliste ruutastend. Kui algastendis sajalistekogu tuhandelitest ja sajalistest koos seisab, siis võime sajaliste ruutastendi niisama kolmeks osandiks lahutada, jne.

§ 79. **Kantastendamine osadekaupa.** Kantastendamisel võime ka osadekaupa tegelda. Selleks lahutame algastendi kaheks osandiks: kümnelisteks ja ühelisteks. Antud arvu kantastendi leiame, kui ta ruutastendi kasvatame algastendiga. Arvu 46-e kantastendamisel on tegeldamiskäik järgmine.

$46^3 = (4 \text{ kümnelist} + 6 \text{ ühelist})^3 = (40 + 6)^3 = (40 + 6)^2 \times (40 + 6)$. Et $(40 + 6)^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 6 + 6^2$, siis peame selle kolmeosandlise kogundi kasvatama kaheosandlise kogundiga $40 + 6$. Me kasvatame iga osandiga iseäraldi. Kasvatis $40^2 \times 40$ on ühe ja sellesama arvu teise astendi ja annab selle asemele astendi kasvatis ja annab selle arvu kantastendi 40^3 ; samal põhjusel on kasvatis $6^2 \times 6 = 6^3$. Et kasvatis kujutist $2 \cdot 40 \cdot 6$ kasvatada 40-ga, selleks võime kujutise teise teguri (40) kasvatada 40-ga (§ 65, II); uus kasvatis on $2 \cdot 40^2 \cdot 6$. Et sedasama kujutist ($2 \cdot 40 \cdot 6$) kasvatada 6-ga, selleks

$$\begin{array}{rcl}
 & 40^2 & + 2 \cdot 40 \cdot 6 + 6^2 \\
 \times & 40 & + 6 \\
 \hline
 + & 40^3 + 2 \cdot 40^2 \cdot 6 + 40 \cdot 6^2 & \\
 & 40^2 \cdot 6 + 2 \cdot 40 \cdot 6^2 + 6^3 & \\
 \hline
 & 40^3 + 3 \cdot 40^2 \cdot 6 + 3 \cdot 40 \cdot 6^2 + 6^3 &
 \end{array}$$

kasvatame kujutise viimase teguri 6-ga; uus kasvatis on $2 \cdot 40 \cdot 6^2$. Osakasvatiste kokkuarvamisel leiame neljaosandlise kogukasvatise, mis antud kahekohalise arvu kantastendamisel tegelduste järjekorra määrab. Et iga teise kahekohalise arvu kantastendamisel kümnelistega ja ühelistega samasugusel viisil ja samas järjekorras tegeldame, siis järgneb siit, et *kahekohalise arvu kantastend on neljaosandline kogund, mille esimene osand on antud arvu kümneliste kantastend, teine osand — kümneliste ruutastendi ja üheliste algastendi kolmekordne kasvatis, kolmas osand — kümneliste algastendi ja üheliste ruutastendi kolmekordne kasvatis, neljas osand — üheliste kantastend.*

Kui kahekohalise arvu kümnelised kujutame tähega a ja ühelised tähega b , siis võime kahekohalise arvu kantastendamise valemi järgmisel viisil kirjutada:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Kui algastendi kümnelistekogu koos seisab sajalistest ja kümnelistest, siis võime kantastendamisel kümnelistekogu kantastendi neljaks osandiks lahutada. Näit. $369^3 = 360^3 + 3 \cdot 360^2 \cdot 9 + 3 \cdot 360 \cdot 9^2 + 9^3 = (300 + 60)^3 + 3 \cdot 360^2 \cdot 9 + 3 \cdot 360 \cdot 9^2 + 9^3 = 300^3 + 3 \cdot 300^2 \cdot 60 + 3 \cdot 300 \cdot 60^2 + 60^3 + 3 \cdot 360^2 \cdot 9 + 3 \cdot 360 \cdot 9^2 + 9^3$. Sama viisi võime sajaliste kantastendi lahutada neljaks osandiks, kui sajaliste algastend tuhandelistest ja sajalistest koos seisab, jne.

Ühekohaliste arvude ruutastendid leiame väikese ükskordühe tabeli abil. Need ruutastendid on meil peas. Kasulik on ka ühekohaliste arvude kantastendid peast teada. Ühekohaliste arvude kantastendid on järgmised: $0^3 = 0$; $1^3 = 1$; $2^3 = 8$; $3^3 = 27$; $4^3 = 64$; $5^3 = 125$; $6^3 = 216$; $7^3 = 343$; $8^3 = 512$; $9^3 = 729$. Väiksem kahekohaline arv on 10; tema kantastend on 1000.

Kuues tegeldus:

Juurendamine.

§ 80. **Juurendamismõiste.** Astendamisel leiame antud algastendi ja antud astendaja kaudu astendi. Juurendamisel on astend ja astendaja antud, otsitav on algastend. Juurendamismõiste võime järgmiselt kindlaks määrata:

Juurendamine on niisugune tegeldus, millega astendi ja astendaja kaudu algastend leitakse.

Juurendamisel nimetatakse antud astend *juurendiks*, antud astendaja nimetatakse *juurendajaks*, otsitav algastend nimetatakse *juureks*, *algiuurendiks* ehk *esijuurendiks*.

Kui astendamisel ja juurendamisel ettetulevad otsitavad arvud küsimismärgiga tähendame, siis võime antud ja otsitavad arvud järgmisel viisil (astendamist silmas pidades) tegelduskujutisteks kirjutada:

$$5^4 = ? \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$?^4 = 625 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Esimesel korral läheme antud algastendi ja antud astendaja poolt otsitava astendi poole, s. o. pahemalt *paremale* poole, teisel korral — antud astendi ja antud astendaja poolt otsitava algastendi poole, s. o. paremalt *pahemale* poole. Nooljoonistused kujutavad mõlemaid tegelduskäikusid. Juurendamine on astendamise vastastegeldus.

Juurendamismärk $\sqrt{}$, ka juuremärgiks nimetatud, on tuletatud Ladina tähest *r* (sõna *radix* — juur — algtäht). Juurend kirjutatakse juuremärgi põikjoone alla, juurendaja selle märgi ülespoole laheneva nurga sisse; juur kirjutatakse tegeldusmärgist *paremale* poole, võrdusmärgi järele. Juurend, kui juuremärgi alla kirjutatud arv, nimetatakse ka *juurealuseks* arvuks ehk lühidalt *juurealuseks*. Kui juurendajaks on arv 2, siis jääb juurendaja harilikult kirjutamata. Näit. $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt[3]{125} = 5$; $\sqrt[4]{1296} = 6$, jne.

Algjuurend nimetatakse *nii mitmenda* astendi juureks, kui suur arv juurendajaks on. Teise astendi juur, s. o. juurendaja 2 kaudu leitud algjuurend, nimetatakse *ruutjuureks*; kolmanda astendi juur nimetatakse *kantjuureks*. Tegelduse abil ruutjuure otsimine on *ruutjuurendamine*, kantjuure otsimine on *kantjuurendamine*.

Arvlemisõpetuse piirides juurendades tuleb meil ainult ruutjuurendamisega ja kantjuurendamisega tegemist teha.

Kokkuarvamise ja kasvatamise vastastegeldustel (mahaarvamisel ja jagamisel) võisime kahe arvu tegeldussaaduse ja emma-kumma antud arvu kaudu neist kahest teise arvu kui otsitava leida. Astendamise korral võime tegeldussaaduse (s. o. astendi) ja antud astendaja kaudu algastendi leida, kuna astendaja leidmine antud astendi ja antud algastendi kaudu ühe ja sellesama tegeldamisviisi abil võimata on. See osa astendamise vastastegeldusest, mille eesmärgiks on astendaja leidmine, toimetatakse iseäralisel arvlemisviisil, mis *logaritmeerimiseks* nimetatakse ja mida otsekohe ka teiste tegelduste lihtsustamiseks ja kergendamiseks (peale kokku- ja mahaarvamise) võidakse tarvitada. Et see arvlemisviis iseäralisi, laiemaid eelteadmisi nõuab, siis jääb ta siin raamatus seletuse alla võtmata.

§ 81. Ruut- ja kantjuurendamise eeltingimused. Ruut- ja kantjuurendamine lõpeb jäänuseta, kui jutrealune arv mõne teise arvu täieline ruut- või kantastend on. Enamatel kordadel ei ole juurealune arv teise arvu täielik astend, ja siis lõpeb juurendamine jäänusega. Säärasel korral otsime juureks niisuguse arvu, mille täielik ruut- või kantastend teiste ruut- ja kantastendite hulgas, mis juurealusest arvust vähemad, sellele juurealusele oma suuruse poolest kõige ligemale ulatab. Otsitav juur on siis ligilähedane juur ehk ligijuur.

Astendamisel (§ 77) nägime, et antud arvu ruutastendi arvumärkide hulk on nii suur kui algastendi kahekordne arvumärkide hulk, ehk ühe arvumärgi võrra väiksem kui algastendi kahekordne arvumärkide hulk. Selle määruse põhjal võime ruutjuurendi arvumärkide hulga kaudu kindlaks teha ka ruutjuure arvumärkide hulga. Selleks lahutame juurealuse arvu, paremalt pahemale poole minnes, salkkondadeks, võttes igasse salkkonda kaks arvumärki, kuna esimesse, s. o. pahempoolsesse salkkonda, ka üksainus arvumärk võib tulla. Kui mitu arvumärkide salkkonda juurealusesse arvu tekib, nii mitu arvumärki on ruutjuures, olgu see ruutjuur täisjuur või ligijuur. Salkkonnad eraldatakse üksteisest komadega, mis salkkondade vahele, arvumärkide ülemistele vahekohtadele kirjutatakse. Nii leiame, et ruutjuur $\sqrt{34'76'15}$ kolmekohaline arv peab olema, sest juurealusel arvul on kolm arvumärkide salkkonda.

Antud juurealuse arvu (kui kantastendi) arvumärkide hulga kaudu (§ 77) võime ka selle arvu kantjuure arvumärkide hulga juba ette, enne tegeldamist, kindlaks määrata. Selleks lahutame juurealuse arvu, paremalt pahemale poole minnes, salkkondadeks, võttes igasse salkkonda kolm arvumärki; esimesse, s. o. pahempoolsesse salkkonda, võib kolme arvumärgi asemele tulla ka kaks või üks arvumärk. Salkkondade arv näitab, mitu arvumärki on kantjuurel. Nii on

⁸
kantjuurel $\sqrt[8]{4'325'426'275}$ neli arvumärki, sest juurealusel arvul on neli arvumärkide salkkonda.

§ 82. Ruutjuurendamine, kui otsitav ruutjuur on ühe- või kahekohaline arv. Ühe- ja kahekohalise arvu ruutjuure (täisjuure või ligijuure) leiame peast, väikese ükskordühe abil. Näit. $\sqrt{64} = 8$, $\sqrt{54} = 7$ (jäänus 5), jne.

Kahe- ja mitmekohalise ruutjuure otsimisel tegeldame kirjalikult. Selgitame tegeldamiskäiku kahekohalise ruutjuure otsimisel.

I. Antud on arv 4761. Selle arvu ruutjuur on kahekohaline arv, sest antud arvul on kaks kahekohalist arvumärkide salkkonda. Otsitav ruutjuur kui kahekohaline arv on kümneliste ja üheliste kogund. Ruutjuurend 4761 on otsitava kahekohalise arvu täielik ruutastend või vähe suurem. Esimesel korral lõpeb tegeldamine jäänuseta, teisel korral jäänusega.

Kahekohalise arvu ruutastend seisab, nagu eelpool (§ 78) nägime, kolmest osandist koos. Need osandid tulevad üksteise järele juurealusest arvust maha arvata.

Kahekohalise arvu ruutastendi *esimene*, kõige ülemjärjelisem osand on kümneliste ruutastend ja sisaldab eneses sajalisi. Alamad järjeüksused (kümnelised ja ühelised) puuduvad esimeses osandis. Kümneliste ruutastend kui sajalistekogu võib peituda

juurealuse arvu sajalistes. Antud juurealuses arvus on 47 sajalist (tuhandelised sajalisteks alandatud ja 7-le sajalisele juure arvatud), s. o. niipalju sajalisi, kui näitab iseseisva arvuna võetud esimene, pahempoolne arvumärkide salkkond. Neis 47-es sajalisest on otsitavate kümneliste ruutastend. 47 sajalist ei ole täielik ruutastend. Sajalistest koosseisev kõige suurem ruutastend, mis 47-sse sajalisest mahub, on 36 sajalist. Ruutarv 36 sajalist on 6-e kümnelise ruut-

astend. Tähendab: *otsitavas ruutjuures on 6 kümnelist*. Võrdusmärgist paremale poole kirjutame arvumärgi 6 ja anname talle kümneliste tähenduse. 6-e kümnelise ruutarvu, s. o. 36 sajalist, arvame juurealuse 47-st sajalisest maha. Jääb järele 11 sajalist.

Kahekohalise arvu ruutastendi *teine* osand on algastendi kümneliste ja üheliste kahekordne kasvatis ja seisab koos kümnelistest. See osand tuleb juurealuse arvu kümnelistest maha arvata. Juurealuse arvu sajalistest jäi esimese osandi mahaarvamisest 11 sajalist järele. Et teine osand tuleb kümnelistest maha arvata, siis alandame 11 sajalist 110-ks kümneliseks ja lisame juurealusest arvust 6 kümnelist juure. Selleks kirjutame esimesele jäänusele (11-le) paremale poole otsa arvumärgi 6, mille juurealusest arvust otsekohe alla toome. Nii leiame 116 kümnelist, mis peale üheliste veel juurealusesse järele on jäänud. Need 116 kümnelist tuletavad niisama suure või vähe suurema arvu kui otsitava kahekohalise ruutjuure kümneliste ja üheliste kahekordne kasvatis on. Kümneliste ja üheliste kahekordne kasvatis on niisama suur kui kümneliste kahekordse kasvatis ühelistega (§ 65, II). Ruutjuure kümneliste arv on 6; kümneliste kahekordne on 12 kümnelist. Peame 12 kümnelist kasvatama üheliste niisuu suure arvuga, et kasvatis annaks 116 kümnelist ehk 116-le kümnelisele lähedase väiksema kümneliste arvu. Et üheliste arvu kui otsitavat kasvatajat leida, selleks jagame 116 kümnelist (kui antud kasvatis) 12 kümnelisega. Jagatisse tuleb 9 ühelist. Tähendab: *otsitavas ruutjuures on 9 ühelist*. Need 9 ühelist kirjutame ruutjuure üheliste kohale, s. o. 6-e kümnelise järele. Ruutastendi teise osandi, s. o. kümneliste kahekordse kasvatis ühelistega, kokku 108 kümnelist, arvame 116 kümnelisest maha. Jääb järele 8 kümnelist.

Otsitava kahekohalise arvu ruutastendi *kolmas* ja viimane osand on algastendi üheliste ruutastend ja seisab ühelistest koos. See osand tuleb juurealuse arvu ühelistest maha arvata. Juurealusest arvust jäi teise jäänusesse 8 kümnelist. Alandame 8

kümmelist ühelisteks; leiame 80 ühelist. Neile 80-le ühelisele lisame juurealusest arvust 1 ühelise juure. Selleks toome üheliste arvamärgi juurealusest arvust otsekohe alla ja kirjutame teisele jäänusele paremale poole otsa. Nii tuletame jäänusesse 81 ühelist. Need 81 ühelist on leitud ruutjuure üheliste täieline ruutarv. Kui juure üheliste ruutarvu, s. o. $9^2 = 81$ ühelist, teisest jäänusest maha arvame, siis ei jää midagi enam järele. Juurendamine lõpeb jäänusega.

Leitud ruutjuur 69 on täisjuur.

II. Harilikult tegeldakse niiviisi, et ruutastendi teine ja kolmas osand, s. o. kümneliste ja üheliste kahekordne kasvatis ja üheliste ruutastend, üheskoos kui ühine kasvatis juurealuse esimesest täielikust jäänusest (milles peale sajaliste jäänuse on ka juurealuse arvu kümnelised ja ühelised) maha arvatakse. Kahe osandi kui ühise kasvatisse mahaarvamine on allpool antud näituses ($\sqrt{7586}$) kujutatud: ruutjuure kümneliste kahekordse — 16 kümnelist — kirjutatakse täieliku jäänuse ette, püstjoonest pahemale poole; täieliku jäänuse kümnelised, mille kaudu ruutjuure ühelised leitakse, oleme lahutusmärgi (koma) abil ühelistest eraldanud. Ruutjuure 7 ühelist kirjutame oma kohale, 8 kümnelise järele. Need 7 ühelist kirjutame ka ruutjuure kümneliste kahekordse, s. o. 16-ne kümnelise järele, täisjäänuse ette. Nii tekib täisjäänuse ette arv 167 ehk 16 kümnelist ja 7 ühelist. Kui arvu 167 kasvatame 7 ühelisega, siis leiame kasvatisse, mis koos seisab ruutjuure kümneliste ja üheliste kahekordsest kasvatisest ja üheliste ruutastendist. Kasvandi ühelistest kasvatamist alates tuletame esiteks üheliste ruutastendi $7^2 = 49$ ühelist, mille lihtühelised täisjäänuse üheliste alla kirjutame; kasvandi 16 kümnelist 7-me ühelisega kasvatades tuletame teiseks ruutjuure kümneliste ja üheliste kahekordse kasvatisse, millele üheliste ruutastendist eraldatud 4 kümnelist juure arvame, nagu kasvatamise tegelduskord nõuab. Ruutjuure kümneliste ja üheliste kahekordne kasvatis ja üheliste ruutastend on kokku 1169. Arvame selle arvu esimesest täisjäänusest maha. Jääb järele 17.

$$\begin{array}{r} \sqrt{7586} = 87 \\ - 64 \\ \hline 167 \quad | \quad 1186 \\ \times 7 \quad | - 1169 \\ \hline 17 \end{array}$$

Juurendamine lõppes jäänusega. Leitud ruutjuur 87 on ligi juur.

Juurendamine lõppes jäänusega. Leitud ruutjuur 87 on ligi juur.

§ 83. Ruutjuurendamine, kui otsitav ruutjuur on kolme- või mitmekohaline arv. Võtame ruutjuurendiks arvu 209764. Ruutjuur $\sqrt{209764}$ on kolmekohaline arv (§ 81). Otsitava ruutjuure kümnelistekogu on kahekohaline arv: ta seisab koos sajalistest ja kümnelistest. Kümnelistekogu (kui kahekohalise arvu),

ruutastendit võib kolmeks osandiks lahutada (§78). Nii tuletame kolmekohalise arvu ruutastendisse kolme osandi asemele viis osandit.

Esimene, kõige ülemjärjelisem osand on algastendi sajaliste ruutastend ja peitub juurealuse arvu kümnetuhandelises (sest sajaliste ruutastend tuletab kümnetuhandelisi). Juurealuses arvus on 20 kümnetuhandelist, s. o. niipalju kümnetuhandelisi, kui näitab iseseisva arvuna võetud esimene arvumärkide salkkond.

$$\begin{array}{r} \sqrt{209764} = 458 \\ - 16 \\ \hline 85 \quad 497 \\ \times 5 \quad - 425 \\ \hline 908 \quad 7264 \\ \times 8 \quad - 7264 \\ \hline \end{array}$$

Sajaliste kõige suurem täielik ruutastend, mis 20-nes kümnetuhandelises peitub, on 16 kümnetuhandelist. Kui ruutastend on 16 kümnetuhandelist, siis on algastend 4 sajalist. Tähendab: *otsitava ruutjuure sajaliste arv on 4*. Kirjutame ruutjuurde arvumärgi 4 ja anname

talle sajaliste tähenduse. Nelja sajalise ruutarvu, 16 kümnetuhandelist, arvame juurealuse arvu kümnetuhandelistest maha. Jääb järele 4 kümnetuhandelist.

Otsitava kolmekohalise arvu ruutastendi *teine* osand on algastendi sajaliste ja kümneliste kahekordne kasvatis ja seisab koos tuhandelitest; *kolmas* osand on algastendi kümneliste ruutastend ja sisaldab eneses sajalisi. Kirjutame esimesele jäänusele, s. o. 4-le kümnetuhandelisele, arvumärkide teise salkkonna juurealusest otsa ja eraldame koma abil 49 tuhandelist 7-st sajalisest. Ruutjuure sajaliste kahekordse (s. o. 8 sajalise) kasvatis otsitava kümneliste arvuga annab 49 tuhandelist või natuke vähem. Et ruutjuure kümneliste arvu leida, selleks jagame 49 tuhandelist, kui kahe arvu kasvatis, ruutjuure sajaliste kahekordsele, s. o. 8 sajalisele. Leiame 6 kümnelist, mis liig palju on: 8 sajalist, 6 kümnelisega kasvatatud, annab 48 tuhandelist; jääb järele 1 tuhandeline + 7 sajalist = 17 sajalist, millest võimata on 6 kümnelise ruutarvu maha arvata. Kohane kümneliste arv on 5 kümnelist. Tähendab: *kümnelisi on otsitavas ruutjuures 5*. Kirjutame esimese jäänuse ette juure sajaliste kahekordse ja tema järele juure kümnelised; nii tekib arv 85 kümnelist. 85 kümnelist 5-e kümnelisega kasvatades leiame juurealuse arvu sajaliste ja kümneliste kahekordse kasvatis ühes kümneliste ruutarvuga, kokku 425 sajalist. Arvame need 425 sajalist juurealuse arvu järelejäänud 497-st sajalisest maha. Jääb järele 72 sajalist.

Otsitava kolmekohalise arvu ruutastendi *neljas* osand on algastendi sajaliste ja kümneliste kahekordse kasvatis ühelistega ja seisab koos kümnelistest; *viies* (viimane, kõige alamjärjelisem) osand on algastendi üheliste ruutastend ja peitub juurealuse ühelistes. Võtame arvumärkide viimase salkkonna juurealusest arvust, kirjutame teisele jäänusele (72-le sajalisele) paremale poole

otsa ja eraldame koma abil 726 kümnelist 4-st ühelisest. Otsitava arvu ruutastendi neljas osand peitub 726-es kümnelises, mis on 45 kümnelise kahekordse ja otsitavate üheliste täielik või ligilähedane kasvatis. Et ruutjuure ühelisi leida, selleks jagame 726 kümnelist 45-e kümnelise kahekordsele, s. o. 90-ne kümnelisele. Jagatis on 8. Tähendab: *otsitavas ruutjuures on 8 ühelist*, mis oma kohale ruutjuurde kirjutame. Teise jäänuse ette kirjutatud 90-ne kümnelise paremale poole kirjutame 8 ühelist. Nii tuletatud arvu 908 kasvatame 8 ühelisega; kasvatis 7264 on nii suur kui ruutjuure sajaliste ja kümneliste kahekordse kasvatis ruutjuure ühelistega ja üheliste ruutastend kokku. Jutrendamine lõpeb ilma jäänuseta.

Nelja- ja mitmekohalise ruutjuure otsimisel tegeldame samas järjekorras; mahaarvatavad osandid võivad jaolt ülemjärjelisemad olla: neljakohalise ruutjuure otsimisel seisab kõige ülemjärjelisem osand koos miljonitest, viiekohalise ruutjuure otsimisel — sajamiljonitest jne. Tegelduskäik on järgmine: Juurealuse arvu esimesest, pahempoolsest arvumärkide salkkonnast kui kahekohalisest arvust leiame täis- või ligijuure peast. Leitud ühekohalise arvu kirjutame ruutjuurde esimeseks, kõige ülemjärjelisemaks arvumärgiks. Selle ühekohalise arvu ruutastendi arvame esimesest salkkonnast maha. Juurealusest arvust toome teise salkkonna alla ja kirjutame esimesele jäänusele paremale poole otsa. Muudetud jäänuse ilma viimase, pahempoolse arvumärgita, mille koma abil eraldame, võtame kui lihtüheliste kogu ja jagame ruutjuure leitud arvumärgi kahekordsele kui lihtüheliste kogule. Jagatis tuletab otsitava ruutjuure teise arvumärgi. Ruutjuure teise arvumärgi kirjutame esimese arvumärgi kahekordsele paremale poole otsa. Nii tuletatud arvu kui lihtüheliste kogu kirjutame (et tegelduskäiku näitlikult kujutada) muudetud esimese jäänuse ette iseäraldi (püstjoonest pahemale poole) ja kasvatame ruutjuure teise arvumärgiga kui ühelistega. Saadud kasvatis arvame maha muudetud esimesest jäänusest (koma abil eraldatud pahempoolne arvumärk kaasa arvatud) kui lihtüheliste kogust. Juurealusest arvust toome kolmanda salkkonna alla ja kirjutame teisele jäänusele paremale poole otsa. Muudetud teise jäänuse, ilma viimase, pahempoolse arvumärgita, võtame kui lihtüheliste kogu ja jagame ruutjuure leitud osa kahekordsele kui üheliste kogule. Jagatis tuletab otsitava ruutjuure kolmanda arvumärgi. Selle kolmanda arvumärgi kirjutame ruutjuure enne leitud osa kahekordsele paremale poole otsa. Nii tuletatud arvu kui lihtüheliste kogu kasvatame ruutjuure kolmanda arvumärgiga kui ühelistega. Saadud kasvatis arvame maha muudetud teisest jäänusest kui lihtüheliste kogust. Kolmanda ja järgmiste jäänustega talitame samasuguses järjekorras kui teise jäänusega.

Ruutjuurendamise abil võime ka neljanda astendi juure leida. Selleks peame antud arvu ruutjuure leidma ja leitud ruutjuure omakord ruutjuurendama.

Neljanda astendi juure $\sqrt[4]{17850625}$ leiame, nagu allolevates juurendamisnäitustes

$$\begin{array}{r} \sqrt{17850625} = 4225 \\ -16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 82 \overline{) 185} \\ \times 2 \quad -164 \\ \hline 842 \overline{) 2106} \\ \times 2 \quad -1684 \\ \hline 8445 \overline{) 42225} \\ \times 5 \quad -42225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{4225} = 65 \\ -36 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 125 \overline{) 625} \\ \times 5 \quad -625 \end{array}$$

tehtud, kahekordse ruutjuurendamise abil. Nagu näha, on antud arvu 17850625 neljanda astendi juur, s. o. astendaja 4 kaudu leitud alguurend, järgmises

tegeldamisjärjekorras leitud: $\sqrt[4]{17850625} = \sqrt{\sqrt{17850625}} = \sqrt{4225} = 65$.

§ 84. Kantjuurendamine. Ühe-, kahe- ja kolmekohalise arvu kantjuur on ühekohaline arv ja leitakse peasttegeldamisel. Näit. $\sqrt[3]{64} = 4$, $\sqrt[3]{358} = 7$ (jäänus 15, jne).

Selgitame tegeldamiskäiku kahekohalise kantjuure otsimisel. Võtame arvu 592704. Selle arvu kantjuur on kahekohaline arv (§ 81). Kahekohalise arvu kantastend seisab koos neljast osandist (§ 79).

Kahekohalise arvu kantastendi esimene, kõige ülemjärjelisem osand on algastendi kümnelite kantastend, sisaldab eneses tuhandelisi ja peitub juurealuse arvu tuhandelistes. Juurealuses arvus on 592 tuhandelist, s. o. niipalju tuhandelisi, kui näitab iseseisva arvuna võetud esimene, pahempoolne arvumärkide salkkond. Kümnelite kõige suurem kantastend, mis 592-es tuhandelises peitub, on 512 tuhandelist. Et 512 tuhandelist on 8 kümnelise kantastend, siis järgneb siit, et otsitavas kantjuures on 8 kümnelist. Arvame 8 kümnelise kantastendi,

s. o. 512 tuhandelist, juurealuse arvu tuhandelistest maha. Jääb järele 80 tuhandelist.

Toome arvumärkide teise salkkonna juurealusest arvust alla, kirjutame jäänusele paremale poole otsa ja eraldame suurendatud jäänuse viimased kaks arvumärki jäänuse sajalistest koma abil. Otsitava kahekohalise arvu kantastendi teine osand on algastendi kümnelite ruutastendi ja üheliste kolmekordne kasvatis, seisab koos sajalistest ja peitub jäänuse sajalistes. Et kantjuure ühelisi leida, selleks jagame jäänuse 807 sajalist kantjuure kümnelite ruutastendi kolmekordsele, s. o. 192 sajalisele. Otsitavasse kantjuurde tuleb 4 ühelist. Teise osandi, kokku $3 \cdot 8^2 \cdot 4 = 768$ sajalist, kirjutame mahaarvamise otstarbel jäänuse sajaliste alla. Otsitava arvu kantastendi kolmas osand annab $3 \cdot 8 \cdot 4^2 = 384$ kümnelist, mille mahaarvamise otstarbel jäänuse kümnelite alla kirjutame. Otsitava arvu kantastendi neljas (viimane) osand kui üheliste kantastend annab $4^3 = 64$ ühelist. Mahaarvamise otstarbel kirjutame need 64 ühelist jäänuse üheliste alla. Kolm viimast osandit kui kolm vähendajat juurealuse esimesest jäänusest maha arvates leiame, et kantastendamine jäänuseta lõpeb.

Kellel raske on kolme vähendajat korraga maha arvata, see võib nad järgemööda maha arvata, ehk jälle kõik kolm vähendajat enne kokku arvata, nagu siin kõrval näidatud, ja leitud kogundi maha arvata esimesest täielikust jäänusest. Kui leitud kogund suurem on kui täielik jäänus, siis oleme ühelisi kantjuurde rohkem võtnud kui tarvis. Säärasel korral võtame ruutjuurde ühe ühelise võrra vähem ja teeme mahaarvamiskatse uuesti, kunni kohane üheliste arv on leitud.

$$\begin{array}{r} 768 \\ + 384 \\ \hline 1152 \\ \hline 80704 \end{array}$$

Kolmekohalise kantjuure otsimisel leiame algjuurendi sajalised, kui juurealuse arvumärkeide esimese salkkonna võtame ja iseseisva arvuna kantjuurendame. Esimesele jäänusele, mis miljonid sisaldab, kirjutame juurealusest arvust teise salkkonna otsa. Niiviisi suurendatud jäänuse sajatuhandelised

(kõrvalolevas näituses koma abil eraldatud 386 sajatuhandelist) jagame kantjuure sajaliste ruutastendi kolmekordsele (75 kümnetuhandelisele), et kantjuure kümnelisi leida. Meie näituses on jagatis 5 (kümnelist), mis aga tegeldamisel liig suur on. Kohane kümneliste arv on 4. Suurendatud jäänusest arvame maha kolm osandit, mis algastendi sajaliste ja kümneliste ühises kantastendis (§ 79) veel leiduvad, peale juurealusest arvust juba mahaarvatud sajaliste kantastendi. Teise jäänusega tegeldame samasuguses järjekorras kui kahekohalise kantjuure otsimisel, ainult selle vahega, et kantjuure sajalised ja kümnelised kokku kahekohalise kümneliste-kogu tuletavat ja sellena ka tegeldamisel tarvitatakse.

Nelja- ja mitmekohalise kantjuure otsimisel tegeldame samas järjekorras kui kolmekohalise kantjuure otsimisel.

Kant- ja ruutjuurendamise abil võime ka kuuenda astendi algjuurendi leida. Selleks peame antud arvu ruutjuure leidma ja leitud ruutjuure kantjuurendama, ehk me peame antud arvu kantjuure enne leidma ja leitud kant-

$$\begin{array}{l} \text{juure ruutjuurendama. Nii leiame, et } \sqrt[6]{3518743761} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{3518743761}} = \\ = \sqrt[3]{59319} = 39, \text{ ehk } \sqrt[6]{3518743761} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{3518743761}} = \sqrt[3]{1521} = 39. \end{array}$$

§ 85. Ülesanded. — 116. Astenda: a) $54^2 = ?$ b) $69^2 = ?$ d) $19^3 = ?$ e) $16^4 = ?$ g) $11^5 = ?$ h) $472^2 = ?$ i) $106^3 = ?$ k) $4700^2 = ?$ l) $601^3 = ?$ m) $80^6 = ?$ n) $1001^4 = ?$

117. Astenda osadekaupa: a) $42^2 = (40 + 2)^2 = ?$ b) $101^2 = (100 + 1)^2 = ?$ d) $105^2 = (100 + 5)^2 = ?$ e) $625^2 = (600 + 25)^2 = (620 + 5)^2 = ?$ g) $31^3 = (30 + 1)^3 = ?$ h) $45^3 = (40 + 5)^3 = ?$ i) $125^3 = (100 + 25)^3 = (120 + 5)^3 = ?$ k) $384^2 = (300 + 84)^2 = (380 + 4)^2 = ?$

118. Mitu korda on 64^3 suurem kui 16^4 ? Mitu korda on 5^5 väiksem kui 25^3 ?

119. Ruutastenda osadekaupa arvud 10-st kunni 20-ni, järgemööda, nii-sama arvud: 21-st kunni 30-ni, 75-st 84-ni, jne. Näita, et iga järgneva suurema arvu ruutastend eelmineva arvu ruutastendist niiviisi saadakse, et eelmineva arvu ruutastendile juure lisatakse tema algastendi kahekordne, mis ühe võrra on suurendatud.

120. Kui otsitava arvu kantastendi jagame otsitava arvu ruutastendile, siis on jagatis 13. Kui suur on otsitav arv?

121. Otsitava arvu viienda järje astendi jagamisel sama arvu kantastendile tuleb jagatise 36. Kui suur on otsitav arv?

122. Ruutjuurenda: a) $\sqrt{625} = ?$ b) $\sqrt{2116} = ?$ d) $\sqrt{9604} = ?$
 e) $\sqrt{15876} = ?$ g) $\sqrt{135424} = ?$ h) $\sqrt{714025} = ?$ i) $\sqrt{577600} = ?$
 k) $\sqrt{36048016} = ?$ l) $\sqrt{924464025} = ?$

123. Kantjuurenda: a) $\sqrt[3]{1728} = ?$ b) $\sqrt[3]{15625} = ?$ d) $\sqrt[3]{195112} = ?$
 e) $\sqrt[3]{300763} = ?$ g) $\sqrt[3]{830584} = ?$ h) $\sqrt[3]{1906624} = ?$ i) $\sqrt[3]{8615125} = ?$
 k) $\sqrt[3]{82881856} = ?$ l) $\sqrt[3]{478211768} = ?$ m) $\sqrt[3]{65536} = ?$ n) $\sqrt[3]{16777216} = ?$
 o) $\sqrt[3]{16777216} = ?$

IV. Tegeldused mitmenimeliste täisarvudega.

Möödustik.

§ 86. **Ühe- ja mitmenimelised arvud.** Kui mõõtmisel tarvitatud üksus (§ 2) terveni mõõdetava suuruse sisse mahub, näit. süllapuu pikkus kaheksa korda maja pikkuse sisse, siis võime mõõdetava suuruse hulga *ühe* mõõtuksuse kaudu, ja nimelt ta *kordarvu*na, ära tähendada. Me ütleme: maja on *8 sülda* pikk. Suhkrupea raskus, ühenaelalise raskusega mõõdetud, on 15-ne ühenaelalise raskusega ühevääriline; see tähendab: suhkrupea on *15 naela* raske. Suhkrupea raskus on naelalise raskusüksuse kordarv, nimelt ta 15-nekordne. *Kui mõõdetav suurus on mõõtuksuse kordarv, siis moodustab mõõdetava suuruse vahekord ehk suhe mõõtuksusega ühenimelise täisarvu.* Maja pikkus, *8 sülda*, on ühenimeline täisarv; niisama on suhkrupea raskus, *15 naela*, ühenimeline täisarv. Ühenimeline täisarv *nimetab*, määrab kindlaks mõõdetava suuruse hulga (kogu, paljuse) temale vastava ehk suguldase *ühe* mõõtuksuse kaudu.

Igakord ei ole võimalik mõõdetava suuruse hulga ühenimelise täisarvuga ära tähendada. Ütleme: süllapuu pikkus mahtus maja pikkuse sisse 8 korda ja jäi maja pikkusest veel järele vähem kui süld. Seda pikkuse ülejäänud osa ei saa me kuidagi süllapuuga mõõta: sülla pikkus ei mahu terveni selle ülejäägi sisse, mis on süllast väiksem. Et maja pikkuse ülejäänud osa mõõta, selleks valime mõõtuksuse, mis on süllast väiksem, nimelt

niisuguse mõõtüksuse, millele sülla pikkus on kordarvuks. Säärane väiksem mõõtüksus on, näit., *jalg*, mis süllas 7-mekordselt kordub. Sülla pikkus on jala pikkuse seitsmekordne; teiste sõnadega: jalg on seitsmes osa süllast. Kui jala pikkus maja pikkuse ülejäänud osasse terveni 6 korda mahub, siis on selle osa pikkus 6 jalg. Maja pikkus on seega *8 sülda 6 jalg*. (Miks ei või jala pikkus sellesse maja pikkuse ülejäänud osasse 7 korda, 8 või rohkem kordi mahtuda?) Maja pikkus on siin tähendatud *kahenimelise arvuga*, õigemini: kahe suguldase arvuga, milledest kummalgi isenimi. Kui jäänuse mõõtmisel jalaga oleks tekkinud uus jäänus, mis jala pikkusest väiksem, siis peaksime selle uue jäänuse pikkust mõõtma jalast väiksema üksusega, millele jala pikkus on kordarvuks. Säärane väiksem üksus on *toll*, millele jala pikkus on 12-nekordne ja mis sellega on kaheteistkümnes osa jala pikkusest. Ütleme: esimese jäänuse pikkuse mõõtmisel jala pikkusega saime uue jäänuse, mille sisse tolli pikkus mahtus täiesti 9 korda. Maja pikkus on siis *8 sülda 6 jalg 9 tolli*. Maja pikkus on siin *kolmenimelise arvuga* kindlaks määratud.

Mitte ainult pikkust, vaid ka teistsuguseid mõõdetavaid suurusi võib oma hulga poolest *ühe*-, *kahe*- või *mitmenimeliste arvudega* avaldada.

Kahe- ja mitmenimelised arvud võime ühenimelisteks muuta, nagu pärastpoole (§ 96) selgub; sellepärast on meil kahe- ja mitmenimelise arvu juures ikkagi ühe suurusega tegemist, mille hulk avaldatakse kahe või mitme suguldase mõõtüksuse kaudu.

Mõõtmisel on meil suuruse *hulgamõistega* tegemist, mitte tema teiste omadustega ja isäraldustega. Tee pikkusel on oma hulk ehk kogu mõõtüksusi; antud mõõtüksusel kui pikkuse suurusel on oma hulk vähemaid mõõtüksusi jne. Suuruste mõõtmisest kõneledes mõlgub meil hulgamõiste meeles, kuigi me seda mõistet sagedasti ei nimeta.

§ 87. Mõõtude süsteemid ehk kavad. Ühe- ja samalaadilise suuruse hulgaväärtus võib mitmeis asjus mitmesugune olla. Näit. võib ühe maja *pikkus* suurem olla kui teise maja pikkus, vähem kui kolmanda maja pikkus, niisama suur kui viljaküüni pikkus, jne. Kerisekivi *raskus* on suurem kui kapsapea raskus; päevatöö *vältus* ehk *kestvus* on suurem kui tunnitöö vältus, jne. Et mitmesuguste suuruste hulgatähendusi kindlaks määrata, selleks peame neid suurusi mõõtma. Mõõtmisvahenditeks tarvitame *mõõtüksusi*, mida lühidalt *mõõtudeks* nimetatakse. Eelpool nägime, et ühe- ja samalaadilise suuruse mõõtmisel mitmed mõõtüksused, ühed suuremad, teised väiksemad, tarvitusele võivad tulla. Need mõõtüksused on üksteisega arvulises siduvuses, nimelt on suuremad mõõtüksused, arvulise siduvuse poolest, väiksemate kordarvud. Muutmiste ja tegelduste kergendamiseks on

võimalust mööda kordarvuline siduvus üldiselt tarvitusele võetud. Murdarvuline siduvus tuleb ainult mõningail juhustel ette.

Ühe- ja samalaadilise suuruse mõõtüksused moodustavad sellele suurusele vastava *mõõtude süsteemi* ehk *mõõtude kava*. Nii on tuletatud *pikkuse, raskuse, ruumi, pinna, hinnaväärtuse, aja* ja mitmesuguste teiste suuruste mõõtude kavad.

Mõõtude kava võib olla täiesti kunstlik sünnitus, s. o. inimeste vaba väljavaliku järele tuletatud; ta võib mõnikord olla ka loodusliste vahekordade mõjul määratud, nagu, näit., aasta vältus ööpäevades arvatud. Esimesel juhusel on meil *kunstliku* mõõtude kavaga, teisel — *looduslike* mõõtude kavaga tegemist.

Mitmesuguste suuruste mõõtude kavad, üheskoos võetult, nimetatakse *mõõdustikuks*.

Riigivõim määrab oma riigi piirides mitmesugused *mõõtkavad* kindlaks, ja need mõõtkavad on riigikodanikkudele avalikus tegevuses sunduslikud. Iga mõõtkava tekib ühest algusliisest mõõtüksusest ehk mõõdust, mille järele suuremad üksused kordarvuliselt, väiksemad — osaarvuliselt tuletatakse. Algüksus ehk algmõõt, võõrakeelse sõnaga *etalooniks* nimetatud, hoitakse riiklises hoiukohas muutmata kujul alal, et selle algmõõduga, kui vaja, tarvitusel olevaid mõõtüksusi võrrelda.

Arv, mis näitab, mitu korda mahub väiksem mõõtüksus suuremasse, teiste sõnadega: mitmekordselt tuleb väiksemat mõõtüksust võtta, et tuletada suuremat üksust, nimetatakse nende üksuste *suhteliseks arvuks* ehk *suhtarvuks*. Sülla ja jala vaheline suhtarv on 7, sest jala pikkus tuleb seitsmekordselt võtta, et sülla pikkust tuletada.

Allpool toome tarvilikumad ja tähtsamad mõõtude kavad, mis on Eestis maksvusel.

§ 88. **Pikkusmõõtude kava.** Pikkusmõõtude abil mõõdetakse joonlõigete, joontükkide suurust, s. o. nende pikkust. Joone pikkus nimetatakse igapäevases elus mõnikord kõrguseks, mõnikord laiuks, paksuseks, sügavuseks, kauguseks, kitsuseks jne. Igal juhusel on siin pikkuse mõistega tegemist. Näit. maja pikkus on 10 süllda, maja kõrgus 3 süllda; kaevu sügavus on 6 süllda; merekitsuse laius on 2 versta, jne. Pikkusmõõdud, niisama ka teised mõõdud, on Eesti Vabariigile Vene ajast jäänud. Pikkusmõõtude aluseks ehk normaalmõõduks Vene riigis oli *arsin*. Eestis võiksime alus- ehk põhimõõduks ennem *sülda* arvata, sest sülla alamosa, *jalg*, on meil tuttavam kui arsin ja viimase alamosa versok. Tarvitusel olevad pikkusmõõdud on järgmised:

1 penikoorm . = 7 versta;

1 verst = 500 süllda;

1 *süld* = 3 arsinat ehk 7 jalga;

1 arsin = 16 versokit ehk 28 tolli;

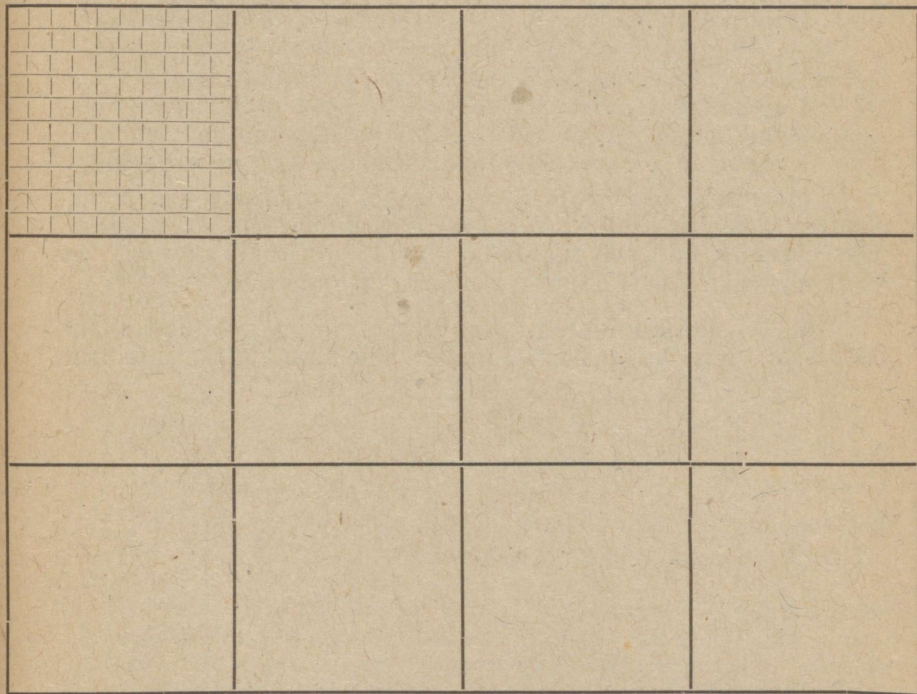
1 jalg = 12 tolli;

1 toll = 10 liini (joont, kriipsu).

Eestis oli ja on veel tarvitusel *küünar*, mille pikkus on 21 tolli, nii et 4 küünart on 3 arsinat.

Meresõidul tarvitatakse pikkusmõõduna *Inglise* ehk *merepe-
nikoorm*, mis on nii suur kui 1 verst 375 sülda ehk 875 sülda.

§ 89. **Pindmõõdud.** Pikkusmõõtudest tuletatakse *pinna* ja *ruumi mõõdud*. Põllu pinna, mitmesuguste kehade jne. pinna
väljaarvlemisel tarvitatakse *ruutmõõtusid*. Nii tarvitame pinna



arvlemisel *ruutsülda*, *ruutjalga*, *ruuttolli*, *ruutversta* ja teistsugu-
seid ruutmõõtusid. Need on ruutmõõdud, mille külje pikkus on
kas sülla, jala, tolli, versta või mõne muu pikkusüksuse suurune.
Siin antud joonistus kujutab õigenurkse nelinurga pinda, mis
ruuttollidega mõõdetult annab 12 ruuttolli. Pinna pikkus on
4 tolli, laius 3 tolli. Pikuti on nelinurga pind ribadeks jaotatud,
igas ribas 4 ruuttolli, s. o. nii mitu ruuttolli, kui mitu joontolli
on pikkuses. Neid neljaruuttollilisi ribasid on kolm, s. o. nii

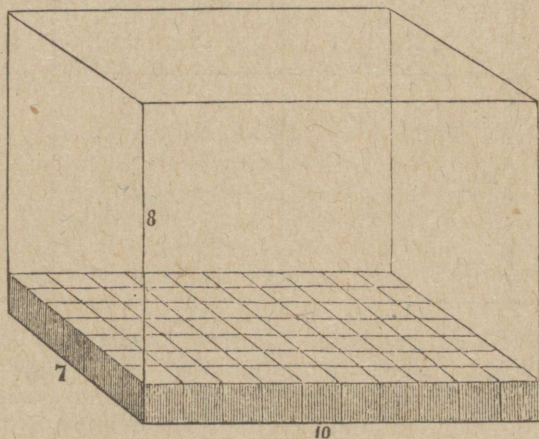
mitu riba, kui mitu tolli (joontolli) on laius. Tähendab: pinna suurus on $4 \times 3 = 12$ ruuttolli. Pinnasuuruse ruutüksuste hulga saame, kui õigenurkse nelinurga pikkuse ja laiuse vastavad väärtused (joonüksuslised) üksteisega kasvatame.

Esimene ruuttoll (eelpool, pahemal poolel) on ruutliinideks jaotatud. Et ruuttolli pikkus on 10 liini ja laius ka 10 liini, siis on ruuttolli pinna suurus ruutliinides $10 \times 10 = 100$ ruutliini. Tähendab: ruuttolli ja ruutliini vaheline suhtarv on 100 ehk 10^2 . Sarnasel viisil leiame, et ruutjala ja ruuttolli vaheline suhtarv on $12^2 = 144$; ruutsülla ja ruutjala vaheline suhtarv on $7^2 = 49$, jne. Järgnevalt:

- 1 ruutpenikoorm = 7^2 ruutversta = 49 ruutversta;
- 1 ruutverst . . . = 500^2 ruutsülda = 250.000 ruutsülda;
- 1 ruutsüld . . . = 7^2 ruutjalga = 49 ruutjalga;
- 1 ruutjalg . . . = 3^2 ruutarsinat = 9 ruutarsinat;
- 1 ruutjalg . . . = 12^2 ruuttolli = 144 ruuttolli;
- 1 ruuttoll . . . = 10^2 ruutliini = 100 ruutliini;
- 1 ruutarsin . . . = 16^2 ruutversokit = 256 ruutversokit.

Maapinna osade: põldude, aasade, karjamaade jne. pinnasuurust arvatakse meil ka *tiinudes* (dessatiinides) ja *vakamaades*. Üks tiinumaa on 2400 ruutsülda; üks Liivi (Ria) vakamaa on 800 ruutsülda, üks Tallinna vakamaa 400 ruutsülda.

§ 90. **Ruummõõdud.** Ruumi arvlemisel tarvitame *kantmõõdusid*, mis ka pikkusmõõtudest tuletatakse. Nii tarvitame



kantjalga, s. o. täisnurkset täringit ehk kantikut, mille iga külg on 1 jalg pikk, *kantsülda*, *kanttolli* jne. Joonistus, mis siin antud, kujutab täisnurkset kuuekülgset kantkeha ehk kantikut, mille

pikkus on 10, laius 7 ja kõrgus 8 ühenimelist pikkusüksust (joonüksust). Nagu näha, on pikkusüksusele vastavaid kantüksusi meie kantkeha alumises kihis $10 \times 7 = 70$, s. o. nii mitu kantüksust, kui suur on pikkuse ja laiuse arvuliste väärtuste ehk mõõtarmude kasvatis. Sääraseid kantüksuste kihte tuleb kantkehas ette 8, s. o. nii mitu kihti, kui suur on kõrguse mõõtarm. Tähendab: kõiges 8-as kihis on ühtekokku $70 \times 8 = 10 \times 7 \times 8 = 560$ kantüksust. Järgnevalt: et leida täisnurkse kuuekülgse kantiku ruumisuurust, valitud kantüksustes, selleks kasvatame kantiku pikkuse, laiuse ja kõrguse vastavad mõõtarmud üksteisega. Kui täisnurkne kuuekülgne kantik on täringkujuline, s. o. kui ta pikkus, laius ja kõrgus on ühesuurused, siis on ta ruumi suurus ehk maht võrdne ta serva kantarmule. Nii on kantsülla suurus $7^3 = 343$ kantjalga, kantjala suurus $12^3 = 1728$ kanttoll, jne.

Nagu eelolevast (§§ 89 ja 90) selgub, on ruutmõõtudevaheline suhtarv võrdne vastava joonmõõtude-vahelise suhtarvu ruutarvule, kantmõõtudevaheline suhtarv aga võrdne vastava joonmõõtudevahelise suhtarvu kantarmule.

§ 91. **Raskusmõõdud.** Raskusmõõtude põhimõõduks on *nael*, mis ligikaudselt 25-e kanttoll, suuruse, tubaselt sooja (13^0 R) puhtavee kogu raskuse määrab. Kordarmulises siduvuses naelaga on tarvitusel järgmised raskusmõõdud:

- 1 kaal (ehk perkovits) = 10 puuda = 20 leisikut;
- 1 puud = 2 leisikut ehk 40 naela;
- 1 leishik = 20 naela;
- 1 *nael* = 32 loodi = 96 solotnikku;
- 1 lood = 3 solotnikku;
- 1 solotnik = 96 doli.

Linade hulk arvatakse kaalu järele; solotniku ja doli abil mõõdetakse väärtasjade, näit. kuldsõrmuste raskust, jne.

§ 92. **Hindmõõdud.** Eesti vabariigis on hinna määrajaks ja seaduslikuks maksuvahendiks rahaüksus, mis *margaks* nimetatakse. Üks mark on 100 penni. Metallraha (hõbe-, kuldraha jne.) Eestis veel tarvitusel ei ole. Liikumas on paberraha. Eestis on tarvitusel 1000-, 500-, 100-, 50-, 25-, 10-, 5-, 3- ja 1-margalised paberrahad, ka 50-, 20-, 10- ja 5-pennilised.

Eesti mark vastab oma nimelise hinna poolest Soome margale ja Prantsuse frangile. Kui meie riik majandusliselt niivõrt kindlale alusele jõuab, et liikumas oleva paberraha kindlustuseks riigipanka tarvilik hulk kulda tagavaraks kogub, siis tõuseb Eesti marga hind Soome marga ja Prantsuse frangi vääriliseks. Nii kaua kui kullakindlustus puudulik on, jääb meie mark oma hinna

poolest Soome margast ja Prantsuse frangist taha. Vene paber-
raha, mis meil osalt veel liikumas, ei vasta kaugeltki enam oma
nominaal- ehk nimelishinna poolest kuldraha väärtusele.

Vene ajast on jäänud tarvitusele kuld- ja hõberahad. Vene
kuldrahad on 15-, 10- ja 5-rublalised; täishinnalised hõberahad
1-rublalised, 50- ja 25-kopikalised. Väiksemad hõberahad on
allaväärtuslised vahetusrahad: 20-, 15-, 10- ja 5-kopikalised. Kuld-
rahad ja täishinnalised hõberahad olid 900-proovilised, s. o. ras-
kuse järele oli neis iga tuhande raskusüksuse kohta 900 osa
kulda või hõbedat ja 100 osa odavamast metalli, näit. vaske.
Allaväärtuslistes hõberahades on hõbedat ja vaske pooleks. Et
vask kergem on kui hõbe, sellepärast tuleb kaalu järele ühe
täishinnalise hõberubla peale ligikaudu 1 rubla 15 kopikat alla-
väärtuslist vahetushõberaha. — Puhtast kullast või hõbedast mündi-
tud rahad oleksid liig pehmed; segametallist rahad on kõvemad
ja vastupidavamad. 1921. aasta sügisel oli kuldrubla väärtus
võrdne 185 Eesti margale.

§ 93. **Aegmõõdud.** Aja mõõtmise põhiüksuseks on *ööpäev*.
See on *loodusline* aegmõõt, mis ripub maakera liikumisest oma
telje ümber. Ööpäeva alguseks loetakse kesköö, mil inimline
tegevus suuremalt osalt seisab. Sellepärast on igapäevases elus
otstarbekohasem piiriks võtta kesköö kahe ööpäeva vahel. Nime-
tuse *ööpäev* asemel tarvitatakse sagedasti sõna *päev*, sest päev
on inimesele ta tegevuses tähtsam osa ööpäevast. *Ööpäev* aja
mõõtmise põhiüksusena on kõigi riikide rahvaste juures tarvitusel;
ta on rahvusvaheline mõõtüksus. Juba vanasti on hakatud öö-
päeva järgmiselt jaotama:

1 ööpäev = 24 tundi;

1 tund = 60 minutit (ajaminutit);

1 minut = 60 sekundit (ajasekundit).

Ööpäevast suurem mõõtüksus on *nädal*, millel on 7
päeva (ööpäeva).

Teine loodusline aegmõõt on *aasta*; ta ripub maakera lii-
kumisest päikese ümber ja on ööpäevast suurem. Aasta ei ole
ööpäeva kordarv; sellepärast ei ole võimalik ühtlast aastavältust
ööpäeva kaudu, ühenimelise arvuna, kindlaks määrata. Ajaarva-
mise lihtsamakstegemise ja praktiliste elunõuete pärast on aga
soovitav, et aasta oleks ööpäeva kordarv. Et seda võimaldada
ja ühes ka looduslise ajaarvamisega sammu pidada, on tarvitu-
sele võetud kahesugune aastavältus, nii üks kui teine ööpäeva
kordarvuna: *lihtaasta*, millel on 365 ööpäeva, ja *liigaasta*, millel
on 366 ööpäeva.

Ajaarvamine meie kalendrites kujuneb niiviisi, et iga aasta on liigaasta, 1) kui aastaarv, mis täielikke aastasadasi ei kujuta, ilma jäänuseta jagub 4-le, 2) kui aastaarvus, mis täielikke aastasadasi kujutab, tema sajaliste arv jagub 4-le ilma jäänuseta; kõik teised aastad on lihtaastad. Nii on, näit., aastad: 1596, 1600, 1864, 1912 jne. liigaastad; aastad: 1627, 1700, 1800, 1900, 1918, 1919, 1921 jne. lihtaastad. Neis näitustes kujutavad aastaarvud 1600, 1700, 1800 ja 1900 täielikke aastasadasi. Arvu 1600 sadadekogu on 16; et see sadadekogu on 4-le jagatav, siis oli aasta 1600 liigaasta. Arvude 1700, 1800, 1900 sajalistekogud 17, 18, 19 ei ole 4-le jagatavad. Tähendab: need aastad olid lihtaastad.

Meil on 400 aasta kestvusel 303 lihtaastat ja 97 liigaastat. Nii kordub see igas neljikaastasajas. (Mitu ööpäeva on ühes neljikaastasajas?)

Aegmööduks tarvitatakse veel *kuuvältust*, *kuud*, mis ka on loodusline aegmoot ja kuu liikumisest ümber maakera ripub. Kuuvältus ehk -kestvus ei ole ööpäeva kordarv; niisama ei ole aastavältus kuu kordarv. Looduslisest kuuvältusest kõrvale minnes arvatakse aastas 12 kuud. Päevade arv kuudes on mitmesugune. Kuude nimed, mis meile vanadelt roomlastelt, Lääne-Euroopa rahvaste kaudu, tarvitusele tulnud, on järgmised: *jaanuar, veebruar, märts, aprill, mai, juuni, juuli, august, september, oktoober, november, detsember*. Seitsmel kuul on igaühel 31 päeva; neljal kuul on igaühel 30 päeva, nimelt aprillil, juunil, septembril ja novembril (ap-juun-se-no); veebruaril on 28 päeva lihtaastas ja 29 päeva liigaastas. Tarvitusel on ka kuude eestikeelsed nimed, kuigi mõned neist Eesti keele iseloomule (jaanuar—näarikuu) ehk Eesti oludele ei vasta (oktoober—viinakuu).

§ 94. **Muud mõõdud.** Vene ajast on meil veel tarvitusel *vilja-* ja *vedeliku* mõõdud, mille asemele sagedasti raskusmõõdud tarvitusele võetakse. *Vilja mõõdud* on:

1 setvert ehk kuli = 8 setverikku;
1 setverik = 8 karnitsat.

Üks setvert on 3 Riia vakka; 1 Riia vakk on 54 toopi.

Toop on ka *vedeliku* mõõt. 10 toopi on 1 pang ehk 1 Vene vedro. 40 pange on 1 vaat ehk aam.

Paberi hulka mõõdetakse järgmiselt:

1 pall = 10 riisi;
1 riis = 20 raamatut;
1 raamat = { 24 poognat kirjutuspaberit;
25 „ trükipaberit.

Nurkmöödu üksuseks võetakse täis- ehk õigenurk. Täisnurga osamöödud on järgmised:

1 täisnurk = 90 kraadi (nurk-kraadi);

1 kraad = 60 minutit (nurkminutit);

1 minut = 60 sekundit (nurksekundit).

Nurk-kraadid, nurkminutid ja nurksekundid tähendatakse lühendatult iseäraliste märkidega. Näit.:

36 kraadi 58 minutit 16 sekundit = $34^{\circ}58'16''$.

Lühendusmärkidega ('ja'') tähendatakse mõnikord ka aegminutid ja aegsekundid. Näit., laev sõitis merele hommikul $7^h16'45''$, kus täht *h* (ladinakeelse sõna *hora*—tund—algtäht) tundi tähendab.

Säärane tundide, aegminutite ja aegsekundite ülestähendamisviis võetakse tarvitusele ainult neil kordadel, kui ajavältuse *piiri*, mitte ajavältust ennast, tahetakse kujutada. Näit.: *Raudteerong sõitis Tartust välja Tallinna poole $8^h55'45''$ hommikul ja oli teel kunni Tallinnani 7 tundi 34 min. 15 sek.* Kui piiritähenduses aeg antud on tundides ja minutites, siis kujutatakse minutite arv tundide arvu kõrval astendajalaadiliselt. Näit., *õpetund algas hommikul kell 8^{15}* , see tähendab: *hommikul $8^h15'$* .

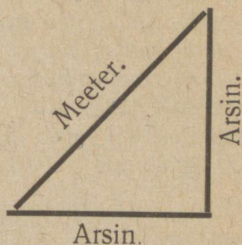
Temperatuuri, s. o. soojust ja külmust, mõõdetakse isekraadides. Temperatuuri *kraadid* näitavad elavhõbeda samba kõrguse tõusu või alanemist temperatuuri tõusu või alanemise tagajärjel.

§ 95. **Meetermöödustik.** Mitmesuguste mõõtude kavadege tutvunedes nägime, et ühes ja samas kavas on mitmesugused suhtarvud tarvitusel. Arusaadav, et kahes ja mitmes kavas ammugi ei ole ühtlust suhtarvude valikul. Juba meelespidamise hõlbustamiseks tuleks soovida, et ühes ja samas kavas mõõtüksused üksteisega oleksid ühes ja samas suhtarvulises siduvuses. Veel parem, kui võimalikult kõigis mõõtkavades ühte ja sedasama suhtarvu tarvitataks. Nimeliste arvude muutmiskordadel ja tegelduste juures on ühtlane, otstarbekohaselt valitud suhtarv töökergendamise mõttes väga kasulik. Prantslased olid esimesed, kes enam kui saja aasta eest omale soetasid möödustiku, nõndanimetatud *meetermöödustiku*, milles suhtarvuks on võetud kümnekava põhiarv 10 ehk mõningail juhustel selle põhiarvu kordarv. See suhtarvuline vahekord võeti tarvitusele kunstlikkudes mõõtkavades, kuna loodusliste mõõtüksuste kohta maksma jäid suhtarvud, mis looduslistest vahekordadest tekkinud. Suhtarvu 10 järele nimetatakse meetermöödustik sagedasti ka *kümnemöödustikuks*, võõrakeelselt *detsimaalmöödustikuks*. Kümnemöödustiku üksikute mõõtude kavad on omavahelises siduvuses, sest nad tuletatakse alguliselt pikkuse mõõtkava üksuste kaudu.

Pikkusmõõtude algüksuseks on *meeter*, mis kavatsuste järele loodusline mõõtüksus pidi olema, nimelt üks kümnemiljondik Pariisi meridiaani neljandikust. Meetri pikkus on aga kaunis ligilähedalt nii suur; sellepärast on ja jääb kord tarvitusele võetud

meeter ikkagi kunstlikult valitud mõõtüksuseks. Meetermõõdustiku üksikud kavad on järgmised:

I. *Pikkusmõõdud.* Algüksuseks on *meeter*, mille pikkus ligilähedalt on 39 tolli 4 liini. Kui meil meetermõõtu (näit. meetripulka) käepärast ei ole, siis võime meetri ligikaudseks pikkuseks (jalgades, tollides, liinides) võtta kaldkülje (hüpoteenuusi) õigenurkses sarikkolmnurgas, mille kumbki rist- ehk sarikkülg 1 arsin (= 28 tolli) pikkune on. See kaldkülj, on ligikaudu ühe liini võrra meetrist pikem. Meetri kordarvuliste üksuste nimetused saadakse silpide *deka-*, *hekto-*, *kilo-*, meetri osaarvuliste üksuste nimetused — silpide *detsi-* (*deci-*), *tsenti-* (*centi-*), *milli-* etтелиitumisel:



1 kilomeeter = 10 hektomeetrit; 1 hektom. = 10 deka-meetrit; 1 dekam. = 10 meetrit;

1 meeter = 10 detsimeetrit; 1 detsim. = 10 tsentimeetrit; 1 tsentim. = 10 millimeetrit.

Enam tarvitatavad üksused, peale meetri (m.), on *kilomeeter* (km.), mille pikkus on ligikaudu 468 sülga 5 jalga, *tsentimeeter* (cm.) ja *millimeeter* (mm.). 5 tsentimeetrit on ligikaudu 2 tolli.

II. *Raskusmõõdud.* Raskusmõõtude algüksuseks on *gramm* (g.). *Grammiks* nimetatakse puhta (*destilleeritud*) veekegu kant-tsentimeetri raskus 4^o soojuse juures Celsiuse, s. o. sajakraadilise soojamõõtja järele. Grammist tuletatakse kordarvuliste ja osaarvuliste raskusüksuste nimetused nendesamade silpide etтелиitumisel kui pikkusüksuste nimetused meetrist:

1 kilogramm (kg.) = 10 hektogrammi; 1 hektogr. = 10 dekagrammi; 1 dekagr. = 10 grammi;

1 gramm (g.) = 10 detsigrammi; 1 detsigr. = 10 tsentigr.; 1 tsentigr. = 10 milligrammi (mg.).

Kilogramm (kg.) on ligikaudu 2 naela 14 loodi; tähendab: paari loodi võrra vähem kui kaks ja pool naela. Rohkem tarvitatavad üksused on, peale grammi, kilogramm ja milligramm. Suuremaist raskusmõõtudest oleks nimetada *meetertonn*, mis 1000 kilogrammi ehk ligikaudu 61 puuda kaalub ja suuremate raskuste (näit. laevakoormate) mõõtmisel tarvitatakse. Kümnes osa meetertonnist on 1 *tsentner*, mis 100 kilogrammi kaalub.

III. *Pind- ja ruum-mõõdud.* Pindmõõtudeks tarvitatakse pikkusmõõtude ruutüksusi. Põllupinna mõõtüksuseks on *aar*,

mille suurus on 1 ruutdekameeter ehk 100 ruutmeetrit. Tarvitusel on veel *hektaar* = 100 aari ehk 1 ruuthektomeeter. Hektaar on umbes 200 ruutsülla võrra vähem kui tiinumaa.

Ruumi mõõtudeks tarvitatakse pikkusmõõtude kantüksusi. Kõvaollusliste ainete, näit. küttepude, kivisöe jne. mõõtüksuseks on *steer*, mille suurus on 1 *kantmeeter*. Vedelate ainete ruumüksuseks on *liiter*, mille suurus on 1 *kantdetsimeeter*. Tarvitusel on veel *hektoliiter* = 100 liitrit, kuna kordarvuline dekaliiter = 10 liitrit ja osaarvuline detsiliiter (kümnes osa liitrist) harvemini tarvitusele tulevad. Et kantdetsimeetris on 1000 kanttsentiimetrit, siis kaalub 1 liiter puhastatud vett 4°C soojuse juures 1000 grammi.

IV. *Hindmõõdud*. Hinna väärtuse algüksuseks on prantslastel *frank*, mis 5 grammi kaalub ja 900-proovilisest hõbedast münditakse (§ 92). Ka mitmeis teistes riikides, peale Prantsusmaa, on frangi väärtus rahaüksuse aluseks võetud, näit. Soomes ja Eestis, kus see rahaüksus marga nime kannab. Frank'is on 100 *santiimi* (Eestis ja Soomes *penni*).

Tähtsamad aegmõõdud: *ööpäev* ja *aasta* on looduslised mõõtüksused, ja sellepärast ei või nende vahekordades kümne-mõõdustiku suhtarvusi tarvitada. Ööpäeva osaarvulised üksused, niisama ringi (4-ja õigenurga) alamosad, on endiste mõõtkavade järele tarvitusel, kuigi kavatsusi on nurkmõõdustikus kümne-mõõdustiku peale üle minna.

Meetermõõdustik on paljudes riikides tarvitusele võetud. Meil, Eestis, on see mõõdustik apteekides, riigi postiasjanduses, raudteedel ja mõnes muus ametkonnas ning asjaajamises tarvitusele võetud.

Muutmine ehk teisendamine.

§ 96. **Alandamine.** Ülemnimelisi mõõtüksusi ja nende kogusid võime alammnimelisteks muuta, ilma et nende suurus selle juures kasvaks või kahaneks. Säärane muutmine ehk teisendamine nimetatakse *alandamiseks* ja tuleb meeles järjeüksuste alandamist (§ 12), ainult selle vahega, et järjeüksustevaheline suhtarv ikka on kümnekava põhiarv, kuna nimeliste arvude alandamisel mitmesuuruste suhtarvudega tegemist tuleb teha. Alandamine teostatakse kasvatamise teel suhtarvuga. Alandatav arv võib olla ühe- või mitmenimeline. Võtame näituseks mitmenimelise arvu.

Ülesanne. Mitu loodi on 45 puudas 16 naelas 25 loes ühtekokku?

Arvlemine. Ühes puudas on 40 naela; 45 puudas on naelasid 45 korda rohkem, s. o. $40 \text{ n.} \times 45 = 1800 \text{ naela}$. Et nüüd

40 naela võetud 45 korda
 45 puuda 16 naela 25 loodi
 annab kui 45 naela võetud
 $\times 40$
 40 korda, siis on meil, et
 1800 naela
 kordamist kirjutamisel ära
 $+ 16$ „
 hoida, hõlpsam 45-e (puu-
 1816 „
 dade arvu) alla kirjutada
 $\times 32$ „
 40 ja 45 kasvatada 40-ga,
 3632
 andes kasvatisesele järgmise
 $+ 5448$
 alamjärjelise, s. o. naelade
 58112 loodi
 nimetuse. Siin on meil
 $+ 25$ „
 tegemist kasvandi ja kasva-
 58137 „
 taja tingimisi ümberpaigu-
 tamisega. Kasvatisesele, s. o.

1800 naelale, lisame antud 16 naela juure; saame 1816 naela. Need 1816 naela alandame samal viisil ja teel loodideks, kasvatades 32 loodi 1816-ga, mis aga niisama hea on, kui kasvataksime 1816 loodi 32-ga. Saadud loodide arvule (58112) lisame antud 25 loodi juure. Lõpusaadus on 58137 loodi.

Säärases järjekorras talitame igal alandamisjuhusel, vastavat suhtarvu *kasvatajaks* tarvitades.

Kümnemöödistiku valdkonnas alandamist teostades tuleb meil 10-ga või 10-ne astendiga kasvatada. Selleks peame kasvandile nii mitu nulli otsa kirjutama, kui mitu nulli kasvatajas kui järjeüksuses leidub (§ 42). Nii on alandamine meetermöödistikus lihtne ja kerge. Näit. 3 kilom. = 30 hektom. = 300 dekam. = 3000 meetrit = 30000 detsim. = 300000 tsentim. = 3000000 millimeetrit.

35 kilogr. = 35000 grammi = 350000 detsigrammi, jne.

§ 97. **Ülendamine.** Alamnimeliste mõõtüksuste kogude ülemnimelisteks muutmine ehk teisendamine nimetatakse *ülendamiseks* ja on sarnane alamjärjeliste üksustekogude ülendamisele (§ 12). Ülendamine teostatakse jagamise teel suhtarvuga. Näitus:

Ülesanne. 1356748 tolli ülendada verstadeni.

Arvlemine. Ülendame tollid kõige esiti ligemaks ülemnimeliseks üksustekoguks, s. o. jalgadeks. 12 tolli ülenevad üheks jalaks, 1356748 tolli ülenevad nii mitmeks jalaks, kui mitu korda

12 tolli mahuvad 1356748 tolli sisse. Jagamisel leiame, et 12 tolli mahuvad 1356748 tolli sisse 113062 korda. Saadus on arv

1356748 tolli	12 tolli	7 jalga	
— 12	113062 (jalga)	16151 (sülda)	500 sülda
15	— 7	— 1500	32 (versta)
— 12	43	1151	
36	— 42	— 1000	
— 36	10	151 sülda	
74	— 7		
— 72	36		
28	— 35		
— 24	12		
4 tolli	— 7		
	5 jalga		

113062, mis ülendamisest tuletatud *jalgade* arvu kindlaks määrab; sellepärast kirjutame sulgudesse, jagatise 113062 järele (mis isenesest on nimeta arv) tema kaudse nimetähenduse, sõnaga *jalga*. Jäänus on **4 tolli**. Saadud 113062 jalga ülendame samas järjekorras süldadeks; leiame 16151 sülda; jäänusesse tuli **5 jalga**. Sülla ülendame verstadeks; leiame **32 versta** ja jäänusesse saame **151 sülda**. Nii saime, paksemalt trükitud arvudes, mitmenimelise lõpuresultaadi: *32 versta 151 sülda 5 jalga 4 tolli*.

Kümneöödistiku valdkonnas ülendamist teostades tuleb meil 10-ga või 10-ne astendiga jagada. Selleks ei ole rohkem tarvis, kui ülendamiseks antud arvus eraldada samanimeliseks jäänuseks nii mitu alamjärjestist arvamärki nende täielikus, esialgses väärtuses, kui mitu nulli on jagajas suhtarvus, ja ülejäävad arvamärgid ühelistekoguna võtta ülemnimeliseks arvuk (§ 56). Leitud ülemnimelist arvu võime samal viisil omakord ülendada, jne. Näit.

3485 tsentim. = 348 detsim. 5 tsentim. = 34 meetrit 8 detsim.
5 tsentim. = 3 dekam. 4 meetr. 8 detsim. 5 tsentim. ;

5914 detsil. = 591 liitr. 4 detsil. = 5 hektol. 91 liitr. 4 detsil. ;

13856 grammi = 13 kilogr. 856 grammi ;

947 penni = 9 marka 47 penni, jne.

§ 98. **Ülesanded.** — 124. Alanda: a) 32 puuda naeladeks, b) 17 versta süldadeks, d) 64 sülda jalgadeks, e) 44 kaalu leisikuteks, g) 16 ööpäeva tundideks, h) 23 tundi minutiteks, i) 175 meetrit tsentimeetriteks, k) 74 kilogrammi grammideks, l) 346 hektoliitrit liitriteks, m) lihtaasta — tundideks, n) augustikuu — minutiteks, o) 78 nurkkraadi nurkminutiteks, p) üks Riia vakamaa — ruutjalgadeks.

125. Mitu minutit on liigaasta veebruaris rohkem kui lihtaasta veebruaris?

126. Tallinnast Rakvereni on raudteed mööda 98 versta. Mitu meetrit tuleb selle tee pikkus, kui 14 versta võrduvad 15 kilomeetrile?

127. Prantsuse hõbefrank kaalub 5 grammi. Mitu milligrammi on temas rohkem hõbedat kui odavat lisametalli?

128. Sõidurong sõidab tunnis 36 kilomeetrit; mitu meetrit sõidab ta läbistikku igas minutis, mitu meetrit igas sekundis?

129. Endisel ajal tuli raudtee ehitamisel, kui suuri looduslisi takistusi ees ei olnud, versta hinnaks 56000 kuldrubla. Kui palju tuli jalapikkune raudteeosa maksma?

130. Peremees laskis heinaliste tarvis 6 puuda 12 naela rukkijahu leivaks küpsetada, 12 naela jahu iga leiva peale arvates. Mitu leiba ta laskis küpsetada? Kui palju kaalusid kõik leivad kokku, kui igast 3-st naelast jahust saadi 4 naela leiba? Kui palju kaalus iga leib?

131. Kuus linaropsijat, töötades kolm töönaalat, ropsisid igaüks päevas läbistikku 3 leisikut 16 naela linu puhtaks. Kui palju ropsisid nad selle aja jooksul puhtaks, arvates kaaludes, puudades ja naelades?

132. Ülanda: a) 384 naela puudadeni, b) 18354 jalga verstadeni, d) 76859 meetrit kilomeetriteni, e) 18759 ruutsülda vakamaadeks ja ruutsüldadeks, g) 1510 liitrit hektoliitriteni, h) 79166 sekundit tundideni, i) 4259 kantjalga kantsüldadeni; k) ülanda võimaluse piirini: 5605 liini, 18749 detsimeetrit, 59500 loodi, 832 nurkminutit.

133. Osteti 3 riisi kirjutuspaberit ja tehti kaustikuteks, võttes igasse kaustikusse 5 poognat. Mitu kaustikut tehti?

134. Kalevipoeg ja Olev tulid lauakandamitega Soomest. Esimesel oli 16 tosinat viie, sülla pikkuseid, teisel 12 tosinat nelja sülla pikkuseid laudu õlal. Mitme versta ja sülla pikkune riba tekiks, kui need lauad pikuti üksteise otsa paigutada?

135. Maakera ekvaatori ehk poolitaja pikkuskraad on ligikaudu 105 versta. Maakera teeb oma pöörlemisel telje ümber ühe täisringi ühe ööpäeva jooksul. Mitu versta liigub iga asi ja koht ekvaatoril, maakera pöörlemise tagajärjel, läänest idasse 1 tunni jooksul? Mitu versta ja sülda Tartu kohal, kus pöörlemise tee kahekordselt lühem on kui ekvaatoril?

136. Ühe versta ja 46 sülla pikkusel ringteel hakkasid ühes sihis edasi liikuma jalamees ja rattasõitja. Kui jalamees 91 sülda edasi oli jõudnud, sai ettejõudnud rattasõitja tema kätte. Mitu korda kiiremini jõudis rattasõitja edasi?

Tegeldused.

§ 99. Üldised juhtmäärused. Tegeldamine mitmenimeliste arvudega on mõndapidi sarnane tegeldamisele nimeta arvudega. Ühenimeliste järjeüksuste asemele astuvad ühenimelised mõõtüksused. Tegeldades osadekaupa võime kas alamnimelistest või ülemnimelistest mõõtüksustest alata, tarvilikul kohal kasutades alandamist või ülendamist, nagu järjeüksustega tegeldades. Järjeüksuste muutmisel on meil üks kindel arv, nimelt põhiarv 10, käsitada. Mitmenimeliste arvude muutmiskordadel (ka ühenime-

lise arvu teisendamisel) peame heaks võtma isesuguseid suhtarvusi, mis muutmist mitmekesistades teda osalt raskendavad.

§ 100. **Kokkuarvamine.** Kokkuarvamisel ühendame ühenimelised mõõtuksused omanimelistega. Mitmenimelisi üksusi ei või ühenimeliseks kogundiks ühendada muidu kui esimeste muutmise järel ühenimelisteks. Mitmenimeliste üksuste ühenimeliseks muutmine on aga siis võimalik, kui need üksused ühe ja selle sama suuruse mõõtkavasse kuuluvad. Peastkokkuarvamisel on hõlpsam alata tegeldamist üks kord alamnimelistest, teine kord ülemnimelistest üksustest, nii kuidas andmed lubavad. Kirjalikul kokkuarvamisel alatakse tegeldamist harilikult alamnimeliste üksustega, kuigi võimalik on ülemnimelistega algust teha. Analoogiliselt nimeta arvude kokkuarvamisega, kirjutatakse osandite ühenimelised arvud üksteise alla. Nii tuleb meil mitmenimeliste arvude kokkuarvamisel tegemist teha *ühenimeliste arvude kokkuarvamise salkkondadega*. Nende salkkondade saadused (üksikud kogundid) on oma vahel suhtarvulises siduvuses, mis ülendamise kaudu kasutatakse, nagu selgub järgnevast näitusest. Selles näi-

	13 puuda	28 naela	26 loodi	
	19 "	39 "	30 "	
	77 "	37 "	29 "	
	5 "	29 "	31 "	
+	14 "	34 "	27 "	
	1 "	38 "	25 "	
	— "	35 "	19 "	
	6	6		
	135 puuda.	245 n.	40 naela	187 loodi
		— 240	6 (puuda)	— 160
		5 naela.	27 loodi.	32 loodi
				5 (naela)

tuses on antud kokku arvata seitse mitmenimelist osandit. Loodisid kokku arvates saame 187 loodi, mis ülendamisel annavad 5 naela ja **27 loodi**. Ülendamisel saadud 5 naela paneme naeladest osanditele lisaosandina (väiksemalt kirjutades ja lookjoonega lahutades antud osanditest) juure ja arvame naelad kokku. Saame 245 naela, mis ülendamisel annavad 6 puuda ja **5 naela**. Ülendamisel saadud 6 puuda arvame lisaosandina juure puudadest osanditele. Viimaseid kokku arvates saame **135 puuda**. Paksemalt trükitud arvud moodustavad mitmenimelise täiskogundi: *135 puuda 5 naela 27 loodi*.

Kui osandite arv suur ei ole, siis võib ülendamist peastarvlemisel teostada. Näit. on antud 3 mitmenimelist osandit.

Arvame kokku ühenimelised arvud salkkondade kaupa ja kirjutame üksikud kogundid esimese põikjoone alla. Peastarvlemisel ülendades ja

	384	sülda	5	jalga	8	tolli.
+	274	"	4	"	9	"
	400	"	6	"	11	"
	1058	sülda	15	jalga	28	tolli
	$\overline{2}$		$\overline{2}$			
2 versta	60	sülda	3	jalga	4	tolli.

saadud ülemnimelisi arvusid lisaosanditena samanimelistele kogunditele juure andes leiame täiskogundi: *2 versta 60 sülda 3 jalga 4 tolli*, nagu teise põikjoone alla on kirjutatud.

Meetermöödistikus antud osandite kokkuarvamisel on ülendamine kerge ja teostatakse peast.

§ 101. **Mahaarvamine.** Mahaarvamisel lahutame ühenimelised mõõtuksused samanimelistest. Mitmenimeliste arvude mahaarvamine kujuneb *ühenimeliste arvude mahaarvamise salkkondadeks*. Alandamise kaudu muudame tarvilikul korral vähendi, kuna üksikud vahengud (järjekult ka täisvaheng) muutmata jäävad. Tegeldamist algame alanimelistest üksustest. Mahaarvamist ülemnimelistest salkkondadest alates peaksime ka vahengu muutmist käsitama, ja see raskendaks arvlemist märksa. Arvame, näit., 8 ööpäevast 12 tunnist 27 minutist 36 sekundist maha 3 ööpäeva 19 tundi 58 minutit 45 sekundit. Et mahaarvamist teostada,

		²⁴		⁶⁰		⁶⁰
8 ööpäeva	12	tundi	27	min.	36	sek.
— 3	"	19	"	58	"	45
4 ööpäeva	16	tundi	28	min.	51	sek.

selleks peame vähendi muutma: muidu oleks alanimelistes salkkondades mahaarvamine võimata. Muudame alandamise kaudu 1 minuti sekunditeks ja kirjutame saadud 60 sekundit lisavähendina 36-le sekundile juure. Selle läbi väikseneb eelviimases salkkonnas vähend 1 minuti võrra (see vähendamine on punktiga tähendatud) ja suureneb viimases, s. o. kõige alanimelisemas salkkonnas, samavõrra või teisendatult 60-ne sekundi võrra. Viimase salkkonna vähendisse tuleb 36 sek. + 60 sek. = 96 sekundit. Mahaarvamine selles salkkonnas on nüüd võimalik. Niisama suurendame, kus tarvis, ka teised vähendid nende eelmiste vähendite üksuse võrra, seda üksust suurendatava vähendi üksuste nimeliseks alandades. Nii saame antud mitmenimelise vähendi asemele teisendatud samasuuruse vähendi: 7 ööpäeva 35 tundi 86 minutit 96 sekundit, millest võime antud vähendaja otsekohe maha arvata. Täisvaheng on *4 ööpäeva 16 tundi 28 min. 51 sek.*

Vähendis võivad mõnenimelised arvud puududa. Säärasel korral võtame ülemnimelise salkkonna vähendist 1 üksuse, alandame ta järgneva alamnimelise salkkonna üksusteks; neist võtame 1 üksuse ja alandame järgneva salkkonna üksusteks jne. kunni tarviduse piirini. Mahaarvamine teostatakse selle järele, nagu eelmisel korral. Näit. on vaja 64-st verstast maha arvata 45 versta 385 sülda 4 jalga 9 tolli. Antud ühenimelist vähendit

64 versta	500	7	12	muutes ja tähenda-
— 45 „	385 sülda	4 jalga	9 tolli.	tud viisil lisavähendi
18 versta	114 sülda	2 jalga	3 tolli.	did tuletades (nad

on lookjooneliselt alla kriipsutatud) saame teisendatud samasuuruse vähendi: 63 versta 499 sülda 6 jalga 12 tolli, millest võime antud vähendaja otsekohe maha arvata.

Nagu kümnekavas iga järjeüksustekogu väiksem on kui põhiarv 10, nii peavad ka korraliselt, normaalkujuliselt kokkuseatud mitmenimelise arvu üksikud osad (ehk osandid) arvuliselt väiksemad olema kui neid ülemnimestav suhtarv. Kui tegelduste saadused (näit. kokkuarvamisel) teisiti esile on tulnud, siis muudetakse nad ülendamisel normaalkujulisteks. Tegeldamise võimaldamiseks tuleb vahest ka normaalkuju teisendamine (alandamise kaudu) ette, nagu vähendi juures nägime.

§ 102. **Kasvatamine.** Mitmenimelise arvu kasvatamine tähendab selle arvu osandiks võtmist kahe- või mitmekordselt. Siit järgneb, et kasvataja on nimeta arv. Kasvatis kui arv, mis vastab kogundile, on nimeline arv. Mitmenimelise arvu kasvatamine teostatakse osadekaupa, kokkuarvamise eeskujul ja järjekorras. Nii jaguneb mitmenimelise arvu kasvatamine *ühenimeliste arvude kasvatamise salkkondadeks*. Üsikute salkkondade kasvatatud ühtekokku moodustavad täiskasvatise, mis ülendamisel normaalkujuliseks muudetakse. Võtame, näit., 6 Riia vakamaad 164 ruutsülda 56 ruutjalga ja kasvatame 27-ga. Meil on siin kasvatamise

6 Riia vakamaad	164 ruutsülda	56 ruutjalga
		× 27
42	1148	392
+ 12	+ 328	+ 112
162 Riia vakam.	4428 ruutsülda.	1512 ruutj. 49 ruutj.
+ 5 — „ —	+ 30 — „ —	— 147 30(ruuts.)
167 Riia vakam.	4458 ruuts. 800 ruuts.	42 ruutjalga.
	— 4000	
	458 ruutsülda.	

kolme salkkonnaga tegemist. Saame kolm osakasvatist, mis ülendamisel moodustavad kolmeosandilise täiskasvatise: 167 Riia vakam. 458 ruutsülda 42 ruutjalga, nagu tegeldamisel rasvaselt trükitud arvud näitavad. Kasvataja oleme ühekordselt kirjutanud; oleksime ta aga võinud iga osakasvandi alla iseäraldi kirjutada.

Kui osakasvatished mitte liiga suured ei ole, siis teostatakse nende ülendamine peastjagamise abil. Meetermõõdistikus on peastülendamine alati võimalik.

Kasvatamist võime ka ülemnimelistest arvudest alata, aga väljaarvlemine on säärasel korral keerulisem ja aegaviitvam.

§ 103. **Jagamine.** Jagamine on kasvatamise vastastegeldus. Jagand, kui antud kasvatis, on nimeline arv. Kui jagajaks on kasvataja, mis ikka on nimeta arv, siis tuleb jagatisse kasvand. Jagatis on siis nimeline arv. Säärasel korral on meil nimelise arvu *jaotamisega* tegemist. Kui jagajaks on kasvand, mis on nimeline arv, siis tuleb jagatisse kasvataja. Jagatis on siis nimeta arv. Meil on säärasel korral tegemist nimelise arvu *mahutamisega* nimelise arvu sisse. Võtame mõlemad juhused harutusele.

I. *Nimeliste arvude jaotamine.* Olgu antud 116 puuda 28 naela jaotada 16-le. Siin on meil tegemist *ühenimeliste arvude jaotamise salkkondadega*, mis alandamise kaudu üksteisega siduvusse astuvad. Jaotamist alates jagandi ülemnimelisest arvust, alandame jäänused ligemaiks alamnimelisteks mõõtüksus-

116 puuda 28 naela	16
— 112	7 puuda 11 naela 24 loodi.
4 p. = 40 n. $\times 4 = 160$ naela.	
	+ 28 „
	188 naela.
	— 16
	28
	— 16
	12 naela = 32 loodi $\times 12 = 384$ loodi.
	— 32
	64
	— 64

teks; viimastele lisame samanimelised antud üksused juure ja jaotame kogundi 16-le. Nii tegeldame kunni lõpuni. Jagatisse tuleb kolmenimeline arv 7 puuda 11 naela 24 loodi.

Ka ühenimeline jagatis võib jaotamisel anda mitmenimelise jagatise. Näit. 67 versta : 8 = 8 versta 187 sülda 3 jalga 6 tolli. Jaotamine võib mõnikord jäänusega lõppeda — kõige alamnimelisemais mõõtüksustes, kust edasialandamine võimata. Näit. 23 sülda 2 jalga 7 tolli : 14 = 1 süld 4 jalga 8 tolli 2 liini (jäänus 2 liini).

II. *Nimeliste arvude mahutamine.* Nimeliste arvude mahutamine on sarnane nimeta arvude mahutamisele. Mahutamine on ühe suuruse mõõtmine teise samalaadilise suurusega. Siit järgneb, et nimeliste arvude mahutamist kõige hõlpsamini võib teostada, kui jagand ja jagaja on ühenimelised. Kui nad seda ei ole, siis tulevad nad alandamise kaudu ühenimelisteks teha. Mahutamise ise teostatakse kui ühenimeliste või nimeta arvude mahutamise (§§ 58, 59). Näituseks, 12 tundi 53 minutit 20 sekundit : 24 min. 10 sek. Alandame jagandi ja jagaja sekunditeks. Leiame 46400 sek. : 1450 sek. = 32. Teine näitus: 108 meetrit : 13 tsentim. 5 millim. = 108000 millim. : 135 millim. = 800. — Mahutamise võib mõnikord ka jäänusega lõppeda.

§ 104. **Astendamine ja juurendamine.** *Astendamise* korral on meil tegemist pikkusmõõtude ruut- või kantastendamisega. Saadustena ilmuvad ruut- või kantüksuste kogud. Et astendamist hõlpsamini teostada, peame mitmenimelised arvud ühenimelisteks alandama. Ühenimelisi arvusid astendades saame joon- arvule vastavad ruut- või kantarvud, mida tarbekorral mitmenimelisteks võib ülendada. Näit. $(5 \text{ sülda } 4 \text{ jalga})^2 = (39 \text{ jalga})^2 = 39^2 \square \text{ jalga} = 1521 \square \text{ jalga} = 31 \square \text{ sülda } 2 \square \text{ jalga}$.

Võiksime ka §§-des 78 ja 79 antud valemid tarvitada. Näit., eelmisel juhusel saaksime: $(5 \text{ sülda } 4 \text{ jalga})^2 = (5 \text{ sülda} + 4 \text{ jalga})^2 = 25 \square \text{ sülda} + 2 \cdot 5 \text{ sülda} \cdot 4 \text{ jalga} + 16 \square \text{ jalga} = 25 \square \text{ sülda} + 2 \cdot 35 \text{ jalga} \cdot 4 \text{ jalga} + 16 \square \text{ jalga} = 25 \square \text{ sülda} + 70 \text{ jalga} \cdot 4 \text{ jalga} + 16 \square \text{ jalga} = 25 \square \text{ sülda} + 280 \square \text{ jalga} + 16 \square \text{ jalga} = 25 \square \text{ sülda} + 296 \square \text{ jalga} = 25 \square \text{ sülda} + 6 \square \text{ sülda} + 2 \square \text{ jalga} = 31 \square \text{ sülda } 2 \square \text{ jalga}$.

Juurendamisel toimetame vastupidiselt. Ruutjuurendamisel on meil ruutmõõduliste, kantjuurendamisel — kantomõõduliste andmetega tegemist, kuna ruut- ja kantjuurde ilmuvad joonarvud, s. o. pikkusüksuste kogud. Juurendamisele asudes alandame juurealuse arvu ühenimeliseks, kui ta on kahe- või mitmenimeline. Näit. $\sqrt{94 \square \text{ sülda } 18 \square \text{ jalga}} = \sqrt{4624 \square \text{ jalga}} = 68 \text{ jalga} = 9 \text{ sülda}$

5 jalga. — Teine näitus: $\sqrt[3]{9 \text{ kantjalga } 73 \text{ kanttolli}} = \sqrt[3]{15625 \text{ kanttolli}} = 25 \text{ tolli} = 2 \text{ jalga } 1 \text{ toll}$.

Ruut- ja kantjuurendamist on võimalik ka §§-des 78 ja 79 antud valemite abil otsekohe kahe- või mitmenimeliste ruut- ja kantarvude juures teostada. Tegeldamine on säärasel korral raskem ja aegaviitvam.

§ 105. **Ülesanded** — 137. Talunik müüs oma sügisest rukkisaagist 270 puuda 35 naela ära, jättis 84 puuda 20 naela omale ja oma perele aastamoonaks, külvas 32 puuda 30 naela uudseseemnena maha ja andis 65 puuda 25 naela teenijaile ja karjasele osapalgaks. Kui palju rukkid sai ta sügisel rehepeksul?

138. Põllumees külvas kevadel 18 puuda 25 naela otri ja 23 puuda 28 naela kaeru. Oder andis 8 seemet, kaer 6 seemet. Kui palju sai ta kumbagi teravilja sügisel rohkem kui oli külvanud?

139. Kelgumees liugles mäest alla 3 sekundiga. Esimesel sekundil liugles ta 6 sülda 5 jalga allapoole, teisel sekundil 2 sülda ja 3 jala võrra enam

kui esimesel, ja kolmandal sekundil 1 sülla 2 jala võrra vähem kui teisel sekundil. Kui pikk oli liuglemistee kolme sekundi vältusel?

140. Kaks reisijat olid ühel ajal ühest ja samast kohast vastupidistes suhtides oma teekäiku alanud. Päeva jooksul tõusis teepikkus nende vahel 78 kilomeetri ja 620 meetrini. Kui pikk oli tee, mis üks ja mis teine läbi käinud, kui esimene 4 kilom. 182 meetrit teistest rohkem oli käinud?

141. Kahekiviga veskil jahvatati päeva jooksul 38 Riia vakka 30 toopi teri jahuks. Kui palju jahvatas kumbki kivi, kui esimese kivi kolusse 40 toopi teri vähem oli puistatud kui teise kivi kolusse?

142. Kui 12 aastast 302 ööpäevast 2 tunnist 55 minutist võtame ära 3 aastat 300 ööpäeva 16 tundi 50 min. 41 sek. ja kui aastast 365 ööpäeva arvame, siis määravad mitmenimelise jäänuse üksikud mõõtarvud Eesti tähestiku järjekorras need tähed, millest tuttav muinasnimi liitub. Kui sellele jäänusele juure lisame 1 aasta 6 ööpäeva 1 tunni 58 min. 42 sek., siis määrab mitmenimeline kogund samas järjekorras teise tuttava muinasnime. Mis nimed need on?

143. Silgutünder, mis 10 puuda 12 naela kaalus, maksis kuldrahas 22 rubla 68 kop. Mis maksis nael silku, kui tühi tünder, mille raskus oli 34 naela, hinna alla arvamata jääb?

144. Kasarmus, kus 78 sõdurit asumas, anti päevamoonaks igale sõdurile 2 naela 8 loodi leiba. Kui palju leiba anti sõduritele päevas, kui palju nädalas?

145. Peremees laenas veskipidajalt 23 puuda rukkid ja lubas laenu eest aastatasuks kuuteistkümnenda osa laenatud viljast. Ta andis laenatud vilja alles kolmanda aasta lõpul tagasi. Kui suur oli aastatasu ja kui palju andis peremees kolmanda aasta lõpul võlaviljaga ja kasudega ühtekokku tagasi?

146. Kahe mitmenimelise arvu kogund on 165 versta 424 sülda 3 jalga. Esimene arv on teisest 11 korda suurem. Kui suur on kumbki otsitav arv?

147. Rukkilvaljal oli masinamees päeva jooksul 7 Riia vakamaad 460 ☐ sülda talurukist rohkem maha niitnud kui sirbimees käsitsi lõiganud. Kui suure põlluosa oli kumbki lõiganud, kui masinamees sirbimehest 11 korda jõudsamini töötas?

148. Kantanumasse, mille sisemise mahutuse pikkus on 3 meetr. 4 detsim., laius 2 meetr. ja sügavus 2 meetr. 7 detsim., kanti vett toobriga, millesse mahub 1 hektol. 20 liitrit. Mitu toobritäit oli vaja, et anumata täita?

149. Meie ajaarvamise järele on neljikaastasajas 303 lihtaastat ja 97 liigaastat. Kuivõrra peaksime iga aastat pikendama, et meie neljikaastasada sama kaua kestaks kui vana ehk Julianuse ajaarvamise neljikaastasada, millel on 300 lihtaastat ja 100 liigaastat? Kuivõrra peaksime iga kuud aastast pikendama?

150. Paarisroopalisel raudteel jõudis sõidurong kaubarongist, mille kiirus oli tunnis 18 versta 320 sülda, tagant järele sõites mööda. Kaubarongi pikkus, masina puhvritest alates kunni viimase vaguni tagumiste puhvriteni, oli 40 sülda. Sõidurongil reisija pani tähele, et temal kulus 42 sekundit selleks ära, et kaubarongist mööda jõuda. Missuguse kiirusega liikus sõidurong tunnis?

151. Ruutkujulise põllupinna suurus on 5 Riia vakamaad 243 ☐ sülda 29 ☐ jalga. Kui pikk on selle ruutpõllu külg?

152. Põld, mille pikkus oli 38 sülda 4 jalga, laius 17 sülda 1 jalga, vahetati ruutpõllu vastu ümber. Kui pikk oli selle ruutpõllu külg?

153. Kroonuasutus tarvitab aasta jooksul 159 kantsülda 335 kantjalga põletispuud. Kui need puud täisnurkseks võrdkülgseks kantikuks hunnikusse laduda, — kui suur on siis selle kantiku külg?

154. Eestis annab ruutversta suurune kõlblik maatükk kolm keskmise suurusega talukohta. Missugune on selle järele keskpärase talukohta täppis suurus?

155. Ühe talu suurus on kolmas osa ruutverstast, teise suurus — neljas osa ruutverstast. Mitu vakamaad ja alamosa on esimene talukoht teisest suurem?

156. Vankri tagumise ratta ümbermõõt on 6 jalga, esimese ratta ümbermõõt 5 jalga 4 tolli. Kui palju peab vanker edasi liikuma, et ta esimene ratas ühe täielise ringi oma telje ümber rohkem teeks kui tagumine ratas oma telje ümber?

157. Ühes salves on teravilja 9 korda rohkem kui teises. Kui kumbagi salve juure lisame 5 puuda 14 naela, siis on esimeses salves 5 korda rohkem kui teises. Kui palju oli algul kummaski salves?

Ajaarvamine.

§ 106. **Aegmõõtude kahesugune tähendus.** Aegmõõtude nimetusega ühendame esiteks kindla *arvulise tähenduse*, küsimuste peale: *mitu? kui palju? kui kaua?* Näit., aprillis on *kolmkümmend päeva*, sulane töötas *viis tundi*, jne. Siin on meil *aja vältusega*, *aja kestvusega* tegemist. *Aja vältuse* tähenduses ei eraldu aegmõõdud teistest mõõtudest: nii ühed kui teised on hulgamõistelise tähendusega.

Aja vältusel on oma piirid: *algus* ja *lõpp*. Aegmõõtude nimetusi tarvitame teiseks *piirtähenduses*, küsimuste peale: *millal? mil ajal?* Säärasel korral ei tähenda aegmõõdu nimetus otsekohe aegmõõdu üksuste kogu, vaid antud piirtähenduse kaudu võime aegüksuste kogu leida. Näit. õpetund algas *hommikul kell kaheksa*. Kui kaua vältas ehk kestis õpetunni algus? Õpetunni *algusel* ei olnud mingisugust vältust, see *algus* ei olnud muud midagi kui piir, kus eelmise aja vältus lõppes ja järgmine, nimelt õpetunni vältus, algas. Õpetunni alguse järele leiame, et aja vältus keskööst kunni õpetunni alguseni oli 8 tundi.

§ 107. **Ajaarvamine ja tema lähtekohad.** Aega, mis piirtähenduses antud, nimetatakse kalendriliseks ajaks. Ajaarvamisel on meil kalendriliste andmetega tegemist, ja need andmed on sagedasti rippuvad ühe või teise kalendri määrustest. Kalendriline ajaarvamine ei tarvitse igakord täpsalt õige olla, sest mõned ajaarvamise mõõtüksused, näit. *aasta*, *kuu*, on kõikuva tähendusega. Kella pendel teeb, näit., jaanuari-kuu jooksul rohkem võnkeid kui veebruari-kuu jooksul, liigaastas rohkem kui lihtaastas, jne. Kodanlises ärielus, kus piinlik täpsus nõutav ei ole, arvatakse sagedasti kuud oma vahel ühepikkusteks, niisama aastad ühevältuslisteks, näit. aastate või kuude eest palgamaksimise suhtes, mõnesugustes pangaoperatsioonides jne.

Aja vältus on tingitud miskisugusest sündmusest. Selle järele, missuguse kestvusega on sündmus, võetakse ajaarvamise lähtekohaks ehk algiipiiks kesköö kui ööpäeva algus, nädala,

kuu või aasta algus. Kauemkestvate sündmuste korral võetakse lähtekohaks miskisugune ajalooliselt tähtis sündmus ja arvatakse aega sellest sündmusest kui aja vältuse algpiirist edasi oleviku või tagasi mineviku poole. Meil, ristiusulistel, on sääraseks lähtekohaks ristiusu põhjendaja, *Jeesuse Kristuse*, sündimine. Vanal Rooma rahval oli lähtekohaks *Rooma linna* asutamine, teistel ajaloolistel rahvastel mõned muud tähtsad sündmused. Võtame näituse: Laev sõitis merele 16. jaanuaril 1916. aastal kell 14 ja tuli tagasi sadamasse 20. märtsil samal aastal kell 9. Siin tuleb lähtekohaks võtta 1916-da aasta algus ja sellest lähtekohast välja minnes määrata kindlaks aja vältus: 1) aasta algusest kunni laeva väljasõiduni, 2) aasta algusest kunni laeva tagasitulekuni. Kui aga laev mitte väljasõidu aastal, vaid näit. 1919-dal aastal tagasi tuli, siis arvame esimest ajavältust Kristuse sündimisest kunni laeva väljasõiduni, teist — Kristuse sündimisest kunni laeva tagasitulekuni.

§ 108. **Ülesannete liigitamine.** Kalendrilise ajaga, mis ainult piirtähenduses esineb, ei saa me tegeldada. Tegeldamiseks on meil tarvis arvused, mis kindlaid mõõtüksuste hulkasid tähendavad. Kalendri ajamääruste kaudu võime niisugused arvud leida, välja minnes mõnesugusest lähtekohast, nagu eelmises §-is seletatud. Ajaarvamises võib kolmesuguseid küsimusi ette tulla — selle järele kas otsitavaks on sündmuse *vältus*, sündmuse *algus* või sündmuse *lõpp*. Kui mõnesugune sündmus ajaarvamise lähtekohaks võetakse, siis on sellel sündmusel piirtähendus ja tema kestvust ei võeta arvesse.

§ 109. **Sündmuse vältus.** Kui sündmuse vältus on otsitav, siis on andmeteks selle sündmuse algus ja lõpp kalendriliste arvudena. Nende viimaste kaudu leiame ajavältused 1) lähtekohast kunni sündmuse alguseni, 2) lähtekohast kunni sündmuse lõpuni. Nende kahe ajavältuse vaheng annab meile sündmuse otsitava vältuse. Võtame näituseks järgmise ülesande:

Laev algas reisi ümber maailma ja sõitis sadamast välja 19. juunil 1913. aastal kell 9¹⁵ hommikul ja jõudis samasse sadamasse tagasi 15. märtsil 1916. aastal kell 3⁴⁵ pärast lõunat. Kui kaua oli laev reisil?

Siin tuleb lähtekohaks võtta Kristuse sündimine. Kristuse sündimisest kunni laeva väljasõiduni läks mööda 1912 täielikku aastat. Oli järgneva aasta juuni-kuu. See kuu ei olnud veel lõpul. Tähendab: 1913-dast aastast oli 5 kuud mööda läinud. Oli kuuenda kuu 19-nes päev, kui sõit algas. Sellest kuust oli terveni 18 päeva mööda läinud; 19-dast päevast oli möödas 9 tundi 15 minutit. Nii oli Kristuse sündimisest kunni laeva-

sõidu alguseni mööda läinud 1912 aastat 5 kuud 18 päeva 9 tundi 15 minutit. Sarnasel viisil leiame, et Kristuse sündimisest kunni laeva tagasitulekuni oli mööda läinud 1915 aastat 2 kuud 14 päeva 15 tundi 45 min. Et reisi kestvust leida, selleks arvame teisest

	1915	aast.	¹² 2	kuud	²⁹ 14	päeva	15	tundi	45	min.
—	1912	"	5	"	18	"	9	"	15	"
	2 aast.		8	kuud	25	päeva	6	tundi	30	min.

mitmenimelisest arvust esimese maha selles järjekorras ja samal viisil, nagu mitmenimeliste arvude mahaarvamise korral (§ 101) nägime. Kuude ja aastate kalendrilist pikkust tuleb siin silmas pidada, sest kuud on päevade arvu poolest mitmesugused. Praegusel juhul on tarvis vähendi alandamisel 1 kuu muuta päevadeks. Alandatav kuu on teine kuu, s. o. veebruar. Veebruaris võib 28 või 29 päeva olla. Alandatav teine kuu (veebruar) kuulub 1916-dasse aastasse, s. o. liigaastasse. Nii tuleb siin veebruaris võtta 29 päeva. Otsitav vaheng, s. o. laevasõidu vältus, oli 2 aastat 8 kuud 25 päeva 6 tundi 30 minutit. — Selle ja teiste sarnaste ülesannete lahendamiskäigust järeldame juhtmääruse:

Et sündmuse vältust ehk kestvust leida, selleks peame ajajärgust, mis Kristuse sündimisest kunni antud sündmuse lõpuni mööda on läinud, maha arvama ajajärgu, mis Kristuse sündimisest kunni antud sündmuse alguseni on mööda läinud.

On lähtekoht teistsugune kui Kristuse sündimine, siis astub juhtmääruses viimase lähtekoha nimetuse asemele selle teistsuguse lähtekoha nimetus.

§ 110. **Sündmuse algus.** Kui sündmuse algus on otsitav, siis on andmeteks 1) sündmuse vältus ühe- või mitmenimelise arvuna, 2) sündmuse lõpp kalendrilise arvuna. Nende andmete abil leiame kalendrilise arvu, mis piirtähisena määrab sündmuse alguse. Võtame näituseks järgmise ülesande:

Randlane, kes 62 aastat 8 kuud 17 päeva 20 tundi vanaks oli saanud, uppus kalapüügil 14. juulil 1918 aastal kell 10 õhtul. Millal ta sündis?

Lähtekohaks Kristuse sündimist võttes leiame, et Kristuse sündimisest kunni randlase surmani on mööda läinud 1917 aastat 6 kuud 13 päeva 22 tundi. Sellest ajast arvame maha randlase vanaduse, s. o. 62 aast. 8 kuud 17 päeva 20 tundi. Mahaarva-

	1917	aastat	¹² 6	kuud	³⁰ 13	päeva	22	tundi.
—	62	"	8	"	17	"	20	"
	1854 aastat		9	kuud	26	päeva	2	tundi.

misel tuleb vähendi üks kuu, nimelt kuues, s. o. juuni-kuu, lisa-vähendiks alandada. Et juunis 30 päeva on, siis saame lisa-vähendiks päevade juure 30 päeva. Täisvaheng 1854 aastat 9 kuud 26 päeva 2 tundi näitab aega, mis mööda on läinud Kristuse sündimisest kunni randlase sündimiseni. Selle täisvahengu järele on Kristuse sündimisest edasi oleviku poole mööda läinud 1854 aastat täieni ja osa 1855-dat aastat. Tähendab: randlane sündis 1855-dal aastal. Aastast 1855 on täieni mööda läinud 9 kuud ja osa 10-dast kuust, s. o. oktoobrist. Tähendab: randlane sündis oktoobri-kuus. Sellest kuust on mööda läinud 26 päeva täieni ja 2 tundi 27-dat päeva. Järjekult: randlane sündis 27. oktoobril kell 2 hommikul. Nii leidsime, et randlane sündis 27. oktoobril 1855 aastal kell 2 hommikul. — Selle ja teiste sarnaste ülesannete lahendamiskäigust järeldame juhtumärruse:

Sündmuse alguse leiame, kui sündmuse vältuse maha arvame ajajärgust, mis Kristuse sündimisest kunni antud sündmuse lõpuni mööda on läinud, ja leitud vahengu kaudu, mis kujutab ajajärku Kristuse sündimisest kunni antud sündmuse alguseni, uue kalendrilise ajaarvu tuletame.

Ka siin võib Kristuse sündimise asemele mõne teise lähtekohta nimetus astuda — rippuvalt andmetest.

§ 111. **Sündmuse lõpp.** Kui sündmuse lõpp on otsitav, siis on andmeteks 1) sündmuse vältus, 2) sündmuse algus kalendrilise arvuna. Nende andmete abil leiame kalendrilise arvu, mis piirtähendusena määrab sündmuse lõpu. Võtame näituse:

Noormees astus kooli 29. septembril 1913. aastal kell 12 päeval ja lahkus koolist 4 aasta 6 kuu 25 päeva järele, kui õppimise oli lõpetanud. Millal lõpetas ta õppimise?

Kristuse sündimisest kunni nooremehe koolitulekuni oli mööda läinud 1912 aastat 8 kuud 28 päeva 12 tundi. Sellele

	1912 aastat	8 kuud	28 päeva	12 tundi.
+	4 „	6 „	25 „	— „
	1916 aastat	14 kuud	53 päeva	12 tundi.
	<u>1</u>	<u>1</u>		
	1917 aastat	3 kuud	22 päeva	12 tundi.

ajajärgule lisame juure kooliaja vältuse. Päevade osakogundist üht kuud ülendamise teel eraldades peame silmas, et see kuu kalendrilises järjekorras kolmandaks on aastast (märtsi-kuuks) ja sellepärast 31 päeva sisaldab. Täiskogund 1917 aastat 3 kuud 22 päeva 12 tundi näitab aega, mis Kristuse sündimisest kunni nooremehe kooliaja lõpuni mööda on läinud. Selle täiskogundi

järele leiame, et noormees lõpetas õppimise ja lahkus koolist 23. aprillil 1918. a. kell 12 päeval. — Selle ja teiste sarnaste ülesannete lahendamiskäigust järeldame juhtmääruse:

Sündmuse lõpu leiame, kui ajajärgule, mis Kristuse sündimisest kunni antud sündmuse alguseni mööda on läinud, juure lisame sündmuse vältuse ja kui leitud kogundi kaudu, mis kujutab ajajärku Kristuse sündimisest kunni antud sündmuse lõpuni, uue kalendrilise ajaarvu tuletame.

Andmetest rippuvalt võib Kristuse sündimise asemele mõne teise lähtekoha nimetus astuda.

§ 112. **Kalendritest.** Kalender, mille järele meie oma aasta ja ööpäeva vahetada § 93-das oleme kujutanud ja mis meil 1. veebruarist saadik 1918. aastast maksev, nimetatakse *Gregorianuse* kalendriks. Hiljuti, Vene ajal, oli meil *Julianuse* kalender tarvitusel. Julianuse kalendri järele on iga aasta läbistikk 365 ööpäeva 6 tundi pikk. Kolm järgnevat aastat on lihtaastad, iga neljas aasta on liigaasta. Julianuse aasta on läbistikku pikem kui Gregorianuse aasta. Sellepärast on Julianuse ajaarvamine Gregorianuse ajaarvamisest aastasadade jooksul 13 ööpäeva taha jäänud; sest mida lühem meie (Gregorianuse kalendri järele arvatud) aasta, seda enne jõuame uude aastasse. Gregorianuse kalendri neljikaastasajas on 303 lihtaastat ja 97 liigaastat (§ 93), Julianuse kalendri neljikaastasajas 300 lihtaastat ja 100 liigaastat. Järjelikult on 400 Julianuse aastat 3-me ööpäeva võrra pikemad kui 400 Gregorianuse aastat (ülesanne 149).

Meie läksime 1. veebruaril 1918. aastal uue ehk Gregorianuse kalendri peale üle; sellepärast oli meil 1918. aasta veebruaris ainult 15 päeva, kuna 13 päeva välja langesid. Enne seda aega valmistati kõik dokumendid ja peeti ametlikud raamatud, näit. kirikuraamatud, Julianuse ehk vana ajaarvamise põhjal. Nüüd on sagedasti vaja vana kalendri aega uue järele ümber kirjutada. Siin tuleb silmas pidada, et 1900. aasta oli Gregorianuse kalendri järele lihtaasta, aga Julianuse kalendri järele liigaasta. Enne 1900. aastat oli ajaarvamiste vahe 12 päeva, pärast 1900. aastat 13 päeva. Et vanadustunnistustes uue kalendri aja peale üle minna, selleks peab vana kalendri arvule 12 päeva juure lisama, kui isik *enne 1900. aastat* on sündinud, ja 13 päeva juure — kui isik *pärast 1900. aastat* sündis. Piirtähiseks on kesköö vana kalendri 28. ja 29. veebruari vahel 1900. a.

§ 113. **Ülesanded.** 158. Kui palju aega läks mööda: a) *keskööst kunni* kella 9-ni hommikul, kunni kella 10⁴⁰ e. l. (= enne lõunat), kunni kella 2¹⁵ p. l. (= pärast lõunat), kunni kella 7¹⁸ p. l., kunni kella 17²⁴, kunni kella 21⁵⁵ (arvates viimases kahes küsimuses kella järele, mis kahekümneneljalise numbrilauaga ja 24-ja tunninäitajaga)? b) *nädala algusest kunni* kesknädalani kell 7 e. l., kunni kella 18-ni teisipäeval, kunni kella 9⁵⁰ p. l. laupäeval, kunni kella 16¹⁷ pühapäeval, kunni 16^h27^m50^s neljapäeval? d) *jaanuari algusest kunni* 17. jaanuarini kell 8¹⁵ e. l., kunni 29. jaanuarini kell 5¹⁶ p. l., kunni 30. jaan. kell 21⁴², kunni 31. jaanuarini 13^h42^m16^s? e) *aasta algusest kunni* 16. II (s. o. 16. veebruarini) kell 7 hommikul, kunni 13. V kell 18⁵⁴, kunni 27. X kell 6⁴⁰ p. l., kunni 24. XII kell 9⁴⁵ õ. (= õhtul)? g) *Kristuse sündimisest kunni* 25. XI kell 6¹⁴, kunni 28. III kell 22⁵⁸, kunni mardipäevani kell 17¹⁰, kunni jõulu teise pühani kell 15⁰⁵, kunni jaanipäevani 16^h18^m24^s, kunni 16. III 15^h44^m46^s mineval aastal?

159. Millal on mööda: a) *keskööst* 13 tundi 30 min.? 16 tundi 17 min. 50 sek.? 855 min.? 1274 min. 35 sek.? 22 tundi 16 min. 50 sek.? b) *nädala algusest* 2^h päeva 6 tundi 15 min.? 5 p. 16 t. 40 m. 30 sek.? 154 päeva? 5790

min.? 452275 sek.? d) *aprilli algusest* 18 päeva 13 tundi? 5 päeva 14 tundi 8 min.? 17 p. 30 m. 15 sek.? 66 p. 8 t. 18 min.? 176 tundi 45 min.? 27 päeva 30 min.? e) *liht- ja liigaasta algusest* 2 kuud 4 päeva 5 tundi? 8 k. 14 p. 45 sek.? 169 p. 3 tundi? 4409 tundi? 131145 min.? 34 näd. 3 p. 30 min.? g) *Kristuse sündimisest* 1380 aastat 7 kuud 15 päeva? 1493 a. 9 k. 2 p. 5 t.? 1918. a. 1 k. 1 p. 17 t. 30 min.? 525966 päeva (arvesse võttes liht- ja liigaastate päevade arvu)?

160. Õpetunnid algasid hommikul kell 8¹⁵ ja lõppesid kell 1⁴⁵ p. l. Kui kaua kestis päevane koolitöö?

161. Koidula sündis uue kalendri 24. detsembril 1843. a. ja suri 10. augustil 1886. a. Kui vanaks ta sai?

162. Jakob Tamm sündis 6. mail 1861. a., Jakob Pärn sündis 28. oktoobril 1843. a. Mitu aastat varem sündis Pärn?

163. Kevade 1920-dal aastal algas 21. märtsil kell 11⁴⁸ p. l.; sama aasta suvi algas 21. juunil kell 7²³ p. l. Kui kaua kestis kevade?

164. Eesti rahva pärisorjus lõpetati 7. aprillil 1819. aastal ja Eesti tunnistati 100 aastat 9 kuud 26 päeva hiljem Tartu rahulepingu põhjal Venemaast rippumatuks. Millal teostati (kirjutati alla) Tartu rahuleping?

165. Täielik kuuvarjutus 1920. aastal oli 2. mail kell 3¹⁴ hommikul. Järgmine täielik kuuvarjutus algas 5 kuud 25 päeva 11 tundi 12 minutit hiljem. Millal algas järgmine täielik kuuvarjutus?

166. Jüripäeval asusid teenistusse kaks meest. Esimene oli 12 päeva peale, teine 4 kuu peale käubeldud. Kui mõlemad olid kokkulepitud aja täis teeninud, jäi esimene veel 4-ks kuuks, teine 12-ks päevaks teenima. Kumb neist teenis kauem ja kui palju kauem?

167. Aurulaev sõitis merele 16. oktoobril 1919. aastal kell 18⁴⁵ ja viibis merireisidel 1 aasta 4 kuud 4 päeva 16 tundi 48 min., enne kui kodusadamasse tagasi tuli. Millal ta tagasi tuli?

168. Lutheruse usupuhastuse alguseks loetakse 31. oktoobri-kuu päev 1517. aastal; Kolumbus leidis Ameerika rannastikku kuuluva esimese saare (Guanahani) 12. oktoobril 1492. aastal. Kui suur on nende kahe sündmuse ajavaheng?

169. Laevnik, kes 16. veebruaril 1876. aastal kell 7 hommikul oli sündinud, astus merikooli poisikesena, kui ta 11 aastat 4 kuud 17 päeva vana oli. Merikoolis õppis ta 6 aastat 8 kuud 14 päeva. Peale seda oli ta mõne aja merisõidus, kust 13. märtsil 1898. aastal kell 9 õhtul kodukohta tagasi tuli. Kui kaua kestis merisõit?

170. Kumb ajavältus on pikem ja kui palju pikem: a) Jõulu esimesest pühast 3 kuud edasi või 3 kuud tagasi? b) mihklipäevast 90 ööpäeva edasi või 3 kuud edasi? 90 ööpäeva tagasi või 3 kuud tagasi?

171. Maakera pöörlemisel oma telje ümber läänest idasse näib päike vastupidises sihis (idast läände) liikuvat. Päike teeb ööpäeva jooksul terve ringi, s. o. 360 pikkuskraadi, ümber maakera. Kui palju liigub päike lääne poole igas tunnis ja igas minutis ekvaatori kohal, kui sealne pikkuskraad on 105 versta ehk 111 kilomeetrit? Kui suur on tunnikellade ajavahe kohtadel, mille vahe pikkuskraadides on 30°, 60°, 120°, 270°, 360°?

V. Täisarvude jagatavus.

Algarvud ja kordarvud.

§ 114. **Algarv ja kordarv.** Täisarv, mis ainult iseenese või 1 peale jäänuseta on jagatav, nimetatakse *algarvuks*. Nii on 2, 3, 5, 7, 11 jne. algarvud. *Kordarv* (§ 46) on peale iseenese ja 1 veel jagatav mõne täisarvu läbi, mis 1-st suurem ja antud kordarvust väiksem on. Sellega peab kordarvul vähemalt kolm isesuurst jagajat olema. Arv 4 on kordarv, sest et ta jäänuseta jagub iseenese, 1 ja 2 peale. Antud arv on ta jagaja ning jagatise kasvatis. Siit järgneb, et antud arvu jagajat ka selle arvu teguriks võime nimetada. Täisarvu jagajad ehk tegurid võivad olla algarvud või mõnesugused kordarvud. Näit. arvu 12-ne jagajad: 1, 2, 3 on algarvud, 4 ja 6 on kordarvud. Kahel või mitmel täisarvul võib *ühine tegur* olla. Näit., arvude 12-ne, 20-ne ja 36-e ühised tegurid on 1, 2 ja 4. Antud arvude ühised tegurid nimetatakse ka *ühisteks jagajaiks*. Arvud, mille ühiseks jagajaks ainult 1 on, nimetatakse *vastastikku algarvudeks* ehk *üldühelisteks arvudeks*. Näit., 8 ja 9; 20 ja 21, jne. Algarvud on oma vahel kõik vastastikku algarvud ehk üldühelised arvud, sest nende üldiseks ehk ühiseks jagajaks on ainult arv 1.

§ 115. **Kordarvude lahutamine algteguriteks.** Iga kordarvu võime lahutada algteguriteks, s. o. kujutisliseks kasvatiseks, mille tegurid on algarvud. Suuremate arvude lahutamisel algteguriteks jagame antud arvu esiteks väiksematele algarvudele, alates 2-st. Algarv 1 on küll iga täisarvu teguriks, aga jagamine 1-le ei muuda antud arvu. Algjagaja kirjutatakse püstjoonest paremale poole, antud arvu kohale, kuna jagatis antud arvu alla kirjutatakse. Kui jagatis on algarv, siis oleme algteguriteks lahutamisega lõpul. On jagatis kordarv, siis lahutame ta samal viisil, võttes jagajaks kõige väiksema võimaliku algarvu. Lahutamine jõuab lõpule, kui jagatiseks ilmub algarv. Et seda jagatist teiste algarvuliste jagajatega ühte püstitta paigutada, selleks võtame ta jagajaks; nii tuletame viimase jagatisena algarvu 1. Püstjoonest paremale poole ilmunud algarvulised jagajad

on antud arvule algteguriteks. Reaslahutamisel saame needsamad algtegurid järgmisel viisil:

$$13860 = 2 \cdot 6930 = 2 \cdot 2 \cdot 3465 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1155 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 385 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 77 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11.$$

Kordarvu lahutamisel algteguriteks võivad viimased ühe-, kahe- või mitmekordselt esineda. Ühe ja sellesama algteguri kordumine on tema astend. Üksik tegur on algastendis ehk esiastendis. Nii võime ütelda, et kordarv lahutatakse algarvude astendite kujutisliseks kasvatiseks. Eelpool lahutatud arv $13860 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$. Arv $217800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11^2$.

Kui antud kordarv kergesti lahuneb kaheks või mitmeks kordarvuliseks teguriks, siis võime antud arvu lahutamise teostada nende kordarvuliste tegurite kaudu. Näit. $62500 = 625 \cdot 100 = 125 \cdot 5 \cdot 25 \cdot 4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 = 2^2 \cdot 5^6$.

§ 116. **Algarvude kindlaksmääramine.** Loomulikus arvudereas, 1-st kunni lõpmatuseni, ilmuvad kõik algarvud ja kõik kordarvud. Et algarvused leida kunni teatud piirini, näit. 10000-ni, selleks kriipsutame läbi loomulikus arvudereas kõik kordarvud. Esimesed kolm arvu: 1, 2 ja 3, kui algarvud, jäävad läbi kriipsutamata. Läbikriipsutamist võime mehaaniliselt niiviisi teostada, et läbikriipsutamata 2-le järgnevatest arvudest iga teise, läbi kriipsutamata 3-le järgnevatest iga kolmanda, läbikriipsutamata 5-le, 7-le jne. järgnevatest iga viienda, seitsmenda jne. maha kriipsutame, selle peale vaatamata, et mõni arv kahe või mitme algarvu kordarvuna kahele või mitmele korrale läbi tuleb kriipsutada. Arvud, mis loomulikus arvudereas jäävad läbi kriipsutamata, on algarvud.

Üksikute väiksemate arvude juures on kerge kindlaks teha, kas nad on alg- või kordarvud. Suuremate arvude juures tuleb seda katsete teel kindlaks teha. Jagame antud arvu kordamööda algarvudele, alates väiksemate algjagajatega. Kui algjagaja viimaks nii suur on võetud, et jagatis väiksem ilmub kui jagaja, kuna jagamine igakord jäänuse annab, siis on antud arv algarv. Sest kui antud arv jäänuseta jagub algarvule, mis jagatisest suurem on, siis pidi ta juba enne jaguma ka sellele jagatisele kui algarvule, ehk jagatise algtegurile, kui jagatis ilmub kordarvuna. Näit. 937 on algarv, sest tema jagamisel algarvudele kunni 31-ni ilmub jäänus, aga jagamisel algarvule 31 on jagatis väiksem kui 31. Sagedasti otsustame jagatavuse tunnuste abil, kas antud arv on kordarv.

§ 117. **Antud arvu jagajate hulk.** Algarvul on ainult kaks jagajat, 1 ja algarv ise. Kordarvul on isesuuruseid jagajaid enam. Katsume isesuuruste jagajate arvu kindlaks määrata. Võtame selleks miskisuguse kordarvu, näit. 126000. Lahutame selle arvu algteguriteks. Leiame, et $126000 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$. Antud arv on jagatav leitud kujutise igale astendile, niisama ka iga leitud astendi jagajale. Üksikute astendite jagajad on:

- | | | | | | |
|----|---------|-------|----------|-------------------------------|-------------------|
| 1) | astendi | 2^4 | jagajad: | 1, 2, 2^2 , 2^3 , 2^4 , | see on 5 jagajat; |
| 2) | " | 3^2 | " | 1, 3, 3^2 , | see on 3 jagajat; |
| 3) | " | 5^3 | " | 1, 5, 5^2 , 5^3 , | see on 4 jagajat; |
| 4) | " | 7^1 | " | 1, 7, | see on 2 jagajat. |

Igal astendil on niipalju isesuurseid jagajaid, kui suur on astendaja, mis 1 võrra suurendatud. Nagu kujutislikest kasvatistest näha, jagub arv 126000 kasvatisele $2^4 \cdot 3^2$, tähendab — ka selle kasvatise igale jagajale. Kui palju leidub viimaseid? Kui astendi 2^4 iga jagajat kasvatame järgemööda astendi 2^3 iga jagajaga iseäraldi, siis saame kasvatise $2^4 \cdot 3^2$ mitmesugused jagajad. Kasvatades esimese astendi (2^4) jagajad, igatihte iseäraldi, teise astendi *esimese* jagajaga, s. o. 1-ga, leiame esimese astendi 5 jagajat. Kasvatades esimese astendi jagajad teise astendi *teise* jagajaga, s. o. 3-ga, saame 5 uut jagajat, ehk eelmistega ühtekokku $5 \cdot 2$ jagajat. Esimese astendi jagajaid, igatihte iseäraldi, teise astendi *kolmanda* jagajaga kasvatades saame 5 uut jagajat, ehk eelmistega ühtekokku $5 \cdot 3$ jagajat, nende hulgas kõige väiksem jagaja 1 ja kõige suurem $2^4 \cdot 3^2$.

Kujutise järele jagub arv 126000 ka kasvatisele $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3$, tähendab — ka selle kasvatise igale jagajale. Need mitmesugused jagajad, tähendab, ka nende arvu leiame, kui kasvatise $2^4 \cdot 3^2$ iga jagaja kasvatame iseäraldi astendi 5^3 iga jagajaga. Kasvatades astendi 5^3 *esimese* jagajaga, s. o. 1-ga, saame kasvatise $2^4 \cdot 3^2$ kõik $5 \cdot 3$ jagajat. Kasvatades astendi 5^3 *teise* jagajaga, saame $5 \cdot 3$ uut jagajat, — eelmistega ühtekokku $5 \cdot 3 \cdot 2$ jagajat. Nisama saame astendi 5^3 *kolmanda* jagajaga kasvatades, ühes eelmistega kokku, $5 \cdot 3 \cdot 3$ jagajat, sama astendi *neljanda* jagajaga kasvatades, ühtekokku eelmistega, $5 \cdot 3 \cdot 4$ jagajat, nende hulgas esimene, kõige väiksem jagaja 1, viimane, kõige suurem $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3$.

Leitud üksikuid jagajaid iseäraldi kasvatades neljanda astendi 7^1 iga jagajaga, leiame ühtekokku $5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2$ isesuurst jagajat, nende hulgas 1 kui kõige väiksem ja antud arv 126000 kui kõige suurem jagaja.

Leitud jagajate hulk $5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2$ tuleb kasvatise algtegurite astendajast sel teel, et iga astendaja 1-he võrra suurendatakse ja niiviisi suurendatud astendajad isekeskis kasvatatakse.

Et järeldus iga teise arvu jagajate hulga määramisel samasugune on, siis järgneb siit põhimäärus:

Antud arvu jagajate hulk on nii suur, kui selle arvu algtegurite ühe võrra suurendatud astendajate kasvatis, kusjuures algtegur 1 arvesse jääb võtmata.

Näit. arvu $126000 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$ jagajate hulk $= (4+1)(2+1)(3+1)(1+1) = 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 = 120$; arvu $42592 = 2^5 \cdot 11^3$ jagajate hulk $= (5+1)(3+1) = 6 \cdot 4 = 24$; algarvu $101 = 1 \cdot 101^1$ jagajate hulk $= (1+1) = 2$, jne.

Kui algtegurite astendajad täheharudega $a, b, c, \dots, l, m, n$, avaldame, siis saame antud arvu jagajate hulga tarvis üldkujulise valemi $(a+1)(b+1)(c+1) \dots (l+1)(m+1)(n+1)$.

Tegelduste saaduste kaudne jagatavus.

§ 118. **Kogundi ja vahengu jagatavus.** Kogundi ja vahengu jagatavuse üle otsustame selle järele, kas osandid, vähend ja vähendaja mõnele arvule jagatavad on või mitte. Siin on meil tegemist järgmistega põhilausetega ehk väidenditega:

Väidend 1. *Kogund on antud arvule jagatav, kui iga osand sellele antud arvule on jagatav.*

Kui osandid on antud arvule jagatavad, siis on nad antud arvu kordarvud ehk tema mitmekordsed. Ühe ja sellesama arvu mitmekordsed annavad ühtekokku sellesama arvu mitmekordse, ja see mitmekordne on antud arvule kui osaarvule jagatav.

Näit. kogundi $18 + 30 + 42$ osandid on 6-le jagatavad, sellega 6-e kordarvud, ja nimelt: 18 on 6-e kolmekordne, 30 on 6-e viiekordne, 42 on 6-e seitsmekordne. Kogund on 6-e viieteistkümnerekordne, tähendab: 6-le jagatav.

Siit järgneb, et kui üks arv on teisele jagatav, siis on ka esimese arvu kordarvud, nende seas ka tema astendid, teisele arvule jagatavad, sest kordarv ei ole muud midagi kui ühesuuruste osandite kogund.

Väidend 2. *Kahe arvu vaheng on antud kolmandale arvule jagatav, kui mõlemad esimesed arvud on kolmandale jagatavad.*

Kui mõlemad kaks arvu on kolmandale jagatavad, siis on nad kolmanda mitmekordsed; tähendab: ka nende vaheng on kolmanda kordarv ja sellena kolmandale jagatav.

Näit. arvud 52 ja 39 on 13-le jagatavad, sellega on nad 13-ne kordarvud: esimene on 13-ne neljakordne, teine — 13-ne kolmekordne. Vaheng on 13-ne ühekordne, nii siis 13-le jagatav.

Siit järgneb, et kui vähendi ja vähendaja mõnele arvule jagame, siis jagub sellele arvule ka vaheng, ja ümberpöörduvalt: kui vähendi ja vähendaja mõne arvuga kasvatame, siis kasvatame selle arvuga ka vahengu.

Väidend 3. *Kui kahe arvu kogund ja üks osanditest on mõnele antud arvule jagatavad, siis on ka teine osand sellele antud arvule jagatav.*

Teine osand on kogundi ja esimese osandi vaheng; sellepärast on eelmise (teise) väidendi põhjal ka teine osand antud arvule jagatav.

Väidend 4. *Kui kaks arvu on jagamisel kolmandale ühejäänuslised, siis on mõlemate esimeste vaheng kolmandale jagatav, ja ümberpöörduvalt: kui kahe arvu vaheng on jagatav kolmandale, siis on need kaks arvu jagamisel kolmandale ühejäänuslised.*

Jagamisel kolmandale arvule lahutub kumbki antud arv kaheks osandiks, millest esimene on kolmanda arvu (s. o. jagaja) mõnesugune kordarv, teine — üks ja seesama jäänus. Vahengu leidmisel mahaarvamist osadekaupa teostades arvame kolmanda arvu kordarvust maha sellesama arvu kordarvu, ja nii tuletame kolmanda arvu uue kordarvu. Vähendi ja vähendaja ühesuurused teised osandid kaovad mahaarvamisel. — Näit. arvud 67 ja 46 annavad jagamisel 7-le jäänuseks 4. Vaheng $67 - 46 = 21$ on 7-le jagatav.

Ümberpöörduvalt: Kahe arvu vaheng on jagatav kolmandale. Väiksema arvu jagamisel kolmandale saadakse mõnesugune jäänus. Tarvis tõestada, et ka suurema arvu jagamisel kolmandale sama suurune jäänus tuletatakse. — Suurem arv kui vähend on võrdne

väiksema arvu ja vahengu kogundile. Väiksema arvu võime omakord kujutada kahe osandina, millest esimene on kolmanda arvu (s. o. jagaja) kordarv, teine — väiksema arvu jagamisel tuletatud jäänus. Suurem antud arv lahutub sellega kolmeks osandiks, millest kaks on antud kolmanda arvu (s. o. jagaja) kordarvud ja ühinevad jagaja üheks kordarvuks. Antud suurem arv on siis võrdne kolmanda arvu, s. o. jagaja kordarvule, millele väiksema arvu jagamisel tuletatud jäänus tuleb juure lisada. Tähendab: antud suurema arvu jagamisel kolmandale saadakse samasuurune jäänus kui väiksema arvu jagamisel kolmandale. — Näit. vaheng $190 - 54 = 136$ on jagatav 17-le. Arv 54 annab jagamisel 17-le jäänuseks 3. Samasuurune jäänus saadakse ka 190-ne jagamisel 17-le.

Välja minnes antud suurema arvu jagamisel leitud jäänusest peame väiksema arvu avaldama suurema arvu ja temast mahaarvatava vahengu kaudu.

Teine väidend on neljanda erijuhus, sest kui mõlemad antud arvud on kolmandale jagatavad, siis on nende jäänused võrdsed nullile, tähendab: ühesuursed.

§ 119. **Kasvatise jagatavus.** Kasvatise jagatavus on rippuv tegurite jagatavusest, nagu selgub järgnevast väidendist:

Väidend: Jagamisel ühe ja sellesama arvule on kahe või mitme arvu kasvatis ühejäänusline selle kasvatise tegurite jagamisel tuletatud jäänuste kasvatisega.

Olgu antud kahe arvu kasvatis. Mõlemate arvude jagamisel kolmandale saame mõnesugused jäänused (ühe- või mitmesuursed). Kumbki neist arvudest moodustab kaheosandlise kogundi, millest esimene on jagaja kordarv, teine — vastav jäänus. Kaheosandlist arvu teise kaheosandlisega kasvatades peame esimese arvu iga osandi kasvatama teise arvu iga osandiga. Saame kas-

$\times$	$46 = 5 \cdot 8 + 6.$ $21 = 2 \cdot 8 + 5.$	vatisse (nagu selgub kõrvalolevast näitusest) neli osandit, millest kolm on jagaja kordarvud, sest igaühes neist on jagaja vähemalt üks kord teguriks. Need jagaja kolm kordarvu võime üheks jagaja
----------	--	---

$46 \cdot 21 = 5 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 8 + 6 \cdot 2 \cdot 8 + 5 \cdot 8 \cdot 5 + 6 \cdot 5;$
 $46 \cdot 21 = 80 \cdot 8 + 12 \cdot 8 + 25 \cdot 8 + 6 \cdot 5;$
 $46 \cdot 21 = 117 \cdot 8 + 6 \cdot 5;$
 $46 \cdot 21 - 6 \cdot 5 = 117 \cdot 8.$

vatisse (nagu selgub kõrvalolevast näitusest) neli osandit, millest kolm on jagaja kordarvud, sest igaühes neist on jagaja vähemalt üks kord teguriks. Need jagaja kolm kordarvu võime üheks jagaja

kordarvuks kokku võtta. Neljas osand kasvatises on kahe jäänuse kasvatis. Sellega on kahe antud arvu kasvatis võrdne jagaja kordarvule, mis jäänuste kasvatise võrra suurendatud. Järgnevalt: Antud kahe arvu kasvatise ja kahe jäänuse kasvatise vaheng on jagaja kordarv, ja sellepärast (§ 118, väid. 4) on antud arvude kasvatis ja nende jagamisel tuletatud jäänuste kasvatis, ühe ja sellesama jagaja juures, ühejäänuslised.

Kolme arvu kasvatise tuletamisel peame kahe arvu kasvatise, mis jagaja kordarvust ja kahe jäänuse kasvatisest koos seisab, osadekaupa kasvatama kolmanda arvuga, mis koos seisab jagaja kordarvust ja kolmandast jäänusest. Kasvatis koondub jälle jagaja kordarvuks, mis kolme jäänuse kasvatise võrra suurendatud. Järjekult on antud kolme arvu kasvatise ja kolme jäänuse kasvatise vaheng jagaja kordarv, sellega mõlemad kasvatised ühejäänuslised.

Samasuguse järelduse tuletame ka nelja, viie jne. teguri kasvatise kohta. Kui ükski jäänus on 0, siis on jäänuste kasvatis 0; tähendab: antud arvude kasvatis on jagatav antud jagajale.

Näit. 46, 21 ja 19 annavad 8-le jagades jäänusteks 6, 5 ja 3. Kasvatis $46 \cdot 21 \cdot 19 = 18354$ annab 8-le jagades jäänuseks 2; jäänuste kasvatis $6 \cdot 5 \cdot 3 = 90$ annab ka jagades 8-le jäänuseks 2. — Arvud 48, 21, 19 annavad 8-le jagades jäänusteks 0, 5 ja 3. Jäänuste kasvatis on 0, mis 8-le jagatav. Tähendab: kasvatis $48 \cdot 21 \cdot 19 = 19152$ on 8-le jagatav.

§ 120. Jagandi ja jagaja ühine jagaja. Kahe arvu ühise jagaja vahekorra jäänusega, mis saadud ühe arvu jagamisel teisele, määrab kindlaks järgmine väidend:

Väidend: *Kahe antud arvu ühine jagaja on jagajaks jäänusele, mis tuletatakse ühe antud arvu jagamisel teisele, ja ümberpöörduvalt: jagaja ja jäänuse ühine jagaja on jagajaks jagandile.*

Jagandina on üks antud arv võrdne teise arvu kui jagaja kordarvule, mis jäänuse võrra suurendatud. Teise arvu kordarv on jagatav ühisele jagajale, sest teine arv ise on jagatav sellele ühisele jagajale. Järgnevalt: kogund ja üks osand on jagatavad antud kahe arvu ühisele jagajale, sellepärast on ka teine osand, s. o. jäänus, jagatav sellele ühisele jagajale.

Ümberpöörduvalt: Jagand on võrdne jagaja kordarvule, mis jäänuse võrra suurendatud. Kui jagaja on mõnele arvule jagatav, siis on ka jagaja kordarv sellele arvule jagatav. Tähendab: jagand on jagatav igale arvule, mis jagajale ja jäänusele on ühiseks teguriks.

Näit. arvude 72 ja 28 ühine jagaja on 4. Antud arvude jagamisel tuletatakse jäänus 16, mis 4-le on jagatav. Ümberpöörduvalt: arvu 56 jagamisel 16-le tuletatakse jäänus 8. Jagaja ning jäänuse ühised jagajad 2, 4, 8 on ka jagajad 72-le.

Jagandi ning jäänuse ühine jagaja ei tarvitse olla jagajale jagajaks: kui jagatis sellele ühisele jagajale on jagatav, siis võib jagajas see ühine jagaja tegurina puududa. Näit. $54 = 5 \cdot 10 + 4$. Arv 54 ja jäänus 4 on jagatavad 2-le; teine arv 5 ei ole 2-le jagatav, küll aga on jagatis 10 jagatav 2-le.

Eeloleva väidendi esimesest osast järgneb, et kui jagandi ning jagaja mõnele arvule jagame, siis jagub sellele arvule ka jäänus, ja vastupidiselt: kui jagandi ning jagaja mõne arvuga kasvatame, siis kasvab samakordselt ka jäänus.

Jagatavuse tunnused.

§ 121. Mõisteselgitus ja tunnuste jaotus. Jagatavuse tunnusteks nimetame iseäralisi tingimusi, mille olemasolust ripub ühe täisarvu jagatavus teisele. Need tingimused on seotud arvetamiskava põhimäärustega ja avalduvad arvumärkide osalises või

kogulises koosseisus, või ka mõlemas. Jagatavuse tunnused, mis avalduvad ehk saavad silmanähtavaks arvumärkide osalise koosseisu, nimelt alamjärjeliste üksustekogude arvumärkide salkkonna kaudu, nimetatakse *esimese liigi* tunnusteks. Tunnused, mis avalduvad jagatava arvu kõigi arvumärkide kogulises koosseisus, nimetatakse jagatavuse *teise liigi* tunnusteks. Esimese ja teise liigi tunnuste ühinemisel tuletatakse kolmanda ehk *segaliigi* tunnused.

Kui jagajaiks on arvud, mis on moodustatud arvetamiskava põhiarvust või tema algteguritest, siis on meil tegemist jagatavuse esimese liigi tunnustega. Jagajad, mis siia kuuluvad, on 1) kümnekava põhiarv ja tema astendid, 2) põhiarvu algtegurid 2 ja 5 ja nende astendid, 3) põhiarvu algteguritest ja nende astenditest moodustatud kasvatised.

Teise liigi tunnustega on meil tegemist, kui jagajaiks on arvud, mis vastastikku algarvud on põhiarvule 10, nagu on arvud 9, 3, 11, 7 jne.

Segaliigi tunnuste käsitamisel on meil tegemist kordarvulistega jagajatega, mille teguriteks on esimese ja teise liigi jagajad, näit. arvud $6 = 2 \cdot 3$; $15 = 5 \cdot 3$; $18 = 2 \cdot 9$, jne.

§ 122. **Esimese liigi tunnused.** Esimese liigi tunnused on rippuvad ükskõik missuguse antud arvu ühest, kahest või mitmest viimasest arvumärgist. Antud arvu osandina moodustavad need arvumärgid ühe-, kahe- või mitmekohalise arvu, mille kaudu otsustame antud arvu jagatavuse üle. Võtame järelkatsele kolm juhust.

I. *Jagajaks on põhiarv 10 või tema astend.* Võtame näitlikuks seletuseks arvu 2437568 ja lahutame ta osanditeks, kümnekava põhimäärust juhtnööriks pidades:

$$\begin{aligned} 2437568 &= 2000000 + 400000 + 30000 + 7000 + 500 + 60 + \\ &+ 8 = 2 \cdot 1000000 + 4 \cdot 100000 + 3 \cdot 10000 + 7 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + \\ &+ 6 \cdot 10 + 8 = 2 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + \\ &+ 6 \cdot 10 + 8. \end{aligned}$$

Osandid saime niipalju, kui meil oli järjeüksuste kogusid. Iga osand, peale viimase, s. o. peale ühelistekogu, on 10-ne kordarv, sellega 10-le jagatav; iga osand, peale kahe viimase, on 10^2 ehk 100 kordarv, sellega 100-le jagatav; iga osand, peale kolme viimase, on 10^3 ehk 1000 kordarv, jne. Ühe ja sellesama astendi kordarvud üheks osandiks ühendades, ülejäävad osandid teiseks osandiks kokku võttes tuletame järgmised kaheosandlised kogundid:

$$\begin{aligned} 2437568 &= 10\text{-kordne} + 8; \\ 2437568 &= 10^2\text{-kordne} + 68 = 100\text{-kordne} + 68; \\ 2437568 &= 10^3\text{-kordne} + 568 = 1000\text{-kordne} + 568; \\ 2437568 &= 10^4\text{-kordne} + 7568 = 10000\text{-kordne} + 7568, \text{ jne.} \end{aligned}$$

Antud arv on lahutatud kaheks osandiks, millest esimene on jagatav 10-ne astendile; arvu jagatavus 10-ne astendile on rippuv teisest osandist (§ 118, väid. 1). Teine osand on, 10-ne astendi kui jagaja juures, antud arvuga ühejäänusline (§ 118, väid. 4). Teine osand langeb vastava jagaja juures jäänuseks, näit. kui 8 jagame 10-le, 68 jagame 10^2 -le ehk 100-le, jne., nagu enne juba (§ 56) oleme näinud. Antud arv on jagatav 10-ne astendile, kui need jäänused, tähendab: teised osandid, puuduvad, s. o. kui nende üksustekogud nullidega on märgitud.

Iga teise mitmekohalise arvu lahutamisel osanditeks tuleme samasugusele lõpuotsusele.

Siit järeldame, et iga arv, mis *ühe* nulliga lõpeb, on 10-le jagatav; iga arv, mis *kahe* nulliga lõpeb, on 10^2 -le ehk 100-le jagatav; iga arv, mis *kolme* nulliga lõpeb, on 10^3 -le ehk 1000-le jagatav, jne.

Kokkuvõtteliselt tuletame järgmise üldmääruse:

Põhiarvu 10-ne astendile on jagatav iga mitmekohaline arv, mille lõpul nii mitu nulli on, kui mitu ühelist on põhiarvu astendajas.

Näit. 3170 on jagatav 10-le; 36000 on jagatav 10^3 -le ehk 1000-le; 85000000 on jagatav 10^6 -le ehk 1000000-le, jne.

II. *Jagajaks on põhiarvu algtegurid 2 ja 5 või nende astendid.* Põhiarvu 10-ne ja tema astendite kordarvud on kordarvudeks 2-le ja 5-le ning nende samanimelistele ja alamaile astenditele, sest $10 = 2 \cdot 5$, $10^2 = 100 = 2^2 \cdot 5^2$, $10^3 = 1000 = 2^3 \cdot 5^3$, jne. Andes 10-ne astendi kordarvule 2 või 5-e astendi kordarvu tähenduse, tuletame eelpool antud arvu 2437568 lahutised kaheks osandiks järgmisel kujul:

$$2437568 = \left\{ \begin{array}{l} 2\text{-kordne} \\ 5\text{-kordne} \end{array} \right\} + 8;$$

$$2437568 = \left\{ \begin{array}{l} 2^2\text{-kordne ehk } 4\text{-kordne} \\ 5^2\text{-kordne ehk } 25\text{-kordne} \end{array} \right\} + 68;$$

$$2437568 = \left\{ \begin{array}{l} 2^3\text{-kordne ehk } 8\text{-kordne} \\ 5^3\text{-kordne ehk } 125\text{-kordne} \end{array} \right\} + 568;$$

$$2437568 = \left\{ \begin{array}{l} 2^4\text{-kordne ehk } 16\text{-kordne} \\ 5^4\text{-kordne ehk } 625\text{-kordne} \end{array} \right\} + 7568, \text{ jne.}$$

Kogundi esimene osand on 2 või 5-e astendi kordarv. Kui teine osand on 2 või 5-e astendile jagatav, siis on ka antud arv jagatav 2 või 5-e vastavale astendile. Eelpool antud lahutistes on ühekohaline teine osand jagatav 2-le, kahekohaline teine osand 2^2 -le ehk 4-le, kolmekohaline teine osand 2^3 -le ehk 8-le ja neljakohaline teine osand 2^4 -le ehk 16-le; tähendab: antud arv on jagatav 2-le, 4-le, 8-le ja 16-le, igaühele iseäraldi. Antud arv ei

ole jagatav 5-e astenditele, sest ükski teine osand ei ole 5-e astenditele jagatav.

Iga teise mitmekohalise arvu lahutise kaudu tuleme samasuguselelõpuotsusele. Kokkuvõtteliselt tuletame järgmise üldmääruse:

Põhiarvu teguri 2 või 5-e antud astendile on jagatav iga mitmekohaline arv, milles nii mitu viimast arvumärki, kui mitu ühelist on põhiarvu teguri astendajas, moodustavad arvu, mis põhiarvu teguri antud astendile on jagatav.

Eelolevast üldmäärusest eraldame järgmised üksikmäärused:

1) *Arv, mis lõpeb 0-ga või paarisarvumärgiga, on 2-le jagatav.*
Näit. 12, 340, 796, 1778, jne.

2) *Arv, mis lõpeb 0-ga või 5-ga, on 5-le jagatav.*
Näit. 70, 600, 175, 695, 1115, jne.

3) *Arv, mille lõpul on kaks nulli või mille kaks viimast arvumärki moodustavad arvud 25, 50 või 75, on 25-le jagatav.*
Näit. 700, 325, 1950, 2875, jne.

4) *Arv on jagatav 2 või 5-e astendile, kui selle arvu lõpul leidub vähemalt nii mitu nulli, kui 2 või 5-e astendajas on ühelisti.*
Näit. on arvud 60, 70, 120 jagatavad 2-le ja 5-le; arvud 6300, 4100, 8500 on jagatavad 2²-le ja 5²-le; arvud 11000, 7000, 89000 on jagatavad 2³-le ja 5³-le, jne.

III. *Jagajaks on kasvatis, mis põhiarvu algtegurite astenditest moodustatud.* Kõne võib olla põhiarvu algtegurite isenimeliste astendite kasvatisest, sest ühenimeliste (ehk ühejärjeliste) astendite kasvatis annab põhiarvu samanimelise astendi. Näit. $2^4 \cdot 5^4 = 2 \cdot 5 \times 2 \cdot 5 \times 2 \cdot 5 \times 2 \cdot 5 = 10^4 = 10000$.

Võtame antud arvu jagajaks kasvatisse $2^3 \cdot 5^2 = 2 \cdot 5 \times 2 \cdot 5 \times 2 = 10^2 \cdot 2$. Et antud arv jagatav oleks kasvatissele $10^2 \cdot 2$, selleks peab ta jaguma 100-le, s. o. ta peab kahe nulliga lõppema; jagatis, mis tuletatakse jagamisel 100-le, peab olema 2-le jagatav. Tähendab: antud arvu sajaliste arvumärk peab olema 0 või paarisarv. Näit. arv 35600 jagub 10²-le ehk 100-le; jagatisse tuleb 356. See jagatis lõpeb paarisarvumärgiga, sellepärast on ta 2-le jagatav. Nii on kasvatissele $2^3 \cdot 5^2$ ehk 200-le jagatav iga arv, mis kahe nulliga lõpeb ja mille sajaliste kohal on 0, 2, 4, 6 või 8. Samal viisil on $5^3 \cdot 2^2$ ehk 500-le jagatav iga arv, mis kahe nulliga lõpeb ja mille sajaliste arvumärgiks on 0 või 5. Sellest ja igast teisest näitusest järeldame üldmääruse:

Põhiarvu algtegurite 2 ja 5-e isenimeliste astendite kasvatissele on jagatav iga antud arv, mis nii mitme nulliga lõpeb,

kui mitu ühelist on väiksemas astendajas, ja mis ühes sellega jagub ülemastmelisele tegurile.

Näit. arv 793600 on jagatav kasvatisel $2^4 \cdot 5^2$ ehk 400-le, sest antud arv lõpeb kahe nulliga ja on 2^4 -le ehk 16-le jagatav (neli viimast arvomärki moodustavad arvu 3600, mis on 16-le jagatav).

§ 123. **Teise liigi tunnuste põhilaused.** Teise liigi tunnused määravad jagatavuse mitmesugustele arvudele, mis põhiarvuga üldühelised, s. o. vastastikku algarvud on 10-ga. Igale niisugusele arvule on jagatav 10-ne miskisugune astend, mis ühe võrra vähendatud, mõnele neist aga on jagatav 10-ne miskisugune astend, mis ühe võrra suurendatud. Põhiarvu esimene omadus on teise liigi tunnustele üldiseks, teine omadus — osaliseks aluseks, s. o. aluseks, mis ainult üksikute jagajate kohta on maksev. Praktiliste tarviduste piiridesse jäädes kasutame allpool mõlemaid põhiarvu omadusi ja jätame üldise aluse tõestamise edaspidiseks (§ 131). Meie otstarbele vastavalt tõestame esialgul järgmised tõelaused ehk väidendid:

Väidend 1. *Kui põhiarvu 10-ne antud astend on võrdne mõne teise arvu kordarvule, mis ühe võrra suurendatud, siis on antud astendi iga uus astend ka võrdne teise arvu kordarvule, mis ühe võrra suurendatud.*

Kui on põhiarvu antud astend 10^n , kus n tähendab mõnda täisarvu, siis $10^n \cdot 10^n = 10^{2n}$ on antud astendi teine astend ehk ruutastend, $10^n \cdot 10^n \cdot 10^n = 10^{3n}$ on antud astendi kolmas astend ehk kantastend, 10^{4n} neljas astend, jne.

Ütleme, et 10^n annab jagamisel mõnele täisarvule jäänuseks 1. Antud astendi ruutastend ei ole muud midagi kui kahe ühesuuruse teguri kasvatis, ja sellepärast on (§ 119. antud väidendi põhjal) 10^{2n} ja 10^n ühe ja sellesama jagaja juures ühejäänuslised.

Kantastendi ja järgnevate ülemate astendite kohta võime sedasama tõestada (§ 119 põhjal), sest iga tegur on 10^n ja iga teguri jagamisel saadud jäänus, tähendab — ka nende jäänuste kasvatis, on 1.

Sedasama võime ka järgmiselt tõestada. Kui 10^n annab jagamisel mõnele täisarvule A jäänuseks 1, siis $10^n = A\text{-kordne} + 1$. Silmas pidades, et antud arvu kordarvu kasvatis mõnesuguse täisarvuga annab ikkagi selle antud arvu kordarvu, võime eelmisest oletusest välja minnes järeldada, et $10^{2n} = 10^n \cdot 10^n = (A\text{-kordne} + 1) \cdot 10^n = A\text{-kordne} + 10^n = A\text{-kordne} + A\text{-kordne} + 1 = A\text{-kordne} + 1$. — Niisama leiame, et $10^{3n} = 10^{2n} \cdot 10^n = (A\text{-kordne} + 1) 10^n = A\text{-kordne} + 10^n = A\text{-kordne} + A\text{-kordne} + 1 = A\text{-kordne} + 1$, jne.

Näit. $10 = 3\text{-kordne} + 1$; tähendab: $10^2 = 100 = 3\text{-kordne} + 1$; $10^3 = 1000 = 3\text{-kordne} + 1$; $10^4 = 3\text{-kordne} + 1$, jne. Niisama $10^2 = 100 = 11\text{-kordne} + 1$; $10^4 = 10000 = 11\text{-kordne} + 1$; $10^6 = 11\text{-kordne} + 1$, jne.

Väidend 2. *Kui põhiarvu 10-ne antud astend on võrdne mõne teise arvu kordarvule, mis ühe võrra vähendatud, siis on antud astendi paarisarvuline astend võrdne teise arvu kordarvule, mis ühe võrra suurendatud, ja antud astendi paaritarvuline astend võrdne teise arvu kordarvule, mis ühe võrra vähendatud.*

Kui $10^n = A\text{-kordne} - 1$, siis $10^{2n} = 10^n \cdot 10^n = (A\text{-kordne} - 1) 10^n = A\text{-kordne} - 10^n = A\text{-kordne} - (A\text{-kordne} - 1) = A\text{-kordne} + 1$. Niisama $10^{4n} = 10^{2n} \cdot 10^{2n} = (A\text{-kordne} + 1) 10^{2n} = A\text{-kordne} + 10^{2n} = A\text{-kordne} + A\text{-kordne} + 1 = A\text{-kordne} + 1$, jne.

Paarituarvuline astend $10^{3n} = 10^{2n} \cdot 10^n = (A\text{-kordne} + 1) \cdot 10^n = A\text{-kordne} + 10^n = A\text{-kordne} + A\text{-kordne} - 1 = A\text{-kordne} - 1$. Niisama $10^{5n} = 10^{4n} \cdot 10^n (A\text{-kordne} + 1) \cdot 10^n = A\text{-kordne} - 1$, jne.

Näit. $10 = 11\text{-kordne} - 1$; tähendab: $10^2 = 100 = 11\text{-kordne} + 1$; $10^3 = 1000 = 11\text{-kordne} - 1$, jne. Niisama $10^3 = 7\text{-kordne} - 1$; $10^6 = 7\text{-kordne} + 1$; $10^9 = 7\text{-kordne} - 1$, jne.

§ 124. **Teise liigi mõned tunnused.** Siin esineme tunnustega, mis kindlaks määravad antud arvu jagatavuse teistele, väiksematele arvudele. Neil tunnustel on praktiline tähendus arvlemisel.

I. *Jagatavus 9-le ja 3-le.* Võtame mõne mitmekohalise arvu, näit. 429385, ja lahutame ta kümnekava põhimääruse alusel osanditeks. Leiame, et $429385 = 400000 + 20000 + 9000 + 300 + 80 + 5$. Silmas pidades, et põhiarvu 10-ne iga astend on võrdne 9 kordarvule või 3 kordarvule, mis ühe võrra suurendatud, võime antud arvu osandid järgmiselt kujutada:

$$\begin{array}{rcl}
 400000 & = 10^5 \cdot 4 = \left\{ \begin{array}{l} 9\text{-kordne} + 1 \\ 3\text{-kordne} + 1 \end{array} \right\} \cdot 4 = \left\{ \begin{array}{l} 9\text{-kordne} \\ 3\text{-kordne} \end{array} \right\} + 4 \\
 20000 & = 10^4 \cdot 2 = \left\{ \begin{array}{l} 9\text{-kordne} + 1 \\ 3\text{-kordne} + 1 \end{array} \right\} \cdot 2 = \left\{ \begin{array}{l} 9\text{-kordne} \\ 3\text{-kordne} \end{array} \right\} + 2 \\
 9000 & = 10^3 \cdot 9 = \left\{ \begin{array}{l} 9\text{-kordne} + 1 \\ 3\text{-kordne} + 1 \end{array} \right\} \cdot 9 = \left\{ \begin{array}{l} 9\text{-kordne} \\ 3\text{-kordne} \end{array} \right\} + 9 \\
 + \quad 300 & = 10^2 \cdot 3 = \left\{ \begin{array}{l} 9\text{-kordne} + 1 \\ 3\text{-kordne} + 1 \end{array} \right\} \cdot 3 = \left\{ \begin{array}{l} 9\text{-kordne} \\ 3\text{-kordne} \end{array} \right\} + 3 \\
 80 & = 10 \cdot 8 = \left\{ \begin{array}{l} 9\text{-kordne} + 1 \\ 3\text{-kordne} + 1 \end{array} \right\} \cdot 8 = \left\{ \begin{array}{l} 9\text{-kordne} \\ 3\text{-kordne} \end{array} \right\} + 8 \\
 5 & = \dots \dots \dots = \dots \dots \dots + 5
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 400000 \\ 20000 \\ 9000 \\ 300 \\ 80 \\ 5 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Arvame kokku võrduste pa-} \\ \text{rempoolsed osad isepäinis} \\ \text{ja pahempoolsed isepäinis.} \end{array}$$

$$429385 = \left\{ \begin{array}{l} 9\text{-kordne} \\ 3\text{-kordne} \end{array} \right\} + (4 + 2 + 9 + 3 + 8 + 5).$$

Iga mitmekohalise arvu võime samal viisil kaheks osandiks lahutada. Tähendab: säärane lahutamisviis on maksev kõigi arvude kohta. Arvus esinevate arvumärkide kogundit selle arvu riskogundiks nimetades järeldame, et *iga antud arv on võrdne 9 või 3-e kordarvule, mis antud arvu riskogundi võrra suurendatud*. Sellest järgneb, et antud arv ja tema riskogund on jagaja 9 juures, niisama ka jagaja 3 juures, ühejäänuslised. Järjelikult:

Kui antud arvu riskogund on 9-le või 3-le jagatav, siis on ka antud arv ise 9-le või 3-le jagatav.

Näit. arv 328185 on 9-le jagatav, sest et riskogund $3 + 2 + 8 + 1 + 8 + 5 = 27$ on 9-le jagatav. Samal põhjusel on arv 328185 ka 3-le jagatav.

Et 3 on arvus 9 algteguriks, siis on arv, mis jagatav 9-le, ka 3-le jagatav.

II. *Jagatavus 11-le*. Võtame mitmekohalise arvu 8435726 ja lahutame osanditeks, järjeüksuste kogude kaudu. Arv $8435726 = 8000000 + 400000 + 30000 + 5000 + 700 + 20 + 6$. Et põhiarvu 10-ne iga paarituarvuline astend = 11-nekordne — 1, iga paarisarvuline astend = 11-nekordne + 1, siis võime antud arvu osandid järgmiselt kujutada:

$$\begin{array}{rcl}
 8000000 & = 10^6 \cdot 8 & = (11\text{-kordne} + 1) \cdot 8 = 11\text{-kordne} + 8 \\
 400000 & = 10^5 \cdot 4 & = (11\text{-kordne} - 1) \cdot 4 = 11\text{-kordne} - 4 \\
 30000 & = 10^4 \cdot 3 & = (11\text{-kordne} + 1) \cdot 3 = 11\text{-kordne} + 3 \\
 + 5000 & = 10^3 \cdot 5 & = (11\text{-kordne} - 1) \cdot 5 = 11\text{-kordne} - 5 \\
 700 & = 10^2 \cdot 7 & = (11\text{-kordne} + 1) \cdot 7 = 11\text{-kordne} + 7 \\
 20 & = 10 \cdot 2 & = (11\text{-kordne} - 1) \cdot 2 = 11\text{-kordne} - 2 \\
 6 & = & = . . . + 6
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Arvame kokku võr-} \\ \text{duste parempoolsed} \\ \text{osad isepäinis ja} \\ \text{parempoolsed ise-} \\ \text{päinis.} \end{array}$$

$$8435726 = 11\text{-nekordne} + [(8 + 3 + 7 + 6) - (4 + 5 + 2)].$$

Iga mitmekohalise arvu võime samal viisil kaheks osandiks lahutada, s. o. *11-ne kordarvuks*, millele juure on lisatud antud arvu paaritukohaliste arvumärkide riskogundi ja paariskohaliste arvumärkide riskogundi vaheng. Arvumärkide kohad tulevad paremalt pahemale poole järjestada.

Võib juhtuda, et paariskohaliste arvumärkide riskogund suurem on kui paaritukohaliste arvumärkide riskogund. Säärasel korral on antud arv võrdne 11-ne kordarvule, mis vähendatud on paariskohaliste arvumärkide riskogundi ja paaritukohaliste arvumärkide riskogundi vahengu võrra.

Näit. arv $937284 = 11 \text{ kordne} + (3 + 2 + 4) - (9 + 7 + 8) = 11\text{-kordne} - (9 + 7 + 8) + (3 + 2 + 4) = 11\text{-kordne} - [(9 + 7 + 8) - (3 + 2 + 4)]$.

Mõlemaid juhuseid ühendades tuletame (§ 118, väid. 1 ja 2 põhjal) järgmise üldmääruse:

Kui antud arvu paaritukohaliste arvumärkide riskogundi ja paariskohaliste arvumärkide riskogundi peripidine ehk vastupidine vaheng on 11-le jagatav, siis on ka antud arv 11-le jagatav.

Näit. 8255764 on 11-le jagatav, sest paaritukohaliste arvumärkide riskogundi ja paariskohaliste arvumärkide riskogundi vaheng $(8 + 5 + 7 + 4) - (2 + 5 + 6) = 24 - 13 = 11$ on 11-le jagatav. Niisama on arv 918280 jagatav 11-le, sest paariskohaliste arvumärkide riskogundi ja paaritukohaliste arvumärkide riskogundi vaheng $(9 + 8 + 8) - (1 + 2 + 0) = 25 - 3 = 22$ on 11-le jagatav.

Et $10^2 = 11\text{-nekordne} + 1$, siis võime (§ 123, väid. 1) antud arvu ka teistviisi lahutada kaheks osandiks, millest esimene on 11-ne kordarv. Näit. arv

86524359 = 86000000 + 52000 + 4300 + 59. Need osandid võime järgmiselt kujutada :

$$\begin{array}{rcl}
 86000000 & = 10^6 \cdot 86 = (11\text{-kordne} + 1) \cdot 86 = 11\text{-kordne} + 86 \\
 + 520000 & = 10^4 \cdot 52 = (11\text{-kordne} + 1) \cdot 52 = 11\text{-kordne} + 52 \\
 + 4300 & = 10^2 \cdot 43 = (11\text{-kordne} + 1) \cdot 43 = 11\text{-kordne} + 43 \\
 + 59 & = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots + 59
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} 86000000 \\ + 520000 \\ + 4300 \\ + 59 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Arvame kokku} \\ \text{parempoolsed} \\ \text{osad isepäinis ja} \\ \text{pahempoolsed} \\ \text{osad isepäinis,} \end{array}$$

$$86524359 = 11\text{-nekordne} + (86 + 52 + 43 + 59).$$

See lahutusviis on maksev iga mitmekohalise arvu kohta. Järgnevalt :

Kui antud arv lahutub, paremalt pahemale poole minnes, kahekohalisteks üksikarvuudeks, mille kogund on 11-le jagatav, siis on ka antud arv 11-le jagatav.

Näit. arv 728541 on jagatav 11-le, sest kahekohaliste üksikarvude kogund $72 + 85 + 41 = 198$ on 11-le jagatav.

Praktilist tähendust sellel tunnusel ei ole, sest kergem on antud arva otsekohe jagada 11-le, kui viimase tunnuse kaudu tema jagatavuse üle otsustadn.

III. Veel mõned teise liigi tunnused. Välja minnes põhiarvu 10-ne kõige alamjärjelisemast astendist, mis võrdne on jagaja ühe võrra suurendatud või ühe võrra väiksendatud kordarvule (§ 123), võime jagatavuse tunnuse leida lihtsamal teel, kui jagatava arvu ainult kaheks osandiks lahutame. Võttes jagajaks 27 või 37, millest teame, et $10^3 = 27\text{-kordne} + 1 = 37\text{-kordne} + 1$, lahutame mõne antud arvu kaheks osandiks, tuhandeliste ja üheliste kogudeks. Näit. $2387564 = 2387000 + 564$. Esimest osandit jagaja kordarvu kaudu muutes saame järgmised avaldused :

$$\begin{array}{rcl}
 + 2387000 & = 10^3 \cdot 2387 = \left\{ \begin{array}{l} 27\text{-kordne} + 1 \\ 37\text{-kordne} + 1 \end{array} \right\} \cdot 2387 = \left\{ \begin{array}{l} 27\text{-kordne} \\ 37\text{-kordne} \end{array} \right\} + 2387. \\
 564 & = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots + 564.
 \end{array}$$

$$2387564 = \left\{ \begin{array}{l} 27\text{-kordne} \\ 37\text{-kordne} \end{array} \right\} + (2387 + 564).$$

Et iga arvu samal viisil võime lahutada, siis järeldame, et *27-le või 37-le on jagatav iga antud arv, mille kolmekohaline lõpuosa ühes tuhandeliste koguarvuga tuletavad kogundi, mis 27-le või 37-le on jagatav.*

Näit. 230607 on 27-le jagatav, sest $230 + 607 = 837$ on 27-me kordarv.

Niisama on 24383 jagatav 37-le, sest $24 + 383 = 407$ on 37-me kordarv.

Määrus on maksev ka jagaja 11-ne kohta, ainult tuhandeliste arvu asemele tuleb võtta sajaliste koguarv ja kolmekohalise lõpuosa asemele kahekohaline. (Mispärast ?)

Kui võtame jagajaiks 7 või 13, mille kohta katseliselt oleme leidnud, et $10^3 = 7\text{-kordne} - 1 = 13\text{-kordne} - 1$, siis saaksime järgmised avaldused :

$$\begin{array}{rcl}
 + 2387000 & = 10^3 \cdot 2387 = \left\{ \begin{array}{l} 7\text{-kordne} - 1 \\ 13\text{-kordne} - 1 \end{array} \right\} \cdot 2387 = \left\{ \begin{array}{l} 7\text{-kordne} \\ 13\text{-kordne} \end{array} \right\} - 2387. \\
 564 & = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots + 564.
 \end{array}$$

$$2387564 = \left\{ \begin{array}{l} 7\text{-kordne} \\ 13\text{-kordne} \end{array} \right\} - (2387 - 564).$$

Kui antud arvu tuhandete arv väiksem on kui kolmekohaline lõpuosa, näituseks, arvus 387564, siis võime saaduse järgmiselt kujutada :

$$387564 = \left\{ \begin{array}{l} 7\text{-kordne} \\ 13\text{-kordne} \end{array} \right\} + (564 - 387).$$

Neist kahest ja teistest sarnastest näitustest järeldame, et 7-le või 13-le on jagatav iga antud arv, mille tuhandeliste koguarvu ja kolmekohalise lõpuosa peripidine ehk vastupidine vaheng on 7-le või 13-le jagatav.

Näit. arv 115374 on 7-le jagatav, sest $374 - 115 = 259$ on 7-kordne. Niisama on arv 864357 jagatav 13-le, sest $864 - 357 = 507$ on 13-kordne.

Määrus on maksev ka 11-ne kohta, sest $10^3 = 11$ -kordne — 1. Jagaja 11-ne juures maksab sama vahekord ka antud arvu kümneliste koguarvu ja üheleliste kohta, sest $10 = 11$ -kordne — 1.

§ 125. **Segatunnused.** Segatunnuste käsitlemisel võime jagaja niiviisi kaheks teguriks lahutada, et esimesse koondame kõik põhiarvu algtegurid, teise — kõik põhiarvuga üldühelised tegurid. Siis on meil käsitada ainult kaheteguriline jagaja. Antud arvu jagatavus säärasele kahetegurilisele jagajale on ripuv nii esimese kui teise liigi tunnusest. Niisugused kahetegurilised jagajad on, näit., $6 = 2 \cdot 3$; $12 = 4 \cdot 3$; $14 = 2 \cdot 7$; $15 = 5 \cdot 3$; $18 = 2 \cdot 9$; $22 = 2 \cdot 11$; $24 = 8 \cdot 3$, jne.

Et antud arv oleks jagatav, näit., 36-le, selleks peab ta jagatav olema niihästi 4-le kui 9-le, sest $36 = 4 \cdot 9$, jne.

Kõige suurem ühine jagaja.

§ 126. **Mõisteselgitus.** Nagu nägime (§ 114), võivad kahel või mitmel täisarvul olla ühised jagajad. Kui ühiseid jagajaid on kaks või mitu, siis on üks neist *kõige suurem ühine jagaja*. Üldühelistel arvudel on 1 kõige suuremaks ühiseks jagajaks. Antud arvud on nende ühistele jagajaile kordarvulisteks jaganditeks. Et ükski kordarvuline jagand oma jagajast suurem ei või olla, siis järgneb siit, 1) et antud arvude ühiste jagajate hulk on piiratud, 2) et antud arvude kõige suurem ühine jagaja kõige väiksemale nende hulgast soodsal juhusel võrdne võib olla.

§ 127. **Kahe arvu kõige suurem ühine jagaja.** Kahe arvu kõige suurema ühise jagaja leidmisel tugeneme § 120 antud väidendile. *Kui kahest antud arvust suurem on jagatav väiksemale, siis on väiksem arv nende ühine kõige suurem jagaja.* Et väiksem arv on suurema arvu ja ka iseenese jagaja, siis on ta mõlema ühine jagaja. Et väiksem arv enesest suuremale arvule ei ole jagatav, siis on väiksem arv mõlemate kõige suurem ühine jagaja.

Kui kahest antud arvust suurem on jäänusega jagatav väiksemale, siis on mõlemate ühine kõige suurem jagaja võrdne väiksema arvu ja jäänuse kõige suuremale ühisele jagajale.

Kahe antud arvu iga ühine jagaja on jagajaks jäänusele (§ 120), sellega on ta antud väiksema arvu ja jäänuse ühine jagaja. Ümberpöörduvalt: väiksema antud arvu ja jäänuse iga ühine jagaja on jagajaks suuremale arvule, sellega on ta kahe antud arvu ühine jagaja. Kui kahel arvupaaril on ühe-

sugused ühised jagajad, siis on neil arvupaaridel (antud kahel arvul ja väiksemal arvul ning jäänusel) ka ühine kõige suurem jagaja, sest viimane on ühiste jagajate hulgas.

Et eelolevate tõelausete abil leida kahe antud arvu kõige suuremat ühist jagajat, selleks jagame suurema arvu väiksemale. Kui väiksem arv ei ole kahe antud arvu kõige suurem ühine jagaja, siis on selleks väiksema arvu ja esimese jäänuse kõige suurem ühine jagaja. Kui esimene jäänus ise ei ole kõige suuremaks ühiseks jagajaks, siis on selleks esimese jäänuse ja antud väiksema arvu jagamisel esimesele jäänusele tuletatud teise jäänuse kõige suurem ühine jagaja. Kui teine jäänus ise ei ole kõige suuremaks ühiseks jagajaks, siis teeme katseid edasi, jagades teist jäänust kolmandale, kolmandat neljandale jne., kunni jagamine jäänuseta lõpeb. Et jäänused, olles jagajaist väiksemad, ikka kahanevad, siis lõpeb järjendline jagamine jäänuseta. Viimane jäänus on otsitav kõige suurem ühine jagaja. On viimane jäänus 1, siis on antud arvud üldühelised. Kui on antud kaks arvu, näit., 2864 ja 360, siis võiksime järjendlise jagamise saadused järgmiselt ridastada:

$$\begin{array}{rcl} 2864 & = & 360 \cdot 7 + 344; \\ 360 & = & 344 \cdot 1 + 16; \\ 344 & = & 16 \cdot 21 + 8; \\ 16 & = & 8 \cdot 2 + 0. \end{array}$$

Viimane jäänus 8 on antud arvude kõige suurem ühine jagaja. Altpoolt üles minnes, rida-realt (§ 118, väid. 1 põhjal), tõestame, et 8 on antud arvude, 2864 ja 360-ne, ühine jagaja; ülevalt alla tulles, jällegi rida-realt, tõestame, et 8 on antud arvude kõige suurem ühine jagaja (§ 118, väid. 3).

Väidendi põhjal, mis § 120 antud, võime ütelda, et *kahe arvu ühine jagaja on jagajaks nende kõige suuremale ühisele jagajale*, ja ümberpöörduvalt: *kahe antud arvu kõige suurema ühise jagaja tegur on antud arvudele ühiseks jagajaks*. Eelpool antud ridastuse (algorütm) kaudu on seda kerge tõestada. Antud arvude ühine jagaja on jagajaks esimesele jäänusele. Olles jagajaks väiksemale arvule ja esimesele jäänusele, peab ta jagajaks olema teisele jäänusele, jne.; kuna ta jagajaks on igale järgnevale jäänusele, peab ta ka jagajaks olema viimasele jäänusele, mis on antud arvude kõige suurem ühine jagaja. — Ei ole raske tõestada, et selle viimase jäänuse jagaja on ühiseks jagajaks kahele antud arvule. — Eelolevast järgneb, et *kui kaks antud arvu jagame kolmandale, siis jagame sellele kolmandale ka kahe antud arvu kõige suurema ühise jagaja*. Näit., kahe antud arvu 75 ja 45 ühine kõige suurem jagaja on 15. Antud arvusid 3-le jagades leiame arvud 25 ja 15. Nende ühine kõige suurem jagaja on 5. Täheandab: antud arvude jagamisel 3-le jagasime samale arvule ka nende kõige suurema ühise jagaja. Järjelikult on õige ka vastuväidend: *kui kaks antud arvu kasvatame kolmandaga, siis kasvatame selle kolmandaga ka kahe antud arvu kõige suurema ühise jagaja*.

§ 128. **Kahe arvu kõige suurema ühise jagaja põhitingimus.** See põhitingimus avaldub järgmistes väidendites: *Kahe antud arvu jagamisel nende kõige suuremale ühisele jagajale saame üldühelised jagatised*, ja ümberpöörduvalt: *kui kahe antud arvu jagamisel nende ühisele jagajale saame üldühelised jagatised, siis on antud ühine jagaja nende arvude kõige suurem ühine jagaja*. Kui kaks antud arvu jagame nende kõige suuremale ühisele jagajale, siis jagub samale jagajale ka antud arvude kõige suurem ühine jagaja. Kõige suuremat ühist jagajat tema enda peale jagades saame jagatiseks 1. Järgnevalt on antud arvude jagamisel saadud uute arvude (vastavate jagatiste) kõige suurem ühine jagaja 1, ja sellepärast need uued arvud ehk jagatised üldühelised.

Ümberpöörduvalt: Kahe arvu jagamisel kolmandale saime üldühelised jagatised, s. o. arvud, mille kõige suurem ühine jagaja on 1. Neid jagatise antud kolmanda arvuga kasvatades suurendame samakordselt ka jagatise kõige suurema ühise jagaja 1. Jagatiste kasvatamise kaudu tuleb antud arvud, arvu 1 samakordse kasvatamise kaudu tuleb antud arvude kõige suurema ühise jagaja, mis on võrdne antud kolmandale arvule.

Näit. arvude 135 ja 105-e kõige suurem ühine jagaja on 15. Jagatised $135 : 15 = 9$ ja $105 : 15 = 7$ on üldühelised.

§ 129. **Mitme arvu ühise kõige suurema jagaja leidmine järjendlise jagamise kaudu.** Olgu antud mitu arvu, näit. 9000, 5040, 4500 ja 3300. Me leiame nende kõige suurema ühise jagaja, kui järjendlise jagamise kaudu leiame esiteks antud kahe arvu kõige suurema ühise jagaja, teiseks — selle viimase ja kolmanda antud arvu kõige suurema ühise jagaja, kolmandaks — selle viimase ja neljanda antud arvu kõige suurema ühise jagaja. Viimane on otsitav kõige suurem ühine jagaja antud neljale arvule.

$$\begin{array}{r} 9000, 5040, 4500, 3300 \\ \hline 360 \\ \hline 180 \\ \hline 60 \end{array}$$

§ 130. **Kõige suurema ühise jagaja leidmine antud arvude algtegurite kaudu.** Võtame mõned arvud. Tarvis leida arvude 7920, 7560, 6840, 2880 ja 2160 ühine kõige suurem jagaja. Lahutame iga arvu algteguriteks. Algtegurid 2, 3 ja 5 on antud arvudes ühised, teised algtegurid ei ole ühised. Esimesed on

$$\begin{array}{l} 7920 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11. \\ 7560 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7. \\ 6840 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 19. \\ 2880 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5. \\ 2160 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5. \end{array}$$

antud arvudele ühisteks jagajaiks, teised ei ole. Esimesed võivad olla ühisjagajaiks: algarv 2 kõige rohkem kolmandas, algarv 3 kõige rohkem teises ja algarv 5 kõige rohkem esimeses astendis. Nende astendite kasvatis tuletab antud arvude kõige suurema ühise jagaja $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$.

Sellest ja teistest sarnastest näitustest järeldame, et *antud arvude kõige suuremaks ühisjagajaks on nende arvude lahutistes esinevate algtegurite alamjärjeliste astendite kasvatis*.

Eelpool antud näituses esinevad algarvud 7, 11 ja 19 esimeses astendis ainult mõnes lahutises; teistes ei ole neid algarvusi ka esimeses astendis (ehk teiste sõnadega: nad esinevad nullastendis). Tähendab: need algtegurid jäävad arvesse võtmata.

§ 131. Jagatavuse teise liigi tunnuste üldine alus. Teise liigi tunnuste üldise aluse kindlaksmääramisel tugeneme järgmisele väidendile:

Väidend 1. Kui kahe arvu kasvatis on jagatav kolmandale arvule, mis esimese antud arvuga üldüheline, siis on teine antud arv jagatav kolmandale.

Olgu kahe arvu A ja B kasvatis AB jagatav kolmandale arvule C. Arvud A ja C on üldühelised. Tarvis tõestada, et teine arv B on jagatav C-le.

Tuletame teise ja kolmanda arvu kasvatis BC. Kahel kasvatisel: antud kasvatisel AB ja uuel kasvatisel BC on kõige suuremaks ühiseks jagajaks arv B, sest nende kasvatisel jagamisel B-le saame üldühelised jagatised A ja C (§ 128). Antud kasvatis on väidendi põhjal jagatav kolmandale arvule C-le; tuletatud uus kasvatis BC on jagatav C-le, sest C on selles kasvatises teguriks. Tähendab: kolmas arv C on kasvatisel AC ja BC ühiseks jagajaks. Kui kahel arvul AB ja BC on ühine jagaja C, siis on nende kahe arvu kõige suurem ühine jagaja B ka jagatav sellele ühisele jagajale C (§ 127). Järelduslikult on teine antud arv jagatav kolmandale antud arvule.

Teise liigi tunnuste üldine alus on järgmine:

Väidend 2. Iga arv, mis põhiarvuga 10 üldüheline, on jagajaks 10-ne mõnesugusele astendile, mis ühe võrra vähendatud.

Võtame tähekujutisena mõne arvu K, mis on 10-ga üldüheline. Olgu K-le kõige lähem, temast suurem põhiarvu astend 10^a , nii et $10^{a-1} < K < 10^a$. Põhiarvu 10-ne astendite: 10^a , 10^{a+1} , 10^{a+2} jne. jagamisel K-le saame mõningad jäänused r_0 , r_1 , r_2 jne. Ükski jäänus ei või olla võrdne 0-le, sest nulljäänus tähendab lõpulikku jagamist. Lõpulik (jäänuseta) jagamine on aga võimata, sest jagaja K on üldüheline 10-ga, tähendab: ka tema astenditega. Kõige väiksem jäänus võib olla 1, kõige suurem $K-1$. Mitmesuguseid jäänuseid võib ette tulla kõige rohkem $K-1$. Et aga jäänuste arv on ilmlõpmata suur, siis peab, jagamise jätkamisel, mõni endine jäänus korduma. Kordub üks jäänus, siis kordub ka teine (s. o. esimese järgmine) jäänus, jne. Ütleme, et jäänus r_m kordub ja on võrdne mõnele järgnevale jäänusele r_n . Kui kaks arvu on ühe ja sellesama jagaja juures ühejäänuslised, siis on nende arvude vaheng jagatav sellesamale jagajale (§ 118, väid. 4). Jäänuse r_m saime 10^{a+m} jagamisel K-le, jäänuse r_n saime 10^{a+n} jagamisel K-le. Tähendab:

$$\frac{10^{a+n} - 10^{a+m}}{K} = \frac{10^{a+m} (10^{n-m} - 1)}{K} = t,$$

kus t on mingisugune täisarv. Kahe arvu kasvatis $10^{a+m} (10^{n-m} - 1)$ on K-le jagatav. Jagaja K on üldüheline esimesele tegurile 10^{a+m} ; järgnevalt on teine tegur $10^{n-m} - 1$ jagatav K-le. Tähendab: põhiarvu astend 10^{n-m} , mis ühe võrra vähendatud, on K-le jagatav.

Me teame, et miskisugune 10-ne astend jagub arvule, mis 10-nega üldüheline, andes jäänusesse 1. Harilikul jagamisel leiame, et, näit., $10^6 = 21$ -kordne $+ 1$; $10^8 = 73$ -kordne $+ 1$, jne.

Kõige väiksem ühine kordarv.

§ 132. **Mõisteselgitus.** Kahel või mitmel antud arvul võib olla *ühine kordarv*. Näit. 48 on 6-e, 8 ja 12-ne ühine kordarv. Antud arvude ühist kordarvu nimetatakse mõnikord ka nende arvude ühiseks jagandiks. Meil on siin küll tegemist jagandiga, aga ainult kordarvulise jagandiga. Antud arvudel kui jagajail võib piiramata hulk ühiseid kordarvusi olla. Sellepärast ei või kõnet olla kõige suuremast ühisest kordarvust, küll aga *ühisest kõige väiksemast* kordarvust. Näit. arvude 6-e, 8 ja 12-ne ühine kõige väiksem kordarv ehk kordarvuline jagand on 24. Ei ole ühtki arvu, mis 24-st väiksem olles igale antud arvule ilma jäänuseta oleks jagatav. Suuremaid aga võib piiramata arvul ette tulla, ja nad kõik on 24-ja kordarvud: 48, 72, 96, 120 jne. Et kordarvuline jagand ~~oma~~ jagajast väiksem ei või olla, siis järgneb sellest, et antud arvude kõige väiksem ühine kordarv soodsal juhusel kõige suuremale nende hulgast võib võrduda.

§ 133. **Ühiste kordarvude vahekord.** Et antud arvude ühised kordarvud on kõige väiksema ühise kordarvu mitmekordsed, selleks tõestame järgmise väidendi:

Väidend: *Antud arvude iga ühine kordarv on kordarvuks nende ühisele kõige väiksemale kordarvule.*

Olgu antud arvude miskisugune ühine kordarv N ja nende kõige väiksem ühine kordarv n , nii et $N > n$. Tarvis tõestada, et N on n mitmekordne. On olemas kaks võimalust: N on n -le kordarvuks, ehk ei ole selleks. Katsume järele, kas teine võimalus on maksev. Ütleme, et N ei ole n -le kordarvuks. Siis saame N jagamisel n -le mõnesuguse jagatise q ja mõnesuguse jäänuse r , nii et $N = nq + r$. Et kogund N ja osand nq igale antud arvule on jagatavad (§ 118, väid. 3), siis peab ka osand r igale antud arvule jagatav olema. Sellega on antud arvudel ühine kordarv r , mis väiksem on kui n . See ei ole aga võimalik, sest antud oli n kui kõige väiksem ühine jagaja. Järelduslikult peab N olema n -le kordarvuks.

§ 134. **Kõige väiksema ühise kordarvu leidmine antud arvude algtegurite kaudu.** Võtame näituseks mõned arvud: 2160, 3300, 23400 ja 544500. Tarvis leida nende ühine kõige väiksem kordarv. Lahutame iga antud arvu ta algteguriteks. Et otsitav arv oleks jagatav igale antud arvule iseäraldi, selleks pea-

$$2160 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5.$$

$$3300 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11.$$

$$23400 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 13 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 13.$$

$$544500 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 11 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 11^2.$$

vad temas kui kordarvulises jagandis esitatud olema antud arvude kõik algtegurid vähemalt neis astendites, milles nad esinevad antud arvudes. On see nõue täidetud, siis on otsitav arv antud arvudele ühiseks kordarvuks, — selle peale vaatamata, kas tema

lahutises kõrgemaastmelisi algtegureid kui antud arvudes ja kõrvalisi tegureid ette tuleb või mitte. Kui, näit., antud nelja arvu algtegurid kõik ühiseks kasvatiseks koondame, siis tuletame antud arvudele ühise kordarvu, milles algtegur 2 ette tuleb 11-das astendis, algtegur 3 ilmub 8-das astendis, jne. Et otsitav arv oleks kõige väiksem ühine kordarv, selleks on küllalt, kui ühist kasvatist moodustades võtame antud arvude algtegurid ainult neist arvudest, kus üks või teine algtegur esineb kõige kõrgemas astendis. Kui algteguri 2 võtame 4-das astendis, siis on otsitav arv selle algteguri suhtes jagatav arvule 2160, aga ka igale teisele antud arvule, kus algtegur 2 esineb alamates astendites. Samal viisil leiame, et kõige väiksema ühise kordarvu moodustamiseks peame algteguri 3 võtma kolmandas, algteguri 5 ka kolmandas, algteguri 11 — teises ja algteguri 13 — esimeses astendis. Nii moodustatud kõige väiksem ühine kordarv on $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 11^2 \cdot 13 = 84942000$.

Sellest ja teistest sarnastest näitustest järeldame, et *antud arvude kõige väiksemaks ühiseks kordarvuks on nende lahutistes esinevate algtegurite ülemjärjeliste astendite kasvatis*.

Antud arvude ühislahutamise kaudu kõrvaldatakse üleliigsed, korduvad tegurid otsekohe ja jõutakse rutemini eesmärgile.

840	792	756	360	2
420	396	378	180	2
210	198	189	90	2
105	99	—	45	3
35	33	63	15	3
—	11	21	5	3
—	—	7	—	5
7	—	—	1	7
1	—	1		11
	1			

Ühislahutamisel võime ka lühemal teel leida antud arvude kõige suurema ühise jagaja algtegurid. Olgu, näit., antud arvud 840, 792, 756 ja 360. Lahutame nad ühiselt, jagades igaühte algarvudele, alates 2-ga. Jagatised on jagatavate arvude all, alates teisest põikreast. Jagajad (algtegurid) on parempoolses püstreas. Kui põikreas kõigis lahtrites jagatised olemas, siis on see tõenduseks, et eelmisel real asuv jagaja on antud arvudele ühine. On põikrea ükski lahter tühi,

siis ei ole eelmisel real asuv algjagaja kõigile antud arvudele ühine. Ühised algtegurid on parempoolses püstreas paksemalt

kujutatud. Lahutamise on lõppenud, kui viimaseks jagatiseks igas püstreas arv 1 ilmub. Parempoolses püstreas esinevad antud arvude kõige väiksema ühise kordarvu algtegurid, nende hulgas ka antud arvude kõige suurema ühise jagaja algtegurid. Järgelikult on antud arvude kõige väiksem ühine kordarv $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 83160$, nende kõige suurem ühine jagaja $2^2 \cdot 3 = 12$.

§ 135. **Kahe arvu kõige väiksema ühise kordarvu põhitingimus.** See põhitingimus avaldub järgmistes väidendites:

Kahe antud arvu kõige väiksema ühise kordarvu jagamisel, kummalegi iseäraldi, saame üldühelised jagatised, ja ümberpöörduvalt: kui kahe antud arvu ühise kordarvu jagamisel, kummalegi iseäraldi, saame üldühelised jagatised, siis on see ühine kordarv antud kahele arvule ühiseks kõige väiksemaks kordarvuks.

Kahe antud arvu A ja B kõige väiksem ühine kordarv on N; vastavad jagatised on m ja n, nii et $N = Am = Bn$. Tarvis tõestada, et m ja n on üldühelised. — On olemas kaks võimalust: m ja n on üldühelised, või nad ei ole seda. Oletame, et m ja n ei ole üldühelised, ja näitame, et see oletus õige ei ole. Kui m ja n ei ole üldühelised, siis on neil mõnesugune ühine jagaja $d > 1$. Vastavaid jagatise tähe arvudega k ja l kujutades leiame, et $m = dk$, $n = dl$. Asemelepanu kaudu leiame, et $N = Adk = Bdl$, ja siit järeldame:

$$\frac{N}{d} = Ak = Bl,$$

s. o. antud arvudel A ja B on ühine kordarv, täisarvuline jagatis $N : d$, mis väiksem on kui N. See järeldus ei ole aga õige, sest väidendi põhjal on N kõige väiksem ühine kordarv. Kui järeldus õige ei ole, siis ei olnud ka meie oletus õige. Täheandab: m ja n on üldühelised.

Ümberpöörduvalt: Kahe antud arvu A ja B ühine kordarv on N; vastavad jagatised m ja n on üldühelised. Tarvis tõestada, et N on antud arvude kõige väiksem ühine kordarv. — Arv N võib olla antud arvude kõige väiksem ühine kordarv, võib ka mitte olla. Oletame, et N ei ole kõige väiksem ühine kordarv, ja näitame, et meie oletus õige ei ole. Kui N ei ole antud arvude kõige väiksem ühine kordarv, siis peab selleks mõni väiksem arv M olema, nii et $M = Ak = Bl$, kus k ja l on vastavad jagatised. Meie teame (§ 133), et $N = M$ -kordne $= Mt$, kus t on mõnesugune täisarv. Andmete põhjal ja asemelepanu kaudu leiame, et $Am = N = Mt = Akt$ ja $Bn = N = Mt = Blt$, ehk $m = kt$ ja $n = lt$. Siit järeldame, et m ja n ei ole üldühelised, sest neil on ühine jagaja $t > 1$. See järeldus ei ole õige, sest väidendi põhjal on m ja n üldühelised. Kui järeldus õige ei ole, siis ei olnud ka meie oletus õige. Täheandab: N on antud arvude kõige väiksem ühine kordarv.

Näit. arvude 45 ja 210 kõige väiksem ühine kordarv = 630. Jagatised $630 : 45 = 14$ ja $630 : 210 = 3$ on üldühelised. Ümberpöörduvalt: jagatised $90 : 15 = 6$ ja $90 : 18 = 5$ on üldühelised; sellepärast on 90 arvude 15 ja 18-ne kõige väiksem ühine kordarv.

§ 136. **Kahe arvu kõige väiksema ühise kordarvu ja kõige suurema ühise jagaja vahekord.** See vahekord oleneb järgmistest väidenditest:

Väidend 1: Kahe antud arvu kõige väiksema ühise kordarvu ja antud suurema arvu jagatis on võrdne jagatisele, mis tuletatud on väiksema antud arvu jagamisel mõlema antud arvu kõige suuremale ühisele jagajale, ja kahe antud arvu kõige väiksema ühise kordarvu ja antud väiksema arvu jagatis on võrdne jagatisele, mis tuletatud on suurema antud arvu jagamisel mõlema antud arvu kõige suuremale ühisele jagajale.

Antud on kaks arvu A ja B. Esimene on teisest suurem. Antud arvude kõige väiksem ühine kordarv on N, nende ühine kõige suurem jagaja on D. Vastavad jagatised on m ja n, p ja q, nii et $N = Am = Bn$ ja $A = Dp$, $B = Dq$. Tarvis tõestada, et $m = q$ ja $n = p$.

Andmete põhjal ja asemelepanu kaudu leiame, et $Dpm = Dqn$, ehk $pm = qn$. Viimasest võrdusest järeldame kaks valemit:

$$n = \frac{pm}{q} \quad \text{ja} \quad p = \frac{qn}{m}.$$

Esimene valem näitab, et pm on q-le jagatav. Et p ja q üldühelised on (§ 128), siis on m jagatav q-le (§ 131, väid. 1). Teine valem näitab, et qn on m-le jagatav. Et m ja n on üldühelised (§ 135), siis on q jagatav m-le. Kui kahest arvust m ja q esimene on jäänuseta jagatav teisele, niisama ka teine on jäänuseta jagatav esimesele, siis peavad need arvud võrdsed olema, s. o. $m = q$.

Kui valemis $pm = qn$ võtame $m = q$, siis on ka $n = p$.

Näit. on antud arvud 16 ja 20, nende kõige väiksem ühine kordarv = 80, kõige suurem ühine jagaja = 4. Võrdsed jagatised on: $80 : 20 = 4$ ja $16 : 4 = 4$; niisama $80 : 16 = 5$ ja $20 : 4 = 5$.

Väidend 2: Kahe antud arvu kõige väiksema ühise kordarvu ja kõige suurema ühise jagaja kasvatise on võrdne mõlemate antud arvude kasvatisele.

Antud kahe arvu A ja B ühine kõige väiksem kordarv on N, ühine kõige suurem jagaja on D. Tarvis tõestada, et $ND = AB$.

Olgu vastavad jagatised m ja n, p ja q, nii et $N = Am = Bn$ ja $A = Dp$, $B = Dq$. Andmete põhjal ja asemelepanu tarvitades leiame, et $ND = AmD = DpmD = DpqD = AB$. — Samasugune on järeldus, kui võtame $ND = BnD = DqnD = BA = AB$.

Näit. kahe arvu 20 ja 32 kõige väiksem ühine kordarv = 160, nende kõige suurem ühine jagaja = 4. Kasvatised $160 : 4$ ja $20 : 32$ on mõlemad võrdsed arvule 640.

Eeloleva teise väidendi põhjal saadud valemist $ND = AB$ järeldame, et

$$N = \frac{AB}{D} \text{ ja } D = \frac{AB}{N},$$

ehk sõnastatult:

1) Kahe antud arvu kõige väiksem ühine kordarv on võrdne antud arvude kasvatisele, mis jagatud nende kõige suuremale ühisele jagajale.

2) Kahe antud arvu kõige suurem ühine jagaja on võrdne antud arvude kasvatisele, mis jagatud nende kõige väiksemale ühisele kordarvule.

Näit. arvude 36 ja 60 kõige suurem ühine jagaja = 12, nende kõige väiksem ühine kordarv = 180. Valemid annavad:

$$N = \frac{36 \cdot 60}{12} = 180 \text{ ja } D = \frac{36 \cdot 60}{180} = 12.$$

Et kergem on tegurit kui kasvatist jagada kahe antud arvu kõige suuremale ühisele jagajale, sellepärast on otstarbekohasem esimest valemist teisendatult tarvitada järgmisel kujul:

$$N = pB = Aq = Dpq.$$

Eelmist näitust teisendades saame:

$$N = 3 \cdot 60 = 180, \text{ ehk } N = 36 \cdot 5 = 180, \text{ ehk } N = 12 \cdot 3 \cdot 5 = 180$$

Ka teist valemist võime asemelepanu kaudu teisendada, kui meil kõige väiksema ühise kordarvu jagatis kummalegi antud arvule teada või kergesti leitav on.

Eelolev teine väidend on kahe antud arvu lahutamise kaudu algteguriteks kergesti ja näitlikult tõestatav. Kindlate määruste põhjal (§§ 130 ja 134) tulevad kahe arvu ühise kõige suurema jagaja ja kõige väiksema ühise kordarvu moodustamisel kasvatisteks võtta: esimesel korral — kahe arvu lahutistes esinevate algtegurite alamjärjelised astendid, teisel korral — neis lahutistes esinevate algtegurite ülemjärjelised astendid. Algtegurite alamjärjeliste ja ülemjärjeliste vahelised astendid kahes lahutises ette ei tule: kahe arvu kõige suurema ühise jagaja ja kõige väiksema ühise kordarvu algteguriteks lähevad mõlema antud arvu kõigi algtegurite astendid. Järgnevalt on esimeste kasvatis võrdne kahe antud arvu kasvatisele, Näit. $260 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, $560 = 2^4 \cdot 5 \cdot 7$. Nende arvude:

$$\text{kõige suurem ühine jagaja} = 2^3 \cdot 5 = 40;$$

$$\text{kõige väiksem ühine kordarv} = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 5040.$$

$$\text{Antud arvude kasvatis} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \times 2^4 \cdot 5 \cdot 7 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 201600.$$

Antud arvude kõige suurema ühise jagaja ja kõige väiksema ühise kordarvu kasvatis on samasuurune, ja nimelt $= 2^3 \cdot 5 \times 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 201600.$

§ 137. Ruutjuurendamine ja kantjuurendamine algtegurite astendite kaudu. Ruutastendamisel teeme algastendi algtegurite arvu kahekordseks, nii siis paarisarvuliseks; kantastendamisel teeme algastendi algtegurite arvu kolmekordseks. Juurendamisel talitame vastupidiselt. Kui antud arvus (juurendis) on algtegurite arv paarisarvuline, siis on antud arv täielik ruutastend. Ruutjuure leiame, kui antud juurendi algtegurite arvu kahekordselt vähendame. Kui antud juurendis on algtegurite arv kolmikarvuline, siis on juurend täielik kantastend. Kantjuure leidmiseks peame algtegurite arvu kolmekordselt vähendama. Näit.

$$\sqrt{1296} = \sqrt{2^4 \cdot 3^4} = 2^2 \cdot 3^2 = 36; \quad \sqrt[3]{592704} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 3^3 \cdot 7^3} = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84, \text{ jne.}$$

§ 138. Ülesanded. — 172. Mispärast on loomulikus arvudereas üksteisele järgneva iga kahe arvu kasvatis jagatav 2-le, iga kolme arvu kasvatis jagatav 6-le?

173. Missugused kahekohalised arvud on jagatavad 3-le ja 5-le ja mispärast?

174. Eesti riigi maakondade arv on viie võrra väiksem kui 1512-ne ja 6480-ne kõige suurema ühise jagaja mitmesuguste jagajate hulk. Mitu maakonda on Eesti riigis? Mitu maakonda oleks siis, kui Alutaguse maakond Viru maakonnast lahutataks?

175. Isa ja poja vanadus aastates määratakse arvudega, mille kasvatis on 2016. Nende arvude kõige väiksem ühine kordarv on 126 korda suurem, kui nende kõige suurem ühine jagaja. Kui vana on isa, kui vana poeg? Mitu vastust on võimalikud?

176. Lahutades algteguriteks arvud: 3600, 7560, 11880 ja 18000, arvle: 1) mitu korda on nende kõige väiksem ühine kordarv suurem kui nende kõige suurem ühine jagaja? 2) kuidas muutuvad mõlemad viimased, kui iga antud arvu jagame 4-le? kasvatame 3-ga?

177. Tee katseid, jagades 9999...99, s. on arvu, milles esineb ainult arvumärk 9, arvudele 13, 17, 19, 21, 23, 27, 29, 63, igauhele iseäraldi, ja seleta, miks jagamine jäänuseta lõpeb.

178. Uus kalender hakkas meil maksma 1. veebruaril 1918 a. Aasta algul taluteenistusse tulles oli sulane omale niipalju töövabasid laadapäivi välja tinginud, kui palju selle aasta päevade arvul isesuursi jagajaid juhtub olema. Uue kalendri peale üle minnes kartis sulane, et ta aasta lühendamise tagajärjel mõnest laadapäevast ilma jääb. Kas oli kartuseks põhjust? Mitu laadapäeva pidi sulane, lepingu põhjal peremehega, sel lühendatud aastal saama?

179. Leida järjendlise jagamise kaudu arvude 2460, 3600, 4920 ja 13200 kõige suurem ühine jagaja.

180. Esimene antud arv on kolm korda suurem kui kahe antud arvu ühine kõige suurem jagaja, mis on kolmaskümnes osa kahe antud arvu kõige väiksemast ühisest kordarvust. Mõlemate viimaste vaheng on 2088. Kui suur on kumbki antud arv?

181. Bengaalia madalikus, Indias, on kodumaaliselt asumas üks loomataug, kes suurt hävitustööd on teinud ja veelgi teeb. Leida tema hävituskül-

vava abinõu nimetus, võttes juurte $\sqrt[3]{370894}$, $\sqrt[3]{68921004}$ ja $\sqrt[4]{50626}$ kaheko-
halised lõpuosad ja juurendamisel saadud jäänused — viimased vastavate juurte
järele — tähtede järjekorra määraks Eesti tähestiku alusel.

182. Arvule, mis põhiarvu 10-ga üldüheline, viimase astendid jagades ja tegeldamist alates astendiga, mis jagajast suurem, temale aga kõige lähem on, saame korduvad jäänused (§ 131, väid. 2). Näidata, et kordamine esimese jäänusega algab.

183. Iga jagatist, mis tuletatakse kahe arvu 5445946 ja 500552 kõige suurema ühise jagaja otsimisel järjendlise jagamise kaudu, tähe järjekorra määraks võttes, Eesti tähestiku alusel, moodustame tuttava ajaloolise nime. Mis nimi see on?

Õpetajaile tähelepanemiseks.

Suurema trükiga osad eelolevas raamatus on algkoolide nõuetele vastavalt kokku seatud, kuna vähema trükiga osad keskkoolide nõudeid tohiksid rahuldada.

	Emk.
Dормидонтова З. Азбука с рис. А. Гринева	120.—
L. Elmanovitsch ja M. Uusna, Vene kirjanikud Eesti koolidele. Sõnastikuga. № 1. М. Ю. Лермонтов.	50.—
Jerusalem, V. prof. Psüholoogia õperaamat. A. Kuksi toimet.	200.—
Aug. Gustavson, Navigatsiooni õperaamat I osa	100.—
Haman, A. Japanese stories by L. Hearn. I. volume.	50.—
Karlson, Ed. Kahekõrdne ehk Itaalia raamatupidamine	60.—
Krimms-Kotkas, A. Vene keele lugemisraamat Eesti koolidele. I osa. IV keele õpeaasta.	80.—
Lang, Juh. Füüsika. Rahvakoolidele.	170.—
Karl Lütsch, Klaveri etüüdid	100.—
Mikkelsaar, F. V. Geomeetria meetoodika.	70.—
Nano, Villem. Trigonomeetria õperaamat keskkoolidele	90.—
Pezold, H. Saksa keele õpetus.	50.—
Pezold, H. Saksa keele õperaamat. I.	90.—
" " " II.	90.—
Pezold, H. English Reading Book (Inglise lugemisraamat).	170.—
" Inglisekeele õpetus. Teine trükk.	180.—
Päss, Viktor. Algebra ülesannete kogu. I osa.	80.—
Päss, Viktor. Neljaastmelised logaritmid. Teine trükk.	35.—
Пикарский, Н. Русская грамматика по новой орфографии.	50.—
" " Синтаксис	100.—
Reiman, Villem. Eesti ajalugu. Trükiks korraldanud cand. hist. H. Sepp.	120.—
Rimski-Korsakoff, N. Praktiline harmoonia õperaamat. I osa. Tõlkinud J. Zeiger.	50.—
— Praktiline harmonia õperaamat. II osa. Tõlkinud J. Zeiger.	50.—
Saar, Märt. Koorilaulud.	50.—
Suits, Gustav. Eesti lugemisraamat. II osa.	120.—
Tennmann, Eduard. Kirik arenemiskäigul. I osa.	40.—
Treiberg, Peeter. Kõige uuem aeg (1789—1914). I.	90.—
Tshelpanoff, prof. Loogika õperaamat. A. Kuksi toimetusel.	180.—
Univer, M. Kasvatusteadus. I osa.	80.—
Univer, M. Kasvatusteadus. II osa. 170 mrk. Mõlemad koos	250.—
Veikmann, A. Protsentide väljaarvamise tabelid.	150.—
Vipper, R. prof. Uus aeg 1500—1789. I osa. Tõlkinud M. Tork. Toimetanud ja täiendanud J. Tork, Tartu õpetajate semi- naari direktor. (Müüdüd).	90.—
Vipper, R. prof. Uus aeg 1500—1789. II osa. Tõlkinud M. Tork. Toimetanud ja täiendanud J. Tork.	80.—
Vipper, R. prof. Uus aeg 1500—1789. I ja II osa koos	170.—