A. BORKVELL

MATEMAATILISE ANALÜÜSI KURSUS

I

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS

A-22333 I

ALBERT BORKVELL

MATEMAATILISE ANALÜÜSI KURSUS

I OSA

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1958

EESSÕNA

Käesolev «Matemaatilise analüüsi kursus» on koostatud peamiselt pedagoogiliste instituutide programmi nõuete kohaselt ja on määratud põhiliseks käsiraamatuks matemaatilise analüüsi alal esimese ja teise kursuse üliõpilastele. Vastavalt on teos jaotatud kaheks osaks, milledest esimene sisaldab esimesel kursusel käsitletavaid peatükke ja teine teisel kursusel käsitletavaid peatükke.

Teose mõlemas osas on püütud näidata käsitletavate matemaatilise analüüsi põhimõistete seost meid ümbritseva reaalsusega, nende väljakasvamist sellest reaalsusest. Teoses esinevaid mõisteid, juhiseid, definitsioone ja teoreeme on püütud loogiliselt põhjendada, viies nende käsitluse vajaduse korral detailideni ja kasutades, kus vähegi võimalik, rööbiti analüütilise arutlusega geomeetrilist tõlgendust. Seega on teoreetiliste küsimuste käsitluses pearõhk pandud nende sisu hõlpsamale mõistetavusele, et võimaldada üliõpilastel suurema eduga tungida matemaatilise analüüsi ning selle rakenduste valda.

Matemaatilise analüüsi mõisted peaksid süvendama üliõpilase loogilis-matemaatilise mõtlemise arenemist ning andma talle sellekohaseid vilumusi ja oskusi. Seda asjaolu on käesolevas töös kogu ulatuses silmas peetud. Mõne printsipiaalse küsimuse ranget põhjendust ei ole teoses otseselt esile toodud, sest see viiks antud kursuse piiridest välja; sellepärast on piirdutud ainult lühikeste märkustega sääraste küsimuste olemuse kohta ja viidatud käsiraamatutele, millest võib leida vastava küsimuse põhjalikumat käsitlust.

Teoreetiliste küsimuste selgitamiseks ja täiendamiseks on teoses läbi töötatud teatav arv illustreeriva iseloomuga praktilisi näiteid. Peale selle on iga peatüki lõppu paigutatud omaette paragrahvina küllaldasel arvul vastavaid harjutusülesandeid, mis on varustatud vastustega (raamatu lõpus), et võimaldada õppijail teose peatükkide läbitöötamisel omandatud teadmiste ja oskuste kontrolli. Raamatus esinevate definitsioonide, teoreemide, juhiste ja märkuste kiireks leidmiseks on toodud teose mõlema osa lõpus aineregister. Valemite kasutamise kergenda-

miseks harjutusülesannete lahendamisel on mõlema osa lõpus antud ka teoses esinevate valemite tabel.

Esitatav «Matemaatilise analüüsi kursus» ületab oma sisult teataval määral pedagoogiliste instituutide praegu kehtiva programmi nõudeid. See on mõeldud selleks, et lugejal oleks võimalik vajaduse korral (näiteks kursusetööde ettevalmistamisel) saada ühe või teise küsimuse kohta täiendavaid teadmisi.

Käesoleva «Matemaatilise analüüsi kursuse» kirjutamisel on mõnede üksikute küsimuste osas kasutatud järgmisi teoseid:

1) Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, 1955;
2) А. Ф. Бермант, Курс математического анализа, 1953;
3) А. К. Власов, Курс высшей математики, 1946;
4) В. И. Смирнов, Курс высшей математики, 1952;
5) А. Я. Хинчин, Краткий курс математического анализа, 1953;
6) Г. П. Толстов, Курс математического анализа, 1954;
7) G. Rägo, Kõrgem matemaatika, 1952;
8) R. Rothe, Höhere Mathematik, 1956.

Avaldan siinjuures ühtlasi tänu asjalike ja oluliste märkuste eest E. Vilde nimelise Tallinna Pedagoogilise Instituudi matemaatika kateedri õppejõudude kollektiivile, eriti E. Etverkile õpiku I osa ja I. Petersenile II osa sisu kontrollimise ja oluliste paranduste tegemise eest ning samuti I ja II osa retsenseerijale Tartu Riikliku Ülikooli professorile G. Kangrole.

Tallinn, 1958. a.

Autor

SISSEJUHATUSEKS

Matemaatika ajaloolises arenemiskäigus võib täheldada seda, et alguses tegeldi matemaatikas arvudega kui muutumatute suurustega. Nii näiteks algebra arenemise algastmel vaadeldi nii antud kui ka otsitavaid suurusi jäävate, muutumatute, iseseisvate suurustena ja alles hiljem hakati nägema seost nende vahel, hakati nägema nende vastastikust sõltuvust ja muutumist. F. Engels kirjutas oma teoses «Looduse dialektika»: «Esimene nähtus, mis liikuva mateeria vaatlemisel meie tähelepanu äratab, on üksikute liikumiste ja üksikute kehade omavaheline vastastikune seos ning nende *sõltuvus* üksteisest.» *

Edasi ütleb F. Engels: «Nagu kõik teised teadused, nii on ka matemaatika välja kasvanud inimeste praktilistest vajadustest: maatükkide suuruse ja anumate mahu mõõtmisest, ajaarvamisest ja mehaanikast.» ** Inimeste praktiline vajadus oli see, mis sundis matemaatikas otsima uusi, üldisemaid ja võimsamaid, muutuvate suuruste ja nende vastastikuse sõltuvuse mõistel põhinevaid meetodeid.

Tootmine, mis hakkas kiiresti arenema XVII sajandi esimesel poolel ja mida iseloomustas see, et inimeste käsitööd hakkasid asendama masinad, seadis nii mehaanikale kui ka matemaatikale ülesande lahendada küsimusi, mis soodustaksid tootmise ja tehnika arengut, milleks ei olnud enam küllaldased elementaarmatemaatika võtted ja meetodid. Seega olid praktika vajadused selleks tõukejõuks, mis põhjustasid analüütilise geomeetria ning sellega ühtlasi ka diferentsiaal- ja integraalarvutuse tekkimist ja arenemist.

Need uued matemaatilised distsipliinid, mis kuuluvad juba nn. kõrgema matemaatika valdkonda, kõrvaldasid seni kestnud raskused matemaatilistes teadustes ning soodustasid seega matemaatika kiiret arenemist dialektilise materialismi vaimus.

Pöördepunktiks matemaatika arenemise ajaloos oli Descartes'i poolt loodud analüütiline geomeetria. Descartes võttis tarvitusele ristkoordinaatide süsteemi (Cartesiuse koordinaadid) ja

---

* Ф. Энгельс, Диалектика природы, Государственное издательство политической литературы, 1950, стр. 182.

** F. Engels, Anti-Dühring, ERK, Tallinn, 1954, lk. 35.

rakendas algebrat geomeetrilistes probleemides. Ta lõi muutuva suuruse mõiste, mis võimaldas geomeetrilisi kujundeid esitada algebraliste funktsioonide ja võrrandite abil ning seega viia geomeetriliste objektide kvalitatiivsed iseärasused kvantitatiivsetesse vahekordadesse.

Muutuva suuruse toomine matemaatikasse oli olulise tähtsusega sündmuseks. See muutis vana, tardunud matemaatika uueks, painduvaks matemaatikaks ning viis matemaatika lähemale loodusele ja tehnikale. Sel puhul ütles F. Engels: «Pöördepunktiks matemaatikas oli Descartes'i *muutuv suurus;* tänu sellele pääsesid matemaatikasse *liikumine* ja *dialektika* ning samuti tänu sellele sai *kohe paratamatuks diferentsiaal- ja integraalarvutus* . . .» * Sellest momendist alates avanesid matemaatikale edaspidised laialdased arenemisvõimalused ja ta sai seega mitmesuguste loodusnähtuste ja tehniliste probleemide uurimise tõhusaks abinõuks. Matemaatilised probleemid hakkasid omandama aktuaalset ja elulähedast iseloomu ning seni valitsenud eluvõõras formalism kaotas oma juurdunud ainuõiguse matemaatikas.

Kõrgema matemaatika õpetamise algusest peale tuleb juhtida õppijate tähelepanu sellele, et « . . . muutuvate suuruste matemaatika, mille tähtsaimaks osaks on infinitesimaalarvutus, pole oma olemuselt mitte midagi muud kui dialektika rakendamine matemaatilistele suhetele».**

V. I. Lenin näitab oma «Filosoofilistes vihikutes», missugust teed käib dialektika: « . . . koeksisteerimiselt kausaalsusele ja ühelt seose ning vastastikuse sõltuvuse vormilt teisele, põhjalikumale ja üldisemale.»*** Seal, kus algab sõltuvuse uurimine, on eriti tähtis rõhutada seda Lenini mõtet: me peame jõudma ühelt sõltuvuse vormilt teisele, põhjalikumale, ja mis eriti tähtis matemaatika seisukohalt, üldisemale, s. o. üldkehtivale, peame jõudma kausaalsuse kõrgemate vormideni.

Funktsiooni mõiste on üks tähtsamatest mõistetest matemaatikas ja funktsioonid ise on matemaatilise analüüsi peamisteks uurimisobjektideks, mille puhul dialektilise materialismi põhimõtted leiavad täielikku rakendamist. Funktsioonide õpetuse käsitlemisel tuleb rõhutada, et nähtustevahelise seose ja põhjuslikkuse tunnetamine moodustab marksistliku maailmavaate ühe tähtsama alussamba, sest on ju nähtustevaheline seos ja põhjuslikkus igasuguse seaduspärasuse alus. Nähtuste seaduspärasusel põhinev teaduslik tunnetamine hajutab idealistliku ja religioosse udu ja uima, mis on aastatuhandeid takistanud inimest nägemast kaugemale ja selgemini.

---

* Ф. Энгельс, Диалектика природы, Государственное издательство политической литературы, 1950, стр. 206.

** F. Engels, Anti-Dühring, ERK, Tallinn, 1954, lk. 119.

*** В. И. Ленин, Философские тетради, Государственное издательство политической литературы, 1947, стр. 193.

On ju vaieldamatuks faktiks see, et olgu uuritav nähtus missugune tahes, ei saa me teda tundma õppides mööda minna nähtust seletavatest ja iseloomustavatest suurustest, suurustele vastavatest arvudest ja nende suhetest, sest matemaatika aineks on «tegeliku maailma ruumilised vormid ja kvantitatiivsed suhted» *. Nähtuste tundmaõppimisel mõõdame näiteks õhu temperatuuri, keha liikumise kiirust, pinna pindala, keha ruumala ja muud selletaolist; teeme kindlaks, missugused suurused on seal jäävad ja missugused muutuvad ning kuidas nad muutuvad. Seejuures paneme tähele, et suurused ei muutu mitte igaüks omapead, vaid et nad on omavahel funktsionaalses seoses, et ühe suuruse muutumine põhjustab teise suuruse muutumist; paneme tähele, et näiteks õhurõhk antud ajamomendil sõltub mõõtmiskoha kõrgusest, pendli võnkeaeg sõltub pendli pikkusest, soola lahustuvus temperatuurist jne. Ei looduses ega inimühiskonnas pole võimalik õigesti mõista ühtki nähtust, kui teda võtta teistest isoleeritult, teistega sidestamatult. Nii on lugu ka matemaatikaga. Matemaatikas ei tegelda arvudega, mis pole seotud nähtustega ning millede vahel pole otsest või kaudset kausaalset sidet.

Nähtuste täielik ja täpne tundmine pole mõeldav ilma matemaatilise valemita, mis on kujunenud tänapäeval väga paljudes teadustes teataval määral ideaaliks, milleni iga täpne uurimistöö peab välja viima. Sellepärast pole olemas matemaatilisi printsiipe, mis eksisteerivad omaette, lahus maailmast ja selle nähtustest. Teatav valem, väärtuspaaride tabel või graafik täidab oma ülesande ainult siis, kui temast osatakse välja lugeda nähtust iseloomustavaid asjaolusid.

Kui elementaarmatemaatika uurib objektiivse maailma nähtuste vahelisi lihtsaid seoseid, siis diferentsiaal- ja integraalarvutus võimaldab seda teha palju keerukamate nähtuste ja nendevaheliste seoste puhul.

Olgu matemaatika õppijaile selles suhtes kasuks käesolev õpperaamat.

---

* F. Engels, Anti-Dühring, ERK, Tallinn, 1954, lk. 35.

I peatükk

FUNKTSIOONID

§ 1. Reaalarvud. Matemaatilises analüüsis opereeritakse peamiselt reaalarvudega, mis tekivad näiteks objektide loendamise ja suuruste mõõtmise tulemusena. Nagu teame elementaarmatemaatikast, moodustavad reaalarvude valla ratsionaal- ja irratsionaalarvud. Ratsionaalarvuks nimetatakse arvu, millele saab anda kuju $\frac{m}{n}$, kus m ja n on täisarvud $(n \neq 0)$.* Seega kuuluvad ratsionaalarvude valda positiivsed ja negatiivsed täisarvud ning null ja harilikud murrud, järelikult ka perioodilised ja lõplikud kümnendmurrud, sest iga harilikku murdu saab teisendada kas perioodiliseks murruks või lõplikuks kümnendmurruks.

Võttes näiteks ruutvõrrandi

$$x^2 = 5,$$

näeme, et sellel pole ratsionaalarvude vallas lahendit. Võrrandi mõlemad lahendid $x_1 = +\sqrt{5}$ ja $x_2 = -\sqrt{5}$ kui lõpmatud mitteperioodilised kümnendmurrud pole enam ratsionaalsed. Võrrandi lahend $\sqrt{5}$ kujutab geomeetriliselt küll reaalset suurust ja nimelt niisuguse täisnurkse kolmnurga hüpotenuusi pikkust, mille kaatetite pikkused on 1 ja 2, kuid need kaatetid ei ole hüpotenuusiga ühismõõdulised, s. t. ei ole niisugust ratsionaalarvu, mis väljendaks hüpotenuusi suhet ühe või teise kaatetiga. Seepärast nimetame antud võrrandi lahendeid $+\sqrt{5}$ ja $-\sqrt{5}$ irratsionaalseteks.

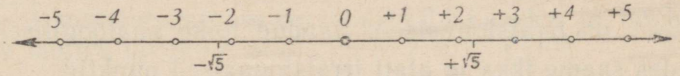
Samuti kuuluvad irratsionaalarvude valdkonda arvud π, $\log 4$, $\sin 10°$ jne.

---

* Avaldisel $\frac{m}{0}$ pole mõtet, sest ei ole arvu, mis nulliga korrutamisel annaks arvu m. Samuti pole mõtet sümboolsel avaldisel $\frac{0}{0}$. Viimast avaldist nimetatakse matemaatilises analüüsis määramata kujuks, millest tuleb juttu edaspidi.

Nii ratsionaal- kui ka irratsionaalarve võib kujutada arvsirgel arve väljendavate sirglõikude otspunktidena, kui valida vastav mõõtühik, märkida arvsirgel nullpunkt ning lugeda nullpunktist ühele (horisontaalsel arvsirgel harilikult paremale) poole minev sirge suund positiivseks ja vastandsuund negatiivseks. Nullpunktist paremale poole mineva sirglõigu otspunkt kujutab siis positiivset arvu ja nullpunktist vasakule poole mineva sirglõigu otspunkt negatiivset arvu. Seda arvu, mida kujutab geomeetriliselt ehk graafiliselt sirglõigu otspunkt, nimetatakse selle otspunkti *koordinaadiks*.

Igale reaalarvule vastab arvsirgel valitud mõõtühiku puhul üks ja ainult üks punkt, ja ümberpöördult, igale punktile arvsirgel valitud mõõtühiku puhul vastab üks ja ainult üks reaal-



Joon. 1.

arv. Seega punkti asend arvsirgel on tema koordinaadi abil *üheselt* määratud.

Et märkida näiteks irratsionaalarvu $\sqrt{5}$ graafiline kujutis punktina arvsirgel, selleks joonestame valitud mõõtühikutes täisnurkse kolmnurga, mille kaatetite pikkused on 1 ja 2. Kandes sirkliga hüpotenuusi pikkuse arvsirgele nõnda, et sirkli üks ots oleks nullpunktis, märgime sirkli teise otsaga nullpunktist paremal pool arvsirgel punkti, mis on irratsionaalarvu $\sqrt{5}$ graafiliseks kujutiseks (joon. 1). Kandes aga sirkliga sama hüpotenuusi pikkuse nullpunktist vasakule poole, saame arvsirgel punkti, mis kujutab negatiivset irratsionaalarvu $-\sqrt{5}$.

Kaht reaalarvu, mis erinevad teineteisest ainult märgilt, nimetatakse *vastandarvudeks*. Nii näiteks $+\sqrt{5}$ ja $-\sqrt{5}$ on vastandarvud. Vastandarvude graafilised kujutised punktidena arvsirgel asetsevad nullpunktist ühekaugusel paremal ja vasakul pool.

Ratsionaalarvudele vastavaid punkte arvsirgel nimetatakse *ratsionaalseteks punktideks* ja irratsionaalarvudele vastavaid punkte *irratsionaalseteks punktideks*.

Ükskõik missuguses kohas ja kuitahes väikese lõigu me arvsirgel ka võtaksime, ikka asetseb sellel lõigul lõpmata palju nii ratsionaalseid kui ka irratsionaalseid punkte. Piltlikult võime seda tähele panna alljärgnevalt. Võtame arvsirgel lõigu ratsionaalsete otspunktidega A ja B, millede ratsionaalsed koordinaadid olgu vastavalt a ja b. Lõigu AB keskpunkti C koordinaat

$c = \frac{a+b}{2}$ on samuti ratsionaalne, järelikult ka keskpunkt C on ratsionaalne punkt. Lõikude AC ja CB keskpunktid C_1 ja C_2 on jälle ratsionaalsed, sest nende vastavad koordinaadid $c_1 = \frac{a+c}{2}$ ja $c_2 = \frac{c+b}{2}$ on ratsionaalsed. Niimoodi saadud lõike edasi poolitades võime leida kuitahes palju uusi ratsionaalseid punkte.

Arvsirge samal lõigul AB, mille otspunktide koordinaadid on a ja b, võime märkida samuti ka kuitahes palju irratsionaalseid punkte. Kui näiteks valime sellel lõigul mingi irratsionaalse punkti D *, mille koordinaat on d, siis lõike AD ja DB poolitades saame poolituspunktideks D_1 ja D_2 samuti irratsionaalsed punktid, sest nende punktide vastavad koordinaadid $d_1 = \frac{a+d}{2}$ ja $d_2 = \frac{d+b}{2}$ on irratsionaalsed. Saadud lõike analoogiliselt edasi poolitades saame ikka ja alati irratsionaalsed punktid.

Sellest arutlusest nähtub, et iga kuitahes väike arvsirge lõik sisaldab lõpmata palju nii ratsionaalseid kui ka irratsionaalseid punkte, kusjuures iga irratsionaalse punkti läheduses on kuitahes palju ratsionaalseid punkte, ja ümberpöördult.

Kuigi alati ei ole võimalik leida geomeetrilise konstruktsiooni abil irratsionaalarvule vastavat lõigu pikkust arvsirgel ja seega ühtlasi irratsionaalset punkti, siis on ikka võimalik leida niisugune vastav ratsionaalarv, mis kuitahes suure täpsusega asendab irratsionaalarvu. Sellele ratsionaalarvule vastab arvsirgel ratsionaalne punkt, mis võib olla otsitavale irratsionaalarvu graafilisele kujutisele ehk otsitavale irratsionaalsele punktile kuitahes lähedal.

§ 2. Imaginaar- ja kompleksarvud. 1) Kui ruutvõrrandis

$$x^2 = a$$

on $a < 0$, siis sellel võrrandil pole reaalarvude (s. o. ratsionaal- ja irratsionaalarvude) vallas lahendit. Kui näiteks

$$x^2 = -9,$$

siis

$$x = \sqrt{-9}.$$

Kui siin sümbol $\sqrt{-9}$ tähendab arvu, siis selle arvu teine aste on -9. Et iga reaalarvu teine aste on ikka ja alati mittenegatiivne, siis sellest järeldub, et arv, mida kujutab sümbol $\sqrt{-9}$

* Niisugune valik on alati võimalik, sest kui paigutame arvsirgele nullpunktist alates säärase ruudu diagonaali pikkuse $x\sqrt{2}$, kus ruudu külje pikkust määrav ratsionaalarv x on valitud nõnda, et $x\sqrt{2}$ on suurem kui a ja väiksem kui b, siis saame sirglõigul AB irratsionaalse punkti.

ja mille teine aste on negatiivne, ei kuulu enam reaalarvude valda.

Siin tekib uus arvude vald, mida nimetatakse *imaginaararvude* vallaks. Nii on $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-6}$, $\sqrt{-12}$ jne. imaginaararvud, mida võime kirjutada järgmiselt:

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9 \cdot (-1)} = 3\sqrt{-1},$$
$$\sqrt{-6} = \sqrt{6 \cdot (-1)} = \sqrt{6} \cdot \sqrt{-1},$$
$$\sqrt{-12} = \sqrt{12 \cdot (-1)} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

millest nähtub, et negatiivse arvu ruutjuurt on ikka võimalik avaldada reaalarvu ja $\sqrt{-1}$ korrutisena.

$\sqrt{-1}$ nimetatakse *imaginaarühikuks* ja tähistatakse lihtsuse mõttes tähega i, s. o.

$$\sqrt{-1} = i,$$

kus i tähendab arvu, mille teine aste on -1, s. o.

$$i^2 = -1.$$

Et aga $-i$ teine aste on samuti -1, s. o. $(-i)^2 = -1$, siis võime kirjutada, et ka

$$\sqrt{-1} = -i.$$

2) Lahendades näiteks ruutvõrrandi

$$x^2 - 8x + 20 = 0,$$

leiame, et

$$x = 4 \pm \sqrt{16 - 20} = 4 \pm 2i.$$

Sellel võrrandil, nagu näeme, pole reaalarvude vallas lahendit. Võrrandi mõlemad lahendid $4 + 2i$ ja $4 - 2i$ on imaginaararvud, mis koosnevad kahest osast: reaalosast (4) ja imaginaarosast ($\pm 2i$).

Imaginaararvud koos reaalarvudega moodustavad arvude valla, mida nimetatakse *kompleksarvude* vallaks. Kompleksarv on reaalarvude ja imaginaararvude ühine nimetus.

Kompleksarvu üldine kuju on

$$a + bi,$$

kus a ja b on mistahes reaalarvud; a on kompleksarvu reaalosa ja bi tema imaginaarosa.

Kui kompleksarvus $a + bi$ on $b = 0$, siis

$$a + 0 \cdot i = a$$

on reaalarv. Kui aga $b \neq 0$, siis saame imaginaararvu. Kui selles imaginaararvus $a = 0$, siis nimetame arvu

$$0 + bi = bi$$

puhtimaginaararvuks. Kui $a = b = 0$, siis

$$0 + 0 \cdot i = 0.$$

Kaks kompleksarvu on võrdsed, kui nende reaalosad on omavahel võrdsed ja imaginaarosade kordajad on omavahel võrdsed, s. o.

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i,$$

kui $a_1 = a_2$ ja $b_1 = b_2$.

Kui kaks kompleksarvu erinevad teineteisest ainult imaginaarosa märgi poolest, siis nimetatakse neid kaaskompleksarvudeks. Tähendab, $a + bi$ ja $a - bi$ on kaaskompleksarvud, kus a ja b on mistahes reaalarvud. Kaaskompleksarvude summa ja korrutis on reaalarvud, s. o. $(a + bi) + (a - bi) = 2a$ ja $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$.

3) Kui reaalsete kordajatega ruutvõrrandi

$$x^2 + px + q = 0$$

lahendid

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

on imaginaarsed, siis on nad ühtlasi kaaskompleksarvud, sest sel juhul ruutvõrrandi diskriminant

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$$

ja

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2},$$

kus

$$q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 > 0.$$

Siit nähtub, et kui ruutvõrrandi üks lahend on imaginaarne, siis on ka teine lahend imaginaarne ja on esimesele kaaskompleksarvuks.

Kui kaks kompleksarvu erinevad teineteisest ainult reaalosa ja imaginaarosa märkide poolest, siis nimetatakse neid vastandkompleksarvudeks. Tähendab, $a + bi$ ja $-a - bi$ on vastandkompleksarvud, kus a ja b on mistahes reaalarvud.

Vastandkompleksarvude summa on võrdne nulliga, s. o. $(a+bi)+(-a-bi)=0$.*

§ 3. Arvu absoluutväärtus. Positiivse arvu absoluutväärtuseks on seesama positiivne arv; negatiivse arvu absoluutväärtuseks on tema vastandarv. Nulli absoluutväärtus on 0. Arvu a absoluutväärtust tähistatakse sümboliga $|a|$. Kui näiteks $a=+2$ või -2, siis $|+2|=|-2|=2$, s. o. vastandarvude absoluutväärtused on võrdsed.

Kui arvu a absoluutväärtus on suurem kui arvu b absoluutväärtus, s. o. $|a|>|b|$, siis positiivse a ja b puhul

$$|a|+|b|=a+b=|a+b|,$$
$$|a|-|b|=a-b<a+b=|a+b|,$$

negatiivse a ja b puhul

$$|a|+|b|=-a-b=-(a+b)=|a+b|,$$
$$|a|-|b|=-a+b<|a+b|,$$

positiivse a ja negatiivse b puhul

$$|a|+|b|=a-b>|a+b|,$$
$$|a|-|b|=a+b=|a+b|$$

ning negatiivse a ja positiivse b puhul

$$|a|+|b|=-a+b>|a+b|,$$
$$|a|-|b|=-a-b=|a+b|.$$

Sellest arvutusest nähtub, et *kahe arvu algebralise summa absoluutväärtus on suurem või sama kui nende arvude absoluutväärtuste vahe ja väiksem või sama kui nende arvude absoluutväärtuste summa.*

Analoogilise arvutuse kaudu näeksime, et sama olukord kehtib ka kahe arvu a ja b algebralise summa absoluutväärtuse kohta, kui arvu a absoluutväärtus on väiksem või sama kui arvu b absoluutväärtus, s. o. kui $|a|\leqslant|b|$.

Seega igal juhul kehtib järgmine kahekordne võrratus:

$$|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

Kui näiteks $a=-5$ ja $b=+2$, siis

$$|-5|-|+2|=|-5+2|<|-5|+|+2|,$$

s. o.

$$3=3<7.$$

---

* Kompleksarvude laiema käsitluse leiab lugeja raamatutest:
1) S. J. Novosjolov, Algebra õpetajate instituutidele, VII peatükk.
2) G. Kangro, Kõrgem algebra, II osa, I peatükk, § 1.

Kui

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

kujutab n arvu algebralist summat, kus ühed liikmed võivad olla positiivsed ja teised negatiivsed, siis — arvestades eelnevat — järeldub, et ka

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|,$$

kusjuures võrdusmärk kehtib ainult siis, kui kõik liikmed on ühesuguste märkidega.

Korrutise absoluutväärtus on võrdne tegurite absoluutväärtuste korrutisega, s. o.

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

ehk üldiselt

$$|a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot |a_3| \cdot \ldots \cdot |a_n|.$$

Murru absoluutväärtus on võrdne lugeja ja nimetaja absoluutväärtuste jagatisega, s. o.

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

§ 4. Vahemikud. Igasuguseid suurusi väljendatakse matemaatilises analüüsis arvudega, kusjuures suurused ise võivad uurimiskäigus kogu aeg jääda konstantseteks ehk muutumatuteks või omada mitmesuguseid väärtusi, s. o. olla muutuvateks suurusteks.

Konstantseid suurusi tähistatakse harilikult tähestiku esimeste tähtedega a, b, c, ... ja muutuvaid suurusi tähestiku viimaste tähtedega x, y, z, ...

Kui arvsirgel a ja b, kus $a < b$ (või $a > b$), on konstantseteks suurusteks ja x muutuvaks suuruseks, mis võib kasvades (või kahanedes) omada iga reaalväärtust vahemikus a-st b-ni, siis ütleme, et x muutub pidevalt vahemikus a-st b-ni. Vahemik a-st b-ni on seega x muutumispiirkond, milles asetsevad x arvulised väärtused, kusjuures a ja b on x ekstreemväärtusteks.

Kui x muutumispiirkonnas a-st b-ni, kus $a < b$, ekstreemväärtused a ja b kuuluvad nende väärtuste hulka, mida x võib omada, siis saame kinnise vahemiku, mida tähistame järgmiselt:

$$a \leqslant x \leqslant b \text{ ehk } [a, b],$$

kus a on x väikseim väärtus ja b on x suurim väärtus. Kui aga ekstreemväärtused a ja b kumbki ei kuulu nende väärtuste hulka, mida x võib omada, siis saame lahtise vahemiku, mida tähistame

$$a < x < b \text{ ehk } (a, b),$$

kus nüüd ei saa määrata x väikseimat ega ka suurimat väärtust.

Kui ekstreemväärtustest a ja b kas esimene või teine ei kuulu nende väärtuste hulka, mida x võib omada, siis saame poollahtise või poolkinnise vahemiku, s. o.

$$a < x \leqslant b \text{ ehk } (a, b], \quad a \leqslant x < b \text{ ehk } [a, b),$$

kus esimesel juhul ei saa määrata x väikseimat väärtust, kuid suurim väärtus on b, ning teisel juhul ei saa määrata x suurimat väärtust, kuid väikseim väärtus on a.

Kui muutuv suurus x võib omada mistahes positiivseid ja negatiivseid reaalväärtusi, siis ütleme, et x muutumispiirkonnaks on lõpmatu vahemik, s. o. vahemik $-\infty$-st $+\infty$-ni, mida kirjutame sümboolselt järgmiselt:

$$-\infty < x < +\infty \text{ ehk } (-\infty, +\infty).$$

Sel juhul on x tõkestamatu muutuja ja iga punkt arvsirgel kujutab mingit x väärtust.

Lõpmatud vahemikud võivad olla ka järgmised:

$$a < x < +\infty \text{ ehk } (a, +\infty),$$
$$a \leqslant x < +\infty \text{ ehk } [a, +\infty),$$

kus x reaalväärtused ei ole väiksemad kui konstantne suurus a, või

$$-\infty < x < b \text{ ehk } (-\infty, b)$$
$$-\infty < x \leqslant b \text{ ehk } (-\infty, b],$$

kus x reaalväärtused ei ole suuremad kui konstantne suurus b.

Märgime siinjuures, et lahtist vahemikku, mille pikkus on $2a$ ja keskpunktiks on b, nimetatakse punkti b ümbruseks. Kui nüüd x väärtused asetsevad nullpunkti ümbruses, siis saame x muutumispiirkonna märkida vahemikuna järgmiselt:

$$-a < x < a \text{ ehk } (-a, a),$$

mis on ekvivalentne ehk samaväärne võrratusega

$$|x| < a.$$

Niisamuti, kui $a > 0$, on võrratus

$$x^2 < a^2$$

ekvivalentne võrratusega

$$|x| < a.*$$

---

* Üldine võrratuse kuju on $a \leqslant b$ ehk $b \geqslant a$, kusjuures võrratust $a < b$ ehk $b > a$ nimetatakse ka rangeks võrratuseks.

§ 5. **Absoluutne ja relatiivne viga.** 1) Praktiliste ülesannete lahendamisel tuleb tihtipeale tegemist teha arvudega, mis väljendavad mitmesuguste suuruste ligikaudseid väärtusi. Mõõtmisel näiteks ei saa me kunagi väita, et oleme leidnud mõõdetava suuruse täpse väärtuse. Ühe ja sama vahemiku mitmekordsel mõõtmisel ilmneb ikka, et saadud resultaadid ei ole kunagi matemaatiliselt ühed ja samad; kord on saadud arv, mis seda vahemikku määrab, suurem, teine kord jälle väiksem. Mõõtmisel tekib ikka viga ehk kõrvalekaldumine suuruse täpsest väärtusest. Seda kõrvalekaldumist suuruse täpsest väärtusest nimetatakse absoluutseks veaks.

Kui tähistame mingisuguse suuruse täpse väärtuse tähega x ja selle suuruse mõõtmisel saadud resultaadi tähega a, milles peitub viga α, siis võime märkida, et absoluutne viga on

$$x - a = \alpha.$$

Et absoluutne viga α on mõõtmisresultaadiga a võrreldes võrdlemisi väike suurus, siis kasutatakse mõnikord ka ligikaudset võrdust

$$x \approx a.$$

Me ütleme, et a on x ligikaudne väärtus absoluutse veaga α. Arv a võib olla kas väiksem või suurem kui x. Esimesel juhul on absoluutne viga $\alpha > 0$ ja teisel juhul on absoluutne viga $\alpha < 0$.

Nii arv x kui ka absoluutne viga α on paljudel juhtudel tundmatud suurused, kuid me võime ikka määrata niisuguse tõkke positiivse arvuna, mida ei ületa α absoluutväärtus. Kui tähistame selle positiivse arvu sümboliga Δa (delta a), nii et $|\alpha| \leqslant \Delta a$, siis seega

$$|x - a| \leqslant \Delta a,$$

mis tähendab ühtlasi, et

$$-\Delta a \leqslant x - a \leqslant \Delta a.$$

Liites viimase kahekordse võrratuse kõik osad arvuga a, saame vahemiku

$$a - \Delta a \leqslant x \leqslant a + \Delta a,$$

milles peitub nüüd x väärtus. Sel juhul me ütleme, et a on x ligikaudne väärtus maksimaalse absoluutse veaga Δa, mida märgitakse ka järgmiselt:

$$x = a(\pm \Delta a).$$

Seega näiteks võrdused

$$x = 14{,}3(\pm 0{,}2) \text{ ja } x = 25{,}2(\pm 0{,}05)$$

tähendavad vastavalt

$$14{,}1 \leqslant x \leqslant 14{,}5 \text{ ja } 25{,}15 \leqslant x \leqslant 25{,}25.$$

Ligikaudse väärtuse a täpsus on seda suurem, mida väiksem on Δa.

Oluline on siinjuures märkida seda, et erinevate suuruste mõõtmise absoluutsed vead ei võimalda igakord mõõtmisresultaatide täpsuste võrdlemist. Kui näiteks Moskva ülikooli uue hoone kõrgus on mõõdetud absoluutse veaga 0,5 m ja ülikooli vana hoone kõrgus on samuti mõõdetud absoluutse veaga 0,5 m, siis on iseenesest mõistetav, et ülikooli uue hoone kõrgus on mõõdetud suurema täpsusega kui vana hoone kõrgus, sest esimesel juhul moodustab viga 0,5 m tervest kõrgusest väiksema osa kui teisel juhul. Sel juhul me räägime absoluutse vea a ja ligikaudse väärtuse a suhtest $\frac{a}{a}$, mida nimetatakse relatiivseks veaks. Maksimaalne relatiivne viga on siis $\frac{\Delta a}{a}$.

Siit nähtub otseselt, et mida väiksem on relatiivne viga, seda suurema täpsusega on ligikaudne mõõtmisresultaat.

Harilikult märgitakse relatiivset viga protsentides ja mõnikord ka promillides. Selleks on vaja relatiivne viga korrutada kas 100-ga või 1000-ga, s. o.

$$\frac{a}{a}\cdot 100\%;\quad \frac{\Delta a}{a}\cdot 100\%;\quad \frac{a}{a}\cdot 1000‰;\quad \frac{\Delta a}{a}\cdot 1000‰.$$

2) Et mõõtmisel või mingil muul teel saadud andmed on ligikaudsed, siis on ligikaudsed ka kõik väärtused, mis neist andmetest arvutamise teel saadakse. Et aga arvutus koosneb teatavast hulgast tehetest, peamiselt liitmisest, lahutamisest, korrutamisest ja jagamisest, siis on oluline teada, missugune on andmete $x = a(\pm \Delta a)$ ja $y = b(\pm \Delta b)$ summa, vahe, korrutise ja jagatise maksimaalne viga, kui loeme Δa ja Δb ligikaudsete suuruste a ja b maksimaalseteks absoluutseteks vigadeks.

Et tähendatud andmete summa $x + y$ omandab väikseima väärtuse, kui liidetavad on võimalikult väikesed, ja suurima väärtuse, kui liidetavad on võimalikult suured, siis

$$(a - \Delta a) + (b - \Delta b) \leqslant x + y \leqslant (a + \Delta a) + (b + \Delta b)$$

ehk

$$a + b - (\Delta a + \Delta b) \leqslant x + y \leqslant a + b + (\Delta a + \Delta b),$$

millest nähtub, et ligikaudsete suuruste summa puhul nende absoluutsed vead liituvad, s. o.

$$x + y = a + b\ [\pm (\Delta a + \Delta b)].$$

Kui näiteks $x = 3{,}6(\pm 0{,}04)$ ja $y = 8{,}2(\pm 0{,}03)$, siis x ja y summa ligikaudne väärtus on

$$3{,}6 + 8{,}2 = 11{,}8$$

ja selle väärtuse maksimaalne absoluutne viga

$$0{,}04 + 0{,}03 = 0{,}07.$$

Seega

$$x + y = 11{,}8 (\pm 0{,}07)$$

ehk

$$11{,}73 \leqslant x + y \leqslant 11{,}87.$$

Vahe $x - y$ omandab väikseima väärtuse, kui vähendatav on võimalikult väike ja lahutatav võimalikult suur, ning suurima väärtuse, kui vähendatav on võimalikult suur ja lahutatav võimalikult väike, s. o.

$$(a - \Delta a) - (b + \Delta b) \leqslant x - y \leqslant (a + \Delta a) - (b - \Delta b)$$

ehk

$$a - b - (\Delta a + \Delta b) \leqslant x - y \leqslant a - b + (\Delta a + \Delta b),$$

mis näitab, et ligikaudsete andmete vahe puhul nende absoluutsed vead samuti liituvad, s. o.

$$x - y = a - b [\pm (\Delta a + \Delta b)].$$

Nii summa kui ka vahe maksimaalne relatiivne viga on siis vastavalt

$$\frac{\Delta a + \Delta b}{a \pm b}.$$

Eespoolöeldut saame täieliku induktsiooni võttega üldistada kuitahes mitmele liidetavale ja lahutatavale. Seega üldiselt: *lõpliku arvu liikmete algebralise summa absoluutne viga on võrdne nende liikmete absoluutsete vigade summaga.*

Korrutis xy omandab väikseima väärtuse, kui tegurid on võimalikult väikesed, ja suurima väärtuse, kui tegurid on võimalikult suured, s. o.

$$(a - \Delta a)(b - \Delta b) \leqslant xy \leqslant (a + \Delta a)(b + \Delta b)$$

ehk

$$ab - (b \cdot \Delta a + a \cdot \Delta b) + \Delta a \cdot \Delta b \leqslant xy \leqslant ab + \\ + (b \cdot \Delta a + a \cdot \Delta b) + \Delta a \cdot \Delta b.$$

Lahutades saadud kahekordse võrratuse igast osast ab ja jagades siis iga osa ab-ga, saame

$$-\left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}\right) + \frac{\Delta a}{a} \cdot \frac{\Delta b}{b} \leqslant \frac{xy - ab}{ab} \leqslant \left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}\right) + \frac{\Delta a}{a} \cdot \frac{\Delta b}{b}.$$

Et üldiselt absoluutsed vead Δa ja Δb (võrreldes vastavalt suurustega a ja b) on võrdlemisi väikesed suurused, siis murrud $\frac{\Delta a}{a}$

ja $\frac{\Delta b}{b}$ kujutavad väga väikesi suurusi ja nende korrutis veel väiksemat suurust, mille võime jätta viimases võrratuses arvestamata, saades seega

$$-\left(\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}\right) \leqslant \frac{xy-ab}{ab} \leqslant \frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}.$$

Sellest nähtub, et ligikaudsete andmete a ja b korrutise maksimaalseks relatiivseks veaks tuleb lugeda tegurite maksimaalsete relatiivsete vigade summat

$$\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b},$$

kusjuures korrutise xy ligikaudse väärtuse ab maksimaalne absoluutne viga on

$$\left(\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}\right) \cdot ab = b \cdot \Delta a + a \cdot \Delta b.$$

Kui näiteks ristküliku külgede pikkused on 22,3($\pm$ 0,02) cm ja 41,6($\pm$ 0,03) cm, siis ristküliku pindala ligikaudne väärtus on

$$22{,}3 \cdot 41{,}6 = 927{,}68 \text{ cm}^2$$

ja saadud väärtuse maksimaalne absoluutne viga

$$22{,}3 \cdot 0{,}03 + 41{,}6 \cdot 0{,}02 = 1{,}501 \text{ cm}^2.$$

Et siin pindala ligikaudses väärtuses 927,68 on juba üheliste number kahtlane, siis pole meil mõtet käesolevas arvus märkida sajandikke ja kümnendikke, vaid ümardame nii pindala ligikaudse väärtuse kui ka saadud maksimaalse vea väärtuse ühelisteni, saades seega

$$928(\pm 2) \text{ cm}^2,$$

kusjuures maksimaalne relatiivne viga on siis

$$\frac{2}{928} \cdot 100\% \approx 0{,}2\%.$$

Täieliku induktsiooni võttega saame näidata, et rohkem kui kahe teguri korrutise ligikaudse väärtuse maksimaalne relatiivne viga on ikka võrdne tegurite maksimaalsete relatiivsete vigade summaga.

Astme x^n, kus astendaja n on positiivne täisarv, ligikaudse väärtuse a^n maksimaalne relatiivne viga on siis $\frac{n \cdot \Delta a}{a}$ ning maksimaalne absoluutne viga

$$\frac{n \cdot \Delta a}{a} \cdot a^n = n a^{n-1} \cdot \Delta a.$$

Juure $\sqrt[n]{x}$, kus juurija n on positiivne täisarv, ligikaudse väärtuse $\sqrt[n]{a}$ maksimaalne relatiivne viga on $\frac{\Delta a}{na}$, sest kui tähistame $\sqrt[n]{a} = u$, siis $a = u^n$ ja eelneva järgi astme maksimaalne relatiivne viga on

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{n \cdot \Delta u}{u},$$

millest saame juure maksimaalse relatiivse vea

$$\frac{\Delta u}{u} = \frac{\Delta a}{na},$$

kusjuures juure maksimaalne absoluutne viga on siis

$$\frac{\Delta a}{na}\sqrt[n]{a} = \frac{a^{\frac{1}{n}-1} \cdot \Delta a}{n} = \frac{\Delta a}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}.$$

Jagatis $\frac{x}{y}$ omandab väikseima väärtuse, kui jagatav on võimalikult väike ja jagaja võimalikult suur, ning suurima väärtuse, kui jagatav on võimalikult suur ja jagaja võimalikult väike, s. o.

$$\frac{a - \Delta a}{b + \Delta b} \leqslant \frac{x}{y} \leqslant \frac{a + \Delta a}{b - \Delta b}.$$

Lahutades saadud kahekordse võrratuse igast osast $\frac{a}{b}$ ja jagades siis iga osa $\frac{a}{b}$-ga, saame

$$-\frac{\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}}{1 + \frac{\Delta b}{b}} \leqslant \frac{\frac{x}{y} - \frac{a}{b}}{\frac{a}{b}} \leqslant \frac{\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}}{1 - \frac{\Delta b}{b}}.$$

Et relatiivne viga $\frac{\Delta b}{b}$ on võrdlemisi väike suurus, siis võime lugeda vasak- ja parempoolse osa nimetajad ligikaudu võrdseks ühega, saades seega

$$-\left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}\right) \leqslant \frac{\frac{x}{y} - \frac{a}{b}}{\frac{a}{b}} \leqslant \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b},$$

mis näitab, et ligikaudsete andmete a ja b jagatise maksimaalseks relatiivseks veaks tuleb lugeda jagatava ja jagaja maksimaalsete relatiivsete vigade summat

$$\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b},$$

kusjuures jagatise $\frac{x}{y}$ ligikaudse väärtuse $\frac{a}{b}$ maksimaalne absoluutne viga on siis

$$\left(\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}\right)\cdot\frac{a}{b}=\frac{b\cdot\Delta a+a\cdot\Delta b}{b^2}.$$

Korrutise ja jagatise relatiivsete vigade puhul võime eelneva põhjal teha järgmise üldistuse: k u i

$$x_1=a_1(\pm\Delta a_1),\ x_2=a_2(\pm\Delta a_2),\ \ldots,\ x_n=a_n(\pm\Delta a_n)$$

ja

$$y_1=b_1(\pm\Delta b_1),\ y_2=b_2(\pm\Delta b_2),\ \ldots,\ y_k=b_k(\pm\Delta b_k),$$

s i i s a v a l d i s e

$$\frac{x_1\cdot x_2\cdot\ \ldots\ \cdot x_n}{y_1\cdot y_2\cdot\ \ldots\ \cdot y_k}$$

l i g i k a u d s e v ä ä r t u s e

$$\frac{a_1\cdot a_2\cdot\ \ldots\ \cdot a_n}{b_1\cdot b_2\cdot\ \ldots\ \cdot b_k}$$

m a k s i m a a l s e k s r e l a t i i v s e k s v e a k s o n l u g e j a j a n i m e t a j a m a k s i m a a l s e t e r e l a t i i v s e t e v i g a d e s u m m a, s. o.

$$\frac{\Delta a_1}{a_1}+\frac{\Delta a_2}{a_2}+\ \ldots\ +\frac{\Delta a_n}{a_n}+\frac{\Delta b_1}{b_1}+\frac{\Delta b_2}{b_2}+\ \ldots\ +\frac{\Delta b_k}{b_k}.$$

N ä i d e. Arvutada materjali erikaal δ, kui sellest materjalist on valmistatud silinder, mis kaalub $p=4{,}2(\pm 0{,}01)$ kg ja mille kõrgus $h=22{,}5(\pm 0{,}2)$ cm ning põhja raadius $r=8{,}6(\pm 0{,}05)$ cm.

Kui lugeda $\pi=3{,}14(\pm 0{,}002)$, siis on erikaalu ligikaudne väärtus

$$\delta=\frac{p}{V}=\frac{p}{\pi r^2h}=\frac{4{,}2\cdot 1000}{3{,}14\cdot 8{,}6^2\cdot 22{,}5}\approx 0{,}93.$$

Rakendades korrutise, jagatise ja astme puhul relatiivsete vigade arvutamise juhist, saame materjali erikaalu relatiivse vea

$$\frac{\Delta\delta}{\delta}=\frac{\Delta p}{p}+\frac{\Delta\pi}{\pi}+\frac{2\Delta r}{r}+\frac{\Delta h}{h}=$$
$$=\frac{0{,}01}{4{,}2}+\frac{0{,}002}{3{,}14}+\frac{2\cdot 0{,}05}{8{,}6}+\frac{0{,}2}{22{,}5}\approx 0{,}02367$$

ehk

$$\frac{\Delta\delta}{\delta} \cdot 100\% = 2{,}367\% \approx 2{,}4\%.$$

Järelikult

$$\Delta\delta = 0{,}93 \cdot 0{,}02367 \approx 0{,}022$$

ja

$$\delta = 0{,}93\,(\pm\,0{,}022).$$

Absoluutset viga ülespoole ümardades saame

$$\delta = 0{,}93\,(\pm\,0{,}03).$$

§ 6. Funktsiooni mõiste. Jälgides mingit tehnikas, ühiskonnas või looduses toimuvat protsessi, võime ikka ja alati tähele panna, et selle protsessi kulgemisel ühe suuruse muutumine toob enesega kaasa teise suuruse muutumise. Nii näiteks õhu temperatuur ühes ja samas kohas muutub ajaga, õhu rõhk muutub kõrguse muutumisega, pendli võnkeaeg muutub pendli pikkuse muutumisega jne. Järelikult ühe suuruse muutumine on tingitud teise suuruse muutumisest ning seega iga protsessi käigus ühe muutuva suuruse kindlatele väärtustele vastavad teise muutuva suuruse kindlad väärtused. Toodud näidetes vastab igale ajamomendile ühes ja samas kohas oma kindel õhu temperatuur, igale kõrgusele maapinnast vastab kindel õhu rõhk, pendli igale pikkusele vastab kindel võnkeaeg jne. Sellest nähtub, et õhu temperatuur sõltub ajast, mille puhul me ütleme, et õhu temperatuur on aja f u n k t s i o o n; et õhu rõhk sõltub kõrgusest, siis seega õhu rõhk on kõrguse funktsioon; et pendli võnkeaeg sõltub pendli pikkusest, siis pendli võnkeaeg on pendli pikkuse funktsioon jne. Siin on õhu temperatuur ja aeg, õhu rõhk ja kõrgus maapinnast, pendli võnkeaeg ja pendli pikkus jne. teineteisega vastastikuses sõltuvuses, mille puhul me ütleme, et nimetatud suurused on teineteisega f u n k t s i o n a a l s e s s e o s e s, nii et ühe muutuva suuruse igale vabalt võetud väärtusele vastab teise muutuva suuruse kindel väärtus.

Võttes näiteks ringi pindala valemi

$$S = \pi r^2,$$

näeme, et ringi raadiuse r muutumisel muutub ka ringi pindala S, s. o. pindala S sõltub raadiusest r ning seega pindala S on raadiuse r funktsiooniks. Ringi raadiuse r muutumispiirkonnaks on siin kõik positiivsed arvud, s. o. vahemik $0 < r < +\infty$. Selles vahemikus vastavad raadiuse r kindlaksmääratud väärtustele pindala S kindlad väärtused, mis moodustavad pindala S muutumispiirkonna. Pindala S muutumispiirkonnaks on siin samuti vahemik $0 < S < +\infty$.

Füüsikast teame, et keha vaba langemine õhuta ruumis toimub seaduse

$$s = \frac{gt^2}{2}$$

järgi, kus maakera gravitatsiooni kiirendus $g = 9{,}81$ m/sek² on konstantne suurus. Siin keha langemise tee pikkus s sõltub ajast t, mida loeme keha langemise algmomendist, kusjuures igale kindlale ajamomendile t (sek) vastab kindel tee pikkus s (m). Järelikult keha langemise tee pikkus s on aja t funktsioon. Kui siin lugeda keha langemise algmomendiks $t = 0$ ja maa peale kukkumise momendiks $t = T$, siis aja t muutumispiirkonnaks on $0 \leqslant t \leqslant T$ ja tee pikkuse s muutumispiirkonnaks $0 \leqslant s \leqslant \frac{gT^2}{2}$.

Toodud näited esitavad ilmselt funktsionaalse sõltuvuse erijuhtumeid järgnevast üldisest skeemist. Kui funktsionaalne sõltuvus kahe muutuva suuruse x ja y vahel on mingisuguses protsessis antud sääraselt, et ühe muutuva suuruse, näiteks x, vabalt valitavatele väärtustele vastavad teise muutuva suuruse y kindlad väärtused, siis nimetatakse x sõltumatuks muutujaks ehk argumendiks. Teise muutuva suuruse y väärtused sõltuvad siis argumendi x väärtustest ja seepärast nimetatakse y sõltuvaks muutujaks ehk funktsiooniks. Siin tuleb muidugi arvestada x ja y muutumispiirkondi.

Tähendab, *muutuvat suurust y nimetatakse muutuva suuruse x funktsiooniks, kui x muutumispiirkonnas igale vabalt võetud x väärtusele vastab y muutumispiirkonnas kindel y väärtus.*

Argumendi x muutumispiirkonda nimetatakse ühtlasi funktsiooni y määramispiirkonnaks, sest selles piirkonnas argumendi x igale väärtusele vastab funktsiooni y kindel reaalne väärtus. Seega funktsiooni käsitlemisel võib piirduda ainult argumendi muutumispiirkonnaga, mis on ühtlasi funktsiooni määramispiirkonnaks. Kui funktsiooni y määramispiirkonnaks on näiteks vahemik $a \leqslant x \leqslant b$, siis ütleme, et funktsioon y on defineeritud ehk määratud vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ ehk $[a, b]$. Väljaspool seda vahemikku on funktsioon y reaalarvude vallas määramatu. Seega ühe või teise funktsiooni käsitlemisel esinevad kaks olulist momenti: funktsiooni määramispiirkond ning muutujate x ja y vahelise vastavuse seadus (valemina).

Argumendi x ja funktsiooni y väärtuste vastavust tähistatakse üldiselt järgmiselt:

$$y = f(x),$$

mis tähendab, et y on ühe sõltumatu muutuja ehk argumendi x funktsioon, mida loeme lühidalt: «y on x funktsioon» ehk veel lühemalt «y on f x». Täht f ei tähenda siin mingisugust suurust, vaid ainult sümbolit, mis näitab üldiselt y sõltuvust

x-st ja ka seda, et võrduse paremal poolel tuleb argumendi x suhtes sooritada teatavad tehted, et saada antud x väärtusele vastavat y väärtust. Kui näiteks

$$y = \sqrt{2x^3 + 16},$$

siis y saamiseks tuleb sooritada x suhtes neli tehet: 1) x-le antav väärtus tuleb tõsta kuupi, 2) saadus korrutada 2-ga, 3) saadud korrutis liita 16-ga ja 4) võtta saadud summast ruutjuur. Kui tähistame selle funktsiooni

$$y = f(x),$$

siis käesoleval juhul

$$f(x) = \sqrt{2x^3 + 16}.$$

Siin funktsioon saab omada reaalseid väärtusi ainult siis, kui $2x^3 + 16 \geqslant 0$, millest $x \geqslant -2$. Seega selle funktsiooni määramispiirkonnaks on vahemik $-2 \leqslant x < +\infty$. Ainult selles vahemikus võime argumendile x anda selliseid väärtusi, et funktsioon y omaks reaalseid väärtusi.

Funktsiooni $f(x)$ väärtust argumendi väärtuse $x = a$ puhul tähistame sümboliga $f(a)$. Kui näiteks

$$f(x) = x^2 - 2x + 5,$$

siis $x = 3$ puhul

$$f(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 + 5 = 8.*$$

Kui funktsiooni $f(x)$ väärtus $x = a$ puhul on b, siis võrdust

$$b = f(a)$$

ei saa enam lugeda, et b on a funktsioon, sest a ja b on konstantsed suurused. See võrdus tähendab, et b on funktsiooni $f(x)$ väärtus, kui argumendi x väärtus on a.

Kui esineb mitu erinevat ühe muutuja funktsiooni, siis märgitakse neid järgmiselt:

$$y = f_1(x), \quad y = f_2(x), \quad y = f_3(x) \text{ jne.}$$

või kasutatakse nende funktsioonide tähistamiseks peale tähe f ka teisi tähti, nagu

$$y = g(x), \quad y = \varphi(x), \quad y = \psi(x) \text{ jne.}$$

---

* Mõnikord tähistatakse ka järgmiselt: kui näiteks

$$y = x^2 - 2x + 5,$$

siis $x = 3$ puhul

$$y = [x^2 - 2x + 5]_{x=3} = 8.$$

Mõnikord kirjutatakse funktsiooni tähisena ka $y = y(x)$, kus nüüd sümbol $y(x)$ näitab otseselt, et y väärtused sõltuvad x väärtustest.

Kirjeldatud ühe muutuja funktsioone nimetatakse *ilmutatud funktsioonideks*. Kui aga mingist kahe muutujaga (x ja y) võrrandist ei ole ilmutatud y ega ka x, siis tähistatakse seda võrrandit üldiselt järgmiselt:

$$F(x, y) = 0.$$

Sümboolse kuju $F(x, y) = 0$ all mõistame, et võrrandi kõik liikmed on vasakul poolel. Kui võrrandis $F(x, y) = 0$ anda näiteks x-le teatavas vahemikus väärtusi ja sellest võrrandist on võimalik leida x väärtustele vastavaid reaalseid y väärtusi, siis nimetatakse y tähendatud vahemikus x *ilmutamata funktsiooniks*. Seega võrrand $F(x, y) = 0$ võib määrata funktsiooni y kui argumendi x ilmutamata funktsiooni. Samuti võib ka vaadelda ümberpöördult x kui y ilmutamata funktsiooni.

Näiteks kolm võrrandit

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$
$$x^3 - 3xy + y^3 = 0$$
$$xy - 2^x + \log y = 0$$

määravad kolm ilmutamata funktsiooni. Nagu nähtub esimesest võrrandist, saame funktsioonile kergesti anda ilmutatud kuju, kui avaldame sellest võrrandist ühe või teise muutuja, näiteks y, s. o.

$$y = \pm \sqrt{4 - x^2}.$$

Teisest võrrandist ühe või teise muutuja avaldamine aga on juba keerukam, sest siin peab tundma kolmanda astme võrrandi lahendust. Kolmandast võrrandist funktsioonile ilmutatud kuju andmine lõpliku arvu tehete kaudu on juba võimatu.

Kui funktsioonis $y = f(x)$ argumendi x väärtusteks on ainult naturaalarvud 1, 2, 3, ... , siis nimetatakse seda funktsiooni *täisarvulise argumendi funktsiooniks* ja tähistatakse harilikult $f(n)$, kus $n = 1, 2, 3, \ldots$ Täisarvulise argumendi funktsiooni väärtused

$$f(1), f(2), f(3), \ldots$$

moodustavad lõpmatu *arvjärjendi*. Näiteks täisarvulise argumendi funktsiooni

$$f(n) = \frac{1}{n}$$

puhul saame järgmise lõpmatu arvjärjendi:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

Kui y on mingi muutuva suuruse u funktsioon, s. o.

$$y = f(u),$$

ja seejuures u on omakorda muutuva suuruse x funktsioon, s. o.

$$u = \varphi(x),$$

siis võime ühtlasi y vaadelda kui x funktsiooni, mida tähistame järgmiselt:

$$y = f[\varphi(x)].$$

Sel juhul y sõltub x-st abimuutuja u kaudu. Niisuguse kaudse funktsionaalse sõltuvuse puhul kõneleme funktsiooni funktsioonist ehk liitfunktsioonist, kusjuures $f(u)$ on välimiseks ja $\varphi(x)$ sisemiseks funktsiooniks. Näiteks funktsioone

$$y = (a^2 + x^2)^3, \quad y = \sqrt{x+1}, \quad y = \sqrt{x^2 - 1}, \quad y = \log(3x + 6)$$

võime vaadelda kui funktsiooni funktsioone ehk liitfunktsioone, mis sõltuvad argumendist x kaudselt, kusjuures nende funktsioonide puhul välimisteks funktsioonideks on

$$y = u^3, \quad y = \sqrt{u}, \quad y = \sqrt{u}, \quad y = \log u$$

ja sisemisteks funktsioonideks vastavalt

$$u = a^2 + x^2, \quad u = x + 1, \quad u = x^2 - 1, \quad u = 3x + 6.$$

Liitfunktsiooni $y = f[\varphi(x)]$, kus $y = f(u)$ ja $u = \varphi(x)$, määramispiirkonda kuuluvad sisemise funktsiooni $u = \varphi(x)$ määramispiirkonnast ainult need x väärtused, millede puhul vastavad u väärtused kuuluvad välimise funktsiooni $y = f(u)$ määramispiirkonda. Teiste x väärtuste puhul liitfunktsioon ei ole määratud.

Näiteks eespool esitatud esimene liitfunktsioon $y = (a^2 + x^2)^3$ on määratud x iga väärtuse puhul, s. o. vahemikus $-\infty < x < +\infty$, kuid teine liitfunktsioon $y = \sqrt{x+1}$ on määratud ainult nendel x väärtustel, millede puhul $x + 1 \geqslant 0$ ehk $x \geqslant -1$, s. o. $-1 \leqslant x < +\infty$. Seega see liitfunktsioon ei ole määratud argumendi väärtustel $x < -1$. Kolmas liitfunktsioon $y = \sqrt{x^2 - 1}$ on määratud neil argumendi väärtustel, millede puhul $x^2 - 1 \geqslant 0$ ehk $x^2 \geqslant 1$, s. o. $|x| \geqslant 1$. Selle liitfunktsiooni määramispiirkond koosneb kahest vahemikust $-\infty < x \leqslant -1$ ja $1 \leqslant x < +\infty$. Neljanda liitfunktsiooni $y = \log(3x + 6)$ puhul peab olema $3x + 6 > 0$ ehk $x > -2$, s. o. $-2 < x < +\infty$, mis on selle liitfunktsiooni määramispiirkonnaks.

Funktsioonide ahel, mis moodustab liitfunktsiooni, võib koos-

neda mitte ainult kahest, vaid ka rohkemast arvust funktsioonidest. Nii võime näiteks funktsiooni

$$y = \log^2(2 - x^2)$$

vaadelda kui kahe abimuutuja u ja v kaudu väljendatud liitfunktsiooni, kus

$$y = u^2, \quad u = \log v, \quad v = 2 - x^2.$$

See liitfunktsioon on määratud nendel x väärtustel, millede puhul $2 - x^2 > 0$ ehk $|x| < \sqrt{2}$, s. o. $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.

Kui funktsiooni väärtus sõltub rohkem kui ühest argumendist, siis on ta mitme muutuja funktsioon. Näiteks ristküliku pindala $S = xy$ sõltub ristküliku külgede pikkustest x ja y; risttahuka ruumala $V = xyz$ sõltub risttahuka kolmest mõõtmest x, y ja z. Ristküliku pindala S kujutab seega kahe argumendi ehk kahe sõltumatu muutuja funktsiooni ja risttahuka ruumala V kolme sõltumatu muutuja funktsiooni. Sel juhul tähistame neid funktsioone sümboolselt järgmiselt:

$$S = f(x, y) \quad \text{ja} \quad V = f(x, y, z).$$

§ 7. Funktsiooni mitmesus. Et vahemikus a-st b-ni ei vasta argumendi x ühele ja samale vabalt võetud väärtusele alati ainult üks reaalne funktsiooni y väärtus, vaid et neid väärtusi võib olla kaks või rohkem, siis — funktsiooni mõistet laiendades — võime jaotada funktsioone nende väärtuste arvu järgi ühesteks, kahesteks jne., üldse mitmesteks funktsioonideks.

Kui näiteks võrrandis $F(x, y) = 0$ y kui funktsioon esineb esimeses astmes, siis on ta ikka ja alati ühene funktsioon, nagu näiteks

$$x^2 - y + 3 = 0,$$

millest ilmutades y näeme, et

$$y = x^2 + 3$$

on ühene funktsioon, mis on määratud vahemikus $-\infty < x < +\infty$, sest selles vahemikus vastab igale x väärtusele ikka üks ja ainult üks reaalne y väärtus.

Kui aga võrrandis $F(x, y) = 0$ y kui funktsioon esineb teises astmes, siis on ta kahene funktsioon, nagu näiteks võrrandis

$$x + y^2 - 4 = 0,$$

millest ilmutades y saame

$$y = \pm\sqrt{4 - x},$$

mis on määratud vahemikus $-\infty < x \leqslant 4$, sest selles vahemikus vastab igale x väärtusele kaks reaalset (üks positiivne ja teine negatiivne) y väärtust. Sel juhul saame ikka kaks ühest funktsiooni, nagu käesoleval juhul

$$y = +\sqrt{4-x} \quad \text{ja} \quad y = -\sqrt{4-x},$$

milledel on üks ja sama määramispiirkond.

Võrrandis

$$x^2 + xy^2 - 3y^2 = 0$$

kujutab y ilmutamata funktsiooni, mis on kahene funktsioon. Ilmutades sellest võrrandist y, saame kaks ühest funktsiooni

$$y = +\frac{x}{\sqrt{3-x}} \quad \text{ja} \quad y = -\frac{x}{\sqrt{3-x}},$$

millede määramispiirkond koosneb kahest vahemikust $-\infty < x < 3$ ja $3 < x < +\infty$. Argumendi väärtuse $x = 3$ puhul pole see funktsioon määratud, sest siis saaksime $y = \frac{3}{0}$, millel pole aga mõtet, sest ei ole arvu, mis nulliga korrutades annaks 3. Seega argumendi väärtusel $x = 3$ funktsioon ei ole määratud.

§ 8. Elementaarsed funktsioonid. Matemaatika arenemiskäigus on aja jooksul funktsionaalse sõltuvuse mitmekesisuse tagajärjel esile kerkinud mitmesuguseid funktsioone, nende hulgas ühtlasi teatud arv lihtsamaid, mida nimetatakse elementaarseteks funktsioonideks. Elementaarsed funktsioonid moodustavad matemaatilise analüüsi aluse ja esinevad rõhuvas enamuses analüüsi konkreetsetes rakendustes. Vaatleme käesolevas paragrahvis funktsioonide liike ja neid funktsioone, mida me nimetame elementaarseteks funktsioonideks.

Lihtsamaks elementaarseks funktsiooniks on ratsionaalne täisfunktsioon

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

kus n on naturaalarv ja koefitsiendid

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n$$

on mistahes reaalarvud. See on n-astme ratsionaalne täisfunktsioon. Seda funktsiooni nimetatakse ratsionaalseks täisfunktsiooniks seepärast, et ta kujutab polünoomi, mille liidetavateks on konstantsete koefitsientidega argumendi x täisarvulised astmed.

Järelikult ühe muutuja lineaarne funktsioon

$$y = a_0x + a_1$$

on ühtlasi esimese astme ratsionaalne täisfunktsioon; ruutfunktsioon

$$y = a_0x^2 + a_1x + a_2$$

on teise astme ratsionaalne täisfunktsioon.

Kahe ratsionaalse täisfunktsiooni suhe kujutab ratsionaalset murdfunktsiooni, mille üldkuju on

$$y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{a_0x^k + a_1x^{k-1} + a_2x^{k-2} + \ldots + a_{k-1}x + a_k}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}.$$

kus k ja m on positiivsed täisarvud ning k võib olla väiksem, võrdne või suurem kui m (kusjuures k võib olla ka võrdne nulliga).

Kui selles ratsionaalses murdfunktsioonis $k < m$, siis on ta ratsionaalne lihtmurdfunktsioon; kui aga $k \geqslant m$, siis on ta ratsionaalne liigmurdfunktsioon, mida saab jagamise teel alati teisendada ratsionaalse täisfunktsiooni ja lihtmurdfunktsiooni summaks, s. o.

$$y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = g(x) + \frac{\varphi_1(x)}{\psi(x)},$$

kus $g(x)$ kujutab ratsionaalset täisfunktsiooni ja $\frac{\varphi_1(x)}{\psi(x)}$ ratsionaalset lihtmurdfunktsiooni. Näiteks

$$y = \frac{x^3 - 4x^2 + 6x - 8}{x^2 - 2x + 1} = x - 2 + \frac{x - 6}{x^2 - 2x + 1}.$$

Ratsionaalne täisfunktsioon on määratud argumendi iga väärtuse puhul; tema määramispiirkond on $-\infty < x < +\infty$. Ratsionaalne murdfunktsioon ei ole määratud neil argumendi väärtustel, millede puhul murdfunktsiooni nimetaja saab nulliks.

Nii ratsionaalne täisfunktsioon kui ka ratsionaalne murdfunktsioon on algebralised ratsionaalsed funktsioonid.

Kui aga funktsioonis $y = f(x)$ argument x esineb ühtlasi ka juuritavas avaldises, siis on tegemist algebralise irratsionaalse funktsiooniga. Nii näiteks

$$y = \sqrt{x},\quad y = 3 - \sqrt[5]{x^2},\quad y = \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2 - x + 2}}$$

on algebralised irratsionaalsed funktsioonid.

Üldiselt, kui võrrandi

$$F(x, y) = 0$$

vasak pool kujutab muutujate x ja y suhtes polünoomi, s. o.

$$F(x, y) = a_0 x^p y^q + \ldots + a_r,$$

kus x ja y astendajad on positiivsed täisarvud või nullid ning koefitsiendid $a_0, \ldots, a_r$ on meelevaldsed reaalarvud, siis ütleme, et võrrandis $F(x, y) = 0$ esinev y (või x) on algebraliseks funktsiooniks. Nii näiteks võrrandis

$$x^2y^2 + \sqrt{2}x^2y - 5xy - 4x + 3 = 0$$

esinev y on algebraline funktsioon. Ka siis, kui võrrandi $F(x, y) = 0$ vasak pool ei kujuta otseselt x ja y suhtes polünoomi, kuid teisendamisel saame võrrandile anda polünoomi kuju, on võrrandis $F(x, y) = 0$ esinev y (või x) ikkagi algebraliseks funktsiooniks.

Polünoomi igal liikmel on kindel dimensioon, mis on võrdne muutujate x ja y astendajate summaga. Polünoomi liikmete kõrgeimat dimensiooni nimetatakse võrrandi $F(x, y) = 0$ astmeks. Seega võrrandi $F(x, y) = 0$ astet saab määrata alles pärast seda, kui võrrandile on antud kuju

$$a_0 x^p y^q + \ldots + a_r = 0.$$

Nii näiteks võrrandites

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{\sqrt{xy}} - 1 = 0, \quad \log x - 2 \log y - 1 = 0$$

y on x algebraliseks funktsiooniks, sest neid võrrandeid saab nõutavalt teisendada, s. o.

$$x^2y - 4xy - x + 4y = 0, \quad x - 10y^2 = 0,$$

milledest nüüd nähtub, et esimene on kolmanda astme ja teine on teise astme algebraline võrrand.

Kui aga võrrandi $F(x, y) = 0$ vasak pool ei kujuta polünoomi ega ole ka võimalik teda esitada polünoomi kujul, siis ütleme, et selles võrrandis y esitab transtsendentset funktsiooni.* Nii näiteks võrrandites

$$x - \log y + 1 = 0, \quad y = \sin x, \quad y = 3^x, \quad y = x^{\sqrt{2}}$$

y on x transtsendentne funktsioon.

Elementaarsed transtsendentsed funktsioonid on: eksponentfunktsioon

$$y = a^x,$$

---

* Termin «transtsendentne» on tuletatud sõnast, mida kasutati omal ajal matemaatilises kirjanduses esinevas ladinakeelses lauses «Quod algebrae vires transcendit» (mis ületab algebra võimed). Transtsendentsete funktsioonide määramiseks puudub otsene positiivne definitsioon; piirdume ainult ülaltähendatud negatiivse definitsiooniga.

kus a on positiivne reaalarv $(a \neq 1)$; logaritmfunktsioon

$$y = \log_a x,$$

kus $a > 0$ $(a \neq 1)$; trigonomeetrilised funktsioonid

$$y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \operatorname{tg} x,\ y = \operatorname{ctg} x;$$

arkusfunktsioonid

$$y = \arcsin x,\ y = \arccos x,\ y = \operatorname{arctg} x,\ y = \operatorname{arcctg} x,$$

milledest on juttu järgnevas paragrahvis.

Eksponentfunktsioonile $y = a^x$, kus x on argument ja y funktsioon, vastab sama nähtuse käiku kujutav logaritmfunktsioon $x = \log_a y$, kus nüüd y on argumendiks ja x funktsiooniks. Viimases muutujate tähiseid ümber vahetades saame logritmfunktsiooni kujul

$$y = \log_a x,$$

mida nimetame eksponentfunktsiooni $y = a^x$ pöördfunktsiooniks.

Üldiselt nimetame funktsiooni $\varphi(x)$ antud funktsiooni $f(x)$ pöördfunktsiooniks, kui võrdusest $y = \varphi(x)$ järeldub, et $x = f(y)$. Me nägime, et eksponentfunktsiooni $y = a^x$ pöördfunktsioon on $y = \log_a x$, mis on ühene funktsioon, kuid paljudel juhtudel võib antud funktsioonil olla mitu pöördfunktsiooni. Nii näiteks funktsioonil $y = x^2$, millest $x = \pm\sqrt{y}$, on kaks pöördfunktsiooni: $y = +\sqrt{x}$ ja $y = -\sqrt{x}$.

§ 9. Arkusfunktsioonid. Kui ringis (joon. 2) nurk $\widehat{AOB} = \alpha < 90°$ ja raadius $OA = OB = 1$, siis nurgale α (kui ta esineb kraadides) vastava kaare $\overset{\frown}{AB}$ pikkus on

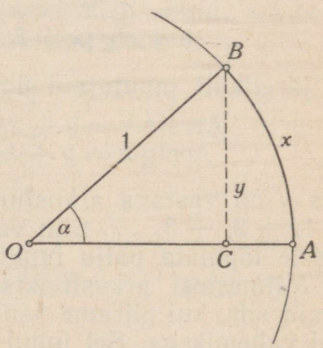
$$x = \frac{\pi\alpha}{180},$$

mida nimetatakse kaare või talle vastava kesknurga radiaanmõõduks. Sellest lähtudes näeme, et funktsioonis

$$y = \sin x$$

argument x on kaar (*arcus*), mille siinus (CB) on võrdne y-ga. Siinusfunktsiooni pöördfunktsiooni tähistatakse järgmiselt:

$$x = \arcsin y,$$



Joon. 2.

s. o. x on arkus siinus y. See tähendab, et x on radiaanmõõdus niisugune kaar, mille siinus on y. Analoogiliselt:

$$\begin{array}{ll} \text{kui } y = \cos x, & \text{siis } x = \arccos y, \\ \text{„ } y = \operatorname{tg} x, & \text{„ } x = \operatorname{arctg} y, \\ \text{„ } y = \operatorname{ctg} x, & \text{„ } x = \operatorname{arcctg} y. \end{array}$$

Siin muutujaid ümber vahetades saame funktsioonid

$$y = \arcsin x,\ y = \arccos x,\ y = \operatorname{arctg} x,\ y = \operatorname{arcctg} x,$$

mis on trigonomeetriliste funktsioonide pöördfunktsioonid ja mida nimetatakse tsüklomeetrilisteks funktsioonideks ehk arkusfunktsioonideks.

Trigonomeetriast on teada, et funktsioonide $y = \sin x$ ja $y = \cos x$ väärtused ei muutu, kui argumendi väärtus kasvab või kahaneb 2π ehk üldiselt $2k\pi$ võrra, kus $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, s. o.

$$\sin x = \sin(x + 2k\pi),\ \cos x = \cos(x + 2k\pi).$$

Siin $\sin x$ ja $\cos x$ väärtused korduvad perioodiliselt. Seega on nad perioodilised funktsioonid. Nende periood on 2π.

Samuti on ka $y = \operatorname{tg} x$ ja $y = \operatorname{ctg} x$ perioodilised funktsioonid, sest

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + k\pi),\qquad \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x + k\pi),$$

kus perioodiks on π.

Arkusfunktsioonid on üldiselt mitmesed funktsioonid, mida tähistatakse sel juhul järgmiselt:

$$\operatorname{Arcsin} x,\ \operatorname{Arccos} x,\ \operatorname{Arctg} x,\ \operatorname{Arcctg} x.$$

Sest

$$\begin{array}{ll} \text{kui } y = \sin(x + 2k\pi), & \text{siis } x + 2k\pi = \operatorname{Arcsin} y, \\ \text{„ } y = \cos(x + 2k\pi), & \text{„ } x + 2k\pi = \operatorname{Arccos} y, \\ \text{„ } y = \operatorname{tg}(x + k\pi), & \text{„ } x + k\pi = \operatorname{Arctg} y, \\ \text{„ } y = \operatorname{ctg}(x + k\pi), & \text{„ } x + k\pi = \operatorname{Arcctg} y \end{array}$$

ja järelikult muutujaid ümber vahetades saame

$$\begin{array}{ll} \operatorname{Arcsin} x = y + 2k\pi, & \operatorname{Arccos} x = y + 2k\pi, \\ \operatorname{Arctg} x = y + k\pi, & \operatorname{Arcctg} x = y + k\pi, \end{array}$$

kus y on vastava arkusfunktsiooni üks kindel väärtus ja $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ Siin vastab argumendi x igale üksikule väärtusele lõpmata palju funktsiooni väärtusi.

Mitmestest arkusfunktsioonidest saame ühesed arkusfunktsioonid siis, kui piirame nende väärtusi järgmisel leheküljel näidatud vahemikega. Sel juhul tähistame neid

$$\arcsin x,\ \arccos x,\ \operatorname{arctg} x,\ \operatorname{arcctg} x,$$

kus nüüd

$$\operatorname{Arcsin} x = \arcsin x + 2k\pi, \quad \operatorname{Arccos} x = \arccos x + 2k\pi,$$
$$\operatorname{Arctg} x = \operatorname{arctg} x + k\pi, \quad \operatorname{Arcctg} x = \operatorname{arcctg} x + k\pi.$$

Arkussiinus $y = \arcsin x$ on üheseks funktsiooniks siis, kui y muutumispiirkonnaks võtame vahemiku $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$. Selles vahemikus asetsevat y väärtust loeme ühtlasi $\operatorname{Arcsin} x$ peaväärtuseks.

Arkuskoosinus $y = \arccos x$ on üheseks funktsiooniks, kui y muutumispiirkonnaks võtame vahemiku $0 \leqslant y \leqslant \pi$, milles esinevat y väärtust loeme siis $\operatorname{Arccos} x$ peaväärtuseks.

Arkustangens $y = \operatorname{arctg} x$ on üheseks funktsiooniks vahemikus $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, milles esinev y väärtus on $\operatorname{Arctg} x$ peaväärtuseks.

Arkuskootangens $y = \operatorname{arcctg} x$ on üheseks funktsiooniks vahemikus $0 < y < \pi$, milles esinev y väärtus on $\operatorname{Arcctg} x$ peaväärtuseks.

Kui ühese arkussiinuse ja arkustangensi puhul

$$y = \arcsin x, \; y = \operatorname{arctg} x,$$

siis trigonomeetriliste funktsioonide puhul

$$x = \sin y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right),$$

$$x = \operatorname{tg} y = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - y\right),$$

millest

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - y, \qquad \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - y.$$

Liites viimastele võrdustele vastavalt $y = \arcsin x$ ja $y = \operatorname{arctg} x$, saame arkussiinuse ja arkuskoosinuse ning arkustangensi ja arkuskootangensi vahel järgmised seosed:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Kui $y = \arcsin x$, siis $x = \sin y$ ja

$$\operatorname{tg} y = \frac{\sin y}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

millest

$$y = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

kus ruutjuur tuleb võtta ainult plussmärgiga, sest $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Asetades $y = \arcsin x$ viimasesse võrdusse, saame arkussiinuse ja arkustangensi vahelise seose

$$\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Analoogiliselt, kui $y = \operatorname{arctg} x$, siis $x = \operatorname{tg} y$ ja

$$\sin y = \frac{\operatorname{tg} y}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 y}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}},$$

millest

$$y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

ehk

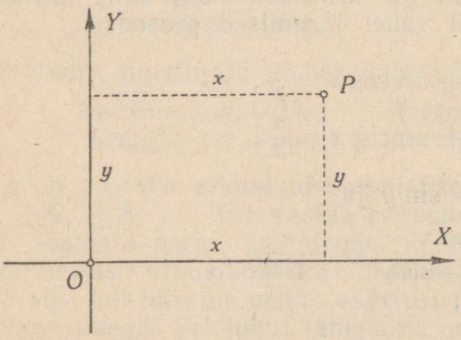
$$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}},$$

kus ruutjuur tuleb samuti võtta plussmärgiga. Seega kehtivad arkussiinuse ja arkustangensi vahel järgmised seosed:

$$\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

§ 10. Funktsiooni graafiline kujutamine. Kui valime vabalt mingi pikkusühiku, siis võime punkti P asendi tasapinnal kindlaks määrata tema kaugusarvude x ja y abil kahest ristuvast sirgest ehk koordinaatteljest, s. o. X-teljest ja Y-teljest, millede lõikepunkt on nullpunktiks (joon. 3). Koordinaattelgede suundi nullpunktist paremale ja ülespoole loeme positiivseteks ning vasakule ja allapoole negatiivseteks. Punkti P koordinaadid on siis x ja y, kus x on abstsiss ja y ordinaat, mis määravad punkti P asukoha tasapinnal. Punkti P koordinaatidega x ja y tähistame järgmiselt: $P(x, y)$.



Joon. 3.

Kindlaksmääratud mõõtühiku puhul vastab igale koordinaatide paarile (x, y) tasapinnal üks ja

ainult üks punkt, ja ümberpöördult, igale punktile tasapinnal vastab üks ja ainult üks koordinaatide paar (x, y). Punkti asukoht tasapinnal on seega kahe koordinaadi, s. o. abstsissi ja ordinaadi abil üheselt määratud.

Üht ja sama tingimust täitvate punktide kogu nimetatakse nende punktide geomeetriliseks kohaks. Punktide geomeetriliseks kohaks on tasapinnal joon, mille mistahes punkti koordinaadid x ja y on omavahel funktsionaalses seoses. See funktsionaalne seos väljendub võrrandina $F(x, y) = 0$, mida rahuldavad ainult joonel asetsevate punktide koordinaadid. Võrrandit $F(x, y) = 0$ nimetatakse joone võrrandiks, kui temas esinevaid koordinaate x ja y kui muutuvaid suurusi lugeda joonel asetsevate punktide koordinaatideks. Seega võrrand $F(x, y) = 0$ esitab tasapinnal joont nende punktide geomeetrilise kohana, millede koordinaadid rahuldavad seda võrrandit.

Sel põhimõttel, kui meil on tegemist kahe muutuva suurusega x ja y, võime funktsiooni $y = f(x)$ muutumist kujutada ristkoordinaadistikus graafilisel teel, võttes argumendi väärtused abstsissideks ja funktsiooni väärtused ordinaatideks.

Kui funktsioon $y = f(x)$ on määratud teatud vahemikus, siis võime selles vahemikus valida argumendi ja temale vastava funktsiooni väärtusi nii palju kui soovime. Igale niisugusele väärtuspaarile vastab tasapinnal teatav punkt. Nende punktide kogum määrab funktsiooni graafiku joonena.

Et esitada ristkoordinaadistikus võrrandile $F(x, y) = 0$ vastavat geomeetrilist kohta ehk joont, selleks ilmutame võrrandist y, s. o.

$$y = f(x),$$

kus nüüd abstsiss x on argumendiks ja ordinaat y on funktsiooniks. Anname argumendile x funktsiooni määramispiirkonnas vabalt võetavaid väärtusi

$$x_1, x_2, x_3, \ldots,$$

arvutame nende järgi funktsiooni y vastavad väärtused

$$f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, f(x_3) = y_3, \ldots$$

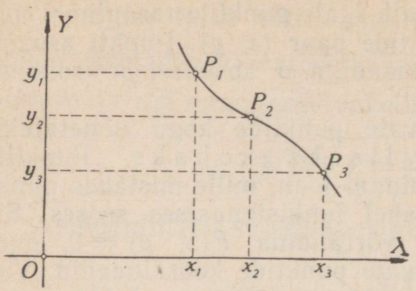
ning koostame argumendi ja temale vastavate funktsiooni väärtuste tabeli

$x =$	x_1	x_2	x_3	$\ldots$
$y =$	y_1	y_2	y_3	$\ldots$

Märgime neile väärtustele vastavad punktid

$$P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3), \ldots$$

koordinaadistikus (joon. 4) ja ühendame need pideva joonega; saame funktsiooni $y = f(x)$ graafiku, mis on kõikide nende punk-



Joon. 4.

tide geomeetriliseks kohaks, millede koordinaadid rahuldavad võrrandit $F(x, y) = 0$ ehk $y = f(x)$.

Võrrand $F(x, y) = 0$ ehk $y = f(x)$, kui tal on reaalseid lahendeid, esitab üldjuhul kõverat; see kõver võib aga paljudel juhtudel koosneda mitmest harust. Erijuhul, kui võrrand on lineaarne, s. o. kui ta omab kuju

$$Ax + By + C = 0,$$

esitab ta sirget. Peale selle esineb võrrandeid, mis esitavad graafiliselt üksikuid isoleeritud ehk eraldatud punkte või ei esita reaalarvude vallas mingisugust geomeetrilist kohta.

Funktsiooni peamised esitamisviisid on: 1) valem, mida nimetatakse funktsiooni analüütiliseks kujuks, 2) tabel, millesse kantakse argumendi väärtused koos vastavate funktsiooni väärtustega, ja 3) funktsiooni graafik.

Väga sagedasti kasutatakse funktsioonide esitamiseks tabeleid, nagu näiteks logaritmide ja trigonomeetriliste funktsioonide tabelid, protsentide tabelid jne. Nii funktsiooni analüütilisel kui ka tabelilisel esitisel aga puudub piltlikkus, mis on omane funktsiooni graafikule.

Graafikut, mida esitab algebraline funktsioon, nimetatakse algebraliseks jooneks, ja graafikut, mida esitab transtsendentne funktsioon, transtsendentseks jooneks.

a) Näiteks teise astme funktsiooni

$$y = 6 - x - x^2$$

graafilise kujutise saamiseks koostame x ja y vastavate väärtuste tabeli (andes argumendile x väärtusi nullpunkti ümbruses, sest funktsiooni määramispiirkond on $-\infty < x < +\infty$):

$x =$	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$y =$	...	-6	0	4	6	6	4	0	-6	...

.

See tabel määrab tasapinnal punktid

$(-4, -6)$, $(-3, 0)$, $(-2, 4)$, $(-1, 6)$, $(0, 6)$, $(1, 4)$, $(2, 0)$, $(3, -6)$.

Argumendile x on siin lihtsuse mõttes antud ainult täisarvulised väärtused. Nõnda toimime ka edaspidi, kui funktsiooni määra-

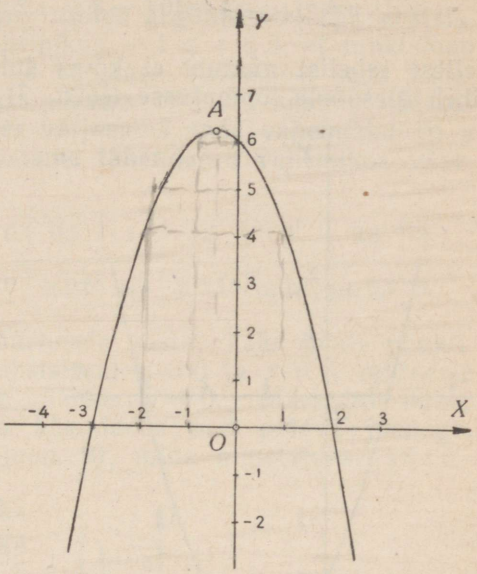
mispiirkonna mõnes üksikus kohas pole vajadust murdarvu järele. Neid punkte teljestikus märkides saame funktsiooni

$$y = 6 - x - x^2$$

graafiku (joon. 5), mida nimetatakse funktsiooni astme järgi teist järku paraboo liks. See parabool on kumer kõverjoon, mis tuleb altpoolt lõpmatusest, tõuseb punktini A, mida nimetatakse kõvera maksimumpunktiks, hakkab siis langema ja läheb allapoole lõpmatusse. Parabool lõikab X-telge punktides $x = -3$ ja $x = 2$, mis on võrrandi

$$6 - x - x^2 = 0$$

graafiliselt leitud lahendid.



Joon. 5.

Et antud funktsioon on ühene, siis võib iga sirge, mis on paralleelne Y-teljega, lõigata funktsiooni graaafikut ühes ja ainult ühes punktis.

b) Teise astme funktsiooni

$$y = x^2 - 2x - 3$$

puhul koostame x ja y väärtuste tabeli:

$x =$	...	-2	-1	0	1	2	3	4	...
$y =$	...	5	0	-3	-4	-3	0	5	...

,

mille järgi joonestame funktsiooni graafiku (joon. 6), mis on samuti teist järku parabool. See parabool on nõgus kõverjoon*, mis tuleb ülaltpoolt lõpmatusest, langeb punktini B, mida nimetatakse kõvera miinimumpunktiks, hakkab siis tõusma ja läheb ülespoole lõpmatusse. Parabool lõikab X-telge punktides $x = -1$ ja $x = 3$, mis on võrrandi

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

graafiliselt leitud lahendid.

* Kõvera kumeruse ja nõgususe ning maksimum- ja miinimumpunkti käsitlemine ja määramine esineb hiljem (§ 54).

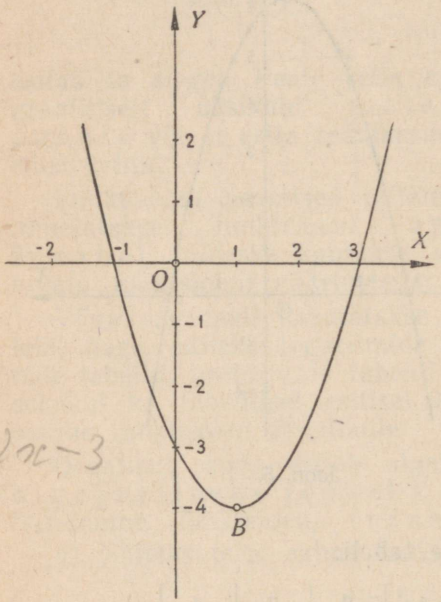
c) Kolmanda astme funktsiooni

$$y = x^3 - 2$$

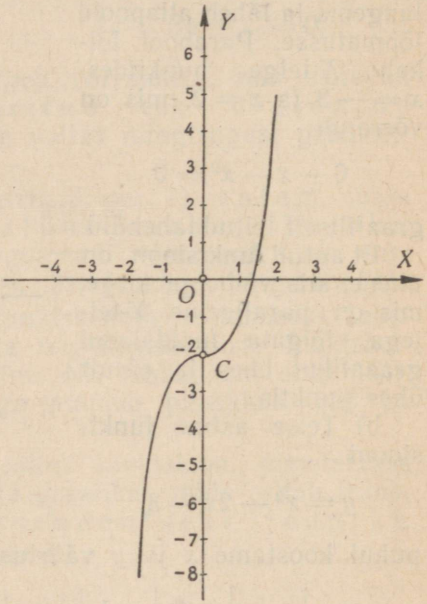
väärtuste tabel on:

$x =$	...	-2	-1	0	1	2	...
$y =$	...	-10	-3	-2	-1	6	...

Sellest tabelist nähtub, et kõver tuleb altpoolt lõpmatusest ja läheb ülespoole lõpmatusse (joon. 7). Siin ei ole ei maksimum-



Joon. 6.



Joon. 7.

ega miinimumpunkti. See kolmandat järku kõver ehk kolmandat järku parabool teeb käänaku punktis $C(0, -2)$. Selles punktis muutub kõverjoone kõveruse suund, s. o. kumer kõverjoon lõpeb ja nõgus kõverjoon algab, või ümberpöördult, nõgus kõverjoon lõpeb ja kumer kõverjoon algab. Seda punkti nimetatakse kõvera *käänupunktiks*.* See kolmandat järku parabool lõikab X-telge punktis $x \approx 1{,}3$, mis esitab võrrandi

$$x^3 - 2 = 0$$

graafiliselt leitud ligikaudset reaallahendit.

* Kõvera käänupunkti määramine esineb hiljem (§ 55).

d) Et joonestada ristkoordinaadistikus näiteks võrrandile

$$y^2(1+x) - x^2(3-x) = 0$$

vastavat graafikut, selleks ilmutame võrrandist y, s. o.

$$y = \pm x\sqrt{\frac{3-x}{1+x}},$$

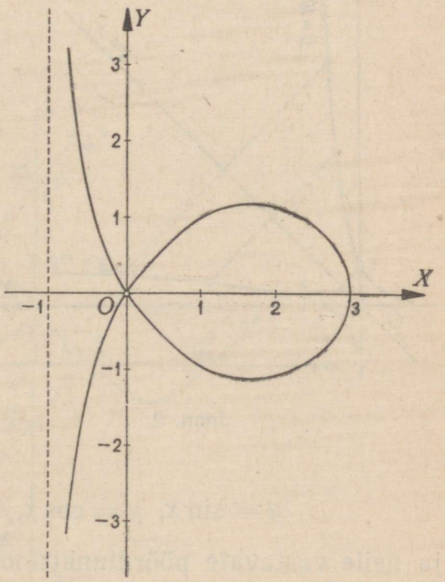
mis kujutab kahest funktsiooni, milles argumendile ehk abstsissile x võib anda väärtusi vahemikus $-1 < x \leqslant 3$, et funktsioon ehk ordinaat y omaks reaalseid väärtusi. Väljaspool seda vahemikku ei ole y määratud, sest punktis $x = -1$ saab y väärtus lõpmatuks ja teistes punktides väljaspool seda vahemikku on y väärtused imaginaarsed. Koostame tähendatud vahemikus väärtuste tabeli:

$x =$	-1	$-0{,}8$	$-0{,}5$	-0.2	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3
$y \approx$	$\pm\infty$	$\pm 3{,}5$	± 1.3	$\pm 0{,}4$	0	$\pm 0{,}6$	± 1	$\pm 1{,}16$	$\pm 1{,}15$	$\pm 0{,}9$	0

millest nähtub, et igale x väärtusele vastab kaks joone punkti. Erandi moodustavad ainult abstsissid $x = 0$ ja $x = 3$, milledele vastab ainult üks ordinaadi väärtus $y = 0$. Märkides leitud punktid koordinaadistikus ja ühendades nad pideva joonega, saame otsitava kõverjoone (joon. 8), mida nimetatakse s t r o f o i d i k s.

Saadud kõverjoon läbib kaks korda nullpunkti, mis on seega kõvera k a h e k o r d s e k s p u n k t i k s. Kõver kujutab Y-teljest paremal pool silmuse; Y-teljest vasakul pool kõvera haarad jätkuvad piiramatult, lähenedes nii ühel kui ka teisel pool X-telge sirgele, mis on paralleelne Y-teljega ja asetseb viimasest ühe negatiivse ühiku kaugusel. Seda sirget, millele kõvera haarad piiramatult lähenevad, nimetatakse kõvera a s ü m p t o o d i k s.*

Et antud funktsioon on kahene, siis funktsiooni graafikust nähtub otseselt, et funktsiooni määramispiirkonnas iga sirge, mis on paralleelne Y-teljega, lõikab graafikut kahes punktis.



Joon. 8.

* Kõvera asümptootide määramine esineb hiljem (§ 57).

e) Eksponentfunktsiooni

$$y = 10^x$$

ja tema pöördfunktsiooni (logaritmfunktsiooni)

$$y = \log x$$

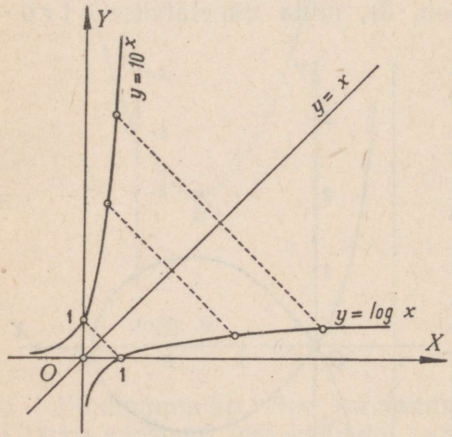
väärtuste tabelid on: eksponentfunktsioonil (vahemikus $-\infty < x < +\infty$)

$x =$	...	-2	-1	0	0,3	0,6	0,8	1	...
$y \approx$	...	0,01	0,1	1	2	3,98	6,31	10	...

ja logaritmfunktsioonil (vahemikus $0 < x < +\infty$)

$x =$	0	0,1	0,5	1	2	3	4	10	...
$y \approx$	$-\infty$	-1	$-0,3$	0	0,3	0,48	0,6	1	...

millede järgi võime joonestada nende graafikud (joon. 9).



Joon. 9.

Pöördfunktsiooni graafik on algfunktsiooni graafiku peegelduskuju, s. o. kui tõmbame läbi nullpunkti sirge koordinaatnurga *XOY* poolitajana, siis selle sirge suhtes algfunktsiooni graafiku igale punktile vastab pöördfunktsiooni graafikul vastav sümmeetriline punkt. Seda sirget nimetame nende graafikute s ü m m e e t r i a t e l j e k s. Kui pöörame pöördfunktsiooni graafikut ümber sümmeetriatelje, siis langeb ta algfunktsiooni graafikuga ühte.

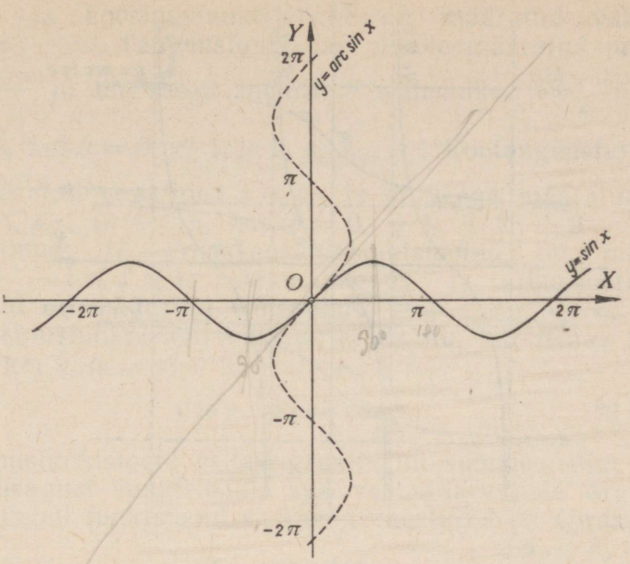
f) Trigonomeetriliste funktsioonide

$$y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \operatorname{tg} x,\ y = \operatorname{ctg} x$$

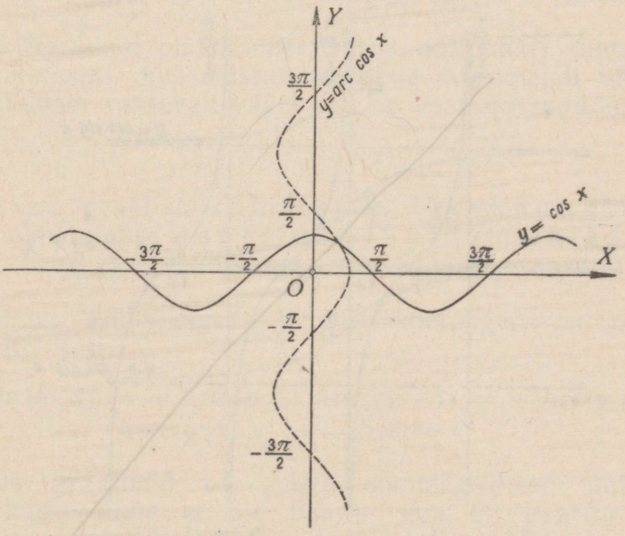
ja neile vastavate pöördfunktsioonide (arkusfunktsioonide)

$$y = \operatorname{Arcsin} x,\ y = \operatorname{Arccos} x,\ y = \operatorname{Arctg} x,\ y = \operatorname{Arcctg} x$$

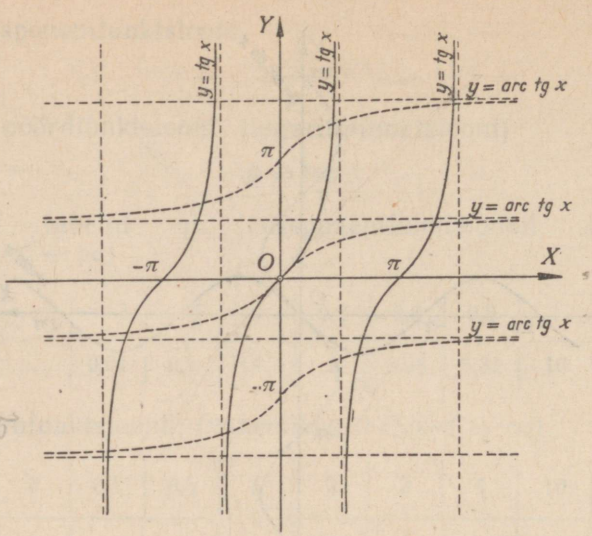
graafikuid kujutavad joonised 10—13.



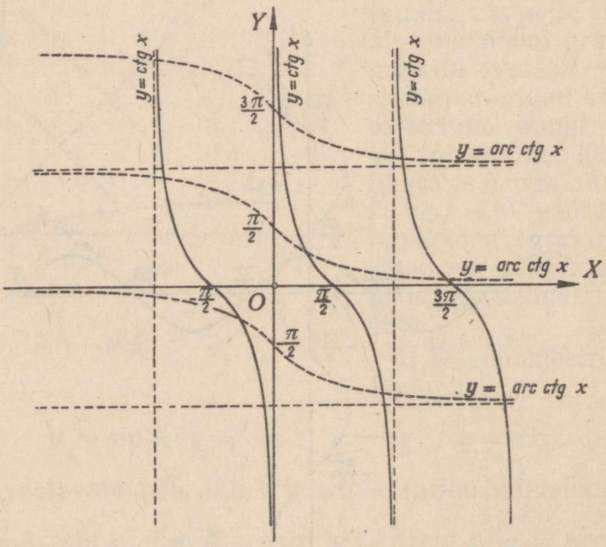
Joon. 10.



Joon. 11.



Joon. 12.



Joon. 13.

Siinus- ja koosinusfunktsioonid on määratud vahemikus $-\infty < x < +\infty$. Tangensfunktsioon ei ole määratud punktides $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ ja on seega määratud vahemikes $\frac{(2k-1)\pi}{2} < x < \frac{(2k+1)\pi}{2}$, kus $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$. Kootangensfunktsioon ei ole määratud punktides $x = k\pi$ ja on seega määratud vahemikes $k\pi < x < (k+1)\pi$, kus $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$.

Arkussiinus- ja arkuskoosinusfunktsioonid on määratud vahemikus $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Arkustangens- ja arkuskootangensfunktsioonid on määratud vahemikus $-\infty < x < +\infty$.

Et koosinusfunktsiooni väärtus ei muutu, kui temas x asendada $-x$-ga, s. o.

$$\cos(-x) = \cos x,$$

siis koosinusfunktsiooni esitav graafik on sümmeetriline Y-telje suhtes. Niisugust funktsiooni, kus vastandarvuliste argumendi väärtuste puhul funktsiooni vastavad väärtused on võrdsed, s. o.

$$f(-x) = f(x),$$

millele vastava graafiku sümmeetriateljeks on Y-telg, nimetatakse paarisfunktsiooniks. Koosinusfunktsioon on seega paarisfunktsioon.

Et siinus-, tangens- ja kootangensfunktsioonid muudavad märki, kui neis x asendada $-x$-ga, s. o.

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x,$$

siis nende graafikud on sümmeetrilised nullpunkti suhtes. Niisugust funktsiooni, kus vastandarvuliste argumendi väärtuste puhul funktsiooni vastavad väärtused on vastandarvud, s. o.

$$f(-x) = -f(x),$$

millele vastava graafiku sümmeetriakeskpunktiks on nullpunkt, nimetatakse paarituks funktsiooniks. Seega on siinus-, tangens- ja kootangensfunktsioonid paaritud funktsioonid.

Arkussiinus, arkustangens ja arkuskootangens on paaritud funktsioonid, sest

$$\operatorname{Arcsin}(-x) = -\operatorname{Arcsin} x, \quad \operatorname{Arctg}(-x) = -\operatorname{Arctg} x,$$
$$\operatorname{Arcctg}(-x) = -\operatorname{Arcctg} x$$

ning nende graafikud on seega sümmeetrilised nullpunkti suhtes. Arkuskoosinus ei ole paaris- ega ka paaritu funktsioon, sest vastandarvuliste argumendi väärtuste puhul arkuskoosinuse vastavad väärtused ei ole võrdsed ega ka

vastandarvud. Järelikult arkuskoosinuse graafik ei ole sümmeetriline Y-telje ega ka nullpunkti suhtes.

g) Võrrand $F(x, y) = 0$ võib esitada ka niisugust geomeetrilist kohta, mis koosneb ainult üksikutest punktidest. Nii näiteks võrrand

$$x^2 + y^2 = 0$$

esitab ainult üht punkti ja nimelt nullpunkti XY-teljestikus, s. o. punkti (0, 0), sest mingisugused teised x ja y reaalväärtused seda võrrandit ei rahulda. Samuti vastab võrrandile

$$(x^2 - 9)^2 + y^2 = 0$$

geomeetriline koht, mis koosneb ainult kahest üksikust punktist: (3, 0) ja (— 3, 0).

h) Et joonestada näiteks võrrandile

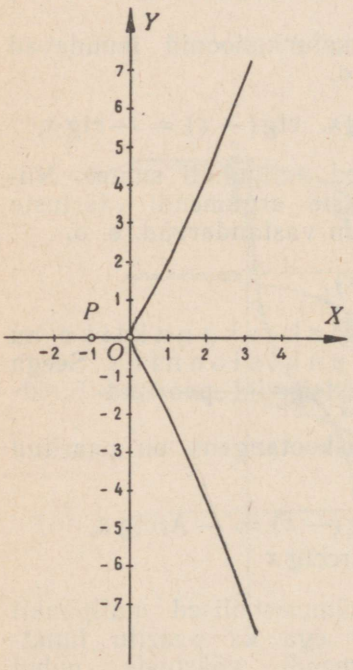
$$x(x + 1)^2 - y^2 = 0$$

vastavat graafikut, selleks ilmutame võrrandist y, s. o.

$$y = \pm (x + 1) \sqrt{x},$$

mis kujutab kahest funktsiooni, milles argumendile x võime anda väärtusi vahemikus $0 \leqslant x < +\infty$, et saada reaalseid funktsiooni y väärtusi, s. o.

kui $x =$	0	1	2	3	4	...
siis $y =$	0	± 2	$\pm 4{,}2$	$\pm 6{,}9$	± 10	...



Joon. 14.

Vahemikus $-\infty < x < 0$ pole funktsioonil reaalseid väärtusi, välja arvatud üksainus punkt, ja nimelt: kui $x = -1$, siis $y = 0$. Punkt $P(-1{,}0)$ on antud kõvera isoleeritud ehk eraldatud punktiks (joon. 14).

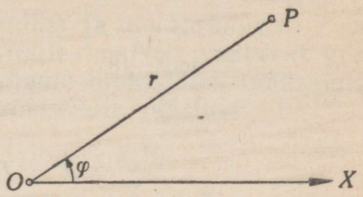
i) Võib ka juhtuda, et võrrand $F(x, y) = 0$ ei esita reaalarvude vallas üldse mingisugust geomeetrilist kohta, nagu näiteks võrrand

$$x^2 + y^2 + 4 = 0.$$

Seda võrrandit ei rahulda mingisugused reaalsed x ja y väärtused. Sel juhul ütleme, et võrrandile vastab imaginaarsete punktide

geomeetriline koht, sest selles võrrandis vähemalt üks muutuv koordinaat väljendub ikka imaginaararvuna.

§ 11. Polaarkoordinaadid. Polaarkoordinaadistiku saame, kui märgime tasapinnal mingi kindla punkti O ja mingisuguses kindlas suunas seda punkti läbiva sirge OX (joon. 15). Punkti O nimetame pooluseks ja sirget OX polaarteljeks. Sel juhul võime tasapinnal asetseva punkti P asukoha määrata kauguse $OP = r$ ja nurga φ kaudu, mille moodustab r polaarteljega OX. Suurused r ja φ on punkti P polaarkoordinaadid, s. o. $P(r, \varphi)$, kusjuures r nimetatakse punkti P polaarkauguseks ehk raadiusvektoriks ja φ polaarnurgaks. Raadiusvektori pikkuse loeme alati positiivseks; ta võib muutuda 0-st kuni $+\infty$-ni. Polaarnurka võime lugeda kas kellaosuti liikumisele vastandsuunas, mida loeme positiivseks, või kellaosuti liikumise suunas, mida loeme negatiivseks.

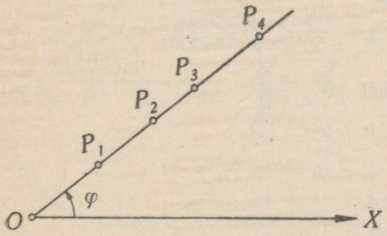


Joon. 15.

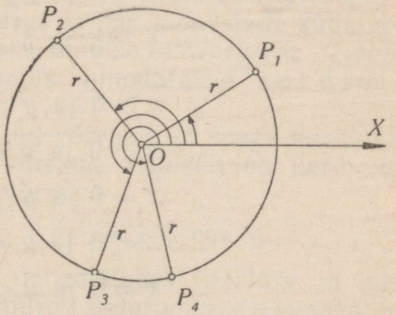
Tasapinna iga punkti puhul võib polaarnurk omada määramata palju väärtusi, mis erinevad üksteisest $2k\pi$ võrra, kus $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ Kui aga lugeda raadiusvektori pikkus alati positiivseks ning polaarnurka lugeda polaarteljest alates kellaosuti liikumisele vastandsuunas 0-st 2π-ni, siis sel juhul igale tasapinna punktile vastab üks ja ainult üks koordinaatide paar (r, φ) ja ümberpöördult, kusjuures poolus on ainus punkt, mis määratakse ühe tingimusega $r = 0$, mille puhul nurk φ on määramatu.

Kõik punktid, milledel on ühesugused polaarnurgad (joon. 16), asetsevad poolusest väljuval sirgel (poolsirgel). Kõik punktid, milledel on ühesugused raadiusvektorid (joon. 17), asetsevad ringjoonel, mille keskpunkt on pooluses.

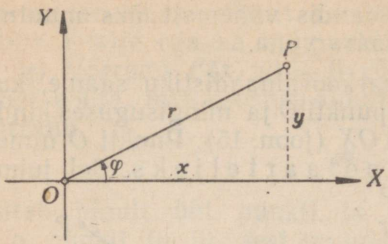
Kui loeme ristkoordinaadistikus nullpunkti pooluseks ja X-



Joon. 16.



Joon. 17.



Joon. 18.

telje polaarteljeks (joon. 18), siis saame punkti P ristkoordinaate x ja y väljendada polaarkoordinaatide r ja φ kaudu järgmiselt:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

mis on üleminekuvalemiteks ristkoordinaatidelt polaarkoordinaatidele.

Tõstes viimaste võrduste mõlemad pooled ruutu ja liites saadused, saame

$$x^2 + y^2 = r^2\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r^2,$$

millest punkti P polaarkaugus

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

kus arvestame ainult ruutjuure positiivset väärtust. Polaarnurga φ väärtuse leiame võrdustest $x = r\cos\varphi$ ja $y = r\sin\varphi$, kui polaarkauguse asendame tema väärtusega, s. o.

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

millede jagatis annab

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x},$$

millest

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x},$$

kus nüüd x ja y märgid määravad polaarnurga φ kvadrandi, s. o.

kui $x > 0$ ja $y > 0$, siis $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$

„ $x < 0$ ja $y > 0$, „ $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$

„ $x < 0$ ja $y < 0$, „ $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$

„ $x > 0$ ja $y < 0$, „ $\frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$

„ $x > 0$ ja $y = 0$, „ $\varphi = 0$

„ $x = 0$ ja $y > 0$, „ $\varphi = \frac{\pi}{2}$

„ $x < 0$ ja $y = 0$, „ $\varphi = \pi$

„ $x = 0$ ja $y < 0$, „ $\varphi = \frac{3\pi}{2}$

„ $x > 0$ ja $y = 0$, „ $\varphi = 2\pi$.

§ 12. Polaarvõrrandile vastav graafik. Joone polaarvõrrandiks nimetatakse niisugust võrrandit, milles muutuvateks koordinaatideks on polaarkoordinaadid r ja φ, s. o.

$$F(r, \varphi) = 0$$

ehk ilmutatult

$$r = f(\varphi),$$

kus nüüd polaarnurk φ on argumendiks ja polaarkaugus r on funktsiooniks. Et esitada polaarvõrrandile $r = f(\varphi)$ vastavat geomeetrilist kohta ehk joont, selleks anname funktsiooni määramispiirkonnas polaarnurgale φ vabalt võetavaid väärtusi

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots,$$

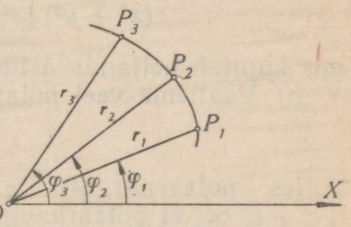
arvutame nende järgi polaarkauguse r vastavad positiivsed väärtused

$$f(\varphi_1) = r_1, \; f(\varphi_2) = r_2, \; f(\varphi_3) = r_3, \ldots$$

ning märgime vastavad punktid

$$P_1(r_1, \varphi_1), \; P_2(r_2, \varphi_2), \; P_3(r_3, \varphi_3), \ldots$$

polaarkoordinaadistikus (joon. 19).



Joon. 19.

Ühendades märgitud punktid pideva joonega, saame kõikide nende punktide geomeetrilise koha, millede koordinaadid rahuldavad polaarvõrrandit $r = f(\varphi)$.

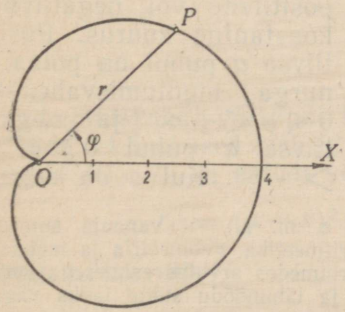
a) Kui näiteks polaarvõrrandis

$$r = 2(1 + \cos\varphi)$$

anname polaarnurgale φ väärtusi vahemikus $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ ja koostame väärtuste tabeli

$\varphi =$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$r \approx$	4	3,4	2	0,6	0	0,6	2	3,4	4

,



Joon. 20.

siis näeme, et saadud väärtuspaaride järgi saame joonestada südamekujulise kinnise kõverjoone (joon. 20), mida nimetatakse kardioidiks.

Antud võrrand on seega kardioidi polaarvõrrand. Üldiselt on kardioidi polaarvõrrand

$$r = a(1 + \cos\varphi),$$

kus a on mistahes reaalarv ja kus polaarnurga muutumisvahemikuks on $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

Et saada kardioidi võrrandit ristkoordinaatides x ja y, asetame r ja $\cos\varphi$ väärtused

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{ja} \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

kardioidi polaarvõrrandisse r ja $\cos\varphi$ asemele; saame

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

Vabastades viimase võrrandi nimetajast ja juurtest, võime esitada kardioidi võrrandi ratsionaalsel kujul järgmiselt:

$$(x^2 + y^2)(x^2 - 2ax + y^2) - a^2y^2 = 0,$$

mis kujutab neljanda astme algebralist võrrandit.

b) Vaatleme veel polaarvõrrandit

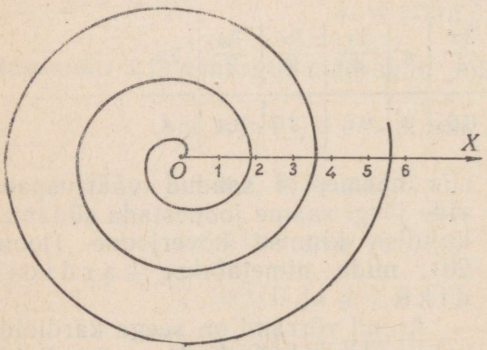
$$r = 0{,}3\varphi,$$

milles polaarnurgale φ võime anda väärtusi vahemikus $0 \leqslant \varphi < \infty$, et polaarkaugus r omaks positiivseid väärtusi. Koostame väärtuste tabeli

$\varphi =$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	3π	4π	5π	6π	...
$r \approx$	0	0,47	0,94	1,41	1,89	2,82	3,77	4,72	5,65	...

,

mille järgi saame joonestada kõvera (joon. 21), mida nimetatakse Arhimedese* spiraaliks. Arhimedese spiraali algus-



Joon. 21.

punkt on pooluses.

Arhimedese spiraali polaarvõrrand on üldiselt

$$r = a\varphi,$$

kus a on mistahes reaalne positiivne või negatiivne konstantne suurus. Positiivse a puhul on polaarnurga muutumisvahemik $0 \leqslant \varphi < +\infty$ ja negatiivse a puhul $0 \geqslant \varphi > -\infty$. Kui a on nega-

* Arhimedes Sürakuusast (287—212 e. m. a.) — vanaaja suurim kreeka matemaatik ja füüsik. Tema teostest aritmeetika, geomeetria ja mehaanika alalt on mõned säilinud meie päevini. Arhimedes arvutas esimesena kera pind- ja ruumala ning määras ringi ümber- ja läbimõõdu suhte jaoks väga lähedased tõkked, nimelt $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.

tiivne, siis on Arhimedese spiraali käik sümmeetriliselt vastupidine joonisel 21 esineva spiraali käigule.

Et esitada Arhimedese spiraali võrrandit ristkoordinaatide x ja y kaudu, selleks kasutame r ja φ suhtes teisendamisvalemeid

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ ja } \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} .$$

Paigutades need r ja φ väärtused Arhimedese spiraali polaarvõrrandisse r ja φ asemele, saame

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \operatorname{arctg} \frac{y}{x} ,$$

millest

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}$$

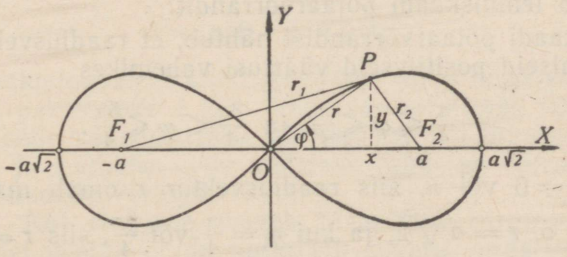
ehk

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a} ,$$

mis kujutab transtsendentset võrrandit.

c) Kõverat, mille iga punkti kauguste korrutis kahest kindlast punktist, mis asetsevad teineteisest $2a$ kaugusel, on konstantne suurus a^2, nimetatakse l e m n i s k a a d i k s.

Kindlaid punkte nimetatakse lemniskaadi fookusteks ja lemniskaadil asetseva jooksva punkti kaugusi fookustest lemniskaadi raadiusvektoriteks. Tähistame fookused tähtedega F_1 ja F_2 ning vastavad raadiusvektorid tähtedega r_1 ja r_2.



Joon. 22.

Lemniskaadi võrrandi leidmiseks võtame ristkoordinaadistiku nõnda, et fookused oleksid $F_1(-a, 0)$ ja $F_2(a, 0)$ (joon. 22). Kui punkt $P(x, y)$ on vabalt võetav lemniskaadi punkt, siis

$$r_1^2 = (a + x)^2 + y^2, \quad r_2^2 = (a - x)^2 + y^2,$$

millede korrutis

$$r_1^2 r_2^2 = (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) + a^4.$$

Et lemniskaadi definitsiooni põhjal $r_1 r_2 = a^2$, siis $r_1^2 r_2^2 = a^4$ ja järelikult

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0,$$

mis kujutab lemniskaadi võrrandit ristkoordinaatides x ja y.

Saadud võrrand näitab, et lemniskaat on neljandat järku algebraline joon. Ilmutades lemniskaadi võrrandist y, leiame, et

$$y = \pm \sqrt{-(a^2 + x^2) \pm a\sqrt{a^2 + 4x^2}},$$

mille järgi saame joonestada joonisel 21 esitatud kõvera, mille äärmised lõikepunktid X-teljega on $x = \pm a\sqrt{2}$. Võrrandist nähtub, et y võib omada vahemikus $-a\sqrt{2} \leqslant x \leqslant a\sqrt{2}$ ainult kahte reaalväärtust. Ülejäänud kaks y väärtust on imaginaarsed. Lemniskaat lõikab iseennast nullpunktis, mis on seega lemniskaadi kahekordseks punktiks.

Polaarkoordinaadistikus, kus poolus ühtib ristkoordinaattelgede nullpunktiga ja polaartelg X-teljega, saame lemniskaadi võrrandi, kui paigutame ristkoordinaatide x ja y asemele

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

s. o.

$$r^4(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)^2 - 2a^2r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 0,$$

millest

$$r^2 = 2a^2\cos 2\varphi,$$

mis kujutab lemniskaadi polaarvõrrandit.

Lemniskaadi polaarvõrrandist nähtub, et raadiusvektor r saab omada reaalseid positiivseid väärtusi vahemikes

$$-\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4} \quad \text{ja} \quad \frac{3\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{5\pi}{4}.$$

Kui siin $\varphi = 0$ või π, siis raadiusvektor r omab maksimaalset väärtust, s. o. $r = a\sqrt{2}$, ja kui $\varphi = \frac{\pi}{4}$ või $\frac{3\pi}{4}$, siis $r = 0$.

Nii käesolevast kui ka eelmistest näidetest nähtub, et lemniskaadi, Arhimedese spiraali ja kardioidi polaarvõrrandid on oma kujult palju lihtsamad ja seega rakendamiseks kaugelt soodsamad kui nende võrrandid ristkoordinaatides x ja y.

§ 13. Joone parameetrilised võrrandid. Kui joone võrrandis

$$y = f(x)$$

vaadelda x kui mõne kolmanda muutuva suuruse t funktsiooni, s. o. $x = \varphi(t)$, ja $\varphi(t)$ paigutada joone võrrandisse x asemele, siis näeme, et ka y on sel juhul muutuva suuruse t funktsioon,

s. o. $y = f[\varphi(t)] = \psi(t)$. Seega võime joone võrrandi $y = f(x)$ teisendada kaheks võrrandiks

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

mida tähistatakse harilikult lihtsuse mõttes järgmiselt:

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

kus t nimetatakse abimuutujaks ehk parameetriks. Parameetri t iga väärtuse jaoks määrab siin esimene võrrand punkti $P(x, y)$ abstsissi x väärtuse ja teine võrrand ordinaadi y väärtuse. Seega on võrranditega $x = x(t)$ ja $y = y(t)$ loodud punkti koordinaatide x ja y omavaheline vastavus ehk funktsionaalne seos.

Saadud võrrandid esitavad joone võrrandit $y = f(x)$ parameetrilisel kujul, mistõttu neid võrrandeid nimetatakse joone parameetrilisteks võrranditeks. Neis võrrandites parameetri t iga väärtus teatavas vahemikus määrab x ja y väärtused nõnda, et funktsionaalne seos $y = f(x)$ jääb ikka kehtivaks. Seega selles vahemikus parameetri t pideval muutumisel punkt $P(x, y)$ kujundab ristkoordinaadistikus joone, mida esitab võrrand $y = f(x)$. Sel põhjusel võime võrrandeid

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

nimetada ka punkti P liikumisvõrranditeks, kus parameetriks t võib olla näiteks aeg, nurk, pikkus või mõni muu sobiv suurus, mille muutumisest on tingitud punkti $P(x, y)$ liikumine.

Et saada võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

määratud funktsionaalset seost $y = f(x)$, tuleb neist võrranditest elimineerida parameeter t kas ilmutades esimesest võrrandist t ja asetades selle väärtuse teise võrrandisse või ilmutades teisest võrrandist t ja asetades selle väärtuse esimesse võrrandisse või mõne muu teisendusvõttega.

Näide. Kui ringjoon veereb tasapinnal sirgjoont mööda, siis ringjoonel võetud punkt kujundab kõvera, mida nimetatakse tsükloidiks.

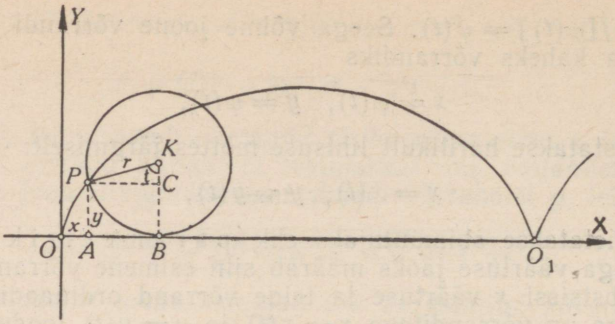
Veeregu ring, mille raadius on r, mööda X-telge ja olgu nullpunkt ringjoonel võetud punkti P algasendiks (joon. 23). Muutuvaks parameetriks võtame ringi pöördenurga

$$\widehat{BKP} = t.$$

Et $\overline{OB} = \overset{\frown}{PB} = rt$, siis punkti P ristkoordinaadid x ja y avalduvad parameetri t kaudu järgmiselt:

$$x = OA = OB - AB = \overset{\frown}{PB} - PC = rt - r\sin t = r(t - \sin t),$$
$$y = AP = BK - CK = r - r\cos t = r(1 - \cos t).$$

TRÜ Raamatukogu



Joon. 23.

Seega

$$x = r(t - \sin t), \quad y = r(1 - \cos t)$$

kujutavad tsükloidi parameetrilisi võrrandeid. Siin parameetri t pideval muutumisel 0-st 2π-ni teeb ringjoon X-telge mööda täispöörde, kusjuures $OO_1 = 2\pi r$.

Et esitada tsükloidi võrrandit ristkoordinaatide x ja y kaudu, selleks kõrvaldame tsükloidi parameetrilistest võrranditest parameetri t. Parameetrit t on siin võimalik ilmutada teisest võrrandist, s. o.

$$\cos t = \frac{r - y}{r}, \quad t = \arccos \frac{r - y}{r}$$

ja

$$\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - \left(\frac{r - y}{r}\right)^2} = \frac{1}{r}\sqrt{y(2r - y)}.$$

Asetades need t ja $\sin t$ väärtused esimesse parameetrilisse võrrandisse, saame otsitava võrrandi

$$x = r \arccos \frac{r - y}{r} + \sqrt{y(2r - y)},$$

kus nüüd x vaatleme kui y funktsiooni. Saadud võrrand näitab, et tsükloid on transtsendentne kõver.

§ 14. Harjutusülesandeid.

1. Korrapärase tetraeedri kõrgus $h = 3{,}48(\pm 0{,}03)$ cm. Arvutada selle tetraeedri täispindala ühes maksimaalse absoluutse veaga.

2. Korrapärase tetraeedri kõrgus $h = 3{,}48(\pm 0{,}02)$ dm. Arvutada selle tetraeedri ruumala ühes maksimaalse relatiivse veaga.

3. Arvutada ruudu pindala ühes maksimaalse absoluutse veaga, kui ruudu diagonaal on $2{,}37(\pm 0{,}01)$ m võrra pikem kui ruudu külg.

4. Arvutada täisnurkse võrdhaarse kolmnurga pindala ühes maksimaalse relatiivse veaga, kui kolmnurga hüpotenuus on $4{,}19\,(\pm 0{,}01)$ m võrra pikem kui kaatet.

5. Leida funktsiooni $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ väärtused:

a) $f(0)$, b) $f(1)$, c) $f(-1)$.

6. Leida funktsiooni $f(x) = \arcsin(3x-1)$ väärtused:

a) $f\left(\frac{1}{3}\right)$, b) $f\left(\frac{1}{2}\right)$, c) $f(0)$.

Leida pöördfunktsioonid:

7. $y = \log^2 x$
8. $y = \log x^2$
9. $y = \sin^2 x$
10. $y = \operatorname{tg} x^2$
11. $y = 10^x - 1$
12. $y = \sqrt[3]{a^3 - x^3}$
13. $y = \frac{1}{1+x^2}$
14. $y = \frac{1-x}{1+x}$
15. $y = \arcsin\frac{x-1}{2}$
16. $y = \log\,(x + \sqrt{x^2+1})$.

Missugused alljärgnevatest funktsioonidest on paaritud ja missugused on paarisfunktsioonid:

17. $y = x^3 + x$
18. $y = x^3 + 1$
19. $y = x \sin x$
20. $y = x + \sin x$
21. $y = 2^x + 2^{-x}$
22. $y = 2^x - 2^{-x}$.

Missugused alljärgnevatest funktsioonidest on perioodilised ja missugused on nende perioodid:

23. $y = \sin 2x$
24. $y = \cos 2x$
25. $y = \sin^2 x$
26. $y = x \cos x$
27. $y = \cos\,(x+1)$
28. $y = 1 + \sin\frac{\pi}{2}x$.

Leida funktsioonide määramispiirkond:

29. $y = \sqrt{x-2}$
30. $y = \sqrt{2-x}$
31. $y = \sqrt[3]{x-1}$
32. $y = \frac{x-3}{x+3}$
33. $y = \sqrt{2+x} - \sqrt{4-x}$
34. $y = \sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x}$
35. $y = \frac{x+2}{x^2+4x-5}$
36. $y = \frac{1}{1+\sqrt{x^2-1}}$.

Kujutada graafiliselt funktsioonid:

37. $y = \frac{1}{x}$
38. $y = \frac{x+1}{x-1}$
39. $y = \frac{1}{1-x^2}$
40. $y = \frac{x}{x^2-1}$
41. $y = \frac{x}{x^2+1}$
42. $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$
43. $y = \frac{x^2}{4-x^2}$
44. $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$
45. $y^2 = \frac{4}{x}$
46. $y^2 = \frac{x^3}{4-x}$
47. $y^2 = x(x-1)$
48. $y^2 = x(x-1)^2$
49. $y^2 = x^2(x-1)$
50. $y^2 = x(x^2-1)$
51. $y^2 = x^2(1-x^2)$
52. $y^3 = x^2$
53. $y^3 = (x^2-4)^2$
54. $(y-x)^2 = x^5$
55. $x(y-x)^2 = 1$
56. $y(x-1)(x-2)(x-3) = 1$
57. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2+1}$
58. $y = \log(x^2+1)$
59. $r = \frac{10}{\varphi}$
60. $r = 2^{0,2\varphi}$.

II peatükk

PIIRVÄÄRTUSTE TEOORIA

§ 15. Arvjärjend ja tema piirväärtus. Võtame mingi perioodilise kümnendmurru, näiteks

$$3,(9) = 3,9999\ldots$$

ja kirjutame välja selle lähendmurrud

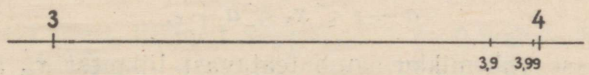
$$3,9;\ 3,99;\ 3,999;\ 3,9999;\ \ldots;$$

saame kasvavate liikmetega arvjärjendi ehk — lühemalt öeldes — kasvava arvjärjendi, milles iga liige sisaldab murdosas ühe 9 rohkem kui temale eelnev liige. Kui siin lähendmurru murdosas üheksate arvu piiramatult suurendada, siis lähenevad selle arvjärjendi liikmed järk-järgult kasvades arvule 4 nii, et teatavast liikmest alates arvu 4 ja arvjärjendi iga liikme vahe võib saada nii väikeseks kui me iganes soovime, s. o. see vahe võib saada väiksemaks kuitahes väikesest etteantud positiivsest arvust ε. Kui näiteks võtta $\varepsilon = 0{,}001$, siis erinevad lähendmurdude järjendis kõik liikmed, alates neljandast liikmest, arvust 4 vähem kui ε võrra; kui võtta $\varepsilon = 0{,}000001$, siis erinevad lähendmurdude järjendis kõik liikmed, alates seitsmendast liikmest, arvust 4 vähem kui ε võrra jne. Arv 4, millele piiramatult lähenevad antud kasvava arvjärjendi liikmed, on selle arvjärjendi *piirväärtuseks*.

Geomeetriliselt tähendab see, et punktid arvsirgel lähendmurdude

$$3,9;\ 3,99;\ 3,999;\ 3,9999;\ \ldots$$

graafiliste kujutistena järk-järgult lähenevad arvu 4 kujutavale punktile (joon. 24), kuhjudes ikka tihedamini ja tihedamini sellele lähemale. Arvu 4 kujutavat punkti arvsirgel nimetatakse antud arvjärjendi *piirpunktiks*. Kui võtame siin vahemiku



Joon. 24.

$(4 - \varepsilon, 4)$, kus ε on kuitahes väike etteantud positiivne arv, siis satub vahemikku $4 - \varepsilon$ kuni 4 ikka piiramatul arvul ratsionaalseid punkte.

Samuti, kui näiteks võtame kahaneva arvjärjendi

$$2{,}1;\ 2{,}01;\ 2{,}001;\ 2{,}0001;\ \ldots,$$

milles iga liige sisaldab murdosas koma ja 1 vahel ühe nulli rohkem kui temale eelnev liige, ja seejuures nullide arvu piiramatult suurendame, siis lähenevad selle arvjärjendi liikmed järkjärgult kahanedes arvule 2 nii, et teatavast liikmest alates arvjärjendi iga liikme ja arvu 2 vahe võib saada väiksemaks kuitahes väikesest etteantud positiivsest arvust ε. Kui näiteks võtta $\varepsilon = 0{,}00001$, siis erinevad selle arvjärjendi liikmed, alates kuuendast liikmest, arvust 2 vähem kui ε võrra; kui võtta $\varepsilon = 10^{-12}$, siis erinevad arvjärjendi liikmed, alates kolmeteistkümnendast liikmest, arvust 2 vähem kui ε võrra jne. Seega arv 2, millele piiramatult lähenevad käsitletava kahaneva arvjärjendi liikmed, on selle arvjärjendi piirväärtuseks. Punkt arvu 2 graafilise kujutisena arvsirgel on selle arvjärjendi piirpunktiks. Kui võtame siin vahemiku $(2, 2 + \varepsilon)$, kus ε on kuitahes väike etteantud positiivne arv, siis satub vahemikku 2 kuni $2 + \varepsilon$ ikka piiramatul arvul ratsionaalseid punkte.

Definitsioon: *Arv a on lõpmatu arvjärjendi*

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

piirväärtuseks, kui teatavast liikmest x_m alates arvjärjendi iga liikme ja arvu a vahe absoluutväärtus iga $n \geqslant m$ puhul on väiksem kui mistahes väike etteantud positiivne arv ε, s. o.

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

ja tähistame

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

See definitsioon ütleb, et arv a on lõpmatu arvjärjendi piirväärtus (*limes*), kui arvjärjendi liikmete arv n piiramatult kasvab, s. o. kui $n \to \infty$.

Võrratus

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

tähendab ühtlasi, et

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$$

ehk

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$

missugusesse vahemikku satub teatavast liikmest x_m alates arvjärjendi iga liige x_n, kui $n \geqslant m$. Vahemik $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, mille

pikkus on 2ε ja mille keskpunktiks on punkt a, on punkti a ümbruseks.

Arvjärjendi liiget x_n nimetame arvjärjendi **üldliikmeks**, millega arvjärjend on ühtlasi määratud. Nii näiteks

$$x_n = \frac{2n}{2n+1},$$

kus $n = 1, 2, 3, \ldots$, tähendab lõpmatut arvjärjendit

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \cdots$$

Arvjärjendit, millel on lõplik piirväärtus, nimetame **koonduvaks** arvjärjendiks. Kui aga arvjärjendil puudub lõplik piirväärtus, siis ütleme, et arvjärjend on **hajuv**. Nii on näiteks lihtmurdude järjend

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$$

koonduv, sest tema piirväärtus on null, s. o.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

kuna aga naturaalarvude järjend

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

on hajuv, sest temal puudub lõplik piirväärtus. Viimasel juhul arvjärjendi liikmed kasvavad piiramatult, saades suuremaks igast kuitahes suurest etteantud arvust. Sel juhul öeldakse ka, et arvjärjendi piirväärtuseks on lõpmatus. Üldiselt, kui arvjärjend

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

on hajuv ja tema piirväärtuseks on lõpmatus, siis märgime seda järgmiselt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Samuti loeme arvjärjendi, mis ei oma kindlat lõplikku piirväärtust, hajuvaks arvjärjendiks. Nii näiteks arvjärjend

$$1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, \ldots, 1, \frac{1}{n}, \ldots$$

on hajuv, sest tema liikmed võnguvad 1 ja 0 vahel. Niisugust arvjärjendit nimetame **ostsilleeruvaks** ehk **võnkuvaks** arvjärjendiks.

Erinevate liikmetega arvjärjendid võivad omada üht ja sama piirväärtust, nagu näiteks arvjärjendid

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

ja

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots,$$

millede ühiseks piirväärtuseks on arv 1, sest definitsiooni järgi esimese arvjärjendi puhul

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|-\frac{1}{n+1}\right| < \varepsilon, \text{ kui } n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon},$$

ja teise arvjärjendi puhul

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon, \text{ kui } n > \frac{1}{\varepsilon},$$

ning seega

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Kahe üht ja sama piirväärtust omava erinevate liikmetega arvjärjendi vahepealse arvjärjendi suhtes kehtib järgmine

teoreem: Kui arvjärjendite

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

ja

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$$

puhul $x_n < y_n$ (või $x_n > y_n$), kus $n = 1, 2, 3, \ldots$, ja seejuures need arvjärjendid lähenevad ühele ja samale piirväärtusele, siis läheneb sellele piirväärtusele ka arvjärjend

$$z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots,$$

kui $x_n < z_n < y_n$ (või $x_n > z_n > y_n$).

Selle teoreemi tõestamiseks oletame, et iga n puhul

$$x_n < z_n < y_n.$$

Olgu arvjärjendite

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$
$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$$

ühine piirväärtus a, s. o.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = a,$$

ehk

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad |y_n - a| < \varepsilon,$$

kus ε on kuitahes väike etteantud positiivne arv. Esitame viimased võrratused järgmiselt:

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon, \quad -\varepsilon < y_n - a < \varepsilon,$$

millede igale osale a juurde lisades saame

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon, \quad a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon.$$

Arvestades kahekordset lähtevõrratust, võime kirjutada

$$a - \varepsilon < x_n < z_n < y_n < a + \varepsilon,$$

millest

$$-\varepsilon < z_n - a < \varepsilon$$

ehk

$$|z_n - a| < \varepsilon,$$

mis ütleb, et

$$\lim_{n \to \infty} z_n = a,$$

s. o. arvjärjendi

$$z_1, \; z_2, \; z_3, \; \ldots, \; z_n, \; \ldots$$

piirväärtus on samuti a.

Näiteks erinevate liikmetega arvjärjendite

$$\frac{1}{2}, \; \frac{3}{4}, \; \frac{5}{6}, \; \ldots, \; \frac{2n-1}{2n}, \; \ldots$$

$$\frac{2}{1}, \; \frac{4}{3}, \; \frac{6}{5}, \; \ldots, \; \frac{2n}{2n-1}, \; \ldots$$

piirväärtused on võrdsed, s. o.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n-1}{2n} = \lim_{n \to \infty} \frac{2n}{2n-1} = 1,$$

sest esimesel juhul

$$\left| \frac{2n-1}{2n} - 1 \right| = \left| -\frac{1}{2n} \right| < \varepsilon, \text{ kui } n > \frac{1}{2\varepsilon},$$

ja teisel juhul

$$\left| \frac{2n}{2n-1} - 1 \right| = \left| \frac{1}{2n-1} \right| < \varepsilon, \text{ kui } n > \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}.$$

Nende kahe arvjärjendi vahepealse arvjärjendi

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \ldots, \frac{2n}{2n+1}, \ldots,$$

kus

$$\frac{2n-1}{2n} < \frac{2n}{2n+1} < \frac{2n}{2n-1},$$

piirväärtus peab olema samuti 1, s. o.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n+1} = 1,$$

nagu nähtub ka arvjärjendi piirväärtuse definitsioonist:

$$\left|\frac{2n}{2n+1} - 1\right| = \left|-\frac{1}{2n+1}\right| < \varepsilon, \text{ kui } n > \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}.$$

§ 16. Tõkestatud arvjärjendid. Arvjärjendit

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

nimetame k a s v a v a k s, kui

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < \ldots,$$

ja üldisemal juhul m i t t e k a h a n e v a k s, kui

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots$$

Seega kasvav arvjärjend on mittekahaneva arvjärjendi erijuhtum.

Analoogiliselt nimetame antud arvjärjendit k a h a n e v a k s, kui

$$x_1 > x_2 > x_3 \ldots > x_n > \ldots,$$

ja m i t t e k a s v a v a k s, kui

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant \ldots$$

Kahanev arvjärjend on mittekasvava arvjärjendi erijuhtum.

Kõiki neid arvjärjendeid nimetatakse m o n o t o o n s e t e k s arvjärjenditeks. Arvjärjend võib seega olla kas monotoonselt kasvav või monotoonselt kahanev, kas monotoonselt mittekahanev või monotoonselt mittekasvav.

Arvjärjendit

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

nimetatakse t õ k e s t a t u k s, kui leidub kaks niisugust reaalarvu m ja M, et iga $n = 1, 2, 3, \ldots$ puhul

$$m \leqslant x_n \leqslant M,$$

kus m on arvjärjendi a l a m t õ k e ja M ü l e m t õ k e.

Mittekahanev arvjärjend on tõkestatud, kui leidub niisugune reaalarv M, mida ei ületa arvjärjendi ükski liige, s. o.

$$x_n \leqslant M.$$

Kui aga niisugust reaalarvu ei leidu, siis ütleme, et arvjärjend on tõkestamatu.

Mittekasvav arvjärjend on tõkestatud, kui leidub niisugune reaalarv m, millest arvjärjendi ükski liige ei ole väiksem, s. o.

$$x_n \geqslant m.$$

Tõkestatud mittekahaneva arvjärjendi kohta tõestame olulise **teoreemi 1:** Igal tõkestatud mittekahaneval arvjärjendil on lõplik piirväärtus.

Kui arvjärjend

$$x_1, \; x_2, \; x_3, \; \ldots, \; x_n, \; \ldots$$

on mittekahanev, s. o.

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots,$$

ja ühtlasi tõkestatud, siis leidub ikka kaks niisugust ratsionaalarvu m ja M, et $m \leqslant x_n \leqslant M$.

Teoreemi tõestamiseks jaotame kõik ratsionaalarvud kahte klassi, lugedes esimesse klassi kuuluvaks arvu m ja iga ratsionaalarvu a, kui antud arvjärjendis leidub mingi liige, mis on arvust a suurem, ja teise klassi kuuluvaks arvu M ja iga ratsionaalarvu b, kui arvjärjendis ei leidu ühtki liiget, mis oleks arvust b suurem. Siis on alati $a < b$, sest kui oleks $a \geqslant b$ ja a esimese klassi arv, siis peaks b olema ammugi esimese klassi arv ega saaks seega kuuluda teise klassi.

Esimese klassi arvude hulgas ei või olla suurimat arvu A, sest kui esimeses klassis leiduks suurim arv A, siis peaks arvjärjendis leiduma niisugune liige x_n, et oleks $x_n > A$ ning iga ratsionaalarv A ja x_n vahel oleks ka esimese klassi arv ning seega A ei saaks olla suurimaks arvuks.

Teise klassi arvude suhtes on olemas kaks võimalust: a) klassi arvude hulgas leidub väikseim arv B, b) klassi arvude hulgas ei leidu väikseimat arvu.

Esimesel juhul ratsionaalarv B ongi arvjärjendi otsitav piirväärtus, sest kui väike ka oleks positiivne arv ε, ikka leidub arvjärjendis liige, mis on suurem kui $B - \varepsilon$, ja et antud arvjärjend on mittekahanev, siis sellest liikmest alates on kõik arvjärjendi liikmed suuremad kui $B - \varepsilon$. Teiselt poolt on kõik arvjärjendi liikmed väiksemad kui B või äärmisel juhul võrdsed B-ga, sest B on teise klassi arv. Seega asetsevad kõik arvjärjendi liikmed teatavast liikmest alates $B - \varepsilon$ ja B vahel, s. o.

$$|x_n - B| < \varepsilon,$$

kui n on küllalt suur.

Teisel juhul, kui teise klassi arvude hulgas ei ole väikseimat arvu, siis niisugune ratsionaalarvude kaheks klassiks jaotamine määrab nn. Dedekindi lõikena* irratsionaalarvu C, mis lahutab esimese klassi arvud teise klassi arvudest. Arvjärjendi teatavast liikmest alates asetsevad siis jälle kõik arvjärjendi liikmed $C - \varepsilon$ ja C vahel, kui väikese me ka võtaksime positiivse arvu ε, ja seega on sel juhul

$$|x_n - C| < \varepsilon,$$

mis ütleb, et arvjärjendil on olemas piirväärtus.

Analoogiliselt võime tõestada

teoreemi 2: Igal tõkestatud mittekasvaval arvjärjendil on lõplik piirväärtus.

§ 17. Lõpmata kasvavad ja lõpmata kahanevad suurused. Kui muutuv suurus x omandab väärtusi

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots,$$

mis moodustavad lõpmatu arvjärjendi, mille liikmete absoluutväärtused kasvavad ja teatavast liikmest x_m alates jäävad suuremaks kuitahes suurest etteantud positiivsest arvust M, s. o.

$$|x_n| > M,$$

kus $n \geqslant m$, siis ütleme, et muutuv suurus x on lõpmata kasvav suurus, ja tähistame

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \infty \quad \text{ehk} \quad x \to \infty.$$

Kui seejuures muutuv suurus x omandab ainult positiivselt kasvavaid väärtusi, siis tähistame

$$\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty \quad \text{ehk} \quad x \to +\infty$$

ja kui x omandab ainult negatiivselt kasvavaid väärtusi, siis tähistame

$$\lim_{n \to \infty} x_n = -\infty \quad \text{ehk} \quad x \to -\infty.$$

---

* Richard Dedekind (1831—1916) on klassikalise irratsionaalarvude teooria rajajaid. Oma teostes «Stetigkeit und irrationale Zahlen» ja «Was sind und was sollen die Zahlen?» väidab ja tõestab Dedekind, et kui jaotada ratsionaalarvud kahte klassi nii, et esimese klassi iga arv on teise klassi igast arvust väiksem, siis esimese klassi arvud kasvavalt ja teise klassi arvud kahanevalt lähenevad piiramatult ühele ja samale piirväärtusele. See piirväärtus on reaalarv ja kujutab nende kahe klassi vaheväärtust ehk nn. Dedekindi lõiget, mis jaotab ratsionaalarvud kahte klassi. Kui esimeses klassis ei ole suurimat arvu ja teises klassis väikseimat arvu, siis Dedekindi lõige kujutab irratsionaalarvu.

Kui aga muutuv suurus x omandab väärtusi

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,$$

mis moodustavad lõpmatu arvjärjendi, mille liikmete absoluutväärtused kahanevad ja teatavast liikmest x_m alates jäävad väiksemaks kuitahes väikesest etteantud positiivsest arvust ε, s. o.

$$|x_n| < \varepsilon,$$

kus $n \geqslant m$, siis ütleme, et muutuv suurus x on lõpmata kahanev suurus*, ja tähistame

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \text{ ehk } x \to 0,$$

mis näitab, et lõpmata kahaneva suuruse piirväärtus on võrdne nulliga.

Kui näiteks muutuva suuruse x väärtusteks on

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$$

või

$$-1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \ldots,\ -\frac{1}{n},\ \ldots$$

või

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{2n-1},\ -\frac{1}{2n},\ \ldots,$$

siis igal juhul $x \to 0$ ja seega on x lõpmata kahanev suurus.

Siit ilmneb samuti, et kui arvjärjendi

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

piirväärtus on a, siis teatavast liikmest alates $|x_n - a| < \varepsilon$, kus ε on kuitahes väike etteantud positiivne arv, ning $x_n - a = \alpha_n$ on seega lõpmata kahanev suurus. Järelikult x_n on oma piirväärtuse ja lõpmata kahaneva suuruse summa, s. o. $x_n = a + \alpha_n$.

Lõpmata kahanevatel suurustel on järgmised omadused:

1) Lõpmata kahanevate suuruste algebraline summa on lõpmata kahanev suurus.

Vaatleme kolme lõpmata kahaneva suuruse x, y ja z summat, s. o.

$$u = x + y + z,$$

kus x, y ja z omandavad vastavalt kahanevaid väärtusi

* Ütluste «väga suur arv» ja «väga väike arv» all mõistame ikkagi lõplikke konstantseid suurusi, kuid «lõpmata kasvav suurus» ja «lõpmata kahanev suurus» on muutuvad suurused, millede absoluutväärtused esimesel juhul piiramatult kasvavad ja teisel juhul piiramatult kahanevad, lähenedes nullile.

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$
$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$$
$$z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots,$$

mis järk-järgult lähenevad nullile. Nende lõpmata kahanevate suuruste summa u väärtused on siis

$$u_1 = x_1 + y_1 + z_1,\ u_2 = x_2 + y_2 + z_2, \ldots, u_n = x_n + y_n + z_n, \ldots$$

Et x, y ja z on lõpmata kahanevad suurused, siis — valides kuitahes väikese etteantud positiivse arvu ε — saame määrata niisuguse arvu m_1, et $|x_n| < \frac{\varepsilon}{3}$, kus $n \geqslant m_1$; samuti saame määrata arvu m_2 niisugusena, et $|y_n| < \frac{\varepsilon}{3}$, kus $n \geqslant m_2$, ja ka arvu m_3 niisugusena, et $|z_n| < \frac{\varepsilon}{3}$, kus $n \geqslant m_3$. Kui tähistame tähega m suurima arvudest m_1, m_2 ja m_3, siis igal juhul

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{3},\ |y_n| < \frac{\varepsilon}{3},\ |z_n| < \frac{\varepsilon}{3},\quad \text{kus } n \geqslant m.$$

Järelikult

$$|u_n| = |x_n + y_n + z_n| \leqslant |x_n| + |y_n| + |z_n| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

s. o. $|u_n| < \varepsilon$, kus $n \geqslant m$. Sellest aga nähtub, et $u = x + y + z \to 0$ ja on seega lõpmata kahanev suurus.

(2) Tõkestatud kasvava ja lõpmata kahaneva suuruse korrutis on lõpmata kahanev suurus.

Olgu korrutises xy muutuv suurus x tõkestatud, s. o. $|x_n| \leqslant M$, kuid y lõpmata kahanev. Kui viimasel juhul ε on kuitahes väike etteantud positiivne arv, siis saab määrata niisuguse arvu m, et $|y_n| < \frac{\varepsilon}{M}$, kus $n \geqslant m$. Seega

$$|x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

s. o. $|x_n \cdot y_n| < \varepsilon$, kus $n \geqslant m$. Sellest nähtub, et $xy \to 0$ ja on seega lõpmata kahanev suurus.

On arusaadav, et see omadus jääb kehtivaks ka siis, kui x on konstantne suurus. Järelikult konstantse suuruse ja lõpmata kahaneva suuruse korrutis on lõpmata kahanev suurus.

Samuti kahe lõpmata kahaneva suuruse korrutis on lõpmata kahanev suurus. Kui x ja y on lõpmata kahanevad suurused, siis saame ikka määrata niisuguse arvu m, et $n \geqslant m$ puhul $|x_n| < \varepsilon$ ja $|y_n| < \varepsilon$, kus ε on kuitahes väike etteantud positiivne arv, mis asetseb vahemikus $0 < \varepsilon < 1$; siis

kus α_n ja β_n on lõpmata kahanevad suurused, siis

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{b^2+b\beta_n} \cdot (b\alpha_n - a\beta_n),$$

kus nüüd parempoolse osa esimene tegur $\frac{1}{b^2+b\beta_n}$ on tõkestatud (sest teatavast muutumise momendist alates jääb ta väiksemaks kui näiteks $\frac{2}{b^2}$), kuid teine tegur $b\alpha_n - a\beta_n$ on lõpmata kahanev suurus. Järelikult lõpmata kahanevate suuruste teise omaduse põhjal on ka $\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}$ lõpmata kahanev suurus. Seega

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

Esitatud kolm teoreemi evivad põhilist tähtsust muutuvate suuruste ja eriti funktsioonide piirväärtuste arvutamisel. Seepärast nimetame neid teoreeme piirväärtuse *põhiteoreemideks*.

Võtame näitena arvjärjendi

$$\frac{x}{1!}, \quad \frac{x^2}{2!}, \quad \frac{x^3}{3!}, \quad \cdots, \quad \frac{x^n}{n!}, \quad \cdots,$$

kus x on antud positiivne arv, ja määrame tema piirväärtuse. Märgime üldliikme järgmiselt:

$$\frac{x^n}{n!} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{x}{n}.$$

Kui viimases avaldises $x < n$, siis $\frac{x}{n} < 1$ ja

$$\frac{x^n}{n!} < \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

mis näitab, et teatavast liikmest alates arvu n kasvamisel $\frac{x^n}{n!}$ järk-järgult kahaneb, jäädes seejuures suuremaks kui null. Seega on ta tõkestatud ja järelikult omab mingit piirväärtust a, s. o.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = a.$$

Sama piirväärtust omab ka $\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$, s. o.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = a,$$

ning seega, kui $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = a \cdot 0 = 0,$$

s. o.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Kui selles näites x oleks negatiivne arv, siis oleks paaritute astendajatega liikmete ees miinusmärk ning arvjärjend läheneks samuti nullile.

§ 19. Funktsiooni piirväärtus. Kui positiivse täisarvulise ehk naturaalse argumendi funktsioonis $y = f(n)$ ehk arvjärjendis

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ \ldots,\ f(n),\ \ldots$$

argumendi n piiramatul kasvamisel funktsiooni $f(n)$ väärtused lähenevad mingile konstantsele suurusele A nõnda, et teatavast argumendi väärtusest m alates funktsiooni $f(n)$ ja konstantse suuruse A vahe absoluutväärtus iga $n \geqslant m$ puhul saab väiksemaks kuitahes väikesest etteantud positiivsest arvust ε, s. o.

$$|f(n) - A| < \varepsilon,$$

siis on konstantne suurus A funktsiooni $f(n)$ ehk arvjärjendi

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ \ldots,\ f(n),\ \ldots$$

piirväärtuseks, kui $n \to \infty$, ja me tähistame

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = A.$$

See tähendab, et kui A on funktsiooni $f(n)$ piirväärtuseks, kui $n \to \infty$, siis võib funktsiooni väärtusi $n \geqslant m$ puhul vaadelda kui arvu A ligikaudseid väärtusi maksimaalse absoluutse veaga ε, mis võib olla kuitahes väike, kui n valida küllalt suur.

Näiteks täisarvulise argumendi funktsioon

$$y = \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2},$$

kui $n \to \infty$, omab piirväärtust, mis on võrdne nulliga, sest arvjärjend

$$\sin \frac{\pi}{2},\ \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{2},\ \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{2},\ \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi}{2},\ \ldots,$$

mille liikmete väärtused on

$$1,\ 0,\ -\frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{5},\ 0,\ -\frac{1}{7},\ 0,\ \ldots$$

on koonduv ja tema piirväärtuseks on null. Seega

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{n\pi}{2} = 0.$$

Seevastu näiteks täisarvulise argumendi funktsioonil

$$y = \sin\frac{n\pi}{2},$$

kui $n \to \infty$, puudub piirväärtus, sest arvjärjend

$$\sin\frac{\pi}{2},\ \sin\frac{2\pi}{2},\ \sin\frac{3\pi}{2},\ \sin\frac{4\pi}{2},\ \ldots,$$

mille liikmete ühesugused väärtused neljakaupa korduvad, s. o.

$$1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ \ldots,$$

on hajuv kui ostsilleeruv arvjärjend.

Kui ühe muutuja funktsiooni $y = f(x)$ määramispiirkonnas pidevalt muutuv argument x piiramatult läheneb kindlale suurusele a, omandades seejuures nii ratsionaalseid kui ka irratsionaalseid väärtusi

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,$$

nii et arvjärjend

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ \ldots,\ f(x_n),\ \ldots$$

on koonduv ja omab piirväärtust A, s. o. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, siis me ütleme, et argumendi x piiramatul lähenemisel a-le funktsioon $f(x)$ läheneb konstantsele suurusele A nõnda, et funktsiooni $f(x)$ ja konstantse suuruse A vahe absoluutväärtus võib saada väiksemaks kuitahes väikesest etteantud positiivsest arvust ε, s. o.

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

mis ütleb, et konstantne suurus A on funktsiooni $f(x)$ piirväärtuseks, kui $x \to a$.

Definitsioon: *Lõplikku suurust A nimetatakse funktsiooni $f(x)$ piirväärtuseks x lähenemisel a-le, kui iga kuitahes väikese etteantud positiivse arvu ε puhul saab määrata teise positiivse arvu δ nõnda, et võrratus*

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

kehtib x iga niisuguse väärtuse puhul, mis rahuldab võrratust $|x - a| < \delta$.

See definitsioon ütleb, et x igale väärtusele vahemikus $(a - \delta,\ a + \delta)$ vastab funktsiooni väärtus, mis asetseb $A - \varepsilon$ ja

$A + \varepsilon$ vahel. Kui valime ε väiksema, siis tuleb vähendada ka δ, et ülaltähendatud tingimus oleks rahuldatud. Arv δ sõltub seega arvust ε, s. o. $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Funktsiooni $y = f(x)$ piirväärtust, kui $x \to a$ ja seejuures $f(x) \to A$, tähistatakse järgmiselt:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A,$$

kusjuures funktsioon $f(x)$ ei pruugi olla määratud piirpunktis $x = a$, kuid peab olema määratud selle punkti ümbruses. Funktsiooni piirväärtus ei pruugi ka igakord ühte langeda funktsiooni väärtusega punktis $x = a$, s. o. funktsiooni väärtusega $f(a)$, sest nagu pärastpoole (§ 20, p. 1) näeme, tähendavad sümbolid $\lim_{x \to a} f(x)$ ja $f(a)$ sisuliselt kahte erinevat mõistet.

Kui funktsioonis $f(x)$ argument x piiramatult kasvab, kuid sealjuures funktsioon $f(x)$ jääb ikka ja alati määratuks ning piiramatult läheneb lõplikule suurusele A, siis nimetame arvu A funktsiooni $f(x)$ piirväärtuseks, kui $x \to \infty$, ja tähistame

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

See tähendab, et kuitahes väikese etteantud positiivse arvu ε puhul saab määrata kuitahes suure positiivse arvu N nii, et $|x| > N$ puhul kehtib ikka võrratus

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Kui argumendi x lähenemisel a-le (või ∞-le) funktsioon $f(x)$ läheneb lõplikule piirväärtusele A, siis on vahe $f(x) - A$ lõpmata kahanev suurus, ja ümberpöördult.

Funktsiooni $f(x)$ nimetame argumendi x muutumispiirkonnas t õ k e s t a t u k s, kui saame määrata niisuguse positiivse arvu M, et muutumispiirkonnas x iga väärtuse puhul

$$|f(x)| \leqslant M.$$

Kui aga niisugust arvu ei saa määrata, siis ütleme, et funktsioon $f(x)$ on t õ k e s t a m a t u.

Kui funktsioonis $f(x)$ argument x muutub pidevalt vahemikus a-st b-ni ja seejuures argumendi x kasvavate väärtuste puhul funktsiooni $f(x)$ vastavad väärtused kasvavad, s. o. kui x mistahes väärtuste x_1 ja x_2 puhul, kus $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, kehtib võrratus $f(x_1) < f(x_2)$, siis nimetame funktsiooni selles vahemikus k a s v a v a k s. Kui aga vahemikus a-st b-ni argumendi x kasvavate väärtuste puhul funktsiooni $f(x)$ vastavad väärtused kahanevad, s. o. kui x mistahes väärtuste x_1 ja x_2 puhul, kus $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, kehtib võrratus $f(x_1) > f(x_2)$, siis nimetame funktsiooni selles vahemikus k a h a n e v a k s. Kui vahemikus

a-st b-ni x mistahes väärtuste x_1 ja x_2 puhul, kus $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, on $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, siis nimetatakse funktsiooni selles vahemikus mittekahanevaks, ja kui vahemikus a-st b-ni x mistahes väärtuste x_1 ja x_2 puhul, kus $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, on $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, siis nimetatakse funktsiooni selles vahemikus mittekasvavaks. Kõikide nende juhtude puhul nimetatakse vahemikku a-st b-ni (mis võib olla kinnine, lahtine, poolkinnine või poollahtine) funktsiooni monotoonsuse vahemikuks ja funktsiooni selles vahemikus monotoonseks funktsiooniks.

Kasvava funktsiooni graafik argumendi kasvamisel kogu aeg tõuseb ja kahaneva funktsiooni graafik argumendi kasvamisel kogu aeg langeb.*

Kui funktsioonis $y = f(x)$ argument $x \to a$ (või $x \to \infty$) ja seejuures funktsioon $f(x)$ kasvab, jäädes kogu aeg väiksemaks kui mingi reaalarv M, siis on funktsioon $f(x)$ tõkestatud ja omab (§ 16 teoreemi 1 põhjal) ikka mingit piirväärtust A, mis ei ületa arvu M, s. o.

$$\lim_{\substack{x \to a \\ (x \to \infty)}} f(x) = A \leqslant M.$$

Kui $x \to a$ (või $x \to \infty$) puhul funktsioon $f(x)$ kahaneb, jäädes kogu aeg suuremaks kui mingi reaalarv m, siis on funktsioonil (§ 16 teoreemi 2 põhjal) samuti mingi piirväärtus B, mis ei ole väiksem kui m, s. o.

$$\lim_{\substack{x \to a \\ (x \to \infty)}} f(x) = B \geqslant m.$$

Kui funktsioon $y = f(x)$ on argumendi $x \to a$ puhul tõkestamatu, siis funktsioon läheneb lõpmatusele, mida tähistame järgmiselt:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

See tähendab, et kuitahes suure positiivse arvu K puhul saame määrata niisuguse $\delta > 0$, et võrratusest $|x - a| < \delta$ järeldub võrratus

$$|f(x)| > K.$$

Kui funktsioon $f(x)$ on argumendi $x \to \infty$ puhul tõkestamatu, siis funktsioon läheneb samuti lõpmatusele, mida tähistame

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

---

* Funktsiooni $f(x)$ nimetatakse ka rangelt monotoonseks, kui monotoonsuse vahemikus argumendi kasvamisel funktsioon kogu aeg kasvab, või ümberpöördult, kogu aeg kahaneb.

See tähendab, et kuitahes suure positiivse arvu K puhul saame määrata niisuguse positiivse arvu N, et võrratusest $|x| > N$ järeldub võrratus

$$|f(x)| > K.$$

Nii on näiteks funktsioon $y = x^2$ vahemikus $0 \leqslant x < +\infty$ kasvav ja tõkestamatu, sest

$$\lim_{x \to \infty} x^2 = +\infty,$$

kuid näiteks funktsioon $y = \frac{1}{x^2}$ on samas vahemikus kahanev ja tõkestatud, sest tema väärtused ei saa x kasvamisel väiksemaks kui null, mis on ühtlasi selle funktsiooni piirväärtuseks, kui $x \to \infty$, s. o.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Kui argumendi x lähenemisel a-le (või ∞-le) funktsioon $f(x)$ läheneb lõpmatusele, siis on funktsioon lõpmata kasvavaks suuruseks, ja kui funktsioon $f(x)$ läheneb nullile, siis on funktsioon lõpmata kahanevaks suuruseks. Kui funktsioon $f(x)$ on lõpmata kasvav suurus, siis on tema pöördväärtus lõpmata kahanev suurus.

Toimides analoogiliselt eelmises paragrahvis antud tõestusega, saame näidata, et kõik piirväärtuse põhiteoreemid, mis kehtivad arvjärjendite puhul, jäävad püsima ka funktsioonide puhul. Nimelt funktsioonide $f_1(x)$ ja $f_2(x)$ summa (vahe), korrutise või jagatise piirväärtus on võrdne vastavalt nende funktsioonide piirväärtuste summaga (vahega), korrutisega või jagatisega, s. o. kui

$$\lim_{x \to a} f_1(x) = A_1, \quad \lim_{x \to a} f_2(x) = A_2,$$

siis

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim_{x \to a} f_1(x) \pm \lim_{x \to a} f_2(x) = A_1 \pm A_2,$$

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{x \to a} f_1(x) \cdot \lim_{x \to a} f_2(x) = A_1 \cdot A_2,$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x \to a} f_2(x)} = \frac{A_1}{A_2},$$

kusjuures kahel esimesel juhul funktsioonide arv ei pruugi olla piiratud ainult kahega ning viimasel juhul $A_2 \neq 0$.

Et konstantse funktsiooni $f(x) = c$ puhul argumendi x muutumisel konstantne suurus c ei muutu, siis seega on konstantse funktsiooni piirväärtuseks konstantne suurus ise, s. o.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} c = c,$$

ning konstantse teguriga funktsiooni $c \cdot f(x)$ piirväärtus on võrdne konstantse teguri c ja funktsiooni $f(x)$ piirväärtuse korrutisega, s. o.

$$\lim_{x \to a} [c \cdot f(x)] = \lim_{x \to a} c \cdot \lim_{x \to a} f(x) = c \cdot \lim_{x \to a} f(x).$$

Funktsiooni $f(x)$ positiivse täisarvulise astendaja n puhul

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} f(x) \ldots \lim_{x \to a} f(x) = [\lim_{x \to a} f(x)]^n.$$

Seega näiteks astmefunktsiooni $f(x) = x^n$ puhul võime kirjutada, et

$$\lim_{x \to a} x^n = (\lim_{x \to a} x)^n = a^n$$

ja samuti analoogia põhjal logaritmfunktsiooni $f(x) = \ln x$ puhul

$$\lim_{x \to a} \ln x = \ln (\lim_{x \to a} x) = \ln a.$$

Analoogiliselt § 15 toodud vahepealsete väärtuste teoreemi tõestusega saame näidata, et üht ja sama piirväärtust omavate funktsioonide vahepealse funktsiooni suhtes kehtib sama teoreem, s. o. kui funktsiooni $f(x)$ väärtused asetsevad kahe teise funktsiooni $\varphi(x)$ ja $\psi(x)$ vastavate väärtuste vahel ning seejuures $x \to a$ puhul funktsioonid $\varphi(x)$ ja $\psi(x)$ lähenevad ühele ja samale piirväärtusele A, s. o. kui

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = \lim_{x \to a} \psi(x) = A,$$

siis $x \to a$ puhul funktsioon $f(x)$ omab sama piirväärtust A, s. o.

$$\lim_{x \to a} f(x) = A,$$

kusjuures a võib olla ka lõpmatus (∞).

§ 20. Piirväärtuse näiteid. 1) Võtame ratsionaalse murdfunktsiooni

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4}$$

ja uurime, missugune on selle funktsiooni piirväärtus, kui $x \to 2$.

Kui asendaksime otseselt x kahega, siis funktsiooni väärtus $x = 2$ puhul avalduks kujul

$$f(2) = \frac{2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 - 2}{2^2 - 4} = \frac{0}{0}.$$

Niisugusel avaldisel pole mõtet ning seega funktsioon $f(x)$ ei ole punktis $x=2$ määratud. Seepärast nimetame kuju $\frac{0}{0}$ määramata kujuks.

Et leida selle funktsiooni piirväärtust, kui $x \to 2$, selleks lahutame funktsiooni lugeja ja nimetaja teguriteks ja taandame ühise teguriga, s. o.

$$\frac{2x^2-3x-2}{x^2-4}=\frac{(x-2)(2x+1)}{(x-2)(x+2)}=\frac{2x+1}{x+2}.$$

Siin võime murdu taandada ühise teguriga $x-2$, sest piirprotsessis argumendi x lähenemisel 2-le on x ikka 2-st erinev ja seega ühine tegur $x-2 \neq 0$. Edasi leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x+1}{x+2}.$$

Kui nüüd $x \to 2$, siis selle murru lugeja $2x+1 \to 5$ ja murru nimetaja $x+2 \to 4$ ning murd ise läheneb väärtusele $\frac{5}{4}$, s. o.

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x+1}{x+2}=\frac{5}{4},$$

mis on ühtlasi antud funktsiooni piirväärtuseks, kui $x \to 2$, s. o.

$$\lim_{x \to 2} f(x)=\lim_{x \to 2} \frac{2x^2-3x-2}{x^2-4}=\frac{5}{4}.$$

Määrame käesoleva näite puhul meile funktsiooni piirväärtuse definitsioonist teada oleva arvu δ, mis sõltub ε-st. Kui ε on kuitahes väike etteantud positiivne arv, siis piirväärtuse definitsooni põhjal

$$\left|\frac{2x^2-3x-2}{x^2-4}-\frac{5}{4}\right|=\left|\frac{3(x-2)}{4(x+2)}\right|<\varepsilon,$$

kui $|x-2|<\delta$. Et siin

$$3|x-2|<4\varepsilon|x+2|=4\varepsilon|x-2+4|\leqslant 4\varepsilon|x-2|+16\varepsilon,$$

millest saame

$$|x-2|<\frac{16\varepsilon}{3-4\varepsilon},$$

siis seega

$$\delta=\frac{16\varepsilon}{3-4\varepsilon}.$$

Eespool esitatud arvutuskäigust nähtub, et käsitletava funktsiooni puhul $f(2)$ ei ole määratud, teda pole olemas, kuid $\lim_{x \to 2} f(x)$ on olemas ja nimelt võrdne $\frac{5}{4}$-ga.

Punkti $x = 2$ ümbruses aga on see funktsioon määratud, sest kui näiteks $x = 1{,}9$ või $x = 2{,}1$, siis on funktsiooni väärtused neis punktides

$$f(1{,}9) = \frac{2 \cdot 1{,}9^2 - 3 \cdot 1{,}9 - 2}{1{,}9^2 - 4} = \frac{16}{13},$$

$$f(2{,}1) = \frac{2 \cdot 2{,}1^2 - 3 \cdot 2{,}1 - 2}{2{,}1^2 - 4} = \frac{52}{41},$$

mis on ühtlasi funktsiooni piirväärtusteks, kui $x \to 1{,}9$ ja $x \to 2{,}1$, s. o.

$$\lim_{x \to 1{,}9} f(x) = \lim_{x \to 1{,}9} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4} = \frac{16}{13},$$

$$\lim_{x \to 2{,}1} f(x) = \lim_{x \to 2{,}1} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4} = \frac{52}{41}.$$

Seega viimastel juhtudel on funktsiooni piirväärtused võrdsed funktsiooni väärtustega, s. o.

$$\lim_{x \to 1{,}9} f(x) = f(1{,}9), \quad \lim_{x \to 2{,}1} f(x) = f(2{,}1).$$

Tähendab, funktsiooni piirväärtuse $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ määramiseks pole oluline, kas funktsioon $f(x)$ on punktis $x = a$ määratud või mitte. Ta peab ainult olema määratud punkti $x = a$ ümbruses. Sümbolid $f(a)$ ja $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ tähendavad sisult kahte erinevat mõistet. Sümbol $f(a)$ seab küsimuse: missugune on funktsiooni $f(x)$ väärtus, kui $x = a$? Selle sümboli tähendus ei sõltu sellest, kuidas funktsioon $f(x)$ muutub või käitub punkti $x = a$ ümbruses, vaid ainult sellest, missugune on tema väärtus punktis $x = a$ eneses. Sümbol $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ seab küsimuse: millele läheneb $f(x)$, kui $x \to a$? Selle sümboli tähendus ei sõltu jälle sellest, missugune on funktsiooni $f(x)$ väärtus punktis $x = a$, vaid ainult sellest, missugune on tema muutumiskäik punkti $x = a$ ümbruses, kui $x \to a$.

Funktsiooni $f(x)$ piirväärtuse leidmisel võib argument x läheneda punktile $x = a$ nii vasakult kui ka paremalt poolt või ainult vasakult poolt, mille puhul saame funktsiooni *vasakpoolse piirväärtuse*, või ainult paremalt poolt, mille puhul saame funktsiooni *parempoolse piirväärtuse*. Funktsiooni $f(x)$ vasakpoolset piirväärtust, kus x läheneb kasvavalt a-le, märgitakse järgmiselt:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a - 0)$$

ja parempoolset piirväärtust, kus x läheneb kahanevalt a-le,

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a+0),$$

kusjuures $f(a-0)$ ja $f(a+0)$ ei pruugi olla omavahel võrdsed ega ka võrdsed funktsiooni väärtusega $f(a)$.

Funktsiooni hariliku (kahepoolse) piirväärtuse olemasoluks peab vasakpoolne piirväärtus olema võrdne parempoolse piirväärtusega, s. o.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a-0) = f(a+0) = A.$$

Kui aga

$$f(a-0) = f(a+0) = f(a),$$

siis on funktsiooni piirväärtus võrdne funktsiooni väärtusega punktis $x = a$, s. o.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

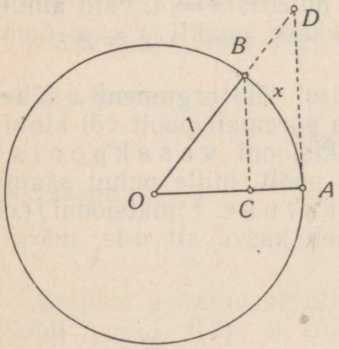
2) Võtame siinuse ja vastava kaare suhet kujutava funktsiooni

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

ja arvutame tema piirväärtuse, kui $x \to 0$. Kui paigutaksime otseselt x asemele 0, siis funktsiooni väärtus omaks määramata kuju

$$f(0) = \frac{0}{0}.$$

Funktsiooni $\frac{\sin x}{x}$ piirväärtuse leidmiseks, kui $x \to 0$, kasutame ühikringi. Võtame selles ringis kaare $AB = x$ nõnda, et $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (joon. 25). Siis



Joon. 25.

$$CB < AB < AD$$

ehk

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Jagades selle kahekordse võrratuse osad $\sin x$-ga (kui positiivse suurusega), saame

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

mille pöördväärtuste puhul

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Et siin $\lim_{x\to 0} 1 = 1$ ja $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$, siis on ka (§ 15 teoreemi põhjal)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Me eeldasime siin, et x läheneb nullile, omades positiivseid väärtusi. Sama tulemuse saame, kui eeldame, et x läheneb nullile, omades negatiivseid väärtusi, sest $\sin(-x) = -\sin x$ ja seega

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x},$$

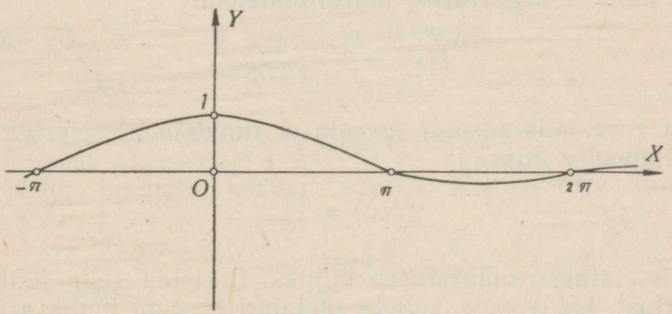
mis kujutab paarisfunktsiooni. Seega

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\sin x}{x}.$$

Selle funktsiooni piirväärtuse, kui $x \to 0$, võime leida ka graafilisel teel, kui anname x-le rea absoluutselt kahanevaid väärtusi. Geomeetriliselt kujutab funktsiooni piirväärtus punkti, millele läheneb paremalt ja vasakult poolt funktsiooni graafik. Kui $x \to 0$, siis peab funktsiooni piirväärtust kujutav punkt asetsema Y-teljel. Selle piirväärtuse leiame, kui vaatame, missugusele punktile Y-teljel läheneb ühelt ja teiselt poolt kõver, mida määrab see funktsioon. Funktsiooni väärtuste tabel on:

$x =$	...	$\pm 2\pi$	$\pm \frac{3\pi}{2}$	$\pm \pi$	$\pm \frac{\pi}{2}$	$\pm \frac{\pi}{3}$	$\pm \frac{\pi}{4}$	$\pm \frac{\pi}{10}$	...
$y =$	...	0	$-0{,}21$	0	0,64	0,83	0,90	0,99	...

Sellest väärtuste tabelist näeme, et kui x kahanevalt või kasvavalt läheneb nullile, siis $y \to 1$. Seega lähenevad kõvera punktid ühelt ja teiselt poolt Y-telge piiramatult punktile $y = 1$ (joon. 26), mis on funktsiooni $\frac{\sin x}{x}$ piirväärtuseks, kui $x \to 0$.



Joon. 26.

§ 21. Lõpmata kasvavate ja lõpmata kahanevate suuruste järk. 1) Kui murdfunktsioonis

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

argumendi x piiramatul kasvamisel funktsioonid $\varphi(x)$ ja $\psi(x)$ piiramatult kasvavad ja seejuures kasvab piiramatult ka murdfunktsioon ise, s. o.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \infty,$$

siis ütleme, et $\varphi(x)$ on kõrgemat järku lõpmata kasvav suurus kui $\psi(x)$. Kui aga ümberpöördult funktsioonide $\varphi(x)$ ja $\psi(x)$ piiramatul kasvamisel murdfunktsioon piiramatult kahaneb, s. o.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0,$$

siis ütleme, et $\varphi(x)$ on madalamat järku lõpmata kasvav suurus kui $\psi(x)$. Kui funktsioonide $\varphi(x)$ ja $\psi(x)$ piiramatul kasvamisel murdfunktsioon läheneb nullist erinevale lõplikule väärtusele A, s. o.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = A,$$

siis ütleme, et $\varphi(x)$ ja $\psi(x)$ on üht ja sama järku lõpmata kasvavad suurused. Kui $\varphi(x)$ ja $\psi(x)$ on üht ja sama järku lõpmata kasvavad suurused ning seejuures $A = 1$, s. o.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1 \text{ või } \lim_{x \to \infty} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = 1,$$

siis ütleme, et $\varphi(x)$ ja $\psi(x)$ on ekvivalentsed lõpmata kasvavad suurused.

Kui näiteks algebralise murdfunktsiooni

$$f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 4}$$

puhul $x \to \infty$, siis otsesel asendusel funktsiooni väärtus omandaks sümboolse kuju

$$f(\infty) = \frac{\infty}{\infty},$$

mida nimetatakse määramata kujuks. Et leida selle funktsiooni piirväärtust, kui $x \to \infty$, selleks oletame, et x on lõplik arv, mille puhul võime teisendada funktsiooni järgmiselt:

$$\frac{2x^2+5x-3}{x^2+4}=2+\frac{5x-11}{x^2+4}=2+\frac{5-\frac{11}{x}}{x+\frac{4}{x}}.$$

Kui nüüd $x\to\infty$, siis $5-\frac{11}{x}\to 5$ ja $x+\frac{4}{x}\to\infty$ ning seega

$$\frac{5-\frac{11}{x}}{x+\frac{4}{x}}\to 0.$$

Tähendab,

$$\left|\frac{2x^2+5x-3}{x^2+4}-2\right|=\left|\frac{5-\frac{11}{x}}{x+\frac{4}{x}}\right|<\varepsilon,$$

kus ε on kuitahes väike etteantud positiivne arv. Seega funktsiooni piirväärtuse definitsiooni põhjal

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x-3}{x^2+4}=2,$$

mis on antud murdfunktsiooni piirväärtuseks, kui $x\to\infty$.

Sama resultaadi saame, kui teisendame antud murdfunktsiooni järgmiselt:

$$\frac{2x^2+5x-3}{x^2+4}=\frac{2+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{4}{x^2}},$$

kus nüüd piirväärtuse põhiteoreemide järgi

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x-3}{x^2+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{4}{x^2}}=2.$$

Seega on siin $x\to\infty$ puhul funktsioonid

$$\varphi(x)=2x^2+5x-3,\quad \psi(x)=x^2+4$$

üht ja sama järku lõpmata kasvavad suurused.

Funktsioon $\varphi(x)=2x^2+5x-3$ on aga $x\to\infty$ puhul madalamat järku lõpmata kasvav suurus kui näiteks funktsioon $\psi(x)=x^3$, sest

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x-3}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)=0.$$

Siin võime ütelda, et $x^3\to\infty$ «kiiremini» kui $2x^2+5x-3$.

2) Analoogiliselt eelnevaga, kui murdfunktsioonis

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

$x \to a$ (erijuhul $x \to 0$) puhul funktsioonid $\varphi(x)$ ja $\psi(x)$ piiramatult kahanevad ja seejuures kahaneb piiramatult ka murdfunktsioon ise, s. o.

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0,$$

siis ütleme, et $\varphi(x)$ on kõrgemat järku lõpmata kahanev suurus kui $\psi(x)$. Kui aga $x \to a$ puhul funktsioonide $\varphi(x)$ ja $\psi(x)$ piiramatul kahanemisel murdfunktsioon piiramatult kasvab, s. o.

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \infty,$$

siis ütleme, et $\varphi(x)$ on madalamat järku lõpmata kahanev suurus kui $\psi(x)$. Kui $x \to a$ puhul funktsioonide $\varphi(x)$ ja $\psi(x)$ piiramatul kahanemisel murdfunktsioon läheneb nullist erinevale lõplikule väärtusele A, s. o.

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = A,$$

siis ütleme, et $\varphi(x)$ ja $\psi(x)$ on üht ja sama järku lõpmata kahanevad suurused. Kui seejuures

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1 \quad \text{või} \quad \lim_{x \to a} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = 1,$$

siis on $\varphi(x)$ ja $\psi(x)$ ekvivalentsed lõpmata kahanevad suurused.

Kui $x \to a$ puhul murdfunktsioonis $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ on $\varphi(x)$ ja $\psi(x)$ ekvivalentsed lõpmata kahanevad suurused, siis nende vahe $\varphi(x) - \psi(x)$ on kõrgemat järku lõpmata kahanev suurus kui $\varphi(x)$ ja $\psi(x)$, sest

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x) - \psi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \to a} \left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} - 1 \right) = 0$$

ja samuti

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x) - \psi(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \left(1 - \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \right) = 0.$$

Eespool nägime, et

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

millest nähtub, et $x \to 0$ puhul on $\sin x$ ja x ekvivalentsed lõp-

mata kahanevad suurused. Näiteks $1-\cos x$ aga on $x\to 0$ puhul kõrgemat järku lõpmata kahanev suurus kui x, sest

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}=1\cdot 0=0.$$

Siin võime öelda, et $1-\cos x$ läheneb nullile «kiiremini» kui x.

Irratsionaalne murdfunktsioon

$$f(x)=\frac{\sqrt{2+x}-2}{\sqrt{7+x}-3}$$

pole määratud, kui $x=2$, sest $x=2$ puhul nii nimetaja kui ka lugeja muutuvad nulliks. Selle funktsiooni piirväärtus, kui $x\to 2$, on

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+x}-2}{\sqrt{7+x}-3}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{2+x}-2)(\sqrt{2+x}+2)(\sqrt{7+x}+3)}{(\sqrt{7+x}-3)(\sqrt{7+x}+3)(\sqrt{2+x}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{7+x}+3}{\sqrt{2+x}+2}=\frac{3}{2},$$

mis näitab, et $x\to 2$ puhul on antud murdfunktsiooni lugeja $\sqrt{2+x}-2$ ja nimetaja $\sqrt{7+x}-3$ üht ja sama järku lõpmata kahanevad suurused.

§ 22. Arv *e*. 1) Arvuga e tähistatakse funktsiooni

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

piirväärtust, kui x piiramatult kasvab, s. o.

$$e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Selle funktsiooni piirväärtuse leidmiseks oletame kõigepealt, et x on lõplik positiivne täisarv n. Siis Newtoni * binoomi arendirea järgi

---

* Isaac Newton (1647—1727) — inglise astronoom, füüsik ja matemaatik. Oma töödes tõi ta esile diferentsiaal- ja integraalarvutuse algmed ning mehaanika põhialused ja gravitatsiooniseaduse ühes rakenduslike järeldustega taevakehade liikumise seletamiseks. Newtoni tööd andsid hoobi keskaegsele skolastikale ja soodustasid teadusliku materialistliku maailmavaate arenemist.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} +$$
$$+ \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} +$$
$$+ \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} =$$
$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) +$$
$$+ \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) +$$
$$+ \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Viimases arendireas on kõik liikmed positiivsed ja seega selle rea liikmete summa on suurem kui 2, s. o.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2, \text{ kui } n \geqslant 2.$$

Arendireas arvu n piiramatul kasvamisel iga liige, alates teisest liikmest, saab ikka suuremaks ja suuremaks, sest tegurid

$$1-\frac{1}{n},\quad 1-\frac{2}{n},\quad 1-\frac{3}{n},\quad \ldots$$

suurenevad. Peale selle tuleb juurde veel uusi positiivseid liikmeid. Järelikult arvu n kasvamisel binoomi aste $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ kasvab, kuid ta on tõkestatud. Selle arendirea liikmete summa on väiksem kui 3, sest positiivse täisarvulise n puhul tegurid

$$1-\frac{1}{n},\quad 1-\frac{2}{n},\quad 1-\frac{3}{n},\quad \ldots,\quad 1-\frac{n-1}{n}$$

on väiksemad kui 1 ja seega

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} <$$
$$< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} =$$
$$= 2 + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}},$$

sest

$$\frac{1}{3!} < \frac{1}{2^2},\quad \frac{1}{4!} < \frac{1}{2^3},\quad \ldots,\quad \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Seega $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$, olgu n kuitahes suur positiivne täisarv.

Et $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, kui n väärtusteks on 1, 2, 3, ..., omandab väärtused, mis moodustavad kasvava arvjärjendi tõkkega 3, siis on tal olemas piirväärtus, kui $n \to \infty$, mis asetseb 2 ja 3 vahel, s o.

$$2 < \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Selle piirväärtuse leidmiseks kasutame binoomi arendirida

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+$$
$$+\ \ldots\ +\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ \ldots\ \left(1-\frac{k-1}{n}\right)+$$
$$+\ \ldots\ +\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ \ldots\ \left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

milles märgime

$$s_k = 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+$$
$$+\ \ldots\ +\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ \ldots\ \left(1-\frac{k-1}{n}\right) \qquad (1)$$

ja

$$s_{n-k} = \frac{1}{(k+1)!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ \ldots\ \left(1-\frac{k}{n}\right)+$$
$$+\ \ldots\ +\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ \ldots\ \left(1-\frac{n-1}{n}\right), \qquad (2)$$

kus $k < n$.

Kui laseme n piiramatult kasvada, kuid k jätame püsivaks, siis võrduse (1) parempoolses osas esinevate liikmete tegurid

$$1-\frac{1}{n},\ \ 1-\frac{2}{n},\ \ \ldots\ ,\ \ 1-\frac{k-1}{n}$$

lähenevad ühele ja see rida ise läheneb piirväärtusele

$$2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ \ldots\ +\frac{1}{k!},$$

s. o.

$$\lim_{n\to\infty} s_k = 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ \ldots\ +\frac{1}{k!}.$$

Võrduses (2) toimime nii, et loeme selle rea kõikides liikmetes tegurid

$$1-\frac{1}{n},\ \ 1-\frac{2}{n},\ \ 1-\frac{3}{n},\ \ldots$$

võrdseks ühega. Siis saame uue rea

$$\frac{1}{(k+1)!}+\frac{1}{(k+2)!}+\frac{1}{(k+3)!}+\ldots,$$

mille liikmed on suuremad kui vastavad liikmed reas (2). Et

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)}<\frac{1}{(k+1)^2},\quad \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}<\frac{1}{(k+1)^3},\ \ldots,$$

siis

$$\frac{1}{(k+1)!}+\frac{1}{(k+2)!}+\frac{1}{(k+3)!}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{k!}\left[\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}+\ldots\right]<$$

$$<\frac{1}{k!}\left[\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{(k+1)^3}+\ldots\right]=$$

$$=\frac{1}{k!}\cdot\frac{\frac{1}{k+1}}{1-\frac{1}{k+1}}=\frac{1}{k!\,k},$$

millest järeldub, et on olemas $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n-k}$, ja see piirväärtus on väiksem kui $\frac{1}{k!\,k}$. Tähendab,

$$\lim_{n\to\infty} s_k<\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty} s_k+\lim_{n\to\infty} s_{n-k}<\lim_{n\to\infty} s_k+\frac{1}{k!\,k},\qquad(3)$$

kus

$$\lim_{n\to\infty} s_k=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{k!}.$$

Kui võrratuses (3) lugeda, et $k\to\infty$, siis

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k!\,k}=0$$

ja

$$\lim_{k\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} s_k\right)=\lim_{k\to\infty}\left(2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{k!}\right)+$$

$$=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots,$$

mis ütleb, et võrratuse (3) mõlemad äärmised osad lähenevad ühisele piirväärtusele

$$2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots$$

Siis ka (§ 15 teoreemi põhjal)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots,$$

mida tähistatakse tähega e, s o.

$$e = 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$$

Arvu e väärtust 0,0001 täpsusega arvutades leiaksime, et see on

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}7183.$$

Arvu e väärtus kaheteistkümne kümnendkohaga on

$$e = 2{,}718281828459.$$

Kui nüüd funktsioonis

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

argument x kasvavalt omandab kõik positiivsed ratsionaalsed ja irratsionaalsed väärtused, siis x pideval piiramatul kasvamisel on samuti

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e = 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots,$$

sest kui x on mistahes positiivne reaalarv ja n temast väiksem talle lähim täisarv, siis kehtib ikka võrratus

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

ehk

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} : \left(1+\frac{1}{n+1}\right) < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right),$$

kusjuures x piiramatul kasvamisel kasvab ka täisarv n piiramatult. Et siin

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1,$$

siis seega

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

2) Matemaatilises analüüsis võetakse arv e logaritmide aluseks, kusjuures logaritme alusel e nimetatakse *loomulikeks logaritmideks* ehk *naturaallogaritmideks* (ka hüperboolseteks ehk Napieri* logaritmideks) ja tähistatakse sümboliga «ln», kusjuures kümnendlogaritme (harilikke ehk Briggsi** logaritme) tähistatakse sümboliga «log» ning logaritme mistahes alusel a sümboliga «$\log_a$».

Võtame meelevaldse arvu x naturaallogaritmi ja sama arvu logaritmi alusel a, tähistades

$$\ln x = y, \quad \log_a x = z,$$

milledest

$$x = e^y = e^{\ln x}, \quad x = a^z = a^{\log_a x}$$

ja seega

$$e^{\ln x} = a^{\log_a x}.$$

Võttes viimase võrduse mõlema poole naturaallogaritmi, saame

$$\ln x \cdot \ln e = \log_a x \cdot \ln a,$$

millest

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a},$$

sest $\ln e = 1$.

Kui logaritmide alus $a = 10$, siis

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \frac{\ln x}{2{,}3026} = 0{,}4343 \cdot \ln x,$$

mille abil saame arvu x naturaallogaritmi kaudu leida sama arvu kümnendlogaritmi väärtuse, kusjuures tegurit 0,4343 nimetatakse kümnendlogaritmide *mooduliks*.

Samuti ümberpöördult, kui on antud arvu x kümnendlogaritm, saame leida viimase kaudu arvu x naturaallogaritmi väärtuse, s. o.

$$\ln x = 2{,}3026 \cdot \log x,$$

kus 2,3026 on nüüd naturaallogaritmide mooduliks. Seega

$$\ln x = 2{,}3026 \cdot \log x,$$
$$\log x = 0{,}4343 \cdot \ln x.$$

---

* John Napier (Neper) (1550—1617) käsitles esimesena logaritme ja määras kindlaks nende tähtsamad omadused. Oma uurimiste tulemused avaldas teoses «Mirifici logarithmorum canonis descriptio ejusque usus in utraque trigonometria».

** Henry Briggs (1556—1630) võttis esimesena tarvitusele kümnendlogaritmid ja koostas oma teoses «Arithmetica logarithmica» 14-kohalised logaritmide tabelid.

§ 23. Hüperboolsed funktsioonid ja areafunktsioonid. 1) Et eksponentfunktsioonid e^x ja e^{-x}, kus e on naturaallogaritmide alus, esinevad matemaatilise analüüsi rakendustes tihti kombineeritult kujudes $\frac{1}{2}(e^x \mp e^{-x})$, siis vaadeldakse sääraseid kujusid eraldi kui erifunktsioone, ja nimelt

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

mida nimetatakse hüperboolseteks funktsioonideks* ja tähistatakse järgmiselt:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

kus sh tähendab hüperboolset siinust (*sinus hyperbolicus*), ch — hüperboolset koosiinust (*cosinus hyperbolicus*), th — hüperboolset tangensit (*tangens hyperbolica*) ja cth — hüperboolset kootangensit (*cotangens hyperbolica*).**

Hüperboolsetest funktsioonidest ch x on paarisfunktsioon, sest tema väärtus ei muutu, kui x asendada $-x$-ga, s. o.

$$\operatorname{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x,$$

millest nähtub ühtlasi, et ch x jääb alati positiivseks ja suuremaks kui 1, kui $x \lesseqgtr 0$, ning omab $x = 0$ puhul minimaalset väärtust $\operatorname{ch} 0 = 1$. Seega on $\operatorname{ch} x \geqslant 1$. Teised hüperboolsed funktsioonid on paaritud funktsioonid, sest neis x asendamisel $-x$-ga muutub funktsiooni märk, s. o.

$$\operatorname{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\operatorname{sh} x,$$

$$\operatorname{th}(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = -\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -\operatorname{th} x,$$

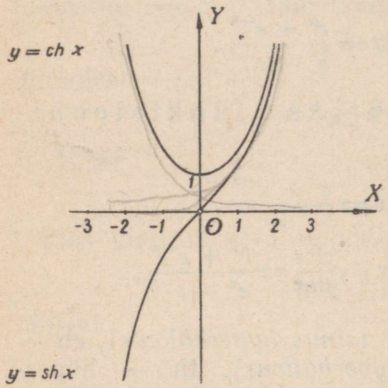
$$\operatorname{cth}(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{e^{-x} - e^x} = -\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = -\operatorname{cth} x,$$

---

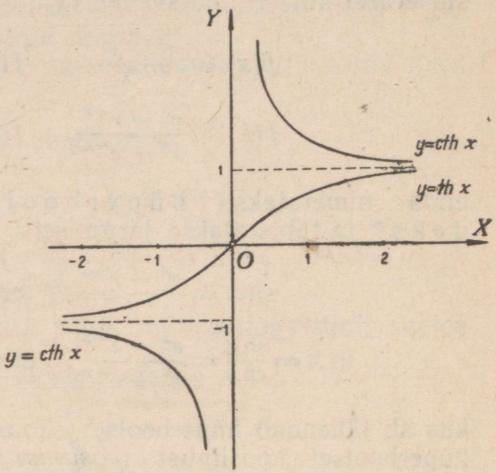
* Nagu pärastpoole (§ 85) näeme, saab hüperboolseid funktsioone ühikhüperbooli $x^2 - y^2 = 1$ puhul vaadelda samaselt nagu trigonomeetrilisi funktsioone ühikringi $x^2 + y^2 = 1$ puhul.

** Hüperboolseid funktsioone tähistatakse ka järgmiselt: sinh x, cosh x, tgh x ja ctgh x või gooti tähtedega.

mis võivad seega olla nii positiivsed kui ka negatiivsed. Tähendab, kõver, mida esitab funktsioon $y = \operatorname{ch} x$, on sümmeetriline Y-telje suhtes ja kõverad, mida esitavad funktsioonid $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{th} x$ ja $y = \operatorname{cth} x$, on sümmeetrilised nullpunkti suhtes (joon. 27 ja 28), kusjuures hüperboolne koosinus esitab graafi-



Joon. 27.



Joon. 28.

liselt nn. a h e l j o o n t. Nagu joonistelt nähtub, on hüperboolsete funktsioonide muutumise vahemikud järgmised:

$$\begin{aligned} -\infty &< \operatorname{sh} x < +\infty, \\ 1 &\leqslant \operatorname{ch} x < +\infty, \\ -1 &< \operatorname{th} x < 1, \\ -\infty &< \operatorname{cth} x < -1 \\ 1 &< \operatorname{cth} x < +\infty \end{aligned}\Big\}.$$

Liites teineteisega ja lahutades teineteisest

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{ja} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

saame $\operatorname{sh} x$ ja $\operatorname{ch} x$ suhtes järgmised funktsionaalsed seosed:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x &= e^x, \\ \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x &= e^{-x}, \end{aligned}$$

millede korrutist

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

nimetatakse hüperboolsete funktsioonide põhivalemiks. Korrutades teineteisega

$$\text{th}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{ja} \quad \text{cth}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

saame teise põhivalemi

$$\text{th}\, x \cdot \text{cth}\, x = 1.$$

Kahekordse argumendi hüperboolne siinus

$$\text{sh}\, 2x = 2\, \text{sh}\, x \cdot \text{ch}\, x,$$

sest

$$2 \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2},$$

ning kahekordse argumendi hüperboolne koosinus

$$\text{ch}\, 2x = \text{sh}^2 x + \text{ch}^2 x,$$

sest

$$\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}.$$

Et hüperboolsete funktsioonide esimese põhivalemi järgi

$$\text{sh}\, x = \sqrt{\text{ch}^2 x - 1}, \qquad \text{ch}\, x = \sqrt{\text{sh}^2 x + 1},$$

siis

$$\text{th}\, x = \frac{\text{sh}\, x}{\sqrt{\text{sh}^2 x + 1}} = \frac{\sqrt{\text{ch}^2 x - 1}}{\text{ch}\, x},$$

millest

$$\text{sh}\, x = \frac{\text{th}\, x}{\sqrt{1 - \text{th}^2 x}}, \qquad \text{ch}\, x = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{th}^2 x}}.$$

2) Hüperboolse siinuse

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

ilmutamata kuju on

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0,$$

mida (kui ruutvõrrandit) e^x suhtes lahendades saame

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1},$$

kus ruutjuur tuleb võtta ainult plussmärgiga, sest e^x on alati positiivne. Võttes viimase võrduse mõlema poole naturaallogaritmi (arvestades, et $\ln e = 1$), leiame, et

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}),$$

kus nüüd muutujate tähiseid ümber vahetades saame hüperboolse siinuse pöördfunktsiooni

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Saadud funktsiooni nimetame hüperboolseks areasiinuseks* ja tähistame

$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}),$$

mis on määratud vahemikus $-\infty < x < +\infty$.

Hüperboolse koosinuse

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

puhul leiame analoogiliselt, et

$$x = \ln(y \pm \sqrt{y^2 - 1}),$$

kus nüüd muutujate tähiseid ümber vahetades saame hüperboolse koosinuse pöördfunktsiooni

$$y = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}),$$

mida nimetame hüperboolseks areakoosinuseks ja tähistame

$$\operatorname{arch} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}),$$

mis on määratud vahemikus $1 \leqslant x < \infty$. Et

$$\ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \ln \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1})}{x + \sqrt{x^2 - 1}} =$$

$$= \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = -\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

siis saame arch x märkida ka järgmiselt:

$$\operatorname{arch} x = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

kus nüüd ruutjuur tuleb võtta ainult plussmärgiga.

Hüperboolse tangensi

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

---

* Area = pindala. Integraalarvutuses (§ 85) ilmneb, et areafunktsioonide puhul on tegemist ühikhüperbooli $x^2 - y^2 = 1$ kaarega piiratud sektori pindalaga.

puhul saame

$$e^{2x} = \frac{1+y}{1-y},$$

millest (logaritmides)

$$x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}.$$

Muutujate tähiseid ümber vahetades saame hüperboolse tangensi pöördfunktsiooni

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x},$$

mida nimetame hüperboolseks areatangensiks ja tähistame

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x},$$

mis on määratud vahemikus $-1 < x < 1$.

Hüperboolse kootangensi

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

puhul

$$e^{2x} = \frac{y+1}{y-1},$$

millest

$$x = \frac{1}{2} \ln \frac{y+1}{y-1},$$

kus nüüd hüperboolse kootangensi pöördfunktsioon on

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1},$$

mida nimetame hüperboolseks areakootangensiks ja tähistame

$$\operatorname{arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1},$$

mis on määratud vahemikes $-\infty < x < -1$ ja $1 < x < \infty$.

Niisiis hüperboolsete funktsioonide pöördfunktsioone

$$\operatorname{arsh} x, \quad \operatorname{arch} x, \quad \operatorname{arth} x, \quad \operatorname{arcth} x$$

nimetame hüperboolseteks areafunktsioonideks ehk lihtsalt areafunktsioonideks.

§ 24. Harjutusülesandeid.

1. Piirväärtuse abil näidata, et perioodiliste kümnendmurdude 0,3333... ja 0,1333... piirväärtused on vastavalt $\frac{1}{3}$ ja $\frac{2}{15}$.

Kirjutada lõpmatud arvjärjendid ja märkida, missugused neist koonduvad ja missugused hajuvad:

2. $x_n = \frac{n}{n+2}$

3. $x_n = -\frac{n+2}{n}$

4. $x_n = \frac{2n+3}{n}$

5. $x_n = (-1)^n \frac{n}{n-1}$

6. $x_n = n + (-1)^n$

7. $x_n = \frac{n + (-1)^n}{n}$

Leida funktsioonide piirväärtused:

8. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2}$

9. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 7x + 10}$

10. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x(x+1)}{(x+2)(x+3)}$

11. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$

12. $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$

13. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$

14. $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$

15. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n^2}$

16. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{2x}$

17. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$

18. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin x}$

19. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$

20. $\lim\limits_{x \to \alpha} \frac{\sin^2 x - \sin^2 \alpha}{x^2 - \alpha^2}$

21. $\lim\limits_{x \to \alpha} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \alpha}{x - \alpha}$

22. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos x}}$

23. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x}$

24. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2}$

25. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$

26. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x$

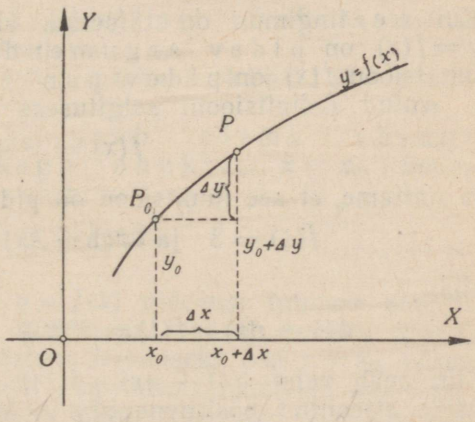
27. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}$

III peatükk

ÜHE MUUTUJA FUNKTSIOONIDE PIDEVUS

§ 25. Funktsiooni pidevuse määramine ja katkevuspunktid.

1) Funktsiooni piirväärtuse mõistega on tihedalt seotud matemaatilise analüüsi teine tähtis mõiste — funktsiooni pidevuse mõiste. Kuigi me kõnelesime juba eespool suuruste pidevast muutumisest, ei selgitanud me seejuures funktsiooni kui muutuva suuruse pidevuse mõistet ega andnud sellele kindlat sisu.



Joon. 29.

Funktsiooni pidevuse mõiste selgitamiseks ja sellele kindla sisu andmiseks võtame ühe muutuja funktsiooni $y = f(x)$, mis on määratud teatavas vahemikus, milles ta kujutab geomeetriliselt mingit kõverat (joon. 29). Võtame selles vahemikus vabalt mingi punkti $x = x_0$, milles funktsioon omab kindlat väärtust $f(x_0)$. Fikseeritud punkti $x = x_0$ ümbruses võtame teise punkti $x = x_0 + \Delta x$, kus Δx all mõistame positiivset või negatiivset väikest arvu, mida nimetatakse *argumendi kasvuks*. Sellele x väärtusele $x_0 + \Delta x$ vastab funktsiooni väärtus $f(x_0 + \Delta x)$, kusjuures funktsiooni väärtuste vahet $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ nimetatakse *funktsiooni kasvuks* ja tähistatakse

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

mis võib osutuda kas positiivseks või negatiivseks (või mõnikord ka võrdseks nulliga).

Kui argumendi väärtus x_0 jääb konstantseks suuruseks ja argumendi kasvu Δx hakkame muutma, siis muutub ka funktsiooni kasv Δy, s. o. argumendi kasvu Δx igale väärtusele vastab funktsiooni kasvu Δy mingi kindel väärtus. Kui nüüd argumendi kasv Δx läheneb nullile, s. o. $\Delta x \to 0$, ja seejuures ka funktsiooni kasv $\Delta y \to 0$ ehk $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \to 0$, vaatamata sellele, kas Δx läheneb nullile paremalt või vasakult poolt punkti x_0 või omandab järk-järgult vaheldumisi positiivseid ja negatiivseid absoluutselt kahanevaid väärtusi, siis *andes ette kuitahes väikese positiivse arvu ε, saab määrata teise positiivse arvu δ nõnda,* et võrratus

$$|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

kehtib ikka iga Δx puhul, kui $|\Delta x| < \delta$. See definitsioon ütleb, et

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

ehk

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Kui see tingimus on täidetud, siis öeldakse, et funktsioon $y = f(x)$ on p i d e v a r g u m e n d i v ä ä r t u s e l $x = x_0$ ehk funktsioon $f(x)$ on p i d e v p u n k t i s x_0.

Antud definitsiooni selgituseks võtame näiteks funktsiooni

$$f(x) = x^2 + 2$$

ja näitame, et see funktsioon on pidev punktis $x = 1$. Et siin

$$f(1) = 3 \quad \text{ja} \quad f(1 + \Delta x) = 3 + 2\Delta x + \Delta x^2,$$

siis

$$f(1 + \Delta x) - f(1) = 2\Delta x + \Delta x^2 = (2 + \Delta x)\Delta x.$$

Siin peab vahe $|f(1 + \Delta x) - f(1)|$ olema väiksem kui mingi väike etteantud positiivne arv ε, kui võtame $|\Delta x|$ küllalt väikese. Olgu $|\Delta x| < 1$. Siis $|2 + \Delta x| < 3$ ja järelikult

$$|f(1 + \Delta x) - f(1)| < 3\,|\Delta x|,$$

kui ainult $\Delta x \neq 0$. Seega on kindlasti

$$|f(1 + \Delta x) - f(1)| < \varepsilon,$$

kui võtta veel tingimuseks, et

$$3|\Delta x| < \varepsilon \quad \text{ehk} \quad |\Delta x| < \frac{\varepsilon}{3} = \delta.$$

Kui siin näiteks $|\Delta x| < \frac{1}{30}$, siis

$$|f(1 + \Delta x) - f(1)| < \frac{1}{10};$$

kui $|\Delta x| < \frac{1}{300}$, siis

$$|f(1+\Delta x) - f(1)| < \frac{1}{100}$$

jne., mis näitab, et kui $|\Delta x| < \delta$, siis

$$|f(1+\Delta x) - f(1)| < \varepsilon.$$

Järelikult

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(1+\Delta x) = f(1) = 3$$

ja seega funktsioon $f(x) = x^2 + 2$ on punktis $x = 1$ pidev.

Käsitletust ilmneb, et funktsiooni pidevuse põhiline idee seisab selles, et argumendi väikestele muutustele vastavad alati funktsiooni väikesed muutused ja järelikult argumendi kasvu Δx lähenemisel nullile läheneb nullile ka funktsiooni kasv Δy.

Funktsiooni $f(x)$ pidevuse tunnusest nähtub ühtlasi, et kui funktsioon $f(x)$ on punktis $x = x_0$ pidev, siis peab olema täidetud kolm eritingimust, ja nimelt: funktsioon

a) peab olema määratud nii punktis $x = x_0$ kui ka selle punkti ümbruses,

b) peab omama $x \to x_0$ puhul kindlat piirväärtust ja

c) see piirväärtus peab olema võrdne funktsiooni väärtusega punktis $x = x_0$. Seega funktsiooni pidevust määrav valem

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

hõlmab täielikult funktsiooni $y = f(x)$ pidevuse tunnuse punktis $x = x_0$. Siit järeldub, et kui funktsioon $f(x)$ on punktis $x = x_0$ pidev, siis funktsiooni piirväärtuse leidmiseks, kui $x \to x_0$, võime argumendi väärtuse x_0 otseselt paigutada funktsiooni avaldisse.

Et vaadelda geomeetriliselt funktsiooni $y = f(x)$ pidevust punktis $x = x_0$, selleks avaldame definitsioonis antud võrratuse $|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| < \varepsilon$ teisiti ja nimelt

$$-\varepsilon < f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < \varepsilon,$$

millest

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x_0 + \Delta x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

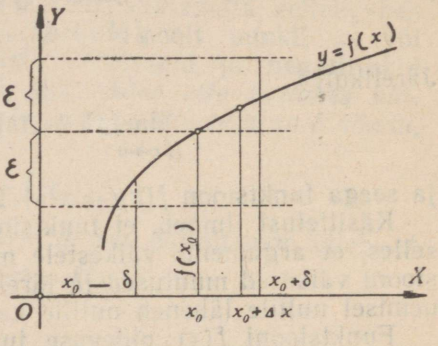
Samuti avaldame võrratuse $|\Delta x| < \delta$ kujul

$$-\delta < \Delta x < \delta,$$

mille osadele x_0 liites saame

$$x_0 - \delta < x_0 + \Delta x < x_0 + \delta.$$

Kui nüüd võtame vahemiku $f(x_0) - \varepsilon$ kuni $f(x_0) + \varepsilon$, kus ε on kuitahes väike etteantud positiivne arv (joon. 30), siis saame alati punkti $x = x_0$ ümbruses määrata vahemiku $x_0 - \delta$ kuni $x_0 + \delta$ niisugusena, et kõvera $y = f(x)$ iga punkti ordinaat $f(x_0 + \Delta x)$ asetseb ikka $f(x_0) - \varepsilon$ ja $f(x_0) + \varepsilon$ vahel, kui selle punkti abstsiss $x_0 + \Delta x$ asetseb vahemikus $x_0 - \delta$ kuni $x_0 + \delta$.



Joon. 30.

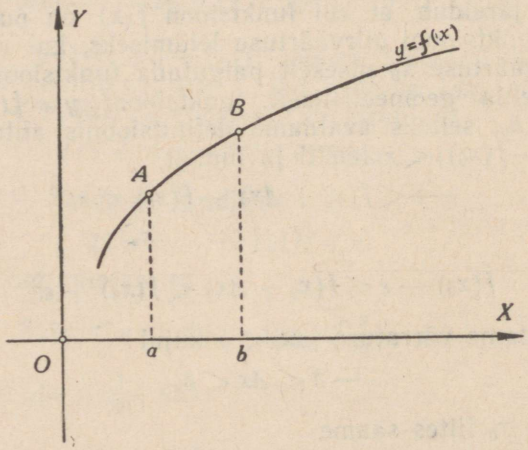
Funktsioon $y = f(x)$ on *pidev mistahes vahemikus a-st b-ni, kui ta on pidev igas punktis, mis asetseb selles vahemikus.* Siin vahemikus a-st b-ni argumendi x iga väärtuse puhul funktsioon $f(x)$ omab vastavat lõplikku väärtust ning argumendi kasvu Δx nullile lähenemisel läheneb ikka nullile ka funktsiooni kasv Δy, s. o.

$$f(x + \Delta x) - f(x) \to 0,$$

mis on samaväärne võrdusega

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x),$$

kus x asetseb vahemikus a-st b-ni, kusjuures vahemik võib olla kinnine, lahtine, poolkinnine või poollahtine. Pidevale funktsioonile vahemikus a-st b-ni vastab pidev kõver punktist A punktini B (joon. 31), mis tähendab, et selles vahemikus kõveral ei ole



Joon. 31.

lünki ega hüppeid. Kui funktsioon $f(x)$ on vahemikus a-st b-ni pidev, siis on ta ühtlasi selle vahemiku igas punktis määratud.

2) Kui funktsioon $f(x)$ on vahemikus a-st b-ni pidev, siis saab selle vahemiku igas punktis kuitahes väikese etteantud positiivse arvu ε puhul määrata teise positiivse arvu δ nõnda, et võrratus

$$|f(x+\Delta x) - f(x)| < \varepsilon$$

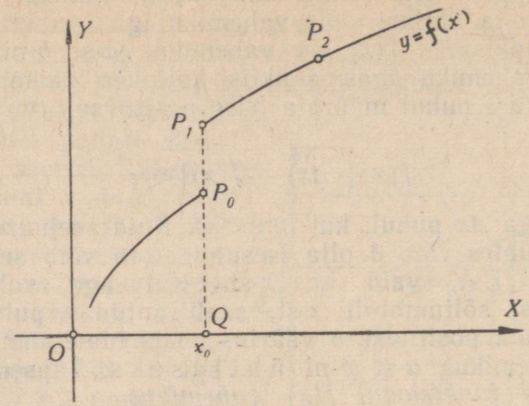
kehtib ikka iga Δx puhul, kui $|\Delta x| < \delta$. Kuid seejuures vahemiku iga punkti suhtes võib δ olla isesugune: ta võib seega sõltuda mitte ainult ε-st, vaid ka x-st. Kui aga vahemiku iga punkti suhtes, sõltumatult x-st, saab antud ε puhul määrata ühe ja sama positiivse δ väärtuse, siis nimetame funktsiooni pidevust vahemikus a-st b-ni ühtlaseks. Täpsemalt öeldes: *me nimetame funktsiooni $f(x)$ vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ ühtlaselt pidevaks, kui selles vahemikus iga $\varepsilon > 0$ puhul esineb ikka niisugune $\delta > 0$, et vahemiku kahe punkti x' ja x'' suhtes võrratuse $|x' - x''| < \delta$ puhul kehtib võrratus $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.* Me nimetame funktsiooni pidevust ühtlaseks sellepärast, et funktsiooni väärtuste $f(x')$ ja $f(x'')$ vahe $|f(x') - f(x'')|$ peab olema väike, sõltumata sellest, kus kohas me vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ võtame punktid x' ja x'', kui nad ainult on teineteisele küllalt lähedal.

Funktsiooni ühtlase pidevuse definitsioonist võime otseselt järeldada, et kui funktsioon $f(x)$ on vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ ühtlaselt pidev, siis on ta pidev ka eespool kirjeldatud harilikus mõttes, sest kui funktsioon $f(x)$ on vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ ühtlaselt pidev ja x_0 on mingi punkt selles vahemikus, siis vahe $|f(x) - f(x_0)|$ saab kuitahes väikeseks, kui vahe $|x - x_0|$ on küllalt väike. See aga tähendab, et funktsioon $f(x)$ on pidev punktis $x = x_0$.

3) Kui vähemalt üks neist eespool (p. 1) esitatud funktsiooni $y = f(x)$ pidevuse määramise kolmest eritingimusest pole täidetud, s. o. kas funktsioon ei ole määratud punktis $x = x_0$ või funktsioon ei oma piirväärtust, kui $x \to x_0$, või funktsioon omab piirväärtust, kui $x \to x_0$, kuid see piirväärtus ei ole võrdne funktsiooni väärtusega punktis $x = x_0$, siis ütleme, et funktsioon $y = f(x)$ on katkev punktis $x = x_0$.

Vaatleme lähemalt funktsiooni $f(x)$ katkevust punktis $x = x_0$ (joon. 32). Argumendi väärtuse $x = x_0$ puhul teeb kõver hüppe punktist P_0 punkti P_1. Argumendi pideval muutumisel tekib funktsiooni käigus katkevus. Argumendi väärtuse $x = x_0$ juures katkeb funktsioon, kuid edasi, näiteks punkti P_2 juures, võib funktsioon olla jälle pidev.

Kui siin argumendi kasv Δx on positiivne, siis $f(x_0 - \Delta x)$ esitab funktsiooni väärtust vasakul pool ja $f(x_0 + \Delta x)$ esitab funktsiooni väärtust paremal pool katkevuspunkti $x = x_0$.



Joon. 32.

Kui x läheneb kasvavalt x_0-le, s. o. x läheneb vasakult poolt x_0-le, siis funktsiooni piirväärtus on

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 - \Delta x) = f(x_0 - 0) = QP_0;$$

kui x läheneb kahanevalt x_0-le, s. o. x läheneb paremalt poolt x_0-le, siis funktsiooni piirväärtus on

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0 + 0) = QP_1.$$

Siin, nagu näeme, on olemas lõplikud piirväärtused $f(x_0 - 0)$ ja $f(x_0 + 0)$, kuid $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$. Kui lõplikud piirväärtused $f(x_0 - 0)$ ja $f(x_0 + 0)$ on olemas ning nad pole võrdsed funktsiooni väärtusega $f(x_0)$, siis nimetatakse punkti x_0 I liiki katkevuspunktiks, kusjuures $f(x_0 - 0)$ ja $f(x_0 + 0)$ võivad olla erinevad või võrdsed. Kui aga vähemalt üht piirväärtustest $f(x_0 - 0)$ või $f(x_0 + 0)$ pole olemas või vähemalt üks neist saab lõpmatuks, siis nimetatakse punkti x_0 II liiki katkevuspunktiks.

Kui punktis $x = x_0$

$$f(x_0 - 0) = f(x_0),$$

siis ütleme, et funktsioon $f(x)$ on vasakpoolselt pidev punktis x_0, ja kui

$$f(x_0 + 0) = f(x_0),$$

siis on ta parempoolselt pidev punktis x_0. Et funktsioon $f(x)$ oleks pidev punktis $x = x_0$, selleks peab funktsiooni väärtus olema võrdne nii vasakpoolse kui ka parempoolse piirväärtusega.

Kui aga

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$$

ja funktsioon $f(x)$ ei ole määratud punktis $x = x_0$, siis on funktsioon muidugi katkev selles punktis. Niisugust katkevust nimetame funktsiooni k õ r v a l d a t a v a k s k a t k e v u s e k s punktis $x = x_0$. Nii on olukord näiteks funktsiooni

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

puhul punktis $x = 0$, milles ta pole määratud, kuid

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{\sin x}{x} = f(0-0) = 1$$

ja

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{\sin x}{x} = f(0+0) = 1.$$

Kui on tegemist funktsiooni $f(x)$ kõrvaldatava katkevusega punktis $x = x_0$, siis me ütleme ka, et katkevuspunkt $x = x_0$ on ühtlasi kõrvaldatava katkevuse punktiks. See tähendab, et leides $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ja lugedes selle piirväärtuse võrdseks funktsiooni väärtusega $f(x_0)$, saame kõrvaldada funktsiooni katkevuse punktis $x = x_0$ ja võime lugeda funktsiooni pidevaks selleks punktis. Seda funktsiooni piirväärtust nimetatakse mõnikord ka funktsiooni «tõeliseks väärtuseks» punktis $x = x_0$. Seega võime funktsiooni

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

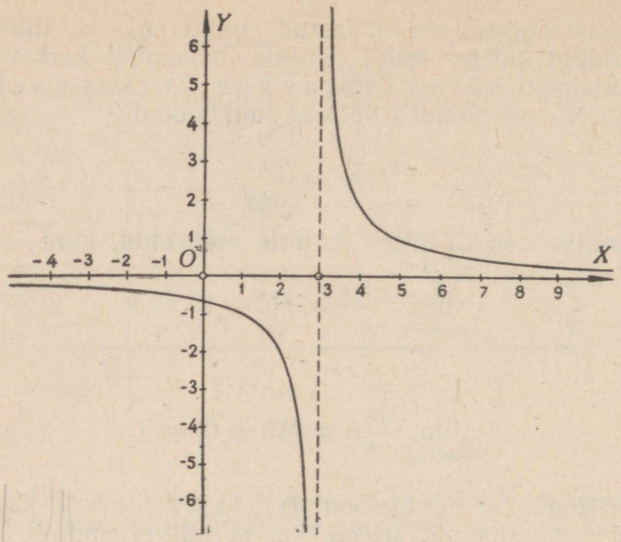
lugeda pidevaks punktis $x = 0$.

§ 26. Katkevaid funktsioone. a) Vaatleme funktsiooni

$$y = \frac{2}{x-3}.$$

Punktis $x = 3$ see funktsioon ei ole määratud. Kuni x jääb väiksemaks kui 3, on funktsiooni väärtused negatiivsed, ja kuni x jääb suuremaks kui 3, on funktsiooni väärtused positiivsed. Kui siin x läheneb kasvavalt 3-le, s. o. $x \to 3-0$, siis läheneb funktsiooni väärtus $-\infty$-le, ja kui x läheneb kahanevalt 3-le, s. o. $x \to 3+0$, siis läheneb funktsiooni väärtus $+\infty$-le. Punktis $x = 3$ tekib funktsiooni II liiki katkevus; funktsioon teeb hüppe $-\infty$-st $+\infty$-sse, kui x möödub 3-st (joon. 33), sest

$$\lim_{x \to 3-0} \frac{2}{x-3} = f(3-0) = -\infty, \qquad \lim_{x \to 3+0} \frac{2}{x-3} = f(3+0) = +\infty$$



Joon. 33.

ehk

$$\lim_{x \to 3} \frac{2}{x-3} = f(3 \mp 0) = \mp \infty.$$

Sel juhul ütleme, et punktis $x = 3$ tekib lõpmatu katkevus. Funktsiooni määramispiirkond koosneb siin kahest vahemikust

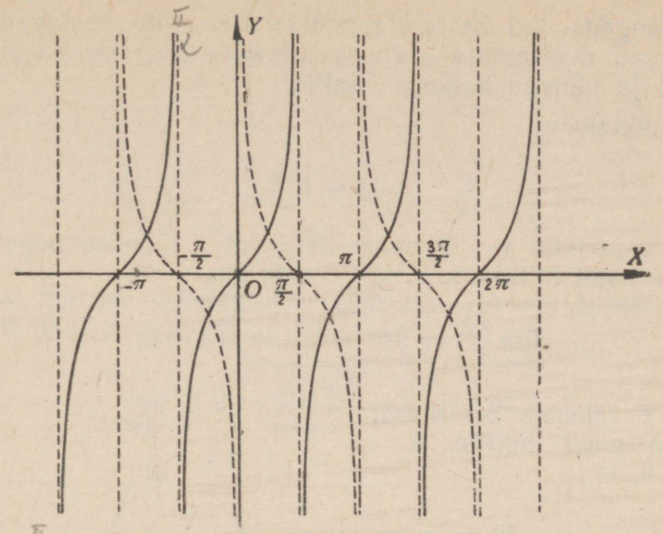
$$-\infty < x < 3 \text{ ja } 3 < x < +\infty$$

ning funktsioonile vastava kõvera asümptootideks on X-telg ja sirge $x = 3$.

b) Tangensfunktsiooni

$$y = \operatorname{tg} x$$

puhul, kui x kasvab näiteks $-\frac{\pi}{2}$-st $+\frac{\pi}{2}$-ni, kasvab funktsiooni väärtus $-\infty$-st $+\infty$-ni (joon. 34). Punktis $x = \frac{\pi}{2}$ tekib tangensfunktsiooni II liiki katkevus: selles punktis funktsioon teeb hüppe $+\infty$-st $-\infty$-sse ja on seni negatiivne, kuni x omandab väärtuse π. Edasi on funktsioon jälle positiivne ja saab $+\infty$-ks, kui $x = \frac{3\pi}{2}$, mis on jälle funktsiooni katkevuspunkt jne. Siin esineb perioodiline katkevus; katkevuse periood on π. Vahemikus $-\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}$ on tangensfunktsioon pidev. Katke-



Joon. 34.

vus tekib punktides $x = -\frac{\pi}{2}$ ja $x = +\frac{\pi}{2}$. Tähendab,

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = f\left(-\frac{\pi}{2} \mp 0\right) = \pm\infty$$

ja

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = f\left(\frac{\pi}{2} \mp 0\right) = \pm\infty.$$

Üldiselt on tangensfunktsioon katkev punktides $x = \frac{(2k-1)\pi}{2}$, kus $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, sest

$$\lim_{x \to \frac{(2k-1)\pi}{2}} \operatorname{tg} x = f\left[\frac{(2k-1)\pi}{2} \mp 0\right] = \pm\infty.$$

Samuti on ka kootangensfunktsioon

$$y = \operatorname{ctg} x$$

perioodilise katkevusega. Kootangensfunktsiooni katkevus tekib punktides $x = k\pi$, kus $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, sest

$$\lim_{x \to k\pi} \operatorname{ctg} x = f(k\pi \mp 0) = \mp\infty.$$

Vahemikus $0 < x < \pi$ näiteks on kootangensfunktsioon pidev (joon. 34); katkevus tekib punktides $x = 0$ ja $x = \pi$.

Nii tangens- kui ka kootangensfunktsioonile vastavad kõverad omavad määramata palju asümptoote, mis on paralleelsed Y-teljega ja läbivad katkevuspunkte.

c) Funktsioon

$$y = e^{\frac{1}{x}}$$

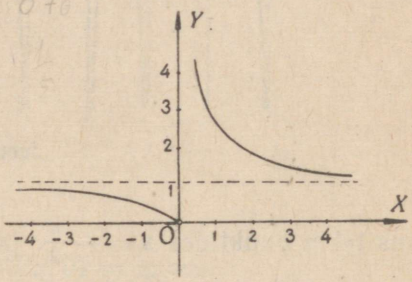
on katkev punktis $x = 0$ (joon. 35). Kui x läheneb negatiivsete väärtuste poolt nullile, s. o. $x \to 0 - 0$, siis

$$\lim_{x \to 0-0} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0-0} \frac{1}{e^{-\frac{1}{x}}} = f(0-0) = 0,$$

ja kui x läheneb positiivsete väärtuste poolt nullile, s. o. $x \to 0 + 0$, siis

$$\lim_{x \to 0+0} e^{\frac{1}{x}} = f(0+0) = +\infty.$$

Siin argumendi kasvamisel funktsioon teeb punktis $x = 0$ hüppe 0-st $+\infty$-sse. Kõvera asümptoodiks on sirge $y = 1$ ning kõvera parempoolse haru asümptoodiks ka Y-telg.

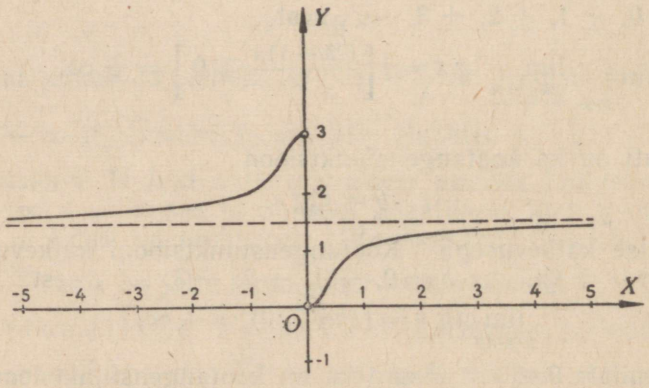


Joon. 35.

d) Funktsioon

$$y = \frac{3}{1 + \sqrt[x]{2}}$$

on katkev punktis $x = 0$ (joon. 36). Kui x läheneb negatiivsete väärtuste poolt nullile, s. o. $x \to 0 - 0$, siis



Joon. 36.

$$\lim_{x \to 0-0} \sqrt[x]{2} = \lim_{x \to 0-0} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0-0} \frac{1}{2^{-\frac{1}{x}}} = 0$$

ja

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{3}{1+\sqrt[x]{2}} = f(0-0) = 3.$$

Kui x läheneb positiivsete väärtuste poolt nullile, s. o. $x \to 0+0$, siis

$$\lim_{x \to 0+0} \sqrt[x]{2} = \lim_{x \to 0+0} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\infty} = \infty$$

ja

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{3}{1+\sqrt[x]{2}} = f(0+0) = 0.$$

Siin argumendi kasvamisel funktsioon teeb punktis $x = 0$ hüppe lõplikus piirkonnas, s. o. 3-st 0-ni. Punkt $x = 0$ on seega I liiki katkevuspunkt. Kõvera asümptoodiks on siin sirge $y = \frac{3}{2}$, sest kui $x \to -\infty$, siis y läheneb kahanevalt $\frac{3}{2}$-le, ja kui $x \to +\infty$, siis y läheneb kasvavalt $\frac{3}{2}$-le.

e) Funktsioon

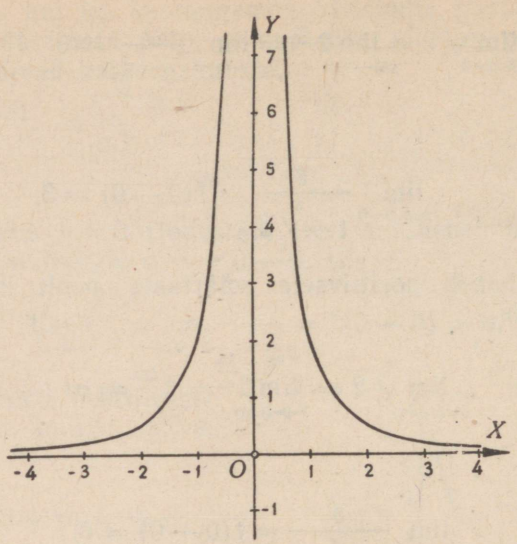
$$y = \frac{2}{x^2}$$

jääb alati positiivseks, olgu x positiivne või negatiivne. Argumendi x absoluutväärtuse vähenemisel saab funktsiooni väärtus lõpmatuks (joon. 37).

Argumendi x nullist üleminekul ei teki siin küll funktsioonis mingit hüpet nagu eelmistes näidetes, kuid $x = 0$ puhul funktsioon ei ole määratud ja seega pole täidetud funktsiooni pidevuse tunnus. Järelikult funktsioon $y = \frac{2}{x^2}$ on katkev punktis $x = 0$. Tema määramispiirkonnaks on

$$-\infty < x < 0 \quad \text{ja} \quad 0 < x < +\infty$$

ning asümptootideks mõlemad koordinaatteljed.



Joon. 37.

§ 27. Funktsioonide pidevuse teoreeme. Teoreem 1: Kui funktsioonid $f_1(x)$ ja $f_2(x)$ on pidevad vahemikus $a < x < b$, siis on ka funktsioonid $f_1(x) \pm f_2(x)$ pidevad selles vahemikus.

Kui $f_1(x_0)$ ja $f_2(x_0)$ on vahemikus $a < x_0 < b$ lõplikud suurused, siis on ka $f_1(x_0) \pm f_2(x_0)$ lõplikud suurused. Et siin

$$\lim_{\Delta x \to 0} f_1(x_0 + \Delta x) = f_1(x_0)$$

ja

$$\lim_{\Delta x \to 0} f_2(x_0 + \Delta x) = f_2(x_0),$$

siis

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f_1(x_0 + \Delta x) \pm f_2(x_0 + \Delta x)] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} f_1(x_0 + \Delta x) \pm \lim_{\Delta x \to 0} f_2(x_0 + \Delta x) = f_1(x_0) \pm f_2(x_0),$$

millest nähtub, et funktsioonid $f_1(x) \pm f_2(x)$ on pidevad punktis $x = x_0$ ja järelikult ka vahemikus $a < x < b$, sest x_0 oli selles vahemikus vabalt võetud punkt.

Kui meil on n pidevat funktsiooni

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots,\ f_n(x),$$

siis analoogiliselt eelnevale saame näidata, et ka nende summa

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots + f_n(x)$$

osutub pidevaks funktsiooniks.

kusjuures $f(x_0-\varepsilon)$ asetseb ühel pool ja $f(x_0+\varepsilon)$ asetseb teisel pool funktsiooni väärtust $y_0=f(x_0)$. Igale $f(x_0+\Delta x)$ väärtusele $f(x_0-\varepsilon)$ ja $f(x_0+\varepsilon)$ vahel vastab nüüd ka ümberpöördult $x_0+\Delta x=\varphi(y_0+\Delta y)$ väärtus $x_0-\varepsilon$ ja $x_0+\varepsilon$ vahel, s. o. $\varphi(y_0)-\varepsilon$ ja $\varphi(y_0)+\varepsilon$ vahel, ning seega

$$\varphi(y_0)-\varepsilon<\varphi(y_0+\Delta y)<\varphi(y_0)+\varepsilon,$$

millest

$$-\varepsilon<\varphi(y_0+\Delta y)-\varphi(y_0)<\varepsilon$$

ehk

$$|\varphi(y_0+\Delta y)-\varphi(y_0)|<\varepsilon$$

ehk

$$\lim_{\Delta y\to 0}\varphi(y_0+\Delta y)=\varphi(y_0),$$

mis ütleb, et funktsioon $x=\varphi(y)$ on pidev punktis $y=y_0$ ja järelikult ka vahemikus $f(a)$-st $f(b)$-ni, sest y_0 oli selles vahemikus vabalt võetud punkt.

Muutujate tähiseid ümber vahetades näeme, et funktsioon $y=\varphi(x)$ on samuti pidev vahemikus $f(a)$-st $f(b)$-ni.

Teoreem 5: Kui funktsioon $u=\varphi(x)$ on pidev vahemikus $a\leqslant x\leqslant b$ ja funktsioon $y=f(u)$ on pidev vahemikus, milles asetsevad kõik need väärtused, mida omab funktsioon $\varphi(x)$ vahemikus $a\leqslant x\leqslant b$, siis on ka liitfunktsioon $y=f[\varphi(x)]$ pidev vahemikus $a\leqslant x\leqslant b$.

Võtame vahemikus $a\leqslant x\leqslant b$ vabalt mingi punkti x_0, millele vastab u väärtus u_0. Siis ühelt poolt funktsiooni $\varphi(x)$ pidevuse tõttu

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)=u_0$$

ja teiselt poolt funktsiooni $f(u)$ pidevuse tõttu $u=u_0$ puhul

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)=f[\varphi(x_0)],$$

millest nähtub, et liitfunktsioon $y=f[\varphi(x)]$ on pidev punktis $x=x_0$ ja järelikult ka kogu vahemikus $a\leqslant x\leqslant b$, sest x_0 oli selles vahemikus vabalt võetud punkt.

Teoreem 6: Eksponentfunktsioon $f(x)=a^x$ on pidev x iga väärtuse puhul, kui $a>0$.

Tõestuseks võime alati oletada, et $a>1$, sest kui on $a<1$ (s. o. $0<a<1$), siis võime kirjutada

$$a^x=\frac{1}{a^{-x}}=\left(\frac{1}{a}\right)^{-x}=b^{-x},$$

kus nüüd $b>1$.

Olgu $a > 1$ ja x_0 argumendi x mingi väärtus. Siis $f(x_0) = a^{x_0}$ on lõplik suurus, kusjuures funktsiooni kasv

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = a^{x_0+\Delta x} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{\Delta x} - 1).$$

Kui tähistame siin $\Delta x = \frac{1}{n}$, siis

$$a^{\Delta x} - 1 = a^{\frac{1}{n}} - 1 = h,$$

millest

$$a = (1 + h)^n > 1 + nh,$$

sest h on positiivne suurus, kui $a > 1$. Viimasest võrratusest saame, et

$$h < \frac{a-1}{n}$$

ja seega

$$0 < a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a-1}{n}.$$

Kui nüüd $\Delta x \to 0$, siis $n \to \infty$ ja järelikult avaldis

$$a^{\Delta x} - 1 = a^{\frac{1}{n}} - 1 \to 0,$$

ning seega ühtlasi

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = a^{x_0}(a^{\Delta x} - 1) \to 0,$$

mis näitab, et funktsioon $f(x) = a^x$ on pidev punktis $x = x_0$. Järelikult eksponentfunktsioon $f(x) = a^x$, kus $a > 0$, on pidev x iga väärtuse puhul, sest x_0 oli vabalt valitav argumendi x väärtus.

Kui siin $a > 1$, siis

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty,$$

s. o. eksponentfunktsioon kasvab pidevalt 0-st $+\infty$-ni, kui argument kasvab $-\infty$-st $+\infty$-ni.

Kui $a < 1$, siis

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} a^x = 0,$$

s. o. eksponentfunktsioon kahaneb pidevalt $+\infty$-st 0-ni, kui argument kasvab $-\infty$-st $+\infty$-ni.

Rakendades käesolevat eksponentfunktsiooni pidevuse teoreemi, saame näidata, et logaritmfunktsioon $y = \log_a x$ on pidev x iga positiivse väärtuse puhul. Võttes logaritmfunktsiooni pöördfunktsiooni $x = a^y$, näeme, et see on pidev vahemikus $-\infty < y < +\infty$, kusjuures x väärtus muutub 0-st $+\infty$-ni, kui $a > 1$, ja

$+\infty$-st 0-ni, kui $a<1$. Seega on käesoleva ja neljanda teoreemi põhjal logaritmfunktsioon $y=\log_a x$ pidev vahemikus $0<x<+\infty$.

Nagu nägime, põhinevad esitatud teoreemide tõestused funktsiooni pidevuse definitsioonil. Nendest teoreemidest ilmneb ühtlasi, et käsitletud elementaarsed funktsioonid on pidevad nende määramispiirkonnas.

Analoogiliselt saame näidata, et trigonomeetrilised funktsioonid $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ ja $\operatorname{ctg} x$ on pidevad nende määramispiirkonnas. Nimelt $y=\sin x$ ja $y=\cos x$ on pidevad vahemikus $-\infty<x<+\infty$; $y=\operatorname{tg} x$ on pidev vahemikes $\frac{(2k-1)\pi}{2}<x<\frac{(2k+1)\pi}{2}$ ja $y=\operatorname{ctg} x$ on pidev vahemikes $k\pi<x<(k+1)\pi$, kus $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Arkusfunktsioonid $y=\operatorname{Arcsin} x$ ja $y=\operatorname{Arccos} x$ on mitmesed funktsioonid. Et nad esitaksid üheseid funktsioone, selleks piirdume $\operatorname{Arcsin} x$ puhul näiteks peaväärtusega, mis asetseb vahemikus $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant+\frac{\pi}{2}$, ja $\operatorname{Arccos} x$ puhul peaväärtusega, mis asetseb vahemikus $0\leqslant y\leqslant\pi$. Arkusfunktsioonid $y=\operatorname{Arcsin} x$ ja $y=\operatorname{Arccos} x$ kujutavad graafiliselt samu kõveraid, mida esitavad vastavad trigonomeetrilised funktsioonid $x=\sin y$ ja $x=\cos y$. Et viimased on pidevad funktsioonid, kus funktsiooni x väärtus muutub vahemikus $-1\leqslant x\leqslant 1$, siis seega on $y=\arcsin x$ ja $y=\arccos x$ pidevad funktsioonid, kus argument x võib omada väärtusi vahemikus $-1\leqslant x\leqslant 1$.

Arkusfunktsioonid $y=\operatorname{Arctg} x$ ja $y=\operatorname{Arcctg} x$ on samuti mitmesed funktsioonid. Ühe väärtuse saamiseks piirdume $\operatorname{Arctg} x$ puhul peaväärtusega, mis asetseb vahemikus $-\frac{\pi}{2}<y<+\frac{\pi}{2}$, ja $\operatorname{Arcctg} x$ puhul peaväärtusega, mis asetseb vahemikus $0<y<\pi$. Arkusfunktsioonid $y=\operatorname{Arctg} x$ ja $y=\operatorname{Arcctg} x$ kujutavad graafiliselt samu kõveraid, mida esitavad vastavad trigonomeetrilised funktsioonid $x=\operatorname{tg} y$ ja $x=\operatorname{ctg} y$. Et $x=\operatorname{tg} y$ on pidev vahemikus $-\frac{\pi}{2}<y<+\frac{\pi}{2}$ ja x kasvab $-\infty$-st $+\infty$-ni, kui y omandab kõik väärtused $-\frac{\pi}{2}$-st $+\frac{\pi}{2}$-ni, ning $x=\operatorname{ctg} y$ on pidev vahemikus $0<y<\pi$ ja x kahaneb $+\infty$-st $-\infty$-ni, kui y omandab kõik väärtused 0-st π-ni, siis seega on $y=\operatorname{arctg} x$ ja $y=\operatorname{arcctg} x$ pidevad vahemikus $-\infty<x<+\infty$.

§ 28. Pidevate funktsioonide omadusi. Pidevate funktsioonide tähtsamate omaduste esitamiseks vaatleme kõigepealt tõkestatud arvhulga ja tõkestatud arvjärjendi kohta kehtivaid teoreeme, milledel baseeruvad pidevate funktsioonide omadused ja mis on ühtlasi täienduseks meie teadmistele tõkestatud arvjärjenditest.

Tähistame suuruse x arvhulga sümboliga $\{x\}$. Arvhulka $\{x\}$ nimetatakse *altpoolt tõkestatuks*, kui leidub niisugune arv a, et võrratus

$$x \geqslant a$$

kehtib x iga väärtuse puhul, mis kuulub arvhulka $\{x\}$, kusjuures arvu a nimetame arvhulga $\{x\}$ *alamtõkkeks*.

Arvhulka $\{x\}$ nimetatakse *ülaltpoolt tõkestatuks*, kui leidub niisugune arv b, et võrratus

$$x \leqslant b$$

kehtib x iga väärtuse puhul, mis kuulub arvhulka $\{x\}$, kusjuures arvu b nimetame arvhulga $\{x\}$ *ülemtõkkeks*.

Arvhulk $\{x\}$ võib olla tõkestatud nii altpoolt kui ka ülaltpoolt või ainult ühelt poolt. Vastasel korral on arvhulk mõlemalt poolt tõkestamatu. Näiteks kõikide negatiivsete ja positiivsete täisarvude hulk on nii altpoolt kui ka ülaltpoolt tõkestamatu; naturaalarvude hulk on altpoolt tõkestatud, kuid ülaltpoolt ei ole tõkestatud; kõikide positiivsete lihtmurdude hulk on nii altpoolt kui ka ülaltpoolt tõkestatud, kusjuures alamtõke a on võrdne nulliga või mistahes negatiivse arvuga ja ülemtõke b on võrdne ühega või ühest suurema arvuga. Nii alamtõke a kui ka ülemtõke b võivad omada lõpmata palju väärtusi. Allpool näitame, et kõikide a-de hulgas leidub *suurim arv*, mida tähistame m-ga ja nimetame arvhulga $\{x\}$ *täpseks alamtõkkeks*, ning samuti kõikide b-de hulgas leidub *väikseim arv*, mida tähistame M-ga ja nimetame arvhulga $\{x\}$ *täpseks ülemtõkkeks*. Arvhulga $\{x\}$ täpset alamtõket ja täpset ülemtõket kirjutatakse sümboolselt

$$m = \inf\{x\}, \qquad M = \sup\{x\}\ *.$$

Et näidata, et igal altpoolt (või ülaltpoolt) tõkestatud arvhulgal $\{x\}$ on olemas täpne alamtõke m (või täpne ülemtõke M), selleks tõestame alljärgneva teoreemi.

Teoreem 1: *Altpoolt tõkestatud arvhulgal $\{x\}$ on olemas täpne alamtõke m.*

Oletame esiteks, et *arvhulgas $\{x\}$ leidub väikseim arv* x_0. Sel juhul arvhulga $\{x\}$ kõik arvud rahuldavad võrratust $x \geqslant x_0$, s. o. x_0 on arvhulga $\{x\}$ alamtõkkeks. Et aga x_0 kuulub arvhulka $\{x\}$, siis iga teise alamtõkke a puhul $x_0 \geqslant a$, millest järeldub, et x_0 on arvhulga $\{x\}$ täpne alamtõke, s. o.

$$x_0 = m = \inf\{x\}.$$

Teiseks oletame, et *arvhulgas $\{x\}$ ei leidu väikseimat arvu*. Jaotame nüüd kõik reaalarvud kahte klassi, lugedes esimesse klassi kuuluvateks kõik arvud a, mis rahuldavad tingi-

* Sümbolid «inf» ja «sup» on võetud ladinakeelsetest sõnadest *infimum* — kõige madalam, *supremum* — kõige kõrgem.

must $x \geqslant a$, ja teise klassi kuuluvateks kõik ülejäänud reaalarvud, eriti arvhulga $\{x\}$ kõik arvud, millede suhtes ei ole kohaldatav arvude a kohta esitatud tingimus. Et esimese klassi iga arv on teise klassi igast arvust väiksem, siis esimese klassi arvud kasvavalt ja teise klassi arvud kahanevalt lähenevad piirväärtusele, mis kujutab nende kahe klassi vaheväärtust ehk Dedekindi lõiget, mis ongi arvhulga $\{x\}$ täpne alamtõke m, sest kui iga arv x arvhulgast $\{x\}$ kuulub teise klassi arvude hulka, siis on ikka $x > m$ ja järelikult m on üks arvudest a, mis rahuldavad tingimust $x \geqslant a$. Seetõttu m kuulub esimese klassi arvude hulka ja on (kui Dedekindi lõige) selle klassi suurimaks arvuks. Sellega ühtlasi m osutub suurimaks kõikidest arvudest a, mis rahuldavad tingimust $x \geqslant a$. Sellega oleme tõestanud, et altpoolt tõkestatud arvhulgal $\{x\}$ on olemas täpne alamtõke m, s. o.

$$m = \inf\{x\}.$$

Analoogilise tõestusega saab näidata, et kehtib samuti

teoreem 2: Ülaltpoolt tõkestatud arvhulgal $\{x\}$ on olemas täpne ülemtõke M, s. o.

$$M = \sup\{x\}.$$

Arvhulka $\{x\}$ nimetame tõkestatuks, kui ta on nii altpoolt kui ka ülaltpoolt tõkestatud. Tõkestatud arvhulgal on olemas täpne alamtõke ja täpne ülemtõke, mis on lõplikud suurused.

Kui arvhulk $\{x\}$ ei ole altpoolt tõkestatud, siis kirjutame

$$\inf\{x\} = -\infty,$$

ja kui ta ei ole ülaltpoolt tõkestatud, siis kirjutame

$$\sup\{x\} = +\infty.$$

Kui funktsioon

$$y = f(x)$$

on nii altpoolt kui ka ülaltpoolt tõkestatud ning tema täpne alamtõke ja täpne ülemtõke on vastavalt m ja M, siis kirjutame

$$\inf\{y\} = \inf\{f(x)\} = m$$

ja

$$\sup\{y\} = \sup\{f(x)\} = M.$$

Näiteks funktsioon

$$y = x^2 - 2x - 3$$

on altpoolt tõkestatud ja tema täpne alamtõke on -4 (§ 10, joon. 6), kuid ülaltpoolt ei ole see funktsioon tõkestatud; seega

$$\inf\{y\} = \inf\{x^2 - 2x - 3\} = -4,$$

$$\sup\{y\} = \sup\{x^2 - 2x - 3\} = +\infty.$$

Bolzano-Weierstrassi* teoreem: Igast tõkestatud arvjärjendist

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

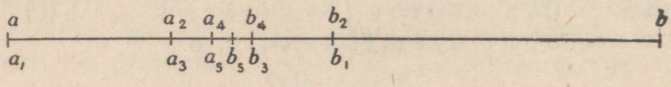
võime alati eraldada liikmed, mis moodustavad uue arvjärjendi, millel on lõplik piirväärtus.

Et antud lõpmatu arvjärjend on eelduse kohaselt tõkestatud, siis peab leiduma kaks niisugust arvu a ja b, et nende vahel asetsevad kõik arvjärjendi liikmed, millede hulgas võib leiduda ka võrdseid liikmeid. See tähendab, et iga n puhul

$$a \leqslant x_n \leqslant b.$$

Jaotame vahemiku $[a, b]$ kaheks võrdseks osavahemikuks (joon. 39). Siis ilmselt vähemalt ühes neist osavahemikest asetseb lõpmata palju arvjärjendi liikmeid, sest vastasel korral peaks vahemikus $[a, b]$ liikmete arv olema lõplik.

Võtame neist osavahemikest selle, milles asetseb lõpmata palju



Joon. 39.

arvjärjendi liikmeid, ja tähistame seda $[a_1, b_1]$, mille pikkus on

$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2},$$

kusjuures

$$a \leqslant a_1 < b_1 \leqslant b.$$

Osavahemiku $[a_1, b_1]$ jaotame omakorda kaheks võrdseks osavahemikuks ja võtame selle osavahemiku, milles asetseb nüüd lõpmata palju arvjärjendi liikmeid, tähistades seda $[a_2, b_2]$, mille pikkus on

$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2},$$

kusjuures

$$a \leqslant a_1 \leqslant a_2 < b_2 \leqslant b_1 \leqslant b.$$

---

* Bernhard Bolzano (1781—1848) — tšehhi matemaatik, kes esitas oma teoses «Paradoxien des Unendlichen» mõisteid ja teoreeme, milledel baseeruvad kaasaegse matemaatilise analüüsi mitmed küsimused.

Karl Weierstrass (1815—1897) — saksa matemaatik, kelle teeneks on matemaatilise analüüsi moodne ja loogiliselt range põhjendamine. Weierstrassi juures õppis omal ajal eraviisiliselt ka Sofia Kovalevskaja (1850—1891), kellele kui naisele olid tsaari-Venemaal kõrgemate õppeasutuste uksed suletud ja kellest pärastpoole kujunes maailma esimene matemaatiliste teaduste naisprofessor, kes tunduvate tagajärgedega töötas diferentsiaalvõrrandite teooria ja teoreetilise mehaanika küsimuste alal.

Analoogiliselt jätkates osavahemike poolitamist, saame k-kordse poolitamise tulemusena osavahemiku $[a_k, b_k]$, milles asetseb lõpmata palju arvjärjendi liikmeid ja mille pikkus on

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k},$$

kusjuures

$$a \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_k < b_k \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1 \leqslant b.$$

Kui seejuures k piiramatult kasvab, siis tekib kaks monotoonset arvjärjendit

$$a \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_k \leqslant \ldots$$

ja

$$b \geqslant b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_k \geqslant \ldots,$$

millede kõik liikmed asetsevad a ja b vahel. Sellega on need monotoonsed arvjärjendid tõkestatud ja järelikult nii üks kui teine omab lõplikku piirväärtust.

Olgu

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \xi;$$

siis (§ 18. teoreem 1 järgi)

$$\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} \left(a_k + \frac{b-a}{2^k}\right) = \xi,$$

millest nähtub, et mõlemal monotoonsel arvjärjendil on üks ja sama lõplik piirväärtus.

Edasi näitame nüüd, et antud tõkestatud arvjärjendist

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \tag{1}$$

saame eraldada liikmed, mis moodustavad uue arvjärjendi

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots, x_{n_k}, \ldots, \tag{2}$$

mida nimetame lühidalt o s a j ä r j e n d i k s ja mille piirväärtuseks on eespool esinev lõplik suurus ξ, s. o.

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi.$$

Osajärjendi (2) esimeseks liikmeks x_{n_1} võime võtta arvjärjendi (1) mistahes liikme (näiteks esimese); teiseks liikmeks x_{n_2} võtame arvjärjendis (1) x_{n_1}-le järgnevatest liikmetest mistahes liikme (näiteks esimese), mis asetseb osavahemikus $[a_1, b_1]$; kolmandaks liikmeks x_{n_3} võtame arvjärjendis (1) x_{n_2}-le järgnevatest liikmetest mistahes liikme (näiteks esimese), mis asetseb vahemikus $[a_2, b_2]$, jne.; üldiselt k-ndaks liikmeks x_{n_k} võtame arv-

järjendis (1) $x_{n_{k-1}}$-le järgnevatest liikmetest mistahes liikme (näiteks esimese), mis asetseb vahemikus $[a_k, b_k]$. Niisugune liikmete valik on alati võimalik, sest eelduse kohaselt igas vahemikus $[a_k, b_k]$ asetseb lõpmata palju liikmeid.

Niimoodi võetud liikmed osajärjendis (2) rahuldavad iga k puhul võrratust

$$a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k.$$

Et siin

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = \xi,$$

siis (§ 15 teoreemi põhjal) sama piirväärtust omab ka osajärjend (2), s. o.

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi.$$

Teades eespool esitatud teoreeme, võime asuda pidevate funktsioonide tähtsamate omaduste vaatlemisele.

1) Kui funktsioon $f(x)$ on pidev kinnises vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$, siis ta on selles vahemikus tõkestatud.

Kui funktsioon $f(x)$ on tõkestatud, siis leidub ikka niisugune konstantne arv M, et vahemikus $[a, b]$ iga x väärtuse puhul

$$|f(x)| \leqslant M.$$

Väidame vastupidiselt, et funktsioon $f(x)$ ei ole tõkestatud. Sel juhul iga naturaalarvu n puhul leidub vahemikus $[a, b]$ punkt x_n, milles

$$|f(x_n)| > n.$$

Seega saame arvjärjendi

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots, \qquad (1)$$

kus iga n puhul

$$a \leqslant x_n \leqslant b$$

ning arvjärjend (1) on tõkestatud. Bolzano-Weierstrassi teoreemi järgi saame siis arvjärjendist (1) eraldada osajärjendi

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots, x_{n_k}, \ldots,$$

kus iga k puhul

$$a \leqslant x_{n_k} \leqslant b,$$

ning see osajärjend omab mingit lõplikku piirväärtust ξ, s. o.

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi,$$

kus ξ asetseb vahemikus $[a, b]$, s. o.

$$a \leqslant \xi \leqslant b.$$

Et $f(x)$ on eelduse kohaselt pidev vahemiku $[a, b]$ igas punktis ja seega ka punktis ξ, siis

$$f(x_{n_k}) \to f(\xi)$$

ehk

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(\xi),$$

mis on vastuolus eespool esitatud võrratusega

$$|f(x_n)| > n,$$

millest järeldub, et

$$f(x_{n_k}) \to \infty.$$

Seega peab funktsioon olema tõkestatud vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$.

Siin tuleb märkida, et kui funktsioon on pidev lahtises, poollahtises või poolkinnises vahemikus, siis võib kirjeldatud omadus mitte kehtida. Selles veendumiseks vaatleme näiteks funktsiooni

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

mis on pidev poollahtises vahemikus $0 < x \leqslant 1$, kuid ei ole selles vahemikus tõkestatud, sest x lähenemisel nullile funktsioon piiramatult kasvab.

2) Kui funktsioon $f(x)$ on pidev kinnises vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$, siis asetsevad selles vahemikus ikka niisugused punktid ξ ja η, milledes funktsiooni väärtused $f(\xi)$ ja $f(\eta)$ esitavad vastavalt funktsiooni $f(x)$ suurimat ja väikseimat väärtust.

Eelduse ja eelmise omaduse põhjal on antud funktsioon $f(x)$ tõkestatud. See tähendab, et funktsiooni $f(x)$ väärtuste hulk vaadeldavas vahemikus $[a, b]$ on tõkestatud. Olgu M ja m vastavalt funktsiooni $f(x)$ täpne ülemtõke ja täpne alamtõke, s. o.

$$M = \sup \{f(x)\} \text{ ja } m = \inf \{f(x)\},$$

kus M ja m on lõplikud suurused. Et esitatud omadus kehtiks, selleks tuleb näidata, et vahemikus $[a, b]$ leiduvad niisugused punktid ξ ja η, milledes

$$f(\xi) = M \text{ ja } f(\eta) = m.$$

Selle omaduse esimese osa tõestamiseks väidame vastupidiselt, et vahemikus $[a, b]$ ei leidu niisugust punkti ξ, mille puhul kehtiks võrdus $f(\xi) = M$. Siis vahemiku $[a, b]$ igas punktis oleks

$$f(x) < M,$$

mille puhul funktsiooni $f(x)$ väärtused ei küüni täpse ülemtõkkeni M. Sel juhul vaatleme siin abifunktsiooni

$$\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)},$$

milles nimetaja $M - f(x)$ ei saa nulliks võrratuse $f(x) < M$ tõttu. Seega $\varphi(x)$ on pidev vahemikus $[a, b]$, sest $f(x)$ on eelduse järgi pidev selles vahemikus ja järelikult eelmise omaduse põhjal tõkestatud, mis on aga võimatu. Sest tõesti, kui M on määrangu järgi funktsiooni $f(x)$ väärtuste täpne ülemtõke, siis leidub arvule M kuitahes lähedasi funktsiooni $f(x)$ väärtusi, milledele vastavad ilmselt kuitahes suured funktsiooni $\varphi(x)$ väärtused, mille puhul $\varphi(x)$ ei või olla tõkestatud. Seega vastuväide on vale ja järelikult vahemikus $[a, b]$ leidub punkt ξ, milles $f(\xi) = M$ on funktsiooni $f(x)$ suurimaks väärtuseks.

Käesoleva omaduse teise osa tõestamiseks väidame samuti vastupidiselt, et vahemikus $[a, b]$ ei leidu punkti η, mille puhul $f(\eta) = m$. Sel juhul vahemiku $[a, b]$ igas punktis oleks

$$f(x) > m.$$

Võttes siin abifunktsiooniks

$$\psi(x) = \frac{1}{f(x) - m},$$

saame analoogiliselt eelmise osaga tõestada, et vahemikus $[a, b]$ leidub punkt η, milles $f(\eta) = m$ on funktsiooni $f(x)$ väikseimaks väärtuseks.

Kui funktsioon on pidev lahtises, poollahtises või poolkinnises vahemikus, siis võib ka käesolev omadus mitte kehtida, nagu näiteks funktsiooni $f(x) = \frac{1}{x}$ puhul. See funktsioon on pidev poollahtises vahemikus $(0, 1]$, kuid selles vahemikus ta suurimat väärtust ei oma.

Kui funktsioon $f(x)$ on pidev kinnises vahemikus $[a, b]$, siis nimetatakse tema suurima ja väikseima väärtuse vahet $M - m$ funktsiooni v õ n k u m i s e k s. Funktsiooni väärtuste vahemik on siis kinnine vahemik $[m, M]$, mille pikkuse määrab funktsiooni võnkumine.

3) K u i f u n k t s i o o n $f(x)$ o n p i d e v k i n n i s e s v a h e m i k u s $a \leqslant x \leqslant b$, s i i s o n t a p i d e v u s s e l l e s v a h e m i k u s ü h t l a n e.

Selle omaduse tõestamiseks väidame vastupidiselt, et kinnises vahemikus $[a, b]$ funktsiooni $f(x)$ pidevus ei ole ühtlane. See tähendab, et selles vahemikus mingi $\varepsilon > 0$ jaoks ei leidu niisugust arvu $\delta > 0$, millest oli jutt ühtlase pidevuse definitsioonis (§ 25, p. 2). Sel juhul, missugune ka ei oleks $\delta > 0$, leidub ikka vahemikus $[a, b]$ kaks niisugust punkti x' ja x'', et $|x' - x''| < \delta$, kuid siiski

$$|f(x') - f(x'')| \geqslant \varepsilon.$$

Võtame nüüd positiivsete arvude järjendi

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n, \ldots$$

nõnda, et $\delta_n \to 0$, kui $n \to \infty$. Siis eespoolöeldu põhjal iga δ_n jaoks leidub vahemikus $[a, b]$ kaks niisugust punkti x_n' ja x_n'', et ($n = 1, 2, 3, \ldots$ puhul) on $|x_n' - x_n''| < \delta_n$, kuid

$$|f(x_n') - f(x_n'')| \geqslant \varepsilon,$$

mida rahuldavad arvjärjendid

$$x_1', x_2', x_3', \ldots, x_n', \ldots$$

ja

$$x_1'', x_2'', x_3'', \ldots, x_n'', \ldots$$

Vaatleme esimest neist arvjärjenditest. Et selle arvjärjendi kõik liikmed asetsevad kinnises vahemikus $[a, b]$, siis esimese omaduse põhjal on see arvjärjend tõkestatud. Bolzano-Weierstrassi teoreemi järgi võime siis sellest arvjärjendist eraldada osajärjendi

$$x'_{n_1}, x'_{n_2}, x'_{n_3}, \ldots, x'_{n_k}, \ldots,$$

millel on lõplik piirväärtus, s. o.

$$\lim_{k \to \infty} x'_{n_k} = \xi,$$

kus $a \leqslant \xi \leqslant b$. Tingimusest $|x_n' - x_n''| < \delta_n$ järeldub, et ka teisest arvjärjendist eraldatud osajärjend

$$x''_{n_1}, x''_{n_2}, x''_{n_3}, \ldots, x''_{n_k}, \ldots$$

omab sama piirväärtust ξ, s. o.

$$\lim_{k \to \infty} x''_{n_k} = \xi.$$

Et eelduse järgi funktsioon $f(x)$ on pidev vahemikus $[a, b]$, siis

$$\lim_{k \to \infty} f(x'_{n_k}) = f(\xi) \text{ ja } \lim_{k \to \infty} f(x''_{n_k}) = f(\xi),$$

millest nähtub, et

$$\lim_{k \to \infty} \left[f\left(x'_{n_k}\right) - f\left(x''_{n_k}\right) \right] = 0,$$

mis on aga vastuolus võrratusega

$$|f(x_n') - f(x_n'')| \geqslant \varepsilon$$

ja seega ka võrratusega

$$|f(x') - f(x'')| \geqslant \varepsilon.$$

Järelikult funktsiooni $f(x)$ pidevus on ühtlane kinnises vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$.

Siin tuleb (nagu eelmisegi omaduse puhul) märkida, et kui funktsioon on pidev lahtises, poollahtises või poolkinnises vahemikus, siis võib see omadus mitte kehtida, sest kui võtame näiteks eespool vaadeldud funktsiooni

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

mis on pidev poollahtises vahemikus $0 < x \leqslant 1$, siis — võetagu $\delta > 0$ kuitahes väike — leidub punkti $x = 0$ läheduses alati kaks niisugust punkti x' ja x'', et $|x' - x''| < \delta$, kuid seejuures $|f(x') - f(x'')|$ võib saada kuitahes suureks.

4) Kui funktsioon $f(x)$ on pidev kinnises vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ ning $f(a) < 0$ ja $f(b) > 0$ [või ümberpöördult: $f(a) > 0$ ja $f(b) < 0$], siis asetseb selles vahemikus vähemalt üks x väärtus $x = \xi$, mille puhul $f(\xi) = 0$.

Selle omaduse tõestamiseks jagame vahe $b - a$ kaheks võrdseks osaks $\frac{b-a}{2}$. Kui nüüd $f\left(a + \frac{b-a}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, siis on seega leitud $\xi = \frac{a+b}{2}$, mille puhul $f(\xi) = 0$. Kui aga $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$, siis otsitav ξ asetseb $a_1 = a$ ja $b_1 = \frac{a+b}{2}$ vahel (joon. 39); kui $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$, siis otsitav ξ asetseb $a_1 = \frac{a+b}{2}$ ja $b_1 = b$ vahel. Mõlemal juhul

$$f(a_1) < 0 < f(b_1),$$

kusjuures $b_1 - a_1$ on kaks korda väiksem kui $b - a$.

Jagame $b_1 - a_1$ jälle kaheks võrdseks osaks $\frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}$. Kui nüüd $f\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right) = 0$, siis on leitud $\xi = \frac{a_1 + b_1}{2}$, mille puhul $f(\xi) = 0$. Kui aga $f\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right) > 0$, siis otsitav ξ asetseb $a_2 = a_1$ ja $b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ vahel; kui $f\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right) < 0$, siis otsitav ξ asetseb $a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ ja $b_2 = b_1$ vahel. Siin samuti mõlemal juhul

$$f(a_2) < 0 < f(b_2),$$

kusjuures $b_2 - a_2$ on kaks korda väiksem kui $b_1 - a_1$ ja neli korda väiksem kui $b - a$.

Analoogiliselt jätkates järk-järgult vähenevate vahede

$$b - a,\ b_1 - a_1,\ b_2 - a_2,\ \ldots,\ b_k - a_k,\ \ldots$$

poolitamist kas leiame punkti ξ, milles $f(\xi) = 0$, või jätkame poolitamisprotsessi piiramatult.

Kui üldiselt k-kordsel vahede poolitamisel $f\left(\frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}\right) = 0$, siis on seega leitud $\xi = \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}$, mille puhul $f(\xi) = 0$. Kui aga

$f\left(\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}\right)>0$, siis otsitav ξ asetseb $a_k=a_{k-1}$ ja $b_k=\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$ vahel; kui $f\left(\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}\right)<0$, siis otsitav ξ asetseb $a_k=\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$ ja $b_k=b_{k-1}$ vahel. Mõlemal juhul

$$f(a_k)<0<f(b_k),$$

kusjuures b_k-a_k on 2^k korda väiksem kui $b-a$, s. o.

$$b_k-a_k=\frac{b-a}{2^k}.$$

Et siin (esimese omaduse põhjal)

$$\lim_{k\to\infty} a_k=\lim_{k\to\infty} b_k=\xi$$

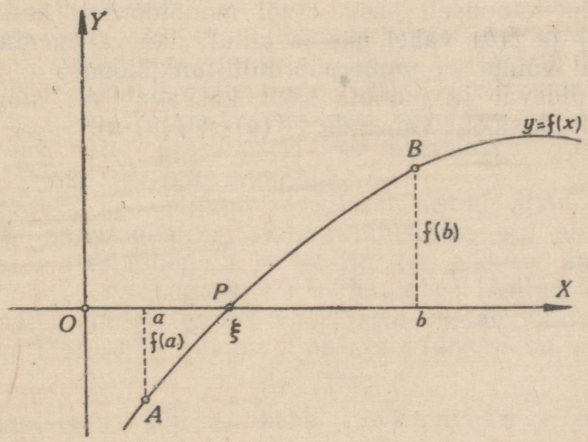
ning kuitahes suure k puhul $f(a_k)$ väärtus jääb ikka ja alati negatiivseks ja $f(b_k)$ väärtus positiivseks, siis piirile minekul, kui $k\to\infty$, ei saa $f(a_k)$ piirväärtus olla suurem kui null ja $f(b_k)$ piirväärtus väiksem kui null, s. o.

$$\lim_{k\to\infty} f(a_k)\leqslant 0 \text{ ja } \lim_{k\to\infty} f(b_k)\geqslant 0,$$

millest järeldub, et

$$\lim_{k\to\infty} f(a_k)=\lim_{k\to\infty} f(b_k)=f(\xi)=0.$$

Geomeetriliselt vastab funktsioonile $y=f(x)$ kõver, mis pidevalt kulgedes ühendab punkte $A[a, f(a)]$ ja $B[b, f(b)]$ (joon. 40), kus $f(a)<0$ ja $f(b)>0$. Pidevuse tõttu peab kõver lõikama X-telge vähemalt ühes punktis P, et funktsiooni negatiivsetelt



Joon. 40.

väärtustelt üle minna positiivsetele väärtustele. Punktis P on siis $OP = \xi$, mille puhul $f(\xi) = 0$.

5) Kui funktsioon $f(x)$ on pidev kinnises vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$, siis asetseb selles vahemikus vähemalt üks x väärtus $x = \xi$, mille puhul $f(\xi) = \mu$, kus μ on $f(a)$ ja $f(b)$ vahel.

Kui μ on $f(a)$ ja $f(b)$ vahel, siis

$$f(a) < \mu < f(b)$$

või

$$f(a) > \mu > f(b).$$

Moodustame uue funktsiooni

$$\varphi(x) = f(x) - \mu,$$

mis on samuti pidev vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$, sest $f(x)$ on pidev selles vahemikus. Esimesel juhul

$$\varphi(a) < 0 < \varphi(b)$$

ning teisel juhul

$$\varphi(a) > 0 > \varphi(b).$$

Kui aga funktsioon $\varphi(x)$ on pidev vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ ning $\varphi(a) < 0 < \varphi(b)$ või $\varphi(a) > 0 > \varphi(b)$, siis eelmise omaduse põhjal asetseb selles vahemikus vähemalt üks x väärtus $x = \xi$, mille puhul $\varphi(\xi) = 0$. Seega

$$\varphi(\xi) = f(\xi) - \mu = 0,$$

millest

$$f(\xi) = \mu.$$

Kui siinjuures pidev funktsioon $y = f(x)$ on vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ monotoonselt kasvav või monotoonselt kahanev, siis asetseb $f(a)$ ja $f(b)$ vahel üks ja ainult üks vahepealne väärtus μ. Sel juhul võime ka ümberpöördult funktsiooni $x = \varphi(y)$ vaadelda kui pidevat ja monotoonselt kasvavat või monotoonselt kahanevat funktsiooni vahemikus $f(a)$-st $f(b)$-ni.

IV peatükk

FUNKTSIOONIDE DIFERENTSIMINE

§ 29. Keha liikumise kiirus. Matemaatilises analüüsis uuritavatest muutuvatest suurustest, mis esinevad praktilistes küsimustes, etendab olulist osa nii tehniliste kui ka ühiskondlike ja looduslike protsesside muutumise kiirus. Kiirus, millega liigub näiteks auto või raudteerong, on auto või raudteerongi poolt tehtava töö tähtsaimaks iseloomustajaks; ühe või teise linna elanike juurdekasv teatavais ajavahemikes on samuti linna elu üheks põhilisemaks iseloomustajaks, jne.

Anname kvantitatiivse määrangu suurusele, mida me nimetame vaadeldava keha liikumise kiiruseks läbitud tee kindlas punktis ehk antud ajamomendil.

Liikugu näiteks auto kiirusega 50 km tunnis. Et aga auto liigub harilikult tunni aja vältel mitteühtlaselt, siis tema kiirus muutub kogu aeg. Tähendab, kui me ütleme, et auto läbib ühe tunni jooksul tee, mille pikkus on 50 km, siis sellest võime saada kujutluse ainult kui mingist keskmisest kiirusest ühe tunni vältel, kuid mitte kiirusest läbitud tee ühes või teises kindlas punktis, sest auto liikumise kiirus läbitud tee punktides võib tunni vältel oluliselt erineda.

Kui aga võtta ühe tunni asemel lühem ajavahemik, näiteks üks sekund, ja auto liikumise kiiruseks lugeda 15 m sekundis, siis selle ühe sekundi vältel auto liikumise kiirus muutub võrdlemisi vähe ja me võime lugeda auto liikumise keskmise kiiruse selle sekundi vältel palju paremaks lähenduseks auto liikumise kiirusele läbitud tee igas punktis.

Et määrata keha liikumise kiirust antud ajamomendil ehk läbitud tee antud punktis, selleks tähistame aja teatavast algmomendist alates tähega t ja läbitud tee pikkuse algmomendist kuni momendini t tähega s. Keha liikumisel läbitud tee pikkus s sõltub ajast t, nii et igale t väärtusele vastab kindel s väärtus ning seega läbitud tee pikkus s on aja t funktsioon, s. o.

$$s = f(t),$$

mida nimetatakse ühtlasi keha liikumise võrrandiks ehk liikumise seaduseks.

Küsimus, mida meil tuleb lahendada, seisab nüüd selles, et

anda kindel määrang keha liikumise kiirusele mistahes ajamomendil t ja leida ühtlasi võte selle kiiruse arvutamiseks, kui keha liikumine toimub seaduse $s = f(t)$ järgi. Olgu t antud ajamoment, mille jaoks me tahame leida keha liikumise kiirust. Võtame peale ajamomendi t veel mingi teise ajamomendi $t + \Delta t$, millele vastab läbitud tee pikkus

$$s + \Delta s = f(t + \Delta t).$$

Siit läbitud tee pikkuse kasv

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t),$$

mis vastab aja kasvule Δt, ja tähendatud kasvude suhe

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \qquad (1)$$

See läbitud tee s (kui funktsiooni) ja aja t (kui argumendi) kasvude suhe määrab keskmiselt funktsiooni muutumise kiiruse argumendi muutumisel ajavahemikus t kuni $t + \Delta t$, mistõttu me nimetame seda suhet funktsiooni $f(t)$ muutumise keskmiseks kiiruseks ajavahemikus Δt. Kui see funktsiooni ja argumendi kasvude suhe (1) omab lõplikku piirväärtust, kui $\Delta t \to 0$, siis nimetame selle suhte piirväärtust keha liikumise kiiruseks antud ajamomendil t, mida tähistame tähega v, s. o.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \qquad (2)$$

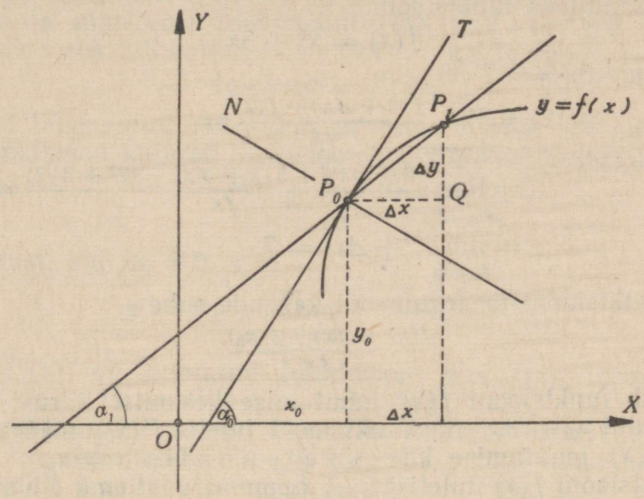
Tähendab, *liikuva keha kiirus antud ajamomendil t on võrdne piirväärtusega, millele läheneb läbitud teeosa Δs ja vastava ajavahemiku Δt suhe, kui $\Delta t \to 0$.* Sellega oleme defineerinud keha liikumise kiiruse antud momendil ja ühtlasi näidanud tee selle arvutamiseks.

Ajamomendi t võime valida vabalt. Kui t on valitud, siis valemis (2) piirväärtuse leidmise protsessis, kui $\Delta t \to 0$, tuleb t-le vaadata kui konstantsele suurusele, mille puhul me võime saada keha liikumise kiiruse antud ajamomendil t. Sõltuvalt valitud ajamomendist t ja ka funktsiooni $f(t)$ kujust võib valem (2) anda kindla piirväärtuse või seda mitte anda. Kui valem (2) ei anna kindlat piirväärtust, siis ütleme, et valitud ajamomendil t ei ole keha liikumise kiirus tähendatud valemiga määratud.

§ 30. Funktsiooni tuletis. 1) Üldistame eelmises paragrahvis käsitletud kiiruse mõistet. Selleks võtame ühe muutuja funktsiooni $y = f(x)$, mis olgu vaadeldavas vahemikus pidev x funktsioon. Siis selles vahemikus funktsiooni graafiliseks kujutiseks on pidev kõver (joon. 41). Märgime sellel kõveral mingi punkti $P_0(x_0, y_0)$ ja tema ümbruses (vasakul või paremal pool punkti P_0) teise punkti $P_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, kus Δx ja Δy on vastavalt argumendi ja funktsiooni kasvud, mis võivad olla nii positiivsed kui ka negatiivsed suurused. Tõmbame läbi punktide P_0 ja P_1

sirge; saame kõverjoone lõikaja, mis moodustab X-telje positiivse suunaga nurga α_1, kus $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Kui siin $y_0 = f(x_0)$, siis $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$, millest



Joon. 41.

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

ja jagades saadud võrduse mõlemad pooled Δx-ga, saame

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

mis väljendab funktsiooni $f(x)$ muutumise keskmist kiirust vahemikus x_0 kuni $x_0 + \Delta x$.

Kui hakkame argumendi kasvu Δx lähendama nullile, s. o. kui $\Delta x \to 0$, siis ühtlasi läheneb funktsiooni pidevuse tõttu nullile ka funktsiooni kasv Δy, s. o. $\Delta y \to 0$, ning punkt P_1 läheneb kõverat mööda punktile P_0 ja lõikaja P_0P_1 läheneb oma piirasendile ehk piirsirgele P_0T, s. o. puutujale punktis $P_0(x_0, y_0)$ *, kusjuures lõikaja ja X-telje vaheline nurk α_1 läheneb nurgale α_0, mille puutuja P_0T moodustab X-telje positiivse suunaga, ning seega ühtlasi $\operatorname{tg}\alpha_1 \to \operatorname{tg}\alpha_0$. Kui suhte $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ piirväärtus ehk lõplik $\operatorname{tg}\alpha_0$ on olemas, siis nimetame seda piirväärtust funktsiooni $f(x)$

---

* Kõvera puutujaks punktis P_0 nimetatakse lõikaja piirasendit, millele kõvera lõikaja läbi punktide P_0 ja P_1 piiramatult läheneb, kui teine lõikepunkt P_1 kõverat mööda liikudes piiramatult läheneb esimesele lõikepunktile P_0.

tuletiseks punktis $x = x_0$ ja tähistame (Lagrange'i* järgi) sümboliga $f'(x_0)$, s. o.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha_0.$$

Seega näiteks funktsiooni

$$f(x) = x^2 + 3x$$

tuletis punktis $x = 2$ on

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 + 3(2 + \Delta x) - (2^2 + 3 \cdot 2)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (7 + \Delta x) = 7.$$

Et funktsiooni ja argumendi kasvude suhe

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

väljendab funktsiooni $f(x)$ muutumise keskmist kiirust vahemikus x_0 kuni $x_0 + \Delta x$, siis funktsiooni tuletis $f'(x_0)$ määrab funktsiooni $f(x)$ muutumise kiiruse punktis $x = x_0$.

Funktsiooni $f(x)$ tuletist $x = x_0$ puhul vaatleme analüütiliselt kui piirväärtust, millele läheneb murd

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

kui argumendi kasv $\Delta x \to 0$. Geomeetriliselt tähendab funktsiooni $f(x)$ tuletis $x = x_0$ puhul puutuja tõusu, kui puutepunktiks on $P_0(x_0, y_0)$. Seda puutuja tõusu loeme ühtlasi kõvera tõusuks punktis $P_0(x_0, y_0)$, milles puutuja on kõvera sihti esitavaks sirgeks. Sellest järeldub, et kahe lõikuva kõvera vaheliseks nurgaks on nurk, mille moodustavad omavahel kõverate puutujad lõikepunktis.

Analüütilisest geomeetriast on teada, et punkti $P_0(x_0, y_0)$ läbiv sirge on määratud võrrandiga

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

kus k on sirge tõus. Et kõvera puutuja P_0T puhul $k = f'(x_0)$, siis seega kõvera $y = f(x)$ puutujat punktis $P_0(x_0, y_0)$ esitab võrrand

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

ja kõvera normaali P_0N, s. o. sirget, mis läbib puutepunkti ja on risti puutujaga, esitab võrrand

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

---

* J. L. Lagrange (1736—1813) oli professoriks Torinos, Berliinis ja Pariisis. Oma töös «Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du differentiel» käsitles ta diferentsiaalarvutuse põhimõisteid.

sest sirgete ristseisu tingimuse kohaselt peab normaali tõus võrduma puutuja vastasmärgilise tõusu pöördväärtusega.

Kui vaadeldavas vahemikus argumendi x iga väärtuse puhul funktsioon $y = f(x)$ omab vastavat tuletist ehk vastavat puutuja tõusu $\operatorname{tg}\alpha$, mis sõltub x-st, siis seega tekib uus x funktsioon, mida nimetame funktsiooni $f(x)$ tuletatud funktsiooniks ehk lühidalt $f(x)$ tuletiseks ja tähistame

$$\operatorname{tg}\alpha = y' = f'(x),$$

kus nüüd tähendatud vahemikus mistahes x väärtuse puhul tuletatud funktsioon kujutab funktsiooni ja argumendi kasvude suhte

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

piirväärtust, kui $\Delta x \to 0$, s. o.

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

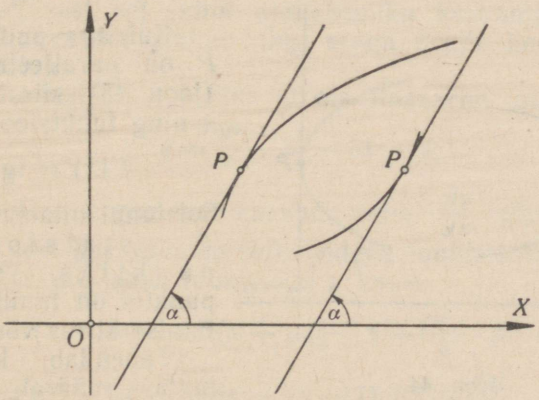
Kui $f'(x)$ on tuletatud funktsioon, siis $f(x)$ loeme algfunktsiooniks, millest on tuletatud $f'(x)$.

Kui materiaalse punkti liikumise seadust esitav funktsioon $s = f(t)$ on algfunktsiooniks (§ 29), siis punkti liikumise kiirust ajamomendil t esitab tuletatud funktsioon $f'(t)$, s. o. $v = f'(t)$.

2) Nagu nägime, on funktsiooni $y = f(x)$ tuletis võrdne selle nurga tangensiga, mille puutuja punktis $P(x, y)$ moodustab X-telje positiivse suunaga, s. o. $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$. Kui punkti P liikumisel kõverat mööda argumendi väärtuste kasvades funktsiooni vastavad väärtused kasvavad, siis asetseb punkt P tõusval kõveral või kõvera tõusval osal (joon. 42) ja nurk α vahemikus $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, mille puhul funktsiooni tuletis

$$f'(x) = \operatorname{tg}\alpha > 0.$$

Kui aga punkti P liikumisel kõverat mööda argumendi väärtuste

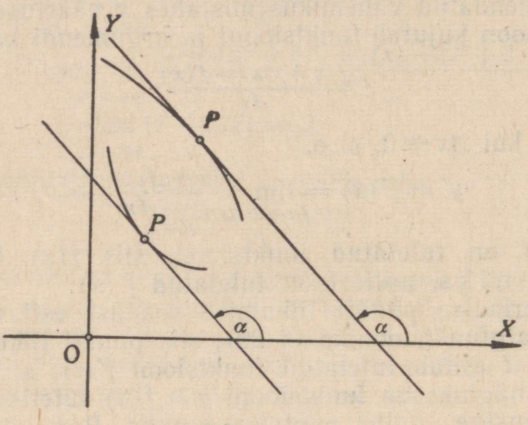


Joon. 42.

kasvades funktsiooni vastavad väärtused kahanevad, siis asetseb punkt P langeval kõveral või kõvera langeval osal (joon. 43) ja nurk α vahemikus $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, mistõttu funktsiooni tuletis

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha < 0.$$

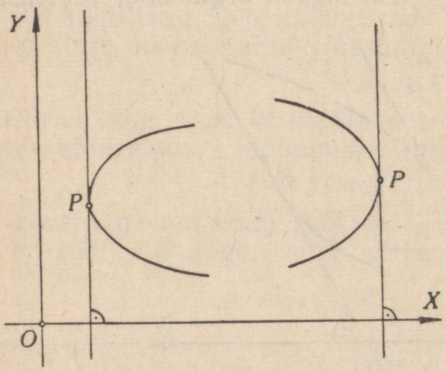
Seega võime öelda, et kui teatavas vahemikus argumendi kasvamisel funktsioon kogu aeg kasvab, siis on selle vahemiku



Joon. 43.

igas punktis $f'(x) > 0$, ja kui teatavas vahemikus argumendi kasvamisel funktsioon kogu aeg kahaneb, siis on selle vahemiku igas punktis $f'(x) < 0$, ja samuti ümberpöördult.

Kui kõvera puutuja punktis P on paralleelne Y-teljega (joon. 44), siis $\alpha = \frac{\pi}{2}$, mistõttu funktsiooni tuletis



Joon. 44.

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha = \infty.$$

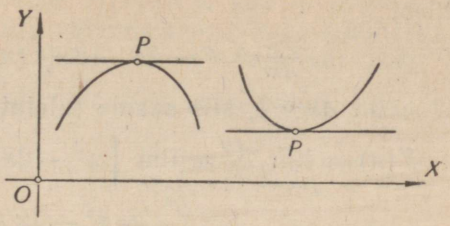
Kui aga puutuja punktis P on paralleelne X-teljega (joon. 45), siis on $\alpha = 0$ või π ning funktsiooni tuletis

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha = 0.$$

Sel juhul nimetatakse punkti P *statsionaarseks punktiks*, sest selles punktis on funktsiooni muutumise kiirus võrdne nulliga.

Tähendab, kui kõveral, mida määrab funktsioon $y = f(x)$, on vaadeldavas

punktis puutuja, siis on tal selles punktis ka tuletis, ja ümberpöördult. Kui seejuures kõvera punktis puutuja ei ole paralleelne Y-teljega, siis selles punktis on funktsiooni tuletis lõplik suurus; kui aga puutuja on paralleelne Y-teljega, siis funktsiooni tuletis on lõpmatus.



Joon. 45.

3) Kui funktsioon $y = f(x)$ on lineaarne, s. o.

$$y = kx + b,$$

mille graafikuks on sirge ja mille tõus on k, siis jääb funktsiooni ja argumendi kasvude vastastikusel muutumisel nende suhe $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ muutumatuks, sest kui anname argumendile x kasvu Δx, siis funktsioon y omandab kasvu

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = k(x + \Delta x) + b - (kx + b) = k\Delta x,$$

millest

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = k,$$

mis on konstantne suurus. Seega lineaarse funktsiooni tuletis

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$$

jääb ikka ja alati konstantseks suuruseks, mis näitab, et funktsiooni muutumine on sel juhul ühtlane.

Analoogiliselt sellele võime näidata, et kui materiaalse punkti liikumine toimub sirgjooneliselt, siis seda liikumist esitav võrrand on lineaarne ja liikumine on ühtlane, s. o. liikumise kiirus on konstantne, sest sel juhul ajavahemiku kasvamisel kasvab võrdeliselt käidava tee pikkus ning seega nende kasvude suhe jääb muutumatuks.

Kui aga funktsioon $y = f(x)$ ei ole lineaarne, nagu näiteks

$$y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 4,$$

siis funktsiooni ja argumendi kasvude suhe $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sõltub nii x-st kui ka Δx-st, sest kui anname selle pideva funktsiooni argumendile x kasvu Δx, siis saab funktsioon y kasvu

$$\Delta y = \frac{(x + \Delta x)^3}{3} - (x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 4 - \left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 4\right) =$$

$$= (x^2 - 2x - 3)\Delta x + (x - 1)\Delta x^2 + \frac{\Delta x^3}{3},$$

millest

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = x^2 - 2x - 3 + (x-1)\Delta x + \frac{\Delta x^2}{3}.$$

Kui nüüd $\Delta x \to 0$, siis saame tuletatud funktsiooni kujul

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[x^2 - 2x - 3 + (x-1)\Delta x + \frac{\Delta x^2}{3} \right] =$$

$$= x^2 - 2x - 3,$$

kus piirile mineku protsessis tuleb x vaadelda kui konstantset suurust.

Tulemusest nähtub, et saadud tuletatud funktsioon on samuti x funktsiooniks, mis näitab ühtlasi, et funktsiooni muutumine pole sel juhul ühtlane.

Kui siin argumendi väärtuseks võtta näiteks $x = 4$, siis funktsiooni väärtus

$$f(4) = \frac{4^3}{3} - 4^2 - 3 \cdot 4 + 4 = -2\frac{2}{3}$$

ning funktsiooni tuletis ehk funktsioonile vastava kõvera tõus punktis $x = 4$ on

$$f'(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 - 3 = 5.$$

Et näha, kuidas muutub suhe $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, kui Δx saab ikka väiksemaks ja väiksemaks argumendi väärtuse $x = 4$ ümbruses, selleks kasutame funktsiooni kasvu Δy väärtuste leidmiseks võrdust

$$\Delta y = 5\Delta x + 3\Delta x^2 + \frac{\Delta x^3}{3}$$

ja koostame järgmise tabeli:

Δx	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
0,05	0,257542	5,15084
0,02	0,101203	5,06015
0,01	0,0503003	5,03003
0,001	0,0050030003	5,00300
0,0001	0,0005000300	5,00030
0,00001	0,0000500003	5,00003
. . .	. . . . .	. . .

See tabel näitab, et argumendi kasvu Δx kahanemisel kahaneb ka funktsiooni kasv Δy ning suhe $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ läheneb järk-järgult piirväärtusele 5, s. o.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 5, \text{ kui } x = 4.$$

Et punktis $x = 4$ kõvera tõus $f'(4) = 5$, siis — rakendades eespool esinevat kõvera puutuja võrrandit — leiame käsitletavale funktsioonile vastava kõvera (joon. 46) puutuja võrrandi, kui puutepunktiks on $P\left(4, -2\frac{2}{3}\right)$. Puutuja võrrand on

$$y + 2\frac{2}{3} = 5(x - 4)$$

ehk

$$15x - 3y - 68 = 0.$$

Kõvera normaali võrrand on siis

$$y + 2\frac{2}{3} = -\frac{1}{5}(x - 4)$$

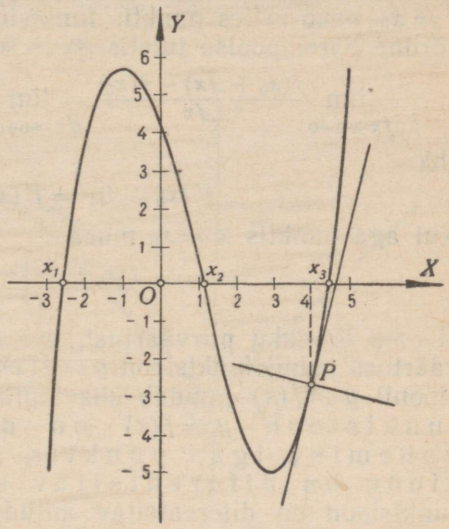
ehk

$$3x + 15y + 28 = 0.$$

Jooniselt võime määrata kõvera ja X-telje lõikepunktidele vastavate abstsisside ligikaudsed väärtused (ühe kümnendkohaga):

$$x_1 \approx -2{,}5;\ x_2 \approx 1{,}1;$$
$$x_3 \approx 4{,}4,$$

mis on ühtlasi kolmanda astme võrrandi



Joon. 46.

$$\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 4 = 0$$

ligikaudsed reaallahendid. Kõvera ligikaudsed tõusud neis lõikepunktides on

$$f'(-2{,}5) = (-2{,}5)^2 - 2 \cdot (-2{,}5) - 3 = 8{,}25,$$
$$f'(1{,}1) = 1{,}1^2 - 2 \cdot 1{,}1 - 3 = -3{,}99,$$
$$f'(4{,}4) = 4{,}4^2 - 2 \cdot 4{,}4 - 3 = 7{,}56$$

ning neile vastavad tõusunurgad

$$\alpha_1 \approx 83°30',\ \alpha_2 \approx 104°25',\ \alpha_3 \approx 82°30',$$

mis on kõvera ja X-telje positiivse suuna vaheliste nurkade ligikaudsed väärtused.

4) Funktsiooni tuletise leidmise protsessi ehk tehet nimetatakse funktsiooni d i f e r e n t s i m i s e k s. Me ütleme, et funktsioon $y = f(x)$ on punktis $x = x_0$ d i f e r e n t s i t a v, kui tal on selles punktis lõplik tuletis, s. o. kui argumendi kasvu $\Delta x \to 0$ puhul murd

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

omab piirväärtust $f'(x_0)$ vaatamata sellele, kas Δx läheneb nul-

lile vasakult või paremalt poolt punkti $x = x_0$. Kui $\Delta x \to 0$ vasakult poolt punkti x_0, siis ütleme, et saame funktsiooni vasakpoolse tuletise $f'(x_0 - 0)$, ja kui $\Delta x \to 0$ paremalt poolt punkti x_0, siis ütleme, et saame funktsiooni parempoolse tuletise $f'(x_0 + 0)$.

Selleks, et funktsioon $y = f(x)$ oleks diferentsitav punktis $x = x_0$, peab selles punktis funktsiooni vasakpoolne tuletis olema võrdne parempoolse tuletisega, s. o.

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

ehk

$$f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0) = f'(x_0).$$

Kui aga punktis $x = x_0$ murd

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ei oma lõplikku piirväärtust, kui $\Delta x \to 0$, siis ütleme, et selle x väärtuse puhul funktsioon $y = f(x)$ pole diferentsitav, s. o. funktsioonil $y = f(x)$ puudub siis lõplik tuletis punktis $x = x_0$. Kui funktsioon $y = f(x)$ on diferentsitav teatava vahemiku igas punktis, siis ütleme, et funktsioon on diferentsitav selles vahemikus. Kui funktsioon on diferentsitav antud vahemikus, siis selles vahemikus funktsioonile vastav kõver on sujuv, mis tähendab, et kõveral ei esine teravikke ega nurkpunkte ning kõvera puutuja sihi muutumine toimub pidevalt.

Kui funktsioon on teatud punktis diferentsitav, siis on ta selles punktis ikka ja alati pidev. Oletame, et funktsioon $y = f(x)$ on punktis $x = x_0$ diferentsitav, s. o.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Et muutuv suurus on võrdne oma piirväärtuse ja lõpmata kahaneva suuruse summaga (§ 17), siis seega

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + h,$$

kus h on lõpmata kahanev suurus, kui $\Delta x \to 0$. Kirjutame viimase võrduse järgmiselt:

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + h\Delta x,$$

millest nähtub, et kui $\Delta x \to 0$, siis ka

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \to 0$$

ehk

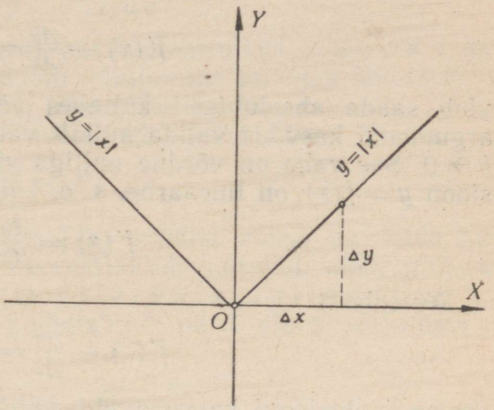
$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0),$$

mis ütleb, et funktsioon on pidev punktis $x = x_0$.

Ümberpöördult aga pole see alati nii. Funktsioon võib küll teatud punktis olla pidev ja omada seal lõplikku väärtust, kuid funktsiooni graafikul võib puududa selles punktis kindel puutuja ja seega võib funktsioon olla selles punktis mittediferentsitav.* Funktsiooni pidevus on seega tarvilik, kuid mitte piisav tingimus funktsiooni diferentsitavuseks, sest näiteks funktsioon

$$y = |x|$$

on küll pidev punktis $x = 0$, omades seal nii piirväärtust kui ka väärtust 0, kuid selles punktis ei saa funktsiooni graafikule (joon. 47) tõmmata kindlat puutujat ja seega funktsioonil puudub kindel lõplik tuletis. Kui antud funktsioon oleks punktis $x = 0$ diferentsitav, siis funktsiooni ja argumendi kasvude suhe $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ peaks omama kindlat lõplikku piirväärtust vaatamata sellele, kas $\Delta x \to 0$ vasakult või paremalt poolt punkti $x = 0$ ning funktsioonile vastav graafik peaks omama kindlat puutujat selles punktis. Et siin $\Delta x > 0$ puhul $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$ ja $\Delta x < 0$ puhul $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$, siis seega



Joon. 47.

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \text{ ja } \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1,$$

millest nähtub, et pidev funktsioon $y = |x|$ pole diferentsitav punktis $x = 0$.

Tähendab, funktsiooni pidevus on tarvilik selleks, et funktsioon omaks tuletist, kuid see tingimus pole siiski piisav.

Kui funktsioon on pidev ja ühtlasi diferentsitav teatud punktis, siis ei tarvitse tuletatud funktsioon olla igakord tähendatud punktis pidev.

---

* Esimesena selgitas funktsioonide pidevuse ja diferentsitavuse vahekorda kuulus vene matemaatik ja mitte-eukleidilise geomeetria looja Nikolai Ivanovitš Lobatševski (1793—1856), kes oli Kaasani ülikooli professoriks ja rektoriks.

Käesolevas raamatus vaatleme peamiselt neid pidevaid funktsioone, milledel on tuletis, s. o. funktsioone, mida saame diferentsida.

§ 31. Funktsiooni diferentsiaal. Olgu funktsioon $y = f(x)$ vaadeldavas punktis diferentsitav ja olgu tema tuletis selles punktis $f'(x)$. Kui selle punkti ümbruses Δx on vabalt võetav argumendi kasv ja sellele vastav funktsiooni kasv on Δy, siis funktsiooni tuletise $f'(x)$ ja nende kasvude suhte $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ vahe

$$f'(x) - \frac{\Delta y}{\Delta x} = h$$

võib saada absoluutselt kuitahes väikeseks, kui vabalt võetav argumendi kasv Δx valida küllalt väike, s. o. kui $\Delta x \to 0$, siis ka $h \to 0$. See vahe on võrdne nulliga siis ja ainult siis, kui funktsioon $y = f(x)$ on lineaarne, s. o. kui $y = kx + b$, sest siis

$$f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = k.$$

Avaldisest

$$f'(x) - \frac{\Delta y}{\Delta x} = h$$

saame funktsiooni kasvu avaldada järgmiselt:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x - h\Delta x,$$

kus nüüd parempoolse osa esimest liiget $f'(x)\Delta x$ kui funktsiooni tuletise ja vabalt võetava argumendi kasvu korrutist nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ d i f e r e n t s i a a l i k s * punktis x ja tähistatakse sümboliga

$$dy = df(x),$$

s. o.

$$dy = f'(x)\Delta x$$

ehk

$$df(x) = f'(x)\Delta x,$$

mis on ühtlasi funktsiooni kasvu Δy peaosaks.

Argumendi x kui sõltumatu muutuja diferentsiaaliks dx nimetatakse argumendi kasvu Δx, s. o.

$$dx = \Delta x,$$

mistõttu võime avaldada funktsiooni diferentsiaali kujul

$$dy = f'(x)\,dx.$$

---

* Sõna «diferentsiaal» on tuletatud ladinakeelsest sõnast *differentia*, mis tähendab vahet. Siin aga funktsiooni diferentsiaal tähendab funktsiooni kasvu kui funktsiooni kahe väärtuse vahet.

Seega funktsiooni diferentsiaal on võrdne funktsiooni tuletise ja argumendi diferentsiaali korrutisega. Et dx on sõltumatult x-st vabalt võetav argumendi diferentsiaal, siis võime funktsiooni diferentsiaali dy vaadelda kui kahe sõltumatu muutuja x ja dx funktsiooni.

Et funktsiooni tuletis $f'(x)$ väljendab kiirust, millega muutub funktsioon $f(x)$ argumendi x muutumisel, siis funktsiooni diferentsiaal

$$dy = f'(x)dx$$

kujutab funktsiooni mõeldavat kasvu vahemikus x kuni $x + dx$, kui selles vahemikus funktsiooni muutumine toimuks ühtlaselt ja nimelt selle kiirusega, mis on fikseeritud punktis x.

Jagades viimase võrduse mõlemad pooled dx-ga, saame

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

mis näitab, et funktsiooni $y = f(x)$ tuletist võime vaadelda kui funktsiooni ja argumendi diferentsiaalide jagatist, mida nimetatakse ka funktsiooni $y = f(x)$ diferentsiaaljagatiseks punktis x. Seega (juba Leibniz'ilt * pärit oleva kirjutusviisi järgi)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}.$$

Viimane kirjutis ei tähenda seda, et argumendi kasvu $\Delta x \to 0$ puhul funktsiooni kasv $\Delta y \to dy$, vaid ainult seda, et funktsiooni ja argumendi kasvude suhe $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ läheneb diferentsiaaljagatisele $\frac{dy}{dx}$, kui $\Delta x \to 0$.

Nagu näeme, on funktsiooni tuletise ja diferentsiaali leidmine oluliselt üks ja sama tehe, mida juba eespool nimetasime funktsiooni diferentsimiseks. Seepärast nimetatakse ka matemaatilise analüüsi seda osa, kus on tegemist funktsioonide tuletiste ja diferentsiaalide leidmisega ning nende rakendamisega, diferentsiaalarvutuseks.

Funktsiooni tuletise ja diferentsiaali mõisted on diferentsiaalarvutuse põhilisteks mõisteteks.

Kui funktsiooni $y = f(x)$ tuletis on

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

siis ütleme, et funktsioon on diferentsitud x järgi. Viimast võrdust võime esitada ka järgmiselt:

---

* G. W. Leibniz (1646—1716) pani koos Newtoniga aluse diferentsiaal- ja integraalarvutusele. Leibniz'i poolt on loodud ka praegu tarvitusel olev diferentsiaal- ja integraalarvutuse sümboolika.

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x),$$

kus sümbolit $\frac{d}{dx}$ loeme funktsiooni diferentsimise märgiks, kui funktsiooni diferentsitakse argumendi x järgi.

Paigutades eespool esinevasse funktsiooni kasvu avaldisse

$$\Delta y = f'(x)\Delta x - h\Delta x$$

$\Delta x = dx$, saame

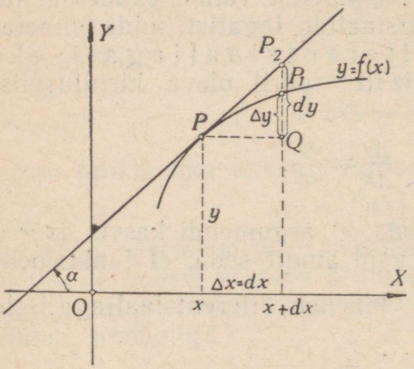
$$\Delta y = dy - hdx,$$

millest

$$dy - \Delta y = hdx,$$

kus hdx väljendab funktsiooni diferentsiaali dy erinevust funktsiooni kasvust Δy.

Et funktsiooni $y = f(x)$ tuletis punktis $P(x, y)$ on (joon. 48)



Joon. 48.

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha,$$

siis funktsiooni diferentsiaal

$$dy = \operatorname{tg}\alpha \cdot dx = \Delta y + hdx$$

kujutab geomeetriliselt funktsiooni kasvu Δy kui lõiku ühes tema lineaarse (positiivse või negatiivse) pikendusega hdx kuni puutujani, kus $hdx = P_1P_2$, sest

$$dy = \operatorname{tg}\alpha \cdot dx = QP_2, \ \Delta y = QP_1$$

ja seega

$$P_1P_2 = QP_2 - QP_1 = dy - \Delta y = hdx.$$

§ 32. Liitfunktsiooni tuletis ja diferentsiaal. Kui y on u funktsioon ja u on omakorda x funktsioon, s. o.

$$y = f(u), \ u = \varphi(x),$$

siis y on ühtlasi x liitfunktsioon, s. o.

$$y = f[\varphi(x)].$$

Selle liitfunktsiooni puhul oletame, et sisemine funktsioon $\varphi(x)$ on pidev ja ühtlasi diferentsitav vaadeldavas punktis x ning välimine funktsioon $f(u)$ on samuti pidev ja diferentsitav x-le vastavas punktis $u = \varphi(x)$.

Kui anname siin argumendile x kasvu Δx, siis saab sisemine funktsioon ehk abimuutuja u kasvu Δu ja sellega ühtlasi saab välimine funktsioon y kasvu Δy, kusjuures $\Delta x \to 0$ puhul ka $\Delta u \to 0$ ja $\Delta y \to 0$. Et oletuse kohaselt funktsioon $u = \varphi(x)$ on diferentsitav punktis x ja funktsioon $y = f(u)$ on diferentsitav

x-le vastavas punktis u, siis neis punktides funktsioonide tuletised olgu vastavalt

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \quad \text{ja} \quad \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{dy}{du}.$$

See tähendab, et

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} - h_1, \qquad \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{dy}{du} - h_2,$$

kus h_1 on lõpmata kahanev suurus, kui $\Delta x \to 0$, ja h_2 on lõpmata kahanev suurus, kui $\Delta u \to 0$. Kirjutades viimased võrdused järgmiselt:

$$\Delta u = \frac{du}{dx}\Delta x - h_1 \Delta x, \qquad \Delta y = \frac{dy}{du}\Delta u - h_2 \Delta u,$$

ja asetades nüüd esimesest võrdusest Δu väärtuse teise võrdusse, saame

$$\Delta y = \frac{dy}{du}\left(\frac{du}{dx}\Delta x - h_1 \Delta x\right) - h_2\left(\frac{du}{dx}\Delta x - h_1 \Delta x\right),$$

millest

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{du}\left(\frac{du}{dx} - h_1\right) - h_2\left(\frac{du}{dx} - h_1\right) =$$

$$= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} - h_1 \frac{dy}{du} - h_2 \frac{du}{dx} + h_1 h_2.$$

Lõpmata kahanevate suuruste omaduste (§ 17) põhjal on saadud võrduse parempoolse osa viimase kolme liikme summa lõpmata kahanev suurus, kui $\Delta x \to 0$ ja sellega ühtlasi ka $\Delta u \to 0$. See tähendab aga, et

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

ehk

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x),$$

millest nähtub, et antud liitfunktsiooni tuletis on võrdne välimise funktsiooni tuletisega abimuutuja järgi, mis on korrutatud selle abimuutuja (kui sisemise funktsiooni) tuletisega argumendi järgi.*

* Olgu siinjuures tähendatud, et meie määrangu järgi funktsiooni ja argumendi diferentsiaalide suhe $\frac{du}{dx} = \varphi'(x)$, kuid suhte $\frac{dy}{du}$ kohta ei saa vahetult öelda, et see oleks igakord võrdne $f'(u)$-ga, sest siin $\frac{dy}{du}$ kujutab kahe funktsiooni diferentsiaalide suhet, aga mitte funktsiooni ja argumendi (kui sõltumatu muutuja) diferentsiaalide suhet. Et käesoleval juhul siiski $\frac{dy}{du} = f'(u)$, järeldub antud liitfunktsiooni diferentsimise valemist.

Liitfunktsiooni tuletise valemist leiame liitfunktsiooni diferentsiaali

$$dy = f'(u)\varphi'(x)\,dx.$$

Et siin $\varphi'(x)\,dx$ kujutab abimuutuja u diferentsiaali du, s. o.

$$\varphi'(x)\,dx = d\varphi(x) = du,$$

siis võime funktsiooni y diferentsiaali dy esitada kujul

$$dy = f'(u)\,du,$$

millest nähtub, et funktsiooni diferentsiaali avaldis jääb ikka ja alati kujuühtseks sõltumatult sellest, kas muutuja u on argumendiks või mingi teise muutuja funktsiooniks. Niisugust funktsiooni diferentsiaali avaldise kujuühtsuse püsima jäämist muutuja teisenduse puhul nimetatakse selle avaldise *invariantsuseks*. Seega võime öelda, et funktsiooni diferentsiaal on invariantne argumendi teisenduse suhtes. Siin tuleb meeles pidada, et kui u on argument (sõltumatu muutuja), siis du on vabalt võetav argumendi kasv; kui aga u on funktsioon (abimuutuja), siis du on selle funktsiooni diferentsiaal, s. o. suurus, mis üldiselt ei ühti funktsiooni kasvuga.

Matemaatilise induktsiooni meetodiga võime näidata, et käsitletud liitfunktsiooni diferentsimise juhist saab üldistada liitfunktsioonidele, milledes esineb kaks või rohkem abimuutujat. Kui näiteks y on u funktsioon, u on v funktsioon ja v on x funktsioon, s. o.

$$y = f(u),\ u = \varphi(v),\ v = \psi(x),$$

mis on pidevad ja ühtlasi diferentsitavad x-le vastavates punktides, siis liitfunktsiooni

$$y = f\{\varphi[\psi(x)]\}$$

tuletis

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} = f'(u)\varphi'(v)\psi'(x),$$

kusjuures funktsiooni diferentsiaal

$$dy = f'(u)\varphi'(v)\psi'(x)\,dx = f'(u)\varphi'(v)\,dv = f'(u)\,du.$$

Sellest tulemusest nähtub samuti, et funktsiooni diferentsiaal on invariantne argumendi teisenduse suhtes.

Analoogiliselt ilmneb, et kui

$$y = f_1(u_1),\ u_1 = f_2(u_2),\ \ldots,\ u_{n-1} = f_n(u_n),\ u_n = f_{n+1}(x),$$

kus abimuutujad $u_1, u_2, \ldots, u_n$ on pidevad ja ühtlasi diferentsitavad x-le vastavates punktides, siis

$$\frac{dy}{dx} = f_1'(u_1)\cdot f_2'(u_2)\ldots f_n'(u_n)\cdot f'_{n+1}(x).$$

Üldiselt, et liitfunktsiooni diferentsida, tuleb teda diferentsida esimese abimuutuja järgi, siis esimest abimuutujat diferentsida teise abimuutuja järgi, teist abimuutujat diferentsida kolmanda abimuutuja järgi jne., lõpuks viimast abimuutujat diferentsida argumendi järgi ja siis saadud tuletised korrutada. Niisugust liitfunktsiooni diferentsimise juhist nimetatakse diferentsiaalarvutuse a h e l j u h i s e k s.

§ 33. Pöördfunktsiooni tuletis. Kui funktsioon $y = f(x)$ on pidev ja ühtlasi monotoonselt kasvav (või kahanev) vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$, siis, ümberpöördult, funktsioon $x = \varphi(y)$ on pidev vahemikus $f(a)$-st $f(b)$-ni (§ 27, teoreem 4).

Oletame, et funktsioon $y = f(x)$ on vahemikus $a < x < b$ diferentsitav, omades tuletist

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x),$$

kusjuures on ikka $f'(x) > 0$ või $f'(x) < 0$.

Võtame vahemikus $f(a)$-st $f(b)$-ni kaks väärtust y ja $y + \Delta y$, milledele vastavad vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ funktsiooni $\varphi(y)$ väärtused x ja $x + \Delta x$, s. o.

$$\varphi(y) = x, \quad \varphi(y + \Delta y) = x + \Delta x.$$

Lahutades teisest võrdusest esimese

$$\varphi(y + \Delta y) - \varphi(y) = \Delta x$$

ja jagades Δy-ga, saame

$$\frac{\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}.$$

Kui nüüd $\Delta y \to 0$, siis funktsiooni $\varphi(y)$ pidevuse tõttu ka $\Delta x \to 0$ ja

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}$$

ehk

$$\varphi'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'(x)}.$$

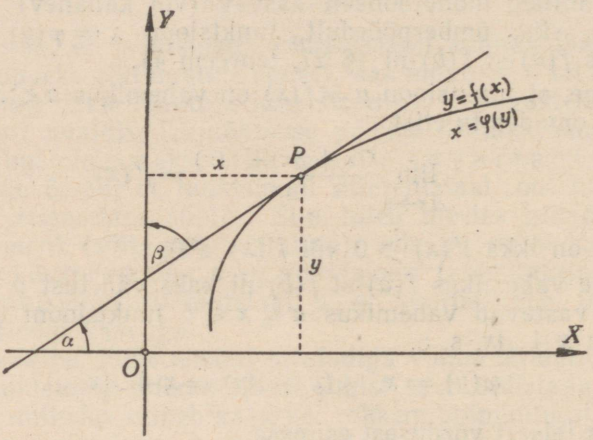
kus $\frac{dx}{dy} = \varphi'(y)$ tähendab, et funktsiooni $x = \varphi(y)$ on d i f e r e n t s i t u d y j ä r g i.

Sama tulemus ilmneb ka funktsioonide $y = f(x)$ ja $x = \varphi(y)$ geomeetrilisest tõlgendusest. Funktsiooni $y = f(x)$ tuletis

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha,$$

kus α on nurk, mille moodustab kõvera puutuja punktis $P(x, y)$ X-telje positiivse suunaga (joon. 49), ja funktsiooni $x = \varphi(y)$ tuletis

$$\varphi'(y) = \operatorname{tg} \beta,$$



Joon. 49.

kus β on nurk, mille moodustab kõvera puutuja punktis $P(x, y)$ Y-telje positiivse suunaga. Et siin $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, siis

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha},$$

millest nähtub samuti, et

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Kui aga $f'(x) = 0$, siis pole tuletatud funktsioon $\varphi'(y)$ määratud.

§ 34. Diferentsimise teoreeme. Käesolevas paragrahvis käsitletavad teoreemid annavad eeskirjad funktsioonide diferentsimiseks. Neis teoreemides esinevate funktsioonide suhtes oletame, et nad on pidevad vaadeldavas vahemikus või vaadeldavas punktis ja omavad seal lõplikku tuletist.

Teoreem 1: Kui funktsioonid $f(x)$ ja $f(x) + c$, mis erinevad teineteisest ainult konstantse liikme c poolest, on diferentsitavad punktis x, siis on nende tuletised võrdsed.

Kui konstantse liikmega funktsioonis

$$y = f(x) + c$$

anname argumendile x kasvu Δx, siis funktsioon y saab vastavalt kasvu Δy, s. o.

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) + c,$$

millest funktsiooni kasv

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

ning funktsiooni ja argumendi kasvude suhe

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

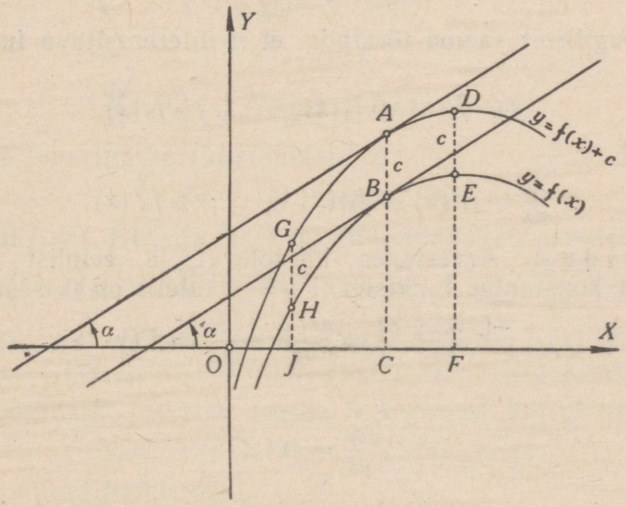
Seega funktsiooni $y = f(x) + c$ tuletis on

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x),$$

mis on samane funktsiooni $y = f(x)$ tuletisega. Tähendab,

$$\frac{d[f(x) + c]}{dx} = \frac{df(x)}{dx},$$

mis näitab otseselt, et funktsioonidele $y = f(x) + c$ ja $y = f(x)$



Joon. 50.

vastavate kõverate puutujad võrdsete abstsissidega punktides on paralleelsed, sest nende tõusud on võrdsed. Ordinaadid neis punktides erinevad teineteisest konstantse suuruse c võrra (joon. 50), nagu näiteks $CA = CB + c$.

Teoreem 2: Kui funktsioonid $f_1(x)$ ja $f_2(x)$ on diferentsitavad punktis x, siis on nende funktsioonide summa (vahe) tuletis võrdne funktsioonide tuletiste summaga (vahega).

Kui anname funktsioonide summat (vahet) esitavas funktsioonis

$$y = f_1(x) \pm f_2(x)$$

argumendile x kasvu Δx, siis saab funktsioon y kasvu Δy, s. o.

$$y + \Delta y = f_1(x + \Delta x) \pm f_2(x + \Delta x),$$

millest funktsiooni kasv

$$\Delta y = f_1(x + \Delta x) \pm f_2(x + \Delta x) - f_1(x) \mp f_2(x)$$

ning funktsiooni ja argumendi kasvude suhe

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_1(x + \Delta x) - f_1(x)}{\Delta x} \pm \frac{f_2(x + \Delta x) - f_2(x)}{\Delta x},$$

mille piirväärtus, kui $\Delta x \to 0$, on antud funktsioonide summat (vahet) esitava funktsiooni tuletis:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_1(x + \Delta x) - f_1(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_2(x + \Delta x) - f_2(x)}{\Delta x} =$$

$$= f_1'(x) \pm f_2'(x).$$

Analoogiliselt saame tõestada, et n diferentsitava funktsiooni summa

$$y = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$$

tuletis on

$$\frac{dy}{dx} = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x).$$

Järeldus: Arvestades käesolevat ja eelmist teoreemi, näeme, et konstantse funktsiooni $y = c$ tuletis on 0, sest

$$\frac{d[f(x) + c]}{dx} = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dc}{dx} = f'(x),$$

kus

$$\frac{dc}{dx} = 0.$$

Funktsiooni $y = c$ graafikuks on sirge, mis on paralleelne X-teljega ja mille tõus on 0, s. o.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = 0.$$

Teoreem 3: Kui funktsioonid $f_1(x)$ ja $f_2(x)$ on diferentsitavad punktis x, siis korrutisfunkt-

siooni $f_1(x) \cdot f_2(x)$ tuletise saame, kui esimese funktsiooni korrutame teise funktsiooni tuletisega, teise funktsiooni korrutame esimese funktsiooni tuletisega ja saadud korrutised liidame.

Kui $y = f_1(x) \cdot f_2(x)$, siis funktsiooni kasv

$$\Delta y = f_1(x + \Delta x) \cdot f_2(x + \Delta x) - f_1(x) \cdot f_2(x)$$

ning funktsiooni ja argumendi kasvude suhe

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_1(x + \Delta x) \cdot f_2(x + \Delta x) - f_1(x) \cdot f_2(x)}{\Delta x}.$$

Lahutades ja liites viimase võrduse parempoolse osa lugejas $f_1(x + \Delta x) \cdot f_2(x)$, saame

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_1(x+\Delta x) \cdot f_2(x+\Delta x) - f_1(x+\Delta x) \cdot f_2(x) + f_1(x+\Delta x) \cdot f_2(x) - f_1(x) \cdot f_2(x)}{\Delta x} =$$

$$= f_1(x + \Delta x) \cdot \frac{f_2(x + \Delta x) - f_2(x)}{\Delta x} + f_2(x) \cdot \frac{f_1(x + \Delta x) - f_1(x)}{\Delta x},$$

mille piirväärtus, kui $\Delta x \to 0$, on

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f_1(x + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_2(x + \Delta x) - f_2(x)}{\Delta x} +$$

$$+ f_2(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_1(x + \Delta x) - f_1(x)}{\Delta x}$$

ehk

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2'(x) + f_2(x) \cdot f_1'(x).$$

Kolme teguriga korrutisfunktsiooni

$$y = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x)$$

puhul, kui $f_1(x)$, $f_2(x)$ ja $f_3(x)$ on diferentsitavad punktis x, saame

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot \frac{d[f_2(x) \cdot f_3(x)]}{dx} + f_2(x) \cdot f_3(x) \cdot \frac{df_1(x)}{dx} =$$

$$= f_1(x)[f_2(x) \cdot f_3'(x) + f_3(x) \cdot f_2'(x)] + f_2(x) \cdot f_3(x) \cdot f_1'(x) =$$
$$= f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3'(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x) \cdot f_3(x) + f_1'(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x).$$

Analoogiliselt jätkates saame n teguriga korrutisfunktsiooni

$$y = f_1(x) \cdot f_2(x) \ \ldots \ f_{n-1}(x) \cdot f_n(x)$$

puhul tuletatud funktsiooni

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(x) \ \ldots \ f_{n-1}(x) \cdot f_n'(x) +$$
$$+ f_1(x) \cdot f_2(x) \ \ldots \ f_{n-1}'(x) \cdot f_n(x) +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$+ f_1'(x) \cdot f_2(x) \ \ldots \ f_{n-1}(x) \cdot f_n(x).$$

Kui meil on konstantse teguriga funktsioon

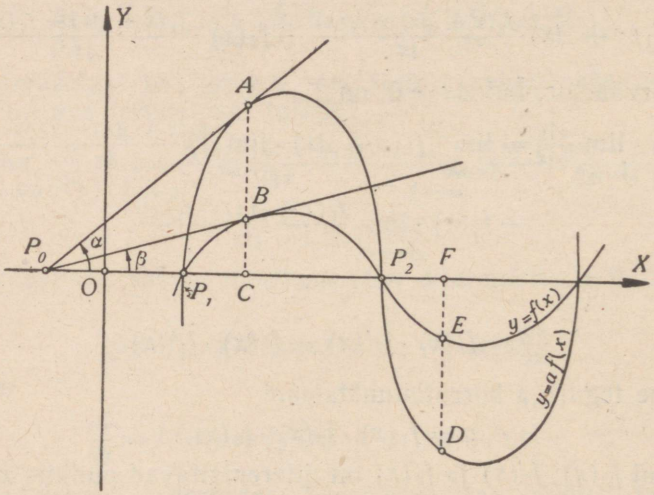
$$y = af(x),$$

milles $f(x)$ on diferentsitav funktsioon ja a on konstantne tegur, siis — rakendades selle funktsiooni tuletise leidmisel käsitletavat teoreemi — saame

$$\frac{dy}{dx} = a \cdot \frac{df(x)}{dx} + f(x) \cdot \frac{da}{dx} = af'(x),$$

sest $\frac{da}{dx} = 0$, ja seega $y' = af'(x)$, mis ütleb, et funktsiooni konstantne tegur jääb diferentsimisel ka tuletise konstantseks teguriks.

Graafiliselt esitavad funktsioonid $y = af(x)$ ja $y = f(x)$ mingisuguseid pidevaid kõverjooni, kus võrdsete abstsisside puhul ühe kõverjoone punkti ordinaat on teise kõverjoone vastava punkti ordinaadi a-kordne (joon. 51). Punkti A ordinaat CA on a korda



Joon. 51.

pikem kui punkti B ordinaat CB, punkti D ordinaat FD on a korda pikem kui punkti E ordinaat FE jne. Punktides P_1 ja P_2 on ordinaadid nullid, sest kui $f(x) = 0$, siis on ka $af(x) = 0$.

Puutuja punktis B lõikab X-telge punktis P_0 ja moodustab X-teljega nurga β, kus

$$\operatorname{tg} \beta = f'(x) = \frac{CB}{P_0C}.$$

Et punktis A ordinaat on a korda pikem kui punktis B, s. o. $CA = a \cdot CB$, siis punktis A puutuja tõus

$$\operatorname{tg} \alpha = af'(x) = a\frac{CB}{P_0C} = \frac{CA}{P_0C},$$

millest nähtub, et puutuja punktis A lõikab X-telge samuti punktis P_0.

Teoreem 4: Kui funktsioonid $f_1(x)$ ja $f_2(x)$ on diferentsitavad punktis x, siis murdfunktsiooni $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ tuletise saame, kui lugeja tuletise korrutame nimetajaga, tulemusest lahutame nimetaja tuletise ja lugeja korrutise ning saadud vahe jagame nimetaja ruuduga, tingimusel, et $f_2(x) \neq 0$.

Kui $y = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, siis funktsiooni kasv

$$\Delta y = \frac{f_1(x+\Delta x)}{f_2(x+\Delta x)} - \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f_1(x+\Delta x)\cdot f_2(x) - f_2(x+\Delta x)\cdot f_1(x)}{f_2(x+\Delta x)\cdot f_2(x)}.$$

Lahutame ja liidame saadud võrduse parempoolse osa lugejas $f_1(x)\cdot f_2(x)$ ja jagame siis võrduse mõlemad pooled Δx-ga; saame funktsiooni ja argumendi kasvude suhte kujul

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{f_1(x+\Delta x)-f_1(x)}{\Delta x}\cdot f_2(x) - \frac{f_2(x+\Delta x)-f_2(x)}{\Delta x}\cdot f_1(x)}{f_2(x+\Delta x)\cdot f_2(x)},$$

mille piirväärtus, kui $\Delta x \to 0$, on

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f_2(x)\cdot \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f_1(x+\Delta x)-f_1(x)}{\Delta x} - f_1(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f_2(x+\Delta x)-f_2(x)}{\Delta x}}{f_2(x)\cdot \lim\limits_{\Delta x\to 0} f_2(x+\Delta x)}.$$

ehk

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_2(x)\cdot f'_1(x) - f_1(x) f'_2(x)}{f_2(x)^2},$$

kus $f_2(x)^2$ all mõistame $[f_2(x)]^2$.

Kui murdfunktsiooni lugeja on konstantne suurus a, s. o.

$$y = \frac{a}{f(x)},$$

siis funktsiooni tuletis on

$$\frac{dy}{dx} = -a\cdot\frac{f'(x)}{f(x)^2}.$$

§ 35. Astmefunktsiooni tuletis. Leiame astmefunktsiooni

$$y = x^n$$

tuletise, kui n on positiivne või negatiivne täisarv.

Oletame, et n on positiivne täisarv. Kasutades Newtoni binoomi arendirida, võime esitada funktsiooni ja argumendi kasvude suhte järgmiselt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$= \binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2}\Delta x + \binom{n}{3} x^{n-3}\Delta x^2 + \ldots + \Delta x^{n-1},$$

mille piirväärtus, kui $\Delta x \to 0$, on

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2}\Delta x + \binom{n}{3} x^{n-3}\Delta x^2 + \right.$$

$$\left. + \ldots + \Delta x^{n-1} \right] = \binom{n}{1} x^{n-1} = nx^{n-1},$$

s. o.

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}.$$

Kui n on negatiivne täisarv, s. o. $n = -m$, siis

$$y = x^{-m} = \frac{1}{x^m},$$

mille tuletise leidmiseks kasutame juba saadud valemit positiivse täisarvulise astendaja puhul ja eelmise paragrahvi neljandat teoreemi, saades

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1},$$

millest nähtub, et negatiivse täisarvulise astendaja puhul jääb astmefunktsiooni tuletise leidmisel kehtima sama seadus, mis kehtib positiivse täisarvulise astendaja puhul, s. o. algfunktsiooni astendaja tuleb korrutada argumendiga, mille astendaja on ühe võrra väiksem algfunktsiooni astendajast. Seega iga täisarvulise astendaja puhul

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$$

Järgmises paragrahvis näeme, et see valem kehtib üldiselt igasuguse reaalse astendaja n puhul.

Saadud valemit ja eelmises paragrahvis esinevaid teoreeme rakendades leiame murdfunktsiooni

$$y = \frac{a+x^3}{b-2x^2}$$

tuletise. Siin a ja b on konstantsed suurused, millede tuletised on võrdsed nulliga. Tähendab,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(b-2x^2)\cdot(a+x^3)' - (a+x^3)\cdot(b-2x^2)'}{(b-2x^2)^2} =$$

$$= \frac{(b-2x^2)\cdot 3x^2 - (a+x^3)\cdot(-4x)}{(b-2x^2)^2} = \frac{x(4a+3bx-2x^3)}{(b-2x^2)^2}.$$

Kui astendatav on x funktsioon $f(x)$, siis astmefunktsioon

$y = f(x)^n$ kujutab liitfunktsiooni, mille tuletis (§ 32 järgi) on

$$\frac{dy}{dx} = n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x).$$

Näiteks kui

$$y = (3x^2 - 2)^5,$$

kus $y = u^5$ ja $u = 3x^2 - 2$, siis antud astmefunktsiooni tuletis on

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 5(3x^2 - 2)^4 \cdot 3 \cdot 2x = 30x(3x^2 - 2)^4.$$

§ 36. Logaritm- ja eksponentfunktsiooni tuletised. 1) Logaritmfunktsiooni

$$y = \ln x$$

puhul

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \frac{\ln \frac{x + \Delta x}{x}}{\Delta x} = \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Et leida selle võrduse parempoolse osa piirväärtust, kui $\Delta x \to 0$, selleks tähistame

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{n},$$

kus $n \to \infty$, kui $\Delta x \to 0$. Siis

$$\Delta x = \frac{x}{n}$$

ja

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{x} = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{x},$$

mille piirväärtus (§ 19)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{x} = \frac{\ln \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{x} = \frac{\ln e}{x} = \frac{1}{x},$$

sest

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \text{ ja } \ln e = 1.$$

Tähendab, kui

$$y = \ln x,$$

siis tema tuletis

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x},$$

s. o. logaritmfunktsiooni tuletis on võrdne argumendi pöördväärtusega.

Kui logaritmitav on x funktsioon $f(x)$, siis logaritmfunktsioon $y = \ln f(x)$ kujutab liitfunktsiooni, mille tuletis on

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Kui näiteks

$$y = \ln (2x^3 + 5),$$

siis selle logaritmfunktsiooni tuletis on

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{2x^3 + 5}.$$

Kui

$$y = \ln^3 (x^2 - 2),$$

kus $y = u^3$, $u = \ln v$ ja $v = x^2 - 2$, siis selle liitfunktsiooni tuletis on

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} =$$

$$= 3 \ln^2 (x^2 - 2) \cdot \frac{1}{x^2 - 2} \cdot 2x = \frac{6x \ln^2 (x^2 - 2)}{x^2 - 2},$$

kus y on diferentsitud u järgi, u on diferentsitud v järgi ja v on diferentsitud x järgi.

Kümnendlogaritmi tuletise leiame naturaallogaritmi tuletise kaudu. Selleks kirjutame (§ 22, p. 2)

$$\log x = 0{,}4343 \ln x,$$

kus 0,4343 on kümnendlogaritmide moodul. Funktsiooni $y = \log x$ tuletis on siis

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (\log x) = 0{,}4343 \cdot \frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{0{,}4343}{x}.$$

Et arvu x logaritm mistahes alusel a on (§ 22, p. 2)

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a},$$

siis selle logaritmi tuletis on

$$\frac{d}{dx} (\log_a x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{1}{x \ln a}.$$

2) Eksponentfunktsiooni

$$y = a^x$$

tuletise saamiseks logaritmime seda funktsiooni, s. o.

$$\ln y = x \ln a,$$

millest

$$x = \frac{\ln y}{\ln a},$$

mis kujutab nüüd logaritmfunktsiooni, kus x vaatleme kui y funktsiooni. Diferentsides viimast funktsiooni y järgi:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y \ln a} = \frac{1}{a^x \ln a},$$

saame (§ 33 põhjal) eksponentfunktsiooni $y = a^x$ tuletise

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a.$$

Seega eksponentfunktsiooni tuletis on võrdne sama eksponentfunktsiooniga, mis on korrutatud astendatava naturaallogaritmiga.

Erijuhul, kui eksponentfunktsioonis astendatav on võrdne naturaallogaritmide alusega e, s. o. kui

$$y = e^x,$$

siis

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x) = e^x \ln e = e^x,$$

mis näitab, et eksponentfunktsiooni e^x tuletis on sama eksponentfunktsioon.

Eksponentfunktsiooni $y = a^x$ tuletise võime leida ka teisiti. Selleks diferentsime logaritmitud eksponentfunktsiooni

$$\ln y = x \ln a$$

mõlemaid pooli argumendi x järgi. Et viimane võrdus kujutab samasust, siis peab ka selle võrduse vasaku poole tuletis olema võrdne parema poole tuletisega. Et siin võrduse vasakpoolne osa kujutab ühtlasi x liitfunktsiooni, siis diferentsides saame

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \ln a,$$

millest

$$\frac{dy}{dx} = y \ln a = a^x \ln a.$$

Niisugust eksponentfunktsiooni tuletise leidmise võtet, kus enne kasutatakse funktsiooni logaritmimist ja siis funktsiooni logaritmi diferentsimist, nimetatakse logaritmiliseks diferentsimiseks.

Rakendades logaritm- ja eksponentfunktsiooni tuletise valemeid, võime leida näiteks liitfunktsiooni

$$y = 2e^{3x} \ln^2 x$$

tuletise:

$$\frac{dy}{dx} = 2[e^{3x} \cdot (\ln^2 x)' + (e^{3x})' \cdot \ln^2 x] =$$

$$= 2\left(e^{3x} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} + e^{3x} \cdot 3 \cdot \ln^2 x\right) =$$

$$= 2\, e^{3x} \ln x \left(\frac{2}{x} + 3 \ln x\right).$$

3) Teades logaritm- ja eksponentfunktsiooni diferentsimise võtet, saame näidata, et eelmises paragrahvis toodud astmefunktsiooni tuletise valem

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

kehtib iga reaalse astendaja puhul.

Oletame, et funktsioonis $y = x^n$ astendaja n on mistahes reaalarv. Logaritmides seda funktsiooni, saame

$$\ln y = n \ln x,$$

mida x järgi diferentsides saame

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{n}{x},$$

millest

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ny}{x} = \frac{nx^n}{x} = nx^{n-1}.$$

Seega astmefunktsiooni $y = x^n$ tuletise valem

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

on rakendatav iga reaalse n puhul.

Ilmutades näiteks ellipsi kanoonilisest võrrandist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

funktsiooni y, saame

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

mida (kui liitfunktsiooni) argumendi x järgi diferentsides saame

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{dx}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2}(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx}(a^2 - x^2) =$$

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2}(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

4) Kui esineb eksponentsiaal-astmefunktsioon

$$y = u^v,$$

kus u ja v on x funktsioonid, s. o.

$$u = \varphi(x) > 0, \quad v = \psi(x),$$

mis on pidevad ja ühtlasi diferentsitavad, siis logaritmides

$$\ln y = v \ln u$$

ja x järgi diferentsides saame

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \cdot \frac{du}{dx} + \ln u \cdot \frac{dv}{dx},$$

millest

$$\frac{dy}{dx} = u^v \left(\frac{v}{u} \cdot \frac{du}{dx} + \ln u \cdot \frac{dv}{dx} \right).$$

Kui erijuhul $y = x^x$, siis saadud valemi järgi

$$\frac{dy}{dx} = x^x (1 + \ln x).$$

Kui aga $u = x$ ja $v = n$ on konstantne reaalarv, siis saame astmefunktsiooni tuletise valemi.

Kui näiteks

$$y = (2x - 1)^{2x+1},$$

kus

$$u = 2x - 1, \quad v = 2x + 1,$$

siis

$$\frac{dy}{dx} = (2x-1)^{2x+1} \cdot \left[\frac{2x+1}{2x-1} \cdot \frac{d}{dx}(2x-1) + \ln(2x-1) \cdot \frac{d}{dx}(2x+1) \right] =$$

$$= (2x-1)^{2x+1} \left[\frac{2x+1}{2x-1} \cdot 2 + \ln(2x-1) \cdot 2 \right] =$$

$$= 2(2x-1)^{2x} [2x + 1 + (2x-1)\ln(2x-1)].$$

5) Kui y on x ilmutamata funktsioon, siis võime tema tuletise leida ka otseselt (ilma et ilmutaksime y). Selleks diferentsime funktsiooni y sisaldava võrduse mõlemaid pooli argumendi x järgi. Leiame sel teel näiteks ellipsi võrrandis

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

esineva y tuletise. Diferentsides võrrandi mõlemaid pooli x järgi, saame

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

millest

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Kui antud ellipsi võrrandist ilmutame y, s. o.

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

ja paigutame selle y väärtuse saadud tuletise avaldisse y asemele, siis saame

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}},$$

mis on samane ellipsit esitavast ilmutatud funktsioonist eespool leitud tuletatud funktsiooniga.

Käesolevat ilmutamata funktsiooni diferentsimise võtet tuleb alati kasutada siis, kui võrrandist pole võimalik avaldada y (ega ka x), nagu näiteks ilmutamata funktsiooni

$$a^x - a^y = xy$$

puhul. Kui loeme selles võrrandis y funktsiooniks ja x argumendiks, siis võrrandi mõlemaid pooli x järgi diferentsides saame

$$a^x \ln a - a^y \ln a \cdot \frac{dy}{dx} = y + x\frac{dy}{dx},$$

millest

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^x \ln a - y}{a^y \ln a + x}.$$

§ 37. Trigonomeetriliste funktsioonide tuletised. Siinusfunktsiooni

$$y = \sin x$$

tuletise leidmiseks kasutame kahe nurga siinuste vahe valemit, mille järgi saame

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

mille piirväärtus

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x,$$

sest (§ 20, p. 2 põhjal)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Seega siinusfunktsiooni tuletis

$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x.$$

Koosinusfunktsiooni

$$y = \cos x$$

tuletise võime leida temaga identse siinusfunktsiooni (kui liitfunktsiooni)

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

kaudu, s. o.

$$\frac{d(\cos x)}{dx} = \frac{d}{dx}\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

Seega

$$\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x.$$

Tangensfunktsiooni

$$y = \operatorname{tg} x$$

puhul kirjutame

$$y = \frac{\sin x}{\cos x},$$

mille (kui murdfunktsiooni) tuletis on

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - (\cos x)' \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

s. o.

$$\frac{d(\operatorname{tg} x)}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Kootangensfunktsiooni

$$y = \operatorname{ctg} x$$

puhul kirjutame

$$y = \frac{1}{\operatorname{tg} x},$$

mille tuletis

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right) = -\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

s. o.

$$\frac{d(\operatorname{ctg} x)}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Saadud tulemustest nähtub, et trigonomeetriliste funktsioonide $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ ja $\operatorname{ctg} x$ tuletised on samuti trigonomeetrilised funktsioonid.

Kui näiteks

$$y = (\operatorname{tg} x)^{\sin x},$$

siis eelmise paragrahvi p. 4 ja käesolevate valemite põhjal

$$\frac{dy}{dx} = (\operatorname{tg} x)^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{d(\operatorname{tg} x)}{dx} + \ln \operatorname{tg} x \cdot \frac{d(\sin x)}{dx}\right] =$$

$$= (\operatorname{tg} x)^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} + \ln \operatorname{tg} x \cdot \cos x\right) =$$

$$= (\operatorname{tg} x)^{\sin x}\left(\frac{1}{\cos x} + \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x\right).$$

§ 38. Arkusfunktsioonide tuletised. Arkussiinuse

$$y = \arcsin x$$

pöördfunktsioon on

$$x = \sin y,$$

mida x järgi diferentsides saame

$$1 = \cos y \cdot \frac{dy}{dx},$$

millest

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

s. o.

$$\frac{d(\arcsin x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Vahemikus $-1 < x < 1$ argumendi x kasvamisel funktsioon $y = \arcsin x$ kasvab ja seega

$$\frac{dy}{dx} > 0.$$

Järelikult $\sqrt{1-x^2}$ peab esinema ainult plussmärgiga.

Arkuskoosinuse

$$y = \arccos x$$

tuletise arvutame arkussiinuse (§ 9)

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

kaudu. Saame

$$\frac{d(\arccos x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Siin vahemikus $-1 < x < 1$ argumendi x kasvamisel funktsioon $y = \arccos x$ kahaneb ja seega

$$\frac{dy}{dx} < 0.$$

Järelikult $\sqrt{1-x^2}$ peab esinema samuti plussmärgiga.

Kui võtta $x = -1$ või 1, siis arkussiinuse tuletis $y' = \infty$ ja arkuskoosinuse tuletis $y' = -\infty$, millede puhul nii ühe kui ka teise funktsiooni graafiku puutujad neis punktides on paralleelsed Y-teljega.

Arkustangensi

$$y = \operatorname{arctg} x$$

pöördfunktsioon on

$$x = \operatorname{tg} y,$$

mida x järgi diferentsides saame

$$1 = \frac{1}{\cos^2 y} \cdot \frac{dy}{dx},$$

millest

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2},$$

s. o.

$$\frac{d(\operatorname{arctg} x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Arkuskootangensi

$$y = \operatorname{arcctg} x$$

tuletise arvutame arkustangensi

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$$

kaudu. Saame

$$\frac{d(\operatorname{arcctg} x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Nagu tulemustest nähtub, on arkusfunktsioonide tuletised algebralised funktsioonid.

§ 39. Hüperboolsete funktsioonide ja areafunktsioonide tuletised. Kasutades liitfunktsioonide diferentsimise eeskirju, leiame hüperboolsete funktsioonide (§ 23, p. 1)

$$y = \operatorname{sh} x, \quad y = \operatorname{ch} x, \quad y = \operatorname{th} x, \quad y = \operatorname{cth} x$$

tuletatud funktsioonid:

$$\frac{d(\operatorname{sh} x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x;$$

$$\frac{d(\operatorname{ch} x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x;$$

$$\frac{d(\operatorname{th} x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} =$$

$$= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{1}{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$\frac{d(\operatorname{cth} x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right) = \frac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2} =$$

$$= -\frac{4}{(e^x - e^{-x})^2} = -\frac{1}{\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x},$$

s. o.

$$\frac{d(\operatorname{sh} x)}{dx} = \operatorname{ch} x, \qquad \frac{d(\operatorname{th} x)}{dx} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

$$\frac{d(\operatorname{ch} x)}{dx} = \operatorname{sh} x, \qquad \frac{d(\operatorname{cth} x)}{dx} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Diferentsides areafunktsioone (§ 23, p. 2)

$$y = \operatorname{arsh} x, \quad y = \operatorname{arch} x, \quad y = \operatorname{arth} x, \quad y = \operatorname{arcth} x,$$

kui liitfunktsioone, saame

$$\frac{d(\operatorname{arsh} x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)\right] =$$

$$= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

mis on määratud vahemikus $-\infty < x < +\infty$, kusjuures ruutjuur tuleb võtta positiivsena;

$$\frac{d(\operatorname{arch} x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\pm \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\right] =$$

$$= \pm \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\pm\sqrt{x^2 - 1}},$$

mis on määratud vahemikus $1 < x < \infty$;

$$\frac{d(\operatorname{arth} x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 - x) + (1 + x)}{\frac{1 + x}{1 - x} \cdot (1 - x)^2} = \frac{1}{1 - x^2},$$

mis on määratud vahemikus $-1 < x < 1$;

$$\frac{d(\operatorname{arcth} x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(x-1)-(x+1)}{\frac{x+1}{x-1}\cdot(x-1)^2} = -\frac{1}{x^2-1},$$

mis on määratud vahemikes $-\infty < x < -1$ ja $1 < x < \infty$. Seega

$$\frac{d(\operatorname{arsh} x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad \frac{d(\operatorname{arth} x)}{dx} = \frac{1}{1-x^2},$$

$$\frac{d(\operatorname{arch} x)}{dx} = \frac{1}{\pm\sqrt{x^2-1}}, \qquad \frac{d(\operatorname{arcth} x)}{dx} = -\frac{1}{x^2-1}.$$

§ 40. Kõrgemat järku tuletised. 1) Eespool nägime, et funktsiooni $y = f(x)$ tuletis

$$y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

on mingis vahemikus üldiselt jälle mõni pidev x funktsioon. Nimetame seda $f(x)$ esimeseks tuletatud funktsiooniks ehk esimest järku tuletiseks ehk lihtsalt esimeseks tuletiseks. Oletame, et esimene tuletis on diferentsitav. Siis võime teda omakorda diferentsida x järgi ja saada seega $f'(x)$ tuletise, mida nimetame funktsiooni $y = f(x)$ teist järku tuletiseks ehk teiseks tuletiseks, tähistades selle järgmiselt:

$$y'' = f''(x) = \frac{df'(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

Siin tuletatud funktsiooni ja argumendi kasvude suhe

$$\frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

annab tuletatud funktsiooni $f'(x)$ muutumise keskmise kiiruse vahemikus x kuni $x + \Delta x$. Järelikult funktsiooni teist tuletist $f''(x)$ kui esimese tuletise ja argumendi kasvude suhte piirväärtust, kui argumendi kasv $\Delta x \to 0$, võime vaadelda kui tuletatud funktsiooni $f'(x)$ muutumise kiirust antud punktis ehk algfunktsiooni $f(x)$ muutumise kiiruse muutumise kiirust, s. o. funktsiooni $f(x)$ muutumise k i i r e n d u s t antud punktis.

Analoogiliselt teise tuletisega võime leida funktsiooni $y = f(x)$ kolmanda, neljanda jne., üldse n-da tuletise:

$$y''' = f'''(x) = \frac{df''(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f''(x+\Delta x) - f''(x)}{\Delta x},$$

$$y^{(4)} = f^{(4)}(x) = \frac{df'''(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'''(x+\Delta x) - f'''(x)}{\Delta x},$$

. . . . . .

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{df^{(n-1)}(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}.$$

Näiteks funktsiooni

$$f(x) = x^2 - x - 1$$

kolm tuletist on

$$f'(x) = 2x - 1, \quad f''(x) = 2, \quad f'''(x) = 0,$$

kusjuures kõik järgnevad tuletised on samuti võrdsed nulliga.

Mõnedel juhtudel on võimalik induktiivsel teel leida funktsiooni n-da tuletise määramiseks üldist valemit, mida saame siis otseselt kasutada funktsiooni mistahes järku tuletise leidmiseks. Võttes näiteks siinusfunktsiooni

$$f(x) = \sin x$$

tuletised ja märkides need järgmiselt:

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right),$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(\frac{2\pi}{2} + x\right),$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right),$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x = \sin\left(\frac{4\pi}{2} + x\right),$$

. . . . . ,

võime induktsiooni põhjal avaldada üldise valemi siinusfunktsiooni n-da tuletise määramiseks:

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right).$$

Samuti võime leida näiteks logaritmfunktsiooni

$$f(x) = \ln x$$

n-da tuletise valemi, sest

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{2!}{x^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{3!}{x^4}, \ldots,$$

mille järgi

$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

Eespool käsitletud elementaarsed funktsioonid võivad omada oma määramispiirkonnas kuitahes kõrget järku lõplikke tuletisi, kuid seejuures mõni funktsioon võib antud punktis omada lõplikke tuletisi ainult kuni teatud järguni ning edasi kõrgemaid lõplikke tuletisi selles punktis võib ka mitte omada. Nii näiteks funktsioon $y = 1 - x\sqrt{x}$ omab esimest tuletist punktis $x = 0$,

s. o. $y' = -\frac{3}{2}\sqrt{x}$, kuid järgnevaid tuletisi selles punktis enam ei oma (need saavad lõpmatuks).

Funktsiooni tuletise mõiste kohaselt on arusaadav, et funktsiooni n-järku tuletise $f^{(n)}(x)$ lõpliku (või lõpmatu) väärtuse olemasoluks punktis x_0 on tarvilik, et $(n-1)$-järku tuletis $f^{(n-1)}(x)$ oleks punkti x_0 ümbruses määratud.

2) Kui funktsioon esineb ilmutamata kujul, siis tema kõrgemat järku tuletise leidmiseks tuleb teda diferentsida vastav arv kordi, arvestades seejuures, et y ja tema tuletised kujutavad ikka x funktsioone.

Näiteks y'' saamiseks võrrandist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

diferentsime seda võrrandit kaks korda järgemööda, saades esimest korda diferentsides

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} \cdot y' = 0$$

ja teist korda diferentsides

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \cdot y'^2 + \frac{y}{b^2} \cdot y'' = 0.$$

Et siin esimene tuletis on

$$y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}},$$

siis teine tuletis

$$y'' = -\frac{b^2 + a^2 y'^2}{a^2 y} = -\frac{b^2(b^2x^2 + a^2y^2)}{a^4 y^3} = -\frac{ab}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}},$$

mis on samane ellipsit esitava ilmutatud funktsiooni

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

kahekordsel diferentsimisel saadava resultaadiga.

Üldiselt võime ilmutamata funktsiooni mistahes järku tuletist ikka avaldada argumendi x ja funktsiooni y kaudu.

3) Eespool (§ 29, p. 2) tuletise mehaanilise mõtte selgitamisel nägime, et sirgjoonelisel liikumisel materiaalse punkti liikumise kiirust v väljendab liikumist esitava funktsiooni

$$s = f(t)$$

esimene tuletis

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t),$$

kus t on aeg ja s on teatavast punktist alates läbitud tee pikkus.

Koostame teise tuletise, mis kujutab kiiruse ja aja kasvude suhte $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ piirväärtust, kui $\Delta t \to 0$. Suhe $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ iseloomustab liikumise kiiruse muutumist ajavahemikus Δt ja väljendab seega materiaalse punkti liikumise keskmist kiirendust selles ajavahemikus. Tähistades keskmise kiirenduse tähega w_k, võime kirjutada

$$w_k = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{f'(t+\Delta t) - f'(t)}{\Delta t}.$$

Kui nüüd $\Delta t \to 0$ ja seega ühtlasi $\Delta v \to 0$ ning keskmine kiirendus w_k omab piirväärtust, siis võime seda piirväärtust vaadelda kui funktsiooni $v = f'(t)$ tuletist, s. o.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f'(t+\Delta t) - f'(t)}{\Delta t} = f''(t),$$

mis väljendab materiaalse punkti liikumise kiirendust antud ajamomendil t. Tähistades selle kiirenduse tähega w, saame

$$w = \frac{dv}{dt} = f''(t).$$

Tähendab, materiaalse punkti liikumise kiirendus w antud ajamomendil t on kiiruse v esimene tuletis aja järgi ehk läbitud tee pikkuse s teine tuletis aja järgi.

Keha vaba langemine näiteks allub seadusele

$$s = \frac{1}{2} g t^2,$$

kus maakera gravitatsiooni kiirendus $g = 9{,}81$ m/sek^2. Ajamomendil t on materiaalse keha liikumise kiirus

$$v = \frac{ds}{dt} = gt$$

ja samal ajamomendil kiirendus

$$w = \frac{dv}{dt} = g,$$

mis on konstantne suurus. Siin kiirus omab igas sekundis konstantset kasvu.

4) Kui funktsioon $y = f(x)$ on teatavas vahemikus kasvav (või kahanev) ja ühtlasi diferentsitav ning selle vahemiku igas punktis funktsiooni tuletis $f'(x) \neq 0$, siis, ümberpöördult, x suhtes ilmutatud funktsiooni $x = \varphi(y)$ tuletis on (§ 33)

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)},$$

kus tuletatud funktsiooni $\varphi'(y)$ võib vaadelda kui y funktsiooni,

kus abimuutujaks on x. Kui nüüd funktsioon $y = f(x)$ omab teist tuletist $f''(x)$, siis — rakendades liitfunktsiooni diferentsimise võtet — leiame funktsiooni $x = \varphi(y)$ teise tuletise

$$\varphi''(y) = \frac{d}{dx}[\varphi'(y)]\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{f'(x)}\right] \cdot \frac{1}{f'(x)} =$$
$$= -\frac{f''(x)}{f'(x)^2} \cdot \frac{1}{f'(x)} = -\frac{f''(x)}{f'(x)^2}.$$

Analoogiliselt, kui funktsioon $y = f(x)$ omab kolmandat tuletist, saame funktsiooni $x = \varphi(y)$ kolmanda tuletise

$$\varphi'''(y) = \frac{d}{dx}[\varphi''(y)]\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dx}\left[-\frac{f''(x)}{f'(x)^3}\right] \cdot \frac{1}{f'(x)} =$$
$$= -\frac{f'''(x)f'(x)^3 - 3f'(x)^2 f''(x)^2}{f'(x)^6} \cdot \frac{1}{f'(x)} =$$
$$= -\frac{f'''(x)f'(x) - 3f''(x)^2}{f'(x)^5}.$$

Neist tulemustest ja samuti ka analoogilise jätkamisega saadavatest funktsiooni $\varphi(y)$ järgnevatest tuletistest nähtub, et kui funktsioon $y = f(x)$ on diferentsitav n korda x järgi, siis on ka, ümberpöördult, funktsioon $x = \varphi(y)$ diferentsitav n korda y järgi, ainult tingimusel, et võetavate x väärtuste puhul $f'(x) \neq 0$.

§ 41. Kõrgemat järku diferentsiaalid. 1) Funktsiooni $y = f(x)$ diferentsiaali

$$dy = f'(x)\,dx$$

vaatlesime (§ 31) kui kahe muutuja funktsiooni, s. o. kui sõltumatu muutuja x ja tema diferentsiaali dx funktsiooni. Et aga funktsioonis $dy = f'(x)\,dx$ argumendi diferentsiaal dx on vabalt võetav suurus, mis ei sõltu x-st, siis võime teda dy diferentsimisel vaadelda kui konstantset suurust ja seega dy diferentsida kui ühe sõltumatu muutuja x funktsiooni. Tähistame dy diferentsiaali järgmiselt:

$$d(dy) = d^2y,$$

mida nimetame funktsiooni teiseks ehk teist järku diferentsiaaliks. Funktsiooni $y = f(x)$ teist järku diferentsiaal saab seega kuju

$$d^2y = d(dy) = d[f'(x)\,dx] = \frac{d}{dx}[f'(x)\,dx] \cdot dx =$$
$$= \frac{df'(x)}{dx} \cdot dx \cdot dx = f''(x)\,dx^2,$$

kus dx^2 tähendab argumendi diferentsiaali ruutu, s. o. $dx^2 = (dx)^2$. Jagades viimati saadud võrduse mõlemad pooled dx^2-ga, saame

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x),$$

mis väljendab funktsiooni $y = f(x)$ teist tuletist, kus d^2y tähendab funktsiooni teist järku diferentsiaali ja dx^2 tähendab argumendi diferentsiaali ruutu.

Nagu eespool (§ 31) nägime, on funktsiooni $y = f(x)$ diferentsiaal $dy = f'(x)dx$ invariantne argumendi x teisenduse suhtes. Seega funktsiooni esimese tuletise valem $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ kehtib ikka ja alati, olgu x sõltumatuks muutujaks või sõltugu ta omakorda mõnest muust muutuvast suurusest, kuid funktsiooni teise tuletise valem $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$, nagu nähtub funktsiooni diferentsiaali diferentsimiskäigust, on kehtiv siis ja ainult siis, kui x on sõltumatuks muutujaks.

Analoogiliselt teist järku diferentsiaaliga on kolmandat, neljandat jne., üldse n-järku diferentsiaalid

$$d^3y = d(d^2y) = \frac{d}{dx}[f''(x)dx^2]dx = f'''(x)dx^3,$$

$$d^4y = d(d^3y) = \frac{d}{dx}[f'''(x)dx^3]dx = f^{(4)}(x)dx^4,$$

. . . . . .

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = \frac{d}{dx}[f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}]\,dx = f^{(n)}(x)dx^n,$$

milledest saame funktsiooni vastavad tuletised

$$\frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x), \qquad \frac{d^4y}{dx^4} = f^{(4)}(x), \ \ldots, \ \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x),$$

kus nüüd d^ny tähendab funktsiooni n-järku diferentsiaali ja dx^n tähendab argumendi diferentsiaali n-astet. Saadud valemid kehtivad siis ja ainult siis, kui x on sõltumatuks muutujaks.

Kui näiteks korrutisfunktsioonis

$$y = uv$$

u ja v on x funktsioonid, s. o.

$$u = \varphi(x), \quad v = \psi(x),$$

mis omavad kuitahes kõrget järku tuletisi, siis võime kirjutada, et

$$\begin{gathered}
dy = d(uv) = du \cdot v + u \cdot dv, \\
d^2y = d^2(uv) = d^2u \cdot v + du \cdot dv + du \cdot dv + u \cdot d^2v = \\
= d^2u \cdot v + 2du \cdot dv + u \cdot d^2v, \\
d^3y = d^3(uv) = d^3u \cdot v + d^2u \cdot dv + 2d^2u \cdot dv + \\
+ 2du \cdot d^2v + du \cdot d^2v + u \cdot d^3v = \\
= d^3u \cdot v + 3d^2u \cdot dv + 3du \cdot d^2v + u \cdot d^3v.
\end{gathered}$$

Edasi diferentsides näeme, et diferentsiaalide arvulised koefitsiendid kujutavad ikka Newtoni binoomi arendirea koefitsiente. Matemaatilise induktsiooni abil selle korrutisfunktsiooni n-järku diferentsiaalilt üle minnes $(n+1)$-järku diferentsiaalile näeme, et kehtib diferentsiaalvalem

$$d^n y = d^n(uv) = d^n u \cdot v + \binom{n}{1} d^{n-1}u \cdot dv +$$

$$+ \binom{n}{2} d^{n-2}u \cdot d^2 v + \binom{n}{3} d^{n-3}u \cdot d^3 v + \ldots + u \cdot d^n v$$

ning samuti ka n-järku tuletise valem

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n(uv)}{dx^n} = \frac{d^n u}{dx^n} \cdot v + \binom{n}{1} \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} \cdot \frac{dv}{dx} +$$

$$+ \binom{n}{2} \frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} + \binom{n}{3} \frac{d^{n-3}u}{dx^{n-3}} \cdot \frac{d^3 v}{dx^3} + \ldots + u \cdot \frac{d^n v}{dx^n},$$

mida nimetatakse Leibniz'i valemiks.

2) Liitfunktsiooni

$$y = f[\varphi(x)]$$

puhul, kus $y = f(u)$ ja $u = \varphi(x)$, kehtib valem (§ 32)

$$dy = f'(u)\,du,$$

kus $du = \varphi'(x)\,dx$, mis on seega vabalt valitava dx puhul sõltumatu muutuja x funktsioon. Et du on x funktsioon, siis ei saa teda liitfunktsiooni teist järku diferentsiaali arvutamisel vaadelda kui konstantset suurust (nagu sõltumatu muutuja x diferentsiaali dx puhul). Liitfunktsiooni teist järku diferentsiaali d^2y leidmisel tuleb funktsiooni $dy = f'(u)\,du$ vaadelda kui kahest funktsioonist $f'(u)$ ja du koosnevat korrutisfunktsiooni, s. o.

$$d^2 y = d(dy) = d[f'(u)\,du] = f''(u)\,du \cdot du + \\ + f'(u) \cdot d(du) = f''(u)\,du^2 + f'(u)\,d^2 u,$$

kus nüüd d^2u on samuti x funktsioon. Kolmandat järku diferentsiaal on siis

$$d^3 y = d(d^2 y) = d[f''(u)\,du^2 + f'(u)\,d^2 u] = \\ = f'''(u)\,du \cdot du^2 + f''(u) \cdot d(du^2) + f''(u)\,du \cdot d^2 u + \\ + f'(u) \cdot d(d^2 u) = f'''(u)\,du^3 + f''(u) \cdot 2du \cdot d^2 u + \\ + f''(u)\,du \cdot d^2 u + f'(u)\,d^3 u = \\ = f'''(u)\,du^3 + 3f''(u)\,du \cdot d^2 u + f'(u)\,d^3 u,$$

kus kolmandat järku diferentsiaali d^3u tuleb jälle vaadelda kui x funktsiooni. Analoogiliselt jätkates võime leida liitfunktsiooni neljandat, viiendat ja üldse n-järku diferentsiaali.

Nagu neist tulemustest nähtub, pole liitfunktsiooni kõrgemat järku $(n \geqslant 2)$ diferentsiaalide avaldised invariantsed, välja arvatud ainus erijuhtum, kui u on lineaarne x funktsioon, s. o. $u = kx + b$, kus $du = k\,dx$, mis ei sõltu x-st ja osutub seega

fikseeritud dx puhul konstantseks suuruseks. Kui näiteks $y = e^u$ ja $u = kx + b$, siis

$$d^n y = e^u du^n = e^{kx+b}(kdx)^n = e^{kx+b} \cdot k^n dx^n.$$

§ 42. Parameetriliste võrranditega määratud funktsiooni tuletised. Kui funktsionaalne sõltuvus argumendi x ja funktsiooni y vahel on antud parameetrilises kujus

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

kus t on pidevalt muutuvaks parameetriks, siis argumendi x ja funktsiooni y diferentsiaalid on

$$dx = x'(t)\,dt, \quad dy = y'(t)\,dt,$$

millede jagamisel saame funktsiooni y tuletise x järgi, s. o.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}},$$

kui tähistame (Newtoni järgi) lühidalt

$$\frac{dx}{dt} = x'(t) = \dot{x} \quad \text{ja} \quad \frac{dy}{dt} = y'(t) = \dot{y}.$$

Funktsiooni y teise tuletise x järgi leiame järgmiselt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)}{\frac{dx}{dt}} =$$

$$= \frac{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} = \frac{x'(t)\,y''(t) - y'(t)\,x''(t)}{x'(t)^3}$$

ehk lühidalt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3},$$

kus $\ddot{x} = x''(t)$ ja $\ddot{y} = y''(t)$.

Funktsiooni y kolmas tuletis x järgi on siis

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}\right)}{\frac{dx}{dt}} =$$

$$= \frac{(\ddot{x}\ddot{y} + \dot{x}\dddot{y} - \ddot{y}\ddot{x})\dot{x}^3 - 3\dot{x}^2\ddot{x}(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})}{\dot{x}^7} =$$

$$= \frac{\dot{x}(\dot{x}\dddot{y} - \dot{y}\dddot{x}) - 3\ddot{x}(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})}{\dot{x}^5}.$$

Näiteks tsükloidi esitavate võrrandite (§ 13)

$$x = r(t - \sin t), \quad y = r(1 - \cos t)$$

puhul esimesed tuletised t järgi on

$$\dot{x} = r(1 - \cos t). \quad \dot{y} = r \sin t,$$

kusjuures puutuja tõus tsükloidil asetsevas punktis on

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{r \sin t}{r(1 - \cos t)} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}.$$

Teised tuletised on

$$\ddot{x} = r \sin t, \quad \ddot{y} = r \cos t$$

ja

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} = \frac{r(1 - \cos t) \cdot r \cos t - r \sin t \cdot r \sin t}{r^3 (1 - \cos t)^3} =$$

$$= -\frac{1}{r(1 - \cos t)^2} = -\frac{1}{4r \sin^4 \frac{t}{2}},$$

ning kolmandad tuletised

$$\dddot{x} = r \cos t, \quad \dddot{y} = -r \sin t$$

ja

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\dot{x}(\dot{x}\dddot{y} - \dot{y}\dddot{x}) - 3\ddot{x}(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})}{\dot{x}^5} =$$

$$= \frac{r(1 - \cos t)[r(1 - \cos t)(-r \sin t) - r \sin t \cdot r \cos t]}{r^5 (1 - \cos t)^5} -$$

$$- \frac{3r \sin t [r(1 - \cos t) \cdot r \cos t - r \sin t \cdot r \sin t]}{r^5 (1 - \cos t)^5} =$$

$$= \frac{2 \sin t}{r^2 (1 - \cos t)^4} = \frac{4 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{16 r^2 \sin^8 \frac{t}{2}} = \frac{\cos \frac{t}{2}}{4r^2 \sin^7 \frac{t}{2}}.$$

§ 43. Harjutusülesandeid.

Leida funktsioonide tuletised:

1. $y = x^{2-m}$
2. $y = \frac{1}{x}$
3. $y = \frac{1}{x^{n-2}}$
4. $y = \frac{1}{x^{1-n}}$
5. $y = \sqrt{x}$
6. $y = x\sqrt{x}$
7. $y = x\sqrt{x\sqrt{x}}$

8. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$
9. $y = 2ax^3$
10. $y = \frac{m}{x}$
11. $y = \frac{1}{ax^2}$
12. $y = \sqrt{ax}$
13. $y = x^{10} - x^6 + x^2$
14. $y = 2x^3 - 4x^2 - 5x$
15. $y = 3a^3x^3 - 2b^2x^2 + cx$
16. $y = \frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x}$
17. $y = x\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}$
18. $y = (4 - 3x^2)(3x - 5)$
19. $y = (mx - nx^2)^2$
20. $y = x(x^2 - 2)^2$
21. $y = \frac{2x - 1}{x^4}$
22. $y = \frac{3x^5 + 5x^2 - 2}{3x^2}$
23. $y = \frac{(x-1)(x-2)}{x^2}$
24. $y = \sin x - \cos x$
25. $y = 3\cos x - 2\operatorname{ctg} x$
26. $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$
27. $y = \frac{a^x}{x^a}$
28. $y = \frac{\ln x}{e^x}$
29. $y = \sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}$
30. $y = \sqrt{4 - x^2}$
31. $y = (x^2 - 2)\sqrt{x^2 + 2}$
32. $y = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$
33. $y = \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{x - \sqrt{x^2 + a^2}}$
34. $y = \ln(a^2 - x^2)$
35. $y = \ln\sqrt{a^2 + x^2}$
36. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
37. $y = \ln^2(a^2 - x^2)$
38. $y = \sin 3x$
39. $y = \sin x^3$
40. $y = \sin^3 x$
41. $y = 2\cos^2 2x$
42. $y = \sqrt{\operatorname{tg}^3 3x}$
43. $y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$
44. $y = \arccos \frac{1}{x}$
45. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a}{x}}$
46. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{1 - x}$
47. $y = \operatorname{arcctg}(x^2 - 5)$
48. $y = 5^{2-2x}$
49. $y = a^{\ln x}$
50. $y = e^{\operatorname{arctg} x}$
51. $y = \arcsin(\sin x)$
52. $y = \ln\ln x$
53. $y = \ln^2 \ln x$
54. $y = \ln \ln^2 x$
55. $y = \ln^2 \ln^2 x$
56. $y = \sin \ln x$
57. $y = \ln \operatorname{tg} x$
58. $y = e^{\cos x} \sin x$
59. $y = e^x \ln \sin x$
60. $y = x^{\sin x}$
61. $y = \sqrt[x]{x}$
62. $y = \sin^x x$
63. $y = (x^2 - 2)^{x^2-2}$
64. $y = x^{\arcsin x}$
65. $y = x^{e^x}$
66. $y = x^{x^x}$
67. $y = \operatorname{sh} 2x$
68. $y = \operatorname{ch}^2 2x$
69. $y = x \operatorname{th} x$
70. $y = e^x \operatorname{cth} x$
71. $y = \operatorname{th} x + \operatorname{cth} x$
72. $y = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x$
73. $y = \frac{\operatorname{sh} x}{e^x}$
74. $y = \ln \operatorname{ch} x.$

Leida funktsioonide teist järku tuletised:

75. $y = 3x - 4$
76. $y = x^3 - 2x + 3$
77. $y = \frac{1}{x}$
78. $y = \sqrt{x}$
79. $y = \sqrt{1 - x}$
80. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$
81. $y = \sin 3x$
82. $y = a \cos ax$
83. $y = \operatorname{tg} x$
84. $y = \operatorname{ctg} x$
85. $y = xe^x$
86. $y = x \ln x$
87. $y = \ln \operatorname{tg} x$
88. $y = \arcsin x$.

Leida funktsioonide kolmandat järku tuletised:

89. $y = x^3 - 3x^2 + x + 2$
90. $y = x^6 - 5x^3 - 2x - 5$
91. $y = x(a^2 - x^2)$
92. $y = \frac{3}{x^3}$
93. $y = \sqrt{x}$
94. $y = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$
95. $y = \operatorname{tg} x$
96. $y = \operatorname{ctg} x$
97. $y = \ln (1 - x)$
98. $y = \ln \sin x$.

Leida funktsioonide n-järku tuletised:

99. $y = x^n$
100. $y = \cos x$
101. $y = a^x$
102. $y = x^{n-1} \ln x$.

103. Leida kõvera $y = x^2 + 2x + 3$ puutuja ja normaal punktis $x = -4$.

104. Missugused nurgad moodustab kõver $y = x^2 - 3x$ abstsissteljega?

105. Missuguse nurga moodustab kõvera $y = x^3 - 5x^2 - 2$ puutuja ordinaatteljega, kui puutepunkti abstsiss $x = 5$?

106. Näidata, et sinusoid $y = \sin x$ moodustab abstsisstelje positiivse suunaga nurga 45° või 135°.

107. Leida kõveral $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ punktid, milles puutujad on rööbikud abstsissteljega.

108. Leida paraboolide $y = 3x^2 - 1$ ja $y = 2x^2 + 3$ vaheline nurk.

109. Leida ringjoonte $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ ja $x^2 + y^2 - 2y - 9 = 0$ vaheline nurk.

110. Parabooli võrrand on $y = x^2 - 7x + 3$. Missuguses parabooli punktis on puutuja rööbik sirgega, mille võrrand on $y = 5x + 2$?

V peatükk

TULETISTE RAKENDUSI

§ 44. Tuletiste rakendusi mehaanikas. 1) Kui esimese astme funktsioon

$$f(t) = at + b$$

esitab liikuva materiaalse punkti sirgjoonelise tee võrrandit, siis kiirus

$$v = f'(t) = a$$

on konstantne suurus, s. o. liikumine on ühtlane, kusjuures kiirendus

$$w = f''(t) = 0.$$

Siin funktsiooni vaba liige $b = f(0)$ määrab materiaalse punkti algasendi, kui $t = 0$.

Kui liikuva materiaalse punkti tee võrrandiks on teise astme funktsioon

$$f(t) = at^2 + bt + c,$$

siis kiirus

$$v = f'(t) = 2at + b$$

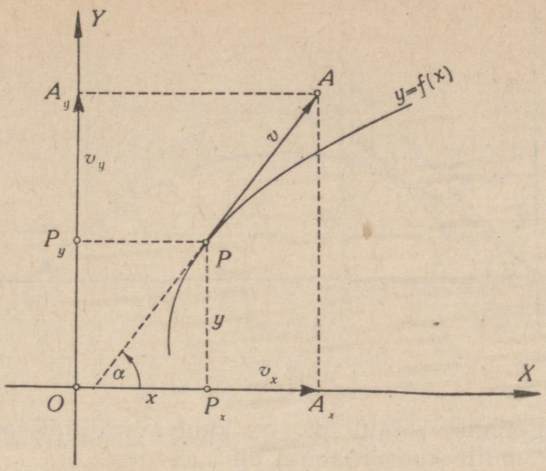
ei ole enam konstantne, s. o. liikumine ei ole ühtlane, kuid kiirendus

$$w = f''(t) = 2a$$

on konstantne suurus. Siin funktsiooni vaba liige $c = f(0)$ määrab materiaalse punkti algasendi ja koefitsient $b = f'(0)$ määrab materiaalse punkti algkiiruse, kui $t = 0$.

2) Liikugu punkt P tasapinnal kõverat $y = f(x)$ mööda (joon. 52). Kui vaatleme punkti $P(x, y)$ liikumise kiirust vektorina $\vec{v} = \vec{PA}$, siis selle vektori projektsioon X-teljel $v_x = P_xA_x$ kujutab punkti P projektsiooni P_x liikumise kiirust X-teljel ja vektori projektsioon Y-teljel $v_y = P_yA_y$ kujutab punkti P projektsiooni P_y liikumise kiirust Y-teljel. Siin punkti P koordinaadid x ja y sõltuvad ajast t, mille puhul võime punkti P liikumise võrrandi $y = f(x)$ esitada parameetrilisel kujul

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$



Joon. 52.

kus nüüd kiiruse vektori projektsioonid X- ja Y-teljel on vastavalt

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$$

ning seega liikumise kiiruse absoluutväärtus kõvera punktis P on

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Analoogiliselt, kui vaatleme punkti P liikumise kiirendust vektorina $\vec{w}$, mille projektsioonid X- ja Y-teljel on vastavalt w_x ja w_y, siis

$$w_x = \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x}, \quad w_y = \frac{dv_y}{dt} = \ddot{y}$$

ja kiirenduse absoluutväärtus punktis P on

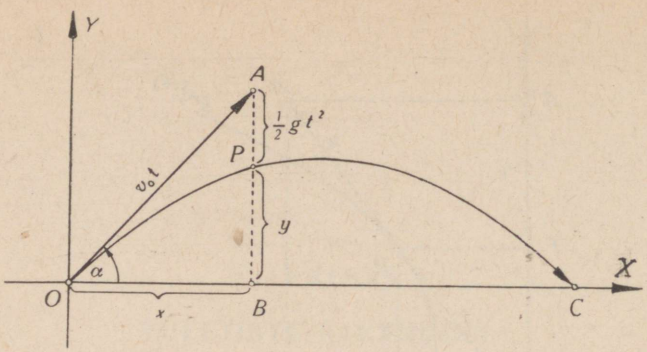
$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}.$$

3) Olgu kuuli laskenurk α, algkiirus v_0 ja aeg t (joon. 53). Kui ei oleks maakera gravitatsiooni kiirendust g, siis lendaks kuul sirget OA mööda kiirusega v_0 ja t sekundi pärast oleks ta punktis A, kusjuures

$$OA = v_0 t.$$

Sel juhul oleks kuuli lennu tee sirgjoon ja punkti A koordinaadid

$$OB = OA \cdot \cos\alpha = v_0 t \cos\alpha,$$
$$BA = OA \cdot \sin\alpha = v_0 t \sin\alpha.$$



Joon. 53.

Maakera külgetõmbe mõjul on aga kuul t sekundi jooksul jõudnud punkti P, mille koordinaadid on

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2,$$

mis kujutavad kuuli lennujoone parameetrilisi võrrandeid. Neid parameetri t järgi diferentsides saame kiiruse vektori projektsioonid vastavalt X- ja Y-teljel

$$v_x = \dot{x} = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = \dot{y} = v_0 \sin \alpha - gt.$$

Paigutades saadud väärtused materiaalse punkti liikumise kiiruse valemisse, leiame kuuli lennukiiruse absoluutväärtuse punktis P, s. o.

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - gt)^2} =$$
$$= \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + v_0^2 \sin^2 \alpha - 2 v_0 g t \sin \alpha + g^2 t^2} =$$
$$= \sqrt{v_0^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - 2g (v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2)} =$$
$$= \sqrt{v_0^2 - 2gy},$$

milest nähtub, et kuuli lennukiirus õhuta ruumis sõltub algkiirusest ja lennukõrgusest.

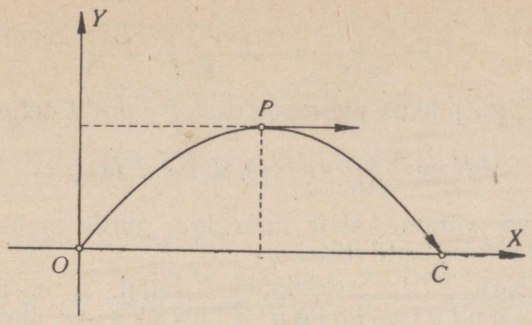
Kiirenduse projektsioonid X- ja Y-teljel on vastavalt

$$w_x = \ddot{x} = 0, \quad w_y = \ddot{y} = -g,$$

millest nähtub, et kiirenduse projektsioon X-teljel on null ning Y-teljel negatiivne konstantne suurus, mis ütleb, et Y-teljega paralleelses sihis toimub kiirendus negatiivses suunas.

Kui lennukõrgus $y = 0$, siis $v = v_0$, s. o. algpunktis O ja lõppunktis C on kuuli lennukiirused õhuta ruumis võrdsed.

Lennujoone kõrgeimas punktis on kiiruse vektor paralleelne X-teljega (joon. 54) ning vektori projektsioon Y-teljel on siis null, s. o.



Joon. 54.

$$\dot{y} = v_0 \sin \alpha - gt = 0,$$

millest kuuli tõusuaeg õhuta ruumis on

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

ning lennuaeg

$$T = 2t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

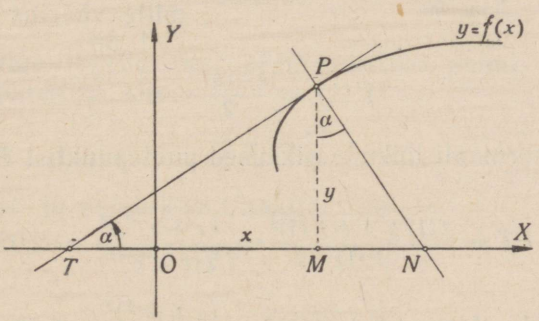
§ 45. Puutuja ja normaali lõikude ning nende aluste pikkused. 1) Kui funktsioon $y = f(x)$ on teatud punktis diferentsitav, s. o. kui tal on selles punktis lõplik tuletis $f'(x)$, siis on kõveral, mida esitab antud funktsioon, tähendatud punktis puutuja, mille tõus $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$. Et

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}}$$

ja

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(x)^2}},$$

siis puutuja lõigu pikkus puutepunktist P kuni X-teljeni (joon. 55)



Joon. 55.

$$PT = \frac{y}{\sin \alpha} = \frac{f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}}{f'(x)}$$

ja normaali lõigu pikkus puutepunktist P kuni X-teljeni

$$PN = \frac{y}{\cos \alpha} = f(x)\sqrt{1+f'(x)^2},$$

kus ruutjuured võtame selle märgiga, mille puhul mõlemad pikkused osutuvad positiivseteks.

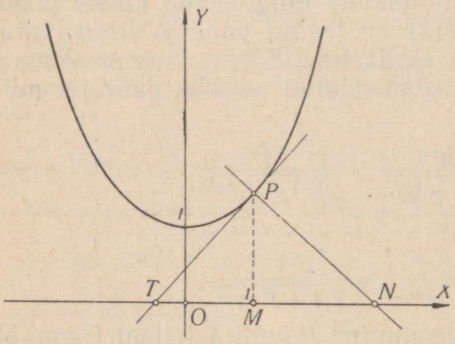
Puutuja lõigu PT projektsiooni X-teljel, s. o. pikkust MT, nimetatakse puutuja lõigu aluseks ja normaali lõigu PN projektsiooni X-teljel, s. o. pikkust MN, nimetatakse normaali lõigu aluseks. Seega puutuja lõigu aluse absoluutväärtus on

$$MT = \left|\frac{y}{\operatorname{tg} \alpha}\right| = \left|\frac{f(x)}{f'(x)}\right|$$

ja normaali lõigu aluse absoluutväärtus

$$MN = |y \operatorname{tg} \alpha| = |f(x) \cdot f'(x)|.$$

Võtame näiteks kõvera (joonis 56), mida esitab hüperboolne koosinus



Joon. 56.

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

ja määrame puutuja ja normaali lõikude pikkused puutepunktist P kuni X-teljeni ning puutuja ja normaali lõikude aluste pikkused, kui puutepunkti abstsiss $x = 1$. Selleks võtame tuletise

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

mille väärtus punkis $x = 1$ on

$$f'(1) = \frac{e - e^{-1}}{2}.$$

Puutuja ja normaali lõikude pikkused puutepunktist P kuni X-teljeni on siis

$$PT = \frac{f(1)\sqrt{1+f'(1)^2}}{f'(1)} = \frac{(e+e^{-1})^2}{2(e-e^{-1})} \approx 2{,}02$$

$$PN = f(1)\sqrt{1+f'(1)^2} = \frac{(e+e^{-1})^2}{4} \approx 2{,}37$$

ning puutuja ja normaali alused on

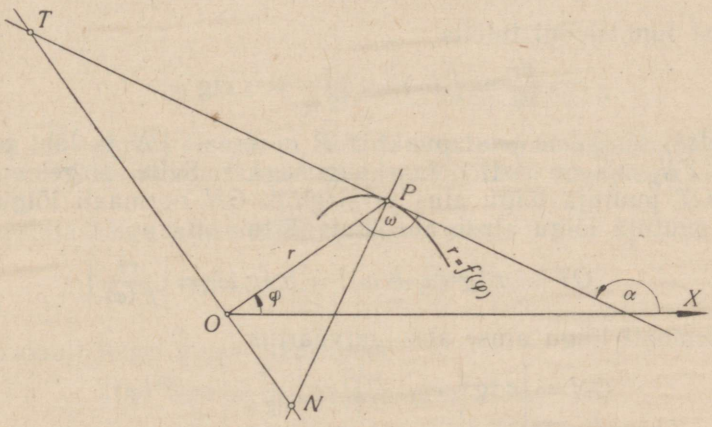
$$MT = \left|\frac{f(1)}{f'(1)}\right| = \frac{e+e^{-1}}{e-e^{-1}} \approx 1{,}31$$

$$MN = |f(1)f'(1)| = \frac{e^2-e^{-2}}{4} \approx 1{,}81.$$

2) Kui kõvera võrrand on antud polaarkoordinaatides $r = f(\varphi)$, kus r on polaarkaugus ja φ on polaarnurk, siis kõvera tõus punktis (r, φ) määratakse sellest punktist tõmmatud puutuja ja polaarkauguse vahelise nurgaga, mille puhul puutuja suunda loetakse polaarnurga kahanemise poole.

Olgu kõveral $r = f(\varphi)$ vabalt võetud punkt $P(r, \varphi)$, milles puutuja moodustab polaarkaugusega nurga ω (joon. 57). Kui puutuja ja polaartelje vaheline nurk on α, siis $\omega = \alpha - \varphi$ ja

$$\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}(\alpha-\varphi) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varphi}.$$



Joon. 57.

Kui polaartelge lugeda ristkoordinaadistiku puhul X-teljeks ja poolust nullpunktiks, siis

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx},$$

kusjuures rist- ja polaarkoordinaatide seoseid

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi$$

ehk

$$x = f(\varphi)\cos\varphi, \qquad y = f(\varphi)\sin\varphi$$

(kui korrutisfunktsioone) φ järgi diferentsides saame

$$\frac{dx}{d\varphi} = f'(\varphi)\cos\varphi - f(\varphi)\sin\varphi$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = f'(\varphi)\sin\varphi + f(\varphi)\cos\varphi,$$

millest

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(\varphi)\sin\varphi + f(\varphi)\cos\varphi}{f'(\varphi)\cos\varphi - f(\varphi)\sin\varphi} = \frac{f'(\varphi)\operatorname{tg}\varphi + f(\varphi)}{f'(\varphi) - f(\varphi)\operatorname{tg}(\varphi)}.$$

Asetades saadud väärtuse $\operatorname{tg}\omega$ avaldisse $\operatorname{tg}\alpha$ asemele, saame

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\frac{f'(\varphi)\operatorname{tg}\varphi + f(\varphi)}{f'(\varphi) - f(\varphi)\operatorname{tg}\varphi} - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \frac{f'(\varphi)\operatorname{tg}\varphi + f(\varphi)}{f'(\varphi) - f(\varphi)\operatorname{tg}\varphi}\cdot\operatorname{tg}\varphi} = \frac{f(\varphi)}{f'(\varphi)},$$

s. o.

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{1}{f'(\varphi)},$$

millest funktsiooni tuletis

$$\frac{dr}{d\varphi} = f'(\varphi) = \frac{r}{\operatorname{tg}\omega} = r\operatorname{ctg}\omega.$$

Edasi tõmbame puutepunktist P normaali PN ja läbi pooluse sirge TN, mis on risti polaarkaugusega r. Sellel sirgel on sirglõik OT puutuja lõigu alus ja sirglõik ON normaali lõigu alus. Siin puutuja lõigu aluse absoluutväärtus on

$$OT = |r\operatorname{tg}(\pi - \omega)| = |r\operatorname{tg}\omega| = \left|\frac{r^2}{f'(\varphi)}\right|$$

ja normaali lõigu aluse absoluutväärtus

$$ON = \left|r\operatorname{tg}\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)\right| = \left|\frac{r}{\operatorname{tg}\omega}\right| = |f'(\varphi)|.$$

Puutuja lõigu pikkus puutepunktist P kuni sirgeni TN on

$$PT = \sqrt{r^2 + OT^2} = \sqrt{r^2 + \frac{r^4}{f'(\varphi)^2}} = \frac{r}{f'(\varphi)}\sqrt{r^2 + f'(\varphi)^2}$$

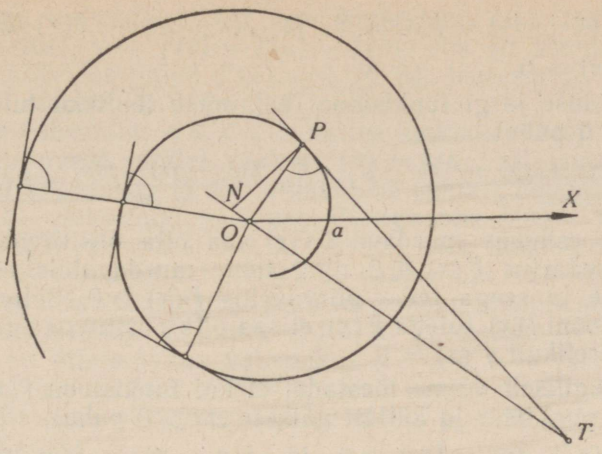
ja normaali lõigu pikkus puutepunktist P kuni sirgeni TN

$$PN = \sqrt{r^2 + ON^2} = \sqrt{r^2 + f'(\varphi)^2}.$$

Võtame näiteks logaritmilise spiraali (joon. 58), mida esitab funktsioon

$$r = ae^{m\varphi},$$

kus a ja m on konstantsed positiivsed suurused ja e on loomulike logaritmide alus. Siin



Joon. 58.

$$\frac{dr}{d\varphi} = am\, e^{m\varphi}$$

ja

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{r}{f'(\varphi)} = \frac{1}{m},$$

mis on konstantne suurus ja näitab, et puutujad logaritmilise spiraali punktides moodustavad vastavate polaarkaugustega võrdsed nurgad.

Puutuja lõigu aluse määrajaks on siin

$$OT = \left| \frac{r^2}{f'(\varphi)} \right| = \frac{a}{m} e^{m\varphi} = \frac{r}{m}$$

ja normaali lõigu aluse määrajaks

$$ON = |f'(\varphi)| = ame^{m\varphi} = mr.$$

Puutuja ja normaali lõikude pikkusi puutepunktist P kuni sirgeni TN määravad

$$PT = \frac{r}{f'(\varphi)} \sqrt{r^2 + f'(\varphi)^2} = \frac{ae^{m\varphi}}{m} \sqrt{1 + m^2} = \frac{r}{m} \sqrt{1 + m^2},$$

$$PN = \sqrt{r^2 + f'(\varphi)^2} = ae^{m\varphi} \sqrt{1 + m^2} = r \sqrt{1 + m^2}.$$

§ 46. Rolle'i teoreem. Enne Rolle'i nime kandva teoreemi tõestamisele asumist tõestame järgmise

abiteoreemi: Kui funktsioon $f(x)$ on diferentsitav punktis x ja küllalt väikese $\Delta x > 0$ puhul kehtivad võrratused

$$f(x+\Delta x)-f(x)\leqslant 0 \quad \text{ja} \quad f(x-\Delta x)-f(x)\leqslant 0,$$

siis $f'(x)=0$.

Et eelduse järgi funktsioon $f(x)$ omab lõplikku tuletist $f'(x)$, siis $\Delta x\to 0$ puhul

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\to f'(x) \quad \text{ja} \quad \frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}\to f'(x),$$

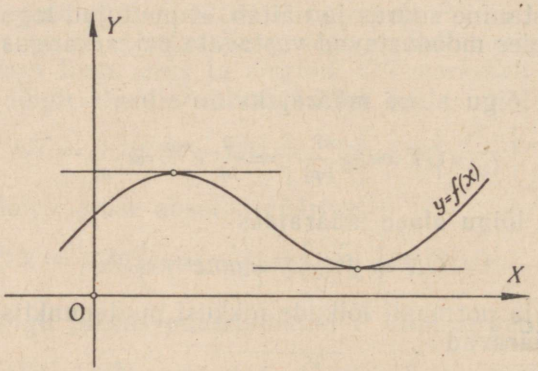
kusjuures esimene murdavaldis ei saa olla positiivne ja seega tema piirväärtus $f'(x)\leqslant 0$ ning teine murdavaldis ei saa olla negatiivne ja seega tema piirväärtus $f'(x)\geqslant 0$. Sellest nähtub, et funktsiooni $f(x)$ tuletis $f'(x)$ ei saa olla positiivne ega ka negatiivne. Järelikult $f'(x)=0$.

Analoogiliselt võime tõestada, et kui funktsioon $f(x)$ on diferentsitav punktis x ja küllalt väikese $\Delta x>0$ puhul

$$f(x+\Delta x)-f(x)\geqslant 0 \quad \text{ja} \quad f(x-\Delta x)-f(x)\geqslant 0,$$

siis samuti $f'(x)=0$.

Sellest abiteoreemist nähtub, et punktis, milles funktsioon $f(x)$ on diferentsitav ja omab suurimat või väiksemat väärtust, võrreldes selle punkti ümbruses olevate punktidega, on funktsiooni tuletis võrdne nulliga. See tähendab geomeetriliselt, et selles punktis funktsioonile $y=f(x)$ vastava kõvera puutuja on paralleelne X-teljega (joon. 59).



Joon. 59.

Rolle'i * teoreem: Kui funktsioon $f(x)$ on pidev vahemikus $a\leqslant x\leqslant b$ ja diferentsitav vahemikus $a<x<b$ ning peale selle $f(a)=f(b)$, siis asetseb a ja b vahel vähemalt üks x väärtus $x=\xi$, mille puhul $f'(\xi)=0$.

---

* Michel Rolle (1652—1719) — prantsuse matemaatik, kes käsitles seda teoreemi polünoomide puhul.

1) Kui kogu vahemikus a-st b-ni funktsioon $f(x)$ omab konstantset väärtust, s. o. $f(x) = f(a) = f(b)$, siis on selles vahemikus x iga väärtuse puhul $f'(x) = 0$ (§ 34, teoreem 2, järeldus) ning Rolle'i teoreem on sel puhul tõestatud.

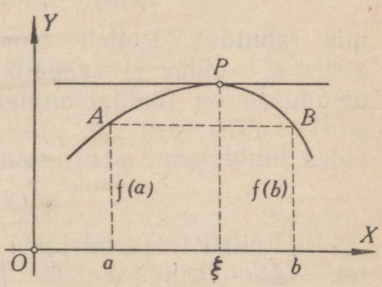
2) Kui aga vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$, milles funktsioon $f(x)$ on pidev, leidub mõni punkt, milles $f(x) \neq f(a) = f(b)$, siis peab funktsioon selles vahemikus (§ 28, 2. omaduse põhjal) omama nii suurimat kui ka väikseimat väärtust. Et aga siin $f(a) = f(b)$, siis ei saa korraga vahemiku ühes otspunktis olla funktsiooni suurimat ja teises otspunktis funktsiooni väikseimat väärtust. Seega vähemalt üht neist väärtustest peab funktsioon omama mingis a ja b vahepealses punktis ξ, kus $a < \xi < b$. Et eelduse järgi funktsioon $f(x)$ on diferentsitav vahemikus $a < x < b$ ja järelikult ka selle vahemiku punktis ξ, milles ta omab suurimat või väikseimat väärtust, siis peab abiteoreemi järgi olema punktis ξ funktsiooni tuletis $f'(\xi) = 0$.

Geomeetrilises tõlgenduses tähendab Rolle'i teoreem seda, et vahemikus a-st b-ni asetseb kõvera kaarel AB vähemalt üks punkt P, milles kõvera puutuja on paralleelne X-teljega (joon. 60). Erijuhul võib Rolle'i teoreemis olla $f(a) = f(b) = 0$.

Rolle'i teoreem nõuab, et funktsioon $f(x)$ omaks lõplikku tuletist vahemiku $a < x < b$ igas punktis. Kui aga selle vahemiku mõnes punktis funktsioon ei oma lõplikku tuletist, siis ei ole Rolle'i teoreem rakendatav, nagu näiteks funktsiooni

$$f(x) = 4 - \sqrt[3]{x^2}$$

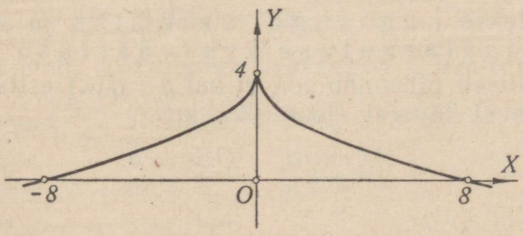
puhul vahemikus $-8 < x < 8$, milles funktsioon on pidev ja $f(-8) = f(8) = 0$, kuid tuletis



Joon. 60.

$$f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

ei saa tähendatud vahemikus nulliks (joon. 61). See tuleb sellest,



Joon. 61.

et $x = 0$ puhul lõplikku tuletist $f'(x)$ pole olemas (ta saab lõpmatuks).

§ 47. Lagrange'i teoreem. Kui funktsioon $f(x)$ on pidev vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ ja diferentsitav vahemikus $a < x < b$, siis asetseb a ja b vahel vähemalt üks x väärtus $x = \xi$, mille puhul

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Tähistame k-ga funktsiooni ja argumendi väärtuste vahede jagatise

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = k,$$

millest

$$f(b) - f(a) - (b - a)k = 0.$$

Asendades viimases võrduses konstantse suuruse b muutuva suurusega x, saame funktsiooni

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - (x - a)k,$$

mis rahuldab Rolle'i teoreemi tingimusi: ta on vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ pidev ja vahemikus $a < x < b$ diferentsitav, sest need omadused on funktsioonidel $f(x)$ ja $(x - a)k$, ning peale selle $\varphi(a) = \varphi(b)$, sest siin $\varphi(b) = 0$ ja samuti ka $\varphi(a) = 0$. Diferentsides funktsiooni $\varphi(x)$, saame

$$\varphi'(x) = f'(x) - k.$$

Et Rolle'i teoreemi järgi vähemalt ühe x väärtuse $x = \xi$ puhul on $\varphi'(\xi) = 0$, kus $a < \xi < b$, siis on ka

$$f'(\xi) - k = 0,$$

millest

$$k = f'(\xi).$$

Asetades saadud k väärtuse lähtevõrdusse, saame

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi),$$

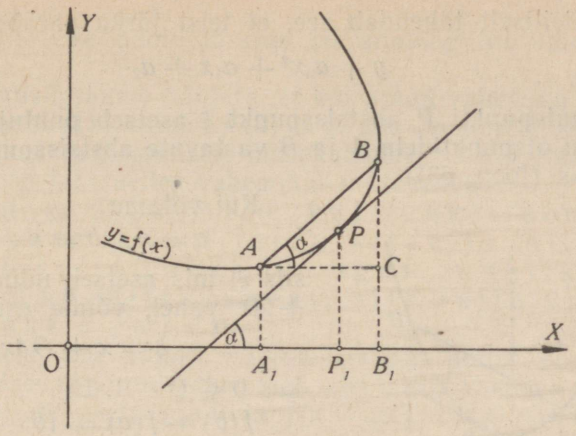
mida nimetatakse Lagrange'i valemiks ja mis väljendab diferentsiaalarvutuse keskväärtuse teoreemi.

Geomeetriliselt tähendab see, et kui $y = f(x)$ esitab vahemikus a-st b-ni pidevat kõverat (joon. 62), kus

$$OA_1 = a, \quad OB_1 = b$$

ja

$$A_1A = f(a), \quad B_1B = f(b)$$



Joon. 62.

ning

$$AC = b - a$$

ja

$$CB = f(b) - f(a),$$

siis

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \operatorname{tg} \alpha,$$

mis näitab, et A ja B vahel asetseb kõveral vähemalt üks punkt P, milles puutuja on paralleelne kõõluga AB. Selles punktis $\operatorname{tg} \alpha = f'(\xi)$, mis ütleb ühtlasi, et funktsiooni $f(x)$ muutumise keskmine kiirus vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ on võrdne funktsiooni muutumise kiirusega punktis $x = \xi$.

Lagrange'i teoreem kinnitab, et on olemas niisugune x väärtus ξ, mille puhul kehtib saadud valem, kuid seejuures ei näita mingisugust teed selle x väärtuse leidmiseks. Ruutfunktsiooni puhul saab näidata, et ξ kujutab ikka ja alati arvude a ja b aritmeetilist keskmist, sest kui $f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$, siis ühelt poolt $f'(x) = 2a_0x + a_1$ ja järelikult

$$f'(\xi) = 2a_0\xi + a_1 \tag{1}$$

ning teiselt poolt, rakendades Lagrange'i valemit, saame

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{a_0b^2 + a_1b + a_2 - a_0a^2 - a_1a - a_2}{b - a} =$$

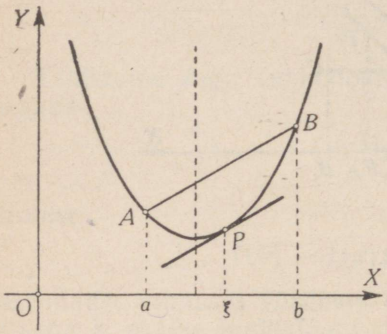
$$= a_0(b + a) + a_1 = 2a_0\frac{a + b}{2} + a_1. \tag{2}$$

Võrdustest (1) ja (2) nähtub, et ruutfunktsiooni puhul $\xi = \frac{a + b}{2}$.

Geomeetriliselt tähendab see, et teist järku parabooli

$$y + a_0x^2 + a_1x + a_2$$

puutuja puutepunkti P abstsisspunkt ξ asetseb puutujaga paralleelse kõõlu otspunktidele A ja B vastavate abstsisspunktide a ja b keskkohas (joon. 63).



Joon. 63.

Kui võtame

$$a = x, \quad b = x + \Delta x,$$

siis ξ, mis asetseb nüüd x ja $x + \Delta x$ vahel, võime esitada kujul

$$\xi = x + \Theta\Delta x,$$

kus $0 < \Theta < 1$. Et

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi),$$

siis võime diferentsiaalarvutuse keskväärtuse teoreemi esitada valemina

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x f'(x + \Theta\Delta x),$$

kusjuures nulli ja ühe vahel asetsev Θ võib olla nii ratsionaalne kui ka irratsionaalne. Et ruutfunktsiooni puhul ξ kujutab arvude x ja $x + \Delta x$ aritmeetilist keskmist, siis sel juhul on alati $\Theta = \frac{1}{2}$.

Rakendades Lagrange'i valemit, võime tõestada järgmised teoreemid.

Teoreem 1: Kui antud vahemiku igas punktis funktsiooni $f(x)$ tuletis $f'(x) > 0$, siis on funktsioon $f(x)$ selles vahemikus monotoonselt kasvav, ja kui $f'(x) < 0$, siis on funktsioon $f(x)$ selles vahemikus monotoonselt kahanev.

Teoreemi esimese osa tõestamiseks võtame antud vahemikus kaks meelevaldset punkti x_1 ja x_2, kus $x_1 < x_2$. Lagrange'i valemi järgi on siis

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\xi),$$

kus ξ on mingi punkt, mis asetseb x_1 ja x_2 vahel. Et eelduse järgi antud vahemiku igas punktis $f'(x) > 0$, siis ka $f'(\xi) > 0$ ja järelikult

$$f(x_2) - f(x_1) > 0$$

ehk

$$f(x_1) < f(x_2),$$

mis ütleb, et funktsioon on antud vahemikus monotoonselt kasvav.

Teoreemi teise poole tõestus on analoogiline esimese poole tõestusega.

Samal viisil saame näidata, et kui antud vahemiku igas punktis funktsiooni $f(x)$ tuletis $f'(x) \geqslant 0$, siis on funktsioon $f(x)$ selles vahemikus monotoonselt mittekahanev, ja kui $f'(x) \leqslant 0$, siis on funktsioon $f(x)$ selles vahemikus mittekasvav.

Niisamuti ka ümberpöördult: kui funktsioon $f(x)$ on antud vahemikus diferentsitav ja mittekahanev, siis selle vahemiku igas punktis $f'(x) \geqslant 0$, ja kui ta on mittekasvav, siis selle vahemiku igas punktis $f'(x) \leqslant 0$.

Tõepoolest, kui küllalt väikese $\Delta x > 0$ puhul punktid x ja $x + \Delta x$ asetsevad antud vahemikus, siis mittekahaneva funktsiooni puhul $f(x + \Delta x) - f(x) \geqslant 0$ ja $f(x - \Delta x) - f(x) \leqslant 0$ ning

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geqslant 0 \quad \text{ja} \quad \frac{f(x - \Delta x) - f(x)}{-\Delta x} \geqslant 0,$$

millede piirväärtus, kui $\Delta x \to 0$, on

$$f'(x) \geqslant 0.$$

Kui aga funktsioon on mittekasvav, siis $f(x + \Delta x) - f(x) \leqslant 0$ ja $f(x - \Delta x) - f(x) \geqslant 0$ ning

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \leqslant 0 \quad \text{ja} \quad \frac{f(x - \Delta x) - f(x)}{-\Delta x} \leqslant 0,$$

millede piirväärtus, kui $\Delta x \to 0$, on

$$f'(x) \leqslant 0.$$

Teoreem 2: Kui antud vahemiku igas punktis funktsiooni $f(x)$ tuletis $f'(x) = 0$, siis selles vahemikus funktsioon $f(x)$ on konstantne suurus.

Nagu eespool (§ 34, teoreem 2, järeldus) nägime, on konstantse funktsiooni $f(x) = c$ tuletis võrdne nulliga, s. o. $f'(x) = 0$. Tekib küsimus, kas ka ümberpöördult funktsioon $f(x)$, mille tuletis antud vahemiku igas punktis võrdub nulliga, on konstantne suurus? Selle teoreemi tõestamiseks võtame antud vahemikus kaks mistahes punkti x_1 ja x_2. Lagrange'i valemi järgi on siis

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi),$$

kus ξ asetseb x_1 ja x_2 vahel. Et eelduse järgi antud vahemiku igas punktis $f'(x) = 0$, siis ka $f'(\xi) = 0$ ja järelikult $f(x_1) = f(x_2)$. Et antud vahemiku mistahes kahes punktis funktsiooni $f(x)$ väärtused on võrdsed, siis sellest järeldub, et funktsioon $f(x)$ on selles vahemikus konstantne.

§ 48. Cauchy teoreem. Kui funktsioonid $f(x)$ ja $g(x)$ on pidevad vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ ja diferent-

sitavad vahemikus $a < x < b$, kusjuures $g'(x) \neq 0$, siis asetseb a ja b vahel vähemalt üks x väärtus $x = \xi$, mille puhul

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Tähistades k-ga funktsioonide väärtuste vahede jagatise

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = k,$$

millest

$$f(b)-f(a) - k[g(b) - g(a)] = 0,$$

ja asendades viimases võrduses konstantse suuruse b muutuva suurusega x, saame funktsiooni

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - k[g(x) - g(a)],$$

mis on pidev vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ ja diferentsitav vahemikus $a < x < b$, kusjuures $\varphi(b) = 0$ ja $\varphi(a) = 0$. Diferentsides saame

$$\varphi'(x) = f'(x) - kg'(x).$$

Et aga funktsioon $\varphi(x)$ on pidev vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ ja diferentsitav vahemikus $a < x < b$ ning $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, siis Rolle'i teoreemi järgi asetseb a ja b vahel vähemalt üks x väärtus ξ, mille puhul

$$\varphi'(\xi) = f'(\xi) - kg'(\xi) = 0,$$

millest

$$k = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

ja seega

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

mida nimetatakse Cauchy* valemiks ja mis väljendab diferentsiaalarvutuse üldistatud keskväärtuse teoreemi.

Kui Cauchy valemis võtame $g(x) = x$, siis $g(b) = b$, $g(a) = a$ ja $g'(\xi) = 1$ ning

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi),$$

---

* A. L. Cauchy (1789—1857) — prantsuse matemaatik, kes rajas matemaatilise analüüsi piiri mõistele ja tõi kompleksmuutuja funktsioonide teooriasse. Tema tööd on põhilise tähtsusega mitmes matemaatika osas.

mis kujutab eespool leitud Lagrange'i valemit. Kuid Lagrange'i valemeid

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi) \text{ ja } \frac{g(b)-g(a)}{b-a}=g\,(\xi)$$

omavahel jagades ei saa me Cauchy valemit, sest neis kahes valemis ei pruugi a ja b vahepealne väärtus ξ olla üks ja sama.

Rakendades Cauchy valemit, saame näidata, et kui antud vahemiku igas punktis funktsioonide $f(x)$ ja $g(x)$ tuletised on võrdsed, s. o. $f'(x)=g'(x)$, siis selles vahemikus funktsioonid $f(x)$ ja $g(x)$ erinevad teineteisest ainult konstantse liikme c poolest, s. o. $f(x)=g(x)+c$.

Võttes antud vahemikus kaks mistahes punkti x_1 ja x_2, võime Cauchy valemi järgi kirjutada, et

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{g(x_2)-g(x_1)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

kus ξ asetseb x_1 ja x_2 vahel. Et eelduse järgi vahemiku igas punktis $f'(x)=g'(x)$, siis ka $f'(\xi)=g'(\xi)$ ja järelikult

$$f(x_2)-g(x_2)=f(x_1)-g(x_1),$$

millest nähtub, et funktsioonide $f(x)$ ja $g(x)$ väärtuste vahed antud vahemiku punktides on võrdsed. Võttes üldiselt antud vahemikus funktsioonide vahe $f(x)-g(x)$, mille tuletis on null, s. o. $f'(x)-g'(x)=0$, saame (§ 47, teoreemi 2 põhjal), et vahe $f(x)-g(x)$ on konstantne suurus c ning seega

$$f(x)=g(x)+c.$$

§ 49. Diferentsiaali rakendusi ligikaudsetes arvutustes. Olgu antud funktsioon $y=f(x)$, mis omab pidevat tuletist $f'(x)$. Andes ette argumendi väärtuse x, võime funktsionaalse seose $y=f(x)$ järgi alati leida funktsiooni vastava väärtuse y. Kui aga argumendi x väärtus ei ole teada täpselt, vaid ligikaudu, s. o. $x\approx x_0$, milles peitub teatav viga Δx, kus nüüd $x=x_0+\Delta x$, siis ei saa ka enam y väärtust täpselt määrata. Sel juhul argumendi viga Δx põhjustab funktsiooni väärtuses teatava vea Δy, kusjuures

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

Kui siinjuures argumendi viga ehk argumendi kasv Δx on küllalt väike, siis on funktsiooni diferentsiaali dy erinevus funktsiooni kasvust Δy samuti väga väike. Et diferentsiaalarvutuse keskväärtuse teoreemi järgi

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta x\cdot f'(x_0+\Theta\Delta x),$$

kus $0<\Theta<1$, ja funktsiooni $f'(x)$ pidevuse tõttu

$$\lim_{\Delta x \to 0} f'(x_0 + \Theta \Delta x) = f'(x_0),$$

siis küllalt väikese Δx puhul funktsiooni viga

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx \Delta x \cdot f'(x_0) = dy,$$

s. o.

$$\Delta y \approx f'(x_0)\,\Delta x,$$

mis väljendab funktsiooni $f(x)$ absoluutset viga. Sellest nähtub, et küllalt keeruka Δy avaldise

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

asemele võib võtta lihtsama ja nimelt Δx suhtes lineaarse avaldise $f'(x_0)\Delta x$, mida arvestades võime leida funktsiooni $y = f(x)$ ligikaudse väärtuse

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Kui meil on näiteks mõõtmise teel x väärtus x_0 leitud maksimaalse veaga Δx, siis funktsiooni väärtuse puhul tuleb arvestada absoluutset viga

$$\Delta y \approx f'(x_0)\,\Delta x$$

või vastavat relatiivset viga

$$\frac{\Delta y}{y_0} \cdot 100\% \approx \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\,\Delta x \cdot 100\%.$$

a) Kui näiteks kera diameeter d on leitud mõõtmise teel maksimaalse veaga Δd, siis kera ruumala

$$V_0 = \frac{1}{6}\pi d^3$$

puhul tuleb arvestada viga

$$\Delta V \approx \frac{1}{2}\pi d^2 \Delta d.$$

Vastav relatiivne viga on siis

$$\frac{\Delta V}{V_0} \approx \frac{\frac{1}{2}\pi d^2 \Delta d}{\frac{1}{6}\pi d^3} = \frac{3\Delta d}{d}$$

ning kera ruumala

$$V = V_0 + \Delta V \approx \frac{1}{6}\pi d^3 + \frac{1}{2}\pi d^2 \Delta d = \frac{\pi d^2}{6}(d + 3\Delta d).$$

b) Kui funktsioonis

$$y = \sin x$$

võtta $x = x_0 + \Delta x$, siis funktsiooni viga

$$\Delta y \approx \cos x_0 \cdot \Delta x$$

ja

$$\sin(x_0 + \Delta x) \approx \sin x_0 + \cos x_0 \cdot \Delta x.$$

Kui seejuures $x_0 = 0$, siis väikese nurga Δx puhul

$$\sin \Delta x \approx \Delta x,$$

kus Δx esineb radiaanmõõdus.

Kui antud juhul võtta näiteks

$$x_0 = \frac{\pi}{3} \ (= 60°) \quad \text{ja} \quad \Delta x = \frac{\pi}{180} \ (= 1°),$$

siis

$$\Delta y \approx \cos 60° \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0{,}00872$$

ja

$$\sin 61° \approx \sin 60° + \cos 60° \cdot \frac{\pi}{180} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0{,}87475,$$

mis erineb $\sin 61°$ õigemast väärtusest ainult 0,00013 võrra, sest viie kümnendkohaga

$$\sin 61° = 0{,}87462.$$

§ 50. Newtoni lähendamismeetod. Võrrandi $f(x) = 0$ reaallahendeid on ikka võimalik leida graafilisel teel, kuid graafilisel teel saame enamikul juhtudel leida ainult lahendite ligikaudsed väärtused. Neid lahendite ligikaudseid väärtusi on võimalik parandada ehk täpsustada nn. Newtoni lähendamismeetodi abil, mis põhineb diferentsiaalarvutuse keskväärtuse teoreemil (Lagrange'i valemil).

Oletame, et võrrandi $f(x) = 0$ üks reaallahend x on graafiliselt leitud ja tema ligikaudne väärtus on a, s. o. $x \approx a$. Olgu absoluutne viga, mille võrra ligikaudne lahend täpsest lahendist erineb, Δa. Siis lahendi täpne väärtus on

$$x = a + \Delta a.$$

Võttes (eelmise paragrahvi põhjal) funktsiooni $f(x)$ ligikaudse väärtuse ja võrrutades selle nulliga, saame

$$f(x) = f(a + \Delta a) \approx f(a) + \Delta a \cdot f'(a) \approx 0,$$

millest

$$\Delta a \approx -\frac{f(a)}{f'(a)},$$

kus nüüd aga $-\frac{f(a)}{f'(a)}$ esitab ligikaudset viga. Seega võrrandi $f(x) = 0$ lahendi uus ligikaudne väärtus on

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)},$$

kus a_1 on lahendi täpsem ligikaudne väärtus kui a.

Et saada lahendi täpsele väärtusele veel lähemale, selleks võtame

$$x = a_1 + \Delta a_1,$$

kus Δa_1 on a_1 absoluutne viga; siis (analoogiliselt eelnevaga) saame, et

$$f(x) = f(a_1 + \Delta a_1) \approx f(a_1) + f'(a_1)\Delta a_1 \approx 0,$$

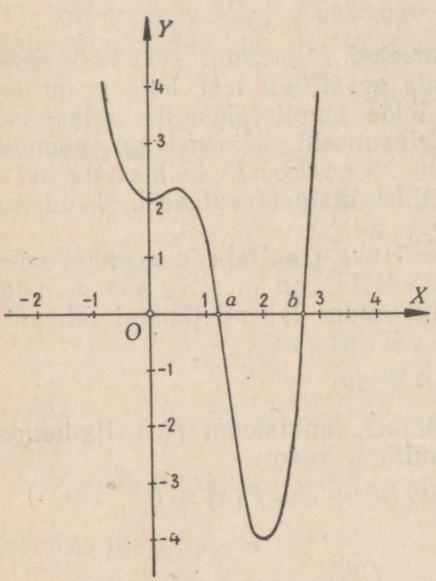
millest

$$\Delta a_1 \approx -\frac{f(a_1)}{f'(a_1)},$$

kus $-\frac{f(a_1)}{f'(a_1)}$ on uus ligikaudne viga. Seega võrrandi $f(x) = 0$ lahendi täpsem ligikaudne väärtus kui a_1 on

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)} = a - \frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)}.$$

Analoogiliselt jätkates võime võrrandi $f(x) = 0$ lahendi täpsele väärtusele jõuda nii lähedale, kui me iganes soovime.



Joon. 64.

a) Et parandada Newtoni lähendamismeetodi abil näiteks võrrandi

$$x^4 - 3x^3 + x + 2 = 0$$

reaallahendite ligikaudseid väärtusi, mis on leitud graafilisel teel, selleks vaatleme antud võrrandi vasakut poolt x funktsioonina, s. o.

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + x + 2,$$

mille tuletis on

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 1.$$

Antud võrrandil on kaks reaallahendit (joon. 64), mille ligikaudsed väärtused on

$$a = 1{,}2 \quad \text{ja} \quad b = 2{,}8.$$

Esimeses lahendis peitub absoluutne viga Δa, mille ligikaudne väärtus on

$$\Delta a \approx -\frac{f(1{,}2)}{f'(1{,}2)} = -\frac{(1{,}2)^4 - 3\cdot(1{,}2)^3 + 1{,}2 + 2}{4\cdot(1{,}2)^3 - 9\cdot(1{,}2)^2 + 1} \approx 0{,}018.$$

Seega lahendi täpsem ligikaudne väärtus kui $a = 1{,}2$ on

$$a_1 = 1{,}2 + 0{,}018 = 1{,}218.$$

Teises lahendis peitub absoluutne viga Δb, mille ligikaudne väärtus on

$$\Delta b \approx -\frac{f(2{,}8)}{f'(2{,}8)} = -\frac{(2{,}8)^4 - 3\cdot(2{,}8)^3 + 2{,}8 + 2}{4\cdot(2{,}8)^3 - 9\cdot(2{,}8)^2 + 1} \approx -0{,}022.$$

Seega lahendi täpsem ligikaudne väärtus kui $b = 2{,}8$ on

$$b_1 = 2{,}8 - 0{,}022 = 2{,}778.$$

Teistkordsel parandusel olgu lahendite a_1 ja b_1 absoluutsed vead vastavalt Δa_1 ja Δb_1, s. o.

$$a_2 = a_1 + \Delta a_1, \qquad b_2 = b_1 + \Delta b_1,$$

kus

$$\Delta a_1 \approx -\frac{f(1{,}218)}{f'(1{,}218)} = -\frac{(1{,}218)^4 - 3\cdot(1{,}218)^3 + 1{,}218 + 2}{4\cdot(1{,}218)^3 - 9\cdot(1{,}218)^2 + 1} \approx -0{,}00038$$

$$\Delta b_1 \approx -\frac{f(2{,}778)}{f'(2{,}778)} = -\frac{(2{,}778)^4 - 3\cdot(2{,}778)^3 + 2{,}778 + 2}{4\cdot(2{,}778)^3 - 9\cdot(2{,}778)^2 + 1} \approx -0{,}00108.$$

Tähendab,

$a_2 = 1{,}218 - 0{,}00038 = 1{,}21762$

$b_2 = 2{,}778 - 0{,}00108 = 2{,}77692.$

b) Võrrandil

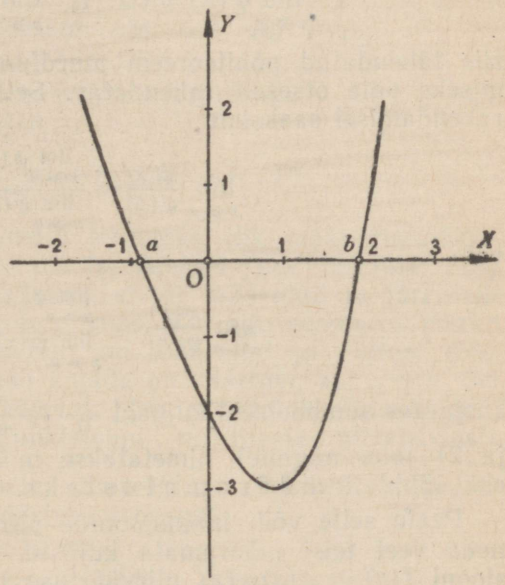
$$3^x - 3x - 3 = 0$$

on kaks reaallahendit (joon. 65). Joonise järgi

$a = -0{,}9$ ja $b = 2$.

Kui vaatleme võrrandi vasakut poolt x funktsioonina, s. o. $f(x) = 3^x - 3x - 3$, siis

$$f'(x) = 3^x \ln 3 - 3.$$



Joon. 65.

Esimese lahendi absoluutne viga

$$\Delta a \approx -\frac{f(-0{,}9)}{f'(-0{,}9)} = -\frac{3^{-0,9} - 3(-0{,}9) - 3}{3^{-0,9} \cdot \ln 3 - 3} \approx 0{,}028$$

ja lahendi täpsem ligikaudne väärtus kui $a = -0{,}9$ on

$$a_1 = -0{,}9 + 0{,}028 = -0{,}872.$$

Teise lahendi absoluutne viga

$$\Delta b = -\frac{f(2)}{f'(2)} = -\frac{3^2 - 3 \cdot 2 - 3}{3^2 \cdot \ln 3 - 3} = 0.$$

Tähendab, $b = 2$ on lahendi täpne väärtus.

§ 51. Määramata kujud. Murdfunktsiooni $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ piirväärtuse $x \to a$ puhul leiame põhiteoreemi

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} \varphi(x)}{\lim\limits_{x \to a} \psi(x)}$$

järgi, kus $\lim \psi(x) \neq 0$. Kui aga funktsioonid $\varphi(x)$ ja $\psi(x)$ mõlemad lähenevad $x \to a$ puhul nullile või lõpmatusele, s. o.

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = 0 \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to a} \psi(x) = 0$$

või

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = \infty \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to a} \psi(x) = \infty,$$

siis tähendatud põhiteoreem murdfunktsiooni piirväärtuse leidmiseks pole otseselt rakendatav. Selle põhiteoreemi formaalsel rakendamisel saaksime

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} \varphi(x)}{\lim\limits_{x \to a} \psi(x)} = \frac{0}{0}$$

või

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} \varphi(x)}{\lim\limits_{x \to a} \psi(x)} = \frac{\infty}{\infty},$$

kusjuures sümboolseid kujusid $\frac{0}{0}$ ja $\frac{\infty}{\infty}$ (nagu paragrahvides 20 ja 21 juba nägime) nimetatakse määramata kujudeks ehk lühidalt määramatusteks.

Peale selle võib funktsioonide piirväärtuste arvutamisel esineda veel teisi määramata kujusid. Nii näiteks korrutisfunktsiooni $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$ piirväärtuse leidmisel $x \to a$ puhul, kui üks teguritest läheneb nullile ja teine lõpmatusele, s. o.

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=0 \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to a}\psi(x)=\infty,$$

siis

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}[\varphi(x)\cdot\psi(x)]=\lim_{x\to a}\varphi(x)\cdot\lim_{x\to a}\psi(x)=0\cdot\infty,$$

kus sümboolset kuju $0\cdot\infty$ nimetame samuti määramata kujuks.

Kui funktsioonide vahe $\varphi(x)-\psi(x)$ puhul

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=\infty \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to a}\psi(x)=\infty,$$

siis

$$\lim_{x\to a}[\varphi(x)-\psi(x)]=\lim_{x\to a}\varphi(x)-\lim_{x\to a}\psi(x)=\infty-\infty,$$

kus $\infty-\infty$ on samuti määramata kuju.

Kui eksponentsiaal-astmefunktsiooni $f(x)=\varphi(x)^{\psi(x)}$ puhul

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=0 \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to a}\psi(x)=0$$

või

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=\infty \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to a}\psi(x)=0$$

või

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=1 \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to a}\psi(x)=\infty,$$

siis vastavalt neile

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\varphi(x)^{\psi(x)}=0^0 \quad \text{või} \quad \infty^0 \quad \text{või} \quad 1^\infty,$$

kus 0^0, ∞^0 ja 1^∞ esinevad määramata kujudena.

Esitatud sümboolsed kujud

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty,$$

mida me nimetame määramata kujudeks ehk määramatusteks, näitavad, et $x=a$ puhul ei ole funktsiooni $f(x)$ väärtusel $f(a)$ mõtet. Nendel juhtudel funktsioon ei ole määratud ja järelikult funktsiooni väärtust $f(a)$ pole olemas. Kui aga seejuures punkti $x=a$ ümbruses funktsioon $f(x)$ on määratud ja ühtlasi diferentsitav, siis võib funktsioon omada piirväärtust, kui $x\to a$. Sel juhul puuduv funktsiooni väärtus $f(a)$ asendatakse funktsiooni piirväärtusega $\lim_{x\to a}f(x)$. Funktsiooni niisuguste piirväärtuste leidmise võtte käsitlemisele asumegi, kasutades seejuures diferentsiaalarvutuse keskväärtuse teoreemi.

1) Olgu antud murdfunktsioon

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

kus $\varphi(x)$ ja $\psi(x)$ on pidevad x funktsioonid, mis $x \to a$ puhul lähenevad nullile, s. o. $\varphi(x) \to 0$ ja $\psi(x) \to 0$, mistõttu öeldakse, et antud murdfunktsioon kujutab endast $x = a$ puhul määramatust $\frac{0}{0}$, mille puhul funktsiooni käigus tekib katkevus.

Kui siin funktsioonid $\varphi(x)$ ja $\psi(x)$ on punkti $x = a$ ümbruses määratud ja diferentsitavad ning $\psi'(x) \neq 0$, siis saame Cauchy valemit kasutades näidata, et

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

Rakendame Cauchy valemit järgmiselt:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\psi(x) - \psi(a)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)},$$

kus ξ asetseb x ja a vahel. Oletame siinjuures, et $x \to a$ puhul funktsioonide tuletiste suhe $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ omab mingit piirväärtust A, s. o.

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = A.$$

Et ξ jääb ikka ja alati x ja a vahele, siis $x \to a$ puhul samuti $\xi \to a$ ning seega sama piirväärtust A omab ka suhe $\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}$, kui $x \to a$ ja sellega ühtlasi $\xi \to a$, s. o.

$$\lim_{\xi \to a} \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} = A,$$

ja järelikult eespool esineva Cauchy valemi põhjal

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = A.$$

Neid võrdusi kõrvutades näeme, et

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

Saadud tulemusest nähtub, et murdfunktsiooni $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ piirväärtuse leidmiseks, kui argumendi väärtusel $x = a$ see funktsioon omab määramata kuju $\frac{0}{0}$, tuleb murdfunktsiooni lugejat ja nimetajat eraldi diferentsida ja leida siis uue murdfunktsiooni $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ piirväärtus, mis on ühtlasi murdfunktsiooni $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ piirväärtuseks, kui $x \to a$.

Kui $x \to a$ puhul ka $\varphi'(x) \to 0$ ja $\psi'(x) \to 0$ ning seega $x = a$

puhul tekib uuesti määramata kuju $\frac{0}{0}$, siis, kui funktsioonid $\varphi'(x)$ ja $\psi'(x)$ on diferentsitavad punkti a ümbruses ja $\psi''(x) \neq 0$, jätkame antud murdfunktsiooni piirväärtuse leidmist lugeja ja nimetaja diferentsimise teel, saades

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)}.$$

Kui ka siin $x \to a$ puhul $\varphi''(x) \to 0$ ja $\psi''(x) \to 0$ ning seega $x = a$ puhul tekib jälle määramata kuju $\frac{0}{0}$, siis arvutame analoogiliselt edasi, kuni määramatus kaob, s. o.

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\varphi^{(n)}(x)}{\psi^{(n)}(x)},$$

kui ainult punkti a ümbruses funktsioonid $\varphi(x)$ ja $\psi(x)$ on diferentsitavad kuni n-järku tuletisteni ning $\psi^{(n)}(x) \neq 0$.

Seda murdfunktsiooni piirväärtuse arvutamise viisi nimetatakse l'Hôpitali* meetodiks.

L'Hôpitali meetod jääb rakendatavaks ka siis, kui $x \to \infty$. Kui $x \to \infty$ puhul $\varphi(x) \to 0$ ja $\psi(x) \to 0$ ning mõlemad funktsioonid on kuitahes suurte x väärtuste puhul diferentsitavad ja seejuures $\psi'(x) \neq 0$, siis l'Hôpitali meetodi kehtivuse tõestamiseks tähistame $x = \frac{1}{u}$, kus $x \to \infty$ puhul $u \to 0$. Seega

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}{\psi\left(\frac{1}{u}\right)} = \frac{\varphi_1(u)}{\psi_1(u)},$$

kus nüüd $u \to 0$ puhul $\varphi_1(u) \to 0$ ja $\psi_1(u) \to 0$. Võtame viimase murdfunktsiooni lugeja ja nimetaja tuletiste suhte

$$\frac{\varphi'_1(u)}{\psi'_1(u)} = \frac{\varphi'\left(\frac{1}{u}\right) \cdot \left(-\frac{1}{u^2}\right)}{\psi'\left(\frac{1}{u}\right) \cdot \left(-\frac{1}{u^2}\right)} = \frac{\varphi'\left(\frac{1}{u}\right)}{\psi'\left(\frac{1}{u}\right)} = \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)},$$

kusjuures eespool esineva l'Hôpitali meetodi järgi

$$\lim_{u \to 0} \frac{\varphi_1(u)}{\psi_1(u)} = \lim_{u \to 0} \frac{\varphi'_1(u)}{\psi'_1(u)},$$

mis on identne võrdusega

---

* G. F. A. l'Hôpital (1661—1704) avaldas 1696. aastal raamatu «Lõpmata kahanevate suuruste analüüs», milles sisaldub ühtlasi uurimus funktsioonide jagatise piirväärtuse kohta juhul, kui jagatis argumendi mingi väärtuse puhul omab määramata kuju $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)},$$

millest nähtub, et l'Hôpitali meetod on rakendatav ka siis, kui $x\to\infty$ puhul $\varphi(x)\to 0$ ja $\varphi(x)\to 0$.

a) Näiteks funktsioon

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{x^2-7x+10}{x^2-4}$$

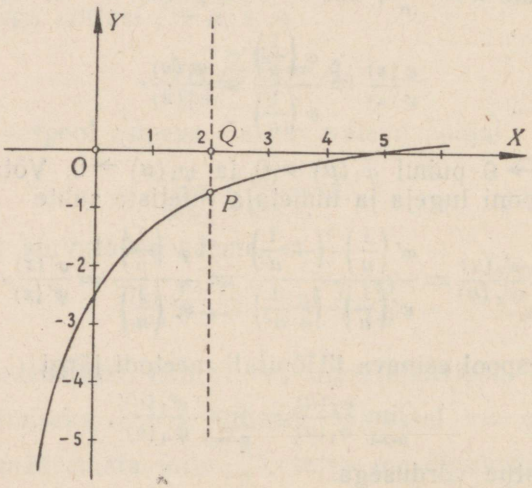
omab määramata kuju $\frac{0}{0}$, kui $x=2$. Diferentsides funktsiooni lugejat ja nimetajat eraldi, leiame funktsiooni piirväärtuse, kui $x\to 2$, s. o.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-7}{2x}=-0{,}75.$$

Funktsiooni

$$f(x)=\frac{x^2-7x+10}{x^2-4}$$

piirväärtus, kui $x\to 2$, kujutab geomeetriliselt sirgel $x-2=0$ asetseva punkti ordinaati (joon. 66). Selle punkti sirgel leiame, kui läheneme argumendi väärtusega nii ühelt kui ka teiselt poolt



Joon. 66.

sirget punktile, milles $x=2$. Punkt P sirgel $x-2=0$, millele läheneb kõver mõlemalt poolt seda sirget, määrab funktsiooni piirväärtuse $QP=-0{,}75$, kui $x\to 2$.

b) Funktsioon

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{x - \sin x}{x^3}$$

omab punktis $x = 0$ määramata kuju $\frac{0}{0}$. Siin tuleb funktsiooni lugejat ja nimetajat diferentsida kaks korda järgemööda, et leida tema piirväärtust, kui $x \to 0$, s. o.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{6}.$$

2) Näitame, et kui murdfunktsioon

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

omab argumendi väärtusel $x = a$ määramata kuju $\frac{\infty}{\infty}$, s. o. kui $x \to a$ puhul $\varphi(x) \to \infty$ ja $\psi(x) \to \infty$, siis selle murdfunktsiooni piirväärtuse leidmiseks, kui $x \to a$, saame analoogiliselt eelnevale kasutada l'Hôpitali meetodit.

Võtme punkti $x = a$ ümbruses kaks x väärtust x ja x_0, millede puhul funktsioon on määratud, nii et x asetseb x_0 ja a vahel. Siis Cauchy valemi järgi

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)},$$

kus ξ asetseb x_0 ja x vahel ja järelikult x_0 ja a vahel. Teisendame saadud võrduse vasakut poolt järgmiselt:

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \cdot \frac{1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{\psi(x_0)}{\psi(x)}},$$

kus nüüd

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \cdot \frac{1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{\psi(x_0)}{\psi(x)}} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)},$$

millest

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} \cdot \frac{1 - \frac{\psi(x_0)}{\psi(x)}}{1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}. \tag{1}$$

Oletame, et $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ omab mingit piirväärtust A, kui $x \to a$, s. o.

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = A,$$

ja näitame, et sama piirväärtust omab ka $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, kui $x \to a$. Valime x_0 niivõrd lähedase a-le, et x_0 ja a vahel asetseva ξ puhul kehtiks võrratus

$$\left| \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} - A \right| < \varepsilon$$

ehk

$$A - \varepsilon < \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} < A + \varepsilon, \tag{2}$$

kus ε on kuitahes väike etteantud positiivne arv. Et ξ asetseb x_0 ja a vahel ning ühtlasi ka x_0 ja x vahel, siis x muutumisel muutub ka ξ ning võrratus (2) jääb ikka kehtivaks. Loeme x_0 konstantseks suuruseks ja laseme x läheneda a-le. Et eelduse kohaselt $\varphi(x) \to \infty$ ja $\psi(x) \to \infty$, kui $x \to a$, siis

$$\frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)} \to 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\psi(x_0)}{\psi(x)} \to 0$$

ning võrduse (1) parema poole teine tegur läheneb ühele. Tähistame selle teguri lühidalt $1 + h$, kus $h \to 0$, kui $x \to a$. Korrutame võrratuste (2) pooled teguriga $1 + h$; saame

$$(A - \varepsilon)(1 + h) < \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}(1 + h) < (A + \varepsilon)(1 + h)$$

ehk

$$(A - \varepsilon)(1 + h) < \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} < (A + \varepsilon)(1 + h).$$

Et ε on kuitahes väike arv ja $h \to 0$, kui $x \to a$, siis järelikult $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \to A$, kui $x \to a$, ning seega

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

Saadud võrdus näitab, et kui murdfunktsioon $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ omab $x = a$ puhul määramata kuju $\frac{\infty}{\infty}$, võime tema piirväärtuse leidmiseks, kui $x \to a$, samuti kasutada l'Hôpitali meetodit, s. o. diferentsida murdfunktsiooni lugejat ja nimetajat eraldi.

Kui siin $x \to a$ puhul $\varphi'(x) \to 0$ ja $\psi'(x) \to 0$ või $\varphi'(x) \to \infty$ ja

$\psi'(x) \to \infty$ ning $x = a$ puhul tekib uuesti määramata kuju $\frac{0}{0}$ või $\frac{\infty}{\infty}$, siis analoogiliselt eelnevale tuleb murdfunktsiooni $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ piirväärtuse leidmiseks kasutada lugeja $\varphi(x)$ ja nimetaja $\psi(x)$ kõrgemaid tuletisi (kui ainult need on olemas).

Samuti analoogiliselt eelnevale (p. 1) võime näidata, et käesoleval juhul l'Hôpitali meetod on rakendatav ka siis, kui $x \to \infty$.

Näiteks funktsioon

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\ln(x-5)}{\ln(e^x - e^5)}$$

omab $x = 5$ puhul määramata kuju $\frac{\infty}{\infty}$. Diferentsides järk-järgult (kaks korda) funktsiooni lugejat ja nimetajat eraldi, saame funktsiooni piirväärtuse, kui $x \to 5$, s. o.

$$\lim_{x \to 5} \frac{\ln(x-5)}{\ln(e^x - e^5)} = \lim_{x \to 5} \frac{e^x - e^5}{e^x(x-5)} = \lim_{x \to 5} \frac{1}{x-4} = 1.$$

3) Kui korrutisfunktsioon

$$f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$$

omab argumendi väärtusel $x = a$ määramata kuju $0 \cdot \infty$, s. o. kui $x \to a$ puhul $\varphi(x) \to 0$ ja $\psi(x) \to \infty$, siis piirväärtuse leidmiseks, kui $x \to a$, teisendame selle korrutisfunktsiooni murdfunktsiooniks

$$\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}} \quad \text{või} \quad \frac{\psi(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}},$$

millede puhul saame rakendada l'Hôpitali meetodit, sest nüüd

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}} = \frac{0}{0} \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to a} \frac{\psi(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Näiteks funktsioon

$$f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x) = x \operatorname{ctg} x$$

omab $x = 0$ puhul määramata kuju $0 \cdot \infty$. Selle funktsiooni piirväärtuse, kui $x \to 0$, leiame järgmiselt:

$$\lim_{x \to 0} x \operatorname{ctg} x = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x \to 0} \cos^2 x = 1.$$

4) Kui funktsioon

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$$

omab argumendi väärtusel $x = a$ määramata kuju $\infty - \infty$, s. o. kui $x \to a$ puhul $\varphi(x) \to \infty$ ja $\psi(x) \to \infty$, siis võttes

$$\varphi(x) = \frac{1}{\varphi_1(x)} \text{ ja } \psi(x) = \frac{1}{\psi_1(x)},$$

saame

$$\varphi(x) - \psi(x) = \frac{1}{\varphi_1(x)} - \frac{1}{\psi_1(x)} = \frac{\psi_1(x) - \varphi_1(x)}{\varphi_1(x)\,\psi_1(x)},$$

mis nüüd $x = a$ puhul omab määramata kuju $\frac{0}{0}$, mille arvutamiseks rakendame l'Hôpitali meetodit.

Näiteks funktsioon

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x) = \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}$$

omab $x = 1$ puhul määramata kuju $\infty - \infty$. Selle funktsiooni piirväärtuse leidmiseks, kui $x \to 1$, viime mõlemad funktsioonid ühisele nimetajale ja diferentsime siis lugejat ja nimetajat kaks korda järgemööda, s. o.

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \to 1} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x \ln x}{x \ln x + x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\ln x + 1}{\ln x + 2} = \frac{1}{2}.$$

5) Kui eksponentsiaal-astmefunktsioon

$$f(x) = \varphi(x)^{\psi(x)}$$

omab argumendi väärtusel $x = a$ määramata kuju 0^0, ∞^0 või 1^∞, s. o. kui $x \to a$ puhul vastavalt $\varphi(x) \to 0$ ja $\psi(x) \to 0$ või $\varphi(x) \to \infty$ ja $\psi(x) \to 0$ või $\varphi(x) \to 1$ ja $\psi(x) \to \infty$, siis kõigepealt logaritmime seda funktsiooni, saades

$$\ln f(x) = \psi(x) \ln \varphi(x).$$

Funktsioon $\ln f(x)$ omab nüüd $x = a$ puhul määramata kuju $0 \cdot \infty$, mille puhul leiame $\ln f(x)$ piirväärtuse eespool (p. 3) käsitletud viisil. Leides selle funktsiooni piirväärtuse

$$\lim_{x \to a} \ln f(x) = \lim_{x \to a} [\psi(x) \cdot \ln \varphi(x)],$$

mis võib osutuda mingiks lõplikuks suuruseks k, $+\infty$-ks või $-\infty$-ks, saame antilogaritmides eksponentsiaal-astmefunktsiooni piirväärtuse

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \varphi(x)^{\psi(x)},$$

mis on siis vastavalt e^k, $+\infty$ või 0.

a) Eksponentsiaal-astmefunktsioon

$$f(x) = x^{\sin x}$$

omab määramata kuju 0^0, kui $x = 0$. Logaritmides seda funktsiooni, saame

$$\ln f(x) = \sin x \ln x,$$

mis omab nüüd $x = 0$ puhul määramata kuju $0 \cdot (-\infty)$. Et antud funktsiooni logaritmi piirväärtus, kui $x \to 0$, on

$$\lim_{x \to 0} \sin x \ln x = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} =$$

$$= -\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x \cos x}{x \sin x - \cos x} = 0,$$

siis antud funktsiooni piirväärtus

$$\lim_{x \to 0} x^{\sin x} = e^0 = 1.$$

b) Funktsioon

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

omab määramata kuju 0^0, kui $x = 0$. Logaritmides seda funktsiooni, saame

$$\ln f(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right),$$

mis omab nüüd $x = 0$ puhul määramata kuju $0 \cdot \infty$. Et antud funktsiooni logaritmi piirväärtus, kui $x \to 0$, on

$$\lim_{x \to 0} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x + 1} = 0,$$

siis antud funktsiooni piirväärtus ja nimelt parempoolne piirväärtus

$$\lim_{x \to 0+0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1,$$

mis nähtub ka funktsiooni graafikust (joon. 67).

c) Funktsioon

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

omab määramata kuju 1^{∞}, kui $x \to \infty$. Selle logaritm saab määramata kuju $\infty \cdot 0$; siis funktsiooni logaritmi piirväärtus, kui $x \to \infty$, on

$$\lim_{x\to\infty} x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

ning antud funktsiooni piirväärtus

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Analoogilise arvutusega saame sama tulemuse, kui funktsiooni

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

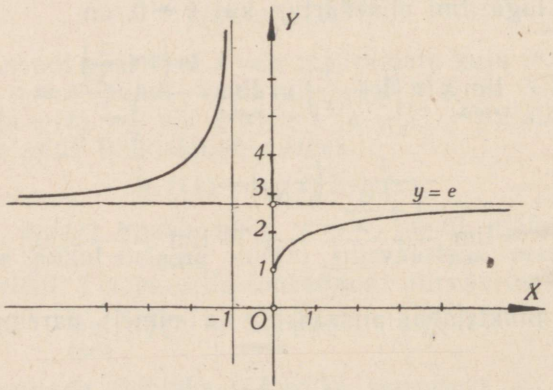
puhul $x \to -\infty$, s. o.

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Seega

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Mõlemat juhtu selgitab joonis 67, millest nähtub, et kui argument x kasvab 0-st $+\infty$-ni, siis funktsioon $f(x)$ kasvab monotoonselt 1-st e-ni, ja kui argument x absoluutselt kasvab negatiivses suunas — 1-st $-\infty$-ni, siis funktsioon $f(x)$ kahaneb monotoonselt $+\infty$-st e-ni.



Joon. 67.

§ 52. Taylori valem. 1) Kujutagu funktsioon $f(x)$ n-astme polünoomi

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

kus $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ on antud konstantsed koefitsiendid. Et esitada seda funktsiooni $x - x_0$ astmete järgi, s. o. kujul

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \ldots + b_n(x - x_0)^n,$$

kus x_0 on antud konstantne suurus ning $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$ on tundmatud koefitsiendid, selleks tuleb need koefitsiendid leida. Neid koefitsiente võime leida algebralisel teel, korraldades viimase võrduse parema poole x astmete järgi ja võrrutades x astmete koefitsiendid vastavalt esimese võrduse parema poole samaastmeliste x koefitsientidega; saame $n + 1$ võrrandit $n + 1$ tundmatuga $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$. Lahendades saadud-võrrandid, leiame $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Näiteks, et korraldada funktsioon

$$f(x) = 2 + x - 3x^2 + x^3$$

$(x - 1)$ astmete järgi, selleks kirjutame

$$2 + x - 3x^2 + x^3 = b_0 + b_1(x - 1) + b_2(x - 1)^2 + b_3(x - 1)^3 = (b_0 - b_1 + b_2 - b_3) + (b_1 - 2b_2 + 3b_3)x + (b_2 - 3b_3)x^2 + b_3x^3,$$

kus nüüd

$$\begin{aligned} b_0 - b_1 + b_2 - b_3 &= 2, \\ b_1 - 2b_2 + 3b_3 &= 1, \\ b_2 - 3b_3 &= -3, \\ b_3 &= 1. \end{aligned}$$

Lahendades saadud võrrandisüsteemi, leiame, et

$$b_3 = 1,\ b_2 = 0,\ b_1 = -2,\ b_0 = 1.$$

Tähendab,

$$2 + x - 3x^2 + x^3 = 1 - 2(x - 1) + (x - 1)^3.$$

Niisugust ülesande lahendamise võtet nimetatakse määramata koefitsientide meetodiks.

Funktsiooni $f(x)$ otsitavaid koefitsiente $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$ võime leida ka teisiti, rakendades selleks funktsiooni $f(x)$ ja tema tuletiste väärtusi $x = x_0$ puhul. Kui funktsioonis

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \ldots + b_n(x - x_0)^n$$

võtame $x = x_0$, siis $f(x_0) = b_0$. Edasi võtame funktsiooni tuletise

$$f'(x) = b_1 + 2b_2(x - x_0) + \ldots + nb_n(x - x_0)^{n-1}$$

ja asendame selles $x = x_0$; saame $f'(x_0) = b_1$. Võtame teise tuletise

$$f''(x) = 2b_2 + 3 \cdot 2b_3(x - x_0) + \ldots + n(n - 1)b_n(x - x_0)^{n-2}$$

ja asendame $x = x_0$; saame $f''(x_0) = 2b_2$. Jätkates edasi diferentsimist ja asendades iga kord $x = x_0$, leiame, et

$$f'''(x_0) = 3 \cdot 2 \cdot b_3,\ f^{(4)}(x_0) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot b_4, \ldots, f^{(n)}(x_0) = \\ = n(n-1) \ldots 3 \cdot 2 \cdot b_n,$$

kusjuures kõik kõrgemat järku tuletised, alates $(n+1)$-järgust, on võrdsed nulliga. Seega

$$b_0 = f(x_0),\ b_1 = f'(x_0),\ b_2 = \frac{f''(x_0)}{2!},\ b_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}, \ldots, b_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

ja järelikult

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\ + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Selle valemi järgi saame iga antud polünoomi esitada $(x - x_0)$ astmete järgi korraldatud polünoomina. Seda valemit nimetatakse Taylori* valemiks polünoomi puhul, kusjuures valemi paremat poolt nimetatakse Taylori polünoomiks.

Märkus: Kui Taylori polünoom esineb kujul

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \frac{b_2}{2!}(x - x_0) + \ldots + \frac{b_n}{n!}(x - x_0)^n,$$

siis on ikka

$$f(x_0) = b_0,\ f'(x_0) = b_1,\ f''(x_0) = b_2, \ldots, f^{(n)}(x_0) = b_n.$$

Eespool esinevas näites oli $x_0 = 1$. Rakendades selle näite puhul Taylori valemit, saame

$$f(1) = [2 + x - 3x^2 + x^3]_{x=1} = 1,$$
$$f'(1) = [1 - 6x + 3x^2]_{x=1} = -2,$$
$$f''(1) = [-6 + 6x]_{x=1} = 0,$$
$$f'''(1) = 6$$

ja seega

$$f(x) = 1 - 2(x - 1) + (x - 1)^3.$$

Erijuhul, kui $x_0 = 0$, saab Taylori valem kuju

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Arendame binoomi astme

$$f(x) = (1 + x)^n$$

---

* Brook Taylor (1685—1734) — inglise matemaatik. Taylori nime kandva valemi arenduskäik sisaldub tema teoses «Methodus incrementorum directa et inversa».

n-astme polünoomiks. Selleks võtame $x_0 = 0$, mille puhul

$$f(0) = 1,\ f'(0) = n,\ f''(0) = n(n-1),$$
$$f'''(0) = n(n-1)(n-2), \ldots, f^{(n)}(0) = n(n-1) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

ja seega Taylori valemi järgi

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \ldots + x^n.$$

Sellest nähtub, et Newtoni binoomivalem on Taylori valemi erijuht.

2) Kui funktsioon $f(x)$ ei kujuta polünoomi, siis eespool esitatud Taylori valem ei saa enam anda täpseid funktsiooni väärtusi, sest sel juhul me ei saa funktsiooni esitada $(x - x_0)$ astmete järgi korraldatud polünoomina, milles esineks lõplik arv liikmeid. Ta võib anda ainult ligikaudseid funktsiooni väärtusi, s. o. teatava veaga, mida võime valemi kasutamisel teha kuitahes väikeseks. Oletame, et funktsioon $f(x)$ on teatud vahemikus määratud ja omab selle vahemiku mistahes punktis x_0 tuletisi kuni $n+1$ järguni ($n+1$ järk kaasa arvatud). Siis, nagu eelmises punktis, võime funktsiooni $f(x)$ puhul koostada n-astme Taylori polünoomi, mida tähistame siin $p_n(x)$-ga, s. o.

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 +$$

$$+ \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

kus nüüd eelmise punkti märkuse põhjal selle polünoomi ja tema tuletiste väärtused punktis x_0 on samased funktsiooni $f(x)$ ja tema vastavate tuletiste väärtustega.

Siin ei saa enam väita, et $f(x)$ oleks võrdne $p_n(x)$-ga. Polünoom $p_n(x)$ annab funktsiooni $f(x)$ väärtuse teatava veaga. Viga, mis esineb funktsiooni $f(x)$ ja Taylori polünoomi $p_n(x)$ vahel, esitab mingit x funktsiooni, mida tähistame $R_n(x)$-ga, s. o.

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

ehk

$$R_n(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 +$$

$$+ \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n].$$

Vea $R_n(x)$ leidmiseks diferentsime viimast võrdust $n+1$ korda, s. o.

$$R_n'(x) = f'(x) - [f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}],$$

$$R_n''(x) = f''(x) - [f''(x_0) + f'''(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2}],$$

. . . . . .

$$R_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0),$$

$$R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x),$$

kusjuures

$$R_n(x_0) = 0,\ R_n'(x_0) = 0,\ R_n''(x_0) = 0, \ldots, R_n^{(n)}(x_0) = 0,$$

ning rakendame diferentsiaalarvutuse üldistatud keskväärtuse teoreemi ehk Cauchy valemit (§ 48) järgmiselt:

$$\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{(x - x_0)^{n+1} - 0} = \frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n},$$

kus ξ_1 on x_0 ja x vahel. Rakendades edasi Cauchy valemit, saame

$$\frac{R_n'(\xi_1) - R_n'(x_0)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n - 0} = \frac{R_n''(\xi_2)}{(n+1)n(\xi_2 - x_0)^{n-1}},$$

kus ξ_2 on x_0 ja ξ_1 vahel ning ühtlasi ka x_0 ja x vahel. Analoogiliselt jätkates ja rakendades $n + 1$ korda Cauchy valemit, saame lõpuks

$$\frac{R_n^{(n)}(\xi_n) - R_n^{(n)}(x_0)}{(n+1)n \cdots 3 \cdot 2 \cdot (\xi_n - x_0) - 0} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

kus ξ on x_0 ja ξ_n vahel ning ühtlasi ka x_0 ja x vahel. Seega võime kirjutada, et

$$\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Arvestades, et

$$R_n^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi),$$

saame

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

ning seega

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

mis esitab Taylori valemit mistahes funktsiooni puhul, kui funktsioon on diferentsitav kuni $n+1$ järguni.

Selles Taylori valemis viimane liige, mida nimetatakse Taylori valemi jääkliikmeks, erineb oma kujult teistest Taylori polünoomi liikmetest selle poolest, et vastava tuletise väärtust ei võeta mitte antud punktis x_0, vaid mingis punktis ξ, mis asetseb x_0 ja x vahel, s. o. $\xi = x_0 + \Theta(x - x_0)$, kus $0 < \Theta < 1$. Teguri Θ kohta teame, et ta asetseb 0 ja 1 vahel, kuid ta võib muutuda nii x kui ka n muutumisel.

Kui $n = 0$, siis Taylori valem taandub Lagrange'i valemiks (§ 47). Lagrange'i valem on seega Taylori valemi erijuht. Kui aga funktsioon $f(x)$ kujutab n-astme polünoomi, siis on jääkliige $R_n(x) = 0$.

Kui Taylori valemis võtta $x_0 = 0$, siis

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 +$$

$$+ \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

kus ξ asetseb 0 ja x vahel, s. o. $\xi = \Theta x$, kus $0 < \Theta < 1$. Viimast valemit nimetatakse ka Mac-Laurini* valemiks. Mac-Laurini valemit kui Taylori valemi erijuhtu võime kasutada funktsioonide ligikaudsete väärtuste leidmiseks.

Kui võtame Taylori valemis $x - x_0 = \Delta x$, siis valem saab kuju

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}\Delta x^3 +$$

$$+ \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1}$$

ja funktsiooni kasv

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = df(x_0) + \frac{d^2f(x_0)}{2!} +$$

$$+ \frac{d^3f(x_0)}{3!} + \ldots + \frac{d^n f(x_0)}{n!} + \frac{d^{n+1}f(\xi)}{(n+1)!},$$

kus $\xi = x_0 + \Theta\Delta x$.

Viimasest võrdusest nähtub, et kui $\Delta x \to 0$, siis Taylori polünoom diferentsiaalides

$$df(x_0) + \frac{d^2f(x_0)}{2!} + \frac{d^3f(x_0)}{3!} + \ldots + \frac{d^n f(x_0)}{n!}$$

esitab funktsiooni lõpmata kahaneva kasvu $\Delta f(x_0)$ ligikaudset väärtust.

---

* C. Mac-Laurin (1698—1746) — šoti matemaatik, kes esimesena käsitles funktsiooni arendit polünoomina punkti $x = 0$ ümbruses.

3) Kui Taylori valemis

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2 +$$

$$+ \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \Theta\Delta x)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1}$$

on Δx küllalt väike, siis võime näidata, et selle Δx puhul jääkliikme $\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \Theta\Delta x)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1}$ absoluutväärtus on ikka väiksem kui talle eelneva liikme absoluutväärtus, s. o.

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \Theta\Delta x)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1}\right| < \left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n\right|.$$

Selleks võtame ühtlasi Taylori valemi jääkliikme, mis järgneb liikmele $\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}\Delta x^{n-1}$, s. o. jääkliikme $\frac{f^{(n)}(x_0 + \Theta_1\Delta x)}{n!}\Delta x^n$, kus $0 < \Theta_1 < 1$. Siis võime kirjutada, et

$$\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \Theta\Delta x)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1} = \frac{f^{(n)}(x_0 + \Theta_1\Delta x)}{n!}\Delta x^n - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n.$$

Jagades viimase võrduse mõlemad pooled liikmega $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n$, saame

$$\frac{\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \Theta\Delta x)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1}}{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n} = \frac{f^{(n)}(x_0 + \Theta_1\Delta x) - f^{(n)}(x_0)}{f^{(n)}(x_0)},$$

mille piirväärtus, kui $\Delta x \to 0$, on

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \Theta\Delta x)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1}}{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n)}(x_0 + \Theta_1\Delta x) - f^{(n)}(x_0)}{f^{(n)}(x_0)} = 0,$$

millest nähtub, et jääkliige $\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \Theta\Delta x)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1}$ on kõrgemat järku lõpmata kahanev suurus kui talle eelnev liige $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n$, ning seega iga väikese Δx puhul on

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \Theta\Delta x)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1}\right| < \left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n\right|.$$

§ 53. Taylori valemi rakendusi. 1) Rakendame Mac-Laurini valemit

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f'(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 +$$

$$+ \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

eksponentfunktsiooni $f(x) = e^x$ puhul. Et

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = e^x,$$

siis, asendades x nulliga, saame

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 1.$$

Paigutades need väärtused Mac-Laurini valemisse, saame eksponentfunktsiooni esitada kujul

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

kus $0 < \Theta < 1$ ning seega $1 < e^{\Theta x} < e^x$.

Selle eksponentfunktsiooni osafunktsioonid

$$f_0(x) = 1,$$

$$f_1(x) = 1 + x,$$

$$f_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$f_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6},$$

$$f_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24},$$

. . . . . .

$$f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

esitavad jooni, mis punkti $x = 0$ ümbruses järk-järgult lähenevad kõverale $f(x) = e^x$ (joon. 68), kui Taylori polünoomi liikmete arv kasvab. Funktsioonid

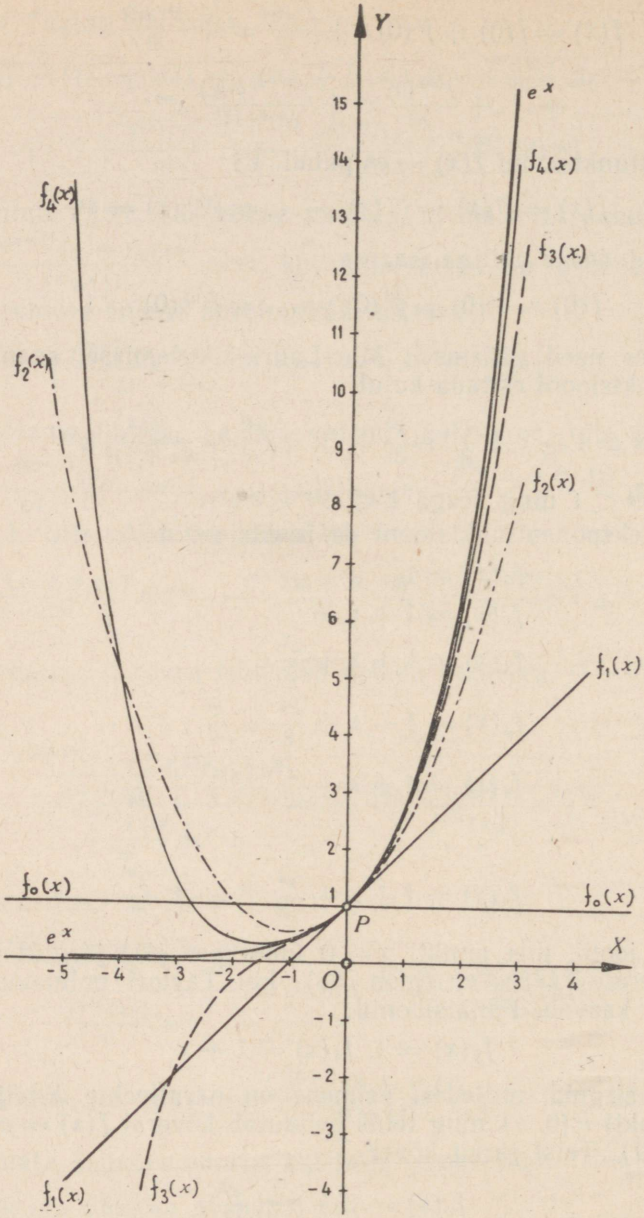
$$f_0(x) = 1, \; f_1(x) = 1 + x$$

esitavad sirgeid, milledest esimene on paralleelne X-teljega ja läbib punkti $P(0, 1)$ ning teine puudutab kõverat $f(x) = e^x$ punktis $P(0, 1)$. Teist järku kõver

$$f_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

on punkti P ümbruses kõverale $f(x) = e^x$ lähemal kui eelmised sirged. Kolmandat järku kõver

$$f_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$



Joon. 68.

on punkti P ümbruses kõverale $f(x) = e^x$ lähemal kui eelmine teist järku kõver jne. Mida rohkem võtame Taylori polünoomis liikmeid, seda lähemale jõuame kõverale $f(x) = e^x$, ning mida

väiksem on argumendi x väärtus, seda täpsem on vastav funktsiooni ligikaudne väärtus.

Kui saadud valemis võtta $x = 1$, siis

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!},$$

mis esitab naturaallogaritmide alust (§ 22), mille väärtuse viie kümnendkohaga saame, kui $n = 8$, s. o. $e \approx 2{,}71828$.

2) Rakendame Mac-Laurini valemit siinus- ja koosinusfunktsioonide $f(x) = \sin x$ ja $f(x) = \cos x$ puhul. Nende funktsioonide tuletised on vastavalt

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$$

nii et siinuse puhul

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -1,\ f^{(4)}(0) = 0, \ldots$$

ja koosinuse puhul

$$f(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = -1,\ f'''(0) = 0,\ f^{(4)}(0) = 1, \ldots$$

Paigutades need väärtused Mac-Laurini valemisse, saame $\sin x$ ja $\cos x$ esitada järgmiselt:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n(x),$$

kus

$$R_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin\left(\Theta x + \frac{2n+1}{2}\pi\right) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \Theta x,$$

ning

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_n^{(x)},$$

kus

$$R_n^{(x)} = (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos\left(\Theta x + \frac{2n+2}{2}\pi\right) =$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \Theta x.$$

Juba kolmeliikmelised Taylori polünoomid

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

võimaldavad leida $\sin x$ ja $\cos x$ ligikaudseid väärtusi viie kümnendkohaga, kui x ei ole väga suur ($< 45°$).

Leiame näiteks $\sin 14°40'$ ligikaudse väärtuse. Radiaanmõõdus on x väärtus

$$x = \frac{14^0\,40' \cdot \pi}{180^0} \approx 0{,}255982$$

ja

$$\frac{x^3}{3!} \approx 0{,}002795, \frac{x^5}{5!} \approx 0{,}000009.$$

Et polünoomi järgmised liikmed ei muuda enam $\sin 14°40'$ väärtuse viiendat kümnendkohta, siis piisab sellest, kui võtta polünoomi esimesed kolm liiget, et saada $\sin 14°40'$ väärtus viie kümnendkohaga, s. o.

$$\sin 14°40' \approx 0{,}255982 - 0{,}002795 + 0{,}000009 \approx 0{,}25320.$$

Sama nurga koosinuse, s. o. $\cos 14°40'$ väärtuse leidmiseks viie kümnendkohaga on samuti küllalt, kui võtame polünoomi esimesed kolm liiget, kus

$$\frac{x^2}{2!} \approx 0{,}032763, \frac{x^4}{4!} \approx 0{,}000179,$$

s. o.

$$\cos 14°40' \approx 1 - 0{,}032763 + 0{,}000179 \approx 0{,}96742.$$

3) Kui funktsiooni $f(x)$ ja tema tuletiste väärtused $x = x_0$ puhul saavad lõpmatuks, siis ei ole Mac-Laurini valem selle funktsiooni suhtes rakendatav. Näiteks logaritmfunktsiooni $f(x) = \ln x$ suhtes ei saa kasutada Mac-Laurini valemit, sest siin $f(x)$ ja tema tuletiste väärtused saavad lõpmatuks, kui $x_0 = 0$.

Et logaritmfunktsiooni suhtes oleks rakendatav Mac-Laurini valem, selleks võtame logaritmfunktsiooni kujul $f(x) = \ln(1 + x)$, mis väldib nüüd lõpmatuse, kui $x_0 = 0$. Et siin

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1-x)^n},$$

siis

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = -1,\ f'''(0) = 1 \cdot 2,\ f^{(4)}(0) = \\ = -1 \cdot 2 \cdot 3, \ldots$$

ning seega

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + R_n(x),$$

kus

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\Theta x)^{n+1}},\ (0 < \Theta < 1).$$

Siin vahemikus $-1 < x \leqslant 1$ on

$$\left|R_n(x)\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\Theta x)^{n+1}}\right| < \frac{1}{n+1},$$

mis näitab, et jääkliige kui viga logaritmi väärtuse ja Taylori polünoomi väärtuse vahel on võrdlemisi suur. See aga ütleb, et küllaldase täpsusega $\ln(1+x)$ väärtuse arvutamiseks on vaja võtta väga kõrgeastmeline Taylori polünoom.

Saadud valemi abil võime leida arvude naturaallogaritme, kui x on väike arv ja nimelt vahemikus $-1 < x \leqslant 1$. Kui näiteks $x = 1$, siis

$$\ln(1+x) = \ln 2 \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

Et sellest polünoomist saada $\ln 2$ väärtuse jaoks üht õiget kümnendkohta, tuleks võtta vähemalt 10 liiget. Et saada kolm õiget kümnendkohta, tuleks arvestada polünoomi 1000 liikmega. Pärastpoole, ridade teoorias esitame teisendatud valemi, mille kaudu jõuame rutemini eesmärgile.

4) Kui funktsioon kujutab binoomi astet $f(x) = (1+x)^m$, kus m on mistahes reaalarv, siis selle funktsiooni ja tema tuletiste väärtused $x = 0$ puhul on

$$\begin{array}{ll}
f(x) = (1+x)^m & f(0) = 1 \\
f'(x) = m(1+x)^{m-1} & f'(0) = m \\
f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2} & f''(0) = m(m-1) \\
f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3} & f'''(0) = m(m-1)(m-2) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{array}$$

millede asetamisel Mac-Laurini valemisse saame

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \ldots +$$
$$+ \binom{m}{n}x^n + \binom{m}{n+1}(1+\Theta x)^{m-n-1}x^{n+1}.$$

Kui võtame $n = 1, 2, 3$, siis saame ligikaudsed valemid

$$(1+x)^m \approx 1 + mx$$

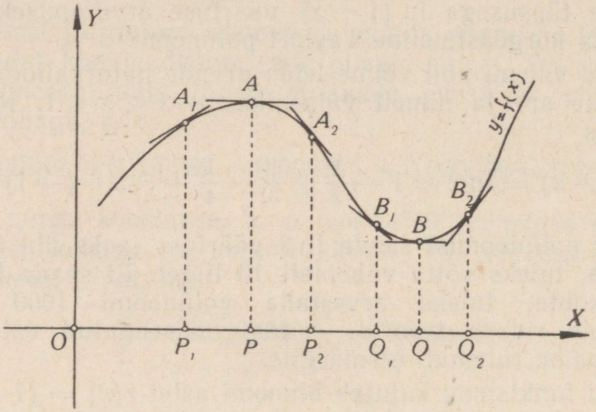
$$(1+x)^m \approx 1 + mx + \frac{m(m+1)}{2}x^2$$

$$(1+x)^m \approx 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{6}x^3,$$

mis määravad küllaldase täpsusega binoomi väärtuse punkti $x = 0$ ümbruses, kusjuures teine valem on täpsem esimesest ja kolmas valem on täpsem teisest.

§ 54. Maksimum ja miinimum. Kui funktsioon $y = f(x)$ on teatavas vahemikus diferentsitav, siis on ta selles vahemikus ühtlasi pidev ja esitab pidevat kõverat, mille mõni osa võib olla

kumer ja mõni teine osa nõgus. Kõverat nimetatakse kumeraks, kui selle igas punktis puutuja on temast ülalpool, ja nõgusaks, kui kõvera igas punktis puutuja on temast allpool. Näiteks punktides A_1, A ja A_2 on kõver kumer (joon. 69) ning punktides B_1, B ja B_2 on kõver nõgus. Kõvera kumeral osal võib olla maksimumpunkt ja nõgusal osal miinimumpunkt.



Joon. 69.

Kõvera maksimumpunkt, mille ordinaadi väärtust nimetatakse funktsiooni maksimumiks, on kõvera kumeral osal asetsevate teiste punktidega võrreldes kõige kõrgemal, s. o. tema ordinaat on kõvera kumeral osal asetsevate teiste punktide ordinaatidest väärtuselt suurem. Maksimumpunkt A on kõvera kumeral osal kõrgemal kui punktid A_1 ja A_2, mis asetsevad kõvera samal kumeral osal. Kui kõvera maksimumpunkti A abstsiss on a ja punktide A_1 ja A_2 abstsissid on vastavalt $a - \Delta x$ ja $a + \Delta x$, kus $\Delta x > 0$, siis kehtivad ikka võrratused

$$f(a - \Delta x) - f(a) < 0 \text{ ja } f(a + \Delta x) - f(a) < 0,$$

kusjuures eelduse ja § 46 abiteoreemi põhjal $f'(a) = 0$ ning seega puutuja punktis $x = a$ on paralleelne X-teljega. Siin funktsiooni väärtus $f(a) = PA$ on funktsiooni maksimumiks.

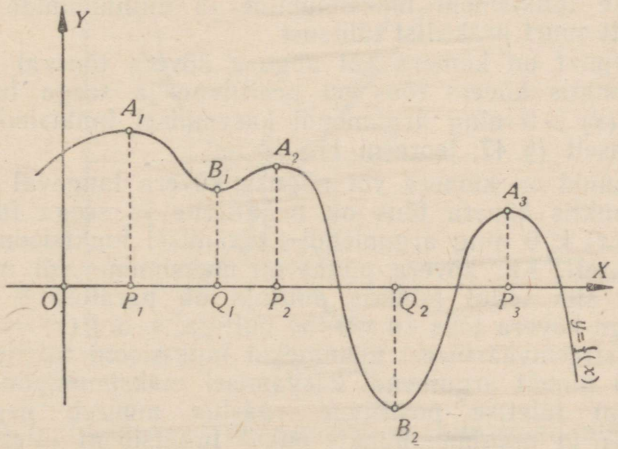
Kõvera miinimumpunkt, mille ordinaadi väärtust nimetatakse funktsiooni miinimumiks, on kõvera nõgusal osal asetsevate teiste punktidega võrreldes kõige madalamal, s. o. tema ordinaat on kõvera nõgusal osal asetsevate teiste punktide ordinaatidest väärtuselt väiksem. Miinimumpunkt B on kõvera nõgusal osal madalamal kui punktid B_1 ja B_2, mis asetsevad kõvera samal nõgusal osal. Kui kõvera miinimumpunkti B abstsiss on b ja punktide B_1 ja B_2 abstsissid on vastavalt $b - \Delta x$ ja $b + \Delta x$, kus $\Delta x > 0$, siis kehtivad ikka võrratused

$$f(b - \Delta x) - f(b) > 0, \; f(b + \Delta x) - f(b) > 0,$$

kusjuures eelduse ja § 46 abiteoreemi põhjal $f'(b) = 0$ ning seega puutuja punktis $x = b$ on samuti paralleelne X-teljega. Siin funktsiooni väärtus $f(b) = QB$ on funktsiooni miinimumiks.

Funktsiooni maksimum kui maksimumpunkti ordinaadi väärtus ei tarvitse olla niisugune väärtus, mis on üldse kõigist teistest funktsiooni väärtustest suurem, vaid ainult nendest väärtustest, mis väljendavad vastava kõvera ühel ja samal kumeral osal asetsevate teiste punktide ordinaatide väärtusi. Samuti funktsiooni miinimum kui miinimumpunkti ordinaadi väärtus ei tarvitse olla niisugune väärtus, mis on üldse kõigist teistest funktsiooni väärtustest väiksem, vaid ainult nendest väärtustest, mis väljendavad vastava kõvera ühel ja samal nõgusal osal asetsevate teiste punktide ordinaatide väärtusi.

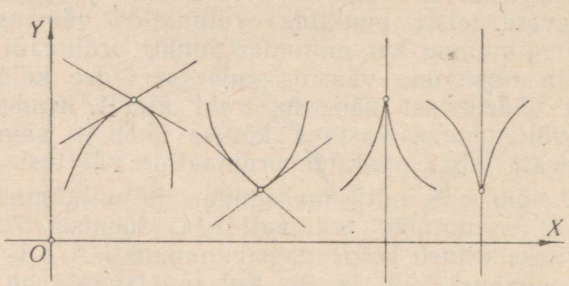
Kõveral võib olla mitu maksimum- ja miinimumpunkti kas võrdsete või erisuuruste ordinaatidega. Joonisel 70 kujutatud kõveral näiteks esineb kolm maksimumpunkti A_1, A_2 ja A_3 ning kaks miinimumpunkti B_1 ja B_2. Kui funktsioonil on mitu maksimumi ja mitu miinimumi, siis võib olla ka, et funktsiooni mõni maksimum on väiksem kui funktsiooni mõni miinimum, nagu nähtub jooniselt 70, kus $P_3A_3 < Q_1B_1$.



Joon. 70.

Funktsiooni suurimat väärtust teatud vahemikus nimetatakse funktsiooni absoluutseks maksimumiks ja väikseimat väärtust selles vahemikus funktsiooni absoluutseks miinimumiks. Kõiki teisi maksimume ja miinimume selles vahemikus nimetatakse vastavalt lokaalseteks ehk relatiivseteks maksimumideks ja miinimumideks. Funktsiooni kõiki maksimume ja miinimume nimetatakse ühiselt funktsiooni ekstreemväärtusteks ehk lühidalt ekstreemumiteks.

Funktsiooni ekstreemumiteks kinnises vahemikus võivad olla ka vastava kõvera otspunktide ordinaatide väärtused ja samuti funktsiooni väärtused kõvera üksikutes punktides, milledes funktsioon pole diferentsitav, s. o. milledes funktsioon ei oma kindlat lõplikku tuletist või milledes funktsiooni tuletis on ∞, nagu nähtub joonisel 71. Käesolevalt aga vaatleme funktsiooni $f(x)$



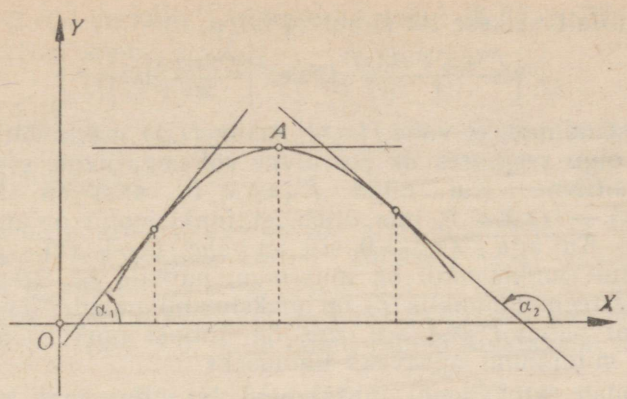
Joon. 71.

ekstreemumeid teatava vahemiku punktides, milledes $f'(x) = 0$. Niisuguste funktsiooni maksimumide ja miinimumide leidmine omab eriti suurt praktilist tähtsust.

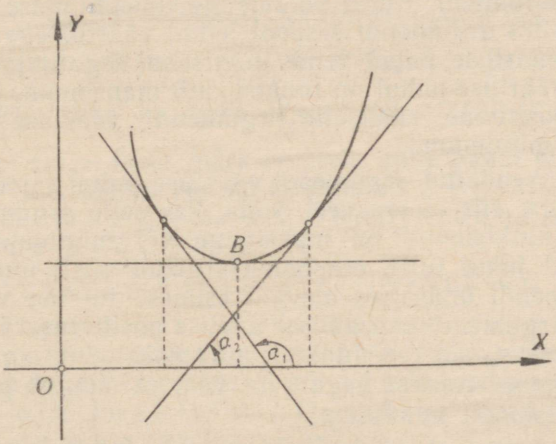
Kui punkt on kumera või nõgusa kõvera tõusval osal, siis selles punktis kõvera tõus on positiivne ja seega funktsiooni tuletis $f'(x) > 0$ ning argumendi kasvamisel funktsioon kasvab monotoonselt (§ 47, teoreem 1).

Kui punkt on kumera või nõgusa kõvera langeval osal, siis selles punktis kõvera tõus on negatiivne ja seega funktsiooni tuletis $f'(x) < 0$ ning argumendi kasvamisel funktsioon kahaneb monotoonselt. Kui kõvera punkt on maksimum- või miinimumpunktiks, siis selles punktis puutuja on paralleelne X-teljega ning seega kõvera tõus on võrdne nulliga, s. o. $f'(x) = 0$. Funktsiooni ekstreemväärtusest üleminekul funktsiooni tuletis muudab märki, ja nimelt argumendi kasvamisel maksimumpunkti puhul funktsiooni tuletise positiivne väärtus muutub negatiivseks (joon. 72) ja miinimumpunkti puhul funktsiooni tuletise negatiivne väärtus muutub positiivseks (joon. 73).

Et leida argumendi x väärtust, mille puhul funktsioonil $f(x)$ on maksimum või miinimum, selleks tuleb võtta funktsiooni esimene tuletis $f'(x)$ ja võrrutada see nulliga; lahendades saadud võrrandi x suhtes, saame otsitavad võimalikud x väärtused, mis on ühtlasi funktsiooni $f(x)$ statsionaarseteks punktideks. Seega $f'(x) = 0$ on üks nõutavatest funktsiooni maksimumi või miinimumi tunnustest. See tunnus on tarvilik, kuid mitte piisav funktsiooni maksimumi või miinimumi määramiseks. Nagu järgmises paragrahvis näeme, ei tarvitse statsionaarne punkt igakord olla funktsiooni maksimum- ega ka miinimumpunktiks.



Joon. 72.



Joon. 73.

Et saada funktsiooni maksimumi ja miinimumi määramiseks piisavat tunnust, selleks oletame, et funktsioon $f(x)$ omab nii teist kui ka kolmandat tuletist mingis punktis x_0 ja selle punkti ümbruses, ning võtame Taylori valemi järgmiselt:

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2+\frac{f'''(x_0+\Theta\Delta x)}{3!}\Delta x^3,$$

kus $0<\Theta<1$, kusjuures argumendi kasv Δx olgu positiivne või negatiivne. Kui nüüd punktis x_0 on funktsioonil maksimum või miinimum, siis peab olema $f'(x_0)=0$ ja seega

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2+\frac{f'''(x_0+\Theta\Delta x)}{3!}\Delta x^3.$$

Et siin küllalt väikese Δx puhul (§ 52, p. 3)

$$\left|\frac{f'''(x_0+\Theta\Delta x)}{3!}\Delta x^3\right|<\left|\frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2\right|,$$

siis sellest nähtub, et vahe $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ märk sõltub $f''(x_0)$ märgist, olgu seejuures Δx positiivne või negatiivne, sest Δx^2 on ikka positiivne. Kui nüüd $f''(x_0)<0$, siis on ka vahe $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)<0$, mis ütleb, et funktsioonil on maksimum punktis x_0. Kui aga $f''(x_0)>0$, siis on vahe $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)>0$ ja järelikult funktsioonil on miinimum punktis x_0. Seega funktsiooni ekstreemumpunktis x_0 on maksimumi puhul $f''(x_0)<0$ ja miinimumi puhul $f''(x_0)>0$, mis on ühtlasi funktsiooni maksimumi ja miinimumi piisavaks tunnuseks.

Tähendab, funktsiooni maksimumi ja miinimumi leidmiseks võtame kõigepealt funktsiooni tuletise ja võrrutame selle nulliga, kus siis saadud võrrandi reaallahendid (kui need on olemas) on argumendi need väärtused, mis võivad anda funktsiooni maksimumi või miinimumi. Edasi võtame funktsiooni teise tuletise ja asendame selles argumendi eespool leitud väärtustega. Kui mõne argumendi väärtuse puhul teine tuletis on negatiivne, siis selle argumendi väärtuse puhul on funktsioonil maksimum, ja kui teine tuletis on positiivne, siis selle argumendi väärtuse puhul on funktsioonil miinimum.

Kui aga asendatud argumendi väärtuse puhul teine tuletis on võrdne nulliga, siis ei saa veel öelda, kas selle argumendi väärtuse puhul funktsioonil on maksimum või miinimum või pole kumbagi. Sel juhul tuleb eespool käsitletud viisil uurida tähendatud argumendi ümbruses olevaid esimese tuletise väärtusi, ja nimelt: kui argumendi kasvamisel tuletise positiivne väärtus muutub negatiivseks, siis on funktsioonil maksimum, ja kui argumendi kasvamisel tuletise negatiivne väärtus muutub positiivseks, siis on funktsioonil miinimum.

Eespool nägime, et kui funktsiooni $f(x)$ statsionaarses punktis $x=x_0$ argumendi kasv Δx, mis võib olla nii positiivne kui ka negatiivne, on küllalt väike, siis funktsiooni väärtuste vahe $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ peab olema funktsiooni maksimumi puhul negatiivne ja miinimumi puhul positiivne.

Kui nüüd üldiselt statsionaarses punktis x_0 funktsioon $f(x)$ omab kõrgemaid tuletisi nii, et

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0,$$

kuid $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, siis võime funktsiooni maksimumi ja miinimumi kindlaks määrata, kasutades selleks samuti Taylori valemit. Sel juhul Taylori valem esineb kujul

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\Theta\Delta x)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1},$$

kus $0 < \Theta < 1$ ja küllalt väikese Δx puhul (§ 52, p. 3)

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \Theta \Delta x)}{(n+1)!} \Delta x^{n+1} \right| < \left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \Delta x^n \right|,$$

millest nähtub, et vahe $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ märk sõltub $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \Delta x^n$ märgist.

Kui n on paarisarv, siis on Δx^n alati positiivne ja seega vahe $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ märk sõltub ainult $f^{(n)}(x_0)$ märgist. Kui $f^{(n)}(x_0) < 0$, siis on ka vahe $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$, mille puhul esineb funktsiooni maksimum, ja kui $f^{(n)}(x_0) > 0$, siis on ka vahe $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) > 0$, mille puhul esineb funktsiooni miinimum.

Kui n on paaritu arv, siis sõltub $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \Delta x^n$ ja ühtlasi ka vahe $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ märk nii $f^{(n)}(x_0)$ kui ka Δx märgist. Kui siin $f^{(n)}(x_0) > 0$ ja $\Delta x > 0$ või $f^{(n)}(x_0) < 0$ ja $\Delta x < 0$, siis on $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \Delta x^n > 0$ ja järelikult ka vahe $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) > 0$; kui aga $f^{(n)}(x_0) > 0$ ja $\Delta x < 0$ või $f^{(n)}(x_0) < 0$ ja $\Delta x > 0$, siis on $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \Delta x^n < 0$ ja ka vahe $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$. Sel juhul vahe $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ märk muutub, mille puhul punktis $x = x_0$ ei saa olla maksimumi ega ka miinimumi.

Tähendab, kui $x = x_0$ on funktsiooni $f(x)$ statsionaarne punkt, milles

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

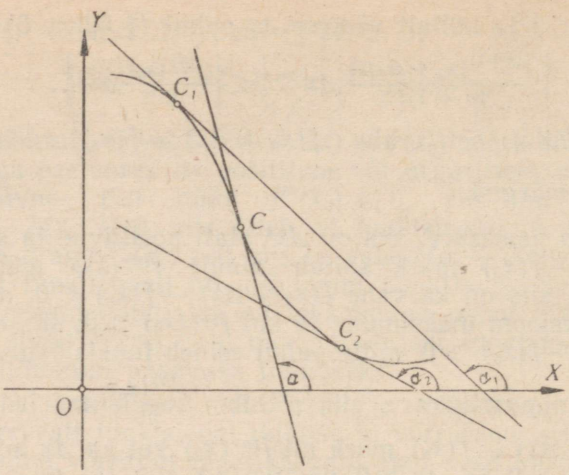
kuid $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, siis paarisarvulise n puhul on funktsioonil maksimum, kui $f^{(n)}(x_0) < 0$, ja miinimum, kui $f^{(n)}(x_0) > 0$. Kui aga n on paaritu arv, siis ei ole funktsioonil selles punktis maksimumi ega ka miinimumi.

§ 55. Käänupunkt. Kui ühene ja pidev funktsioon $y = f(x)$ esitab niisugust kõverat, mille kumerale osale järgneb nõgus osa või nõgusale osale järgneb kumer osa, siis seda punkti, milles lõpeb kõvera kumer osa ja algab nõgus osa või, ümberpöördult, lõpeb nõgus osa ja algab kumer osa ning seejuures kõvera kumer osa asetseb ühel pool ja nõgus osa teisel pool selles punktis tõmmatud puutujat, nimetatakse kõvera käänupunktiks. Tähistame käänupunkti tähega C (joon. 74 ja 75). Kui kõvera käänupunkti C abstsiss on c ning käänupunkti ümbruses kõveral asetsevate punktide C_1 ja C_2 abstsissid on vastavalt $c - \Delta x$ ja $c + \Delta x$, kus $\Delta x > 0$, siis kehtivad võrratused

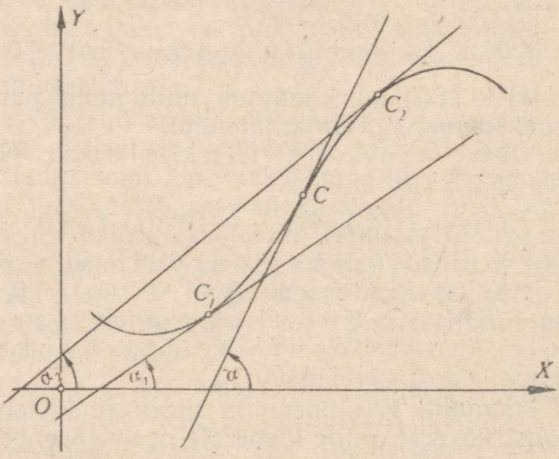
$$f(c - \Delta x) - f(c) > 0, \qquad f(c + \Delta x) - f(c) < 0$$

või

$$f(c - \Delta x) - f(c) < 0, \qquad f(c + \Delta x) - f(c) > 0,$$



Joon 74



Joon. 75.

millest nähtub, et käänupunktist üleminekul funktsiooni väärtuste vahe märk muutub ning seega käänupunkti C ümbruses kõver kogu aeg langeb või tõuseb. Sel juhul argumendi x kasvamisel puutuja tõusunurk α kahaneb seni, kui puutuja saab puutujaks käänupunktis, ja hakkab siis kasvama (joon. 74), või kasvab seni, kui puutuja saab puutujaks käänupunktis, ja hakkab siis kahanema (joon. 75). Käänupunktis puutuja lõikab kõverat ning seega kõvera kumer osa asetseb ikka ja alati ühel pool puutujat ja nõgus osa teisel pool puutujat.

Maksimumpunktis ja selle ümbruses on kõver kumer; miinimumpunktis ja selle ümbruses on kõver nõgus. Käänupunkt on neutraalne punkt, milles kõver pole kumer ega ka nõgus, kuid tema ümbruse ühel poolel on kõver kumer ja teisel poolel nõgus.

Oletame, et vahemikus, milles funktsioonile $y = f(x)$ vastav kõver omab käänupunkti, on funktsioon $f(x)$ vähemalt kaks korda diferentsitav. Siis käänupunktist üleminekul funktsiooni esimene tuletis $f'(x)$ märki ei muuda, kuid käänupunktile vastava argumendi väärtuse juures peab funktsiooni teine tuletis $f''(x)$ muutma oma märki, sest kui punkt on kõvera kumeral osal, siis $f''(x) < 0$, ja kui punkt on kõvera nõgusal osal, siis $f''(x) > 0$. Et käänupunktis tekib üleminek kõvera kumeralt osalt nõgusale osale või ümberpöördult, siis käänupunktile vastava x väärtuse juures $f''(x) = 0$, mis on ühtlasi käänupunkti üheks tunnuseks. See tunnus on tarvilik, kuid mitte piisav käänupunkti määramiseks. Lahendades võrrandi $f''(x) = 0$, leiame kõvera $y = f(x)$ punktide abstsissid, mis võivad olla käänupunktide abstsissideks.

Et saada käänupunkti määramiseks piisavat tunnust, selleks oletame, et kõverat esitav funktsioon $y = f(x)$ omab tuletisi kuni neljanda järguni, ja võtame Taylori valemi

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \\ + \frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}\Delta x^3 + \frac{f^{(4)}(x_0 + \Theta\Delta x)}{4!}\Delta x^4,$$

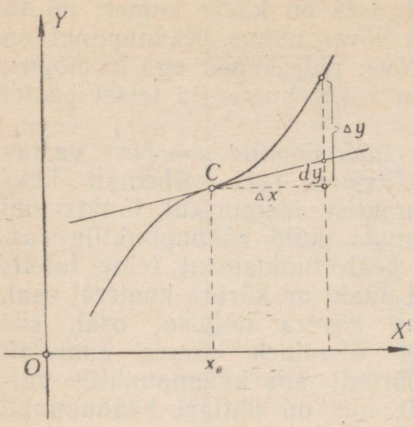
kus $0 < \Theta < 1$ ja x_0 olgu võrrandi $f''(x) = 0$ üks lahend, mille puhul $f''(x_0) = 0$, kuid $f'(x_0) \neq 0$. Tähistades funktsiooni kasvu $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$ ja funktsiooni diferentsiaali $f'(x_0)\Delta x = dy$ (§ 31), saame

$$\Delta y - dy = \frac{f'''(x_0)}{3!}\Delta x^3 + \frac{f^{(4)}(x_0 + \Theta\Delta x)}{4!}\Delta x^4.$$

Et siin küllalt väikese Δx puhul

$$\left|\frac{f^{(4)}(x_0 + \Theta\Delta x)}{4!}\Delta x^4\right| < \left|\frac{f'''(x_0)}{3!}\Delta x^3\right|,$$

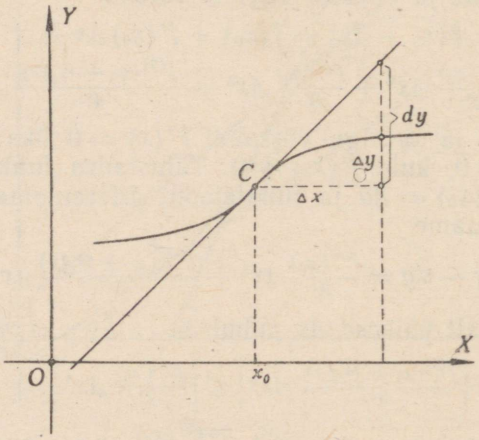
siis sõltub vahe $\Delta y - dy$ märk $\frac{f'''(x_0)}{3!}\Delta x^3$ märgist, s. o. nii $f'''(x_0)$ kui ka Δx märgist. Kui siin $f'''(x_0) > 0$ ja $\Delta x > 0$ või $f'''(x_0) < 0$ ja $\Delta x < 0$, siis on $\frac{f'''(x_0)}{3!}\Delta x^3 > 0$ ja järelikult ka vahe $\Delta y - dy > 0$, mille puhul kõver on nõgus (joon. 76). Kui aga $f'''(x_0) > 0$ ja $\Delta x < 0$ või $f'''(x_0) < 0$ ja $\Delta x > 0$, siis on $\frac{f'''(x_0)}{3!}\Delta x^3 < 0$ ja ka vahe $\Delta y - dy < 0$, mille puhul kõver on kumer (joon. 77). Sellest arutluskäigust nähtub, et kui $f'''(x_0)$ omab nullist erinevat kindlat väärtust, s. o. $f'''(x_0) \gtrless 0$, siis vahe



Joon. 76.

$\Delta x - dy$ märk muutub Δx märgi muutumisel, mis ütleb, et kõver asetseb nii ühel pool kui ka teisel pool puutujat punktis $x = x_0$, mille puhul meil on tegemist käänupunktiga. Järelikult käänupunkti piisavaks tunnuseks on $f'''(x_0) \neq 0$.

Kui algebralise täisfunktsiooni aste ei ole suurem kui kolm, siis esitatud tunnused määravad ikka funktsioonile vastava kõvera käänupunkti. Käänupunkti x_0 puhul on siis $f'''(x_0) \gtrless 0$, kusjuures $f'''(x_0) > 0$ puhul on kõver käänupunktist vasakul pool kumer ja paremal pool nõgus ning $f'''(x_0) < 0$ puhul on kõver käänupunktist vasakul pool nõgus ja paremal pool kumer. On aga algebralise täisfunktsiooni aste suurem kui kolm või esineb mõni teine funktsioon, mis on diferentsitav kuni



Joon. 77.

n-järguni, siis võib juhtuda, et võrrandi $f''(x) = 0$ lahendi $x = x_0$ puhul on

$$f'''(x_0) = f^{(4)}(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

kuid $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Kui siin $f'(x_0) \neq 0$ ja n on paaritu arv, siis analoogiliselt eelnevale, kasutades Taylori valemit, saame

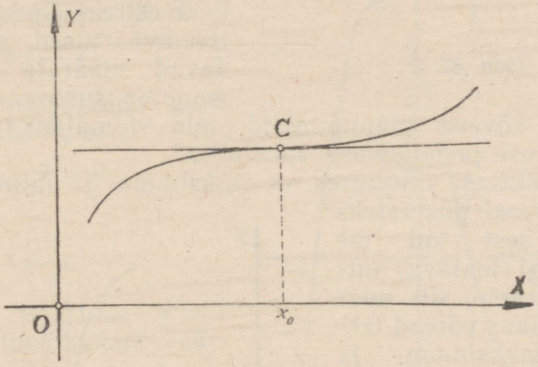
$$\Delta y - dy = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \Theta\Delta x)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1},$$

kus küllalt väikese Δx puhul

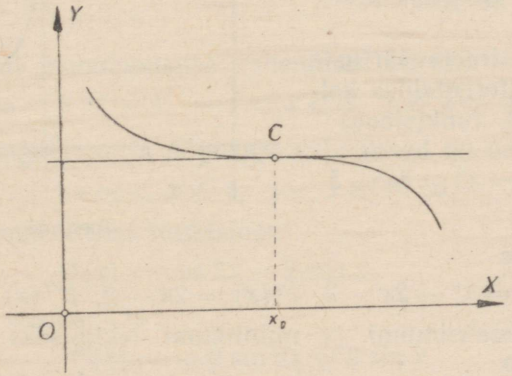
$$\left|\frac{f^{(n+1)}(x_0+\Theta\Delta x)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1}\right| < \left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n\right|$$

ning seega vahe $\Delta y - dy$ märk sõltub nii $f^{(n)}(x_0)$ kui ka Δx märgist. Kui siin $f^{(n)}(x_0) > 0$ ja $\Delta x > 0$ või $f^{(n)}(x_0) < 0$ ja $\Delta x < 0$, siis on vahe $\Delta y - dy > 0$, mille puhul kõver on nõgus; kui $f^{(n)}(x_0) > 0$ ja $\Delta x < 0$ või $f^{(n)}(x_0) < 0$ ja $\Delta x > 0$, siis on vahe $\Delta y - dy < 0$, mille puhul kõver on kumer. Siin lõpliku $f^{(n)}(x_0) \gtrless 0$ puhul vahe $\Delta y - dy$ märk muutub Δx muutumisel ning seega argumendi väärtusel $x = x_0$ esineb käänupunkt, kusjuures $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ on siin käänupunkti piisavaks tunnuseks, kui n on paaritu arv.

Erijuhul, kui käänupunktis $f'(x_0) = 0$, siis on käänupunkt läbiv kõvera puutuja paralleelne X-teljega (joon. 78 ja 79).

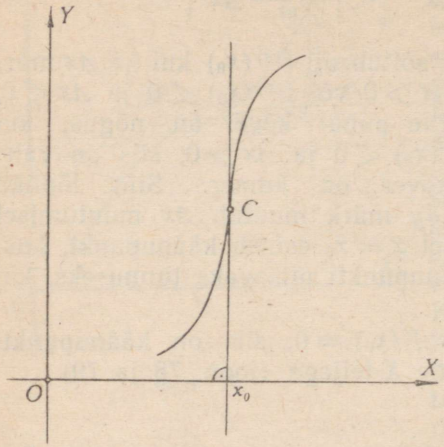


Joon. 78.



Joon. 79.

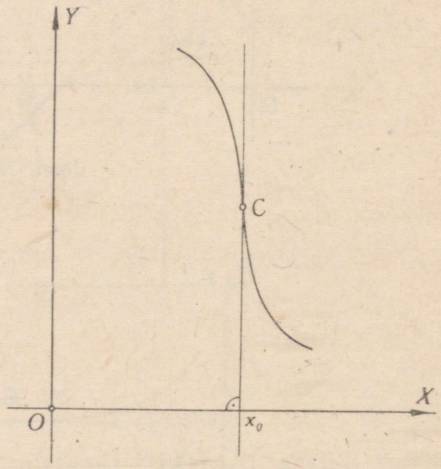
Kui aga käänupunktis $f'(x_0) = \infty$, siis on käänupunkti läbiv kõvera puutuja paralleelne Y-teljega (joon. 80 ja 81).



Joon. 80.

Funktsiooni graafiku valmistamine punktide järgi, mis vastavad abstsissteljel vabalt võetud punktidele, annab üldiselt enam või vähem moonutatud graafiku kuju, eriti maksimum- ja miinimumpunktide ning käänupunktide (kui need on olemas) ümbruses. Et saada funktsiooni käigu õiget graafilist kujutist, selleks on vaja peale funktsiooni määramispiirkonna ja katkevuspunktide veel kindlaks teha esiteks funktsiooni ekstreemväärtused, mis võimaldavad määrata funktsiooni monotoonsuse vahemikud, ning teiseks kõvera käänupunktid, mis võimaldavad määrata kõvera kumeruse ja nõgususe vahemikud.

Märgime ühtlasi siinjuures, et maksimum- ja miinimumpunktid ei ole kõveral püsivateks punktideks, sest kui me koordinaattelgi teatava nurga võrra pöörame, siis uues koordinaadistikus võivad tekkida uued maksimum- ja miinimumpunktid, kuid käänupunkt jääb koordinaattelgede teisendamisel ikka ja alati kõveral püsivaks punktiks.



Joon. 81.

§ 56. Ekstreemväärtuste näiteid. 1) Diferentsides kolmanda astme funktsiooni

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 5$$

x järgi, saame

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3,\ f''(x) = 2x - 2,\ f'''(x) = 2.$$

Funktsiooni maksimumi ja miinimumi leidmiseks peab olema $f'(x) = 0$, s. o.

$$x^2 - 2x - 3 = 0,$$

millest

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 3$$

ning vastavad funktsiooni väärtused on

$$f(-1) = 6\frac{2}{3}, \quad f(3) = -4.$$

Et $f''(-1) = -4$ on negatiivne, siis $f(-1) = 6\frac{2}{3}$ on funktsiooni maksimum ning vastava kõvera maksimumpunkt on (joon. 82)

$$A\left(-1,\ 6\frac{2}{3}\right).$$

Et $f''(3) = 4$ on positiivne, siis $f(3) = -4$ on funktsiooni miinimum ning kõvera miinimumpunkt on

$$B(3,\ -4).$$

Käänupunkti puhul peab olema $f''(x) = 0$, s. o.

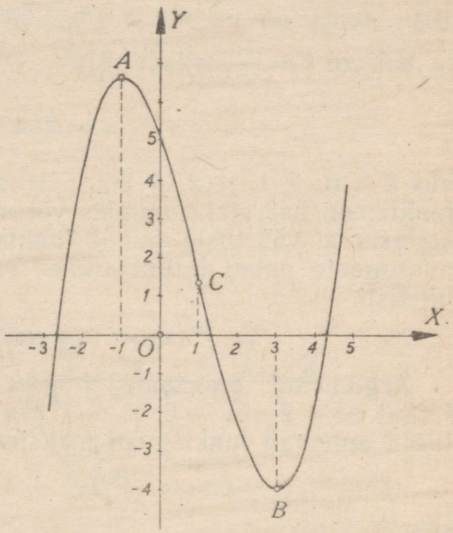
$$2x - 2 = 0,$$

millest

$$x = 1.$$

Argumendi väärtuse $x = 1$ juures on funktsiooni väärtus $f(1) = 1\frac{1}{3}$ ja seega käänupunkt on

$$C\left(1,\ 1\frac{1}{3}\right).$$



Joon. 82.

Funktsiooni monotoonsuse vahemikud on siin

$$-\infty < x < -1, \quad -1 < x < 3, \quad 3 < x < +\infty$$

ning kõvera kumeruse ja nõgususe vahemikud on vastavalt

$$-\infty < x < 1, \quad 1 < x < +\infty.$$

2) Trigonomeetrilist funktsiooni

$$f(x) = \cos 2x - 2\cos x$$

diferentsides saame

$$f'(x) = -2\sin 2x + 2\sin x$$
$$f''(x) = -4\cos 2x + 2\cos x.$$

Funktsiooni maksimumi ja miinimumi leidmiseks

$$f'(x) = -2\sin 2x + 2\sin x = 0,$$

millest

$$2\sin x\cos x - \sin x = 0$$

ehk

$$\sin x(2\cos x - 1) = 0.$$

Viimasest võrrandist saame

$$\sin x = 0,\ \cos x = \frac{1}{2}.$$

Kui $\sin x = 0$, siis

$$x = k\pi,$$

ja kui $\cos x = \frac{1}{2}$, siis

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3},$$

kus $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ Niisuguste x väärtuste puhul saab funktsioon kas maksimumiks või miinimumiks. Et selgitada, missuguste x väärtuste puhul funktsioon osutub maksimumiks ja missuguste puhul miinimumiks, selleks uurime funktsiooni teist tuletist

$$f''(x) = -4\cos 2x + 2\cos x.$$

Argumendi väärtuste $x = k\pi$ puhul näeme, et ikka on $f''(k\pi) = -2$ või -6, s. o. $f''(k\pi) < 0$. Tähendab, need x väärtused annavad funktsiooni maksimumid. Kui siin

$$x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \ldots,$$

siis

$$f(x) = \cos 2x - 2\cos x = -1;$$

kui

$$x = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \pm 7\pi, \ldots,$$

siis

$$f(x) = \cos 2x - 2\cos x = 3.$$

Argumendi väärtuste $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ puhul ilmneb, et ikka on $f''\left(2k\pi \pm \frac{\pi}{3}\right) = 3$, s. o. $f''\left(2k\pi \pm \frac{\pi}{3}\right) > 0$. Järelikult need x väärtused annavad funktsiooni miinimumid. Et siin

$$x = \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{5\pi}{3}, \pm\frac{7\pi}{3}, \pm\frac{11\pi}{3}, \ldots,$$

siis

$$f(x) = \cos 2x - 2\cos x = -\frac{3}{2}.$$

Funktsiooni maksimumid ja miinimumid korduvad siin perioodiliselt.

Võtame vahemiku 0-st 2π-ni nõnda, et $0 \leqslant x < 2\pi$; siis selles vahemikus on funktsioonil kaks maksimumi

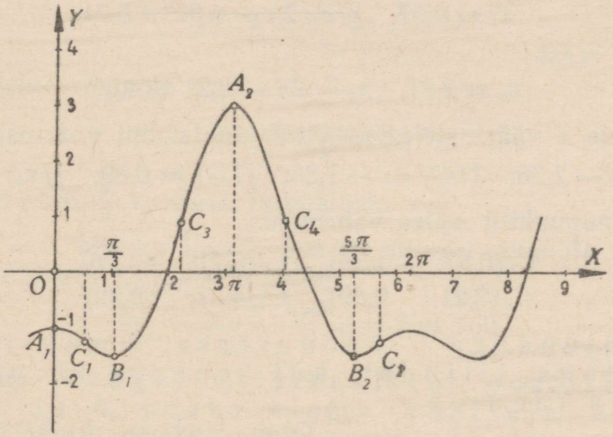
$$f(0) = -1, \quad f(\pi) = 3$$

ja kaks miinimumi

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2}, \quad f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2}.$$

Seega maksimumpunktid vahemikus $0 \leqslant x < 2\pi$ on (joon. 83)

$$A_1(0, -1), \quad A_2(\pi, 3)$$



Joon. 83.

ning miinimumpunktid selles vahemikus

$$B_1\left(\frac{\pi}{3}, -\frac{3}{2}\right), \quad B_2\left(\frac{5\pi}{3}, -\frac{3}{2}\right).$$

Et leida käänupunkte, selleks peab olema $f''(x) = 0$, s. o.

$$-4\cos 2x + 2\cos x = 0$$

ehk

$$2(\cos^2 x - \sin^2 x) - \cos x = 0,$$
$$2(\cos^2 x - 1 + \cos^2 x) - \cos x = 0,$$
$$4\cos^2 x - \cos x - 2 = 0,$$

millest

$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8} \approx \frac{1 \pm 5{,}7446}{8},$$

s. o.

$$\cos x \approx 0{,}8431,$$
$$\cos x \approx -0{,}5931,$$

nii et

$$x \approx 2k\pi \pm \frac{\pi \cdot 32°32'}{180°} = 2k\pi \pm 0{,}57,$$

$$x \approx 2k\pi \pm \frac{\pi \cdot 126°23'}{180°} = 2k\pi \pm 2{,}21.$$

Niisuguste x väärtuste puhul esinevad käänupunktid, sest nende väärtuste juures $f'''(x) \neq 0$. Vahemikus $0 \leqslant x < 2\pi$ on neli käänupunkti, sest esimesest reast

$$x_1 \approx 0{,}57, \quad x_2 \approx 2\pi - 0{,}57 \approx 5{,}71$$

ja teisest reast

$$x_3 \approx 2{,}21, \quad x_4 \approx 2\pi - 2{,}21 \approx 4{,}07.$$

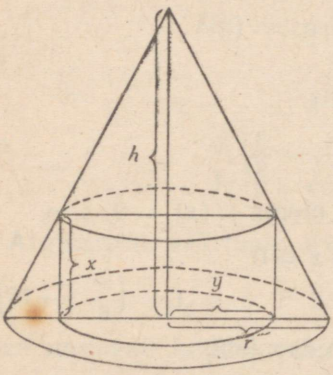
Nendele x väärtustele vastavad funktsiooni väärtused on

$$f(x_1) \approx -1{,}26; \quad f(x_2) \approx -1{,}26; \quad f(x_3) \approx 0{,}89; \quad f(x_4) \approx 0{,}89;$$

ning käänupunktid selles vahemikus

$$C_1(0{,}57; -1{,}26), \quad C_2(5{,}71; -1{,}26),$$
$$C_3(2{,}21; \quad 0{,}89), \quad C_4(4{,}07; \quad 0{,}89).$$

3) Kujundada koonusesse maksimaalse ruumalaga silinder, kui koonuse kõrgus on h ja põhja raadius r.



Joon. 84.

Olgu otsitava silindri kõrgus x ja põhja raadius y (joon. 84). Silindri ruumala on siis

$$V = \pi x y^2.$$

Et siin V on kahe muutuja x ja y funktsioon, siis avaldame ühe neist teise kaudu, näiteks x avaldame y kaudu:

$$\frac{y}{r} = \frac{h - x}{h}, \qquad x = \frac{h(r - y)}{r}.$$

Paigutades selle x väärtuse silindri ruumala valemisse, saame ruumala esitada ühe muutuja funktsioonina

$$V = \frac{\pi h (r - y) y^2}{r} = \pi h y^2 - \frac{\pi h}{r} y^3,$$

kus V on y funktsioon. Diferentsides saame

$$\frac{dV}{dy} = 2\pi h y - \frac{3\pi h}{r} y^2 = 0,$$

millest

$$y_1 = \frac{2r}{3}, \quad y_2 = 0.$$

Silindri maksimaalse ruumala saame juhul, kui $y = \frac{2r}{3}$, sest selle y väärtuse puhul

$$\frac{d^2V}{dy^2} = 2\pi h - \frac{6\pi h}{r} y = -2\pi h < 0.$$

Maksimaalse ruumalaga silindri kõrgus

$$x = h - \frac{hy}{r} = \frac{h}{3}.$$

Maksimaalne ruumala on

$$V_{max} = \frac{4}{27} \pi r^2 h,$$

mis moodustab $\frac{4}{9}$ koonuse ruumalast.

Kui $y = 0$, siis ka $V = 0$. See on silindri ruumala minimaalsuse juhtum, sest siin $y = 0$ puhul

$$\frac{d^2V}{dy^2} = 2\pi h - \frac{6\pi h}{r} y = 2\pi h > 0.$$

4) Kui kaugel vertikaalsest postist, mille pikkus on h, peaks olema vaatleja, et näha posti kõige suurema nurga all, kui vaatleja silma kõrgus on a, kusjuures post on lühem kui vaatleja?

Olgu vaatleja kaugus postist x ja vaatenurk α (joon. 85). Et siin

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a}{x}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{a - h}{x},$$

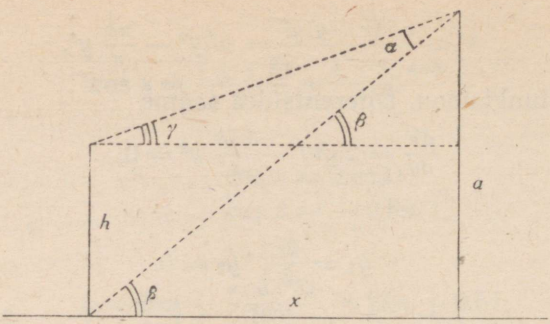
millest

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{a}{x}, \quad \gamma = \operatorname{arctg} \frac{a - h}{x},$$

siis

$$\alpha = \beta - \gamma = \operatorname{arctg} \frac{a}{x} - \operatorname{arctg} \frac{a - h}{x},$$

kus nüüd α on x funktsioon.



Joon. 85.

Et saada nurga α maksimaalset väärtust, selleks leiame tema tuletise ja võrrutame selle nulliga, s. o.

$$\frac{d\alpha}{dx} = -\frac{1}{1+\frac{a^2}{x^2}} \cdot \frac{a}{x^2} + \frac{1}{1+\frac{(a-h)^2}{x^2}} \cdot \frac{a-h}{x^2} = 0,$$

millest

$$x^2 = a^2 - ah$$

ja

$$x = \sqrt{a(a-h)},$$

mis on lõplik positiivne suurus. Niisuguses kauguses postist peaks seisma vaatleja, et nurk α oleks maksimaalne. Siin ei ole enam vaja uurida teise järgu tuletist, sest jooniselt on selge, et nurk on minimaalne siis, kui $x = 0$ või $x \to \infty$.

Kui posti pikkus $h = 1$ m ja vaatleja silma kõrgus $a = 1{,}72$ m, siis kaugus on

$$x = \sqrt{a(a-h)} = \sqrt{1{,}2344} \approx 1{,}11 \quad \text{(m)}$$

ja maksimaalne nurk

$$\alpha_{max} \approx \operatorname{arctg} \frac{1{,}72}{1{,}11} - \operatorname{arctg} \frac{0{,}72}{1{,}11} \approx \operatorname{arctg} 1{,}55 - \operatorname{arctg} 0{,}65 \approx$$

$$\approx 57°10' - 33°01' = 24°09'.$$

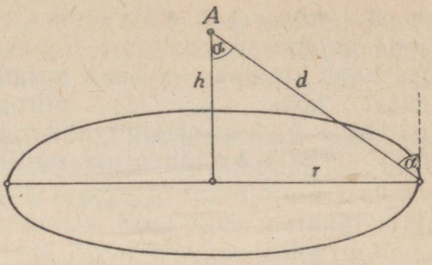
5) Kui kõrgele ringtee keskkohta peaks asetama elektrilambi, et tee oleks võimalikult tugevamini valgustatud, kui tee kaugus keskkohast $r = 30$ m?

Olgu valgusallika A otsitav kõrgus h, kaugus ringteest d ja valguskiire langemisnurk α (joon. 86). Füüsikast teame, et ringtee valgustus E on võrdeline valguskiire langemisnurga koosinu-

sega ja pöördvõrdeline valgusallika kauguse ruuduga, s. o.

$$E = \frac{J \cdot \cos \alpha}{d^2},$$

kus J on valgusallika intensiivsus ehk tugevus (rahvusvahelistes küünaldes), mida loeme konstantseks suuruseks. Et siin



Joon. 86.

$$d^2 = h^2 + r^2, \quad \cos \alpha = \frac{h}{d} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}},$$

siis

$$E = \frac{Jh}{(h^2 + r^2)\sqrt{h^2 + r^2}} = \frac{Jh}{(h^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

kus nüüd E on kõrguse h funktsioon.

Et leida ringtee maksimaalset valgustust, selleks võtame ringtee valgustuse E tuletise kõrguse h järgi ja võrrutame selle tuletise nulliga, s. o.

$$\frac{dE}{dh} = J \cdot \frac{(h^2 + r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} h (h^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2h}{(h^2 + r^2)^3} =$$

$$= J \cdot \frac{r^2 - 2h^2}{(h^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}} = 0,$$

millest

$$r^2 - 2h^2 = 0$$

ning seega otsitav kõrgus

$$h = \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{2} = \frac{30\sqrt{2}}{2} = 15\sqrt{2} \text{ (m)}.$$

Ringtee maksimaalne valgustus on siis (luksides):

$$E_{max} = \frac{J \cdot 15\sqrt{2}}{\sqrt{450 + 900}} = \frac{J}{\sqrt{3}} \text{ (lx)}.$$

§ 57. Kõvera asümptoodid. 1) Funktsiooni $y = f(x)$ muutumiskäigu uurimisel ja talle vastava graafilise kuju joonestamisel on tihtipeale oluline teada, kuidas muutub funktsioon, kui argument x läheneb teatavale lõplikule suurusele a või lõpmatusele, s. o. kas $+\infty$-le või $-\infty$-le. Selleks tuleb kindlaks määrata funktsioonile vastava kõvera sirgjoonelised asümptoodid, milledele kõvera harud $|x|$ kasvamisel piiramatult lähenevad.

Kui kõveral $y = f(x)$ on sirgjooneline asümptoot, siis peab seda asümptooti esitama lineaarne funktsioon $y = kx + b$, milles tuleb kindlaks määrata arvud k ja b. Et argumendi $|x|$ kasvamisel kõver $y = f(x)$ piiramatult läheneks asümptoodile $y = kx + b$, kus esialgu oletame, et $k \neq \infty$, selleks peab vahe $f(x) - (kx + b)$ lähenema nullile, kui $x \to \infty$, s. o.

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - kx - b] = 0.$$

Sel puhul me ütleme, et $f(x)$ läheneb asümptootiliselt lineaarsele funktsioonile $y = kx + b$. Jagades saadud võrduse mõlemad pooled x-ga, saame

$$\lim_{x \to \infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0,$$

kus nüüd

$$\lim_{x \to \infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} - k = 0,$$

millest

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Kui on leitud k, siis b saame lähtevõrdusest

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - kx - b] = \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx] - b = 0,$$

millest

$$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx].$$

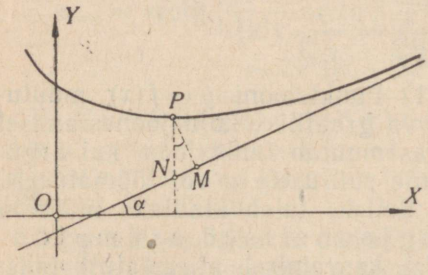
Tähendab, et kõveral $y = f(x)$ oleks (Y-teljega mitteparalleelne) asümptoot $y = kx + b$, on tarvilik ja piisav, et $x \to \infty$ puhul $\frac{f(x)}{x}$ omaks lõplikku piirväärtust k ja $f(x) - kx$ omaks lõplikku piirväärtust b.

Kui sirge $y = kx + b$ on kõvera $y = f(x)$ asümptoodiks (joon. 87), siis geomeetrilises tõlgenduses tähendab see, et ordinaatide vahe

$$f(x) - (kx + b) = NP$$

läheneb $|x|$ kasvamisel nullile. Samuti läheneb siis nullile ka punkti P kaugus asümptoodist, s. o.

$$MP = NP \cdot \cos \alpha,$$



Joon. 87.

kus α on asümptoodi ja X-telje vaheline nurk. Seega võime kõvera asümptooti geomeetriliselt vaadelda kui niisugust sirget, mille kaugus kõveral asetsevast punktist läheneb nullile, kui selle punkti abstsiss $x \to \infty$.

Kõvera asümptoodi määramine ja joonestamine soodustab õiget ettekujutust funktsioonile vastava kõvera käigust, kui argument $x \to \infty$, ja selgitab ühtlasi funktsiooni muutumise iseloomu ja käitumist tema määramispiirkonnas. Siin tuleb muidugi eraldi vaadelda juhtumeid, kui $x \to +\infty$ ja $x \to -\infty$, ning mõlemal juhtumil kindlaks määrata funktsioonide vahe $f(x) - (kx + b)$ märk. Kui see vahe teatavast kohast alates jääb positiivseks, siis asetseb lõpmatusse minev kõvera haru ülalpool asümptooti, ja kui see vahe jääb negatiivseks, siis asetseb lõpmatusse minev kõvera haru allpool asümptooti. Kui aga selle vahe märk x piiramatul kasvamisel kogu aeg vaheldumisi muutub, siis kõver lõikab järk-järgult asümptooti, s. o. ta võngub asümptoodi ümber.

Kui kaks kõverat $y = \varphi(x)$ ja $y = \psi(x)$ asümptootiliselt lähenevad ühele ja samale sirgele $y = kx + b$, kui $x \to \infty$, ning seejuures $\varphi(x) \to \infty$ ja $\psi(x) \to \infty$, siis on need funktsioonid ekvivalentsed lõpmata kasvavad suurused, mille puhul (§ 21, p. 1)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1.$$

Määrame näiteks kõvera

$$y = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$$

asümptoodi $y = kx + b$. Selleks tuleb leida arvud k ja b, s. o.

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt[3]{6x^2 - x^3}}{x} = \lim_{x \to \infty} \sqrt[3]{\frac{6}{x} - 1} = -1$$

ja (kasutades l'Hôpitali meetodit)

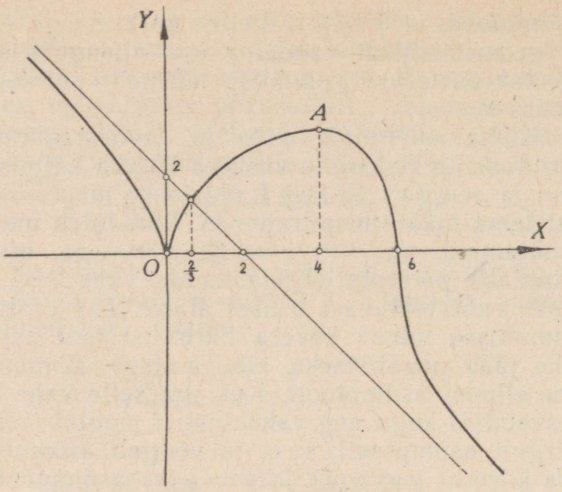
$$b = \lim_{x \to \infty} [\sqrt[3]{6x^2 - x^3} - (-x)] = \lim_{x \to \infty} (x - \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}) =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \sqrt[3]{1 - \frac{6}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{6}{3\sqrt[3]{\left(1 - \frac{6}{x}\right)^2}} = 2.$$

Antud funktsioonile vastava kõvera asümptoodi võrrand on seega (joon. 88)

$$y = -x + 2.$$

Kui siin $x \to +\infty$, siis alates kõvera ja asümptoodi lõikepunktist $x = \frac{2}{3}$ on funktsioonide vahe



Joon. 88.

$$\sqrt[3]{6x^2 - x^3} - (-x + 2) > 0$$

ja seega kõvera parempoolne osa asetseb ülalpool asümptooti; kui aga $x \to -\infty$, siis alates punktist $x = \frac{2}{3}$ on

$$\sqrt[3]{6x^2 - x^3} - (-x + 2) < 0$$

ja kõvera vasakpoolne osa asetseb allpool asümptooti.

Kui argumendi $x \to \infty$ puhul funktsioon $f(x)$ läheneb lõplikule piirväärtusele b, siis on

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

ja kõvera $y = f(x)$ asümptoodiks on X-teljega paralleelne sirge $y = b$. See on kõvera või tema haru horisontaalne asümptoot.

Kui x lähenemisel lõplikule suurusele a funktsioon $f(x) \to \infty$, siis on

$$k = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{x} = \infty$$

ja kõvera $y = f(x)$ asümptoodiks on Y-teljega paralleelne sirge $x = a$, mis on kõvera või tema haru vertikaalseks asümptoodiks.

Näiteks funktsiooni

$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

puhul, kui $x \to +\infty$, on

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{e}{x} = 0$$

ja

$$b = \lim_{x \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - 0\right] = e$$

ning funktsioonile vastava kõvera asümptoodi võrrand on $y = e$ (§ 51, p. 5, c, joon. 67). Kui aga $x \to -\infty$, siis on samuti

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e}{x} = 0$$

ja

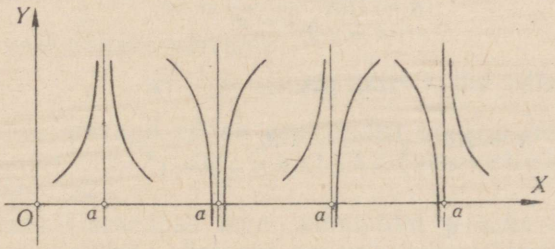
$$b = \lim_{x \to -\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - 0\right] = e,$$

millest nähtub, et $|x|$ kasvamisel negatiivses suunas läheneb kõvera haru samale asümptoodile $y = e$, kuid viimase juhu puhul kõver omab ka vertikaalset asümptooti $x = -1$, sest

$$k = \lim_{x \to -1-0} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}{x} = \infty.$$

Vertikaalne asümptoot on seega asümptoodiks ainult kõvera vasakpoolsele harule (§ 51, p. 5, c, joon. 67).

Kõvera $y = f(x)$ harude ja nende vertikaalse asümptoodi $x = a$ vastastikuse asendi üldisi võimalikke juhtumeid esitab geomeetriliselt joonis 89, kus x läheneb kasvavalt või kahanevalt a-le, s. o. $x \to a \mp 0$. Punkt $x = a$ on siin ühtlasi funktsiooni $f(x)$ katkevuspunktiks.



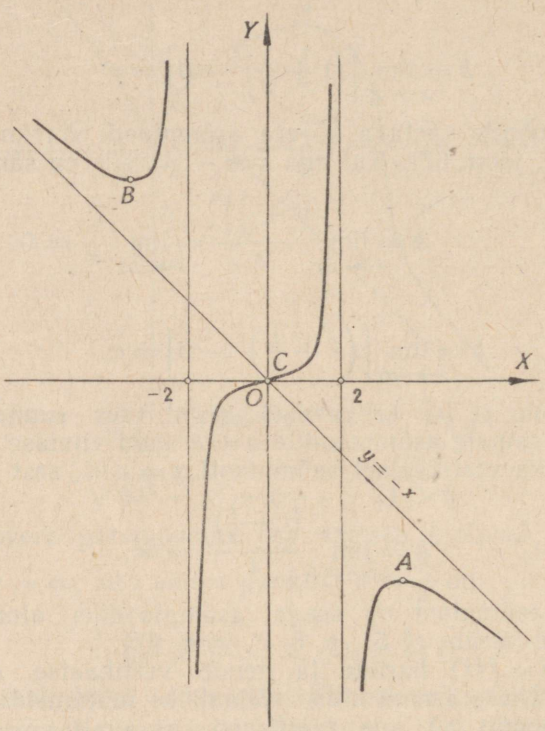
Joon. 89.

Näiteks kõveral

$$y = \frac{x^3}{4 - x^2},$$

mille maksimumpunkt on $A(2\sqrt{3}, -3\sqrt{3})$, miinimumpunkt

$B(-2\sqrt{3},\ 3\sqrt{3})$ ja käänupunkt $C(0,\ 0)$, on katkevuspunktides $x=-2$ ja $x=2$ kaks vertikaalset asümptooti (joon. 90), sest nendes punktides



Joon. 90.

$$k=\lim_{x\to\mp 2}\frac{x^2}{4-x^2}=\infty,$$

kuid peale selle, kui $x\to\infty$, on

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{4-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{4}{x^2}-1}=-1$$

ja

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{4-x^2}-(-x)\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{4-x^2}=0$$

ning seega antud funktsioonile vastava kõvera asümptoodiks on veel kolmas sirge

$$y=-x.$$

Võttes näiteks eksponentfunktsiooni

$$y = e^x,$$

näeme, et x lähenemisel $+\infty$-le ei saa me määrata sellele funktsioonile vastava kõvera asümptooti. Kui aga $x \to -\infty$, siis

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$$

ja

$$b = \lim_{x \to -\infty} e^x = 0,$$

millest järeldub nüüd, et X-telg on selle eksponentkõvera vasakpoolse haara asümptoodiks (joon. 91).

Kui aga $x \to \infty$ puhul $\frac{f(x)}{x}$ omab lõplikku piirväärtust k, kuid

$$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx] = \infty,$$

siis sellest ilmselt järeldub, et kõveral $y = f(x)$ puudub asümptoot.
Nii näiteks kõvera

$$y = x + \ln x$$

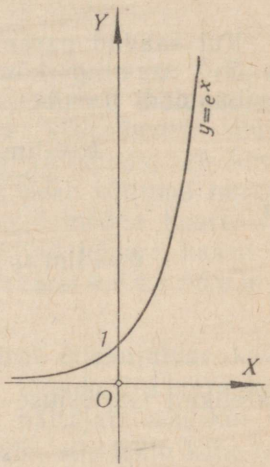
puhul

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x + \ln x}{x} = 1 + \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = 1$$

ja

$$b = \lim_{x \to \infty} (x + \ln x - x) = \infty$$

ning seega antud kõveral puudub asümptoot.



Joon. 91.

Võtame veel näiteks võrrandi

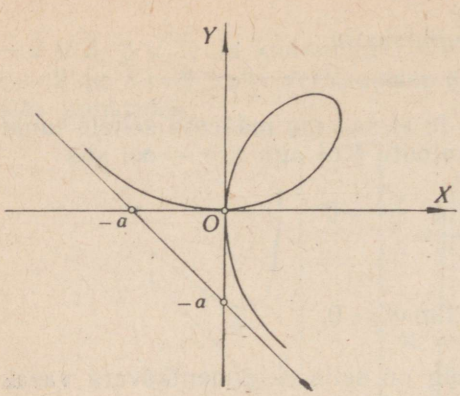
$$x^3 + y^3 - 3axy = 0,$$

kus $a > 0$. See võrrand esitab graafiliselt kõverat, mida nimetatakse Descartes'i* ehk Cartesiuse leheks (*Folium Cartesii*) (joon. 92).

Et määrata Cartesiuse lehe asümptoot $y = kx + b$, selleks esitame Cartesiuse lehe võrrandi parameetrilisel kujul, tähistades $y = tx$, kus t on muutuvaks parameetriks ja nimelt sirge $(y = tx)$

---

* René Descartes (Cartesius) (1596—1650) — prantsuse metafüüsiline filosoof, füüsik ja matemaatik. Descartes oli analüütilise geomeetria rajajaks, mille tõttu ristkoordinaadistikku nimetatakse sageli tema nime järgi ka Descartes'i ehk Cartesiuse koordinaadistikuks.



Joon. 92.

muutuvaks tõusuks. Asendame Cartesiuse lehe võrrandis y avaldisega tx; saame

$$x^3 + t^3x^3 - 3atx^2 = 0,$$

millest

$$x = \frac{3at}{1+t^3}$$

ja järelikult

$$y = \frac{3at^2}{1+t^3},$$

mis on Cartesiuse lehe parameetrilised võrrandid.

Kui saadud parameetrilistes võrrandites $t \to -1$, siis $x \to \infty$ ja $y \to \infty$ ning kõver omab lõpmatusse minevaid haarasid. Asümptoodi $y = kx + b$ määramiseks leiame k ja b:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to-1} \frac{3at^2(1+t^3)}{3at(1+t^3)} = -1$$

ja

$$b = \lim_{x\to\infty} (y - kx) = \lim_{t\to-1} \left(\frac{3at^2}{1+t^3} + \frac{3at}{1+t^3} \right) =$$

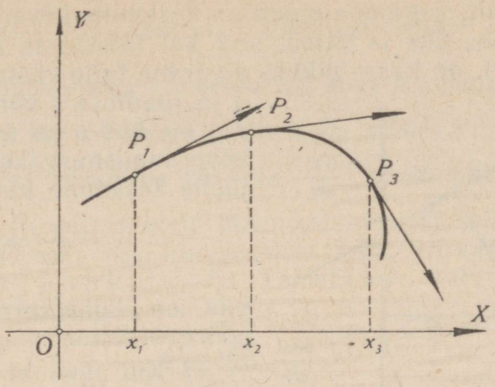
$$= \lim_{t\to-1} \frac{3at}{1-t+t^2} = -a.$$

Järelikult Cartesiuse lehe asümptoodi võrrand on

$$y = -x - a.$$

§ 58. Joonte kõverus. Jälgides mingi kõverjoone kuju ja käiku, võime tähele panna, et erinevates vahemikes võib joon olla kõverdunud erinevalt, mitte ühtlaselt. Ainult ringjoone kõverduvus on ühtlane. Kui aga võtame mitu erinevate raadiustega ringjoont, siis näeme otseselt, et kõige rohkem ehk kõige tugevamini on kõverdunud see ringjoon, mille raadius on kõige väiksem.

Kõvera kõverduvuse iseloom sõltub sellest, kui kiiresti kõver kõverdumisel muudab oma suunda. Oletame, et kõvera suuna muutumine toimub pidevalt, s. o. et puutepunkti pideval liikumisel kõverat mööda puutuja muudab pidevalt oma suunda. Nagu nähtub jooniselt 93, on vahemikus x_1-st x_2-ni kõvera suuna muutumine vähe märgatav, sest sellele vahemikule vastava kaare P_1P_2 punktides (ja samuti kaare P_1P_2 otspunktides P_1 ja P_2) on puutujad peaaegu paralleelsed ja seega selles vahemikus on kõvera kõverduvus väike; vahemikus x_2-st x_3-ni aga on kõvera suuna muutumine palju suurem, sest sellele



Joon. 93.

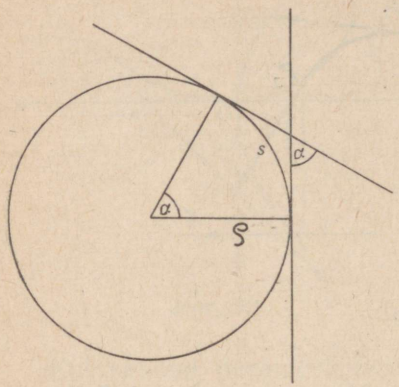
vahemikule vastava kaare P_2P_3 punktides, eriti kaare P_2P_3 otspunktides P_2 ja P_3, on puutujate suunad tunduvalt erinevad ning järelikult selles vahemikus on kõvera kõverduvus suurem kui vahemikus x_1-st x_2-ni. Sellest võib järeldada, et kõvera ühe või teise lõigu ehk kaare kõverduvus peab sõltuma nurgast, mille moodustab kõvera puutuja kulgemisel mööda kaart, s. o. nurgast, mille moodustavad kõvera puutujad kõvera kaare otspunktides. Seda nurka nimetame kõvera kaare k õ v e r d u m i s n u r g a k s.

Kõverdumisnurk annab teataval määral ettekujutuse kõvera kaare kõverduvusest, kuid ei määra veel täielikult kõvera kaare kõverduvuse kvantitatiivset ehk arvulist näitajat, sest kui näiteks raudteeröövbaste kõverdumisnurk on 25°, siis tekib kohe küsimus: kui pika teeosa puhul see nurk on võetud? Kui teeosa pikkus on näiteks 3 km, siis pole raudteeröövbaste kõverduvus märgatav, sest ta on väga väike; kui aga teeosa pikkus on näiteks 200 m, siis on röövbaste kõverduvus tunduvalt märgatav ja küllaltki suur.

Öeldust järeldub, et kõvera kaare kõverduvuse arvulise näitaja määramiseks on vaja teada peale kõverdumisnurga, mida tähistame α-ga, ka kõvera kaare pikkust s. Loomulikult on siis kõvera kaare kõverduvuse arvuliseks näitajaks kõverdumisnurga α ja kõvera kaare pikkuse s suhe $\frac{\alpha}{s}$, mis näitab, mitu kõvera suuna muutumise ühikut vastab kaare pikkuse ühele ühikule. Seda radiaanides esineva kõverdumisnurga α ja kõvera kaare pikkuse s suhet nimetame kõvera kaare k e s k m i s e k s k õ v e r u s e k s. Keskmiseks kõveruseks nimetame seda suhet seepärast, et kõvera kaare mitmesuguste osade kõverduvused võivad olla üksteisest

erinevad. Ainult ringjoone puhul on keskmine kõverus, vaatamata kaare pikkusele, üks ja sama, sest kui tähistame ringi raadiuse ϱ-ga (joon. 94), on kaare pikkus s võrdne talle vastava kesknurga α ja raadiuse ϱ korrutisega, s. o. $s = \alpha\varrho$, kus α on ühtlasi kaare s kõverdumisnurgaks. Seega ringjoone keskmine kõverus

$$\frac{\alpha}{s} = \frac{\alpha}{\alpha\varrho} = \frac{1}{\varrho},$$

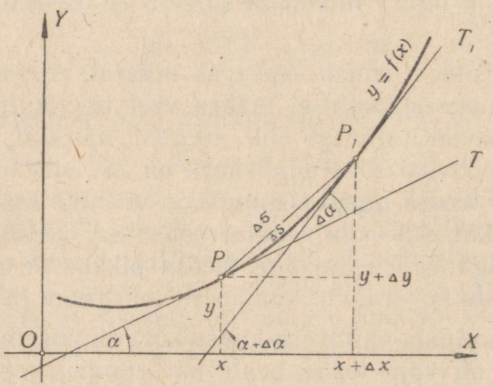


Joon. 94.

mis on konstantne suurus ja pöördvõrdeline ringi raadiusega.

1) Kui meil ei ole tegemist ringjoonega, vaid mistahes kõveraga, mida esitab pidev funktsioon $y = f(x)$, siis võivad selle kõvera kaare mitmesugustes osades olla isesugused keskmised kõverused.

Esitagu funktsioon $y = f(x)$ vaadeldavas vahemikus pidevat kõverat (joon. 95) ja omagu funktsioon sellel kõveral vabalt võetud punktis $P(x, y)$ nii esimest kui ka teist järku tuletist. Võtame



Joon. 95.

punkti P ümbruses samal kõveral mingi teise punkti $P_1(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$. Joonestame nendes punktides puutujad PT ja P_1T_1, mis moodustavad X-telje positiivse suunaga vastavalt nurgad α ja $\alpha + \Delta\alpha$. Kõvera kaare PP_1 kõverdumisnurgaks on siis puutujate PT ja P_1T_1 vaheline nurk $\Delta\alpha$. Kui tähistame kaare PP_1 pikkuse Δs-ga, siis kõverdumisnurga ja kaare PP_1 pikkuse suhe

$\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ määrab kaare PP_1 keskmise kõveruse. Kaare PP_1 keskmist kõverust $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ võime seega vaadelda kui kõverdumisnurga $\Delta\alpha$ muutumise keskmist kiirust kaare pikkuse Δs suhtes.

Kui siinjuures keskmine kõverus $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ omab piirväärtust, kui laseme punkti P_1 piiramatult läheneda kõverat mööda punktile P, s. o. kui $\Delta s \to 0$, siis nimetatakse seda piirväärtust kõvera kõveruseks punktis P. Tähistades selle piirväärtuse k-ga, võime kirjutada, et

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}.$$

Tähendab, *kõvera kõveruseks antud punktis P nimetatakse puutujate PT ja P_1T_1 vahelise nurga (kõverdumisnurga) ja kaare PP_1 pikkuse suhte piirväärtust, kui punkt P_1 piiramatult läheneb kõverat mööda punktile P.*

Kui see piirväärtus k on olemas, siis on see üldiselt kõvera erinevates punktides erinev. Ainult ringjoone igas punktis on kõverus k konstantne suurus, s. o. $k = \frac{1}{\varrho}$, kus ϱ on ringi raadius.

Kõvera $y = f(x)$ kõveruse leidmiseks punktis $P(x, y)$ esitame kaare PP_1 keskmise kõveruse järgmiselt:

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta x} : \frac{\Delta s}{\Delta x}$$

ja laseme punkti P_1 piiramatult läheneda kõverat mööda punktile P. Et eelduse järgi funktsioon $f(x)$ omab esimest ja teist tuletist, siis tuletatud funktsiooni $f'(x)$ pidevuse tõttu, kui $\Delta x \to 0$, samuti ka $\Delta\alpha \to 0$ ja $\Delta s \to 0$, kusjuures $\frac{\Delta\alpha}{\Delta x}$ ja $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ piirväärtused olgu

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta x} = \frac{d\alpha}{dx} \text{ ja } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{ds}{dx}.$$

Seega punktis P kõvera kõveruse k avaldis esineb kujul

$$k = \frac{d\alpha}{dx} : \frac{ds}{dx} = \frac{d\alpha}{ds}.$$

Kõvera $y = f(x)$ kõveruse leidmiseks punktis $P(x, y)$ teisendame kõvera kõverust määravat avaldist $\frac{d\alpha}{ds}$. Punktis $P(x, y)$ on funktsiooni $f(x)$ tuletis

$$f'(x) = \operatorname{tg}\alpha,$$

millest

$$\alpha = \operatorname{arctg} f'(x),$$

kusjuures α on x pidev funktsioon. Diferentsides seda funktsiooni x järgi, saame

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{1+f'(x)^2}\frac{df'(x)}{dx} = \frac{f''(x)}{1+f'(x)^2},$$

mis väljendab $\frac{d\alpha}{dx}$ väärtust funktsiooni $f(x)$ esimest ja teist järku tuletiste kaudu.

Kui kaarele Δs vastav kõõl on $\Delta\sigma$, siis

$$\Delta\sigma = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

ehk

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta x} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

ja

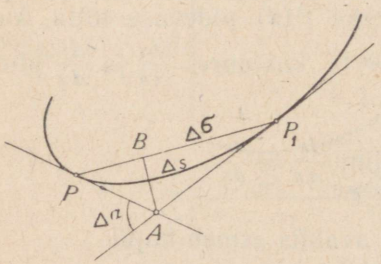
$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta x} = \frac{d\sigma}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

millest

$$d\sigma = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

kus $d\sigma = ds$, sest kui Δs on kogu ulatuses, s. o. punktist P kuni punktini P_1 (joon. 96), kumer või nõgus, siis

$$\Delta\sigma < \Delta s < PA + AP_1,$$



Joon. 96.

kus

$$PA = \frac{PB}{\cos \widehat{APB}}, \quad AP_1 = \frac{BP_1}{\cos \widehat{AP_1B}}.$$

Et aga

$$\cos \widehat{APB} > \cos \Delta\alpha,$$

$$\cos \widehat{AP_1B} > \cos \Delta\alpha,$$

siis

$$\Delta\sigma < \Delta s < \frac{PB}{\cos \widehat{APB}} + \frac{BP_1}{\cos \widehat{AP_1B}} < \frac{PB}{\cos \Delta\alpha} + \frac{BP_1}{\cos \Delta\alpha} = \frac{\Delta\sigma}{\cos \Delta\alpha},$$

millest (jagades võrratuse kaks esimest ja viimase osa $\Delta\sigma$-ga) saame

$$1 < \frac{\Delta s}{\Delta \sigma} < \frac{1}{\cos \Delta \alpha}$$

ehk ümberpöördult

$$1 > \frac{\Delta \sigma}{\Delta s} > \cos \Delta \alpha,$$

mille iga osa 1-st lahutades saame

$$0 < 1 - \frac{\Delta \sigma}{\Delta s} < 1 - \cos \Delta \alpha = 2 \sin^2 \frac{\Delta \alpha}{2},$$

s. o.

$$\left| \frac{\Delta \sigma}{\Delta s} - 1 \right| < \varepsilon,$$

kus ε on kuitahes väike etteantud positiivne arv, sest

$$\lim_{\Delta \alpha \to 0} 2 \sin^2 \frac{\Delta \alpha}{2} = 0.$$

Seega

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \sigma}{\Delta s} = \frac{d\sigma}{ds} = 1,$$

millest järeldub kaare ja temale vastava kõõlu diferentsiaalide võrdsus

$$ds = d\sigma,$$

mille puhul

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

ja järelikult

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + f'(x)^2}.$$

Paigutades leitud $\frac{d\alpha}{dx}$ ja $\frac{ds}{dx}$ väärtused

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{f''(x)}{1 + f'(x)^2} \text{ ja } \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

kõvera kõveruse avaldisse

$$k = \frac{d\alpha}{dx} : \frac{ds}{dx},$$

saame kõvera kõveruse punktis $P(x, y)$ avaldada järgmiselt:

$$k = \frac{f''(x)}{[1 + f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}, \qquad (1)$$

kus nõgusa kõvera puhul $f''(x) > 0$ ja kumera kõvera puhul

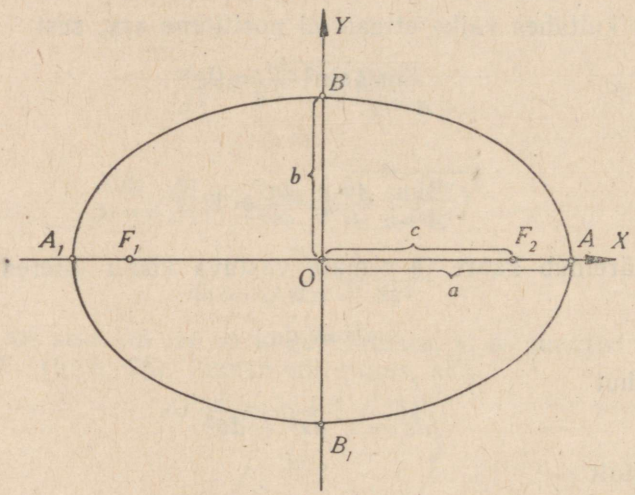
$f''(x) < 0$. Et me loeme kõvera kõverust alati positiivseks, siis võime $f''(x) < 0$ puhul võtta selle absoluutväärtuse $|f''(x)|$ või valida nimetaja $\frac{3}{2}$-astme (kui ruutjuure) selle märgiga, mille puhul kõvera kõverus k osutub positiivseks.

Et kõvera käänupunktis $f''(x) = 0$, siis saadud valemist nähtub otseselt, et kõvera käänupunktis kõvera kõverus $k = 0$.

Et näiteks ellipsi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

kaart AB (joon. 97) või mingit selle osa võiks sirkliga joonestada, selleks peaksid kaare AB või tema osa kõikides punktides



Joon. 97.

olema võrdsed kõverused. Diferentsides ellipsit esitavat funktsiooni $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, saame

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \text{ja} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{ab}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Paigutades saadud tuletiste väärtused kõvera kõveruse valemisse (1), saame ellipsi kõveruse

$$k = \left| -\frac{\frac{ab}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}}{\left[1 + \frac{b^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)}\right]^{\frac{3}{2}}} \right| = \left| -\frac{a^4b}{(a^4 - a^2x^2 + b^2x^2)^{\frac{3}{2}}} \right|,$$

millest nähtub, et kui x muutub 0-st a-ni, siis ellipsi kõverus

muutub pidevalt kasvades $\frac{b}{a^2}$-st $\frac{a}{b^2}$-ni, kui $a > b$. Tähendab, ellipsi kaare AB igas punktis on isesugune kõverus. Järelikult pole võimalik sirkliga joonestada ellipsi kaart AB või mingit selle osa.

Punktis A (niisama ka punktis A_1) on ellipsi kõverus maksimaalne, s. o. $\frac{a}{b^2}$, ja punktis B (samuti ka punktis B_1) on ellipsi kõverus minimaalne, s. o. $\frac{b}{a^2}$.

2) Kui kõver on antud parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

mis on parameetri t järgi diferentsitavad, siis (§ 42)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}.$$

Nende väärtuste asetamisel kõvera kõveruse valemisse (1) saame tähendatud valemi kujul

$$k = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{2}$$

a) Et leida näiteks tsükloidi

$$x = r(t - \sin t), \qquad y = r(1 - \cos t)$$

kõverust määravat valemit, selleks võtame esimest ja teist järku tuletised

$$\dot{x} = r(1 - \cos t), \qquad \dot{y} = r \sin t,$$
$$\ddot{x} = r \sin t, \qquad \ddot{y} = r \cos t,$$

millede asetamisel kõveruse valemisse (2) saame

$$k = \frac{r^2(1 - \cos t)\cos t - r^2 \sin^2 t}{[r^2(1 - \cos t)^2 - r^2 \sin^2 t]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\cos t - 1}{r(2 - 2\cos t)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= -\frac{2\sin^2 \frac{t}{2}}{r\left(2 \cdot 2\sin^2 \frac{t}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4r \sin \frac{t}{2}},$$

kus ruutjuur on võetud miinusmärgiga.

Kui siin näiteks $t = \pi$, siis

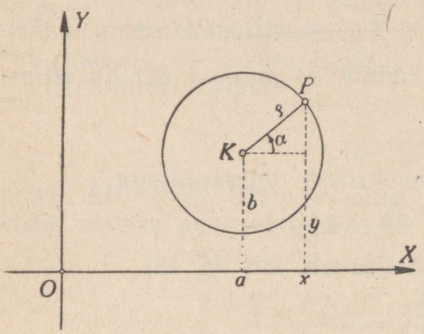
$$k = \frac{1}{4r},$$

mis väljendab tsükloidi väikseimat kõverust, sest $t = \pi$ puhul on $\sin \frac{t}{2}$ väärtus maksimaalne.

b) Ringjoone

$$(x-a)^2+(y-b)^2=\varrho^2$$

kõverust k on lihtne määrata, kui ringjoon on antud parameetriliste võrranditega (joon. 98)



Joon. 98.

$$x-a=\varrho\cos\alpha,$$

$$y-b=\varrho\sin\alpha,$$

kus a ja b on ringi keskpunkti K koordinaadid, ϱ on ringi raadius ning muutuvaks parameetriks on kesknurk α. Siin

$$\dot{x}=-\varrho\sin\alpha, \qquad \dot{y}=\varrho\cos\alpha,$$

$$\ddot{x}=-\varrho\cos\alpha,$$

$$\ddot{y}=-\varrho\sin\alpha.$$

Seega ringjoone kõverus

$$k=\frac{\varrho\sin\alpha\cdot\varrho\sin\alpha+\varrho\cos\alpha\cdot\varrho\cos\alpha}{(\varrho^2\sin^2\alpha+\varrho^2\cos^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\varrho},$$

millest nähtub, et ringjoone kõverus on igas punktis ühesugune ja nimelt pöördvõrdeline ringi raadiusega.

Tasapinnalistest joontest on ainult ringjoonel ja sirgel konstantne kõverus. Sirgjoone kõverus on igas punktis võrdne nulliga, sest sirgjoont esitavat funktsiooni $y=ax+b$ kaks korda diferentsides saame $y''=0$.

3) Kui kõver on antud polaarvõrrandiga $r=f(\varphi)$, mille puhul

$$x=r\cos\varphi, \qquad y=r\sin\varphi$$

ehk

$$x=f(\varphi)\cos\varphi, \qquad y=f(\varphi)\sin\varphi,$$

mis on parameetri φ (kui polaarnurga) järgi diferentsitavad, siis nende esimesed ja teised tuletised on

$$\frac{dx}{d\varphi}=f'(\varphi)\cos\varphi-f(\varphi)\sin\varphi,$$

$$\frac{dy}{d\varphi}=f'(\varphi)\sin\varphi+f(\varphi)\cos\varphi$$

ja

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2}=f''(\varphi)\cos\varphi-2f'(\varphi)\sin\varphi-f(\varphi)\cos\varphi,$$

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2}=f''(\varphi)\sin\varphi+2f'(\varphi)\cos\varphi-f(\varphi)\sin\varphi.$$

Nende väärtuste asetamisel kõvera kõveruse valemisse (2) saame

$$k = \frac{f(\varphi)^2 + 2f'(\varphi)^2 - f(\varphi)\cdot f''(\varphi)}{[f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2]^{\frac{3}{2}}}. \qquad (3)$$

Näiteks logaritmilise spiraali (§ 45, p. 2)

$$r = ae^{m\varphi}$$

puhul

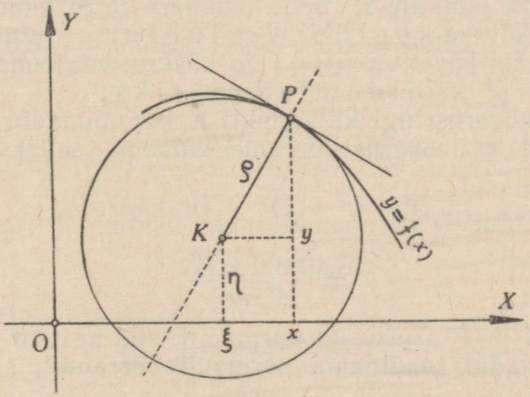
$$f'(\varphi) = ame^{m\varphi} \qquad \text{ja} \qquad f''(\varphi) = am^2e^{m\varphi}$$

ning seega logaritmilise spiraali kõverus

$$k = \frac{a^2e^{2m\varphi} + 2a^2m^2e^{2m\varphi} - a^2m^2e^{2m\varphi}}{\left(a^2e^{2m\varphi} + a^2m^2e^{2m\varphi}\right)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{ae^{m\varphi}\sqrt{1+m^2}} = \frac{1}{r\sqrt{1+m^2}}.$$

§ 59. Kõverusring. 1) Oletame, et kõvera $y = f(x)$ punktis $P(x, y)$ on kõvera kõverus k, mis on nullist erinev, s. o. $f''(x) \neq 0$. Joonestame antud kõverale $y = f(x)$ normaali punktis P (joon. 99) ja märgime kõvera nõgususe poolel sellel nor-



Joon. 99.

maalil sirglõigu $PK = \frac{1}{k}$. Kui nüüd joonestame raadiusega $\varrho = \frac{1}{k}$ ringjoone, mille keskpunktiks on punkt K, siis see ringjoon läbib punkti P, milles tal on ühine puutuja kõveraga $y = f(x)$, sest raadius ϱ asetseb kõvera normaalil. Kõver $y = f(x)$ ja ringjoon on punktis P kõverdatud puutujast ühele ja samale poole ning omavad selles punktis üht ja sama kõve-

rust $k = \frac{1}{\varrho}$. Seda ringjoont nimetatakse kõvera $y = f(x)$ kõverusringjooneks punkti P suhtes ja vastavat ringi kõverusringiks. Kõverusringi raadiust

$$\varrho = \frac{1}{k} = \frac{[1 + f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}$$

nimetatakse kõvera $y = f(x)$ kõverusraadiuseks punktis P ja kõverusringi keskpunkti K kõvera $y = f(x)$ kõveruse keskpunktiks punkti P suhtes. Kõvera $y = f(x)$ kõveruse keskpunkt K kõveral võetud punkti P suhtes asetseb normaalil kõvera nõgususe poolel kaugusel $\varrho = \frac{1}{k}$ punktist P.

Kui kõveral $y = f(x)$ asetseva punkti P suhtes võetud kõverusringi keskpunkti K koordinaadid on ξ ja η, s. o. $K(\xi, \eta)$, siis kõverusringjoone võrrand on

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \varrho^2.$$

Kui võtame kõveral $y = f(x)$ punkti P ümbruses veel kaks teist punkti P_1 ja P_2 ning joonestame läbi punktide P, P_1 ja P_2 ringjoone, siis võime kõvera kõverusringjoont punkti P suhtes vaadelda kui punkte P, P_1 ja P_2 läbiva ringjoone piirasendit, mis saadakse siis, kui punktid P_1 ja P_2 piiramatult lähenevad kõverat mööda punktile P. Selle omaduse tõttu kannab kõverusringjoon ka kõvera kooldumisringjoone nime, kusjuures punkt P on siis kõvera $y = f(x)$ ja kõverusringjoone $(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \varrho^2$ kooldumispunktiks.

Et leida kõverusringi keskpunkti K koordinaadid ξ ja η ning seega ühtlasi ka kõverusringjoone võrrand, selleks esitame ϱ^2 kahel viisil:

$$\varrho^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$$

ja

$$\varrho^2 = \frac{[1 + f'(x)^2]^3}{f''(x)^2}.$$

Et punktid K ja P asetsevad normaalil, siis peavad nende punktide koordinaadid rahuldama normaali võrrandit, s. o.

$$y - \eta = -\frac{1}{f'(x)}(x - \xi).$$

Paigutame ϱ^2 väärtuse teisest võrdusest ja $y - \eta$ väärtuse kolmandast võrdusest esimesse võrdusse; saame

$$\frac{[1 + f'(x)^2]^3}{f''(x)^2} = (x - \xi)^2 + \frac{1}{f'(x)^2}(x - \xi)^2,$$

millest

$$\xi = x - f'(x)\frac{1 + f'(x)^2}{f''(x)},$$

ja järelikult (kasutades normaali võrrandit)

$$\eta = y + \frac{1 + f'(x)^2}{f''(x)},$$

oletades siinjuures, et $f''(x) \neq 0$. Seega kõverusringi keskpunkti koordinaadid on

$$\xi = x - f'(x)\,\frac{1 + f'(x)^2}{f''(x)}, \qquad \eta = f(x) + \frac{1 + f'(x)^2}{f''(x)},$$

millede väärtused koos ϱ väärtusega määravad kõverusringjoone võrrandi

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \varrho^2,$$

kus x ja y on ringjoonel asetseva jooksva punkti koordinaadid.

Et leida näiteks kõvera

$$f(x) = 2 - x - x^2$$

kõveruse keskpunktid maksimumpunkti ning punktide $x = -2$ ja $x = -1$ suhtes, samuti vastavate kõverusringjoonte võrrandid (joon. 100), selleks leiame $f'(x)$ ja $f''(x)$, s. o.

$$f'(x) = -1 - 2x, \qquad f''(x) = -2.$$

Maksimumpunkti A koordinaadid on $(-0{,}5;\ 2{,}25)$. Seega

$$\xi = -0{,}5 - f'(-0{,}5)\,\frac{1 + f'(-0{,}5)^2}{f''(-0{,}5)} = -0{,}5 + 0 = -0{,}5$$

ja

$$\eta = f(-0{,}5) + \frac{1 + f'(-0{,}5)^2}{f''(-0{,}5)} = 2{,}25 - \frac{1}{2} = 1{,}75$$

ning kõveruse keskpunkt maksimumpunkti A suhtes on

$$K(-0{,}5;\ 1{,}75).$$

Et kõverusringi raadiuse ruut

$$\varrho^2 = \frac{[1 + f'(-0{,}5)^2]^3}{f''(-0{,}5)^2} = \frac{(1 + 0)^3}{4} = 0{,}25,$$

siis vastava kõverusringjoone võrrand on

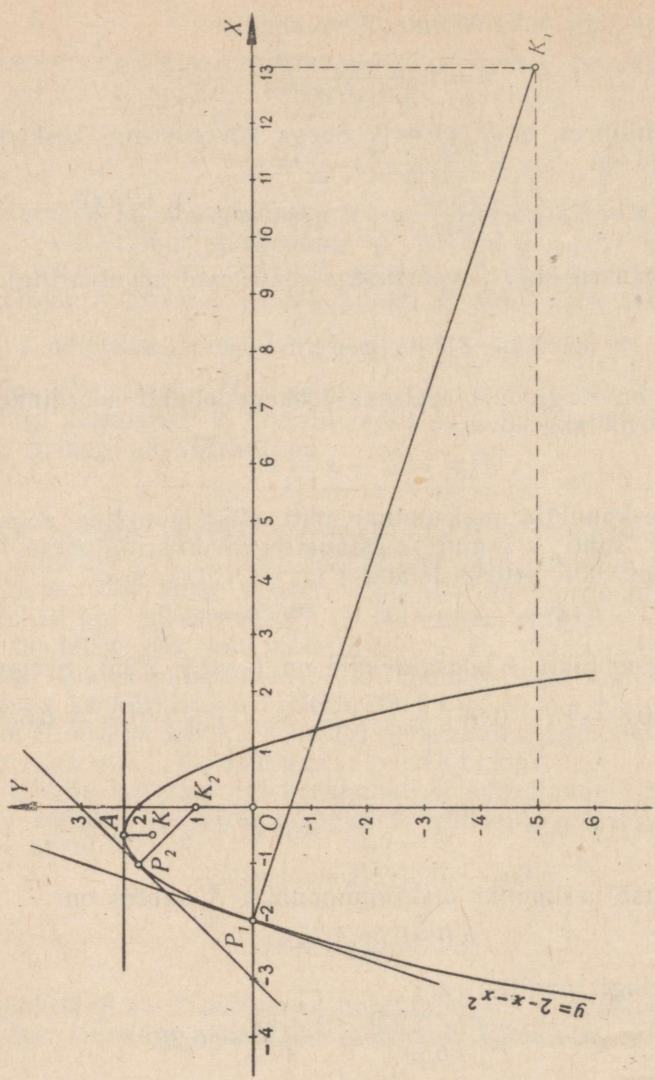
$$(x + 0{,}5)^2 + (y - 1{,}75)^2 = 0{,}25,$$

kusjuures kõverusraadius punktis A

$$\varrho = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$$

ja kõverus

$$k = \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{0{,}5} = 2$$



Joon. 100.

Kui $x = -2$, siis

$$\xi = -2 - 3 \cdot \frac{1+9}{-2} = 13, \qquad \eta = 0 + \frac{1+9}{-2} = -5$$

ja kõveruse keskpunkt punkti $P_1(-2, 0)$ suhtes on

$$K_1(13, -5).$$

Siin kõverusringi raadiuse ruut

$$\varrho_1^2 = \frac{[1 + f'(-2)^2]^3}{f''(-2)^2} = \frac{(1+9)^3}{4} = 250$$

ja seega kõverusringjoone võrrand

$$(x-13)^2+(y+5)^2=250,$$

kusjuures kõverusraadius punktis P_1

$$\varrho_1=\sqrt{250}\approx 15{,}8$$

ja kõverus

$$k_1=\frac{1}{\varrho_1}=\frac{1}{\sqrt{250}}\approx 0{,}063.$$

Kui $x=-1$, siis

$$\xi=-1-\frac{1+1}{-2}=0, \qquad \eta=2+\frac{1+1}{-2}=1$$

ning kõveruse keskpunkt punkti $P_2(-1, 2)$ suhtes on

$$K_2(0,1).$$

Selle kõverusringi raadiuse ruut

$$\varrho_2^2=\frac{[1+f'(-1)^2]^3}{f'(-1)^2}=\frac{(1+1)^3}{4}=2$$

ja järelikult kõverusringjoone võrrand

$$x^2+(y-1)^2=2,$$

kusjuures kõverusraadius punktis P_2

$$\varrho_2=\sqrt{2}\approx 1{,}4$$

ja kõverus

$$k_2=\frac{1}{\varrho_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0{,}707.$$

2) Kui kõver on antud parameetriliste võrranditega

$$x=x(t), \qquad y=y(t),$$

kus

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3},$$

siis x, y, $\frac{dy}{dx}$ ja $\frac{d^2y}{dx^2}$ väärtuste asetamisel võrdustesse

$$\xi=x-\frac{dy}{dx}\cdot\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \qquad \eta=y+\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

saame kõverusringi keskpunkti koordinaadid ξ ja η parameetri t kaudu, s. o.

$$\xi=x(t)-\dot{y}\,\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}, \qquad \eta=y(t)+\dot{x}\,\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}.$$

Näiteks tsükloidi

$$x = r(t - \sin t), \qquad y = r(1 - \cos t)$$

puhul

$$\dot{x} = r(1 - \cos t), \qquad \dot{y} = r \sin t,$$
$$\ddot{x} = r \sin t, \qquad \ddot{y} = r \cos t,$$

kusjuures

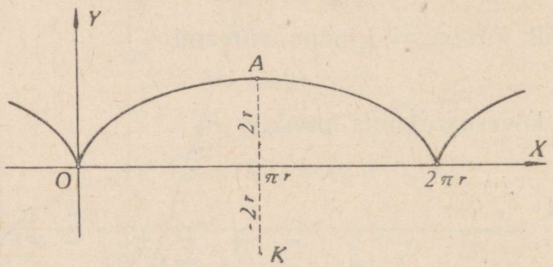
$$\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\,\ddot{y} - \dot{y}\,\ddot{x}} = \frac{r^2(1 - \cos t)^2 + r^2 \sin^2 t}{r(1 - \cos t) r \cos t - r^2 \sin^2 t} = -2,$$

ning tsükloidi keskpunkti koordinaadid on

$$\xi = r(t - \sin t) - r \sin t \cdot (-2) = r(t + \sin t),$$
$$\eta = r(1 - \cos t) + r(1 - \cos t) \cdot (-2) = -r(1 - \cos t).$$

Kui siin $t = 0$ või 2π (joon. 101), siis

$$(\xi, \eta) \equiv (0, 0) \quad \text{või} \quad (\xi, \eta) \equiv (2\pi r, 0)$$



Joon. 101.

ja kõverusraadius neis punktides (§ 58, p. 2)

$$\varrho = 4r \sin \frac{t}{2} = 0.$$

Tsükloidi maksimumpunktis A on $t = \pi$ ja

$$\xi = \pi r, \qquad \eta = -2r,$$

s. o. kõveruse keskpunkt tsükloidi ühe haru maksimumpunkti suhtes on

$$K(\pi r, -2r).$$

§ 60. Kõverate puutejärk. Oletame, et punkt P on kõvera $y = f(x)$ ja kõverusringjoone kooldumispunktiks. Läbi selle kooldumispunkti on võimalik kujundada peale ülaltähendatud kõverusringjoone veel määramatult palju teisi ringjooni, mis puudutavad samuti kõverat $y = f(x)$ kooldumispunktis, kui ringide

keskpunktid võtta kooldumispunktist tõmmatud normaalil. Kui ühe niisuguse vabalt võetud ringjoone võrrand on $y = \varphi(x)$ ja sellel ringjoonel on kõveraga $y = f(x)$ kooldumispunktis ühine puutuja, siis kooldumispunktis on ikka

$$f(x) = \varphi(x), \qquad f'(x) = \varphi'(x),$$

mille puhul mõistame, et ringjoonel on antud kõveraga kooldumispunktis kahekordne ühine punkt. Kui seejuures $y = \varphi(x)$ esitab kõvera $y = f(x)$ kõverus- ehk kooldumisringjoont, siis on kooldumispunktis kõvera $y = f(x)$ kõverus võrdne ringjoone $y = \varphi(x)$ kõverusega, s. o.

$$\frac{f''(x)}{[1 + f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}} = k = \frac{\varphi''(x)}{[1 + \varphi'(x)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

millest otseselt nähtub, et sel juhul antud kõvera ja ringjoone kooldumispunktis on peale $f(x) = \varphi(x)$ ja $f'(x) = \varphi'(x)$ veel ka

$$f''(x) = \varphi''(x),$$

mille puhul, nagu eespool (§ 59, p. 1) nägime, ringjoonel on antud kõveraga kooldumispunktis kolmekordne ühine punkt.

Kui kaks mistahes pidevat kõverat

$$y = f(x) \quad \text{ja} \quad y = g(x)$$

omavad ühist puutujat, siis on puutepunktis ikka

$$f(x) = g(x), \qquad f'(x) = g'(x).$$

Kui selles punktis ka

$$f''(x) = g''(x),$$

siis on kõveratel selles punktis (kui kooldumispunktis) üks ja sama kõverus, mille puhul ütleme, et kõverad $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ esitavad kooldumispunktis teist järku puutumist. Kui aga nende kõverate ühises punktis on ainult $f(x) = g(x)$ ja $f'(x) = g'(x)$, kuid $f''(x) \neq g''(x)$, siis esitavad nad selles punktis esimest järku ehk harilikku puutumist. On nende kõverate kooldumispunktis peale $f''(x) = g''(x)$ veel ka $f'''(x) = g'''(x)$, kuid $f^{(4)}(x) \neq g^{(4)}(x)$, siis ütleme, et nad esitavad kooldumispunktis kolmandat järku puutumist jne. Kui üldiselt funktsioonid $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ on diferentsitavad kuni $n + 1$ järguni ja kooldumispunktis on

$$f'(x) = g'(x), \quad f''(x) = g''(x), \ \ldots, \ f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x),$$
$$f^{(n+1)}(x) \neq g^{(n+1)}(x),$$

siis ütleme, et kõverad $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ esitavad kooldumispunktis n-järku puutumist. Kõverate n-järku puutumise puhul

mõistame ühtlasi, et kõveratel on kooldumispunktis $(n+1)$-kordne ühine punkt.

Rakendades funktsioonide $f(x)$ ja $g(x)$ suhtes Taylori valemit, võime kirjutada, et

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2 + \frac{f'''(x)}{3!}\Delta x^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x)}{n!}\Delta x^n + \frac{f^{(n+1)}(x+\Theta_1\Delta x)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1}$$

ja

$$g(x+\Delta x) = g(x) + g'(x)\Delta x + \frac{g''(x)}{2!}\Delta x^2 + \frac{g'''(x)}{3!}\Delta x^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{g^{(n)}(x)}{n!}\Delta x^n + \frac{g^{(n+1)}(x+\Theta_2\Delta x)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1},$$

kus $0 < \Theta_1 < 1$ ja $0 < \Theta_2 < 1$. Et kõverate $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ n-järku puutumise puhul

$$f(x) = g(x), \quad f'(x) = g'(x), \ \ldots\ , f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x),$$

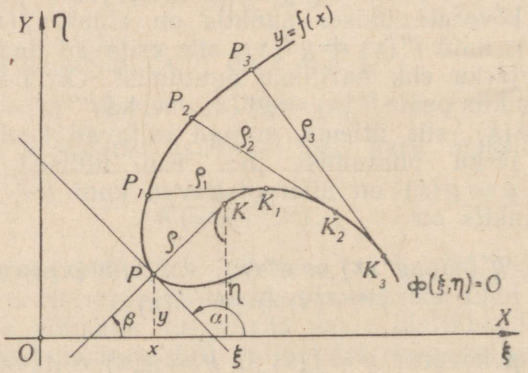
siis

$$f(x+\Delta x) - g(x+\Delta x) =$$

$$= [f^{(n+1)}(x+\Theta_1\Delta x) - g^{(n+1)}(x+\Theta_2\Delta x)]\,\frac{\Delta x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Viimasest võrdusest nähtub, et kui n on paaritu arv, siis nii positiivse kui ka negatiivse Δx puhul $f(x+\Delta x) - g(x+\Delta x)$ omab üht ja sama märki. Kui aga n on paarisarv, siis negatiivse Δx puhul on $f(x+\Delta x) - g(x+\Delta x)$ märk vastupidine positiivse Δx puhul saadud väärtusele. Seega viimasel juhul kõverad $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ lõikuvad kooldumispunktis. Näiteks kõvera käänupunktis puutuja lõikab ikka kõverat, sest käänupunktis on n alati paarisarv.

§ 61. Evoluut ja evolvent. Kui punkt $P(x, y)$ liigub mööda pidevat kõverat $y = f(x)$ (joon. 102), siis kõveruse keskpunkt



Joon. 102.

$K(\xi, \eta)$ nihkub edasi ja moodustab samuti mingi kõvera, kus siis ξ ja η on jooksva punkti K koordinaatideks. Viimast kõverat nimetatakse kõvera $y = f(x)$ **evoluudiks** ja selle parameetrilised võrrandid on (§ 59, p. 1)

$$\xi = x - f'(x)\,\frac{1 + f'(x)^2}{f''(x)},$$

$$\eta = f(x) + \frac{1 + f'(x)^2}{f''(x)},$$

kus x on muutuvaks parameetriks. Kui neist võrranditest on võimalik kõrvaldada x, siis saame evoluudi võrrandi

$$\Phi(\xi, \eta) = 0$$

ristkoordinaatides ξ ja η.

Ümberpöördult, kui evoluuti $\Phi(\xi, \eta) = 0$ lugeda algkõveraks, siis kõverat $y = f(x)$ nimetatakse kõvera $\Phi(\xi, \eta) = 0$ **evolvendiks**.

Diferentsides evoluuti esitavaid parameetrilisi võrrandeid

$$\xi = x - f'(x)\,\frac{1 + f'(x)^2}{f''(x)}, \quad \eta = f(x) + \frac{1 + f'(x)^2}{f''(x)}$$

parameetri x järgi, saame

$$\frac{d\xi}{dx} = -f'(x)\,\frac{3f'(x)f''(x)^2 - f'''(x) - f'(x)^2 f'''(x)}{f''(x)^2},$$

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{3f'(x)f''(x)^2 - f'''(x) - f'(x)^2 f'''(x)}{f''(x)^2},$$

millede jagatis

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{1}{f'(x)}$$

on evoluudi $\Phi(\xi, \eta) = 0$ tõus punktis K, s. o.

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg} \beta,$$

kusjuures evolvendi $y = f(x)$ tõus punktis P on

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha.$$

Et need nurgatangensid on teineteise pöördväärtused vastupidise märgiga, siis evoluudi $\Phi(\xi, \eta) = 0$ puutuja punktis K on ühtlasi evolvendi $y = f(x)$ normaaliks punktis P. Seega ümberpöördult: evolvendi $y = f(x)$ normaal on evoluudile $\Phi(\xi, \eta) = 0$ puutujaks punktis, mis on evolvendi kõveruse keskpunkt.

Kui evoluudi kaare KK_3 pikkus on s, siis (§ 58, p. 1)

$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2$$

ja seega ühtlasi ka

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 =$$

$$= \left[-f'(x)\ \frac{3f'(x)f''(x)^2 - f'''(x) - f'(x)^2 f'''(x)}{f''(x)^2} \right]^2 +$$

$$+ \left[\frac{3f'(x)f''(x)^2 - f'''(x) - f'(x)^2 f'''(x)}{f''(x)^2} \right]^2 =$$

$$= \left[1 + f'(x)^2 \right] \left[\frac{3f'(x)f''(x)^2 - f'''(x) - f'(x)^2 f'''(x)}{f''(x)^2} \right]^2,$$

mis on samane evolvendi $y = f(x)$ kõverusraadiuse tuletise ruuduga $\left(\frac{d\varrho}{dx}\right)^2$, kui kõverusraadiust vaatleme kui x funktsiooni, s. o.

$$\frac{d\varrho}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{ \frac{[1 + f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}{f''(x)} \right\} =$$

$$= [1 + f'(x)^2]^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{3f'(x)f''(x)^2 - f'''(x) - f'(x)^2 f'''(x)}{f''(x)^2},$$

mille ruut

$$\left(\frac{d\varrho}{dx}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dx}\right)^2,$$

kust

$$d\varrho = \pm ds$$

ehk

$$d(\varrho \mp s) = 0.$$

Et ainult konstantse suuruse diferentsiaal on võrdne nulliga, siis seega (§ 47, teoreemi 2 põhjal)

$$\varrho \mp s = \text{konst.},$$

kus miinusmärk esineb siis, kui evolvendi kõverusraadiuse kasvamisel evoluudi kaar kasvab, ja plussmärk siis, kui evolvendi kõverusraadiuse kasvamisel evoluudi kaar kahaneb.

Kui nüüd evoluudi kaarte K_1K_3 ja K_2K_3 pikkused on vastavalt s_1 ja s_2 ning evolvendi $y = f(x)$ kõverusraadiuse kasvamisel evoluudi $\Phi(\xi, \eta) = 0$ kaar kahaneb, siis

$$\varrho_1 + s_1 = \varrho_2 + s_2,$$

millest

$$\varrho_2 - \varrho_1 = s_1 - s_2 = \widehat{K_1K_2},$$

mis näitab, et evoluudi kaare pikkus on võrdne evolvendi nende kõverusraadiuste vahega, mille puhul kaare otspunktid on vastavate kõverusringide keskpunktideks.

Sellest omadusest nähtub, et evolventi saab joonestada evoluudi järgi niidi abil, kui niidi üks ots kinnitada näiteks punkti K_3 ja pingule tõmmatud niidi teine ots punkti P_3. Kui nüüd niidi otsaga P_3 edasi liikuda, nii et pingule jääv niit mähib ennast evoluudi peale, siis niidi ots P_3 joonestab evoluudile vastava evolvendi, sest siin niidi pikkus

$$\overline{K_3P_3} = \widehat{K_3K_2} + \overline{K_2P_2} = \widehat{K_3K_1} + \overline{K_1P_1},$$

mis esitab ülaltähendatud omadust, s. o.

$$s_2 + \varrho_2 = s_1 + \varrho_1$$

millest

$$\varrho_2 - \varrho_1 = s_1 - s_2 = \widehat{K_1K_2}.$$

§ 62. Evoluudi näiteid. 1) Diferentsides ellipsi võrrandi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

mõlemaid pooli kaks korda x järgi, saame

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2}\,y' = 0, \qquad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\,y'^2 + \frac{y}{b^2}\,y'' = 0,$$

milledest

$$y' = -\frac{b^2x}{a^2y}, \qquad y'' = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

Paigutades need väärtused evoluudi parameetrilistesse võrranditesse

$$\xi = x - y'\frac{1+y'^2}{y''}, \qquad \eta = y + \frac{1+y'^2}{y'},$$

saame ellipsi evoluudi parameetrilised võrrandid

$$\xi = \frac{a^2-b^2}{a^4}x^3, \qquad \eta = -\frac{a^2-b^2}{b^4}y^3.$$

Viimastest võrdustest saadud x ja y väärtusi

$$x = \left(\frac{a^4\xi}{a^2-b^2}\right)^{\frac{1}{3}}, \qquad y = -\left(\frac{b^4\eta}{a^2-b^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

ellipsi võrrandisse paigutades saame ellipsi evoluudi võrrandi ristkoordinaatides ξ ja η, s. o.

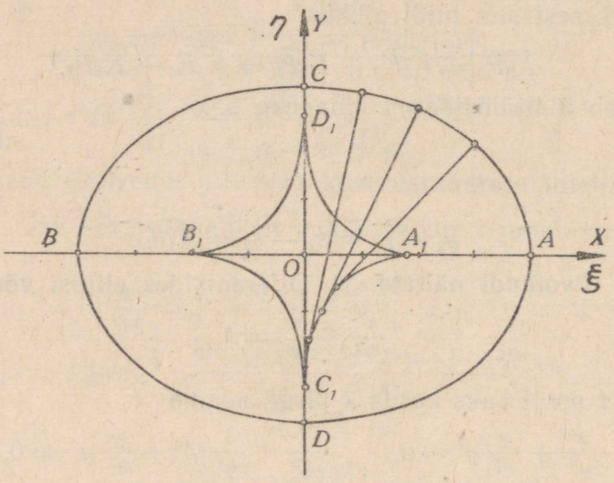
$$(a\xi)^{\frac{2}{3}} + (b\eta)^{\frac{2}{3}} = (a^2-b^2)^{\frac{2}{3}},$$

mille määramispiirkonnaks on $\frac{b^2-a^2}{a} \leqslant \xi \leqslant \frac{a^2-b^2}{a}$, kui $a > b$.

Kui näiteks ellipsi võrrandis $a = 4$ ja $b = 3$, siis selle ellipsi evoluudi võrrand on

$$(4\xi)^{\frac{2}{3}} + (3\eta)^{\frac{2}{3}} = 7^{\frac{2}{3}},$$

mille graafiliseks kujutiseks on moonutatud astroid $A_1C_1B_1D_1$ (joon. 103).



Joon. 103

Kui ellipsi võrrandis $a = b$, siis saame ringjoone

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

mille evoluudi parameetrilised võrrandid on

$$\xi = 0,\ \eta = 0,$$

millest nähtub, et ringjoone evoluut on punkt ja nimelt tema keskpunkt.

2) Diferentsides hüperbooli võrrandi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

mõlemaid pooli kaks korda x järgi, saame

$$\frac{x}{a^2} - \frac{y}{b^2}\,y' = 0, \qquad \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\,y'^2 - \frac{y}{b^2}\,y'' = 0,$$

milledest

$$y' = \frac{b^2x}{a^2y}, \qquad y'' = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

Nende asetamisel evoluudi parameetrilistesse võrranditesse leiame hüperbooli evoluudi parameetrilised võrrandid

$$\xi = \frac{a^2+b^2}{a^4}\,x^3, \qquad \eta = -\frac{a^2+b^2}{b^4}\,y^3.$$

Paigutades viimastest saadud x ja y väärtused

$$x = \left(\frac{a^4\xi}{a^2 + b^2}\right)^{\frac{1}{3}}, \qquad y = -\left(\frac{b^4\eta}{a^2 + b^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

hüperbooli võrrandisse, saame hüperbooli evoluudi võrrandi kujul

$$(a\xi)^{\frac{2}{3}} - (b\eta)^{\frac{2}{3}} = (a^2 + b^2)^{\frac{2}{3}},$$

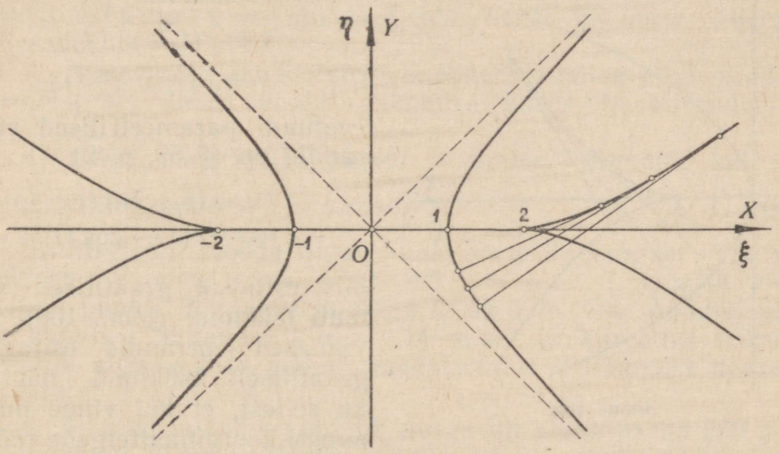
mille määramispiirkond on

$$-\infty < \xi \leqslant -\frac{a^2 + b^2}{a}, \qquad \frac{a^2 + b^2}{a} \leqslant \xi < +\infty.$$

Kui näiteks hüperbooli võrrandis $a = b = 1$, siis hüperbooli evoluudi võrrand on

$$\xi^{\frac{2}{3}} - \eta^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}},$$

mille graafik on esitatud joonisel 104.



Joon. 104.

3) Diferentsides parabooli võrrandit

$$y^2 = 2px$$

x järgi, saame

$$2yy' = 2p, \quad y'^2 + yy'' = 0,$$

milledest

$$y' = \frac{p}{y}, \qquad y'' = -\frac{p^2}{y^3}.$$

Paigutades need väärtused evoluudi parameetrilistesse võrranditesse, saame

$$\xi = 3x + p, \quad \eta = -\frac{y^3}{p^2},$$

milledest

$$x = \frac{\xi - p}{3}, \quad y = -\sqrt[3]{p^2\eta}.$$

Nende x ja y väärtuste asetamisel parabooli võrrandisse saame parabooli evoluudi võrrandi

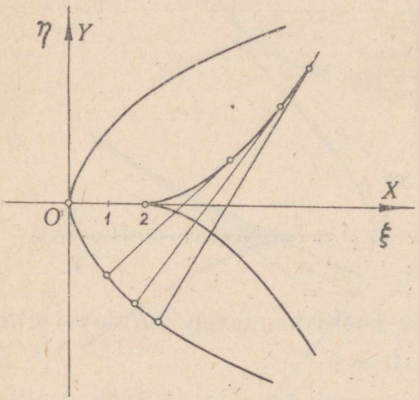
$$\eta^2 = \frac{8}{27p}(\xi - p)^3,$$

mille määramispiirkond on $p \leqslant \xi < +\infty$.

Kui näiteks siin $p = 2$, siis

$$\eta = \pm\frac{2}{3}(\xi - 2)\sqrt{\frac{\xi - 2}{3}},$$

mille graafiline kujutis on esitatud joonisel 105.



Joon. 105.

4) Tsükloidi

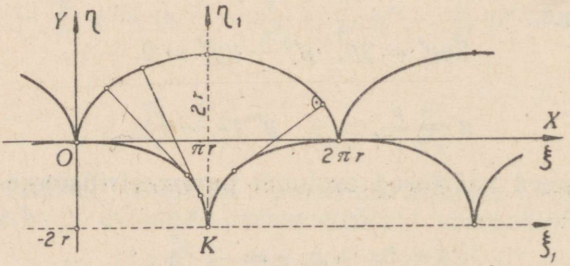
$$x = r(t - \sin t),$$
$$y = r(1 - \cos t)$$

evoluudi parameetrilised võrrandid on (§ 59, p. 2)

$$\xi = r(t + \sin t),$$
$$\eta = -r(1 - \cos t),$$

mis esitavad graafiliselt samuti tsükloidi (joon. 106). Et viimased võrrandid esitavad graafiliselt tsükloidi, nähtub ka sellest, et kui viime nullpunkti koordinaattelgede rööplükkega punkti $K(\pi r, -2r)$, siis koordinaadid ξ ja η on uute koordinaatidega ξ_1 ja η_1 järgmises seoses:

$$\xi = \xi_1 + \pi r, \quad \eta = \eta_1 - 2r,$$



Joon. 106.

kusjuures parameeter $t = t_1 + \pi$. Nende asetamisel evoluudi võrranditesse saame

$$\xi_1 + \pi r = r(t + \sin t),\ \eta_1 - 2r = -r(1 - \cos t)$$

ehk

$$\xi_1 = r(1 - \pi + \sin t) = r[(t - \pi) - \sin(t - \pi)] = r(t_1 - \sin t_1),$$

$$\eta_1 = r(1 + \cos t) = r[1 - \cos(t - \pi)] = r(1 - \cos t_1),$$

mis on samased tsükloidi esitavate lähtevõrranditega ja millest nähtub, et nii tsükloidi kui ka tema evoluudi moodustajaks on ringjoon raadiusega r.

§ 63. Harjutusülesandeid.

1. Leida kiiruse ja kiirenduse komponendid ühtlasel ringjooneliselt liikumisel.

2. Keha liikumine tasapinnal on määratud valemitega $x = a\cos^2 t$ ja $y = a\sin^2 t$. Leida keha liikumise kiirus ja kiirendus.

3. Materiaalse punkti sirgjooneline liikumine allub seadusele $s = t^3 + 3t^2$. Leida punkti liikumise kiirus ja kiirendus, kui $t = 2$ sek.

4. Leida materiaalse punkti liikumise kiirendus, kui liikumine allub seadusele $s = a\cos\frac{\pi t}{2}$.

5. Sirgjoont mööda liigub punkt P, mille kaugust punktist Q määrab liikumise võrrand $s = at^3 + bt + c$. Liikumise algmomendil punkti P kaugus punktist Q on 1 m. Ühe sekundi pärast on punkti P liikumise kiirus 0,14 m/sek ja kiirendus kolmanda sekundi alguses 0,48 m/sek^2. Leida punkti P liikumise seadus ja graafik.

6. Püssist lastakse kuul 45° nurga all algkiirusega 200 m/sek. Leida kuuli liikumise kiirus, kiiruse komponendid ja suund, kui $t = 6$ sek (õhutakistust arvestamata).

7. Seniitkahurist lastakse kuul vertikaalselt üles algkiirusega 196 m/sek. Leida kuuli liikumise kiirus ja kiirendus 10 sekundi möödumisel ning aeg kuuli maksimaalse tõusuni.

8. Punkti liikumise kiiruse komponent Y-telge mööda t sekundi lõpul on $v_y = 3t^2 - 2t + 6$ m/sek. Leida kiirenduse komponent Y-telge mööda 2. sekundi lõpul.

9. Leida kõvera $y = ae^x$ puutuja ja normaali lõikude ning nende aluste pikkused, kui puutepunkti abstsiss $x = 0$.

10. Leida hüperbooli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ puutuja ja normaali lõikude ning nende aluste pikkused, kui puutepunkti abstsiss $x = 2a$.

11. Leida parabooli $y^2 = 2px$ puutuja ja normaali lõikude ning nende aluste pikkused, kui puutepunkti abstsiss $x = 2p$.

12. Leida kõverate $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ja $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ lõikepunkti suhtes esimese kõvera puutuja ja normaali lõikude alused.

13. Rakendada Lagrange'i valemit funktsiooni $f(x) = x^2$ puhul vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ ja leida ξ.

14. Rakendada Lagrange'i valemit funktsiooni $f(x) = \sqrt{x}$ puhul vahemikus $1 \leqslant x \leqslant 4$ ja leida ξ.

15. Rakendada Cauchy valemit funktsioonide $f(x) = x^3$ ja $g(x) = x^2$ puhul vahemikus $-1 \leqslant x \leqslant 2$ ja leida ξ.

16. Rakendada Cauchy valemit funktsioonide $f(x) = \sin x$ ja $g(x) = \cos x$ puhul vahemikus $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ ja leida ξ.

17. Missuguses kõvera $x^2 + y - 4 = 0$ punktis on puutuja paralleelne kõvera kõõluga, mille otspunktid on $A(-2, 0)$ ja $B(1, 3)$?

Leida graafiliselt võrrandite ligikaudsed reaallahendid ja teha ühe- ja kahekordne parandus:

18. $x^3 - 2x - 5 = 0$

19. $\frac{x^3}{3} + x - 3 = 0$

20. $x^4 + 2x - 5 = 0$

21. $4^x - x + 2 = 0$

22. $e^x - x - 2 = 0$

23. $x - \cos x = 0.$

Leida funktsioonide piirväärtused (l'Hôpitali meetodi abil):

24. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3}$

25. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

26. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$

27. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}$

28. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x}$

29. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x}$

30. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x \cos x}$

31. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{e^x}$

32. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x}$

33. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^3}$

34. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^n}$

35. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{e^x}$

36. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x - \sin x \operatorname{tg} x)$

37. $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$

38. $\lim\limits_{x \to a} (x - a) \ln (x - a)$

39. $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \ln x$

40. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$

41. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right)$

42. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$

43. $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} x}$

44. $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$

45. $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$

46. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \sin x)^{\operatorname{ctg} x}$

47. $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{ctg} x)^{x}$.

48. Korraldada funktsioon

$$f(x) = 1 - 4x - 3x^2 - 2x^3 + x^4$$

$(x + 1)$ astmete järgi.

49. Arvutada Taylori polünoomi kolm liiget funktsiooni $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ puhul.

50. Näidata Mac-Laurini valemi abil, et $\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3}$, ja leida maksimaalne viga $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}$ puhul.

51. Missuguste x väärtuste puhul kehtib ligikaudne valem $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ täpsusega kuni 0,0001? Arvutada $\cos 5°$ täpsusega kuni 0,0001.

52. Näidata, et $\sin (x_0 + \Delta x)$ erineb avaldisest $\sin x_0 + \Delta x \cos x_0$ mitte rohkem kui $\frac{\Delta x^2}{2}$ võrra.

53. Näidata, et funktsiooni e^x väärtuste arvutamisel valemi

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

järgi absoluutne viga on väiksem kui 0,01, kui $0 < x < 1$.

Leida alljärgnevate funktsioonide maksimum-, miinimum- ja käänupunktid:

54. $y = 1 + 6x - 3x^2$

55. $y = 3x^2 - 12x + 1$

56. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 3$

57. $y = 2 - 3x + 3x^2 - x^3$

58. $y = \frac{x}{x^2 + 2x + 4}$

59. $y = \frac{x^3 + x}{x^4 - x^2 + 1}$

60. $y = x + \sqrt{1 - x}$

61. $y = \sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}$

62. $y = x \sqrt{2 - x^2}$

63. $y = x \sqrt{ax - x^2}$

64. $y = x \sin x \cos x$

65. $y = \sin x - \cos x$

66. $y = 2 \cos x + \cos 2x$

67. $e^x - xy = 0$

68. $y = x^2 e^{-x}$

69. $y = xe^{\frac{1}{x}}$

70. $y = e^{2x} - e^x$.

71. Leida funktsiooni $y \ln x = 2x$ monotoonsuse vahemikud.

72. Leida funktsiooni $y(x^2 + 1) = x^2 - 1$ kumeruse ja nõgususe vahemikud.

73. Kolmnurksele maatükile, mille külg $a = 60$ m ja selle külje vastastipu kaugus $h = 40$ m, ehitada võimalikult suure aluspinnaga (nelinurkne) maja. (Vundamendi üks serv asetsegu küljel a.)

74. Jaotada arv a kaheks osaks nii, et nende korrutis oleks maksimaalne.

75. Jaotada arv 6 kaheks osaks nii, et nende ruutude summa oleks minimaalne.

76. Nelinurkse akna ümbermõõt $2p = 6$ m. Kui suur peaks olema akna kõrgus, et temast võimalikult palju valgust läbi tungiks?

77. Nelinurkse akna pindala $S = 3$ m^2. Missugused peaksid olema akna mõõtmed, et tema ümbermõõt oleks võimalikult väike?

78. Kolmnurga kaks külge on a ja b. Kui suur tuleb võtta nendevaheline nurk, et kolmnurk oleks maksimaalse pindalaga?

79. Missugused peaksid olema silindrikujulise liitri mõõtmed, et tema valmistamiseks kuluks võimalikult vähe plekki?

80. Kerast, mille raadius $R = 20$ cm, lõigata välja maksimaalse ruumalaga a) silinder, b) koonus, c) korrapärane risttahukas.

81. Koonusest, mille põhja raadius $r = 8$ cm ja kõrgus $h = 20$ cm, lõigata välja maksimaalse külgpindalaga silinder.

82. Koonusesse, mille põhja raadius $r = 25$ cm ja kõrgus $h = 1$ m, kujundada teine koonus nõnda, et tema tipp asetseks esimese koonuse põhja keskpunktis ja ruumala oleks võimalikult suur.

83. Toa ruumala $V = 216$ m^3. Kui suur peaks olema toa kõrgus, et seinte, põranda ja lae pindala kokku oleks võimalikult väike (oletades, et põranda pindala on ruut).

84. Kanali ristlõige $S = 120$ m^2 ja nõlvnurk $\alpha = 60°$. Missugune peab olema kanali sügavus, et kanali ristlõike perimeeter oleks võimalikult väike?

85. Ringi sektori ümbermõõt on 12 cm. Kui suur peaks olema sektori raadius, et sektori pindala oleks maksimaalne?

86. Näidata, et kõveral $y(a^2 + x^2) = x$ on kolm käänupunkti, mis asetsevad sirgel $x - 4a^2y = 0$.

87. Valmistada ümmargusest palgist, mille läbimõõt $d = 33$ cm, neljakandiline tala nõnda, et tal oleks võimalikult suur painduvus. Neljakandilise tala painduvus on võrdeline korrutisega xy^2, kus x on tala paksus ja y on tala laius.

88. Nelinurkse plekitüki serv $a = 18$ cm. Missugused ruudukesed tuleb välja lõigata tema nurkadest, et ülejäänud plekist saaks võimalikult suure ruumalaga karbi?

89. Ristkülik perimeetriga $2p = 24$ cm pöörleb ümber ühe külje. Missugusel tingimusel on saadud silindril maksimaalne külgpindala ja missugusel tingimusel maksimaalne ruumala?

90. Valmistada ringikujulisest riidest, mille suurus $S = 9$ m², koonusekujuline telk maksimaalse mahutusega. a) Missugused on telgi mõõtmed? b) Mitu kraadi riidest tuleb kokku keerata?

91. Leida maksimaalse ruumalaga koonus, kui tema täispindala $S = \pi a^2$.

92. Sirgjoonelisel teel on pistetud iga meetri kaugusel üksteisest maa sisse odad. Üks sportlane seisab sellest teest 90 m ja teine 60 m kaugusel. Sportlaste kaugus teineteisest on 50 m. Missuguse oda juurde peaks minema otsejoones esimene sportlane, et seda viia jälle otsejoones teise sportlase kätte, nii et ärakäidud tee oleks kõige lühem?

93. Kolhoosi keskus asub raudteest 30 km kaugusel, kust linnani on veel 50 km. Kui kaugele linnast tuleks asutada raudteejaam, et kolhoosnik jõuaks kõige kiiremini linna, kui ta sõidab hobusega kolhoosist jaama kiirusega 10 km tunnis ja siis rongiga linna kiirusega 40 km tunnis?

94. Kujundada kera ümber koonus, millel on: a) minimaalne külgpindala, b) minimaalne ruumala. Kera raadius $R = 10$ cm.

95. Seinal rippuva pildi ülemine serv on h_1 cm ja alumine serv h_2 cm vaatleja silmast kõrgemal. Kui kaugel seinast peaks seisma vaatleja, et näha pilti suurima nurga all?

96. Kaks lennukit lendavad ühes ja samas tasapinnas sirgjooneliselt 120° nurga all ühesuguse kiirusega 300 km tunnis. Ühe lennuki jõudmisel liikumisjoonte lõikepunkti on teise lennuki kaugus sellest lõikepunktist 50 km. Missugusel momendil on lennukid teineteisele kõige lähemal ja kui suur on siis nendevaheline kaugus?

97. Missugusel tingimusel on prismat läbiva valguskiire kaldenurk minimaalne?

98. Harmooniline võnkumine toimub valemi $s = a \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$ järgi, kus s on võnkumise tee, a amplituud, t aeg, millest sõltub võnkumine, ning T täisvõnke aeg. Missugusel momendil on kiirus ja kiirendus maksimaalsed või minimaalsed?

Leida kõverate asümptoodid:

99. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$

100. $y = \frac{2x^2}{2x - 1}$

101. $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$

102. $y(x - 1) = 2x$

103. $x(y - x)^2 = 1$

104. $(x + y + 1)^2 = x^2 + 1$

105. $y = x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$

106. $x = \frac{2t}{1 - t^2}$, $y = \frac{t^2}{1 - t^2}$.

107. Leida kõvera $y = 2e^{\frac{x}{2}}$ kõverusraadius ja kõverus punktides $x = 0$ ja $x = 1$.

108. Leida sinusoidi kõverusraadius ja kõverus punktides $x = \frac{\pi}{2}$ ja $x = \pi$.

109. Leida parabooli $y^2 = 2px$ kõverusraadiused punktides $x = 0$ ja $x = p$.

110. Leida kõvera $y = x^3 + x^2 - x - 1$ kõverusraadiused maksimum- ja miinimumpunktis.

111. Missuguses punktis on kõveral $y = x^2 - 6x + 10$ suurim kõverus?

112. Leida kõvera

$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t)$$

kõverusraadius punktis $t = \frac{\pi}{2}$.

113. Leida logaritmilise spiraali $r = a^{\varphi}$ kõverusraadius punktis $\varphi = 0$.

114. Leida parabooli $y^2 = 4x$ kõverusringjooned punktide $x = 0$ ja $x = 2$ suhtes.

115. Leida tsissoidi $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ kõverusringjoon punkti $x = a$ suhtes.

VI peatükk

FUNKTSIOONIDE INTEEGRIMINE

§ 64. Määramata integraal. Eespool (§ 29) nägime, et kui on antud keha liikumise seadus ehk ajast t sõltuva läbitud tee pikkuse s muutumise seadus $s = s(t)$, siis diferentsides funktsiooni $s(t)$ leiame keha liikumise kiiruse $v = s'(t)$ aja funktsioonina. Sageli aga on vaja lahendada selle pöördülesanne: antud on keha liikumise kiirus aja t funktsioonina $v = v(t)$, mille järgi tuleb leida läbitud tee pikkuse s muutumise seadus sõltuvalt ajast t, s. o. $s = s(t)$. Sel juhul on tundmatust funktsioonist $s(t)$ antud tuletis $s'(t) = v(t)$, mille järgi tuleb leida algfunktsioon $s(t)$. On ilmne, et nüüd on tegemist funktsiooni tuletise leidmisele vastupidise tehtega: antud tuletatud funktsiooni järgi tuleb leida tundmatu algfunktsioon.

Nii tuleb sageli toimida matemaatiliste teaduste ja tehnika paljudes küsimustes, kus üldiselt antud tuletatud funktsiooni $f(x)$ järgi tuleb leida tundmatu algfunktsioon $F(x)$, mida sel juhul nimetame integraalfunktsiooniks ehk lihtsalt integraaliks.

Definitsioon: *Funktsiooni $f(x)$ integraalfunktsiooniks ehk integraaliks nimetatakse niisugust funktsiooni $F(x)$, mille tuletis $F'(x)$ on võrdne antud funktsiooniga $f(x)$, s. o.*

$$F'(x) = f(x),$$

kusjuures tundmatu integraalfunktsiooni $F(x)$ diferentsiaal

$$dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Me otsime algfunktsiooni $F(x)$, kui on antud tema tuletatud funktsioon $f(x)$ või tema diferentsiaal $f(x)\,dx$. Antud tuletatud funktsiooni $f(x)$ või diferentsiaali $f(x)\,dx$ järgi algfunktsiooni ehk integraali leidmist nimetatakse funktsiooni inteegrimiseks ja seda operatsiooni tähistatakse järgmiselt:

$$\int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = \int dF(x) = F(x),$$

kus $\int$ on inteegrimise märk. Inteegrimine on seega vastupidine operatsioon diferentsimisele, s. o. funktsiooni diferentsiaali leidmisele.

Olgu siinjuures tähendatud, et inteegrimise märgi $\int$ järele kirjutatakse ikka ja alati otsitava algfunktsiooni diferentsiaal $f(x)dx$, mitte aga tuletis $f(x)$. Niisugune kirjutamisviis on kujunenud ajalooliselt ja on otstarbekohane ning põhjendatud, nagu seda näeme edaspidi (§ 69).

Integraali $\int f(x)dx$ argumenti x nimetatakse inteegrimismuutujaks, funktsiooni $f(x)$ inteegritavaks funktsiooniks ning inteegritava funktsiooni ja inteegrimismuutuja diferentsiaali korrutist $f(x)dx$ inteegritavaks avaldiseks.

Nagu pärastpoole (§ 68) näeme, on igal pideval inteegritaval funktsioonil ikka olemas algfunktsioon.

Kui funktsiooni $f(x)$ mingi algfunktsioon on $F(x)$, siis on funktsiooni $f(x)$ algfunktsiooniks ka $F(x) + c$, kus c on meelevaldne konstantne suurus. Et konstantse liikmega funktsiooni $F(x) + c$ diferentsimisel kaob konstantne liige, s. o.

$$d[F(x) + c] = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx,$$

kus nüüd $f(x)dx$ pole ainult funktsiooni $F(x)$ diferentsiaal, vaid üldiselt $F(x) + c$ diferentsiaal, siis võime ümberpöördult järeldada, et

$$\int f(x)dx = \int F'(x)dx = \int d[F(x) + c] = F(x) + c,$$

kus $F(x) + c$ nimetatakse funktsiooni $f(x)$ üldintegraaliks ja konstantset suurust c inteegrimiskonstandiks.

Selleks, et näidata, et funktsiooni $f(x)$ üldintegraal avaldub tõesti kujul $F(x) + c$, kus $F(x)$ on funktsiooni $f(x)$ mingi integraal ja c teatav konstant, oletame, et funktsiooni $f(x)$ üldintegraali esitab mingi funktsioon $G(x)$, mille tuletis on samuti $f(x)$, s. o.

$$G'(x) = f(x).$$

Et ka

$$F'(x) = f(x),$$

siis saame lahutades

$$G'(x) - F'(x) = 0.$$

Kui tähistame

$$G(x) - F(x) = \varphi(x),$$

siis diferentsides näeme, et

$$\varphi'(x) = G'(x) - F'(x) = 0.$$

Et konstantse suuruse tuletis on võrdne nulliga, siis järelikult (§ 47, teoreemi 2 põhjal)

$$\varphi(x) = \text{konst.} = c.$$

Seega

$$G(x) - F(x) = c$$

ehk

$$G(x) = F(x) + c,$$

millest nähtub, et funktsiooni $f(x)$ üldintegraal avaldub ikka ainult kujul $F(x) + c$. See tähendab, et kui $F(x)$ on funktsiooni $f(x)$ üks algfunktsioon, siis sisalduvad kõik teised algfunktsioonid üldintegraalis $F(x) + c$, kus c on meelevaldne konstantne suurus.

Üldintegraalil $F(x) + c$ on määramata palju väärtusi, sest inteegrimiskonstant c on määramata suurus, mistõttu integraali

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

nimetatakse funktsiooni $f(x)$ määramata integraaliks.

Siit järeldub ühtlasi, et kui kaks funktsiooni või kaks diferentsiaali on võrdsed, siis nende integraalid võivad erineda teineteisest ainult konstantse liikme poolest. Kaks integraalfunktsiooni on võrdsed, kui nende diferentsiaalid (või tuletised) on samad.

Diferentsides integraali inteegrimismuutuja järgi, saame inteegritava funktsiooni, s. o.

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x),$$

kusjuures integraali diferentsiaal

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx,$$

sest integraalfunktsiooni definitsiooni järgi määramata integraali tuletis on võrdne inteegritava funktsiooniga ning määramata integraali diferentsiaal on võrdne inteegritava avaldisega.

Et määramata integraali kõik algfunktsioonid erinevad üksteisest ainult konstantse liikme (inteegrimiskonstandi c väärtuse) poolest, siis neist algfunktsioonidest ühe kindla algfunktsiooni ehk eriintegraali saamiseks tuleb arvutada inteegrimiskonstandi c väärtus. See tähendab, et eriintegraali määramisel tuleb arvestada lisatingimust, et antud argumendi väärtuse puhul otsitav funktsioon omandab vastava väärtuse.

Kui näiteks $f(x) = 3x^2$, siis ei ole raske näha, et selle funktsiooni üldintegraal

$$\int 3x^2 dx = x^3 + c,$$

mille õigsust võime kontrollida integraalfunktsiooni diferentsimisega: $d(x^3 + c) = 3x^2dx$. Siin ühe ja sama x väärtuse puhul inteegrimiskonstandi c mitmesugustele väärtustele vastavad ka mitmesugused integraali väärtused. Et saada mingit eriintegraali, selleks oletame, et see integraal näiteks $x = 2$ puhul muutub nulliks, s. o.

$$x^3 + c = 8 + c = 0,$$

millest

$$c = -8;$$

sellele c väärtusele vastav eriintegraal on siis

$$\int 3x^2dx = x^3 - 8.$$

Me nägime (§ 40, p. 3), et ajamomendil t keha vaba langemise kiirus

$$v = \frac{ds}{dt} = gt,$$

kus g on maakera gravitatsiooni kiirendus. Et siin läbitud tee pikkuse diferentsiaal

$$ds = gtdt,$$

siis läbitud tee pikkuse s määrab integraalfunktsioon

$$s = \int gtdt = \frac{gt^2}{2} + c,$$

sest selle üldintegraali diferentsiaal on inteegritav avaldis $gtdt$. Et saada siin mingit kindlat lahendit ehk eriintegraali, selleks oletame, et teataval ajamomendil $t = t_0$ on $s = s_0$. Asetades need väärtused integraalfunktsiooni, saame

$$s_0 = \frac{gt_0^2}{2} + c,$$

millest

$$c = s_0 - \frac{gt_0^2}{2}.$$

Otsitav eriintegraal on siis

$$s = \frac{gt^2}{2} + s_0 - \frac{gt_0^2}{2}$$

ehk

$$s - s_0 = \frac{g}{2}(t^2 - t_0^2),$$

kus s_0 ja t_0 nimetatakse suuruste s ja t algväärtusteks.

Matemaatilise analüüsi seda osa, kus on tegemist integraalide leidmisega ning nende rakendamisega, nimetatakse *integraalarvutuseks*. Intergraalarvutus nagu diferentsiaalarvutuski on matemaatilise analüüsi üks põhilisematest osadest.

§ 65. Inteegrimise teoreemid. 1) *Konstantse teguri võib tuua inteegritavast avaldisest inteegrimise märgi ette*, s. o.

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx,$$

kus c on konstantne tegur.

Et integraalide diferentsiaalid

$$d\int cf(x)\,dx = cf(x)\,dx$$

ja

$$d[c\int f(x)\,dx] = cd\int f(x)\,dx = cf(x)\,dx$$

on võrdsed, siis järelikult (§ 64 põhjal)

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx.$$

2) *Funktsioonide summa (vahe) integraal on võrdne nende funktsioonide integraalide summaga (vahega)*, s. o.

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx.$$

Et siin samuti integraalide diferentsiaalid

$$d\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = f_1(x)\,dx \pm f_2(x)\,dx$$

ja

$$d[\int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx] = d\int f_1(x)\,dx \pm \\ \pm d\int f_2(x)\,dx = f_1(x)\,dx \pm f_2(x)\,dx$$

on võrdsed, siis järelikult

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx.$$

Analoogiliselt saame tõestada, et n funktsiooni puhul

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)]\,dx = \\ = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx + \ldots + \int f_n(x)\,dx.$$

§ 66. Inteegrimise põhivalemid. Integraali

$$\int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = F(x) + c$$

mõiste järgi võime saada diferentsimise valemitest neile vastavad inteegrimise valemid.

a) Astmefunktsiooni

$$y = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,$$

kus c on konstantne suurus, diferentsiaal on

$$dy = x^n dx$$

ja seega vastupidiselt astmefunktsiooni $f(x) = x^n$ integraalfunktsioon

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,$$

kus n on mistahes reaalarv, välja arvatud $n = -1$, sest sel puhul viimase võrduse paremal poolel puudub mõte.

Et aga

$$d(\ln x + c) = \frac{dx}{x},$$

siis sel juhul, kui $x > 0$ ja $n = -1$, s. o. $f(x) = x^{-1}$, on

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c.$$

Kui $x < 0$, mille puhul funktsioonil $\ln(-x)$ on sama diferentsiaal $\frac{dx}{x}$, siis järelikult

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + c.$$

Seega nii $x > 0$ kui ka $x < 0$ puhul võime kirjutada ühise valemi

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c.$$

Tähistades saadud valemis inteegrimiskonstandi $\ln c$-ga, võime esitada selle inteegrimisvalemi ka järgmiselt:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \ln c = \ln|cx|,$$

kus $cx \neq 0$.

Et konstantse funktsiooni $y = c$ tuletis on võrdne nulliga, siis võime vastupidiselt (§ 47, teoreemi 2 põhjal) järeldada, et

$$\int 0 \cdot dx = c.$$

Diferentsiaalarvutuses nägime, et iga ratsionaalse funktsiooni tuletis on ikka ja alati ratsionaalne funktsioon, kuid ümberpöördult: iga ratsionaalse funktsiooni integraal ei tarvitse olla ratsionaalne funktsioon. Nagu näeme, juba käesoleval juhul ratsio-

naalse funktsiooni $\frac{1}{x}$ integraal $\ln|cx|$ pole enam ratsionaalne, vaid transtsendentne funktsioon.

Polünoomi

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

integraal on samuti polünoom, s. o.

$$\int f(x)\,dx = \frac{a_0x^{n+1}}{n+1} + \frac{a_1x^n}{n} + \ldots + a_nx + c,$$

mille aste on ühe võrra suurem inteegritava polünoomi astmest.

b) Eksponentfunktsiooni

$$y = \frac{a^x}{\ln a} + c,$$

kus $a > 0$ ja seejuures $a \neq 1$, diferentsiaal on

$$dy = a^x dx$$

ja seega vastupidiselt eksponentfunktsiooni $f(x) = a^x$ integraalfunktsioon on

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c.$$

Et eksponentfunktsiooni $y = e^x + c$ diferentsiaal

$$d(e^x + c) = e^x dx,$$

siis

$$\int e^x dx = e^x + c.$$

c) Trigonomeetriliste funktsioonide ja arkusfunktsioonide diferentsiaalid on (§§ 37 ja 38)

$$d(\sin x + c) = \cos x dx, \qquad d(-\cos x + c) = \sin x dx,$$

$$d(\operatorname{tg} x + c) = \frac{dx}{\cos^2 x}, \qquad d(-\operatorname{ctg} x + c) = \frac{dx}{\sin^2 x},$$

$$d(\arcsin x + c_1) = d(-\arccos x + c_2) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$d(\operatorname{arctg} x + c_1) = d(-\operatorname{arcctg} x + c_2) = \frac{dx}{1+x^2}$$

ning seega nende diferentsiaalide integraalid on

$$\int \cos x dx = \sin x + c,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c, \quad (\cos x \neq 0),$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c, \quad (\sin x \neq 0),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c_1 = -\arccos x + c_2, \quad (|x| < 1),$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c_1 = -\operatorname{arcctg} x + c_2.$$

Et $\arcsin x$ ja $\operatorname{arctg} x$ muutuvad vahemikus $-\frac{\pi}{2}$-st $+\frac{\pi}{2}$-ni ning $\arccos x$ ja $\operatorname{arcctg} x$ muutuvad vahemikus 0-st π-ni (§ 9), siis

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x,$$

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x,$$

millest nähtub, et kui soovime saada ühe ja sama eriintegraali ühel või teisel kujul, siis inteegrimiskonstandid c_1 ja c_2 erinevad teineteisest $\frac{\pi}{2}$ võrra.

d) Analoogiliselt eelnevaga võime võtta hüperboolsete funktsioonide ja areafunktsioonide diferentsiaalid (§ 39)

$d(\operatorname{sh} x + c) = \operatorname{ch} x dx$	$d(\operatorname{arsh} x + c = \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$
$d(\operatorname{ch} x + c) = \operatorname{sh} x dx$	$d(\operatorname{arch} x + c) = \pm\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$
$d(\operatorname{th} x + c) = \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}$	$d(\operatorname{arth} x + c) = \frac{dx}{1-x^2}$
$d(-\operatorname{cth} x + c) = \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x}$	$d(\operatorname{arcth} x + c) = -\frac{dx}{x^2-1}$

ja kirjutada nende diferentsiaalide integraalid

$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + c = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + c,$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + c = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + c,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + c = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + c,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + c = -\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} + c, \quad (x \neq 0),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arsh} x + c = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c,$$

$$\pm\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arch} x + c = \pm \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + c, \quad (x > 1),$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arth} x + c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c, \quad (|x| < 1),$$

$$-\int \frac{dx}{x^2-1} = \operatorname{arcth} x + c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + c, \quad (|x| > 1).$$

Näiteks:

$$\int \left(2x + 4\sqrt[3]{x} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx =$$

$$= 2\int x dx + 4\int x^{\frac{1}{3}} dx - 3\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{dx}{\sin^2 x} =$$

$$= x^2 + c_1 + 3x\sqrt[3]{x} + c_2 - 3 \arcsin x + c_3 + \operatorname{ctg} x + c_4 =$$

$$= x^2 + 3x\sqrt[3]{x} - 3 \arcsin x + \operatorname{ctg} x + c,$$

kus inteegrimiskonstantide (kui vabalt võetud konstantsete suuruste) summa tähistame ühise inteegrimiskonstandiga c, s. o. $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = c$, mis on samuti vabalt võetav konstantne suurus. Nii toimime ka edaspidi.

Inteegrimise resultaadi õigsust saame kontrollida resultaadi diferentsimisega, mis peab andma inteegritava funktsiooni.

§ 67. Integraalkõverad. Määramata integraali

$$\int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = F(x) + c$$

kui funktsiooni $y = F(x) + c$ võime kujutada graafiliselt kõverana, mille jooksvas punktis puutuja moodustab X-telje positiivse suunaga nurga α, nii et

$$\operatorname{tg} \alpha = F'(x) = f(x).$$

Et määramata integraali väärtus väljendab geomeetriliselt kõveral asetseva punkti ordinaati, mis vastab vabalt võetud abstsissile x, siis sellel ordinaadil $F(x) + c$, kus c on mistahes positiivne või negatiivne suurus, on määramata palju väärtusi. Seepärast esineb ka määramata palju kõveraid, mis vastavad sellele tingimusele.

Kui anname üldintegraalis

$$y = F(x) + c$$

inteegrimiskonstandile c väärtusi

$$c_1, \; c_2, \; c_3, \; \ldots,$$

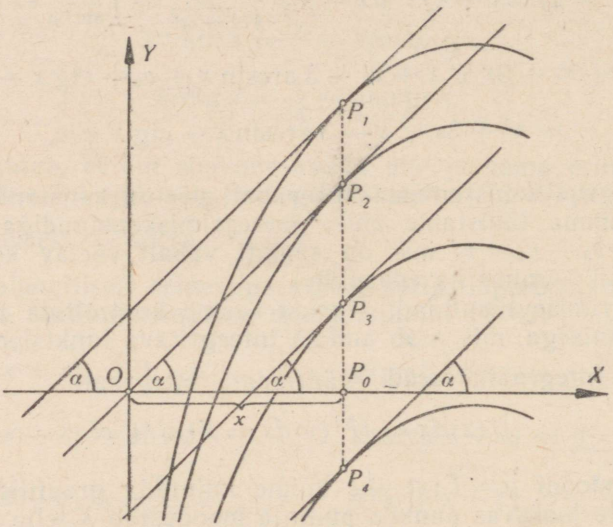
siis saame vastavad eriintegraalid

$$y = F(x) + c_1, \quad y = F(x) + c_2, \quad y = F(x) + c_3, \quad \ldots$$

Igaüks neist eriintegraalidest määrab teatava kõvera (joon. 107), mida nimetame integraalkõveraks. Iga integraalkõver peab rahuldama tingimust

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = F'(x),$$

millest nähtub, et ühe ja sama abstsissi $x = OP_0$ väärtuse puhul kõverate vastavatest punktidest P_1, P_2, P_3, P_4 jne. tõmmatud puu-



Joon. 107.

tujad on omavahel paralleelsed. Seega määramata integraali $F(x) + c$ graafiliseks vasteks on integraalkõverate parv, mis saadakse, kui üht neist kõveratest nihutatakse paralleellükkega ordinaattelje sihis edasi.

Kujutame graafiliselt näiteks määramata integraali

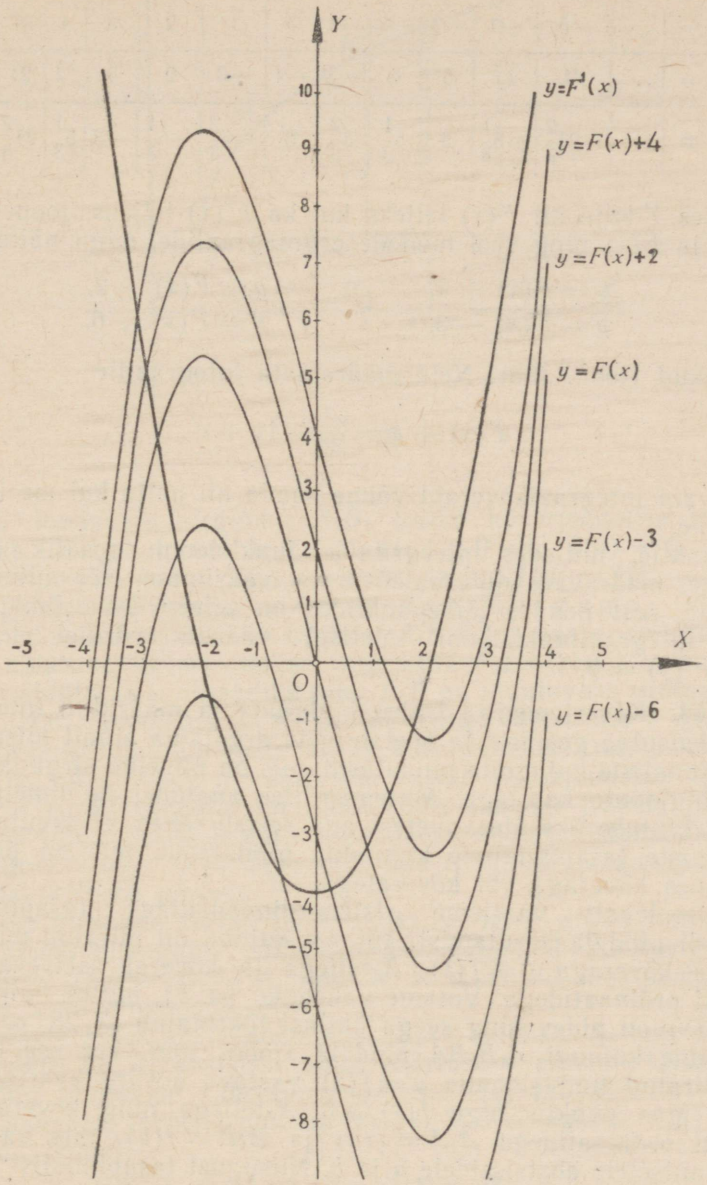
$$\int (x^2 - 4)\,dx = \frac{x^3}{3} - 4x + c.$$

Siin

$$F'(x) = x^2 - 4$$

ja

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - 4x.$$



Joon. 108.

Koostame x, $F'(x)$ ja $F(x)$ väärtuste tabeli:

$x =$	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
$F'(x) =$	...	21	12	5	0	-3	-4	-3	0	5	12	21	...
$F(x) =$	...	$-21\frac{2}{3}$	$-5\frac{1}{3}$	3	$5\frac{1}{3}$	$3\frac{2}{3}$	0	$-3\frac{2}{3}$	$-5\frac{1}{3}$	-3	$5\frac{1}{3}$	$21\frac{2}{3}$	

Lugedes Y-telje nii $F(x)$-teljeks kui ka $F'(x)$-teljeks, joonestame $F'(x)$ ja $F(x)$ ning veel mõnede eriintegraalide, nagu näiteks

$$y = F(x) + 4, \qquad y = F(x) + 2,$$
$$y = F(x) - 3, \qquad y = F(x) - 6,$$

graafikud (joon. 108). Neid määramata integraalile

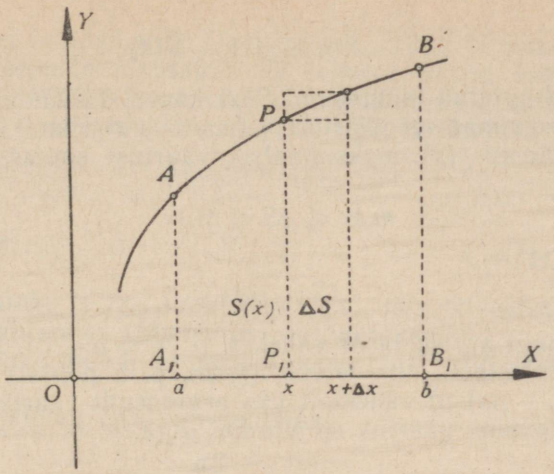
$$F(x) + c = \frac{x^3}{3} - 4x + c$$

vastavaid integraalkõveraid võime saada nii palju kui me iganes soovime.

Punktid, milledes inteegritava funktsiooni graafik lõikab X-telge, määravad integraalkõverate maksimum- või miinimumpunktid, sest nendes lõikepunktides on inteegritava funktsiooni (kui integraalfunktsiooni tuletise) väärtus võrdne nulliga, s. o. $F'(x) = 0$.

§ 68. Kõverjoonelise trapetsi pindala ja määratud integraal. 1) Elementaargeomeetria õpetab meid arvutama ainult niisuguste tasapinnaliste kujundite pindalasid, mis on piiratud sirglõikudega või ringjoonte kaartega. Matemaatilise analüüsi ja nimelt integraalarvutuse üks ülesannetest aga seisab selles, et arvutada ka niisuguste tasapinnaliste kujundite pindalasid, mis on piiratud mistahes kõveraga või kõveratega.

Käesolevalt vaatleme ristkoordinaadistikus tasapinnalise kujundi pindala arvutamist, kui see kujund on piiratud mistahes pideva kõveraga $y = f(x)$, X-teljega ja kõveral asetseva kahe punkti ordinaatidega. Võtame vahemiku $[a, b]$, milles funktsioon $y = f(x)$ on pidev ning seega ühtlasi tõkestatud (§ 28, p. 1), ja vaatleme kujundi A_1B_1BA pindala (joon. 109), kui see kujund on piiratud funktsioonile $y = f(x)$ vastava kõvera kaarega AB, mille igas punktis olgu $f(x) \geqslant 0$, X-teljega ning kõvera kahe punkti ordinaatidega $A_1A = f(a)$ ja $B_1B = f(b)$, mis vastavad konstantsetele abstsissidele a ja b. Niisugust tasapinnalist kujundit A_1B_1BA, mis on kolmest küljest piiratud sirglõikudega, milledest kaks on omavahel paralleelsed ja ühtlasi perpendikulaarsed kolmandaga, ning neljas külg kujutab mistahes pideva kõvera kaart, mida iga Y-teljega paralleelne sirge ei lõika rohkem kui ühes punktis, nimetame kõverjooneliseks trapet-



Joon. 109.

siks, kusjuures sirglõiku A_1B_1 loeme kõverjoonelise trapetsi aluseks. Erijuhul, kui ordinaat $f(a) = 0$ või $f(b) = 0$, esineb kõverjooneline kolmnurk, ja kui $f(a) = f(b) = 0$, siis on tegemist kõverjoonelise kaksnurgaga.

Et leida kõverjoonelise trapetsi A_1B_1BA pindala, selleks vaatleme muutuva kõverjoonelise trapetsi A_1P_1PA pindala, kus A_1A on konstantseks ordinaadiks ning P_1P on muutuvaks ordinaadiks, mis vastab vahemikus $[a, b]$ vabalt võetud abstsissile x. Abstsissi x muutumisel muutub vastavalt ka kõverjoonelise trapetsi A_1P_1PA pindala, nii et igale x väärtusele vastab kõverjoonelise trapetsi A_1P_1PA kindel pindala. Järelikult kõverjoonelise trapetsi A_1P_1PA pindala võime vaadelda kui x funktsiooni, mida tähistame $S(x)$-ga, kusjuures $S(a) = 0$ ja $S(b) = S$, kus S tähendab kõverjoonelise trapetsi A_1B_1BA pindala.

Meie ülesanne seisab nüüd selles, et leida antud funktsiooni $f(x)$ kaudu niisugune funktsioon, mis väljendab muutuva kõverjoonelise trapetsi A_1P_1PA pindala, s. o. antud funktsiooni $f(x)$ kaudu leida funktsioon $S(x)$.

Leiame kõigepealt funktsiooni $S(x)$ tuletise. Selleks võtame vahemikus $[a, b]$ abstsissi mingi väärtuse x, anname talle kasvu Δx ning tähistame vahemikule $[x, x + \Delta x]$ kui alusele rajatud kõverjoonelise trapetsi pindala ΔS-ga. Siis pindalade aditiivsuse* põhjal

$$S(x) + \Delta S = S(x + \Delta x),$$

* Tasapinnalise kujundi pindala üldise määrangu ja selle pindala omaduste range põhjenduse leiab lugeja raamatust D. Perepjolkin, Elementaargeomeetria kursus I, ptk. VII (1951. a.).

millest

$$\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x),$$

kus nüüd ΔS kujutab funktsiooni $S(x)$ kasvu. Tähendagu m funktsiooni $f(x)$ minimaalset väärtust vahemikus x-st kuni $(x + \Delta x)$-ni ja M funktsiooni $f(x)$ maksimaalset väärtust samas vahemikus. Siis

$$m\Delta x \leqslant \Delta S \leqslant M\Delta x,$$

mis näitab, et

$$\Delta S = \mu\Delta x,$$

kus μ on mingi arv m ja M vahel, s. o. $m \leqslant \mu \leqslant M$. Et aga $f(x)$ on pidev funktsioon, siis leidub (§ 28, p. 5 põhjal) vahemikus x-st kuni $(x + \Delta x)$-ni vähemalt üks argumendi väärtus ξ, millele vastav funktsiooni väärtus on võrdne μ-ga, s. o. $\mu = f(\xi)$. Järelikult

$$\Delta S = f(\xi)\Delta x,$$

millest

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} = f(\xi).$$

Et siin x muutumisel ξ jääb ikka ja alati x ja $x + \Delta x$ vahele, siis piirprotsessi $\Delta x \to 0$ tõttu $\xi \to x$ ja seega

$$S'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x)$$

ehk

$$\frac{dS}{dx} = f(x),$$

millest nähtub, et muutuva kõverjoonelise trapetsi A_1P_1PA pindala ehk funktsiooni $S(x)$ tuletis x järgi on võrdne x-le vastava ordinaadiga $f(x)$, ehk teisiti: muutuva kõverjoonelise trapetsi pindala $S(x)$ kujutab x funktsiooni, mille tuletis vahemiku $[a, b]$ igas punktis on $f(x)$.

Baseerudes ülalöeldule, näeme ühtlasi, et iga funktsioon $f(x)$, mis on pidev vahemikus $[a, b]$, omab selles vahemikus algfunktsiooni, sest kui vahemikus $[a, b]$ on $f(x) \geqslant 0$, siis eespoolöeldu põhjal funktsioonil $f(x)$ on olemas algfunktsioon ja nimelt funktsioon $S(x)$, mis esitab vastava muutuva kõverjoonelise trapetsi pindala. Kui aga vahemikus $[a, b]$ või selle vahemiku mõnedes punktides on $f(x) < 0$, siis võime funktsiooni $f(x)$ tõkestatuse tõttu ikka valida positiivse konstantse suuruse k niisugusena, et vahemiku $[a, b]$ igas punktis oleks

$$f(x) + k \geqslant 0,$$

mis ütleb, et funktsioonile $f(x)$ vastav graafik on paralleellükkega k võrra ülespoole nihutatud. Et eelneva põhjal mittenegatiivsel funktsioonil $f(x)+k$ on olemas algfunktsioon, mida tähistame siin $G(x)$-ga, siis funktsiooni $f(x)$ algfunktsiooniks on

$$F(x) = G(x) - kx,$$

sest

$$F'(x) = G'(x) - k = [f(x) + k] - k = f(x).$$

Sellest nähtub, et iga funktsioon $f(x)$, mis on pidev vahemikus $[a, b]$, omab selles vahemikus algfunktsiooni.

2) Oletame nüüd, et funktsiooni $f(x)$ algfunktsiooniks on $F(x)+c$.

Et funktsiooni $S(x)$ diferentsiaal

$$dS = f(x)\,dx,$$

siis inteegrides leiame, et

$$S(x) = \int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = F(x) + c,$$

mis näitab, et diferentsiaali $f(x)\,dx$ integraal kui x algfunktsioon väljendab geomeetriliselt pinnaosa, mis asetseb pideva kõvera $y = f(x)$, kus $f(x) \geqslant 0$, X-telje ja kahe ordinaadi vahel.

Integraali geomeetrilisest tähendusest ilmneb samuti, mispärast integraalile lisatakse määramata inteegrimiskonstant c: ordinaat A_1A, mis ühelt poolt piirab tähendatud pinnaosa, on vabalt võetav, s. o. pole seatud tingimust, kui kaugel ta tuleks võtta Y-teljest. Selle ordinaadi edasi-tagasi nihkumisel muutub kujundi pindala, millest on ka tingitud inteegrimiskonstandi c väärtus. Kui loeme $OA_1 = a$ puhul ordinaadi A_1A kindlaks suuruseks, siis inteegrimiskonstandi c määramiseks valime x-le niisuguse väärtuse, mis muudaks integraali ja seega ühtlasi ka pindala nulliks. Kui anname x-le väärtuse $x = a$, siis ordinaat P_1P langeb ordinaadiga A_1A ühte ja pindala saab nulliks. Tähendab, kui $x = a$, siis

$$F(a) + c = 0,$$

millest

$$c = -F(a).$$

Paigutades funktsioonis $S(x) = F(x) + c$ konstandi c asemele $-F(a)$, saame pindala avaldiseks eriintegraali

$$S(x) = F(x) - F(a).$$

Kui anname x-le kindla väärtuse $x = b$, siis saame kõverjoonelise trapetsi A_1B_1BA pindala S vahemikus a-st b-ni

$$S = F(b) - F(a),$$

mida tähistatakse järgmiselt:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

ja nimetatakse määratud integraaliks, kus x on inteegrimismuutuja, a ja b on inteegrimisrajad: a on alumine ja b ülemine inteegrimisraja ning $[a, b]$ on inteegrimisvahemik, kusjuures sümbolit $\int_a^b$ loeme: integraal rajades a-st b-ni.

Üldiselt tähistatakse määratud integraali järgmiselt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

mis on ühtlasi määratud integraali põhivalem, mida nimetatakse ka Newton-Leibniz'i inteegrimisvalemiks.

Tähendab, et leida määratud integraali väärtust, selleks tuleb inteegritud funktsioonis argumendi asemele paigutada enne integraali ülemise raja väärtus ja pärast alumise raja väärtus ning siis funktsiooni esimesest väärtusest lahutada funktsiooni teine väärtus. Sellest näeme, et kindlate inteegrimisrajade a ja b puhul määratud integraal pole enam x funktsioon (nagu määramata integraal), vaid mingisugune konstantne suurus, mis arvuliselt määrab kõvera $y = f(x)$, X-telje ning kahe ordinaadi $f(a)$ ja $f(b)$ vahelise kõverjoonelise trapetsi pindala.

Et inteegrimisrajade asetamisel inteegritud funktsiooni ja saadud funktsiooni väärtuste lahutamisel inteegrimiskonstant kaob, siis võib teda jätta inteegrimise protsessis arvestamata. Tõepoolest:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x) + c]_a^b = [F(b) + c] - [F(a) + c] = F(b) - F(a).$$

Määratud integraali põhivalemist selgub, et funktsiooni $f(x)$ määratud integraali väärtus kui konstantne suurus ei sõltu inteegrimismuutuja tähisest, olgu see x, z, t või mingi muu täht, s. o.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(z)\,dz = \int_a^b f(t)\,dt.$$

§ 69. Määratud integraali olemasolu teoreem. Et saada mistahes pideva kõveraga $y = f(x)$, X-teljega ja kahe ordinaadiga $f(a)$ ja $f(b)$ piiratud pinnatüki pindalale ning ühtlasi määratud integraalile analüütilist definitsiooni, mis oleks vaba igasugusest

näitlikust kujutlusest, selleks jaotame vahemiku a-st b-ni, milles $f(x)$ võib olla nullist suurem, nullist väiksem või võrdne nulliga, jaotuspunktidega

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}$$

n osaks, nii et

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Tähistame osavahemikud

$$x_1 - x_0 = \Delta x_1,\quad x_2 - x_1 = \Delta x_2,\ \ldots,\ x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$$

ja valime igaühes neist osavahemikest vabalt mingi punkti, näiteks esimeses osavahemikus punkti ξ_1, teises osavahemikus punkti ξ_2 jne., viimases osavahemikus punkti ξ_n nõnda, et iga ξ_k puhul $x_{k-1} \leqslant \xi_k \leqslant x_k$, kus $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Neile punktidele vastavad siis funktsiooni $f(x)$ väärtused

$$f(\xi_1),\ f(\xi_2),\ \ldots,\ f(\xi_n).$$

Moodustame korrutised igast funktsiooni väärtusest $f(\xi_k)$ ja vastava osavahemiku pikkusest $x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$ ning liidame tulemused, mille puhul saame n liikme summa

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

mida nimetame funktsiooni $f(x)$ integraalsummaks vahemikus a-st b-ni. Siin funktsioon $f(x)$ võib olla mistahes funktsioon, kui ta on ainult pidev vahemikus $[a, b]$ ja seega ühtlasi tõkestatud (§ 28, p. 1).

Geomeetriliselt kujutab integraalsumma ristkülikute pindalade summat, kus ristkülikute alusteks on osavahemikke kujutavad lõigud Δx_k ja kõrgusteks ordinaadid $f(\xi_k)$ (joon. 110).

Et nii osavahemikud

$$\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \ldots,\ \Delta x_n$$

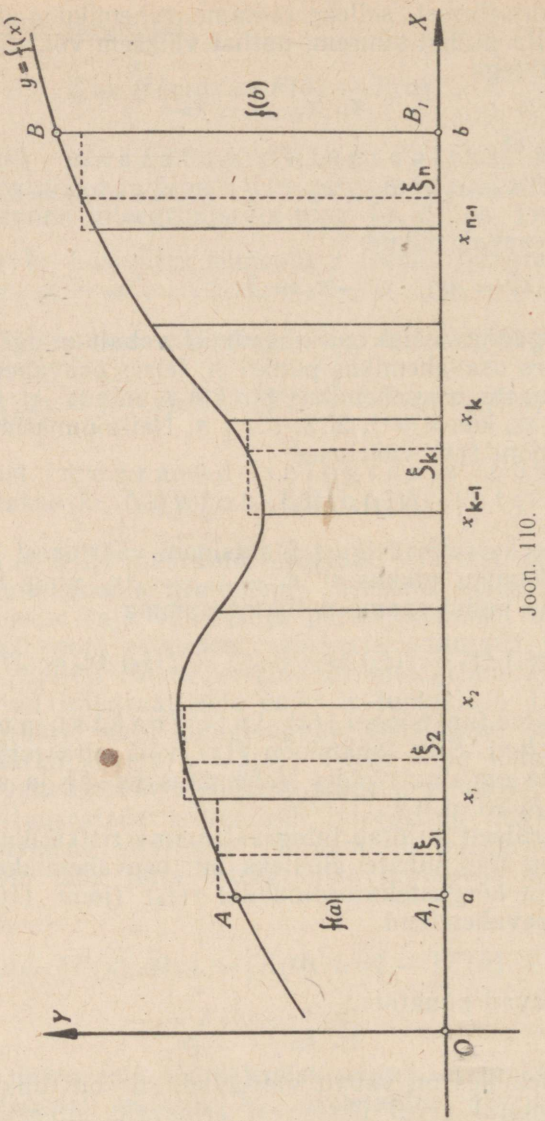
kui ka vastavad punktid

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n$$

neis osavahemikes on vabalt valitavad, siis on funktsioonil $f(x)$ seega piiramatul arvul üksteisest erinevaid integraalsummasid. Siit järeldub, et integraalsumma arvuline väärtus sõltub ühelt poolt osavahemike ja teiselt poolt neis osavahemikes võetavate punktide valikust, kuid nagu järgnevalt näeme, kehtib funktsiooni $f(x)$ integraalsumma suhtes järgmine

teoreem: Kui funktsioon $f(x)$ on pidev vahemikus $[a, b]$, siis on integraalsumma

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$



Joon. 110.

piirväärtus suurima osavahemiku pikkuse lähenemisel nullile ikka üks ja sama, vaatamata sellele, kuidas me valime vahemikus a-st b-ni osavahemikud

$$\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$$

ja vastavad punktid

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$$

neis osavahemikes.

Seda teoreemi nimetatakse määratud integraali olemasolu teoreemiks.

Tähistame suurima osavahemiku sümboliga $\max \Delta x_k$. Kui nüüd $\max \Delta x_k \to 0$, siis ka iga teise osavahemiku pikkus läheneb nullile ja järelikult $n \to \infty$, mille puhul kirjutame integraalsumma piirväärtuse järgmiselt:

$$\lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Näitame esiteks, et kui vahemikus $[a, b]$ pideva funktsiooni $f(x)$ integraalsummal

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k$$

on olemas piirväärtus S, siis see piirväärtus ei sõltu punktide

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$$

asendist osavahemikes

$$\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n.$$

Tõepoolest, kui võtame vahemikus a-st b-ni näiteks kaks integraalsummat

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n,$$
$$S_n' = f(\xi_1')\Delta x_1 + f(\xi_2')\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n')\Delta x_n,$$

kus ühtedes ja samades osavahemikes

$$\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$$

on üks kord võetud vastavalt punktid

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$$

ja teine kord punktid

$$\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_n',$$

siis nende integraalsummade vahe

$$S_n - S_n' = [f(\xi_1) - f(\xi_1')]\Delta x_1 + [f(\xi_2) - f(\xi_2')]\Delta x_2 + \ldots + [f(\xi_n) - f(\xi_n')]\Delta x_n$$

läheneb nullile, kui $\max \Delta x_k \to 0$ ja seega ühtlasi $n \to \infty$. Et eelduse järgi funktsioon $f(x)$ on pidev vahemikus $[a, b]$, siis on ta

(§ 28, omaduse 2 põhjal) selles vahemikus ka ühtlaselt pidev, mille puhul kuitahes väikese positiivse etteantud arvu ε puhul saame määrata teise positiivse arvu δ nõnda, et $|\xi_k - \xi_k'| \leqslant \leqslant \max \Delta x_k < \delta$ puhul kehtivad võrratused

$$|f(\xi_1) - f(\xi_1')| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

$$|f(\xi_2) - f(\xi_2')| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \ \ldots, \ |f(\xi_n) - f(\xi_n')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Seega

$$|S_n - S_n'| < \frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_1 + \frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_n =$$

$$= \frac{\varepsilon}{b-a}(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n) = \varepsilon$$

ehk

$$\lim_{\max \Delta x_k \to 0} (S_n - S_n') = 0,$$

millest nähtub, et ühtede ja samade osavahemike puhul vahemikus $[a, b]$ vabalt võetud integraalsummade piirväärtused on võrdsed, s. o.

$$\lim_{\max \Delta x_k \to 0} S_n' = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} S_n = S.$$

Teiseks saame näidata, et vahemikus $[a, b]$ pideva funktsiooni $f(x)$ integraalsumma

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

piirväärtus S ei sõltu osavahemike

$$\Delta x_1, \ \Delta x_2, \ \ldots, \ \Delta x_n$$

valikust.

Olgu vahemikus a-st b-ni vabalt valitud jaotuspunktid

$$x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_{n-1},$$

millede puhul tekivad vabalt võetud osavahemikud

$$\Delta x_1, \ \Delta x_2, \ \ldots, \ \Delta x_n.$$

Olgu vahemikus $[a, b]$ funktsiooni $f(x)$ mingi algfunktsioon $F(x)$, kusjuures viimase funktsiooni väärtuste vahe $x = a$ ja $x = b$ puhul märgime järgmiselt:

$$F(b) - F(a) = [F(x_1) - F(a)] + [F(x_2) - F(x_1)] + \ldots + [F(b) - F(x_{n-1})].$$

Diferentsiaalarvutuse keskväärtuse teoreemi (§ 47) põhjal iga vahe

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = \Delta x_k F'(\bar{\xi}_k),$$

kus $\bar{\xi}_k$ on nüüd k i n d e l p u n k t osavahemikus Δx_k. Et $F(x)$ on funktsiooni $f(x)$ algfunktsioon, siis vahemikus a-st b-ni $F'(x) = f(x)$ ja ühtlasi ka $F'(\bar{\xi}_k) = f(\bar{\xi}_k)$. Seega

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(\bar{\xi}_k)\Delta x_k$$

ja

$$F(b) - F(a) = f(\bar{\xi}_1)\Delta x_1 + f(\bar{\xi}_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\bar{\xi}_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\bar{\xi}_k)\Delta x_k,$$

mis piirprotsessis, kui $\max \Delta x_n \to 0$ ja seega ühtlasi $n \to \infty$, jääb ikka ja alati konstantseks suuruseks $F(b) - F(a)$, s. o.

$$F(b) - F(a) = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{\xi}_k)\Delta x_k.$$

Et aga eespoolöeldu põhjal integraalsumma piirväärtus on üks ja sama, vaatamata sellele, kuidas me valime $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ vastavates osavahemikes $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, siis seega vahemikus a-st b-ni pideva funktsiooni $f(x)$ puhul integraalsumma piirväärtus ei sõltu osavahemike $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ valikust ega ka punktide $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ asendist neis osavahemikes ja on arvuliselt võrdne funktsiooni $f(x)$ algfunktsiooni $F(x)$ väärtuste vahega, kui $x = a$ ja $x = b$, s. o.

$$S = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} S_n = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{\xi}_k)\Delta x_k = F(b) - F(a).$$

Seega vahemikus $[a, b]$ iga pideva funktsiooni $f(x)$ integraalsummal

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\bar{\xi}_k)\Delta x_k$$

on ikka olemas lõplik piirväärtus S, kui $\max \Delta x_k \to 0$, ükskõik kuidas me ka valiksime jaotuspunktid

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$$

ja punktid

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$$

saadud osavahemikes

$$\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n.$$

See piirväärtus S on loomulikult kujundi A_1B_1BA (joon. 110), mis on piiratud kõvera $y = f(x)$ kaarega AB, X-teljega ning ordinaatidega $f(a)$ ja $f(b)$, pindalaks.

Integraalsumma piirväärtust S nimetame nüüd funktsiooni $f(x)$ määratud integraaliks rajades a-st b-ni ja esitame selle järgmiselt:

$$S = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

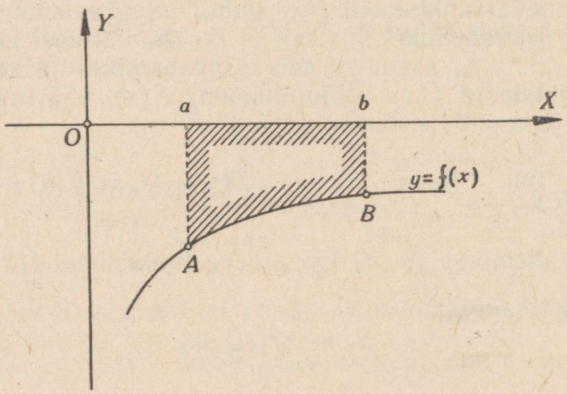
mis kujutab endast Newton-Leibnizi valemit. Saadud piirväärtust S nimetas Leibniz ladina keeles *functio integralis*'eks, s. o. täis- ehk kogufunktsiooniks, millest tekkis ka integraali nimetus.

Siit nähtub ühtlasi, et inteegrimise märk $\int$ on tuletatud sõna «Summa» esimesest pikaks venitatud tähest S. Samuti selgub nüüd, mispärast kirjutatakse funktsiooni diferentsiaali $f(x)dx = F'(x)dx$ integraal, aga mitte funktsiooni tuletise $f(x) = F'(x)$ integraal.

Joonisel 110 kõvera kaar AB asetseb X-teljest ülalpool ja järelikult on selle kaare kõikide punktide ordinaadid positiivsed, s. o. $f(x) > 0$, ning ühtlasi

$$\lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx > 0,$$

mis määrab pindala A_1B_1BA positiivse märgiga.



Joon. 111.

Kui aga kõvera kaar AB asetseks allpool X-telge (joon. 111), siis oleksid selle kaare kõikide punktide ordinaadid negatiivsed, s. o. $f(x) < 0$, ja

$$\lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx < 0,$$

mis määrab pindala negatiivse märgiga.

Tähendab, kui $a < b$ ja inteegrimisvahemiku $[a, b]$ igas punktis inteegritav funktsioon $f(x) > 0$, siis on ka $\int_a^b f(x)\,dx > 0$, ja kui inteegrimisvahemiku $[a, b]$ igas punktis inteegritav funktsioon $f(x) < 0$, siis on $\int_a^b f(x)\,dx < 0$. Kui aga inteegrimisvahemikus $[a, b]$ inteegritav funktsioon $f(x)$ muudab märki, siis võib määratud integraali $\int_a^b f(x)\,dx$ väärtus olla kas positiivne või negatiivne või võrdne nulliga.

§ 70. Määratud integraali omadusi. 1) Inteegrimisrajade vahetamisel muutub integraali märk, s. o.

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Esimesele integraalile vastav integraalsumma on

$$f(\xi_n)(x_{n-1} - x_n) + f(\xi_{n-1})(x_{n-2} - x_{n-1}) + \ldots + f(\xi_1)(x_0 - x_1) =$$
$$= f(\xi_n)(-\Delta x_n) + f(\xi_{n-1})(\Delta x_{n-1}) + \ldots + f(\xi_1)(-\Delta x_1) =$$
$$= -[f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n] = -S_n,$$

kust piirile minnes, kui $\max \Delta x_k \to 0$ ja seega ühtlasi $n \to \infty$, järeldub otsekohe ülaltähendatud omadus.

2) Võrdsete rajadega integraali väärtus on võrdne nulliga, s. o.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Vahetades antud integraali rajad, võime eelmise omaduse põhjal kirjutada

$$\int_a^a f(x)\,dx = -\int_a^a f(x)\,dx$$

ehk

$$2\int_a^a f(x)\,dx = 0,$$

millest

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

3) Kui c on mingi väärtus vahemikus a-st b-ni või väljaspool seda vahemikku, siis on integraal a-st b-ni võrdne kahe integraali

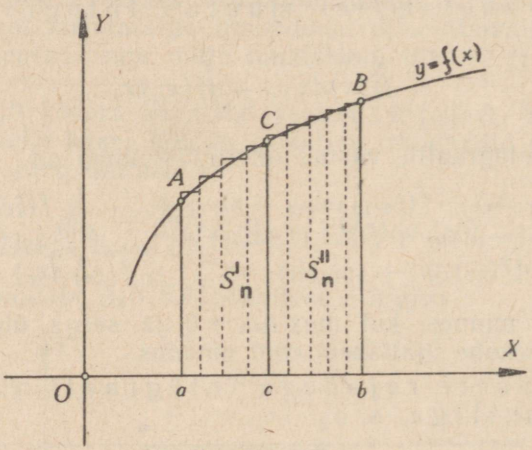
summaga, milledest esimene on võetud rajades a-st c-ni ja teine rajades c-st b-ni, s. o.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Et määratud integraali väärtus ei sõltu sellest, kuidas me valime integraalsumma

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

saamiseks jaotuspunktid $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$, siis valime alati üheks jaotuspunktiks punkti $x = c$ ja lahutame summa S_n kaheks osa-



Joon. 112.

summaks S_n' ning S_n'' (joon. 112), milledest esimene on rajatud vahemikule a-st c-ni ja teine vahemikule c-st b-ni, nii et

$$S_n = S_n' + S_n''.$$

Minnes piirile, kui $\max \Delta x_k \to 0$ ja seega ühtlasi $n \to \infty$, saamegi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

See omadus, mida nimetatakse määratud integraali aditiivsuseks, jääb kehtima ka siis, kui punkt c asetseb väljaspool vahemikku a-st b-ni, kas vasakul pool a-st või paremal pool b-st; ainult inteegritav funktsioon $f(x)$ peab olema esimesel juhul pidev vahemikus c-st b-ni ja teisel juhul pidev vahemikus a-st c-ni.

Üldiselt, kui meil on n punkti $c_1, c_2, \ldots, c_n$, mis asetsevad kas vahemikus a-st b-ni või väljaspool seda vahemikku, võime kirjutada

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{c_n}^{b} f(x)\,dx,$$

kui ainult $f(x)$ on pidev vahemikus, milles asetsevad vaadeldavad punktid.

4) Paragrahvis 65 esitatud inteegrimise teoreemid kehtivad ka määratud integraali puhul, s. o.

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx,$$

kus c on konstantne tegur, ja

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx,$$

sest inteegrimisvahemikus a-st b-ni lõpliku n puhul vastavad integraalsummad on

$$\sum_{k=1}^{n} cf(\xi_k)\,\Delta x_k = c\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

ja

$$\sum_{k=1}^{n} [f_1(\xi_k) \pm f_2(\xi_k)]\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f_1(\xi_k)\,\Delta x_k \pm \sum_{k=1}^{n} f_2(\xi_k)\,\Delta x_k,$$

millede piirväärtused, kui $\max \Delta x_k \to 0$ ja seega $n \to \infty$, esitavad ülaltähendatud võrdusi.

Siit järeldub otseselt, et vahemikus $[a, b]$ konstantse funktsiooni $f(x) = c$ määratud integraal

$$\int_a^b f(x)\,dx = c\int_a^b dx = c(b - a).$$

Kui vahemiku $[a, b]$ igas punktis on $f(x) = 0$, siis algfunktsiooniks on konstantne suurus ja seega

$$\int_a^b 0 \cdot dx = 0.$$

5) Kui inteegritav funktsioon $f(x)$ on paarisfunktsioon, s. o. $f(-x) = f(x)$, siis

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx,$$

ja kui inteegritav funktsioon $f(x)$ on paaritu funktsioon, s. o. $f(-x) = -f(x)$, siis

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Kui integraalile $\int_0^a f(x)\,dx$ vastav integraalsumma on

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = S_n,$$

siis paarisfunktsiooni $f(x)$ puhul, kus iga $f(-\xi_k) = f(\xi_k)$, vastab integraalile $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$ integraalsumma

$$\sum_{k=1}^{n} f(-\xi_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = S_n,$$

ja paaritu funktsiooni $f(x)$ puhul, kus iga $f(-\xi_k) = -f(\xi_k)$, vastab integraalile $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$ integraalsumma

$$\sum_{k=1}^{n} f(-\xi_k)\,\Delta x_k = -\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = -S_n.$$

Mõlemal juhul piirile minekul, kui $\max \Delta x_k \to 0$, järeldub otsekohe ülaltähendatud omadus.

Määratud integraali käesoleva ja eelnevate omaduste põhjal ilmneb, et paarisfunktsiooni $f(x)$ puhul

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

ja paaritu funktsiooni $f(x)$ puhul

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

6) Kui inteegrimisvahemiku $[a, b]$ igas punktis $f(x) \geqslant 0$, siis $a < b$ puhul

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \geqslant 0.$$

Kui siin $a < b$ ja vahemiku $[a, b]$ igas punktis $f(x) \geqslant 0$, siis on ka sellele funktsioonile vastava integraalsumma igas osavahemikus Δx_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ vabalt valitud ξ_k puhul $f(\xi_k) \geqslant 0$ ja järelikult

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k \geqslant 0.$$

Piirile minekul, kui $\max \Delta x_k \to 0$, järeldub, et

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

Kui vahemiku $[a, b]$ mõnes punktis või kõigis punktides $f(x) > 0$, siis on

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0,$$

nagu nägime juba eespool määratud integraali geomeetrilise tõlgendamise puhul (§ 69).

7) Kui integreerimisvahemiku $[a, b]$ igas punktis $f(x) \leqslant g(x)$, siis $a < b$ puhul

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

Et vahemiku $[a, b]$ igas punktis $f(x) \leqslant g(x)$, siis on ka nende funktsioonide integraalsummade igas osavahemikus Δx_k vabalt valitud ξ_k puhul $f(\xi_k) \leqslant g(\xi_k)$ ja järelikult

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

Piirile minekul, kui $\max \Delta x_k \to 0$, järeldub ülaltähendatud omadus.

Järeldus 1: Kui integreerimisvahemiku $[a, b]$ igas punktis $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$, siis $a < b$ puhul

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Et siin eelduse järgi $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$, siis käesoleva omaduse põhjal

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx, \quad \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \psi(x)\,dx$$

ehk

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Kui saadud kahekordses võrratuses ainult $\varphi(x)$ ja $\psi(x)$ on inteegritavad teadaolevate inteegrimisvalemite järgi, siis see võrratus määrab piirid, millede vahel asetseb määratud integraali $\int_a^b f(x)\,dx$ väärtus.

Vahemikus $0 \leqslant x \leqslant 0{,}5$ näiteks on positiivse ruutjuure puhul

$$1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x^{10}}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Siis

$$\int_0^{0{,}5} dx \leqslant \int_0^{0{,}5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{10}}} \leqslant \int_0^{0{,}5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

s. o.

$$[x]_0^{0{,}5} \leqslant \int_0^{0{,}5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{10}}} \leqslant [\arcsin x]_0^{0{,}5}$$

ehk

$$0{,}5 \leqslant \int_0^{0{,}5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{10}}} \leqslant \frac{\pi}{6} \approx 0{,}5236,$$

millest nähtub, et määratud integraali $\int_0^{0{,}5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{10}}}$ väärtus asetseb 0,5 ja 0,5236 vahel.

Järeldus 2: Kui inteegrimisvahemikus $[a, b]$ funktsioonid $\varphi(x) = m$ ja $\psi(x) = M$ on konstantsed, kus $m < M$, ning $m \leqslant f(x) \leqslant M$, siis

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Järeldus 3: Et funktsiooni $f(x)$ absoluutväärtuse puhul on ikka

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|,$$

siis funktsiooni $f(x)$ inteegritavuse puhul vahemikus $[a, b]$ on

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

mis on samaväärne võrratusega

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

millest nähtub, et integraali absoluutväärtus ei ületa inteegritava funktsiooni absoluutväärtuse integraali.

8) Kui vahemikus $[a, b]$, kus $a < b$, inteegritav funktsioon kujutab korrutisfunktsiooni, s. o. $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$, siis

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b \varphi(x)^2\,dx} \cdot \sqrt{\int_a^b \psi(x)^2\,dx}.$$

Selle võrratuse tõestamiseks võtame abiintegraali järgmiselt:

$$I = \int_a^b [\lambda\varphi(x) + \psi(x)]^2\, dx,$$

mis (omaduse 6 põhjal) ei ole ühegi λ puhul negatiivne, s. o. $I \geqslant 0$. Avades viimases inteegritavas funktsioonis sulud, saame

$$I = \lambda^2 \int_a^b \varphi(x)^2 dx + 2\lambda \int_a^b \varphi(x)\psi(x)\, dx + \int_a^b \psi(x)^2 dx \geqslant 0,$$

mis kujutab λ suhtes ruutkolmliiget. Et selles ruutkolmliikmes $\int_a^b \varphi(x)^2 dx > 0$, siis saadud võrratus kehtib ainult sel juhul, kui ruutkolmliikme diskriminant ei ole positiivne, s. o.

$$\left[\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\, dx\right]^2 - \int_a^b \varphi(x)^2 dx \cdot \int_a^b \psi(x)^2 dx \leqslant 0,$$

millest saame

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\, dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b \varphi(x)^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^b \psi(x)^2 dx}.$$

Saadud valemit nimetatakse Bunjakovski* võrratuseks.

§ 71. Integraalarvutuse keskväärtuse teoreem. 1) Kui funktsioon $f(x)$ on pidev vahemikus $[a, b]$, siis asetseb a ja b vahel vähemalt üks x väärtus $x = \xi$, mille puhul

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b - a) f(\xi).$$

Olgu m funktsiooni $f(x)$ minimaalne väärtus vahemikus a-st b-ni ja M funktsiooni $f(x)$ maksimaalne väärtus selles vahemikus, s. o. $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Siis (eelmise paragrahvi p. 7 järelduse 2 põhjal)

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant M(b - a),$$

millest nähtub, et

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b - a)\mu,$$

kus μ on mingi arv m ja M vahel, s. o. $m \leqslant \mu \leqslant M$. Et eelduse järgi $f(x)$ on pidev funktsioon, siis leidub vahemikus a-st b-ni

* V. J. Bunjakovski (1804—1889) — tuntud vene matemaatik ja akadeemik, kes avaldas ülaltähendatud võrratuse 1859. aastal.

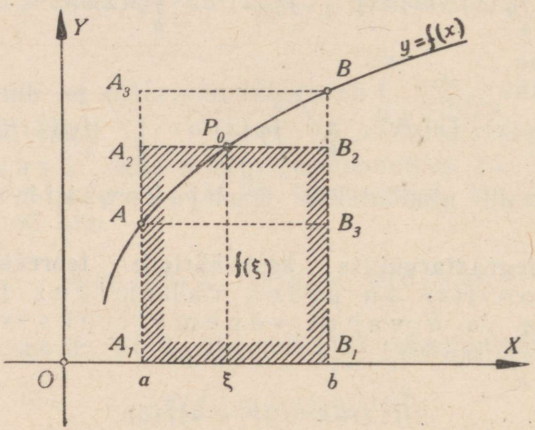
vähemalt üks punkt $x = \xi$, millele vastav funktsiooni väärtus on võrdne μ-ga (§ 28, p. 5), s. o. $\mu = f(\xi)$, ja seega

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi),$$

mida nimetatakse integraalarvutuse keskväärtuse teoreemiks. Funktsiooni $f(x)$ keskväärtuseks vahemikus a-st b-ni on siin

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Kui vahemikus $[a, b]$ on $f(x) \geqslant 0$, siis integraalarvutuse keskväärtuse teoreem geomeetrilises tõlgenduses tähendab, et kõverjoonelise trapetsi A_1B_1BA pindala (joon. 113), mis on suurem kui



Joon. 113.

ristküliku $A_1B_1B_3A$ pindala ja väiksem kui ristküliku $A_1B_1BA_3$ pindala, on võrdne mõne vahepealse ristküliku pindalaga, ja nimelt niisuguse ristküliku $A_1B_1B_2A_2$ pindalaga, mille aluseks on $b - a$ ja kõrguseks $f(\xi)$, s. o.

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi).$$

Kui funktsiooni $f(x)$ mingi algfunktsioon on $F(x)$, siis $f(\xi) = F'(\xi)$ ja integraalarvutuse keskväärtuse teoreemi esitavale valemile saame anda kuju

$$F(b) - F(a) = (b-a)F'(\xi),$$

mis kujutab Lagrange'i valemit funktsiooni $F(x)$ puhul vahemikus $[a, b]$ (§ 47).

2) Kui funktsioonid $f(x)$ ja $g(x)$ on pidevad vahemikus $[a, b]$ ja selles vahemikus $g(x)$ säilitab märki, siis asetseb a ja b vahel vähemalt üks x väärtus $x=\xi$, mille puhul

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Olgu m ja M vastavalt funktsiooni $f(x)$ minimaalne ja maksimaalne väärtus. Siis, oletades, et $g(x) \geqslant 0$, on

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$$

ja (§ 70, pp. 4 ja 7 järgi)

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx,$$

kusjuures nüüd

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu\int_a^b g(x)\,dx,$$

kus $m \leqslant \mu \leqslant M$. Et eelduse järgi funktsioon $f(x)$ on vahemikus $[a, b]$ pidev, siis leidub selles vahemikus vähemalt üks punkt $x=\xi$, millele vastav funktsiooni väärtus on võrdne μ-ga, s. o. $\mu = f(\xi)$, ja seega

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx,$$

mida võime nimetada integraalarvutuse üldistatud keskväärtuse teoreemiks.

Kui siin $g(x) = 0$, siis ka $\int_a^b g(x)\,dx = 0$ ning $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$. Kui $g(x) > 0$, siis on $\int_a^b g(x)\,dx > 0$ ja

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx},$$

millest nähtub, et inteegrimisrajade vahetamisel või funktsiooni $g(x)$ märgi muutumisel jääb saadud võrdus ikka kehtivaks.

Kui $g(x) = 1$, siis saame eelmises punktis esineva valemi, s. o.

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi).$$

§ 72. Määramata ja määratud integraali seos. Eespool tulime määramata ja määratud integraali mõiste juurde erinevaid teid mööda. Määramata integraali vaatlesime kui diferentsimisele vastupidise operatsiooni saadust, kuna määratud integraali mõiste juurde jõudsime kasutades inteegritava funktsiooni suhtes teatavat piirprotsessi, s. o. inteegritavale funktsioonile vastava integraalsumma piirväärtuse leidmise teel. Käesolevas paragrahvis vaatleme nende kahe mõiste vahelist seost.

Olgu määratud integraalis

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

alumine inteegrimisraja a konstantseks suuruseks ja ülemine inteegrimisraja b muutuvaks suuruseks x, s. o.

$$\int_a^x f(x)\,dx,$$

kus ülemine inteegrimisraja x kui sõltumatu muutuja võib omada mistahes väärtust vahemikus $[a, b]$. Et nüüd ülemise inteegrimisraja x muutumisel muutub vastavalt ka määratud integraali väärtus, nii et ülemise raja x igale väärtusele vahemikus a-st b-ni vastab määratud integraali kindel väärtus, siis loomulikult võime seda integraali vaadelda kui ülemise raja x funktsiooni, mida tähistame $G(x)$-ga, s. o.

$$G(x) = \int_a^x f(x)\,dx.$$

Et aga integraalis $\int_a^x f(x)\,dx$ muutuv suurus x esineb kahes erinevas tähenduses, s. o. nii inteegrimismuutujana kui ka ülemise inteegrimisrajana, millede muutumine toimub üht ja sama telge mööda, siis võime selguse mõttes inteegrimismuutuja tähistada mingi muu tähega (§ 68, p. 2), näiteks tähega t, s. o.

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

kus ülemine inteegrimisraja x võib muutuda vahemikus a-st b-ni ja inteegrimismuutuja t vahemikus a-st x-ni.

Et saada muutuva rajaga määratud integraali ja määramata integraali ehk algfunktsiooni mõistete vahelist seost, selleks tõestame järgmise

teoreemi: Kui funktsioon $f(t)$ on inteegritav vahemikus $[a, b]$, siis on pideva funktsiooni $f(t)$ integraal $\int_a^x f(t)\,dt$ ülemise raja x pidev funktsioon $G(x)$, mille tuletis on $f(x)$, s. o. $G'(x) = f(x)$.

Anname argumendile x kasvu Δx, nii et $x + \Delta x$ jääb vahemikku $[a, b]$ ehk õigemini x jääb vahemikku $a \leqslant x < b$, nii et $x + \Delta x \leqslant b$. Moodustame funktsiooni $G(x)$ ja argumendi x kasvude suhte

$$\frac{G(x+\Delta x) - G(x)}{\Delta x}.$$

Kui

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

siis (§ 70, p. 3 põhjal)

$$G(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

ja

$$G(x+\Delta x) - G(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Integraalarvutuse keskväärtuse teoreemi (§ 71, p. 1) põhjal

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \Delta x f(\xi),$$

kus $x \leqslant \xi \leqslant x + \Delta x$. Järelikult

$$\frac{G(x+\Delta x) - G(x)}{\Delta x} = f(\xi).$$

Et siin ξ jääb alati x ja $x + \Delta x$ vahele, siis piirprotsessi $\Delta x \to +0$ tõttu $\xi \to x$ ja seega

$$G'(x) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{G(x+\Delta x) - G(x)}{\Delta x} = \lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x).$$

Analoogiliselt võime näidata, et kui vahemikus $a < x \leqslant b$, milles $x - \Delta x \geqslant a$, argumendi kasv $\Delta x \to -0$, kehtib samuti võrdus

$$G'(x) = f(x).$$

Et aga funktsioonil $G(x)$ on olemas tuletis, mis on võrdne inteegritava funktsiooniga $f(x)$, siis sellest järeldub, et $G(x)$ ise on muutuva ülemise raja x pidev funktsioon.

Sellest tõestusest nähtub ühtlasi, et inteegrimisvahemiku alguspunktis a ja lõpp-punktis b on $\Delta x > 0$ puhul

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{G(a+\Delta x) - G(a)}{\Delta x} = f(a), \qquad \lim_{\Delta x \to -0} \frac{G(b-\Delta x) - G(b)}{-\Delta x} = f(b),$$

kui ainult punktides a ja b funktsioon $f(x)$ on pidev.

Loomulikult võime funktsiooni $G(x)$ nimetada vahemikus $[a, b]$ inteegritava funktsiooni $f(x)$ algfunktsiooniks, sest selles vahemikus $G'(x) = f(x)$. Seega vahemikus $[a, b]$ igal pideval funktsioonil $f(t)$ on olemas määratud integraali muutuva ülemise raja pidev algfunktsioon ehk määramata integraal, s. o.

$$\int_a^x f(t)\,dt = G(x).$$

Kui $F(x)$ on funktsiooni $f(x)$ mistahes algfunktsioon, siis on (§ 64)

$$G(x) = F(x) + c$$

ja seega

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + c.$$

Võttes $x = a$, saame

$$0 = F(a) + c,$$

millest

$$c = -F(a)$$

ja järelikult

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a),$$

mis on ülemise inteegrimisraja x funktsioon, kus ülemise inteegrimisraja x all mõistame lõppväärtust, mida omab inteegrimismuutuja t integraalsumma piirväärtuse leidmise protsessis.

Integraali $\int_a^x f(t)\,dt$ tuletis ja diferentsiaal muutuva ülemise raja järgi on vastavalt

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = \frac{d}{dx}[F(x) - F(a)] = F'(x) = f(x)$$

ja

$$d\int_a^x f(t)\,dt = d[F(x) - F(a)] = F'(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

§ 73. Inteegrimise asendusmeetod. Eespool nägime, et iga diferentsitavat funktsiooni saab diferentsida kindlaksmääratud üldiste juhtnööride järgi. Seevastu pole aga võimalik leida niisuguseid üldisi juhtnööre, mis võimaldaksid iga funktsiooni inteegrimist, kuigi on tõestatud, et igal pideval funktsioonil teatavas vahemikus on ikka olemas integraal.

Võrreldes funktsioonide diferentsimisega on funktsioonide inteegrimine üldiselt märksa keerukam ja raskem. Funktsioonide

diferentsimist võime toimetada peaaegu mehaaniliselt, kuid funktsioonide inteegrimiseks tuleb igal üksikjuhul leida sobiv võte, mis võimaldaks inteegritavat avaldist nii teisendada, et tema suhtes oleks võimalik kasutada üht või teist teadaolevat inteegrimisvalemit. Käesolevas paragrahvis ja ka edaspidi vaatleme peamiselt niisuguste liitfunktsioonide inteegrimist, kus inteegritavat avaldist saame elementaarsete võtete abil nii teisendada, et tema suhtes võiksime kasutada teadaolevaid inteegrimise põhivalemeid.

Kui inteegritav funktsioon on liitfunktsioon, mille algfunktsiooni ei ole võimalik otseselt leida antud inteegrimisvalemite abil, siis võib tihti tarvitada meetodit, kus x asemele võetakse uueks inteegrimismuutujaks z nõnda, et inteegritav funktsioon uue inteegrimismuutuja puhul omandaks kuju, mille suhtes saaks kasutada teatavat inteegrimisvalemit.

Olgu meil näiteks pidev funktsioon $f(z)$, mida oskame inteegrida ja mille üks algfunktsioon on $G(z)$, nii et

$$G'(z) = f(z)$$

ehk

$$dG(z) = f(z)dz$$

ja seega

$$\int f(z)dz = G(z) + c.$$

Kui lugeda siin z uue muutuja x funktsiooniks, s. o. $z = \varphi(x)$, mis on ühtlasi diferentsitav, siis

$$G(z) = G[\varphi(x)]$$

kujutab diferentsitavat liitfunktsiooni. Liitfunktsiooni diferentsimise juhise (§ 32) järgi on funktsiooni $G[\varphi(x)]$ diferentsiaal

$$G'[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = f[\varphi(x)]d\varphi(x).$$

Et $\int f(z)dz = G(z) + c$ ja $z = \varphi(x)$ on mistahes diferentsitav funktsioon, siis

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) = G[\varphi(x)] + c.$$

See tähendab, et kui $z = \varphi(x)$ ja funktsioon $\varphi(x)$ on diferentsitav ning funktsioon $f(z)$ omab algfunktsiooni $G(z)$, siis

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) = \int f(z)dz = G(z) + c,$$

mille viimases osas asendades $z = \varphi(x)$, saame

$$G(z) + c = G[\varphi(x)] + c = F(x) + c.$$

Käsitletud võtet nimetatakse liitfunktsiooni inteegrimise asendusmeetodiks, kus x asemel võetakse uus inteegri-

mismuutuja ehk abimuutuja z, mis tuleb valida nõnda, et see asendus võimaldaks inteegrimist teatavate valemite järgi.

Asendusmeetodi kasutamisel omandab määratud integraal $\int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$ inteegrimismuutuja $z = \varphi(x)$ puhul uued inteegrimisrajad $z = \varphi(a)$ ja $z = \varphi(b)$, s. o.

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(z)dz = [G(z)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = G[\varphi(b)] - G[\varphi(a)].$$

Kui integraal esineb kujul

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx,$$

kus inteegritava murdfunktsiooni lugeja on nimetaja tuletis, siis see integraal on võrdne inteegritava funktsiooni nimetaja logaritmiga, s. o.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|,$$

sest kui tähistame $f(x) = z$, siis $f'(x)dx = dz$ ja

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{dz}{z} = \ln|z| + c = \ln|f(x)| + c,$$

või kui tähistame inteegrimiskonstandi $\ln c$-ga, siis

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + \ln c = \ln|c\,f(x)|.$$

Näiteks:

1) $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + c;$

$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + c;$

$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln\ln x + c, \quad (x > 1).$

2) Integraali $\int \sin 2x dx$ leidmiseks tähistame

$$2x = z,$$

kus nüüd z on uueks inteegrimismuutujaks. Siis saame diferentsides

$$2dx = dz, \quad dx = \frac{dz}{2}$$

ja asendades

$$\int \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int \sin z dz = -\frac{1}{2}\cos z + c = -\frac{1}{2}\cos 2x + c.$$

Kui selle integraali inteegritavas avaldises loeme $2x$ inteegrimismuutujaks, siis saame otseselt

$$\int \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x d(2x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + c.$$

Kui aga teisendada inteegritavat avaldist järgmiselt:

$$\sin 2x dx = 2 \sin x \cos x dx = 2 \sin x d(\sin x)$$

ja $\sin x$ lugeda inteegrimismuutujaks, siis

$$\int \sin 2x dx = 2 \int \sin x d(\sin x) = \sin^2 x + c_1.$$

Viimati saadud integraalfunktsioon on identne eelmisega; ainult inteegrimiskonstandid c ja c_1 erinevad teineteisest $\frac{1}{2}$ võrra, sest trigonomeetriast teame, et

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x.$$

3) Leida $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$.

Teisendame inteegritavat funktsiooni järgmiselt:

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{(x + a) - (x - a)}{2a(x + a)(x - a)} = \frac{1}{2a(x - a)} - \frac{1}{2a(x + a)},$$

kus nüüd

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x - a} - \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x + a} = \frac{1}{2a}\int \frac{d(x - a)}{x - a} - \frac{1}{2a}\int \frac{d(x + a)}{x + a} =$$

$$= \frac{1}{2a}\ln|x - a| - \frac{1}{2a}\ln|x + a| + c = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + c.$$

Analoogilise võttega leiaksime, et

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right| + c.$$

4) Integraali $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$ leidmiseks teeme asenduse

$$x = az,$$

kus z on uueks inteegrimismuutujaks. Siis

$$dx = adz$$

ja seega integraal

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int \frac{adz}{a^2 + a^2 z^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dz}{1 + z^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} z + c =$$

$$= \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c.$$

5) Leida $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Tähistame siin

$$\sqrt{a^2-x^2}=z,$$

kus z on uueks inteegrimismuutujaks. Siis

$$a^2-x^2=z^2$$

ja

$$-2xdx=2zdz$$

ehk

$$xdx=zdz.$$

Asendades saame

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\int dz=-z+c=-\sqrt{a^2-x^2}+c.$$

Analoogilise asendusega leiaksime, et

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\sqrt{x^2\pm a^2}+c.$$

6) Leida $\int \frac{xdx}{(x^2+1)^n}$.

Kui tähistame

$$x^2+1=z,$$

siis

$$2xdx=dz, \qquad xdx=\frac{dz}{2}.$$

Asendades saame

$$\int \frac{xdx}{(x^2+1)^n}=\frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^n}=-\frac{1}{2(n-1)z^{n-1}}+c=$$

$$=c-\frac{1}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}}.$$

Saadud vastus on rakendatav siis, kui $n\neq 1$. Kui aga $n=1$, siis sama asendusega saame

$$\int \frac{xdx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int \frac{dz}{z}=\frac{1}{2}\ln z+c=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c=\ln\sqrt{x^2+1}+c.$$

7) Leida $\int_0^3 \sqrt{1+x}dx$.

Tähistame

$$\sqrt{1+x}=z$$

ehk

$$1 + x = z^2,$$

mida diferentsides saame

$$dx = 2zdz.$$

Kui võtame uue inteegrimismuutuja, siis muutuvad vastavalt ka inteegrimisrajad:

$$\text{kui } x = 0, \quad \text{siis } z = \sqrt{1+0} = 1,$$
$$\text{„ } x = 3, \quad \text{„ } z = \sqrt{1+3} = 2.$$

Asendades saame määratud integraali väärtuse

$$\int_0^3 \sqrt{1+x}\,dx = 2\int_1^2 z^2 dz = 2\left[\frac{z^3}{3}\right]_1^2 = 4\frac{2}{3}.$$

Selle määratud integraali väärtuse võime leida ka kui niisuguse astmefunktsiooni integraali, mille inteegrimismuutujaks loeme $1+x$. Siis $dx = d(1+x)$ ja inteegrimisrajasid pole tarvis muuta, s. o.

$$\int_0^3 \sqrt{1+x}\,dx = \int_0^3 \sqrt{1+x}\,d(1+x) = \left[\frac{2(1+x)\sqrt{1+x}}{3}\right]_0^3 = 4\frac{2}{3}.$$

8) Leida $\int \sin^2 x dx$.

Teisendame inteegritavat funktsiooni:

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$$

ja tähistame nüüd

$$2x = z;$$

siis

$$dx = \frac{dz}{2}$$

ja

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{4}\int dz - \frac{1}{4}\int \cos z dz = \frac{1}{4}z - \frac{1}{4}\sin z + c =$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c = \frac{x - \sin x \cos x}{2} + c.$$

Integraali $\int \cos^2 x dx$ leiame analoogiliselt, kui asendame

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},$$

saades

$$\int \cos^2 x dx = \frac{x + \sin x \cos x}{2} + c.$$

9) Leida $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$.

Tähistame

$$\sin x = z,$$

mille diferentsiaal

$$\cos x dx = dz,$$

ja rajad:

$$\text{kui } x = \frac{\pi}{6}, \quad \text{siis } z = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

$$\text{„ } x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{„ } z = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

Asendame

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dz}{z^2} = \left[-\frac{1}{z}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = 1.$$

Sama ülesande võime lahendada ka ilma inteegrimisrajade muutmiseta järgmiselt:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x} = \left[-\frac{1}{\sin x}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{\sin \frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}} = 1.$$

Sama võttega võime leida integraalid

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos^n x}, \quad \int \frac{\cos x dx}{\sin^n x}, \quad \int \sin x \cos^n x dx, \quad \int \cos x \sin^n x dx,$$

kus n on mistahes reaalarv.

10) Leida $\int \sin^3 x dx$.

Teisendades inteegritavat funktsiooni, saame

$$\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx =$$

$$= -\cos x - \int \cos^2 x \sin x dx = -\cos x + \int \cos^2 x d(\cos x) =$$

$$= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c = \frac{\cos^3 x - 3\cos x}{3} + c.$$

Samal viisil leiame, et

$$\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx =$$
$$= \sin x - \int \sin^2 x \cos x dx = \sin x - \int \sin^2 x d(\sin x) =$$
$$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c = \frac{3 \sin x - \sin^3 x}{3} + c.$$

11) Leida $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Tähistame siin

$$x = 2z,$$

Siis

$$dx = 2dz$$

ja

$$\int \frac{dx}{\sin x} = 2 \int \frac{dz}{\sin 2z}.$$

Teisendades viimast inteegritavat funktsiooni, saame

$$\int \frac{dx}{\sin x} = 2 \int \frac{dz}{\sin 2z} = \int \frac{dz}{\sin z \cos z} = \int \frac{dz}{\operatorname{tg} z \cos^2 z} =$$
$$= \int \frac{d(\operatorname{tg} z)}{\operatorname{tg} z} = \ln |\operatorname{tg} z| + c = \ln \left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + c.$$

Integraali $\int \frac{dx}{\cos x}$ leiame eelmise kaudu järgmiselt:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \ln \left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + c.$$

12) Leida $\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x}$.

Teisendame inteegritavat funktsiooni:

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin x} + \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx,$$

kus nüüd esimene integraal (näite 11 põhjal)

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + c_1.$$

Teises integraalis asendame

$$\cos x = z;$$

siis

$$-\sin x dx = dz$$

ja

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{z} + c_2 = \frac{1}{\cos x} + c_2.$$

Seega

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{\cos x} + c,$$

kus $c = c_1 + c_2$.

13) Leida $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$.

Kui vähemalt üks täisarvulistest astendajatest m või n on paaritu arv, siis kasutame inteegritava funktsiooni teisendamiseks valemit

$$\sin^{m-1}x = (1 - \cos^2 x)^{\frac{m-1}{2}} \quad \text{või} \quad \cos^{n-1}x = (1 - \sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}},$$

kus $m - 1$ või $n - 1$ on siis paarisarv. Pärast niisugust teisendust saame integraali asendusmeetodi abil muuta astmefunktsioonide integraaliks. Näiteks:

$$\int \sin^2 x \cos^5 x\,dx = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x\,dx =$$
$$= \int (\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x)\cos x\,dx;$$

kui tähistame

$$\sin x = z,$$

siis

$$\cos x\,dx = dz$$

ja

$$\int \sin^2 x \cos^5 x\,dx = \int (z^2 - 2z^4 + z^6)\,dz =$$
$$= \frac{z^3}{3} - \frac{2z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + c = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{2\sin^5 x}{5} + \frac{\sin^7 x}{7} + c.$$

Kui aga mõlemad astendajad m ja n on paarisarvud, siis kasutame inteegritava funktsiooni teisendamiseks kahekordse nurga valemeid

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \qquad \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x,$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x,$$

mis võimaldavad asendusmeetodi rakendamist. Näiteks:

$$\int \sin^4 x \cos^2 x\,dx = \int (\sin x \cos x)^2 \sin^2 x\,dx =$$
$$= \int \frac{1}{4}\sin^2 2x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\,dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x\,dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x\,dx =$$
$$= \frac{x}{16} - \frac{1}{16}\int \cos 4x\,dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x\,dx;$$

kui tähistame esimeses integraalis

$$4x = u,$$

siis

$$dx = \frac{du}{4},$$

ja teises integraalis

$$\sin 2x = v,$$

siis

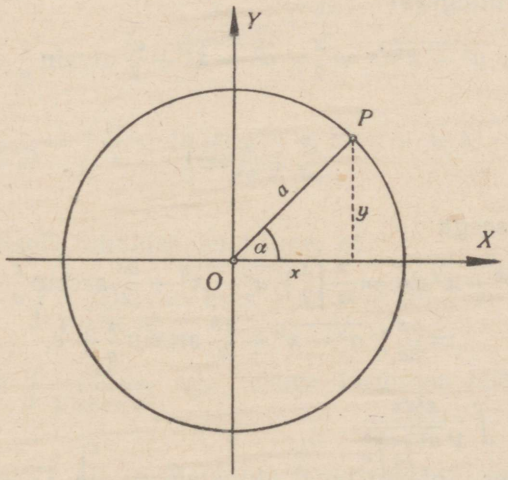
$$\cos 2x dx = \frac{dv}{2},$$

ning seega

$$\int \sin^4 x \cos^2 x dx = \frac{x}{16} - \frac{1}{64}\int \cos u du - \frac{1}{16}\int v^2 dv =$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{\sin u}{64} - \frac{v^3}{48} + c = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin^3 2x}{48} + c.$$

14) Leida $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$.



Joon. 114.

Seda integraali nimetatakse ringi integraaliks, kus a on ringi raadius. Teeme siin järgmise asenduse (joon. 114):

$$x = a \cos \alpha,$$

kus nurk α on uueks inteegrimismuutujaks. Siis

$$dx = -a \sin \alpha d\alpha$$

ning

$$\cos\alpha = \frac{x}{a} \quad \text{ja} \quad \alpha = \arccos\frac{x}{a}.$$

Asendades ja kasutades siis eespool (p. 8) leitud integraali, saame

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = -\int a\sin\alpha \sqrt{a^2 - a^2\cos^2\alpha}d\alpha =$$
$$= -a^2\int \sin\alpha \sqrt{1 - \cos^2\alpha}d\alpha = -a^2\int \sin^2\alpha d\alpha =$$
$$= -\frac{a^2}{2}(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + c_1) = \frac{a^2}{2}\cos\alpha\sqrt{1 - \cos^2\alpha} -$$
$$-\frac{a^2}{2}(\alpha + c_1) = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{x}{a}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} - \frac{a^2}{2}\left(\arccos\frac{x}{a} + c_1\right) =$$
$$= \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{a^2}{2}\left(-\arcsin\frac{x}{a} + c_2\right),$$

sest

$$\arccos\frac{x}{a} + c_1 = -\arcsin\frac{x}{a} + c_2.$$

Seega ringi integraal

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + c.$$

Ellipsi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

integraal on seega

$$\int \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + c_1\right] =$$
$$= \frac{bx}{2a}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a} + c.$$

15) Leida $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Teisendades inteegritavat funktsiooni ja kasutades ringi integraali, saame

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a^2 - (a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx =$$
$$= a^2\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} - \int \sqrt{a^2 - x^2}dx =$$
$$= a^2\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + c =$$

$$= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + c.$$

16) Leida $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$.

Tähistame siin

$$x + \sqrt{x^2 - a^2} = z,$$

mille diferentsiaal

$$\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}\right) dx = dz,$$

s. o.

$$\frac{\sqrt{x^2 - a^2} + x}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = dz$$

ehk

$$\frac{z}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = dz,$$

millest

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{dz}{z}.$$

Seega

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{dz}{z} = \ln |z| + c = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + c,$$

kus $|x| > |a|$.

Analoogiliselt toimides leiaksime, et

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + c.$$

Integraali $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ aga leiame järgmise teisendusega:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c.$$

17) Leida $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}}$.

Teeme siin järgmise teisenduse:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}}$$

ja asendame

$$\frac{a}{x} = z, \quad \frac{dx}{x^2} = -\frac{dz}{a}.$$

Siis

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = -\frac{1}{a}\int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = -\frac{1}{a}\arcsin z + c =$$

$$= -\frac{1}{a}\arcsin \frac{a}{x} + c.$$

Analoogilise teisenduse ja asendusega leiame, et integraalid

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^2 \pm 1}} = -\frac{1}{a}\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 \pm 1}} =$$

$$= -\frac{1}{a}\ln\left|z + \sqrt{z^2 \pm 1}\right| + c = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a}{x} + \sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^2 \pm 1}\right| + c =$$

$$= -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 \pm x^2}}{x}\right| + c.$$

§ 74. Ositi inteegrimine. Korrutisfunktsiooni $y = uv$, kus $u = \varphi(x)$ ja $v = \psi(x)$ on diferentsitavad x funktsioonid, diferentsimisel nägime, et

$$dy = d(uv) = udv + vdu,$$

kus $du = \varphi'(x)dx$ ja $dv = \psi'(x)dx$. Ümberpöördult, inteegrides saame

$$uv = \int udv + \int vdu,$$

millest

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

mida nimetame inteegritava avaldise $udv = \varphi(x)\psi'(x)dx$ **ositi inteegrimise** valemiks.

Saadud valemi järgi võime avaldise udv inteegrimise taandada avaldise vdu inteegrimisele. Tegurid u ja dv tuleb valida nõnda, et avaldise vdu inteegrimine oleks teostatav teadaolevate inteegrimisvalemite järgi kas otseselt või asendusmeetodi abil.

Lähtudes ülalpool esitatud funktsiooni diferentsiaalist

$$d(uv) = udv + vdu$$

ja inteegrides rajades a-st b-ni, saame

$$\int_a^b d(uv) = \int_a^b udv + \int_a^b vdu$$

ehk

$$[uv]_a^b = \int_a^b udv + \int_a^b vdu,$$

millest

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du,$$

mis on määratud integraali ositi inteegrimise valem, kus inteegrimismuutuja x omandab väärtusi a-st b-ni.

Saadud valemite rakendamist selgitavad alljärgnevad näited:

1) Leida $\int \ln x\,dx$.

Tähistame siin

$$\left.\begin{aligned} u &= \ln x \\ dv &= dx \end{aligned}\right\};\ \text{siis}\ \left\{\begin{aligned} du &= \frac{dx}{x} \\ v &= x. \end{aligned}\right.$$

Kasutades ositi inteegrimise valemit, saame

$$\int \ln x\,dx = uv - \int v\,du = x \ln x - \int dx =$$
$$= x \ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c.$$

2) Leida $\int x \sin x\,dx$.

Ositi inteegrimiseks tuleb siin tähistada

$$\begin{array}{rl} u = x & du = dx \\ dv = \sin x\,dx & v = -\cos x. \end{array}$$

Kasutades nüüd ositi inteegrimise valemit, saame

$$\int x \sin x\,dx = -x \cos x + \int \cos x\,dx = -x \cos x + \sin x + c.$$

3) Leida $\int_0^{\pi} x^2 \cos x\,dx$.

Tähistame siin

$$\begin{array}{rl} u = x^2 & du = 2x\,dx \\ dv = \cos x\,dx & v = \sin x, \end{array}$$

kus nüüd ositi inteegrides

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x\,dx = [x^2 \sin x]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} x \sin x\,dx = -2\int_0^{\pi} x \sin x\,dx,$$

sest $[x^2 \sin x]_0^{\pi} = 0$. Integraali $\int_0^{\pi} x \sin x\,dx$ suhtes tuleks veel kord kasutada ositi inteegrimist, kuid see on juba eelmises näites teostatud; seepärast

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x\,dx = -2\int_0^{\pi} x \sin x\,dx =$$
$$= -2\,[-x \cos x + \sin x]_0^{\pi} = -2\pi.$$

Märkus. Kui n on positiivne täisarv, siis n-kordse ositi inteegrimisega võime analoogiliselt leida integraalid

$$\int x^n \sin x dx, \quad \int x^n \cos x dx, \quad \int x^n e^x dx.$$

4) Leida $\int \sin^2 x dx$.

Tähistame

$$\begin{array}{r|l} u = \sin x & du = \cos x dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x, \end{array}$$

kus nüüd ositi inteegrides ja uut inteegritavat funktsiooni teisendades saame

$$\int \sin^2 x dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x dx = -\sin x \cos x + \\ + \int (1 - \sin^2 x) dx = -\sin x \cos x + x + c_1 - \int \sin^2 x dx.$$

Viies saadud võrduse paremal poolel esineva integraali vasakule poolele, saame

$$2\int \sin^2 x dx = -\sin x \cos x + x + c_1,$$

millest

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x - \sin x \cos x}{2} + c,$$

mis kujutab sama integraalfunktsiooni, mille leidsime eelmises paragrahvis (p. 8) asendusmeetodiga.

Analoogiliselt ositi inteegrimisega leiaksime, et

$$\int \cos^2 x dx = \frac{x + \sin x \cos x}{2} + c.$$

5) Leida $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^4 x dx$.

Tähistame siin

$$\begin{array}{r|l} u = \sin^3 x & du = 3 \sin^2 x \cos x dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{array}$$

ja

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^4 x dx = [-\sin^3 x \cos x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} + 3\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \cos^2 x dx =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{8} + 3\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x (1 - \sin^2 x) dx =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{8} + 3\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x dx - 3\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^4 x dx.$$

Et eelmise näite järgi

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x dx = \left[\frac{x - \sin x \cos x}{2}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{12},$$

siis, viies $3\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^4 x dx$ üle vasakule poole, saame

$$4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^4 x dx = -\frac{\sqrt{3}}{8} + 3\frac{\pi}{12} = \frac{2\pi - \sqrt{3}}{8},$$

millest

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^4 x dx = \frac{2\pi - \sqrt{3}}{32} \approx 0{,}142.$$

6) Leida $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

Teisendame inteegritavat funktsiooni järgmiselt:

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x} dx = \int \frac{dx}{\sin x} + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx,$$

kus paremal poolel esimene integraal eelmise paragrahvi (p. 11) järgi on

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c_1.$$

Teise integraali suhtes kasutame ositi inteegrimist, tähistades

$$u = \frac{\cos x}{\sin^3 x} \quad \Big| \quad du = -\frac{\sin^2 x + 3\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$$
$$dv = \cos x dx \quad \Big| \quad v = \sin x$$

ja

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx = \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \int \frac{\sin^2 x + 3\cos^2 x}{\sin^3 x} dx =$$
$$= \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\sin x} + 3\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx =$$
$$= \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c_1 + 3\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx,$$

kus viimase integraali kui sarnase vasakpoolse integraaliga viime vasakule poole ja siis jagame võrduse mõlemad pooled integraali ees oleva koefitsiendiga, s. o. — 2-ga; saame

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}\,dx = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c_2.$$

Seega

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c_1 - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c_2 =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + c.$$

Analoogilist arvutuskäiku kasutades saaksime

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + c.$$

7) Ringi integraali

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

võime leida ka ositi inteegrimise teel, tähistades

$$u = \sqrt{a^2 - x^2} \quad \Big| \quad du = -\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$
$$dv = dx \quad \Big| \quad v = x.$$

Seega

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Viimast integraali teisendades:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a^2 - (a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx =$$
$$a^2 \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx =$$
$$= a^2 \arcsin\frac{x}{a} + c_1 - \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx,$$

saame

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} + c_1 - \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx,$$

millest ringi integraal

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + c.$$

8) Leida $\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx$.

Tähistame siin

$$\begin{array}{l|l} u = \sqrt{x^2 - a^2} & du = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \\ dv = dx & v = x. \end{array}$$

Siis

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} =$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{(x^2 - a^2) + a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}},$$

millest

$$2\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Et viimane integraal on eelmise paragrahvi (p. 16) järgi

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + c_1,$$

siis

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + c.$$

Analoogiliselt leiaksime ositi inteegrimisega, et

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + c.$$

9) Leida $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$.

Siin teeme järgmise teisenduse:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \int \frac{(x^2 \pm a^2) \mp a^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx \mp a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}},$$

kus nüüd esimene integraal on eelmise näite (p. 8) järgi

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c_1$$

ja teine integraal eelmise paragrahvi (p. 16) järgi

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c_2;$$

seega

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \mp$$
$$\mp a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c =$$
$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c.$$

10) Leida $\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, kus täisarv $n > 1$.

Teisendame inteegritavat funktsiooni järgmiselt:

$$\frac{1}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} - \frac{x^2}{(x^2+1)^n}.$$

Siis

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^n},$$

kus kasutame ositi inteegrimist, tähistades

$$u = x \quad | \quad du = dx$$
$$dv = \frac{x dx}{(x^2+1)^n} \quad | \quad v = -\frac{1}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} \quad (\S\ 73\ \text{p. 6 järgi})$$

ning saades

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^n} = -\frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}},$$

mille asendamisel saame

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} =$$
$$= \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}.$$

Saadud tulemusest nähtub, et oleme integraali $\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ leidmise taandanud integraali $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}$ leidmisele. Niisugust valemit, mis integraali leidmise taandab teise, lihtsama (eelmisega analoogilise) integraali leidmisele, nimetatakse inteegrimise rekurrentseks valemiks. Saadud rekurrentse valemi järgi võime viimase integraali leidmise mehaaniliselt taandada integraali $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-2}}$ leidmisele, saades

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} = \frac{x}{2(n-2)(x^2+1)^{n-2}} + \frac{2n-5}{2(n-2)} \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-2}},$$

edasi

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-2}} = \frac{x}{2(n-3)(x^2+1)^{n-3}} + \frac{2n-7}{2(n-3)} \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-3}}$$

jne., kuni saame lõpuks

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + c.$$

Niimoodi inteegritava funktsiooni nimetajas astendajat järkjärguliselt vähendades leiame integraali $\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$. Tehes järkjärgulise asenduse, saame

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{(2n-3)x}{2^2(n-1)(n-2)(x^2+1)^{n-2}} +$$
$$+ \frac{(2n-3)(2n-5)x}{2^3(n-1)(n-2)(n-3)(x^2+1)^{n-3}} + \ldots +$$
$$+ \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 5\cdot 3\cdot x}{2^{n-1}(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1\cdot (x^2+1)} +$$
$$+ \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 5\cdot 3\cdot 1}{2^{n-1}(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1} \cdot \operatorname{arctg} x + c.$$

11) Leida $\int \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$, kus täisarv $n > 1$.

Tähistame siin

$$\begin{array}{l|l} u = x^{n-1} & du = (n-1)x^{n-2}dx \\ dv = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} & v = -\sqrt{1-x^2} \end{array} \qquad (\S\ 73,\ p.\ 5)$$

ja ositi inteegrimise valemi järgi

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x^{n-1}\sqrt{1-x^2} + (n-1)\int x^{n-2}\sqrt{1-x^2}dx =$$
$$= -x^{n-1}\sqrt{1-x^2} + (n-1)\int \frac{x^{n-2}-x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$
$$= -x^{n-1}\sqrt{1-x^2} + (n-1)\int \frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{1-x^2}} - (n-1)\int \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Viies viimase integraali vasakule poolele ja jagades siis mõlemad pooled n-ga, saame

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{n-1}}{n}\sqrt{1-x^2} + \frac{n-1}{n}\int \frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

millest nähtub, et oleme integraali $\int \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$ leidmise taandanud integraali $\int \frac{x^{n-2} dx}{\sqrt{1-x^2}}$ leidmisele ja järelikult saanud inteegrimise rekurrentse valemi. Edasi leiame analoogiliselt, et

$$\int \frac{x^{n-2} dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{n-3}}{n-2}\sqrt{1-x^2} + \frac{n-3}{n-2}\int \frac{x^{n-4} dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \frac{x^{n-4} dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{n-5}}{n-4}\sqrt{1-x^2} + \frac{n-5}{n-4}\int \frac{x^{n-6} dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

jne., kuni saame lõpuks paarisarvulise n puhul

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + c$$

ja paaritu n puhul

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -\frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{1-x^2} + c.$$

Tehes järkjärgulise asenduse, saame paarisarvulise n puhul

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\left[\frac{1}{n}x^{n-1} + \frac{n-1}{n(n-2)}x^{n-3} + \right.$$

$$+ \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)(n-4)}x^{n-5} + \ldots + \left.\frac{(n-1)(n-3)\ldots 5\cdot 3}{n(n-2)(n-4)\ldots 4\cdot 2}x\right] +$$

$$+ \frac{(n-1)(n-3)\ldots 3\cdot 1}{n(n-2)(n-4)\ldots 4\cdot 2}\arcsin x + c$$

ja paaritu n puhul

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\left[\frac{1}{n}x^{n-1} + \frac{n-1}{n(n-2)}x^{n-3} + \right.$$

$$+ \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)(n-4)}x^{n-5} + \ldots + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 6\cdot 4}{n(n-2)(n-4)\ldots 5\cdot 3}x^2 +$$

$$\left. + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 4\cdot 2}{n(n-2)(n-4)\ldots 3\cdot 1}\right] + c.$$

12) Kasutame integraali

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$$

leidmiseks ositi inteegrimist, tähistades

$$\begin{array}{l|l} u = \sin^{n-1} x & du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x\,dx \\ dv = \sin x\,dx & v = -\cos x; \end{array}$$

siis

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = [-\sin^{n-1} x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx,$$

millest

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx.$$

See on rekurrentne valem, mille põhjal võime kirjutada, et

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-4} x\,dx.$$

Analoogiliselt jätkates saame paarisarvulise n puhul

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx =$$

$$= \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

ja paaritu n puhul

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx =$$

$$= \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot$$

Seega $n = 2k$ puhul

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x\,dx = \frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k-3}{2k-2}\cdot\frac{2k-5}{2k-4}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

ja $n = 2k + 1$ puhul

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x\,dx = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \frac{2k-4}{2k-3} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3},$$

millest jagamise teel saame

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x\,dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x\,dx}.$$

Et vahemikus $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ on

$$\sin^{2k+1} x \leqslant \sin^{2k} x \leqslant \sin^{2k-1} x,$$

siis (§ 70, p. 7 järgi)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x\,dx \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x\,dx \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k-1} x\,dx$$

ja

$$1 \leqslant \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x\,dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x\,dx} \leqslant \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k-1} x\,dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x\,dx},$$

kus

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k-1} x\,dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x\,dx} = \frac{2k+1}{2k} = 1 + \frac{1}{2k}.$$

Seega

$$1 \leqslant \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x\,dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x\,dx} \leqslant 1 + \frac{1}{2k}$$

ja

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x\,dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x\,dx} = 1$$

ning

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2k}{2k-1}\cdot\frac{2k}{2k+1}\right)$$

ehk

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots,$$

mis kannab Wallise* valemi nime.

Et leida integraali

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$$

väärtust, selleks tähistame $x = \frac{\pi}{2} - z$, mille puhul $dx = -dz$ ning z inteegrimisrajad on $\frac{\pi}{2}$ ja 0; saame

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - z\right) dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n z\,dz.$$

Et määratud integraali väärtus ei sõltu inteegrimismuutuja tähisest, siis seega

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx.$$

13) Integraali

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

nimetatakse beeta-funktsiooniks ja tähistatakse järgmiselt:

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx.$$

---

* J. Wallis (1616—1703) — inglise matemaatik. Tema teoses «Arithmetica infinitorum» leidub esmakordselt π avaldis ülaltähendatud lõpmatu korrutisena.

Näitame, et see funktsioon omab lõplikku väärtust $\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$, kui m ja n on positiivsed täisarvud.

Inteegrime B-funktsioonis esinevat inteegritavat avaldist ositi, tähistades

$$\begin{array}{l|l} u = (1-x)^{n-1} & du = -(n-1)(1-x)^{n-2}dx \\ dv = x^{m-1}dx & v = \frac{x^m}{m}; \end{array}$$

siis

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx = \left[\frac{x^m(4-x)^{n-1}}{m}\right]_0^1 + \frac{n-1}{m}\int_0^1 x^m(1-x)^{n-2}dx =$$

$$= \frac{n-1}{m}\int_0^1 x^m(1-x)^{n-2}dx$$

ja seega

$$B(m, n) = \frac{n-1}{m}\int_0^1 x^m(1-x)^{n-2}dx = \frac{n-1}{m}B(m+1, n-1).$$

Kasutades saadud võrdust kui rekurrentset valemit, leiame, et

$$B(m, n) = \frac{(n-1)(n-2)}{m(m+1)}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-3}dx =$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{m(m+1)}B(m+2, n-2).$$

Analoogiliselt jätkates saame positiivsete täisarvuliste m ja n puhul

$$B(m, n) = \frac{(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1}{m(m+1)\ldots(m+n-2)}\int_0^1 x^{m+n-2}dx =$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1}{m(m+1)\ldots(m+n-2)}\cdot B(m+n-1, 1).$$

Et

$$\int_0^1 x^{m+n-2}dx = \left[\frac{x^{m+n-1}}{m+n-1}\right]_0^1 = \frac{1}{m+n-1},$$

siis

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx =$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1}{m(m+1)\ldots(m+n-1)} = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

Saadud tulemusest nähtub, et

$$B(m, n) = B(n, m),$$

sest kui tähistaksime B-funktsioonis $1-x=z$, siis $dx=-dz$ ning uued inteegrimisrajad oleksid $x=0$ puhul $z=1$ ja $x=1$ puhul $z=0$, millede asendamisel saaksime

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx = -\int_1^0 (1-z)^{m-1}z^{n-1}dz =$$

$$= \int_0^1 z^{n-1}(1-z)^{m-1}dz = \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{m-1}dx = B(n, m).$$

§ 75. **Ratsionaalsete murdfunktsioonide teisendamine.** Nagu nägime (§ 8), võib iga ratsionaalset murdfunktsiooni kujutada kahe ratsionaalse täisfunktsiooni jagatisena järgmiselt

$$y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{a_0x + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m},$$

kus k ja m on positiivsed täisarvud, kusjuures k võib olla suurem, võrdne või väiksem kui m ja

$$a_0, a_1, \ldots, a_k, b_0, b_1, \ldots, b_m$$

on konstantsed koefitsiendid.

Ratsionaalset liigmurdfunktsiooni, s. o. kui $k \geqslant m$, on ikka võimalik lugeja jagamisel nimetajaga esitada kujul

$$y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = g(x) + \frac{\varphi_1(x)}{\psi(x)},$$

kus $g(x)$ on ratsionaalne täisfunktsioon ja $\frac{\varphi_1(x)}{\psi(x)}$ on ratsionaalne lihtmurdfunktsioon, mille lugeja $\varphi_1(x)$ aste ei ole suurem kui $m-1$.

Tähendab, et ratsionaalset liigmurdfunktsiooni inteegrida, tuleb inteegrida liigmurdfunktsioonist saadud täisfunktsiooni ja lihtmurdfunktsiooni summat, s. o.

$$\int \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}dx = \int g(x)dx + \int \frac{\varphi_1(x)}{\psi(x)}dx,$$

kusjuures meil on juba teada ratsionaalse täisfunktsiooni $g(x)$ integraal, mis on omakorda jälle ratsionaalne täisfunktsioon. Seepärast käsitleme järgmises pragrahvis ainult ratsionaalsete lihtmurdfunktsioonide inteegrimise võtet, mis seisab selles, et inteegritav murdfunktsioon teisendatakse niisuguste murdfunktsioonide ehk osamurdude summaks, mille inteegrimise võtted on meil otseselt või kaudselt teada. Selleks tõestame enne järgmised teoreemid.

Teoreem 1: Iga taandumatu ratsionaalse lihtmurdfunktsiooni $\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)\psi_2(x)}$, mille nimetaja tegurid $\psi_1(x)$ ja $\psi_2(x)$ on ühistegurita, võime teisendada kahe osamurru summaks nõnda, et $\psi_1(x)$ on ühe ja $\psi_2(x)$ on teise osamurru nimetajaks, s. o.

$$\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)\psi_2(x)} = \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)} + \frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)},$$

kus osamurdude lugejate $\varphi_1(x)$ ja $\varphi_2(x)$ astmed on vähemalt ühe võrra väiksemad kui osamurdude vastavate nimetajate $\psi_1(x)$ ja $\psi_2(x)$ astmed.

Olgu tähendatud ratsionaalse lihtmurdfunktsiooni $\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)\psi_2(x)}$ nimetaja tegurid $\psi_1(x)$ ja $\psi_2(x)$ vastavalt m- ja k-astme ühistegurita ratsionaalsed täisfunktsioonid, s. o.

$$\psi_1(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m$$
$$\psi_2(x) = c_0x^k + c_1x^{k-1} + \ldots + c_k;$$

siis lugeja $\varphi(x)$ võimalik kõrgem aste on $m + k - 1$, s. o.

$$\varphi(x) = a_0x^{m+k-1} + a_1x^{m+k-2} + \ldots + a_{m+k-1}.$$

Teisendame antud murdfunktsiooni järgmiselt:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)\psi_2(x)} = \frac{\varphi_1(x)\psi_2(x) + \varphi(x) - \varphi_1(x)\psi_2(x)}{\psi_1(x)\psi_2(x)} =$$
$$= \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)} + \frac{\varphi(x) - \varphi_1(x)\psi_2(x)}{\psi_1(x)\psi_2(x)},$$

kus abiks võetava ratsionaalse täisfunktsiooni $\varphi_1(x)$ valime nõnda, et $\varphi(x) - \varphi_1(x)\psi_2(x)$ oleks jaguv funktsiooniga $\psi_1(x)$. Kui see jaguvuse tingimus on täidetud, siis

$$\frac{\varphi(x) - \varphi_1(x)\psi_2(x)}{\psi_1(x)} = \varphi_2(x)$$

kujutab ratsionaalset täisfunktsiooni ja seega

$$\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)\psi_2(x)} = \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)} + \frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)}.$$

Et siin $\varphi(x)$ on $(m+k-1)$-astme, $\psi_1(x)$ on m-astme ja $\psi_2(x)$ on k-astme ratsionaalne täisfunktsioon, siis valitava funktsiooni $\varphi_1(x)$ võimalik kõrgeim aste võib olla $m-1$, sest funktsiooni $\varphi_1(x)\psi_2(x)$ aste ei või ületada funktsiooni $\varphi(x)$ astet, ja järelikult funktsiooni $\varphi_2(x)$ kõrgeim aste on $k-1$, s. o.

$$\varphi_1(x) = \beta_1 x^{m-1} + \beta_2 x^{m-2} + \ldots + \beta_m,$$
$$\varphi_2(x) = \gamma_1 x^{k-1} + \gamma_2 x^{k-2} + \ldots + \gamma_k.$$

Et

$$\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)\psi_2(x)} = \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)} + \frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)},$$

siis võrdusest

$$\varphi(x) = \varphi_1(x)\psi_2(x) + \varphi_2(x)\psi_1(x)$$

ilmneb, et $\varphi_1(x)$ ja $\varphi_2(x)$ koefitsiente

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$$

saame leida funktsioonides $\varphi(x)$ ja $\varphi_1(x)\psi_2(x) + \varphi_2(x)\psi_1(x)$ esinevate võrdsete x astmete $(x^{m+k-1}, x^{m+k-2}, \ldots, x^0)$ koefitsientide võrrutamise teel, koostades seega $m+k$ võrrandit $m+k$ tundmatuga $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$, millede suhtes tuleb siis saadud lineaarne võrrandisüsteem lahendada *. Näiteks:

$$\frac{2x^4 - 6x^2 + 26}{(x^2+1)(x^3-2x-5)} = \frac{\beta_1 x + \beta_2}{x^2+1} + \frac{\gamma_1 x^2 + \gamma_2 x + \gamma_3}{x^3 - 2x - 5},$$

mille puhul

$$2x^4 - 6x^2 + 26 = (\beta_1 x + \beta_2)(x^3 - 2x - 5) + (\gamma_1 x^2 + \gamma_2 x + \gamma_3)(x^2 + 1) = (\beta_1 + \gamma_1)x^4 + (\beta_2 + \gamma_2)x^3 - (2\beta_1 - \gamma_1 - \gamma_3)x^2 - (5\beta_1 + 2\beta_2 - \gamma_2)x - (5\beta_2 - \gamma_3),$$

kus nüüd

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 + \gamma_1 &= 2 \\ \beta_2 + \gamma_2 &= 0 \\ 2\beta_1 - \gamma_1 - \gamma_3 &= 6 \\ 5\beta_1 + 2\beta_2 - \gamma_2 &= 0 \\ -5\beta_2 + \gamma_3 &= 26 \end{aligned}\right\},$$

millest leiame, et

$$\beta_1 = 3,\ \beta_2 = -5,\ \gamma_1 = -1,\ \gamma_2 = 5,\ \gamma_3 = 1.$$

Seega

$$\frac{2x^4 - 6x^2 + 26}{(x^2+1)(x^3-2x-5)} = \frac{3x-5}{x^2+1} - \frac{x^2 - 5x - 1}{x^3 - 2x - 5}.$$

---

* Otsitavate koefitsientide jaoks lineaarse võrrandisüsteemi lahenduvuse põhjenduse leiab lugeja raamatust Gunnar Kangro, Kõrgem algebra I, § 16 (1948. a.).

Kasutades tõestatud teoreemi, võime näidata, et üldiselt taandumatu ratsionaalse lihtmurdfunktsiooni

$$\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)\psi_2(x)\dots\psi_n(x)},$$

mille nimetaja üheski kahes teguris pole ühistegurit, saame teisendada n osamurru summaks nõnda, et $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\dots$, $\psi_n(x)$ on nende osamurdude nimetajateks, sest eelneva järgi

$$\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)\psi_2(x)\dots\psi_n(x)} = \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)} + \frac{g_1(x)}{\psi_2(x)\psi_3(x)\dots\psi_n(x)},$$

$$\frac{g_1(x)}{\psi_2(x)\psi_3(x)\dots\psi_n(x)} = \frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)} + \frac{g_2(x)}{\psi_3(x)\psi_4(x)\dots\psi_n(x)},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{g_{n-2}(x)}{\psi_{n-1}(x)\psi_n(x)} = \frac{\varphi_{n-1}(x)}{\psi_{n-1}(x)} + \frac{g_{n-1}(x)}{\psi_n(x)} = \frac{\varphi_{n-1}(x)}{\psi_{n-1}(x)} + \frac{\varphi_n(x)}{\psi_n(x)},$$

millest järkjärgulise asendamisega saame

$$\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)\psi_2(x)\dots\psi_n(x)} = \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)} + \frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)} + \dots + \frac{\varphi_n(x)}{\psi_n(x)},$$

kus osamurdude lugejate $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\dots$, $\varphi_n(x)$ astmed on vähemalt ühe võrra väiksemad kui osamurdude vastavate nimetajate $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\dots$, $\psi_n(x)$ astmed.

Kui nimetajad $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\dots$, $\psi_n(x)$ on lineaarsed, s. o.

$$\psi_1(x) = x - x_1, \quad \psi_2(x) = x - x_2, \quad \dots, \quad \psi_n(x) = x - x_n,$$

siis lugejad $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\dots$, $\varphi_n(x)$ on konstantsed suurused ja seega

$$\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)\psi_2(x)\dots\psi_n(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \dots + \frac{A_n}{x - x_n}.$$

Teoreem 2: Iga taandumatu ratsionaalse lihtmurdfunktsiooni $\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)^n\psi_2(x)}$, mille nimetaja ühe teguri astendaja on n, võime teisendada osamurdude summaks järgmiselt:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)^n\psi_2(x)} = \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)^n} + \frac{\varphi_2(x)}{\psi_1(x)^{n-1}} + \dots + \frac{\varphi_n(x)}{\psi_1(x)} + \frac{g_n(x)}{\psi_2(x)},$$

kus osamurdude lugejate $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\dots$, $\varphi_n(x)$ astmed on vähemalt ühe võrra väiksemad kui $\psi_1(x)$ aste, kusjuures $g_n(x)$ aste on vähemalt ühe võrra väiksem kui $\psi_2(x)$ aste.

Oletame, et

$$\psi_1(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m$$

ja

$$\psi_2(x) = c_0x^k + c_1x^{k-1} + \ldots + c_k,$$

siis $\varphi(x)$ võimalik kõrgeim aste on $m \cdot n + k - 1$, s. o.

$$\varphi(x) = a_0x^{m\cdot n+k-1} + a_1x^{m\cdot n+k-2} + \ldots + a_{m\cdot n+k-1}.$$

Eelmise teoreemi järgi võime kirjutada, et

$$\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)\psi_2(x)} = \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)} + \frac{g_1(x)}{\psi_2(x)},$$

kus $\varphi_1(x)$ võimalik kõrgeim aste on $m - 1$ ja $g_1(x)$ võimalik kõrgeim aste on $k - 1$. Jagame viimase võrduse mõlemad pooled funktsiooniga $\psi_1(x)^{n-1}$; saame

$$\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)^n\psi_2(x)} = \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)^n} + \frac{g_1(x)}{\psi_1(x)^{n-1}\psi_2(x)}.$$

Edasi kirjutame

$$\frac{g_1(x)}{\psi_1(x)\psi_2(x)} = \frac{\varphi_2(x)}{\psi_1(x)} + \frac{g_2(x)}{\psi_2(x)},$$

kus $\varphi_2(x)$ võimalik kõrgeim aste on jälle $m - 1$ ja $g_2(x)$ võimalik kõrgeim aste on $k - 1$. Jagame saadud võrduse mõlemad pooled funktsiooniga $\psi_1(x)^{n-2}$; saame

$$\frac{g_1(x)}{\psi_1(x)^{n-1}\psi_2(x)} = \frac{\varphi_2(x)}{\psi_1(x)^{n-1}} + \frac{g_2(x)}{\psi_1(x)^{n-2}\psi_2(x)}.$$

Edasi leiame analoogiliselt jätkates, et

$$\frac{g_2(x)}{\psi_1(x)^{n-2}\psi_2(x)} = \frac{\varphi_3(x)}{\psi_1(x)^{n-2}} + \frac{g_3(x)}{\psi_1(x)^{n-3}\psi_2(x)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{g_{n-2}(x)}{\psi_1(x)^2\psi_2(x)} = \frac{\varphi_{n-1}(x)}{\psi_1(x)^2} + \frac{g_{n-1}(x)}{\psi_1(x)\psi_2(x)},$$

$$\frac{g_{n-1}(x)}{\psi_1(x)\psi_2(x)} = \frac{\varphi_n(x)}{\psi_1(x)} + \frac{g_n(x)}{\psi_2(x)}.$$

Tehes järkjärgulise asenduse, saame

$$\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)^n\psi_2(x)} = \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)^n} + \frac{\varphi_2(x)}{\psi_1(x)^{n-1}} + \ldots + \frac{\varphi_n(x)}{\psi_1(x)} + \frac{g_n(x)}{\psi_2(x)},$$

kus $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ astmed on vähemalt ühe võrra väiksemad kui $\psi_1(x)$ aste ja $g_n(x)$ aste on vähemalt ühe võrra väik-

sem kui $\psi_2(x)$ aste. Kui siin $\psi_2(x)$ on konstantne suurus, siis $g_n(x) = 0$. Kui oletame, et $\psi_2(x) = 1$, siis

$$\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)^n} = \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)^n} + \frac{\varphi_2(x)}{\psi_1(x)^{n-1}} + \ldots + \frac{\varphi_n(x)}{\psi_1(x)}.$$

Funktsioonides $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ esinevaid koefitsiente võime leida eelmises teoreemis käsitletud viisil.

Kui funktsioon $\psi_1(x)$ on lineaarne, s. o. $\psi_1(x) = x - x_1$, siis osamurdude lugejad $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ on konstantsed suurused ja seega

$$\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)^n} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x - x_1)^n}.$$

kus osamurrud on kirjutatud lugejate indeksite ja nimetajate astmete tõusvas järjestuses.

§ 76. Ratsionaalsete murdfunktsioonide inteegrimine. Võtame taandumatu ratsionaalse lihtmurdfunktsiooni, mida võime üldiselt ikka esitada kujul

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n}{x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_n},$$

kus vähemalt üks lugejas esinevatest koefitsientidest a_1, a_2, ..., a_n ei ole võrdne nulliga. Kui murdfunktsiooni nimetajas x^n ees olev koefitsient erineb ühest, siis jagame murdfunktsiooni lugeja ja nimetaja selle koefitsiendiga, nii et saame murdfunktsiooni ikkagi ülaltähendatud kujul. Lahutame selle murdfunktsiooni nimetaja lineaarseteks teguriteks, s. o.

$$\psi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n),$$

kus x_1, x_2, ..., x_n on võrrandi $\psi(x) = 0$ lahendid, kusjuures esinevad järgmised võimalused: 1) kõik lahendid on reaalsed ja erinevad, 2) kõik lahendid on reaalsed, seejuures kõik nad või mõned neist on võrdsed, 3) kõik või mõned lahendid on erinevad kompleksarvud, 4) komplekslahenditest on mõned võrdsed.

1) Kui võrrandi $\psi(x) = 0$ lahendid x_1, x_2, ..., x_n on reaalsed ja erinevad, siis teisendame inteegritava murdfunktsiooni $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ osamurdude summaks nõnda, et inteegritava funktsiooni nimetaja igale lineaarsele tegurile vastaks oma osamurd, s. o.

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n}{x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_n} = \frac{a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n}{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)} =$$

$$= \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - x_n},$$

kus $A_1, A_2, \ldots, A_n$ on eelmise paragrahvi esimese teoreemi järgi osamurdude konstantsed lugejad, sest osamurdude nimetajad on esimese astme funktsioonid.

Seega reaalsete ja üksteisest erinevate $x_1, x_2, \ldots, x_n$ puhul

$$\int \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,dx = \int \frac{a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n}{x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_n}\,dx =$$

$$= \int \frac{A_1dx}{x - x_1} + \int \frac{A_2dx}{x - x_2} + \ldots + \int \frac{A_ndx}{x - x_n} =$$

$$= A_1 \ln|x - x_1| + A_2 \ln|x - x_2| + \ldots + A_n \ln|x - x_n| + c.$$

Konstantsete suuruste $A_1, A_2, \ldots, A_n$ leidmiseks kirjutame (osamurdude summa ühisele nimetajale viimise teel)

$$\begin{aligned}\varphi(x) = {} & A_1(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n) + \\ & + A_2(x - x_1)(x - x_3) \ldots (x - x_n) + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + A_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1})\end{aligned}$$

ja asetame x asemele järk-järgult

$$x = x_1,\ x = x_2,\ \ldots,\ x = x_n;$$

saame

$$\begin{aligned}\varphi(x_1) &= A_1(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \ldots (x_1 - x_n), \\ \varphi(x_2) &= A_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \ldots (x_2 - x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi(x_n) &= A_n(x_n - x_1)(x_n - x_2) \ldots (x_n - x_{n-1}),\end{aligned}$$

milledest leiame osamurdude konstantsed lugejad

$$A_1 = \frac{\varphi(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \ldots (x_1 - x_n)},$$

$$A_2 = \frac{\varphi(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \ldots (x_2 - x_n)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_n = \frac{\varphi(x_n)}{(x_n - x_1)(x_n - x_2) \ldots (x_n - x_{n-1})}.$$

Osamurdude konstantsed lugejad $A_1, A_2, \ldots A_n$ võime käesoleval juhul leida ka teisiti. Kui näiteks x_k on võrrandi $\psi(x) = 0$ mistahes lahend, siis

$$\psi(x) = (x - x_k)\psi_1(x),$$

mille tuletis

$$\psi'(x) = \psi_1(x) + (x - x_k)\psi_1'(x)$$

$x = x_k$ puhul on

$$\psi'(x_k) = \psi_1(x_k).$$

Eelmise paragrahvi esimese teoreemi järgi

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{A_k}{x - x_k} + \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)},$$

kus selle murru lugeja

$$\varphi(x) = A_k\psi_1(x) + (x - x_k)\varphi_1(x)$$

omandab $x = x_k$ puhul kuju

$$\varphi(x_k) = A_k\psi_1(x_k),$$

millest

$$A_k = \frac{\varphi(x_k)}{\psi_1(x_k)} = \frac{\varphi(x_k)}{\psi'(x_k)},$$

kus $k = 1, 2, \ldots, n$. Siin iga A_k omab ikka nullist erinevat lõplikku väärtust, sest nii $\varphi(x)$ kui ka $\psi_1(x)$ ei sisalda tegurit $x - x_k$ ning seega

$$\varphi(x_k) \neq 0 \text{ ja } \psi'(x_k) = \psi_1(x_k) \neq 0.$$

Näiteks:

$$\int \frac{2x^4 - 6x^2 + 9}{x^3 + x^2 - 2x}\,dx = \int \left(2x - 2 - \frac{4x - 9}{x^3 + x^2 - 2x}\right)dx =$$

$$= \int (2x - 2)\,dx - \int \frac{4x - 9}{x(x - 1)(x + 2)}\,dx =$$

$$= x^2 - 2x - \left(\int \frac{A_1 dx}{x} + \int \frac{A_2 dx}{x - 1} + \int \frac{A_3 dx}{x + 2}\right) =$$

$$= x^2 - 2x - A_1 \ln|x| - A_2 \ln|x - 1| - A_3 \ln|x + 2| + c.$$

Et siin

$$\varphi(x) = 4x - 9$$

ja

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -2,$$

siis

$$A_1 = \frac{\varphi(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{9}{2},$$

$$A_2 = \frac{\varphi(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = -\frac{5}{3},$$

$$A_3 = \frac{\varphi(x_3)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = -\frac{17}{6}$$

ning seega

$$\int \frac{2x^4 - 6x^2 + 9}{x^3 + x^2 - 2x}\,dx = x^2 - 2x - \frac{9}{2}\ln|x| + \frac{5}{3}\ln|x - 1| +$$

$$+ \frac{17}{6}\ln|x + 2| + c.$$

2) Kui võrrandi $\psi(x) = 0$ lahendid $x_1, x_2, \ldots, x_n$ on reaalsed ja võrdsed, s. o.

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n,$$

siis eelmise paragrahvi teise teoreemi järgi teisendame inteegritava funktsiooni $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ n osamurru summaks nõnda, et

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n}{(x - x_1)^n} =$$

$$= \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x - x_1)^n},$$

kus $A_1, A_2, \ldots, A_n$ on osasummade konstantsed lugejad, sest inteegritava funktsiooni nimetaja kujutab n lineaarse teguri korrutist $(x - x_1)^n$. Inteegrides saame

$$\int \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,dx = \int \frac{a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n}{(x - x_1)^n}\,dx =$$

$$= \int \frac{A_1\,dx}{x - x_1} + \int \frac{A_2\,dx}{(x - x_1)^2} + \ldots + \int \frac{A_n\,dx}{(x - x_1)^n} =$$

$$= A_1 \ln|x - x_1| - \frac{A_2}{x - x_1} - \ldots - \frac{A_n}{(n-1)(x - x_1)^{n-1}} + c.$$

Konstantsed suurused $A_1, A_2, \ldots, A_n$ leiame siin osamurdude summa

$$\frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x - x_1)^n}$$

ühisele nimetajale viimise teel, korraldades lugeja x astmete järjekorras ja siis võrrutades x astmete $(x^{n-1}, x^{n-2}, \ldots, x^0)$ koefitsiendid funktsiooni

$$a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$$

vastavate koefitsientidega; saame n võrrandit n tundmatuga $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Saadud võrrandisüsteemi nende tundmatute suhtes lahendades leiame otsitavad osamurdude lugejad $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Et murd $\frac{\varphi(x)}{(x - x_1)^n}$ on eelduste järgi taandumatu, siis seega $\varphi(x)$ ei sisalda tegurit $x - x_1$, mis näitab ühtlasi, et $A_n \neq 0$. Kuid $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ võivad olla võrdsed nulliga. Järelikult kõrgeima astme nimetajaga osamurd $\frac{A_n}{(x - x_1)^n}$ esineb alati.

Kui võrrandi $\psi(x) = 0$ lahenditest $x_1, x_2, \ldots, x_n$ on k lahendit ($k < n$) võrdsed, s. o.

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_k,$$

ning ülejäänud $n - k$ lahendit

$$x_{k+1}, \quad x_{k+2}, \quad \ldots, \quad x_n$$

on isesuurused, siis analoogiliselt eelnevaga leiame, et

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x)}{(x-x_1)^k \psi_1(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-x_1)^k} + \frac{A_{k+1}}{x-x_{k+1}} + \frac{A_{k+2}}{x-x_{k+2}} + \ldots + \frac{A_n}{x-x_n},$$

kus kõikide osamurdude lugejad leiame samuti n võrrandiga ja n tundmatuga $A_1, A_2, \ldots, A_n$ võrrandisüsteemi koostamise ja lahendamise teel.

Näiteks:

$$\int \frac{x^2+1}{x(x-1)^3}\,dx = \int \frac{A_1 dx}{x-1} + \int \frac{A_2 dx}{(x-1)^2} + \int \frac{A_3 dx}{(x-1)^3} + \int \frac{A_4 dx}{x} =$$

$$= A_1 \ln|x-1| - \frac{A_2}{x-1} - \frac{A_3}{2(x-1)^2} + A_4 \ln|x| + c.$$

Siin

$$x^2 + 1 = A_1 x(x-1)^2 + A_2 x(x-1) + A_3 x + A_4 (x-1)^3 =$$
$$= (A_1 + A_4)x^3 - (2A_1 - A_2 + 3A_4)x^2 +$$
$$+ (A_1 - A_2 + A_3 + 3A_4)x - A_4,$$

kus

$$\left.\begin{aligned} A_1 + A_4 &= 0 \\ -2A_1 + A_2 - 3A_4 &= 1 \\ A_1 - A_2 + A_3 + 3A_4 &= 0 \\ -A_4 &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

Neid võrrandeid A_1, A_2, A_3 ja A_4 suhtes lahendades saame

$$A_1 = 1, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 2, \quad A_4 = -1.$$

Tähendab,

$$\int \frac{x^2+1}{x(x-1)^3}\,dx = \ln|x-1| - \frac{1}{(x-1)^2} - \ln|x| + c =$$

$$= \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| - \frac{1}{(x-1)^2} + c.$$

3) Kui võrrandi $\psi(x) = 0$ lahenditest $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kõik või mõned on erinevad kompleksarvud, siis on need ikka kahekaupa

kaaskompleksarvud. Kaaskomplekslahendite paarile $a+bi$ ja $a-bi$ vastavad inteegritava funktsiooni nimetajas komplekstegurid $x-(a+bi)$ ja $x-(a-bi)$, mille korrutis on reaalne ruuttegur x^2+px+q, kus p ja q on reaalarvud ($p=-2a$, $q=a^2+b^2$). Murdfunktsiooni osamurdudeks lahutamisel jäetakse komplekslahendite puhul osamurru nimetajaks nimetaja ruuttegur x^2+px+q, mis esitab kaaskomplekslahendeid. Sellele tegurile vastab eelmise paragrahvi esimese teoreemi järgi osamurd

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q},$$

mis teisendatakse omakorda kahe osamurru summaks nõnda, et esimese osamurru lugejaks eraldatakse lugejast $Ax+B$ see osa, mis kujutab nimetaja x^2+px+q tuletist, ja nimetajaks jääb x^2+px+q. Teise osamurru lugejaks jääb siis murdfunktsiooni lugeja $Ax+B$ ülejäänud osa, mis on ikka konstantne suurus, kuid nimetajat x^2+px+q teisendatakse järgmiselt:

$$x^2+px+q=(x+l)^2+m^2=m^2\left[\left(\frac{x+l}{m}\right)^2+1\right]=m^2(z^2+1),$$

kus $z=\frac{x+l}{m}$, millest $dz=\frac{dx}{m}$ ehk $dx=mdz$. Niisugune teisendus on alati võimalik ja see võimaldab integraali leidmist asendusmeetodi abil. Sel juhul võime võtta

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx=r\int\frac{(2x+p)+s}{x^2+px+q}\,dx,$$

kus r ja s (nagu ka l ja m) on nimetaja tuletise $2x+p$ eraldamisel lugejas tekkinud võimalikud konstantsed suurused. Seega

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx=r\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx+rs\int\frac{dx}{x^2+px+q}.$$

Asendades viimases integraalis x^2+px+q avaldisega $m^2(z^2+1)$ ja dx avaldisega mdz, saame

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx=r\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx+\frac{rs}{m}\int\frac{dz}{z^2+1}=$$

$$=r\ln|x^2+px+q|+\frac{rs}{m}\operatorname{arctg}z+c=$$

$$=r\ln|x^2+px+q|+\frac{rs}{m}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+l}{m}\right)+c.$$

Kui inteegritava funktsiooni $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ nimetajas esineb k erinevat ruuttegurit, mis esitavad võrrandi $\psi(x)=0$ kaaskomplekslahendeid, s. o.

$$\psi(x)=(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)\ldots(x^2+p_kx+q_k),$$

kus $2k = n$, siis teisendame murdfunktsiooni eelmise paragrahvi esimese teoreemi põhjal k osamurru summaks nõnda, et

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{a_1x^{n-1} a_2x^{n-2} + \ldots + a_n}{(x^2 + p_1x + q_1)(x^2 + p_2x + q_2) \ldots (x^2 + p_kx + q_k)} =$$

$$\frac{A_1x + B_1}{x^2 + p_1x + q_1} = \frac{A_2x + B_2}{x^2 + p_2x + q_2} + \ldots + \frac{A_kx + B_k}{x^2 + p_kx + q_k},$$

mille integraal

$$\int \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,dx = \int \frac{a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n}{(x^2 + p_1x + q_1)(x^2 + p_2x + q_2) \ldots (x^2 + p_kx + q_k)}\,dx =$$

$$= \int \frac{A_1x + B_1}{x^2 + p_1x + q_1}\,dx + \int \frac{A_2x + B_2}{x^2 + p_2x + q_2}\,dx + \ldots + \int \frac{A_kx + B_k}{x^2 + p_kx + q_k}\,dx =$$

$$= r_1 \ln|x^2 + p_1x + q_1| + \frac{r_1s_1}{m_1} \operatorname{arctg}\left(\frac{x + l_1}{m_1}\right) +$$

$$+ r_2 \ln|x^2 + p_2x + q_2| + \frac{r_2s_2}{m_2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x + l_2}{m_2}\right) +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ r_k \ln|x^2 + p_kx + q_k| + \frac{r_ks_k}{m_k} \operatorname{arctg}\left(\frac{x + l_k}{m_k}\right) + c.$$

Konstantsed suurused $A_1, B_1, \ldots, A_k, B_k$ leiame osamurdude summa ühisele nimetajale viimise teel, koostades n võrrandiga ja $n = 2k$ tundmatuga $A_1, B_1, \ldots, A_k, B_k$ võrrandisüsteemi, mida lahendades leiame otsitavad konstantsed suurused.

a) Võtame integraali

$$\int \frac{6x - 2}{(x + 1)(x^2 - 2x + 5)}\,dx,$$

mille võime esitada järgmiselt:

$$\int \frac{6x - 2}{(x + 1)(x^2 - 2x + 5)}\,dx = \int \left(\frac{A_1}{x + 1} + \frac{Ax + B}{x^2 - 2x + 5}\right) dx.$$

Siin

$$6x - 2 = A_1(x^2 - 2x + 5) + (Ax + B)(x + 1) =$$
$$= (A_1 + A)x^2 + (-2A_1 + A + B)x + 5A_1 + B,$$

kus

$$\left.\begin{aligned} A_1 + A &= 0 \\ -2A_1 + A + B &= 6 \\ 5A_1 + B &= -2 \end{aligned}\right\}.$$

Lahendades saadud võrrandisüsteemi, saame

$$A_1 = -1, \quad A = 1, \quad B = 3.$$

Teise osamurru nimetaja on teisendatult

$$x^2-2x+5=(x-1)^2+4=4\left[\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1\right]=4(z^2+1),$$

kus $z=\frac{x-1}{2}$, millest $dx=2dz$. Seega

$$\int\frac{6x-2}{(x+1)(x^2-2x+5)}\,dx=\int\left(-\frac{1}{x+1}+\frac{x+3}{x^2-2x+5}\right)dx=$$

$$=-\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{(2x-2)+8}{x^2-2x+5}\,dx=$$

$$=-\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{2x-2}{x^2-2x+5}\,dx+\int\frac{2dz}{z^2+1}=$$

$$=-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+5|+2\operatorname{arctg}z+c=$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-2x+5}}{x+1}\right|+2\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right)+c.$$

b) Integraali

$$\int\frac{dx}{x^4+1}$$

leidmiseks lahutame inteegritava funktsiooni nimetaja kaheks teguriks:

$$x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2=(x^2+1+\sqrt{2}x)(x^2+1-\sqrt{2}x);$$

siis

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\int\left(\frac{A_1x+B_1}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{A_2x+B_2}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)dx.$$

Siin

$$1=(A_1x+B_1)(x^2-\sqrt{2}x+1)+(A_2x+B_2)(x^2+\sqrt{2}x+1)=$$
$$=(A_1+A_2)x^3+(-\sqrt{2}A_1+B_1+\sqrt{2}A_2+B_2)x^2+$$
$$+(A_1-\sqrt{2}B_1+A_2+\sqrt{2}B_2)x+B_1+B_2,$$

kus

$$\left.\begin{aligned}A_1+A_2&=0\\-\sqrt{2}A_1+B_1+\sqrt{2}A_2+B_2&=0\\A_1-\sqrt{2}B_1+A_2+\sqrt{2}B_2&=0\\B_1+B_2&=1\end{aligned}\right\}.$$

Lahendades saadud võrrandisüsteemi, saame

$$A_1=\frac{1}{2\sqrt{2}},\quad B_1=\frac{1}{2},\quad A_2=-\frac{1}{2\sqrt{2}},\quad B_2=\frac{1}{2}.$$

Osamurdude nimetajad on teisendatult

$$x^2+\sqrt{2}x+1=\frac{1}{2}[(\sqrt{2}x+1)^2+1]=\frac{1}{2}(u^2+1),$$

$$x^2-\sqrt{2}x+1=\frac{1}{2}[(\sqrt{2}x-1)^2+1]=\frac{1}{2}(v^2+1),$$

kus $u=\sqrt{2}x+1$, millest $dx=\frac{du}{\sqrt{2}}$, ja $v=\sqrt{2}x-1$, millest $dx=\frac{dv}{\sqrt{2}}$. Seega

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\left[\frac{(2x+\sqrt{2})+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{(2x-\sqrt{2})-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right]dx=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx+\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{du}{u^2+1}-$$

$$-\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx+\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{dv}{v^2+1}=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln|x^2+\sqrt{2}x+1|+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}u-$$

$$-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln|x^2-\sqrt{2}x+1|+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}v+c=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1)+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)+c.$$

4) Kui inteegritava funktsiooni $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ nimetaja sisaldab k võrdset komplekstegurit ja seega ühtlasi ka k võrdset kaaskomplekstegurit, siis

$$\psi(x)=(x^2+px+q)^k,$$

kus $2k=n$. Sel juhul teisedame eelmise paragrahvi teise teoreemi põhjal inteegritava murdfunktsiooni k osamurru summaks nõnda, et

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n}{(x^2+px+q)^k}=$$

$$=\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{A_kx+B_k}{(x^2+px+q)^k}.$$

Inteegrimiseks teisendame siin iga osamurdu

$$\frac{A_\nu x + B_\nu}{(x^2 + px + q)^\nu}, \text{ kus } \nu = 2, 3, \ldots, k,$$

omakorda kahe osamurru summaks nõnda, et esimese osamurru lugejaks eraldame lugejast $A_\nu x + B_\nu$ selle osa, mis kujutab $x^2 + px + q$ tuletist, ja nimetajaks jätame $(x^2 + px + q)^\nu$. Teise osamurru lugejaks jääb siis lugeja $A_\nu x + B_\nu$ ülejäänud osa, mis on ikka konstantne suurus, kuid nimetajat $(x^2 + px + q)^\nu$ teisendame analoogiliselt eelnevaga (kus oli $\nu = 1$) järgmiselt:

$$(x^2 + px + q)^\nu = [m^2(z^2 + 1)]^\nu = m^{2\nu}(z^2 + 1)^\nu,$$

kus $z = \frac{x + l}{m}$, millest $dx = mdz$. Siis

$$\int \frac{A_\nu x + B_\nu}{(x^2 + px + q)^\nu} dx = r \int \frac{(2x + p) + s}{(x^2 + px + q)^\nu} dx =$$

$$= r \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^\nu} dx + \frac{rs}{m^{2\nu - 1}} \int \frac{dz}{(z^2 + 1)^\nu}.$$

Kui tähistame esimeses integraalis $x^2 + px + q = t$, siis $(2x + p)dx = dt$ ja

$$\int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^\nu} dx = \int \frac{dt}{t^\nu} = -\frac{1}{(\nu - 1)t^{\nu - 1}} =$$

$$= -\frac{1}{(\nu - 1)(x^2 + px + q)^{\nu - 1}}.$$

Teise integraali leiame (§ 74, p. 10 põhjal) järgmiselt:

$$\int \frac{dz}{(z^2 + 1)^\nu} = \frac{z}{2(\nu - 1)(z^2 + 1)^{\nu - 1}} + \frac{2\nu - 3}{2(\nu - 1)} \int \frac{dz}{(z^2 + 1)^{\nu - 1}},$$

$$\int \frac{dz}{(z^2 + 1)^{\nu - 1}} = \frac{z}{2(\nu - 2)(z^2 + 1)^{\nu - 2}} + \frac{2\nu - 5}{2(\nu - 2)} \int \frac{dz}{(z^2 + 1)^{\nu - 2}}$$

jne., kuni saame

$$\int \frac{dz}{z^2 + 1} = \operatorname{arctg} z.$$

Niimoodi leiame $\int \frac{dz}{(z^2 + 1)^\nu}$ ja seega ühtlasi ka $\int \frac{A_\nu x + B_\nu}{(x^2 + px + q)^\nu}$.

a) Integraali

$$\int \frac{x^3 - 3x - 8}{(x^2 + 4x + 5)^2} dx$$

puhul kirjutame

$$\int \frac{x^3-3x-8}{(x^2+4x+5)^2}\,dx = \int\left[\frac{A_1x+B_1}{x^2+4x+5} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+4x+5)^2}\right]dx.$$

Siin

$$x^3-3x-8 = (A_1x+B_1)(x^2+4x+5) + A_2x + B_2 =$$
$$= A_1x^3 + (4A_1+B_1)x^2 + (5A_1+A_2+4B_1)x + 5B_1 + B_2,$$

kus

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= 1\\ 4A_1 + B_1 &= 0\\ 5A_1 + A_2 + 4B_1 &= -3\\ 5B_1 + B_2 &= -8 \end{aligned}\right\}.$$

Lahendades saadud võrrandisüsteemi, saame

$$A_1 = 1,\ B_1 = -4,\ A_2 = 8,\ B_2 = 12.$$

Seega

$$\int \frac{x^3-3x-8}{(x^2+4x+5)^2}\,dx = \int\left[\frac{x-4}{x^2+4x+5} + \frac{8x+12}{(x^2+4x+5)^2}\right]dx =$$
$$= \int\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+4)-12}{x^2+4x+5} + 4\cdot\frac{(2x+4)-1}{(x^2+4x+5)^2}\right]dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int\frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx - 6\int\frac{dx}{(x+2)^2+1} +$$
$$+ 4\int\frac{2x+4}{(x^2+4x+5)^2}\,dx - 4\int\frac{dx}{[(x+2)^2+1]^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+5| - 6\operatorname{arctg}(x+2) -$$
$$- \frac{4}{x^2+4x+5} - 4\left[\frac{x+2}{2(x^2+4x+5)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+2)\right] + c =$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+5| - \frac{2x+8}{x^2+4x+5} - 8\operatorname{arctg}(x+2) + c.$$

b) Integraali

$$\int\frac{x^3-2x+1}{x^3(x-2)(x^2+1)^2}\,dx$$

leidmiseks kirjutame

$$\int\frac{x^3-2x+1}{x^3(x-2)(x^2+1)^2}\,dx = \int\frac{A_1x+B_1}{x^2+1}\,dx + \int\frac{A_2x+B_2}{(x^2+1)^2}\,dx + \int\frac{A_3dx}{x-2} +$$
$$+ \int\frac{A_4dx}{x} + \int\frac{A_5dx}{x^2} + \int\frac{A_6dx}{x^3}.$$

Siin

$$x^3-2x+1=(A_1x+B_1)x^3(x-2)(x^2+1)+(A_2x+$$
$$+B_2)x^3(x-2)+A_3x^3(x^2+1)^2+A_4x^2(x-2)(x^2+1)^2+$$
$$+A_5x(x-2)(x^2+1)^2+A_6(x-2)(x^2+1)^2=$$
$$=(A_1+A_3+A_4)x^7+(-2A_1-2A_4+A_5+B_1)x^6+$$
$$+(A_1+A_2+2A_3+2A_4-2A_5+A_6-2B_1)x^5+$$
$$+(-2A_1-2A_2-4A_4+2A_5-2A_6+B_1+B_2)x^4+$$
$$+(A_3+A_4-4A_5+2A_6-2B_1-2B_2)x^3+$$
$$+(-2A_4+A_5-4A_6)x^2+(-2A_5+A_6)x-2A_6,$$

kus

$$\left.\begin{aligned}
A_1+A_3+A_4&=0\\
-2A_1-2A_4+A_5+B_1&=0\\
A_1+A_2+2A_3+2A_4-2A_5+A_6-2B_1&=0\\
-2A_1-2A_2-4A_4+2A_5-2A_6+B_1+B_2&=0\\
A_3+A_4-4A_5+2A_6-2B_1-2B_2&=1\\
-2A_4+A_5-4A_6&=0\\
-2A_5+A_6&=-2\\
-2A_6&=1
\end{aligned}\right\}.$$

Lahendades saadud võrrandisüsteemi, saame

$$A_1=-\frac{7}{5},\ A_2=-1,\ A_3=\frac{1}{40},\ A_4=\frac{11}{8},$$

$$A_5=\frac{3}{4},\ A_6=-\frac{1}{2},\ B_1=-\frac{4}{5},\ B_2=-1.$$

Seega

$$\int\frac{x^3-2x+1}{x^3(x-2)(x^2+1)^2}dx=-\frac{1}{5}\int\frac{7x+4}{x^2+1}dx-\int\frac{x+1}{(x^2+1)^2}dx+$$
$$+\frac{1}{40}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{11}{8}\int\frac{dx}{x}+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x^2}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3}=$$
$$=-\frac{7}{10}\int\frac{2x+\frac{8}{7}}{x^2+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{(x^2+1)^2}dx+$$
$$+\frac{1}{40}\ln|x-2|+\frac{11}{8}\ln|x|-\frac{3}{4x}+\frac{1}{4x^2}=$$
$$=-\frac{7}{10}\int\frac{2xdx}{x^2+1}-\frac{4}{5}\int\frac{dx}{x^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{(x^2+1)^2}-\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}+$$
$$+\frac{1}{40}\ln|x-2|+\frac{11}{8}\ln|x|-\frac{3}{4x}+\frac{1}{4x^2}=$$
$$=-\frac{7}{10}\ln|x^2+1|-\frac{4}{5}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2(x^2+1)}-$$
$$-\frac{x}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{40}\ln|x-2|+\frac{11}{8}\ln|x|-$$

$$-\frac{3}{4x}+\frac{1}{4x^2}+c=\frac{11}{8}\ln|x|+\frac{1}{40}\ln|x-2|-$$

$$-\frac{7}{10}\ln|x^2+1|-\frac{13}{10}\operatorname{arctg}x-\frac{5x^3-3x^2+3x-1}{4x^2(x^2+1)}+c.$$

§ 77. Ostrogradski meetod. Kui ratsionaalse lihtmurdfunktsiooni $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ nimetaja $\psi(x)$ koosneb võrdsetest lineaarsetest teguritest ja võrdsetest ruutteguritest, siis on paljudel juhtudel otstarbekohane kasutada selle murdfunktsiooni inteegrimiseks M. V. Ostrogradski* poolt antud valemit

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}dx=\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}+\int\frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)}dx,$$

kus

$$\psi(x)=\psi_1(x)\cdot\psi_2(x),$$

kusjuures üks teguritest, näiteks $\psi_1(x)$ on $\psi(x)$ ja $\psi'(x)$ suurim ühistegur. Siis

$$\psi_2(x)=\frac{\psi(x)}{\psi_1(x)}.$$

Kui siin $\psi_1(x)$ aste on k, siis $\varphi_1(x)$ aste on mitte suurem kui $k-1$, s. o.

$$\varphi_1(x)=\alpha_1x^{k-1}+\alpha_2x^{k-2}+\ldots+\alpha_k,$$

ja kui $\psi_2(x)$ aste on m, siis $\varphi_2(x)$ aste on mitte suurem kui $m-1$, s. o.

$$\varphi_2(x)=\beta_1x^{m-1}+\beta_2x^{m-2}+\ldots+\beta_m.$$

Diferentsides Ostrogradski valemit, saame

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi_1'(x)\psi_1(x)-\varphi_1(x)\psi_1'(x)}{\psi_1(x)^2}+\frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)},$$

mille järgi võime leida koefitsientide

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_k,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_m$$

väärtused.

Selgituseks rakendame Ostrogradski valemit järgmise integraali arvutamisel:

$$\int\frac{x^5-4x^3+3x-4}{x^3(x^2+1)^2}dx.$$

---

*Mihhail Vassiljevitš Ostrogradski (1801—1861) — kuulus vene akadeemik, kelle pedagoogiline tegevus kulges Peterburi kõrgemates sõjaväelistes ja pedagoogilistes õppeasutustes. Ostrogradski teaduslikud uurimused kuuluvad peamiselt matemaatilise analüüsi ja selle rakenduste valdkonda. Ostrogradski oli ühtlasi vene matemaatilise koolkonna rajajaid.

Siin

$$\psi(x) = x^3(x^2+1)^2,$$
$$\psi'(x) = x^2(x^2+1)(7x^2+3),$$

millede suurim ühistegur on

$$\psi_1(x) = x^2(x^2+1)$$

ning seega

$$\psi_2(x) = \frac{\psi(x)}{\psi_1(x)} = x(x^2+1).$$

Tähendab,

$$\int \frac{x^5-4x^3+3x-4}{x^3(x^2+1)^2}\,dx = \frac{a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4}{x^2(x^2+1)} + \int \frac{\beta_1x^2+\beta_2x+\beta_3}{x(x^2+1)}\,dx.$$

Et siin

$$\varphi_1(x) = a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4,$$
$$\varphi_2(x) = \beta_1x^2 + \beta_2x + \beta_3$$

ja

$$\varphi_1'(x) = 3a_1x^2 + 2a_2x + a_3,$$
$$\psi_1'(x) = 2x(2x^2+1),$$

siis

$$\frac{x^5-4x^3+3x-4}{x^3(x^2+1)^2} =$$
$$= \frac{(3a_1x^2+2a_2x+a_3)x^2(x^2+1) - (a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4)2x(2x^2+1)}{x^4(x^2+1)^2} +$$
$$+ \frac{\beta_1x^2+\beta_2x+\beta_3}{x(x^2+1)},$$

millest ühisele nimetajale viimise teel saame

$$x^5-4x^3+3x-4 = \beta_1x^6 + (-a_1+\beta_2)x^5 + (-2a_2+\beta_1+$$
$$+\beta_3)x^4 + (a_1-3a_3+\beta_2)x^3 + (-4a_4+\beta_3)x^2 - a_3x - 2a_4.$$

Lahendades võrrandisüsteemi

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= 0 \\ -a_1+\beta_2 &= 1 \\ -2a_2+\beta_1+\beta_3 &= 0 \\ a_1-3a_3+\beta_2 &= -4 \\ -4a_4+\beta_3 &= 0 \\ -a_3 &= 3 \\ -2a_4 &= -4 \end{aligned}\right\},$$

leiame, et

$$a_1 = -7,\quad a_2 = 4,\quad a_3 = -3,\quad a_4 = 2,\quad \beta_1 = 0,\quad \beta_2 = -6,\quad \beta_3 = 8.$$

Nende väärtuste asendamisel ilmneb, et

$$\int \frac{x^5-4x^3+3x-4}{x^3(x^2+1)^2}\,dx = \frac{-7x^3+4x^2-3x+2}{x^2(x^2+1)} + \int \frac{-6x+8}{x(x^2+1)}\,dx,$$

kus nüüd

$$\int \frac{-6x+8}{x(x^2+1)}\,dx = \int \left(\frac{A}{x}+\frac{A_1x+B_1}{x^2+1}\right)dx = \int \left(\frac{8}{x}-\frac{8x+6}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= 8\ln|x| - 4\int \frac{2x+\frac{3}{2}}{x^2+1}\,dx = 8\ln|x| - 4\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} - 6\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= 8\ln|x| - 4\ln|x^2+1| - 6\operatorname{arctg} x + c =$$

$$= 4\ln\left|\frac{x^2}{x^2+1}\right| - 6\operatorname{arctg} x + c$$

ning seega

$$\int \frac{x^5-4x^3+3x-4}{x^3(x^2+1)^2}\,dx = \frac{-7x^3+4x^2-3x+2}{x^2(x^2+1)} +$$

$$+ 4\ln\left|\frac{x^2}{x^2+1}\right| - 6\operatorname{arctg} x + c.$$

§ 78. Inteegrimise ratsionaliseerimismeetod. Kui meil on tegemist irratsionaalsete või transtsendentsete funktsioonide inteegrimisega, siis võime mõningaid neist funktsioonidest uue muutuja vastava valikuga r a t s i o n a l i s e e r i d a, s. o. muuta ratsionaalseteks funktsioonideks, ja seega inteegrida neid irratsionaalseid ja transtsendentseid funktsioone ratsionaalsete funktsioonide inteegrimise kaudu. Vaatleme siinkohal mõningaid juhtumeid, kus inteegritavaid funktsioone on võimalik teisendada uue inteegrimismuutuja kohasel valikul ratsionaalseteks murdfunktsioonideks.

1) Kui inteegritavas irratsionaalses funktsioonis $f(x)$ esinevad x ja ainult x murrulised astendajad, siis tähistame selle funktsiooni järgmiselt:

$$f(x) = R(\sqrt[n]{x}),$$

kus R tähendab ratsionaalset funktsiooni, milles n on x astendajate ühine nimetaja ehk juuravaldiste ühine juurija. Sel juhul tähistame

$$x = z^n,$$

millest

$$dx = nz^{n-1}dz.$$

Asetades need väärtused inteegritavasse funktsiooni x ja dx asemele, saame irratsionaalse avaldise väljendada ratsionaalselt uue inteegrimismuutuja z kaudu, s. o.

$$\int R(\sqrt[n]{x})\,dx = n\int R(z)\,z^{n-1}dz.$$

Näiteks integraali

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3} - \sqrt[12]{x^5}}$$

puhul kirjutame

$$x = z^{12},\ dx = 12z^{11}dz,$$

sest ühine juurija on 12. Seega

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3} - \sqrt[12]{x^5}} = 12\int \frac{z^6 dz}{z^4 - 1} = 12\int \left(z^2 + \frac{z^2}{z^4 - 1}\right) dz =$$

$$= 4z^3 + \int \frac{12z^2}{z^4 - 1}\,dz,$$

kus viimase integraali suhtes rakendame ratsionaalsete lihtmurdfunktsioonide inteegrimisvõtet, saades

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3} - \sqrt[12]{x^5}} = 4z^3 + \int \left(\frac{3}{z-1} - \frac{3}{z+1} + \frac{6}{z^2+1}\right) dz =$$

$$= 4z^3 + 3\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + 6\operatorname{arctg} z + c =$$

$$= 4\sqrt[4]{x} + 3\ln\left|\frac{\sqrt[12]{x} - 1}{\sqrt[12]{x} + 1}\right| + 6\operatorname{arctg}\sqrt[12]{x} + c.$$

2) Kui inteegritav funktsioon esineb kujul

$$f(x) = R(x,\ \sqrt[n]{ax+b}),$$

kus n on $ax + b$ juuravaldiste ühine juurija, siis tähistame

$$ax + b = z^n,$$

millest

$$x = \frac{z^n - b}{a} \quad \text{ja} \quad dx = \frac{n}{a} z^{n-1}dz.$$

Niisuguse asendusega saame tähendatud funktsiooni väljendada ratsionaalselt uue inteegrimismuutuja z kaudu, s. o.

$$\int R(x,\ \sqrt[n]{ax+b})\,dx = \frac{n}{a}\int R\left(\frac{z^n - b}{a},\ z\right) z^{n-1}dz,$$

kus R on z suhtes ratsionaalne funktsioon.

Kui näiteks integraalis

$$\int \frac{x+3\sqrt[3]{x+2}}{x-3\sqrt[3]{x+2}}\,dx$$

tähistame

$$x+2=z^3,$$

millest

$$dx=3z^2dz,$$

siis

$$\int \frac{x+3\sqrt[3]{x+2}}{x-3\sqrt[3]{x+2}}dx=3\int \frac{z^5+3z^3-2z^2}{z^3-3z-2}\,dz=$$

$$=3\int\left(z^2+6+\frac{18z+12}{z^3-3z-2}\right)dz=$$

$$=3\int(z^2+6)\,dz+\int\left(\frac{16}{z-2}-\frac{16}{z+1}+\frac{6}{(z+1)^2}\right)dz=$$

$$=z^3+18z+16\ln\left|\frac{z-2}{z+1}\right|-\frac{6}{z+1}+c=$$

$$=x+2+18\sqrt[3]{x+2}+16\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x+2}-2}{\sqrt[3]{x+2}+1}\right|-\frac{6}{\sqrt[3]{x+2}+1}+c.$$

3) Kui inteegritavas funktsioonis $f(x)$ irratsionaalne osa esineb kujul $\sqrt{x^2+px+q}$, s. o.

$$f(x)=R(x,\ \sqrt{x^2+px+q}),$$

siis võime inteegritava funktsiooni ratsionaliseerimiseks teha asenduse

$$\sqrt{x^2+px+q}=z-x,$$

millest

$$x=\frac{z^2-q}{2z+p}\ \text{ja}\ \ dx=\frac{2(z^2+pz+q)}{(2z+p)^2}\,dz.$$

Seega

$$\sqrt{x^2+px+q}=z-x=\frac{z^2+pz+q}{2z+p}$$

ja

$$\int R(x,\ \sqrt{x^2+px+q}\,dx=2\int R\left(\frac{z^2-q}{2z+p},\ \frac{z^2+pz+q}{2z+p}\right)\frac{z^2+pz+q}{(2z+p)^2}\,dz.$$

Kui näiteks integraalis

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+2}}$$

tähistame

$$\sqrt{x^2-x+2} = z - x,$$

millest

$$x = \frac{z^2-2}{2z-1} \text{ ja } dx = \frac{2(z^2-z+2)}{(2z-1)^2}\,dz$$

ning

$$\sqrt{x^2-x+2} = z - x = \frac{z^2-z+2}{2z-1},$$

siis

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+2}} = 2\int \frac{dz}{z^2-2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{z-\sqrt{2}} - \frac{1}{z+\sqrt{2}}\right)dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}\right| + c = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+2}+x-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+2}+x+\sqrt{2}}\right| + c.$$

4) Kui inteegritavas funktsioonis $f(x)$ irratsionaalne osa esineb kujul $\sqrt{q+px-x^2}$, s. o.

$$f(x) = R(x, \sqrt{q+px-x^2}),$$

ja seejuures saame juuritava avaldise lahutada kaheks reaalseks teguriks $x-\alpha$ ja $\beta-x$ (kus α ja β on reaalsed), siis võime inteegritava funktsiooni ratsionaliseerimiseks võtta

$$\sqrt{q+px-x^2} = \sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)} = (x-\alpha)z,$$

millest

$$x = \frac{\alpha z^2+\beta}{z^2+1} \text{ ja } dx = \frac{2(\alpha-\beta)z}{(z^2+1)^2}\,dz.$$

Siis

$$\sqrt{q+px-x^2} = (x-\alpha)z = \frac{(\beta-\alpha)z}{z^2+1}$$

ja

$$\int R(x, \sqrt{q+px-x^2})\,dx =$$

$$= 2(\alpha-\beta)\int R\left(\frac{\alpha z^2+\beta}{z^2+1}, \frac{(\beta-\alpha)z}{z^2+1}\right)\frac{z}{(z^2+1)^2}\,dz.$$

Kui näiteks integraalis

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$$

tähistame

$$\sqrt{2+x-x^2} = \sqrt{(x+1)(2-x)} = (x+1)z,$$

millest

$$x = \frac{2-z^2}{z^2+1} \quad \text{ja} \quad dx = -\frac{6z\,dz}{(z^2+1)^2}$$

ning

$$\sqrt{2+x-x^2} = (x+1)z = \frac{3z}{z^2+1},$$

siis järelikult

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}} = 2\int \frac{dz}{z^2-2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}} \right| + c =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{2-x}{x+1}} - \sqrt{2}}{\sqrt{\frac{2-x}{x+1}} + \sqrt{2}} \right| + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{2x+2}}{\sqrt{2-x} + \sqrt{2x+2}} \right| + c.$$

Kui kahe viimase inteegrimisvõtte puhul juuravaldis esineb kujul $\sqrt{c+bx\pm ax^2}$, siis on seda ikka võimalik esitada $\sqrt{q+px\pm x^2}$ kaudu, s. o.

$$\sqrt{c+bx\pm ax^2} = \sqrt{a}\sqrt{\frac{c}{a}+\frac{b}{a}x\pm x^2} = \sqrt{a}\sqrt{q+px\pm x^2}.$$

5) Kui inteegritavas transtsendentses funktsioonis $f(x)$ esinevad $\sin x$ ja $\cos x$, millede suhtes $f(x)$ on ratsionaalne, s. o.

$$f(x) = R(\sin x,\ \cos x),$$

siis ratsionaliseerimiseks võtame

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z,$$

millest

$$x = 2\operatorname{arctg} z \quad \text{ja} \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}.$$

Et

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$$

ja

$$\sin\frac{x}{2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}}=\frac{z}{\sqrt{1+z^2}},$$

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+z^2}},$$

siis

$$\sin x=\frac{2z}{1+z^2},\quad \cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}.$$

Kui asendame inteegritavas avaldises $R(\sin x,\ \cos x)dx$ $\sin x$, $\cos x$ ja dx saadud väärtustega, siis muutub see avaldis z suhtes ratsionaalseks avaldiseks ning seega

$$\int R\ (\sin x,\ \cos x)dx=2\int R\left(\frac{2z}{1+z^2},\ \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\frac{dz}{1+z^2}.$$

Kui inteegritavas transtsendentses funktsioonis $f(x)$ esinevad $\operatorname{tg} x$ ja $\operatorname{ctg} x$, millede suhtes $f(x)$ on ratsionaalne, s. o.

$$f(x)=R\ (\operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x),$$

siis selle funktsiooni ratsionaliseerimist toimetame siinus- ja koosinusfunktsiooni kaudu, sest

$$R\ (\operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x)=R\left(\frac{\sin x}{\cos x},\ \frac{\cos x}{\sin x}\right).$$

Näiteks:

$$\int\frac{\cos x}{1+\cos x}dx=2\int\frac{\frac{1-z^2}{1+z^2}}{1+\frac{1-z^2}{1+z^2}}\cdot\frac{dz}{1+z^2}=\int\frac{1-z^2}{1+z^2}dz=$$

$$=\int\left(\frac{2}{1+z^2}-1\right)dz=2\operatorname{arctg} z-z+c=$$

$$=2\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+c=x-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+c,$$

sest $z=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ ja $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)=\frac{x}{2}$.

Siinjuures tuleb märkida, et mitmeid trigonomeetrilisi funktsioone saame inteegrida ilma ratsionaliseerimata, kasutades selleks teadaolevaid trigonomeetrilisi teisendusi, nagu nägime paragrahvis 73 esinevate näidete puhul, Sellest nähtub ühtlasi, et funktsiooni inteegrimine ei pruugi igakord toimuda ühe ja ainult ühe võttega. Oluline on siin see, et inteegrimine toimuks kõige lihtsama võttega ja minimaalse ajakuluga. Kindlaid fikseeritud

juhiseid on siin muidugi võimatu anda. See on praktika ja oskuse küsimus.

6) Kui meil tuleb inteegrida nn. binomiaalset diferentsiaali

$$x^m \sqrt[n]{(ax^k + b)^r}dx,$$

kus m, n, k ja r on täisarvud ning k on seejuures positiivne, siis saame kasutada inteegrimise ratsionaliseerimismeetodit: a) kui $\frac{m+1}{k}$ on täisarv või null, b) kui $\frac{m+1}{k} + \frac{r}{n}$ on täisarv või null.

Kui m ja k on murdarvud, siis, tähistades

$$x = z^\alpha, \quad dx = \alpha z^{\alpha-1}dz,$$

saame

$$x^m \sqrt[n]{(ax^k + b)^r}dx = \alpha z^{m\alpha+\alpha-1} \sqrt[n]{(az^{k\alpha} + b)^r}dz,$$

kus täisarvu α valime niisugusena, et $m\alpha$ ja $k\alpha$ oleksid täisarvud.

a) Olgu m, n, k ja r täisarvud, kusjuures k on positiivne ja $\frac{m+1}{k}$ on täisarv või null. Tähistame

$$ax^k + b = z^n,$$

millest

$$x = \left(\frac{z^n - b}{a}\right)^{\frac{1}{k}} \text{ ja } dx = \frac{n}{ak} z^{n-1} \left(\frac{z^n - b}{a}\right)^{\frac{1}{k}-1} dz.$$

Siis

$$x^m = \left(\frac{z^n - b}{a}\right)^{\frac{m}{k}} \text{ ja } \sqrt[n]{(ax^k + b)^r} = z^r$$

ning

$$\int x^m \sqrt[n]{(ax^k + b)^r}dx = \frac{n}{ak} \int z^{n+r-1} \left(\frac{z^n - b}{a}\right)^{\frac{m+1}{k}-1} dz,$$

millest nähtub, et inteegritav funktsioon on ratsionaalne, kui $\frac{m+1}{k}$ on täisarv või null.

Näiteks integraalis

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int x^3 \sqrt{(x^2+1)^{-1}}dx$$

võime inteegritava funktsiooni ratsionaliseerimiseks kasutada käesolevat võtet, sest siin $\frac{m+1}{k}$ on täisarv, s. o.

$$\frac{m+1}{k}=\frac{3+1}{2}=2.$$

Seega

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{2}{1\cdot 2}\int z^{2-1-1}\left(\frac{z^2-1}{1}\right)^{2-1}dz=$$

$$=\int(z^2-1)\,dz=\frac{z^3}{3}-z+c=\frac{\sqrt{(x^2+1)^3}}{3}-$$

$$-\sqrt{x^2+1}+c=\frac{(x^2-2)\sqrt{x^2+1}}{3}+c.$$

b) Kui $\frac{m+1}{k}+\frac{r}{n}$ on täisarv või null, siis tähistame

$$ax^k+b=z^nx^k,$$

millest

$$x=b^{\frac{1}{k}}(z^n-a)^{-\frac{1}{k}}\text{ ja }dx=-\frac{n}{k}b^{\frac{1}{k}}z^{n-1}(z^n-a)^{-\frac{1}{k}-1}dz.$$

Siis

$$x^m=b^{\frac{m}{k}}(z^n-a)^{-\frac{m}{k}},\ ax^k+b=z^nx^k=bz^n(z^n-a)^{-1}$$

ja

$$\sqrt[n]{(ax^k+b)^r}=b^{\frac{r}{n}}z^r(z^n-a)^{-\frac{r}{n}}$$

ning

$$\int x^m\sqrt[n]{(ax^k+b)^r}dx=-\frac{n}{k}b^{\frac{m+1}{k}+\frac{r}{n}}\int z^{n+r-1}(z^n-a)^{-\left(\frac{m+1}{k}+\frac{r}{n}+1\right)}dz,$$

millest nähtub, et inteegritav funktsioon on ratsionaalne, kui $\frac{m+1}{k}+\frac{r}{n}$ on täisarv või null.

Näiteks integraalis

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(x^3+3)^5}}=\int x^{-2}\sqrt[3]{(x^3+3)^{-5}}dx$$

$\frac{m+1}{k}$ ei ole täisarv ega null, kuid

$$\frac{m+1}{k}+\frac{r}{n}=\frac{-2+1}{3}-\frac{5}{3}=-2.$$

Seega käesoleva inteegritava funktsiooni ratsionaliseerimiseks saame kasutada viimast võtet, s. o.

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt[3]{(x^3+3)^5}} = -3^{-2}\int z^{3-5-1}(z^3-1)\,dz =$$

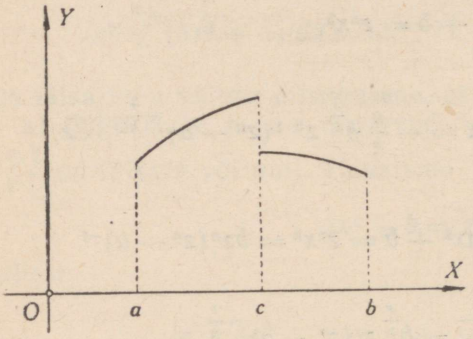
$$= -\frac{1}{9}\int (1-z^{-3})\,dz = -\frac{1}{9}\left(z+\frac{1}{2z^2}\right)+c =$$

$$= -\frac{1}{9}\left[\frac{\sqrt[3]{x^3+3}}{x}+\frac{x^2}{2\sqrt[3]{(x^3+3)^2}}\right]+c = c-\frac{x^3+2}{6x\sqrt[3]{(x^3+3)^2}}.$$

§ 79. Katkeva funktsiooni inteegrimine. Eespool funktsioonide inteegrimise puhul oletasime iga kord, et inteegritav funktsioon $f(x)$ on inteegrimisvahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ pidev. Esineb aga ka juhtumeid, kus inteegritav funktsioon $f(x)$ on vahemiku $a \leqslant x \leqslant b$ mõnes punktis katkev, mille puhul saame tõestada, et määratud integraali põhivalem

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

jääb ikkagi kehtima. Sel juhul peab aga algfunktsioon $F(x)$ olema pidev vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$.



Joon. 115.

Kui inteegritav funktsioon $f(x)$ on vahemikes $a \leqslant x < c$ ja $c < x \leqslant b$ pidev ning katkevus tekib punktis $x = c$ (joon. 115) ja seejuures integraalid

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{ja} \quad \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

lähenevad lõplikele piirväärtustele, kui positiivne arv $\varepsilon \to 0$, siis esimese integraali piirväärtuse loeme funktsiooni $f(x)$ määratud integraaliks rajades a-st c-ni, s. o.

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

ja teise integraali piirväärtuse loeme funktsiooni $f(x)$ määratud integraaliks rajades c-st b-ni, s. o.

$$\int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

Sel juhul öeldakse, et integraalid

$$\int_a^c f(x)\,dx \text{ ja } \int_c^b f(x)\,dx$$

koonduvad. Kui aga integraalid

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx \text{ ja } \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

ei oma lõplikku piirväärtust, kui $\varepsilon \to 0$, siis ütleme, et integraalid

$$\int_a^c f(x)\,dx \text{ ja } \int_c^b f(x)\,dx$$

hajuvad.

Olgu inteegritava funktsiooni $f(x)$ algfunktsioon $F(x)$ pidev vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$, kuid funktsioon $f(x)$ katkev selle vahemiku punktis $x = c$. Siis vahemikes $a \leqslant x \leqslant c - \varepsilon$ ja $c + \varepsilon \leqslant x \leqslant b$ on $f(x)$ pidev ja seega neis vahemikes on rakendatav määratud integraali põhivalem, s. o.

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx = F(c-\varepsilon) - F(a),$$

$$\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx = F(b) - F(c+\varepsilon).$$

Funktsiooni $F(x)$ pidevuse tõttu võime võtta

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} [F(c-\varepsilon) - F(a)] = F(c) - F(a),$$

$$\int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} [F(b) - F(c+\varepsilon)] = F(b) - F(c).$$

Et aga pideva $f(x)$ puhul (§ 70, p. 3)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

siis on vaadeldaval juhul loomulik lugeda, et ka

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx =$$

$$= [F(c) - F(a)] + [F(b) - F(c)] = F(b) - F(a),$$

millest nähtub, et määratud integraali põhivalem on rakendatav ka siis, kui inteegrimisvahemikus leidub punkt, milles inteegri-

tav funktsioon on katkev, kui ainult algfunktsioon jääb pidevaks vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$.

Kui inteegritav funktsioon $f(x)$ on pidev vahemikus $a < x \leqslant b$ ja katkevus tekib punktis $x = a$, siis võime analoogiliselt eelnevaga lugeda, et

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx;$$

kui inteegritav funktsioon $f(x)$ on pidev vahemikus $a \leqslant x < b$ ja katkevus tekib punktis $x = b$, siis

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx;$$

kui inteegritav funktsioon $f(x)$ on pidev vahemikus $a < x < b$ ja katkevus tekib punktides $x = a$ ja $x = b$, siis

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Neil juhtudel tuleb ikka eeldada, et ülaltähendatud integraalid koonduvad.

Kui vahemikus a-st b-ni esineb mitu katkevuspunkti, siis tuleb vahemik jaotada nii mitmeks osaks, kui palju on selles vahemikus katkevuspunkte, nii et igasse osasse jääb üks katkevuspunkt, mille kohta on kehtiv esitatud tõestus.

Tähendab, katkeva inteegritava funktsiooni puhul kehtib ikka määratud integraali põhivalem

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

kui algfunktsioon $F(x)$ on pidev vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$, kusjuures katkevuspunkti $x = c$ puhul integraalid

$$\int_a^c f(x)\,dx \text{ ja } \int_c^b f(x)\,dx$$

koonduvad.

Näiteks integraal

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^n}$$

koondub, kui $n < 1$, sest siis

$$\int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^n} = \frac{1 - \varepsilon^{1-n}}{1-n},$$

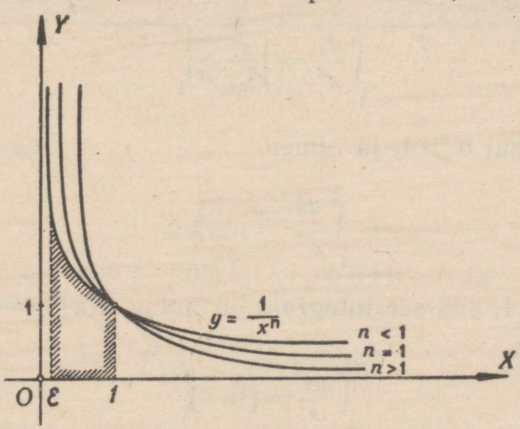
mis $n < 1$ puhul omab lõplikku piirväärtust, s. o.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^n} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^n} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1 - \varepsilon^{1-n}}{1-n} = \frac{1}{1-n}.$$

Kui aga $n > 1$, siis algfunktsioon $F(x) = \frac{x^{1-n}}{1-n}$ on katkev punktis $x = 0$ ja integraalil $\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^n}$ puudub lõplik piirväärtus, kui $\varepsilon \to 0$. Sel juhul integraal $\int_0^1 \frac{dx}{x^n}$ hajub.

Kui eelnevas integraalis $n = 1$, siis saame integraali $\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = -\ln \varepsilon$, millel puudub samuti lõplik piirväärtus, ja seega integraal $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ on hajuv.

Geomeetriliselt tähendab see, et kõveraga $y = \frac{1}{x^n}$, X-teljega ning sirgetega $x = \varepsilon$ ja $x = 1$ piiratud kujundi pindala omab $n < 1$ puhul piirväärtusena lõplikku suurust, kui $\varepsilon \to 0$ (joon. 116), kuid $n \geqslant 1$ puhul tähendatud pindala piirväärtusena ei oma lõplikku suurust, vaid kasvab piiramatult, kui $\varepsilon \to 0$.



Joon. 116.

§ 80. Päratu integraal. Eespool vaadeldud määratud integraali

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

puhul eeldasime iga kord, et inteegrimisrajad a ja b on lõplikud suurused. Mõnikord aga on võimalik teha inteegrimisrajad kuitahes suureks ja lasta neid ühes või teises suunas piiramatult kasvada, nii et $b \to +\infty$ või $a \to -\infty$ või $b \to +\infty$ ja $a \to -\infty$.

Kui määratud integraalis ülemine inteegrimisraja piiramatult kasvab, s. o. $b \to +\infty$, või alumine inteegrimisraja piiramatult kahaneb, s. o. $a \to -\infty$, siis võib see integraal omada lõplikku piirväärtust või seda mitte omada: ta võib koonduda või hajuda.

Kui määratud integraalis ülemine inteegrimisraja $b \to +\infty$ või alumine inteegrimisraja $a \to -\infty$, siis defineeritakse neid integraale järgmiste võrdustega:

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\infty f(x)\,dx, \quad \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \int_{-\infty}^b f(x)\,dx.$$

Kui aga $a \to -\infty$ ja $b \to +\infty$, siis tähistatakse

$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

mis võib samuti koonduda või hajuda. Need integraalid kujutavad endast lõpmatute inteegrimisrajadega integraale, mida nimetame lühidalt p ä r a t u t e k s i n t e g r a a l i d e k s.

Teatava inteegritava funktsiooni puhul võib lõpmatute inteegrimisrajadega integraal koonduda ja omada seega lõplikku väärtust, kuid mõne teise inteegritava funktsiooni puhul võib ta olla hajuv.

a) Integraal

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^n} = \left[\frac{x^{1-n}}{1-n}\right]_1^\infty$$

on koonduv, kui $n > 1$, ja nimelt

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{1-n}.$$

Kui aga $n < 1$, siis see integraal on hajuv. Ka $n = 1$ puhul saadav integraal

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^\infty$$

on hajuv.

Geomeetriliselt tähendab see, et pinnaosa, mis on piiratud kõveraga $y = \frac{1}{x^n}$, X-teljega ja sirgega $x = 1$ ning asetseb sellest sirgest paremal pool (joon. 116), kasvab $n > 1$ puhul pidevalt,

kui ülemine inteegrimisraja $b \to \infty$, kuid seejuures omab piirväärtusena lõplikku suurust, mille arvuline väärtus on $\frac{1}{1-n}$. Samal ajal $n \leqslant 1$ puhul tähendatud pindala piirväärtusena ei oma lõplikku suurust, vaid kasvab piiramatult, kui $b \to \infty$.

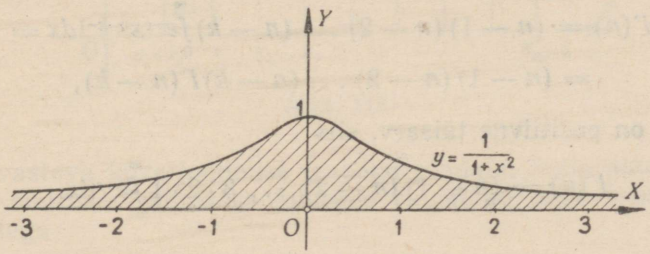
b) Integraal

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

on koonduv ja tema väärtus on π, sest

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = [\operatorname{arctg} x]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Geomeetriliselt kujutab viimane integraal kõveraga $y = \frac{1}{1+x^2}$ ja X-teljega piiratud kujundi pindala (joon. 117), mis omab piirväärtusena lõplikku suurust, kui inteegrimisrajad $a \to -\infty$ ja $b \to +\infty$. Selle pindala väärtus on π.



Joon. 117.

c) Integraali

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx$$

nimetatakse gamma-funktsiooniks ja tähistatakse sümboliga $\Gamma(n)$, s. o.

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx,$$

mis omab lõplikku väärtust $(n-1)!$, kui n on positiivne täisarv.

Inteegrime Γ-funktsioonis esinevat inteegritavat avaldist ositi, võttes

$$u = x^{n-1}, \quad dv = e^{-x} dx,$$

millest saame

$$du = (n-1)x^{n-2} dx, \quad v = -e^{-x},$$

ning seega

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx = -[e^{-x}x^{n-1}]_0^\infty + (n-1)\int_0^\infty e^{-x}x^{n-2}dx =$$

$$= (n-1)\int_0^\infty e^{-x}x^{n-2}dx,$$

sest $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{n-1}}{e^x} = 0$ ja $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^{n-1}}{e^x} = 0$, kui $n > 1$. Seega

$$\Gamma(n) = (n-1)\int_0^\infty e^{-x}x^{n-2}dx = (n-1)\Gamma(n-1).$$

Edasi, kasutades saadud võrdust kui rekurrentset valemit, leiame, et

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\int_0^\infty e^{-x}x^{n-3}dx = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2)$$

jne. Kui $0 < k < n$, siis

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\ldots(n-k)\int_0^\infty e^{-x}x^{n-k-1}dx =$$

$$= (n-1)(n-2)\ldots(n-k)\Gamma(n-k),$$

ja kui n on positiivne täisarv, siis

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\ \ldots\ 3\cdot 2\cdot 1\int_0^\infty e^{-x}dx.$$

Et

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^\infty = 1,$$

siis

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx = (n-1)!,$$

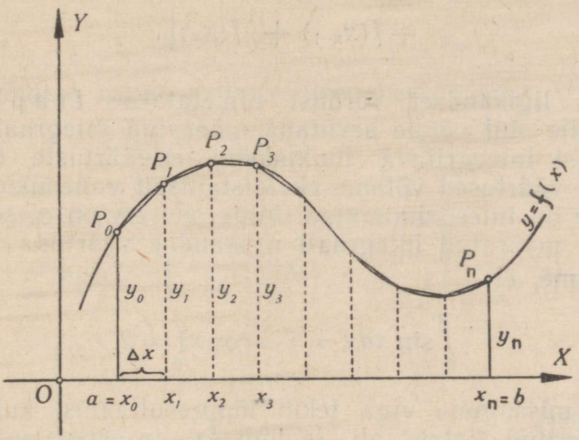
millest nähtub, et faktoriaale on võimalik esitada integraali kaudu.

§ 81. Numbriline inteegrimine. Kui määratud integraali $\int_a^b f(x)dx$ väärtust pole võimalik leida otseselt inteegrimise põhivalemite kaudu või teadaolevate inteegrimisvõtete abil, siis võib tema väärtuse otsimisel kasutada nn. n u m b r i l i s t i n t e e g r i m i s t, kus määratud integraali väärtuse asemel leitakse numbriliselt (ühe või teise arvutusvalemi järgi) tema ligikaudne väärtus, mille täpsus sõltub võetavate inteegritava funktsiooni eriväärtuste arvust ja nende täpsusest vahemikus a-st b-ni,

oletusel, et inteegrimisvahemik on lõplik ja selles vahemikus inteegritava funktsiooni iga väärtus on samuti lõplik suurus.

1) Oletame, et vahemikus a-st b-ni inteegritav funktsioon $f(x) > 0$, kusjuures $a < b$. Kui tähendatud vahemikus $f(x)$ esitab pidevat kõverat (joon. 118), siis määratud integraal

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$



Joon. 118.

esitab vastava kõverjoonelise trapetsi pindala. Selle pindala ligikaudse suuruse leidmiseks jaotame vahemiku a-st b-ni jaotuspunktidega

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}$$

n võrdseks osaks, kus iga osa

$$\Delta x = \frac{b-a}{n},$$

kusjuures $a = x_0$ ja $b = x_n$. Märgime vastavad ordinaadid

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$$

ja ühendame punktid P_0, P_1, P_2, ..., P_n sirglõikudega (kõõludega); saame n trapetsit, millede pindalade summa on

$$S_n = \frac{1}{2}(y_0 + y_1)\Delta x + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\Delta x + \ldots + \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)\Delta x =$$

$$= \left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right)\Delta x.$$

Kui võtame n küllalt suure, siis võime S_n väärtuse lugeda ligikaudu võrdseks määratud integraali väärtusega S, s. o.

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right).$$

Et

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2),\ \ldots,\ y_n = f(x_n),$$

siis

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\right].$$

Saadud ligikaudset võrdust nimetatakse trapetsvalemiks, mille abil võime arvutada määratud integraali ligikaudset väärtust inteegritava funktsiooni eriväärtuste kaudu, kui argumendi väärtused võtame ekvidistantselt vahemikus a-st b-ni, kus a ja b on inteegrimisrajad. Mida suurem on n, seda täpsem on saadav määratud integraali ligikaudne väärtus.

Me teame, et

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 2.$$

Vaatame, missugune viga tekib lõppresultaadis, kui kasutame selle määratud integraali leidmiseks trapetsvalemit, valides $n = 10$. Siis

$$\frac{b-a}{n} = \frac{\pi}{10}$$

ja argumendi x väärtuste

$$x_0 = 0°,\ x_1 = 18°,\ x_2 = 36°,\ \ldots,\ x_9 = 162°,\ x_{10} = 180°$$

puhul trapetsvalemi sulgudes [ ] esinevate funktsiooni väärtuste summa on

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}f(x_0) &= \frac{1}{2}\sin\ 0° = 0{,}0000\\
f(x_1) &= \sin\ 18° = 0{,}3090\\
f(x_2) &= \sin\ 36° = 0{,}5878\\
f(x_3) &= \sin\ 54° = 0{,}8090\\
f(x_4) &= \sin\ 72° = 0{,}9511\\
f(x_5) &= \sin\ 90° = 1{,}0000\\
f(x_6) &= \sin 108° = 0{,}9511\\
f(x_7) &= \sin 126° = 0{,}8090\\
f(x_8) &= \sin 144° = 0{,}5878\\
f(x_9) &= \sin 162° = 0{,}3090\\
\frac{1}{2}f(x_{10}) &= \frac{1}{2}\sin 180° = 0{,}0000\\
&\qquad\qquad [\,] = 6{,}3138.
\end{aligned}$$

Seega trapetsvalemi järgi integraali ligikaudne väärtus kolme kümnendkohaga on

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx \approx \frac{\pi}{10} \cdot 6{,}3138 \approx 1{,}983,$$

mis on õigest resultaadist 0,017 võrra väiksem.

2) Kui inteegritav funktsioon $f(x)$ esitab vahemikus a-st b-ni pidevat kõverat ja võrdsete osavahemike otspunktide

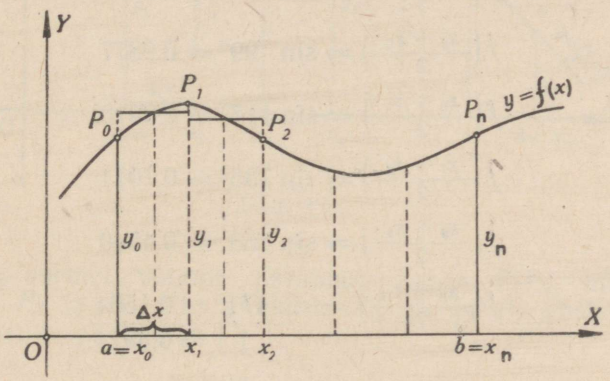
$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n$$

asemel võtame nende aritmeetilised keskmised

$$\frac{x_0+x_1}{2},\ \frac{x_1+x_2}{2},\ \ldots,\ \frac{x_{n-1}+x_n}{2}$$

ja neile abstsissidele vastavad ordinaadid

$$f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right),\ f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right),\ \ldots,\ f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right),$$



Joon. 119.

siis saame n ristkülikut (joon. 119), millede pindalade summa

$$S_n = \left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \ldots + f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\right]\Delta x,$$

kus $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Küllalt suure n puhul võime saadud S_n väärtuse kui ristkülikute pindalade summa lugeda ligikaudu võrdseks otsitava määratud integraali väärtusega S, s. o.

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \ldots + f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\right].$$

Saadud ligikaudset võrdust, mille abil võime arvutada määratud integraali ligikaudset väärtust, nimetatakse numbrilise inteegrimise r i s t k ü l i k v a l e m i k s.

Vaatame, missugune viga tekib integraali $\int_0^{\pi} \sin x dx$ arvutamisel ristkülikvalemi järgi, kui jaotame inteegrimisvahemiku samuti 10 võrdseks osaks, kus $\frac{b-a}{n} = \frac{\pi}{10}$. Et siin

$$f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) = \sin 9° = 0{,}1564$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \sin 27° = 0{,}4540$$

$$f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right) = \sin 45° = 0{,}7071$$

$$f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right) = \sin 63° = 0{,}8910$$

$$f\left(\frac{x_4+x_5}{2}\right) = \sin 81° = 0{,}9877$$

$$f\left(\frac{x_5+x_6}{2}\right) = \sin 99° = 0{,}9877$$

$$f\left(\frac{x_6+x_7}{2}\right) = \sin 117° = 0{,}8910$$

$$f\left(\frac{x_7+x_8}{2}\right) = \sin 135° = 0{,}7071$$

$$f\left(\frac{x_8+x_9}{2}\right) = \sin 153° = 0{,}4540$$

$$f\left(\frac{x_9+x_{10}}{2}\right) = \sin 171° = 0{,}1564$$

$$[\,] = 6{,}3924,$$

siis

$$\int_0^{\pi} \sin x dx \approx \frac{\pi}{10} \cdot 6{,}3924 \approx 2{,}008,$$

mis on õigest resultaadist 0,008 võrra suurem. Sellest nähtub ühtlasi, et käsitletava määratud integraali ligikaudse väärtuse leidmisel annab ristkülikvalem parema tulemuse kui trapetsvalem, mille kasutamisel tekkiv viga oli suurem.

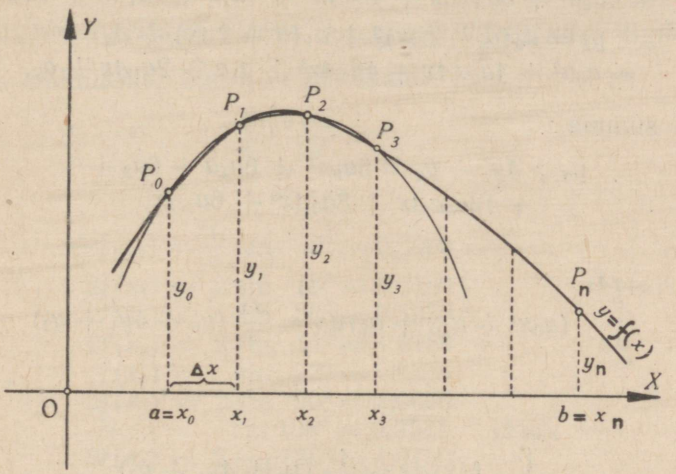
3) Kui inteegritav funktsioon $f(x)$ esitab pidevat kõverat ja selle kõvera jaotuspunktide ühendusjooned loeme mitte sirglõikudeks, nagu seda tegime trapetsvalemi puhul, vaid teist järku paraboolide kaarteks, millede sümmeetriateljed on paralleelsed Y-teljega, siis saame määratud integraali ligikaudse väärtuse

arvutamiseks valemi, mida nimetatakse Simpsoni* valemiks ehk paraboolvalemiks.

Kui parabooli sümmeetriatelg on paralleelne Y-teljega, siis parabooli võrrand üldkujul on

$$y = a_0x^2 + a_1x + a_2.$$

Kujundame parabooli nii, et ta läbib kõvera $y = f(x)$ kolm jaotuspunkti, näiteks P_0, P_1 ja P_2 (joon. 120). Kõvera $y = f(x)$



Joon. 120.

kaare P_0P_2 asemel võtame parabooli kaare P_0P_2, mis läbib punkte P_0, P_1 ja P_2. Kui punktide P_0, P_1 ja P_2 abstsissid on vastavalt x_0, x_1 ja x_2, kus

$$x_0 = a,$$
$$x_1 = a + \Delta x,$$
$$x_2 = a + 2\Delta x,$$

siis X-telje ja parabooli vahelise kujundi pindala rajades a-st $(a + 2\Delta x)$-ni on

$$\int_a^{a+2\Delta x} (a_0x^2 + a_1x + a_2)\,dx = \left[\frac{a_0x^3}{3} + \frac{a_1x^2}{2} + a_2x\right]_a^{a+2\Delta x} =$$

$$= \frac{\Delta x}{3}\,(6a_0a^2 + 6a_1a + 6a_2 + 12a_0a\Delta x + 8a_0\Delta x^2 + 6a_1\Delta x),$$

kus viimane sulgavaldis on sama mis $y_0 + 4y_1 + y_2$, sest parabool läbib punkte P_0, P_1 ja P_2, millede vastavad koordinaadid

* Th. Simpson (1710—1761) — inglise matemaatik.

(a, y_0), $(a+\Delta x, y_1)$ ja $(a+2\Delta x, y_2)$ peavad rahuldama parabooli võrrandit

$$y = a_0x^2 + a_1x + a_2,$$

s. o.

$$y_0 = a_0a^2 + a_1a + a_2,$$
$$4y_1 = 4[a_0(a+\Delta x)^2 + a_1(a+\Delta x) + a_2] =$$
$$= 4a_0a^2 + 8a_0a\Delta x + 4a_0\Delta x^2 + 4a_1a + 4a_1\Delta x + 4a_2,$$
$$y_2 = a_0(a+2\Delta x)^2 + a_1(a+2\Delta x) + a_2 =$$
$$= a_0a^2 + 4a_0a\Delta x + 4a_0\Delta x^2 + a_1a + 2a_1\Delta x + a_2,$$

millede summa

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 6a_0a^2 + 6a_1a + 6a_2 +$$
$$+ 12a_0a\Delta x + 8a_0\Delta x^2 + 6a_1\Delta x.$$

Seega

$$\int_a^{a+2\Delta x} (a_0x^2 + a_1x + a_2)\,dx = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

ehk

$$\int_a^{a+2\Delta x} f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Edasi kujundame läbi punktide P_2, P_3 ja P_4 parabooli ja analoogiliselt arvutades saame

$$\int_{a+2\Delta x}^{a+4\Delta x} f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

ning jätkates

$$\int_{a+4\Delta x}^{a+6\Delta x} f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_4 + 4y_5 + y_6)$$

jne. Kui võtame n paarisarvuna, s. o. $n = 2k$, siis

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots +$$
$$+ 2y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{b-a}{2k}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) +$$
$$+ 4f(x_3) + 2f(x_4) + \ldots + 2f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})]$$

ehk

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{2}{3}\cdot\frac{b-a}{2k}\left[\frac{1}{2}f(x_0)+2f(x_1)+f(x_2)+\right.$$

$$\left.+2f(x_3)+f(x_4)+\ldots+f(x_{2k-2})+2f(x_{2k-1})+\frac{1}{2}f(x_{2k})\right],$$

mis on eespoolnimetatud Simpsoni valem ehk paraboolvalem.

Kasutades paraboolvalemit integraali $\int_0^{\pi}\sin x\,dx$ ligikaudse väärtuse leidmiseks, kui $n=10$, saame

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{b-a}{2k}=\frac{\pi}{15}$$

ja

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}f(x_0) &= \frac{1}{2}\sin\ 0^\circ = 0{,}0000\\
2f(x_1) &= 2\sin 18^\circ = 0{,}6180\\
f(x_2) &= \sin 36^\circ = 0{,}5878\\
2f(x_3) &= 2\sin 54^\circ = 1{,}6180\\
f(x_4) &= \sin 72^\circ = 0{,}9511\\
2f(x_5) &= 2\sin 90^\circ = 2{,}0000\\
f(x_6) &= \sin 108^\circ = 0{,}9511\\
2f(x_7) &= 2\sin 126^\circ = 1{,}6180\\
f(x_8) &= \sin 144^\circ = 0{,}5878\\
2f(x_9) &= 2\sin 162^\circ = 0{,}6180\\
\frac{1}{2}f(x_{10}) &= \frac{1}{2}\sin 180^\circ = 0{,}0000\\
\hline
[\,] &= 9{,}5498
\end{aligned}$$

ning

$$\int_0^{\pi}\sin x\,dx \approx \frac{\pi}{15}\cdot 9{,}5498 \approx 2{,}0001,$$

kus viga on 0,0001. Saadud tulemusest nähtub, et käsitletava määratud integraali ligikaudse väärtuse leidmisel numbrilise inteegrimise teel annab paraboolvalemi kasutamine ühe ja sama jaotuspunktide arvu puhul parema tulemuse kui trapets- ja ristkülikvalemi kasutamine.

4) Määratud integraali ligikaudset arvutamist võime teostada ühe, teise või kolmanda numbrilise inteegrimise valemi järgi, kui inteegrimisrajad ei ole lõpmatud ja kui inteegrimispiirkonnas ühegi argumendi väärtuse puhul inteegritav funktsioon ei saa lõpmatuks. Vastasel korral tuleb integraali teisendada nõnda, et inteegrimisrajad oleksid lõplikud suurused ja inteegritav funkt-

sioon inteegrimispiirkonnas ühegi argumendi väärtuse puhul ei muutuks lõpmatuks. Niisugune integraal on näiteks

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \pi,$$

milles ülemine inteegrimisraja on lõpmatus ja inteegritav funktsioon saab argumendi väärtuse $x = 0$ puhul lõpmatuks.

Et seda integraali lõpmatust rajast vabastada, selleks jaotame ta kaheks integraaliks:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} + \int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}},$$

kus viimases integraalis võtame uueks muutujaks $x = \frac{1}{z}$, millest $dx = -\frac{dz}{z^2}$, ning uued inteegrimisrajad on: kui $x = 1$, siis $z = \frac{1}{x} = 1$, ja kui $x = \infty$, siis $z = \frac{1}{x} = 0$. Saame

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = -\int_1^0 \frac{dz}{(1+z)\sqrt{z}} = \int_0^1 \frac{dz}{(1+z)\sqrt{z}}.$$

Et

$$\int_0^1 \frac{dz}{(1+z)\sqrt{z}} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}},$$

siis seega

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 2\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

Et inteegritav funktsioon ei muutuks argumendi väärtuse $x = 0$ puhul lõpmatuks, selleks inteegrime teda ositi, võttes

$$u = \frac{1}{1+x}, \quad dv = \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

milledest

$$du = -\frac{dx}{(1+x)^2}, \quad v = 2\sqrt{x},$$

ning seega

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \left[\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+x)^2} = 1 + 2\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+x)^2}$$

ja

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 2 + 4\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+x)^2},$$

milles pole enam tähendatud takistust.

Viimati saadud integraali ligikaudse väärtuse leidmiseks võime nüüd kasutada üht, teist või kolmandat numbrilise inteegrimise valemit.

Kasutame Simpsoni valemit. Võtame $n = 2k = 8$. Siis

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{b-a}{2k} = \frac{1}{12}$$

ja argumendi väärtused on

$$x_0 = 0;\ x_1 = 0{,}125;\ x_2 = 0{,}25;\ x_3 = 0{,}375;\ x_4 = 0{,}5;$$
$$x_5 = 0{,}625;\ x_6 = 0{,}75;\ x_7 = 0{,}875;\ x_8 = 1.$$

Simpsoni valemi järgi

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+x)^2} \approx \frac{1}{12} \cdot \left(0 + 2 \cdot \frac{\sqrt{0{,}125}}{1{,}125^2} + \frac{\sqrt{0{,}25}}{1{,}25^2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{0{,}375}}{1{,}375^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{0{,}5}}{1{,}5^2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{0{,}625}}{1{,}625^2} + \frac{\sqrt{0{,}75}}{1{,}75^2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{0{,}875}}{1{,}875^2} + \frac{1}{8}\right) \approx \frac{1}{12} \cdot 3{,}424 \approx 0{,}2853$$

ja otsitav integraali ligikaudne väärtus on seega

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \approx 2 + 4 \cdot 0{,}2853 \approx 3{,}141.$$

§ 82. Graafiline inteegrimine. Võtame muutuva ülemise rajaga integraali

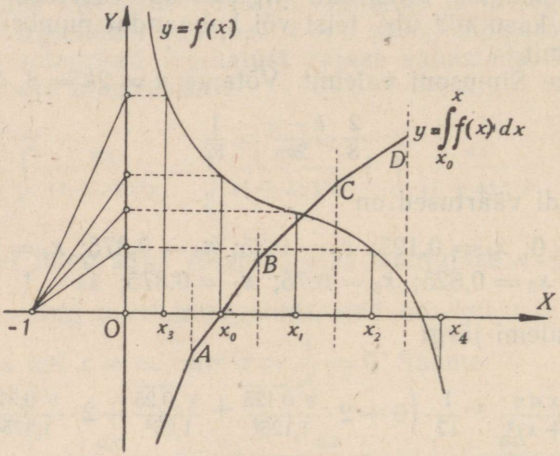
$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} F'(x)\,dx = F(x) - F(x_0),$$

kus alumiseks rajaks on konstantne suurus x_0. See integraalfunktsioon esitab graafiliselt üht ja ainult üht integraalkõverat, mis lõikab X-telge punktis x_0. Kui aga tähendatud integraalfunktsioon pole teada, siis võime temale vastava integraalkõvera otsimisel kasutada nn. graafilist inteegrimist, mille puhul leiame graafiliselt otsitava integraalkõvera ligikaudse kuju.

Joonestame inteegritavale funktsioonile $f(x)$ vastava graafiku (joon. 121). Et integraalfunktsioon tähendab geomeetriliselt integraalkõvera ordinaati punktis x (§ 67), kus puutuja moodustab X-telje positiivse suunaga nurga α nõnda, et $\operatorname{tg}\alpha = f(x)$, siis

otsitava integraalkõvera tõus igas punktis x võrdub funktsiooni $f(x)$ vastava väärtusega.

Võtame X-teljel peale punkti x_0 vabalt veel punktid x_1, x_2, x_3, ..., milledes $f(x)$ on määratud, ja tõmbame nende punktide vaheliste lõikude keskpunktidest Y-teljega paralleelsed sirged. Läbi punkti x_0 joonestame sirglõigu AB nõnda, et tema tõus oleks



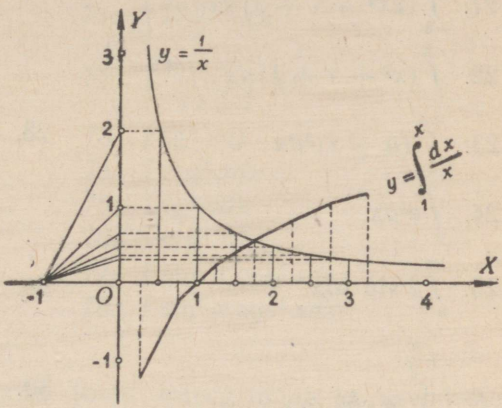
Joon. 121.

$f(x_0)$. Edasi joonestame punktist B sirglõigu BC nõnda, et tema tõus oleks $f(x_1)$; punktist C joonestame sirglõigu CD nõnda, et tema tõus oleks $f(x_2)$. Analoogiliselt jätkates saame otsitava integraalkõvera ligikaudset kuju esitava murdjoone, mis lõikab X-telge punktis x_0. Mida tihedamalt võtame punktid x_1, x_2, x_3, ..., seda täpsemalt saame integraalkõvera ligikaudse kuju.

Integraalfunktsioonile $\int_{x_0}^{x} f(x)dx$ vastava integraalkõvera, mis läbib punkti $(x_0; 0)$, ligikaudse kuju võime leida konstruktiivsel teel järgmiselt. Kui jaotuspunktidest x_0, x_1, x_2, ... tõmmatud ordinaadid $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... projektime Y-teljele ja ühendame iga projektsiooni otspunkti $[0; f(x_0)]$, $[0; f(x_1)]$, $[0; f(x_2)]$, ... punktiga $(-1; 0)$, siis saame sirglõigud, mille tõusud on võrdsed integraalkõvera $y = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$ tõusudega vastavalt punktides x_0, x_1, x_2, ... Saadud sirglõike rööplükkega üle viies võime eespoolesitatud võttega joonestada integraalkõvera ligikaudse kuju.

Võtame näiteks integraalfunktsiooni $\int_{1}^{x} \frac{dx}{x}$, millele vastav integraalkõver lõikab X-telge punktis $x = 1$. Selle integraal-

kõvera ligikaudse kuju leidmiseks joonestame inteegritavale funktsioonile $y = \frac{1}{x}$ vastava kõvera (joon. 122), võtame jaotuspunktideks $x = 0{,}5;\ 1;\ 1{,}5;\ 2;\ \ldots$ ja tõmbame vastavad ordinaadid $f(0{,}5)$ $f(1)$, $f(1{,}5)$, $f(2)$, ..., mille projektsioonide otspunktid Y-teljel on $[0;\ f(0{,}5)]$, $[0;\ f(1)]$, $[0;\ f(1{,}5)]$, $[0; f(2)]$, ... Ühendades need punktid punktiga $(-1;\ 0)$, saame sirglõigud, mis määravad integraalkõvera $y = \int_1^x \frac{dx}{x}$ tõusu punktides $x = 0{,}5;\ 1;\ 1{,}5;\ 2, \ldots$, mille järgi joonestame tähendatud integraalkõvera ligikaudse graafiku.



Joon. 122.

§ 83. Harjutusülesandeid.

Leida määramata integraalid:

1. $\int x^3 dx$
2. $\int 12x^5 dx$
3. $\int \frac{dx}{x^3}$
4. $\int \sqrt{x}\,dx$
5. $\int (5x^4 - 3x + 2)\,dx$
6. $\int \left(\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} - \frac{4}{x^4}\right) dx$
7. $\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$
8. $\int (3^x + 3x^2)\,dx$
9. $\int (1 - x)(1 - 2x)\,dx$
10. $\int (a - x)^3 dx$
11. $\int \frac{4x^5 - 5x^2 + 3}{2x^2} dx$
12. $\int \frac{(x-2)^2}{4x^4} dx$
13. $\int \frac{(x^2-1)^3}{x} dx$
14. $\int \frac{3 + 5\sqrt[3]{x^2}}{x\sqrt{x}} dx$
15. $\int (5\cos x - 2\sin x)\,dx$
16. $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{3}{\sin^2 x}\right) dx$
17. $\int \frac{a\sin^3 x - b\sin^2 x + c}{\sin^2 x} dx.$

Leida määratud integraalid:

18. $\int_1^2 4x\,dx$
19. $\int_0^2 5x^3 dx$

20. $\int_0^a ax^4 dx$

21. $\int_{-3}^{2} (2x^2 - x + 3)\,dx$

22. $\int_0^2 (x^2 + x + 1)\,dx$

23. $\int_{-a}^{+a} (a + x)^2 dx$

24. $\int_0^1 e^x dx$

25. $\int_0^{\pi} 2 \sin x dx$

26. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} a \cos x dx$

27. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$

28. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

29. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)\,dx$

30. $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Leida määramata integraalid (ositi inteegrimise ja asendusmeetodi abil):

31. $\int \frac{dx}{(a + x)^2}$

32. $\int \frac{dx}{(m - nx)^3}$

33. $\int \frac{dx}{\sin^2 4x}$

34. $\int x \sin (a^2 + x^2)\,dx$

35. $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx$

36. $\int \frac{x dx}{x^4 + 1}$

37. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^6}}$

38. $\int e^{-x} dx$

39. $\int x e^{-k^2 x^2} dx$

40. $\int \frac{x^2 dx}{(1 + x^2)^2}$

41. $\int \sqrt{a^2 - b^2 x^2} dx$

42. $\int a^x (1 + a^x)\,dx$

43. $\int (x + 1) e^{5x} dx$

44. $\int x^2 e^{x^3} dx$

45. $\int \frac{e^x}{a + e^x} dx$

46. $\int e^x \sqrt{1 + e^x} dx$

47. $\int \frac{e^x dx}{(e^x - 1)^2}$

48. $\int \frac{\ln x}{x} dx$

49. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$

50. $\int x^2 e^x dx$

51. $\int x^3 e^x dx$

52. $\int x^4 e^x dx$

53. $\int \arcsin x dx$

54. $\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx$

55. $\int \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x^2} dx$

56. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 + x^2}}$

57. $\int \operatorname{arctg} x dx$
58. $\int \operatorname{arcctg} x dx$
59. $\int x^2 \ln x dx$
60. $\int \ln^2 x dx$
61. $\int e^x \cos x dx$
62. $\int \frac{e^{2x} dx}{e^x + 1}$
63. $\int a^x e^x dx$
64. $\int e^{\sin x} \cos x dx$
65. $\int a^{\cos x} \sin x dx$
66. $\int e^{2 \cos x} \sin x dx$
67. $\int \sin mx \cos nx dx$
68. $\int \sin mx \sin nx dx$
69. $\int x \operatorname{arctg} x dx$
70. $\int \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx$
71. $\int \frac{\ln \ln x}{x} dx$
72. $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}} dx$
73. $\int \operatorname{tg}^3 x dx$
74. $\int \operatorname{ctg}^3 x dx$
75. $\int \operatorname{tg}^4 x dx$
76. $\int \operatorname{ctg}^4 x dx$
77. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$
78. $\int \sin^5 x \cos^4 x dx.$

Leida määratud integraalid (ositi inteegrimise ja asendusmeetodi abil):

79. $\int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx$
80. $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
81. $\int_{-2}^{+2} \sqrt[3]{9 - 2x} dx$
82. $\int_{-1}^{+1} \frac{x dx}{(9 - x^2)^2}$
83. $\int_1^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$
84. $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{3x + 2}}$
85. $\int_{-a}^{+a} \frac{dx}{\sqrt[3]{(a - x)^2}}$
86. $\int_1^4 \frac{x dx}{\sqrt{2 + 4x}}$
87. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^6}}$
88. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$
89. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt[3]{\sin x} dx$
90. $\int_{\frac{\pi}{3}}^0 \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$
91. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 (\pi - 5x)}$
92. $\int_0^{\pi} \sin x \cos^2 x dx$
93. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \cos x}$
94. $\int_0^1 \ln (1 + x^2) dx.$

Leida ratsionaalsete murdfunktsioonide integraalid:

95. $\int \frac{x+13}{x^2-4x-5}\,dx$

96. $\int \frac{x^4 dx}{x^2-5x+6}$

97. $\int \frac{x+6}{x^2-3}\,dx$

98. $\int \frac{2x^4-10x^3+21x^2-20x+5}{x^2-3x+2}\,dx$

99. $\int \frac{x^2+1}{x^3+3x^2+2x}\,dx$

100. $\int \frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x}\,dx$

101. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$

102. $\int \frac{x^4 dx}{x^3+2x^2-x-2}$

103. $\int \frac{17x^2-x-26}{(x^2-1)(x^2-4)}\,dx$

104. $\int \frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}\,dx$

105. $\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}\,dx$

106. $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3}\,dx$

107. $\int \frac{x^3+3x+4}{(x^2-1)^2}\,dx$

108. $\int \frac{x^2+3x+4}{(x-1)^2(x+1)^2}\,dx$

109. $\int \frac{3x^2+1}{(x-1)^3(x+1)^2}\,dx$

110. $\int \frac{dx}{x^2(x^2-1)}$

111. $\int \frac{2x-20}{x^2-8x+25}\,dx$

112. $\int \frac{3x+4}{x^2+4x+8}\,dx$

113. $\int \frac{6x}{x^2+4x+13}\,dx$

114. $\int \frac{x+6}{x^2+3}\,dx$

115. $\int \frac{27x^6}{3x^2+2}\,dx$

116. $\int \frac{x-1}{x^3+1}\,dx$

117. $\int \frac{2x^2-x-2}{(x-3)(x^2+x+1)}\,dx$

118. $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}\,dx$

119. $\int \frac{dx}{x(x+1)(x^2+1)}$

120. $\int \frac{x^3+1}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx$

121. $\int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}\,dx$

122. $\int \frac{x^3+2x^2+5x+3}{(x^2+1)^2}\,dx$

123. $\int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)(x^2+3)}$

124. $\int \frac{10x^3+110x+400}{(x^2-4x+29)(x^2-2x+5)}\,dx.$

Leida integraalid (ratsionaliseerimismeetodi abil):

125. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}$

126. $\int \frac{dx}{\sqrt[8]{x^5}-\sqrt[8]{x}}$

127. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}$

128. $\int \frac{x dx}{\sqrt{(2x+3)^3}}$

129. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx$

130. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$

131. $\int x \sqrt[4]{x-2}\,dx$

132. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\,dx$

133. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$

134. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x^2}\,dx$

135. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$

136. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}$

137. $\int \frac{xdx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$

138. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$

139. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$

140. $\int \frac{dx}{5-4\cos 2x}$

141. $\int \frac{\sin x dx}{1+\sin x}$

142. $\int x^3 \sqrt{x^2+1}dx$

143. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(x^2+1)^3}}$

144. $\int x^3 \sqrt{(2x^2+1)^3}dx.$

Leida päratud integraalid:

145. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$

146. $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

147. $\int_0^\infty xe^{-x}dx$

148. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a^2+x^2}$

149. $\int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

150. $\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx.$

151. Arvutada trapetsvalemiga $\int_{0,2}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x^2}}$, jaotades inteegrimisvahemiku 10 osaks.

152. Arvutada trapetsvalemiga $\int_0^{1,8} e^{-x^2}dx$, jaotades inteegrimisvahemiku 6 osaks.

153. Arvutada trapetsvalemiga $\int_0^{1,2} e^{-(0,25+x^2)}dx$, jaotades inteegrimisvahemiku 6 osaks.

154. Arvutada ristkülikvalemiga $\int_0^{1,6} \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{x^2+3x+3}}$, jaotades inteegrimisvahemiku 8 osaks.

155. Arvutada ristkülikvalemiga $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\cos^2 x}\,dx$, jaotades inteegrimisvahemiku 10 osaks.

156. Arvutada paraboolvalemiga $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{2+x+x^2}}$, jaotades inteegrimisvahemiku 8 osaks.

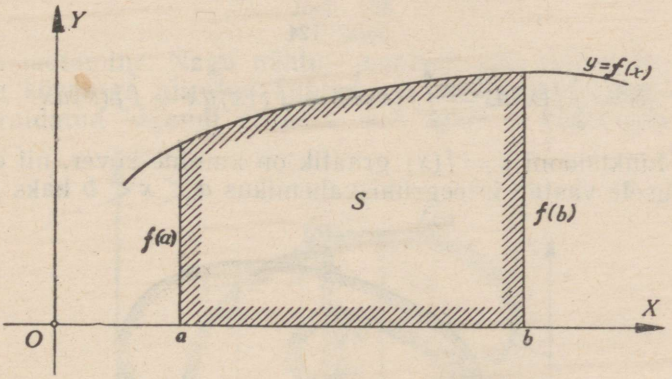
157. Arvutada paraboolvalemiga $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$, jaotades inteegrimisvahemiku 10 osaks.

158. Arvutada paraboolvalemiga $\int_0^{1,2} \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$, jaotades inteegrimisvahemiku 6 osaks.

VII peatükk

INTEGRAALI RAKENDUSI

§ 84. Kvadratuur. 1) Pideva kõveraga $y = f(x)$ ja X-teljega ning ordinaatidega $f(a)$ ja $f(b)$ piiratud kõverjoonelise trapetsi (joon. 123) pindala S võime leida, nagu paragrahvis 69 nägime, määratud integraali



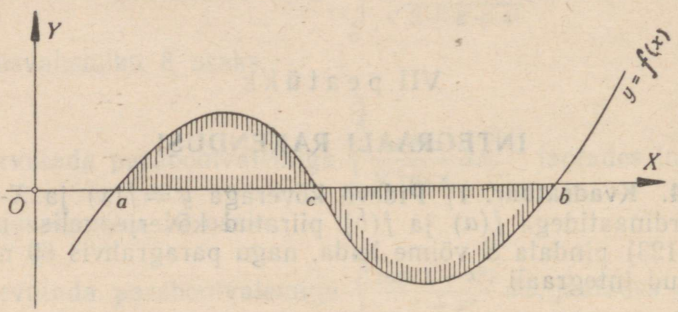
Joon. 123.

$$S = \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

abil, mille väärtus sõltub inteegrimisvahemiku otspunktidest $x = a$ ja $x = b$. Niisugust pindala arvutamist nimetatakse kvadratuuriks ja see toimub kõverat esitava funktsiooni $f(x)$ inteegrimise kaudu. Siin inteegritav funktsioon $f(x)$ peab olema pidev vahemikus a-st b-ni, kuid funktsiooni $f(x)$ diferentsitavus pole oluline.

Kui vahemikus a-st b-ni kõver asetseb ülalpool X-telge, siis on selles vahemikus $f(x) > 0$ ja pindala S saame positiivse suurusena. Asetseb aga vahemikus a-st b-ni kõver allpool X-telge, siis on tähendatud vahemikus $f(x) < 0$ ja pindala S väljendub negatiivse suurusena, mille absoluutväärtuse leidmiseks võime vahetada inteegrimisrajad.

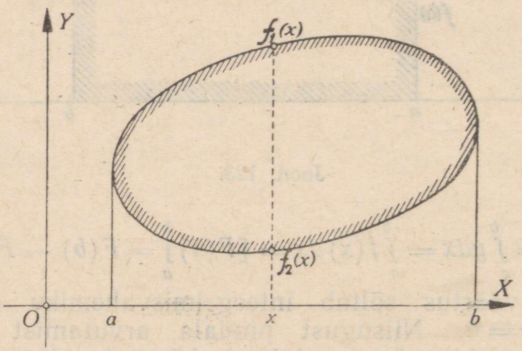
Kui vahemikus a-st b-ni kõvera mõni osa asetseb ülalpool X-telge ja mõni osa allpool X-telge, siis tuleb inteegrimisvahemik jaotada kõvera ja X-telje lõikepunktidega osavahemikeks ja valida inteegrimisrajad neis osavahemikes nõnda, et integraalide summa esitaks otsitava pindala absoluutväärtust. Joonisel 124 esitatud kõvera $y = f(x)$ ja X-telje vahelise kujundi pindala vahemikus a-st b-ni saame seega määrata järgmiselt:



Joon. 124.

$$S = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Kui funktsiooni $y = f(x)$ graafik on kinnine kõver, nii et igale x väärtusele vastab inteegrimisvahemikus $a < x < b$ kaks y väär-



Joon. 125.

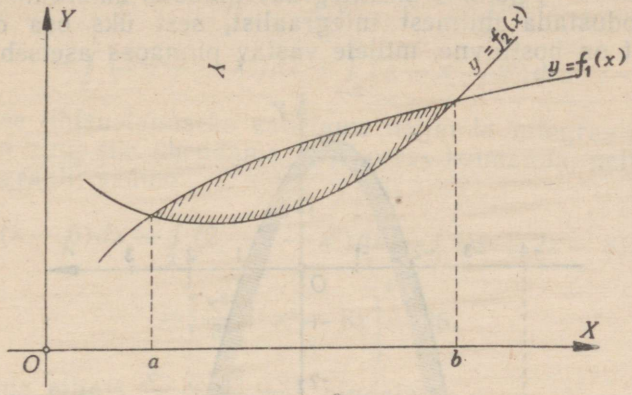
tust $f_1(x)$ ja $f_2(x)$ (joon. 125), kusjuures $f_1(x) > f_2(x)$, siis kõveraga piiratud kujundi pindala

$$S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,dx,$$

kus inteegrimisrajad a ja b on võrrandi $f_1(x) = f_2(x)$ lahendid, sest inteegrimisrajadel ordinaadid ühtivad. Sama valem kehtib

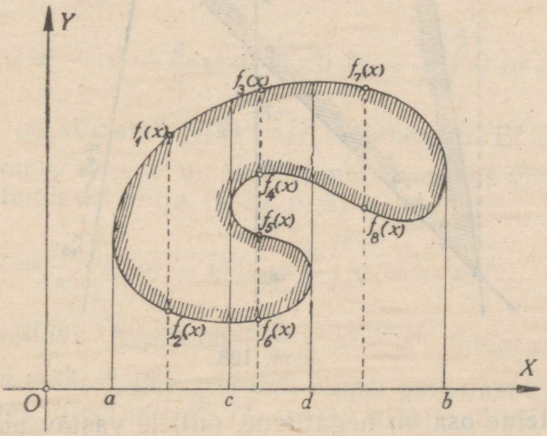
ka punktides a ja b lõikuvate kõveratega $y = f_1(x)$ ja $y = f_2(x)$ piiratud kujundi pindala määramisel (joon. 126).

Kui inteegrimisvahemikus mõnele x väärtusele vastab rohkem kui kaks y väärtust, siis on vajalik inteegrimisvahemiku otstarbe-



Joon. 126.

kohane jaotamine. Nagu nähtub jooniselt 127, millel on esitatud kinnise kõveraga piiratud kujund, on inteegrimisvahemikus a-st b-ni eraldatud kujundi see osa, kus igale x väärtusele vastab



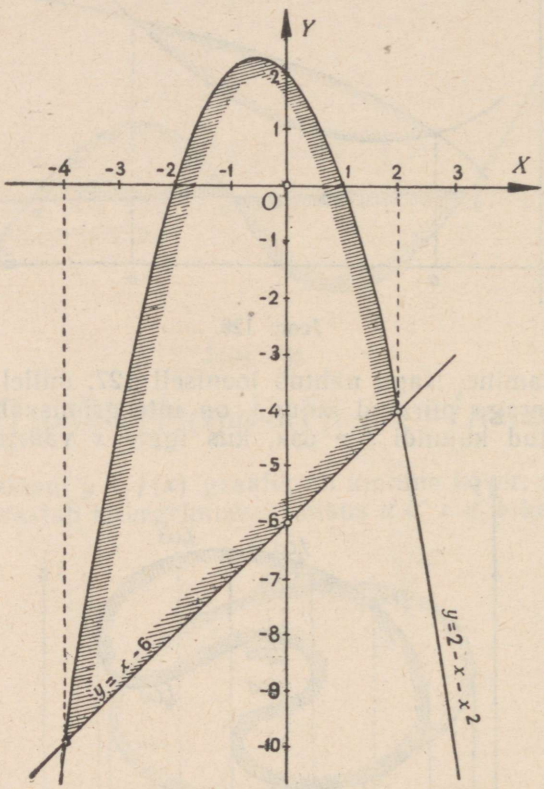
Joon. 127.

neli y väärtust, s. o. osavahemik c-st d-ni, kusjuures kogu kõveraga piiratud kujundi pindala

$$S = \int_a^c [f_1(x) - f_2(x)]dx + \int_c^d \{[f_3(x) - f_4(x)] + [f_5(x) - f_6(x)]\}dx + \int_d^b [f_7(x) - f_8(x)]dx.$$

a) Leida kõvera $y = 2 - x - x^2$ ja sirge $y = x - 6$ vahelise kujundi pindala (joon. 128).

Moodustades kõvera ja sirge võrranditest võrrandisüsteemi ning lahendades selle, leiame kõvera ja sirge lõikepunktide abstsissid $x = -4$ ja $x = 2$. Integraal pindala määramiseks tuleb siin moodustada mitmest integraalist, sest üks osa otsitavast pindalast on positiivne, millele vastav pinnaosa asetseb ülalpool



Joon. 128.

X-telge, ja teine osa on negatiivne, millele vastav pinnaosa asetseb allpool X-telge. Peale selle tuleb arvestada veel neid pinnaosi, mis asetsevad kõvera ja X-telje vahel rajades —4-st —2-ni ja 1-st 2-ni, sest kõvera lõikepunktid X-teljega on $x = -2$ ja $x = 1$. Et leida otsitava pindala absoluutväärtust, selleks tuleb leida sirge ja X-telje vahelise pinnaosa pindala rajades —4-st 2-ni, lahutada sellest kõvera ja X-telje vahel asetsevate pinnaosade pindalad rajades —4-st —2-ni ja 1-st 2-ni ning lõpuks liita sellele ülalpool X-telge asetseva kõvera ja X-telje vahelise pinnaosa pindala rajades —2-st 1-ni. Valides nüüd otsitava pindala abso-

luutväärtuse leidmiseks vastavalt inteegrimisrajad, võime kirjutada, et pindala

$$S = \int_{2}^{-4} (x-6)\,dx - \int_{-2}^{-4} (2-x-x^2)\,dx -$$

$$- \int_{2}^{1} (2-x-x^2)\,dx + \int_{-2}^{1} (2-x-x^2)\,dx.$$

Arvutamise lihtsustamiseks vahetame neljanda integraali inteegrimisrajad ning siis ühendame järjekorras kolmanda, neljanda ja teise integraali; saame

$$S = \int_{2}^{-4} (x-6)\,dx - \int_{2}^{-4} (2-x-x^2)\,dx = \int_{2}^{-4} (x^2+2x-8)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - 8x\right]_{2}^{-4} = 36.$$

b) Leida ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ pindala. *

Et ellips on kinnine kõver, mille puhul

$$f_1(x) = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\ f_2(x) = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

siis pindala

$$S = \int_{-a}^{a} \left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right) dx = \frac{2b}{a}\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx,$$

kus $-a$ ja a on võrrandi $f_1(x) = f_2(x)$ lahendid. Et siin inteegritav funktsioon $\sqrt{a^2-x^2}$ on paarisfunktsioon, siis võime inteegrimise lihtsustamiseks võtta (§ 70, p. 5)

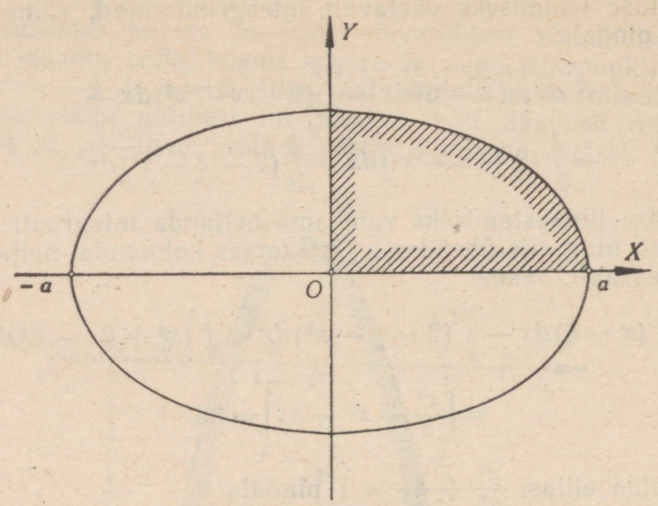
$$S = \frac{2b}{a}\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{4b}{a}\int_{0}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx,$$

kus ellipsit esitava funktsiooni $\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ integraal rajades $x=0$ ja $x=a$ määrab ühe veerandi ellipsi pindalast (joon. 129). Kasutades ringi integraali (§ 74, p. 7), leiame ellipsi kogupindala

$$S = \frac{4b}{a}\int_{0}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{4b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right]_{0}^{a} = \pi ab,$$

---

* Nii ellipsi kui ka iga teise kinnise kõvera (nagu kardioid, astroid, lemniskaat jne.) nimetuse all mõistetakse tavaliselt ka selle kinnise kõveraga piiratud kujundit. Seepärast kasutame siin ja edaspidi ütluse «ellipsiga piiratud kujundi pindala» asemel lühidalt «ellipsi pindala». Analoogiliselt toimime ka ruumikujundite puhul, kus näiteks ellipsoidi all mõistame nii pindala kui ka keha, mille puhul ütleme «ellipsoidi pindala» ja ellipsoidi ruumala».



Joon. 129.

millest nähtub, et ellipsi pindala on võrdne π-kordse pooltelgede korrutisega.

2) Kui kõver on antud parameetriliste võrranditega

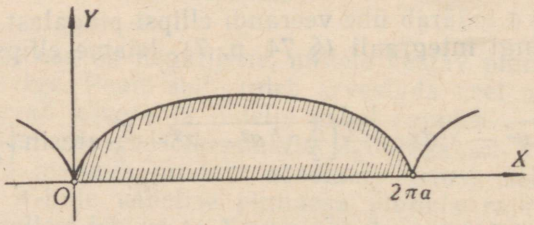
$$x = x(t),\ y = y(t),$$

kus t on parameetriks, siis $dx = \dot{x}dt$ ja pindala valem $S = \int_a^b y dx$ saab kuju

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y\dot{x}dt,$$

kus inteegrimisrajad t_1 ja t_2 on määratud võrdustega

$$a = x(t_1),\ b = x(t_2),$$



Joon. 130.

kusjuures punkt (x, y) moodustab vahemikus a-st b-ni kõvera kaare, kui t omandab pidevalt väärtusi t_1-st t_2-ni.

Et leida näiteks tsükloidi (§ 13)

$$x = a\,(t - \sin t),\quad y = a(1 - \cos t)$$

ühe haru ja X-telje vahelise kujundi pindala (joon. 130), selleks võtame

$$\dot{x} = a(1 - \cos t)$$

ja inteegrimisrajadeks $t = 0$ ja $t = 2\pi$. Siis pindala

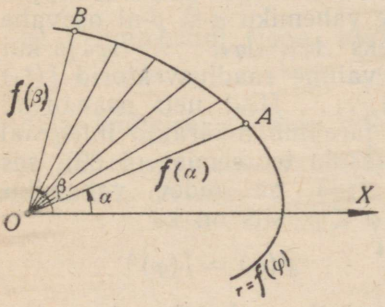
$$S = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dx = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,dt =$$

$$= a^2 \left[t - 2\sin t + \frac{t + \sin t \cos t}{2} \right]_0^{2\pi} = 3\pi a^2,$$

sest (§ 73, p. 8 järgi)

$$\int \cos^2 t dt = \frac{t + \sin t \cos t}{2} + c.$$

Nagu tulemusest nähtub, on saadud pindala võrdne tsükloidi moodustava ringi kolmekordse pindalaga.



Joon. 131.

3) Kui kõver on antud polaarvõrrandiga $r = f(\varphi)$, kus r ja φ on muutuvad polaarkoordinaadid, kusjuures $f(\varphi)$ on vaadeldavas vahemikus ühene ja pidev funktsioon, siis vaatleme pinnaosa kõvera $f = f(\varphi)$ ja kahe raadiusvektori OA ja OB vahel (joon. 131), millede polaarnurgad olgu vastavalt α ja β ning seega raadiusvektorid $OA = f(\alpha)$ ja $OB = f(\beta)$, kusjuures $\alpha < \beta$.

Et saada sektori OAB pindala arvutamiseks valemit, selleks jaotame tähendatud sektori raadiusvektoritega n osasektoriks nõnda, et raadiusvektorid moodustavad polaarteljega OX nurgad

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_{n-1},$$

kus

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta$$

ja raadiusvektorite-vahelised nurgad kui osavahemikud on

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \Delta\varphi_1,\ \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n - \varphi_{n-1} = \Delta\varphi_n.$$

Valime nurgad

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n$$

nõnda, et ξ_1 oleks nurk polaartelje ja esimeses osasektoris võetud raadiusvektori $f(\xi_1)$ vahel, ξ_2 oleks nurk polaartelje ja teises

osasektoris võetud raadiusvektori $f(\xi_2)$ vahel jne., ξ_n oleks nurk polaartelje ja viimases osasektoris võetud raadiusvektori $f(\xi_n)$ vahel, s. o. nõnda, et iga $\varphi_{k-1} \leqslant \xi_k \leqslant \varphi_k$, kus $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Raadiusvektoritega

$$f(\xi_1),\ f(\xi_2),\ \ldots,\ f(\xi_n)$$

joonestame ringi kaared ja asendame vaadeldavad osasektorid vastavate ringisektoritega (joon. 132), millede pindalad olgu

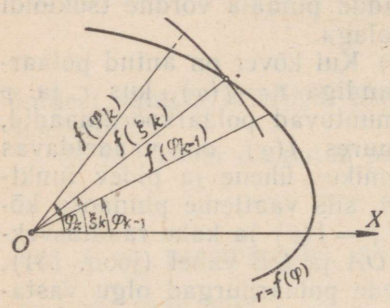
$$\Delta S_1,\ \Delta S_2,\ \ldots,\ \Delta S_n.$$

Ringisektorite pindalade summa on siis

$$S_n = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \ldots + \Delta S_n =$$

$$= \frac{1}{2} f(\xi_1)^2 \Delta\varphi_1 + \frac{1}{2} f(\xi_2)^2 \Delta\varphi_2 + \ldots + \frac{1}{2} f(\xi_n)^2 \Delta\varphi_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)^2 \Delta\varphi_k.$$

Käsitletava sektori pindala võime nüüd vaadelda kui piirväärtust, millele läheneb ringisektorite pindalade summa S_n, kui $\max \Delta\varphi_k \to 0$ ja seega $n \to \infty$. Et niisugune piirväärtus on olemas sõltumatult sellest, kuidas me jaotame vahemiku α-st β-ni osavahemikeks $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \ldots, \Delta\varphi_n$ ja kuidas valime raadiusvektorid $f(\xi_1)$, $f(\xi_2), \ldots, f(\xi_n)$ neis osavahemikes, järeldub määratud integraali olemasolu teoreemist (§ 69), sest kui $f(\varphi)$ on pidev vahemikus $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, siis on ka



Joon. 132.

$$g(\varphi) = f(\varphi)^2$$

pidev selles vahemikus ja summa

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)^2 \Delta\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k) \Delta\varphi_k$$

pole midagi muud kui funktsiooni $g(\varphi)$ integraalsumma. Järelikult saame tähendatud sektori pindala jaoks valemi määratud integraali kaudu kujul

$$S = \lim_{\max \Delta\varphi_k \to 0} S_n = \frac{1}{2} \lim_{\max \Delta\varphi_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)^2 \Delta\varphi_k =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\max \Delta\varphi_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k) \Delta\varphi_k = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} g(\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi.$$

a) Kardioidi (§ 12)

$$r = a(1 + \cos\varphi)$$

pindala leidmisel võtame inteegrimisrajadeks $\alpha = 0$ ja $\beta = \pi$ (joon. 133), mille puhul saame poole kardioidi pindalast. Kardioidi kogupindala on siis

$$S = \int_0^{\pi} r^2 d\varphi =$$

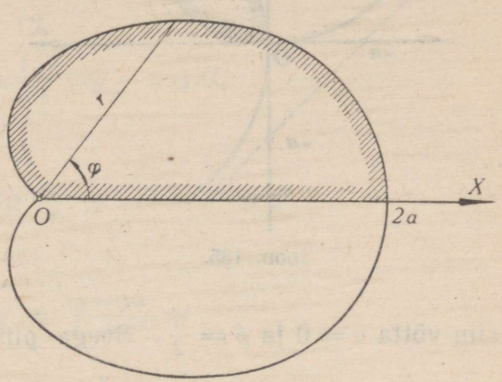
$$= a^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos\varphi)^2 d\varphi =$$

$$= a^2 \int_0^{\pi} (1 + 2\cos\varphi +$$

$$+ \cos^2\varphi)\, d\varphi = a^2 \Big[\varphi +$$

$$+ 2\sin\varphi +$$

$$+ \frac{\varphi + \sin\varphi\cos\varphi}{2}\Big]_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

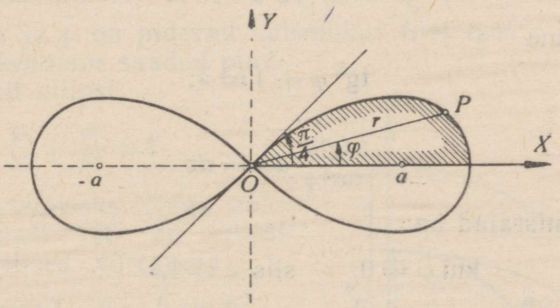


Joon. 133.

b) Lemniskaadi (joon. 134)

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$$

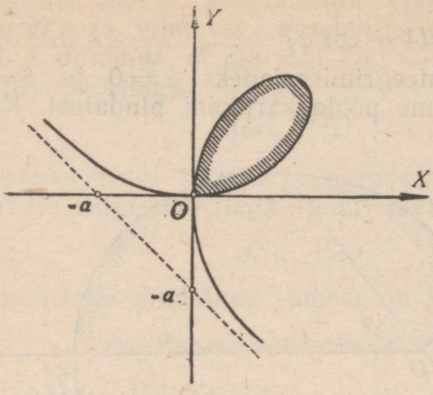
pindala leidmisel võtame inteegrimisrajadeks $\alpha = 0$ ja $\beta = \frac{\pi}{4}$, mille puhul saame veerandi lemniskaadi pindalast. Lemniskaadi kogupindala on siis



Joon. 134.

$$S = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d(2\varphi) =$$

$$= 2a^2 [\sin 2\varphi)]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2.$$



Joon. 135.

c) Cartesiuse lehe (sõlme) (joon. 135)

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

pindala leidmiseks asendame antud võrrandi polaarvõrrandiga. Asetades antud võrrandisse x ja y asemele

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi,$$

saame Cartesiuse lehe polaarvõrrandi kujul

$$r = \frac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}.$$

Inteegrimisrajadeks tuleb siin võtta $\alpha = 0$ ja $\beta = \frac{\pi}{2}$. Seega pindala

$$S = \frac{9}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(\sin^3\varphi + \cos^3\varphi)^2}\,d\varphi.$$

Teisendame inteegritavat funktsiooni järgmiselt (jagades lugeja ja nimetaja $\cos^4\varphi$-ga):

$$S = \frac{9}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^2\varphi\,d\varphi}{(\operatorname{tg}^3\varphi + 1)^2\cos^2\varphi},$$

kus tähistame

$$\operatorname{tg}^3\varphi + 1 = z;$$

siis

$$\frac{3\operatorname{tg}^2\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi = dz$$

ja inteegrimisrajad on:

kui $\varphi = 0$, siis $z = 1$,

„ $\varphi = \frac{\pi}{2}$, „ $z = \infty$,

ning seega

$$S = \frac{3}{2}a^2\int_1^{\infty}\frac{dz}{z^2} = \frac{3}{2}a^2.$$

4) Kui kõver on antud parameetriliste võrranditega

$$x = x(t),\qquad y = y(t),$$

siis saame pindala valemi polaarkoordinaatides

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi$$

teisendada valemiks

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - y\dot{x})\,dt,$$

sest

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \quad \text{ja} \quad r^2 = x^2 + y^2$$

ning

$$d\varphi = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2 + y^2}\,dt$$

ja

$$r^2 d\varphi = (x\dot{y} - y\dot{x})\,dt.$$

Seega

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - y\dot{x})\,dt,$$

kusjuures eeldame, et parameeter t muutub pidevalt ja monotoonselt vahemikus t_1-st t_2-ni, kui nurk φ kasvab α-st β-ni, ja et tuletised $\dot{x}$ ja $\dot{y}$ on pidevad vahemikus t_1-st t_2-ni.

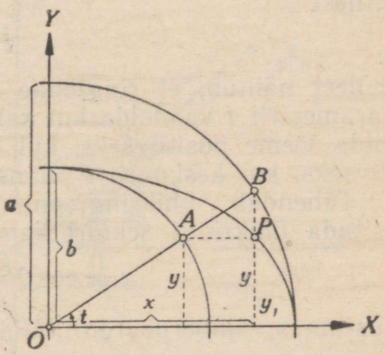
a) Rakendame saadud pindala valemit ellipsi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

pindala leidmiseks. Nagu nähtub jooniselt 136, on ellipsi parameetrilised võrrandid

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t,$$

kus parameetri t (kui nurga) pideval muutumisel 0-st 2π-ni punkt $P(x, y)$ kujundab ellipsi. Diferentsides ellipsit esitavaid parameetrilisi võrrandeid, saame



Joon. 136.

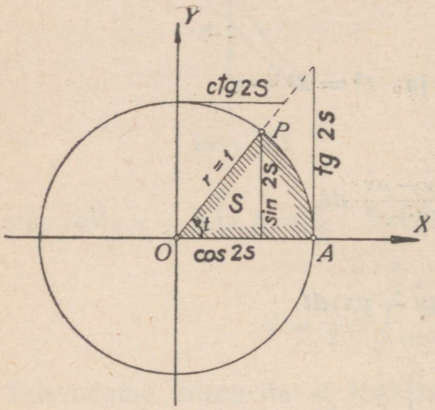
$$\dot{x} = -a\sin t, \quad \dot{y} = b\cos t.$$

Ellipsi pindala on seega

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (ab\cos^2 t + ab\sin^2 t)\,dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \frac{ab}{2}\cdot 2\pi = \pi ab,$$

mis on identne eespool (p. 1, b) saadud tulemusega.



Joon. 137.

b) Rakendame sama valemit ühikringi

$$x^2 + y^2 = 1$$

sektori pindala S leidmiseks. Ühikringjoone parameetrilised võrrandid on

$$x = \cos t, \quad y = \sin t,$$

kus parameetri t (kui kesknurga) muutumisel 0-st 2π-ni punkt $P(x, y)$ kujundab ringjoone (joon. 137).

Diferentsides ringjoont esitavaid parameetrilisi võrrandeid, saame

$$\dot{x} = -\sin t, \quad \dot{y} = \cos t,$$

kus nüüd ringi sektori OAP pindala rajades 0-st t-ni on

$$S = \frac{1}{2}\int_0^t (\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^t dt = \frac{t}{2},$$

millest

$$t = 2S.$$

Sellest nähtub, et ringjoone parameetrilistes võrrandites võime parameetrit t vaadelda kui kahekordset ühikringi sektori pindala, mida loeme positiivseks, kui kesknurk t on positiivne, ja negatiivseks, kui kesknurk t on negatiivne.

Tähendab, ühikringjoone parameetrilisi võrrandeid saame esitada ühikringi sektori kahekordse pindala kaudu järgmiselt:

$$x = \cos 2S, \quad y = \sin 2S,$$

kusjuures, ümberpöördult, ühikringi sektori kahekordne pindala

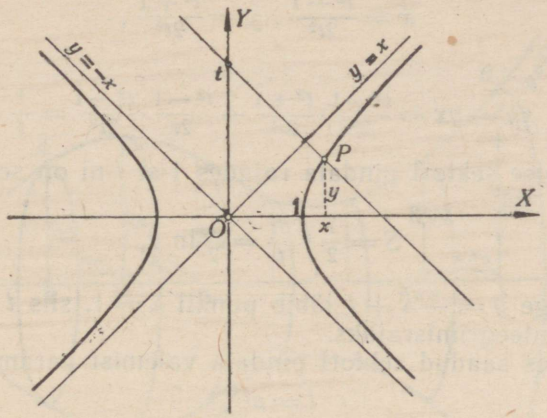
$$2S = \arccos x, \quad 2S = \arcsin y.$$

§ 85. Hüperboolse sektori pindala. Ühikhüperbooli

$$x^2 - y^2 = 1$$

asümptoodid on $y = \pm x$. Iga sirge, mis on paralleelne ühe või teise asümptoodiga, lõikab hüperbooli ühes ja ainult ühes punktis. Kui võtame hüperboolil jooksva punkti $P(x, y)$ ja tõmbame läbi selle punkti sirge, mis on paralleelne näiteks asümptoodiga $y = -x$ (joon. 138), siis selle sirge võrrand on

$$y = -x + t,$$

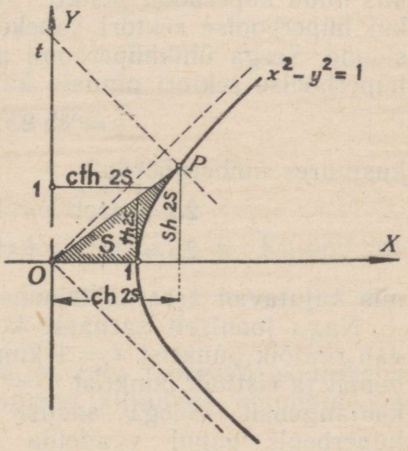


Joon. 138.

kus t väljendab sirge ja Y-telje lõikepunkti kaugust nullpunktist. Lahendades saadud sirge ja hüperbooli võrrandid x ja y suhtes, leiame lõikepunkti P koordinaadid

$$x = \frac{t^2 + 1}{2t}, \quad y = \frac{t^2 - 1}{2t},$$

mis on ratsionaalsed t funktsioonid. Et t pideval muutumisel punkt $P(x, y)$ liigub mööda hüperbooli, siis kujutavad need funktsioonid ühtlasi antud ühikhüperbooli parameetrilisi võrrandeid, kus t on muutuvaks parameetriks. Kui siin parameeter t kasvab 0-st $+\infty$-ni, siis punkt P kujundab hüperbooli parempoolse haru (altpoolt ülespoole), ja kui t muutub 0-st $-\infty$-ni, siis punkt P kujundab hüperbooli vasakpoolse haru (ülaltpoolt allapoole). Seega hüperbooli parempoolse haru igale punktile vas-



Joon. 139.

tab positiivne t väärtus ja vasakpoolse haru igale punktile vastab negatiivne t väärtus.

Leiame ühikhüperbooli parempoolse haru puhul X-teljega, hüperbooli kaarega ja sirglõiguga OP piiratud sektori pindala S (joon. 139). Nimetame seda sektorit hüperboolseks sektoriks. Diferentsides ühikhüperbooli esitavaid parameetrilisi võrrandeid, saame

$$\dot{x} = \frac{t^2-1}{2t^2}, \quad \dot{y} = \frac{t^2+1}{2t^2},$$

kus nüüd

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \frac{t^2+1}{2t} \cdot \frac{t^2+1}{2t^2} - \frac{t^2-1}{2t} \cdot \frac{t^2-1}{2t^2} = \frac{1}{t}$$

ja hüperboolse sektori pindala rajades 1-st t-ni on seega

$$S = \frac{1}{2}\int_1^t \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln t,$$

sest kui sirge $y = -x + t$ läbib punkti $x = 1$, siis $t = 1$, mis on alumiseks inteegrimisrajaks.

Avaldades saadud sektori pindala valemist parameetri t, s. o.

$$t = e^{2S},$$

ja paigutades selle väärtuse ühikhüperbooli parameetrilistesse võrranditesse parameetri t asemele, saame

$$x = \frac{e^{4S}+1}{2e^{2S}} = \frac{e^{2S}+e^{-2S}}{2} = \operatorname{ch} 2S,$$

$$y = \frac{e^{4S}-1}{2e^{2S}} = \frac{e^{2S}-e^{-2S}}{2} = \operatorname{sh} 2S,$$

kus nüüd hüperbooli punkti P koordinaate x ja y võime vaadelda kui hüperboolse sektori kahekordse pindala hüperboolseid funktsioone. Seega ühikhüperbooli parameetrilised võrrandid esinevad hüperboolse sektori pindala kaudu hüperboolsete funktsioonidena

$$x = \operatorname{ch} 2S, \quad y = \operatorname{sh} 2S,$$

kusjuures ümberpöördult

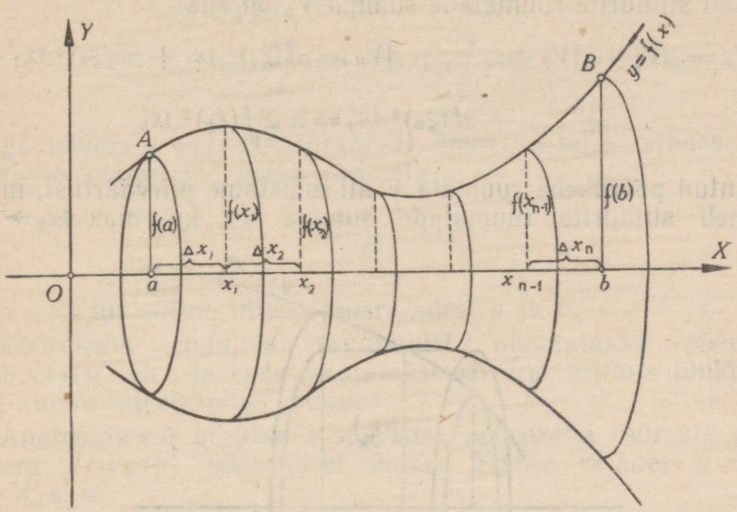
$$2S = \operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}),$$

$$2S = \operatorname{arsh} y = \ln(y + \sqrt{y^2+1}),$$

mis kujutavad areafunktsioone.

Nagu jooniselt sarnaste kolmnurkade kaudu nähtub, väljendab ristlõik punktist $x = 1$ kuni sirglõiguni OP hüperboolset tangensit ja ristlõik punktist $y = 1$ kuni sirglõiguni OP hüperboolset kootangensit. Seega saame hüperboolseid funktsioone ühikhüperbooli puhul vaadelda samaselt nagu trigonomeetrilisi funktsioone ühikringjoone puhul.

§ 86. Pöördkeha kubatuur. Esitagu funktsioon $y = f(x)$ pidevat kõverat (joon. 140). Märgime sellel kõveral kaks punkti A ja B, mille abstsissid olgu vastavalt a ja b ning ordinaadid $f(a)$ ja $f(b)$. Neist ordinaatidest, kõverast ja X-teljest piiratud tasapinnalise kujundi pööramisel ümber X-telje saame pöördkeha, mis on piiratud ühelt poolt kõverpinnaga ja teiselt poolt kahe paralleelse ringiga.



Joon. 140.

Et saada valemit selle pöördkeha ruumala arvutamiseks, selleks jaotame vahemiku a-st b-ni punktidega

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,\ x_{n-1}$$

n osavahemikuks

$$\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \ldots\ ,\ \Delta x_n,$$

milledes võtame punktid

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots\ ,\ \xi_n$$

nõnda, et $x_{k-1} \leqslant \xi_k \leqslant x_k$, kus $k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ ,\ n$. Kujundame läbi jaotuspunktide

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,\ x_{n-1}$$

tasapinnad, mis on risti X-teljega ja mis jaotavad pöördkeha n osaks. Saadud ruumalad asendame silindrite ruumaladega (joon. 141)

$$\Delta V_1,\ \Delta V_2,\ \ldots\ .\ \Delta V_n.$$

Nende silindrite kõrgusteks on osavahemike pikkused

$$\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \ldots,\ \Delta x_n$$

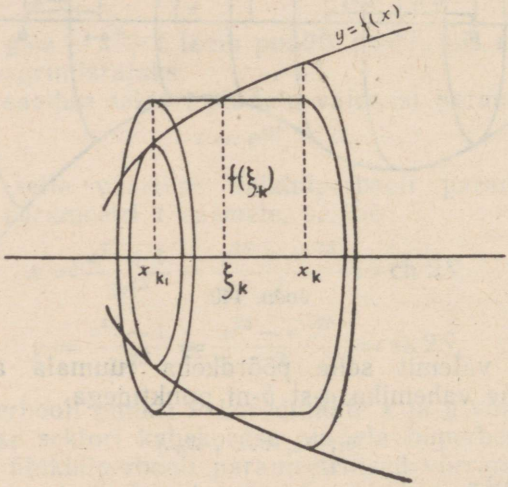
ja põhjade raadiusteks vastavalt funktsiooni väärtused

$$f(\xi_1),\ f(\xi_2),\ \ldots,\ f(\xi_n).$$

Saadud silindrite ruumalade summa V_n on siis

$$V_n = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \ldots + \Delta V_n = \pi f(\xi_1)^2 \Delta x_1 + \pi f(\xi_2)^2 \Delta x_2 + \\ + \ldots + \pi f(\xi_n)^2 \Delta x_n = \pi \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)^2 \Delta x_k.$$

Antud pöördkeha ruumala V all mõistame piirväärtust, millele läheneb silindrite ruumalade summa V_n, kui $\max \Delta x_k \to 0$ ja



Joon. 141.

seega $n \to \infty$. Et niisugune piirväärtus on olemas sõltumatult sellest, kuidas me jaotame vahemiku a-st b-ni osavahemikeks ja kuidas valime punktid $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ neis osavahemikes, järeldub määratud integraali olemasolu teoreemist, sest kui $f(x)$ on pidev vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$, siis ka

$$g(x) = f(x)^2$$

on pidev selles vahemikus ja summa

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)^2 \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k) \Delta x_k$$

pole midagi muud kui funktsiooni $g(x)$ integraalsumma. Järelikult saame pöördkeha ruumala arvutamiseks valemi määratud integraali kaudu kujul

$$V = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} V_n = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \pi \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)^2 \Delta x_k =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \pi \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k) \Delta x_k = \pi \int_a^b g(x)\,dx =$$

$$= \pi \int_a^b f(x)^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Seega kõvera $y = f(x)$ pööramisel ümber X-telje rajades $x = a$ ja $x = b$ saame pöördkeha ruumala

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx,$$

mille väärtus sõltub inteegrimisrajadest a ja b.

Pöördkeha ruumala arvutamist nimetatakse pöördkeha kubatuuriks ja seda teostatakse kõverat esitava funktsiooni $f(x)$ ruudu inteegrimise kaudu.

Analoogiliselt arvutades saaksime pöördkeha ruumala pideva kõvera $x = \varphi(y)$ pööramisel ümber Y-telje rajades $y = c$ ja $y = d$, s. o.

$$V = \pi \int_c^d \varphi(y)^2 dy = \pi \int_c^d x^2 dy.$$

Kui vahemikus a-st b-ni kahe kõvera $y = f_1(x)$ ja $y = f_2(x)$ puhul $f_1(x) > f_2(x)$, siis nende kõverate pööramisel ümber X-telje tekkiva pöördkeha ruumala antud vahemikus määrab valem

$$V = \pi \int_a^b [f_1(x)^2 - f_2(x)^2] dx.$$

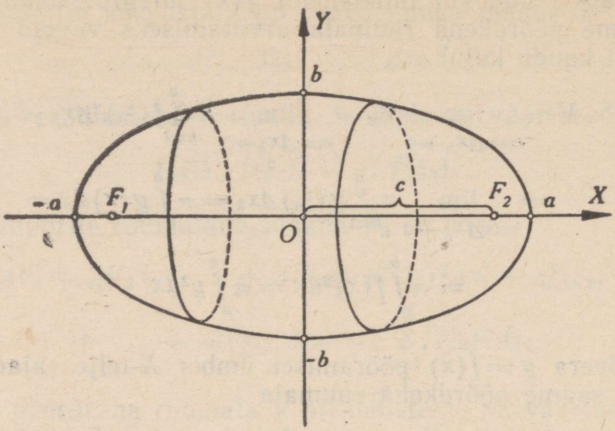
a) Ellipsi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

pööramisel ümber X-telje saame pöördellipsoidi (joon. 142).

Kui inteegrimisrajadeks võtame siin $x = 0$ ja $x = a$, siis saame poole ellipsoidi ruumalast. Ellipsoidi koguruumala on siis

$$V = 2\pi \int_0^a y^2 dx = \frac{2\pi b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2)\,dx = \frac{2\pi b^2}{a^2} \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{4}{3} \pi a b^2.$$



Joon. 142.

Kui sama ellips pöörleks ümber Y-telje (joon. 143), siis saaksime

$$V = \frac{4}{3}\pi a^2 b.$$

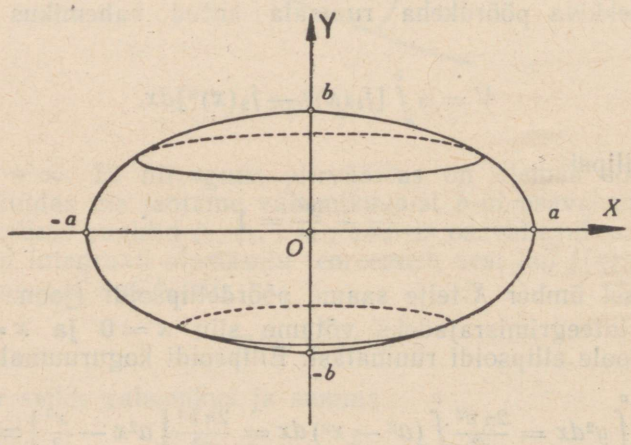
b) Leiame ruumala pöördkehal, mis saadakse astroidi

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

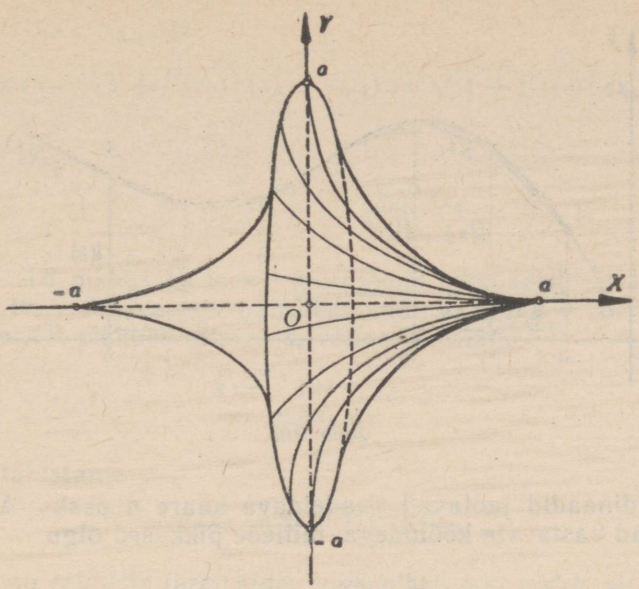
pööramisel ümber X-telje (joon. 144).

Siin

$$y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$



Joon. 143.



Joon. 144.

on paarisfunktsioon, mis esitab geomeetriliselt Y-telje suhtes sümmeetrilist kõverat, mille lõikepunktid X-teljega on $x = -a$ ja $x = +a$. Seega ruumala

$$V = 2\pi \int_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx = 2\pi \int_0^a \left(a^2 - 3a^{\frac{4}{3}} x^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}} - x^2\right) dx =$$

$$= 2\pi \left[a^2 x - \frac{9}{5} a^{\frac{4}{3}} x^{\frac{5}{3}} + \frac{9}{7} a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{3} x^3\right]_0^a = \frac{32}{105} \pi a^3.$$

§ 87. Rektifikatsioon. 1) Olgu kõverat esitava pideva funktsiooni $y = f(x)$ tuletis $f'(x)$ samuti pidev vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$.

Leiame kõvera $y = f(x)$ kaare AB pikkuse vahemikus a-st b-ni (joon. 145). Selleks jaotame vahemiku a-st b-ni punktidega

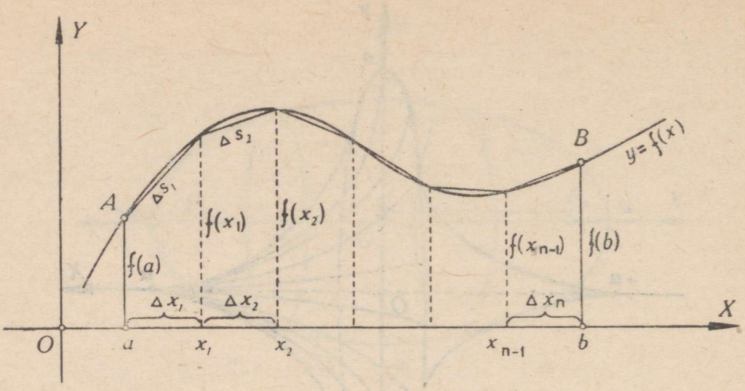
$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$$

osavahemikeks

$$\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$$

ja tõmbame jaotuspunktidest ordinaadid

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{n-1}).$$



Joon. 145.

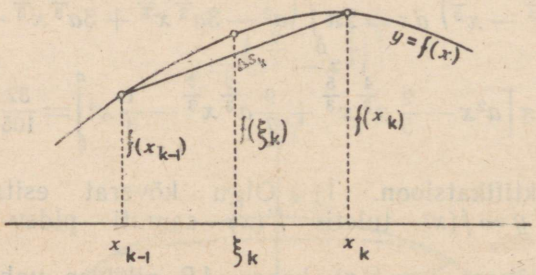
Need ordinaadid jaotavad vaadeldava kaare n osaks. Asendame kaareosad vastavate kõõludega, millede pikkused olgu

$$\Delta s_1,\ \Delta s_2,\ \ldots,\ \Delta s_n.$$

Kõõlude pikkuste summa on siis

$$s_n = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \ldots + \Delta s_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k,$$

kus (joon. 146)



Joon. 146.

$$\Delta s_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2} =$$

$$= \sqrt{1 + \left[\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right]^2}\,(x_k - x_{k-1}).$$

Et diferentsiaalarvutuse keskväärtuse teoreemi (§ 47) põhjal

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = (x_k - x_{k-1}) f'(\xi_k),$$

kus $x_{k-1} < \xi_k < x_k$, siis

$$\Delta s_k = \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\,(x_k - x_{k-1}) = \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\,\Delta x_k$$

ja

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\,\Delta x_k.$$

Kaare AB pikkuseks loeme murdjoone pikkuse s_n piirväärtuse, kui $\max \Delta x_k \to 0$ ja seega murdjoone lülide arv $n \to \infty$. Tähistades kaare AB pikkuse tähega s, võime kirjutada

$$s = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} s_n,$$

sest kui tähistame

$$g(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2},$$

kus $g(x)$ on eelduste järgi pidev vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$, siis saame

$$s = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx,$$

mis väljendab kõvera $y = f(x)$ kaare pikkust rajades $x = a$ ja $x = b$, kusjuures kaare diferentsiaal, mida nimetame kaare elemendiks, on

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Kõvera $y = f(x)$ kaare pikkuse arvutamist nimetatakse kõvera rektifikatsiooniks ja seda teostatakse funktsiooni $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ inteegrimise teel.

a) Leida kõvera

$$y = \frac{x^2}{2} + 2x - 5$$

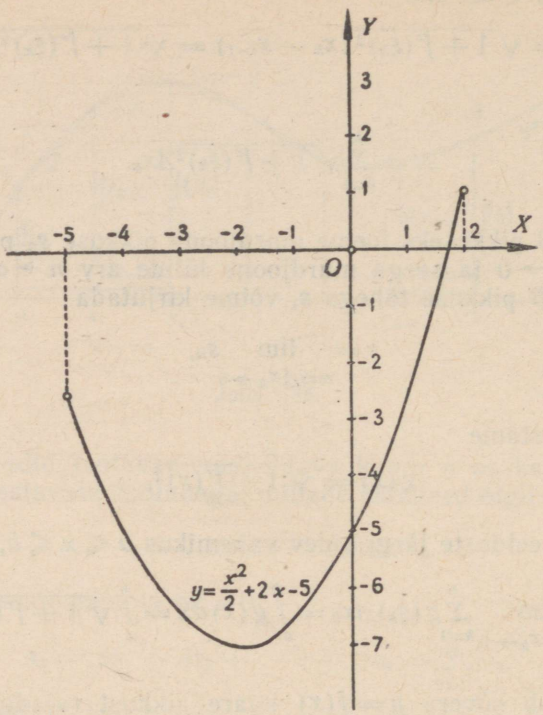
kaare pikkus rajades $x = -5$ ja $x = 2$ (joon. 147).

Siin funktsiooni tuletis

$$f'(x) = x + 2$$

ja seega kaare pikkus

$$s = \int_{-5}^{2} \sqrt{1 + (x+2)^2}\,dx = \int_{-5}^{2} \sqrt{1 + (x+2)^2}\,d(x+2).$$



Joon. 147.

Inteegrides leiame, et (§ 74, p. 8 järgi)

$$s=\left[\frac{x+2}{2}\sqrt{1+(x+2)^2}+\frac{1}{2}\ln\left(x+2+\sqrt{1+(x+2)^2}\right)\right]_{-5}^{2}=$$

$$=\left[2\sqrt{17}+\frac{1}{2}\ln\left(4+\sqrt{17}\right)\right]-\left[-\frac{3}{2}\sqrt{10}+\frac{1}{2}\ln\left(-3+\sqrt{10}\right)\right]=$$

$$=\frac{4\sqrt{17}+3\sqrt{10}}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{4+\sqrt{17}}{\sqrt{10}-3}\approx 12{,}989+\frac{1}{2}\ln 5{,}002\approx$$

$$\approx 12{,}989+1{,}958\approx 14{,}95.$$

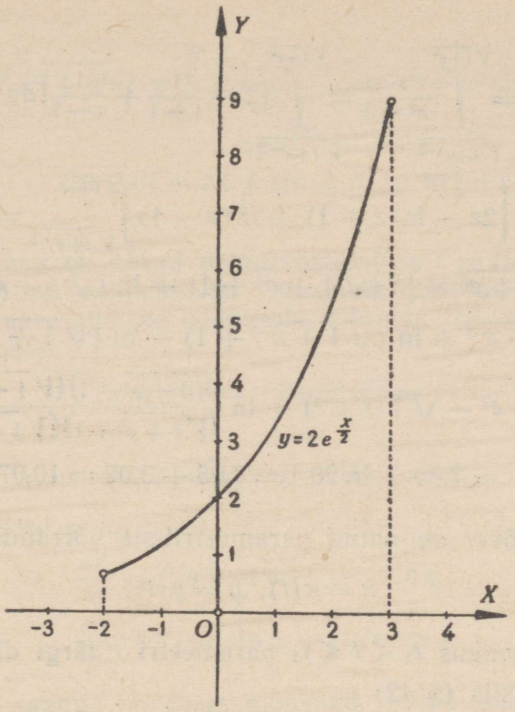
b) Leida kõvera

$$y=2e^{\frac{x}{2}}$$

kaare pikkus rajades $x=-2$ ja $x=3$ (joon. 148).

Funktsiooni tuletis

$$f'(x)=e^{\frac{x}{2}}$$



Joon. 148.

ja seega kaare pikkus

$$s=\int_{-2}^{3}\sqrt{1+e^x}\,dx.$$

Kui tähistame

$$1+e^x=z^2,$$

siis

$$e^x dx=2zdz,$$

millest

$$dx=\frac{2zdz}{e^x}=\frac{2zdz}{z^2-1},$$

ja inteegrimisrajad on:

kui $x=-2$, siis $z=\sqrt{1+e^{-2}}$,

„ $x=3$, „ $z=\sqrt{1+e^3}$.

Kaare pikkust väljendava integraali väärtuse leiame nüüd järgmiselt:

$$s = \int\limits_{\sqrt{1+e^{-2}}}^{\sqrt{1+e^3}} \frac{2z^2dz}{z^2-1} = \int\limits_{\sqrt{1+e^{-2}}}^{\sqrt{1+e^3}} \left(2 - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1}\right) dz =$$

$$= \left[2z - \ln(z+1) + \ln(z-1)\right]_{\sqrt{1+e^{-2}}}^{\sqrt{1+e^3}} =$$

$$= 2\sqrt{1+e^3} - \ln(\sqrt{1+e^3}+1) + \ln(\sqrt{1+e^3}-1) -$$

$$- 2\sqrt{1+e^{-2}} + \ln(\sqrt{1+e^{-2}}+1) - \ln(\sqrt{1+e^{-2}}-1) =$$

$$= 2(\sqrt{1+e^3} - \sqrt{1+e^{-2}}) + \ln\frac{(\sqrt{1+e^3}-1)(\sqrt{1+e^{-2}}+1)}{(\sqrt{1+e^3}+1)(\sqrt{1+e^{-2}}-1)} \approx$$

$$\approx 7{,}05 + \ln 20{,}4 \approx 7{,}05 + 3{,}02 = 10{,}07.$$

2) Kui kõver on antud parameetriliste võrranditega

$$x = x(t),\ y = y(t),$$

mis on vahemikus $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ parameetri t järgi diferentsitavad, ning $\dot{x} \neq 0$, siis (§ 42)

$$f'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}},\ dx = \dot{x}dt$$

ning kõvera kaare pikkus rajades $t = t_1$ ja $t = t_2$ on

$$s = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt,$$

mille puhul kaare element

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt.$$

Siinjuures eeldame, et vaadeldavas vahemikus kõver ei lõika iseennast, nii et erinevatele t väärtustele vastavad erinevad kõvera punktid.

Et leida näiteks tsükloidi (§ 84, p. 2, joon. 130)

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$$

ühe haru pikkust, selleks leiame tuletised

$$\dot{x} = a(1 - \cos t),\ \dot{y} = a \sin t,$$

millede asetamisel kaare pikkuse valemisse saame tsükloidi haru pikkuse

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\,dt =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\,dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = 4a\left[-\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8a.$$

3) Kui kõver on antud polaarvõrrandiga $r = f(\varphi)$, kusjuures $f(\varphi)$ ja $f'(\varphi)$ on vaadeldavas vahemikus pidevad funktsioonid, siis kõvera kaare pikkuse leidmiseks lähtume rist- ja polaarkoordinaatide seosest

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi,$$

s. o.

$$x = f(\varphi)\cos\varphi,\quad y = f(\varphi)\sin\varphi,$$

millede tuletised φ järgi on

$$\frac{dx}{d\varphi} = f'(\varphi)\cos\varphi - f(\varphi)\sin\varphi,$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = f'(\varphi)\sin\varphi + f(\varphi)\cos\varphi.$$

Kui tõstame saadud võrduste mõlemad pooled ruutu ja liidame nende vastavad pooled, siis saame

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2 = r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2,$$

millest

$$dx^2 + dy^2 = f(\varphi)^2 d\varphi^2 + f'(\varphi)^2 d\varphi^2.$$

Et kaare diferentsiaal

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2}\,d\varphi,$$

siis kaare pikkus rajades $\varphi = \alpha$ ja $\varphi = \beta$ on

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2}\,d\varphi = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + f'(\varphi)^2}\,d\varphi.$$

Et leida näiteks kardioidi (§ 84, p. 3, joon. 133)

$$r = a(1+\cos\varphi)$$

pikkust, selleks leiame tuletise

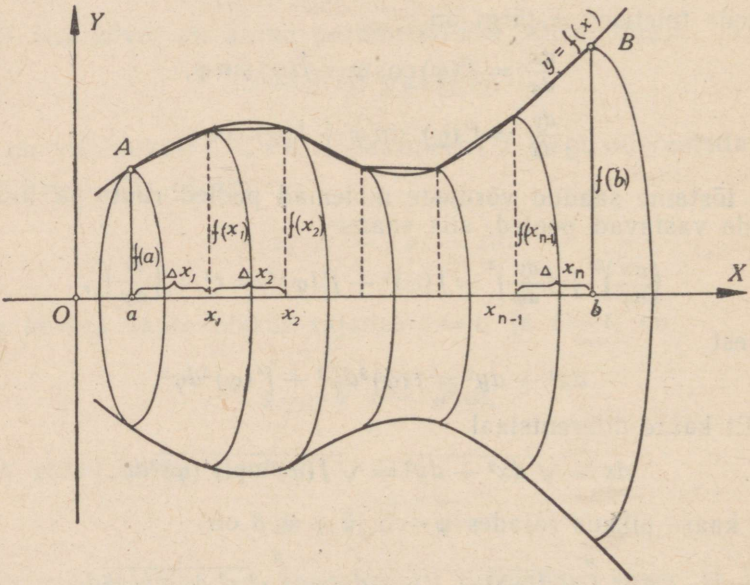
$$f'(\varphi) = \frac{dr}{d\varphi} = -a\sin\varphi.$$

Et kardioid on sümmeetriline polaartelje suhtes, siis võime tema pikkuse leidmisel võtta inteegrimisrajadeks $\alpha = 0$ ja $\beta = \pi$, mille puhul saame poole kardioidi pikkusest. Kardioidi kogupikkus on siis

$$s = 2\int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + f'(\varphi)^2}\, d\varphi = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 2a\int_0^{\pi} \sqrt{2(1+\cos\varphi)}\, d\varphi = 4a\int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8a\left[\sin\frac{\varphi}{2}\right]_0^{\pi} = 8a.$$

§ 88. Pöördpinna komplanatsioon. Olgu kõverat esitava pideva funktsiooni $y = f(x)$ tuletis $f'(x)$ vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ samuti pidev ja sellele vahemikule vastava kõvera kaare AB otspunktide A ja B abstsissid vastavalt a ja b (joon. 149). Pöörelgu kõvera kaar AB ümber X-telje. Kaare AB pöörlemisel tekib pöördpind. Tähistame kaare AB pöörlemisel tekkiva pöördpinna pindala tähega U.



Joon. 149.

Et saada valemit kaare AB pöörlemisel tekkiva pöördpinna pindala arvutamiseks, selleks jaotame vahemiku a-st b-ni osavahemikeks

$$\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n.$$

Läbi jaotuspunktide

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$$

kujundatud tasapinnad, mis on risti X-teljega, jaotavad vaadeldava pöördpinna n osaks. Asendame viimased tüvikoonuste külgpindadega, võttes tüvikoonuste kõrgusteks osavahemike pikkused

$$\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$$

ja põhjade raadiusteks vastavalt

$$f(x_0) \text{ ja } f(x_1); f(x_1) \text{ ja } f(x_2); \ldots; f(x_{n-1}) \text{ ja } f(x_n).$$

Olgu nende tüvikoonuste külgpindalad

$$\Delta U_1, \Delta U_2, \ldots, \Delta U_n.$$

Siis nende külgpindalade summa

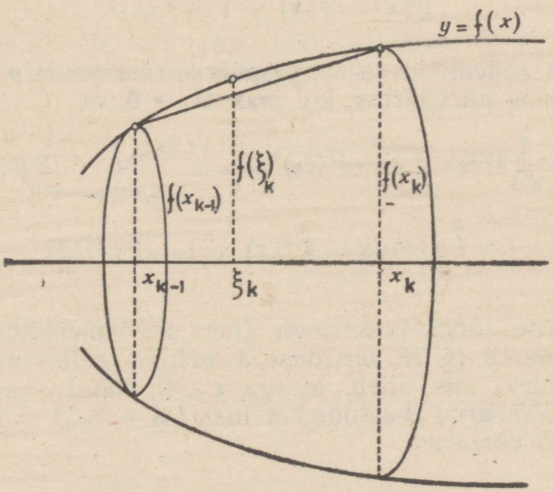
$$U_n = \Delta U_1 + \Delta U_2 + \ldots + \Delta U_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta U_k.$$

Tüvikoonuse külgpindala valemi ja diferentsiaalarvutuse keskväärtuse teoreemi järgi

$$\Delta U_k = \pi [f(x_{k-1}) + f(x_k)] \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2} =$$
$$= \pi [f(x_{k-1}) + f(x_k)] \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2} \Delta x_k,$$

kus $x_{k-1} < \xi_k < x_k$ (joon. 150). Funktsiooni väärtusi $f(x_{k-1})$ ja $f(x_k)$ kirjutame siin järgmiselt:

$$f(x_{k-1}) = f(\xi_k) + [f(x_{k-1}) - f(\xi_k)],$$
$$f(x_k) = f(\xi_k) + [f(x_k) - f(\xi_k)],$$



Joon. 150.

millede asetamisel eelmisse võrdusse saame

$$\Delta U_k = 2\pi f(\xi_k)\sqrt{1+f'(\xi_k)^2}\Delta x_k + \\ + \pi\{[f(x_{k-1}) - f(\xi_k)] + [f(x_k) - f(\xi_k)]\}\sqrt{1+f'(\xi_k)^2}\Delta x_k$$

ning seega

$$U_n = 2\pi\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\sqrt{1+f'(\xi_k)^2}\Delta x_k + \\ + \pi\sum_{k=1}^{n}\{[f(x_{k-1}) - f(\xi_k)] + [f(x_k) - f(\xi_k)]\}\sqrt{1+f'(\xi_k)^2}\Delta x_k.$$

Kaare AB pöörlemisel ümber X-telje tekkinud pöördpinna pindala suuruseks U loeme tüvikoonuste külgpindalade summa U_n piirväärtuse, kui $\max \Delta x_k \to 0$ ja seega ühtlasi tüvikoonuste arv n piiramatult kasvab, s .o.

$$U = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} U_n = 2\pi \cdot \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\sqrt{1+f'(\xi_k)^2}\Delta x_k + \\ + \pi \cdot \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n}\{[f(x_{k-1}) - f(\xi_k)] + \\ + [f(x_k) - f(\xi_k)]\}\sqrt{1+f'(\xi_k)^2}\Delta x_k.$$

Et eelduse järgi funktsioon $f(x)$ omab vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ pidevat tuletist $f'(x)$, siis on ka funktsioon

$$g(x) = f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}$$

pidev selles vahemikus ja seega pöördpinna pindala U avaldises esinev esimene piirväärtus, kui $\max \Delta x_k \to 0$, on

$$\lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\sqrt{1+f'(\xi_k)^2}\Delta x_k = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k = \\ = \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx.$$

Et eelduse järgi funktsioon $f(x)$ on vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ pidev, siis on ta (§ 28, omaduse 3 põhjal) selles vahemikus ka ühtlaselt pidev, mis ütleb, et iga $\varepsilon > 0$ puhul saame määrata teise positiivse arvu δ nõnda, et $\max (x_k - x_{k-1}) = \max \Delta x_k < \delta$ puhul kehtib võrratus

$$|f(x_k) - f(x_{k-1})| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)\sqrt{1+M^2}},$$

kus M tähendab $f'(x)$ maksimaalset väärtust vahemikus a-st b-ni. Et aga ξ_k asetseb x_{k-1} ja x_k vahel, siis seda enam kehtivad võrratused

$$|f(x_{k-1}) - f(\xi_k)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)\sqrt{1+M^2}},$$

$$|f(x_k) - f(\xi_k)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)\sqrt{1+M^2}}$$

ning seega pöördpinna pindala U avaldises esineva teise piirväärtuse leidmiseks, kui $\max \Delta x_k \to 0$, saame

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \{[f(x_{k-1}) - f(\xi_k)] + [f(x_k) - f(\xi_k)]\} \sqrt{1+f'(\xi_k)^2}\Delta x_k\right| <$$

$$< \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{(b-a)\sqrt{1+M^2}} \cdot \sqrt{1+M^2}\Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \varepsilon.$$

Järelikult on pöördpinna pindala U avaldises esinev teine piirväärtus võrdne nulliga, kui $\max \Delta x_k \to 0$ ja seega ühtlasi $n \to \infty$. Pöördpinna pindala rajades $x = a$ ja $x = b$ määrab seega valem

$$U = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx.$$

Pöördpinna pindala arvutamist nimetatakse pöördpinna k o m p l a n a t s i o o n i k s.

Kui näiteks ellips

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

pöörleb ümber X-telje, siis saame pöördellipsoidi (§ 86, joon. 142), mille pindala leidmiseks kasutame ellipsi võrrandi ilmutatud kuju

$$f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

mille tuletis

$$f'(x) = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Võttes inteegrimisrajadeks $x = 0$ ja $x = a$, saame

$$U = 2 \cdot 2\pi \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \cdot \sqrt{1+\frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}}\,dx =$$

$$= \frac{4\pi b}{a^2} \int_0^a \sqrt{a^4 - a^2x^2 + b^2x^2}dx.$$

Kui antud ellipsi puhul X-telg on fokaalteljeks, s. o. $a > b$, siis ellipsi lineaarne ekstsentrisus $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ja seega pöördellipsoidi pindala

$$U = \frac{4\pi b}{a^2} \int_0^a \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}\,dx = \frac{4\pi b}{a^2} \sqrt{a^4 - c^2x^2}\,dx.$$

Kasutades edasi ringi integraali (§ 74, p. 7), saame

$$U = \frac{4\pi b}{a^2} \int_0^a \sqrt{a^4 - c^2x^2}\,dx = \frac{4\pi b}{a^2 c} \int_0^a \sqrt{a^4 - (cx)^2}\,d(cx) =$$

$$= \frac{4\pi b}{a^2 c}\left[\frac{cx}{2}\sqrt{a^4 - c^2x^2} + \frac{a^4}{2}\arcsin\frac{cx}{a^2}\right]_0^a =$$

$$= \frac{4\pi b}{a^2 c}\left(\frac{ac}{2}\sqrt{a^4 - a^2c^2} + \frac{a^4}{2}\arcsin\frac{c}{a}\right) =$$

$$= \frac{4\pi b}{a^2 c}\left(\frac{a^2bc}{2} + \frac{a^4}{2}\arcsin\frac{c}{a}\right) = 2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2 b}{c}\arcsin\frac{c}{a}.$$

Kui aga fokaalteljeks oleks Y-telg, s. o. $a < b$, siis ellipsi lineaarne ekstsentrisus $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ ja pöördellipsoidi pindala

$$U = \frac{4\pi b}{a^2} \int_0^a \sqrt{a^4 + (b^2 - a^2)x^2}\,dx = \frac{4\pi b}{a^2} \int_0^a \sqrt{a^4 + c^2x^2}\,dx.$$

Kasutades sellele avaldisele vastavat integraali (§ 74, p. 8 järgi), saame

$$U = \frac{4\pi b}{a^2} \int_0^a \sqrt{a^4 + c^2x^2}\,dx = \frac{4\pi b}{a^2 c} \int_0^a \sqrt{a^4 + (cx)^2}\,d(cx) =$$

$$= \frac{4\pi b}{a^2 c}\left[\frac{cx}{2}\sqrt{a^4 + c^2x^2} + \frac{a^4}{2}\ln\left(cx + \sqrt{a^4 + a^2x^2}\right)\right]_0^a =$$

$$= \frac{4\pi b}{a^2 c}\left[\frac{ac}{2}\sqrt{a^4 + a^2c^2} + \frac{a^4}{2}\ln\left(ac + \sqrt{a^4 + a^2c^2}\right) - \frac{a^4}{2}\ln a^2\right] =$$

$$= \frac{2\pi b}{c}\left[c\sqrt{a^2 + c^2} + a^2\ln\left(ac + a\sqrt{a^2 + c^2}\right) - a^2\ln a^2\right] =$$

$$= \frac{2\pi b}{c}\left(bc + a^2\ln\frac{b + c}{a}\right) = 2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2 b}{c}\ln\frac{b + c}{a}.$$

Tähendab, kui $a > b$, siis ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ pöörlemisel ümber X-telje tekib pöördellipsoid, mille pindala

$$U = 2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2 b}{c} \arcsin \frac{c}{a},$$

kus $c \sqrt{a^2 - b^2}$, ja kui $a < b$, siis

$$U = 2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2 b}{c} \ln \frac{b + c}{a},$$

kus $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.

Analoogiliselt võime näidata, et ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ pöörlemisel ümber Y-telje moodustuva pöördellipsoidi (§ 86, joon. 143) pindala on $a > b$ puhul

$$U = 2\pi a^2 + \frac{2\pi ab^2}{c} \ln \frac{a + c}{b},$$

kus $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, ja $a < b$ puhul

$$U = 2\pi a^2 + \frac{2\pi ab^2}{c} \arcsin \frac{c}{b},$$

kus $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.

§ 89. Raskuspunkt. 1) Mehaanikast teame, et lõpliku arvu materiaalsete punktide raskuspunkti ehk massikeskme asukoha koordinaadid on

$$x_0 = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k \Delta m_k}{\sum_{k=1}^{n} \Delta m_k}, \quad y_0 = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k \Delta m_k}{\sum_{k=1}^{n} \Delta m_k}, \quad z_0 = \frac{\sum_{k=1}^{n} z_k \Delta m_k}{\sum_{k=1}^{n} \Delta m_k},$$

kus Δm_1, Δm_2, ..., Δm_n on massi elemendid, s. o. üksikute materiaalsete punktide massid.

Kindla keha puhul on aga üksikpunktide arv määramatult suur. Kui nüüd kindla keha puhul massi element $\max \Delta m_k \to 0$

ja seega materiaalsete punktide arv n piiramatult kasvab, siis on kindla keha raskuspunkti koordinaadid

$$x_0 = \frac{\lim\limits_{\max \Delta m_k \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \Delta m_k}{\lim\limits_{\max \Delta m_k \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta m_k} = \frac{\int x\,dm}{\int dm},$$

$$y_0 = \frac{\lim\limits_{\max \Delta m_k \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} y_k \Delta m_k}{\lim\limits_{\max \Delta m_k \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta m_k} = \frac{\int y\,dm}{\int dm},$$

$$z_0 = \frac{\lim\limits_{\max \Delta m_k \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} z_k \Delta m_k}{\lim\limits_{\max \Delta m_k \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta m_k} = \frac{\int z\,dm}{\int dm},$$

kus m on kindla keha mass ja kus integraale mõistame kui määratud integraale teatavates rajades.

Kui keha on massilt homogeenne ja tema tihedus on ϱ, siis

$$m = \varrho V,$$

kus V on keha ruumala. Konstantse ϱ puhul

$$dm = \varrho\,dV$$

ja keha raskuspunkti koordinaate võib esitada ruumala V kaudu järgmiselt:

$$x_0 = \frac{\int \varrho\, x\,dV}{\int \varrho\,dV} = \frac{\int x\,dV}{\int dV},$$

$$y_0 = \frac{\int \varrho\, y\,dV}{\int \varrho\,dV} = \frac{\int y\,dV}{\int dV},$$

$$z_0 = \frac{\int \varrho\, z\,dV}{\int \varrho\,dV} = \frac{\int z\,dV}{\int dV},$$

millest nähtub, et homogeense massi puhul raskuspunkti koordinaadid ei sõltu tihedusest.

Analoogiliselt arvutades leiame, et keha pinna raskuspunkti koordinaate saab esitada pindala U kaudu järgmiselt:

$$x_0 = \frac{\int x\,dU}{\int dU}, \quad y_0 = \frac{\int y\,dU}{\int dU}, \quad z_0 = \frac{\int z\,dU}{\int dU}.$$

Samaselt saame ruumis antud tasapinna osa raskuspunkti koordinaadid pindala S kaudu:

$$x_0 = \frac{\int x dS}{\int dS}, \quad y_0 = \frac{\int y dS}{\int dS}, \quad z_0 = \frac{\int z dS}{\int dS},$$

ja ruumis antud joonlõigu raskuspunkti koordinaadid joonlõigu pikkuse s kaudu:

$$x_0 = \frac{\int x ds}{\int ds}, \quad y_0 = \frac{\int y ds}{\int ds}, \quad z_0 = \frac{\int z ds}{\int ds},$$

kus integraale mõistame samuti kui määratud integraale teatavates rajades.

2) Kui funktsioon $y = f(x)$ esitab tasapinnal vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ pidevat kõverat, siis selle kõveraga, X-teljega ning ordinaatidega $f(a)$ ja $f(b)$ piiratud kujundi pindala S diferentsiaal

$$dS = f(x)\,dx$$

ja selle tasapinnalise kujundi raskuspunkti abstsiss

$$x_0 = \frac{\int_a^b x f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx} = \frac{\int_a^b xy dx}{\int_a^b y dx}.$$

Kui tasapinnalise kujundi raskuspunkti ordinaadi leidmisel võtta pinna elemendiks

$$\Delta S_k = f(\xi_k)\Delta x_k,$$

siis iga niisuguse elemendi $f(\xi_k)\Delta x_k$ raskuspunkt asetseb $\frac{1}{2} f(\xi_k)$ kaugusel X-teljest (kui momentteljest) ja pinna elemendi staatiline moment on siis

$$\frac{1}{2} f(\xi_k) f(\xi_k)\Delta x_k = \frac{1}{2} f(\xi_k)^2 \Delta x_k$$

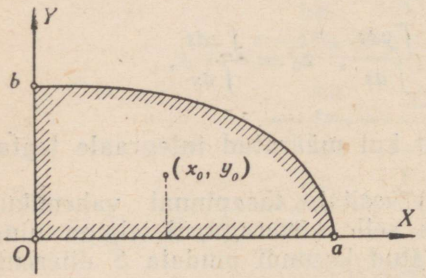
ning kujundi raskuspunkti ordinaat

$$y_0 = \frac{\int_a^b \frac{1}{2} y \cdot f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx}{\int_a^b y dx}.$$

a) Esimeses kvadrandis asetseva ellipsi (joon. 151)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

kaarega ja koordinaattelgedega piiratud kujundi raskuspunkti koordinaadid on:



Joon. 151.

$$x_0=\frac{\int_0^a x\cdot\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx}{\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx}=$$

$$=\frac{\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx}{\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx}=$$

$$=\frac{\left[\frac{(x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2}}{3}\right]_0^a}{\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^a}=\frac{4a}{3\pi}$$

ja

$$y_0=\frac{\frac{1}{2}\int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\,dx}{\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx}=\frac{b\int_0^a (a^2-x^2)\,dx}{2a\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx}=$$

$$=\frac{b\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a}{a\left[x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^a}=\frac{4b}{3\pi}.$$

b) Tsükloidi

$$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$$

haruga (joon. 152) ja X-teljega piiratud kujundi raskuspunkti koordinaatide saamiseks leiame diferentsiaali

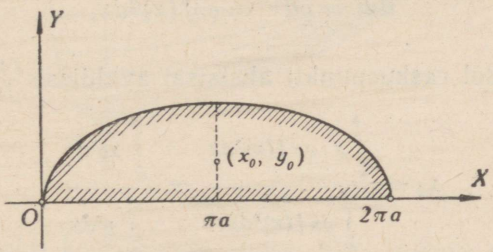
$$dx=a(1-\cos t)\,dt.$$

Siis raskuspunkti abstsiss

$$x_0 = \frac{\int_0^{2\pi} a(t-\sin t)\,a(1-\cos t)\,a(1-\cos t)\,dt}{\int_0^{2\pi} a\,(1-\cos t)\,a\,(1-\cos t)\,dt} =$$

$$= \frac{a\int_0^{2\pi} (t - 2t\cos t + t\cos^2 t - \sin t + 2\sin t\cos t - \sin t\cos^2 t)\,dt}{\int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,dt} =$$

$$= \frac{a\left[\frac{t^2}{2} - 2t\sin t - 2\cos t + \frac{t^2}{4} + \frac{t}{2}\sin t\cos t - \frac{1}{4}\sin^2 t + \cos t + \sin^2 t - \frac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{2\pi}}{\left[t - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin t\cos t\right]_0^{2\pi}} = \pi a.$$



Joon. 152.

Selle resultaadi oleksime võinud kirjutada ka ilma arvutamiseta, arvesse võttes pinna sümmeetrilisust tsükloidi haru keskordinaadi suhtes. Raskuspunkti ordinaat

$$y_0 = \frac{\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\,a(1-\cos t)\,dt}{\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\,a(1-\cos t)\,dt} =$$

$$= \frac{\frac{a}{2}\int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)\,dt}{\int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,dt} =$$

$$= \frac{\frac{a}{2}\left[t - 3\sin t + \frac{3}{2}\sin t\cos t - \sin t + \frac{1}{3}\sin^3 t\right]_0^{2\pi}}{\left[t - 2\sin t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t\cos t\right]_0^{2\pi}} = \frac{5}{6}a.$$

Seega tsükloidi haruga ja X-teljega piiratud kujundi raskuspunkti koordinaadid on:

$$x_0 = \pi a,\ y_0 = \frac{5}{6}a.$$

3) Kui funktsioon $y = f(x)$ esitab vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ pidevat kõverat, siis selle kõvera pöörlemisel ümber X-telje moodustuva pöördkeha raskuspunkt asetseb X-teljel a ja b vahel, sest saadud keha on X-telje suhtes sümmeetriline ja massi loeme homogeenseks. Pöördkeha raskuspunkti ordinaat ja aplikaat on sel juhul võrdsed nulliga, s. o. $y_0 = z_0 = 0$. Raskuspunkti abstsissi x_0 leidmiseks kasutame seost

$$dm = \varrho dV = \varrho\pi f(x)^2 dx,$$

mille asetamisel raskuspunkti abstsissi avaldisse $\frac{\int x dm}{\int dm}$ saame

$$x_0 = \frac{\int_a^b x \cdot \varrho\pi f(x)^2 dx}{\int_a^b \varrho\pi f(x)^2 dx} = \frac{\int_a^b xy^2 dx}{\int_a^b y^2 dx}.$$

Seega ellipsi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

veerand kaare (vahemikus $0 \leqslant x \leqslant a$) pöörlemisel ümber X-telje moodustuva poole pöördellipsoidi (joon. 153) raskuspunkt asetseb X-teljel ja tema abstsiss

$$x_0 = \frac{\int_0^a x \cdot \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)dx}{\int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)dx} = \frac{\int_0^a x(a^2 - x^2)dx}{\int_0^a (a^2 - x^2)dx} = \frac{\left[\frac{a^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^a}{\left[a^2x - \frac{x}{3}\right]_0^a} = \frac{3}{8}a.$$

4) Et tasapinnal asetseva pideva kõvera $y = f(x)$ kaare diferentsiaal

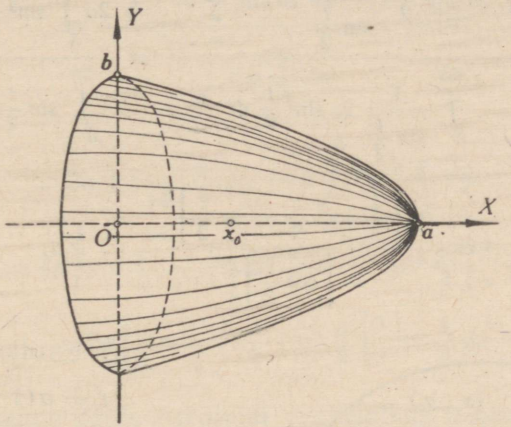
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + f'(x)^2}dx,$$

siis vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ kaare raskuspunkti koordinaadid on:

$$x_0 = \frac{\int_a^b x \cdot \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}, \quad y_0 = \frac{\int_a^b y \cdot \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}.$$

a) Et leida näiteks tsükloidi

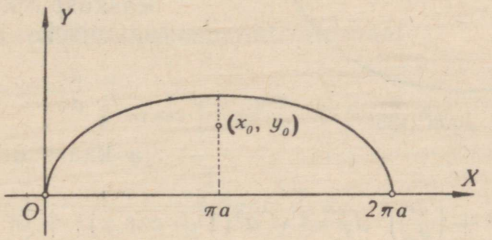
$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$$



Joon. 153.

haru raskuspunkti koordinaate (joon. 154), selleks toetume kaare sümmeetrilisusele, mille tõttu tsükloidi vaadeldava haru raskuspunkti abstsiss

$$x_0 = \pi a.$$



Joon. 154.

Tsükloidi haru raskuspunkti ordinaadi saamiseks leiame diferentsiaalid

$$dy = a \sin t\,dt = 2a \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}\,dt,$$

$$dx = a(1 - \cos t)\,dt = 2a \sin^2 \frac{t}{2}\,dt;$$

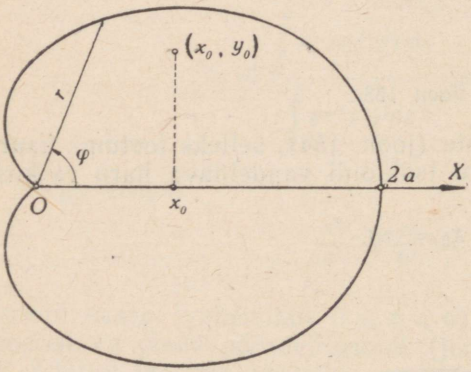
nende võrduste vastavaid pooli jagades saame

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}},\quad \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}.$$

Seega raskuspunkti ordinaat

$$y_0=\frac{\int_0^{2\pi} 2a\sin^2\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\,2a\sin^2\frac{t}{2}\,dt}{\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\,2a\sin^2\frac{t}{2}\,dt}=\frac{2a\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt}{\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt}=$$

$$=\frac{2a\left[\frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2}-\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}}{-\left[\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}}=\frac{4}{3}a.$$



Joon. 155.

b) Kardioidi

$$r=a(1+\cos\varphi)$$

raskuspunkt asetseb kardioidi sümmeetrilisuse tõttu polaarteljel (joon. 155), kus $\varphi=0$, ja seega

$$y_0=0.$$

Raskuspunkti abstsissi saamiseks leiame tuletise

$$\frac{dr}{d\varphi}=-a\sin\varphi$$

ja kaare diferentsiaali

$$ds=\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi=\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=a\sqrt{2(1+\cos\varphi)}\,d\varphi=a\sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi=2a\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi.$$

Et

$$x=r\cos\varphi=a(1+\cos\varphi)\cos\varphi=2a\cos^2\frac{\varphi}{2}\cos\varphi,$$

siis seega kardioidi raskuspunkti abstsiss

$$x_0 = \frac{2\int_0^{\pi} 2a\cos^2\frac{\varphi}{2}\cos\varphi \cdot 2a\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi}{2\int_0^{\pi} 2a\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi} =$$

$$= \frac{2a\int_0^{\pi} \cos^3\frac{\varphi}{2}\left(2\cos^2\frac{\varphi}{2}-1\right)d\varphi}{\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi} =$$

$$= 2a\int_0^{\pi}\cos^5\frac{\varphi}{2}\,d\varphi - a\int_0^{\pi}\cos^3\frac{\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= 4a\left[\sin\frac{\varphi}{2} - \frac{2}{3}\sin^3\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{5}\sin^5\frac{\varphi}{2}\right]_0^{\pi} -$$

$$- 2a\left[\sin\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{3}\sin^3\frac{\varphi}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{5}a.$$

Kui otsiksime poole kardioidi (vahemikus $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$) raskuspunkti koordinaate, siis leiaksime, et selle raskuspunkti abstsiss on samuti $\frac{4}{5}a$. Poole kardioidi raskuspunkti ordinaadi y_0 saamiseks esitame $y = r\sin\varphi$ kujul

$$y = r\sin\varphi = a(1+\cos\varphi)\sin\varphi = 4a\sin\frac{\varphi}{2}\cos^3\frac{\varphi}{2}.$$

Seega poole kardioidi raskuspunkti ordinaat

$$y_0 = \frac{\int_0^{\pi} 4a\sin\frac{\varphi}{2}\cos^3\frac{\varphi}{2}\cdot 2a\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi}{\int_0^{\pi} 2a\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi} =$$

$$= \frac{4a\int_0^{\pi}\sin\frac{\varphi}{2}\cos^4\frac{\varphi}{2}\,d\varphi}{\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi} = \frac{4a\left[-\frac{2}{5}\cos^5\frac{\varphi}{2}\right]_0^{\pi}}{\left[2\sin\frac{\varphi}{2}\right]_0^{\pi}} = \frac{4}{5}a.$$

Tulemusest nähtub, et poole kardioidi raskuspunkti koordinaadid on arvuliselt võrdsed (joon. 155), s. o.

$$x_0 = y_0 = \frac{4}{5}\,a.$$

5) Kõvera $y = f(x)$ pöörlemisel ümber X-telje moodustuva pöördpinna raskuspunkt asetseb sümmeetrilisuse tõttu X-teljel. Et pöördpinna puhul pinna diferentsiaal

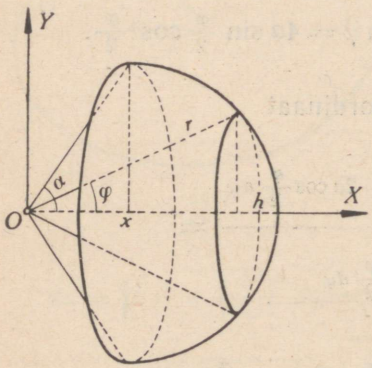
$$dU = 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx,$$

siis vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ pöördpinna raskuspunkti abstsiss

$$x_0 = \frac{\int_a^b x \cdot 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx}{\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx} = \frac{\int_a^b x f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx}{\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx}.$$

Et leida näiteks sfääri segmendi raskuspunkti, kui sfääri raadius on r ja segmendi poolust läbiva suuringjoone segmendi kaarele vastav nurk on 2φ (joon. 156), selleks võtame sfääri segmendi pindala valemi

$$U = 2\pi rh.$$



Joon. 156.

Siin

$$x = r - h = r\cos\varphi,$$

millest segmendi kõrgus

$$h = r(1 - \cos\varphi).$$

Asetades saadud h väärtuse sfääri segmendi pindala valemisse, saame

$$U = 2\pi r^2(1 - \cos\varphi),$$

millest pinna diferentsiaal

$$dU = 2\pi r^2 \sin\varphi\,d\varphi.$$

Sfääri segmendi raskuspunkti ordinaat ja aplikaat on segmendi sümmeetrilisuse tõttu võrdsed ja võrduvad nulliga, s. o. $y_0 =$

$= z_0 = 0$, ning vahemikus $0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha$ raskuspunkti abstsiss

$$x_0 = \frac{\int_0^{\alpha} x\,dU}{\int_0^{\alpha} dU} = \frac{\int_0^{\alpha} r\cos\varphi \cdot 2\pi r^2 \sin\varphi\,d\varphi}{\int_0^{\alpha} 2\pi r^2 \sin\varphi\,d\varphi} =$$

$$= \frac{r\int_0^{\alpha} \sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi}{\int_0^{\alpha} \sin\varphi\,d\varphi} = \frac{r\left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{\alpha}}{\left[-\cos\varphi\right]_0^{\alpha}} = r\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Kui segment muutub poolsfääriks, siis $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ja

$$x_0 = r\cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{r}{2},$$

s. o. poolsfääri raskuspunkt asetseb sfääri keskpunktist poole raadiuse kaugusel.

§ 90. Guldini valemid. 1) Tasapinnalise kõvera $y = f(x)$ kaare raskuspunkti ordinaat vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ oli (§ 89, p. 4)

$$y_0 = \frac{\int_a^b y\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}.$$

Et (§ 87, p. 1)

$$\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = s,$$

siis

$$\int_a^b y\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = sy_0$$

ja korrutatult 2π-ga

$$2\pi\int_a^b y\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = s\cdot 2\pi y_0$$

ehk

$$U = s\cdot 2\pi y_0,$$

mida nimetatakse Guldini* esimeseks valemiks. Sellest valemist nähtub, et kaare pöörlemisel ümber telje, mis ei lõika kaart, tekkiva pöördpinna pindala U on võrdne kaare pikkuse s ja kaare raskuspunkti poolt moodustatud ringjoone pikkuse korrutisega.

Nagu nägime (§ 87, p. 2), on tsükloidi

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

ühe haru pikkus

$$s = 8a$$

ja tema raskuspunkti ordinaat (§ 89, p. 4, a)

$$y_0 = \frac{4}{3}a.$$

Järelikult on siis tsükloidi haru pöörlemisel ümber X-telje tekkiva pöördpinna suurus

$$U = 8a \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3}a = \frac{64}{3}\pi a^2.$$

2) Kõveraga $y = f(x)$, X-teljega ning ordinaatidega $f(a)$ ja $f(b)$ piiratud tasapinnalise kujundi raskuspunkti ordinaat oli (§ 89, p. 2)

$$y_0 = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx}{\int_a^b y dx}.$$

Et (§ 84, p. 1)

$$\int_a^b y dx = S,$$

siis

$$\frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx = Sy_0$$

---

* P. Guldin (1577—1643) käsitles keskajal esimesena käesolevas paragrahvis esinevaid valemeid, kuigi nende päritolu ulatub tagasi III sajandisse, sest juba siis käsitles Aleksandria matemaatik Pappus neid valemeid sisuliselt oma koguteoses «Synagoge».

ja korrutatult 2π-ga

$$\pi \int_a^b y^2 dx = S \cdot 2\pi y_0$$

ehk

$$V = S \cdot 2\pi y_0,$$

mida nimetatakse Guldini teiseks valemiks. Guldini teisest valemist nähtub, et tasapinnalise kujundi pöörlemisel ümber telje, mis ei lõika kujundit, tekkiva pöördkeha ruumala V on võrdne selle kujundi pindala S ja kujundi raskuspunkti poolt moodustatud ringjoone pikkuse korrutisega.

Et ellipsi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

veerand pindala on (§ 84, p. 1, b)

$$S = \frac{\pi ab}{4}$$

ja selle kujundi pöörlemisel ümber X- või Y-telje (vahemikus $0 \leqslant x \leqslant a$ või vahemikus $0 \leqslant y \leqslant b$) moodustuva poole pöördellipsoidi ruumala on vastavalt (§ 86, a)

$$V_x = \frac{2}{3}\pi ab^2, \quad V_y = \frac{2}{3}\pi a^2 b,$$

siis Guldini teise valemi järgi

$$V_y = S \cdot 2\pi x_0, \quad V_x = S \cdot 2\pi y_0,$$

s. o.

$$\frac{2}{3}\pi a^2 b = \frac{\pi ab}{4} \cdot 2\pi x_0, \quad \frac{2}{3}\pi ab^2 = \frac{\pi ab}{4} \cdot 2\pi y_0,$$

milledest saame raskuspunkti koordinaadid

$$x_0 = \frac{4a}{3\pi}, \quad y_0 = \frac{4b}{3\pi}.$$

Nagu näeme, võimaldavad Guldini valemid kaare pikkuse s ja pindala S kaudu määrata pöördkehade pind- ja ruumalasid, kui on teada pöördpinda moodustava kaare ja pöördkeha moodustava tasapinnalise kujundi raskuspunktid ehk massikeskmed.

Samuti võime, ümberpöördult, teadaoleva pöördkeha pind- või ruumala kaudu Guldini valemite põhjal määrata pöördpinda moodustava kaare või pöördkeha moodustava tasapinnalise kujundi raskuspunkti ehk massikeskme.

§ 91. Harjutusülesandeid.

1. Leida kõveraga $y = 2x^2 + 1$ ja sirgega $y = 2x + 5$ piiratud kujundi pindala.

2. Leida kõveratega $y = 2x^2 - 5x - 3$ ja $y = x^2 - 3x + 5$ piiratud kujundi pindala.

3. Leida kõveraga $(y - x)^2 x = 1$ ja koordinaattelgedega piiratud kujundi pindala.

4. Leida kõveraga $y = \frac{x}{1 + x^2}$ ja X-teljega piiratud kujundi pindala rajades $x = 0$ ja $x = 3$.

5. Leida kõveraga $y = \frac{x^3 + 1}{x}$ ja X-teljega piiratud kujundi pindala rajades $x = 2$ ja $x = 4$.

6. Leida kõveraga $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$ ja X-teljega piiratud kujundi pindala rajades $x = -4$ ja $x = 2$.

7. Leida kõveratega $y = x^2$ ja $y = ee^{\frac{x}{2}}$ ning sirgega $y = e$ piiratud kujundi pindala.

8. Leida sinusoidiga $y = \sin x$ ja Y-teljega piiratud pindala rajades $y = 0$ ja $y = 1$.

9. Leida ellipsi $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ pinna osa, mis asetseb ringis $x^2 + y^2 = 25$.

10. Leida kõveratega $x^2 + y^2 = 8$ ja $x^2 = 2y$ piiratud kujundi pindala.

11. Leida astroidi $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ pindala.

12. Leida kolmlehe $r = a \cos 3\varphi$ pindala.

13. Leida spiraalide $r = a\varphi$ ja $r = a\varphi^2$ kaartega piiratud kujundi pindala.

14. Leida paraboolidega $y^2 = 2px$ ja $x^2 = 2qy$ piiratud kujundi pindala.

15. Leida tsissoidiga $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ ja tema asümptoodiga $x = 2a$ piiratud kujundi pindala.

16. Leida kera segmendi ruumala, kui kera raadius $R = 8$ cm ja segmendi kõrgus $h = 3$ cm.

17. Leida kera sektori ruumala, kui sektor saadakse X-teljest, sirgest $y = x$ ja ringjoonest $x^2 + y^2 = 16$ piiratud kujundi pööramisel ümber X-telje.

18. Leida pöördkeha ruumala, kui pöördkeha saadakse kõvera $4x^2 - y + 1 = 0$ pööramisel ümber X-telje rajades $x = -1$ ja $x = 1$.

19. Leida pöördkeha ruumala, kui pöördkeha saadakse kõverast $x^2 - 2y + 2 = 0$ ja sirgest $y = 3$ piiratud kujundi pööramisel ümber X-telje.

20. Leida pöördkeha ruumala, kui pöördkeha saadakse kõveratest $x^2 - 2x - 2y + 4 = 0$ ja $x^2 + x + y - 1 = 0$ piiratud kujundi pööramisel ümber X-telje.

21. Leida pöördkeha ruumala, kui pöördkeha saadakse kolmnurga pööramisel ümber a) X-telje, b) Y-telje, kui kolmnurga külgede võrrandid on: $x - 3y - 12 = 0$, $x + y - 2 = 0$, $y + 6 = 0$.

22. Leida pöördkeha ruumala, kui pöördkeha saadakse sinusoidi $y = \sin x$ ühe haru pööramisel ümber X-telje.

23. Leida pöördkeha ruumala, kui pöördkeha saadakse ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ pööramisel ümber sirge $y = c$, kus $c \geqslant b$.

24. Leida pöördkeha ruumala, kui pöördkeha saadakse ringi $x^2 + (y - b)^2 = r^2$ pööramisel ümber X-telje.

25. Leida pöördkeha ruumala, kui pöördkeha saadakse kõvera $x^2 + y^{\frac{2}{3}} = 1$ pööramisel ümber Y-telje.

26. Leida kõvera $y = x^2$ kaare pikkus rajades $x = 0$ ja $x = 2$.

27. Leida kõvera $y = 2 - x^2$ kaare pikkus ülalpool X-telge.

28. Leida kõvera $x^2 + 2y - 2 = 0$ kaare pikkus rajades $x = -3$ ja $x = 1$.

29. Leida kõvera $y = \ln \sin x$ kaare pikkus rajades $x = \frac{\pi}{3}$ ja $x = \frac{\pi}{2}$.

30. Leida kõvera $y^2 = 4x^3$ kaare pikkus rajades $x = 0$ ja $x = 3$.

31. Leida kõvera $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$ kaare pikkus rajades $x = -2$ ja $x = 2$.

32. Leida astroidi $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ pikkus.

33. Leida kõvera $9ay^2 = x(x - 3a)^2$ kaare pikkus rajades $x = 0$ ja $x = 3a$.

34. Leida pöördpinna pindala, kui pöördpind saadakse kõvera $y = 2e^{\frac{x}{2}}$ pööramisel ümber X-telje rajades $x = -2$ ja $x = 2$.

35. Leida pöördpinna pindala, kui pöördpinna moodustab sinusoidi $y = \sin x$ üks haru pöörlemisel ümber X-telje.

36. Leida rõnga pindala, kui rõngas saadakse ringi $x^2 + y^2 = r^2$ pööramisel ümber telje $y = c$, kus $c \geqslant r$.

37. Leida pöördpinna pindala, kui pöördpind saadakse parabooli $y^2 = 6x$ pööramisel ümber X-telje rajades $x = 0$ ja $x = 4{,}5$.

38. Leida pöördpinna pindala, kui pöördpinna moodustab kõver $y = e^{-x}$ pöörlemisel ümber X-telje rajades $x = 0$ ja $x = \infty$.

39. Leida ringi $x^2 + y^2 = r^2$ veerand pinna raskuspunkt, a) kui ringi veerand on esimeses kvadrandis; b) kui ringi veerand on sümmeetriline X-telje suhtes.

40. Leida kujundi raskuspunkt, kui kujund on piiratud parabooliga $f(x) = \sqrt{2px}$, X-teljega ja ordinaadiga $f(a)$.

41. Leida sinusoidiga ja X-teljega piiratud kujundi raskuspunkt $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$.

42. Leida ringjoone $x^2 + y^2 = r^2$ veerand kaare raskuspunkt, a) kui kaar on esimeses kvadrandis; b) kui kaar on sümmeetriline X-telje suhtes.

43. Leida pöördkeha raskuspunkt, kui selle pöördkeha moodustab ümber X-telje pöörlemisel kujund, mis on piiratud parabooliga $f(x) = 2\sqrt{px}$, X-teljega ja ordinaadiga $f(a)$.

HARJUTUSÜLESANNETE VASTUSED

§ 14

1. $31{,}4(\pm 0{,}6)\ \text{cm}^2$.
2. 1,8%.
3. $32{,}72(\pm 0{,}28)\ \text{m}^2$.
4. 0,5%.
5. a) $f(0) = 1$;
   b) $f(1) = 1$;
   c) $f(-1) = 0$.
6. a) $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$;
   b) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$;
   c) $f(0) = -\frac{\pi}{2}$.
7. $y = 10^{\pm\sqrt{x}}$.
8. $y = \sqrt{10^x}$.
9. $y = \pm \arcsin \sqrt{x}$.
10. $y = \pm \sqrt{\operatorname{arctg} x}$.
11. $y = \log(x+1)$.
12. $y = \sqrt[3]{a^3 - x^3}$.
13. $y = \pm \sqrt{\frac{1-x}{x}}$.
14. $y = \frac{1-x}{1+x}$.
15. $y = 1 + 2 \sin x$.
16. $y = \frac{10^x - 10^{-x}}{2}$.
17. Paaritu.
18. Ei kumbki.
19. Paaris.
20. Paaritu.
21. Paaris.
22. Paaritu.
23. Perioodiline, perioodiga π.
24. Perioodiline, perioodiga π.
25. Perioodiline, perioodiga π.
26. Mitteperioodiline.
27. Perioodiline, perioodiga 2π.
28. Perioodiline, perioodiga 4.
29. $2 \leqslant x < +\infty$.
30. $-\infty < x \leqslant 2$.
31. $-\infty < x < +\infty$.
32. $-\infty < x < -3$, $-3 < x < +\infty$.
33. $-2 \leqslant x \leqslant 4$.
34. $-\infty < x < +\infty$.
35. $-\infty < x < -5$, $-5 < x < -1$, $-1 < x < +\infty$.
36. $-\infty < x \leqslant -1$, $1 \leqslant x < +\infty$.

§ 24

2. Koondub.
3. Koondub.
4. Koondub.
5. Hajub.
6. Hajub.
7. Koondub.
8. 1.
9. 0.
10. 1.

11. $\frac{1}{2}$.

12. 0.

13. 3.

14. na^{n-1}.

15. $\frac{1}{2}$.

16. $\frac{3}{2}$.

17. 1.

18. 2.

19. $\frac{1}{3}$.

20. $\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}$.

21. $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$.

22. $\sqrt{2}$.

23. 1.

24. e.

25. $\frac{1}{e}$.

26. e^5.

27. $\ln a$.

§ 43

1. $(2-m)x^{1-m}$.

2. $-\frac{1}{x^2}$.

3. $\frac{2-n}{x^{n-1}}$.

4. $\frac{n-1}{2^{2-n}}$.

5. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

6. $\frac{3}{2}\sqrt{x}$.

7. $\frac{7}{4}\sqrt[4]{x^3}$.

8. $-\frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$.

9. $6ax^2$.

10. $-\frac{m}{x^2}$.

11. $-\frac{2}{ax^3}$.

12. $\frac{\sqrt{ax}}{2a}$.

13. $10x^9 - 6x^5 + 2x$.

14. $6x^2 - 8x - 5$.

15. $9a^3x^2 - 4b^2x + c$.

16. $\frac{3}{x^4} - \frac{5}{x^5} - \frac{1}{x^2}$.

17. $\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

18. $12 + 30x - 27x^2$.

19. $2m^2x - 6mnx^2 + 4n^2x^3$.

20. $5x^4 - 12x^2 + 4$.

21. $\frac{2(2-3x)}{x^5}$.

22. $\frac{9x^5+4}{3x^3}$.

23. $\frac{3x-4}{x^3}$.

24. $\sin x + \cos x$.

25. $\frac{2}{\sin^2 x} - 3\sin x$.

26. $-\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$.

27. $\frac{a^x}{x^{a+1}}(x\ln a - a)$.

28. $\frac{1-x\ln x}{xe^x}$.

29. $\frac{1}{2\sqrt{1+x}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$.

30. $-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.

31. $\frac{x(3x^2+2)}{\sqrt{x^2+2}}$.

32. $\frac{a^2x}{(a^2-x^2)\sqrt{x^4-a^4}}$.

33. $-\frac{2(x+\sqrt{x^2+a^2})^2}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$.

34. $\frac{2x}{x^2-a^2}$.

35. $\frac{x}{a^2+x^2}$.

36. $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

37. $\frac{4x}{x^2-a^2}\ln(a^2-x^2)$.

38. $3\cos 3x$.

39. $3x^2\cos x^3$.

40. $3\sin^2 x\cos x$.

41. $-4\sin 4x$.

42. $\frac{9\sqrt{\operatorname{tg} 3x}}{2\cos^2 3x}$.

43. $\frac{a}{a^2+x^2}$.

44. $-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

45. $-\frac{\sqrt{ax}}{2\sqrt{a^2+x^2}}$.

46. $\frac{1}{2(x-2)\sqrt{1-x}}$.

47. $\frac{2x}{10x^2-x^4-26}$.

48. $-\frac{\ln 25}{25^{x-1}}$.

49. $\frac{a^{\ln x}\ln a}{x}$.

50. $\frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}$.

51. 1.

52. $\frac{1}{x\ln x}$.

53. $\frac{2\ln\ln x}{x\ln x}$.

54. $\frac{2}{x\ln x}$.

55. $\frac{4\ln\ln^2 x}{x\ln x}$.

56. $\frac{\cos\ln x}{x}$.

57. $\frac{2}{\sin 2x}$.

58. $e^{\cos x}(\cos x-\sin^2 x)$.

59. $e^x(\operatorname{ctg} x+\ln\sin x)$.

60. $x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\cdot\ln x\right)$.

61. $\frac{\sqrt[x]{x}}{x^2}(1-\ln x)$.

62. $\sin^x x(\ln\sin x+x\operatorname{ctg} x)$.

63. $2x(x^2-2)^{x^2-2}\ln e(x^2-2)$.

64. $x^{\arcsin x}\left(\frac{\arcsin x}{x}+\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

65. $e^x x^{e^x}\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$.

66. $x^x x^{x^x}\left(\ln x+\ln^2 x+\frac{1}{x}\right)$.

67. $2\operatorname{ch} 2x$.

68. $2\operatorname{sh} 4x$.

69. $\operatorname{th} x+\frac{x}{\operatorname{ch}^2 x}$.

70. $\frac{e^x(\operatorname{sh} x\cdot\operatorname{ch} x+1)}{\operatorname{sh}^2 x}$.

71. $-\frac{1}{2\operatorname{sh}^2 2x}$.

72. $2\operatorname{sh} 2x$.

73. e^{-2x}.

74. $\operatorname{th} x$.

75. 0.

76. $6x$.

77. $\frac{2}{x^3}$.

78. $-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$.

79. $\frac{1}{4(x-1)\sqrt{1-x}}$.

80. $\frac{1}{(x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2}}$.

81. $-9\sin 3x$.

82. $a^3\cos ax$.

83. $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$.

84. $\frac{2\cos x}{\sin^3 x}$.

85. $e^x(x+2)$.

86. $\frac{1}{x}$.

87. $-\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

88. $\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

89. 6.

90. $30(40x^3-1)$.

91. -6.

92. $-\frac{180}{x^6}$.

93. $\frac{3}{8x^2\sqrt{x}}$.

94. $\frac{3x\sqrt{x}-48}{8x^4}$.

95. $\frac{2(2\sin^2 x+1)}{\cos^4 x}$.

96. $-\frac{2(2\cos^2 x+1)}{\sin^4 x}$.

97. $\frac{2}{(x-1)^3}$.

98. $\frac{2\cos x}{\sin^3 x}$.

99. $n!$

100. $\cos\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)$.

101. $a^x\ln^n a$.

102. $\frac{(n-1)!}{x}$.

103. $6x+y+13=0$;
$x-6y+70=0$.

104. $\alpha_1\approx 71°33'54''$;
$\alpha_2\approx 108°26'06''$.

105. $2°17'26''$.

107. $P_1(3;\ -22)$;
$P_2(-1;\ 10)$.

108. $2°21'41''$.

109. $45°$

110. $P(6;\ -3)$.

§ 63

1. $v_x=-r\omega\sin\alpha$, $v_y=r\omega\cos\alpha$; $w_x=-r\omega^2\cos\alpha$, $w_y=-r\omega^2\sin\alpha$.

2. $v=a\sqrt{2}\sin 2t$; $w=2a\sqrt{2}\cos 2t$.

3. $v=24$ m/sek; $w=18$ m/sek^2.

4. $w=-\frac{\pi^2 s}{4}$.

5. $s=0{,}04t^3+0{,}02t+1$.

6. $v\approx 163{,}6$ m/sek; $v_x\approx 141{,}4$ m/sek; $v_y\approx 82{,}5$ m/sek;
$\alpha\approx \operatorname{arctg}\frac{82{,}5}{141{,}4}\approx 30°14'$.

7. $v\approx 98$ m/sek; $w=-g=-9{,}81$ m/sek^2; $t\approx 20$ sek.

8. $w_y=10$ m/sek^2.

9. Puutuja lõigu alus $= 1$; normaali lõigu alus $= a^2$.

10. Puutuja lõigu alus $= \frac{3}{4}a$; normaali lõigu alus $= \frac{2b^2}{a}$.

11. Puutuja lõigu alus $= 4p$; normaali lõigu alus $= p$.

12. Puutuja ja normaali lõikude alused $= \sqrt{2}$.

13. $a+b = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

14. $\frac{1}{3} = f'\left(\frac{9}{4}\right)$.

15. $3 = \frac{f'(2)}{g'(2)}$.

16. $-1 = \frac{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{g'\left(\frac{\pi}{4}\right)}$.

17. $P(-0{,}5;\ 3{,}75)$.

24. $\frac{3}{5}$.

25. $\frac{1}{2}$.

26. $-\frac{1}{3}$.

27. 3.

28. 1.

29. 2.

30. $\frac{1}{2}$.

31. 0.

32. 0.

33. ∞.

34. 0.

35. 0.

36. 0.

37. 2.

38. 0.

39. 0.

40. 0.

41. -1.

42. $-\frac{1}{2}$.

43. 1.

44. 1.

45. $\frac{1}{2}$.

46. e.

47. 1.

48. $1+4(x+1)-3(x+1)^2-2(x+1)^3+(x+1)^4$.

49. $1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+\frac{e^{\Theta x}-e^{-\Theta x}}{2\cdot 5!}x^5$, $(0<\Theta<1)$.

50. Maksimaalne viga $= 0{,}006$.

51. $x < 0{,}2213$; $\cos 5^\circ \approx 0{,}9962$.

54. $A(1;\ 4)$.

55. $B(2;\ -11)$.

56. $C(1;\ -8)$.

57. $C(1;\ 1)$.

58. $A\left(2;\ \frac{1}{6}\right)$, $B\left(-2;\ -\frac{1}{2}\right)$.

59. $A(1;\ 2)$; $B(-1;\ -2)$.

60. $A\left(\frac{3}{4};\ \frac{5}{4}\right)$.

61. $A(0;\ 2)$.

62. $A(\pm 1;\ 1)$; $B(\pm 1;\ -1)$; $C(0;\ 0)$.

63. $A\left(\frac{3a}{4};\ \frac{3a^2}{4}\sqrt{3}\right)$.

64. $A_1\left(\frac{\pi}{4};\ \sqrt{2}\right)$.

65. $C_1\left(\frac{\pi}{4};\ 0\right)$.

66. $A_1(0;\ 3)$; $B_1\left(\frac{2\pi}{3};\ -\frac{3}{2}\right)$.

67. $B(1;\ e)$.

68. $A\left(2;\ \frac{4}{e^2}\right)$; $B(0;\ 0)$;
$C_1(0{,}6;\ 0{,}2)$; $C_2(3{,}4;\ 0{,}4)$.

69. $B(1;\ e)$.

70. $B\left(-\ln 2;\ -\frac{1}{4}\right)$;
$C\left(-\ln 4;\ -\frac{3}{16}\right)$.

71. $\left.\begin{array}{l} a<x<e \\ e<x<\infty \end{array}\right\}$.

72. $\left.\begin{array}{l} -\infty<x<-\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}<x<\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}}<x<+\infty \end{array}\right\}$.

73. 600 m².

74. $\frac{a}{2}$.

75. 3.

76. 1,5 m.

77. Võrdsed.
78. 90°.
79. $r = h \approx 6{,}8$ cm.
80. a) $V = \frac{32}{9}\pi\sqrt{3}$ dm³;

b) $V = \frac{256}{81}\pi$ dm³;

c) kuup servaga $\approx 23{,}1$ cm.
81. $S = 80\ \pi$ cm².
82. $V = \frac{1\,000\,000}{324}\pi$ cm³.
83. 6 m.
84. $h \approx 8{,}32$ m.
85. $r = 3$ cm.
87. Paksus $\approx 19{,}05$ cm.
88. 9 cm².
89. S_{max}, kui $r = h = 6$ cm;
V_{max}, kui $r = 2h = 8$ cm.
90. $r \approx 138$ cm; $h \approx 98$ cm; $\alpha \approx 66°$.
91. $V = \frac{\pi a^3}{12}\sqrt{2}$.
92. 24. oda juurde.
93. 42,25 km.
94. a) $h \approx 34{,}14$ cm;
b) $h = 40$ cm.
95. $\sqrt{h_1 h_2}$.
96. 5 minuti pärast on lennukite minimaalne kaugus teineteisest 25 km.
97. $\alpha = \beta$.
98. v_{max} ja w_{min} siis, kui $t = 0$ või $\frac{T}{2}$;

v_{min} ja w_{max} siis, kui $t = \frac{T}{4}$.
99. $y = \pm 2x$.
100. $y = x + \frac{1}{2}$; $x = \frac{1}{2}$.
101. $y = \frac{1}{2}x - 1$; $x = -1$.
102. $x = 1$; $y = 2$.
103. $y = x$; $x = 0$.
104. $y = -2x - 1$; $y = -1$.
105. $y = x + \frac{1}{e}$; $x = -\frac{1}{e}$.
106. $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$; $y = -\frac{1}{2}x$.
107. $\varrho_1 \approx 5{,}7$; $\varrho_2 \approx 8{,}7$.
108. $\varrho_1 = 1$; $\varrho_2 = \infty$.
109. $\varrho_1 = p$; $\varrho_2 = 3p\sqrt{3}$.
110. $\varrho_1 = \varrho_2 = \frac{1}{4}$.
111. $B(3;\ 1)$.
112. $\varrho = \frac{\pi a}{2}$.
113. $\varrho = |\sqrt{1 + \ln^2 a}|$.
114. $64x^2 + (8y - 1)^2 = 1$;
$64(x + 512)^2 + (8y - 385)^2 = 257^2$.
115. $\left(x + \frac{7}{3}a\right)^2 + \left(y \mp \frac{8}{3}a\right)^2 = \frac{125}{9}a^2$.

§ 83

1. $\frac{x^4}{4} + c$.
2. $2x^6 + c$.
3. $c - \frac{1}{2x^2}$.
4. $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$.
5. $x^5 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + c$.
6. $\frac{4}{3x^3} - \frac{3}{2x^2} - \frac{2}{x} + c$.
7. $4\sqrt{x} - \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} + c$.
8. $3^x \ln 3 + x^3 + c$.

9. $x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + c.$

10. $a^3x - \frac{3}{2}a^2x^2 + ax^3 - \frac{1}{4}x^4 + c.$

11. $\frac{x^4}{2} - \frac{5x}{2} - \frac{3}{2x} + c.$

12. $c - \frac{1}{4x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3}.$

13. $\frac{x^6}{6} - \frac{3x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} - \ln x + c.$

14. $c - \frac{6}{\sqrt{x}} - \frac{30}{\sqrt[6]{x}}.$

15. $5\sin x + 2\cos x + c.$
16. $2\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x + c.$
17. $C - bx - a\cos x - c\operatorname{ctg} x.$
18. 6.
19. 20.
20. $\frac{a^6}{5}.$
21. $40\frac{5}{6}.$
22. $6\frac{2}{3}.$
23. $\frac{8}{3}a^3.$
24. $e - 1.$
25. 4.
26. $2a.$
27. 1.
28. $\frac{2\sqrt{3}}{3}.$
29. 2.
30. $\pi.$
31. $c - \frac{1}{a+x}.$
32. $\frac{1}{2n(m-nx)^2} + c.$
33. $c - \frac{\operatorname{ctg} 4x}{4}.$
34. $c - \frac{\cos(a^2+x^2)}{2}.$
35. $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + c.$
36. $\frac{\operatorname{arctg} x^2}{2} + c.$
37. $\frac{\arcsin x^3}{3} + c.$
38. $c - \frac{1}{e^x}.$
39. $c - \frac{e^{-k^2x^2}}{2k^2}.$
40. $\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} x - \frac{x}{1+x^2}\right) + c.$
41. $\frac{a^2}{2b}\arcsin\left(\frac{bx}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - b^2x^2} + c.$
42. $\frac{a^x(a^x+2)+c}{2\ln a}.$
43. $\frac{e^{5x}(5x+4)+c}{25}.$
44. $\frac{e^{x^3}+c}{3}.$
45. $\ln c(a+e^x).$
46. $\frac{2}{3}\left(1+e^x\right)^{\frac{3}{2}} + c.$
47. $\frac{1}{1-e^x} + c.$
48. $\frac{1}{2}\ln^2 x + c.$
49. $\frac{1}{3}\ln^3 x + c.$
50. $e^x(x^2 - x + 2) + c.$
51. $e^x(x^3 - 3x^2 + 3x - 6) + c.$
52. $e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + c.$
53. $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c.$
54. $\sqrt{x^2 - a^2} - a\operatorname{arccos}\left(\frac{a}{x}\right) + c.$

55. $\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})-\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}+c.$

56. $c-\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x}.$

57. $x\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{1+x^2}+c.$

58. $x\operatorname{arcctg}x+\ln\sqrt{1+x^2}+c.$

59. $\frac{x^3}{3}\left(\ln x-\frac{1}{3}\right)+c.$

60. $x(\ln^2 x-2\ln x+2)+c.$

67. $\frac{n\sin nx\sin mx+m\cos nx\cos mx}{n^2-m^2}+c.$

68. $\frac{m\cos mx\sin nx-n\sin mx\cos nx}{n^2-m^2}+c.$

69. $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}+c.$

70. $\frac{x\ln x}{x+1}-\ln(x+1)+c.$

71. $\ln x(\ln\ln x-1)+c.$

72. $2\sqrt{x+1}\,[\ln(x+1)-2]+c.$

73. $\frac{\operatorname{tg}^2x+2\ln\cos x+c}{2}.$

78. $\frac{c-63\cos^5x+90\cos^7x-35\cos^9x}{315}.$

79. $\frac{a^3}{3}.$

80. $\frac{\pi}{2}.$

81. $\frac{1}{8}(39\sqrt[3]{13}-15\sqrt[3]{5})\approx 8{,}3.$

82. 0.

83. $2-\ln 2{,}25\approx 1{,}19.$

84. $\frac{1}{2}(\sqrt[3]{121}-\sqrt[3]{25})\approx 1{,}01.$

85. $3\sqrt[3]{2a}.$

86. $\frac{3\sqrt{2}}{2}.$

61. $\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)+c.$

62. $e^x-\ln(e^x+1)+c.$

63. $\frac{a^xe^x+c}{\ln(ea)}.$

64. $e^{\sin x}+c.$

65. $\frac{c-a^{\cos x}}{\ln a}.$

66. $\frac{c-e^{2\cos x}}{2}.$

74. $\frac{c-\operatorname{ctg}^2x-2\ln\sin x}{2}.$

75. $\frac{3x-3\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^3x+c}{3}.$

76. $\frac{3x+3\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}^3x+c}{3}.$

77. $\frac{4x-\sin 4x+c}{32}.$

87. $\frac{\pi}{6}.$

88. $2-\frac{\pi}{2}.$

89. $\frac{3}{4}.$

90. $-1.$

91. 0.

92. $\frac{2}{3}.$

93. 1.

94. $\frac{\pi}{2}-2+\ln 2.$

95. $3\ln|x-5|-2\ln|x+1|+c.$

96. $\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+19x-16\ln|x-2|+81\ln|x-3|+c.$

97. $\ln\sqrt{x^2-3}+\sqrt{3}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+c.$

98. $\frac{2}{3}x^3-2x^2+5x+\ln|x-2|+2\ln|x-1|+c.$

99. $\ln\left|c\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2\sqrt{x(x+1)}\right|.$

100. $\ln|c\sqrt[6]{x(x-2)^3(x+3)^2}|.$

101. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x-\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+c.$

102. $\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{(x+1)^3}\right|+\frac{16}{3}\ln|x+2|+c.$

103. $\frac{5}{3}\ln|x-1|-\frac{4}{3}\ln|x+1|+\frac{10}{3}\ln|x-2|-\frac{11}{3}\ln|x+2|+c.$

104. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+c.$

105. $\frac{3}{x-2}+2\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|+c.$

106. $\frac{4x+3}{2(x+1)^2}+2\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+c.$

107. $\frac{x^2}{2}-\frac{2}{x-1}+2\ln|x+1|+c.$

108. $\frac{3}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{2}{x-1}-\frac{1}{2(x+1)}+c.$

109. $\frac{x}{2x^2-x^4-1}+c.$

110. $\frac{1}{x}+\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+c.$

111. $\ln|x^2-3x+25|-4\operatorname{arctg}\frac{x-1}{3}+c.$

112. $\frac{3}{2}\ln(x^2+4x+8)-\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3}+c.$

113. $3\ln(x^2+4x+13)-4\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3}+c.$

114. $\frac{1}{2}\ln(x^2+3)+2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+c.$

115. $\frac{9}{5}x^5 - 2x^3 + 4x - \frac{8}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + c.$

116. $\ln\left|c\sqrt[3]{\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2}}\right|.$

117. $\frac{1}{2}\ln[(x-3)^2(x^2+x+1)] + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c.$

118. $\frac{3}{2}\ln|x^2-2x+5| - \ln|x-1| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + c.$

119. $\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + c.$

120. $\ln\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} + \operatorname{arctg} x - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + c.$

121. $\ln\frac{x^2+1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + c.$

122. $\frac{x-4}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{5}{2}\operatorname{arctg} x + c.$

123. $\ln\left|c\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+3}}\right|.$

124. $2\ln|x^2-4x+29| + 3\ln|x^2-2x+5| + 6\operatorname{arctg}\frac{x-2}{5} + 3\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + c.$

125. $3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6\ln(\sqrt[6]{x}+1) + c.$

126. $\frac{8}{3}\sqrt[8]{x^3} + 2\ln\left|\frac{\sqrt[8]{x}-1}{\sqrt[8]{x}+1}\right| + 4\operatorname{arctg}\sqrt[8]{x} + c.$

127. $\frac{4}{3}[\sqrt[4]{x^3} - \ln(\sqrt[4]{x^3}+1)] + c.$

128. $\frac{x+3}{\sqrt{2x+3}} + c.$

129. $x + 1 + 4\sqrt{x+1} + 4\ln|\sqrt{x+1}-1| + c.$

130. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2} - 3\sqrt[3]{x+1} + 3\ln|1+\sqrt[3]{x+1}| + c.$

131. $\frac{4}{45}(5x+8)(x-2)\sqrt[4]{x-2} + c.$

132. $2\sqrt{x-2} + \sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{2}} + c.$

133. $\operatorname{arctg} \dfrac{x+\sqrt{x^2+4x-4}}{2}+c.$

134. $\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x}|-\dfrac{4}{x+\sqrt{x^2+2x}}+c.$

135. $\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\dfrac{a^2}{2}\ln\dfrac{x^2+\sqrt{x^2-a^2}}{a}+c.$

136. $\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}+c.$

137. $c-\sqrt{3-2x-x^2}-\arcsin\dfrac{x+1}{2}.$

138. $c-\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}.$

139. $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)+c.$

140. $\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}(3\operatorname{tg}x)+c.$

141. $\dfrac{2}{1+\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}+x+c.$

142. $\dfrac{2x^2-1}{3x^3}\sqrt{x^2+1}+c.$

143. $c-\dfrac{2x^2+1}{x\sqrt{x^2+1}}.$

144. $\dfrac{(5x^2-1)(2x^2+1)^2}{70}\sqrt{2x^2+1}+c.$

145. 1.

146. $\dfrac{\pi}{2}.$

147. 1.

148. $\dfrac{\pi}{a}.$

149. $\dfrac{\pi}{2}.$

150. $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\ln 2}{2}.$

151. 0,91.

152. 0,876.

153. 0,631.

154. 0,684.

155. 0,614.

156. 0,969.

157. 0,1575.

158. 0,106.

§ 91

1. 9.

2. 36.

3. $1\dfrac{1}{2}.$

4. $\dfrac{1}{2}\ln 10\approx 1{,}15.$

5. $18\dfrac{2}{3}+\ln 2\approx 19{,}36.$

6. $2(e^2 + e - e^{-1} - e^{-2}) \approx 19{,}2$.
7. $S_1 \approx 1{,}11$; $S_2 \approx 4{,}86$.
8. $\frac{\pi}{2} - 1 \approx 0{,}57$.
9. $S \approx 51$.
10. $2\pi + \frac{4}{3} \approx 7{,}6$.
11. $\frac{3}{8}\pi a^2$.
12. $\frac{\pi a^2}{4}$.
13. $3\pi a^2$.
14. $\frac{4}{3}pq$.
15. $3\pi a^2$.
16. 63π.
17. $V \approx 39$.
18. $13\frac{11}{15}\pi$.
19. $23\frac{7}{15}\pi$.
20. Pöördkeha ei teki.
21. a) $236\frac{5}{6}\pi$; b) $130\frac{1}{6}\pi$.
22. π^2.
23. $2\pi^2 abc$.
24. $2\pi^2 br^2$.
25. $\frac{4}{5}\pi$.
26. $s \approx 4{,}6$.
27. $s \approx 5{,}1$.
28. $s \approx 6{,}8$.
29. $\frac{1}{2}\ln 3 \approx 0{,}55$.
30. $\frac{2}{27}(28\sqrt{28} - 1) \approx 10{,}9$.
31. $2(1 - e^{-1}) \approx 4{,}7$.
32. $6a$.
33. $2a\sqrt{3}$.
34. $U \approx 76{,}8$.
35. $U \approx 14{,}4$.
36. $4\pi^2 rc$.
37. 42π.
38. $\pi[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$.
39. a) $x_0 = y_0 = \frac{4r}{\pi}$; b) $x_0 = \frac{4r\sqrt{2}}{\pi}$.
40. $x_0 = \frac{3}{5}a$, $y_0 = \frac{3}{8}\sqrt{2pa}$.
41. $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $y_0 = \frac{\pi}{8}$.
42. a) $x_0 = y_0 = \frac{2r}{\pi}$; b) $x_0 = \frac{2r\sqrt{2}}{\pi}$.
43. $x_0 = \frac{2}{3}a$.

VALEMITE TABEL

Eelkursuse valemeid

Absoluutväärtused:

$$|a| - |b| \leqslant |a + b| \leqslant |a| + |b|;$$

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|;$$

$$|a_1 \cdot a_2 \ldots a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \ldots |a_n|;$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

Summa ja vahe, korrutise, jagatise, astme ning juure absoluutsed vead:

$$x \pm y = a \pm b[\pm (\Delta a + \Delta b)];$$

$$xy = ab[\pm (b \cdot \Delta a + a \cdot \Delta b)];$$

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}\left(\pm \frac{b \cdot \Delta a + a \cdot \Delta b}{b^2}\right);$$

$$x^n = a^n(\pm na^{n-1}\Delta a);$$

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}\left(\pm \frac{\Delta a}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}\right).$$

Relatiivsed vead:

summa $x + y$ ja vahe $x - y$ puhul

$$\frac{\Delta a + \Delta b}{a \pm b};$$

korrutise xy ja jagatise $\frac{x}{y}$ puhul

$$\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b};$$

astme x^n puhul

$$\frac{n \cdot \Delta a}{a};$$

juure $\sqrt[n]{x}$ puhul

$$\frac{\Delta a}{na}.$$

Rist- ja polaarkoordinaatide seosed:

$$x = r\cos\varphi; \qquad y = r\sin\varphi; \qquad r = \sqrt{x^2+y^2};$$

$$\varphi = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Arkusfunktsioonide seosed:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2};$$

$$\arcsin x = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Hüperboolsed funktsioonid ja nende põhivalemid:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}; \qquad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}};$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1; \qquad \operatorname{th} x \cdot \operatorname{cth} x = 1;$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x; \qquad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x;$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}} = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}}{\operatorname{ch} x};$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}}; \qquad \operatorname{ch} x = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}}.$$

Areafunktsioonid:

$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}); \qquad \operatorname{arch} x = \pm\ln(x + \sqrt{x^2-1});$$

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}; \qquad \operatorname{arcth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}.$$

Astroid:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Cartesiuse leht:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

Tsissoid:

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}.$$

Kardioid:

$r = a(1 + \cos\varphi)$; $\quad (x^2 + y^2)(x^2 - 2ax + y^2) - a^2y^2 = 0.$

Lemniskaat:

$r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$; $\quad (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0.$

Arhimedese spiraal:

$$r = a\varphi;\ \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}.$$

Hüperboolne spiraal:

$$r = \frac{a}{\varphi};\ \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{a}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Logaritmiline spiraal:

$$r = ae^{m\varphi}.$$

Tsükloid:

$$x = r(t - \sin t); \qquad y = r(1 - \cos t);$$

$$x = r \arccos\frac{r - y}{r} + \sqrt{y(2r - y)}.$$

Funktsiooni $y = f(x)$ piirväärtus:

$|f(x) - A| < \varepsilon$ ehk $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, kui $|x - a| < \delta$;

$$\lim_{x \to 0}\frac{\sin x}{x} = 1; \qquad \lim_{x \to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \to 0}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1; \qquad \lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2{,}718\ \ldots$$

Logaritmide seosed:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a};$$

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \log e \cdot \ln x = 0{,}4343 \cdot \ln x;$$

$$\ln x = \ln 10 \cdot \log x = 2{,}3026 \cdot \log x.$$

Piirväärtuse põhiteoreemid:

$$\lim_{x \to a}[f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim_{x \to a} f_1(x) \pm \lim_{x \to a} f_2(x);$$

$$\lim_{x \to a}[f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{x \to a} f_1(x) \cdot \lim_{x \to a} f_2(x);$$

$$\lim_{x \to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x \to a} f_2(x)}, \text{ kui } \lim_{x \to a} f_2(x) \neq 0.$$

Funktsiooni $y = f(x)$ pidevuse tunnus:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ ehk } \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \text{ ehk}$$

$$|\Delta y| = |f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad \text{kui} \quad |\Delta x| < \delta.$$

Funktsiooni $y = f(x)$ vasakpoolne piirväärtus:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 - \Delta x) = f(x_0 - 0), \text{ kus } \Delta x > 0.$$

Funktsiooni $y = f(x)$ parempoolne piirväärtus:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0 + 0), \text{ kus } \Delta x > 0.$$

Funktsioonide diferentsimine

Funktsiooni $y = f(x)$ tuletis:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Funktsiooni $y = f(x)$ diferentsiaal:

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Funktsiooni $y = f(x)$ n-järku tuletis ja diferentsiaal:

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}; \quad d^n y = f^{(n)}(x)\,dx^n.$$

Leibniz'i valem:

$$\frac{d^n(uv)}{dx^n} = \frac{d^n u}{dx^n} \cdot v + \binom{n}{1} \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} \cdot \frac{dv}{dx} +$$

$$+ \binom{n}{2} \frac{d^{n-2} u}{dx^{n-2}} \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} + \binom{n}{3} \frac{d^{n-3} u}{dx^{n-3}} \cdot \frac{d^3 v}{dx^3} + \ldots + u \frac{d^n v}{dx^n}.$$

Liitfunktsiooni $y = f[\varphi(x)]$, kus $y = f(u)$ ja $u = \varphi(x)$, diferentsimine:

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x); \quad dy = f'(u)\varphi'(x)\,dx = f'(u)\,du.$$

Pöördfunktsiooni tuletis:

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Diferentsimise valemid:

$$\frac{dc}{dx} = 0;$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) + c] = f'(x);$$

$$\frac{d}{dx}\,[a\cdot f(x)] = af'(x);$$

$$\frac{d}{dx}\,[f_1(x) \pm f_2(x)] = f_1'(x) \pm f_2'(x);$$

$$\frac{d}{dx}\,[f_1(x)\cdot f_2(x)] = f_1'(x)\cdot f_2(x) + f_1(x)\cdot f_2'(x);$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right] = \frac{f_1'(x)\cdot f_2(x) - f_1(x)\cdot f_2'(x)}{f_2(x)^2};$$

$$\frac{d}{dx}\,(x^n) = nx^{n-1};$$

$$\frac{d}{dx}\,(\ln x) = \frac{1}{x};\quad \frac{d}{dx}\,[\ln f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)};$$

$$\frac{d}{dx}\,(\log x) = \frac{0{,}4343}{x};$$

$$\frac{d}{dx}\,(\log_a x) = \frac{1}{x\ln a};$$

$$\frac{d}{dx}\,(a^x) = a^x \ln a;$$

$$\frac{d}{dx}\,(e^x) = e^x;$$

$$\frac{d}{dx}\,(u^v) = u^v\left(\frac{v}{u}\cdot\frac{du}{dx} + \ln u\cdot\frac{dv}{dx}\right),$$

kus $u = \varphi(x) > 0$ ja $v = \psi(x)$;

$$\frac{d}{dx}\,(x^x) = x^x(1 + \ln x);$$

$$\frac{d}{dx}\,(\sin x) = \cos x;$$

$$\frac{d}{dx}\,(\cos x) = -\sin x;$$

$$\frac{d}{dx}\,(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$\frac{d}{dx}\,(\operatorname{ctg} x) = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$\frac{d}{dx}\,(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\frac{d}{dx}\,(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\frac{d}{dx}\,(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2};$$

$$\frac{d}{dx}\,(\operatorname{arcctg} x) = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sh} x) = \operatorname{ch} x;$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{ch} x) = \operatorname{sh} x;$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{th} x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cth} x) = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x};$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arsh} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}};$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arch} x) = \frac{1}{\pm\sqrt{x^2-1}};$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arth} x) = \frac{1}{1-x^2};$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcth} x) = -\frac{1}{x^2-1}.$$

Parameetriliste võrranditega $x = x(t)$ ja $y = y(t)$ määratud funktsiooni tuletised:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\dot{x}(\dot{x}\dddot{y} - \dot{y}\dddot{x}) - 3\ddot{x}(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})}{\dot{x}^5}.$$

Tuletiste rakendusi

Kiirus $[s = f(t)]$:

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t).$$

Kiirendus:

$$w = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = f''(t).$$

Liikumise kiirus kõvera $x = x(t)$ ja $y = y(t)$ punktis $P(x, y)$:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

ja kiirendus

$$w = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}.$$

Kuuli lennujoone võrrandid:

$$x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

ja lennuaeg

$$T = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Kõvera $y = f(x)$ puutuja punktis $P_0(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0)$$

ning puutuja lõigu P_0T ja selle aluse MT pikkused

$$P_0T = \frac{f(x_0)\sqrt{1 + f'(x_0)^2}}{f'(x_0)}; \quad MT = \left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right|.$$

Kõvera $y = f(x)$ normaal punktis $P_0(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}\,(x - x_0)$$

ning normaali lõigu P_0N ja selle aluse MN pikkused

$$P_0N = f(x_0)\sqrt{1 + f'(x_0)^2}; \quad MN = |f(x_0) \cdot f'(x_0)|.$$

Rolle'i teoreem pideva funktsiooni $f(x)$ puhul vahemikus $[a, b]$:

$$f'(\xi) = 0, \quad \text{kus } a < \xi < b.$$

Lagrange'i valem (diferentsiaalarvutuse keskväärtuse teoreem):

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi), \text{ kus } a < \xi < b$$

ehk

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x \cdot f'(x + \Theta \Delta x), \text{ kus } 0 < \Theta < 1.$$

Cauchy valem (diferentsiaalarvutuse üldistatud keskväärtuse teoreem):

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \text{ kus } a < \xi < b.$$

Funktsiooni $y = f(x)$ absoluutne viga:

$$\Delta y \approx f'(x_0)\,\Delta x$$

ja relatiivne viga

$$\frac{\Delta y}{y_0} \cdot 100\% \approx \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\,\Delta x \cdot 100\%.$$

Newtoni lähendamismeetod:

$$x \approx a_n = a - \frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)} - \ldots - \frac{f(a_{n-1})}{f'(a_{n-1})}.$$

Määramata kujud:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty.$$

L'Hôpitali meetod:

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)} = \ldots$$

Taylori valem:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

kus $\xi = x_0 + \Theta(x - x_0)$ ja $0 < \Theta < 1$.

Mac-Laurini valem:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

kus $\xi = \Theta x$ ja $0 < \Theta < 1$.

Mac-Laurini valemi rakendusi:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!}x^{n+1};$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} +$$

$$+ (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \Theta x;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} +$$

$$+ (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \Theta x;$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} +$$

$$+ \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\Theta x)^{n+1}};$$

$$(1 + x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \ldots + \binom{m}{n}x^n +$$

$$+ \binom{m}{n+1}(1 + \Theta x)^{m-n-1}x^{n+1}.$$

Maksimumi tunnused:

$$f'(x) = 0 \quad \text{ja} \quad f''(x) < 0$$

ehk üldiselt

$$f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(n-1)}(x) = 0 \quad \text{ja} \quad f^{(n)}(x) < 0,$$

kus n on paarisarv.

Miinimumi tunnused:

$$f'(x) = 0 \quad \text{ja} \quad f''(x) > 0$$

ehk üldiselt

$$f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(n-1)}(x) = 0 \quad \text{ja} \quad f^{(n)}(x) > 0,$$

kus n on paarisarv.

Käänupunkti tunnused:

$$f''(x) = 0 \quad \text{ja} \quad f'''(x) \neq 0$$

ehk üldiselt

$$f''(x) = f'''(x) = \ldots = f^{(n-1)}(x) = 0 \quad \text{ja} \quad f^{(n)}(x) \neq 0,$$

kus n on paaritu arv.

Kõvera $y = f(x)$ asümptoodid:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k \\ \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - kx] = b \end{array}\right\} \text{asümptoot: } y = kx + b;$$

$$\left.\begin{array}{l} 2)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k \\ \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \infty \end{array}\right\} \text{ei ole asümptooti;}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3)\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b \\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{asümptoot: } y = b;$$

$$4)\ \lim_{x\to a} f(x) = \infty \Big\} \text{ asümptoot: } x = a.$$

Kõverate $y = f(x)$, $x = x(t)$ ja $y = y(t)$ ning $r = f(\varphi)$ kõverusraadiused:

$$\varrho = \frac{[1 + f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}{|f''(x)|} = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|} = \frac{[f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2]^{\frac{3}{2}}}{|f(\varphi)^2 + 2f'(\varphi)^2 - f(\varphi)f''(\varphi)|}.$$

Kõverate $y = f(x)$ ning $x = x(t)$ ja $y = y(t)$ kõveruse **keskpunkti** koordinaadid:

$$\xi = x - f'(x)\frac{1 + f'(x)^2}{f''(x)} = x(t) - \dot{y}\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}};$$

$$\eta = f(x) + \frac{1+f'(x)^2}{f''(x)} = y(t) + \dot{x}\,\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}.$$

Kõvera $y = f(x)$ evoluudi parameetrilised võrrandid:

$$\xi = x - f'(x)\,\frac{1+f'(x)^2}{f''(x)};\quad \eta = f(x) + \frac{1+f'(x)^2}{f''(x)}.$$

Ellipsi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ evoluut:

$$(a\xi)^{\frac{2}{3}} + (b\eta)^{\frac{2}{3}} = (a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

Hüperbooli $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ evoluut:

$$(a\xi)^{\frac{2}{3}} - (b\eta)^{\frac{2}{3}} = (a^2+b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

Parabooli $y^2 = 2px$ evoluut:

$$\eta^2 = \frac{8}{27p}(\xi - p)^3.$$

Tsükloidi $x = r(t - \sin t)$ ja $y = r(1 - \cos t)$ evoluut:

$$\xi = r(t + \sin t);\quad \eta = -r(1 - \cos t).$$

Funktsioonide inteegrimine

Inteegrimise põhivalemid:

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx;$$
$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx;$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c;$$

$$\int dx = x + c;$$

$$\int 0 \cdot dx = c;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c;$$

$$\int e^x dx = e^x + c;$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + c;$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c;$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c,\ (\cos x \neq 0);$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c,\ (\sin x \neq 0);$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c_1 = -\arccos x + c_2,\ (|x| < 1);$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c_1 = -\operatorname{arcctg} x + c_2;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arsh} x + c = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c;$$

$$\pm\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arch} x + c = \pm \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + c, \quad (|x| \neq 1);$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arth} x + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c, \quad (|x| \neq 1);$$

$$-\int \frac{dx}{x^2-1} = \operatorname{arcth} x + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + c, \quad (|x| \neq 1);$$

$$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + c = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + c;$$

$$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + c = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + c;$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + c = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + c;$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + c = -\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} + c, \quad (x \neq 0).$$

Integraalsumma:

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta_k.$$

kus $x_{k-1} \leqslant \xi_k \leqslant x_k$.

Määratud integraal:

$$S = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Newton-Leibniz'i valem (määratud integraali põhivalem):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Määratud integraali omadusi:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx; \quad \int_a^a f(x)\,dx = 0;$$

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx; \quad \int_a^b 0 \cdot dx = 0;$$

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx;$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Kui $f(x)$ on paarisfunktsioon, siis

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx; \quad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Kui $f(x)$ on paaritu funktsioon, siis

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx; \quad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Kui $f(x) \geqslant 0$ ja $a < b$, siis

$$\int_{a}^{b} 0 \leqslant xp(x)\,\iint$$

Kui $f(x) \leqslant g(x)$ ja $a < b$, siis

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \leqslant \int_{a}^{b} g(x)\,dx.$$

Kui $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$ ja $a < b$, siis

$$\int_{a}^{b} \varphi(x)\,dx \leqslant \int_{a}^{b} f(x)\,dx \leqslant \int_{a}^{b} \psi(x)\,dx.$$

Kui vahemikus $[a, b]$ on $m \leqslant f(x) \leqslant M$, siis

$$m(b-a) \leqslant \int_{a}^{b} f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Kui vahemikus $[a, b]$ on $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$, siis

$$-\int_{a}^{b} |f(x)|\,dx \leqslant \int_{a}^{b} f(x)\,dx \leqslant \int_{a}^{b} |f(x)|\,dx$$

ehk

$$\left|\int_{a}^{b} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_{a}^{b} |f(x)|\,dx.$$

Bunjakovski võrratus:

$$\left|\int_{a}^{b} \varphi(x)\psi(x)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int_{a}^{b} \varphi(x)^2 dx} \cdot \sqrt{\int_{a}^{b} \psi(x)^2\,dx}.$$

Integraalarvutuse keskväärtuse valemid:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = (b-a)f(\xi);$$

$$\int_{a}^{b} f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_{a}^{b} g(x)\,dx,$$

kus $a < \xi < b$.

Ositi inteegrimise valemeid:

$$\int u dv = uv - \int v du; \quad \int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du,$$

kus $u = \varphi(x)$ ja $v = \psi(x)$.

Ratsionaalsete murdfunktsioonide inteegrimine:

a) $$\int \frac{a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n}{x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_n} dx =$$

$$= \int \frac{a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n}{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)} dx =$$

$$= \int \frac{A_1 dx}{x - x_1} + \int \frac{A_2 dx}{x - x_2} + \ldots + \int \frac{A_n dx}{x - x_n} =$$

$$= A_1 \ln |x - x_1| + A_2 \ln |x - x_2| + \ldots + A_n \ln |x - x_n| + c;$$

b) $$\int \frac{a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n}{x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n} dx =$$

$$= \int \frac{a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-1} + \ldots + a_n}{(x - x_1)^n} dx =$$

$$= \int \frac{A_1 dx}{x - x_1} + \int \frac{A_2 dx}{(x - x_1)^2} + \ldots + \int \frac{A_n dx}{(x - x_1)^n} =$$

$$= A_1 \ln |x - x_1| - \frac{A_2}{x - x_1} - \ldots - \frac{A_n}{(n-1)(x - x_1)^{n-1}} + c;$$

c) $$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx = r \int \frac{(2x + p) + s}{x^2 + px + q} dx =$$

$$= r \int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx + \frac{rs}{m} \int \frac{d\left(\frac{x + l}{m}\right)}{\left(\frac{x + l}{m}\right)^2 + 1} =$$

$$= r \ln |x^2 + px + q| + \frac{rs}{m} \operatorname{arctg} \frac{x + l}{m} + c;$$

d) $$\int \frac{a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n}{(x^2 + px + q)^k} dx =$$

$$= \int \frac{A_1 x + B_1}{x^2 + px + q} dx + \int \frac{A_2 x + B_2}{(x^2 + px + q)^2} dx + \ldots + \frac{A_k x + B_k}{(x^2 + px + q)^k} dx,$$

kus $n = 2k$; inteegritavaid funktsioone teisendame analoogiliselt eelmise punkti teisendusele.

Ostrogradski valem:

$$\int \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,dx = \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)} + \int \frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)}\,dx,$$

kus $\psi(x) = \psi_1(x)\psi_2(x)$.

Inteegrimise ratsionaliseerimismeetod:

1) $f(x) = R(\sqrt[n]{x})$;

asendades $x = z^n$, saame

$$\int R(\sqrt[n]{x})\,dx = n\int R(z)\,z^{n-1}dz;$$

2) $f(x) = R(x, \sqrt[n]{ax+b})$;

asendades $ax + b = z^n$, saame

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,dx = \frac{n}{a}\int R\left(\frac{z^n-b}{a},\ z\right) z^{n-1}dz;$$

3) $f(x) = R(x, \sqrt{x^2+px+q})$;

asendades $\sqrt{x^2+px+q} = z - x$, saame

$$\int R(x, \sqrt{x^2+px+q})\,dx =$$

$$= 2\int R\left(\frac{z^2-q}{2z+p},\ \frac{z^2+pz+q}{2z+p}\right)\frac{z^2+pz+q}{(2z+p)^2}\,dz;$$

4) $f(x) = R(x, \sqrt{q+px-x^2})$;

asendades $\sqrt{q+px-x^2} = \sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)} = (x-\alpha)z$, saame

$$\int R(x, \sqrt{q+px-x^2})\,dx =$$

$$= 2(\alpha-\beta)\int R\left(\frac{\alpha z^2+\beta}{z^2+1},\ \frac{(\beta-\alpha)z}{z^2+1}\right)\frac{z}{(z^2+1)^2}\,dz;$$

5) $f(x) = R(\sin x, \cos x)$;

asendades $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$, saame

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = 2\int R\left(\frac{2z}{1+z^2},\ \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\frac{dz}{1+z^2};$$

6) $f(x) = x^m\sqrt[n]{(ax^k+b)^r}$, kus m, n, $k > 0$ ja r on täisarvud;

a) kui $\frac{m+1}{k}$ on täisarv, siis, asendades $ax^k + b = z^n$, saame

$$\int x^m\sqrt[n]{(ax^k+b)^r}\,dx = \frac{n}{ak}\int z^{n+r-1}\left(\frac{z^n-b}{a}\right)^{\frac{m+1}{k}-1}dz;$$

b) kui $\frac{m+1}{k}+\frac{r}{n}$ on täisarv, siis, asendades $ax^k+b=z^n x^k$, saame

$$\int x^m \sqrt[n]{(ax^k+b)^r}\,dx = -\frac{n}{k}\,b^{\frac{m+1}{k}+\frac{r}{n}} \int z^{n+r-1}(z^n-a)^{-\left(\frac{m+1}{k}+\frac{r}{n}+1\right)}\,dz.$$

Numbriline inteegrimine:

[redacted] trapetsvalem:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}f(x_n)\right];$$

ristkülikvalem:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\ldots+f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\right];$$

paraboolvalem:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{2}{3}\cdot\frac{b-a}{2k}\left[\frac{1}{2}f(x_0)+2f(x_1)+f(x_2)+2f(x_3)+\right.$$
$$\left.+f(x_4)+\ldots+f(x_{2k-2})+2f(x_{2k-1})+\frac{1}{2}f(x_{2k})\right].$$

Beeta-funktsioon:

$$B(m,\,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx=\frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

Gamma-funktsioon:

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx=(n-1)!$$

Inteegrimise valemeid:

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+c;$$

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c;$$

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c;$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+c;$$

$$\int\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+c;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c;$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2} + c;$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2} + c;$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + c;$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c;$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = -\frac{1}{a} \arcsin \frac{a}{x} + c;$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 \pm x^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 \pm x^2}}{x} \right| + c;$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a^2 x} + c;$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2 \pm x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 \pm x^2}}{a^2 x} + c;$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 - x^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| + c;$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 \pm a^2} + \arcsin \frac{a}{x} + c;$$

$$\int \frac{xdx}{(x^2 + 1)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + c; \quad (n \neq 1);$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n} = \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{(2n-3)x}{2^2(n-1)(n-2)(x^2+1)^{n-2}} +$$

$$+ \frac{(2n-3)(2n-5)x}{2^3(n-1)(n-2)(n-3)(x^2+1)^{n-3}} + \ldots +$$

$$+ \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 5 \cdot 3 \cdot x}{2^{n-1}(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (x^2+1)} +$$

$$+ \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 5 \cdot 3 \cdot 1}{2^{n-1}(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1} \operatorname{arctg} x + c;$$

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\left[\frac{1}{n}x^{n-1} + \frac{n-1}{n(n-2)}x^{n-3} + \right.$$

$$+ \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)(n-4)}x^{n-5} + \ldots +$$

$$+ \begin{cases} \left.+ \frac{(n-1)(n-3)\ldots 5\cdot 3}{n(n-2)\ldots 4\cdot 2}x\right] + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 3\cdot 1}{n(n-2)\ldots 4\cdot 2}\arcsin x + c, \\ \text{(paarisarvulise } n \text{ puhul)} \\ \left.+ \frac{(n-1)(n-3)\ldots 6\cdot 4}{n(n-2)\ldots 5\cdot 3}x^2 + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 4\cdot 2}{n(n-2)\ldots 3\cdot 1}\right] + c, \\ \text{(paaritu } n \text{ puhul);} \end{cases}$$

$$\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + c;$$

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln \ln x + c, \ (x > 1);$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + c;$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + c;$$

$$\int \sin x \cos x dx = \frac{\sin^2 x}{2} + c;$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln|\operatorname{tg} x| + c;$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x - \sin x \cos x}{2} + c;$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{x + \sin x \cos x}{2} + c;$$

$$\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x} + c;$$

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + c;$$

$$\int \sin^3 x dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c;$$

$$\int \cos^3 x dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c;$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c;$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + c;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + c;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + c;$$

$$\int x \sin x dx = \sin x - x \cos x + c;$$

$$\int x \cos x dx = \cos x + x \sin x + c;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx =$$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \begin{cases} \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \text{ paarisarvulise } n \text{ puhul,} \\ \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \text{ paaritu } n \text{ puhul;} \end{cases}$$

$$\int \sin mx \sin nx dx = \frac{m \cos mx \sin nx - n \sin mx \cos nx}{n^2 - m^2} + c;$$

$$\int \cos mx \cos nx dx = \frac{n \cos mx \sin nx - m \sin mx \cos nx}{n^2 - m^2} + c;$$

$$\int \sin mx \cos nx dx = \frac{m \cos mx \cos nx + n \sin mx \sin nx}{n^2 - m^2} + c;$$

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

a) kui vähemalt m või n on paaritu, siis asendus

$$\sin^{m-1} x = (1 - \cos^2 x)^{\frac{m-1}{2}}$$

või

$$\cos^{n-1} x = (1 - \sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}};$$

b) kui m ja n on paarisarvud, siis asendus

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x,$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x,$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x;$$

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c;$$

$$\int \arccos x dx = x \arccos x - \sqrt{1 - x^2} + c;$$

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1 + x^2} + c;$$

$$\int \operatorname{arcctg} x dx = x \operatorname{arcctg} x + \ln \sqrt{1 + x^2} + c.$$

Kvadratuur:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} y\dot{x}\,dt;$$

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - y\dot{x})\,dt.$$

Ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ pindala:

$$S = \pi ab.$$

Tsükloidi $x = a(t - \sin t)$ ja $y = a(1 - \cos t)$ haruga ja X-teljega piiratud kujundi pindala:

$$S = 3\pi a^2.$$

Kardioidi $r = a(1 + \cos\varphi)$ pindala:

$$S = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

Lemniskaadi $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ pindala:

$$S = 2a^2.$$

Cartesiuse lehe $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ pindala:

$$S = \frac{3}{2}a^2.$$

Ühikringi sektori pindala:

$$2S = \arccos x, \quad 2S = \arcsin y.$$

Hüperboolse sektori pindala:

$$2S = \operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

$$2S = \operatorname{arsh} y = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

Pöördkeha kubatuur:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx; \quad V_y = \pi \int_{f(a)}^{f(b)} x^2 dy.$$

Pöördellipsoidi ruumala:

$$V_x = \frac{4}{3}\pi ab^2; \quad V_y = \frac{4}{3}\pi a^2 b.$$

Astroidi $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ pöörlemisel tekkiva keha ruumala:

$$V_x = V_y = \frac{32}{105}\pi a^3.$$

Rektifikatsioon:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt + \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + f'(\varphi)^2}\, d\varphi.$$

Tsükloidi $x = a(t - \sin t)$ ja $y = a(1 - \cos t)$ haru pikkus:

$$s = 8a.$$

Kardioidi $r = a(1 + \cos \varphi)$ pikkus:

$$s = 8a.$$

Pöördpinna komplanatsioon:

$$U = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Pöördellipsoidi pindala:

$$U_x = 2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2 b}{c} \arcsin \frac{c}{a}, \text{ kui } a > b;$$

$$U_x = 2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2 b}{c} \ln \frac{b + c}{a}, \text{ kui } a < b;$$

$$U_y = 2\pi a^2 + \frac{2\pi a b^2}{c} \ln \frac{a + c}{b}, \text{ kui } a > b;$$

$$U_y = 2\pi a^2 + \frac{2\pi a b^2}{c} \arcsin \frac{c}{b}, \text{ kui } a < b.$$

Kõveraga $y = f(x)$, X-teljega ning ordinaatidega $f(a)$ ja $f(b)$ piiratud kujundi raskuspunkt:

$$x_0 = \frac{\int_a^b xy\,dx}{\int_a^b y\,dx}; \quad y_0 = \frac{\int_a^b y^2\,dx}{2\int_a^b y\,dx}.$$

Veerand ellipsiga $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ja koordinaattelgedega piiratud kujundi raskuspunkt:

$$x_0 = \frac{4a}{3\pi}; \quad y_0 = \frac{4b}{3\pi}.$$

Tsükloidi $x = a(t - \sin t)$ ja $y = a(1 - \cos t)$ haruga ja X-teljega piiratud kujundi raskuspunkt:

$$x_0 = \pi a; \quad y_0 = \frac{5}{6} a.$$

Pöördkeha raskuspunkt:

$$x_0 = \frac{\int_a^b xy^2\,dx}{\int_a^b y^2\,dx}; \quad (y_0 = z_0 = 0).$$

Poolkera raskuspunkt:

$$x_0 = \frac{r}{2}.$$

Kõvera $y = f(x)$ kaare raskuspunkt:

$$x_0 = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}; \quad y_0 = \frac{\int_a^b y\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}.$$

Tsükloidi $x = a(t - \sin t)$ ja $y = a(1 - \cos t)$ haru raskuspunkt:

$$x_0 = \pi a; \quad y_0 = \frac{4}{3}a.$$

Kardioidi $r = a(1 + \cos\varphi)$ raskuspunkt:

$$x_0 = \frac{4}{5}a; \quad y_0 = 0.$$

Pöördpinna raskuspunkt:

$$x_0 = \frac{\int_a^b xy\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}{\int_a^b y\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}; \quad (y_0 = z_0 = 0).$$

Poolsfääri raskuspunkt:

$$x_0 = \frac{r}{2}.$$

Guldini valemid:

$$U = s \cdot 2\pi y_0; \quad V = S \cdot 2\pi y_0.$$

AINEREGISTER

A

Abimuutuja 26
Absoluutne maksimum (miinimum) 209
— viga 16
Absoluutväärtus 13
Abstsiss 34
Aditiivsus 273, 284
Aheljoon 88
Aheljuhis 137
Alamtõke 60, 110
Algebraline funktsioon 29—30
— joon 36
Algfunktsioon 125
Algväärtused 264
Arhimedes 48
Arhimedese spiraal 48
Arcus 31
Areafunktsioonid 90—91
Argumendi kasv 93
Argument 23
Arkusfunktsioonid 31—32
Arv *e* 85
Arvjärjend 25
Arvjärjendi koonduvus ja hajuvus 57
— piirväärtus 55
Arvsirge 9
Asendusmeetod 295
Astme absoluutne ja relatiivne viga 19
Astmefunktsiooni tuletis 144, 148
— piirväärtus 73
Astroidi pööramisel saadava keha ruumala 387
Asümptoot 39, 225
Asümptootiline lähenemine 226

B

Beeta-funktsioon 317
Binomiaalne diferentsiaal 344
Binoomi aste Mac-Laurini valemina 207
Bolzano 112
Briggs 86
Bunjakovski 289
Bunjakovski võrratus 289

C

Cartesius 231
Cartesiuse lehe pindala 378
Cartesiuse leht 231
Cauchy 180
Cauchy valem 180

D

Dedekind 62
Dedekindi lõige 62
Descartes 231
Descartes'i leht 231
Diferentsiaal 132
Diferentsiaalarvutus 133
Diferentsiaalarvutuse aheljuhis 137
— keskväärtuse teoreem 176, 180
Diferentsiaaljagatis 133
Diferentsimine 129
Dimensioon 30

E

Eksponentfunktsioon 30
— Mac-Laurini valemina 203
Eksponentsiaal-astmefunktsioon 148
Eksponentsiaal-astmefunktsiooni tuletis 148—149
Ekstreemväärtus 14, 209
Ekvivalentsed suurused 78
— võrratused 15
Elementaarsed funktsioonid 28
Ellipsi evoluut 251
— pindala 373, 380
— kõverus 238—239
Eriintegraal 263
Eraldatud punkt 36, 44
Evoluut 249
Evolvent 249

F

Folium Cartesii 231
Fookus 49
Functio Integralis 282

Funktsionaalne seos 22
Funktsioon 23
— algebraline 29—30
— area- 90—91
— arkus- 31—32
— eksponent- 30
— eksponentsiaal-astme- 148
— hüperboolne 87
— ilmutamata 25
— ilmutatud 25
— integraal- 261
— kahanev 70
— kahe muutuja 27
— kahene 27
— kasvav 70
— katkev 97
— kolme muutuja 27
— lihtmurd- 29
— liigmurd- 29
— liit- 26
— logaritm- 31
— mitme muutuja 27
— mitmene 27
— mittekahanev 71
— mittekasvav 71
— monotoonne 71
— murd- 29
— paaris- 43
— paaritu 43
— perioodiline 32
— pidev 94—95
— pöörd- 31
— rangelt monotoonne 71
— sisemine 26
— transtsendentne 30
— trigonomeetriline 31
— tsüklomeetriline 32
— tõkestamatu 70
— tõkestatud 70
— täisarvulise argumendi 25
— välimine 26
— ühe muutuja 23
— ühene 27
Funktsiooni analüütiline kuju 36
— funktsioon 26
— graafik 36
— graafiline esitamisviis 36
— kahepoolne piirväärtus 76
— kasv 93
— kasvamine ja kahanemine 70
— kasvu peaosa 132
— tabeliline esitamisviis 36
— ühepoolne piirväärtus 75

G

Gamma-funktsioon 351
Geomeetriline koht 35
Graafik 36
Graafiline inteegrimine 361
Guldin 410
Guldini valemid 410—411

H

Hajuv arvjärjend 57
Horisontaalne asümptoot 228
Hüberbooli evoluut 252—253
Hüperboolne sektor 382
Hüperboolsed areafunktsioonid 90—91
— funktsioonid 87

I

Ilmutamata funktsioon 25
— funktsiooni diferentsimine 149
Ilmutatud funktsioon 25
Imaginaararvud 11
Imaginaarsete punktide geomeetriline koht 44—45
Imaginaarühik 11
Inteegrimine ositi 306
Inteegrimise asendusmeetod 295
— ratsionaliseerimismeetod 338
Inteegrimiskonstant 262
Inteegrimismuutuja 262
Inteegrimisrajad 276
Inteegrimisvahemik 276
Inteegritav avaldis 262
— funktsioon 262
Integraal 261
Integraalarvutus 265
Integraalarvutuse keskväärtuse teoreem 290—291
Integraalfunktsioon 261
Integraalkõver 270
Integraalsumma 277
Invariantsus 136
Irratsionaalarvud 8
Irratsionaalsed punktid 9
Isoleeritud punkt 36, 44

J

Jagatise absoluutne ja relatiivne viga 20—31
— piirväärtus 66, 72
— tuletis 143
Joone võrrand 35
Juure absoluutne ja relatiivne viga 20
Jääkliige 201

K

Kaare element 389
Kaaskompleksarvud 12
Kahanev arvjärjend 60
— funktsioon 70

Kahe muutuja funktsioon 27
Kahekordne punkt 39
Kahene funktsioon 27
Kahepoolne piirväärtus 76
Kardioid 47
Kardioidi pindala 377
— pikkus 394
— raskuspunkt 406—407
Kasvav arvjärjend 60
— funktsioon 70
Katkevus 97
— kõrvaldatav 99
— lõpmatu 100
— perioodiline 100
Keskmine kiirendus 158
— kiirus 122
— kõverus 233
Kiirendus 155, 158
Kiirus 122, 124
Kinnine vahemik 14
Kolme muutuja funktsioon 27
Komplanatsioon 397
Kompleksarvud 11
Konstandi tuletis 140
Konstantne suurus 14
Konstantse liikmega funktsiooni tuletis 139
— teguriga funktsiooni tuletis 142
Kooldumispunkt 242
Kooldumisringjoon 242
Koonduv arvjärjend 57
Koordinaadid 9, 34
Koordinaatteljed 34
Koosinusfunktsioon Mac-Laurini valemina 205
Korrutise absoluutne ja relatiivne viga 18—19
— piirväärtus 65, 72
— tuletis 141
Kovalevskaja 112
Kubatuur 385
Kumer kõverjoon 37
Kvadratuur 369
Kõrvaldatav katkevus 99
Kõvera kaare pikkus 389
— puutuja 123
Kõverate puutejärk 246
Kõverdumisnurk 233
Kõverjooneline kaksnurk 273
— kolmnurk 273
— trapets 272
Kõverus 235
Kõveruse keskpunkt 242
Kõverusraadius 242
Kõverusring 242
Kõverusringjoon 242
Käänupunkt 38, 213
Kümnendlogaritm 86
Kümnendlogaritmi tuletis 146

L

Lagrange 124
Lagrange'i valem 176
Lahtine vahemik 14
Leibniz 133
Leibniz'i valem 161
Lemniskaat 49
Lemniskaadi pindala 377
Lennujoone parameetrilised võrrandid 168
L'Hôpital 189
L'Hôpitali meetod 189
Lihtmurdfunktsioon 29
Liigmurdfunktsioon 29
Liikumise võrrand 121
Liitfunktsioon 26
lim (*limes*) 56
Lobatševski 131
Logaritmfunktsioon 31
— Mac-Laurini valemina 206
Logaritmfunktsiooni piirväärtus 73
Logaritmiline diferentsimine 147
— spiraal 172
Lokaalne maksimum (miinimum) 209
Loomulikud logaritmid 86
Lõpmata kahanev (kasvav) suurus 62—63
Lõpmatu arvjärjend 25
— katkevus 100
— vahemik 15
Lähendmurrud 55

M

Mac-Laurin 201
Mac-Laurini valem 201
Maksimaalne viga 16
Maksimum 208
Maksimumpunkt 37, 208
Miinimum 208
Miinimumpunkt 37, 208
Mitme muutuja funktsioon 27
Mitmene funktsioon 27
Mittekahanev arvjärjend 60
— funktsioon 71
Mittekasvav arvjärjend 60
— funktsioon 71
Monotoonne arvjärjend 60
— funktsioon 71
Monotoonsuse vahemik 71
Moodul 86
Murdfunktsioon 29
Murdfunktsiooni diferentsimine 143
— inteegrimine 324—338
Muutumispiirkond 14
Muutuv suurus 14
Määramata integraal 263
— kujud 8, 74, 186
— koefitsientide meetod 197

Määramispiirkond 23
Määratud integraal 276
Määratud integraali olemasolu teoreem 279
— — omadusi 283—289
— — põhivalem 276

N

Napier (Neper) 86
Naturaallogaritmid 86
Naturaallogaritmi tuletis 145
Negatiivne suund 9
Neutraalne punkt 215
Newton 81
Newtoni lähendamismeetod 183
Newton-Leibniz'i inteegrimisvalem 276
Normaal 124
Normaali lõigu alus 170
— võrrand 124
Numbriline inteegrimine 352
Nõgus kõverjoon 37

O

Ordinaat 34
Osajärjend 113
Ositi inteegrimine 306
Ostrogradski 336
Ostrogradski meetod 336
Ostsilleeruv arvjärjend 57

P

Paarisfunktsioon 43
Paaritu funktsioon 43
Pappus 410
Parabool 37
Paraboli evoluut 254
Paraboolvalem 357
Parameeter 51
Parameetrilised võrrandid 51
Parempoolne tuletis 130
Parempoolselt pidev funktsioon 98
Peaväärtused 33
Peegelduskuju 40
Periood 32
Perioodiline katkevus 100
— murd 55
Perioodilised funktsioonid 32
Pidev muutumine 14
— funktsioon 94—95
Pidevus 95
Piirpunkt 55
Piirväärtus 55, 68, 75
Piirväärtuse põhiteoreemid 65, 72
Polaarkaugus 45
Polaarkoordinaadid 45
Polaarnurk 45
Polaartelg 45
Polaarvõrrand 47
Poolkinnine ja poollahtine vahemik 15
Poolus 45
Positiivne suund 9
Punkti ümbrus 15, 57
Puutuja 123
— lõigu alus 170
— võrrand 124
Põhiteoreemid 67
Päratu integraal 350
Pöördellipsoidi pindala 398
— ruumala 385
Pöördfunktsioon 31
Pöördkeha kubatuur 385
Pöördpinna komplanatsioon 397

R

Raadiusvektor 45
Radiaanmõõt 31
Rangelt monotoonne funktsioon 71
Range võrratus 15
Raskuspunkt 399—408
Ratsionaalarvud 8
Ratsionaalsed punktid 9
Ratsionaliseerimine 338
Reaalarvud 8
Rektifikatsioon 389
Rekurrentne valem 312
Relatiivne maksimum (miinimum) 209
— viga 17
Ringi integraal 303, 310
— sektor 380
Ristkülikvalem 356
Rolle 174
Rolle'i teoreem 174

S

Samaväärsed võrratused 15
Siinusfunktsioon Mac-Laurini valemina 205
Simpson 357
Simpsoni valem 357
Sirgjoonelised asümptoodid 225
Sisemine funktsioon 26
Staatiline moment 401
Statsionaarne punkt 126
Strofoid 39
Sujuv kõver 130
Summa absoluutne ja relatiivne viga 18
— piirväärtus 65, 72
— tuletis 140
Suuruste järk 78

Sõltumatu muutuja 23
Sõltuv muutuja 23
Sümmeetriakeskpunkt 43
Sümmeetriatelg 40

T

Taylor 198
Taylori polünoom 198
Taylori valem 198, 201
Transtsendentne funktsioon 30
— joon 36
Trapetsvalem 354
Trigonomeetrilised funktsioonid 31
Tsükloid 51
Tsükloidi evoluut 254—255
— haru ja *X*-telje vahelise kujundi pindala 375
— haru ja *X*-telje vahelise kujundi raskuspunkt 403
— haru pikkus 393
— haru raskuspunkt 405—406
— kõverusraadius 246
Tsüklomeetrilised funktsioonid 32
Tuletis 124—125
Tuletised, areafunktsioonide 154—155
— arkusfunktsioonide 152—153
— astmefunktsiooni 144, 148
— eksponentfunktsiooni 147
— eksponentsiaal-astmefunktsiooni 148—149
— hüperboolsete funktsioonide 154
— ilmutamata funktsiooni 149—150, 157
— jagatise 143
— konstandi 140
— korrutise 141
— kõrgemat järku 155
— kümnendlogaritmi 146
— liitfunktsiooni 135
— naturaallogaritmi 145
— pöördfunktsiooni 137
— parameetriliste võrranditega määratud funktsiooni 162
— summa 140
— trigonomeetriliste funktsioonide 151
— vahe 140
Tõkestamatu arvjärjend 61
— funktsioon 70
Tõkestatud arvjärjend 60
— funktsioon 70
Täisarvulise argumendi funktsioon 25
Täpne alamtõke 110
— ülemtõke 110

V

Vahe absoluutne ja relatiivne viga 18
Vahemikud 14—15
Vahepealsete väärtuste teoreem 58, 73
Vahe piirväärtus 65, 72
— tuletis 140
Vasakpoolne tuletis 130
Vasakpoolselt pidev funktsioon 98
Vastandarvud 9
Vastandkompleksarvud 12
Vertikaalne asümptoot 228
Võnkumine 116
Võnkuv arvjärjend 57
Välimine funktsioon 26

W

Wallis 317
Wallise valem 317
Weierstrass 112

Ü

Ühe muutuja funktsioon 23
Ühene funktsioon 27
— määramine 9, 35
Ühepoolne piirväärtus 75
Ühikhüperbool 87, 90
Ühikring 76, 87
Ühtlane muutumine 127
— pidevus 97
Üldintegraal 262
Üldliige 57
Ülemtõke 60, 110
Ümbrus 15, 57

SISUKORD

Eessõna 3
Sissejuhatuseks 5

I peatükk

Funktsioonid

§ 1. Reaalarvud 8
§ 2. Imaginaar- ja kompleksarvud 10
§ 3. Arvu absoluutväärtus 13
§ 4. Vahemikud 14
§ 5. Absoluutne ja relatiivne viga 16
§ 6. Funktsiooni mõiste 22
§ 7. Funktsiooni mitmesus 27
§ 8. Elementaarsed funktsioonid 29
§ 9. Arkusfunktsioonid 31
§ 10. Funktsiooni graafiline kujutamine 34
§ 11. Polaarkoordinaadid 45
§ 12. Polaarvõrrandile vastav graafik 47
§ 13. Joone parameetrilised võrrandid 50
§ 14. Harjutusülesandeid 52

II peatükk

Piirväärtuste teooria

§ 15. Arvjärjend ja tema piirväärtus 55
§ 16. Tõkestatud arvjärjendid 60
§ 17. Lõpmata kasvavad ja lõpmata kahanevad suurused 62
§ 18. Piirväärtuse põhiteoreemid 65
§ 19. Funktsiooni piirväärtus 68
§ 20. Piirväärtuse näiteid 73
§ 21. Lõpmata kasvavate ja lõpmata kahanevate suuruste järk 78
§ 22. Arv e 81
§ 23. Hüperboolsed funktsioonid ja areafunktsioonid 87
§ 24. Harjutusülesandeid 92

III peatükk

Ühe muutuja funktsioonide pidevus

§ 25. Funktsiooni pidevuse määramine ja katkevuspunktid 93
§ 26. Katkevaid funktsioone 99
§ 27. Funktsioonide pidevuse teoreeme 104
§ 28. Pidevate funktsioonide omadusi 109

IV peatükk

Funktsioonide diferentsimine

§ 29. Keha liikumise kiirus 121
§ 30. Funktsiooni tuletis 122
§ 31. Funktsiooni diferentsiaal 132
§ 32. Liitfunktsiooni tuletis ja diferentsiaal 134
§ 33. Pöördfunktsiooni tuletis 137
§ 34. Diferentsimise teoreeme 138
§ 35. Astmefunktsiooni tuletis 143
§ 36. Logaritm- ja eksponentfunktsiooni tuletised 145
§ 37. Trigonomeetriliste funktsioonide tuletised 150
§ 38. Arkusfunktsioonide tuletised 152
§ 39. Hüperboolsete funktsioonide ja areafunktsioonide tuletised 153
§ 40. Kõrgemat järku tuletised 155
§ 41. Kõrgemat järku diferentsiaalid 159
§ 42. Parameetriliste võrranditega määratud funktsiooni tuletised . . 162
§ 43. Harjutusülesandeid 163

V peatükk

Tuletiste rakendusi

§ 44. Tuletiste rakendusi mehaanikas 166
§ 45. Puutuja ja normaali lõikude ning nende aluste pikkused 169
§ 46. Rolle'i teoreem 173
§ 47. Lagrange'i teoreem 176
§ 48. Cauchy teoreem 179
§ 49. Diferentsiaali rakendusi ligikaudsetes arvutustes 181
§ 50. Newtoni lähendamismeetod 183
§ 51. Määramata kujud 186
§ 52. Taylori valem 196
§ 53. Taylori valemi rakendusi 202
§ 54. Maksimum ja miinimum 207
§ 55. Käänupunkt 213
§ 56. Ekstreemväärtuste näiteid 218
§ 57. Kõvera asümptoodid 225
§ 58. Joonte kõverus 232
§ 59. Kõverusring 241
§ 60. Kõverate puutejärk 246
§ 61. Evoluut ja evolvent 248
§ 62. Evoluudi näiteid 251
§ 63. Harjutusülesandeid 255

VI peatükk

Funktsioonide inteegrimine

§ 64. Määramata integraal 261
§ 65. Inteegrimise teoreemid 265
§ 66. Inteegrimise põhivalemid 265
§ 67. Integraalkõverad 269
§ 68. Kõverjoonelise trapetsi pindala ja määratud integraal 272
§ 69. Määratud integraali olemasolu teoreem 276
§ 70. Määratud integraali omadusi 283
§ 71. Integraalarvutuse keskväärtuse teoreem 289
§ 72. Määramata ja määratud integraali seos 292

§ 73. Inteegrimise asendusmeetod 294
§ 74. Ositi inteegrimine 306
§ 75. Ratsionaalsete murdfunktsioonide teisendamine 319
§ 76. Ratsionaalsete murdfunktsioonide inteegrimine 324
§ 77. Ostrogradski meetod 336
§ 78. Inteegrimise ratsionaliseerimismeetod 338
§ 79. Katkeva funktsiooni inteegrimine 346
§ 80. Päratu integraal 349
§ 81. Numbriline inteegrimine 352
§ 82. Graafiline inteegrimine 361
§ 83. Harjutusülesandeid 363

VII peatükk

Integraali rakendusi

§ 84. Kvadratuur 369
§ 85. Hüperboolse sektori pindala 380
§ 86. Pöördkeha kubatuur 383
§ 87. Rektifikatsioon 387
§ 88. Pöördpinna komplanatsioon 394
§ 89. Raskuspunkt 399
§ 90. Guldini valemid 409
§ 91. Harjutusülesandeid 412
Harjutusülesannete vastused 415
Valemite tabel 427
Aineregister 448

Борквель, Альберт Александрович
КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

На эстонском языке

Эстонское Государственное Издательство
Таллин, Пярнуское шоссе, 10

*

Toimetaja R. T o m i n g
Tehniline toimetaja I. V a h t r e
Korrektor E. V a l d n a

Ladumisele antud 17. VI 1957. Trükkimisele antud 5. IX 1958. Paber 60×92,1/16. Trükipoognaid 28,5. Arvutuspoognaid 22,73. Trükiarv 3000. MB-06098. Tell. nr. 1790. Hans Heidemanni nim. trükikoda. Tartu, Vallikraavi 4.

Hind rbl. 7.85

2—2

Rbl. 7.85

A-22333 I

TÜ RAAMATUKOGU
1 0300 00344392 8