Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Annika Jaakson
Kaalutud kategooriad

Matemaatika
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: PhD Ülo Reimaa

Tartu 2024

KAALUTUD KATEGOORIAD
Bakalaureusetöö
Annika Jaakson

Lühikokkuvõte
Käesolevas bakalaureusetöös tutvustatakse kaalutud kategooria mõistet ning kirjeldatakse lisatingimusi, mida kategooriateooriast tuntud korrutise, kokorrutise, astme, koastme, funktori ja adjunktsiooni mõisted peavad rahuldama, et olla mõistlikul viisil kaalutud kategooria struktuuriga kooskõlas. Tuuakse näiteid nende mõistete kohta arhetüüpsetest kaalutud kategooriatest, nagu näiteks meetriliste ruumide kategooria, punktiga meetriliste ruumide kategooria ning Banachi ruumide kategooria. Samuti tõestatakse mõned üldised omadused, mida kaaludega kooskõlas olevad adjunktsioonid rahuldavad.

CERCS teaduseriala: P120 Arvuteooria, väljateooria, algebraline geomeetria, algebra, rühmateooria; P140 Jadad, Fourier analüüs, funktsionaalanalüüs.
Märksõnad: kaalutud kategooria, korrutis, kokorrutis, aste, koaste, adjunktsioon, Banachi ruum, Lipschitz-vaba ruum.

WEIGHTED CATEGORIES
Bachelor's thesis
Annika Jaakson

Abstract
This bachelor's thesis introduces the concept of a weighted category and describes additional conditions that the categorical concepts of a product, coproduct, power, copower, functor and adjunction must satisfy to be in accordance with the structure of a weighted category in a sensible way. Examples of these constructions from archetypical weighted categories, such as the category of metric spaces, the category of pointed metric spaces, and the category of Banach spaces are described in detail. In addition, some general results are proven about adjunctions between weighted categories that are in accordance with the weighted structure.

CERCS research specialisation: P120 Number theory, field theory, algebraic geometry, algebra, group theory; P140 Series, Fourier analysis, functional analysis.
Keywords: weighted category, product, coproduct, power, copower, adjunction, Banach space, Lipschitz-free space.

Sisukord

Sissejuhatus

Kõigi meetriliste ruumide kogumit ja kõigi Banachi ruumide kogumit saab vaadelda näidetena kategooria mõistest. Lihtsustatult öeldes koosneb kategooria $\mathcal{C}$ objektide klassist $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja iga kahe objekti $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ korral hulgast $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, mille elemente nimetame morfismideks objektist A objekti B. Näiteks meetriliste ruumide kategoorias on objektideks kõik meetrilised ruumid ning morfismideks kõik Lipschitzi tingimust rahuldavad kujutused, mille Lipschitzi konstant ei ületa 1. Banachi ruumide kategoorias on objektideks kõik Banachi ruumid ning morfismideks lineaarsed tõkestatud operaatorid, mille norm ei ületa 1. Samas on meetriliste ruumide kategooria ja Banachi ruumide kategooria teatud mõttes erilised - igale morfismile saab seada vastavusse arvu intervallist $[0, 1]$, mida nimetame kaaluks. Meetriliste ruumide puhul on selleks arvuks kujutuse Lipschitzi konstant, Banachi ruumide puhul aga operaatori norm. See motiveerib meid uurima üldisemat, kaalutud kategooria mõistet - see on selline kategooria, kus igale morfismile vastab kaal ehk arv intervallist $[0, 1]$.

Käesoleva bakalaureusetöö eesmärk on uurida kategooriateooriast tuntud funktori ning adjunktsiooni mõisteid ja piiri ning kopiiri mõisteid (korrutiste ja astmete ning kokorrutiste ja koastmete näitel) kaalutud kategooriate kontekstis. Töö on jagatud kaheks peatükiks: esimeses peatükis tuuakse välja vajalikud eelteadmised nii kategooriateooria kui ka funktsionaalanalüüsi vallast koos illustreerivate näidetega. Teises peatükis defineerime kaalutud kategooria ning täpsustame funktori, adjunktsiooni, korrutise, kokorrutise, astme ja koastme mõisteid nii, et nad oleksid mõistlikul viisil kooskõlas kaalutud kategooria morfismidel oleva lisastruktuuriga. Toome näiteid sellistest “kaaludega kooskõlas” olevatest (ko)korrutistest, (ko)astmetest ja adjunktsioonidest meetriliste ruumide ja Banachi ruumide kategooriatest. Samuti tõestame, et

- adjunktsiooni kaaludega kooskõlas olemisest järeldub, et adjunktsiooni moodustavad kaasfunktorid on kaaludega kooskõlas;
- kaaludega kooskõlas oleva adjunktsiooni parempoolne kaasfunktor säilitab kaaludega kooskõlas olevaid korrutisi ja astmeid.

Bakalaureusetöö autorile ja juhendajale teadaolevalt on viimati mainitud kaks tulemust originaalsed. Samuti on (hetkel teadaolevalt) originaalsed kaalutud korrutiste, kokorrutiste, astmete ja koastmete definitsioonid ning kaalutud astmete ja koastmete näited Banachi ruumide kategoorias.

Bakalaureusetöö lugejalt eeldatakse, et ta on tuttav funktsionaalanalüüsi põhimõistete- ja tulemustega (näiteks on läbinud kursuse Funktsionaalanalüüs I) ning teab, mis on kommutatiivne diagramm. Kasuks tuleb ka põgus varasem kokkupuude kategooriateooriaga.

1 Põhiteadmised

Selles peatükis toome ära mõned edasises vajalikud eelteadmised definitsioonide ja abitulemuste kujul. Alustame mõistetega funktsionaalanalüüsist ja kategooriateooriast ning anname nende illustreerimiseks mõned näited. Eeldame lugejalt, et ta on tuttav funktsionaalanalüüsi põhimõistetega, nagu nt meetriline ruum, normeeritud ruum, koonduv jada, Cauchy jada, Banahi ruum.

1.1 Põhimõisted funktsionaalanalüüsist

Siin alapeatükis toome mõned vajalikud definitsioonid ja teoreemid funktsionaalanalüüsi valdkonnast, mida vajame peamiselt kategooriateoreetiliste mõistete motiveerimiseks. Kui ei ole teisiti öeldud, pärinevad kõik definitsioonid ja tulemused selles alapeatükis õpikust [3].

Definitsioon 1.1.1. *Punktiga meetriliseks ruumiks* nimetatakse meetrilist ruumi (M, d_M) koos valitud punktiga $0_M \in M$. Tähistame seda $(M, d_M, 0_M)$.

Definitsioon 1.1.2. Olgu $(M, d_M), (N, d_N)$ meetrilised ruumid ja olgu $f : M \to N$ kujutus. Funktsioon f *rahuldab Lipschitzi tingimust*, kui

$$\exists L \in \mathbb{R}\ \forall m_1, m_2 \in M \quad d_N(f(m_1), f(m_2)) \leq L \cdot d_M(m_1, m_2) \tag{1}$$

Väikseimat konstanti $L_f \in \mathbb{R}$, mille korral omadus (1) kehtib, nimetatakse funktsiooni f *Lipschitzi konstandiks*. Kui f rahuldab Lipschitzi tingimust, nimetatakse teda vahel ka *Lipschitzi kujutuseks*.

On tuntud tõsiasi, et kõik Lipschitzi tingimust rahuldavad funktsioonid meetriliste ruumide vahel on pidevad [3].

Märkus 1.1.3. Kui M, N on meetrilised ruumid ja $f : M \to N$ on Lipschitzi kujutus, siis f Lipschitzi konstandi saab samaväärselt defineerida ka kui väärtuse

$$L_f := \sup_{\substack{x,y \in M \\ x \neq y}} \frac{d_N(f(x), f(y))}{d_M(x, y)}$$

(vt näiteks definitsiooni 2.1.1 doktoritöös [6]).

Definitsioon 1.1.4. Olgu $(M, d_M), (N, d_N)$ meetrilised ruumid ja olgu $f : M \to N$ kujutus. Kui f rahuldab Lipschitzi tingimust ja $L_f \leq 1$, siis nimetame funktsiooni f *ahendavaks.*

Eelnev definitsioon erineb mõnevõrra õpikus [3] toodust, nimelt nõutakse ahendavuse definitsioonis tavaliselt, et $L_f < 1$, s.t. et kehtib range võrratus.

Definitsioon 1.1.5. Olgu $(V, ||\cdot||_V), (W, ||\cdot||_W)$ Banachi ruumid (üle korpuse $\mathbb{R}$) ja olgu $f : V \to W$ pidev lineaarne kujutus. Kujutuse f *normiks* nimetatakse korpuse $\mathbb{R}$ elementi

$$||f|| = \sup_{x \in B_V} ||f(x)||_W,$$

mida tähistame tähisega $||f||$. (Siin B_V tähistab Banachi ruumi V kinnist ühikkera).

Õpikus [3] on ka tõestatud, et

$$||f|| = \min\{M \in \mathbb{R} \mid ||f(x)||_W \leq M \cdot ||x||_V\}.$$

1.2 Punktiga meetrilise ruumi Lipschitz-vaba ruum

Kui ei ole teisiti öeldud, pärinevad kõik definitsioonid ja tulemused selles alapeatükis doktoritööst [6]. Selles alapeatükis on meie eesmärgiks illustreerida, kuidas saab iga punktiga meetrilise ruumi $(M, d_M, 0_M)$ jaoks defineerida Banachi ruumi, kuhu M isomeetriliselt sisestuks. See konstruktsioon osutub hilisemas seotuks mitme kategooriateoreetilise mõistega.

Definitsioon 1.2.1. Olgu $(M, d_M, 0_M)$ punktiga meetriline ruum. Vektorruumi

$$\mathrm{Lip}_0(M) := \{f : M \to \mathbb{R} \mid f \text{ rahuldab Lipschitzi tingimust ja } f(0_M) = 0\}$$

nimetatakse punktiga meetrilise ruumi M *Lipschitzi ruumiks.*

Tõepoolest, pole raske näha, et $\mathrm{Lip}_0(M)$ on vektorruum üle korpuse $\mathbb{R}$, kus

- liitmine ja skalaariga korrutamine on defineeritud punktiviisi, s.t. iga $f, g \in \mathrm{Lip}_0(M)$, iga $a \in \mathbb{R}$ ja iga $m \in M$ korral

$$(f+g)(m) := f(m) + g(m)$$
$$(af)(m) := a \cdot f(m),$$

  kusjuures liitmise puhul on tegu kommutatiivse tehtega;

- nullelement on kujutus

$$0_{\mathrm{Lip}_0(M)} : M \to \mathbb{R}$$
$$m \mapsto 0;$$

- kujutuse $f \in \mathrm{Lip}_0(M)$ vastandelement on

$$\begin{aligned} -f : M &\to \mathbb{R} \\ m &\mapsto -f(m). \end{aligned}$$

Kõige olulisem tähelepanek siinkohal ongi ehk see, et $\mathrm{Lip}_0(M)$ on kinnine niimoodi defineeritud tehete korral. Tõesti, nullelement $0_{\mathrm{Lip}_0(M)}$ kuulub ruumi $\mathrm{Lip}_0(M)$, sest $0_{\mathrm{Lip}_0(M)}(0_M) = 0$ ja

$$d_{\mathbb{R}}(0_{\mathrm{Lip}_0(M)}(m_1), 0_{\mathrm{Lip}_0(M)}(m_2)) = d_{\mathbb{R}}(0,0) = 0 = 0 \cdot d_{\mathrm{Lip}_0(M)}(m_1, m_2)$$

kehtib iga $m_1, m_2 \in M$ korral. Samuti kui $f, g \in \mathrm{Lip}_0(M)$, siis $(f+g)(0_M) = f(0_M) + g(0_M) = 0 + 0 = 0$ ning

$$\begin{aligned} \forall m_1, m_2 \in M \quad & d_{\mathbb{R}}((f+g)(m_1), (f+g)(m_2)) = \\ &= d_{\mathbb{R}}(f(m_1) + g(m_1), f(m_2) + g(m_2)) = \\ &= |f(m_1) + g(m_1) - f(m_2) - g(m_2)| \leq \\ &\leq |f(m_1) - f(m_2)| + |g(m_1) - g(m_2)| = \\ &= d_{\mathbb{R}}(f(m_1), f(m_2)) + d_{\mathbb{R}}(g(m_1), g(m_2)) \leq \\ &\leq L_f \cdot d_M(m_1, m_2) + L_g \cdot d_M(m_1, m_2) = \\ &= (L_f + L_g) \cdot d_M(m_1, m_2) \end{aligned}$$

ehk ka $f + g$ rahuldab Lipschitzi tingimust ning kokkutvõtteks $f + g \in \mathrm{Lip}_0(M)$.

Fakti, et $af \in \mathrm{Lip}_0(M)$ iga $a \in \mathbb{R}$ korral, saab tõestada analoogselt. Tõepoolest, $(af)(0_M) = a \cdot f(0_M) = a \cdot 0 = 0$. Samuti kehtib iga $m_1, m_2 \in M$ korral

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R}}((af)(m_1), (af)(m_2)) &= |(af)(m_1) - (af)(m_2)| = |a \cdot f(m_1) - a \cdot f(m_2)| = \\ &= |a| \cdot |f(m_1) - f(m_2)| = |a| \cdot d_{\mathbb{R}}(f(m_1), f(m_2)) \leq \\ &\leq |a| \cdot L_f \cdot d_M(m_1, m_2), \end{aligned}$$

st af on Lipschitzi tingimust rahuldav kujutus. Siit järeldub ka, et iga $f \in \mathrm{Lip}_0(M)$ korral $-f \in \mathrm{Lip}_0(M)$, võttes $a = -1$.

Järgneva lause tõestuse võib leida näiteks doktoritööst [6] (lausest 2.1.6).

Lause 1.2.2. *Ruum $Lip_0(M)$ on Banachi ruum normi*

$$\begin{aligned} ||\cdot||_L : Lip_0(M) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto L_f \end{aligned}$$

suhtes.

Märgime, et kuna $\mathrm{Lip}_0(M)$ on normeeritud ruum ja $\mathbb{R}$ on Banachi ruum, siis $\mathrm{Lip}_0(M)$ kaasruum $\mathcal{L}(\mathrm{Lip}_0(M), \mathbb{R}) = \mathrm{Lip}_0(M)^*$ on Banachi ruum, kus normiks on kujutuse $\mathrm{Lip}_0(M) \to \mathbb{R}$ norm definitsioon 1.1.5 mõttes. See fakt on tõestatud näiteks õpikus [3].

Järgmiseks saab defineerida kujutuse ruumist M ruumi $\mathrm{Lip}_0(M)$ kaasruumi:

$$\begin{aligned}\delta_M : M &\to \mathrm{Lip}_0(M)^* \\ x &\mapsto \delta(x),\end{aligned}$$

kus $\delta(x)$ on kujutus

$$\begin{aligned}\delta(x) : \mathrm{Lip}_0(M) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto f(x).\end{aligned}$$

Järgneva lause tõestus on samuti ära toodud doktoritöös [6] (lauses 2.2.1).

Lause 1.2.3. *Kujutus $\delta_M : M \to \mathrm{Lip}_0(M)^*$ on kaugusi täpselt säilitav injektiivne kujutus (isomeetriline sisestus).*

Et $\mathrm{Lip}_0(M)^*$ kui Banachi ruum on ka meetriline ruum, siis kujutus δ on meetriliste ruumide vaheline kujutus. Samuti märkame, et

- esiteks,

  $$\delta_M(0_M) = (\delta(0_M) : \mathrm{Lip}_0(M) \to \mathbb{R},\ f \mapsto f(0_M)) = \dots .$$

  Kuna kõik $f \in \mathrm{Lip}_0(M)$ rahuldavad tingimust $f(0_M) = 0$, saame võrdust jätkata:

  $$\dots = (\delta(0_M) : \mathrm{Lip}_0(M) \to \mathbb{R},\ f \mapsto 0) = 0_{\mathrm{Lip}_0(M)^*}.$$

- teiseks, δ_M rahuldab Lipschitzi tingimust. Tõepoolest, lause 1.2.3 järgi on δ_M kaugusi täpselt säilitav kujutus. Seega iga $m_1, m_2 \in M$ korral

  $$\begin{aligned}d_{F(M)}(\delta_M(m_1), \delta_M(m_2)) &= d_{\mathrm{Lip}_0(M)^*}(\delta_M(m_1), \delta_M(m_2)) \\ &= d_M(m_1, m_2).\end{aligned}$$

  Et tegu on range võrdusega, siis $L_{\delta_M} = 1$.

Nüüd saab defineerida ruumi

$$F(M) := \overline{\mathrm{span}}\ \delta(M) = \overline{\mathrm{span}}\ \{\delta(x) \mid x \in M\} \subseteq \mathrm{Lip}_0(M)^*.$$

Kuna span $\delta(M)$ on Banachi ruumi $\mathrm{Lip}_0(M)^*$ vektoralamruum, siis tema sulund $F(M)$ on samuti $\mathrm{Lip}_0(M)^*$ (kinnine) vektoralamruum ([3, p. 86]). Kuna $F(M)$ on $\mathrm{Lip}_0(M)^*$ vektoralamruum, siis ta on ka normeeritud ruum $\mathrm{Lip}_0(M)^*$ normi järgi. Et $\mathrm{Lip}_0(M)^*$ kui Banachi ruum on täielik, siis $F(M)$ kinnisusest järeldub, et $F(M)$ on täielik ([3, lk 86]). Kokkuvõtteks $F(M)$ on Banachi ruum. Edaspidi nimetame Banachi ruumi $F(M)$ punktiga meetrilise ruumi $(M, d_M, 0_M)$ Lipschitz-vabaks ruumiks.

Kehtib järgnev universaalomadus, mille tõestuse leiab doktoritööst [6] (Teoreem 2.2.4).

Teoreem 1.2.4. *Olgu $(M, d_M, 0_M)$ punktiga meetriline ruum ja olgu $(X, ||\cdot||_X)$ Banachi ruum. Olgu $f : M \to X$ Lipschitzi kujutus, kusjuures $f(0_M) = 0_X$. Siis leidub üheselt määratud lineaarkujutus $\overline{f} : F(M) \to X$ nii, et $||\overline{f}|| = L_f$ ja $\overline{f}(\delta(m)) = f(m)$ iga $m \in M$ korral (ehk järgnev diagramm kommuteerub).*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"'] \arrow[d, hook, "\delta_M"'] & X \\ F(M) \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

1.3 Kategooriad ja funktorid

Kui ei ole teisiti öeldud, pärinevad kõik definitsioonid ja tulemused selles alapeatükis raamatust [2].

Definitsioon 1.3.1. *Kategooria* $\mathcal{C}$ koosneb järgmistest andmetest:

1. klass $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, mille elemente nimetatakse kategooria $\mathcal{C}$ objektideks;
2. hulk $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ iga kahe objekti $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ jaoks, mille elemente nimetatakse morfismideks objektist A objekti B;
3. kujutus

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C),$$

   iga objektikolmiku $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ jaoks, mida nimetatakse morfismide komponeerimiseks või korrutamiseks; morfismide $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ja $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ kompositsiooni tähistatakse $g \circ f$;
4. morfism $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ iga objekti $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ korral, mida nimetatakse objekti A ühikmorfismiks,

mis peavad rahuldama järgmisi tingimusi:

1. kui $A, A', B, B' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ on sellised, et $A \neq A'$ või $B \neq B'$, siis $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \neq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A', B')$;

2. mistahes objektide $A, B, C, D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja morfismide $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B), g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ ja $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$ korral kehtib

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f;$$

3. mistahes morfismi $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ korral kehtivad võrdused $f \circ \mathrm{id}_A = f$ ja $\mathrm{id}_B \circ f = f$.

Kui $\mathcal{C}$ on kategooria, $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, siis ütleme vahel, et f on morfism objektist A objekti B ning tähistame seda $f : A \to B$.

Näide 1.3.2. Võime vaadelda kõigi meetriliste ruumide kategooriat **Met**, mille objektideks on kõik meetrilised ruumid ning morfismideks ahendavad kujutused meetriliste ruumide vahel (mis on Lipschitzi kujutustena ka pidevad).

Näide 1.3.3. Võime vaadelda kõigi punktiga meetriliste ruumide kategooriat $\mathbf{Met_0}$, mille objektideks on kõik punktiga meetrilised ruumid ning morfismideks ahendavad kujutused meetriliste ruumide vahel, mis säilitavad punkti. See tähendab, et kui $(M, d_M, 0_M), (N, d_N, 0_N) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Met_0})$, siis ahendav kujutus $f : M \to N$ kuulub hulka $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Met_0}}(M, N)$ parajasti siis, kui $f(0_M) = 0_N$.

Näide 1.3.4. Samuti võime vaadelda kõigi Banachi ruumide kategooriat **Ban**, mille objektideks on Banachi ruumid (üle korpuse $\mathbb{R}$) ning morfismideks pidevad lineaarkujutused, mille norm ei ole suurem kui 1.

Definitsioon 1.3.5. Olgu $\mathcal{C}$ on kategooria, $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$. Morfismi f nimetatakse *isomorfismiks* objektide A ja B vahel, kui leidub selline $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$, et

$$g \circ f = \mathrm{id}_A \quad \wedge \quad f \circ g = \mathrm{id}_B.$$

Definitsioon 1.3.6. Olgu $\mathcal{C}$ kategooria. Kategooria $\mathcal{C}$ *duaalseks kategooriaks* nimetatakse kategooriat $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, mille objektideks on $\mathcal{C}$ objektid, s.t. $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, morfismideks aga $\mathcal{C}$ morfismid, mille lähteobjekt ja sihtobjekt on formaalselt ära vahetatud. See tähendab, et kui $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, siis $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(B, A)$.

Definitsioon 1.3.7. Olgu $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ kategooriad. *Funktor* F kategooriast $\mathcal{A}$ kategooriasse $\mathcal{B}$ koosneb järgmistest andmetest:

1. kujutus $F_0 : \mathrm{Ob}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ kategooriate $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ objektide klasside vahel; objekti $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ kujutist tähistatakse $F(A)$;
2. kujutus $F_1^{A,A'} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A') \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), F(A'))$ iga objektipaari $A, A' \in \mathcal{A}$ puhul; morfismi $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A')$ kujutust tähistatakse $F(f)$,

mis peavad rahuldama järgmisi tingimusi:

1. mistahes morfismide $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A')$ ja $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A', A'')$ kehtib
$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f);$$
2. iga objekti $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ korral $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$.

Kui F on funktor kategooriast $\mathcal{A}$ kategooriasse $\mathcal{B}$, siis tähistame seda $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

Näide 1.3.8. Olgu meil antud kategooria $\mathcal{C}$. Lihtsaim näide funktorist on ühikfunktor $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, mille defineerime igal objektil $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ järgmiselt
$$\mathrm{id}_C(C) := C$$
ja igal morfismil $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$, kus $C, D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, järgmiselt
$$\mathrm{id}_C(f) := f.$$

Järgnevad näited pärinevad õpikust [2].

Näide 1.3.9. Olgu $\mathcal{C}$ kategooria ja olgu $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Siis leidub funktor
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \_) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set},$$
mis seab igale $\mathcal{C}$ objektile $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ vastavusse hulga $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$. Morfismidel käitub see funktor järgnevalt: kui $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, siis $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, f)$ on hulkade kujutus
$$\begin{aligned} f \circ \_ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A) &\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, B) \\ g &\mapsto f \circ g. \end{aligned}$$

Õpikus [2] tähistatakse seda funktorit $\mathrm{Mor}(C, -)$.

Näide 1.3.10. Olgu $\mathcal{C}$ kategooria ja olgu $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Siis leidub funktor
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, C) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set},$$
mis seab igale $\mathcal{C}$ objektile $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ vastavusse hulga $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$. Morfismidel käitub see funktor järgnevalt: kui $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ (ehk $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(B, A)$), siis $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, C)$ on hulkade kujutus
$$\begin{aligned} \_ \circ f : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) &\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C) \\ g &\mapsto g \circ f. \end{aligned}$$

Õpikus [2] tähistatakse seda funktorit $\mathrm{Mor}(-, C)$.

Näide 1.3.11. Eksisteerib funktor $U : \mathbf{Ban} \to \mathbf{Met}$ kategooriast $\mathbf{Ban}$ kategooriasse $\mathbf{Met}$, mis seab igale Banachi ruumile vastavusse selle ruumi enda kui meetrilise ruumi ning igale morfismile (pidevale lineaarsele kujutusele, mille norm on väiksem kui 1) vastavusse iseenda kui pideva ahendava kujutuse meetriliste ruumide vahel. Seda funktorit nimetatakse unustavaks funktoriks, sest see "unustab" ära Banachi ruumi vektorruumi struktuuri ja jätab alles vaid meetrilise ruumi struktuuri.

Näide 1.3.12. Eelpool kirjeldatud protseduuri, kus punktiga meetrilisele ruumile $(M, d_M, 0_M)$ seatakse vastavusse Banachi ruum $F(M)$, saab kirjeldada funktoriga $F : \mathbf{Met_0} \to \mathbf{Ban}$, kus

$$\begin{aligned} F_0 : \mathrm{Ob}(\mathbf{Met_0}) &\to \mathrm{Ob}(\mathbf{Ban}) \\ M &\mapsto F(M) \end{aligned}$$

ning iga $M, N \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Met_0})$ korral

$$\begin{aligned} F_1^{M,N} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Met_0}}(M, N) &\to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ban}}(F(M), F(N)) \\ f &\mapsto \overline{\delta_N \circ f}, \end{aligned}$$

kasutades teoreem 1.2.4 tähistusi. Tõepoolest, $\delta_N \circ f : M \to F(N)$ on kujutus punktiga meetrilisest ruumist Banachi ruumi, mis tähendab, et seda saab tegurdada kujutuse δ_M kaudu:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "\delta_M"] & N \arrow[d, hook, "\delta_N"] \\ F(M) \arrow[r, dashed, "F(f)"] & F(N) \end{tikzcd} \tag{2}$$

Edaspidi märgime kujutust $\overline{\delta_N \circ f}$ lihtsalt $F(f)$. Märkame ka, et

$$F(\mathrm{id}_M) = \overline{\delta_M \circ \mathrm{id}_M} = \overline{\delta_M} = \mathrm{id}_{F(M)},$$

kus viimane võrdus kehtib, sest kujutus $\mathrm{id}_{F(M)}$ paneb diagrammi

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "\delta_M"'] \arrow[dr, "\delta_M"] & \\ F(M) \arrow[r, dashed, "\mathrm{id}_M"'] & F(M) \end{tikzcd}$$

kommuteeruma ja teoreem 1.2.4 tõttu on selline kujutus üheselt määratud. Samuti paneme tähele, et kui $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} O$ kategoorias $\mathbf{Met_0}$, siis

$$F(g \circ f) = \overline{\delta_O \circ g \circ f} = F(g) \circ F(f),$$

sest kujutus $F(g)$ paneb diagrammis

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "\delta_M"'] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook, "\delta_N"'] & O \arrow[d, hook, "\delta_O"] \\ F(M) \arrow[r, "F(f)"'] & F(N) \arrow[r, "F(g)"'] & F(O) \end{tikzcd}$$

parempoolse ruudu kommuteeruma ning $F(f)$ paneb vasakpoolse ruudu kommuteeruma, seega $F(g) \circ F(f)$ paneb välimise ruudu kommuteeruma. Teoreemi 1.2.4 tõttu on selline kujutus üheselt määratud, seega $\overline{\delta_O \circ g \circ f} = F(g) \circ F(f)$. Kokkuvõtteks F rahuldab funktori definitsiooni.

Järgmiseks kirjeldame mõnda viisi, kuidas saab kategoorias $\mathcal{C}$ olemasolevatest objektidest uusi konstrueerida.

Definitsioon 1.3.13. Olgu $\mathcal{C}$ kategooria ning $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Kolmikut (P, p_A, p_B), kus $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $p_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, A)$ ja $p_B \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, B)$, nimetatakse objektide A ja B *korrutiseks*, kui iga $Q \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, A)$ ja $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, B)$ korral leidub üheselt määratud morfism $m \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, P)$ nii, et diagramm

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "m"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & P \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_B"'] & B \end{tikzcd}$$

kommuteerub.

Näide 1.3.14. Kategoorias **Set** on kahe hulga A ja B kategoorseks korrutiseks nende hulkade otsekorrutis $A \times B$ koos projektsioonidega

$$p_A : A \times B \to A, \ (a, b) \mapsto a$$
$$p_B : A \times B \to B, \ (a, b) \mapsto b.$$

Samas saame rääkida ka rohkem kui kahe hulga otsekorrutisest ning võtta otsekorrutise lõpmatust kogumist hulkadest. Sellest on motiveeritud järgmine definitsioon.

Definitsioon 1.3.15. Olgu $\mathcal{C}$ kategooria, I hulk ning $A_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ iga $i \in I$ korral. Paari $(P, (p_i)_{i\in I})$, kus $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja $p_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, A_i)$ iga $i \in I$ korral, nimetatakse objektide süsteemi $\{A_i\}_{i\in I}$ *korrutiseks*, kui iga paari $(Q, (q_i)_{i\in I})$ korral, kus $Q \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja $q_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, A_i)$, leidub üheselt määratud morfism $m \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, P)$ nii, et diagramm

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[d, dashed, "m"'] \arrow[dr, "q_i"] & \\ P \arrow[r, "p_i"'] & A_i \end{tikzcd}$$

kommuteerub.

Märkus 1.3.16. Märgime, et kategoorias **Set** on lõpmatu hulkade süsteemi $\{A_i\}_{i\in I}$, kus I on ka mingi hulk, korrutiseks hulkade otsekorrutis $\prod_{i\in I} A_i$. Kui $Q \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Set})$ ja $q_i : Q \to A_i$ on funktsioon iga $i \in I$ korral, siis funktsiooniks, mis ülevaloleva diagrammi kommuteeruma paneb, on

$$\begin{aligned} m : Q &\to \prod_{i\in I} A_i \\ q &\mapsto (q_i(q))_{i\in I}. \end{aligned}$$

Analoogiliselt saame defineerida kokorrutise mõiste, mis on motiveeritud hulkade lõikumatu ühendi mõistest.

Definitsioon 1.3.17. Olgu $\mathcal{C}$ kategooria ning $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Kolmikut (P, u_A, u_B), kus $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $u_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, P)$ ja $u_B \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, P)$, nimetatakse objektide A ja B *kokorrutiseks*, kui iga $Q \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Q)$ ja $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, Q)$ korral leidub üheselt määratud morfism $m \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, Q)$ nii, et diagramm

$$\begin{tikzcd} & Q & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "u_A"'] & P \arrow[u, dashed, "m"'] & B \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "u_B"] \end{tikzcd}$$

kommuteerub.

Näide 1.3.18. Kategoorias **Set** on kahe hulga A ja B kategoorseks kokorrutiseks nende hulkade lõikumatu ühend $A \amalg B$ koos sisestustega

$$\begin{aligned} i_A &: A \to A \amalg B,\ a \mapsto a^A \\ i_B &: B \to A \amalg B,\ b \mapsto b^B, \end{aligned}$$

kus a^A tähistab lõikumatu ühendi komponendis A olevat elementi a ning b^B tähistab lõikumatu ühendi komponendis B olevat elementi b. Nagu korrutistegi puhul, saame rääkida ka lõpmatu hulkade kogumi lõikumatust ühendist. Sellest on motiveeritud järgmine definitsioon.

Definitsioon 1.3.19. Olgu $\mathcal{C}$ kategooria, I hulk ning $A_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ iga $i \in I$ korral. Paari $(P, (u_i)_{i\in I})$, kus $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja $u_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A_i, P)$ iga $i \in I$ korral, nimetatakse objektide süsteemi $\{A_i\}_{i\in I}$ *kokorrutiseks*, kui iga paari $(Q, (q_i)_{i\in I})$ korral, kus $Q \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja $q_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A_i, Q)$, leidub üheselt määratud morfism $m \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, Q)$

nii, et diagramm

$$\begin{tikzcd}
Q & \\
P \arrow[u, dashed, "m"] & A_i \arrow[l, "u_i"] \arrow[ul, "q_i"']
\end{tikzcd}$$

kommuteerub.

Märkus 1.3.20. Märgime, et kategoorias **Set** on lõpmatu hulkade süsteemi $\{A_i\}_{i\in I}$, kus I on ka mingi hulk, kokorrutiseks hulkade lõikumatu ühend $\coprod_{i\in I} A_i$. Kui $Q \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Set})$ ja $q_i : A_i \to Q$ on funktsioon iga $i \in I$ korral, siis funktsiooniks, mis ülevaloleva diagrammi kommuteeruma paneb, on

$$m : \coprod_{i\in I} A_i \to Q$$
$$x \mapsto q_i(x),$$

kus $i \in I$ on selline (ühesel määratud) indeks, et $x \in A_i$.

Suvalises kategoorias saame vaadelda ka objekti "hulgaga (ko)astendamise" mõistet. Olgu järgnevas $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Set})$, $\mathcal{C}$ kategooria ja $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Järgnevad kaks definitsiooni pärinevad raamatust [5]. Anname siin nende põhjalikult lahti kirjutatud variandid.

Definitsioon 1.3.21. Objekti A *astmeks hulgaga* X nimetatakse objektide süsteemi

$$\{A\}_{x\in X}$$

korrutist ehk paari $(P, (p_x)_{x\in X})$, kus $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja iga $x \in X$ korral $p_x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, A)$, mis rahuldab järgnevat universaalomadust: kui $(Q, (q_x)_{x\in X})$ on mingi teine paar, kus $Q \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja iga $x \in X$ korral $q_x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, A)$, siis leidub selline üheselt määratud $m \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, P)$, et iga $x \in X$ korral $q_x = p_x \circ m$ ehk järgnev diagramm

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[d, dashed, "m"'] \arrow[dr, "q_x"] & \\
P \arrow[r, "p_x"'] & A
\end{tikzcd}$$

kommuteerub iga $x \in X$ korral. Objekti P tähistatakse sel juhul A^X.

Definitsioon 1.3.22. Objekti A *koastmeks hulgaga* X nimetatakse objektide süsteemi

$$\{A\}_{x\in X}$$

kokorrutist ehk paari $(P, (u_x)_{x \in X})$, kus $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja iga $x \in X$ korral $u_x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, P)$, mis rahuldab järgnevat universaalomadust: kui $(Q, (q_x)_{x \in X})$ on mingi teine paar, kus $Q \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja iga $x \in X$ korral $q_x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Q)$, siis leidub selline üheselt määratud $m \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, Q)$, et iga $x \in X$ korral $q_x = m \circ u_x$ ehk järgnev diagramm

$$\begin{tikzcd} Q & \\ P \arrow[u, dashed, "m"] & A \arrow[l, "u_x"] \arrow[ul, "q_x"'] \end{tikzcd}$$

kommuteerub iga $x \in X$ korral. Objekti P tähistatakse sel juhul $X \cdot A$.

Näide 1.3.23. Olgu astme definitsioonis $\mathcal{C}$ rollis **Set**. Siis hulga $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Set})$ aste hulgaga X on hulk

$$A^X = \{f : X \to A\}$$

ehk kõik funktsioonid $X \to A$. Definitsiooni 1.3.21 tähistusi kasutades $P = A^X$ ning iga $x \in X$ korral p_x on järgnev funktsioon:

$$\begin{aligned} p_x : A^X &\to A \\ (f : X \to A) &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Kontrollime ka, et A^X rahuldab definitsioonis 1.3.21 toodud universaalomadust. Olgu $Q \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Set})$ ja $q_x : Q \to A$ funktsioon iga $x \in X$ korral. Siis funktsioon

$$\begin{aligned} m : Q &\to A^X \\ q &\mapsto (f : X \ni x \mapsto q_x(q) \in A) \end{aligned}$$

rahuldab tingimust $q_x = p_x \circ m$ iga $x \in X$ korral. Kui funktsioon $m' : Q \to A^X$ rahuldab samuti tingimust $q_x = p_x \circ m'$ iga $x \in X$ korral, siis vastavalt p_x definitsioonile $q_x(q) = m'(q)(x)$ iga $q \in Q$ ja $x \in X$ korral. Tingimusest $q_x = p_x \circ m$ ja p_x definitsioonist saame aga, et ka $q_x(q) = m(q)(x)$ kehtib iga $q \in Q$ ja $x \in X$ korral. Kuna $m(q), m'(q) : X \to A$, siis sellest järeldub, et $m(q) = m'(q)$ suvalise $q \in Q$ korral. Seega $m = m'$ kui funktsioonid $Q \to A^X$.

Näide 1.3.24. Olgu koastme definitsioonis $\mathcal{C}$ rollis **Set**. Siis hulga $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Set})$ koaste hulgaga X on otsekorrutis $X \times A$. Definitsiooni 1.3.22 tähistusi kasutades $P = X \times A$ ja iga $x \in X$ korral u_x on järgnev funktsioon:

$$\begin{aligned} u_x : A &\to X \times A \\ a &\mapsto (x, a). \end{aligned}$$

Kontrollime ka, et $X \times A$ rahuldab definitsioonis 1.3.22 toodud universaalomadust.

Olgu $Q \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Set})$ ja $q_x : A \to Q$ funktsioon iga $x \in X$ korral. Siis funktsioon

$$\begin{aligned} m : X \times A &\to Q \\ (x, a) &\mapsto q_x(a) \end{aligned}$$

rahuldab tingimust $q_x = m \circ u_x$ iga $x \in X$ korral. Kui funktsioon $m' : X \times A \to Q$ rahuldab samuti tingimust $q_x = m' \circ u_x$ iga $x \in X$ korral, siis järelduvast võrdusest $m' \circ u_x = m \circ u_x$ ja u_x definitsioonist saame, et

$$\begin{aligned} m'(u_x(a)) &= m(u_x(a)) \\ m'(x, a) &= m(x, a) \end{aligned}$$

ning seda iga $x \in X$ ja $a \in A$ korral. Seega iga $(x, a) \in X \times A$ korral $m'(x, a) = m(x, a)$ ehk $m' = m$ kui funktsioonid $X \times A \to Q$.

Nagu definitsioonides kirjas, siis need mõisted on (tavalises kategoorias) erijuhud korrutise ja kokorrutise mõistest. Hiljem defineerime need mõisted kaalutud kategooriate jaoks ning näeme, et kaalutud juhul ei saa astmeid ja koastmeid enam täielikult (kaalutud) korrutiste ja kokorrutiste kaudu esitada. Terminoloogia lihtsustamise huvides märgime ka ära, et korrutised ja astmed on erijuhud piiri mõistest, mida on kirjeldatud näiteks õpikus [2] ning kokorrutised ja koastmed on erijuhud kopiiri mõistest, mida on samuti kirjeldatud õpikus [2].

Definitsioon 1.3.25. Olgu $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funktorid kategooriast $\mathcal{A}$ kategooriasse $\mathcal{B}$. *Loomulikuks teisenduseks* funktorist F funktorisse G nimetatakse kategooria $\mathcal{B}$ morfismide süsteemi $\alpha = (\alpha_A : F(A) \to G(A))_{A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})}$, mille korral iga objektipaari $A, A' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ ja morfismi $f : A \to A'$ puhul järgnev diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & F(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ A' & F(A') \arrow[r, "\alpha_{A'}"'] & G(A') \end{tikzcd}$$

kommuteerub. Kui $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, siis morfismi α_A nimetatakse loomuliku teisenduse α komponendiks kohal A. Kui α on loomulik teisendus funktorist F funktorisse G, tähistame seda vahel $\alpha : F \Rightarrow G$.

Definitsioon 1.3.26. Olgu $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ kategooriad ja $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ja $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ funktorid. Olgu $\varphi = (\varphi_{A,B})_{(A,B) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{B})}$ bijektiivsete kujutuste

$$\varphi_{A,B} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, G(B))$$

süsteem, mis on loomulik teisendus nii A kui B suhtes. Kolmikut $\langle F, G, \varphi \rangle$ nimetatakse *adjunktsiooniks* kategooriast $\mathcal{A}$ kategooriasse $\mathcal{B}$. Kui $\langle F, G, \varphi \rangle$ on adjunktsioon, siis ütleme, et F on G vasakpoolne kaasfunktor ja G on F parempoolne kaasfunktor ning tähistame seda $F \dashv G$.

Näide 1.3.27. Eespool kirjeldatud Lipschitz-vaba funktor F on vasakpoolne kaasfunktor unustavale funktorile U kategooriast **Ban** kategooriasse $\mathbf{Met_0}$. Tõepoolest, iga $M \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Met_0})$ ja $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Ban})$ puhul eksisteerib kujutus

$$\begin{aligned}\varphi_{M,X} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ban}}(F(M), X) &\to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Met_0}}(M, U(X))\\ \overline{f} &\mapsto \overline{f} \circ \delta_M,\end{aligned}$$

kasutades teoreemi 1.2.4 tähistusi. See kujutus on teoreemi 1.2.4 kohaselt bijektiivne. Samuti on mistahes $\mathbf{Met_0}$ morfismi $k : K \to M$ ja **Ban** morfismi $h : X \to Y$ korral diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ban}}(F(M), X) \arrow[r, "\varphi_{M,X}"] \arrow[d, "_\circ F(k)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Met_0}}(M, U(X)) \arrow[d, "_\circ k"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ban}}(F(K), X) \arrow[r, "\varphi_{K,X}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Met_0}}(K, U(X))
\end{tikzcd}$$

ja diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ban}}(F(M), X) \arrow[r, "\varphi_{M,X}"] \arrow[d, "h\circ_"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Met_0}}(M, U(X)) \arrow[d, "U(h)\circ_"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ban}}(F(M), Y) \arrow[r, "\varphi_{M,Y}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Met_0}}(M, U(Y))
\end{tikzcd}$$

kommutatiivsed. Tõepoolest, esimese diagrammi kommutatiivsus tähendab seda, et iga $\overline{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ban}}(F(M), X)$ puhul kehtib võrdus

$$\overline{f} \circ \delta_M \circ k = \overline{f} \circ F(k) \circ \delta_K.$$

Lipschitz-vaba funktori definitsioonist (vaata näidet 1.3.12) aga teame, et F on defineeritud nii, et $\delta_M \circ k = F(k) \circ \delta_K$. Seega võrdus kehtib ja esimene diagramm kommuteerub. Teise diagrammi kommutatiivsus tähendab seda, et iga $\overline{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ban}}(F(M), X)$ puhul kehtib võrdus

$$U(h) \circ \overline{f} \circ \delta_M = h \circ \overline{f} \circ \delta_M.$$

Et U on unustav funktor, siis $U(h) = h$. Seega võrdus kehtib ja teine diagramm kommuteerub.

Definitsioon 1.3.28. Olgu $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ kategooriad, $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ funktor ja $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ objekt kategoorias $\mathcal{A}$. *Universaalne morfism* objektist A funktorisse G on paar (u, B), kus $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ ja $u : A \to G(B)$ on kategooria $\mathcal{A}$ morfism, mille puhul iga teise paari (g, B'), kus $B' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ ja $g : A \to G(B')$ jaoks leidub üheselt määratud morfism $f : B \to B'$ kategoorias $\mathcal{B}$ nii, et $G(f) \circ u = g$.

Definitsioon 1.3.29. Olgu $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ kategooriad, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funktor ja $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ objekt kategoorias $\mathcal{B}$. *Universaalne morfism* funktorist F objekti B on paar (A, u), kus $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ ja $u : F(A) \to B$ on kategooria $\mathcal{B}$ morfism, mille puhul iga teise paari (A', g), kus $A' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ ja $g : F(A') \to B$ jaoks leidub üheselt määratud morfism $f : A' \to A$ kategoorias $\mathcal{A}$ nii, et $u \circ F(f) = g$.

Teoreem 1.3.30. *Olgu $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ kategooriad, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ funktorid ja olgu meil adjunktsioon $\langle F, G, \varphi \rangle$. Siis leiduvad*

1. *loomulik teisendus $\eta : id_{\mathcal{A}} \Rightarrow G \circ F$ nii, et iga objekti $A \in Ob(\mathcal{A})$ puhul $(\eta_A, F(A))$ on universaalne morfism objektist A funktorisse G ja iga $f : F(A) \to B$ korral*

$$\varphi_{A,B}(f) = G(f) \circ \eta_A.$$

2. *loomulik teisendus $\varepsilon : F \circ G \to id_{\mathcal{B}}$ nii, et iga objekti $B \in Ob(\mathcal{B})$ korral $(G(B), \varepsilon_B)$ on universaalne morfism funktorist F objekti B ja iga $g : A \to G(B)$ korral*

$$\varphi^{-1}_{A,B}(g) = \varepsilon_B \circ F(g).$$

Loomulikku teisendust η nimetatakse adjunktsiooni ühikuks ja loomulikku teisendust ε nimetatakse adjunktsiooni koühikuks.

Märkus 1.3.31. Näites 1.3.27 toodud adjunktsiooni ühikuks on $\delta : \mathrm{id}_{\mathbf{Met_0}} \Rightarrow U \circ F$, kus iga punktiga meetrilise ruumi $(M, d_M, 0_M)$ puhul δ_M on kirjeldatud alapeatükis 1.2. See, et $\delta : \mathrm{id}_{\mathbf{Met_0}} \Rightarrow U \circ F$ on loomulik teisendus, on tõestatud näites 1.3.12. Tõepoolest, kommuteeruvat diagrammi (2) võib iga

$$(M, d_M, 0_M), (N, d_N, 0_N) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Met_0})$$

ja iga $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Met_0}}(M, N)$ korral vaadata ka kui (kommuteeruvat) diagrammi

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "\delta_M"'] & N \arrow[d, hook, "\delta_N"] \\ U(F(M)) \arrow[r, dashed, "U(F(f))"'] & U(F(N)) \end{tikzcd}$$

See, et $(\delta_M, F(M))$ on universaalne morfism objektist M funktorisse U, järeldub teoreemist 1.2.4. Samuti järeldub näitest 1.3.27, et

$$\varphi_{M,X}(\overline{f}) = \overline{f} \circ \delta_M = U(\overline{f}) \circ \delta_M,$$

nagu vaja.

2 Kaalutud kategooriate struktuur ja näited

Selles peatükis on meie eesmärk defineerida kaalutud kategooria ning tutvustada selle mõiste olulisemaid näiteid. Seejärel uurime adjunktsioone kaalutud kategooriate vahel ning mõningaid piire (nimelt korrutisi ja astmeid) ja kopiire (nimelt kokorrutisi ja koastmeid) kaalutud kategooriates.

2.1 Kaalutud kategooria mõiste ja näited

Kaalutud kategooriatest rääkides tuleb alustada kaalutud hulkadest, mida on võimalik defineerida eri viisidel. Näiteks artiklis [1] nimetatakse kaalutud hulgaks paari (X, w), kus X on hulk ja w on funktsioon

$$w : X \to [0, \infty].$$

Meie eesmärk selles bakalaureusetöös on vaadelda kategooriate **Met**, $\mathbf{Met_0}$ ja **Ban** morfismihulki kaalutud hulkadena, kus morfismi kaaluks on tema Lipschitzi konstant. Et nendes kategooriates on kõigi morfismide Lipschitzi konstant intervallis $[0, 1]$, siis anname sellele mõistele natuke teistsuguse sisu.

Definitsioon 2.1.1. *Kaalutud hulgaks* nimetame paari (X, w), kus X on hulk ja

$$w : X \to [0, 1]$$

on funktsioon.

Edaspidi nimetame kaalutud hulkadeks just definitsiooni 2.1.1 rahuldavaid paare. Kui kontekstist on selge, et (X, w) on kaalutud hulk, siis vahel tähistame teda ka lihtsalt tähisega X.

Järgmised mõisted selles alapeatükis pärinevad artiklist [1], kui ei ole teisiti öeldud.

Definitsioon 2.1.2. Olgu (X, w_X) ja (Y, w_Y) kaalutud hulgad. *Kaalutud hulkade morfismiks* nimetatakse funktsiooni $f : X \to Y$, mille puhul

$$\forall x \in X \quad w_Y(f(x)) \leq w_X(x).$$

Märkus 2.1.3. Saab vaadelda kategooriat **wSet**, mille objektideks on kõik kaalutud hulgad ja morfismideks kaalutud hulkade morfismid definitsioon 2.1.2 mõttes. Tõepoolest, kui on antud kaalutud hulgad $(X, w_X), (Y, w_Y)$ ja (Z, w_Z) ning kaalutud hulkade morfismid $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, siis $g \circ f : X \to Z$ on samuti kaalutud hulkade morfism, sest

$$w_Z(g(f(x))) \leq w_Y(f(x)) \leq w_X(x).$$

Samuti on iga kaalutud hulga (X, w_X) puhul id_X kaalutud hulkade morfism, sest

$$w_X(\mathrm{id}_X(x)) = w_X(x) \leq w_X(x).$$

Definitsioon 2.1.4. Kategooriat $\mathcal{C}$ nimetame *kaalutud kategooriaks*, kui iga objektipaari $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ korral $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ on kaalutud hulk (tähistame lihtsuse mõttes iga morfismihulga kui kaalutud hulga kaalufunktsiooni tähega w) ning

$$w(g \circ f) \leq w(g) \cdot w(f).$$

mistahes $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ning $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ja $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ korral.

Märgime, et kaalutud kategooria definitsioon artiklis [1] sisaldab lisatingimust, et $w(\mathrm{id}_A) \leq 1$ iga $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ korral, sest kaalud võivad seal võtta väärtusi intervallis $[0, \infty]$. Meie kaalutud hulga ja kaalutud kategooria definitsiooni puhul on aga tingimus $w(\mathrm{id}_A) \leq 1$ iga $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ korral vaikimisi tagatud, sest kaalud võtavad alati väärtusi intervallis $[0, 1]$.

Märkus 2.1.5. Artiklis [1] tuuakse välja, et kaalutud kategooriat saab vaadelda ka siis, kui kaalutud hulga definitsioonis $[0, 1]$ asendada $[0, \infty]$-ga, lisada nõue $w(\mathrm{id}_A) = 0$ iga $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ korral ning nõue $w(g \circ f) \leq w(g) \cdot w(f)$ asendada nõudega $w(g \circ f) \leq w(g) + w(f)$. Sellist kaalutud kategooriat nimetatakse *aditiivselt kaalutud kategooriaks*, meie kasutatavat definitsiooni võib nimetada aga *multiplikatiivselt kaalutud kategooriaks.*

Näide 2.1.6. Kategooria **Met** on kaalutud kategooria, kui vaadelda iga morfismi $f : M \to N$, kus M ja N on meetrilised ruumid, sealhulgas $M \neq \emptyset$, kaaluna f Lipschitzi konstanti L_f. Tõepoolest, funktsioon

$$\begin{aligned} w : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Met}}(M, N) &\to [0, 1] \\ f &\mapsto L_f \end{aligned}$$

on iga morfismi $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$ korral esiteks korrektselt defineeritud, sest kategoorias **Met** on M ja N vahelised morfismid ahendavad kujutused, mille Lipschitzi konstant on kindlasti vahemikus $[0, 1]$. Teiseks kehtib iga $O \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Met})$ ja iga $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N), g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Met}}(N, O)$ korral tingimus

$$w(g \circ f) \leq w(g) \cdot w(f).$$

Tõepoolest, see järeldub sellest, et

$$\begin{aligned} d_O((g \circ f)(m_1), (g \circ f)(m_2)) &= d_O(g(f(m_1)), g(f(m_2))) \\ &\leq L_g \cdot d_N(f(m_1), f(m_2)) \\ &\leq L_g \cdot L_f \cdot d_M(m_1, m_2) \end{aligned}$$

iga meetrilise ruumi O ja kujutuste $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,N), g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Met}}(N,O)$ korral, samas Lipschitzi konstandi definitsiooni kohaselt on $L_{g\circ f}$ vähim selline reaalarv $L \in \mathbb{R}$, et võrratus

$$d_O((g\circ f)(m_1),(g\circ f)(m_2)) \leq L \cdot d_M(m_1,m_2)$$

kehtib. Seega $w(g\circ f) = L_{g\circ f} \leq L_g \cdot L_f = w(g)\cdot w(f)$.

Juhul, kus $M = \emptyset$, defineerime **Met** morfismi kaalu järgnevas märkuses.

Samal viisil morfismidele kaale andes saab kaalutud kategooriana vaadelda ka kategooriat $\mathbf{Met_0}$ (märgime, et tühja hulka ei pea enam selles kategoorias erijuhuna vaatama, sest tühi hulk ei ole punktiga meetriline ruum).

Märkus 2.1.7. Ka tühja hulka $\emptyset$ saab vaadelda meetrilise ruumina, kui võtta meetrikaks kujutus

$$d_\emptyset : \emptyset \times \emptyset \to \mathbb{R}$$

(tegu on üheselt määratud kujutusega tühjast hulgast hulka $\mathbb{R}$). Seega $(\emptyset, d_\emptyset) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Met})$. Olgu $(M,d_M) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Met})$ mingi teine **Met** objekt. Olgu $f : \emptyset \to M$ üheselt määratud morfism tühjast hulgast ruumi M. Defineerime f kaaluna $w(f) := 0$. Siis $w(f\circ g) \leq w(f)\cdot w(g)$ on täidetud iga teise objekti $(N,d_N) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Met})$ ja morfismi $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Met}}(M,N)$ korral.

Märkus 2.1.8. Kui punktiga meetrilises ruumis $(M,d_M,0_M)$ on rohkem kui üks punkt, siis ühikmorfismi id_M Lipschitzi konstandiks on 1. Samas kui $M = \{0_M\}$, siis ei ole selles meetrilises ruumis nullist erinevaid kauguseid ja kehtib

$$\forall m_1,m_2 \in M \quad d_M(\mathrm{id}_M(m_1),\mathrm{id}_M(m_2)) = d_M(m_1,m_2) = 0 \leq 0 * d_M(m_1,m_2)$$

ehk $L_{\mathrm{id}_M} = 0$.

Näide 2.1.9. Kategooria **Ban** on kaalutud kategooria, kui vaadelda iga morfismi $f : V \to W$, kus V ja W on Banachi ruumid, kaaluna f normi $||f||$.

Näide 2.1.10. Üks olulisemaid kaalutud kategooria näiteid on **wSet** ise. Olgu $(X,w_X),(Y,w_Y) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{wSet})$ vabalt valitud kaalutud hulgad. Defineerime nende kahe kaalutud hulga vahelistel morfismidel kaalud järgnevalt:

$$w : \mathrm{Hom}_{\mathbf{wSet}}(X,Y) \to [0,1]$$
$$f \mapsto \begin{cases} 0, & \text{kui } w_X(x) = 0 \text{ iga } x \in X \text{ korral;} \\ \sup_{\substack{x\in X \\ w_X(x)\neq 0}} \frac{w_Y(f(x))}{w_X(x)}, & \text{muidu.} \end{cases}$$

Näitame, et w tõesti võtab väärtusi hulgas $[0,1]$. Juhul $w_X(x) = 0$ iga $x \in X$ korral on see selge. Leidugu seega selliseid $x \in X$, et $w_X(x) \neq 0$. Kuna iga $f \in$

$\mathrm{Hom}_{\mathbf{wSet}}(X,Y)$ rahuldab tingimust $w_Y(f(x)) \leq w_X(x)$ iga $x \in X$ korral, siis $\frac{w_Y(f(x))}{w_X(x)} \leq 1$ iga $x \in X$ korral, mis rahuldab $w_X(x) \neq 0$, ja seega hulk

$$\left\{ \frac{w_Y(f(x))}{w_X(x)} \;\middle|\; x \in X, w_X(x) \neq 0 \right\}$$

on ülalt tõkestatud arvuga 1. Seega selle hulga vähim ülemine tõke ehk $w(f)$ ei ole suurem kui 1. Samuti on see hulk alt tõkestatud arvuga 0, sest $w_Y(f(x)), w_X(x) \geq 0$ iga $x \in X$ korral. Seega $0 \leq w(f) \leq 1$, nagu vaja.

Olgu nüüd $(Z, w_Z) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{wSet})$ mingi kolmas kaalutud hulk ja $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{wSet}}(X,Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{wSet}}(Y,Z)$. Veendume, et $w(g \circ f) \leq w(g) \cdot w(f)$. Kui $w_X(x) = 0$ iga $x \in X$ korral, siis $w(g \circ f) = w(f) = 0$ ja võrratus kehtib. Eeldame, et leidub $x \in X$, mille puhul $w_X(x) \neq 0$. Kui elemendi $x \in X$ puhul kehtib $w_Y(f(x)) \neq 0$, siis

$$\begin{aligned}
\frac{w_Z(g(f(x)))}{w_X(x)} &= \frac{w_Z(g(f(x)))}{w_Y(f(x))} \cdot \frac{w_Y(f(x))}{w_X(x)} \\
&\leq \frac{w_Z(g(f(x)))}{w_Y(f(x))} \cdot \sup_{\substack{x \in X \\ w_X(x) \neq 0}} \frac{w_Y(f(x))}{w_X(x)} \\
&= \frac{w_Z(g(f(x)))}{w_Y(f(x))} \cdot w(f) \\
&\leq \sup_{\substack{y \in f(X) \\ w_Y(y) \neq 0}} \frac{w_Z(g(y))}{w_Y(y)} \cdot w(f) \\
&\leq \sup_{\substack{y \in Y \\ w_Y(y) \neq 0}} \frac{w_Z(g(y))}{w_Y(y)} \cdot w(f) \\
&= w(g) \cdot w(f).
\end{aligned}$$

Märgime, et võrratus eelviimasel real kehtib, sest $f(X) \subseteq Y$ ja ülemhulga supreemum ei saa olla väiksem alamhulga omast.

Kui $w_Y(f(x)) = 0$, siis ka $w_Z(g(f(x))) = 0$, sest kujutus g ei saa kaale suurendada. Seega

$$\frac{w_Z(g(f(x)))}{w_X(x)} = \frac{0}{w_X(x)} = 0 \leq w(g) \cdot w(f).$$

Saime, et igal juhul kehtib $\frac{w_Z(g(f(x)))}{w_X(x)} \leq w(g) \cdot w(f)$, kui $w_X(x) \neq 0$. Võttes supreemumi üle kõigi $x \in X$, mille puhul $w_X(x) \neq 0$, saame

$$\sup_{\substack{x \in X \\ w_X(x) \neq 0}} \frac{w_Z(g(f(x)))}{w_X(x)} \leq w(g) \cdot w(f)$$

$$w(g \circ f) \leq w(g) \cdot w(f).$$

Nägime, et **wSet** tõesti rahuldab kaalutud kategooria tingimusi.

2.2 Adjunktsioonid kaalutud kategooriate vahel

Järgmiseks kirjeldame, mida tähendab kategooriateooriast tuntud funktori ja adjunktsiooni mõistete kooskõla kaaludega üldises kaalutud kategoorias.

Definitsioon 2.2.1. Olgu $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ kaalutud kategooriad ning olgu $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funktor. Tähistame iga $\mathcal{C}$ morfismihulga kaalufunktsiooni tähisega $w_{\mathcal{C}}$ ja iga $\mathcal{D}$ morfismihulga kaalufunktsiooni tähisega $w_{\mathcal{D}}$. Funktorit F nimetame *kaalutud kategooriate funktoriks*, kui

$$\forall A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \ \forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \quad w_{\mathcal{D}}(F(f)) \leq w_{\mathcal{C}}(f).$$

Näide 2.2.2. Unustav funktor $U : \mathbf{Ban} \to \mathbf{Met}$ on kaalutud kategooriate funktor. Tõepoolest, olgu $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Ban})$ ja $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ban}}(X, Y)$. Siis

$$w_{\mathbf{Met}}(U(f)) = w_{\mathbf{Met}}(f) = L_f = ||f|| = w_{\mathbf{Ban}}(f).$$

Selgitame veidi kolmandat võrdust. Tõepoolest, $||f||$ on vähim selline reaalarv $M \in \mathbb{R}$, et kehtib

$$||f(x)||_Y \leq M \cdot ||x||_X \tag{3}$$

iga $x \in X$ korral. Samas L_f on vähim selline reaalarv $L \in \mathbb{R}$, et kehtib

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq L \cdot d_X(x_1, x_2) \tag{4}$$

iga $x_1, x_2 \in X$ korral. Et tegu on normeeritud ruumiga, siis võib tingimused (3) ja (4) ümber kirjutada vastavalt kujul

$$\begin{aligned} d_Y(f(x), f(0_X)) &\leq M \cdot d_X(x, 0) \\ ||f(x_1 - x_2)||_Y &\leq L \cdot ||x_1 - x_2||_X. \end{aligned}$$

Seega näeme, et kui $||f|| \in \mathbb{R}$ on väikseim arv, mis tingimust (3) iga $x \in X$ korral rahuldab, siis $||f||$ rahuldab ka tingimust (4) L rollis, kui võtta $x_1 = x$ ja $x_2 = 0$. Seega $L_f \leq ||f||$. Teiselt poolt, kui L_f on väikseim arv, mis tingimust (4) iga $x_1, x_2 \in X$ korral rahuldab, siis L_f rahuldab ka tingimust (4) M rollis, kui võtta $x = x_1 - x_2$. Seega $||f|| \leq L_f$. Kokkuvõttes $||f|| = L_f$.

Näide 2.2.3. Lipschitz-vaba funktor $F : \mathbf{Met_0} \to \mathbf{Ban}$ on kaalutud kategooriate funktor. Teame juba, et ta on funktor tavalises mõttes. Jääb seega tõestada, et $w(F(f)) \leq w(f)$ iga morfismi $f : M \to N$ korral. Olgu $(M, d_M, 0_M), (N, d_N, 0_N)$

punktiga meetrilised ruumid ja $f : M \to N$ pidev ahendav kujutus. Siis $F(f) = \overline{\delta_N \circ f}$, kui kasutada teoreem 1.2.4 tähistusi. Selle teoreemi kohaselt ka $w(F(f)) = ||F(f)|| = L_{\delta_N \circ f} = w(\delta_N \circ f)$.

Nüüd $L_{\delta_N \circ f} = L_f$, sest δ_N on isomeetria. Tõepoolest,

$$d_{F(N)}(\delta_N(f(m_1)), \delta_N(f(m_2))) = d_N(f(m_1), f(m_2))$$

iga $m_1, m_2 \in M$ korral. Järelikult tingimus, et L on väikseim reaalarv, mille korral kehtib

$$\forall m_1, m_2 \in M \quad d_{F(N)}(\delta_N(f(m_1)), \delta_N(f(m_2))) \leq L \cdot d_M(m_1, m_2)$$

(s.t. $L = L_{\delta_N \circ f}$) on samaväärne tingimusega, et L on väikseim reaalarv, mille korral kehtib

$$\forall m_1, m_2 \in M \quad d_N(f(m_1), f(m_2)) \leq L \cdot d_M(m_1, m_2)$$

(s.t. $L = L_f$). Seega $w(F(f)) = L_{\delta_N \circ f} = L_f = w(f)$. Näeme, et F tõepoolest on kaalutud kategooriate funktor, sealhulgas lausa kaale säilitav.

Märkus 2.2.4. Olgu (X, w_X) ja (Y, w_Y) kaalutud hulgad. Olgu $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{wSet}}(X, Y)$. Siis f on isomorfism kategoorias **wSet** parajasti siis, kui ta on bijektiivne hulkadevahelise kujutusena ning kehtib tingimus

$$w_Y(f(x)) = w_X(x)$$

iga $x \in X$ korral.

Olgu meil nüüd antud suvaline adjunktsioon

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D} \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

kaalutud kategooriate $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ vahel. Hulkade isomorfism

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D))$$

iga $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja $D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ korral adjunktsiooni definitsioonis ei pruugi üldjuhul olla kaalutud hulkade isomorfism. Kui aga tahame, et meie adjunktsioon oleks kaaludega kooskõlas, on loomulik nõuda, et see bijektsioon oleks iga objektipaari $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ korral kaale täpselt säilitav. See motiveerib järgmist definitsiooni.

Definitsioon 2.2.5. Adjunktsioon $\langle F, G, \varphi \rangle$ on *kaalutud adjunktsioon*, kui iga $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja $D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ korral

$$\varphi_{C,D} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D))$$

on kaalutud hulkade isomorfism.

Näitame hiljem, et kui $\langle F, G, \varphi \rangle$ on kaalutud adjunktsioon, siis sellest saab isegi järeldada, et F ja G on kaalutud kategooriate funktorid. Enne aga defineerime lisatingimused, mida rahuldades tagavad adjunktsiooni ühik η ja koühik ε, et F ja G on lausa kaale täpselt säilitavad funktorid ning mida motiveerib isomeetria mõiste meetriliste ruumide vahel.

Olgu $M, N \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Met})$ ja $f : M \to N$ kategooria **Met** morfism. Näitame, et f on isomeetria parajasti siis, kui iga $L \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Met})$ ja iga morfismi $x : L \to M$ korral $w(f \circ x) = L_{f \circ x} = L_x = w(x)$.

$$L \xrightarrow{x} M \xrightarrow{f} N$$

Esiteks, olgu f isomeetria, $L \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Met})$ ja $x : L \to M$ kategooria **Met** morfism. Siis

$$d_N(f(x(l_1)), f(x(l_2))) = d_M(x(l_1), x(l_2)) \leq L_x \cdot d_L(l_1, l_2)$$

iga $l_1, l_2 \in L$ korral. Et L_x on x Lipschitzi konstant, siis ta on vähim arv L', mille puhul võrratus

$$d_M(x(l_1), x(l_2)) \leq L' \cdot d_L(l_1, l_2) \tag{5}$$

iga $l_1, l_2 \in L$ korral kehtib. Samas on definitsiooni järgi $L_{f \circ x}$ vähim arv L', mille puhul kehtib

$$d_N(f(x(l_1)), f(x(l_2))) \leq L' \cdot d_L(l_1, l_2) \tag{6}$$

iga $l_1, l_2 \in L$ korral. Et praegusel juhul on võrratused (5) ja (6) samaväärsed, siis $L_x = L_{f \circ x}$, nagu vaja.

Teistpidi, kehtigu $L_{f \circ x} = L_x$ iga $L \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Met})$ ja iga **Met** morfismi $x : L \to M$ korral. Olgu $m_1, m_2 \in M$ sellised, et $m_1 \neq m_2$. Olgu $L = \{m_1, m_2\}$, kus $d_L(m_1, m_2) = d_M(m_1, m_2)$ ja

$$\begin{aligned} x : L &\to M \\ m &\mapsto m. \end{aligned}$$

Siis $L_x = 1$. Tõepoolest, kasutades märkuses 1.1.3 toodud viisi Lipschitzi konstandi arvutamiseks, saame, et

$$L_x = \sup_{\substack{k,l \in L \\ k \neq l}} \frac{d_M(x(k), x(l))}{d_L(k, l)} = \frac{d_M(x(m_1), x(m_2))}{d_L(m_1, m_2)} = \dots,$$

sest ainus L elementide paar (x, y), kus $x \neq y$, ongi (m_1, m_2). Võrdust jätkates ning x ja L definitsiooni kasutades saamegi

$$\dots = \frac{d_M(k,l)}{d_M(k,l)} = 1.$$

Seega ka $L_{f\circ x} = 1$. Kasutame jällegi märkust 1.1.3, et arvutada

$$\begin{aligned} L_{f\circ x} &= \sup_{\substack{k,l\in L \\ k\neq l}} \frac{d_N(f(x(k)), f(x(l)))}{d_L(k,l)} \\ &= \frac{d_N(f(x(m_1)), f(x(m_2)))}{d_L(m_1,m_2)} \\ &= \frac{d_N(f(m_1), f(m_2))}{d_M(m_1,m_2)}. \end{aligned}$$

Et $L_{f\circ x} = 1$, siis saame, et $d_N(f(m_1), f(m_2)) = d_M(m_1, m_2)$. Kuna $m_1, m_2 \in M, m_1 \neq m_2$ olid valitud suvaliselt, siis saame iga $m_1, m_2 \in M, m_1 \neq m_2$ korral järeldada, et $d_N(f(m_1), f(m_2)) = d_M(m_1, m_2)$. Kui $m_1, m_2 \in M$ on sellised, et $m_1 = m_2$, siis $d_N(f(m_1), f(m_2)) = 0 = d_M(m_1, m_2)$. Kokkuvõtteks on f siis isomeetria.

Üldises kaalutud kategoorias ei saa me morfismide puhul rääkida isomeetriaks olemisest samas mõttes, nagu kategoorias **Met**, s.t. elementide vahelisi kaugusi mõõtes. Tõepoolest, meie kaalutud kategooria objektid ei pruugi isegi olla hulgad, et me saaks rääkida "elementidest". Seevastu kui $M, N \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$, siis tingimusest $w(f \circ x) = w(x)$ iga $L \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja $x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L, M)$ korral saame rääkida igas kaalutud kategoorias. See motiveerib järgmist definitsiooni.

Definitsioon 2.2.6. Olgu $\mathcal{C}$ kaalutud kategooria, $M, N \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$. Kui

$$w(f \circ x) = w(x)$$

iga $L \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja $x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L, M)$ korral, siis nimetame f *isomeetriliseks morfismiks.*

Saame defineerida ka duaalse mõiste (vahetades kõigi morfismide lähte- ja sihtobjekti formaalselt ära).

Definitsioon 2.2.7. Olgu $\mathcal{C}$ kaalutud kategooria, $M, N \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M)$. Kui

$$w(x \circ f) = w(x)$$

iga $L \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja $x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, L)$ korral, siis nimetame f *koisomeetriliseks morfismiks.*

Tõestame nüüd eelpool lubatud tulemuse kaalutud adjunktsioonide kohta.

Lause 2.2.8. *Olgu meil antud kaalutud adjunktsioon*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D} \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

kaalutud kategooriate $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ vahel. Siis F ja G on kaalutud kategooriate funktorid.

Lisaks on see, et adjunktsiooni ühiku $\eta : id_{\mathcal{C}} \Rightarrow G \circ F$ C-kohaline komponent η_C on isomeetriline morfism iga $C \in Ob(\mathcal{C})$ korral, samaväärne sellega, et F on kaale täpselt säilitav.

Analoogselt, see, et adjunktsiooni koühiku $\varepsilon : F \circ G \Rightarrow id_{\mathcal{D}}$ D-kohaline komponent ε_D on koisomeetriline morfism iga $D \in Ob(\mathcal{D})$ korral, on samaväärne sellega, et G on kaale täpselt säilitav.

Tõestus. Näitame esmalt, et F on kaalutud kategooriate funktor. Olgu $C_1, C_2 \in \mathrm{Ob}(C)$ ja $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$. Meie eesmärk on näidata, et $w(F(f)) \leq w(f)$. Vaatleme esmalt diagrammi

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "\eta_{C_1}"'] & & C_2 \arrow[d, "\eta_{C_2}"] \\ G(F(C_1)) \arrow[rr, "G(F(f))"] & & G(F(C_2)) \end{tikzcd}$$

kus η_{C_1} ja η_{C_2} on adjunktsiooni ühiku η, mis on loomulik teisendus $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow G \circ F$, komponendid. See diagramm kommuteerub, sest η on loomulik teisendus. Et $(\eta_{C_1}, F(C_1))$ on universaalne morfism objektist C_1 funktorisse G, siis morfism $\eta_{C_2} \circ f$ tegurdub üheselt morfismi η_{C_1} kaudu. Seega $G(F(f))$ on ainuke morfism, mis eelneva diagrammi kommuteeruma paneb.

Võtame nüüd kaalutud hulkade isomorfismis

$$\varphi_{C,D} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D)) \tag{7}$$

D rolli $F(C_2)$ ja C rolli C_1. Saame, et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C_1), F(C_2)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(F(C_2)))$ on kaale säilitav bijektiivne kujutus, kus $F(f) \mapsto G(F(f)) \circ \eta_{C_1}$. Seega $w(F(f)) = w(G(F(f)) \circ \eta_{C_1}) = w(\eta_{C_2} \circ f)$, kus viimane võrdus kehtib eelneva diagrammi kommutatiivsuse tõttu.

Nüüd

$$w(\eta_{C_2} \circ f) \leq w(\eta_{C_2}) \cdot w(f) \leq w(f),$$

kus viimane võrratus kehtib, sest w võtab väärtusi intervallis $[0, 1]$. Kokkuvõttes $w(F(f)) \leq w(f)$, nagu vaja.

Tõestame nüüd esimese lisaväite. Eeldame ühtepidi, et iga $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ korral η_C on isomeetriline morfism. Järelikult on seda ka η_{C_2}. Sel juhul $w(\eta_{C_2} \circ f) = w(f)$ ehk $w(F(f)) = w(f)$ ja funktor F on kaale täpselt säilitav.

Eeldame vastupidi, et F on kaale täpselt säilitav. Olgu $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Näitame, et adjunktsiooni ühiku C-kohaline komponent η_C on isomeetriline morfism. Olgu $C' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ vabalt valitud objekt ja $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C', C)$ vabalt valitud morfism. Tõestuse esimeses kahes lõigus toodud arutelu korrates saame, et $w(F(f)) = w(\eta_C \circ f)$. Et F on kaale täpselt säilitav funktor, siis $w(F(f)) = w(f)$ ja kokkuvõtteks $w(f) = w(\eta_C \circ f)$ (ehk η_C on isomeetriline morfism). Et objekt C kategoorias $\mathcal{C}$ oli suvaline, siis saame öelda, et η_C on isomeetriline morfism iga $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ korral.

Näitame teiseks, et G on kaalutud kategooriate funktor. Olgu $D_1, D_2 \in \mathrm{Ob}(D)$ ja $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D_1, D_2)$. Meie eesmärk on näidata, et $w(G(g)) \leq w(g)$. Vaatleme esmalt diagrammi

$$\begin{tikzcd} D_1 \arrow[r, "g"] & D_2 \\ F(G(D_1)) \arrow[u, "\varepsilon_{D_1}"] \arrow[r, "F(G(g))"'] & F(G(D_2)) \arrow[u, "\varepsilon_{D_2}"'] \end{tikzcd}$$

kus ε_{D_1} ja ε_{D_2} on adjunktsiooni koühiku ε komponendid. See diagramm kommuteerub, sest $\varepsilon : F \circ G \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ on loomulik teisendus. Et $(G(D_2), \varepsilon_{D_2})$ on universaalne morfism funktorist F objekti D_2, siis morfism $g \circ \varepsilon_{D_1}$ tegurdub üheselt morfismi ε_{D_2} kaudu. Seega $F(G(g))$ on ainuke morfism, mis eelneva diagrammi kommuteeruma paneb.

Võtame nüüd kaalutud hulkade isomorfismis (7) D rolli D_2 ja C rolli $G(D_1)$. Saame, et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G(D_1), G(D_2)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(G(D_1)), D_2)$ on kaale säilitav bijektiivne kujutus, kus $G(g) \mapsto \varepsilon_{D_2} \circ F(G(g))$. Seega $w(G(g)) = w(\varepsilon_{D_2} \circ F(G(g))) = w(g \circ \varepsilon_{D_1})$, kus viimane võrdus kehtib eelneva diagrammi kommutatiivsuse tõttu.

Nüüd

$$w(g \circ \varepsilon_{D_1}) \leq w(g) \cdot w(\varepsilon_{D_1}) \leq w(g),$$

kus viimane võrratus kehtib, sest w võtab väärtusi intervallis $[0, 1]$. Kokkuvõttes $w(G(g)) \leq w(g)$, nagu vaja.

Tõestame nüüd teise lisaväite. Eeldame ühtepidi, et iga $D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ korral ε_D on koisomeetriline morfism. Järelikult on seda ka ε_{D_1}. Sel juhul $w(g \circ \varepsilon_{D_1}) = w(g)$ ehk $w(G(g)) = w(g)$ ja funktor G on kaale täpselt säilitav.

Eeldame vastupidi, et G on kaale täpselt säilitav. Olgu $D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$. Näitame, et adjunktsiooni koühiku D-kohaline komponent ε_D on koisomeetriline morfism. Olgu $D' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ vabalt valitud objekt ja $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D, D')$ vabalt valitud morfism. Eespool G kohta toodud arutelu korrates saame, et $w(G(g)) = w(g \circ \varepsilon_D)$. Et G on kaale täpselt säilitav funktor, siis $w(G(g)) = w(g)$ ja kokkuvõtteks $w(g) = w(g \circ \varepsilon_D)$ (ehk ε_D on koisomeetriline morfism). Et objekt D kategoorias $\mathcal{D}$ oli suvaline, siis saame öelda, et ε_D on koisomeetriline morfism iga $D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ korral. $\square$

Märgime, et Lipschitz-vaba funktor, mida me nägime näites 2.2.3 olevat kaalutud kategooriate funktori, rahuldab lause 2.2.8 eeldust. Tõepoolest, teoreem 1.2.4 ütleb meile, et iga punktiga meetrilise ruumi $(M, d_M, 0_M)$, Banachi ruumi X ja ahendava ning tingimust $f(0_M) = 0$ rahuldava kujutuse $f : M \to X = U(X)$ korral $w(f) = L_f = ||\overline{f}|| = w(\overline{f})$, kus $\overline{f} : F(M) \to X$. Seega

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ban}}(F(M), X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Met_0}}(M, U(x))$$

ei ole mitte ainult hulkade isomorfism, vaid ka kaalutud hulkade isomorfism. Võttes lauses $\mathcal{C}$ rolli $\mathbf{Met_0}$, $\mathcal{D}$ rolli $\mathbf{Ban}$, F rolli Lipschitz-vaba funktori ja G rolli unustava funktori $U : \mathbf{Ban} \to \mathbf{Met_0}$, siis saamegi, et F on kaalutud kategooriate funktor, nagu me näites 2.2.3 juba nägime.

Samas on adjunktsiooni ühik $\delta : \mathrm{id}_{\mathbf{Met_0}} \Rightarrow U \circ F$ eriline - kõik selle komponendid δ_M on isomeetriad. Näites 2.2.3 saime seetõttu järeldada, et iga objektipaari $M, N \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Met_0})$ ja morfismi $f : M \to N$ korral $w(\delta_N \circ f) = L_{\delta_N \circ f} = L_f = w(f)$, s.t.

$$\delta_N \circ \_ : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Met_0}}(M, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Met_0}}(M, U(F(N)))$$

on kaale säilitav kaalutud hulkade morfism. Nägime eespool, et kategoorias $\mathbf{Met}$ (ja seega ka kategoorias $\mathbf{Met_0}$) langevad isomeetria ja isomeetrilise morfismi mõisted kokku. Seega Lipschitz-vaba funktor rahuldab ka lause 2.2.8 esimest lisaeeldust ja on kaale säilitav, nagu me näites 2.2.3 varasemalt nägime.

2.3 Korrutised ja kokorrutised kategoorias wSet

Esmalt uurime, millise kuju võtavad korrutised ja kokorrutised kategoorias **wSet**, sest saadud teadmisi saame hiljem kasutada selleks, et defineerida (ko)korrutised ja (ko)astmed suvalises kaalutud kategoorias.

Lemma 2.3.1. *Olgu I hulk ja olgu meil iga $i \in I$ korral antud objekt (A_i, w_{A_i}) kategoorias **wSet** ehk kaalutud hulk. Siis objektide süsteemil $\{(A_i, w_{A_i})\}_{i \in I}$ eksisteerib korrutis, milleks on paar $((\prod_{i \in I} A_i, w), (p_i)_{i \in I})$, kus $\prod_{i \in I} A_i$ on alushulkade A_i otsekorrutis kaaluga*

$$\begin{aligned} w : \prod_{i \in I} A_i &\to [0, 1] \\ (a_i)_{i \in I} &\mapsto \sup_{i \in I} w_{A_i}(a_i) \end{aligned}$$

ning p_i on hulkade kontekstist tuntud projektsioon $\prod_{i \in I} A_i \to A_i$ iga $i \in I$ korral.

Tõestus. Kontrollime esiteks, et $(\prod_{i\in I} A_i, w)$ on kaalutud hulk. Märkame, et kuna w_{A_i} võtab väärtusi $[0,1]$-s iga $i \in I$ korral, siis reaalarv 1 on hulga $\{i \in I \mid w_{A_i}(a_i)\}$ ülemine tõke. Et supreemum pole suurem ühestki ülemisest tõkkest, siis $w((a_i)_{i\in I}) \leq 1$ iga $(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$ korral. Seega w on tõesti kaal hulgal $\prod_{i\in I} A_i$. Teiseks veendume, et p_i on kaalutud hulkade morfism ehk morfism kategoorias **wSet** iga $i \in I$ korral. Fikseerime $i \in I$. Siis iga $(a_j)_{j\in I}$ korral kehtib võrratus

$$w_{A_i}(p_i((a_j)_{j\in I})) = w_{A_i}(a_i) \leq \sup_{j\in I} w_{A_j}(a_j) = w((a_j)_{j\in I}).$$

Seega paar $((\prod_{i\in I} A_i, w), (p_i)_{i\in I})$ koosneb kategooria **wSet** objektist ja morfismidest.

Järgmiseks vaatame diagrammi

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[dr, "f_i"] & \\ \prod_{i\in I} A_i \arrow[r, "p_i"'] & A_i, \end{tikzcd}$$

kus $(Q, w_Q) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{wSet})$ ja f_i on kaalutud hulkade morfism iga $i \in I$ korral. Defineerime morfismi

$$\begin{aligned} m : Q &\to \prod_{i\in I} A_i \\ q &\mapsto (f_i(q))_{i\in I}. \end{aligned}$$

Märkame, et

1. m on kaalutud hulkade morfism. Tõepoolest,

$$w(m(q)) = w((f_i(q))_{i\in I}) = \sup_{i\in I} w_{A_i}(f_i(q)) \leq w_Q(q).$$

   Siin viimane võrratus kehtib seetõttu, et f_i on kaalutud hulkade morfism iga $i \in I$ korral, järelikult $w_{A_i}(f_i(q)) \leq w_Q(q)$ iga $i \in I$ korral. Seega $w_Q(q)$ on ülemine tõke hulgale $\{i \in I \mid w_{A_i}(f_i(q))\}$. Et reaalarvude hulga supreemum ei ole ühestki ülemisest tõkkest suurem, siis saamegi $w(m(q)) \leq w_Q(q)$.

2. m paneb diagrammi

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[d, dashed, "m"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\ \prod_{i\in I} A_i \arrow[r, "p_{A_i}"'] & A_i \end{tikzcd}$$

   kommuteeruma ning on üheselt määratud. Tõepoolest, kuna $\prod_{i\in I} A_i$ on hulkade süsteemi $\{A_i\}_{i\in I}$ korrutis kategoorias **Set**, siis m on üheselt määratud hulkade morfism (ehk lihtsalt funktsioon), mis diagrammi kategoorias **Set** kommuteeruma paneb. Kuna just näitasime m olevat ka kaalutud hulkade morfismi, siis m on morfism kategoorias **wSet** ja paneb eelneva diagrammi ka selles kategoorias kommuteeruma. Kuna iga **wSet** morfism on ka **Set** morfism, siis m üheselt määratusest kategoorias **Set** järeldub ka tema üheselt määratus kategoorias **wSet**.

Nägime, et $((\prod_{i\in I} A_i, w), (p_i)_{i\in I})$ on tõepoolest objektide $\{(A_i, w_{A_i})\}_{i\in I}$ korrutis kategoorias **wSet**. □

Märkus 2.3.2. Märgime, et kui $I = \emptyset$, siis on eelnevas lemmas toodud objektide süsteem tühi ja selle süsteemi korrutise tingimust rahuldab selline $P \in \mathrm{Ob}(\mathbf{wSet})$, et iga teise objekti $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{wSet})$ korral leidub üheselt määratud morfism objektist A objekti P. Kategooriateoorias nimetatakse kategooria sellist objekti (kui ta antud kategoorias leidub) *lõppobjektiks* [2, lk 36]. Kaalutud hulkade kategoorias **wSet** on lõppobjektiks kaalutud hulk $(\mathbf{1}, w_{\mathbf{1}})$, kus $\mathbf{1}$ on üheelemendiline hulk $\{*\}$ ja kaal $w_{\mathbf{1}}$ on defineeritud funktsiooniga

$$\begin{aligned} w_{\mathbf{1}} : \mathbf{1} &\to [0,1] \\ * &\mapsto 0. \end{aligned}$$

Lemma 2.3.3. *Olgu I hulk ja olgu meil iga $i \in I$ korral objekt (A_i, w_{A_i}) kategoorias **wSet** ehk kaalutud hulk. Siis objektide süsteemil $\{(A_i, w_{A_i})\}_{i\in I}$ eksisteerib kokorrutis, milleks on paar $((\coprod_{i\in I} A_i, w), (u_i)_{i\in I})$, kus $\coprod_{i\in I} A_i$ on alushulkade A_i lõikumatu ühend kaaluga*

$$\begin{aligned} w : \coprod_{i\in I} A_i &\to [0,1] \\ x^{A_i} &\mapsto w_{A_i}(x), \end{aligned}$$

kus x^{A_i} on element x lõikumatu ühendi $\coprod_{i\in I} A_i$ komponendis A_i ning u_i on hulkade kontekstist tuntud sisestus $A_i \to \coprod_{i\in I} A_i$ iga $i \in I$ korral.

Tõestus. Esiteks märkame, et kuna w_{A_i} võtab väärtuseid intervallis $[0,1]$ iga $i \in I$ korral, siis ka w võtab väärtuseid $[0,1]$-s. Seega $\coprod_{i\in I} A_i$ on kaalutud hulk ehk **wSet** objekt. Teiseks märkame, et u_i on kaalutud hulkade morfism iga $i \in I$ korral. Tõepoolest, olgu $i \in I$ ja $x \in A_i$. Siis

$$w(u_i(x)) = w(x) = w_{A_i}(x)$$

ehk u_i on lausa kaale täpselt säilitav **wSet** morfism. Seega paar

$$\left(\left(\coprod_{i\in I} A_i, w\right), (u_i)_{i\in I}\right)$$

koosneb kategooria **wSet** objektist ja morfismidest.

Kontrollime järgmiseks kokorrutise universaalomaduse kehtivust. Vaatleme diagrammi

$$\begin{tikzcd}
Q & \\
\coprod_{i\in I} A_i & A_i \arrow[l, "u_i"] \arrow[ul, "f_i"']
\end{tikzcd}$$

kus $(Q, w_Q) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{wSet})$ ja f_i on kaalutud hulkade morfism iga $i \in I$ korral. Defineerime morfismi

$$m : \coprod_{i\in I} A_i \to Q$$
$$x \mapsto f_i(x),$$

kus $i \in I$ on selline (üheselt määratud) indeks, et $x \in A_i$. Kontrollime, et

1. m on kaalutud hulkade morfism. Tõepoolest,

   $$w_Q(m(x)) = w_Q(f_i(x)) \leq w_{A_i}(x),$$

   kus viimane võrratus kehtib, sest f_i on kaalutud hulkade morfism.

2. m paneb diagrammi

   $$\begin{tikzcd}
   Q & \\
   \coprod_{i\in I} A_i \arrow[u, dashed, "m"] & A_i \arrow[l, "u_i"] \arrow[ul, "f_i"']
   \end{tikzcd}$$

   kommuteeruma ning on üheselt määratud. Tõepoolest, kuna $\coprod_{i\in I} A_i$ on hulkade süsteemi $\{A_i\}_{i\in I}$ kokorrutis kategoorias **Set**, siis m on üheselt määratud hulkade morfism (ehk lihtsalt funktsioon), mis diagrammi kategoorias **Set** kommuteeruma paneb. Kuna just näitasime m olevat ka kaalutud hulkade morfismi, siis m on morfism kategoorias **wSet** ja paneb diagrammi ka selles kategoorias kommuteeruma. Kuna iga **wSet** morfism on ka **Set** morfism, siis m üheselt määratusest kategoorias **Set** järeldub ka tema üheselt määratus kategoorias **wSet**.

Nägime, et $((\coprod_{i\in I} A_i, w), (u_i)_{i\in I})$ on tõepoolest objektide $\{(A_i, w_{A_i})\}_{i\in I}$ kokorrutis kategoorias **wSet**. $\square$

Märkus 2.3.4. Märgime, et kui $I = \emptyset$, siis on eelnevas lemmas toodud objektide süsteem tühi ja selle süsteemi kokorrutise tingimust rahuldab selline $P \in \mathrm{Ob}(\mathbf{wSet})$, et iga teise objekti $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{wSet})$ korral leidub üheselt määratud morfism objektist P objekti A. Kategooriateoorias nimetatakse kategooria sellist objekti (kui ta antud kategoorias leidub) *algobjektiks* [2, lk 35]. Kaalutud hulkade kategoorias **wSet** on algobjektiks tühi hulk $\emptyset$ koos kaaluga $w_\emptyset : \emptyset \to [0,1]$, mis on üheselt määratud funktsioon tühjast hulgast hulka $[0,1]$.

2.4 Piire ja kopiire üldises kaalutud kategoorias

Siin alapeatükis on meie eesmärk anda (ko)korrutise ja (ko)astme definitsioon kaalutud kategooriate jaoks, mis oleks mingil mõistlikul viisil kaaludega kooskõlas. Selleks meenutame esiteks korrutise definitsiooni üldises kategoorias (vt definitsiooni 1.3.15) ja vaatame, kuidas suvalise kategooria $\mathcal{C}$ objektide süsteemi korrutist saab "tõlkida" kategooria **Set** objektide süsteemi korrutiseks.

Olgu $I \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Set})$, $\mathcal{C}$ kategooria ning $\{A_i\}_{i\in I}$ kategooria $\mathcal{C}$ objektide süsteem. Leidugu meil selle süsteemi jaoks objekt $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ nii, et leidub morfism $p_i \in \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(P, A_i)$ iga $i \in I$ korral. Olgu $Q \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ mingi teine objekt. Rakendame diagrammile

$$P \xrightarrow{p_i} A_i$$

iga $i \in I$ korral funktorit $\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(Q, \_)$ ja saame diagrammi

$$\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(Q, P) \xrightarrow{p_i \circ \_} \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(Q, A_i)$$

kategoorias **Set** iga $i \in I$ korral. Objektide süsteemil $\{\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(Q, A_i)\}_{i\in I}$ leidub kategoorias **Set** korrutis, selleks on hulkade otsekorrutis

$$\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(Q, A_i)$$

koos projektsioonidega

$$\begin{aligned} \mathrm{proj}_i : \prod_{j\in I} \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(Q, A_j) &\to \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(Q, A_i) \\ (Q \xrightarrow{f_j} A_j)_{j\in I} &\mapsto (Q \xrightarrow{f_i} A_i) \end{aligned}$$

iga $i \in I$ korral. Seega leidub üheselt määratud morfism (tähistame seda tähisega $(p_j \circ \_)_{j\in I}$), mis paneb kolmnurga

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(Q, P) \arrow[d, "(p_j\circ\_)_{j\in I}"'] \arrow[dr, "p_i\circ\_"] & \\ \prod_{j\in I} \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(Q, A_j) \arrow[r, "\mathrm{proj}_i"'] & \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(Q, A_i) \end{tikzcd}$$

kommuteeruma iga $i \in I$ korral. Märkuse 1.3.16 kohaselt

$$\begin{aligned}(p_j \circ \_)_{j\in I} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,P) &\to \prod_{j\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,A_j) \\ m &\mapsto (p_j \circ m)_{j\in I}.\end{aligned} \tag{8}$$

Märkame, et paar $(P,(p_i)_{i\in I})$ on objektide süsteemi $\{A_i\}_{i\in I}$ korrutis parajasti siis, kui kujutus $(p_j \circ \_)_{j\in I}$ on bijektsioon iga $Q \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ korral. Tõepoolest, see, et iga paari $(Q,(q_i)_{i\in I})$, kus $Q \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja $q_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,A_i)$ iga $i \in I$ korral leidub morfism m nii, et $q_i = p_i \circ m$ iga $i \in I$ korral, on samaväärne funktsiooni $(p_j \circ \_)_{j\in I}$ sürjektiivsusega. See, et selline m on üheselt määratud, on samaväärne $(p_j \circ \_)_{j\in I}$ injektiivsusega.

Et defineerida korrutisi kaalutud kategoorias $\mathcal{C}$, teeme eelneva arutelu läbi kasutades funktorit $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,\_)$ objektide $Q \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ jaoks. Sel juhul on tegu funktoriga

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,\_) : \mathcal{C} \to \mathbf{wSet},$$

sest kaalutud kategooria morfismihulgad on kaalutud hulgad. Olgu $\{A_i\}_{i\in I}$ nüüd kaalutud kategooria $\mathcal{C}$ objektide süsteem. Lemma 2.3.1 ütleb meile, et kategooria **wSet** objektide süsteemi $\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,A_i)\}_{i\in I}$ korrutis on kaalutud hulk

$$\left(\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,A_i), w\right),$$

kus

$$\begin{aligned}w : \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,A_i) &\to [0,1] \\ (Q \xrightarrow{f_i} A_i)_{i\in I} &\mapsto \sup_{i\in I} w_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,A_i)}(Q \xrightarrow{f_i} A_i).\end{aligned}$$

Seega on funktsioon $(p_j \circ \_)_{j\in I}$ (vt (8)) nüüd kujutus kaalutud hulkade vahel. Kuna tavalise kategooria puhul oli $(P,(p_i)_{i\in I})$ objektide süsteemi $\{A_i\}_{i\in I}$ korrutiseks olemine samaväärne sellega, et $(p_j \circ \_)_{j\in I}$ on bijektsioon (ehk hulkade isomorfism), siis kaalutud kategooria puhul võiks olla mõistlik nõuda, et $(p_j \circ \_)_{j\in I}$ oleks kaalutud hulkade isomorfism. Nii jõuamegi järgneva definitsioonini.

Olgu siin ja edaspidi $\mathcal{C}$ kaalutud kategooria.

Definitsioon 2.4.1. Olgu I hulk ja olgu $(A_i)_{i\in I}$ kaalutud kategooria $\mathcal{C}$ objektide süsteem. Paar $(P,(p_i)_{i\in I})$, kus $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja $p_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,A_i)$ iga $i \in I$ korral, on selle objektide süsteemi *kaalutud korrutis*, kui iga teise paari $(Q,(q_i)_{i\in I})$, kus $Q \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja $q_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,A_i)$, korral leidub morfism $m \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,P)$ nii, et

1. m on üheselt määratud morfism, mis paneb diagrammi

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[d, dashed, "m"'] \arrow[dr, "q_i"] & \\ P \arrow[r, "p_i"'] & A_i \end{tikzcd}$$

kommuteeruma iga $i \in I$ korral ja

2. $w(m) = \sup_{i \in I} w(q_i)$.

Märkus 2.4.2. Kaalutud korrutise definitsioonist on selge, et kui kaalutud kategooria objektide süsteemil eksisteerib kaalutud korrutis P, on P ka selle objektide süsteemi korrutis tavalises mõttes. Vastupidine ei pruugi aga kehtida. Vaatame näiteks kaalutud kategooriat

$$a \xleftarrow[u]{} c \xrightarrow[v]{} b,$$

kus $w(u) = 0 = w(v)$ ja kõigi ühikmorfismide kaal on 1. Objektide a ja b korrutis on objekt c, sest ta on ainus objekt, millest viivad morfismid nii objekti a kui ka objekti b. Seega ainus objekt, mida saab korrutise definitsioonis võtta Q rolli, ongi c ise. Morfismi m rollis, mis diagrammi

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl, "u"'] \arrow[d, dashed, "\mathrm{id}_c"] \arrow[dr, "v"] & \\ a & c \arrow[l, "u"] \arrow[r, "v"'] & b \end{tikzcd}$$

kommuteeruma paneb, on siis id_c. Samas

$$w(\mathrm{id}_c) = 1 \neq 0 = \sup\{w(u), w(v)\}.$$

Seega on c objektide a ja b korrutis, kuid mitte kaalutud korrutis.

Näide 2.4.3. Vaatleme meetriliste ruumide kategooriat **Met**. Olgu I lõplik hulk ja $\{M_i\}_{i \in I}$ kategooria **Met** objektide süsteem. Tähistame meetrilise ruumi M_i meetrikat tähisega d_{M_i}. Vaatleme hulka

$$P := \prod_{i \in I} M_i,$$

millel on defineeritud kaugus

$$d((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) = \sup_{i \in I} d_{M_i}(x_i, y_i). \tag{9}$$

Näitame, et (P,d) koos morfismidega

$$\begin{aligned} p_i : P &\to M_i \\ (x_j)_{j\in I} &\mapsto x_i \end{aligned}$$

iga $i \in I$ korral on objektide süsteemi $\{M_i\}_{i\in I}$ kaalutud korrutis.

Esiteks veendume, et (P,d) on meetriline ruum. Kontrollime läbi meetrika aksioomid.

1. Olgu $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I} \in P$. Siis

$$\begin{aligned} d((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) = 0 &\Leftrightarrow \sup_{i\in I} d_{M_i}(x_i, y_i) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\forall i \in I \ d_{M_i}(x_i, y_i) = 0) \\ &\Leftrightarrow (\forall i \in I \ x_i = y_i) \\ &\Leftrightarrow (x_i)_{i\in I} = (y_i)_{i\in I}, \end{aligned}$$

   nagu vaja.

2. Olgu $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I} \in P$. Siis

$$\begin{aligned} d((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) &= \sup_{i\in I} d_{M_i}(x_i, y_i) \\ &= \sup_{i\in I} d_{M_i}(y_i, x_i) \\ &= d((y_i)_{i\in I}, (x_i)_{i\in I}) \end{aligned}$$

   nagu vaja.

3. Olgu $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}, (z_i)_{i\in I} \in P$. Siis

$$\begin{aligned} d((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) &= \sup_{i\in I} d_{M_i}(x_i, y_i) \\ &\leq \sup_{i\in I} (d_{M_i}(x_i, z_i) + d_{M_i}(z_i, y_i)) \\ &= \sup_{i\in I} d_{M_i}(x_i, z_i) + \sup_{i\in I} d_{M_i}(z_i, y_i) \\ &= d((x_i)_{i\in I}, (z_i)_{i\in I}) + d((z_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}), \end{aligned}$$

   nagu vaja.

Teiseks märkame, et iga $i \in I$ korral p_i on Lipschitzi tingimust rahuldav kujutus, kusjuures $L_{p_i} \leq 1$. Tõesti, olgu $(x_j)_{j\in I}, (y_j)_{j\in I} \in P$ ja $i \in I$. Siis

$$d_{M_i}(p_i((x_j)_{j\in I}), p_i((y_j)_{j\in I})) = d_{M_i}(x_i, y_i) \leq \sup_{j\in I} d_{M_j}(x_j, y_j) = d((x_j)_{j\in I}, (y_j)_{j\in I})$$

ja seega p_i on kategooria **Met** morfism iga $i \in I$ korral.

Olgu nüüd $(Q, d_Q) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Met})$ ja $q_i : Q \to M_i$ kategooria **Met** morfism iga $i \in I$ korral. Defineerime

$$\begin{aligned} m : Q &\to P \\ y &\mapsto (q_i(y))_{i \in I}. \end{aligned}$$

Esiteks, m on Lipschitzi tingimust rahuldav kujutus. Tõepoolest, olgu $y, z \in Q$. Siis

$$\begin{aligned} d(m(y), m(z)) &= d((q_i(y))_{i \in I}, (q_i(z))_{i \in I}) = \sup_{i \in I} d_{M_i}(q_i(y), q_i(z)) \\ &\leq \sup_{i \in I} L_{q_i} \cdot d_Q(y, z) = \left(\sup_{i \in I} L_{q_i} \right) \cdot d_Q(y, z). \end{aligned}$$

Seega m on Lipschitzi tingimust rahuldav kujutus, kusjuures $L_m \leq \sup_{i \in I} L_{q_i}$. Et $L_{q_i} \leq 1$ iga $i \in I$ korral, siis saame ka, et

$$L_m \leq \sup_{i \in I} L_{q_i} \leq 1$$

ehk et m on kategooria **Met** morfism.

Näitame, et $q_i = p_i \circ m$ iga $i \in I$ korral. Tõepoolest, olgu $i \in I$ ja $y \in Q$. Siis

$$p_i(m(y)) = p_i((q_j(y))_{j \in I}) = q_i(y),$$

mis tähendab, et kujutused $q_i, p_i \circ m : Q \to M_i$ on võrdsed iga $i \in I$ korral, nagu vaja.

Oletame nüüd, et m' on mingi teine morfism hulgas $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Met}}(Q, P)$, mille korral $q_i = p_i \circ m'$ iga $i \in I$ korral. Siis iga $i \in I$ ja $y \in Q$ korral

$$p_i(m'(y)) = q_i(y).$$

Seega $m'(y) = (q_i(y))_{i \in I}$ hulgas $P = \prod_{i \in I} M_i$. Et $y \in Q$ oli suvaline, siis järelikult

$$m(y) = (q_i(y))_{i \in I} = m'(y)$$

iga $y \in Q$ korral ehk $m = m'$. Järelikult m on üheselt määratud morfism, mille puhul $q_i = p_i \circ m$ iga $i \in I$ korral.

Viimaks veendume, et $w(m) = L_m = \sup_{i \in I} L_{q_i} = \sup_{i \in I} w(q_i)$. Võrratus $L_m \leq \sup_{i \in I} L_{q_i}$ on meil juba tõestatud, seega jääb näidata võrratus $L_m \geq \sup_{i \in I} L_{q_i}$. Märkame, et kuna iga $i \in I$ korral $p_i \circ m = q_i$, siis $L_{p_i} \cdot L_m \geq L_{q_i}$. Samas kehtib ka $L_m \geq L_{p_i} \cdot L_m$, sest $L_{p_i} \leq 1$. Kokkuvõtteks $L_m \geq L_{q_i}$ iga $i \in I$ korral. Võttes võrratusest supreemumi üle kõigi $i \in I$, saame

$$L_m \geq \sup_{i \in I} L_{q_i},$$

nagu vaja.

Oleme näidanud, et meetriline ruum (P, d) koos morfismidega $(p_i)_{i\in I}$ on objektide süsteemi $\{M_i\}_{i\in I}$ kaalutud korrutis kategoorias **Met**. Märgime lõpetuseks veel, et hulga I lõplikkust nõudsime seetõttu, et meie defineeritud kaugus (9) oleks alati lõplik ja korrutise alushulk $\prod_{i\in I} M_i$ oleks kindlasti ka meetriline ruum.

Järgneva definitsioonini jõuame, kui rakendame sarnast arutelu, nagu enne definitsiooni 2.4.1, kuid kasutades funktorit

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, \_) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{wSet}$$

iga $Q \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ korral.

Definitsioon 2.4.4. Olgu I hulk ja olgu $(A_i)_{i\in I}$ kaalutud kategooria $\mathcal{C}$ objektide süsteem. Paar $(P, (u_i)_{i\in I})$, kus $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja $u_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A_i, P)$ iga $i \in I$ korral, on selle objektide süsteemi *kaalutud kokorrutis*, kui iga teise paari $(Q, (q_i)_{i\in I})$, kus $Q \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja $q_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A_i, Q)$, korral leidub morfism $m \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, Q)$ nii, et

1. m on üheselt määratud morfism, mis paneb diagrammi

$$\begin{tikzcd} Q & \\ P \arrow[u, dashed, "m"] & A_i \arrow[l, "u_i"] \arrow[ul, "q_i"'] \end{tikzcd}$$

   kommuteeruma iga $i \in I$ korral ja

2. $w(m) = \sup_{i\in I}\{w(q_i)\}$.

Märkus 2.4.5. Näeme definitsioonist, et sarnaselt kaalutud korrutistega on ka kaalutud kokorrutised alati kokorrutised ka tavalises mõttes. Vastupidine ei pruugi jällegi kehtida. Vaatame näiteks kaalutud kategooriat

$$a \xrightarrow{u} c \xleftarrow{v} b,$$

kus $w(u) = 0 = w(v)$ ja kõigi ühikmorfismide kaal on 1. Objektide a ja b kokorrutis on objekt c, sest ta on ainus objekt, milleni viivad morfismid nii objektist a kui ka objektist b. Seega ainus objekt, mida saab kokorrutise definitsioonis võtta Q rolli, ongi c ise. Morfismi m rollis, mis diagrammi

$$\begin{tikzcd} & c & \\ a \arrow[ur, "u"] \arrow[r, "u"'] & c \arrow[u, dashed, "\mathrm{id}_c"'] & b \arrow[ul, "v"'] \arrow[l, "v"] \end{tikzcd}$$

kommuteeruma paneb, on siis id_c. Samas

$$w(\mathrm{id}_c) = 1 \neq 0 = \sup\{w(u), w(v)\}.$$

Seega on c objektide a ja b kokorrutis, kuid mitte kaalutud kokorrutis.

Näide 2.4.6. Vaatleme punktiga meetriliste ruumide kategooriat $\mathbf{Met_0}$. Olgu $(M, d_M, 0_M), (N, d_N, 0_N) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Met_0})$ punktiga meetrilised ruumid. Defineerime hulgal $M \amalg N$ ekvivalentsiseose $\sim$ järgmiselt (samastame vaid punktid 0_M ja 0_N):

$$x \sim y \Leftrightarrow (x = y \ \vee \ x, y \in \{0_M, 0_N\}).$$

Vaatleme hulka

$$P := (M \amalg N)_{/\sim}$$

koos kaugusega

$$d([x],[y]) = \begin{cases} d_M(x,y), & \text{kui } x, y \in M; \\ d_N(x,y), & \text{kui } x, y \in N; \\ d_M(x, 0_M) + d_N(0_N, y), & \text{kui } x \in M, y \in N; \\ d_N(x, 0_N) + d_M(0_M, y), & \text{kui } x \in N, y \in M. \end{cases}$$

Defineerime kujutuse

$$\begin{aligned} u_M : M &\to P \\ m &\mapsto [m] \end{aligned}$$

ja kujutuse

$$\begin{aligned} u_N : N &\to P \\ n &\mapsto [n]. \end{aligned}$$

Objekt $(P, 0_P, d)$ koos morfismidega u_M, u_N on objektide $(M, d_M, 0_M)$ ja $(N, d_N, 0_N)$ kaalutud kokorrutis kategoorias $\mathbf{Met_0}$. Kuna selle väite detailne tõestus on pikk, siis leiab lugeja selle lisast A.

Järgnevas olgu $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{wSet})$. Alampeatükis 1.3 defineerisime kategooria objekti astendamise ja koastendamise hulgaga X. Nüüd defineerime kaalutud kategooria objekti astendamise ja koastendamise kaalutud hulgaga (X, w). Märgime, et alampeatükis 1.3 toodud definitsiooni kohaselt on $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja morfismide pere $(p_x : P \to A)_{x \in X}$ puhul tingimus $P = A^X$ (ehk P on objekti A aste (tavalise) hulgaga X) samaväärne sellega, et kategooria **Set** morfism

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, P) &\to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, A)) \\ m &\mapsto (X \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, A),\ x \mapsto p_x \circ m) \end{aligned}$$

on hulkade isomorfism (ehk bijektsioon) iga $Q \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ korral. Seega kaalutud kategoorias oleks loomulik nõuda, et kategooria **wSet** morfism

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, P) &\to \mathrm{Hom}_{\mathbf{wSet}}(X, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, A)) \\ m &\mapsto (X \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, A),\ x \mapsto p_x \circ m) \end{aligned}$$

on kaalutud hulkade isomorfism iga $Q \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ korral. See idee annab meile järgmise definitsiooni.

Definitsioon 2.4.7. Objekti A *kaalutud astmeks kaalutud hulgaga* (X, w) nimetame paari $(P, (p_x)_{x \in X})$, kus $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja iga $x \in X$ korral $p_x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, A)$ ning $w(p_x) \leq w(x)$, mis rahuldab järgnevat omadust: kui $(Q, (q_x)_{x \in X})$ on mingi teine paar, kus $Q \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja iga $x \in X$ korral $q_x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, A)$ ning $w(q_x) \leq w(x)$, siis leidub morfism $m \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, P)$ nii, et

1. m on üheselt määratud morfism, mis rahuldab iga $x \in X$ korral tingimust $q_x = p_x \circ m$ ehk paneb järgneva diagrammi

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[d, dashed, "m"'] \arrow[dr, "q_x"] & \\ P \arrow[r, "p_x"'] & A \end{tikzcd} \tag{10}$$

   kommuteeruma iga $x \in X$ korral;

2. morfismi m kaal on määratud võrdusega

$$w(m) = \begin{cases} 0, & \text{kui } \forall x \in X\ w(x) = 0; \\ \sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{w(q_x)}{w(x)} & \text{muidu.} \end{cases}$$

Objekti P tähistame sel juhul A^X, samamoodi, nagu kaaludeta juhul.

Märkus 2.4.8. Definitsioonist näeme, et kui (X, w) on selline kaalutud hulk, et $w(x) = 1$ iga $x \in X$ korral, siis objekti A kaalutud aste kaalutud hulgaga (X, w) on lihtsalt objektide süsteemi $\{A\}_{x \in X}$ kaalutud korrutis kategoorias $\mathcal{C}$.

Näide 2.4.9. Kategoorias **Ban** on Banachi ruumi B kaalutud astmeks kaalutud hulgaga (X, w) ruum

$$P := \left\{ f : X \to B \mid \sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{||f(x)||_B}{w(x)} < \infty \wedge (\forall x \in X \ w(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0_B) \right\}$$

koos morfismidega

$$\begin{aligned} p_x : P \to B \\ (f : X \to B) \mapsto f(x) \end{aligned}$$

iga $x \in X$ korral. Kuna selle väite detailne tõestus on pikk, siis leiab lugeja selle lisast B.

Järgneva definitsioonini jõuame, kui rakendame sarnast arutelu, nagu enne definitsiooni 2.4.7, kuid kasutades funktorit

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, \_) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{wSet}$$

iga $Q \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ korral.

Definitsioon 2.4.10. Objekti A *kaalutud koastmeks kaalutud hulgaga* (X, w) nimetame paari $(P, (u_x)_{x \in X})$, kus $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja iga $x \in X$ korral $u_x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, P)$ ning $w(u_x) \leq w(x)$, mis rahuldab järgnevat omadust: kui $(Q, (q_x)_{x \in X})$ on mingi teine paar, kus $Q \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja iga $x \in X$ korral $q_x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Q)$ ning $w(q_x) \leq w(x)$, siis leidub morfism $m \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, Q)$ nii, et

1. m on üheselt määratud morfism, mis rahuldab iga $x \in X$ korral tingimust $q_x = m \circ u_x$ ehk paneb järgneva diagrammi

$$\begin{tikzcd} Q & \\ P \arrow[u, dashed, "m"] & A \arrow[l, "u_x"] \arrow[ul, "q_x"'] \end{tikzcd}$$

   kommuteeruma iga $x \in X$ korral;

2. morfismi m kaal on määratud võrdusega

$$w(m) = \begin{cases} 0, & \text{kui } \forall x \in X \ w(x) = 0; \\ \sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{w(q_x)}{w(x)} & \text{muidu.} \end{cases}$$

Objekti P tähistatame sel juhul $X \cdot A$, samamoodi, nagu kaaludeta juhul.

Märkus 2.4.11. Definitsioonist näeme, et kui (X, w) on selline kaalutud hulk, et $w(x) = 1$ iga $x \in X$ korral, siis objekti A kaalutud koaste kaalutud hulgaga (X, w) on lihtsalt objektide süsteemi $\{A\}_{x\in X}$ kaalutud kokorrutis kategoorias $\mathcal{C}$.

Näide 2.4.12. Leiame kategoorias **Ban** Banachi ruumi B kaalutud koastme kaalutud hulgaga (X, w). (Näitlikuse mõttes kirjeldame siinkohal ära kogu protseduuri koos detailse tõestusega, et meie tulemuseks saadav konstruktsioon rahuldab kaalutud hulgaga koastme definitsiooni.) Defineerime esiteks iga $x \in X$ korral hulga

$$\{x\} \cdot B := \{w(x) \cdot b \mid b \in B\}.$$

See hulk on esiteks Banachi ruumi B vektoralamruum, sest hulkadena $\{x\} \cdot B \subseteq B$ ja iga $b_1, b_2 \in B$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$ korral

$$\begin{aligned} w(x) \cdot b_1 + w(x) \cdot b_2 &= w(x) \cdot (b_1 + b_2) \\ \lambda \cdot w(x) \cdot b_1 &= w(x) \cdot (\lambda \cdot b_1). \end{aligned}$$

Ruumi B vektoralamruumina on $\{x\} \cdot B$ ka normeeritud ruum. Näitame, et $\{x\} \cdot B$ on Banachi ruum, s.t. täielik meetriline ruum. Selleks piisab näidata, et ta on B kinnine alamruum. Kui $w(x) = 0$, siis $\{x\} \cdot B = \{0_B\}$ on triviaalselt kinnine. Kui $w(x) \neq 0$, siis $B \subseteq \{x\} \cdot B$, sest siis iga $b \in B$ korral

$$b = w(x) \cdot \frac{1}{w(x)} \cdot b = w(x) \cdot \left(\frac{1}{w(x)} \cdot b\right)$$

ja $\frac{1}{w(x)} \cdot b \in B$. Et juba kehtib vastupidine sisaldus $\{x\} \cdot B \subseteq B$, siis $\{x\} \cdot B = B$ ja seega $\{x\} \cdot B$ on kinnine. Kokkuvõtteks on $\{x\} \cdot B$ Banachi ruum iga $x \in X$ korral.

Vaatleme nüüd **Ban** objektide süsteemi $\{\{x\} \cdot B\}_{x\in X}$ kokorrutist, milleks on ruum

$$P := \left\{ (w(x) \cdot b_x)_{x\in X} \mid \sum_{x\in X} ||w(x) \cdot b_x||_B < \infty \right\} \subseteq \prod_{x\in X} \{x\} \cdot B$$

normiga

$$||(w(x) \cdot b_x)_{x\in X}||_P := \sum_{x\in X} ||w(x) \cdot b_x||_B.$$

Tõestuse, et Banachi ruumide kokorrutis on sellisel kujul, võib leida näiteks magistritööst [4]. Ruum P on vektorruum punktiviisiliste tehete suhtes. Defineerime iga $x \in X$ korral kujutuse

$$\begin{aligned} u_x : B &\to P \\ b &\mapsto (w(x) \cdot b \cdot \delta_x^y)_{y\in X}, \end{aligned}$$

kus δ_x^y on Kroneckeri delta. Et

$$\sum_{y\in X} ||w(x)\cdot b\cdot \delta_x^y||_B = ||w(x)\cdot b\cdot \delta_x^x||_B = ||w(x)\cdot b||_B = w(x)\cdot ||b||_B < \infty,$$

siis u_x tõepoolest võtab väärtusi P-s. Samuti on u_x lineaarne, sest iga $b_1, b_2 \in B$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$ korral

$$\begin{aligned} u_x(b_1+\lambda b_2) &= (w(x)\cdot(b_1+\lambda b_2)\cdot\delta_x^y)_{y\in X} \\ &= (w(x)\cdot\delta_x^y\cdot b_1 + \lambda\cdot w(x)\cdot\delta_x^y\cdot b_2)_{y\in X} \\ &= (w(x)\cdot b_1\cdot\delta_x^y)_{y\in X} + \lambda\cdot(w(x)\cdot b_2\cdot\delta_x^y)_{y\in X} \\ &= u_x(b_1)+\lambda\cdot u_x(b_2). \end{aligned}$$

Eespool nägime juba, et

$$||u_x(b)||_P = \sum_{y\in X} ||w(x)\cdot b\cdot\delta_x^y||_B = w(x)\cdot||b||_B,$$

seega $||u_x|| = w(x) \leq 1$. See tähendab nii seda, et iga $x \in X$ korral u_x on kategooria **Ban** morfism (sest $||u_x|| \leq 1$) kui ka seda, et iga $x \in X$ korral $||u_x|| \leq w(x)$ (nagu nõutud kaalutud koastme definitsioonis).

Näitame, et $(P, (u_x)_{x\in X})$ rahuldab kaalutud koastme definitsiooni, s.t. et $P = X\cdot B$. Olgu esiteks $Q \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Ban})$ ja olgu $(q_x)_{x\in X}$ selline hulga $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ban}}(B, Q)$ elementide pere, et $||q_x|| \leq w(x)$ iga $x \in X$ korral.

Defineerime kujutuse

$$\begin{aligned} m: P &\to Q \\ (w(x)\cdot b_x)_{x\in X} &\mapsto \sum_{x\in X} q_x(b_x). \end{aligned}$$

Tõestuse, et selline m on tõepoolest korrektselt defineeritud (st et summa

$$\sum_{x\in X} q_x(b_x)$$

eksisteerib iga $(w(x)\cdot b_x)_{x\in X} \in P$ korral), leiab magistritööst [4]. Teiseks, olgu $(w(x)\cdot b_x)_{x\in X}$ ja $(w(x)\cdot c_x)$ sellised, et $(w(x)\cdot b_x)_{x\in X} = (w(x)\cdot c_x)_{x\in X}$ Siis kõigi $x \in X$ puhul, mille korral $w(x) \neq 0$, kehtib $b_x = c_x$, sest $w(x)$ saab võrdusest $w(x)\cdot b_x = w(x)\cdot c_x$ taandada. Sel juhul ka $q_x(b_x) = q_x(c_x)$. Seevastu kõigi $x \in X$ puhul, mille korral $w(x) = 0$, kehtib $||q_x|| = 0$, millest järeldub, et $||q_x(b)||_Q = 0$ iga $b \in B$ korral, millest omakorda järeldub, et $q_x(b) = 0_Q$ iga $b \in B$ korral. Ka siis $q_x(b_x) = q_x(c_x)$. Kokkuvõtteks m on korrektselt defineeritud.

Näitame järgmiseks, et m on **Ban** morfism. Esiteks, m on lineaarne. Tõepoolest, olgu $(w(x) \cdot b_x)_{x \in X}, (w(x) \cdot c_x)_{x \in X} \in P$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$. Siis

$$\begin{aligned}
m((w(x) \cdot b_x)_{x \in X} + \lambda \cdot (w(x) \cdot c_x)_{x \in X}) &= m((w(x) \cdot (b_x + \lambda c_x))_{x \in X}) \\
&= \sum_{x \in X} q_x(b_x + \lambda c_x) \\
&= \sum_{x \in X} (q_x(b_x) + \lambda q_x(c_x)) \\
&= \sum_{x \in X} q_x(b_x) + \lambda \cdot \sum_{x \in X} q_x(c_x) \\
&= m((w(x) \cdot b_x)_{x \in X}) \\
&+ \lambda \cdot m((w(x) \cdot c_x)_{x \in X}).
\end{aligned}$$

Teiseks, m on tõkestatud ja $||m|| \leq 1$. Tõesti,

$$\begin{aligned}
||m((w(x) \cdot b_x)_{x \in X})||_Q &= \left|\left| \sum_{x \in X} q_x(b_x) \right|\right|_Q \leq \sum_{x \in X} ||q_x(b_x)||_Q \\
&\leq \sum_{x \in X} ||q_x|| \cdot ||b_x||_B \\
&= \sum_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} ||q_x|| \cdot ||b_x||_B + \sum_{\substack{x \in X \\ w(x) = 0}} ||q_x|| \cdot ||b_x||_B \\
&= \sum_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{||q_x||}{w(x)} \cdot w(x) \cdot ||b_x||_B + \sum_{\substack{x \in X \\ w(x) = 0}} 0 \cdot ||b_x||_B \\
&\leq \sum_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{||q_x||}{w(x)} \cdot w(x) \cdot ||b_x||_B + 0 \\
&= \sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{||q_x||}{w(x)} \cdot \sum_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} w(x) \cdot ||b_x||_B \\
&= \sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{||q_x||}{w(x)} \cdot \sum_{x \in X} w(x) \cdot ||b_x||_B \\
&= \sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{||q_x||}{w(x)} \cdot ||(w(x) \cdot b_x)_{x \in X}||_P.
\end{aligned}$$

(Märgime, et kui iga $x \in X$ korral $w(x) = 0$, siis kolmandal real vasakpoolset summat ei eksisteeri ja $||m((w(x) \cdot b_x)_{x \in X})||_Q = 0$ iga $(w(x) \cdot b_x)_{x \in X}$ korral, kust

$||m|| = 0$.) Seega

$$||m|| \leq \sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{||q_x||}{w(x)}$$

(kui leidub $x \in X$, mille puhul $w(x) \neq 0$). Et iga $x \in X$ korral $||q_x|| \leq w(x)$, siis $\frac{||q_x||}{w(x)} \leq 1$ iga $x \in X$, $w(x) \neq 0$ korral ja kokkuvõtteks

$$||m|| \leq \sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{||q_x||}{w(x)} \leq 1,$$

nagu vaja.

Olles näidanud, et m tõepoolest on **Ban** morfism, näitame järgmiseks, et m paneb diagrammi

$$\begin{tikzcd} Q & \\ P \arrow[u, dashed, "m"] & A \arrow[l, "u_x"] \arrow[ul, "q_x"'] \end{tikzcd}$$

kommuteeruma iga $x \in X$ korral. Olgu $x \in X$ ja $b \in B$. Siis

$$m(u_x(b)) = m((w(x) \cdot b \cdot \delta_x^y)_{y \in X}) = \sum_{y \in X} q_x(\delta_x^y \cdot b) = q_x(\delta_x^x \cdot b) = q_x(b).$$

Et $b \in B$ ja $x \in X$ olid suvalised, siis tõesti $m \circ u_x = q_x$ ehk ülalolev diagramm kommuteerub iga $x \in X$ korral.

Vaja on ka näidata, et m on üheselt määratud morfism, mille puhul $m \circ u_x = q_x$ iga $x \in X$ korral. Eeldame, et $m' : P \to Q$ on mingi teine **Ban** morfism, mille puhul $m' \circ u_x = q_x$ iga $x \in X$ korral. Seega iga $b \in B$ korral

$$m'(u_x(b)) = m'((w(x) \cdot b \cdot \delta_x^y)_{y \in X}) = q_x(b).$$

Et iga $(w(x) \cdot b_x)_{x \in X}$ ruumis P saab kirjutada kujul

$$(w(x) \cdot b_x)_{x \in X} = \sum_{x \in X} (w(x) \cdot b_x \cdot \delta_x^y)_{y \in X}$$

ja m' on lineaarkujutus, siis

$$\begin{aligned} m'((w(x) \cdot b_x)_{x \in X}) &= m' \left(\sum_{x \in X} (w(x) \cdot b_x \cdot \delta_x^y)_{y \in X} \right) \\ &= \sum_{x \in X} m'((w(x) \cdot b_x \cdot \delta_x^y)_{y \in X}) \end{aligned}$$

$$= \sum_{x \in X} q_x(b_x)$$
$$= m((w(x) \cdot b_x)_{x \in X})$$

ehk $m' = m$, nagu vaja.

Viimaks arvutame m normi. Eespool nägime, et kui iga $x \in X$ korral $w(x) = 0$, siis $||m|| = 0$. Eeldame, et leidub $x \in X$, mille puhul $w(x) \neq 0$. Näitame, et siis

$$||m|| = \sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{||q_x||}{w(x)}.$$

Et oleme ühtepidi võrratuse juba tõestanud, siis jääb näidata, et

$$||m|| \geq \sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{||q_x||}{w(x)}.$$

Et iga $x \in X$ korral $q_x = m \circ u_x$, siis

$$||q_x|| = ||m \circ u_x|| \leq ||m|| \cdot ||u_x|| = ||m|| \cdot w(x)$$

ja

$$\frac{||q_x||}{w(x)} \leq ||m||$$

iga $x \in X$ korral, mille puhul $w(x) \neq 0$. Võttes võrratusest supreemumi üle kõigi $x \in X$, mille puhul $w(x) \neq 0$, saame

$$\sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{||q_x||}{w(x)} \leq ||m||,$$

nagu vaja.

Oleme näidanud, et $(P, (u_x)_{x \in X})$ on Banachi ruumi B kaalutud koaste kaalutud hulgaga (X, w).

Viimaste tulemustena tõestame tähelepanekud, et kaalutud adjunktsioonid on teatud viisil kooskõlas kaalutud korrutiste ja kaalutud astmetega.

Lause 2.4.13. *Olgu $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ kaalutud kategooriad ning olgu antud*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D} \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

kaalutud adjunktsioon $\langle F, G, \varphi \rangle$ kaalutud kategooriate $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ vahel. Siis parempoolne kaasfunktor G säilitab kõiki kaalutud korrutisi, mis kategoorias $\mathcal{D}$ leiduvad.

Tõestus. Olgu I hulk ja olgu $\{D_i\}_{i\in I}$ kategooria $\mathcal{D}$ objektide süsteem. Leidugu sellel süsteemil kaalutud korrutis $(P,(p_i)_{i\in I})$. Siis on $(P,(p_i)_{i\in I})$ ka objektide süsteemi $\{D_i\}_{i\in I}$ korrutis tavalises mõttes. Kategooriateooriast teame, et parempoolsed kaasfunktorid säilitavad (tavalisi) korrutisi ja ka teisi (tavalisi) piire (vt näiteks Teoreem 4.5.2 õpikust [5]). Seega $(G(P),(G(p_i))_{i\in I})$ on objektide süsteemi $\{G(D_i)\}_{i\in I}$ (tavaline) korrutis kategoorias $\mathcal{C}$. Näitame, et ta on ka süsteemi $\{G(D_i)\}_{i\in I}$ kaalutud korrutis.

Olgu $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja olgu iga $i \in I$ korral antud $c_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D_i))$. Et paar $(G(P),(G(p_i))_{i\in I})$ on (tavaline) korrutis, siis leidub üheselt määratud morfism m nii, et diagramm

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, dashed, "m"'] \arrow[dr, "c_i"] & \\ G(P) \arrow[r, "G(p_i)"'] & G(D_i) \end{tikzcd}$$

kommuteerub. Näitame, et m kaal on kooskõlas kaalutud korrutise definitsiooniga. Teame, et

$$\varphi_{C,P} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), P) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(P))$$

on kaalutud hulkade isomorfism, sest $\langle F, G, \varphi\rangle$ on kaalutud adjunktsioon. Seega

$$w(m) = w(\varphi^{-1}_{C,P}(m)) = w(\varepsilon_P \circ F(m))$$

(siin ε on adjunktsiooni $\langle F, G, \varphi\rangle$ koühik). Vaatleme diagrammi

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[d, "F(m)"'] \arrow[dr, "F(c_i)"] & \\ F(G(P)) \arrow[r, "F(G(p_i))"'] \arrow[d, "\varepsilon_P"'] & F(G(D_i)) \arrow[d, "\varepsilon_{D_i}"] \\ P \arrow[r, "p_i"'] & D_i \end{tikzcd}$$

Alumine ruut selles diagrammis kommuteerub, sest $\varepsilon : F \circ G \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ on loomulik teisendus. Ülemine kolmnurk kommuteerub aga seetõttu, et funktorit F on rakendatud vastavale kommutatiivsele diagrammile kategoorias $\mathcal{C}$. Seega kommuteerub ka välimine kolmnurk. Et $(P,(p_i)_{i\in I})$ on süsteemi $\{D_i\}_{i\in I}$ kaalutud korrutis, siis kujutus

$$\begin{aligned}(p_i \circ \_)_{i\in I} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), P) &\to \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D_i)\\ f &\mapsto (p_i \circ f)_{i\in I}.\end{aligned}$$

on kaalutud hulkade isomorfism. Seega leidub üheselt määratud morfism objektist $F(C)$ objekti P, mis ülaloleva diagrammi kommuteeruma paneb, kusjuures selle morfismi kaal on $\sup_{i\in I} w(\varepsilon_{D_i} \circ F(c_i))$. Kuna nägime, et $\varepsilon_P \circ F(M)$ on selline morfism, mis diagrammi kommuteeruma paneb, siis saame järeldada, et

$$w(\varepsilon_P \circ F(m)) = \sup_{i\in I} w(\varepsilon_{D_i} \circ F(c_i)) = \sup_{i\in I} w(\varphi^{-1}_{C,D_i}(c_i)) = \sup_{i\in I} w(c_i).$$

Viimane võrdus kehtib, sest φ_{C,D_i} on kaalutud hulkade isomorfism (mis omakorda kehtib, sest $\langle F, G\varphi\rangle$ on kaalutud adjunktsioon).

Kokkuvõtteks

$$w(m) = w(\varepsilon_P \circ F(m)) = \sup_{i\in I} w(c_i)$$

ja seega $(G(P), (G(p_i))_{i\in I})$ rahuldab süsteemi $\{G(D_i)\}_{i\in I}$ kaalutud korrutise definitsiooni. Et süsteem $\{D_i\}_{i\in I}$ kategoorias $\mathcal{D}$ oli vabalt valitud, siis säilitab G kõiki kaalutud korrutisi, mis kategoorias $\mathcal{D}$ leiduvad. □

Lause 2.4.14. *Olgu $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ kaalutud kategooriad ning olgu antud*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D} \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

kaalutud adjunktsioon $\langle F, G, \varphi\rangle$ kaalutud kategooriate $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ vahel. Siis parempoolne kaasfunktor G säilitab kõiki kaalutud astmeid kaalutud hulkadega, mis kategoorias $\mathcal{D}$ leiduvad.

Tõestus. Olgu (X, w) kaalutud hulk, olgu $D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ ning leidugu kategoorias $\mathcal{D}$ kaalutud aste D^X (milleks on paar $(P, (p_x)_{x\in X})$, kus $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ on $\mathcal{D}$ objekt ja $p_x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(P, D)$ on iga $x \in X$ korral selline morfism, et $w(p_x) \le w(x)$).

Olgu C objekt kategoorias $\mathcal{C}$ ning olgu $c_x : C \to G(D)$ selline morfism iga $x \in X$ korral, et $w(c_x) \le w(x)$. Vaatleme kategoorias $\mathcal{C}$ diagrammi

$$\begin{tikzcd} C \arrow[dr, "c_x"] & \\ G(P) \arrow[r, "G(p_x)"'] & G(D) \end{tikzcd}$$

Märgime, et iga $x \in X$ korral $w(G(p_x)) \le w(p_x)$ vastavalt lausele 2.2.8, sest

$\langle F, G, \varphi \rangle$ on kaalutud adjunktsioon. Kuna $(P, (p_x)_{x \in X})$ on aste D^X kategoorias $\mathcal{D}$, siis kehtib samuti $w(p_x) \leq w(x)$ iga $x \in X$ korral. Kokkuvõtteks $w(G(p_x)) \leq w(x)$ iga $x \in X$ korral ning paar $(G(P), (G(p_x))_{x \in X})$ sobib seega kandidaadiks $G(D)$ kaalutud astmele kaalutud hulgaga X.

Vaatame ka kategoorias $\mathcal{D}$ eelmisele diagrammile vastavat diagrammi

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[dr, "\varphi^{-1}_{C,D}(c_x)"] & \\ P \arrow[r, "p_x"'] & D \end{tikzcd}$$

Et P on D kaalutud aste kaalutud hulgaga X kategoorias $\mathcal{D}$, siis

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), P) &\to \mathrm{Hom}_{\mathbf{wSet}}(X, \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D)) \\ m &\mapsto (X \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D),\ x \mapsto p_x \circ m) \end{aligned}$$

on kaalutud hulkade isomorfism. Seega leidub üheselt määratud morfism $m : F(C) \to P$ nii, et m paneb diagrammi

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[d, dashed, "m"'] \arrow[dr, "\varphi^{-1}_{C,D}(c_x)"] & \\ P \arrow[r, "p_x"'] & D \end{tikzcd}$$

iga $x \in X$ puhul kommuteeruma ja

$$w(m) = \begin{cases} 0, & \text{kui } \forall x \in X \ w(x) = 0; \\ \sup\limits_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \dfrac{w(\varphi^{-1}_{C,D}(c_x))}{w(x)} & \text{muidu.} \end{cases} \tag{11}$$

Tähistame $l := \varphi_{C,P}(m)$.

Näitame esmalt, et l paneb diagrammi

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "l"'] \arrow[dr, "c_x"] & \\ G(P) \arrow[r, "G(p_x)"'] & G(D) \end{tikzcd}$$

kommuteeruma iga $x \in X$ korral. Olgu $x \in X$. Kuna $\varphi_{C,\_}$ on loomulik teisendus, mille iga komponent on kaalutud hulkade isomorfism, saame iga $X \in X$ korral kommuteeruva diagrammi

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C),P) \arrow[r, shift left, "\varphi_{C,P}"] \arrow[d, "p_x\circ _"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,G(P)) \arrow[l, shift left, "\varphi^{-1}_{C,P}"] \arrow[d, "G(p_x)\circ _"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C),D) \arrow[r, shift left, "\varphi_{C,D}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,G(D)) \arrow[l, shift left, "\varphi^{-1}_{C,D}"]
\end{tikzcd}$$

kategoorias **wSet**. Seega

$$G(p_x)\circ l = G(p_x)\circ \varphi_{C,P}(m) = \varphi_{C,D}(p_x\circ m) = \varphi_{C,D}(\varphi^{-1}_{C,D}(c_x)) = c_x$$

iga $x\in X$ korral, nagu vaja. Märgime, et siin eelviimane võrdus kehtib m definitsiooni tõttu.

Näitame järgmiseks, et l on üheselt määratud. Oletame, et ka $l' : C \to G(P)$ on selline morfism, et $G(p_x)\circ l' = c_x$ iga $x\in X$ korral. Siis ülaltoodud morfismihulkade diagrammi kommuteeruvuse tõttu

$$\varphi_{C,D}(p_x\circ \varphi^{-1}_{C,P}(l')) = G(p_x)\circ l'$$

iga $x\in X$ korral. Samas $G(p_x)\circ l' = c_x = \varphi_{C,D}(\varphi^{-1}_{C,D}(c_x))$ iga $x\in X$ korral. Kujutuse $\varphi_{C,D}$ bijektiivsuse tõttu siis

$$p_x\circ \varphi^{-1}_{C,P}(l') = \varphi^{-1}_{C,D}(c_x)$$

iga $x\in X$ korral. Samas on m selline üheselt määratud morfism, et

$$p_x\circ m = \varphi^{-1}_{C,D}(c_x)$$

iga $x\in X$ korral. Järelikult $m=\varphi^{-1}_{C,P}(l')$. Rakendades võrdusele $\varphi_{C,P}$, saame, et $\varphi_{C,P}(m)=l'$. Seega

$$l = \varphi_{C,P}(m) = l'$$

ja l on tõepoolest üheselt määratud morfism, mille puhul

$$G(p_x)\circ l = c_x$$

iga $x\in X$ korral.

Viimaks näitame, et l kaal on kooskõlas kaalutud astme definitsiooniga. Et $\varphi_{C,P}$ on kaalutud hulkade isomorfism, siis $w(l)=w(m)$. Samas teame m kaalu juba varasemast (vt (11)). Seega

$$
\begin{aligned}
w(l) &= w(m)\\
&= \begin{cases} 0, & \text{kui } \forall x \in X \ w(x) = 0;\\ \sup\limits_{\substack{x\in X\\ w(x)\neq 0}} \frac{w(\varphi_{C,D}^{-1}(c_x))}{w(x)} & \text{muidu} \end{cases}\\
&= \begin{cases} 0, & \text{kui } \forall x \in X \ w(x) = 0;\\ \sup\limits_{\substack{x\in X\\ w(x)\neq 0}} \frac{w(c_x)}{w(x)} & \text{muidu,} \end{cases}
\end{aligned}
$$

nagu vaja. Märgime, et viimane võrdus kehtib jällegi seetõttu, et $\varphi_{C,D}$ on kaalutud hulkade isomorfism.

Kokkuvõttes oleme näidanud, et $(G(P), (G(p_x))_{x\in X})$ on objekti $G(D)$ kaalutud aste kaalutud hulgaga X. Et objekt $D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ ja kaalutud hulk (X, w) olid vabalt valitud, siis säilitab G kõiki kaalutud astmeid kaalutud hulkadega, mis kategoorias $\mathcal{D}$ leiduvad. $\square$

Kokkuvõte

Käesolevas bakalaureusetöös kirjeldati kaalutud kategooria mõistet ning kirjeldati, kuidas mõningad piirid (korrutiste ja astmete näitel) ja kopiirid (kokorrutiste ja koastmete näitel) sellistes kategooriates välja näevad. Autor kahjuks käesolevas töös selleni ei jõudnud, aga edasi võiks näiteks mõelda, kuidas defineerida kaalutud kategooriates mõistlikul viisil "kaaludega kooskõlalised" muud piiride ja kopiiride liigid, näiteks võrdustajad ning kovõrdsustajad ja tagasitõmbajad ning väljatõukajad. Samuti võiks uurida, kas mainitud (ko)piirid arhetüüpsetes kaalutud kategooriates, nagu **Met**, $\mathbf{Met_0}$ ja **Ban** langeksid kokku selliste "kaaludega kooskõlaliste" versioonidega nendest mõistetest. Lisaks võiks uurida, kas töös tutvustatud kaalutud (ko)korrutisi ja kaalutud (ko)astmeid saaks mingitel huvitavatel erijuhtudel üksteisega siduda (näiteks nagu (ko)astmeid tavalises mõttes saab täielikult kirjeldada (ko)korrutiste kaudu).

Samuti kirjeldati töös, mida tähendab kaalutud kategooriate vahel oleva adjunktsiooni jaoks "kaaludega kooskõlas olemine" ning tõestati, et kaaludega kooskõlas oleva adjunktsiooni parempoolne kaasfunktor säilitab kaalutud korrutisi ja kaalutud astmeid kaalutud hulgaga (analoogselt sellega, kuidas tavalises mõttes adjunktsiooni parempoolne kaasfunktor säilitab tavalisi piire). Duaalselt saaks näidata ka, et kaaludega kooskõlas oleva adjunktsiooni vasakpoolne kaasfunktor säilitab kokorrutisi ja koastmeid. Autor enda jaoks oleks huvitav edasi uurida, kas kaaludega kooskõlas oleval adjunktsioonil veel mingeid huvitavaid omadusi on ja millistel tingimustel leidub etteantud kaalutud kategooriate funktoril vasak- või parempoolne kaasfunktor nii, et tegu oleks kaalutud adjunktsiooniga.

Kasutatud allikad

[1] Marco Grandis. “Categories, norms and weights”. *Journal of Homotopy and Related Structures, vol. 2(2)* (2007).

[2] Mati Kilp. *Kategooriad*. Eesti Matemaatika Selts, 2000.

[3] Eve Oja ja Peeter Oja. *Funktsionaalanalüüs*. Tartu Ülikool, 1991.

[4] Kenneth Leroy Pothoven. *A Category of Banach Spaces*. 1968.

[5] Emily Riehl. *Category Theory in Context*. Aurora: Dover Modern Math Originals. Dover Publications, 2017. ISBN: 9780486820804. URL: https://books.google.ee/books?id=6B9MDgAAQBAJ.

[6] Ramón José Aliaga Varea. “Geometry and structure of Lipschitz-free spaces and their biduals”. Doktoritöö. Universitat Politècnica de València, 2020.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Annika Jaakson,

1. Annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose "Kaalutud kategooriad", mille juhendaja on Ülo Reimaa, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 4.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaaloman-di ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Annika Jaakson
15.05.2024

Lisad

Lisades toome välja alapeatükis 2.4 toodud kaalutud kokorrutise ja astme näidete jaoks detailsed tõestused, et antud näited tõepoolest rahuldavad definitsioone, mille kohta nad on antud.

Lisa A. Näite 2.4.6 detailne tõestus

Vaatleme punktiga meetriliste ruumide kategooriat $\mathbf{Met_0}$. Olgu $(M, d_M, 0_M), (N, d_N, 0_N) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Met_0})$ punktiga meetrilised ruumid. Defineerime hulgal $M \amalg N$ ekvivalentsiseose $\sim$ järgmiselt (samastame vaid punktid 0_M ja 0_N):

$$x \sim y \Leftrightarrow (x = y \ \vee \ x, y \in \{0_M, 0_N\}).$$

Vaatleme hulka

$$P := (M \amalg N)_{/\sim}$$

koos kaugusega

$$d([x],[y]) = \begin{cases} d_M(x,y), & \text{kui } x, y \in M; \\ d_N(x,y), & \text{kui } x, y \in N; \\ d_M(x, 0_M) + d_N(0_N, y), & \text{kui } x \in M, y \in N; \\ d_N(x, 0_N) + d_M(0_M, y), & \text{kui } x \in N, y \in M. \end{cases}$$

Funktsioon $d : P \times P \to \mathbb{R}$ on korrektselt defineeritud. Tõepoolest, kui $x \sim x'$, kuid $x \neq x'$, siis kas $x = 0_M$ ja $x' = 0_N$ või $x = 0_N$ ja $x' = 0_M$. Olgu $[y] \in P$, üldisust kitsendamata $y \in N$, sest d definitsioon on sümmeetriline M ja N kuulumise suhtes. Siis juhul $x = 0_M$, $x' = 0_N$ kehtib $d([x],[y]) = d_M(x, 0_M) + d_N(0_N, y) = d_M(0_M, 0_M) + d_N(0_N, y) = 0 + d_N(0_N, y) = d_N(x', y) = d([x'],[y])$ ja juhul $x = 0_N$, $x' = 0_M$ kehtib samuti $d([x],[y]) = d_N(x,y) = d_N(0_N, y) = 0 + d_N(0_N, y) = d(0_M, 0_M) + d_N(0_N, y) = d(x', 0_M) + d_N(0_N, y) = d([x'],[y])$. Sarnaselt saab näidata, et kui $y \sim y'$, kuid $y \neq y'$, siis $d([x],[y]) = d([x],[y'])$ iga $[x] \in P$ korral.

Tähistame $[0_M] = [0_N] =: 0_P$. Näitame, et $(P, 0_P, d)$ on punktiga meetriline ruum. Kontrollime meetrika aksioome d jaoks:

1. Olgu $[x], [y] \in P$. Eeldame, et $[x] = [y]$. Siis kas $x = y$ ja d definitsioonist on selge, et $d([x],[y]) = 0$ või siis $x \neq y$ ja kehtib $x = 0_M$, $y = 0_N$ või $x = 0_N$, $y = 0_M$. Esimesel juhul $d([x],[y]) = d_M(0_M, 0_M) + d_N(0_N, 0_N) = 0 + 0 = 0$. Teisel juhul samuti $d([x],[y]) = d_N(0_N, 0_N) + d_M(0_M, 0_M) = 0 + 0 = 0$, nagu vaja.

Eeldame nüüd teistpidi, et $d([x],[y]) = 0$. Kui x ja y kuuluvad samasse ruumi, nt ruumi M, siis d definitsioonist $d([x],[y]) = d_M(x,y) = 0$, kust järeldub, et $x = y$ ja seega $[x] = [y]$. Kui x ja y kuuluvad erinevatesse ruumidesse, nt $x \in M$ ja $y \in N$, siis $d([x],[y]) = d_M(x, 0_M) + d_N(0_N, y) = 0$, kust järeldub, et $d_M(x, 0_M) = 0$ ja seega $x = 0_M$ ning et $d_N(0_N, y) = 0$ ja seega $y = 0_N$. Siis ka $[x] = [0_M] = [0_N] = [y]$, nagu vaja.

2. Olgu $[x],[y] \in P$. Kui x ja y kuuluvad samasse ruumi, nt ruumi N, siis $d([x],[y]) = d_N(x,y) = d_N(y,x) = d([y],[x])$, nagu vaja. Kui x ja y kuuluvad erinevatesse ruumidesse, nt $x \in N$ ja $y \in M$, siis $d([x],[y]) = d_N(x, 0_N) + d_M(0_M, y) = d_M(y, 0_M) + d_N(0_N, x) = d([y],[x])$, nagu vaja.

3. Olgu $[x],[y],[z] \in P$. Kui x, y, z kuuluvad kõik samasse ruumi, siis $d([x],[y]) \leq d([x],[z]) + d([z],[y])$, sest kolmnurga võrratus kehtib nii ruumis M kui ruumis N.

   Vaatame esiteks juhtu, kus x ja y kuuluvad samasse ruumi, ent z kuulub teise ruumi. Üldisust kitsendamata kehtigu $x, y \in M$ ja $z \in N$. Siis

$$\begin{aligned} d([x],[y]) &= d_M(x,y) \leq d_M(x, 0_M) + d_M(0_M, y) \\ &\leq d_M(x, 0_M) + d_N(0_N, z) + d_N(z, 0_N) + d_M(0_M, y) \\ &= d([x],[z]) + d([z],[y]), \end{aligned}$$

   nagu vaja.

   Teiseks vaatame juhtu, kus x ja y kuuluvad erinevatesse ruumidesse. Üldisust kitsendamata kehtigu $x \in N$ ja $y \in M$. Siis z peab kuuluma samasse ruumi kas x või y-ga. Jällegi üldisust kitsendamata olgu $z \in N$. Siis

$$\begin{aligned} d([x],[y]) &= d_N(x, 0_N) + d_M(0_M, y) \\ &\leq d_N(x, z) + d_N(z, 0_N) + d_M(0_M, y) \\ &= d([x],[z]) + d([z],[y]), \end{aligned}$$

   nagu vaja.

Defineerime kujutuse

$$\begin{aligned} u_M : M &\to P \\ m &\mapsto [m] \end{aligned}$$

ja kujutuse

$$\begin{aligned} u_N : N &\to P \\ n &\mapsto [n]. \end{aligned}$$

Kuna iga $m_1, m_2 \in M$ korral kehtib

$$d(u_M(m_1), u_M(m_2)) = d([m_1], [m_2]) = d_M(m_1, m_2)$$

ja iga $n_1, n_2 \in N$ korral kehtib

$$d(u_N(n_1), u_N(n_2)) = d([n_1], [n_2]) = d_N(n_1, n_2),$$

siis u_M ja u_N on mõlemad Lipschitzi tingimust rahuldavad kujutused, kusjuures $w(u_M) = L_{u_M} = 1 = L_{u_N} = w(u_N)$. Samuti kehtib $u_M(0_M) = [0_M] = 0_P$ ja $u_N(0_N) = [0_N] = 0_P$, seega u_M ja u_N on ka punkti säilitavad kujutused.

Näitame, et $(P, 0_P, d)$ koos morfismidega u_M, u_N on objektide $(M, d_M, 0_M)$ ja $(N, d_N, 0_N)$ kaalutud kokorrutis kategoorias $\mathbf{Met_0}$. Selleks olgu $(Q, 0_Q, d_Q)$ mingi teine punktiga meetriline ruum ja olgu $f : M \to Q$, $g : N \to Q$ punkti säilitavad Lipschitzi tingimust rahuldavad kujutused. Defineerime kujutuse

$$\begin{aligned} m &: P \to Q \\ [x] &\mapsto \begin{cases} f(x), & \text{kui } x \in M \setminus \{0_M\}; \\ g(x), & \text{kui } x \in N \setminus \{0_N\}; \\ 0_Q, & \text{kui } [x] = 0_P. \end{cases} \end{aligned}$$

Esiteks, kontrollime, et m on üldse kategooria $\mathbf{Met_0}$ morfism. Definitsioonist on selge, et m säilitab punkti, s.t. et $m(0_P) = 0_Q$. Näitame, et m on Lipschitzi tingimust rahuldav kujutus ja $L_m \leq 1$. Olgu $[x], [y] \in P$. Vaatame läbi kaks võimalust:

1. x ja y kuuluvad samasse ruumi. Kui $x, y \in M$, siis

$$d(m([x]), m([y])) = d_Q(f(x), f(y)) \leq L_f \cdot d_M(x, y) = L_f \cdot d([x], [y]).$$

   Kui $x, y \in N$, siis

$$d(m([x]), m([y])) = d_Q(g(x), g(y)) \leq L_g \cdot d_N(x, y) = L_f \cdot d([x], [y]).$$

2. x ja y kuuluvad erinevatesse ruumidesse. Kehtigu üldisust kitsendamata $x \in M$ ja $y \in N$, siis

$$\begin{aligned} d(m([x]), m([y])) &= d_Q(f(x), g(y)) \leq d_Q(f(x), 0_Q) + d_Q(0_Q, g(y)) \\ &= d_Q(f(x), f(0_M)) + d_Q(g(0_N), g(y)) \\ &\leq L_f \cdot d_M(x, 0_M) + L_g \cdot d_N(0_N, y) \\ &\leq \sup\{L_f, L_g\} \cdot d_M(x, 0_M) + \sup\{L_f, L_g\} \cdot d_N(0_N, y) \\ &= \sup\{L_f, L_g\} \cdot (d_M(x, 0_M) + d_N(0_N, y)) \\ &= \sup\{L_f, L_g\} \cdot d([x], [y]). \end{aligned}$$

Näeme, et m on Lipshitzi tingimust rahuldav kujutus, kusjuures $L_m \leq \sup\{L_f, L_g\}$. Et nii $L_f \leq 1$ kui ka $L_g \leq 1$, siis kokkuvõttes $L_m \leq \sup\{L_f, L_g\} \leq 1$, nagu vaja.

Kontrollime, et m paneb diagrammi

$$\begin{tikzcd} & Q & \\ M \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "u_M"'] & P \arrow[u, dashed, "m"] & N \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "u_N"] \end{tikzcd}$$

kommuteeruma. Olgu $x \in M$ ja $y \in N$. Kui $x \neq 0_M$, siis

$$m(u_M(x)) = m([x]) = f(x).$$

Kui $x = 0_M$, siis

$$m(u_M(x)) = m([0_M]) = m(0_P) = 0_Q = f(0_M) = f(x).$$

Näeme, et $f = m \circ u_M$, nagu vaja. Kui $y \neq 0_N$, siis

$$m(u_N(y)) = m([y]) = g(y).$$

Kui $y = 0_N$, siis

$$m(u_N(y)) = m([0_N]) = m(0_P) = 0_Q = g(0_N) = g(y).$$

Näeme, et $g = m \circ u_N$, nagu vaja.

Kontrollime, et m on üheselt määratud morfism, mis selle diagrammi kommuteeruma paneb. Oletame, et leidub mingi teine morfism $m' : P \to Q$, mille puhul $f = m' \circ u_M$ ja $g = m' \circ u_N$. Et m' on kategooria $\mathbf{Met_0}$ morfism, siis ta on punkti säilitav ja seega $m'(0_P) = 0_Q = m(0_P)$. Kui $x \in M \setminus \{0_M\}$, siis tingimusest $f = m' \circ u_M$ järeldub, et $m([x]) = f(x) = m'(u_M(x)) = m'([x])$. Kui nüüd aga $x \in N \setminus \{0_N\}$, siis tingimusest $g = m' \circ u_N$ järeldub, et $m([x]) = g(x) = m'(u_N(x)) = m'([x])$. Kokkuvõtteks $m = m'$, mis tõestab, et m on üheselt määratud.

Viimaks näitame, et

$$w(m) = L_m = \sup\{L_f, L_g\} = \sup\{w(f), w(g)\}.$$

Et võrratus $L_m \leq \sup\{L_f, L_g\}$ on juba eespool tõestatud, siis jääb tõestada võrratus $L_m \geq \sup\{L_f, L_g\}$. Et $\mathbf{Met_0}$ on kaalutud kategooria ja $f = m \circ u_M$ ning $g = m \circ u_N$, siis

$$\begin{aligned} w(f) = L_f \leq L_m \cdot L_{u_M} \\ w(g) = L_g \leq L_m \cdot L_{u_N}. \end{aligned}$$

Et $L_{u_M}, L_{u_N} \leq 1$, siis $L_m \cdot L_{u_M} \leq L_m$ ja $L_m \cdot L_{u_N} \leq L_m$. Kokkuvõtteks seega

$$\begin{aligned} L_f &\leq L_m \\ L_g &\leq L_m, \end{aligned}$$

kust järeldub, et $\sup\{L_f, L_g\} \leq L_m$, nagu vaja.

Oleme näidanud, et $(P, 0_P, d)$ koos morfismidega u_M, u_N on objektide $(M, d_M, 0_M)$ ja $(N, d_N, 0_N)$ kaalutud kokorrutis.

Lisa B. Näite 2.4.9 detailne tõestus

Kategoorias **Ban** on Banachi ruumi B kaalutud astmeks kaalutud hulgaga (X, w) ruum

$$P := \left\{ f : X \to B \mid \sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{||f(x)||_B}{w(x)} < \infty \wedge (\forall x \in X \ w(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0_B) \right\}$$

koos morfismidega

$$\begin{aligned} p_x : P &\to B \\ (f : X \to B) &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

iga $x \in X$ korral. Tõestame selle väite. Esmalt näitame, et P üldse on Banachi ruum.

1. Esiteks, hulk P on vektorruum üle korpuse $\mathbb{R}$. Defineerime tehted punktiviisiliselt - olgu $f, g \in P$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$. Siis

   $$\begin{aligned} f + g &:= (f + g : x \mapsto f(x) + g(x)) \\ \lambda f &:= (\lambda f : x \mapsto \lambda \cdot f(x)). \end{aligned}$$

   Näitame, et $f + g$ ja λf kuuluvad hulka P. Esiteks, leidugu $x \in X$ selline, et $w(x) = 0$. Siis

   $$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) = 0_B + 0_B = 0_B \\ \lambda f(x) &= \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot 0_B = 0_B, \end{aligned}$$

   nagu vaja. Teiseks, kui leidub selliseid $x \in X$, et $w(x) \neq 0$, siis

   $$\sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{||(f + g)(x)||_B}{w(x)} \leq \sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \left(\frac{||f(x)||_B + ||g(x)||_B}{w(x)} \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \left(\frac{||f(x)||_B}{w(x)} + \frac{||g(x)||_B}{w(x)} \right) \\
&\leq \sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{||f(x)||_B}{w(x)} + \sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{||g(x)||_B}{w(x)} \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

(esimene võrratus kehtib kolmnurga võrratuse ja teine supreemumi omaduste tõttu, kolmas seetõttu, et viimases summas mõlemad supreemumid on lõplikud $f, g \in P$ tõttu) ja

$$
\begin{aligned}
\sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{||(\lambda f)(x)||_B}{w(x)} &= \sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{|\lambda| \cdot ||f(x)||_B}{w(x)} \\
&= |\lambda| \cdot \sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{||f(x)||_B}{w(x)} \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

(teine võrdus kehtib supreemumi omaduste tõttu ja viimane võrratus $f \in P$ tõttu). On lihtne kontrollida, et vektorruumi 8 aksioomi on selliste punktiviisiliste tehete korral rahuldatud. Märgime, et 0_P on kujutus

$$
\begin{aligned}
0 : X &\to B \\
x &\mapsto 0_B.
\end{aligned}
$$

2. Teiseks, vektorruum P on normeeritud ruum, kus elemendi $f \in P$ norm arvutatakse järgnevalt:

$$
||f|| = \begin{cases} 0, & \text{kui } \forall x \in X \ w(x) = 0; \\ \sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{||f(x)||_B}{w(x)} & \text{muidu.} \end{cases}
$$

Kontrollime normi aksioome. Olgu järgnevas $f \in P$.

(a) Eeldame, et $f = 0$. Kui iga $x \in X$ korral $w(x) = 0$, kehtib $||f|| = 0$ niikuinii. Kui leidub $x \in X$, mille korral $w(x) \neq 0$, siis

$$
||f|| = \sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{||f(x)||_B}{w(x)} = \sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{||0_B||_B}{w(x)} = \sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} 0 = 0,
$$

nagu vaja.

Teistpidi, eeldame, et $||f|| = 0$. Kui iga $x \in X$ korral $w(x) = 0$, siis ka iga $x \in X$ korral $f(x) = 0_B$, sest $f \in P$. Seega $f = 0$. Kui aga leidub

$x \in X$, mille korral $w(x) \neq 0$, siis võrdusest

$$||f|| = \sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{||f(x)||_B}{w(x)} = 0$$

järeldub, et iga $x \in X$ korral, mille puhul $w(x) \neq 0$, kehtib

$$\frac{||f(x)||_B}{w(x)} = 0 \Leftrightarrow ||f(x)||_B = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0_B.$$

Kokkuvõttes iga $x \in X$ korral $f(x) = 0_B$ ehk $f = 0$.

(b) Olgu $\lambda \in \mathbb{R}$. Kui leidub selliseid $x \in X$, kus $w(x) \neq 0$, siis

$$||\lambda f|| = \sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{||\lambda \cdot f(x)||_B}{w(x)} = |\lambda| \cdot \sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{||f(x)||_B}{w(x)} = |\lambda| \cdot ||f||,$$

(keskmist võrdust näitasime juba punktis 1). Kui ei leidu, siis $||f|| = 0 \Leftrightarrow f = 0$ ja $||\lambda f|| = ||\lambda \cdot 0|| = 0 = |\lambda| \cdot 0 = |\lambda| \cdot ||f||$.

(c) Olgu ka $g \in P$. Kui leidub selliseid $x \in X$, kus $w(x) \neq 0$, siis

$$\begin{aligned} ||f+g|| &= \sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{||(f+g)(x)||_B}{w(x)} \\ &\leq \sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{||f(x)||_B}{w(x)} + \sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{||g(x)||_B}{w(x)} \\ &= ||f|| + ||g|| \end{aligned}$$

(keskmist võrratust näitasime juba punktis 1). Kui ei leidu, siis $||f|| = 0 \Leftrightarrow f = 0$ ja $||g|| = 0 \Leftrightarrow g = 0$, kust saame

$$||f+g|| = ||0+0|| = 0 = 0 + 0 = ||f|| + ||g||.$$

3. Kolmandaks, P on täielik meetriline ruum. Selle tõestamiseks olgu $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ P elementide Cauchy jada. Märgime, et iga $m, n \in \mathbb{N}$ korral ja iga $x \in X$ korral, kui $w(x) \neq 0$, kehtivad võrratused

$$\begin{aligned} ||f_m(x) - f_n(x)||_B &\leq \frac{||f_m(x) - f_n(x)||_B}{w(x)} \\ &\leq \sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{||f_m(x) - f_n(x)||_B}{w(x)} \\ &= ||f_m - f_n|| \end{aligned}$$

(esimene võrratus kehtib, sest $0 < w(x) \leq 1$). Seega tingimusest

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \quad n, m \geq N \Rightarrow ||f_m - f_n|| < \varepsilon \tag{12}$$

järeldub tingimus

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \quad n, m \geq N \Rightarrow \\ \Rightarrow &\left(\forall x \in X w(x) \neq 0 \Rightarrow \left\| \frac{f_m(x)}{w(x)} - \frac{f_n(x)}{w(x)} \right\|_B < \varepsilon \right) \end{aligned} \tag{13}$$

ja tingimus

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \quad n, m \geq N \Rightarrow (\forall x \in X\ w(x) \neq 0 \Rightarrow ||f_m(x) - f_n(x)||_B < \varepsilon) \tag{14}$$

kui $w(x) \neq 0$. Sel juhul on nii $\left(\frac{f_n(x)}{w(x)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ kui $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy jadad ruumis B. Kuna B on Banachi ruumina ka täielik meetriline ruum, siis mõlemad need jadad koonduvad juhul $w(x) \neq 0$. Kui $w(x) = 0$, siis $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} = (0)_{n \in \mathbb{N}}$ kui konstantne jada on ühtlasi koonduv jada ja seega ka Cauchy jada.

Kuna oleme nüüd näinud, et $\lim_{n \to \infty} f_n(x)$ eksisteerib iga $x \in X$ korral, siis defineerime funktsiooni

$$\begin{aligned} f : X &\to B \\ x &\mapsto \lim_{n \to \infty} f_n(x). \end{aligned}$$

Näitame, et

(a) $f \in P$. Esiteks, kui $w(x) = 0$, siis $f(x) = \lim_{n \to \infty} 0_B = 0_B$, sest iga $n \in \mathbb{N}$ korral $f_n \in P$. Teiseks,

$$\begin{aligned} ||f|| &= \sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{||f(x)||_B}{w(x)} = \sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{||\lim_{n \to \infty} f_n(x)||_B}{w(x)} \\ &= \sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{\lim_{n \to \infty} ||f_n(x)||_B}{w(x)} = \sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \lim_{n \to \infty} \frac{||f_n(x)||_B}{w(x)} \\ &\leq \liminf_{n \to \infty} \sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{||f_n(x)||_B}{w(x)} = \liminf_{n \to \infty} ||f_n|| \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Tuletame esmalt võrratuse kolmandal real. Iga $x \in X$ korral, kui $w(x) \neq$

0, saame

$$\frac{||f_n(x)||_B}{w(x)} \leq \sup_{\substack{x\in X\\ w(x)\neq 0}} \frac{||f_n(x)||_B}{w(x)}.$$

Et nii vasakul kui paremal pool võrratust esinevad reaalarvude jadad on alt 0-ga tõkestatud, siis saame võtta võrratusest alumise piirväärtuse

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{||f_n(x)||_B}{w(x)} \leq \liminf_{n\to\infty} \sup_{\substack{x\in X\\ w(x)\neq 0}} \frac{||f_n(x)||_B}{w(x)}.$$

Kuna jada $\left(\frac{f_n(x)}{w(x)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ koondub ruumis B, siis jada $\left(\left|\left|\frac{f_n(x)}{w(x)}\right|\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ koondub ruumis $\mathbb{R}$. Seega $\liminf_{n\to\infty} \frac{||f_n(x)||_B}{w(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{||f_n(x)||_B}{w(x)}$. Saame kokkuvõtteks, et iga $x \in X$, mille puhul kehtib $w(x) \neq 0$, kehtib ka

$$\lim_{n\to\infty} \frac{||f_n(x)||_B}{w(x)} \leq \liminf_{n\to\infty} \sup_{\substack{x\in X\\ w(x)\neq 0}} \frac{||f_n(x)||_B}{w(x)}.$$

Võttes sellest võrratusest supreemumi üle kõigi $x \in X$, mille puhul $w(x) \neq 0$, saamegi

$$\sup_{\substack{x\in X\\ w(x)\neq 0}} \lim_{n\to\infty} \frac{||f_n(x)||_B}{w(x)} \leq \liminf_{n\to\infty} \sup_{\substack{x\in X\\ w(x)\neq 0}} \frac{||f_n(x)||_B}{w(x)},$$

nagu vaja.

Nüüd viimane võrdus $\liminf_{n\to\infty} ||f_n|| < \infty$ kehtib seetõttu, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kui Cauchy jada on tõkestatud ([3]).

(b) $f_n \to f$ ruumis P. Olgu meil $\varepsilon > 0$. Siis leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$m, n \geq N \Rightarrow \left(\forall x \in X \; w(x) \neq 0 \Rightarrow \left|\left|\frac{f_m(x)}{w(x)} - \frac{f_n(x)}{w(x)}\right|\right|_B < \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

vastavalt tingimusele (13). Olgu nüüd $n \geq N$. Tahame näidata, et siis $||f_n - f|| < \varepsilon$. Iga $x \in X$, kui $w(x) \neq 0$, jaoks leidub $M_x \in \mathbb{N}$ nii, et

$$m \geq M_x \Rightarrow \left|\left|\frac{f_m(x)}{w(x)} - \frac{f(x)}{w(x)}\right|\right|_B < \frac{\varepsilon}{3},$$

sest jada $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ koondub punktiviisi funktsiooniks f, seega $\left(\frac{f_n}{w(x)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ koondub punktiviisi funktsiooniks $\frac{f}{w(x)}$. Olgu nüüd $x \in X$ selline, et

$w(x) \neq 0$. Olgu $m_x = \max\{N, M_x\}$. Siis

$$\begin{aligned}\frac{||f_n(x) - f(x)||_B}{w(x)} &= \left|\left|\frac{f_n(x)}{w(x)} - \frac{f(x)}{w(x)}\right|\right|_B \\ &\leq \left|\left|\frac{f_n(x)}{w(x)} - \frac{f_{m_x}(x)}{w(x)}\right|\right|_B + \left|\left|\frac{f_{m_x}(x)}{w(x)} - \frac{f(x)}{w(x)}\right|\right|_B \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

Võtame nüüd supreemumi üle kõigi $x \in X$, mille korral $w(x) \neq 0$ ja saame

$$||f_n - f|| = \sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{||f_n(x) - f(x)||_B}{w(x)} \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Kokkuvõttes saime, et

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \quad n \geq N \Rightarrow ||f_n - f|| < \varepsilon$$

ehk et $f_n \to f$ ruumis P.

Oleme siiamaani näinud, et P on Banachi ruum. Järgmiseks defineerime kujutuse

$$\begin{aligned}&X \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ban}}(P, B) \\ &x \mapsto p_x,\end{aligned} \tag{15}$$

kus p_x on omakorda defineeritud järgnevalt:

$$\begin{aligned}p_x : P &\to B \\ (f : X \to B) &\mapsto f(x).\end{aligned}$$

Veendume esiteks, et kujutus (15) on hästi defineeritud, s.t. et p_x on Banachi ruumide morfism iga $x \in X$ korral. Olgu $x \in X$. Esiteks, p_x on lineaarne, sest iga $f, g \in P$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$ korral

$$p_x(f + \lambda g) = (f + \lambda g)(x) = f(x) + \lambda \cdot g(x) = p_x(f) + \lambda p_x(g).$$

Teiseks, p_x on tõkestatud ja tema norm on ≤ 1. Näitame, et $||p_x|| \leq w(x) \leq 1$. Parempoolne võrratus kehtib alati. Näitame vasakpoolse võrratuse. Selleks piisab veenduda, et iga $f \in P$ korral $||p_x(f)||_B \leq w(x) \cdot ||f||$. Olgu $f \in P$. Kui $w(x) = 0$, siis $||p_x(f)||_B = ||f(x)||_B = ||0_B||_B = 0 = 0 \cdot ||f|| = w(x) \cdot ||f||$. Kui $w(x) \neq 0$, siis

$$\frac{||f(x)||_B}{w(x)} \leq \sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{||f(x)||_B}{w(x)} = ||f||,$$

kust saame

$$||f(x)||_B \le w(x) \cdot ||f||.$$

Kokkuvõttes $||p_x(f)||_B = ||f(x)||_B \le w(x) \cdot ||f||$, nagu vaja. Seega $||p_x|| \le w(x)$. Oleme näidanud, et p_x on tõkestatud kujutus, mille norm on ≤ 1. Samas oleme ka näidanud, et kujutus $x \mapsto p_x$ on kaalutud hulkade morfism, sest $||p_x|| \le w(x)$.

Oleme nüüdseks täielikult defineerinud kaalutud astme B^X potentsiaalse alusobjekti $(P, (p_x)_{x\in X})$. Kontrollime, et ta rahuldab kaalutud astme definitsiooni. Olgu $(Q, (q_x)_{x\in X})$ mingi teine paar, kus $Q \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Ban})$ ja

$$\begin{aligned} X &\to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ban}}(Q, B) \\ x &\mapsto q_x \end{aligned}$$

on kaalutud hulkade morfism. Defineerime kujutuse

$$\begin{aligned} m : Q &\to P \\ y &\mapsto (X \to B,\ x \mapsto q_x(y)). \end{aligned}$$

Kontrollime, et defineerisime m korrektselt, s.t. et $(X \to B,\ x \mapsto q_x(y)) \in P$. Olgu $x \in X$. Kui $w(x) = 0$, siis $||q_x(y)||_B \le ||q_x|| \cdot ||y||_Q \le w(x) \cdot ||y||_Q = 0 \cdot ||y||_Q = 0$. Seega $q_x(y) = 0$, nagu vaja. Märgime, et $||q_x|| \le w(x)$ kehtib, sest $x \mapsto q_x$ on kaalutud hulkade morfism. Kui leidub mõni $x \in X$, mille puhul $w(x) \ne 0$, siis

$$\sup_{\substack{x\in X\\ w(x)\ne 0}} \frac{||q_x(y)||_B}{w(x)} \le \sup_{\substack{x\in X\\ w(x)\ne 0}} \frac{||q_x|| \cdot ||y||_Q}{w(x)} \le \dots$$

Et $x \mapsto q_x$ on kaalutud hulkade morfism, siis $\frac{||q_x||}{w(x)} \le 1$ iga $x \in X, w(x) \ne 0$ korral. Saame võrratust jätkata:

$$\dots \le \sup_{\substack{x\in X\\ w(x)\ne 0}} ||y||_Q = ||y||_Q,$$

($||y||_Q$ ei sõltu x-st). Et $||y||_Q < \infty$, siis $\sup_{\substack{x\in X\\ w(x)\ne 0}} \frac{||q_x(y)||_B}{w(x)}$ on lõplik ja seega kokkuvõtteks $(X \to B,\ x \mapsto q_x(y)) \in P$.

Kontrollime järgmiseks, et m on Banachi ruumide morfism. Esiteks on m lineaarkujutus. Tõepoolest, olgu $y, z \in Q$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$. Siis

$$\begin{aligned} m(y + \lambda z) &= (X \to B,\ x \mapsto q_x(y + \lambda z)) \\ &= (X \to B,\ x \mapsto q_x(y) + \lambda q_x(z)) = \dots, \end{aligned}$$

sest q_x on lineaarkujutus iga $x \in X$ korral. Arvestades, et P-s toimub kujutuste liitmine ja skalaariga korrutamine punktiviisiliselt, saame võrdust jätkates

$$\begin{aligned}\ldots &= (X \to B,\ x \mapsto q_x(y)) + \lambda(X \to B,\ x \mapsto q_x(z)) \\ &= m(y) + \lambda m(z).\end{aligned}$$

Seega m on lineaarkujutus. Teiseks kontrollime, et m on tõkestatud kujutus normiga ≤ 1. Kui iga $x \in X$ korral $w(x) = 0$, siis ka $||q_x|| = 0$, kust $q_x(y) = 0_B$ iga $x \in X$ ja $y \in Q$ korral. Järelikult iga $y \in Q$ korral ka $m(y) = (X \to B,\ x \mapsto 0_B) = 0$ ruumis P. Seega $||m|| = 0$. Oletame nüüd, et leidub mõni $x \in X$, mille puhul $w(x) \neq 0$. Olgu $y \in Q$, siis

$$\begin{aligned}||m(y)|| &= \sup_{\substack{x\in X\\ w(x)\neq 0}} \frac{||m(y)(x)||_B}{w(x)} = \sup_{\substack{x\in X\\ w(x)\neq 0}} \frac{||q_x(y)||_B}{w(x)} \\ &\leq \sup_{\substack{x\in X\\ w(x)\neq 0}} \frac{||q_x|| \cdot ||y||_Q}{w(x)} = \left(\sup_{\substack{x\in X\\ w(x)\neq 0}} \frac{||q_x||}{w(x)}\right) \cdot ||y||_Q.\end{aligned}$$

Siit näeme, et $||m|| \leq \sup_{\substack{x\in X\\ w(x)\neq 0}} \frac{||q_x||}{w(x)}$. Kuna iga $x \in X$, kus $w(x) \neq 0$, korral $||q_x|| \leq w(x)$, siis ka $\frac{||q_x||}{w(x)} \leq 1$ ja seega

$$||m|| \leq \sup_{\substack{x\in X\\ w(x)\neq 0}} \frac{||q_x||}{w(x)} \leq 1. \tag{16}$$

Näeme, et igal juhul m on tõkestatud (ja seega pidev) kujutus, mille norm on ≤ 1.

Järgmiseks näitame, et diagramm (10) kommuteerub iga $x \in X$ korral. Tõepoolest, olgu $x \in X$. Olgu ka $y \in Q$ Siis $p_x(m(y)) = p_x(X \to B,\ x \mapsto q_x(y)) = q_x(y)$. Et $y \in Q$ ja $x \in X$ olid suvalised, siis järelikult $p_x \circ m = q_x$ iga $x \in X$ korral. Kui nüüd m' on mingi teine morfism, mille puhul $p_x \circ m' = q_x$ iga $x \in X$ korral, siis iga $y \in Q$ ja $x \in X$ korral

$$m'(y)(x) = p_x(m'(y)) = q_x(y) = p_x(m(y)) = m(y)(x).$$

Seega iga $y \in Q$ korral kehtib kujutuste $X \to B$ võrdus $m(y) = m'(y)$. Seega kehtib ka kujutuste $Q \to P$ võrdus $m = m'$. Kokkuvõtteks m on ühesel määratud morfism, mis diagrammi (10) kommuteeruma paneb.

Viimaks näitame, et

$$||m|| = \begin{cases} 0, & \text{kui } \forall x \in X\ w(x) = 0; \\ \sup_{\substack{x\in X\\ w(x)\neq 0}} \frac{||q_x||}{w(x)} & \text{muidu.}\end{cases}$$

Juht $w(x) = 0$ iga $x \in X$ korral on meil juba eelnevalt läbi vaadatud. Oletame, et leidub $x \in X$, mille puhul $w(x) \neq 0$. Siis võrduse $||m|| = \sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{||q_x||}{w(x)}$ jaoks on meil ühtepidi võrratus juba tõestatud (vt (16)). Tõestame, et

$$||m|| \geq \sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{||q_x||}{w(x)}.$$

Teame eelnevast, et iga $x \in X$ korral $q(x) = p_x \circ m$ ning et $||q_x||, ||p_x|| \leq w(x)$. Seega

$$||q_x|| \leq ||p_x|| \cdot ||m|| \leq w(x) \cdot ||m||,$$

vastavalt kaalutud kategooria definitsioonile. Seega iga $x \in X, w(x) \neq 0$ korral

$$\frac{||q_x||}{w(x)} \leq ||m||.$$

Võttes supreemumi üle kõigi $x \in X, w(x) \neq 0$, saame

$$\sup_{\substack{x \in X \\ w(x) \neq 0}} \frac{||q_x||}{w(x)} \leq ||m||,$$

nagu vaja.

Kokkuvõtteks näeme, et paar $(P, (p_x)_{x \in X})$ rahuldab kaalutud astme definitsiooni ja seega võime öelda, et $P = B^X$.